

Politechnika Lubelska
Katedra Podstaw Techniki

P.269



PRACA HABILITACYJNA

Jerzy Montusiewicz

**EWOLUCYJNA ANALIZA
WIELOKRYTERIALNA
W ZAGADNIENIACH
TECHNICZNYCH**

5/2004

WARSZAWA 2004

<http://rcin.org.pl>

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 3 marca 2004 r.

recenzenci

Prof.dr hab.inż. Andrzej Osyczka
Dr hab.inż. Witold Paczkowski Prof.nadzw.PS

Redaktor Naczelny - Prof. dr hab. Józef J. Telega



57263

Praca habilitacyjna

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 150 egz. Ark. wyd. 9,0 Ark. druk. 11,25
Oddano do drukarni w sierpniu 2004 r.

Druk i oprawa: Drukarnia Braci Grodzickich, Piaseczno, ul. Geodetów 47A

SPIS TREŚCI

Ważniejsze oznaczenia i skróty terminologiczne	3
1. Wprowadzenie	10
1.1. Wybrane pojęcia podstawowe	12
1.2. Punkty charakterystyczne w przestrzeni kryterialnej	17
1.2.1. Punkty będące wewnętrznymi właściwościami podzbioru	17
1.2.2. Dodatkowe punkty charakterystyczne	19
1.2.3. Punkty definiowane w przestrzeni kryterialnej	21
2. Przegląd wybranych metod analizy wielokryterialnej	23
2.1. Metody skalaryzacji	24
2.2. Metody z relacją przewyższania	28
2.3. Metody funkcji dystansowej	35
2.4. Metody leksykograficzne i hierarchiczne	38
2.5. Metody analizy grupowej	39
2.6. Podsumowanie przeglądu wybranych metod	42
3. Teza i zakres pracy	44
4. Ewolucyjny System Analizy Wielokryterialnej <ESAW>	46
4.1. Budowa ogólna systemu <ESAW>	46
4.2. Wstępna filtracja zbioru rozwiązań	51
4.2.1. <i>Metoda Wartości Progowej</i>	51
4.2.2. <i>Metoda Definiowania Punktu Idealnego</i>	57
4.3. Selekcja zbioru rozwiązań <i>Metodą Przedziału Nierozróżnialności</i>	60
4.3.1. Podstawowe algorytmy realizacji <i>Metody Przedziału Nierozróżnialności</i> (MPN)	65
4.3.2. Zjawisko wzajemnego wykluczania	73
4.3.3. Zjawisko łańcucha eliminacji	80
4.4. Filtracja zbioru rozwiązań <i>Metodą Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych</i> (MWRK)	83
4.4.1. Wyznaczanie rozwiązań kompromisowych – FAZA I	86
4.4.2. Wyznaczanie rozwiązań kompromisowych – FAZA II	87
4.4.3. Przykład ilustrujący działanie MWRK	93

5.	Testowanie metod <i>Ewolucyjnego Systemu Analizy Wielokryterialnej</i>	95
5.1.	Testowanie <i>Metody Przewidywania Nierozróżnialności</i>	95
5.1.1.	Filtracja wyników optymalizacji wielokryterialnej wielostopniowej belki wspornikowej	95
5.1.2.	Filtracja w przestrzeni trójwymiarowej	105
5.2.	Testowanie <i>Metody Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych</i> ..	111
5.2.1.	Wielokryterialna analiza wariantów impulsowej obróbki elektrochemicznej	112
5.2.2.	Wielokryterialna ocena wariantów systemu dystrybucyjnego paliw	115
6.	Zastosowanie systemu <ESAW> w zagadnieniach technicznych ..	119
6.1.	Wybór wariantów projektowanej przekładni zębatej przy wykorzystaniu systemu <ESAW>	120
6.1.1.	Zarys modelu optymalizacji wielokryterialnej i uzyskane wyniki ..	120
6.1.2.	Wyniki analizy wielokryterialnej	121
6.1.3.	Wnioski dotyczące przeprowadzonej analizy postoptymalnej ...	124
6.2.	Ocena wpływu paliwa ekologicznego na zużycie rozpylaczy paliwa <i>Metodą Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych</i>	126
6.2.1.	Szczegóły techniczne i rezultaty badań	126
6.2.2.	Kryteria oceny i zbiorcze zestawienie wyników badań	127
6.2.3.	Wyniki analizy wielokryterialnej	127
6.2.4.	Wnioski dotyczące wpływu stosowania paliwa ekologicznego na zużycie rozpylaczy paliwa	131
6.3.	Ocena wpływu konstrukcji rozpylacza paliwa na toksyczność spalin przy wykorzystaniu systemu <ESAW>	132
6.3.1.	Opis i wyniki badań	133
6.3.2.	Analiza siedmiokryterialna emisji toksycznych składników spalin ..	135
6.3.3.	Analiza czterokryterialna emisji toksycznych składników spalin ..	136
6.3.4.	Analiza <i>Metodą Przewidywania Nierozróżnialności</i>	139
6.3.5.	Wnioski dotyczące wpływu konstrukcji rozpylacza na toksyczność spalin	140
6.4.	Ocena projektów kształtu uzwojenia kriomagnesu separatora HGMS przy użyciu systemu <ESAW>	141
6.4.1.	Metoda wyznaczania wariantów projektowych	141
6.4.2.	Analiza wielokryterialna z wykorzystaniem systemu <ESAW> ..	144
6.4.3.	Wnioski końcowe	148

6.5. Wykorzystanie systemu <ESAW> do oceny efektów projektowania ślizgowych łożysk wzdłużnych przy zastosowaniu MES	148
6.5.1. Opis projektowanego obiektu	149
6.5.2. Analiza wielokryterialna z wykorzystaniem systemu <ESAW> ..	150
6.5.3. Wnioski dotyczące ślizgowych łożysk wzdłużnych	156
6.6. Ocena skuteczności wibroizolacji frezarki FWD-32J <i>Metodą Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych</i>	156
6.6.1. Opis i wyniki obliczeń na podstawie danych literaturowych	156
6.6.2. Analiza <i>Metodą Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych</i> . . .	159
6.6.3. Wnioski końcowe	161
7. Uwagi końcowe, wnioski i prognozowanie dalszych prac	162
7.1. Wnioski poznawcze	164
7.2. Wnioski użytkowe i szczegółowe, dotyczące przykładów obliczeniowych	166
7.3. Główne elementy dorobku pracy	167
7.4. Prognozowane kierunki badań	168
Bibliografia	170
Streszczenie	183
Summary	184

WAŻNIEJSZE OZNACZENIA I SKRÓTY TERMINOLOGICZNE

OZNACZENIA

- $a_i; a_{11}$ – odpowiednio: promień wewnętrzny i zewnętrzny uzwojenia głównego,
- a^f_i – numer i -tego rozwiązania w metodzie Yagera,
- $b; b$ – szerokość belki wspornikowej; połowa długości uzwojenia głównego kriomagnesu separatora HGMS,
- B_0, B_k – indukcja magnetyczna w nadprzewodnikowym uzwojeniu kriomagnesu oraz w różnych punktach cewki kriomagnesu,
- B^* – względna szerokość podatnego segmentu łożyska wzdłużnego,
- c_j – unormowana lub wyrażona w punktach albo w skali pieniężnej wartość kryterium F_j ,
- c^*_{ijl} – unormowane wartości oceny w metodzie Yagera,
- C_0 – stożek dodatni o wierzchołku w punkcie zero,
- C_{F^*} – stożek dodatni o wierzchołku w punkcie F^* ,
- d_{ij} – elementy macierzy D ,
- D – macierz odległości w metodzie ORESTE,
- d^Y_j – decyzje unormowane w metodzie Yagera,
- D^Y – decyzje optymalne, $D^Y = D_1 + D_2 + \dots + D_l$ w metodzie Yagera,
- E – macierz intensywności preferencji w metodzie ORESTE,
- e_{ij}, e^n_{iij} – elementy macierzy oraz macierzy unormowanej intensywności preferencji,
- e_j – wartość progowa dla j -tego kryterium,
- f_c, f_{c_j} – postulowany wektor realizacji $F(x)$ oraz wektor j -tej składowej funkcji celu $F_j(x)$,
- f_s, f_{s_j} – zadowalająca wartość $F(x)$ oraz j -tej funkcji celu $F_j(x)$,
- $F(x)$ – wektor funkcji celu, $F(x) = [F_1(x), F_2(x), \dots, F_j(x)]^T$,
- F_{jmax}, F_{jmin} – odpowiednio: największa i najmniejsza wartość j -tej składowej w zbiorze rozwiązań niezdominowanych,
- F^f, F^2 – rozwiązania ze zbioru rozwiązań niezdominowanych,
- $F^{ai}(x)$ – punkt (wektor) antyidealny, $F^{ai}(x) = [F^{ai}_1(x), F^{ai}_2(x), \dots, F^{ai}_j(x)]^T$,
- $F^n(x)$ – punkt (wektor) narożny, $F^n(x) = [F^n_1(x), F^n_2(x), \dots, F^n_j(x)]^T$,
- $F^{na}(x)$ – punkt (wektor) Nadir, $F^{na}(x) = [F^{na}_1(x), F^{na}_2(x), \dots, F^{na}_j(x)]^T$,
- $F^{ni}(x)$ – lokalny punkt Nadir, $F^{ni}(x) = [F^{ni}_1(x), F^{ni}_2(x), \dots, F^{ni}_j(x)]^T$,
- $F^o(x)$ – punkt (wektor) idealny, $F^o(x) = [F^o_1(x), F^o_2(x), \dots, F^o_j(x)]^T$,
- $F^{o'}(x)$ – nowy punkt (wektor) idealny, $F^{o'}(x) = [F^{o'}_1(x), F^{o'}_2(x), \dots, F^{o'}_j(x)]^T$,
- $F^{oi}(x)$ – i -ty naddany punkt idealny, $F^{oi} = [F^{oi}_1, F^{oi}_2, \dots, F^{oi}_j]^T$,
- $F^*(x)$ – rozwiązanie kompromisowe, $F^* = [F^*_1, F^*_2, \dots, F^*_j]^T$,

$F^{*i}(x)$	– i -te rozwiązanie kompromisowe, $F^{*i} = [F^{*i}_1, F^{*i}_2, \dots, F^{*i}_j]^T$,
$F^{PC}(x)$	– rozwiązanie preferowane wyznaczone metodą programowania celów,
$F^T(x)$	– rozwiązanie kompromisowe wyznaczone metodą TOPSIS,
$F^z(x)$	– kryterium zadaniowe,
G	– gęstość mocy cieplnej kriomagnesu,
G_i	– kryterium globalne,
H	– grubość podatnego segmentu łożyska wzdłużnego,
I	– relacja równoważności,
I	– zbiór indeksów rozpatrywanych rozwiązań dopuszczalnych,
J	– zbiór indeksów rozpatrywanych kryteriów,
J_1, J_2	– gęstość prądu w uzwojeniu głównym i w dozwojeniu kriomagnesu separatora HGMS,
k_j	– ranga j -tego kryterium,
$k_{j^*}^*, k_j^*$	– odpowiednio: oceny unormowane oraz łączne oceny unormowane kryteriów w metodzie Yagera,
l	– długość segmentu belki wspornikowej,
L	– zbiór indeksów ekspertów,
M^S, M^{SI}	– odpowiednio: macierz ocen i ilorazów w metodzie Saaty'ego,
M^W	– macierz ważności poszczególnych kryteriów w metodzie Yagera, $M^W = [m_{jj}]$,
N	– zbiór indeksów rozwiązań niezdominowanych,
p_j	– próg preferencji,
p_1	– definiowana wiarygodność w metodzie wagowo-korelacyjnej,
P, P_j	– relacja preferencji mocnej,
p_j^{ND}	– względna wartość przedziału zmienności j -tej składowej,
pN_j	– przedział nierozróżnialności dla j -tego kryterium,
q_j	– próg rozróżnialności,
Q	– siła obciążająca belkę,
$Q(F^T)$	– kwalifikator decyzji w metodzie ELECTRE III,
Q, Q_j	– relacja preferencji słabej,
$r \in \{1, 2, \infty\}$	– parametr normy wektora,
r	– próg nieporównywalności,
R	– rezystancja uzwojenia,
R	– relacja nieporównywalności,
R_w	– średnica wewnętrzna segmentu łożyska wzdłużnego,
R_z	– średnica zewnętrzna segmentu łożyska wzdłużnego,

S	– relacja przewyższania,
S(λ)	– próg relacji przewyższania,
S_F	– mocna relacja przewyższania,
S_f	– słaba relacja przewyższania,
S^S	– skala ocen w metodzie Saaty'ego,
T, T_c	– temperatura robocza i krytyczna kriomagnesu,
v_j	– próg weta,
uⁿ_{kij}	– <i>k</i> -te elementarne kryterium skuteczności wibroizolacji w <i>j</i> -tym reprezentatywnym modelu dla <i>i</i> -tego wibroizolatora,
U_R	– napięcie strefy rezystywnej,
w_j; ω_j	– waga preferencji <i>j</i> -tego kryterium,
W^w	– wektor własny w metodzie Yagera, $\mathbf{W}^w = [w^w_1, w^w_2, \dots, w^w_j]^T$,
x	– wektor zmiennych decyzyjnych, $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$,
x^{id}	– wektor zmiennych decyzyjnych rozwiązania idealnego,
y_j	– składowa punktu charakterystycznego,
Y	– zbiór rozwiązań dopuszczalnych,
Y_{ND}	– zbiór rozwiązań niezdominowanych,
Y_{Sj}	– zbiór ocen satysfakcji <i>j</i> -tego kryterium,
Y^L_j	– zbiór rozwiązań w metodzie leksykograficznej,
$\bar{\mathbf{y}}_s$	– ocena zadowolająca, $\bar{\mathbf{y}}_s = [\bar{y}, \bar{y}_{s2}, \dots, \bar{y}_{sj}]^T$,
α, β	– wielkości bezwymiarowe kriomagnesu separatora HGMS,
α_j	– stała <i>j</i> -tego kryterium,
γ	– ranga globalna rozwiązania \mathbf{F}^i ,
γ_{ij}	– rangi cząstkowe rozwiązania \mathbf{F}^i z punktu widzenia <i>j</i> -tego kryterium,
δ_j^{ND}	– dyspersja <i>j</i> -tej składowej, $\delta_j^{\text{ND}} \in (0, 2)$,
λ	– maksymalna wartość relacji przewyższania S w metodzie ELECTRE III,
ω_j	– <i>j</i> -ta waga preferencji kryterium,
ξ_j	– <i>j</i> -ty parametr zapewniający porównywalność składników,
ζ_j	– <i>j</i> -ty parametr normujący.

SKRÓTY TERMINOLOGICZNE

DF	–	algorytm dwufazowy,
<ESAW>	–	Ewolucyjny System Analizy Wielokryterialnej,
JF	–	algorytm jednofazowy,
H-NWPN	–	algorytm hybrydowy z narastającą wartością przedziału nierozróżnialności,
K-NWPN	–	algorytm klasyczny z narastającą wartością przedziału nierozróżnialności,
KPT	–	algorytm z korekcją przedziału nierozróżnialności,
MDPI	–	Metoda Definiowania Punktu Idealnego,
MES	–	Metoda Elementów Skończonych,
MPN	–	Metoda Przedziałów Nierozróżnialności,
MTS	–	model masowo–tłumiąco–sprężysty,
MWP	–	Metoda Wartości Progowej,
MWRK	–	Metoda Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych,
ON	–	olej napędowy,
ONM	–	ekologiczny olej napędowy,
RNSPN	–	rozwiązanie niezdominowane w sensie przedziału nierozróżnialności,
ROSP	–	rozwiązanie optymalne w sensie Pareto,
ZWW	–	zjawisko wzajemnego wykluczania.

OZNACZENIA GRAFICZNE

*	–	ocena dopuszczalna, zdominowana,
⊗	–	zdominowana ocena satysfakcji,
⊙	–	ocena spełniająca zdefiniowany punkt idealny,
✱	–	pierwsze rozwiązanie kompromisowe,
✕	–	rozpylacz optymalny w sensie min-max,
★	–	wybrane rozwiązanie,
■	–	punkt idealny,
□	–	nowy wektor idealny,
▣	–	nadążny punkt idealny I rzędu,
▤	–	nadążny punkt idealny II rzędu,
▪	–	nadążny punkt idealny,
◻	–	punkt quasi idealny,
▲	–	punkt nadir,
△	–	punkt quasi nadir,
◇	–	punkt narożny,

- ◇ – ocena satysfakcjonująca, zadowolająca,
- ◊ – rozwiązanie spełniające ocenę satysfakcjonującą,
- ◆ – rozwiązanie spełniające ocenę satysfakcjonującą i zdefiniowany punkt idealny,
- – ocena niezdominowana, ocena leżąca poza stożkiem dominacji,
- ◐ – niezdominowana ocena satysfakcji,
- – ocena rozwiązania kompromisowego,
- – rozwiązanie niezdominowane,
- ⊙ – rozwiązanie należące do stożka dominacji (rozwiązanie wyeliminowane),
- ∅ – eliminacja,
- ▼ – punkt antyidealny,
- ▽ – wzorzec negatywny,
- +
- wzorzec pozytywny.

1. Wprowadzenie

Zagadnienie wspomagania decyzji wielokryterialnych w problemach technicznych stało się niezmiernie ważne ze względu na zastosowanie narzędzi komputerowych do projektowania elementów maszyn oraz ich wytwarzania. Metody obliczeniowe z wbudowaną procedurą optymalizacyjną, takie jak: metoda przeglądu zupełnego [14, 17, 18, 90, 221], programowania celowego [131, 132, 157], Monte Carlo [63, 90, 131, 132, 221, 249], metody gradientowe i bezgradientowe [38, 41, 47, 52, 61, 62, 64, 127, 171, 172, 190, 217, 247], metody optymalizacji dyskretnej [14, 48, 50, 71, 72, 74, 91, 126, 131, 138, 184, 231], algorytmy genetyczne [22, 43, 103, 133], algorytmy ewolucyjne [8, 10, 22, 103, 133, 134, 138, 143, 144, 173, 238], czy też metody bez wbudowanych procedur optymalizacyjnych, np.: metoda elementów skończonych [128, 154, 165, 232, 250] lub metoda elementów brzegowych [21], umożliwiają wygenerowanie bardzo licznych zbiorów rozwiązań dla różnych parametrów konstrukcyjnych. Stosując wektorowy wskaźnik jakości, konstruktor staje przed problemem dokonania wyboru: w fazie wstępnej – podzbioru „rozwiązań najlepszych” z określeniem interesującego go podzbioru zmiennych decyzyjnych, a w fazie końcowej – jednego rozwiązania. Z analizy literaturowej wynika znaczna dysproporcja między stanem badań nad rozwojem i zastosowaniem metod służących do przeprowadzania obliczeń wskaźników projektowania konstrukcji, a metodami służącymi do wspomagania procesu wyboru. Adaptowanie systemów podejmowania decyzji stosowanych w problematyce zarządzania i organizacji przedsiębiorstwa dla potrzeb techniki nie zawsze jest możliwe ze względu na specyfikę proponowanego tam podejścia [6, 74, 75, 76, 92, 93, 104, 125, 146, 158].

Inny problem spotykany w zagadnieniach technicznych, to wybór rozwiązań z oferty katalogowej lub przetargowej [24, 81, 84, 95, 116, 117, 118, 119, 120, 149, 152, 159, 182, 191, 251]. Oferta rozumiana jest tutaj jako zbiór rozwiązań już istniejących, które są stosowane przez wielu użytkowników, lub jako zbiór

nowych, dopiero opracowanych, zaprojektowanych i wykonanych konstrukcji, które bada się w celu ustalenia ich rzeczywistych parametrów użytkowych.

Duża liczba różnych wielkości charakteryzujących urządzenie techniczne sprawia, że często mamy do czynienia z wektorowymi wskaźnikami jakości. W sytuacji, gdy jedno z tych wskaźników minimalizujemy, a pozostałe maksymalizujemy, oraz mając na uwadze fakt, że wiele z tych wskaźników wyrażonych jest w różnych jednostkach (niektóre wskaźniki jakości mają charakter ekonomiczny, np.: koszt zakupu, koszt eksploatacji, inne – charakter techniczny), problem poprawnego wyboru „rozwiązań najlepszych” jest sprawą bardzo trudną.

1.1. Wybrane pojęcia podstawowe

Szczegółowy opis zagadnień związanych z optymalizacją, optymalizacją wielokryterialną, analizą wielokryterialną, teorią relacji i topologią można znaleźć w bogatej literaturze [3, 18, 32, 38, 41, 47, 50, 70, 72, 82, 90, 99, 100, 138, 145, 151, 155, 163, 171, 172, 201, 202, 229, 230, 231, 245]. W rozdziale 1.1 przedstawiono wybrane pojęcia z zakresu analizy wielokryterialnej, które wykorzystano w opisie prezentowanego *Ewolucyjnego Systemu Analizy Wielokryterialnej* <ESAW>.

Zadanie optymalizacji wielokryterialnej

Ogólnie problem optymalizacji wielokryterialnej można sformułować następująco: znaleźć wektor zmiennych decyzyjnych

$$\mathbf{x}^* = [x^*_1, x^*_2, \dots, x^*_j]^T \quad (1.1)$$

taki, że optymalizuje funkcję wektorową

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = [F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), \dots, F_j(\mathbf{x})]^T \quad (1.2)$$

i spełnia narzucone ograniczenia, gdzie

$i = \{1, 2, \dots, I\}$ – zbiór indeksów zmiennych decyzyjnych,

$j = \{1, 2, \dots, J\}$ – zbiór indeksów kryteriów.

Analizowany obiekt jest opisywany przez zmienne decyzyjne, które podlegają wariacjom w procesie optymalizacji, oraz przez parametry – wielkości ustalone wcześniej (przyjęte założenia projektowe) pozostające jako stałe w całym procesie optymalizacyjnym. Zmienne decyzyjne określone są w i -wymiarowej przestrzeni zmiennych decyzyjnych $A \subset R^I$. Obszar rozwiązań dopuszczalnych X wyznaczają ograniczenia nałożone na zmienne decyzyjne i stanowiące część przestrzeni zmiennych decyzyjnych.

Ograniczenia występujące w zadaniu optymalizacji wielokryterialnej można podzielić na brzegowe oraz zachowawcze. Ograniczenia brzegowe występują w postaci jawnej i są nakładane na elementy wektora zmiennych decyzyjnych

$$\underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i \quad (1.3)$$

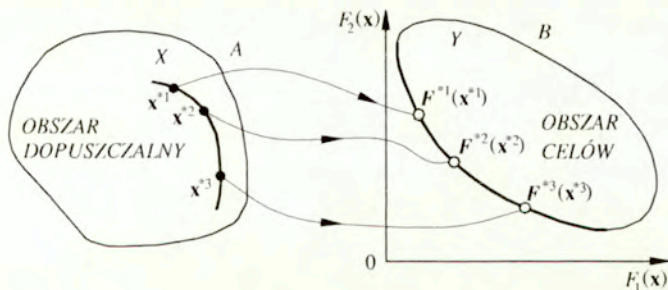
Ograniczenia zachowawcze są zależnościami pomiędzy zmiennymi decyzyjnymi oraz parametrami, i mogą przyjmować postać równości lub nierówności

$$h_l(\mathbf{x}) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, s \quad (1.4)$$

$$g_l(\mathbf{x}) \leq 0, \quad l = s+1, \dots, S$$

Nałożone ograniczenia mogą okazać się ograniczeniami istotnymi (ich pominięcie zmienia zbiór rozwiązań dopuszczalnych X) albo nieistotnymi (eliminacja ich nie zmienia zbioru), aktywnymi (dla danego rozwiązania \mathbf{x}^* jest ono spełnione jako równość) albo nieaktywnymi (w tym przypadku mamy styczność z nierównościami ostrymi).

Składowa funkcji wektorowej $F_j(\mathbf{x})$, zwana często funkcją celu, wskaźnikiem jakości lub kryterium, jest zazwyczaj wyrażeniem matematycznym opisującym wybraną właściwość optymalizowanego obiektu [62].



Rys. 1.1. Odzworowanie obszaru dopuszczalnego X w obszar celów Y , ● – rozwiązanie niezdominowane, ○ – ocena rozwiązania niezdominowanego

Optimum w sensie Pareto (OSP)

Rozwiązania niezdominowane, często nazywane rozwiązaniami optymalnymi w sensie Pareto (OSP) [25, 66, 79, 143], są jednoznacznie określone matematycznie. Rozwiązanie jest optymalne w sensie Pareto, jeśli żadne z kryteriów $F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), \dots, F_j(\mathbf{x})$ nie może być poprawione bez jednoczesnego pogorszenia przynajmniej jednego z nich. Element $\mathbf{x}^* \in X$ jest nazywany rozwiązaniem optymalnym w sensie Pareto wtedy i tylko wtedy, gdy w zbiorze X nie istnieje taki element $\tilde{\mathbf{x}}$, że dla każdego $j \in J$

$$F_j(\tilde{\mathbf{x}}) \leq F_j(\mathbf{x}^*) \quad (1.5)$$

oraz istnieje $m \in J$, takie że

$$F_m(\mathbf{x}^*) < F_m(\mathbf{x}^*) \quad (1.6)$$

Relacje porządku częściowego

Do wyznaczenia rozwiązań optymalnych w sensie Pareto stosujemy relacje porządku częściowego określone przez stożek. Stożek dodatni o wierzchołku w zerze, należący do j -wymiarowej euklidesowej przestrzeni celów definiujemy następująco [3, 127, 244]

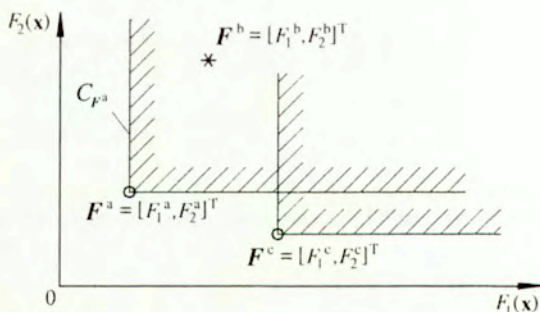
$$C_0 = \{F = [F_1, \dots, F_j]^T : F_j \geq 0 \ (j = 1, \dots, J)\} \quad (1.7)$$

zaś stożek dodatni o wierzchołku w punkcie $F^s = [F^s_1, \dots, F^s_j]^T$

$$C_{F^s} = \{F = [F_1, \dots, F_j]^T : (F_j - F^s_j) \geq 0 \ (j = 1, \dots, J)\} \quad (1.8)$$

Definicja relacji porządku częściowego określona przez stożek dodatni jest następująca: element $F^a = [F^a_1, \dots, F^a_j]^T$ jest mniejszy, według relacji porządku częściowego ($^c <$) określonego przez stożek dodatni, od elementu $F^b = [F^b_1, \dots, F^b_j]^T$, jeżeli element F^b należy do stożka dodatniego o wierzchołku w punkcie F^a

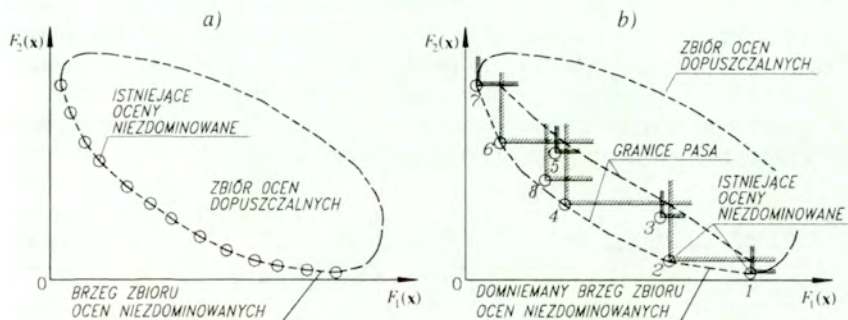
$$F^a <^c F^b, \text{ jeżeli } F^b \in C_{F^a} \quad (1.9)$$



Rys. 1.2. Ilustracja relacji mniejszości określona przez stożek dodatni według relacji porządku częściowego w dwuwymiarowej przestrzeni, \circ – oceny niezdominowane, $*$ – ocena zdominowana

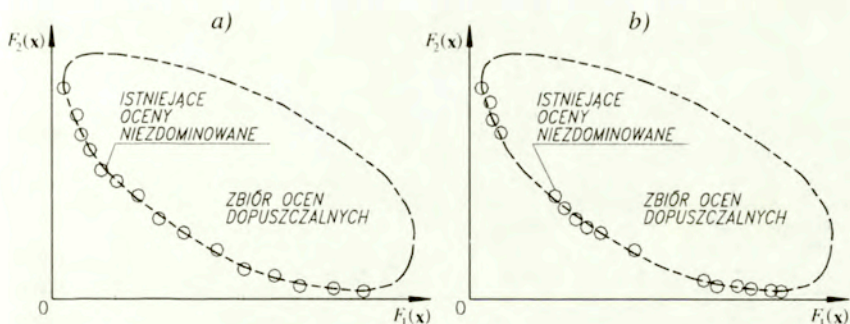
Na rysunku 1.2 przedstawiono elementy F^a i F^b w przestrzeni dwuwymiarowej. Zaznaczono również element F^c , dla którego element F^a nie jest ani mniejszy, ani większy według relacji porządku częściowego określonego przez stożek dodatni. Elementy F^a i F^c należą do zbioru ocen niezdominowanych.

W zadaniach wyboru można spotkać się z różnymi przypadkami rozmieszczenia elementów niezdominowanych: istniejące oceny niezdominowane mogą leżeć na brzegu zbioru rozwiązań niezdominowanych, co pokazano na rysunku 1.3a lub być rozproszone – rysunek 1.3b.



Rys. 1.3. Rozmieszczenie ocen niezdominowanych przy dwukryterialnej minimalizacji

W drugim przypadku można wskazać tzw. domniemany brzeg zbioru ocen niezdominowanych, który wyznaczany jest przez część istniejących ocen niezdominowanych. Pozostałe oceny niezdominowane są w stosunku do niego przesunięte. Tak więc oceny niezdominowane leżą w pasie, którego szerokość zależy od liczebności analizowanego zbioru i rozmieszczenia jego elementów. Oczywiście dostępne są tylko te części pasa, które nie należą do stożków dominacji umieszczonych w ocenach niezdominowanych. Z rysunku 1.3b widać, że nie wszystkie oceny niezdominowane są równoprawne. Gdyby pojawiło się rozwiązanie, którego ocena leżałaby bliżej domniemanego brzegu, np. rozwiązanie numer 8, to ono wyeliminowałoby rozwiązanie dotychczas niezdominowane – numer 5 – leżące w głębi pasa.



Rys. 1.4. Rozmieszczenie ocen niezdominowanych przy dwukryterialnej minimalizacji

Oceny niezdominowane mogą być również rozmieszczone równomiernie w całym zakresie zmienności rozważanego kryterium – co pokazano na rysunku 1.4a, lub skupione w grupy rozwiązań, tak jak przedstawiono na rysunku 1.4b.

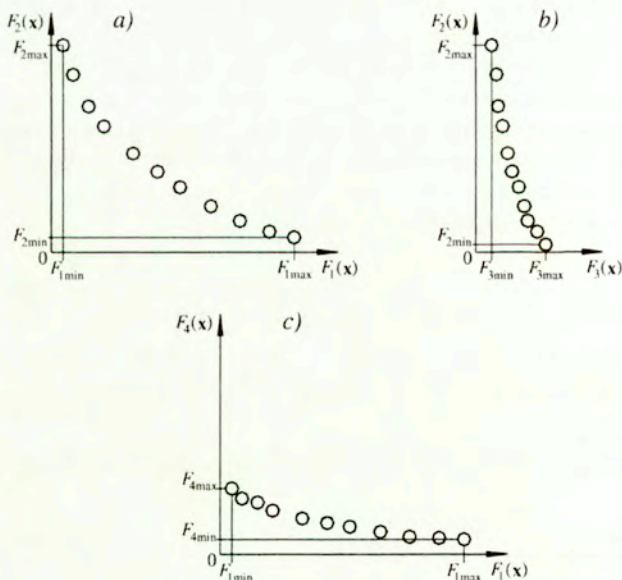
W niektórych sytuacjach – mimo równomiernego rozmieszczenia ocen niezdominowanych – przedziały zmienności wartości przyjmowanych przez poszczególne kryteria składowe są wielokrotnie węższe niż dla innych kryteriów. Należy pamiętać, że jednostki przyjęte do graficznej prezentacji rozmieszczenia rozwiązań mogą mieć wpływ na ostateczny wygląd rysunku.

Parametrem rozmieszczenia, pomocnym we wstępnej analizie składowych ocen, mogą być wielkości wyrażone następującymi formułami

$$P_j^{\text{ND}} = \frac{F_{j\max} - F_{j\min}}{F_{j\min}} \quad \delta_j^{\text{ND}} = 2 \frac{F_{j\max} - F_{j\min}}{F_{j\max} + F_{j\min}} \quad (1.10)$$

gdzie

- P_j^{ND} – względna wartość przedziału zmienności j -tej składowej,
- $F_{j\max}, F_{j\min}$ – odpowiednio: największa i najmniejsza wartość j -tej składowej w zbiorze rozwiązań niezdominowanych,
- δ_j^{ND} – dyspersja j -tej składowej, $\delta_j^{\text{ND}} \in (0, 2)$, [201].



Rys. 1.5. Rozmieszczenie ocen niezdominowanych przy czterokryterialnej minimalizacji

Na rysunku 1.5a pokazano przypadek rozmieszczenia równomiernego, zaś na rysunkach 1.5b i 1.5c – rozmieszczenie zagęszczone, odpowiednio dla kryterium numer 3 i 4.

1.2. Punkty charakterystyczne w przestrzeni kryterialnej

Rozważając istniejące warianty (rozwiązania) konstrukcji w przestrzeni kryterialnej (przestrzeni ocen) możemy zdefiniować kilka charakterystycznych punktów, które są wewnętrznymi właściwościami analizowanych rozwiązań. Autorzy wielu prac [3, 4, 18, 31, 70, 131, 169, 201, 246] do grupy tych punktów zaliczają: punkt idealny, punkt antyidealny, punkt nadir, punkty narożne. W niniejszej pracy opisano dodatkowe punkty, również powiązane z wewnętrznymi właściwościami analizowanych rozwiązań. Nowe punkty to: punkty quasi nadir, punkty quasi idealne oraz naddające punkty idealne [111, 113].

Oprócz tego, w przestrzeni kryterialnej można definiować własne punkty, które nie są bezpośrednio związane z analizowanymi rozwiązaniami. Do tych punktów zalicza się oceny zadowalające [137, 138] oraz punkty referencyjne [76, 176, 233, 234, 241, 248].

1.2.1. Punkty będące wewnętrznymi właściwościami podzbioru

Punkty charakterystyczne są wewnętrznymi właściwościami zbioru ocen rozwiązań dopuszczalnych i podzbioru ocen rozwiązań niezdominowanych. Zmiany ich wartości mają charakter obiektywny, ponieważ wynikają ze zmian zawartości tych zbiorów. Definicje punktów charakterystycznych podano dla problemu formułowanego jako zadanie minimalizacji.

Punkt idealny (wektor idealny) definiowany jest jako wektor $F^0(\mathbf{x}) = [F^0_1(\mathbf{x}), F^0_2(\mathbf{x}), \dots, F^0_j(\mathbf{x})]^T$ w przestrzeni kryterialnej, składający się z minimalnych wartości rozpatrywanych funkcji celu

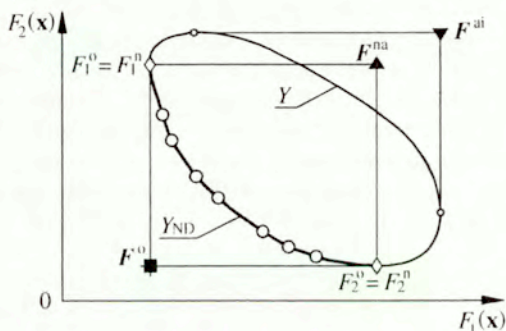
$$F_j^0(\mathbf{x}) = \min_{n \in N} F_j^n(\mathbf{x}) \quad (1.11)$$

gdzie

- $F_j(\mathbf{x})$ – j -ta składowa wektora kryteriów,
- $n = \{1, 2, \dots, N\}$ – zbiór indeksów rozwiązań niezdominowanych (optymalnych w sensie Pareto).

Rozwiązanie idealne \mathbf{x}^{id} jest zazwyczaj rozwiązaniem fikcyjnym [3, 4]. Istnieje tylko wtedy, gdy $F(\mathbf{x}^{id})$ jest elementem najmniejszym w zbiorze Y , tzn., dominuje wszystkie pozostałe wektory ocen. Funkcje celu osiągające swoje minima przy tych samych wartościach zmiennych decyzyjnych: $\mathbf{x}^{id} = [x_1^{id}, x_2^{id}, \dots, x_k^{id}]^T$ ($k = \{1, 2, \dots, K\}$ – zbiór indeksów zmiennych decyzyjnych), nazywamy

funkcjami kooperacyjnymi. Kooperacyjność dwóch funkcji celu możemy określić jako kąt wyznaczany przez punkty narożne tych funkcji i początek układu współrzędnych. Gdy wartość wyznaczonego kąta jest równa zero, funkcje są kooperatywne. Mała wartość kąta oznacza, że analizowane kryteria są ze sobą zgodne, gdy kąt osiąga duże wartości, analizowane funkcje są przeciwstawne. Punkt idealny to zazwyczaj fikcyjne rozwiązanie, reprezentujące zbiór wartości minimalnych wśród wszystkich osiąganych w zbiorze rozwiązań niezdominowanych, natomiast niemożliwych do osiągnięcia jednocześnie przez wszystkie kryteria. Położenie podstawowych punktów charakterystycznych w przestrzeni kryterialnej przedstawiono na rysunku 1.6.



Rys. 1.6. Położenie podstawowych punktów charakterystycznych: ■ – punkt idealny, ▲ – punkt nadir, ▼ – punkt antyidealny, ◇ – punkty narożne

Punktem antyidealnym nazywamy wektor $F^{ai}(x) = [F^{ai}_1(x), F^{ai}_2(x), \dots, F^{ai}_j(x)]^T$ w zbiorze ocen dopuszczalnych, przedstawiający najmniej preferowany poziom realizacji wszystkich celów jednocześnie

$$F_j^{ai}(x) = \max_{i \in I} F_j^i(x) \quad (1.12)$$

gdzie

$i = \{1, 2, \dots, I\}$ – zbiór indeksów rozwiązań dopuszczalnych.

Punkt nadir definiowany jest jako wektor $F^{na}(x) = [F^{na}_1(x), F^{na}_2(x), \dots, F^{na}_j(x)]^T$ przedstawiający najmniej preferowany poziom realizacji wszystkich celów jednocześnie, ale w zbiorze ocen niezdominowanych:

$$F_j^{na}(x) = \max_{n \in N} F_j^n(x) \quad (1.13)$$

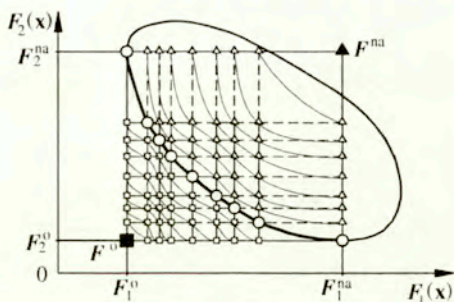
Punkty narożne wyznaczone są poprzez minimalizację składowych wektora kryteriów: $F^n_1(x), F^n_2(x), \dots, F^n_j(x)$. Punkty te wyznaczają wektor idealny, dlatego też punkt narożny rozpatrywanego kryterium odpowiada właściwej składowej wektora idealnego: $F^n_1(x) = F^0_1(x), F^n_2(x) = F^0_2(x), \dots, F^n_j(x) = F^0_j(x)$.

Rozważając podstawowe punkty charakterystyczne należy zwrócić uwagę na fakt, że punkt antyidealny nie jest „lustrzanym odbiciem” punktu idealnego (jak niekiedy podają różni autorzy), ponieważ wyznaczany jest w zbiorze ocen dopuszczalnych, podczas gdy punkt idealny – w zbiorze ocen niezdominowanych. Za „lustrzane odbicie” można natomiast uznać punkt nadir, który – tak, jak punkt idealny – wyznaczany jest w zbiorze ocen niezdominowanych.

1.2.2. Dodatkowe punkty charakterystyczne

W oparciu o wewnętrzne właściwości zbioru rozwiązań niezdominowanych można zdefiniować dodatkowe punkty charakterystyczne. W literaturze spotyka się pojęcie wędrującego (przemieszczającego się) punktu idealnego oraz punktu idealnego drugiego rodzaju. Przemieszczający się punkt idealny zastosowany został w metodzie nazwanej Dyskretną Interaktywną Procedurą Dwureferencyjną [125]. Punkt idealny drugiego rodzaju [4, 248] powstaje w wyniku formułowania wtórnego zadania optymalizacji. W zadaniu pierwotnym przy zastosowaniu metody funkcji dystansowej o różnych wartościach normy $\|r\|$, uzyskujemy kilka rozwiązań kompromisowych. Wtórne zadanie optymalizacji polega na znalezieniu wśród wygenerowanych rozwiązań kompromisowych jednego „rozwiązania najlepszego”, przy zastosowaniu jako punktu odniesienia nowego punktu idealnego, wyznaczonego z rozpatrywanego podzbioru ocen rozwiązań kompromisowych [129, 130].

Autor niniejszej pracy proponuje stosowanie nowych punktów dodatkowych: quasi idealnych oraz quasi nadir. Na rysunku 1.7 przedstawiono punkty quasi idealne oraz punkty quasi nadir [113], które powstają przez skojarzenie składowych ocen ze zbioru ocen rozwiązań niezdominowanych.



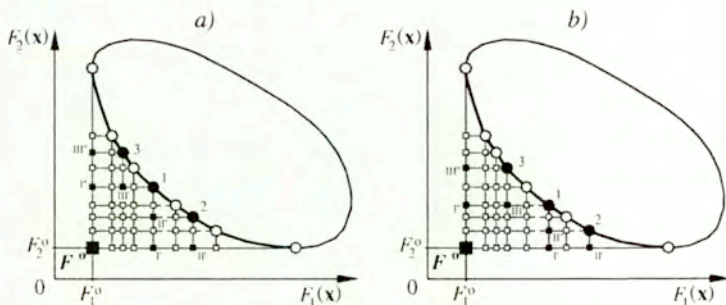
Rys. 1.7. Rozmieszczenie punktów quasi idealnych i quasi nadir w przestrzeni dwukryterialnej: \square – punkty quasi idealne, \triangle – punkty quasi nadir

W zbiorach tych punktów można wyodrębnić następujące nowe punkty charakterystyczne:

- **lokalne punkty idealne** (punkty quasi idealne I rzędu) – definiowane jako punkty idealne dla dwóch sąsiednich ocen niezdominowanych,
- **lokalne punkty nadir** (punkty quasi nadir I rzędu) – definiowane jako punkty nadir dla dwóch sąsiednich ocen niezdominowanych,
- **punkty quasi idealne II rzędu i kolejnych rzędów,**
punkty quasi nadir II rzędu i kolejnych rzędów.

Splajny oraz łuki pokazane na rysunku 1.7 łączą punkty quasi idealne oraz punkty quasi nadir należące do tego samego rzędu. Zdefiniowane powyżej lokalne punkty nadir zostały wykorzystane przy opisie wybranych przypadków oceny zadowalającej, zastosowanej w *Metodzie Wartości Progowej* i omówionej szczegółowo w rozdziale 4.2. Punkty quasi idealne posłużyły do zdefiniowania nadeżnych punktów idealnych, wykorzystywanych w *Metodzie Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych*.

Nadeżne punkty idealne [111, 113] są pewnym podzbiorem punktów quasi idealnych i zostały szczegółowo opisane w rozdziale 4.4 przy okazji prezentowania *Metody Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych*. Najogólniej mówiąc, nadeżne punkty idealne powstają w wyniku operacji krzyżowania składowych ocen rozwiązania kompromisowego wyznaczonego poprzez zastosowanie funkcji dystansowej i składowych odpowiedniego punktu idealnego, który posłużył do wyznaczenia tego rozwiązania. W kolejnych krokach wyznaczane są nowe rozwiązania i oceny kompromisowe, oraz nowe nadeżne punkty idealne kolejnych rzędów. Specyfiką tych punktów jest fakt, że przesuwają się one szybko do brzegu zbioru rozwiązań niezdominowanych, a w przypadku przestrzeni dwukryterialnej „przeskakują” po punktach quasi idealnych, pomijając punkty quasi idealne należące do wielu rzędów.



Rys. 1.8. Rozmieszczenie nadeżnych punktów idealnych w przestrzeni dwukryterialnej przy różnych ocenach kompromisowych: ● – oceny rozwiązań kompromisowych, ■ – nadeżne punkty idealne

Rysunek 1.8 pokazuje położenie nadążnych punktów idealnych w przestrzeni dwuwymiarowej przy różnych ocenach kompromisowych, wyznaczonych ze zbioru ocen niezdominowanych. Oceny rozwiązania kompromisowego 1 wyznaczają nadążne punkty idealne I' i I'', zaś oceny rozwiązań kompromisowych 2 i 3 wyznaczają odpowiednio nadążne punkty idealne II', II'' oraz III' i III''.

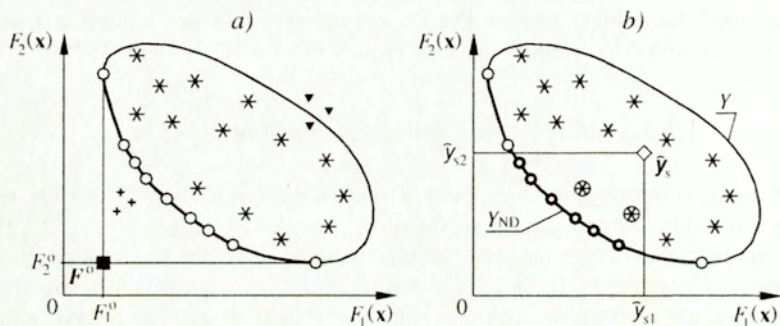
1.2.3. Punkty definiowane w przestrzeni kryterialnej

Punkty referencyjne. Idea punktu referencyjnego i zbioru punktów referencyjnych ma bardzo obszerną literaturę przedmiotu [76, 176, 233, 234]. Koncepcja punktu referencyjnego polega na zastosowaniu dowolnego punktu (w wersjach bardziej rozbudowanych zbioru punktów) w przestrzeni kryterialnej, reprezentującego poziom aspiracji lub satysfakcji decydenta, jako punktu odniesienia w procedurze porządkowania jego preferencji względem rozważanego zbioru wariantów decyzyjnych.

W systemach wspomaganiania decyzji wykorzystujących takie podejście badane obiekty (warianty decyzyjne) nie są porównywane między sobą, lecz konfrontuje się je ze zbiorem punktów referencyjnych, wykorzystując najczęściej relacje przewyższania lub funkcję dystansową. W tym celu tworzy się zbiór ocen rozwiązań pozytywnych (wzorców realizacji decyzji), bądź zbiór ocen rozwiązań negatywnych (antywzorców trafnej decyzji). W przypadku jednoczesnego stosowania wzorców i antywzorców przyjmuje się, że żaden ze złych obiektów nie dominuje któregokolwiek z dobrych obiektów. Postępowanie się zbiorem wzorców realizacji decyzji prowadzi do akceptacji motywu ludzkiego postępowania nastawionego na osiągnięcie sukcesu. W przypadku przyjęcia do rozważań antywzorca realizacji decyzji, akceptujemy chęć uniknięcia niepowodzenia [76]. Na ogół prezentowany jest pogląd, że w zagadnieniach, w których występuje nieporównywalność ocen uzyskiwanych przez poszczególne warianty, a które mają zweryfikowane prototypy rozwiązań (wzorce i antywzorce), stosowanie punktów referencyjnych oraz analizy w zbiorze rozwiązań dopuszczalnych daje właściwe rozwiązanie. Na rysunku 1.9a pokazano położenie punktów referencyjnych, które pełnią odpowiednio funkcję wzorców pozytywnych i negatywnych.

Ocena zadowalająca [137, 138] jest zdefiniowanym w przestrzeni kryterialnej punktem \bar{y}_s , który zapewnia osiągnięcie przez każdą składową wektora kryterium wartości nie większej, niż składowe tego punktu: $\bar{y}_{s1}, \bar{y}_{s2}, \dots, \bar{y}_{sj}$ $j = \{1, 2, \dots, J\}$ – co pokazano na rysunku 1.9b. Ocena zadowalająca \bar{y}_s jest wierzchołkiem utworzonego stożka satysfakcji. Po wprowadzeniu tej oceny do procesu wyboru, możemy otrzymać podzbiór ocen rozwiązań satysfakcji ze zbioru ocen dopuszczalnych Y , albo podzbiór niezdominowanych ocen rozwiązań satysfakcji ze zbioru ocen niezdominowanych Y_{ND} . Szerzej

o niezdominowanych ocenach i rozwiązaniach satysfakcji napisano w rozdziale 4.2 przy prezentacji *Metody Wartości Progowej*.



Rys. 1.9. Rozmieszczenie w przestrzeni dwuwymiarowej a) punktów referencyjnych: $+$ – wzorce pozytywne, \blacktriangledown – wzorce negatywne, b) oceny zadowalającej (\diamond): \otimes – zdominowana ocena satysfakcji, \bullet – niezdominowana ocena satysfakcji

2. Przegląd wybranych metod analizy wielokryterialnej

Zgodnie z literaturą przedmiotu [163] celem analizy decyzji może być:

- wspomaganie wyboru „najlepszego” wariantu (problematyka wyboru) – co prowadzi do opracowania procedur selekcji istniejących wariantów,
- wspomaganie sortowania wariantów według przyjętych kategorii (problematyka sortowania) – co prowadzi do opracowania procedur przydziału analizowanych wariantów do określonych kategorii,
- wspomaganie porządkowania wariantów według przyjętych preferencji (problematyka porządkowania) – co prowadzi do opracowania procedur klasyfikacji wariantów,
- wspomaganie opisu wariantów (problematyka opisu) – co prowadzi do opracowania procedur poznawczych.

Zagadnienia teoretyczne i podstawowe metody wspomaganie podejmowania decyzji przy wektorowych wskaźnikach celów opisano w następujących pracach [13, 25, 39, 53, 74, 163, 245, 248]. W literaturze można znaleźć wiele różnych metod analizy wielokryterialnej, które realizują jedno lub więcej z wymienionych poniżej podejść: skalaryzację wektorowego wskaźnika oceny [106, 189, 191, 202, 203, 237], tworzenie rankingu rozwiązań dopuszczalnych lub niezdominowanych [2, 19, 40, 150, 152, 216, 220], przeprowadzenie redukcji liczebności analizowanego zbioru lub rozmiaru wektora kryteriów [1, 4, 11, 122, 159, 170, 202], zastosowanie relacji przewyższania w uporządkowaniu zbiorów rozwiązań dopuszczalnych lub niezdominowanych [2, 15, 26, 28, 29, 30, 36, 37, 45, 51, 58, 59, 65, 123, 125, 127, 161, 162, 163, 177, 229], wyznaczenie rozwiązania lub rozwiązań kompromisowych [7, 11, 67, 129, 130, 157, 169, 170, 246, 248], zastosowanie w procesie analizy punktów referencyjnych [76, 176, 233, 234], wprowadzenie funkcji użyteczności (preferencji) [106, 202, 203], prowadzenie analizy przy zastosowaniu podzbiorów rozmytych [15, 124, 153, 160, 167, 239, 240], zastosowanie analizy przy hierarchicznym uporządkowaniu

kryteriów [24, 33, 46, 81, 88, 94, 105, 145, 166, 201, 202, 225, 227], analiza przy grupowym podejmowaniu decyzji [5, 9, 44, 69, 73, 86, 87, 147, 148, 216, 225, 226, 227, 228, 235, 243] oraz wykorzystanie reguł rozstrzygania i systemów ekspertowych [75, 174, 175, 180].

Dobrze zbudowane zadanie optymalizacji wielokryterialnej, z właściwie dobranym wektorem ocen, prowadzi zawsze do uzyskania zbioru rozwiązań niezdominowanych. Poprawnie przygotowana oferta katalogowa także zabezpiecza przed sytuacją, w której jedno rozwiązanie eliminuje wszystkie pozostałe. W procesie projektowania nowej konstrukcji, przy określeniu wektorowego wskaźnika jakości, mamy również do czynienia z podzbiorem rozwiązań niezdominowanych. W takich przypadkach wybór „rozwiązania najlepszego” możliwy jest zazwyczaj po wprowadzeniu dodatkowego kryterium oceny.

Opisane w literaturze metody wyboru rozwiązania preferowanego w zadaniu wielokryterialnym stosują często różnorodne przekształcenia pierwotnych wartości kryteriów, wprowadzając np.: pojęcie funkcji użyteczności lub dokonując skalaryzacji składowych wektora kryteriów poprzez tworzenie kryterium globalnego. Poniżej przedstawiono najczęściej opisywane sposoby dochodzenia do rozwiązania preferowanego.

2.1. Metody skalaryzacji

Metody skalaryzacji są najstarszym sposobem rozwiązywania zadań optymalizacji i wyboru wielokryterialnego. Według Tarnowskiego i Kiczkowiaka [202, 203] kryterium skalarne jest sposobem ilościowego określenia jakości za pomocą jednej liczby poprzez przyjęcie wspólnej skali dla wszystkich kryteriów oceny. W metodach skalaryzacji można wyodrębnić kilka podejść.

Pierwszy sposób nie wprowadza agregacji składowych wektora kryteriów, lecz przyjmuje do ich oceny skalę punktową lub pieniężną. Skalaryzację otrzymanych wyników cząstkowych przeprowadza się stosując odpowiednią formułę (2.1 ÷ 2.7). Należy dodać, że wprowadzenie skali punktowej jest działaniem arbitralnym, nie zawsze powiązaniem z wartościami kryteriów składowych. Skalę pieniężną wykorzystuje się najczęściej w zagadnieniach ekonomicznych.

Drugie podejście polega na wprowadzeniu skali użyteczności. Zostało ono przedstawione w pracach: Fishburna [39], Galasa, Nykowskiego i Żółkiewskiego [41], Jendo i Marksa [61], Keeneya i Raiffa [70], Misiakiewicza [105, 106] oraz Tarnowskiego [202]. Zastosowanie funkcji (skali) użyteczności powoduje zamianę wartości uzyskanych przez kryteria składowe na wartości bezwymiarowe, zgodnie z przyjętą funkcją użyteczności. Zazwyczaj funkcja użyteczności $U(F_1, F_2, \dots, F_j)$ jest rozdzielna (dekomponowalna) względem funkcji celów, czyli: $U_1(F_1), U_2(F_2), \dots, U_j(F_j)$. Konstrukcja poszczególnych funkcji użyteczności oraz określenie wag preferencji wymaga uzyskania od decydenta większej

ilości informacji, przy czym przyjmuje się różne funkcje użyteczności dla poszczególnych składowych wektora kryteriów. Uzyskane użyteczności poddaje się agregacji zgodnie z jedną z formuł (2.1 ÷ 2.7). Wprowadzenie różnych postaci funkcji użyteczności powoduje nie tylko przetworzenie zadania pierwotnego na nowe zadanie, ale przyczynia się również do jego deformacji.

Trzeci sposób skalaryzacji wykorzystuje jedno kryterium zadaniowe zbudowane z wykorzystaniem stosownej formuły (2.1 ÷ 2.7) – Tarnowski [202]. Warunkiem koniecznym jest jednak, aby wszystkie kryteria składowe wyrażone były w tych samych jednostkach. Podejście takie zastosował Witek w pracy [237]. Szerzej zostało ono omówione w rozdziale 6.6.

W czwartym podejściu przyjmuje się operowanie miarami względnymi. Stosowanie miary względnej powoduje, że wartość każdego kryterium zamieniana jest na wartość z przedziału $\langle 0, 1 \rangle$. Szwabowski i Deszcz w pracy [189] analizują wyniki otrzymane przy różnych sposobach obliczania miary względnej: normowania względem wartości maksymalnej (przy zadaniu maksymalizacji), kodowania wg Neumana–Morgensterna oraz kodowania metodą Pattern. Każda z metod kodowania daje różne wartości liczbowe tej samej miary rozważanego rozwiązania. Analiza wartości miar rozwiązań po zakodowaniu pozwala stwierdzić, że największe różnice występują w przypadku kodowania Neumana–Morgensterna, a najmniejsze przy zastosowaniu metody Pattern. Wymienione powyżej sposoby kodowania naruszają proporcjonalność ocen w stosunku do normowania względem wartości maksymalnej. Widać więc, że w procesie kodowania można uzyskać wzmocnienie hierarchii analizowanych kryteriów. Misiakiewicz [106] rozważa normalizację wektorową mającą charakter nieliniowy. Szyrka w artykule [191] proponuje normowanie nieliniowe, w którym względne procentowe wartości odnoszone do wartości maksymalnej (w zadaniu maksymalizacji) są podnoszone do potęgi odpowiadającej wadze ważności rozważanego kryterium (suma wag równa się 1). Szwabowski i Deszcz rozpatrują również proces standaryzacji wartości kryteriów. Standaryzacja rozumiana jest jako odchylenie od wartości średniej miar częściowych dla wszystkich wariantów wg j -tych kryteriów, odniesione do obliczonej z nich wartości odchylenia standardowego. W tym przypadku miara względna nie należy do przedziału $\langle 0, 1 \rangle$, a jej wartości wykazują jeszcze większe różnice, niż w przypadku kodowania Neumana–Morgensterna.

Skalaryzacja prowadzi do wyodrębnienia tzw. kryterium zadaniowego, którego postać może być zrealizowana na wiele sposobów. Tarnowski w pracy [202] przedstawia cztery podstawowe strategie.

Strategia liniowa (kompensacyjna) ma tą własność, że niedostatek jednej składowej wektora kryteriów może być skompensowany odpowiednim wzrostem innej składowej. Strategia liniowa może mieć różną postać matematyczną.

Stosuje się:

- wskaźnik sumacyjny lub ważony wskaźnik sumacyjny

$$F^z = \sum_{j=1}^J c_j \quad \text{lub} \quad F^z = \sum_{j=1}^J w_j c_j, \quad (2.1)$$

- średnią arytmetyczną lub ważoną średnią arytmetyczną

$$F^z = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J c_j \quad \text{lub} \quad F^z = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J w_j c_j, \quad (2.2)$$

- średnią arytmetyczną ważoną

$$F^z = \frac{\sum_{j=1}^J w_j c_j}{\sum_{j=1}^J w_j}, \quad (2.3)$$

- ważoną długość wektora

$$F^z = \sqrt{\sum_{j=1}^J w_j c_j^2} \quad \text{lub} \quad F^z = \sqrt{\sum_{j=1}^J w_j^2 c_j^2} \quad (2.4)$$

gdzie

- c_j – unormowana lub wyrażona w punktach albo w skali
pieniężnej wartość kryterium F_j ,
- w_j – współczynnik wagi kryterium F_j ,
- $j = \{1, 2, \dots, J\}$ – zbiór indeksów kryteriów.

Strategia koniunkcyjna charakteryzuje się tym, że kryterium zadaniowe osiąga wartość ekstremalną, gdy wartości wszystkich składowych wektora kryteriów przyjmują wartości ekstremalne. Rozwiązanie o słabej wartości jednej składowej wektora kryterium może zostać odrzucone. Spotykane postacie tej strategii pokazano poniżej [189, 201, 202, 203, 237]:

- wskaźnik multiplikacyjny lub ważony wskaźnik multiplikacyjny

$$F^z = \prod_{j=1}^J c_j \quad \text{lub} \quad F^z = \prod_{j=1}^J w_j c_j \quad \text{lub} \quad F^z = \prod_{j=1}^J c_j^{w_j}, \quad (2.5)$$

- geometryczna średnia ważona

$$F^z = \sqrt[J]{\prod_{j=1}^J w_j c_j} \quad \text{lub} \quad F^z = \sum_{j=1}^J w_j \sqrt[J]{\prod_{j=1}^J (c_j)^{w_j}}, \quad (2.6)$$

- wskaźnik paraboliczny lub ważony wskaźnik paraboliczny

$$F^z = \prod_{j=1}^J (c_j)^{\alpha_j} \quad F^z = \prod_{j=1}^J (w_j c_j)^{\alpha_j} \quad (2.7)$$

gdzie

α_j – stała dla kryterium nr j .

Strategia alternatywna opisana formułą (2.8) jest strategią nieliniową i niekompensacyjną. Charakteryzuje się tym, że preferowane jest takie rozwiązanie, które osiąga dobre wyniki wszystkich składowych wektora kryteriów i bardzo dobre co najmniej jednej składowej

$$F^z = \prod_{j=1}^J \left(\frac{j}{e_j - F_j} \right)^{\alpha_j} \quad (2.8)$$

gdzie

e_j – wartość progowa (dość wysoka) dla kryterium nr j ,

F_j – składowa j -tego wektora kryterium.

Strategia interakcyjna dopuszcza interakcje między wartościami składowych wektora kryteriów.

W literaturze można znaleźć wiele różnych metod, które w mniejszym lub większym stopniu wykorzystują ideę skalaryzacji. Ciekawą metodą opracowaną przez Pogorzelskiego, a opisaną w pracach [150 ÷ 152], jest metoda wagowo-korelacyjna. Metoda ta należy do grupy metod użyteczności. Skalaryzuje ona j -wymiarowe kryterium poprzez dobranie dla analizowanych rozwiązań (niezdominowanych i zdominowanych) użyteczności kompromisowych, osiągających maksimum sumy ważonej współczynników korelacji dobieranych użyteczności z użytecznościami cząstkowymi. Zapis formalny wygląda następująco

$$F^w(\mathbf{y}_p^w) = \max_{\mathbf{y}_p \in Y_p} \sum_{j=1}^J w_j (\text{sign } \rho_{oj}) \cdot \rho_{oj}^2 \quad (2.9)$$

gdzie

ρ_{oj} – współczynnik korelacji liniowej j -tej składowej wektora kryteriów

$$\rho_{oj} = \sum_{i=1}^I p_i \frac{F_j(\mathbf{x}_D^i) - \mu_i}{\sigma_i} \cdot \frac{F_j(\mathbf{x}_p^w) - \mu_p}{\sigma_p} \quad (2.10)$$

$$\mu_j = \sum_{i=1}^I p_i F_j(\mathbf{x}_D^i), \sigma_j = \left\{ \sum_{i=1}^I p_i \cdot [F_j(\mathbf{x}_D^i) - \mu_j]^2 \right\}^{1/2}, j=1, 2, \dots, J$$

$$\text{sign } \rho_{oj} = \begin{cases} +1, & \text{jeśli } \rho_{oj} > 0 \\ 0, & \text{jeśli } \rho_{oj} = 0 \\ -1, & \text{jeśli } \rho_{oj} < 0 \end{cases}$$

- p_i – prawdopodobieństwo zaistnienia rozwiązania \mathbf{x}_D^i ,
- μ_j – wartość średnia,
- σ_j – odchylenie standardowe j -tej składowej wektora kryteriów.

Należy podkreślić, że autor nie wyklucza przydatności metody do oceny wyników ze zbioru rozwiązań dopuszczalnych. Ponadto praktyka stosowania metody wagowo–korelacyjnej [152] wskazuje, że przed uruchomieniem metody można przeprowadzić ocenę wiarygodności wyników. Gdy wyniki poddawane analizie nie budzą zastrzeżeń, prawdopodobieństwo p_i wynosi 1, w innych przypadkach p_i przyjmuje wartości mniejsze od jedności. W przypadkach skrajnych p_i może wynosić zero, co prowadzi do odrzucenia wstępnie ocenianego rozwiązania. Koniecznym jest również określenie ważności analizowanych kryteriów. W metodzie tej suma wag przypisywanych składowym nie musi być równa jedności.

Sprowadzenie zadania wielokryterialnego do problemu jednokryterialnego jest ideą prostą i przejrzystą, ale jej realizacja nie jest jednoznaczna. Przedstawione powyżej sposoby kodowania wartości składowych wektora kryteriów analizowanych rozwiązań, ich agregacji w jedno kryterium zadaniowe oraz wprowadzania wag odzwierciedlających ważność poszczególnych kryteriów powodują, że otrzymane rezultaty końcowe w wielu przypadkach różnią się diametralnie.

