Rok II Warszawa, Grudzień 1918 r. № 8

NAUCZANIE MATEMATYKI i FIZYKI

WYCHODZI W LUTYM, KWIETNIU, PAŹDZIERNIKU I GRUDNIU

TREŚĆ:

T. Sierzputowski. Odwzorowanie zbiorów, ciąg liczb naturalnych i systemy pozycyjne w nauczaniu początków arytmetyki.

R. Witwiński. O przekształceniach linjowych w geometrji.

W. Smosarski. Pojęcie stosunku.

Badanie kilku zależności, zachodzących między kątami i odcinkami.

Zadania arytmetyczne w zakresie liczby całkowitej przez M. Borowiecką (recenzja T. Łazowskiego).

Prenumerata wynosi 5 marek rocznie w Warszawie i na prowincji. Cena oddzielnego zeszytu 2 marki.

Redakcja: Polna 78 m. 7.

Administracja: Księgarnia M. Arcta, Nowy-Świat 35.

Rok II. Warszawa, Grudzień 1918 r. № 8

NAUCZANIE
MATEMATYKI I FIZYKI

WYCHODZI 4 RAZY DO ROKU POD REDAKCJĄ TADEUSZA GUTKOWSKIEGO

T. SIERZPUTOWSKI.

ODWZOROWANIE ZBIORÓW, CIĄG LICZB NATURALNYCH I SYSTEMY POZYCYJNE W NAUCZANIU POCZĄTKÓW ARYTMETYKI.

Niema już chyba dzisiaj pedagoga, którynby nie zgodził się na następujące określenie celu nauczania w szkole średniej, t. j. tej szkole, która ma wykształcić inteligentne warstwy społeczeństwa: Szkoła średnia winna nauczyć myśleć, winna wyrobić władze umysłowe młodzieńca, aby po otrzymaniu świadectwa dojrzałości umiał on naprawdę „używać rozumu".

Oczywista, że wytknięcie takiego celu pociąga za sobą kapitalną reformę całokształtu nauczania, a w szczególności zmianę programów poszczególnych przedmiotów, które tem samem schodzą do roli materjału do ćwiczeń władz umysłu.

O takiej reformie mówi p. A. Dobrowolski w swym referacie „O pilnej potrzebie wychowania umysłowego w Polsce" (Rocznik kasy Mianowskiego „Nauka Polska" 1918 r.).

Zachęcony przez p. Dobrowolskiego, naszkicowałem pewien program arytmetyki i propedeutyki geometrji dla klas niższych (wst., I i II) szkoły średniej. W programie tym na samym wstępie uwzględniłem pojęcie zbioru; odwzorowanie zbiorów i stąd wynikające pojęcia „mniej", „tyleż", „więcej", oraz, jako dalszy węzeł rozwoju pojęcia ilości, ciąg liczb naturalnych; notowanie i nazywanie liczb naturalnych; systemy pozycyjne: dwójkowy, piątkowy i powszechnie używany system dziesiętny.

Wykonanie wyszczególnionych powyżej punktów programu zajęło mi 12 godzin w kl. wstępnej. Próba wypadła naogół pomyślnie i dlatego postanowiłem podzielić się z kolegami-fachowcami szczegółami samego przebiegu lekcyj oraz uwagami, dotyczącemi wymienionych punktów programu.

Pierwszą lekcję rozpocząłem od odwzorowania dwóch zbiorów. Pojęcia „mniej", „tyleż", „więcej" nie sprawiały uczniom żadnych trudności. Za tem, że odwzorowanie jest naturalnym biegiem myśli, przemawia fakt, że uczeń kl. wstępnej sam określił pojęcie „mniej" w ten sposób: „Okien w klasie jest mniej, niż palców u ręki, gdyż przy przeliczaniu (tak uczeń nazwał odwzorowanie) pozostają jeszcze palce, gdy okien już brakło". Chcąc urozmaicić lekcje, a jednocześnie zachować ciągłość poszczególnych lekcyj, uciekłem się do następującej fabuły: „Człowiek dziki, Indjanin lub murzyn, z którym poznałeś się w podróży po puszczy amerykańskiej lub afrykańskiej, prosi cię o wskazanie mu sposobu stwierdzenia, czy nie giną mu konie, które całem stadem pasą się we dnie, a na noc są zapędzane do zagrody w osadzie.

Uczniowie sami podali następujące sposoby, kolejno je ulepszając: Zapędzając kolejno konie, należy łamać patyczki i ułamać ich tyle, ile zapędzono koni.

Na drugi dzień przeprowadzić kontrolę i tym sposobem stwierdzić, czy powróci tyleż koni, ile było patyczków, czy powróci ich mniej (konie zginęły) czy więcej (do stada przyłączyły się inne stepowe konie). Inni chłopcy krytykują ten sposób: wszak patyczki mogą zaginąć; przy licznych stadach patyczków będzie dużo i trudno je przechowywać.

Projekt pierwszy zastępuje drugi, a mianowicie: proponuje inny chłopiec by nacinać kreski na drzewie. Ten sposób ma też braki (może nie być drzewa tuż koło zagrody); a więc lepiej nacinać kij. Modyfikuję nieco zagadnienie, a mianowicie: chodzi nie tylko o przeliczenie koni, lecz również owiec, kóz, bawołów i t. d.

Wyłania się nowy projekt, aby ów kij do nacinania był graniasty; jednocześnie proponuje jeden z chłopców, by owe nacięcia robić na specjalnej deseczce, którą można ze sobą nosić, lub na skórze, którą można się opasać.

Naturalnie każdy sposób wywołuje krytykę (np. deseczkę niewygodnie nosić, a znów skóry szkoda); po pewnym namyśle powstaje nowy projekt: zrobić coś w rodzaju skóry z kory drzewnej (np. brzozowej) i nacinać kreski nożem.

Nasuwam chłopcom myśl, aby zamiast nacinać na korze, lepiej na niej notować kreski węglem drzewnym. Sposób ten zostaje w zupełności zaaprobowany. A więc nauczyliśmy naszego domniemanego Indjanina notowania liczb naturalnych; uczmy go dalej; nauczmy go nazywać liczby I, II, III, IIII, i t. d.

Lecz notowanie takie, jak powyżej, nie jest łatwe, zwłaszcza gdy chodzi o liczby większe, np. od dwudziestu—można się łatwo pomylić.

Stawiam wniosek uproszczenia notowania.

Po pewnej dyskusji wyłaniają się następujące wnioski uczniów: 1) każde pięć zwierząt oznaczać jedną kreską, 2) każde dziesięć oznaczać jedną kreską.

Nasuwam chłopcom myśl, że może lepiejby było zacząć od oznaczania każdej pary przedmiotów (czy zwierząt) jedną kreską.

Natychmiast powstaje pytanie, jak zanotować np., że Indjanin ma trzy bawoły. Uczniowie proponują, aby pary oznaczać czerwoną kreską, a pojedyńcze przedmioty—czarną.

Również powstaje projekt, aby tabliczkę z kory, na której notujemy przedzielić na połowy: na jednej połowie notować pojedyńcze przedmioty, a na drugiej—pary.

Ulepszam ten projekt, nasuwając taki sposób notowania, by z lewej strony tabliczki notować pojedyńcze przedmioty, a z prawej — pary.

Rozpoczynamy więc notowanie, jak poniżej:

pary	pojedyńcze	
I	I	oznacza trzy
II	I	„ pięć
III	I	„ siedem
IIII	I	„ dziewięć
		i t. d.

Ulepszamy w następstwie nasz system, wprowadzając trzecią kolumnę, mianowicie „pary z par" czyli „czwórki" i notujemy, jak poniżej:

pary z par	pary	pojedyńcze	
I		I	oznacza pięć
II	I		„ dziesięć
III		I	„ trzynaście
I	I	I	„ siedem
			i t. d.

Wprowadzanie kolumny „par z czwórek" czyli „ósemek" oraz „par z ósemek" nie sprawiło istotnych trudności uczniom. Również zostaje łatwo zrozumiana przez nich rola zera (kółeczka) w wypadku, gdy w danej kolumnie niema kreski.

Jedną lekcję całkowicie przeznaczyłem na ćwiczenia w notowaniu, jak poniżej:

miar polskich, system metryczny). O ile dzieciom znane są odnośne pojęcia z kl. wstępnej, jakże kształcące analogje dadzą się przeprowadzić. System metryczny miar zyska wtedy wśród uczniów odpowiednie mu uznanie.

Uwaga 6. Uskarżamy się często na t. zw. werbalizm, czyli na używanie słów bez należytego zrozumienia ich treści. Podobny werbalizm może istnieć i jest szkodliwy w nauczaniu matematyki, szczególnie początkowej. Dziecko miesza chętnie liczbę z cyfrą; operując liczbami, czyni to automatycznie, jak maszyna rachunkowa, zastępując jedne znaczki innemi.

Należy więc o d e r w a ć pojęcie liczby od e k o n o m j i l i c z b y. Należy już w początkach nauczania wskazać na to, że system notowania (lub nazywania) i cyfra to tylko narzędzia, niezbędne przy operowaniu liczbami.

Uwaga 7. W myśl uwagi 6-ej należałoby również przy nauce działań arytmetycznych uwzględnić zbiory.

Działania te i ich własności należy wysnuwać na zasadzie własności zbiorów: a więc dodawanie jest to „dołączanie" zbiorów; stąd pochodzą prawa dodawania: prawo przemienności, prawo łączności.

Działania inne, jak mnożenie, potęgowanie, należy połączyć z dodawaniem, jako nowe cenne narzędzia, umożliwiające (znacznie ułatwiające) operowanie liczbami.

Warszawa 28 października 1918 r.

ROMUALD WITWIŃSKI.

O PRZEKSZTAŁCENIACH LINJOWYCH W GEOMETRJI.

(Rozdział kursu matematyki klasy 8-mej Gimnazjum Praskiego w roku szkolnym 1918—1919).

WSTĘP.

Liczbą rzeczywistą nazywa się każda liczba całkowita lub ułamkowa, wymierna lub niewymierna, dodatnia lub ujemna. Liczbą urojoną nazywa się wyrażenie postaci $m + n\sqrt{-1}$, gdzie przez m i n rozumiemy liczby rzeczywiste. Liczba m nazywa się częścią rzeczywistą liczby urojonej, zaś n — częścią urojoną.

