264/2009

Raport Badawczy
Research Report

RB/69/2009

Wybrane metody wspomagania wielokryterialnych decyzji kooperacyjnych.
Część III

L. Kruś

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences

POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 3810100

fax: (+48) (22) 3810105

Kierownik Pracowni zgłaszający pracę:
Dr inż. Lech Kruś

Warszawa 2009

Część III

Gry kooperacyjne w problemie alokacji kosztów

9

Rozwiązania gier kooperacyjnych w zastosowaniu do problemu alokacji kosztów

Rozpatruje się problem alokacji kosztów w przypadku realizacji projektu rozwojowego mającego na celu pozyskanie pewnego zestawu dóbr. Realizacją projektu jest zainteresowanych kilka podmiotów decyzyjnych. Każdy z nich może zrealizować odpowiedni projekt w celu pozyskania tych dóbr, ale może również podjąć współpracę z innymi, tworząc różne koalicje i wspólnie realizować projekty odpowiednio większej skali. Podmioty decyzyjne traktujemy dalej jako graczy w grze kooperacyjnej

Problem alokacji kosztów dotyczy nie tylko ich podziału między graczy, ale także między rozpatrywane, różne dobra. Problem nie jest trywialny, zwłaszcza że gracze mogą tworzyć różne koalicje, a podział korzyści ze współpracy musi być akceptowany przez wszystkich uczestniczących w danej koalicji graczy.

Problem alokacji kosztów ma bardzo obszerną literaturę. Zestaw istotnych artykułów zawiera praca zbiorowa (Young, 1982). Przykłady problemów praktycznych i propozycje rozwiązań podają: Ransmeier (1942) - dotyczące wielokryterialnego planowania w Dolinie Tennessee w Stanach Zjednoczonych, Gately (1974) - zagadnienia dotyczące inwestowania w systemy energetyczne, Young, Okada, Hashimoto (1980)- dotyczące alokacji kosztów związanych z inwestycjami w zasoby wodne regionu Umea w Szwecji. Podobne problemy rozpatrywano w ramach interdyscyplinarnego projektu dotyczącego Regionu Górnej Noteci w Polsce realizowanego w Instytucie Badań Systemowych PAN wspólnie z International Institute for Applied System Analysis w Laxenburg w Austrii i we współpracy z szeregiem instytutów w Polsce. Kolejne przykłady problemów i rozwiązań z zastosowaniem różnych technik zawierają prace (Fernández, Hinojosa, Puerto, 2004), (Matsubayashi, Umezawa, Masuda, Nishino, 2005), (Krajewska, Kopfer, 2006), (Cruijssen, Cools, Dullaert, 2007).

W tej pracy problem współpracy podmiotów decyzyjnych i alokacji kosztów jest modelowany za pomocą rodziny gier kooperacyjnych, zwanych grami wieloprzedmiotowymi. Są to gry z wypłatami ubocznymi w których bezpośrednio uwzględnione są wektory określające ilości kilku rodzajów dóbr, pozyskiwane z realizacji projektu lub projektów oraz wprowadzana jest procedura alokacji kosztów wykorzystująca mechanizm cenowy. Proponuje się i porównuje różne koncepcje rozwiązań teorii gier kooperacyjnych w zastosowaniu do tego problemu. Analizuje się właściwości tych rozwiązań. Dyskutuje się różne procedury alokacji kosztów budowane na podstawie tych koncepcji rozwiązań i formułuje mechanizmy określania odpowiednich cen. Przy określaniu mechanizmów cenowych przydatne były idee podane przez Billera and Heath (1982). Uzyskiwane rozwiązania porównywane są do wyników klasycznej metody SCRB (James, Lee 1971, Young Okada, Hashimoto 1980) tradycyjne stosowanej w praktyce alokacji kosztów w przypadku projektów z zakresu inwestycji w systemy wodne. Podaje się algorytm obliczeniowy umożliwiający wyznaczenie omawianych rozwiązań. Wykonano eksperymenty obliczeniowe na przykładzie problemu alokacji kosztów dla 4 graczy i 2 rodzajów dóbr. Wyniki eksperymentów ilustrują proponowane podejście i pokazują możliwości jego zastosowania. Proponuje się także i dyskutuje możliwości wspomagania wielokryterialnej analizy problemu.

9.1 Ogólne sformułowanie problemu

Niech $N = \{1, \ldots, n\}$ będzie skończonym zbiorem graczy, a $\mathcal{N}$ będzie zbiorem wszystkich niepustych podzbiorów zbioru N.

Niech C oznacza daną koalicje graczy, $C \in \mathcal{N}$. Każdy z graczy jest zainteresowany pozyskaniem tego samego zestawu dóbr $M = \{1, \ldots, m\}$, które mogą być uzyskane w wyniku realizacji odpowiedniego projektu rozwojowego.

Dla każdej koalicji $C \in \mathcal{N}$, dana jest funkcja $f_C : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ opisująca koszt realizacji projektu dającego w wyniku wektor $x \in \mathbb{R}^m$ określający ilości pozyskiwanych dóbr poszczególnych rodzajów. Zakłada się, że $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m_+$, co oznacza, że gracze zainteresowani są tylko dodatnimi ilościami tych dóbr. Funkcja kosztów f_C zależy tylko od całkowitej ilości poszczególnych dóbr, a nie zależy od ich podziału między graczy.

Przyjmuje się konwencję, że dla $x, z \in \mathbb{R}^m$, i dla każdego m:
$x \geq z$ oznacza, że $x_j \geq z_j$ dla wszystkich $j \in M$,
$x > z$ oznacza, że $x_j \geq z_j$, $x \neq z$ dla wszystkich $j \in M$,
$x \gg z$ oznacza, że $x_j > z_j$ dla wszystkich $j \in M$

Niech $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{n \times m}_+ = \mathbb{R}^{NM}$, gdzie:
$\mathbb{R}^{MN}$ jest przestrzenią dóbr koalicji pełnej N,
$y_i = (y_{i1}, \ldots, y_{im}) \in \mathbb{R}^m_+$,
y_{ij} oznacza ilość dobra j przydzielonego graczowi i, dla $j \in M$, $i \in N$.

Kontynuując notację,
$I\!R^{CM}$ oznacza przestrzeń dóbr graczy tworzących koalicję C,
y^C oznacza projekcję wektora dóbr $y \in I\!R^{NM}$ na przestrzeń $I\!R^{CM}$,
$y^C = \{y_i\}_{i \in C}$, gdzie $y_i = (y_{i1}, \ldots, y_{im}) \in I\!R^m_+$.

Postawione zadanie dotyczy analizy korzyści jakie mogą osiągnąć gracze tworząc koalicje, poszukiwania zwycięskiej koalicji, oraz alokacji korzyści akceptowalnej przez graczy. W celu rozwiązania zadania formułuje się grę kooperacyjną z wypłatami ubocznymi, w której uwzględnia się mechanizm alokacji kosztów wykorzystujący ceny rozpatrywanych dóbr. Gra nazywana dalej grą wieloprzedmiotową, formułowana jest dla zadanego wektora dóbr $y = (y_1, \ldots, y_n) \in I\!R^{NM}$, określającego ilości dóbr wymaganych przez poszczególnych graczy.

Definicja 9.1

Wieloprzedmiotowa gra kooperacyjna z wypłatami ubocznymi zdefiniowana jest przez parę
(N, v_y), gdzie N jest zbiorem graczy, a funkcja v_y jest określona przez:
$v_y(C) = \sum_{i \in C} \sum_{j=1}^{m} \left[c_j(f_{\{i\}}, y_i) \times y_{ij}\right] - \sum_{j=1}^{m} \left[c_j(f_C, \sum_{i \in C} y_i) \times \sum_{i \in C} y_{ij}\right]$ dla wszystkich $C \in \mathcal{N}$,
$v_y(\emptyset) = 0$. □

Funkcja v_y jest zwana funkcją charakterystyczną gry. Funkcja ta odwzorowuje podzbiory C zbioru N w zbiór liczb rzeczywistych. Dla danej koalicji określa jej wypłatę, jeśli członkowie tej koalicji będą działać wspólnie.

Funkcja c jest funkcją cen. Dla danej funkcji kosztów f i wektora dóbr x, określa ona wektor cen przyporządkowanych poszczególnym rodzajom dóbr, tzn. $c(f, x) \in I\!R^m$, gdzie $c(f, x) =$

$(c_1(f,x),\ldots,c_j(f,x),\ldots,c_m(f,x))$, i $c_j(f,x)$ jest ceną dobra j-tego rodzaju.

W definicji tej, część:

$\sum\limits_{j=1}^{m}\left[c_j(f_{\{i\}},y_i)\times y_{ij}\right]$ opisuje koszt projektu realizowanego indywidualnie przez gracza i-th player, a część:

$\sum\limits_{j=1}^{m}\left[c_j(f_C,\sum_{i\in C}y_i\times\sum_{i\in C}y_{ij})\right]$ opisuje koszt projektu realizowanego wspólnie przez graczy tworzących koalicję C.

$v_y(C)$ określa korzyści jakie ci gracze uzyskują realizując projekt wspólnie w koalicji C w porównaniu z sytuacją, gdyby każdy działał niezależnie.

Łatwo zauważyć, że funkcja $v_y(\{i\})=0$ dla wszystkich $i\in N$, co oznacza spełnienie warunku normalizacji gry

Oznaczmy przez Ω klasę wszystkich wieloprzedmiotowych gier kooperacyjnych.

Definicja 9.2

Mówimy, że gra z wypłatami ubocznymi jest **właściwa** (ang. proper), jeśli spełniony jest warunek superadytywności:

$$v_y(C\cup T)\geq v_y(C)+v_y(T) \text{ for all } C,T\in\mathcal{N}, C\cap T=\emptyset.$$

Mówimy, że gra z wypłatami ubocznymi jest **ściśle właściwa** (ang. strictly proper), jeśli spełniony jest warunek ścisłej superaddytywności:

$$v_y(C\cup T)> v_y(C)+v_y(T) \text{ for all } C,T\in\mathcal{N}, C\cap T=\emptyset.$$

□

Definicja 9.3

Mówimy, że wektor wypłat $z=(z_1,\ldots,z_n)$ jest **imputacją** w grze (N,v_y), jeśli spełnia następujące warunki:

$$z_i \geq v_y(\{i\}) \tag{9.1}$$

zwany warunkiem indywidualnej racjonalności, oznaczającym, że żaden z graczy nie zgodzi się na wypłatę gorszą niż może uzyskać sam działając indywidualnie, oraz

$$\sum_{i \in N} z_i = v_y(N), \tag{9.2}$$

zwany warunkiem racjonalności grupowej. Warunek ten oznacza, że gracze osiągając porozumienie w koalicji, dzielą między siebie całą wartość funkcji $v_y(N)$.

□

Niech $I(N, v_y)$ będzie zbiorem wszystkich imputacji w grze (N, v_y).

Definicja 9.4
Koncepcją rozwiązania jest funkcja $F : \Omega \to I\!R^n$, która każdej grze (N, v_y) przyporządkowuje wektor wypłat ze zbioru $I(N, v_y)$.
□

Zgodnie z określona koncepcją rozwiązania, można wyznaczyć wymagane udziały graczy w celu pokrycia kosztów wspólnego projektu oraz podział między nimi ilości dóbr, uzyskanych w wyniku jego realizacji.

Definicja 9.5
Dla dowolnego wektora dóbr $y = (y_1, \ldots, y_n) \in I\!R^{NM}$, gdzie $y_i \in I\!R^m$ jest wektorem dóbr przydzielonych graczowi i, **funkcja określająca wkłady finansowe graczy** jest zdefiniowana przez $G : \Omega \to I\!R^m$, gdzie

$$G_i(N, v_y) = \sum_{j=1}^{m} \left[c_j(f_{\{i\}}, y_i) \times y_{ij}\right] - F_i(N, v_y)$$

oznacza wkład finansowy gracza i. □

W powyższych definicjach rozpatrujemy wieloprzedmiotowe gry kooperacyjne zależne od ilości dóbr przyporządkowanych poszczególnym graczom i od sposobu alokacji kosztów między tych graczy. Zakłada się, że rozwiązaniem gry jest imputacja. Oznacza to, że żaden gracz nie zaakceptuje współpracy przy realizacji projektu, przy którym pokrywana przez niego część kosztów byłaby większa niż koszt odpowiedniego projektu realizowanego indywidualnie, tzn.:

$G_i(N, v_y) \leq f_{\{i\}}(y_i)$ dla wszystkich $i \in N$,

oraz, że całość korzyści odniesionych z realizacji wspólnego projektu będzie rozdzielona między graczy, tzn.

$\sum_{i \in N} G_i(N, v_y) = f_N(\sum_{i \in N} y_i)$.

Wypłaty uboczne (ang. side payments) graczy określone są jako różnice między kosztami wynikającymi z mechanizmu cenowego a kosztami wynikającymi z koncepcji rozwiązania:

$$\sum_{j=1}^{m} [c_j(f_N, y_i) \times y_{ij}] - G_i(N, v_y).$$

9.2 Aksjomaty i koncepcja rozwiązania

Procedura alokacji kosztów powinna spełnić szereg wymagań, aby mogła być zastosowana w rzeczywistych problemach (patrz Billera,Heat 1982). Wymagania te formułowane są w postaci zestawu aksjomatów.

Aksjomat 1 (Pełne pokrycie kosztów)

Dla każdej koalicji $C \in \mathcal{N}$,

$$f_C(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j(f_C, x) \times x_j,$$

Jeśli gracze w koalicji C zdecydują się realizować projekt umożliwiający pozyskanie wektora dóbr x, to mechanizm cen powinien zapewnić pokrycie pełnych kosztów $f_C(x)$ tego projektu.

Aksjomat 2 (Addytywność)

Dla każdej koalicji $C \in \mathcal{N}$,

$$c(f_C, x) + c(g_C, x) = c(h_C, x)$$

dla wszystkich $(f_C, x), (g_C, x) \in P^m$, takich, że $h_C = f_C + g_C$.
Jeśli funkcje f_C i g_C reprezentują różne składowe ogólnych kosztów h_C, wtedy finalna cena każdego dobra powinna być sumą cen składowych.

Aksjomat 3 (Niezależność od agregacji)

Dla każdej koalicji $C \in \mathcal{N}$,
jeśli $f_C(x) = g_C(\sum_{j=1}^{m} d_j x_j)$, gdzie $d = (d_1, \ldots, d_m) \in I\!R^m$, $d > 0$ jest danym wektorem, to $c(f_C, x) = c(g_C, \sum_{j=1}^{m} d_j \cdot x_j) \times x$
Jeśli dwa dobra są w rzeczywistości tym samym dobrem, być może mierzonym w innych jednostkach, to wynikowa cena powinna zależeć tylko od ich kombinacji liniowej.

Aksjomat 4

Dla każdej koalicji $C \in \mathcal{N}$, jeśli funkcja f_C jest niemalejąca (tzn. $x \geq z \Rightarrow f_C(x) \geq f_C(z)$) w zbiorze $\{z \in I\!R^m : 0 \leq z \leq x\}$, to $c(f, x) \geq 0$.
Oznacza to, że jeśli funkcja kosztów jest niemalejąca, to ceny nie powinny być ujemne.

