

4/81

Bożena Jaskorzyńska-Dziedzic

DYFRAKCJA FALI PŁASKIEJ
NA PÓŁPŁASZCZYŹNIE
POŁOŻONEJ NA GRANICY
DWÓCH OŚRODKÓW ANIZOTROPOWYCH

P.269



WARSZAWA 1981

ISSN 0208-5658

Prace Zakładu Teorii Fal Elektromagnetycznych
Praca nr 186

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 31 grudnia 1980 r.

Zarejestrowana pod nr 4/1981



57136



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 150 egz. Ark.wyd. 1,5. Ark. druk.2,5

Oddano do drukarni w lutym 1981 r.

Nr zamówienia WDN zam.98/O/81 n.150

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

DYFRAKCJA FALI PŁASKIEJ NA POŁPŁASZCZYZNIE
POŁOŻONEJ NA GRANICY DWOCH OŚRODKÓW ANIZOTROPOWYCH

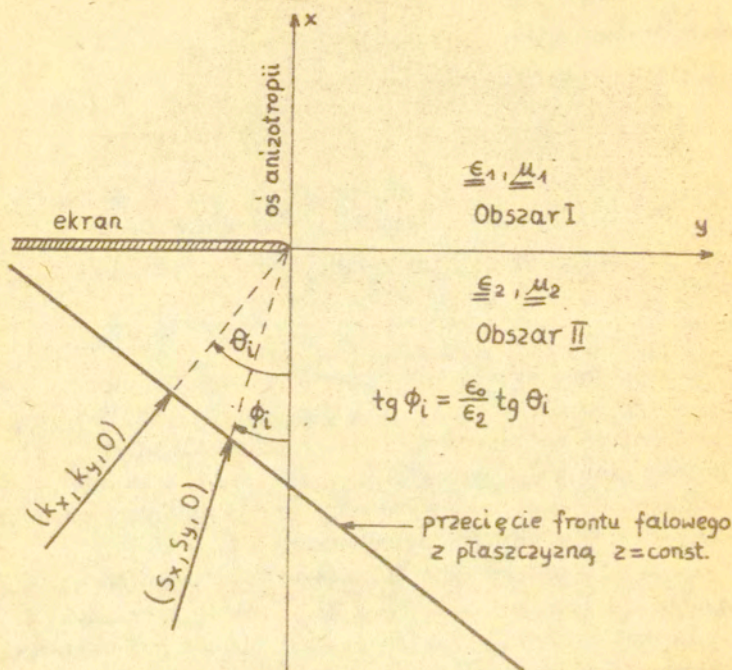
Przedstawiono ściśle rozwiązanie następującego problemu dyfrakcyjnego: w płaszczyźnie $x = 0$ rozdzielającej dwa różne ośrodki jednoosiowo anizotropowe /rys.1/ umieszczona została doskonale przewodząca półpłaszczyzna /ekran/. Oś anizotropii obu ośrodków skierowana jest prostopadle do ekranu. Dopuszcza się niewielkie straty w obu ośrodkach. Od strony $x < 0$ nadbiega elektromagnetyczna fala płaska typu TM, której zależność od czasu przyjęto w postaci czynnika $e^{-i\omega t}$. Na kierunku propagacji tej fali nie nałożono żadnych ograniczeń. W ogólności jej wektor falowy skierowany jest skośnie do płaszczyzny $z = 0$. Dopuszczenie skośnego padania powoduje, że problem staje się trójwymiarowy i istotnie wektorowy, tzn. nie można wyrazić jego rozwiązania przy pomocy jednej funkcji skalarnej spełniającej równanie różniczkowe drugiego rzędu.

Ośrodki I i II charakteryzują się przenikalnościami elektrycznymi i magnetycznymi w postaci następujących tensorów:

$$\underline{\underline{\epsilon}}_1 = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\mu}}_1 = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \quad x > 0$$

/1/

$$\underline{\underline{\epsilon}}_2 = \begin{pmatrix} \epsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\mu}}_2 = \begin{pmatrix} \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_0 \end{pmatrix} \quad x < 0$$



Rys.1

Rzut wektora falowego \underline{k} i wektora Poyntinga \underline{S} fali padającej.

Przedstawione tu wyniki są uogólnieniem wyników otrzymanych w pracy [1], gdzie rozwiązano analogiczny problem dyfrakcyjny dla przypadku, gdy dolny ośrodek ($x < 0$) jest izotropowy

$$(\epsilon_2 = \epsilon_0, \mu_2 = \mu_0).$$

Obecnie, ze względu na anizotropowe własności ośrodka II, kierunki propagacji frontów falowych nie pokrywają się z kierunkami transportu energii /promieni/.

