Rok I. Warszawa, Kwiecień 1917 r. № 2

NAUCZANIE
MATEMATYKI I FIZYKI

WYCHODZI 4 RAZY DO ROKU POD REDAKCJĄ TADEUSZA GUTKOWSKIEGO

ROMUALD WITWIŃSKI.

METODA FERMATA W ŚWIETLE ANALIZY SPÓŁCZESNEJ.

WSTĘP.

Znakomity matematyk francuski, *Fermat*, jest twórcą metody, która w przededniu odkrycia rachunku różniczkowego stanowiła najpotężniejsze narzędzie badania największych i najmniejszych wartości funkcji. Ze względu na znaczenie historyczne tej metody, jak również na jej elementarność, zasługuje ona na uwzględnienie w szkole średniej i może stanowić tło, na którym rozwija się idea jednoznaczności i wieloznaczności funkcji [1]) w wykładzie szkolnym.

Zanim przejdę do treści swego artykułu, uważam za rzecz stosowną przypomnieć pokrótce czytelnikowi myśl przewodnią metody *Fermata*.

Zasada Fermata. *Niech x oznacza wartość zmiennej niezależnej, przy której funkcja osiąga maximum (lub minimum): istnieją zawsze takie dwie wartości zmien-*

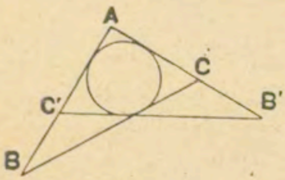
[1]) Już w najprostszych przykładach, dotyczących trójmianu kwadratowego, spotykamy się z badaniem warunków, przy których funkcja przechodzi przez pewną wartość tylko raz jeden: uczeń bezwiednie dla siebie odwołuje się tu do metody *Fermata;* zadaniem nauczyciela jest moment ten należycie wyzyskać.

nej niezależnej — jedna $x - h$, *mniejsza od* x, *druga* $x + k$, *większa od* x, *którym odpowiadają dwie równe wartości funkcji* $f(x - h)$ *i* $f(x + k)$, *jakkolwiek małe są liczby* h *i* k.

W rzeczy samej, funkcja, wzrastając i zbliżając się do swego *maximum'a*, przejdzie [1]) przez wartość $f(x - h)$, dowolnie bliską do tego *maximum'a;* po osiągnięciu *maximum'a* funkcja zaczyna maleć, i zanim osiągnie pewną określoną wartość, mniejszą od swego *maximum'a*, przejdzie, na zasadzie ciągłości, i przez wartość $f(x + k)$, równą $f(x - h)$ i dowolnie bliską do swego *maximum'a*.

Wynika stąd bezpośrednio sama *metoda Fermata*. Ograniczymy się do podania jednego przykładu.

Przykład. *Na kole, o promieniu* $= r$, *opisać trójkąt prostokątny, posiadający najmniejszą przeciwprostokątną.* Przez dowolny punkt C poprowadźmy prostą CB, styczną do koła, następnie weźmy $AC' = AC$ i $AB' = AB$: otrzymamy dwa równe trójkąty $AB'C'$ i ABC. Z budowy tej wnosimy, iż AC i AB' są to dwie wartości zmiennej niezależnej, którym odpowiadają dwie *równe* przeciwprostokątne BC i $B'C'$. Na mocy zasady *Fermata* jedna z tych wartości jest mniejsza od tej, przy której ma miejsce *minimum*, druga zaś jest większa. Pozostaje to prawdziwym, jakkolwiek bliskie są do siebie punkty C i B'. Zatym *minimum* ma miejsce wtedy, gdy punkty C i B' stają się jednym punktem. Wynika stąd, iż trójkąt szukany jest trójkątem równoramiennym [2]).



Rys. 1.

Zapoznawszy czytelnika z treścią metody *Fermata*, przy-

[1]) Czytelnik może sam zbudować odpowiedni wykres.

[2]) Oznaczając przez r promień, z łatwością znajdziemy minimum przeciwprostokątnej BC:

$$BC \geqslant 2r(\sqrt{2} + 1).$$

stąpię teraz do uzasadnienia tej metody z punktu widzenia wymagań analizy dzisiejszej.

§ 1.

Przypuszczamy, iż czytelnikowi są znane takie elementy matematyki wyższej, jak, naprzykład, pojęcie o funkcji ciągłej albo twierdzenie o tym, iż funkcja, jednostajna i ciągła w pewnym przedziale, posiada funkcję odwrotną, również jednostajną i ciągłą w należytym przedziale. Przyjmujemy również, iż czytelnikowi nie jest obce ścisłe określenie *maximum'a* i *minimum'a*,—i wogóle zakładamy znajomość elementów rachunku różniczkowego.

Zbiór liczb rzeczywistych, czyniących zadość nierównościom $a \leqslant x \leqslant b$, gdzie a i b są to dane liczby nierówne, będziemy nazywali *przedziałem zamkniętym*, oznaczając go przez $< a, b >$; same zaś liczby a, b będziemy nazywali końcami przedziału. Zbiory liczb, otrzymane z przedziału zamkniętego drogą wyłączenia końca a lub b albo obu końców, będziemy nazywali *przedziałami rozwartymi*, oznaczając je odpowiednio przez $(a, b >$, $< a, b)$ i (a, b). Jeżeli funkcja $f(x)$ posiada pewną własność przy każdej wartości x, położonej w danym zamkniętym lub rozwartym przedziale od a do b, wówczas będziemy poprostu mówili, iż funkcja $f(x)$ posiada tę własność w danym przedziale, albo, jeszcze prościej, iż funkcja $f(x)$ posiada tę własność w $<a, b>$, w $<a, b)$ i t. d. Jeżeli funkcja $f(x)$ osiąga przy $x = c$ *maximum* albo *minimum*, i jeżeli nie jest wymienione, który mianowicie przypadek ma miejsce, będziemy wówczas mówili, iż $f(x)$ posiada przy $x = c$ *extremum*.

§ 2.

Niech funkcja $f(x)$, dana w pewnym skończonym lub nieskończonym przedziale, ma własności następujące: 1) posiada pochodną $f'(x)$ w całym przedziale; 2) pochodna $f'(x)$ posiada liczbę skończoną pierwiastków rzeczywistych; 3) wewnątrz przedziału, między dwoma kolejnymi rzeczywistymi jej pierwiastkami (i również w przedziałach od $-\infty$ do najmniejszego pierwiastka albo od największego pierwiastka do $+\infty$, o ile funkcja $f(x)$ jest dana w jednym z tych przedziałów), funkcja $f'(x)$ zachowuje znak stały.

Własności te, jak wiadomo, dają możność znalezienia wszystkich *maxima* i *minima* funkcji $f(x)$. W rzeczy samej, na mocy znanego twierdzenia rachunku różniczkowego, funkcja $f(x)$ w każdym z wyżej wskazanych kolejnych przedziałów jednostajnie wzrasta lub jednostajnie maleje wraz z wzrastaniem x, zależnie od tego, czy pochodna $f'(x)$ wewnątrz przedziału zachowuje znak $+$, czy też znak $-$. Otóż, łącząc w jeden ogólny przedział każdą grupę przyległych przedziałów (jeżeli takowe istnieją), wewnątrz których $f'(x)$ zachowuje jeden i ten sam znak, przekonamy się, iż albo funkcja $f(x)$ jest jednostajna w całym obszarze jej określenia, zatym nie posiada *extremum*, albo też podzielimy obszar określenia funkcji $f(x)$ na kolejno następujące po sobie wraz z wzrastaniem x przedziały wzrastania i malenia (albo malenia i wzrastania) funkcji; każdy punkt rozdziału poprzedniego przedziału wzrastania i następującego przedziału malenia daje *maximum*, zaś punkt rozdziału poprzedniego przedziału malenia i następującego przedziału wzrastania daje *minimum* funkcji $f(x)$.

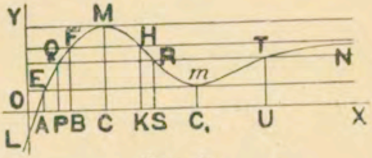
§ 3.

Przytoczona tu zwykła metoda badania przebiegu funkcji $f(x)$ może być związana z zagadnieniem o wyodrębnieniu (o ile to jest możliwe) wszystkich tych różnych przedziałów, w których funkcja $f(x)$ przybiera zbiór jednych i tych samych wartości. Zagadnienie to sprowadza się do rozwiązania równania nieoznaczonego:

$$f(z) = f(x) \tag{1}$$

o dwóch niewiadomych, mianowicie—do wyrażenia z przez jedną lub kilka funkcji zmiennej x. Wyjaśnimy metodę rozwiązania postawionego zagadnienia na następującym szematycznym przykładzie.

Niech funkcja $y = f(x)$, czyniąca zadość założeniom § 2, wyraża się graficznie (rys. 2) krzywą $LMmN$. Niech pochodna $f'(x)$ zamienia się na zero dla odciętych c i c_1 punktów M i m, zachowując znak dodatni w $(-\infty, c)$ i $(c_1 + \infty)$, a ujemny w (c, c_1). Wówczas w punktach M i m rzędna krzywej osiąga odpowiednio *maximum* $f(c)$ i *minimum* $f(c_1)$. Poza tym, niech, według warunku, funkcja $f(x)$ dąży do $(-\infty)$, gdy x dąży do $(-\infty)$, i niech funkcja $f(x)$ dąży do granicy skończonej l, położonej, według warunku, między liczbami $f(c)$ i $f(c_1)$, gdy x dąży do $(+\infty)$; w ten sposób, krzywa posiada asymptotę $y=l$, równoległą do osi x. Poprowadźmy do krzywej styczne w punktach M i m; są one równoległe do osi x na zasadzie równości $f'(c) = 0$ i $f'(c_1) = 0$. Poprowadźmy również wskazaną wyżej asymptotę. Styczna do krzywej w punkcie M posiada z nią tylko jeden punkt spólny, styczna zaś w punkcie m przecina krzywą jeszcze w jednym punkcie E; wreszcie, asymptota do krzywej przecina ją w dwóch punktach F i H; oznaczając odcięte punktów E, F, H przez a, b, k, widzimy, iż $a < b < c < k < c_1$.