2.2. Metody z relacją przewyższania

Metody z relacją przewyższania są często używane w różnych zastosowaniach technicznych i ekonomicznych. Przy użyciu tych metod można wyodrębnić podzbiór rozwiązań niezdominowanych lub zbudować ranking analizowanych rozwiązań. Należy jednak nadmienić, że we wszystkich metodach z relacją przewyższania występuje wewnętrzna skalaryzacja zadania wielokryterialnego, polegająca najczęściej na sumowaniu otrzymanych wyników cząstkowych (zobacz zależności 2.11, 2.15 ÷ 2.17, 2.19 ÷ 2.25). Przez skalaryzację wewnętrzną rozumie się proces ukryty wewnątrz procedury i nie stanowiący fundamentu metody – w tym przypadku jest to relacja przewyższania. Wynik końcowy analizy w dużej mierze zależy od przyjętych arbitralnie

wag, oznaczających ważność poszczególnych kryteriów, oraz od kompensacyjnego charakteru przeprowadzonej skalaryzacji wewnętrznej. Metody z relacją przewyższania charakteryzuje konieczność wprowadzania wielu wartości niezbędnych do przeprowadzenia stosownych obliczeń. W zależności od typu metody są to progi: preferencji, równoważności, veta, zgodności (określane indywidualnie dla każdej składowej wektora kryteriów).

Do podstawowych metod stosujących relację przewyższania należą metody z rodziny ELECTRE (ELimination Et Choix Traduisent REalite) [15, 30, 36, 37, 123, 156, 162, 163, 177, 229],

W metodach rodziny ELECTRE opracowanych przez Roy'a [162 ÷ 164] i wykorzystywanych przez takich autorów, jak: Beccali [15], Dias [30], Fiala [36], Figueira [37], Mousseau [123], Słowiński [177], Vincke [229], stosuje się relację przewyższania S zdefiniowaną po wprowadzeniu sytuacji zgrupowanych, dzięki czemu uzyskuje się pewną dwuznaczność. Relacja przewyższania S charakteryzuje się tym, że nie można rozróżnić czy element F^1 preferuje silnie element F^2 , czy preferuje go słabo, czy też między elementami F^1 i F^2 występuje równoważność.

Metoda ELECTRE I wykorzystuje relację przewyższania S do wyznaczenia tzw. jądra, czyli wyodrębnienia podzbioru rozwiązań niezdominowanych, który można przedstawić decydom do analizy. Każdy element spoza jądra jest przewyższany przez co najmniej jeden element jądra. Elementy należące do jądra nie przewyższają się wzajemnie.

W metodzie ELECTRE II relację przewyższania S wykorzystuje się do przedstawienia dwóch możliwych różnych porządków zupełnych, zgodnych z tą relacją. Na początku przyjmuje się próg zgodności bliski jedności oraz określa wagi ważności poszczególnych składowych wektora kryteriów (suma wag równa się 1). Następnie dla każdej pary analizowanych rozwiązań (F^1, F^2) składowe wektora kryteriów dzieli się na trzy klasy: składowe, dla których F^1 przewyższa F^2 , te – gdzie występuje sytuacja odwrotna i te, dla których F^1 i F^2 są równoważne. W kolejnym kroku zliczane są wagi składowych w każdej klasie i sprawdzamy warunek zgodności. Spełnienie warunku upoważnia do przyjęcia hipotezy, że F^1 przewyższa F^2 . W przypadku relacji przeciwnej hipotezę odrzuca się.

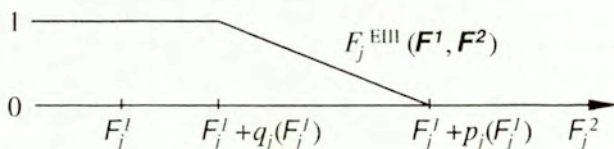
Metoda ELECTRE III polega na budowaniu wartościowej relacji przewyższania, dzięki czemu staje się mniej wrażliwa na zmiany danych oraz zastosowanych parametrów. Obliczenie stopni przewyższania $S(F^1, F^2)$ dla każdej uporządkowanej pary rozwiązań wymaga przypisania każdemu kryterium wagi ω_j , progu preferencji – p_j oraz progu rozróżnialności – q_j . Na początku, dla każdej pary rozwiązań (F^1, F^2) wyznacza się indeks zgodności

$$c(F^1, F^2) = \frac{1}{W} \sum_{j=1}^J \omega_j F_j^{\text{III}}(F^1, F^2) \quad , \quad W = \sum_{j=1}^J \omega_j \quad (2.11)$$

$$F_j^{\text{EIII}}(\mathbf{F}^1, \mathbf{F}^2) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } F_j^1 + q_j(F_j^1) \geq F_j^2 \\ 0 & \text{jeśli } F_j^1 + p_j(F_j^1) \leq F_j^2 \\ (0, 1) & \text{jeśli } F_j^1 + q_j(F_j^1) < F_j^2 < F_j^1 + p_j(F_j^1) \end{cases} \quad (2.12)$$

gdzie

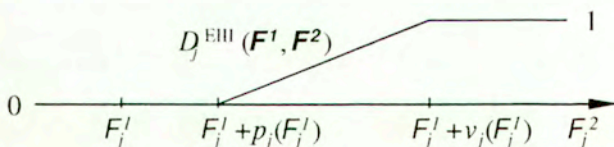
$j = \{1, 2, \dots, J\}$ – zbiór indeksów rozpatrywanych kryteriów,
 F_j^{EIII} – j -ta składowa funkcji użyteczności, $F_j^{\text{EIII}} \in \langle 0, 1 \rangle$.



Rys. 2.1. Ilustracja sposobu obliczania wielkości $F_j^{\text{EIII}}(\mathbf{F}^1, \mathbf{F}^2)$

Po wprowadzeniu dla każdego kryterium progu weta v_j , istnieje możliwość odrzucenia przewyższania rozwiązania \mathbf{F}^2 przez \mathbf{F}^1 , jeżeli choć dla jednego j zachodzi: $F_j^2 \geq F_j^1 + v_j(F_j^1)$, nawet gdy dla wszystkich innych składowych kryteriów \mathbf{F}^2 jest przewyższane przez \mathbf{F}^1 . Wskaźnik niezgodności dla każdego kryterium jest zdefiniowany następująco

$$D_j^{\text{EIII}}(\mathbf{F}^1, \mathbf{F}^2) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } F_j^2 \leq F_j^1 + p_j(F_j^1) \\ 1 & \text{jeśli } F_j^2 \geq F_j^1 + v_j(F_j^1) \\ (0, 1) & \text{jeśli } F_j^1 + p_j(F_j^1) < F_j^2 < F_j^1 + v_j(F_j^1) \end{cases} \quad (2.13)$$



Rys. 2.2. Ilustracja sposobu obliczania wielkości $D_j^{\text{EIII}}(\mathbf{F}^1, \mathbf{F}^2)$

Ostatecznie stopień przewyższania obliczany jest z zależności (2.14). Wykorzystując wyznaczone wartościowe relacje przewyższania $\mathbf{S}(\mathbf{F}^1, \mathbf{F}^2)$, ich maksymalną wartość λ oraz przyjęty przez decydenta próg $\mathbf{S}(\lambda)$, oblicza się kwalifikator $Q(\mathbf{F}^1)$ każdego rozwiązania (tzn. liczbę rozwiązań przewyższanych przez \mathbf{F}^1 , pomniejszoną o liczbę rozwiązań, które przewyższają \mathbf{F}^1). Ostatecznie,

po zastosowaniu procedury zstępującego łańcucha destylacyjnego oraz wstępującego łańcucha destylacyjnego, powstają dwa zupełne preporządki analizowanych rozwiązań:

$$S(F^1, F^2) = \begin{cases} c(F^1, F^2) & \text{jeśli } D_j^{\text{III}}(F^1, F^2) \leq c(F^1, F^2) \quad \forall j \\ c(F^1, F^2) \cdot \prod_{j \in J(F^1, F^2)} \frac{1 - D_j^{\text{III}}(F^1, F^2)}{1 - c(F^1, F^2)} & \end{cases} \quad (2.14)$$

W opinii Vincke'a [229] mimo, że metoda ELECTRE III umożliwia uzyskanie względnie stabilnych rezultatów, wymaga jednak wprowadzenia dużej liczby parametrów nie posiadających interpretacji fizycznej, jest bardzo skomplikowana, a otrzymane wyniki trudno zinterpretować.

Metoda ELECTRE IV umożliwia zbudowanie rankingu rozwiązań bez wprowadzania ważenia kryteriów. Podstawą jej działania jest wykorzystanie dla każdego rozważanego kryterium mocnej i słabej preferencji (odpowiednio: P_j i Q_j) oraz przyjętego progu weta, w celu zdefiniowania mocnej i słabej relacji przewyższania – S_F oraz S_f . Następnie, tak jak w metodzie ELECTRE III, po zastosowaniu procedury zstępującego łańcucha destylacyjnego oraz wstępującego łańcucha destylacyjnego, wyznaczane są dwa zupełne preporządki analizowanych rozwiązań.

Metoda PROMETHEE (Preferencje Ranking Organisation Metod for Enrichment Evaluation) opracowana przez Brans'a i Vince'a [229], a zastosowana między innymi w pracach [2, 29, 218], polega – podobnie, jak metoda ELECTRE III, na budowaniu wartościowej relacji przewyższania. Sposób wyznaczania preporządku częściowego lub rankingu jest zdecydowanie prostszy niż w metodzie ELECTRE III. W tym przypadku wagi ω_j przypisywane do każdego kryterium zwiększają się wraz z ważnością kryterium, zaś stopień przewyższania $\pi(F^1, F^2)$ dla każdej uporządkowanej pary rozwiązań oblicza się z zależności

$$\pi(F^1, F^2) = \frac{1}{W} \sum_{j=1}^J \omega_j F_j^{\text{III}}(F^1, F^2) \quad , \quad W = \sum_{j=1}^J \omega_j \quad (2.15)$$

Dla każdego kryterium należy określić wartości stosownych parametrów: p_j – progu preferencji oraz q_j – progu rozróżnialności ($q_j < p_j$). Do obliczenia wartości F_j^{PR} decydent wybiera jedną z sześciu postaci krzywych funkcji użyteczności. Podstawą przyporządkowania wartości z przedziału $\langle 0, 1 \rangle$ jest obliczenie wartości $F_j(F^1) - F_j(F^2)$ oraz porównanie jej z wartościami p_j i q_j . W oparciu o wyznaczony stopień przewyższania π ustalone są dwa preporządki zupełne: pierwszy – malejący według $\Theta^+(F^1)$, a drugi rosnący $\Theta^-(F^1)$

$$\Theta^+(F^1) = \sum_{F^2 \in Y_{\text{NB}}} \pi(F^1, F^2) \quad , \quad \Theta^-(F^1) = \sum_{F^2 \in Y_{\text{NB}}} \pi(F^2, F^1) \quad (2.16)$$

W przypadku metody PROMETHEE I „przecięcie” dwóch preporządków tworzy preporządek częściowy, zaś w metodzie PROMETHEE II utworzenie końcowego rankingu analizowanych rozwiązań powstaje według formuły

$$\Theta(F^1) = \Theta^+(F^1) - \Theta^-(F^1) \quad (2.17)$$

Metoda MAPPAC (Multicriteria Analysis of Preferences by means of Pairwise Actions and Criteria comparisons) została opracowana przez Matarazzo [98] i zastosowana między innymi przez Fiałę [36], Żaka, Włodarczyka i Kicińskiego [251]. Metoda ta bazuje na porównywaniu rozwiązań parami względem każdej pary kryteriów. W metodzie zastosowano relację preferencji – \mathbf{P} oraz równoważności – \mathbf{I} , wprowadzono również wektor wag ω_j ważności rozpatrywanych składowych wektora kryteriów. Procedura wyznaczania rankingu analizowanych rozwiązań F^i przebiega na podstawie indeksu $\tau(F^i)$ w macierzy χ . W tym celu należy najpierw obliczyć składniki unormowanej macierzy kryteriów $\mathbf{C} = (c_{ij})$, gdzie w każdym przypadku zachodzi, że $0 \leq c_{ij} \leq 1$

$$c_{ij} = \begin{cases} \frac{y_{ij} - F_j^1}{F_j^2 - F_j^1} & \text{jeżeli } F_j^1 < F_j^2 \quad , \quad F_j^1 \leq y_j^* \text{ i } F_j^2 \geq y_j^* \\ 0 & \text{jeżeli } F_j^1 = F_j^2 \end{cases} \quad (2.18)$$

gdzie

- $j, j1 \in J$ – zbiór indeksów rozpatrywanych kryteriów,
- $i, i1 \in I$ – zbiór indeksów rozpatrywanych rozwiązań,
- y_{ij} – składnik macierzy zawierający wartość j -tego kryterium dla i -tego rozwiązania,
- y_j^*, y_j^* – odpowiednio najlepsze i najgorsze oszacowanie rozwiązań względem j -tego kryterium,
- F_j^1, F_j^2 – porównywane rozwiązania względem j -tego kryterium.

Następnie oblicza się bazowe wskaźniki preferencji $\chi_{j1}(F^i, F^{i1})$ dla pary rozwiązań (F^i, F^{i1}) i kryteriów K_j i K_{j1} , $i \neq i1$ oraz $j \neq j1$. Rozwiązanie F^i dominuje F^{i1} w odniesieniu do kryteriów K_j i K_{j1} , jeśli wystąpi jeden z następujących warunków: $c_{ij} > c_{i1j}$ i $c_{ij1} > c_{i1j1}$; $c_{ij} > c_{i1j}$ i $c_{ij1} = c_{i1j1}$; $c_{ij} = c_{i1j}$ i $c_{ij1} > c_{i1j1}$. Stąd otrzymujemy: $\chi_{j1}(F^i, F^{i1}) = 1$ oraz $\chi_{j1}(F^{i1}, F^i) = 0$. Rozwiązania (F^i, F^{i1}) są identyczne względem kryteriów K_j i K_{j1} , jeżeli $c_{ij} = c_{i1j}$ i $c_{ij1} = c_{i1j1}$, stąd otrzymujemy, że $\chi_{j1}(F^i, F^{i1}) = \chi_{j1}(F^{i1}, F^i) = 0.5$. Jeżeli $c_{ij} > c_{i1j}$ i $c_{ij1} < c_{i1j1}$ wtedy otrzymujemy, że

$$\chi_{j,j_1}(\mathbf{F}^i, \mathbf{F}^{i'}) = \frac{\omega_j(\mathbf{c}_{ij} - \mathbf{c}_{i_1j})}{\omega_j(\mathbf{c}_{ij} - \mathbf{c}_{i_1j}) + \omega_{j_1}(\mathbf{c}_{i_1j_1} - \mathbf{c}_{ij_1})} \quad (2.19)$$

$$\chi_{j,j_1}(\mathbf{F}^{i'}, \mathbf{F}^i) = 1 - \chi_{j,j_1}(\mathbf{F}^i, \mathbf{F}^{i'})$$

w przeciwnym wypadku, gdy $\mathbf{c}_{ij} < \mathbf{c}_{i_1j}$ i $\mathbf{c}_{i_1j_1} > \mathbf{c}_{ij_1}$

$$\chi_{j,j_1}(\mathbf{F}^i, \mathbf{F}^{i'}) = \frac{\omega_{j_1}(\mathbf{c}_{i_1j_1} - \mathbf{c}_{ij_1})}{\omega_j(\mathbf{c}_{i_1j_1} - \mathbf{c}_{ij_1}) + \omega_{j_1}(\mathbf{c}_{i_1j_1} - \mathbf{c}_{ij_1})} \quad (2.20)$$

$$\chi_{j,j_1}(\mathbf{F}^{i'}, \mathbf{F}^i) = 1 - \chi_{j,j_1}(\mathbf{F}^i, \mathbf{F}^{i'})$$

Zagregowaną macierz preferencji oblicza się z zależności

$$\chi = \sum_{i=1}^{i-1} \sum_{j=i+1}^j \chi_{j,j_1} \frac{\omega_i + \omega_j}{k-1} \quad (2.21)$$

a indeks $\tau(\mathbf{F}^i)$ w macierzy χ ze wzoru

$$\tau(\mathbf{F}^i) = \sum_{i'=1}^i \chi(\mathbf{F}^i, \mathbf{F}^{i'}), \quad i \neq i' \quad (2.22)$$

Pierwsze miejsce w rankingu uzyskuje rozwiązanie o największej wartości indeksu $\tau - \tau(\mathbf{F}^i) = \max\{\tau(\mathbf{F}^1), \dots, \tau(\mathbf{F}^l)\}$. Jeśli kilka rozwiązań ma tą samą wartość indeksu, tworzą klasę rozwiązań równoważnych. Następnie i -ty wiersz oraz i -ta kolumna jest wykreślana, a procedura obliczania kolejnego indeksu τ – powtarzana.

Metoda ORESTE opracowana przez Roubens'a [161], a stosowana przez Fiałę [34], Żaka, Włodarczyka i Kicińskiego [251] umożliwia wyznaczenie rankingu analizowanych rozwiązań. Decydent ustala porządek zupełny dla zbioru kryteriów, stosując relację preferencji – \mathbf{P} i równoważności – \mathbf{I} . W odniesieniu do analizowanych rozwiązań przeprowadzany jest test równoważności i nieporównywalności. W tym celu decydent ustala progi: preferencji – p ($p < 1/2(i_{\max} - 1)$), równoważności – q ($q < 1/j_{\max}(i_{\max} - 1)$) oraz nieporównywalności – r ($r > (j_{\max} - 2)/4$), gdzie j_{\max} oraz i_{\max} odpowiednio liczba kryteriów i rozwiązań.

Na początku następuje zamiana przyjętego porządku na rangi. Element \mathbf{y}_{ij} otrzymuje rangę rozwiązania \mathbf{F}^i z punktu widzenia kryterium K_j , zaś element k_j rangę kryterium K_j . Następnie obliczane są elementy macierzy odległości $\mathbf{D} = (d_{ij})$, przy zastosowaniu metryki Höldera

$$d_{ij} = \left(\frac{1}{2} \mathbf{y}_{ij}^r + \frac{1}{2} k_j^r\right)^{\frac{1}{r}}, \quad r \in \mathbb{R}_+, \quad \text{zalecane } r = 3 \quad (2.23)$$

W ogólnym przypadku wartość parametru r określana jest metodą Dujmoviča.

W kolejnym kroku wartościom obliczonych odległości d_{ij} nadawane są rangi γ_{ij} . Rangi globalne każdego rozwiązania F^i obliczane są z zależności

$$\gamma_i = \sum_{j=1}^J \gamma_{ij} \quad (2.24)$$

Następnie wyznaczone są elementy e_{iil} macierzy intensywności preferencji $E = (e_{iil})$ oraz elementy e^n_{iil} macierzy unormowanej

$$e_{iil} = \sum_{l \in J_k} (\gamma_{iil} - \gamma_{il}) \quad (2.25)$$

gdzie

$i, i \in I$ – zbiór indeksów rozpatrywanych rozwiązań,

J_k – zbiór indeksów kryteriów, gdy F^1 jest lepsze od F^2 .

Elementy macierzy unormowanej intensywności preferencji używane są do określenia relacji: preferencji – P , równoważności – I oraz nieporównywalności – R dla analizowanych rozwiązań.

Jeżeli dla $e^n_{iil} \geq e^n_{iil}$ zachodzi, że: $e^n_{iil} \leq p$ i $e^n_{iil} - e^n_{iil} \leq q$, to F^i jest równoważne F^{il} , w przeciwnym razie rozwiązanie F^i preferuje F^{il} albo rozwiązania są nieporównywalne. W takim przypadku należy przeprowadzić test nieporównywalności. Jeżeli dla $e^n_{iil} > e^n_{iil}$ zachodzi, że: $e^n_{iil} / (e^n_{iil} - e^n_{iil}) > r$, to F^i jest nieporównywalne z F^{il} , w przeciwnym razie rozwiązanie F^i preferuje rozwiązanie F^{il} .

Metoda BIPOLAR opracowana przez Konarzewską-Gubałę [76] umożliwia utworzenie rankingu analizowanych rozwiązań. Przeprowadzenia kompletnej analizy istniejących rozwiązań wymaga określenia dla każdego przyjętego kryterium: wagi ważności (suma wag równa jest jedności), progów równoważności, progów veta, przewyższania oraz zgodności. Należy także podać zbiór obiektów „dobrych” – o pożądanym poziomie realizacji celów oraz obiektów „złych” – o nieakceptowanym poziomie realizacji celów. Dąży się do tego, aby osiągnąć sukces (czyli zbliżyć się do elementów zbioru pełniących rolę wzorców pozytywnych), unikając jednocześnie niepowodzenia (czyli oddalając się od zbioru rozwiązań będących wzorcami negatywnymi). Oczekiwany rezultatem procedury jest charakterystyka każdego badanego wariantu decyzyjnego w postaci wektora $[d_S > 0, d_N > 0]$, w którym składowe d_S i d_N są miarą osiągnięcia sukcesu i stopnia uniknięcia niepowodzenia. Gdy $d_S = 1$ i $d_N = 1$, oznacza to najlepszą realizację obu celów. Bywają jednak sytuacje, w których $d_S = 0$ lub $d_N = 0$, co świadczy, że badany obiekt jest nieporównywalny ze zbiorem obiektów „dobrych” lub „złych”. U podstaw metody leży założenie, że warianty nieporównywalne ze zbiorami referencyjnymi nie mogą być brane pod uwagę przez decydenta przy dokonywaniu ostatecznego wyboru rozwiązań.

2.3. Metody funkcji dystansowej – rozwiązania kompromisowe

Funkcja dystansowa była prezentowana między innymi przez Ameljańczyka [3], Galasa, Nykowskiego i Żółkiewskiego [41], Jendo i Marksa [61], Kotarskiego [80], Osyczkę [131, 132], Paczkowskiego [138], Salukwadze [169, 170] oraz Yu [246]. Funkcja ta opisuje odległość z normą $\|r\|$ pomiędzy wybranym punktem w przestrzeni kryterialnej, a poszczególnymi ocenami (rozwiązaniami) należącymi do zbioru rozwiązań niezdominowanych Y_{ND} . Zadanie poszukiwania odległości z normą $\|r\|$ od punktu w przestrzeni ocen można zapisać następująco

$$\rho(F(x)) = \left[\sum_{j=1}^J [\xi_j (F_j(x) - y_j^-)]^r \right]^{\frac{1}{r}}, \quad 1 \leq r \leq +\infty \quad (2.26)$$

gdzie

- ξ_j – j -ty parametr zapewniający porównywalność składników,
- y_j^- – składowa punktu charakterystycznego.

W praktyce rozpatruje się jedną z trzech norm. Przy zastosowaniu normy Hamminga dla $\|r\| = 1$, otrzymujemy sumę odchyleń cząstkowych

$$\rho(F(x)) = \sum_{j=1}^J \xi_j (F_j(x) - y_j^-) \quad (2.27)$$

Po zastosowaniu normy Euklidesa dla $\|r\| = 2$ otrzymujemy odległość geometryczną

$$\rho(F(x)) = \sqrt{\sum_{j=1}^J [\xi_j (F_j(x) - y_j^-)]^2} \quad (2.28)$$

Przy zastosowaniu normy Czebyszewa dla $\|r\| \rightarrow +\infty$ otrzymujemy maksymalną odległość indywidualną

$$\rho(F(x)) = \sup_{1 \leq j \leq J} \xi_j (F_j(x) - y_j^-) \quad (2.29)$$

Należy zaznaczyć, że parametr zapewniający porównywalność składników ξ_j może składać się z czynnika normującego – ζ_j oraz składnika odzwierciedlającego preferencje decydenta – ω_j . Parametr ζ_j zapewniający porównywalność rozpatrywanych składników może mieć różną postać. Najistotniejsze jest to, że porównaniu powinny podlegać wyłącznie wielkości o takich samych jednostkach. Przy stosowaniu optymalizacji wielokryterialnej w zagadnieniach technicznych

kryteria wyrażają zazwyczaj różne wielkości fizyczne (czasami ekonomiczne), stąd warunek ten nie jest spełniony. Dlatego też przy zastosowaniu funkcji dystansowej powinno się badać wartości względne. Najczęściej czynnik normujący przyjmuje postać

$$\xi_j = 1/|y_j^*| \quad (2.30)$$

Odchylenia $F_j(\mathbf{x}) - y_j^*$ mierzone są względem wielkości $|y_j^*|$, którą może być punkt idealny, inny punkt charakterystyczny, bądź ocena poszukiwanego rozwiązania optymalnego $F_j(\mathbf{x})$.

Na bazie funkcji dystansowej Yu [246], a następnie Salukwadze [169, 170], wprowadzili pojęcie rozwiązania kompromisowego. W tym celu wyznaczono punkt idealny, a następnie punkt leżący na brzegu zbioru rozwiązań niezdominowanych w sensie Pareto, stosując funkcję dystansową. Punkt Salukwadze jest obrazem rozwiązania optymalnego w sensie Salukwadze poprzez funkcję wektorową $F(\mathbf{x})$. Rozwiązanie to realizuje pewien kompromis – spośród punktów optymalnych w sensie Pareto wybierane jest rozwiązanie leżące najbliżej punktu idealnego w sensie metryki euklidesowej.

W niniejszej pracy do wyznaczania rozwiązań kompromisowych wykorzystano metodę min-max z wagami wielokrotnie stosowaną w pracach Osyczki [131, 132] z uwzględnieniem normy Czebyszewa (2.29) oraz odchylenia mierzonego względem punktu idealnego

$$\rho[F(\mathbf{x})] = \min_{n \in N} \max_{j \in J} \left\{ \omega_j \frac{|F_j^n - F_j^*|}{|F_j^*|} \right\} \quad (2.31)$$

gdzie

- ω_j – „waga” j -tego kryterium oceny, $\sum_{j=1}^J \omega_j = 1$,
- $j = \{1, 2, \dots, J\}$ – zbiór indeksów rozpatrywanych kryteriów,
- $n = \{1, 2, \dots, N\}$ – zbiór indeksów rozwiązań niezdominowanych,
- F_j^n – j -ta składowa punktu idealnego.

W myśl tej koncepcji najlepsze rozwiązanie kompromisowe to takie, które powoduje, że maksymalne odchylenia od punktu idealnego są możliwe najmniejsze dla wszystkich składowych wektora kryteriów. Mówiąc inaczej, za rozwiązanie kompromisowe uważa się wariant o najmniejszej wartości najsłabszego kryterium. Metoda min-max reprezentuje więc strategię pesymisty, przyjmując założenie, że konstrukcja jest tak mocna, jak jej najsłabszy element [138]. Tak wyznaczone rozwiązanie kompromisowe $F^*(\mathbf{x})$ jest niezależne od jednostek wyrażających składowe wektora kryteriów. Należy zwrócić uwagę, że w zależności (2.31) uwzględniono współczynniki ω_j . Projektant może więc wpływać na uzyskane rozwiązanie kompromisowe wprowadzając własne preferencje dla poszczególnych składowych wektora kryteriów. Współczynniki ω_j nie

odpowiadają jednak „wagom” stosowanym w metodach skalaryzacji (ważenia składników funkcji celu), ponieważ są wprost skolerowane z ważnością składowych wektora kryteriów.

W pracach Ameljańczyka [4] oraz Zelene’go [248] metoda funkcji dystansowej przy różnych wartościach normy $\|r\|$ zastosowana została do wyznaczenia kilku rozwiązań kompromisowych w pierwotnym zadaniu optymalizacji. Zadanie pierwotne było formułowane jako zadanie minimalizacji, dlatego za punkt odniesienia przyjęto punkt idealny. Następnie formułowano wtórne zadanie optymalizacji polegające na znalezieniu z wygenerowanych wcześniej rozwiązań kompromisowych jednego „rozwiązania najlepszego”, przy zastosowaniu jako punktu odniesienia nowego punktu idealnego, wyznaczonego z rozpatrywanego podzbioru rozwiązań kompromisowych. Taki sposób działania zastosował w swoich pracach Ostwald [129, 130].

Współcześnie pojęcie rozwiązania kompromisowego zostało rozszerzone, ponieważ wybranym punktem odniesienia może być nie tylko punkt idealny, lecz inne punkty charakterystyczne, np.: punkt nadir, czy punkt antyidealny. W zależności od położenia wybranego punktu, poszukujemy oceny maksymalizującej albo minimalizującej odległość. Odległość jest minimalizowana, gdy punktami odniesienia są: punkt idealny lub punkt quasi idealny, natomiast maksymalizacja odległości ma miejsce, gdy wybranym punktem odniesienia jest: punkt nadir, punkt quasi nadir lub punkt antyidealny. W praktyce minimalizacja odległości oznacza, że dąży się, aby rozwiązanie kompromisowe położone było jak najbliżej wybranego punktu, zaś maksymalizacja powinna zapewnić jak największe oddalenie od wybranego punktu.

Przyjęcie do obliczeń jednego punktu charakterystycznego i jednej wartości parametru $\|r\|$ umożliwi wyznaczenie tylko jednego rozwiązania kompromisowego. Oczywiście rozwiązania kompromisowe wyznaczone względem różnych punktów charakterystycznych nie muszą być tymi samymi rozwiązaniami kompromisowymi. Krytycy stosowania punktów charakterystycznych do wyznaczania rozwiązań kompromisowych podnoszą problem przyjęcia właściwej wartości parametru $\|r\|$. W problematyce technicznej wydaje się, że stosowanie punktu antyidealnego jest działaniem niewłaściwym, natomiast należy posługiwać się punktem nadiru.

Funkcje dystansowe znalazły również zastosowanie w metodzie programowania celów, opisywanej przez Galasa, Nykowskiego i Żółtkiewskiego [41], Jendę i Marksa [61] oraz Paczkowskiego [138]. Problem wyboru wielokryterialnego sprowadzony jest tu do rozwiązania zadania programowania celowego, w którym decydent potrafi wskazać punkt (wektor) f_c w przestrzeni kryterialnej o składowych f_{c_j} w postaci postulowanych poziomów realizacji poszczególnych celów. Decydent zainteresowany jest uzyskaniem rozwiązania zapewniającego jak najlepszą realizację celów, dopasowaną do wektora f_c . Rozwiązanie preferowane

(przy założeniu, że punkt f_c jest położony pomiędzy punktem idealnym, a zbiorem ocen niezdominowanych Y_{ND}) minimalizuje odchyłki od wektora f_c

$$F^{pc}(x) = \min_{y_{ND} \in Y_{ND}} \{S(F(x); f_c)\} \quad (2.32)$$

gdzie

S – wielkość strat wynikająca z występowania różnic między realizacjami celów przez decyzję x , a postulowanymi poziomami ich realizacji określonymi przez wektor f_c .

Jako funkcję celu S przyjmuje się funkcję dystansową postaci (2.26).

Należy zwrócić uwagę, że ustalony przez decydenta a priori wektor f_c nazywany jest często punktem referencyjnym. Może on spełniać funkcję wzorca pozytywnego – wtedy wielkość strat S jest minimalizowana, lub być wzorcem negatywnym – w tym przypadku wielkość strat S podlega maksymalizacji.

Metoda TOPSIS (Technique for Order Preferences by Similarity to Ideal Solutions) opisywana przez Hwanga i Masuda [53], a także przedstawiana przez Brandta [18], stosuje euklidesową normę odległości do poszukiwania oceny F^T , położonej możliwie blisko punktu idealnego i jednocześnie maksymalnie oddalonego od punktu antyidealnego. Oceną wariantu jest względna bliskość do punktu idealnego

$$F^T = \min_{n \in N} \frac{d_{id}^n}{d_{id}^n + d_{ai}^n} \quad (2.33)$$

gdzie

d_{id}^n, d_{ai}^n – odpowiednio: odległość od punktu idealnego i antyidealnego, formuła (2.28),

$n = \{1, 2, \dots, N\}$ – zbiór indeksów rozwiązań niezdominowanych.

Z dwóch wariantów jednakowo odległych od oceny idealnej preferowany jest wariant bardziej odległy od oceny antyidealnej. Wydaje się, że uwzględnianie w analizach punktu antyidealnego, wyznaczanego ze zbioru rozwiązań dopuszczalnych, może deformować ostateczny wynik obliczeń. Praktyczniejsze jest korzystanie z punktu nadir zamiast punktu antyidealnego, ponieważ wyznaczany jest on ze zbioru rozwiązań niezdominowanych i uzyskiwany jednocześnie z obliczeniem punktu idealnego [138].

2.4. Metody leksykograficzne i hierarchiczne

W metodzie leksykograficznej opisywanej przez: Ameliańczyka [6], Galasa, Nykowskiego i Żółkiewskiego [41], Hwanga [53], Paczkowskiego [138] oraz Tarnowskiego [202], na podstawie informacji a priori o preferencjach, dokonuje

się uporządkowania kryteriów składowych: $F_1(x), F_2(x), \dots, F_j(x)$. Wyznaczenie rozwiązania preferowanego rozpoczyna skalarna optymalizacja względem kryterium najważniejszego ($j = 1$). W przypadku, gdy poszukiwany zbiór ocen Y^1 jest zbiorem wieloelementowym, dalsze wyznaczanie rozwiązania preferowanego przeprowadzane jest na tym zbiorze. W kolejnym kroku dokonuje się skalarnej optymalizacji względem kolejnego kryterium ($j = 2$), wyznaczając zbiór Y^2 . Procedura jest kontynuowana do momentu uzyskania jednoelementowego zbioru $Y^j, j \leq J$. Gdy zbiór Y^j zawiera więcej niż jeden element, wszystkie elementy zbioru są optymalne w sensie leksykograficznym przy przyjętym uporządkowaniu składowych wektora kryteriów. Zmiana uporządkowania prowadzi zazwyczaj do wyznaczenia innego rozwiązania preferowanego. Przy stosowaniu metody leksykograficznej najczęściej zdarza się, że już przeprowadzenie optymalizacji względem pierwszego kryterium daje jednoelementowy zbiór Y^1 , co prowadzi do zatrzymania całej procedury.

Chcąc uwzględnić przyjętą hierarchię celów, a jednocześnie umożliwić oddziaływanie wszystkich składowych wektora kryteriów na wybór rozwiązania zadania, proponuje się przyjęcie tzw. zasady quasi-hierarchii [41]. Polega ona na wprowadzeniu dopuszczalnych odchyień (wyrażanych w procentach) poszczególnych składowych od wartości optymalnej. W ten sposób rozszerzony zostaje obszar, w którym poszukiwane jest rozwiązanie optymalizujące funkcję celu o kolejnym priorytecie.

2.5. Metody analizy grupowej

Zupełnie inną metodologię podejmowania decyzji wprowadził Saaty [166], proponując metodę hierarchicznego procesu decyzyjnego AHP (Analytic Hierarchy Process), którą można także prześledzić u Escobara i Moreno-Jiméneza [33], Guha [46], Kwiesielewicz [86, 87] czy Van den Honerta [225, 227]. Metoda ta służy do wyznaczania rankingu analizowanych rozwiązań. Saaty wprowadza hierarchiczne uporządkowanie kryteriów, wykorzystując do tego celu wiedzę wielu ekspertów. Łączy więc w pewnym sensie metody hierarchiczne z metodami grupowego podejmowania decyzji. Przy stosowaniu metody AHP nie jest konieczna znajomość wartości liczbowych przyjętych składowych kryteriów oceny, ponieważ eksperci lub decydenci poprzez porównywanie parami analizowanych ocen (F^i, F^{ij}), $i, ij = 1, 2, \dots, I$ (I – liczba rozwiązań dopuszczalnych) przyporządkowują im liczbę $r_{ij} \in S^S$ ($r_{ij} = 1/r_{ji}$), korzystając przy tym ze skali: $S^S = \{1/9, \dots, 1/2, 1, 2, \dots, 9\}$. Wyniki umieszczone są w tzw. macierzy ocen M^S , będącej macierzą z ocenami niezgodnymi. Następnie macierz M^S jest przybliżana macierzą ilorazów M^{SI} ze zgodnymi ocenami. Otrzymując macierz M^{SI} wyznaczany jest wektor rozwiązania rozważanego problemu – $m^{SI} = [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n]^T$, np. poprzez zastosowanie metody logarytmicznych najmniejszych kwadratów

$$\mathbf{M}^S = \begin{Bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1l} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{l1} & r_{l2} & \dots & r_{ll} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{M}^{SI} = \begin{Bmatrix} \sigma_1/\sigma_1 & \sigma_1/\sigma_2 & \dots & \sigma_1/\sigma_l \\ \sigma_2/\sigma_1 & \sigma_2/\sigma_2 & \dots & \sigma_2/\sigma_l \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_l/\sigma_1 & \sigma_l/\sigma_2 & \dots & \sigma_l/\sigma_l \end{Bmatrix} \quad (2.34)$$

Dokonując normalizacji wektora \mathbf{m}^{SI} , uzyskuje się wektor

$$\mathbf{m}^{SI*} = [\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_n^*]^T \quad (2.35)$$

gdzie

$$\sigma_i^* = \sigma_i / \sum_{i=1}^l \sigma_i, \quad i = \{1, 2, \dots, l\} \quad (2.36)$$

W przypadku rozwiązywania problemu wielokryterialnego podejmowania decyzji do dyspozycji pozostaje l rozwiązań ocenianych z punktu widzenia J kryteriów przez L ekspertów. W metodzie AHP przeprowadza się dekompozycję na dwa podproblemy: przyznawania rang kryteriom (otrzymuje się znormalizowany wektor wag $\mathbf{w}^* = [w_1^*, w_2^*, \dots, w_J^*]^T$) oraz przyznawania rang rozwiązaniom z punktu widzenia pojedynczego kryterium (uzyskujemy znormalizowany wektor $\mathbf{m}_j^{SI*} = [\sigma_{j1}^*, \sigma_{j2}^*, \dots, \sigma_{jl}^*]^T$). W obu przypadkach należy postępować zgodnie z procedurami opisanymi powyżej (formuły 2.34 i 2.36). Następnie wyznacza się ranking globalny i -tego rozwiązania

$$\sigma_i^* = \sum_{j=1}^J w_j^* \cdot \sigma_{ij}^* \quad (2.37)$$

W przypadku zastosowania metody logarytmicznych najmniejszych kwadratów wyznaczenie wektora \mathbf{m}_j^{SI} wymaga minimalizacji następującego wyrażenia

$$\sum_{i,l} \sum_{t=1}^l [\ln(r_{iilt}) - \ln(\sigma_i/\sigma_{il})]^2 \quad (2.38)$$

gdzie

$r_{iilt} \in S^S$ – liczba wyrażająca relację dotyczącą pary rozwiązań F^i, F^{il} przedstawioną przez l -tego eksperta.

Warto odnotować, że w prezentowanej metodzie istnieje możliwość wyznaczenia rankingu rozwiązań nawet wtedy, gdy nie wszyscy eksperci wypowiedzą się w odniesieniu do wszystkich porównywanych par rozwiązań oraz kryteriów. Obecnie prowadzone są badania nad zastosowaniem tej metody przy rozmytych wartościach osądów.

Podobną metodologię oceny analizowanych rozwiązań przedstawił Yager [239, 240]. Z powodzeniem stosowali ją Cichy, Płonka, Stadnicki, Rduch

i Wróbel [24, 147 ÷ 149]. Yager, wykorzystując koncepcję Saaty'ego porównywania par kolejnych kryteriów, proponuje wyznaczanie macierzy ważności poszczególnych kryteriów $\mathbf{M}^w = [m_{jj}]$, $j, j = 1, 2, \dots, J$ (J – liczba kryteriów). Następnie dla poszczególnych kryteriów i każdego rozpatrywanego rozwiązania konstrukcyjnego ekspert określa w przyjętej skali punktowej, np. $\langle 0, 10 \rangle$, ocenę r_{ijl} . Oceny punktowe poddaje się normalizacji, sprowadzając je do wartości z przedziału $\langle 0, 1 \rangle$. W pierwszym kroku tworzone są sumy r_{ijl}^s , a w drugim – unormowane wartości oceny c_{ijl}^*

$$r_{jl}^s = \sum_{i=1}^I r_{ijl} \quad c_{ijl}^* = r_{ijl} / r_{jl}^s \quad (2.39)$$

gdzie

$i = \{1, 2, \dots, I\}$ – liczba rozwiązań dopuszczalnych,
 $l = \{1, 2, \dots, L\}$ – liczba ekspertów.

Następnie wyznaczane są dla l -tego eksperta oceny unormowane – k_{jl}^* oraz – w wyniku uśrednienia ocen podanych przez poszczególnych ekspertów – łączne oceny unormowane – k_j^*

$$k_{jl}^* = c_{1jl}^* / a_{1l}^r + c_{2jl}^* / a_{2l}^r + \dots + c_{ijl}^* / a_{il}^r$$

$$k_j^* = c_{1j}^* / a_{1l}^r + c_{2j}^* / a_{2l}^r + \dots + c_{ij}^* / a_{il}^r \quad (2.40)$$

gdzie

a_{il}^r – numer i -tego rozwiązania.

Poszczególnym kryteriom oceny k_j^* przypisywane są wagi w_j , będące współrzędnymi wektora własnego \mathbf{W}^w , odpowiadającego maksymalnej wartości własnej λ_{\max} wyznaczonej z zależności

$$\mathbf{M}^w \cdot \mathbf{W}^w = \lambda_{\max} \cdot \mathbf{W}^w \quad , \quad \sum_{j=1}^J w_j = J \quad (2.41)$$

Kolejnym etapem metody Yagera jest wyznaczanie decyzji unormowanych d_j^Y

$$d_j^Y = (c_{1j}^*)^{w_j} / a_{1l}^r + (c_{2j}^*)^{w_j} / a_{2l}^r + \dots + (c_{ij}^*)^{w_j} / a_{il}^r \quad (2.42)$$

Ostatni etap stanowi wyznaczenie jednej decyzji optymalnej D^Y , na podstawie której wybiera się rozwiązanie najlepsze, spełniające wszystkie przyjęte do oceny kryteria

$$D^Y = D_1 + D_2 + \dots + D_l \quad , \quad D = \max_j (c_{ij}^*)^{w_j} \quad (2.43)$$

Za rozwiązanie najlepsze uznaje się rozwiązanie, któremu odpowiada największy składnik decyzji optymalnej

$$D_{opt} = \max_i D_i \quad (2.44)$$

Należy zaznaczyć, że obie opisane metody są dość skomplikowane i trudno podać interpretację fizyczną otrzymanych wielkości. Ponadto autorzy obu metod stosują skalaryzację wewnętrzną, polegającą na uśrednianiu cząstkowych wyników podanych przez ekspertów do pojedynczej oceny.

2.6. Podsumowanie przeglądu wybranych metod

Metody analizy wielokryterialnej mają za zadanie wspomaganie decydenta w procesie wyboru „rozwiązania najlepszego”. Mając wspólny cel, różnią się jednak pod względem założeń i procedur postępowania.

Metody skalaryzacji stosują prostą ideę sprowadzenia zadania wielokryterialnego do jednokryterialnego. Wyniki końcowe tak przeprowadzonej analizy nie są jednak jednoznaczne, ponieważ zależą istotnie od sposobu przeprowadzania skalaryzacji, kodowania wartości składowych wektora kryteriów oraz wprowadzania wag ważności poszczególnych kryteriów.

Metody analizy z relacją przewyższania wymagają wprowadzania wielu różnych wielkości dla każdego kryterium składowego, np.: progę preferencji, rozróżnialności, weta oraz wagi ważności kryterium, co wiąże się z jednej strony – z koniecznością dobrego poznania stosowanej metody, z drugiej zaś – wymaga rzetelnej wiedzy o analizowanym problemie. Wielkości obliczane z reguły nie mają interpretacji fizycznej, a wynik końcowy powstaje przez zastosowanie skalaryzacji wewnętrznej. Otrzymane rankingi bywają mało zrozumiałe dla użytkowników ze względu na występowanie kategorii rozwiązań nieporównywalnych.

Metody funkcji dystansowej w swoim klasycznym podejściu wyznaczają jedną ocenę kompromisową, co zazwyczaj prowadzi do ustalenia jednego rozwiązania kompromisowego. Uzyskany wynik jest jednak zależny od zastosowanej normy oraz preferencji kryteriów określanych przez ekspertów. Po wprowadzeniu wielu zestawów preferencji otrzymuje się podzbiór rozwiązań kompromisowych, co utrudnia ostateczny wybór rozwiązania preferowanego.

Analiza przy użyciu metody leksykograficznej lub hierarchicznej dzięki uporządkowaniu kryteriów składowych zamienia zadanie wielokryterialne w zbiór sekwencyjnych zadań jednokryterialnych. Zmiana uporządkowania kryteriów w przeważającej większości przypadków powoduje zmianę uzyskanego rozwiązania preferowanego.

Metody analizy grupowej wymagają uporządkowania ważności kryteriów składowych oraz wprowadzenia ocen kryteriów rozpatrywanego wariantu przy

wykorzystaniu wiedzy kilku ekspertów. Agregacja ocen cząstkowych w ocenie końcową wymaga skomplikowanych obliczeń oraz zastosowania skalaryzacji wewnętrznej, a otrzymane wielkości nie mają interpretacji fizycznej.

Metody opisane w literaturze prezentowane są zazwyczaj jako narzędzia interaktywne, ale ich interaktywność ograniczona jest do wprowadzania przez użytkownika danych żądanych przez program. Algorytm przelicza analizowane rozwiązania i jako wynik przedstawia listę rankingową lub jedno preferowane rozwiązanie. Autorzy i użytkownicy tych metod unikają wykonania powtórnych analiz przy zmienionych wartościach, np.: wag ważności rozpatrywanych kryteriów lub zbioru preferencji pochodzącego od innego eksperta, ponieważ powoduje to zazwyczaj otrzymanie innego rozwiązania preferowanego lub nowej listy rankingowej, w której rozmieszczenie analizowanych rozwiązań nie pokrywa się z listą uzyskaną poprzednio. Tak więc, im dłużej przeprowadzana jest analiza (więcej zbiorów preferencji lub zestawów wag otrzymanych od ekspertów zostało przeliczonych), tym więcej otrzymuje się różnych końcowych wyników. W efekcie użytkownik korzystający z takich metod wspomagających podejmowanie decyzji zamiast uzyskać pomoc, zostaje doprowadzony do sytuacji, z którą nie może sobie poradzić. Różne końcowe wyniki uniemożliwiają mu podjęcie racjonalnej decyzji. Pewnym wyjściem z powyższej sytuacji jest podejście, w którym przy korzystaniu z ocen kilku ekspertów następuje agregacja ich preferencji przypisywanych analizowanym kryteriom (skalaryzacja wewnętrzna). W kolejnym kroku następuje wygenerowanie listy rankingowej lub rozwiązania preferowanego.

Drugim poważnym mankamentem istniejących metod i systemów wspomagających decyzje przy wielorakości celów jest wprowadzanie skomplikowanej nomenklatury oraz nowych terminów i pojęć, które dla potencjalnego użytkownika mogą być mało zrozumiałe, np.: funkcja użyteczności, wartość przewyższania, silna preferencja, słaba preferencja, kategoria równoważności, wskaźnik zgodności, poziom niezgodności, macierz ocen. Ponadto korzystający z tych metod jest często zmuszony do wprowadzania wartości wielu różnych parametrów, a niekiedy nawet rozbudowanych macierzy ocen, które powinny być tworzone przez ekspertów.

Trzeci mankament metod opisywanych w literaturze to brak interpretacji fizycznej wielu wielkości obliczanych w procesie stosowania tych metod. Mankament ten dotyczy to przede wszystkim metod skalaryzacji, metod z relacją przewyższania oraz metod analizy grupowej.

3. Teza i zakres pracy

Analizując bogatą literaturę dotyczącą komputerowego wspomaganie decyzji wielokryterialnych przy skończonym zbiorze rozwiązań dopuszczalnych oraz opierając się na własnych badaniach i przemyśleniach sformułowano następującą tezę:

Istnieje możliwość opracowania systemu analizy wielokryterialnej, wykorzystującego wiele różnych metod analizy współdziałających ze sobą, który będzie generować podzbiór o niewielkiej liczebności rozwiązań optymalnych w sensie Pareto, mało wrażliwych na zmianę preferencji kryteriów przyjętych przez ekspertów.

Zakres pracy

Zakres pracy obejmuje:

1. Opracowanie metody stosującej operację mutacji do selekcji rozwiązań niezdominowanych. Metoda ta umożliwi eliminację rozwiązań położonych w bliskim sąsiedztwie, prowadząc do trwałej redukcji liczebności rozważanego zbioru rozwiązań niezdominowanych przy zachowaniu kształtu analizowanego zbioru.
2. Opracowanie metody analizy wielokryterialnej wykorzystującej wewnętrzne własności analizowanego zbioru rozwiązań niezdominowanych poprzez zmodyfikowaną operację krzyżowania w celu wyznaczenia mało licznej reprezentacji.
3. Dobór metod analizy wielokryterialnej zapewniających wieloetapowy przebieg procesu selekcji rozwiązań niezdominowanych, przy czym metody te winny współdziałać tak, by otrzymane podzbiory wynikowe w metodach poprzednich były podzbiórami początkowymi metod następných.
4. Opracowanie systemu analizy wielokryterialnej, w którym proces dochodzenia do rozwiązań preferowanych będzie przebiegał ewolucyjnie, a wyznaczone rozwiązania będą mało wrażliwe na zmianę preferencji przypisywanych składowym wektora kryteriów przez grupę ekspertów.

Poszczególne rozdziały pracy zawierają

1. Przedstawienie wybranych pojęć podstawowych dotyczących optymalizacji wielokryterialnej oraz relacji porządku częściowego, a także opis punktów charakterystycznych w przestrzeni kryterialnej i wykorzystania ich do wyznaczania rozwiązań kompromisowych.
2. Przegląd literaturowy metod analizy wielokryterialnej stosowanych w zagadnieniach technicznych.
3. Prezentację idei, ogólnej budowy i zasady działania autorskiego systemu do wspomaganiania decyzji przy wielorakości celów, nazwanego *Ewolucyjnym Systemem Analizy Wielokryterialnej*.
4. Szczegółowy opis opracowanych i zastosowanych metod filtracji rozwiązań niezdominowanych: *Metody Wartości Progowej*, *Metody Przesunięcia Punktu Idealnego*, *Metody Przedziału Nierozróżnialności* oraz *Metody Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych*.
5. Testowanie opracowanych algorytmów realizujących filtrację *Metodą Przedziału Nierozróżnialności* oraz porównanie wyników otrzymanych przy użyciu *Metody Przedziału Nierozróżnialności* i *Metody Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych* z wynikami uzyskanymi przy użyciu uznanych metod analizy wielokryterialnej.
6. Prezentację sześciu przykładów zastosowania *Ewolucyjnego Systemu Analizy Wielokryterialnej* lub jego metod składowych w różnych zagadnieniach technicznych.
7. Przedstawienie ogólnych i szczegółowych wniosków dotyczących zastosowania *Ewolucyjnego Systemu Analizy Wielokryterialnej*.
8. Prognozowanie kierunków dalszych badań, wykorzystania metod składowych *Ewolucyjnego Systemu Analizy Wielokryterialnej* oraz rozwoju tego systemu w komputerowo wspomaganym podejmowaniu decyzji wielokryterialnych.

4. Ewolucyjny System Analizy Wielokryterialnej <ESAW>

Opracowany *Ewolucyjnym Systemem Analizy Wielokryterialnej* (<ESAW>) zawiera w sobie dwa pojęcia ewolucyjności: zewnętrzną oraz wewnętrzną. Ewolucyjność zewnętrzna rozumiana jest tutaj jako wieloetapowe, interaktywne dochodzenie do końcowego „rozwiązania najlepszego” dzięki generowaniu kolejnych podzbiorów rozwiązań niezdominowanych. Realizuje się to poprzez stopniowe zawężanie zawartości analizowanego podzbioru przy zastosowaniu opracowanych metod filtracji. Ewolucyjność wewnętrzna wynika z faktu, że dwie oryginalne metody analizy wielokryterialnej wykorzystują narzędzia będące podstawą optymalizacyjnych algorytmów genetycznych i ewolucyjnych. *Metoda Przedziału Nierozróżnialności* stosuje zmodyfikowaną operację mutacji, zaś *Metoda Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych* posługuje się zmodyfikowaną operacją krzyżowania.

4.1. Budowa ogólna systemu <ESAW>

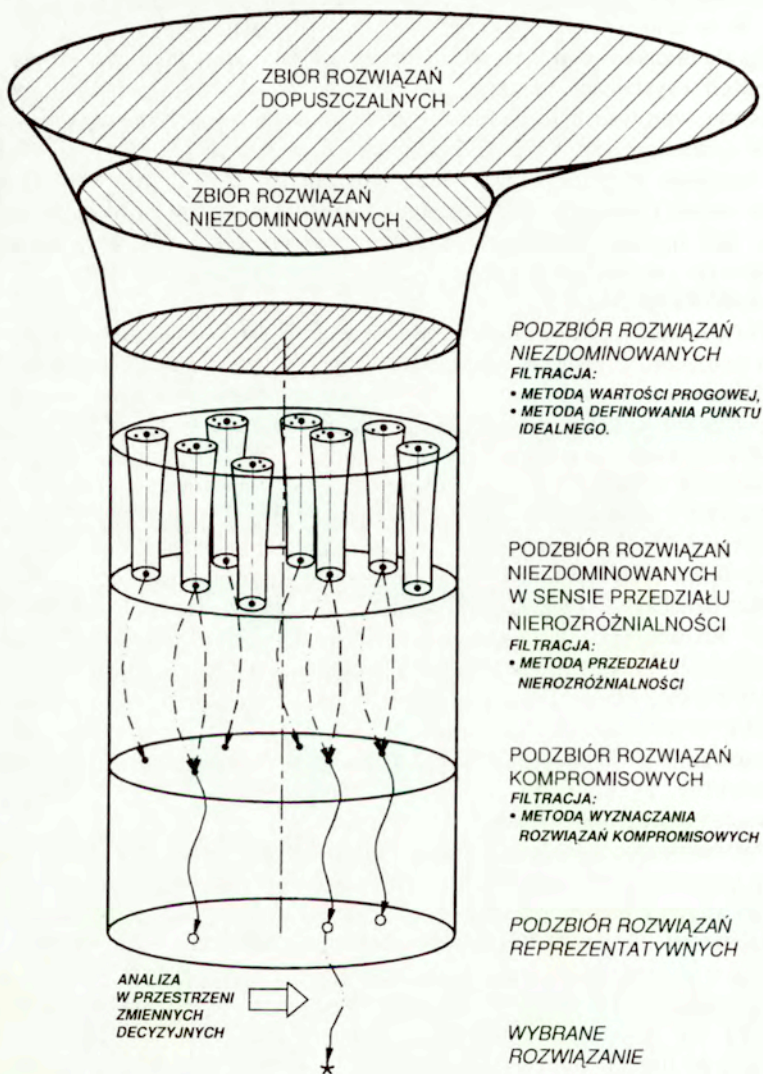
Prezentowany *Ewolucyjny System Analizy Wielokryterialnej* zbudowano w oparciu o wewnętrzne właściwości zawarte w analizowanych rozwiązaniach oraz parametr podawany w procentach. Wartości rozwiązań decydują o położeniu wektora idealnego będącego podstawowym punktem odniesienia *Metody Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych*. Przedział nierozróżnialności wyrażony w procentach umożliwia przeprowadzanie filtracji *Metodą Przedziałów Nierozróżnialności*. Końcowy efekt tej filtracji zależy od podanej wartości przedziału nierozróżnialności i od wzajemnego rozmieszczenia analizowanych rozwiązań. Należy podkreślić, że dzięki podawaniu wartości parametru w procentach, korzysta się ze sposobu powszechnie znanego w technice, służącego między innymi do wyrażania dokładności pomiaru przyrządu czy dokładności wykonywanych obliczeń.

Ewolucyjny System Analizy Wielokryterialnej charakteryzuje się również tym, że w celu wyznaczenia końcowego „rozwiązania najlepszego” nie wprowadza się dodatkowego kryterium wyboru, tak jak to ma miejsce w klasycznych metodach i systemach analizy, np.: opartych na skalaryzacji rozpatrywanego problemu, wprowadzających funkcję użyteczności lub hierarchię kryteriów.

W systemie <ESAW> poszukiwanie końcowego „rozwiązania najlepszego” nie następuje w pojedynczym akcie obliczeniowym, lecz we współdziałaniu wielu metod i prowadzi do znalezienia takiego rozwiązania kompromisowego, które jest najmniej wrażliwe na preferencje przypisywane przez ekspertów składowym wektora kryteriów. Graficzną interpretację systemu <ESAW> pokazano na rysunku 4.1.

Przy zastosowaniu wektorowego wskaźnika jakości, liczebność wyznaczonego podzbioru rozwiązań niezdominowanych bywa często duża (może liczyć od kilkunastu do kilkuset rozwiązań), co uniemożliwia proste wskazanie „rozwiązania najlepszego”. W wielu pracach takie terminy, jak: rozwiązanie niezdominowane, rozwiązanie kompromisowe, rozwiązanie preferowane, rozwiązanie najlepsze są synonimami. W niniejszej pracy – ze względu na ewolucyjne dochodzenie do kilkuelementowego podzbioru „rozwiązań najlepszych” i do końcowego „rozwiązania najlepszego” – wprowadzono rozróżnienie tych terminów. „Rozwiązania najlepsze” to pojęcie najbardziej ogólne, oznaczające rozwiązania wybrane ze zbioru rozwiązań niezdominowanych. Rozwiązania kompromisowe to rozwiązania wyznaczone poprzez zastosowanie funkcji dystansowej mierzonej od punktu idealnego i nadejrzanych punktów idealnych. Rozwiązanie reprezentatywne to takie rozwiązanie kompromisowe, które pojawiało się w podzbiórach rozwiązań kompromisowych przy zastosowaniu różnych preferencji dla analizowanych kryteriów. Rozwiązanie preferowane to końcowe „rozwiązanie najlepsze”, wybrane z podzbioru rozwiązań reprezentatywnych.

Prezentowany *Ewolucyjny System Analizy Wielokryterialnej* jest systemem, który umożliwia wyznaczanie kilkuelementowego podzbioru rozwiązań reprezentatywnych z bardzo licznego zbioru rozwiązań optymalnych w sensie Pareto (kilkadziesiąt lub nawet kilkaset elementów), a na koniec – po uwzględnieniu analizy w przestrzeni zmiennych decyzyjnych – wskazanie jednego rozwiązania preferowanego. Dochodzenie do podzbioru rozwiązań reprezentatywnych odbywa się w sposób ewolucyjny, poprzez włączanie nowych jakościowo narzędzi do filtracji kolejno otrzymywanych podzbiorów rozwiązań niezdominowanych. Należy podkreślić, że proces filtracji jest sekwencyjny. Wynikowy podzbiór rozwiązań otrzymany w procesie filtracji przy użyciu jednej metody jest podzbiorem wejściowym do analizy kolejną metodą. Schemat blokowy systemu <ESAW> pokazano na rysunku 4.2.



Rys. 4.1. Graficzna ilustracja systemu <ESAW>

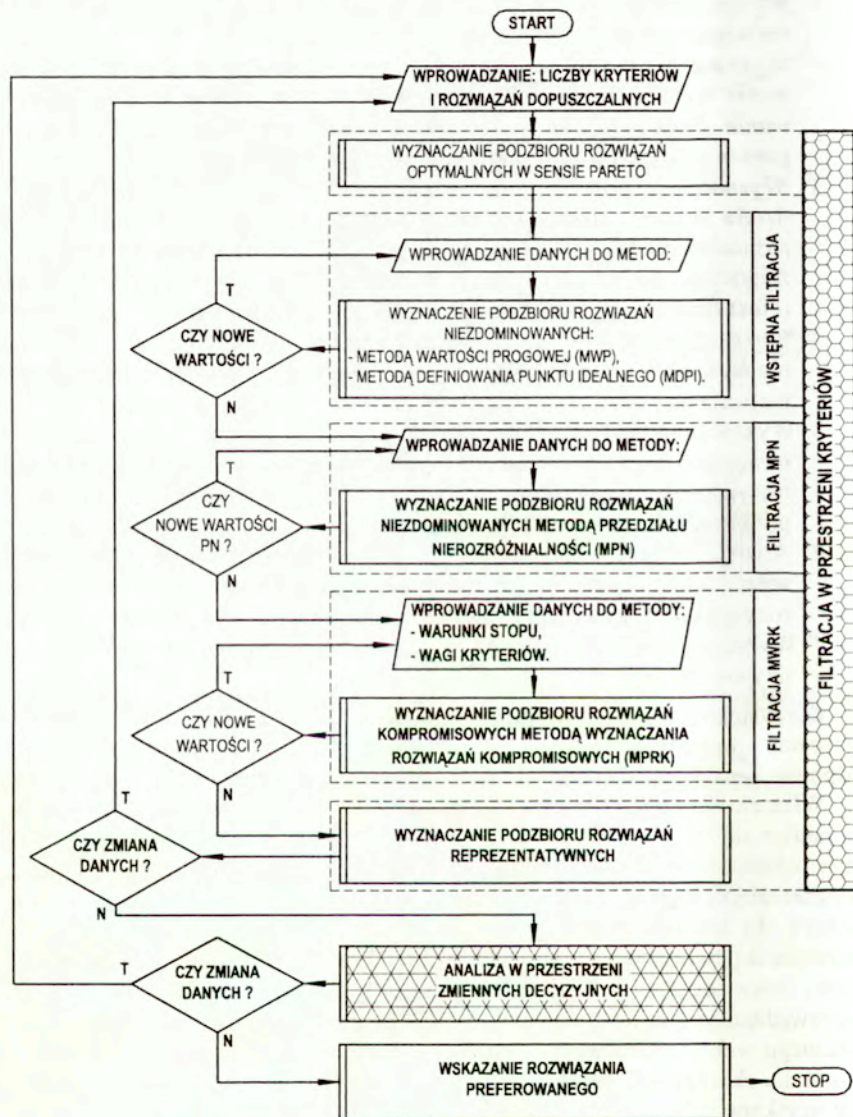
Ewolucyjny System Analizy Wielokryterialnej obejmuje następujące działania:

- 1⁰ Wyznaczanie zbioru rozwiązań optymalnych w sensie Pareto – odrzucenie rozwiązań zdominowanych.
- 2⁰ Wyznaczanie podzbioru rozwiązań niezdominowanych poprzez zastosowanie *Metody Wartości Progowych* (MWP) lub użycie *Metody Definiowania Punktu Idealnego* (MDPI) – odrzucenie rozwiązań tworzących punkty narożne i rozwiązań leżących w ich sąsiedztwie.
- 3⁰ Wyznaczanie podzbioru rozwiązań niezdominowanych w sensie przedziału nierozróżnialności poprzez filtrację *Metodą Przedziałów Nierozróżnialności* (MPN) – ortogonalne stożki odrzucają wybrane rozwiązania znajdujące się na całej hiperpowierzchni rozwiązań niezdominowanych (efekt działania tej metody podobny jest do działania sita).
- 4⁰ Wyznaczanie podzbioru rozwiązań kompromisowych poprzez zastosowanie *Metody Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych* (MWRK) – wybór nielicznego podzbioru z podzbioru rozwiązań niezdominowanych.
- 5⁰ Wyznaczanie podzbioru rozwiązań reprezentatywnych – wybór rozwiązań następuje poprzez analizę wygenerowanych wcześniej podzbiorów rozwiązań kompromisowych, które powstały przy wprowadzaniu różnych preferencji dla analizowanych kryteriów.
- 6⁰ Analiza w przestrzeni zmiennych decyzyjnych (o ile jest dostępna) – wyznaczenie obszarów zmiennych decyzyjnych, dla których analizowane rozwiązania należą do podzbioru rozwiązań reprezentatywnych.
- 7⁰ Wyznaczanie rozwiązania preferowanego z podzbioru rozwiązań reprezentatywnych.

Korzystając z *Ewolucyjnego Systemu Analizy Wielokryterialnej* można stosować wszystkie tworzące go metody lub tylko metody wybrane, odpowiednio do realizacji aktualnie analizowanego zadania.