Aksjomat 5

Jeśli koalicja C jest taka, że $v_y(C) = v_y(C \cap T)$ dla dowolnej $C \in \mathcal{N}$, to $\sum_{i \in C} F_i(N, v_y) = v_y(C)$
Właściwość ta oznacza, że gracz pozorny, który nic nie wnosi do danej koalicji, nie powinien odnosić korzyści ze współpracy.

Aksjomat 6

Dla dowolnej permutacji Π i dowolnego $i \in N$,

$$F_{\Pi(i)}(N, \Pi v_y) = F_i(N, v_y)$$

Oznacza to, że gracze są anonimowi. Rozwiązanie nie zależy od sposobu uporządkowania kolejności graczy w grze.

Aksjomat 7

Dla dowolnej gry (N, v'_y) i (N, v''_y) spełniony jest warunek:

$$F(N, v'_y + v''_y) = F(N, v'_y) + F(N, v''_y)$$

Z właściwości tej wynika, że jeśli podzielimy funkcję całych kosztów na pewną liczbę składowych i rozpatrzymy gry sformułowane dla składowych funkcji kosztów, to wynik gry powinien być określony jako suma wyników gier składowych.

Aksjomat 8

Dla wszystkich koalicji $C, T \in \mathcal{N}$ gry (N, v_y) spełniony jest warunek

$$f_{C\cup T}(\sum_{i\in C\cup T} y_i) \le f_C(\sum_{i\in C} y_i) + f_T(\sum_{i\in T} y_i).$$

Warunek ten opisuje tzw. efekty skali związane z realizacją projektów. Spełnienie tego warunku oznacza, że koszt koszt jednego większego projektu jest mniejszy niż suma kosztów dwóch mniejszych niezależnych projektów dających w razem tę samą ilość dóbr.

Lemat 9.1

Jeśli gra $(N, v_y) \in \Omega$ spełnia Aksjomaty 1 i 8 to jest grą właściwą, tzn. spełnia warunek superaddytywności. ∎

Dowód

Dla każdych koalicji $C, T \in \mathcal{N}$, takich, że $C \cap T = \emptyset$, mamy

$$v_y(C \cup T) = \sum_{i \in C \cup T} \sum_{j=1}^{m} \left[c_j(f_{\{i\}}, y_i) \times y_{ij}\right] -$$

$$- \sum_{j=1}^{m} \left[c_j(f_C, \sum_{i \in C \cup T} y_i) \times \sum_{i \in C} y_{ij}\right] = \sum_{i \in C \cup T} f_{\{i\}}(y_i) - f_{C \cup T}(\sum_{i \in C \cup T} y_i) \leq$$

$$\leq \sum_{i \in C} f_{\{i\}}(y_i) - f_C(\sum_{i \in C} y_i) + \sum_{i \in T} f_{\{i\}}(y_i) - f_T(\sum_{i \in T} y_i) = v_y(C) + v_y(T).$$

$\Diamond$

Łatwo zauważyć, że jeśli nierówność w definicji 9.2 jest spełniona ściśle, to gra jest ściśle właściwa.

Twierdzenie 9.1

Dla dowolnego danego wektora dóbr $y = (y_1, \ldots, y_n) \in I\!R^{NM}$, istnieje jedno i tylko jedno rozwiązanie F spełniające Aksjomaty 1 - 8.

Funkcja F ma postać

$$F_i(N, v_y) = \sum_{C \in \mathcal{N} : i \in C} \frac{(|C| - 1)! \cdot (n - |C|)!}{n!} (v_y(C) - v_y(C - \{i\})),$$

dla każdego $i \in N$, gdzie

$$v_y(C) = \sum_{i \in C} \sum_{j=1}^{m} \left[c_j(f_{\{i\}}, y_i) \times y_{ij}\right] - \sum_{j=1}^{m} \left[c_j(f_C, \sum_{i \in C} y_i) \times \sum_{i \in C} y_{ij}\right]$$

dla wszystkich $C \in (\mathcal{N})$,

$v_y(\emptyset) = 0$,

a

$$c_j(f_C, \sum_{i \in C} y_i) = \int_0^1 \frac{\partial f_C}{\partial x_j}(t \cdot \sum_{i \in C} y_i) dt.$$

Notacja $\frac{\partial f_C}{\partial x_j}(t \cdot \sum_{i \in C} y_i)$ oznacza pochodną cząstkową ze względu na j-tą współrzędną w punkcie $(t \cdot \sum_{i \in C} y_i)$.

$|C|$ oznacza moc zbioru C. ∎

Dowód

Przyjmijmy, że dla dowolnej koalicji $C \in \mathcal{N}$ funkcje kosztów f_C, g_C, h_C będą takie jak w Aksjomacie 2, tzn. $h_C = f_C + g_C$ i niech $(N, v_y), (N, v_y'), (N, v_y")$ będą odpowiednio grami wynikającymi z tych trzech funkcji kosztów. Z Aksjomatu 2 wynika, że

$$
\begin{aligned}
v_y(C) &= \sum_{i \in C} \sum_{j=1}^{m} [c_j(h_{\{i\}}, y_i) \times y_{ij}] - \sum_{j=1}^{m} \left[c_j(h_C, \sum_{i \in C} y_i) \times \sum_{i \in C} y_{ij} \right] \\
&= \sum_{i \in C} \sum_{j=1}^{m} [(c_j(f_{\{i\}}, y_i) + c_j(g_{\{i\}}, y_i)) \times y_{i,j}] \\
&\quad - \sum_{j=1}^{m} \left[\left(c_j \left(f_s, \sum_{i \in C} y_i \right) + c_j \left(g_C, \sum_{i \in C} y_i \right) \right) \times \sum_{i \in C} y_{i,j} \right] \\
&= v_y'(C) + v_y''(C)
\end{aligned}
$$

Ponieważ Aksjomaty 1 i 2 są spełnione, z Lematu 9.1 wynika, że gra spełnia warunek superaddytywności. Z aksjomatów 5-7, zgodnie z twierdzeniem w pracy (Shapley, 1953) i podstawiając postać funkcji charakterystycznej podanej w Definicji 9.1, możemy wyznaczyć postać funkcji określającej rozwiązanie $F_i(N, v_y)$.

Z Aksjomatów 1-4, stosując podejście zaproponowane przez Billera i Heath (1982) można pokazać, że podana w twierdzeniu procedura alokacji kosztów jest jednoznaczna i przyjmuje określoną w tym twierdzeniu postać.

◇

Właściwości rozwiązania

Procedura alokacji kosztów opisana w Twierdzeniu 9.1, określa w jednoznaczny sposób ceny przyporządkowane poszczególnym dobrom. Ceny te zapewniają pokrycie kosztów realizacji całego wspólnego projektu. Koszty wynikające z tych cen, przyporządkowane poszczególnym graczom w ogólnym przypadku nie określają rzeczywistych udziałów tych graczy w kosztach, określonych na podstawie rozwiązania F, które to udziały mogą być na ogół inne. Wymagany jest dodatkowy przepływ funduszy. Realizowany jest on jako mechanizm wypłat ubocznych. Oznacza to, że każdy gracz i pokrywa koszty zgodnie z mechanizmem cenowym:

$$\sum_{j=1}^{m}\left[c_j(f_C, \sum_{i\in C} y_i) \times y_{ij}\right],$$

a następnie wypłacane są wypłaty uboczne zapewniające, że po ich uwzględnieniu, rzeczywiste wkłady graczy we wspólny projekt są zgodne z wyznaczonym rozwiązaniem.

Łatwo zauważyć, że

$$\sum_{i\in N} F_i(N, v_y) = v_y(N).$$

Ponieważ gra (N, v_y) jest właściwa, co wynika z Lematu 9.1, to

$$F_i(N, v_y) \geq v_y(i) \text{ dla każdego } i \in N,$$

co oznacza, że jest imputacją.

Łatwo pokazać, że z Aksjomatu 1 wynika:
$G_i(N, v_y) \geq f_{\{i\}}$ dla każdego $i \in N$, oraz
$\sum_{i\in N} G_i(N, v_y) = f_N(\sum_{i\in N} y_i)$.

Oznacza to, że funkcja określająca wkłady finansowe graczy jest dobrze określona. Wkład finansowy żadnego gracza nie jest większy niż koszt niezależnego projektu, realizowanego przez niego indywidualnie. Wkłady finansowe wszystkich graczy dokładnie pokrywają koszty wspólnego projektu.

Można wyznaczyć wypłaty uboczne, stanowiące subsydia poszczególnych graczy, jako różnice między kosztami wynikającymi z mechanizmu cen, a rzeczywistymi wkładami finansowymi wynikającymi z koncepcji rozwiązania:

$$\sum_{j=1}^{m}[c_j(f_C, y_i) \times y_{ij}] - G_i(N, v_y),$$

dla graczy $i = 1, ..., n$.

9.3 Inne koncepcje rozwiązań

9.3.1 Rdzeń gry

Definicja 9.6

Rdzeniem gry (ang. core) nazywamy zbiór wszystkich wektorów wypłat $z \in I\!R^n$ spełniających warunek

$$\sum_{i \in C} z_i \geq v_y(C)$$

dla wszystkich koalicji $C \in \mathcal{N}$ (warunek ten nazywany jest warunkiem racjonalności koalicyjnej),
i warunek

$$\sum_{i \in N} z_i = v_y(N).$$

□

Wypłata z należy do rdzenia gry v_y, jeśli jest imputacją i jeśli spełnia warunek racjonalności koalicyjnej, tzn. że nie istnieje koalicja $C \in \mathcal{N}$ w której gracze mogliby uzyskać więcej niż w przypadku koalicji pełnej. Innymi słowami, dla danego wektora dóbr y, nie istnieje podkoalicja, która deje tworzącym ją graczom większe korzyści niż koalicja pełna. Rdzeń jako koncepcja rozwiązania, charakteryzuje się dużą stabilnością, ponieważ nie istnieje podkoalicja, która mogłaby spowodować zerwanie i podział koalicji pełnej.

W ogólnym przypadku rdzeń gry może być pusty, a jeśli istnieje, to może zawierać więcej niż jedno rozwiązanie.

Poszukujemy koncepcji rozwiązania, która pozwoli określić końcowy wektor wypłat w sposób jednoznaczny, a jeśli gra ma niepusty rdzeń, to wyznaczony wektor wypłat będzie do niego należał.

9.3.2 Funkcje nadwyżki i koncepcje nukleolusa

W literaturze teorii gier kooperacyjnych jest wiele koncepcji rozwiązań budowanych z wykorzystaniem porządku leksykograficznego dla różnych postaci tzw. funkcji nadwyżki (ang. excess function). W celu usystematyzowania tych koncepcji rozwiązań i analizy ich stosowalności w przypadku rozpatrywanej klasy gier, formułuje się niżej ogólne warunki, które powinna spełniać funkcja nadwyżki, a także definiuje się ogólna koncepcję nukleolusa generowanego przez tę funkcję. Przedstawia się nowe wyniki opisujące relację między tą koncepcją i rdzeniem gry. Następnie wprowadza się i analizuje różne konkretne postaci funkcji nadwyżki i odpowiadające im koncepcje nukleolusa.

Definicja 9.7

Funkcja $l_C : R^N \times \Omega \to R$ będzie nazywana **ogólną funkcją nadwyżki** dla koalicji C jeśli spełnia następujące warunki:

1. Jeśli $z^1, z^2 \in R^N$ są takie, że $z_i^1 = z_i^2$ dla każdego $i \in C$, wtedy dla każdej gry v_y,
$$l_C(z^1, v_y) = l_C(z^2, v_y)$$
2. Jeśli $z^1, z^2 \in R^N$ są takie, że $z_i^1 \geq z_i^2$ dla każdego $i \in C$, i istnieje $j \in C$ takie, że $z_j^1 > z_j^2$, to dla każdej gry v_y,
$$l_C(z^1, v_y) < l_C(z^2, v_y)$$

3. Dla dowolnej gry v_y, jeśli $\sum_{i \in C} z_i = v_y(C)$, to $l_C(z, v_y) = 0$.
4. $l_C(z, v_y)$ jest ciągła ze względu z i v_y.

□

Funkcja nadwyżki $l_C(z, v_y)$ odzwierciedla postawę danej koalicji C względem wypłaty z. Pierwszy warunek oznacza, że funkcja nadwyżki nie zależy od pozostałych graczy ze zbioru N, nie należących do C. Warunek 2 gwarantuje, że jeśli wypłaty graczy rosną (rośnie co najmniej wypłata jednego gracza), to maleje wartość funkcji nadwyżki koalicji tworzonych przez tych graczy. Warunek 3 dzieli wypłaty na dwie kategorie: te, które dana koalicja C może osiągnąć, gdy $l_C(z, v_y) \geq 0$, oraz te, które dla tej koalicji są nieosiągalne, gdy $l_C(z, v_y) < 0$. Z warunków 2 i 4 wynika, że jeśli $z^1, z^2 \in R^N$ są takie, że $z_i^1 \geq z_i^2$ dla każdego $i \in C$, to dla każdej gry v_y, $l_C(z^1, v_y) \leq l_C(z^2, v_y)$.

Na podstawie warunków 2 i 3 można pokazać następujące twierdzenie.

Twierdzenie 9.2

Dla dowolnej kolekcji funkcji nadwyżek $\{l_C\}_{C \in \mathcal{N}}$, dla każdej gry (N, v_y), rdzeń

$$core(N, v_y) = \{z \in I(N, v_y) : l_C(z, v_y) \leq 0, \ \textit{dla każdego } C \in \mathcal{N} \backslash \{N\}\}.$$

■

Definicja 9.8

Niech $\Theta(z)$ będzie wektorem w przestrzeni $R^{|\mathcal{N}|-1}$ otrzymanym przez uporządkowanie wartości funkcji nadwyżek $l_C(z, v_y)$ wszystkich koalicji C ze zbioru $\mathcal{N}$, $C \neq N$ w niemalejącym porządku. **Ogólna koncepcja nukleolusa** jest zdefiniowana jako

$$GN(v_y) = \{z \in I(N, v_y) : \Theta(z) \leq_{lex} \Theta(x) \text{ for any } x \in I(N, v_y)\}.$$

□

Dla dowolnych wektorów $z^1, z^2 \in R^m$, porządek leksykograficzny $z^1 \leq_{lex} z^2$ oznacza, że $z^1 = z^2$, albo, że istnieje liczba całkowita k, $1 \leq k \leq m$, taka, że $z_i^1 = z_i^2$, dla $1 \leq i < k$ i że $z_k^1 < z_k^2$.

$I(N, v_y)$ jest zbiorem imputacji gry v_y.

Twierdzenie 9.3

Niech $\{l_C\}_{C \in \mathcal{N}}$ będzie kolekcją funkcji nadwyżek i niech $(N, v_y) \in \Omega$.

(i) Istnieje niepusty ogólny nukleolus $GN(N, v_y)$.

