262/2009

Raport Badawczy
Research Report

RB/67/2009

Wybrane metody wspomagania wielokryterialnych decyzji kooperacyjnych.
Część I

L. Kruś

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences

POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 3810100

fax: (+48) (22) 3810105

Kierownik Pracowni zgłaszający pracę:
Dr inż. Lech Kruś

Warszawa 2009

LECH KRUŚ

WYBRANE METODY WSPOMAGANIA WIELOKRYTERIALNYCH DECYZJI KOOPERACYJNYCH

Warszawa, 2009

Instytut Badań Systemowych
Polskiej Akademii Nauk

Spis treści

Spis rysunków

Przedmowa

Niniejsza praca stanowi wynik moich zainteresowań zagadnieniami modelowania złożonych systemów oraz zastosowaniem metod wielokryterialnej optymalizacji do wspomagania podejmowania decyzji, w sytuacjach decyzyjnych, w których jest kilku decydentów mających swoje odrębne, ale współzależne kryteria i zwykle przeciwstawne interesy. Powstaje problem: czy i jak można wspomagać analizę decyzyjną decydentów, a także jak doprowadzić do akceptowalnego przez nich rozwiązania.

Z zagadnieniami takimi spotkałem się pierwszy raz w czasie pracy w projekcie badawczym dotyczącym modelowania regionalnego prowadzonym wspólnie w International Institute for Applied System Analysis w Laxenburg w Austrii i Instytucie Badań Systemowych PAN w latach 1981-82 (tzw. Upper Noteć Case Study), kierowanym przez Profesora Romana Kulikowskiego. Projekt obejmował budowę modeli matematycznych pozwalających określić wymagane nakłady i korzyści z realizacji projektu. Problem decyzyjny dotyczył współpracy kilku władz regionalnych, w zaprojektowaniu i realizacji wspólnego projektu zaopatrzenia w wodę wykorzystywaną między innymi w celu rozwoju rolnictwa, na cele przemysłowe i komunalne. Istotny był udział poszczególnych władz (decydentów) w nakładach na projekt i podział korzyści wynikających z projektu, charakteryzowanych przez wektor kryteriów. Wynikła potrzeba wspomagania decyzyjnego, w szczególności wspomagania procesu negocjacji decydentów.

Badania dotyczące tych problemów prowadzono przez kolejne lata w Instytucie Badań Systemowych PAN, głównie w aspekcie tworzenia podstaw teoretycznych i opracowania metod wspomagania decyzji. W wyniku badań sformułowana została i rozwinięta teoria wielokryterialnego zagadnienia targu oraz wielokryterialnych gier kooperacyjnych w zastosowaniu do budowy systemów wspomagania negocjacji.

Dużą rolę w prowadzeniu tych badań odegrała współpraca z International Institute for Applied System Analysis (IIASA) w Laxenburg, w Austrii w ramach projektu badawczego dotyczącego metod wspomagania analizy decyzyjnej, oraz z Instytutem Automatyki Politechniki Warszawskiej i z Profesorem Andrzejem Wierzbickim, koordynatorem tego projektu.

Praca poświęcona jest podstawom teoretycznym wspomagania decyzji, ale także wykorzystaniu proponowanych metod do budowy systemów komputerowych, które mogą stanowić pomocnicze narzędzie w procesach decyzyjnych. Obejmuje zagadnienia wielokryterialnej optymalizacji w sytuacjach z wieloma decydentami, ale także rozwinięcie wybranych zagadnień z teorii gier, przy założeniu wielokryterialnych wypłat graczy. Zagadnienia teoretyczne teorii gier rozwijane są przede wszystkim jako podstawa formułowania koncepcji rozwiązań, które mogą wyznaczane w systemie wspomagania decyzji, a następnie analizowane przez graczy w procesie negocjacji i prowadzić do uzgodnienia stanowisk.

Zakłada się, że czytelnik jest zaznajomiony z podstawami wielokryterialnej optymalizacji i metod wspomagania decyzji wielokryterialnych, a także z podstawami teorii gier.

Niniejsza praca mogła być przygotowana dzięki stałemu finansowemu wsparciu Instytutu Badań Systemowych PAN, mojemu pracodawcy, a także Komitetu Badań Naukowych (Projekt badawczy Nr 8S5.05.009904 na temat: Systemy wspomagające analizę decyzyjną w negocjacjach, podstawy teoretyczne i implementacje komputerowe).

Chciałbym wyrazić moje podziękowania Profesorowi Romanowi Kulikowskiemu oraz Profesorowi Andrzejowi Wierzbickiemu za inspiracje do prowadzenia tych badań, wiele wartościowych dyskusji i zachętę do przygotowania tej pracy.

Miło jest mi również podziękować moim współpracownikom, Drowi Piotrowi Broniszowi za udział w pracach teoretycznych i w oprogramowaniu systemu komputerowego MCBARG, oraz Dr Bożenie Łopuch za pomoc przy opracowaniu przykładu modeli rolniczych oraz udział w oprogramowaniu systemu MCBARG.

Część I

Sformułowanie problemu decyzyjnego i charakteryzacja rozwiązań wielokryterialnego zagadnienia targu

1

Wprowadzenie

Praca dotyczy problemów metodologicznych związanych ze wspomaganiem analizy decyzyjnej w sytuacjach kooperacyjnych przy wykorzystaniu systemów komputerowych. Rozpatruje się klasę sytuacji decyzyjnych opisywanych jako wielokryterialne problemy targu oraz wielokryterialne koalicyjne gry kooperacyjne. Zakłada się, że jest kilka podmiotów decyzyjnych negocjujących warunki możliwej współpracy. Podmioty te, rozpatrywane jako gracze wspomagani są przez mediatora starającego się doprowadzić ich do porozumienia i pomagającego znaleźć akceptowalne przez wszystkich rozwiązanie. Zakłada się, że dany jest model matematyczny opisujący sytuację przetargową graczy, a w szczególności pozwalający wyznaczyć ich wypłaty, w zależności od przyjmowanych decyzji. Każdy gracz może mieć inny, wielokryterialny zestaw celów, które chciałby osiągnąć, a cele te mogą być konfliktowe. Cechą charakterystyczną rozpatrywanych problemów w przypadku wielokryterialnych celów jest to, że każdy gracz ma do czynienia z pewnym zbiorem tzw. niezdominowanych rozwiązań, przy czym zbiory rozwiązań graczy są wzajemnie współzależne. Zbiory tych rozwiązań są na ogół niemożliwe do zapisania w formie analitycznej i przedstawienia graczom w takiej formie do globalnej analizy. Możliwe jest natomiast wyznaczenie pewnej skończonej liczby punktów należących do tych zbiorów przy zastosowaniu metod optymalizacji.

Celem systemu komputerowego jest wspomaganie analizy decyzyjnej dokonywanej przez każdego gracza, z uwzględnieniem jego preferencji i oczekiwań. Rozważa się także ideę wspomagania procesu mediacji, w którym system generuje propozycje mediacyjne. Te propozycje są oczywiście przedmiotem kolejnej analizy dokonywanej przez graczy. Powstaje problem jak konstruować te propozycje mediacyjne, aby mogły być zaakceptowane przez wszystkich graczy. Pomocne mogą być w tym idee i koncepcje rozwijane w teorii gier.

Dla przypadku sytuacji decyzyjnej z jednym decydentem rozwinięte zostały metody wielokryterialnego wspomagania decyzji. Istnieje już obecnie wiele monografii poświęconych metodom wielokryterialnego podejmowania decyzji np. Chankong, Haimes (1983), Cohon (1978), Galas, Nykowski, Żółkiewski (1987), Hwang i inni (1979), Tanino Sawaragi (1980), Steuer (1986), Yu (1985), Zeleny (1982). Wszystkie proponowane podejścia mają na celu umożliwienie decydentowi wybór rozwiązanie niezdominowanego, zgodnego z jego preferencjami, przy zastosowaniu pewnej procedury przeglądania zbioru tych niezdominowanych rozwiązań. Wykorzystywane są przy tym różne metody obliczeniowe wielokryterialnej optymalizacji.

Wśród stosowanych podejść na szczególną uwagę zasługują metody stosujące tzw. procedury uczące i pojęcie tzw. funkcji aspiracji decydenta (Wierzbicki, 1982, 1986). Idea tego podejścia polega na zastosowaniu interakcyjnej procedury, w czasie której decydent może coraz lepiej poznawać zbiór rozwiązań niezdominowanych, wyznaczając przy pomocy systemu komputerowego niektóre rozwiązania z tego zbioru. Może także kierować sposobem przeglądania tego zbioru i wybrać ostateczne rozwiązanie zgodnie ze swoimi preferencjami.

W przypadku wielokryterialnego problemu targu zagadnienie jest bardziej złożone, ponieważ zbiory rozwiązań graczy są współzależne. Gracze mają zwykle różne kryteria i różne preferencje. Wybór rozwiązania wymaga akceptacji wszystkich graczy. Wspomaganie decyzji jest rozpatrywane dwojako: jako wspomaganie graczy w lepszym rozumieniu ich sytuacji przetargowej, ale także jako wspomaganie procesu mediacyjnego, tzn. pomoc w znalezieniu akceptowalnego przez graczy rozwiązania.

Modele wielokryterialnego problemu targu opisują przykładowo zagadnienia dotyczące współpracy podmiotów gospodarczych, władz regionalnych w realizacji wspólnych projektów rozwojowych. Problem dotyczy udziału stron we wspólnym projekcie oraz podziału efektów wynikających ze współpracy. Rozwiązania problemu dokonuje się zwykle w drodze negocjacji, w których strony mają różne preferencje co do rozwiązań.

Rozwijane w pracy podejście polega na zastosowaniu interakcyjnych procedur uczących. Procedury te łączą idee nowych koncepcji rozwiązań wielokryterialnego problemu targu i koalicyjnych gier kooperacyjnych, a także idee wielokryterialnego wspomagania decyzji, w szczególności podejście funkcji aspiracji. Wymagane przy tym było rozwinięcie elementów klasycznej teorii gier na przypadek wielokryterialnych wypłat graczy.

Rozdział 2 ma charakter wprowadzający w podstawowe pojęcia dotyczące negocjacji i klasycznej teorii gier.

Następnie przedstawia się w pracy sformułowanie wielokryterialnego problemu targu (Rozdział 3), a także podaje się kilka koncepcji rozwiązań, stanowiących uogólnienie rozwiązań znanych z literatury (Rozdział 4). Oryginalną, jak się wydaje, jest koncepcja punktu względnej utopii, stanowiąca podstawę do sformułowania tych nowych rozwiązań. Przeanalizowano własności rozwiązań i ich związki.

Przedstawia się następnie możliwości wykorzystania tych rozwiązań w interakcyjnych procedurach mediacyjnych (Rozdział 5). Inspiracją do formułowania takich procedur były koncepcje i metody negocjacji (Raiffa, 1982) stosowane w praktyce, np. zakończone sukcesem rokowania izraelsko-egipskie w Camp David. W przedstawianych procedurach wprowadzono i połączono dwa rodzaje wspomagania decyzji: tzw. jednostronne i wielostronne. Jednostronne pozwala każdemu z graczy na niezależną analizę problemu bez uwzględnienia aktualnej decyzji kontrgraczy. We wspomaganiu wielostronnym uwzględnione są decyzje wszystkich graczy. Procedury te umożliwiają graczom lepsze poznanie ich sytuacji przetargowej, wybór propozycji rozwiązań zgodnie z ich preferencjami, a także prowadzą do rozwiązania niezdominowanego. Wykorzystywane jest przy tym podejście punktu referencyjnego wielokryterialnej analizy decyzyjnej.

W Rozdziale 6 omawia się konstrukcję systemu komputerowego wspomagającego analizę dokonywaną przez graczy, a także realizującego proces mediacji, który ułatwia i może doprowadzić graczy do konsensusu.

Przykłady dotyczące międzynarodowej współpracy w zakresie kwaśnych deszczów, oraz współpracy gospodarstw rolnych (Rozdział 7) ilustrują wielokryterialny problem targu i omawiane podejście. Metody wspomaganie negocjacji w wielokryterialnym problemie targu zostaLy wykorzystane w opracowanym systemie komputerowym MCBARG omówionym w rozdziale 6.

