

11/81

Krzysztof Wilmański

DYNAMIKA PRĘTÓW ZAKRZYWIONYCH
PRZESTRZENNIE

Teoria geometrycznie nieliniowa

P. 269



WARSZAWA 1981

ISSN - 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 6 lutego 1981 r.

Zarejestrowana pod nr 11/1981



57102



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 140 egz. Ark.wyd. 1,2. Ark. druk.2,25

Oddano do drukarni w marcu 1981 r.

Nr zamówienia 193/0/81

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

KRZYYSZTOF WILMAŃSKI

Zakład Teorii Ośrodków
Ciągłych IPPT PAN

4.43 - pręty
7.71 - teoria drgań
7.76 - fale w ciałach stałych

DYNAMIKA PRĘTÓW ZAKRZYWIONYCH
PRZESTRZENNIE
Teoria geometrycznie nieliniowa

11. WSTĘP

Przedmiotem opracowania jest teoria prętów przestrzennie zakrzywionych. Zagadnienie traktowane jest z uwzględnieniem wszystkich nieliniowych efektów geometrycznych i kinematycznych w odniesieniu do opisu osi pręta. Jednakże w odniesieniu do odkształcenia pręta jako całości oraz związków fizycznych przyjmuje się najprostsz opis z możliwych - rozszerzenie na pręty zakrzywione założeń Kirchhoffa i liniową postać lokalnych związków fizycznych. Założenia te, mimo bardzo daleko idących ograniczeń, prowadzą do teorii bardzo bogatej w efekty, których nie opisuje żadna z istniejących dotąd teorii prętów zakrzywionych. Dają one jednocześnie możliwość uzyskania jawnej postaci równań, co było niemożliwe w ramach znanych w literaturze teorii nieliniowych.

Otrzymana w pracy teoria stanowi odpowiednik znanej od lat nieliniowej teorii powłok cienkich. Ta ostatnia doczekała się już jednak bardzo bogatej literatury i opracowań monograficznych, podczas gdy nieliniowa teoria prętów zakrzywionych stanowi do dziś problematykę całkowicie zaniedbaną.

W przedstawionej pracy prezentujemy jedynie podstawowe założenia i równania teorii. Omówienie literatury przedmiotu oraz bardziej szczegółową dyskusję równań teorii nieliniowej i analizę przypadków szczególnych zawiera praca doktorska J. Frankowskiego z Politechniki Świętokrzyskiej w Kielcach. Głównym celem tej pracy była analiza drgań sprężyn zaworowych silnika wysokoprężnego i ten problem aplikacyjny stanowił mo-

tywację dla opracowania prezentowanej poniżej teorii.

Ze względu na podstawowy cel pracy - skonstruowanie modelu nieliniowego z możliwością jego zastosowań w problemach inżynierskich - pomijamy większość detali matematycznych takich, jak założenia ciągłości, osobliwości w geometrii pręta, konstrukcję zagadnienia brzegowo-początkowego, istnienie rozwiązań podstawowego układu równań itp. Część z tych zagadnień będzie omówiona w przygotowywanej do druku pracy J.Frankowskiego i K.Wilmańskiego "Dynamic Kirchhoff's theory of non-linear, spatially curved roads" /Ingenieur Archiv./. Założenia geometryczne pokrywają się w zasadzie z przyjętymi w klasycznej pracy A.E.Greena [2] /por.również G.E.Hay [3], J.L.Ericksen, C.Truesdell [1], C.Truesdell, R.Toupin [4], §214/.

Autor opracowania chciałby wyrazić wdzięczność mgr J. Frankowskiemu za dyskusję w czasie pracy nam przedstawioną wersją teorii oraz za zgodę na umieszczenie w tym raporcie wyników otrzymanych wspólnie.

2. GEOMETRIA PRĘTA

2.1. Geometria osi środków masy

Założmy, że pręt jest zadany w pewnej konfiguracji odniesienia w chwili τ_0 . Niech równanie osi środków masy tego pręta w chwili τ_0 będzie dane w postaci

$$/2.1/ \quad \hat{R}_0 = \hat{R}_0(\Lambda, \tau_0), \quad \Lambda \in [\Lambda_1, \Lambda_2] \subset \mathbb{R}$$

gdzie Λ jest dowolnie zadaną parametryzacją określającą orientację krzywej /2.1/. Zakładamy, że funkcja /2.1/ jest dostatecznie gładka by wykonywane dalej operacje były dopuszczalne. Wektor styczny do krzywej /2.1/ jest zdefiniowany związkiem

$$/2.2/ \quad \hat{T}_0(\Lambda, \tau_0) := \partial_\Lambda \hat{R}_0(\Lambda, \tau_0).$$

W przypadku ogólnym wektor ten nie jest jednostkowy. Normalizację przeprowadzimy zmieniając parametryzację z zachowaniem orientacji krzywej. Wprowadzamy parametryzację łukową, określoną przez

$$/2.3/ \quad S := \int_0^\Lambda |\hat{T}_0(\Gamma, \tau_0)| d\Gamma.$$

Będziemy ją nazywali parametryzacją materialną /lub Lagrange'a/. Zmieniając zmienne $\Lambda \rightarrow S$, otrzymujemy nową postać związku /2.1/

$$/2.4/ \quad \hat{R}_0 = \hat{R}_0(S, \tau_0) = \hat{R}_0[\Lambda(S), \tau_0],$$

gdzie $\Lambda(\cdot)$ jest funkcją odwrotną do określonej związkiem /2.3/. Wektor styczny w nowej parametryzacji

$$/2.5/ \quad \hat{T}_0(S, \tau_0) := \partial_S \hat{R}_0(S, \tau_0)$$

jest wektorem jednostkowym : $|\underline{T}_o| = 1$, gdyż

$$/2.6/ \quad \underline{T}_o(S, \tau_o) = \partial_A \hat{R}_o (\partial_A S)^{-1} = \hat{T}_o |\hat{T}_o|^{-1}.$$

W sposób standardowy wprowadzamy wektor normalny główny i wektor binormalny osi środków masy. Pierwszy z nich dany jest wzorem

$$/2.7/ \quad \underline{N}_o(S, \tau_o) := K_o^{-1} \partial_s \underline{T}_o(S, \tau_o) = K_o^{-1} \partial_s^2 \underline{R}_o.$$

gdzie

$$/2.8/ \quad K_o := |\partial_s \underline{T}_o|$$

jest krzywizną główną osi.

Wektor binormalny zdefiniowany jest związkiem

$$/2.9/ \quad \underline{B}_o(S, \tau_o) := \underline{T}_o \times \underline{N}_o(S, \tau_o) = K_o^{-1} \partial_s \underline{R}_o \times \partial_s^2 \underline{R}_o.$$

Trzy wektory $(\underline{T}_o, \underline{N}_o, \underline{B}_o)$ tworzą bazę lokalną w każdym punkcie S osi środków masy. Wykorzystamy je do wprowadzania układu współrzędnych, parametryzującego pręt w konfiguracji odniesienia.

W dalszym ciągu często wykorzystujemy związki Freneta, określające pochodne wektorów bazy w tej bazie. Mają one postać

$$\begin{aligned} \partial_s \underline{T}_o &= K_o \underline{N}_o, \\ /2.10/ \quad \partial_s \underline{N}_o &= -K_o \underline{T}_o + \Sigma_o \underline{B}_o, \\ \partial_s \underline{B}_o &= -\Sigma_o \underline{N}_o, \end{aligned}$$

gdzie Σ_o jest skręceniem osi środków masy. Można je obliczyć na przykład tworząc iloczyn skalarny trzeciego z powyższych wzorów z wektorem normalnym głównym \underline{N}_o .

2.2. Włókna materialne

W teorii zginania prętów, opartej na hipotezach Kirchhoffa, podstawową rolę odgrywają założenia dotyczące ruchów płaskich przekrojów poprzecznych, prostopadłych do osi pręta. Pozwalają one wyróżnić włókna materialne, przenoszące naprężenia normalne do przekrojów poprzecznych, których wzajemne oddziaływania ograniczają się do naprężeń stycznych.

Przedstawiana teoria prętów zakrzywionych, uwzględniająca nieliniowości geometryczne stawia sobie za cel zachowanie tej prostej struktury oddziaływań w takim zakresie, jaki dopuszcza skomplikowana sytuacja geometryczna. Wprowadzamy, w związku z tym, analogiczne pojęcie włókna materialnego w konfiguracji odniesienia. Rodzinę punktów materialnych pręta nazywamy włóknom materialnym, jeśli tworzy ona krzywą ortogonalną do każdego przekroju poprzecznego pręta.

