PROF. V. SCHLEGEL. NAUKA ROZCIĄGŁOSCI GRASSMANNA

NAUKA ROZCIĄGŁOŚCI.

Prof. V. Schlegel.

NAUKA ROZCIĄGŁOŚCI

GRASSMANNA

PRZYCZYNEK

do historyi matematyki w ostatnich pięćdziesięciu latach

przełożył

za upoważnieniem autora

S. Dickstein.

Warszawa.

Wydawnictwo Redakcyi Prac matematyczno-fizycznych.

1896.

Дозволено Цензурою.

Варшава, 8 Августа 1896 года.

Warszawa.—Druk S. Orgelbranda Synów, Krakowskie-Przedmieście Nr. 66.

W roku 1844 nakładem Ottona Wiganda w Lipsku ukazało się dzieło nauczyciela szkoły realnej w Szczecinie, Hermanna Grassmanna, stanowiące tom o 280 stronicach p. t.: „Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik, dargestellt und durch Anwendung auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erläutert." W roku następnym ogłosił Grassmann w „Archivie" Grunerta artykuł, informujący o istocie i pojęciach głównych nauki rozciągłości. Po dwóch znów latach w pracy konkursowej, nagrodzonej przez Towarzystwo Jabłonowskiego, wykazał, że jego nowa nauka jest urzeczywistnieniem takiej „analizy geometrycznej" jakiej żądał Leibniz, oceniający w całej pełni jej wielkie znaczenie dla geometryi. Zarazem podał Grassmann dalsze zastosowania swej nauki do geometryi i mechaniki. W przeciągu lat dwunastu od wyjścia głównego dzieła, w szeregu rozpraw w dzienniku Crellego ogłosił Grassmann ważne nowe odkrycia w dziedzinie teoryi krzywych i powierzchni, które zawdzięczał swojej analizie, a między innemi nowe, związane później z jego imieniem, sposoby tworzenia krzywych i powierzchni algebraicznych.

W roku 1862 u Adolfa Enslina w Berlinie ukazał się zapowiedziany podwójnym tytułem dzieła z r. 1844 tom drugi: „Die Ausdehnungslehre vollständig und in strenger Form bearbeitet." Tom ten, opracowany według metody euklidesowej, łączył w sobie treść tomu pierwszego, w którym wykład prowadzony był bardziej filozoficznie, z dalszym ciągiem teoryi, albo, krótko mówiąc, do analizy przesunięć dodawał analizę ruchów obrotowych.

Mimo to wszystko, dzieło główne z r. 1844 prawie przez ćwierć wieku pozostało niezrozumianem i nieznanem, podobnie jak i to wszystko, co napisał Grassmann celem wyjaśnienia i rozszerzenia swej pracy. Jedyny wyjątek stanowił wspomniany już sposób tworzenia krzywych i powierzchni, przyjęty przez naukę, jakkolwiek nikt nie zadawał sobie trudu wniknięcia w samą metodę, dającą te piękne wyniki. Z powodu minimalnego pokupu dzieła z r. 1844 nakładca wycofał je zupełnie z obiegu. Ponieważ i wpływ drugiej książki był może jeszcze mniejszy niż pierwszej, przeto i sam Grassmann usunął się całkowicie od pracy matematycznej i przeniósł się na pole badań sanskrytu, na którem znalazł też bezwzględne uznanie. O nauce rozciągłości zapomniano. Atoli w końcu 6-go dziesiątka lat nastąpił zwrot, przepowiedziany w przedmowie do części drugiej przez Grassmanna, przekonanego o żywotności swego dzieła. Na rynku antykwarskim poczęła szybko podnosić się w cenie część pierwsza oraz wyczerpana część druga. Wkrótce po śmierci Grassmanna (w r. 1878) wyszedł przedruk dzieła z r. 1844 z przedmową, którą on sam zdołał jeszcze napisać. Dziś dzieło to wraz z wspomnianą rozprawą konkursową stanowi tom pierwszy całkowitego wydania dzieł matematycznych i fizycznych Grassmanna, podjętego w r. 1894 staraniem królewsko-saskiego Towarzystwa umiejętności w 50 roku jubileuszowym od ukazania się pierwszego wydania. Dzieła te wychodzą u B. G. Teubnera w Lipsku.

Oto w krótkim zarysie losy dzieła uczonego niemieckiego, którego nazwisko, lubo późno i nie bez poważnego współudziału zagranicy, znalazło wreszcie przynależne sobie stanowisko obok pierwszych wielkości w świecie matematycznym naszego stulecia.

Rozwój i rozpowszechnienie nauki rozciągłości w ostatnich 25 latach pozostały bez wpływu na niektóre tylko gałęzie matematyki; dla wielu innych nauka ta była potężną dźwignią badania, działając pobudzająco i zapładniająco w rozmaitych kierunkach. Lecz z powodu braku organu zbiorowego, jaki posiadają szkoły innych twórczych badaczów w czasopismach oraz w zakładach wyższych, prace te są nadzwyczaj rozproszone. Mniemamy przeto, że zwłaszcza w chwili obecnej, kiedy przez wydanie jubileuszowe dzieło Grassmanna dostanie się do rąk matematyków, którzy dotąd stronili od niego, przegląd niniejszy rozwoju i rozszerzenia nauki rozciągłości, mający za zadanie poinformowanie o wszystkich tych pracach, będzie mile powitany i w kołach szerszych.

Piszący te słowa, niegdyś młodszy przyjaciel i przez cza krótki towarzysz zawodu zestarzałego już wówczas i jakby obcego własnemu dziełu H. Grassmanna, będąc głęboko przekonany o wielkiem na długie lata jeszcze znaczeniu tego dzieła dla rozwoju nauk matematycznych, poświęca mu od 26 lat większą część swojej pracy naukowej, usiłując uczynić je przez to zrozumialszem gromadząc i wiążąc siły pracujących nad niem. Stąd może bardziej, niż kto inny, miał on oko zwrócone na rozwój dzieła Grassmannowskiego; starał się przynajmniej tym sposobem, wedle skromnych sił swoich, zastąpić brak organu zbiorowego, do czasu, w którym dzieło Grassmanna o własnej sile nie ukończyło wyprawy zwycięskiej za granicą i w blasku powodzeń nie zdobyło sobie, obok prac innych szkół matematycznych, ogólnego w Niemczech uznania. Z własnego, niezwykle bogatego, lubo niewolnego od braków materyału, pragnie piszący te słowa, o ile miejsce pozwoli, przedstawić cechy charakterystyczne dziejów nauki rozciągłości oraz związku jej z innemi gałęziami matematyki. Z drugiej strony zamierza przy tej sposobności dostarczyć pewnych koniecznych, zdaniem jego, uzupełnień do „Uwag wstępnych“ wydawcy wydania jubileuszowego, który od dzieła Grassmanna stał w istocie w pewnej odległości. A zadanie to spełnia z tem większem zadowoleniem, że dopiero literatura przedmiotu, mająca być dodaną do ostatniego tomu obecnego wydania dzieł matematycznych i fizycznych Grassmanna, da mu sposobność wzięcia udziału w pracy nad wydaniem, spełniającem dawne gorące życzenia jego własne i wielu innych przyjaciół zawodowych.

Nauka rozciągłości jest konsekwentnie rozwiniętym systemem działań rachunkowych, dającym najprostszą i najnaturalniejszą podstawę wszystkim badaniom, odnoszącym się do geometryi i mechaniki. Geometrya analityczna przez swoje spółrzędne wprowadza element całkiem obcy do właściwego przedmiotu badania. Jej metoda postępuje drogami bocznemi, traci czucie z zagadnieniem i ukazuje swe rozwiązania jakby przez zasłonę. Wraz ze złożonością przedmiotu rosnąca niepomiernie rozwlekłość i zawiłość jej rachunków i wzorów zmusza do ustanawiania coraz nowych układów spółrzędnych, mających możliwie ściśle przystosowywać się do zagadnień specyalnych, oraz do wynajdywania coraz nowych symboli skracających; skutkiem tego cała metoda, pierwotnie jednolita i konsekwentna, w rozwoju swym stała się bezplanową. Geometrya syntetyczna (Steinerowska) jest wprawdzie od tych braków wolna, lecz nie używając rachunków, pozbawia się najpotężniejszego i najdogodniejszego narzędzia badania, o którem Klein w swych „Badaniach porównawczych o nowszych badaniach geometrycznych" *) mówi trafnie, że dobrze przystosowany formalizm daje badaniu tę cenną korzyść, iż w pewnej mierze wyprzedza myśl. Ciężar roboty, zdjęty z umysłu, nakłada na daleko słabsze i bardziej ograniczone spostrzeganie; dogodny język wzorów zastępuje ciężką mową wyrazową. Dlatego to liczba zwolenników tej geometryi była zawsze ograniczona, a wartość jej prawdopodobnie będzie z czasem stawała się coraz bardziej propedeutyczną.

Nauka rozciągłości, podobnie jak geometrya syntetyczna, operuje bezpośrednio na utworach geometrycznych, poddaje je wszakże własnym działaniom rachunkowym. Ustanawia rachunkowo proste zależności wzajemne utworów i za pomocą prawidłowych przekształceń prowadzi sposobem systematycznym, pewnym i najkrótszym, do nowych związków tam, gdzie inne metody prowadzą nużącemi drogami bocznemi, lub, dla uniknienia tychże, wprowadzają sztuczne kombinacye myślowe. Każdy krok w rachunku oznacza wprost zrozumiałe przekształcenie geometryczne, a niewyczerpane bogactwo możliwych przekształceń stanowi zarazem niewyczerpane źródło nowych twierdzeń. W skutek tego nauka rozciągłości staje się metodą bezpośrednią, nadającą się do systematycznego odkrywania prawd geometrycznych; przewodniczką pewną, która w nieskończonej rozmaitości utworów przestrzennych i ich zależności wzajemnych, przedstawia jasno sam system i jego związki. Lecz nie wyczerpuje to bynajmniej jej znaczenia. Elementy, wpro-

*) Porów. Prace matematyczno-fizyczne t. VI, str. 55.

wadzone do rachunków, można z góry pojmować ogólniej i następnie wraz z osiągniętemi wynikami tłómaczyć w różny sposób. Tak np. te same wzory mogą wyrażać twierdzenia geometryi i mechaniki, albo też twierdzenia geometryi liniowej i kulistej. Podobnież działania i metody rachunkowe nauki rozciągłości można stosować do przestrzeni o dowolnej liczbie wymiarów, i tak też pierwotnie rozwinął je w największej ich ogólności sam Grassmann. W tym rozległym i dobrze uporządkowanym systemie wszystkie środki analityczne i pomocnicze mają swoje miejsce osobne i w tym właśnie związku dochodzą do istotnego udoskonalenia i uproszczenia. Stosuje się to zwłaszcza do teoryi wyznaczników, do całej tak nazwanej algebry nowszej, oraz do teoryi funkcyj analitycznych. I różne gałęzie matematyki stosowanej ciągnęły korzyść z tych metod.

Podstawą tych wszystkich reform są dwa działania, nazwane przez Grassmanna mnożeniem „zewnętrznem" i „wewnętrznem" elementów: pierwsze z prawem zasadniczem $(e_1\, e_2) = -(e_2\, e_1)$, skąd wprost wynika $(e_1\, e_1) = 0$; drugie z prawami zasadniczemi: $(e_1 | e_2) = 0$, $(e_1 | e_1) = 1$. Z tych niepozornych początków rozwija się nieprzeczuwane, rozszerzone jeszcze później przez szkołę Grassmannowską, bogactwo metodycznych środków pomocniczych, których całej doniosłości dziś jeszcze przejrzeć nie możemy, gdyż dotąd nie wyspecyalizowano jeszcze i nie wyzyskano większych działów abstrakcyjnej teoryi Grassmanna. Powiemy tu odrazu, że zastosowanie nauki rozciągłości ogranicza się do teoryi tych grup przekształceń (według rozumienia Lie'go), które zlewają się z geometryą w znaczeniu zwykłem, wraz z geometryą wielowymiarową i nieeuklidesową. Ocena doniosłości nauki rozciągłości winna tedy być oparta na znaczeniu, które nadajemy tej zwykłej geometryi i mechanice w porównaniu do geometryj i teoryi niezmienników, należących do innych grup przekształceń. Co do tego mówi Study[1]) bardzo słusznie: „Czy odpowiedni układ liczb pozyska ważniejsze znaczenie, zależeć znów będzie od tego, jakie miejsce zajmą przynależne grupy w całości wiedzy matematycznej".

Nauka rozciągłości nie wystąpiła bynajmniej z roszczeniami przeszkodzenia prawidłowemu biegowi rozwoju nauki matematycznej. Jakkolwiek odosobnionem było jej stanowisko, obcą i nieprzejrzystą szata, w której najprzód się ukazała, mimo to nie brak było zjawisk uprzedzających jej pojawienie się. Ukazała się właśnie w porę, by pobudzić do dalszego rozwoju ważne gałęzie wiedzy matematycznej. I jakkolwiek ten wpływ jej nie uwidocznia się przez całe dziesiątki lat skutkiem zupełnego ukrycia, w jakiem pozostawała, to wszakże dziś, po 50 latach, możemy widzieć, że rozwój nauki sam przez się i w najrozmaitszych miejscach skierowany był ku ideom Grassmannowskim. I do ostatniego czasu powstawały tam, gdzie nie znano dostatecznie nauki rozciągłości, rzekome odkrycia nowych pomysłów, które były tylko zasadami nauki rozciągłości, lub odkrycia nowych twierdzeń treści geometrycznej i analitycznej, które okazały się tylko wnioskami z daleko ogólniejszej nauki rozciągłości.

Jako poprzedzające naukę rozciągłości należy uważać, oprócz wspomnianej już „charakterystyki geometrycznej“ [2]) Leibniza, następujące prace: J. Grassmanna [3]) uważanie powierzchni równoległoboku za iloczyn geometryczny dwu boków przyległych; Möbiusa [4]) dodawanie geometryczne punktów i odcinków; Bellavitisa [5]) rachunek ekwipolencyj, który Hoüel uznał później za wynik logiczny ogólnej nauki rozciągłości; wreszcie rachunek kwaternionów, przeciw czemu zresztą protestował Bellavitis [6]).

Z pojedynczemi charakterystycznemi działaniami nauki rozciągłości, jakkolwiek zupełnie bez jej udziału, zlewają się: mnożenie odcinków St-Venanta [7]); klucze algebraiczne (Clefs algébriques), Cauchy'ego [8]); formy symboliczne (=iloczyny zewnętrzne) O'Briena [9]); iloczyn geometryczny (= wewnętrzny) Gaussa [10]); pęki liczbowe (=odcinki poddane dodawaniu) Bunkofera [11]); iloczyn geometryczny (=wewnętrzny) Résala [12]), przyjęty także w mechanice przez Somowa [13]); „znaki pierwotne“ (Promitivzeichen) Lipschitza [14]) identyczne z jednostkami Grassmannowskiemi i podległe tym samym prawom mnożenia. Dalej wprowadzone przez Kroneckera i Weierstrassa [15]) skrócone oznaczenia wyznaczników, które można uważać za stopień wstępny do systematycznego przedstawienia wyznaczników u Grassmanna; uważanie wziętej ze znakiem ujemnym połowy kwadratu odległości dwóch punktów za iloczyn (wewnętrzny) punktów, według Möbiusa [16]); uważanie spólnej potęgi dwóch kul za ich iloczyn (wewnętrzny), według Badorffa [17]); Assemblages binaires de la taxe k Méraya, jako szczególny przypadek wielkości rozciągłych Grassmanna, wyprowadzanych z $k+1$ jednostek i poddanych mnożeniu algebraicznemu [19]); symbol ω_k Chapmana [20]), obejmujący symbole kwaternionowe S i V, jako przypadki szczególne, umożliwiający rozszerzenie rachunku kwaternionów na n jednostek, i będący tylko symbolem mnożenia zewnętrznego, podobnie jak i dalsza próba Chapmana, zmierzająca do udoskonalenia rachunku kwaternionów [21]). Dalej należy tu pogląd Genty'ego [22]), według którego symbol kwaternionowy S (ab) jest iloczynem „rzutowym“ (wewnętrznym) symboli a i b; „niwelator“ Sylvestera [23]) — symbol, utworzony z tego samego punktu widzenia, jak „wyrażenie z lukami“ nauki rozciągłości.

