306/2007

Raport Badawczy
Research Report

RB/28/2007

Koncepcje propozycji mediacyjnych w wielokryterialnym zagadnieniu przetargowym

L. Kruś

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences

POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 8373578

fax: (+48) (22) 8372772

Kierownik Pracowni zgłaszający pracę:
Prof. dr inż. Roman Kulikowski

Warszawa 2007

Koncepcje propozycji mediacyjnych w wielokryterialnym zagadnieniu przetargowym

Lech Kruś
Instytut Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa
e-mail: krus@ibspan.waw.pl

Warszawa, 2007

1 Wprowadzenie

W pracy rozpatrywane są zagadnienia kooperacji, w których kilku decydentów analizuje możliwość realizacji wspólnego przedsięwzięcia. Ogólny problem dotyczy sposobu podziału między tych decydentów korzyści z tego przedsięwzięcia. Każdy z decydentów może mieć inny wektor kryteriów, według których ocenia efekty przedsięwzięcia oraz inne preferencje wyboru odnoszące się do tych kryteriów. Problem formułowany jest w pracy jako wielokryterialne zagadnienia przetargowe, w którym analiza wyplat decydentów jest dokonywana w przestrzeni będącej iloczynem kartezjańskim przestrzeni kryteriów poszczególnych decydentów. Rozpatrywane są różne rozwiązania tego zagadnienia, stanowiące uogólnienie rozwiązań proponowanych wcześniej w klasycznych grach targu, w których wyplaty decydentów - traktowanych jako graczy analizowane były w przestrzeni ich użyteczności. Rozwiązania klasyczne nie przenoszą się na przypadek wielokryterialny w sposób prosty. W przypadku podejścia funkcji użyteczności zakłada się, że te funkcje właściwie opisują preferencje decydentów, zakładając wcześniejsze skalowanie tych funkcji zgodnie z odczuciami decydentów. W przypadku podejścia wielokryterialnego, stosuje się interakcyjne mechanizmy analizy, prowadzące do wyboru rozwiązań niezdominowanych, zgodnych z preferencjami decydentów.

W pracy proponuje się rozwiązania wielokryterialnego zagadnienia przetargowego, wprowadzając pojęcia punktów indywidualnie niezdominowanych poszczególnych decydentów oraz pojęcie punktu względniej utopii. Zakłada się, że punkty indywidualnie niezdominowanych określane są przez każdego z decydentów, po przeprowadzeniu wielokryterialnej analizy w jego przestrzeni kryteriów i wybrane są zgodnie z ich preferencjami. Pojęcie punktu względnej utopii istotnie różni się od klasycznego pojęcia punktu idealnego (punktu utopijnego) w wielokryterialnej przestrzeni wypłat wszystkich decydentów. Punkt idealny (utopijny) zależy tylko od kształtu zbioru osiągalnych wypłat. Punkt względniej utopii istotnie zależy także od preferencji wyborów decydentów.

Praca zawiera podsumowanie i rozwinięcie wyników badań przedstawianych we wcześniejszych publikacjach: Bronisz, Kruś (1988), Bronisz, Kruś, Wierzbicki (1989), Kruś, Bronisz, Łopuch (1990), Kruś (1991), Kruś, Bronisz (1993), Kruś (1996, 2002, 2004).

Załączona literatura zawiera także prace poświęcone wybranym zagadnieniom -

teorii gier: Nash (1950, 1953), Raiffa (1953), Kalai, Smorodinsky, (1975), Harsanyi, Selten, (1972), Roth (1979a, b), Roth, Malouf (1979), Thomson (1980), Imai (1983), Krus, Bronisz (1994, 1995, 2000),

wielokryterialnego wspomagania decyzji: Hwang, Masud, Paidy, Yoon (eds) 1979), Wierzbicki (1982, 1983), Chankong, Haims (1983), Sawaragi, Nakayama, Tanino (1985), Roy, Słowiński(1990), Grauer, Thompson, Wierzbicki (eds) (1985), Steuer (1986) Galas, Nykowski, Żółkiewski (1987), Kręglewski, Paczynski, Granat, Wierzbicki (1988), Rogowski, Sobczyk, Wierzbicki (1986, 1988), Kaliszewski (1994), Trzaskalik (1998), Wierzbicki, Makowski, Wessels (2000), Kostreva, Ogryczak, Wierzbicki (2004),

wielokryterialnym modelom współpracy międzynarodowej i ich analizie: Ameliańczyk (1979), Piasecki, Hołubiec, Ameliańczyk (1982),

systemom komputerowego wspomagania negocjacji i decyzji grupowych: Goeltner (1987), Jarke, Jelassi, Shakun (1987), Kersten (1985, 1988), Korhonen , Moskowitz , Wallenius, Zionts (1986), , Gallupe (1987), Shakun (1988), Nunamaker, Applegate, Konsynsky (1988), Korhonen. Wallenius, (1989), Krus, Lopuch, Bronisz (1989), Krus, Bronisz, Lopuch (1990), Kruś, Lopuch (1989), Nyhart, Samarasan (1989), Wierzbicki, A. P., L. Krus, M. Makowski (1993), DeSanctisTeich, Wallenius, Kuula, Zionts (1995),

idei funkcji użyteczności i jej zastosowaniom: Luce, Raiffa, (1957), Kulikowski (2000, 2003a, 2003b, 2004a, 2004b), Słowiński, Greco, Matarazzo (2002), Kruś (2002a, 2004a, 2004b),

analizie i modelom negocjacji: Barclay S., Peterson C (1976), Raiffa (1982), Axelrod R., (1985), Wierzbicki (1985, 1987, 1990), Kersten, Szapiro (1986), Kersten, Michalowsky, Matwin, Szpakowicz (1988).

2 Sformułowanie wielokryterialnego problemu decyzyjnego

Proponowany opis zagadnienia kooperacji stanowi rozszerzenie klasycznego problemu targu, w którym uczestniczy n decydentów. Oznaczmy ich zbiór przez $N = \{1, 2, \dots n\}$. Każdy decydent ma określone zmienne decyzyjne, oznaczone przez wektor $z_i = (z_{i1}, z_{i2}, \dots z_{ik^i})$, tj. $z_i \in I\!R^{k^i}$, gdzie k^i jest liczbą zmiennych decyzyjnych decydenta $i \in N$, $I\!R^{k^i}$ jest przestrzenią jego decyzji. Wektor zmiennych decyzyjnych wszystkich decydentów oznaczamy przez: $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in I\!R^K$, $K = \sum_{i \in N} k^i$, gdzie $I\!R^K$ jest iloczynem kartezjańskim przestrzeni decyzji poszczególnych decydentów.

Zakłada się, że każdy decydent ma określony wektor kryteriów, mierzący jego wypłaty, przy pomocy których ocenia swoje wyniki współpracy. Oznaczmy wektor kryteriów przez $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots x_{im^i}, \; x_i \in I\!R^{m^i})$, gdzie m^i jest liczbą kryteriów decydenta i, a $I\!R^{m^i}$ jest przestrzenią jego kryteriów. Wektor kryteriów wszystkich decydentów oznaczamy: $x = (x_1, x_2, \dots x_n) \in I\!R^M$, $M = \sum_{i \in N} m^i$. $I\!R^M$ jest iloczynem kartezjańskim przestrzeni kryteriów poszczególnych decydentów $I\!R^{m^i}$ gdzie $i \in N$.

Zakładamy, że dany jest model pozwalający wyznaczyć wypłaty decydentów, to jest wartości ich wektorowych kryteriów, przy założonych zmiennych decyzyjnych. Formalnie, zakładamy, że model ten dany jest przez określony zbiór dopuszczalnych decyzji Z_0, oraz przez odwzorowanie W z przestrzeni zmiennych decyzyjnych w przestrzeń kryteriów. Przyjmujemy, że zbiór $Z_0 \subset I\!R^K$ jest zwarty, a odwzorowanie $W : Z_0 \to I\!R^M$ ciągłe. W tym przypadku zbiór osiągalnych wypłat $S_0 = W(Z_0)$ jest zwarty.

W przestrzeniach kryteriów wprowadzamy częściowy porządek. Niech $I\!R^k$ oznacza pewną arbitralną przestrzeń kryteriów. Każde z kryteriów może być maksymalizowane lub minimalizowane. Jednakże dla uproszczenia notacji, bez straty ogólności przyjmujemy, że gracze maksymalizują swoje kryteria. Określamy **dodatni stożek**:

$$C = \{x \in I\!R^k, : x_i \geq 0, \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, k\},$$

Wprowadzamy trzy pojęcia dominacji w przestrzeni $I\!R^k$.

