Rok II Warszawa, Październik 1918 r. № 7

NAUCZANIE MATEMATYKI i FIZYKI

WYCHODZI W LUTYM, KWIETNIU, PAŹDZIERNIKU I GRUDNIU

TREŚĆ:

Prenumerata wynosi 5 marek rocznie w Warszawie i na prowincji. Cena oddzielnego zeszytu 2 marki.

Redakcja: Polna 78 m. 7.

Administracja: Księgarnia M. Arcta, Nowy-Świat 35.

Rok II. Warszawa, Październik 1918 r. № 7

NAUCZANIE
MATEMATYKI I FIZYKI

WYCHODZI 4 RAZY DO ROKU POD REDAKCJĄ TADEUSZA GUTKOWSKIEGO

ROMUALD WITWIŃSKI.

Z TEORJI FUNKCJI JEDNEJ ZMIENNEJ.

(Ciąg dalszy).

§ **4.** Dowiedziemy teraz twierdzeń następujących:

Twierdzenie III. *Jeżeli funkcja $f(x)$ posiada w zamkniętym lub niezamkniętym przedziale $a... b$ pochodną $f'(x)$, różną od zera dla każdej wartości x w przedziale $a... b$, wówczas pochodna ta zachowuje znak stały w tym przedziale.*

Przypuśćmy, iż $f'(x)$ nie zachowuje znaku stałego w przedziale $a... b$. Wówczas, z uwagi na warunek $f'(x) \neq 0$ w $a... b$, w przedziale tym istnieć muszą dwie liczby α i β, dla których pochodna $f'(x)$ przybiera wartości $f'(\alpha)$ i $f'(\beta)$ o znakach różnych. Istniejąc w przedziale $a... b$, pochodna $f'(x)$ istnieje również w przedziale zamkniętym $\langle\alpha, \beta\rangle$, przybierając na jego granicach, jak to pokazano wyżej, wartości różnych znaków. Wnosimy stąd, iż, na mocy twierdzenia I, istnieje wewnątrz $\langle\alpha, \beta\rangle$ liczba c, dla której $f'(c) = 0$. Lecz jest to niemożliwe, ponieważ, znajdując się w przedziale $\langle\alpha, \beta\rangle$, liczba c jest położona również w przedziale $a... b$, w którym, zgodnie z warunkiem, $f'(x) \neq 0$. Tak więc, $f'(x)$ w przedziale $a... b$ zachowuje znak [1]).

[1]) Rozważany w twierdzeniu III przedział oznaczyliśmy przez $a... b$ w celu zwrócenia uwagi na okoliczność, iż przedział ten może być zamkniętym i niezamkniętym (jeden z trzech możliwych przedziałów (a, b), $\langle a, b)$ lub $(a, b\rangle$.

Wniosek. *Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła na granicach a i b przedziału zamkniętego $\langle a, b \rangle$ i jeżeli funkcja ta wewnątrz $\langle a, b \rangle$ posiada pochodną $f'(x)$, różną od zera dla każdej wartości x, położonej w przedziale $\langle a, b \rangle$, wówczas funkcja $f(x)$ jest jednostajna w przedziale zamkniętym $\langle a, b \rangle$.*

W rzeczy samej, stosując do przedziału niezamkniętego (a, b) twierdzenie poprzednie, znajdujemy, iż pochodna $f'(x)$ zachowuje w nim, t. j. wewnątrz przedziału $\langle a, b \rangle$, znak stały. Tak więc, funkcja $f(x)$ jest ciągła na granicach przedziału $\langle a, b \rangle$, przybierając wewnątrz niego pochodną znaku stałego. Wynika stąd, na mocy twierdzenia Lagrange'a, iż funkcja $f(x)$ jest jednostajna w przedziale zamkniętym $\langle a, b \rangle$, mianowicie rośnie w nim jednostajnie lub jednostajnie maleje wraz z wzrastaniem x, zależnie od tego, czy $f'(x)$ wewnątrz $\langle a, b \rangle$ zachowuje znak dodatni, czy też ujemny.

Dowiedziemy teraz twierdzeń następujących:

Twierdzenie IV. a) LEMAT. *Niech funkcja $f(x)$ posiada własności następujące:* 1) *jest ciągła na granicach przedziału $\langle a, b \rangle$* i 2) *posiada pochodną wewnątrz $\langle a, b \rangle$, przyczem* 3) *równanie*

$$(24) \qquad f'(x) = 0$$

posiada liczbę skończoną pierwiastków rzeczywistych, położonych wewnątrz $\langle a, b \rangle$. Niech pierwiastki te, uporządkowane w kolei wzrastania, są $c_1, c_2, \ldots, c_m$, przyczem niech $a < b$. Przy tych warunkach funkcja $f(x)$ jest jednostajna w każdym z kolejnych przedziałów $\langle a, c_1 \rangle$, $\langle c_1, c_2 \rangle, \ldots, \langle c_{m-1}, c_m \rangle$, $\langle c_m, b \rangle$, i w ciągu liczb

$$(25) \qquad f(a), f(c_1), f(c_2), \ldots f(c_m), f(b)$$

każde dwie liczby sąsiednie są różne.

b) **Twierdzenie podstawowe.** *Niech funkcja $f(x)$ posiada własności:* 1), 2), 3). *W celu znalezienia wszystkich jej extrema wystarczy (zachowując oznaczenia twierdzenia poprzedniego) wybrać śród liczb $f(c_1), f(c_2), \ldots, f(c_m)$ te z nich, które nie zawierają się między dwoma sąsiednimi wyrazami ciągu* (25), *przyczem $f(c_i)$ jest maximum funkcji $f(x)$, jeżeli liczba $f(c_i)$ jest większa, i minimum, je-*

żeli liczba ta jest mniejsza od każdej z dwóch sąsiednich liczb ciągu (25). *W szczególności, jeżeli liczby ciągu* (25) *następują po sobie, wzrastając lub malejąc* [*albo, jeżeli równanie* (24) *nie posiada pierwiastków rzeczywistych wewnątrz* $\langle a, b\rangle$], *wówczas funkcja* $f(x)$ *nie posiada extremum'a w* $\langle a, b\rangle$.

c) *Niech funkcja* $f(x)$ *posiada własności:* 1), 2), 3). *Wówczas (oznaczenia te same), w celu znalezienia największej (lub najmniejszej* [1]) *wartości funkcji* $f(x)$ *w przedziale* $\langle a, b\rangle$, *wystarczy wybrać śród liczb* (25) *tę z nich (lub te), która (lub które) są nie mniejsze (lub nie większe) od wszystkich pozostałych liczb tego ciągu.*

W każdym z punktów $a, c_1, c_2,..., c_m, b$ funkcja $f(x)$ jest ciągła. W rzeczy samej, liczby $c_1, c_2,..., c_m$ są położone, na mocy warunku, wewnątrz $\langle a, b\rangle$, zatem w każdym z punktów $c_1, c_2, ..., c_m$ funkcja $f(x)$, zgodnie z drugą jej własnością, posiada pochodną, zatem jest ciągła; w punktach zaś a i b funkcja $f(x)$ jest ciągła na mocy pierwszej jej własności. Z drugiej strony, z uwagi na to, iż liczby $c_1, c_2,..., c_m$ są wszystkie pierwiastkami równania (24), położonemi w przedziale $\langle a, b\rangle$, i ponieważ są one kolejno położone w $\langle a, b\rangle$, przeto pochodna $f'(x)$ jest różna od zera wewnątrz każdego z przedziałów $\langle a, c_1\rangle, \langle c_1, c_2\rangle,..., \langle c_m, b\rangle$. Tak więc, pochodna $f'(x)$ jest ciągła na granicach każdego z przedziałów $\langle a, c_1\rangle, \langle c_1, c_2\rangle, ... \langle c_m, b\rangle$ i wewnątrz każdego z nich różna od zera. Wobec tego, na mocy wniosku z twierdzenia III, funkcja $f(x)$ jest jednostajna w każdym z przedziałów zamkniętych $\langle a, c_1\rangle, \langle c_1, c_2\rangle,..., \langle c_m, b\rangle$, skąd wynika, iż dla granic tych przedziałów zachodzą nierówności $f(a) \gtrless f(c_1)$, $f(c_1) \gtrless f(c_2), ..., f(c_m) \gtrless f(b)$, w każdej

---

[1]) Tu jest mowa o znalezieniu największej (lub najmniejszej) wartości funkcji $f(x)$ w przedziale $\langle a, b\rangle$, t. j. — o znalezieniu w $\langle a, b\rangle$ liczby α, czyniącej zadość nierówności $f(\alpha) \geqslant f(x)$ [albo $f(\alpha) \leqslant f(x)$] dla każdej wartości x, położonej w $\langle a, b\rangle$; jeśli zaś szuka się wartości $f(\alpha)$, czyniącej zadość nierówności $f(\alpha) > f(x)$ [albo $f(\alpha) < f(x)$] dla każdej wartości x w $\langle a, b\rangle$, wówczas $f(\alpha)$ nazywa się największą wartością funkcji $f(x)$ w $\langle a, b\rangle$ w zwyklym, właściwym sensie słowa.

z których należy wziąć znak górny lub dolny, zależnie od tego, czy funkcja $f(x)$ w odpowiednim przedziale wzrasta, czy też maleje. Tym sposobem lemat a) został udowodniony.

Dla dowodu twierdzenia b) zauważmy najpierw, iż przez extrema funkcji rozumiemy, jak i zawsze, gdy niema żadnych wskazań dodatkowych, maxima lub minima funkcji wyłącznie dla pewnych wartości c, położonych wewnątrz przedziału, w którym określona jest funkcja $f(x)$, t. j. szukamy wewnątrz $\langle a, b\rangle$ punktu c, dla każdego z których można wskazać dodatnią liczbę δ w ten sposób, aby różnica $f(x)-f(c)$ zachowywała określony znak, o ile tylko spełniają się nierówności $0 < |x-c| < \delta$. W ten sposób, ani punkt a, ani punkt b nie nadają funkcji $f(x)$ wartości extremum w $\langle a, b\rangle$, zgodnie z samym określeniem extremum. Zupełnie tak samo, liczba ξ, położona wewnątrz jednego z przedziałów $\langle a, c_1\rangle$, $\langle c_1, c_2\rangle, \ldots, \langle c_m, b\rangle$, nie może nadać funkcji $f(x)$ wartości extremum, ponieważ, na mocy lematu a), funkcja $f(x)$ jest jednostajna wewnątrz każdego z tych przedziałów, wskutek czego różnica $f(x)-f(\xi)$ zmienia znak przy przejściu w należycie małem otoczeniu punktu ξ od wartości, mniejszych od ξ, do wartości, większych od ξ [1]). Tym sposobem, wartości zmiennej niezależnej, dla których funkcja $f(x)$ osiąga extremum, można odnajdować (jeżeli tylko wartości takie wogóle istnieją) wyłącznie śród liczb $c_1, c_2, \ldots, c_m$. Aby przekonać się, czy osiąga funkcja $f(x)$ extremum przy $x = c_1$, rozpatrzmy liczby $f(a)$, $f(c_1)$, $f(c_2)$ [albo $f(a)$, $f(c_1)$, $f(b)$, jeżeli $m = 1$]. Zgodnie z lematem a), $f(a) \neq f(c_1)$ i $f(c_1) \neq f(c_2)$, a zatem liczba $f(c_1)$ albo zawiera się między liczbami $f(a)$ i $f(c_2)$, albo jednocześnie jest większa lub jednocześnie mniejsza od każdej z liczb $f(a)$ i $f(c_2)$. W przypadku pierwszym zachodzą nierówności:

---

[1]) Aby dowieść, iż $f(\xi)$ nie jest extremum, można również powołać się na to, iż $f'(\xi) \neq 0$, ponieważ ξ leży wewnątrz $\langle a, c_1\rangle$; znaczy to, iż w punkcie ξ nie spełnia się warunek *konieczny* osiągania extremum, na mocy którego powinno być $f'(\xi) = 0$, a zatem $f(\xi)$ nie jest extremum.

