

5.54 — beton
7.72 — plastyczność

PRACA DOKTORSKA

Marek Klisiński

DEGRADACJA I ODKSZTALCENIA
PLASTYCZNE BETONU

38/1984

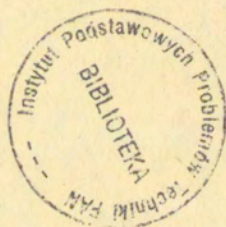
WARSZAWA 1984

<http://rcin.org.pl>

ISSN 0208-5658

Praca doktorska
Promotor Prof. dr hab. Zenon Mróz

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 14 listopada 1984 r.



56985



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 160 egz. Ark. wyd. 9,4. Ark. druk. 12,5.
Oddano do drukarni w listopadzie 1984 r.
Nr zamówienia 737/84

Warszawska Drukarnia Naukowa Warszawa,

<http://rcin.org.pl>

DEGRADACJA I ODKSZTAŁCENIA PLASTYCZNE BETONU

1. Wstęp

Przedstawiona praca zawiera w swojej głównej części propozycję modelu konstytutywnego betonu uwzględniającego zarówno odkształcenia trwałe jak i degradację na skutek rozwoju mikroszczelin. Model umożliwia opis zachowania się betonu w dowolnym stanie naprężenia dla obciążeń monotonicznych oraz cyklicznych, łącznie z zakresem pokrytycznym.

Początkowy rozdział obejmuje przegląd modeli konstytutywnych stosowanych dotychczas do opisu betonu. Prezentowane modele zgrupowane są zgodnie z podziałem na zjawiska fizyczne, które opisują. Najczęściej jest to zgodne z historycznym rozwojem modelowania zachowania się materiału. Począwszy od liniowego modelu sprężystego, rozwój kieruje się w stronę modeli nieliniowych uwzględniających efekty obserwowane doświadczalnie. Ostatnim dokonany krok jest opis degradacji sprężystej. Na skutek inicjacji i rozwoju mikroszczelin w betonie zmieniają się jego własności sprężyste. Proces ten w końcowym etapie prowadzi do tworzenia się rys i zniszczenia materiału.

Ogólną postać przyjętego równania konstytutywnego oraz ograniczenia stąd wynikające przedstawia kolejny rozdział. Ze względów numerycznych najczęściej stosowane są obecnie równania przyrostowo-liniowe, i taki też typ rozważono w pracy. W rozdziale tym podano podstawowe założenia dotyczące prezentowanego modelu oraz przeanalizowano teoretycznie problem naróża ze sprzężeniem parametrów wzmocnienia. Uzyskane tu rezultaty mogą znaleźć zastosowanie również przy opisie innych niż beton materiałów.

Następny rozdział zawiera opis proponowanego modelu betonu. Początkowo ograniczono rozważania wyłącznie do płaszczyzny $p-q$ i wyprowadzono odpowiednie związki konstytutywne. W dalszej zaś części rozszerzono je na przypadek ogólnego stanu naprężenia oraz zmodyfikowano model tak, aby mógł opisywać obciążenia cykliczne. Zaprezentowany model dla obciążeń cyklicznych stosowany być może dla innych materiałów. W przedstawionej formie zastosowany został do opisu ołowiu - dając dobre rezultaty. W swojej wcześniejszej postaci stosowany był dla gruntów.

Identyfikacja funkcji materiałowych jest ważnym krokiem na drodze do praktycznego wykorzystania modelu. Tej tematyce poświęcony jest rozdział 5. Przedstawia on kolejne etapy procesu identyfikacji, zawierając jednocześnie bogatą dokumentację w postaci wykresów uzyskanych w wyniku symulacji numerycznej. Testy oparte zostały na istniejących badaniach doświadczalnych i obejmują różne stany naprężenia, łącznie z badaniami trójosiowymi przy cyklicznym obciążeniu.

Przykład zastosowania modelu zawiera kolejny z rozdziałów. Przy pomocy metody elementów skończonych rozwiązany został prosty problem brzegowy, ściskanie próbki betonowej pomiędzy dwoma sztywnymi stemplami. Założono różne stany naprężenia i odkształcenia oraz warunki brzegowe, dzięki czemu istnieje możliwość dokonywania porównań pomiędzy nimi.

Ostatni z rozdziałów dotyczy kształtu powierzchni granicznych belki żelbetowej pojedynczo zbrojonej dla znacznie prostszego, jednowymiarowego modelu betonu sprężysto-idealnie plastycznego o ograniczonej ciągłości. Stanowi on oddzielne studium tego problemu.

Dodatek zawiera podstawowe wiadomości z teorii zbiorów rozmytych. Teorię tą wykorzystano przy interpretacji modelu opisującego obciążenia cykliczne.

W pracy stosowana jest głównie notacja macierzowa oraz w rozdziale 3 tensorowa. Podamy obecnie reguły umożliwiające jednoznaczna interpretację podanych wzorów.

Tensory drugiego rzędu w zapisie tensorowym oraz wektory w macierzowym oznaczono małymi literami np.

$$\underline{a} = [a_{ij}]_{i,j=1,2,3} \quad \underline{a} = [a_i]_{i=\begin{cases} 1,2 \\ 1,2,3 \\ 1,\dots,6 \end{cases}}$$

Tensory czwartego rzędu oraz macierze oznaczono dużymi literami np.

$$\underline{A} = [A_{ijkl}]_{i,j,k,l=1,2,3} \quad \underline{A} = [A_{ij}]_{i,j=\begin{cases} 1,2 \\ 1,2,3 \\ 1,\dots,6 \end{cases}}$$

Wszystkie wielkości nadkreślone np. \underline{a} , \underline{A} oznaczają, że odnoszą się do płaszczyzny p-q i wówczas wskaźniki mają tylko dwie wartości 1 i 2. Inne wymiary wektorów i macierzy podawane są w nawiasach u dołu oznaczenia np. $\underline{a}_{(6)}$, $\underline{A}_{(3 \times 2)}$. Iloczyn skalarny konsekwentnie oznaczono stawiając kropkę pomiędzy wielkościami. Tak więc w zapisie tensorowym

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_{ij} b_{ij}$$

i zgodnie z konwencją sumacyjną powtórzenie wskaźnika oznacza sumowanie po nim.

Natomiast w zapisie macierzowym

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_i b_i$$

Stosując zaś transpozycję oznaczoną literą T u góry

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{a}^T \underline{b}$$

Zapis $\underline{A} \underline{a}$ oznacza w zapisie tensorowym operację podwójnego nasunięcia tensorów

$$\underline{A} \underline{a} = A_{ijkl} a_{kl}$$

Ten sam zapis w notacji macierzowej jest zwykłym iloczynem macierzy i wektora

$$\underline{A} \underline{a} = A_{ij} a_j$$

Mnożenie tensorowe oznaczono znakiem \otimes

$$\underline{a} \otimes \underline{b} = a_{ij} b_{kl}$$

Operacji tej w zapisie macierzowym odpowiada

$$\underline{a} \underline{b}^T$$

Różniczkowanie cząstkowe funkcji wielu zmiennych oznaczać będziemy zapisując symbol zmiennej jako wskaźnik po przecinku

np.
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f_{,x} \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f_{,y}$$

Różniczkowanie względem czasu oznaczamy stawiając kropkę nad daną wielkością np. $\frac{da}{dt} = \dot{a}$, dzięki czemu otrzymujemy prędkość danej wielkości. Jednakże, ponieważ opisywane zjawiska niezależne są od skali czasu, możemy utożsamiać prędkość z przyrostem danej wielkości przyjmując, że przyrost miał miejsce w jednostce czasu

$$da = \dot{a} dt \qquad dt = 1 \Rightarrow da = \dot{a}$$

2. Przegląd modeli konstytutywnych betonu

Celem niniejszego rozdziału jest przedstawienie zwięzłego przeglądu istniejących modeli konstytutywnych betonu.

Niektóre z nich są również z powodzeniem stosowane dla skał oraz innych materiałów ziarnistych.

Istnieje wiele kryteriów klasyfikacji modeli konstytutywnych. Ze względu na poziom szczegółowości opisu struktury materiału możemy wyróżnić modele mikroskopowe, zwane też strukturalnymi oraz makroskopowe, inaczej fenomenologiczne. W tych ostatnich struktura wewnętrzna jest nieistotna, ponieważ materiał traktowany jest jako jednorodny. Zastosowanie modeli fenomenologicznych ograniczone jest do elementów, których minimalne rozmiary przekraczają kilkakrotnie wielkość ziaren kruszywa w betonie. Zdecydowana większość konstrukcji inżynierskich spełnia to wymaganie z nadmiarem. W przypadku mniejszych rozmiarów wskazane jest stosowanie modeli strukturalnych. W dalszej części pracy nie będziemy się nimi zajmować.

Innym kryterium jest zachowanie modelu przy różnych prędkościach przebiegu procesu odkształcenia. Wyróżniamy modele zależne od skali czasu np. lepkoplastyczne oraz modele konstytutywne od czasu niezależne, co jest podstawową cechą np. modeli plastycznych. W dalszym ciągu ograniczymy się tylko do tej drugiej grupy.

Istotne jest również jakim obciążeniom poddawany jest materiał. Ze względu na to kryterium istnieją modele uwzględniające obciążenia monotoniczne, cykliczne, dynamiczne, udarowe itp.

Z matematycznego punktu widzenia najważniejszy jest charakter relacji pomiędzy tensorem naprężenia lub jego przyrostem oraz odpowiednio tensorem odkształcenia bądź jego przyrostem. Jeżeli związek ten jest tensorowo-liniowy, wówczas mówimy o fizykalnej liniowości, w przeciwnym zaś przypadku o fizykalnej nieliniowości. Beton należy do materiałów fizykalnie nieliniowych, jednakże w najprostszych modelach stosowana jest relacja liniowa.

Według pracy Willama [1] istnieją trzy możliwości opisu nieliniowego zachowania się materiału:

a. opis energetyczny $\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial U}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}}$

gdzie U jest potencjałem energii odkształcenia

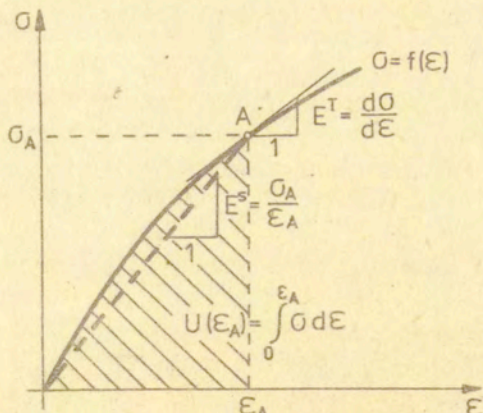
b. opis z wykorzystaniem modułów ściecznych $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{E}}^s \underline{\underline{\epsilon}}$

gdzie $\underline{\underline{E}}^s$ jest tensorem modułów ściecznych

c. opis z wykorzystaniem modułów stycznych $\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \underline{\underline{E}}^T \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}$

gdzie $\underline{\underline{E}}^T$ jest tensorem sztywności.

W przypadku jednowymiarowym wszystkie te opisy są równoważne. Ich interpretację geometryczną przedstawia (rys.2.1). Ogólnie jednak równoważność tych opisów nie zachodzi.



Model energetyczny stanowi najwyższą klasę i zapewnia niezależność zachowania materiału od drogi obciążania jak również pełną odwracalność procesu odkształcenia bez dyssypacji energii. Dla materiału opisanego tym prawem możemy wyprowadzić oba pozostałe opisy. W drugą zaś stronę konieczne jest spełnienie warunków związanych z istnieniem całki prowadzącej do potencjału U . Tradycyjne pierwsze dwie możliwości używane są w nieliniowej sprężystości, natomiast trzecia w plastyczności, gdzie reakcja materiału zależy od drogi, po której przebiegał proces obciążania.

Najważniejszym jednak kryterium jest podział zgodny ze zjawiskami fizycznymi, które dany model opisuje.

2.1. Modele sprężyste

Modele sprężyste opisują procesy odwracalne zachodzące bez dyssypacji energii. W zastosowaniach inżynierskich, ze względu na swoją prostotę stosowane są głównie modele liniowo-sprężyste (rys.2.2a). Beton wykazuje cechy liniowe tylko w początkowym zakresie obciążania, dlatego też zastosowanie tych modeli ograniczone jest do konstrukcji o dużym zapasie wytrzymałości.

2.1.1. Model liniowy izotropowy

Jest to najprostszy model wymagający określenia tylko dwóch stałych materiałowych. W notacji macierzowej, we współrzędnych kartezjańskich prawo konstytutywne ma formę

$$(2.1) \quad \underline{\sigma} = \underline{E} \underline{\varepsilon}$$

gdzie wektory naprężenia $\underline{\sigma}$ i odkształcenia $\underline{\varepsilon}$ dane są wzorami

$$(2.2) \quad \underline{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}]$$
$$\underline{\varepsilon} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \delta_{xy}, \delta_{yz}, \delta_{zx}]$$

Do zapisu macierzy sztywności tradycyjnie używany jest moduł Younga E oraz współczynnik Poissona ν

$$(2.3) \quad \underline{\underline{\epsilon}} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} (1-\nu) & \nu & \nu & & & \\ \nu & (1-\nu) & \nu & & & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & & & \\ \hline & & & (1-2\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & & & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 \\ & & & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{array} \right]$$

Alternatywna forma zapisu wywodzi się z dekompozycji naprężenia na część hydrostatyczną oraz dewiatorową. Używane są wówczas moduły ścisłości objętościowej K oraz ścinania G

$$(2.4) \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Macierz sztywności $\underline{\underline{E}}$ możemy zapisać jako sumę dwóch macierzy

$$(2.5) \quad \underline{\underline{\epsilon}} = (K - \frac{2}{3}G) \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & & & \\ 1 & 1 & 1 & & & 0 \\ 1 & 1 & 1 & & & \\ \hline & & & & & 0 \\ 0 & & & & & 0 \end{array} \right] + G \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & & & & & \\ & 2 & & & & 0 \\ & & 2 & & & \\ & & & 1 & & \\ & 0 & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{array} \right]$$

Ostatnią możliwością jest użycie stałych Lamego λ i μ

$$(2.6) \quad \lambda = K - \frac{2}{3}G \quad \mu = G$$

i wtedy w zapisie tensorowym

$$(2.7) \quad \underline{\underline{\epsilon}} = \lambda \operatorname{tr} \underline{\underline{\epsilon}} \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\epsilon}}$$

Wszystkie te sformułowania są oczywiście równoważne.

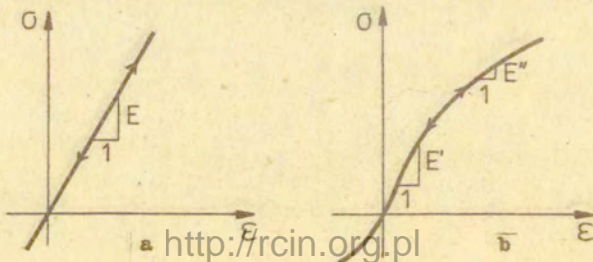
W przypadku rozszerzenia modelu na zachowanie nieliniowe, poprzez założenie zmienności modułów sprężystych, istotne jest którą parę stałych materiałowych używamy.

2.1.2. Model liniowy ortotropowy

Zakłada się, że beton jest początkowo materiałem izotropowym. Dopiero na skutek rozwoju mikroszczelin oraz pojawienia się rys zaczyna wykazywać cechy anizotropowe. Relację ortotropową możemy przedstawić dla naprężeń i odkształceń głównych w formie

$$(2.8) \quad \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ & E_{22} & E_{23} \\ \text{sym.} & & E_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

w której występuje sześć parametrów materiałowych E_{ij} . Po transformacji do globalnego układu kartezjańskiego otrzymujemy pełną macierz sztywności ze sprzężeniem pomiędzy zmianami objętościowymi oraz ścinaniem. Model ten stosowany jest głównie do opisu zachowania betonu przy rozciąganiu np. w pracy [2]. Początkowo zakłada się, że parametry E_{11} oraz E_{1j} ($1 \neq j$) we wszystkich kierunkach są równe. Następnie wprowadzając kryterium maksymalnych naprężeń rozciągających (tension cut-off) modyfikuje parametry dla kierunku, w którym naprężenia te zostały przekroczone, otrzymując model ortotropowy. Wadą tego modelu jest fakt, że nie spełnia on zasady obiektywności. Może być stosowany jedynie wtedy, gdy osie główne naprężeń w trakcie procesu obciążania nie doznają dużych obrotów.



Rys.2.2

2.1.3. Model hipersprężysty

Jest to najprostszy model nieliniowy (rys.2.2b) zapewniający niezależność od drogi obciążania oraz odwracalność procesu odkształcenia. Stosowany jest w nim opis energetyczny

$$(2.9) \quad \underline{\underline{\xi}} = \frac{\partial U}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}$$

Izotropową funkcję energii odkształcenia $U(\underline{\underline{\varepsilon}})$ możemy zapisać w zależności od niezmienników stanu odkształcenia $U = U(\bar{J}_1, \bar{J}_2, \bar{J}_3)$. Używając momentowych niezmienników wyrażonych wzorami

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \bar{J}_1 &= \text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}} \\ \bar{J}_2 &= \text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}^2 \\ \bar{J}_3 &= \text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}^3 \end{aligned}$$

możemy zgodnie z Willamem [1] relację konstytutywną zapisać w formie

$$(2.11) \quad \underline{\underline{\xi}} = \Phi_1 \underline{\underline{I}} + \Phi_2 \underline{\underline{\varepsilon}} + \Phi_3 \underline{\underline{\varepsilon}}^2$$

gdzie Φ_i oznaczają funkcje skalarne $\Phi_i = \frac{\partial U}{\partial \bar{J}_i}$ zależne od niezmienników \bar{J}_i . Funkcje te na podstawie twierdzenia o pochodnych cząstkowych muszą spełniać warunki

$$(2.12) \quad \frac{\partial \Phi_i}{\partial \bar{J}_j} = \frac{\partial \Phi_j}{\partial \bar{J}_i}$$

Relację (2.11) możemy przedstawić w równoważnej postaci wykorzystując tensor modułów siecznych

$$(2.13) \quad \underline{\underline{\xi}} = \underline{\underline{E}}^s \underline{\underline{\varepsilon}}$$

gdzie

$$(2.14) \quad \underline{\underline{E}}^s = \Phi_1 \underline{\underline{\varepsilon}}^{-1} + \Phi_2 \underline{\underline{I}} + \Phi_3 \underline{\underline{\varepsilon}}$$

Ostatni możliwy typ opisu otrzymujemy poprzez różniczkowanie

$$(2.15) \quad \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} = \frac{\partial^2 U}{\partial \underline{\underline{\epsilon}} \otimes \partial \underline{\underline{\epsilon}}} \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}$$

prowadzące dla izotropowej funkcji energii odkształcenia do wzoru

$$(2.16) \quad \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} = \underline{\underline{E}}^T \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}$$

gdzie

$$(2.17) \quad \underline{\underline{E}}^T = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}} + \Phi_2 \right) \underline{\underline{I}} + \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}} + 2\Phi_3 \right) \underline{\underline{\epsilon}} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}} \underline{\underline{\epsilon}}^2$$

W ogólnej postaci hipersprężystość powoduje anizotropię materiałową indukowaną przez odkształcenia. Używana jest jednak również uproszczona wersja modelu polegająca na odrzuceniu wyrażenia zawierającego drugą potęgę tensora odkształcenia we wzorze (2.11) i wówczas izotropia zostaje zachowana. Funkcje Φ_1 i Φ_2 możemy traktować w tym przypadku jako nieliniowe uogólnienie modułów Lamego λ i μ .

Do opisu betonu stosowana jest głównie uproszczona wersja wywodząca się z liniowej teorii sprężystości np. Nilson [3]. Inne podejście polega na założeniu zależności modułów ściśliwości objętościowej K oraz ścinania G od stanu odkształcenia np. Cedolin, Crutzen, Dei Poli [4], lub stanu naprężenia np. Kupfer, Gerstle [5]. Modele te mogą być używane wyłącznie w przypadku monotonicznego obciążenia. Ich zaletą jest prostota w programowaniu oraz niewielka czasochłonność obliczeń komputerowych.

2.1.4. Model sprężysty w sensie Cauchy'ego

Relacja konstytutywna wykorzystuje moduły sieci

$$(2.18) \quad \underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{E}}^s \underline{\underline{\epsilon}}$$

Twierdzenie o funkcjach izotropowych tensorów drugiego rzędu prowadzi podobnie jak w modelu poprzednim do ogólnej postaci

$$(2.19) \quad \underline{\underline{\epsilon}} = \Phi_1 \underline{\underline{I}} + \Phi_2 \underline{\underline{\epsilon}} + \Phi_3 \underline{\underline{\epsilon}}^2$$

Jednakże obecnie funkcje skalarne $\bar{\Phi}_i$ nie muszą spełniać warunku (2.12). W przeciwieństwie do modelu hipersprężystego podczas zamkniętego cyklu obciążenia może nastąpić dyssypacja energii, co wykracza poza klasyczne rozumienie zachowania sprężystego. Model ten nie znalazł w przypadku betonu zastosowania praktycznego i przedstawiony został jako jedna z możliwości teoretycznych.

2.1.5. Model hiposprężysty

Jest to model przyrostowy, w którym nieliniowe zachowanie się materiału opisane jest równaniem

$$(2.20) \quad \dot{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{E}}^T \dot{\underline{\varepsilon}}$$

gdzie tensor sztywności stycznej $\underline{\underline{E}}^T$ jest funkcją naprężenia i odkształcenia. Całkując (2.20) otrzymujemy wzór

$$(2.21) \quad \underline{\sigma} = \underline{\sigma}^0 + \int_0^t \underline{\underline{E}}^T \frac{\partial \underline{\varepsilon}}{\partial \tau} d\tau$$

który wyraźnie uwidacznia, że w ogólnym przypadku reakcja materiału hiposprężystego zależy od historii obciążania. Porównanie z przyrostową formą modelu hipersprężystego (2.16) wskazuje na jedyną możliwość opisu rzeczywiście sprężystego materiału, którego zachowanie nie zależy od drogi obciążania i jest w pełni odwracalne. Najczęściej zakłada się, że tensor sztywności jest liniową funkcją naprężenia $\underline{\sigma}$. Wówczas zgodnie z Coonem i Evanssem [6] możemy napisać ogólną postać równania konstytutywnego

$$(2.22) \quad \begin{aligned} \dot{\underline{\sigma}} = & g_1 (\text{tr} \dot{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} + g_2 \dot{\underline{\varepsilon}} + g_3 (\text{tr} \underline{\sigma}) \underline{\sigma} + \\ & + g_4 \text{tr} (\underline{\sigma} \dot{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} + \frac{1}{2} g_5 (\dot{\underline{\varepsilon}} \underline{\sigma} + \underline{\sigma} \dot{\underline{\varepsilon}}) \end{aligned}$$

gdzie funkcje g_1 i g_2 są liniowymi rozwinięciami naprężenia hydrostatycznego, natomiast g_3 , g_4 , g_5 są stałymi materiałowymi. W bardziej ogólnym przypadku, zakładając jedynie zależność $\underline{\underline{E}}^T(\underline{\sigma})$, do opisu potrzebnych jest dwanaście skalarnych funkcji naprężenia, co znacznie przekracza możliwość

identyfikacji. Dlatego też do opisu betonu stosowane są znacznie prostsze formy wykorzystujące niektóre składniki z równania (2.22). Możemy wymienić wiele prac stosujących powyższy model np. Liu, Nilson, Slate [7], Romstad, Taylor, Herrmann [8] dla dwuosioowego stanu naprężenia, Darwin, Pecknold [9] w postaci ortotropowej, Phillips, Zienkiewicz [10] zakładając jedynie zmienność modułu ścinania w zależności od drugiego niezmiennika stanu naprężenia. Zastosowanie modelu ograniczone jest do obciążenia monotonicznego.

2.2. Modele plastyczne

Modele plastyczne służą do opisu trwałych deformacji materiału, co związane jest z dyssypacją energii w trakcie procesu odkształcenia. W przeciwieństwie do sprężystości zjawisko to jest nieodwracalne, wyróżnia się zatem dwa stany: obciążenie i odciążenie. W trakcie obciążania następuje przyrost odkształceń trwałych, natomiast podczas odciążania zachowanie materiału jest czyste sprężyste. Koncepcja ta prowadzi do dekompozycji odkształceń na część odwracalną i nieodwracalną

$$(2.23) \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^p$$

W celu oddzielenia w przestrzeni naprężeń obszaru zachowań sprężystych od plastycznych posługujemy się powierzchnią plastyczności.

2.2.1. Deformacyjna teoria plastyczności

Teoria deformacyjna posługuje się całkowitymi naprężeniami i odkształceniami i wywodzi się pod wieloma względami z opisu stosującego moduły ścisne w nieliniowej sprężystości. Odkształcenia plastyczne opisywane są wzorem

$$(2.24) \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^p = \Phi \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}$$

gdzie Φ jest funkcją skalarną dodatnią w trakcie obciążania i równą zero w trakcie odciążania, natomiast F jest funkcją skalarną zależną od stanu naprężenia oraz niekiedy od parametrów wzmocnienia $\underline{\underline{\alpha}}$. Ogólnie możliwe jest przedstawienie prawa konstytutywnego w formie

$$(2.25) \quad \underline{\sigma} = \underline{F}^s(\underline{\sigma}, \underline{\kappa}) \underline{\varepsilon}$$

W porównaniu z odpowiednim modelem sprężystym różnica polega na odmiennym zachowaniu w trakcie odciażania, jak również możliwości uwzględnienia zależności od historii obciążania poprzez parametry wzmocnienia.

W swojej klasycznej formie teoria deformacyjna nie znalazła zastosowania do opisu betonu. Natomiast często w podejściu inżynierskim modele hipersprężyste uzupełniane są warunkami odciażania, przez co są ściśle związane z powyższą teorią np. Kupfer, Gerstle [5], Nelson, Baron [11].

2.2.2. Teoria plastycznego płynięcia

Teoria plastycznego płynięcia opiera się na trzech podstawowych założeniach: istnieniu powierzchni plastyczności, prawie plastycznego płynięcia, prawie wzmocnienia lub osłabienia.

Powierzchnia plastyczności opisywana jest w przestrzeni naprężeń funkcją

$$2.26 \quad F(\underline{\sigma}, \underline{\kappa}) = 0$$

Wektor parametrów wzmocnienia $\underline{\kappa}$ umożliwia zmiany skali, kształtu oraz translację powierzchni plastyczności. Uplastycznienie materiału następuje w momencie osiągnięcia przez stan naprężenia początkowej powierzchni plastyczności $F(\underline{\sigma}, \underline{\kappa}_0) = 0$.

W literaturze możemy znaleźć wiele propozycji jej geometrycznego kształtu. Szczegółowy przegląd zawierają prace Eibla, Ivanyni [12], Argyrisa i in. [13] głównie z myślą o zastosowaniu w metodzie elementów skończonych. Skrótowe zestawienie prezentują Nilson [14] i Jiang Jian-Jing [15].

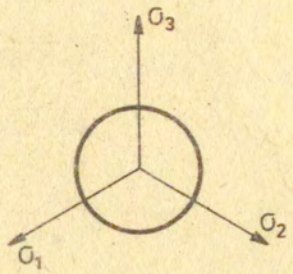
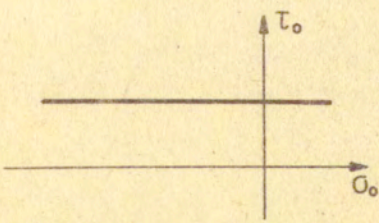
Kształt powierzchni w trójwymiarowej przestrzeni naprężenia najlepiej może być przedstawiony w dwóch przekrojach: na płaszczyźnie dwiatowej $\pi: \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{const.}$ oraz na płaszczyźnie $\sigma_1 - \tau_0$; gdzie $\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ oznacza naprężenie hydrostatyczne, natomiast $\tau_0 = \frac{1}{3}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2}$ jest oktaedrycznym naprężeniem ścinającym.

Suidan i Schobrich [18] w metodzie elementów skończonych do analizy betonu stosują powierzchnię Misesa zależną wyłącznie od τ_0 i przedstawiającą okrąg na płaszczyźnie dewiatorowej (rys.2.3a).

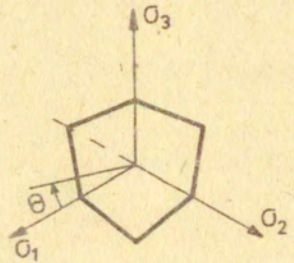
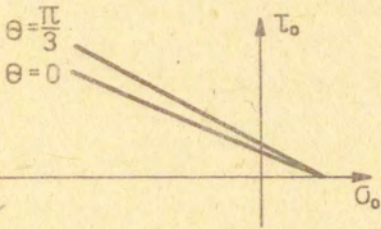
Powierzchnia ta stosowana praktycznie dla stali, w przypadku betonu musi być uzupełniona kryterium dla naprężeń rozciągających. Powierzchnie Coulomba-Mohra (rys.2.3b) podobnie jak Druckera-Pragera (rys.2.3c) wywodzą się z wcześniejszego zastosowania dla gruntów, gdzie wyraźnie obserwowana jest zależność od naprężenia hydrostatycznego σ_0 , w obu przypadkach liniowa. Różnica pomiędzy nimi polega na tym, że kształt powierzchni Coulomba-Mohra zależy, na płaszczyźnie dewiatorowej, od kąta Θ . Kryterium Druckera-Pragera wykorzystali Muto i in. [19] do trójwymiarowej nieliniowej analizy kolumn żelbetowych. Inną postać opisu zależności od kąta Θ , dającą gładką krzywą na płaszczyźnie dewiatorowej zaproponowali Willam i Warnke [23]. W połączeniu z liniową zależnością $\tau_0 - \sigma_0$ (rys.2.3d) otrzymali swoje kryterium trój-parametrowe.

W uogólnionej powierzchni Druckera-Pragera (rys.2.3e) zakłada się paraboliczną zależność $\tau_0 - \sigma_0$. Przekrój dewiatorowy pozostaje niezależny od Θ . Propozycję tę stosują Bresler i Pister [20] oraz Chen i in. [21], [22]. Logiczne wydaje się połączenie nieliniowej zależności $\tau_0 - \sigma_0$ oraz zależności od kąta Θ w płaszczyźnie dewiatorowej (rys.2.3f). Pierwsi uczynili to Willam i Warnke tworząc powierzchnię pięcioparametryczną. Inną propozycję, różniącą się postaciami funkcji, przedstawił Ottosen [24]. Dane doświadczalne wskazują jednak, że powierzchnia plastyczności powinna być zamknięta.

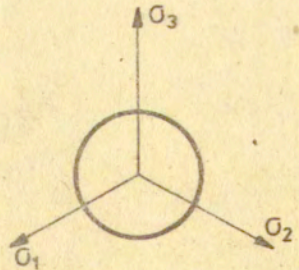
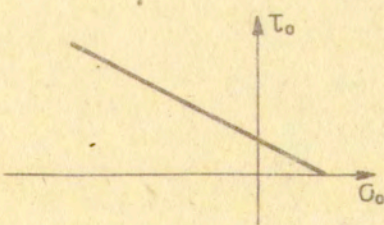
Buykozturk w pracy [25] stosuje powierzchnię elipsoidalną niezależną od trzeciego niezmiennika Θ (rys.2.3g). Podobną elipsoidalną powierzchnię plastyczności przedstawił wcześniej Mróz [26]. W przypadku powierzchni zamkniętej możliwe jest również uwzględnienie wpływu kąta Θ na kształt rzutu na płaszczyznę dewiatorową. Czynią to Nilsson oraz Elenberg [14], [27].



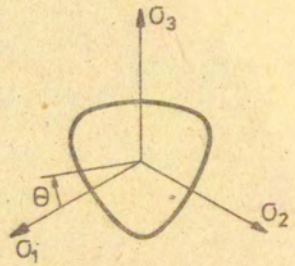
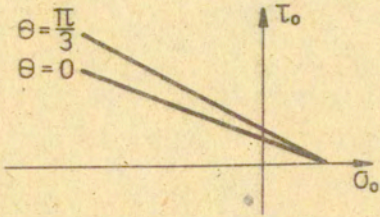
a)



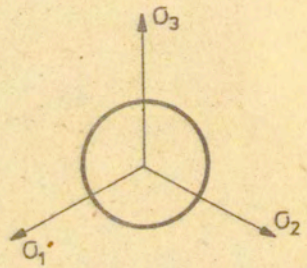
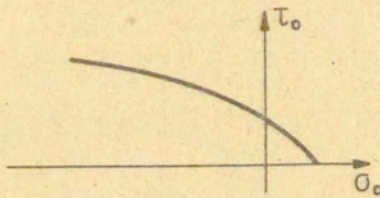
b)



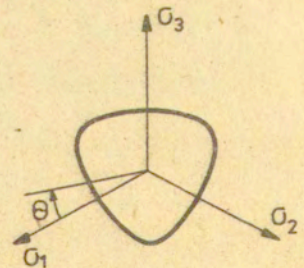
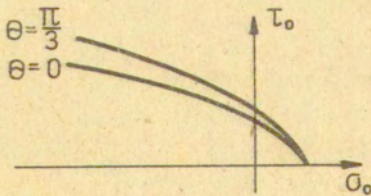
c)

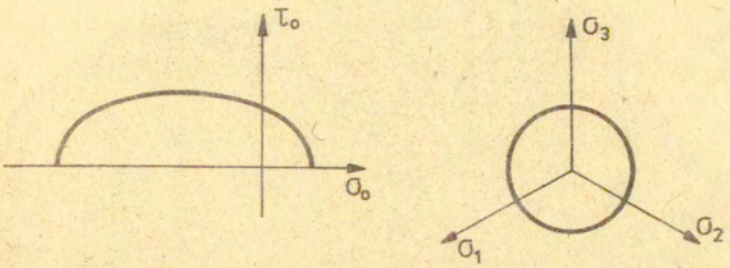


d)

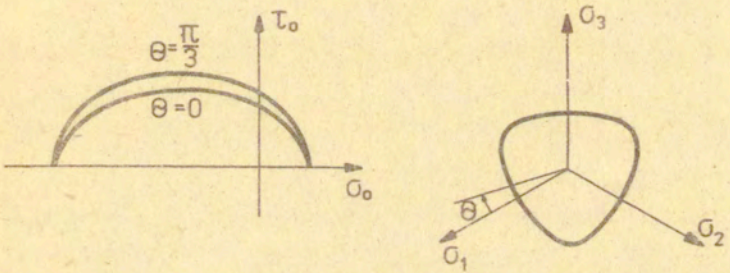


e)





g)



h)

- a/ von Mises
- b/ Mohr-Coulomb
- c/ Drucker-Prager
- d/ Willam-Warnke
- e/ uogólniona Drucker-Prager
- f/ 5 parametrowa Willam-Warnke
- g/ Mróz-Buyukozturk
- h/ Nilsson-Glenberg

Prawo plastycznego płynięcia zakłada istnienie potencjału plastycznego $G(\underline{\sigma}, \underline{\epsilon})$, który pozwala na wyznaczenie przyrostu odkształceń plastycznych ze wzoru

$$(2.27) \quad \dot{\underline{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}}$$

gdzie $\dot{\lambda}$ jest skalarną funkcją pracy odkształceń plastycznych. Postulat stabilności Druckera prowadzi do stowarzyszonego prawa płynięcia, w którym utożsamia się potencjał plastyczny z powierzchnią plastyczności $G \equiv F$. Jednakże dla betonu często stosowane jest prawo niestowarzyszone lub częściowo stowarzyszone na płaszczyźnie dewiatorowej. Całkowity przyrost odkształceń składa się z dwóch części

$$(2.28) \quad \dot{\underline{\epsilon}} = \dot{\underline{\epsilon}}^e + \dot{\underline{\epsilon}}^p$$

Wzór ten otrzymujemy przez zróżniczkowanie (2.23).

Wykorzystując prawo płynięcia można uzyskać opis operujący modułami stycznymi.

2.2.2.1. Model idealnie plastyczny

W modelu idealnie plastycznym materiał nie doznaje wzmocnienia (rys.2.4a), a zatem zarówno powierzchnia plastyczności F jak i potencjał plastyczny G zależą wyłącznie od stanu naprężenia i w trakcie procesu nie ulegają zmianom. Stany naprężenia leżące na zewnątrz powierzchni plastyczności są nieosiągalne.

Z warunku zgodności

$$(2.29) \quad F(\underline{\sigma} + \dot{\underline{\epsilon}}) = 0$$

wynika, że gdy stan naprężenia leży na powierzchni plastyczności, plastyczne płynięcie zachodzi wtedy, gdy przyrost naprężenia $\dot{\underline{\epsilon}}$ jest styczny do tej powierzchni. Otrzymujemy stąd warunki obciążania

$$(2.30) \quad F = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \cdot \dot{\underline{\epsilon}} = 0$$

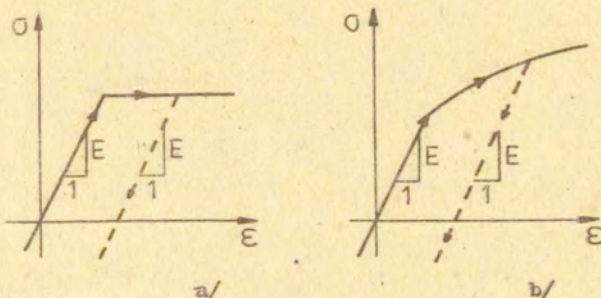
oraz odciążania

$$(2.31) \quad F < 0 \quad \text{lub} \quad \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \cdot \dot{\underline{\epsilon}} < 0$$

Ze względu na fakt, że przy ściskaniu hydrostatycznym beton silnie się wzmacnia, stosowane powinny być otwarte powierzchnie plastyczności. Model ten szeroko stosowany jest w praktyce projektowej, w metodzie nośności granicznej.

2.2.2.2. Model plastyczny ze wzmocnieniem (rys.2.4b)

Prawo wzmocnienia definiuje zmiany powierzchni plastyczności, jak również potencjału plastycznego w trakcie procesu obciążania plastycznego. Istnieją dwa zasadnicze typy wzmocnienia: izotropowe, w którym powierzchnia powiększa swoje rozmiary bez zmiany kształtu oraz kinematyczne, podczas którego powierzchnia doznaje czystej translacji.



Rys.2.4.

W modelach betonu stosowane jest głównie wzmocnienie izotropowe lub mieszane, będące połączeniem obu typów, Chen [16], Argyris [13].

Kryteria obciążania i odciążania otrzymywane są z warunku zgodności

$$(2.32) \quad F(\underline{\sigma} + \dot{\underline{\sigma}}, \underline{\alpha} + \dot{\underline{\alpha}}) = 0$$

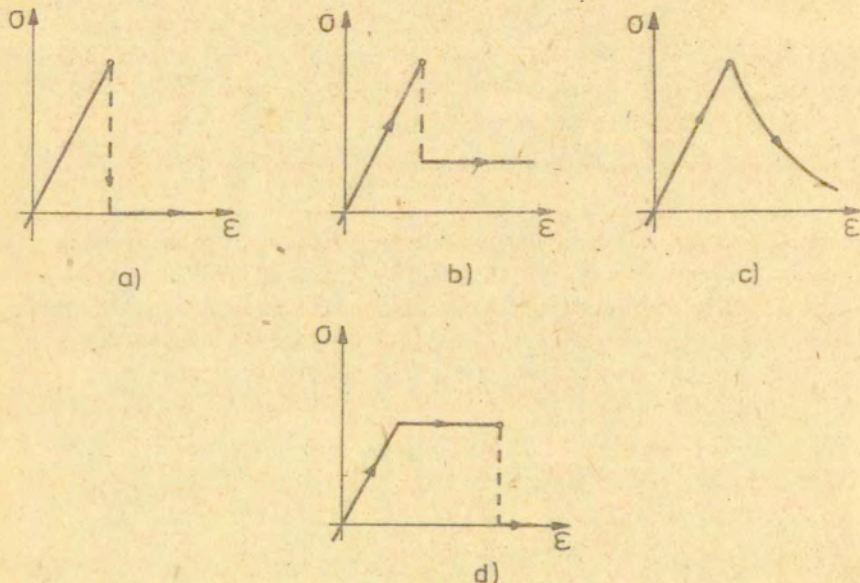
w zależności od znaku mnożnika plastycznego $\dot{\lambda}$. Szczegółowe wyprowadzenie zawarte jest w dalszej części pracy.

Teoria plastycznego płynięcia prowadzi do zależności od historii obciążania zarówno dla naprężeń jak odkształceń. W przypadku odciążania i powtórnego obciążania zachowanie materiału jest identyczne, co jest niezgodne z obserwowanymi doświadczalnie pętlami histerezy. Dla metali i dla gruntów

istnieją modele plastyczne pozwalające na prawidłowe opisanie tego zjawiska. Na szczególną uwagę zasługuje propozycja Mroza [17] zakładająca istnienie plastycznych powierzchni aktywnych zarówno w trakcie odciążania jak i powtórnego obciążenia.

2.3. Modele kruche

Modele kruche opisują nagły spadek wytrzymałości materiału. W momencie spełnienia warunku stanu granicznego, opisywanego przeważnie przez powierzchnię graniczną w przestrzeni naprężeń, materiał osiąga maksymalną wytrzymałość i wchodzi w zakres pokrytyczny. Różne możliwości zachowania materiału w obszarze pokrytycznym w stanie jednoosiowym przedstawia (rys.2.5).



Rys.2.5.

Wytrzymałość materiału w stanie pokrytycznym może być zerowa (rys.2.5a), bądź też posiadać pewną residualną wartość (rys.2.5b). W ostatnim przypadku, (rys.2.5c) zakładana jest funkcyjna za-

ležność spadku wytrzymałości. Dla jednoosiowego rozciągania betonu model ten stosują Nilsson i Oldenburg [28] oraz Glemberg [29].

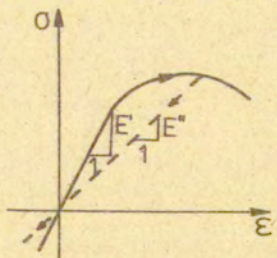
Kształty powierzchni granicznych betonu pokrywają się z otwartymi powierzchniami plastyczności omówionymi w poprzednim modelu. Po stronie rozciągania uzupełniane są one często kryterium Paula [30] maksymalnych naprężeń rozciągających (tension cut-off). Najdokładniejsze są kryteria uwzględniające wpływ trzeciego niezmiennika σ_3 np. Willama-Warnke [23] czy Ottosena [31].

Szczegółowe omówienie tych warunków oraz propozycję ogólnego warunku stanu granicznego dla materiałów kruchych zawiera praca Podgórskiego [32].

Odmianą modelu kruchego jest model plastyczny o ograniczonej ciągliwości (rys.2.5d). Wytrzymałość materiału spada po osiągnięciu odkształceń granicznych. Powierzchnia graniczna musi być zadana w przestrzeni odkształceń.

2.4. Modele uwzględniające degradację sprężystą

Degradacja sprężysta polega na zmianie własności sprężystych materiału na skutek rozwoju mikroszczelin. W betonie, w trakcie procesu obciążania na granicach ziaren oraz w zaprawie powstają oraz rozszerzają mikroszczeliny, które później łącząc się doprowadzają do powstania rys. Moduły sprężyste podczas tego procesu nie są stałe, lecz zmieniają swoje wartości (rys.2.6).



Rys.2.6.

W modelach uwzględniających degradację sprężystą istnieje problem wyboru miary degradacji. Najczęściej stosowane są miary opisujące fizyczne pustki rozmieszczone w ciele. Najprostszą jest oczywiście miara skalarna, która może być zdefiniowana np. jako stosunek objętości pustek V_p do objętości materiału V

$$(2.33) \quad \omega = \frac{V_p}{V}$$

Miara ta nie pozwala jednak na określenie orientacji mikro-szczelin. Vakulenko i Kachanov [33], [34] proponują opis defektów miarą tensorową

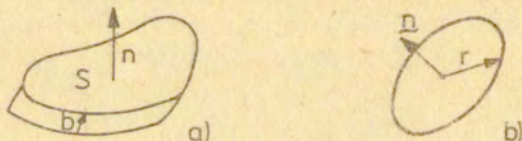
$$(2.34) \quad \omega_{ij} = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^m \int_{S^{(k)}} n_i^{(k)} b_j^{(k)} dS^{(k)}$$

gdzie m jest ilością pustek w materiale o objętości V ,

$n_i^{(k)}$ - wektorem normalnym do powierzchni pustki,

$b_j^{(k)}$ - wektorem określającym rozwarcie i przesunięcie, a

$S^{(k)}$ - powierzchnią k -tej pustki (rys.2.7a).



Rys.2.7.

Wadą tej miary jest fakt, że nie odróżnia ona pustek rozległych o małym rozwarciu od pustek kulistych, przy czym pierwsze z nich znacznie bardziej osłabiają materiał. W propozycjach Ody [35] oraz Krajcinovica i Fonseki [36] nie uwzględnia się rozwarcia mikro-szczelin, traktując je jako twory płaskie (rys.2.7b). Miara Ody prowadzi do tensora

$$(2.35) \quad \omega_{ij} = \frac{2\pi}{V} \sum_{k=1}^m n_i^{(k)} n_j^{(k)} r_{(k)}$$

gdzie

$$(2.36) \quad r_{(k)} = \sqrt{\frac{S^{(k)}}{\pi}}$$

i oznaczenia są identyczne jak poprzednio.

Natomiast miarą degradacji zaproponowaną przez Krajcinovica i Fonsekę jest wektor

$$(2.37) \quad \omega_i = \omega_n n_i$$

gdzie ω_n jest gęstością pustek w przekroju o normalnej n_i . Najbardziej ogólną miarę przedstawiają Stout i Thigpen w pracy [37]. Każda mikroszczelina charakteryzowana jest wektorem $\underline{s} = [S, n, b, \dot{b}]^T$, gdzie oznaczenia są zachowane, a \dot{b} oznacza prędkość rozwierania się szczeliny.

Miarę degradacji określa funkcja stochastyczna gęstości mikroszczelin $C(\underline{x}, t, \underline{s})$, gdzie \underline{x} jest wektorem położenia, t czasem.

2.4.1. Model Dougilla

Model degradacji sprężystej zaproponowany przez Dougilla [38], [39] zastosowany został dla betonu, w pracy Bazanta i Kima [40]. Teoria ta zbliżona jest do teorii plastycznego płynięcia. Opiera się na rozkładzie przyrostu naprężenia na dwie części

$$(2.38) \quad \dot{\underline{\sigma}} = \dot{\underline{\sigma}}^e - \dot{\underline{\sigma}}^f$$

przy czym $\dot{\underline{\sigma}}^e$ dotyczy sprężystego zachowania się materiału, natomiast $\dot{\underline{\sigma}}^f$ jest relaksacyjnym naprężeniem wynikającym z degradacji sprężystej

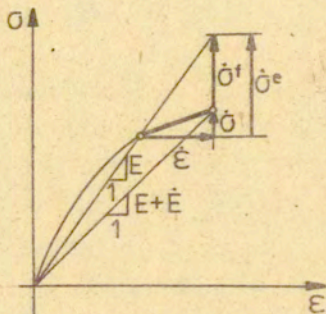
$$(2.39) \quad \dot{\underline{\sigma}}^f = -\dot{\underline{E}} \underline{\varepsilon}$$

gdzie $\dot{\underline{E}}$ oznacza zmianę tensora sztywności (rys.2.8).

W przestrzeni odkształceń wprowadza się powierzchnię degradacji $\bar{\Phi}(\underline{\varepsilon}, \underline{\omega}) = 0$. Naprężenie relaksacyjne otrzymywane jest przy założeniu o istnieniu potencjału degradacji $\Psi(\underline{\varepsilon}, \underline{\omega})$ z prawa analogicznego do prawa plastycznego płynięcia

$$(2.40) \quad \dot{\underline{\sigma}}^f = \dot{\Lambda} \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\epsilon}}$$

Podobnie definiuje się też prawo stowarzyszone, zakładając $\Psi \equiv \Phi$



Rys.2.8.

Poprzez porównanie wzorów (2.39) i (2.40) otrzymuje się wyrażenie pozwalające na obliczenie zmian modułów sprężystych. W przypadku traktowania betonu jako materiału izotropowego w ciągu całego procesu degradacji niemożliwe jest stosowanie prawa stowarzyszonego. Warunki obciążania i odciążania mają analogiczną postać, jak w teorii plastyczności. W trakcie odciążania zakłada się, że materiał nie doznaje degradacji i jego zachowanie jest czysto sprężyste.

2.4.2. Model Dragona-Mroza

W pracy [41] Dragon i Mróz zaproponowali odmienny model degradacji. Zakłada się w nim, że energia odkształcenia U zależy nie tylko od stanu naprężenia $\underline{\sigma}_{ij}$, ale również od miary degradacji ω_{ij} , przy czym miarą tą jest tensor wprowadzony przez Vakulenkę i Kachanowa. Przyrost odkształcenia składa się z dwóch części

$$(2.41) \quad \dot{\underline{\epsilon}} = \dot{\underline{\epsilon}}^e + \dot{\underline{\epsilon}}^f$$

związanych ze sprężystym odkształceniem oraz degradacją sprężystą. Przyrosty te wyrażone są wzorami

$$(2.42) \quad \dot{\epsilon}_{ij}^e = \frac{\partial^2 U}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl}$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^f = \frac{\partial^2 U}{\partial \sigma_{ij} \partial \omega_{kl}} \dot{\omega}_{kl}$$

W celu obliczenia przyrostu tensora degradacji $\dot{\omega}_{ij}$ wprowadza się w przestrzeni naprężeń powierzchnię degradacji $D(\sigma_{ij}, \omega_{ij})=0$ i identycznie jak w modelu plastycznym określa warunki obciążania i odciążania oraz prawo degradacji

$$(2.43) \quad \dot{\omega}_{ij} = \frac{1}{K} c_{ij} \left\langle \frac{\partial D}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} \right\rangle$$

gdzie c_{ij} jest znormalizowanym "tensorem kierunkowym", K - skalarną funkcją $\underline{\sigma}$ oraz $\underline{\omega}$. Natomiast oznaczenie $\langle x \rangle$ definiowane jest następująco

$$2.44 \quad \langle x \rangle = \begin{cases} x & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x \leq 0 \end{cases}$$

Alternatywnie wyprowadzona jest koncepcja dualna zakładająca podobnie jak w modelu poprzednim, istnienie powierzchni degradacji w przestrzeni odkształceń.

Modele stosowane do opisu betonu uwzględniają przeważnie kilka zjawisk równocześnie, dlatego też są zwykle kombinacją propozycji z powyższych grup. Przedstawiony w dalszej części pracy model betonu możemy zaliczyć do klasy modeli sprężysto-plastycznych ze wzmocnieniem uwzględniających degradację sprężystą.

3. Ogólna postać równania konstytutywnego

Niesprężyste zachowanie się betonu opisywać będziemy modelem przyrostowym, w którym prawo konstytutywne wiąże ze sobą przyrosty odkształcenia i naprężenia, a nie ich wartości. Z numerycznego punktu widzenia równanie konstytutywne powinno być liniowe. Odpowiada to lokalnej linearyzacji nieliniowej relacji pomiędzy odkształceniem i naprężeniem.