Aby wyprowadzić równania włókna materialnego, zdefiniujemy najpierw specjalny układ współrzędnych. Położenie dowolnego punktu pręta będziemy opisywali poprzez wyróżnienie przekroju poprzecznego, na którym leży ten punkt, oraz współrzędnymi kartezjańskimi tego punktu na płaszczyźnie przekroju poprzecznego. Początkiem tego układu w każdym przekroju jest środek masy. Tym samym współrzędnymi punktu materialnego jest trójka (S, X, Y) . Zakładamy dodatkowo, że wektory (N_o, B_o) tworzą bazę układu kartezjańskiego. Wektor wodzący punktu materialnego przyjmuje wtedy postać

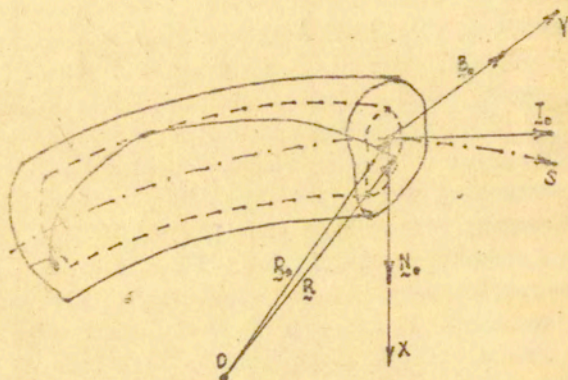
$$/2.11/ \quad R = R(S, X, Y; \tau_o) = R_o(S, \tau_o) + N_o X + B_o Y$$

/por. Rys.1/. Jeśli wyróżnimy punkt (S_o, X_o, Y_o) w pewnym wybranym przekroju S_o , to punkt ten określa włókno materialne, ortogonalne do tego przekroju i przechodzące przez punkt (S_o, X_o, Y_o) .

Aby określić to włókno musimy znaleźć związki

$$X = X(S; X_o, Y_o), \quad Y = Y(S; X_o, Y_o)$$

tzn. współrzędne tego włókna w dowolnym przekroju poprzecznym. Wektor styczny do włókna materialnego zgodnie z relacją



Rys.1

/2.11/, ma postać

$$/2.12/ \quad \underline{I}(S, X, Y, \tau_0) = \partial_s \underline{R} = (1 - K_0 X) \underline{I}_0 + (\partial_s X - \Sigma_0 Y) \underline{N}_0 + (\partial_s Y + \Sigma_0 X) \underline{B}_0.$$

Zgodnie z definicją włókna materialnego wektor ten musi być prostopadły do przekroju poprzecznego, tzn. równoległy do wektora \underline{I}_0 ; a więc

$$/2.13/ \quad \underline{I}(S, X, Y, \tau_0) \parallel \underline{I}_0(S, \tau_0).$$

Porównanie związków /2.12/ i /2.13/ prowadzi do równań

$$/2.14/ \quad \begin{cases} \partial_s X - \Sigma_0 Y = 0, \\ -\partial_s Y + \Sigma_0 X = 0 \end{cases}$$

z warunkami brzegowymi

$$/2.15/ \quad \begin{cases} X(S_0, \tau_0) = X_0, \\ Y(S_0, \tau_0) = Y_0. \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że równania /2.14/ prowadzą do związku

$$/2.16/ \quad X^2 + Y^2 = X_0^2 + Y_0^2.$$

Oznacza to, że włókno materialne znajduje się w każdym przekroju poprzecznym w tej samej odległości od środka masy. Nakłada to określone ograniczenia topologiczne na kształt przekroju poprzecznego, których nie dyskutujemy w tej pracy.

Wykorzystując własność /2.16/ łatwo już skonstruować rozwiązanie układu równań /2.14/. Ma ono postać

$$/2.17/ \quad \begin{cases} X = X_0 \cos \left(\int_{S_0}^S \Sigma_0(P, \tau_0) dP \right) + Y_0 \sin \left(\int_{S_0}^S \Sigma_0(P, \tau_0) dP \right), \\ Y = -X_0 \sin \left(\int_{S_0}^S \Sigma_0(P, \tau_0) dP \right) + Y_0 \cos \left(\int_{S_0}^S \Sigma_0(P, \tau_0) dP \right). \end{cases}$$

Oczywiście, w przypadku pręta zakrzywionego bez skręcenia $X = X_0$, $Y = Y_0$, a więc włókno materialne jest krzywą równoległą do osi środków masy.

Na podstawie wzoru /2.12/ wektor styczny do włókna materialnego przyjmuje postać

$$/2.18/ \quad \underline{T}(S, X_0, Y_0, \tau) = \left[1 - K_0 \left(X_0 \cos \int_{S_0}^S \Sigma_0 dP + Y_0 \sin \int_{S_0}^S \Sigma_0 dP \right) \right] \underline{T}_0$$

i nie jest on wektorem jednostkowym dla pręta zakrzywionego.

Wykorzystując definicję krzywizny i skręcania łatwo wykazać, że w przypadku włókna materialnego obiekty te dane są wzorami

$$/2.19/ \quad \begin{cases} \frac{1}{K} = \frac{1}{K_0} - X, \\ \Sigma = \frac{\Sigma_0}{1 - K_0 X}, \end{cases}$$

gdzie X jest dane wzorem /2.17/.

3. DEFORMACJA I KINEMATYKA PRĘTA

3.1. Geometria aktualnej konfiguracji pręta

W celu opisanego ruchu pręta wykorzystamy wektor przemieszczenia \underline{u} , który określa zmianę położenia punktów osi pręta względem konfiguracji odniesienia w chwili τ_0 . Wektor położenia punktów osi w chwili τ ma więc postać

$$/3.1/ \quad \hat{\underline{r}}_0(S, \tau) = \underline{R}_0(S, \tau_0) + \underline{u}(S, \tau).$$

Wektor styczny do osi w konfiguracji aktualnej określony jest wzorem

$$/3.2/ \quad \hat{\underline{t}}_0(S, \tau) := \partial_s \hat{\underline{r}}_0 = \underline{T}_0(S, \tau_0) + \partial_s \underline{u}(S, \tau).$$

Długość tego wektora jest różna od jedności. Aby go znormalizować dokonamy zmiany parametryzacji analogicznej do tej, która została przedstawiona w poprzednim rozdziale. Nową parametryzację definiujemy związkiem

$$/3.3/ \quad s := \int_{s_0}^s |\underline{T}_0(P, \tau_0) + \partial_P \underline{u}(P, \tau)| dP = s(S, \tau)$$

i będziemy ją nazywali parametryzacją przestrzenną lub Eulera. Z definicji /3.3/ wynika

$$/3.4/ \quad \eta := \partial_s s = |\underline{T}_0 + \partial_s \underline{u}| = \sqrt{1 + 2\underline{T}_0 \cdot \partial_s \underline{u} + |\partial_s \underline{u}|^2} > 0,$$

a więc związek /3.3/ może być odwrócony w każdej chwili τ

$$/3.5/ \quad S = S(\Delta, \tau).$$

Oznacza to, że geometria odkształconej osi pręta może być opisana albo w układzie współrzędnych materialnych S , lub w układzie współrzędnych przestrzennych Δ z jednoznacznym przejściem od jednego opisu do drugiego.

Wstawiając związek /3.5/ do /3.1/ otrzymujemy

$$/3.6/ \quad \underline{r}_o = \underline{r}_o(\Delta, \tau) = \hat{\underline{r}}_o [S(\Delta, \tau), \tau].$$

Jednostkowy wektor styczny do osi w konfiguracji aktualnej jest więc określony związkiem

$$/3.7/ \quad \underline{t}_o(\Delta, \tau) = \partial_\Delta \underline{r}_o = \frac{1}{\eta} \left\{ \underline{I}_o [S(\Delta, \tau), \tau] + \partial_s \underline{u} [S(\Delta, \tau), \tau] \right\}.$$

Wektor normalny główny w konfiguracji aktualnej ma postać dualną do wektora /2.7/

$$/3.8/ \quad \underline{n}_o(\Delta, \tau) := \frac{1}{\kappa_o} \partial_\Delta \underline{t}_o = \frac{1}{\kappa_o} \partial_\Delta \hat{\underline{r}}_o,$$

gdzie

$$/3.9/ \quad \kappa_o := |\partial_\Delta \underline{t}_o| = \frac{1}{\eta^2} \left| \hat{\underline{r}}_o \times \partial_\Delta \hat{\underline{r}}_o \right|$$

jest krzywizną chwilową osi pręta.

Związki /3.8/ i /3.9/ można napisać w postaci jawnej względem pochodnych wektora przemieszczenia. Po prostych choć żmudnych przekształceniach otrzymujemy

$$\underline{n}_o = - \frac{(\underline{I}_o + \partial_s \underline{u}) \times [(\underline{I}_o + \partial_s \underline{u}) \times (K_o \underline{n}_o + \partial_s^2 \underline{u})]}{\eta \sqrt{\eta^2 |K_o \underline{n}_o + \partial_s^2 \underline{u}|^2 - (K_o \underline{n}_o \cdot \partial_s \underline{u} + \underline{I}_o \cdot \partial_s^2 \underline{u} + \partial_s \underline{u} \cdot \partial_s^2 \underline{u})^2}},$$

/3.10/

$$\kappa_o^2 = K_o^2 \frac{1 + 2N_o \cdot \frac{\partial_s^2 \underline{u}}{K_o} + \left| \frac{\partial_s^2 \underline{u}}{K_o} \right|^2}{\eta^4} - K_o^2 \frac{[N_o \cdot \partial_s \underline{u} + \underline{I}_o \cdot \frac{\partial_s^2 \underline{u}}{K_o} + \partial_s \underline{u} \cdot \frac{\partial_s^2 \underline{u}}{K_o}]^2}{\eta^6}.$$

Wreszcie wektor binormalny określony jest wzorem

$$\mathbf{b}_o = \mathbf{t}_o \times \mathbf{n}_o =$$

/3.11/

$$= \frac{(\mathbf{I}_o + \partial_s \mathbf{U}) \times (K_o \mathbf{N}_o + \partial_s^2 \mathbf{U})}{\sqrt{\gamma^2 |K_o \mathbf{N}_o + \partial_s^2 \mathbf{U}|^2 - (K_o \mathbf{N}_o \cdot \partial_s \mathbf{U} + \mathbf{I}_o \cdot \partial_s^2 \mathbf{U} + \partial_s \mathbf{U} \cdot \partial_s^2 \mathbf{U})^2}}$$

