Raport Badawczy

Research Report

RB/15/2005

Problemy skalowania funkcji użyteczności w zagadnieniach wspomagania zarządzania kapitałami z uwzględnieniem ryzyka

L. Kruś

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences

POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 8373578

fax: (+48) (22) 8372772

Kierownik Pracowni zgłaszający pracę:
Prof. dr inż. Roman Kulikowski

Warszawa 2005

Lech Kruś

Instytut Badań Systemowych PAN
w Warszawie

PROBLEMY SKALOWANIA FUNKCJI UŻYTECZNOŚCI W ZAGADNIENIACH WSPOMAGANIA ZARZĄDZANIA KAPITAŁAMI Z UWZGLĘDNIENIEM RYZYKA

Wstęp

Praca dotyczy zagadnień konstrukcji komputerowych systemów wspomagania analizy decyzyjnej z uwzględnieniem ryzyka. Wiąże się bezpośrednio z referatem R Kulikowskiego [14]. Proponuje się budowę odpowiednich systemów komputerowych wspomagających analizę problemów zarządzania kapitałami rozpatrywanych w tym referacie, z wykorzystaniem metodologii funkcji użyteczności. Funkcje użyteczności mogą być stosowane w praktyce do analizy decyzyjnej, jeśli właściwie opisują rzeczywiste relacje preferencji decydenta. Istotny jest w związku z tym problem skalowania, tj. oszacowania subiektywnych parametrów funkcji użyteczności na podstawie preferencji decydenta. Klasyczne podejście [4] zakłada wykorzystanie ekwiwalentu pewności, zgodnie z którym decydent przyrównuje pewien wariant obciążony ryzykiem z wariantem pewnym o takiej samej użyteczności. W pracach [11-14] podane są metody skalowania w odniesieniu do proponowanej dwuczynnikowej funkcji uwzględniającej oczekiwany zysk i zysk najgorszego przypadku, gwarantujący uniknięcie ryzyka bankructwa.

W niniejszej pracy rozpatruje się problemy skalowania funkcji użyteczności ze względu na konstrukcję komputerowych systemów, umożliwiających

analizę decyzyjną z uwzględnieniem ryzyka. Przedstawia się ogólną koncepcję konstrukcji takich systemów. Na podstawie koncepcji podanych przez R. Kulikowskiego proponuje się procedury obliczeniowe szacowania parametrów funkcji użyteczności, a także funkcji opisującej nieużyteczność możliwych strat i zagrożeń. Procedury te zaimplementowane w formie komputerowej umożliwiły przeprowadzenie eksperymentów obliczeniowych mających na celu sprawdzenie, jak oceny decydenta podawane w odpowiedzi na zadawane pytania wpływają na wartości szacowanych parametrów, a także interpretację tych parametrów. Przedstawia się także przykład obliczeniowy ilustrujący wpływ jednego z parametrów na optymalną alokację nakładów między przedsięwzięcia o różnym poziomie ryzyka.

1. Wspomaganie decyzji z wykorzystaniem systemów komputerowych i metod teorii użyteczności

W pracy [14] (Kulikowski 2005) przedstawiono metody zarządzania kapitałami z zastosowaniem oryginalnej koncepcji funkcji użyteczności do różnych zagadnień inwestowania w ryzykowne przedsięwzięcia, ochrony zagrożonego kapitału przez działania prewencyjne i ubezpieczenia, a także zarządzania kapitałami w rozwoju długofalowym i przestrzennym. W celu efektywnego wykorzystania tej metodologii do wspomagania podejmowania decyzji wskazana jest konstrukcja odpowiednich systemów komputerowych.

Proponowany system komputerowy ma strukturę modułową. W jego skład wchodzą moduły zawierające: model sytuacji decyzyjnej, bazę danych informacji do tego modelu, procedury estymacji parametrów modelu i jego weryfikacji, model preferencji decydenta z wykorzystaniem funkcji użyteczności, procedury szacowania parametrów tego modelu, moduł wspomagania analizy decyzyjnej, procedury obliczeniowe optymalizacji, procedury obsługi interakcyjnych sesji z decydentem, interfejs graficzny. Specyfikacja modelu sytuacji decyzyjnej obejmuje wielkości wejściowe, wśród których rozróżniamy zmienne decyzyjne oraz zmienne egzogeniczne, wielkości wyjściowe, które są przedmiotem analizy decydenta, relacje modelu opisujące jak wielkości wyjściowe zależą od wielkości wejściowych. Model jest budowany a następnie aktualizowany na postawie informacji zewnętrznych, obejmujących między

innymi dane historyczne, oceny ekspertów, informacje z badań ankietowych. Informacje te składowane są w odpowiedniej bazie danych. Zagadnienia prawidłowej konstrukcji modeli na podstawie dostępnych informacji rozważane są między innymi w pracy [2] (Burnham , Anderson, 1998).

Model opisujący preferencje decydenta budowany jest z wykorzystaniem metodologii funkcji użyteczności proponowanej w pracach R. Kulikowskiego. Metodologia ta stanowi rozwinięcie idei von Neumana-Morgensterna, Savege'a, Tverskiego. Zgodnie z tą metodologią użyteczność z zainwestowania części x dysponowanego kapitału P w ryzykowne przedsięwzięcie może być aproksymowana przy pomocy funkcji $U=(Z\cdot x)^{\beta}(Y)^{1-\beta}$ gdzie $Z=P\cdot R$ oznacza oczekiwany zysk, Y - zysk w najgorszym przypadku, a parametr $\beta\in[0,1]$. Zakłada się przy tym, że stopa zwrotu jest zmienną losową o wartości oczekiwanej R i wariancji σ^2. Funkcję użyteczności można również wyrazić w postaci: $U(x)=P\cdot R\cdot S^{1-\beta}\cdot x^{\beta}$, gdzie $S=1-\kappa\cdot\sigma/R$ oznacza indeks (współczynnik) bezpieczeństwa. Parametry κ i β mają charakter subiektywny. Ich wartości zależą od preferencji decydenta dotyczących relacji między oczekiwaną stopą zwrotu, którą decydent chciałby maksymalizować a obawą przed ryzykiem. Wartości tych parametrów należy oszacować w drodze interakcji z decydentem. Wynika stąd konieczność wyposażenia systemu w moduł zawierający procedury szacowania tych parametrów (skalowania użyteczności). Proponowane procedury są przedmiotem tej pracy.