Nad liczbami urojonemi dokonywa się tych samych działań, co i nad liczbami rzeczywistemi.

Przy dodawaniu i odejmowaniu liczb urojonych działania dokonywują się osobno nad częściami rzeczywistemi i nad spółczynnikami przy $\sqrt{-1}$.

Jeżeli dwie liczby urojone $m+n\sqrt{-1}$ i $m'+n'\sqrt{-1}$ są równe, wówczas są równe ich części rzeczywiste i spółczynniki przy $\sqrt{-1}$.

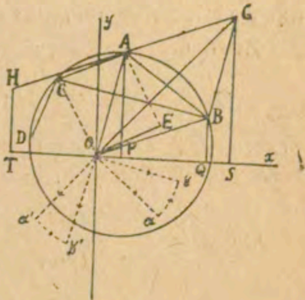
Mnożenie liczb urojonych wypełnia się tak samo, jak i mnożenie dwumianów, z zachowaniem warunku: $(\sqrt{-1})^2 = -1$.

Iloraz od dzielenia liczby urojonej $m + n\sqrt{-1}$ przez liczbę urojoną $m'+n'\sqrt{-1}$ może być przedstawiony w postaci:

$$\frac{mm'+nn'}{m'^2+n'^2} + \frac{nm'-mn'}{m'^2+n'^2}\sqrt{-1}.$$

Dwie liczby urojone nazywają się sprzężonemi, jeżeli ich części rzeczywiste są równe, zaś części urojone różnią się tylko znakami, naprzykład $m+n\sqrt{-1}$ i $m-n\sqrt{-1}$. Suma i iloczyn liczb urojonych sprzężonych są liczbami rzeczywistemi.

1. Gdy dana jest jednostka miary linjowej, wówczas można jak wiadomo, wszystkie liczby rzeczywiste wyrazić zapomocą punktów prostej Ox, na której zupełnie dowolnie ustalamy punkt O. Zapytajmy się, jakie to liczby wyrażają każdy inny punkt na płaszczyźnie? Poprowadźmy w tym celu dwie osi prostopadłe Ox i Oy, przecinające się w punkcie O (rys. 1). Na osi Ox odłóżmy odcinek OP, równy m jednostkom długości, wprawo od punktu O, jeżeli m jest liczbą dodatnią, i wlewo od punktu O, jeżeli m jest liczbą ujemną. Z punktu P wystawmy prostopadłą do osi Ox i odłóżmy na niej odcinek PA, równy n jednostkom długości, nad osią Ox, jeżeli n jest liczbą dododatnią, i pod osią Ox, jeżeli n jest liczbą ujemną. Umówmy się, iż punkt A wyraża liczbę $m+n\sqrt{-1}$. Każdej liczbie urojonej odpowiada jeden punkt na płaszczyźnie i nawzajem. Zazwyczaj, dla uproszczenia, przez punkt A rozumiemy nie tylko punkt A, lecz i samą liczbę $m+n\sqrt{-1}$. W przypadku $m=0$, punkty A są położone na osi Oy, w przypadku $n=0$, punkty A są położone na osi Ox, i wyrażają liczby rzeczywiste. Aby odróżnić iloczyn AB dwóch liczb urojonych A i B od odległości AB między dwoma punktami A i B, odległość AB oznacza się kreską: $\overline{AB}$.



Rys. 1.

Punkt O nazywa się p u n k t e m p o c z ą t k o w y m, prosta Ox — o s i ą r z e c z y w i s t ą i prosta Oy — o s i ą u r o j o n ą. Odcinek OA nazywa się w e k t o r e m punktu A.

Dwie liczby urojone sprzężone wyrażają się na płaszczyźnie zapomocą dwóch punktów, położonych na prostej prostopadłej do osi rzeczywistej Ox, w jednakowych od niej odległościach.

2. Każda liczba $A = m + n\sqrt{-1}$ może być przedstawiona w postaci $r(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})$. Uczyńmy w tym celu $m = r\cos\varphi$, $n = r\sin\varphi$.

Podnosząc obie równości do kwadratu i dodając je, otrzymamy

$$m^2+n^2 = r^2 \quad \text{i} \quad r = \sqrt{m^2+n^2}.$$

Pierwiastek kwadratowy bierzemy tu ze znakiem $+$. Znajdujemy dalej

$$\cos\varphi = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

Znaki przy m i n wskazują, w jakiej ćwierci kończy się łuk, mierzący kąt φ.

Liczba r nazywa się m o d u ł e m liczby urojonej $m+n\sqrt{-1}$, kąt zaś φ—a r g u m e n t e m tej liczby.

Zwróćmy się do rys. 1. Ponieważ

$$\overline{OA} = \sqrt{\overline{OP}^2+\overline{PA}^2} = \sqrt{m^2+n^2} \quad \text{i} \quad r = \sqrt{m^2+n^2},$$

przeto $\overline{OA} = r$, czyli odcinek $\overline{OA}$, albo wektor punktu A wyraża moduł liczby urojonej A. Ponieważ

$$\cos\widehat{AOx} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} = \frac{m}{r}, \quad \sin\widehat{AOx} = \frac{\overline{PA}}{\overline{OA}} = \frac{n}{r}$$

i

$$\cos\varphi = \frac{m}{r}, \ \sin\varphi = \frac{n}{r}, \text{ przeto } \widehat{AOx} = \varphi,$$

czyli kąt między wektorem punktu A i osią rzeczywistą wyraża argument liczby urojonej A *).

3. Pokażemy, w jaki sposób określa się moduł i argument sumy, różnicy, iloczynu i stosunku dwóch liczb urojonych. Uczyńmy

$$A = m + n\sqrt{-1} = r(\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1}),$$

$$B = m'+n'\sqrt{-1} = r'(\cos\varphi'+\sin\varphi'\sqrt{-1})$$

i wyraźmy obie te liczby zapomocą punktów A i B.

Weźmy sumę liczb urojonych A i B:

$$A+B = (m+m')+(n+n')\sqrt{-1}.$$

---

*) Argument odmierzamy od osi rzeczywistej w kierunku przeciwnym poruszaniu się wskazówki zegara, od 0 do 2π.

Na wektorach OA i OB punktów A i B budujemy równoległobok $OAGB$ i prowadzimy przekątną OG. Punkt G wyrażać będzie liczbę $A + B$. Dla dowodu poprowadźmy z punktów A, B, G prostopadłe AP, BQ, GS do osi rzeczywistej Ox. Ponieważ odcinki OB i AG są równe, równoległe i skierowane w jedną stronę, przeto odcinki OQ i PS także są równe i jednakowo skierowane. Wnosimy stąd, iż odcinek OS równa się sumie algebraicznej odcinków OP i OQ, czyli

$$\overline{OS} = \overline{OP} + \overline{OQ} = m + m'.$$

Zupełnie tak samo, prowadząc z punktów A, B, G prostopadłe do osi urojonej, przekonamy się, iż $\overline{SG} = n + n'$.

Tak więc, suma dwóch liczb urojonych wyraża się na płaszczyźnie jako wierzchołek równoległoboku, zbudowanego na wektorach punktów, wyrażających te liczby.

Aby wyrazić na płaszczyźnie różnicę dwóch liczb urojonych A i B, należy zbudować równoległobok w ten sposób, aby wektor OA stanowił jego przekątną, wektor zaś OB stanowił jego bok. W tym celu z punktu O prowadzimy prostą, równoległą do BA, i z punktu A — prostą, równoległą do OB. Proste te przecinają się w punkcie H. Ponieważ punkt A wyraża sumę liczb urojonych B i H, przeto punkt H stanowi różnicę liczb A i B.

Jeżeli różnica liczb urojonych A i B jest liczbą rzeczywistą, wówczas punkty A i B znajdują się na prostej, równoległej do osi rzeczywistej, punkt zaś H znajduje się na osi rzeczywistej.

Wektor OH punktu H równa się według długości i kierunku odcinkowi BA. Ponieważ

$$H = A - B = (m - m') + (n - n')\sqrt{-1},$$

przeto $$\overline{OH} = \overline{BA} = \sqrt{(m - m')^2 + (n - n')^2}.$$

Na zasadzie tego wzoru można określić odległość między punktami A i B, wyrażającymi liczby urojone A i B.

Weźmy iloczyn liczb urojonych A i B:

$$AB = rr' \,[(\cos\varphi \cos\varphi' - \sin\varphi \sin\varphi') + \\ + (\cos\varphi \sin\varphi' + \sin\varphi \cos\varphi')\sqrt{-1}]$$

$$AB = rr' \,[\cos(\varphi + \varphi') + \sin(\varphi + \varphi')\sqrt{-1}].$$

Tym sposobem, moduł iloczynu liczb urojonych równa się iloczynowi ich modułów, oraz argument iloczynu równa się sumie argumentów czynników.

Nie trudno twierdzenie to uogólnić na przypadek iloczynu kilku liczb urojonych.

Ponieważ dzielenie jest działaniem odwrotnem do mnożenia, przeto moduł stosunku liczb urojonych równa się stosunkowi ich modułów, zaś argument stosunku równa się różnicy argumentów dzielnej i dzielnika. Wnosimy stąd, że stosunek $A : B$ można napisać w postaci

$$\frac{A}{B} = \rho(\cos\psi + \sin\psi\sqrt{-1}),$$

gdzie ρ oznacza stosunek $\frac{r}{r'}$, albo $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$ i $\psi = \varphi - \varphi'$, albo $\widehat{BOA}$, czyli kąt, o który należy obrócić OB do przystania z OA. Przytem obrót dodatni uważa się za przeciwny poruszaniu się wskazówki zegara.

4. Weźmy stosunek $\frac{A - C}{A - B}$, gdzie A, B, C oznaczają liczby urojone, wyrażone zapomocą punktów A, B, C.

Różnica $A - C$, zgodnie z powyższym, wyraża się przez punkt E, którego wektor OE równa się według długości i kierunku odcinkowi CA, skierowanemu od C do A. Analogicznie, różnica $A - B$ wyraża się jako punkt H, którego wektor OH równa się według długości i kierunku odcinkowi BA, skierowanemu od B do A; zatem, zgodnie z naszemi oznaczeniami, $\frac{A - C}{A - B} = \frac{E}{H}$. Moduł tego stosunku równa się $\frac{\overline{OE}}{\overline{OH}}$, albo $\frac{\overline{CA}}{\overline{BA}}$, zaś argument równa się kątowi HOE, o który należy obrócić kierunek BA do przystania z kierunkiem CA. Czyniąc $\frac{\overline{CA}}{\overline{BA}} = \rho$ i $\widehat{HOE} = \psi$, znajdujemy

$$\frac{A - C}{A - B} = \rho(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}).$$

Jeżeli trzy punkty A, B, C są położone w jednej linji prostej, wówczas kąt ψ zamienia się na zero lub na π, i

$$\frac{A - C}{A - B} = \pm\frac{\overline{CA}}{\overline{BA}}, \text{ albo } \frac{A - C}{\overline{CA}} = \pm\frac{A - B}{\overline{BA}},$$

zależnie od położenia punktu A. Znak — odnosi się do przypadku, gdy punkt A jest położony między punktami B i C.