Przyrostowo liniowe równanie konstytutywne musi mieć następującą postać

$$(3.1) \quad \dot{\underline{\varepsilon}} = \underline{C} \dot{\underline{\sigma}}$$

lub dualnie

$$(3.2) \quad \dot{\underline{\sigma}} = \underline{E} \dot{\underline{\varepsilon}}$$

gdzie tensory podatności \underline{C} i sztywności \underline{E} zależą od stanu naprężenia, odkształcenia oraz parametrów wzmocnienia plastycznego $\underline{\kappa}$ i degradacji $\underline{\omega}$ opisujących stan wewnętrzny materiału, nie mogą natomiast zależeć od ich przyrostów tzn.

$$\underline{C} \equiv \underline{C}(\underline{\sigma}, \underline{\varepsilon}, \underline{\kappa}, \underline{\omega}), \quad \underline{E} \equiv \underline{E}(\underline{\sigma}, \underline{\varepsilon}, \underline{\kappa}, \underline{\omega})$$

Obie postacie dualne (3.1) i (3.2) są równoważne [42] i w dalszym ciągu rozpatrywać będziemy wyłącznie równanie (3.1).

Zakładamy istnienie w przestrzeni naprężeń dwóch powierzchni:

plastycznego płynięcia

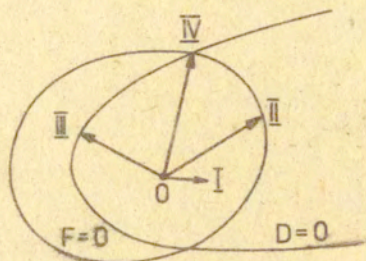
$$(3.3) \quad F(\underline{\sigma}, \underline{\kappa}) = 0$$

i degradacji sprężystej

$$(3.4) \quad D(\underline{\sigma}, \underline{\omega}) = 0$$

Powierzchnie te ograniczają obszary, w których nie zachodzą zjawiska plastyczne $F < 0$ lub degradacja sprężysta $D < 0$.

Schematycznie wszystkie możliwe przypadki przedstawia (rys.3.1).



Rys.3.1.

Dla pierwszego stanu naprężenia zachowanie materiału jest czysto sprężyste, dla drugiego sprężysto-plastyczne, trzeci odpowiada degradacji sprężystej, natomiast czwarty jest iloczynem dwóch poprzednich, co oznacza równoczesne zachodzenie zjawisk plastycznych i degradacji.

Rozpatrzmy sytuację, gdy punkt reprezentujący aktualny stan naprężenia leży na powierzchni plastyczności $F = 0$ lub degradacji $D = 0$. Oznaczmy odpowiednio przez \underline{f} i \underline{d} wersory normalne do tych powierzchni. W zależności od kierunku przyrostu naprężenia skierowanego do wewnątrz lub na zewnątrz powierzchni, możemy określić warunki obciążania dla plastyczności

$$(3.5) \quad \underline{f} \cdot \underline{\dot{\epsilon}} \gg 0$$

oraz degradacji

$$(3.6) \quad \underline{d} \cdot \underline{\dot{\epsilon}} \gg 0$$

Cztery przypadki przedstawione na (rys.3.1) możemy obecnie opisać następującymi warunkami

(3.7)

$$\begin{aligned}
 \text{I: } & F < 0 \text{ lub } F=0 \text{ i } \underline{f} \cdot \underline{\xi} \leq 0 \quad \text{oraz } D < 0 \text{ lub } D=0 \text{ i } \underline{d} \cdot \underline{\xi} \leq 0 \\
 \text{II: } & F = 0 \text{ i } \underline{f} \cdot \underline{\xi} \geq 0 \quad \text{oraz } D < 0 \text{ lub } D=0 \text{ i } \underline{d} \cdot \underline{\xi} \leq 0 \\
 \text{III: } & F < 0 \text{ lub } F=0 \text{ i } \underline{f} \cdot \underline{\xi} \leq 0 \quad \text{oraz } D = 0 \text{ i } \underline{d} \cdot \underline{\xi} \geq 0 \\
 \text{IV: } & F = 0 \text{ i } \underline{f} \cdot \underline{\xi} \geq 0 \quad \text{oraz } D = 0 \text{ i } \underline{d} \cdot \underline{\xi} \geq 0
 \end{aligned}$$

Dla każdego z nich zapisujemy odpowiednie równanie konstytutywne

$$\begin{aligned}
 \text{I: } & \underline{\xi} = \underline{c}_I \underline{\xi} \\
 \text{(3.8) II: } & \underline{\xi} = \underline{c}_{II} \underline{\xi} \\
 \text{III: } & \underline{\xi} = \underline{c}_{III} \underline{\xi} \\
 \text{IV: } & \underline{\xi} = \underline{c}_{IV} \underline{\xi}
 \end{aligned}$$

Warunki zgodności przedstawiają się następująco

(3.9)

$$\begin{aligned}
 \underline{c}_I \underline{\xi} &= \underline{c}_{II} \underline{\xi} \quad \text{dla } F=0 \text{ i } \underline{f} \cdot \underline{\xi} = 0 \text{ oraz } D < 0 \text{ lub } D=0 \text{ i } \underline{d} \cdot \underline{\xi} \leq 0 \\
 \underline{c}_I \underline{\xi} &= \underline{c}_{III} \underline{\xi} \quad \text{dla } F < 0 \text{ lub } F=0 \text{ i } \underline{f} \cdot \underline{\xi} \leq 0 \text{ oraz } D=0 \text{ i } \underline{d} \cdot \underline{\xi} = 0 \\
 \underline{c}_I \underline{\xi} &= \underline{c}_{II} \underline{\xi} = \underline{c}_{III} \underline{\xi} = \underline{c}_{IV} \underline{\xi} \quad \text{dla } F=0 \text{ i } \underline{f} \cdot \underline{\xi} = 0 \text{ oraz } D=0 \text{ i } \underline{d} \cdot \underline{\xi} = 0 \\
 \underline{c}_{II} \underline{\xi} &= \underline{c}_{IV} \underline{\xi} \quad \text{dla } F=0 \text{ i } \underline{f} \cdot \underline{\xi} = 0 \text{ oraz } D=0 \text{ i } \underline{d} \cdot \underline{\xi} > 0 \\
 \underline{c}_{III} \underline{\xi} &= \underline{c}_{IV} \underline{\xi} \quad \text{dla } F=0 \text{ i } \underline{f} \cdot \underline{\xi} \geq 0 \text{ oraz } D=0 \text{ i } \underline{d} \cdot \underline{\xi} = 0
 \end{aligned}$$

Z warunków tych wynika postać tensora podatności \underline{c}

$$\text{(3.10) } \quad \underline{c} = \underline{c}^e + \underline{c}^p + \underline{c}^f$$

przy czym dla odpowiednich przypadków

$$\begin{aligned}
 \text{I: } & \underline{c}^p = \underline{c}^f = \underline{0} \\
 \text{(3.11) II: } & \underline{c}^f = \underline{0} \\
 \text{III: } & \underline{c}^p = \underline{0}
 \end{aligned}$$

gdzie $\underline{0}$ oznacza tensor zerowy.

Załómy dalej, że całkowite odkształcenie możemy zapisać jako sumę odkształceń plastycznych i sprężystych

$$\text{(3.12) } \quad \underline{\xi} = \underline{\xi}^p + \underline{c}_s^e \underline{\xi}$$

przy czym $\underline{\underline{C}}_s^e$ jest tensorem siecznych modułów sprężystych. Różniczkując równanie (3.12) otrzymamy

$$(3.13) \quad \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} = \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^P + \underline{\underline{C}}_s^e \dot{\underline{\underline{\sigma}}} + \dot{\underline{\underline{C}}}_s^e \underline{\underline{\sigma}}$$

Widzimy, że przyrost odkształcenia składa się z trzech części: z przyrostu odkształceń plastycznych, przyrostu sprężystego oraz przyrostu wywołanego zmianą siecznych modułów sprężystych (rys.3.2).

Czyli

$$(3.14) \quad \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} = \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^P + \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^e + \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^f$$

gdzie

$$(3.15) \quad \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^e = \underline{\underline{C}}_s^e \dot{\underline{\underline{\sigma}}}$$

$$\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^f = \dot{\underline{\underline{C}}}_s^e \underline{\underline{\sigma}}$$

Przyjmując

$$(3.16) \quad \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^P = \underline{\underline{C}}^P \dot{\underline{\underline{\sigma}}}$$

i porównując równania (3.1) i (3.10) z (3.13) otrzymujemy warunek

$$(3.17) \quad (\underline{\underline{C}}^e + \underline{\underline{C}}^f) \dot{\underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{C}}_s^e \dot{\underline{\underline{\sigma}}} + \dot{\underline{\underline{C}}}_s^e \underline{\underline{\sigma}}$$

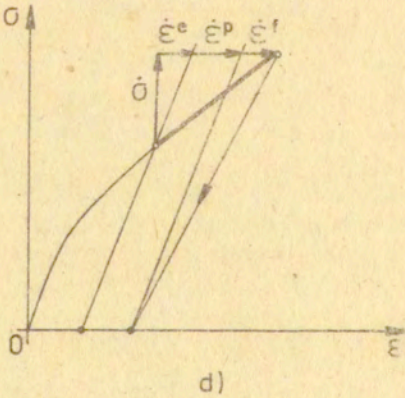
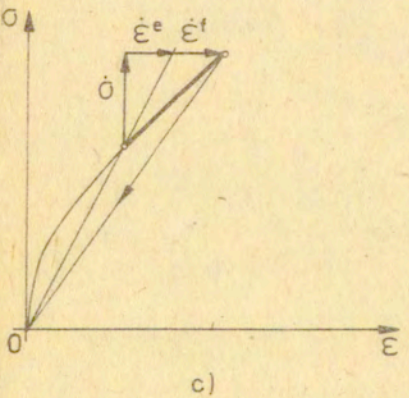
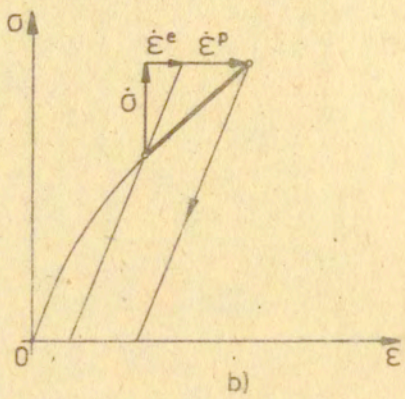
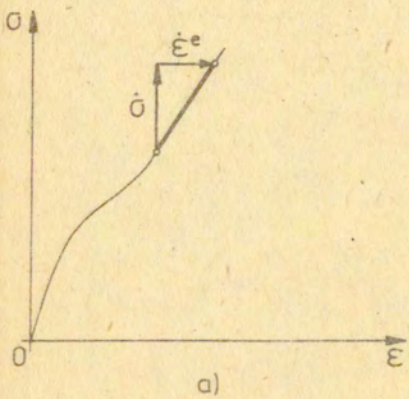
W przypadku liniowej sprężystości, moduły sieczne i styczne są równe i wówczas warunek (3.17) upraszcza się do postaci

$$(3.18) \quad \underline{\underline{C}}^f \underline{\underline{\sigma}} = \dot{\underline{\underline{C}}}_s^e \underline{\underline{\sigma}}$$

Stanowi on istotne ograniczenie na postać tensora $\underline{\underline{C}}^f$ opisującego degradację. Założenie o liniowej sprężystości pozwala również zapisać składniki przyrostu odkształcenia (3.14) za pomocą składników tensora podatności (3.10)

(3.19)

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}^e &= C^e \dot{\epsilon}^e \\ \dot{\sigma}^p &= C^p \dot{\epsilon}^p \\ \dot{\sigma}^f &= C^f \dot{\epsilon}^f \end{aligned}$$



Rys. 3.2

3.1. Plastyczność

Zakładamy, że aktualny stan naprężenia znajduje się na powierzchni plastyczności tzn. spełniony jest warunek

$$(3.20) \quad F(\underline{\sigma}, \underline{\kappa}) = 0$$

Wzmocnienie określane jest prawem ewolucji parametru $\underline{\kappa}$ w zależności od przyrostu odkształceń plastycznych

$$(3.21) \quad \dot{\underline{\kappa}} = \underline{\kappa}(\dot{\underline{\epsilon}}^P)$$

Przyrost odkształceń plastycznych obliczamy z prawa plastycznego płynięcia

$$(3.22) \quad \dot{\underline{\epsilon}}^P = \lambda \underline{m} \quad \lambda \geq 0$$

gdzie \underline{m} jest wektorem określającym kierunek płynięcia. Mnożnik λ wyznaczany jest z warunku zgodności

$$(3.23) \quad F(\underline{\sigma} + \dot{\underline{\sigma}}, \underline{\kappa} + \dot{\underline{\kappa}}) = 0$$

opisującego fakt, że w trakcie obciążania punkt reprezentujący stan naprężenia przez cały czas pozostaje na powierzchni plastycznego płynięcia. Warunek (3.23) prowadzi do równania

$$(3.24) \quad \dot{F} = F_{,\sigma} \cdot \dot{\underline{\sigma}} + F_{,\kappa} \cdot \dot{\underline{\kappa}} = 0$$

Zgodnie z (3.21) i (3.22) $\dot{\underline{\kappa}}$ jest funkcją λ . Aby prawo plastycznego płynięcia było liniową funkcją $\underline{\sigma}$ wyrażenie (3.24) musi być sprowadzalne do postaci

$$(3.25) \quad \dot{F} = f \cdot \underline{\sigma} - H \lambda = 0$$

skąd

$$(3.26) \quad \lambda = \frac{1}{H} f \cdot \underline{\sigma}$$

gdzie

$$\underline{f} = \frac{\underline{F}_{,6}}{|\underline{F}_{,6}|} \quad |\underline{F}_{,6}| = (\underline{F}_{,6} \cdot \underline{F}_{,6})^{1/2}$$

Natomiast moduł plastyczny H zależy od prawa wzmocnienia. Konieczność istnienia przejścia od równania (3.24) do (3.25) narzuca warunki na postać parametrów wzmocnienia. O ile $\lambda \gg 0$ to wówczas przyrost odkształceń plastycznych wyrazi się wzorem

$$(3.27) \quad \dot{\underline{\epsilon}}^P = \frac{1}{H} (\underline{f} \cdot \dot{\underline{\epsilon}}) \underline{m} = \frac{1}{H} \underline{m} (\underline{f} \cdot \dot{\underline{\epsilon}}) = \frac{1}{H} (\underline{m} \otimes \underline{f}) \dot{\underline{\epsilon}}$$

a zatem

$$(3.28) \quad \underline{C}^P = \underline{C}^P \dot{\underline{\epsilon}}$$

gdzie

$$(3.29) \quad \underline{C}^P = \frac{1}{H} \underline{m} \otimes \underline{f}$$

Jeśli zaś $\lambda \leq 0$ lub $F < 0$, to wówczas przyjmujemy

$$(3.30) \quad \underline{C}^P = \underline{0}$$

Przyjmując $\underline{m} = \underline{f}$ otrzymujemy stowarzyszone prawo płynięcia.

3.2. Problem naroża ze sprzężeniem parametrów wzmocnienia

Zakładamy istnienie dwóch powierzchni plastyczności w przestrzeni naprężeń

$$(3.31) \quad \begin{aligned} F_1(\underline{\sigma}, \underline{x}_1) &= 0 \\ F_2(\underline{\sigma}, \underline{x}_2) &= 0 \end{aligned}$$

Wzmocnienie tych powierzchni określane jest prawami ewolucji zależnymi od przyrostów odkształceń plastycznych generowanych przez obydwie z nich tzn.

$$(3.32) \quad \begin{aligned} \dot{\underline{\kappa}}_1 &= \dot{\underline{\kappa}}_1 (\dot{\underline{\varepsilon}}_1^P, \dot{\underline{\varepsilon}}_2^P) \\ \dot{\underline{\kappa}}_2 &= \dot{\underline{\kappa}}_2 (\dot{\underline{\varepsilon}}_1^P, \dot{\underline{\varepsilon}}_2^P) \end{aligned}$$

Prawa plastycznego płynięcia określające oba przyrosty odkształceń wyrażają się wzorami

$$(3.33) \quad \begin{aligned} \dot{\underline{\varepsilon}}_1^P &= \dot{\lambda}_1 \underline{m}_1 & \dot{\lambda}_1 &\geq 0 \\ \dot{\underline{\varepsilon}}_2^P &= \dot{\lambda}_2 \underline{m}_2 & \dot{\lambda}_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Całkowity przyrost odkształceń plastycznych jest ich sumą

$$(3.34) \quad \dot{\underline{\varepsilon}}^P = \dot{\underline{\varepsilon}}_1^P + \dot{\underline{\varepsilon}}_2^P$$

Założmy, że aktualny stan naprężenia znajduje się na przecięciu obydwu powierzchni $F_1 = F_2 = 0$. Aby prawo płynięcia było liniowe, warunek zgodności dla powierzchni F_1

$$(3.35) \quad F_1 (\underline{\varepsilon} + \dot{\underline{\varepsilon}}, \underline{\kappa}_1 + \dot{\underline{\kappa}}_1) = 0$$

musi prowadzić do równania

$$(3.36) \quad \dot{F}_1 = \underline{f}_1 \cdot \dot{\underline{\varepsilon}} - H_{11} \dot{\lambda}_1 - H_{12} \dot{\lambda}_2 = 0$$

Podobnie prawo zgodności dla powierzchni F_2

$$(3.37) \quad F_2 (\underline{\varepsilon} + \dot{\underline{\varepsilon}}, \underline{\kappa}_2 + \dot{\underline{\kappa}}_2) = 0$$

daje

$$(3.38) \quad \dot{F}_2 = \underline{f}_2 \cdot \dot{\underline{\varepsilon}} - H_{21} \dot{\lambda}_1 - H_{22} \dot{\lambda}_2 = 0$$

Z (3.36) i (3.38) otrzymujemy układ równań

$$(3.39) \quad \begin{aligned} H_{11} \dot{\lambda}_1 + H_{12} \dot{\lambda}_2 &= \underline{f}_1 \cdot \dot{\underline{\varepsilon}} \\ H_{21} \dot{\lambda}_1 + H_{22} \dot{\lambda}_2 &= \underline{f}_2 \cdot \dot{\underline{\varepsilon}} \end{aligned}$$

Musimy rozpatrzyć cztery przypadki.

Założmy $\lambda_1 \gg 0$ i $\lambda_2 \gg 0$

Rozwiązując układ (3.39) otrzymujemy

$$(3.40) \quad \begin{aligned} \dot{\lambda}_1^0 &= \frac{1}{H} (H_{22} \underline{f}_1 - H_{12} \underline{f}_2) \cdot \underline{\dot{S}} = \frac{1}{H} \underline{r}_1 \cdot \underline{\dot{S}} \\ \dot{\lambda}_2^0 &= \frac{1}{H} (H_{11} \underline{f}_2 - H_{21} \underline{f}_1) \cdot \underline{\dot{S}} = \frac{1}{H} \underline{r}_2 \cdot \underline{\dot{S}} \end{aligned}$$

gdzie oznaczyliśmy

$$(3.41) \quad \underline{r}_1 = H_{22} \underline{f}_1 - H_{12} \underline{f}_2$$

$$\underline{r}_2 = H_{11} \underline{f}_2 - H_{21} \underline{f}_1$$

oraz

$$(3.42) \quad H = H_{11} H_{22} - H_{12} H_{21}$$

i przyjmujemy, że $H \neq 0$.

Widzimy, że rozwiązanie to jest podobne do rozwiązania dla pojedynczej powierzchni, z tym tylko, że wektory \underline{r}_1 i \underline{r}_2 są liniową kombinacją wektorów \underline{f}_1 i \underline{f}_2 .

Obszar, w którym początkowe założenie jest spełnione, jest przecięciem dwóch półprzestrzeni

$$(3.43) \quad \frac{1}{H} \underline{r}_1 \cdot \underline{\dot{S}} \gg 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{H} \underline{r}_2 \cdot \underline{\dot{S}} \gg 0$$

i nazywać go będziemy obszarem naroża.

Założmy $\lambda_1 \gg 0$, $\lambda_2 = 0$.

Warunek zgodności (3.35) dla pierwszej powierzchni prowadzi do równania

$$(3.44) \quad \dot{F}_1 = \underline{f}_1 \cdot \underline{\dot{S}} - H_{11} \lambda_1 = 0$$

Ponieważ równocześnie zachodzi $F_2 = 0$ musimy spełnić nierówność

$$(3.45) \quad \dot{F}_2 = \underline{f}_2 \cdot \underline{\dot{S}} - H_{21} \lambda_1 \leq 0$$

wynikającą z założenia, że stan naprężenia pozostaje wewnątrz powierzchni plastyczności $F_2 \leq 0$.

Rozwiązanie otrzymujemy z równania (3.44) przyjmując $H_{11} \neq 0$.

$$(3.46) \quad \dot{\lambda}_1 = \frac{1}{H_{11}} \underline{f}_1 \cdot \underline{\dot{\epsilon}}$$

i jest ono identyczne jak poza narożem.

Z warunku (3.45) po podstawieniu rozwiązania (3.46) wynika, że

$$(3.47) \quad \left(\underline{f}_2 - \frac{H_{21}}{H_{11}} \underline{f}_1 \right) \cdot \underline{\dot{\epsilon}} \leq 0$$

Obszar, w którym spełnione jest założenie $\dot{\lambda}_1 \geq 0$, $\dot{\lambda}_2 = 0$ wyznaczamy z warunków

$$(3.48) \quad \frac{1}{H_{11}} \underline{f}_1 \cdot \underline{\dot{\epsilon}} \geq 0 \quad \text{oraz} \quad \left(\underline{f}_2 - \frac{H_{21}}{H_{11}} \underline{f}_1 \right) \cdot \underline{\dot{\epsilon}} \leq 0$$

i nazywamy obszarem bocznym związanym z pierwszą powierzchnią. W podobny sposób rozwiązujemy trzeci przypadek:

$$\dot{\lambda}_1 = 0 \quad \text{i} \quad \dot{\lambda}_2 \geq 0$$

Rozwiązanie ma postać

$$(3.49) \quad \dot{\lambda}_2 = \frac{1}{H_{22}} \underline{f}_2 \cdot \underline{\dot{\epsilon}} \quad (H_{22} \neq 0)$$

Natomiast obszar boczny drugiej powierzchni określany jest przez iloczyn

$$(3.50) \quad \frac{1}{H_{22}} \underline{f}_2 \cdot \underline{\dot{\epsilon}} \geq 0 \quad \text{i} \quad \left(\underline{f}_1 - \frac{H_{12}}{H_{22}} \underline{f}_2 \right) \cdot \underline{\dot{\epsilon}} \leq 0$$

Ostatni przypadek $\dot{\lambda}_1 = 0$ i $\dot{\lambda}_2 = 0$ odpowiada odciążaniu. Na granicy pomiędzy obszarem naroża oraz obszarami bocznymi spełnione muszą być warunki zgodności

$$(3.51) \quad \begin{aligned} \dot{\lambda}_2^0 = 0 &\Rightarrow \dot{\lambda}_1^0 = \dot{\lambda}_1^1 \\ \dot{\lambda}_1^0 = 0 &\Rightarrow \dot{\lambda}_2^0 = \dot{\lambda}_2^2 \end{aligned}$$

Półprosta

$$(3.52) \quad H_{11} \underline{f}_2 \cdot \underline{\dot{\xi}} = H_{21} \underline{f}_1 \cdot \underline{\dot{\xi}} \quad \frac{1}{H_{11}} \underline{f}_1 \cdot \underline{\dot{\xi}} > 0$$

stanowi granicę pomiędzy obszarem naroża i pierwszym obszarem bocznym i spełniony jest na niej warunek, określony pierwszym z równań (3.51)

$$(3.53) \quad \begin{aligned} \dot{\lambda}_1^0 &= \frac{1}{H} (H_{22} \underline{f}_1 \cdot \underline{\dot{\xi}} - H_{12} \underline{f}_2 \cdot \underline{\dot{\xi}}) = \frac{1}{H} (H_{22} - H_{12} \frac{H_{21}}{H_{11}}) \underline{f}_1 \cdot \underline{\dot{\xi}} = \\ &= \frac{1}{H} \frac{H_{22} H_{11} - H_{12} H_{21}}{H_{11}} \underline{f}_1 \cdot \underline{\dot{\xi}} = \frac{1}{H_{11}} \underline{f}_1 \cdot \underline{\dot{\xi}} = \dot{\lambda}_1^1 \end{aligned}$$

Podobnie drugą z granic określa półprosta

$$(3.54) \quad H_{22} \underline{f}_1 \cdot \underline{\dot{\xi}} = H_{12} \underline{f}_2 \cdot \underline{\dot{\xi}} \quad \frac{1}{H_{22}} \underline{f}_2 \cdot \underline{\dot{\xi}} > 0$$

dla której spełniony jest drugi z warunków (3.51).

Rozpatrzmy obecnie wzajemne położenie obszarów (3.43), (3.48) i (3.50). W przypadku wzmocnienia, gdy wszystkie $H_{ij} > 0$, aby rozwiązanie było jednoznacznie określone, konieczne jest by wnętrza wszystkich tych obszarów były wzajemnie rozłączne. Natomiast, jeśli powierzchnie plastyczności ulegają osłabieniu, dopuszczalne jest by obszar boczny zawierał się w obszarze naroża. Prawa płynięcia w części wspólnej tych dwóch obszarów zależą wówczas od tego czy obie powierzchnie są obciążane, czy też zachodzi obciążanie wyłącznie dla jednej z nich. Zarówno w przypadku wzmocnienia, jak i osłabienia rozwiązanie będzie niejednoznaczne jeżeli półprosta (3.52) leżeć będzie we wnętrzu obszaru bocznego drugiej z powierzchni lub półprosta (3.54) we wnętrzu obszaru bocznego pierwszej z nich. Niemożliwe jest wówczas spełnienie wymienionych wyżej warunków jednoznaczności. Sformułowanie to pozwala na wyznaczenie tych warunków.

Rozpatrzmy przypadek, kiedy półprosta (3.52) leży wewnątrz obszaru (3.50).

Z równania (3.52) wynika, że

$$(3.55) \quad \tilde{f}_2 \cdot \dot{\tilde{\omega}} = \frac{H_{21}}{H_{11}} \tilde{f}_1 \cdot \dot{\tilde{\omega}}$$

Wnętrze obszaru bocznego określają nierówności

$$(3.56) \quad \frac{1}{H_{22}} \tilde{f}_2 \cdot \dot{\tilde{\omega}} > 0 \quad ; \quad (\tilde{f}_1 - \frac{H_{12}}{H_{22}} \tilde{f}_2) \cdot \dot{\tilde{\omega}} < 0$$

Podstawiając do nich (3.55) otrzymujemy

$$(3.57) \quad \frac{H_{21}}{H_{22} H_{11}} \tilde{f}_1 \cdot \dot{\tilde{\omega}} > 0$$

oraz

$$(3.58) \quad (\tilde{f}_1 - \frac{H_{12}}{H_{22}} \frac{H_{21}}{H_{11}} \tilde{f}_1) \cdot \dot{\tilde{\omega}} = \frac{H}{H_{22} H_{11}} \tilde{f}_1 \cdot \dot{\tilde{\omega}} < 0$$

Po uwzględnieniu nierówności (3.52) dostajemy

$$(3.59) \quad \frac{H_{21}}{H_{22}} > 0 \quad \text{ i } \quad \frac{H}{H_{22}} < 0$$

Podobnie dla półprostej (3.54) i obszaru (3.48)

$$(3.60) \quad \frac{H_{12}}{H_{11}} > 0 \quad \text{ i } \quad \frac{H}{H_{11}} < 0$$

Negując (3.59) i (3.60) otrzymujemy warunki jednoznaczności

$$\frac{H_{21}}{H_{22}} \leq 0 \quad \text{ lub } \quad \frac{H}{H_{22}} \geq 0$$

i jednocześnie

$$(3.61) \quad \frac{H_{12}}{H_{11}} \leq 0 \quad \text{ lub } \quad \frac{H}{H_{11}} \geq 0$$

W szczególnym przypadku identycznego wzmocnienia lub osłabienia pbydnu powierzchni tzn. $H_{22} = H_{11}$ i $H_{21} = H_{12}$,

$H = H_{11}^2 - H_{12}^2$ i dla różnych znaków H_{11} i H_{12} warunek jedno-

znaczności wymaga by

$$(3.62) \quad \begin{aligned} H_{11} > 0 \quad H_{12} > 0 &\Rightarrow H \gg 0 \\ H_{11} < 0 \quad H_{12} < 0 &\Rightarrow H \ll 0 \end{aligned}$$

Natomiast dla $H_{11} H_{12} < 0$ nie ma żadnych ograniczeń.
Jak wynika z (3.61) przypadki

$$(3.63) \quad \begin{aligned} &H_{11} > 0 \quad H_{12} > 0 \quad H_{21} < 0 \quad H_{22} < 0 \\ \text{lub} \\ &H_{11} < 0 \quad H_{12} < 0 \quad H_{21} > 0 \quad H_{22} > 0 \end{aligned}$$

możliwe są jedynie dla $H = 0$.

Rozpatrzmy obecnie tę szczególną sytuację.

Jeśli $H_{11} = 0$ lub $H_{22} = 0$ wówczas stan naprężenia osiągnął linię stanów krytycznych i płynięcie plastyczne jest nieograniczone dla zerowego wzrostu naprężenia. Pozostaje możliwość, że $H_{22} = kH_{12}$ oraz $H_{21} = kH_{11}$ gdzie k jest pewnym współczynnikiem $k \neq 0$.

Aby układ (3.39) nie był sprzeczny, musi zachodzić

$$(3.64) \quad \underline{f}_2 \cdot \underline{\hat{\epsilon}} = k \underline{f}_1 \cdot \underline{\hat{\epsilon}}$$

Obszar naroża redukuje się do prostej, jednakże rozwiązanie nie jest jednoznaczne, gdyż układ (3.39) sprowadza się do równania z dwiema niewiadomymi. Oznacza to, że przypadki (3.63) są niemożliwe do opisania.

Ostatecznie warunki jednoznaczności rozwiązania możemy zapisać w formie

$$(3.65) \quad 1 \quad \frac{H_{21}}{H_{22}} \leq 0 \quad \text{lub} \quad \frac{H}{H_{22}} > 0$$

$$\frac{H_{12}}{H_{11}} \leq 0 \quad \text{lub} \quad \frac{H}{H_{11}} > 0$$

Rozważania dotyczące naroża ze sprzężeniem, zilustrujemy na prostym przykładzie.

Założmy, że powierzchnie plastyczności opisane są wzorami

$$(3.66) \quad \begin{aligned} G_1 - f_1(\varepsilon_1^P, \varepsilon_2^P) &= 0 \\ G_2 - f_2(\varepsilon_1^P, \varepsilon_2^P) &= 0 \end{aligned}$$

Stosujemy stowarzyszone prawa pływnięcia prowadzące do równości dla składowych przyrostu odkształcenia

$$(3.67) \quad \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1^P &= \dot{\lambda}_1 & \dot{\lambda}_1 &\geq 0 \\ \dot{\varepsilon}_2^P &= \dot{\lambda}_2 & \dot{\lambda}_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Równania zgodności przybierają formę

$$(3.68) \quad \begin{aligned} \dot{G}_1 - \frac{\partial f_1}{\partial \varepsilon_1^P} \dot{\varepsilon}_1^P - \frac{\partial f_1}{\partial \varepsilon_2^P} \dot{\varepsilon}_2^P &= 0 \\ \dot{G}_2 - \frac{\partial f_2}{\partial \varepsilon_1^P} \dot{\varepsilon}_1^P - \frac{\partial f_2}{\partial \varepsilon_2^P} \dot{\varepsilon}_2^P &= 0 \end{aligned}$$

Po wprowadzeniu oznaczenia

$$(3.69) \quad H_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial \varepsilon_j^P}$$

otrzymujemy układ równań

$$(3.70) \quad \begin{aligned} H_{11} \dot{\lambda}_1 + H_{12} \dot{\lambda}_2 &= \dot{G}_1 \\ H_{21} \dot{\lambda}_1 + H_{22} \dot{\lambda}_2 &= \dot{G}_2 \end{aligned}$$

Obszar naroża N opisują nierówności

$$(3.71) \quad N: \quad H_{22} \dot{G}_1 \geq H_{12} \dot{G}_2 \quad H_{11} \dot{G}_2 \geq H_{21} \dot{G}_1$$

zaś rozwiązanie w zapisie macierzowym ma postać

$$(3.72) \quad \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_1^P \\ \dot{\varepsilon}_2^P \end{bmatrix} = \frac{1}{H} \begin{bmatrix} H_{22} & -H_{12} \\ -H_{21} & H_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{G}_1 \\ \dot{G}_2 \end{bmatrix}$$

$$H = H_{11} H_{22} - H_{12} H_{21}$$

Aby macierz konstytutywna była symetryczna musi oczywiście zachodzić $H_{21} = H_{12}$.

Dla obszaru bocznego B1 pierwszej powierzchni

$$(3.73) \quad B1 : \quad \frac{1}{H_{41}} \dot{\sigma}_1 \geq 0 \quad \dot{\sigma}_2 \leq \frac{H_{21}}{H_{41}} \dot{\sigma}_1$$

rozwiązanie ma postać

$$(3.74) \quad \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_1^p \\ \dot{\epsilon}_2^p \end{bmatrix} = \frac{1}{H_{41}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\sigma}_1 \\ \dot{\sigma}_2 \end{bmatrix}$$

Natomiast drugiej

$$(3.75) \quad B2 : \quad \frac{1}{H_{22}} \dot{\sigma}_2 \geq 0 \quad \dot{\sigma}_1 \leq \frac{H_{12}}{H_{22}} \dot{\sigma}_2$$

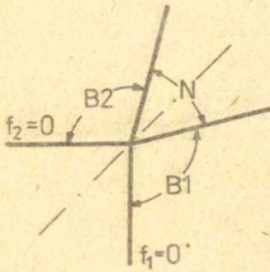
formę

$$(3.76) \quad \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_1^p \\ \dot{\epsilon}_2^p \end{bmatrix} = \frac{1}{H_{22}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\sigma}_1 \\ \dot{\sigma}_2 \end{bmatrix}$$

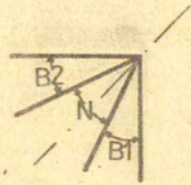
Zakładamy identyczne wzmocnienie obu powierzchni $H_{22} = H_{11}$, $H_{21} = H_{12}$. Kolejne rysunki (rys.3.3) pokazują wzajemne położenie obszaru naroża i obszarów bocznych dla różnych wartości modułów wzmocnienia

$$(3.77) \quad \begin{array}{ll} \text{a.} & H_{11} > H_{12} > 0 & H > 0 \\ \text{b.} & H_{12} > H_{11} > 0 & H < 0 \\ \text{c.} & H_{11} > 0 & H_{12} < 0 \\ \text{d.} & H_{12} < H_{11} < 0 & H < 0 \\ \text{e.} & H_{11} < H_{12} < 0 & H > 0 \\ \text{f.} & H_{11} < 0 & H_{12} > 0 \end{array}$$

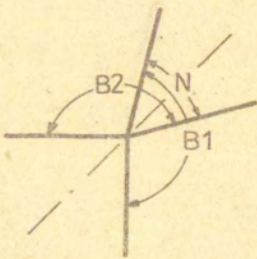
Przypadki b. i e., jak to wynika z wyprowadzonych warunków (3.65), prowadzą do niejednoznaczności rozwiązania.



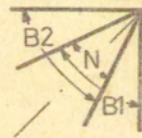
a)



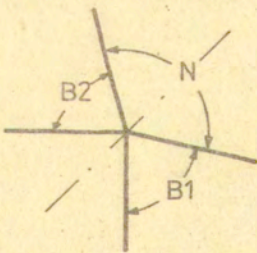
d)



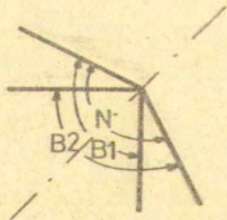
b)



e)



c)



f)

Rys. 3.3

3.3. Degradacja sprężysta

Energia odkształcenia U w opisie uwzględniającym degradację sprężystą musi być funkcją zarówno stanu naprężenia jak i parametru degradacji $\underline{\omega}$ tzn. $U = U(\underline{\varepsilon}, \underline{\omega})$.
Dla ustalonej wartości $\underline{\omega}$ zachodzi oczywiście

$$(3.78) \quad \underline{\varepsilon}(\underline{\varepsilon}, \underline{\omega}) = \frac{\partial U(\underline{\varepsilon}, \underline{\omega})}{\partial \underline{\varepsilon}}$$

Obliczając przyrost odkształcenia w trakcie procesu degradacji otrzymujemy

$$(3.79) \quad \dot{\underline{\varepsilon}} = \frac{\partial^2 U}{\partial \underline{\varepsilon} \partial \underline{\varepsilon}} \dot{\underline{\varepsilon}} + \frac{\partial^2 U}{\partial \underline{\varepsilon} \partial \underline{\omega}} \dot{\underline{\omega}} = \dot{\underline{\varepsilon}}^e + \dot{\underline{\varepsilon}}^f.$$

Widzimy, że w celu jego określenia musimy znać przyrost parametru degradacji $\dot{\underline{\omega}}$.

Zakładając istnienie powierzchni degradacji $D(\underline{\varepsilon}, \underline{\omega}) = 0$ w przestrzeni naprężeń możemy dualnie opisać powierzchnię degradacji $\hat{D} = 0$ w przestrzeni odkształceń

$$(3.80) \quad \hat{D}(\underline{\varepsilon}, \underline{\omega}) = D(\underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^p], \underline{\omega})$$

W pracach Bazanta i Kima [40], Krajcinovica i Fonseki [36] przyjmuje się za Dougillem [38] stowarzyszone prawo dla opisu przyrostu naprężenia relaksacyjnego degradacji

$$(3.81) \quad \dot{\underline{\varepsilon}}^f = \dot{\Lambda} \frac{\partial \hat{D}}{\partial \underline{\varepsilon}}$$

Wykażemy, że jest to równoważne z przyjęciem stowarzyszonego prawa dla przyrostu odkształcenia degradacji

$$(3.82) \quad \dot{\underline{\varepsilon}}^f = \dot{\lambda} \frac{\partial D}{\partial \underline{\varepsilon}}$$

Obraz dowolnego infityzesimalnego odcinka $d\underline{\varepsilon}$ powierzchni $\hat{D} = 0$ w przestrzeni naprężeń będzie odcinkiem $d\underline{\varepsilon}$ powierzchni $D = 0$ przy czym

$$(3.83) \quad ds = \underline{E} \, d\underline{e}$$

Związek gradientów obu powierzchni degradacji wyraża się wzorem

$$(3.84) \quad \frac{\partial \hat{D}}{\partial \underline{E}} = \frac{\partial D}{\partial \underline{e}} \frac{\partial \underline{e}}{\partial \underline{E}} = \frac{\partial D}{\partial \underline{e}} \underline{E}$$

A stąd iloczyn skalarny ma własność

$$(3.85) \quad \dot{\underline{e}}^f \cdot d\underline{s} = \dot{\underline{e}}^f \cdot \frac{\partial D}{\partial \underline{E}} \cdot \underline{E} \, d\underline{e} = \dot{\underline{e}}^f \cdot \frac{\partial D}{\partial \underline{e}} \cdot d\underline{e} = \frac{\dot{\underline{e}}^f}{\Lambda} \cdot d\underline{e}$$

Oznacza to równoważność praw (3.81) i (3.82).

W przypadku tensorowej miary $\underline{\omega}$ jest to z kolei równoważne, jak pokazano w pracy Dragona i Mroza [41], z przyjęciem prawa stowarzyszonego dla $\underline{\omega}$.

Rozpatrzmy warunek (3.18) dla czystego ścinania tzn. dla $\sigma_{kk} = 0$ przy założeniu izotropii w trakcie całego procesu degradacji. Po prawej stronie przyrost odkształcenia objętościowego wynikający z degradacji.

$$\dot{\epsilon}_v^f = \frac{1}{3} \sigma_{kk} \left(\frac{1}{K} \right) = 0$$

gdzie K oznacza moduł ściśliwości objętościowej.

A zatem materiał nie może doznawać żadnych zmian objętościowych na skutek degradacji. Po lewej zaś stronie przyjmując stowarzyszone prawo mamy

$$\dot{\epsilon}_v^f = \dot{\lambda} \frac{\partial D}{\partial \sigma_{kk}}$$

Wynika stąd, że powierzchnia degradacji powinna przecinać oś τ pod kątem prostym. Spośród opisanych w rozdz.2 powierzchni, jedynie powierzchnia Misesa spełnia ten warunek, zdecydowanie jednak odbiega od wyników doświadczalnych dla betonu. Przyjęcie innej powierzchni uniemożliwia stosowanie stowarzyszonego prawa degradacji lub oznacza konieczność rezygnacji z izotropowości materiału, przez co wzrasta znacznie ilość modułów sprężystych. W pracy Bazanta i Kima [40] zakładając izotropo-

wość, odchodzi się od prawa stowarzyszonego pozostawiając normalność do powierzchni degradacji na płaszczyźnie dziewiatorowej, co jest możliwe tylko w przypadku powierzchni osiowo-symetrycznych.

W niniejszej pracy proponujemy inne prawo, integralnie spełniające warunek (3.18) i umożliwiające opis niszczenia materiału izotropowego.

Podobnie jak w teorii Griffitha [42] [43] możemy napisać bilans energetyczny dla ciała, w którym statycznie propagują się mikroszczeliny. Pomijamy przy tym wpływy termiczne

$$(3.86) \quad \dot{W} = \dot{U} + \dot{R} + \dot{Z}$$

gdzie

\dot{W} - oznacza energię dostarczoną w postaci pracy sił zewnętrznych

\dot{U} - zmianę energii odkształcenia

\dot{R} - dyssypację plastyczną $\dot{R} \gg 0$

\dot{Z} - dyssypację niszczenia $\dot{Z} \gg 0$

Zakładamy, że \dot{Z} może być dodatnie tylko wtedy, gdy $\dot{W} - \dot{R}$ jest dodatnie. Innymi słowy, dla zajścia procesu niszczenia konieczna jest nadwyżka energii dostarczonej do ciała nad dyssypacją plastyczną. Przy tym założeniu możemy stwierdzić, że istnieje ψ takie, że

$$(3.87) \quad \dot{Z} = \psi (\dot{W} - \dot{R})$$

w przypadku, kiedy degradacja nie zachodzi mamy oczywiście $\psi = 0$.

Znaczenie funkcji ψ pokażemy na przykładach jednowymiarowych, pomijając przy tym zjawiska plastyczne ($\dot{R} = 0$).

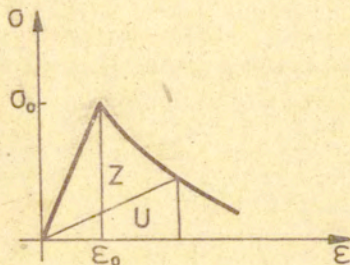
Założmy, że po osiągnięciu pewnego odkształcenia ϵ_0 , wartość ψ zmienia się skokowo z 0 na 1. Wówczas $\dot{Z} = \dot{W}$ i z bilansu energii $\dot{U} = 0$, czyli $U = \text{const}$.

A zatem $U = \frac{1}{2} \sigma \epsilon = \frac{1}{2} \sigma_0 \epsilon_0$, gdzie σ_0 jest naprężeniem odpowiadającym odkształceniu ϵ_0 .

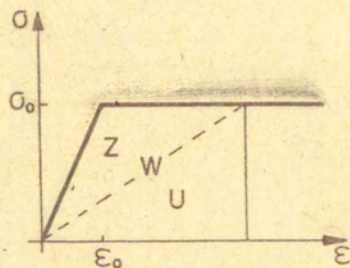
Stąd

$$(3.88) \quad \sigma = \frac{\sigma_0 \epsilon_0}{\epsilon}$$

Wykres zależności $\sigma - \epsilon$ przedstawia (rys.3.4).



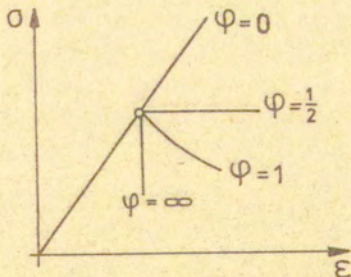
Rys.3.4.



Rys.3.5

Przyjmijmy, że zachowanie materiału przedstawia (rys.3.5). Wykres ten jest podobny do wykresu $\sigma - \epsilon$ dla modelu sprężysto-idealnie plastycznego. Różnica polega na innej drodze odciążania. Liczymy energię dostarczoną $W = \frac{1}{2} \sigma_0 \epsilon_0 + \sigma_0 (\epsilon - \epsilon_0)$ oraz energię odkształcenia $U = \frac{1}{2} \sigma_0 \epsilon$. Różniczkując otrzymujemy $\dot{W} = \sigma_0 \dot{\epsilon}$, $\dot{U} = \frac{1}{2} \sigma_0 \dot{\epsilon}$ i możemy obliczyć dysypację $\dot{Z} = \dot{W} - \dot{U} = \frac{1}{2} \sigma_0 \dot{\epsilon} = \frac{1}{2} \dot{W}$, czyli $\psi = \frac{1}{2}$ i jest stałe dla $\epsilon > \epsilon_0$.

Różne możliwości zachowania się materiału w zależności od wartości funkcji ψ pokazane są na (rys.3.6).



Wykresy te nasuwają pewną interpretację ψ jako miary degradacji. Dla $\psi = 0$ materiał zachowuje się w sposób czysto sprężysty, przy $\psi = \frac{1}{2}$ materiał nie zmienia poziomu naprężenia, dla $\psi = 1$ energia sprężysta materiału pozostaje niezmienną, $\psi = \infty$ natomiast odpowiada nagłej utracie wytrzymałości. Zakładając ciągłą zmianę wartości ψ od 0 do ∞ . poszczególne wartości odpowiadać będą brakowi degradacji, maksimum naprężenia, maksimum energii odkształcenia oraz zniszczeniu. Nieodwracalność tego procesu zapewnić będzie warunek $\psi \geq 0$. Z fizycznego punktu widzenia ψ opisuje podział energii dostarczonej na zmianę energii sprężystej oraz dyssypację niszczenia, jest zatem wielkością obiektywną.

3.4. Analogia ze zmodyfikowanym modelem Griffitha

Energia odkształcenia nieskończonej cienkiej płyty o jednostkowej grubości ze szczeliną Griffitha o długości $2c$ wyraża się wzorem

$$(3.89) \quad U = (1 - \nu^2) \pi c^2 G^2 / E$$

Pochodna energii odkształcenia dla wzrostu długości szczeliny ma postać

$$(3.90) \quad \frac{\partial U}{\partial c} = \frac{2(1 - \nu^2) \pi}{E} c G^2$$

Zakładamy, że jednostkowa energia powierzchniowa γ_s jest funkcją długości szczeliny tzn. $\gamma_s \equiv \gamma_s(c)$ a nie wartością stałą. Warunek początku propagacji wymaga, by zgodnie z kryterium Griffitha

$$(3.91) \quad \frac{\partial U}{\partial c} = 4 \gamma_s$$

Możemy stąd wyznaczyć funkcję $G(c)$

$$(3.92) \quad G = A \left(\frac{\gamma_s}{c} \right)^{1/2}$$

gdzie oznaczyliśmy

$$(3.93) \quad A = \left[\frac{2E}{(1-\nu^2)\pi} \right]^{1/2}$$

Na wykresie naprężenie-przemieszczenie dla całej próbki, przyrost szczeliny uwidacznia się w postaci zmiany sztywności całego układu (rys.3.7). Energia dyssypowana dZ wyraża się wzorem

$$(3.94) \quad dZ = \frac{1}{2} G du - \frac{1}{2} u dG$$

Zakładamy, że energia ta w całości idzie na zmianę rozmiarów szczeliny

$$(3.95) \quad dZ = 4 \delta_s dc$$

Ze wzoru (3.94) otrzymujemy równanie

$$(3.96) \quad \frac{1}{2} G \frac{du}{dc} - \frac{1}{2} u \frac{dG}{dc} = 4 \delta_s$$

Różniczkując (3.92) dostajemy

$$(3.97) \quad \frac{dG}{dc} = \frac{1}{2} A \delta_s^{-1/2} c^{-3/2} (\delta_s' c - \delta_s)$$

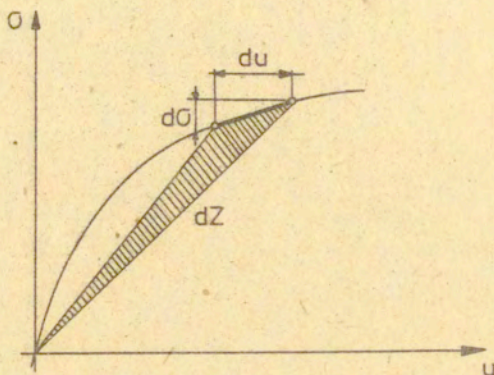
i po podstawieniu do (3.96) wraz ze wzorem (3.92)

$$(3.98) \quad \frac{du}{dc} = 8 A^{-1} (\delta_s' c)^{1/2} + \frac{1}{2} u (\delta_s^{-1} \delta_s' - c^{-1})$$

Równanie różniczkowe (3.98) po przyjęciu konkretnej postaci funkcji δ_s pozwoli na otrzymanie zależności $u(c)$.

Warunek początkowy możemy sformułować w postaci

$$(3.99) \quad u \Big|_{c=c_0} = 0$$



Rys. 3.7.

Równanie (3.98) jest równaniem liniowym

$$(3.100) \quad \frac{du}{dc} + p(c)u = f(c)$$

gdzie

$$(3.101) \quad p(c) = \frac{1}{2} (c^{-1} - \gamma_s^{-1} \gamma_s')$$

$$f(c) = \gamma A^{-1} (\gamma_s c)^{\frac{1}{2}}$$

Rozwiązanie ogólne ma postać

$$(3.102) \quad u = e^{-B} \int_{c_0}^c f(c) e^B dc$$

gdzie oznaczyliśmy

$$(3.103) \quad B = \int_{c_0}^c p(c) dc$$

Obliczając B otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 (3.104) \quad B &= \frac{1}{2} \int_{c_0}^c \left(\frac{1}{c} - \frac{\delta_s'}{\delta_s} \right) dc = \frac{1}{2} (\ln c - \ln \delta_s) \Big|_{c_0}^c = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\ln \frac{c}{c_0} - \ln \frac{\delta_s}{\delta_0} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{c \delta_0}{c_0 \delta_s} = \\
 &= \ln \left(\frac{c \delta_0}{c_0 \delta_s} \right)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

przy czym $\delta_0 = \delta_s(c_0)$

Przemieszczenie u wyrazi się wzorem

$$\begin{aligned}
 (3.105) \quad u &= \left(\frac{c_0 \delta_s}{c \delta_0} \right)^{\frac{1}{2}} 8A^{-1} \int_{c_0}^c (\delta_s c)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c \delta_0}{c_0 \delta_s} \right)^{\frac{1}{2}} dc = \\
 &= 8A^{-1} \left(\frac{\delta_s}{c} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{c_0}^c c dc = 4A^{-1} \left(\frac{\delta_s}{c} \right)^{\frac{1}{2}} (c^2 \Big|_{c_0}^c) = \\
 &= 4A^{-1} \left(\frac{\delta_s}{c} \right)^{\frac{1}{2}} (c^2 - c_0^2)
 \end{aligned}$$

Podsumowując, mamy określone dwie funkcje G i u zależne od aktualnej długości szczeliny c

$$(3.106) \quad G = A \left(\frac{\delta_s}{c} \right)^{\frac{1}{2}} \quad u = 4A^{-1} \left(\frac{\delta_s}{c} \right)^{\frac{1}{2}} (c^2 - c_0^2)$$

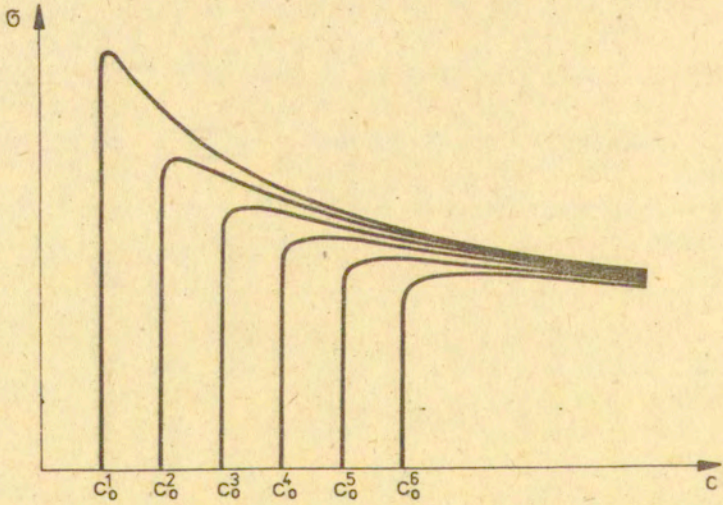
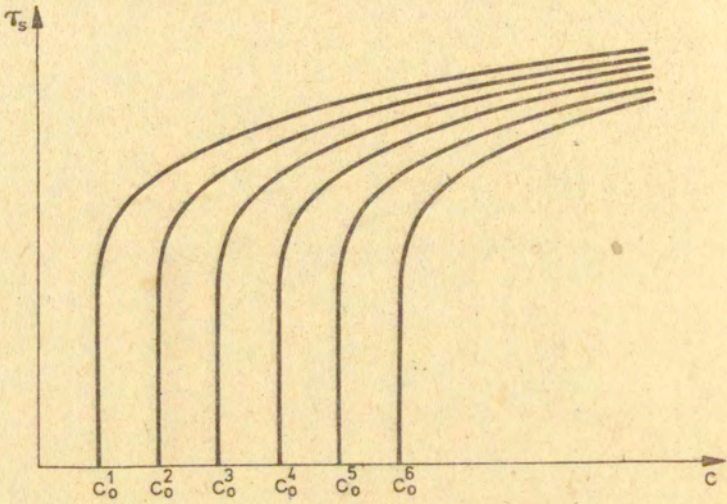
Na ich podstawie możemy przedstawić relacje $G - u$ dla całej próbki.