(26) $f(a) < f(c_1) < f(c_2)$

albo (27) $f(a) > f(c_1) > f(c_2)$,

zaś w przypadku drugim:

(28) $f(c_1) > f(a),\ f(c_1) > f(c_2)$

albo (29) $f(c_1) < f(a),\ f(c_1) < f(c_2)$.

Zgodnie z lematem a), funkcja $f(x)$ jest jednostajna w każdym z kolejnych przedziałów $\langle a, c_1\rangle$, $\langle c_1, c_2\rangle$. Wobec tego, w przypadku nierówności (26), funkcja ta jednostajnie wzrasta w każdym z przedziałów $\langle a, c_1\rangle$ i $\langle c_1, c_2\rangle$, a zatem jednostajnie wzrasta i w całym przedziale $\langle a, c_2\rangle$, składającym się z przedziałów $\langle a, c_1\rangle$ i $\langle c_1, c_2\rangle$, skąd wynika, iż przy $x = c_1$ funkcja $f(x)$ nie osiąga extremum'a, ponieważ liczba c_1 jest położona wewnątrz $\langle a, c_2\rangle$; w przypadku zaś nierówności (27), funkcja $f(x)$ jednostajnie maleje w $\langle a, c_2\rangle$, wobec czego $f(c_1)$ również nie jest extremum. W przypadku zaś nierówności (28), funkcja $f(x)$, będąc jednostajną w każdym z przedziałów $\langle a, c_1\rangle$ i $\langle c_1, c_2\rangle$, w pierwszym z nich jednostajnie wzrasta, w drugim zaś jednostajnie maleje. Dlatego też wartość $f(c_1)$ funkcji $f(x)$ jest największą w każdym z przedziałów $\langle a, c_1\rangle$ i $\langle c_1, c_2\rangle$, zatem jest to największa wartość funkcji $f(x)$ i w całym przedziale $\langle a, c_2\rangle$, przyczem $f(c_1)$ jest również maximum funkcji $f(x)$, ponieważ c_1 jest położone wewnątrz $\langle a, c\rangle$. Rozumując w sposób analogiczny w przypadku nierówności (29), znajdujemy, iż $f(c_1)$ jest najmniejszą wartością funkcji $f(x)$ w każdym z przedziałów $\langle a, c_1\rangle$ i $\langle c_1, c_2\rangle$, a także w całym przedziale $\langle a, c_2\rangle$, i jednocześnie $f(c_1)$ jest minimum badanej funkcji. W sposób podobny, rozważając liczby $f(c_1), f(c_2), f(c_3)$ i przedziały $\langle c_1, c_2\rangle$, $\langle c_2, c_3\rangle$, następnie liczby $f(c_2)$, $f(c_3)$, $f(c_4)$ i przedziały $\langle c_2, c_3\rangle$, $\langle c_3, c_4\rangle$, i t. d., wreszcie liczby $f(c_{m-1})$, $f(c_m)$, $f(b)$ i przedziały $\langle c_{m-1}, c_m\rangle$, $\langle c_m, b\rangle$, można się przekonać, iż każda z liczb $f(c_1), f(c_2), \ldots, f(c_m)$ ciągu (25) albo zawiera się między dwiema sąsiedniemi liczbami tego ciągu, nie nadając w tym przypadku extremum'a funkcji $f(x)$, albo nie zawiera się między sąsiedniemi liczbami tego ciągu, będąc przytem odrazu albo większą, albo mniejszą od każdej z liczb sąsiednich: w przypadku pierwszym badana wartość funkcji jest maximum, w drugim minimum. Tym sposobem twierdzenie b) zostało dowiedzione.

Oznaczmy przez α liczbę, wybraną z ciągu liczb a, c_1, $c_2, \ldots, c_m$, b w ten sposób, aby w ciągu liczb (25) liczba $f(\alpha)$ była nie mniejszą od wszystkich pozostałych liczb tego ciągu. Wówczas liczba α uczyni zadość nierówności

$$(30) \qquad f(\alpha) \geqslant f(x)$$

dla każdej wartości x w $\langle a, b \rangle$. Istotnie, jeżeli x równa się jednej z liczb $a, c_1, c_2, \ldots, c_m, b$, wówczas, zgodnie z warunkiem, mamy odpowiednio:

$$(31) \qquad f(\alpha) \geqslant f(a),\ f(\alpha) \geqslant f(c_1),$$
$$f(\alpha) \geqslant f(c_2), \ldots, f(\alpha) \geqslant f(c_m),\ f(\alpha) \geqslant f(b).$$

Jeżeli zaś liczba x, zawierając się w $\langle a, b \rangle$, nie jest żadną z liczb $a, c_1, c_2, \ldots, c_m, b$, wówczas liczba ta jest położona w jednym z przedziałów $\langle a, c_1 \rangle$, $\langle c_1, c_2 \rangle, \ldots, \langle c_m, a \rangle$, w każdym z których, zgodnie z twierdzeniem a), funkcja $f(x)$ jest jednostajna. Wskutek tego $f(x)$ jest położone między pewnemi dwiema liczbami ciągu (25), i $f(\alpha)$, będąc nie mniejszą od każdej z tych dwóch liczb, napewno jest *większa* od liczby pośredniej $f(x)$. Tak więc, $f(\alpha)$ czyni zadość nierówności (30) dla każdej wartości x w $\langle a, b \rangle$, a wskutek tego $f(\alpha)$ jest największą (w szerokiem znaczeniu słowa) wartością funkcji $f(x)$ w $\langle a, b \rangle$, i żadna wartość funkcji $f(x)$, wyjąwszy jedną lub kilka wartości $f(\alpha)$, obraną (lub obranych) w sposób powyższy, nie jest największą w $\langle a, b \rangle$. W sposób podobny, obierając śród liczb a, c_1, $c_2, \ldots, c_m$, b liczbę α_0 w ten sposób, aby liczba $f(\alpha_0)$ była nie większą od wszystkich pozostałych liczb ciągu (25), otrzymamy najmniejszą w szerokiem znaczeniu słowa wartość funkcji $f(x)$ w $\langle a, b \rangle$; dowodzi się tego zapomocą rozumowań zupełnie analogicznych, zastępując wszędzie słowa i znaki [p. (30), (31)], „nie mniejsza", „większa" słowami i znakami „nie większa", „mniejsza". W ten sposób twierdzenie c) jest dowiedzione.

d) **Wniosek**. *Na to, aby funkcja $f(x)$ posiadała w $\langle a, b\rangle$ największą (lub najmniejszą) wartość we właściwem znaczeniu tego słowa, jest koniecznem i dostatecznem, aby śród liczb* (25) *istniała liczba największa (lub najmniejsza); liczba ta ciągu* (25) *i jest największą (lub najmniejszą) wartością funkcji $f(x)$ w $\langle a, b\rangle$ we właściwem znaczeniu słowa.*

Jeżeli w ciągu (25) istnieje największa (lub najmniejsza) liczba, wówczas liczba ta jest, na mocy twierdzenia poprzedniego, największą (lub najmniejszą wartością funkcji $f(x)$ w $\langle a, b\rangle$ w szerokiem znaczeniu słowa; jednakże, w rozważanym przypadku we wzorach (31) (lub im analogicznym) odpada, zgodnie z warunkiem, znak równości, a zatem odpada również i we wzorze (30) (lub mu analogicznym) przy $x \neq \alpha$. Wobec tego największa (lub najmniejsza) liczba ciągu (25) jest największą (lub najmniejszą) wartością funkcji $f(x)$ w $\langle a, b\rangle$ we właściwem znaczeniu słowa. Odwrotnie, największa (lub najmniejsza) wartość funkcji $f(x)$ w $\langle a, b\rangle$ w ścisłem znaczeniu słowa jest również największą (lub najmniejszą) jej wartością w ścisłem znaczeniu słowa, zatem wartość ta równa się jednej z liczb (25); lecz liczba ta, zgodnie z określeniem, jest większa (lub mniejsza) od wszystkich innych wartości funkcji $f(x)$, zatem jest większa (lub mniejsza) od wszystkich innych liczb tego ciągu.

§ **5**. Wyjaśnimy wyłożoną w § 4 metodę rozwiązywania zadań na maximum i minimum na przykładzie. Niech trzeba w stożek, o wysokości h i promieniu podstawy r, wpisać [1]) walec o największej objętości. Oznaczmy przez x wysokość, przez y — promień podstawy walca; z podobieństwa trójkątów prostokątnych, położonych w przekroju osiowym stożka i walca, mamy: $y : r = (h - x) : h$. Wyznaczając z tego równania y i podstawiając w wyrażenie $\pi y^2 x$ objętości walca, otrzymamy, oznaczając badaną objętość przez $v(x)$,

[1]) Przez wpisany w stożek walec rozumiemy walec, którego oś jest położona na osi stożka, górna podstawa jest przekrojem równoległym stożka, dolna zaś znajduje się na podstawie stożka.

(32) $$v(x) = \frac{\pi r^2}{h^2} x(h - x)^2,$$

przyczem x zmienia się w przedziale $\langle 0, h \rangle$. Ściśle mówiąc, przy $x = 0$ i $x = h$ figura walca niknie, zaś $v(x)$ zamienia się przy tych wartościach na zero. Ale umówmy się wpisywać w stożek również walec objętości zerowej i przy wysokości 0 i h (zniekształcony jakby na podstawę lub wysokość stożka), ściślej, umówmy się uważać zmiany funkcji $v(x)$ w przedziale zamkniętym $\langle 0, h \rangle$. Prościej zaś będzie, gdy rozpatrzymy zmiany w $\langle 0, h \rangle$ funkcji

(33) $$f(x) = x(h - x)^2,$$

która osiąga wartość największą wraz z $v(x)$, ponieważ $\pi r^2 : h^2 > 0$. Różniczkując równość (33), znajdziemy, iż:

$$f'(x) = (h - x)(h - 3x).$$

Tak więc, równanie $f'(x) = 0$, albo $(h-x)(h-3x)=0$ posiada wewnątrz $\langle 0, h \rangle$ jedyny pierwiastek $x = \frac{h}{3}$, otrzymany przez przyrównanie do zera czynnika $h - 3x$. Ponieważ pochodna $f'(x)$ istnieje w całym przedziale $\langle 0, h \rangle$, przeto funkcja $f(x)$ jest ciągła w punktach 0 i h. W ciągu liczb

$$f(0) = 0, \quad f\left(\frac{h}{3}\right) = \frac{4h^3}{27}, \quad f(h) = 0$$

liczba $f\left(\frac{h}{3}\right)$ jest największą, wobec czego $f\left(\frac{h}{3}\right)$ jest największą wartością funkcji $f(x)$ w przedziale $\langle 0, h \rangle$. Jej odpowiada największa wartość [p. (32)] $v\left(\frac{h}{3}\right) = \frac{4\pi r^2 h}{27}$ objętości walca wpisanego. Tak więc, największą objętość osiąga wpisany w stożek walec wówczas, gdy wysokość jego równa się trzeciej części wysokości stożka. Największa ta wartość objętości jest również maximum, ponieważ punkt $\frac{h}{3}$ jest położony wewnątrz przedziału $\langle 0, h \rangle$.

A. ŁAPAREWICZ.

O ZAGADNIENIU DELIJSKIEM.

Wśród zagadnień geometrycznych, na jakie starożytni Grecy zwrócili uwagę, obok zagadnienia o kwadraturze koła równy prawie rozgłos zyskało zagadnienie o podwojeniu sześcianu; geometrja zawdzięcza mu zbogacenie się o parę krzywych, jak: cissoidy Dioklesa, konchoidy Nikomedesa; w niem również linje stożkowe znalazły pierwsze swe zastosowanie; w celu jego rozwiązania zbudowano pewną liczbę narzędzi mechanicznych, jak: mesolabium Eratostenesa.