Moduł wspomagania analizy decyzyjnej ma na celu generowanie wielkości wyjściowych dla zadanych scenariuszy zmiennych egzogenicznych, zgodnie z opiniami ekspertów i życzeniami decydenta. Znajomość preferencji decydenta, wyrażonych przez oszacowane wartości parametrów funkcji użyteczności, umożliwia wyznaczenie decyzji optymalnych maksymalizujących tę użyteczność i prezentację tych decyzji oraz wynikających z nich wielkości wyjściowych do analizy decydenta. Niezbędny jest przy tym moduł zawierający procedury optymalizacji. Zakłada się, że proces analizy decyzyjnej odbywa się w formie interakcyjnej sesji z wykorzystaniem interfejsu graficznego.

Funkcja użyteczności stanowi oczywiście tylko przybliżony opis rzeczywistych preferencji decydenta. W praktyce analizy decyzyjnej zauważono, że preferencje decydenta nie są stałe. Mamy do czynienia z procesem uczenia, polegającym na tym, że decydent uzyskując kolejne informacje o możliwych efektach decyzji, lepiej poznaje problem decyzyjny i często koryguje swoje wcześniejsze preferencje. Proponuje się w związku z tym, aby proces estymacji parametrów funkcji użyteczności i analizy decyzyjnej odbywał się naprzemiennie w formie iteracyjnej procedury. W kolejnych iteracjach tej procedury decy-

dent ma możliwość korekty swoich subiektywnych parametrów funkcji użyteczności po każdej interakcyjnej sesji analizy decyzyjnej.

2. Procedura skalowania funkcji użyteczności

Do określenia parametrów funkcji użyteczności niezbędny jest model opisujący ryzykowne przedsięwzięcie, które rozważa decydent - inwestor, informacje dotyczące sytuacji finansowej decydenta, oraz wartość stopy zwrotu bez ryzyka.

Zgodnie z propozycją R. Kulikowskiego, przyjęto opis ryzykownego przedsięwzięcia w formie dwupunktowego rozkładu prawdopodobieństwa sukcesu, w którym zmienna losowa, jaką jest stopa zwrotu, przyjmuje wartości R_u w przypadku sukcesu z prawdopodobieństwem p, oraz wartość $R_d = 0$ z prawdopodobieństwem $1-p$.

Sytuacja finansowa inwestora opisana jest przez jego zasoby kapitałowe P, które może przeznaczyć na ryzykowne przedsięwzięcie, rezerwy kapitałowe A, oraz minimalne potrzeby i zobowiązania inwestora L_m.

Stopa zwrotu bez ryzyka R_F jest wykorzystywana w procedurze szacowania parametrów funkcji użyteczności. Może być określona w praktyce na podstawie rentowności obligacji skarbowych, ewentualnie bonów skarbowych

Powyższe wielkości traktowane są jako dane wejściowe.

Procedura skalowania

1. Przedstawienie decydentowi informacji opisującej ryzykowne przedsięwzięcie na podstawie modelu decyzyjnego, a także sytuacji finansowej decydenta oraz stopy zwrotu bez ryzyka.
2. Wyznaczenie dolnej granicy prawdopodobieństwa sukcesu $\overline{p} = \lambda / R_u$,

   gdzie $\lambda = \dfrac{L_m - A}{P}$.
3. Prośba o informacje od decydenta
   a. Jaką część x swoich zasobów kapitałowych decydent przeznaczy na ryzykowną inwestycję względem części x_F na inwestycje bez ryzyka, przy których użyteczności z porównywanych inwestycji będą równoważne?

      Decydent powinien podać wartość relacji x_F/x.

b. Jaki według opinii decydenta powinien być optymalny (maksymalizujący użyteczność) podział przyrostu dochodów na część h przeznaczoną na ryzykowną działalność, w porównaniu z częścią $(1-h)$ przeznaczoną na rezerwę bez ryzyka?
Decydent powinien podać wartość relacji $h/(1-h)$.

4. Wyznaczenie parametru β.
Zgodnie z zależnościami podanymi w pracy [14] wyznaczane są wartości: $ln(x_F/x)$, $ln(h/(1-h)$, oraz $\beta = \left[1 + \frac{\ln x_F/x}{\ln \frac{h}{1-h}}\right]^{-1}$.

5. Wyznaczenie minimalnej akceptowalnej wartości indeksu bezpieczeństwa S_0 i parametru κ:
$S_0 = (R_F/\lambda)^{\gamma}$, gdzie $\gamma = 1/(1-\beta)$,
$\kappa = (1-S_0)/[1/\bar{p} - 1]^{1/2}$.