W Rozdziale 8 rozpatrzono sytuacje decyzyjne opisywane przez wielokryterialne gry kooperacyjne, uwzględniające możliwość tworzenia przez graczy różnych koalicji i ich wpływ na możliwe do osiągnięcia wypłaty. Przedstawia się rozwinięcie sformułowania klasycznych gier kooperacyjnych podanego przez Aumana (1967), oraz koncepcji rozwiązań na przypadek wielokryterialnych wypłat graczy. Rozwinięcie to nie jest proste, ponieważ w przestrzeniach wielokryterialnych wypłat mamy na ogół do czynienia z relacjami częściowego porządku i trzeba rozważyć różne sformułowania dominacji. Podaje się oryginalną propozycję nukleolusa, jako rozwiązania mediacyjnego uwzględniającego preferencje wszystkich graczy. Przedstawia się także idee interakcyjnej procedury wspomagającej analizę i proces mediacji.

Rozdział 9 przedstawia rodzinę gier opisujących współpracę graczy zainteresowanych pozyskaniem pewnego zestawu dóbr, przez realizację wspólnego projektu. Proponuje się i analizuje procedury ałokacji kosztów wykorzystujące mechanizm cenowy oraz różne koncepcje rozwiązań teorii gier. Przedstawiona jest także procedura wspomagająca analizę problemu alokacji kosztów, w tym także jako zagadnienia wielokryterialnego.

Rozdział 10 dotyczy gier kooperacyjnych w postaci funkcji partycji opisujących problem alokacji kosztów. Gry takie opisują rzeczywiste sytuacje, w której wypłaty każdej koalicji zależą nie tylko od graczy, którzy ją tworzą, ale także od struktury koalicji tworzonych przez graczy pozostałych. W pracy rozwijana jest teoria takich gier. W szczególności proponuje się koncepcje rozwiązań takich jak rdzeń gry i zbiory stabilne na podstawie wprowadzonych relacji dominacji. Analizuje się własności tych koncepcji rozwiązań.

Załączona bibliografia zawiera prace poświęcone wybranym zagadnieniom -

teorii gier: Aumann (1961, 1967), Harsanyi, Selten, (1972), Imai (1983), Kalai(1975), Kalai, Smorodinsky (1975), Nash (1950, 1953), Kalai, Smorodinsky, (1975), Koczy (2007, 2008), Raiffa (1953), Roth (1979a, b), Roth, Malouf (1979), Schmeidler (1969), Shapley (1953), Shapley, Schubik (1966), Thomson (1980), Thrall, Lucas (1963), Krus, Bronisz (1994, 1995, 2000), Krus (2009),

wielokryterialnego wspomagania decyzji: Hwang, Masud, Paidy, Yoon (eds) 1979), Wierzbicki (1982, 1983), Chankong, Haims (1983), Sawaragi, Nakayama, Tanino (1985), Roy, Słowiński(1990), Grauer, Thompson, Wierzbicki (eds) (1985), Steuer (1986) Galas, Nykowski, Żółkiewski (1987), Kręglewski, Paczynski, Granat, Wierzbicki (1988), Rogowski, Sobczyk, Wierzbicki (1986, 1988), Kaliszewski (1994), Trzaskalik (1998), Wierzbicki, Makowski, Wessels (2000), Kostreva, Ogryczak, Wierzbicki (2004),

wielokryterialnym modelom współpracy międzynarodowej i ich analizie: Ameliańczyk (1979), Piasecki, Hołubiec, Ameliańczyk (1982),

systemom komputerowego wspomagania negocjacji i decyzji grupowych: Goeltner (1987), Jarke, Jelassi, Shakun (1987), Kersten (1985, 1988), Korhonen , Moskowitz , Wallenius, Zionts

(1986), , Gallupe (1987), Shakun (1988), Nunamaker, Applegate, Konsynsky (1988), Korhonen. Wallenius, (1989), Krus, Lopuch, Bronisz (1989), Krus, Bronisz, Lopuch (1990), Kruś, Lopuch (1989), Nyhart, Samarasan (1989), Wierzbicki, A. P., L. Krus, M. Makowski (1993), DeSanctisTeich, Wallenius, Kuula, Zionts (1995),

idei funkcji użyteczności i jej zastosowaniom: Luce, Raiffa, (1957), Kulikowski (2000, 2003a, 2003b, 2004a, 2004b), Słowiński, Greco, Matarazzo (2002), Kruś (2002a, 2004a, 2004b),

analizie i modelom negocjacji: Barclay S., Peterson C (1976), Raiffa (1982), Axelrod R., (1985), Wierzbicki (1985, 1987, 1990), Kersten, Szapiro (1986), Kersten, Michalowsky, Matwin, Szpakowicz (1988).

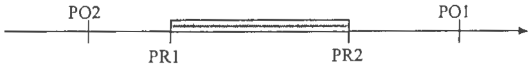
2

Problemy wspomagania negocjacji

Negocjacje są procesem uzgadniania decyzji stron (podmiotów gospodarczych, władz, krajów jak i osób na targu) w przypadku, gdy przynajmniej niektóre interesy tych stron są konfliktowe.

2.1 Negocjacje pozycyjne

Klasycznym przykładem negocjacji pozycyjnych jest proces targowania o cenę np. sprzedawanego domu, między sprzedającym a nabywcą. Każda ze stron ma odpowiednio swoją minimalną (sprzedający) i maksymalną (kupujący) cenę (zwaną ceną rezerwacji), za którą jest gotów dokonać transakcji. Sprzedający i kupujący podają kolejne propozycje cen, próbując ustalić końcową cenę kompromisu. Wyjściowe propozycje, zwane pozycjami otwarcia różnią się na ogół znacznie od cen rezerwacji. Negocjacje pozycyjne ilustruje rys. 2.1. Na osi poziomej przedstawia się wartość negocjowanej ceny. PO1 i PO2 oznaczają pozycje otwarcia strony sprzedającej (1) i kupującej (2). PR1 i PR2 oznaczają odpowiednio ceny rezerwacji obydwu stron. Zauważmy, że przedział cen między PO1 i PR1 określa obszar, w którego obrębie sprzedający może się poruszać w trakcie negocjacji. Odpowiednio przedział między PO2 a



Rysunek 2.1. Schemat negocjacji pozycyjnych.

PR2 stanowi obszar negocjacji kupującego. Przedział między PR1 a PR2 określa obszar zgodności, w którego obrębie może być zawarte porozumienie. Każdej ze stron zależy na zawarciu takiego porozumienia, które leżałoby najbliżej pozycji - ceny będącej jak najgorszą dla drugiej strony, ale która mogłaby być jednak przez tę drugą stronę zaakceptowana. Podstawowe znaczenie dla osiągnięcia sukcesu w negocjacjach pozycyjnych ma właściwe oszacowanie granicy ustępstw drugiej strony. Oszacowania takiego należy dokonać, jeśli jest to możliwe, jeszcze przed rozpoczęciem właściwych negocjacji. Istotne jest również możliwe wczesne zorientowanie się w czasie negocjacji, kiedy wymieniane w trakcie negocjacji propozycje wkroczyły już w obszar wyników akceptowalnych przez drugą stronę. Na szkoleniach w zakresie negocjacji formułuje się zwykle szereg zaleceń, którymi powinien się kierować negocjator:

- Przed przystąpieniem do negocjacji należy dobrze określić swoją pozycję rezerwacji. Istotne jest określenie najlepszej alternatywy dla negocjowanego porozumienia (ang. Best Alternative To Negotiated Agreement, patrz Raiffa 1982). Pomocne może być zebranie informacji np. o cenach podobnych transakcji dokonanych wcześniej, porównanie różnych ofert na rynku.
- Starać się uzyskać informacje o drugiej stronie poza stołem negocjacyjnym.
- Nie sugerować się wstępną propozycją drugiej strony. Druga strona zostawiła sobie na pewno pole manewru.

- Zdobywać informacje w trakcie negocjacji od drugiej strony, w szczególności dane dotyczące ograniczeń, istotnych dla drugiej strony elementów, potrzeb, w celu oszacowania, co w danej chwili druga strona skłonna byłaby zaakceptować.
- Korzystać z informacji zawartych w komunikacji niewerbalnej.
- Nie ustępować w kwestiach ważnych.
- Ustępować powoli, zmniejszać wielkość ustępstw. Nie ustępować za darmo - uzyskiwać za każde swoje ustępstwo, także ustępstwo drugiej strony.

Rozróżnia się dwie strategie negocjacji pozycyjnych. Strategia twarda, w których po przedstawienie propozycji stwierdza się twardo, że z propozycji tej się nie ustąpi. Alternatywą są negocjacje ze strategią miękką, w których po przedstawieniu wstępnej propozycji, sugeruje się możliwość ustępstw. W przypadku prostych, jednoprzedmiotowych, niepowtarzalnych negocjacji, strategia twarda jest zwykle wygrywającą. W sytuacjach bardziej złożonych, zastosowanie strategii miekkiej, może dać lepsze wyniki, jeśli obie strony ją zastosują. Negocjatorzy stosują czasami tzw. brudne chwyty. Może do nich należeć podawanie nieprawdziwych informacji, wojna psychologiczna polegająca na manipulowaniu otoczeniem negocjacji prowadzącym do dyskomfortu przeciwnika i inne. W przypadkach bardziej złożonych, negocjacje pozycyjne mogą prowadzić do nienajlepszych wyników. Często następuje impas i całkowite załamanie negocjacji. Zauważmy także, że jeśli nawet kontrakt zostanie zawarty ale z wyraźnym pokrzywdzeniem jednej ze stron, może być niestabilny w przyszłości.

2.2 Negocjacje zasadnicze

Alternatywą dla negocjacji pozycyjnych są negocjacje zasadnicze, stosowane zwłaszcza na szczeblu międzynarodowym. Podstawowa idea tych negocjacji polega na odstąpieniu od negocjacji pozycji, przy których strony zwykle się upierają i zastąpieniu tych negocjacji dyskusją i negocjowaniem zasad, na których budowane będzie porozumienie.

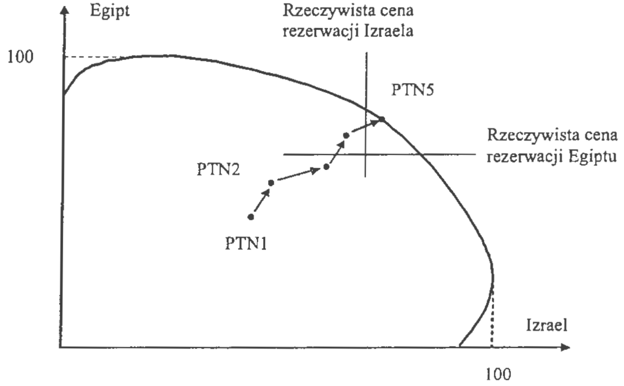
Istotną, pozytywną cechą negocjacji zasadniczych, jest możliwość lepszego zrozumienia intencji, celów i potrzeb drugiej strony. Często nie wszystkie interesy stron są przeciwstawne. Odejście od formułowania twardych pozycji i zastąpienie ich dyskusją zasad ułatwia znalezienie rozwiązań wzajemnie korzystnych, sprzyja wzrostowi wzajemnego zaufania, a także sprawia, że osiągnięte rozwiązanie może być traktowane przez strony jako korzystne i sprawiedliwe.

Idea negocjacji zasadniczych przedstawiona została przez Fishera, Ury (1981). W książce tej podano szereg przykładów, zaleceń dla negocjatorów, a także trików stosowanych w negocjacjach zasadniczych. Pierwszym elementem sukcesu jest przekonanie drugiej strony do negocjacji zasad, a nie pozycji. Fisher i Ury podają przykłady i zalecenie jak można to osiągnąć. Podstawowa strategia polega na twardym negocjowaniu zasad, ale "łagodnym" podejściu do osobowości drugiej strony. W szczególności należy oddzielić osobowość od negocjowanego problemu, koncentrować się na motywacjach i interesach i szukać rozwiązań wzajemnie korzystnych.