Nazywamy je pospolicie zagadnieniem Delijskiem, ze względu na przywiązaną doń legendę, którą przekazał Philoponus w komentarzach do pism Arystotelesa. Legenda ta głosi, że ongi, podczas grasującej w Atenach zarazy, wysłane na wyspę Delos poselstwo, mające się tamecznej wyroczni poradzić co do środków przeciwko tej klęsce, wróciło z odpowiedzią, że: „Ołtarz Feba [1]) zdwoić trzeba".

Legenda głosi dalej, że Ateńczykom zastosowanie się do woli bóstwa zdało się rzeczą tak łatwą, iż bez namysłu zbudowali niezwłocznie ołtarz o dwa razy większej... krawędzi. Gdy zaraza nie ustała, wysłane nowe poselstwo wróciło z odpowiedzią, że dopóki żądane podwojenie objętości ołtarza nie zostanie spełnione bez błędów lub wybiegów, bóg nie przywróci Ateńczyków do swej łaski. Rada ateńska długo się męczyła nad tem zagadnieniem, aż z kłopotu wyprowadził ją Platon.

Co do tej legendy, należy zauważyć co następuje. Ateńczycy, którzy w sztukach zajęli tak chlubną kartę, do nauk ścisłych nie mieli głowy ani przekonania. Sokrates np. utrzymywał, że geometrja przydatną jest jedynie dla ziemianina, o ileby zapragnął zmierzyć swe pole. Uczeń tegoż, Platon, nie podzielał tej niechęci swego mistrza i nad gmachem założonej przez siebie „Akademji" umieścił napis, zezwalający na wstęp do niej jedynie geometrom; w swym traktacie logiki pełno przytoczył przykładów z geometrji; gorliwie też uczni swych zachęcał do dociekań geometrycznych; wszelakoż ani on sam, ani jego słuchacze niczem się w geometrji nie odznaczyli. Jakkolwiek więc w epoce Platona zagadnienie Delijskie było już powszechnie znane i wielekroć rozwiązywane, tak iż wzmianka o niem

[1]) Feb, właściwie Phoibos, była to grecka nazwa bożka słońca Apollina, którego ołtarze, jak wogóle i wszystkie ołtarze u Greków, miały kształt sześcianów. Odpowiedzi wyroczni zawsze były wierszowane.

w legendzie trąci grubym anachronizmem, była ona jednak konieczną, ponieważ Ateńczycy nie mieli nadeń wybitniejszego w swem gronie geometry.

Z tego też względu dziwić się nie można legendzie, że Ateńczykom, mającym podwoić swój ołtarz, każe go budować na dwa razy większej krawędzi. Zresztą, i dziś jeszcze, nie tylko wśród laików, ale nawet i wśród — jakby się zdawać mogło — specjalistów, nieraz spotykamy osoby, którym obcą jest różnica między stosunkami linjowemi, kwadratowemi, sześciennemi. Niejeden np. z wynalazców, obmyśliwszy jakiś mechanizm, dla wypróbowania jego działania w sposób możliwie oszczędny, buduje go zrazu w minjaturze, w t. zw. modelu, osiągnąwszy zaś po paru próbach i poprawkach należyte jego funkcjonowanie, poprzestaje na odpowiedniem powiększeniu linjowych jego rozmiarów — i tu najczęściej pada ofiarą przykrego rozczarowania. Przyczyna bardzo prosta: w modelu wszystkie działające nań siły zostały ze sobą sharmonizowane; jeżeli jednak linjowe jego rozmiary powiększymy np. n razy, wówczas jedne z sił powiększą się n, inne n^2, jeszcze inne n^3 lub w stosunku jeszcze wyższej potęgi linjowego powiększenia (Helmholz w r. 1882 dał przykład siły, wzrastającej w tym razie n^7 razy: jest to mianowicie siła nośna samolotu, i tu niewątpliwie szukać należy przyczyny tak późnego rozwoju awjatyki), tak iż harmonja między temi siłami zostanie zburzoną, a tem samem mechanizm może wykazywać tylko działanie naogół odmienne od tego, jakiegoby należało się spodziewać według działania modelu.

Co do legendy Delijskiej, w cokolwiek odmiennej postaci znajdujemy ją u Eratostenesa: naprzód, zaraza szerzyła się na wyspie Delos; powtóre, Delijczycy podwoili jedynie górny kwadrat ołtarza, wychodząc z zasady, że on właśnie, jako miejsce do składania ofiar, stanowi właściwy ołtarz; wreszcie, doradcą co do podwojenia ołtarza był, według tej wersji, Minos.

Zagadnienie Delijskie można sformułować w sposób następujący: Wyznaczyć krawędź sześcianu tak, by jego objętość była dwa razy większą od objętości sześcianu, zbudowanego na danej krawędzi.

Oznaczając krawędź danego sześcianu przez a, szukanego przez x, mamy warunek zadania w postaci równania:

$$x^3 = 2a^3.$$

Zaznaczyć należy, że, w dacie powstania zagadnienia, algebra Greków była czysto geometryczną, wielkości więc ogólne przedstawiano zapomocą odcinków, tak iż każde zagadnienie ogólne z natury rzeczy było konstrukcyjnem; geometrja zaś ich we wspomnianej dacie, prócz prostych i okręgów, innych linij nie znała. Stąd widzimy, że zagadnienie Delijskie było u Greków zagadnieniem konstrukcyjnem, mającem być rozwiązanem z pomocą jedynie linijki i cyrkla.

Warunek taki jest nie do osiągnięcia, ponieważ z równań 1 i 2-go st., będących równaniami prostej i okręgu, przez rugowanie rzędnej w żadnym razie równania st. 3-go względem odciętej nie otrzymamy. Tem samem więc zagadnienie Delijskie było u Greków nierozwiązalne.

Ten jednak wniosek, dla nas tak oczywisty, nie był dostępny starożytnym Grekom. Nie byli oni pozbawieni świadomości, że stosunek krawędzi obu sześcianów był liczbą niewymierną; gdy więc zagadnienie o podwojeniu kwadratu, w którem stosunek boków kwadratu danego i szukanego był również niewymierny, łatwo dało się rozwiązać, a z różnicy stopni niewymierności Grecy nie zdawali sobie sprawy, z konieczności przeto wnioskowali, że i zagadnienie Delijskie musi mieć rozwiązanie. Bezowocność poszukiwań tegoż, będąca następstwem wspomnianej nierozwiązalności, zjednała zagadnieniu Delijskiemu wyjątkowy rozgłos, zaznaczony na wstępie.

Nierozwiązalność ta była, rzecz prosta, tylko względną. Architas z Tarentu, koło r. 400 przed Chr., biorąc rozbrat z okręgiem i zwracając się do powierzchni obrotowych, otrzymał najdawniejsze rozwiązanie, niedające się wprawdzie przedstawić na płaszczyźnie i dla spółczesnych może mało dostępne, mimo to jednak zupełne i dokładne. Rozwiązanie to przedstawiało się w sposób następujący.

Na kole o promieniu a zbudujmy walec prostopadły obrotowy; dokoła dowolnej średnicy koła, z wierzchołkiem w jednym z jej końców, wystawmy stożek o tworzącej, pochylonej do osi pod kątem 60^0; w płaszczyźnie, którą wyznacza oś stożka i wyprowadzona z jego wierzchołka tworząca walca, na znajdującej się już tam średnicy zakreślamy półokrąg, który obróćmy dokoła rzeczonej tworzącej walca, otrzymując t. zw. „powierzchnię torową"; trzy te powierzchnie przecinają się w przestrzeni w dwóch punktach, takich, iż łącząc którykolwiek z nich z wierzchołkiem stożka, otrzymamy promień wodzący, którego rzut na podstawę walca wyznaczy żądaną krawędź podwojonego sześcianu.

Nic łatwiejszego, jak przekonać się o tem sposobem analitycznym. W tym celu wierzchołek stożka przyjmijmy za początek spółrzędnych, oś stożka za oś X, odnośną tworzącą walca za oś Z, wreszcie prostopadłą do płaszczyzny XZ za oś Y. Równania powyższych powierzchni w przyjętym układzie otrzymamy w postaci:

$$x^2+y^2 = 2ax \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$y^2+z^2 = 3x^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$z^2 = \sqrt{x^2+y^2}(2a-\sqrt{x^2+y^2}). \quad . \quad (3)$$

Równanie (3), po podstawieniu wartości na z^2 z (2) i na $\sqrt{x^2+y^2}$ z (1), sprowadzimy do postaci:

$$3x^2 - y^2 = 2a\sqrt{2ax} - 2ax \quad . \; . \; . \; . \; (4)$$

Z równań (1) i (4), dodając je stronami, otrzymamy:

$$4x^2 = 2a\sqrt{2ax}, \quad \text{tak iż} \quad x = a\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}};$$

zatem, na podstawie (1):

$$x^2+y^2 = 2a^2\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}} = a^2\sqrt[3]{4}$$

i ostatecznie:

$$(\sqrt{x^2+y^2})^3 = 2a^3.$$

Jeszcze oczywistszym wynik ten będzie w układzie biegunowym. Jakoż, oznaczając promień wodzący punktu (x, y, z) przez r, pochylenie jego do osi Z („odległość zenitalną") przez θ i kąt między płaszczyzną XZ a płaszczyzną, poprowadzoną przez punkt (x, y, z) i oś Z, („poziomołuk" czyli „azymut") przez φ, mamy wzory przekształcające:

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, \quad y = r \sin\theta \sin\varphi, \quad z = r \cos\theta.$$

Równanie stożka (2) przyjmie wówczas postać:

$$\sin^2\theta \sin^2\varphi + \cos^2\theta = 3 \sin^2\theta \cos^2\varphi;$$

że jednak

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \sin^2\theta (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi),$$

możemy je przeto sprowadzić do postaci:

$$4 \sin^2\theta \cos^2\varphi = 1;$$

a ponieważ, w granicach możliwego przecięcia się rozważanych powierzchni zarówno $\sin\theta$, jak i $\cos\varphi > 0$, przeto ostatecznie równanie stożka przedstawimy w postaci:

$$2 \sin\theta \cos\varphi = 1.$$

Przekształcenie pozostałych powierzchni nie nastręcza trudności, tak iż przychodzimy do układu następującego:

$$r \sin\theta = 2a \cos\varphi \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1')$$
$$2 \sin\theta \cos\varphi = 1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2')$$
$$2a \sin\theta = r \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3')$$

Z mnożenia ich stronami wynika: $\sin^3\theta = \frac{1}{2}$; że zaś z (3') podnosząc je do sześcianu, otrzymamy: $r^3 = 8a^3 \sin^3\theta = 4a^3$, przeto:

$$(r \sin\theta)^3 = 2a^3 \qquad \text{c. b. d. o.}$$

Hippokrates z Chiosu, koło r. 420 przed Chr., uczynił ważne spostrzeżenie, że zagadnienie Delijskie sprowadza się do wyznaczenia dwu średnich proporcjonalnych między odcinkiem danym a podwojonym; jakoż, jeżeli $\div\!\!\div\; a : x : y : 2a$, wówczas $x = a\sqrt[3]{2}$. Odkrycie to było podstawą całego szeregu nowych roztrząsań.

Przedewszystkiem, jeżeli $\div\!\!\div\; a : x : y : 2a$, to:

$$1)\ x^2 = ay,\quad 2)\ y^2 = 2ax,\quad 3)\ xy = 2a^2.$$

Z zestawienia równań (1) i (2) czytamy, że:

1. Dwie parabole o wierzchołku wspólnym, osiach wzajemnie prostopadłych, z których druga ma szerokość ogniskową (*latus rectum*) dwakroć większą, niż pierwsza, przecinają się w punkcie, którego odległość od osi pierwszej paraboli stanowi krawędź sześcianu, dwakroć większego od sześcianu, zbudowanego na szerokości ogniskowej tejże paraboli.