Komentarze

Prośba o oceny inwestora zawarta w kroku 3. poprzedzona jest prezentacją informacji z modelu matematycznego opisującego ryzykowne przedsięwzięcie i informacjami dotyczącymi sytuacji finansowej decydenta. Pytanie 3a. wynika z zastosowania ekwiwalentu pewności, zgodnie z którym decydent proszony jest o podanie wartości nakładów x_F na przedsięwzięcie bez ryzyka w porównaniu z nakładami x na rozważane przedsięwzięcie ryzykowne, przy których uzyskiwane użyteczności są takie same. Większa wartość x_F/x oznacza, że decydent woli rozwiązania o mniejszej stopie zwrotu, ale pewniejsze, charakteryzujące się mniejszym ryzykiem.

Pytanie 3b. związane jest z optymalizacją retencji. Decydent proszony jest o informacje, jaki byłby najlepszy, ze względu na uzyskiwaną użyteczność, podział przyrostu dochodów na część h przeznaczoną na ryzykowną działalność (prezentowaną przez wyniki modelu matematycznego) oraz na część $(1-h)$ przeznaczoną na inwestycje bez ryzyka, np. na zakup obligacji skarbowych o danej stopie procentowej. Rozwiązanie problemu maksymalizacji użyteczności prowadzi do relacji umożliwiających wyznaczenie parametru β. Większa wartość h względem $(1-h)$ oznacza, że decydent jest bardziej przedsiębiorczy, woli zainwestować większą część przyrostu dochodów w przedsięwzięcie bardziej ryzykowne, ale charakteryzujące się większą stopą zwrotu, niż w przedsięwzięcie bez ryzyka o niskiej stopie zwrotu.

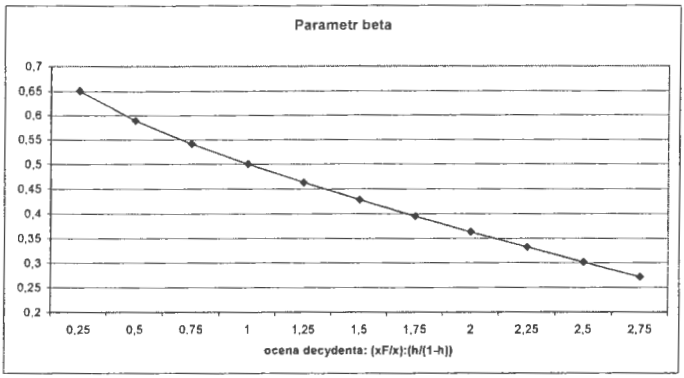
Powyższa procedura została zaimplementowana w eksperymentalnym systemie komputerowym oraz przeprowadzono szereg eksperymentów obliczeniowych. Podane niżej wyniki z jednego z tych eksperymentów ilustrują wpływ ocen decydenta, podawanych w procedurze, na wartości wyznaczanych subiektywnych parametrów funkcji użyteczności. Ryzykowne przedsięwzięcie opisane jest w formie dwupunktowego rozkładu prawdopodobieństwa. Eksperyment przeprowadzono dla danych zamieszczonych w Tabeli 1. Dane te obejmują wartości, jakie może przyjąć zmienna losowa, którą jest stopa zwrotu i prawdopodobieństwa ich wystąpienia, wielkości opisujące sytuację finansową inwestora: zasoby kapitału, który może przeznaczyć na ryzykowne przedsięwzięcie, rezerwy kapitałowe oraz minimalne potrzeby i zobowiązania inwestora. Wielkości te wyrażone są przykładowo w tys. zł. Stopa zwrotu bez ryzyka przyjęta została na poziomie 6%.

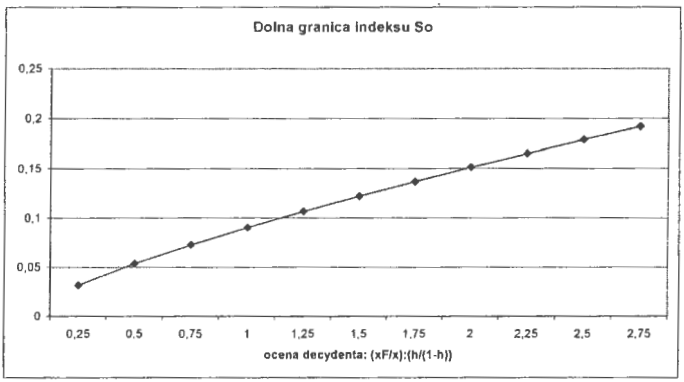
Tabela 1

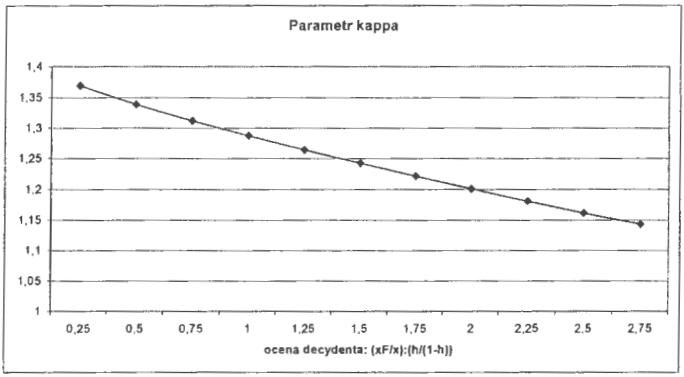
Dane przykładu obliczeniowego.