Jak dalece symbolika algebry nowoczesnej zbliżyła się do sposobu przedstawienia nauki rozciągłości, nie przyjmując wszakże odpowiadającego istocie rzeczy charakteru tej ostatniej, wskazuje wyraźnie równanie $\alpha_x^n = 0$, orzekające, że punkt x opisuje krzywą n—go rzędu α, będące wszakże po lewej swej stronie tylko dowolnem zestawieniem trzech liter, rodzajem oznaczenia skróconego, gdy tymczasem w nauce rozciągłości równanie $\alpha x^n = 0$, wyrażające to samo, zawiera w sobie iloczyn zewnętrzny krzywej α przez potęgę algebraiczną x^n. W pierwszym razie mamy konglomerat, wymagający jeszcze nowych działań symbolicznych, aby mógł być użytecznym; w drugim zaś razie—wyrażenie, wchodzące do organizmu systemu i nadające się do bezpośredniego traktowania. Że symbole używane w algebrze nowoczesnej bardzo łatwo i z wielką korzyścią dla płynności rachunku oraz dla przedstawienia geometrycznego wyników zastąpić można utworami iloczynowemi Grassmanna, dowodzi tego wprowadzone przez Waelscha [24]) przedstawienie używanych w geometryi liniowej spółrzędnych promieniowych i osiowych pod postacią iloczynów zewnętrznych. Wreszcie symbole skracające, za pomocą których Hesse nadał geometryi analitycznej taką prostotę i elegancyę, jakich przedtem nie posiadała, cechują właśnie ten stopień rozwoju nauki, którego bezpośrednim krokiem dalszym są metody nauki rozciągłości.

Analitycy ścisłej reguły długo wzbraniali się uznać już nietylko konieczność ale nawet dopuszczalność takich działań, które, jak np. mnożenia Grassmannowskie, ulegają prawom innym, niż prawa arytmetyki zwykłej. W każdym razie ograniczono te działania do niższych dziedzin zastosowań w geometryi i mechanice. Dla scharakteryzowania tego ograniczonego sposobu widzenia porówn. rozważanie Study'ego (l. c. str. 177 i następ. str. 213). W obec tego jest interesującem, że w ostatnim czasie procesy czysto-analityczne doprowadziły do działań podobnych. Właściwie należą tu z rezultatów dawniejszych: przedstawienie wyznaczników podług Grassmanna; „Clefs algébriques“ Cauchy'ego oraz znaki pierwotne Lipschitza. Następnie znalazł Frobenius[25]), że jeżeli A i B są dwie formy dwuliniowe zmiennych $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$, to iloczyn

$$AB = \sum \frac{\partial A}{\partial y_k} \frac{\partial B}{\partial x_k}$$

jest w ogóle różny od BA. Niedawno okazał Study[1]), że teorya grup przekształceń liniowych pozostaje w najściślejszym związku z teoryą liczb urojonych wyższych (nadurojonych). Pozyskano tedy do ocenienia znaczenia układów tych liczb daleko rozleglejsze punkty widzenia, niż je dać może „analiza wyższa“, ścieśniająca się w kole swych działań elementarnych.

Grassmannowską metodę wyprowadzania wielkości rozciągłej (punktu lub odcinka) z jednostek (punktów lub odcinków) przy pomocy liczb, które można uważać za spółrzędne tamtej wielkości, znajdujemy także w szeregu samodzielnie pomyślanych układów spółrzędnych, których spółrzędne różnią się tylko stałemi czynnikami od spółrzędnych Grassmannowskich. Wszystkie te układy ustępują wszakże Grassmannowskiemu pod tym względem, że w zastosowaniach rachujemy w tamtych tylko ze spółrzędnemi, oderwanemi od punktów zasadniczych, gdy tymczasem równania nauki rozciągłości zawdzięczają swoją prostotę oraz łatwość i przejrzystość swych przekształceń właśnie tym punktom i zachodzącym pomiędzy niemi prawom rachunku. Takiemi układami są: spółrzędne barycentryczne Möbiusa[26]); spółrzędne Chasles'a[27]) stosunków z przecięcia wynikających; spółrzędne trójliniowe Schendela[27]), spółrzędne stosowane przez Kindela[28]) przy przyporządkowywaniu wzajemnem elementów przestrzennych; spółrzędne czworościenne d'Ocagne'a[29]), obejmujące w sobie z jednej strony spółrzędne Descartes'a i Plückera, z drugiej zaś spółrzędne równoległe punktowe i tangencyalne.

Do systemu nauki rozciągłości włączyć się dają bez zmiany istotnej: sposób przedstawienia ilości urojonych za pomocą wektorów, podany przez Arganda [30]) i Gaussa [31]); rachunek punktowy Siebecka [32]); sposoby przedstawiania ilości urojonych na płaszczyznie lub w przestrzeni, podane przez Möbiusa i Björlinga [33]).

Nie brakło też przedsięwzięć szerszych, w kierunku dążeń Grassmanna i pokrewnych nauce rozciągłości, celem stworzenia osobnej analizy, głównie dla celów geometryi lub fizyki. Tu przedewszystkiem, ze względu na bogate wyrobienie i powagę, na pierwszem miejscu postawić należy teoryę kwaternionów Hamiltona, o której mowa będzie jeszcze niżej. Ze względu na ograniczoność środków pomocniczych i niedogodność oznaczeń, stoi ona daleko niżej od nauki rozciągłości; wszystkie traktowane przez nią zagadnienia daleko dogodniej i krócej rozwiązują się za pomocą nauki rozciągłości, która, jak to sam Grassmann [32]) już wykazał, obejmuje w sobie i teoryę kwaternionów. I Gibbs [35]) też, wychodząc z teoryi kwaternionów, doszedł niezależnie do analizy wektorowej, zgodnej co do swej istoty z metodami nauki rozciągłości. Rozprawa Cayley'a [36]) „Memoir on the theory of matrices"; Peirce'a [37]) „Linear associative Algebra", opracowana po jego śmierci w dalszym ciągu przez syna; Sylvestera [38]) „Lectures on the principles of universal Algebra", poruszają się też w kierunku pomysłów Grassmannowskich. Niedawno Macfarlane [39]) w swojej „Algebra of physics" starał się utworzyć analizę, która łączy w sobie metody nauki rozciągłości, kwaternionów i wyznaczników, w celu zastosowań fizykalnych.

Częściowo co do ducha zgodną z Grassmannem, lecz mniej praktyczną, jest dawniejsza próba profesora pragskiego Dopplera wprowadzania utworów geometrycznych bezpośrednio do rachunku, oraz Scheffler a „Rachunek sytuacyjny" (Situationscalcül).

Przeglądając ten długi szereg usiłowań, zdążających bez wyjątku do istniejącego już przed niemi systemu nauki rozciągłości, jakby do ogniska, nie możemy oprzeć się wrażeniu, że przeznaczeniem tego systemu jest zajęcie trwałego stanowiska w dziejach rozwoju matematyki. Z drugiej wszakże strony musimy powiedzieć: jaki ogrom zbytecznej pracy umysłowej mogłoby zaoszczędzić pokolenie matematyków drugiej połowy 19-go stulecia, gdyby w swoim czasie posiadało gotowy system nauki Grassmannowskiej, zamiast budować go na nowo, przez pół wieku, z mozołem i z wszelkiemi błędami, nieuniknionemi przy próbach podobnych! Zasady tego systemu bowiem posiadali tylko czasowo i tylko niektórzy; dalej nikt nie poszedł; te zaś rozprawy, które idą dalej niż wyniki samego Grassmanna, zawierają tylko formalne ulepszenia lub rozwinięcia nieznaczące w stosunku do systemu Grassmanna i jego zastosowań.

Mimowoli nasuwa się pytanie: jak to się stało, że podobne prace spoczywały tak długo niepostrzeżonemi? Powodem głównym była forma, którą sam Grassmann nadał swemu dziełu. Ponieważ utworzył on system możliwie najogólniejszy i abstrakcyjny, z którego dopiero miały być wyprowadzone, jako zastosowanie, geometrya i mechanika, przeto treść i uzasadnienie tego systemu otrzymały piętno daleko bardziej filozoficzne niż matematyczne. Próby zaś stosowalności praktycznej były dla matematyków zbyt skąpemi i ukrytemi, aby módz pobudzić którego z nich do studyów nad dziełem, postępującem drogami zbyt dalekiemi od utartych gościńców badań matematycznych. Jeżeli nawet taki Möbius [40]), najbliżej stojący pomysłów tego dzieła, ustał w studyum nad niem z powodu jego charakteru filozoficznego, to łatwo już pojąć, że nie poznano się ani na treści matematycznej ani na znaczeniu dzieła. Ciepłe przyjęcie, jakiego doznało u Möbiusa i powodzenie zaszczytne u Grunerta były to tylko wyjątki. Gauss [40]) zaszczycił dzieło mało znanego nauczyciela pobieżnem przejrzeniem, szukając zresztą w niem tylko tego, o ile dążenia autora zbliżają się do własnych jego pomysłów; zdanie Gaussa, wypowiedziane tonem olimpijskim,—nawet i po za tym tonem, charakteryzuje w ogóle przyjęcie, jakiego wówczas doznała nauka rozciągłości *).

---

*) Jedynym owocem swego dzieła nazywa Grassmann w przedmowie do „Nauki rozciągłości“ z r. 1862, małą rozprawę Kysäusa ([79]).

Trudniej już zrozumieć, że nie zwrócono wówczas uwagi nawet na czysto-matematyczną pracę konkursową, zwłaszcza na rozprawy w dzienniku Crellego, mimo że przynosiły one nowe rezultaty w powszechnie interesującej dziedzinie teoryi krzywych i powierzchni; rezultaty, które i później, jako ważne, łączono z nazwiskiem Grassmanna, chociaż zapomniano o metodzie, której je zawdzięczano. Tak np. Plücker w 34 tomie dziennika Crellego mógł twierdzić, że nie istnieje jeszcze ogólna geometryczna definicya krzywej trzeciego rzędu, gdy tymczasem w tomie 31-go tegoż dziennika podał był Grassmann taką definicyę i wykazał, że jest ogólną. Można to objaśnić tylko w ten sposób, że ogłaszanie prac w dzienniku Crellego nie wystarczało wówczas do zapewnienia należytego uznania wybitnym pracom, jeżeli ich autor, jak Grassmann, zajmował podrzędne zewnętrzne stanowisko naukowe.

Zresztą, mówiąc nawiasem, nie lepiej powodziło się i innym odkryciom Grassmanna. Prawo elektrodynamiczne o działaniu dwu części prądu, ogłoszone przez Grassmanna w r. 1845 w „Annalach“ Poggendorffa, stało się znanem dopiero wtedy, gdy Clausius [43]) odkrył je na nowo w r. 1876. Zauważyć należy, że krótkie, przejrzyste sformułowanie Grassmanna było wyższem od zawikłanego układu równań Clausiusa. Teorya dźwięków samogłoskowych, ogłoszona przez Grassmanna z 1854 w jednym z programatów szkolnych szczecińskich, została w r. 1859 na nowo odkryta przez Helmholtza. Piszącemu te słowa niewiadomo, czy dowód podany w r. 1877 przez Grassmanna [44]), że podstawa teoryi Helmholtza, o fizykalnej naturze dźwięków mowy, jest nieprawdziwą, zwrócił na się uwagę kół właściwych. W r. 1853 Grassmann [45]) obalił ogłoszoną na dwa lata przedtem przez Helmholtza teoryę mieszania barw i za pomocą metod wielokrotnie cytowanej nauki rozciągłości wyprowadził prawo, stwierdzające empiryczne prawidło Newtona, które potem i sam Helmholtz wprowadził do swojej „Optyki fizyologicznej“. Ale i Helmholtz, pomimo blizkiego związku nauki rozciągłości z własnemi spekulacyami, nie zbadał książki Grassmanna.

„Nauka rozciągłości z r. 1862“ *), zawierająca treść poprzedniego dzieła w wykładzie całkowicie zmienionym i opracowanym według wzoru Euklidesowego, miała co do formy być bardziej przystosowaną do użytku matematyków. Lecz, jeżeli pomyślimy o tem, że skuteczność dogmatycznej metody Euklidesowej ogranicza się przeważnie na geometryi elementarnej, i że metoda ta już w dziedzinie arytmetyki elementarnej jest jakby szczątkiem budowli średniowiecznej w epoce dzisiejszej, to zrozumiemy, że rozległa treść systemu Grassmannowskiego z trudnością tylko wcisnąć się dała w karby tego wykładu. Nowa szata tak źle przystawała do dzieła, że nawet Grunert, mimo całego uznania dla bystrości Grassmanna, w rozczarowaniu oświadczył, że w nowej książce nie widzi istotnego postępu naukowego, a nawet nie chciał pisać o niej recenzyi. Tak więc, mimo olbrzymiego trudu włożonego w tę pracę, powstało dzieło, które nużącemi, długiemi abstrakcyjnemi wywodami, wystawiało daleko bardziej na próbę cierpliwość czytelnika niż część pierwsza. Nowa praca pozostała tedy mniej znaną jeszcze od pierwszej, a treść jej — skarbem ukrytym w ostach i cierniach.

W obec tych faktów, zapytać należy, czy w ogóle Grassmann nie umiał znaleść odpowiedniej fermy dla swoich rozległych genialnych pomysłów, oraz dla swych logicznie ścisłych i jasno przemyślanych rozumowań? Jego podręczniki algebry, a zwłaszcza trygonometryi dowodzą rzeczy przeciwnej. Oba podręczniki, prawie nieznane w Niemczech, wyżej cenione w Ameryce, są po dziś dzień, mimo zewnętrznych pozorów metody Euklidesowej, nieprześcignionym wzorem naukowej ścisłości, jasności, zwięzłości i praktycznego opracowania metody. Miał bo też Grassmann, nauczając w szkole, sposobność szukania i wypróbowania najlepszego sposobu wykładu traktowanych w tych książkach przedmiotów. Podobnej sposobności nie znalazł dla badań swych oryginalnych, ponieważ nie udało mu się pozyskać stanowiska w wyższym zakładzie naukowym, które należało mu się słusznie, zarówno jako

*) Te dwa wydania „Nauki rozciągłości“ odróżniać będziemy niżej za pomocą znaków A_1 i A_2.

badaczowi teoretycznemu jak i praktycznemu nauczycielowi. Tylko na takiem stanowisku, mając pod dostatkiem wolnego czasu i rozwijając odpowiednią działalność nauczycielską, wśród żywego obcowania z kolegami i uczniami, mógłby on wyrobić zewnętrznie swój system, zgodnie z wymaganiami nowszej umiejętności i wykazać w należytem świetle jego zalety. Że umiał cenić ważność takiego ustnego wykładu i opracowania przedmiotu, tego dowodzą odczyty, jakie w r. 1842 o dziele swojem miewał w niewielkiem kółku przyjaciół [46]) oraz wspólna praca z bratem Robertem nad A_2 [47]). Przecież i później, wykładający w wyższych zakładach naukowych uważali wykłady za najlepszy środek wniknięcia w ducha nauki rozciągłości. Kroki, przedsięwzięte przez Grassmanna w celu pozyskania katedry, znalazły życzliwe przyjęcie u rządu, i kiedy w r. 1868 zawakowała profesura w Greifswaldzie, popierał początkowo i Grunert radą te starania o to stanowisko (niższe pieniężnie). Gdy jednak w samym fakultecie powstała poważna przeciwko Grassmannowi opozycya, wynikła skutkiem życzenia, aby katedrę tę zajął matematyk kierunku Riemannowskiego, wtedy upadł cały ten plan, a z nim zarazem i uwieńczenie dzieła Grassmannowskiego. Czyniono Grassmannowi zarzuty nietylko co do formy przedstawienia, lecz także i co do sposobu jego produkcyi naukowej, ponieważ, mimo całego bogactwa oryginalnych poglądów, nie usiłował doprowadzić do ostatecznego rozwiązania żadnego z pytań, do którego te poglądy prowadziły. Zapomniano przytem, że najbardziej cierpliwe usiłowania słabną przy braku potrzebnej atmosfery oraz wszelkiego śladu uznania. (Pod tym względem szczęśliwszym był Hamilton, którego teorya kwaternionów dość wcześnie zaliczoną została do zwyczajnych przedmiotów wykładowych na uniwersytecie w Dublinie). Nie było wcale mowy o względach dla badań Grassmanna przez ułatwienie mu pracy urzędowej; matematyka sama już, jako przedmiot wykładowy, była w sferach urzędowych Szczecina nauką mało cenioną, o wiele mniej jeszcze, jako zajęcie poboczne nauczyciela! Z drugiej strony wspomnieć należy, że i Grassmann na swojem odosobnionem stanowisku nie posiadał koniecznej ruchliwości na to, by przez pielęgnowanie istniejących i nawiązywanie nowych stosunków z matematykami pozyskać zainteresowanie dla swego dzieła. Świadczy już o tem zdumiewająca szczupłość jego korespondencyi naukowej. W braku tedy wszelkiego powodzenia sam odwrócił się od nauki rozciągłości, a opracowawszy ją w zarysach zasadniczych, odłożył wykończenie budowy do czasu późniejszego.