Mówimy, że element $x \in I\!R^k$ jest **silnie zdominowany** przez element $y \in I\!R^k$ (y **silnie dominuje** x), i oznaczamy $y \gg x$, $x, y \in I\!R^k$ jeśli $y \in x + int(C)$, gdzie $int(C)$ oznacza wnętrze zbioru C, $x + int(C) = \{z \in I\!R^k : z = x + v$, dla dowolnego $v \in int(C)\}$.

Mówimy, że element x jest **zdominowany** przez element y (y **dominuje** x) i oznaczamy: $y > x$ jeśli $y \in x + C \backslash \{0\}$, gdzie $C \backslash \{0\}$ oznacza zbiór C z wyłączeniem elementu $\{0\}$.

Mówimy, że element x jest **słabo zdominowany** przez element y (y **słabo dominuje** x) i oznaczamy: $y \geq x$ jeśli $y \in x + C$.

Zbiór wypłat Pareto optymalnych (niezdominowanych) w dowolnym zbiorze $Q \in I\!R^k$, określamy w sposób standardowy, jako zbiór:

$$\widehat{Q}_0 = \{\hat{x} \in Q : Q \cap (\hat{x} + C \backslash \{0\}) = \emptyset\}.$$

Zbiór wypłat słabo Pareto optymalnych (słabo niezdominowanych) określony jest jako zbiór:

$$\widehat{Q}^w = \{\hat{x} \in Q : Q \cap (\hat{x} + int(C)) = \emptyset\},$$

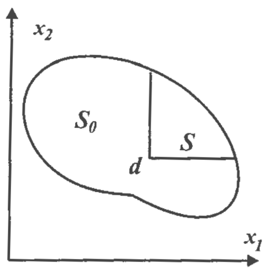
Pojęcie dominacji wprowadzone zostało dla pewnej arbitralnej przestrzeni kryteriów $I\!R^k$, ponieważ w zależności od toku rozważań może ona oznaczać przestrzeń kryteriów $I\!R^{k^i}$ pojedynczego decydenta i, lub też przestrzeń kryteriów wszystkich decydentów $I\!R^M$.

Przyjmijmy, że każdy decydent ma swój punkt rezerwacji $d_i \in I\!R^{m^i}$. Decydent rozpatrując możliwą współpracę, nie zgadza się na propozycje kooperacyjne, które pogarszały by chociaż jedną ze składowych tego punktu. W zależności od rozpatrywanego problemu, decydent może przyjąć ten punkt jako aktualny punkt status-quo, albo rozważając alternatywne przedsięwzięcia, określić go na podstawie koncepcji BATNA. Pojęcie koncepcji BATNA (Best Alternative to Negotiated Agreement) została wprowadzona w pracy

(Fisher, Ury 1979) i jest powszechnie stosowane w procesie przygotowania stron do negocjacji. W przypadku wyznaczania punktu rezerwacji na podstawie koncepcji BATNA, wymagana jest wstępna analiza wielokryterialna dokonywana niezależnie przez każdego decydenta, dotycząca możliwych do osiągnięcia wypłat z przedsięwzięć alternatywnych do rozpatrywanego problemu współpracy.

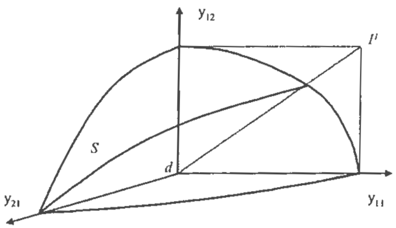
Można wówczas sformułować wielokryterialne zagadnienie przetargowe, jako parę (S, d). Element $d = (d_1, d_2, \dots, d_n) \in S \subset I\!R^M$ zwany jest punktem braku porozumienia. Zbiór S, zwany zbiorem porozumień jest podzbiorem zbioru osiągalnych wypłat $S \subsetneq S_0 \subset I\!R^M$, które dominują punkt d. Zbiór porozumień określa wypłaty osiągalne przez decydentów, które mogą oni uzyskać pod warunkiem porozumienia - zgody wszystkich decydentów. W przypadku braku takiej zgody, wypłaty decydentów określone są przez punkt d.

Przykład zbioru wypłat, zbioru porozumień i punkt rezerwacji przedstawione są na Rys. 1.



Rysunek 1: Zbiór porozumień i punkt braku porozumienia w klasycznym zagadnieniu przetargowym

Dla prostoty, przyjęto na tym rysunku, że każdy z dwóch decydentów ma tylko jedno kryterium, x_1 i x_2 odpowiednio. Natomiast na Rys. 2 przedstawiono przykład problemu wielokryterialnego, w którym decydent 1 ma dwa kryteria x_{11}, x_{12}, a decydent drugi ma kryterium x_{21}. Na rysunku tym zaznaczono również punkt idealny I^1 w dwukryterialnej przestrzeni wypłat decydenta 1. Punkt ten nie jest osiągalny, leży poza zbiorem S.



Rysunek 2: Przykład wielokryterialnego problemu przetargowego

Zauważmy, że dla danego punktu rezerwacji d zbiór porozumień określony jest jako zbiór osiągalnych wypłat, dominujących ten punkt $S = \{x \in S : x \in d + C\{0\}\}$. Wynika to z faktu, że racjonalny gracz nie zgodzi się na wypłaty gorsze niż określone przez punkt d. Zbiór porozumień S jest określony przez relacje modelu matematycznego. W ogólnym przypadku jego postać nie jest dana (znana) eksplicite. Wykorzystując model można natomiast wyznaczać punty tego zbioru dla danych wektorów zmiennych decyzyjnych $z_i \in \mathbb{R}^{k^i}, i = 1, \ldots, n$.

Wspomaganie podejmowania decyzji w zagadnieniu przetargowym polega na umożliwieniu decydentom dokonania analizy ich sytuacji decyzyjnej. Taka analiza powinna obejmować ocenę wypłat przy różnych założeniach dotyczących ich decyzji i decyzji pozostałych decydentów, pomocy w określeniu preferencji w przestrzeni wypłat, pomocy w znalezieniu przez decydentów rozwiązania niezdominowanego w zbiorze porozumień, zgodnego z ich preferencjami. Rozwiązanie to powinno spełniać zasady rzetelności ("fair play"), aby mogło być zaakceptowane jako rozwiązanie kooperacyjne.

Przedstawione sformułowanie jest rozszerzeniem klasycznej definicji problemu targu, którą podał Nash (1950). Problem ten w klasycznym sformułowaniu był przedmiotem badań tzw. aksjomatycznej teorii targu rozwijanej właśnie przez Nash'a, a następnie w pracach: (Raiffa, 1953), (Roth, 1979a,b), (Kalai, Smorodinsky, 1975), (Thomson, 1980) i przez wielu innych badaczy. W sformułowaniu klasycznym zakładano istnienie w jawnej postaci funkcji użyteczności poszczególnych decydentów, traktowanych jak graczy, co pozwalało agregować kryteria każdego gracza do jego użyteczności i rozpatrywać problem w przestrzeni jednowymiarowych użyteczności graczy. Metoda badawcza aksjomatycznej teorii targu polega na formułowaniu różnych założeń, zwanych aksjomatami, odnośnie zachowania się graczy w negocjacjach, a zwłaszcza ich odczuć dotyczących sprawiedliwych zasad wyznaczania rozwiązania i własności, które rozwiązanie to powinno spełniać, a następnie na wyszukiwaniu i analizowaniu rozwiązań spełniających te aksjomaty.

W niniejszej pracy problem targu formułowany jest w wielokryterialnej przestrzeni wypłat graczy, bez założenia agregacji tych kryteriów do użyteczności decydentów. To rozszerzenie definicji jest stosunkowo proste, jednakże koncepcje rozwiązań formułowane w klasycznej teorii targu, jak również i ich własności nie przenoszą się w prosty sposób na przypadek wielokryterialny. Przy braku założenia istnienia jawnie danej funkcji użyteczności, zakłada się jednak, że decydenci mają określone preferencje dotyczące wypłat w ich przestrzeniach kryteriów. W praktyce przy niepełnej wiedzy o sytuacji decyzyjnej, decydent może być nie w pełni świadomy swoich preferencji. Świadomość ta wzrasta w miarę poznawania istoty problemu, na podstawie oceny osiągalnych wypłat, wpływu decyzji na te wypłaty itp. Istnieje w związku z tym potrzeba zastosowania uczących, interakcyjnych mechanizmów pozwalających decydentom na analizę problemu, wyrażanie ich preferencji i poszukiwanie rozwiązań zgodnych z tymi preferencjami w ich przestrzeniach kryteriów. Proponuje się zastosowanie w tym celu podejść rozwijanych w ramach metod wielokryterialnego podejmowania decyzji. Jednakże, aby rozwiązanie mogło być zakceptowane przez wszystkich decydentów, powinno spełniać akceptowalne zasady rzetelności formułowane w postaci aksjomatów opisujących ich odczucia. Podejście aksjomatycznej teorii targu może ułatwić znalezienie odpowiednich koncepcji rozwiązań. W związku z tym wydaje się celowe połączenie obu tych podejść.