DANE		
Opis ryzykownego przedsięwzięcia w formie dwupunktowego rozkładu prawdopodobieństwa sukcesu		
Stopa zwrotu w przypadku sukcesu	Ru =	0,3
z prawdopodobieństwem	p =	0,6
oraz stopa zwrotu	Rd =	0
z prawdopodobieństwem	1-p =	0,4
Sytuacja finansowa inwestora		
Zasoby kapitału	P =	100
Rezerwy kapitałowe	A =	20
Zobowiązania inwestora i minimalne potrzeby	Lm =	40
Stopa zwrotu bez ryzyka	RF=	0,06

Obserwowano, jak zmieniają się szacowane parametry funkcji użyteczności, w zależności od ocen podawanych przez decydenta, w odpowiedzi na pytania a. i b. w 3-cim kroku procedury. Uzyskane wyniki zawiera Rys. 1. Zbadano w szczególności wpływ wielkości $(x_F/x):[h/(1-h)]$, która zmienia się w przedziale [0,25 – 2,75], na wartość szacowanego parametru β, dolnej granicy indeksu bezpieczeństwa S_0 oraz parametru κ. Zauważmy, że zwiększenie tej wielkości oznacza, że decydent jest bardziej ostrożny i bardziej zachowawczy, bojąc się ryzyka utraty kapitału włożonego w niepewne przedsięwzięcie. Wartość oszacowanego parametru β maleje ze wzrostem wielkości $(x_F/x):[h/(1-h)]$, od wartości 0,65 do 0,27. Dla wartości $(x_F/x):[h/(1-h)]=1$, β przyjmuje wartość

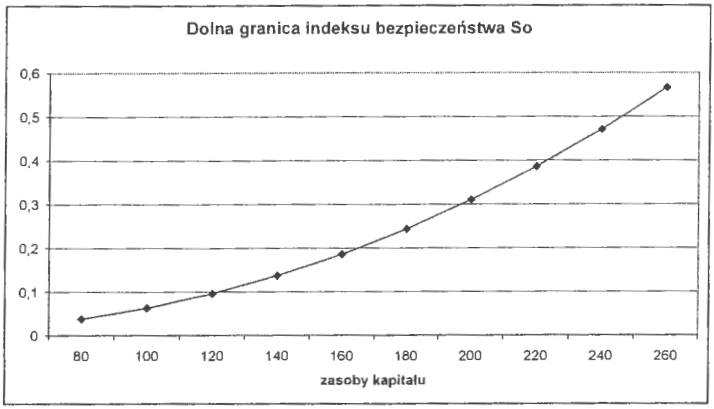


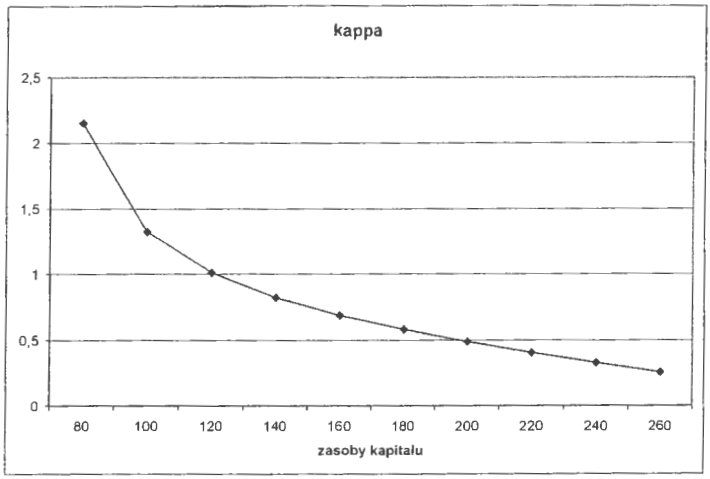




Rys. 1. Zależność szacowanych parametrów funkcji użyteczności od ocen podawanych przez decydenta.

0,5. Parametr β można traktować jako wielkość charakteryzującą przedsiębiorczość inwestora. Inwestor, który ma skłonność do większej retencji kapitału, charakteryzowany jest przez większą wartość parametru β.





Rys. 2. Zależność dolnej granicy indeksu bezpieczeństwa S_0 oraz parametru κ od zasobów kapitału P.

Ze wzrostem wartości $(x_F/x):[h/(1-h)]$ i zmniejszaniem wartości parametru β, zwiększa się wartość dolnej granicy indeksu bezpieczeństwa S_0 oraz zmniejsza się wartość parametru κ. Bardziej przedsiębiorczy decydent, charakteryzowany przez β>0,5 jest skłonny do retencji kapitału mimo większej „ceny

strachu" reprezentowanej przez parametr κ. Decydent obawiający się ryzyka stara się wybrać opcje charakteryzujące się większym dolnym poziomem indeksu bezpieczeństwa i mniejszą wartością parametru κ.

Uzyskane wyniki korespondują z wynikami badań psychologów [17].

Na Rys. 2. przedstawiono wyniki obliczeniowe ilustrujące jak wielkość zasobów kapitału P, który może być przeznaczony na ryzykowne przedsięwzięcie, wpływa na oszacowania dolnej granicy indeksu bezpieczeństwa S_0 oraz parametru κ. Rozpatrywano zmianę wartości kapitału P w przedziale 80 – 260 tys. zł. Pozostałe dane były ustalone na takim samym poziomie jak podane w Tab. 1. Przyjęto, że oceny decydenta reprezentowane przez wartość wielkości $(x_F/x):[h/(1-h)]=5/8$ są stałe. Stała jest wówczas wartość parametru $\beta= 0{,}563$. Zwiększenie poziomu kapitału P przy tych samych minimalnych potrzebach i zobowiązaniach inwestora i takiej samej rezerwie oznacza zwiększenie dolnej granicy poziomu bezpieczeństwa oraz zmniejszenie wartości parametru κ. Subiektywna ocena „ceny strachu" jest mniejsza.