Równania (1) i (3) łącznie wskazują:

2. Parabola o szerokości ogniskowej a oraz hyperbola równoboczna o osi rzeczywistej $4a$, za asymptoty mająca oś paraboli i styczną do niej w wierzchołku, przecinają się w punkcie, którego odległość od osi paraboli stanowi krawędź sześcianu, dwakroć większego niż sześcian o krawędzi a.

Z ogólniejszego stosunku $\div\!\!\div\; a : x : y : b$ wynika:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b} = \frac{a-y}{x-b}.$$

Stąd m. in. przychodzimy do dwóch równań

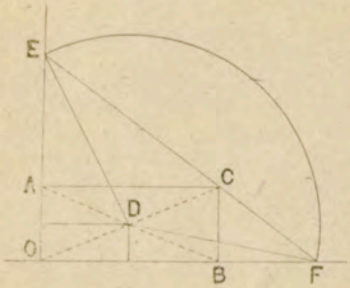
$$xy = ab, \qquad x^2 + y^2 = ay + bx,$$

które wskazują, że:

3. Hyperbola równoboczna, poprowadzona przez wierzchołek prostokąta, zbudowanego na odcinkach a i b, mająca zaś za asymptoty proste, na których leżą wyprowadzone z przeciwległego wierzchołka boki tegoż prostokąta, opisany na nim okrąg przecina w punkcie, którego odległości od asymptot stanowią dwie średnie proporcjonalne między odcinkami a i b.

Twierdzenia 1) i 2) wygłosił Menechmus (r. 340 przed Chr.), odkrywca i pierwszy badacz przekrojów stożkowych; twierdzenie 3) po raz pierwszy znajdujemy w dziele: „Opus geometricum quadraturae circuli" Grégoire'a de Saint Vincent (1647); analogiczne twierdzenie, z zamianą hyperboli na parabolę, po raz pierwszy drogą analityczną otrzymane, uwzględnił Descartes w swej klasycznej „Géomètrie" (1659).

Zagadnienie dwu średnich proporcjonalnych, jako zagadnienie st. 3-go, również jak zagadnienie Delijskie, w zakresie prostych i okręgów jest nierozwiązalne. Doświadczalnie się o tem przekonali liczni greccy geometrzy, stale podczas swych rozwiązań natrafiając na jakiś dodatkowy warunek; stosownie do sposobu załatwienia się z tym ostatnim, możemy rozróżnić trzy kategorje podobnych rozwiązań: 1) przez proste założenie, że warunkowi temu stało się zadość, 2) przez wprowadzenie nowej krzywej (tu przedewszystkiem należą cztery podane przed chwilą rozwiązania z pomocą stożkowych), 3) rozwiązania mechaniczne.



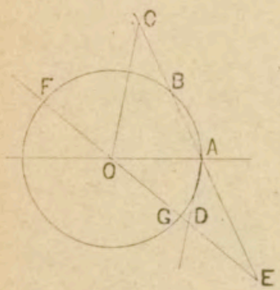
Rys. 1.

Z rozwiązań pierwszej kategorji mamy do zaznaczenia rozwiązanie Apolloniusza (koło r. 200 przed Chr.). Na odcinkach $OA = a$ i $OB = b$ (rys. 1) zbudujmy prostokąt $OACB$ i ze środka jego D zatoczmy łuk tak obranym promieniem, by przedłużenia prostych OA i OB przeciął on w punktach E i F, wraz z wierzchołkiem C leżących na jednej prostej; o ile taki punkt uda się nam znaleźć, odcinki $BF = x$ i $AE = y$ będą szukanemi odcinkami. Jakoż, z podobieństwa $\triangle\ BCF$ i AEC, mamy naprzód $a : x = y : b$. Następnie, odcinki $DF = DE$, jako promienie tegoż łuku, stanowią zaś one przeciwprostokątne trójkątów prostokątnych, których przyprostokątnemi są $\frac{a}{2}$ i $x + \frac{b}{2}$ oraz $\frac{b}{2}$ i $y + \frac{a}{2}$, tak iż $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{a}{2}\right)^2$ czyli $x(x + b) = y(y + a)$. Z poprzedniej proporcji wynika $\frac{a}{x} = \frac{y}{b} = \frac{a+y}{x+b}$, z nowej zaś równości $\frac{y+a}{x+b} = \frac{x}{y}$, tak iż ostatecznie $\because\ a : x : y : b$, c. b. d. o.

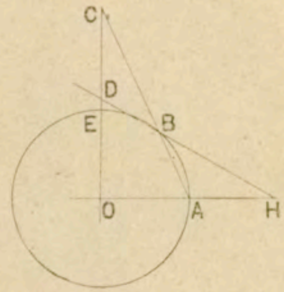
Tu należą również rozwiązania Viète'a („Opera math." 1646) i Newtona („Arithmetica Universalis", 2 ed. 1728).

Viète z dowolnego punktu O zatacza okrąg promieniem $OA = \frac{b}{2}$ (rys. 2) i prowadzi cięciwę $AB = a$, przedłużając ją do punktu C tak, aby $BC = AB$; prowadzi następnie prostą $AD \parallel CO$, wreszcie na przedłużeniu CA wyznacza punkt E, taki, aby, jeżeli prosta OE przecina okrąg w punktach F i G, prostą zaś AD w punkcie D, był zaspokojony warunek $ED = \frac{b}{2}$; o ile taki punkt E uda się nam znaleźć, odcinki $GE = x$ i $AE = y$ będą szukanemi.

Jakoż, z podobieństwa trójkątów EOC i EAD, wynika najpierw $\left(x + \frac{b}{2}\right) : (y + 2a) = b : 2y$ czyli $xy = ab$; z własności zaś odcinków siecznych w kole wynika $EF \,.\, EG = EB \,.\, EA$ czyli $(x + b)x = (y + a)b$. Zastępując równości iloczynów proporcjami i tworząc dla nich pochodne, otrzymamy ∺ $a : x : y : b$.



Rys. 2.



Rys. 3.

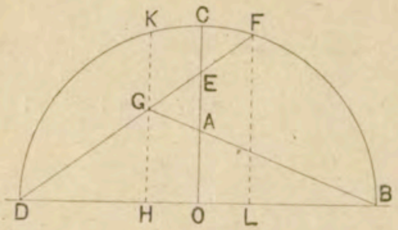
Newton, podzieliwszy odcinek $OH = b$ (rys. 3) w punkcie A napół, zatoczywszy promieniem OA koło i odciąwszy cięciwę $AB = a$, na jej przedłużeniu wyznacza punkt C, taki, że jeżeli przez D oznaczymy punkt przecięcia OC z przedłużeniem HB, został spełniony warunek $CD = \frac{b}{2}$; o ile taki punkt znaleźć potrafimy, odcinki $OD = x$ i $BC = y$ odpowiadać będą zadaniu.

Jakoż, z własności siecznych, wyprowadzonych z punktu C, zważając, że $OD + DC = OE + EC$, a $OE = DC = \frac{b}{2}$, tak iż $OD = EC = x$, mamy $(x + b)x = (y + a)y$; oznaczając następnie kąty OHD, ABH i ODH odpowiednio przez α, β i γ, mamy $\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\gamma}$, $\frac{b}{2\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{y}{\sin\gamma}$, tak iż $\frac{a}{x} = \frac{y}{b}$; dalej—jak u Viète'a.

Przekonamy się wkrótce, że rozwiązania Viète'a i Newtona można zaliczyć także i do rozwiązań drugiej kategorji, t. j. do rozwiązań z pomocą konchoidy.

Do drugiej kategorji, prócz rozwiązań przez stożkowe, należą rozwiązania Dioklesa i Nikomedesa.

Diokles, na ramionach kąta prostego (rys. 4) odciąwszy dane odcinki $OA = a$ i $OB = b$ (z których $a < b$), z punktu O, jako ze środka, promieniem b zatacza półokrąg, przecinający przedłużenie boków OA i BO w punktach C i D; poczem na odcinku AC wyznacza taki punkt E, aby, jeżeli przez F i G oznaczymy przecięcia prostej DE odpowiednio z okręgiem i przedłużeniem prostej BA, było $EF = EG$; jeżeli taki punkt E znajdziemy, wówczas odcinek OE będzie drugą z dwu średnich proporcjonalnych między a i b, t. j. $OE = \sqrt[3]{ab^2}$.



Rys. 4.

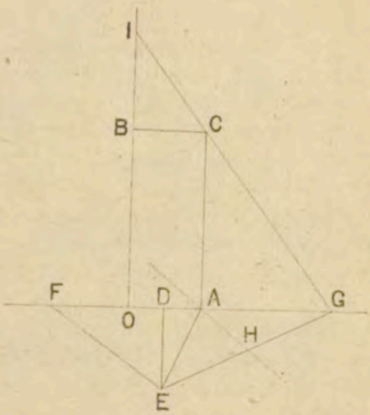
Kładąc $OE = y$, $HG = u$, $HO = v$, z widocznego podobieństwa dwóch par trójkątów mamy $y : u = b : (b - v)$; $a : u = b : (b + v)$, skąd $v = b \cdot \frac{y - a}{y + a}$ i $u = \frac{2ya}{y + a}$; z własności zaś siecznych w kole wynika $EF \cdot ED = b^2 - y^2$; lecz $ED = \sqrt{b^2 + y^2}$, według założenia zaś $EF = EG$, ostatni zaś odcinek stanowi przeciwprostokątną w trójkącie, zbudowanym na przyprostokątnych $HO = v$ i $OE - HG = y - u$, tak iż $b^2 - y^2 = \sqrt{b^2 + y^2} \cdot \sqrt{v^2 + (y - u)^2}$; kładąc powyższe wartości na u i v, znajdziemy stąd $y^3 = ab^2$, c. b. d. o.

W celu wyznaczenia punktu E, Diokles zbudował swą „cissoidę”, określając ją w sposób następujący: W półkolu DCB prowadzi on, symetrycznie do promienia OC, dwie prostopadłe HK i LF do średnicy DB; prosta DE, łącząca koniec średnicy D ze szczytem dalszej prostopadłej F, bliższą prostopadłą HK przetnie w punkcie G, stanowiącym jeden z punktów cissoidy. Prowadząc w temże półkolu cały szereg takich par prostopadłych i z każdą z nich postępując podobnie, otrzymamy w ćwiartce koła $DOCK$ szereg odosobnionych punktów takich, jak G; łącząca je ciągła linja będzie odnogą cissoidy, leżącą we wspomnianej ćwierci koła. Stąd wnosimy, że punkt E można określić jako przecięcie promienia OC z prostą, łączącą D z punktem cissoidy, leżącym na przedłużeniu prostej BA.

Nikomedes, którego sposób Cantor nazywa najbardziej pomysłowym ze wszystkich starożytnych, na odcinkach $OA = 2a$ i $OB = 2b$ (rys. 5) budował prostokąt $OACB$, ze środkowego punktu D odcinka OA wznosił prostopadłą, wyznaczając na niej taki punkt E, aby było $AE = b$, poczem, na przedłużeniu prostej AO odciąwszy $OF = 2a$, punkty F i E łączył ze sobą, do otrzymanej zaś prostej przez A prowadził równoległą; wreszcie na przedłużeniu prostej OA wyznaczał taki punkt G, aby, jeżeli przez H oznaczymy punkt, w którym taż równoległa przetnie prostą EG, dał się zaspokoić warunek $HG = b$. W razie znalezienia takiego punktu G, otrzymamy szukaną parę średnich proporcjonalnych między $2a$ i $2b$ w postaci odcinków $AG = v$ i $BI = u$, gdzie I oznacza punkt, w którym prosta GC przecina przedłużenie boku OB.