2.3 Procedura pojedynczego tekstu w negocjacjach międzynarodowych

Metodą przełamania impasu w twardych negcjacjach pozycyjnych jest procedura pojedyńczego tekstu (ang. Single Negotiation Text procedure). Procedura ta została zaproponowana przez Rogera Fishera i jest często stosowana w negocjacjach międzynarodowych. Raiffa (1982) opisał tę procedurę w przypadku negocjacji w Camp David, w których uczestniczyły : Egipt i Izrael jako przeciwnicy – strony konfliktu, oraz Stany Zjednoczone jako mediator. Stany Zjednoczone przygotowywały pakiety propozycji, przedstawiane następnie pod uwagę przeciwników. Każdy pakiet rozumiany był jako pojedynczy tekst negocjacyjny - pewien tekst porozumienia poddawany krytyce przeciwników, a następnie wielokrotnie modyfikowany w iteracyjny sposób. Tekst ten pozwalał skoncentrować uwagę przeciwników na tym samym zestawie zagadnień. Proces negocjacji rozpoczął się od pierwszego tekstu, który by daleko od oczekiwań przeciwników. Proces był progresywny, tzn. każdy następny tekst był korzystniejszy dla obu stron od poprzedniego. Ostatecznie proces zakończył się porozumieniem zawartym po kilku iteracjach. Ilustrację procedury pojedyńczego tekstu negocjacyjnego przedstawiono schematycznie na rys. 2.2 zapożyczonym z pracy Raiff'y (1982). Osie wykresu reprezentują poziom dyskutowanego porozumienia ("wypłatę") dla każdej ze stron w skali od 0 do 100 %.

Linia krzywa wyznacza zbiór dopuszczalnych porozumień. Liniami przerywanymi (poza liniami oznaczającymi 100 % skali wypłat) przedstawiono rzeczywiste poziomy rezerwacji Egiptu i Izraela. Punkty PTN1 - PTN5 oznaczają kolejne propozycje - pojedyncze teksty negocjacyjne przygotowane przez mediatora - Stany



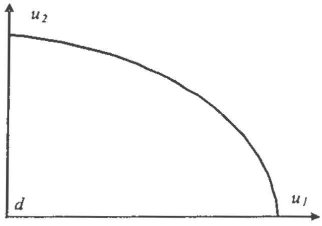
Rysunek 2.2. Ilustracja negocjacji w Camp David.

Zjednoczone, a następnie dyskutowane przez oponentów i poprawiane przez mediatora. Zauważmy, że zgodnie z przedstawionym schematem, czwarty tekst negocjacyjny T4 przekroczył poziom rezerwacji Egiptu, a tekst piąty przekroczył także poziom rezerwacji Izraela, osiągnął brzeg obszaru dopuszczalnego i stanowił rozwiązanie problemu zaakceptowane przez obu oponentów.

W rzeczywistości negocjacje w Camp-David rozpoczęły się od twardych negocjacji pozycyjnych tak, że reprezentujący Egipt i Izrael: Sadat i Begin przestali w ogóle rozmawiać w drugim dniu spotkania. Procedura pojedyńczego tekstu negocjacyjnego Fisher'a została zastosowana w celu przełamania impasu. Rzeczywista liczba iteracji i przygotowanych pojedyńczych tekstów negocjacyjnych wyniosła ponad 20. Stany Zjenoczone odegrały rolę silnego mediatora. Mogły zaoferować antagonistom pomoc ekonomiczną oraz dostawy sprzętu wojskowego i wysokiej technologii. W interesie Stanów Zjednoczonych było z kolei zawarcie porozumienia bez udziału ZSRR. Osiągnięcie porozumienia w Camp-David rzeczywiście i istotnie osłabiło wpływy ZSRR w regionie Bliskiego Wschodu.

2.4 Modele klasycznej teorii targu

Klasyczna, aksjomatyczna teoria targu została zapoczątkowana przez Nash'a (1950) dla przypadku dwóch graczy, a następnie rozwijana przez wielu badaczy. Teoria ta dotyczy problemu podjęcia przez graczy wspólnej decyzji spośród pewnego zbioru decyzji dla nich korzystnych. Podstawowe założenie tej teorii jest związane z przyjęciem miary korzyści każdego z graczy przy użyciu funkcji użyteczności von Neumana, Morgensterna (1944). Zakłada się, że funkcja ta jest znana dla każdego z graczy. Korzyści jakie gracze mogą uzyskać w wyniku podjęcia zgodnej decyzji rozpatrywane są w przestrzeni ich użyteczności i porównywane z przypadkiem, gdy takiej decyzji nie uzgodnią. Zagadnienie targu formułowane jest jako para (S, d), gdzie $S \subset R^2$, zwany zbiorem porozumień, określa zbiór wypłat korzystnych dla obu graczy, osiągalnych w przypadku zgodnej decyzji, natomiast $d \in R^2$ jest tzw. punktem status quo, określającym wypłaty graczy w przypadku, gdy zgodnej decyzji nie podejmą. Przykład ilustrujący zagadnienie targu przedstawiony jest na rys. 2.3. Problem decyzyjny polega na wyborze takiego punktu ze zbioru S, na który zgodzą się obaj gracze. Zagadnienie targu opisuje zarówno prosty problem targowania o cenę produktu sprzedawanego na bazarze, jak i złożone problemy dotyczące współpracy podmiotów ekonomicznych i podziału korzyści wynikających z tej współpracy.



Rysunek 2.3. Przykład problemu targu.

Nash (1950) zaproponował charakteryzację rozwiązania (tj. końcowych wypłat graczy) przy pomocy zestawu aksjomatów opisujących relacje między zbiorem dopuszczalnych wypłat (tj. zbiorem porozumień S) i punktem status quo, a końcową wypłatą graczy. Aksjomaty te opisują nie tyle samo rozwiązanie ale pewne racjonalne zasady dotyczące wyboru rozwiązania. Aby mogły być akceptowane przez graczy, zasady te powinny odzwierciedlać ich odczucia sprawiedliwego wyboru. Przedmiotem rozważań Nash'a było zagadnienie targu spełniające założenia:

(1)zbiór porozumień S jest zwarty i wypukły,

(2)zbiór S jest niepusty i zawiera co najmniej jeden punkt $x \in S$ taki, że $x \gg d$,

(3)punkt status quo $d \in S$, oraz dla dowolnego $x \in S$, spełnione jest $x \geq d$.

Rozwiązanie zagadnienia targu rozumiane jest jako pewna funkcja f przypisująca problemowi (S, d) spełniającemu założenia (1)-(3) wypłatę końcową graczy $f(S, d) \in S$. Nash sformułował następujące aksjomaty charakteryzujące poszukiwane rozwiązanie y:

(A1) Pareto-optymalność
$y = f(S, d)$ jest Pareto-optymalne w zbiorze S,

(A2) Indywidualna racjonalność.

$y = f(S,d) \geq d$.

(A3) Symetria

Mówimy, że problem jest symetryczny, jeśli $d_1 = d_2$, oraz $(x_1, x_2) \in S$, to $(x_2, x_1) \in S$. Mówimy, że rozwiązanie spełnia aksjomat symetryczności, jeżeli dla symetrycznego problemu (S,d) $f_1(S,d) = f_2(S,d)$.

(A4) Niezależność od skali użyteczności.

Niech L będzie przekształceniem afinicznym, tj. takim, że $Lx = (a_1x_1 + b_1, a_2x_2 + b_2)$ dla dowolnego $x \in R^2$, gdzie $a_i, b_i \in R, a_i > 0, i = 1,2$. Mówimy, że rozwiązanie jest niezależne od skali użyteczności, jeżeli $Lf(S,d) = f(LS, Ld)$.

(A5) Niezależność od nieistotnych opcji.

Dla dowolnych zagadnień targu (S,d) i (T,d), jeżeli $S \subset T$ oraz $f(T,d) \in S$ to $f(S,d) = f(T,d)$.

Aksjomat ten oznacza,że jeżeli gracze uzgodnili rozwiązanie $f(T,d)$ w zagadnieniu targu (T,d), to zmniejszenie zbioru porozumień T do zbioru S, ale zawierającego to rozwiązanie tzn. $f(T,d) \in S$, nie powinno spowodować zmiany wypłat.

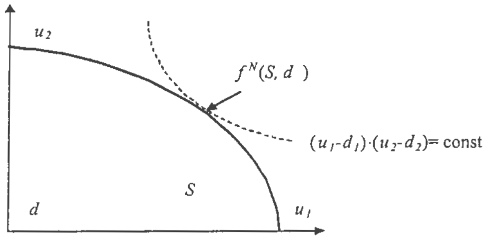
Twierdzenie (Nash, 1950)

Dla dowolnego problemu targu (S,d) spełniającego założenia (1) - (3) istnieje dokładnie jedno rozwiązanie $f^N(S,d)$ o postaci:

$$f_N(S,d) = argmax_{x \in S}(x_1 - d_1)(x_2 - d_2),$$

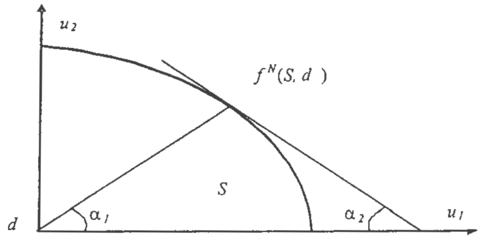
spełniającego aksjomaty A1 - A5. ∎

Ilustrację kooperacyjnego rozwiązania Nash'a przedstawiono na Rys. 2.4. Rozwiązanie to maksymalizuje iloczyn przyrostu użyteczności graczy. Poszukiwanie rozwiązania Nash'a polega na znalezieniu punktu stycznego brzegu zbioru porozumień S z maksymalną poziomicą określoną przez podstawową hiperbolę.



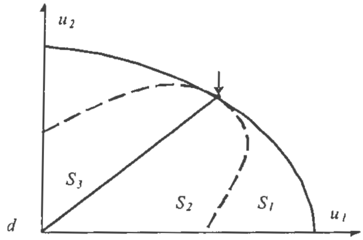
Rysunek 2.4. Ilustracja rozwiązania kooperacyjnego Nash'a.

Rozwiązanie to ma również interesującą interpretację geometryczną (Rys. 2.5).



Rysunek 2.5. Geometryczna interpretacja rozwiązania kooperacyjnego Nasha.

Kąt α_2 nachylenia stycznej do brzegu zbioru S w punkcie rozwiązania i kąt α_1 nachylenia prostej łączącej punkt statu quo d z punktem rozwiązania są sobie równe. Aksjomaty A1 - A4 są naturalne. Pareto - optymalność oznacza, że w zbiorze S nie znajdzie się punkt poprawiający jednocześnie wypłaty obu graczy. Indywidualna racjonalność oznacza, że wypłata każdego z graczy będzie nie gorsza niż w przypadku braku porozumienia. Aksjomat symetrii wymaga, aby zmiana kolejności graczy nie wpływała na rozwiązanie. Zmiana skali użyteczności któregokolwiek z graczy nie wpływa istotnie na rozwiązanie (zmieni się tylko zgodnie z tą samą skalą). Aksjomat niezależności od nieistotnych opcji również może się wydać naturalny. Zauważmy jednak, że w rzeczywistości aksjomat ten oznacza, że rozwiązanie nie zależy kształtu zbioru S poza odcinkiem łączącym punkt status quo z rozwiązaniem. Pokazano to na Rys. 2.6.



Rysunek 2.6. Ilustracja aksjomatu niezależności rozwiązania od nieistotnych opcji. Rozwiązanie Nasha $f^N(S^1, d)$ jest wspólne dla trzech różnych problemów targu opisanych odpowiednio przez zbiór porozumień S^1, S^2, S^3.

Aksjomat niezależności rozwiązania od nieistotnych opcji był przez wielu badaczy uznany jako kontrowersyjny (np. Luce, Raiffa 1957). Dyskusja dotycząca między innymi tego aksjomatu rozpoczęła poszukiwanie innych rozwiązań i formułowanie wielu innych aksjomatów charakteryzujących te rozwiązania.