3. Procedura skalowania funkcji opisującej nieużyteczność możliwych strat i zagrożeń

Zgodnie z propozycją R. Kulikowskiego [14] przyjmuje się, że subiektywne odczucie decydenta związane z możliwymi, prawdopodobnymi stratami i zagrożeniami posiadanych przez niego różnych form kapitału może być opisane za pomocą funkcji zależnej od wielkości K_e zagrożonego kapitału, posiadanych rezerw K_r umożliwiających pokrycie ewentualnych strat oraz od stopy strat $\widetilde{R}_l$. W ogólnym przypadku zakłada się, że stopa strat jest zmienną losową o znanych parametrach rozkładu prawdopodobieństwa: wartości oczekiwanej R_l i odchyleniu standardowym σ_l.

Funkcja ta zwana funkcją nieużyteczności przyjmuje postać:

$$D(x_l) = F[K_r R_l x_l;\, K_r R_l + \kappa_l \sigma] = K_r R_l S_l^{1-\beta} x_l^{\beta}, \text{ gdzie } x_l = {K_e}/{K_r},\ x_l \le 1.$$

Do opisu stopy strat zaproponowano model rozkładu dwupunktowego, w którym stopa strat może przyjąć wartości

$$R_l^u = 1 - {\overline{K}_e}/{K_e} > 0, \text{ z prawdopodobieństwem strat } p_l,$$

$R_l^d = 0$, z prawdopodobieństwem $1 - p_l$.

Wielkość $\overline{K}_e$ oznacza jaką wartość będzie miał zagrożony kapitał K_e po wystąpieniu zdarzenia losowego.

Wielkość S_l oznacza indeks bezpieczeństwa, zdefiniowany analogicznie jak w przypadku funkcji użyteczności, który w powyższym przypadku może być opisany zależnością: $S_l = 1 + \kappa_l \sqrt{1/p_l - 1}$.

Parametry β oraz κ_l są subiektywnymi parametrami zależnymi od konkretnego decydenta. Przedstawiana niżej procedura umożliwia ich oszacowanie na podstawie ocen podawanych przez decydenta.

Do proponowanej procedury niezbędne są informacje dotyczące rozkładu prawdopodobieństwa stopy strat oraz dotyczące sytuacji finansowi inwestora. W najprostszym przypadku sytuacja finansowa może być opisana przez wartość zagrożonego kapitału i wartość kapitału rezerwowego, który umożliwi pokrycie ewentualnych strat. Powyższe informacje traktowane są jako dane wejściowe.

Rozpatrywane są możliwości ubezpieczenia od szkód spowodowanych sytuacją losową oraz możliwości działań prewencyjnych umożliwiające zmniejszenie prawdopodobieństwa wystąpienia zagrożenia.

Procedura skalowania

1. Przedstawienie decydentowi informacji opisującego zagrożenia jego kapitału w formie rozkładu prawdopodobieństwa możliwych strat, a także podanie informacji dotyczącej sytuacji finansowej decydenta oraz kosztów ubezpieczenia kapitału.
2. Wyznaczenie górnej granicy prawdopodobieństwa strat $\overline{p}_l = \lambda / R_l^u$, gdzie $\lambda = K_r/K_e$.
3. Prośba o informacje od decydenta:
   a. Jaką część kapitału rezerwowego K_r jest gotów przeznaczyć decydent na koszty ubezpieczenia C w porównaniu z wartością zagrożonego kapitału K_e, przy której nieużyteczność związana z ryzykiem poniesienia straty bez ubezpieczenia i nieużyteczność związana z poniesieniem kosztów ubezpieczenia będą równoważne. Decydent powinien podać wartość relacji $\boldsymbol{C/K_e}$.
   b. Jaki według opinii decydenta powinien być optymalny (minimalizujący nieużyteczność) podział przyrostu rezerw na część g przeznaczoną na redukcję strat przez działania prewencyjne, w porów-

naniu z częścią *(1-g)* przeznaczoną na eliminację strat przez ubezpieczenie?

Decydent powinien podać wartość relacji ***g/(1-g)***.

4. Wyznaczenie parametru β.

   Zgodnie z zależnościami podanymi w pracy [14] wyznaczane są wartości: $ln(C/K_e)$, $ln(g/(1-g)$, oraz $\beta=[1+ ln(C/K_e)/ln(g/(1-g)]^{-1}$,

5. Wyznaczenie minimalnej akceptowalnej wartości indeksu bezpieczeństwa $\bar{S}_l$ i parametru κ_l:

   $\bar{S}_l = (\lambda^{1/\beta} K_e / C)^{\gamma}$, gdzie $\gamma=1/(1-\beta)$,

   $\kappa_l = (\bar{S}_l - 1) : \sqrt{1/\bar{p}_l - 1}$.

Komentarze

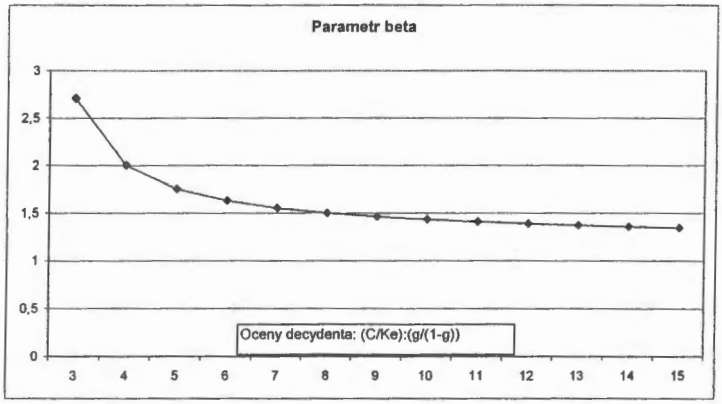
Pytanie 3.a. wynika z zastosowania ekwiwalentu pewności. Decydent porównuje dwie opcje: ubezpieczenie od zagrożenia, które oznacza poniesienie kosztu C, ale ewentualne straty powstałe w wyniku zdarzenia losowego zostaną pokryte oraz opcję akceptacji zagrożenia i poniesienia strat z prawdopodobieństwem p_l i konieczności pokrycia tych strat K_e z kapitału rezerwowego. Decydent proszony jest o podanie wartości C/K_e, przy której użyteczności obu opcji są identyczne.