Z podobieństwa trójkątów AGC i BCI mamy $2a : u = v : 2b$. Przedstawiwszy tę poporcję w postaci $4a : u = v : b$ i zważając, że $4a = FA$, $v = AG$ i $b = HG$, wnosimy $EH = u$; że zaś odcinek ED jest wspólną przyprostokątną trójkątów EAD i EGD, przeto $b^2 - a^2 = (u + b)^2 - (a + v)^2$ czyli $(u+2b)u = (v + 2a)v$, skąd w zestawieniu z pierwotną proporcją łatwo już otrzymamy $\div\!\!\div\, 2a : u : v : 2b$, c. b. d. o.

Dla wyznaczenia punktu G, Nikomedes skonstruował „konchoidę”, określając ją jako miejsce geometryczne końców odcinków równej długości, odmierzonych od stałej poprzecznej (kierownicy) na poszczególnych promieniach pęku, wyprowadzonego ze stałego punktu (ogniska). W powyższej konstrukcji ognisko takie stanowi punkt E, kierownicę — prosta AH, stała zaś długość odmierzonych odcinków wynosi b; możemy więc punkt G określić jako przecięcie prostej OA z konchoidą.



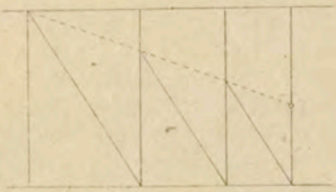
Rys. 5.

Łatwo zauważyć, że w konstrukcji Viète'a punkt E daje się otrzymać z pomocą konchoidy, mającej za kierownicę prostą AE, w konstrukcji zaś Newtona— HD, przyczem w obu razach środek koła stanowi ognisko, promień zaś—stałą długość (parametr).

Nikomedesowi zawdzięczamy nadto przyrząd, umożliwiający kreślenie konchoidy dla dowolnego parametru i dowolnej odległości ogniska od kierownicy.

Jako przykład rozwiązania mechanicznego, wymienimy spostrzeżenie Platona, który (koło r. 360 przed Chr.) zauważył, że, jeżeli zbudujemy dwa trójkąty prostokątne o wspólnej przyprostokątnej, tak, aby pozostałe przyprostokątne były wzajemnie równoległe, przeciwprostokątne zaś — prostopadłe, wówczas wewnętrzne, t. j. przyległe do wierzchołków kątów prostych, odcinki przeciwprostokątnych będą stanowiły parę średnich proporcjonalnych między odcinkami zewnętrznemi. W celu otrzymania pierwszych dla każdej pary danych odcinków Grecy posiadali odpowiedni przyrząd mechaniczny, co do którego wszakże żadnych szczegółów nie posiadamy.

W celu mechanicznego wyznaczenia pary średnich proporcjonalnych dla danych dwu odcinków Eratostenes zbudował przyrząd, który nazwał „mesolabium” (t. j. otrzymywaczem ilości środkowych). Składał się on z trzech równych blaszek prostokątnych, włożonych w wyżłobienie okalającej je ramki, tak iż częściowo mogły się pod siebie podsuwać (rys. 6); na każdej blaszce wyryta była jedna z jej przekątnych, np. pochylona nalewo, i stosownie do tego każda blaszka dawała się podsuwać pod blaszkę, położoną od niej nalewo. Lewa krawędź pierwszej (górnej) blaszki, w skali umówionej, przedstawiała długość większego z danych odcinków; długość mniejszego otrzymywano na prawej krawędzi ostatniej (dolnej) blaszki zapomocą przesuwalnego wzdłuż tejże krawędzi guziczka. Z pomocą odpowiedniego układu trybików i drążków, w miarę przesuwania guziczka wzdłuż swej krawędzi, przesuwały się i blaszki w wyżłobieniu ramki, lecz w ten sposób, iż prawa krawędź pierwszej blaszki z przekątną drugiej, a prawa krawędź drugiej z przekątną trzeciej przecinały się w punktach, stale znajdujących się na prostej, łączącej końce danych odcinków. Prosty przegląd trójkątów podobnych, jakie przy podobnym układzie wypadają, wskazuje wyraźnie, że wspomniane punkty przecięcia się prawej krawędzi jednej blaszki z przekątną niższej wyznaczają końcowe punkty odpowiednich odcinków szukanych.



Rys. 6.

Przyrząd ten cieszył się taką wziętością, że od niego samo zagadnienie dwu średnich proporcjonalnych znane było u Greków jako zagadnienie mesolabium.

T. GUTKOWSKI.

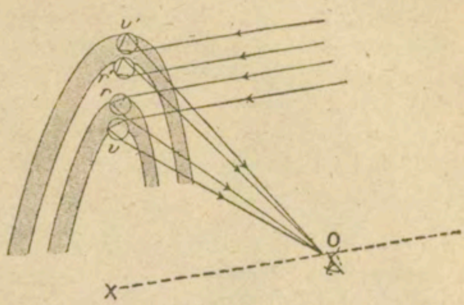
TEORJA TĘCZY.

W naszych podręcznikach szkolnych teorja tęczy jest zwykle podawana błędnie, a w każdym razie niewystarczająco. To też podajemy tu dokładną teorję tego zjawiska.

Istnieją zwykle dwie tęcze o różnym blasku, przyczem tęcza jaśniejsza jest wewnątrz ciemniejszej. W obydwu tęczach widać jest wszystkie barwy widma, otrzymane przez rozszczepienie barwy białej.

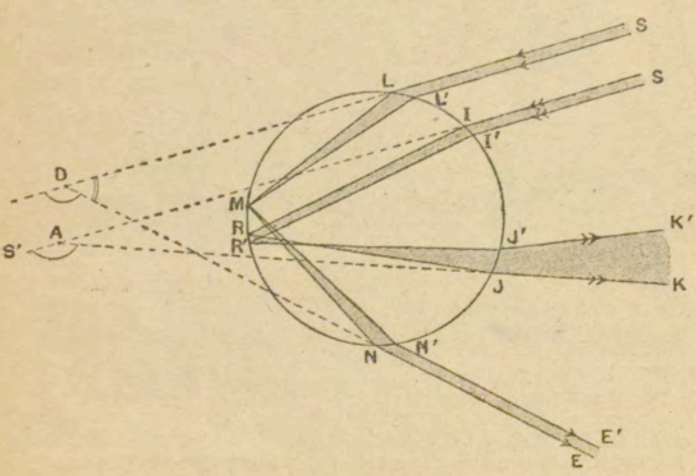
Porządek barw w obydwu tęczach jest inny. W tęczy wewnętrznej barwa fiołkowa jest wewnątrz, a czerwona nazewnątrz, w zewnętrznej zaś naodwrót.

Pomiary dają, że wszystkie części nieba, posyłające do oka jedną i tę samą barwę, znajdują się na powierzchni stożkowej, której oś OX (rys. 1) jest równoległa do promieni słonecznych. Kąt tego stożka wynosi 40° (vOX) dla barwy fiołkowej pierwszej tęczy i 42° (rOX) dla barwy czerwonej tej samej tęczy. Dla tęczy zewnętrznej te kąty są 51° ($r'OX$) dla czerwonej barwy i 54° ($v'OX$) dla fiołkowej. Szerokość pierwszej tęczy wynosi 2°, a drugiej 3°. Jeśli słońce jest wyżej ponad horyzontem, jak 42°, to pierwsza tęcza nie może być widziana, druga zaś nie może być widziana, jeśli słońce znajduje się wyżej nad horyzontem, jak 54°.



Rys. 1.

Objaśnienie zjawiska tęczy. — Promień świetlny, który pada na kroplę, załamuje się wewnątrz jej, następnie odbija się raz lub dwa razy, tracąc przy każdem odbiciu na blasku, ponieważ siła światła rozdziela się pomiędzy promieniem odbitym i załamanym, następnie wychodzi z kropli.



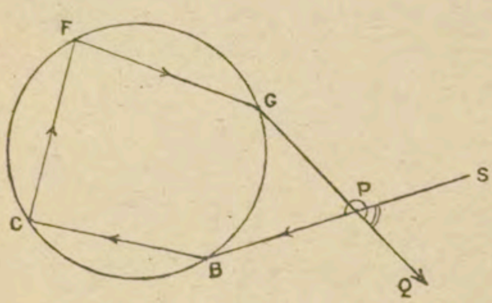
Rys. 2.

Rozpatrzmy najpierw wypadek, w którym promień SI (rys. 2) wychodzi z kropli w J po jednem odbiciu w R. Kąt odchylenia promienia jest $S'AJ$. Można dowieść, że w jednakowym kierunku promienia padającego *odchylenie jest zmienne i zależy od punktu I, w którym promień przebija powierzchnię kropli.* Wobec tego promień SI', równoległy do SI, po wyjściu z kropli, posiada kierunek $J'K'$ różny od JK. Inaczej mówiąc, pęk promieni równoległych, nawet bardzo wąski, po wyjściu z kropli, jest zwykle pękiem *rozchodzącym* się. Jeśli ten pęk pada do oka, znajdującego się dość daleko od kropli, to otrzymuje zbyt mało światła, ażeby otrzymało wrażenie, wobec tego kropla wydaje się ciemną.

Ale można dowieść, że odchylenie *przechodzi przez minimum* dla pewnego położenia punktu I, t. j. dla pewnej wartości kąta padania, niech promień SL będzie promieniem, dającym minimum odchylenia. Ponieważ najczęściej funkcja zmienia się bardzo powoli w pobliżu minimum lub maximum, to promień SL', bliski do SL, po wyjściu z kropli ma kierunek $N'E'$ prawie równoległy do NE. Jeśli więc oko znajduje się w kierunku NE, to widzi kroplę jasną. To też ten promień nosi nazwę promienia *działającego.*

Wreszcie można udowodnić, że *kąt SDE* (spełnienie kąta odchylenia) *pomiędzy promieniem padającym a promieniem działającym zależy od barwy*, z powodu różnych załamań dla tych barw; ten kąt jest 40^0 dla barwy fiołkowej i 42^0 dla czerwonej.

Teraz bardzo łatwo wyjaśnić zjawisko tęczy. Wszystkie krople, które znajdują się na tworzących stożka, pochylonych o 40^0 do osi OX (rys. 1), przechodzącej przez słońce i przez oko obserwatora, posyłają do oka promienie fiołkowe i wydają się fiołkowemi; również wszystkie krople, które znajdują się na tworzących stożka, pochylonych o 42^0 do osi OX, posyłają do oka promienie czerwone i wydają się czerwonemi. To samo da się powiedzieć o barwach pośrednich. Tak się tłumaczy tworzenie się tęczy *).



Rys. 3.

*) W rozumowaniu naszem przypuszczaliśmy, że wszystkie promienie, wysyłane przez słońce, są równoległe. W rzeczywistości zaś średnica widoczna słońca nie jest zero, wobec tego dla każdej barwy otrzymamy nie jeden łuk, lecz pasmo łuków, którego szerokość kątowa równa się widocznej średnicy słońca, t. j. m. w. 32'. Te pasma zachodzą częściowo jedno na drugie i wobec tego widmo nie jest czyste.

Tworzenie się drugiej tęczy tłumaczy się w podobny sposób, rozważając promienie, wychodzące z kropli po dwukrotnem odbiciu (rys. 3). Ale w tym wypadku, wartość kąta *SPQ*, utworzonego przez promienie działający i padający, jest większy dla fiołkowego, a mniejszy dla czerwonego i wobec tego barwa fiołkowa znajduje się nazewnątrz, zaś czerwona wewnątrz.

TADEUSZ GUTKOWSKI.

METODY ROZWIĄZYWANIA ZADAŃ ARYTMETYCZNYCH.