W rzeczy samej do roku 1869 nikt poważnie i szczegółowo nie zajmował się nauką rozciągłości, prócz Hankela, który w swem dziele: „Theorie der complexen Zahlensysteme“ uwzględnił też teoryę Grassmanna i polecił ją gorąco, jakkolwiek bez widocznego skutku. Zresztą należy wspomnieć o tem, że trzej pierwszorzędni specyaliści mniej lub więcej jasno pojęli znaczenie pojedyńczych części nauki rozciągłości. Cremona[48]) już w rozprawie z r. 1860 zwrócił na nią uwagę, starał się ją poznać i polecił swym przyjaciołom jako przedmiot studyów. Weierstrass przedstawił swoim słuchaczom niektóre poglądy nauki rozciągłości—idziemy tu za świadectwem prof. Killinga — zwrócił ich uwagę na użytek iloczynu zewnętrznego i wewnętrznego w teoryi ruchu ciała sztywnego i w nauce o kole *). Clebsch potrafił ocenić doniosłość nauki rozciągłości dla geometryi i algebry, w wymownych wyrazach przedstawił swój sąd o niej we wspomnieniu o Plückerze[49]) i umierając przedwcześnie, uczniom swoim ten sąd w spuściznie pozostawił.

Wszystkie te wzmianki i polecenia, jakkolwiek pochodziły od osób tak poważnych, nie były wszakże dostatecznemi, by nauce rozciągłości zapewnić należyty rozgłos, a przedewszystkiem wpływ praktyczny na dalszy rozwój umiejętności, który się jej dawno należał. Bo i na cóż przydać się mógł wszelki podziw, skoro nie wielu rozumiało naukę rozciągłości, a nikt nad nią nie pracował! Do tego celu koniecznem był przedewszystkiem wykład nauki drogą odmienną od tej, którą szedł Grassmann, a mianowicie, należało rozpoczynać nie od pojęć oderwanych i twierdzeń geometryi n—wymiarowej, lecz przedstawić metody nauki rozciągłości

---

*) Uwagi Weierstrassa o stosunku analizy algebraicznej do teoryi jednostek wielokrotnych miały na celu nie tyle zaprzeczenie prawa istnienia tej ostatniej, ile raczej wykazanie, że analiza algebraiczna może być zbudowaną i bez ich pomocy. Po za tem Weierstrass uznawał wyraźnie korzyści z wprowadzenia jednostek wielokrotnych.

wewnątrz dziedziny przestrzeni zwykłej. Na tle zwyczajnych poglądów przestrzennych, właściwości nauki rozciągłości odznaczały się dobitniej; przy znanej treści geometrycznej, jej formy obce, przeciwne zwyczajom dotychczasowym, stawały się zrozumialszemi dla czytelnika. Temu to punktowi widzenia należy przypisać *) powstanie dzieła „System der Raumlehre" napisanego przez autora niniejszego szkicu. Pierwsza część tej książki (1872), ograniczona była pod względem treści do elementów geometryi, druga zaś (1875) **) obejmowała nową geometryę i algebrę w przedstawieniu Grassmannowskiem. O powstaniu tego dzieła zdałem sprawę w biografii Grassmanna [50]; o znaczeniu jego dla nauki rozciągłości napisał sam Grassmann w przedmowie do drugiego wydania A_1 [51]). Wszystkie środki pomocnicze nauki rozciągłości rozwinięte tu zostały ab ovo, nadto wzmiankowane nauki podane zostały w zakresie stosowanym w podręcznikach. W ten sposób stworzono podstawę do przedstawienia rezultatów dalszych oraz do badań samodzielnych, a równocześnie stworzono książkę przygotowawczą do studyów nad ogólną nauką rozciągłości. Skutek stwierdził słuszność tych rozważań. Dzięki „Nauce przestrzeni" z każdym rokiem rosła znajomość nauki rozciągłości. Przybywali wciąż matematycy, którzy w poczuciu wewnętrznej naukowej niezależności, nietylko badali i podziwiali naukę rozciągłości, lecz pracowali też nad jej rozwinięciem i uprzystępnieniem. Najbliższym owocem tych usiłowań był wznowiony udział samego Grassmanna w ówczesnych dążeniach matematyków. W ostatnich już latach swego życia wystąpił on z nielicznemi lecz wartościowemi rozprawami o stosunku nauki rozciągłości do geometryi, algebry nowszej, kwaternionów, nauki o barwach i elektrodynamiki. Dalszym owocem, według świadectwa Grassmanna, było doprowadzenie do skutku drugiego wydania A_1, oraz wyczerpanie istniejących jeszcze egzemplarzy A_2 w ciągu kilku lat. Dziś zaś, po upływie 25 lat od początku tego okresu, widzimy już cały szereg gałęzi badania matematycznego, na

---

*) Nie zaś wpływowi Clebscha, jak błędnie przypuszcza Kraft w przedmowie do swego dzieła (N. 170).

**) Dwie te części będziemy oznaczali poniżej przez R_1 i R_2.

które nauka rozciągłości wpłynęła w stopniu mniejszym lub większym, dając im ulepszone metody badania oraz nowe rezultaty.

Zasady ogólnej nauki o formach, stworzone przez Grassmanna i wyłożone obszerniej przez Hankela oraz później przez Notha [52]), doprowadziły do pogłębienia teoryi zasadniczych działań arytmetycznych i są dziś własnością wszystkich matematyków.

Pierwszy Grassmann wypowiedział pogląd, że geometrya jest nauką stosowaną i wyciągnął stąd konsekwencye praktyczne. Z tym poglądem najściślej wiąże się różnica pomiędzy wyobrażeniem przestrzeni doświadczalnej a pojęciem oderwanem przestrzeni płaskiej trójwymiarowej, oraz poddanie tej ostatniej pod ogólne pojęcie przestrzeni; są to działania rozumowe, na których stoi i w braku których pada cała geometrya wielowymiarowa i nieeuklidesowa.

W geometryi elementarnej w dziele R_1, przyjąwszy ruch za istotne narzędzie badania, wskazałem nowe zasady opracowania w przeciwstawieniu do dogmatycznej metody Euklidesa, opierającej się tylko na utworach sztywnych*). Przytem metody nauki rozciągłości okazały się tu najnaturalniejszem narzędziem rachunkowem w całej dziedzinie geometryi. Dawały one równocześnie związki położenia i miary; z wielką łatwością prowadziły do odleglejszych i dotąd trudno dostępnych dziedzin geometryi trójkąta, koła i kuli; okazały się przydatnemi do rozwiązywania zagadnień oraz do dowodzenia twierdzeń [55]). Dalszem rozwinięciem idej Grassmannowskich jest przeprowadzona w R_1 przy pomocy „czynnika obrotowego“ i“ metryka geometryi elementarnej [56]), pozostająca w blizkim związku z teoryą funkcyj hyperbolicznych [57]) Tu należy także uważanie punktów urojonych za punkty rzeczywiste, przyczem własność punktów przecięcia zastępuje się przez inną [58]); jest to pogląd, do którego doszli także Laguerre, Tarry [59]) i Molenbroek [60]). Günther [61]) za pomocą dowodu twierdzenia o sumie kątów trójkąta [62]), dowodu związanego z czynnikiem obrotowym,

---

*) W późniejszej książce „Lehrbuch der elementaren Mathematik“ [53]) rozwinąłem twierdzenia płynące z zasad nauki rozciągłości, bez używania jej metod; z książki tej wiele rzeczy ważnych przeszło do innych podręczników.

sprowadził tylokrotnie dyskutowany pewnik o liniach równoległych do pewnika prostszego, wyrażającego zasadniczą własność płaszczyzny, i wykazał dowodnie chwiejność wszystkich prób dotychczasowych. Na gruncie nauki rozciągłości poruszały się także badania Eichlera [63]) o pojęciu przestrzeni i Pilgrima [64]) o podziale dziedzin. Już Grassmann [65]) wykazał, że niesłusznie zaliczana do zakresu teoryi kwaternionów trygonometrya kulista znajduje naturalne swe uzasadnienie w nauce rozciągłości; niedawno do tego samego wyniku na innej drodze doszedł Carvallo [66]). Równoważność nieskończenie odległego punktu i ograniczonego odcinka, ważna zwłaszcza dla mechaniki; odróżnienie odcinka od „części linii" (Linientheil), nacechowanej nietylko kierunkiem i długością lecz także położeniem oznaczonem—oto nowe pojęcia geometryczne nauki rozciągłości, których pożytek okazał się istotnym.

W dziedzinie nauki o liczbach Stolz [67]) przyjął pojęcie Grassmannowskie wielkości, jako najogólniejsze, za podstawę swoich prac arytmetycznych. Większą jeszcze bezporównania doniosłość ma podstawa ogólna, na której Grassmann [68]) zbudował naukę o liczbach, przez ustanowienie ogólnego układu n niezależnych od siebie jednostek, wtedy gdy Hamilton do jednostki rzeczywistej i urojonej dodał tylko dwie nowe jednostki urojone. Łatwo nasuwającą się myśl rozszerzenia teoryi kwaternionów do układu n jednostek urzeczywistnił Clifford [69]). Należą tu także podane przez Simony'ego [70]) dwa uogólnienia powszechne zasadniczych działań algebraicznych wraz z najprostszem sformułowaniem pojęcia funkcyi dla argumentu n—krotnie zespolonego; praca ta opiera się przeważnie na poglądach nauki rozciągłości. Na tej samej podstawie opierają się studya grupowo-teoretyczne Dycka [71]), który przyjmuje pewien szereg jednostek i ustanawia dla niego prawidła mnożenia; dalej Dedekinda [72]) teorya wielkości zespolonych, utworzonych z n jednostek głównych. Jednostki wielowartościowe powstają tu z liczb zwyczajnych i podlegają prawom rachunkowym, bardziej skomplikowanym, niż prawa mnożenia zewnętrznego i wewnętrznego. W teoryi tej—wbrew poglądowi Weierstrassa o nieprzynależności wielkości zespolonych ogólnych do arytmetyki—wielkościom tym nadano znaczenie specyalne, dzięki któremu wypływają one bez zaprzeczenia z gruntu arytmetyki zwykłej. Nawiązując swe badania do tego przedmiotu, wskazał Petersen [73]) warunek ogólny, przy którym układ równań operacyjnych pomiędzy n jednostkami głównemi charakteryzuje pewną dopuszczalną algebrę. Należą tu podane przez Studye'go [74]) uogólnienia pojęć Grassmannowskich: „pochodna“ i „wartość liczebna,“ przez które pojęciom tym poddano w dziedzinie zastosowań wszystkie gatunki geometryi i równocześnie ustanowiono ich związki z teoryami przestrzeni Riemanna, Helmholtza i Kleina. Należą tu wreszcie badania tegoż autora nad układami liczb nadurojonych i ich związkami z pewnemi grupami ciągłemi przekształceń; w badaniach tych oznaczono wszystkie różne typy układów liczbowych z 2-4 i więcej liczbami zasadniczemi, czyniące zadość pewnym warunkom podstawowym, i scharakteryzowano także liczby zespolone, jako oznaczenia skrócone form dwuliniowych, przedstawiających pewne formy przekształceń liniowych.

Powyższe dane stwierdzają, że analiza wyższa i teorya funkcyj nie są tak dalekiemi od nauki rozciągłości, jakby to na pozór wydawać się mogło. Sam Grassmann prawie połowę A_2 poświęcił temu przedmiotowi; punkt wyjścia stanowi u niego sprowadzenie układu n funkcyj dowolnej liczby zmiennych do funkcyi jednej zmiennej. Rozważa on tu także teoryę szeregów nieskończonych, oraz rachunku różniczkowego i całkowego. Niewielu dotąd badaczy zgłębiło te trudne rozdziały dawno wyczerpanej A_2; ci wszakże przekonali się o wielkiem ich znaczeniu. Podstawy tej teoryi przedstawiono w R_2. Znaczenie ich dla zastosowań rachunku całkowego (w mechanice) poznał Mehmke; Simony zaś, za pomocą trzeciego ze wspomnianych uogólnień działań zasadniczych algebry, doszedł do metody systematycznej szukania całek szczególnych równania

$$\sum \frac{\partial^2 W}{\partial x^2_r} = 0; \qquad (r = 1,\ 2\ .\ .\ n).$$

Seydler [75]), rozszerzając mnożenie zespolone Grassmanna do czterech jednostek, znalazł takież same symetryczne rozwiązanie równania różniczkowego

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

znane przedtem dla takiegoż równania z dwiema zmiennemi.

Okazało się, że wielkości wyprowadzone z tych czterech jednostek są równoważne z bikwaternionami spółpłaszczyznowemi (komplanarnemi) Hamiltona, i dają się z korzyścią stosować do rozszerzenia na przestrzeń wyników geometryi płaskiej. Najobszerniej dziedzinę tę uprawiał Gibbs [35]), który podał szczegółowy wykład rachunku różniczkowego i całkowego wektorów i wciągnął do swych rozważań, między innemi, przekształcenie całek określonych, wartości najmniejsze całek i t. d., oraz wskazał pożytki, wynikające z metod nauki rozciągłości w traktowaniu przedmiotów czysto-analitycznych.