Właściwości opisanego powyżej ewolucyjnego systemu <ESAW> wskazują, że nadaje się on doskonale do przeprowadzania analiz wielokryterialnych nawet przy minimalnym doświadczeniu użytkownika. Użytkownik może nie mieć wystarczającej wprawy w posługiwaniu się systemem, nie posiadać dostatecznej wiedzy do sterowania zastosowanymi metodami filtracji, a nawet niewiele wiedzieć o przedmiocie przeprowadzanej analizy. Z drugiej strony, w przypadku osoby doświadczonej – dzięki elastyczności systemu możliwe jest samodzielne wprowadzanie wielu dodatkowych parametrów (np. wartości progowych, własnego wektora idealnego). Wartości przedziału nierozróżnialności mogą być różne dla składowych wektora kryteriów, można również wprowadzać preferencje uzyskane od ekspertów (lub własne) dla poszczególnych kryteriów, definiować różne wektory kryterialne lub wybierać sposób zakończenia poszukiwań rozwiązań kompromisowych. Ponadto możliwe jest analizowanie pośrednich wyników przeprowadzonych filtracji. To wszystko sprawia, że *Ewolucyjny*

System Analizy Wielokryterialnej nadaje się zarówno do wspomagania decyzji dla osób początkujących, jak i doświadczonych.



Rys. 4.2. Schemat blokowy systemu <ESAW>

4.2. Wstępna filtracja zbioru rozwiązań

4.2.1. Metoda Wartości Progowej

Metoda Wartości Progowej (MWP) jest prostym sposobem eliminowania rozwiązań niezdominowanych leżących na skraju zbioru rozwiązań niezdominowanych, wzdłuż ortogonalnych kierunków składowych wektora kryteriów – to znaczy rozwiązań wyznaczających punkty narożne i leżących w ich otoczeniu. Rozwiązania wyznaczające punkty narożne definiują zazwyczaj rozwiązanie idealne (wektor idealny), tak więc ich odrzucenie powoduje konieczność wyznaczenia nowego wektora idealnego. *Metoda Wartości Progowej* jest w dużej mierze podobna do sformułowanego w optymalizacji jednokryterialnej i wielokryterialnej zadania satysfakcji [137, 138]. Zadanie satysfakcji w optymalizacji jednokryterialnej jest zapisywane następująco

$$F(\mathbf{x}_s) = \text{sat}_{\mathbf{x} \in X} F(\mathbf{x}) \quad (4.1)$$

$$\text{sat}_{\mathbf{x} \in X} F(\mathbf{x}) \begin{cases} \leq f_s & \text{w zadaniu } \min F(\mathbf{x}) \\ \geq f_s & \text{w zadaniu } \max F(\mathbf{x}) \end{cases}$$

gdzie

- F – funkcja celu,
- \mathbf{x} – wektor zmiennych decyzyjnych,
- f_s – zadowalająca wartość kryterium,
- \mathbf{x}_s – wektor zmiennych decyzyjnych, dla których funkcja celu $F(\mathbf{x})$ przyjmuje wartości lepsze (mniejsze przy minimalizacji $F(\mathbf{x})$, a większe przy maksymalizacji $F(\mathbf{x})$) od wcześniej przyjętej wartości zadowalającej.

W zadaniu optymalizacji wielokryterialnej występuje wektorowa funkcja celu $F(\mathbf{x}) = [F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), \dots, F_j(\mathbf{x})]^T$, dlatego też należy określić j wartości zadowalających f_{sj} (gdzie $j \in J = \{1, 2, \dots, J\}$ jest numerem funkcji celu).

Zadanie satysfakcji przyjmie postać

$$F(\mathbf{x}_s) = \text{sat}_{\mathbf{x} \in X} F(\mathbf{x}) \quad (4.2)$$

$$\text{sat}_{\mathbf{x} \in X} F(\mathbf{x}) \begin{cases} F_j \leq f_{sj} & \text{w zadaniu } \min F_j(\mathbf{x}), j \in J = \overline{1, J} \\ F_j \geq f_{sj} & \text{w zadaniu } \max F_j(\mathbf{x}), j \in J = \overline{1, J} \end{cases}$$

W zagadnieniu wielokryterialnego wyboru wg systemu <ESAW> dysponuje się uzyskanymi wcześniej rozwiązaniami dopuszczalnymi lub niezdominowanymi. Stąd, po określeniu j wartości zadowalających f_{sj} , można dokonać przeglądu

(filtracji) istniejącego zbioru. W zależności od wprowadzonych wartości zadowalających otrzymuje się różne jakościowo przypadki. Na rysunkach 4.3 ÷ 4.9 pokazano poziomy f_S w zadaniach minimalizacji składowych wektora kryterium przyjmujących wartości większe od zera ($F_f(x) \geq 0$).

Spośród sześciu przypadków różnego położenia f_S w odniesieniu do optymalizacji wielokryterialnej przedstawionych przez Paczkowskiego [138], tylko niektóre mają praktyczne znaczenie w zagadnieniach wielokryterialnego wyboru. W niniejszej pracy rozważane jest zagadnienie satysfakcji dotyczące problemu wielokryterialnego wyboru, stąd niektóre przypadki ulegają pewnym modyfikacjom i dlatego należy wyjaśnić ich specyfikę.

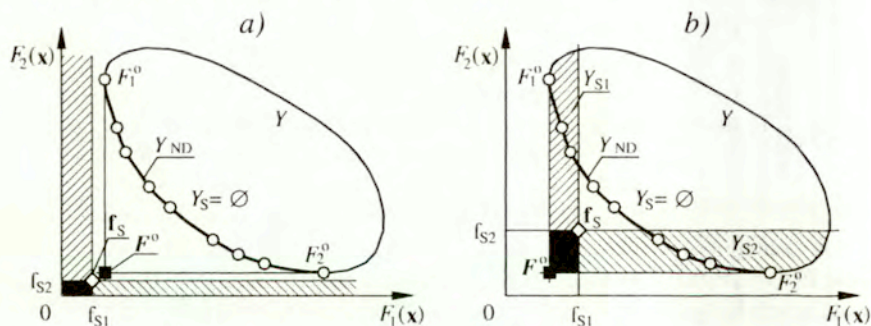
W przypadkach 1 i 2 zbiór ocen satysfakcjonujących zawsze jest pusty, a więc nie mogą być one przydatne dla potrzeb filtracji.

Przypadek 1

Ocena zadowalająca f_S znajduje się w strefie pomiędzy początkiem układu 0 , a wektorem idealnym F^0 (rysunek 4.3a).

Przypadek 2

Ocena zadowalająca leży pomiędzy punktem idealnym, a zbiorem rozwiązań niezdominowanych – powstają rozłączne zbiory ocen satysfakcjonujących poszczególne kryteria (rysunek 4.3b), ale ostateczny zbiór ocen satysfakcjonujących pozostaje pusty.



Rys. 4.3. Przypadki pustych zbiorów satysfakcji zadania dwukryterialnego,
 ◇ – ocena satysfakcjonująca

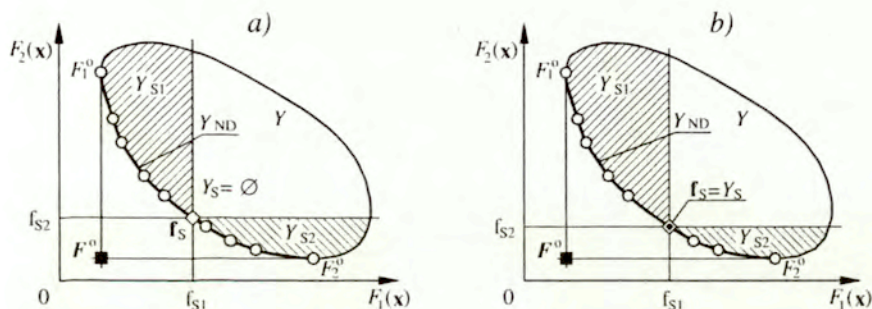
Zbyt ostre wymagania, co do wartości funkcji celu powodują, że brak jest rozwiązań satysfakcjonujących.

Kolejne przypadki 3 i 4 mają praktyczne znaczenie w procesie filtracji, ponieważ przyczyniają się do redukcji liczby rozwiązań niezdominowanych.

Przypadek 3

Ocena zadowalająca leży na brzegu zbioru rozwiązań niezdominowanych. W zadaniu wielokryterialnego wyboru należy rozróżnić dwie możliwości:

- ocena zadowalająca leży między rozwiązaniami wyznaczającymi brzeg – zbiór ocen satysfakcjonujących jest zbiorem pustym, rysunek 4.4a,
- ocena zadowalająca odpowiada wartościom funkcji celu konkretnego rozwiązania – zbiór ocen satysfakcjonujących będzie zredukowany do jednego rozwiązania, rysunek 4.4b.

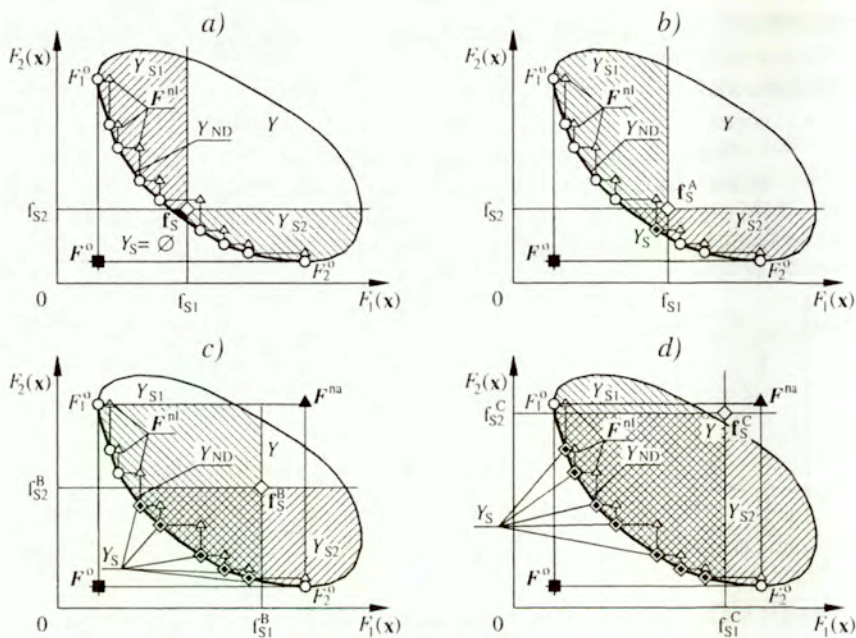


Rys. 4.4. Zbiory satysfakcji zadania dwukryterialnego, gdy ocena leży na brzegu zbioru, \diamond – rozwiązanie spełniające ocenę satysfakcjonującą

Przypadek 4

Oceny satysfakcjonujące f_{Sj} znajdują się wewnątrz zbioru rozwiązań dopuszczalnych (w zadaniach dyskretnych wewnątrz powłoki $C_o(Y)$) lub poniżej punktu nadir (gdy punkt nadir nie należy do zbioru rozwiązań dopuszczalnych). W zadaniach satysfakcji prowadzi to do wyznaczenia zbioru rozwiązań dopuszczalnych, lub nawet niezdominowanych, spełniających postawione wymagania. W zadaniu wielokryterialnego wyboru należy rozróżnić dwie możliwości:

- ocena satysfakcjonująca leży poniżej wszystkich lokalnych punktów nadir F^{nl} – wynikiem jest zbiór pusty – rysunek 4.5a;
- położenie oceny satysfakcjonującej znajduje się powyżej lub obok wszystkich lokalnych punktów nadir F^{nl} (tzn., że ocena satysfakcjonująca oraz lokalne punkty nadir tworzą podzbiór rozwiązań niezdominowanych), ale poniżej punktu nadir F^{na} – zbiór rozwiązań satysfakcjonujących będzie składał się:
 - z jednego rozwiązania – ocena f_S^A (taka sytuacja występuje przy tzw. sterowanych przetargach, gdy określa się takie wartości kryteriów, by inne rozwiązania były odrzucane), rysunek 4.5b,
 - z wielu rozwiązań – oceny f_S^B oraz f_S^C , rysunek 4.5c i d.



Rys. 4.5. Zbiory satysfakcji zadania dwukryterialnego, gdy ocena leży wewnątrz zbioru rozwiązań dopuszczalnych

Przypadek 5 i 6 nie mają praktycznego znaczenia, ponieważ nie przyczyniają się do redukcji liczebności rozważanego zbioru.

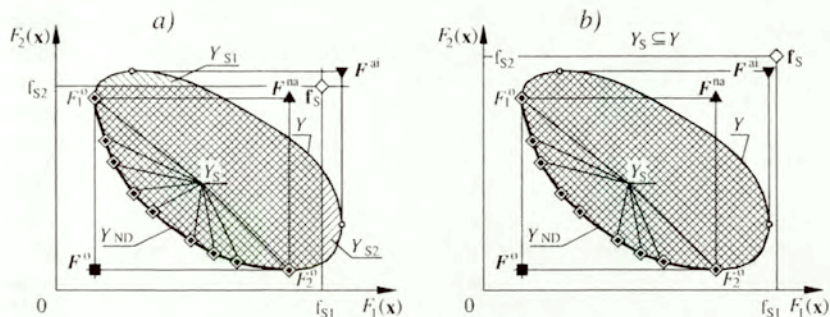
Przypadek 5

Wszystkie oceny satysfakcjonujące f_{Sj} znajdują się pomiędzy punktem nadir, a punktem antyidealnym F^{ai} – zbiór ocen satysfakcjonujących obejmuje większość ocen dopuszczalnych i wszystkie oceny niezdominowane, rysunek 4.6a.

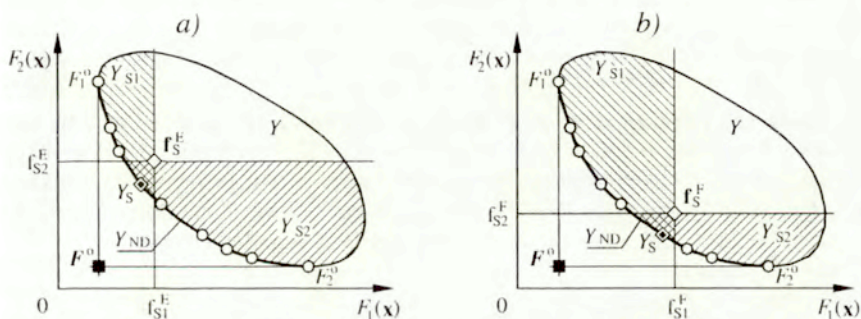
Przypadek 6

Oceny satysfakcjonujące f_{Sj} znajdują się powyżej punktu antyidealnego F^{ai} – zbiór ocen satysfakcjonujących obejmuje wszystkie oceny dopuszczalne i oceny niezdominowane, rysunek 4.6b.

Gdy po filtracji zbioru rozwiązań niezdominowanych *Metodą Wartości Progowej* pozostaje jedno rozwiązanie, stanowi ono rozwiązanie kompromisowe i jednocześnie preferowane. Taka sytuacja budzi jednak wiele wątpliwości, ponieważ wprowadzenie nowej wartości zadowalającej (progowej) – np.: f_S^P zamiast f_S^E – powoduje zazwyczaj, że inne rozwiązanie staje się rozwiązaniem preferowanym, rysunek 4.7.



Rys. 4.6. Zbiory satysfakcji zadania dwukryterialnego, gdy ocena leży powyżej punktu nadir i punktu antyidealnego



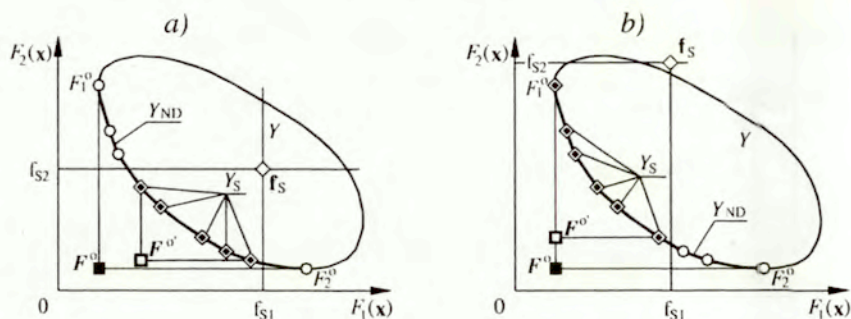
Rys. 4.7. Wpływ zmiany rozwiązania zadowalającego f_S^E i f_S^F na rozwiązanie preferowane na przykładzie zadania dwukryterialnego

Gdy w procesie filtracji *Metodą Wartości Progowej* otrzymuje się podzbiór rozwiązań niezdominowanych (satysfakcjonujących) liczący więcej niż jeden element, następuje zazwyczaj odrzucenie przynajmniej jednego rozwiązania tworzącego punkty narożne oraz rozwiązań niezdominowanych leżących w sąsiedztwie tych punktów. Tym samym rozwiązanie (lub rozwiązania) wyznaczające punkt idealny nie należy do wygenerowanego podzbioru, rysunek 4.8, co pociąga za sobą konieczność wyznaczenia nowego punktu idealnego. Dla zadania minimalizacji zapis ten wygląda następująco

$$F^{o'} = [F_1^{o'}, F_2^{o'}, \dots, F_j^{o'}]^T \quad (4.3)$$

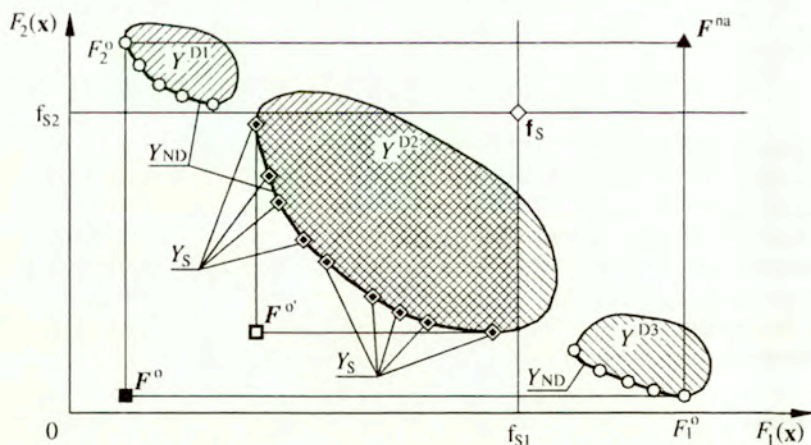
gdzie

$$F_j^{o'} = \min_{x \in X} F_j \quad \text{dla} \quad F_j \leq f_{Sj} \quad j \in J = \{1, 2, \dots, J\}$$



Rys. 4.8. Wyznaczanie nowego wektora idealnego F^{o*} (■) na przykładzie zadania dwukryterialnej minimalizacji

Widać więc, że właściwe stosowanie *Metody Wartości Progowej* może przyczynić się do redukcji liczebności rozważanego podzbioru rozwiązań niezdominowanych i w konsekwencji – do zmiany punktu odniesienia wykorzystywanego w *Metodzie Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych* (patrz rozdział 4.4). Warto w tym miejscu przypomnieć, że punkt idealny jest wewnętrzną właściwością analizowanych rozwiązań. Stosowanie MWP wymaga od użytkownika dużej wiedzy o analizowanych rozwiązaniach, aby uniknąć zbytejnej redukcji liczby elementów zbioru i w żadnym razie nie doprowadzić do sytuacji, w której otrzymujemy podzbiór pusty lub jednoelementowy.



Rys. 4.9. Działanie MWP na przykładzie zadania dwukryterialnej minimalizacji

Niewłaściwe stosowanie MWP może prowadzić również do zubożenia wiedzy o różnorodności analizowanych rozwiązań – poprzez odrzucenie całych podzbiorów rozwiązań dopuszczalnych i niezdominowanych. Pokazano to na

rysunku 4.9. Zbiór rozwiązań dopuszczalnych i niezdominowanych składa się z trzech podzbiorów: Y^{D1} , Y^{D2} i Y^{D3} . Po wprowadzeniu wartości satysfakcjonującej f_s Metoda Wartości Progowej odcięła wszystkie rozwiązania należące do podzbiorów Y^{D1} i Y^{D3} . Zbiór rozwiązań satysfakcjonujących obejmuje tylko elementy należące do podzbioru Y^{D2} . Na rysunku zaznaczono również nowy wektor idealny F^0 .

4.2.2. Metoda Definiowania Punktu Idealnego

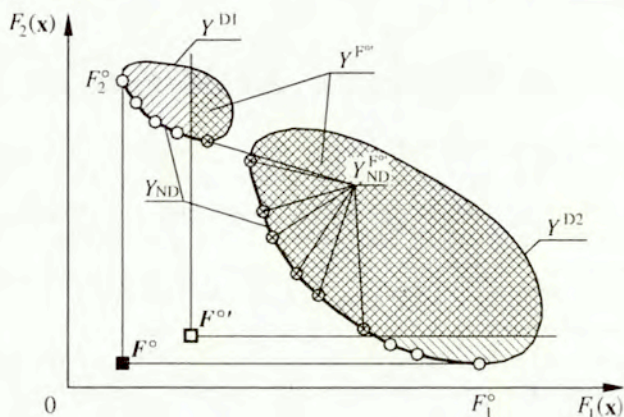
Punkt idealny jest wewnętrzną właściwością rozważanych rozwiązań i stanowi dobry punkt odniesienia do przeprowadzania dalszych analiz wielokryterialnych. W ten sposób można wyznaczać rozwiązania kompromisowe stosując odpowiednią metrykę [61, 170]. Należy jednak pamiętać, że zmiana metryki lub jej parametrów powoduje zazwyczaj wyznaczenie innego rozwiązania kompromisowego [129, 130]. Stąd pewna niedogodność i trudność w ustaleniu, które rozwiązanie kompromisowe jest lepsze.

Innym podejściem do wyznaczania rozwiązań kompromisowych lub podzbiorów rozwiązań kompromisowych jest idea punktu referencyjnego [176, 233]. Koncepcja punktu referencyjnego polega na zastosowaniu dowolnego punktu (w wersjach bardziej rozbudowanych zbioru punktów) w przestrzeni kryterialnej, reprezentującego poziom aspiracji decydenta, jako punktu odniesienia w procedurze porządkowania jego preferencji względem rozważanego zbioru wariantów decyzyjnych. W systemach wspomagania decyzji wykorzystujących powyższą ideę, badane obiekty – warianty decyzyjne – nie są porównywane między sobą, lecz konfrontuje się je ze zbiorem punktów referencyjnych. W tym celu tworzy się zbiór rozwiązań pozytywnych (wzorców realizacji decyzji), bądź zbiór rozwiązań o zdecydowanie negatywnej ocenie (antywzorców trafnej decyzji).

W podejściu prezentowanym w niniejszej pracy zaproponowano, aby punkt referencyjny będący wzorcem pozytywnym potraktować jako nowy punkt (wektor) idealny. Z definicji wektora idealnego (rozdział 2.1) wynika, że jest on wyznaczany przez rozwiązania niezdominowane uzyskujące najmniejsze wartości poszczególnych kryteriów przy minimalizacji kryteriów, albo przez największe wartości kryteriów w zadaniach maksymalizacji. W *Metodzie Definiowania Punktu Idealnego* (MDPI) odwrócono sytuację. Tym razem to nie rozwiązania wyznaczają wektor idealny, lecz przyjęty punkt idealny wybiera ze zbioru rozwiązań niezdominowanych podzbiór rozwiązań, które będą spełniały warunek, że żadna wartość składowa nie będzie odpowiednio mniejsza (albo większa) od wartości składowej punktu idealnego (w zależności od tego, czy występuje zadanie minimalizacji czy maksymalizacji).

Rysunek 4.10 przedstawia selekcję zbioru rozwiązań dopuszczalnych i niezdominowanych po przyjęciu wzorca pozytywnego jako nowego punktu (wektora) idealnego F^0 . Widać więc, że MDPI prowadzi do wyznaczenia

podzbioru rozwiązań niezdominowanych i dopuszczalnych. Stosowanie w analizie wielokryterialnej przeciwstawnych kryteriów powoduje, że eliminowanie rozwiązań, które mają bardzo małe wartości jednych składowych, prowadzi jednocześnie do odrzucania rozwiązań o dużych lub bardzo dużych wartościach innych składowych.



Rys. 4.10. Działanie MDPI na przykładzie zadania dwukryterialnej minimalizacji,
 ⊗ – ocena spełniająca zdefiniowany punkt idealny

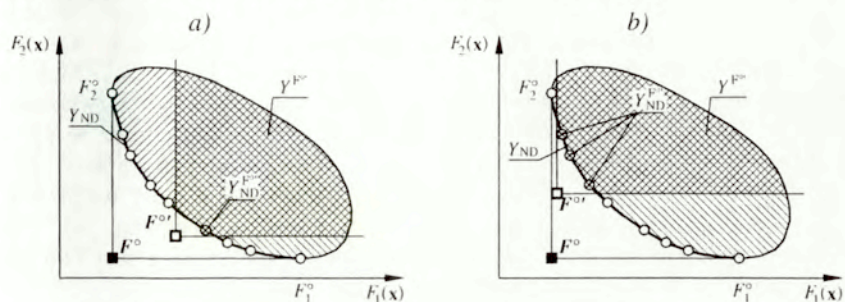
Tak więc *Metoda Definiowania Punktu Idealnego* jest podobna w swoim charakterze do omawianej w rozdziale 4.2.1 *Metody Wartości Progowej*. Różnica polega na tym, że wartości progowe (zadowalające) ograniczają przestrzeń kryterialną od góry (poprzez duże wartości kryteriów) dla zadania minimalizacji, zaś dla zadania maksymalizacji od dołu – poprzez małe wartości kryteriów. W przypadku *Metody Definiowania Punktu Idealnego* mamy sytuację odwrotną. Zdefiniowany punkt idealny ogranicza przestrzeń kryterialną od dołu (poprzez małe wartości kryteriów) dla zadania minimalizacji, a od góry (poprzez duże wartości kryteriów) w przypadku zadania maksymalizacji.

Należy zwrócić uwagę na fakt, że im bliżej brzegu zbioru rozwiązań niezdominowanych znajduje się nowy punkt (wektor) idealny, tym mniejsza liczba rozwiązań niezdominowanych pozostaje po selekcji. W skrajnym przypadku może pozostać jedno rozwiązanie lub zbiór pusty, rysunek 4.11.

Wynika stąd, że stosowanie *Metody Definiowania Punktu Idealnego* wymaga pewnej wiedzy o analizowanym obiekcie. Przede wszystkim należy znać punkty referencyjne (leżące między punktem idealnym całego rozważanego zbioru, a brzegiem tego zbioru wyznaczonym przez rozwiązania niezdominowane), które mogą pełnić funkcję wzorca pozytywnego.

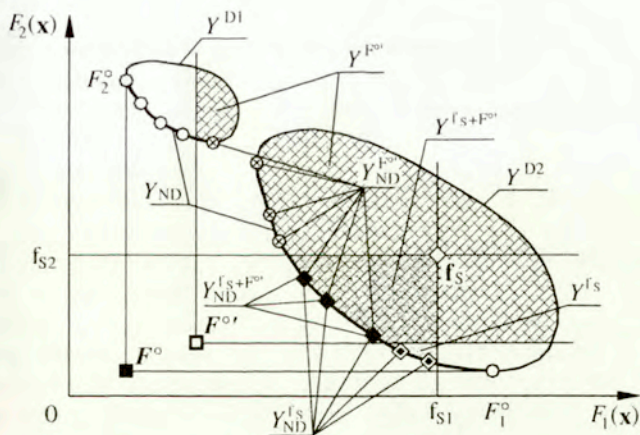
W rozdziale 4.4 zostanie pokazane między innymi, że istnieje możliwość automatycznego generowania takich punktów idealnych, tzn. leżących między punktem idealnym całego rozważanego zbioru, a brzegiem wyznaczonym przez

rozwiązania niezdominowane. Punkty te nazwano nadążnymi punktami idealnymi, ponieważ w kolejnych generacjach zbliżają się do brzegu wyznaczonego przez rozwiązania niezdominowane. W ten sposób proces selekcji *Metodą Definiowania Punktu Idealnego* może zostać zautomatyzowany.



Rys. 4.11. Selekcja MDPI przy różnym położeniu punktu idealnego na przykładzie zadania dwukryterialnej minimalizacji

Istnieje oczywiście możliwość jednoczesnego stosowania obu wymienionych metod selekcji. W takiej sytuacji, na zbiór rozwiązań dopuszczalnych i niezdominowanych oddziałuje się jednocześnie od „góry” i od „dołu”, co pokazano na rysunku 4.12.



Rys. 4.12. Selekcja zbioru rozwiązań dopuszczalnych i niezdominowanych przy jednoczesnym stosowaniu MWP i MDPI na przykładzie zadania dwukryterialnej minimalizacji. \blacklozenge – rozwiązanie spełniające ocenę satysfakcjonującą i zdefiniowany punkt idealny

4.3. Selekcja zbioru rozwiązań *Metodą Przedziału Nierozróżnialności* (MPN)

Prezentowana selekcja ocen niezdominowanych *Metodą Przedziału Nierozróżnialności* [107, 109, 115] wykorzystuje ideę zmodyfikowanej mutacji. Wartość mutacji podawana jest przez projektanta w procentach wartości analizowanego kryterium i nazywana przedziałem nierozróżnialności. Mutację przyjęto określać poprzez wartość procentową analizowanego rozwiązania, ponieważ jest to sposób znany i często stosowany w technice oraz w życiu codziennym, np.: w procentach określana jest dokładność pomiarowa przyrządu, wzrost wartości obciążenia lub wytrzymałości, zmniejszenie masy urządzenia, oprocentowanie lokat bankowych i kredytów, wielkość podatku, itd. Tak wyrażona mutacja nie wymaga definiowania nowych wielkości, a przy tym jest intuicyjnie zrozumiała dla potencjalnego użytkownika.

W jednokrotnym przebiegu procesu selekcji przy niezmienionej wartości mutacji, następuje porównywanie parami każdego rozwiązania po mutacji z pozostałymi rozwiązaniami. Składowe wektora kryteriów mogą mieć tą samą lub różną wartość mutacji. Mutacji podlega każde analizowane rozwiązanie według podanego algorytmu. Dla zadania minimalizacji jest on następujący:

- Krok 1** Określić wartości przedziałów nierozróżnialności dla wszystkich składowych wektora kryteriów (wartości mogą być takie same lub różne, niektóre mogą przyjmować wartość zero – co oznacza brak mutacji składowej).
- Krok 2** Porównać składowe wektora kryteriów dwóch rozwiązań niezdominowanych, aby ustalić, które składowe są mniejsze i do którego rozwiązania należą.
- Krok 3** Składowe o mniejszych wartościach podlegają mutacji – powiększyć je o wartość wynikającą z iloczynu składowej i przyjętego przedziału nierozróżnialności. Mutacja analizowanych rozwiązań prowadzi do wygenerowania rozwiązań zmutowanych.
- Krok 4** Porównać oceny rozwiązań zmutowanych. Rozwiązanie o dominowanych ocenach zostaje odrzucone, a rozwiązanie o ocenach niezdominowanych przechodzi do generowanego podzbioru. Gdy oba porównywane rozwiązania są niezdominowane, przechodzą do generowanego podzbioru. W tworzonym podzbiorze rozwiązania są zapisywane w postaci pierwotnej, a nie zmutowanej.

Końcowym efektem działania *Metody Przedziałów Nierozróżnialności* jest wygenerowanie podzbioru rozwiązań o niezdominowanych ocenach, którego liczebność będzie uzależniona od przyjętych wartości przedziałów nierozróżnialności. Przy właściwym doborze wartości przedziałów nierozróżnialności, wygenerowany podzbiór będzie miał znacznie mniej elementów, ale kształt

podzbioru będzie odzwierciedlał kształt początkowego zbioru rozwiązań niezdominowanych.

Należy zwrócić uwagę na fakt, że zadanie wyboru dotyczy skończonego zbioru istniejących rozwiązań (przykładowo oferta katalogowa, zbiór rozwiązań wygenerowanych przy zastosowaniu MES), dlatego też zaproponowana tu mutacja różni się zasadniczo od mutacji stosowanej w algorytmach genetycznych i ewolucyjnych. Algorytmy genetyczne i ewolucyjne służą do generowania rozwiązań optymalnych. Stosowanie mutacji ma na celu nieznaczne przekształcenie wektora zmiennych decyzyjnych (często w połączeniu z operacją krzyżowania), po czym – po obliczeniu składowych wektora kryteriów – następuje sprawdzenie (selekcja), czy nowe rozwiązanie jest lepsze od rozwiązań wcześniejszych. W zadaniu wyboru zmodyfikowana mutacja dotyczy wektora kryteriów i jest przeprowadzana tylko na czas operacji selekcji – nie ma bowiem możliwości generowania nowych rozwiązań.

Optymalność w sensie przedziału nierozróżnialności (OSPN)

Selekcja rozwiązań *Metodą Przedziałów Nierozróżnialności* opisana w tej pracy stosowana jest do zbiorów rozwiązań niezdominowanych (optymalnych w sensie Pareto). Eliminacja analizowanych rozwiązań wykorzystuje pojęcie optymalności w sensie przedziału nierozróżnialności, bazujące na idei zmodyfikowanej mutacji.

Analiza wielokryterialna rozwiązań niezdominowanych przeprowadzana jest w przestrzeni kryterialnej i dąży do ustalenia, czy rozwiązanie zmutowane („pogorszone”) przez przyjęty przedział nierozróżnialności PN pozostaje nadal rozwiązaniem niezdominowanym i będzie dołączane do aktualnie tworzonego podzbioru rozwiązań niezdominowanych. Dla przypadku minimalizacji kryteriów, element $\mathbf{x}^\wedge \in \Omega$ będzie optymalny w sensie przedziału nierozróżnialności (niezdominowany w sensie przedziału nierozróżnialności NSPN) wtedy i tylko wtedy, gdy w zbiorze Ω nie ma takiego elementu \mathbf{x}^+ , że dla każdego $l \in N$

$$\text{gdy } F_l(\mathbf{x}^\wedge) \geq 0: F_l(\mathbf{x}^\wedge) < F_l(\mathbf{x}^+) \text{ zachodzi } \left(1 + \frac{PN_l}{100}\right) F_l(\mathbf{x}^\wedge) > F_l(\mathbf{x}^+), \quad (4.4)$$

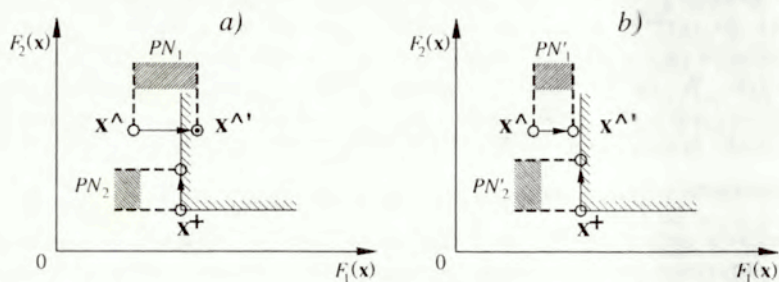
$$\text{gdy } F_l(\mathbf{x}^\wedge) < 0: F_l(\mathbf{x}^\wedge) < F_l(\mathbf{x}^+) \text{ zachodzi } \left(1 - \frac{PN_l}{100}\right) F_l(\mathbf{x}^\wedge) > F_l(\mathbf{x}^+),$$

gdzie

Ω – niepusty zbiór rozwiązań optymalnych w sensie Pareto.

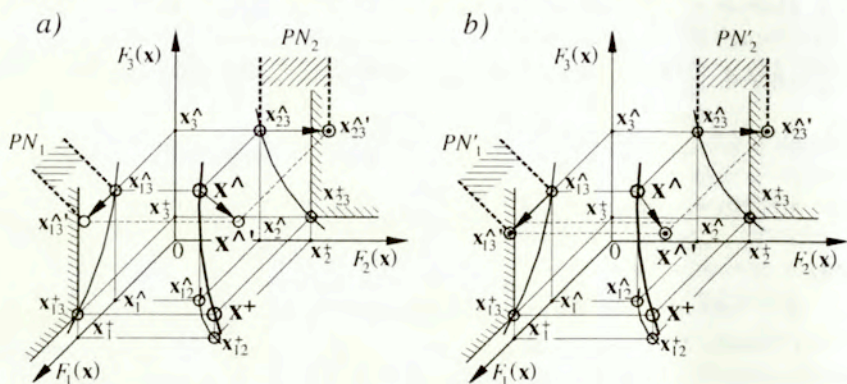
Na rysunku 4.13 przedstawiono graficznie ideę działania *Metody Przedziału Nierozróżnialności* opisaną warunkami (4.4) przy minimalizacji dwu kryteriów. Rozwiązanie \mathbf{x}^+ oraz \mathbf{x}^\wedge są niezdominowane, ponieważ rozwiązanie \mathbf{x}^\wedge ma mniejszą wartość kryterium F_1 i większą wartość kryterium F_2 niż rozwiązanie \mathbf{x}^+ . Wprowadzając zmodyfikowaną mutację „pogarsza się” na chwilę,

o wielkość obliczoną z przyjętego przedziału nierozróżnialności, składowe kryteriów, które miały mniejsze wartości dla porównywanych rozwiązań. Rysunek 4.13a prezentuje sytuację gdy warunek (4.4), dla wprowadzonych przedziałów nierozróżnialności PN_1 oraz PN_2 , jest spełniony, tzn., że rozwiązanie x^\wedge nie jest rozwiązaniem NSPN i zostaje wyeliminowane. Na rysunku 4.13b przedstawiono przypadek, gdy warunek (4.4), dla nowych wartości PN_1' oraz PN_2' , nie jest spełniony i żadne z rozwiązań nie jest eliminowane, tzn. oba rozwiązania są NSPN dla przyjętych wartości przedziału nierozróżnialności.



Rys. 4.13. Działanie warunku (4.4) przy dwukryterialnej minimalizacji, \circ – rozwiązanie leżące poza stożkiem dominacji, \odot – rozwiązanie należące do stożka dominacji

Rysunek 4.14. prezentuje ideę działania *Metody Przedziału Nierozróżnialności* opisaną przez warunki (4.4) przy minimalizacji trzech kryteriów. Rozwiązanie x^\wedge ma większą wartość kryterium F_3 i mniejsze wartości kryteriów F_1 i F_2 niż rozwiązanie x^{*+} , dlatego jest niezdominowane w sensie Pareto.

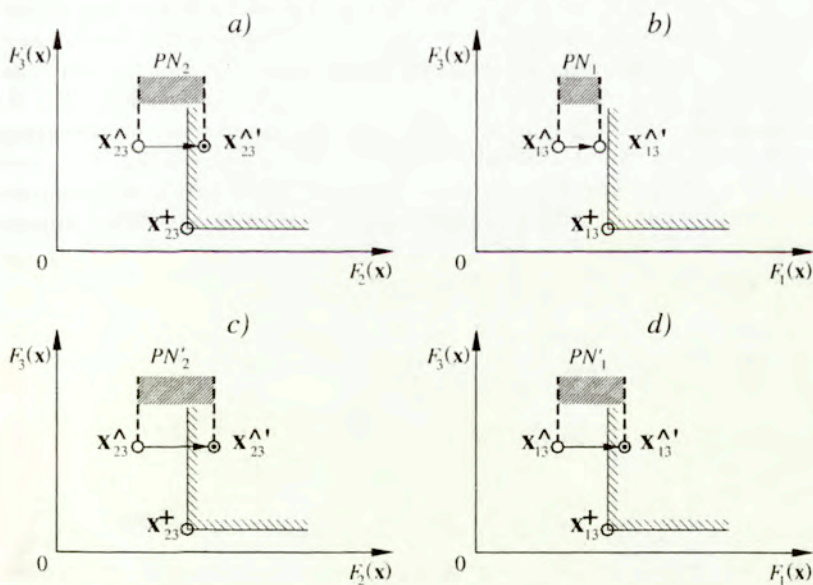


Rys. 4.14. Działanie warunku (4.4) przy trzykryterialnej minimalizacji, na rysunku wprowadzono uproszczone oznaczenie zamiast $F(x^\wedge)$ oraz $F(x^{*+})$ zastosowano zapis x^\wedge oraz x^{*+}

Stosując zmodyfikowaną mutację „pogarsza się” chwilowo (o wartość wynikającą z przyjętego przedziału nierozróżnialności) te wartości składowych kryterium rozwiązania \hat{x} (w tym przypadku składową pierwszą i drugą), które były mniejsze od wartości rozwiązania x^+ .

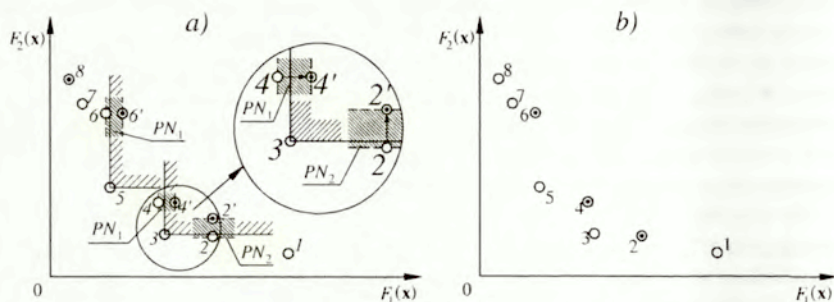
W ten sposób, uwzględniając przyjęte na rysunku 4.14 przedziały nierozróżnialności, odpowiednio: PN_1 i PN_2 oraz PN'_1 i PN'_2 , przemieszcza się rozwiązanie \hat{x} wzdłuż kierunku F_1 i F_2 do położenia, odpowiednio: $x_{13}^{\wedge'}$ i $x_{23}^{\wedge'}$ (rozwiązanie \hat{x} ulega chwilowej mutacji i staje się rozwiązaniem $x^{\wedge'}$). Na rysunku 4.14a przedstawiono sytuację, gdy rozwiązanie $x_{23}^{\wedge'}$ należy do stożka dodatniego o wierzchołku w punkcie x_{23}^+ i jest zdominowane, zaś rozwiązanie $x_{13}^{\wedge'}$ nie należy do stożka dodatniego o wierzchołku w punkcie x_{13}^+ i nie jest zdominowane. Wynika stąd, że rozwiązanie \hat{x} jest optymalne w sensie przedziału nierozróżnialności i zostaje dopisane do podzbioru rozwiązań niezdominowanych w sensie przedziału nierozróżnialności (RNSPN). Na rysunkach 4.15 a i b pokazano rozważaną sytuację, prezentując odpowiednie rzuty płaszczyzn.

Na rysunku 4.14b przedstawiono przypadek, gdy składowe zmutowanego rozwiązania \hat{x} , tzn. $x_{13}^{\wedge'}$ i $x_{23}^{\wedge'}$, należą do stożków dodatnich o wierzchołkach odpowiednio w punktach x_{13}^+ i x_{23}^+ . Tak więc składowe $x_{13}^{\wedge'}$ i $x_{23}^{\wedge'}$ są zdominowane. Ostatecznie wynika stąd, że rozwiązanie \hat{x} nie jest optymalne w sensie przedziału nierozróżnialności i zostaje wyeliminowane. Na rysunkach 4.15 c i d pokazano taką sytuację, prezentując odpowiednie rzuty płaszczyzn.



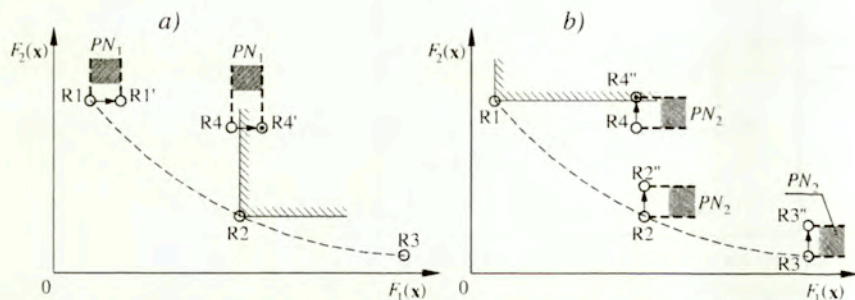
Rys. 4.15. Działanie warunku (4.4) przy trzykryterialnej minimalizacji

Rysunek 4.16 prezentuje wyznaczanie rozwiązań niezdominowanych w sensie przedziału nierozróżnialności (RNSPN) opisanych warunkiem (4.4), według relacji porządku częściowego \prec określonego przez stożek dodatni, z ośmioelementowego zbioru rozwiązań optymalnych w sensie Pareto (ROSP) przy minimalizacji dwóch kryteriów. Rysunek 4.16a przedstawia działanie przedziału nierozróżnialności PN_1 – dla kryterium $F_1(x)$, w odniesieniu do rozwiązań o numerach 4 i 6, oraz przedziału nierozróżnialności PN_2 – dla kryterium $F_2(x)$, w odniesieniu do rozwiązania numer 2.



Rys. 4.16. Wyznaczanie RNSPN przy dwukryterialnej minimalizacji

Metoda Przedziału Nierozróżnialności jest skutecznym narzędziem eliminacji rozwiązań optymalnych w sensie Pareto, których odległość ocen w sensie miary euklidesowej jest duża. Pokazano to na rysunku 4.17. Rozwiązanie R4 należy do zbioru ROSP, ale jest znacznie oddalone od domniemanego brzegu ocen zbioru (zaznaczonego łukiem), wyznaczanego przez oceny rozwiązań: R1, R2 i R3. Wprowadzenie przedziału nierozróżnialności PN_1 dla kryterium pierwszego umożliwia wyeliminowanie rozwiązania R4 przez rozwiązanie R2, przy czym należy podkreślić, że rozwiązanie R4 nie może w żaden sposób wyeliminować rozwiązania R2. Na rysunku pokazano również, że rozwiązanie R4 jest eliminowane przez rozwiązanie R1 poprzez przedział nierozróżnialności PN_2 dotyczący kryterium drugiego.



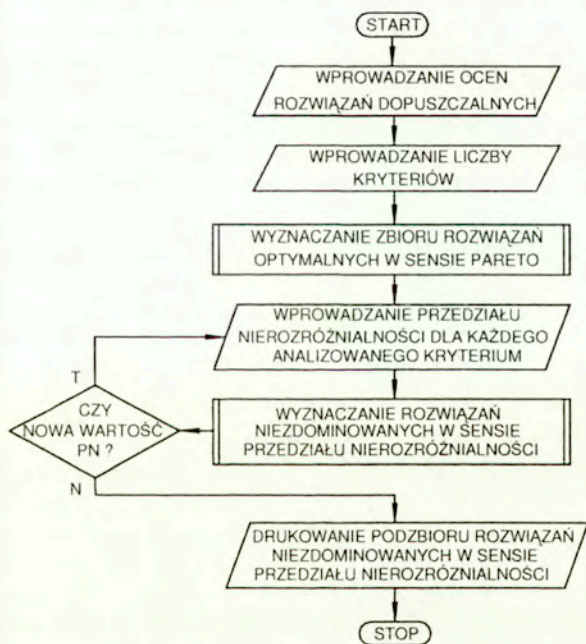
Rys. 4.17. Eliminacja rozwiązania o dużej odległości w sensie miary Euklidesowej

Tak więc zastosowanie *Metody Przedziału Nerozróżnialności* do analizy zbioru rozwiązań niezdominowanych prowadzi do pozostawienia rozwiązań, których oceny leżą blisko domniemanego brzegu ocen zbioru ROSP.

4.3.1. Podstawowe algorytmy realizacji *Metody Przedziału Nerozróżnialności*

Ogólny schemat blokowy poszukiwania rozwiązań niezdominowanych *Metodą Przedziałów Nerozróżnialności* (MPN) pokazano na rysunku 4.18. W schemacie tym należy zwrócić uwagę na następujące elementy składowe:

- wprowadzanie ocen rozwiązań dopuszczalnych,
- wyznaczanie ROSP,
- wprowadzanie wartości przedziału nierozróżnialności,
- wyznaczanie RNSPN.



Rys. 4.18. Schemat blokowy poszukiwania rozwiązań niezdominowanych MPN

Wprowadzanie rozwiązań dopuszczalnych może być realizowane w różnej kolejności, co zazwyczaj ma wpływ na końcowy podzbiór RNSPN. Zagadnienie to zostanie szerzej opisane poniżej – przy prezentacji algorytmów realizujących ideę optymalności w sensie przedziału nierozróżnialności oraz w rozdziale 4.3.3.

W niniejszej pracy MPN jest stosowana zawsze w odniesieniu do zbioru rozwiązań optymalnych w sensie Pareto. Wprowadzone wartości przedziału nierozróżnialności mogą być identyczne dla wszystkich składowych wektora kryteriów lub mogą się różnić, a niektóre z nich mogą być równe zero. Wartości przedziału nierozróżnialności PN nie mogą natomiast być zbyt duże, ze względu na występowanie zjawiska wzajemnego wykluczania (ZWW) i zjawiska łańcucha eliminacji. Zagadnienia te zostaną szerzej opisane w rozdziałach 4.3.2 i 4.3.3. Należy pamiętać, że MPN powinna być używana jedynie do filtracji analizowanego zbioru rozwiązań niezdominowanych i nie należy dopuszczać do nadmiernego eliminowania rozwiązań należących do zbioru.

Praktyka stosowania *Metody Przedziału Nierozróżnialności* wskazuje, że w sytuacjach, gdy filtrowany zbiór rozwiązań jest liczny (kilkadziesiąt a nawet kilkaset elementów) i brak jest szczegółowych informacji na jego temat, za wstępną wartość przedziału nierozróżnialności PN można przyjąć wielkość, jaka wynika z podzielenia 100% przez liczbę elementów zbioru. W sytuacji, gdy filtrowany zbiór składa się z rozwiązań powstałych w wyniku pomiaru określonych wielkości w trakcie wykonywania eksperymentu lub w procesie obliczeniowym, wartości przyjętych przedziałów nierozróżnialności powinny odpowiadać dokładności wykonanego pomiaru lub zastosowanego modelu obliczeniowego. W zależności od analizowanego zbioru ROŚP (jego liczebności i rozmieszczenia elementów – zobacz uwagi przedstawione w rozdziale 2) dobre wyniki filtracji MPN uzyskujemy już przy wartościach od dziesiątych części procenta do kilku procent.

Wyznaczanie RNSPN i spełnienie warunku (4.4) może być realizowane na wiele sposobów. Rozpatrując możliwość praktycznej eliminacji rozwiązań niezdominowanych, przy zastosowaniu idei optymalności w sensie przedziału nierozróżnialności do budowy algorytmów realizujących relacje przedstawione w warunkach (4.4), zaproponowano dwa różne ideowo podejścia.

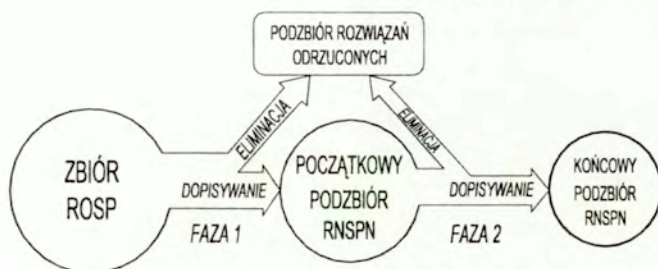
Algorytm dwufazowy

Algorytm dwufazowy dokonuje dwukrotnego badania obszaru przestrzeni kryterialnej. Przyjęto, że rozwiązania wchodzące do wyznaczanego początkowo podzbioru RNSPN są uprzywilejowane. Oznacza to, że nie mogą być wyeliminowane przez rozwiązania pobierane do analizy. Algorytm ten ma dwie fazy, rysunek 4.19.

Faza 1. Rozwiązanie pobrane ze zbioru rozwiązań optymalnych w sensie Pareto porównywane jest na mocy warunku (4.4) z kolejnymi rozwiązaniami, które generują początkowy podzbiór rozwiązań niezdominowanych w sensie przedziału nierozróżnialności. Po wyczerpaniu elementów zbioru rozwiązań optymalnych w sensie Pareto, następuje zakończenie tej fazy. Skutkiem ubocznym jest wygenerowanie podzbioru rozwiązań odrzuconych.

Faza 2. W fazie tej badaniu poddany zostaje tylko początkowy podzbiór rozwiązań niezdominowanych w sensie przedziału nierozróżnialności, wygenerowany

podczas fazy 1, ale pobieranie rozwiązań do ponownego sprawdzania warunku (4.4) odbywa się w kolejności odwrotnej niż w fazie 1. Takie postępowanie ma na celu uniezależnienie się od wpływu kolejności rozwiązań pobieranych do analizy na ostateczną postać generowanego końcowego podzbioru RNSPN.



Rys. 4.19. Idea działania algorytmu dwufazowego

Tablica 4.1

Wartości elementów zbioru rozwiązań optymalnych w sensie Pareto

Numer rozwiązania	Wartości kryteriów $F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x})$	Wartości po mutacji, $PN = 5\%$	Eliminacja rozwiązań w sensie PN	Uwagi
S1	2.5 14.0	2.625 14.700	$S1 \in (F_2) S2^*$; $S1 \in (F_1) S7$	
S2	3.3 13.5	3.465 14.175		
S3	3.5 11.5	3.675 12.075	$S3 \in (F_2) S4$; $S3 \in (F_1) S6$	wε**
S4	4.3 11.3	4.515 11.865		
S5	4.5 10.0	4.725 10.500	$S5 \in (F_1) S4$	
S6	3.4 11.8	3.570 12.390	$S6 \in (F_2) S3$; $S6 \in (F_2) S4$	wε
S7	2.4 15.0	2.520 15.750		

* zapis $S1 \in (F_2) S2$ oznacza, że rozwiązanie S1 eliminuje rozwiązanie S2 poprzez przedział nierozróżnialności odniesiony do kryterium F_2 ,

** wzajemna eliminacja rozwiązań S3 i S6.

Działanie algorytmu dwufazowego sprowadza się do wykonania jednej z dwóch operacji:

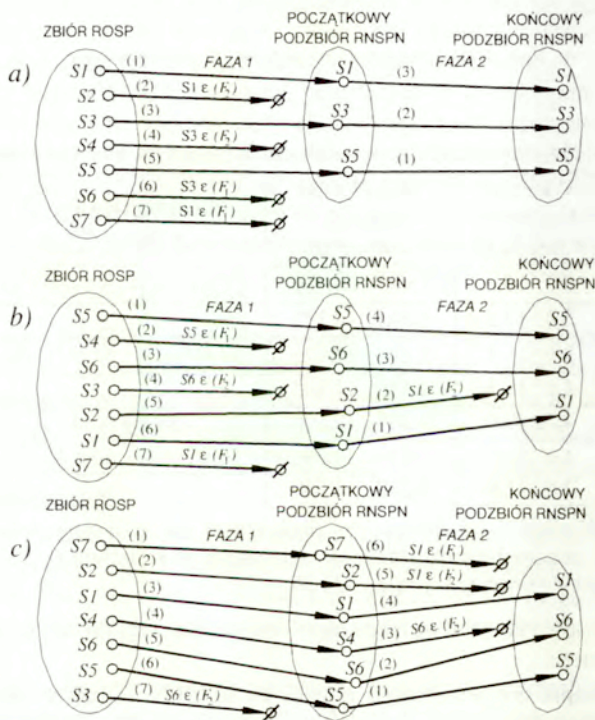
- dopisania do tworzonego podzbioru RNSPN aktualnie analizowanego rozwiązania,
- eliminacji aktualnie analizowanego rozwiązania przez rozwiązanie należące już do podzbioru RNSPN.

Specyfiką tego algorytmu jest fakt, że liczebność końcowego podzbioru RNSPN będzie co najwyżej równa liczebności początkowego podzbioru RNSPN, zaś podzbiór rozwiązań odrzuconych po fazie 2 będzie co najmniej równy zbiorowi z fazy 1.

Sposób działania algorytmu dwufazowego rozważono w oparciu o przykład liczbowy. Wartości analizowanych kryteriów podano w tabelicy 4.1.

Przyjęto jednakową wartość progu nierozróżnialności dla obu kryteriów, wynoszącą $PN = 5\%$. Kolejność pobierania danych do analizy może mieć wpływ na końcowy wynik. Przy zbiorze siedmioelementowym kolejność pobierania danych do analizy może być realizowana na wiele sposobów, jednak nie wszystkie przyjęte kolejności są istotne z punktu działania opisywanego algorytmu. Na rysunku 4.20 pokazano działanie algorytmu dwufazowego: fazę 1 oraz fazę 2 dla następujących trzech porządków pobierania danych:

- a) $S1, S2, S3, S4, S5, S6, S7$;
- b) $S5, S4, S6, S3, S2, S1, S7$;
- c) $S7, S2, S1, S4, S6, S5, S3$.



Rys. 4.20. Działanie algorytmu dwufazowego – faza 1 i 2, przy różnych porządkach pobierania danych, \emptyset – eliminacja, $S_k \in (F_i)$ – analizowane rozwiązanie jest eliminowane przez rozwiązanie o numerze k poprzez PN odniesiony do kryterium F_i

Operację dopisania aktualnie analizowanego rozwiązania do tworzonego początkowego podzbioru RNSPN można zaobserwować na rysunku 4.20a, faza 1

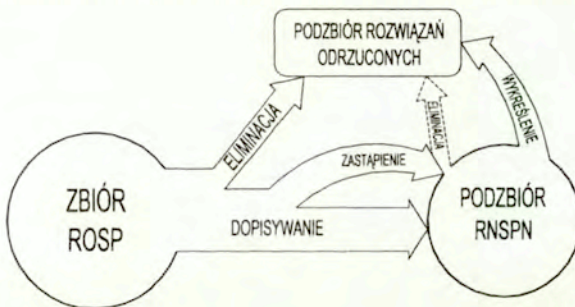
– rozwiązania $S1$, $S3$ i $S5$, zaś dopisanie do końcowego podzbioru RNSPN na rysunku 4.20c, faza 2 – rozwiązania $S5$, $S6$ i $S7$.

Operację eliminacji aktualnie analizowanego rozwiązania przez rozwiązanie należące już do początkowego podzbioru RNSPN obserwować można na rysunku 4.20a, faza 1 – rozwiązania $S2$, $S4$, $S6$ i $S7$, zaś na rysunku 4.20b pokazano eliminację przez rozwiązanie należące już do końcowego podzbioru RNSPN, faza 2 – rozwiązanie $S2$.

W rozpatrywanym przypadku końcowy podzbiór RNSPN liczył 3 elementy i był identyczny przy różnych porządkach pobierania danych, mimo że początkowy podzbiór RNSPN liczył od 3 do 6 elementów. Tak więc idea powtórnego analizowania warunku (4.4) przy odwróconej kolejności pobierania danych z początkowego podzbioru RNSPN przyniosła pożądany efekt.

Algorytm jednofazowy

Algorytm jednofazowy dokonuje jednokrotnego badania obszaru przestrzeni kryterialnej, ale wyznaczane RNSPN nie są traktowane jako uprzywilejowane, tzn. warunek (4.4) sprawdzany jest w obie strony, zarówno w odniesieniu do rozwiązania pobieranego ze zbioru rozwiązań optymalnych w sensie Pareto, jak i rozwiązań już znajdujących się w zbiorze RNSPN, rysunek 4.21.



Rys. 4.21. Idea działania algorytmu jednofazowego

Na rysunku 4.22 pokazano działanie algorytmu jednofazowego w odniesieniu do minimalizacji czterokryterialnej. Rysunek 4.22a przedstawia dwa rozwiązania: x^{\wedge} i x^{\ast} , z których rozwiązanie x^{\wedge} ma mniejsze wartości kryteriów F_1 i F_2 oraz większe wartości kryteriów F_3 i F_4 , niż rozwiązanie x^{\ast} . Oba rozwiązania należą więc do zbioru ROŚP (fakt przecinania się łamanych łączących składowe poszczególne rozwiązań świadczy o tym, że występujące rozwiązania są niezdominowane).

Kolejne rysunki prezentują różne sytuacje, powstające przy wprowadzeniu zmodyfikowanej mutacji (chwilowym „pogarszaniu”) tych składowych rozwiązań, które są mniejsze o przyjęte wartości przedziału nierozróżnialności: PN_1 , PN_2 , PN_3 , PN_4 . Na rysunku 4.22b przedstawiono przypadek, gdy po

chwilowym przemieszczeniu analizowanego rozwiązania o odpowiednią wartość wynikającą z przedziału nierozróżnialności, rozwiązania nadal pozostają niezdominowane (łamana łącząca składowe rozwiązania $x^{\wedge'}$: $x_1^{\wedge'} \rightarrow x_2^{\wedge'} \rightarrow x_3^{\wedge'} \rightarrow x_4^{\wedge'}$ przecina się z łamaną łączącą składowe rozwiązania x^{+} : $x_1^+ \rightarrow x_2^+ \rightarrow x_3^+ \rightarrow x_4^+$).

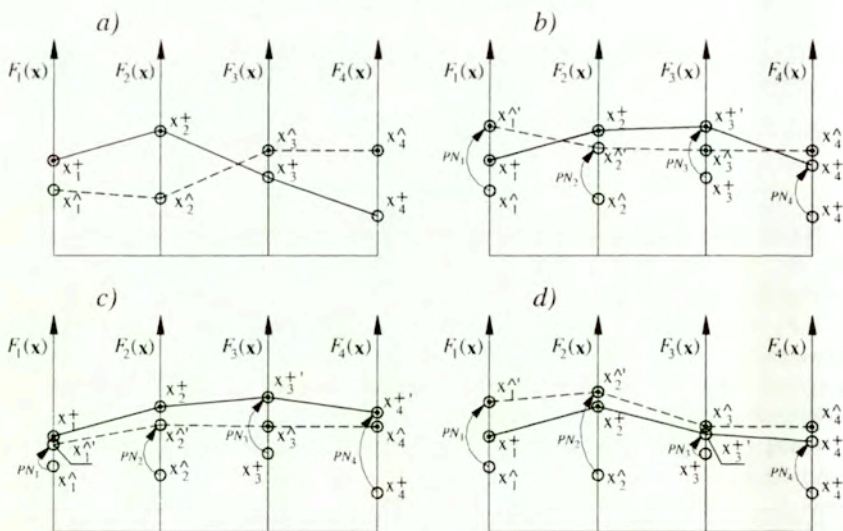
Rysunek 4.22c prezentuje przypadek, gdy rozwiązanie x^{\wedge} dominuje nad rozwiązaniem x^+ . Łamana łącząca składowe: $x_1^+ \rightarrow x_2^+ \rightarrow x_3^+ \rightarrow x_4^+$ leży powyżej łamanej łączącej składowe: $x_1^{\wedge} \rightarrow x_2^{\wedge} \rightarrow x_3^{\wedge} \rightarrow x_4^{\wedge}$.

Na rysunku 4.22d zobrazowano sytuację odwrotną. Po wprowadzeniu zmienionych wartości przedziału nierozróżnialności, rozwiązanie x^+ eliminuje rozwiązanie x^{\wedge} .

W sytuacji, gdy analizowane rozwiązania leżą blisko siebie, w zależności od wprowadzonych wartości przedziałów nierozróżnialności można otrzymać różny jakościowo końcowy wynik analizy.

W przypadku zastosowania algorytmu jednofazowego następuje wykonanie jednego z czterech działań:

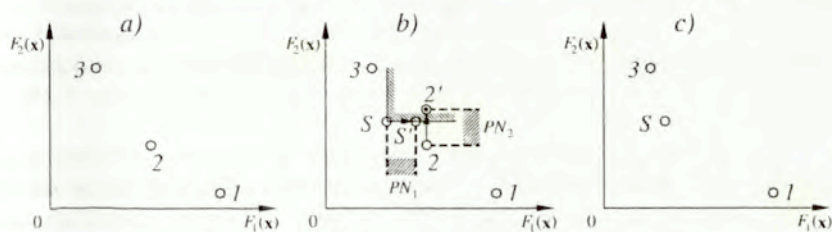
- **dopisanie** aktualnie analizowanego rozwiązania do tworzonego podzbioru RNSPN,
- **eliminowanie** aktualnie analizowanego rozwiązania przez rozwiązanie należące do podzbioru RNSPN,
- **zastąpienie** istniejącego elementu podzbioru RNSPN analizowanym rozwiązaniem,
- **wykreślenie** elementów podzbioru RNSPN przez rozwiązania, które wcześniej zastąpiły istniejące elementy podzbioru.