Podobnie jak w konfiguracji odniesienia, pochodne wektorów \mathbf{t}_o , \mathbf{n}_o , \mathbf{b}_o konfiguracji aktualnej można wyrazić przy pomocy wzorów Freneta

$$/3.12/ \quad \begin{cases} \partial_s \mathbf{t}_o = \kappa_o \mathbf{n}_o, \\ \partial_s \mathbf{n}_o = -\kappa_o \mathbf{t}_o + \epsilon_o \mathbf{b}_o, \\ \partial_s \mathbf{b}_o = -\epsilon_o \mathbf{n}_o, \end{cases}$$

gdzie zmiennymi niezależnymi są s i τ , a ϵ_o oznacza skręcenie osi pręta w konfiguracji aktualnej. Skręcenie można określić ze związku

$$\epsilon_o = \frac{\hat{\mathbf{t}}_o \cdot (\partial_s \hat{\mathbf{t}}_o \times \gamma^2 \hat{\mathbf{t}}_o)}{\gamma^6 \chi^2} =$$

/3.13/

$$= \sum_o \frac{1 - \left(\frac{K_o}{\Sigma_o} \mathbf{B}_o + \mathbf{I}_o\right) \cdot \partial_s \mathbf{U} + \frac{1}{K_o} \left(\mathbf{N}_o - \frac{\partial_s K_o}{\Sigma_o} \mathbf{B}_o\right) \cdot \partial_s^2 \mathbf{U} +}{\gamma^2 \left(1 + 2\mathbf{N}_o \cdot \frac{\partial_s^2 \mathbf{U}}{K_o} + \left|\frac{\partial_s^2 \mathbf{U}}{K_o}\right|^2\right) - \left(\mathbf{N}_o \cdot \partial_s \mathbf{U} + \mathbf{I}_o \cdot \frac{\partial_s^2 \mathbf{U}}{K_o} + \partial_s \mathbf{U} \cdot \frac{\partial_s^2 \mathbf{U}}{K_o}\right)^2} +$$

$$+ \left(\frac{\partial_s K_o}{K_o^2 \Sigma_o} \mathbf{N}_o - \frac{1}{\Sigma_o} \mathbf{I}_o + \frac{1}{K_o} \mathbf{B}_o\right) \cdot (\partial_s \mathbf{U} \times \partial_s^2 \mathbf{U}) +$$

$$+ \partial_s^2 \mathbf{U} \cdot \left(\frac{1}{K_o \Sigma_o} \mathbf{B}_o + \frac{1}{K_o^2 \Sigma_o} \mathbf{I}_o \times \partial_s^2 \mathbf{U} + \frac{1}{K_o \Sigma_o} \mathbf{N}_o \times \partial_s \mathbf{U} + \frac{1}{K_o^2 \Sigma_o} \partial_s \mathbf{U} \times \partial_s^2 \mathbf{U}\right).$$

3.2. Geometria aktualnej konfiguracji włókna materialnego

Aby określić postać włókna materialnego w dowolnej konfiguracji pręta musimy zrobić pewne założenia o deformacji przekroju poprzecznego pręta. Ograniczamy się do najprostszej możliwości, rozszerzając na pręty zakrzywione założenia Kirchhoffa. Przyjmujemy, mianowicie, że płaskie przekroje poprzeczne pręta w konfiguracji początkowej poruszają się jak sztywne tarcze, ortogonalne do osi pręta. Jeśli (S, X, Y) jest dowolnym punktem pręta w konfiguracji początkowej, to w chwili aktualnej zajmuje on położenie (s, x, y) i jedną z konsekwencji założenia Kirchhoffa jest związek

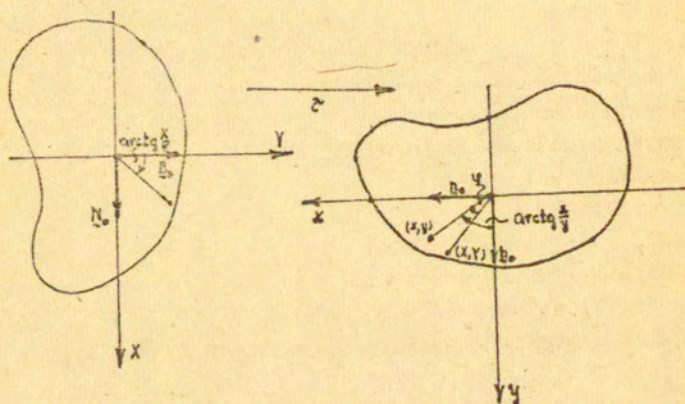
$$/3.14/ \quad x^2 + y^2 = X^2 + Y^2 = X_0^2 + Y_0^2.$$

W powyższej zależności para (X, Y) określa współrzędne kartezjańskie punktu w przekroju poprzecznym S , a para (x, y) - współrzędne kartezjańskie tego samego punktu po deformacji. Układy współrzędnych w przekrojach poprzecznych są indukowane przez bazy (N_0, B_0) i, odpowiednio, (n_0, b_0) w sposób opisany w punkcie 2.2 tej pracy.

Związek /3.14/ oznacza, że jeśli punkt (S, X, Y) traktujemy jako należący do włókna materialnego, to zgodnie z relacjami /2.16/ i /3.14/, włókno w czasie deformacji znajduje się zawsze w tej samej odległości od osi pręta. Tym samym, w danym przekroju poprzecznym, punkt włókna materialnego może na skutek deformacji ulec jedynie obrotowi /por. Rys.2/.

Obrót ten jest wynikiem superpozycji dwóch rodzajów deformacji: zmiany kształtu osi pręta, która wywołuje przejście od bazy (N_0, B_0) do bazy (n_0, b_0) oraz skręcenia o pewien dodatkowy kąt ψ , który mierzy obroty materiału pręta wokół jego osi bez deformacji tej ostatniej. Kąt ψ jest obok wektora przemieszczenia u miarą deformacji pręta i podlega wyznaczeniu z podstawowego układu równań teorii.

Łatwo dostrzec, że we wprowadzonych układach współrzędnych przyjęte założenia prowadzą do związków



Rys.2

$$/3.15/ \quad \begin{cases} x = X \cos \varphi + Y \sin \varphi, \\ y = -X \sin \varphi + Y \cos \varphi. \end{cases}$$

Kąt $\arctg \frac{x}{y}$, obliczony z tych związków, ma postać

$$/3.16/ \quad \arctg \frac{x}{y} = \arctg \frac{X}{Y} + \varphi.$$

Dualność opisu materialnego i przestrzennego pozwala, na podstawie związków /2.17/, napisać

$$/3.17/ \quad \arctg \frac{x}{y} = \arctg \frac{X_0}{Y_0} + \int_{\lambda_0}^{\lambda} \delta_0(p, \tau) dp + \varphi,$$

gdzie (X_0, Y_0) są współrzędnymi punktu (X_0, Y_0) po deformacji w przekroju $\lambda_0 = \lambda(\delta_0, \tau)$.

Przez zróżniczkowanie związków /3.14/ i /3.17/ wzdłuż włókna materialnego po deformacji, otrzymujemy następujące zależności

$$/3.18/ \quad \begin{cases} \partial_s x = y(\xi_0 + \partial_s \varphi), \\ \partial_s y = -x(\xi_0 + \partial_s \varphi). \end{cases}$$

Będą one wykorzystane do określenia wektora stycznego do włókna materialnego po deformacji. Mianowicie, wektor wodzący włókna w chwili τ ma postać

$$/3.19/ \quad \underline{r}(s, x, y, \tau) = \underline{r}_0(s, \tau) + \underline{n}_0(s, \tau)x(s, \tau) + \underline{b}_0(s, \tau)y(s, \tau).$$

W związku z tym wektor styczny do włókna określa związek

$$/3.20/ \quad \underline{t}(s, x, y, \tau) := \partial_s \underline{r}_0 + \partial_s \underline{n}_0 x + \underline{n}_0 \partial_s x + \partial_s \underline{b}_0 y + \underline{b}_0 \partial_s y.$$

Wykorzystując wzory Freneta /3.12/ i związki /3.18/ otrzymujemy ostatecznie

$$/3.21/ \quad \underline{t}(s, x, y, \tau) = (1 - \kappa_0 x) \underline{t}_0(s, \tau) + \partial_s \varphi (y \underline{n}_0 - x \underline{b}_0).$$

Tym samym deformacja pręta w ogólności narusza ortogonalność włókna materialnego do przekroju poprzecznego. Włókna pozostają prostopadłe do przekrojów wtedy i tylko wtedy, gdy deformacja pręta ogranicza się do odkształceń osi, opisanych wektorem przemieszczenia \underline{u} , a czyste skręcanie φ jest co najwyżej stałe wzdłuż pręta, tzn. $\partial_s \varphi \equiv 0$.

3.3. Wydłużenie włókna materialnego

W związku z założeniami, które przyjmujemy w dalszym ciągu pracy odnośnie oddziaływań, jedyną miarą deformacji, użyteczną w tej pracy, jest wydłużenie włókna materialnego. Wydłużenie to definiujemy związkiem

$$/3.22/ \quad C(S, X, Y, \tau) := \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\int_s^{s+\Delta s} |I_{\pm}(P, X, Y, \tau)| dP - \int_s^{s+\Delta s} |I_{\pm}(P, X, Y, \tau)| dP}{\int_s^{s+\Delta s} |I_{\pm}(P, X, Y, \tau)| dP},$$

gdzie (x, y) jest położeniem punktu (X, Y) przekroju S w chwili τ , a $s = s(S, \tau)$.