(ii) Ogólny nukleolus zawiera skończoną liczbę punktów.

(iii) Jeśli ogólne funkcje nadwyżek $\{l_C\}_{C \in \mathcal{N}}$ są dodatnie i afiniczne wzgledem z, tzn. $l_C(z, v_y) = \sum_{i \in C} a_i^C z_i + b^C$, gdzie $a_i^C > 0$ dla $i \in N$, to
nukleolus $GN(N, v_y)$ jest jednoznaczny.

(iv) Jeśli rdzeń $core(N, v_y)$ gry jest niepusty, to $GN(N, v_y) \subset core(N, v_y)$. ■

Dowód

W celu pokazania części (i) twierdzenia, użyjemy równoważnej definicji funkcji

$$\Theta_i(z_i) = \max\{\min\{l_C(z, v_y) : C \in \widetilde{\mathcal{N}}\}\widetilde{\mathcal{N}} \subset \mathcal{N} \setminus \{N\}, |\widetilde{\mathcal{N}}| = i\}$$

Z warunku 4, Definicji 9.7 mamy, że funkcja l_C jest ciągła. Funkcja określona jako maksimum lub minimum skończonej liczby funkcji ciągłych też jest ciągła. Wynika z tego , że funkcje Θ_i dla $i = 1, 2, \dots |\mathcal{N}| - 1$ też są ciągłe.

Zdefiniujmy

$$I_1 = \{z \in I(N, v_y) : \Theta_1(z) \leq \Theta_1(y) \text{ dla wszystkich } y \in I(N, v_y)\}$$

i

$$I_i = \{z \in I_{i-1} : \Theta_i(z) \leq \Theta_i(y) \text{ dla wszystkich } y \in I_{i-1}(N, v_y)\}$$

dla $i = 2, \ldots, |\mathcal{N}| - 1$.
Ponieważ $I(N, v_y)$ jest niepusty, a Θ_i jest ciągła dla $i = 1, \ldots |\mathcal{N}| - 1$, łatwo zauważyć, że zbiór I_i jest zwarty i niepusty dla $i = 1, \ldots, |\mathcal{N}| - 1$. Oczywiście, $I_{|\mathcal{N}|-1} = GN(N, v_y)$, co oznacza, że została pokazana część (i) twierdzenia.

Dowodząc część (ii), przyjmijmy, że $B(z) = (B_1(z), \ldots, B_k(z))$ oznacza uporządkowaną partycję zbioru $\mathcal{N} \setminus \{N\}$, taką, że $\bigcup_{i=1}^{k} B_i(z) = \mathcal{N} \setminus \{N\}$, $B_i(z) \cap B_j(z) = \emptyset$ kiedy tylko $i \neq j$ i

$$B_1(z) = \{C \in \mathcal{N}\setminus\{N\} : l_C(z, v_y) \geq l_T(y, v_y) \text{ dla każdego } T \in \mathcal{N}\setminus\{N\}\},$$

oraz

$$\begin{aligned} B_i(z) = \{C \in \mathcal{N} \setminus \{N\} \setminus \textstyle\bigcup_{j=1}^{i-1} B_i(z) : l_C(z, v_y) \geq l_T(y, v_y) \\ \text{dla każdego } T \in \mathcal{N} \setminus \{N\} \setminus \textstyle\bigcup_{j=1}^{i-1} B_i(z)\}. \end{aligned}$$

$B_i(z)$ odpowiada koalicji o i-tej najwyższej nadwyżce.

Niech x i y będą różnymi punktami należącymi do zbioru $GN(N, v_y)$ i niech $B(x) = (B_1(z), \ldots, B_k(z))$, i $B(y) = (B_1(z), \ldots, B_l(z))$. Ponieważ każdy punkt w $GN(N, v_y)$ został otrzymany w wyniku minimalizacji nadwyżek w leksykograficznym porządku, mamy $k = l$ i dla $j = 1, \ldots, k$, $l_C(x, v_y) = l_T(y, v_y)$, gdy tylko $C \in B_j(x)$ i $T \in B_j(y)$ i $|B_j(x)| = |B_j(y)|$, gdzie $|B_j(\cdot)|$ oznacza moc zbioru $B_j(\cdot)$.
Ponieważ $l_{\{i\}}(x, v_y)$ określa x_i w sposób jednoznaczny dla każdego $i \in N$ i ponieważ $x \neq y$, mamy $B(x) \neq B(y)$. Oznacza to, że

każdy punkt w rdzeniu $GN(N, v_y)$ ma inną uporządkowaną partycję. Ponieważ jest tylko skończona liczba uporządkowanych partycji, dowodzi to części (ii) Twierdzenia.

Do dowodu części (iii) wystarczy pokazać, że $\Theta(x) = \Theta(y)$, $x \neq y$, $x, y \in I(N, v_y)$ pociąga za sobą, że $\Theta(\frac{x+y}{2}) <_{lex} \Theta(x)$. Niech $x, y \in I\!R^{|\mathcal{N}|-1}$ i $\eta : I\!R^{|\mathcal{N}|-1} \to I\!R^{|\mathcal{N}|-1}$ będzie funkcją porządkującą:

$$\eta_i(z) = \max\{\min\{z_j : j \in \widetilde{\mathcal{N}}\}, \quad \widetilde{\mathcal{N}} \in \mathcal{N} \setminus \{N\}, \quad |\widetilde{\mathcal{N}}| = i\}.$$

Można pokazać (Schmeidler, 1969), że $\eta(x + y) \leq_{lex} \eta(x) + \eta(y)$. Ponieważ

$$\eta(\{l_C(x, v_y)\}_{C \in \mathcal{N} \setminus \{N\}}) = \Theta(x),$$
$$\eta(\{l_C(y, v_y)\}_{C \in \mathcal{N} \setminus \{N\}}) = \Theta(y)$$

i

$$l_C(x, v_y) + l_C(y, v_y) = \sum_{i \in C} a_i^C x_i + b^C + \sum_{i \in C} a_i^C y_i + b^C =$$
$$2\left(\sum_{i \in C} a_i^C \cdot \frac{x_i + y_i}{2} + b^C\right) = 2 l_C\left(\frac{x+y}{2}, v_y\right)$$

mamy

$$\eta\left(\{l_C(x, v_y) + l_C(y, v_y)\}_{C \in \mathcal{N} \setminus \{N\}}\right) = 2\Theta\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Otrzymujemy, że $2\Theta(\frac{x+y}{2}) \leq_{lex} \Theta(x) + \Theta(y)$. Jeśli ta nierówność jest spełniona ściśle, to część (iii) jest już dowiedziona. W przeciwnym przypadku $2\Theta(\frac{x+y}{2}) = \Theta(x) + \Theta(y)$. Z założenia $\Theta(x) = \Theta(y)$, można pokazać, że $l_C(x, v_y) = l_C(y, v_y)$ dla każdej koalicji $C \in \mathcal{N} \setminus \{N\}$. Pociąga to za sobą, że $x = y$ co jest w sprzeczności do założenia, co dowodzi części (iii) twierdzenia.

Część (iv) wynika bezpośrednio z twierdzenia 9.2.

$\Diamond$

9.3.3 Przykłady funkcji nadwyżki i postaci nukleolusa

Wykorzystując ogólna koncepcję nukleolusa wprowadza się kilka różnych rozwiązań posiadających różne właściwości. Podaje się listę rozwiązań i konkretnych sformułowań funkcji nadwyżki generujących te rozwiązania. Odpowiadają one rozwiązaniom znanym z literatury, podanym w nawiasach. the solutions.

Nukleolus (Schmeidler, 1969)

$l_C^{Nu}(z, v_y) = v_y(C) - \sum_{i \in C} z_i$ dla dowolnego $C \in \mathcal{N}$.

Słaby Nuklelus (Shapley and Shubik 1966)

$l_C^{WN}(z, v_y) = \frac{v_y(C) - \sum_{i \in C} z_i}{|C|}$ dla dowolnego $C \in \mathcal{N}$.

gdzie $|C|$ oznacza denotes the cardinality of coalition C

Nukleolus proporcjonalny (Young, Okada, Hashimoto 1982)

$l_C^{PN}(z, v_y) = \frac{v_y(C) - \sum_{i \in C} z_i}{v_y(C)}$ dla dowolnego $C \in \mathcal{N}$, $v_y(C) \neq 0$,

w przeciwnym przypadku $l_C^{PN}(z, v_y) = 0$.

Nukleolus kompromisowy (ang. concession nucleolus) zaproponowany przez Seo, Sakawa, (1987)

$l_C^{CN}(z, v_y) = \frac{v_y(C) - \sum_{i \in C} z_i}{\sum_{i \in C} SH_i(N, v_y)}$ dla dowolnego $C \in \mathcal{N}$,

gdzie CH oznacza wartość Shapley'a.

Nukleolus zerwania (ang. disruption nucleolus)

$l_C^{DN}(z, v_y) = \frac{v_y(C) - \sum_{i \in C} z_i}{v_y(N) - v_y(C) - v_y(N \backslash C)}$ dla dowolnego $C \in \mathcal{N}$

Uwaga 1. Nukleolus zerwania określony jest na podstawie warunków, przy których może nastapić zerwanie współpracy graczy, stąd jego nazwa. W przypadku Nukleolusa zerwania, nadwyżka koalicji obliczana jest ze względu na wypłaty graczy, którzy do tej koalicji nie należą. Zaproponowany tutaj nukleolus zerwania jest analogiczny do rozwiązania sformułowanego przez Littlechild, Vaidya (1976). Nukleolus Littlechild'a jest generowany przez funkcję nadwyżki

$$d_C(z, v_y) = \frac{\sum_{i \in N \setminus C} z_i - v_y(N \setminus C)}{\sum_{i \in C} z_i - v_y(C)}.$$

Ponieważ

$$\sum_{\text{ß} \in N \setminus C} z_i = v_y(N) - \sum_{i \in C} z_i \quad \text{dla } z \in I(N, v_y),$$

$d_C(z, v_y)$ może być sformułowana jako

$$d_C(z, v_y) = \frac{v_y(N) - v_y(C) - v_y(n \setminus C)}{\sum_{i \in C} - v_y(C)} - 1.$$

Można zauważyć, że funkcje d_C i l_C^{DN} generują te same postaci nukleolusa.

Uwaga 2. Zaproponowana tutaj funkcja l_C^{DN} spełnia warunki (1 – 4) ogólnej funkcji nadwyżki. Funkcja d_C zdefiniowana przez Littlechild'a nie spełnia tych warunków.

Uwaga 3. Proponowana funkcja nadwyżki l_C^{DN} umożliwia wyznaczanie wartości nukleolusa zerwania rozwiązując odpowiedni problem optymalizacji programowania liniowego.

9.3.4 Problemy obliczeniowe związane z wyznaczaniem nukleolusa

Różne postaci nukleolusa wymienione w poprzednim punkcie są generowane przez liniowe funkcje nadwyżki. Umożliwia to sformułwanie algorytmów obliczeniowych, w których rozwiązuje się zestaw problemów programowania liniowego. Ogólna idea algorytmu została zaproponowana w pracach (Kopelowitz, 1967), (Maschler, Peleg, Shapley, 1979).

Dla dowolnej gry $(N, v_y) \in \Omega$ i kolekcji funkcji nadwyżki $\{l_C\}_{C \in N}$ można wyznaczyć nukleolus stosując następujący algorytm:

Algorytm wyznaczania nukleolusa

Zakładamy, że dana jest postać funkcji nadwyżki l_C.

Krok 1.

Rozwiąż problem programowania liniowego:

$$\begin{array}{ll} \text{LP1:} & \min w_1 \\ & \text{przy ograniczeniach} \\ & l_C(z, v_y) \le w_1, \ \text{dla wszystkich} \ \ C \in \mathcal{N} \setminus \{N\}, \\ & z \in I(N, v_y). \end{array}$$

ustaw numer iteracji k=2

Krok 2.

Niech w^*_{k-1} oznacza optymalną wartość w_{k-1} w problemie LP(k-1) i niech

$A_{k-1} = \{z \in I\!R^n : z$ jest rozwiązaniem optymalnym problemu LP(k-1)$\}$

$E_{k-1} = \{C \in \mathcal{N} \setminus \{N\} : l_C(z, v_y) = w^*_{k-1}$ dla każdego $z \in A_{k-1}\}$

jeśli rozwiązanie problemu LP(k-1) jest jednoznaczne, to **stop**,
w przeciwnym przypadku

Rozwiąż problem:

$$\begin{array}{ll} \text{LPk:} & \min w_k \\ & \text{przy ograniczeniach} \\ & l_C(z, v_y) \le w_k, \ \text{for każdego} \ \ C \in \mathcal{N} \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} E_j \\ & l_C(z, v_y) = w^*_j \ \text{dla każdego} \ s \in E_j \ \text{for} \ j = 1, \ldots, k-1 \\ & z \in I(N, v_y). \end{array}$$

ustaw k=k+1, **idź do Kroku 2.**

Uwagi

Jeśli rozwiązanie problemu LP1 jest jednoznaczne, to jest to nukleolus gry (N, v_y), generowany przez funkcję nadwyżki l_C.

Niestety problem LP1 nie zawsze ma jednoznaczne rozwiązanie. W takim przypadku wymagana jest pewna liczba kolejnych iteracji algorytmu. Wyznaczenie nukleolusa generowanego przez daną funkcję nadwyżki l_C wymaga rozwiązania nie więcej niż $n-1$ problemów programowania liniowego.

Przy implementacji algorytmu należy zauważyć, że dla każdego danego k, podzbiór E_k może być znaleziony przez optymalne rozwiązanie dualne problemu LPk. Rozwiązania dualne są standardowo wyznaczane w procesie rozwiązywania problemów programmowania liniowego metodą simplex (Christensen, Lind 1996).

9.3.5 Metoda SCRB

Nazwa metody SCRB, powszechnie stosowana w literaturze, skrót pełnej nazwy: Separable Costs-Remaining Benefits method (James,Lee 1971, Young, Okada,Hashimoto 1982). Matoda ta jest często stosowana w praktyce alokacji kosztów w przypadku projektów rozwojowych systemów wodnych. W opisie metody stosowane jest specyficzne nazewnictwo, w szczególności definiowane są takie pojęcia jak resztowe koszty (ang. remaning costs), resztowe korzyści (ang. remaining benefits) czy koszty marginalne (ang. marginal costs).