Szczególnie głębokim i zarazem łatwo zrozumiałym jest wpływ nauki rozciągłości na teoryę wyznaczników. Wyznacznik w A_2 (Nr. 62) jest określony jako czynnik liczbowy iloczynu zewnętrznego n wielkości liczbowych, wyprowadzonych z jednostek e_1, e_2, . . e_n. Wyznacznik sam w sobie, w oderwaniu od tych jednostek i praw działań nad niemi, jest utworem ciężkim, niedogodnym w użyciu i w przekształceniach. Natomiast, w powyższym związku, działania z nim nabierają zdumiewającej łatwości. To też przedmiot ten, po obszerniejszem przedstawieniu go w R_2, wywierał stosunkowo największą siłę przyciągającą. Nowe przedstawienie uwzględnił przedewszystkiem Günther w swojej książce „Lehrbuch der Determinantentheorie;“ potem zasadniczo i systematycznie zastosowano je w podręczniku Scotta [76]), a niedawno Niemöller [77]) podał rzecz tę z wielu zastosowaniami do podwyznaczników, rozwiązywania równań, podstawień, rugowników, redukcyi form dwójkowych do postaci kanonicznej i t. p. Toż samo uczynił Carvallo [78]), który o nauce Grassmanna wypowiedział zdanie: „La vérité est que la méthode de Grassmann supprime la théorie des déterminants, en se substituant à elle.“ Caspary [80]) doszedł na drodze najprostszej do podanych dawniej przez Hunyady'ego, Mertensa i Pascha przekształceń wyznaczników przecięć stożkowych oraz tych wyznaczników, których znikanie jest warunkiem położenia perspektywicznego dwóch trójkątów. Mehmke [81]) wykazał, że twierdzenie o wyznacznikach, przedstawione przez Kroneckera Akademii berlińskiej w 1882, zawiera się jako szczególny przypadek w twierdzeniu A_2 Nr. 183, i że w swojej postaci zwykłej mniej się nadaje do wywodu twierdzeń geometryi punktu, niż twierdzenie Grassmanna. Ze związków zaś, objętych w powyższem twierdzeniu Kroneckera, wyprowadził Caspary [82]) zasadnicze twierdzenie Weierstrassa dla funkcyj sigma o większej liczbie argumentów. Z tego przykładu będzie można powziąć wyobrażenie o doniosłości twierdzeń Grassmannowskich oraz o pożytku, jaki matematyka dawno już mogła odnieść ze studyów nad nauką rozciągłości. Dwa przykłady, podane przez autora [83]), stwierdzają, z jaką łatwością za pomocą metod Grassmannowskich uzasadnić można odległe twierdzenia o wyznacznikach.

Bezpośrednio z wyznacznikami wiąże się teorya macierzy, stworzona przez Cayley'a [84]) w podziwianej rozprawie „Memoir on the theory of Matrices.“ Teorya ta wszakże zlewa się całkowicie z rozwiniętą w A_1 [85]) teoryą iloczynów otwartych (wyrażeń z lukami) i teoryą uogólnionych ilorazów, podaną w A_2 [86]). Iloraz rozszerzony

$$Q = \frac{b_1 \; b_2 \; \ldots . \; b_n}{a_1 \; a_2 \; \ldots . \; a_n}$$

jest wyrażeniem, które, pomnożone przez jakikolwiek ze swych mianowników, daje stojący nad nim licznik; wyrażenie z lukami jest sumą iloczynów, z której wyłączono czynnik wspólny, lecz—ponieważ czynniki iloczynu występują w określonym porządku,—czynnik wyłączony zastąpiono luką [*l* lub ( )]. Związek obu wyrażeń podany jest w A_2 str. 246. Wskazany przez autora w „Fortschr. d. Math“ [87]) związek pomiędzy macierzami a wyrażeniami z lukami spostrzegali wielokrotnie i wyjaśniali już inni matematycy. Tak np. Gibbs [35]) spostrzegł tożsamość „wyrażeń dyadycznych“ swojej analizy wektorowej z najogólniejszemi iloczynami Grassmanna, oraz tożsamość macierzy z wyrażeniami z lukami i ilorazami; pokazał też zgodnie z R_2 Nr. 72, że rozszerzenie pojęcie ilorazu daje się z pożytkiem stosować do pochodnych. Podobne związki zauważyli Mehmke i Buchheim [88]), z których ostatni podał obszerną teoryę macierzy ze stanowiska Grassmannowskiego.

Szczególniej płodnym okazał się pomysł równoczesny Scotta [89]) i von Eschericha [90]), dotyczący przedstawienia i badania, przy pomocy środków nauki rozciągłości, wyznaczników wyższych wymiarów, które przedtem już traktował był Zehfuss [91]) Kto studyował algebrę nowszą z podręczników Fiedlera, Salmona i Clebscha, podziwia z jednej strony postęp w szeregu stosowanych tam metod, z drugiej zaś z żalem stwierdza, że jedne i te same wielkości i działania oznaczane bywają różnorodnemi symbolami, i doznaje skutkiem tego wrażenia, że cała ta symbolika, jakkolwiek mądrze obmyślona, składa się wszakże z oznaczeń dowolnych i pozbawionych jednolitej podstawy. Już Clebsch [49]) zauważył był, że wielka część wyobrażeń zasadniczych algebry nowszej zawiera się w A_1. W podobny sposób wyraził się był Gibbs [92]) wtedy jeszcze, gdy nie znał wszystkich odnośnych rezultatów. Sam Grassman [93]) w ostatnich latach życia rozwinął w kilku rozprawach idee zasadnicze tego związku. Już pierwsze rezultaty jego wykazują zupełnie wyraźnie, że w nauce rozciągłości należy szukać naturalnej i jednolitej podstawy dla nowszej algebry, której ta nauka dotąd nie posiada. W samej rzeczy w R_2 [94]) udało się rozwinąć w pożądanym stopniu teoryę form dwójkowych (aż do stopnia 4-go) i trójkowych (aż do 2-go), przy pomocy środków mnożenia zewnętrznego i algebraicznego; prostota rachunków i łatwość wyjaśnień geometrycznych zaświadczyły tu o wyższości tej metody nad poprzedniemi. Toż samo okazało się w nieogłoszonem jeszcze rozwinięciu tych badań do form trójkowych sześciennych (w porównaniu z metodą Aronholda) i do innych przedmiotów, traktowanych w dziele Clebscha-Lindemanna. Wszakże tworzenie form bardziej złożonych nie było dostatecznie wolnem od niedogodności metod dotychczasowych. Dopiero wyżej wspomnionej rozprawie von Eschericha [90]) zawdzięczamy ogólny sposób tworzenia niezmienników i spółzmienników metodą jednolitą i niezależną, przy pomocy środków nauki rozciągłości. W rozprawie tej udowodniono, że każde nasunięcie dwóch form dwójkowych jest wyznacznikiem wyższego wymiaru, i że utwory dalsze dla form trójkowych, czwórkowych i wyższych dają się przy pomocy form już utworzonych przedstawić i badać jako agregaty takich wyznaczników. Schendel [95]) z równem powodzeniem traktował w różnych rozprawach teoryę rugowników i (podobnie jak von Escherich) przedstawił wyznacznik r-wymiarowy n—go stopnia, jako iloczyn n wyznaczników i agregat $(r!)^n$ wyrazów, które w przestrzeni $(n+1)$ wymiarowej wypełniają sześcian $(n+1)$ wymiarowy. W osobnej książce [96]) dał wykład uporządkowany wszystkich części tej dziedziny. Na szczególną uwagę zasługuje tu zastąpienie procesu różniczkowania, stosowanego przy tworzeniu form nowych, wprowadzeniem tak nazwanych nadwyznaczników. Buchheim [97]) wreszcie oparł nowy wykład teoryj grafów (theory of graphs) Clifforda na przedstawieniu formy liniowej za pomocą iloczynu zewnętrznego

W ogóle wszakże nie mamy dotąd opracowania nowej algebry, opartego na nauce rozciągłości; opracowania, które wzniósłszy się z początków podanych w R_2, przy stosowaniu metod ulepszonych, byłoby co do treści wykładem systematycznym, odpowiadającym dzisiejszemu stanowi tej teoryi, formalnie zaś wykazywałoby korzyści tego wykładu. Do tej pory zastosowanie nauki rozciągłości nie zostało jeszcze uwzględnione w takiej mierze, na jakie zasługuje.

Do badania krzywych i powierzchni algebraicznych nauka rozciągłości podaje kilka metod charakterystycznych. W pierwszej z nich krzywa lub powierzchnia, uważana za utworzoną z elementów stałych i ruchomych, przedstawia się pod postacią przyrównanego do zera iloczynu „planimetrycznego“ lub „stereometrycznego“ (który zresztą można przekształcić na dowolne wyrażenie w spółrzędnych), co prowadzi do teoryi czysto-geometrycznej najogólniejszych pomiędzy wzmiankowanemi utworów. Metoda ta tem różni się istotnie od metody Steinera, że w każdym z utworzonych prawidłowo iloczynów i we wszystkich prawidłowych przekształceniach tkwią charakterystyczne przedstawienia samych utworów, ich własności oraz przekształceń, i że wszystkie te przemioty poddane są prostemu układowi działań, niezależnemu od ich uzmysłowienia. Metoda ta łączy w sobie zalety postępowania analitycznego i syntetycznego. Grassmann na tej drodze znalazł najogólniejsze twierdzenia o tworzeniu krzywych i powierzchni [98]) i w szeregu rozpraw przedstawił obszernie teoryę oraz jej zastosowania do krzywych i powierzchni rzędu drugiego i trzeciego oraz do krzywych rzędu czwartego. Zastosował tę metodę autor niniejszego w pracy o powierzchni rzędu 3-go i jej wzajemnej [100]); równanie i własności stereometyczne powierzchni wyprowadzono tu w sposób bezpośredni. Później Eckardt [101]) i Bauer [102]) badali tenże przedmiot przy pomocy metody spółrzędnych. Następnie rozwinął autor [103]) zasadę Grassmannowską w ten sposób, że do prostych i punktów, użytych za elementy konstrukcyi, dołączył jeszcze krzywą stałą. Dingeldey [104]), na podstawie Grassmannowskich mechanizmów ruchu, podał bardzo prosty sposób tworzenia krzywej C_3 z punktem podwójnym oraz konstrukcyę linii punktów zwrotu, i pokazał zarazem, w jaki sposób należy zmodyfikować ten mechanizm, aby otrzymać krzywą C_4 z 1—3 punktami podwójnemi, oraz jak winny leżeć jej elementy, aby powstała dowolna krzywa C_4. Jednocześnie Kölmel [105]) podał położenie szczególne elementów dla krzywej C_3 z punktem podwójnym oraz prosty sposób oznaczenia stopnia krzywej dowolnej, utworzonej za pomocą mechanizmu Grassmannnowskiego. Fritz [106]) rozszerzył pierwszą metodę Grassmanowską tworzenia krzywych C_3 na przestrzeń. Sturm [107]) zastosował metody Grassmannowskie tworzenia krzywych trzeciego rzędu i klasy do oznaczenia liczb zniekształcenia homologii dwóch pól płaskich. Caspary [108]), rozszerzył Grassmannowski sposób tworzenia krzywych płaskich na krzywe przestrzenne i wyprowadził stąd istotne ich własności oraz nowe konstrukcye. Na tej samej podstawie v. Escherich [109]) podał metody ogólne konstrukcyi krzywych i powierzchni algebraicznych dowolnego rzędu z liczby określających je punktów, za pomocą układów liniowych wzajemnych wyższego gatunku. Jest to zagadnienie, które nie było jeszcze przedtem rozwiązane dla powierzchni rzędu wyższego niż czwarty.

Metoda, o której mowa, miała i swoich przeciwników. Już Grassmann [110]) musiał zwalczać mniemanie Bellavitisa, że metody te dają tylko specyalne gatunki krzywych C_3. Schröter [111]) uczynił interesujące spostrzeżenie, że trzy metody Grassmannowskie tworzenia krzywych C_3 można otrzymać przez przekształcenie metod Chasles'a i Cayley'a-Hessego. Lecz nietrafną była złączona z tem spostrzeżeniem uwaga, że metody Grassmannowskie są dla tego właśnie zbytecznemi. Faktycznie bowiem mamy tu do czynienia z dwoma równouprawnionemi wyrażeniami tej samej myśli zasadniczej: z wyrażeniem rzutowem i mechanicznem. Tylko skutkiem nieznajomości wspomnionej już odnośnej literatury, mógł także utrzymywać Schröter, że z określenia Grassmannowskiego nie wynika, w jaki sposób można otrzymać mechanizm podstawowy dla krzywej danej, i że dlatego określenie to pozostało bezpłodnem dla istotnego tworzenia krzywych C_3 oraz wywodu ich własności.

W metodzie drugiej krzywe i powierzchnie przedstawione są, jako funkcye utworu zmiennego (punktu, prostej, płaszczyzny), a kombinacye rachunkowe funkcyj pozwalają znaleść i przedstawić związki pomiędzy krzywemi, jakoteż między powierzchniami. Metoda ta otwiera drogę najprostszą i najnaturalniejszą do teoryi biegunowych, układów krzywych i powierzchni oraz związków ich pokrewieństwa. Rysy zasadnicze tej teoryi podał Grassmann [112]) w wielu rozprawach, które—nawiązane w części do prac Clebscha i Reye'go o parach biegunowych krzywej C_3, o teoryi biegonowych powierzchni algebraicznej i t. d.,—uprościły nadzwyczajnie metody dotychczasowe i otwarły nowe drogi do rozszerzenia tych teoryj. Dalsze rozwinięcie metody prowadziło wprost do omówionego już przedstawienia algebry nowszej i dziedziny jej geometrycznej interpretacyi. Tu też wspomnieć należy o zastosowaniach geometrycznych, podanych w cytowanem dziele Schendela [113]).

Trzecia droga prowadzi do teoryi krzywizny. Spożytkowuje ona w sposób zwykły środki pomocnicze rachunku rożniczkowego, lecz unikając spółrzędnych, operuje na samych utworach (odcinkach, łukach i ich różniczkach i t. d.); stosuje zresztą prawidła rachunku odcinków oraz mnożenia, charakteryzujące naukę rozciągłości. Teoryę tę we wszystkich jej częściach przedstawił szczegółowo H. Grassmann młodszy [114]). Nawiązując rzecz do tej teoryi, dał Carvallo [115]) prosty dowód twierdzenia, że suma krzywizn powierzchni minimalnej jest zerem w każdym punkcie. Na tejże podstawie badał Mehmke [116]) własności liniowych przekształceń punktu, przekształceń styczności i podobne zagadnienia [117]); podał też konstrukcyę ogólną środków krzywizny krzywych płaskich, nowe uzasadnienie twierdzeń zasadniczych teoryi powierzchni oraz uproszczone dowody twierdzeń o krzywych przestrzennych. Peano [118]) rozstrząsa szczegółowo te przedmioty w swoich podręcznikach geometryi Grassmannowskiej i przy pomocy tych metod wyprowadza szereg twierdzeń o maximach i minimach i o normalnych do krzywych i powierzchni. Cesàro [120]) uprościł wzory Codazzi'ego, odnoszące się do krzywizny geodezyjnej i skręcenia krzywych na powierzchni. Tu należy także podane przez autora niniejszego [121]) rozwiązanie zagadnienia Steinerowskiego, rozstrząsanego później i przez Sturma, o punktach z najmniejszą sumą wzajemnych odległości. Wreszcie Fine [122]) za pomocą metod nauki rozciągłości rozwinął teoryę punktów osobliwych krzywych przestrzennych.

Pokrewieństwa i przekształcenia geometryczne można, według Grassmanna, badać z korzyścią przy pomocy (wspomnianych już) iloczynów rozszerzonych. Na tem opiera się podana przez autora niniejszego [124]) i przez Hydego [125]) teorya czynników przekształcających, mianowicie czynnika przesunięcia Λ (u Hydego τ) dla punktów oraz czynnika obrotu i^m (u Hydego $\mathfrak{v}$) dla odcinków. Pojęcia te dają się z korzyścią stosować w teoryi związków rzutowych i kolinearnych oraz przy przedstawianiu linij krzywych. Hyde wykazał niewątpliwą ich wyższość nad środkami pomocniczemi teoryi kwaternionów.

Dwojakiego rodzaju jest przeczuwany już dawniej przez Kleina a w zarysie podany w R_2. związek zasad nauki rozciągłości z poglądami zasadniczemi nowej geometryi rzutowej, takiej, jaką rozwinął Clebsch. Po pierwsze, metoda wyprowadzania utworów przestrzennych z innych, za pomocą czynników liczbowych, pozwala równocześnie otrzymywać związki miary i położenia. Przez te czynniki liczbowe styka się metoda Grassmanna ze spółrzędnemi rzutowemi Fiedlera. Po drugie, wspomniane wyżej przedstawienie teoryi niezmienników prowadzi, bez wszelkich zależności miarowych, do dziedziny geometryi rzutowej. Już Clifford [69]) spostrzegł był, że związki te stanowią wstęp najprostszy do geometryi rzutowej przestrzeni n-wymiarowych. Study [117]) miał na widoku tylko pierwszy z wymienionych związków, gdy twierdził, że w dziedzinie geometryi rzutowej rachunek symboliczny ma pierwszeństwo przed nauką rozciągłości, i gdy pragnął, aby ta ostatnia w zastosowaniach swych ograniczała się na dziedzinie mechaniki. Lecz i pierwsza z dwóch metod, przez usunięcie związków miarowych, rozwinęła się z pożytkiem dla geometryi. Noth [128]), wprowadziwszy dodawanie i odejmowanie rzutowe oraz rzutowo-arytmetyczne mnożenie i dzielenie, ustanowił najprostszą analizę dla geometryi położenia, przytem dla teoryi siatek geometrycznych Möbiusa podał mechanizm rachunkowy, który, jak o tem przekonywają pozostałe po nim i nie ogłoszone drukiem notatki, zapowiada stosowalność i przedstawienia geometrycznego związków teoretyczno-liczbowych.