Raiffa (1953) zaproponował inne rozwiązanie, zależne od maksymalnych wartości użyteczności osiąganych przez graczy w zbiorze porozumień. Rozwiązanie to zostało scharakteryzowane w pracy (Kalai, Smorodinsky 1975). Aksjomat niezależności od nieistotnych opcji został zastąpiony aksjomatem indywidualnej monotoniczności. Oznaczmy przez $I \in R^2$ punkt stanowiący złożenie maksymalnych wartości użyteczności osiągalnych przez graczy w problemie targu (S,d), tzn. $I(S,d) = (I_1(S,d), I_2(S,d)) : I_i(S,d) = max\{x_i : x \in S\}, i = 1,2$. Punkt I nazywany jest punktem idealnym lub punktem utopii.

A6Indywidualna monotoniczność.

Dla dowolnych zagadnień targu (S,d) i (T,d) takich, że $S \subset T$, jeżeli $I_i(S,d) = I_i(T,d)$ to $f_{3-i}(T,d) \geq f_{3-i}(S,d)$.

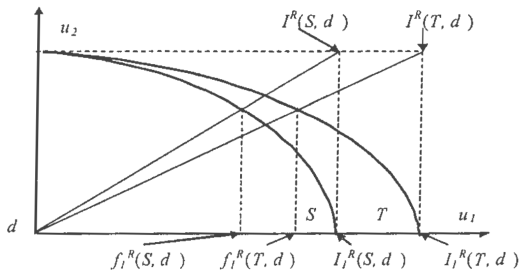
Twierdzenie (Kalai, Smorodinsky 1975).
Istnieje dokładnie jedno rozwiązanie problemu targu (S,d) spełniającego założenia (1) - (3), które spełnia aksjomaty Pareto optymalności (A1), indywidualnej racjonalności (A2), symetrii (A3), niezależności od skali użyteczności (A4), oraz indywidualnej monotoniczności (A5):

$$f^R(S,d) = (f_1^R, f_2^R) : (f_1^R - d_1)/(f_2^R - d_2) = (I_1 - d_1)/(I_2 - d2).$$

■

Rozwiązanie to jest określane jest w literaturze jako rozwiązanie Raiffa, Kalai, Smorodinsky. Zgodnie z tym rozwiązaniem przyrost użyteczności graczy jest proporcjonalny do maksymalnych wartości użyteczności określonych przez punkt idealny, względem punktu status quo.

Aksjomat indywidulanej monotoniczności oznacza, że jeśli powiększymy zbiór porozumień w ten sposób, że powiększymy maksymalną wypłatę np. gracza 1, osiągalną w zbiorze S, bez zmiany maksymalnej wypłaty gracza 2, to wypłata gracza 1, wynikająca z rozwiązania nie powinna się zmniejszyć. Ilustrację tego aksjomatu przedstawia rys. 2.7. Na rysunku pokazano, że powiększenie zbioru porozumień S do zbioru T powoduje powiększenie maksymalnej wypłaty gracza 1 i nie zwiększa maksymalnej wypłaty gracza 2,



Rysunek 2.7. Ilustracja rozwiązania Raiffa i aksjomatu indywidualnej monotoniczności.

tzn. $I_1(T,d) > I_1(S,d), I_2(T,d) = I_2(S,d)$. Wypłata gracza 1 zgodnie z rozwiązaniem Raiffa jest większa w przypadku zbioru T, tzn. $f^R(T,d) > f^R(S,d)$.

Klasyczna teoria targu była rozwijana przez wielu badaczy, w szczególności w przypadku liczby graczy większej niż dwa, dla różnych założeń i różnych aksjomatów charakteryzujących rozwiązania. Wyniki można znaleźć między innymi w pracach: Thomson (1980), Imai(1983), Roth(1979a,b), Peters (1986).

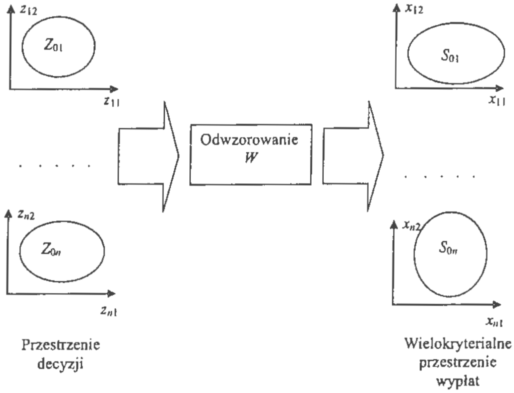
3

Wielokryterialny problem decyzyjny w sytuacjach kooperacyjnych

3.1 Ogólne sformułowanie problemu

Rozpatrujemy sytuację decyzyjną n podmiotów decyzyjnych uzgadniających warunki możliwej współpracy. Oznaczmy ich zbiór przez $N = \{1, 2, \ldots n\}$. Każdy decydent ma określone zmienne decyzyjne, oznaczone przez wektor $z_i = (z_{i1}, z_{i2}, \ldots z_{ik^i})$, tj. $z_i \in I\!R^{k^i}$, gdzie k^i jest liczbą zmiennych decyzyjnych decydenta $i \in N$, $I\!R^{k^i}$ jest przestrzenią jego decyzji. Wektor zmiennych decyzyjnych wszystkich decydentów oznaczamy przez: $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in I\!R^K$, $K = \sum_{i \in N} k^i$, gdzie $I\!R^K$ jest iloczynem kartezjańskim przestrzeni decyzji poszczególnych decydentów.

Zakłada się, że każdy decydent ma określony wektor kryteriów, mierzący jego wypłaty, przy pomocy których ocenia swoje wyniki współpracy. Oznaczmy wektor kryteriów przez $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots x_{im^i}, \ x_i \in I\!R^{m^i})$, gdzie m^i jest liczbą kryteriów decydenta i, a $I\!R^{m^i}$ jest przestrzenią jego kryteriów. Wektor kryteriów wszystkich decydentów oznaczamy: $x = (x_1, x_2, \ldots x_n) \in I\!R^M$, $M = \sum_{i \in N} m^i$. $I\!R^M$ jest iloczynem kartezjańskim przestrzeni kryteriów poszczególnych decydentów $I\!R^{m^i}$ gdzie $i \in N$.



Rysunek 3.1. Przestrzenie decyzji i przestrzenie wypłat

Zakładamy, że dany jest model pozwalający wyznaczyć wypłaty decydentów, to jest wartości ich wektorowych kryteriów, przy założonych zmiennych decyzyjnych. Formalnie, zakładamy, że model ten dany jest przez określony zbiór dopuszczalnych decyzji Z_0, oraz przez odwzorowanie W z przestrzeni zmiennych decyzyjnych w przestrzeń kryteriów. Przyjmujemy, że zbiór $Z_0 \subset \mathbb{R}^K$ jest zwarty, a odwzorowanie $W : Z_0 \to \mathbb{R}^M$ ciągłe. W tym przypadku zbiór osiągalnych wypłat $S_0 = W(Z_0)$ jest zwarty. Zbiór dopuszczalnych decyzji w przestrzeni $\mathbb{R}^K$ Z_0 widziany jest przez każdego decydenta i jako zbiór Z_{0i} w jego przestrzeni decyzji $\mathbb{R}^{m^i}$ Patrz Rys. 3.1. Zbiór osiągalnych wypłat $S_0 = W(Z_0)$ widziany jest przez każdego z decydentów w jego przestrzeni wielokryterialnych wypłat jako S_{0i}, gdzie $i = 1, 2, ..., n$. Widziane obrazy zbiorów, w szczególności obrazy zbioru $S_0 = W(Z_0)$ widziane przez poszczególnych graczy w ich przestrzeniach kryteriów są współzależne. Obraz osiągalnych wypłat np. gracza 1 zależy od wypłat graczy pozostałych.

W przestrzeniach kryteriów wprowadzamy częściowy porządek. Niech $I\!R^k$ oznacza pewną arbitralną przestrzeń kryteriów. Każde z kryteriów może być maksymalizowane lub minimalizowane. Jednakże dla uproszczenia notacji, bez straty ogólności przyjmujemy, że gracze maksymalizują swoje kryteria. Określamy **dodatni stożek**:

$$C = \{x \in I\!R^k, : \; x_i \geq 0, \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, k\},$$

Wprowadzamy trzy pojęcia dominacji w przestrzeni $I\!R^k$.

Mówimy, że element $x \in I\!R^k$ jest **silnie zdominowany** przez element $y \in I\!R^k$ (y **silnie dominuje** x), i oznaczamy $y \gg x$, $x, y \in I\!R^k$ jeśli $y \in x + int(C)$, gdzie $int(C)$ oznacza wnętrze zbioru C, $x + int(C) = \{z \in I\!R^k : \; z = x + v, \text{ dla dowolnego } v \in int(C)\}$.

Mówimy, że element x jest **zdominowany** przez element y (y **dominuje** x) i oznaczamy: $y > x$ jeśli $y \in x + C \backslash \{0\}$, gdzie $C \backslash \{0\}$ oznacza zbiór C z wyłączeniem elementu $\{0\}$.

Mówimy, że element x jest **słabo zdominowany** przez element y (y **słabo dominuje** x) i oznaczamy: $y \geq x$ jeśli $y \in x + C$.

Zbiór wypłat Pareto optymalnych (niezdominowanych) w dowolnym zbiorze $Q \in I\!R^k$, określamy w sposób standardowy, jako zbiór:

$$\widehat{Q}_0 = \{\hat{x} \in Q : Q \cap (\hat{x} + C \backslash \{0\}) = \emptyset\}.$$

Zbiór wypłat słabo Pareto optymalnych (słabo niezdominowanych) określony jest jako zbiór:

$$\widehat{Q}^w = \{\hat{x} \in Q : \; Q \cap (\hat{x} + int(C)) = \emptyset\},$$

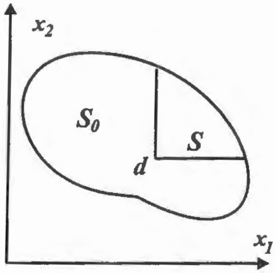
Pojęcie dominacji wprowadzone zostało dla pewnej arbitralnej przestrzeni kryteriów $\mathbb{R}^k$, ponieważ w zależności od toku rozważań może ona oznaczać przestrzeń kryteriów $\mathbb{R}^{k^i}$ pojedynczego decydenta i, lub też przestrzeń kryteriów wszystkich decydentów $\mathbb{R}^M$.

Przyjmijmy, że każdy decydent ma swój punkt rezerwacji $d_i \in \mathbb{R}^{m^i}$. Decydent rozpatrując możliwą współpracę, nie zgadza się na propozycje kooperacyjne, które pogarszały by chociaż jedną ze składowych tego punktu. W zależności od rozpatrywanego problemu, decydent może przyjąć ten punkt jako aktualny punkt status-quo, albo rozważając alternatywne przedsięwzięcia, określić go na podstawie koncepcji BATNA. Pojęcie koncepcji BATNA (Best Alternative to Negotiated Agreement) została wprowadzona w pracy (Fisher, Ury 1979) i jest powszechnie stosowane w procesie przygotowania stron do negocjacji. W przypadku wyznaczania punktu rezerwacji na podstawie koncepcji BATNA, wymagana jest wstępna analiza wielokryterialna dokonywana niezależnie przez każdego decydenta, dotycząca możliwych do osiągnięcia wypłat z przedsięwzięć alternatywnych do rozpatrywanego problemu współpracy.

3.2 Wielokryterialny problem targu

Można wówczas sformułować wielokryterialne zagadnienie przetargowe, jako parę (S, d). Element $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n) \in S \subset \mathbb{R}^M$ zwany jest punktem braku porozumienia. Zbiór S, zwany zbiorem porozumień jest podzbiorem zbioru osiągalnych wypłat $S \subseteq S_0 \subset \mathbb{R}^M$, które dominują punkt d. Zbiór porozumień określa wypłaty osiągalne przez decydentów, które mogą oni uzyskać pod warunkiem porozumienia - zgody wszystkich decydentów. W przypadku braku takiej zgody, wypłaty decydentów określone są przez punkt d.