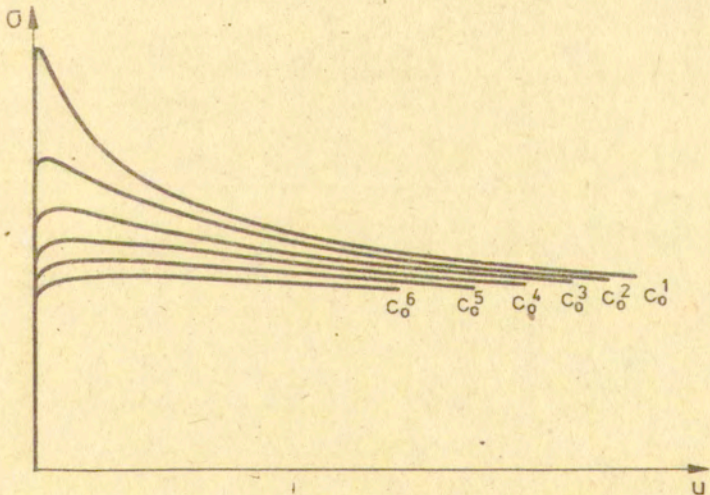
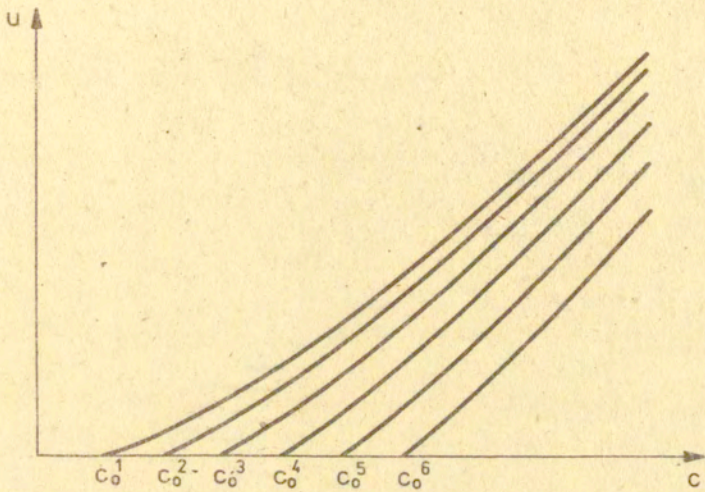
Przyjmując funkcję jednostkowej energii powierzchniowej δ_s w formie

$$(3.107) \quad \delta_s(c) = \delta_0 + a(c - c_0)^{\frac{1}{p}} \quad p > 0$$

możemy pokazać przykładowe wykresy funkcji δ_s , G , u oraz relację $G - u$.

Są one przedstawione na (rys.3.8) dla różnych początkowych długości szczeliny c_0 , przy czym $c_0^i < c_0^{i+1}$. Im większa jest początkowa długość szczeliny, tym dłuższy jest odcinek jej statecznej propagacji przy sterowaniu naprężeniami.





Stosując podejście zaproponowane w pracy, obliczamy

$$\begin{aligned} dW &= \sigma du \\ (3.108) \quad dU &= \frac{1}{2} \sigma du + \frac{1}{2} u d\sigma \\ dZ &= \frac{1}{2} \sigma du - \frac{1}{2} u d\sigma \end{aligned}$$

i zgodnie ze wzorem

$$(3.109) \quad dZ = \psi dW$$

wyznaczamy wartość

$$(3.110) \quad \psi = \frac{dZ}{dW} = \frac{\frac{1}{2} \sigma du - \frac{1}{2} u d\sigma}{\sigma du} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{u}{\sigma} \frac{d\sigma}{du}$$

Oznaczając moduły sieczny E_s i styczny E_t mamy

$$(3.111) \quad E_s = \frac{\sigma}{u} \quad E_t = \frac{d\sigma}{du}$$

oraz

$$(3.112) \quad \psi = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{E_t}{E_s} \right)$$

Znając funkcję jednostkowej energii powierzchniowej możemy zatem sprowadzić model z pojedynczą szczeliną Griffitha do modelu stosowanego w pracy. Wynika z tego, że w zastosowanym modelu moglibyśmy zamiast założenia postaci funkcji ψ rozpatrywać fikcyjną szczelinę opisującą wszystkie mikroszczeliny znajdujące się w ciele.

4. Model betonu

4.1. Związki fizyczne na płaszczyźnie p-q

Analizę ograniczymy obecnie do przypadku testu "trójosiowego", w którym dwa naprężenia główne są sobie równe $\sigma_2 = \sigma_3$. Walcowa próbka poddana jest działaniu siły osiowej i ciśnienia hydrostatycznego. Panujący w niej stan naprężenia jest osiowo-symetryczny.

Wyniki uzyskane w tym szczególnym przypadku rozszerzymy później na dowolny trójosiowy stan naprężenia.

Wprowadzamy następujący wektor naprężenia:

$$(4.1) \quad \bar{\sigma} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

gdzie $p = -\frac{1}{3}(\sigma_1 + 2\sigma_2)$ i jest ciśnieniem hydrostatycznym oraz $q = \sigma_2 - \sigma_1$ jest naprężeniem ścinającym ($\sigma_2 = \sigma_3$). Podobnie przyjmujemy wektor odkształcenia

$$(4.2) \quad \bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_v \\ \varepsilon_q \end{bmatrix}$$

gdzie $\varepsilon_v = -(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)$ $\varepsilon_q = \frac{2}{3}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$

Współczynniki zostały dobrane tak, aby

$$(4.3) \quad \bar{\sigma} \cdot \bar{\varepsilon} = p\varepsilon_v + q\varepsilon_q = \sigma_1\varepsilon_1 + 2\sigma_2\varepsilon_2$$

Prawo Hooke'a dla wprowadzonych wektorów naprężenia i odkształcenia wygląda następująco:

$$(4.4) \quad \bar{\varepsilon} = \bar{C}^e \bar{\sigma} \quad \bar{C}^e = \begin{bmatrix} \frac{1}{K} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3G} \end{bmatrix}$$

K jest modułem ściśliwości objętościowej, G zaś modułem ścinania. Przyjmijmy dla uproszczenia zapisu oznaczenia:

$$(4.5) \quad T = \frac{1}{K} \quad S = \frac{1}{3G}$$

Wielkości te nazywać będziemy współczynnikami sprężystymi. Pomiędzy modułami K i G , a nowo wprowadzonymi współczynnikami zachodzą związki

$$(4.6) \quad \begin{aligned} K &= \frac{1}{T} & G &= \frac{1}{3S} \\ \dot{T} &= -\frac{\dot{K}}{K^2} & \dot{S} &= -\frac{\dot{G}}{3G^2} \\ \dot{K} &= -\frac{\dot{T}}{T^2} & \dot{G} &= -\frac{\dot{S}}{3S^2} \end{aligned}$$

Macierz podatności sprężystej przyjmuje postać:

$$(4.7) \quad \bar{c}^e = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}$$

Jej pochodna zaś wyrażać się będzie wzorem

$$(4.8) \quad \dot{\bar{c}}^e = \begin{bmatrix} \dot{T} & 0 \\ 0 & \dot{S} \end{bmatrix}$$

4.1.1. Opis degradacji sprężystej

Przyjmujemy najprostszą możliwą postać energii odkształcenia dla materiału izotropowego

$$(4.9) \quad U = \frac{1}{2} (T p^2 + S q^2)$$

Składowymi wektora $\bar{\omega}$ są wartości współczynników sprężystych

$$(4.10) \quad \bar{\omega} = \begin{bmatrix} T \\ S \end{bmatrix}$$

Materiał w trakcie procesu niszczenia zmienia swoje własności sprężyste, natomiast przez cały czas pozostaje materiałem izotropowym. Nie jest to oczywiście całkowicie zgodne z zachowaniem się betonu, szczególnie dla zaawansowanego stanu zniszczenia, gdzie anizotropia jest wyraźnie widoczna. Można natomiast dopuścić takie założenie w początkowej, przedkrytycznej fazie procesu.

Przyjmujemy, że materiał podlega obciążaniu, którego warunki wyprowadzimy później.

Różniczkując (4.9) obliczamy

$$(4.11) \quad \dot{U} = \frac{1}{2} p^2 \dot{T} + \frac{1}{2} q^2 \dot{S} + T p \dot{p} + S q \dot{q}$$

Zgodnie z (3.12) różnica energii dostarczonej i dyssypacji

$$(4.12) \quad \dot{W} - \dot{R} = \underline{\mathcal{E}} \cdot (\underline{\dot{\mathcal{E}}} - \underline{\dot{\mathcal{E}}}') = \underline{\mathcal{E}} \cdot (\underline{\dot{\mathcal{C}}} \underline{\dot{\mathcal{E}}}) = \underline{\mathcal{E}} \cdot (\underline{\dot{\mathcal{C}}} \underline{\dot{S}} + \underline{\dot{\mathcal{C}}}' \underline{\dot{S}})$$

Podstawiając (4.7) i (4.8) do (4.12) otrzymujemy

$$(4.13) \quad \dot{W} - \dot{R} = p^2 \dot{T} + q^2 \dot{S} + T p \dot{p} + S q \dot{q}$$

Z bilansu energii (3.86) liczymy dyssypację

$$(4.14) \quad \dot{Z} = (\dot{W} - \dot{R}) - \dot{U} = \frac{1}{2} p^2 \dot{T} + \frac{1}{2} q^2 \dot{S}$$

Równanie (3.87) po przekształceniu daje

$$(4.15) \quad \left(\frac{1}{2} - \Psi\right) (p^2 \dot{T} + q^2 \dot{S}) = \Psi (T p \dot{p} + S q \dot{q})$$

Z warunku zgodności

$$(4.16) \quad D(\underline{\dot{\mathcal{E}}} + \underline{\dot{\mathcal{E}}}', \underline{\dot{\omega}} + \underline{\dot{\omega}}') = 0$$

przy założeniu, że stan naprężenia pozostaje na powierzchni degradacji, otrzymamy drugie równanie pozwalające na wyznaczenie przyrostu parametru degradacji

$$(4.17) \quad \dot{D} = D_{,p} \dot{p} + D_{,q} \dot{q} + D_{,T} \dot{T} + D_{,S} \dot{S} = 0$$

a zatem

$$(4.18) \quad D_{,T} \dot{T} + D_{,S} \dot{S} = - (D_{,p} \dot{p} + D_{,q} \dot{q})$$

Rozwiązanie układu równań (4.15) (4.18) możemy zapisać w postaci macierzowej

$$(4.19) \quad \dot{\bar{\omega}} = \bar{\Omega} \dot{\bar{\xi}}$$

gdzie

$$(4.20) \quad \bar{\Omega} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \varphi T_P D_{,s} + (\frac{1}{2} - \varphi) q^2 D_{,p} & \varphi S_q D_{,s} + (\frac{1}{2} - \varphi) q^2 D_{,q} \\ -\varphi T_P D_{,T} - (\frac{1}{2} - \varphi) p^2 D_{,p} & -\varphi S_q D_{,T} - (\frac{1}{2} - \varphi) p^2 D_{,q} \end{bmatrix}$$

$$(4.21) \quad \Delta = (\frac{1}{2} - \varphi) (p^2 D_{,s} - q^2 D_{,T})$$

Prawą stronę warunku (3.18) przekształcamy następująco

$$(4.22) \quad \dot{\bar{c}}^e \dot{\bar{\xi}} = \begin{bmatrix} \dot{T} & 0 \\ 0 & \dot{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{S} \end{bmatrix} = \bar{A} \dot{\bar{\omega}}$$

gdzie oznaczyliśmy

$$(4.23) \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}$$

Wykorzystując (3.18), (3.19), (4.19) i (4.22) otrzymujemy

$$(4.24) \quad \dot{\bar{c}}^f = \bar{C}^f \dot{\bar{\xi}} = \dot{\bar{c}}^e \dot{\bar{\xi}} = \bar{A} \dot{\bar{\omega}} = \bar{A} \bar{\Omega} \dot{\bar{\xi}}$$

skąd

$$(4.25) \quad \bar{C}^f = \bar{A} \bar{\Omega}$$

Zajmiemy się teraz wyrażeniem (4.21). Dla $\Delta = 0$ macierz $\bar{\Omega}$ jest nieokreślona. Na wykresie naprężenie-odkształcenie odpowiada to punktowi krytycznemu, czyli maksimum naprężenia. Żądamy, aby w trakcie procesu obciążania występował dokładnie jeden taki punkt, czyli Δ może się zerować tylko raz.

celu spełnienia tego warunku przyjmujemy, że funkcja $D(\bar{\xi}, \bar{\omega})$ opisująca powierzchnię degradacji nie zależy bezpośrednio od wartości współczynników sprężystych lecz od wartości ψ . Funkcja ψ natomiast zależęć będzie od współczynników T i S, czyli

$$(4.26) \quad \begin{aligned} D &\equiv D(\bar{\xi}, \psi) \\ \psi &\equiv \psi(T, S) = \psi(\bar{\omega}) \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy

$$(4.27) \quad \begin{aligned} D_{,S} &= D_{,\psi} \psi_{,S} & D_{,T} &= D_{,\psi} \psi_{,T} \\ \Delta &= \left(\frac{1}{2} - \psi\right) D_{,\psi} (P^2 \psi_{,S} - q^2 \psi_{,T}) \end{aligned}$$

Zakładamy dalej, że $D_{,\psi} = 0$ dla $\psi = \frac{1}{2}$. Powierzchnia degradacji sprężystej staje się wówczas powierzchnią graniczną. Aby uniknąć zerowania się wyrażenia w drugim nawiasie przyjmujemy, że ψ jest funkcją monotonicznie rosnącą dla jednego z argumentów, dla drugiego zaś monotonicznie malejącą. Wówczas dla każdego T i S, $\psi_{,T}$ oraz $\psi_{,S}$ mają przeciwne znaki.

Warunki obciążania wyprowadzimy korzystając z prawa o nieujemności dyssypacji niszczenia $\dot{Z} \geq 0$ oraz zgodnie z założeniem o nieodwracalności procesu degradacji $\dot{\psi} \geq 0$. Obliczone wyrażenie (4.19) dla przyrostów T i S podstawiamy do (4.14) i po redukcji otrzymujemy

$$(4.28) \quad \dot{Z} = \bar{d}_1 \cdot \bar{\xi} \geq 0$$

gdzie

$$(4.29) \quad \bar{d}_1 = \frac{\psi}{2\psi-1} \begin{bmatrix} TP \\ Sq \end{bmatrix}$$

Dla $\psi \neq 0$ i $\psi \neq \frac{1}{2}$ wektor \bar{d}_1 jest wektorem normalnym do powierzchni opisującej potencjał sprężysty $U = \text{const.}$ w przestrzeni naprężeń. Z warunkiem tym zwiążemy kryterium $U = U_0$,

gdzie U_0 oznacza ostatnią, osiągniętą w trakcie procesu obciążania, energię odkształcenia.

Drugie założenie, po wykorzystaniu warunku zgodności (4.16) prowadzi do nierówności

$$(4.30) \quad \bar{d}_2 \cdot \bar{\sigma} \geq 0$$

gdzie

$$(4.31) \quad \bar{d}_2 = \frac{1}{D_{1\varphi}} \begin{bmatrix} D_{1P} \\ D_{1q} \end{bmatrix}$$

przy czym musi zachodzić $D = 0$.

Wektor \bar{d}_2 , dla $\varphi \neq \frac{1}{2}$, jest normalny do powierzchni degradacji. Postać warunków obciążania jest identyczna jak dla warunków plastycznego płynięcia. Różnica polega jedynie na tym, że dla $\varphi = 0$ wektor \bar{d}_1 jest wektorem zerowym.

Wyprowadzoną macierz $\bar{\Omega}$ możemy podzielić na dwie części

$$(4.32) \quad \bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 + \bar{\Omega}_2$$

gdzie oznaczyliśmy

$$(4.33) \quad \begin{aligned} \bar{\Omega}_1 &= \frac{1}{\Delta} \varphi \begin{bmatrix} T_P D_{1s} & S_q D_{1s} \\ -T_P D_{1T} & -S_q D_{1T} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{\varphi D_{1\varphi}}{\Delta} \begin{bmatrix} \varphi_{1s} \\ -\varphi_{1T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_P & S_q \end{bmatrix} = \\ &= \frac{\varphi}{(\frac{1}{2}-\varphi)(p^2\varphi_{1s}-q^2\varphi_{1T})} \begin{bmatrix} \varphi_{1s} \\ -\varphi_{1T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_P & S_q \end{bmatrix} \\ \bar{\Omega}_2 &= \frac{1}{\Delta} (\frac{1}{2}-\varphi) \begin{bmatrix} q^2 D_{1P} & q^2 D_{1q} \\ -p^2 D_{1P} & -p^2 D_{1q} \end{bmatrix} \\ (4.34) \quad &= \frac{1}{D_{1\varphi}(p^2\varphi_{1s}-q^2\varphi_{1T})} \begin{bmatrix} q^2 \\ -p^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{1P} & D_{1q} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Jak widzimy, otrzymane wzory odpowiadają przyjęciu niestowarzyszonych praw płynięcia typu (3.29) dla powierzchni opisującej energię sprężystą $U = U_0$ oraz dla powierzchni degradacji $D = 0$.

W przypadkach odciążania

$$(4.35) \quad \begin{aligned} U < U_0 \quad \text{lub} \quad U = U_0 \quad \text{i} \quad \bar{d}_1 \cdot \dot{\bar{\sigma}} < 0 &\Rightarrow \bar{\Omega}_1 = 0 \\ D < 0 \quad \text{lub} \quad D = 0 \quad \text{i} \quad \bar{d}_2 \cdot \dot{\bar{\sigma}} < 0 &\Rightarrow \bar{\Omega}_2 = 0 \end{aligned}$$

Początkowo $\Psi = 0$ i wówczas $\bar{\Omega}_1 = 0$ niezależnie od warunków obciążania. Dopiero po osiągnięciu przez stan naprężenia powierzchni degradacji i zmianie wartości Ψ składnik ten staje się istotny, a jego rola wzrasta wraz z postępującym procesem niszczenia. Geometrycznie możemy zinterpretować uzyskane zależności jako problem naroża. Występujące w nim powierzchnie nie są sprzężone i dzięki temu nie istnieje możliwość niejednoznaczności rozwiązania.

Na początku w przestrzeni naprężeń istnieje wyłącznie powierzchnia degradacji $D = 0$. Po osiągnięciu jej przez stan naprężenia generowana jest kolejna powierzchnia stałej energii odkształcenia $U = U_0$. W zależności od kierunku przyrostu naprężenia, prawo degradacji opisywane jest poprzez różne macierze (rys.4.1).

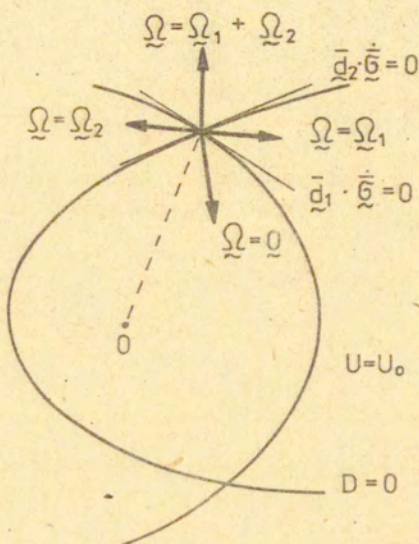
Spełnione są przy tym warunki zgodności dla kierunków danych wzorami

$$(4.36) \quad \bar{d}_1 \cdot \dot{\bar{\sigma}} = 0 \quad \text{i} \quad \bar{d}_2 \cdot \dot{\bar{\sigma}} = 0$$

co natychmiast wynika z postaci macierzy (4.33) i (4.44).

Przypadek $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1$, odpowiada zmianie modułów sprężystych bez zmiany wartości funkcji Ψ . Przykładem mogą być tutaj zachowania przedstawione na (rys.3.4. i 3.5).

Przypadek $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_2$ opisuje zmiany wartości funkcji Ψ pomimo braku dyssypacji niszczenia. Możemy je określić jako energetycznie neutralne.



Rys. 4.1.

Wychodząc z odmiennych założeń otrzymaliśmy prawa zgodne z teorią plastycznego płynięcia z niewielkimi modyfikacjami. Jest to wynik twierdzenia o ogólnej postaci wzorów dla praw przyrostowo-liniowych. Wszystkie niesprężyste składniki tensorów podatności muszą mieć formę (3.29). Umożliwia nam to również sprawdzenie poprawności wyprowadzenia.

Pomimo uwzględnienia w bilansie energii dyssypacji plastycznej, otrzymane równania są niezależne od zjawisk plastycznych. Zechcemy jednak uwzględnić wpływ degradacji sprężystej na powierzchnię plastyczności.

4.1.2. Opis zjawisk plastycznych

Do opisu przyrostu odkształceń plastycznych stosujemy sformułowane prawo płynięcia

$$(4.37) \quad \dot{\underline{\epsilon}}^P = \dot{\lambda} \underline{\bar{f}} \quad \dot{\lambda} \geq 0$$

gdzie

$$(4.38) \quad \tilde{f} = \begin{bmatrix} f^p \\ f^q \end{bmatrix} = \frac{F_{,\bar{\sigma}}}{|F_{,\bar{\sigma}}|}$$

$$|F_{,\bar{\sigma}}| = (F_{,\bar{\sigma}} \cdot F_{,\bar{\sigma}})^{1/2}$$

Przez \tilde{f} oznaczyliśmy wersor normalny do powierzchni plastycznego płynięcia $F = 0$ w punkcie odpowiadającym na niej stanowi naprężenia.

Zgodnie z propozycją Mroza [43] przyjmujemy następujące parametry wzmocnienia

$$(4.39) \quad \tilde{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

których równania ewolucji mają postać

$$(4.40) \quad \begin{aligned} \dot{\alpha} &= |\dot{\epsilon}_q^p| \\ \dot{\beta} &= \dot{\epsilon}_v^p + \alpha \dot{\epsilon}_v^f \end{aligned}$$

Należy zwrócić uwagę na fakt, że na wartość β ma wpływ przyrost odkształceń objętościowych na skutek degradacji.

Współczynnik α jest stałą materiałową. Oznaczając przez C_p i C_q odpowiednie wyrazy macierzy \tilde{c}^f (4.25) możemy napisać

$$(4.41) \quad \dot{\epsilon}_v^f = C_p \dot{p} + C_q \dot{q}$$

Wykorzystując warunek zgodności

$$(4.42) \quad \dot{F} = F_{,\bar{\sigma}} \cdot \dot{\tilde{\sigma}} + F_{,\tilde{\alpha}} \cdot \dot{\tilde{\alpha}} = 0$$

oraz prawo płynięcia obliczamy

$$(4.43) \quad H = - \frac{1}{|F_{,\bar{\sigma}}|} (F_{,\alpha} |F_{,q}| + F_{,\beta} F_{,p})$$

oraz zgodnie z (3.29)

$$(4.44) \quad \bar{C}^P = \frac{1}{H} \begin{bmatrix} F_{1P} \\ F_{1q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{1P} + \alpha C_P & F_{1q} + \alpha C_q \end{bmatrix}$$

otrzymując

$$(4.45) \quad \dot{\bar{C}}^P = \bar{C}^P \dot{\bar{G}}$$

Pomimo stosowania prawa stowarzyszonego, macierz podatności plastycznej jest niesymetryczna. Jedynie gdy zrezygnujemy ze sprzężenia, przyjmując $\alpha = 0$, staje się macierzą symetryczną. Zastosowane sprzężenie jednostronne ułatwia znacznie obliczenia w stosunku do sprzężenia obustronnego, gdyż przyrost odkształceń wynikający z degradacji może być liczony niezależnie i jest znany. Warunki jednoznaczności rozwiązania będą spełnione wówczas gdy $H > 0$.

W praktyce zapewnia to wzajemne położenie powierzchni plastyczności i degradacji. Przed osiągnięciem linii stanów krytycznych $H=0$ osiągana jest powierzchnia graniczna i dzięki temu przypadek $H \leq 0$ nie występuje.

Warunek obciążania ma postać

$$(4.46) \quad \bar{r} \cdot \dot{\bar{G}} \geq 0$$

gdzie

$$(4.47) \quad \bar{r} = \begin{bmatrix} F_{1P} + \alpha C_P \\ F_{1q} + \alpha C_q \end{bmatrix}$$

Uwzględnia on osłabienie powierzchni plastyczności na skutek degradacji sprężystej.

4.2. Równania konstytutywne dla ogólnego stanu naprężenia

Przedstawimy obecnie związki konstytutywne dla ogólnego stanu naprężenia. Zajmiemy się stanem naprężenia opisanym zarówno poprzez naprężenia główne $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ jak też w dowolnym układzie kartezjańskim x, y, z .

Pierwszy typ opisu spotykamy we wszystkich badaniach doświadczalnych. Wykorzystamy go przy identyfikacji parametrów i porównaniu krzywych modelowych z wynikami eksperymentalnymi.

Drugi, bezpośrednio można stosować do obliczeń numerycznych metodą elementów skończonych.

Przyjmijmy następujące wektory naprężenia:

$$(4.48) \quad \underline{\sigma}^{(3)} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} \quad \underline{\sigma}^{(6)} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}]^T$$

oraz odkształcenia

$$(4.49) \quad \underline{\varepsilon}^{(3)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad \underline{\varepsilon}^{(6)} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \delta_{xy}, \delta_{yz}, \delta_{zx}]^T$$

gdzie $\underline{u} = [u_x, u_y, u_z]^T$ jest wektorem przemieszczenia

$$(4.50) \quad \begin{aligned} \varepsilon_x &= u_{x,x} & \delta_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = u_{x,y} + u_{y,x} \\ \varepsilon_y &= u_{y,y} & \delta_{yz} &= 2\varepsilon_{yz} = u_{y,z} + u_{z,y} \\ \varepsilon_z &= u_{z,z} & \delta_{zx} &= 2\varepsilon_{zx} = u_{z,x} + u_{x,z} \end{aligned}$$

Niezmienniki naprężenia mają postać

$$(4.51) \quad J_1' = \sigma_{kk} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = \frac{1}{2} (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) = \frac{1}{2} (s_x^2 + s_y^2 + s_z^2) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2$$

$$J_3 = \frac{1}{3} s_{ij} s_{ki} s_{kj} = s_1 s_2 s_3 = \begin{vmatrix} s_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & s_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & s_z \end{vmatrix}$$

gdzie $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}$ jest dewiatorem naprężenia. Wprowadzimy niezmienniki σ_0 , ϱ , Θ bardziej przydatne do opisu w walcowym układzie współrzędnych

$$(4.52) \quad \begin{aligned} \sigma_0 &= \frac{1}{3} J_1' \\ \varrho &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \\ \Theta &= \frac{1}{3} \arccos \frac{4J_3}{\varrho^3} \end{aligned}$$

Naprężenia główne poprzez te niezmienniki wyrażają się następująco:

$$(4.53) \quad \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_0 \\ \sigma_0 \\ \sigma_0 \end{bmatrix} + \varrho \begin{bmatrix} \cos \Theta \\ \cos(\Theta + \frac{2}{3}\pi) \\ \cos(\Theta - \frac{2}{3}\pi) \end{bmatrix}$$

Interpretację geometryczną przedstawia (rys.4.2).

Kąt Θ mierzony jest na płaszczyźnie oktaedrycznej

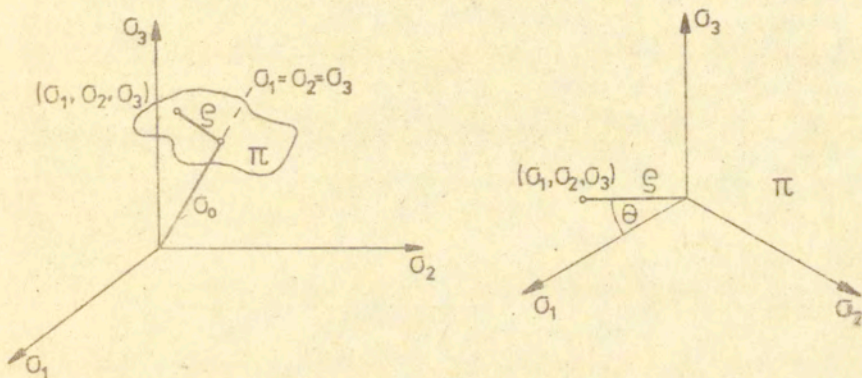
$$\pi : \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{const.}$$

Zakładamy, że pomiędzy współrzędnymi wektora naprężenia $\underline{\sigma}$ a przedstawionymi niezmiennikami zachodzą związki

$$(4.54) \quad \begin{aligned} p &= -\sigma_0 \\ q &= \frac{3}{2} \varrho(\Theta) \varrho \end{aligned}$$

p jest nadal ciśnieniem hydrostatycznym, natomiast q wyraża zredukowane naprężenie ścinające na płaszczyźnie dewiatorowej. Funkcja g pozwala uwzględnić wpływ trzeciego niezmiennika na zachowanie się materiału, co wyraźnie obserwujemy w doświadczeniach dla betonu.

W przypadku, gdy $\sigma_2 = \sigma_3$, $\Theta = \frac{\pi}{3}$ i przyjmujemy $g(\frac{\pi}{3}) = 1$ dzięki czemu powyższa definicja q pokrywa się z definicją (4.1). Przyjęte założenie pozwala łatwo uogólnić związki uzyskane w rozdziale 4.1. Potrzebne jest w tym celu jedynie określenie funkcji g .



Rys. 4.2.

Przyrost $\dot{\gamma}_{ij}$ możemy obliczyć znając przyrosty $\dot{\sigma}_{(2)}$ lub $\dot{\sigma}_{(6)}$ z równań:

$$(4.55) \quad \dot{\gamma}_{ij} = Q_{(2 \times 3)} \dot{\sigma}_{(2)} \quad \dot{\gamma}_{ij} = Q_{(2 \times 6)} \dot{\sigma}_{(6)}$$

gdzie

$$(4.56) \quad Q_{(2 \times 3)} = \begin{bmatrix} P_{1,6_1} & P_{1,6_2} & P_{1,6_3} \\ q_{1,6_1} & q_{1,6_2} & q_{1,6_3} \end{bmatrix}$$

$$Q_{(2 \times 6)} = \begin{bmatrix} P_{1,6_x} & P_{1,6_y} & P_{1,6_z} & P_{1,\tau_{xy}} & P_{1,\tau_{yz}} & P_{1,\tau_{zx}} \\ q_{1,6_x} & q_{1,6_y} & q_{1,6_z} & q_{1,\tau_{xy}} & q_{1,\tau_{yz}} & q_{1,\tau_{zx}} \end{bmatrix}$$

są macierzami zawierającymi pochodne cząstkowe wyrażeń (4.54).
Wyrazy tych macierzy mają postać:

$$(4.57)$$

$$P_{1,6_1} = P_{1,6_2} = P_{1,6_3} = -\frac{1}{3}$$

$$q_{1,6_1} = \frac{1}{3\varrho} [g(\Theta)(2s_1 - s_2 - s_3) + m(2J_3[2s_1 - s_2 - s_3] - \varrho^2[2s_2s_3 - s_1(s_2 + s_3)])]$$

$$q_{1,6_2} = \frac{1}{3\varrho} [g(\Theta)(2s_2 - s_1 - s_3) + m(2J_3[2s_2 - s_1 - s_3] - \varrho^2[2s_1s_3 - s_2(s_1 + s_3)])]$$

$$q_{1,6_3} = \frac{1}{3\varrho} [g(\Theta)(2s_3 - s_1 - s_2) + m(2J_3[2s_3 - s_1 - s_2] - \varrho^2[2s_1s_2 - s_3(s_1 + s_2)])]$$

$$P_{1,6_x} = P_{1,6_y} = P_{1,6_z} = -\frac{1}{3}$$

$$P_{1,\tau_{xy}} = P_{1,\tau_{yz}} = P_{1,\tau_{zx}} = 0$$

$$q_{1,6_x} = \frac{1}{3\varrho} [g(\Theta)(2s_x - s_y - s_z) + m(2J_3[2s_x - s_y - s_z] - \varrho^2[2(s_y s_z - \tau_{yz}^2) - s_x(s_y + s_z) + \tau_{xy}^2 + \tau_{zx}^2])]$$

$$q_{1,6_y} = \frac{1}{3\varrho} [g(\Theta)(2s_y - s_x - s_z) + m(2J_3[2s_y - s_x - s_z] - \varrho^2[2(s_x s_z - \tau_{zx}^2) - s_y(s_x + s_z) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2])]$$

$$q_{1,6_z} = \frac{1}{3\varrho} [g(\Theta)(2s_z - s_x - s_y) + m(2J_3[2s_z - s_x - s_y] - \varrho^2[2(s_x s_y - \tau_{xy}^2) - s_z(s_x + s_y) + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2])]$$

$$q_{1,\tau_{xy}} = \frac{2}{\varrho} [g(\Theta)\tau_{xy} + m(2J_3\tau_{xy} - \varrho^2[\tau_{yz}\tau_{zx} - s_z\tau_{xy}])]$$

$$q_{1,\tau_{yz}} = \frac{2}{\varrho} [g(\Theta)\tau_{yz} + m(2J_3\tau_{yz} - \varrho^2[\tau_{xy}\tau_{zx} - s_x\tau_{yz}])]$$

$$q_{1,\tau_{zx}} = \frac{2}{\varrho} [g(\Theta)\tau_{zx} + m(2J_3\tau_{zx} - \varrho^2[\tau_{xy}\tau_{yz} - s_y\tau_{zx}])]$$

gdzie oznaczyliśmy

$$m = \frac{2g'(\Theta)}{\varrho^3 \sqrt{1 - \left(\frac{4J_3}{\varrho^3}\right)^2}}$$

Macierze podatności sprężystej wyrażone za pomocą współczynników sprężystych T i S możemy zapisać następująco

$$(4.58) \quad \underline{\underline{C}}_{(3 \times 3)}^e = \begin{bmatrix} \frac{T}{9} + S & \frac{T}{9} - \frac{S}{2} & \frac{T}{9} - \frac{S}{2} \\ \frac{T}{9} - \frac{S}{2} & \frac{T}{9} + S & \frac{T}{9} - \frac{S}{2} \\ \frac{T}{9} - \frac{S}{2} & \frac{T}{9} - \frac{S}{2} & \frac{T}{9} + S \end{bmatrix}$$

oraz w skróconej formie

$$(4.59) \quad \underline{\underline{C}}_{(6 \times 6)}^e = \left[\begin{array}{c|c} \underline{\underline{C}}_{(3 \times 3)}^e & \underline{\underline{Q}}_{(3 \times 3)} \\ \hline \underline{\underline{Q}}_{(3 \times 3)} & 3S \underline{\underline{I}}_{(3 \times 3)} \end{array} \right]$$

$\underline{\underline{Q}}$ jest macierzą zerową, natomiast $\underline{\underline{I}}$ macierzą jednostkową.

Wyrażenia $\underline{\underline{C}}_{(3 \times 3)}^e \underline{\underline{E}}_{(3)}$ i $\underline{\underline{C}}_{(6 \times 6)}^e \underline{\underline{E}}_{(6)}$ przedstawiamy w postaci

$$(4.60) \quad \begin{aligned} \underline{\underline{C}}_{(3 \times 3)}^e \underline{\underline{E}}_{(3)} &= \underline{\underline{A}}_{(3 \times 2)} \underline{\underline{\bar{E}}} \\ \underline{\underline{C}}_{(6 \times 6)}^e \underline{\underline{E}}_{(6)} &= \underline{\underline{A}}_{(6 \times 2)} \underline{\underline{\bar{E}}} \end{aligned}$$

przy czym

$$(4.61) \quad \underline{\underline{A}}_{(3 \times 2)} = \begin{bmatrix} -\frac{P}{3} & \sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \\ -\frac{P}{3} & \sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \\ -\frac{P}{3} & \sigma_3 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \end{bmatrix}$$

$$(4.62) \quad \underline{A}_{(6 \times 2)} = \begin{bmatrix} -\frac{P}{3} & \sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z) \\ -\frac{P}{3} & \sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) \\ -\frac{P}{3} & \sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \\ 0 & 3\tau_{xy} \\ 0 & 3\tau_{yz} \\ 0 & 3\tau_{zx} \end{bmatrix}$$

Przyrost odkształceń na skutek degradacji sprężystej obliczamy ze wzorów

$$(4.63) \quad \dot{\underline{\epsilon}}_{(3)}^f = \underline{C}_{(3 \times 3)}^f \dot{\underline{\sigma}}_{(3)}$$

$$\dot{\underline{\epsilon}}_{(6)}^f = \underline{C}_{(6 \times 6)}^f \dot{\underline{\sigma}}_{(6)}$$

Macierze $\underline{C}_{(3 \times 3)}^f$ i $\underline{C}_{(6 \times 6)}^f$ wyrażamy przy pomocy znanych macierzy

$$(4.64) \quad \underline{C}_{(3 \times 3)}^f = \underline{A}_{(3 \times 2)} \underline{\bar{\Omega}} \underline{Q}_{(2 \times 3)}$$

$$\underline{C}_{(6 \times 6)}^f = \underline{A}_{(6 \times 2)} \underline{\bar{\Omega}} \underline{Q}_{(2 \times 6)}$$

W przypadku plastyczności korzystamy z zasady różniczkowania funkcji złożonej

$$(4.65) \quad \underline{F}_{,\sigma} = \underline{F}_{,\bar{\sigma}} \underline{Q}$$

gdzie macierz pochodnych cząstkowych wektora $\underline{\bar{\sigma}}$ określona jest wzorami (4.56) i (4.57).

Przyrost odkształceń plastycznych liczymy z równań

$$(4.66) \quad \dot{\underline{\epsilon}}_{(3)}^P = \underline{C}_{(3 \times 3)}^P \dot{\underline{\sigma}}_{(3)}$$

$$\dot{\underline{\epsilon}}_{(6)}^P = \underline{C}_{(6 \times 6)}^P \dot{\underline{\sigma}}_{(6)}$$

przy czym

$$(4.67) \quad \begin{aligned} \underline{C}_{(3 \times 3)}^P &= \underline{Q}_{(2 \times 3)}^T \underline{\bar{C}}^P \underline{Q}_{(2 \times 3)} \\ \underline{C}_{(6 \times 6)}^P &= \underline{Q}_{(2 \times 6)}^T \underline{\bar{C}}^P \underline{Q}_{(2 \times 6)} \end{aligned}$$

Wektory w warunkach obciążania (3.5) i (3.6) przyjmują postać

$$(4.68) \quad \begin{aligned} \underline{f}_{(3)} &= \underline{\bar{f}} \underline{Q}_{(2 \times 3)} \\ \underline{f}_{(6)} &= \underline{\bar{f}} \underline{Q}_{(2 \times 6)} \\ \underline{d}_{(3)} &= \underline{\bar{d}} \underline{Q}_{(2 \times 3)} \\ \underline{d}_{(6)} &= \underline{\bar{d}} \underline{Q}_{(2 \times 6)} \end{aligned}$$

Przedstawione równania pozwalają wyznaczyć macierz podatności $\underline{C} = \underline{C}^e + \underline{C}^p + \underline{C}^f$ dla dowolnego stanu trójosiowego, a w szczególności dla naprężeń głównych.

4.3. Opis modelu w przypadku obciążeń cyklicznych

W przedstawionym dotychczas modelu betonu, podczas odciażania przyjęto zachowanie liniowo-sprężyste. Jest ono niezgodne z doświadczeniem, w którym obserwuje się zachowanie nieliniowe, przy czym następuje spadek odkształceń plastycznych, rozumianych jako różnica między odkształceniem całkowitym, a odkształceniem wynikającym z prawa liniowej sprężystości. Podczas powtórnego obciążania otrzymujemy wyraźną pętlę histerezy.

Modelem dobrze opisującym te zjawiska, jest model wielopowierzchniowy zaproponowany przez Mroza i szeroko stosowany dla gruntów, m.in. w pracach Mroza, Norrisa, Zienkiewicza, Pietruszczaka [44], [45], [46], [47].

W modelu tym, w trakcie odciażania buduje się powierzchnię aktywną przechodzącą przez aktualny punkt naprężenia, podobną do powierzchni plastyczności i styczną do niej w punkcie, w którym nastąpiło odciażenie. Punkt ten dalej nazywać będziemy punktem zwrotnym. Kierunek przyrostu odkształceń plastycznych określa wektor normalny do powierzchni aktywnej,

natomiast wartość przyrostu jest funkcją stosunku wielkości powierzchni aktywnej do powierzchni plastyczności δ , oraz modułu wzmocnienia H w punkcie sprzężonym do aktualnego punktu naprężenia. Przez punkt sprzężony rozumiany jest punkt leżący na powierzchni plastyczności w miejscu, w którym wersory normalne do powierzchni aktywnej i plastyczności są równe. Ideę przedstawia (rys.4.3) dla przypadku, gdy powierzchnia plastyczności $F = 0$ jest okręgiem. Przyrost odkształceń plastycznych możemy opisać wzorem

$$(4.69) \quad \dot{\underline{\epsilon}}^P = \frac{1}{h(H, \underline{r})} (\underline{r} \cdot \underline{\dot{\sigma}}) \underline{f}$$

gdzie

$$\delta = \frac{R_1}{R}$$

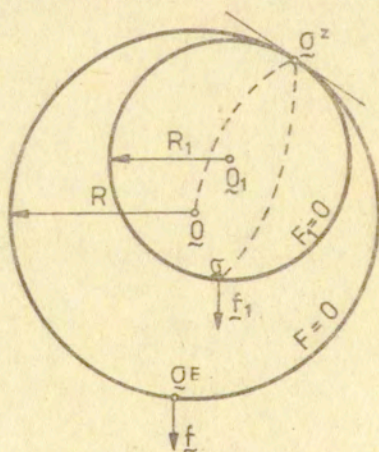
R_1, R - wymiary charakterystyczne powierzchni aktywnej

$F_1 = 0$ i powierzchni $F = 0$

$$\underline{f} = \underline{f}_1$$

H - moduł wzmocnienia w punkcie sprzężonym $\underline{\sigma}^F$

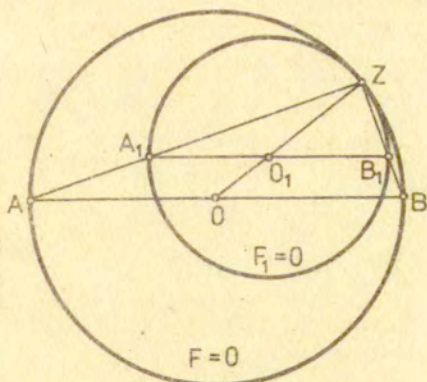
\underline{r} - wektor (4.47) liczony w punkcie sprzężonym.



Rys. 4.3.

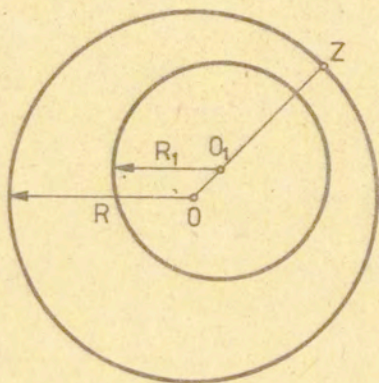
W przypadku ponownego zwrotu kierunku obciążania buduje się kolejne powierzchnie aktywne $F_1 = 0$ styczne do poprzednich w punkcie zwrotnym i przechodzące przez aktualny punkt naprężenia. Przyjęte prawo ewolucji kolejnych powierzchni aktywnych zapewnia, że nie mogą się one przecinać i w momencie, w którym punkt naprężenia leży jednocześnie na dwóch z nich, powinny się pokrywać. Wyjątkami są tylko punkty zwrotne, w których obie powierzchnie mogą być do siebie jedynie styczne. W obu tych przypadkach kontynuujemy dalej opis, przyjmując za powierzchnię aktywną wcześniejszą z nich /o niższym wskaźniku i/. Wadą tego modelu jest istnienie punktów osobliwych, którymi są punkty zwrotne. Przy ponownym przechodzeniu przez nie, w trakcie procesu obciążania, na wykresie $\sigma - \varepsilon$ pojawiają się nagłe załamania, związane ze skokową zmianą modułu plastycznego.

W celu usunięcia tej wady, proponujemy zmianę prawa ewolucji powierzchni aktywnej. Powierzchnia ta nie może być styczna do powierzchni plastyczności w punkcie zwrotnym. Musi uzyskać dodatkową swobodę poruszania się do wnętrza powierzchni $F = 0$. W klasycznym modelu dowolny punkt wewnątrz powierzchni aktywnej leży na odcinku łączącym odpowiadający mu na zasadzie podobieństwa punkt wewnątrz powierzchni plastyczności z punktem zwrotnym (rys.4.4). Co więcej, punkt ten dzieli powyższy odcinek w stosunku δ np.: $|\vec{ZO}_1| = \delta |\vec{ZO}|$, $|\vec{OO}_1| = (1-\delta) |\vec{OZ}|$



Rys. 4.4.

Obecnie, cechę tę przyjmiemy jako wyjściową dla opisu ewolucji. Wybieramy charakterystyczny punkt O wewnątrz powierzchni plastyczności np. środek symetrii lub punkt zerowy układu, w którym powierzchnia jest opisana. Przyjmujemy, że odpowiedni punkt wnętrza powierzchni aktywnej O_1 leży na odcinku łączącym punkt O_1 z punktem zwrotnym Z . Wprowadzamy dwa parametry: γ opisujący stosunek wielkości powierzchni aktywnej do powierzchni plastyczności oraz δ opisujący podział odcinka \overline{OZ} (rys.4.5).



$$\gamma = \frac{R_1}{R}$$

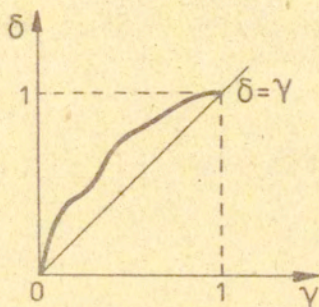
$$\delta = \frac{|\overline{O_1Z}|}{|\overline{OZ}|}$$

Rys.4.5.

Oba parametry mogą zmieniać się w granicach od 0 do 1. Oznacza to, że punkt O_1 nie może leżeć poza odcinkiem \overline{OZ} , natomiast wielkość powierzchni aktywnej może być co najwyżej równa wielkości powierzchni plastyczności. Zależność między tymi parametrami przedstawiać będziemy na wykresie $\delta - \gamma$.

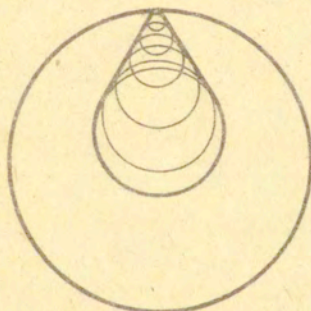
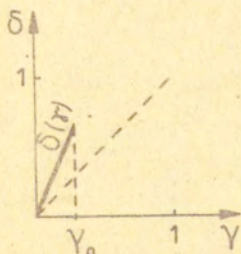
Dla $\delta = \gamma$ otrzymujemy oczywiście model poprzedni. Aby powierzchnia aktywna mogła oderwać się od punktu zwrotnego i leżeć we wnętrzu powierzchni plastyczności musi zachodzić $\delta > \gamma$. Dla $\delta < \gamma$ obie powierzchnie przecinają się. Wykres zależności δ i γ musi zatem leżeć powyżej prostej $\delta = \gamma$ i prze-

chodzić przez punkty $(0,0)$ i $(1,1)$ (rys.4.6).



Rys.4.6.

Przyjmijmy chwilowo, że możemy wprowadzić funkcję $\delta(\delta)$ opisującą tę zależność. Możemy wówczas prześledzić ewolucję powierzchni aktywnej. Przykładowo dla odcinka $[0, \delta_0]$ przedstawia ją (rys.4.7).



Rys.4.7.

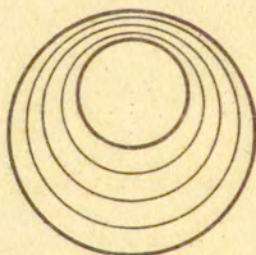
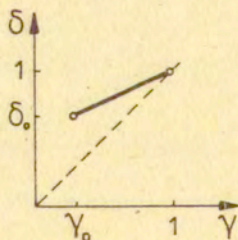
Widzimy, że prawo ewolucji opisane funkcją $\delta(\delta)$ wprowadza podział wnętrza powierzchni plastyczności na dwa obszary. Pierwszy z nich, stanów osiągalnych, zawierający stany naprężenia dające się opisać przyjętym prawem ewolucji dla $\delta \in [0, \delta_0]$

i drugi, stanów nieosiągalnych będący pozostałą częścią zbioru $F \leq 0$. Jeżeli w trakcie procesu stan naprężenia przekroczy granicę między tymi obszarami, wówczas zmiana parametrów δ i δ nie będzie ciągła i uzyskamy taki sam efekt jak w modelu poprzednim, czyli nagłe załamanie na wykresie $\delta - \varepsilon$. Nie można zatem z góry określać zależności δ i δ za pomocą funkcji $\delta(\delta)$.

Założmy, że aktualną powierzchnię aktywną określają parametry δ_0 i δ_0 ($\delta_0 > \delta_0$) a ich dalszą ewolucję możemy przedstawić na wykresie jako odcinek łączący punkty (δ_0, δ_0) i $(1, 1)$ (rys.4.8) o równaniu

$$(4.70) \quad \delta = \frac{\delta - \delta_0}{1 - \delta_0} + \frac{1 - \delta}{1 - \delta_0} \delta_0$$

Równanie to opisuje jednoparametryczną rodzinę powierzchni ściśle wypełniających obszar pomiędzy powierzchnią aktywną i plastyczności. W tym przypadku wszystkie stany są osiągalne. W szczególnym przypadku $\delta_0 = \delta_0 = 0$ równanie (4.70) ma postać $\delta = \delta$.