Pytanie 3.b. dotyczy proponowanej przez decydenta strategii redukcji strat, polegającej na takim podziale przyrostu rezerw na ubezpieczenie i na działania prewencyjne, przy których nieużyteczność związana z poniesionymi nakładami i pozostałym zagrożeniem będzie minimalna.

Przykład obliczeniowy

W przedstawianym przykładzie przyjęto następujące dane wejściowe: dwupunktowy rozkład prawdopodobieństwa, zgodnie z którym stopa strat może przyjąć wartości: R_l^u=0,1, z prawdopodobieństwem tych strat p_l=0,1, oraz $R_l^d = 0$, z prawdopodobieństwem $1 - p_l$=0,9; wartość kapitału zagrożonego K_e=100 tys zł; wartość kapitału rezerwowego K_r=200 tys zł.

Zbadano jak oceny decydenta wpływają na wartość szacowanego parametru β i κ. Wybrane wyniki przedstawia Rys. 3.



Rys. 3. Zależność szacowanego parametru β funkcji nieużyteczności od ocen decydenta.

Oceny decydenta w odpowiedzi na pytania a. i b. w 3-cim kroku procedury reprezentuje relacja $(C/K_e):(g/(1-g)$. Typowi decydenci przyjmują wartości C/K_e mniejsze od 1, a wartości $g/(1-g)$ większe od 1. W przedstawianym eksperymencie wartości $(C/Ke):(g/(1-g)$ zmieniały się w przedziale 3 do 16. Zauważmy, że szacowany parametr β funkcji nieużyteczności przyjmuje wartości większe od 1. Oznacza to, że funkcja nieużyteczności D jest funkcją wypukłą. Zauważmy, że wzrost wartości $(C/K_e):(g/(1-g)$ następuje wówczas, gdy decydent skłonny jest przeznaczyć większe środki na ubezpieczenie zapewniające pokrycie strat, niż na działania prewencyjne. Wartość parametru β wtedy maleje, dążąc do wartości 1. Decydent, który woli większe środki przeznaczyć na działania prewencyjne, charakteryzowany jest przez większą wartość parametru β, dochodzącą w przeprowadzanym badaniu do wysokości 2,7.

4. Wpływ parametru β na optymalizację decyzji

Rozpatrzmy następujący przykład ilustrujący wykorzystanie funkcji użyteczności do podziału nakładów między różne przedsięwzięcia z uwzględnieniem ryzyka. Decydent ma do dyspozycji kapitał P, który w 80% zamierza przeznaczyć inwestycje w dwa rodzaje ryzykownych przedsięwzięć A i B. Stopy zwrotu tych przedsięwzięć są zmiennymi losowymi odpowiednio $\widetilde{R}_A$ i $\widetilde{R}_B$ .Dane są rozkłady prawdopodobieństwa stóp zwrotu zgodnie z tabelą 2.

Problem decyzyjny dotyczy podziału danych środków $I = 0{,}8 \cdot P$ między te

Tabela 2

Rozkłady prawdopodobieństw zmiennych

$\widetilde{R}_A$		$\widetilde{R}_B$	
Stopa zwrotu	Prawdopodobieństwo	Stopa zwrotu	Prawdopodobieństwo
-1	0,4	-0,5	0,05
7	0,6	-0.2	0,05
		0	0,1
		0,2	0,3
		0,5	0,5

dwa przedsięwzięcia tak, aby maksymalizować użyteczność łącznej inwestycji. Przyjmijmy, że zmienne decyzyjne x_A, x_B określają podział nakładów I na te przedsięwzięcia, tzn. $x_A+x_B \leq 1$. Założono niezależność rozkładów, brak korelacji zmiennych $\widetilde{R}_A$ i $\widetilde{R}_B$. Można wówczas prosto wyznaczyć realizacje R_j, $j=1,..10$, łącznej stopy zwrotu możliwych zdarzeń i ich prawdopodobieństwa według schematu przedstawionego w Tabeli 3.

Tabela 3

Realizacje R_j łącznej stopy zwrotu

Zdarzenie j=	Realizacja stopy zwrotu R_i	Prawdopodobieństwo p_i
1	$R_{A1}x_A+R_{B1}x_B$	$p_{A1}p_{B1}$
2	$R_{A1}x_A+R_{B2}x_B$	$p_{A1}p_{B2}$
...	...	...
5	$R_{A1}x_A+R_{B5}x_B$	$p_{A1}p_{B5}$
6	$R_{A2}x_A+R_{B1}x_B$	$p_{A2}p_{B1}$
...	...	...
10	$R_{A2}x_A+R_{B5}x_B$	$p_{A2}p_{B5}$