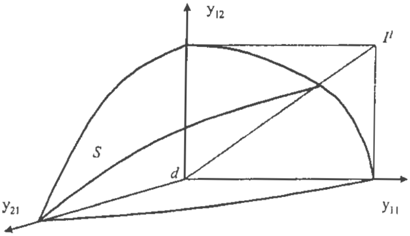
Przykład zbioru wypłat, zbioru porozumień i punkt rezerwacji przedstawione są na Rys. 3.2.



Rysunek 3.2. Zbiór porozumień i punkt braku porozumienia w klasycznym zagadnieniu przetargowym

Dla prostoty, przyjęto na tym rysunku, że każdy z dwóch decydentów ma tylko jedno kryterium, x_1 i x_2 odpowiednio. Natomiast na Rys. 3.3 przedstawiono przykład problemu wielokryterialnego, w którym decydent 1 ma dwa kryteria x_{11}, x_{12}, a decydent drugi ma kryterium x_{21}. Na rysunku tym zaznaczono również punkt idealny I^1 w dwukryterialnej przestrzeni wypłat decydenta 1. Punkt ten nie jest osiągalny, leży poza zbiorem S.

Zauważmy, że dla danego punktu rezerwacji d zbiór porozumień określony jest jako zbiór osiągalnych wypłat, dominujących ten punkt $S = \{x \in S : x \in d + C\{0\}\}$. Wynika to z faktu, że racjonalny gracz nie zgodzi się na wypłaty gorsze niż określone przez punkt d. Zbiór porozumień S jest określony przez relacje modelu matematycznego. W ogólnym przypadku jego postać nie jest dana



Rysunek 3.3. Przykład wielokryterialnego problemu przetargowego

(znana) explicite. Wykorzystując model można natomiast wyznaczać punty tego zbioru dla danych wektorów zmiennych decyzyjnych $z_i \in I\!R^{k^i}, i = 1, \ldots, n$.

Wspomaganie podejmowania decyzji w zagadnieniu przetargowym polega na umożliwieniu decydentom dokonania analizy ich sytuacji decyzyjnej. Taka analiza powinna obejmować ocenę wypłat przy różnych założeniach dotyczących ich decyzji i decyzji pozostałych decydentów, pomocy w określeniu preferencji w przestrzeni wypłat, pomocy w znalezieniu przez decydentów rozwiązania niezdominowanego w zbiorze porozumień, zgodnego z ich preferencjami. Rozwiązanie to powinno spełniać zasady rzetelności ("fair play"), aby mogło być zaakceptowane jako rozwiązanie kooperacyjne.

Przedstawione sformułowanie jest rozszerzeniem klasycznej definicji problemu targu, którą podał Nash (1950). Problem ten w klasycznym sformułowaniu był przedmiotem badań tzw. aksjomatycznej teorii targu rozwijanej właśnie przez Nash'a, a następnie w pracach: (Raiffa, 1953), (Roth, 1979a,b), (Kalai, Smorodinsky, 1975), (Thomson, 1980) i przez wielu innych badaczy. W sformułowaniu klasycznym zakladano istnienie w jawnej postaci funkcji użyteczności poszczególnych decydentów, traktowanych jak graczy, co pozwalało agregować kryteria każdego gracza do jego użyteczności i rozpatrywać problem w przestrzeni jednowymiarowych użyteczności graczy. Metoda badawcza aksjomatycznej teorii targu polega na formułowaniu różnych założeń, zwanych aksjomatami, odnośnie zachowania się graczy w negocjacjach, a zwłaszcza ich odczuć dotyczących sprawiedliwych zasad wyznaczania rozwiązania i własności, które rozwiązanie to powinno spełniać, a następnie na wyszukiwaniu i analizowaniu rozwiązań spełniających te aksjomaty.

W niniejszej pracy problem targu formułowany jest w wielokryterialnej przestrzeni wypłat graczy, bez założenia agregacji tych kryteriów do użyteczności decydentów. To rozszerzenie definicji jest stosunkowo proste, jednakże koncepcje rozwiązań formułowane w klasycznej teorii targu, jak również i ich własności nie przenoszą się w prosty sposób na przypadek wielokryterialny. Przy braku założenia istnienia jawnie danej funkcji użyteczności, zakłada się jednak, że decydenci mają określone preferencje dotyczące wypłat w ich przestrzeniach kryteriów. W praktyce przy niepełnej wiedzy o sytuacji decyzyjnej, decydent może być nie w pełni świadomy swoich preferencji. Świadomość ta wzrasta w miarę poznawania istoty problemu, na podstawie oceny osiągalnych wypłat, wpływu decyzji na te wypłaty itp. Istnieje w związku z tym potrzeba zastosowania uczących, interakcyjnych mechanizmów pozwalających decydentom na analizę problemu, wyrażanie ich preferencji i poszukiwanie rozwiązań zgodnych z tymi preferencjami w ich przestrzeniach kryteriów. Proponuje się zastosowanie w tym celu podejść rozwijanych w ramach metod wielokryterialnego podejmowania decyzji. Jednakże, aby rozwiązanie mogło być zaakceptowane przez wszystkich decydentów, powinno spełniać akceptowalne zasady rzetelności formułowane w postaci aksjomatów opisujących ich odczucia. Podejście aksjomatycznej teorii targu może ułatwić znalezienie odpowiednich koncepcji rozwiązań. W związku z tym wydaje się celowe połączenie obu tych podejść.

W dalszej części pracy rozpatruje się różne klasy wielokryterialnych problemów targu w zależności od spełnienia następujących warunków:

(**W3.2.1**) Zbiór porozumień S jest zwarty i istnieje element $x \in S$ dominujący element d.

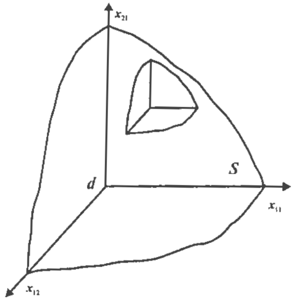
(**W3.2.2**) Zbiór S ma taką własność, że dla każdego $x \in S$ jeśli $y : d \leq y < x$ to $y \in S$. Właściwość tę nazywamy dalej komprechensywnością zbioru S (ang. comprehensiveness).

(**W3.2.3**) Dla każdego $x \in S$, niech $J(x) = \{j : y \geq x,\ y_j > x_j,\ j \in [1, M]$ dla pewnego $y \in S\}$. Wtedy dla każdego $x \in S$, istnieje $y \in S$ taki, że $y \geq x$, $y_j > x_j$ dla każdego $j \in J(x)$.

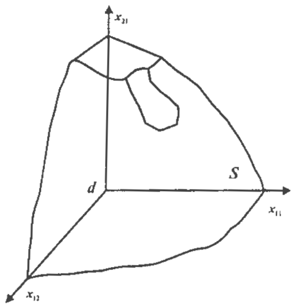
(**W3.2.4**) Zbiór S jest wypukły.

Oznaczmy przez B - klasę problemów targu spełniających warunki **W3.2.1** i **W3.2.2**, przez B^* - klasę problemów spełniających warunki **W3.2.1**, **W3.2.2**, **W3.2.3**, a przez B^{**}- odpowiednio warunki **W3.2.1**, **W3.2.2**, **W3.2.4** .

Założenia **W3.2.1**, **W3.2.2** i **W3.2.4** są typowo przyjmowane w klasycznej teorii targu. Założenie **W3.2.1** oznacza, że zbiór S jest ograniczony, domknięty i zawiera przynajmniej jeden element dominujący punkt braku porozumienia. Założenie **W3.2.2** stwierdza, że jeśli gracze mogą uzyskać wypłatę x mogą również osiągnąć każdą wypłatę gorszą od x (znane jest również w literaturze jako założenie dyspozycyjności wypłat).



Rysunek 3.4. Przykład zbioru porozumień nie spełniającego założenia **W3.2.3**



Rysunek 3.5. Przykład nie wypukłego zbioru porozumień spełniającego założenie **W3.2.3**

Założenie **W3.2.3** stanowi osłabienie założenia wypukłości zbioru S. Zbiór $J(x)$ określa zbiór tych współrzędnych w przestrzeni $\mathbb{R}^M$, wzdłuż których mogą być powiększone wypłaty w porównaniu z punktem x w zbiorze porozumień S. Warunek stwierdza, że zbiór wypłat efektywnych zbioru S nie zawiera "dziur", dopuszcza jednak niewypukłość zbioru S. Każdy wypukły zbiór S spełnia warunek **W3.2.3**. Przykład zbioru porozumień w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ nie spełniającego tego założenia jest pokazany na Rys. 3.4, natomiast przykład zbioru niewypukłego, spełniającego ten warunek na Rys. 3.5. Warunek **W3.2.3** zapewnia spójność zbioru niezdominowanych wypłat w zbiorze S.

3.3 Indywidualnie niezdominowane wypłaty graczy i punkt względnej utopii

Rozpatrzmy problem (S, d) spełniający warunki **W 2.1**, **W 2.2**. Jedną z istotnych informacji dla analizy problemu targu przez danego gracza i, $i \in [1, \dots n]$ jest ocena możliwych wypłat w przestrzeni jego kryteriów, przy założeniu, że miałby pełną kontrolę nad decyzjami kontrgraczy. Punkty niezdominowane odpowiadające takim wypłatom nazwiemy **indywidualnie niezdominowanymi (i-niezdominowanymi)** danego gracza.

Definicja 3.1
Punkt $x^i \in S$ nazywamy **indywidualnie niezdominowanym (i-niezdominowanym)** gracza $i \in N$ w problemie (S, d), jeśli

$$Proj^i(S) \cap (Proj^i(x^i) + C \backslash \{0\}) = \emptyset,$$

gdzie: $Proj^i(\cdot)$ oznacza projekcję z przestrzeni $\mathbb{R}^M$ na przestrzeń kryteriów $\mathbb{R}^{k^i}$ gracza i, tzn. $Proj^i(x) = x_i$, $Proj^i(S) = \{x_i : x \in S\}$, a C jest dodatnim stożkiem w przestrzeni $\mathbb{R}^{k^i}$.

Punkt $x^i \in S$ nazywamy **słabo indywidualnie niezdominowanym (słabo i-niezdominowanym)** gracza $i \in N$ w problemie (S, d), jeśli

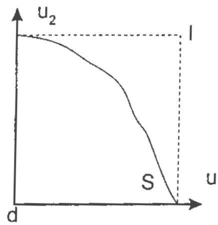
$$Proj^i(S) \cap (Proj^i(x^i) + int(C)) = \emptyset.$$

□

Definicja 3.2
Punkt $u \in I\!R^M$ nazywamy **punktem względnej utopii** w problemie (S, d) jeśli dla każdego gracza $i \in N$ istnieje i-niezdominowany punkt $x^i \in S$ taki, że $Proj^i(u) = Proj^i(x^i)$.

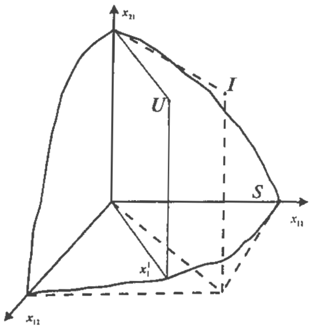
Punkt $u \in I\!R^M$ nazywamy **punktem słabej względnej utopii** w problemie (S, d) jeśli dla każdego gracza $i \in N$ istnieje słabo i-niezdominowany punkt $x^i \in S$ taki, że $Proj^i(u) = Proj^i(x^i)$.