Rys.4.8.

Zaproponujemy proste prawo ewolucji powierzchni aktywnej. Założymy, że w każdym punkcie przestrzeni możliwe są dwa kierunki przyrostu drogi. Pierwszy, powodujący dryfowanie powierzchni aktywnej do środka powierzchni plastyczności opisany

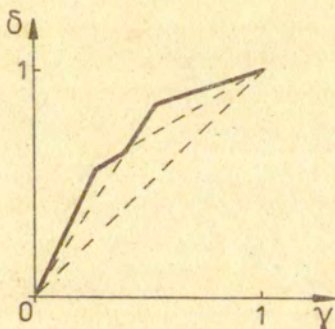
równaniem

$$(4.71) \quad \begin{aligned} \dot{\delta} &= \frac{\delta}{\bar{\delta}} \dot{\bar{\delta}} && \text{dla } \bar{\delta} \neq 0 && \delta < 1 \\ \dot{\delta} &= c_0 \dot{\bar{\delta}} && \text{dla } \bar{\delta} = 0 && (c_0 > 1) \end{aligned}$$

i stosowany w przypadku, kiedy kolejny stan naprężenia jest na tej drodze osiągalny. Oraz drugi, oparty na zależności (4.70) i używany w pozostałych przypadkach

$$(4.72) \quad \dot{\delta} = \frac{1-\delta}{1-\bar{\delta}} \dot{\bar{\delta}}$$

Przykładowy wykres $\delta - \bar{\delta}$ oparty na zależnościach (4.71) i (4.72) przedstawia (rys.4.9).

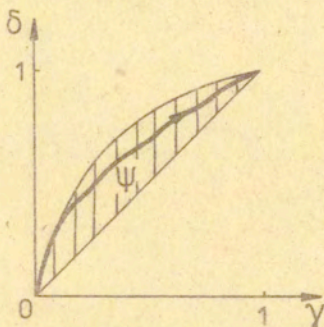


Rys.4.9.

Alternatywną propozycją jest określenie w przestrzeni obszaru dopuszczalnego Ψ , dla wartości $\bar{\delta}$ i δ oraz wprowadzenie kryterium wyboru drogi w tym obszarze.

Przykładem takiego kryterium może być maksymalizacja stosunku $\delta / \bar{\delta}$ (rys.4.10).

Przedstawiony model opisu odkształceń plastycznych w przypadku obciążeń cyklicznych jest uogólnieniem modelu wielopowierzchniowego. W przypadku granicznym, przyjmując $C_0 = 1$, otrzymujemy klasyczny model wielopowierzchniowy.



Rys. 4.10.

Prawo płynięcia opisywane jest w obu modelach równaniem (4.69). Definicja punktu sprężonego również nie ulega zmianie.

Rozważmy teraz warunki, jakie musi spełniać funkcja h . Zakładając istnienie obszaru sprężystego, zachowanie materiału w procesie obciążania powinno być w nim liniowo-sprężyste. Przyjmijmy, że wielkość obszaru sprężystego określa wartość δ^e . Zatem

$$(4.73) \quad h(H, \delta) = +\infty \quad \text{dla} \quad \delta \leq \delta^e$$

Z warunku ciągłości, w momencie powrotu na powierzchnię plastyczności otrzymujemy drugi warunek

$$(4.74) \quad h(H, 1) = H$$

Przykładową funkcją spełniającą oba te warunki jest

$$(4.75) \quad h(H, \delta) = \begin{cases} +\infty & \text{dla} \quad \delta \leq \delta^e \\ H - h_0 \ln \frac{\delta - \delta^e}{1 - \delta^e} & \text{dla} \quad \delta > \delta^e \end{cases}$$

Ze względu na skończoną dokładność obliczeń na maszynach cyfrowych, wygodniej jest jednak przyjmować funkcję

$$(4.76) \quad h(H, \delta) = H + (h_1 - H)(1 - \delta)^{h_2}$$

w której stała h_1 powinna być znacznie większa od wartości H . Funkcja ta daje dobre rezultaty dla gruntów [48]. W celu uzyskania jednolitego opisu przyjmujemy, że powierzchnia aktywna $F_1 = 0$ istnieje od samego początku procesu i rozwija się z punktu odpowiadającego zerowemu stanowi naprężenia $0 = Z = \underline{0}$. Dzięki temu krzywa $\sigma - \varepsilon$ jest gładka i nie posiada załamania w punkcie odpowiadającym osiągnięciu przez stan naprężenia powierzchni plastyczności $F = 0$. Wybrany punkt wewnątrz zbioru $F \leq 0$, potrzebnym do opisu ewolucji powierzchni aktywnej będzie punkt zerowy.

Opis degradacji przedstawiony w poprzednich rozdziałach posiada również wadę ujawniającą się przy obciążeniach cyklicznych. Obciążając beton cyklicznie do pewnego zadanego poziomu naprężenia leżącego poniżej maksimum obciążenia, obserwujemy w badaniach eksperymentalnych zmianę modułów sprężystych podczas kolejnych cykli, a następnie zniszczenie materiału. W modelu natomiast, aby nastąpiło zniszczenie musi zostać osiągnięty maksymalny poziom naprężenia. Również moduły sprężyste nie zmieniają się, począwszy od drugiego cyklu. Wady tej nie posiada model opisany poniżej.

Określimy rodzinę \mathcal{D} powierzchni podobnych do powierzchni degradacji $D = 0$ i opisywanych parametrem c

$$(4.77) \quad \mathcal{D} = \{ \bar{D}(\underline{\varepsilon}, c) = 0 : 0 \leq c \leq C \}$$

przy czym powierzchnię degradacji opisuje parametr $C > 0$ tzn. $\bar{D}(\underline{\varepsilon}, C) = D$. Rodzina \mathcal{D} powinna ściśle wypełniać zbiór $D \leq 0$. W ten sposób każdemu punktowi naprężenia $\underline{\varepsilon} \in \{D \leq 0\}$ możemy przyporządkować wartość c taką, że $\bar{D}(\underline{\varepsilon}, c) = 0$. (rys.4.11). Określimy teraz pewną miarę odległości $\underline{\varepsilon}$ od punktu zerowego

$$(4.78) \quad \delta_D = \frac{c}{C}$$

W przypadku, kiedy $\bar{D}(\underline{\xi}, C) = 0$ mamy $\delta_D = 1$. Miara $1 - \delta_D$ określa w pewnym sensie odległość punktu naprężenia $\underline{\xi}$ od powierzchni degradacji D . Równanie (4.19) opisujące przyrost modułów sprężystych modyfikujemy wprowadzając funkcję μ

$$(4.79) \quad \dot{\underline{\omega}} = \mu(\delta_D) \underline{\bar{\omega}} \underline{\bar{\xi}}$$

Funkcja μ miary odległości δ_D powinna spełniać warunki

$$(4.80) \quad \begin{aligned} \mu(0) &= 0 \\ \mu(1) &= 1 \end{aligned}$$

Przykładem takiej funkcji jest funkcja potęgowa

$$(4.81) \quad \mu(\delta_D) = \delta_D^{\mu_1}$$

Macierz $\underline{\bar{\omega}}$ obliczana jest dla punktu sprzężonego $\underline{\xi}^D$ leżącego na powierzchni degradacji $D = 0$. Punkt sprzężony definiujemy identycznie jak w plastyczności tzn. zachodzi równość $\underline{n}_D = \underline{n}_{\bar{D}}$ wersorów normalnych do powierzchni $D = 0$ w punkcie $\underline{\omega}^D$ oraz do powierzchni $\bar{D} = 0$ w punkcie $\underline{\xi}$.

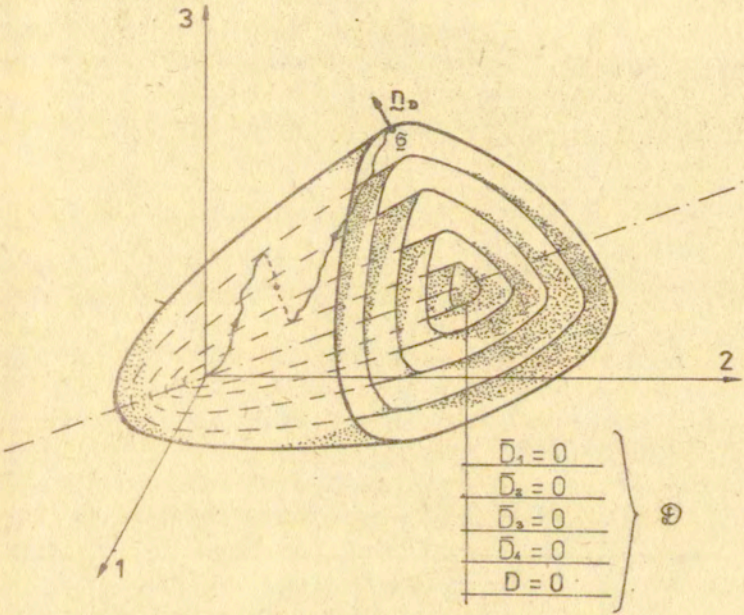
Możemy podać teraz interpretację matematyczną na gruncie teorii zbiorów rozmytych [49].

W modelu przedstawionym w poprzednich rozdziałach, zjawiska plastyczne zachodziły od momentu, w którym punkt naprężenia osiągał powierzchnię plastyczności. Podobnie było z degradacją sprężystą. Powierzchnie plastyczności i degradacji rozdzielały przestrzeń naprężeń na obszar sprężystego zachowania się materiału oraz obszary zjawisk plastycznych i degradacji sprężystej. W tym modelu rozmywamy granice pomiędzy tymi obszarami.

Wprowadzamy dwie przestrzenie:

$$(4.82) \quad \begin{aligned} \Gamma &= \{ \delta : 0 \leq \delta \leq 1 \} \\ \Gamma_D &= \{ \delta_D : 0 \leq \delta_D \leq 1 \} \end{aligned}$$

które są przestrzeniami miar odległości zdefiniowanych wcześniej. Zakładamy, że w obu tych przestrzeniach możemy określić



Rys. 4.11.

funkcje przynależności μ i μ_1 odpowiednio do zbioru zjawisk plastycznych i do zbioru degradacji sprężystej, spełniające warunki

$$(4.83) \quad \begin{aligned} \mu(0) &= 0 & \mu(1) &= 1 \\ \mu_1(0) &= 0 & \mu_1(1) &= 1 \end{aligned}$$

Wartości tych funkcji będą mnożnikami we wzorach pozwalających obliczyć przyrosty odkształceń plastycznych oraz wynikających z degradacji sprężystej

$$(4.84) \quad \begin{aligned} \dot{\underline{\epsilon}}^P &= \mu(\sigma) \dot{\underline{\epsilon}}_F^P \\ \dot{\underline{\epsilon}}^f &= \mu_1(\sigma_D) \dot{\underline{\epsilon}}_D^f \end{aligned}$$

Przyrosty odkształceń $\dot{\underline{\epsilon}}_F^P$ i $\dot{\underline{\epsilon}}_D^f$ liczone są w punktach sprzężonych, leżących odpowiednio na powierzchni plastyczności i degradacji.

Funkcję μ możemy określić znając funkcję h

$$(4.85) \quad \mu(\sigma, H) = \frac{H}{h(H, \sigma)}$$

Funkcja ta nie jest w pełnym sensie funkcją przynależności, ponieważ zależy również od modułu plastycznego H , oraz jej wartości mogą wykraczać poza przedział $[0, 1]$.

Przyjmując funkcje przynależności μ i μ_1 w postaci

$$(4.86) \quad \begin{aligned} \mu(\sigma) &= \begin{cases} 0 & \sigma \neq 1 \\ 1 & \sigma = 1 \end{cases} \\ \mu_1(\sigma_D) &= \begin{cases} 0 & \sigma_D \neq 1 \\ 1 & \sigma_D = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

otrzymujemy graniczne przejście do modelu przedstawionego w poprzednich rozdziałach.

5. Identyfikacja funkcji materiałowych

Prawidłowa identyfikacja funkcji materiałowych jest niezwykle istotna dla praktycznego wykorzystania modelu. Wraz ze wzrostem złożoności modeli konstytutywnych opisujących coraz więcej zjawisk obserwowanych doświadczalnie staje się ona coraz bardziej skomplikowana. W przypadku betonu dodatkowym utrudnieniem jest fakt, że badania eksperymentalne prowadzone są dla różnych typów betonu. Każde z tych badań obejmuje przeważnie tylko zbliżone do siebie stany naprężenia. Porównanie wyników doświadczeń prowadzonych dla odmiennych stanów naprężenia i dla innych betonów, możliwe jest jedynie pod względem jakościowym. Najczęściej beton charakteryzowany jest poprzez podanie wytrzymałości na ściskanie jednoosiowe f'_c standardowych próbek, co jest jednak niewystarczające.

Betony o zbliżonej wytrzymałości różnią się dosyć znacznie już w swoich cechach sprężystych. Przykładem mogą tu być badania Kotsovosa [50] oraz Kupfera i in. [55], gdzie różnica wytrzymałości wynosi ok. 1%, natomiast wartości modułów sprężystych różnią się o ponad 20%. Trudno zatem spodziewać się aby cechy plastyczne, czy też związane z powstawaniem mikroszczelin były dla tych betonów zbliżone pod względem ilościowym. Dlatego dosyć krytycznie należy oceniać próby uzależnienia funkcji materiałowych jedynie od wartości f'_c , jak to czynią np. Bazant i Kim [40]. Jest to również problematyczne ze względu na to, że nie dysponujemy wystarczającą ilością badań w złożonych stanach naprężenia dla różnych betonów.

Proces identyfikacji możemy podzielić na dwa etapy: dobór postaci funkcji materiałowej oraz identyfikację współczynników tej funkcji. Postać funkcji materiałowej staramy się dobrać zgodnie z jakościowym zachowaniem się materiału i tak aby występowało w niej możliwie jak najmniej stałych. Często pomocny jest tutaj wybór odpowiedniego doświadczenia ukazującego wpływ tej funkcji. Gdy opieramy się na istniejących wynikach eksperymentalnych nie zawsze jest to możliwe. Najbardziej uniwersalną klasą funkcji są wielomiany, gdyż zgodnie z twierdzeniem Weierstrassa możemy nimi aproksymować dowolną funkcję ciągłą w przedziale skończonym. Ze względów praktycz-

nych stopień wielomianu nie może być zbyt wysoki, przez co spada znacznie dokładność aproksymacji. Często występują również trudności ze spełnieniem warunków brzegowych. Dlatego też wydaje się, że na tym etapie ważne jest doświadczenie uzyskane podczas symulacji numerycznej metodą "prób i błędów".

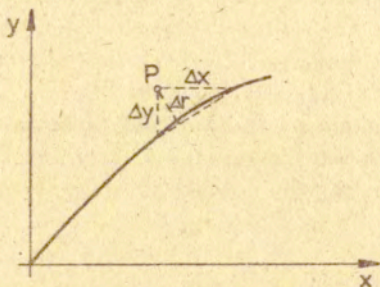
Drugi etap polegający na identyfikacji stałych występujących w przyjętych funkcjach materiałowych jest łatwiejszy, przy założeniu, że dysponujemy odpowiednio szybką maszyną cyfrową. Istnieją odpowiednie dla tego zagadnienia metody optymalizacyjne. Ze względu na duży koszt obliczania gradientów funkcji celu dla wszystkich stałych materiałowych - stosowane są tutaj metody bezgradientowe. W niniejszej pracy zastosowano metodę Rosenbrocka, której algorytm opisany jest w książce [59]. Zaletą tej metody jest stosunkowo mała czułość na wybór punktu startowego i fakt, że prawie w każdej sytuacji daje zadowalające wyniki. Istnieją jednakże metody znacznie od niej szybsze. Najważniejszy jest odpowiedni dobór funkcji celu.

Założmy, że dysponujemy wynikami kilku doświadczeń. Dla każdego z nich musimy określić wartość normy opisującej odległość krzywej teoretycznej od punktów doświadczalnych. Niech wykres będzie przedstawiony w osiach xy . Możemy zmierzyć odległość punktu eksperymentalnego od krzywej teoretycznej wzdłuż osi x oraz y . Oznaczmy je przez Δx i Δy . Odległość tego punktu od krzywej zdefiniujemy następująco:

$$(5.1) \quad \Delta r = \frac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

Geometrycznie jest to wysokość trójkąta, którego wierzchołkami są punkt doświadczalny P oraz punkty przecięcia krzywej teoretycznej z prostymi równoległymi do osi i przechodzącymi przez punkt P (rys.5.1).

W przypadku, gdy nie istnieje któryś z punktów przecięcia, przyjmujemy $\Delta r = \Delta x$ lub $\Delta r = \Delta y$. W ten sposób możemy dosyć dokładnie obliczyć odległość wszystkich punktów doświadczalnych od wykresu. Normę określającą dokładność opisu teoretycznego dla danego doświadczenia, możemy zdefiniować albo



Rys. 5.1.

jako normę średniokwadratową

$$(5.2) \quad \Delta f = \frac{1}{m} \sqrt{\sum_{i=1}^m \Delta r_i^2}$$

albo jako maksimum

$$(5.3) \quad \Delta \cdot f = \max_{i=1 \dots m} \Delta r_i$$

gdzie m oznacza ilość punktów doświadczalnych.

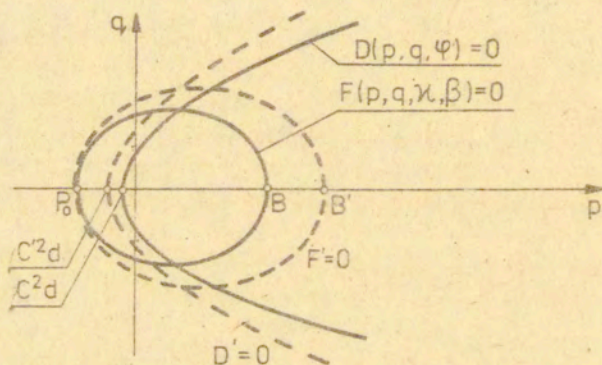
Identycznie definiujemy normę dla wszystkich doświadczeń, będącą funkcją celu w zadaniu optymalizacji. W pracy, przyjęto dla pojedynczego doświadczenia normę średniokwadratową, natomiast dla wszystkich doświadczeń - normę maksimum. Wartość normy zależy, jak widać, od skali wykresu. Zmieniając jedynie skalę osi x lub y możemy uzyskiwać zupełnie różne rozwiązania. Dlatego też, wartości stałych nie są określone jednoznacznie, co było możliwe w przypadku prostych modeli konstytutywnych. Z doświadczeń uzyskanych podczas identyfikacji wynika, że korzystne byłoby uwzględnienie w funkcji celu również różnicy w nachyleniu obu wykresów; doświadczalnego oraz teoretycznego. Procedura optymalizacyjna nie zmieniała bowiem automatycznie kształtu krzywej teoretycznej i w tym celu konieczna była interwencja polegająca na zmianie punktu startowego.

5.1. Identyfikacja wstępna dla testów na płaszczyźnie p-q

Przedstawiony w rozdziale 4.1 model betonu zastosowano do opisu wyników testu "trójosiowego" dla próbek walcowych. Założono następujące postacie powierzchni plastycznego płynięcia oraz degradacji:

$$(5.4) \quad \begin{aligned} F(p, q, \kappa, \beta) &= q^2 + A(p - P_0)(p - B(\kappa, \beta)) \\ D(p, q, \varphi) &= |q|^{3/2} - C(\varphi)(p - dC^2(\varphi)) \end{aligned}$$

Pierwsza z nich przedstawia elipsę przecinającą oś p w punktach P_0 i B, druga natomiast parabolę o wierzchołku w punkcie $(-dC^2, 0)$ (rys.5.2.).



Rys.5.2.

Założono ponadto, że wartość funkcji φ zależy wyłącznie od współczynnika sprężystego T będącego odwrotnością modułu ścisłości objętościowej. Charakter funkcji B, C, φ dobrano zgodnie z wynikami badań doświadczalnych, przyjmując dla wzmocnienia plastycznego

$$(5.5) \quad B(\kappa, \beta) = b_1 \ln(\kappa + b_2) + b_3 e^{b_4 \beta} + b_5$$

i dla degradacji

$$(5.6) \quad C(T) = \frac{C_1}{\sqrt{C_1 T^2 - 1}} \quad i = \begin{cases} 2 & T > 0 \\ 3 & T < 0 \end{cases}$$

$$\varphi(T) = \varphi_1 \left(\frac{T}{T_2} - 1 \right)^2$$

Znając funkcje $C(T)$ i $\varphi(T)$ możemy znaleźć wartość funkcji $C(\varphi)$. Funkcja $\varphi(T)$ nie jest funkcją monotoniczną, jednakże w obliczeniach wykorzystujemy tylko jedną z gałęzi paraboli. Ponadto $\varphi, s = 0$ i nie istnieje obawa zerowania się wyrażenia w drugim nawiasie przy obliczaniu wartości według wzoru (4.27).

Przyjęte funkcje były pierwszą próbą zastosowania modelu, stąd dążenie do maksymalnego ich uproszczenia. Ważne było jedynie, by ich charakter umożliwiał dopasowanie współczynników w nich występujących - do danych doświadczalnych.

Oparto się na badaniach Kotsovosa [50]. Badania prowadzone były na próbkach walcowych. Ściskano je początkowo hydrostatycznie, a następnie zwiększano składową pionową σ_1 przy stałym ciśnieniu bocznym (rys.5.3).

W eksperymencie użyto trzy rodzaje betonu, o wytrzymałości w próbie ściskania jednoosiowego 31.7 MPa, 46.9 MPa, 62.1 MPa. Dla każdego typu betonu zbadano zachowanie się próbek przy czterech różnych maksymalnych ciśnieniach bocznych. Rezultaty dopasowania krzywych modelowych oraz eksperymentalnych dla wszystkich rodzajów betonu przedstawione są na wykresach (rys.5.4 - 5.7). Rysunki (rys.5.5) i (rys.5.6) przedstawiają te same dane w różnych układach współrzędnych. Uzyskane wyniki wskazują na możliwość dosyć dokładnego opisu zachowania się betonu dla tego typu prób, przy użyciu proponowanego modelu. Dalsza weryfikacja miała na celu zbadanie dokładności modelu dla dowolnych testów trójosiowych oraz jego rozszerzenie na obciążenia cykliczne.

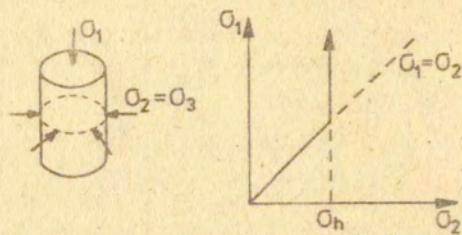
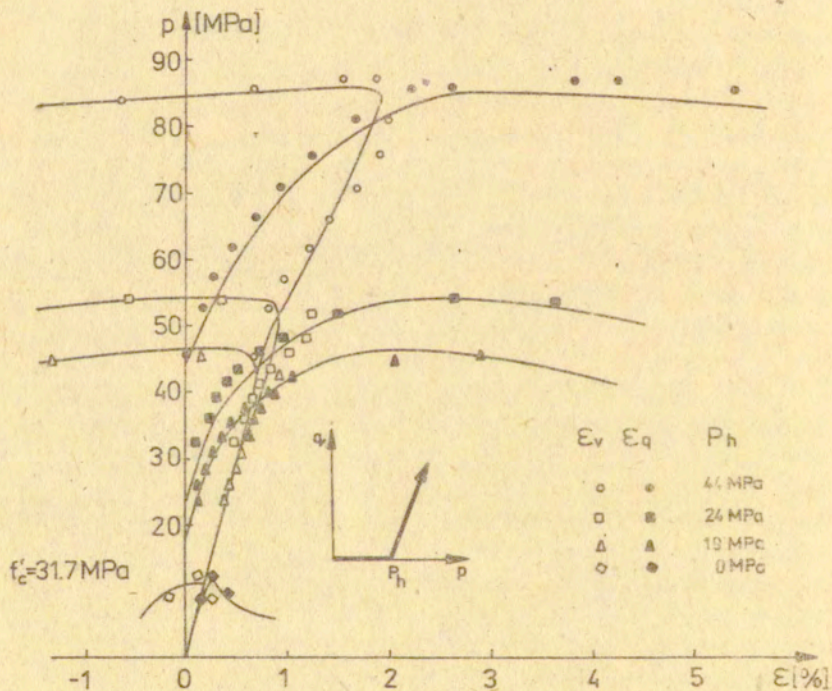
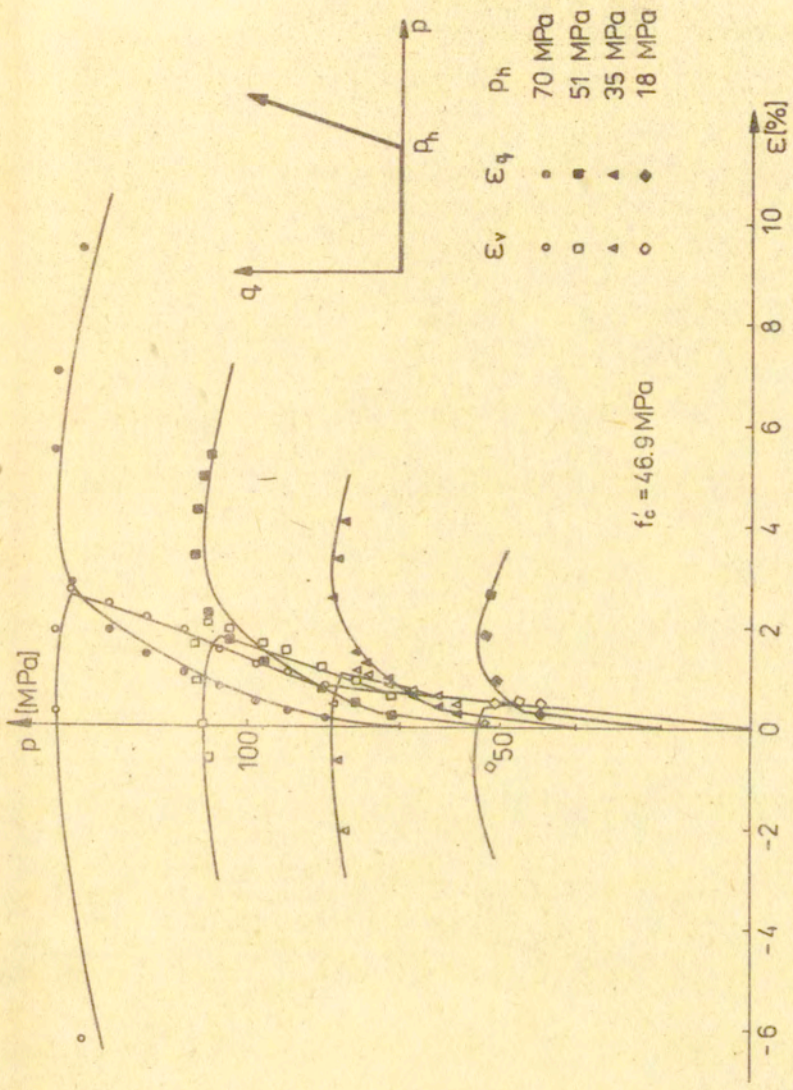
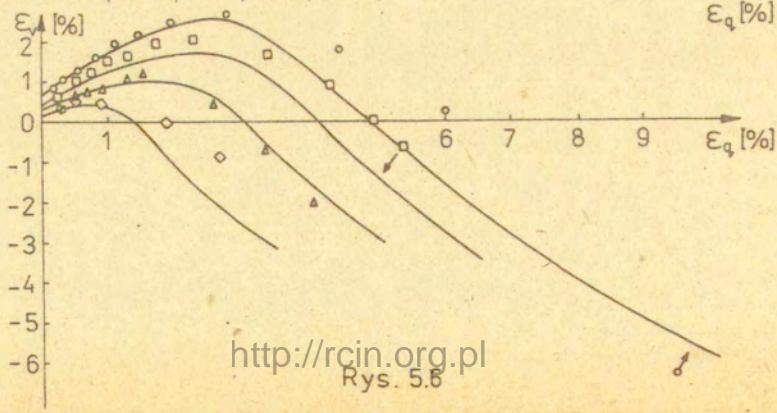
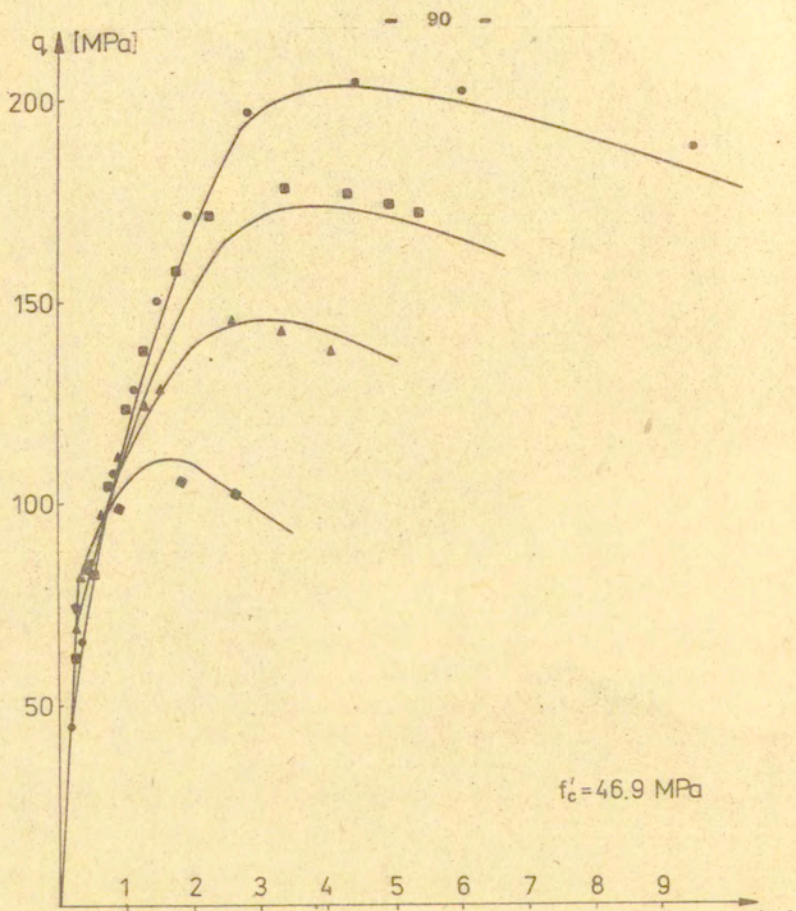


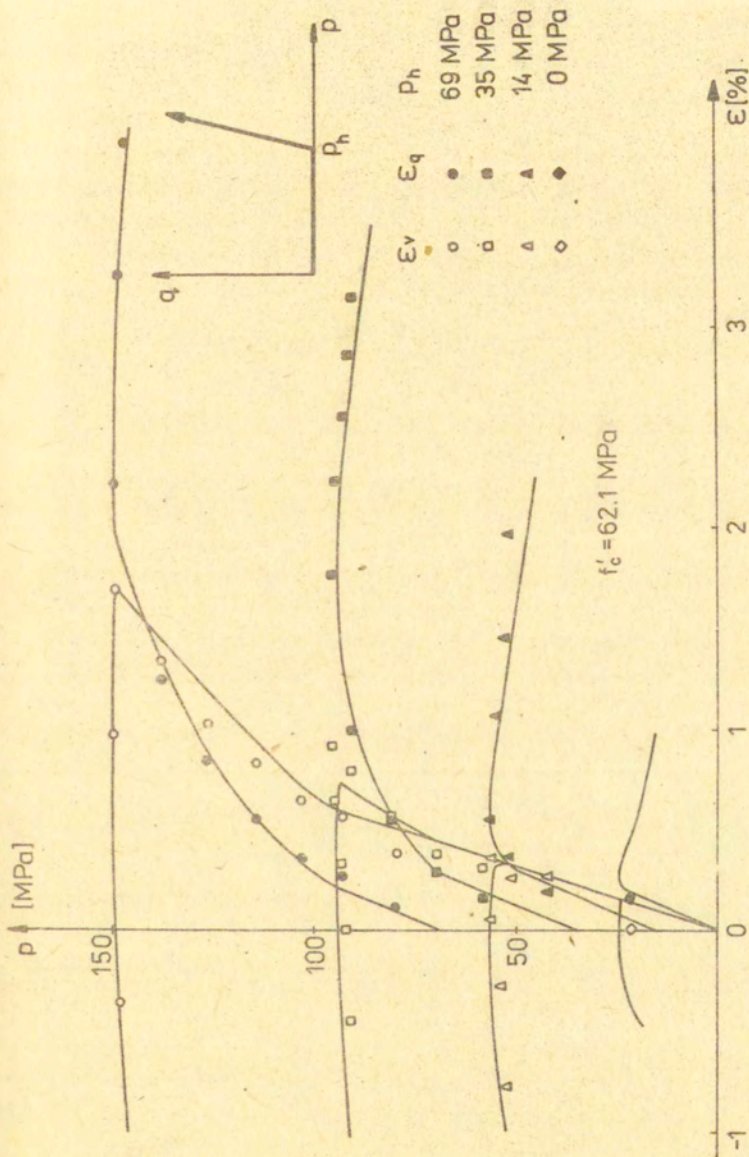
Рис. 5.3.





Rys. 5.5





Rys. 5.7

5.2. Obciążenia cykliczne

Przyjęta w poprzednim paragrafie powierzchnia plastyczności przecinała oś p w jednym punkcie stałym P_0 , drugi natomiast ulegał zmianie na skutek wzmocnienia. Obecnie chcemy, aby powierzchnia plastyczności o zerowych rozmiarach znajdowała się w punkcie odpowiadającym zerowemu naprężeniu. Umożliwi to opisywanie zjawisk plastycznych od samego początku procesu obciążania, zgodnie z koncepcją przedstawioną w rozdziale 4. Tak zmodyfikowana powierzchnia plastyczności dana jest wzorem

$$(5.7) \quad F(p, q, \kappa, \beta) = q^2 + A [p + f_1 B(\kappa, \beta)] [p - B(\kappa, \beta)]$$

Punkt zerowy układu, w którym elipsa ta jest opisana, dzieli oś elipsy w stałym stosunku, niezależnie od wartości parametrów wzmocnienia. Zmieniają się natomiast punkty przecięcia powierzchni $F = 0$ z osią ciśnień hydrostatycznych B oraz $-f_1 B$. Ilość stałych materiałowych w stosunku do równania (5.4) nie ulega zmianie. Jest to najprostsza, zamknięta powierzchnia plastyczności możliwa do zastosowania w przypadku betonu.

W celu weryfikacji modelu plastycznego, opisującego obciążenia cykliczne, rozpatrzmy szczególną drogę obciążania. Próbkę poddawać będziemy jedynie ścisłaniu hydrostatycznemu. Z równania (5.7) wynika, że dla $q = 0$ $F, q = 0$, a stąd $\dot{\epsilon}_q^p = 0$ i $\dot{\kappa} = 0$. Pozwala to wyeliminować wpływ parametru wzmocnienia κ . Jest to równocześnie, jedyny przypadek braku degradacji sprężystej dla dowolnych wartości ciśnienia. Potwierdzają to wyniki przedstawione w pracy Nilssona [14] lub [51], że przy obciążaniu hydrostatycznym moduły sprężyste nie ulegają zmianom. Doświadczenie to pozwala w prosty sposób, na dobranie odpowiedniej funkcji $B(0, \cdot)$. Możemy ją przyjąć w postaci

$$(5.8) \quad B(0, \beta) = b_1 e^{b_2 \beta} + b_3$$

Funkcja wykładnicza dobrze opisuje szybkie umacnianie się betonu na skutek zmniejszania objętości. Dzieje się tak w wyniku zamykania się mikroszczelin istniejących w materiale.

Opisane doświadczenie pozwala jednocześnie na identyfikacja-

cję stałych funkcji h opisanej równaniem (4.76). Niestety nie dysponujemy opracowanymi statystycznie badaniami cyklicznymi dla tego przypadku. Dostępne są jedynie badania ściskania cyklicznego jedno- lub dwuosiowego np. [52], [53], [54], oraz pojedyncze wykresy z pracy [60]. Obserwowane efekty we wszystkich tych badaniach, są jakościowo podobne.

Przedstawione wykresy (rys.5.8 - 5.14) ilustrują wpływ stałych h_1 i h_2 z równania (4.76) na postać pętli histerezy. Pokazane są one na tle wyników Kotsovosa [50] monotonicznego ściskania hydrostatycznego betonu o wytrzymałości $f'c = 31,7$ MPa.

Rysunki te potwierdzają duże możliwości dopasowania przy zastosowaniu modelu dla obciążeń cyklicznych. Na (rys.5.9) obserwujemy wyraźną stabilizację odkształceń plastycznych wraz ze wzrostem ilości cykli. Efekt ten ma miejsce w badaniach doświadczalnych.

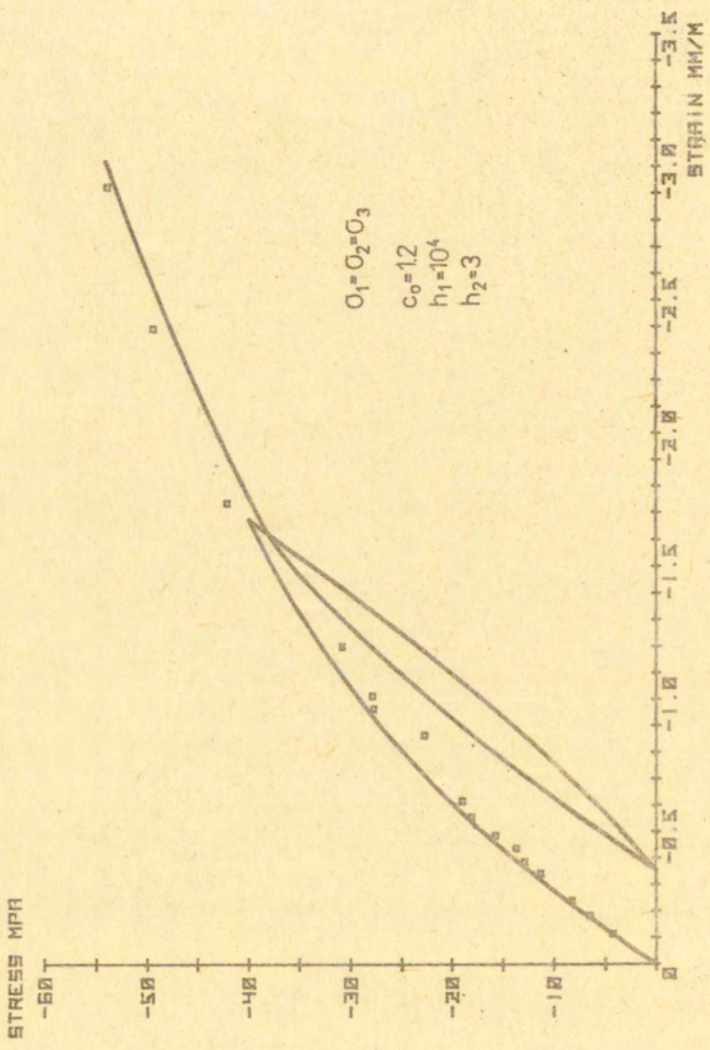
Zaproponowany model cykliczny, w przypadku degradacji sprężystej nie został jeszcze zweryfikowany. Ma on jednak znacznie mniejszy wpływ na postać pętli histerezy od modelu plastycznego.

5.3. Identyfikacja dla stanów trójosiowych

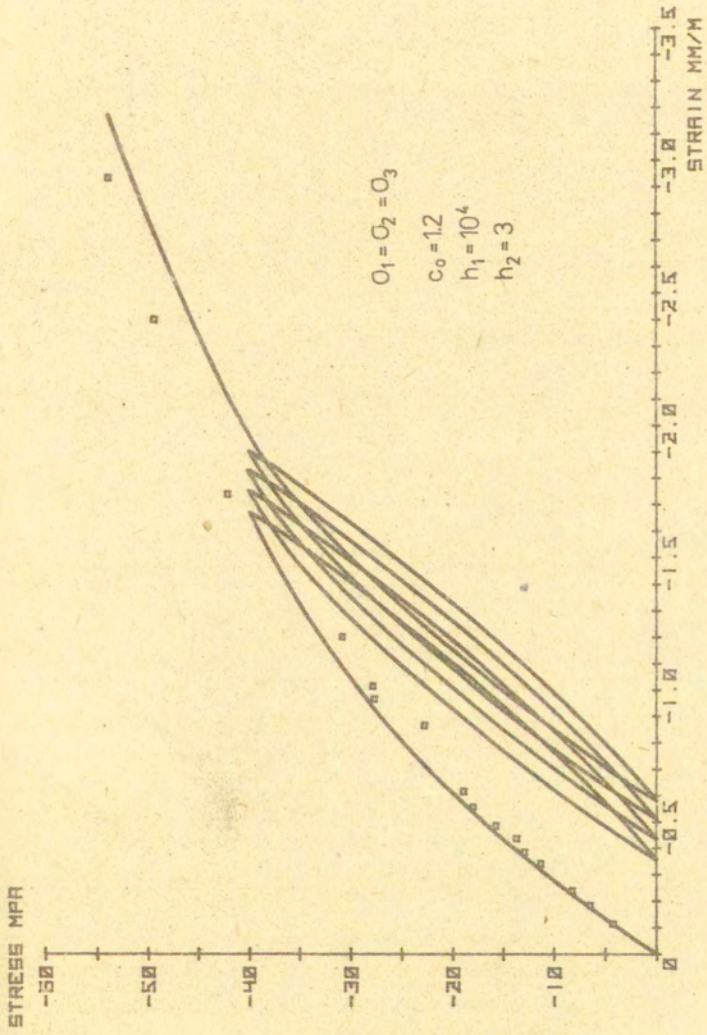
Dla betonu, stosunkowo najlepiej zbadany jest warunek stanu granicznego. Ogranicza on obszar statecznego zachowania się materiału. W przestrzeni naprężeń powierzchnia graniczna aproksymuje zbiór punktów odpowiadających maksimum naprężenia dla różnych dróg obciążania. Różne zaproponowane warunki omówiliśmy w rozdziale 2. W pracy, zastosujemy warunek uzależniający kształt powierzchni granicznej od wartości trzeciego niezmiennika. Jest to konieczne, w celu uzyskania zgodności z danymi doświadczalnymi, zawartymi w pracach [50], [55], [56], [57], [58].

Funkcję $g(\Theta)$ występującą w równaniu (4.54) opiszemy równaniem zaproponowanym przez Willama i Warnke'go [23]

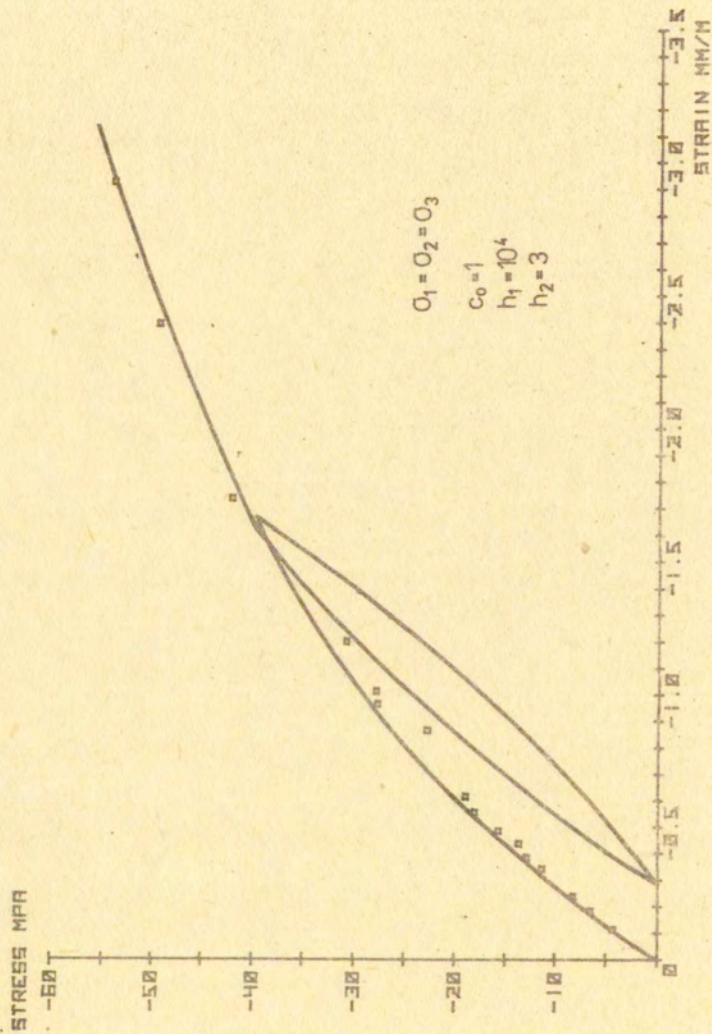
$$(5.9) \quad g(\Theta) = \frac{4(1-e^2)\cos^2\Theta + (2e-1)^2}{2(1-e^2)\cos\Theta - (2e-1)[4(1-e^2)\cos^2\Theta + 5e^2 - 4e]}^{1/2}$$



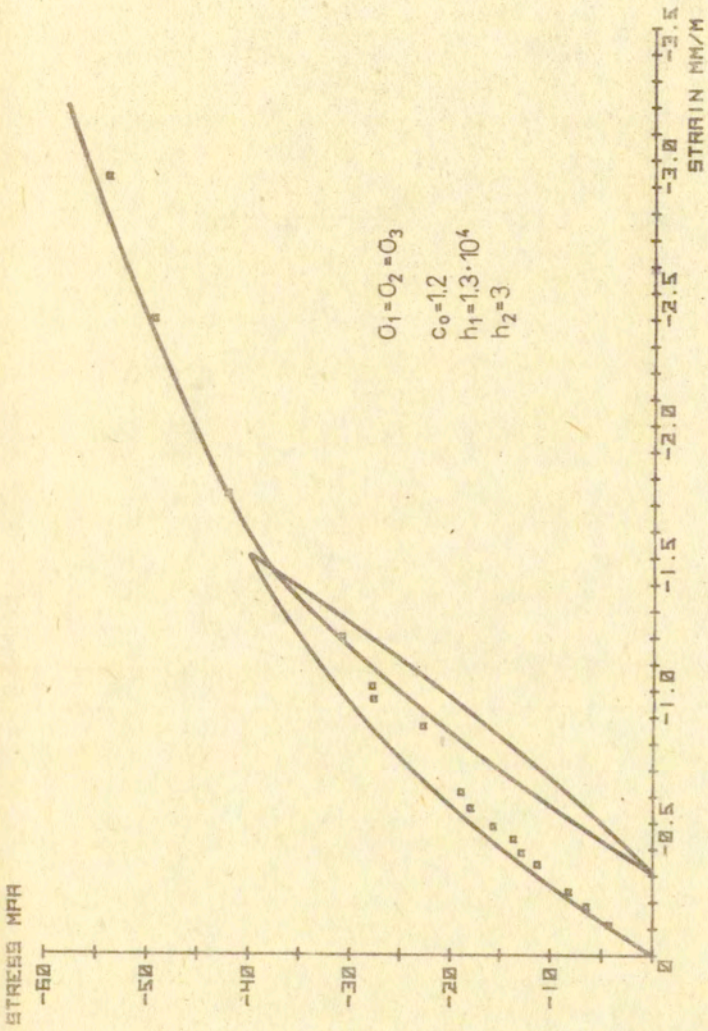
Rys. 5.8



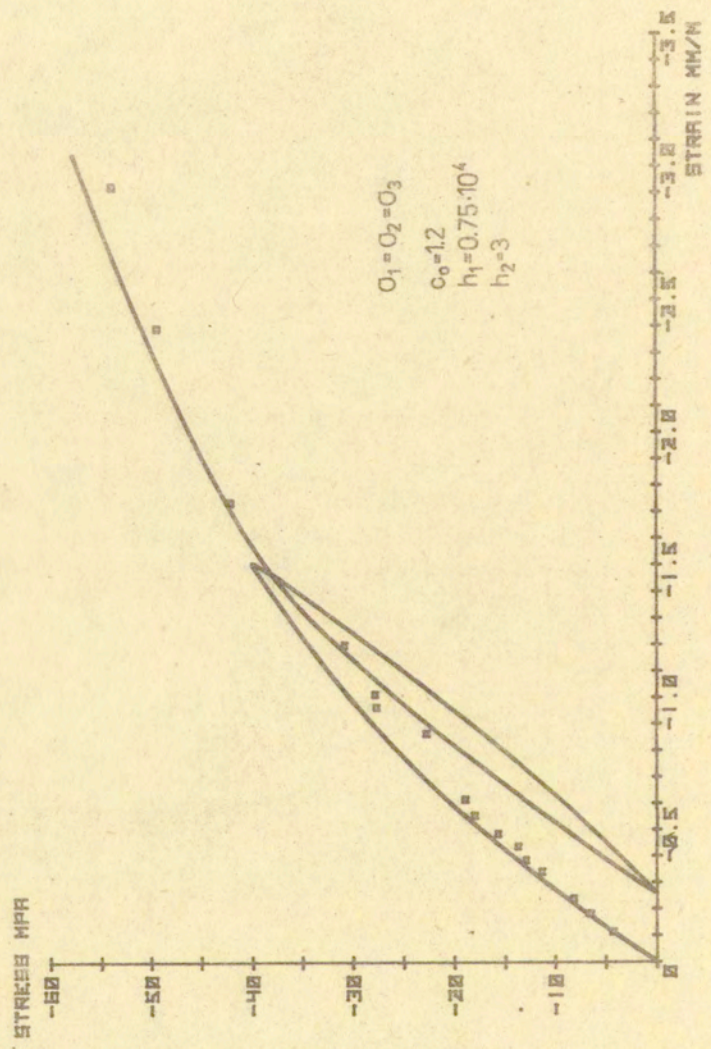
Rys. 5.9



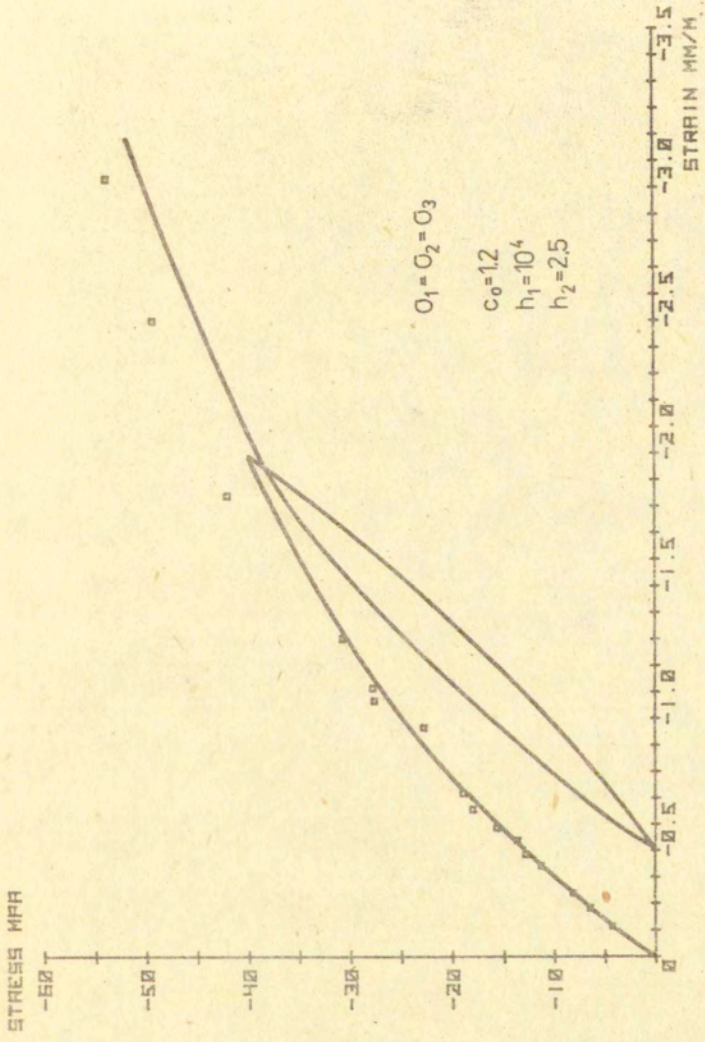
Rys. 5.10



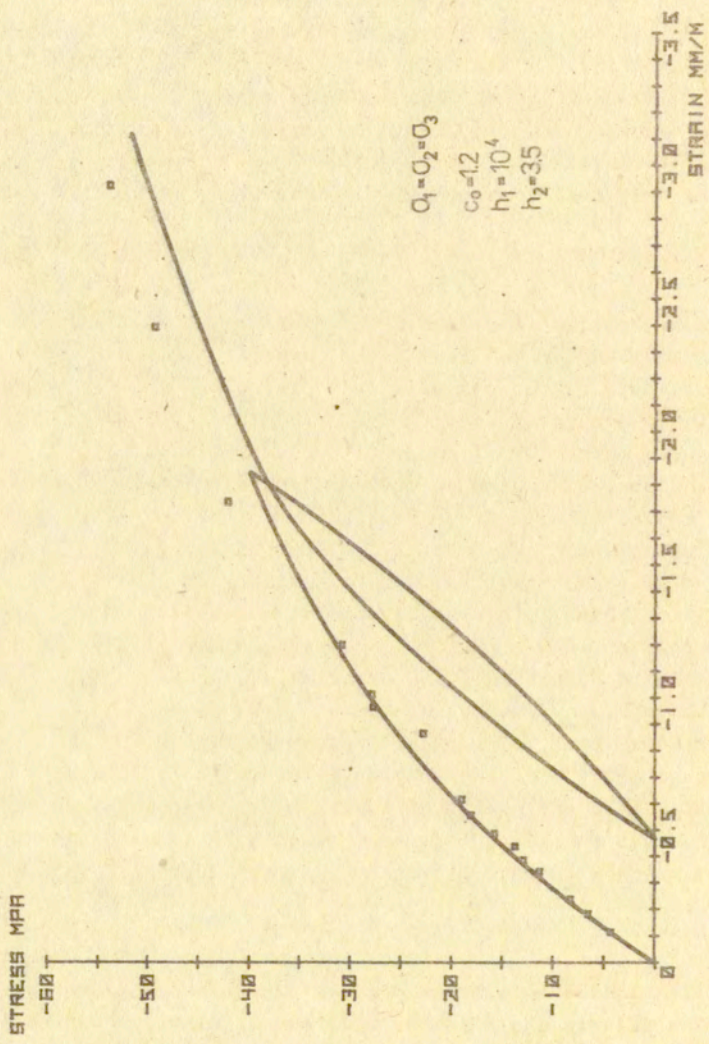
Rys. 5.11



Rys. 5.12



Rys. 5.13



Rys. 5.14

gdzie e jest stałą wyrażającą stosunek odległości powierzchni granicznej od osi ciśnień hydrostatycznych, przy tej samej wartości ciśnienia, dla kąta $\Theta = 0$ i $\Theta = \frac{\pi}{3}$. Funkcja ta przedstawia kształt powierzchni granicznej na płaszczyźnie dziewiatkowej $\pi : \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{const.}$ Na płaszczyźnie p - q opisujemy powierzchnię graniczną parabolą o równaniu

$$(5.10) \quad D(p, q, \frac{1}{2}) = q^{d_1} - C_0(p + p_0)$$

Dla $d_1 > 1$ powierzchnia ta jest gładka w każdym punkcie, w przeciwieństwie do innych propozycji, w których istnieją punkty osobliwe. Powierzchnia ta przecina oś ciśnień hydrostatycznych po stronie rozciągania w punkcie $-p_0$, po stronie ściskania natomiast jest nieograniczona. Dopasowanie powierzchni opisanej wzorami (5.9) i (5.10) do wyników badań doświadczalnych na płaszczyźnie p - q oraz w płaskim stanie naprężenia przedstawiają (rys. 5.15, 5.16). Przyjęta wartość stałej $e = 0.65$, wykładnika $d_1 = 1.3$, parametry C_0 i p_0 zależą natomiast od wytrzymałości betonu. Lepsze wyniki dopasowania można by uzyskać, zwiększając liczbę stałych w równaniu opisującym funkcję $g(\Theta)$. Interesującą propozycję przedstawił Podgórski w pracy [32] otrzymując dokładniejszy przebieg krzywej dla płaskiego stanu naprężenia.