Wadą najbardziej rozpowszechnioną w wykładzie nauk ścisłych jest unikanie, a właściwie niepodawanie wcale metody dochodzenia drogą świadomą do celu. A co może być bardziej pożyteczne, bardziej kształcące, jak właśnie posiadanie takiej metody.

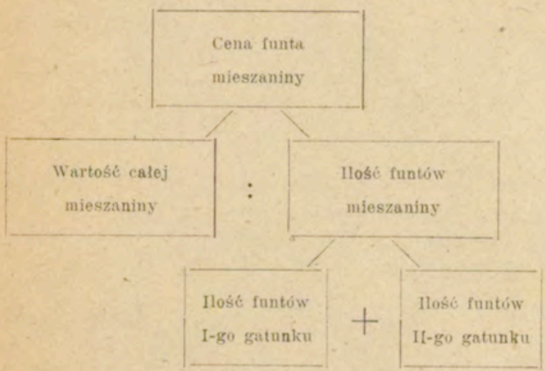
Zadania arytmetyczne można rozbić na dwa typy. Do jednego można odnieść te, które bez większego wysiłku daje się rozwiązać bez równań, do drugiego te, które łatwiej jest rozwiązywać zapomocą równań. Pierwsze z nich są rozwiązywane u nas do klasy drugiej włącznie, drugie w czwartej klasie zaledwie w ciągu paru miesięcy. Na pierwsze poświęca się czasu bez porównania dużo więcej, na drugie zbyt mało. Ale pomimo to pierwszy typ zadań nie jest należycie opanowany. Dzieje się to dzięki temu, że przy ich rozwiązywaniu nie zaznajamia się z żadną metodą. Cały swój wysiłek nauczyciel kieruje w stronę ilości przerobionych zadań, licząc na to, że uczeń nabierze wprawy w rozwiązywaniu. Ale i ta wprawa jest wogóle wątpliwa z tego powodu, że zwykle w zbiorach zadań są drukowane odpowiedzi. Odpowiedzi podawane sprawiają to, że uczeń przyzwyczaja się zbyt mało dowierzać samemu sobie, że często robi zadanie półświadomie. W braku podawanych metod sam w sobie wyrabia metodę, ale ta polega jedynie na tem, że dąży, aby zadanie wypadło podług odpowiedzi. Oczywiście, taka metoda nic nie jest warta, a wobec tego wprawa, nabyta w rozwiązywaniu i liczeniu, jest wątpliwa. To też nic dziwnego, że stale uskarżamy się na brak wprawy w liczeniu u uczni, pomimo że czasu na to poświęca się niemało. A cóż powiedzieć o drugim typie, tam nawet nie dajemy możności nabycia tej wątpliwej wprawy. Drugi typ zadań wymaga więcej czasu, niż mu się poświęca i powinien być rozwiązywany w klasach młodszych metodą zadań odwróconych. Do pierwszego typu należy stosować metodę analityczną.

Ponieważ większość naszych nauczycieli nie studjowała metodyki, więc pozwolę sobie przytoczyć tutaj zasady metody analitycznej, którą zwykle stosuję w wykładzie. Rozpatrzę ją na konkretnym przykładzie, który miałem możność przygodnie zastosować w początku obecnego roku szkolnego z jednym znajomym chłopczykiem, uczniem klasy I-ej jednej z tutejszych szkół, który biedził się nad zadaniem treści m. w. następującej: Kupiec zmieszał 9 funtów towaru po 40 m. za funt z 15 funtami towaru po 24 m. za funt. Ile marek kosztuje funt mieszaniny? Chłopiec ten próbował rozwiązać zadanie najróżniejszemi sposobami, ale na właściwy nie mógł wpaść.

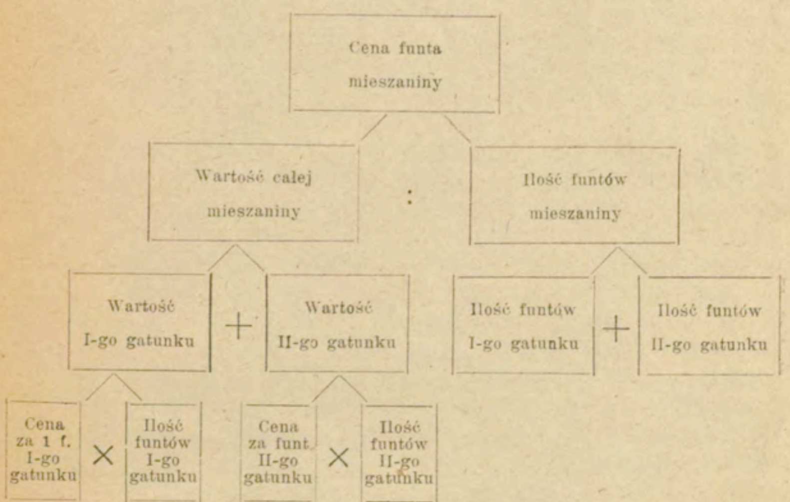
Postanowiłem mu przyjść z pomocą. Pomoc moja polegała na tem jedynie, żeby zmusić go iść świadomie do celu. To też postawiłem mu szereg pytań: „Co masz znaleźć?" na co odpowiedział: „Ile marek kosztuje funt mieszaniny". „Czego potrzebowałbyś, żeby znaleźć cenę funta?" „Potrzebowałbym wiedzieć, ile kosztowała cała mieszanina i ile jej było". „A czy potrafisz znaleźć ilość mieszaniny?" Odpowiedź dał mi, oczywiście, dobrą. „No dobrze, a czego potrzebowałbyś, aby znaleźć, ile kosztowała mieszanina?" „Musiałbym wiedzieć, ile kosztował każdy gatunek", przyczem dodał z radością: „A już wiem, jak trzeba robić!" uprzedzając moje pytanie: „A jak znajdziesz wartość każdego gatunku?" Zadanie rozwiązaliśmy metodą analityczną. Jak widać z przytoczonego przykładu, metoda analityczna polega na tem, że uświadamiamy sobie dokładnie cel, do którego dążymy. W naszym przykładzie tym celem jest odnalezienie ceny funta mieszaniny. Gdy ten cel jest wyraźny, to zadajemy sobie pytanie: co powinniśmy zrobić, aby dopiąć tego celu?, na które mamy zwykle odpowiedź: celu tego dopniemy, jeśli znajdziemy takie a takie rzeczy, w naszym przykładzie, jeśli znajdziemy wartość całej mieszaniny i ilość jej funtów i t. d. Metodę analityczną można byłoby nazwać metodą rozwiązywania od końca.

Bardzo jest dobrze ujmować rozumowanie analityczne w schemat. Gdy dajemy odpowiedź na pierwsze pytanie, że dla znalezienia ceny funta mieszaniny powinniśmy wiedzieć wartość całej mieszaniny i jej ilość, to robimy następujący schemat:

Przy drugiej odpowiedzi uzupełniamy ten schemat tak:



W miarę dalszych odpowiedzi uzupełniamy schemat, który ostatecznie przedstawia się tak:



Schematyzowanie takie ma nie tylko tę zaletę, że uwidocznia lepiej analizę, ale również i tę, że przyzwyczaja dziecko do operowania wielkościami w postaci ogólnej, przygotowując grunt do używania liter.

Metoda zadań odwróconych wymaga zaznajomienia się z trzema rzeczami, bardzo zresztą prostemi. Pierwsza z nich to jest umiejętność ujęcia we wzór (nawiasy) kolejności działań, potrzebnych do rozwiązania. Trzeba więc, by uczeń potrafił to zrobić. Tak np. zadanie poprzednie dałoby:

$$(40 \times 9 + 24 \times 15) : (9 + 15),$$

co po wyliczeniu daje 30.

Dalej trzeba, aby uczeń potrafił rozwiązywać takie równania:

$$25 + x = 47; \quad (35 + x) \times 2 = 90 \text{ i t. p.}$$

Równania te powinny być rozwiązywane zawsze propedeutycznie. Tak np. drugie z nich należy rozwiązywać tak: Jeśli liczbę niewiadomą $35 + x$ pomnożymy przez 2, to otrzymamy 90, czyli że ta liczba niewiadoma jest 90 : 2, albo:

$$35 + x = 45.$$

Teraz widzimy, że x jest składnikiem takim, który razem z 35 daje 45, czyli $x = 45 - 35 = 10$.

Trzecią rzeczą jest umiejętność rozwiązywania zadań i pisania wzorów w postaci ogólnej. Jeśli uczeń umie pisać wzory w postaci liczb i jeśli umie wykonać schemat rozumowania analitycznego, to właściwie umysł jego jest zupełnie dostatecznie przygotowany do pisania wzorów w postaci ogólnej. Wzory te mogą być pisane na razie całemi wyrazami, a potem mogą być uproszczone zapomocą oznaczania pewnej liczby tylko jedną literą.

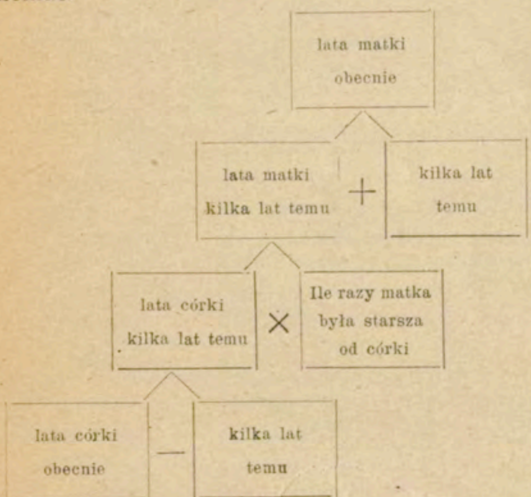
Gdy te trzy rzeczy są opanowane, to należy zapoznać uczniów ze sprawdzeniem zadania sposobem odwrócenia. Gdyby chodziło o zadanie, któreśmy rozwiązywali, to można byłoby odwrócić je, przyjąwszy odpowiedź otrzymaną jako wiadomą, a jedną z danych, jako niewiadomą. Niech np. liczba 40 będzie niewiadoma, czyli układamy zadanie: Kupiec zmieszał 9 funtów towaru po niewiadomej cenie z 15 funtami towaru po 24 m. za funt i otrzymał mieszaninę po 30 m. za funt. Ile kosztował funt pierwszego gatunku? Zadanie to można byłoby rozwiązać sposobem analitycznym. Jednakże można byłoby również skorzystać ze wzoru ułożonego poprzednio, w którym zamienimy 40 na x, otrzymamy:

$$(x \times 9 + 24 \times 15) : (9 + 15) = 30.$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie sposobem zawsze propedeutycznym i otrzymujemy 40, co sprawdza zadanie.

Jeśli uczeń dobrze opanował odwracanie zadań, to gdy ma zadanie trudniejsze do rozwiązania, gdzie i metoda analityczna może mu nie wystarczyć, to układa wtedy jedno z zadań odwróconych, któreby potrafił rozwiązać sposobem analitycznym, otrzymuje wzór, a z niego równanie dla zadania pierwotnego. Odwracanie zadań powinno się robić w klasach I i II, a nawet, jeśli chodzi tylko o sprawdzenie, to i wcześniej. Tym sposobem układanie równań jest opanowane już w klasach młodszych. Czas odpowiedni w klasach starszych powinien być raczej poświęcony na metody rozwiązywania równań.