Rys. 2.

Wszystko, co powiedzieliśmy, można stwierdzić na drodze analitycznej, biorąc pod uwagę ciągłość funkcji $f(x)$, posiadającej, według warunku, pochodną, a również i jej jednostajność w przedziałach: $(-\infty, c)$, (c, c_1), $(c_1, +\infty)$. Podzielmy całą oś x na sześć przedziałów: $(-\infty, a>$, $<a, b>$, $<b, c>$, $<c, k>$, $<k, c_1>$, $<c_1, +\infty)$, które nazywać będziemy krótko: 1-szy, 2-gi, 3-ci, ... 6-ty przedział. Funkcja $f(x)$ jest jednostajna i ciągła w każdym z sześciu rozważanych przedziałów, zatem w każdym z nich posiada ona odwrotną funkcję, również jednostajną i ciągłą; sześć tych funkcji odwrotnych będziemy odpowiednio oznaczali przez $g_1(y)$, $g_2(y), \ldots, g_6(y)$. Funkcje $g_1(y)$, $g_2(y), \ldots, g_6(y)$ są określone odpowiednio w przedziałach: $(-\infty, f(c_1)>$, $<f(c_1), l>$, $<l, f(c)>$, $<f(c), l>$, $<l, f(c_1)>$, $<f(c_1), l)$, zaś wartości tych funkcji są położone odpowiednio w przedziałach: $(-\infty, a>$, $<a, b>$, $<b, c>$, $<c, k>$, $<k, c_1>$, $<c_1, +\infty)$, to znaczy — odpowiednio w pierwszym, drugim, ...szóstym przedziałach. Zgodnie z określeniem funkcji odwrotnej, dla wartości x, położonych w jednym z sześciu

rozważanych przedziałów, i dla odpowiadających wartości y z równości:

$$y = f(x) \tag{2}$$

wynika równość:

$$x = g_i(y) \quad (i = 1, 2, \ldots, 6), \tag{3}$$

i nawzajem; każda więc z funkcji odwrotnych $g_1(y)$, $g_2(y)$,..., $g_6(y)$, dla wskazanych wyżej wartości odpowiadających x i y, czyni zadość tożsamościom:

$$g_i[f(x)] = x \tag{4}$$

$$f[g_i(y)] = y \quad (i = 1, 2, \ldots, 6) \tag{5}$$

Jasnym jest teraz, w jaki sposób można posługiwać się zbudowanymi przez nas funkcjami odwrotnymi w celu wyznaczenia wszystkich rozwiązań rzeczywistych równania (1) względem z. W przedziale $(-\infty, a)$, otrzymanym z przedziału pierwszego drogą wyłączenia końca a, funkcja $f(x)$ przybiera wartości, położone w $(-\infty, f(c_1))$, z których żadna nie powtarza się w żadnym z pozostałych pięciu przedziałów. Wynika stąd, iż dla x, położonego w $(-\infty, a)$, istnieje jedno tylko rozwiązanie rzeczywiste równania (1), mianowicie, rozwiązanie $z = x$, które [p. (4)] możemy zapisać również w postaci:

$$z = g_1[f(x)] = x. \tag{6}$$

W przedziałach zamkniętych drugim, piątym i szóstym [1]) funkcja $f(x)$ posiada jedne i te same wartości, położone w $< f(c_1), l >$, zatym dla x, położonego w przedziale drugim, prócz oczywistego rozwiązania $z = x$ (które można również zapisać w postaci $z = g_2[f(x)]$), równanie (1) posiada jeszcze po jednym rozwiązaniu w przedziałach piątym i szóstym względem z. W celu otrzymania szukanego rozwiązania dla z z przedziału piątego, wystarcza zastosować do równania (1) wzór (3), biorąc z za niewiadomą, a x za liczbę daną drugiego przedziału, przy $i = 5$. Otrzymamy wówczas, iż szukana wartość na z wyraża się wzorem:

$$z = g_5[f(x)].$$

---

[1]) W celu uproszczenia dalszego wykładu, jeżeli umówimy się, iż $f(+\infty) = l$, wówczas wprowadzimy pojęcie o przedziale zamkniętym $< c_1, +\infty >$.

Zupełnie tak samo, dla x z przedziału drugiego pierwiastek rzeczywisty równania (1), rozwiązanego względem z, przy warunku, aby z było liczbą przedziału szóstego, wyraża się wzorem:

$$z = g_6[f(x)].$$

Tym sposobem, dla x, położonego w przedziale drugim, rozwiązania rzeczywiste równania (1) względem z wyrażają się zapomocą wzorów:

$$z = g_2[f(x)], \qquad z = g_5[f(x)], \qquad z = g_6[f(x)], \tag{7}$$

przyczym pierwsze z tych rozwiązań, rzecz jasna, sprowadza się tożsamościowo do x.

Godzi się zauważyć, iż wzory (7) można zinterpretować geometrycznie: niech $x = OP$ jest liczba, wzięta wewnątrz przedziału drugiego, zaś $PQ = f(x)$—rzędna krzywej, odpowiadająca odciętej x. Prowadząc przez punkt Q prostą, równoległą do osi x, znajdujemy punkty przecięcia R i T prostej tej z krzywą, i budujemy rzędne tych punktów; wówczas: $SR = UT = PQ = f(x)$, $OP = x = g_2[f(x]$, $OS = g_5[f(x)]$, $OU = g_6[f(x)]$.

Powtarzając rozumowania analogiczne, widzimy, iż przy x, położonym w przedziale piątym lub szóstym, rozwiązania rzeczywiste równania (1) względem z wyrażają się przez te same wzory (7), przyczym drugi i trzeci z tych wzorów zamieniają się odpowiednio na równość $z = x$. Wreszcie, jeżeli x jest liczbą z przedziału trzeciego lub czwartego, wówczas równanie (1) rozwiązuje się względem z przez wzory:

$$z = g_3[f(x)], \qquad z = g_4[f(x)], \tag{8}$$

przyczym dla x z przedziałów trzeciego i czwartego, pierwszy i drugi z wzorów (8) zamieniają się odpowiednio na równość $z = x$.

Tym sposobem, wzory (6), (7), (8) dają tablicę zupełną rozwiązań rzeczywistych względem z. Kładąc:

$$g_i[f(x)] = \varphi_i(x), \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6) \tag{9}$$

widzimy, [p. (6), (7), (8)], iż dla x, położonego w $(-\infty, a)$, jedynym rozwiązaniem równania (1) względem z jest wzór:

$$z = \varphi_1(x) = x; \tag{10}$$

dla x, położonego w $< a, b >$, w $< k, c_1 >$ lub w $< c_1, +\infty)$, wszystkie rozwiązania równania (1) względem z wyrażają się jednym z wzorów:

$$z = \varphi_2(x), \qquad z = \varphi_5(x), \qquad z = \varphi_6(x), \tag{11}$$

przyczym w $< a, b >$, w $< k, c_1 >$ i w $< c_1, +\infty >$ pierwsze, drugie i trzecie z rozwiązań (11) sprowadzają się odpowiednio do $z = x$; wreszcie, dla x w $< b, c >$ lub w $< c, k >$ wszystkie rozwiązania równania (1) względem z wyrażają się wzorami:

$$z = \varphi_3(x), \qquad z = \varphi_4(x), \tag{12}$$

przyczym w $< b, c >$ i w $< c, k >$ pierwsze i drugie z rozwiązań (12) sprowadzają się odpowiednio do $z = x$. Wogóle, każda z funkcji $\varphi_i(x)$ zamienia się tożsamościowo na x w i-tym przedziale.

§ 4.

Funkcje $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_6(x)$ posiadają własności następujące:

1) Każda z funkcji $\varphi_i(x)$ jest określona w i-tym przedziale, zamieniając się przytym w tym przedziale tożsamościowo na funkcję $z = x$. Funkcja $\varphi_1(x)$ jest określona tylko w pierwszym przedziale. Każda z funkcji $\varphi_2(x)$, $\varphi_5(x)$, $\varphi_6(x)$ jest określona zarówno w przedziałach drugim, piątym i szóstym. Każda z funkcji $\varphi_3(x)$ i $\varphi_4(x)$ jest określona i w przedziale trzecim, i w przedziale czwartym.

2) Wartości funkcji $\varphi_i(x)$, z określonym wskaźnikiem i, są położone w przedziale i-tym. Wynika to z wzoru (9) i z tego, iż wartości funkcji $g_i(y)$, na mocy samego jej określenia, są położone w przedziale i-tym.

3) Niech funkcja $\varphi_i(x)$ jest tą jedną z sześciu rozważanych funkcji, która jest określona zarówno w i-tym, jak i w pewnym innym - k-tym przedziale [funkcją taką, jak to było wskazane wyżej, okazuje się w naszym przykładzie dowolna z sześciu funkcji, prócz $\varphi_1(x)$]. Rozważana funkcja $\varphi_i(x)$ tożsamościowo nie zamienia się w przedziale k-tym na funkcję $z = x$. W rzeczy samej, gdyby funkcja ta $\varphi_i(x)$

zamieniała się w przedziale k-tym na funkcję $z = x$, wówczas wartości jej dla przedziału k-tego położone byłyby również w przedziale k-tym, a to jest niemożliwe, ponieważ [p. 2)] wszystkie wartości funkcji $\varphi_i(x)$ są położone w przedziale i-tym.

4) Każda z funkcji $\varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ w przedziałach odpowiadających czyni zadość tożsamości:

$$f[\varphi_i(x)] = f(x). \tag{13}$$

Wynika to stąd, iż każda z funkcji $\varphi_i(x)$ daje rozwiązanie równania (1) względem z. Oczywiście, tożsamości (13) spełniają się dla wartości x, położonych w tych przedziałach, w których są określone funkcje odpowiadające $\varphi_i(x)$. Jeżeli $i = 1$, wówczas tożsamość (13) spełnia się tylko w pierwszym przedziale; jeżeli $i = 2$, 5 albo 6, wówczas każda z odpowiadających tożsamości postaci (13) spełnia się zarówno w przedziałach drugim, piątym i szóstym; jeżeli $i = 3$ albo 4, wówczas odpowiadające tożsamości spełniają się i w przedziale trzecim, i w przedziale czwartym.