Na podstawie kształtu powierzchni granicznej przyjmujemy równania opisujące powierzchnię degradacji sprężystej. Zakładamy, że na płaszczyźnie oktaedrycznej jej kształt jest niezmienny w trakcie procesu, a zatem opisuje go równanie (5.9). Na płaszczyźnie p - q modyfikujemy (5.10) uzmienniając C_0 oraz p_0 .

$$(5.11) \quad D(p, q, \varphi) = q^{d_1} - C(\varphi) [p + d_2 C(\varphi)^{\frac{1}{d_1-1}}]$$

Funkcja $p_0(\varphi) = d_2 C(\varphi)^{\frac{1}{d_1-1}}$ została dobrana tak, aby powierzchnia degradacji, niezależnie od wartości φ , przecinała oś q pod tym samym kątem. Gdy wartość $C(\varphi)$ wzrasta, ramiona paraboli rozchylają się i punkt przecięcia z osią p przesuwają się w stronę naprężeń rozciągających. Wartość φ wzrasta w trakcie procesu począwszy od 0. Początkowo, do wartości $\varphi = \frac{1}{2}$, $C(\varphi)$

wzrasta. Dla $\varphi = \frac{1}{2}$ powierzchnia degradacji pokrywa się z powierzchnią graniczną, a zatem $C(\frac{1}{2}) = C_0$. Później dla $\varphi > \frac{1}{2}$, w zakresie pokrytycznym, wartość funkcji C maleje wraz ze wzrostem φ . Zachowanie to możemy opisać równaniem

$$(5.12) \quad C(\varphi) = \frac{C_1}{[c_1(\varphi - \frac{1}{2}) + 1]^{\frac{1}{2}}} \quad i = \begin{cases} 2 & \varphi \leq \frac{1}{2} \\ 3 & \varphi > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Funkcję φ dwóch zmiennych T i S opiszemy jako sumę dwóch funkcji

$$(5.13) \quad \varphi(T, S) = \bar{\varphi}(T) + \bar{\varphi}(S) + \text{const.}$$

Funkcje $\bar{\varphi}$ oraz $\bar{\varphi}$ przyjmujemy jako funkcje potęgowe, natomiast stałą dobieramy tak, aby spełniony był warunek $\varphi(T_0, S_0) = 0$. T_0 i S_0 opisują początkowe wartości współczynników sprężystych. Ostatecznie φ ma postać

$$(5.14) \quad \varphi(T, S) = \varphi_1 ([\varphi_2 - (T - T_0)]^{\varphi_3} - \varphi_2^{\varphi_3}) + \\ + \varphi_4 ([\varphi_5 + (S - S_0)]^{\varphi_6} - \varphi_5^{\varphi_6})$$

Do kompletu brakuje jeszcze funkcji wzmocnienia powierzchni plastyczności (5.7) ze względu na parametr κ . Funkcję $B(\cdot, 0)$ przyjmujemy również jako funkcję potęgową i w wyniku

$$(5.15) \quad B(\kappa, \beta) = b_1 e^{b_2 \beta} + b_3 (\kappa + b_4)^{b_5} + b_6$$

Tak dobrane funkcje zweryfikowano dla badań prowadzonych przez Kupfera, Hilsdorfa i Ruscha [55].

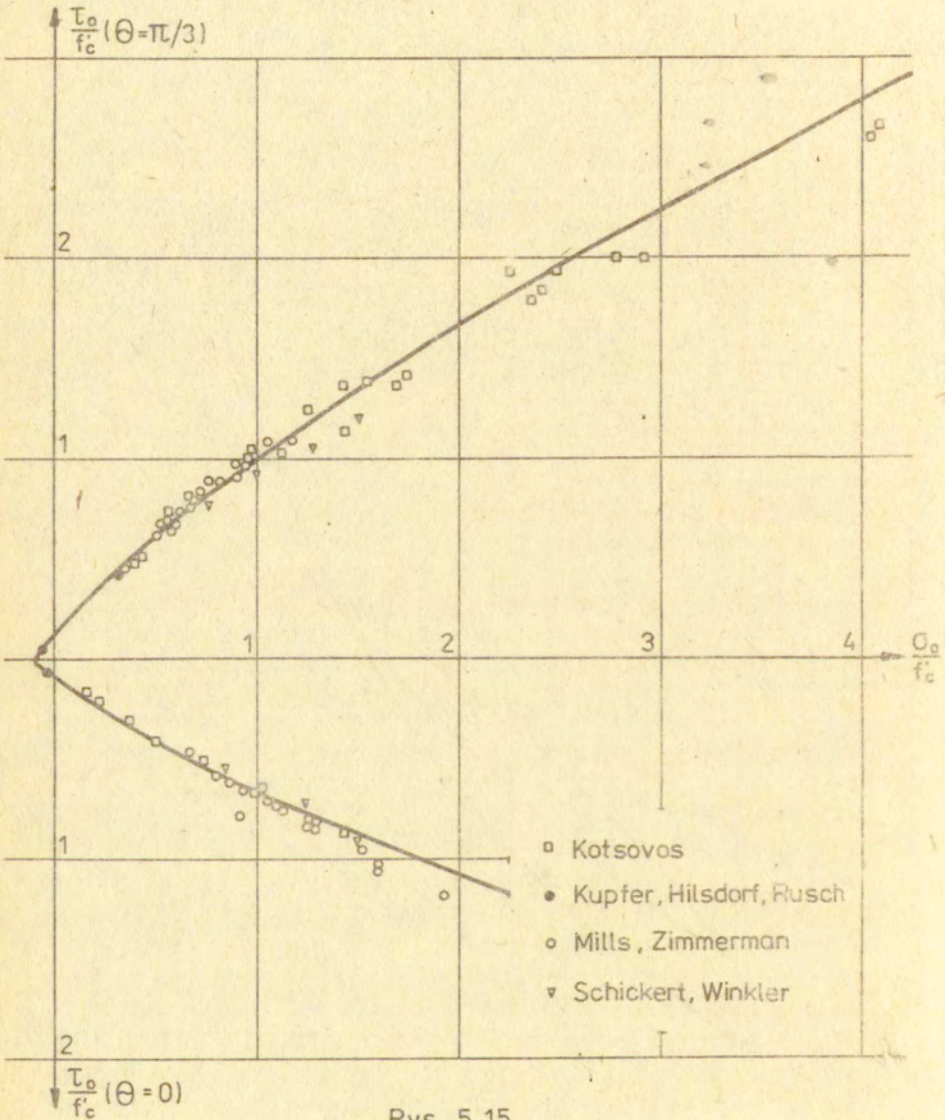
Próbki z betonu o $f'c = 32.1$ MPa w kształcie kwadratowych tarcz o niewielkiej grubości poddano ścisłaniu dwuosowemu przy zastosowaniu specjalnych szczotek eliminujących tarcie. Otrzymano szereg wyników dla płaskiego stanu naprężenia przy różnych stosunkach naprężeń głównych od 1/0 do 1/1. Wyniki dopasowania przedstawiają (rys. 5.17 - 5.19). Uzyskano je dla następujących wartości stałych:

$$\begin{aligned}
 (5.16) \quad & K_0 = 18.4 & G_0 &= 13.8 \\
 & e = 0.65 & \alpha &= 0 \\
 & d_1 = 1.3 & d_2 &= 0.034 \\
 & c_1 = 6.99 & c_2 &= 0.9637 & c_3 &= 8.066 \\
 & \psi_1 = 4.01 & \psi_2 &= 0.001 & \psi_3 &= 0.1 \\
 & \psi_4 = 0.2078 & \psi_5 &= 0.1 & \psi_6 &= 1.5 \\
 & A = 3.508 & f_1 &= 0.416 \\
 \\
 & b_1 = 2.814 & b_2 &= 0.227 & b_3 &= 38.97 & b_4 &= 0.1501 \\
 & b_5 = 0.1214 & b_6 &= 1.086 \\
 \\
 & h_1 = 2.29.10 & h_2 &= 2.613 \\
 & c_0 = 1.2
 \end{aligned}$$

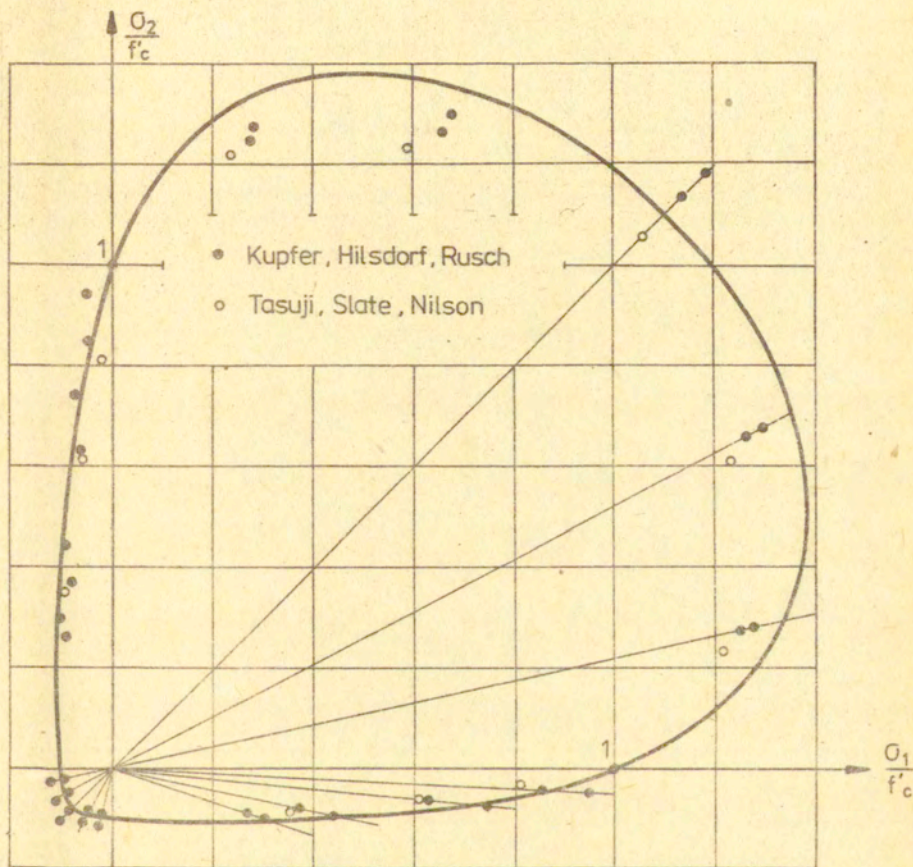
Jednostki tych stałych są takie, aby otrzymywany wykres wyrażony był dla odkształceń w mm/m natomiast dla naprężeń w MPa. Wartości te są stosowane przy rozwiązywaniu problemu brzegowego, przedstawionego w następnym rozdziale.

5.4. Weryfikacja dla testów trójosiowych

Model zweryfikowano również pod względem jakościowym dla badań cyklicznych w stanie trójosiowym. Badania te przeprowadzili na Uniwersytecie Stanu Colorado w Boulder Scavuzzo, Stan-kowski, Gerstle i Ko [60]. Próbkki sześciennie ściskano w specjalnej maszynie wytrzymałościowej umożliwiającej uzyskanie dowolnej kombinacji trzech naprężeń głównych. Praca [60] zawiera wyniki dla dużej ilości dróg w przestrzeni naprężeń. Nie są one natomiast opracowane statystycznie. Do weryfikacji modelu teoretycznego wybrano dwie serie badań. W pierwszej serii ściskano próbki, początkowo hydrostatycznie, do zadanej wartości ciśnienia. Następnie odciażano do zera i ponownie ściskano hydrostatycznie do wyższego niż poprzednio ciśnienia. Wykonano w ten sposób dwa cykle. Dalej ustalano ciśnienie i prowadzono cykle w płaszczyźnie dewiatorowej, zachowując przy tym stałą wartość trzeciego niezmiennika kąowego Θ . Testy pierwszy i trzeci prowadzone były dla $\Theta = 0$ i różnią się tylko wartościami naprężeń ścinających, uzyskiwanych w kolejnych cyklach.

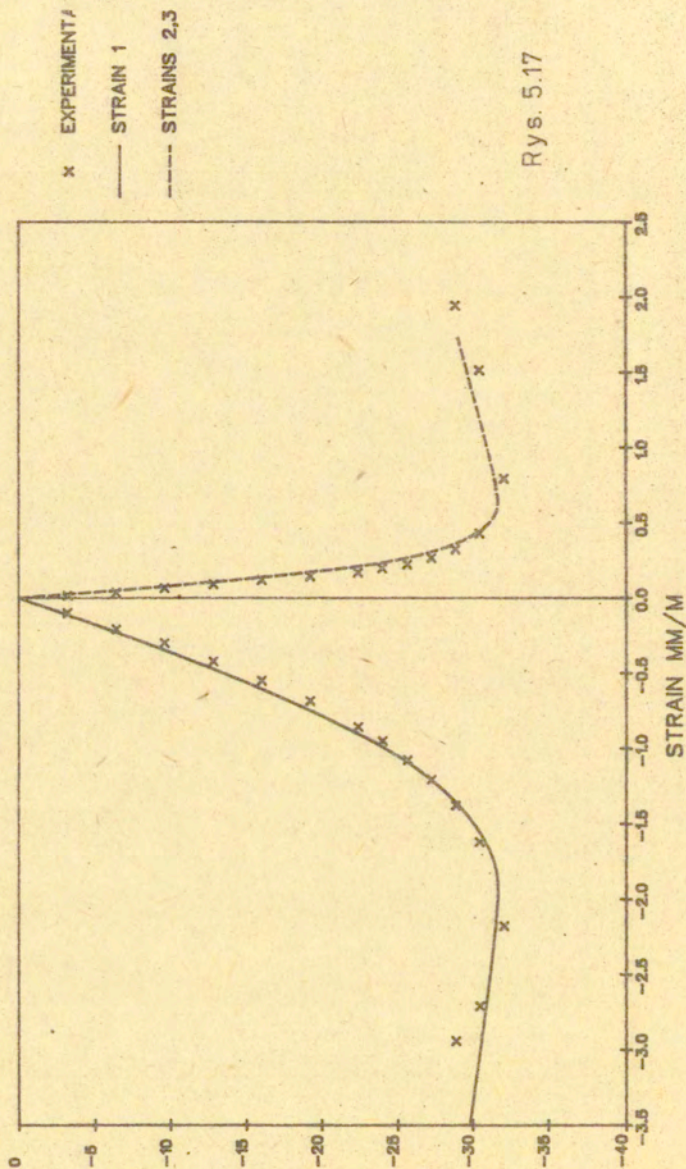


Rys. 5.15



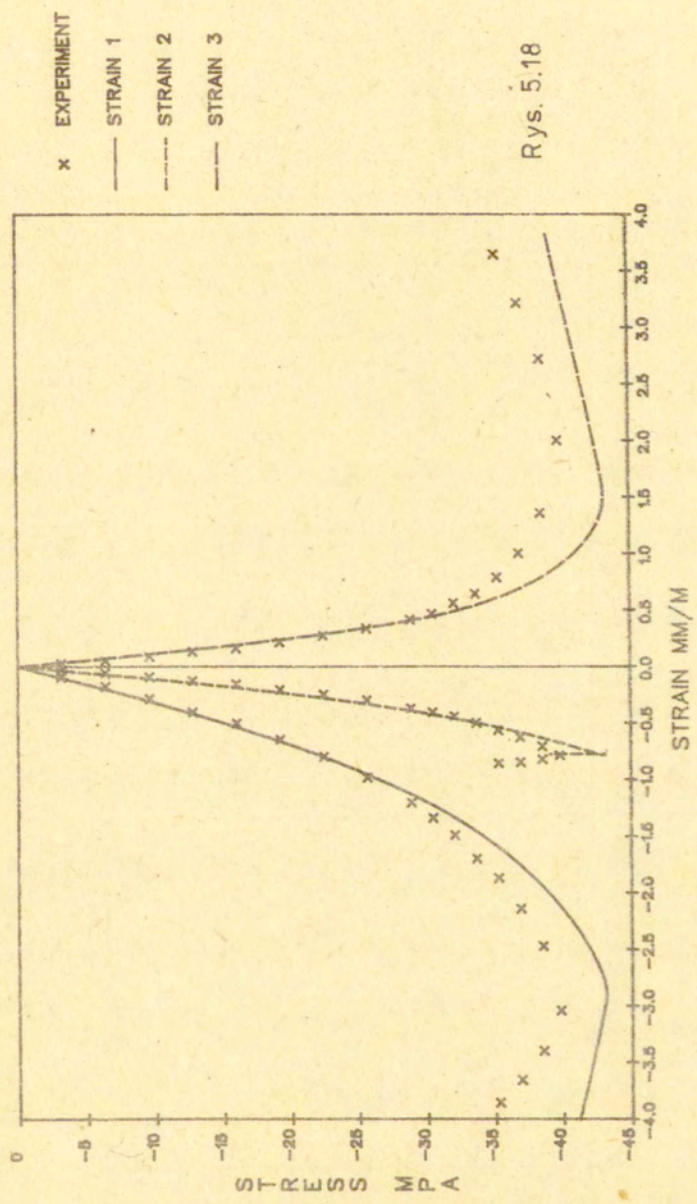
rys. 5.18

FC=32.1MPA UNIAXIAL COMPRESSION KUPFER,HILSDORF,RUSCH



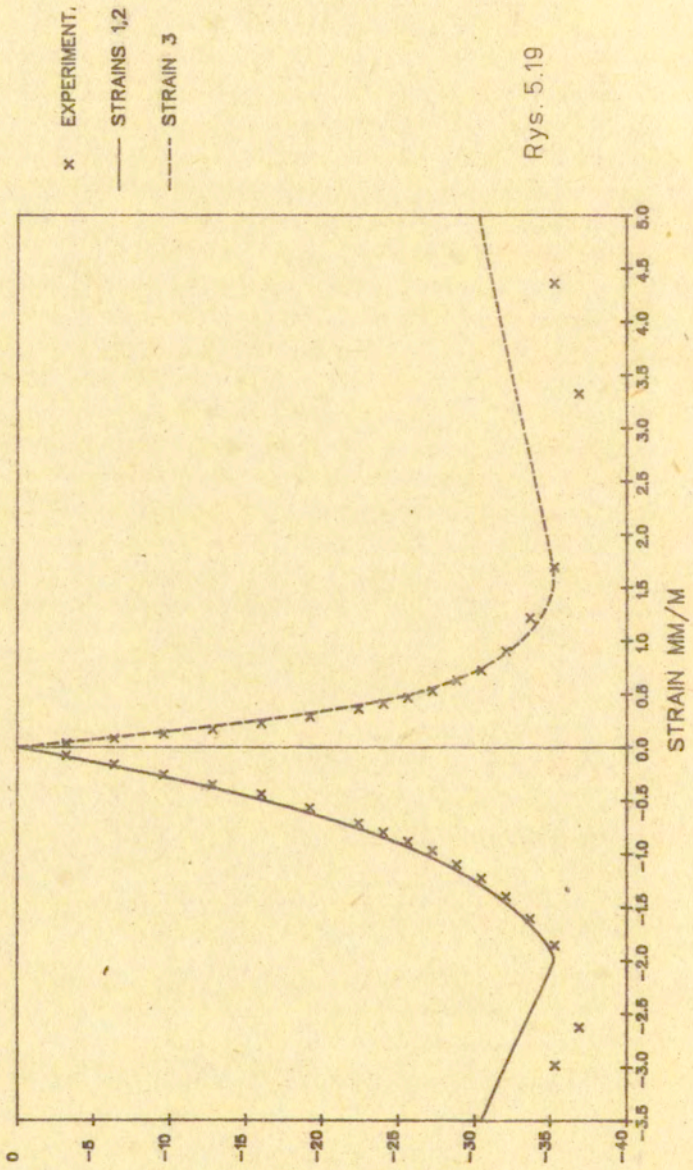
Rys. 5.17

FC=32.1MPA BIAXIAL COMPRESSION 1/0.52 KUPFER,HILSDORF,RUSCH



Rys. 5.18

FC=32.1MPA BIAXIAL COMPRESSION 1/1 KUPFER,HILSDORF,RUSCH



Rys. 5.19

W drugim teście natomiast wartość $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Zwiększając poziom naprężenia doprowadzono do zniszczenia próbki. Drogi w przestrzeni naprężeń dla tej serii testów przedstawia (rys.5.20). Dla każdej z dróg przeprowadzono dwie próby. Ich wyniki pokazane są na (rys.5.12, 5.23, 5.25). Rezultaty symulacji numerycznej dla identycznych typów trajektorii w przestrzeni naprężeń zawierają (rys.5.22, 5.24, 5.26) umieszczone bezpośrednio po wykresach eksperymentalnych.

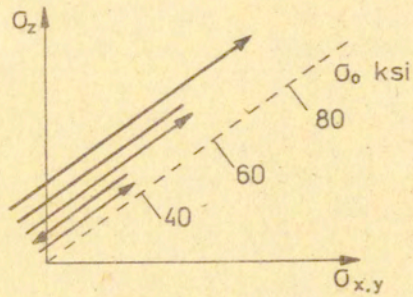
W drugiej serii badań obciążano próbkę monotonicznie do zadanego poziomu ciśnienia hydrostatycznego i następnie obciążano cyklicznie na danej płaszczyźnie dewiatorowej.

O ile jednak w pierwszej serii badań odciążano zawsze do zerowego poziomu naprężenia dewiatorowego i nie zmieniano jego zwrotu, o tyle teraz cykle mają charakter naprzemienny.

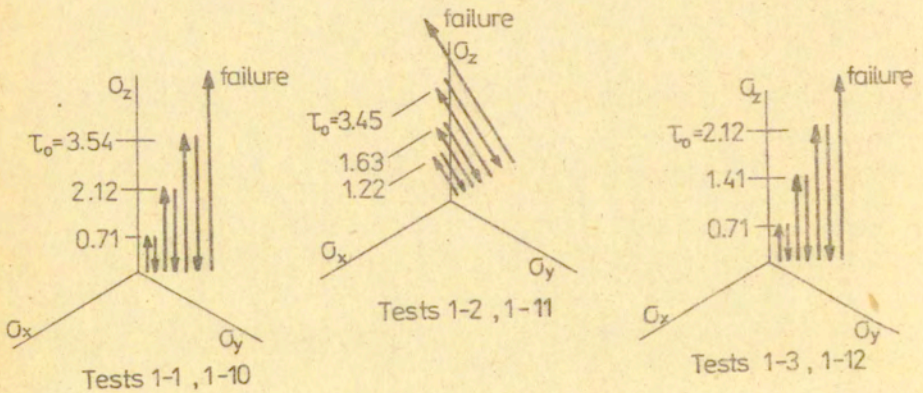
W momencie przejścia przez punkt zerowy płaszczyzny dewiatorowej zmienia się wartość kąta α , pomimo że kierunek obciążania jest zachowany. Na (rys.5.27) przedstawiono drogi obciążania dla kolejnych testów. Wyniki badań doświadczalnych zawierają (rys.5.28, 5.31). Za nimi umieszczone są rezultaty symulacji numerycznej (rys.5.29, 5.30, 5.32).

Wykresy te można porównywać jedynie pod względem podobieństwa, nie są one bowiem dopasowane ilościowo. Trajektorie eksperymentalne i teoretyczne w układzie naprężenie - odkształcenie są zbliżone. Również przewidywany zakres odkształceń jest zbliżony z wynikami doświadczalnymi. Wartości naprężeń natomiast są zupełnie dowolne.

Ilościowe opisanie betonu używanego w tych doświadczeniach wymagałoby dysponowania wynikami prostszych testów monotonicznych, którymi niestety nie dysponujemy.

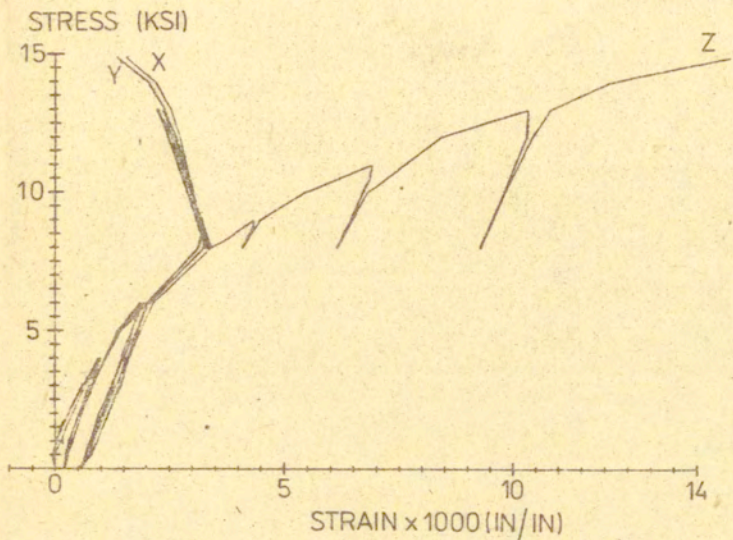


Tests 1-4 to 1-3
1-10 to 1-12

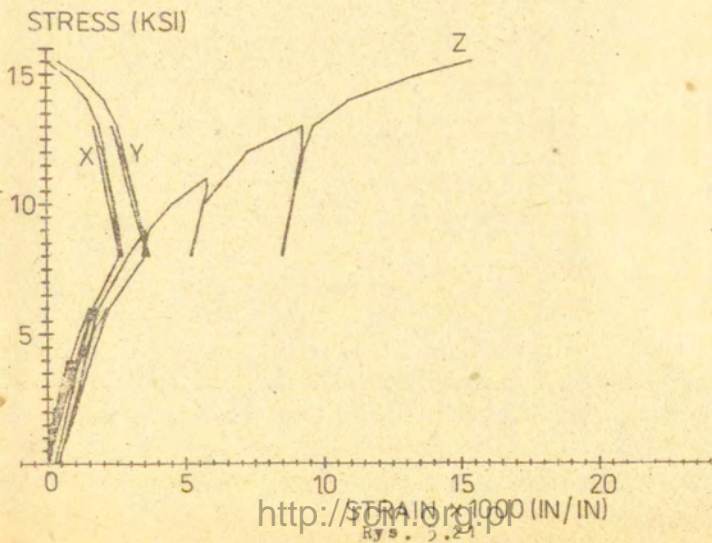


Rys. 5.20

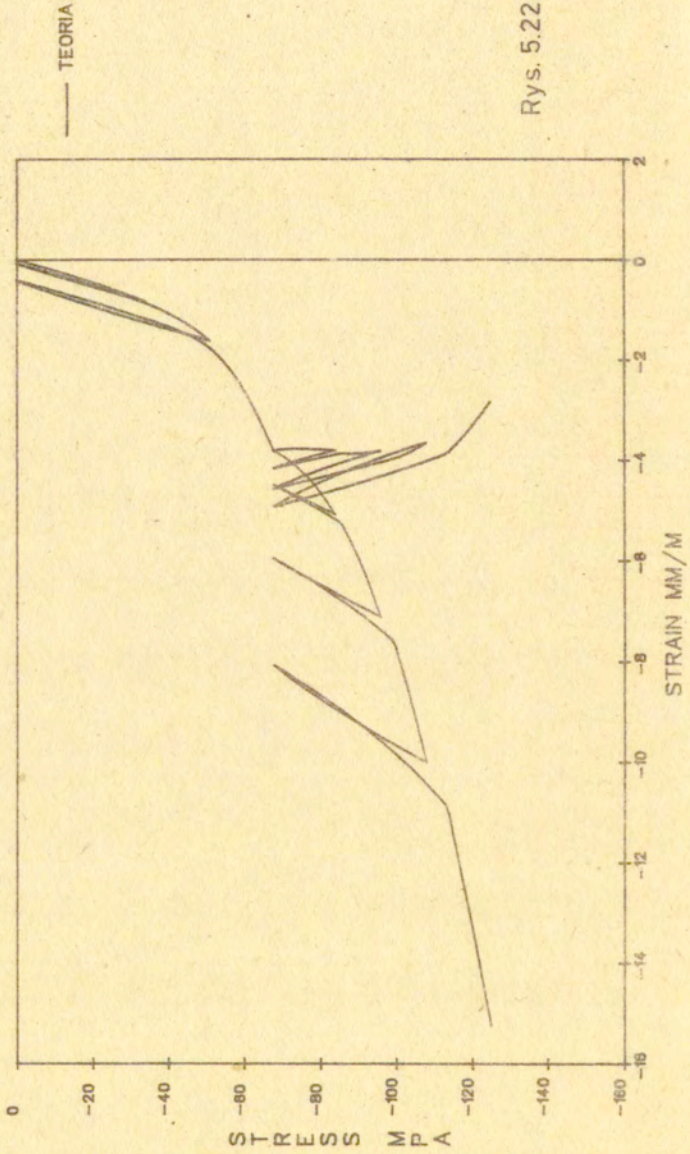
TEST 1-1



TEST 1-10

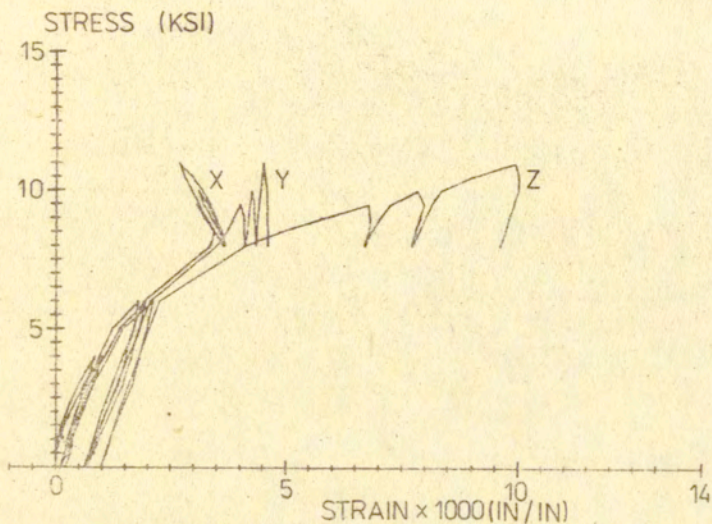


TEST TROJOSIOWY 1-1 BOULDER

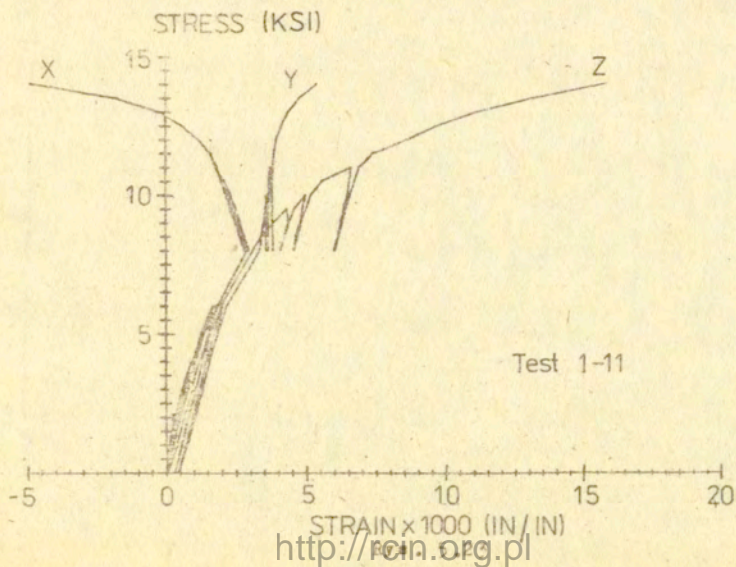


Rys. 5.22

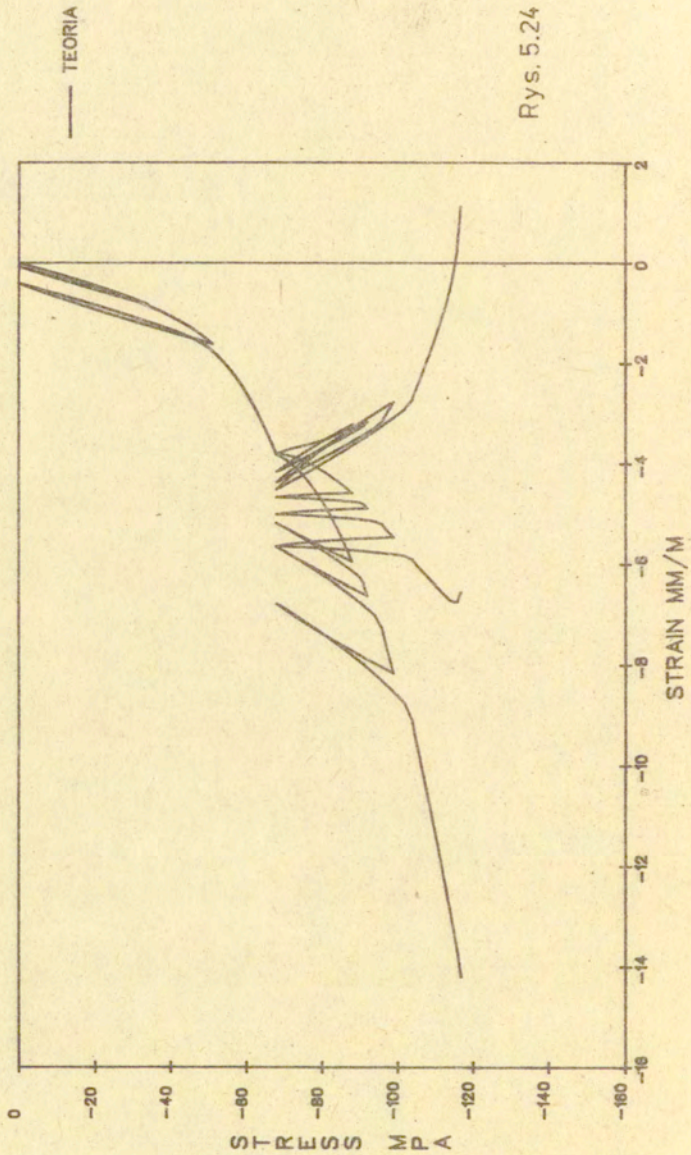
TEST 1-2



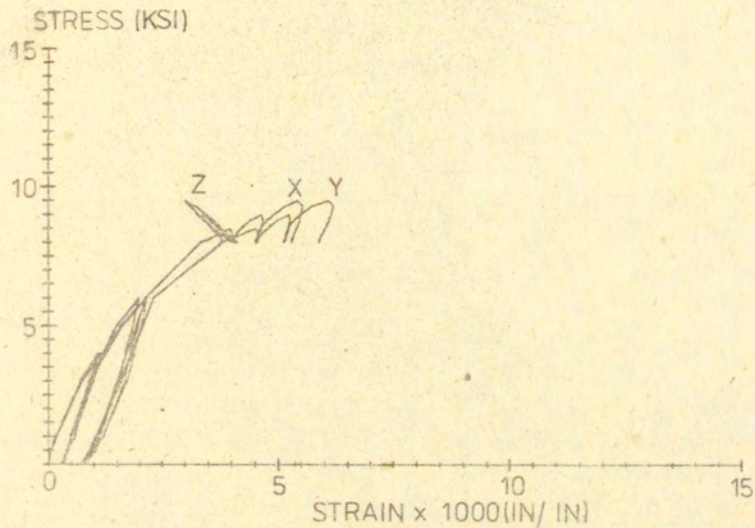
TEST 1-11



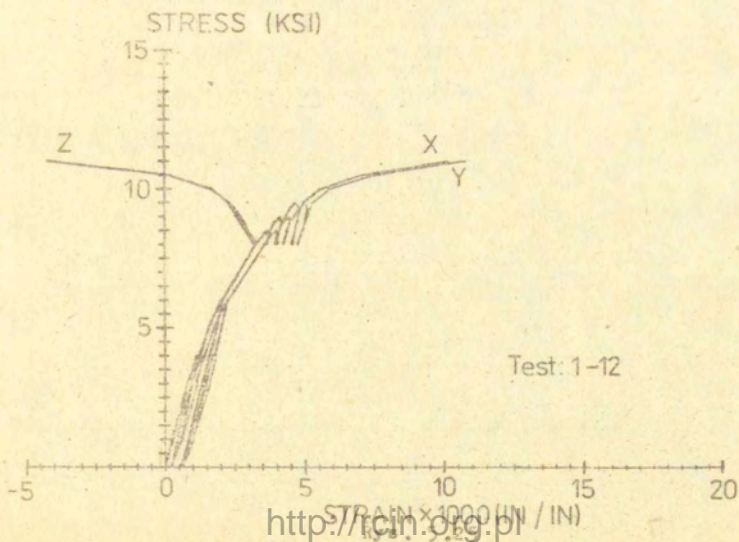
TEST TROJOSIOWY 1-2 BOULDER



TEST 1-3

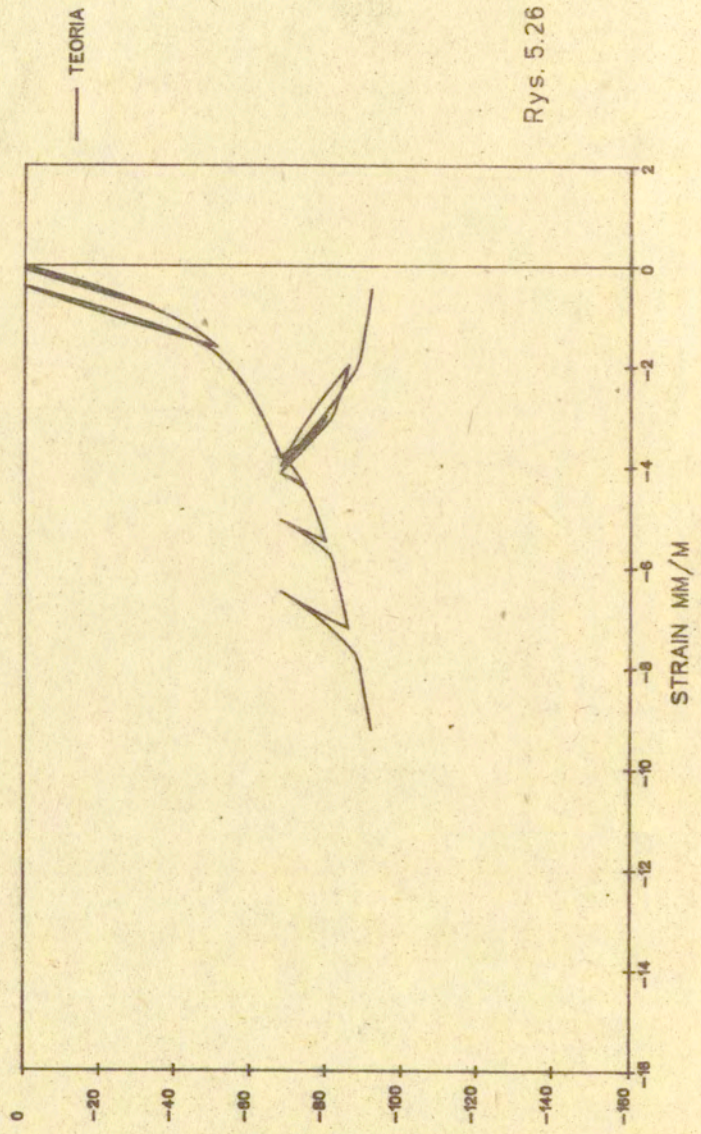


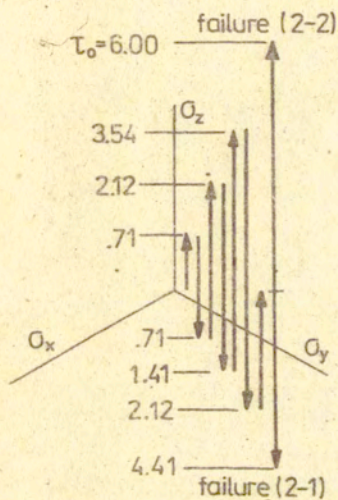
TEST 1-12



Rys. 5.26

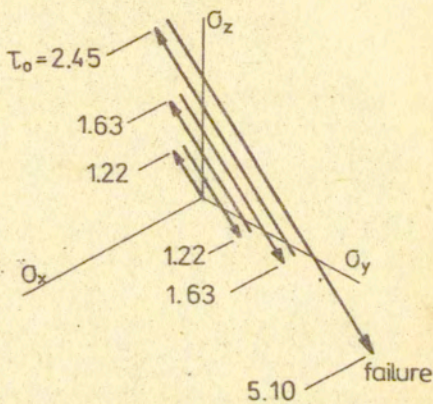
TEST TROJOSIOWY 1-3 BOULDER





$\sigma_o = 8$ ksi

Tests 2-1, 2-2

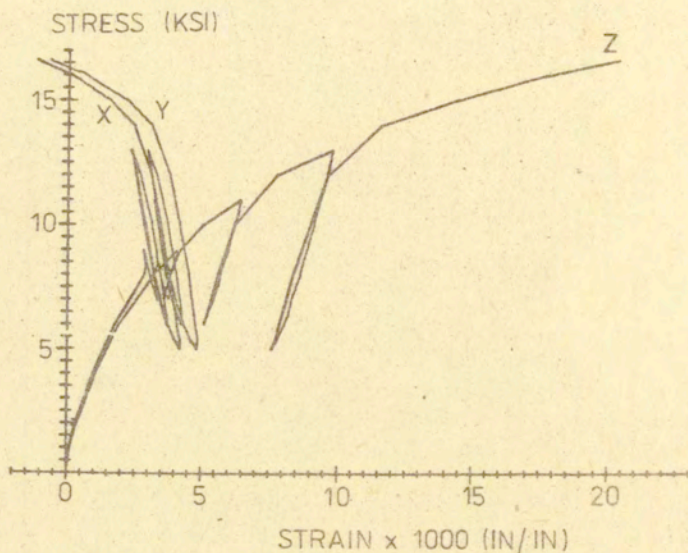


$\sigma_o = 8$ ksi

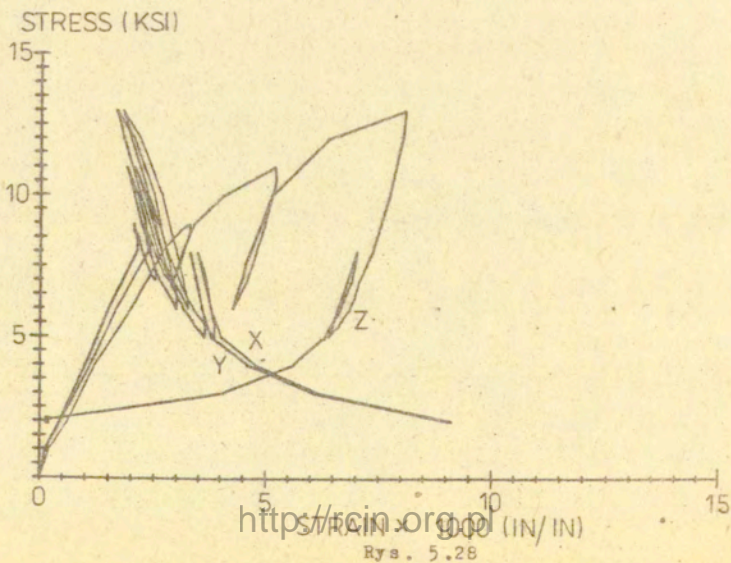
Tests 2-3, 2-4

Rys. 5.27

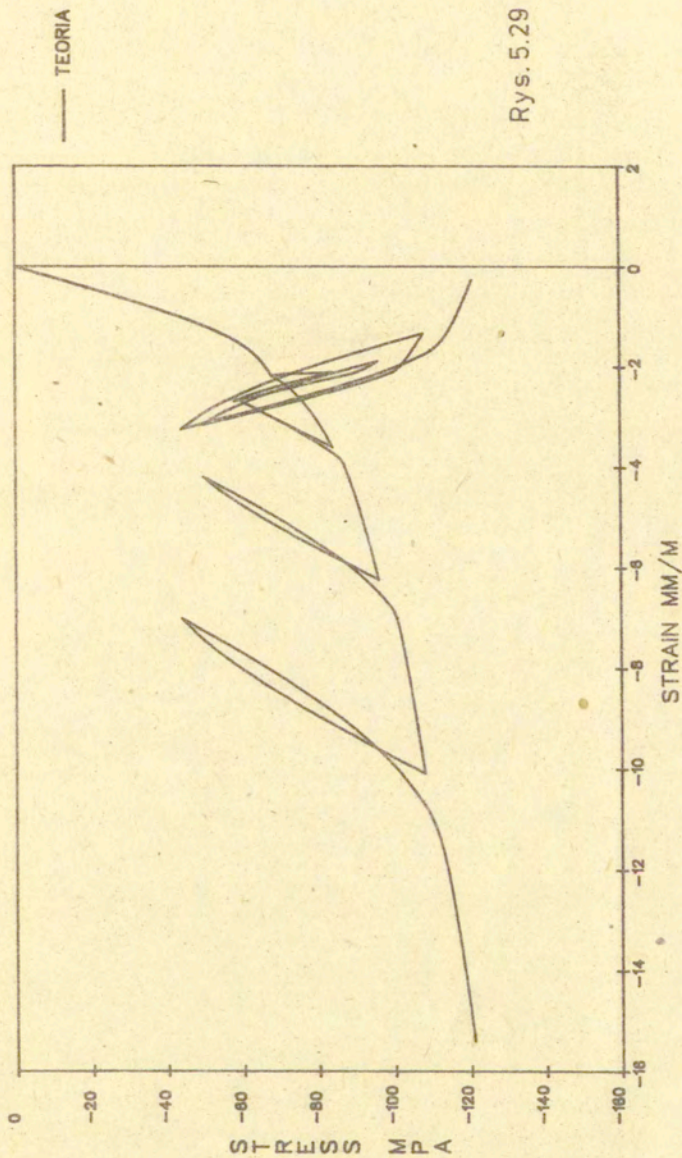
TEST 2-1



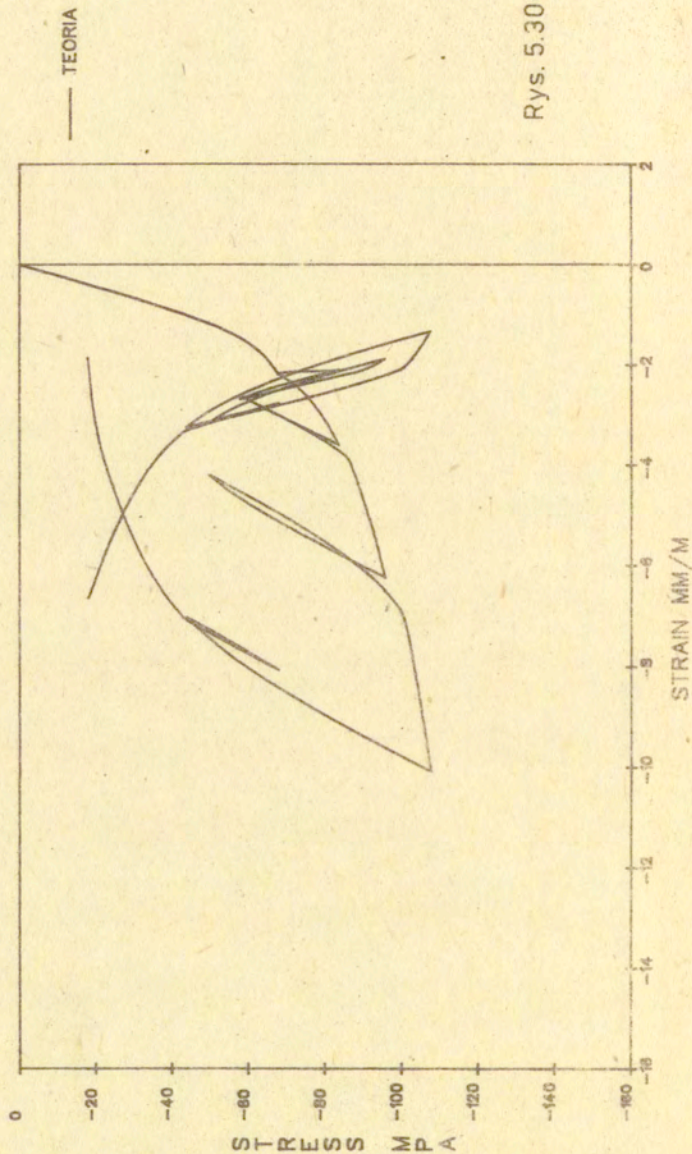
TEST 2-2



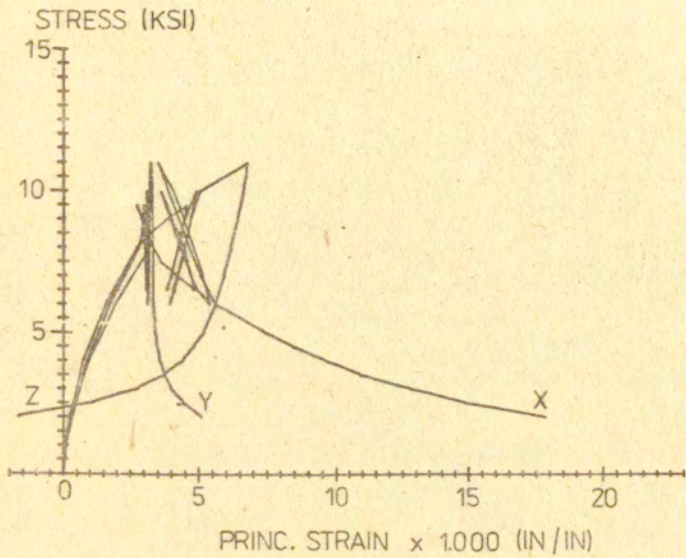
TEST TROJSIOWY 2-1 BOULDER



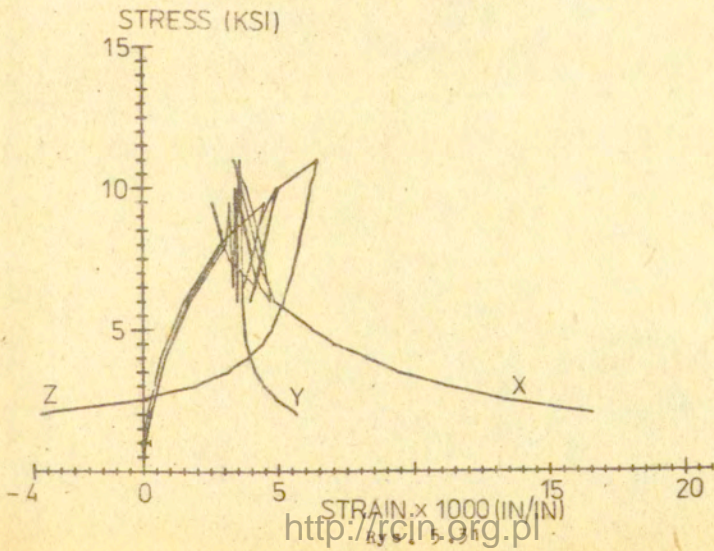
TEST TROJOSIOWY 2-2 BOULDER



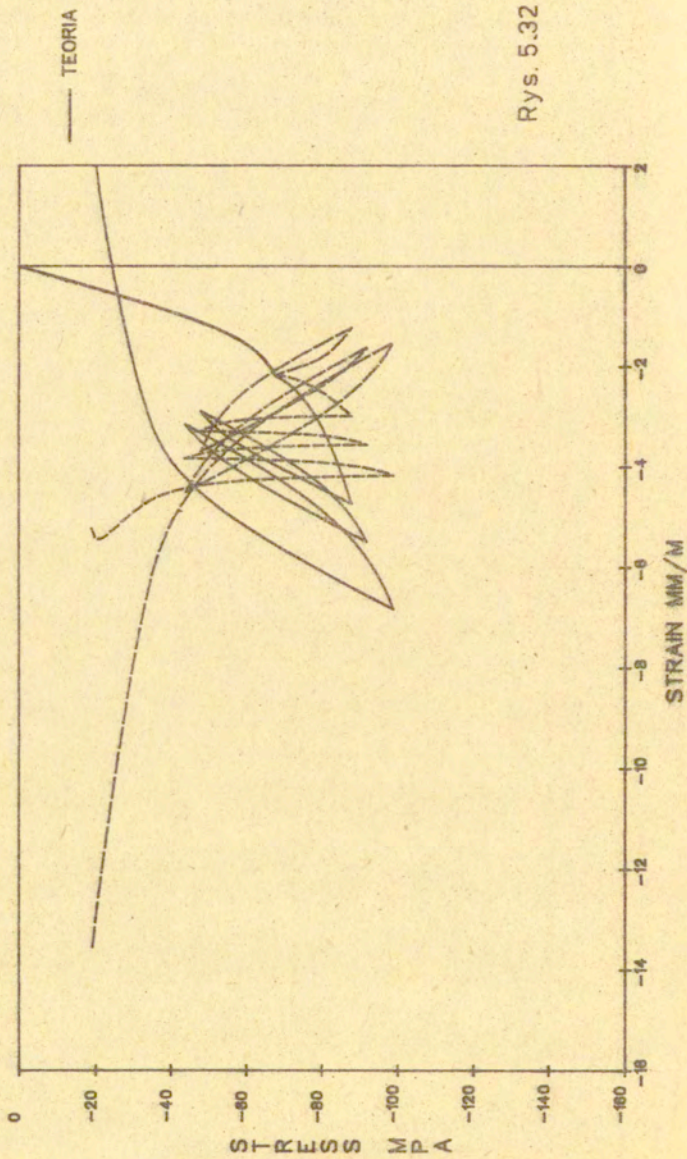
TEST 2-3



TEST 2-4



TEST TROJSIOWY 2-3 BOULDER



Rys. 5.32

5.5. Zestawienie funkcji materiałowych

Sporządzimy obecnie pełny zestaw funkcji materiałowych wraz z ich pochodnymi używanymi do opisu macierzy podatności:

$$F(p, q, \kappa, \beta) = q^2 + A [p + f_1 B(\kappa, \beta)] [p - B(\kappa, \beta)]$$

$$F, p = A [2p + (f_1 - 1)B]$$

$$F, q = 2q$$

$$F, B = A [(f_1 - 1)p - 2f_1 B]$$

$$B(\kappa, \beta) = b_1 e^{b_2 \beta} + b_3 (\kappa + b_4)^{b_5} + b_6$$

$$B, \kappa = b_3 b_5 (\kappa + b_4)^{b_5 - 1}$$

$$B, \beta = b_1 b_2 e^{b_2 \beta}$$

$$F, \kappa = F, B B, \kappa$$

$$F, \beta = F, B B, \beta$$

$$(5.17) \quad D(p, q, \varphi) = q^{d_1} - C(\varphi) [p + d_2 C(\varphi)^{\frac{1}{d_1 - 1}}]$$

$$D, p = -C$$

$$D, q = d_1 q^{d_1 - 1}$$

$$D, C = -p - \frac{d_1 d_2}{d_1 - 1} C^{\frac{1}{d_1 - 1}}$$

$$C(\varphi) = \frac{c_1}{[c_i (\varphi - \frac{1}{2})^2 + 1]}^{1/2}$$

$$i = \begin{cases} 2 & \varphi \leq \frac{1}{2} \\ 3 & \varphi > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$C, \varphi = - \frac{c_1 c_i (\varphi - \frac{1}{2})}{[c_i (\varphi - \frac{1}{2})^2 + 1]}^{3/2}$$

$$i = \begin{cases} 2 & \varphi \leq \frac{1}{2} \\ 3 & \varphi > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$D, \varphi = D, C C, \varphi$$

$$\varphi(T, S) = \varphi_1 ([\varphi_2 - (T - T_0)]^{\varphi_3} - \varphi_2^{\varphi_3}) + \varphi_4 ([\varphi_5 + (S - S_0)]^{\varphi_6} - \varphi_5^{\varphi_6})$$

$$\varphi_{1,T} = -\varphi_1 \varphi_3 [\varphi_2 - (T - T_0)]^{\varphi_3 - 1}$$

$$\varphi_{1,S} = \varphi_4 \varphi_6 [\varphi_5 + (S - S_0)]^{\varphi_6 - 1}$$

$$g(\Theta) = \frac{4(1-e^2)\cos^2\Theta + (2e-1)^2}{2(1-e^2)\cos\Theta - (2e-1)[4(1-e^2)\cos^2\Theta + 5e^2 - 4e]^{1/2}}$$

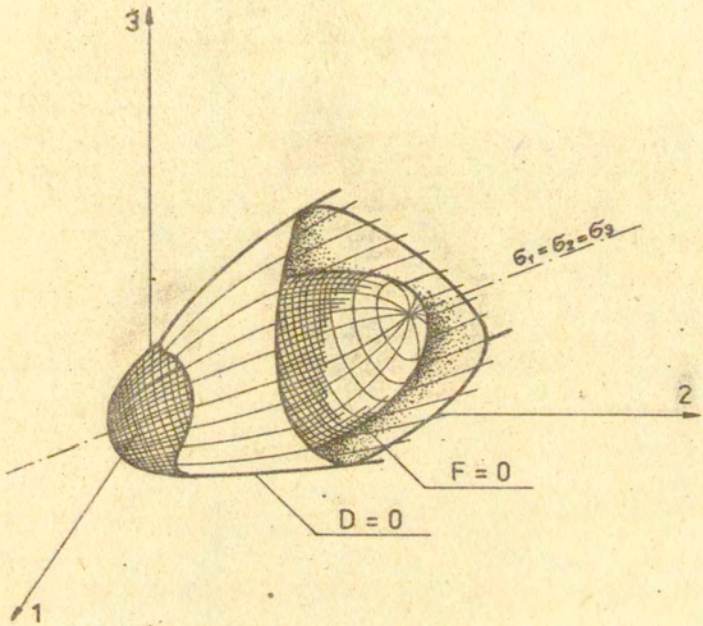
$$g'(\Theta) = \frac{g_1}{g_2}$$

$$g_1 = -8(1-e^2)\cos\Theta\sin\Theta\{2(1-e^2)\cos\Theta - (2e-1)[4(1-e^2)\cos^2\Theta + 5e^2 - 4e]^{1/2}\} + 2(1-e^2)\sin\Theta\left\{1 + \frac{2(2e-1)\cos\Theta}{[4(1-e^2)\cos^2\Theta + 5e^2 - 4e]^{1/2}}\right\}$$

$$g_2 = \{2(1-e^2)\cos\Theta - (2e-1)[4(1-e^2)\cos^2\Theta + 5e^2 - 4e]^{1/2}\}^2$$

W celu uzyskania odpowiednich macierzy podatności korzystamy ze wzorów (3.10), (4.5), (4.7), (4.20), (4.23), (4.25), (4.27), (4.43), (4.44), (4.56), (4.57), (4.58), (4.59), (4.61), (4.62), (4.64), (4.67), (4.69), (4.71), (4.72), (4.78).

Kształt powierzchni plastyczności i degradacji w przestrzeni naprężeń głównych przedstawia (rys. 5.33).



Rys. 5.33

6. Rozwiązanie problemu brzegowego

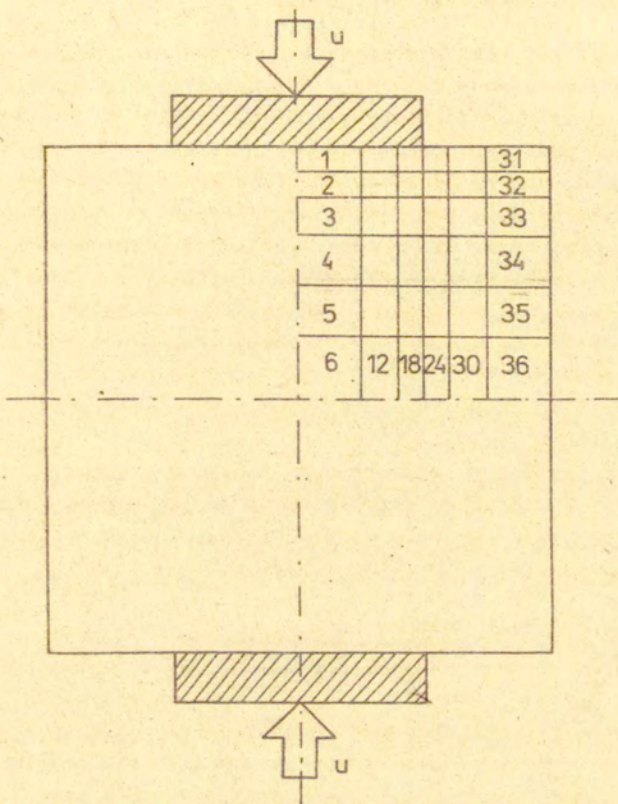
Pierwszy przykład demonstruje możliwość zastosowania zaproponowanego modelu do analizy odkształceń plastycznych i niszczenia konstrukcji betonowych. Metodą elementów skończonych rozwiązano prosty problem brzegowy, polegający na ściskaniu próbki betonowej pomiędzy dwoma sztywnymi płytami. Beton opisywany jest stałymi podanymi w rozdziale 5.

Przyjęto trzy różne stany naprężenia i odkształcenia panujące w próbce. Płaski stan naprężenia dla próbki wykonanej jako cienka tarcza. Płaski stan odkształcenia dla próbki w postaci długiej belki, ściskanej wzdłuż całej swej długości. Stan osiowosymetryczny dla próbki walcowej. Rozważono również dwa rodzaje warunków panujących pomiędzy stemplem a próbką. W pierwszym przypadku założono brak tarcia na styku stempla i próbki, dzięki czemu możliwe było swobodne wzajemne przemieszczanie się w kierunku poziomym. W drugim natomiast założono pełne przyleganie stempla do próbki, eliminując możliwość przemieszczeń poziomych.

6.1. Metoda rozwiązania

Analizę numeryczną przeprowadzono korzystając z systemu metody elementów skończonych GENFEM 4 opracowanego na Uniwersytecie Technicznym Chalmers w Göteborgu [62], [63].

System ten umożliwia przedkrytyczną analizę nieliniową dla różnych modeli materiału. W celu przystosowania systemu do nowego modelu, konieczna jest zmiana podprogramów zawierających macierze konstytutywne i obliczających przyrosty odkształceń oraz zmiany parametrów wewnętrznych. Dzięki swojej budowie zapewnia on dużą elastyczność w dobrze odpowiednich procedurach numerycznych. W rozważanym przykładzie zastosowano osmiowęzłowe elementy izoparametryczne dostosowane do realizacji wszystkich założonych stanów. Dzięki symetrii zadania, możliwe było przeprowadzenie obliczeń jedynie dla 1/4 próbki. Podział tej części próbki na 36 elementów skończonych przedstawia (rys.6.1).



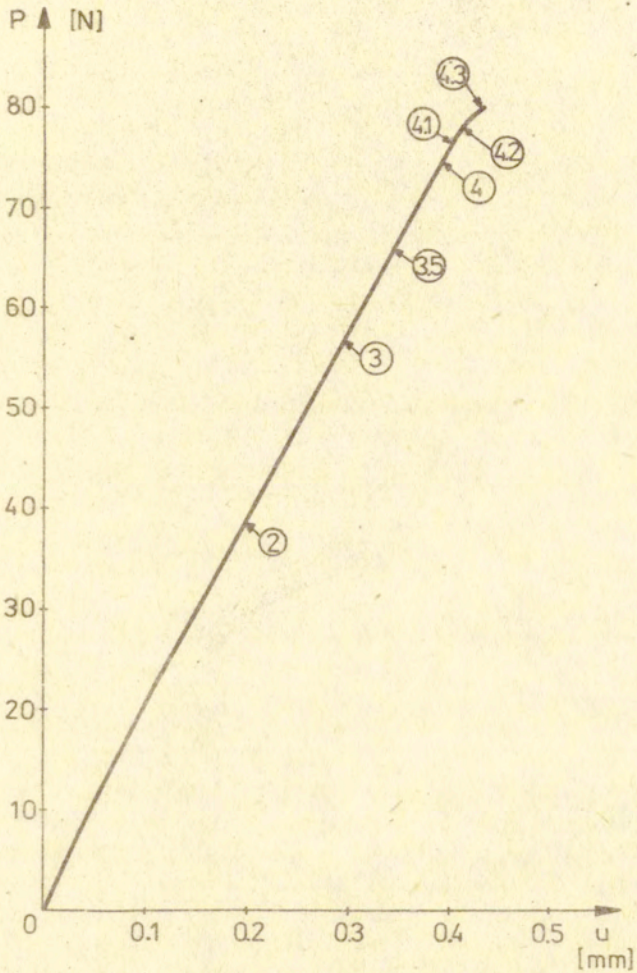
Rys. 6.1.

W celu określenia macierzy sztywności elementu korzystano z kwadratury Gaussa opartej na 4 punktach całkowania. Do obliczeń przyrostów przemieszczeń zastosowano metodę stycznych - Newtona. Jak wynikało z testów numerycznych jest to, w przypadku tego modelu, jedyna standardowa metoda zapewniająca wystarczającą zbieżność iteracji. Obciążanie próbki realizowane było poprzez zadawanie przyrostu przemieszczenia stempla na każdym z kroków analizy. W momencie uzyskania osobliwej

macierzy sztywności całego układu - system przerywał działanie. Dlatego też analiza kończy się w pobliżu pierwszego napotkanego lokalnego maksimum siły przyłożonej do stempla. Analiza pokrytyczna możliwa będzie dopiero po zastosowaniu specjalnych procedur numerycznych umożliwiających kontynuowanie obliczeń również w przypadku osobliwej macierzy sztywności. Jest ona przewidziana w następnym etapie badań nad modelem. Całość obliczeń prowadzona była na komputerze IBM 3033. Czas jednej iteracji wynosił około 1. minuty. Analiza prowadzona przy zastosowaniu pełnego modelu jest zatem dosyć kosztowna. Istnieje jednakże możliwość uproszczenia stosowanego modelu w zależności od typu rozwiązywanego problemu brzegowego.

6.2. Wyniki

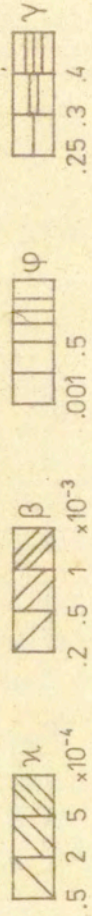
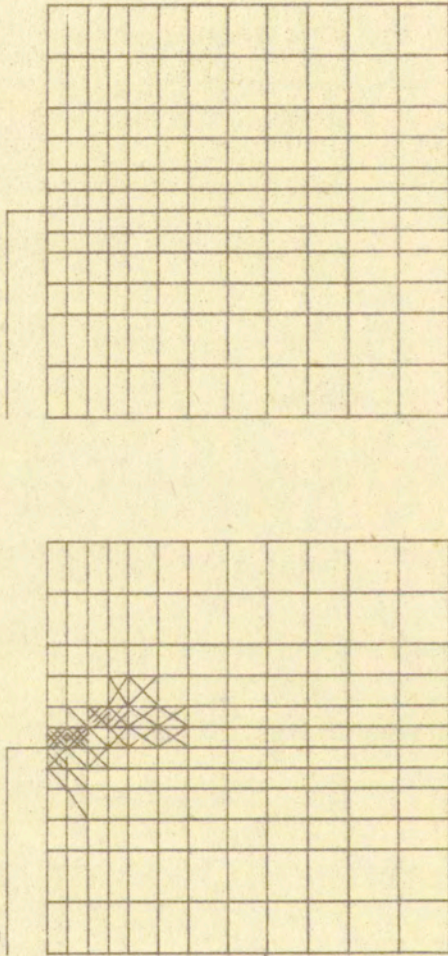
Wykres siła - przemieszczenie dla płaskiego stanu naprężenia w stanie przedkrytycznym zbliżony jest do linii prostej (rys. 6.2). Pokrywa się to z wynikami uzyskanymi przez Chenów [64] dla ich modelu betonu. Podobne wykresy otrzymano dla pozostałych przypadków. Na (rys. 6.3 - 6.8) przedstawiono rozkład parametrów wewnętrznych materiału dla kolejnych kroków obciążania i wszystkich analizowanych stanów. Parametry te liczone były w punktach Gaussa. Dlatego każdy element skończony podzielono na cztery obszary związane z poszczególnymi punktami całkowania. Parametr κ określa dewiatorowe odkształcenia plastyczne, β natomiast - plastyczne odkształcenia objętościowe. Parametr φ jest miarą degradacji sprężystej i gdy jest większy od 1/2 wskazuje, że materiał znajduje się w stanie pokrytycznym. Fizycznie odpowiada mu powstanie mikroszczelin lub pęknięcie materiału. Ostatni uwzględniony parametr γ określa stosunek wielkości powierzchni aktywnej do powierzchni plastyczności. Uzyskane wyniki wskazują na większą dokładność analizy zjawisk plastycznych w stosunku do klasycznego modelu plastycznego, który /jak np. w pracach [64], [65] / prawie do punktu krytycznego wskazuje na sprężystą pracę próbki. Wyniki degradacji sprężystej pokrywają się z przewidywanym schematem zniszczenia próbki na skutek powstania szczelin (rys. 6.9). Ze względu na przerwanie analizy w punkcie krytycz-



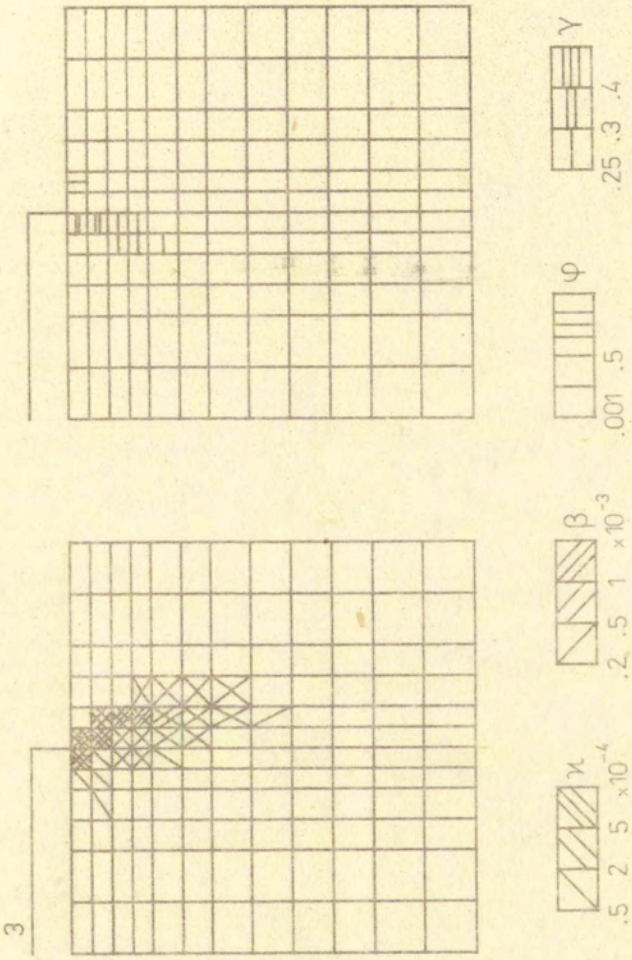
Rys. 6.2.

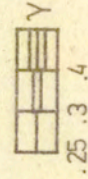
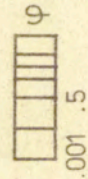
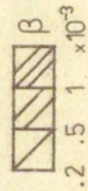
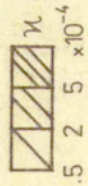
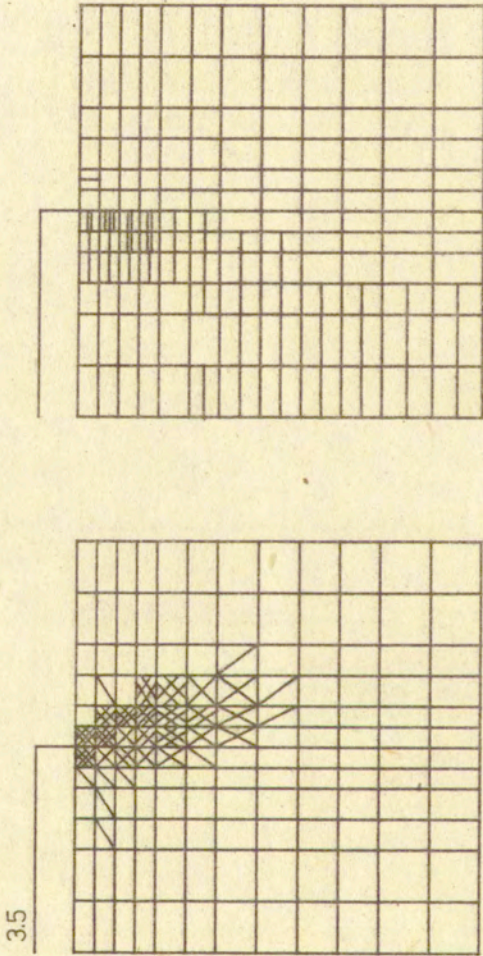
PLASKI STAN NAPRĘŻENIA - POŚLIZG

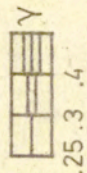
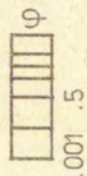
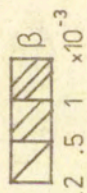
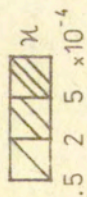
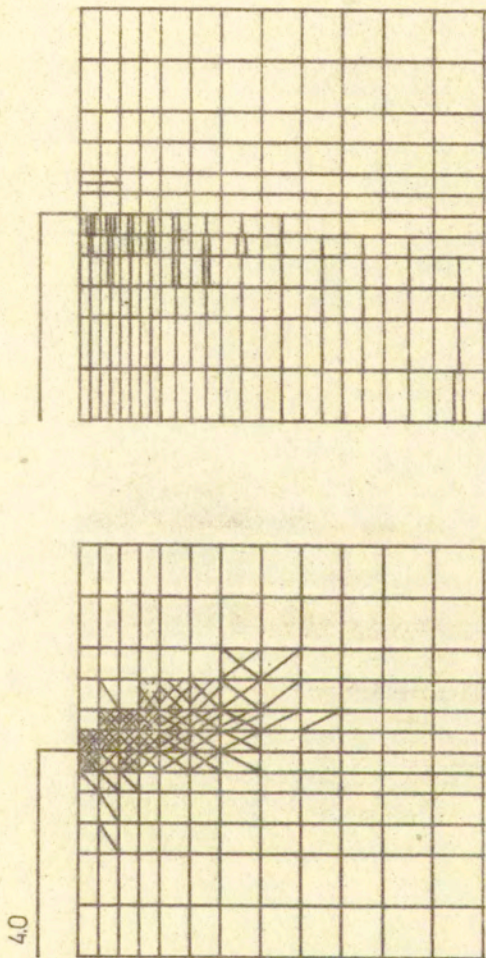
2



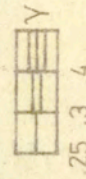
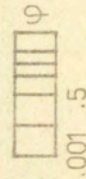
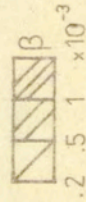
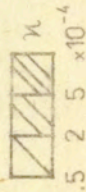
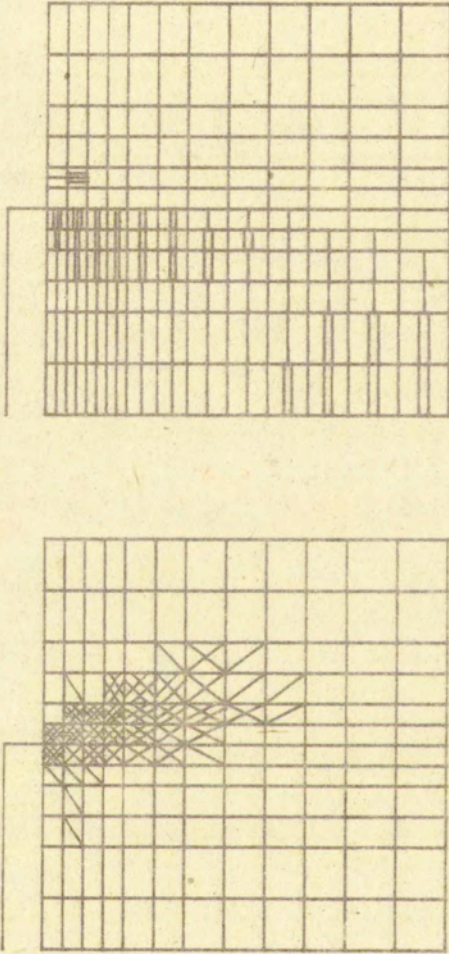
Rys. 6.3

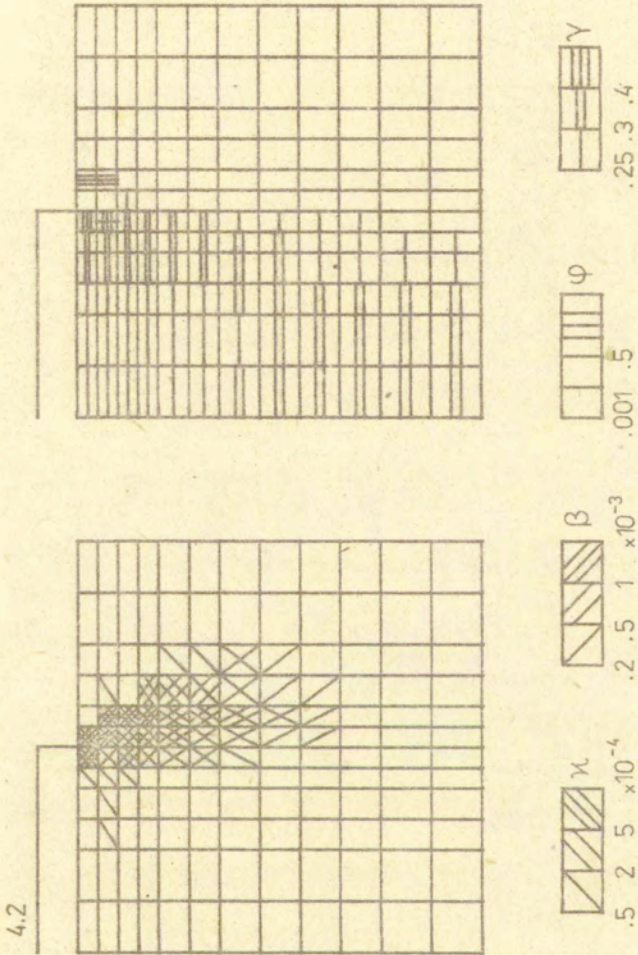




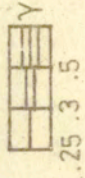
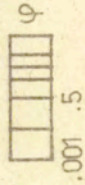
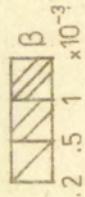
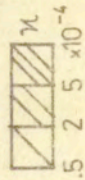
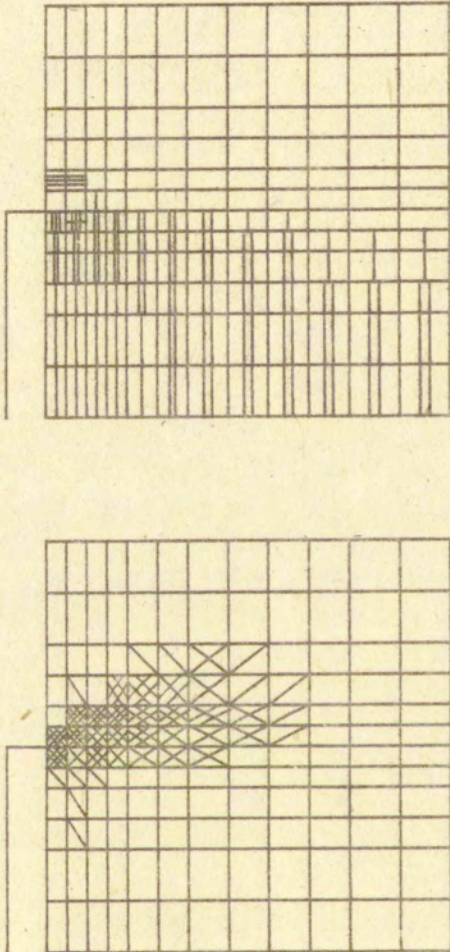


4.1



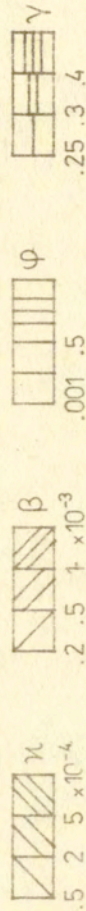
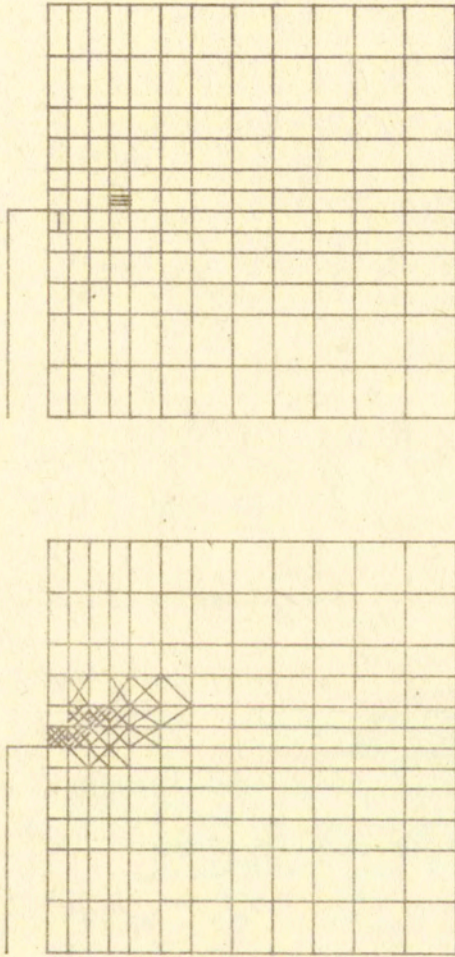


4.3



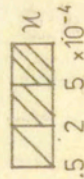
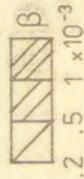
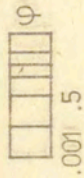
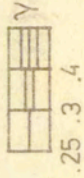
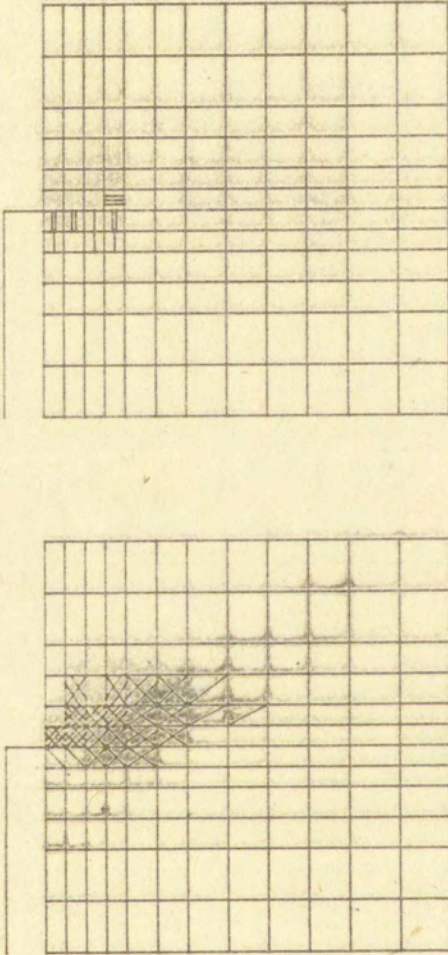
PLASKI STAN NAPRĘŻENIA — PRZYLEGANIE

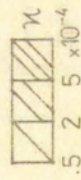
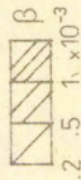
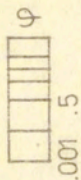
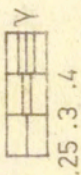
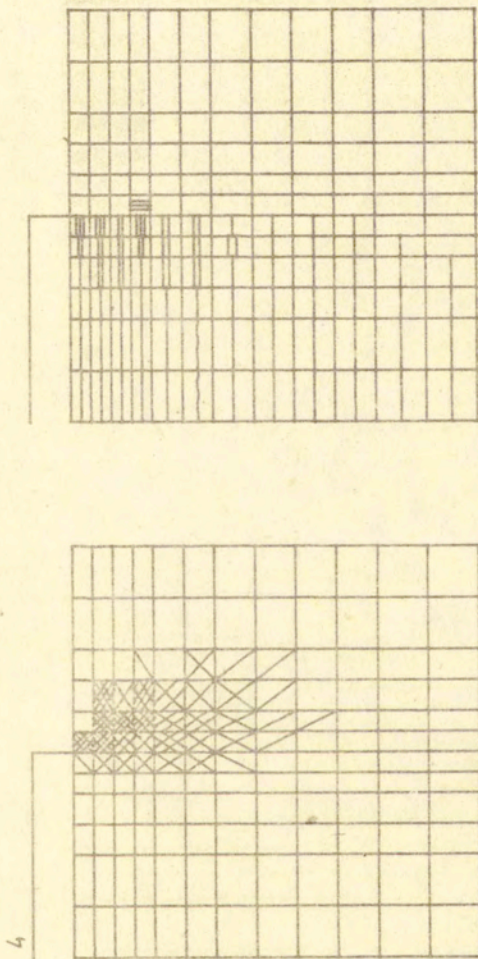
2

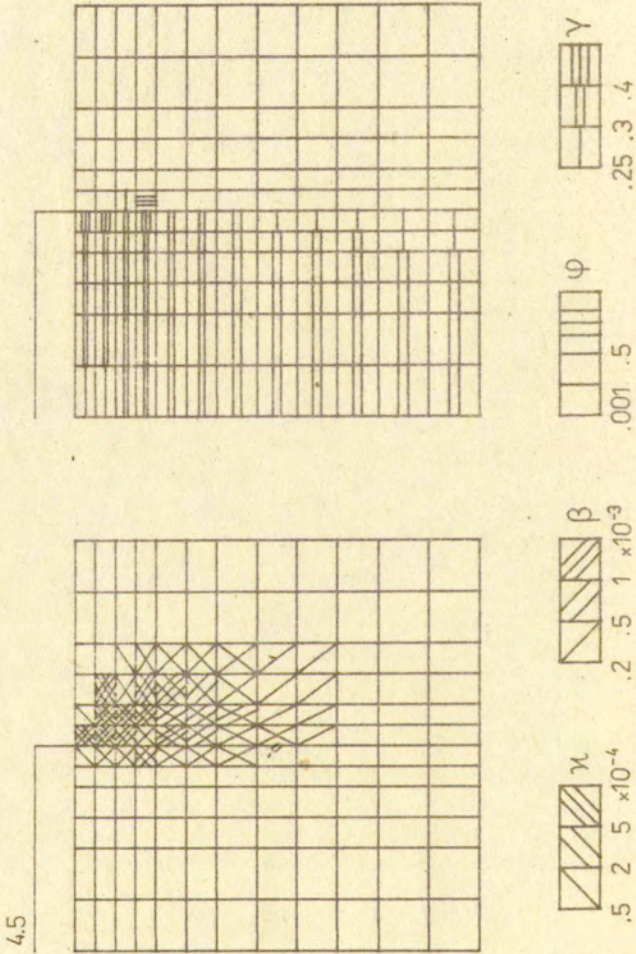


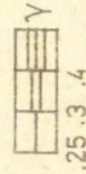
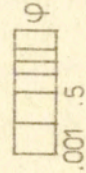
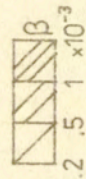
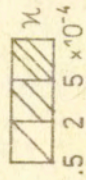
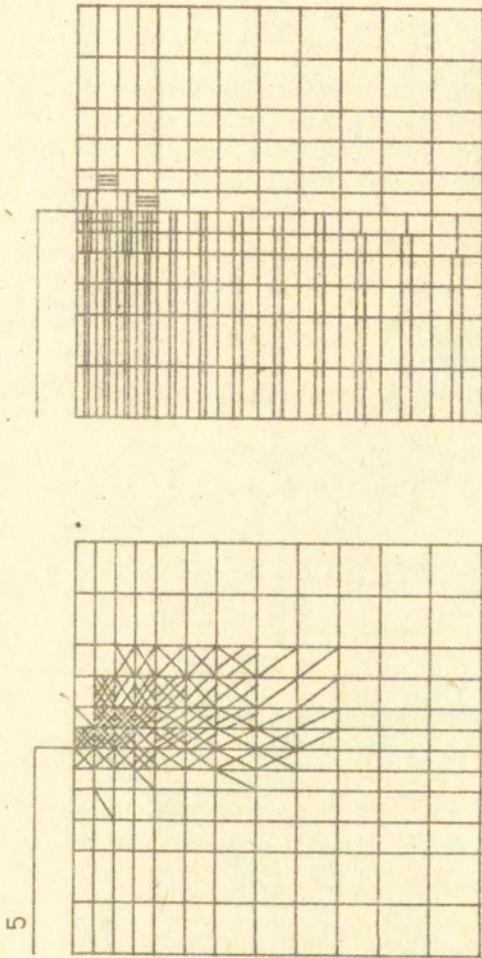
Rys. 6.4

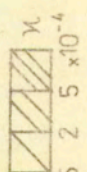
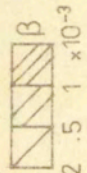
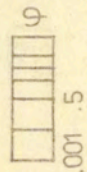
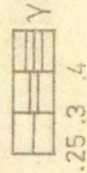
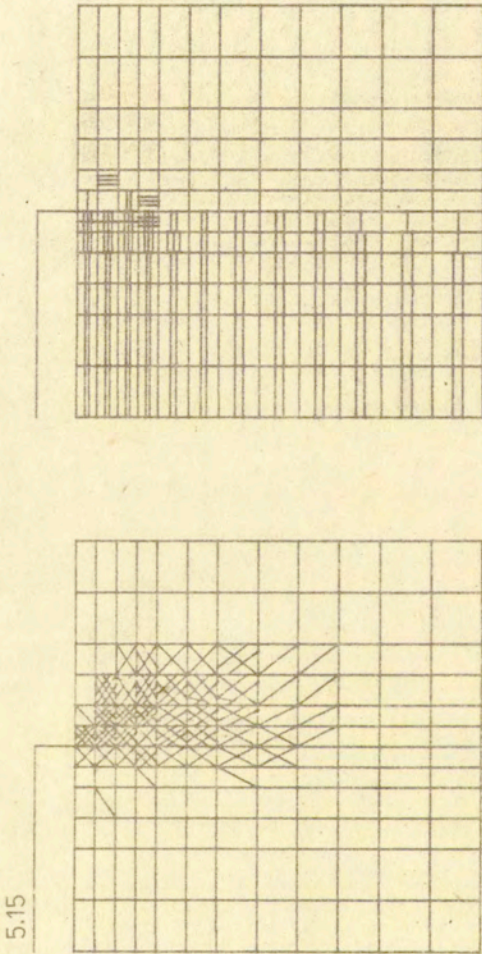
3



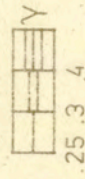
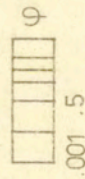
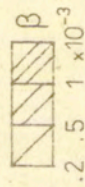
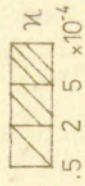
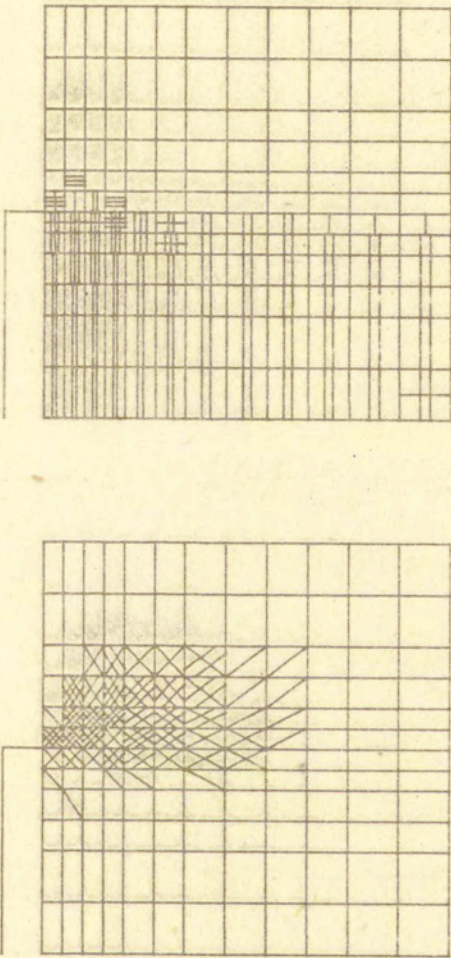






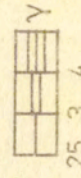
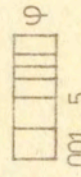
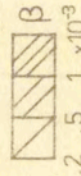
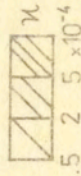
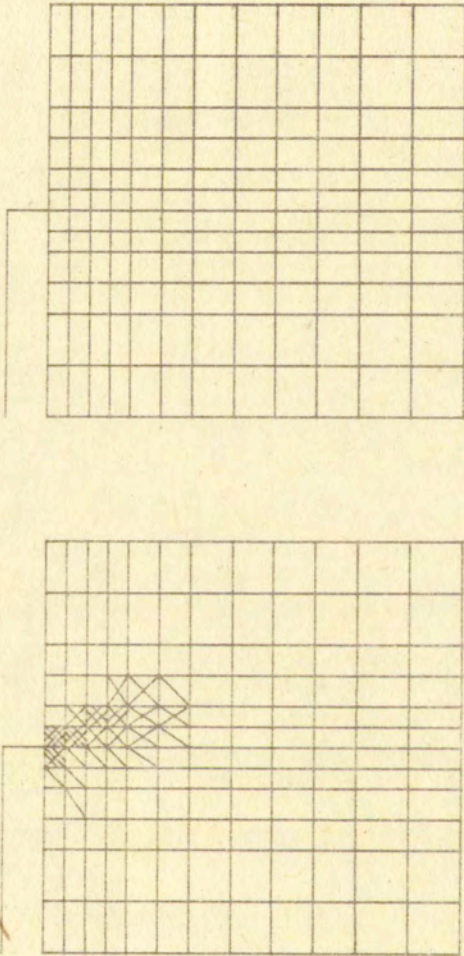


525



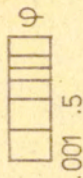
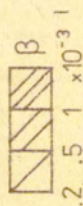
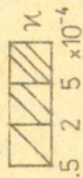
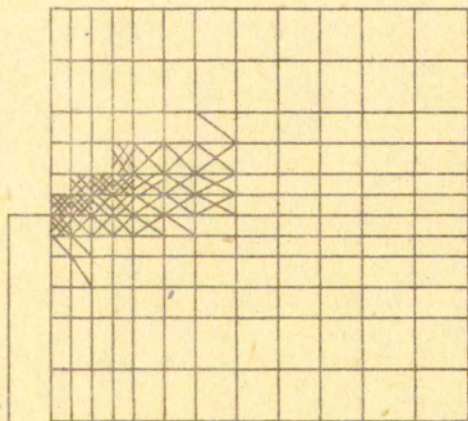
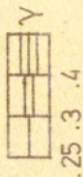
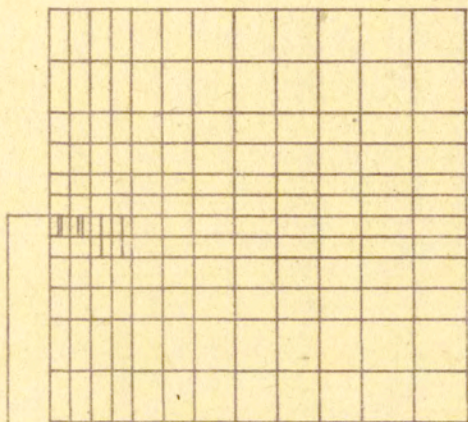
PLASKI STAN ODKSZTAŁZENIA - POŚLIZG

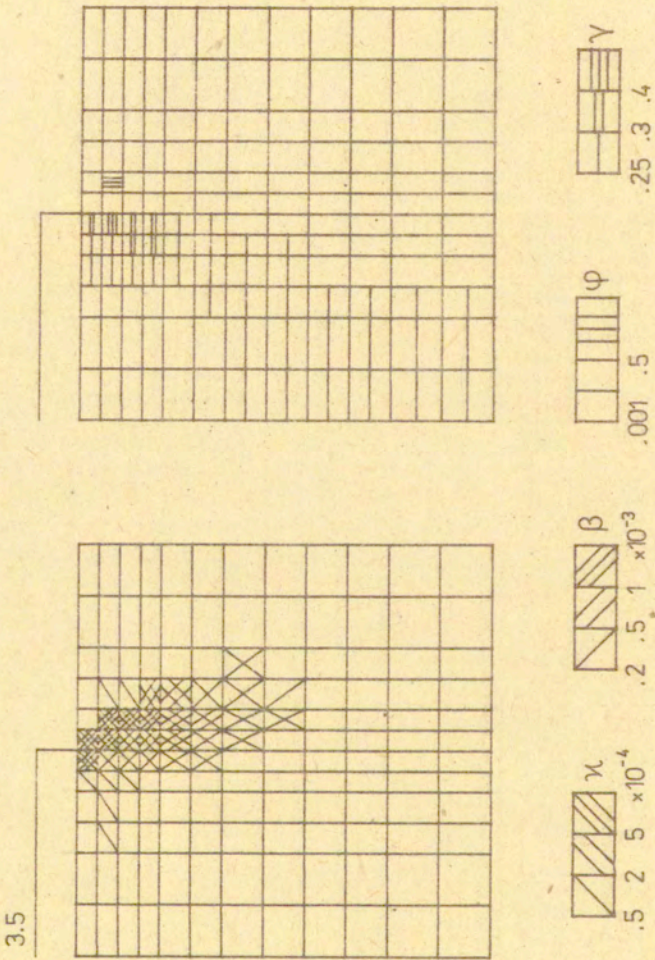
2

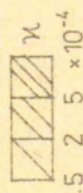
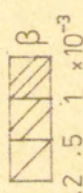
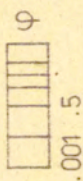
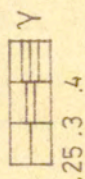
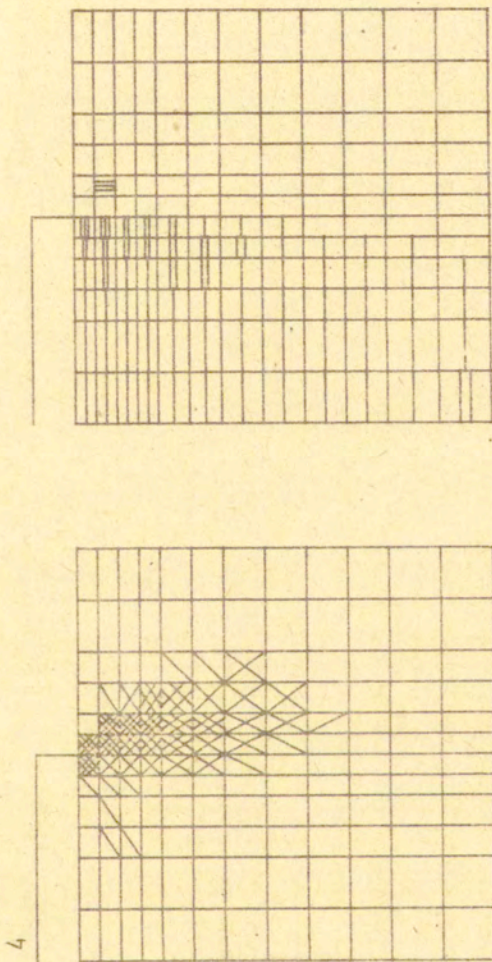