5. W celu dalszego badania własności liczb urojonych opierać się będziemy na twierdzeniu następującem. *Jeżeli na cięciwie CA zbudujemy jakikolwiek odcinek kołowy i na jego łuku obierzemy punkt B, wówczas stosunek $\overline{BC} : \overline{BA}$ wzrasta, jeżeli punkt B oddala się od punktu C, t. j. gdy łuk BC wzrasta.* Dowód jest bezpośredni: pomijamy go.

6. Utwórzmy stosunek złożony

$$\frac{B-C}{B-A}:\frac{D-C}{D-A},$$

gdzie A, B, C, D oznaczają liczby urojone, wyrażone przez punkty A, B, C, D. Mamy

$$\frac{B-C}{B-A}=r(\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1}),$$

gdzie $r=\dfrac{\overline{CB}}{\overline{BA}}$ i φ jest kątem między kierunkami AB i CB, o który trzeba obrócić AB do przystania z CB. Zupełnie taksamo

$$\frac{D-C}{D-A}=r'(\cos\varphi'+\sin\varphi'\sqrt{-1}),$$

gdzie $$r'=\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} \text{ i } \varphi'=\widehat{ADC}.$$

Wobec tego

$$\frac{B-C}{B-A}:\frac{D-C}{D-A}=\frac{r}{r'}[\cos(\varphi-\varphi')+\sin(\varphi-\varphi')\sqrt{-1}].$$

Czyniąc

$$\rho=\frac{r}{r'}=\frac{\overline{CB}}{\overline{AB}}:\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}},\quad \psi=\varphi-\varphi'=\widehat{ABC}-\widehat{ADC},$$

znajdujemy

$$\frac{B-C}{B-A}:\frac{D-C}{D-A}=\rho(\cos\psi+\sin\psi\sqrt{-1}).$$

Wyprowadzimy z tego wzoru kilka ważnych wniosków.

Załóżmy, iż punkty A, B, C, D znajdują się na jednym okręgu.

Jeżeli punkty B i D są położone z jednej strony cięciwy CA, wówczas kąty ABC i ADC są równe. Wynika stąd, iż kąt $\psi=0$ i

$$\frac{B-C}{B-A}:\frac{D-C}{D-A}=\rho.$$

Jeżeli punkty B i D są położone z różnych stron cięciwy CA, wówczas różnica między kątami ABC i ADC stanowi dwa kąty proste, zatem

$$\frac{B-C}{B-A}:\frac{D-C}{D-A}=-\rho.$$

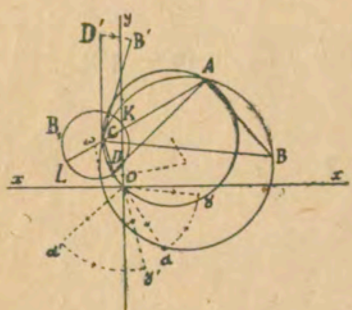
Dla wyjaśnienia należy z punktu początkowego O poprowadzić proste $O\alpha$, $O\gamma$, $O\alpha'$, $O\gamma'$, skierowane taksamo, jak i proste AB, CB, AD, CD.

W ten sposób, dla punktów A, B, C, D, położonych na jednym okręgu, stosunek

$$\frac{B-C}{B-A} : \frac{D-C}{D-A} = m,$$

gdzie m oznacza pewną liczbę rzeczywistą. Jeżeli m jest liczbą ujemną, wówczas punkty B i D znajdują się z różnych stron cięciwy CA. Jeżeli m jest liczbą dodatnią, wówczas punkty B i D są położone z jednej strony cięciwy CA; jeżeli przytem $m > 1$, wówczas łuk BC jest większy od łuku DC, ponieważ $m = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} : \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}$, i, zgodnie z powyższym, stosunek $\overline{BC} : \overline{BA}$ jest większy od stosunku $\overline{DC} : \overline{DA}$, gdy łuk BC jest większy od łuku DC.

7. Załóżmy, iż punkty A, B, C, D są położone na płaszczyźnie zupełnie dowolnie (rys. 2). Aby wykryć znaczenie kąta ψ, opiszmy na trójkątach CAB i CAD koła i do tych kół poprowadźmy styczne CB' i CD' w punkcie C. Kąt $B'CA$, zawarty między styczną CB' i cięciwą CA, równa się kątowi wpisanemu CBA. Zupełnie taksamo kąt $D'CA$ równa się kątowi CDA. Wynika stąd, iż różnica między kątami CBA i CDA równa się kątowi $B'CD'$ między stycznemi CB' i CD'. Tym sposobem, kąt ψ jest to kąt, pod którym przecinają się koła, posiadające cięciwę spólną CA i przechodzące jedno przez punkt B, drugie — przez punkt D. Zauważmy, iż kąt ψ jest to właśnie ten kąt, o który trzeba obrócić styczną CD' do przystania jej ze styczną CB'.



Rys. 2.

8. Podzielmy jakikolwiek odcinek CA w punktach K i L wewnętrznie i zewnętrznie w jednym i tym samym stosunku, t. j. tak, aby było $\overline{CK} : \overline{AK} = \overline{CL} : \overline{AL}$, i następnie na odcinku KL, jako na średnicy, opiszmy koło. Wiadomo, iż koło to stanowić będzie miejsce geometryczne punktu, którego stosunek odległości od punktów C i A zachowuje wartość stałą. Cztery punkty C i A, K i L stanowią tak zwaną czwórkę harmoniczną. Załóżmy, iż punkt ω jest środkiem odcinka KL. Wiadomo, iż $\varpi C \,.\, \varpi A = \varpi K^2$. Poprowadźmy przez punkty C i A jakiekolwiek koło, i z punktu ω—styczną do niego. Kwadrat tej stycznej równa się $\varpi C \,.\, \varpi A$, albo ϖK^2. Wnosimy stąd, iż punkt styczności jest położony na okręgu, opisanym na średnicy KL. Dochodzimy w ten sposób do twierdzenia następującego: *miejscem geometrycznem punktu, którego odległości od dwóch danych punktów zachowują stosunek stały, jest okrąg, przecinający pod kątem prostym wszystkie okręgi, przechodzące przez dwa dane punkty.*

9. Załóżmy, iż punkt D porusza się na okręgu, przechodzącym przez punkt B_1 i przecinającym pod kątem prostym wszystkie koła, przechodzące przez punkty C i A. Wówczas

$$\frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}} : \frac{\overline{DC}}{\overline{DA}} = 1 \text{ i } \frac{B_1 - C}{B_1 - A} : \frac{D - C}{D - A} = \cos\psi + \sin\psi\sqrt{-1},$$

albo
$$\frac{D - A}{D - C} = \frac{B_1 - A}{B_1 - C}(\cos\psi + \sin\psi\sqrt{-1}).$$

Odwrotnie, jeżeli punkt zmienny D związany jest z punktami stałemi A, B_1, C zapomocą ostatniej zależności, wówczas przy zmianie kąta ψ punkt D porusza się na okręgu, przechodzącym przez punkt B_1 i przecinającym pod kątem prostym wszystkie koła, przechodzące przez punkty C i A.

Na tem zakończamy wykład własności liczb urojonych i przechodzimy do ich zastosowań w geometrji.

---

10. Załóżmy, iż dwie zmienne liczby urojone Z i Z' są związane zależnością

$$Z' = \frac{aZ+b}{cZ+d}, \tag{1}$$

gdzie a, b, c, d oznaczają liczby stałe, rzeczywiste lub urojone. Podstawiając Z_1, Z_2, Z_3, ... zamiast Z, otrzymamy dla Z' odpowiednie wartości Z'_1, Z'_2, Z'_3, ... W ten sposób zbiór punktów Z_1, Z_2, Z_3, ... przekształca się na inny zbiór punktów Z'_1, Z'_2, Z'_3, ..., innemi słowy, *każdą figurę można przekształcić na inną w ten sposób, że każdemu punktowi jednej figury odpowiadać będzie jeden tylko punkt figury drugiej, i nawzajem* *). Przekształcenie, wyrażone przez zależność (1), nazywa się *przekształceniem linjowem*. Wyprowadzimy różne własności tego przekształcenia.

Z równości

$$Z' = \frac{aZ+b}{cZ+d},\quad Z'_1 = \frac{aZ_1+b}{cZ_1+d},\quad Z'_2 = \frac{aZ_2+b}{cZ_2+d},\quad Z'_3 = \frac{aZ_3+b}{cZ_3+d}$$

---

*) Własność tę wyrażamy niekiedy krótko, mówiąc, iż przekształcenie jest jednoznacznie odwracalnem.

znajdujemy

$$Z'_3 - Z'_1 = \frac{(ad-bc)(Z_3-Z_1)}{(cZ_3+d)(cZ_1+d)}, \quad Z'_3 - Z' = \frac{(ad-bc)(Z_3-Z)}{(cZ_3+d)(cZ+d)},$$

$$Z'_2 - Z'_1 = \frac{(ad-bc)(Z_2-Z_1)}{(cZ_2+d)(cZ_1+d)}, \quad Z'_2 - Z' = \frac{(ad-bc)(Z_2-Z)}{(cZ_2+d)(cZ+d)}.$$

Stąd

$$\frac{Z'_3 - Z'_1}{Z'_3 - Z'} = \frac{Z_3 - Z_1}{Z_3 - Z} \cdot \frac{cZ+d}{cZ_1+d},$$

$$\frac{Z'_2 - Z'_1}{Z'_2 - Z'} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 - Z} \cdot \frac{cZ+d}{cZ_1+d}.$$

Tym sposobem dochodzimy do tożsamości:

$$\frac{Z'_3 - Z'_1}{Z'_3 - Z'} : \frac{Z'_2 - Z'_1}{Z'_2 - Z'} = \frac{Z_3 - Z_1}{Z_3 - Z} : \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 - Z}.$$

Załóżmy, iż punkty Z, Z_1, Z_2, Z_3 są położone na jednym okręgu. Wówczas, na mocy twierdzenia (6), część druga wyprowadzonej tożsamości stanowić winna liczbę rzeczywistą. Lecz wobec tego i część prawa tej tożsamości jest liczbą rzeczywistą. Wnosimy stąd, na mocy tegoż twierdzenia (6), iż punkty Z', Z'_1, Z'_2 Z'_3 są położone na jednym okręgu. Tak więc, przekształcenie (1) zamienia koła na koła *).