Jest oczywiste, że C jest wydłużeniem włókna materialnego na jednostkę długości tego włókna w stanie nieodkształconym.

Biorąc pod uwagę związki /2.18/ i /3.21/ we wzorze /3.22/ otrzymujemy ostatecznie

$$/3.23/ \quad C(S, X, Y, \tau) = \eta \sqrt{\frac{[1 - \kappa_0 (X \cos \varphi + Y \sin \varphi)]^2 + (\varrho_0 \varphi)^2 (X^2 + Y^2)}{(1 - \kappa_0 X)^2}} - 1$$

gdzie $\kappa_0, \varphi, \varrho_0 \varphi$ są traktowane jako funkcje S poprzez podstawienie $s = s(S, \tau)$, określone związkiem /3.3/.

Szczególnie często będziemy korzystać ze wzoru /3.23/ dla przypadku szczególnego $\varphi = 0$. Ma on wtedy postać

$$/3.24/ \quad C(S, X, Y, \tau) = \eta \frac{1 - \kappa_0 X}{1 - \kappa_0 X} - 1.$$

3.4. Kinematyka pręta

Zajmiemy się teraz zależnością wektora wodzącego włókna materialnego \underline{r} od czasu τ . Na podstawie związków /3.15/ mamy

/3.25/

$$/3.25/ \quad \dot{x} = \dot{\varphi} y, \quad \dot{y} = -\dot{\varphi} x, \quad \dot{\varphi} = \partial_t \varphi(s, \tau).$$

Ze wzoru /3.19/ wynika natomiast

$$/3.26/ \quad \dot{\underline{r}} = \dot{\underline{r}}_0 + \dot{n}_0 x + n_0 \dot{x} + \dot{b}_0 y + b_0 \dot{y}.$$

Połączenie tych dwu relacji daje następujące wyrażenie dla prędkości dowolnego punktu włókna materialnego

$$/3.27/ \quad \dot{\underline{r}} = \dot{\underline{r}}_0 + (\dot{n}_0 - \dot{\varphi} b_0) x + (\dot{b}_0 + \dot{\varphi} n_0) y.$$

Pochodne \dot{n}_0 , \dot{b}_0 mogą być powiązane z pochodnymi wektora \underline{r}_0 poprzez, na przykład, wykorzystanie wzorów Freneta /3.12/. Po prostych przekształceniach otrzymujemy

$$/3.28/ \quad \begin{cases} \dot{n}_0 = \kappa_0 \left(\frac{1}{\kappa_0 \eta}\right)' n_0 + \frac{1}{\kappa_0 \eta} \partial_s \dot{\underline{t}}_0, \\ \dot{b}_0 = \frac{1}{\eta} \partial_s \dot{\underline{r}}_0 \times n_0 - (\ln \eta)' b_0 + \kappa_0 \left(\frac{1}{\kappa_0 \eta}\right)' b_0 + \frac{1}{\kappa_0 \eta} \dot{\underline{t}}_0 \times \partial_s \dot{\underline{t}}_0, \end{cases}$$

gdzie

$$/3.29/ \quad \dot{\underline{t}}_0 = \frac{1}{\eta} \partial_s \dot{\underline{r}}_0 - (\ln \eta)' \dot{\underline{t}}_0.$$

Kolejne różniczkowanie względem ζ związku /3.27/ pozwala określić przyspieszenie punktów włókna materialnego. Ze względu na skomplikowaną formę jawnej postaci tych związków nie będziemy ich przytaczać w tej pracy.

4. RÓWNANIA RUCHU; SIŁY UOGÓLNIONE W PRĘCIE

W celu wyprowadzenia równań ruchu pręta skorzystamy ze standardowej procedury, opartej na prawach bilansu pędu i momentu pędu. W tym celu rozważamy wycinek pręta o długości Δs w jego konfiguracji aktualnej. Na rys.3 przedstawiono schema-

A więc

$$/4.5/ \quad \int_{\Delta V} \rho \ddot{\mathbf{r}} dV = m \ddot{\mathbf{r}}_0 \Delta s + o(|\Delta s|),$$

gdzie

$$/4.6/ \quad m := \int_A \rho dA$$

jest masą pręta na jednostkę długości w konfiguracji odkształconej. Łącząc związki /4.5/ i /4.3/ i przechodząc do granicy $\Delta s \rightarrow 0$, otrzymujemy na podstawie /4.1/

$$/4.7/ \quad m \ddot{\mathbf{r}}_0 = \partial_s Q.$$

Równanie to reprezentuje zasadę zachowania pędu dla pręta zakrzywionego.

4.2. Równanie bilansu momentu pędu

Przyjmując podobne założenia do omówionych w poprzednim punkcie równanie bilansu momentu pędu możemy napisać w postaci

$$/4.8/ \quad \int_{\Delta V} \mathbf{r} \times (\rho \ddot{\mathbf{r}}) dV = \oint_{\partial \Delta V} \mathbf{r} \times (\mathbf{I} d\underline{\mathbf{A}}).$$

Rozważmy najpierw budowę całki powierzchniowej. Dla rozważanego segmentu ma ona postać

$$\begin{aligned} \oint_{\partial \Delta V} \mathbf{r} \times (\mathbf{I} d\underline{\mathbf{A}}) = & - \int_A \mathbf{r}(s, x, y, z) \times [\mathbf{I}(s, x, y, z) \underline{\mathbf{t}}_0(s, \tau)] dA + \\ & + \int_A \mathbf{r}(s+\Delta s, x, y, z) \times [\mathbf{I}(s+\Delta s, x, y, z) \underline{\mathbf{t}}_0(s+\Delta s, \tau)] dA \end{aligned}$$

Po uproszczeniu otrzymujemy

$$\oint_{\partial \Delta V} \mathbf{r} \times (\mathbf{I} d\underline{\mathbf{A}}) = \left[\partial_s \int_A \mathbf{r} \times (\mathbf{I} \underline{\mathbf{t}}_0) dA \right] \Delta s + o(|\Delta s|).$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$/4.9/ \quad \underline{M}(s, \tau) := \int_A (\underline{n}_0 x + \underline{b}_0 y) \times (\underline{I} \underline{\dot{x}}) dA.$$

Wektor \underline{M} jest nazywany wypadkowym momentem przekrojowym w przekroju $\underline{S}(s, \tau)$. Biorąc pod uwagę definicje /4.2/ i /4.9/ otrzymujemy

$$/4.10/ \quad \oint_{\partial V} \underline{r} \times (\underline{I} d\underline{A}) = (\underline{t}_0 \times \underline{Q} + \underline{r}_0 \times \partial_s \underline{Q} + \partial_s \underline{M}) \Delta s + o(|\Delta s|).$$

Rozpatrzmy teraz całkę objętościową, występującą w równaniu /4.8/. Mamy

$$\begin{aligned} \int_{\Delta V} \underline{r} \times (\varrho \ddot{\underline{r}}) dV = & \{ m \underline{r}_0 \times \ddot{\underline{r}}_0 + \int_A (\underline{n}_0 x + \underline{b}_0 y) \times [(\ddot{\underline{n}}_0 - 2\dot{\varphi} \dot{\underline{b}}_0 - \dot{\varphi}^2 \underline{n}_0) x + \\ & + (\ddot{\underline{b}}_0 + 2\dot{\varphi} \dot{\underline{n}}_0 - \dot{\varphi}^2 \underline{b}_0) y + \ddot{\varphi} (\underline{n}_0 y - \underline{b}_0 x)] dA \} \Delta s + o(|\Delta s|). \end{aligned}$$

Wprowadźmy klasyczne oznaczenia dla charakterystyk przekrojowych

$$I_x := \int_A \varrho y^2 dA, \quad I_y := \int_A \varrho x^2 dA,$$

/4.10/

$$I_{xy} := \int_A \varrho xy dA, \quad I_0 := \int_A \varrho (x^2 + y^2) dA = I_x + I_y.$$

Biorąc pod uwagę związki /4.4/ otrzymujemy

$$\begin{aligned} /4.12/ \quad \int_{\Delta V} \underline{r} \times (\varrho \ddot{\underline{r}}) dV = & \{ m \underline{r}_0 \times \ddot{\underline{r}}_0 + \underline{n}_0 \times (\ddot{\underline{n}}_0 - 2\dot{\varphi} \dot{\underline{b}}_0 - \dot{\varphi}^2 \underline{n}_0) I_y + \\ & + \underline{b}_0 \times (\ddot{\underline{b}}_0 + 2\dot{\varphi} \dot{\underline{n}}_0 - \dot{\varphi}^2 \underline{b}_0) I_x + \\ & + [\underline{b}_0 \times (\ddot{\underline{n}}_0 - 2\dot{\varphi} \dot{\underline{b}}_0 - \dot{\varphi}^2 \underline{n}_0) + \underline{n}_0 \times (\ddot{\underline{b}}_0 + 2\dot{\varphi} \dot{\underline{n}}_0 - \dot{\varphi}^2 \underline{b}_0)] I_{xy} - \\ & - \ddot{\varphi} I_0 \underline{t}_0 \} \Delta s + o(|\Delta s|). \end{aligned}$$

Jeśli teraz podstawimy związki /4.10/ i /4.12/ do równania /4.8/, uwzględnimy równanie bilansu pędu /4.7/ i przejdziemy do granicy $\Delta t \rightarrow 0$, otrzymamy następujący związek

$$\begin{aligned}
 & \underline{n}_0 \times (\ddot{\underline{n}}_0 - 2\dot{\psi}\dot{\underline{b}}_0) \underline{I}_y + \underline{b}_0 \times (\ddot{\underline{b}}_0 + 2\dot{\psi}\dot{\underline{n}}_0) \underline{I}_x - \ddot{\psi} \underline{I}_0 \underline{t}_0 + \\
 /4.13/ & + [\underline{b}_0 \times (\ddot{\underline{n}}_0 - 2\dot{\psi}\dot{\underline{b}}_0 - \dot{\psi}^2 \underline{n}_0) + \underline{n}_0 \times (\ddot{\underline{b}}_0 + 2\dot{\psi}\dot{\underline{n}}_0 - \dot{\psi}^2 \underline{b}_0)] \underline{I}_{xy} = \\
 & = \underline{t}_0 \times \underline{Q} + \partial_s \underline{M}.
 \end{aligned}$$

Jest to zasada zachowania momentu pędu dla pręta zakrzywionego.