5) Funkcje $\varphi_i(x)$ są ciągłe. Wynika to z wzorów (9) i z ciągłości funkcji $f(x)$ i $g_i(y)$.

6) Każda z funkcji $\varphi_i(x)$ jest jednostajna w każdym z tych sześciu, rozpatrzonych przez nas, przedziałów, w których jest określona. Wynika to z wzorów (9) i z jednostajności funkcji $f(x)$ w każdym z tych sześciu przedziałów, na które została podzielona oś x, jak również z jednostajności funkcji $g_i(y)$ w przedziałach odpowiadających. Każda z funkcji $\varphi_i(x)$ wzrasta jednostajnie w tym z sześciu przedziałów, w którym jest określona, jeżeli funkcja $f(x)$ jednocześnie rośnie lub maleje jednostajnie zarówno w tym, jak i w i tym przedziale; odwrotnie, jeżeli w jednym z tych przedziałów funkcja $f(x)$ jednostajnie wzrasta, a w drugim maleje wraz z wzrastaniem x, wówczas funkcja $\varphi_i(x)$ jednostajnie maleje w uważanym przedziale. Tak, naprzykład, funkcja $\varphi_2(x)$ jednostajnie wzrasta w $< c_1, +\infty)$ i jednostajnie maleje wraz z wzrastaniem x w $< k, c_1 >$; każda z funkcji $\varphi_i(x)$ jest określona w przedziale i-tym i jednostajnie wzrasta w tym przedziale, sprowadzając się w tym przedziale tożsamościowo do funkcji $z = x$.

7) Funkcje $\varphi_2(x)$, $\varphi_5(x)$, $\varphi_6(x)$ tworzą grupę funkcji; to znaczy, iż funkcja złożona, składająca się z dowolnych dwóch z tych funkcji, daje znowu jedną z tych funkcji. Funkcje $\varphi_3(x)$, $\varphi_4(x)$ również tworzą grupę, i funkcja oddzielna $\varphi_1(x)$ również daje grupę.

W rzeczy samej, z wzorów (9) i (5) przy n i p, równych dowolnej z liczb 2, 5 albo 6, mamy:

$$\varphi_n[\varphi_p(x)] = g_n(f[g_p(f(x)))] = g_n[f(x)] = \varphi_n(x). \qquad (14)$$

Naprzykład, $\varphi_2[\varphi_5(x)] = \varphi_2(x)$, $\varphi_5[\varphi_6(x)] = \varphi_5(x)$. Funkcje $\varphi_3(x)$ i $\varphi_4(x)$ także tworzą grupę, w czym łatwo się przekonać, stosując wzór (14) w tym przypadku, gdy n i p równają się jednej z liczb 3 lub 4. Wreszcie, dla funkcji $\varphi_1(x)$ mamy: $\varphi_1[\varphi_1(x)] = x = \varphi_1(x)$.

8) Odcięte c i c_1 punktów M i m, w których funkcja $f(x)$ osiąga *extrema*, są odpowiednio pierwiastkami równań:

$$\varphi_3(x) = x \quad (15), \qquad \varphi_4(x) = x \quad (16)$$

i

$$\varphi_5(x) = x \quad (17), \qquad \varphi_6(x) = x, \quad (18)$$

przyczym o x w równaniach (15), (16), (17) i (18) zakładamy, iż równa się odpowiednio dowolnej liczbie z przedziałów zamkniętych czwartego, trzeciego, szóstego i piątego; tym sposobem, żadne z tych równań [p. (3)] nie sprowadza się do tożsamości $x = x$.

Istotnie, z wzorów (9) i (4), pamiętając, iż c jest położone jednocześnie i w trzecim i w czwartym przedziale, znajdujemy: $\varphi_3(c) = g_3[f(c)] = c$. Otóż $\varphi_3(c) = c$, i podobnież otrzymamy: $\varphi_4(c) = c$, $\varphi_5(c_1) = c_1$, $\varphi_6(c_1) = c_1$.

§ 5.

Rozpatrzoną w przypadku szczególnym metodę rozwiązania równania (1) względem z można, rzecz jasna, zastosować do dowolnej funkcji $f(x)$, czyniącej zadość ograniczeniom § 2-go. W rzeczy samej, dla takiej funkcji cały obszar zmienności zmiennej niezależnej można podzielić na liczbę skończoną przedziałów wzrastania lub malenia funkcji $f(x)$ i określić wszystkie jej *extrema*. Następnie należy zbudować krzywą $y = f(x)$, poprowadzić we wszystkich jej punktach, odpowiadających *extrema*, styczne, i również poprowadzić jedną lub dwie równoległe do osi x asymptoty, o ile takowe istnieją. Określiwszy wówczas punkty przecięcia (jeżeli istnieją) tych stycznych i asymptot (jeżeli istnieją) z krzywą, można, odosobniając części krzywej, zawarte między tymi równoległymi, podzielić obszar cały określenia funkcji $f(x)$ na takie grupy przedziałów, w których wartości funkcji zmieniają się w jednym i tym samym przedziale. Każdej z takich grup m przedziałów odpowiada szereg wyrażających się wzorami postaci (9), funkcji $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$, określonych we wszystkich przedziałach tej grupy, przyczym wartości każdej z tych funkcji są położone w przedziale odpowiadającym grupy, w którym ta funkcja przechodzi tożsamościowo na funkcję $z = x$. Funkcje $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$ każdego z tych szeregów tworzą grupę, mianowicie, są poddane zależnościom $\varphi_n[\varphi_p(x)] = \varphi_n(x)$, gdzie n i p są dowolne z liczb $1, 2, \ldots, m$. Zbudowane w ten sposób dla wszystkich grup przedziałów funkcje $\varphi_i(x)$ są ciągłe i jednostajne w przedziałach odpowiadających. Każda z funkcji $\varphi_i(x)$ czyni zadość w swej grupie przedziałów tożsamości $f[\varphi_i(x)] = f(x)$, i wszystkie możliwe równości $z = \varphi_i(x)$ dają wszystkie rozwiązania rzeczywiste równania (1) względem z. Każda z odciętych c, dla której rzędna $f(x)$ osiąga *extremum*, jest pierwiastkiem dwu równań postaci $\varphi_i(x) = x$, które z pewnością nie sprowadzają się do tożsamości. Należy zauważyć, iż wyłożona tutaj teorja rozwiązania równania (1) względem z, w związku z teorją *extrema*, pozostaje prawdziwą, jeżeli funkcja $f(x)$ w pewnej skończonej liczbie punktów, zachowując ciągłość, nie posiada pochodnej. Punkty te należy również przyjąć za końce przedziałów wzrastania lub malenia funkcji, i, jeżeli w takim punkcie funkcja $f(x)$ osiąga *extremum*, wówczas, przy oddzielaniu ostatecznych grup przedziałów, należy w tym punkcie również poprowadzić, zamiast stycznej, prostą, równoległą do osi x. Wreszcie cała teorja powyższa może być rozciągnięta i na ten przypadek, gdy cały obszar określenia funkcji $f(x)$ rozpada się na przeliczalnie nieskończoną mnogość oddzielnych przedziałów, w których funkcja ta czyni zadość wymaganiom § 2-go, albo też przed chwilą wskazanym warunkom uogólnionym. Wynika to z możliwości zastosowania wszystkich powyższych rozumowań do każdego zosobna z wspomnianej nieskończonej mnogości przedziałów; jasne jest, iż liczba wszystkich rozmaitych funkcji $\varphi_i(x)$, zarówno liczba wszystkich rozmaitych grup tych funkcji, może okazać się nieskończenie wielką.

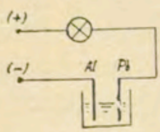
(Dokończenie nastąpi).

J. KAMIŃSKI.

ZAWÓR ELEKTROLITYCZNY NODONA.

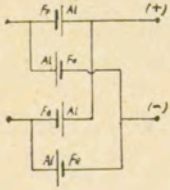
Zdarza się, że mając źródło prądu elektrycznego zmiennego, w postaci np. kontaktu ściennego, nie umiemy sobie dać rady z nabijaniem akumulatorów przenośnych, elektrolizą i t. p. manipulacjami, potrzebującymi prądu stałego, a właściwiej jednokierunkowego.

Przyrządem, który chcę tu opisać, a który pozwoli nam na urzeczywistnienie prądu jednokierunkowego, jest tak zwany zawór elektrolityczny Nodona. Składa się on z naczynia szklanego, napełnionego kwasem siarkowym, w którym umieszczono dwie płytki: ołowianą i glinową. Połączmy pierwszą z biegunem dodatnim, drugą z ujemnym źródła prądu stałego, włączywszy w obwód żarówkę, odpowiadającą napięciu źródła prądu (rys. 1). Będzie się ona palić normalnie (na blaszce ołowianej wydziela się tlen, na glinowej wodór).



Rys. 1.

Przełóżmy teraz połączenia tak, aby płytka glinowa była przyłączona do bieguna dodatniego. Lampka narazie pali się dobrze, lecz stopniowo światło ciemnieje coraz mocniej, aż wkońcu gaśnie. Co zaszło? Otóż na płytce dodatniej, glinowej wydzielający się tlen wytworzył cieniutką warstewkę tlenku, który jest bardzo złym przewodnikiem elektryczności.



Rys. 2.

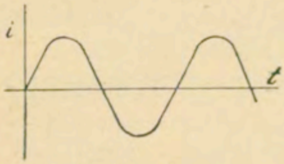
Przywróćmy poprzednie połączenie, a lampka momentalnie zajaśnieje.

Widzimy więc, że przyrząd nasz nie przepuszcza prądu, idącego w nim od glinu do ołowiu (ściślej mówiąc, bardzo go osłabia); prąd o przeciwnym kierunku przepuszcza swobodnie, skąd nazwa zaworu elektrolitycznego.

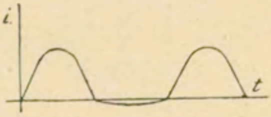
Granicą dobrego działania takiego zaworu jest 20 woltów; na wyższe napięcia musielibyśmy łączyć je po kilka w szereg.