Koszty marginalne, oznaczone jako $mc(i)$, związane z włączeniem gracza i do koalicji, określone są przez przyrost kosztów projektu, gdy gracz i jest włączany do koalicji pełnej. Niech y_i oznacza wektor dóbr żądanych przez gracza i, a $u_y(C) = f_C(\sum_{i \in C} y_i)$ oznacza koszt projektu realizowanego przez koalicję C, dla każdej $C \in \mathcal{N}$. Koszt marginalny wyznaczany jest jako:

$$mc(i) = u_y(N) - u_y(N-1)$$

Korzyści resztowe, oznaczone dalej jako $rb(i)$, opisują gotowość gracza i do pokrycia kosztów wyznaczanych w odniesieniu do projektu realizowane indywidualnie. Określone są jako różnica kosztu projektu realizowanego indywidualnie pomniejszonego o koszty marginalne danego gracza.

$$rb(i) = f_{\{i\}}(y_i) - mc(i)$$

Koszty resztowe rc opisują oszczędności uzyskiwane, gdy jeden większy projekt będzie realizowany wspólnie przez wszystkich graczy w koalicji pełnej, w miejsce wielu małych, niezależnych projektów realizowanych przez pojedynczych graczy.

$$rc = u_y(N) - \sum_{j \in N} mc(j)$$

Rozwiązanie w metodzie SCRB obliczane jest w ten sposób, że resztowe koszty są dzielone między graczy w proporcji do resztowych korzyści.

$$F_i^{SCRB} = u_y(i) + \frac{rb(i)}{\sum_{j \in N} rb(j)} \cdot rb.$$

Uwaga

Metoda jest bardzo prosta. Przy pierwszym spojrzeniu jest bardzo atrakcyjna i wydaje się rozsądna. Z tego powodu jest bardzo często stosowana w praktyce. Niestety ma istotne wady. W ogólnym przypadku, rozwiązanie wyznaczone przy pomocy tej metody, może nie spełniać warunku racjonalności indywidualnej i/lub warunku racjonalności grupowej. Wyznaczone rozwiązanie może nie należeć do rdzenia gray, nawet gdy ten rdzeń nie jest pusty.

9.4 Przykład modelu gry kooperacyjnej i wyniki obliczeniowe

Przykład dotyczy czterech podmiotów decyzyjnych (graczy) zainteresowanych dwoma rodzajami dóbr. Dobra te mogą być uzyskane w wyniku realizacji projektów rozwojowych. Każdy z graczy może realizować swój własny niezależny projekt, aby uzyskać wymagane ilości dóbr. Gracze mogą jednak tworzyć koalicje i realizować wspólnie projekt odpowiednio większej skali.

W tym przypadku mamy:
zbiór graczy $N = \{1, 2, 34\}$,
zbiór dóbr $M = \{1, 2\}$,
zbiór możliwych koalicji $\mathcal{N} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\},$
$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\},$
$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$.
Dla każdej koalicji $C \in \mathcal{N}$, dana jest funkcja kosztów $f_C(x_1, x_2)$, gdzie x_1, x_2 oznaczają ilości dóbr wymaganych przez koalicję C. W tym przykładzie przyjęto, że funkcja kosztów ma postać: $f(x_1, x_2) = ax_1^{\alpha}x_2^{\beta}$, gdzie liczny $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta < 1$. Funkcja ta jest traktowana jako przybliżenie rzeczywistej funkcji kosztów w

rozpatrywanym przedziale $[\underline{x}_1, \overline{x}_1], [\underline{x}_2, \overline{x}_2]$. W problemie rzeczywistym funkcja ta może być oczywiście bardziej złożona i inna dla każdej koalicji.

Dla danych ilości dóbr zakładanych przez graczy, wyznaczono wartości charakteryzujące rozpatrywaną grę. Następnie obliczono rozwiązania gry zgodnie z różnymi koncepcjami: wartośc Shapley'a, Nukleolus, Słaby Nukleolus, Nukleolus Proporcjonalny, Nukleolus Kompromisowy. Wyniki są porównywane z rozwiązaniem uzyskanym metodą SCRB. Wymienione wyżej nukleolusy zostały wyznaczone z użyciem algorytmu przedstawionego w Sekcji 9.3.4, przez rozwiązanie wymaganej liczby odpowiednio sformułowanych problemów programowania liniowego. Wyniki przedstawione są w tabelach i na rysunkach.

Tabela 9.1.

Koalicja	{1}	{2}	{3}	{4}	{12}	{13}	{14}	{23}
Dobro 1	4,00	2,00	3,00	2,00	6,00	7,00	6,00	5,00
Dobro 2	5,00	2,00	1,00	3,00	7,00	6,00	8,00	3,00
Koszt projektu	7,61	3,73	3,46	4,39	10,67	10,84	11,25	6,94
Cena dobra 1	1,06	1,04	0,64	1,22	0,99	0,86	1,04	0,77
Cena dobra 2	0,68	0,83	1,54	0,65	0,68	0,80	0,63	1,03
Funkcja charakt. v	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Koalicja	{24}	{34}	{123}	{124}	{134}	{234}	{1234}
Dobro 1	4,00	5,00	9,00	8,00	9,00	7,00	11,00
Dobro 2	5,00	4,00	8,00	10,00	9,00	6,00	11,00
Koszt projektu	7,61	7,79	13,78	14,21	14,45	10,84	17,31
Cena dobra 1	1,06	0,87	0,85	0,99	0,89	0,86	0,87
Cena dobra 2	0,68	0,87	0,77	0,63	0,71	0,80	0,70
Funkcja charakt. v	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Tabela 9.1 zawiera ilości dóbr wymagane odpowiednio przez każdego gracza i koalicję, a następnie, obliczone dla każdej koalicji: koszt projektu, ceny dóbr 1 i 2, a także wartości funkcji charakterystycznej.

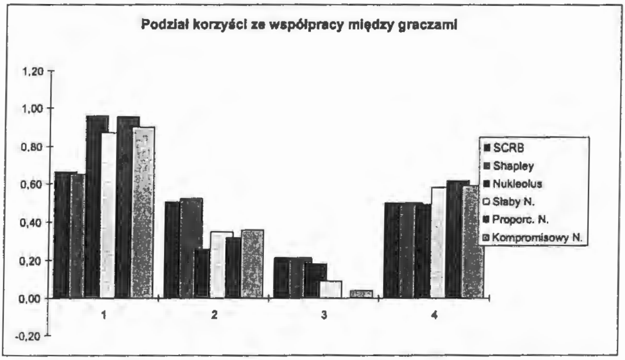
W tabeli 9.2 podano korzyści wynikające ze współpracy w odniesieniu do każdego gracza, obliczone zgodnie z różnymi koncepcjami rozwiązań. Korzyści wynikające ze współpracy przedstawiono także na Rys. 9.1. W tym przykładzie gracz 1 wymaga znacznie większej ilości dóbr niż każdy z pozostałych graczy. Ceny dóbr obliczono zgodnie z zależnościami podanymi w Twierdzeniu 9.1. Wartości rozwiązania, tzn. wypłaty graczy w koalicji pełnej interpretowane są jako korzyści odnoszone przez graczy w wyniku współpracy.

W tabeli 9.3 i na Rys. 9.2 przedstawiono rzeczywiste wkłady graczy we wspólny projekt.

Tabela 9.2. Korzyści jakie odnoszą gracze w wyniku współpracy

Koncepcja rozwiązania	Gracze			
	1	2	3	4
SCRB	0,67	0,51	0,21	0,50
Shapley	0,65	0,53	0,21	0,50
Nucleolus	0,96	0,26	0,18	0,49
Słaby N.	0,87	0,35	0,09	0,59
Proporc. N.	0,95	0,32	0,00	0,62
Kompromisowy N.	0,90	0,36	0,04	0,59

Jak wspomniano wcześniej, metoda SCRB ma niekorzystne cechy, ponieważ rozwiązania wyznaczone tą metodą mogą nie spełniać warunków racjonalności. Rozwiązania metody SCRB i wartość Shapleya mogą w pewnych przypadkach nie należeć do rdzenia gry, nawet gdy ten rdzeń istnieje i nie jest pusty. Wszystkie wyznaczone postaci nukleolusa należą do rdzenia gry. Różnią

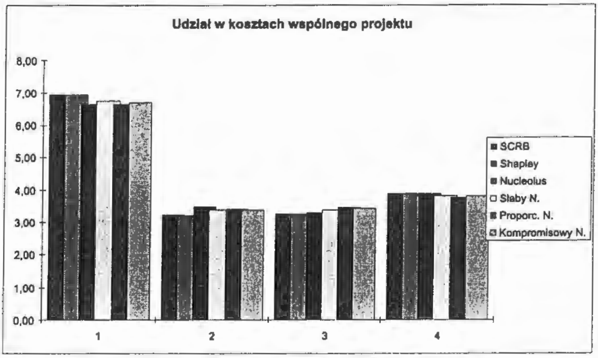


Rysunek 9.1. Podział korzyści wynikających ze współpracy między graczami

Tabela 9.3. Wkłady finansowe graczy we wspólny projekt

Koncepcja	Gracze			
rozwiązania	1	2	3	4
SCRB	6,95	3,22	3,25	3,89
Shapley	7,61	7,79	13,78	14,21
Nucleolus	7,61	7,79	13,78	14,21
Słaby N.	7,61	7,79	13,78	14,21
Proporc. N.	7,61	7,79	13,78	14,21
Kompromisowy N.	7,61	7,79	13,78	14,21

się ze względu na różne sformułowania funkcji nadwyżki. Nukleolus Słaby, Proporcjonalny, Kompromisowy różnią się od oryginalnego Nukleolusa Schmaidler'a sposobem ważenia nadwyżki. W przypadku Nukleolusa Słabego nadwyżka jest mierzona na głowę uczestnika koalicji, w przypadku Nukleolusa Proporcjonalnego - proporcjonalnie do siły koalicji mierzonej wartością funkcji charakterystycznej, w przypadku Nukleolusa Kompromisowego - w



Rysunek 9.2. Udział w kosztach projektu zgodnie z rozważanymi koncepcjami rozwiązań

proporcji do siły koalicji mierzonej wartością Shapley'a uczestników, tzn w proporcji do oczekiwanych wypłat tych graczy. W przypadku Nukleolusa Przerwania, nadwyżka koalicji obliczana jest ze względu na wypłaty graczy, którzy do tej koalicji nie należą.

9.5 Wspomaganie analizy wielokryterialnej

Proponowany model gry kooperacyjnej do analizy problemu alokacji kosztów został sformułowany przy założeniu, że wektor dóbr $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ jest dany, gdzie y_i, $i = 1, ..., n$ oznacza zestaw dóbr pożądanych przez gracza i. Oznacza to także, że rozwiązanie kooperacyjne jest wyznaczane dla danego wektora y i może być rozpatrywane jako parametryczne ze względu na pożądane ilości tych dóbr. Kooperacja graczy oznacza, że zgadzają się realizować większy i efektywniejszy projekt wspólnie. Koszt tego wspólnego projektu jest mniejszy niż koszt mniejszych projektów realizowanych niezależnie. Rozwiązanie kooperacyjne gry opisuje faktycznie podział między graczy korzyści odnoszonych ze współpracy. W rezultacie dany gracz poniesie koszty mniejsze, niż w przypadku odrzucenia współpracy. Naturalne jest, że gracz może preferować np. pozyskanie większej ilości określonego dobra zamiast określonego zmniejszenia kosztów. W celu umożliwienia takich rozważań proponuje się ogólniejszą analizę wielokryterialną i jej wspomaganie w interaktywnej procedurze.

9.5.1 Sformułowanie problemu wielokryterialnego

Każdy z graczy stara się zmaksymalizować wektor y_i określający ilości pożądanych dóbr oraz zminimalizować koszty związane z realizacją projektu rozwojowego, oznaczone tutaj jako u_i. Wektor kryteriów gracza i ma postać $(y_i, u_i) \in R^{m+1}$, gdzie m jest liczbą rodzajów dóbr. Dla każdego gracza i dany jest zbiór $V_{\{i\}}$ określający osiągalne wartości kryteriów w przestrzeni R^{m+1} w przypadku niezależnej realizacji projektów. Jeśli funkcje kosztów $f_{\{i\}}(y_i)$ są dane dla rozpatrywanego zakresu dóbr $[y_{il}, y_{ih}]$, to zbiory $V_{\{i\}}$ mogą być określone jako:

$$V_{\{i\}} = \{(y_i, u_i) : y_i \in [y_{il}, y_{ih}],\ u_i \geq f(y_i)\}$$

W przypadku kooperacji, osiągalne wartości kryteriów wszystkich graczy są określone przez zbiór $V_N \in \Pi_{i \in N} R^{m+1}$.

$$\begin{aligned} V_N = \{(y_i, u_i) \in R^{n(m+1)} &: y_i \in [y_{il}, y_{ih}], \\ &u_i \geq G_i(N, v_y) \text{ for all } i = 1, 2, ..., n, \\ &\sum_{i \in N} u_i \geq f_N(\sum_{i \in N} y_i)\}, \end{aligned}$$

gdzie:

$f_N(\sum_{i \in N} y_i)$ jest funkcją kosztów dla wspólnego projektu realizowanego przez koalicję pełną,

$G_i(N, v_y) = \sum_{j=1}^{m} [c_j(f_{\{i\}}, y_i) \times y_{ij}] - F_i(N, v_y)$ oznacza wkład finansowy gracza i wyznaczonego na podstawie koncepcji rozwiązania $F_i(N, v_y)$ dla danego wektora dóbr y.

9.5.2 Idea iteracyjnej procedury wspomagającej analizę wielokryterialną

Proponuje się iteracyjną procedurę umożliwiającą graczom analizę wypłat gry z uwzględnieniem wielokryterialnego charakteru tych wypłat. Procedura obejmuje dwie fazy działań.

W pierwszej fazie gracze analizują swoje osiągalne wypłaty, zakładając że działają sami, że nie ma między nimi współpracy. Wyniki z tej fazy stanowią podstawę do analizy korzyści wynikających ze współpracy i możliwości tworzenia różnych koalicji, które analizowane są w drugiej fazie. W pierwszej fazie, każdy gracz niezależnie analizuje zbiór swoich osiągalnych niezdominowanych wypłat wykorzystując odpowiedni pakiet oprogramowania optymalizacji wielokryterialnej, np. tego typu, jak system DIDAS (Lewandowski, Kręglewski, Rogowski, Wierzbicki 1989). Dany gracz stara się znaleźć możliwie najlepszą wypłatę zgodną z jego preferencjami w zbiorze $V_{\{i\}}$. Wypłata ta może być uzyskana bez względu na możliwą współpracę z innymi graczami. W kolejnych iteracjach gracz zakłada i proponuje punkty referencyjne $(y_i^r, u_i^r) \in R^{m+1}$, gdzie R^{m+1} jest przestrzenią kryteriów wypłat tego gracza. System optymalizacji wielokryterialnej, dla każdego punktu referencyjnego wyznacza wypłatę niezdominowaną w zbiorze $V_{\{i\}}$, zgodną z zadanym punktem referencyjnym. Gracz odpowiednio proponując kolejne punkty referencyjne i analizując uzyskiwane wyniki w iteracyjnym procesie, może znaleźć wypłatę zgodna z jego preferencjami. Gracz jest proszony o wskazanie tej preferowanej wypłaty. Ta faza jest kończone, gdy wszyscy gracze $i = 1, 2, \ldots n$, wskażą swoje preferowane wypłaty. Wypłaty te oznaczone jako (y_i^q, u_i^q) są przechowywane w systemie komputerowym. Stanowią punkt startowy w drugiej fazie procedury.