4.3. Siły uogólnione

W praktycznych zastosowaniach podstawowe związki /4.7/ i /4.13/ wygodniej jest wykorzystywać w postaci rozpisanej w lokalnym układzie odniesienia. Aby tę postać otrzymać wprowadźmy najpierw następujące oznaczenia: $\underline{\zeta}$ - składowa normalna wektora naprężenia ($\underline{I} \underline{t}_0$), działającego w przekroju poprzecznym, τ_x - składowa styczna tego wektora naprężenia w kierunku \underline{n}_0 , τ_y - składowa styczna wektora naprężenia w kierunku \underline{b}_0 .
Wtedy

$$/4.14/ \quad \underline{I} \underline{t}_0 = \zeta \underline{t}_0 + \tau_x \underline{n}_0 + \tau_y \underline{b}_0.$$

W podobny sposób rozłożymy na składowe siły i momenty przekrojowe. Mianowicie

$$/4.15/ \quad \begin{cases} \underline{Q} = N \underline{t}_0 + Q_x \underline{n}_0 + Q_y \underline{b}_0, \\ \underline{M} = M_s \underline{t}_0 + M_x \underline{n}_0 + M_y \underline{b}_0. \end{cases}$$

Dla poszczególnych współrzędnych będziemy stosowali klasyczne nazewnictwo: N - siła normalna, Q_x, Q_y - siły tnące, M_s - moment skręcający, M_x, M_y - momenty zginające.

Podstawiając związki /4.14/ i /4.15/ w definicjach /4.2/ i /4.9/ otrzymujemy następujące relacje

$$/4.16/ \quad \begin{cases} N = \int_A \sigma dA, & M_x = \int_A y \sigma dA, & M_y = - \int_A x \sigma dA, \\ Q_x = \int_A \tau_x dA, & Q_y = \int_A \tau_y dA, & M_z = \int_A (x \tau_y - y \tau_x) dA. \end{cases}$$

W dalszych rozważaniach istotną rolę odgrywa fakt, że siły uogólnione N, M_x, M_y można obliczyć znając jedynie rozkład naprężeń normalnych σ , a siły uogólnione Q_x, Q_y, M_z - znając rozkład naprężeń stycznych τ_x, τ_y .

4.4. Podstawowy układ równań ruchu

Podstawienie reprezentacji /4.15/ w zasadach zachowania oraz wykorzystania ortogonalności wektorów \underline{t}_o , \underline{n}_o i \underline{b}_o prowadzi do następującego układu równań

$$/4.17/ \quad \begin{cases} m \underline{t}_o \cdot \ddot{\underline{r}}_o = \partial_b N - \kappa_o Q_x, \\ m \underline{n}_o \cdot \ddot{\underline{r}}_o = \partial_b Q_x + \kappa_o N - \delta_o Q_y, \\ m \underline{b}_o \cdot \ddot{\underline{r}}_o = \partial_b Q_y + \delta_o Q_x, \end{cases}$$

$$/4.18/ \quad \begin{cases} \underline{b}_o \cdot (\ddot{\underline{n}}_o - 2\dot{\varphi} \dot{\underline{b}}_o) I_y - \underline{n}_o \cdot (\ddot{\underline{b}}_o + 2\dot{\varphi} \dot{\underline{n}}_o) I_x - \ddot{\varphi} I_o + \\ + [\underline{b}_o \cdot (\ddot{\underline{b}}_o + 2\dot{\varphi} \dot{\underline{n}}_o - \dot{\varphi}^2 \underline{b}_o) - \underline{n}_o \cdot (\ddot{\underline{n}}_o - 2\dot{\varphi} \dot{\underline{b}}_o - \dot{\varphi}^2 \underline{n}_o)] I_{xy} = \partial_b M_z - \kappa_o M_x, \\ Q_y = \partial_b M_x + \kappa_o M_z - \delta_o M_y - \underline{t}_o \cdot (\ddot{\underline{b}}_o + 2\dot{\varphi} \dot{\underline{n}}_o) I_x - \underline{t}_o \cdot (\ddot{\underline{n}}_o - 2\dot{\varphi} \dot{\underline{b}}_o) I_{xy}, \\ Q_x = -\partial_b M_y - \delta_o M_x - \underline{t}_o \cdot (\ddot{\underline{n}}_o - 2\dot{\varphi} \dot{\underline{b}}_o) I_y - \underline{t}_o \cdot (\ddot{\underline{b}}_o + 2\dot{\varphi} \dot{\underline{n}}_o) I_{xy}, \end{cases}$$

gdzie wykorzystano związki Freneta /3.12/.

Zauważmy, że powyższe 6 równań, po wykorzystaniu odpowiednich związków fizycznych, powinno służyć do określenia 4 pól \underline{u} , ψ . W ogólnym przypadku jest to więc układ przeokreślony. Jest to wynikiem przyjętych założeń o deformacji pręta. Równania /4.18/_{2,3} można w tym przypadku traktować jako określające rozkład naprężeń stycznych - poprzez związki /4.16/ - w zależności od zadanego rozkładu naprężeń normalnych. Otrzymany rozkład naprężeń na ogół będzie spełniał równania ruchu teorii sprężystości w sposób całkowity, a nie ścisły. Problem ten pojawia się również w klasycznej teorii zginania prętów prostych i nie będziemy się nim zajmować w dalszej części pracy.

W związku z powyższymi uwagami wyeliminujemy siły tnące Q_x , Q_y z układu /4.17/, /4.18/. Po prostych, choć żmudnych przekształceniach otrzymujemy następujące cztery równania

$$m \underline{\dot{t}}_o \cdot \ddot{\underline{r}}_o = \alpha_o N + \alpha_o (\alpha_o M_y + \delta_o M_x + \underline{\dot{t}}_o \cdot \ddot{\underline{n}}_o I_y + \underline{\dot{t}}_o \cdot \ddot{\underline{b}}_o I_{xy}),$$

$$\alpha_o \left\{ \frac{1}{\delta_o} [m \ddot{\underline{n}}_o \cdot \ddot{\underline{r}}_o - \alpha_o N + \alpha_o (\alpha_o M_y + \delta_o M_x + \underline{\dot{t}}_o \cdot \ddot{\underline{n}}_o I_y + \underline{\dot{t}}_o \cdot \ddot{\underline{b}}_o I_{xy})] \right\} =$$

$$= m \underline{\dot{b}}_o \cdot \ddot{\underline{r}}_o + \delta_o (\alpha_o M_y + \delta_o M_x + \underline{\dot{t}}_o \cdot \ddot{\underline{n}}_o I_y + \underline{\dot{t}}_o \cdot \ddot{\underline{b}}_o I_{xy}),$$

$$\begin{aligned} /4.19/ \quad & \frac{1}{\alpha_o} [m \underline{\dot{b}}_o \cdot \ddot{\underline{r}}_o + \delta_o (\alpha_o M_y + \delta_o M_x + \underline{\dot{t}}_o \cdot \ddot{\underline{n}}_o I_y + \underline{\dot{t}}_o \cdot \ddot{\underline{b}}_o I_{xy})] + \\ & + \frac{1}{\delta_o} \alpha_o \left(\frac{1}{\alpha_o} \right) [-m \ddot{\underline{n}}_o \cdot \ddot{\underline{r}}_o + \alpha_o N - \alpha_o (\alpha_o M_y + \delta_o M_x + \underline{\dot{t}}_o \cdot \ddot{\underline{n}}_o I_y + \underline{\dot{t}}_o \cdot \ddot{\underline{b}}_o I_{xy})] = \\ & = \underline{\dot{b}}_o \cdot \ddot{\underline{n}}_o I_y - \underline{\dot{n}}_o \cdot \ddot{\underline{b}}_o I_x + (\underline{\dot{b}}_o \cdot \ddot{\underline{b}}_o - \underline{\dot{n}}_o \cdot \ddot{\underline{n}}_o) I_{xy} + \alpha_o M_x + \\ & + \alpha_o \left[\frac{1}{\alpha_o} (\alpha_o M_x - \delta_o M_y - \underline{\dot{t}}_o \cdot \ddot{\underline{b}}_o I_x - \underline{\dot{t}}_o \cdot \ddot{\underline{n}}_o I_{xy}) \right], \\ & \underline{\dot{b}}_o \cdot (\ddot{\underline{n}}_o - 2\dot{\psi} \dot{\underline{b}}_o) I_y - \underline{\dot{n}}_o \cdot (\ddot{\underline{b}}_o + 2\dot{\psi} \dot{\underline{n}}_o) I_x - \ddot{\psi} I_o + \\ & + [\underline{\dot{b}}_o \cdot (\ddot{\underline{b}}_o + 2\dot{\psi} \dot{\underline{n}}_o - \dot{\psi}^2 \underline{\dot{b}}_o) - \underline{\dot{n}}_o \cdot (\ddot{\underline{n}}_o - 2\dot{\psi} \dot{\underline{b}}_o - \dot{\psi}^2 \underline{\dot{n}}_o)] I_{xy} = \\ & = \alpha_o M_x - \alpha_o M_x. \end{aligned}$$