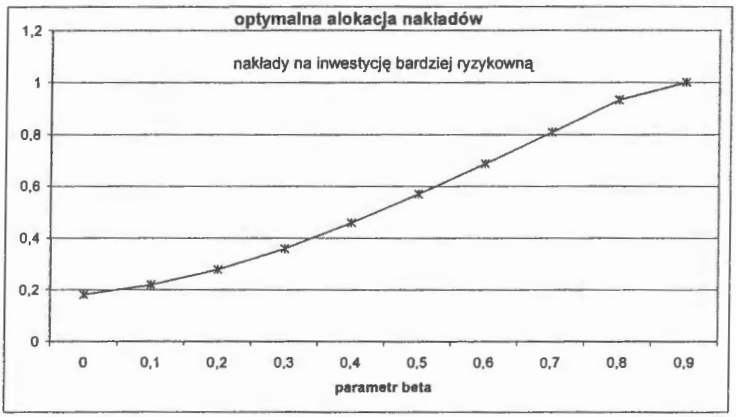
gdzie R_{Ai}, p_{Ai}, $i=1,2$ są odpowiednio realizacjami stopy zwrotu $\widetilde{R}_A$ i ich prawdopodobieństwami, a R_{Bi}, p_{Bi}, $i=1,..,5$ są realizacjami stopy zwrotu $\widetilde{R}_B$ i ich prawdopodobieństwami. Mając te dane można wyznaczyć oczekiwaną stopę zwrotu $R(x_A,x_B)$ oraz odchylenie standardowe $\sigma(x_A,x_B)$ i semi-odchylenie standardowe w zależności od zmiennych decyzyjnych.

Przedmiotem badania było sprawdzenie jak wartość parametru β wpływa na wyniki maksymalizacji przyjętej funkcji użyteczności względem zmiennych decyzyjnych. Rozpatrywana funkcja użyteczności przyjmuje postać:
$U(x_A,x_B)=P\ R(x_A,x_B)S^{1-\beta} \bullet (0,8)^{\beta}$ gdzie indeks bezpieczeństwa

$$S=1-\kappa\sigma(x_A,x_B)/R(x_A,x_B).$$

Parametry β i κ są subiektywnymi parametrami zależnymi od preferencji decydenta. Rozwiązywano zadanie optymalizacji:
max $U(x_A,x_B)$, ze względu na zmienne decyzyjne x_A,x_B, przy ograniczeniach $x_A+x_B\leq 1$ oraz $S(x_A,,x_B)\geq 0$, przy różnych wartościach parametru β. Wartość parametru κ była stała.

Uzyskane wyniki przedstawiono na kolejnych rysunkach 4, 5, 6, 7. Każdy punkt krzywych przedstawionych na wykresach odpowiada konkretnemu rozwiązaniu zadania optymalizacji. Zauważmy, że większa wartość parametru β oznacza wzrost wartości nakładów (Rys. 4) przeznaczonych na bardziej ryzykowne przedsięwzięcie A, które zapewnia przy tym znacznie większą stopę zwrotu w porównaniu z przedsięwzięciem B. Decydent godzi się przy tym na istotny wzrost odchylenia standardowego, kierując się wzrostem oczekiwanej stopy zwrotu. Przy wartości β=0,9 całość nakładów przeznaczona jest na ryzykowne przedsięwzięcie A.

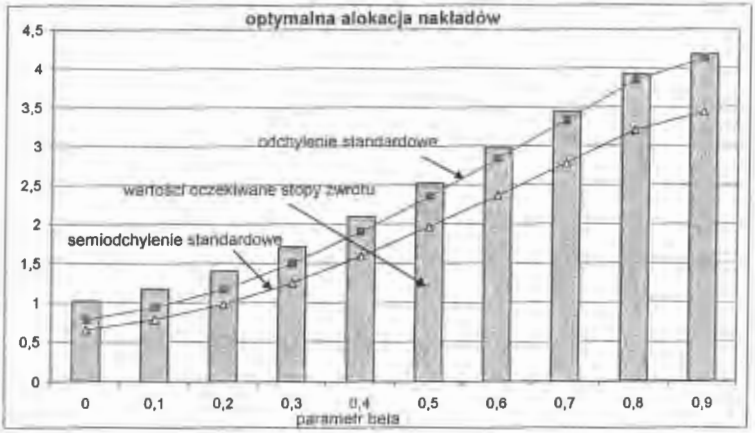


Rys.4. Optymalne nakłady na przedsięwzięcie A przy różnych wartościach parametru β.

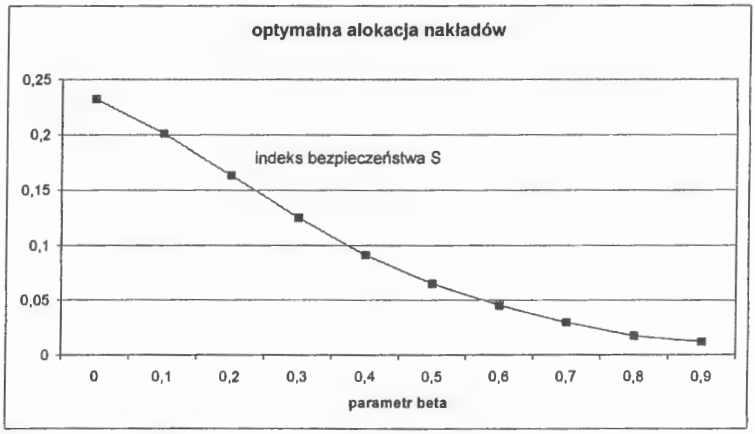
Zauważmy również, że większa wartość parametru β oznacza wybór rozwiązania, charakteryzującego się malejącą wartością indeksu bezpieczeństwa (Rys. 6).