Punkt $I(S, d) = (I_1, \ldots, I_n) \in I\!R^M$, $I_i = (I_{i1}, \ldots, I_{ij}, \ldots, I_{ik^i}) \in I\!R^{k^i}$ nazywamy **punktem idealnym** w problemie (S, d) jeżeli dla każdego $i \in N$, $I_{ij} = \max x_{ij} : x \in S$. □



Rysunek 3.6. Punkt idealny w klasycznym problemie targu

Relacje między punktami i-niezdominowanymi, punktem względnie utopijnym, oraz punktem idealnym zilustrowano na Rys. 3.6i Rys. 3.7. Na Rys. 3.6 podano przykład klasycznej gry



Rysunek 3.7. Punkt idealny i punkt względniej utopii w problemie wielokryterialnym

targu dla dwóch graczy, t.j. przypadek, gdy każdy gracz ma tylko jedno kryterium. Na Rys. 3.7 przedstawiono przykład gry, w której gracz pierwszy ma dwa kryteria x_{11}, x_{12}, natomiast gracz drugi ma tylko jedno kryterium x_{21}. Punkt idealny oznaczono przez I, a przykładowy punkt względnej utopii przez u. Zauważmy, że w klasycznym przypadku istnieje tylko jeden punkt względnej utopii tożsamy z punktem idealnym dla zbioru S. W przypadku gry wielokryterialnej mamy do czynienia z pewnym podzbiorem wypłat Pareto optymalnych osiągalnych przy założeniu wypłaty gracza 2 na poziomie jego punktu rezerwacji. Są to punkty indywidualnie niezdominowane gracza 1. Gracz 1 ma w tym przypadku możliwość wyboru jednego z punktów i-niezdominowanych w zależności od swoich preferencji. Wybór taki może być dokonywany przy użyciu metod optymalizacji wielokryterialnej.

Załóżmy, że w ogólnym przypadku każdy gracz $i \in N$ wybrał zgodnie ze swoimi preferencjami jeden z punktów i-niezdominowanych. Punkt względnej utopii stanowi "złożenie" puntów i-niezdominowanych poszczególnych graczy. W przypadku przedstawionym na Rys. 3.7 jest to "złożenie" punktu i-niezdominowanego gracza pierwszego: x_1^1 oraz punktu i-niezdominowanego gracza drugiego t.j. punktu x^2.

W ogólnym przypadku punkt względnej utopii różni się istotnie od punktu idealnego określonego przez maksymalne wartości poszczególnych kryteriów osiągalne w zbiorze S. Rzut punktu względnej utopii na przestrzeń kryteriów pojedynczego gracza jest osiągalny w odróżnieniu od punktu idealnego, którego odpowiednio rzut w przypadku gdy każdy gracz ma co najmniej dwa kryteria nie jest zwykle osiągalny. Punkt idealny zawsze słabo dominuje punkt względnej utopii. Punkt idealny wynika z natury problemu (modelu), natomiast punkt względnej utopii zależy także od wyborów (preferencji) graczy.

Zakładamy, że kryteria graczy są istotne. Ze względu na możliwą różnorodność preferencji graczy i w konsekwencji różnorodność wyborów punktów i-niezdominowanych, istnieje pewien zbiór punktów słabej względnej utopii. W dalszej części ograniczamy naszą uwagę do punktów słabej względnej utopii dominujących punkt braku porozumienia.

Oznaczmy przez $U(S, d)$ zbiór wszystkich punktów słabej względnej utopii u w grze (S, d) spełniających warunek $u \gg d$.

4

Aksjomatyczna charakteryzacja wybranych rozwiązań wielokryterialnego problemu targu

4.1 Koncepcja uogólnionego rozwiązania Raiffa-Kalai-Smorodinsky

Rozpatrzmy klasę problemów targu (S, d), oznaczoną przez B^*, które spełniają warunki **W 2.1**, **W 2.2**, **W 2.3**.

Analogiczne założenia były przyjęte przez Thomsona (1980) dla klasycznych gier, przy czym Thomson zakładał dodatkowo wypukłość zbioru S.

Definicja 4.1
Rozwiązaniem wielokryterialnego problemu targu jest funkcja $f : B^* \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^M$ która przyporządkowuje każdej grze $(S, d) \in B^*$ i każdemu punktowi względnej utopii $u \in U(S, d)$ pewien punkt ze zbioru porozumień S, oznaczony przez $f(S, d, u)$, gdzie $U(S, d)$ oznacza zbiór wszystkich punktów słabej względnej utopii $u \gg d$.
□

Poszukujemy rozwiązania $f(S, d, u)$, które powinno posiadać określone własności, formułowane w formie następującego zestawu aksjomatów:

A4.1.1. Słaba Pareto optymalność.

Punkt $f(S, d, u)$ jest słabo Pareto optymalny w zbiorze S.

A4.1.2. Niezależność od dodatnich, afinicznych transformacji kryteriów.

Niech $Tx = (T_1 x_1, \ldots, T_n x_n)$ będzie dowolną afiniczną transformacją, taką że $T_i x_i = (a_{ij} x_{ij} + b_{ij})_{j=1,\ldots,m^i}$, $a_{ij} > 0$, $i \in N$. Wtedy $f(TS, Td, Tu) = Tf(S, d, u)$.

A4.1.3. Anonimowość graczy i kryteriów.

Dla dowolnej permutacji Π na M, niech Π^* odpowiada permutacji w $\mathbb{R}^M$. Wtedy $\Pi^* f(S, d, u) = f(\Pi^*(S), \Pi^*(d), \Pi^*(u))$.

A4.1.4. Ograniczona monotoniczność.

Dla dowolnych (S, d), (S', d) oraz dowolnego $u \in U(S, d) \cap U(S', d)$, jeśli $S \subset S'$ to $f(S, d, u) \leq f(S', d, u)$.

Aksjomat **A4.1.1** opisuje racjonalność postępowania graczy. Z aksjomatu **A4.1.2** wynika, że rozwiązanie nie zależy od wyboru afinicznej miary przyporządkowanej poszczególnym kryteriom. Aksjomat **A4.1.3** oznacza, że rozwiązanie nie zależy od uporządkowania graczy i ich kryteriów, zależy tylko od postaci problemu i od preferencji graczy wyrażanych za pomocą punktu względnej utopii u. Aksjomat monotoniczności wymaga, aby wszyscy gracze odnieśli korzyści, a przynajmniej nie stracili w przypadku powiększenia zbioru porozumień, o ile punkt utopii nie ulegnie zmianie.

Twierdzenie 4.1

W klasie zagadnień przetargowych B^* istnieje jedno i tylko jedno rozwiązanie, oznaczone dalej przez f^R spełniające aksjomaty **A4.1.1, A4.1.2, A4.1.3, A4.1.4**. *Rozwiązanie to ma następującą postać:*

$$f^R(S, d, u) = d + h(S, d, u) * [u - d],$$

gdzie $(S, d) \in B^*$, $u \in U(S, d)$, *a* $h(S, d, u) = \max_{\geq}\{a \in I\!R : d + a(u - d) \in S\}$. ■

Dowód

Można łatwo pokazać, że funkcja f^R spełnia warunki **A4.1.1** – **A4.1.4**. Pokażemy, że rozwiązanie f^R jest jednoznaczne. Niech (S, d) będzie dowolną grą z klasy gier B^*, i niech u będzie względnym punktem utopii $u \in U(S, d)$. Pokażemy, że $x^* = f^R(S, d, u)$ jest rozwiązaniem gry (S, d) dla punktu względnej utopii u. Niech T będzie dodatnią transformacją odwzorowującą punkt braku porozumienia d w początek układu współrzędnych 0, a punkt u w punkt $\overline{u}$ taki, że $\overline{u}_{ij} = 1$ for $i \in N$, $j = 1, 2, \ldots, m^i$. Niech $T(S, d) = (TS, 0)$. Zauważmy, że punkt $\overline{x}^* = Tx^*$ ma równe współrzędne. Zdefiniujmy problem targu $(\overline{S}, 0)$, gdzie $\overline{S} = \{x \in TS$: dla każdej permutacji Π na N, punkt $y = \Pi^* x$ również należy do $TS\}$. Pokażemy, że $(\overline{S}, 0)$ należy do klasy B^*. Spełnienie warunku **W 2.1** jest oczywiste. Spełnienie warunku **W 2.2** wynika z faktu, że jeśli $x \in \overline{S}$, $d \leq y \leq x$ to dla każdej permutacji Π , punkt $\Pi^* x \in TS$, a więc także dla każdej permutacji Π punkt $\Pi^* y \in TS$. Wynika stąd, że $y \in \overline{S}$. Pokażemy spełnienie warunku **W 2.3**. Jeśli $x, y \in \overline{S}$ oraz $y \geq x$, $y \neq x$ to dla każdej permutacji Π punkty $x^\Pi = \Pi^* x$ i $y^\Pi = \Pi^* y$ należą do TS oraz $y^\Pi \geq x^\Pi$, $y^\Pi \neq x^\Pi$. Z warunku **W 2.3** dla $T(S, d)$ wynika, że dla każdej permutacji Π istnieje $v^\Pi \in TS$ taki, że $v^\Pi > x^\Pi$. Niech element $v \in I\!R^M$ będzie taki, że dla każdego $i \in N$, $j = 1, \ldots, m$, $v_{ij} = \min_\Pi v^\Pi_{\Pi(i)j}$. Punkt v należy do TS, $v > x$, a ponieważ dla każdej permutacji Π, $\Pi^* v \leq v^\Pi$, to $\Pi^* v \in TS$. Wynika stąd, że $v \in \overline{S}$ oraz $v > x$. Pokazaliśmy zatem, że $(\overline{S}, 0) \in B^*$. Łatwo zauważyć, że $(S_{\bar{,}}))$ jest grą symetryczną, a ponadto $\overline{S} \subset TS$,

$\overline{x} \in \overline{S}$, $\overline{u}$ jest punktem względnej utopii dla gry $(\overline{S}, 0)$. Z aksjomatów **A4.1** i **A4.3** wynika,że $f((\overline{S}, 0), \overline{u}) = \overline{x}^*$. Z aksjomatu monotoniczności wynika,że $f(T(S, d), \overline{u}) = \overline{x}^*$, a z aksjomatu **A4.2**: $f((S, d), u) = T^{-1}\overline{x}^* = x^*$.

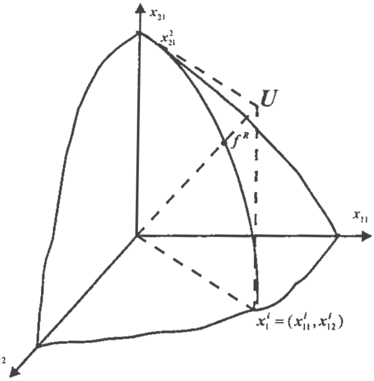
◊

Twierdzenie zostało wcześniej podane w pracy (Kruś, Bronisz, 1993).

Koncepcję rozwiązania f^R zilustrowano na Rys. 4.1. Przedstawiono na nim grę targu dla dwóch graczy, z których pierwszy ma dwa kryteria oznaczone odpowiednio x_{11}, y_{12} a gracz drugi ma tylko jedno kryterium x_{21}. Punkt braku porozumienia d odpowiada początkowi układu współrzędnych. Przyjmijmy, że x_1^1 jest niezdominowanym punktem gracza pierwszego, wybranym zgodnie z jego preferencjami ze zbioru wszystkich jego punktów niezdominowanych odpowiadających wypłacie gracza drugiego na poziomie punktu d. Niezdominowany punkt gracza drugiego odpowiada wartości jego maksymalnej wypłaty x_{21}^2. Punkt względnej utopii oznaczono przez u, a punkt odpowiadający rozwiązaniu przez f^R. Zauważmy, że punkt ten leży na przecięciu linii łączącej punkt braku porozumienia i punkt względnej utopii z brzegiem Pareto zbioru porozumień S.

W przypadku klasycznej gry targu, t.j. gdy każdy gracz ma tylko jedno kryterium, istnieje tylko jeden punkt względnej utopii odpowiadający punktowi idealnemu, a zatem rozwiązanie f^R jest w tym przypadku tożsame z koncepcją rozwiązania Raiffa (1953), scharakteryzowanego aksjomatycznie przez Kalai i Smorodinsky'ego (1975).

Rozpatrzmy klasę gier B. Oznaczmy przez $x^i \in S$ niezdominowany punkt wybrany przez gracza i, $i = 1, 2, \ldots n$, a przez $u \in I\!R^M$ generowany przez punkty $x^1, x^2, \ldots, x^n$, punkt względnej utopii.