Rys. 4.22. Działanie algorytmu jednofazowego przy czterokryterialnej minimalizacji

Dopisywanie rozwiązań przyczynia się do powiększania liczebności podzbioru RNSPN. Eliminowanie rozwiązań aktualnie analizowanych powoduje, że liczebność podzbioru RNSPN pozostaje bez zmian. Również zastępowanie rozwiązania z podzbioru RNSPN przez aktualnie analizowane rozwiązanie ze zbioru RO SP nie zmienia liczebności podzbioru RNSPN. Rozwiązanie, które wcześniej zastąpiło istniejący element podzbioru RNSPN, może doprowadzić w dalszej analizie do wykreślenia kolejnych elementów podzbioru RNSPN, co powoduje redukcję liczebności podzbioru RNSPN.

Na rysunku 4.23 pokazano działanie **zastąpienia**. Podzbiór RNSPN składa się z trzech elementów: 1, 2 i 3 (rysunek 4.23a). Po wprowadzeniu rozwiązania S ze zbioru RO SP (rysunek 4.23b) okazuje się, że przy przyjętym PN_2 rozwiązanie 2 należy do stożka dodatniego o wierzchołku w punkcie S . Rozwiązanie S wyklucza rozwiązanie nr 2 poprzez przedział nierozróżnialności PN_2 odniesiony do kryterium F_2 , co można zapisać jako $S \in (F_2) 2$. Warunek (4.4) jest spełniony i następuje zastąpienie rozwiązania 2 przez rozwiązanie S (rysunek 4.23c). Należy dodać, że rozwiązanie nr 2 nie jest w stanie wykluczyć rozwiązania S . Tak więc podzbiór RNSPN będzie nadal liczył trzy elementy.

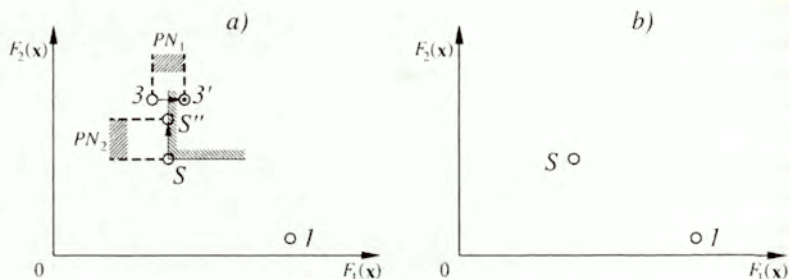


Rys. 4.23. Zastąpienie rozwiązania w podzbiorze RNSPN przy dwukryterialnej minimalizacji

Na rysunku 4.24 przedstawiono graficznie działanie **wykreślenia**. Z dalszego porównywania rozwiązania S z następnym elementem podzbioru RNSPN – w tym przypadku z rozwiązaniem 3 – wynika, że rozwiązanie S' należy do stożka dodatniego o wierzchołku w punkcie S (warunek 4.4 jest spełniony). Rozwiązanie S wyklucza więc rozwiązanie nr 3 poprzez przedział nierozróżnialności PN_1 odniesiony do kryterium $F_1 - S \in (F_1) 3$. Ostatecznie podzbiór RNSPN liczy dwa elementy (rysunek 4.24b) – nastąpiła redukcja liczebności podzbioru.

Dla szczegółowego rozważenia działania algorytmu jednofazowego wykonano obliczenia, które dotyczyły zbioru rozwiązań niezdominowanych zaprezentowanego w tabelicy 4.1. Wyniki pokazano na rysunku 4.25.

Operację **dopisania** aktualnie analizowanego rozwiązania do tworzonego podzbioru RNSPN można prześledzić na rysunku 4.25a – rozwiązania $S3$ i $S5$ oraz na rysunku 4.25b – rozwiązania $S6$ i $S3$.



Rys. 4.24. Wykreślenie rozwiązania w podzbiorze RNSPN przy dwukryterialnej minimalizacji

Operację **eliminowania** aktualnie analizowanego rozwiązania przez rozwiązanie należące do podzbioru RNSPN przedstawiono na rysunku 4.25a – rozwiązania $S2$, $S4$ i $S7$ oraz na rysunku 4.25b – rozwiązania $S4$ i $S7$.

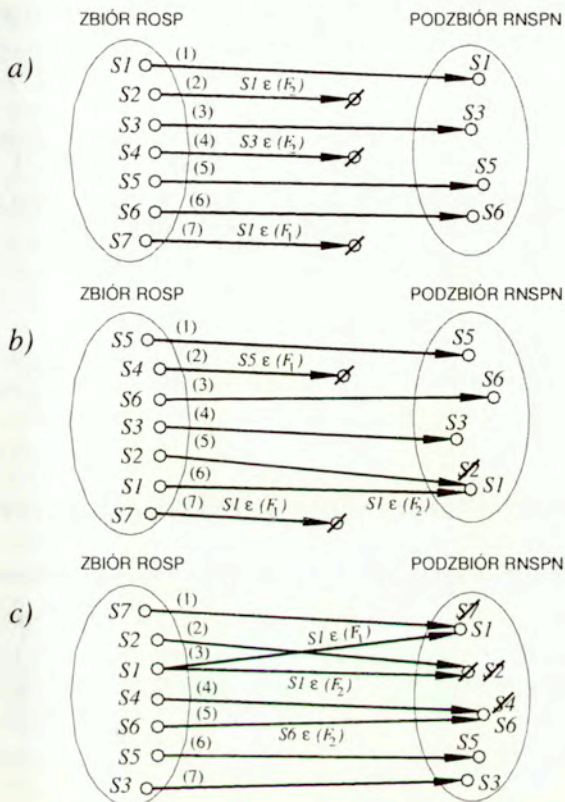
Zastąpienie istniejącego elementu podzbioru RNSPN analizowanym rozwiązaniem zaprezentowano na rysunku 4.25b – rozwiązanie $S1$ zastępuje $S2$, oraz na rysunku 4.25c – rozwiązanie $S1$ zastępuje $S7$, a rozwiązanie $S6$ zastępuje $S4$.

Operację **wykreślenia** elementu podzbioru RNSPN przez rozwiązanie, które wcześniej zastąpiło istniejący element zbioru – co doprowadziło do zmniejszenia liczebności podzbioru RNSPN – można zaobserwować na rysunku 4.25c – rozwiązanie $S1$ wykreśliła $S2$.

Należy zaznaczyć, że w przypadku zastosowania algorytmu jednofazowego rozwiązania $S3$ i $S6$ wchodzi do utworzonego podzbioru RNSPN. Dzieje się tak dlatego, że rozpatrywanie warunków (4.4) odbywa się w obu kierunkach, tzn. sprawdza się, czy $S3$ może wyeliminować $S6$ oraz czy $S6$ może wyeliminować $S3$. Badanie to ujawnia, że oba rozważane rozwiązania eliminują się w sensie przedziału nierozróżnialności względem różnych kryteriów. Otóż rozwiązanie $S6$ przewyższa w sensie przedziału nierozróżnialności rozwiązanie $S3$ względem kryterium F_2 , natomiast rozwiązanie $S3$ przewyższa w sensie przedziału nierozróżnialności rozwiązanie $S6$ względem kryterium F_1 . W tej sytuacji przyjęto, że oba rozwiązania należą do podzbioru RNSPN.

W rozpatrywanym przypadku, końcowy podzbiór RNSPN liczył 4 elementy i był identyczny przy różnych porządkach pobierania danych. Tak więc idea analizowania rozważanych rozwiązań w obie strony przyniosła pożądany efekt.

Porównanie obu zaproponowanych algorytmów wskazuje, że algorytm jednofazowy wyróżnia sytuację nieznaną w algorytmie dwufazowym, w której oba rozważane rozwiązania dążą do wzajemnego wyeliminowania. Należy przypomnieć, że w algorytmie dwufazowym w takiej sytuacji rozwiązanie uprzywilejowane (należące już do początkowego lub końcowego podzbioru RNSPN) eliminuje rozwiązanie pobrane do analizy.



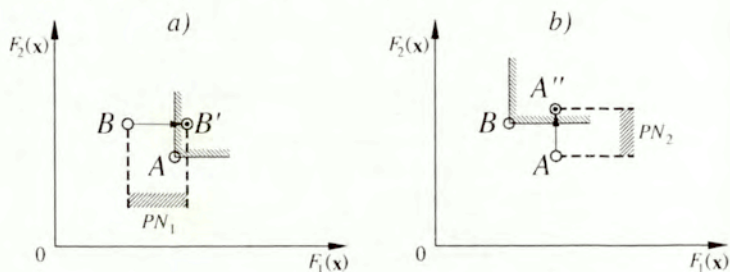
Rys. 4.25. Działanie algorytmu jednofazowego przy różnych porządkach pobierania danych, \emptyset – eliminacja, $\emptyset \cancel{\emptyset}$ – wykreślenie, \cancel{A} – zastąpienie, $S_k \in (F_i)$ – analizowane rozwiązanie jest eliminowane przez rozwiązanie o numerze k poprzez PN odniesiony do kryterium F_i

4.3.2. Zjawisko wzajemnego wykluczania

W przypadku filtracji zbioru ROSP z zastosowaniem algorytmu jednofazowego przy znacząco dużych wartościach przedziału nierozróżnialności może zachodzić tzw. zjawisko wzajemnego wykluczania porównywanych ocen rozwiązań. Sytuację taką przedstawiono na rysunku 4.26.

Rozważanie warunku (4.4) odbywa się w obu kierunkach, tzn. sprawdza się czy rozwiązanie A może wykluczyć rozwiązanie B oraz czy B może wykluczyć A . Chwilowe przemieszczenie rozwiązania B do punktu B' (rysunek 4.26a)

powoduje jego umiejscowienie wewnątrz stożka dominacji umieszczonego w punkcie A . Wynika z tego, że rozwiązanie A wyklucza rozwiązanie B poprzez przedział nierozróżnialności (PN_1) odniesiony do kryterium $F_1 - A \in (F_1) B$. Natomiast chwilowe przemieszczenie rozwiązania A do punktu A'' (rysunek 4.26b) powoduje jego ulokowanie wewnątrz stożka dominacji umieszczonego w punkcie B , co wskazuje, że rozwiązanie B wyklucza rozwiązanie A poprzez przedział nierozróżnialności (PN_2) odniesiony do kryterium $F_2 - B \in (F_2) A$. W takiej sytuacji nie może wystąpić ani eliminacja ani zastąpienie, stąd oba porównywane rozwiązania są dopisywane do tworzonego podzbioru RNSPN.



Rys. 4.26. Zjawisko wzajemnego wykluczania przy dwukryterialnej minimalizacji

Przez zjawisko wzajemnego wykluczania (ZWW) należy rozumieć, że oba porównywane rozwiązania eliminują się nawzajem przy analizie poszczególnych składowych wektora kryteriów. Elementy $\mathbf{x}^\wedge \in \Omega$ oraz $\mathbf{x}^+ \in \Omega$ będą elementami względem, których będzie występowało ZWW wtedy i tylko wtedy, gdy

dla $F_j(\mathbf{x}^\wedge) \geq 0$:

gdy $F_j(\mathbf{x}^\wedge) < F_j(\mathbf{x}^+)$ to dla $\bigwedge_{l1=j}$ zachodzi $(1 + \frac{PN_{l1}}{100}) F_{l1}(\mathbf{x}^\wedge) > F_{l1}(\mathbf{x}^+)$

oraz

(4.5)

gdy $F_{j1}(\mathbf{x}^\wedge) > F_{j1}(\mathbf{x}^+)$ to dla $\bigwedge_{l2=j1}$ zachodzi $(1 + \frac{PN_{l2}}{100}) F_{l2}(\mathbf{x}^+) > F_{l2}(\mathbf{x}^\wedge)$; $j \neq j1$

gdzie

- $j, j1 \in J$ – J jest zbiorem rozpatrywanych indeksów wektora kryteriów, $J = \{1, 2, \dots, J\}$,
- $l1$ – indeksy, dla których zachodzi eliminacja elementu \mathbf{x}^\wedge względem składowych kryteriów F_{l1} ,
- $l2$ – indeksy, dla których zachodzi eliminacja elementu \mathbf{x}^+ względem składowych kryteriów F_{l2} ,
- $l3$ – indeksy, dla których $F_j(\mathbf{x}^\wedge) = F_j(\mathbf{x}^+)$, $\{l1\} + \{l2\} + \{l3\} = J$.

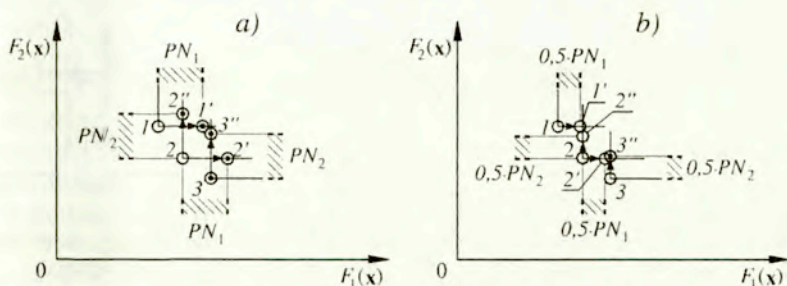
Algorytm z korekcją przedziału nierozróżnialności (KPN)

Przebadanie algorytmu jednofazowego na przykładach testowych pokazało, że przy wzrastającej wartości przedziału nierozróżnialności dla tego samego analizowanego zbioru RO SP wzrasta liczebność generowanego podzbioru RNSPN. Wzrost wartości przedziału nierozróżnialności powoduje zwiększoną częstość występowania ZWW, co skutkuje przechodzeniem analizowanych rozwiązań do podzbioru RNSPN.

Prezentowany algorytm z korekcją przedziału nierozróżnialności bazuje na idei algorytmu jednofazowego, tzn. jednoczesnego sprawdzania warunku (4.4) dla rozwiązania pobieranego ze zbioru RO SP z elementami podzbioru RNSPN. W algorytmie tym, w przypadku pojawienia się zjawiska wzajemnego wykluczania – zgodnie z warunkiem (4.5) – następuje powtórna analiza rozwiązań wzajemnie się wykluczających, czyli sprawdzenie warunku (4.4) przy skorygowanej wartości PN . Jeżeli przy pomniejszonej wartości PN analizowane rozwiązania nie wykluczają się wzajemnie, do podzbioru RNSPN przechodzi to, które wykluczyło analizowane rozwiązanie.

Rysunek 4.27a prezentuje takie położenie elementów podzbioru RNSPN: 1 i 3 oraz wprowadzonego do analizy rozwiązania ze zbioru RO SP – 2, że filtracja tych rozwiązań z zastosowaniem *Metody Przedziałów Nierozróżnialności* przy przyjętym PN_1 i PN_2 wykazuje ZWW między rozwiązaniami 1 i 2 oraz 2 i 3. Tak więc żadne z tych rozwiązań nie może być wykluczone i wszystkie przechodzą do podzbioru RNSPN.

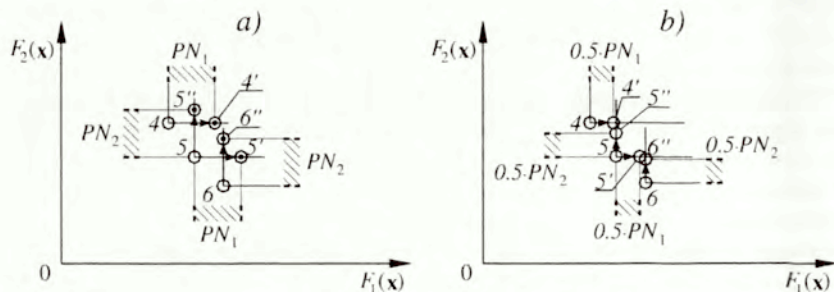
Zastosowanie algorytmu z KPN umożliwia powtórna analizę przy zmniejszeniu dotychczasowych wartości przedziałów nierozróżnialności PN_1 i PN_2 na PN_1' i PN_2' . Na rysunku 4.27b pokazano sytuację, gdy nowe przedziały nierozróżnialności stanowiły połowę wartości poprzedniej. W ten sposób wprowadzone do analizy rozwiązanie numer 2 wyeliminowało rozwiązanie 3.



Rys. 4.27. Eliminacja rozwiązania z podzbioru RNSPN przy zastosowaniu korekcji przedziału nierozróżnialności podczas występowania zjawiska wzajemnego wykluczania

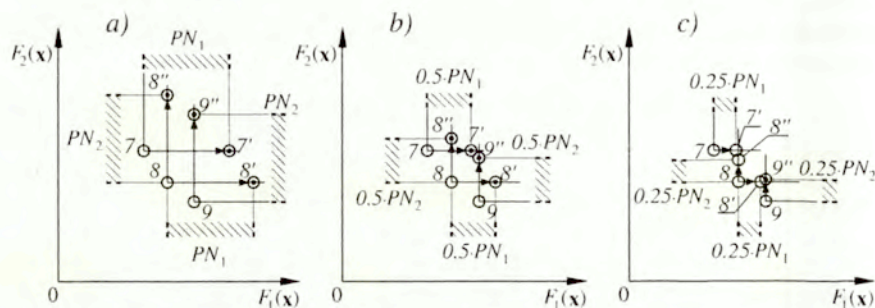
Położenie elementów zbioru RNSPN: 4 i 6 oraz rozwiązania 5 pobranego ze zbioru RO SP, prezentowanych na rysunku 4.28a, świadczą o występowaniu

ZWW. Powtórna analiza przy dwukrotnym zmniejszeniu początkowych wartości PN_1 i PN_2 nie przyczynia się do eliminacji żadnego rozwiązania (rysunek 4.28b). Chwilowe położenie rozwiązań: $4'$, $5''$, $6'$ i $6''$ wskazuje, że nie należą one do właściwych stożków dominacji umieszczonych odpowiednio w punktach: 4, 5 i 6.



Rys. 4.28. Brak eliminacji rozwiązania z podzbioru RNSPN mimo zastosowania korekcy przedziału nierozróżnialności podczas występowania zjawiska wzajemnego wykluczania

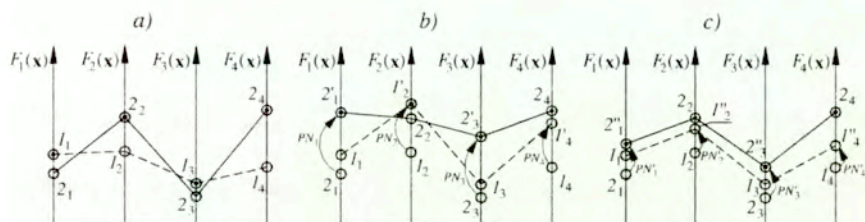
Na rysunku 4.29a również pokazano sytuację, gdy położenie elementów zbioru RNSPN: 7 i 8 oraz rozwiązania 9 pobranego ze zbioru ROSP powoduje ZWW. Przyjęte do filtracji wartości przedziału nierozróżnialności: PN_1 i PN_2 są jednak tak duże, że ich pierwsza korekca ($PN_1' = 0.5 PN_1$ i $PN_2' = 0.5 PN_2$) nadal wywołuje ZWW – rysunek 4.29b. Dopiero przeprowadzenie drugiej korekcy ($PN_1'' = 0.25 PN_1$ i $PN_2'' = 0.25 PN_2$) umożliwia wykluczenie rozwiązania numer 9 – rysunek 4.29c.



Rys. 4.29. Eliminacja rozwiązania z podzbioru RNSPN przy zastosowaniu podwójnej korekcy przedziału nierozróżnialności (KPN) podczas występowania zjawiska wzajemnego wykluczania

Przytoczone rozważania odnoszą się oczywiście do przestrzeni n -wymiarowej. Rysunek 4.30a prezentuje przypadek optymalizacji czterokryterialnej – oba rozwiązania 1 i 2 są optymalne w sensie Pareto, o czym świadczy przecinanie się odcinków łączących punkty odpowiadające składowym poszczególnych

rozwiązań. Na rysunku 4.30b pokazano te same rozwiązania po zastosowaniu przedziału nierozróżnialności PN' . Rozwiązanie numer 1 ma obecnie następujące składowe: $[I_1, I'_2, I_3, I'_4]^T$, zaś rozwiązanie numer 2 = $[2'_1, 2_2, 2'_3, 2_4]^T$. Odcinki łączące punkty odpowiadające odpowiednim składowym rozwiązań 1 i 2 w dalszym ciągu przecinają się, tak więc nadal występuje ZWW, żadne z rozwiązań nie dominuje nad drugim. Rysunek 4.30c pokazuje efekt działania przedziału nierozróżnialności – PN'' , gdy jego wartość jest równa połowie PN' . Istotna zmiana nastąpiła po korekcie wartości przedziału nierozróżnialności, w odniesieniu do kryterium F_2 . W tym przypadku rozwiązanie 1 = $[I_1, I''_2, I_3, I''_4]^T$ dominuje nad rozwiązaniem 2 = $[2''_1, 2_2, 2''_3, 2_4]^T$ (odcinki łączące składowe analizowanych rozwiązań nie przecinają się).



Rys. 4.30. Korekcja przedziału nierozróżnialności podczas zjawiska wzajemnego wykluczenia przy czterokryterialnej minimalizacji

Gdy korekcja przedziału nierozróżnialności nie przynosi pozytywnego rezultatu, można ponownie przeprowadzić zmianę wartości PN . W prezentowanym algorytmie dopuszcza się trzykrotną korekcję początkowej wartości PN . Filtracje przeprowadzone na różnych zbiorach testowych pokazały, że kolejne korekcje wartości PN nie przynoszą oczekiwanych zmian. Gdy wielokrotna korekcja PN nie zapewnia pożądanego rezultatu, nie następuje wykluczenie analizowanego rozwiązania i rozwiązanie to jest dopisywane do podzbioru RNSPN.

Algorytm z narastającą wartością przedziału nierozróżnialności

W algorytmie z narastającą wartością przedziału nierozróżnialności (NWPN) odwrócono sposób przeprowadzania filtracji. Ponieważ ZWW pojawia się przede wszystkim dla dużych wartości PN , przyjęto zasadę, że do wprowadzonych wartości przedziałów nierozróżnialności (pierwotnych wartości PN) należy dochodzić stopniowo poprzez wartości mniejsze. Tak więc filtracja *Metodą Przedziałów Nierozróżnialności* przeprowadzana jest wielokrotnie począwszy od bardzo małych wartości PN . W kolejnych analizach wartości PN rosną, aż do osiągnięcia wartości zadeklarowanych na początku. Rozwiązania wykluczone lub zastąpione przez inne rozwiązania przy małych wartościach PN , nie uczestniczą w kolejnych filtracjach. Tak więc w algorytmie tym nie ma potrzeby stosowania korekcji przedziału nierozróżnialności. Algorytm z NWPN działa trochę wolniej,

niż algorytm z KPN, gdyż filtracja wykonywana jest wielokrotnie. Dzięki stopniowemu wykluczaniu analizowanych rozwiązań przy kolejnym zwiększaniu wartości PN , rozpatrywany zbiór nie jest jednak liczniejszy niż poprzednio.

Algorytm klasyczny NWP

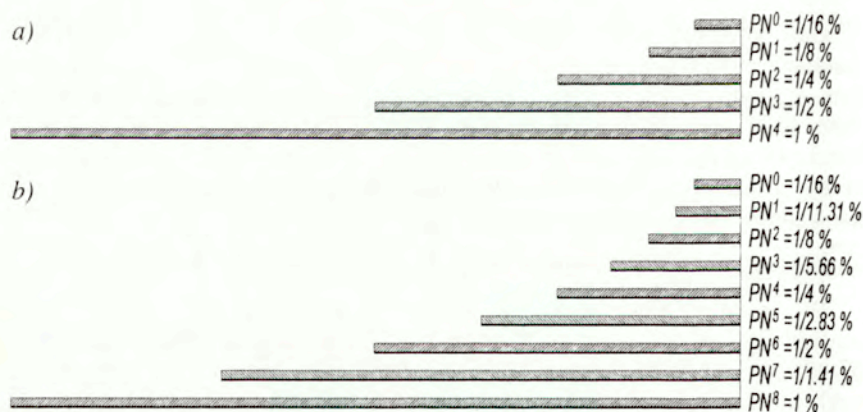
Istotą algorytmu NWP jest przeprowadzanie filtracji zbioru ocen rozwiązań poprzez przedziały nierozróżnialności, które na początku przyjmują wartości małe, a następnie rosną do pierwotnie zadeklarowanej wartości PN . W algorytmie klasycznym podział PN realizowany jest według następującej formuły

$$PN_j^l = \frac{PN_j}{\alpha^{q-l}} \quad (4.6)$$

gdzie

- α – dzielnik,
- q – wykładnik potęgi, liczba naturalna,
- PN_j – pierwotny przedział nierozróżnialności dla j -tej składowej wektora kryteriów, $j \in J = \{1, 2, \dots, J\}$,
- PN_j^l – l -ty narastający przedział nierozróżnialności dla j -tej składowej wektora kryteriów, $l = \{0, 1, 2, \dots, q\}$.

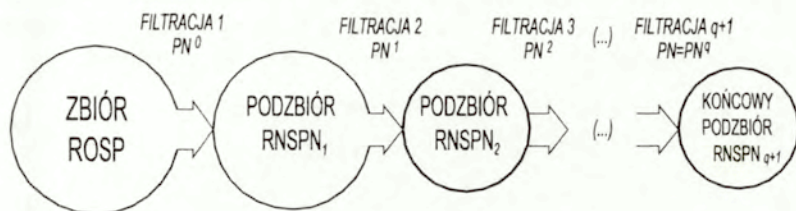
Przykładowe ciągi wartości narastających przedziałów nierozróżnialności pobierane do filtracji MPN pokazano na rysunku 4.31.



Rys. 4.31. Ciągi wartości narastających przedziałów nierozróżnialności
 a) $PN = 1\%$, $\alpha = 2$, $q = 4$, b) $PN = 1\%$, $\alpha = \sqrt{2}$, $q = 8$

Wprowadzenie mniejszej wartości dzielnika α sprawia, że uzyskany podział jest gęściejszy, ale stosowane wartości wykładnika q powinny być znacznie większe, by uzyskać małą wartość początkowego przedziału nierozróżnialności

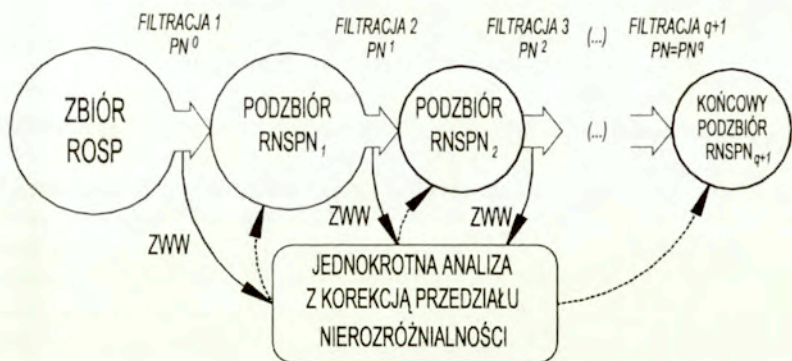
(PN^0) w ciągu narastających przedziałów nierozróżnialności. Powoduje to wydłużenie procesu obliczeniowego, ponieważ liczba przeprowadzonych filtracji wynosi zawsze $q+1$. Ogólny schemat blokowy filtracji przedstawiono na rysunku 4.32.



Rys. 4.32. Ogólny schemat filtracji *Metodą Przedziału Nierozróżnialności* z zastosowaniem algorytmu z narastającą wartością przedziału nierozróżnialności

Algorytm hybrydowy NWP

Podstawą algorytmu hybrydowego jest klasyczny algorytm z NWP. Jednak w sytuacji, gdy ujawnia się zjawisko ZWW, algorytm hybrydowy uruchamia dodatkową korekcję przedziałów nierozróżnialności KPN – rysunek 4.33.



Rys. 4.33. Ogólny schemat filtracji *Metodą Przedziału Nierozróżnialności* z zastosowaniem algorytmu hybrydowego

Dzięki temu nie ma potrzeby dokonywania gęstego podziału pierwotnej wartości przedziału nierozróżnialności, a proces obliczeniowy nie wydłuża się nadmiernie. Należy jednak pamiętać, aby zastosowana korekcja PN umieszczala skorygowany przedział nierozróżnialności – PN^k w odpowiednim miejscu ciągu narastających przedziałów nierozróżnialności.

Gdy ZWW ujawni się przy wartości przedziału nierozróżnialności PN^2 , to przyjęta skorygowana wartość PN^k musi być większa od PN^1 , co obrazuje ciąg

narastających przedziałów nierozróżnialności pokazany na rysunku 4.31a. W przypadku algorytmu hybrydowego przeprowadzano tylko jednokrotną korekcję, co wynikało bezpośrednio ze specyfiki jego działania.

Prostą formułą umożliwiającą wyznaczenie skorygowanej wartości przedziału nierozróżnialności – PN^k jest zapis wykorzystujący obliczone wcześniej wielkości z ciągu narastających wartości przedziału nierozróżnialności

$$PN_j^k = \frac{PN_j^l + PN_j^{l-1}}{2} \quad (4.7)$$

gdzie

- l – numer filtracji przy której ujawniło się ZWW,
- PN_j^l – wartość przedziału nierozróżnialności dla j -tej składowej wektora kryteriów w l -tej filtracji,
- PN_j^{l-1} – wartość przedziału nierozróżnialności dla j -tej składowej wektora kryteriów w $l-1$ filtracji.

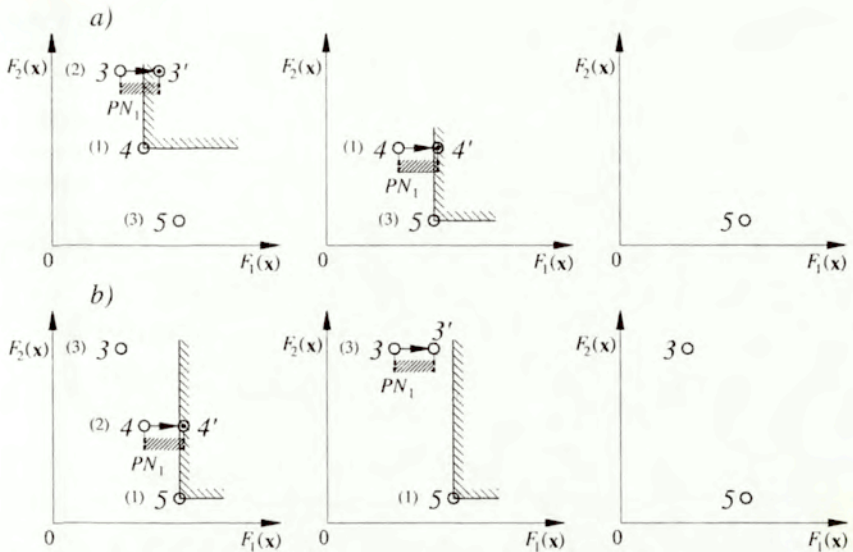
Wprowadzenie korekcji PN przy porównywaniu dwóch rozwiązań w sytuacji pojawienia się ZWW powoduje chwilowe zagęszczenie pierwotnego podziału przedziału nierozróżnialności. W innych przypadkach zjawisko takie nie występuje.

4.3.3. Zjawisko łańcucha eliminacji

Zjawisko łańcucha eliminacji pojawia się, gdy zbiór ROSP jest analizowany przy różnych porządkach wprowadzania danych.

Rysunek 4.34a pokazuje, że przy przyjętym porządku pobierania danych ze zbioru ROSP: 4—3—5, rozwiązanie 3 zostało wyeliminowane przez 4, po czym rozwiązanie 5 wyeliminowało rozwiązanie 4. Tak więc końcowy podzbiór RNSPN składał się tylko z jednego elementu – 5. Wystąpiło zjawisko łańcucha eliminacji, polegające na chwilowym wykorzystaniu rozwiązania 4 do eliminacji rozwiązania 3. Przy zmianie porządku pobierania danych na: 5—4—3, rozwiązanie 4 zostało w pierwszej kolejności wyeliminowane przez rozwiązanie 5, co obrazuje rysunek 4.34b. Podzbiór RNSPN składał się wówczas z rozwiązań 5 i 3.

Zjawisko łańcucha eliminacji staje się bardziej aktywne, gdy rozmieszczenie analizowanych ROSP wzdłuż składowej wektora kryteriów jest zagęszczone. Sytuację taką przedstawia rysunek 1.5 zamieszczony w rozdziale 1.



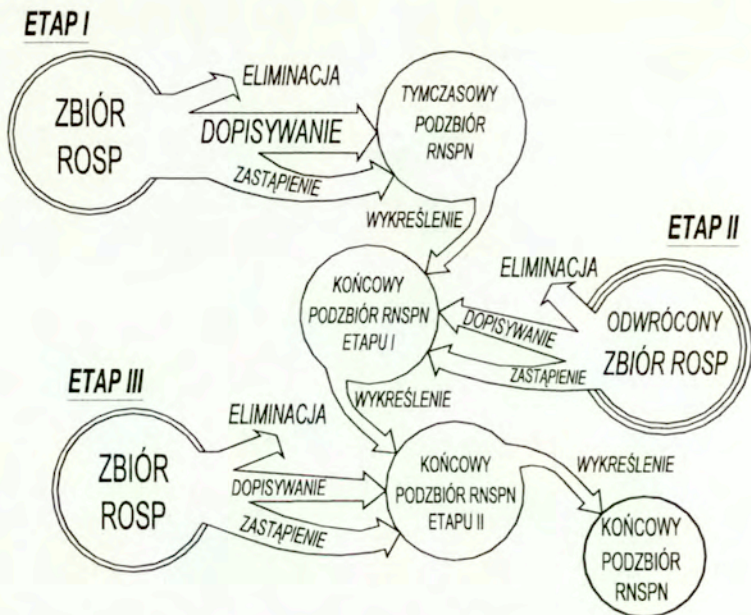
Rys. 4.34. Zjawisko łańcucha eliminacji przy dwukryterialnej minimalizacji

Opis algorytmu z odwróconą analizą

Prezentowany algorytm bada obszar przestrzeni kryterialnej, przy czym warunek (4.4) sprawdzany jest w obie strony, zarówno w odniesieniu do rozwiązania pobieranego ze zbioru ROSP, jak i rozwiązań już znajdujących się w wyznaczonym podzbiore RNSPN. Do stworzenia algorytmu z odwróconą analizą wykorzystano ideę algorytmu jednofazowego, opisanego szczegółowo w rozdziale 4.3.1. Algorytm z odwróconą analizą składa się z trzech etapów, co prezentuje rysunek 4.35.

Etap I wykorzystuje algorytm jednofazowy w czystej postaci. W etapie II zastosowano odwróconą kolejność pobierania rozwiązań ze zbioru ROSP do dalszej analizy i porównywania ich z końcowym podzbiorem RNSPN uzyskanym w etapie I. W etapie III następowało ponowne odwrócenie kolejności pobierania danych ze zbioru ROSP (co oznacza, że kolejność pobierania danych jest identyczna, jak w etapie I) i porównywanie ich z końcowym podzbiorem RNSPN z etapu II. W etapie II i III zastosowano algorytm jednofazowy zmodyfikowany, którego działanie polega na porównywaniu rozwiązań ze zbioru ROSP z rozwiązaniami stanowiącymi elementy istniejących podzbiórów RNSPN, uzyskanych jako wyniki analizy przeprowadzonej w etapach wcześniejszych.

Efektom działania algorytmu z odwróconą analizą jest otrzymanie końcowego podzbioru rozwiązań niezdominowanych w sensie przedziału nierozróżnialności.



Rys. 4.35. Idea działania algorytmu z odwróconą analizą

W każdym z kolejnych etapów algorytmu następuje wykonanie jednego lub kilku wymienionych niżej działań:

- **dopisania** do tworzonych podzbioru RNSPN aktualnie analizowanego rozwiązania – gdy warunek (4.4) nie jest spełniony dla rozwiązania pobieranego ze zbioru ROSP,
- **eliminowania** aktualnie analizowanego rozwiązania przez rozwiązanie należące do podzbioru RNSPN – gdy warunek (4.4) jest spełniony dla rozwiązania pobranego ze zbioru ROSP,
- **zastąpienia** istniejącego elementu podzbioru RNSPN analizowanym rozwiązaniem – gdy warunek (4.4) jest spełniony dla rozwiązania pobranego ze zbioru RNSPN,
- **wykreślenia** elementów podzbioru RNSPN przez rozwiązanie, które wcześniej zastąpiło istniejący element podzbioru – gdy warunek (4.4) jest spełniony dla kolejnego rozwiązania pobranego ze zbioru RNSPN.

Dzięki zastosowanym procedurom algorytm z odwróconą analizą trzykrotnie bada przynależność rozwiązań optymalnych w sensie Pareto do podzbioru rozwiązań niezdominowanych w sensie przedziału nierozróżnialności.

4.4. Filtracja zbioru rozwiązań *Metodą Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych (MWRK)*

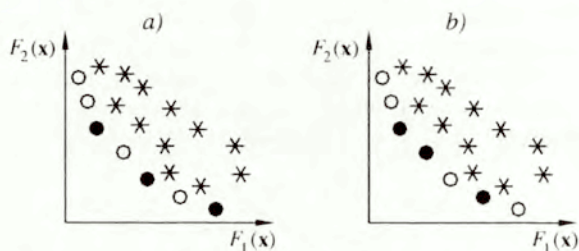
Metoda Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych dąży do wyznaczenia „rozwiązania najlepszego” lub podzbioru „rozwiązań najlepszych” [107, 108], opierając się na analizie relacji dominowania (opisanej w rozdziale 1) w zbiorze wektorowych wartości wskaźników (funkcji kryteriów). Na rysunku 4.36 pokazano ogólny schemat blokowy metody.



Rys. 4.36. Ogólny schemat blokowy *Metody Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych* w skończonym zbiorze rozwiązań dopuszczalnych

Przykładowe podzbiory rozwiązań reprezentatywnych (●) – w sensie min-max i w sensie min-max z wagami, gdy przyjęte wagi ω preferują kryterium F_1 , przedstawiono na rysunku 4.37.

„Rozwiązanie najlepsze” nazywane jest dalej rozwiązaniem kompromisowym, zaś podzbiór „rozwiązań najlepszych” przyjmuje nazwę podzbioru rozwiązań reprezentatywnych.

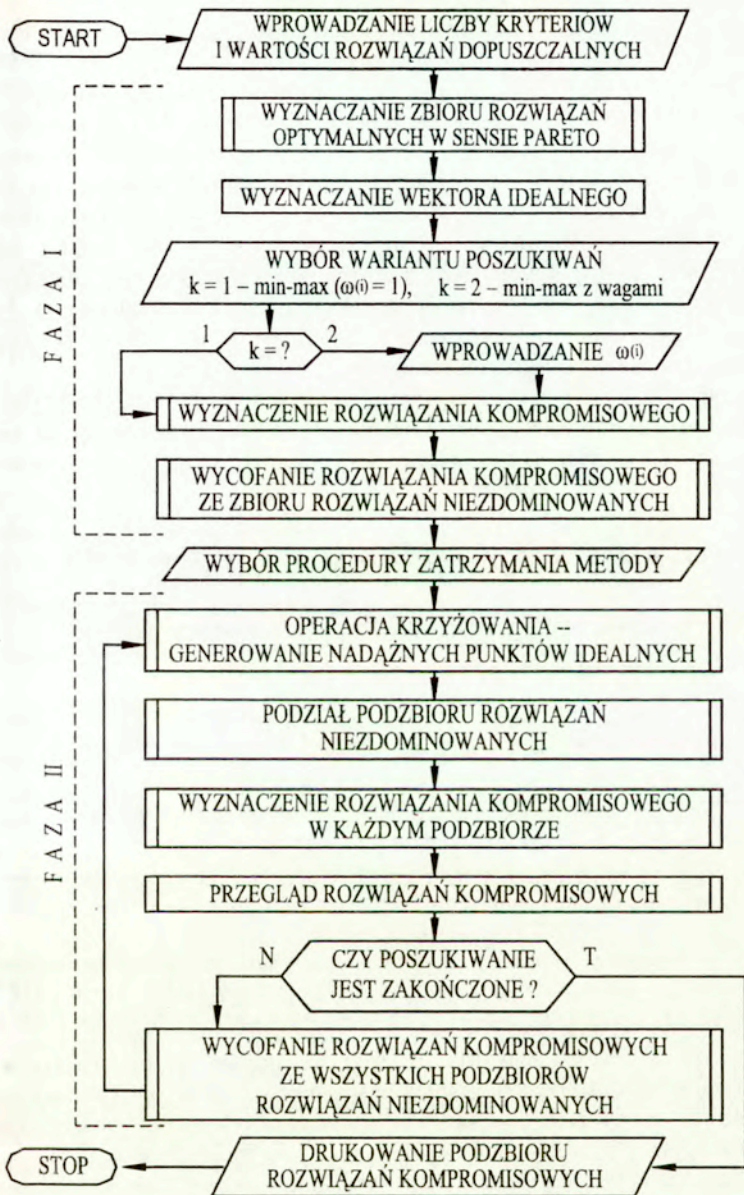


Rys. 4.37. Zbiory rozwiązań reprezentatywnych przy dwukryterialnej minimalizacji: a) w sensie min-max – $\omega_1 = \omega_2$, b) w sensie min-max z wagami – $\omega_1 > \omega_2$

W prezentowanej *Metodzie Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych* – dzięki wykorzystaniu operacji krzyżowania – istnieje możliwość wyznaczania podzbioru „rozwiązań najlepszych” przy zastosowaniu tej samej metryki i tych samych preferencji dla analizowanych kryteriów. Możliwość ta w znaczący sposób odróżnia prezentowaną metodę od innych znanych metod analizy wielokryterialnej. Operacja krzyżowania jest narzędziem charakterystycznym dla algorytmów genetycznych i ewolucyjnych. W zadaniach optymalizacji wielokryterialnej krzyżowanie dotyczy części składowych wektora zmiennych decyzyjnych. Dzięki temu powstają nowe rozwiązania, które należy sprawdzić pod kątem przynależności do zbioru rozwiązań dopuszczalnych, a następnie obliczyć wartości kryteriów i porównać je z ocenami rozwiązań ze zbioru ocen niezdominowanych. W zależności od powstałej sytuacji, nowe rozwiązania są dopisywane do istniejącego już zbioru rozwiązań niezdominowanych (przy okazji mogą eliminować z niego inne rozwiązania) albo odrzucane.

W zadaniach wyboru decydent dysponuje skończonym zbiorem rozwiązań dopuszczalnych lub niezdominowanych, i nie możemy generować nowych rozwiązań. Dlatego operacja krzyżowania dotyczy składowych wyznaczonych rozwiązań kompromisowych i składowych punktu idealnego. Wygenerowane w ten sposób nowe punkty idealne zwane dalej nadążnymi punktami idealnymi, mogą pełnić funkcję punktów referencyjnych lub punktów odniesienia w kolejnych analizach wielokryterialnych. Operacja krzyżowania umożliwia uzyskanie wielu punktów odniesienia, względem których wyznaczamy dalsze rozwiązania kompromisowe.

Metoda Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych składa się z dwóch faz. Faza I obejmuje wyznaczenie zbioru rozwiązań optymalnych w sensie Pareto oraz wyznaczenie pierwszego rozwiązania kompromisowego. Faza II umożliwia generowanie nadążnych punktów idealnych i wyznaczenie dalszych rozwiązań kompromisowych. Szczegółowy schemat blokowy metody przedstawiono na rysunku 4.38.

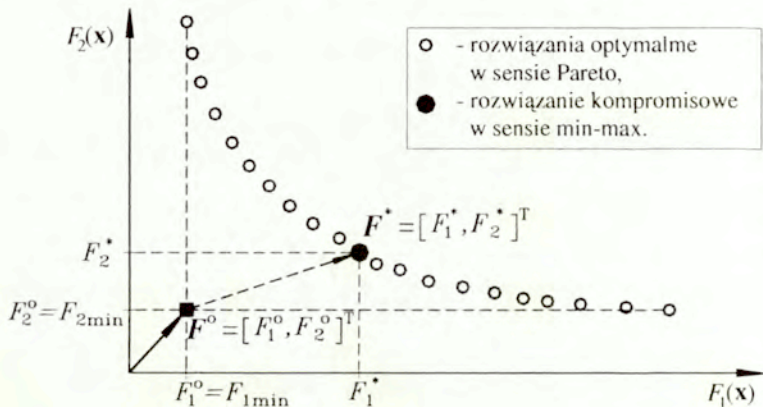


Rys. 4.38. Szczegółowy schemat blokowy *Metody Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych*

4.4.1. Wyznaczanie rozwiązań kompromisowych – FAZA I

Metoda Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych stosuje tzw. optymalizację docelową. Polega ona na tym, że dążymy do rozwiązania, które byłoby najlepsze, ale fizycznie jest niewykonalne. W tym celu wyznaczamy wektor idealny $F^o = [F^o_1, F^o_2, \dots, F^o_j]^T$ w rozpatrywanym skończonym zbiorze rozwiązań optymalnych w sensie Pareto. W przypadku, gdy wszystkie składowe wektora kryteriów $F = [F_1, F_2, \dots, F_j]^T$ są minimalizowane, wektor idealny $F^o = [F^o_1, F^o_2, \dots, F^o_j]^T$ tworzony jest poprzez poszukiwanie niezależnego minimum dla każdego kryterium oceny (formuła 1.11 w rozdziale 1). Należy podkreślić, że zdefiniowany w ten sposób wektor idealny stanowi wewnętrzną właściwość rozwiązań niezdominowanych.

Do wyznaczenia rozwiązań kompromisowych w przestrzeni kryterialnej zastosowano funkcję dystansową z normy $\|r\| \rightarrow +\infty$, co prowadzi do zadania optymalizacji przedstawionego w formule (2.31) w rozdziale 2.



Rys. 4.39. Ilustracja działania fazy I *Metody Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych* dla przypadku dwukryterialnej minimalizacji: wyznaczenie wektora idealnego (F^o); wyznaczenie pierwszego rozwiązania kompromisowego w sensie min-max (F^*)

Właściwości metryki min-max zostały przedstawione przez Osyczkę w pracach [131, 132]. Gdy poszczególnym wskaźnikom jakości przyporządkuje się wagi określające własne preferencje (dotyczące istotności poszczególnych kryteriów oceny F_j), w efekcie uzyskuje się metrykę min-max z wagami.

W fazie pierwszej wyznaczane jest tylko jedno rozwiązanie kompromisowe w sensie minimaxowym $F^* = [F^*_1, F^*_2, \dots, F^*_j]^T$, co przedstawia rysunek 4.39. Należy zwrócić uwagę, że wagi kryteriów w opisanej metodzie odnoszą się do wielkości bezwymiarowych. Stąd też ich wartości odwzorowują – w miarę precyzyjnie – preferencje, nadawane poszczególnym kryteriom oceny. Odróżnia

to w zasadniczy sposób przedstawione postępowanie od klasycznej metody skalaryzacji problemu wielokryterialnego.

Fazę I kończy usunięcie rozwiązania kompromisowego z analizowanego zbioru rozwiązań niezdominowanych.

4.4.2. Wyznaczanie rozwiązań kompromisowych – FAZA II

W fazie II można uzyskać kolejne rozwiązania kompromisowe: F^{*1} , F^{*2} , ..., F^{*m} , przy czym liczba rozwiązań zależy od wyboru sposobu zatrzymania procedury poszukiwawczej. Poszukiwanie rozwiązań kompromisowych w tej fazie podzielono na etapy, które powtarzane są aż do uruchomienia procedury końca pracy programu. W przypadku stosowania metryki min-max z wagami, zachowane pozostają wartości wag ω_j z fazy I.

Procedury zatrzymania MWRK

W *Metodzie Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych* przewidziano kilka sposobów zakończenia procedury poszukiwawczej. Obejmują one:

- (i) – określenie liczby etapów poszukiwań,
- (ii) – określenie liczby elementów wyznaczanego podzbioru rozwiązań kompromisowych,
- (iii) – określenie liczby elementów w podzbiorze, w którym wyznaczone jest rozwiązanie kompromisowe,
- (iv) – automatyczne zakończenie programu.

Automatyczne zakończenie programu łączy w sobie trzy pierwsze sposoby zatrzymania procedury MWRK. Na podstawie liczebności zbioru rozwiązań niezdominowanych oraz rozmiaru wektora kryteriów obliczane są:

- maksymalna liczba etapów poszukiwania (tak, aby nie nastąpiło przekroczenie zadeklarowanych rozmiarów macierzy do przechowywania obliczanych wielkości),
- maksymalna liczba elementów podzbioru rozwiązań kompromisowych,
- minimalna liczba elementów podzbioru, w którym wyznaczone jest rozwiązanie kompromisowe (gdy analizowany podzbiór zawiera mniej elementów niż zadeklarowana/obliczona wartość, to podzbiór taki jest pomijany i rozwiązanie kompromisowe nie jest wyznaczone).

Automatyczne zatrzymanie procedury następuje po przekroczeniu jednego z obliczanych parametrów.

W każdym etapie fazy II wykonywane są następujące działania:

- operacja krzyżowania – generowanie nadających punktów idealnych,
- podział podzbioru rozwiązań niezdominowanych,
- wyznaczanie rozwiązań kompromisowych w każdym z utworzonych podzbiorów rozwiązań niezdominowanych,

- przegląd rozwiązań kompromisowych,
- wycofanie rozwiązań kompromisowych ze wszystkich podzbiorów rozwiązań niezdominowanych.

Operacja krzyżowania – generowanie nadążnych punktów idealnych

Nadążne punkty idealne generowane są dzięki zastosowaniu operacji krzyżowania. Punktem wyjścia w proponowanym podejściu jest wyznaczenie punktu idealnego oraz wygenerowanie rozwiązania kompromisowego $F^* = [F^*_1, F^*_2, \dots, F^*_J]^T$ wg zależności (2.31). W etapie 1, krzyżując składowe punktu idealnego – F^o i pierwszego rozwiązania kompromisowego – F^* , generujemy J nadążnych punktów idealnych rzędu I, zgodnie z formułą (4.8)

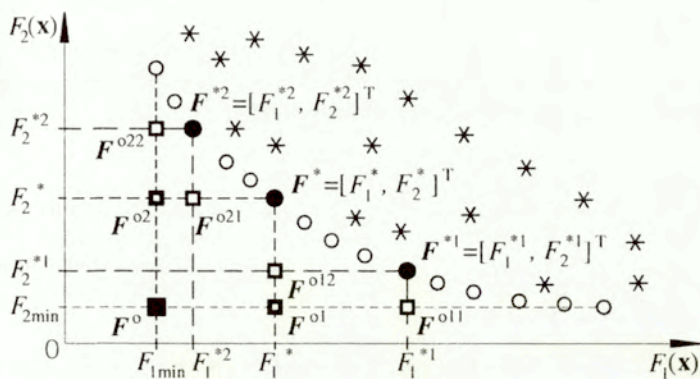
$$\begin{aligned}
 F^{o1} &= [F^*_1, F^o_2, \dots, F^o_J]^T \\
 F^{o2} &= [F^o_1, F^*_2, \dots, F^o_J]^T \\
 (\dots) \\
 F^{oJ} &= [F^o_1, F^o_2, \dots, F^*_J]^T
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Nadążne punkty idealne rzędu II wyznaczane są w etapie 2 poprzez krzyżowanie odpowiedniego nadążnego punktu idealnego rzędu I i odpowiadającego mu rozwiązania kompromisowego. W przypadku, gdy każdy punkt idealny przyczynia się do wyznaczenia rozwiązania kompromisowego, całkowita liczba punktów idealnych rzędu II będzie równa $J \cdot J$, co przedstawia formuła (4.9)

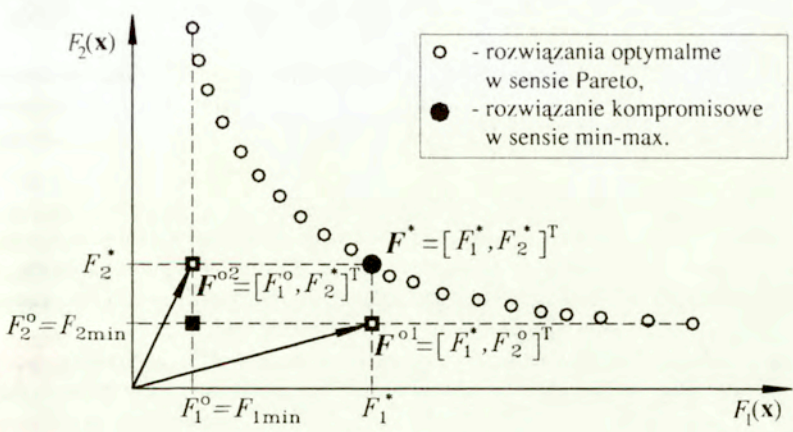
$$\begin{aligned}
 F^{o11} &= [F^*_1, F^{o1}_2, \dots, F^{o1}_J]^T \\
 F^{o12} &= [F^{o1}_1, F^*_2, \dots, F^{o1}_J]^T \\
 (\dots) \\
 F^{o1J} &= [F^{o1}_1, F^{o1}_2, \dots, F^*_J]^T \\
 F^{o21} &= [F^*_1, F^{o2}_2, \dots, F^{o2}_J]^T \\
 F^{o22} &= [F^{o2}_1, F^*_2, \dots, F^{o2}_J]^T \\
 (\dots) \\
 F^{o2J} &= [F^{o2}_1, F^{o2}_2, \dots, F^*_J]^T \\
 \\
 F^{oJ1} &= [F^*_1, F^{oJ}_2, \dots, F^{oJ}_J]^T \\
 F^{oJ2} &= [F^{oJ}_1, F^*_2, \dots, F^{oJ}_J]^T \\
 (\dots) \\
 F^{oJJ} &= [F^{oJ}_1, F^{oJ}_2, \dots, F^*_J]^T
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

W analogiczny sposób w kolejnych etapach, poprzez operację krzyżowania odpowiednich składowych nadążnych punktów idealnych wcześniejszego rzędu i odpowiadających im składowych rozwiązań kompromisowych, wyznaczane są nadążne punkty idealne kolejnych rzędów.

Nadażne punkty idealne są zbiorem punktów, które ujawniają również wewnętrzne właściwości rozpatrywanych rozwiązań [111, 113]. Rozmieszczenie nadażnych punktów idealnych rzędu I i II względem ocen rozwiązań dopuszczalnych, niezdominowanych oraz kompromisowych, przedstawiono na rysunku 4.40.



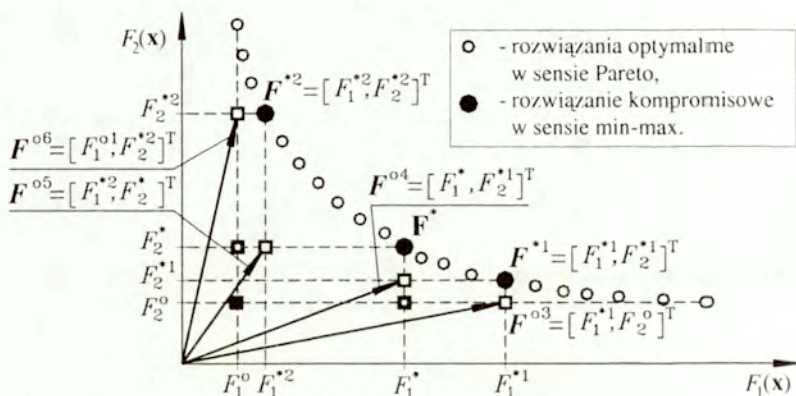
Rys. 4.40. Rozmieszczenie nadażnych punktów idealnych: \blacksquare – nadażny punkt idealny I rzędu, \blacksquare – nadażny punkt idealny II rzędu



Rys. 4.41. Operacja krzyżowania w Metodzie Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych dla przypadku dwukryterialnej minimalizacji, etap 1: wyznaczanie nadażnych punktów idealnych rzędu I (\blacksquare – F^{o1} , F^{o2})

Należy zwrócić uwagę na fakt, że generowane nadążne punkty idealne wszystkich rzędów nigdy nie są zdominowane przez istniejące (rozpatrywane) rozwiązania optymalne w sensie Pareto. Poza tym, położenie tych punktów jest w miarę równomierne w odniesieniu do brzegu zbioru rozwiązań niezdominowanych. Nadążne punkty idealne wyższych rzędów leżą bliżej wspomnianego brzegu niż nadążne punkty idealne niższych rzędów, przez co oddziałują na mniejszą liczbę rozwiązań niedominowanych.

Na rysunku 4.41 zaprezentowano wyznaczanie nadążnych punktów idealnych rzędu I w dwuwymiarowej przestrzeni decyzyjnej, zaś na rysunku 4.42 – wyznaczanie nadążnych punktów idealnych rzędu II.



Rys. 4.42. Operacja krzyżowania w Metodzie Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych dla przypadku dwukryterialnej minimalizacji, etap 2: wyznaczanie nadążnych punktów idealnych rzędu II (□ – F^{*3} , F^{*4} , F^{*5} , F^{*6}).

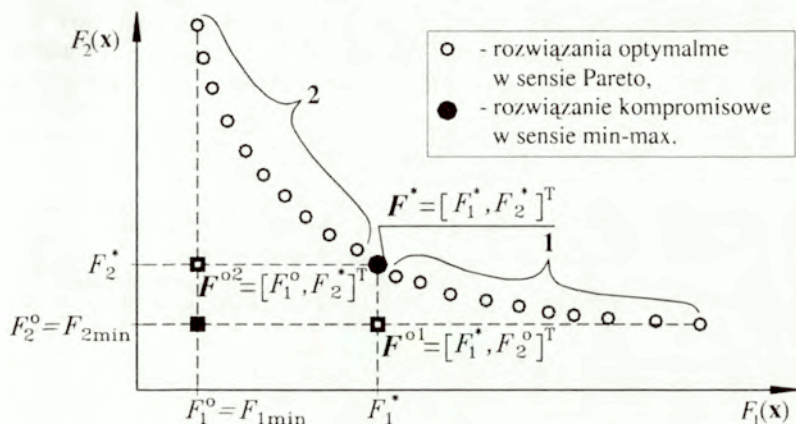
Podział podzbioru rozwiązań niezdominowanych

Nadążne punkty idealne, powstające w sposób zautomatyzowany w operacji krzyżowania, dzięki opisanym powyżej właściwościom są wykorzystywane do przeprowadzenia selekcji zbioru (podzbioru) rozwiązań niezdominowanych z wykorzystaniem *Metody Definiowania Punktu Idealnego*.

Dla każdego nowego nadążnego punktu idealnego F^{oj} , wyszukuje się ze zbioru rozwiązań optymalnych w sensie Pareto te rozwiązania, dla których dany wektor F^{oj} jest wektorem idealnym. W ten sposób otrzymuje się j podzbiorów rozwiązań niezdominowanych. W sytuacji, gdy $J=2$ powstają podzbiory rozłączne, tzn. żaden element jednego podzbioru nie należy do drugiego, co obrazuje rysunek 4.43. Gdy $J > 2$, w większości przypadków, nie można uzyskać podzbiorów rozłącznych i niektóre rozwiązania będą występowały w kilku, maksymalnie w $J-1$ podzbiórach.

Przykładowo, rozwiązanie $F^d = [F^d_1, F^d_2, \dots, F^d_J]^T$ nie należy do podzbioru rozwiązań niezdominowanych nr 1, gdzie punkt idealny wyrażony jest przez wektor $F^{o1} = [F^{o1}_1, F^{o1}_2, \dots, F^{o1}_J]^T$, gdy dla dowolnego $l = 1, 2, \dots, J$ spełniona jest nierówność

$$F^d_l < F^{o1}_l \quad (4.10)$$



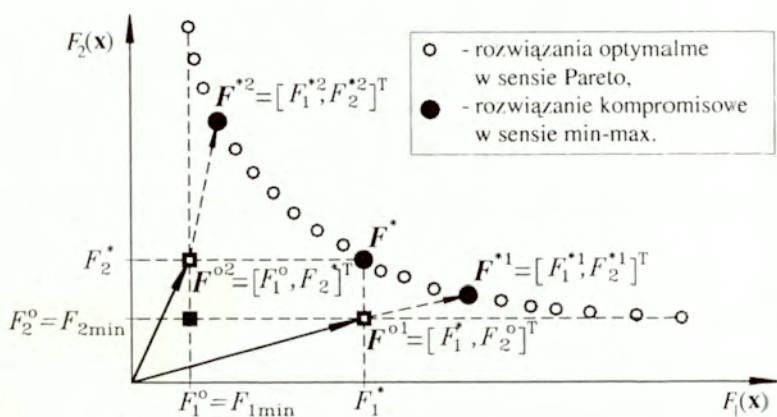
Rys. 4.43. Ilustracja działania fazy II Metody Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych dla przypadku dwukryterialnej minimalizacji: podział zbioru rozwiązań optymalnych w sensie Pareto na podzbiory nr 1 i nr 2 przy użyciu MDPI

Wyznaczanie rozwiązań kompromisowych w każdym z utworzonych podzbiorów rozwiązań niezdominowanych

W każdym z podzbiorów rozwiązań niezdominowanych, które powstały po podziale zbioru (podzbiorów) rozwiązań niezdominowanych, na podstawie zależności (2.31) wyznaczane jest rozwiązanie kompromisowe, co przedstawia rysunek 4.44. Teoretycznie generowanych jest tyle rozwiązań kompromisowych, ile podzbiorów powstało po podziale (w etapie 1 będzie to J rozwiązań, zaś w etapie 2 – $J - J$). W praktyce może ich być znacznie mniej. Dzieje się tak na przykład wtedy, gdy zadziała procedura zatrzymania, która analizuje liczebność elementów w rozpatrywanym podzbiornie. Zbyt mała liczba elementów powoduje, że wyznaczanie kompromisowe nie jest wyznaczane. W sytuacji, gdy liczba analizowanych kryteriów jest większa od 2, rozwiązania należące do podzbiorów powstałych po podziale, mogą się powtarzać. Wynika stąd, że wyznaczone rozwiązania kompromisowe mogą być tymi samymi elementami.

Przegląd rozwiązań kompromisowych

Analiza w przestrzeniach kryterialnych większych od 2 może prowadzić do sytuacji, w której pewne rozwiązania kompromisowe wyznaczone z poprzedzających podzbiorów mogą być tymi samymi elementami. Przegląd rozwiązań kompromisowych prowadzi do wycofania rozwiązań powtarzających się, z jednoczesnym zliczaniem powtórzeń (wyznaczanie tych samych rozwiązań kompromisowych ma miejsce zazwyczaj od etapu 2). Przyjęto, że im większa liczba powtórzeń konkretnego rozwiązania kompromisowego, tym to rozwiązanie jest ważniejsze w danym etapie poszukiwań. W sytuacji, gdy liczby powtórzeń dwóch rozwiązań kompromisowych są jednakowe, o ważności jednego z rozwiązań może decydować liczebność podzbiorów, z których dane rozwiązanie wyznaczono.



Rys. 4.44. Ilustracja działania fazy II Metody Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych dla przypadku dwukryterialnej minimalizacji: wyznaczanie kolejnych rozwiązań kompromisowych w sensie min-max (F^{*1} , F^{*2})

Wycofanie rozwiązań kompromisowych ze wszystkich podzbiorów rozwiązań niezdominowanych

W sytuacji, gdy procedury zatrzymania nie kończą przeprowadzanej analizy, następuje wycofanie wyznaczonych rozwiązań kompromisowych ze wszystkich podzbiorów rozwiązań niezdominowanych. W ten sposób w dalszych obliczeniach udział biorą tylko rozwiązania niezdominowane, nie będące rozwiązaniami kompromisowymi. Program przechodzi do kolejnego etapu drugiej fazy.