W dalszej części pracy istotną rolę będzie odgrywał szczególnie przypadek deformacji pręta, gdy $\varphi \equiv 0$. W tym przypadku powyższy układ staje się znów przeokreślony. Można wtedy, z zastrzeżeniami, o których mówiliśmy powyżej w odniesieniu do sił tnących, wyeliminować z układu /4.19/ moment skręcający M_x . Do problemu tego powracamy w następnym rozdziale. Eliminacja M_x prowadzi do następującego układu 3 równań, które zawierają jedynie siły uogólnione N, M_y, M_z .

$$\begin{aligned}
 m \dot{\underline{x}}_o \cdot \ddot{\underline{r}}_o &= \partial_x N + \chi_o (\partial_y M_y + \delta_o M_x + \dot{\underline{x}}_o \cdot \ddot{\underline{n}}_o I_y + \dot{\underline{x}}_o \cdot \ddot{\underline{b}}_o I_{xy}), \\
 \partial_x \left(\frac{1}{\delta_o} m \dot{\underline{n}}_o \cdot \ddot{\underline{r}}_o \right) + \partial_x \left[\frac{1}{\delta_o} \partial_x (\dot{\underline{x}}_o \cdot \ddot{\underline{n}}_o I_y + \dot{\underline{x}}_o \cdot \ddot{\underline{b}}_o I_{xy}) \right] + m \dot{\underline{b}}_o \cdot \ddot{\underline{r}}_o + \\
 + \delta_o (\dot{\underline{x}}_o \cdot \ddot{\underline{n}}_o I_y + \dot{\underline{x}}_o \cdot \ddot{\underline{b}}_o I_{xy}) &= \partial_x \left[\frac{\chi_o}{\delta_o} N - \frac{1}{\delta_o} \partial_x (\partial_y M_y + \delta_o M_x) \right] - \delta_o (\partial_y M_y + \delta_o M_x), \\
 - \partial_x \left(\frac{1}{\chi_o} \right) \left[\frac{1}{\delta_o} \partial_x (\dot{\underline{x}}_o \cdot \ddot{\underline{n}}_o I_y + \dot{\underline{x}}_o \cdot \ddot{\underline{b}}_o I_{xy}) + \frac{1}{\delta_o} m \dot{\underline{n}}_o \cdot \ddot{\underline{r}}_o \right] + \frac{1}{\chi_o} [m \dot{\underline{b}}_o \cdot \ddot{\underline{r}}_o + \\
 /4.20/ \quad + \delta_o (\dot{\underline{x}}_o \cdot \ddot{\underline{n}}_o I_y + \dot{\underline{x}}_o \cdot \ddot{\underline{b}}_o I_{xy})] + \partial_x \left(\frac{1}{\chi_o} \dot{\underline{x}}_o \cdot \ddot{\underline{b}}_o I_x + \frac{1}{\chi_o} \dot{\underline{x}}_o \cdot \ddot{\underline{n}}_o I_{xy} \right) - \\
 - \dot{\underline{b}}_o \cdot \ddot{\underline{n}}_o I_y + \dot{\underline{n}}_o \cdot \ddot{\underline{b}}_o I_x - (\dot{\underline{b}}_o \cdot \ddot{\underline{b}}_o - \dot{\underline{n}}_o \cdot \ddot{\underline{n}}_o) I_{xy} = \\
 = \partial_x \left(\frac{1}{\chi_o} \right) \left[\frac{1}{\delta_o} \partial_x (\partial_y M_y + \delta_o M_x) - \frac{\chi_o}{\delta_o} N \right] - \frac{\delta_o}{\chi_o} (\partial_y M_y + \delta_o M_x) + \\
 + \partial_x \left(\frac{1}{\chi_o} \partial_x M_x - \frac{\delta_o}{\chi_o} M_y \right) + \chi_o M_x.
 \end{aligned}$$

W rozdziale 6 powrócimy do badania powyższego układu w przypadku teorii liniowej.

5. ZWIĄZKI KONSTITUTYWNE

Aby zamknąć układ równań /4.19/ należy go uzupełnić związkami konstytutywnymi, które w rozważanym przez nas zagadnieniu winny wiązać siły uogólnione N, M_x, M_y, M_z z polem przemieszczeń \underline{u} , skręceniem ψ i pochodnymi tych pól. Związki takie można uzyskać poprzez wykorzystanie związków fizycznych teorii sprężystości w relacjach /4.16/. W odniesieniu do sił N, M_x, M_y nie napotykamy na istotne trudności i zagadnienie to będzie omówione poniżej.

Inaczej przedstawia się sprawa z momentem skręcającym M_z . Aby wykorzystać relację /4.16/6 musimy znać rozkład naprężeń τ_x i τ_y w dowolnym przekroju poprzecznym. W przypadku statyki prętów prostych rozkład ten jest implikowany przez rozkład naprężeń normalnych, który z kolei jest określony przez założenia Kirchhoffa.

W rozpatrywanym przez nas przypadku rozkład naprężeń τ_x i τ_y winien być uzgodniony z rozkładem naprężeń normalnych σ poprzez związki /4.18/2,3. Zagadnienie to nie zostało dotąd rozwiązane.

Z tego powodu ograniczymy się w dalszym ciągu do badania przypadku szczególnego bez czystego skręcenia: $\psi \equiv 0$. Wtedy zachodzą równania /4.20/ i do ich zamknięcia potrzebna jest jedynie znajomość rozkładu naprężeń normalnych σ . Co więcej, z uwagi na związek /3.21/, włókna materialne pozostają przy takiej deformacji ortogonalne do przekrojów poprzecznych w czasie całego ruchu. Oznacza to, że w każdym punkcie przekroju poprzecznego naprężenia normalne we włóknie i naprężenia normalne σ są identyczne. Nie ma to, oczywiście, miejsca w ogólnym przypadku, gdy $\psi \neq 0$.

W związku z powyższymi uwagami należy najpierw przeprowadzić analizę oddziaływań w obrębie włókna materialnego oraz między takimi włóknami. Ze względu na przyjęcie założeń Kirchhoffa można również założyć, że w każdym włóknie pojawiają się jedynie naprężenia normalne wzdłuż włókna, a wzajemne oddziaływanie włókien ograniczają się do naprężeń tnących typu τ_{x_3} , τ_{y_3} w przyjętym przez nas układzie współrzędnych.

Zakładamy, że materiał pręta jest opisywany liniowym prawem fizycznym. Oznacza to, że naprężenia normalne we włók-

nie materialnym spełniają prawo Hooke'a

$$/5.1/ \quad \delta(S, X, Y, \tau) = EC(S, X, Y, \tau)$$

gdzie E jest modułem Young'a, a C - wydłużeniem włókna materialnego. W rozpatrywanym przypadku C jest określone związkiem /3.24/. A więc zależność /5.1/ przyjmuje postać

$$/5.2/ \quad \delta = E \left\{ \eta \frac{1 - \alpha_0 X}{1 - k_0 X} - 1 \right\}.$$

Związki /4.16/ prowadzą bezpośrednio do praw fizycznych dla sił uogólnionych N, M_x, M_y . A mianowicie

$$N = E\eta \int_A \frac{1 - \alpha_0 X}{1 - k_0 X} dA - EA,$$

$$/5.3/ \quad M_x = E\eta \int_A Y \frac{1 - \alpha_0 X}{1 - k_0 X} dA,$$

$$-M_y = E\eta \int_A X \frac{1 - \alpha_0 X}{1 - k_0 X} dA.$$

Układ równań /4.20/, /5.3/ wraz z odpowiednimi relacjami kinematycznymi, omówionymi uprzednio w tej pracy, określa zamkniętą postać związków dla pola przemieszczeń \underline{u} . Należy zwrócić uwagę, że wyznaczenie pola \underline{u} z tych związków pozwala określić geometrię i kinematykę pręta oraz wielkość sił uogólnionych N, M_x, M_y . Pozostałe trzy siły uogólnione: Q_x, Q_y, M_s należy określać poprzez związki /4.18/_{2,3} i /4.19/₄. Należy więc rozwiązać dodatkowy problem brzegowo-początkowy.

6. TEORIA LINIOWA PRĘTA ZGINANEGO

Omówiony powyżej nieliniowy geometrycznie problem zginania pręta prowadzi do tak skomplikowanych równań różniczkowych, że istnieją niewielkie szanse na znalezienie ogólnych rozwiązań ścisłych. Równania te stanowią jednak dogodny punkt wyjścia do analizy problemów częściowo lub całkowicie zlinearyzowanych.