Rysunek 4.1. Konstrukcja uogólnionego rozwiązania Raiffa-Kalai-Smorodinsky

Przeprowadźmy przez punkty $d, x^1, x^2, \ldots, x^n$ n-wymiarową hiperpłaszczyznę H^n. Każdy punkt $x \in H^n$ można jednoznacznie przedstawić w postaci:

$$x = d + a_1(x^1 - d) + a_2(x^2 - d) + \cdots + a_n(x^n - d).$$

Oznaczmy przez A odwzorowanie z H^n w $I\!R^n$ określone przez $A(x) = A[d + a_1(x^1 - d) + a_2(x^2 - d) + \cdots + a_n(x^n - d)] = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Rozpatrzmy na hiperpłaszczyźnie H^n, n osobową grę targu $(A(S^H), A(d))$, gdzie zbiór $S^H = S \cap H^n$. W grze tej każdemu graczowi odpowiada tylko jedno kryterium. Pokażemy związek między rozwiązaniem Raiffa w tak sformułowanej grze (oznaczonym przez r^n) a rozwiązaniem f^R w wielokryterialnej grze (S, d).

Twierdzenie 4.2

W klasie wielokryterialnych gier targu B^* spełniona jest własność:

$$A[f^R((S,d),u)] = r^n(A(S^H), A(d)).$$

■

Przedstawiony w twierdzeniu zapis oznacza, że jeśli w wielokryterialnej grze targu (S, d) ograniczymy rozważania do wypłat na hiperpłaszczyźnie określonej przez punkt braku porozumienia d i przez wybrane przez graczy ich słabo niezdominowane wypłaty, to koncepcja rozwiązania f^R gry (S, d) odpowiada koncepcji rozwiązania Raiffa gry sformułowanej na tej hiperpłaszczyźnie.

Dowód

Z założenia **W 2.2** wynika, że każdy słabo niezdominowany punkt x^i gracza i, $i \in N$, ma postać: $x^i_j = d_j$ dla $j \in N$, $j \neq i$. W związku z tym, każdy punkt $x \in H^n$ można przedstawić w postaci

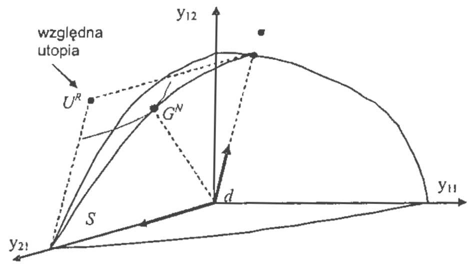
$$x = d + a_1(x^1 - d) + a_2(x^2 - d) + \cdots + a_n(x^n - d)$$

a odwzorowanie A ma postać $A(x) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Odwzorowanie A normalizuje grę targu określoną na hiperpłaszczyźnie H^n, t.j. gra (AS^H, Ad) ma punkt braku porozumienia $Ad = (0, 0, \ldots 0)$, oraz punkt idealny $I = (1, 1, \ldots 1)$. Zachodzą następujące relacje: $r^n((AS^H, Ad) = \max_{\geq}\{a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A(S^H) : a = A(d) + h(I - A(d)$ dla pewnego $h \in I\!R_+\} = \max_{\geq}\{a \in A(S^H) : a = h * 1$ dla pewnego $h \in I\!R_+\} = A[\max_{\geq}\{x \in S : x = d + h(u - d)\}] = A[f^R((S, d), u)]$.

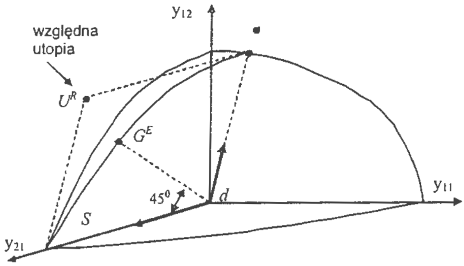
◊

Thomson (1980) przedstawił charakteryzację klasycznego rozwiązania Raiffa dla n osobowych gier targu. Twierdzenia 4.1 i 4.2 uogólniają wyniki Thomsona na przypadek wielokryterialnych zagadnień przetargowych. Charakteryzacja uogólnionego rozwiązania Raiffa-Kalai-Smorodinsky została pokazana przy osłabionych założeniach, t.j. bez wymagania wypukłości zbioru porozumień.

Na hiperpłaszczyźnie H^n można skonstruować inne rozwiązania stanowiące uogólninia propozycji określonych dla klasycznj gry



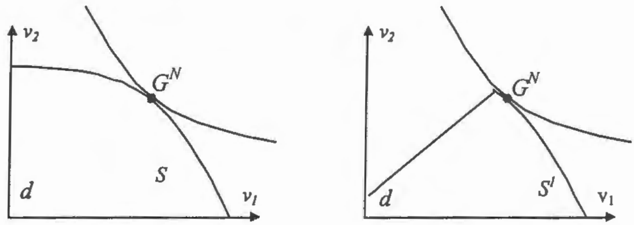
Rysunek 4.2. Konstrukcja uogólnionego rozwiązania Nash'a



Rysunek 4.3. Konstrukcja uogólnionego rozwiązania egalitarnego

targu. Przykłady przedstawiające konstrukcję uogólnionego rozwiązania Nash'a oraz rozwiązania egalitarnego przedstawiono na odpowiednio na Rys. 4.2 i Rys. 4.3. Strzałki zaznaczone na tych rysunkach oznaczają kierunki poprawy wypłat prowadzące do wybranego punktu i-niezdominowanego gracza 1 w przestrzeni jego kryteriów y_{11}, y_{12} i punktu i-niezdominowanego gracza 2. W przypadku gracza 2 jest to maksymalna osiągalna wypłata na osi kryterium y_{21}.

Rozwiązanie egalitarne określone jest jako punkt Pareto optymalny w zbiorze S zapewniający równe przyrosty wypłat na hiperpłaszczyźnie H^n. Rozwiązanie to spełnia aksjomaty: słabej Pareto optymalności, symetrii, silnej monotoniczności.



Rysunek 4.4. Ilustracja aksjomatu niezależności rozwiązania Nash'a od nieistotnych alternatyw

Rozwiązanie kooperacyjne Nasha określone jest jako punkt zbioru S maksymalizujący iloczyn przyrostu wypłat na hiperpłaszczyźnie H^n. Punkt ten spełnia aksjomaty Pareto optymalności, niezależności od afinicznych przekształceń użyteczności, niezależności od nieistotnych alternatyw, symetrii. aksjomat niezależności od nieistotnych alternatyw jest przedmiotem dyskusji. Na Rys. 4.4 przedstawia się konstrukcję rozwiązania Nash'a dla dwóch różnych zbiorów porozumień. W drugim przypadku osiągalne wypłaty gracza 2 są istotnie ograniczone, natomiast rozwiązanie Nasha jest w obu przypadkach takie same. Powstaje pytanie czy jest to uczciwe. Wady tej nie ma uogólnione rozwiązanie Raiffa-Kalai-Smorodinsky.

4.2 Koncepcja uogólnionego rozwiązania leksykograficznego

Uogólnione rozwiązanie Raiffa-Kalai-Smorodinsky może w szczególnym przypadku należeć do zbioru rozwiązań słabo Pareto optymalnych w zbiorze porozumień S. Oznacza to, że wypłaty niektórych graczy są słabo niezdominowane i że niektóre kryteria można poprawić bez pogorszenia innych, w tym innych kryteriów pozostałych graczy. Powstaje możliwość porawy takiego rozwiązania do rozwiązania, które jest niezdominowane w zbiorze S. Takie poprawienie rozwiązania słabo niezdominowanego jest możliwe z zastosowaniem porządku leksykograficzengo oraz sformułowania i rozwiązania odpowiedniego zadania optymalizacji.

Koncepcję rozwiązania leksykograficznego maxmin-u formułujemy następująco:
Dla dowolnego problemu $(S, d) \in B^*$ i $u \in U(S, d)$ niech $L^N : I\!R^M \rightarrow I\!R^M$ będzie przekształceniem liniowym takim, że

$$L_i^N(x_i) = (x_i - d_i)/(u_i - d_i) \qquad \text{dla } i \in M.$$

Przekształcenie to normalizuje problem, tzn. $L^N(d) = (0, 0, \ldots, 0)$ oraz $L^N(u) = (1, 1, \ldots, 1)$.

Niech $\rangle^{lex}$ oznacza leksykograficzny porządek w $I\!R^M$, tzn. dla dowolnych $x, y \in I\!R^M$, $x\rangle^{lex}y$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje $i \in M$ takie, że $x_i > y_i$ oraz $x_j = y_j$ dla $j < i$. Niech $P : I\!R^M \rightarrow I\!R^M$ będzie przekształceniem takim, że dla dowolnego $x \in R^M$ istnieje permutacja π na M spełniająca $P(x) = \pi^* x$ oraz $P_1(x) \leq P_2(x) \leq \cdots \leq P_n(x)$. Rozwiązanie leksykograficznego maxmin-u ma postać $f^L(S, d, u) = \{x \in S : P(L^N(x))\rangle^{lex} P(L^N(y))$ dla każdego $y \in S\}$.

Można pokazać, że powyższa konstrukcja daje jednoznaczne rozwiązanie, a także podać sposób jego uzyskania.

Dla $y \in S$ niech $v(S,d,u,y) \in \mathbb{R}^M$ będzie wektorem spełniającym następujące warunki:

$$v_i(S,d,u,y) = u_i - d_i \text{ dla } i \in J(S,d,u,y)$$

$$v_i(S,d,u,y) = 0 \text{ dla } i \in M \backslash J(S,d,u,y).$$

oraz niech $x(S,d,u,y)$ będzie punktem w S takim. że $x(S,d,u,y) = \max_{\geq}\{x \in S : x = y + av(S,d,u,y) \text{ dla } a \in \mathbb{R}\}$. Dla danego problemu (S,d) i danego $u \in U(S,d)$ wprowadźmy następujący nieskończony ciąg punktów w S, $\{x^t\}_{t=0}^{\infty}$ spełniający następujące własności: $x^0 = d$, oraz $x^t = x(S,d,u,x^{t-1})$ dla $t = 1,2,\ldots$ Wtedy istnieje liczba T taka, że $x^T = x^{T+1}$, $T \leq M-1$, oraz $x^T = f^L(S,d,u)$. Ponadto $x^1 = f^R(S,d,u)$.

Intuicyjnie, rozwiązanie to uzyskujemy w następujący iteracyjny sposób: startujemy z punktu d i poruszamy się w kierunku $u-d$ dopóki jest to możliwe w zbiorze S. Po osiągnięciu punktu brzegowego, zerujemy te składowe w wektorze $u-d$ dla których niemożliwa jest poprawa uzyskanego punktu i poruszamy się w tym kierunku dopóki jest to możliwe. Czynność tą powtarzamy, aż uzyskamy punkt w S którego poprawa w dowolnym kierunku jest niemożliwa. (w tym przypadku odrzuciliśmy warunek wypukłości zbioru S, ale na mocy założenia **W 2.3** taka poprawa jest możliwa, co gwarantuje nam osiągniecie punktu ściśle Pareto optymalnego).

Wprowadźmy w miejsce aksjomatu **A4.1** następujący aksjomat:

A4.1*. Pareto optymalność.

Punkt $f(S,d,u)$ jest Pareto optymalny w zbiorze S.

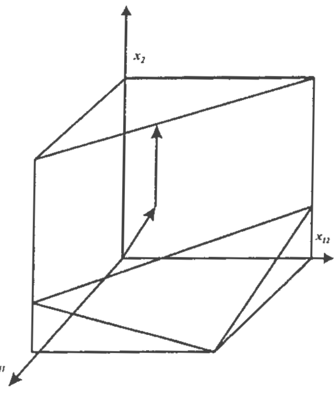
Twierdzenie 4.3

Zaproponowane rozwiązanie leksykograficzne jest jednoznaczne w *klasie problemów targu* B^**, ponadto podany algorytm wyznacza to rozwiązanie w sposób jednoznaczny. Rozwiązanie spełnia aksjomaty* **A4.1***, **A4.2**, **A4.3**. ■

Dowód.