W drugiej fazie analizowane są wyniki możliwej współpracy graczy. Analiza wykonywana jest w pewnej liczbie rund. Każda runda składa się z dwóch części. Pierwsza część obejmuje niezależna analizę gry przez każdego gracza. Gracz określa swoje preferencje za pomocą punktów referencyjnych (y_i^r, u_i^r), zakłada także punkty referencyjne pozostałych graczy (y_j^r, u_j^r), $j \neq i$, $j = 1, 2, ...n$. System wyznacza rozwiązanie możliwe rozwiązanie. Gracz może zakładać kolejno różne punkty referencyjne i analizować wynikające dla nich wypłaty, szukając preferowanego rozwiązania kooperacyjnego. Może przy tym lepiej zrozumieć naturę sytuacji decyzyjnej. Gracz proszony jest o wskazanie swojej preferowanej wielokryterialnej wypłaty, oznaczoną jako (y_i^u, u_i^u) i nazwaną preferowaną wypłatą jednostronną.

W drugiej części rundy, na podstawie wskazanych przez graczy ich prefereowanych wypłat jednostronnych, określany jest punkt $(y^u, u^u) = (y_1^u, ...y_n^u, u_1^u, ..., u_n^u)$. Punkt ten, w porównaniu z punktem status quo, wyznacza kierunek poprawy wypłat zgodny z preferencjami wszystkich graczy. Mając określony ten punkt, system wyznacza wypłaty graczy, niezdominowane w zbiorze V_N zgodnie podejściem punktu referencyjnego optymalizacji wielokryterialnej. Wyznaczone wypłaty graczy będą się na ogół różniły od wypłat wyznaczonych w pierwszej części rundy, ponieważ są wyznaczane zgodnie z preferowanymi kierunkami wypłat wszystkich graczy. W pierwszej części rundy dany gracz mógł tylko zakładać punkty referencyjne innych graczy, nie znając ich naprawdę. Wypłaty wyznaczane przez system w drugiej części rundy nazywane są wielostronnymi. Przedstawiane są graczom do analizy. Po dokonaniu analizy, gracze mogą przeprowadzić następną rundę procedury, w analogiczny sposób. Będzie to w szczególności wskazane, gdy wypłaty wyznaczone przez system w trakcie analizy jednostronnej i wypłaty wielostronne będą się istotnie różniły. Zauważmy, ze w drugiej i następnych rundach, przy analizie jednostronnej, preferencje kontrgarczy mogą być szacowane na podstawie punktów referencyjnych rzeczywiście zakładanych przez nich we wcześniejszych rundach. Gracze w dowolnym momencie mogą przerwać analizę zatrzymując procedurę, ale mogą również, analizując kolejne wypłaty wyznaczane przez system, traktowane jako propozycje mediacyjne, znaleźć konsensus.

9.5.3 Schemat iteracyjnej procedury

Faza pierwsza

Każdy gracz i niezależnie analizuje swój zbiór wypłat $V_{\{i\}}$ Przy użyciu pakietu optymalizacji wielokryterialnej. Wynik analizy wielokryterialnej: $(y_1^q, ..., y_n^q, u_1^q, ..., u_n^q)$ gdzie (y_i^q, u_i^q) oznacza wybrany, preferowany przez gracza i, wektor wypłat niezdominowany w zbiorze $V_{\{i\}}$.

Faza druga

Runda 1

Analiza jednostronna

Analiza jednostronna wykonywana jest niezależnie i równolegle przez graczy $i = 1, 2, ..., n$. Dany gracz i proponuje punkt referencyjny (y_i^r, u_i^r) i zakłada punkty referencyjne kontrgraczy $j \neq i$, $j = 1, 2, ...n$. System komputerowy wyznacza odpowiednią niezdominowaną wielokryterialną wypłatę w zbiorze V_N. Gracz i analizuję te wypłatę, proponuje inny punkt referencyjny, system wyznacza kolejną niezdominowaną wypłatę, znów analizowaną przez gracza itd., aż gracz wskaże wypłatę preferowaną (y_i^u, u_i^u), uznaną jako najlepszą.

Analiza wielostronna.

Analiza wielostronna może być dokonywana, gdy wszyscy gracze zakończą analizę jednostronna i wskażą swoje preferowane wypłaty. System wyznacza wówczas wielostronną wypłatę niezdominowaną w zbiorze V_N na podstawie punktu referencyjnego $(y^{o1}, u^{o1}) = (y^u, u^u) = (y_1^u, ...y_n^u, u_1^u, ..., u_n^u)$ Gracze analizują te wypłatę jako propozycję mediacyjną i decydują czy kontynuować procedurę postępowania czy też ją zakończyć.

. . . .

Runda k

Wykonywana jest w taki sam sposób jak runda 1. Przy wyznaczaniu wypłat niezdominowanych dla gracza i w ramach analizy jednostronnej, gracz ten może podawać swoje różne punkty referencyjne, przy czym punkty referencyjne kontrgraczy mogą być przyjmowane na postawie (y^{ok}, u^{ok}).

Kryterium stopu

Procedura jest kończona, gdy gracze zrezygnują z kontynuowania analizy, lub gdy zgodzą się zaakceptować wyznaczone wypłaty wielostronnego rozwiązania.

9.6 Podsumowanie

W rozdziale podano model opisujący problem alokacji kosztów między podmioty decyzyjne negocjujące realizację wspólnego projektu rozwojowego. Model ten opisany jest w formie tzw, wieloprzedmiotowej gry kooperacyjnej. podmioty deyzyjne, traktowane jako gracze w tej grze, są zainteresowani pozyskaniem pewnego zestawu dóbr, które mogą być uzyskane wyniku realizacji projektów niezależnych, lub też gracze mogą tworzyć różne koalicje i rozważyć realizację większego projektu wspólnego.

Rozpatrzono procedurę alokacji kosztów przy wykorzystaniu mechanizmu cen i różne koncepcje rozwiązań teorii gier. Zaproponowano niezbędne narzędzia obliczeniowesłużące wyznaczeniu proponowanych rozwiązań. Podano i zaimplementowano numerycznie algorytm wyznaczania różnych typów nukleolusa. Przeprowadzono eksperymenty obliczeniowe dla przykładowego problemu z 4 graczami i dwoma rodzajami dóbr. Przedstawiono wyniki tych eksperymentów., łącznie z dyskusją dotyczącą stosowalności wymienionych typów rozwiązań. Zaproponowano i przedyskutowano procedurę wspomagającą analizę wielokryterialną problemu alokacji kosztów.

Gry kooperacyjne w postaci funkcji partycji

Rozpatruje się problem alokacji kosztów w przypadku grupy decydentów, którzy wspólnie chcą uzyskać pewien zestaw dóbr i dzielą między siebie koszty przedsięwzięcia - projektu rozwojowego. Decydenci, traktowani dalej jako gracze, mogą tworzyć różne koalicje i realizować projekt wspólnie. Problem alokacji kosztów dotyczy ich podziału między graczy, ale także między pozyskiwane dobra. W rozdziale poprzednim, a także w pracy Kruś, Bronisz (2000), w celu opisania problemu, wprowadzono klasę gier kooperacyjnych w postaci funkcji charakterystycznej, nazwanych grami wieloprzedmiotowymi. Sformułowania tych gier uwzględniają mechanizm cen przyporządkowanych poszczególnym dobrom. Przedstawiono różne koncepcje rozwiązań oraz algorytm umożliwiający ich wyznaczanie. Podobnie jak w innych pracach dotyczących alokacji kosztów z zastosowaniem gier kooperacyjnych w postaci funkcji charakterystycznej Littlechild, Thompson (1977), Young, Okada, Hashimoto (1980), Seo, Sakawa (1987), Legros (1986), przyjęto że wypłata każdej koalicji zależy tylko od graczy, którzy ją tworzą.

W praktyce występują jednak również sytuacje, w których wypłata koalicji zależy nie tylko od graczy, którzy ją tworzą, ale także od struktury koalicji graczy pozostałych (ogólniej - od ich partycji). Jest to typowe np. w przypadku firm dzielących między siebie pewien rynek usług lub dóbr. Jeśli kilka firm decyduje się utworzyć koalicję, jej efekty będą zależeć także od pozostałych firm działających na danym rynku i od tego czy te pozostałe firmy będą działać indywidualnie czy też utworzą pewne koalicje.

W rozdziale przedstawia się wyniki aktualnie prowadzonych badań dotyczących wspomagania decyzji w takich sytuacjach. Zakłada się, że gracze starają się uzyskać określone ilości pewnych dóbr i są gotowi pokryć związane z tym koszty. W celu uzyskania tych dóbr mogą działać niezależnie lub tworzyć koalicje. Związane z tym koszty zależą od tworzonej koalicji, ale także od struktury koalicyjnej graczy pozostałych. Kierunek prowadzonych badań obejmuje:

- sformułowanie gry w postaci funkcji partycji (ang. game in partition function form) w celu analizy problemu alokacji kosztów,

- sformułowanie i analiza koncepcji rozwiązań,

- poszukiwania gry w postaci funkcji charakterystycznej, której koncepcje rozwiązań są koincydentne z odpowiednimi koncepcjami rozwiązań gry w postaci funkcji partycji,

- wykorzystanie koncepcji rozwiązań, wyznaczonych dla gry w postaci funkcji charakterystycznej, w problemach wspomagania analizy decyzyjnej, analogicznie jak w Rozdziale 9 i w pracy Kruś, Bronisz (2000), ale w odniesieniu do gry w postaci funkcji partycji.

Niżej przedstawia się wstępne wyniki tych badań opublikowane także w pracy (Krus, 2009). Proponuje się sformułowanie gry kooperacyjnej w postaci funkcji partycji jako model matematyczny opisujący rozważane sytuacje decyzyjne. Proponuje się także koncepcje rozwiązań określone na podstawie wprowadzonej relacji dominacji. Właściwości tych rozwiązań pokazuje się w postaci udowodnionych twierdzeń. Właściwości te dotyczą w szczególności relacji rozwiązań rozpatrywanej gry w postaci funkcji partycji z rozwiązaniami odpowiednio skonstruowanej gry w postaci funkcji charakterystycznej. Sposób podejścia jest analogiczny jak w pracy (Thrall i Lucas, 1963). Proponowane koncepcje rozwiązań są również podobne jak pracy (Thrall i Lucas, 1963), ale zostały sformułowane przy słabszej relacji dominacji. Od czasu prac Thrall'a i Lucas'a zostało wprowadzonych kilka koncepcji rdzenia gry w postaci funkcji partycji: γ-core (Chander, Tulkens, 1997), r-core (Huang, Sjöström, 2003), recursive cores (Kóczy, 2007). W tej ostatniej pracy jest także przegląd różnych koncepcji rdzenia w tym również α-core (Auman, Peleg, 1960).

10.1 Sformułowanie gry

Niech $N = \{1, \ldots, n\}$ będzie skończonym zbiorem graczy. Koalicje są podzbiorami tego zbioru.

Dla dowolnej koalicji $C \subseteq N$ niech $P_C = \{P_1, ..., P_r\}$ będzie jej partycją, tzn.

$$\bigcup_{i=1}^{r} P_i = C, \ \forall j \ P_j \neq 0, \ \forall k \ P_j \cap P_k = \emptyset \text{ jeśli } k \neq j, \tag{10.1}$$

i niech Π_C oznacza zbiór wszystkich partycji koalicji C. Dla uproszczenia notacji, przyjmujemy że P oznacza partycję koalicji pełnej N, a Π oznacza Π_N. Niech P_I będzie partycją składającą się z indywidualnych graczy, tzn. $P_I = \{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}\}$.

Dla każdej koalicji $P_k \subseteq N$ i partycji $P \in \Pi$, takiej że $P_k \in P$, dane są funkcje opisujące koszt uzyskania dóbr wymaganych przez tę koalicję. Zakłada się, że te funkcje zależą od całkowitej ilości dóbr poszczególnych rodzajów, Funkcje to mogą zależeć od partycji pozostałych graczy. Na podstawie tych funkcji można wyznaczyć korzyści, jakie mogą odnieść gracze działając wspólnie w koalicji P_k w porównaniu z sytuacją gdyby działali indywidualnie i niezależnie.

Definicja 10.1

Gra kooperacyjna w postaci funkcji partycji jest zdefiniowana przez parę (N, F), gdzie N jest zbiorem graczy, F jest funkcją, która każdej partycji $P \in \Pi$, $P = \{P_1, P_2, ..., P_r\}$ przyporządkowuje r-wymiarowy wektor liczb rzeczywistych $F_P = (F_P(P_1), ..., F_P(P_r))$. □

$F_P(P_k)$ dla $k = 1, 2, \ldots, r$ opisuje korzyści jakie gracze mogą odnieść działając wspólnie w koalicji P_k w porówaniu z działaniami indywidualnymi. Zauważmy, że $F_P(P_k)$ zależy od partycji P, tzn. także od struktury koalicyjnej graczy pozostałych.

Dla każdej koalicji $C \subseteq N$ i każdej partycji $P_C \in \Pi_C$ formułujemy następujące funkcje:

$$v(C) = \min_{\{P \in \Pi : C \in P\}} F_P(C), \quad v(\emptyset) = 0, \tag{10.2}$$

$$u(P_C) = \min_{\{P \in \Pi : P_C \subset P\}} \sum_{T \in P_C} F_P(T), \tag{10.3}$$

$$\overline{v}(C) = \max_{\{P_C \in \Pi_C\}} u(P_C), \quad \overline{v}(\emptyset) = 0., \tag{10.4}$$

gdzie

$v(C)$ oznacza wartość wypłaty koalicji C, która jest gwarantowana niezależnie od zachowań graczy,

$u(P_C)$ oznacza gwarantowaną wypłatę graczy zorganizowanych w

postaci P_C, niezależnie od zachowań graczy pozostałych,
$\overline{v}(C)$ oznacza maksymalną wypłatę gwarantowaną graczom koalicji C niezależnie od zachowań pozostałych graczy.

Przykład 1.
W celu zilustrowania tych funkcji rozpatrzmy następującą grę czterech graczy. Przyjmujemy, że funkcje $F_P(P_k)$ mają postać: dla każdego różnego $i, j, k, m \in N$

(i) $F_P(\{i\}) = a$, dla dowolnej partycji P, takiej że $\{i\} \in P$
(ii)$F_P(\{i,j\}) = b$, dla $P = \{\{i,j\}, \{k\}, \{m\}\}$,
(iii)$F_P(\{i,j\}) = c$, dla $P = \{\{i,j\}, \{k,m\}\}$,
(iv)$F_P(\{i,j,k\}) = d$ dla $P = \{\{i,j,k\}, \{m\}\}$,
(v)$F_P(N) = e$, for $P = \{N\}$.