W dalszej części pracy rozpatruje się różne klasy wileokryterialnych problemów targu w zależności od spełnienia następujących warunków:

(W2.1) Zbiór porozumień S jest zwarty i istnieje element $x \in S$ dominujący element d.

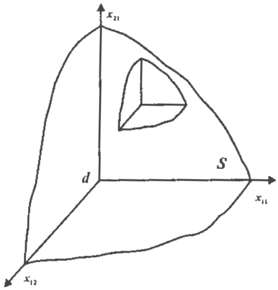
(W2.2) Zbiór S ma taką własność, że dla każdego $x \in S$ jeśli $y : d \leq y < x$ to $y \in S$. Właność tę nazywamy dalej komprechensywnością zbioru S (ang. comprehensiveness).

(W2.3) Dla każdego $x \in S$, niech $J(x) = \{j : y \geq x,\ y_j > x_j,\ j \in [1, M]$ dla pewnego $y \in S\}$. Wtedy dla każdego $x \in S$, istnieje $y \in S$ taki, że $y \geq x$, $y_j > x_j$ dla każdego $j \in J(x)$.

(W2.4) Zbiór S jest wypukły.

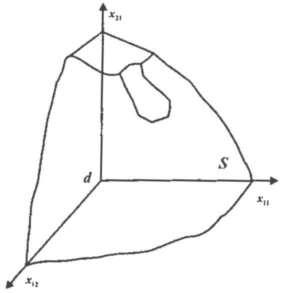
Oznaczmy przez B - klasę problemów targu spełniających warunki **W2.1** i **W2.2**, przez B^* - klasę problemów spełniających warunki **W2.1**, **W2.2**, **W2.3**, a przez B^{**}- odpowiednio warunki **W2.1**, **W2.2**, **W2.4** .

Założenia **W2.1**, **W2.2** i **W2.4** są typowo przyjmowane w klasycznej teorii targu. Założenie **W2.1** oznacza, że zbiór S jest ograniczony, domknięty i zawiera przynajmniej jeden element dominujący punkt braku porozumienia. Założenie **W2.2** stwierdza, że jeśli gracze mogą uzyskać wypłatę x mogą również osiągnąć każdą wypłatę gorszą od x (znane jest również w literaturze jako założenie dyspozycyjności wypłat).



Rysunek 3: Przykład zbioru porozumień nie spełniajcego założenia **W2.3**

Założenie **W2.3** stanowi osłabienie założenia wypukłości zbioru S. Zbiór $J(x)$ określa zbiór tych współrzędnych w przestrzeni $\mathbb{R}^M$, wzdłuż których mogą być powiększone wypłaty w porównaniu z punktem x w zbiorze porozumień S. Warunek stwierdza, że zbiór wypłat efektywnych zbioru S nie zawiera "dziur", dopuszcza jednak niewypukłość zbioru S. Każdy wypukły zbiór S spełnia warunek **W2.3**. Przykład zbioru porozumień w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ nie spełniającego tego założenia jest pokazany na Rys. 3, natomiast przykład zbioru niewypukłego, spełniającego ten warunek na Rys. 4. Warunek **W2.3** zapewnia spójność zbioru niezdominowanych wypłat w zbiorze S.



Rysunek 4: Przykład nie wypukłego zbioru porozumień spełniającego założenie **W2.3**

3 Indywidualnie niezdominowane wypłaty graczy i punkt względnej utopii

Rozpatrzmy problem (S, d) spełniający warunki **W 2.1**, **W 2.2**. Jedną z istotnych informacji dla analizy problemu targu przez danego gracza i, $i \in [1, \ldots n]$ jest ocena możliwych wypłat w przestrzeni jego kryteriów, przy założeniu, że miałby pełną kontrolę nad decyzjami kontrgraczy. Punkty niezdominowane odpowiadające takim wypłatom nazwiemy **indywidualnie niezdominowanymi (i-niezdominowanymi)** danego gracza.

Definicja 3.1

Punkt $x^i \in S$ nazywamy **indywidualnie niezdominowanym (i-niezdominowanym)** gracza $i \in N$ w problemie (S, d), jeśli

$$Proj^i(S) \cap (Proj^i(x^i) + C \backslash \{0\}) = \emptyset,$$

gdzie: $Proj^i(\cdot)$ oznacza projekcję z przestrzeni $I\!R^M$ na przestrzeń kryteriów $I\!R^{k^i}$ gracza i, tzn. $Proj^i(x) = x_i$, $Proj^i(S) = \{x_i : x \in S\}$, a C jest dodatnim stożkiem w przestrzeni $I\!R^{k^i}$.

Punkt $x^i \in S$ nazywamy **słabo indywidualnie niezdominowanym** (**słabo i-niezdominowanym**) gracza $i \in N$ w problemie (S, d), jeśli

$$Proj^i(S) \cap (Proj^i(x^i) + int(C)) = \emptyset$$

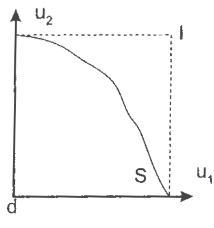
.

Definicja 3.2

Punkt $u \in \mathbb{R}^M$ nazywamy **punktem względnej utopii** w problemie (S, d) jeśli dla każdego gracza $i \in N$ istnieje i-niezdominowany punkt $x^i \in S$ taki, że $Proj^i(u) = Proj^i(x^i)$.

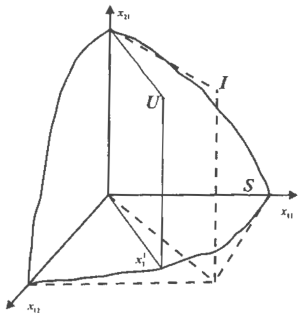
Punkt $u \in \mathbb{R}^M$ nazywamy **punktem słabej względnej utopii** w problemie (S, d) jeśli dla każdego gracza $i \in N$ istnieje słabo i-niezdominowany punkt $x^i \in S$ taki, że $Proj^i(u) = Proj^i(x^i)$.

Punkt $I(S, d) = (I_1, \ldots, I_n) \in \mathbb{R}^M$, $I_i = (I_{i1}, \ldots, I_{ij}, \ldots, I_{ik^i}) \in \mathbb{R}^{k^i}$ nazywamy **punktem idealnym** w problemie (S, d) jeżeli dla każdego $i \in N$, $I_{ij} = \max x_{ij} : x \in S$.



Rysunek 5: Punkt idealny w klasycznym problemie targu

Relacje między punktami i-niezdominowanymi, punktem względnie utopijnym, oraz punktem idealnym zilustrowano na Rys. 5i Rys. 6. Na Rys. 5 podano przykład klasycznej gry targu dla dwóch graczy, t.j. przypadek, gdy każdy gracz ma tylko jedno kryterium. Na Rys. 6 przedstawiono przykład gry, w której gracz pierwszy ma dwa kryteria x_{11}, x_{12}, natomiast gracz drugi



Rysunek 6: Punkt idealny i punkt względniej utopii w problemie wielokryterialnym

ma tylko jedno kryterium x_{21}. Punkt idealny oznaczono przez I, a przykładowy punkt względnej utopii przez u. Zauważmy, że w klasycznym przypadku istnieje tylko jeden punkt względnej utopii tożsamy z punktem idealnym dla zbioru S. W przypadku gry wielokryterialnej mamy do czynienia z pewnym podzbiorem wypłat Pareto optymalnych osiągalnych przy założeniu wypłaty gracza 2 na poziomie jego punktu rezerwacji. Są to punkty indywidualnie niezdominowane gracza 1. Gracz 1 ma w tym przypadku możliwość wyboru jednego z punktów i-niezdominowanych w zależności od swoich preferencji. Wybór taki może być dokonywany przy użyciu metod optymalizacji wielokryterialnej.

Załóżmy, że w ogólnym przypadku każdy gracz $i \in N$ wybrał zgodnie ze swoimi preferencjami jeden z punktów i-niezdominowanych. Punkt względnej utopii stanowi "złożenie" puntów i-niezdominowanych poszczególnych graczy. W przypadku przedstawionym na Rys. 6 jest to "złożenie" punktu i-niezdominowanego gracza pierwszego: x_1^1 oraz punktu i-niezdominowanego gracza drugiego t.j. punktu x^2.