Używając płytek z glinu i żelaza w nasyconym roztworze fosforanu amonu, granicę tę doprowadzamy do 150 woltów.

Włączmy taki zawór w obwód prądu zmiennego (jak rys. 1), wówczas, na zasadzie powyższego, prąd będzie przechodził tylko w chwilach, gdy kierunek jego jest skierowany od żelaza do glinu i wykres prądu (rys. 3) przyjmie postać, wskazaną na rysunku 4.

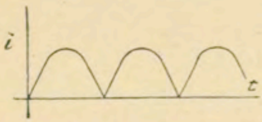


Rys. 3.

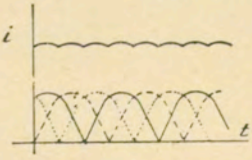


Rys. 4.

Posiłkując się czterema zaworami elektrolitycznymi i łącząc je, jak wskazuje rys. 2, otrzymamy prąd, którego krzywą widzimy na rysunku 5. Działanie tego układu zaworów łatwo zrozumieć, pamiętając, że prąd może przejść tylko w kierunku od żelaza do glinu.

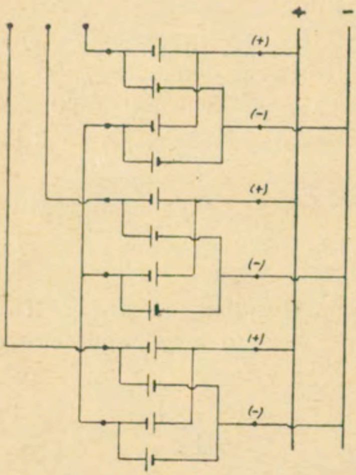


Rys. 5.



Rys. 6.

Gdybyśmy rozporządzali źródłem prądu trójfazowego, możnaby przy pomocy dwunastu zaworów elektrolitycznych, połączonych, jak wskazuje rysunek 7, urzeczywistnić prąd prawie nie różniący się od stałego.



Rys. 7.

Sposób, w jaki dodają się prądy składowe, pochodzące od trzech oddzielnych faz, wskazuje rys. 6 (prąd wypadkowy wyobraża linja gruba, falista).

Należy jeszcze dodać tytułem informacji, że zamiast płytki z czystego glinu, można użyć ze stopu glinu i np. cynku.

Następnie, aby zawór działał dobrze i prędko, należy do tego przygotować płytkę glinową. Robimy to, zmieniając wielokrotnie kierunek przechodzącego przez zawór prądu stałego. Tę wstępną czynność powtarzamy tak długo, aż przyrząd momentalnie, po odpowiednim włączeniu, nie przerwie prądu, czyli w razie połączenia z lampką (rys. 1) ta odrazu się nie zapala. (Początkowo, jak wyżej wspomniałem, długą chwilę na to trzeba czekać).

Sprawność zaworu elektrolitycznego wynosi około 0,75.

T. GUTKOWSKI.

TEORJA BŁĘDNOŚCI W ZASTOSOWANIU DO FIZYKI.

Błędem pomiaru albo inaczej błędem *rzeczywistym* pomiaru nazywamy różnicę pomiędzy rzeczywistą wartością liczbową mierzonej wielkości a rezultatem, otrzymanym od pomiaru. Jeżeli rzeczywistą wartość liczbową wielkości oznaczymy przez A, a wartość jej otrzymaną przez a, to błąd rzeczywisty Δa wyraża się wzorem:

$$\Delta a = A - a,$$

albo:

$$A = a + \Delta a.$$

Naogół wartość błędu jest niewiadoma, lecz zwykle wiadome są granice, w jakich znajduje się błąd. Tak np., jeżeli zapomocą podziałki, podzielonej na milimetry, mierzymy pewną długość, to popełniamy błąd mniejszy co do wartości bezwzględnej od 1 mm., tak że ten błąd jest zawarty między -1 i $+1$.

Twierdzenie. — *Błąd, popełniony na sumie, równa się sumie błędów, popełnionych na składnikach.*

Niech A i B będą rzeczywiste wartości liczbowe dwóch wielkości, a i b ich wartości otrzymane, a Δa i Δb błędy. Wtedy:

$$\Delta a = A - a, \qquad \Delta b = B - b,$$

skąd:

$$\Delta a + \Delta b = (A + B) - (a + b).$$

Twierdzenie.—1°. *Błąd, popełniony na różnicy, równa się różnicy błędów, popełnionych na odjemnej i odjemniku.* 2°. *Bezwzględna wartość błędu, popełnionego na różnicy, równa się najwyżej (t. j. równa się lub jest mniejszą) sumie wartości bezwzględnych błędów na odjemnej i odjemniku.*

1°

$$\Delta a = A - a$$

$$\Delta b = B - b,$$

skąd

$$\Delta a - \Delta b = (A - B) - (a - b).$$

2°. Z ostatniej równości mamy:

$$| \Delta a - \Delta b | = | (A - B) - (a - b) | ,$$

ale $$| \Delta a - \Delta b | \leqslant | \Delta a | + | \Delta b | ,$$

więc $$| \Delta a | + | \Delta b | \geqslant | (A - B) - (a - b) | .$$

Przykład. — Zważono flakonik pusty i flakonik z płynem, z dokładnością do 0,01 gr. i otrzymano, że flakonik pusty waży 12,37 gr., a z płynem 37,83 gr. Znaleźć wagę flakonika i oznaczyć granice błędu popełnionego.

Masa płynu, na zasadzie pomiarów, jest 37,83 — 12,37, t. j. 25,46 gr.

Jeżeli prawdziwą masę flakonika oznaczymy przez A, a flakonika wraz z płynem przez B, to prawdziwa masa płynu jest $B - A$:

$$0{,}01 \geqslant | A - 12{,}37 |$$
$$0{,}01 \geqslant | B - 37{,}83 |$$

więc, na zasadzie poprzedniego:

$$0{,}02 \geqslant | (B - A) - (37{,}83 - 12{,}37) |$$
$$0{,}02 \geqslant | (B - A) - 25{,}46 | .$$

A więc błąd popełniony jest zawarty między —0,02 i +0,02.

Uwaga.— Z poprzednich twierdzeń i przykładu wynika, że granica błędu, popełnionego na sumie lub różnicy pewnych wielkości, równa się sumie granic błędów, popełnionych na tych wielkościach.

Jednakże, jeżeli wiadomo, że pomiary dwóch wielkości są zrobione obydwa z nadmiarem, albo obydwa z niedomiarem, to granica błędu na różnicy tych wielkości równa się większej z dwóch granic błędów popełnionych.

Rzeczywiście, niech wielkości A i B będą zmierzone obie z niedomiarem, czyli $\Delta a < 0$ i $\Delta b < 0$. Niech α i β będą granice błędów Δa i Δb, t. j. $| \Delta a | < \alpha$ i $| \Delta b | < \beta$ i niech np. $\alpha > \beta$.

Otóż $$\Delta a - \Delta b = (A - B) - (a - b).$$

Skąd, ponieważ Δa i Δb są jednakowego znaku,

$$| \Delta a | \geqslant | (A - B) - (a - b) | ,$$

więc tymbardziej $$\alpha \geqslant | (A - B) - (a - b) | .$$

Błędność. — Błąd rzeczywisty nie wystarcza, żeby zdać sobie sprawę z dokładności pomiaru. Jeżeli, mierząc długość pokoju, otrzymamy 5 m. 23 cm. i omylimy się przytym o 1 cm., zaś, mierząc pudełko od zapałek, otrzymamy 5 cm. i również omylimy się o 1 cm., to powiadamy, że długość pokoju jest zmierzona dokładniej, niż długość pudełka od zapałek. Przy jednakowym błędzie ten pomiar jest dokładniejszy, który daje większy rezultat.

Z tego przykładu wynika, że błąd nie charakteryzuje dokładności pomiaru, a prędzej to czyni stosunek błędu do otrzymanej wartości wielkości. Ten stosunek będziemy nazywali *błędnością* albo *błędem względnym*. W pierwszym z przytoczonych przykładów błędność jest $\frac{1}{523} = 0{,}0019....$, a w drugim $\frac{1}{5} = 0{,}2$. Im błędność jest mniejsza, tym pomiar jest dokładniejszy.

Dokładnością pomiaru nazywamy odwrotność błędności. Im błędność jest mniejsza, tym dokładność jest większa.

Jeżeli wartość otrzymana jest a, a błąd rzeczywisty jest Δa, to błędność jest $\frac{\Delta a}{a}$.

Uwaga. To, co następuje, będzie stosowało się tylko do wypadków, w których błędność jest tak mała, że jej druga i wyższe potęgi, jak również iloczyny dwóch lub więcej błędności, mogą być zaniechane. Ale pomimo tego zastrzeżenia, teorja ta może być praktycznie stosowana prawie wszędzie w fizyce, bo np. pomiar, przy którym omylono się o $\frac{1}{10}$ mierzonej wielkości, liczy się za zły i prawie nie do przyjęcia. Błędność takiego pomiaru jest $\frac{1}{10}$, jej kwadrat jest $\frac{1}{100}$. Otóż tam, gdzie się mylimy o $\frac{1}{10}$, to taką wielkością jak $\frac{1}{100}$ możemy zaniechać. Przy większych dokładnościach, t. j. przy mniejszych błędnościach, kwadraty ich mają jeszcze mniejsze znaczenie.

Twierdzenie. — *Błędność, popełniona na iloczynie, równa się sumie błędności, popełnionych na czynnikach.*

Niech rezultatem od mierzenia dwóch wielkości A i B będzie a i b, z błędem Δa i Δb, mamy wykazać, że jeżeli X jest iloczynem AB, a x iloczynem ab, to:

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}.$$

Otóż
$$\begin{aligned} \Delta x &= X - x \\ &= AB - ab \\ &= (a + \Delta a)(b + \Delta b) - ab \\ &= b\Delta a + a\Delta b + \Delta a\Delta b. \end{aligned}$$

Skąd
$$\begin{aligned} \frac{\Delta x}{x} &= \frac{b\Delta a + a\Delta b + \Delta a\,\Delta b}{ab} \\ &= \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta a}{a} \times \frac{\Delta b}{b}. \end{aligned}$$

Otóż, jeżeli iloczynem $\frac{\Delta a}{a} \times \frac{\Delta b}{b}$ możemy zaniechać, to mamy:

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}.$$

Wykazaliśmy twierdzenie dla dwóch czynników. Wykażemy je dla trzech. Niech $x = abc$. Wtedy:

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta (ab)}{ab} + \frac{\Delta c}{c},$$

ale
$$\frac{\Delta (ab)}{ab} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b},$$

więc
$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c}.$$

Tak samo wykazalibyśmy to twierdzenie dla większej ilości czynników.