W tym przypadku, dla dowolnej niepustej koalicji $C \subseteq N$, funkcja $v(C)$ przyjmie wartości:

$$v(\{i\}) = a,$$
$$v(\{i,j\}) = min(b,c),$$
$$v(\{i,j,k\}) = d,$$
$$v(N) = e$$

z kolei wartości funkcji $\overline{v}(C)$ będą następujące:

$$\overline{v}(\{i\}) = a,$$
$$\overline{v}(\{i,j\}) = max(min(b,c), 2a),$$
$$\overline{v}(\{i,j,k\}) = max(d, b+a, 3a),$$
$$\overline{v}(N) = max(e, d+a, 2c, b+2a, 4a).$$

$\diamond$

Można pokazać, że dla dowolnej gry w postaci funkcji partycji (N, F) zachodzą następujące relacje:

$$\overline{v}(\{i\}) = v(\{i\}) \quad \text{dla każdego } i \in N, \tag{10.5}$$

$$v(C) \leq \overline{v}(C) \quad \text{dla każdego } C \subset N, \tag{10.6}$$

$$u(P_C) + u(P_T) \leq u(P_C \cup P_T) \quad \text{dla każdego } P_C \in \Pi_C,\ P_T \in \Pi_T, \text{ gdzie } C, T \subset N \text{ takie, że } C \cap T = \emptyset, \tag{10.7}$$

$$\overline{v}(C)+\overline{v}(T) \leq \overline{v}(C \cup T) \quad \text{dla każdego } C, T \subset N \text{ takiego, że } C \cap T = \emptyset. \tag{10.8}$$

10.2 Koncepcje rozwiązań

Definicja 10.2
Wektor wypłat $x = (x_1, \ldots x_n)$ jest nazywany **imputacją** jeśli spełnia warunek indywidualnej racjonalności:

$$x_i \geq \overline{v}(\{i\}) \quad \text{dla każdego } i \in N, \tag{10.9}$$

oraz warunek ralizowalności:

$$\sum_{i \in N} x_i = \sum_{C \in P} F_P(C) \quad \text{dla pewnego } P \in \Pi. \tag{10.10}$$

□

Indywidualna racjonalność oznacza, że żaden gracz w koalicji nie zgodzi się na wypłatę gorszą niż może osiągnąć działając indywidualnie. Realizowalność oznacza, że istnieje partycja, która może zrealizować tę wypłatę. Niech R oznacza zbiór wszystkich imputacji, a R^P zbiór imputacji realizowalnych przez partycję $P \in \Pi$.

Definicja 10.3
Niech C będzie niepustym podzbiorem N, a $x, y \in R$. Mówimy, że x **dominuje** y **via** C (oznaczone: $x\ Dom_C\ y$) jeśli

$$x_i > y_i \quad \text{dla każdego } i \in C, \tag{10.11}$$

i istnieje $P_C \in \Pi_C$ takie, że

$$\sum_{i \in C} x_i \leq u(P_C), \tag{10.12}$$

$$\begin{array}{l} \sum_{i \in N} x_i = \sum_{T \in P} F_P(T) \\ \text{dla pewnej partycji } P \in \Pi \text{ takiej, że } P_C \subset P. \end{array} \tag{10.13}$$

□

Pierwszy warunek w tej definicji oznacza, że każdy gracz C preferuje wypłatę x w porównaniu z wypłatą y,
drugi - że gracze w C mogą uformować taką partycję $P_C \in \Pi_C$, która pozwoli zrealizować wypłatę x_i, dla $i \in C$,
trzeci - że wypłata x może być realizowana przez pewną partycję P.

Powiemy, że x **dominuje** y (oznaczając $x\, Dom\, y$) jeśli $x\, Dom_C\, y$ dla pewnego zbioru $C \subset N$. Relacja Dom nie jest przechodnia ani antysymetryczna.

Niech X będzie podzbiorem R. Wtedy

$$Dom_C\, X = \{y \in R : \ x\, Dom_C\, y \text{ dla pewnego } x \in X\},$$
$$Dom\, X = \{y \in R : \ x\, Dom\, y \quad \text{dla pewnego } x \in X\}.$$

Definicja 10.4
Zbiór imputacji K jest **zbiorem stabilnym** (ang. stable set) jeśli

$$K \cap Dom\, K = \emptyset, \tag{10.14}$$

$$K \cup Dom\, K = R. \tag{10.15}$$

□

Uwagi dotyczące definicji zbioru stabilnego

Pierwszy warunek, zwany warunkiem wewnętrznej stabilności, oznacza, że jeśli imputacje x i y należą do K, wtedy żadna z nich nie dominuje drugiej,
drugi - warunek zewnętrznej stabilności, stwierdza, że jeśli imputacja z nie należy do K wtedy istnieje imputacja x w K, która dominuje z.

Zbiór stabilny jest zdefiniowany na podstawie idei, że zamiast jednej imputacji satysfakcjonującej każdą koalicję, istnieje zbiór imputacji takich, że jeśli weźmiemy dla pewnej koalicji dowolną imputację spoza tego zbioru, to w tym zbiorze istnieje imputacja korzystniejsza dla tej koalicji, tak że koalicja ta nie byłaby zainteresowana pozyskaniem imputacji z zewnątrz zbioru. Nie każdy gracz byłby jednak zadowolony z tej nowej imputacji wewnętrznej i pewien podzbiór graczy mógłby chcieć przeforsować zmianę na inną imputację spoza tego zbioru. Ta nowa imputacja jest jednak znowu zdominowana przez jakąś imputację ze zbioru. W rezultacie proces przetargowy ogranicza się do rozpatrywanego zbioru imputacji. Zatem, cały ten zbiór może być rozpatrywany jako rozwiązanie. Wszystkie imputacje ze zbioru stabilnego są równie ważne. Żadna z nich nie dominuje innej w tym zbiorze.

Definicja 10.5
Zbiór imputacji $Core$ jest **rdzeniem** (ang. core) jeśli

$$Core = R \setminus Dom\ R. \tag{10.16}$$

□

Rdzeń jest zbiorem niezdominowanych imputacji w R, tzn. dla dowolnej partycji P nie istnieje koalicja $C \in P$, która daje swoim członkom wypłaty lepsze niż w rdzeniu. Oczywiście, rdzeń jest zawarty w każdym zbiorze stabilnym.

Definicje zbioru stabilnego i rdzenia są podane w podobny sposób jak w pracach (Thrall i Lucas 1963), (Lucas 1965), ale przy słabszej relacji dominacji. Thrall i Lucas zakładali, że dana koalicja $C \in P$ nie może być podzielona. W proponowanym tutaj podejściu, przyjmuje się, że jeśli podział koalicji C daje lepsze rezultaty dla tej koalicji, to można ją podzielić.

10.3 Właściwości rozwiązań

Dla każdej partycji $P \in \Pi$ w grze (N, F) niech

$$\|P\| = \sum_{C \in P} F_P(C). \tag{10.17}$$

Definicja 10.6

Dowolna imputacja x jest **grupowo racjonalna** jeśli

$$\sum_{i \in N} x_i = \max_{\{P \in \Pi\}} \|P\|. \tag{10.18}$$

□

Niech $R^{\max}$ oznacza zbiór wszystkich imputacji grupowo racjonalnych w grze (N, F).

Jeśli gracze wybiorą imputację $x \in R^{\max}$ jako wypłatę gry, to znaczy, że podzielili maksymalny efekt tej gry. Można pokazać, że imputacje należące do koncepcji rozwiązań podanych wyżej spełniają tę własność.

Twierdzenie 10.1

Niech Core oznacza rdzeń gry (N, F). Rdzeń Core jest podzbiorem rdzenia zaproponowanego w pracy (Thrall i Lucas 1963).

Każda imputacja $x \in Core$ jest grupowo racjonalna. ■

Dowód

Niech $x \in Core$ i $x \notin R^{\max}$. Wtedy $\sum_{i \in N} x_i = \max_{\{P \in \Pi\}} \|P\| - M$, gdzie $M > 0$. Jeśli $y \in R^{\max}$ jest określone przez $y_i = x_i + M/n$ dla każdego $i \in N$ to $y\, Dom_N\, x$. Sprzeczność.

Jeśli $x\, dom_C\, y$ dla pewnego $C \subset N$ zgodnie z definicją tej dominacji podanej przez Thrall'a i Lucas'a (1963), wtedy $x\, Dom_C\, y$. Zatem $Core = R \setminus Dom\, R \subset R \setminus dom\, R$. ◊

Zgodnie z twierdzeniem, podany tutaj rdzeń jest podzbiorem rdzenia zaproponowanego w pracy (Thrall i Lucas, 1963). Może się zdarzyć, że rdzeń *Core* jest pusty, chociaż rdzeń proponowany w pracy (Thrall and Lucas 1963) jest niepusty.

Zgodnie z definicją funkcji $\overline{v}$ (równanie 10.4) tzn. z warunku $\overline{v}(\emptyset) = 0$ i z warunku superaddytywności (10.8) wynika, że para $(N, \overline{v})$ jest dobrze określoną grą kooperacyjną w postaci funkcji charakterystycznej z wypłatami ubocznymi.

Twierdzenie drugie pokazuje relacje między rdzeniami gier w formie funkcji partycji i w formie funkcji charakterystycznej.

Twierdzenie 10.2

Rdzeń gry (N, F) jest koincydentny z rdzeniem gry kooperacyjnej $(N, \overline{v})$ w postaci funkcji charakterystycznej, tzn. spełnia warunki:

$$\sum_{i \in C} x_i \geq \overline{v}(C) \quad \textit{for each } C \subset N, \tag{10.19}$$

$$\sum_{i \in N} x_i = \overline{v}(N). \tag{10.20}$$

■

Dowód

Niech CR oznacza rdzeń gry $(N, \overline{v})$. Niech $x \in Core$ i $x \notin CR$. Z (10.5) wynika, że $x_i = \overline{v}(\{i\})$, a z twierdzenia 10.1 mamy, że $\sum_{i \in N} x_i = \overline{v}(N)$, zatem x jest imputacją w grze $(N, \overline{v})$. Ponieważ

$x \notin CR$, to istnieje imputacja y i koalicja C w grze $(N, \overline{v})$, taka że $y_i > x_i$ dla każdego $i \in C$ i $\sum_{i \in C} y_i \leq \overline{v}(C)$. Niech P_C będzie partycją zbioru C, taką że $\overline{v}(C) = u(P_C)$. Rozpatrzmy partycję zbioru N, taką że $P = P_C \cup \{\{i_1\}, \{i_2\}, \dots \{i_{n-s}\}\}$, gdzie s oznacza liczbę graczy w C, $i_j \in N \setminus C$, $j = 1, 2, \dots, n-s$
i imputację z w grze (N, F) określoną przez

$$z_i = \begin{cases} y_i & \text{for each } i \in C, \\ F_P(\{i\}) + M/(n-s) & \text{dla każdego } i \in N \setminus C, \end{cases}$$

gdzie $M = \sum_{T \in P_C} F_P(T) - \sum_{i \in C} y_i \geq 0$.
Ponieważ $z \, Dom_C \, x$, to $x \notin Core$. Sprzeczność.
Niech $x \in CR$ i $x \notin Core$. x jest imputacją w grze (N, F). Ponieważ $x \notin Core$, to istnieje koalicja $C \subset N$, partycja $P_C \in \Pi_C$ i imputacja y w grze (N, F), taka że $y_i > x_i$ dla każdego $i \in C$, $\sum_{i \in C} y_i \leq u(P_C)$ i $\sum_{i \in N} y_i = \sum_{T \in P} F_P(T)$ dla pewnej partycji $P \in \Pi$, $P_C \subset P$.
Rozważmy imputację z w grze $\overline{v}$ określoną przez

$$z_i = \begin{cases} y_i & \text{dla każdego } i \in C, \\ y_i + M/(n-s) & \text{dla każdego } i \in N \setminus C \end{cases}$$

gdzie $M = \overline{v}(N) - \sum_{T \in P} F_P(T) \geq 0$.
Wynika z tego, że z dominuje x via C w grze $(N, \overline{v})$, zatem $x \notin CR$.
Sprzeczność. Co dowodzi twierdzenia. ◊

Następujące twierdzenia pokazują, że zbiory stabilne są określone w racjonalny sposób.

Twierdzenie 10.3

Jeśli K jest dowolnym zbiorem stabilnym gry (N, F), to każda imputacja $x \in K$ jest grupowo racjonalna. ■

Dowód

Niech $x \in R \setminus R^{\max}$ i y będą imputacjami określonymi tak, jak w dowodzie twierdzenia 10.1. Mamy więc, że $y \, Dom_N \, x$. Jeśli $y \in K$ to $x \in Dom\, K$. Jeśli $y \notin K$ to $y \in Dom_C\, K$ dla pewnej koalicji $C \subset N$, istnieje zatem imputacja $z \in K$ taka, że $z\, Dom_C\, y$. Można jednak łatwo sprawdzić, że jeśli $z\, Dom_C\, y$, $y\, Dom_C\, y$ i $y\, Dom_N\, x$ to $z\, Dom_C\, x$. Zatem $x \in Dom\, K$. Co dowodzi twierdzenia. $\diamond$

Z twierdzeń 10.1 i 10.3 wynika, że rozpatrując rdzeń i zbiory stabilne, można się ograniczyć, bez straty ogólności, do rozważań imputacji grupowo racjonalnych. Możliwe jest, że dla gry (N, F) nie ma zbioru stabilnego, jest jeden, lub jest wiele. Można pokazać następujące twierdzenie:

Twierdzenie 10.4

Dla n-osobowej gry z partycją $\{N\}$, takiej że $\|\{N\}\| > \|P\|$ dla każdego $P \in \Pi$, $P \neq \{N\}$, istnieje unikalny zbiór stabilny

$$K = R^{\{N\}} = R^{\max}.$$

■

Dowód

Niech $x, y \in R^{\max}$ i niech $x\, Dom\, y$. Dominacja może być realizowana tylko przez partycję $\{N\}$, więc $x_i > y_i$ dla każdego $i \in N$. Wynika z tego, że $\sum_{i \in N} x_i > \sum_{i \in N} y_i$. Sprzeczność.
Niech $x \in R \setminus R^{\max}$ i niech y będzie imputacją zdefiniowaną tak, jak w dowodzie twierdzenia 10.1. Mamy $y\, Dom_N\, x$, więc $x \in Dom\, R^{\max}$. Oznacza to, że $R^{\max}$ jest rozwiązaniem. Rozwiązanie to jest jednoznaczne, co wynika z twierdzenia 10.3. $\diamond$

Nie ma problemu ze znalezieniem rozwiązania dla n-osobowych gier, w których wypłata dla partycji $\{N\}$ jest większa od sumy wypłat każdej innej partycji. Takie jednoznaczne rozwiązanie jest tożsame z rozwiązaniem w pracy (Thrall and Lucas 1963).

Następujące twierdzenie pokazuje relacje między zbiorami stabilnymi gier w postaci funkcji partycji i w postaci funkcji charakterystycznej.