I geometrya liniowa zawdzięcza nauce rozciągłości nowe metody i rezultaty. Sturm [129]), stosując mnożenie zewnętrzne, znalazł związek między liniami działania sił, znajdujących się w równowadze, z kompleksami i kongruencyami liniowemi. Buchheim [130]) pokazał, że jeżeli a jest formą ogólną stopnia drugiego, utworzoną z czterech jednostek, wtedy równanie $(a\ x) = 0$ przedstawia kompleks liniowy i równocześnie ruch śrubowy. Do tegoż rezultatu doszedł Hyde [131]), wskazawszy przytem wynikające stąd uproszczenie Plückerowskiej teoryi kompleksów liniowych. Szczegółowiej uproszczenie to traktował Wälsch [24]), na podstawie wspomnianego już postępowania, i z równym pożytkiem zastosował tę metodę do kompleksów wyższych. Nakoniec znalazł Müller [132]) że tylko formalnie przez Grassmanna określona suma geometryczna dwóch części linij w przestrzeni przedstawia oznaczony przez nie kompleks liniowy; na tem oparł uproszczone przedstawienie kompleksów i wykazał, w jaki sposób każdy z otrzymanych wzorów można intrepretować, tak w sensie geometryi kuli jak i geometryi liniowej. W badaniach nowoczesnych geometrya n—wymiarowa z każdym rokiem zajmuje miejsce coraz poważniejsze, gdyż, niezależnie od zainteresowania, jaki budzi sam przedmiot, rzuca on nowe światło na pojęcia i metody geometryi zwykłej. Tu właśnie naukę rozciągłości, ze względu na ogólność jej metod, uznano za najlepsze narzędzie badania. Właśnie w A_1 i A_2 zawarte są zasady analityczne tej umiejętności i, aby zasady te wyrazić w słowach, dość pojęcie ogólne przełożyć na język geometryczny. Co się tyczy badań bardziej szczegółowych, to na tej drodze podjęto rozszerzenie twierdzeń geometrycznych do przestrzeni wielowymiarowych. Autor niniejszego [133]) uogólnił do przestrzeni n—wymiarowych twierdzenia o liniach środkowych, o środkach ciężkości trójkąta i czworościanu, o czworokącie, sześciościanie i ośmiościanie zupełnym, o grupach punktów harmonicznych i t. p.; a idąc wstecz za pomocą rzutu znalazł nowe twierdzenia dla dziedzin niższych. Na tej drodze też podał klasyfikacyę grup punktowych w przestrzeniach o dowolnej liczbie wymiarów [134]). Toż samo uogólnienie przeprowadził Mehmke [135]) dla twierdzenia Eulera o trójkącie, dla twierdzeń o punkcie przecięcia wysokości w trójkącie oraz dla koła dziewięciu punktów. Clifford [69]) zwrócił uwagę na możliwość utworzenia ogólnej geometryi rzutowej o *n* wymiarach na podstawach nauki Grassmanna. Należy wszakże zauważyć, że teorya wielowymiarowych ciał foremnych, ważna dla powyższych uogólnień, znajduje się dotąd po za dziedziną zastosowań nauki rozciągłości.

Podana przez Cayley'a [136]) teorya początku analitycznego związków miarowych, na której polega rozróżnienie geometryi nieeuklidesowych od euklidesowej, daje się, jak to już pokazano w R_2 [137]), przedstawić najprościej za pomocą utworów iloczynowych Grassmanna. Później to samo spostrzenie uczynili Buchheim [138]) i Cox [139]). Ten ostatni podał szczegółowy wywód wzorów zasadniczych dla tych głównych rodzajów geometryi i wykazał, że z pojęcia „wyprowadzenia punktu z punktów" wynikają wszystkie opisowe i rzutowe własności krzywych, których punkty czynią zadość pewnym równaniom. Zresztą sam Grassmann [140]) wykazał już dawniej, że zasady nauki rozciągłości wystarczają do zbudowania geometryi nieeuklidesowej.

Za pomocą nauki rozciągłości znaleziono, jakkolwiek częściowo tylko w jej języku przedstawiono, piękne rezultaty w dziedzinie funkcyj Θ; ogłosił je Caspary [141]) w szeregu prac, z których wspomniano już wyżej (N. 82) o jednej, związanej z wyznacznikami. Między innemi, za pomocą podstawienia liniowego ułamkowego, przekształcił Caspary różniczkę $\frac{dy}{\sqrt{f(y)}}$ na formę normalną Weierstrassa; wyprowadził stąd i wyjaśnił na drodze geometrycznej nowe równanie Hermite'a i podał inne jeszcze równania. Wykazał następnie, że 9 spółczynników podstawienia ortogonalnego można wyrazić tożsamościowo za pomocą funkcyi Θ, a jako zastosowanie podał proste rozwiązanie zagadnienia o ruchu obrotowym. Okazało się przytem, że związki, znalezione przez Jacobi'ego [142]) za pomocą funkcyj eliptycznych, dają się przy stosowaniu nauki rozciągłości wyprowadzić i bez tych funkcyj; że są one w części tożsamościami bezwzględnemi, w części zaś dają się na takie tożsamości zamienić przy pomocy przekształceń kwadratowych funkcyj Θ. I kąty Eulerowskie ϑ, φ, ψ oraz ich funkcye trygonometryczne można było przy pomocy dwóch argumentów dowolnych wyrazić przez cztery funkcye Θ Jacobiego, a przy pomocy czterech dowolnych argumentów—przez same nieparzyste funkcye Θ. Z kątami Eulerowskiemi wiążą się sposobem naturalnym za pomocą prostych związków kąty α, β, γ, występujące w aksonometryi przy dowodzie twierdzenia zasadniczego Gaussa za pomocą metod Grassmanowskich [143]). Podobnież i cała teorya układów ortogonalnych, przekształcenia Rodrigues'a i t. p. należą wprost do dziedziny „jednostek głównych" nauki rozciągłości, jak to już w części wykazano w odnośnych rozdziałach R_2 [144]).

Dalszym wynikiem było wyprowadzenie z tożsamości algebraicznych [145]) rozmaitych wzorów i twierdzeń, jak np. wzoru Weierstrassa na iloczyny czterech funkcyj Θ, twierdzenia zasadniczego Jacobi'ego, twierdzenia Cayley'a i t. p.

Byłoby to nas zadaleko doprowadziło, gdybyśmy chcieli wymienić liczne rezultaty tego rodzaju, wykazujące, że cała dziedzina funkcyj Θ i przedmiotów z nią związanych należy do naturalnego zakresu metod Grassmannowskich; pewną część tej literatury podajemy w Nocie 145-ej. Tylko co do funkcyj hypereliptycznych nadmienimy, że teorya ich jest identyczną z teoryą geometryczną czterech czworościanów, mających takie szczególne położenie, że każdy z nich jest jednocześnie wpisany i opisany na trzech pozostałych. Zresztą, jako rezultat tych badań wymienimy to, że najprościej do teoryi funkcyj eliptycznych nie prowadzi ani określenie całkowe, ani własności peryodyczności, podobnież jak rozwinięcie według potęg zmiennych nie stanowi najprostszego wstępu do teoryi funkcyj Θ i funkcyj sigma. Tylko związki geometryczne, dające się przedstawić i rozwinąć za pomocą nauki rozciągłości, stanowią najprostsze wprowadzenie do powyższych przedmiotów. W ten sposób potwierdza się wypowiedziane już przed wielu laty przez Kleina przekonanie, że istnieje głęboki związek pomiędzy tworzeniem Grassmannowskiem utworów algebraicznych a geometrycznem zastosowaniem funkcyj Abelowych, uzasadnionem przez Clebscha. Jest zasługą Caspary'ego wykazanie tego związku w całej jego rozciągłości; zadaniem zaś przyszłości będzie stwierdzenie całego jego pożytku dla obu teoryj, tak analitycznej jak i geometrycznej.

Najwidoczniejszemi okazały się pożytki nauki rozciągłości w mechanice. Gdy w matematyce czystej dawno już przekroczono punkt widzenia Descartes'a, dzięki rozwinięciu metody analitycznej i utworzeniu nowej metody syntetycznej, to przeciwnie w mechanice, ciążył jeszcze aparat spółrzędnych, nawet w związkach najprostszych. Właśnie zagadnienia mechaniki, jak o tem mówi sam Grassmann w przedmowie do A_1, były dla niego punktem wyjścia w badaniach, które potem powoli wytworzyły system nauki rozciągłości. Przy opracowywaniu mechaniki analitycznej Lagrange'a okazało się, że wszystkie wywody tego dzieła dały się przy pomocy pojęcia iloczynu zewnętrznego nowej analizy przedstawić sposobem tak prostym, iż rachunek stawał się często dziesięć razy krótszym, niż w tem dziele. Podobnież zawikłane nieraz i niesymetryczne wzory teoryi przypływu i odpływu morza w „Mechanice niebieskiej" Laplace'a (księga IV) dały się przerobić na wzory niezmiernie proste i symetryczne, przyczem sposób ich rozwinięcia szedł zawsze w parze z samem pojęciem. „W samej rzeczy, nie tylko można było wypowiedzieć łatwo słowami każdy wzór, ukazujący się w biegu wywodów, i wyrazić przez to za każdym razem odpowiednie prawo, lecz nadto wszelkie przejście od jednego wzoru do drugiego było wyrażeniem symbolicznem równoległego dowodu pojęciowego. W metodzie zwykłej, wpowadzenie spółrzędnych dowolnych, nie mających nic wspólnego z przedmiotem, zaciemniało całkowicie myśl, rachunek zaś polegał na mechanicznem rozwijaniu wzorów, nic nie mówiącem, więc zabójczem dla ducha. Przeciwnie, w tej metodzie, idea, nie zamglona niczem obcem, promieniała poprzez wzory z całą jasnością, a przy każdem rozwinięciu wzorów umysł brał czynny udział w postępowym ich wywodzie". Temi słowy Grassmann scharakteryzował najdobitniej metodę nauki rozciągłości, nie tylko ze względu na jej zastosowania do mechaniki, lecz i najogólniej. Gdyż mechanika, cynematyka i geometrya są tu tylko interpretacyą tych samych wywodów i wyników w różnych dziedzinach zastosowań. Wyższość też nauki rozciągłości ponad innemi metodami w dziedzinie mechaniki wielokrotnie bywała uznawaną, nigdy zaprzeczaną. Rezultaty własnych prac Grassmanna w tej dziedzinie są bardzo rozproszone; nawet obie rozprawy [146]), traktujące specyalnie o mechanice, dają w ogóle tylko zasady i próby zastosowań, obok pewnych objaśnień i informacyj. Niestety, prace, podjęte przez Grassmanna w ostatnich latach jego życia, nie zostały ukończone; lecz to, co pozostało, starczy niewątpliwie za fundament do dalszej budowy. Autor niniejszego w jednej z swych nowszych prac [147]) zebrał systematycznie wszystkie istotne dane mechaniki Grassmannowskiej. Odnośne próby z A_1 dał już był Hankel [148]). Sturm [129]) na tej drodze oznaczył przypadek ogólny równowagi n sił w przestrzeni i wyprowadził stąd specyalne rezultaty, do jakich doszli byli Spottiswoode, Chelini, Möbius, Cayley i Sylvester. Cremona [149]) zastosował naukę rozciągłości w swoim wykładzie rachunku graficznego do konstrukcyi sił wypadkowych i środków ciężkości; Bunkofer [11])—do badań nad zachowaniem i zmianą miejsca środka poruszającego się układu punktów i nad ciśnieniem odśrodkowem tarczy wirującej. Favaro [150]) uwydatnił znaczenie nauki rozciągłości w grafice statycznej, jako środka pomocniczego w wykładzie technicznym. Piszący te słowa podał [151]) proste wywody twierdzeń o środku ciężkości. Caspary w wykładach w Société math. de France (1887) dał dowody podobnych twierdzeń Laisanta, Darboux'a, André'go, Foureta. Carvallo [152]), przy pomocy Grassmannowskiego przedstawienia wypadkowych i środków ciężkości, znalazł szereg twierdzeń ogólnych o siłach działających na ciała i o równowartości dwóch układów sił. Peano [119]) znalazł twierdzenia o siłach, kompleksach i środkach ciężkości, po części nowe, po części zaś wypowiedziane już dawniej przez Poinsota, Serreta i Steinera. Obszerne opracowanie statyki na tejże podstawie zawdzięczamy E. Müllerowi [153]). Zarys mechaniki Lürotha [154]) opiera się wprawdzie zasadniczo na poglądach nauki rozciągłości, jakkolwiek występuje w przekładzie na język i symbolikę kwaternionów, nie zupełnie z pożytkiem dla rzeczy. Burmester znalazł, że twierdzenia główne jego rozpraw cynematycznych [155]) wypływają z wielką łatwością z zasad nauki rozciągłości. Mehmke [156]) opracował te badania oraz inne zagadnienia cynematyczne przy pomocy nauki rozciągłości i podał uproszczoną teoryę momentów bezwładności, przy uwzględnieniu równoczesnem zadań specyalnych. Abbé wykazał w swoich odczytach o mechanice ciał stałych, że poglądy nauki rozciągłości pozwalają na badanie bezpośrednie pojęcia ruchu krzywoliniowego, bez potrzeby kombinowania ruchów prostoliniowych; w szczególności przedstawił przyspieszenie punktu układu, tak co do położenia jak i kierunku, jako różnicę geometryczną dwóch następujących po sobie nieskończenie małych obrotów. Powstające stąd równania ruchu zastosował Kircher[158]) do rozwiązania szeregu zagadnień, które wypadło daleko piękniej i przejrzyściej, niż za pomocą równań ruchu Eulera. Takiż rezultat osiągnęło podane przez Alle'go[159]) w języku nauki rozciągłości przedstawienie zasady d'Alemberta i równań ruchu obrotowego. Buchheim[130]) wykazał, że nauka rozciągłości daje najprostszy i najbardziej przystosowalny aparat rachunkowy dla całej teoryi ruchów śrubowych. W szczególności podał on nową i zupełną teoryę ruchu śrubowego w przestrzeni o krzywiznie dodatniej, wtedy gdy Clifford i Ball przedmiot ten traktowali tylko urywkowo i po części bez dowodów, przy pomocy bikwaternionów. Tenże uczony zastosował także wzory, znalezione dla ruchów nieskończenie małych, do ruchów skończonych, a to dla wszystkich gatunków przestrzeni trójwymiarowej; wreszcie uogólnił on całą teoryę do przestrzeni n-wymiarowej. W tej samej dziedzinie i temiż środkami pracował Cox[139]), który badał ruch śrubowy w przestrzeni hyperbolicznej oraz cylindrojdę, a także Hyde[131]), który wykazał też, jak nadzwyczajnie zyskują na prostocie i przejrzystości teorye Balla, gdy zastosujemy do nich pojęcia i metody nauki rozciągłości[160]). Mimo to Gravelius w swojej „Mechanice teoretycznej układów sztywnych“ (1889) nie uwzględnił tego postępu w przedstawieniu teoryi Balla, tak że nawet jeden z recenzentów tej pracy poradził autorowi, aby dzieło swe podał zupełnej przeróbce w myśl powyższego[160]). I Study[161]) używa także kwaternionów w rozważaniach swych nad przedstawianiem parametrów grupy obrotów ciała sztywnego około punktu. Wreszcie Gibbs[35]) teoryę potencyałów i inne funkcye ważne w fizyce matematycznej traktował wyłącznie przy pomocy utworów iloczynowych nauki rozciągłości. Odpowiednie prace innych uczonych z dziedziny nauki sprężystości i hydrodynamiki nie zostały dotąd ogłoszone.