Wniosek I.— *Błędność, popełniona na ilorazie, równa się różnicy błędności, popełnionych na dzielnej i dzielniku.— Wartość bezwzględna błędności na ilorazie równa się najwyżej sumie wartości bezwzględnych błędności, popełnionych na dzielnej i dzielniku.*

Wniosek II.—*Błędność, popełniona na potędze, równa się błędności, popełnionej na wielkości, podnoszonej do potęgi, pomnożonej przez wykładnik potęgi.*

Wniosek III. — *Błędność, popełniona na pierwiastku, równa się błędności, popełnionej na wielkości podpierwiastkowej, podzielonej przez wykładnik pierwiastka.*

Zastosowanie I. — Zrobiono trzy ważenia, z dokładnością do 0,01 gr, w których na lewej szalce postawiono pewną stałą tarę. Na prawej szalce w pierwszym ważeniu postawiono piknometr i $m = 39{,}58$ gr., w drugim piknometr, napełniony płynem i $m' = 13{,}25$ gr., w trzecim piknometr, napełniony wodą i $m'' = 12{,}03$ gr.

Znaleźć gęstość płynu i granice błędu popełnionego.

Masa płynu jest $m - m'$, masa wody jest $m - m''$, więc gęstość płynu jest:

$$d = \frac{m - m'}{m - m''}$$

$$d = \frac{39{,}58 - 13{,}25}{39{,}58 - 12{,}03}$$

$$= \frac{26{,}33}{27{,}55}$$

i ostatecznie:

$$d = 0{,}9557.$$

Błędność popełniona na d jest:

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{\Delta(m - m')}{m - m'} - \frac{\Delta(m - m'')}{m - m''}$$

$$= \frac{\Delta m - \Delta m'}{m - m'} - \frac{\Delta m - \Delta m''}{m - m''}$$

$$= \frac{\Delta m}{m - m'} - \frac{\Delta m'}{m - m'} - \frac{\Delta m}{m - m''} + \frac{\Delta m''}{m - m''}$$

$$= \frac{\Delta m''}{m - m''} - \frac{\Delta m'}{m - m'} + \frac{m\Delta m - m''\Delta m - m\Delta m + m'\Delta m}{(m - m')(m - m'')}$$

$$= \frac{\Delta m''}{m - m''} - \frac{\Delta m'}{m - m'} + \frac{(m' - m'')\Delta m}{(m - m)'(m - m'')}.$$

Skąd:

$$\left|\frac{\Delta d}{d}\right| < \left|\frac{\Delta m''}{m - m''}\right| + \left|\frac{\Delta m'}{m - m'}\right| + \left|\frac{(m' - m'')\Delta m}{(m - m')(m - m'')}\right|$$

Ponieważ wszystkie ważenia są zrobione z dokładnością do 0,01, to:

$$\left|\frac{\Delta d}{d}\right| < \frac{0{,}01}{27{,}55} + \frac{0{,}01}{26{,}33} + \frac{1{,}22 \times 0{,}01}{26{,}33 \times 27{,}55}$$

$$\left|\frac{\Delta d}{d}\right| < 0{,}00037 + 0{,}00038 + 0{,}00002 = 0{,}00077.$$

Skąd $|\Delta d| \leqslant 0{,}00077d$

$$|\Delta d| \leqslant 0{,}00077 \times 0{,}9557 = 0{,}00074,$$

albo $|\Delta d| < 0{,}0008.$

A więc prawdziwa gęstość płynu jest zawartą między:

$$d - \Delta d \quad \text{i} \quad d + \Delta d,$$

t. j. między:

$$0{,}9557 - 0{,}0008 = 0{,}9549$$

i $$0{,}9557 + 0{,}0008 = 0{,}9565.$$

Zastosowanie II. — Ażeby zmierzyć wewnętrzną średnicę rurki włoskowatej, wstawiono do niej słupek rtęci, zmierzono jej długość l z dokładnością do 0,1 cm. i zważono następnie masę m tej rtęci z dokładnością do 0,005 gr. Powtórzono to dwa razy, za pierwszym razem otrzymano $l = 10{,}2$ i $m = 2{,}105$, za drugim zaś $l = 12{,}9$ i $m = 2{,}70$. Przed rozpoczęciem tych pomiarów wstawiono do rurki słupek rtęci i mierzono go w różnych miejscach rurki; długość jego okazała się wszędzie jednakową. Znaleźć na zasadzie zrobionych pomiarów promień wewnętrzny rurki możliwie najdokładniej i podać granice popełnionego błędu.

Jeżeli oznaczymy przez r promień wewnętrzny rurki, to objętość słupka rtęci będzie $\pi r^2 l$, masa zaś tej rtęci jest $13{,}6\pi r^2 l$, więc:

$$13{,}6\pi r^2 l = m,$$

i $$r = \sqrt{\frac{m}{13{,}6\pi l}}. \tag{1}$$

Skąd $$\frac{\Delta r}{r} = \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta m}{m} - \frac{\Delta 13{,}6}{13{,}6} - \frac{\Delta l}{l}\right] \tag{2}$$

π można wziąć dowolnie dokładnie i wobec tego błąd na π może być tak małym, że im można zaniechać.

Jeżeli we wzory (1) i (2) podstawimy otrzymane wielkości $l = 10{,}2$ i $m = 2{,}105$ za pierwszym razem, to otrzymamy:

$$\left|\frac{\Delta r}{r}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left[\frac{0{,}005}{2{,}105} + \frac{0{,}01}{13{,}6} + \frac{0.1}{10{,}2}\right] = \frac{1}{2}(0{,}0238 + 0{,}00074 + 0{,}00985)$$

$$\left|\frac{\Delta r}{r}\right| \leqslant \frac{1}{2} \times 0{,}01297 = 0{,}00649.$$

Skąd $|\Delta r| \leqslant 0{,}0649 \times 0{,}0695 = 0{,}00045,$

więc $r = 0{,}0695 + 0{,}00045 = 0{,}06995$ z nadmiarem,

$r = 0{,}0695 - 0{,}00045 = 0{,}06905$ z niedomiarem.

Jeżeli we wzory (1) i (2) podstawimy wielkości $l = 12{,}9$ i $m = 2{,}70$, to otrzymamy:

$$r = 0{,}06999$$

$$\left|\frac{\Delta r}{r}\right| \leqslant \tfrac{1}{2}\left[\frac{0{,}005}{2{,}7} + \frac{0{,}01}{13{,}6} + \frac{0{,}1}{12{,}9}\right] = \tfrac{1}{2}(0{,}00186 + 0{,}00074 + 0{,}00778)$$

$$|\Delta r| \leqslant 0{,}00519 \times 0{,}06999 = 0{,}00037$$

więc $r = 0{,}06999 + 0{,}00037 = 0{,}07036$ z nadmiarem,

$r = 0{,}06999 - 0{,}00037 = 0{,}06962$ z niedomiarem.

Porównując rezultaty dla r z pierwszego i drugiego mierzeń, otrzymamy:

$$0{,}06962 < r < 0{,}06995.$$

Jeżeli weźmiemy dla r średnią ostatnich dwóch wartości, t. j. $r = 0{,}069775$, to ta wartość może się różnić od prawdziwej wartości r nie więcej jak o 0,000165. Gdybyśmy wzięli wartość bardziej okrągłą $r = 0{,}0698$, to błąd byłby mniejszy od 0,0002.

Z przytoczonego przykładu wynika, że najdokładniejsza, jaką możemy znaleźć wartość dla r, nie jest średnią arytmetyczną między otrzymanymi rezultatami 0,0695 i 0,006999, bo ta średnia arytmetyczna jest 0,069745. Jednakże ta średnia arytmetyczna jest bardzo bliską do wartości, którą możemy otrzymać najdokładniej.

Zastosowanie III.—Zapomocą aerometru Nicholsona (o objętości stałej) chcą zmierzyć gęstość ciała stałego. Jakiej wielkości należy wziąć to ciało, żeby rezultat był możliwie najdokładniejszy?

Oznaczmy przez M masę, zrównoważającą aerometr, przez m masę, którą należy dodać do ciała, leżącego na aerometrze, żeby go zrównoważyć, przez m', masę, którą należy położyć na aerometrze do zrównoważenia, jeżeli ciało leży w wodzie. Przy tych oznaczeniach masa ciała jest $M - m$, masa wypartej wody $(M - m) - (M - m') = (m' - m)$, wobec tego gęstość d dana będzie wzorem:

$$d = \frac{M - m}{m' - m}.$$

Skąd
$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{\Delta(M - m)}{M - m} - \frac{\Delta(m' - m)}{m' - m}$$
$$= \frac{\Delta M}{M - m} - \frac{\Delta m}{M' - m} - \frac{\Delta m'}{m' - m} + \frac{\Delta m}{m' - m}$$
$$= \frac{\Delta M}{M - m} - \frac{\Delta m'}{m' - m} + \frac{(M - m')\Delta m}{(M - m)(m' - m)}.$$

Granice błędów ΔM, $\Delta m'$ i Δm są oczywiście jednakowe; jeżeli bezwzględną wartość tej granicy oznaczymy przez ε, to:

$$\left|\frac{\Delta d}{d}\right| \leqslant \varepsilon\left[\frac{1}{M - m} + \frac{1}{m' - m} + \frac{M - m'}{(M - m)(m' - m)}\right]$$
$$\left|\frac{\Delta d}{d}\right| \leqslant \varepsilon\frac{m' - m + M - m + M - m'}{(M - m)(m' - m)}$$
$$\left|\frac{\Delta d}{d}\right| \leqslant \varepsilon\frac{2M - 2m}{(M - m)(m' - m)} = 2\varepsilon\frac{M - m}{(M - m)(m' - m)}$$
$$\left|\frac{\Delta d}{d}\right| \leqslant \frac{2\varepsilon}{m' - m}.$$

Otóż $m' - m$ jest masą wody w objętości ciała, więc $m' - m = \frac{M - m}{d}$, więc:

$$\frac{\Delta d}{d} \leqslant \frac{2\varepsilon d}{M - m}, \qquad \text{albo} \qquad \Delta d \leqslant \frac{2\varepsilon d^2}{M - m}.$$

Z tej ostatniej nierówności widać, że granica błędu Δd będzie najmniejszą, gdy $M - m$ będzie największe, t. j. gdy $m = 0$. Jeżeli więc ciało, leżące na aerometrze, zrównoważa aerometr, to otrzymamy największą dokładność.