Jako przykład stosowania metody zadań odwróconych rozwiążę w krótkości zadanie treści następującej: Matka ma 35 lat, a córka 7; ile lat temu matka była 8 razy starsza od córki? Zadanie to byłoby trudno rozwiązać metodą analityczną. Jednakże zadanie to posiada 3 zadania odwrócone, ponieważ zawiera trzy wielkości wiadome. Zadania odwrócone rozwiązuje się bardzo łatwo metodą analityczną. Jedno z takich zadań byłoby takie, w którem te kilka lat temu są wiadome, a niewiadome są np. lata matki. Wtedy metoda analityczna dałaby schemat:



Podstawienie wielkości wiadomych i niewiadomej w postaci znaku x daje:

$$(7 - x) \times 8 + x = 35.$$

Stosując własność rozdzielności do $(7 - x) \times 8$, otrzymamy:

$$7 \times 8 - 8 \times x + x = 35, \quad \text{albo} \quad 56 - 8 \times x + 1 \times x = 35.$$

Stosując własność rozdzielności do $8 \times x$ i $1 \times x$, otrzymamy.

$$56 - (8 - 1) \times x = 35, \quad \text{albo} \quad 56 - 7 \times x = 35.$$

Niewiadoma odjemna $7 \times x$ jest $56 - 35 = 21$, więc $7 \times x = 35$. Skąd $x = 35 : 7 = 5$.

To są dwie główne metody rozwiązywania zadań, jakie powinny być znane uczniom młodszych klas. Metody te powinny być bardzo dobrze opanowane, boć przecież w każdem zagadnieniu stosujemy jedną z nich lub obie. Z niemi uczeń powinien obcować przez dłuższy czas, aby były dla niego tak bliskie, jak tablica mnożenia lub też reguły rozwiązywania równań. I tylko dłuższe posługiwanie się temi metodami może doprowadzić do tego. Na coś podobnego do drugiej z tych metod poświęca się trochę czasu w klasie IV-ej, ale to jest zupełnie niewystarczające, aby metoda ta była należycie opanowana, szczególniej, że układanie samych równań nie jest zwykle traktowane jako metoda.

Z WYDAWNICTW.

Jan Grabowski. — Siatki do sklejania brył geometrycznych. Nakład Stow. Spółdzielczego „Nasz Sklep".

Jednem z zadań propedeutyki geometrji jest wyrobienie w uczniu pojęcia przestrzennego. Nic nie jest w stanie tego zrobić tak, jak stałe obcowanie ucznia z bryłami najróżniejszych postaci, jak tworzenie przez samych uczni tych brył i obserwowanie sposobu powstawania ich. Przypuszczam, że głównie tę myśl miał autor, opracowując swe siatki. Gotowe siatki mają tę zaletę, że nie wymagają straty czasu na rysowanie siatki i że wobec tego pozwalają uczniowi odtworzyć sporą liczbę brył, obejrzeć je dokładnie i zapoznać się z niemi. Gotowa siatka ułatwia również wypełnienie samego rysunku przez ucznia, co może być bardzo pożyteczne przy powiększaniu lub zmniejszaniu brył. Bez wątpienia, siatki p. J. Grabowskiego przyczynią się w znacznej mierze do podniesienia wykładu geometrji w naszych szkołach, zwłaszcza, że przedstawiają sobą jedyne nasze wydawnictwo. To też należy je polecić bardzo gorąco do użytku szkolnego. Siatki te zostały wydane w trzech arkuszach. Arkusz I: 1 Sześcian, 2 Graniastosłup o kwadratowej podstawie, 3 Czworościan, 4 Ośmiościan, 5 Czternastościan półforemny, 6 Ośmiościan półforemny, 7 Czternastościan półforemny, 8 Dwunastościan foremny, 9 Dwudziestościan foremny. Arkusz II: 10 Graniastosłup o kwadratowej podstawie pochyły, 11 Graniastosłup o trójkątnej podstawie pochyły, 12 Pień stożkowy, 13 Pień ostrosłupowy, 14 Dwa graniastosłupy trójkątne, składające się na graniastosłup o kwadratowej podstawie, 15 Trzy ostrosłupy o trójkątnej podstawie, składające się na graniastosłup, 16 Dwa ostrosłupy trójkątne, składające się na ostrosłup kwadratowy, 17 Dwa graniastosłupy o kwadratowej podstawie, składające się na graniastosłup pochyły, 18 Walec pochyły, 19 Stożek prosty. Arkusz III: 20 Pień stożka prostego, ściętego płaszczyzną nierównoległą do podstawy, 21 Stożek pochyły, 22 Walec prosty, 23 Sześcian (krawędź 10 cm.), z którego wyjęty jest sześcian o krawędzi = 5 cm., 24 Graniastosłup prosty, ścięty płaszczyzną pochyłą do podstawy, 25 Ostrosłup o trójkątnej podstawie prosty, 26 takiż pochyły, 27 Ostrosłup o kwadratowej podstawie prosty, 28 Ostrosłup o trójkątnej podstawie pochyły, 29 Prostopadłościan, 30 Cztery graniastosłupy, składające się razem na graniastosłup sześciokątny, 31 i 33 Stożek prosty przecięty płaszczyzną, pochyloną pod kątem ostrym do podstawy, 32 i 34 Stożek prosty, przecięty płaszczyzną, prostopadłą do podstawy, 35 Graniastosłup o trójkątnej podstawie.

Jak widzimy, spis ten przedstawia sobą bogaty materjał i odpowiada nie tylko celowi zaznaczonemu w początku, ale i wielu innym, jak np. zaznajamia z figurami równoważnemi, z figurami umiarowemi, z kątami najróżniejszych wielkości i t. p.

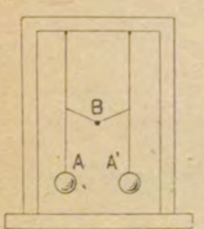
W tem samem wydaniu wyszły siatki kryształów tego samego autora.

T. Gutkowski.

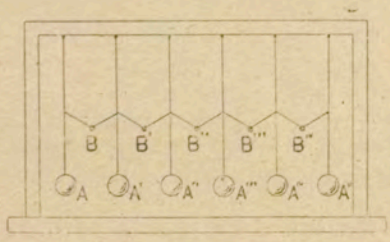
PRZYRZĄD DO ILUSTRACJI PRAWA CORNU (REZONANSU).

W № 5 N. M. i F. podaliśmy prosty przyrząd do wykazania rezonansu. Oto jeszcze jeden bardzo prosty.

Na ramce zawieszamy dwa wahadła A i A' (rys. 1) jednakowej długości. Wahadła te łączymy nicią z ciężarkiem B. Jeśli puścić w ruch jedno z wahadeł, to ono będzie poszarpywać drugie rytmicznie i to drugie zacznie się wahać, pochłaniając energję pierwszego wahadła, które powoli ustaje. Teraz waha się



Rys. 1.

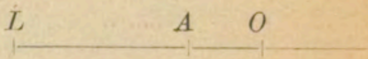


Rys. 2.

tylko drugie. Poszarpywania jego wprawiają w ruch znowu pierwsze wahadło i t. d. Gdyby zrobić dwa wahadła różnej długości, to wahania jednego z nich nie wprawiałyby w ruch drugiego. Jeśli zawiesić szereg jednakowych wahadeł, jak na rys. 2, i puścić w ruch jedno ze skrajnych, to można zauważyć, jak wahadła sąsiednie wprawiają się stopniowo w ruch.

ROZWIĄZANIA ZADAŃ (№ 5 N. M. i F.).

1.—Niech L oznacza lokomotywę, odcinek OA — długość fali, t — okres wahań, v — prędkość dźwięku. Gdy lokomotywa zbliża się z prędkością v_1, to przebiega w ciągu czasu t drogę $v_1 t$. O tę długość fala skraca się, przeto jest:



$$OA = \lambda_1 = (v - v_1)\, t,$$

lecz $t = {}^1/n$ i $v = n_1\lambda_1$, gdzie n = liczba drgań na sek. dźwięku gwizdka, a n_1 = liczba drgań na sek. dosięgających obserwatora, więc:

$$n_1 = n \frac{v}{v - v_1}.$$

Gdy lokomotywa się oddala, to droga w czasie t przebyta jest $v_1 t$ i o tę długość fala wzrasta, więc:

$$OA = \lambda_2 = (v + v_1)\, t,$$

ponieważ, jak wyżej, $t = {}^1/n$ i $v = n_2\lambda_2$, gdzie n_2 — liczba drgań dosięgających obserwatora, więc:

$$n_2 = n \frac{v}{v + v_1}.$$

Z powyższego wynika, że w pierwszym okresie obserwator słyszy dźwięk o n_1 drganiach, a w drugim — o n_2 drganiach. Stosunek $n_1 : n_2$ stanowi o wielkości obniżenia się tonu, czyli o jego interwale:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{n \dfrac{v}{v - v_1}}{n \dfrac{v}{v + v_1}} = \frac{v + v_1}{v - v_1}.$$

Z danych w zadaniu mamy interwał $\frac{10}{9}$ lub $\frac{9}{8}$ i prędkość głosu 330 m/sk.; podstawiając te wartości w ostatni wzór, otrzymamy:

$$\frac{10}{9} = \frac{330 + v_1}{330 - v_1};\ 3300 - 10v_1 = 2970 + 9v_1;\ v_1 = \frac{330}{19} = 17.4 \text{ m/sk.}$$

$$\frac{9}{8} = \frac{330 + v_1}{330 - v_1};\ 2970 - 9v_1 = 2640 + 8v_1;\ v_1 = \frac{330}{17} = 19.4 \text{ m/sk.}$$

Przy założeniu, że obserwator zauważył obniżenie się dźwięku dokładnie o cały ton, lecz nie wskazał jego położenia w skali muzycznej, otrzymamy prędkość pociągu albo 17 . 4 m/sk. albo 19 . 4 m/sk. Gdyby zaś obserwator uważał jakiś pośredni interwał między $\frac{10}{9}$ i $\frac{9}{8}$ za cały ton, wtedy prędkość pociągu zawierałaby się między

17 . 4 m/sk. i 19 . 4 m/sk., a błąd zawierałby się w granicach 2 m., czyli prędkość znaleziona byłaby z dokładnością do 2 m.

Rozwiązanie nadesłali: *Wl. Mazurkiewicz* (samouk) i *Wl. Majewski.*

2. — Niech koło o środku O (czytelnik sam zrobi rysunek) przedstawia bilard, A — położenie kuli, zaś B i C punkty, w których kula odbija się i przechodzi przez położenie początkowe A, wtedy trójkąt ABC przedstawia drogę kuli. Trójkąt ten jest równoramienny o podstawie BC.

OA, OB i OC są dwusieczne trójkąta ABC. Niech OA przecina BC w D. Przyjmijmy $OD = x$, jako niewiadomą. Oznaczmy $OA = a$ i $OB = OC = r$.

Na zasadzie twierdzenia, że dwusieczna kąta tr-ta dzieli bok przeciwległy na odcinki proporcjonalne do boków przyległych, mamy:

$$\frac{a}{x} = \frac{AB}{BD}, \text{ albo } \frac{a^2}{x^2} = \frac{AB^2}{BD^2}.$$

Z trójkątów prostokątnych ODB i ADB mamy $BD^2 = r^2 - x^2$

$$AB^2 = BD^2 + (a+x)^2 = \sqrt{r^2 - x^2 + (a+x)^2} =$$
$$= \sqrt{r^2 - x^2 + a^2 + 2ax + x^2} = \sqrt{r^2 + a^2 + 2ax},$$

więc:

$$\frac{a^2}{x^2} = \frac{r^2 + a^2 + 2ax}{r^2 - x^2}; \quad x^2(r^2 + a^2 + 2ax) = a^2(r^2 - x^2).$$

Po przeniesieniu wyrazów na jedną stronę i wykonaniu uproszczeń, otrzymamy równanie:

$$(x+a)(2ax^2 + r^2x - ar^2) = 0.$$

Równanie to można rozwiązać i przedyskutować sposobem, podanym w № 1 N. M. i F.

Rozwiązanie nadesłali: *Wl. Mazurkiewicz* i *Wl. Majewski.*

3. — $\lambda \sin x + \cos x + 3\lambda - 1 = 0$.