11. Dalej, wychodząc z tej samej tożsamości, na mocy twierdzenia (7), możemy otrzymać jeszcze jeden wynik. Kąt między kołami, opisanemi na trójkątach ZZ_1Z_2 i ZZ_1Z_3, równa się kątowi między kołami, opisanemi na trójkątach $Z'Z'_1Z'_2$ i $Z'Z'_1Z'_3$, ponieważ kąty te stanowią argumenty liczb urojonych tożsamościowo sobie równych. Lecz przekształcenie (1) zamienia pierwszą parę kół na drugą parę. Wnosimy stąd, iż kąt między kołami nie ulega zmianie w przekształceniu (1).

Przekształcenie (1) zamienia prostą albo na okrąg, albo znowu na linję prostą.

12. Będziemy teraz zakładali, iż spółczynniki a, b, c, d są liczbami rzeczywistemi. Wówczas przekształcenie (1) posiada wiele godnych uwagi własności. Czyniąc

$$Z = x + y\sqrt{-1}, \qquad Z' = x' + y'\sqrt{-1},$$

znajdujemy $$x' + y'\sqrt{-1} = \frac{ax + ay\sqrt{-1} + b}{cx + cy\sqrt{-1} + d},$$

---

*) Ponieważ koło w zupełności wyznacza się przez trzy punkty, możemy przeto powiedzieć, iż koło, przechodzące przez punkty Z, Z_1, Z_2, przekształca się na koło, przechodzące przez punkty Z', Z'_1, Z'_2.

skąd

$$(cx+d)x' - cyy' + [(cx+d)y' + cyx']\sqrt{-1} = ax+b+ay\sqrt{-1}$$

i $\quad (cx+d)x' - cyy' = ax+b, \qquad (cx+d)y' + cyx' = ay.$

Z równości tych znajdujemy

$$x' = \frac{ac(x^2+y^2)+(ad+bc)x+bd}{(cx+d)^2+c^2y^2}, \quad y' = \frac{(ad-bc)y}{(cx+d)^2+c^2y^2}.$$

Z wzoru drugiego widzimy, iż y' i y mają znaki jednakowe, jeżeli $ad - bc > 0$, i znaki różne, jeżeli $ad - bc < 0$. Innemi słowy, jeżeli $ad - bc$ jest liczbą dodatnią, wówczas punkty Z' i Z są położone z jednej strony osi rzeczywistej; w przeciwnym razie są one położone z różnych stron tej osi.

Podamy konstrukcję, która pozwoli wyznaczyć położenie punktu Z' według danego położenia punktu Z. W tym celu równość (1) przedstawmy w postaci

$$Z' = \frac{aZ \pm k^2}{Z+d}; \qquad (1 \text{ bis})$$

wówczas

$$x' = \frac{a(x^2+y^2)+(ad \pm k^2)x \pm k^2d}{(x+d)^2+y^2}, \quad y' = \frac{(ad \mp k^2)y}{(x+d)^2+y^2}.$$

Ponieważ

$$x' - a = \frac{-(ad \mp k^2)(x+d)}{(x+d)^2+y^2},$$

przeto

$$\frac{a-x'}{d+x} = \frac{y'}{y} \quad \text{i} \quad (x'-a)^2+y'^2 = \frac{(ad \mp k^2)^2}{(x+d)^2+y^2}.$$

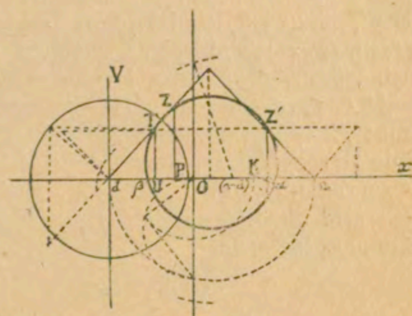
Zbudujmy punkty, wyrażające liczby Z, a, $-d$ (rys. 3) i oznaczmy je temi samemi literami. Wówczas odległości $\overline{Zd}$ i $\overline{Z'a}$ wyznaczą się z wzorów

$$\overline{Zd} = \sqrt{(x+d)^2+y^2},$$

$$\overline{Z'a} = \sqrt{(x'-a)^2+y^2}.$$

Mamy więc

$$\overline{Z'a}\,.\,\overline{Zd} = \pm\,(ad \mp k^2).$$



Rys. 3.

Poprowadźmy prostą dZ i opiszmy z punktu d koło promieniem, równym $\sqrt{\mp(ad \mp k^2)}$. Na prostej dZ obierzmy punkt T w ten sposób, aby było $dT \,.\, dZ = \mp (ad \mp k^2)$. Z punktów T i Z poprowadźmy prostopadłe TU i ZP do prostej Ox.

Mamy wówczas

$$\frac{\overline{TU}}{\overline{ZP}}=\frac{\overline{dU}}{\overline{dP}}=\frac{\overline{dT}}{\overline{dZ}}=\frac{\overline{dT}\,.\,\overline{dZ}}{\overline{dZ}^2}=\frac{(ad\mp k^2)}{(x+d)^2+y^2}.$$

Tak więc

$$\frac{\overline{TU}}{\overline{ZP}}=\frac{y'}{y} \quad \text{i} \quad \frac{\overline{dU}}{\overline{dP}}=\frac{a-x'}{d+x}.$$

Ponieważ $\overline{ZP}=y$ i $\overline{dP}=d+x$, przeto

$$y'=\overline{TU} \quad \text{i} \quad a-x'=\overline{dU}.$$

Poprowadźmy z punktu T prostą, równoległą do Ox i z punktu a—prostą, nachyloną do Ox pod kątem, równym kątowi Zda, lecz nie równoległą do Zd. Proste te przetną się w punkcie Z'.

Zauważmy, iż przy $ad\mp k^2<0$ punkt T należy obrać z drugiej strony punktu d, czyli—nie między punktami Z i d.

Punkt T jest punktem odwrotnym do punktu Z względem koła, opisanego z d promieniem, równym $\sqrt{\pm(ad\mp k)^2}$. Figura, utworzona z punktów T, jest odwrotnością figury, utworzonej z punktów Z. Figura, utworzona z punktów Z', równa się figurze, utworzonej z punktów T. Aby figurę, utworzoną z punktów T, sprowadzić do położenia figury, utworzonej z punktów Z', należy przedewszystkiem zbudować figurę, symetryczną z figurą, utworzoną z punktów T, względem prostej dV, prostopadłej do Ox, i następnie figurę tę przesunąć na odległość da, równolegle do osi Ox. Tym sposobem, dochodzimy do wniosku, iż *przekształcenie* (1) *stanowi ogół trzech przekształceń, znanych w geometrji elementarnej*, mianowicie—przekształcenia zapomocą promieni wodzących odwrotnych, czyli *inwersji*, przekształcenia przez *symetrję* i przekształcenia przez *przesunięcie równoległe*. Pierwsze z tych przekształceń zmienia postać figur, drugie zaś i trzecie—tylko położenie *).

13. Przekształcenie (1) sprowadza punkt Z do położenia Z', punkt Z'—do położenia Z'' i t. d. Powtarzając to przekształcenie n razy, otrzymamy szereg liczb urojonych i odpowiadający szereg punktów $Z, Z', Z'', Z''', \ldots, Z^{(n-1)}, Z^{(n)}$. W szeregu tym każde dwie liczby sąsiednie $Z^{(k+1)}$ i $Z^{(k)}$ związane są zapomocą zależności

$$Z^{(k+1)}=\frac{aZ^{(k)}+b}{cZ^{(k)}+d}.$$

*) Przy sposobności chcę polecić uwadze nauczyciela piękny artykuł prof. J. Rudnickiego p. t. „Przekształcenie linjowe w geometrji" (Wektor, t. IV, nº 1), zawierający czysto-geometryczne opracowanie przekształceń linjowych. Artykuł ten uważam za perłę w dziedzinie spółczesnych monografji elementarno-matematycznych.

Utwórzmy stosunek $\dfrac{Z''-Z}{Z''-Z'''} : \dfrac{Z'-Z}{Z'-Z'''}$.

$$Z''-Z=\frac{aZ'+b}{cZ'+d}-Z=\frac{aZ'+b-cZZ'-dZ}{cZ'+d}.$$

Lecz z równości (1) znajdujemy

$$cZZ'=aZ+b-dZ',$$

zatem
$$Z''-Z=\frac{(a+d)(Z'-Z)}{cZ'+d}$$

albo
$$\frac{Z''-Z}{Z'-Z}=\frac{a+d}{cZ'+d}.$$

Ponieważ

$$Z'-Z'''=\frac{(ad-bc)(Z-Z'')}{(cZ+d)(cZ''+d)},\quad Z''-Z'''=\frac{(ad-bc)(Z'-Z'')}{(cZ'+d)(cZ''+d)},$$

$$Z'-Z''=\frac{(ad-bc)(Z-Z')}{(cZ+d)(cZ'+d)},$$

przeto

$$Z''-Z'''=\frac{(ad-bc)^2(Z-Z')}{(cZ+d)(cZ'+d)^2(cZ''+d)};$$

stąd

$$\frac{Z'-Z'''}{Z''-Z'''}=\frac{Z-Z''}{Z-Z'}\cdot\frac{(cZ'+d)^2}{ad-bc}=\frac{(a+d)(cZ'+d)}{ad-bc},$$

i ostatecznie

$$\frac{Z-Z''}{Z-Z'}\cdot\frac{Z'-Z'''}{Z''-Z'''}=\frac{Z''-Z}{Z''-Z'''}:\frac{Z'-Z}{Z'-Z'''}=\frac{(a+d)^2}{ad-bc}.$$

Z tożsamości tej, na mocy twierdzenia (6), wnosimy, iż cztery kolejne punkty Z, Z', Z'', Z''' są położone na jednym okręgu. Jest jasnem, iż tę samą własność posiadają wszelkie cztery kolejne punkty szeregu Z, Z', Z'', Z''', Z'''', ... Tak więc, wszystkie punkty tego szeregu są położone na jednym okręgu. Koło, na okręgu którego znajdują się kolejne punkty, nazywać będziemy kołem obrotowem, ponieważ przekształcenie (1), jak o tem przekonamy się dalej, jest równoznaczne z obrotem tego koła dokoła środka. Położenie koła obrotowego zależy zarówno od liczb a, b, c, d, jak i od punktu początkowego Z.