Poniżej omówimy problem całkowitej linearyzacji zakładając, że wszystkie pojawiające się w teorii gradienty przemieszczenia i przyspieszenia są małe w porównaniu z jednością w sensie odpowiednio wybranej normy. Na przykład, można przyjąć następujące ograniczenia

$$/6.1/ \quad |\partial_s u| \ll 1, \quad \frac{1}{K_0} |\partial_s^2 u| \ll 1, \quad \frac{1}{\Sigma_0 K_0} |\partial_s^3 u| \ll 1, \quad \text{itd.}$$

Oznacza to, że we wszystkich związkach pozostawiamy jedynie te wyrazy, w których powyższe gradienty występują liniowo.

6.1. Linearyzacja związków geometrycznych

Rozpocznijmy od linearyzacji wektorów bazy lokalnej. Zatrzymując w rozwinięciu w szereg potęgowy dwa pierwsze wyrazy, na podstawie związku /3.7/ otrzymujemy następujące przybliżone wyrażenie dla wektora stycznego do osi pręta

$$/6.1/ \quad \underline{t}_0 \cong (1 - \underline{I}_0 \cdot \partial_s u) \underline{I}_0 + \partial_s u.$$

W celu określenia wektora normalnego głównego \underline{n}_0 znajdziemy najpierw wyrażenie przybliżone dla pochodnej $\partial_s \underline{t}_0$. Ma ona postać

$$/6.2/ \quad \partial_s \underline{t}_0 = \frac{\partial_s \underline{t}_0}{\eta} \cong K_0 \left\{ (1 - 2 \underline{I}_0 \cdot \partial_s u) \underline{n}_0 - (\underline{n}_0 \cdot \partial_s u + \underline{I}_0 \cdot \frac{\partial_s^2 u}{K_0}) \underline{I}_0 + \frac{\partial_s^2 u}{K_0} \right\} \dots$$

Na podstawie definicji /3.8/ otrzymujemy

$$/6.3/ \quad \underline{n}_0 \cong \left(1 - \underline{N}_0 \cdot \frac{\partial_s^2 u}{K_0}\right) \underline{N}_0 - (\underline{N}_0 \cdot \partial_s u + \underline{I}_0 \cdot \frac{\partial_s^2 u}{K_0}) \underline{T}_0 + \frac{\partial_s^2 u}{K_0}.$$

Jednocześnie związek /3.9/ prowadzi do następującego przybliżonego wzoru dla krzywizny κ_0 :

$$/6.4/ \quad \kappa_0 \cong K_0 \left(1 + \underline{N}_0 \cdot \frac{\partial_s^2 u}{K_0} - 2 \underline{I}_0 \cdot \partial_s u\right).$$

Związki /6.1/ i /6.3/ prowadzą bezpośrednio do wzoru na przybliżoną wartość wektora binormalnego \underline{b}_0 :

$$/6.5/ \quad \underline{b}_0 = \underline{t}_0 \times \underline{n}_0 \cong \left(1 - \underline{I}_0 \cdot \partial_s u - \underline{N}_0 \cdot \frac{\partial_s^2 u}{K_0}\right) \underline{b}_0 + \underline{I}_0 \times \frac{\partial_s^2 u}{K_0} + \partial_s u \times \underline{N}_0.$$

Aby określić skrócenie ϵ_0 wykorzystamy wzór Freneta /3.12/. W pierwszym rzędzie musimy obliczyć pochodną $\partial_s \underline{b}_0$. Po prostych rachunkach otrzymujemy

$$\begin{aligned} \partial_s \underline{b}_0 = \frac{\partial_s \underline{b}_0}{\gamma} &\cong -K_0 \left(\underline{N}_0 \cdot \partial_s u + \sum_0 \underline{b}_0 \cdot \frac{\partial_s^2 u}{K_0} + \frac{1}{K_0} \underline{N}_0 \cdot \partial_s \left(\frac{\partial_s^2 u}{K_0} \right) \right) \underline{b}_0 - \\ /6.7/ \quad &- \sum_0 \left(1 - 2 \underline{I}_0 \cdot \partial_s u - \underline{N}_0 \cdot \frac{\partial_s^2 u}{K_0} \right) \underline{N}_0 + \underline{I}_0 \times \partial_s \left(\frac{\partial_s^2 u}{K_0} \right) - \\ &- K_0 \partial_s u \times \underline{I}_0 + \sum_0 \partial_s u \times \underline{b}_0. \end{aligned}$$

Iloczyn skalarny wektorów /6.3/ i /6.7/ daje $-\epsilon_0$. Po wykonaniu mnożenia otrzymujemy

$$/6.8/ \quad \epsilon_0 \cong \sum_0 \left(1 - \underline{I}_0 \cdot \partial_s u - \underline{N}_0 \cdot \frac{\partial_s^2 u}{K_0} \right) + K_0 \underline{b}_0 \cdot \partial_s u + \underline{b}_0 \cdot \partial_s \left(\frac{\partial_s^2 u}{K_0} \right).$$

Ostatnią z wielkości geometrycznych, których linearyzacja jest potrzebna w dalszej części pracy, jest wydłużenie włókna materialnego. Jak już wspominaliśmy, ograniczamy się do przypadku $\psi \cong 0$. Po prostych przekształceniach i wykorzystaniu

wzoru /6.4/, ze związku /3.24/ otrzymujemy

$$/6.9/ \quad C \cong \frac{I_0 \cdot \partial_s u + K_0 X (I_0 \cdot \partial_s u - N_0 \cdot \frac{\partial_s^2 u}{K_0})}{1 - K_0 X}.$$

Zauważmy, że dla cienkich prętów o małej krzywiznie, gdy można założyć $|K_0 X| \ll 1$, powyższy wzór upraszcza się do postaci

$$/6.10/ \quad C \cong I_0 \cdot \partial_s u - X N_0 \cdot \partial_s^2 u.$$

Pierwszy wyraz opisuje wydłużenie osi pręta, a drugi - zmiany krzywizny.

6.2. Linearyzacja związków fizycznych

W analogiczny sposób do zaprezentowanego powyżej wykonamy teraz linearyzację związków /5.3/ dla sił uogólnionych. Podstawiając w tych związkach przybliżoną wartość krzywizny /6.4/ dostajemy

$$/6.11/ \quad \begin{aligned} N &= E \alpha I_0 \cdot \partial_s u + E \mathcal{B}_y (I_0 \cdot \partial_s u - N_0 \cdot \frac{\partial_s^2 u}{K_0}) K_0, \\ M_x &= E \mathcal{B}_x I_0 \cdot \partial_s u + E \mathcal{J}_{xy} (I_0 \cdot \partial_s u - N_0 \cdot \frac{\partial_s^2 u}{K_0}) K_0, \\ M_y &= -E \mathcal{B}_y I_0 \cdot \partial_s u - E \mathcal{J}_{xy} (I_0 \cdot \partial_s u - N_0 \cdot \frac{\partial_s^2 u}{K_0}) K_0, \end{aligned}$$

gdzie wprowadzono następujące charakterystyki nieodkształconej postaci pręta

$$/6.12/ \quad \alpha A := \int_A \frac{1}{1 - K_0 X} dA,$$

$$\xi_x := \int_A \frac{Y}{1 - K_0 X} dA, \quad \xi_y := \int_A \frac{X}{1 - K_0 X} dA,$$

/6.12/

$$\eta_{xy} := \int_A \frac{XY}{1 - K_0 X} dA, \quad \eta_y := \int_A \frac{X^2}{1 - K_0 X} dA.$$

W przypadku małej krzywizny, gdy można się ograniczyć do pierwszych dwu wyrazów w potęgowym rozwinięciu względem $K_0 X$, powyższe wzory upraszczają się do postaci /zakładamy dla uproszczenia, że gęstość masy nie zależy od X i Y /

$$dA \approx A, \quad \xi_x \approx \frac{1}{\rho} K_0 I_{xy}, \quad \xi_y \approx \frac{1}{\rho} K_0 I_y,$$

/6.13/

$$\eta_{xy} \approx \frac{1}{\rho} I_{xy} + K_0 \int_A X^2 Y dA, \quad \eta_y \approx \frac{1}{\rho} I_y + K_0 \int_A X^3 dA,$$

gdzie A jest polem przekroju poprzecznego, I_y, I_{xy} - momentami bezwładności.

6.3. Linearyzacja równań ruchu

W ramach przyjętych ograniczeń ($\psi \approx 0$) powinniśmy teraz dokonać linearyzacji równań /4.20/. Z uwagi na ich niezwykle skomplikowaną postać nie będziemy tu przedstawiali tych związków. Ich szczegółową analizę można znaleźć w przygotowywanych do druku pracach J. Frankowskiego, a zwłaszcza w jego pracy doktorskiej /Politechnika Świętokrzyska, Kielce, 1981/.