I we wspomnianej już wyżej Grassmannowskiej teoryi elektrodynamiki [162]) metody nauki rozciągłości grają rolę istotną, a także w badaniach nowszych jeszcze nie ogłoszonych, odnoszących się do specyalnej teoryi transformatorów. Toż samo odnosi się do Grassmannowskiej teoryi mieszania barw, również do zbudowanej przez Preyera [164]) teoryi czystej nauki o wrażeniach, z którą wiąże się praca Wundta [165]) o tak nazwanych znakach miejscowych. Kilka zastosowań nauki rozciągłości do krystalografii i do nauki o magnetyzmie podał sam Grassmann w A_1. (Co do zastosowania liczb wyższych zespolonych do chemii, które musi być pozostawione przyszłości, patrz szczegóły u Hankela [166]). I rachunki astronomiczne doznały znacznych uproszczeń przy pomocy nauki rozciągłości, Gibbs [167]), zastosowawszy rachunek odcinków oraz mnożenia wewnętrzne i zewnętrzne, podał nową metodę obliczania eliptycznych orbit ciał niebieskich z trzech zupełnych obserwacyj i zastosował tę metodę do obliczenia orbity planety Ceres. Postępowanie to nietylko dało lepsze rezultaty, aniżeli metody Gaussa i Oppolzera, lecz nadto zmniejszyło znacznie robotę potrzebną do przygotowania równania zasadniczego, odnoszącego się do szukanego rozwiązania. Podobną metodą Beebe i Phillips [168]) obliczyli całkowicie drogę komety Swifta (1880, V).

Oprócz wymienionych robót specyalnych należy tu przytoczyć cały szereg pism, mających głównie na celu obznajmienie czytelnika z metodami nauki rozciągłości w mniejszym lub większym zakresie oraz pobudzenie do studyów nad nią. Prócz oryentującej w tym przedmiocie własnej pracy Grassmanna [169]) oraz dzieła autora „System der Raumlehre“, należy tu wymienić nazwiska następujących autorów [170]): w Niemczech: Hankel, Mahler, H. Grassmann młodszy, R. Grassmann, Kraft; w Anglii: Henrici, Cox; w Ameryce: Beman, Clifford, Hyde, Gibbs; we Francyi: Caspary, Carvallo; w Hiszpanii (obok jednej pracy autora) Galdeano; we Włoszech: Peano; w Rossyi: Bogusławskij.

Czynnikiem, wielce sprzyjającym rozwojowi nauki rozciągłości, była teorya kwaternionów, która, z powodów już wyżej wyjaśnionych, znalazłszy w Anglii daleko prędsze i większe uznanie niż nauka rozciągłości w Niemczech, następnie stosunkowo szybko przekroczyła granice swej ojczyzny. Na teoryi kwaternionów matematycy amerykańscy, francuscy i niemieccy oswoili się z nowemi działaniami rachunku geometrycznego, który w Niemczech znajdowano tak dziwnym i niedogodnym. Przekłady dzieł oryginalnych Hamiltona oraz znaczna liczba mniejszych i większych przewodników i podręczników, głównie niemieckich, usunęły w szerszych kołach uprzedzenie przeciwko rzekomym innowacyom matematyków i przygotowały grunt pod naukę rozciągłości. Ze wszech stron powstało wielkie zdziwienie, gdy się okazało, że zagadnienia, traktowane z przymusem przy pomocy kwaternionów, dają się o wiele dogodniej i prędzej badać za pomocą nauki rozciągłości. To uznanie najotwarciej i najprędzej ujawniło się w Ameryce, w ostatnich zaś czasach we Francyi. Hyde[171]), zestawiwszy wywody tych samych twierdzeń za pomocą kwaternionów i nauki rozciągłości, wykazał w sposób drastyczny wyższość tej ostatniej, pod względem krótkości postępowania. Gibbs[172]) w cytowanych już pismach broni tej wyższości z zapałem i przekonywająco przeciwko zarzutom Taita, wynikającym z mylnego pojmowania rzeczy. Clifford[69]), przez porównanie rezultatów obu umiejętności, doszedł do tych samych wniosków. Carvallo[173]), udoskonaliwszy wykład teoryi funkcyj wektorowych liniowych Laguerre'a (1867), dał najważniejszym metodom rachunku kwaternionów taką postać, od której postęp najbliższy prowadził już do nauki rozciągłości. Padeletti[174]), w swoim wykładzie teoryi kwaternionów wspomniał przynajmniej o znakowaniu Grassmanna; Stephanos[175]) zaś podał zastosowanie Grassmannowskiego rachunku odcinków do przedstawiania form dwójkowych dwuliniowych przy pomocy punktów ciężkich. W Niemczech już dawniej Unverzagt[176]) bronił kwaternionów i nauki rozciągłości przeciwko zarzutom Scheffler'a; później zaś Study[177]) z naciskiem i bezstronnością wspomniał o użytku algorytmów niealgebraicznych i o dopuszczalnej dziedzinie zastosowań rachunku kwaternionów, i wskazał zarazem, jak nieuzasadnionemi są przesądy, będące powodem niechęci ku tym algorytmom.

Nauce rozciągłości zarzucano mianowicie: 1) że używa metod dowolnych, przeciwnych prawom zwykłego rachunku; 2) że pragnie zwalić to, co jest utrwalonem w metodach matematycznych i wcisnąć się wszędzie; 3) że przy jej pomocy nie daje się otrzymać nic takiego, coby i bez niej „równie dobrze“ nie dało się osiągnąć; 4) że „nowych rezultatów“ nie odkryła; owszem, skutkiem nadzwyczajnego postępu w matematyce od czasów Grassmanna stała się sama zbyteczną, gdyż nie istnieje żadna istotna różnica pomiędzy nią a metodami nowszemi. Przeciwko tym zarzutom tak odzywa się trafnie Study[177]): „Kto z zasady odrzuca stosowanie kwaternionów lub podobnych algorytmów, ten, chcąc być konsekwentnym, odrzucić musi i piękne badania (znalezione przy pomocy analityczno-geometrycznego algorytmu funkcyi zmiennej urojonej; przyp. autora), odnoszące się do odwzorowania z podobieństwem, do powierzchni minimalnych i t. p.; przez które nauka od czasów Gaussa i Riemanna doznała prawdziwego zbogacenia. Podobnemu przekonaniu nie mógł nie poddać się i Gauss[178]), lubo żywił niechęć do algorytmów analityczno-geometrycznych, jakich używano za jego czasów. Niesłusznie powołują się niektórzy na powagę Gaussa dla poparcia powyższego poglądu“. Na innem zaś miejscu mówi: „Historyczny rozwój umiejętności, potęga przyzwyczajenia nabytego przez całe pokolenia, każe nam uważać za naturalne to, do czego przywykliśmy w pierwszych latach naszych studyów. Umysły głębsze, jak Leibniz, a przedewszystkiem Hermann Grassmann, uczą nas, że nie należy poprzestać na tem stanowisku. Nie jesteśmy jeszcze, co prawda, tak daleko, abyśmy wszędzie mogli postępować według zasad, które, jako cenną spuściznę, przekazał nam Grassmann. Lecz w teoryi ruchów, jak i w geometryi elementarnej, jesteśmy już w stanie to przeprowadzić.“ Że analitycy starszego pokolenia, np. subtelny Heine, nie wiele trzymali o nauce rozciągłości, czy to z zasady, czy też dla tego, że nie znajdowali powodu do bliższego jej poznania, to łatwo to zrozumieć ze względu na jej ówczesną nieprzystępność i odosobnienie. Dziś wszakże znajomość powierzchowna lub fragmentaryczna jej metod nie może usprawiedliwiać bezpodstawnych sądów ujemnych, jakie wyżej zestawiono. Te sądy, ujawniające się zresztą dziś tylko sporadycznie, uważać można za odparte; zresztą występują one tylko w pojedyńczych kołach, hołdujących specyalnemu kierunkowi naukowemu, i patrzących niestety bez słusznego powodu na naukę rozciągłości w świetle dążeń nieprzyjaznych. W „Uwagach wstępnych“ wydawcy wydania jubileuszowego dzieł

Grassmanna czytamy: „Istnieje wprawdzie cały zastęp matematyków, pracujących prawie wyłącznie za pomocą metod Grassmanna; lecz dla znakomitej większości Grassmann pozostał obcym. Ci ostatni w najpomyślniejszym razie wypowiadają nazwisko jego z pewnym szacunkiem, lecz obok dzieł jego przechodzą, wzruszając ramionami". Wszakże fakty przez nas wyżej podane zdają się świadczyć, że sąd powyższy jest trzymany w tonie zbyt pesymistycznym. Powyższe dane o rozwoju i rozpowszechnieniu nauki rozciągłości, gdyby nawet były zupełnemi, nie wyczerpują jeszcze wpływu, który dotąd nauka rozciągłości wywarła na rozwój matematyki. Należałoby np. doliczyć tu prace, które faktycznie przeprowadzono za pomocą metod nauki rozciągłości, lecz które, po osiągnięciu rezultatów, przerobiono i ogłoszono w postaci zwykłej już to dlatego, że autorowie tych prac nie przypuszczali u czytelników swoich dostatecznego zrozumienia dla przedstawienia Grassmannowskiego, już to dlatego, że oparli się na doświadczeniu, iż przeróbki daleko prędzej, niż prace oryginalne, przechodzą drogę od stołu redakcyjnego czasopism do drukarni.

Daleko ważniejszą atoli jest okoliczność, że nowe badania w dziedzinach geometryi i mechaniki coraz więcej i widoczniej przenika duch nauki rozciągłości, nawet tam, gdzie panuje pewne niedowierzanie do jej metod. Cały rozwój tego badania, jak to już wyżej wspomniano, nietylko dąży coraz bardziej ku formie zewnętrznej, stworzonej przez naukę rozciągłości, lecz posuwając się w tem dążeniu, szuka w duchu tej nauki ogólnych punktów widzenia i praw najogólniejszych; szuka związków jasnych pomiędzy przedmiotami pozornie odległemi, lecz w rzeczy samej organicznie spokrewnionemi; przejrzystego porządku wyników; lepszego ugruntowania zasad, mniej dbając o rezultaty drobne, nie stanowiące postępu we wskazanych kierunkach. W obec tego nie można się dziwić wprawdzie, że dziś nauka rozciągłości uważana bywa za naturalną, oraz za pokrewną innym metodom badania, a więc skutkiem tego za zbyteczną, jak przed laty 25 uważano ją za nienaturalną i sprzeczną z innemi metodami, a więc także za zbyteczną. Dla zupełności musieliśmy zaregestrować i pogląd dopiero co wyrażony, gdyż ten niekiedy słyszeć się daje. Może w przyszłości, wyraźniej niż obecnie, będzie można poznać, że matematyka fin de siècle pozostawała pod wpływem ducha i metody nauki rozciągłości w stopniu daleko wyższym, niż przypuszczali jej przedstawiciele.

Z drugiej strony mamy świadectwa najpoważniejszych matematyków w różnych krajach, którzy z rzadką jednomyślnością, często z zapałem, wypowiadają uznanie dla siły upraszczającej, porządkującej i kierującej oraz dla nadzwyczajnej doniosłości metod Grassmannowskich; metod, które, przy całej swej prostocie, najdoskonalej i najściślej przystosowują się wszędzie do przedmiotu badania, nigdzie nie gubiąc się w bezdrożach rachunku, dla dojścia na drogach bocznych do prostego celu; metod, które badaczowi każą tylko pozbyć się przesądu, że całe zbawienie w matematyce polega na działaniach rachunkowych arytmetyki lub, specyalnie w geometryi, na systemie Steinera. Samo przytoczenie wyjątków z sądów powyższych przekroczyłoby znacznie ramy pracy niniejszej i mogłoby nawet obudzić mniemanie, że nauka rozciągłości dziś jeszcze potrzebuje publicznego zalecenia przez uznane powagi. Zresztą, podziw dla nauki rozciągłości nie był tak platonicznym, jakby można było przypuszczać według wyżej podanego wyjątku z „Uwag wstępnych.“ Nie tylko bowiem poważni uczeni, zwłaszcza za granicą, starali się od lat wielu o rozpowszechnienie nauki rozciągłości, lecz nadto oddawna stała się ona przedmiotem wykładów w wyższych zakładach naukowych. Tak np. (według danych, które posiadam), wykładali zasady lub zastosowania nauki rozciągłości: Burmester w Monachium, Mehmke w Stuttgarcie i Darmstadzie, von Escherich w Czerniowcach, Kraft w Zurychu, Hyde w Cincinnati; znajdujemy tę naukę także w planie studyów na uniwersytecie lipskim. O zainteresowaniu dla nauki rozciągłości i metod pokrewnych świadczy zadanie konkursowe, ogłoszone przez Dutch Society of Sciences na rok 1894 na temat porównania metod Grassmanna, Hamiltona i Cauchy'ego pod względem ich użytku w fizyce. Zwłaszcza, w Ameryce, zainteresowanie do nauki rozciągłości był bardzo żywe i dla tego tam najbardziej odczuwano potrzebę wydania zupełnego wszystkich niełatwo dostępnych prac Grassmanna.

O dojściu do skutku wydania zbiorowego, do którego powracamy tu w kilku słowach, zamykających zarys niniejszy, piszą wspomnione już „Uwagi wstępne“ z godną uznania otwartością.

Kroki wstępne w tej sprawie uczynił prof. Klein z Getyngi. Po porozumieniu się z rodziną Grassmanna, znalazł on w osobie prof. Engela w Lipsku wydawcę, równie ostrożnego jak i sumiennego, a w klasie matematyczno-fizycznej królewskiego saskiego Towarzystwa umiejętności poparcie, zarówno liberalne jak i poważne; poczem profesor Klein poczytał własny swój udział w sprawie wydawnictwa za ukończony. Prof. Engel, w porozumieniu z komisyą Towarzystwa ad hoc wysadzoną, pozyskał spółpracowników, prowadził układy z dawnymi wydawcami dzieł Grassmanna i zawarłszy umowę z księgarnią B. G. Teubnera w sprawie przejęcia nakładu, doprowadził pracę przygotowawczą do szczęśliwego zakończenia.

Nadto wielką zasługą Engela jest przygotowanie, po części wspólnie ze Studym, uwag krytycznych do tomu pierwszego zawierającego A_1 oraz „Analizę geometryczną“ *). Trudność zrozumienia obu wydań A_1 oraz „Analizy geometrycznej“ zwiększał dotąd brak dostatecznego rozczłonkowania a stąd i przejrzystości tekstu. Temu brakowi, bez krzywdy dla zupełnej dokładności przedruku, zaradził Engel za pomocą umiejętnego użycia środków typograficznych. Następnie znaczna liczba zmian redakcyjnych, podjętych już przez samego Grassmanna z okoliczności drugiego nakładu A_1, wymagała dokładnego porównania, sprawdzenia i rozstrzygnięcia. Osobne spisy dla A_1 i „Analizy geometrycznej“ dają dokładną wiadomość o odstępstwach od tekstu oryginalnego, które stały się koniecznemi, już to skutkiem zmian dopiero co wspomnianych, już to z powodu drobnych niepoprawności pierwszych druków. Szczególnej wagi i wielce ciekawemi są liczne przypisy treści krytycznej i historycznej, pochodzące w części także od Study'ego, a przynoszące także nowe dane o stanowisku Hamiltona względem nauki rozciągłości i odtwarzające całkowicie „Essay“ Leibniza, tak blizko związany z nauką rozciągłości. Koniec tomu stanowi szczegółowy spis rzeczy, wspólny dla obu dzieł, cenny zwłaszcza z powodu mnóstwa pojęć i związków w tekscie dzieła i tem

*) Obecnie (w 1896) wyszła już część druga tomu I-go zbiorowych dzieł Grassmanna, zawierająca nowe wydanie A_2 z objaśnieniami krytycznemi.

ważniejszy, że dotąd istniał tylko krótki spis nowo wprowadzonych wyrażeń dla A_1. Nadto dołączenie paginacyi wydań dawniejszych daje możność odszukania zupełnie na pewno w nowem wydaniu cytat z wydań dawniejszych.