Rozpatrzmy szczegółowo, w jaki sposób wyznacza się położenie tego koła.

Punkt, położenie którego nie zmienia się przez przekształcenie (1), nazywa się punktem podwójnym. Punktów podwójnych jest dwa. Liczby urojone, wyrażone przez te punkty, są pierwiastkami równania

$$Z = \frac{aZ+b}{cZ+d},$$

ponieważ, zgodnie z określeniem punktu podwójnego,

$$Z' = Z.$$

Oznaczając pierwiastki tego równania przez α i β i rozwiązując go, znajdujemy

$$cZ^2 - (a - d)Z = b,$$

$$\alpha = \frac{a - d + \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}{2c}, \quad \beta = \frac{a - d - \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2c}.$$

Jeżeli $(a - d)^2 + 4bc > 0$, wówczas pierwiastki α i β są liczbami rzeczywistemi, i punkty podwójne znajdować się będą na osi rzeczywistej. W przypadku tym przekształcenie (1) nazywa się hiperbolicznem.

Jeżeli $(a - d)^2 + 4bc = 0$, wówczas $\alpha = \beta = \dfrac{a - d}{2c}$, i punkt podwójny będzie jeden, przyczem znajdować się będzie na osi rzeczywistej. W tym przypadku przekształcenie (1) nazywa się parabolicznem.

Jeżeli $(a - d)^2 + 4bc < 0$, wówczas α i β są liczbami urojonemi sprzężonemi, i punkty podwójne α i β znajdować się będą na prostej, prostopadłej do osi rzeczywistej, w odległościach równych od tej osi. Przekształcenie (1), w tym przypadku, nazywa się eliptycznem.

Przedstawmy teraz równość (1) w postaci innej. Ponieważ

$$c\alpha^2 - (a - d)\alpha - b = 0, \quad c\beta^2 - (a - d)\beta - b = 0,$$

przeto

$$\alpha = \frac{b - \alpha d}{\alpha c - a}, \quad \beta = \frac{b - \beta d}{\beta c - a}.$$

Utwórzmy stosunek $(Z' - \alpha) : (Z' - \beta)$.

$$Z' - \alpha = \frac{aZ + b - \alpha cZ - \alpha d}{cZ + d}, \quad Z' - \beta = \frac{aZ + b - \beta cZ - \beta d}{cZ + d};$$

$$\frac{Z' - \alpha}{Z' - \beta} = \frac{(a - \alpha c)Z + b - \alpha d}{(a - \beta c)Z + b - \beta d}.$$

Czyniąc
$$k = \frac{a - \alpha c}{a - \beta c},$$

znajdujemy
$$\frac{Z' - \alpha}{Z' - \beta} = k\frac{Z - \alpha}{Z - \beta}. \qquad \text{(1 ter)}$$

Liczbę k można przedstawić w postaci

$$k = \frac{2a - 2\alpha c}{2a - 2\beta c} = \frac{a+d - \sqrt{(a-d)^2+4bc}}{a+d+\sqrt{(a-d)^2+4bc}}.$$

Mnożąc licznik i mianownik przez $[a+d - \sqrt{(a-d)^2+bc}]$, po uproszczeniu, znajdujemy

$$k = \frac{(a^2+d^2+2bc) - (a+d)\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2(ad-bc)}.$$

14. Przekształcenie hiperboliczne sprowadza się do postaci

$$\frac{Z'-\alpha}{Z'-\beta} = k\frac{Z-\alpha}{Z-\beta}, \tag{2}$$

gdzie α i β są punktami podwójnemi, położonemi na osi rzeczywistej, i k — liczba rzeczywista. Na mocy twierdzenia (6) wnosimy, iż w przekształceniu hiperbolicznem każde koło obrotowe przechodzi przez punkty podwójne α i β. Tym sposobem, położenie koła obrotowego wyznacza się w zupełności przez punkty podwójne α i β i punkt początkowy Z. Jeżeli k jest liczbą dodatnią, większą od jedności, wówczas przekształcenie (2) oddala punkt Z od α, czyli łuk $Z'\alpha$ jest większy od łuku $Z\alpha$.

Zauważmy, iż znak liczby k jest taki sam, jak i liczby $(ad-bc)$.

15. W przekształceniu parabolicznem

$$(a-d)^2+4bc = 0, \quad \alpha = \beta = \frac{a-d}{2c},$$

skąd
$$d = a - 2c\alpha \quad \text{i} \quad b = -c\alpha^2,$$

zatem
$$Z' - \alpha = \frac{aZ - c\alpha^2}{cZ+a-2c\alpha} - \alpha = \frac{(a-\alpha c)(Z-\alpha)}{c(Z-\alpha)+a-\alpha c},$$

skąd
$$\frac{1}{Z'-\alpha} = \frac{1}{Z-\alpha} + \frac{c}{a-\alpha c} \quad \text{albo} \quad \frac{1}{Z'-\alpha} = \frac{1}{Z-\alpha}+h, \tag{3}$$

gdzie h oznacza liczbę rzeczywistą.

Tę samą równość można przedstawić w postaci

$$\frac{Z-Z'}{(Z-\alpha)(Z'-\alpha)} = h.$$

Przekształcając punkt Z' na punkt Z'', otrzymamy

$$\frac{Z'-Z''}{(Z'-\alpha)(Z''-\alpha)} = h,$$

skąd znajdujemy
$$\frac{Z''-Z'}{Z''-\alpha} : \frac{Z-Z'}{Z-\alpha} = -1.$$

Wnosimy stąd, w myśl twierdzenia (6), iż w przekształceniu parabolicznem każde koło obrotowe przechodzi przez punkt podwójny.

Każde koło obrotowe dotyka się osi rzeczywistej w punkcie podwójnym, ponieważ przekształcenie paraboliczne można uważać jako przypadek graniczny przekształcenia hiperbolicznego, gdy dwa punkty podwójne, położone na osi rzeczywistej, stają się jednym punktem. Tym sposobem, położenie koła obrotowego wyznacza się w zupełności przez punkt podwójny α, styczną Ox w tym punkcie i punkt początkowy Z.

Załóżmy, iż liczba h jest liczbą dodatnią. Wówczas punkt, wyrażający liczbę urojoną $\frac{1}{Z' - \alpha}$ powinien być położony wprawo od punktu, wyrażającego liczbę $\frac{1}{Z - \alpha}$; przytem oba punkty powinny znajdować się na prostej równoległej do osi rzeczywistej. W celu większej jasności, przypuśćmy, iż koło obrotowe jest położone nad osią rzeczywistą. Wówczas punkty, wyrażające liczby $Z' - \alpha$ i $Z - \alpha$ również będą położone nad osią rzeczywistą, punkty zaś, wyrażające liczby $\frac{1}{Z' - \alpha}$ i $\frac{1}{Z - \alpha}$, będą położone pod osią rzeczywistą. Wobec tego argument liczby urojonej $\frac{1}{Z' - \alpha}$ będzie większym od argumentu liczby urojonej $\frac{1}{Z - \alpha}$, ponieważ argumenty liczą się od 0^0 do 360^0 w kierunku przeciwnym poruszaniu się wskazówki zegara. Wnosimy stąd, iż argument liczby $Z' - \alpha$ jest mniejszy od argumentu liczby $Z - \alpha$. Tym sposobem, przy h dodatniem, przekształcenie (3) przesuwa punkt Z po okręgu koła obrotowego w kierunku ruchu wskazówki zegara. To samo mieć będzie miejsce i w przypadku, kiedy koło obrotowe położonem będzie pod osią rzeczywistą.

Zauważmy, iż liczba $(ad - bc)$ jest dodatnia, ponieważ równa się ona liczbie $(a - c\alpha)^2$.

16. Przekształcenie eliptyczne sprowadza się do postaci

$$\frac{Z' - \alpha}{Z' - \beta} = k\,\frac{Z - \alpha}{Z - \beta},$$

gdzie k oznacza liczbę urojoną.

Ponieważ

$$k = \frac{(a^2 + d^2 + 2bc) - (a + d)\sqrt{-(a - d)^2 - 4bc}\,\sqrt{-1}}{2(ad - bc)},$$

przeto moduł jej równa się

$$\frac{(a^2+d^2+2bc)^2+(a+d)^2\,[-(a-d)^2-4bc]}{4(ad-bc)^2}=$$

$$=\frac{4a^2d^2+4b^2c^2-8adbc}{4(ad-bc)}=1.$$

Oznaczając argument liczby urojonej k przez φ, sprowadzimy przekształcenie eliptyczne do postaci

$$\frac{Z'-\alpha}{Z'-\beta}=\frac{Z-\alpha}{Z-\beta}\,(\cos\varphi+\sqrt{-1}\,\sin\varphi), \tag{4}$$

gdzie α i β są punktami podwójnemi, wyrażającemi liczby urojone sprzężone. Na mocy twierdzenia (9) wnosimy, iż każde koło obrotowe przecina pod kątem prostym wszystkie koła, przechodzące przez punkty podwójne α i β. Tak więc, położenie koła obrotowego wyznacza się w zupełności przez punkt początkowy Z i dwa punkty A i B, dzielące odcinek $\alpha\beta$ w ten sposób, aby było: $\overline{\alpha A}:\overline{\beta A}=\overline{\alpha B}:\overline{\beta B}=\overline{\alpha Z}:\overline{\beta Z}$. Proste ZA i ZB dzielą na połowy wewnętrzny i zewnętrzny kąty trójkąta $Z\alpha\beta$ przy wierzchołku Z.

Udowodniliśmy w ten sposób w zupełności, iż każdy punkt na kole obrotowem przekształca się zawsze na punkt, położony na tem samem kole obrotowem, czyli — przekształcenie (1) jest równoważne obrotowi tego koła dokoła środka.