Uwaga.—Z ostatnich wzorów jeszcze wynika, że w najlepszych warunkach błąd popełniony jest proporcjonalny do kwadratu gęstości, a błąd względny jest proporcjonalny do gęstości ciała. Metoda ta więc jest dużo mniej dokładną dla ciał ciężkich, niż dla ciał lekkich.

Zastosowanie IV. — Posiadamy cały szereg rurek włoskowatych, o różnej średnicy wewnętrznej i chcemy zmierzyć możliwie najdokładniej napięcie powierzchniowe danego płynu zapomocą prawa Jurina. Promienie wewnętrzne tych rurek są znane z dokładnością do ε, a wysokość płynu mierzymy z dokładnością do η. Jaką z rurek należy wybrać, żeby zmierzyć napięcie najdokładniej?

Ażeby odpowiedzieć na to pytanie, bierzemy pierwszą lepszą rurkę i zapomocą niej mierzymy prowizorycznie w przybliżeniu napięcie. Niech ono będzie A.

Z prawa Jurina mamy:

$$A = \frac{\pi h r}{2},$$

gdzie π jest ciężar gatunkowy płynu, h wysokość płynu w rurce włoskowatej i r promień rurki.

Skąd $$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta \pi}{\pi} + \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta r}{r}.$$

Skąd $$\left|\frac{\Delta A}{A}\right| \leqslant \left|\frac{\Delta \pi}{\pi} + \frac{\eta}{h} + \frac{\varepsilon}{r}\right|$$

błąd $\frac{\Delta \pi}{\pi}$ jest stały. Więc $\frac{\Delta A}{A}$ będzie najmniejsze, gdy $y = \frac{\eta}{k} + \frac{\varepsilon}{r}$ będzie najmniejsze. Z prawa Jurina mamy:

$$h = \frac{2A}{\pi r}, \qquad \text{więc} \qquad y = \frac{\eta \pi r}{2A} + \frac{\varepsilon}{r}.$$

Mamy tu do czynienia z sumą dwu wyrazów zmiennych, których iloczyn jest stały. Otóż suma takich wyrazów jest najmniejszą, gdy te wyrazy są sobie równe, t. j. gdy:

$$\frac{\eta \pi r}{2A} = \frac{\varepsilon}{r}.$$

Skąd $$r^2 = \frac{2A\varepsilon}{\eta \pi} \qquad \text{i} \qquad r = \sqrt{\frac{2A\varepsilon}{\eta\pi}}.$$

Jeśli nie jest znane twierdzenie co do wartości najmniejszej sumy dwu składników, których iloczyn jest stały, to możemy dojść do tego samego wyniku zapomocą pochodnej. Mianowicie:

$$y = \frac{\eta \pi r^2 + 2A\varepsilon}{2Ar},$$

skąd
$$y' = \frac{2\eta\pi r \,.\, 2A - 2A\eta\pi r^2 - 4A^2\varepsilon}{4A^2r^2}$$
$$= \frac{2\eta\pi A r^2 - 4A^2\varepsilon}{4A^2r^2}$$
$$= \frac{\eta\pi r^2 - 2A\varepsilon}{2Ar^2}$$
$$= \frac{2\eta\pi\left(r + \sqrt{\frac{2A\varepsilon}{\eta\pi}}\right)\left(r - \sqrt{\frac{2A\varepsilon}{\eta\pi}}\right)}{2Ar^2}.$$

Otóż przy $r < \sqrt{\frac{2A\varepsilon}{\eta\pi}}$ $y' < 0$ y maleje,

i przy $r > \sqrt{\frac{2A\varepsilon}{\eta\pi}}$ $y' > 0$ y rośnie,

Więc przy $r = \sqrt{\frac{2A\varepsilon}{\eta\pi}}$ wartość y jest najmniejszą. Należy więc przy powtórnym mierzeniu napięcia wziąć taką rurkę, której promień wewnętrzny jest najbliższy do $\sqrt{\frac{2A\varepsilon}{\eta\pi}}$.

Wartość dla r, przy której błędność jest najmniejsza, można również znaleźć bardzo prosto, stosując zasadę Fermata. Należy tylko zauważyć, że y ma jednakową wartość przy r i r' związanych zależnością:
$$rr' = \frac{2A\varepsilon}{\eta\pi}.$$

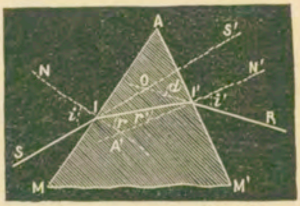
Więc gdy $r = r' = \sqrt{\frac{2A\varepsilon}{\eta\pi}}$, to y będzie miało najmniejszą wartość.

MINIMUM ODCHYLENIA W PRYZMACIE.

Referat p. R. Witwińskiego, umieszczony w niniejszym numerze, nasunął mi na myśl odnalezienia warunków, przy których kąt odchylenia w pryzmacie jest najmniejszy.

Niech SI będzie promieniem, padającym na pryzmat MAN, tworzący kąt padania i. Wewnątrz pryzmatu promień idzie wzdłuż $I\,I'$ i wychodzi z pryzmatu wzdłuż IR, tworzący kąt załamania i'. Promień, padający na pryzmat i promień, wychodzący zeń, tworzą kąt d, zwany kątem odchylenia.

Zauważymy, że kąt odchylenia w pryzmacie nie zależy od tego, na jaką ścianę promień pada, lecz tylko od kąta padania. Z drugiej strony wiadomo, że gdyby promień upadł na pryzmat wzdłuż prostej RI', to wyszedłby wzdłuż prostej IS, i kąt odchylenia byłby ten sam. Widzimy więc, że dwum różnym kątom padania i i i' odpowiada ten sam kąt odchylenia d. Na mocy zasady Fermata jedna z tych wartości kąta padania jest mniejszą od tej, przy której ma miejsce *minimum*, druga zaś jest większą. Zatym minimum ma miejsce wtedy, gdy kąty i i i' są równe, t. j. gdy kąt padania równa się kątowi, pod którym promień wychodzi z pryzmatu.



ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ TRYGONOMETRYCZNYCH.

W trygonometrji Henryka Fervala podana jest nota Ch. Biocha, co do rozwiązywania równań trygonometrycznych, której treść tu podajemy wraz z pewnym uzupełnieniem.

Niech będzie dane równanie do rozwiązania:

$$a \sin x + b \cos x = c.$$

Jeśli zamienimy $\cos x$ na $\pm \sqrt{1 - \sin^2 x}$, to otrzymamy 2 równania pierwiastkowe:

$$a \sin x + b \sqrt{1 - \sin^2 x} = c,$$

$$a \sin x - b \sqrt{1 - \sin^2 x} = c.$$

Pierwiastki tych dwu równań są pierwiastkami zadanego równania. Jak widzimy, wyrażenie $\cos x$, zapomocą $\sin x$, doprowadza nas do rozwiązania dwu równań, zamiast jednego, bo otrzymujemy równanie pierwiastkowe. Nie wypełniając tej zamiany, która została zrobiona, można łatwo się przekonać, że nie możemy otrzymać równania wymiernego (t. j. bez pierwiastka kwadratowego) względem $\sin x$.

Rzeczywiście, gdyby pewne przekształcenia mogły zamienić zadane równanie na równoważne i wymierne względem sin x, to zamiana x na $\pi - x$ nie zmieniłaby równania, ponieważ $\sin(\pi - x) = \sin x$. Podobnież można się przekonać przez zamianę x na $-x$, że równanie to nie da się wyrazić wymiernie w zależności od cos x. Zamiana x na $\pi + x$ wskazuje, że równanie to nie da się wyrazić wymiernie w zależności od tg x. Gdybyśmy chcieli przekształcić zadane równanie na równanie równoważne i wymierne względem jednej tylko funkcji kątowej, to nie pozostaje nic innego, jak zrobić następującą zamianę:

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \qquad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

Równanie, otrzymane w ten sposób, łatwe byłoby do dyskusji, ponieważ tangens może być każdą liczbą.

Z podobnych uwag wynika:

1°. *Jeśli zamiana x na $\pi - x$ zmienia równanie, to równanie nie da się wyrazić wymiernie w zależności od sin x.*

2°. *Jeśli zamiana x na $-x$ zmienia równanie, to równanie nie da się wyrazić wymiernie w zależności od cos x.*

3°. *Jeśli zamiana x na $\pi + x$ zmienia równanie, to równanie nie da się wyrazić wymiernie w zależności od tg x.*

4°. *Jeśli wszystkie powyższe zamiany zmieniają równanie, to równanie można wyrazić jedynie wymiernie w zależności od tg $\frac{x}{2}$.*

Właściwie w zastosowaniach używa się twierdzeń wzajemnych do wypowiedzianych, które nie zawsze są słuszne, jak to łatwo się przekonać, choćby z równania:

$$\sin(\operatorname{tg} x) + \cos(\operatorname{tg} x) = \operatorname{tg} x.$$

Jednakże, jeśli widzimy, że naprzykład pierwsze i trzecie podstawienie zmienia równanie, a drugie nie, to możemy próbować wyrazić równanie wymiernie tylko w zależności od cos x.

Jako przykład weźmy równanie:

$$a \sin^2 x + b \cos x \sin x + c \cos^2 x = d.$$

Otóż zamiana x na $\pi + x$ nie zmienia tego równania. Wobec tego postarajmy się wyrazić to równanie w zależności od tg x.