Pełna troskliwości staranność, z jaką wydawca podjął i przeprowadził żmudne zadanie, jest tem godniejszą uznania, że według słów własnych: „nie był on nigdy jednostronnym zwolennikiem Grassmanna i nigdy nim nie będzie.“ Jeżeli mimo tego zastrzeżenia, wypływem żywego zainteresowania do dzieła Grassmanna było takie oddanie się wydawnictwu, jakiego nie mógłby nawet okazać najgorętszy zwolennik, to widać stąd w każdym razie, że ci jednostronni zwolennicy—jeżeli są tacy—walczą za sprawę nie małej wagi. Jest nawet zbytecznem nadmienić, że druk, korekta i strona zewnętrzna tomu należą do najlepszych produkcyj B. G. Teubnera; trzeba wszakże wspomnieć o tem, że ozdobą tomu jest wyborny portret Grassmanna i facsimile jego pisma. Oby wydawca z niezaprzeczalnego ogólnego uznania swych zasług dla sprawy Grassmanna zaczerpnął sił i cierpliwości do dalszego prowadzenia oraz zakończenia trudnego przedsięwzięcia!

Znaczenie wydania zbiorowego dla rozwoju i rozpowszechnienia nauki rozciągłości nie polega, jak mniemamy, na tem, że rozpocznie ono nową erę i że uczonego, znanego dotąd tylko niewielkiej liczbie zwolenników, podniesie odrazu na piedestał sławy wszechświatowej. Jak mało pod tym względem pozostaje jeszcze do zrobienia, świadczy opisane wyżej dotychczasowe powodzenie nauki rozciągłości. Dla zagranicy znaczenie wydania zbiorowego polega na tem, że czyni ono zadość dawno w kołach najwybitniejszych matematyków ogólnie odczuwanej potrzebie zgromadzenia częścią wyczerpanych, częścią zaś rozproszonych dzieł Grassmanna. W Niemczech pod egidą wysokiego ciała naukowego uznano wreszcie naukę rozciągłości za uprawnioną obok innych metod szkolnych gałęź badania, a uznanie to przysporzy jej bezwątpienia zwolenników i wśród ziomków naszych. Lecz nie należy sądzić, by wydawnictwo to usuwało już wszelkie trudności. W okresie 25-letnim dotychczasowego rozwoju nauki rozciągłości brakło wydania A_1 przez lat dziesięć na rynku księgarskim, brak od dłuższego czasu po dzień dzisiejszy wydania

A_2 *) bogatszego od A_1 pod względem pojęć i wykładu rachunkowego. Żaden komentarz i w przyszłości nie usunie wszelkich trudności, jakie przedstawia studyum oryginalnych dzieł Grassmanna z powodu właściwości jego wykładu. Aż do czasu dopóki nowe opracowanie całego materyału nie odpowie dzisiejszym wymaganiom pod względem zwięzłości, przejrzystości i łatwości, pedagogicznie obmyślane wykłady i prace wstępne do nauki rozciągłości, tak dziś jak i potem, stanowić będą najłatwiejszy i najdogodniejszy środek uczenia się i nauczania. Dopiero po takiem przygotowaniu, większość matematyków będzie mogła podjąć z korzyścią i zadowoleniem studyum obu części nauki rozciągłości.

Tem wydaniem zbiorowem Niemcy oddają hołd należny cieniom męża, który był zarówno genialnym badaczem jak i szlachetnym charakterem. Spełniły się tym sposobem prorocze słowa, któremi przed laty 34 zamknął Grassmann przedmowę do A_2: „Mam głębokie przeświadczenie, że nie zaginie praca, włożona w przedstawioną tu umiejętność, której poświęciłem znaczną część mego życia z wytężeniem wszystkich sił moich. Wiem wprawdzie, że postać, którą nadałem umiejętności, jest i musi być niedoskonałą. Lecz wiem także i muszę to wypowiedzieć, choćbym miał narazić się na zarzut zarozumiałości, że gdyby nawet dzieło to miało przeleżeć lat 17 lub dłużej, bez pożytku, bez wniknięcia w żywy rozwój nauki, to nadejdzie wszelako chwila, w której wyciągniętem będzie z pyłu zapomnienia i w której myśli w niem złożone zaczną przynosić owoce. Wiem, że jeżeli nawet nie uda mi się na stanowisku napróżno dotąd przezemnie upragnionem zgromadzić dokoła siebie uczniów, których mógłbym natchnąć i pobudzić do rozwinięcia i pomnożenia tych pomysłów, to mimo to pomysły te, może w postaci zmienionej, powstaną na nowo i z postępem czasu żywo wzajemnie oddziaływać na się będą. Albowiem prawda jest wieczną, jest boską i żadna faza jej rozwoju nawet, gdy szczupłą obejmuje dziedzinę, nie może przejść bez śladu; trwa ona, mimo, że szata, w jaką ją słaby przyodziewa człowiek, w proch się rozwiewa“.

---

*) Patrz przypisek na str. 37.

LITERATURA.

1. Study, Complexe Zahlen und Transformationsgruppen, Leip. Ber. 1889, S. 213 i nast., S. 117 i nast.

2. Por. Schlegel, Hermann Grassmann, Lipsk 1878, str. 28 i nast., lub H. Grassmann's Ges. math. und phys. Werke I_1, 417.

3. J. Grassmann, Raumlehre, II, Berlin 1829; Trigonometrie, Berlin 1835.

4. Möbius, Der barycentrische Calcül, Lipsk 1827; Mechanik des Himmels, Lipsk 1843.

5. Bellavitis, Annali delle scienze del regno Lomb. Ven. 1835, 1837; Calcolo delle equipollenze, Padova 1835.

6. Bellavitis, Sulle origini del metodo delle equipollenze, Ven. Ist. Mem. XIX (1877).

7. St-Venant, C. R. XXI, 620 i nast. (1845).

8. Cauchy C. R. XXVI, 70, 129, 161 (1853).

9. O'Brien, Phil. Mag. 1847, s. 139; London Phil. Trans. CXLII, 161, (1852).

10. Gauss, Ges. Werke, II, 305.

11. Bunkofer, Zahlenbüschel etc. Progr., Bruchsal 1878.

12. Résal, Traité de cinématique pure, 1862, s. 64.

13. Somoff, Kinematik, deutsch. v. A. Ziwet, 1878.

14. Lipschitz, Principes d'un calcul algébrique, etc. C. R. XCI (1889). Porówn. ref. w „Fortschritte der Math." lub Schlegel, Einige geom. Anwendungen der Grassmann'schen Ausdehnungslehre, Progr. Waren, 1882.

15. Porów. Niemöller, Anwendungen der linealen Ausdehnungslehre auf d. Theorie der Determinanten. Progr. Osnabrück, 1891.

16. Möbius, Ges. Werke IV. Ueber geometr. Addition u. Multiplication.

17. Badorff, Beitrag zur Geometrie des Kreises u. d. Kugel. Progr. Baden, 1877.

18. Méray, Essai sur le calcul des quantités associées en systèmes etc. Ann. de l'École norm. (2), VIII, (1879).

19. A_2 s. 233.

20. Chapman, On some applications of the Units of an n-fold space, American. J. XIII (1888).

21. Chapman, On the matrix which represent a vector, American. J. XIII (1891). Porówn. referat w „Fortschr. d. Math.“

22. Genty, Applications mécaniques du calcul des quaternions, Journ. de Math. (3), VII (1881).

23. Sylvester, Sur la résolution générale de l'équation en matrices, C. R. IC (1884).

24. Wälsch, Zur Invariantentheorie der Liniengeometrie, Wien., Ber. XCVIII (1889).

25. Frobenius, Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen, Crelle J. LXXXIV (1878).

26. O tym i dwóch następnych systemach porów. Schlegel, Ueber neuere geometrische Methoden etc. Schlömilch, Zeitschrift XXIV (1879).

27. Schendel, Die Bernoullischen Functionen und das Taylor'sche Theorem etc., Jena 1876.

28. Kindel, Eine reciproke Zuordnung der räumlichen Elemente, Progr., Berlin, (Kölln. G.) 1887.

29. d'Ocagne, Sur la corrélation etc. Nouv. Ann. (3) XI (1892). Porówn. referat w „Fortschr. d. Math.“

30. Porówn. Böklen, Die Rechnung mit Vectoren, Correspondenz-Bl. für Gel. u. Realsch. 1882.

31. Gauss, Götting. Gelehrte Anz. 1831.

32. Siebeck, Ueber die graphische Darstellung imaginärer Funct. Crelle J. 1858. Do tego i następnego numeru patrz też N. 26.

33. Björling, Ueber eine vollständige geometrische Darstellung einer Gleichung zwischen zwei veränderlichen Grössen. Stockholm 1875.

34. Grassmann. Der Ort des Hamilton'schen Quaternionen in der Ausdehnungslehre, Math. Ann. XII (1877). Patrz także N. 26.

35. Gibbs, Elements of Vector Analysis, New-Haven 1881—84; On multiple Algebra, Americ. Assoc. XXXV, (1886).

36. Cayley, Memoir on the theory of matrices, London Phil. Trans. CXLVIII (1858).

37. Peirce, Linear associative Algebra, American. J. IV (1881).

38. Sylvester, Lectures on the principles of Universal Algebra, Annals of Math. VI (1884) i rozmaite artykuły w Comptes Rendus XCVIII i IC. Patrz też Cayley, On double Algebra, London M. S. Proc. XV (1884).

39. Macfarlane, Principles of the Algebra of Physics, Americ. Assoc. XL (1891).

40. Patrz Schlegel, Hermann Grassmann, Lipsk 1878, str. 22 i następne; gdzie w ogóle można znaleźć szczegóły o pierwszym okresie histo-

ryi nauki rozciągłości. Patrz także artykuł S. Dicksteina p. t. „Hermann Grassmann“ w „Niwie“ (1879).

41. Grassmann, Geometrische Analyse etc. Lipsk 1847.

43. Journal f. Math. t. XXIV, XXV, XXXI, XXXVI, XLII, XLIV, XLIX, LII.

44. Clausius, Journ. f. Math. LXXXII, str. 85 i dalsze (1876).

45. Grassmann, Zur Theorie der Farbenmischung, Pogg. Ann. LXXXIX (1853).

46. Patrz N-o 40, str. 15.

47. R. Grassmann, Die Ausdehnungslehre, Szczecin 1891, str. IV—VI.

48 Cremona, Nouv. Ann. 1860, str. 356.

49. Clebsch, Zum Gedächtniss an J. Plücker. Gött. Abh. XV (1872).

50. Patrz Nr. 40, str. 61, przypisek.

51. Grassmann, Der Ausdehnungslehre von 1844 (1878), str. XVII.

52. Noth, Die vier Species in den Elementen der Geometrie. Progr. Freiberg 1874, 1879.

53. Schlegel, Lehrbuch der element. Math. Wolfenbüttel 1878—1880.

54. Schlegel, Einige geometrische Anwendungen der Grassmann'schen Ausdehnungslehre, Progr. Waren, 1882; R_2 str. 59—121; Mehmke, Geometrie der Kreise in der Ebene, Schlömilch, Zeitschr. XXIV (1879); Anwendung der Grassmann'schen Ausdehnungslehre anf die Geometrie der Kreise in der Ebene, Rozprawa, Tybinga 1880; Cox, Application of Grassmann's A. to properties of circles. Quart. J. XXV (1890); Müller, Die Kugelgeometrie nach den Principien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre. Monatshefte f. Math. III, IV (1892, 1893).

55. Schlegel, Die Ausdehnungslehre als Mittel zur Analysis elem. geom. Aufgaben. Hoffmann, Zeitschr. XIV 81—86, 517, 518, 520 (1883).

56. Schlegel, R_1 str. 35—70. Einige geom. Anwendungen der Grassmann'schen Ausdehnungslehre, str. 20; patrz N. 30 str. 5 i 30 (uwaga końcowa).

57. Einige geom. Anwendungen der Grassmann'schen Ausdehnungslehre, str. 3.

58. Schlegel, R_2 str. 111; Ueber die geom. Darstellung des Imaginären etc. Schlömilch, Zeitschr. XXIII (1878).

59. Tarry, Nouvel essai sur la géometrie imaginaire, Assoc. franç. 1888. Géométrie générale. Ibid. 1889.

60. Molenbroek, Theorie der Quaternionen, Leiden, 1891, str. 131.

61. Günther, Der Thibaut'sche Beweis für das 11 Axiom, Progr. Ansbach 1877, str. 11, 12. Przypisek.

62. R_1, str. 43.

63. Eichler. Verallgemeinerte Betrachtungen über unsere Raumauffasung, Progr. Lingen, 1871.

64. Pilgrim. Ueber die Anzahl der Theile etc. Schlömilch, Zeitschrift XXIV (1879).

65. Patrz Nr. 34, str. 384.

66. Carvallo, Sur une généralisation du théorème des projections. Nouv. Ann. (3), X (1891).

67. Stolz, Zur Geometrie der Alten. Math. Ann. 1883; Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, Lipsk 1885, 1886.

68. Grassmann, Sur les différents genres de multiplication, Journ. f. Math. IL (1854).

69. Clifford, Application of Grassmann's Extension Algebra, Americ. Journ. I (1878).

70. Simony, Ueber zwei universelle Verallgem. algebr. Grundoperationen, Wiener Ber. XCI (1885).

71. Dyck, Gruppentheoretische Studien, Math. Ann. XX (1882).

72. Dedekind, Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen, Gött. Nachr. 1885, 1887.

73. Petersen, Ueber n-dimensionale complexe Zahlen, Götting. Nachr. 1887.

74. Study, Ueber die Maassbesstimmung extensiver Grössen. Rozprawa, Monachium 1885; Ueber Systeme von complexen Zahlen, Gött. Nachr. 1889. Complexe Zahlen u. Transformationsgruppen, Leipz. Ber. 1889.

75. Seydler, Zur Theorie der complanaren Biquaternionen, Prag. Ber. 1881.

76. Scott, A Treatise on the theory of determinants, Cambridge 1880.

77. Patrz N-r 15.

78. Carvallo, Théorie des déterminants; Multiplication des déterminants. Nouv. Ann. (3) X, (1891).

79. Carvallo, Théorèmes de mécanique, Nouv. Ann. (3), XII (1893).

80. Caspary, Ueber die Umformung gewisser Determinanten etc. Journ. f. Math. XCII. (1882); Ueber einige Determinanten-Identitäten, Ibid. XCV, (1881).

81. Mehmke, Bemerkung über d. Subteterminanten symmetrischer Systeme, Schlöm. Zeitsch. XXX (1885).

82. Caspary, Ableitung des Weierstrass'schen Fundamentaltheorems etc. Journ. f. Math. XCVI (1884).

83. Schlegel, Auflösung der Aufgabe 637, Hoffmann. Zeitschr. XVII (1886); Progreso mat. IV.

84. Patrz Nr. 36.

85. A_1 str. 266 i nast.; A_2 str. 228; także R_2 str. 14.

86. A_2 str. 241; także R_2 str. 76.

87. Patrz Nr. 23 i referat w „Fortsch. d. Math.“

88. Buchheim, On the theory of matrices, London M. S. Proc. XVI (1885).

89. Scott, On cubic determinants etc. Ibid. XI (1880); On some forms of cubic determ. Ibid. XIII, (1882).

90. v. Escherich, Die Determinanten höheren Ranges, Wien. Berichte XLIII (1880).