Rozpatrzmy własności szczególne przekształcenia eliptycznego.

17. Opiszmy koła na trójkątach $Z\alpha\beta$ i $Z'\alpha\beta$. Z równości (4), na mocy twierdzenia (7), wnosimy, iż koła te są nachylone do siebie pod kątem φ. Lecz koło $Z'\alpha\beta$ otrzymuje się przez przekształcenie koła $Z\alpha\beta$; zatem przekształcenie eliptyczne zamienia koło, przechodzące przez punkty podwójne, na inne koło, przechodzące przez te same punkty podwójne, i nachylone do pierwszego pod kątem φ.

18. Załóżmy, iż $\varphi=\frac{p\pi}{q}$, gdzie p i q oznaczają pewne liczby całkowite. Utwórzmy kolejny ciąg

$$Z,\ Z',\ Z'',\ldots Z^{(q)},\ Z^{(q+1)},\ldots Z^{(2q-1)},\ Z^{(2q)}.$$

$$\frac{Z'-\alpha}{Z'-\beta}=\frac{Z-\alpha}{Z-\beta}\left(\cos\frac{p\pi}{q}+\sqrt{-1}\,\sin\frac{p\pi}{q}\right),$$

$$\frac{Z''-\alpha}{Z''-\beta}=\frac{Z'-\alpha}{Z'-\beta}\left(\cos\frac{p\pi}{q}+\sqrt{-1}\,\sin\frac{p\pi}{q}\right),$$

$$\ldots\ldots\ \frac{Z^{(q)}-\alpha}{Z^{(q)}-\beta}=\frac{Z^{(q-1)}-\alpha}{Z^{(q-1)}-\beta}\left(\cos\frac{p\pi}{q}+\sqrt{-1}\,\sin\frac{p\pi}{q}\right).$$

Mnożąc równości te stronami, i spostrzegając, iż argument iloczynu liczb urojonych równa się sumie argumentów czynników, po skróceniu, otrzymamy

$$\frac{Z^{(q)}-\alpha}{Z^{(q)}-\beta}=\frac{Z-\alpha}{Z-\beta}\,(\cos p\pi+\sqrt{-1}\,\sin p\pi).$$

Ponieważ $\cos p\pi = (-1)^p$ i $\sin p\pi = 0$,

przeto $$\frac{Z^{(q)}-\alpha}{Z^{(q)}-\beta}=(-1)^p\,\frac{Z-\alpha}{Z-\beta}.$$

Zupełnie tak samo wykażemy, iż

$$\frac{Z^{(2q)}-\alpha}{Z^{(2q)}-\beta}=(-1)^p\,\frac{Z^{(q)}-\alpha}{Z^{(q)}-\beta},$$

skąd $$\frac{Z^{(2q)}-\alpha}{Z^{(2q)}-\beta}=\frac{Z-\alpha}{Z-\beta}\quad \text{i}\quad Z^{(2q)}=Z.$$

Tak więc, jeżeli w podstawieniu eliptycznem (4) kąt φ jest liczbą spółmierną z π, wówczas ciąg Z, Z', Z'', . . . składa się z okresowo powtarzających się liczb.

19. Załóżmy, iż liczba φ jest niespółmierna z π. Wówczas można założyć, iż φ zawiera się między $\frac{(2p+1)\pi}{q}$ i $\frac{2p\pi}{q}$, przyczem wartość $\frac{p}{q}$ może być uczyniona dowolnie małą.

Ponieważ $$\varphi > \frac{2p\pi}{q},$$

przeto $$q\varphi > 2p\pi$$

i *à fortiori* $$q\varphi > p\pi+\sqrt{p^2\pi^2-p\varphi}$$

albo $$(q\varphi-p\pi)^2 > p^2\pi^2-p\varphi,$$

skąd $$2p\pi - q\varphi < \frac{\pi}{q}.$$

Na mocy powyższego

$$\frac{Z^{(q)}-\alpha}{Z^{(q)}-\beta}=\frac{Z-\alpha}{Z-\beta}\,(\cos q\varphi+\sqrt{-1}\,\sin q\varphi).$$

Ponieważ różnica między $2p\pi$ i $q\varphi$ może być uczyniona dowolnie małą, przeto, stosując kolejne przekształcenia, można będzie punkt Z sprowadzić do położenia $Z^{(q)}$, dowolnie bliskiego do położenia pierwotnego.

Tym sposobem, jeżeli w podstawieniu eliptycznem (4) kąt φ jest liczbą niespółmierną z π, wówczas w szeregu punktów Z, Z', Z'', ... można znaleźć punkt, dowolnie bliski do punktu pierwotnego Z.

20. Ponieważ w przekształceniu eliptycznem koło obrotowe powinno przecinać pod kątem prostym wszystkie koła, przechodzące przez punkty podwójne α i β, przeto środek jego znajdować się winien na prostej $\alpha\beta$, która jest prostopadła do osi rzeczywistej. Tak więc, przy zmianie położenia punktu pierwotnego środek koła obrotowego przesuwa się po prostej, prostopadłej do osi rzeczywistej.

Tę samą własność posiada również koło obrotowe w przekształceniach parabolicznem i hiperbolicznem, ponieważ w pierwszym z nich koło to dotyka się osi rzeczywistej w punkcie podwójnym, w drugim zaś — przechodzi przez punkty podwójne, położone na osi rzeczywistej.

W. SMOSARSKI.

POJĘCIE STOSUNKU.

1. *Zakres stosowania pojęcia stosunku.*—Uczący się posiłkują się często pojęciem stosunku, lecz przeważnie nie rozumieją go jasno, a zwłaszcza jego roli wobec ilorazu liczb; przyczyną są bałamutne określenia tego pojęcia, praktykowane w szkole i w literaturze dydaktycznej. Pragniemy zanalizować dokładnie znaczenie wyrazu „stosunek", przyczem chodzi nam nie tyle o to, jakie ono powinno być, ile o jego rozpowszechnione i zwyczajne użycie. Zajmujemy się tylko stosunkiem ilorazowym.

Przedewszystkiem należy zwrócić uwagę na to, że w świecie liczb oderwanych pojęcie stosunku jest zupełnie zbyteczne, jako identyczne z ilorazem; to też w analizie wyższej i w teorji funkcji nie spotkamy się z niem nigdzie. Inna sprawa w geometrji, mechanice i w zastosowaniach matematyki do fizyki lub do nauk społecznych. Tu już nie można się obejść bez pojęcia stosunku. Istotnie, do działań arytmetycznych jest przywiązane zasadnicze wymaganie, by wynik działania był wielkością tego samego rodzaju, co i wielkości, na których wykonano działanie. Wolno zatem mówić o dodawaniu odcinków, mas, objętości i t. p., gdyż suma znów jest odcinkiem, masą i t. p. To samo dotyczy odejmowania. Lecz nie można mówić o ilorazie odcinków albo mas, w znaczeniu stosunku, gdyż wynik nie jest już odcinkiem albo masą, lecz liczbą oderwaną czyli wielkością innego rodzaju.

2. *Dwojakie znaczenie wyrazu stosunek.*—Druga rzecz ważna, że wyraz stosunek używany bywa w dwóch zupełnie różnych znaczeniach.

Pierwotne i właściwe znaczenie odnosi się do wielkości jednorodnych. Wyrażamy się przytem, że jedna wielkość jest większa lub mniejsza od drugiej tyle razy, lub stanowi taką jej część. Mierzenie wielkości można traktować jako szczególny przypadek znajdywania stosunku, gdy jedna z wielkości jest jednostką miary.

Drugie praktykowane zastosowanie wyrazu „stosunek" mniej już jest uprawnione i może budzić wątpliwości, a dotyczy wielkości różnorodnych; mówi się np., że prędkość jest stosunkiem drogi do czasu. Co gorsza, przejście od jednego zastosowania wyrazu do drugiego odbywa się w dydaktyce milcząco, bez wprowadzenia definicji. Rozpatrzymy szczegółowo oba przypadki.

3. Stosunek wielkości jednorodnych. — W każdej wielkości rozróżniamy stronę jakościową (rodzaj) i ilościową. W dalszym ciągu, mówiąc o wielkości, mamy zawsze na myśli pewną ograniczoną ilość, np., pewien odcinek prostej (a nie długość wogóle), masę pewnego ciała (a nie masę wogóle) i t. d.

Założenia nasze są następujące. 1°. Umiemy porównywać wielkości jednorodne czyli rozstrzygać, czy są równe lub, jeżeli nie, to która z nich jest większa; metody porównywania bywają różne i dla każdej jakości muszą być wyłuszczone osobno; np., aby porównać dwa odcinki, przenosimy jeden na drugi; chcąc porównać pojemności dwu naczyń, napełniamy jedno z nich wodą i przelewamy ją do drugiego; masy porównywamy na wadze, temperatury — na termoskopie, naboje elektryczne — na elektroskopie, wartości towarów — zapomocą pieniędzy i t. d.

2°. Umiemy dodawać i odejmować wielkości.

Klasyczne i nie pozostawiające nic do życzenia co do ścisłości określenie stosunku dał Euklides w swych Elementach. Polega ono na określeniu równości i nierówności stosunków.

Powiadamy, w celu określenia, że wszelkie dwie wielkości jednorodne wyznaczają pewną liczbę oderwaną, jeżeli zastosujemy do nich znany dobrze algorytm Euklidesa mieszczenia łańcuchowego; tę liczbę oderwaną nazywamy stosunkiem danych wielkości.

Wykład mieszczenia łańcuchowego w zastosowaniu do odcinków znaleźć można w każdym podręczniku geometrji, i nie będziemy go tu powtarzać. Postępowanie to może być skończone lub nieskończone. W pierwszym razie daje nam ono miarę spólną odcinków; obliczamy, ile razy miara spólna mieści się w każdym odcinku, a iloraz liczb znalezionych będzie stosunkiem. W drugim razie algorytm Euklidesa pozwala utworzyć nieskończony ciąg liczb, coraz rosnących, lecz mniejszych od pewnej oznaczonej liczby: ciąg taki musi zdążać do pewnej granicy, którą jest jakaś liczba niewymierna; można też jednocześnie utworzyć ciąg liczb malejących, lecz zawsze większych od pewnej oznaczonej liczby i zdążających do tej samej granicy. Granica ta jest stosunkiem.