W ogólnym przypadku punkt względnej utopii różni się istotnie od punktu idealnego określonego przez maksymalne wartości poszczególnych kryteriów osiągalne w zbiorze S. Rzut punktu względnej utopii na przestrzeń kryteriów pojedynczego gracza jest osiągalny w odróżnieniu od punktu idealnego, którego odpowiednio rzut w przypadku gdy każdy gracz ma co najmniej dwa kryteria nie jest zwykle osiągalny. Punkt idealny zawsze słabo dominuje punkt względnej utopii. Punkt idealny wynika z natury problemu (modelu), natomiast punkt względnej utopii zależy także od wyborów (preferencji) graczy.

Zakładamy, że kryteria graczy są istotne. Ze względu na możliwą różnorodność preferencji graczy i w konsekwencji różnorodność wyborów punktów i-niezdominowanych, istnieje pewien zbiór punktów słabej względnej utopii. W dalszej części ograniczamy naszą uwagę do punktów słabej względnej utopii dominujących punkt braku porozumienia.

Oznaczmy przez $U(S,d)$ zbiór wszystkich punktów słabej względnej utopii u w grze (S,d) spełniających warunek $u \gg d$.

4 Koncepcja uogólnionego rozwiązania Raiffa-Kalai-Smorodinsky

Rozpatrzmy klasę problemów targu (S,d), oznaczoną przez B^*, które spełniają warunki **W 2.1**, **W 2.2**, **W 2.3**.

Analogiczne założenia były przyjęte przez Thomsona (1980) dla klasycznych gier, przy czym Thomson zakładał dodatkowo wypukłość zbioru S.

Definicja 4.1

Rozwiązaniem wielokryterialnego problemu targu jest funkcja $f : B^* \times I\!R^M \to I\!R^M$ która przyporządkowuje każdej grze $(S,d) \in B^*$ i każdemu punktowi względnej utopii $u \in U(S,d)$ pewien punkt ze zbioru porozumień S, oznaczony przez $f(S,d,u)$, gdzie $U(S,d)$ oznacza zbiór wszystkich punktów słabej względnej utopii $u \gg d$.

Poszukujemy rozwiązania $f(S,d,u)$, które powinno posiadać określone własności, formułowane w formie następującego zestawu aksjomatów:

A4.1. Słaba Pareto optymalność.

Punkt $f(S,d,u)$ jest słabo Pareto optymalny w zbiorze S.

A4.2. Niezależność od dodatnich, afinicznych transformacji kryteriów.
Niech $Tx = (T_1x_1, \dots, T_nx_n)$ będzie dowolną afiniczną transformacją, taką że $T_ix_i = (a_{ij}x_{ij} + b_{ij})_{j=1,\dots,m^i}$, $a_{ij} > 0$, $i \in N$. Wtedy $f(TS, Td, Tu) = Tf(S, d, u)$.

A4.3. Anonimowość graczy i kryteriów.
Dla dowolnej permutacji Π na M, niech Π^* odpowiada permutacji w $\mathbb{R}^M$. Wtedy $\Pi^* f(S, d, u) = f(\Pi^*(S), \Pi^*(d), \Pi^*(u))$.

A4.4. Ograniczona monotoniczność.
Dla dowolnych (S, d), (S', d) oraz dowolnego $u \in U(S, d) \cap U(S', d)$, jeśli $S \subset S'$ to $f(S, d, u) \leq f(S', d, u)$.

Aksjomat **A4.1** opisuje racjonalność postępowania graczy. Z aksjomatu **A4.2** wynika, że rozwiązanie nie zależy od wyboru afinicznej miary przyporządkowanej poszczególnym kryteriom. Aksjomat **A4.3** oznacza, że rozwiązanie nie zależy od uporządkowania graczy i ich kryteriów, zależy tylko od postaci problemu i od preferencji graczy wyrażanych za pomocą punktu względnej utopii u. Aksjomat monotoniczności wymaga, aby wszyscy gracze odnieśli korzyści, a przynajmniej nie stracili w przypadku powiększenia zbioru porozumień, o ile punkt utopii nie ulegnie zmianie.

Twierdzenie 4.1

W klasie zagadnień przetargowych B^* istnieje jedno i tylko jedno rozwiązanie, oznaczone dalej przez f^R spełniające aksjomaty **A4.1, A4.2, A4.3, A4.4**. *Rozwiązanie to ma następującą postać:*

$$f^R(S, d, u) = d + h(S, d, u) * [u - d],$$

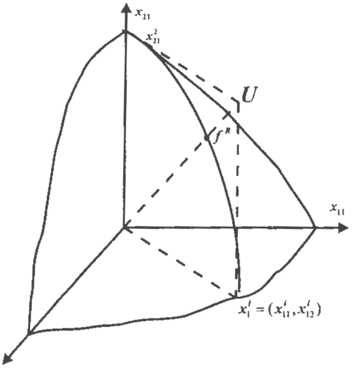
gdzie $(S, d) \in B^*$, $u \in U(S, d)$, *a* $h(S, d, u) = \max_{\geq}\{a \in \mathbb{R} : d + a(u - d) \in S\}$.

Dowód
Można łatwo pokazać, że funkcja f^R spełnia warunki **A4.1** – **A4.4**. Pokażemy, że rozwiązanie f^R jest jednoznaczne. Niech (S, d) będzie dowolną grą z klasy gier B^*, i niech u będzie względnym punktem utopii $u \in U(S, d)$. Pokażemy, że $x^* = f^R(S, d, u)$ jest rozwiązaniem gry (S, d)

dla punktu względnej utopii u. Niech T będzie dodatnią transformacją odwzorowującą punkt braku porozumienia d w początek układu współrzędnych 0, a punkt u w punkt $\overline{u}$ taki, że $\overline{u}_{ij} = 1$ for $i \in N$, $j = 1, 2, \ldots, m^i$. Niech $T(S,d) = (TS, 0)$. Zauważmy, że punkt $\overline{x}^* = Tx^*$ ma równe współrzędne. Zdefiniujmy problem targu $(\overline{S}, 0)$, gdzie $\overline{S} = \{x \in TS :$ dla każdej permutacji Π na N, punkt $y = \Pi^* x$ również należy do $TS\}$. Pokażemy, że $(\overline{S}, 0)$ należy do klasy B^*. Spełnienie warunku **W 2.1** jest oczywiste. Spełnienie warunku **W 2.2** wynika z faktu, że jeśli $x \in \overline{S}$, $d \leq y \leq x$ to dla każdej permutacji Π , punkt $\Pi^* x \in TS$, a więc także dla każdej permutacji Π punkt $\Pi^* y \in TS$. Wynika stąd, że $y \in \overline{S}$. Pokażemy spełnienie warunku **W 2.3**. Jeśli $x, y \in \overline{S}$ oraz $y \geq x$, $y \neq x$ to dla każdej permutacji Π punkty $x^\Pi = \Pi^* x$ i $y^\Pi = \Pi^* y$ należą do TS oraz $y^\Pi \geq x^\Pi$, $y^\Pi \neq x^\Pi$. Z warunku **W 2.3** dla $T(S,d)$ wynika, że dla każdej permutacji Π istnieje $v^\Pi \in TS$ taki, że $v^\Pi > x^\Pi$. Niech element $v \in I\!R^M$ będzie taki, że dla każdego $i \in N$, $j = 1, \ldots, m$, $v_{ij} = \min_\Pi v^\Pi_{\Pi(i)j}$. Punkt v należy do TS, $v > x$, a ponieważ dla każdej permutacji Π, $\Pi^* v \leq v^\Pi$, to $\Pi^* v \in TS$. Wynika stąd, że $v \in \overline{S}$ oraz $v > x$. Pokazaliśmy zatem, że $(\overline{S}, 0) \in B^*$. Łatwo zauważyć, że $(S_{\overline{?}}))$ jest grą symetryczną, a ponadto $\overline{S} \subset TS$, $\overline{x} \in \overline{S}$, $\overline{u}$ jest punktem względnej utopii dla gry $(\overline{S}, 0)$. Z aksjomatów **A4.1** i **A4.3** wynika,że $f((\overline{S}, 0), \overline{u}) = \overline{x}^*$. Z aksjomatu monotoniczności wynika,że $f(T(S,d), \overline{u}) = \overline{x}^*$, a z aksjomatu **A4.2**: $f((S,d), u) = T^{-1}\overline{x}^* = x^*$.
C. N. D.

Twierdzenie zostało wcześniej podane w pracy (Kruś, Bronisz, 1993).

Koncepcję rozwiązania f^R zilustrowano na Rys. 7. Przedstawiono na nim grę targu dla dwóch graczy, z których pierwszy ma dwa kryteria oznaczone odpowiednio x_{11}, y_{12} a gracz drugi ma tylko jedno kryterium x_{21}. Punkt braku porozumienia d odpowiada początkowi układu współrzędnych. Przyjmijmy, że x_1^1 jest niezdominowanym punktem gracza pierwszego, wybranym zgodnie z jego preferencjami ze zbioru wszystkich jego punktów niezdominowanych odpowiadających wypłacie gracza drugiego na poziomie punktu d. Niezdominowany punkt gracza drugiego odpowiada wartości jego maksymalnej wypłaty x_{21}^2. Punkt względnej utopii oznaczono przez u, a punkt odpowiadający rozwiązaniu przez f^R. Zauważmy, że punkt ten leży na przecięciu linii łączącej punkt braku porozumienia i punkt względnej utopii z brzegiem Pareto zbioru porozumień S.