91. Zehfuss, Ueber eine Erweiterung des Begriffs der Determinanten, Frankf. a. M. 1868.

92. Gibbs, On multiple Algebra, Am. Ass. XXXV, str. 11.

93. Grassmann, Ueber zusammengehörige Pole und ihre Darstellung durch Producte, Gött. Nach. 1872; Die neuere Algebra und die Ausdehnungslehre, Math. Ann. VII (1874); Verwendung der Ausdehnunglehre für die allgemeine Theorie der Polaren etc. Journ. f. Math. LXXXXIV. (1877).

94. R_2 str. 156—210; uwaga na str. 172; str. 102 i nast.

95. Schendel, w Zeitschr. Schlömilcha 1885, 1886, 1887.

96. Schendel, Grundzüge der Algebra nach Grasmann'schen Principien, Halle 1885.

97. Buchheim, On Clifford's theory of Graphs. London M. S. Proc. XVII (1886).

98. A_1 str. 224 i nast.; A_2 str. 189 i nast.

99. Patrz Nr. 42.

100. Schlegel, Untersuchungen über eine Fläche dritter Ordnung, Progr. Waren 1871.

101. Eckardt, Beitrag zur analytischen Geometrie des Raumes, Math. Ann. V, (1872).

102. Bauer, Ueber Flächen vierter Ordnung etc. Münch. Ber. (1888).

103. Schlegel, Ueber die mechanische Erzeugung von Curven, Math. Ann. VI (1873).

. **104**. Dingeldey, Ueber C_3 mit Doppelpunkten. Ibid. XXVII, (1886); Ueber die Erzeugung von C_4 durch Bewegungsmechanismen, Rozprawa, Lipsk 1885.

105. Kölmel, Die Grassmann'sche Erzeugungsweise von ebenen C_3, Rozprawa, Tybinga 1886.

106. Fritz, Ueber die erste Grassmann'sche Erzeugungsweise der ebenen C_3 und deren Analogon im Raum, Progr. Darmstadt, 1889.

107. Sturm, Ueber Collineation und Correlation, Math. Ann. XXII (1883).

108. Caspary, Ueber die Erzeugung algebr. Raumcurven durch veränderliche Figuren, Journ. f. Math. C (1887); Sur les cubiques gauches, Darboux Bulletin (2), XI, (1887).

109. v. Escherich, Die Construction der algebr. Curven und Flächen etc. Wiener Ber. LXXXV (1882); Die Construction der alg. Flächen, Ibid. 1884.

110. Grassmann, Die lineale Erzeugung von C_3, Journ. f. Math. LII (1856).

111. Schröter, Zuruckführung der Grassmann'schen Definition der C_3 etc. Ibid. CIV (1889).

112. Grassmann, Die höhere Projectivität in der Ebene, dargestellt durch Functionsverknüpfung, Ibid. XLII (1851); Ueber zusammengehörige Pole etc. Gött. Nachr. 1872; Verwendung der Ausdehnungslehre etc. (p. Nr. 93).

113. Patrz Nr. 96.

114. H. Grassmann jr., Anwendung der Ausdehnungslehre auf die allgemeine Theorie der Raumcurven und Oberflächen. Progr. Halle 1886, 1888, 1893; Punktrechnung und projective Geometrie, Festschrift, Halle, 1894.

115. Carvallo, Sur les surfaces minima, Darboux Bull. (2) XVIII, (1874).

116. Mehmke, Ueber zwei . . . charakt. Eigenschaften der linearen Punkttransformation, Schlöm. Zeitschr. XXXVI (1891); Untersuchungen über die . . Eigenschaften der Berührungstransformation, Ibid. XXXVIII (1893); Kleine Beiträge zu den Anwendungen der Methoden von Grassmann. Ibid. XXXVII (1892).

117. Ibid. XXXVII (1892).

118. Peano, Calcolo geometrico secondo l'A di H. G. Turyn 1888; Gli elementi di calcolo geom. Ibid. 1891.

119. Peano, Teoremi su massimi e minimi geom. etc. Palermo Rendiconti, II (1888).

120. Cesàro. I numeri di G. in geometria intrinseca. Rzym, Accad. L. Rend. (5). III. (1894).

121. Schlegel, On the problem of the minimum sum of the distances of a point from given point, Americ. M. S. Bulletin (2), I; Démonstration d'un théorème de Steiner, Progreso mat. IV, 174 (1894).

122. Fine, On the siugularities of curves of double curvature, Americ. J. VIII (1886).

123. A_2 str. 241 i nast.

124. R_2 str. 75; R_1 str. 49; patrz też N-r 57 str. 21.

125. Hyde, Geometric division of non congruent quantities, Annals of Math. IV (1881).

126. R_2, str. 59—104; str. 156—250.

127. Study, Ueber die Geometrie der Kegelschnitte, rozprawa habilitacyjna, Lipsk 1885.

128. Noth, patrz Nr. 52; Die Arithmetik der Lage, Lipsk 1882.

129. Sturm, Sulle forze in equilibrio, Annali d. Mat. (2), VII, (1876).

130. Buchheim, On the theory of screws in elliptic space, London M. S. Proc. XIV, XVI, XVII, XVIII (1884—1887).

131. Hyde, The directional theory of screws, Annals of Math. IV, (1888); The screw as a unit in a Grassmanian system of the sixth order, Ibid. VIII (1894).

132. Müller, Die Liniengeometrie nach den Principien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre, Monatsh. f. Math. II (1891).

133. Schlegel, Quelques théorèmes de géométrie à n dimensions S. M. F. Bull. X, (1882).

134. Schlegel, Ueber die verschiedenen Formen von Gruppen etc. Hoppe, Archiv (2), X (1891).

135. Mehmke, Ausdehnung einiger elem. Sätze über das ebene Dreieck etc. Ibid. LXX (1884).

136. Cayley, Sixth memoir upon quantics. London Phil. Trans. CIL (1859).

137. R_2, str. 5—12, str. 250 i nast.

138. Patrz Nr. 130, str. 89.

139. Cox, On the application of quaternions and G. A. to different kinds of uniform space, Cambr. Proc. IV (1882).

140. Grassmann, Ueber das Verhältniss der nichteuklidischen Geometrie zur Ausdehnungslehre, Dodatek do A_1 (1878).

141. Caspary, Extrait d'une lettre à M. Hermite, Journ. de Math. (4), V (1889).

142. Jacobi, Ges. Werke II, 505.

143. Schlegel, Zum Gauss'schen Fundamentalsatz der Axonometrie, Hoffm. Z. XVIII (1887).

144. R_2, str. 132 i nast.

145. Caspary, Ueber die Verwendung algebr. Identitäten etc. Math. Ann. XXVIII (1887); Ueber einen einfachen Beweis der Rosenhain'schen Fundamentalformeln, Ibid. XXX (1887); Sur les systèmes orthogonaux, formés par les fonctions Θ; Sur une méthode élémentaire pour obtenir le théorème fondamental de Jacobi etc; Sur les théorèmes d'addition des fonctions Θ C. R. IV (1887); Sur une manière d'exprimer . . . les coefficients de 3 syst. orth etc.; Sur les expressions des angles d'Euler au moyen des fonctions Θ etc. Darb. Bull. (2) XIII (1889); Sur les relations qui lient les éléments d'un syst. orth. aux fonctions Θ et σ etc. Journ. de Math. (4), VI (1890); Sur une méthode élém. pour établir les équations différentielles dont les fonctions Θ forment les intégrales; Sur deux systèmes d'équ. différentielles dont les fonctions hyperelleptiques de 1-re esp. forment les intégrales; Sur les deux formes sous lesquelles s'expriment . . . les coordonnées de la surface du 4-me dégré etc.; Nouvelles manières d'exprimer . . . les coord. de la surf du 4-me dégré C. R. CXII (1891); Sur une nouvelle manière d'établir les relations alg. qui ont lieu entre les fonctions hyperelliptiques de 1-re espèce. Nouv. de l'École norm. (3), X, (1893).

146. Grassmann, Grundriss der Mechanik, Progr. Szczecin 1867; Die Mechanik nach den Principien der Ausdehnungslehre, Math. Ann, XII (1877).

147. Schlegel, Die Hauptmethoden der Gr. Ausdehnungslehre in ihrer Anwendung auf die Mechanik, Civiling., XL (1894).

148. Hankel, Theorie der complexen Zahlensysteme, Lipsk, 1867.

149. Cremona, Elemente des graphischen Calcüls, übersetzt von Curtze (1875).

150. Favaro, La statica grafica nel insegnamento superiore, Wenecya 1873.

151. Schlegel, Zwei Sätze vom Schwerpunkt, Schlöm. Z. XXI, (1876); Sur le théorème de M. Laisant etc. S. M. F. Bull. X (1883); Sur le théorème de M. Haton de la Goupillière etc. Ibid. XXI (1893).

152. Carvallo, Théorèmes de mécanique; Nouveau théorème de mécanique, Nouv. Ann. (3), XII (1893).

153. Müller, Neue Methode zur Ableitung der statischen Gesetze, Mittheilungen d. k. k. Technol. Gewerbemuseums, Wien, Neue Folge (1893).

154. Lüroth, Grundriss der Mechanik, Monachium 1881.

155. Burmester, Kinematisch geom. Theorie der Bewegung d. affin veränderlichen Systeme, Schlöm. Z. XXIII (1878); Ueber dem Beschleunigungszustand ähnl. veränderl. und starrer ebener Systeme, Civiling. XXIV (1878).

156. Mehmke, Ueber die Geschwindigkeiten beliebiger Ordnung etc. Civilingenieur, XXIX (1883); Eine kinematische Aufgabe, Darmstadt 1886; Ueber die Bewegung eines starren ebenen Systems in seiner Ebene, Schlöm. Z. XXXV (1890); Ueber den kinematischen Ort der Punkte ohne Normalbeschleunigung Civiling. XXIX (1883).

157. Mehmke, Ueber die Bestimmung von Trägheitsmomenten mit Hilfe Grassmann'scher Methoden, Math. Ann. XXIII (1884); Einfache Darstellung der Trägheitsmomente von Körpern, Schlöm. Z. XXVIII (1883).

158. Kircher, Ein Beitrag zur Bewegung unveränderlicher ebener Systeme, Progr. Meiningen, 1887.

159. Allé, Ueber die Ableitung der Gleichungen der drehenden Bewegung eines starren Körpers nach der Grassmann'sches Analyse, Prag. Math. Ges. (1892).

160. Mehmke, Recenzya dzieła Graveliusa „Theoretische Mechanik starrer Systeme“ w „Deutsche Literaturzeitung“ 1890 Nr. 14.

161. Study, Ueber die Bewegungen des Raumes, Leipz. Ber. 1890, str. 354.

162. Grassmann, Neue Theorie der Elektrodynamik, Poggend. Ann. LXIV (1845); Zur Elektrodynamik, Journ f. Math. LXXXIII (1877).

163. Grassmann, Zur Theorie der Farbenmischung, Poggend. Ann. LXXXIX (1853); Bemerkungen zur Theorie der Farbenempfindungen (Dodatek do dzieła cytowanego pod Nr. 164).

164. Preyer, Elemente der reinen Empfindungslehre, Jena 1877.

165. Wundt, Revue philosophique (1878).

166. Patrz Nr. 148, str. 104.

167. Gibbs, On the determination of elliptic orbits from three complete observations, Mem. Nation. Acad. of sciences IV (1890).

168. Beebe i Philipps, The orbit of Swift's Comet 1880, V determined by Gibbs Vector metod, Astronom Journ. Nr. 207—208 (1890).

169. Grassmann, Kurze Uebersicht über das Wesen der Ausdehnungslehre, Grunert, Archiv VI, (1845).

170. Hankel, Theorie der complexen Zahlensysteme; Mahler, Einleitung in die Grassmann'sche Ausdehnungslehre, Progr. Ulm 1894; H. Grassmann jr., Punktrechnung und projective Geometrie, Halle 1894; R. Grassmann, Die Ausdehnungslehre oder die Wissenschaft von den extensiven Grössen etc., Szczecin 1891. Die Folgelehre oder Functionenlehre, tamże 1894; Peano, Grundzüge des geometr. Calcüls w przekładzie Scheppa, Lipsk 1891; Kraft, Abriss des geometrischen Calcüls, Lipsk 1893; Henrici, Encyclopaedia britannica (1880); Cox. On the application etc. (patrz Nr. 139); Beman, A brief acconnt of the essential features of Grassmanns extension-Algebra. Annals of Math. VIII (1881, przekład N-ru 169); Clifford, patrz Nr. 69; Hyde, The directional caluclus based upon the methods of H. G. Boston 1890; Gibbs, patrz Nr. 92; Caspary, Sur une methode de géometrie etc. Darboux Bull. (2) XIII, (1879); Carvallo, Exposition d'une méthode de M. Caspary pour l'étude des courbes gauches S. M. F. Bull. XV (1887); La methode de Grassmann, Nouv. Ann. (3), XI (1889); Schlegel, Introduction aux méthodes géom. de H. G. Progreso mat. II, III (1892, 1893); Galdeano, Teoremas, problemas y métodos geom., Progreso mat. IV (1894); Geometria, Zaragoza 1895; Peano, Calcolo geometrico etc. (patrz wyżej); Bogusławskij, Algebra płaszczyzny i przestrzeni (po ros) w Zbiorniku Tow. mat. w Moskwie XIV—XVI, 1891; S. Dickstein, Pojęcia i metody matematyki (Warszawa, 1891); Kraft, Aequivalenz der Linientheilsysteme, Schlöm. Z. XXXIX (1894); E. Müller, Die Geometrie der Punktepaare und Kreise im Raume nach Grassmann'schen Principien, Monatshefte f. Math. VII (1896); Sondat, Sur un système de coordoonées triangulaires, Nouv. Ann. (3), XII, (1893). (Odnosi się do badań Chasles'a wspomnionych w tekscie, patrz Chasles Géom. super. Leç. III Chap. 23, 24).

171. Hyde, Calculus of direction and position, Americ. J. VI, (1883).

172. Gibbs, Quaternions and the Ausdehungslehre. Nature, maj 1891. str. 79. Patrz też On the Rôle of Quaternions on the Algebra of Vectors, Ibid. kwiecień 1891; Quaternion and the Algebra of Vectors, Ibid. marzec 1893; Quaternions and Vector Analysis, ibid. sierpień 1893.

173. Carvallo, Sur les systèmes linéaires etc. Monatshefle f. Math. II (1891).

174. Padeletti, Principii della teoria del quaternioni, Giorn. di Mat. XX (1882).

175. Stephanos, Sur la théorie des quaternions Math. Ann. XXII (1883).

176. Unverzagt, Ueber die Grundlagen der Rechnung mit Quaternion, Progr. Wiesbaden 1881.

177. Study, Complexe Zahlen etc. p. wyżej; Ueber die Bewegung des Raumes, p. wyżej.

178. Gauss, Briefwechsel mit Schumacher, IV, 147, Nr. 883; patrz także wyżej Nr. 10 i 31.

179. Kysäus, Bedeutung und Anwendung der Zahlen in der Geometrie, Progr. Siegen, 1850.

180. W zbiorze wykładów, mających na celu obznajmienie głównie uczniów wyższych szkół technicznych z trudniejszemi działami wyższej matematyki i, obok teoryi, z zastosowaniami do fizyki i techniki, wychodzącym pod tytułem „Higher Mathematics for engineering colleges" (edit. by Merriman, Lehigh University, and Woodward, Collumbia College, New-York London, 1876), analizę punktu i naukę rozciągłości opracowuje E. W. Hyde, analizę wektorową i kwaterniony A. Macfarlane.

PP. Molenbroek (Haaga) i Kimura (New-Haven) podali w r. 1895 projekt założenia Towarzystwa międzynarodowego dla postępu analizy wektorowej (kwaternionów i nauki rozciągłości). Rozstrzygnięcie losów tego projektu ma nastąpić w roku bieżącym (1896).

SPIS NAZWISK

z podaniem numeru stronicy.