Wprowadźmy φ i r takie, żeby:

$$\lambda = r \cos \varphi \quad \text{i} \quad 1 = r \sin \varphi,$$

t. j. tg. $\varphi = \frac{1}{\lambda}$, wtedy:

$$r \cos \varphi \sin x + r \sin \varphi \cos x + 3\lambda - 1 = 0,$$

albo

$$r \sin (\varphi + x) + 3\lambda - 1 = 0.$$

Skąd

$$\sin (\varphi + x) = \frac{1 - 3\lambda}{r}.$$

Żeby zadanie było możebne, należy aby

$$-1 \leqslant \frac{1 - 3\lambda}{r} \leqslant 1,$$

ale $r = \frac{\lambda}{\cos\varphi} = \lambda \sec\varphi = \lambda \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi} = \lambda \sqrt{+\frac{1}{\lambda^2}}$
$= \sqrt{\lambda^2 + 1}.$

Więc warunek możebności zadania jest:

$$-1 \leqslant \frac{1-3\lambda}{\sqrt{\lambda^2+1}} \leqslant 1,$$

lub też

$$\frac{(1-3\lambda)^2}{\lambda^2+1} \leqslant 1,$$

t. j.

$$1 - 6\lambda + 3\lambda^2 \leqslant \lambda^2 + 1$$
$$-6\lambda + 2\lambda^2 \leqslant 0$$
$$2\lambda(\lambda - 3) \leqslant 0$$
$$\lambda(\lambda - 3) \leqslant 0,$$

czyli

$$0 \leqslant \lambda \leqslant 3.$$

Rozwiązanie nadesłali: *Wł. Mazurkiewicz* i *Wł. Majewski.*

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA DLA UCZĄCEJ SIĘ MŁODZIEŻY.

1.—Na kole o promieniu R opisano trapez, w którym kąt przy podstawie równa się α. Wyznaczyć i zbadać długość środkowej linji tego trapezu, gdy kąt α przybiera wszystkie wartości możliwe, promień zaś pozostaje bez zmiany.

R. W.

2.—Na kole opisano trapez, w którym kąt przy podstawie równa się α. Wyznaczyć i zbadać stosunek tej podstawy do linji środkowej trapezu w zależności od kąta α.

R. W.

3.—Na kole o promieniu R opisano trapez, w którym kąt przy podstawie równa się α. Wyznaczyć i zbadać różnicę d między tą podstawą a linją środkową trapezu, gdy kąt α przybiera wszystkie wartości możliwe. Podać zależność między temi dwiema wartościami kąta α, przy których różnice d są równe według wartości bezwzględnej, lecz różne znakami.

R. W.

4.—Na kulistą kroplę wody (rys. 2 na str. 19) pada promień świetlny SI, załamuje się wewnątrz (IR), odbija się raz (RJ) i wychodzi, załamując się z kropli (JK). Dowieść, że odchylenie (kąt $S'AK$) promienia przechodzi przez minimum.

PROGRAM

MATEMATYKI W GIMNAZJACH I LICEACH WE WŁOSZECH.

GIMNAZJUM.

I klasa.—Arytmetyka praktyczna od numeracji do ułamków wyłącznie. Elementarne intuicyjne pojęcie punktu, prostej, płaszczyzny, wielokąta, koła, najprostszych brył, walca, stożka i kuli.

II klasa.—Ułamki zwyczajne i dziesiętne. Układ metryczny. Liczby wielorakie. Miary długości, kątów powierzchni i objętości.

III klasa.—Reguła wyciągania pierwiastka kwadratowego. Stosunki i proporcje. Początki kreślenia geometrycznego i ćwiczenia w pomiarach.

IV klasa (*2 godziny tygodniowo*).—*Arytmetyka teoretyczna.* Własności podstawowe pierwszych pięciu działań z liczbami całkowitemi. Cechy podzielności przez 2, 5, 4, 25, 3 i 9. Największy spólny dzielnik. Liczby pierwsze względem siebie. Najmniejsza spólna krotność.

Geometrja.—Proste i płaszczyzny. Odcinki i kąty. Proste prostopadłe. Trójkąty, ich własności i wypadki równości. Wielokąty. Proste równoległe. Suma kątów wewnętrznych trójkąta i wielokąta wypukłego. Równoległoboki i trapezy.

V klasa (*2 godziny tygodniowo*).—*Arytmetyka teoretyczna.* Ułamki i ich własności. Zasadnicze własności pierwszych pięciu działań z ułamkami. Krótki wykład własności działań z liczbami oderwanemi. Liczby dziesiętne. Dokładna lub przybliżona zamiana ułamka zwyczajnego na dziesiętny. Proporcje liczbowe.

Geometrja.—Miejsca geometryczne. Koło i jego własności. Położenie prostej i koła względem siebie. Własności łuków, cięciw, i kątów środkowych. Kąty wpisane. Styczne wychodzące z punktu zewnętrznego. Względne położenie dwu kół. Koło wpisane i opisane na trójkącie. Zadania proste na wykreślanie odcinków, kątów i trójkątów. Zadania i miejsca geometryczne co do koła. Wielokąty umiarowe. Kwadrat, sześciokąt i trójkąt umiarowe wpisane w koło.

LICEUM.

I klasa (*4 godziny tygodniowo*).—*Algebra.* Teorja liczb wymiernych dodatnich i ujemnych i działania z niemi. Równania wogóle. Równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą. Układ dwu równań pierwszego stopnia z dwoma niewiadomemi. Krótki wykład rozwiązania układu równań pierwszego stopnia z trzema niewiadomemi. Rozwiązywanie zadań na układanie równań pierwszego stopnia. Postępy arytmetyczny i geometryczny.

Geometrja. Zasadnicze twierdzenia i zadania odnośnie do równoważności figur. Proporcje pomiędzy wielkościami geometrycznemi i ich własności najprostsze.

Trójkąty i wielokąty podobne i ich położenia odpowiednie. Dziesięciokąt i pięciokąt umiarowe wpisane. Proste i płaszczyzny w przestrzeni. Kąty dwuścienne. Proste i płaszczyzny prostopadłe. Proste i płaszczyzny równoległe. Rzuty, kąty i odległości. Kąty trójścienne i wypadki ich równości. Kąty bryłowe. Graniastosłupy i ostrosłupy. Bryły wogóle. Pojęcie o bryłach umiarowych.

II klasa (*trzy godziny tygodniowo*). — *Algebra*. Liczby rzeczywiste i działania z niemi. Równania stopnia drugiego z jedną niewiadomą. Suma i iloczyn pierwiastków. Równania dwukwadratowe. Układ równań stopnia wyższego od pierwszego w wypadkach najprostszych. Równania ułamkowe i niewymierne (irracjonalne).

Geometrja. Wielkości spółmierne i niespółmierne. Teorja mierzenia i zastosowania jej do odcinków, kątów, wielokątów, kół. Zasadnicze twierdzenia i zadania na równoważność i podobieństwo brył. Powierzchnie i objętości graniastosłupów i ostrosłupów. Walec, stożek i kula. Odpowiednie powierzchnie i objętości. Zastosowanie algebry do geometrji.

III klasa (*2 godziny tygodniowo*). — *Arytmetyka*. Teorja liczb pierwszych i najprostsze ich zastosowania.

Algebra. Wykładniki potęg wymierne, wykładniki potęg rzeczywiste. Równania wykładnicze. Logarytmy. Używanie tablic logarytmicznych.

Trygonometrja. Funkcje kątowe i ich najważniejsze własności. Wzory dodawania, odejmowania, podwajania i przepołowiania kątów. Logarytmy funkcyj kątowych. Rozwiązanie trójkątów prostokątnych i zastosowania.

INSTRUKCJE.

1. Program arytmetyki praktycznej, który istniał dotychczas w młodszych klasach gimnazjów, został uzupełniony dodaniem elementarnych pojęć intuicyjnych geometrycznych wraz z ćwiczeniami w pomiarach i początkami kreślenia geometrycznego.

Wszystko to stanowi powtórzenie i rozwinięcie pojęć nabytych przez uczniów w szkole początkowej i nadaje programowi z jednej strony charakter ciągłości, z drugiej jest wysoce korzystną propedeutyką do studjowania kursu systematycznego geometrji, który zaczyna się w klasach starszych.

2. Wprowadzanie nazw figur powinno się odbywać łącznie z wykreślaniem ich na tablicy, lub też z pokazem modeli; już w pierwszym roku uczniowie powinni się ćwiczyć w kreśleniu zapomocą przyrządów i od ręki, przyczem należy zwracać uwagę tak na czystość linij, jak i na dokładność formy. (Dok. nast.).

REDAKTOR I WYDAWCA TADEUSZ GUTKOWSKI.

PODSTAWY WYKSZTAŁCENIA WSPÓŁCZESNEGO

wychodzą pod kierunkiem W. M. Kozłowskiego.

Podstawą wykształcenia współczesnego w dzisiejszym rozwoju kultury i nauki wszechświatowej musi być poznanie zagadnień życia i potrzeb ludzkości, bo na podstawie przeszłości i teraźniejszości budować trzeba przyszłość, a to jest jedynie w tym wypadku możliwe, gdy przeszłość i teraźniejszość poznać i krytycznie ocenić potrafimy. To jest zadaniem biblioteczki „Podstawy Wykształcenia Współczesnego", zawierającej przedewszystkiem dzieje myśli ludzkiej i dzieje narodów.

		Mk.
I.	**Kozłowski Wł. M.** Klasyfikacya umiejętności.	
II.	**Freeman E. E.** Dzieje Eurody. Przekład J. Rodziewiczowej. 2. , w oprawie	3 —
III.	**Creighton M. A.** Historya Rzymu. Przekład J. Stempkowskiej. 2.—, w oprawie	3 —
IV.	**Kozłowski Wł. M** Historya filozofii. Cz. I do końca XVIII w. 2.—, w oprawie	3 —
V. VI.	**Chmielowski P.** Krytyczno-porównawczy przegląd dziejów piśmiennictwa polskiego. 2 tomy.	
	Tom I. Literatura staropolska. 2.—, w opr.	3 —
	Tom II. Literatura polska nowożytna, 2.—, w opr.	3 —
VII.	**Fyffe C. A.** Historya Grecyi. Przekład Wł. M. Kozłowskiego. 2.—, w oprawie	3 —
VIII.	**Jebb R. C.** Historya literatury greckiej. Przekład Wł. M. Kozłowskiego. 2.—, w oprawie	3 —
IX.	**Gibbins H B.** Historya przemysłowa Anglii. Przekład J. Stempkowskiej. 2.—, w oprawie	3 —
X.	**Worsfold B.** O sądzie w literaturze. Przełożył i uzupełnił co do rzeczy polskich Wł. M. Kozłowski. 2—, w oprawie	3 —
XI.	**Freeman E. E.** Instytucye polityczne Greków, Rzymian i Germanów. Opracował Wł. M. Kozłowski. 2,—, w oprawie	3 —
XII.	**Kozłowski Wł. M.** Filozofia XIX wieku.	3 50
XIII.	**Kozłowski Wł. M.** Historya rewolucyi francuskiej, podług Aularda, Carnota, Baxa i innych.	2 50
XIV.	**Tocqueville A.** Dawne rządy i rewolucya. Opracował Wł. Kozłowski. 2.—, w oprawie	3 —
XV.	**Karejew M.** Pogląd ogólny na dzieje Europy Zachodniej w wieku XIX. Przekład J. Szustra.	2 —
XVI.	**Hettner H.** J. J. Rousseau. Przekład M. Pieńkowskiej. Z dodatkiem: Rousseau i Polska przez Wł. M. Kozłowskiego.	2 —

Za zezwoleniem Cenzury Niemieckiej.

DRUKARNIA M. ARCTA W WARSZAWIE, NOWY-ŚWIAT 41.