Niech (S, d) będzie dowolnym problemem targu z klasy B^*. Niech $u \in U(S, d)$. Ponieważ zbiór S jest niepusty i zwarty, a funkcje P i L są ciągłe, to $f^L(S, d, u)$ istnieje. Jednoznaczność wynika z warunku **W2.3**. Jeśli $x \in f^L(S, d, u)$, $y \in f^L(S, d, u)$, $x \neq y$, to istnieje $z \in f^L(S, d, u)$ spełniające $P(L(z)))^{lex}P(L(x))$, co stanowi sprzeczność. Łatwo można pokazać, że funkcja f^L spełnia aksjomaty **A4.1***, **A4.2** i **A4.3**. ◊

Przedstawiona propozycja jest uogólnieniem na przypadek wielokryterialnych wypłat graczy - koncepcji, którą Imai (1983) zaproponował w przypadku klasycznego problemu targu, jako rozwiązanie tzw. leksykograficznego maxmin-u.



Rysunek 4.5. Konstrukcja rozwiązania leksykograficznego

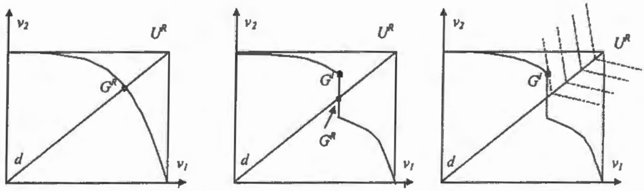
Zamieszczony niżej przykład (Rys.4.5) ilustruje konstrukcję uogólnionego rozwiązania Imai. Podobnie jak w poprzednich ilustracjach rozpatrywany jest problem targu, w którym gracz pierwszy ma dwa kryteria: odpowiednio x_{11}, x_{12}, natomiast gracz drugi ma tylko jedno kryterium x_2. Zbiór porozumień określony jest następująco:

$x_2 \leq 1$,

$x_{11} + x_{12} \leq 1$ dla $x_2 \geq 1/3$, oraz

$x_{11} + x_{12} + 3x_2 \leq 2$ dla $x_2 \leq 1/3$.

W podanym przykładzie, $f^L(S, d, u) = (1/2, 1/2, 1)$. Uzyskujemy tą wartość w sposób następujący: najpierw poruszamy się w kierunku $(1, 1, 1)$ uzyskując punkt $(1/2, 1/2, 1/2)$, następnie poruszamy się w kierunku $(0, 0, 1)$ uzyskując rozwiązanie leksykograficznego maxminu. Jak można zauważyć rozwiązanie Raiffa-Kalai-Smorodinsky jest pierwszym "przybliżeniem" rozwiązania leksykograficznego maxminu w podanej konstrukcji. Rozwiązanie leksykograficznego maxminu f^L pokrywa się z rozwiązaniem Raiffa-Kalai-Smorodinsky f^R, jeżeli $f^R(S, d, u)$ jest punktem Pareto-optymalnym.



Rysunek 4.6. Wyznaczanie rozwiazania leksykograficznego z zastosowaniem funkcji skalaryzującej

Na Rys. 4.6 przedstawiono uogólnione rozwiązania Raiffa-Kalai-Smorodinsky i rozwiązanie leksykograficzne w dwuwymiarowej hiperpłaszczyżnie określonej przez i-niezdominowane punkty wybrane przez dwóch graczy. Na pierwszym rysunku, w przypadku wypukłego zbioru S oba rozwiązania są tożsame. Na rysunku drugim pokazano jak rozwiązanie leksykograficzne poprawia słabo Pareto optymalne rozwiązanie Raiffa-Kalai-Smorodinsky do rozwiązanie Pareto optymalnego w zbiorze S. Na rysunku trzecim pokazano także izolinie funkcji skalaryzującej

$$s(v, U^R) =$$
$$\min_{1 \leq i \leq n} \left[a_i(v_i - U_i^R)/(U_i^R - d_i)\right] + a_{n+1} \sum_{i=1}^{n} a_i(v_i - U_i^R)/(U_i^R - d_i),$$

gdzie $U^R \in R^M$, jest punktem względnej utopii na hiperpłaszczyźnie H^n, a_i są dodatnimi, znormalizowanymi wagami dla $i = 1, \ldots, n$, a $a_{n+1} > 0$ jest małym parametrem. Jeśli $a_{n+1} \rightarrow 0_+$, to maksymalizacja tej funkcji dla $y \in S$ prowadzi do rozwiązania leksykograficznego. W pracy (Kostreva, Ogryczak, Wierzbicki, 2004) przedstawia się, jak porządek leksykograficzny może być wykorzystany do wyznaczania rozwiązań niezdominowanych w zdaniach optymalizacji wielokryterialnej oraz relacje tego podejścia z zastosowaniem odpowiednich funkcji skalaryzujących.

4.3 Właściwość ciągłości

Przy porównaniu uogólnionego rozwiązania Raiffa-Kalai-Smorodinsky i rozwiązania leksykograficznego istotna jest właściwość ciągłości rowiązań wielokryterialnego zagarnienia targu. wprowadźmy dodatkowo aksjomat ciągłości.

Definicja 4.2
Rozwiązanie wielokryterialnego zagadnienia przetargowego spełnia **warunek ciągłości**, jeśli dla dowolnego ciągu problemów przetargowych $\{(S_j, d)\}_{j=1}^{\infty}$, $(S_j, d) \in B$ zbieżnego do problemu $(S, d) \in B$, oraz dla dowolnego ciągu punktów $u^j \in U(S_j, d)$ zbieżnego do punktu $u \in U(S, d)$ (w topologii Hausdorffa) zachodzi $\lim_{j \to \infty} f(S_j, d, u^j) = f(S, d, u)$. □

Aksjomat ciągłości stanowi proste uogólnienie aksjomatu ciągłości podawanego w literaturze klasycznego problemu targu.

Definicja 4.3
Mówimy, że rozwiązanie wielokryterialnego problemu przetargowego jest ciągłe ze względu na aspiracje graczy, jeśli dla dowolnego ciągu punktów referencyjnych $\{y_i^{rt}\}_{t=1}^{\infty}$ dla $i = 1, 2, \ldots n$ takich, że gdy t dąży do nieskończomości y_i^{rt} jest zbieżne do y_i^r dla wszystkich $i = 1, 2, \ldots, n$, spełnione jest, że $G(S, d, u(y^{rt}))$ jest zbieżne do $G(S, d, u(y^{rt}))$, gdzie $y^{rt} = (y_1^r, y_2^r, ..., y_2^r)$. □

Twierdzenie 4.4
Jeśli zbiór porozumień S jest zwarty, wypukły, komprechensywny oraz istnieje punkt $x \in S$ dominujący punkt status-quo d,

wtedy

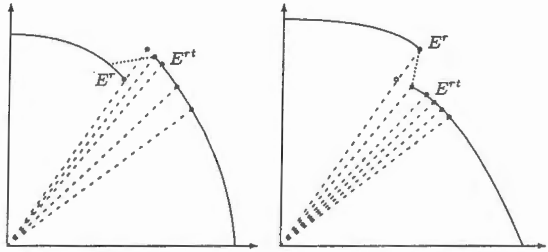
- *uogólnione rozwiązanie wielokryterialne zgodne z koncepcją Raiffa, Kalai, Smorodinsky ,*
- *wielokryterialne rozwiązanie zgodne z koncepcją rozwiązania Egalitarnego,*

są ciągłe ze względu na aspiracje graczy w wielokryterialnym problemie przetargowym. ■

Dowód.

Rozpatrzmy najpierw koncepcję rozwiązania egalitanego i ciąg punktów referencyjnych , y_i^{rt} zbieżny do y_i^r, określony dla wszystkich $i = 1, 2, \dots, n$. Dla każdego t, na punktach y_i^{rt}, $i = 1, 2, \dots, n$, i punkcie status quo d można zbudować hiperpłaszczyznę H^{rt} w podobny sposób, jak to przedstawiono w Twierdzeniu 4.2. Na każdej z tych hiperpłaszczyzn rozwiązanie egalitarne E^{rt} jest zdefiniowane jako przecięcie linii prostej równych wypłat z brzegiem wypłat Pareto optymalnych zbioru S. Przyjmijmy, że ten ciąg $\{E^{rt}\}_t$ nie zbiega do E^r, gdzie E^r jest rozwiązaniem egalitarnym dla punktów referencyjnych y_i^r, $i = 1, 2, \dots, n$. Oznacza to, że ten ciąg zbiega do punktu leżącego na linii prostej łączącej punkt d z punktem E^r, ale w punkcie mniej lub bardziej odległym od d niż punkt E^r (co pokazano na następującym rysunku). Jeśli ten ciąg zbiega do punktu niżej, to można zbudować odcinki łączące punkt E^r z punktami E^{rt}. Odcinki te musiałyby zawierać punkty nie należące do zbioru S. Jest to sprzeczne z założeniem wypukłości zbioru S. Analogiczna sprzeczność zachodzi, jeśli ciąg $\{E^r t\}_t$ zbiegałby do punktu dalszego niż cE^r. Odcinki te można zbudować w sposób pokazany z prawej strony rysunku. Oznacza to, że ciąg $\{E^{rt}\}_t$ zbiega w granicy do punktu E^r.

Niech w przypadku uogólnionego rozwiązania Raiffa-Kalai-Smorodinsky (R-K-S) $\hat{y}_i^{rt}$ i $\hat{y}_i^r$ oznaczają niezdominowane punkty zbioru S odpowiadające punktom referencyjnym y_i^{rt} i y_i^r, gdzie i oznacza numer gracza. W przestrzeni kryteriów gracza i konstruujemy linię prostą łączącą punkt d z punktem referencyjnym y_i^{rt}. Niezdominowany punkt wypłaty gracza i określony jest przez przecięcie tej linii z brzegiem pareto optymalnych wypłat zbioru S w przestrzeni kryteriów tego gracza. Ponieważ projekcja zbioru wypukłego na hiperpłaszczyznę jest zbiorem wypukłym, podobnie jak w przypadku rozwiązania egalitarnego, można pokazać, że ciąg



Rysunek 4.7. Ilustracja do dowodu właściwości ciągłości

$\{\hat{y}_i^{rt}\}_t$ zbiega do punktu $\hat{y}_i^r$. Zatem ciąg punktów względnej utopii zbiega do punktu $\{U^{rt}\}_t$ zbiega do punktu U^r. Konstruujemy linie proste łączące punkt d z punktami U^{rt} i oznaczmy odpowiednio punkty uogólnionego rozwiązania R-K-S jako G^{rt}. Każde rozwiązanie R-K-S jest określone jako przecięcie danej linii z brzegiem Pareto optymalnych wypłat zbioru S. Postępując w analogiczny sposób, jak w przypadku rozwiązania egalitarnego, pokazuje się, że ciąg punktów $\{G^{rt}\}_t$ zbiega w granicy do punktu G^r.

◊

Właściwość ciągłości jest istotna z punktu widzenia systemów wspomagania decyzji w zastosowaniu do problemów praktycznych. Budowany model zawsze stanowi tylko przybliżenie problemu rzeczywistego. Właściwość ciągłości zapewnia, że gdy konstrukcja modelu jest bliższa rzeczywistości to również rozwiązanie wyznaczone dla tego modelu jest bliższe rozwiązaniu odpowiadającemu problemowi rzeczywistemu. Przy rozpatrywaniu interakcyjnych algorytmów rozwiązania, spełnienie tej własności przez rozwiązanie umożliwia pokazanie zbieżności danego algorytmu.

4.4 Podsumowanie

Przedmiotem tego rozdziału jest sformułowanie wielokryterialnego problemu decyzyjnego jako zagadnienia przetargowego oraz koncepcja jego rozwiązań. Zagadnienie to stanowi model matematyczny opisujący problem współpracy kilku decydentów podejmujących decyzje przy wielokryterialnych celach. Proponowane rozwiązania stanowią uogólnienie rozwiązań klasycznych gier targu na przypadek wielokryterialny. Pokazano własności i przeprowadzono analizę proponowanych rozwiązań. Rozwiązania te ze względu na swoje własności mogą stanowić podstawę do określania propozycji mediacyjnych przedstawianych decydentom do analizy.