Równanie nasze możemy napisać tak:

$$a \sin^2 x + b \cos x \sin x + c \cos^2 x = d(\cos^2 x + \sin^2 x).$$

Dzieląc przez $\cos^2 x$, otrzymamy:

$$a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = d(1 + \operatorname{tg}^2 x).$$

Równanie to już jest łatwe do rozwiązania.

Weźmy teraz równanie:

$$a(\sin x + \cos x) + b \sin x \cos x = c.$$

Tu wszystkie trzy zamiany zawodzą. Gdybyśmy wyrazili sin x i cos x zapomocą tg $\frac{x}{2}$, to otrzymalibyśmy równanie stopnia czwartego, którego rozwiązać nie potrafimy. Lecz gdybyśmy zamienili x na $\frac{\pi}{4} - z$, to otrzymalibyśmy równanie:

$$a\left[\sin\left(\frac{\pi}{4} - z\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - z\right)\right] + b \sin\left(\frac{\pi}{4} - z\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - z\right) = c.$$

Otóż zamiana z na $-z$ nie zmienia tego równania, więc staramy się wyrazić to równanie w zależności od cos z. Jest to rzecz prosta, należy tylko porozwijać $\sin\left(\frac{\pi}{4} - z\right)$ i $\cos\left(\frac{\pi}{4} - z\right)$. Po uproszczeniu otrzymamy:

$$2b \cos^2 z + 2a\sqrt{2} \cos z - b - 2c = 0.$$

Łatwo jest zrozumieć, że zamiana taka wypadnie zawsze, jeśli równanie jest symetryczne względem sin x i cos x. Możemy dodać jeszcze jedną uwagę do podanych poprzednio:

Jeśli równanie jest symetryczne względem sin x i cos x, to należy postarać się wyrazić je w zależności od cos z, mając, że $x = \frac{\pi}{4} - z$.

Czasem równanie nie jest symetryczne względem sin x i cos x, ale prosta zamiana robi je symetrycznym. Naprzykład:

$$a(\sin x - \cos x) + b \sin x \cos x = c.$$

Jeśli zamienimy x na $\pi - x'$, to otrzymamy:

$$a(\sin x' + \cos x') - b \sin x' \cos x' = c.$$

Jest to już równanie symetryczne względem $\sin x'$ i $\cos x'$. Robimy więc nową zamianę $x' = \frac{\pi}{4} - z$; czyli $x = \pi - \frac{\pi}{4} + z$ lub też $x = \frac{3}{4}\pi + z$. Po tej zamianie przekształcamy równanie i otrzymujemy równanie wymierne względem $\cos z$.

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA DLA UCZĄCEJ SIĘ MŁODZIEŻY.

Nazwiska osób, które przyślą nam dobre rozwiązania, będziemy umieszczali w następnych numerach przy podanych rozwiązaniach.

Rozwiązania należy skierowywać do Redakcji, najpóźniej do 15 września r. b., podając nazwę i adres szkoły.

W celu zachęcenia młodzieży do brania udziału w rozwiązywaniu naszych zadań wyznaczamy *nagrodę* w postaci trzech tomów *Fizyki Witkowskiego* za najlepsze rozwiązanie zadań, podanych w niniejszym numerze. W razie kilku jednakowo dobrych rozwiązań losowanie rozstrzygnie, kto otrzyma nagrodę.

Zadania, skierowywane do Redakcji w celu umieszczania ich w Nauczaniu Matematyki i Fizyki, winny być nadsyłane wraz z rozwiązaniem.

1.—Na bilardzie prostokątnym $ABCD$ leży kula w punkcie O. W jakim kierunku należy pchnąć tą kulą, żeby ona odbiła się po kolei od brzegów AB, BC, CD, DA i przeszła znowu przez O? Jakie położenie powinna zajmować kula, ażeby zadanie było możebne? Kąt, pod którym kula uderza o brzeg, równa się kątowi, pod którym się od niego odbija.

2.—Trójkąt równoramienny ABC, mający kąt A prosty, obraca się dookoła osi BX, leżącej w płaszczyźnie trójkąta i nieprzecinającej tego trójkąta. Znaleźć kąt pomiędzy BX i BC tak, żeby objętość ciała, zatoczonego przez trójkąt, była V. Dane jest $AB = AC = b$. Jaką powinna być zadana objętość, żeby zadanie było możebne? Jaka jest największa i jaka jest najmniejsza możliwa objętość? Przy jakich wartościach V zadanie ma jedno rozwiązanie, a przy jakich dwa?

3.—Jakie położenie powinien zajmować przedmiot względem soczewki wypukłej, żeby obraz jego był rzeczywisty, i żeby odległość od przedmiotu do jego obrazu była najmniejszą. Dana jest odległość ogniskowa f soczewki.

ROZWIĄZANIA ZADAŃ (№ 1 NAUCZANIA).

1.—1°. $AC = CE$; $BD = DE$; CO i OD tworzą kąt prosty, jako dwusieczne kątów przyległych $AOE \times EOB$. W trójkącie prostokątnym COD mamy: $CE \times ED = OE^2$, czyli:

$$AC \times BD = R^2.$$

2°. Oznaczmy pole trójkąta COD przez y, otrzymamy:

$$y = \tfrac{1}{2} OE \times CD;\quad OE = R;\quad CD = CE + ED;$$

$$CE = AC = x;\quad DE = \frac{R^2}{AC} = \frac{R^2}{x};\quad CD = x + \frac{R^2}{x}.$$

$$y = \frac{R}{2}\left(x + \frac{R^2}{x}\right).$$

Odcinek x może się zmieniać, rosnąc od 0 do $+\infty$. Zobaczymy, jak się będzie zachowywało pole y. Można to znaleźć dwoma sposobami.

Pierwszy sposób. — Wyrażenie $x + \dfrac{R^2}{x}$ jest sumą dwu wielkości zmiennych x i $\dfrac{R^2}{x}$. Iloczyn tych wielkości jest stały, mianowicie R^2. Otóż wiadomo, że suma takich składników jest tym większą, im te składniki bardziej się od siebie różnią, ona jest najmniejszą, gdy te składniki są równe, t. j. gdy każdy z nich jest R. Możemy więc streścić nasze badanie w następującej tablicy:

x	0		R		$+\infty$
$x + \dfrac{R^2}{x}$		$\searrow$	$2R$	$\nearrow$	
y	$+\infty$	$\searrow$	R^2	$\nearrow$	$+\infty$

Drugi sposób.—Pole nasze wyraża się wzorem:

$$y = \frac{Rx^2 + R^3}{2x}.$$

Pochodna tej funkcji jest:

$$y' = \frac{Rx^2 - R^3}{2x^2} = \frac{R(x+R)(x-R)}{2x^2}.$$

Mianownik pochodnej jest dodatni. Czynniki R i $(x + R)$ też są dodatnie. Więc znak pochodnej jest taki, jak $(x - R)$. Otóż $x - R$ jest ujemne przy $x < R$ i dodatnie przy $x > R$. Wobec tego zmienność funkcji przedstawia się tak:

x	0		R		$+\infty$
y'		$-$		$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	R^2	$\nearrow$	$+\infty$

3°. Pole trójkąta ma równać się a^2, czyli:

$$\frac{Rx^2 + R^3}{2x} = a^2.$$

Skąd
$$Rx^2 - 2a^2x + R^3 = 0,$$
albo
$$x^2 - 2\frac{a^2}{R}x + R^2 = 0.$$

Budowę wypełniamy według artykułu, podanego w № 1 Nauczania, na str. 19. Na osi OX odkładamy odcinek $OE = \frac{a^2}{R}$, który łatwo jest znaleźć, według reguł, znanych z kursów geometrji. Na osi OY odkładamy odcinek $OF = R$. Przez punkty E i F prowadzimy dwie równoległe do obydwu osi, które przecinają się w punkcie O'. Z punktu O' jako ze środka zataczamy koło promieniem $O'F$, które wydziela na osi OX dwa odcinki OA i OB takie, że $OA = x'$ i $OB = x''$.

Warunek możebności zadania widoczny jest z badania funkcji: pole trójkąta nie może być mniejsze od R^2, t. j. $a^2 \geqslant R^2$, albo:

$$a \geqslant R.$$

Jeśli $a > R$, to zadanie ma dwa rozwiązania; jeśli $a = R$, to zadanie ma jedno rozwiązanie.

Dobre rozwiązanie tego zadania nadesłał Wacław Wróbel z gimn. hr. Z. Wielopolskiego (im. Św. Stanisława).

2.—Niech O będzie środkiem podstawy stożka, a S jego wierzchołkiem. Niech ABS będzie rozpatrywanym trójkątem, a OE odległością O od AB. Jeśli y oznacza pole trójkąta ABS, to:

$$y = AE \times SE.$$

$AE = \sqrt{r^2 - x^2}$, gdzie $r = OA$ i $x = OE$.

$SE = \sqrt{h^2 + x^2}$, gdzie $h = OS$.

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}\,\sqrt{h^2 + x^2} = \sqrt{r^2h^2 + (r^2 - h^2)x^2 - x^4}$$
$$= \sqrt{-[x^4 + (h^2 - r^2)x^2 - r^2h^2}$$
$$= \sqrt{-\left[\left(x^2 + \frac{h^2 - r^2}{2}\right)^2 - \frac{(r^2+rh)^2}{4}\right]}.$$

Z tej ostatniej formy widać, że jeśli x wzrasta od 0 do r, to x^2 wzrasta od 0 do r^2, zaś $x^2 + \frac{h^2 - r^2}{2}$ wzrasta od $\frac{h^2 - r^2}{2}$ do $r^2 + \frac{h^2 - r^2}{2}$ czyli do $\frac{h^2 + r^2}{2}$. Kwadrat wyrażenia $x^2 + \frac{h^2 - r^2}{2}$ zachowuje się różnie, zależnie od tego, czy to wyrażenie jest dodatnie, czy też ujemne. Rozpatrzymy więc dwa wypadki.