Istnieje jeszcze inny sposób wyznaczania stosunku, prostszy nawet, lecz nie prowadzący bezpośrednio do miary spólnej. Dajmy na to, że odcinek B mieści się n razy w odcinku A z pewną resztą. Dzielimy B najpierw na 10 równych części, i niech jedna taka część mieści się $10n+n_1$ razy w odcinku A z pewną resztą; potem dzielimy B na 100 równych części, i niech jedna taka część mieści się $100n+10n_1+n_2$ razy w odcinku A z pewną resztą; postępując tak dalej, otrzymamy szereg nierówności:

$$n \cdot B < A < (n+1) \cdot B$$

$$\left(n + \frac{n_1}{10}\right) \cdot B < A < \left(n + \frac{n_1+1}{10}\right) \cdot B$$

$$\left(n + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{100}\right) \cdot B < A < \left(n + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2+1}{100}\right) B$$

i t. d.,

gdzie n, n_1 n_2 . . . są liczbami całkowitemi. Spółczynniki przy B w lewych stronach nierówności tworzą ciąg liczb (ułamkowych dziesiętnych) rosnących, lecz wciąż mniejszych od $n+1$, a zatem zdążających do pewnej granicy. Do tej samej granicy zdąża też ciąg liczb z prawej strony nierówności: jest on malejący, i wszystkie jego wyrazy są większe od n. Granica ta jest stosunkiem.

Zwyczajny sposób mierzenia długości nie jest w zasadzie niczem innem, jak powyższą operacją, przyczem miara (metryczna) jest już zawczasu i na stałe podzielona na 10, 100 i 1000 równych części. Różnica zaś polega na tem, że postępowanie teoretyczne daje wogóle nieskończony ciąg, gdy tymczasem przy mierzeniu musimy zawsze ograniczać się na kilku pierwszych wyrazach ciągu i nie możemy wyjść poza rezultat przybliżony. Tak np. przy porównywaniu wzorców arszyna i metra nie zdołano posunąć się dalej jak do miljonowych części.

W praktyce używamy jeszcze trzeciego, uproszczonego postępowania do znalezienia stosunku: mierzymy każdą z dwóch wielkości zosobna, a iloraz znalezionych liczb daje nam szukany stosunek.

To, co mówiliśmy o odcinkach, stosuje się i do wszelkich innych wielkości, tylko że do technicznego wykonania dla każdej jakości służą specjalne metody, polegające na zastosowaniu wagi z odważnikami, termometru, elektrometru i t. d.

Stosunek wyrażamy na piśmie takim samym symbolem jak dzielenie:

$$A \,/\, B \quad \text{lub} \quad A : B.$$

Ustnie zaś wyrażamy go nader rozmaitemi zwrotami mowy; można np. powiedzieć o dwóch odcinkach A i B: stosunek A do B jest jak 2 do 5, A jest $2\frac{1}{2}$ raza mniejszy od B, A stanowi $\frac{2}{5}$ części B, A mieści się w B $2\frac{1}{2}$ raza, wreszcie A jest $2\frac{1}{2}$ raza krótszy od B.

Jak widzimy z tych zwrotów mowy, wyrażanie stosunku zapomocą dwu liczb („jak 2 do 5"), ze szczególnem upodobaniem praktykowane w średnich klasach szkoły, bynajmniej nie jest żadną istotną cechą stosunku. Forma ta, która niekiedy bywa dogodna, w rzeczywistości jest zabytkiem z dawnych czasów, gdy rachowanie odbywało się na abakach, ułamki zaś nastręczały trudności.

Dziwną jest także rzeczą zbyt późne wprowadzanie w nauczaniu definicji stosunku; ponieważ dzieci już od najpierwszych początków nauczania obznajmione są z pojęciem stosunku, więc powinny poznać zastosowanie tego wyrazu i jego definicję zaraz, jak tylko są zdolne do przyjmowania definicyj, t. j. w roku 11-ym życia; to określenie będzie oparte na pojęciach „większy lub mniejszy tyle razy, lub stanowiący taką część". Później, gdy dziecko pozna spólny dzielnik liczb i mieszczenie łańcuchowe, t. j. około roku 13—14-go, otrzyma ogólniejsze określenie stosunku, oparte na mierze spólnej. Wreszcie na wyższym poziomie nauczania otrzyma określenie ściśle stosunku, oparte na pojęciu ciągu liczb i obejmujące przypadek niespółmierności.

4. *Stosunek wielkości różnorodnych.*—Przechodzimy teraz do drugiego pojęcia stosunku, w zastosowaniu do wielkości różnorodnych. Dojdziemy do wniosku, że użycie naszego terminu i w tym przypadku może być uprawnione, byleby tylko był należycie określony. Z góry jednak należy ustalić zasadniczą różnicę, że dwie wielkości różnorodne w żadnym razie nie wyznaczają jakiejś oznaczonej liczby, jak to zachodziło dla jednorodnych wielkości. S t o s u n k i e m w nowem znaczeniu tego wyrazu będzie jakaś wielkość zupełnie odrębnej jakości, którą należy wprowadzić w każdym poszczególnym przypadku drogą specjalnej umowy; gdzie takiej umowy nie postawiono, tam i stosunek nie istnieje; np., pomiędzy siłą wogóle i czasem nie rozpatruje się stosunku.

Aby wspomniana umowa mogła być uzasadniona, należy ustalić, czy rozpatrywane dwie wielkości różnorodne mogą określać trzecią wielkość w sposób jednoznaczny, t. j. niezależnie od użytych jednostek miar. Pytamy np., czy droga i czas wyznaczają prękość jako jakąś wielkość zupełnie niezależną od jednostek długości i czasu.

Aby to było możliwe, muszą być spełnione dwa warunki. 1°. Dane dwie wielkości różnorodne muszą być z a l e ż n e od siebie, t. j. zmianie jednej z nich towarzyszy określona zmiana drugiej. 2°. Jeżeli mamy dwie pary odpowiednich wartości naszych zmiennych, np. dwie drogi s_1 i s_2 oraz dwa odpowiednie przeciągi czasu t_1 i t_2, i jeżeli przy pewnych jednostkach miary jest:

$$s_1 / t_1 \gtreqless s_2 / t_2,$$

to znak równości lub nierówności pozostaje taki sam i przy wszelkich innych jednostkach miary.

Ponieważ te warunki są naogół spełnione, więc pojęcie stosunku będzie określone. Inna kwestja, że zamiast wyrazu „stosunek" lepiej byłoby wprowadzić jakiś inny termin, a to w myśl zasady, głoszącej, że pojęcia różne powinny mieć i terminy różne. W rzeczy samej, u wielu pisarzy, zwłaszcza angielskich, znajdujemy sposób wysłowienia: „na jednostkę"; np. prędkość jest to droga na jednostkę czasu.

Zaznaczyć tu należy uderzający brak konsekwencji w terminologji; tak np. przyjęty jest zwyczaj mówienia, że „siła jest (lub mierzy się) iloczynem masy przez przyśpieszenie"; z takiem samem więc prawem można by mówić, że masa jest ilorazem (a nie stosunkiem) siły i przyśpieszenia.

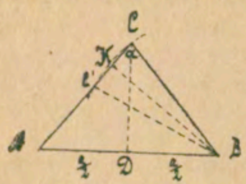
5. *Określenie ogólne stosunku.* — Jeżeli mówimy o stosunku dwu wielkości różnorodnych, to przedewszystkiem mamy na myśli, że one są zależne od siebie i to podług równania $y = ax$ (zależność wprost proporcjonalna), przyczem spółczynnik a jest co do jakości i co do wartości szukanym stosunkiem; aby go wyznaczyć, trzeba przedewszystkiem dwie dane wielkości y i x zmierzyć, ich wartości cyfrowe podzielić $(y : x)$ i przy otrzymanej liczbie umieścić miano stosownie do umówionej jednostki miary. Mierząc y i x w innych jednostkach, otrzymamy na a oczywiście inną liczbę i inne miano.

Np., jeśli y jest siłą wyrażoną w dynach, x—przyśpieszeniem w cm/sek.^{2}, to $a = y / x$ będzie masą wyrażoną w gramach.

W szczególności y i x mogą nawet być wielkościami jednorodnemi, i wtenczas a jest liczbą oderwaną, która jednak nie zależy już od jednostek, użytych do zmierzenia y i x. A więc podane określenie jest ogólne i obejmuje pojęcie stosunku tak wielkości różnorodnych, jak i jednorodnych.

BADANIE KILKU ZALEŻNOŚCI, ZACHODZĄCYCH MIĘDZY KĄTAMI I ODCINKAMI.

I. Niech w trójkącie równoramiennym ABC podstawa AB równa się a i kąt wierzchołkowy równa się α (rys. 1). Z punktu B, jako ze środka, promieniem, równym BC, zakreślmy koło, które przetnie bok AC w drugim punkcie C'. Postawmy sobie za cel wyznaczenie i zbadanie odcinka CC', zakładając, iż kąt α jest zmienny, podstawa zaś AB zachowuje wartość stałą.



Rys. 1.

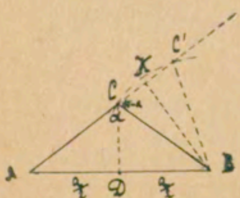
1. $\alpha < 90^0$. Z trójkąta CDB znajdziemy $CB = \dfrac{a}{2 \sin \dfrac{\alpha}{2}}$, skąd, biorąc pod uwagę trójkąt CBK, otrzymamy

$$CK = CB \cos \alpha = \frac{a \cos \alpha}{2 \sin \dfrac{\alpha}{2}}$$

i ostatecznie, oznaczając odcinek CC' przez d, znajdziemy

$$d = \frac{a \cos \alpha}{\sin \dfrac{\alpha}{2}}. \qquad (1)$$

2. $\alpha > 90^0$. Podstawiając we wzorze powyższym zamiast kąta α kąt $180^0 - \alpha$, znajdziemy (rys. 2).



Rys. 2.