Rysunek 7: Konstrukcja uogólnionego rozwiązania Raiffa-Kalai-Smorodinsky

W przypadku klasycznej gry targu, t.j. gdy każdy gracz ma tylko jedno kryterium, istnieje tylko jeden punkt względnej utopii odpowiadający punktowi idealnemu, a zatem rozwiązanie f^R jest w tym przypadku tożsame z koncepcją rozwiązania Raiffa (1953), scharakteryzowanego aksjomatycznie przez Kalai i Smorodinsky'ego (1975).

Rozpatrzmy klasę gier B. Oznaczmy przez $x^i \in S$ niezdominowany punkt wybrany przez gracza i, $i = 1, 2, \ldots n$, a przez $u \in I\!R^M$ generowany przez punkty $x^1, x^2, \ldots, x^n$, punkt względnej utopii. Przeprowadźmy przez punkty $d, x^1, x^2, \ldots, x^n$ n-wymiarową hiperpłaszczyznę H^n. Każdy punkt $x \in H^n$ można jednoznacznie przedstawić w postaci:

$$x = d + a_1(x^1 - d) + a_2(x^2 - d) + \cdots + a_n(x^n - d).$$

Oznaczmy przez A odwzorowanie z H^n w $I\!R^n$ określone przez $A(x) = A[d + a_1(x^1 - d) + a_2(x^2 - d) + \cdots + a_n(x^n - d)] = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Rozpatrzmy na hiperpłaszczyźnie H^n, n osobową grę targu $(A(S^H), A(d))$, gdzie zbiór $S^H = S \cap H^n$. W grze tej każdemu graczowi odpowiada tylko jedno kryterium. Pokażemy związek między rozwiązaniem Raiffa w tak sformułowanej grze (oznaczonym przez r^n) a rozwiązaniem f^R w wielokryterialnej grze (S, d).

Twierdzenie 4.2

W klasie wielokryterialnych gier targu B^* spełniona jest własność:

$$A[f^R((S,d),u)] = r^n(A(S^H), A(d)).$$

Przedstawiony w twierdzeniu zapis oznacza, że jeśli w wielokryterialnej grze targu (S,d) ograniczymy rozważania do wypłat na hiperpłaszczyźnie określonej przez punkt braku porozumienia d i przez wybrane przez graczy ich słabo niezdominowane wypłaty, to koncepcja rozwiązania f^R gry (S,d) odpowiada koncepcji rozwiązania Raiffa gry sformułowanej na tej hiperpłaszczyźnie.

Dowód

Z założenia **W 2.2** wynika, że każdy słabo niezdominowany punkt x^i gracza i, $i \in N$, ma postać: $x^i_j = d_j$ dla $j \in N$, $j \neq i$. W związku z tym, każdy punkt $x \in H^n$ można przedstawić w postaci

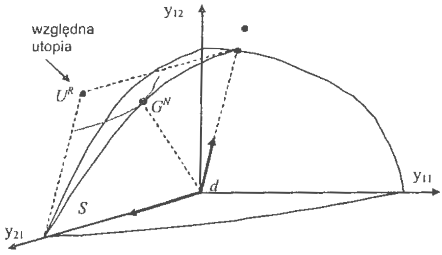
$$x = d + a_1(x^1 - d) + a_2(x^2 - d) + \cdots + a_n(x^n - d)$$

a odwzorowanie A ma postać $A(x) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Odwzorowanie A normalizuje grę targu określoną na hiperpłaszczyźnie H^n, t.j. gra (AS^H, Ad) ma punkt braku porozumienia $Ad = (0, 0, \ldots 0)$, oraz punkt idealny $I = (1, 1, \ldots 1)$. Zachodzą następujące relacje: $r^n((AS^H, Ad) = \max_{\geq}\{a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A(S^H) : a = A(d) + h(I - A(d)$ dla pewnego $h \in I\!R_+\} = \max_{\geq}\{a \in A(S^H) : a = h * 1$ dla pewnego $h \in I\!R_+\} = A[\max_{\geq}\{x \in S : x = d + h(u - d)\}] = A[f^R((S,d),u)]$.

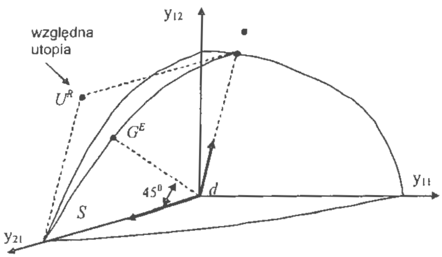
C.N.D.

Thomson (1980) przedstawił charakteryzację klasycznego rozwiązania Raiffa dla n osobowych gier targu. Twierdzenia 4.1 i 4.2 uogólniają wyniki Thomsona na przypadek wielokryterialnych zagadnień przetargowych. Charakteryzacja uogólnionego rozwiązania Raiffa-Kalai-Smorodinsky została pokazana przy osłabionych założeniach, t.j. bez wymagania wypukłości zbioru porozumień.

Na hiperpłaszczyźnie H^n można skonstruować inne rozwiązania stanowiące uogólninia propozycji określonych dla klasycznj gry targu. Przykłady przedstawiające konstrukcję uogólnionego rozwiąania Nash'a oraz rozwiązania egalitarnego przedstawiono na odpowiednio na Rys. 8 i Rys. 9. Strzałki zaznaczone na tych rysunkach oznaczają kierunki poprawy wypłat prowadzące



Rysunek 8: Konstrukcja uogólnionego rozwiązania Nash'a

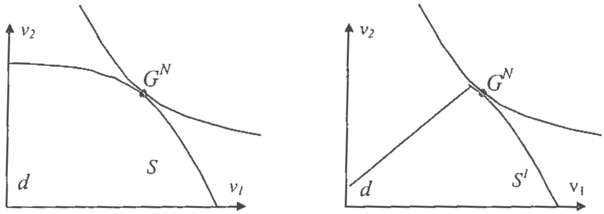


Rysunek 9: Konstrukcja uogólnionego rozwiązania egalitarnego

do wybranego punktu i-niezdominowanego gracza 1 w przestrzeni jego kryteriów y_{11}, y_{12} i punktu i-niezdominowanego gracza 2. W przypadku gracza 2 jest to maksymalna osiągalna wypłata na osi kryterium y_{21}.

Rozwiązanie egalitarne określone jest jako punkt Pareto optymalny w zbiorze S zapewniający równe przyrosty wypłat na hiperpłaszczyźnie H^n. Rozwiązanie to spełnia aksjomaty: słabej Pareto optymalności, symetrii, silnej monotoniczności.

Rozwiązanie kooperacyjne Nasha określone jest jako punkt zbioru S maksymalizujący iloczyn przyrostu wypłat na hiperpłaszczyźnie H^n. Punkt ten spełnia aksjomaty Pareto optymalności, niezależności od



Rysunek 10: Ilustracja aksjomatu niezależności rozwiązania Nash'a od nieistotnych alternatyw

afinicznych przekształceń użyteczności, niezależności od nieistotnych alternatyw, symetrii. aksjomat niezależności od nieistotnych alternatyw jest przedmiotem dyskusji. Na Rys. 10 przedstawia się konstrukcję rozwiązania Nash'a dla dwóch różnych zbiorów porozumień. W drugim przypadku osiągalne wypłaty gracza 2 są istotnie ograniczone, natomiast rozwiązanie Nasha jest w obu przypadkach takie same. Powstaje pytanie czy jest to uczciwe. Wady tej nie ma uogólnione rozwiązanie Raiffa-Kalai-Smorodinsky.

5 Koncepcja uogólnionego rozwiązania leksykograficznego

Uogólnione rozwiązanie Raiffa-Kalai-Smorodinsky może w szczególnym przypadku należeć do zbioru rozwiązań słabo Pareto optymalnych w zbiorze porozumień S. Oznacza to, że wypłaty niektórych graczy są słabo niezdominowane i że niektóre kryteria można poprawić bez pogorszenia innych, w tym innych kryteriów pozostałych graczy. Powstaje możliwość porawy takiego rozwiązania do rozwiązania, które jest niezdominowane w zbiorze S. Takie poprawienie rozwiązania słabo niezdominowanego jest możliwe z zastosowaniem porządku leksykograficzengo oraz sformułowania i rozwiązania odpowiedniego zadania optymalizacji.