Rys. 6.5

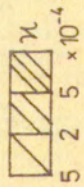
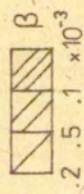
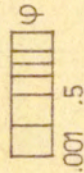
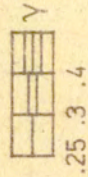
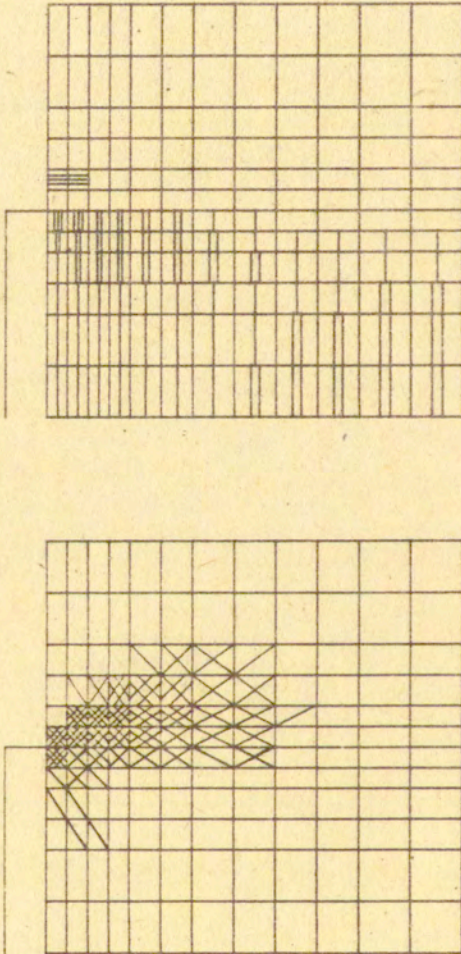
3



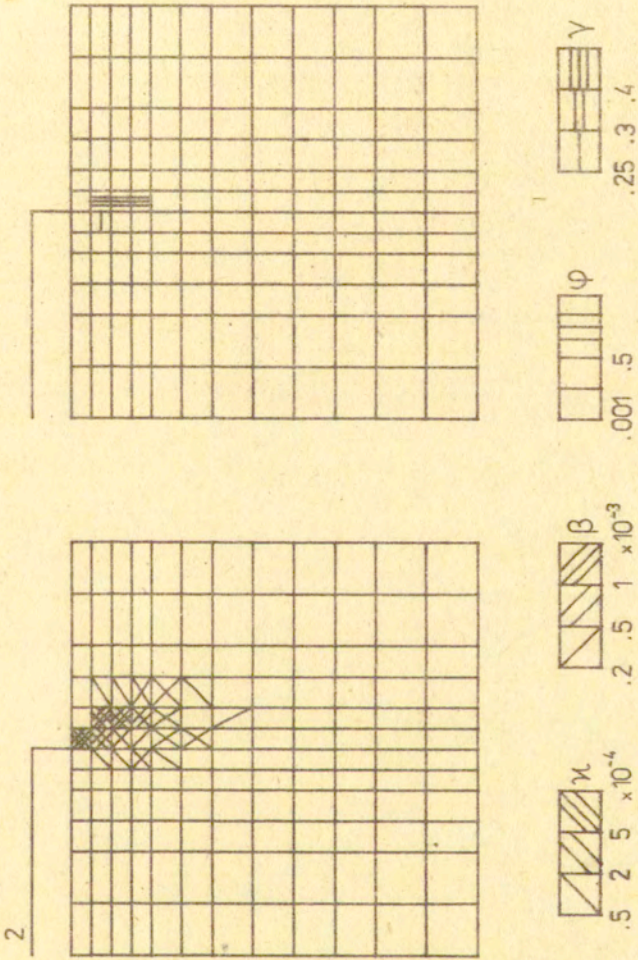




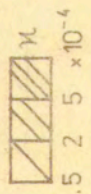
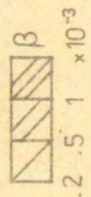
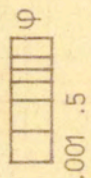
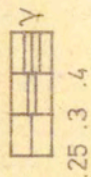
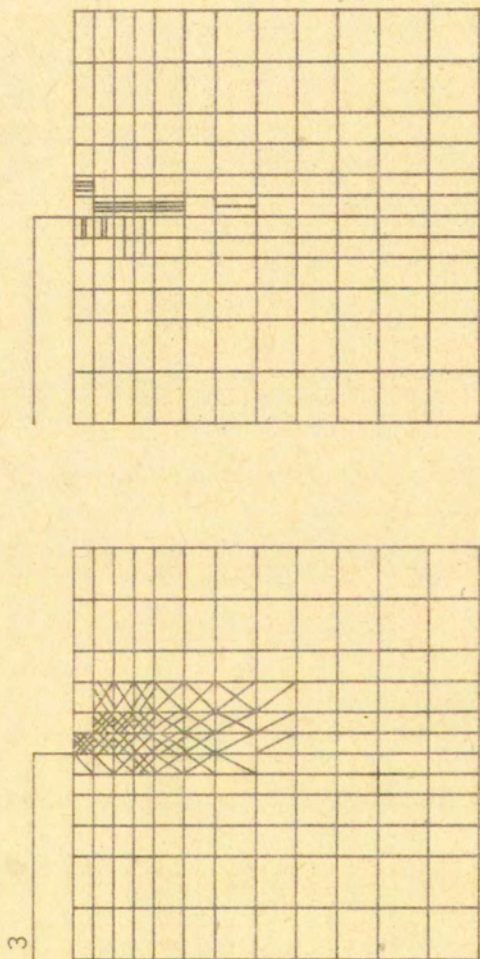
4.15

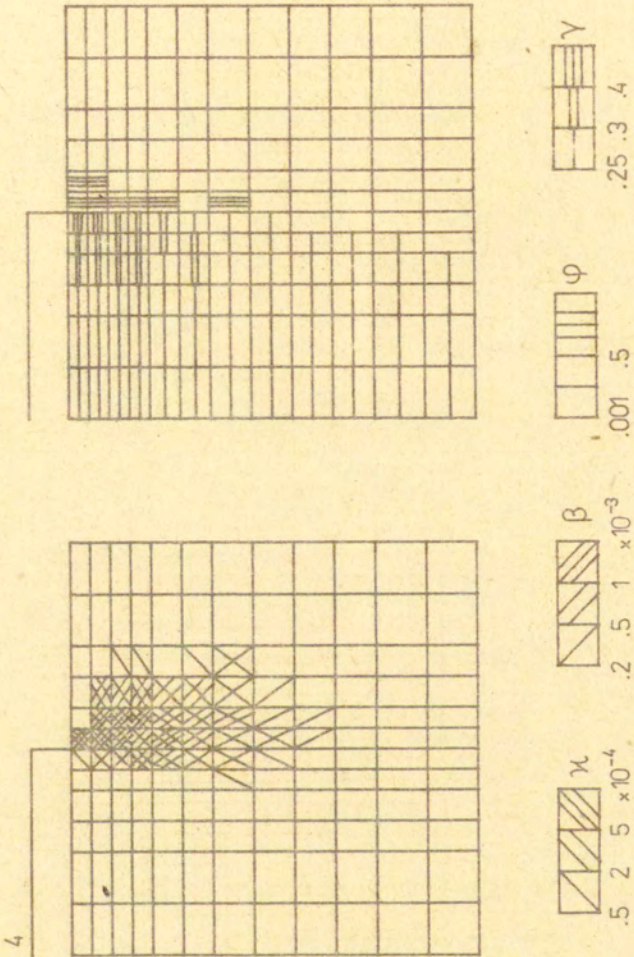


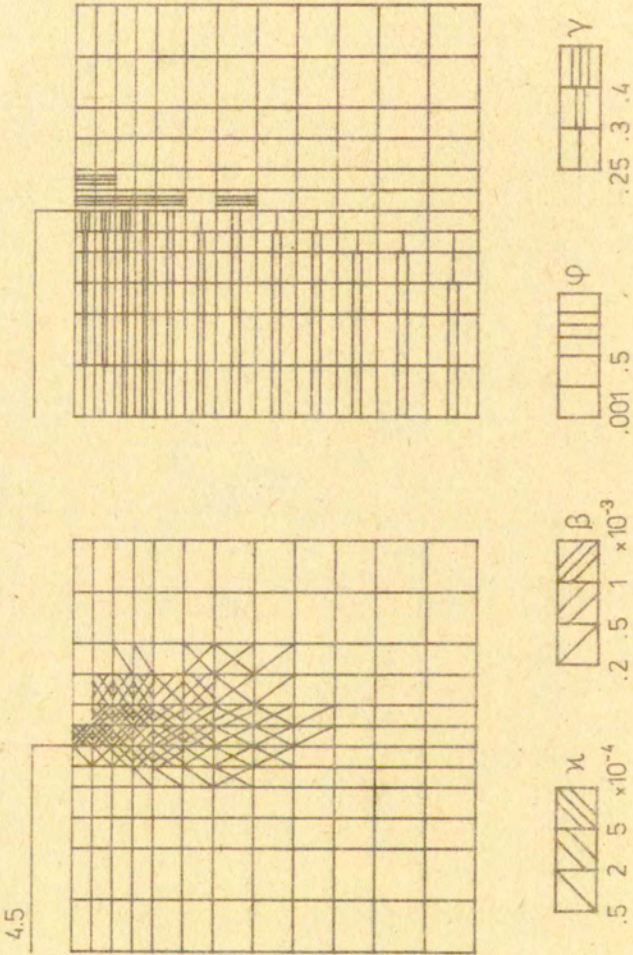
PLASKI STAN ODKSZTALCENIA - PRZYLEGANIE

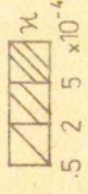
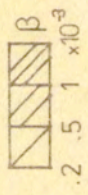
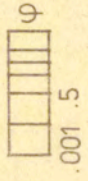
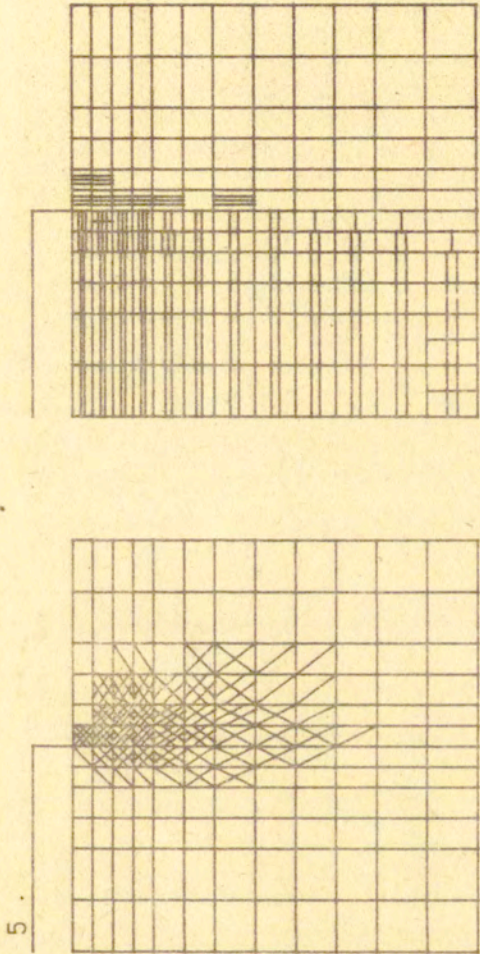


Rys. 6.6

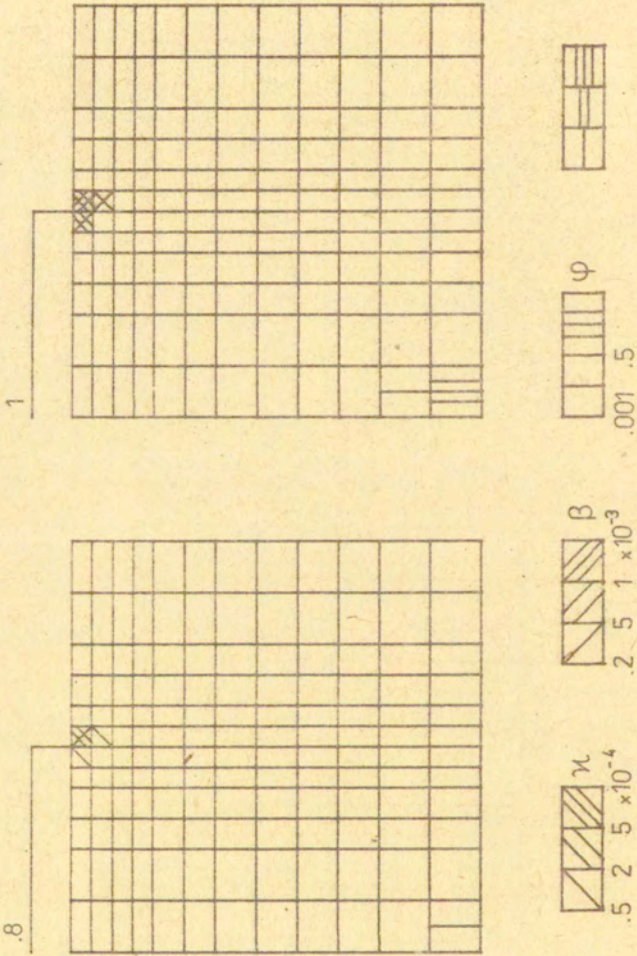




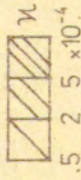
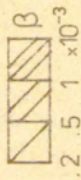
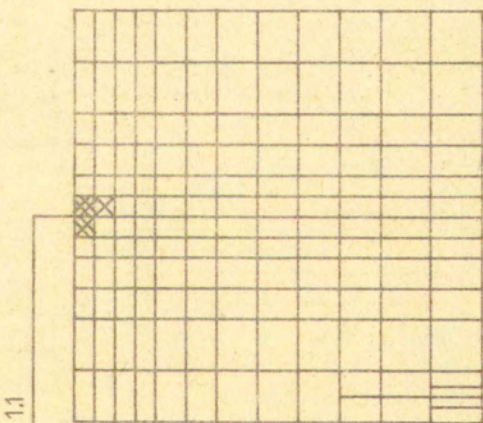
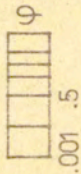
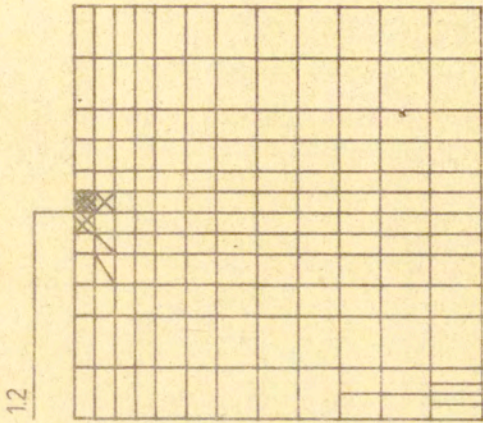


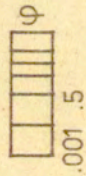
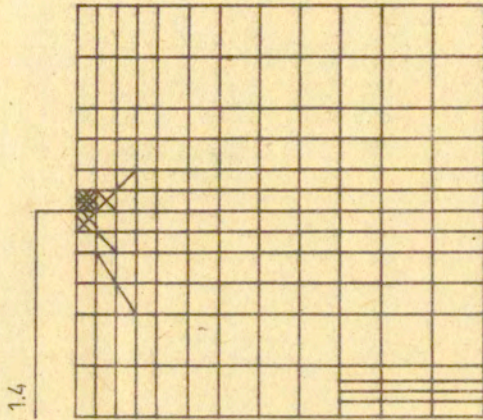


OSIOWA SYMETRIA - POŚLIZG

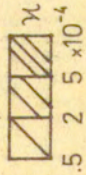
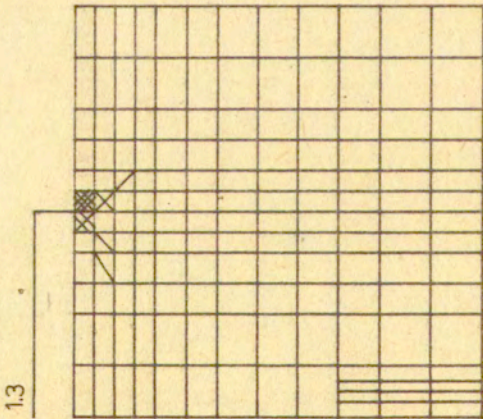


Rys. 6.7

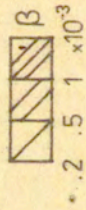




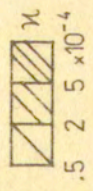
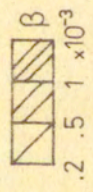
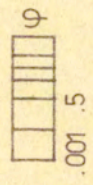
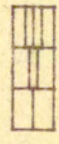
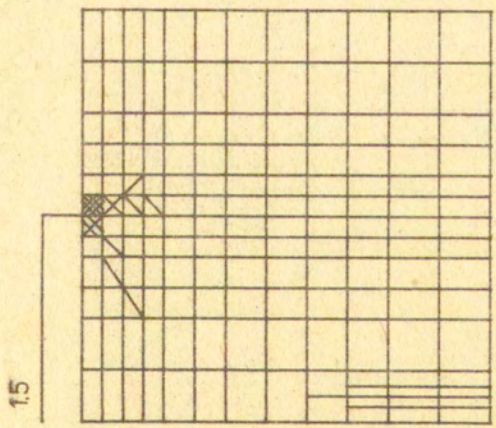
0.0015



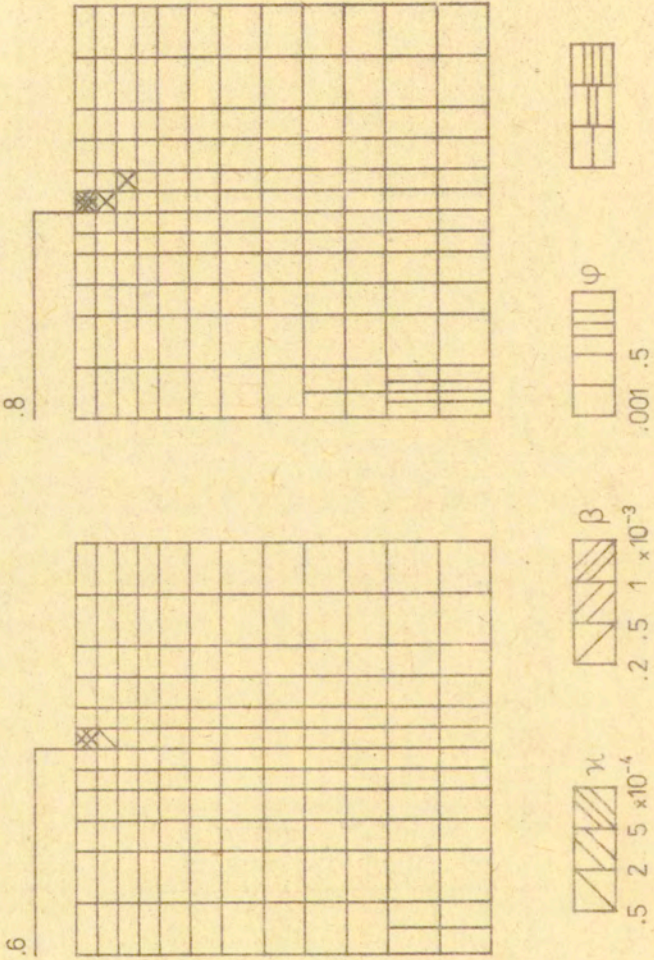
0.5 2 5 $\times 10^{-4}$



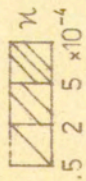
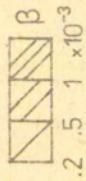
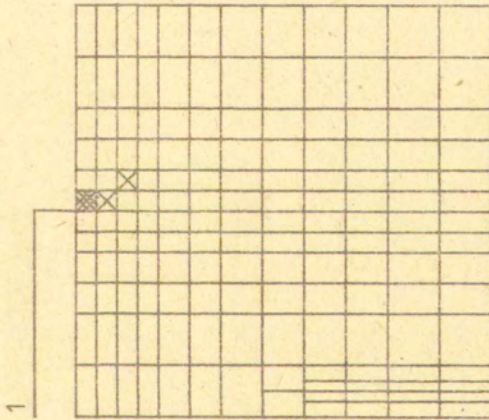
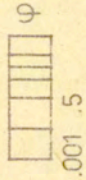
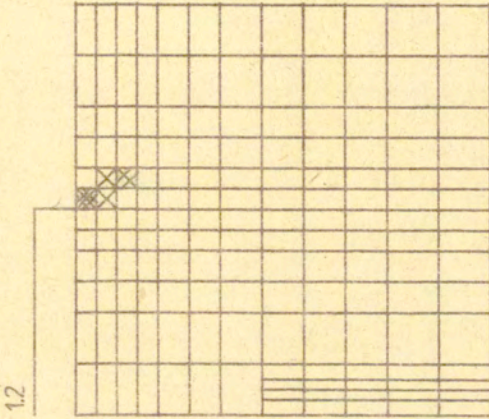
0.2 5 1 $\times 10^{-3}$

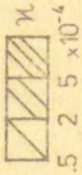
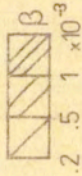
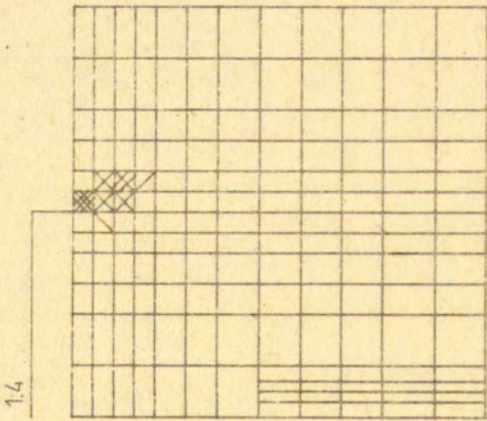
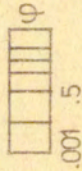
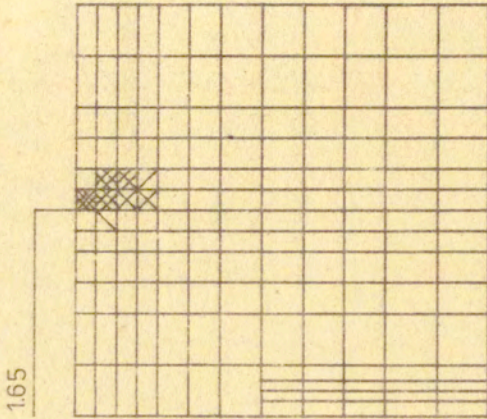


OSIOWA SYMETRIA - PRZYLEGANIE



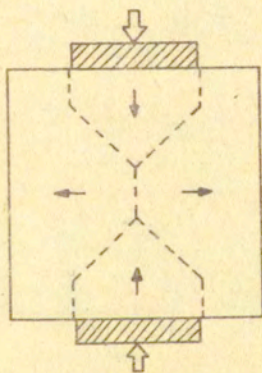
Rys. 6.0





nym, niemożliwe było prześledzenie procesu zniszczenia do końca. Proponowany model nie uwzględnia jednak efektów lokalizacji w stanie pokrytycznym i trudno spodziewać się aby dał wyniki dokładne ilościowo.

Interesujące jest porównanie wyników dla różnych stanów naprężenia i odkształcenia oraz warunków brzegowych. Największe przemieszczenie w punkcie krytycznym uzyskano dla płaskiego stanu odkształcenia, zdecydowanie zaś najniższe dla osiowej symetrii. Założenie o braku poślizgu pomiędzy stemplem a próbką wpływa również na zwiększenie przemieszczeń krytycznych. Degradacja sprężysta w przypadku osiowej symetrii rozpoczyna się w pobliżu środka próbki i rozwija na zewnątrz wzdłuż osi symetrii. W pozostałych przypadkach, początek zniszczenia materiału następuje blisko krawędzi stempla i rozwija ku środkowi próbki.



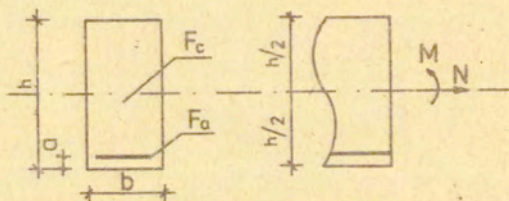
Rys. 6.9.

7. Powierzchnie graniczne dla modelu plastycznego o ograniczonej ciągliwości

Celem drugiego z przykładów jest analiza wpływu parametrów materiałowych, takich jak ciągliwość - na kształt powierzchni granicznej. Analizę uproszczono, przyjmując jednowymiarowy model betonu. Uwzględniono również współdziałanie ze zbrojeniem, rozważając belkę pojedynczo zbrojoną poddaną zginaniu oraz ścisaniu lub rozciąganiu. Przykład ten, ma głównie znaczenie dydaktyczne.

7.1. Założenia wstępne

Rozważamy prostokątny przekrój żelbetowy pojedynczo zbrojony (rys.7.1).



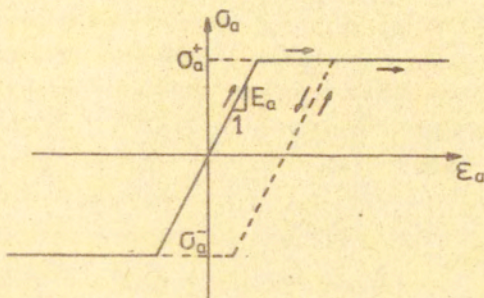
Rys.7.1.

Na przekrój ten działają: moment zginający M oraz siła normalna N . Ich dodatnie zwroty zaznaczone są na (rys.7.1.).

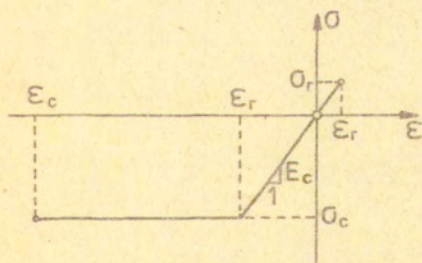
Dla zbrojenia przyjmujemy model sprężysto - idealnie plastyczny z uwzględnieniem możliwości odciążania (rys.7.2).

Dla betonu natomiast model sprężysto - idealnie plastyczny o ograniczonej ciągliwości w strefie ściskania i sprężysto-kruchy w strefie rozciągania (rys.7.3) oraz dla porównania, w przypadku nośności granicznej, model sztywno-idealnie plastyczny (rys.7.4).

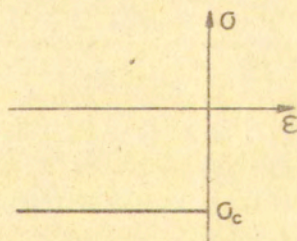
Przyjmujemy hipotezę płaskich przekrojów. Rozkład naprężeń w betonie zakładamy dla odkształceń zawartych między ϵ_p a ϵ_r jako trójkątny, dla odkształceń pomiędzy ϵ_c i ϵ_p jako prostokątny, natomiast dla odkształceń większych od ϵ_r lub



Rys. 7.2.

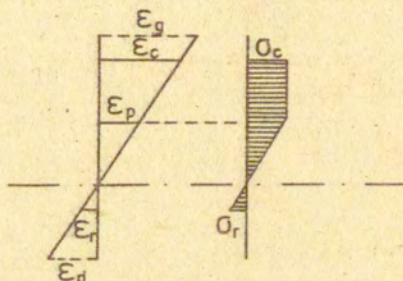


Rys. 7.3.



Rys. 7.4.

mniejszych od ϵ_p naprężenia są zerowe (rys.7.5).

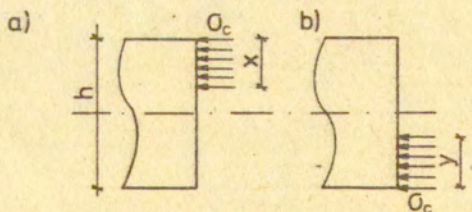


Rys. 7.5.

W większości przypadków przyjęto $\sigma_r = 0$, ze względu na minimalny wpływ na nośność. Na początku rozważamy klasyczną teorię nośności granicznej. Stanowiąc ona będzie górne oszacowanie otrzymanych wyników dla naszego modelu.

7.2. Model betonu sztywno-idealnie plastyczny

Przyjmujemy model betonu pokazany na (rys.7.4) oraz model zbrojenia z (rys.7.2). Zniszczenie przekroju następuje w przypadku pełnego uplastycznienia strefy ściskanej betonu. Załóżmy, że przekrój wykonany jest wyłącznie z betonu. Krzywe graniczne otrzymamy rozważając następujący schemat (rys.7.6).



Rys. 7.6.

Beton uplastyczniony jest na odcinku x od góry lub y od dołu przekroju. Rozkład naprężeń na uplastycznym odcinku jest prostokątny, zaś wartość naprężenia wynosi σ_c .

Obliczamy siłę normalną N i moment zginający M dla przekroju o jednostkowej szerokości $b = 1$.

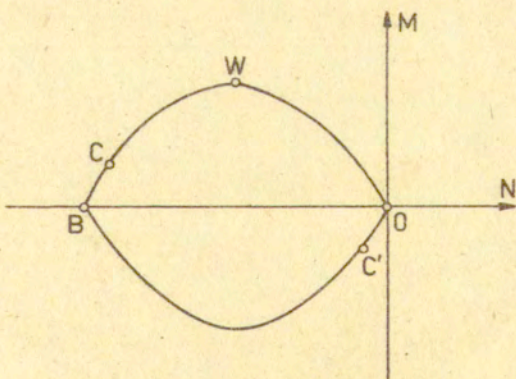
W przypadku a:

$$(7.1.) \quad \begin{aligned} N &= \sigma_c x \\ M &= -\sigma_c x \left(\frac{h}{2} - \frac{x}{2} \right) = -\frac{1}{2} \sigma_c (h-x)x \end{aligned} \quad x \in [0, h]$$

W przypadku b:

$$(7.2.) \quad \begin{aligned} N &= \sigma_c y \\ M &= \frac{1}{2} \sigma_c (h-y)y \end{aligned} \quad y \in [0, h]$$

Na płaszczyźnie $N - M$ równania (7.1) i (7.2) przedstawiają odpowiednio górny i dolny odcinek paraboli (rys. 7.7).

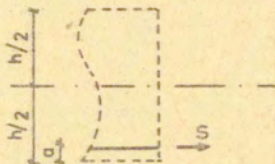


Rys. 7.7.

Założmy teraz, że w przekroju pojedynczo zbrojonym pracuje wyłącznie zbrojenie. Stosunek przekroju zbrojenia F_a do powierzchni całego przekroju wynosi μ .

$$(7.3) \quad \mu = \frac{F_a}{F_c} = \frac{f_a \cdot b}{h \cdot b} = \frac{f_a}{h}$$

gdzie f_a oznacza pole przekroju zbrojenia przypadającego na jednostkową szerokość b .



Rys. 7.8.

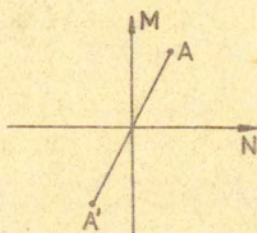
Stany możliwe do osiągnięcia opisywane są równaniami:

$$(7.4) \quad \begin{aligned} N &= S \\ M &= S \left(\frac{1}{2} h - a \right) \\ S &= \sigma_a \cdot \mu \cdot h \end{aligned} \quad \sigma_a \in [\sigma_a^-, \sigma_a^+]$$

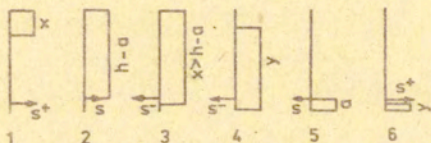
Oznaczmy

$$(7.5) \quad S^- = \sigma_a^- \cdot \mu \cdot h \quad S^+ = \sigma_a^+ \cdot \mu \cdot h \quad S \in [S^-, S^+]$$

Na płaszczyźnie N - M równania (7.4) przedstawiają odcinek $A' A$. Dla przekroju pojedynczo zbrojonego, z uwzględnieniem pracy betonu i zbrojenia, krzywa graniczna składać się będzie z odcinków krzywych odpowiadających różnym zakresom pracy przekroju. Poglądowo przedstawia to (rys. 7.10).



Rys. 7.9.



Rys. 7.10.

- (7.6)
1. $N = s^+ + \sigma_c \cdot x$
 $M = s^+ \left(\frac{1}{2} h - a \right) - \frac{1}{2} \sigma_c (h-x)x$
 $x \in [0, h-a]$
 2. $N = s + \sigma_c (h-a)$
 $M = s \left(\frac{1}{2} h - a \right) - \frac{1}{2} \sigma_c (h-a)a$
 $s \in [s^+, s^-]$
 3. $N = s^- + \sigma_c \cdot x$
 $M = s^- \left(\frac{1}{2} h - a \right) - \frac{1}{2} \sigma_c (h-x)x$
 $x \in [h-a, h]$
 4. $N = s^- + \sigma_c \cdot y$
 $M = s^- \left(\frac{1}{2} h - a \right) + \frac{1}{2} \sigma_c (h-y)y$
 $y \in [h, a]$
 5. $N = s + \sigma_c \cdot a$
 $M = s \left(\frac{1}{2} h - a \right) + \frac{1}{2} \sigma_c (h-a)a$
 $s \in [s^-, s^+]$
 6. $N = s^+ + \sigma_c \cdot y$
 $M = s^+ \left(\frac{1}{2} h - a \right) + \frac{1}{2} \sigma_c (h-y)y$
 $y \in [a, 0]$

Jeżeli przez C oznaczymy na wykresie (rys.7.7) punkt odpowiadający $x = h - a$, a przez C' punkt odpowiadający $y = a$, to wykres nośności granicznej dla przekroju pojedynczo zbrojonego możemy, obrazowo mówiąc, otrzymać poprzez rozcięcie wykresu z (rys.7.7) w punktach C i C' oraz rozsunięcie go równoległe do odcinka A A' z (rys.7.9) tak, by punkt O znalazł się w punkcie A, a punkt B na wysokości punktu A' (rys.7.11). Sposób konstrukcji został podany dlatego, że można wysnuć z niego interesujące wnioski. Pierwszym z nich jest fakt, że dla różnych stopni zbrojenia wykresy różnią się wyłącznie wielkością rozsunięcia A A', kierunek natomiast pozostaje ten sam. Im wyższy stopień zbrojenia, tym większe rozsunięcie. Drugi wniosek otrzymamy dla czystego zginania $N = 0$. Z wykresu możemy obliczyć optymalny stopień zbrojenia, w tym sensie, że w pełni wykorzystana jest nośność przekroju betonowego. Odpowiada to graficznie przypadkowi, w którym wierzchołek paraboli W znajdzie się na osi M. Wówczas

$$(7.7) \quad N = \sigma_a^+ \mu_0 h + \frac{1}{2} \sigma_c h = 0$$

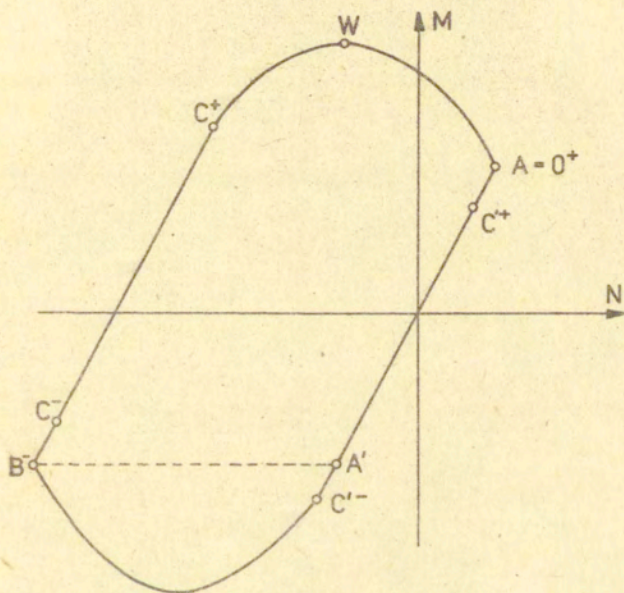
skąd

$$(7.8) \quad \mu_0 = -\frac{\sigma_c}{2\sigma_a^+}$$

Podobnie możemy znaleźć maksymalny stopień zbrojenia, powyżej którego nie nastąpi już żaden wzrost nośności na zginanie

$$(7.9) \quad \mu_{\max} = -\frac{\sigma_c}{\sigma_a^+}$$

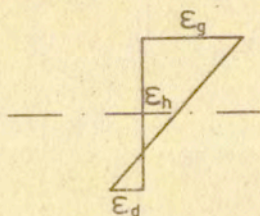
Z praktycznego punktu widzenia wydaje się niecelowym stosowanie wyższego stopnia zbrojenia niż μ_0 , gdyż wówczas znajdziemy się na opadającej gałęzi paraboli i przyrosty nośności będą coraz niższe. W tym sensie μ_0 odpowiadać będzie dopuszczalnemu maksymalnemu stopniowi zbrojenia.



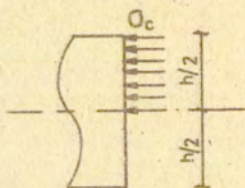
Rys. 7.11.

7.3. Model betonu sprężysto-idealnie plastyczny o ograniczonej ciągliwości

Przyjmujemy model betonu z (rys. 7.3) i stali zbrojeniowej z (rys. 7.2). Analityczne rozważenie tego modelu jest trudne, ze względu na występowanie wielu przypadków pracy przekroju. Nie jest wykluczone, że w niektórych z nich, analityczne rozwiązanie jest ogólnie niemożliwe. Z tego względu, od początku przyjęto podejście numeryczne. Zbudowano dwa programy. Pierwszy służy do wyznaczania krzywych granicznych na płaszczyźnie N-M. Jego idea polega na wyznaczaniu maksymalnych odległości od początku układu dla różnych dróg obciążania. Drogi te jest pęk półprostych wychodzących z początku układu N-M. W drugim programie przyjęto następujące normy dla odkształceń i sił uogólnionych /siła normalna, moment zginający/.



Rys. 7.12.



Rys. 7.13.

W przypadku odkształceń

$$(7.10) \quad \|\varepsilon\| = |\varepsilon_g| + |\varepsilon_d|$$

gdzie: ε_g - oznacza odkształcenie włókien górnych

ε_d - odkształcenie włókien dolnych.

Dla zginania, gdy $\varepsilon_g < 0$, $\varepsilon_d > 0$ możemy znaleźć zależność pomiędzy krzywizną κ_p a $\|\varepsilon\|$

$$(7.11) \quad \kappa_p = \frac{\varepsilon_d - \varepsilon_g}{h} \quad \|\varepsilon\| = \varepsilon_d - \varepsilon_g$$

skąd

$$(7.12) \quad \pi_p = \frac{\|\varepsilon\|}{h}$$

W przypadku ściskania $\varepsilon_g < 0$, $\varepsilon_d < 0$ istnieje związek między odkształceniem w środku wysokości przekroju ε_h a $\|\varepsilon\|$

$$(7.13) \quad \varepsilon_h = \frac{\varepsilon_g + \varepsilon_d}{2} \quad \|\varepsilon\| = -\varepsilon_g - \varepsilon_d$$

$$(7.14) \quad \varepsilon_h = -\frac{\|\varepsilon\|}{2}$$

W przypadku sił uogólnionych za wielkości porównawcze przyjmujemy wartości bezwzględne N i M dla schematu z (rys. 7.13).

$$(7.15) \quad N_0 = -\frac{1}{2} G_c h \quad M_0 = -\frac{1}{8} G_c h^2$$

oraz definiujemy

$$(7.16) \quad n = \frac{N}{N_0} \quad m = \frac{M}{M_0}$$

$$(7.17) \quad \|F\| = \sqrt{n^2 + m^2}$$

Wszystkie wielkości odnoszą się do jednostkowej szerokości przekroju $b = 1$.

Zadaniem programu było wyznaczenie zależności $\|F\|$ ($\|\varepsilon\|$) dla różnych dróg obciążania na płaszczyźnie n - m .

Obliczenia przeprowadzone zostały dla przekroju, betonu i stali zbrojeniowej o następujących parametrach:

$$\begin{array}{lll}
 h = 1 \text{ m} & a = 5 \text{ cm} & \\
 7.18 & E_c = 3 \cdot 10^4 \text{ MPa} & G_c = -18.5 \text{ MPa} & G_r = 0 \text{ MPa} \\
 & E_a = 2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa} & G_a^- = -190 \text{ MPa} & G_a^+ = 190 \text{ MPa}
 \end{array}$$

Zmienne natomiast były parametry ε_c oraz μ .

W przypadku krzywych granicznych przyjęto następujące stopnie zbrojenia μ : 0.01; 0.03; 0.05; 0.07.

Dla każdego z nich porównano krzywe graniczne otrzymane przez przyjęcie różnych parametrów ε_c : ε_p ; $2 \varepsilon_p$; $5 \varepsilon_p$; $100 \varepsilon_p$ gdzie $\varepsilon_p = \frac{G_c}{E_c}$

Dla $\varepsilon_c = \varepsilon_p$ otrzymujemy model sprężysto-kruchy,

dla $\varepsilon_c = 100 \varepsilon_p$ praktycznie model sprężysto-plastyczny.

Uzyskane wyniki przedstawione są na (rys. 7.14 - 7.17).

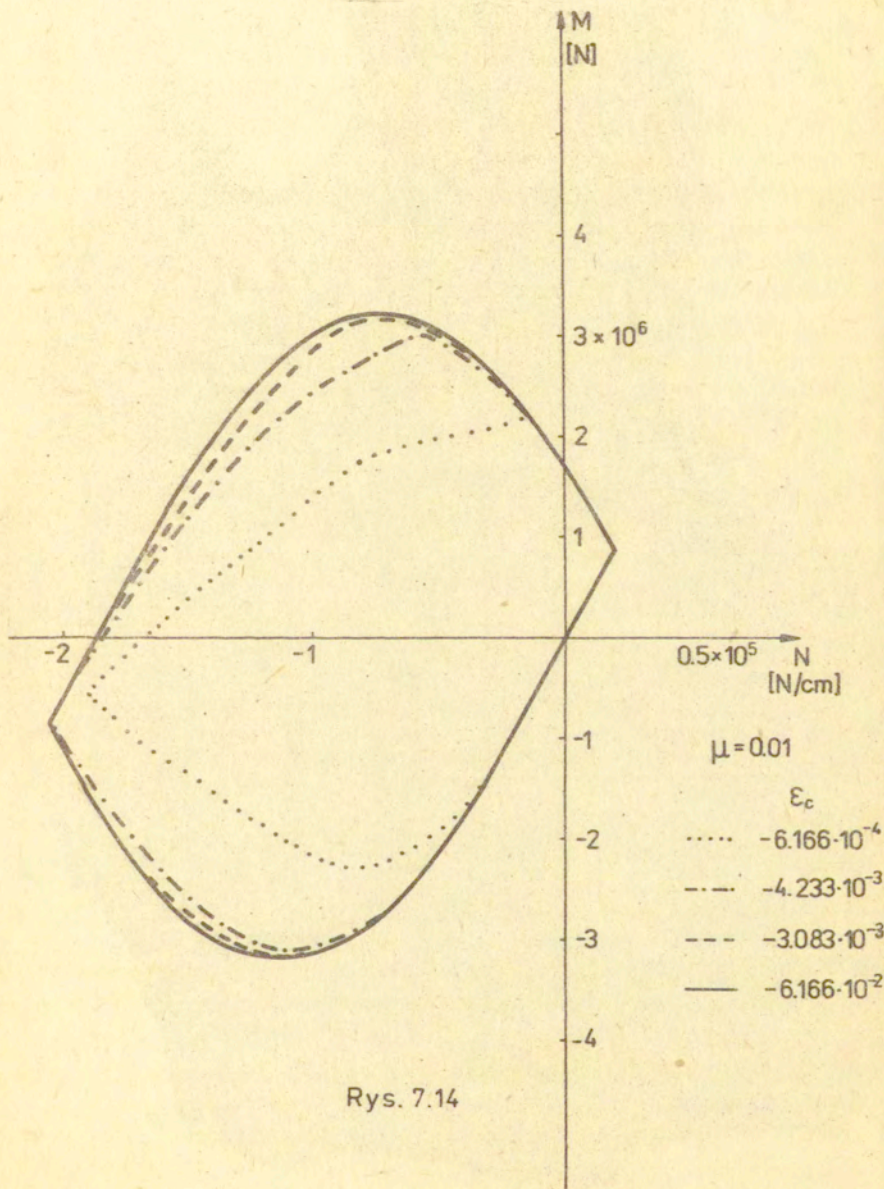
Przy badaniu zależności $\|\varepsilon\| - \|F\|$ przyjęto identyczne parametry (7.18).

Zbadano dwie wartości $\varepsilon_c = \varepsilon_p$ oraz $\varepsilon_c = 5 \varepsilon_p$ oraz trzy drogi obciążania na płaszczyźnie n-m, będące półprostymi o wektorach: $[-1; 0]$, $[-0.3; -0.7]$, $[0; 1]$. Dla każdej kombinacji przedstawiono krzywe (rys. 7.18 - 7.23) dla stopni zbrojenia μ równych 1%, 3%, 5%, 7%. Dla jednej drogi obciążania odpowiadającej czystemu zginaniu, zbadano również wpływ wytrzymałości betonu na rozciąganie, przyjmując $G_r = 1.53 \text{ MPa}$ i pozostawiając pozostałe dane (7.18) bez zmian (rys. 7.24 i 7.25).

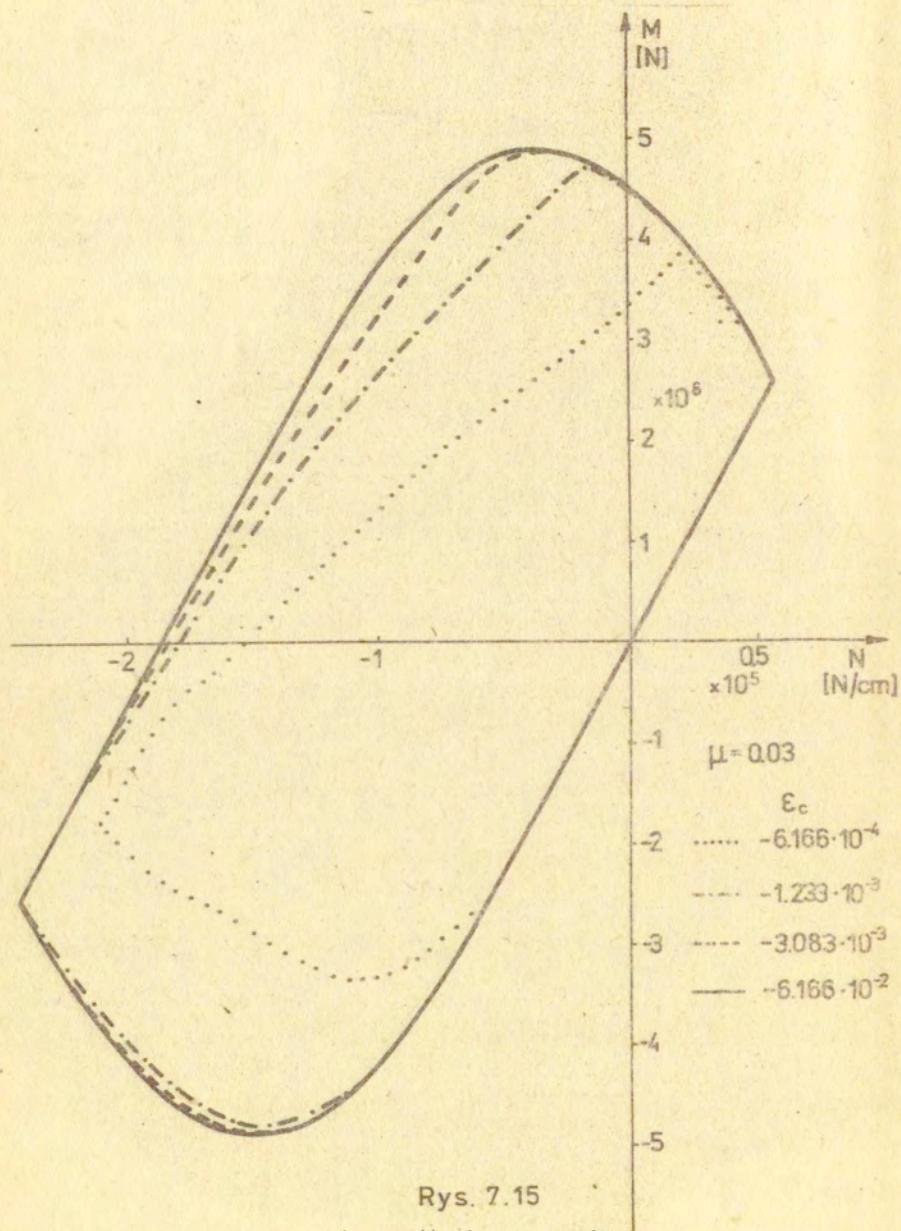
7.4. Wnioski

Zgodnie z zaleceniami Europejskiego Komitetu Betonu [61] ε_c powinno wynosić -0.003 . Najbliższa tym zaleceniom jest wartość $\varepsilon_c = 5 \varepsilon_p = -0.003083...$

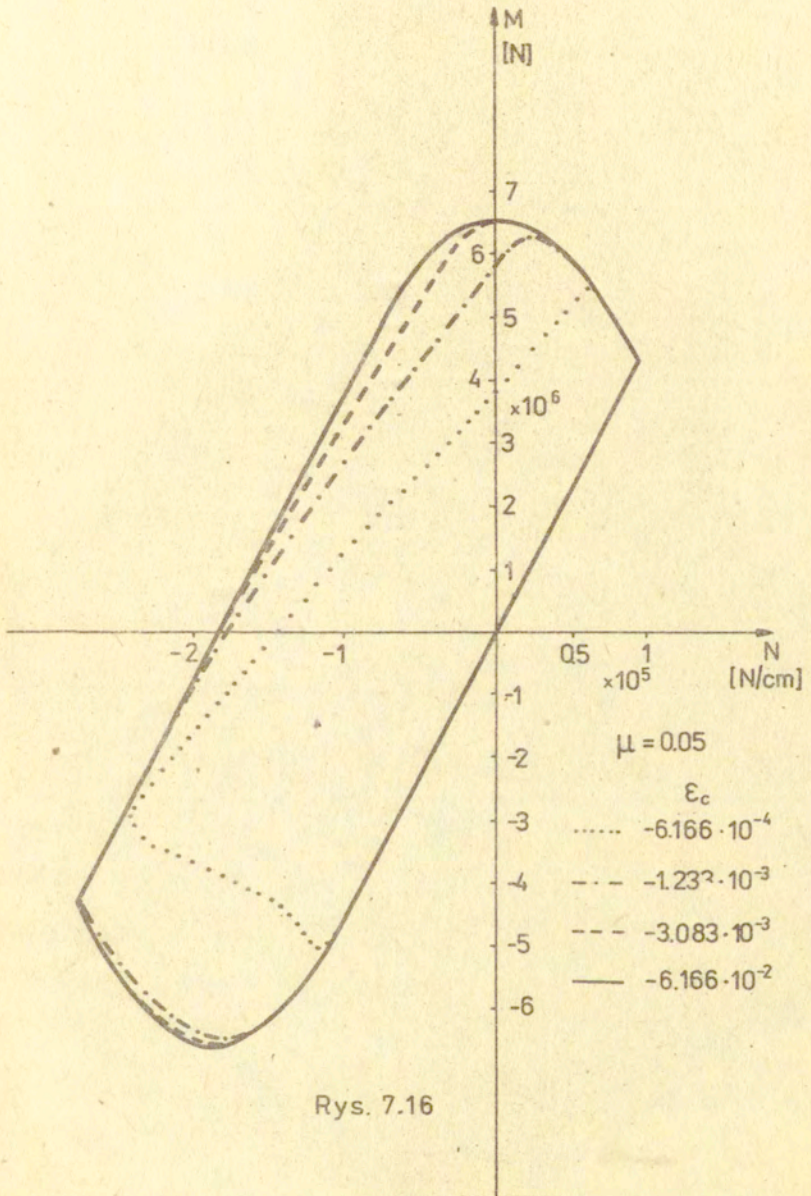
Wydaje się więc, że wyniki uzyskane dla niej najlepiej odpowiadają rzeczywistości. W przypadku krzywych granicznych oznacza to stosunkowo dużą dokładność krzywych uzyskanych za pomocą klasycznej teorii nośności granicznej. Dla czystego zginania przy stopniu zbrojenia $\mu \leq \mu_0$ /w liczonym przykładzie $\mu_0 = 0.0487 \approx 0.05$ / wartości momentu granicznego niemal pokrywają się. Największe rozbieżności występują przy zginaniu wraz ze ściskaniem, gdzie różnica może wynosić nawet 10%.