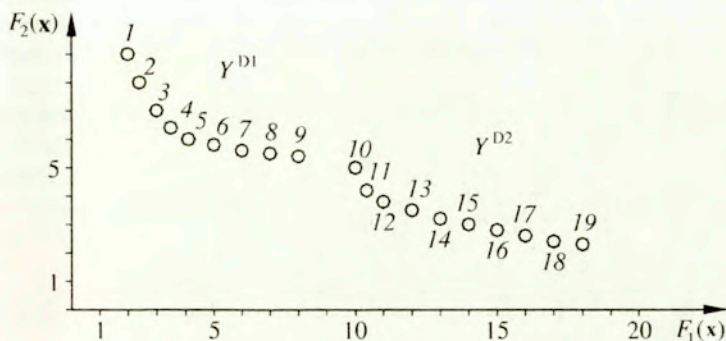
4.4.3. Przykład ilustrujący działanie MWRK

W celu lepszego zobrazowania działania *Metody Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych* wykonano obliczenia dla zadania wyboru „rozwiązań najlepszych” przy dwukryterialnej minimalizacji. Analizowany zbiór rozwiązań niezdominowanych jest zbiorem rozłącznym, składającym się z dwóch podzbiorów: Y_{ND}^1 oraz Y_{ND}^2 . Obliczenia wykonano dla różnych liczebności zbiorów rozwiązań optymalnych w sensie Pareto. Z podzbioru Y_{ND}^1 usuwano elementy leżące najbliżej podzbioru Y_{ND}^2 , a z podzbioru Y_{ND}^2 elementy leżące najbliżej podzbioru Y_{ND}^1 . W ten sposób powiększono odległość między podzbiórami i sprawdzano, czy mimo to w wyznaczanym podzbiórze rozwiązań kompromisowych znajdują się elementy należące do obu podzbiorów. Dane do obliczeń zawarto w tabelicy 4.2 oraz przedstawiono na rysunku 4.45.

Tabela 4.2

Wartości analizowanych kryteriów

Nr rozwiązania	$F_1(x)$	$F_2(x)$	Nr rozwiązania	$F_1(x)$	$F_2(x)$
1	2	9	11	10.3	4
2	2.5	8	12	10.8	3.8
3	3	7	13	12	3.5
4	3.5	6.5	14	13	3.2
5	4	6	15	14	3
6	5	5.8	16	15	2.8
7	6	5.6	17	16	2.6
8	7	5.5	18	17	2.4
9	8	5.4	19	18	2.2
10	10	5			



Rys. 4.45. Rozmieszczenie ROSP na podstawie tabelicy 4.2

Przeprowadzona analiza wielokryterialna *Metodą Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych* wykazuje, że wyznaczony podzbiór rozwiązań kompromisowych składał się z elementów należących do obu podzbiorów składowych: Y_{ND}^1 oraz

Y_{ND}^2 . Podczas obliczeń dokonywano zmian preferencji analizowanych kryteriów. Wyniki zamieszczono w tabelicy 4.3 oraz pokazano na rysunku 4.46.

Przeprowadzona analiza dowiodła, że wykreślanie kolejnych rozwiązań sąsiadujących ze sobą, a należących do obu podzbiorów, nie wpływało na końcową zawartość podzbioru rozwiązań kompromisowych (porównaj wiersze 1, 2 oraz 3 z tabelicy 4.3), albo wpływ ten był nieznaczny (porównanie wiersza 4 z 5 oraz 6 z 7 z tej samej tabelicy).

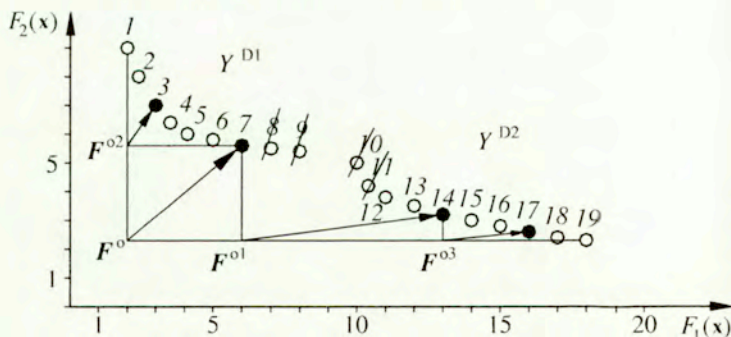
Zaprezentowany przykład świadczy o tym, że podzbiór rozwiązań kompromisowych wygenerowany *Metodą Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych* odzwierciedla kształt analizowanego zbioru ROSP nawet w przypadku, gdy składa się on z dwu podzbiorów.

Tabela 4.3

Wyniki analizy wielokryterialnej *Metodą Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych*

Lp.	Liczba rozwiązań	Elementy wykreślone	Typ analizy	Rozwiązania kompromisowe	Rozwiązania nie powtarzające się
1	19	brak	min-max	6, 11, 2, 15, 17*	—
2	17	8, 9	min-max	6, 11, 2, 15, 17	—
3	15	8, 9, 10, 11	min-max	6, 12, 2, 15, 17	—
min-max z wagami					
4	17	8, 9	$\omega_1 = 0.6,$ $\omega_2 = 0.4$	5, 7, 2, 11, 14, 16	11
5	15	8, 9, 10, 11	$\omega_1 = 0.6,$ $\omega_2 = 0.4$	5, 7, 2, 12, 14, 16	12
6	17	8, 9	$\omega_1 = 0.3,$ $\omega_2 = 0.7$	7, 14, 3, 17, 11	11
7	15	8, 9, 10, 11	$\omega_1 = 0.3,$ $\omega_2 = 0.7$	7, 14, 3, 17	—

* rozwiązania powtarzające się przy różnych analizach



Rys. 4.46. Rozmieszczenie rozwiązań kompromisowych, analiza min-max z wagami $\omega_1 = 0.3, \omega_2 = 0.7$

5. Testowanie metod *Ewolucyjnego Systemu Analizy Wielokryterialnej*

Rozdział 5 poświęcono testowaniu dwóch podstawowych metod systemu <ESAW>: *Metody Przedziałów Nierozróżnialności* oraz *Metody Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych*.

5.1. Testowanie *Metody Przedziału Nierozróżnialności*

Testowanie *Metody Przedziałów Nierozróżnialności* przeprowadzono na dwóch przykładach literaturowych. W pierwszym z nich wykorzystano wyniki otrzymane w procesie optymalizacji wielokryterialnej wielostopniowej belki wspornikowej [133]. Celem testowania było sprawdzenie skuteczności działania różnych algorytmów realizujących ideę optymalności w sensie przedziału nierozróżnialności poprzez zbadanie wpływu kolejności wprowadzania danych do analizy na końcową zawartość podzbioru rozwiązań niezdominowanych w sensie przedziału nierozróżnialności. Tym samym starano się ustalić zdolność opracowanych algorytmów do pokonywania pojawiającego się zjawiska wzajemnego wykluczania i zjawiska łańcucha eliminacji.

W drugim przykładzie przeprowadzono filtrację danych *Metodą Przedziałów Nierozróżnialności*, a efekty porównano z wynikami otrzymanymi przez autorów, którzy stosowali własną metodę filtracji – metodę kompleksowego łączenia skupień [159].

5.1.1. Filtracja wyników optymalizacji wielokryterialnej wielostopniowej belki wspornikowej

Do testowania filtracji *Metodą Przedziałów Nierozróżnialności* wykorzystano wyniki optymalizacji wielokryterialnej wielostopniowej belki wspornikowej

uzyskane przez Osyczkę, a zamieszczone w pracy [133]. Schemat projektowanej belki wspornikowej przedstawiono na rysunku 5.1.

Problem optymalizacji sformułowany był następująco:

- wektor zmiennych decyzyjnych

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_6]^T$$

gdzie

x_n – jest wysokością n -tej części belki wspornikowej,

- funkcje celu:

– objętość belki wspornikowej [mm³]

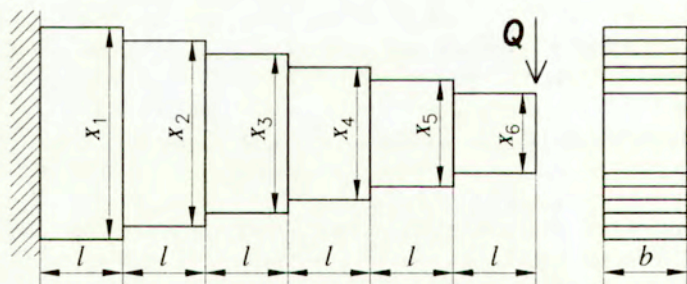
$$F_1(\mathbf{x}) = b \cdot l \sum_{n=1}^N x_n \quad (5.1)$$

– przemieszczenie spowodowane działaniem siły Q [mm]

$$F_2(\mathbf{x}) = \frac{Ql^3}{2E} \left(\frac{1}{I_1} + \sum_{n=2}^N \frac{n^3 - (n-1)^3}{I_n} \right) \quad (5.2)$$

gdzie

$$I_n = \frac{bx_n^3}{12} \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots, N.$$



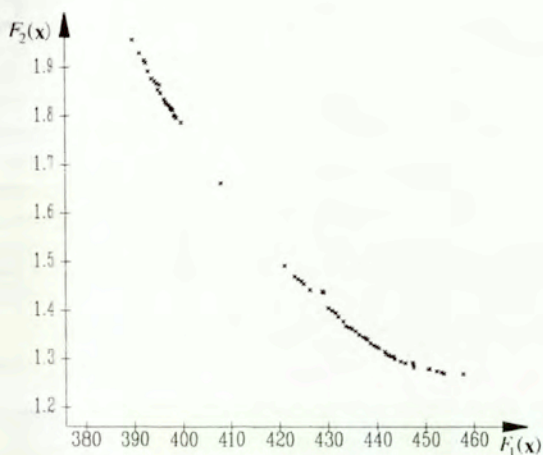
Rys. 5.1. Wielkości charakterystyczne optymalizowanej belki wspornikowej

Ograniczenia dotyczyły dopuszczalnych naprężeń gnących w poszczególnych segmentach belki wspornikowej (sześć ograniczeń nierównościowych) oraz grubości poszczególnych segmentów (również sześć ograniczeń nierównościowych). Zadanie zostało sformułowane jako problem dyskretny z następującym zbiorem dopuszczalnych zmiennych decyzyjnych

$$x_i = \{12; 14; 16; 18; 20; 22; 24; 26; 28; 30; 32\} \text{ [mm]}, \text{ dla } n = 1, 2, \dots, 6.$$

Do rozwiązania tego problemu przyjęto następujące wartości parametrów: $N = 6$, $l = 50$ [mm], $b = 50$ [mm], $Q = 10000$ [N], $E = 2.06 \cdot 10^5$ [N/mm²], $\sigma_g = 360$ [N/mm²].

Proces optymalizacji wielokryterialnej przykładu opisanego powyżej był przeprowadzony przez Osyczkę przy użyciu algorytmu genetycznego, stosującego selekcję turniejową. W efekcie wygenerowanych zostało 85 rozwiązań, z których 66 starożyły rozwiązania niezdominowane w sensie Pareto. Na rysunku 5.2 pokazano rozmieszczenie tych rozwiązań w przestrzeni kryterialnej.



Rys. 5.2. Rozmieszczenie elementów analizowanego zbioru w przestrzeni kryterialnej

Należy zwrócić uwagę na specyfikę uzyskanego zbioru. Składa się on z trzech części: dwóch skupisk rozwiązań na jego końcach oraz pojedynczego rozwiązania w środku. Zgromadzenie tak wielu rozwiązań na obu końcach zbioru powoduje, że są one położone blisko siebie. W takim przypadku, nawet nieznaczne wartości przedziału nierozróżnialności będą powodowały eliminację sąsiednich rozwiązań, przy czym z pewnością wystąpią zjawiska wzajemnego wykluczania oraz łańcucha eliminacji. Prezentowany zbiór stanowi bardzo dobry materiał do testowania algorytmów selekcji *Metodą Przedziałów Nierozróżnialności*.

Do przeprowadzenia testu algorytmów przygotowano 10 różnych porządków wprowadzania danych. W każdym przypadku kolejność wprowadzania uzyskano w procesie losowania bez zwracania. Testowano przydatność algorytmów: dwufazowego, jednofazowego, algorytmu z korekcją przedziału nierozróżnialności, algorytmu z narastającą wartością przedziału nierozróżnialności oraz algorytmu z odwróconą analizą.

Algorytm dwufazowy (DF)

Idea działania algorytmu dwufazowego została przedstawiona w rozdziale 4.3.1 i na rysunku 4.18. Zbiorcze wyniki analizy zbioru testowego przy 10 różnych porządkach wprowadzania danych pokazano w tabelicy 5.1.

Tablica 5.1

Liczby elementów podzbiorów RNSPN wygenerowanych przy użyciu algorytmu DF dla różnych wartości PN

PN [%]	Średnia* liczba elementów podzbioru RNSPN		Liczba elementów podzbioru RNSPN		Maksymalna liczba rozwiązań odrzuconych w fazie 2
	po fazie 1	po fazie 2	minimalna	maksymalna	
0.25	28	26	24	28	3
0.50	16	15	14	18	2
0.75	12	11	10	13	3
1.00	11	10	9	11	1
1.25	9	9	7	10	1
1.50	8	8	7	10	1
2.00	7	7	6	8	0

* po zaokrągleniu do liczby naturalnej

Tablica 5.2

Powtarzalność elementów należących do podzbiorów RNSPN wygenerowanych przy użyciu algorytmu DF dla różnych wartości PN

PN [%]	Liczba elementów występujących w każdym podzbiorze RNSPN	Liczba wszystkich innych elementów występujących przynajmniej w jednym podzbiorze RNSPN
0.25	11	36
0.50	3	47
0.75	2	40
1.00	1	48
1.25	1	35
1.50	1	41
2.00	1	30

Liczba elementów końcowego podzbioru RNSPN (po fazie 2) była mniejsza lub równa liczbie początkowego podzbioru RNSPN (po fazie 1), co może świadczyć, że powtórna analiza przy odwróconej kolejności pobierania danych przyniosła oczekiwany skutek (przy mniejszych wartościach PN ujawniło się zjawisko łańcucha eliminacji). Zgodnie z przewidywaniami, zwiększenie wartości przedziału nierozróżnialności PN powodowało eliminację większej liczby analizowanych rozwiązań i wygenerowanie mniej licznych podzbiorów RNSPN. Mankamenty algorytmu dwufazowego ujawniły się dopiero przy szczegółowej analizie zawartości końcowych podzbiorów RNSPN. Okazało się bowiem, że

kolejność wprowadzania danych decyduje o zawartości generowanego podzbioru. W rozpatrywanym przypadku sytuacja taka jest niedopuszczalna i dlatego algorytm dwufazowy nie powinien być stosowany przy filtrowaniu zbiorów. Wyniki analizy zawarto w tablicy 5.2.

Algorytm jednofazowy (JF)

Idea działania algorytmu jednofazowego została przedstawiona w rozdziale 4.3.1 i na rysunku 4.21. Najogólniej mówiąc rozwiązanie należące do podzbioru RNSPN nie jest uprzywilejowane w trakcie porównywania dwóch rozwiązań i może zostać z niego wyeliminowane. Przydatność algorytmu jednofazowego do selekcji rozwiązań sprawdzono na przykładzie zbioru uzyskanego z wykorzystaniem algorytmu genetycznego. Zbiórcze wyniki analizy zbioru testowego przy 10 różnych porządkach wprowadzania danych pokazano w tablicy 5.3.

Już na pierwszy rzut oka widać, że filtrowanie zbioru rozwiązań niezdominowanych przy użyciu tego algorytmu nie spełnia swojego zadania, ponieważ zwiększanie przedziału nierozróżnialności PN nie prowadzi do zmniejszenia liczby elementów wchodzących w skład generowanego podzbioru RNSPN. Ta sytuacja spowodowana jest występowaniem zjawiska wzajemnego wykluczania (ZWW) opisanego szczegółowo w rozdziale 4.3.2.

Tablica 5.3

Liczby elementów podzbiorów RNSPN wygenerowanych przy użyciu algorytmu JF dla różnych wartości PN

PN [%]	Średnia* liczba elementów podzbioru RNSPN	Liczba elementów podzbioru RNSPN		Średnia* liczba elementów podzbioru RNSPN wyznaczona algorytmem DF
		minimalna	maksymalna	
0.25	33	30	36	26
0.50	23	20	26	15
0.75	20	17	23	11
1.00	20	18	24	10
1.25	20	18	24	9
1.50	21	17	24	8
2.00	22	20	23	7

*po zaokrągleniu do liczby naturalnej

Algorytm z korekcją przedziału nierozróżnialności (KPN)

Algorytm z korekcją przedziału nierozróżnialności został szczegółowo zaprezentowany w rozdziale 4.3.2. W algorytmie tym, w przypadku pojawienia się zjawiska wzajemnego wykluczania – zgodnie z warunkiem (4.5) – następuje powtórna analiza rozwiązań wzajemnie się wykluczających, czyli sprawdzenie warunku (4.4) przy skorygowanej wartości PN . Jeżeli przy pomniejszonej wartości PN analizowane rozwiązania nie wykluczają się wzajemnie, to do podzbioru RNSPN przechodzi tylko jedno rozwiązanie – to, które wykluczyło

rozwiązanie analizowane. Zbiórcze wyniki analizy zbioru testowego przy 10 różnych porządkach wprowadzania danych pokazano w tabelicy 5.4.

Tablica 5.4

Liczby elementów podzbiorów RNSPN wygenerowanych z wykorzystaniem algorytmu KPN dla różnych wartości PN

PN [%]	Średnia* liczba elementów podzbioru RNSPN	Liczba elementów podzbioru RNSPN		Średnia* liczba elementów podzbioru RNSPN wyznaczona algorytmem DF
		minimalna	maksymalna	
0.25	25	24	27	26
0.50	15	14	17	15
0.75	11	10	14	11
1.00	11	10	12	10
1.25	10	9	11	9
1.50	9	8	10	8
2.00	9	8	10	7

* po zaokrągleniu do liczby naturalnej

Należy podkreślić, że komputerowa implementacja algorytmu KPN przeciwdziałała występowaniu zjawiska łańcucha eliminacji opisanego w rozdziale 4.3.3 i przedstawionego na rysunku 4.35. Powtórna analiza przy odwróconej kolejności pobierania danych z podzbioru RNSPN powodowała dodatkową eliminację rozwiązań z podzbioru RNSPN. W zależności od przyjętego porządku wprowadzania danych i wartości przedziału nierozróżnialności PN , liczebność końcowego podzbioru RNSPN była mniejsza nawet o 6 elementów.

Podobnie, jak w przypadku zastosowania algorytmu dwufazowego, zwiększenie wartości przedziału nierozróżnialności PN powodowało eliminację większej liczby analizowanych rozwiązań i generowanie podzbioru RNSPN o mniejszej liczebności, przy czym średnia liczba elementów podzbioru RNSPN była w przybliżeniu taka sama. Należy jednak zauważyć, że dla większych wartości przedziału nierozróżnialności PN (od 1% do 2%) liczebności podzbiorów RNSPN wygenerowanych przy użyciu algorytmu z korekcją przedziału nierozróżnialności (KPN) były o jeden, a czasami o dwa elementy większe od średniej liczby elementów podzbiorów RNSPN wyznaczonych przy użyciu algorytmu dwufazowego. Oznacza to, że zastosowanie trzypoziomowej KPN nie zawsze pozwala na likwidację zjawiska wzajemnego wykluczania (ZWW). Analiza pośrednich wyników filtracji przy $PN=0.5\%$ umożliwiła obliczenie średniego udziału poszczególnych poziomów korekcji w likwidacji zjawiska wzajemnego wykluczania. Poziom I KPN likwidował około 55% ZWW; poziom II KPN – około 22% ZWW; poziom III KPN likwidował około 11% ZWW; a około 12% ZWW nie ulegało likwidacji. Dla wartości $PN=1\%$ uzyskano następujące wyniki: poziom I KPN likwidował około 49% ZWW; poziom II – około 20% ZWW; poziom III – około 8% ZWW; a około 23% ZWW nie ulegało likwidacji. Wzrost wartości przedziału nierozróżnialności PN powodował

zwiększone „zazębianie” analizowanych rozwiązań, w efekcie procent nie zlikwidowanych ZWW ulegał powiększeniu.

W tabelicy 5.5 przedstawiono wyniki dotyczące powtarzalności elementów występujących w każdym podzbiorze RNSPN. Uzyskane wyniki są wprawdzie znacznie lepsze od tych, które otrzymano przy zastosowaniu algorytmu dwufazowego (patrz tablica 5.2), ale nadal niezadowalające.

Tablica 5.5

Powtarzalność elementów należących do podzbiorów RNSPN wygenerowanych z wykorzystaniem algorytmu KPN dla różnych wartości PN

PN [%]	Liczba elementów występujących w każdym podzbiorze RNSPN	Liczba wszystkich innych elementów występujących przynajmniej w jednym podzbiorze RNSPN
0.25	14	35
0.50	7	35
0.75	4	33
1.00	6	23
1.25	6	16
1.50	4	26
2.00	6	11

Algorytmy z narastającą wartością przedziału nierozróżnialności

Algorytmy z narastającą wartością przedziału nierozróżnialności (NWPN) zostały opisane w rozdziale 4.3.2. Przedstawiono tam algorytm klasyczny oraz algorytm hybrydowy.

Algorytmy klasyczny K-NWPN

Istotą algorytmu klasycznego K-NWPN jest przeprowadzanie filtracji zbioru rozwiązań niezdominowanych poprzez przedziały nierozróżnialności, które na początku przyjmują wartości małe, a później rosnące do pierwotnej wartości PN , czyli wartości wprowadzonej przez operatora systemu. Zbiorcze wyniki analizy zbioru testowego przy 10 różnych porządkach wprowadzania danych pokazano w tabelicy 5.6.

Podobnie, jak przy zastosowaniu algorytmu dwufazowego oraz algorytmu z korekcją przedziału nierozróżnialności, zwiększenie wartości PN spowodowało eliminację większej liczby analizowanych rozwiązań i wygenerowanie mniej licznych podzbiorów RNSPN. Średnia liczba elementów w podziorach RNSPN była w przybliżeniu taka sama, jak w przypadku zastosowania algorytmu DF i KPN.

W tabelicy 5.7 pokazano wyniki dotyczące powtarzalności elementów występujących w każdym podzbiorze RNSPN. Uzyskane wyniki są znacznie lepsze od tych, które otrzymano przy zastosowaniu algorytmu dwufazowego (patrz tablica 5.2) i algorytmu KPN (patrz tablica 5.5). Nastąpiła poprawa obu wskaźników. Liczba elementów występujących w każdym podzbiorze RNSPN powiększyła się, zaś liczba wszystkich innych elementów występujących

przynajmniej w jednym podzbiore RNSPN uległa zmniejszeniu (w zależności od wartości rozpatrywanego PN nawet o 100 procent).

Tablica 5.6

Liczby elementów podzbiorów RNSPN wygenerowanych z wykorzystaniem algorytmu klasycznego K-NWPN dla różnych wartości PN

PN [%]	Średnia* liczba elementów podzbioru RNSPN	Liczba elementów podzbioru RNSPN		Średnia* liczba elementów podzbioru RNSPN wyznaczona algorytmem DF
		minimalna	maksymalna	
0.25	26	24	27	26
0.50	16	15	17	15
0.75	12	10	12	11
1.00	11	10	12	10
1.25	10	7	11	9
1.50	9	8	10	8
2.00	7	6	8	7

* po zaokrągleniu do liczby naturalnej

Tablica 5.7

Powtarzalność elementów należących do podzbiorów RNSPN wygenerowanych z wykorzystaniem algorytmu klasycznego K-NWPN dla różnych wartości PN

PN [%]	Liczba elementów występujących w każdym podzbiore RNSPN	Liczba wszystkich innych elementów występujących przynajmniej w jednym podzbiore RNSPN
0.25	19	17
0.50	10	19
0.75	6	17
1.00	6	18
1.25	6	10
1.50	6	10
2.00	5	7

Algorytmy hybrydowy NWPN (H-NWPN)

Podstawę algorytmu hybrydowego stanowił algorytm klasyczny K-NWPN wzbogacony o dodatkowy algorytm z KPN, uruchamiany w momencie ujawnienia zjawiska wzajemnego wykluczania – rysunek 4.33. Zbiorcze wyniki analizy zbioru testowego przy 10 różnych porządkach wprowadzania danych pokazano w tablicy 5.8. Podobnie, jak przy zastosowaniu algorytmu dwufazowego, algorytmu z korekcją przedziału nierozróżnialności oraz algorytmu klasycznego K-NWPN, zwiększenie wartości PN powodowało eliminację większej liczby analizowanych rozwiązań i wygenerowanie mniej licznych podzbiorów RNSPN. Średnia liczba elementów podzbioru RNSPN była mniejsza niż przy zastosowaniu algorytmu DF i KPN, a także algorytmu klasycznego K-NWPN. Można więc stwierdzić, że dodatkowa analiza z wykorzystaniem algorytmu z KPN dała pożądany skutek.

Liczby elementów podzbiorów RNSPN wygenerowanych z wykorzystaniem algorytmu hybrydowego H-NWPN dla różnych wartości PN

PN [%]	Średnia* liczba elementów podzbioru RNSPN	Liczba elementów podzbioru RNSPN		Średnia* liczba elementów podzbioru RNSPN wyznaczona algorytmem DF
		minimalna	maksymalna	
0.25	23	23	25	26
0.50	14	14	15	15
0.75	10	9	11	11
1.00	8	7	9	10
1.25	7	7	8	9
1.50	6	5	7	8
2.00	5	4	5	7

* po zaokrągleniu do liczby naturalnej

Tablica 5.9

Powtarzalność elementów należących do podzbiorów RNSPN wygenerowanych z wykorzystaniem algorytmu hybrydowego H-NWPN dla różnych wartości PN

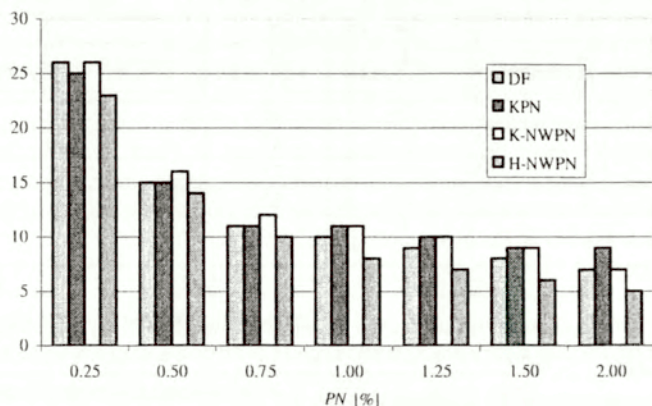
PN [%]	Liczba elementów występujących w każdym podzbiorze RNSPN	Liczba wszystkich innych elementów występujących przynajmniej w jednym podzbiorze RNSPN
0.25	21	5
0.50	11	7
0.75	5	13
1.00	5	7
1.25	5	9
1.50	3	8
2.00	3	7

W tablicy 5.9 pokazano wyniki dotyczące powtarzalności elementów występujących w każdym podzbiorze RNSPN. Dla małych wartości przedziału nierozróżnialności PN uzyskane wyniki były znacznie lepsze od tych, które otrzymano przy zastosowaniu algorytmu dwufazowego (tablica 5.2), algorytmu KPN (tablica 5.5) oraz algorytmu klasycznego K-NWPN (tablica 5.7).

Nastąpiła dalsza poprawa obu wskaźników: liczba elementów występujących w każdym podzbiorze RNSPN powiększyła się, zaś liczba wszystkich innych elementów występujących przynajmniej w jednym podzbiorze RNSPN uległa dalszemu ograniczeniu.

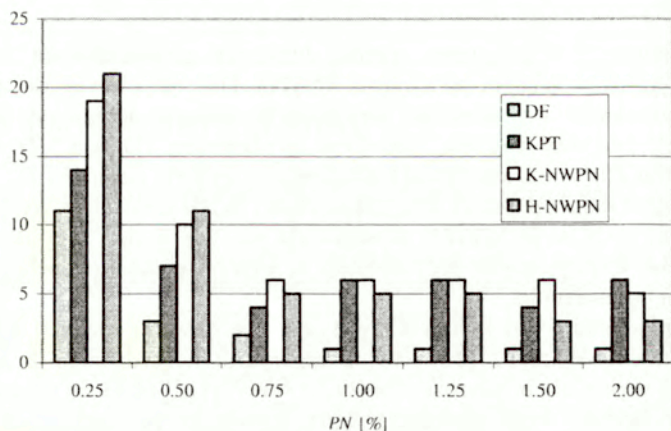
Z porównania wyników uzyskanych przy zastosowaniu różnych testowanych algorytmów wynika, że przy użyciu algorytmu hybrydowego z narastającą wartością przedziału nierozróżnialności (H-NWPN) uzyskuje się najmniej liczny podzbiór RNSPN oraz największą liczbę rozwiązań powtarzających się przy różnej kolejności wprowadzania danych do analizy. Tak więc algorytm ten jest

najlepszą komputerową implementacją optymalności w sensie przedziału nierozróżnialności, ponieważ potrafi najsukutekniej ograniczyć występowanie zjawiska wzajemnego wykluczania i łańcucha eliminacji. Zestawienie wyników filtracji przy zastosowaniu algorytmów *Metody Przedziałów Nierozróżnialności* zamieszczono na rysunkach 5.3 i 5.4.



Rys. 5.3. Średnia liczba elementów podzbioru RNSPN

DF – algorytm dwufazowy, KPN – algorytm z korekcją przedziału nierozróżnialności, K-NWPN – algorytm klasyczny z narastającą wartością przedziału nierozróżnialności, H-NWPN – algorytm hybrydowy z narastającą wartością przedziału nierozróżnialności

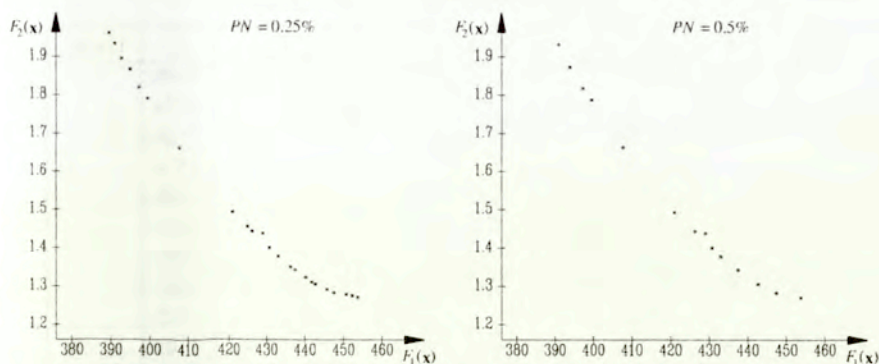


Rys. 5.4. Liczba elementów występujących w każdym podzbiorze RNSPN

Specyfika analizowanego zbioru uzyskanego przez Osyczkę [133] składającego się z trzech części: dwóch skupisk rozwiązań na jego końcach oraz pojedynczego rozwiązania w środku (patrz rysunek 5.2) przejawiała się tym, że przy stosunkowo niskich wartościach PN (powyżej 0.75%) liczba elementów generowanego podzbioru RNSPN była niewielka – mniejsza niż 15% stanu analizowanego zbioru rozwiązań niezdominowanych. Wartość $PN = 0.25\%$ powodowała zmniejszenie generowanego podzbioru do 35% jego początkowej liczebności, a $PN = 0.5\%$ aż do 21%.

Metoda Przedziałów Nierozróżnialności nie powinna nadmiernie redukować liczby elementów składowych analizowanego zbioru, co ma miejsce w przypadku niewłaściwie przyjętych wartości PN . Należy pamiętać, że w opracowanym systemie <ESAW> do rozwiązania preferowanego dochodzi się w sposób ewolucyjny. Filtracja z wykorzystaniem *Metody Przedziałów Nierozróżnialności* zazwyczaj poprzedza dalsze analizy *Metodą Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych*, stąd nadmierne ograniczenie liczebności rozpatrywanych podzbiorów nie jest korzystne.

Na rysunku 5.5 pokazano rozmieszczenie elementów podzbiorów RNSPN otrzymanych przy zastosowaniu algorytmu hybrydowego H-NWPN dla wartości przedziału nierozróżnialności $PN = 0.25\%$ i $PN = 0.5\%$. Na uwagę zasługuje równomierne pokrycie całej przestrzeni kryterialnej, co wiąże się z wiernym zachowaniem kształtu analizowanego zbioru.



Rys. 5.5. Rozmieszczenie elementów analizowanego zbioru po selekcji MPN przy użyciu algorytmu H-NWPN w przestrzeni kryterialnej

5.1.2. Filtracja w przestrzeni trójwymiarowej

W poprzednim rozdziale dokonano weryfikacji przydatności algorytmów selekcji *Metodą Przedziałów Nierozróżnialności* w odniesieniu do przestrzeni dwukryterialnej. Niniejszy rozdział poświęcono skuteczności tych algorytmów

w przestrzeni trójwymiarowej. Do realizacji celu wykorzystano przykład zamieszczony w pracy [159]. Rosenman i Gero opisali podstawy teoretyczne i zastosowanie autorskiej metody skupień do redukcji liczebności zbioru rozwiązań optymalnych w sensie Pareto. Metoda kompleksowego łączenia skupień – po podaniu wartości łączenia rozwiązań określonej w procentach – pozwala eliminować rozwiązania z rozważanego zbioru rozwiązań niezdominowanych. W efekcie końcowym uzyskuje się podzbiory rozwiązań niezdominowanych, które zachowują kształt zbioru początkowego.

Analizowany zbiór liczył 31 elementów, z czego 6 miało identyczne wartości wszystkich trzech kryteriów. Tablica 5.10 zawiera wartości liczbowe zastosowanych kryteriów:

- F_1 – koszty materiałowe,
- F_2 – koszty robocizny,
- F_3 – koszty ogólne.

Wszystkie kryteria były minimalizowane.

Do przetestowania algorytmów selekcji *Metodą Przedziałów Nierozróżnialności* na przykładzie zbioru Rosenmana i Gero przygotowano 10 różnych porządków wprowadzania danych. Dziewięć z nich wylosowano bez zwracania, a dziesiąty odpowiadał kolejności przedstawionej w tablicy 5.10.

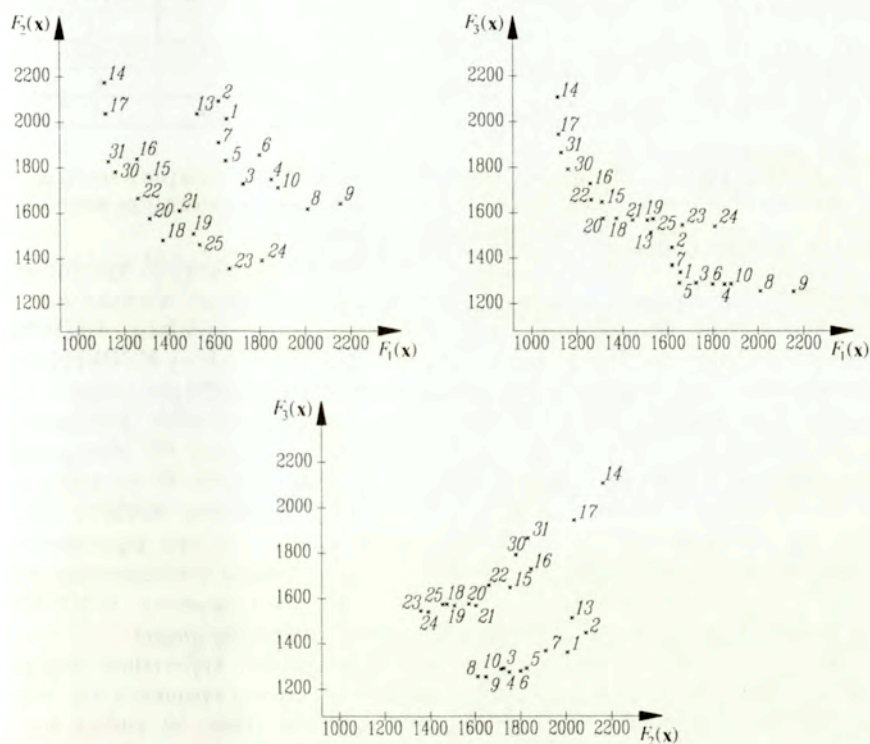
Tablica 5.10

Wartości kryteriów testowanego zbioru

Lp.	F_1	F_2	F_3	Uwagi	Lp.	F_1	F_2	F_3	Uwagi
1	1655	2005	1369		17	1130	2035	1949	
2	1610	2090	1449		18	1370	1475	1574	
3	1720	1725	1294		19	1510	1505	1569	
4	1860	1755	1289		20	1310	1575	1574	
5	1660	1825	1294		21	1450	1605	1569	
6	1800	1855	1289		22	1265	1660	1654	
7	1615	1910	1374		23	1670	1360	1547	
8	2020	1610	1267		24	1810	1390	1542	
9	2160	1640	1262		25	1535	1460	1572	
10	1885	1710	1292		26	1120	2163	2105	jak 14
11	1655	2005	1369	jak 1	27	1305	1755	1649	jak 15
12	1610	2090	1449	jak 2	28	1260	1840	1729	jak 16
13	1520	2030	1514		29	1130	2035	1949	jak 17
14	1120	2163	2105		30	1170	1780	1794	
15	1305	1755	1649		31	1135	1830	1869	
16	1260	1840	1729						

Zastosowanie różnych porządków wprowadzania danych miało na celu sprawdzenie działania algorytmów w sytuacji występowania zjawiska wzajemnego wykluczania i łańcucha eliminacji.

Należy zaznaczyć, że analizowany zbiór rozwiązań niezdominowanych w sensie Pareto składał się z 25 elementów, a rozwiązania były rozłożone w miarę równomiernie w całej przestrzeni kryterialnej, co obrazuje rysunek 5.6. Wstępna analiza wykazała, że przedział nierozróżnialności $PN = 0.3\%$ nie eliminował żadnego elementu. Wprowadzenie wartości $PN = 0.4\%$ redukowało analizowany zbiór do 15 elementów, a wartość $PN = 0.5\%$ powodowała redukcję zbioru do 14 elementów. Wyniki selekcji przeprowadzonej *Metodą Przedziałów Nierozróżnialności* pokazano w tabelicy 5.11.



Rys. 5.6. Rozmieszczenie elementów analizowanego zbioru w przestrzeni kryterialnej

Algorytm jednofazowy zastosowany w rozpatrywanym przykładzie nie eliminował zjawiska wzajemnego wykluczania, dlatego też zwiększanie wartości przedziału nierozróżnialności PN nie przyczyniało się do eliminacji większej liczby elementów (kolumna 1). Algorytm dwufazowy działał poprawnie przy zwiększeniu wartości przedziału nierozróżnialności PN – eliminował więcej

elementów, lecz powtarzalność elementów w zbiorze RNSPN była niezadowalająca (kolumna 6).

Tablica 5.11

Zbiorcze zestawienie wyników selekcji przy zastosowaniu opisanych algorytmów MPN dla różnych wartości PN i różnych porządków wprowadzania danych

PN [%]	Średnia* liczba elementów podzbioru RNSPN				Liczba elementów występujących w każdym podzbiorze RNSPN			
	1	2	3	4	5	6	7	8
	JF	DF	KPN	H-NWPN	JF	DF	KPN	H-NWPN
1	12.5	12.2	12.2	13	12	11	12	13
3	14.5	10.5	10.5	10	13	10	10	10
5	12.8	6.1	7.6	6.8	9	4	7	6
10	11.1	4	5.5	4.8	11	0	5	4

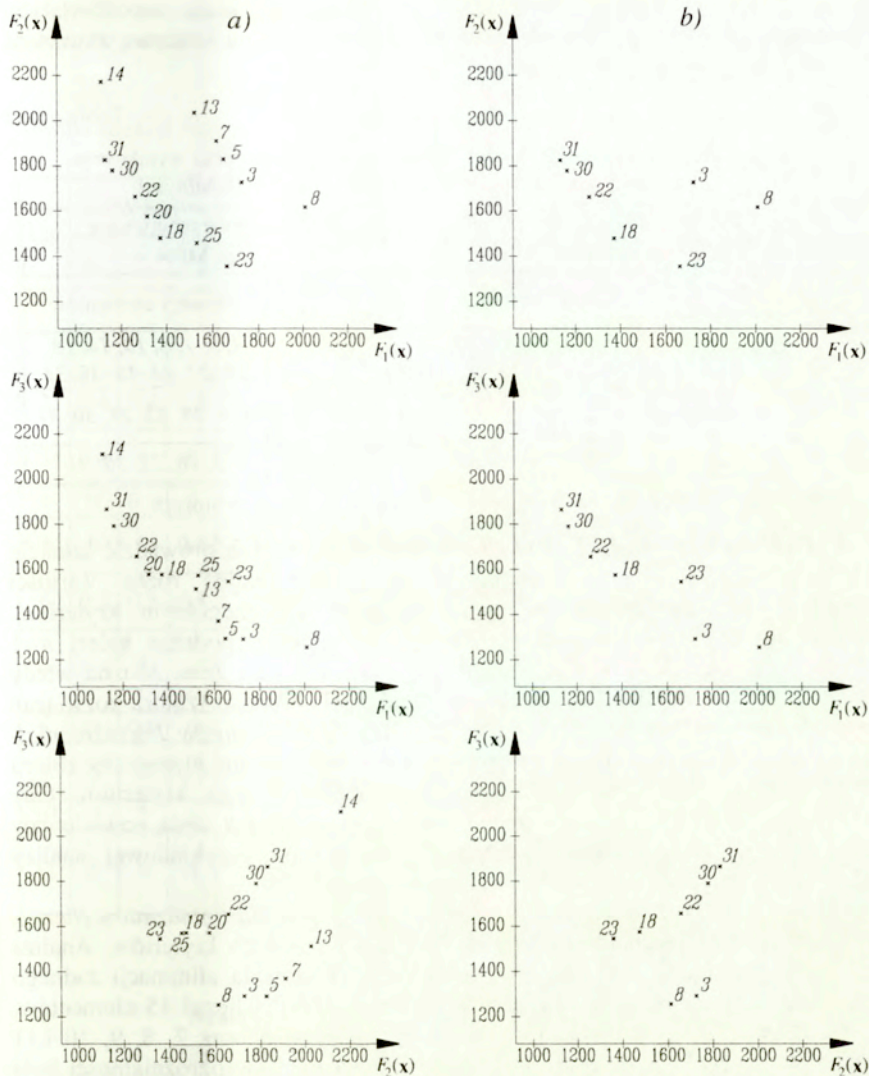
* po zaokrągleniu,

JF – algorytm jednofazowy, DF – algorytm dwufazowy, KPN – algorytm z korekcją przedziału nierozróżnialności, H-NWPN – algorytm hybrydowy z narastającą wartością przedziału nierozróżnialności

Algorytm z korekcją przedziału nierozróżnialności oraz algorytm hybrydowy H-NWPN działały poprawnie w całym zakresie rozważanych wartości PN – eliminując zjawisko wzajemnego wykluczania oraz zjawisko łańcucha eliminacji. Należy zwrócić uwagę na fakt, że algorytm hybrydowy H-NWPN dla wartości $PN = 1\%$ oraz $PN = 3\%$ generował podzbiór RNSPN dokładnie o tej samej liczebności (kolumna 4) dla wszystkich zastosowanych porządków wprowadzania danych, natomiast przy większych wartościach PN eliminował w praktyce o jedno rozwiązanie więcej, niż algorytm z KPN. W tej sytuacji, powtarzalność elementów wchodzących w skład podzbioru RNSPN przy wartości $PN = 5\%$ oraz $PN = 10\%$, uzyskanych przy użyciu obu algorytmów, należy uznać za identyczną (kolumny 7 i 8). W oparciu o przeprowadzone analizy ostatecznie stwierdzić można, że algorytm hybrydowy H-NWPN najlepiej realizuje ideę selekcji *Metodą Przedziału Nierozróżnialności*.

W pracy [159] autorzy przeprowadzili w przestrzeni kryterialnej analizę zbioru o elementach przedstawionych w tablicy 5.10 oraz na rysunkach 5.6, przy trzech wartościach łączenia rozwiązań: 1%, 5% oraz 10%. W tablicy 5.12 porównano wyniki uzyskane przez Rosenmana i Gero oraz wyniki selekcji otrzymane *Metodą Przedziałów Nierozróżnialności* przy zastosowaniu algorytmu hybrydowego H-NWPN. Na rysunku 5.7 pokazano wygląd podzbiorów RNSPN dla wartości $PN = 1\%$ oraz $PN = 5\%$.

Rezultaty przedstawione w tablicy 5.12 mimo użycia różnych metod filtracji wykazują dużą zgodność liczebności wygenerowanych podzbiorów, jak i ich zawartości, dla wszystkich dostępnych wartości: 1%, 5% i 10%.



Rys. 5.7. Rozmieszczenie elementów podzbioru RNSPN w przestrzeni kryterialnej odpowiednio dla wartości: a) $PN = 1\%$, b) $PN = 5\%$

Z opisu metody redukcji liczebności zbioru rozwiązań optymalnych w sensie Pareto zaproponowanej przez Rosenmana i Gero wynika, że wygenerowana zawartość podzbioru jest uzależniona od kolejności wprowadzania danych.

Autorzy nie prowadzą jednak dalszych rozważań, które umożliwiłyby eliminowanie wpływu kolejności wprowadzania danych na końcową zawartość wyznaczonego podzbioru.

Tablica 5.12

Porównanie wyników uzyskanych przez Rosenmana i Gero oraz wyników po zastosowaniu selekcji *Metodą Przedziałów Nierozróżnialności*

PN [%]	Podzbiory wygenerowane przez Rosenmana i Gero		Podzbiory wygenerowane przez MPN	
	Liczba elementów	Numery elementów	Liczba elementów	Numery elementów
1	14	<i>3, 5, 7, 8, 10, 13, 14, 18, 20, 22, 23, 25, 30, 31</i>	13	<i>3, 5, 7, 8, 13, 14, 18, 20, 22, 23, 25, 30, 31</i>
5	9	<i>3, 5, 7, 8, 13, 18, 20, 23, 30</i>	7	<i>3, 8, 18, 22, 23, 30, 31</i>
10	5	<i>3, 8, 18, 23, 30</i>	5	<i>3, 18, 22, 30, 31</i>

*pogrubienie oznacza rozwiązania powtarzające się w obu podzbiorach

Dzięki *Metodzie Przedziałów Nierozróżnialności* można prowadzić selekcję zbioru rozwiązań niezdominowanych, przyporządkowując różne wartości przedziałom nierozróżnialności odpowiadającym poszczególnym kryteriom. Szczególnym przypadkiem takiej analizy jest selekcja, podczas której $n-1$ przedziałom nierozróżnialności nadaje się wartość równą zeru. Można wtedy badać wpływ wybranego kryterium na redukcję liczebności zbioru rozwiązań niezdominowanych poprzez zastosowanie *Metody Przedziałów Nierozróżnialności*. Sposób ten pozwala na wstępną ocenę rozmieszczenia elementów zbioru rozwiązań niezdominowanych z punktu widzenia danego kryterium. Gdy elementy zbioru leżą blisko siebie niewielkie wartości PN będą powodowały eliminację jednych rozwiązań przez drugie. Wyniki przykładowej analizy obrazującej taki przypadek zamieszczono w tablicy 5.13.

W wierszach 1, 2 i 6 pokazano rezultaty selekcji *Metodą Przedziałów Nierozróżnialności* przy jednakowej wartości PN dla wszystkich kryteriów. Analiza danych wykazała, że wartość $PN = 0.3\%$ nie powodowała eliminacji żadnego rozwiązania. Przy wartości $PN = 0.4\%$ podzbiór RNSPN liczył 15 elementów, a dla $PN = 0.5\%$ – 14 elementów. W wierszach 3, 4, 5 oraz 7, 8, 9, 10 i 11 przedstawiono wyniki selekcji, gdy wartość przedziału nierozróżnialności była różna od zera tylko dla jednego z kryteriów.

Zamieszczone wyniki wskazują, że część elementów analizowanego zbioru położona była blisko siebie względem kryterium nr 3 (największa redukcja liczebności zbioru). Najmniejsza redukcja liczby elementów zbioru następowała przy selekcji względem kryterium nr 2, ponieważ dopiero przy wartości $PN = 3\%$ zachodziło odrzucenie jednego rozwiązania. Prezentowana analiza

umożliwiła ustalenie wpływu poszczególnych kryteriów na proces selekcji *Metodą Przedziałów Nerozróżnialności*.

Tablica 5.13

Wyniki selekcji *Metodą Przedziałów Nerozróżnialności* przy różnych wartościach *PN* dla poszczególnych kryteriów

Lp.	PN [%]			Liczba elementów podzbioru RNSPN	Liczba elementów odrzuconych	Numery elementów
	F_1	F_2	F_3			
1	0.3	0.3	0.3	25	—	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 30, 31
2	0.4	0.4	0.4	15	10	3, 5, 7, 8, 10, 13, 14, 17, 18, 20, 22, 23, 25, 30, 31
3	0.4	0	0	21	4	3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 14, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 30, 31
4	0	0.4	0	25	—	Tak jak w wierszu 1
5	0	0	0.4	17	8	2, 3, 5, 7, 8, 10, 13, 14, 16, 17, 18, 20, 22, 23, 25, 30, 31
6	0.5	0.5	0.5	14	11	3, 5, 7, 8, 10, 13, 14, 18, 20, 22, 23, 25, 30, 31
7	0.5	0	0	20	5	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 30, 31
8	0	0.5	0	25	—	Tak jak w wierszu 1
9	0	0	0.5	17	8	2, 3, 5, 7, 8, 10, 13, 14, 16, 17, 18, 20, 22, 23, 25, 30, 31
10	0	2	0	25	—	Tak jak w wierszu 1
11	0	3	0	24	1	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 30, 31

5.2. Testowanie *Metody Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych*

Testowanie *Metody Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych* przeprowadzono w oparciu o przykłady zamieszczone w literaturze [95, 251]. Wykonano analizy wielokryterialne przy użyciu *Metody Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych*, a ich wyniki porównano z rezultatami otrzymanymi przy użyciu metody wagowo-korelacyjnej, ELECTRE III, ORESTE i MAPPAC.

5.2.1. Wielokryterialna analiza wariantów impulsowej obróbki elektrochemicznej

W artykule [95] zamieszczono ranking wariantów impulsowej obróbki elektrochemicznej, uzyskany przy użyciu metody wagowo-korelacyjnej, opisanej w pracach [150 ÷ 152] oraz przedstawionej w zarysie w rozdziale 2.

Drażnienie elektrochemiczne stosowane jest szeroko przy wytwarzaniu elementów z materiałów twardych, odpornych na korozję i działanie wysokich temperatur, takich jak: części profilowe łopatek sprężarek i turbin lotniczych silników turbinowych, czy elementy elektroniczne (mikroobróbka). Podstawowym problemem drażnienia elektrochemicznego jest uzyskanie zadowalającej dokładności wymiarowej i kształtowej, której efektywny wzrost uzyskuje się przez wprowadzenie impulsowego zasilania szczeliny międzyelektrodowej prądem roboczym w połączeniu z pasywowującym elektrolitem przy okresowym ruchu elektrody roboczej. Na podstawie analizy procesu obróbki Łubkowski i Zawora [96] wyodrębnili cztery zmienne projektowe (zmienne decyzyjne):

- x_1 – grubość szczeliny międzyelektrodowej [mm],
- x_2 – ciśnienie elektrolitu na wlocie do szczeliny [MPa],
- x_3 – czas impulsu roboczego [ms],
- x_4 – współczynnik wypełnienia [-].

W rozważanym reżimie technologicznym założono, że każda zmienna może przyjąć pięć wartości. Stąd liczba możliwych wariantów obróbki wynosiła $5^4 = 625$, przy czym każdy z nich charakteryzował się innymi efektami końcowymi, co powodowało konieczność wyboru najlepszego wariantu. W pracach [95, 96] przyjęto następujące kryteria:

- F_1 – średni wzrost grubości szczeliny międzyelektrodowej podczas obróbki [μm],
- F_2 – średnia chropowatość powierzchni obrobionej [μm],
- F_3 – kąt nachylenia obrobionej powierzchni $\times 10^{-3}$ [rad],
- F_4 – błąd prostoliniowości obrobionej powierzchni [μm].

Pierwsze kryterium było maksymalizowane, zaś pozostałe – minimalizowane.

Spśród 625 możliwych wariantów obróbki wybrano – według metod planowania eksperymentu – 30 wariantów. Dla wybranych wariantów przeprowadzono obróbkę na stanowisku badawczym i zmierzono wartości kryteriów, które pokazano w tabelicy 5.14. Szczegóły dotyczące przeprowadzonego eksperymentu i uzyskane wyniki można znaleźć w pracy [96].

Wartości zmiennych decyzyjnych i kryteriów dla wybranych wariantów obróbki elektroerozyjnej

Nr roz.	Kryteria				Nr roz.	Kryteria			
	F_1 [μm]	F_2 [μm]	F_3 [rad] 10^{-3}	F_4 [μm]		F_1 [μm]	F_2 [μm]	F_3 [rad] 10^{-3}	F_4 [μm]
1	0.1321	0.272	1.4318	5.94	16	0.1361	0.403	1.548	5.38
2	0.1369	0.64	1.645	5.38	17	0.1443	0.211	1.2106	6.06
3	0.1534	1.09	1.8613	9.38	18	0.1113	0.716	0.9923	9.88
4	0.0976	0.448	0.5387	5.56	19	0.1158	0.502	0.1393	6.88
5	0.1186	0.171	0.8873	4.13	20	0.1231	0.228	0.7661	4.88
6	0.1243	0.699	2.2642	9.38	21	0.1343	0.455	1.610	7.75
7	0.1252	1.08	0.921	6.56	22	0.1318	0.393	1.4122	5.69
8	0.1332	0.425	1.161	5.88	23	0.1149	0.200	0.6648	4.06
9	0.1192	0.321	2.3224	4.88	24	0.1354	0.513	0.968	5.63
10	0.1413	0.289	0.9844	7.06	25	0.1530	1.10	1.9385	13.75
11	0.1344	0.235	0.3628	7.0	26	0.1483	0.384	1.9613	4.06
12	0.1379	0.37	2.6456	5.88	27	0.1115	0.348	1.0648	5.13
13	0.1363	0.405	1.1615	6.0	28	0.1501	0.598	0.656	6.25
14	0.1453	0.879	1.7864	8.44	29	0.1196	0.292	0.7403	7.58
15	0.1291	0.737	1.7702	6.81	30	0.1249	0.790	1.138	4.88

Ranking wariantów impulsowej obróbki elektrochemicznej metodą wagowo-korelacyjną

Analizę przedstawioną w pracy [95] zrealizowano przy użyciu metody wagowo-korelacyjnej i przeprowadzono na zbiorze rozwiązań dopuszczalnych. Przed wyznaczeniem rankingu dokonano wstępnej analizy wiarygodności p_1 uzyskanych wariantów obróbki. Ostatecznie przyjęto, że dla normalnych warunków wiarygodności wielkość p_1 wynosi 1. Dla wariantów o numerach 2 i 15 – przyjęto $p_1 = 0.75$, dla wariantu 12 – $p_1 = 0.8$, zaś dla wariantów o numerach 22 i 26 p_1 wynosiło jedynie 0.4. Wariant numer 25 został wyeliminowany ze względu na wyniki wyraźnie odbiegające od pozostałych.

Analiza ważności kryteriów spowodowała, że dla kryteriów o numerach 1, 3 i 4 przyjęto wagę równą 1, zaś dla kryterium numer 2 – tylko 0.25.

Wyznaczony ranking wariantów obróbki przedstawiał się następująco: 23, 5, 20, 11, 17, 27, 26, 4, 1, 10, 16, 13, 24, 19, 8, 22, 29, 9, 28, 30, 2, 12, 21, 15, 7, 18, 14, 6, 3. Okazało się, że przy przyjętych wstępnie wartościach wiarygodności p_1 oraz wagach, najkorzystniejszy jest wariant 23, na drugim miejscu znalazł się wariant 5. Analiza zmiennych decyzyjnych najlepszych wariantów wykazała, że są to warianty obróbki zupełnie różne, gdyż żadna zmienna decyzyjna nie przyjmuje takiej samej wartości dla obu przypadków. Oznacza to, że wartości ocen kompromisowych w przestrzeni zmiennych decyzyjnych nie są jednomodalne.

Analiza wielokryterialna Metodą Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych

Analizę *Metodą Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych*, zgodnie z opisem przedstawionym w rozdziale 4.4, przeprowadzono na podzbiorze rozwiązań niezdominowanych. Zastosowano ją dla przykładu zamieszczonego w pracy [95].

W kroku pierwszym sprawdzono wszystkie rozwiązania dopuszczalne i okazało się, że tylko 20 rozwiązań należy do podzbioru rozwiązań niezdominowanych. Były to następujące rozwiązania: 1, 2, 3, 4, 5, 8, 10, 11, 12, 13, 16, 17, 19, 20, 22, 23, 24, 26, 28, 30. Należy zwrócić uwagę na fakt, że usunięte zostały między innymi rozwiązania o numerach 15, 25 i 27. Rozwiązania te we wstępnej analizie (opisanej w rozdziale 5.2.1) osiągnęły małą wartość wiarygodności.

Wektor idealny wyznaczony w podzbiorze rozwiązań niezdominowanych przedstawiał się następująco

$$F^0(\mathbf{x}) = [0.1534 \ 0.171 \ 0.139 \ 10^{-3} \ 4.06]^T.$$

Pierwsza składowa tego wektora należała do rozwiązania nr 3, zaś kolejne – do rozwiązań o numerach: 5, 19, 23.

W kroku drugim przeprowadzono wyznaczanie rozwiązań kompromisowych stosując MWRK. Na początku przeprowadzono analizę z użyciem metryki min-max. Następnie wykonano analizę z użyciem metryki min-max z wagami, dobierając wagi zgodnie z sugestiami opisanymi w rozdziale 5.2.1. Kryterium F_1 – oznaczające średni wzrost grubości szczeliny międzyelektrodowej podczas obróbki – otrzymywało każdorazowo wagę czterokrotnie mniejszą od pozostałych kryteriów. W MWRK obowiązuje zasada, by suma wag przypisana analizowanym kryteriom była równa jedności (warunek 2.31). Po odpowiednim przeliczeniu uzyskano wartości wag, które zamieszczono w wierszu drugim tablicy 5.15. W kolejnych analizach – co obrazują wiersze od 3 do 6 – zwiększano wartości wag preferując kryteria o numerach 1, 2, 3 oraz 4.

Porównując podzbiory rozwiązań kompromisowych (tablica 5.15), uzyskane przy użyciu metryki min-max oraz metryki min-max z wagami widać, że niezależnie od preferencji przypisanych poszczególnym kryteriom uzyskiwano prawie identyczny podzbiór końcowy. Tylko w przypadku mocnego preferowania kryterium nr 3, w końcowym podzbiorze nie występowało rozwiązanie nr 5, a jako pierwsze rozwiązanie kompromisowe pojawiała się rozwiązanie nr 19. Ten stan rzeczy związany był z faktem, że trzecia składowa wektora idealnego pochodziła właśnie od rozwiązania nr 19. Fakt występowania tych samych rozwiązań w końcowym podzbiorze rozwiązań kompromisowych świadczy o braku wrażliwości na preferencje przypisywane kryteriom w procesie filtracji rozwiązań optymalnych w sensie Pareto *Metodą Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych*.

Zbiornicze zestawienie analizy wielokryterialnej MWRK

Lp.	Wagi preferencji, $\sum \omega_i = 1$	Pierwsze rozwiązanie kompromisowe	Kolejne rozwiązanie kompromisowe	Podzbiór rozwiązań kompromisowych
	1	2	3	4
1	$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 0.25$	11	23, 19, 20, 4, 5	4, 5, 11, 19, 20, 23
2	$\omega_1 = 0.076$; $\omega_2 = \mathbf{0.308}$; $\omega_3 = \mathbf{0.308}$; $\omega_4 = \mathbf{0.308}$	11	23, 19, 20, 4, 5	4, 5, 11, 19, 20, 23
3	$\omega_1 = \mathbf{0.4}$; $\omega_2 = 0.2$; $\omega_3 = 0.2$; $\omega_4 = 0.2$	11	23, 19, 20, 5, 4	4, 5, 11, 19, 20, 23
4	$\omega_1 = 0.2$; $\omega_2 = \mathbf{0.4}$; $\omega_3 = 0.2$; $\omega_4 = 0.2$	11	23, 19, 20, 4, 5	4, 5, 11, 19, 20, 23
5	$\omega_1 = 0.1$; $\omega_2 = 0.25$; $\omega_3 = \mathbf{0.4}$; $\omega_4 = 0.25$	19	11, 23, 4, 20	4, 11, 19, 20, 23
6	$\omega_1 = 0.2$; $\omega_2 = 0.2$; $\omega_3 = 0.2$; $\omega_4 = \mathbf{0.4}$	11	23, 19, 20, 5, 4	4, 5, 11, 19, 20, 23

Podzbiory rozwiązań kompromisowych uzyskane przy użyciu *Metody Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych* zawierały następujące rozwiązania: 4, 5, 11, 19, 20, 23. Należy zwrócić uwagę, że w rankingu uzyskanym metodą wagowo-korelacyjną pierwsze cztery pozycje zajmowały rozwiązania: 23, 5, 20, 11. Rozwiązanie nr 4 znajdowało się na pozycji 8, a rozwiązanie 19 – na pozycji 14 (należy przy tym dodać, że w omawianym rankingu pod pozycją 6 znalazło się rozwiązanie zdominowane, stąd nie mogło stanowić elementu w wyznaczanym podzbiore rozwiązań kompromisowych). Uzyskane rezultaty wskazują na dużą zgodność wyników wygenerowanych przy użyciu *Metody Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych* z rankingiem powstałym przy zastosowaniu metody wagowo-korelacyjnej.

Dodatkowo wykazano, że *Metoda Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych* odzwierciedla kształt analizowanego zbioru rozwiązań niezdominowanych, co tłumaczy skłonność do wcześniejszego ujawniania się pewnych rozwiązań kompromisowych w generowanym podzbiore tych rozwiązań.

5.2.2. Wielokryterialna ocena wariantów systemu dystrybucyjnego

Kolejny przykład obrazujący zastosowanie *Metody Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych*, a dotyczący wielokryterialnej oceny wariantów systemu dystrybucyjnego paliw przeprowadzonej w oparciu o metody ELECTRE III, ORESTE oraz MAPPAC, oparto na danych przedstawionych w pracy [251]. Metody te opisano szczegółowo w pracach [36, 98, 161, 162, 163, 164, 177, 178, 184, 229] i przedstawiono pokrótce w rozdziale 2.

W pracy Żaka, Włodarczyka i Kicińskiego [251] przedstawiono podstawowe zagadnienia dotyczące systemów dystrybucyjnych, a także przebudowę wybranego systemu dystrybucji paliw. Opierając się na zdiagnozowanym systemie dystrybucji paliw w fazie tworzenia nowych wariantów tego systemu, próbowano wyeliminować jego słabe strony. Na etapie diagnozy poddano ocenie: potencjał materialny infrastruktury magazynowej i środków transportu, kadrę pracowniczą oraz system organizacyjny. Na podstawie przeprowadzonej diagnozy zaproponowano 9 nowych wariantów systemu dystrybucyjnego paliw. Zbiór dziesięciu wariantów (za wariant numer 1 uznano rozwiązanie istniejące) oceniony został przy pomocy następujących sześciu kryteriów:

- F_1 – średni czas potrzebny na pokonanie drogi od magazynu do odbiorcy paliwa [h],
- F_2 – współczynnik gotowości technicznej pojazdu [-],
- F_3 – liczba osób zatrudnionych [-],
- F_4 – koszty inwestycji [zł],
- F_5 – koszty deincestycji [zł],
- F_6 – koszty dystrybucji [zł].

Kryteria o numerach 1, 3, 4, 6 były minimalizowane, zaś pozostałe – maksymalizowane. Więcej szczegółów o zbiorze przyjętych kryteriów można znaleźć w pracy [251].

Wartości kryteriów dla przyjętych wariantów rozwiązań systemu dystrybucyjnego zamieszczono w tablicy 5.16.