Ograniczymy się do linearyzacji podstawowego układu równań bilansu: pędu /4.7/ i momentu pędu /4.13/. Proste przekształcenia i wykorzystanie omówionej już powyżej procedury li-

nearyzacyjnej prowadzą do następującego układu równań

$$m\ddot{u}_z = \partial_s N - K_0 Q_x,$$

$$m\ddot{u}_x = \partial_s Q_x + K_0 N - \sum_0 Q_y,$$

$$m\ddot{u}_y = \partial_s Q_y + \sum_0 Q_x,$$

$$/6.14/ \quad I_c \frac{1}{K_0} \partial_s^2 \ddot{u} \cdot \underline{b}_0 = \partial_s M_s - K_0 M_x,$$

$$-I_x \partial_s \ddot{u} \cdot \underline{b}_0 = \partial_s M_x + K_0 M_s - \sum_0 M_y - Q_y,$$

$$I_y \partial_s \ddot{u} \cdot \underline{n}_0 = \partial_s M_y + \sum_0 M_x + Q_x,$$

gdzie dla uproszczenia przyjęto symetrię przekroju poprzecznego: $I_{xy} = 0$ oraz wykorzystano reprezentację

$$/6.15/ \quad \underline{u} = u_s \underline{i}_0 + u_x \underline{i}_c + u_y \underline{b}_0.$$

Jeśli teraz wykorzystamy związki fizyczne /6.11/, to otrzymamy następujący układ

$$m\ddot{u}_z = \partial_s \left\{ E \alpha I_0 \cdot \partial_s u + E \beta_y (I_0 \cdot \partial_s u - N_0 \cdot \frac{\partial_s^2 u}{K_0}) K_0 \right\} - K_0 Q_x,$$

$$m\ddot{u}_x = \partial_s Q_x + K_0 \left\{ E \alpha I_0 \cdot \partial_s u + E \beta_y (I_0 \cdot \partial_s u - N_0 \cdot \frac{\partial_s^2 u}{K_0}) K_0 \right\} - \sum_0 Q_y,$$

$$m\ddot{u}_y = \partial_s Q_y + \sum_0 Q_x,$$

$$I_c \frac{1}{K_0} \partial_s^2 \ddot{u} \cdot \underline{b}_0 = \partial_s M_s - K_0 \left\{ E \beta_x I_0 \cdot \partial_s u + E \gamma_{xy} (I_0 \cdot \partial_s u - N_0 \cdot \frac{\partial_s^2 u}{K_0}) K_0 \right\}$$

$$/6.15/ \quad -I_x \partial_s \ddot{u} \cdot \underline{b}_0 = \partial_s \left\{ E \beta_x I_0 \cdot \partial_s u + E \gamma_{xy} (I_0 \cdot \partial_s u - N_0 \cdot \frac{\partial_s^2 u}{K_0}) K_0 \right\} +$$

$$+ K_0 M_s + \sum_0 \left\{ E \beta_y I_0 \cdot \partial_s u + E \gamma_y (I_0 \cdot \partial_s u - N_0 \cdot \frac{\partial_s^2 u}{K_0}) K_0 \right\} - Q_y,$$

$$I_y \partial_s \ddot{u} \cdot \underline{n}_0 = \partial_s \left\{ -E \beta_y I_0 \cdot \partial_s u - E \gamma_y (I_0 \cdot \partial_s u - N_0 \cdot \frac{\partial_s^2 u}{K_0}) K_0 \right\} +$$

$$+ \sum_0 \left\{ E \beta_x I_0 \cdot \partial_s u + E \gamma_{xy} (I_0 \cdot \partial_s u - N_0 \cdot \frac{\partial_s^2 u}{K_0}) K_0 \right\} + Q_x.$$

Powyższy układ, po wyeliminowaniu sił Q_x, Q_y, M_s , redukuje się do trzech równań dla pola przemieszczeń. Stanowi on punkt wyjścia do opisu różnych ruchów szczególnych, którymi nie będziemy się tu zajmować.

Przedstawmy jeszcze na zakończenie jeden przypadek szczególny. Mianowicie, jeśli przyjmiemy, że pręt jest dostatecznie cienki na to, aby można było przyjąć $|K_0 x| \ll 1$ to układ /6.15/ przyjmuje postać

$$\begin{aligned} m \ddot{u}_s &= \partial_s \left\{ EA I_0 \cdot \partial_s u + \frac{1}{\rho} EI_y K_0^2 (I_0 \cdot \partial_s u - N_0 \cdot \frac{\partial_s^2 u}{K_0}) \right\} - K_0 Q_x, \\ m \ddot{u}_x &= K_0 \left\{ EA I_0 \cdot \partial_s u + \frac{1}{\rho} EI_y K_0^2 (I_0 \cdot \partial_s u - N_0 \cdot \frac{\partial_s^2 u}{K_0}) \right\} + \partial_s Q_x - \sum Q_y, \\ m \ddot{u}_y &= \partial_s Q_y + \sum Q_x, \\ I_0 \frac{1}{K_0} \partial_s^2 \ddot{u} \cdot B_0 &= \partial_s M_s, \\ - I_x \partial_s \ddot{u} \cdot B_0 &= \frac{1}{\rho} \sum K_0 EI_y \left\{ 2 I_0 \cdot \partial_s u - N_0 \cdot \frac{\partial_s^2 u}{K_0} \right\} + K_0 M_s - Q_y, \\ I_y \partial_s \ddot{u} \cdot N_0 &= -\partial_s \left\{ \frac{1}{\rho} K_0 EI_y (2 I_0 \cdot \partial_s u - N_0 \cdot \frac{\partial_s^2 u}{K_0}) \right\} + Q_x. \end{aligned}$$

Jak widać, nawet w tym prostym przypadku podstawowy układ pozostaje silnie sprzężony. W oddzielnym opracowaniu przeprowadzimy dyskusję możliwych drgań układu, opisanego tymi równaniami.

Przytoczmy jeszcze układ równań, który powstaje po wyeliminowaniu sił uogólnionych Q_x, Q_y i M_s . Ma on postać:

$$\begin{aligned} m \ddot{u}_s + K_0 I_y \partial_s \ddot{u} \cdot N_0 &= \partial_s \left\{ EA I_0 \cdot \partial_s u - \frac{1}{\rho} EI_y K_0^2 I_0 \cdot \partial_s u \right\} + \\ &+ \frac{1}{\rho} K_0 EI_y (\partial_s K_0) (2 I_0 \cdot \partial_s u - N_0 \cdot \frac{\partial_s^2 u}{K_0}), \\ m \ddot{u}_y + \partial_s \left(\sum m \ddot{u}_x \right) - \partial_s \left[\sum \partial_s (I_y \partial_s \ddot{u} \cdot N_0) \right] - \sum I_y \partial_s \ddot{u} \cdot N_0 &= \\ = \partial_s \left\{ \frac{K_0}{\rho} \left[EA I_0 \cdot \partial_s u + \frac{1}{\rho} EI_y K_0^2 (I_0 \cdot \partial_s u - N_0 \cdot \frac{\partial_s^2 u}{K_0}) \right] \right\} + \\ + \frac{1}{\rho} \partial_s^2 \left[\frac{1}{\rho} K_0 EI_y (2 I_0 \cdot \partial_s u - N_0 \cdot \frac{\partial_s^2 u}{K_0}) \right] + \sum \partial_s \left[\frac{1}{\rho} K_0 EI_y (2 I_0 \cdot \partial_s u - N_0 \cdot \frac{\partial_s^2 u}{K_0}) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & I_0 \frac{1}{K_0} \partial_s^2 \ddot{u} \cdot B_0 + \partial_s \left(\frac{1}{K_0} I_x \partial_s \ddot{u} \cdot B_0 \right) + \partial_s \left[\frac{1}{K_0 \Sigma_0} m \ddot{u}_x - \frac{1}{K_0 \Sigma_0} \partial_s (I_y \partial_s \ddot{u} \cdot N_0) \right] = \\
 /6.17/ & = -\partial_s \left[\frac{1}{\rho} \Sigma_0 E I_y (2I_0 \cdot \partial_s \ddot{u} - N_0 \cdot \frac{\partial_s^2 u}{K_0}) \right] + \\
 & + \partial_s \left\{ \frac{1}{\Sigma_0} [E A I_x \cdot \partial_s \ddot{u} + \frac{1}{\rho} E I_y K_0^2 (I_0 \cdot \partial_s \ddot{u} - N_0 \cdot \frac{\partial_s^2 u}{K_0})] \right\} + \\
 & + \frac{1}{K_0 \Sigma_0} \partial_s \left[I_y \partial_s \ddot{u} \cdot N_0 + \partial_s \left[\frac{1}{\rho} K_0 E I_y (2I_0 \cdot \partial_s \ddot{u} - N_0 \cdot \frac{\partial_s^2 u}{K_0}) \right] \right].
 \end{aligned}$$

7. UWAGI KOŃCOWE

Przedstawione opracowanie zawiera jedynie szkic nieliniowej teorii prętów zakrzywionych i z konieczności - ze względu na początkowy etap badań w tej dziedzinie - pominięto w nim wiele podstawowych elementów. Wydaje się jednak, że opublikowanie podstawowych założeń teorii może się przyczynić do udoskonalenia modelu. Autor będzie wdzięczny za wszelkie sugestie w tej sprawie. Przedstawiany problem, ze względu na jego znaczenie praktyczne /np. w projektowaniu sprężyn różnych kształtów, układów kompensacyjnych itp./ wart jest poświęcenia mu większej uwagi, niż to miało dotąd miejsce.

LITERATURA

1. J.L.ERICKSEN, C.TRUESDELL; Exact Theory of Stress and Strain in Rods and Shells, Arch.Rat.Mech.Anal.,1,295-322/1959/.
2. A.E.GREEN; The Equilibrium of Rods, Arch.Rat.Mech.Anal.,3, 417-421/1959/.
3. G.E.HAY; The Finite Displacement of Thin Rods, Trans.Am. Math.Soc., 51,65-102/1942/.
4. C.TRUESDELL, R.A.TOUPIN; The Classical Field Theories, Handbuch der Physik, III/1/1960/.