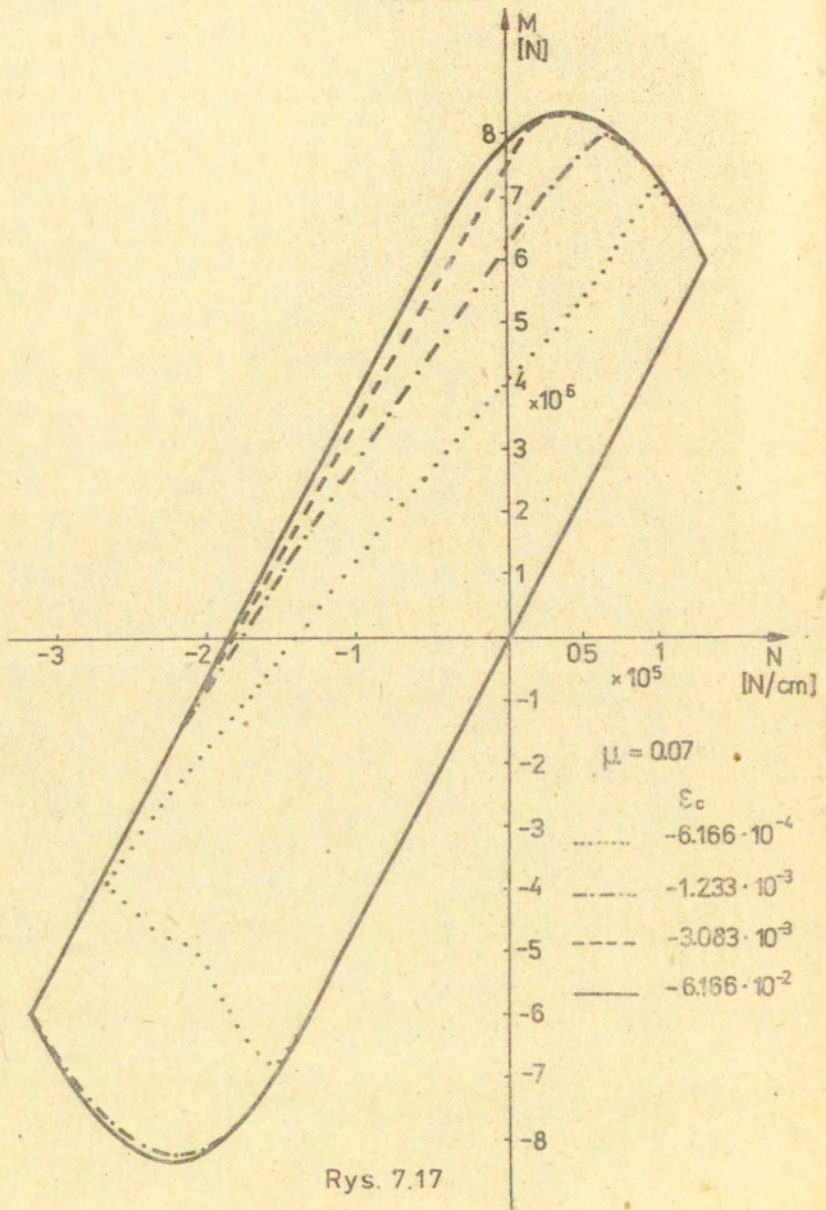
Rys. 7.14



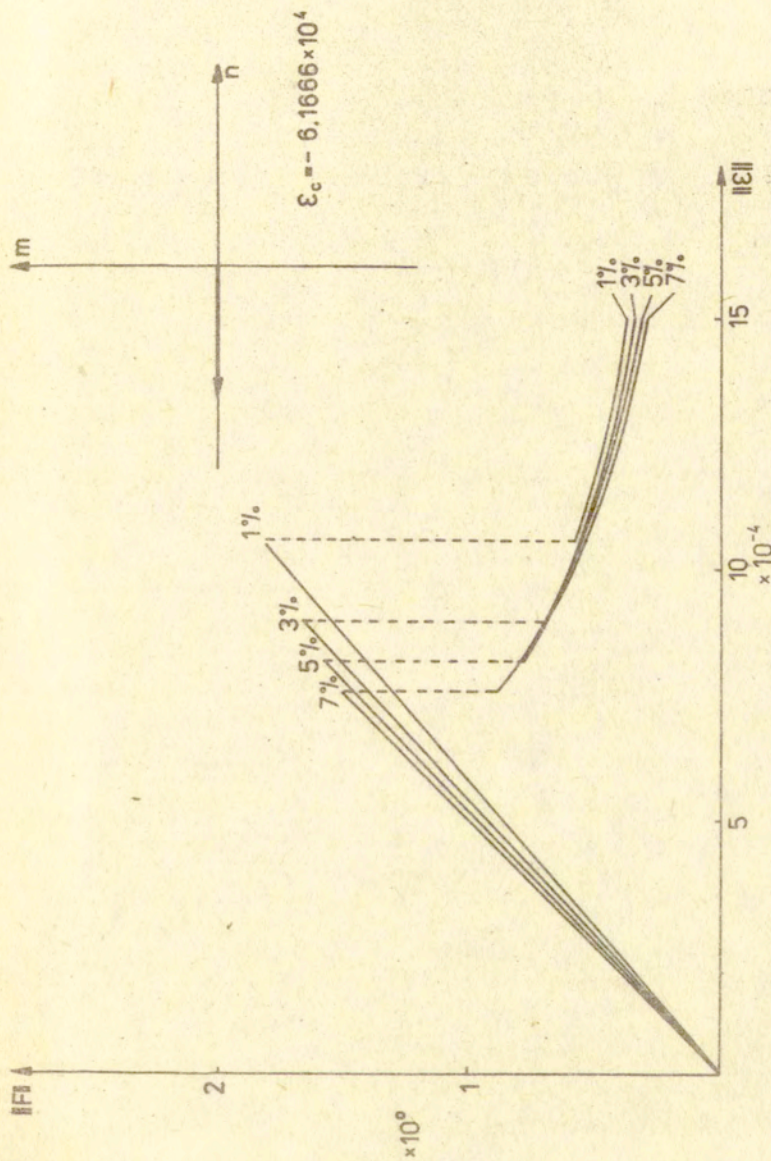
Rys. 7.15



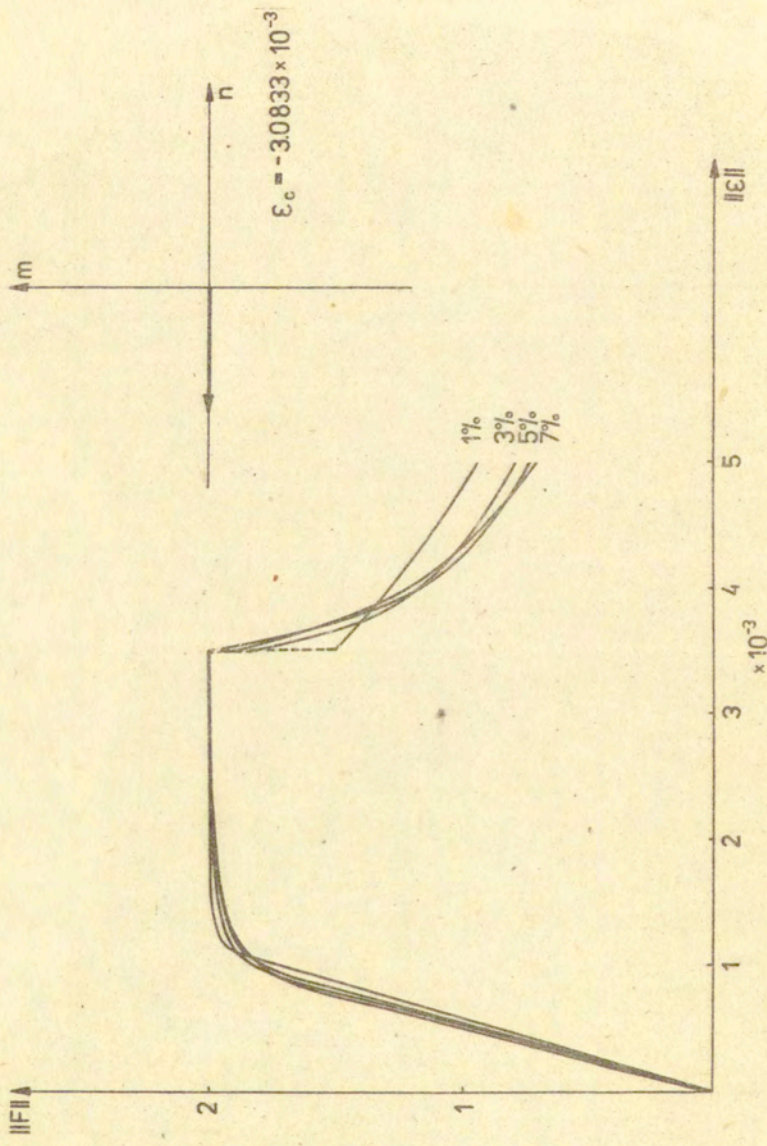
Rys. 7.16



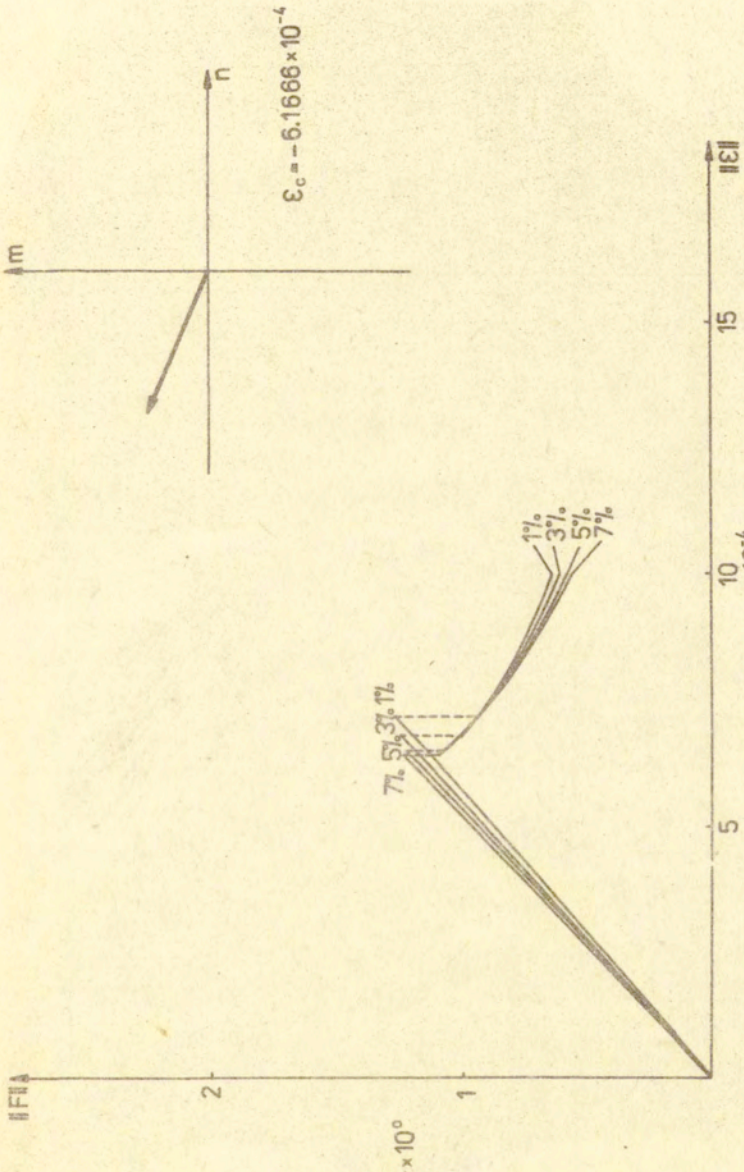
Rys. 7.17



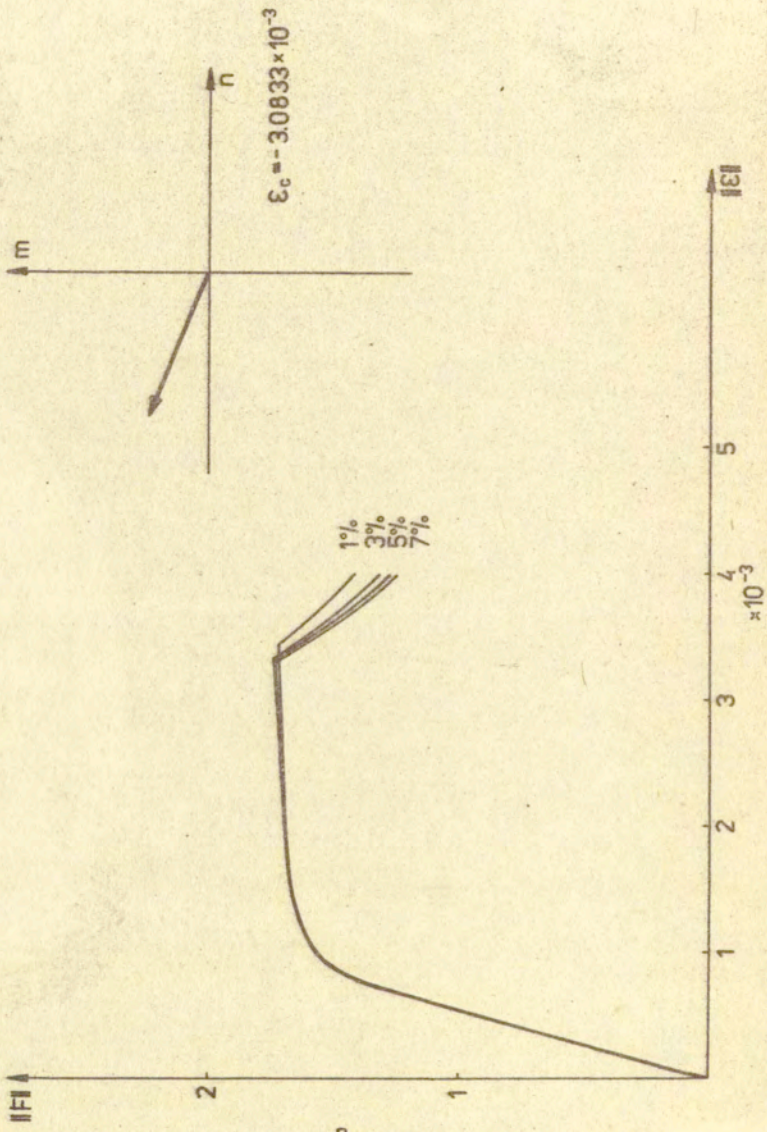
Rys. 7.18



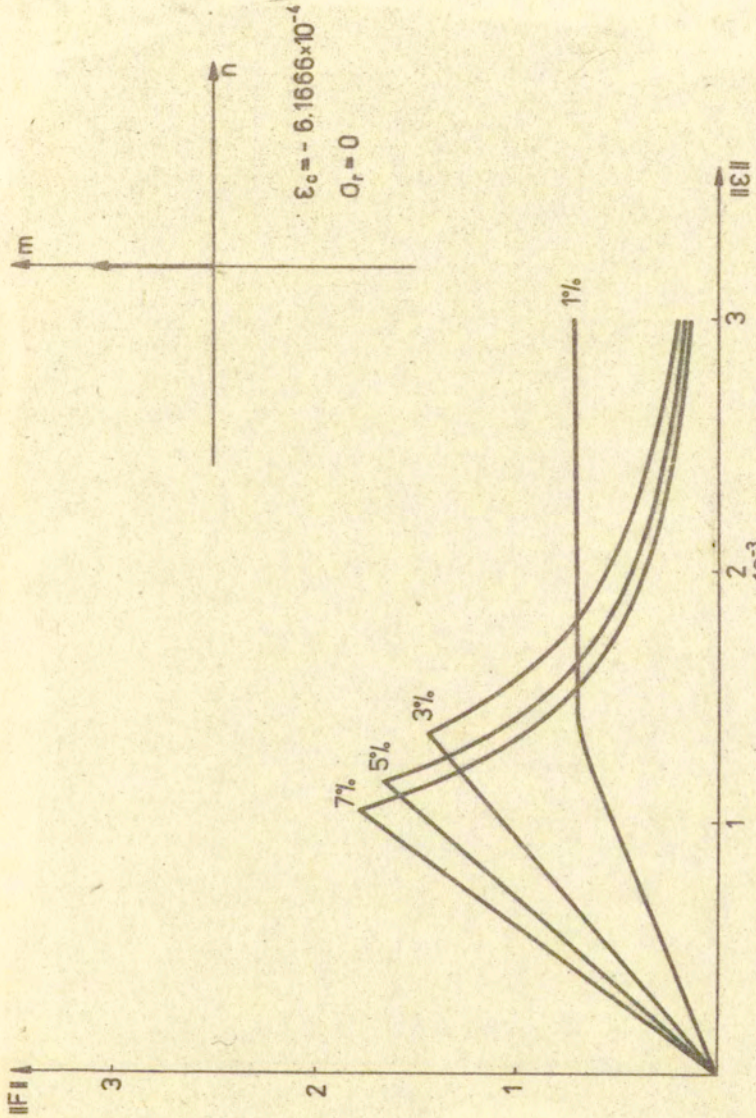
Rys. 7.19



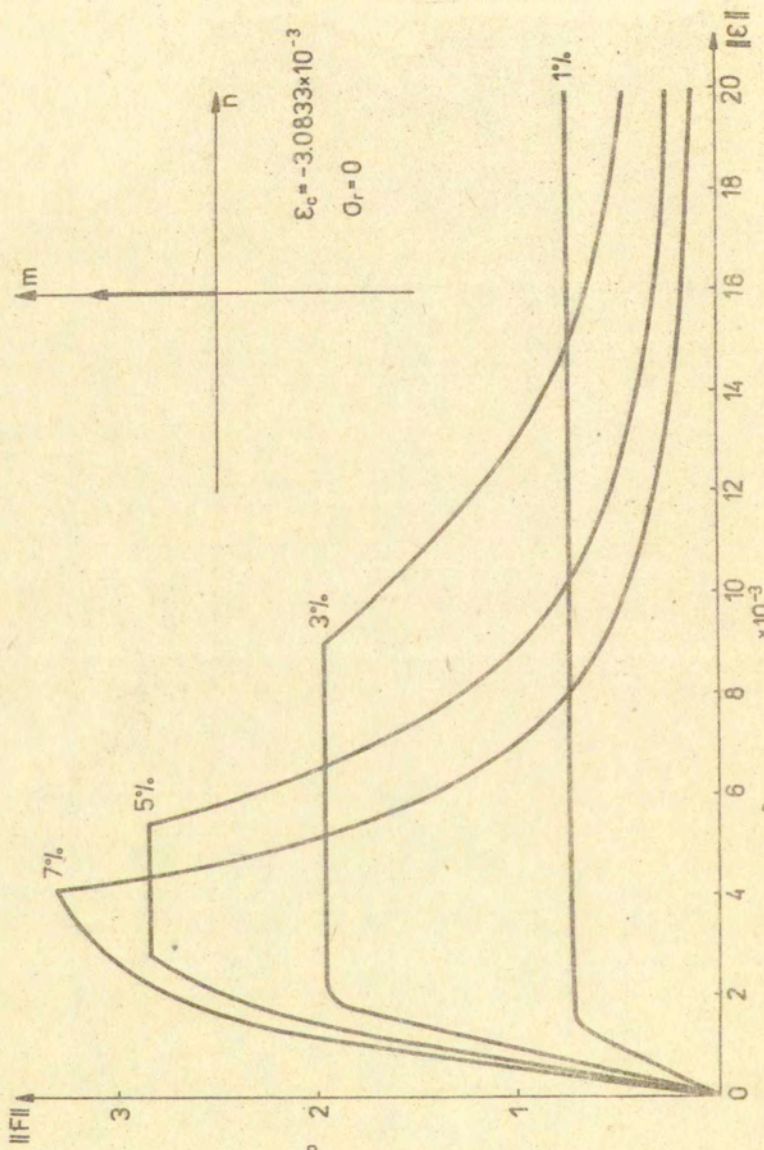
Rys. 7.20



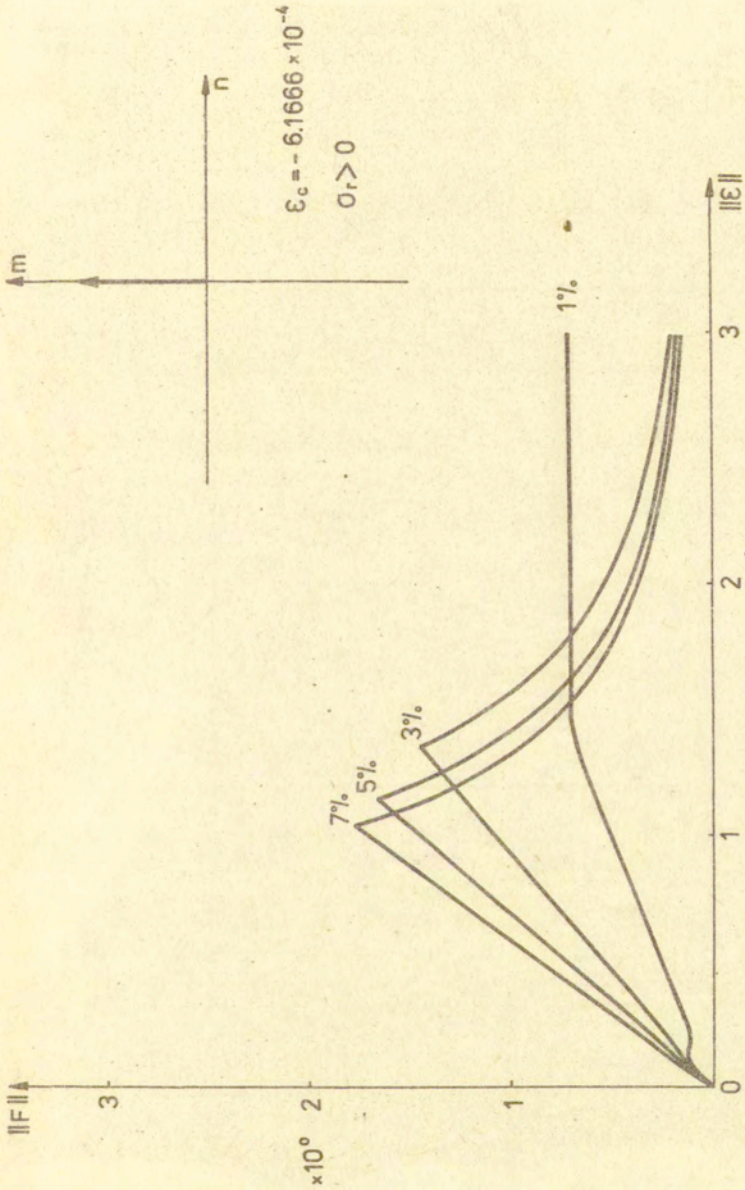
Rys. 7.21



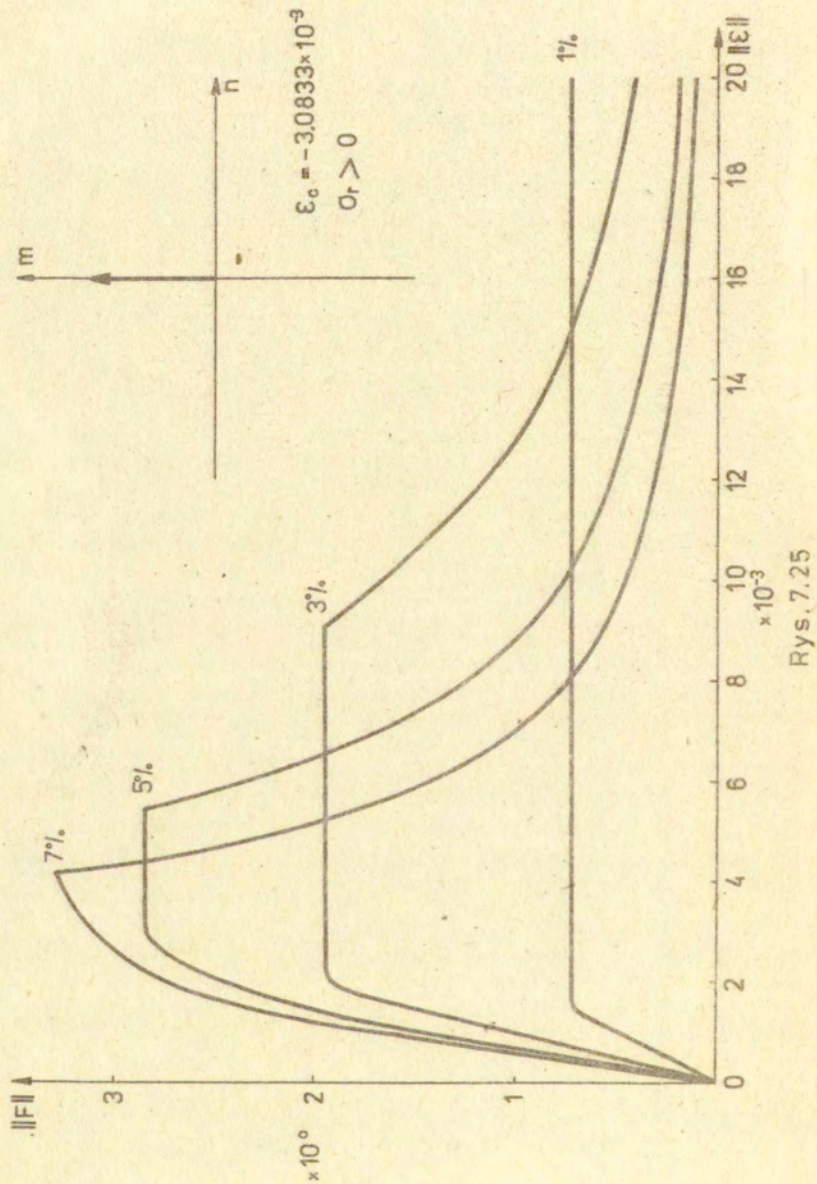
Rys. 7.22



Rys. 7.23



Rys. 7.24



W przypadku modelu betonu sprężysto-idealnie plastycznego o ograniczonej ciągliwości, interesującym wynikiem jest obniżenie nośności przekroju wraz ze wzrostem stopnia zbrojenia, dla pewnych dróg obciążania. Szczególnie widoczne jest to dla czystego ściskania $M = 0$. Spadek ten jest największy dla modelu sprężysto-kruchoego i maleje wraz ze wzrostem długości pólki plastycznej $(\epsilon_p - \epsilon_c)$.

Zbadany wpływ wytrzymałości betonu na rozciąganie, potwierdził początkowe założenie, że można przyjąć $\sigma_r = 0$.

Ujawnia się on tylko w początkowej części wykresu $\|\epsilon\| - \|F\|$ i zmniejsza się wraz ze wzrostem stopnia zbrojenia.

DODATEK

Podstawy teorii zbiorów rozmytych

Niech X będzie przestrzenią, której elementy oznaczamy przez x . Rozmyty zbiór A w X jest charakteryzowany przez funkcję przynależności /charakterystyczną/ $f_A(x)$, która przyporządkowuje każdemu punktowi z X liczbę rzeczywistą z przedziału $[0,1]$. Wartość $f_A(x)$ w x reprezentuje "stopień przynależności" x do A . W ten sposób, im bliższa wartość $f_A(x)$ jedności tym wyższy stopień przynależności x do A .

Gdy A jest zbiorem w zwykłym sensie, jego funkcja przynależności może przyjmować tylko dwie wartości 0 i 1.

$f_A(x) = 1$ lub $f_A(x) = 0$ oznacza że x należy lub nie należy do A . W tym przypadku $f_A(x)$ redukuje się do funkcji charakterystycznej zbioru A .

Przykład.

Niech $X = R$ i A będzie rozmytym zbiorem liczb, które są znacznie większe od 1. Można dać precyzyjną, aczkolwiek subiektywną charakterystykę A przez podanie $f_A(x)$ jako funkcji w R .

Reprezentatywne wartości tej funkcji mogą być następujące:

$$f_A(0) = 0; f_A(1) = 0; f_A(5) = 0.01; f_A(10) = 0.2; f_A(100) = 0.95; f_A(500) = 1.$$

Rozmyty zbiór jest puty wtedy i tylko wtedy, gdy jego funkcja przynależności jest identycznie równa 0 na X .

Dwa zbiory rozmyte A i B są równe $A = B \Leftrightarrow f_A = f_B$.

Dopełnienie zbioru rozmytego A (A') jest zdefiniowane przez $f_{A'} = 1 - f_A$.

Podobnie jak w przypadku zwykłych wzorów, pojęcie dopełnienia pełni centralną rolę w przypadku zbiorów rozmytych.

A zawiera się w B / A jest podzbiorem B , A jest mniejsze lub równe B /

$$\Leftrightarrow f_A \leq f_B \text{ symbolicznie } A \subset B \Leftrightarrow f_A \leq f_B$$

Suma dwóch zbiorów rozmytych A i B z odpowiednimi funkcjami przynależności $f_A(x)$ i $f_B(x)$ nazywamy zbiór rozmyty C ($C = A \cup B$)

którego funkcja przynależności

$$f_c(x) = \max [f_A(x), f_B(x)] \quad x \in X$$

lub w skróconej formie

$$f_c = f_A \vee f_B$$

Zachodzi własność łączności

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

Bardziej intuicyjna definicja :

Suma A i B jest najmniejszym zbiorem rozmytym zawierającym A i B.

Precyzyjniej, jeśli D jest zbiorem rozmytym zawierającym A i B to również zawiera sumę A i B.

Udowodnimy równoważność tych definicji

C zawiera A i B gdyż

$$\max [f_A, f_B] \geq f_A \quad \max [f_A, f_B] \geq f_B$$

Jeżeli D zawiera A i B to $f_D \geq f_A$ i $f_D \geq f_B$ zatem

$$f_D \geq \max [f_A, f_B] = f_c$$

co implikuje $C \subset D$.

Iloczyn dwóch zbiorów rozmytych A i B z odpowiednimi funkcjami przynależności $f_A(x)$, $f_B(x)$ jest zbiorem rozmytym C ($C=A \cap B$), którego funkcja przynależności

$$f_c(x) = \min [f_A(x), f_B(x)] \quad x \in X$$

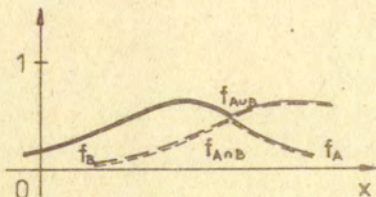
$$f_c = f_A \wedge f_B$$

Można łatwo pokazać, że iloczyn A i B jest największym zbiorem rozmytym zawartym w A i w B.

Tak jak w przypadku zwykłych zbiorów A i B są rozłączne, kiedy $A \cap B$ jest pusty. Zachodzi własność łączności

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Pojęcie "przynależności" pełniące fundamentalną rolę w przypadku zwykłych zbiorów, nie posiada tego samego znaczenia w przypadku zbiorów rozmytych. Tak więc nonsensem jest stwierdzenie, że punkt x należy do zbioru rozmytego A z wyjątkiem



trywialnego sensu, że $f_A(x)$ jest dodatnie.

Mniej trywialnie można wprowadzić dwa poziomy α i β
 $(0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1, \alpha > \beta)$ i zgodzić się że:

1. x należy do A jeśli $f_A(x) \geq \alpha$
2. x nie należy do A jeśli $f_A(x) \leq \beta$
3. x ma nieokreślony stosunek do A jeśli $\beta < f_A(x) < \alpha$

Prowadzi to do trójwartościowej logiki /Kleene, 1952/.

Własności sumy, iloczynu i dopełnienia

prawa de Morgana

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

prawa rozdzielności $C \cap (A \cup B) = (C \cap A) \cup (C \cap B)$

$$C \cup (A \cap B) = (C \cup A) \cap (C \cup B)$$

Algebraiczne operacje na zbiorach rozmytych.

Produkt algebraiczny /iloczyn algebraiczny/ A i B (AB)

$$f_{AB} = f_A f_B$$

$$AB \subset A \cup B$$

Dualna do produktu algebraicznego jest suma

$$A \oplus B = (AB')' = A + B - AB$$

Suma algebraiczna $A \oplus B$ ($A+B$)

$$f_{A+B} = f_A + f_B$$

pod warunkiem, że suma $f_A + f_B$ jest nie większa od jedności.

Tak więc w przeciwieństwie do produktu algebraicznego, suma algebraiczna ma znaczenie tylko wtedy, gdy warunek

$$f_A(x) + f_B(x) \leq 1 \text{ zachodzi dla wszystkich } x.$$

Różnica bezwzględna A i B ($|A-B|$)

$$f_{|A-B|} = |f_A - f_B|$$

Relacje rozmyte

Zwykle relacja jest zdefiniowana jako zbiór par uporządkowanych np. zbiór uporządkowanych par liczb rzeczywistych $x \gg y$. W kontekście zbiorów rozmytych, relacja rozmyta w X jest zbiorem rozmytym w przestrzeni $X \times X$.

np. relacja $x \gg y$ $x, y \in R$ może być uważana za zbiór rozmyty A w R^2 z funkcją przynależności $f_A(x, y)$ posiadającą następujące /subiektywne/ wartości

$$f_A(10, 5) = 0; \quad f_A(100, 10) = 0.7; \quad f_A(100, 1) = 1 \quad \text{itp.}$$

Ogólniej można zdefiniować n - członową relację rozmytą w X jako zbiór rozmyty w przestrzeni $X \times X \times X \times \dots \times X$.

Dla takiej relacji funkcja przynależności ma postać

$$f_A(x_1 \dots x_n) \quad x_i \in X \quad i = 1 \dots n$$

W przypadku binarnej relacji rozmytej złożenie dwóch relacji rozmytych A i B $B \circ A$ jest zdefiniowane jako relacja rozmyta, której funkcja przynależności

$$f_{B \circ A} = \sup_y \min [f_A(x, y), f_B(y, y)]$$

Zachodzi własność łączności

$$A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C$$

Literatura

1. Willam K.J., Possibilities of modeling nonlinear triaxial deformation behaviour, CEB - Task Group Report on " Concrete Under Multiaxial State of Stress ", University of Colorado, Boulder, 1982
2. Owen D.R.J., Figueras J.A., Finite element analysis of reinforced and prestressed concrete structures including thermal loading, to be published
3. Nilson A.H., Nonlinear analysis of reinforced concrete by the finite element method, ACI Journal, Vol.65, 1968, 757 - 766
4. Cedolin L., Crutzen Y.R.J., Dei Poli S., Triaxial stress - strain relationship for concrete, J. Engng Mech. Div., ASCE, Vol.103, No. EM3, June 1977, 423 - 439
5. Kupfer H., Gerstle K., Behaviour of concrete under biaxial stress, J. Engng Mech. Div., ASCE, Vol.99, No. EM4, August 1973, 852 - 866
6. Coon M.D., Evans R.J., Incremental constitutive laws and their associated failure criteria with applications to plain concrete, Int. J. Solids Structures, No.8, 1972, 1169 - 1183
7. Liu T.C.Y., Nilsson A.H., Slate F.O., Biaxial stress - strain relations for concrete, J. Structural Div., ASCE, Vol.98, No. ST5, May 1972, 1025 - 1034
8. Romstad K.M., Taylor M.A., Herrmann , Numerical biaxial characterization for concrete, J. Engng Mech. Div., ASCE, Vol. 100, No. EM5, October 1974, 935 - 948
9. Darwin D., Peckhold D.A.W., Nonlinear biaxial stress - strain law for concrete, J. Engng Mech. Div., ASCE, Vol.103, No. EM2, April 1977, 229 - 241
10. Phillips D.V., Zienkiewicz O.C., Finite element nonlinear analysis of concrete structure, Proc. Int. Civ. Eng., Vol.61, Part 2, March 1976, 59 - 88
11. Nelson I., Baron M.L., Application of variable moduli models to soil behaviour, Int. J. Solids Structures, Vol. 7, 1971, 399 - 417

12. Bibl J., Ivanyi G., Studie zum Trag - und Verformungs - Verhalten von Stahlbeton , Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 260, Berlin, 1976
13. Argyris J.H., Faust G., Szimmat J., Warnke E.P., Willan K.J., Recent developments in the finite element analysis of prestressed concrete reactor vessels, Nuclear Engineering and Design, Vol. 28, 1974, 42 -75
14. Nilsson L., Impact loading on concrete structures, Publication 79:1, Department of Structural Mechanics, Chalmers University of Technology, Göteborg 1979
15. Jiang Jian-Jing, Finite element techniques for static analysis of structures in reinforced concrete, Publication 83:2, Department of Structural Mechanics, Chalmers University of Technology, Göteborg 1983
16. Chen A., Constitutive relations of concrete and punch - indentation problems, Ph.D. Thesis, Lehigh University, Lehigh 1973
17. Mróz Z., An attempt to describe the behaviour of metals under cyclic loads using a more general workhardening model, Acta Mechanica, Vol. 7, 1969, 199 - 212
18. Suidan M., Schebrich W.C., Finite element analysis of reinforced concrete, J. Structural Div., ASCE, Vol. 99 No. ST10, October 1973, 2109 - 2122
19. Muto K., Suge T., Miyashita T., Thoe N., 3 - Dimensional nonlinear analysis of reinforced concrete column, Advanced Mechanics of Reinforced Concrete, IABSE Colloquium Delft, 1981, 361 - 376
20. Bresler B., Pister K.S., Strength of concrete under combined stresses, ACI Journal, September 1958, 321 - 345
21. Chen A.C.T., Chen W.F., Constitutive relations for concrete, J. Engng Mech. Div., ASCE, Vol. 101, No. EM4, August 1975, 465 - 481
22. Chen W.F., Suzuki H., Constitutive models for concrete, Computer and Structures, Vol. 12, 1980, 23 - 32

23. Willam K.J., Warnke E.P., Constitutive models for triaxial behaviour of concrete, IABSE Seminar on Concrete Structures Subjected to Triaxial Stresses, Bergamo, 1974, Assoc. Bridge Struct. Eng. Proc., Vol. 19, 1975, 1 - 30.
24. Ottosen N.S., Constitutive model for short - time loading of concrete, J. Engng Mech. Div., ASCE, Vol. 105, No. EM1, February 1979, 127 - 141
25. Buyukozturk O., Nonlinear analysis of reinforced concrete structures, Computer and Structures, Vol. 7, 1977, 47 - 72
26. Mróz Z., Mathematical models of inelastic concrete behaviour, Inelasticity and Nonlinearity in Structural Concrete, University of Waterloo Press, 1973
27. Nilsson L., Glemberg R., A constitutive model for concrete in high rate of loading conditions, Advanced Mechanics of Reinforced Concrete, IABSE Colloquium Delft, 1981, 185 - 200
28. Nilsson L., Oldenburg M., Nonlinear wave propagation in plastic fracturing materials - A constitutive modeling and finite element analysis, IUTAM, Symposium Nonlinear Deformation Waves, Tallin, 22-28 August 1982
29. Glemberg R., Dynamic analysis of concrete structures, Publication 84:1, Department of Structural Mechanics, Chalmers University of Technology, Göteborg 1984
30. Paul B., Macroscopic criteria for plastic flow and brittle fracture, in " Fracture, an Advanced Treatise ", Vol. 2, ed. by H. Liebowitz, Academic Press, New York, London, 1968
31. Ottosen N.S., A failure criterion for concrete, J. Engng Mech. Div., ASCE, Vol. 103, No. EM4, August 1977
32. Podgórski J., Ogólny warunek stanu granicznego dla materiałów izotropowych, Prace IPPT, 17/1983
33. Vakulenko A.A., Kachanov M.L., Continuum model of medium with cracks, Mechanika Tverdogo Tela, Moscow, No. 4, USSR, 1971, 159 - 166 / in Russian /
34. Kachanov M.L., Continuum model of medium with cracks, J. Engng Mech. Div., ASCE, Vol. 106, No. EM5, October 1980, 1039 - 1051

35. Oda M., Geometry of discontinuity and its relation to mechanical properties of discontinuous materials, IUTAM Conference on " Deformation and Failure of Granular Materials ", Delft 1982, 53 - 61
36. Krajcinovic D., Fonseka G.V., The cotinuous damage theory of brittle materials; Part 1 and 2, ASME, J. Appl. Mech., Vol. 48, December 1981, 809 - 824
37. Stout R.B., Thigpen L., Modeling microcrack kinetics in rocks, Lawrence Livermore Laboratory of California, Livermore, California 94550
38. Dougill J.W., On stable progressively fracturing solids, Journal of Applied Mathematics and Physics, ZAMP, Vol. 27, 1976, 423 - 437
39. Dougill J.W., Lau J.C., Burt N.J., Towards a theoretical model for progressive failure and softening in rock, concrete and similar materials, Mechanics in Engineering Eds. Dabey R.N. and Lind M.C., University of Waterloo Press, Waterloo 1977, 335 - 355
40. Bazant Z.P., Kim S.S., Plastic - fracturing theory for concrete, J. Engng Mech. Div., ASCE, Vol. 105, No. EM3, June 1979, 407 - 428
41. Dragon A., Mróz Z., A continuum model for plastic - brittle behaviour of rock and concrete, Int. J. Engng Sci., Vol.17, 1979, 121 - 137
42. Mróz Z., On forms of constitutive laws for elastic - plastic solids, Arch. Mech. Stos., 18, 1966, 3 - 35
43. Mróz Z., Discussion on Session 7, Proc. IUTAM Symp. " Three - Dimensional Constitutive Relations and Ductile Fracture ", Ed. S. Nemat-Nasser, North Holl. Publ. Co., 1981, 391 - 395
44. Mróz Z., Norris V.A., Zienkiewicz O.C., Application of an anisotropic hardening model for soils and its application to cyclic loading, Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech., Vol. 2, 1978, 203 - 221

45. Mróz Z., Norris V.A., Zienkiewicz O.C., Application of an anisotropic hardening model in the analysis of elasto - plastic deformation of soils, *Geotechnique*, Vol. 29, 1979, 1 - 34
46. Pietruszczak S., Mróz Z., Description of mechanical behaviour of anisotropically consolidated clays, *Proc. Euromech. Coll. " Anisotropy in Solid Mechanics "*, Grenoble, Nordhoff Int. Publ., 1980
47. Pietruszczak S., Mróz Z., On hardening anisotropy of K_0 - consolidated clays, *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, Vol. 7, 1983, 19 - 38
48. Pietruszczak S., Mróz Z., A constitutive model for sand with an anisotropic hardening rule, *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, Vol. 7, 1983, 305 - 320
49. Zadeh L.A., Fuzzy sets, *Information and Control*, Vol. 8, 1965, 338 - 353
50. Kotsovos M.D., A generalised constitutive model of concrete based on fundamental material properties, A thesis submitted for habilitation at the IFTR of the PAN, Civil Eng. Dep. of Science and Technology, London, August 1980
51. Samuelsson A., Modele konstytutywne i metody wariacyjne w plastyczności metali, glin i betonu, Wykład na konferencji " Metody analizy funkcjonalnej w plastyczności ", Łańcut, wrzesień 1979, *Ossolineum* 1981, 279 - 329
52. Sinha B.P., Gerstle K.H., Tulin L.G., Stress - strain relations for concrete under cyclic loading, *ACI Journal*, Vol. 61, No. 2, February 1964, 195 - 210
53. Karsan E.D., Jirsa J.O., Behaviour of concrete under compressive loadings, *J. Struct. Div., ASCE*, Vol. 95, No. ST12, December 1969, 2543 - 2563
54. Shah S.P., Chandra S., Mechanical behavior of concrete examined by ultra - sonic measurements, *Journal of Materials*, American Society for Testing and Materials, Vol.5, No. 3, 1970, 550 - 563

55. Kupfer H., Hilsdorf H.K., Rusch H., Behavior of concrete under biaxial stresses, ACI Journal, Vol. 65, No. 8, August 1969, 656 - 666
56. Mills L.L., Zimmerman R.M., Compressive strength of plain concrete under multiaxial loading conditions, ACI Journal, Vol. 67, No. 10, October 1970
57. Tasuji E., Slate F.O., Nilson A.H., Stress - strain response and fracture of concrete in biaxial loading, ACI Journal, Vol. 75, No. 7, July 1978
58. Schickert G., Winkler H., Results of test concerning to multiaxial compressive stresses, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 277, Berlin, 1977
59. Findeisen W., Szymanowski J., Wierzbicki A., Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji, PWN, Warszawa 1980
60. Scavuzzo R., Stankowski T., Gerstle K.H., Ko H.-Y., Stress - strain curves for concrete under multiaxial load histories, Department of Civil, Environmental and Architectural Engineering, University of Colorado, Boulder, August 1983
61. Recommendation internationale CEB - FIP - 1970 pour le calcul et l'exécution des ouvrages en béton, Bulletin d'information No. 84, Comité Européen du Béton, Mai 1972
62. Wennerstrom H., Glemberg R., Petersson H., GENFEM - 3 User's manual, Department of Structural Mechanics, Chalmers University of Technology, Publication 79:4
63. Wennerström H., Petersson H., GENFEM - 3 Verification manual, Department of Structural Mechanics, Chalmers University of Technology, Publication 79:5
64. Chen A.C.T., Chen W.F., Constitutive equations and punch - indentation of concrete, J. Engng Mech. Div., ASCE, Vol. 101, No. EM6, December 1975, 889 - 906
65. Suzuki H., Chen W.F., Elastic - plastic - fracture analysis of concrete structures, Computer and Structures, Vol. 16, No. 6, 1983, 697 - 705

Streszczenie

Praca zawiera propozycję modelu konstytutywnego betonu z uwzględnieniem zarówno odkształceń plastycznych jak i degradacji sprężystej na skutek rozwoju mikroszczelin. Model umożliwia opis deformacji betonu w dowolnym stanie naprężenia dla obciążeń monotonicznych oraz cyklicznych, łącznie z zakresem pokrytym. Propozycja ta poprzedzona jest przeglądem dotychczas stosowanych modeli konstytutywnych betonu. Zaproponowane równanie konstytutywne należy do klasy równań przyrostowo - liniowych i oparte jest na założeniu o istnieniu w przestrzeni naprężeń dwóch powierzchni plastycznego płynięcia oraz degradacji. Powierzchnie te są ze sobą sprzężone poprzez parametry wzmocnienia. Do opisu deformacji plastycznych stosowane jest stowarzyszone prawo płynięcia, opis degradacji sprężystej oparty jest natomiast na oryginalnie sformułowanych założeniach energetycznych. Deformacje cykliczne opisano poprzez wprowadzenie do modelu pamięci maksymalnych obciążeń i zinterpretowano na gruncie teorii zbiorów rozmytych. Praca zawiera przykład zastosowania modelu do rozwiązania prostego problemu brzegowego, polegającego na ścisaniu próbki betonowej pomiędzy dwoma sztywnymi stemplami, metodą elementów skończonych. Rozważono też wpływ parametrów materiałowych na kształt powierzchni granicznej w przypadku zginania i ścisania lub rozciągania belki żelbetowej pojedynczo zbrojonej dla modelu idealnie plastycznego o ograniczonej ciągliwości.

SPIS TREŚCI

	str.
1. Wstęp.....	3
2. Przegląd modeli konstytutywnych betonu.....	6
2.1. Modele sprężyste.....	8
2.1.1. Model liniowy izotropowy.....	8
2.1.2. Model liniowy ortotropowy.....	10
2.1.3. Model hipersprężysty.....	11
2.1.4. Model sprężysty w sensie Cauchy'ego	12
2.1.5. Model hiposprężysty.....	13
2.2. Modele plastyczne.....	14
2.2.1. Deformacyjna teoria plastyczności..	14
2.2.2. Teoria plastycznego płynięcia.....	15
2.2.2.1. Model idealnie plastyczny.	20
2.2.2.2. Model plastyczny ze wzmocnieniem	21
2.3. Modele kruche.....	22
2.4. Modele uwzględniające degradację sprężystą	23
2.4.1. Model Dougilla.....	25
2.4.2. Model Dragona-Mroza.....	26
3. Ogólna postać równania konstytutywnego.....	28
3.1. Plastyczność.....	33
3.2. Problem naroża ze sprzężeniem parametrów wzmocnienia.....	34
3.3. Degradacja sprężysta.....	44
3.4. Analogia ze zmodyfikowanym modelem Griffitha	48
4. Model betonu.....	55
4.1. Związki fizyczne na płaszczyźnie p-q.....	55
4.1.1. Opis degradacji sprężystej.....	56
4.1.2. Opis zjawisk plastycznych.....	62
4.2. Równania konstytutywne dla ogólnego stanu naprężenia.....	65
4.3. Opis modelu w przypadku obciążeń cyklicznych	71

5. Identyfikacja funkcji materiałowych.....	83
5.1. Identyfikacja wstępna dla testów na płaszczy- źnie p-q.....	86
5.2. Obciążenia cykliczne.....	92
5.3. Identyfikacja dla stanów trójosiowych.....	93
5.4. Weryfikacja dla testów trójosiowych.....	103
5.5. Zestawienie funkcji materiałowych.....	123
6. Rozwiązanie problemu brzegowego.....	126
6.1. Metoda rozwiązania.....	126
6.2. Wyniki.....	128
7. Powierzchnie graniczne dla modelu plastycznego o ograniczonej ciągliwości.....	153
7.1. Założenia wstępne.....	163
7.2. Model betonu sztywno-idealnie plastyczny.....	165
7.3. Model betonu sprężysto-idealnie plastyczny o ograniczonej ciągliwości.....	171
7.4. Wnioski.....	173
Dodatek.....	187
Literatura.....	191