Rysunek 7 przedstawia fragment brzegu Pareto osiągalnych rozwiązań w przestrzeni określonej przez oczekiwaną stopę zwrotu i odchylenie standardowe. Naniesione punkty przedstawiają rozwiązania rozpatrywanego zadania optymalizacji dla różnych wartości β. Pokazują możliwość charakteryzacji

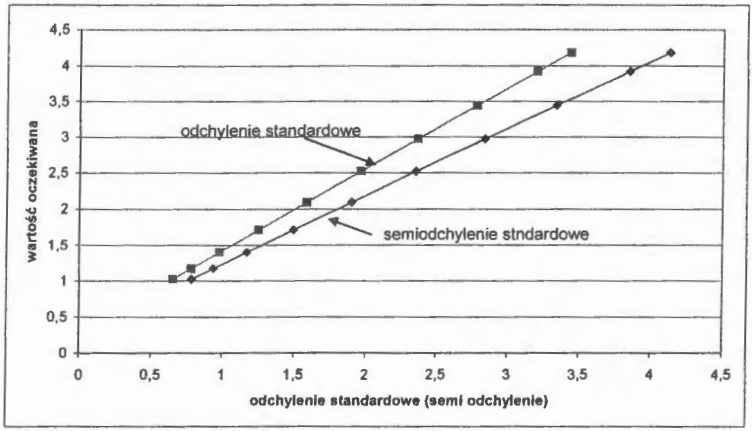
zbioru rozwiązań niezdominowanych przez odpowiedni dobór parametru β. Przedstawione wyniki pokazują, że duża wartość parametru β charakteryzuje decydenta bardziej przedsiębiorczego, który nie boi się ryzyka, a w swoich decyzjach kieruje się przede wszystkim możliwością uzyskania wysokiej stopy zwrotu na zainwestowanym kapitale.



Rys. 5. Oczekiwana stopa zwrotu i odchylenie standardowe przy optymalnej alokacji nakładów dla różnych wartości parametru β.



Rys. 6. Indeks bezpieczeństwa przy optymalnej alokacji nakładów dla różnych wartości parametru β.



Rys. 7. Wybrane rozwiązanie dla różnych wartości β na brzegu Pareto w przestrzeni zmiennych: wartość oczekiwana stopy zwrotu i odchylenie standardowe.

Podsumowanie

Na podstawie koncepcji podanych przez R. Kulikowskiego zaproponowano komputerową implementację procedur obliczeniowych szacowania parametrów funkcji użyteczności, a także funkcji opisującej nieużyteczność możliwych strat i zagrożeń. Procedury te mają charakter interaktywny. Przeprowadzono eksperymenty obliczeniowe ilustrujące działanie tych procedur. Pokazano jak oceny podawane przez decydentów, zgodnie z ich preferencjami, wpływają na wartości szacowanych parametrów, co umożliwia praktyczną interpretacje tych parametrów. Podano przykład ilustrujący wpływ rozpatrywanego parametru β na optymalny podział nakładów między przedsięwzięcia o różnym poziomie ryzyka. Rozpatrywane procedury szacowania traktowane są jako elementy systemu komputerowego wspomagającego analizę decyzyjną z uwzględnieniem ryzyka w zagadnieniach zarządzania kapitałami.

Literatura

1. Banek T, Kulikowski R. (2003). Management of intellectual capital. Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Sci. Tech. Vol. 51, No. 2.

2. Burnham K., Anderson D.R. (1998). Model selection and multimodel inference, Springer.
3. Francis J.C. (1991). Investments – analysis and management. McGraw-Hill, New York.
4. Keeney R., Raiffa H. (1976) Decisions with Multiple Objectives. John Wiley & Sons, New York.
5. Kruś L. (2003) Analiza finansowania przedsięwzięć innowacyjnych, W: Modelowanie preferencji a ryzyko '03, T. Trzaskalik (red.), AE Katowice.
6. Kruś L. (2004). Analiza współpracy we wspólnych przedsięwzięciach innowacyjnych. W: Badania operacyjne i systemowe, 2004. Podejmowanie decyzji. Podstawy metodyczne i zastosowania. EXIT, Warszawa.
7. Kruś L. (2004) A Computer Based System Supporting Analysis of Cooperative Strategies. W: Artificial Intelligence and Soft Computing – ICAISC 2004,, L. Rutkowski, J. Siekmann, R. Tadeusiewicz, L. Zadeh (eds), Lecture Notes in Computer Science, Springer.
8. Kulikowski R. (2002). URS methodology – a tool for stimulation of economic growth by innovations. Bulletin of Polisth Academy of Sciences, Sci. Tech. Vol. 50, No 1.
9. Kulikowski R. (2002). Wspomaganie zarządzania przez maksymalizację użyteczności w granicach dopuszczalnego ryzyka. XIV Krajowa Konferencja Automatyki, 24-27.VI.
10. Kulikowski R. (2003). Acceleration of economic growth by technological change and knowledge management. Bulletin of Polish Academy of Sciences, Sci. Tech. Vol. 51, No 3.
11. Kulikowski R. (2004). Risk and utility of sustainable development. W: Grzegorzewski P., Krawczak M., Zadrożny S. (eds). Soft computing – tools, techniques and application.
12. Kulikowski R. (2004). Management support by knowledge using the concept of utility of sustainable development. W: Proceedings of the 15th International Conference on Systems Science, Wrocław.
13. Kulikowski R. (2003) On General Theory of Risk Management and Decision Support Systems. Bull. of Polish Academy of Sciences, Sci. Tech. Vol. 51, No. 3.
14. Kulikowski R. (2005) Wspomaganie zarządzania kapitałami z uwzględnieniem ryzyka. Artykuł zgłoszony na konferencję MPAR 2005.
15. Ogryczak, W. (2002) Multiple criteria optimization and decisions under risk. Control and Cybernetics, 31,4.

16. Von Neumann J., Morgenstern O. (1953). Theory of games and economic behaviour. Princeton Univ. Press.
17. Savage L.J. (1954). The foundations of statistics. New York, Wiley.
18. Tversky A., Kahneman O. (1981). The framing of decisions and the psychology of choice. Science 211, 453-480.