Wypadek, w którym $h \geqslant r$, *t. j.* $h^2 - r^2 \geqslant 0$. W tym wypadku $x^2 + \frac{h^2 - r^2}{2}$ jest zawsze dodatnie i jego kwadrat wzrasta. Wobec tego wyrażenie w nawiasie prostym również wzrasta. Wyrażenie podpierwiastkowe jako przeciwne do wartości nawiasu prostego maleje, więc i sam pierwiastek maleje. Rezultat badania można streścić tak:

x	0		r
x^2		↗	
$x^2 + \frac{h^2 - r^2}{2}$		↗	
$\left(x^2 + \frac{h^2 - r^2}{2}\right)^2$		↗	
$\left(x^2 + \frac{h^2 - r^2}{2}\right)^2 - \frac{(r^2+rh)^2}{4}$		↗	
$-\left[\left(x^2 + \frac{h^2 - r^2}{2}\right)^2 - \frac{(r^2+rh)^2}{4}\right]$		↘	
y	rh	↘	0

Wypadek, w którym $h < r$, t. j. $h^2 - r^2 < 0$.

W tym wypadku $\frac{h^2 - r^2}{2}$ jest ujemne i wobec tego suma $x^2 + \frac{h^2 - r^2}{2}$ jest albo ujemną albo dodatnią, zależnie od tego, czy $x^2 < \frac{r^2 - h^2}{2}$ czy też $x^2 > \frac{r^2 - h^2}{2}$, t. j. czy $x < \sqrt{\frac{r^2 - h^2}{2}}$ czy też $x > \sqrt{\frac{r^2 - h^2}{2}}$. Jeśli suma $x^2 + \frac{h^2 - r^2}{2}$ jest dodatnią, to jej kwadrat wzrasta, gdy ona sama wzrasta, ale gdy jest ujemną, to jej kwadrat maleje. Możemy więc w tym wypadku tak streścić badanie:

x	0		$\sqrt{\frac{r^2 - h^2}{2}}$		r
x^2		↗		↗	
$x^2 + \frac{h^2 - r^2}{2}$		− ↗	0	+ ↗	
$\left(x^2 + \frac{h^2 - r^2}{2}\right)^2$		↘	0	↗	
$\left(x^2 + \frac{h^2 - r^2}{2}\right)^2 - \frac{(r^2 + rh)^2}{4}$		↘		↗	
$-\left[\left(x^2 + \frac{h^2 - r^2}{2}\right)^2 - \frac{(r^2 + rh)^2}{4}\right]$		↗		↘	
y	hr	↗	$\frac{r^2 + h^2}{2}$	↘	0

Badanie pola y można byłoby wypełnić i zapomocą pochodnej.

3°. Kąt ASO wynosi $\frac{\pi}{3}$ czyli $\frac{180^0}{3} = 60^0$. Kąt $OAS = 30^0$ i wobec tego $r = h\sqrt{3}$. Tu $h < r$. Tabelka zmiany y przedstawia się tak:

x	0		h		$h\sqrt{3}$
y	$h^2\sqrt{3}$	↗	$2h^2$	↘	0

Niech $A'SB'$ będzie trójkąt o największym polu. Mamy $A'S = B'S = 2h$.

$$\text{Pole } A'SB = \frac{A'S \times B'S}{2} \times \sin S$$
$$= 2h^2 \sin S.$$

Ale to pole jest $2h^2$, więc:

$$2h^2 \sin S = 2h^2.$$

Skąd:

$$\sin S = 1 \qquad \text{i} \qquad S = 90^0.$$

Wobec tego kąty A' i B' są po 45^0.

Dobre rozwiązanie nadesłali: S. Janicki, W. Rabęcki (gimn. im. Władysława IV) i Wacław Wróbel (gimn. hr. Z. Wielopolskiego im. Św. Stanisława).

Rozwiązania pozostałych zadań podamy później.

NOWE KSIĄŻKI.

G. H. Hardy, prof. Uniw. w Cambridge.— *Wykłady elementarne z dziedziny analizy.*—Przełożył Wł. Wojtowicz. (Ze zbioru dzieł z dziedziny matematyki czystej i stosowanej „Wiedza matematyczna") Warszawa 1916.—Str. XV+492.

Książka prof. Hardyego, której tytuł, zmieniony przez tłumacza ze względu na nasze przyzwyczajenia myślowe, brzmi w oryginale „A course of pure mathematics" („Kurs matematyki czystej"), stanowi dla polskiej literatury naukowej nabytek nader pożądany i cenny. Nie jest to, co prawda, zupełny kurs uniwersytecki czy politechniczny, i nie trudno wymienić działy, których brak do tego; autor sam zaznacza, że „książką niniejszą prawdopodobnie posługiwać się będą obok innych podręczników." Mimo to jednak, zwłaszcza gdy chodzi o rozpoczynających studja wyższe, dla których jest właśnie przeznaczona przez autora, można ją polecić gorąco do codziennego użytku. Składają się na to czynniki następujące: obszerny, bądź co bądź, zakres zagadnień zbadanych lub poruszonych, wielka liczba przykładów i ćwiczeń, ścisłość roztrząsań, sposób nowoczesny ujęcia tematu i jego rozwinięcia, duża ogólnie jasność i przejrzystość wykładu, wreszcie nacisk szczególny, położony na wyjaśnienie i uwydatnienie niektórych pojęć zasadniczych. Prof. Hardy, zastanawiając się nad brakiem pewności, ujawniającym się u najzdolniejszych słuchaczy przy stosowaniu praktycznym pojęć granicy, ciągłości i t. p., dochodzi do wniosku, wypowiedzianego w uwagach wstępnych, że nasuwające się w tym zakresie trudności „nie są większe od tych, które młody matematyk przezwycięża w każdym innym dziale swej nauki. Winien tu nie przedmiot, lecz książka i nauczyciel." ...„nie wystarczy powiedzieć prawdę, trzeba wyłożyć ją szczegółowo i dobitnie."

To, co nazywam stanowiskiem nowoczesnym autora, zostało uwydatnione: w dobrej analizie pojęcia funkcji, w znaczeniu najogólniejszym tego słowa; w całym przebiegu roztrząsań, dotyczących pojęcia granicy i należytym związaniu z nimi określeń pochodnej i całki; we wprowadzeniu pewnych wiadomości z dziedziny teorji mnogości, a jednocześnie w ostrożności przy używaniu terminów: nieskończenie mały, nieskończenie wielki, rząd nieskończenie małej i t. p., powodującej szczęśliwe uniknięcie tego, co w oczach początkującego jest tylko tajemniczą i oszałamiającą ekwilibrystyką z „jakimiś" głównymi i podrzędnymi częściami nieskończenie małych i nieskończenie wielkich (o różniczkach — tylko krótka wzmianka na str. 312); wreszcie — że poprzestanę tylko na rzeczach najistotniejszych—w dążeniu do poglądowości, kierującym np. tak wyraźnie wykładem, o liczbach zespolonych w rozdz. III.

Do wad książki zaliczyłbym: pewien brak przejrzystości w ogólnym planie i nierównomierność w roztrząsaniu różnych zagadnień, niezawsze dość usprawiedliwioną przez zamiar zajęcia się przedewszystkim tym właśnie, co gdzieindziej zostało pominięte lub zbyt pobieżnie uwzględnione. Pozatym, zaznaczyć można jeszcze nieco usterek bardziej specjalnych, nad którymi trudno się tu rozwodzić: mętność w klasyfikacji miejsc nieciągłości, sposób ujęcia pewnych drobniejszych szczegółów w definicjach granic i ich uzasadnieniach i niektóre inne.

W celu lepszego zorjentowania czytelnika, przytaczam tytuły rozdziałów: I. O zmiennych rzeczywistych. II. O funkcjach zmiennej rzeczywistej. III. O liczbach zespolonych. IV. O granicach funkcji zmiennej, całkowitej, dodatniej [$\varphi(n)$]. V. O granicach funkcji zmiennej ciągłej. O f. ciągłych i nieciągłych. VI. O pochodnych i całkach. VII. Dalsze twierdzenia... VIII. O zbieżności szeregów nieskończonych i całek nieskończonych. IX. O f. logarytmicznych i wykładniczych zmiennej rzeczywistej. X. Ogólna teorja f. logarytmicznej, wykładniczej, oraz f. kołowych.—Dodatki I i II.

Co do języka przekładu, posiada on zwykłe zalety stylu p. Wojtowicza: poprawność, jasność, giętkość i potoczystość. Nie spierając się o szczegóły, leżące, być może, najzupełniej w zakresie prawowitej swobody wyboru, uczynię jednak w tym względzie parę zastrzeżeń. Mimo tradycji, uważam za nieprawidłowe użycie wyrazów: połóżmy, kładźmy— zamiast: ***załóżmy***, przypuśćmy, umówmy się i t. p. Pozatym razi moje poczucie językowe (rzecz może bardziej sporna!) dość upowszechnione zresztą użycie przyimka „na" w takich zwrotach, jak „wartość *na* x" (zamiast: wartość x-a, wartość x, wartość zmiennej x). Należy liczyć się z tym, że język naukowy jest również czymś, wymagającym kontroli i doskonalenia, i że w szczególności walczyć wypada z niewłaściwymi zapożyczeniami z mowy obcej.

Ambicją każdego autora dzieł podstawowych — w większym stopniu jeszcze niż monografów—winno być nadawanie im takiej postaci, by się stawały wzorami odpowiedniego stylu; nie możemy jednak powiedzieć, aby tak było zawsze w przeszłości, bądź to z powodu warunków zewnętrznych (wydawnictwa emigracyjne), bądź też ze względu na trudność pierwszych kroków w danej dziedzinie... Następcom tedy przystoi prostować drogi poprzedników, z uwzględnieniem nawet drobnych szczegółów.

Do omawianego przekładu wkradła się — co uważam za potrzebne zaznaczyć—pewna liczba błędów zecerskich. Winny temu zapewne przedewszystkim wyjątkowe warunki pracy, w których żyjemy obecnie—w każdym razie jednak łatwo temu będzie zaradzić w nowym wydaniu, którego, jak sądzę, książka winna się doczekać.

T. Łazowski.

REDAKTOR I WYDAWCA TADEUSZ GUTKOWSKI.