Koncepcję rozwiązania leksykograficznego maxmin-u formułujemy następująco:
Dla dowolnego problemu $(S,d) \in B^*$ i $u \in U(S,d)$ niech $L^N : I\!R^M \to I\!R^M$

będzie przekształceniem liniowym takim, że

$$L_i^N(x_i) = (x_i - d_i)/(u_i - d_i) \qquad \text{dla } i \in M.$$

Przekształcenie to normalizuje problem, tzn. $L^N(d) = (0, 0, \dots, 0)$ oraz $L^N(u) = (1, 1, \dots, 1)$.

Niech $\rangle^{lex}$ oznacza leksykograficzny porządek w $\mathbb{R}^M$, tzn. dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}^M$, $x\rangle^{lex}y$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje $i \in M$ takie, że $x_i > y_i$ oraz $x_j = y_j$ dla $j < i$. Niech $P : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^M$ będzie przekształceniem takim, że dla dowolnego $x \in R^M$ istnieje permutacja π na M spełniająca $P(x) = \pi^* x$ oraz $P_1(x) \leq P_2(x) \leq \dots \leq P_n(x)$. Rozwiązanie leksykograficznego maxmin-u ma postać $f^L(S, d, u) = \{x \in S : P(L^N(x))\rangle^{lex} P(L^N(y))$ dla każdego $y \in S\}$.

Można pokazać, że powyższa konstrukcja daje jednoznaczne rozwiązanie, a także podać sposób jego uzyskania.

Dla $y \in S$ niech $v(S, d, u, y) \in \mathbb{R}^M$ będzie wektorem spełniającym następujące warunki:

$$v_i(S, d, u, y) = u_i - d_i \text{ dla } i \in J(S, d, u, y)$$

$$v_i(S, d, u, y) = 0 \text{ dla } i \in M \backslash J(S, d, u, y).$$

oraz niech $x(S, d, u, y)$ będzie punktem w S takim. że $x(S, d, u, y) = \max_{\geq}\{x \in S : x = y + av(S, d, u, y) \text{ dla } a \in \mathbb{R}\}$. Dla danego problemu (S, d) i danego $u \in U(S, d)$ wprowadźmy następujący nieskończony ciąg punktów w S, $\{x^t\}_{t=0}^{\infty}$ spełniający następujące własności: $x^0 = d$, oraz $x^t = x(S, d, u, x^{t-1})$ dla $t = 1, 2, \dots$ Wtedy istnieje liczba T taka, że $x^T = x^{T+1}$, $T \leq M - 1$, oraz $x^T = f^L(S, d, u)$. Ponadto $x^1 = f^R(S, d, u)$.

Intuicyjnie, rozwiązanie to uzyskujemy w następujący iteracyjny sposób: startujemy z punktu d i poruszamy się w kierunku $u - d$ dopóki jest to możliwe w zbiorze S. Po osiągnięciu punktu brzegowego, zerujemy te składowe w wektorze $u-d$ dla których niemożliwa jest poprawa uzyskanego punktu i poruszamy się w tym kierunku dopóki jest to możliwe. Czynność tą powtarzamy, aż uzyskamy punkt w S którego poprawa w dowolnym kierunku jest niemożliwa. (w tym przypadku odrzuciliśmy warunek wypukłości zbioru S, ale na mocy założenia **W 2.3** taka poprawa jest możliwa, co gwarantuje nam osiągniecie punktu ściśle Pareto optymalnego).

Wprowadźmy w miejsce aksjomatu **A4.1** następujący aksjomat:
A4.1*. Pareto optymalność.

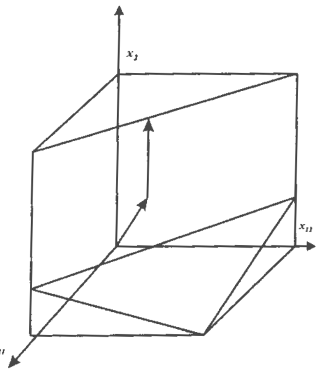
Punkt $f(S, d, u)$ jest Pareto optymalny w zbiorze S.

Twierdzenie 5.1

Zaproponowane rozwiązanie leksykograficzne jest jednoznaczne w klasie problemów targu B^*, ponadto podany algorytm wyznacza to rozwiązanie w sposób jednoznaczny. Rozwiązanie spełnia aksjomaty **A4.1***, **A4.2**, **A4.3**.

Dowód.
Niech (S, d) będzie dowolnym problemem targu z klasy B^*. Niech $u \in U(S, d)$. Ponieważ zbiór S jest niepusty i zwarty, a funkcje P i L są ciągłe, to $f^L(S, d, u)$ istnieje. Jednoznaczność wynika z warunku **W2.3**. Jeśli $x \in f^L(S, d, u)$, $y \in f^L(S, d, u)$, $x \neq y$, to istnieje $z \in f^L(S, d, u)$ spełniające $P(L(z)) \rangle^{lex} P(L(x))$, co stanowi sprzeczność. Łatwo można pokazać, że funkcja f^L spełnia aksjomaty **A4.1***, **A4.2 i A4.3.** C.N.D.

Przedstawiona propozycja jest uogólnieniem na przypadek wielokryterialnych wypłat graczy - koncepcji, którą Imai (1983) zaproponował w przypadku klasycznego problemu targu, jako rozwiązanie tzw. leksykograficznego maxmin-u.

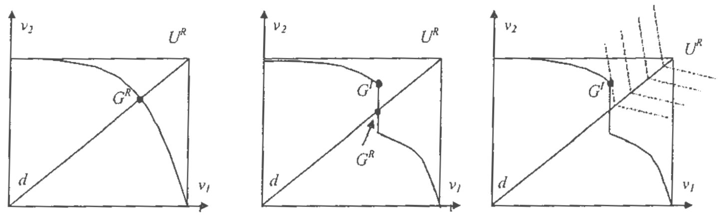


Rysunek 11: Konstrukcja rozwiązania leksykograficznego

Zamieszczony niżej przykład (Rys.11) ilustruje konstrukcję uogólnionego rozwiązania Imai. Podobnie jak w poprzednich ilustracjach rozpatrywany jest

problem targu, w którym gracz pierwszy ma dwa kryteria: odpowiednio x_{11}, x_{12}, natomiast gracz drugi ma tylko jedno kryterium x_2. Zbiór porozumień określony jest następująco:
$x_2 \leq 1$,
$x_{11} + x_{12} \leq 1$ dla $x_2 \geq 1/3$, oraz
$x_{11} + x_{12} + 3x_2 \leq 2$ dla $x_2 \leq 1/3$.

W podanym przykładzie, $f^L(S, d, u) = (1/2, 1/2, 1)$. Uzyskujemy tą wartość w sposób następujący: najpierw poruszamy się w kierunku $(1, 1, 1)$ uzyskując punkt $(1/2, 1/2, 1/2)$, następnie poruszamy się w kierunku $(0, 0, 1)$ uzyskując rozwiązanie leksykograficznego maxminu. Jak można zauważyć rozwiązanie Raiffa-Kalai-Smorodinsky jest pierwszym "przybliżeniem" rozwiązania leksykograficznego maxminu w podanej konstrukcji. Rozwiązanie leksykograficznego maxminu f^L pokrywa się z rozwiązaniem Raiffa-Kalai-Smorodinsky f^R, jeżeli $f^R(S, d, u)$ jest punktem Pareto-optymalnym.



Rysunek 12: Wyznaczanie rozwiazania leksykograficznego z zastosowaniem funkcji skalaryzującej

Na Rys.12 przedstawiono uogólnione rozwiązania Raiffa-Kalai-Smorodinsky i rozwiązanie leksykograficzne w dwuwymiarowej hiperpłaszczyźnie określonej przez i-niezdominowane punkty wybrane przez dwóch graczy. Na pierwszym rysunku, w przypadku wypukłego zbioru S oba rozwiązania są tożsame. Na rysunku drugim pokazano jak rozwiązanie leksykograficzne poprawia słabo Pareto optymalne rozwiązanie Raiffa-Kalai-Smorodinsky do rozwiązanie Pareto optymalnego w zbiorze S. Na rysunku trzecim pokazano także izolinie funkcji skalaryzującej

$$s(v, U^R) = \min_{1 \le i \le n} \left[a_i(v_i - U_i^R)/(U_i^R - d_i) \right] + a_{n+1} \sum_{i=1}^{n} a_i(v_i - U_i^R)/(U_i^R - d_i),$$

gdzie $U^R \in R^M$, jest punktem względnej utopii na hiperpłaszczyźnie H^n, a_i są dodatnimi, znormalizowanymi wagami dla $i = 1, \ldots, n$, a $a_{n+1} > 0$ jest małym parametrem. Jeśli $a_{n+1} \to 0_+$, to maksymalizacja tej funkcji dla $y \in S$ prowadzi do rozwiązania leksykograficznego. W pracy (Kostreva, Ogryczak, Wierzbicki, 2004) przedstawia się, jak porządek leksykograficzny może być wykorzystany do wyznaczania rozwiązań niezdominowanych w zdaniach optymalizacji wielokryterialnej oraz relacje tego podejścia z zastosowaniem odpowiednich funkcji skalaryzujących.