Tablica 5.16

Macierz ocen wariantów systemu dystrybucyjnego

Nr wariantu	F_1 [h]	F_2 [-]	F_3 [-]	F_4 [mln PLN]	F_5 [tys. PLN]	F_6 [mln PLN]
1	1.99	0.88	160	0	0	2.62
2	1.99	0.98	160	0.51	45	2.83
3	1.37	0.98	163	5	0	3.52
4	1.37	0.98	163	5.51	45	3.73
5	1.37	0.98	167	5.51	45	3.73
6	1.24	0.88	166	10	0	4.42
7	1.24	0.98	166	10.51	45	4.63
8	1.24	0.98	174	10.51	45	4.63
9	0.95	0.98	172	20.51	45	6.43
10	0.95	0.98	188	20.51	45	6.43

Analiza wariantów systemu dystrybucyjnego metodą ELECTRE III, ORESTE oraz MAPPAC

W pracy Żaka, Włodarczyka i Kicińskiego do oceny przedstawionych wariantów użyto trzech różnych metod wspomaganie decyzji. Metody ELECTRE III [35, 162, 163, 229] oraz ORESTE [35, 161] wykorzystują relacje przewyższania, zaś metoda MAPPAC [35, 98] stanowi „kompromis” pomiędzy

podejściem opartym o relację przewyższania i podejściem wykorzystującym wieloatributową teorię użyteczności.

Metoda ELECTRE III została szczegółowo zaprezentowana w rozdziale 2.2. Analiza przy użyciu tej metody wymagała wprowadzenia progów preferencji, równoważności i weta oraz wagi ważności każdego rozważanego kryterium. Wartości wag były odpowiednio równe (w kolejności od kryterium pierwszego do kryterium szóstego): 9, 6, 4, 7, 7, 10. Wyniki przeprowadzonej analizy pokazały, że najlepszymi rozwiązaniami są systemy dystrybucji oznaczone numerami: 4 i 5, a następnie 2 oraz 7 i 8.

Wykonując analizę przy użyciu metody MAPPAC (opisanej w rozdziale 2.2) wprowadzono takie same wartości wag, jak przy analizie metodą ELECTRE III. Wyniki analizy wykazały, że najlepszymi rozwiązaniami są systemy dystrybucji oznaczone kolejno numerami: 2, następnie 3 i 4, a później 5 oraz 7.

Metoda ORESTE została również omówiona w rozdziale 2.2. Preporządek zupełny zbudowany w odniesieniu do zbioru kryteriów wyglądał następująco: $F_6 \mathbf{P} F_1 \mathbf{P} F_4 \mathbf{I} F_5 \mathbf{P} F_2 \mathbf{P} F_3$. Analiza z wykorzystaniem metody ORESTE wykazała, że najlepszymi rozwiązaniami były systemy dystrybucji oznaczone numerami: 1 i 2, a następnie 3 i 4 oraz 7 i 5.

Wyniki eksperymentu obliczeniowego dowiodły, że pomimo zastosowania różnych metod obliczeniowych, końcowe uporządkowania wariantów były do siebie zbliżone, choć nie identyczne. Spośród rozwiązań, które występowały na dwóch górnych poziomach wszystkich rankingów, najczęściej powtarzały się warianty oznaczone numerami 2 oraz 4.

Analiza wielokryterialna Metodą Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych

W celu oceny przydatności MWRK do analizy problemu przedstawionego przez Żaka, Włodarczyka i Kicińskiego w pracy [251] oraz porównania skuteczności własnej metody z metodami powszechnie stosowanymi, przeprowadzono selekcję zbioru wariantów zaczerpniętego z powyższej pracy. Ponieważ analiza wielokryterialna *Metodą Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych* przeprowadzana jest w zbiorze rozwiązań optymalnych w sensie Pareto, w rozpatrywanym przypadku zbiór ten liczył siedem elementów i zawierał następujące warianty: 1, 2, 3, 4, 6, 7 oraz 9. Warianty 5, 8 oraz 10 zostały wyeliminowane odpowiednio przez rozwiązania: 4, 7 oraz 9.

Na początku analizy wyznaczono rozwiązania kompromisowe stosując metrykę min-max, a następnie min-max z wagami. Ze względu na fakt, że w MWRK suma wag przypisywanych analizowanym kryteriom wynosi jeden, istniała konieczność przeliczenia wag z zachowaniem preferencji przyjętych przez autorów w pracy [251] i zastosowanych w metodach ELECTRE III oraz MAPPAC. Obliczone wartości wag zamieszczono w drugim wierszu tablicy 5.17. Użycie metody ORESTE wymagało utworzenia preporządku. Przy zastosowaniu MWRK istniała konieczność nadania stosownych wag, odzwierciedlających ustalony preporządek. W wierszach 3 i 4 podano wartości wag obliczone

według dwóch różnych sposobów. Z porównania wartości wag zamieszczonych w kolumnie 1 tablicy 5.17 wynika, że wartości odnoszące się do tych samych kryteriów dla wszystkich zestawów wag tylko nieznacznie się różnią.

Tablica 5.17

Wyniki analizy *Metodą Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych*

Lp.	Typ analizy	Pierwsze rozwiązanie kompromisowe	Kolejne rozwiązania kompromisowe
	1	2	3
1	min-max: $\omega_1 \div \omega_6 = 0.167$ min-max z wagami	4	7, 2, 6
2	$\omega_1 = 0.21$; $\omega_2 = 0.14$; $\omega_3 = 0.09$; $\omega_4 = 0.165$; $\omega_5 = 0.165$; $\omega_6 = 0.23$	4	6, 2, 7
3	$\omega_1 = 0.21$; $\omega_2 = 0.125$; $\omega_3 = 0.083$; $\omega_4 = 0.166$; $\omega_5 = 0.166$; $\omega_6 = 0.25$	4	3, 2, 7, 6
4	$\omega_1 = 0.22$; $\omega_2 = 0.11$; $\omega_3 = 0.056$; $\omega_4 = 0.167$; $\omega_5 = 0.167$; $\omega_6 = 0.28$	4	3, 2, 7, 6
5	$\omega_1 = 0.3$; $\omega_2 = 0.1$; $\omega_3 = 0.1$; $\omega_4 = 0.1$; $\omega_5 = 0.1$; $\omega_6 = 0.3$	4	3, 6, 7, 2

Wyniki analiz otrzymane przy użyciu MWRK przedstawiono w tablicy 5.17 w kolumnach 2 i 3. W wierszu 5 zamieszczono wyniki analizy dla własnego zestawu preferencji składowych wektora kryteriów. Największe wartości wag nadano kryteriom o numerach 1 i 6.

Dla wszystkich zestawów wag przy zastosowaniu MWRK uzyskano prawie identyczne podzbiory rozwiązań kompromisowych. Warianty powtarzające się we wszystkich podzbiorach to rozwiązania: 4, 2, 7, 6.

Wyniki analiz otrzymanych przy zastosowaniu metod ELEKTRE III, ORESTE oraz MAPPAC oraz rezultaty uzyskane w *Metodzie Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych* wykazały duże podobieństwo. Warianty o numerach 2 i 4 powtarzały się we wszystkich przeprowadzonych analizach. Rozwiązanie numer 7, także należące do podzbioru rozwiązań kompromisowych, występowało dość wysoko w rankingach uzyskanych przy użyciu metod ELEKTRE III, ORESTE oraz MAPPAC. Należy zaznaczyć, że w rankingach pojawiały się warianty 5 i 8, które – jako rozwiązania zdominowane – nie mogły wystąpić w podzbiorach rozwiązań kompromisowych wyznaczonych przy użyciu MWRK.

6. Zastosowanie systemu <ESAW> w zagadnieniach technicznych

W niniejszym rozdziale przedstawiono przykłady zastosowań *Ewolucyjnego Systemu Analizy Wielokryterialnej* <ESAW> w rozwiązywaniu różnorodnych problemów technicznych. Zaprezentowane przykłady zostały tak dobrane, aby można było prześledzić jakościowo różne zastosowania systemu <ESAW>: analizę postoptymalną (reanalizę) czyli analizę wielokryterialną rezultatów uzyskanych przy zastosowaniu metod obliczeniowych z wbudowaną procedurą optymalizacyjną, filtrację rezultatów wygenerowanych przy zastosowaniu metod bez procedury optymalizacyjnej – np. metody elementów skończonych, analizę wielokryterialną wyników badań różnych rozwiązań konstrukcyjnych, technologicznych lub eksploatacyjnych.

Rozdział 6.1 prezentuje postoptymalną analizę wielokryterialną rozwiązań wygenerowanych dla jednostopniowej przekładni zębatej o zębach prostych przy zastosowaniu systemu optymalizacji wielokryterialnej „CAMOS” [131]. W przykładzie tym wykorzystano wszystkie metody tworzące system <ESAW>.

W rozdziale 6.2 przedstawiono analizę wielokryterialną wyników porównawczych badań zużycia rozpylaczy paliwa po eksploatacji na nowym paliwie ekologicznym ONM i tradycyjnym oleju napędowym ON. Do analizy użyto *Metody Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych*.

Rozdział 6.3 prezentuje wyniki wielokryterialnej oceny zanieczyszczenia substancjami toksycznymi spalin silnika z rozpylaczami czopikowymi nowej konstrukcji w porównaniu do zalecanych norm Euro I i Euro II. Nowe konstrukcje rozpylaczy zostały wykonane, a następnie przebadane na hamowni silnikowej. Do analizy użyto *Metody Przedziałów Nierozróżnialności i Metody Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych*. W procesie analizy wyznaczono podzbiór rozwiązań reprezentatywnych oraz rozwiązanie preferowane.

Rozdział 6.4 przedstawia analizę wielokryterialną oceny projektów kształtu dozwojeń kriomagnesu, który pełni funkcję wysokogradientowego separatora cząstek ferromagnetycznych. Analizę przeprowadzono przy użyciu systemu <ESAW>. Projekty kształtu dozwojeń wykonano poprzez obliczenia rozkładu

indukcji magnetycznej przy użyciu metody elementów skończonych. Wartości zmiennych decyzyjnych zostały zdyskretyzowane. Dzięki zastosowaniu *Metody Przedziałów Nerozróżnialności* oraz *Metody Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych* udało się wyodrębnić podzbiór rozwiązań reprezentatywnych oraz wskazać rozwiązanie preferowane.

W rozdziale 6.5 wykorzystano metody wchodzące w skład systemu <ESAW> do oceny efektów projektowania ślizgowych łożysk wzdłużnych o segmentach sztywnych lub podatnych przy zastosowaniu MES. Przeprowadzona analiza wielokryterialna przy zastosowaniu *Metody Przedziału Nerozróżnialności* oraz *Metody Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych* pozwoliła wyznaczyć rozwiązania reprezentatywne. Ponadto udało się wskazać w przestrzeni zmiennych decyzyjnych obszar, w którym należałoby prowadzić dalsze obliczenia przy wykorzystaniu metody elementów skończonych w celu znalezienia nowych niezdominowanych rozwiązań projektowanych łożysk wzdłużnych.

Rozdział 6.6 pokazuje zastosowanie *Metody Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych* do oceny skuteczności posadowienia frezarki FWD-32J na wibroizolatorach różnych konstrukcji oraz przy posadowieniu bezpośrednim. W przykładzie tym przedstawiono oryginalny sposób agregacji kryteriów elementarnych do postaci kryteriów cząstkowych, których zbiór poddano analizie wielokryterialnej. Ponadto porównano otrzymane wyniki z rezultatami uzyskanymi w procesie dwukrotnej skalaryzacji kryteriów elementarnych do kryterium globalnego, prezentowanymi w literaturze.

6.1. Wybór wariantów projektowanej przekładni zębatej przy wykorzystaniu systemu <ESAW>

W opisywanym przykładzie przeprowadzono – przy wykorzystaniu systemu <ESAW> – wybór wariantów projektowanej przekładni zębatej wygenerowanych w procesie optymalizacji wielokryterialnej. Do optymalizacji wielokryterialnej wykorzystano metodę losową, która została zaimplementowana w system „CAMOS” [131]. Zbiór zmiennych decyzyjnych zawierał tylko zmienne dyskretne. Funkcje opisujące kryteria i ograniczenia były nieliniowe.

6.1.1. Zarys modelu optymalizacji wielokryterialnej i uzyskane wyniki

Opracowany model optymalizacji wielokryterialnej jednostopniowej przekładni zębatej o zębach prostych bazował na wzorach przedstawionych w pracach [136, 219]. Ogólny schemat przekładni pokazano na rysunku 6.1.



Rys. 6.1. Schemat jednostopniowej przekładni zębatej o zębach prostych

Wektor kryteriów składał się z trzech składowych:

- $F_1(\mathbf{x})$ – objętość kół zębatych przekładni [mm^3],
- $F_2(\mathbf{x})$ – odległość między osiami wałków [mm],
- $F_3(\mathbf{x})$ – szerokość pierścienia zębatego [mm].

Wszystkie kryteria były minimalizowane.

Wektor zmiennych decyzyjnych (wszystkie występujące zmienne typu dyskretnego) zawierał następujące składowe:

- x_1 – szerokość pierścienia zębatego [mm], $x_1 = \{24, 25, \dots, 42\}$,
- x_2 – średnica wałka napędowego [mm], $x_2 = \{28, 29, 30, \dots, 70\}$,
- x_3 – średnica wałka napędzanego [mm], $x_3 = \{48, 49, 50, \dots, 100\}$,
- x_4 – liczba zębów koła napędowego [-], $x_4 = \{14, 15, 16, \dots, 25\}$,
- x_5 – moduł zęba [mm], $x_5 = \{4, 4.5, 5, 5.5, 6\}$.

Model przekładni zębatej zawierał 13 ograniczeń nierównościowych, które dotyczyły rozmiarów geometrycznych przekładni i dopuszczalnych naprężeń występujących w wałkach oraz pomiędzy współpracującymi zębami. Główne dane do modelu optymalizacji wielokryterialnej przekładni obejmowały: moc na wałku wejściowym – 12 [kW], prędkość obrotową wałka wejściowego – 280 [obr./min.], przełożenie przekładni – 0.317, dopuszczalny błąd przełożenia – 0.01. Dane materiałowe ustalono dla przyjętych do obliczeń materiałów konstrukcyjnych.

Stosując metodę losową, w procesie optymalizacji wielokryterialnej wygenerowano 22 rozwiązania dopuszczalne, które przedstawiono w tabelicy 6.1.

6.1.2. Wyniki analizy wielokryterialnej

Analizę wielokryterialną przeprowadzono wykorzystując system <ESAW> zgodnie ze schematem pokazanym na rysunku 6.2.

W kroku pierwszym wyznaczono rozwiązania optymalne w sensie Pareto.

Zbiór ten zawierał 19 elementów. W jego skład wchodziły następujące rozwiązania: 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22. Wyznaczony wektor idealny przedstawiał się następująco

$$F^o = [307142.7 \quad 145 \quad 24]^T.$$

Tablica 6.1

Rozwiązania dopuszczalne przekładni zębatej

Nr rozwiązania	$F_1(\mathbf{x})$ [mm ³]	$F_2(\mathbf{x})$ [mm]	$F_3(\mathbf{x})$ [mm]
1	377093.4	182	27
2	320048.4	157.5	37
3	307142.7	195.75	24
4	313421.2	195.75	24
5	364187.7	186.75	26
6	340907.0	173.25	31
7	307142.7	166	32
8	342116.5	174	30
9	334628.5	190	25
10	313421.2	192	28
11	307142.7	145	42
12	334386.6	162.25	35
13	307142.7	174	31
14	307142.7	155	38
15	333536.8	186.75	27
16	320048.4	192	26
17	313421.2	184	30
18	334386.6	190	25
19	307142.7	159.5	37
20	333536.8	184	28
21	326909.6	184	29
22	358744.9	182	27

W kroku drugim zastosowano filtrację przy użyciu *Metody Wartości Progowej*. Wprowadzono następujące wartości oceny zadowalającej dla składowych wektora:

$$f_{s1} = 360000 \text{ [mm}^3\text{]}, \quad f_{s2} = 192 \text{ [mm]}, \quad f_{s3} = 37 \text{ [mm]}.$$

Podzbiór rozwiązań optymalnych w sensie Pareto liczył w tym wypadku 15 rozwiązań: 2, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22. Wyeliminowane zostały rozwiązania narożne oraz leżące w ich sąsiedztwie. Wyznaczony nowy wektor idealny zawierał następujące wartości

$$F^{o'} = [307142.7 \quad 157 \quad 25]^T.$$



Rys. 6.2. Schemat blokowy przeprowadzonej analizy wielokryterialnej

W kroku trzecim przeprowadzono filtrację *Metodą Definiowania Punktu Idealnego*, wprowadzając własny wektor idealny

$$F^o = [307142.7 \quad 162 \quad 26]^T.$$

W analizie wielokryterialnej występują zazwyczaj kryteria przeciwstawne, co powoduje, że eliminowanie rozwiązań o bardzo małych wartościach jednych składowych, prowadzi jednocześnie do odrzucania rozwiązań o dużych lub bardzo dużych wartościach innych składowych. W efekcie podzbiór rozwiązań optymalnych w sensie Pareto po trzecim kroku filtracji zmniejszył się do 12 elementów i zawierał rozwiązania o numerach: 6, 7, 8, 10, 12, 13, 15, 16, 17, 20, 21, 22.

W kroku czwartym zastosowano selekcję *Metodą Przedziału Nierozróżnialności*, wprowadzając wartość $PN = 1.5\%$. Otrzymany podzbiór rozwiązań niezdominowanych w sensie przedziału nierozróżnialności liczył 10 elementów. Były to rozwiązania o numerach: 7, 8, 10, 12, 13, 15, 16, 17, 21, 22.

W kroku piątym przeprowadzono filtrację przy użyciu *Metody Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych*. Zastosowano metrykę min-max oraz min-max z wagami przy różnych preferencjach dla analizowanych kryteriów. Wyniki analiz przedstawiono w tablicy 6.2. Należy zwrócić uwagę na fakt, że preferencje

wybranego kryterium były nawet dwukrotnie większe od preferencji pozostałych kryteriów (zobacz wiersze 3, 5 i 7).

W kroku szóstym poszukiwano podzbioru rozwiązań reprezentatywnych. Analiza wyników zamieszczonych w tabelicy 6.2. pokazała, że rozwiązanie numer 21 występowało we wszystkich wyznaczonych podzbiórach rozwiązań kompromisowych, rozwiązanie numer 13 pojawiło się 5 razy, a rozwiązanie 15 – 4 razy.

Tablica 6.2

Filtracja *Metodą Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych*

Lp.	Wagi preferencji $\sum \omega_i = 1$	Pierwsze rozwiązanie kompromisowe	Podzbiór rozwiązań kompromisowych
1	$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0,333$	21	21*, 13, 22, 16
2	$\omega_1 = 0,4; \omega_2 = 0,3; \omega_3 = 0,3$	21	21, 13, 22, 16
3	$\omega_1 = 0,5; \omega_2 = 0,25; \omega_3 = 0,25$	21	21, 13, 15, 10
4	$\omega_1 = 0,3; \omega_2 = 0,4; \omega_3 = 0,3$	8	8, 15, 7, 21
5	$\omega_1 = 0,25; \omega_2 = 0,5; \omega_3 = 0,25$	8	8, 21, 7, 16
6	$\omega_1 = 0,3; \omega_2 = 0,3; \omega_3 = 0,4$	15	15, 21, 13
7	$\omega_1 = 0,25; \omega_2 = 0,25; \omega_3 = 0,5$	15	15, 21, 8, 13

*rozwiązanie preferowane – występujące w każdym podzbiórze rozwiązań kompromisowych

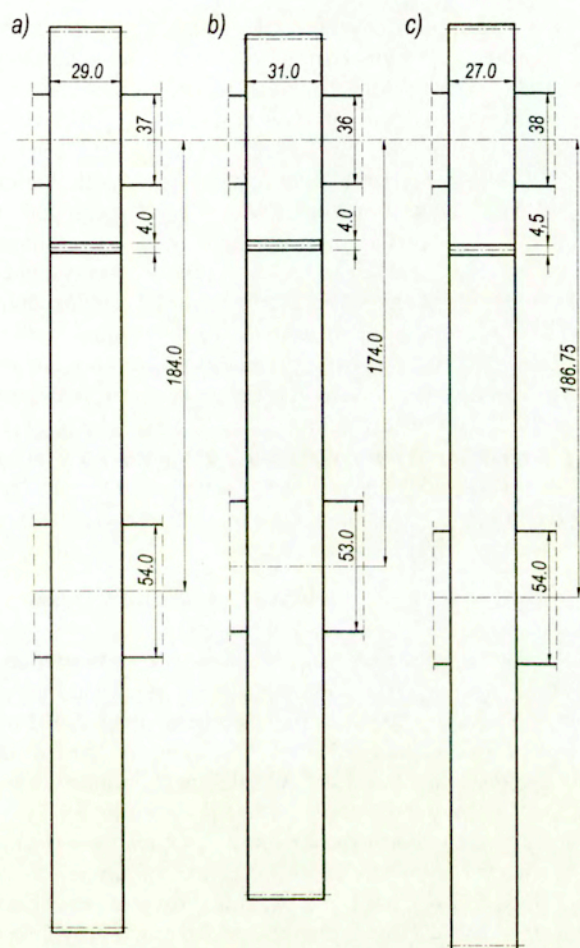
6.1.3. Wnioski dotyczące przeprowadzonej analizy postoptymalnej

Postoptymalna analiza wielokryterialna wygenerowanych przez system „CAMOS” rozwiązań jednostopniowej przekładni walcowej, przeprowadzona z użyciem *Ewolucyjnego Systemu Analizy Wielokryterialnej* <ESAW> dowiodła, że można stopniowo odfiltrowywać poszczególne rozwiązania niezdominowane, a w końcowym etapie wyznaczać podzbiory rozwiązań kompromisowych i podzbiór rozwiązań reprezentatywnych.

Ścisły podzbiór rozwiązań reprezentatywnych przy przyjętym zbiorze kryteriów składał się tylko z jednego elementu – rozwiązania nr 21, zaś podzbiór rozszerzony zawierał trzy rozwiązania: 21, 13 i 15. Rozwiązanie o numerze 21 okazało się najmniej wrażliwe na zmianę preferencji dla składowych wektora kryteriów, tak więc stało się poszukiwanym rozwiązaniem preferowanym. Na rysunku 6.3. przedstawiono uproszczone schematy rozwiązania preferowanego – nr 21, oraz rozwiązań o numerach 13 i 15, występujących najczęściej w wyznaczonych podzbiórach rozwiązań kompromisowych.

Analiza w przestrzeni zmiennych decyzyjnych ujawniła fakt, że wybrane rozwiązania charakteryzowały się małą wartością modułu zęba (4 oraz 4.5 [mm]),

dużą liczbą zębów koła napędzającego ($20 \div 22$) oraz małymi średnicami wałków (odpowiednio: $36 \div 38$ oraz 53 albo 54 [mm]).



Rys. 6.3. Graficzna ilustracja: a) rozwiązanie preferowane – nr 21; b) i c) rozwiązania z rozszerzonego podzbioru rozwiązań reprezentatywnych – rozwiązanie nr 13 oraz 15

6.2. Ocena wpływu paliwa ekologicznego na zużycie rozpylaczy paliwa *Metodą Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych*

Spełnienie wymagań zapisanych w zaleceniach Euro II i Euro III dotyczących ograniczenia emisji związków toksycznych w spalinowych silnikach wymusza nie tylko rozwój konstrukcji i technologii silników, ale również stosowanie nowych, jakościowo lepszych paliw, które poprawią osiągi silnika, przy jednoczesnym zmniejszeniu zużycia paliwa [141, 198, 199].

W latach 1995 – 1996 wprowadzono na rynek polski ekologiczne paliwo do silników o zapłonie samoczynnym. Paliwo występuje pod nazwą ONM „Standard” (ONM) i przeznaczone jest głównie do zasilania autobusów komunikacji miejskiej w dużych aglomeracjach. Wykorzystanie ulepszonych paliw ONM powoduje zmniejszenie toksyczności spalin emitowanych do atmosfery w porównaniu z przypadkiem zastosowania tradycyjnego oleju napędowego (ON). W pracy [119] opublikowano wyniki badań dotyczących wpływu paliwa ekologicznego na przebieg procesu zużycia pary precyzyjnej korpus – igła układu rozpylacza paliwa. Analizę efektów przeprowadzono na podstawie porównawczych badań rozpylaczy paliwa po nadzorowanej eksploatacji, przy czym jedna grupa rozpylaczy użytkowana była na paliwie tradycyjnym ON, druga zaś na paliwie ONM.

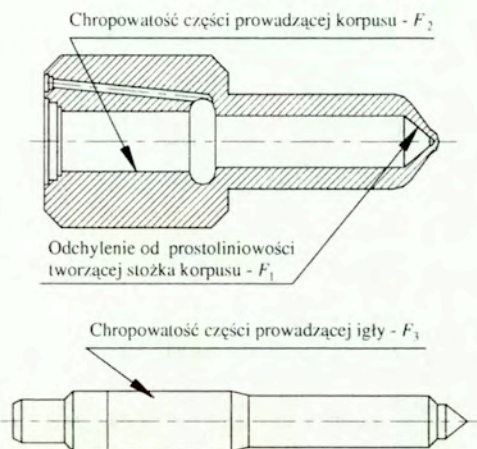
6.2.1. Szczegóły techniczne i rezultaty badań

Badania eksploatacyjne rozpylaczy paliwa przeprowadzono w silnikach autobusów wykorzystywanych w komunikacji miejskiej. Do badań wytypowano cztery autobusy IKARUS 280, oraz trzy autobusy JELCZ PR 110, wszystkie w zbliżonej formie eksploatacyjnej (ok. 2 lat) i w bardzo dobrym stanie technicznym. W okresie nadzorowanej eksploatacji trwającej ok. 18 miesięcy, przebiegi autobusów były podobne i wynosiły po ok. 80 tys. km. Łącznie badaniom poddano 42 rozpylacze, z których 24 eksploatowano na paliwie ONM, a 18 – na oleju napędowym ON [140]. Przyjęto założenie, że typ rozpylacza (DILMK140/2 lub DILK35M1) nie wpływa istotnie na charakter procesu zużycia, ponieważ są to rozpylacze długie, otworkowe, z przylgnią stożkową.

Ocenę wpływu zastosowanego rodzaju paliwa na zużycie rozpylaczy przeprowadzono na podstawie analizy zmian parametrów geometrycznych charakteryzujących ich stan techniczny: odchylenia od prostoliniowości tworzącej stożka w gnieździe korpusu rozpylaczy, chropowatości powierzchni części prowadzącej w korpusie rozpylaczy, chropowatości powierzchni części prowadzącej igły i szczelności gniazd rozpylaczy paliwa (parametr funkcjonalny).

Pomiary wymienionych wyżej parametrów wykonano dla stanu wyjściowego rozpylaczy (rozpylacze fabrycznie nowe) i po zakończeniu nadzorowanej

eksploatacji. Na rysunku 6.4 zaznaczono miejsca pomiarów parametrów geometrycznych charakteryzujących efekt zużycia rozpylaczy paliwa [56] oraz podano oznaczenia wykorzystywane w analizach: F_1 , F_2 , F_3 .



Rys. 6.4. Miejsca pomiarów profilometrycznych korpusów rozpylaczy paliwa i współpracujących z nimi igieł

Pomiary zużycia wyrażone zmianą parametrów geometrycznych rozpylaczy paliwa polegały na sporządzeniu profilogramów badanych powierzchni. Szczelność gniazd rozpylaczy mierzono metodą rurki szklanej. Szczegóły zamieszczono w pracach [56, 119, 140].

6.2.2. Kryteria oceny i zbiorcze zestawienie wyników badań

Badania przeprowadzono dla zbioru 42 rozpylaczy, z których 24 pracowało na paliwie ONM (nr 1 ÷ 6, 13 ÷ 24, 37 ÷ 42), a 18 na paliwie ON (nr 7 ÷ 12, 25 ÷ 36). Wyniki badań zamieszczono w tablicy 6.3 [121]. Kolumny oznaczone od F_1 do F_7 zawierają wartości parametrów charakterystycznych, określone po eksploatacji rozpylaczy.

6.2.3. Wyniki analizy wielokryterialnej

Analiza wielokryterialna wielkości nieunormowanych wymagała założenia, że wszystkie rozpylacze dopuszczone do eksploatacji spełniały wymagania służb kontroli jakości, a ich stan wyjściowy był identyczny. Zostało to potwierdzone

Zestawienie wyników badań poeksploatacyjnych rozpylaczy paliwa

Nr rozpylacza	Odchylenie od prostoliniowości tworzącej stożka korpusu	Chropowatość części prowadzącej		Nies/czel-ność gniazda	Okrągłość części prowadzącej		Jednolitość hydrauliczna
		korpusu	igły		korpusu	igły	
	[μm]	[μm]	[μm]	[mm^3] [*]	[μm]	[μm]	[s]
	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7
1	1.20	0.05	0.04	5.75	0.3	0.3	49.95
2	1.25	0.05	0.06	5.14	0.4	0.2	53.85
3	1.20	0.05	0.04	7.07	0.4	0.2	53.83
4	1.20	0.05	0.06	2.17	0.3	0.2	51.77
5	1.10	0.05	0.04	5.42	0.2	0.3	52.23
6	1.50	0.06	0.05	7.07	0.2	0.2	52.72
7	2.00	0.06	0.06	6.13	0.2	0.1	52.75
8	1.85	0.05	0.06	4.57	0.4	0.2	53.80
9	1.45	0.06	0.05	3.77	0.3	0.2	50.12
10	1.30	0.07	0.05	1.51	0.3	0.2	48.14
11	2.10	0.05	0.06	3.68	0.4	0.2	54.12
12	1.80	0.05	0.06	9.24	0.4	0.1	48.67
13	1.40	0.06	0.03	3.51	0.4	0.2	51.86
14	1.30	0.05	0.05	2.59	0.4	0.2	52.62
15	0.95	0.05	0.05	5.84	0.3	0.3	51.24
16	1.35	0.05	0.03	8.53	0.2	0.3	51.32
17	1.40	0.06	0.03	4.24	0.2	0.3	51.48
18	1.10	0.07	0.05	2.07	0.3	0.3	52.62
19	1.40	0.07	0.05	5.42	0.5	0.3	54.80
20	1.30	0.06	0.05	8.68	0.5	0.3	53.57
21	1.40	0.06	0.06	8.29	0.6	0.2	50.33
22	1.45	0.06	0.05	5.23	0.8	0.3	51.48
23	1.90	0.04	0.05	1.93	0.5	0.3	54.47
24	1.15	0.07	0.05	10.73	0.4	0.4	51.05
25	1.20	0.06	0.05	3.58	0.6	0.2	52.55
26	1.40	0.05	0.05	14.18	0.3	0.2	52.94
27	1.25	0.04	0.05	6.97	0.6	0.2	52.13
28	1.40	0.07	0.06	14.23	0.5	0.2	53.27
29	1.45	0.08	0.05	3.86	0.4	0.2	59.73
30	1.60	0.09	0.05	4.57	0.4	0.4	53.40
31	1.60	0.07	0.04	4.90	0.9	0.2	72.61
32	1.90	0.06	0.04	8.39	0.9	0.2	73.34
33	1.25	0.06	0.06	3.91	0.9	0.3	73.75
34	1.50	0.08	0.05	4.83	0.4	0.3	73.28
35	2.60	0.08	0.04	5.70	0.9	0.2	75.35
36	1.40	0.06	0.04	12.91	0.5	0.2	72.10
37	1.05	0.04	0.04	2.88	0.3	0.2	72.80
38	1.25	0.04	0.04	4.93	0.3	0.2	75.10
39	1.20	0.03	0.04	5.42	0.3	0.2	74.90
40	1.30	0.04	0.04	9.38	0.1	0.2	76.78
41	1.70	0.04	0.04	5.75	0.2	0.2	70.70
42	1.10	0.04	0.05	5.18	0.3	0.3	75.60

* wartość objętości dla czasu 30 [s]

poprzez dokonanie pełnej kontroli wszystkich parametrów funkcjonalnych oraz geometrycznych parametrów powierzchni roboczych z wykorzystaniem pomiarów profilometrycznych. Natomiast stan końcowy, po nadzorowanych badaniach eksploatacyjnych, zależał jedynie od rodzaju paliwa użytego do eksploatacji [121, 199]. W tej sytuacji kryteria oceny obejmowały:

- F_1 – odchylenie od prostoliniowości tworzącej stożka korpusu [μm],
- F_2 – chropowatość części prowadzącej korpusu [μm],
- F_3 – chropowatość części prowadzącej igły [μm],
- F_4 – nieszczelność gniazda [mm^3],
- F_5 – okrągłość części prowadzącej korpusu [μm],
- F_6 – okrągłość części prowadzącej igły [μm],
- F_7 – jednolitość hydrauliczną [s].

Wartości przyjętych kryteriów zawarto w tabelicy 6.3 – kolumny: $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7$. Wszystkie kryteria oceny od F_1 do F_7 były minimalizowane.

Analiza siedmiokryterialna

Wyznaczony podzbiór rozpylaczy o wartościach kryteriów ocen optymalnych w sensie Pareto liczył 25 elementów (rozpylacze o numerach: 1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 37, 39, 40, 41), z czego 18 zasilanych było paliwem ONM. Wyniki analizy zawarto w tabelicy 6.4. Już pierwszy etap filtracji wskazał na dominację rozpylaczy pracujących na paliwie ONM nad rozpylaczami eksploatowanymi na ON. Rozwiązaniem kompromisowym w sensie min-max (wiersz 1) okazał się rozpylacz nr 37 (zasilany paliwem ONM). Do podzbioru rozwiązań kompromisowych należały ponadto rozpylacze o numerach: 18, 41, 14, 17 – wszystkie eksploatowane na paliwie ONM. Wyznaczono także podzbiory rozwiązań kompromisowych przy wprowadzeniu różnych wartości preferencji (ω) dla poszczególnych kryteriów oceny – wiersze 2 i 3.

Tabela 6.4

Zestawienie analizy siedmiokryterialnej wielkości nieunormowanych

Lp.	Wagi preferencji, $\sum \omega_i = 1$	Pierwsze rozwiązanie kompromisowe	Kolejne rozwiązania kompromisowe	Podzbiór rozwiązań kompromisowych
	1	2	3	4
1	$\omega_1 \div \omega_7 = 0.143$	37*	18, 41, 14, 17	37, 18, 41, 14, 17
2	$\omega_1 \div \omega_8 = 0.1; \omega_7 = 0.4$	18	17, 10, 41, 14, 37	18, 17, 10, 41, 14, 37
3	$\omega_1 \div \omega_4 = 0.2; \omega_8 = \omega_5 = 0.05; \omega_7 = 0.1$	14	23, 18, 4, 37	14, 23, 18, 4, 37

* pogrubienie numeru oznacza rozpylacz zasilany paliwem ONM

Analiza pięciokryterialna

Szczegółowa analiza mierzonych wielkości i uzyskanych wyników skłoniła autora do przeprowadzenia analizy pięciokryterialnej. Wyeliminowano kryteria F_5 i F_6 określające odpowiednio: okrągłość części prowadzącej korpusu i części prowadzącej igły, ponieważ wartości mierzone dla rozpylaczy nowych i po eksploatacji w wielu przypadkach były identyczne, albo nieznacznie się różniły [119]. Zużycie części prowadzących jest nieznaczne w przeciwieństwie do zużycia występującego w strefie stożka korpusu oraz igły, które decyduje o utracie przydatności eksploatacyjnej rozpylacza paliwa. Pozostały więc kryteria: F_1, F_2, F_3, F_4, F_7 . Analizę przeprowadzono na tym samym zbiorze 42 rozpylaczy.

Tablica 6.5

Zestawienie analizy pięciokryterialnej wielkości nieunormowanych

Lp.	Wagi preferencji, $\sum \omega_i = 1$	Pierwsze rozwiązanie kompromisowe	Kolejne rozwiązania kompromisowe	Podzbiór rozwiązań kompromisowych
	1	2	3	4
1	$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega_7 = 0.2$	14*	23, 18, 4, 37	14, 23, 18, 4, 37
2	$\omega_1 = \omega_4 = 0.3; \omega_7 = 0.1; \omega_2 = \omega_3 = 0.15$	4	23, 10, 37, 18	18, 17, 10, 41, 14, 37
3	$\omega_1 = \omega_4 = 0.25; \omega_7 = 0.1; \omega_2 = \omega_3 = 0.2$	14	23, 18, 4, 37	14, 23, 18, 4, 37

* pogrubienie numeru oznacza rozpylacz zasilany paliwem ONM

Wyznaczony podzbiór rozpylaczy o wartościach kryteriów ocen optymalnych w sensie Pareto liczył 19 elementów (rozpylacze o numerach: 1, 4, 5, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 23, 24, 25, 27, 37, 39, 41), z czego 14 zasilanych było paliwem ONM. Zaobserwowano wyraźną dominację rozpylaczy pracujących na paliwie ONM nad rozpylaczami eksploatowanymi na ON.

Rozwiązaniem kompromisowym przy jednakowych preferencjach dla każdego kryterium oceny – wiersz 1 z tablicy 6.5 – okazał się rozpylacz nr 14 (zasilany paliwem ONM). Podzbiór kolejnych rozwiązań kompromisowych składał się z rozpylaczy o numerach: 23, 18, 4, 37 – co obrazuje kolumna 3. Ostatecznie podzbiór rozwiązań reprezentatywnych zawierał tylko rozpylacze eksploatowane na paliwie ONM.

Wyznaczano również podzbiory rozwiązań kompromisowych przy wprowadzaniu różnych wartości preferencji dla poszczególnych kryteriów oceny. Przyjęte wielkości zamieszczono w wierszach 2 i 3 tablicy 6.5. Podzbiory rozwiązań kompromisowych zachowały tendencję zaobserwowaną w analizie min-max (wiersz 1) – nadal występowała zdecydowana dominacja rozpylaczy eksploatowanych na paliwie ONM (cztery albo pięć) nad rozpylaczami zasilanymi paliwem ON (zero lub jedna sztuka).

Analiza czterokryterialna

W analizie czterokryterialnej uwzględniono pierwsze cztery kryteria, tzn.: F_1 , F_2 , F_3 , F_4 , zrezygnowano z kryterium oznaczającego jednolitość hydrauliczną. Do obliczeń wprowadzono wartości, które uzyskano w wyniku pomiaru wielkości po nadzorowanych badaniach eksploatacyjnych. Przyjęte dane obrazują kolumny F_1 , F_2 , F_3 i F_4 w tabelicy 6.3.

Wyznaczony podzbiór rozpylaczy o wartościach kryteriów ocen optymalnych w sensie Pareto liczył 10 elementów (rozpylacze o nr: 4, 10, 13, 14, 15, 16, 18, 23, 37, 39), z czego 9 zasilanych było paliwem ONM. Już pierwszy etap filtracji wskazywał na zdecydowaną dominację rozpylaczy pracujących na paliwie ONM nad rozpylaczami eksploatowanymi na ON. Wyznaczone rozwiązania kompromisowe (wiersze 1, 2 i 3 w tabelicy 6.6) pokazały, że z podzbioru rozwiązań optymalnych w sensie Pareto wybierane były tylko rozpylacze zasilane paliwem ONM. Wyniki analizy świadczą o jednoznacznej dominacji rozpylaczy eksploatowanych na paliwie ONM.

Tabela 6.6

Zestawienie analizy czterokryterialnej wielkości nieunormowanych

Lp.	Wagi preferencji, $\sum \omega_i = 1$	Pierwsze rozwiązanie kompromisowe	Kolejne rozwiązania kompromisowe	Podzbiór rozwiązań kompromisowych
	1	2	3	4
1	$\omega_1 \div \omega_2 = 0.25$	14*	23, 18, 4, 37	14, 23, 18, 4, 37
2	$\omega_1 = \omega_2 = 0.3$; $\omega_3 = \omega_4 = 0.2$	4	23, 18, 37	4, 23, 18, 37
3	$\omega_1 = 0.4$; $\omega_2 = 0.2$; $\omega_3 = 0.1$; $\omega_4 = 0.3$	4	14, 18, 37	4, 14, 18, 37

* pogrubienie numeru oznacza rozpylacz zasilany paliwem ONM

6.2.4. Wnioski dotyczące wpływu stosowania paliwa ekologicznego na zużycie rozpylaczy paliwa

Na podstawie uzyskanych rezultatów badań przedstawionych w tym rozdziale pracy nasuwają się następujące spostrzeżenia i wnioski.

Analiza wielokryterialna wykazała, że niezależnie od podanych wartości preferencji dla przyjętych wskaźników jakości, rozpylacze eksploatowane na paliwie ON nie należały do podzbiorów rozwiązań kompromisowych lub ich liczba była wielokrotnie mniejsza od liczby rozpylaczy zasilanych paliwem ONM. Świadczy to jednoznacznie o mniejszym zużyciu rozpylaczy pracujących na paliwie ONM.

Wyniki analizy zostały potwierdzone dla wartości kryteriów określonych z badań bezpośrednio po eksploatacji rozpylaczy paliwa przy różnej liczbie analizowanych kryteriów: siedmiu, pięciu i czterech, oraz przy różnych preferencjach dla poszczególnych kryteriów oceny.

Zastosowana *Metoda Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych*, bazująca na wydobywaniu wewnętrznych właściwości rozpatrywanych rozwiązań i wyznaczaniu nie jednego „rozwiązania najlepszego”, lecz małego licznego podzbioru rozwiązań kompromisowych, była skuteczna w rozwiązaniu postawionego problemu i pozwoliła na uzyskanie jednoznacznej odpowiedzi o wpływie zastosowanego paliwa na zużycie badanych rozpylaczy.

6.3. Ocena wpływu konstrukcji rozpylacza paliwa na toksyczność spalin przy wykorzystaniu systemu <ESAW>

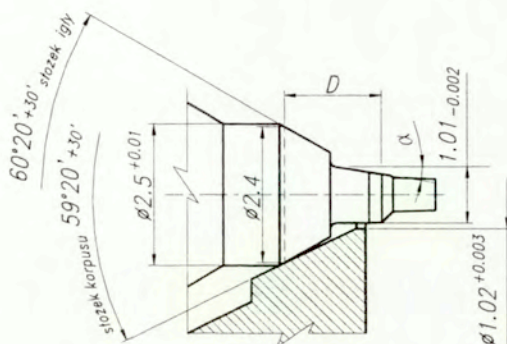
Spalanie w trakcyjnych silnikach spalinowych przebiega zwykle w warunkach odbiegających od optymalnych, co powoduje, że uzyskiwana w ten sposób energia jest w znacznym stopniu tracona. Należy przy tym pamiętać, że spalanie paliw jest nie tylko źródłem energii, ale również przyczyną powstawania większości zanieczyszczeń atmosferycznych, jak np.: tlenków azotu i siarki, tlenku węgla, cząstek stałych. W wyniku spalania nośników energii, do atmosfery przedostają się również duże ilości dwutlenku węgla, który odpowiedzialny jest między innymi za nasilenie efektu cieplarnianego. Silnik tłokowy ze względu na swą powszechną obecność jest w świecie głównym źródłem emitującym wymienione wyżej zanieczyszczenia.

Programy badawcze dotyczące rozwoju silnika zwracają szczególną uwagę na poziom emisji związków toksycznych oraz zużycie paliwa. Niezbędna staje się świadoma optymalizacja parametrów silnika w celu redukcji poziomu emisji zanieczyszczeń, przy jednoczesnym zachowaniu jak najkorzystniejszych wskaźników pracy. Podjęte badania procesów spalania wykazały, że dla obniżenia zawartości najbardziej szkodliwych składników spalin, konieczne jest znaczne zwiększanie ciśnienia wtrysku, co poprawia proces spalania poprzez lepsze rozpylenie paliwa. Pojawiły się więc nowe konstrukcje silników o zapłonie samoczynnym z nowatorskimi rozwiązaniami konstrukcyjnymi, dotyczącymi zwłaszcza aparatury paliwowej.

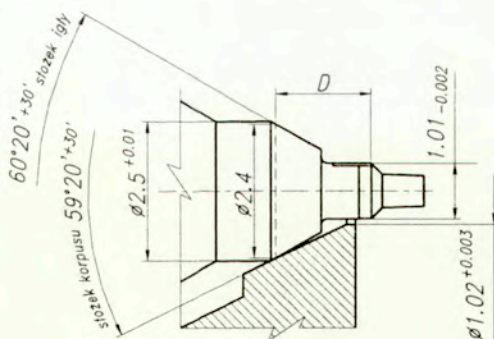
Prawidłowe działanie układu wtryskowego, którego ważnym elementem składowym jest rozpylacz, decyduje w dużej mierze o tym, czy silnik może osiągnąć odpowiednie wskaźniki pracy [54]. Konstrukcja rozpylacza wpływa także istotnie na ilość toksycznych składników spalin emitowanych przez silnik. W tej części pracy przedstawiono możliwość wykorzystania metody analizy wielokryterialnej do oceny specjalnie skonstruowanych rozpylaczy czopikowych [57, 114, 119] z punktu widzenia poziomu emisji związków toksycznych do atmosfery.

6.3.1. Opis i wyniki badań

Badania objęły dwie grupy rozpylaczy czopikowych. Pierwszą grupę stanowiły rozpylacze o kątowym ścięciu czopika dławiącego – typ rozpylacza nr: 294, 309, 265. Ich kształt pokazano na rysunku 6.5. Wybrane wielkości konstrukcyjne zamieszczono w tablicy 6.7. Druga badana grupa (rysunek 6.6) obejmowała rozpylacze z czopikiem dławiącym o ścięciu równoległym do osi igły – typ rozpylacza nr: 256, 256A i 189.



Rys. 6.5. Końcówka rozpylacza o kątowym ścięciu czopika dławiącego



Rys. 6.6. Końcówka rozpylacza o ścięciu czopika dławiącego równoległym do osi igły

Badane rozpylacze nie różniły się budową korpusu ($d_g = 2.5$ mm), wszystkie miały takie same średnice otworów rozpylających ($d_{or} = 1.02$ mm), wymiary stożka korpusu (kął rozwarcia $59^{\circ}20'$) oraz stożka igły (kął rozwarcia $60^{\circ}20'$). Spośród badanych konstrukcji największy skok dławienia miał rozpylacz 189 (tablica 6.7), zaś najmniejszy rozpylacz 256A (tablica 6.8).

Wybrane wielkości konstrukcyjne końcówki rozpylacza o kątowym ścięciu czopika dławiącego

Typ rozpylacza	Wymiar D [mm]	Kąt ścięcia α	Skok igły [mm]
294	1.75 ^{+0.02} _{-0.01}	6°30' ^{+10'} _{-10'}	0.73
309	1.82 ^{+0.02} _{-0.01}	9° ^{+10'} _{-10'}	0.82
265	1.81 ^{+0.02} _{-0.01}	9° ^{+10'} _{-10'}	0.84

Tablica 6.8

Wybrane wielkości konstrukcyjne końcówki rozpylacza o ścięciu czopika dławiącego równoległym do osi igły

Typ rozpylacza	Wymiar D [mm]	Skok igły [mm]
256	1.71 ^{+0.02} _{-0.01}	0.71
256A	1.71 ^{+0.02} _{-0.01}	0.68
189	1.91 ^{+0.02} _{-0.01}	0.95

Tablica 6.9

Wyniki badań hamownianych

Oznaczony związek	Typ rozpylacza							
	265	309	294	189	256A	256	Euro I ¹	Euro II ¹
	e _i [g/kWh]							
HC(30)	0.3987	0.3395	0.2832	0.5109	0.2931	0.3511	1.23	1.10
HC(70)	0.6277	0.5237	0.4303	0.8276	0.4493	0.5435	1.23	1.10
HC _{tot}	0.9865	0.8013	0.6451	1.3475	0.6817	0.8354	1.23	1.10
NO _x	5.2749	7.6445	6.0561	5.9985	5.6334	5.5308	9.00	7.00
CO	1.7259	1.3253	1.2580	2.0103	1.1473	1.4311	4.90	4.00
PM(30) ²	0.6906	0.5924	0.5095	1.0152	0.4908	0.5898	0.68	0.25
PM(70) ²	0.4616	0.4082	0.3624	0.6985	0.3346	0.3974	0.68	0.25
Spełnienie Euro I	6x	7x	7x	4x	7x	7x	7x	7x
Spełnienie Euro II	5x	4x	5x	4x	5x	5x	0x	7x

^{1/} Euro I oraz Euro II to zalecane normy emisji związków toksycznych i cząstek stałych,

^{2/} żaden z badanych rozpylaczy nie spełnił wymagań normy Euro II w odniesieniu do emisji cząstek stałych PM(30) i PM(70).

Celem badań było określenie wpływu zmian konstrukcji rozpylaczy czopikowych na zanieczyszczenie spalin [54, 55]. Pomiary przeprowadzono w warunkach

kach testu ECE R. 49. Na podstawie otrzymanych wyników wyliczano z testu średnią emisję szkodliwych substancji. Badania z różnymi kompletami rozpylaczy prowadzono na silniku o zapłonie samoczynnym, turbodoładowanym, czterocylindrowym, o pojemności skokowej 2417 [cm³] i mocy 66 [kW]. Pomiar emisji cząstek stałych PM przeprowadzono optycznym analizatorem cząstek stałych – typ DPA480, natomiast do pomiaru emisji tlenków azotu, węgla i dwutlenku siarki użyto analizatora NDIR typu TESTO. Wartości emisji oznaczanych związków uzyskane dla poszczególnych typów rozpylaczy przedstawiono w tabelicy 6.9.

6.3.2 Analiza siedmiokryterialna emisji toksycznych związków spalin

Z pobieżnej analizy wyników zamieszczonych w tabelicy 6.9 wynikało, że badane rozpylacze uzyskiwały wartości leżące blisko wartości punktów odniesienia oznaczonych jako zalecane przez normy Euro I i Euro II. W tej sytuacji postanowiono przeprowadzić analizę wielokryterialną, zgodnie z propozycją zawartą w pracy [114], wprowadzając punkty odniesienia jako istniejące rozwiązania. Wszystkie kryteria oceny były minimalizowane. Przyjętymi kryteriami oceny jakości rozpylaczy były oznaczane związki:

- kryterium 1 (F_1) – węglowodory HC(30),
- kryterium 2 (F_2) – węglowodory HC(70),
- kryterium 3 (F_3) – węglowodory HC_{tot},
- kryterium 4 (F_4) – tlenki azotu NO_x,
- kryterium 5 (F_5) – tlenek węgla CO,
- kryterium 6 (F_6) – cząstki stałe PM(30),
- kryterium 7 (F_7) – cząstki stałe PM(70).

Analiza dotyczyła 8 rozpylaczy zgodnie z przyjętymi wcześniej kryteriami, tj. sześciu rozpylaczy wykonanych i przebadanych oraz dwóch rozpylaczy hipotetycznych: Euro I i Euro II.

Wektor idealny przyjął postać

$$F^0 = [0.2832 \ 0.4303 \ 0.6451 \ 5.2749 \ 1.1473 \ 0.25 \ 0.25]^T$$

i obejmował składowe, które pochodziły z następujących rozwiązań:

$$\begin{array}{ll} \text{rozpylacz nr 294} & - F^0_1, F^0_2, F^0_3, & \text{rozpylacz nr 265} & - F^0_4, \\ \text{rozpylacz nr 256A} & - F^0_5, & \text{rozpylacz Euro II} & - F^0_6, F^0_7. \end{array}$$

Zbiór rozwiązań niezdominowanych liczył 5 elementów, tj. obejmował rozpylacze o numerach: 294, 256, 256A, 265, Euro II. Wyeliminowano rozpylacze o numerach 189 i 309 oraz Euro I. Rozwiązaniem kompromisowym został rozpylacz numer 256A, zaś kolejnymi rozwiązaniami kompromisowymi

wyznaczonymi w oparciu o nadające punkty idealne I rzędu – rozpylacze o numerach: 294 i 256. Ostatecznie podzbiór rozwiązań kompromisowych liczył 3 elementy i obejmował rozpylacze: 256A, 294 i 256. Wyniki przeprowadzonych analiz zamieszczono w tablicy 6.10.

Tablica 6.10

Zestawienie wyników analizy siedmiokryterialnej dla różnych preferencji

Lp.	Wagi preferencji, suma wag = 1	Pierwsze rozwiązanie kompromisowe	Podzbiór rozwiązań kompromisowych
1.	$\omega_1 \div \omega_7 = 0.143$	256A	256A, 294, 256
2.	$\omega_1 = 0.4; \omega_2 \div \omega_7 = 0.1$	256A	256A, 294, 256
3.	$\omega_1 = 0.1; \omega_2 = 0.4; \omega_3 \div \omega_7 = 0.1$	256A	256A, 294, 256
4.	$\omega_1 = \omega_2 = 0.1; \omega_3 = 0.4; \omega_4 \div \omega_7 = 0.1$	256A	256A, 294, 256
5.	$\omega_1 \div \omega_3 = 0.1; \omega_4 = 0.4; \omega_5 \div \omega_7 = 0.1$	256A	256A, 256, 294
6.	$\omega_1 \div \omega_4 = 0.1; \omega_5 = 0.4; \omega_6 = \omega_7 = 0.1$	256A	256A, 294, 256
7.	$\omega_1 \div \omega_5 = 0.1; \omega_6 = 0.25; \omega_7 = 0.25$	256A	256A, 294, Euro II
8.	$\omega_1 \div \omega_5 = 0.1; \omega_6 = 0.4; \omega_7 = 0.1$	Euro II	Euro II, 256A
9.	$\omega_1 \div \omega_6 = 0.1; \omega_7 = 0.4$	256A	256A, 294, 256

Następnie przeprowadzono dalszą analizę wielokryterialną przy wprowadzeniu preferencji dla poszczególnych kryteriów. Prezentacja wektora idealnego pokazała, że składowe pochodzą od czterech rozpylaczy. Można więc spodziewać się, że wprowadzanie znaczących preferencji dla poszczególnych kryteriów składowych od F_1 do F_7 wpływa na generowane rozwiązania kompromisowe i końcowy obraz podzbioru rozwiązań kompromisowych. Oczywistym staje się fakt, że w przypadku, gdy wartość wagi ω_j dąży do 1 (albo wartość ω_j jest wielokrotnie większa od wartości wag dla pozostałych rozważanych kryteriów) – jako rozwiązanie kompromisowe otrzymuje się takie, które dla danego j wprowadziło swoją składową do wektora idealnego – F^0 .

6.3.3. Analiza czterokryterialna emisji toksycznych składników spalin

Analizą objęto 8 rozpylaczy: sześć z nich zostało wykonanych – parametry geometryczne przedstawiono w rozdziale 6.3.1 (tablica 6.7 i 6.8) i przebadanych – wyniki badań hamownianych zawiera tablica 6.9. Dwa pozostałe rozpylacze były rozpylaczami hipotetycznymi o wartościach emisji związków toksycznych odpowiadających normom Euro I oraz Euro II [119]. Wszystkie rozpylacze traktowano jako równoprawne. Przyjętymi kryteriami oceny jakości rozpylaczy były wartości stężeń następujących związków w spalinach:

- kryterium 1 (F_1) – węglowodory HC_{tot} ,
- kryterium 2 (F_2) – tlenki azotu NO_x ,

- kryterium 3 (F_3) – tlenek węgla CO,
- kryterium 4 (F_4) – cząstki stałe PM(30).

Wszystkie kryteria oceny były minimalizowane.

Wektor idealny F^o przyjął postać

$$F^o = [0.6451 \ 5.2749 \ 1.1473 \ 0.25]^T$$

i zawierał składowe, które pochodziły z następujących rozwiązań:

F^o_1 – rozpylacz nr 294,

F^o_2 – rozpylacz nr 265,

F^o_3 – rozpylacz nr 256A,

F^o_4 – rozpylacz *Euro II*.

Zbiór rozwiązań optymalnych w sensie Pareto liczył 5 elementów: rozpylacze o numerach: 294, 256, 256A, 265 oraz *Euro II*. Wyeliminowane zostały rozpylacze o numerach 189 i 309 oraz *Euro I*.

Rozwiązaniem kompromisowym został rozpylacz 256A, zaś rozwiązaniami kompromisowymi wybranymi w drugim etapie działania metody rozpylacze: 294 i 256. Ostatecznie zbiór rozwiązań kompromisowych liczył 3 rozpylacze: 256A, 294 i 256.

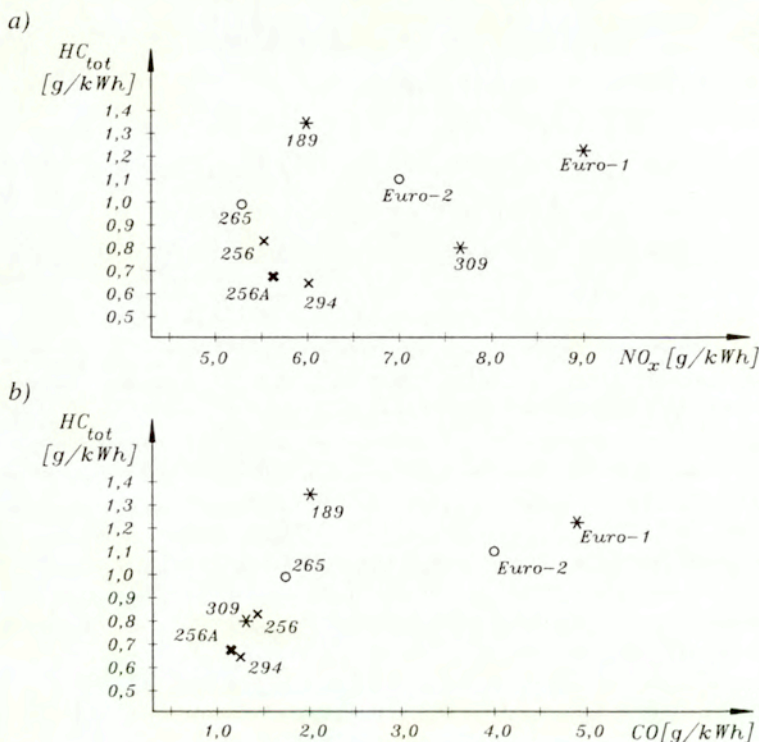
Następnie przeprowadzono analizę wprowadzając preferencje dla poszczególnych kryteriów. Analiza wektora idealnego pokazała, że każda ze składowych: F^o_1 , F^o_2 , F^o_3 , F^o_4 pochodzi od innego rozpylacza. Można więc było spodziewać się, że wprowadzenie znaczących preferencji dla poszczególnych kryteriów składowych od F_1 do F_4 wpłynie na obraz generowanych rozwiązań kompromisowych i końcowy podzbiór rozwiązań kompromisowych. Wyniki przeprowadzonych analiz czterokryterialnych przy różnych wartościach wag dla poszczególnych kryteriów składowych zamieszczono w tablicy 6.10.

Tablica 6.11

Wyniki analizy czterokryterialnej dla różnych preferencji

Lp.	Wagi preferencji, $\sum \omega_i = 1$	Pierwsze rozwiązanie kompromisowe	Podzbiór rozwiązań kompromisowych
1	$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 0.25$	256A	256A, 294, 256
2	$\omega_1 = 0.4; \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 0.2$	256A	256A, 294, 256
3	$\omega_1 = 0.2; \omega_2 = 0.4; \omega_3 = \omega_4 = 0.2$	256A	256A, 256, 294
4	$\omega_1 = \omega_2 = 0.2; \omega_3 = 0.4; \omega_4 = 0.2$	256A	256A, 294, 256
5	$\omega_1 = \omega_2 = 0.25; \omega_3 = 0.2; \omega_4 = 0.3$	256A	256A, 294, 256
6	$\omega_1 \div \omega_2 = 0.2; \omega_3 = 0.4$	256A	256A, 294, <i>Euro II</i>

Graficzne przedstawienie wyników w przestrzeni czterowymiarowej jest praktycznie niewykonalne, więc na rysunkach 6.7 ÷ 6.9 przedstawiono rozmieszczenie analizowanych rozpylaczy paliwa w kolejnych przestrzeniach dwukryterialnych.

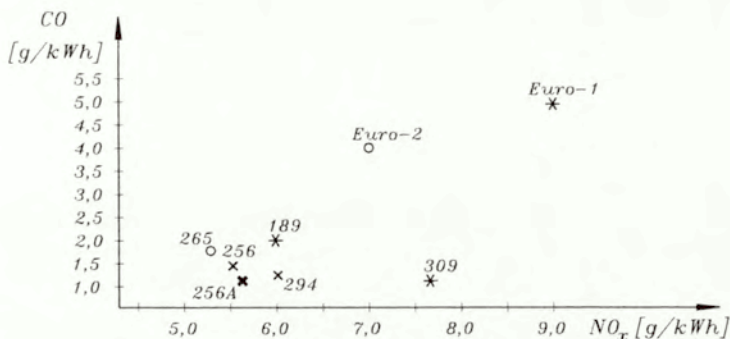


Rys. 6.7. Rozmieszczenie wyników analizy rozpylaczy w przestrzeni: a) HC_{tot} - NO_x , b) HC_{tot} -CO, * – pierwsze rozwiązanie kompromisowe, x – rozpylacz optymalny w sensie min-max

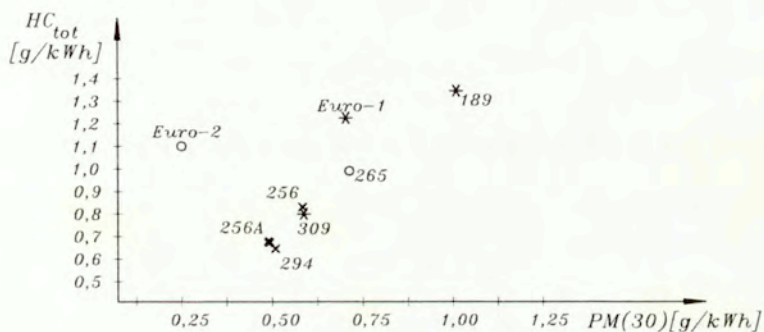
Należy jednak pamiętać, że relacje porządku częściowego określone przez stożki, opisane w rozdziale 1 – zależności (1.7) ÷ (1.9), dotyczą przestrzeni czterowymiarowej. Stąd, w układach dwuwymiarowych wydaje się, że rozwiązanie zaznaczone jako optymalne w sensie Pareto (niezdominowane) powinno być przedstawione jako rozwiązanie zdominowane.

Szczegółowa obserwacja wszystkich wykresów w przestrzeniach dwuwymiarowych pokazuje, że rozpylacz o numerze 256A w żadnym układzie nie był zdominowany przez pozostałe rozpylacze. Potwierdza to w pewien sposób fakt, że rozpylacz o numerze 256A był wyznaczany jako pierwsze rozwiązanie kompromisowe.

a)



b)

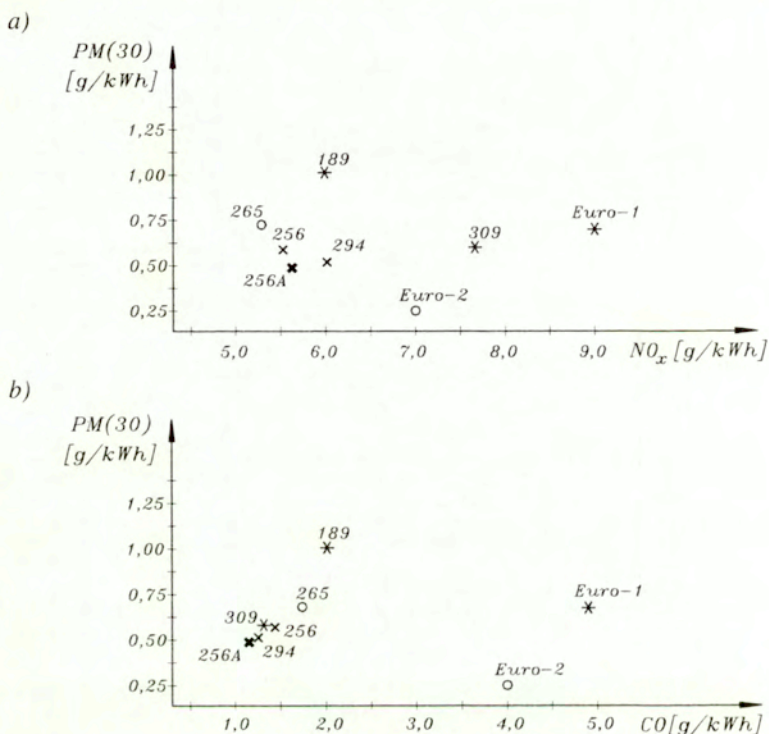


Rys. 6.8. Rozmieszczenie wyników analizy rozpylaczy w przestrzeni: a) CO – NO_x, b) HC_{tot} – PM(30)

6.3.4. Analiza Metodą Przedziałów Nerozróżnialności

Na zakończenie przeprowadzono dodatkową analizę *Metodą Przedziałów Nerozróżnialności* aby sprawdzić, jak „oddalone są od siebie” rozwiązania konstrukcji rozpylaczy paliwa w sensie wielokryterialnym oceniając toksyczność ich spalin. Wykonano analizę siedmiokryterialną (zgodnie z kryteriami przedstawionymi w rozdziale 6.3.2) zbioru rozwiązań niezdominowanych, który obejmował rozpylacze o numerach: 294, 256, 256A, 265, *Euro II*. Okazało się, że wprowadzenie progu nierozróżnialności $PN = 2\%$ eliminowało rozpylacz 256. Aby wyeliminować kolejny rozpylacz, próg nierozróżnialności należało zwiększyć aż do 7% – eliminacja rozpylacza 265. Wyznaczenie rozwiązania kompromisowego ze zbioru rozwiązań optymalnych w sensie przedziału nierozróżnialności przy zastosowaniu MWRK zawsze prowadziło do wskazania rozpylacza 256A. Przeprowadzona analiza MPN pokazała, że rozpylacz 256

„znajdował się blisko” pozostałych opracowanych konstrukcji rozpylaczy mimo, że należał do zbioru rozwiązań niezdominowanych.