Twierdzenie 10.5
Jeśli $\hat{P} = \{\hat{P}_1, \ldots, \hat{P}_r\}$ jest partycją zbioru N taką, że $\|\hat{P}\| > \|P\|$ dla każdego $P \in \Pi$, $P \neq \hat{P}$ to gra (N, F) ma takie same zbiory stabilne, jak gra w postaci funkcji charakterystycznej $(N, \hat{v})$ określona przez

$$\begin{aligned} &\hat{v}(C) = \overline{v}(T) + \textstyle\sum_{i \in C \setminus T} \overline{v}(\{i\}) \\ &\textit{dla każdego } C \subset N, \quad \hat{v}(\emptyset) = 0, \end{aligned} \tag{10.21}$$

gdzie: $T \subset C$, $\quad T = \bigcup_{i=1}^{r} \{\hat{P}_i : \hat{P}_i \subset C\}$.

■

Dowód
Na podstawie warunku addytywności (10.8) łatwo sprawdzić, że gra $(N, \hat{v})$ jest dobrze określona. x jest imputacją w grze $(N, \hat{v})$ jeśli $x_i \geq \hat{v}(\{i\}) = v(\{i\})$ i $\sum_{i \in N} x_i = \hat{v}(N) = \|\hat{P}\|$. W takim przypadku zbiór imputacji w grze $(N, \hat{v})$ jest równy zbiorowi $R^{\max}$. Ponadto z twierdzenia 10.3 wynika, że imputacje, które nie należą do $R^{\max}$, nie mają znaczenia w grze (N, F), możemy więc rozpatrywać tylko zbiór $R^{\max}$.
Niech $x, y \in R^{\max}$ i niech y dominuje x w grze $(N, \hat{v})$. Istnieje zatem koalicja $C \subset N$, taka że $y_i > x_i$ dla każdego $i \in C$ i $\sum_{i \in C} y_i \leq \hat{v}(C)$. Wynika z tego, że $y_i > x_i$ dla każdego $i \in T \subset C$ i

$\sum_{i\in T} y_i \leq \overline{v}(T) + \sum_{i\in C\setminus T}(v(\{i\}) - y_i) \leq \overline{v}(T)$, a zatem $y\,Dom\,x$. Niech $x, y \in R^{\max}$ i niech $y\,Dom\,x$. Wtedy istnieje koalicja $C = T$, taka że $y_i > x_i$ dla każdego $i \in C$ i $\sum_{i\in C} y_i \leq \hat{v}(C)$, a zatem y dominuje x w grze $(N, \hat{v})$. Co dowodzi twierdzenia. $\diamond$

10.4 Podsumowanie

W niniejszym rozdziale przedstawiono propozycję gry kooperacyjnej w postaci funkcji partycji, umożliwiającą analizę problemu alokacji kosztów. Gra ta opisuje rzeczywiste sytuacje, w których wypłata każdej z koalicji zależy nie tylko od graczy, którzy ją tworzą , ale także od struktury koalicji tworzonych przez graczy pozostałych. Przedstawia się pewne rozwinięcie teorii takich gier. Formułując odpowiednią relację dominacji, określa się koncepcje rozwiązań, takie jak zbiory stabilne i rdzeń gry. Dokonano analizy właściwości tych koncepcji rozwiązań. Koncepcje rozwiązań są podobne do koncepcji zaproponowanych w pracy (Thrall i Lucas, 1963), ale sformułowane dla słabszej relacji dominacji, która wydaje się jest bardziej adekwatna do sytuacji rzeczywistych. Rozwijane podejście jest podobne do podejścia w pracach (Kóczy, 2007, 2008). Wymagane są jednak i planowane dalsze prace obejmujące analizę relacji miedzy różnymi koncepcjami rozwiązań, warunkami ich istnienia i inne.

Pokazano, że rdzeń gry w postaci funkcji partycji jest koincydentny z rdzeniem odpowiednio zdefiniowanej gry w postaci funkcji charakterystycznej. Ten wynik teoretyczny jest ważny przy konstrukcji systemów wspomagania decyzji. Ogólna idea wspomagania decyzji i konstrukcji systemów komputerowych w sytuacjach kooperacyjnych jest rozważana w poprzednich rozdziałach, a wcześniej między innymi w pracach (Wierzbicki, Kruś, Makowski, 1993), (Kruś, 1996, 2004, 2008). Na podstawie wyników omówionych w tym rozdziale można sformułować odpowiednią grę w postaci funkcji charakterystycznej, a następnie wyznaczyć rdzeń gry. Rdzeń ten może być przedstawiony graczom, jako zbiór określający ramy ich negocjacji. Można wówczas zastosować podejście zaproponowane w pracy (Kruś, Bronisz, 2000) i prezentowane w rozdziale 9. Można wyznaczać różne rodzaje nukleolusa rozwiązując zestaw problemów programowania liniowego, a następnie przedstawiać je graczom jako propozycje mediacyjne.

W zagadnieniach wspomagania decyzji można wykorzystywać różne koncepcje rozwiązań, zwracając przy tym uwagę na ich specyficzne właściwości. W dalszych pracach interesujące mogą być idee sekwencyjnego tworzenia koalicji i wykorzystanie koncepcji tzw. rdzeni rekursywnych (ang. recursive cores). Interesujące są zwłaszcza koncepcje rdzeni pesymistycznych i optymistycznych zaproponowane w pracach (Kóczy, 2007, 2008).

Bibliografia

Alacmo J., Shaw R., Hordijk L. (1990). The RAINS Model of Acidification, Science and Strategies in Europe. Kluwer Ac. Publ., Dordrecht.

Ameliańczyk, A. (1979). Multicriterial optimization of international economic cooperation control. Prace Naukowe ICT Polit. Wrocł. Nr 39,

Aumann, R. J. (1961), The Core of Cooperative Games without Side Payments. Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 98,, pp. 539-552.

Aumann, R. J. (1967) A Survey of Games without Sidepayments. Essays in Mathematical Economics, M. Shubik, ed., Princeton University Press, pp.3-27.

Aumann, R.J., Maschler, M. (1964) , The Bargaining Set for Cooperative Games, in Advances in Game Theory (M. Dreshler, L. S. Shapley and A. W. Tucker, eds.), Annals of Mathematics Studies, No. 52, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Auman, R.J., Peleg, B. (1960), Von Neumann-Morgenstern solutions to cooperative games without side payments, *Bull. of the American Mathematical Society*. 66, 173-179.

Axelrod R., (1985), The Evolution of Cooperation, Basic Books, New York.

Barclay S., Peterson C (1976), Multi-attribute Models for Negotiations. Technical Report 76-1, Decisions and Designs, Inc. McLean, VA.

Billera L.,J., Heath D. C. (1982), Allocation of Shared Costs: A Set of Axioms Yielding a Unique Procedure, *Mathematics of Operations Research*, Vol. 7, No. 1, pp. 32-39.

Bergstresser, K., P.L. Yu (1977), Domination Structures and Multicriteria Problems in N-person Games. Theory and Decision, Vol. 8, pp. 5-48.

Bergman L., H. Cesar, G. Klaassen (1990) A Scheme for Sharing the Costs of Reducing Sulfur Emissions in Europe. WP-90-005.IIASA, Laxenburg, Austria

Blass A., Raiffa H. (1986), Copmuter Program for Investigating the Efficient Solutions of Two-party, multiple-issue Negotiations, Unpublished Manuscript, Harvard University.

Bronisz P., L. Krus, (1986a), "A New Solution of Two-Person Bargaining Games", ZTSW-17-1/86, Report of Systems Research Institute, Polish Academy of Sciences, Warsaw.

Bronisz P., L. Krus, (1986b), "A Dynamic Solution of Two-Person Bargaining Games", ZTSW-17-3/86, Report of Systems Research Institute, Polish Academy of Sciences.

Bronisz P., L. Krus, (1986c), "Interactive System Aiding Decision Making in Multiobjective Cooperative Games. Mathematical Background", Syst. Anal. Model. Simul., vol.3, pp. 387-394.

Bronisz P., L. Krus, (1986d), "Supporting of Negotiation in Bargaining Problem with Multiple Payoffs", in: Proceedings of the 1986 IFAC Workshop on Modeling, Decision and Game with Application to Social Phenomena, Vol II, Beijing, China, pp. 496-502.

Bronisz P., L. Krus, (1987), "A Mathematical Basis for System Supporting Multicriteria Bargaining", Archiwum Automatyki i Telemechaniki, vol. 4, Warsaw, Poland, pp. 331-337.

Bronisz P., (1988), Własności rozwiązań kooperacyjnych w problemie przetargowym. Rozprawa doktorska, IBS PAN, Warszawa.

Bronisz P., L. Krus, (1987), "The Raiffa Solution for Multicriterial Bargaining Problems", ZTSW-17-1/87, Opracowanie IBS PAN, Warszawa.

Bronisz P., L. Krus, B. Lopuch, (1987), "An Experimental System Supporting Multiobjective Bargaining Problem. A Methodological Guide", W: Theory, Software and Testing Examples for Decision Support Systems, ed. A.Lewandowski, A.P.Wierzbicki, IIASA, Laxenburg.

Bronisz P., L. Krus, (1988), "Application of Generalized Raiffa Solution to Multicriteria Bargaining Support", in: System Modeling and Optimization, M. Iri, K. Yajima (eds), Lecture Notes in Control and Information Sciences 113, Springer- Verlag, pp. 207-211.

Bronisz P., L. Krus, (1988), "Interactive Procedures for Multicriteria Decision Support in Bargaining Problem", in: System Analysis and Simulation, A. Sydow, S.G. Tzafestas, R. Vichnevetsky (eds), Band 46, Akademie-Verlag, Berlin, pp. 59-62.

Bronisz P., L. Krus, A. Wierzbicki, (1989), "Towards Interactive Solutions in a Bargaining Problem", W: Aspiration Based Decision Support Systems, ed.: A.Lewandowski, A.P.Wierzbicki, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 331, Springer Verlag, Berlin, str. 251-268.

Bronisz P., H. Bury, L. Kruś (1989), Interaktywny system wspomagający analizę strategii rozwojowych. W: Materiały 1-szej Krajowej Konferencji BOiS, IBS PAN, Warszawa.

Bronisz P., L. Krus, (1989), "Dynamic Solution of Two-Person Bargaining Games", in: Processes of International Negotiations, F. Mautner-Markhof (ed.), Westview Press, Boulder, pp. 449-456.

Bronisz P., L. Krus, (1989), "An Experimental System Supporting Negotiation on Joint Development Program", in: Processes of International Negotiations, F. Mautner-Markhof (ed), Westview Press, Boulder, pp. 519-529.

Bui T. (1987), Co-oP - A Group Decision Support System for Cooperative Multiple Criteria Group Decision Making. Lecture Notes in Computer Science 290, Springer Verlag, Berlin.

Bury H., L. Kruś, R. Kulikowski, (1988), Supporting Planning Decisions by Experiments with Complex Development Model. W: Methodology and Applications of Decision Support Systems, Third Polish Finnish Conference, Sobieszewo 1988. IBS PAN. Warszawa.

Chander, P., Tulkens, H. (1997), The core and economy with multilateral environmental externalities, *International Journal of Game Theory* 26(3), 379-401.

Chankong V., Y. Y. Haimes (1983) Multiobjective Decision Making. North Holland.

Cichoń T., (1989), Narzędzia softwerowe do symulacji i wspomagania decyzji w przypadku wielokryterialnej gry dynamicznej. Praca magisterska, Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki, Instytut Automatyki.

Cruijssen F., Cools M. and Dullaert W. (2007), Horizontal cooperation in logistics: Opportunities and impedimenta. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 43(2), 129-142.

Davis M., Maschler M. (1965), The Kernel of a Cooperative Game, *Naval Research Logistic Quarterly*, Vol. 12.

Dreyfus S., (1985), "Beyond Rationality", W: M.Grauer, M.Thompson, A.P.Wierzbicki (eds): Plural Rationality and Interactive Decision Processes, Proceedings Sopron 1984, Springer-Verlag, Heidelberg.

Fandel G., (1979), Optimale Entscheidungen in Organizationen, Springer-Verlag, Heidelberg.

Fandel G., A.P. Wierzbicki, (1985), "A Procedural Selection of Equilibria for Supergames", (private unpublished communication).

Fernández F.R., Hinojosa M.A., Puerto J. (2004), Multi-criteria minimum cost spanning tree games. *European Journal of Operational Research*, 158 (2), 399-408.

Fisher R., Ury W., (1981), Getting to Yes, Hougton Mifflin, Boston.

Galas Z., Nykowski I., Żółkiewski Z, (1987), Programowanie wielokryterialne. Państwowe Wydawnictwo Naukowe. Warszawa.

Gately D. (1974) Sharing the Gains from Regional Cooperation: A Geme Theoretic Application to Planning Investment in Electric Power, *International Economic Review*, Vol. 15.

Gembicki, F., Y. Y. Haimes (1975), Approach to Performance and Multiojective Sensitive Optimization: the Goal Attainement Method. IEEE Automatic Control AC-20, No. 6.

Gillies D. B. (1959), Solution to General Nonzero Sum Games, *Annals of Mathematics Studies*, Vol. 40.

Goeltner C. (1987), The Copmuter as a Third Party: Decision Support System for Two Party Single-issue and Two Party multiple-issue Negotiations. Working Paper 1958-87, Alfred P. Sloan School of Management, MIT, Cambridge, MA.

Grauer M., M. Thompson, A.P. Wierzbicki (eds), (1985), Plural Rationality and Interactive Decision Processses, Proceedings Sopron 1984, Springer-Verlag, Heidelberg.

Harsanyi J.C., R. Selten, (1972), "A Generalized Nash Solution for Two-Person Bargaining Games with Incomplete Information", Management Sciences, Vol. 18, str. 80-106.

Huang, C.Y., Sjöström, T. (2003), Consistent solutions for cooperative games with externalities, *Games and Economic Behavior* 43, 196-213.

Hwang C., Masud A. S. M., Paidy S. R., Yoon K. (1979), Multiple Objective Decision Making: Methods and Applications, A stete-of-the-art survey. Springer Verlag.

Imai H., (1983), "Individual Monotonicity and Lexicographical Maxmin Solution", Econometrica, Vol.51, str. 389-401.

James L.D., R.R. Lee, (1971) Economics of Water Resources Planning. New York, McGraw-Hill.

Jarke M., Jelassi M. T., Shakun M. F. (1987), Mediator: Towards a negotiation support system. European Journal of Operation Research 31, 314-334, North-Holland.

Kalai, E. (1975), Excess Functions for Cooperative Games without Sidepayments. SIAM J. Appl. Math. Vol.29, No. 1, pp.60-71.

Kalai E., M. Smorodinsky, (1975), "Other Solutions to Nash's Bargaining Problem", Econometrica, Vol. 43, str. 513-518.

Kaniewski M., (1990), Wspomaganie decyzji w wielokryterialnych grach dynamicznych na przykładzie modelu gry połowowej. Praca magisterska, Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki, Instytut Automatyki.

Kersten G., E. (1985), NEGO - Group Decision Support System. Information and Management. Vol. 8., pp. 237-386.

Kersten G. E. (1988), A Procedure for Negotiating Efficient and Non-Efficient Compromises. Decision Support Systems 4, 167-177, North-Holland.

Kersten G., E., Michalowsky W., Matwin S., Szpakowicz S. (1988), Rule-based Modelling of Negotiation Strategies. Theory and Decision, Vol. 25., pp.225-257.