Przy porównaniu uogólnionego rozwiązania Raiffa-Kalai-Smorodinsky i rozwiązania leksykograficznego istotna jest własność ciągłości. W uzupełnieniu do wcześniej rozważanych aksjomatów **A4.1**, **A4.2**, **A4.3** i **A4.4**, wprowadźmy dodatkowo aksjomat ciągłości.

A4.5. Ciągłość.
Rozwiązanie wielokryterialnego zagadnienia przetargowego spełnia warunek ciągłości, jeśli dla dowolnego ciągu problemów przetargowych $\{(S_j, d)\}_{j=1}^{\infty}$, $(S_j, d) \in B$ zbieżnego do problemu $(S, d) \in B$, oraz dla dowolnego ciągu punktów $u^j \in U(S_j, d)$ zbieżnego do punktu $u \in U(S, d)$ (w topologii Hausdorffa) zachodzi $\lim_{j \to \infty} f(S_j, d, u^j) = f(S, d, u)$.

Aksjomat ciągłości stanowi proste uogólnienie aksjomatu ciągłości podawanego w literaturze klasycznego problemu targu.

Można pokazać (Kruś, 2002b), że uogólnione rozwiązanie Raiffa-Kalai-Smorodinsky ma własność ciągłości natomiast rozwiązanie leksykograficzne nie posiada tej własności. Własność ciągłości jest istotna z punktu widzenia systemów wspomagania decyzji w zastosowaniu do problemów praktycznych. Budowany model zawsze stanowi tylko przybliżenie problemu rzeczywistego. Własność ciągłości zapewnia, że gdy konstrukcja modelu jest bliższa rzeczywistości to również rozwiązanie wyznaczone dla tego modelu jest bliższe rozwiązaniu odpowiadającemu problemowi rzeczywistemu. Przy rozpatrywaniu interakcyjnych algorytmów rozwiązania, spełnienie tej własności przez rozwiązanie umożliwia pokazanie zbieżności danego algorytmu.

6 Uwagi końcowe

Przedmiotem pracy są rozwiązania wielokryterialnego zagadnienia przetargowego. Zagadnienie to stanowi model matematyczny opisujący problem współpracy kilku decydentów podejmujących decyzje przy wielokryterialnych celach. Proponowane rozwiązania stanowią uogólnienie rozwiązań klasycznych gier targu na przypadek wielokryterialny. Pokazano własności i przeprowadzono analizę proponowanych rozwiązań. Rozwiązania te ze względu na swoje własności mogą stanowić podstawę do określania propozycji mediacyjnych przedstawianych decydentom do analizy.

Literatura

Ameliańczyk, A. (1979). Multicriterial optimization of international economic cooperation control. Prace Naukowe ICT Polit. Wrocł. Nr 39,

Axelrod R., (1985), The Evolution of Cooperation, Basic Books, New York.

Barclay S., Peterson C (1976), Multi-attribute Models for Negotiations. Technical Report 76-1, Decisions and Designs, Inc. McLean, VA.

Bronisz P., L. Krus, (1988), "Application of Generalized Raiffa Solution to Multicriteria Bargaining Support", in: System Modeling and Optimization, M. Iri, K. Yajima (eds), Lecture Notes in Control and Information Sciences 113, Springer- Verlag, pp. 207-211.

Bronisz P., L. Krus, (1988), "Interactive Procedures for Multicriteria Decision Support in Bargaining Problem", in: System Analysis and Simulation, A. Sydow, S.G. Tzafestas, R. Vichnevetsky (eds), Band 46, Akademie-Verlag, Berlin, pp. 59-62.

Bronisz P., L. Krus, A. Wierzbicki, (1989), "Towards Interactive Solutions in a Bargaining Problem", W: Aspiration Based Decision Support Systems, ed.: A.Lewandowski, A.P.Wierzbicki, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 331, Springer Verlag, Berlin, str. 251-268.

Chankong V., Haims Y. Y. (1983), Multiobjevtive deision making. North Holland, New York.

Galas Z., Nykowski I., Żółkiewski Z, (1987), Programowanie wielokryterialne. Państwowe Wydawnictwo Naukowe. Warszawa.

Goeltner C. (1987), The Copmuter as a Third Party: Decision Support System for Two Party Single-issue and Two Party multiple-issue Negotiations. Working Paper 1958-87, Alfred P. Sloan School of Management, MIT, Cambridge, MA.

Grauer M., M. Thompson, A.P. Wierzbicki (eds), (1985), Plural Rationality and Interactive Decision Processses, Proceedings Sopron 1984, Springer-Verlag, Heidelberg.

Harsanyi J.C., R. Selten, (1972), "A Generalized Nash Solution for Two-Person Bargaining Games with Incomplete Information", Management Sciences, Vol. 18, str. 80-106.

Hwang C., Masud A. S. M., Paidy S. R., Yoon K. (1979), Multiple Objective Decision Making: Methods and Applications, A stete-of-the-art survey. Springer Verlag.

Imai H., (1983), "Individual Monotonicity and Lexicographical Maxmin Solution", Econometrica, Vol.51, str. 389-401.

Jarke M., Jelassi M. T., Shakun M. F. (1987), Mediator: Towards a negotiation support system. European Journal of Operation Research 31, 314-334, North-Holland.

Kalai E., M. Smorodinsky, (1975), "Other Solutions to Nash's Bargaining Problem", Econometrica, Vol. 43, str. 513-518.

Kaliszewski I. (1994), Quantitative Pareto Analysis by Cone Separation Teechnique. Kluwer, Boston.

Kersten G., E. (1985), NEGO - Group Decision Support System. Information and Management. Vol. 8., pp. 237-386.

Kersten G. E. (1988), A Procedure for Negotiating Efficient and Non-Efficient Compromises. Decision Support Systems 4, 167-177, North-Holland.

Kersten G., E., Michalowsky W., Matwin S., Szpakowicz S. (1988), Rule-based Modelling of Negotiation Strategies. Theory and Decision, Vol. 25., pp.225-257.

Kersten G. E., Szapiro T., (1986), Generalized approach to modeling negotiations. European Journal of Operational Research, 1986 Vol. 26 (1986), No. 1, pp: 142-149.

Korhonen P., Moskowitz H., Wallenius J., Zionts S. (1986), An Interactive Approach to Multiple Criteria Optimization with Multiple Decision-Makers. Naval Research Logistics Quarterly, vol. 33, 589-602, John Wiley & Sons.

Korhonen P., J. Wallenius, (1989), Supporting Individuals in Group Decision-making. Helsinki School Of Economics, Finland. (forthcoming)

M.M.Kostreva, W.Ogryczak, A.Wierzbicki (2004): Equitable Aggregations and Multiple Criteria Analysis, European Journal of Operational Research, 158.

Kreglewski T.,J. Paczynski, J. Granat, A. P. Wierzbicki (1988). IAC-DIDAS-N A Dynamic Interactive Decision Analysis and Support System for Multicriteria Analysis of Nonlinear Models with Nonlinear Model Generator supporting model analysis, IIASA working paper, IIASA, Laxenburg , Austria.

Krus L., B. Lopuch, P. Bronisz, (1989), "Application of interactive solutions for decision support in bargaining problem, an illustrative example", in: Methodology and Applications of decision support systems, R. Kulikowski (ed.), Proceeding of the 3-rd Polish-Finnish Symposium, Gdansk, 1988, pp. 121-140.

Krus L.,P. Bronisz, B. Lopuch, (1990) "MCBARG - Enhanced, A System Supporting Multicriteria Bargaining", IIASA Collaborative Paper, CP-90-006, IIASA, Laxenburg, Austria.

Kruś, L., B. Lopuch (1989). Wielokryterialny problem targu w przypadku modeli liniowych i jego rozwiązanie przy użyciu systemu MCBARG. Przykład modeli gospodarstwa rolnego. Opracowanie ZTSW 16/17/89, IBS PAN, Warszawa.

Kruś L., (1991), "Some Models and Procedures for Decision Support in Bargaining", W: Multiple Criteria Decision Support. Korhonen, Lewandowski, Wallenius (ed.), Lecture notes in Economics and Math. Systems, Vol. 356, Springer Verlag, Berlin str. 350-359.

Krus, L. (1992a), "Interactive Approach to multicriteria bargaining on an example of acid rains problem", in: Systems and Control (Han-Fu Chen Ed.) International Acad. Publ., Beijing, China.