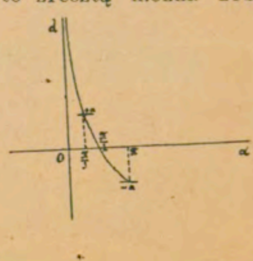
$$d = -\frac{a \cos \alpha}{\sin \dfrac{\alpha}{2}}. \qquad (2)$$

Zakładając, iż w przypadku $\alpha < 90^0$ odcinek d jest dodatni, w przypadku zaś $\alpha > 90^0$ — ujemny, możemy oba wzory (1) i (2) połączyć w jeden (1). Ostatecznie więc mamy

$$d = \frac{a \cos \alpha}{\sin \dfrac{\alpha}{2}},$$

przyczem, przy $\alpha = 90^0$, odcinek d, jak to zresztą można zobaczyć bezpośrednio, równa się zeru.

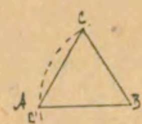
Przebieg zmienności odcinka d ilustruje tablica i krzywa poniższe:

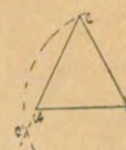


α	0^0		60^0		90^0		180^0
d	∞	$\searrow$	a	$\searrow$	0	$\searrow$	$-a$

gdzie α zmienia się w przedziale $\langle 0, 180^0 \rangle$ wyjąwszy dolną granicę 0, przyczem, gdy α nieograniczenie zbliża się do 0, odcinek d nieograniczenie wzrasta; przy $\alpha = 180^0$ trójkąt zniekształca się na podstawę, i $d = - a$.

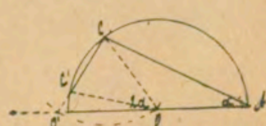
Opierając się na ustalonem prawie zmienności odcinka d i zważywszy, iż przy $\alpha = 60^0$ odcinek $d = a$, z łatwością znajdujemy, iż 1) przy $\alpha < 60^0$ mamy $d > a$, 2) przy $\alpha = 60^0$ mamy $d = a$, 3) przy $\alpha > 60^0$ mamy $d < a$. Do tych samych wyników dojdziemy również zapomocą rozumowania czysto geometrycznego. W rzeczy samej, przy $\alpha = 60^0$ (rys. 3) punkt C' pokrywa się z punktem A, i $d = a$; przy $\alpha < 60^0$ mamy $BC > a$ (rys. 4), i pukt C' jest położony na przedłużeniu AC w kierunku dodatnim: $d > a$; wreszcie przy $\alpha > 60^0$ (rys. 1 i 2) punkt C' jest położony między punktami A i C $(90^0 > \alpha > 60^0)$, lub też na przedłużeniu AC w kierunku ujemnym $(\alpha > 90^0)$, i $d < a$.


Rys. 3.


Rys. 4.

II. W koło o promieniu R wpisujemy kąt ostry CAB, równy α (rys. 5). Z wierzchołka C promieniem równym R zakreślamy łuk, przecinający podstawę w jej środku O i w drugim punkcie O'. Niech prosta CO' przecina koło w drugim punkcie C'. Zajmiemy się wyznaczeniem i zbadaniem zmienności odcinka CC' przy zmiennym kącie α i stałej podstawie.

Opierając się na badaniu, przeprowadzonem w części I, i spostrzegając, iż odcinek CC' tworzy się na mocy tego samego prawa, możemy go wyznaczyć, zastępując a przez odcinek OO' i kąt α przez kąt OCO'. Mamy $OO' = 2R \cos 2\alpha$ i $\sphericalangle\, OCO' = 180^0 - 4\alpha$. Podstawiając te wyrażenia do wzoru, otrzymanego w części I, znajdziemy


Rys. 5.

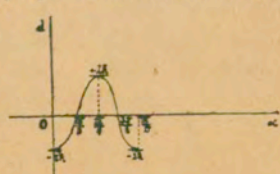
$$d = \frac{2R \cos 2\alpha \,.\, \cos (180^0 - 4\alpha)}{\sin (90^0 - 2\alpha)},$$

skąd, po uproszczeniu,

$$d = - 2R \cos 4\alpha,$$

skąd z łatwością otrzymujemy tablicę i krzywą zmienności odcinka d:

4α	0^0		90^0		180^0		270^0		360^0
α	0^0		$22^0 50'$		45^0		$67^0 50'$		90^0
d	$-2R$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$2R$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-2R$



Krzywa ta jest symetryczna względem prostej $x = \frac{\pi}{4}$, ponieważ, jak to można spostrzec ze wzoru, lub, jeszcze prościej, drogą bezpośrednio geometryczną, jednej danej wartości odcinka d odpowiadają dwa kąty α, związane zależnością $\alpha_1 + \alpha_2 = 90^0$, czyli symetryczne względem kąta $\frac{\pi}{4}$; przy kątach α, zawartych między $22^0 50'$ i $67^0 50'$, odcinek d jest *dodatni*, przy kątach α, położonych nazewnątrz tego przedziału,—*ujemny*, przybiera wartość, *równą zeru*, na granicach, t. j. przy $\alpha = 22^0 50'$ i $\alpha = 67^0 50'$.

Warunki przejścia odcinka d przez zero, można z łatwością ustalić z bezpośredniego obserwowania figury. Istotnie, w tym przypadku punkty C i C' stają się jednym punktem i prosta $O'C$ jest prostopadła do OC, skąd kolejno znajdziemy: $\angle COO' = 45^0$, $\alpha = 22^0 50'$, a więc, w myśl powyższego, i $\alpha = 67^0 50'$.

Wanda Hepkówna, Wanda Śliwińska, Janina Zakrzewska

uczennice klasy VII gimnajum żeńskiego imienia Królowej Jadwigi.

M. Borowiecka. **Zadania arytmetyczne w zakresie liczby całkowitej.** Nakład Gebethnera i Wolffa, r. 1918, str. 123.

Zbiór zadań p. Borowieckiej został dostosowany do kursu tradycyjnego klasy 1-ej szkół średnich, z uwzględnieniem jednak nowszych poglądów. Numeracja i cztery działania nad liczbami całkowitemi, oderwanemi i mianowanemi, opracowane w ten sposób, iż liczby wielorakie nie są wyodrębnione w osobnym dziale i że w szczególności miary metryczne występują już w zadaniach z zakresu numeracji („Pisanie liczb w dowolnym zakresie" str. 1—10); zmiany sumy i różnicy, iloczynu i ilorazu; zastosowania praktyczne, w szczególności obliczanie pól prostokątnych i objętości prostopadłościanów wraz z zadaniami odwrotnemi — oto krótki wykaz zasadniczych tematów. Ze strony teoretycznej zasługują na zaznaczenie: zadania, ilustrujące prawa przemienności, łączności, rozdzielności, dodawania i odejmowania różnicy i t. p. (których liczba winnaby zresztą być większą, przy swobodniejszem i obfitszem posługiwaniu się nawiasami) oraz ćwiczenia, dotyczące zmiany wyników działań, liczne i dość urozmaicone. Unikając widocznie kombinacyj sztucznych i łamigłówek, autorka starała się o uwzględnienie zastosowań istotnie praktycznych i żywotnych, jako to: obliczanie kosztów utrzymania (zad. 152, 294, 295 i inne), zamiana marek na ruble, rubli na korony i t. d., obliczenia statystyczne (np. zad. 1094, 1095, 1096) i t. p. Zasługują na uwagę wskazówki co do zaokrąglania liczb i otrzymywania wyników przybliżonych. Dążenie do prawdopodobieństwa i aktualności sprawiać musiało autorce w zmiennych i złożonych warunkach naszego życia gospodarczego sporo trudności, z których, jak się zdaje, wybrnęła dość pomyślnie. Zostały uwzględnione: wszystkie panujące u nas układy monetarne, z przewagą markowego, miary polskie i metryczne; ceny odpowiadają pono najbardziej warunkom warszawskim w ciągu ubiegłej zimy (1917/8), w każdym razie zaś nie stanowią nic rażącego, wobec zmienności i skoków, do których przywykliśmy.

Podług najnowszych programów, w klasie 1-ej mają być podawane wiadomości propedeutyczne z zakresu geometrji, związane organicznie z nauką arytmetyki. Wobec wielkich różnic w poglądach na to zagadnienie i sposobach jego praktycznego rozwiązywania, p. Borowiecka napisała swą książkę z myślą jedynie o nauce arytmetyki, z góry zakładając, że właściwie ćwiczenia z dziedziny propedeutyki geometrji mogą być czerpane z innego źródła. Sądzę jednak, że i temu skromnemu założeniu autorka bynajmniejby się nie sprzeniewierzyła, a podniosła wartość podręcznika, gdyby w odpowiednich miejscach zostały uwzględnione ćwiczenia zmysłów (oka, zmysłu mięśniowego) w ocenianiu przybliżonem wielkości oraz gdyby związek nauki o liczbach z pracami ręcznemi (istotnem mierzeniem, budowaniem brył z siatek, ważeniem i t. p.) był mocniej podkreślony i systematycznie utrzymywany. Związek ten występuje zresztą np. w zadaniach 609—614, 850.

Język książki jest poprawny; jeden zwrot o pójściu „za sprawunkami” w zad. 739-em stanowi zapewne niedopatrzenie. Skróty nazw miar metrycznych niepotrzebnie różnią się częściowo od dawniej używanych. Brak wyników rozwiązania uważać można, na tym szczeblu nauki za rzecz właściwą, gdyż uczy samodzielności i krytycyzmu; tyle razy się przecież zdarza, że uczeń lub uczennica dorabia tylko obliczenia do gotowych „odpowiedzi”.

T. Łazowski.

OD WYDAWCY.

Wzrost kosztów wydawniczych w ostatnich czasach zmusza nas do wstrzymania wydawnictwa NAUCZANIA MATEMATYKI I FIZYKI aż do ustalenia się cen kosztów nakładu.

Z wielkim żalem czynimy to tembardziej, że pismo nasze zyskało sobie licznych czytelników. Pismo nasze mogło się utrzymać dotąd tylko dzięki poparciu finansowemu. Otóż koszty wydawnicze wzrosły ostatnio o tyle, że pomoc ta jest niewystarczająca. Jak tylko stosunki się unormują wznowimy natychmiast nasze pismo.

Przy sposobności wyrażam serdeczne podziękowanie księgarni M. Arcta za bezinteresowną a bardzo sprawną Administrację, która przyczyniła się w znacznej mierze do szerokiego rozpowszechnienia się naszego pisma, jak również do utrzymania się niskiej jego ceny.

Tadeusz Gutkowski.

REDAKTOR I WYDAWCA TADEUSZ GUTKOWSKI.

DRUKARNIA M. ARCTA W WARSZAWIE, NOWY-ŚWIAT 41.