Kóczy L.Á. (2007), A Recursive Core for Partition Function Form Games. *Theory and Decision* 63, 41-51.

Kóczy L.Á. (2008), Sequential Coalition Formation and the Core in the Presence of Externalities. *Games and Economic Behavior*

Kopelowitz A. (1967), Computation of the Kernels of Simple Games and the Nucleolus of N-Person Games. RM No. 31, Research Program in Game Theory and Math. Economics, Department of Mathematics, Hebrew University of Jerusalem.

Korhonen P., Moskowitz H., Wallenius J., Zionts S. (1986), An Interactive Approach to Multiple Criteria Optimization with Multiple Decision-Makers. Naval Research Logistics Quarterly, vol. 33, 589-602, John Wiley & Sons.

Korhonen P., J. Wallenius, (1989), Supporting Individuals in Group Decision-making. Helsinki School Of Economics, Finland.

Krajewska M.A., Kopfer H. (2006) Collaborating freight forwarding enterprises. *OR Spectrum*, 28 (3), 301-317.

Kreglewski T.,J. Paczynski, J. Granat, A. P. Wierzbicki (1988). IAC-DIDAS-N A Dynamic Interactive Decision Analysis and Support System for Multicriteria Analysis of Nonlinear Models with Nonlinear MOdel Generator supporting model analysis, IIASA working paper, IIASA, Laxenburg , Austria.

Kreglewski T., (1984), private communication.

Krus L., B. Lopuch, P. Bronisz, (1989), "Application of interactive solutions for decision support in bargaining problem, an illustrative example", in: Methodology and Applications of decision support systems, R. Kulikowski (ed.), Proceeding of the 3-rd Polish-Finnish Symposium, Gdansk, 1988, pp. 121-140.

Krus L.,P. Bronisz, B. Lopuch, (1990) "MCBARG - Enhanced, A System Supporting Multicriteria Bargaining", IIASA Collaborative Paper, CP-90-006, IIASA, Laxenburg, Austria.

Kruś, L., B. Lopuch (1989). Wielokryterialny problem targu w przypadku modeli liniowych i jego rozwiązanie przy użyciu systemu MCBARG. Przykład modeli gospodarstwa rolnego. Opracowanie ZTSW 16/17/89, IBS PAN, Warszawa.

Kruś L., P. Bronisz (1990). Decision Support on Joint Development Program, Opracowanie, ZTSW, IBS PAN, Warszawa.

Kruś L., (1991), "Some Models and Procedures for Decision Support in Bargaining", W: Multiple Criteria Decision Support. Korhonen, Lewandowski, Wallenius (ed.), Lecture notes in Economics and Math. Systems, Vol. 356, Springer Verlag, Berlin str. 350-359.

Krus, L. (1992a), "Interactive Approach to multicriteria bargaining on an example of acid rains problem", in: Systems and Control (Han-Fu Chen Ed.) International Acad. Publ., Beijing, China.

Krus, L. (1992b), "Computer Based Mediation Support", in: Preprints of the IFAC Workshop on "Support Systems for Decision and Negotiation Processes", June, 24-26, 1992, Warsaw, Poland.

Kruś L., P. Bronisz, (1993) "Some New Results in Interactive Approach to Multicriteria Bargaining". W: User Oriented Methodology and Techniques af Decision Analysis, Wierzbicki i inni (red.), Lecture Notes in Econ. and Math. Systems, Springer Verlag, Berlin, str 21-34.

Krus L. P. Bronisz (1994) "On n-person Noncooperative Multicriteria Games Described in Strategic Form". Annals of Operation Research. Vol. 51 (1994), pp. 83-97. J. C. Balzer AG, Sci. Publ.

Krus L., Z. Nahorski, J. W. Owsinski (eds.) (1994). Decision Support in Negotiations and Policy Determination. Special issue of Control and Cybernetics. Vol. 22, No.4, 1993 (appeared in 1994).

Krus L. (1994). Wspomaganie negocjacji w wielokryterialnym zagadnieniu targu. Biulatyn Instytutu Bdań Systemowych PAN. Nr 2/ czerwiec 1994, str. 14-26.

Krus L. P. Bronisz (1995) "Solution Concepts in Multicriteria Cooperative Games without Side Payments" in: System Modelling and Optimization, J. Dolezal (ed.), Chapman and Hall Publ. (in print)

Krus L., Bronisz P. (1996) Cooperative Game Model for a Cost Allocation Problem. In: MMAR96, Proceedings.

Kruś L., (1996), Multicriteria Decision Support in Negotiations, Control and Cybernetics, Vol. 25 , No. 6, 1245-1260.

Kruś L., Bronisz, P., (2000), Cooperative game solution concepts to a cost allocation problem, European Journal of Operational Research. Vol. 122 , No. 2, 258-271.

Kruś L. (2002), A System Supporting Financial Analysis of an Innovation Project in the Case of Two Negotiating Parties, Bull. of Polish Academy of Sci., Ser. Techn., Vol. 50, No. 1, 93-108.

Kruś L., (2002), ulticriteria Decision Support in Bargaining, a Problem of Players Manipulations, in: T. Trzaskalik, J. Michnik, (eds), Multiple Objective and Goal Programming, Physica Verlag, Springer, Berlin.

Kruś L., (2004), A Computer Based System Supporting Analysis of Cooperative Strategies, in: L. Rutkowski, J. Siekmann, R. Tadeusiewicz, L. Zadeh, (eds), Artificial Intelligence and Soft Computing - ICAISC 2004, Lecture Notes in Computer Science, Springer, Berlin.

Kruś L. (2004), A multicriteria approach to cooperation in the case of innovative activity, Control and Cybernetics, Vol. 33 , No.3.

Kruś L. (2008), On Some Procedures Supporting Multicriteria Cooperative Decisions. *Foundations of Computing and Decision Science*, 33 (3), 257-270.

Kruś L. (2009), Cost Allocation in Partition Function Form Games. *Operation Research and Decisions*, No. 2, 39-49.

Kulikowski R. (1988), Modelling and Optimization of Complex Development Strategies. W: Development in Managerial Support, ed.: C. Carlson, Abo Academy Press, Finland.

Legros P.(1986), Allocating Joint Costs by Means of Nucleolus, *Int. Journal of Game Theory*, Vol. 15, Issue 2, 109-119.

Lewandowski A., T. Kreglewski, T. Rogowski, A. P. Wierzbicki (1989), Decision Support Systems of DIDAS Family. In: Aspiration Based Decision Support Systems, (A. Lewandowski, A.P. Wierzbicki eds.) Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 331, Springer-Verlag, pp. 21-47.

Littlechild S.C. (1974), A Simple Expression for the Nucleolus in a Special Case, *Int. Journal of Game Theory*, Vol. 3, Issue 1, pp. 21-29.

Littlechild, S.C., Thompson, G.F. (1977), Aircraft landing fees: a game theory approach. *The Bell Journal of Economics*. 8, 186-204.

Littlechild S.C., Vaidya K.G. (1976), The Propensity to Disrupt and the Disruption Nucleolus of a Characteristic Function Game, *Int. Journal of Game Theory*, Vol. 5, pp. 151-161.

Lucas, W.F., (1965), Solution for Four-Person Games in Partition Function Form, *SIAM Review*. 13, 118-128.

Lucas, W.F. (1968), A game with no solutions. *Bull. of the American Mathematical Society* 74, 237-239.

Lucas, W.F. (1969), The proof that a game may note have a solution. *Transactions of the American Mathematical Society*. 137, 219-229.

Luce R.D., H. Raiffa, (1957), "Games and Decisions: Introduction and Critical Survey", New York: Wiley.

Maschler M, Peleg B, Shapley L.S. (1979), Geometric Properties of the Kernel, Nucleolus and Related Solution Concepts, *Mathematics of Operations Research*, Vol. 4, pp. 303-338.

Matsubayashi N., Umezawa M., Masuda Y. and Nishino H. (2005), A cost allocation problem arising in hub-spoke network systems. *European Journal of Operational Research*, 160 (3), 821-838.

Nash J.F., (1950), "The Bargaining Problem", Econometrica, Vol. 18, str. 155-162.

Nash J.F., (1953), "Two-Person Cooperative Games", Econometrica, Vol. 21, str. 129-140.

von Neumann, J., O. Morgenstern (1953), Theory of Games and Economic Behaviour, Princeton, New Jersey, Princeton Univ. Press.

Nunamaker J., F., Applegate L., M., Konsynsky B., R. (1988), Computer-aided deliberation: Model Management and Group Decision Support. Operations Research, Vol. 36., pp. 826-848.

Nyhart J., Samarasan D. (1989), The Elements of Negotiation Management: Using Computers to Help Resolve Conflict. Negotiation Journal, 43-62.

Ogryczak W., (2002), Multiple criteria optimization and decisions under risk, Control and Cybernetics, Vol. 31 , No. 4.

Ogryczak W., (2007), On Nucleolar Refinement of the Reference Point Method, referat na MCDM Workshop, AE Katowice, Ustroń.

Peleg, B. (1963), Solutions to Cooperative Games without Side Payments. Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 106,, pp.280-292.

Piasecki, St., J. Hołubiec, A. Ameliańczyk (1982). Międzyna- rodowa kooperacja gospodarcza, modelowanie i optymalizacja. PWN, Warszawa.

Raiffa H., (1953), "Arbitration Schemes for Generalized Two-Person Games", Annals of Mathematics Studies, No. 28 str. 361-387, Princeton.

Raiffa H. (1982), "The Art and Science of Negotiations". Harvard Univ. Press, Cambridge.

Ransmeier J. S. (1942), The Tennessee Valley Authority: A Case Study in the Economics of Multiple Purpose Stream Planning, The Vanderbild University Press, Nashvill.

Rogowski, J. Sobczyk, A. P. Wierzbicki (1988). IAC-DIDAS-L A Dynamic Interactive Decision Analysis and Support System, Linear Version. WP-88-110, IIASA, Laxenburg, Austria.

Roth A.E., (1979a), "An Impossibility Result Concerning n-Person Bargaining Games", International Journal of Game Theory, Vol. 8, str.129-132.

Roth A.E., (1979b), "Axiomatic Model of Bargaining", Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 170, Springer-Verlag, Berlin.

Roth A.E. , M.W.K. Malouf , (1979), "Game-Theoretical Models and the Role of Information in Bargaining", Psychological Review, Vol. 86, str. 1163-1170. communication). communication).

Roy B. (1990), Wielokryterialne wspomaganie decyzji. Wydawnictwa Naukowo-atechniczne. Warszawa.

Sawaragi Y., Nakayama H., Tanino T. (1985), Theory of Multiobjective Optimization. Academic Press, New York.

DeSanctis G., Gallupe R., B. (1987), A Foundation for the Study of Group Decision Support Systems. Management Science vol. 33, No. 5., 589-609.

Schmeidler D. (1969), The Nucleolus of a Characteristic Function Game, *SIAM Journal of Applied Mathematics*, Vol. 17, No. 3, pp. 1163-1169.

Seo F. (1988), Utilization of Mathematical Programming in Group Decision Making: An Application to Effective Formation of Integrated Regional Information Networks. Discussion Paper No. 254, Kyoto Institute of Economic Research, Kyoto University.

Seo F. Sakawa M. (1987) Multiple Criteria Decision Analysis in Regional Planning, D. Reidel Publishing Co.

Shakun M. (1988), Evolutionary Systems Design. HoldenDay, Oakland, CA.

Shapley L. S. (1953), A Value for n-Person Game, *Annals of Mathematics Studies*, Vol. 28,

Shapley L. S., Schubik M.(1966), Quasi-cores in Monetary Economy with Nonvonvex Preferences, *Econometrica*, Vol. 34, pp. 805-827.

Skwarczyło, M. (1988). Opis użytkowy programu SCONVEX. Opracowanie ZTSW-24-17/88, IBS PAN, Warszawa.

Stam. A., H. Cesar, M. Kuula, (1989), Transboundary Air Pollution in Europe: An Interactive Multicriteria Tradeoff Analysis, WP-89-61, IIASA, Laxenburg, Austria.

Stearns, R. (1964), On the Axioms for a Cooperative Game without Side Payments. Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 15, pp. 82-86.

Teich J. E., Wallenius H., Kuula M., Zionts S. (1995), A Decision Support Approach for Negotiation with an Application to Agricultural Income Policy Negotiations. European Journal of Operational Research, Vol. 81, pp. 76-87.

Thomson W., (1980), "Two Characterization of the Raiffa Solution", Economic Letters, Vol. 6, str. 225-231.

Thrall, R.M., Lucas W.F. (1963), n-Person Games in Partition Function Form, *Naval Research Logistics Quarterly*, 10, 281-298.

Tversky A., Kahneman O., (1981), The framing of decisions and the psychology of choice, Science, Vol. 211, 453-480.

Tversky A., (1967), Utility theory and additivity analysis of risky choices, Experimental Psychology, Vol. 75, 27-37.

Wierzbicki A.P., (1982), "A Mathematical Basis for Satisficing Decision Making", Mathematical Modelling, Vol. 3, str. 391-405.

Wierzbicki A.P., (1983),"Negotiation and Mediation in Conflicts I: The Role of Mathematical Approaches and Methods", Working Paper WP-83-106, IIASA, Laxenburg; także w: H. Chestnat i inni, (ed): Supplemental Ways to Increase International Stability, Pergamon Press, Oxford, 1983.

Wierzbicki A.P., (1985), "Negotiation and Mediation in Conflicts II: Plural Rationality and Interactive Decision Processes", W: M.Grauer, M.Thompson, A.P.Wierzbicki (ed): Plural Rationality and Interactive Decision Processes, Proceedings Sopron 1984, Springer-Verlag, Heidelberg.

Wierzbicki A.P.,(1986), "On the Completeness and Constructiveness of Parametric Characterizations to Vector Optimization Problems", OR Spectrum (1986)8:73-87, Springer Verlag.

Wierzbicki A.P., (1990), Multiple Criteria Solutions in Noncooperative Game Theory, Part III. Discussion Paper 288, Kyoto Institute of Economic Research, Kyoto University, Kyoto.

Wierzbicki A.P., (1987), "Towards Interactive Procedures in Simulation and Gaming: Implications for Multiperson Decision Support", W: Methodology and Software for Interactive Decision Support, Proceedings of International Workshop, Albena, Springer Verlag.

Wierzbicki, A. P., L. Krus, M. Makowski (1993), "The Role of Multi-Objective Optimization in Negotiation and Mediation Support" in: Theory and Decision, special issue on "International Negotiation Support Systems: Theory, Methods, and Practice" Vol. 34, No. 2.

Wierzbicki A. P., M. Makowski, J. Wessels, (2000), Model-based Decision Support Methodology with Environmental Applications, Kluwer Academic Press, Dordrecht, Boston.

Young H. P., Okada N., Hashimoto T. (1980), Cost Allocation in Water Resources Development - A Case Study of Sweden. RR 80-32, IIASA, Laxenburg, Austria.

Young H. P. (1982), Cost allocation. Prentice Hall. New York.

Indeks