Rys. 6.9. Rozmieszczenie wyników analizy rozpylaczy w przestrzeni: a) $PM(30)-NO_x$, b) $PM(30)-CO$

6.3.5. Wnioski dotyczące wpływu konstrukcji rozpylacza na toksyczność spalin

Na podstawie uzyskanych rezultatów badań rozpylaczy paliwa przedstawionych w pracy nasuwają się następujące spostrzeżenia i wnioski.

W świetle przyjętych kryteriów oceny wykonana analiza siedmiokryterialna oraz czterokryterialna czyni rozpylacz 256A rozwiązaniem preferowanym, ponieważ niezależnie od preferencji przypisywanych poszczególnym kryteriom składowym rozwiązanie to występuje zawsze w podzbiorze rozwiązań kompromisowych.

Przy identycznych preferencjach wszystkich kryteriów, a także przy większości innych preferencji, do podzbioru rozwiązań kompromisowych należą rozpylacze o numerach: 256A, 294, 256. Świadczy to, że w świetle analizy czterokryterialnej całkowity efekt zanieczyszczenia środowiska przez każdy z rozpylaczy 256A, 294, 256 będzie mniejszy niż dla hipotetycznego rozpylacza *Euro II*, tak więc to one powinny być stosowane w silnikach.

Mocne akcentowanie kryterium 1 (wiersz 2 w tabelicy 6.10) nie powodowało, że rozpylacz 294 stawał się rozwiązaniem kompromisowym, zaś mocne preferowanie kryterium 2 (wiersz 3 w tabelicy 6.10) nie przyczyniło się do wprowadzenia rozpylacza 265 do podzbioru rozwiązań kompromisowych.

Najmniejszą wartość składowej F_4 w wektorze idealnym osiągał hipotetyczny rozpylacz *Euro II*. Wprowadzenie dużej preferencji dla kryterium 4 (waga preferencji ω_4 była dwa razy większa niż dla pozostałych kryteriów – patrz wiersz 6 w tabelicy 6.10) wpłynęło na pojawienie się w ostatniej pozycji podzbioru rozwiązań kompromisowych rozpylacza *Euro II*.

Analiza *Metodą Przedziałów Nierozróżnialności* w przestrzeni siedmiokryterialnej pokazała, że rozwiązanie 256 było eliminowane ze zbioru rozwiązań niezdominowanych przy wartości $PN = 2\%$ i „leży najbliżej” innych rozwiązań w sensie wielokryterialnym.

Analiza wielokryterialna emisji przez silnik szkodliwych związków wykazała wyższość konstrukcji rozpylaczy o najmniejszym skoku dławienia (rozpylacze 256A, 256 oraz 294, patrz tablice 6.7 i 6.8) nad rozpylaczami o większym skoku dławienia. Rozpylacz o największym skoku dławienia (numer 189) nie należał nawet do zbioru rozwiązań optymalnych w sensie Pareto.

6.4. Ocena projektów kształtu uzwojenia kriomagnesu separatora HGMS przy użyciu systemu <ESAW>

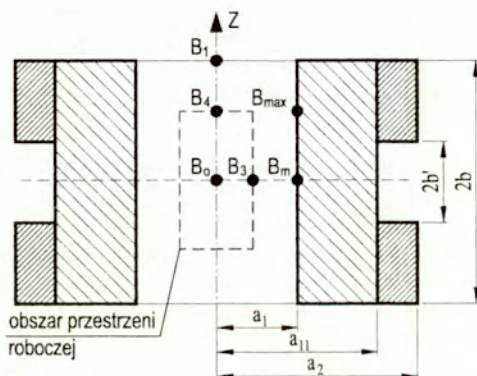
Elektromagnes nadprzewodnikowy o uzwojeniu cylindrycznym umieszczony w matrycy miedzianej może pełnić funkcję źródła energii i być głównym składnikiem matrycowego filtra wysokogradentowego separatora cząstek ferromagnetycznych [181 ÷ 183]. Aby funkcję spełniał prawidłowo, obszar przestrzeni roboczej powinien znajdować się w jednorodnym polu magnetycznym.

6.4.1. Metoda wyznaczania wariantów projektowych

Przedmiotem przeprowadzonej analizy wielokryterialnej z wykorzystaniem systemu <ESAW> był elektromagnes nadprzewodnikowy chłodzony helem, o uzwojeniu cylindrycznym, nawiniętym przewodem kompozytowym wielowłóknowym z nadprzewodnikiem NbTi umieszczonym w matrycy miedzianej. Obszar przestrzeni roboczej elektromagnesu stanowił walec o średnicy 90 mm

i wysokości 200 mm. Aby zapewnić jednakowe warunki filtracji zawieszin, matryca filtra powinna znajdować się w jednorodnym polu magnetycznym. W tym celu, przy podanych wymiarach głównego uzwojenia nadprzewodnikowego elektromagnesu poszukiwano wymiarów dozwojeń oraz gęstości prądu tam płynącego. Wprowadzenie dozwojeń powodowało zwiększenie jednorodności rozkładu indukcji oraz przesunięcie punktu występowania indukcji maksymalnej B_m (przy braku dozwojeń) do punktu B_{max} (położenie tego punktu było zmienne, a zależało od aktualnych wymiarów dozwojenia i gęstości płynącego w nim prądu).

Rysunek 6.10 przedstawia schemat uzwojenia solenoidalnego z dozwojeniami oraz położenie punktów pomiarowych, których użyto do analizy rozkładu pola magnetycznego.



Rys. 6.10. Przekrój cewki cylindrycznej z obszarami dozwojeń.

Wymiary uzwojenia były następujące:

- $a_1 = 81.5$ mm – promień wewnętrzny uzwojenia głównego,
- $a_{11} = 92.47$ mm – promień zewnętrzny uzwojenia głównego,
- $b = 157$ mm – połowa długości uzwojenia głównego.

W procesie obliczeniowym posługiwano się wielkościami bezwymiarowymi: $\alpha = a_{11} / a_1$ oraz $\beta = b / a_1$ przyjmującymi odpowiednie wartości: $\alpha = 1.1346$; $\beta = 1.926$. Gęstość prądu w uzwojeniu głównym wynosiła $J_1 = 1 \cdot 10^8$ [A/m²].

Analizowany rozkład indukcji w wewnętrznej części uzwojenia można przybliżyć wartościami dla charakterystycznych punktów pokazanych na rysunku 6.10:

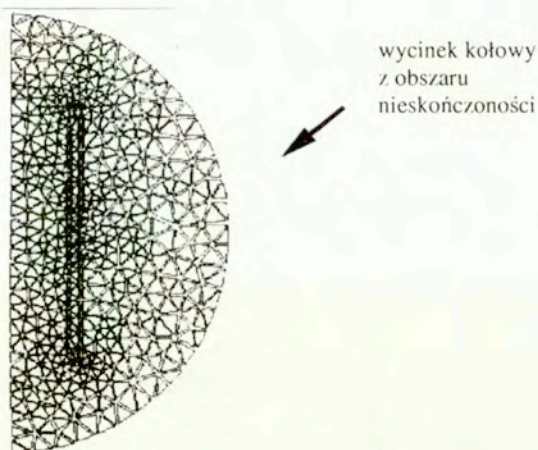
- $B_0(0,0)$ – środek geometryczny uzwojenia, wartość indukcji w tym punkcie była traktowana jako indukcja odniesienia,
- $B_m(81.5,0)$ – indukcja w punkcie leżącym na wewnętrznej ścianie uzwojenia,

- $B_1(0,157)$ – indukcja w punkcie leżącym w środku otworu na skraju uzwojenia,
- $B_3(45,0)$ – indukcja w punkcie leżącym na powierzchni walcowej matrycy filtru,
- $B_4(0,100)$ – indukcja w punkcie leżącym na skraju matrycy filtru, oś OZ,
- B_{max} – punkt maksymalnej wartości indukcji w przestrzeni otworu leżący na wewnętrznej ścianie uzwojenia.

W przeprowadzonym procesie obliczeniowym wprowadzono następujące zmienne projektowe (decyzyjne):

- $\alpha' = a_2/a_{11}$ – względny rozmiar grubości dozwojenia,
- $\beta' = b'/a_{11}$ – względny rozmiar szerokości dozwojenia,
- J_2 – gęstość prądu w dozwojeniu.

Rozkład indukcji magnetycznej ustalono przy użyciu metody elementów skończonych. Przeprowadzono dyskretyzację obszaru obliczeń, otrzymując 1956 trójkątnych elementów skończonych o różnych wielkościach, ze zwiększoną gęstością elementów w obszarze wewnętrznej części uzwojenia co pokazano na rysunku 6.11.



Rys. 6.11. Podział obszaru obliczeń na elementy skończone.

Wartości zmiennych decyzyjnych zostały zdyskretyzowane, osiągając następujące wartości:

$$\alpha' = \{1.04 ; 1.07 ; 1.08 ; 1.10 ; 1.14 ; 1.15\},$$

$$\beta' = \{0.50 ; 0.52 ; 0.55 ; 0.60 ; 0.70 ; 0.80 ; 0.92 ; 1.00 ; 1.12 ; 1.24 ; 1.25 ; 1.50\},$$

$$J_2 = \{0.20 ; 0.30 ; 0.39 ; 0.40 ; 0.45 ; 0.50 ; 0.55 ; 0.70 ; 0.80 ; 1.00 ; 1.10 ; 1.40 ; 1.50 ; 2.00\} \cdot 10^8 \text{ [A/m}^2\text{]}.$$

W obliczeniach wykonanych przy użyciu programu FLUX2D przyjmowano różne kombinacje wartości zmiennych decyzyjnych. Ostatecznie przyjęto 17 sposobów wykonania dozwojeń kriomagnesu, dla których dobierano różne gęstości prądu płynącego w dozwojeniach. W ten sposób wygenerowano 92 rozwiązania. Bliższe szczegóły przeprowadzonych obliczeń można znaleźć w pracach [181, 182]. Tablica 6.12 zawiera wybrane wyniki obliczeń.

Tablica 6.12

Wybrane wyniki obliczeń rozkładu pola magnetycznego dla uzwojenia głównego z dozwojeniami

Nr roz.	α'	β'	$J_2 \cdot 10^8$	B_m (81,5,0)	B_0 (0,0)	B_1 (0,157)	B_{max}	B_3 (45,0)	B_4 (0,100)
	[-]	[-]	[A/m ²]	[T]	[T]	[T]	[T]	[T]	[T]
15	1.04	0.80	1.10	1.861	1.880	1.210	2.099	1.874	1.847
28	1.07	0.52	1.50	2.176	2.438	2.412	2.887	2.345	2.248
33	1.07	0.60	1.50	2.119	2.313	2.350	2.836	2.263	2.321
38	1.07	0.60	0.40	1.855	1.867	1.662	1.998	1.867	1.715
40	1.07	0.80	1.50	2.007	2.149	1.867	2.709	2.087	2.150
49	1.07	1.00	1.00	1.870	1.892	1.801	2.236	1.883	1.890
52	1.07	1.25	2.00	1.880	1.900	1.938	2.586	1.891	1.882
53	1.07	1.25	1.50	1.850	1.849	1.798	2.331	1.849	1.786
59	1.07	1.50	1.10	1.785	1.735	1.411	1.789	1.757	1.570
73	1.14	0.60	1.00	2.226	2.520	2.001	3.143	2.420	2.470
78	1.14	0.80	1.00	2.069	2.265	2.367	2.980	2.191	2.263

6.4.2. Analiza wielokryterialna z wykorzystaniem systemu <ESAW>

W celu doboru optymalnych wymiarów dozwojeń i wartości gęstości prądu przepływającego w dozwojeniach wykonano filtrację rozwiązań wygenerowanych metodą elementów skończonych, stosując system <ESAW>. Analizę przeprowadzono zgodnie ze schematem pokazanym na rysunku 6.12.

Do zastosowania systemu <ESAW>, na bazie wartości indukcji magnetycznej obliczonej w punktach charakterystycznych (rysunek 6.10), przyjęto następujące kryteria optymalizacji:

- kryterium 1 – B_0 [Ts],
- kryterium 2 – B_{max}/B_0 [-],
- kryterium 3 – $|(B_3/B_0) - 1|$ [-],
- kryterium 4 – $|(B_4/B_0) - 1|$ [-],
- kryterium 5 – $|(B_1/B_0) - 1|$ [-].

Pierwsze kryterium było maksymalizowane (stąd minus przy prezentacji wektora idealnego), zaś pozostałe – minimalizowane.



Rys. 6.12. Schemat blokowy przeprowadzonej analizy wielokryterialnej

W kroku pierwszym wyznaczono rozwiązania optymalne w sensie Pareto spośród 92 rozwiązań dopuszczalnych wygenerowanych we wcześniejszym procesie obliczeniowym. Zbiór rozwiązań optymalnych w sensie Pareto zawierał 64 elementy. Wyznaczony wektor idealny przedstawiał się następująco

$$F^0 = [-2.52 \quad 1.0311 \quad 0.0 \quad 0.000465 \quad 0.010664]^T.$$

Poszczególne składowe wektora idealnego pochodziły z następujących rozwiązań: składowa pierwsza z rozwiązania 73, składowa druga z rozwiązania 59, składowa trzecia z rozwiązań o numerach 38 i 53, składowa czwarta z rozwiązania 40, ostatnia składowa z rozwiązania 28.

W kroku drugim zastosowano selekcję *Metodą Przedziału Nierozróżnialności*. Przyjęta wartość progu nierozróżnialności wynikała z podstawowej zasady stosowania MPN oraz dokładności modelowania procesu dozwywania kriomagnesu. Podstawowa zasada stosowania MPN głosi, że pierwotna wartość progu nierozróżnialności obliczana jest z podzielenia liczby 100 przez liczbę rozwiązań analizowanego zbioru. Tak obliczona wartość PN wynosi dla rozpatrywanego przypadku 1.56%. Wydaje się, że dokładność modelowania nie przekraczała obliczonej wartości PN , więc ostatecznie wprowadzono wartość $PN = 1.5\%$. Dla porównania, w tabelicy 6.13 pokazano wyniki selekcji *Metodą Przedziału Nierozróżnialności* przy innych wartościach PN .

Otrzymany podzbiór rozwiązań niezdominowanych w sensie przedziału nierozróżnialności liczył 53 elementy. Wyznaczony z podzbioru RNSPN wektor idealny nie zmienił się, ponieważ w procesie selekcji nie zostały wyeliminowane rozwiązania tworzące wektor idealny w zbiorze rozwiązań optymalnych w sensie Pareto.

Tablica 6.13

Selekcja Metodą Przedziału Nierozróżnialności

Lp.	Przedział nierozróżnialności PN [%]	Liczba elementów podzbioru RNSPN
1	0.5	58
2	1.0	54
3	1.5	53
4	2.0	48
5	5.0	34

W kroku trzecim przeprowadzono filtrację przy użyciu *Metody Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych*. Zastosowano metrykę min-max oraz min-max z wagami przy różnych preferencjach dla analizowanych kryteriów. Wyniki analiz przedstawiono w tablicy 6.14. Należy zwrócić uwagę na fakt, że preferencje wybranego kryterium były dwukrotnie większe od preferencji przy zastosowaniu metryki min-max oraz prawie trzykrotnie większe od preferencji pozostałych kryteriów.

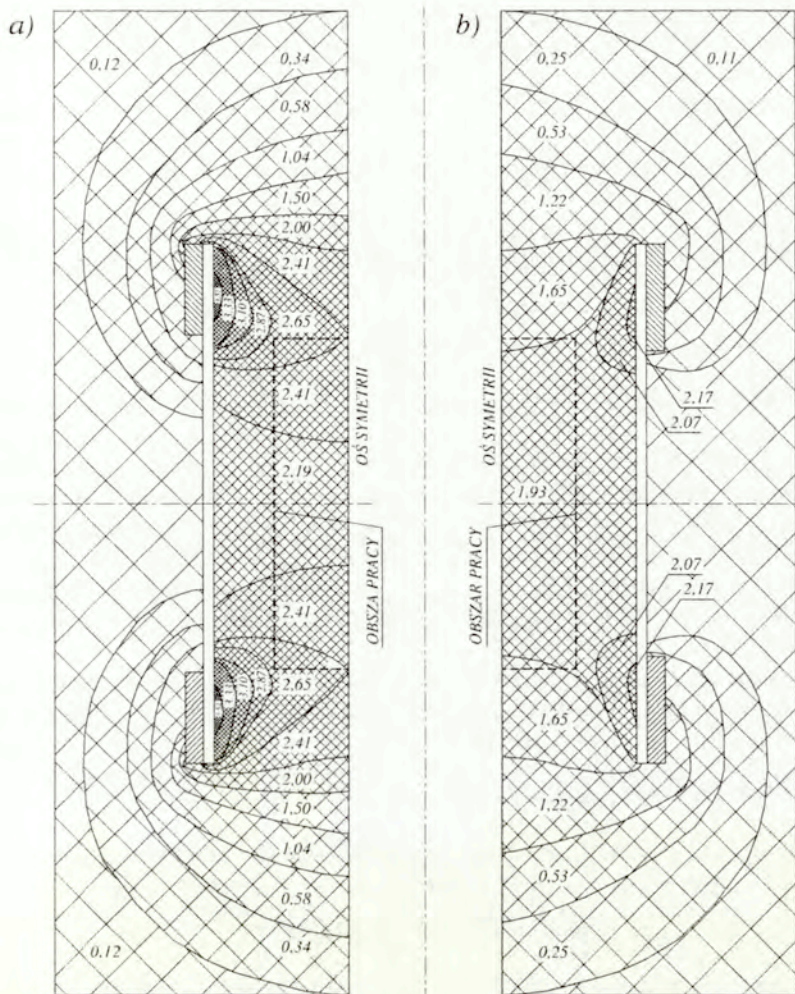
W kroku czwartym poszukiwano podzbioru rozwiązań reprezentatywnych. Analiza wyników zamieszczonych w tablicy 6.14 wskazała, że rozwiązania o numerach: 78, 33, 49 oraz 52 wystąpiły we wszystkich wyznaczonych podziorach rozwiązań kompromisowych, zaś rozwiązania o numerach: 40 i 15 pojawiły się pięciokrotnie. Ścisły podzbiór rozwiązań reprezentatywnych składał się z elementów o numerach 78, 33, 49 i 52.

Tablica 6.14

Filtracja Metodą Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych

Lp.	Wagi preferencji $\sum \omega_i = 1$	Pierwsze rozwiązanie kompromisowe	Podzbiór rozwiązań kompromisowych
1	$\omega_1 \div \omega_2 = 0.2$	78	78*, 49, 33, 40, 52, 15
2	$\omega_1 = 0.4; \omega_2 \div \omega_3 = 0.15$	78	78, 49, 33, 40, 52, 15
3	$\omega_1 = 0.15; \omega_2 = 0.4; \omega_3 \div \omega_4 = 0.15$	78	78, 49, 33, 40, 52, 15
4	$\omega_1 = \omega_2 = 0.15; \omega_3 = 0.4; \omega_4 = \omega_5 = 0.15$	78	78, 49, 33, 40, 52, 15
5	$\omega_1 \div \omega_2 = 0.15; \omega_3 = 0.4; \omega_4 = 0.15$	78	78, 49, 40, 15, 33, 52, 34
6	$\omega_1 \div \omega_2 = 0.15; \omega_3 = 0.4$	33	33, 78, 52, 49, 34, 53, 48

* numery pogrubione oznaczają rozwiązania występujące w każdym podziorze rozwiązań kompromisowych



Rys. 6.13. Efekt zastosowania systemu <ESAW>: rozkład indukcji pola magnetycznego w półprzekrojach cewki dla dwóch rozwiązań: a) dopuszczalnego, b) preferowanego – numer 78

W kroku piątym przeprowadzono analizę w zbiorze zmiennych decyzyjnych. Spośród 17 wariantów wykonania dozwojeń kriomagnesu, tylko 5 znalazło się w podzbiorze rozwiązań reprezentatywnych. Zmienna α' najczęściej przyjmowała wartość równą 1.07 (trzykrotnie), a w przypadku rozwiązania 78 wynosiła 1.14. Zmienna β' przyjmowała wartości ze zbioru {0.6; 0.8; 1.0; 1.25} – były to

wartości średnie tej zmiennej. Gęstości prądu płynącego w dozwojeniach przyjmowały jedną z następujących wartości: $\{1.0 ; 1.5 ; 2.0\} \cdot 10^8$ [A/m²]. Były to górne wartości tej zmiennej.

W kroku szóstym spośród zbioru rozwiązań reprezentatywnych wybrano rozwiązanie preferowane. Było to rozwiązanie o numerze 78, ponieważ pojawiało się jako pierwsze rozwiązanie kompromisowe dla zdecydowanej większości przyjętych preferencji analizowanych kryteriów.

Dla przykładu, na rysunku 6.13 pokazano rozkład linii pola magnetycznego dla dwóch konstrukcji: rozwiązania zdominowanego oraz preferowanego.

6.4.3. Wnioski końcowe

W wyniku zastosowania systemu <ESAW> poprzez ewolucyjne filtrowanie zbioru rozwiązań konstrukcyjnych liczącego 92 elementy udało się wyznaczyć na początku 64 rozwiązania niezdominowane w sensie Pareto, a następnie wyodrębnić 53 rozwiązania niezdominowane w sensie przedziału nierozróżnialności. Zastosowanie *Metody Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych* pozwoliło wygenerować kilkuelementowe podzbiory rozwiązań kompromisowych. Następnie z tych podzbiorów wydzielono czteroelementowy podzbiór rozwiązań reprezentatywnych, by na koniec wskazać jedno rozwiązanie preferowane.

Analiza rozkładu pola magnetycznego w obszarze matrycy separatora dla rozwiązań należących do podzbioru rozwiązań reprezentatywnych pokazała, że otrzymano znaczną poprawę jednorodności rozkładu tego pola w obszarze pracy separatora, przy zachowaniu stabilnej pracy uzwojenia nadprzewodnikowego.

6.5. Wykorzystanie systemu <ESAW> do oceny efektów projektowania ślizgowych łożysk wzdłużnych przy zastosowaniu MES

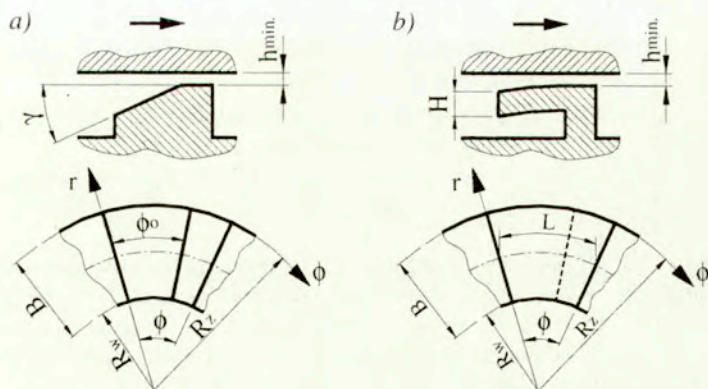
Łożyska wzdłużne pracujące w warunkach tarcia hydrodynamicznego stanowią bardzo istotny podzespół w układzie łożyskowania wałów, toteż prowadzone są wielokierunkowe badania teoretyczne tego rodzaju węzłów trybologicznych. Wyniki tych badań są niekiedy weryfikowane eksperymentalnie [34, 85, 223]. W pracy [83] przedstawiono komputerowo wspomaganą metodę obliczeń numerycznych ślizgowego łożyska wzdłużnego, opartą na nieizotermicznym modelu przepływu czynnika smarującego przez szczelinę olejową. Zastosowana metoda umożliwia badania symulacyjne łożyska i wyznaczenie przy użyciu MES jego podstawowych charakterystyk, nie ma jednak wbudowanych procedur optymalizacyjnych, które pozwoliłyby na projektowanie

rozwiązań zoptymalizowanych. Do oceny efektów tak przeprowadzonego projektowania segmentów łożyska wzdłużnego zastosowano system <ESAW>.

6.5.1. Opis projektowanego obiektu

Matematyczny model łożyska wzdłużnego smarowanego hydrodynamicznie zbudowany jest z równań opisujących przepływ oleju w szczelinie smarnej, procesów wymiany ciepła w filmie olejowym oraz między nim a otoczeniem, zmian lepkości oleju wynikających z procesów wymiany ciepła w rozpatrywanym układzie trybologicznym oraz zjawiska ugięcia sprężystego i termosprężystego łożyska. Szczegółowe założenia do modelu znaleźć można w pracy [84]. Rozważono dwie odmiany konstrukcji łożyska ze stałymi segmentami: niepodatnymi, z klinowo uformowaną płaską powierzchnią tarcia – rysunek 6.14a oraz sprężysto odkształcalnymi pod działaniem pola ciśnienia hydrodynamicznego – rysunek 6.14b. Do rozwiązania równań rozkładu ciśnienia oraz temperatury w szczelinie olejowej łożyska zastosowano metodę różnic skończonych. Obszar filmu olejowego zastąpiono siatką współrzędnych o składowych: promieniowej i obwodowej. Równania różniczkowe opracowanego modelu były rozwiązywane metodą iteracji do czasu uzyskania założonej dokładności obliczeń. W efekcie uzyskano wartości ciśnienia, temperatury i grubości filmu smarnego w przyjętych punktach siatki współrzędnych. Ponadto wyznaczono moment tarcia oraz wydatek oleju wpływającego do szczeliny smarnej.

Do obliczeń numerycznych łożyska wykorzystano metodę elementów skończonych realizowaną przez system „ALGOR” [185].



Rys. 6.14. Geometria segmentów stałych łożyska wzdłużnego: a) niepodatnego, b) sprężysto odkształcalnego

6.5.2. Analiza wielokryterialna z wykorzystaniem systemu <ESAW>

W celu wyboru optymalnego rozwiązania konstrukcyjnego projektowanego segmentu wzdłużnego łożyska ślizgowego zastosowano system <ESAW>. Analizę przeprowadzono zgodnie ze schematem pokazanym na rysunku 6.15.



Rys. 6.15. Schemat blokowy przeprowadzonej analizy wielokryterialnej

Należy podkreślić, że charakterystyki łożyska wzdłużnego wyznaczone przy zastosowaniu MES wyrażone są w różnych jednostkach. W przeprowadzonej analizie wielokryterialnej przyjęto następujący zbiór kryteriów [84]:

- F_1 – ciśnienie maksymalne w szczelinie smarnej [Pa],
- F_2 – minimalna grubość filmu olejowego [mm],
- F_3 – moment tarcia w łożysku [Nm],
- F_4 – wydatek oleju wpływającego do szczeliny [m^3/s],
- F_5 – przyrost temperatury w szczelinie smarnej [K].

Kryteria F_1, F_3, F_4, F_5 były minimalizowane, a kryterium F_2 – maksymalizowane.

Analiza segmentów sztywnych

Obliczenia łożyska wzdłużnego z segmentami sztywnymi wykonano przyjmując cztery wartości nośności tego łożyska: 160, 200, 240 oraz 280 [kN]. Przykładowe wartości kryteriów dla nośności 200 [kN] przedstawiono w tabelicy 6.15. Obliczenia komputerowe segmentów sztywnych wykonano przy zastosowaniu MES, przyjmując jedną zmienną decyzyjną $B^* = B/L$. B^* jest wielkością bezwymiarową, oznaczającą stosunek szerokości segmentu do jego długości – zobacz rysunek 6.14.

Wartości kryteriów łożysk z segmentami sztywnymi dla nośności 200 [kN]

Lp.	Kryteria					Zmienna
	F_1 [Pa]	F_2 [μm]	F_3 [Nm]	F_4 [m^3/s]	F_5 [K]	B^* [-]
1	$0.55226 \cdot 10^7$	27.32	99.86	$0.4285 \cdot 10^{-4}$	21.32	1.2
2	$0.54663 \cdot 10^7$	26.83	91.89	$0.3969 \cdot 10^{-4}$	20.42	1.4
3	$0.54238 \cdot 10^7$	26.44	86.64	$0.3756 \cdot 10^{-4}$	19.64	1.6
4	$0.53716 \cdot 10^7$	26.13	83.06	$0.3607 \cdot 10^{-4}$	18.98	1.8
5	$0.53891 \cdot 10^7$	25.72	80.23	$0.3471 \cdot 10^{-4}$	18.50	2.0

Wyniki analizy wielokryterialnej przeprowadzonej dla przyjętych wartości nośności przy zastosowaniu *Metody Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych* przedstawiono w tablicy 6.16.

Tablica 6.16

Wyniki analizy MWRK segmentów sztywnych

Lp.	Nośność łożyska [kN]	Liczba ROASP ¹	Liczba rozwiązań kompromisowych	Wartości B^* [-] dla rozwiązań kompromisowych
1	160	5	3	1.6; 1.8; 2.0
2	200	5	3	1.6; 1.8; 2.0
3	240	5	3	1.6; 1.8; 2.0
4	280	5	3	1.6; 1.8; 2.0

¹ rozwiązania optymalne w sensie Pareto

Z przeprowadzonej analizy wynika, że dla wszystkich przyjętych do obliczeń numerycznych wartości zmiennej decyzyjnej B^* uzyskano rozwiązania niezdominowane. Po wyznaczeniu trzejelementowego zbioru rozwiązań kompromisowych i przejściu do przestrzeni zmiennych decyzyjnych okazało się, że konstrukcje segmentów dla wartości B^* równych 1.6; 1.8 oraz 2.0 są lepsze, w świetle przyjętego zbioru wskaźników jakości, od pozostałych rozwiązań. W celu poprawienia wartości kryteriów należałoby wykonać dalsze obliczenia numeryczne przy zmienności B^* segmentów w zakresie od 1.6 do 2.0.

Analiza segmentów podatnych

W procesie obliczeniowym segmentów podatnych łożyska wzdłużnego, przeprowadzonym przy użyciu MES, przyjęto następującą siatkę zmienności dwóch zmiennych decyzyjnych [84, 116]:

- $B^* = \{1.2; 1.4; 1.6; 1.8; 2.0\}$ – względna szerokość segmentu,
- $H = \{15; 17.5; 20; 22.5; 25\}$ – grubość segmentu.

Uzyskana liczba rozwiązań dla każdej z czterech przyjętych nośności łożyska (160, 200, 240 oraz 280 [kN]) wynosiła 25. Przykładowe wartości analizowanych kryteriów dla nośności 160 [kN] zamieszczono w tablicy 6.17. Poniżej przedstawiono analizę wielokryterialną wykonaną dla tej właśnie nośności.

Wartości kryteriów łożysk z segmentami podatnymi przy nośności 160 [kN]

Rozwiązanie	Kryteria					Zmienna	
	F_1 [Pa]	F_2 [μm]	F_3 [Nm]	F_4 [m ³ /s]	F_5 [K]	B* [-]	H [mm]
101	0.42419·10 ⁷	27.96	130.78	0.3259·10 ⁻⁴	12.83	1.2	15.0
105	0.41529·10 ⁷	26.34	136.88	0.2668·10 ⁻⁴	13.14	1.2	17.5
109	0.40953·10 ⁷	29.03	141.59	0.2312·10 ⁻⁴	13.33	1.2	20.0
113	0.40500·10 ⁷	29.32	145.32	0.2085·10 ⁻⁴	13.48	1.2	22.5
117	0.40953·10 ⁷	29.02	141.59	0.2312·10 ⁻⁴	13.33	1.2	25.0
121	0.41353·10 ⁷	27.69	119.82	0.2844·10 ⁻⁴	12.39	1.4	15.0
125	0.40637·10 ⁷	28.28	124.83	0.2370·10 ⁻⁴	12.68	1.4	17.5
129	0.39962·10 ⁷	28.66	128.64	0.2090·10 ⁻⁴	12.84	1.4	20.0
133	0.39615·10 ⁷	28.93	131.55	0.1912·10 ⁻⁴	12.96	1.4	22.5
137	0.39446·10 ⁷	29.10	133.82	0.1793·10 ⁻⁴	13.05	1.4	25.0
141	0.40766·10 ⁷	27.47	112.50	0.2578·10 ⁻⁴	12.00	1.6	15.0
145	0.39993·10 ⁷	27.97	116.86	0.2186·10 ⁻⁴	12.24	1.6	17.5
149	0.39603·10 ⁷	28.35	120.02	0.1952·10 ⁻⁴	12.41	1.6	20.0
153	0.39291·10 ⁷	28.56	122.50	0.1804·10 ⁻⁴	12.52	1.6	22.5
157	0.39142·10 ⁷	28.71	124.38	0.1706·10 ⁻⁴	12.59	1.6	25.0
161	0.40034·10 ⁷	27.25	107.37	0.2411·10 ⁻⁴	11.64	1.8	15.0
165	0.39628·10 ⁷	27.73	111.22	0.2070·10 ⁻⁴	11.88	1.8	17.5
169	0.39277·10 ⁷	28.02	114.20	0.1865·10 ⁻⁴	12.03	1.8	20.0
173	0.39088·10 ⁷	28.24	116.31	0.1736·10 ⁻⁴	12.13	1.8	22.5
177	0.38597·10 ⁷	28.40	117.82	0.1653·10 ⁻⁴	12.21	1.8	25.0
181	0.39870·10 ⁷	26.87	103.39	0.2284·10 ⁻⁴	11.39	2.0	15.0
185	0.39449·10 ⁷	27.30	107.05	0.1973·10 ⁻⁴	11.61	2.0	17.5
189	0.39209·10 ⁷	27.61	109.62	0.1791·10 ⁻⁴	11.76	2.0	20.0
193	0.39053·10 ⁷	27.81	111.56	0.1676·10 ⁻⁴	11.86	2.0	22.5
197	0.38947·10 ⁷	27.93	113.03	0.1600·10 ⁻⁴	11.93	2.0	25.0

W kroku pierwszym wyznaczono rozwiązania należące do zbioru rozwiązań optymalnych w sensie Pareto. Zbiór ten liczył 14 elementów i składał się z rozwiązań o numerach: 113, 133, 137, 153, 157, 165, 169, 173, 177, 181, 185, 189, 193, 197. Wyznaczony wektor idealny przedstawiał się następująco

$$F^o = [0.38947 \cdot 10^7 \quad -29.32 \quad 103.39 \quad 0.1600 \cdot 10^{-4} \quad 11.38]^T.$$

Pierwsza i czwarta składowa wektora idealnego pochodziła od rozwiązania numer 197, druga – od rozwiązania 113 (minus poprzedzający wartość składowej wektora oznacza, że kryterium to było maksymalizowane), trzecia i piąta od rozwiązania o numerze 181.

W kroku drugim przeprowadzono selekcję rozwiązań optymalnych w sensie Pareto *Metodą Przedziałów Nierozróżnialności*, przyjmując do analizy wartość $PN=1\%$. Wyznaczony podzbiór rozwiązań optymalnych w sensie przedziału nierozróżnialności liczył 9 elementów i składał się z rozwiązań o numerach: 137,

157, 173, 177, 181, 185, 189, 193, 197. Wyznaczony nowy wektor idealny przedstawiał się następująco

$$F^o = [0.38947 \cdot 10^7 \quad -29.10 \quad 103.39 \quad 0.1600 \cdot 10^{-4} \quad 11.38]^T.$$

Na skutek wyeliminowania rozwiązania numer 113, uległa zmianie druga składowa wektora, która tym razem pochodziła od rozwiązania 137.

W kroku trzecim zastosowano selekcję *Metodą Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych* stosując początkowo metrykę min-max, a następnie przypisując indywidualne preferencje analizowanym kryteriom. Wartości wag dobrano w ten sposób, aby jednocześnie preferować te składowe, które w nowym wektorze idealnym pochodziły od tego samego rozwiązania. Wybrane kryteria miały wagę ponad dwa i pół razy większą, niż pozostałe składowe wektora kryteriów. Wyniki analiz zamieszczono w tablicy 6.18.

Tablica 6.18

Wyniki analiz MWRK łożysk z segmentami podatnymi przy nośności 160 [kN], $PN = 1\%$

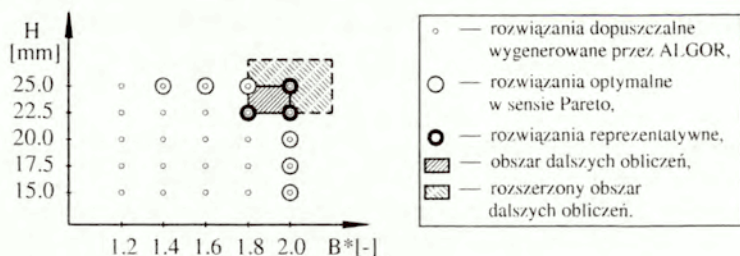
Lp.	Typ analizy	Pierwsze rozwiązanie kompromisowe	Kolejne rozwiązania kompromisowe
1	min-max: $\omega_1 \div \omega_5 = 0.2$	193*	197, 189, 173
	min-max z wagami:		
2	$\omega_1 = 0.32; \omega_2 = 0.32;$ $\omega_3 \div \omega_5 = 0.12$	197	193, 173
3	$\omega_1 = 0.32; \omega_2 = 0.12;$ $\omega_3 = 0.12; \omega_4 = 0.32; \omega_5 = 0.12$	197	193, 173
4	$\omega_1 = 0.12; \omega_2 = 0.12;$ $\omega_3 = 0.32; \omega_4 = 0.12; \omega_5 = 0.32$	189	193, 197
5	$\omega_1 = 0.15; \omega_2 = 0.4;$ $\omega_3 = 0.15; \omega_4 = \omega_5 = 0.15$	197	193, 173

* rozwiązania występujące we wszystkich podziorach rozwiązań kompromisowych

Przeprowadzona analiza pokazała, że wprowadzenie dużych preferencji dla wybranych kryteriów powodowało w niektórych przypadkach zmianę pierwszego rozwiązania kompromisowego. Zawartość podzioru rozwiązań kompromisowych w zasadzie nie ulegała zmianie.

W czwartym kroku dokonano analizy zawartości wyznaczonych podziorów rozwiązań kompromisowych i wyznaczono podzbiór rozwiązań reprezentatywnych. Okazało się, że rozwiązania o numerach 193 oraz 197 występują we wszystkich wyznaczonych podziorach (patrz tablica 6.18), zaś rozwiązanie 173 powtarza się czterokrotnie.

W kroku piątym przeprowadzono analizę w przestrzeni zmiennych decyzyjnych. Rozmieszczenie rozwiązań optymalnych w sensie Pareto oraz rozwiązań reprezentatywnych przedstawiono na rysunku 6.16.



Rys. 6.16. Rozmieszczenie rozwiązań w przestrzeni zmiennych decyzyjnych

Rozwiązania, które wygenerowano przy małych wartościach zmiennych decyzyjnych H oraz B^* , nie znalazły się w zbiorze rozwiązań optymalnych w sensie Pareto. Rozwiązania należące do zbioru rozwiązań reprezentatywnych przyjmowały duże wartości zmiennych i grupowały się w prawym górnym obszarze zmiennych decyzyjnych. Na rysunku zaznaczono obszary, które powinny być sprawdzone przy poszukiwaniu optymalnych konstrukcji segmentów podatnych projektowanego łożyska wzdłużnego. We wskazanych obszarach należałoby zageścić siatkę zmiennych decyzyjnych do obliczeń przeprowadzonych przy zastosowaniu programu ALGOR.

W celu sprawdzenia poprawności uzyskanych wyników dokonano dodatkowych analiz, które polegały na wyznaczeniu podzbioru rozwiązań reprezentatywnych, gdy wartość przedziału nierozróżnialności $PN = 0.5\%$ oraz w przypadku, gdy nie stosowano MPN ($PN = 0\%$). Otrzymane wyniki zamieszczono w tablicach 6.19 i 6.20.

Tablica 6.19

Wyniki analiz MWRK łożysk z segmentami podatnymi przy nośności 160 [kN], $PN = 0.5\%$

Lp.	Typ analizy	Pierwsze rozwiązanie kompromisowe	Kolejne rozwiązania kompromisowe
1	min-max: $\omega_1 \div \omega_5 = 0.2$	193*	197, 189, 173, 177
	min-max z wagami:		
2	$\omega_1 = 0.32; \omega_2 = 0.32;$ $\omega_3 \div \omega_5 = 0.12$	173	193, 177, 189
3	$\omega_1 = 0.32; \omega_2 = 0.12;$ $\omega_3 = 0.12; \omega_4 = 0.32; \omega_5 = 0.12$	197	193, 173, 157, 177
4	$\omega_1 = 0.12; \omega_2 = 0.12;$ $\omega_3 = 0.32; \omega_4 = 0.12; \omega_5 = 0.32$	189	193, 185, 197, 173
5	$\omega_1 = 0.15; \omega_2 = 0.4;$ $\omega_3 = 0.15; \omega_4 = \omega_5 = 0.15$	173	193, 177, 189

* rozwiązania występujące we wszystkich podzbiórach rozwiązań kompromisowych

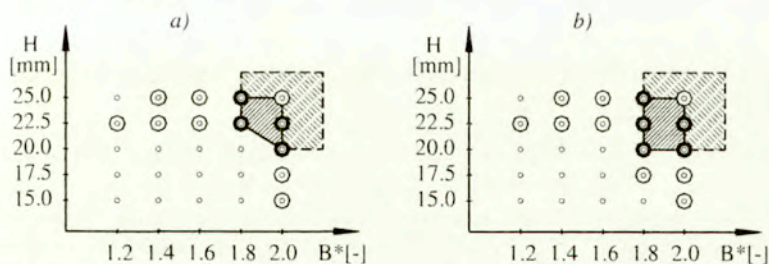
Wyniki analiz MWRK łożysk z segmentami podatnymi przy nośności 160 [kN], $PN = 0.0\%$

Lp.	Typ analizy	Pierwsze rozwiązanie kompromisowe	Kolejne rozwiązania kompromisowe
1	min-max: $\omega_1 \div \omega_3 = 0.2$ min-max z wagami:	193*	197, 189, 173, 177
2	$\omega_1 = \omega_2 = 0.32$; $\omega_3 \div \omega_5 = 0.12$	173	177, 169, 189, 193
3	$\omega_1 = 0.32$; $\omega_2 = 0.12$; $\omega_3 = 0.12$; $\omega_4 = 0.32$; $\omega_5 = 0.12$	197	193, 173, 157, 177
4	$\omega_1 = \omega_2 = 0.12$; $\omega_3 = 0.32$; $\omega_4 = 0.12$; $\omega_5 = 0.32$	197	193, 173, 157, 177
5	$\omega_1 = 0.15$; $\omega_2 = 0.4$; $\omega_3 \div \omega_5 = 0.15$	189	193, 185, 197, 169, 165, 173

* rozwiązania występujące we wszystkich podzbiorach rozwiązań kompromisowych

Uzyskane końcowe wyniki odniesione do przestrzeni zmiennych decyzyjnych były bardzo podobne. Okazało się, że zmienne decyzyjne rozwiązań reprezentatywnych przyjmowały duże wartości. Podzbiór rozwiązań reprezentatywnych przy wartości $PN = 0.5\%$ liczył 4 rozwiązania, a przy $PN = 0\%$ – 5 rozwiązań. Taki stan rzeczy wynikał z faktu, że większe wartości PN wpływały na zmniejszenie liczebności podzbioru rozwiązań niezdominowanych w sensie przedziału nierozróżnialności.

Na rysunku 6.17. pokazano wyniki analiz przeprowadzonych w przestrzeni zmiennych decyzyjnych.



Rys. 6.17. Rozmieszczenie rozwiązań w przestrzeni zmiennych decyzyjnych przy a) $PN = 0.5\%$, b) $PN = 0.0\%$, oznaczenia jak na rysunku 6.16

Zaprezentowana analiza szczegółowa przy wykorzystaniu systemu <ESAW> dotyczyła projektowania segmentów podatnych łożyska wzdłużnego o nośności równej 160 [kN]. Wykonano również dalsze analizy wielokryterialne wykorzystując dane obliczone przy użyciu programu ALGOR dla przewidywanych nośności łożyska równych 200, 240 oraz 280 [kN]. We wszystkich przypadkach

wnioski były identyczne. Podzbiór rozwiązań reprezentatywnych składał się z rozwiązań, które przyjmowały duże wartości obu zmiennych decyzyjnych. Obszar dalszych obliczeń, związany z zagęszczeniem zastosowanej siatki zmiennych decyzyjnych, obejmował zawsze górny prawy róg obszaru zmienności zmiennych decyzyjnych – tak jak to obrazują rysunki 6.16 oraz 6.17.

6.5.3. Wnioski dotyczące ślizgowych łożysk wzdłużnych

Przedstawiony przykład dobrze pokazuje współdziałanie selekcji wykonanej przy użyciu *Ewolucyjnego Systemu Analizy Wielokryterialnej* z rezultatami wygenerowanymi przy zastosowaniu MES. Wyznaczenie podzbioru rozwiązań kompromisowych w przestrzeni kryterialnej umożliwiło w przestrzeni zmiennych decyzyjnych wyznaczenie obszaru zmienności, który jest interesujący z punktu widzenia poszukiwania dalszych rozwiązań niezdominowanych.

Wprowadzenie analizy wielokryterialnej systemem <ESAW> do obliczeń wykonanych przy użyciu MES umożliwiło znalezienie optymalnych wymiarów projektowanych segmentów łożysk wzdłużnych smarowanych hydrodynamicznie. Okazało się, że dla wszystkich przeprowadzonych analiz i przyjmowanych do obliczeń nośności łożyska z segmentami podatnymi: 160, 200, 240, 280 [kN] rozwiązania kompromisowe osiągały względną szerokość segmentu wynoszącą: 1.8 lub 2.0, a grubość segmentu: 20, 22.5 albo 25 [mm].

6.6. Ocena skuteczności wibroizolacji frezarki FWD–32J *Metodą Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych*

6.6.1. Opis i wyniki obliczeń na podstawie danych literaturowych

W pracy [237] Witek badał wpływ posadowienia frezarki FWD–32J na jakość jej pracy. Frezarka była mocowana do podłoża przy zastosowaniu jednego z trzech wibroizolatorów o różnych rozwiązaniach konstrukcyjnych: GNNP–16/II, OW–31, UCI.6 oraz bezpośrednio do podłoża (tzw. posadowienie sztywne). W celu wyznaczenia wartości kryterium globalnego, które odzwierciedlałoby całkowity wpływ sposobu posadowienia frezarki na jej parametry eksploatacyjne, dokonano wyodrębnienia modeli zmienności struktur i parametrów frezarki oraz wskaźników jakości opisujących każdy z modeli.

Wyodrębniono 16 reprezentatywnych modeli zmienności struktur i parametrów układu MTS (masowo–tłumiąco–sprężystego). W każdym modelu określano 10 wskaźników jakości, które przedstawiały się następująco:

- 1 – mobilność, względne przemieszczenie normalne,

- 2 – amplituda max., względne przemieszczenie normalne,
- 3 – amplituda średnia, względne przemieszczenie normalne,
- 4 – mobilność, względne przemieszczenie wypadkowe,
- 5 – amplituda max., względne przemieszczenie wypadkowe,
- 6 – amplituda średnia, względne przemieszczenie wypadkowe,
- 7 – wyróżnik stabilności, względne przemieszczenie wypadkowe,
- 8 – mobilność, reakcje pionowe wypadkowe,
- 9 – amplituda max., reakcje pionowe wypadkowe,
- 10 – amplituda średnia, reakcje pionowe.

Ostatecznie praca frezarki została opisana przy pomocy 160 wskaźników jakości. Wszystkie wskaźniki były minimalizowane. Wyznaczono globalne kryterium oceny dla każdego posadowienia z wykorzystaniem zastosowanego wibroizolatora poprzez przeprowadzenie dwukrotnej skalaryzacji. Przy obliczaniu globalnego kryterium, wartości otrzymane podczas pomiarów były każdorazowo odnoszone do wartości osiąganych przy sztywnym posadowieniu frezarki. Do wyznaczenia kryterium globalnego wykorzystano trzy różne funkcjonały:

- arytmetyczną średnią ważoną

$$c_1 = \frac{1}{n_c} \sum_{k=1}^{n_c} w_k c_k \quad , \quad (6.1)$$

- ważoną długość wektora

$$c_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n_c} w_k c_k^2} \quad \text{lub} \quad c_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n_c} w_k^2 c_k^2} \quad , \quad (6.2)$$

- geometryczną średnią ważoną

$$c_3 = \sqrt[n_c]{\prod_{k=1}^{n_c} w_k c_k} \quad (6.3)$$

gdzie

- c_k – kryterium nr k ,
- w_k – współczynnik wagi kryterium c_k ,
- n_c – liczba kryteriów.

W pierwszym etapie ze 160 wskaźników jakości utworzono poprzez normowanie 160 kryteriów elementarnych – u_{kij}^n . Następnie przeprowadzono skalaryzację stosując opisane funkcjonały (6.1 ÷ 6.3). Uzyskano 16 kryteriów lokalnych F_{ij} , które opisywały skuteczność wibroizolacji w j -tym modelu reprezentatywnym

$$F_{ij} = F_{ij}(w_k \cdot u_{kij}^n) \quad (6.4)$$

gdzie

- w_k – współczynnik wagi k -tego kryterium elementarnego ($w_k = 1$ dla wszystkich k), $k = \{1, 2, \dots, 10\}$,
 u_{kij}^n – k -te elementarne kryterium skuteczności wibroizolacji w j -tym reprezentatywnym modelu dla i -tego wibroizolatora

$$u_{kij}^n = \frac{u_{kij}}{u_{k0j}} \quad (6.5)$$

gdzie

- u_{kij} – mierzony k -ty wskaźnik jakości w j -tym reprezentatywnym modelu dla i -tego wibroizolatora, $j = \{1, \dots, 16\}$, $i = \{0; 1; 2; 3\}$,
 u_{k0j} – mierzony k -ty wskaźnik jakości w j -tym reprezentatywnym modelu dla posadowienia sztywnego ($i = 0$).

W kolejnym kroku kryteria F_{ij} podlegały unormowaniu

$$F_{ij}^n = \frac{F_{ij}}{F_{0j}} \quad (6.6)$$

gdzie

- F_{0j} – kryterium lokalne odpowiadające j -temu reprezentatywnemu modelowi przy posadowieniu sztywnym ($i = 0$).

W drugim etapie przeprowadzono ponowną skalaryzację, stosując te same funkcjonały. Z kryteriów lokalnych utworzono kryteria globalne

$$G_i = G_i(W_j; F_{ij}^n) \quad (6.7)$$

gdzie

- W_j – współczynnik wagi j -tego kryterium lokalnego ($W_j = 1$ dla wszystkich j), $j = \{1, \dots, 16\}$.

Kryteria globalne G_i podlegały kolejnemu unormowaniu

$$G_i^n = \frac{G_i}{G_0} \quad (6.8)$$

gdzie

- G_0 – kryterium globalne odpowiadające posadowieniu sztywnemu,
 i – numer wibroizolatora, $i = \{1; 2; 3\}$.

Podwójna skalaryzacja zastosowana przez autora prowadziła ostatecznie do uzyskania rezultatów zamieszczonych w tablicy 6.21.

Według Witka [237] najlepszym wibroizolatorem był ten, dla którego otrzymano najmniejszą wartość kryterium globalnego. Ponadto, całkowita skuteczność zastosowanej wibroizolacji była lepsza od posadowienia sztywnego tylko wtedy, gdy wartość kryterium globalnego była mniejsza od 1 (wynika to

z faktu, że obliczane wartości kryterium globalnego były normowane względem posadowienia sztywnego, dla którego wartość kryterium globalnego wynosiła 1).

Tablica 6.21

Globalne kryteria skuteczności wibroizolacji frezarki FWD-32J

Typ funkcjonatu	Rodzaj posadowienia		
	GNNP-16/II	OW-31	UC1.6
(6.1)	1,039	1,042	1,038
(6.2)	1,267*	1,313	1,297
(6.3)	0,665	0,449	0,512

* pogrubienie najmniejszej wartości

Tablica 6.21 wskazuje na brak jednoznaczności wyników. Po pierwsze – w zależności od zastosowanego funkcjonatu inny typ wibroizolatora uzyskiwał najmniejszą wartość kryterium globalnego, po drugie – tylko w przypadku zastosowania funkcjonatu (6.3) użycie wibroizolatorów poprawiało posadowienie frezarki w świetle obliczonego kryterium globalnego G_f (jego wartości były mniejsze od 1).

Ostatecznie widać, że zastosowana metodologia redukcji kryteriów elementarnych poprzez przyjęty sposób podwójnej skalaryzacji oraz odnoszenie wyników do posadowienia sztywnego nie dała jednoznacznych wyników. Dzieje się tak często przy pochopnie przeprowadzonej skalaryzacji. Autor w pierwszym etapie skalaryzacji dla każdego wyodrębnionego modelu zmienności struktur i parametrów układu MTS sumował wskaźniki jakości reprezentujące różne wielkości fizyczne.

6.6.2. Analiza Metodą Wyznaczania Rozwiązania Kompromisowego

Przy wykonaniu analizy skuteczności wibroizolacji frezarki *Metodą Wyznaczania Rozwiązania Kompromisowego* przyjęto, że:

- istniejące rozwiązanie konstrukcyjne – posadowienie sztywne – nie jest traktowane jako punkt odniesienia (referencyjny), lecz włącza się je do oceny na równych prawach z rozwiązaniami nowymi – tj. przy zastosowaniu wibroizolatorów,
- redukcję liczby kryteriów realizuje się nie stosując sposobów charakterystycznych dla metod skalaryzacji (nie przeprowadza się agregacji kryteriów wyrażanych w różnych jednostkach i kryteriów oznaczających różne mierzone wielkości).

Na początku przeprowadzono redukcję liczby kryteriów, agregując poszczególne kryteria elementarne odniesione do różnych reprezentatywnych modeli zmienności struktury i parametrów układu frezarki [110]. Sumowano

tylko wartości tego samego wskaźnika jakości. W ten sposób uzyskano 10 kryteriów lokalnych F_{ik}

$$F_{ik} = F_{ik}(\omega_j \cdot u_{kij}^n) \quad (6.9)$$

gdzie

- ω_j – współczynnik wagi ważności j -tego reprezentatywnego modelu ($\omega_j = 1$ dla wszystkich j), $j = \{1, \dots, 16\}$,
 u_{kij}^n – k -te elementarne kryterium skuteczności wibroizolacji w j -tym reprezentatywnym modelu dla i -tego wibroizolatora, $k = \{1, \dots, 10\}$, (patrz 6.5).

W rozpatrywanym przypadku istniała możliwość wprowadzenia wag ω różnych od jedności, ponieważ łatwo było podać ich interpretację. Małą wagę otrzymywały reprezentatywne modele pracy frezarki rzadko stosowane przy jej eksploatacji.

Włączenie do analizy *Metody Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych* pozwoliło wygenerować zbiór rozwiązań niezdominowanych w sensie Pareto. Okazało się, że wszystkie analizowane rozwiązania konstrukcyjne wibroizolatorów oraz posadowienie sztywne należały do tego zbioru. Następnie wyznaczono wektor idealny, który stał się punktem odniesienia w dalszej analizie wielokryterialnej

$$F^0 = [1.00 \ 1.00 \ 1.00 \ 1.00 \ 1.00 \ 1.00 \ 1.00 \ 1.00 \ 0.00626 \ 0.0824 \ 0.0730]^T.$$

Wartości pierwszych siedmiu składowych wektora F^0 pochodziły od rozwiązania sztywnego posadowienia frezarki. Okazało się jednak, że decydujące znaczenie miały składowe nr 8, 9 i 10 (należące do wibroizolatora OW-31), o wartościach wielokrotnie mniejszych od wartości tych samych składowych dla posadowienia sztywnego.

Tablica 6.22

Wyniki wielokryterialnej oceny skuteczności wibroizolacji frezarki FWD-32J

Lp.	Wagi ω_k	Typ wibroizolatora
1.	$\omega_1 \div \omega_{10} = 0.1$	OW-31
2.	$\omega_1 \div \omega_7 = 0.11$; $\omega_8 = 0.08$; $\omega_9 = 0.08$; $\omega_{10} = 0.07$	OW-31
3.	$\omega_1 \div \omega_7 = 0.12$; $\omega_8 = 0.05$; $\omega_9 = 0.05$; $\omega_{10} = 0.06$	UC1.6
4.	$\omega_1 = 0.09$; $\omega_2 = 0.3$; $\omega_3 \div \omega_7 = 0.09$; $\omega_8 = \omega_9 = 0.05$; $\omega_{10} = 0.06$	UC1.6
5.	$\omega_1 \div \omega_6 = 0.09$; $\omega_7 = 0.3$; $\omega_8 = 0.05$; $\omega_9 = 0.05$; $\omega_{10} = 0.06$	UC1.6
6.	$\omega_1 \div \omega_7 = 0.08$; $\omega_8 = 0.1$; $\omega_9 = 0.24$; $\omega_{10} = 0.1$	OW-31

Stosując *Metodę Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych* z metryką min-max wyznaczono rozwiązanie kompromisowe, którym okazał się wibroizolator OW-31 – tablica 6.22, wiersz nr 1. Następnie wielokrotnie powtórzono wyznaczanie rozwiązań kompromisowych stosując metrykę min-max z wagami

(pamiętając, że suma ω_k równa jest 1). Wygenerowane rozwiązania kompromisowe dla różnych wartości wag pokazano w tablicy 6.22. Analiza wykazała niewrażliwość uzyskiwanego rozwiązania kompromisowego na preferencje przypisane poszczególnym lokalnym kryteriom oceny.

6.6.3. Wnioski końcowe

Przeprowadzona analiza *Metodą Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych* dowiodła, że posadowienie sztywne nie staje się nigdy rozwiązaniem kompromisowym.

W zależności od przyjętych preferencji dla poszczególnych kryteriów rozwiązaniami kompromisowymi były wibroizolatory: OW-31 albo UC1.6 i one powinny być preferowane przy posadowieniu frezarki.

W przeciwieństwie do oceny na podstawie kryterium globalnego (uzyskanego przy dwukrotnej skalaryzacji), analiza *Metodą Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych* dała jednoznaczną odpowiedź o korzystnym wpływie stosowania wibroizolatorów OW-31 i UC1.6 na efekty pracy frezarki.

7. Uwagi końcowe, wnioski i prognozowanie dalszych prac

W pracy przedstawiono spójny system metodologiczny komputerowo wspomaganą analizę wielokryterialną. Główny cel opracowania nowej metodologii stanowiło znalezienie sposobu wyznaczania takich „rozwiązań najlepszych”, które byłyby niezależne od preferencji przypisywanych poszczególnym kryteriom przez ekspertów i decydentów, maksymalnie wykorzystując wewnętrzne właściwości analizowanych rozwiązań. Zaproponowane podejście opiera się na wielokrotnej selekcji skończonego zbioru rozwiązań niezdominowanych przy użyciu czterech jakościowo różnych metod analizy wielokryterialnej, przy czym wynikowy podzbiór otrzymany przy selekcji jedną z metod stanowi podzbiór wejściowy do kolejno zastosowanej metody. Pierwsze trzy metody odrzucają część analizowanych rozwiązań i w ten sposób generują podzbiory rozwiązań niezdominowanych, zaś ostatnia z użytych metod wyznacza z podzbioru rozwiązań niezdominowanych mało liczne reprezentacje rozwiązań kompromisowych. Na ich podstawie wyznaczane są rozwiązania reprezentatywne, a w końcowym etapie analizy – rozwiązanie preferowane.

W celu realizacji nowej idei poszukiwania „rozwiązań najlepszych” opracowano autorski system komputerowego wspomaganie decyzji, który nazwano *Ewolucyjnym Systemem Analizy Wielokryterialnej*. Stworzony system obejmuje cztery jakościowo różne metody analizy wielokryterialnej: *Metodę Wartości Progowej*, *Metodę Definiowania Punktu Idealnego*, *Metodę Przedziału Nierozróżnialności* oraz *Metodę Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych*. Pierwsza z metod znana jest z literatury przedmiotu, pozostałe trzy są autorskimi metodami do analizy wielokryterialnej.

Metoda Wartości Progowej MWP realizuje opisane w literaturze zadanie satysfakcji, polegające na wskazaniu oceny zadowalającej. W wyniku selekcji przeprowadzonej tą metodą eliminujemy rozwiązania wyznaczające punkty narożne i rozwiązania leżące w ich sąsiedztwie. MWP jest metodą niekompensacyjną, to jest odrzucającą rozwiązania, które uzyskują niezadowalające

wartości chociażby jednego kryterium, mimo bardzo dobrych wartości pozostałych kryteriów. Po zakończeniu selekcji MWP istnieje konieczność wyznaczenia nowego punktu idealnego. Efektem selekcji jest otrzymanie podzbioru rozwiązań niezdominowanych.

Metoda Definiowania Punktu Idealnego MDPI również eliminuje rozwiązania narożne i rozwiązania leżące w ich sąsiedztwie, ale w tym przypadku decydent wskazuje, które z rozwiązań uważa za wzorzec pozytywny. Selekcja polega tu na odrzuceniu rozwiązań, dla których oceny wprowadzonego rozwiązania nie mogą być nowym punktem idealnym. Takie podejście odróżnia metodę MDPI od opisanego w literaturze klasycznego zastosowania punktów referencyjnych. MDPI jest również metodą niekompensacyjną. W przypadku, gdy wektor kryteriów składa się z kryteriów niekooperacyjnych, przy jej użyciu można eliminować rozwiązania posiadające bardzo dobre wartości przynajmniej jednego kryterium, ale niezbyt dobre wartości pozostałych kryteriów. W efekcie selekcji otrzymuje się nowy podzbiór rozwiązań niezdominowanych.

Metoda Przedziału Nierozróżnialności MPN realizuje wprowadzoną w pracy optymalność w sensie przedziału nierozróżnialności i umożliwia eliminowanie rozwiązań, których oceny leżą we wzajemnym sąsiedztwie. Metoda ta stosuje zmodyfikowaną procedurę mutacji. Wartość mutacji podawana jest przez projektanta w procentach wartości analizowanego kryterium i nazywana przedziałem nierozróżnialności. Po selekcji otrzymujemy podzbiór rozwiązań niezdominowanych w sensie przedziału nierozróżnialności, którego liczebność zależy przede wszystkim od wprowadzonej wartości przedziału nierozróżnialności PN oraz od rozmieszczenia rozwiązań w analizowanym podzbiorze. Należy zaznaczyć, że kształt wygenerowanego podzbioru rozwiązań niezdominowanych w sensie przedziału nierozróżnialności pozostaje zachowany. W pracy zwrócono szczególną uwagę na zbudowanie efektywnych algorytmów realizujących MPN. Opracowano kilka praktycznych algorytmów: *Algorytm dwufazowy*, *Algorytm jednofazowy*, *Algorytm z korekcją przedziału nierozróżnialności*, *Algorytm klasyczny z narastającą wartością przedziału nierozróżnialności*, *Algorytm hybrydowy z narastającą wartością przedziału nierozróżnialności* oraz *Algorytm z odwróconą analizą*. Zaproponowane algorytmy zostały przetestowane na przykładach, a wyniki otrzymane przy ich użyciu porównano między sobą i z wynikami otrzymanymi przy zastosowaniu uznanych metod zaczerpniętych z literatury. Najlepsze rezultaty otrzymano wykorzystując *Algorytm hybrydowy z narastającą wartością przedziału nierozróżnialności z odwróconą analizą*. Algorytmu tego użyto w prezentowanych przykładach zastosowania systemu <ESAW>.