Krus, L. (1992b), "Computer Based Mediation Support", in: Preprints of the IFAC Workshop on "Support Systems for Decision and Negotiation Processes", June, 24-26, 1992, Warsaw, Poland.

Kruś L., P. Bronisz, (1993) "Some New Results in Interactive Approach to Multicriteria Bargaining". W: User Oriented Methodology and Techniques af Decision Analysis, Wierzbicki i inni (red.), Lecture Notes in Econ. and Math. Systems, Springer Verlag, Berlin, str 21-34.

Krus L. P. Bronisz (1994) "On n-person Noncooperative Multicriteria Games Described in Strategic Form". Annals of Operation Research. Vol. 51 (1994), pp. 83-97. J. C. Balzer AG, Sci. Publ.

Krus L., Z. Nahorski, J. W. Owsinski (eds.) (1994). Decision Support in Negotiations and Policy Determination. Special issue of Control and Cybernetics. Vol. 22, No.4, 1993 (appeared in 1994).

Krus L. (1994). Wspomaganie negocjacji w wielokryterialnym zagadnieniu targu. Biulatyn Instytutu Bdań Systemowych PAN. Nr 2/ czerwiec 1994, str. 14-26.

Krus L. P. Bronisz (1995) "Solution Concepts in Multicriteria Cooperative Games without Side Payments" in: System Modelling and Optimization, J. Dolezal (ed.), Chapman and Hall Publ. (in print)

Kruś L.(1996), Multicriteria Decision Support in Negotiations. Control and Cybernetics, Vol. 25, No. 6, 1245-1260.

Kruś L., Bronisz (2000), P., Cooperative game solution concepts to a cost allocation problem, European Journal of Operational Research. Vol. 122, No. 2, 258-271.

Kruś L. (2002a), A System Supporting Financial Analysis of an Innovation Project in the Case of Two Negotiating Parties, Bull. of Polish Academy of Sci., Ser. Techn., Vol. 50, No. 1, 93-108.

Kruś L. (2002b), Multicriteria Decision Support in Bargaining, a Problem of Players Manipulations, in: T. Trzaskalik, J. Michnik, (eds), Multiple Objective and Goal Programming, Physica Verlag, Springer, Berlin.

Kruś L. (2004a) A Computer Based System Supporting Analysis of Cooperative Strategies, in: L. Rutkowski, J. Siekmann, R. Tadeusiewicz, L. Zadeh, (eds), Artificial Intelligence and Soft Computing - ICAISC 2004, Lecture Notes in Computer Science, Springer, Berlin.

Kruś L.(2004b), A multicriteria approach to cooperation in the case of innovative activity, Control and Cybernetics, Vol. 33 (2004), Kulikowski R.(2000), Optimization of survival strategy by application of safety dependent utility model. Control and Cybernetics, vol. 29, No. 1, ss. 167-178

Kulikowski R. (2003a). Acceleration of economic growth by technological change and knowledge management. Bulletin of Polish Academy of Sciences, Sci. Tech. Vol. 51, No 3.

Kulikowski R. (2004a). Risk and utility of sustainable development. W: Grzegorzewski P., Krawczak M., Zadrożny S. (eds). Soft computing - tools, techniques and application.

Kulikowski R. (2004b). Management support by knowledge using the concept of utility of sustainable development. W: Proceedings of the 15th In-ternational Conference on Systems Science, Wrocław.

Kulikowski R. (2003b) On General Theory of Risk Management and Decision Support Systems. Bull. of Polish Academy of Sciences, Sci. Tech. Vol. 51, No. 3.

Luce R.D., H. Raiffa, (1957), "Games and Decisions: Introduction and Critical Survey", New York: Wiley.

Nash J.F., (1950), "The Bargaining Problem", Econometrica, Vol. 18, str. 155-162.

Nash J.F., (1953), "Two-Person Cooperative Games", Econometrica, Vol. 21, str. 129-140.

Nunamaker J., F., Applegate L., M., Konsynsky B., R. (1988), Computer-aided deliberation: Model Management and Group Decision Support. Operations Research, Vol. 36., pp. 826-848.

Nyhart J., Samarasan D. (1989), The Elements of Negotiation Management: Using Computers to Help Resolve Conflict. Negotiation Journal, 43-62.

Ogryczak W. (2002), Multiple Criteria Optimization and Decisions under Risk, Control and Cybernetics, Vol. 31, No. 4, 2002, pp. 975-1004.

Piasecki, St., J. Hołubiec, A. Ameliańczyk (1982). Międzyna- rodowa kooperacja gospodarcza, modelowanie i optymalizacja. PWN, Warszawa.

Raiffa H., (1953), "Arbitration Schemes for Generalized Two-Person Games", Annals of Mathematics Studies, No. 28 str. 361-387, Princeton.

Raiffa H. (1982), "The Art and Science of Negotiations". Harvard Univ. Press, Cambridge.

Rogowski, J. Sobczyk, A. P. Wierzbicki (1988). IAC-DIDAS-L A Dynamic Interactive Decision Analysis and Support System, Linear Version. WP-88-110, IIASA, Laxenburg, Austria.

Roth A.E., (1979a), "An Impossibility Result Concerning n-Person Bargaining Games", International Journal of Game Theory, Vol. 8, str.129-132.

Roth A.E., (1979b), "Axiomatic Model of Bargaining", Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 170, Springer-Verlag, Berlin.

Roth A.E. , M.W.K. Malouf , (1979), "Game-Theoretical Models and the Role of Information in Bargaining", Psychological Review, Vol. 86, str. 1163-1170.

Roy B. , R. Słowiński (1990), Wielokryterialne wspomaganie decyzji. Wydawnictwa Naukowo-atechniczne. Warszawa.

Sawaragi Y., Nakayama H., Tanino T. (1985), Theory of Multiobjective Optimization. Academic Press, New York.

DeSanctis G., Gallupe R., B. (1987), A Foundation for the Study of Group Decision Support Systems. Management Science vol. 33, No. 5., 589-609.

Shakun M. (1988), Evolutionary Systems Design. HoldenDay, Oakland, CA.

Słowiński R., Greco S., Matarazzo B. (2002), Axiomatization of utility, outranking and decision rule preference models for multiple-criteria classification problems under partial inconsistency with dominance principle. Control and Cybernetics, Vol. 31, No. 4, 2002, pp.1005-1036.

Steuer R. E. (1986), Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Optimization. John Wiley and Sons Inc., New York.

Teich J. E., Wallenius H., Kuula M., Zionts S. (1995), A Decision Support Approach for Negotiation with an Application to Agricultural Income Policy Negotiations. European Journal of Operational Research, Vol. 81, pp. 76-87.

Thomson W., (1980), "Two Characterization of the Raiffa Solution", Economic Letters, Vol. 6, str. 225-231.

Trzaskalik T. (1998), Multiobjective Analysis in Dynamic Environment. Karol Adamiecki University of Economics in Katowice.

Wierzbicki A.P., (1982), "A Mathematical Basis for Satisficing Decision Making", Mathematical Modelling, Vol. 3, str. 391-405.

Wierzbicki A.P., (1983),"Negotiation and Mediation in Conflicts I: The Role of Mathematical Approaches and Methods", Working Paper WP-83-106, IIASA, Laxenburg; także w: H. Chestnat i inni, (ed): Supplemental Ways to Increase International Stability, Pergamon Press, Oxford, 1983.

Wierzbicki A.P., (1985), "Negotiation and Mediation in Conflicts II: Plural Rationality and Interactive Decision Processes", W: M.Grauer, M.Thompson, A.P.Wierzbicki (ed): Plural Rationality and Interactive Decision Processes, Proceedings Sopron 1984, Springer-Verlag, Heidelberg.

Wierzbicki A.P.,(1986), "On the Completeness and Constructiveness of Parametric Characterizations to Vector Optimization Problems", OR Spectrum (1986)8:73-87, Springer Verlag.

Wierzbicki A.P., (1990), Multiple Criteria Solutions in Noncooperatove Game Theory, Part III. Discussion Paper 288, Kyoto Institute of Economic Research, Kyoto University, Kyoto.

Wierzbicki A.P., (1987), "Towards Interactive Procedures in Simulation and Gaming: Implications for Multiperson Decision Support", W: Methodology and Software for Interactive Decision Support, Proceedings of International Workshop, Albena Springer Verlag.

Wierzbicki, A. P., L. Krus, M. Makowski (1993), "The Role of Multi-Objective Optimization in Negotiation and Mediation Support" in: Theory and Decision, special issue on "International Negotiation Support Systems: Theory, Methods, and Practice" Vol. 34, No. 2.

Wierzbicki A. P., M. Makowski, J. Wessels, (2000), Model-based Decision Support Methodology with Environmental Applications, Kluwer Academic Press, Dordrecht, Boston.