Metoda Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych MWRK umożliwia, przy zastosowaniu funkcji dystansowej z normą $\|r\| \rightarrow +\infty$, wyznaczenie małego licznego podzbioru rozwiązań niezdominowanych. Dzięki wprowadzeniu operacji krzyżowania rozwiązania kompromisowego z punktem idealnym

uzyskano możliwość generowania punktów idealnych, które w kolejnych krzyżowaniach zbliżają się do brzegu analizowanego podzbioru rozwiązań niezdominowanych. Stąd też nazwano je nadążnymi punktami idealnymi. MWRK dąży do wykorzystania wewnętrznych właściwości analizowanych rozwiązań. Nadążne punkty idealne stają się nowymi, obowiązującymi punktami odniesienia, służącymi do wyznaczania rozwiązań kompromisowych. By umożliwić porównywanie wartości różnych wielkości, wbudowano wewnętrzną funkcję normalizującą, odnoszącą analizowane kryteria do wartości uzyskanych przez wektor idealny. Zastosowanie do MWRK poszukiwań z normą Czebyszewa prowadzi do zadania minimalizacji maksymalnego przyrostu składowej wektora kryteriów. W MWRK można również wprowadzić własne preferencje dla poszczególnych składowych wektora kryteriów. Przypisane wagi (ich suma równa się 1) odnoszą się do względnych przyrostów tych składowych, stąd dość dobrze odzwierciedlają preferencje decydenta lub eksperta. Wyznaczony podzbiór rozwiązań kompromisowych właściwie zachowuje kształt analizowanego podzbioru rozwiązań niezdominowanych.

7.1. Wnioski poznawcze

1. *Ewolucyjny System Analizy Wielokryterialnej* składa się z czterech jakościowo różnych metod. W trzech pierwszych proces filtracji przebiega dzięki analizie rzeczywistych wartości kryteriów (nie wykonuje się żadnych operacji na wartościach składowych wektora kryteriów). W czwartej metodzie (MWRK) została wbudowana wewnętrzna funkcja normalizująca, która pozwala na porównywanie składowych wektora kryteriów wyrażonych w różnych jednostkach.
2. W *Ewolucyjnym Systemie Analizy Wielokryterialnej* nie przeprowadza się ani jawnej, ani ukrytej skalaryzacji. Skalaryzacja jawna polega na agregacji składowych wektora kryteriów w jedno kryterium (np. utworzenie kryterium zadaniowego lub kryterium globalnego). Przez ukrytą skalaryzację rozumie się działanie, które obejmuje: wyznaczenie globalnych preferencji grupy ekspertów na podstawie indywidualnych preferencji członków tej grupy (np. w metodzie Saat'ego), łączenie informacji o preferowaniu jednego rozwiązania przez drugie (np. w metodach z relacją przewyższania).
3. *Ewolucyjny System Analizy Wielokryterialnej* umożliwia wyznaczenie mało licznego podzbioru rozwiązań niezdominowanych przy użyciu jednej funkcji dystansowej (zastosowanie *Metody Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych*). Jest to możliwe dzięki wprowadzeniu zmodyfikowanej operacji krzyżowania, w wyniku której uzyskuje się wiele punktów odniesienia (nadążne punkty idealne) w procesie generowania rozwiązań kompromisowych.

4. W opracowanym *Ewolucyjnym Systemem Analizy Wielokryterialnej* można wyróżnić dwa pojęcia ewolucyjności: zewnętrzną oraz wewnętrzną. Ewolucyjność zewnętrzna rozumiana jest tutaj jako wieloetapowe, interaktywne dochodzenie do końcowego „rozwiązania najlepszego” poprzez stopniowe zawężanie zawartości analizowanego podzbioru rozwiązań niezdominowanych dzięki użyciu kolejnych metod filtracji. Ewolucyjność wewnętrzna wynika z faktu, że dwie oryginalne metody analizy wielokryterialnej wykorzystują narzędzia będące podstawą optymalizacyjnych algorytmów genetycznych i ewolucyjnych. *Metoda Przedziału Nierozróżnialności* stosuje zmodyfikowaną operację mutacji, zaś *Metoda Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych* posługuje się zmodyfikowaną operacją krzyżowania.
5. W *Ewolucyjnym Systemie Analizy Wielokryterialnej* zastosowano nową metodologię poszukiwania końcowego „rozwiązania najlepszego” (rozwiązania preferowanego). Dla każdego zbioru preferencji podanych przez poszczególnych ekspertów wyznacza się podzbiór rozwiązań kompromisowych. Tak wyznaczone podzbiory porównuje się w celu wyszukania rozwiązań reprezentatywnych – tzn. takich, które występują we wszystkich wygenerowanych podzbiorach lub w większości tych podzbiorów. Rozwiązanie preferowane (rozwiązania preferowane) jest (są) wskazywane po przeprowadzeniu dodatkowej analizy w przestrzeni zmiennych decyzyjnych. Wynikiem finalnym tak wykonanej analizy jest wyznaczenie rozwiązania (rozwiązań) najmniej wrażliwego na zmiany preferencji przypisanych poszczególnym kryteriom. W *Ewolucyjnym Systemie Analizy Wielokryterialnej* można przeprowadzić wyżej wymienioną analizę nie posiadając preferencji ekspertów. W takiej sytuacji operator systemu sam wprowadza wagi, oznaczające ważność poszczególnych składowych wektora kryteriów, opierając się między innymi na pochodzeniu składowych wektora idealnego.
6. Przeprowadzone testy i badania porównawcze wykazały, że zastosowanie *Algorytmu hybrydowego z narastającą wartością przedziału nierozróżnialności i odwróconą analizą* w przypadku *Metody Przedziałów Nierozróżnialności* zapewnia generowanie najlepszych podzbiorów rozwiązań niezdominowanych w sensie przedziału nierozróżnialności. Podzbiory te zawierają mniejszą liczbę elementów, niż podzbiory uzyskane przy zastosowaniu innych algorytmów oraz składają się w większości przypadków z tych samych elementów, mimo zastosowania różnych porządków wprowadzania danych do analizy.

7. Badania porównawcze *Metody Przedziałów Nierozróżnialności* oraz *Metody Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych* z metodami uznanymi w literaturze (ELECTRE III, ORESTE, MAPPAC, metodą koleracyjno-wagową, metodą skupień) pokazały, że wyznaczone podzbiory rozwiązań kompromisowych są identyczne lub bardzo zbliżone, a występujące różnice wynikają po części ze specyfiki zastosowanych metod.

7.2. Wnioski utylitarne i szczegółowe dotyczące przykładów obliczeniowych

1. W przykładzie 6.1 dokonano postoptymalnej analizy wielokryterialnej rozwiązań jednostopniowej przekładni walcowej, wygenerowanej dzięki zastosowaniu systemu do wielokryterialnej optymalizacji. Użycie systemu <ESAW> umożliwiło – poprzez wielostopniową filtrację 22 rozwiązań dopuszczalnych – wyznaczenie jednego rozwiązania preferowanego, które okazało się niewrażliwe na zmianę preferencji przypisywanych składowym analizowanego wektora kryteriów.
2. W przykładzie 6.2 analiza przeprowadzona *Metodą Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych* wykazała mniejsze zużycie rozpylaczy zasilanych paliwem ONM, niż rozpylaczy eksploatowanych na paliwie ON. Wygenerowane podzbiory rozwiązań kompromisowych nie zawierały rozpylaczy zasilanych przez ON lub ich liczba była wielokrotnie mniejsza od liczby rozpylaczy eksploatowanych na paliwie ONM.
3. W przykładzie 6.3 stosując *Metodę Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych* wyznaczono ze zbioru zaprojektowanych i przebadanych konstrukcji rozpylaczy rozwiązanie preferowane o numerze roboczym 256A. Rozpylacz ten należał do wszystkich wygenerowanych podzbiorów rozwiązań kompromisowych, mimo dokonywania zmiany liczby kryteriów i przypisywanych im preferencji podczas analizy. Należy dodać, że zanieczyszczenie środowiska powodowane zastosowaniem tego rozpylacza będzie mniejsze w porównaniu z hipotetycznym rozpylaczem emitującym do środowiska szkodliwe związki, zgodnie z zaleceniami normy Euro II. Ustalenie to skłania do wprowadzenia tego rozpylacza do wtryskiwaczy samochodów ciężarowych wyprodukowanych przed laty, a nadal jeżdżących po naszych drogach.
4. W przykładzie 6.4 dzięki użyciu systemu <ESAW> poddano analizie 92 projekty dozwojenia do istniejącego elektromagnesu nadprzewodnikowego pełniącego funkcję separatora cząstek ferromagnetycznych. Ewolucyjne filtrowanie zbioru rozwiązań uzyskanych podczas projektowania doprowadziło do wyodrębnienia czterech rozwiązań reprezentatywnych – niewrażliwych na zmianę preferencji przypisywanych analizowanym

kryteriom. Dodatkowa analiza w przestrzeni zmiennych decyzyjnych pozwoliła na wybór jednego rozwiązania o numerze 78. Analiza rozkładu pola magnetycznego w obszarze matrycy tego separatora pokazała, że otrzymano znaczną poprawę jednorodności rozkładu pola w obszarze jego pracy.

5. Przykład 6.5 przedstawia współdziałanie *Ewolucyjnego Systemu Analizy Wielokryterialnej* i metody MES, prowadząc do znalezienia optymalnych wymiarów projektowanych segmentów łożysk wzdłużnych smarowanych hydrodynamicznie. Wieloetapowa analiza wykazała, że rozwiązania reprezentatywne powstają w obszarze, gdzie wielkości projektowe segmentów sztywnych i podatnych przyjmują duże wartości z ustalonych przez projektanta wielkości dostępnych.
6. W przykładzie 6.6 pokazano korzystny wpływ stosowania wibroizolatorów OW-31 i UC1.6 na całkowity efekt pracy frezarki, dzięki oryginalnemu sformułowaniu problemu oraz przeprowadzeniu analizy *Metodą Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych*. Tym samym wykazano, że ocena uzyskana na podstawie kryterium globalnego powstałego w procesie dwukrotnej skalaryzacji może prowadzić do niejednoznacznych i błędnych wyników.

Przedstawione przykłady zastosowania *Ewolucyjnego Systemu Analizy Wielokryterialnej* do zagadnień technicznych potwierdziły walory zaproponowanej ewolucyjnej koncepcji dochodzenia do rozwiązania preferowanego, poprawności doboru metod wchodzących w skład tego systemu oraz idei wykorzystania wewnętrznych własności analizowanych rozwiązań.

7.3. Główne elementy dorobku pracy

Oryginalnym dorobkiem pracy, w przeświadczeniu autora, są:

1. Wprowadzenie selekcji rozwiązań niezdominowanych poprzez opracowanie *Metody Definiowania Punktu Idealnego*.
2. Opis różnorodnych wariantów zadania satysfakcji w odniesieniu do selekcji istniejących rozwiązań niezdominowanych przy użyciu *Metody Wartości Progowej*.
3. Zdefiniowanie i opis optymalności w sensie przedziału nierozróżnialności oraz opracowanie *Metody Przedziału Nierozróżnialności* służącej do selekcji rozwiązań niezdominowanych.
4. Opracowanie różnych algorytmów realizujących w praktyce optymalność w sensie przedziału nierozróżnialności.
5. Zbudowanie algorytmu do *Metody Przedziału Nierozróżnialności* niewrażliwego na kolejność wprowadzania danych, to jest *Algorytmu hybrydowego z narastającą wartością przedziału nierozróżnialności z odwróconą analizą*.

6. Zdefiniowanie dodatkowych punktów charakterystycznych w przestrzeni kryterialnej: lokalnych punktów idealnych, lokalnych punktów nadiru, nadszarych punktów idealnych.
7. Opis koncepcji wyznaczania podzbioru rozwiązań kompromisowych ze zbioru rozwiązań niezdominowanych poprzez opracowanie *Metody Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych*.
8. Opracowanie koncepcji poszukiwania „rozwiązania najlepszego”, mało wrażliwego na preferencje przypisywane przez ekspertów poszczególnym składowym wektora kryteriów.
9. Rozróżnienie i zdefiniowanie zmodyfikowanego znaczenia następujących pojęć: rozwiązanie kompromisowe, rozwiązanie reprezentatywne, rozwiązanie preferowane.
10. Zbudowanie *Ewolucyjnego Systemu Analizy Wielokryterialnej* poprzez zastosowanie i właściwe powiązanie następujących metod: *Metody Wartości Progowej*, *Metody Definiowania Punktu Idealnego*, *Metody Przedziału Nierozróżnialności*, *Metody Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych*.
11. Prezentacja różnorodnych zastosowań *Ewolucyjnego Systemu Analizy Wielokryterialnej* w zagadnieniach technicznych do:
 - analizy postoptymalnej wyników otrzymanych przy zastosowaniu metod z wbudowanymi procedurami optymalizacyjnymi,
 - analizy rezultatów będących efektem zastosowania metod bez wbudowanych algorytmów optymalizacyjnych,
 - analizy wyników badań obiektów, które zostały zaprojektowane i poddane testom eksploatacyjnym,
 - analizy oferty katalogowej.

7.4. Prognozowane kierunki badań

Na podstawie przedstawionych wyników badań teoretycznych, dotyczących wspomaganie decyzji przy wielorakości celów, oraz przykładów zastosowań opracowanego *Ewolucyjnego Systemu Analizy Wielokryterialnej* w zagadnieniach technicznych można wyznaczyć następujące dalsze kierunki badawcze:

1. Opracowanie koncepcji i algorytmów generowania nadszarych punktów nadiru.
2. Opracowanie koncepcji i algorytmów bipolarnego ewolucyjnego systemu analizy wielokryterialnej z wykorzystaniem jako punktów odniesienia: punktu idealnego, nadszarych punktów idealnych oraz punktu nadiru i nadszarych punktów nadiru.
3. Wykorzystanie optymalności w sensie przedziału nierozróżnialności do opracowania metody i algorytmów w celu redukcji wymiaru analizowanego wektora kryteriów.

4. Wykorzystanie koncepcji generowania nadeżnych punktów idealnych i nadeżnych punktów nadiru do identyfikacji położenia punktów referencyjnych pełniących funkcję wzorców pozytywnych albo negatywnych względem znanego zbioru rozwiązań dopuszczalnych w n -wymiarowej przestrzeni kryterialnej.
5. Opracowanie koncepcji zastosowania *Metody Przedziałów Nierozróżnialności* do filtracji i selekcji rozwiązań niezdominowanych w genetycznych i ewolucyjnych algorytmach optymalizacji wielokryterialnej.
6. Zastosowanie *Metody Przedziałów Nierozróżnialności* do opracowania genetycznego algorytmu optymalizacji wielokryterialnej poprzez nadawanie rang ważności generowanym rozwiązaniom niezdominowanym.

BIBLIOGRAFIA

1. Agrell P.: On redundancy in multicriteria decision making, *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 98, 1997, s. 571–586.
2. Al-Kloub B., Al-Shemmeri T., Pearman A.: The role of weights in multi-criteria decision aid, and the ranking of water projects in Jordan, *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 99, 1997, s. 278–288.
3. Ameljańczyk A.: Metoda punktu idealnego w rozwiązywaniu zadań polioptymalizacji, XXII Symp. PTMTiS Modelowanie w Mechanice, Politechnika Śląska, Zeszyty Naukowe, 1983, *Automatyka*, z. 67, s. 7–16.
4. Ameljańczyk A.: Metoda redukcji zbioru elementów optymalnych w sensie Pareto, *Biul. WAT*, XXXIII, 12, 1984, s. 111–115.
5. Ameljańczyk A.: Optimal solution of collective decision problems, *Systems Science*, vol. 9, no. 4, 1983, s. 5–16.
6. Ameljańczyk A.: Optymalizacja wielokryterialna w problemach sterowania i zarządzania, Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wrocław 1984.
7. Ameljańczyk A.: Wpływ przyjętej metody polioptymalizacji na wybór rozwiązania konstrukcyjnego, XXIII Symp. PTMTiS Modelowanie w Mechanice, Beskid Śląski, 1984, s. 509–519.
8. Balicki J.: Algorytmy ewolucyjne oraz algorytmy przeszukiwania tabu do optymalizacji przydziałów modułów programów w rozproszonych systemach komputerowych, *Zeszyty Naukowe AMW*, nr 141B, Gdynia 2000.
9. Balicki J.: Dialogowa metoda wyboru optymalnego wariantu złożonego systemu przez grupę ekspertów, [w:] Tarnowski W. [207], s. 17–25.
10. Balicki J.: Evolutionary computation for finding Pareto solutions from discrete sets. *Proc. of the 6th Inter. Conf. on Electronics, Communications and Computers*, Universidad de las Américas–Puebla, Mexico, 24–26 February 1997, s. 151–154.
11. Ballester E.: Selecting the CP metric: A risk aversion approach, *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 97, 1997, s. 593–596.
12. Bana E Costa C.A. (ed.), *Readings in Multiple Criteria Decision Aid*, Springer-Verlag, Berlin 1990.
13. Bana E Costa C.A., Stewart T.J., Vansnick J.–C.: Multicriteria decision analysis: Some thoughts based on the tutorial and discussion sessions of the ESIGMA meeting. *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 99, 1997, s. 28–37.
14. Bauer J.: A survey of methods for discrete optimum structural design, *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, 1994, vol. 1, s. 27–38.
15. Beccali M., Cellura M., Ardente D.: Decision making in energy planning: the ELECTRE multicriteria analysis approach compared to a fuzzy-sets methodology, *Energy Convers. Mgmt*, vol. 39, 1998, no. 16–18, s. 1869–1881.
16. Bowman V.J.Jr.: On the relationship between the Tchebycheff norm and the efficient frontier of multi-criteria objectives, [in:] Thirez H., Zions S. [222], s. 55–71.
17. Brandt A.M. (red.): *Metody optymalizacji materiałów kompozytowych o matrycach cementowych*, PAN KILiW IPPT, Studia z Zakresu Inżynierii, nr 38, Warszawa 1994.
18. Brandt A.M. (red.): *Kryteria i metody optymalizacji konstrukcji*, PWN, Warszawa 1977, *Criteria and Methods of Structural Optimization*, PWN, Warszawa, Martins Nijhoff Publishers, The Hague – Boston – Lancaster 1984.

19. Brans J.P., Vincke Ph.: A preference ranking organization method, *Management Science*, nr 31 (6), 1985, s. 647–656.
20. Bubnicki Z., Grzech A. (red.): *Inżynieria wiedzy i systemy ekspertowe*, tom 1, Wrocław 1997.
21. Burczyński T.: *Metoda elementów brzegowych w mechanice*, WNT, Warszawa 1995.
22. Burczyński T., Kuś W., Majchrzak E., Orantek P.: Evolutionary computation based on biological tissue surface temperature in identification of a tumor, *Proc. Evolution in Real and Virtual Systems PERVS'01*, Cracow 2002, s. 75–79.
23. Cheng F.Y., Li D.: Multiobjective optimization design with Pareto genetic algorithm, *J. of Struc. Engin.*, vol. 123, 1997, s. 1252–1261.
24. Cichy M., Płonka S., Rduch R.: Wybór optymalnego rozwiązania konstrukcyjnego stanowiska do montażu i badań reduktorów, [w:] Tarnowski W. [210], s. 67–74.
25. Clímaco J.C.N.: A critical reflection on optimal decision, *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 153, 2004, s. 506–516.
26. Corner J.T., Buchanan J.T.: Capturing decision maker preference: Experimental comparison of decision analysis and MCDM techniques, *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 98, 1997, s. 85–97.
27. Czyżak P., Jaskiewicz A.: Pareto Simulated Annealing – A Metaheuristic Technique for Multiple Objective Combinatorial Optimization, *J. M-Cri. Dec. Anal.*, vol. 7, 1998, s. 34–47.
28. Dias L., Costa J., Clímaco J.: Conflicting criteria, cooperating processors – some experiments on implementing a multicriteria decision support method on a parallel computer, *Computers Ops Res.*, vol. 24, 1997, s. 805–817.
29. Dias L., Costa J., Clímaco J.: A parallel implementation of the PROMETHEE method, *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 104, 1998, s. 521–531.
30. Dias L., Mousseau V., Figueira J., Clímaco J.: An aggregation/disaggregation approach to obtain robust conclusions with ELECTRE TRI, *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 138, 2002, s. 332–338.
31. Ehrgott M., Tenfelde-Podehl D.: Computation of ideal and Nadir values and implications for their use in MCDM methods, *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 151, 2003, s. 119–139.
32. Eschenauer H., Koski J., Osyczka A. (eds): *Multicriteria design optimization: Procedures and applications*, Springer-Verlag, Berlin – Heideberg – New York 1990.
33. Escobar M.T., Moreno-Jiménez J.M.: A linkage between the analytic hierarchy process and the compromis programming models, *Omega* 30, 2002, s. 359–365.
34. Ettles C.: Size Effects in Tilting Pad Thrust Bearings, *Wear*, 59, 1980.
35. Fandel G., Gal T., (eds): *Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems*, 177, Springer-Verlag, Berlin 1980.
36. Fiala P.: Comparison of three outranking methods, [w:] Tarnowski W. [205], s. 57–64.
37. Figueira J., Roy B.: Determining the weights of criteria in the ELECTRE type methods with a revised Simos' procedure, *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 139, 2002, s. 317–326.
38. Findeisen W., Szymanowski J., Wierzbicki A.: *Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji*, Biblioteka Naukowa Inżyniera, PWN, Warszawa 1980.
39. Fishburn P.C.: *Utility Theory for Decision-Making*, John Wiley, New York 1970.
40. Friedman L., Sinuany-Stern Z.: Combining ranking scales and selecting variables in the DEA context: The case of industrial branches, *Computers Ops Res.*, vol. 25, 1998, s. 781–791.

41. Galas Z., Nykowski I., Żółkiewski Z.: Programowanie wielokryterialne, PWE, Warszawa 1987.
42. Gandibleux X.: Interactive multicriteria procedure exploiting a knowledge-based module to select electricity production alternatives: The CASTART system, *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 113, 1999, s. 355–373.
43. Goldberg D.E.: Algorytmy genetyczne i ich zastosowanie, WNT, Warszawa 1995, *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*, Addison–Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Massachusetts, USA, 1989.
44. González-Paegón J., Romero C.: Aggregation of partial ordinal rankings: an interval goal programming approach, *Comp. and Oper. Res.*, vol. 28, 2001, s. 827–834.
45. Górkiewicz M.: Symetryczne cykliczne uporządkowanie preferencyjne, [w:] Bubnicki Z., Grzech A. [20], 1997, s. 89–96.
46. Guh Y.–Y.: Introduction to a new weighing method – hierarchy consistency analysis, *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 102, 1997, s. 215–226.
47. Gutenbaum J.: Modelowanie matematyczne systemów, Omnitech Press, Warszawa 1992.
48. Gutkowski W., Bauer J.: *Discrete Structural Optimization*, Springer–Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1993.
49. Gutkowski W., Mróz Z. (red.): *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Proceedings of WCSMO–2, vol. 1, 26–30 May, Zakopane 1997.
50. Haftka R.T., Gürdal Z., Kamat M.P.: *Elements of Structural Optimization*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1990.
51. Haralambopoulos D.A., Polatidis H.: Renewable energy projects: structuring a multicriteria group decision–making framework, *Renewable Energy*, vol. 28, 2003, s. 961–973.
52. Huang Z., Li S.X., Rousseau J.J.: Determining rates of change in data envelopment analysis, *J. Oper. Res. Soc.*, vol. 48, 1997, s. 591–599.
53. Hwang C.L., Masud A.S.M.: *Multiple Objective Decision Making Methods and Applications*. Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1979.
54. Idzior M.: Badanie wpływu wybranych parametrów rozpylaczy na emisję składników toksycznych spalin silników o zapłonie samoczynnym, *Teka Komisji Naukowo–Problemowej Motoryzacji PAN O. w Krakowie*, z. 20, 2000, s. 309–317.
55. Idzior M.: Badania nad doбором parametrów wtryskiwaczy silników o zapłonie samoczynnym metodami optymalizacyjnymi, *Materiały Ogólnopolskiej Konferencji Naukowej KONSSPAL'2000*, Wrocław 2000, s. 57–67.
56. Idzior M., Merksiz J., Tarkowski P., Wiechecki W.: Przegląd nieniszczących metod oceny powierzchni przyłgi korpusów rozpylaczy paliwa, *ZN Politechniki Poznańskiej*, nr 40/93, Poznań 1993, s. 76–87.
57. Idzior M., Montusiewicz J.: Zastosowanie procedur optymalizacyjnych do oceny rozpylaczy silników o zapłonie samoczynnym, *Teka Komisji Naukowo–Problemowej Motoryzacji PAN O. w Krakowie*, z. 22, 2001, s. 169–174.
58. Jaskiewicz A., Słowiński R.: The Light Beam Search – Outranking Based Interactive Procedure for Multiple–Objective Mathematical Programming, [in:] Pardalos P.M., Siskos Y., Zopounidis C. [142], s. 129–146.
59. Jaskiewicz A., Słowiński R.: The 'Light Beam Search' Approach – an Overview of Methodology and Application, *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 113, no. 2, 1999, s. 300–314.
60. Jendo S.: Multiobjective optimization, [in:] Save M., Prager W. [171], s. 311–342.
61. Jendo S., Marks W.: O wielokryterialnej optymalizacji konstrukcji, *Archiwum Inżynierii Lądowej*, tom XXX, z. 1, 1984, s. 3–21.

62. Jendo S., Marks W., Paczkowski W.M.: Matematyczne podstawy optymalizacji wielokryterialnej. [w:] Marks W., Owczarek S. [101], s. 12–46.
63. Jermakow S.M.: Metoda Monte Carlo i zagadnienia pokrewne, Biblioteka Naukowa Inżyniera, PWN, Warszawa 1976, Metod Monte Carlo i smežnye voprosy, Nauka, Moskwa 1971.
64. Jędrzejuk H., Marks W.: Pewien sposób wyznaczania zbiorów kompromisów w przypadku nieciągłej funkcji celu. Met. Komp. Inż. Łąd. nr 3, 1997, s. 37–50.
65. Kaliszewski I.: Dynamic parametric bounds on efficient outcomes in interactive multicriteria decision making problems, Eur. J. Oper. Res., vol. 147, 2003, s. 94–107.
66. Kaliszewski I.: Quantitative Pareto Analysis by Cone Separation Technique, Kluwer Academic Publishers, Boston 1994.
67. Kaliszewski I., Michałowski W.: Efficient solutions and bounds on tradeoffs, JOTA, No 94, 1997, s. 381–394.
68. Kamińska-Krzowska B., Tarkowski P.: Friction and wear processes modification of ion implanted steel, Nukleonika the International Journal of Nuclear Research, vol. 44, 1999, s. 195–200.
69. Karacapilidis N.I., Pappis C.P.: A framework for group decision support systems: Combining AI tools and OR techniques, Eur. J. Oper. Res., vol. 103, 1997, s. 373–388.
70. Keeney R.L., Raiffa H.: Decisions with Multiple Objectives. Preferences and Value Tradeoffs, Cambridge University Press, 1976.
71. Khan M.G.M., Ahsan M.J., Jahan N.: Compromise allocation in multivariate stratified sampling: An integer solution, Naval Research Logistics, vol. 44, 1997, s. 69–79.
72. Kirsch U.: Optimal Structural Design, McGraw–Hill Book Company, New York 1987.
73. Knosala R., Pedrycz W.: Komputerowy system wspomagający proces oceny rozwiązań konstrukcyjnych, ZN Pol. Śląskiej, nr 1012, Mechanika z. 86, Gliwice 1987.
74. Konarzewska-Gubała E.: Programowanie przy wielorakości celów, PWN, Warszawa 1980.
75. Konarzewska-Gubała E.: Wspomaganie inteligentne decyzji w systemie „Kompromis”, Zesz. Nauk. Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, z. 258, 1998, s. 39–48.
76. Konarzewska-Gubała E.: Wspomaganie decyzji wielokryterialnych: system >BIPO-LAR<, Seria: Monografie i opracowania, nr 76, AE we Wrocławiu, Wrocław 1991.
77. Korngold J.C., Gabriele G.A.: Ultradisciplinary analysis and optimization of discrete problems using response surface methods, J. of Mech. Design, vol. 119, 1997, s. 427–433.
78. Kose V., Sievert J.: Non-linear Electromagnetic Systems, Advanced Techniques and Mathematical Methods, IOS Press, Amsterdam, Berlin 1998.
79. Kotarski W.: Some problems of optimal and Pareto optimal control for distributed parameter systems, Wyd. Uniwersytetu Śląskiego, Katowice 1997.
80. Kotarski W., Pyszny J.: Efektywne metody wyznaczania brzegu Pareto i punktu Salukwadze, [w:] Tarnowski W. [212], s. 115–122.
81. Kulas S.: Wybór wariantu konstrukcji łącznika elektrycznego, [w:] Tarnowski W. [204], s. 336–341.
82. Kuratowski K.: Wstęp do teorii mnogości i topologii wraz z dodatkiem R. Engelkinga: Elementy topologii algebraicznej, Biblioteka Matematyczna, wyd. VI, PWN, Warszawa 1973.
83. Kuśnierczak L.: Wspomagana komputerowo metoda obliczeń ślizgowego łożyska wzdłużnego, Biuletyn Lubelskiego Towarzystwa Naukowego, vol. 1, nr 1–2, 1992, s. 21–31.

84. Kuśnierz L., Montusiewicz J., Ponieważ G.: Polioptymalizacja kształtu segmentów ślizgowego łożyska wzdłużnego, *Folia Societatis Scientiarum Lublinensis, Technika*, vol. 3, nr 2, LTN, Lublin 1994, s. 31–47.
85. Kuśnierz L., Ponieważ G.: A Numerical Simulation of Thrust Bearing Performance with Consideration of the Pad Elastic Deflections, *International Conference on Computer Integrated Manufacturing*, Zakopane, 1994, s. 37–52.
86. Kwiesielewicz M.: Grupowe wielokryterialne podejmowane decyzji w oparciu o metodę porównywania parami, [w:] Tarnowski W. [207], s. 91–98.
87. Kwiesielewicz M.: Pairwise comparison using the logarithmic least squares and the generalised pseudoinverse, *Report of the Department of Mathematics and Informatics, Delft University of Technology*, 1993, s. 84–93.
88. Lahdelma R., Miettinen K., Salminen P.: Ordinal criteria in stochastic multicriteria acceptability analysis (SMAA), *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 147, 2003, s. 117–127.
89. Lenik K. (red.): *Rozwój techniki a problem kształcenia technicznego*, Lubelskie Towarzystwo Naukowe, Lublin 1996.
90. Leśniak Z.K.: *Metody optymalizacji konstrukcji przy zastosowaniu maszyn matematycznych*, Arkady, Warszawa 1970.
91. Libura M.: *Analiza wrażliwości rozwiązań zadań optymalizacji dyskretnej*, PAN IBS, Zak. Wydawniczo-Poligraficzny SYNPRESS, Warszawa 1990.
92. Lotfi V., Pegels C.: *Decision Support Systems for Management Science/Operations Research*, Irwin, Homewood 1989.
93. Lotfi V., Stewart T.J., Zionts S.: An aspiration-level interactive model for multiple criteria decision making, *Comp. and Oper. Res.*, vol. 19, 1992, s. 671–681.
94. Lootsman F.A.: Multicriteria decision analysis in a decision tree, *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 101, 1997, s. 442–451.
95. Łubkowski K., Pogorzelski W.: Ranking wariantów impulsowej obróbki elektrochemicznej, [w:] Tarnowski W. [208], s. 135–138.
96. Łubkowski K., Zawora Józef.: Optymalizacja impulsowej obróbki elektrochemicznej (PECM), [w:] Tarnowski W. [208], s. 127–134.
97. Matros B.: *Programowanie nieliniowe. Teoria i metody*, PWN, Warszawa 1983, *Nonlinear programming. Theory and methods*, Originalverlag Akadémiai Kiadó, Budapest 1975.
98. Matarazzo B.: MAPPAC as a compromise between outranking methods and MAUT, *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 54, 1991, s. 48–65.
99. Malec M.: *Elementarny wstęp do teorii relacji*, Uczelniane Wydawnictwa Naukowo-Dydaktyczne, część I, Kraków 1999.
100. Malec M.: *Elementarny wstęp do teorii relacji*, Uczelniane Wydawnictwa Naukowo-Dydaktyczne, część II, Kraków 2001.
101. Marks W., Owczarek S. (red.): *Optymalizacja wielokryterialna budynków energiooszczędnych*, Komitet Inżynierii Łądowej i Wodnej, IPPT PAN, Warszawa 1999.
102. Merksiz J., Montusiewicz J., Tarkowski P.: O zastosowaniu analizy polioptymalnej w badaniach poeksploatacyjnych rozpylaczy paliwa, *Zagadnienia Eksploatacji Maszyn*, vol. 31, z. 3 (107), 1996, s. 313–328.
103. Michalewicz Z.: *Algorytmy genetyczne + struktury danych = programy ewolucyjne*, WNT, Warszawa, 1996, *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolutionary Programs*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1992.

104. Michałowski W., Szapiro T.: A bi-reference procedure for interactive multiple criteria programming, *Oper. Res.*, vol. 40, no. 1, 1991, s. 62–72.
105. Misiakiewicz J.: Komputerowe wspomaganie wyboru w projektowaniu wstępnym, [w:] Tarnowski W. [204], s. 201–207.
106. Misiakiewicz J.: Mikrokomputerowy system wspomagania wyboru w projektowaniu, [w:] Tarnowski W. [205], s. 143–152.
107. Montusiewicz J.: Pewna metoda poszukiwania rozwiązań reprezentatywnych, [w:] Tarnowski W. [204], s. 46–69.
108. Montusiewicz J.: A method of searching for compromising solutions, [in:] Lenik K. [89], s. 50–70.
109. Montusiewicz J.: Algorytmy eliminacji rozwiązań optymalnych w sensie Pareto metodą przedziałów nierozróżnialności, [w:] Tarnowski W. [211], s. 184–191.
110. Montusiewicz J.: A multicriterial evaluation method of the vibration isolation of the FWD–32J milling machine, [in:] Świć A. [193], s. 325–332.
111. Montusiewicz J.: Characteristic points in polyoptimal analyses of technical problems, *Materiały XV Ogólnopolskiej Konferencji Polioptymalizacja i Komputerowe Wspomaganie Projektowania, Kolobrzeg'97, streszczenia*, s. 30.
112. Montusiewicz J.: Division of the set of nondominated solutions by means of the undifferentiation interval method, [in:] Świć A. [192], s. 65–72.
113. Montusiewicz J.: Punkty charakterystyczne w wielokryterialnej analizie zagadnień technicznych, [w:] Tarnowski W. [210], s. 230–237.
114. Montusiewicz J.: O szczególnym przypadku wyznaczania podzbioru rozwiązań reprezentatywnych, [w:] Tarnowski W. [213], s. 249–256.
115. Montusiewicz J.: Reducing the Pareto optimal set by means of the undifferentiation interval method, [in:] Gutkowski W., Mróz Z. [49], s. 97–102.
116. Montusiewicz J., Kuśnierz L.: A computer aided method of optimal design on the example of a sliding thrust bearings, *Proceedings vol. II, International Conference on Computer Integrated Manufacturing, Zakopane, 14–17 May 1996*, s. 237–244.
117. Montusiewicz J., Osyczka A.: A Decomposition strategy for multicriteria optimization with application to machine tool design, *Engineering Costs and Production Economics*, 20 (1990), s. 191–202.
118. Montusiewicz J., Osyczka A., Zamorski J.: A decomposition method for multicriteria optimization and its application to machine tool spindle design, [in:] Eschenauer H., Koski J., Osyczka A. (eds) [32], s. 282–302.
119. Montusiewicz J., Tarkowski P.: O aplikacjach metody analizy wielokryterialnej w wybranych badaniach rozpylaczy paliwa silników o zapłonie samoczynnych, *Polska Akademia Nauk Oddział w Krakowie, Zeszyt 23 Monografia 3, Kraków 2002*.
120. Montusiewicz J., Tarkowski P.: Wielokryterialna ocena wyników badań z zakresu wybranych problemów techniki samochodowej, *Teka Komisji Naukowo–Problemowej Motoryzacji PAN O. w Krakowie*, z. 18, 1999, s. 317–322.
121. Montusiewicz J., Tarkowski P., Paluch R.: O pewnym przykładzie wykorzystania metody analizy wielokryterialnej w badaniach zużycia pary precyzyjnej igła–korpus rozpylacza paliwa, *Folia Societatis Scientiarum Lublinensis*, vol. 10, 2001, s. 41–56.
122. Morse J.N.: Reducing the size of the nondominated set: pruning the clustering, *Computers and Ops Res.*, vol. 7, 1980, s. 55–66.

123. Mousseau V., Slowinski R., Zielniewicz P.: A user-oriented implementation of the ELECTRE-TRI method integrating preference elicitation support, *Comp. and Oper. Res.*, vol. 27, 2000, s. 757–777.
124. Niczuj J.: Wielokryterialna optymalizacja niezawodności oraz szacowanie stanu technicznego konstrukcji prętowych z zastosowaniem teorii zbiorów rozmytych, PNP nr 581, Katedra Teorii Konstrukcji nr 3, Szczecin 2003.
125. Niewińska J., Ozdżeński W.: Algorytmy genetyczne w wielokryterialnym problemie wyboru optymalnego portfela akcji, *Materiały II Kraj. Konf. Algorytmy Ewolucyjne i Optymalizacja Globalna*, Ryto, 15–19 września 1997, s. 183–192.
126. Ogryczak W.: Wielokryterialna optymalizacja liniowa i dyskretna. Modele preferencji i zastosowania do wspomagania decyzji, Wyd. Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa 1997.
127. Osiński Z., Wróbel J.: *Teoria konstrukcji*, PWN, Warszawa 1995.
128. Osiński J.: Obliczenia wytrzymałościowe elementów maszyn z zastosowaniem metody elementów skończonych, Oficyna Wyd. Pol. Warszawskiej, Warszawa 1997.
129. Ostwald M.: Multicriteria optimization of cylindrical sandwich shells under combined loads, *Structural Optimization*, vol. 12 no. 2/3, October 1996, s. 159–166.
130. Ostwald M.: Optymalne projektowanie trójwarstwowych konstrukcji powłokowych, seria rozprawy, nr 290, Politechnika Poznańska, Poznań 1993.
131. Osyczka A.: Computer Aided Multicriterion Optimization System (CAMOS), Software Package in FORTRAN, International Software Publishers, Cracow, 1992.
132. Osyczka A.: Multicriterion Optimization in Engineering with FORTRAN Programs, John Wiley and Sons, Chichester, 1984.
133. Osyczka A.: Evolutionary Algorithms for Single and Multicriterial Design Optimization, Physica-Verlag, A Springer-Verlag Company, Heidelberg, New York, 2002.
134. Osyczka A., Krenich S., Krzystek J., Habel J.: Evolutionary optimization system (EOS) for design automation, IUTAM Symposium on Evolutionary Methods in Mechanics, Cracow 2002, s. 63–64.
135. Osyczka A., Krzystek J., Krenich S.: Spring design automation using evolutionary algorithms, [w:] Tarnowski W. [214], s. 121–128.
136. Osyczka A., Montusiewicz J.: A random-search approach to multicriterion discrete optimization, [in:] Gutkowski W., Bauer J. [48], s. 71–79.
137. Paczkowski W.M.: Słabe i mocne zagadnienia satysfakcji, [w:] Tarnowski W. [213], s. 265–274.
138. Paczkowski W.M.: Wybrane problemy dyskretnej optymalizacji ewolucyjnej, *Prace Naukowe Politechniki Szczecińskiej*, III, nr 544, Szczecin 1999.
139. Paczkowski W.M.: Wybór rozwiązania preferowanego obiektu optymalizacji metodą reanalizy wielokryterialnej, [w:] Tarnowski W. [211], s. 206–213.
140. Paluch R.: Wpływ ekologicznego oleju napędowego na niektóre parametry pracy silnika o zapłonie samoczynnym oraz zużycie elementów aparatury paliwowej, *Rozprawa doktorska*, Politechnika Lubelska, Lublin 2000.
141. Paluch R., Tarkowski P.: Ispolzowanije ekologiczeskogo topliwa w dizielnych dwigatieliach, *WIЕСSI Nacyjonalnaj Akademii Nauk Bielarusi, IZWIESTIJA AN*, no. 4, 1998, Mińsk, s. 91–98.
142. Pardalos P.M., Siskos Y., Zopounidis C. (eds): *Advances in Multicriteria Analysis*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1995.
143. Pareto V.: *Cours d'economie politique*, vol. 1 and 2, F. Rouge, Lousanne 1896.

144. Parmee I.C.: *Evolutionary and Adaptive Computing in Engineering Design*, A Springer-Verlag Company, Heidelberg, New York, 2001.
145. Peschel M., Riedel C.: *Poliptymalizacja. Metody podejmowania decyzji kompromisowych w zagadnieniach inżynierjno-technicznych*, WNT, Warszawa 1979.
146. Pluta W.: *Wielowymiarowa analiza porównawcza w badaniach ekonomicznych*, PWE, Warszawa 1977.
147. Płonka S.: *Metody oceny i wyboru optymalnej struktury procesu technologicznego, ZN PŁ Filii w Bielsko-Białej*, nr 48, *Budowa i Eksploatacja Maszyn*, nr 31, Bielsko-Biała 1998.
148. Płonka S.: *Model optymalizacji wielokryterialnej struktury procesów technologicznych*, *Postępy Technologii Maszyn i Urządzeń*, z.1, 1994, s. 91–98.
149. Płonka S., Stadnicki J., Wróbel I.: *Metodyka wyboru najlepszego rozwiązania konstrukcyjnego*, [w:] Tarnowski W. [209], s. 207–212.
150. Pogorzelski W.: *Metoda wagowo-korelacyjna określania użyteczności kompromisowej wytworów przy wielu kryteriach*, [w:] Tarnowski W. [204], s. 252–268.
151. Pogorzelski W.: *Teoria systemów i metody optymalizacji*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1996.
152. Pogorzelski W.: *Wagowo-korelacyjna skalaryzacja wielowymiarowej jakości typu rozmiar o normalnych rozkładach brzegowych*, *Wiadomości Statystyczne*, rok XXXVI, nr 8, sierpień 1991, s. 16–21.
153. Prabhu T.R., Vizayakumar K.: *Fuzzy hierarchical decision making (FHDM): A methodology for technology choice*, *Int. J. of Comp. in Technology*, vol. 9, nos 5/6, 1996, s. 322–329.
154. Rakowski G., Kacprzyk Z.: *Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji*, Oficyna Wyd. Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1993.
155. Rasiowa H.: *Wstęp do matematyki współczesnej*, Biblioteka Matematyczna, wyd. 13, PWN, Warszawa 2003.
156. Rogers M., Bruen M.: *A new system for weighting environmental criteria for use within ELECTRE III*, *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 107, 1998, s. 552–563.
157. Romero C.: *Extended lexicographic goal programming: a unifying approach*, *Omega*, vol. 29, 2001, s. 63–71.
158. Romero C.: *Multicriteria decision analysis and environmental economics: An approximation*, *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 96, 1996, s. 81–89.
159. Rosenman M.A., Gero J.S.: *Reducing the Pareto optimal set in multicriteria optimization*, *Eng. Opt.*, vol. 8, 1985, s. 189–206.
160. Roubens M.: *Choice procedures in fuzzy multicriteria decision analysis based on pairwise comparisons*, *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 88, 1996, s. 135–142.
161. Roubens M.: *Preference relations on actions and criteria in multicriteria decision making*, *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 10, 1982, s. 51–55.
162. Roy B.: *The outranking approach and the foundations of ELECTRE methods*, [in:] Bana E Costa C.A. [12], s. 155–183.
163. Roy B.: *Wielokryterialne wspomaganie decyzji*, WNT, Warszawa 1990, *Methodologie Multicritere d'Aide A la Decisin*, Editions Economica, Paris 1985.
164. Roy B., Vincke Ph.: *Multicriteria analysis: Surve and new directions*, *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 8, 1981, s. 207–218.

165. Rusiński E., Czmochowski J., Smolnicki T.: Zaawansowana metoda elementów skończonych w konstrukcjach nośnych, Oficyna Wyd. Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2000.
166. Saaty T.: The analytic hierarchy process, McGraw-Hill, New York 1980.
167. Sakava M., Kato K.: Interactive decision making for large-scale multiobjective linear programs with fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 88, 1997, s. 161–172.
168. Salminen P., Hokkanen J., Lahdelma R.: Comparing multicriteria methods in the context of environmental problems, *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 104, 1998, s. 485–496.
169. Salukwadze M.E.: On the existence of solutions in problems of optimization under vector-valued criteria, *JOTA*, 1974, vol. 13, no. 2, s. 305–322.
170. Salukwadze M.E.: Zadaci wektornej optymalizacji w teorii optymalnego uprawnienia, Miecniereba, Tbilisi 1975.
171. Save M., Prager W. (eds): *Structural Optimization, Volume 1: Optimality criteria*, Plenum Press, New York 1985.
172. Save M., Prager W. (eds): *Structural Optimization, Volume 2: Borkowski A., Jendo S., Reitman M. I.: Mathematical programming*, Plenum Press, New York–London 1990.
173. Sielicki A.: Ewolucyjna metoda znajdowania rozwiązań dopuszczalnych, [w:] Tarnowski W.: [212], s. 269–276.
174. Siskos Y., Spyridakos A.: Intelligent multicriteria decision support: Overview and perspectives, *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 113, 1999, s. 236–246.
175. Skołod B. (red.): *Systemy wspomaganie decyzji w planowaniu produkcji*, Monografia, Wyd. Politechniki Śląskiej, Gliwice 2001.
176. Skulimowski A.M.: *Decision Support Systems Based on Reference Sets*, Rozprawy i monografie, nr 40, Wyd. AGH, Kraków 1996.
177. Słowiński R.: Modelowanie preferencji w wielokryterialnych problemach decyzyjnych, [w:] ZN Politechniki Śląskiej, *Automatyka*, z. 67, Gliwice 1983, s. 95–111.
178. Słowiński R.: Multiobjective network scheduling with efficient use of renewable and nonrenewable resources, *Eur. J. Oper. Res.* vol. 7, no. 3, 1981, s. 265–273.
179. Steuer R.: *Multiple Criteria Optimization, Theory, Computation and Application*, John Wiley & Sons, New York 1986.
180. Spencer M.S.: Production planning in a make-to-order repetitive environment, *Production Planning and Control*, vol. 5, no. 6, 1995, s. 575–584.
181. Surdacki P., Janowski T.: Computation of resistive zone propagation in superconducting winding, *IEEE Trans. Magn.*, vol. 31, 1995, s. 1829–1832.
182. Surdacki P., Montusiewicz J.: Multicriterion designing of additional windings of the cylindrical cryomagnet, [in:] Kose V., Sievert J. [78], s. 111–114.
183. Surdacki P., Montusiewicz J., Kuchciewicz R.: An approach to multicriterion shape optimization of superconducting solenoid windings, [in:] *Proceedings: Electromagnetic Devices and Processes in Environment Protection, International Conference ELMECO'94, 8–9 September, Lublin 1994*, s. 295–300.
184. Sysło M.M., Deo N., Kowalik J.S.: *Algorytmy optymalizacji dyskretnej z programami w języku Pascal*, PWN, Warszawa 1995.
185. System metody elementów skończonych „ALGOR”, Algor Inc. 1993.
186. Szadkowski J.: An approach to dynamic optimization of cutting parameters, *International Conference Development of Metal Cutting DMC'96*, Kosice 1996.
187. Szadkowski J.: The tool blocks replacement strategies optimization for multi tool machining, *IX International Conference on Tools*, Miskolc 1996.

188. Szadkowski J., Stryczek R., Nikiel G.: Projektowanie procesów technologicznych na obrabiarki sterowane numerycznie, ZN PŁ Filii w Bielsko-Białej, nr 26, Budowa i Eksploatacja Maszyn, nr 21, Bielsko-Biała 1995.
189. Szwabowski J., Deszcz J.: Metody wielokryterialnej analizy porównawczej. Podstawy teoretyczne i przykłady zastosowań w budownictwie, Wyd. Politechniki Śląskiej, Gliwice 2001.
190. Szymanowski J. (red.): Metody optymalizacji w języku Fortran, BNInż., PWN, Warszawa 1984.
191. Szyrka J.: Zastosowanie metody APEKS do oceny wartości wskaźnika jakości sterowania eksploatacją, [w:] ZN Politechniki Śląskiej, Automatyka, z. 67, Gliwice 1983, s. 113–120.
192. Świć A. (red.): The Technological Information Systems, Societas Scientiarum Lublinensis, Lublin 1999.
193. Świć A. (red.): The Technological Information Systems in Engineer's Production and Technical Education, Societas Scientiarum Lublinensis, Lublin 2001.
194. Tarkowski P.: Badania trwałościowe rozpylaczy paliwa implantowanych jonowo, Materiały Sekcji Podstaw Eksploatacji KBM PAN, Lublin 1986, s. 61–68.
195. Tarkowski P.: Possible improvement of tribological properties of some parts of combustion engines by implanting them with nitrogen ions, Vacuum Technique and Technology, vol. 3, nos 5/6, Minsk 1993, s. 39–43.
196. Tarkowski P.: Sposób pomiaru struktury geometrycznej wewnętrznych, powierzchni profili zamkniętych trudno dostępnych, zwłaszcza stożkowych w rozpylaczach paliwa, Zgłoszenie w UP PRL nr P-244911.
197. Tarkowski P.: Stanowisko do prób szczelności wtryskiwaczy zwłaszcza samochodowych, Zgłoszenie patentowe nr W-70243.
198. Tarkowski P., Paluch R., Budzyński P.: O wpływie stosowania ekologicznego oleju napędowego na skład nagaru w komorach spalania silników o ZS, Teka Komisji Motoryzacji i Energetyki Rolnictwa PAN O. w Lublinie, Lublin 2001.
199. Tarkowski P., Paluch R., Montusiewicz J.: O wybranych aspektach trybologicznych stosowania ekologicznych paliw do silników o ZS, Teka Komisji Naukowo-Problemovej Motoryzacji PAN O. w Krakowie, z. 21, 2000, s. 291–298.
200. Tarkowski P., Wierzholski K.: Wear changes after nitrogen ions implantations, Zagadnienia Eksploatacji Maszyn, vol. 30, z. 4 (104), 1995, s. 507–519.
201. Tarnowski W.: Model procesu wyboru w projektowaniu technicznym, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Automatyka, z. 72, 1984; WSInż. w Koszalinie, seria monografie, 1987.
202. Tarnowski W.: Podstawy projektowania technicznego, seria: Wspomaganie komputerowe CAD/CAM, WNT, Warszawa 1997.
203. Tarnowski W., Kiczowski T.: Komputerowe wspomaganie projektowania, Wyd. Uczel. WSInż. w Koszalinie, Koszalin 1994.
204. Tarnowski W. (red.): Prace V Krajowej Konf. Polioptymalizacja w Projektowaniu – Mielno'86, ZN WSInż. w Koszalinie, seria WM, Koszalin 1986, nr 8.
205. Tarnowski W. (red.): Prace VI Krajowej Konf. Polioptymalizacja w Projektowaniu – Mielno'87, ZN WSInż. w Koszalinie, seria WM, Koszalin 1987, nr 10.
206. Tarnowski W., Kiczowski T. (red.): Materiały IX i X Ogólnopolskiej Konf. Polioptymalizacja i Komputerowe Wspomaganie Projektowania – Mielno'91 i 92, ZN WSInż. w Koszalinie, seria WM, Koszalin 1994, nr 16.

207. Tarnowski W. (red.): Materiały XII Ogólnopolskiej Konf. Polioptymalizacja i Komputerowe Wspomaganie Projektowania – Mielno'94, ZN WSI^{nz}. w Koszalinie, seria WM, Koszalin 1994, nr 18.
208. Tarnowski W. (red.): Materiały XIII Ogólnopolskiej Konf. Polioptymalizacja i Komputerowe Wspomaganie Projektowania – Kołobrzeg'95, ZN WSI^{nz}. w Koszalinie, seria WM, Koszalin – Kołobrzeg 1995, nr 19.
209. Tarnowski W. (red.): Materiały XV Ogólnopolskiej Konf. Polioptymalizacja i Komputerowe Wspomaganie Projektowania – Mielno 1997, Pol. Koszalińska, 1997.
210. Tarnowski W. (red.): Materiały XVI Ogólnopolskiej Konf. Polioptymalizacja w Projektowaniu – Mielno'98, Pol. Koszalińska, ZN WM, 1998, nr 23.
211. Tarnowski W. (red.): Materiały XVII Ogólnopolskiej Konf. Polioptymalizacja w Projektowaniu – Mielno'99, Pol. Koszalińska, ZN WM, 1999, nr 26.
212. Tarnowski W. (red.): Materiały XVIII Ogólnopolskiej Konf. Polioptymalizacja i Komputerowe Wspomaganie Projektowania – Mielno'2000, Pol. Koszalińska, ZN WM, 2000, nr 27.
213. Tarnowski W. (red.): Prace XIX Ogólnopolskiej Konf. Polioptymalizacja i Komputerowe Wspomaganie Projektowania – Mielno 2001, Pol. Koszalińska, ZN WM, 2001, nr 28.
214. Tarnowski W. (red.): Prace XX Ogólnopolskiej Konf. Polioptymalizacja i Komputerowe Wspomaganie Projektowania – Mielno 2002, Pol. Koszalińska, ZN WM, 2002, nr 31.
215. Tarnowski W., Kiczowski T. (red.): Polioptymalizacja i Komputerowe Wspomaganie Projektowania, WNT, Mielno 2002.
216. Tavana M., Kennedy D.T., Joglekar P.: A group decision support framework for consensus ranking of technical manager candidates, *Int. J. Mgmt Sci.*, vol. 24, no. 5, 1996, s. 523–538.
217. Teghem J., Tuytens D., Ulungu E.L.: An interactive heuristic method for multiobjective combinatorial optimization, *Comp. and Oper. Res.*, vol. 27, 2000, s. 671–681.
218. Téno J.F., Mareschal B.: An interval version of PROMETHEE for the comparison of building products' design with ill-defined data on environmental quality, *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 109, 1998, s. 522–529.
219. Thwberge Y., Cardou A., Cloutier L.: Parallel axes gear set optimization in two-parameter spaces, *MPT'91 JSME Int. Conf. on Motion and Power Trans.*, Nov. 23–26, Hiroshima, 1991.
220. Thiel T., Boissier O., Kapliński O.: Ranking of technical alternatives using the entropy method, *Met. Komp. Inz. Łąd.* nr 3, 1997, s. 21–36.
221. Thierauf G.: Direct search, stochastic search and darwinian methods in structural optimization and interactions with parallel computing, [in:] Topping B.H.V. [224], s. 31–41.
222. Thirez H., Zionts S. (eds): *Multiple Criteria Decision Making, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, 130, Springer–Verlag, 1976.
223. Tieu A.K.: An investigation of „diaphragm” type thrust bearing, Part I: Experiment, Part II: Theory, *Transactions of the ASME*, vol. 97, October 1975, s. 876–882.
224. Topping B.H.V. (ed.): *Advances in computational structures technology, Selection of papers presented at The Thrid Int. Conf. in Computational Structures Technology*. 21–23 Aug. 1996, Budapest. Hungary, Civil–Comp Press, Edinburgh 1996.

225. Van den Honert R.C.: Stochastic group preference modeling in the multiplicative AHP: A model of group consensus, *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 110, 1998, s. 99–111.
226. Van den Honert R.C., Lootsma F.A.: Assessing the quality of negotiated proposals using the REMBRANDT system, *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 120, 2000, s. 162–173.
227. Van den Honert R.C., Lootsma F.A.: Group preference aggregation in the multiplicative AHP. The model of the group decision process and Pareto optimality, *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 96, 1996, s. 363–370.
228. Verkama M., Heiskanen P.: Comment on a decision support approach for negotiation: Software vs. Methodology, *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 96, 1996, s. 202–204.
229. Vincke P., Gassner M., Roy B.: *Multicriteria decision-aid*, John Wiley & Sons, Chichester – New York – Brisbane – Toronto – Singapore, 1992.
230. Wagner H. M.: *Principles of Operations Research*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ 1969.
231. Walukiewicz S.: *Programowanie dyskretne*, Seria: Analiza systemowa i jej zastosowania, PWN, Warszawa 1986.
232. Waszczyszyn Z., Cichoń C., Radwańska M.: *Metoda elementów skończonych w stateczności konstrukcji*, Arkady, Warszawa 1990.
233. Wierzbicki A.P.: The use of reference objectives in multiobjective optimization, *Multiple Criteria Decision Making: Theory and Applications*, [in:] Fandel G., Gal T. [35], s. 468–486.
234. Wierzbicki A.P.: Parallel approaches to parametric optimization and the convergence of interactive decision support, *Control and Cybernetics*, vol. 29, no. 1, 2000, s. 427–444.
235. Wierzbicki A.P., Makowski M.: *Multi-objective optimization in negotiation support*, Working paper of IIASA, Laxenburg, Austria, February 1992.
236. Wilson M.N.: *Superconducting Magnets*, Clarendon Press, Oxford 1983.
237. Witek A.: *Podstawy projektowania wibroizolacji obrabiarek*, prac. naukowe Politechniki Szczecińskiej, z. 471, Szczecin 1992.
238. Wojnarowski J., Zawisłak S.: Algorytm ewolucyjny w problemie podziału grafu, [w:] Tarnowski W., Kiczowski T. [215], s. 277–284.
239. Yager R.R.: Multiple objective decision-making using fuzzy sets, *Inf. J. on Man Machine Studies*, no 9, 1977, s. 372–382.
240. Yager R.R., Filev D.P.: *Podstawy modelowania i sterowania rozmytego*, WNT, Warszawa 1995, *Essentials of Fuzzy Modeling and Control*, John Wiley & Sons, 1994.
241. Yang J.-B.: Minmax reference point approach and its application for multiobjective optimisation, *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 126, 2000, s. 541–556.
242. Yang J.-B.: Rule and utility based evidential reasoning approach for multiattribute decision analysis under uncertainties, *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 131, 2001, s. 31–61.
243. Yu P.L.: *A class of solutions for group decision problems*, Center for System Science, University of Rochester, New York, no 6, 1971.
244. Yu P.L.: Cone convexity, cone extreme points and nondominated solutions in decision problems with multiobjectives, *JOTA*, vol. 14, 1974, s. 319–377.
245. Yu P.L.: *Multiple-Criteria Decision Making: Concepts, Techniques, and Extensions*, New York-London, Plenum Press, 1985.
246. Yu P.L., Leitmann G.: Compromise solutions, domination structures and Salukwadze's solution, *JOTA*, 1974, vol. 13, no. 3, s. 267–279.

247. Zhang W.H.: Pareto optimum sensitivity analysis in multicriteria optimization, *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 39, 2003, s. 505–520.
248. Zeleny M.: *Multiple Criteria Decision Making*, McGraw–Hill, New York 1982.
249. Zieliński R., Neuman P.: *Stochastyczne metody poszukiwania minimum funkcji*, WNT, Warszawa 1986.
250. Zienkiewicz O.C.: *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972.
251. Żak J., Włodarczyk H., Kiciński M.: Wielokryterialna ocena wariantów systemu dystrybucyjnego w oparciu o metody ELECTRE III, ORESTE i MAPPACC, [w:] Tarnowski W. [211], s. 455–464.

Streszczenie

W pracy przedstawiono spójny system metodologiczny komputerowo wspomaganą analizę wielokryterialną, której efektem końcowym jest wyznaczenie „rozwiązań najlepszych” niewrażliwych na preferencje przypisywane poszczególnym kryteriom przez ekspertów i decydentów. Zaproponowane podejście opiera się na wielokrotnej selekcji skończonego zbioru rozwiązań niezdominowanych, przy czym wynikowy podzbiór otrzymany przy selekcji jedną z metod stanowi podzbiór wejściowym do kolejno zastosowanej metody (ewolucyjność zewnętrzna). W celu realizacji nowej idei poszukiwania „rozwiązań najlepszych” opracowano autorski system komputerowego wspomaganie decyzji, który nazwano *Ewolucyjnym Systemem Analizy Wielokryterialnej*. Stworzony system obejmuje cztery jakościowo różne metody analizy wielokryterialnej: *Metodę Wartości Progowej*, *Metodę Definiowania Punktu Idealnego*, *Metodę Przedziału Nierozróżnialności* (stosując zmodyfikowaną operację mutacji) oraz *Metodę Wyznaczania Rozwiązań Kompromisowych* (posługując się zmodyfikowaną operacją krzyżowania). Pierwsza z metod znana jest z literatury przedmiotu, pozostałe trzy są autorskimi metodami do analizy wielokryterialnej.

Do realizacji metod wchodzących w skład *Ewolucyjnego Systemu Analizy Wielokryterialnej* zbudowano stosowne algorytmy i ich implementacje komputerowe. Przeprowadzone testy algorytmów oraz badania porównawcze otrzymanych wyników i rezultatów metod opisanych w literaturze, potwierdziły przydatność opracowanych algorytmów do zastosowania w analizie wielokryterialnej.

W pracy zamieszczono sześć różnych przykładów wykorzystania *Ewolucyjnego Systemu Analizy Wielokryterialnej* do zastosowań technicznych przy:

- analizie postoptymalnej wyników otrzymanych przy zastosowaniu metod z wbudowanymi procedurami optymalizacyjnymi – przykład projektowania jednostopniowej przekładni walcowej,
- analizie rezultatów będących efektem zastosowania metod bez wbudowanych algorytmów optymalizacyjnych – przykład wyboru projektu dozwojenia elektromagnesu nadprzewodnikowego pełniącego funkcję separatora cząstek ferromagnetycznych, wybór optymalnych wymiarów projektowanych segmentów łożysk wzdłużnych smarowanych hydrodynamicznie,
- analizie wyników badań obiektów, które zostały zaprojektowane i poddane testom eksploatacyjnym – przykład wyboru projektu rozpylacza wtryskiwacza paliwa, ocena konstrukcji wibroizolatorów do posadowienia frezarki,
- ocenie właściwości eksploatacyjnych par ciemnych – przykład wpływu zasilania ekologicznym olejem napędowym na zużycie rozpylaczy.

Summary

The thesis shows a coherent methodological system of computer-aided multicriterial analysis, whose end effect is the determination of *optimal solutions* insensitive to the preferences ascribed to individual criteria by experts and decision-makers. The proposed approach is based on the multiple selection of a finite set of nondominated solutions, such that the output subset achieved during selection by one of the methods is the input subset of the method applied next (external evolution). In order to realise a new idea of the search for *optimal solutions* an authoring system of computer aid in decision-making was prepared, called an *Evolutionary System of Multicriterial Analysis*. The system includes four qualitatively different methods of multicriterial analysis: the *Boundary Value Method*, the *Ideal Point Definition Method*, the *Undifferentiation Interval Method* (using a modified mutation operation) and the *Compromise Solution Determination Method* (using a modified crossing operation). The first method is known from the literature, the remaining three are authoring methods of multicriterial analysis.

For the realisation of the methods included in the *Evolutionary System of Multicriterial Analysis* appropriate algorithms and their computer implementations were constructed. The algorithm tests carried out, as well as comparative studies of the results obtained and the results of the methods described in the literature, confirmed the applicability of the constructed algorithms in multicriterial analysis.

The thesis includes six different examples of technical applicability of the *Evolutionary System of Multicriterial Analysis* in:

- postoptimal analysis of the results obtained by using methods with inbuilt optimisation procedures – example of designing a one-speed cylindrical gear,
- analysis of the results of applying methods without in-built optimisation algorithms – example of selecting the design of winding a superconductor electromagnet functioning as separator of ferromagnetic particles; selecting the optimal dimensions of designed elements of hydrodynamically lubricated sliding thrust bearings,
- analysis of the results of testing objects designed and subjected to operational tests – example of selecting the design of a fuel injector nozzle; evaluation of the construction of vibration insulators used in the foundation of a milling machine,
- evaluation of the operational properties of friction couples – example of the influence of using ecological fuel on the wear of the fuel nozzle.