1. Sformułowanie problemu.

Zadanie polegające na znalezieniu rozkładu pola elektromagnetycznego w dowolnym punkcie przestrzeni zostało sformułowane przy pomocy skalarnych potencjałów Hertza. Jest to możliwe dzięki temu, że w ośrodkach jednoosiowo anizotropowych dowolne pole elektromagnetyczne można podzielić na pole o polaryzacji TE /transverse electric/ i pole o polaryzacji TM /transverse magnetic/ względem kierunku osi anizotropii.

$$/1.1/ \quad \underline{E} = \underline{E}^{TE} + \underline{E}^{TM}, \quad \underline{H} = \underline{H}^{TE} + \underline{H}^{TM}, \quad E_x^{TE} = 0, \quad H_x^{TM} = 0$$

Wszystkie składowe pola TE można wyrazić przez jedną funkcję skalarną U /magnetyczny potencjał Hertza/ a składowe pola TM przez funkcję V /elektryczny potencjał Hertza/:

$$\underline{E}^{TE} = i\omega\mu \nabla U \times \underline{n} \qquad \underline{E}^{TM} = \nabla \frac{\partial V}{\partial x} + k^2 V \underline{n}$$

/1.2/

$$\underline{H}^{TE} = \nabla \frac{\partial U}{\partial x} + k^2 U \underline{n} \qquad \underline{H}^{TM} = -i\omega\epsilon \nabla V \times \underline{n}$$

gdzie: $\underline{n} = /1, 0, 0/$, $\nabla \equiv \text{grad}$, $k^2 = \omega^2 \epsilon \mu$, ϵ, μ - składowe /2, 2/ i /3, 3/ diagonalnych tensorów przenikalności elektrycznej i magnetycznej.

Aby pola TE i TM niezależnie spełniały równania Maxwella, potencjały U i V muszą spełniać następujące równania różniczkowe:

$$/1.3/ \quad \left(\nabla_t^2 + \frac{\mu_1}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_{m1}^2 \right) U^I = 0 \quad \left(\nabla_t^2 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_{e1}^2 \right) V^I = 0 \quad x > 0$$

$$\left(\nabla_t^2 + \frac{\mu_2}{\mu_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_{m2}^2 \right) U^{II} = 0 \quad \left(\nabla_t^2 + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_{e2}^2 \right) V^{II} = 0 \quad x < 0$$

gdzie: $\nabla_i \equiv (0, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$, $k_{m1}^2 = \omega^2 \epsilon_1 \mu_1$, $k_{e1}^2 = \omega^2 \epsilon_1 \mu$, $k_{m2}^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_2$,
 $k_{e2}^2 = \omega^2 \epsilon_2 \mu_0$, $\epsilon, \mu, \epsilon_1, \mu_1, \epsilon_0, \mu_0, \epsilon_2, \mu_2$ -

odpowiednie składowe tensorów /1/.

Założono, że fala padająca jest typu TM:

$$/1.4/ \quad U_i = 0, \quad V_i = P_e e^{i \alpha_{e2} [\beta_{e2}(\alpha_i) x + \alpha_i y]} + i Y_2 e^{-i \omega t}$$

gdzie: $\alpha_i = 1 / \sqrt{1 + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_0} \operatorname{ctg}^2 \theta_i}$, $-\frac{\pi}{2} < \theta_i < \frac{\pi}{2}$, θ_i - kąt

jaki tworzy z osią x rzut wektora falowego fali padającej
 /rys. 1/, $\alpha_{e2} = + \sqrt{k_{e2}^2 - \alpha_i^2}$, $\beta_{e2}(\alpha) = + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_0} \sqrt{1 - \alpha^2}}$, P_e - stała.

Z całkowitego pola $\underline{E}_{\text{całk}}$, $\underline{H}_{\text{całk}}$ wyodrębniono pole pierwotne \underline{E}_p , \underline{H}_p , tzn. pole które wzbudziłaby rozważana fala padająca w nieobecności ekranu. Pole \underline{E} , \underline{H} wzbudzone dodatkowo na skutek umieszczenia ekranu, nazwane jest polem ugiętym.

$$/1.5/ \quad \underline{E}_{\text{całk}} = \underline{E}_p + \underline{E}, \quad \underline{H}_{\text{całk}} = \underline{H}_p + \underline{H}$$

W przypadku osi anizotropii prostopadłej do granicy dwóch ośrodków, pole pierwotne złożone z fali padającej, przechodzącej i odbitej ma tą samą polaryzację, co fala padająca. Nie występuje tu sprzężenie odbiciowe rodzajów TE i TM.

Potencjały pola pierwotnego mają postać: /czynnik $e^{-i \omega t}$ identyczny dla wszystkich wyrażeni będzie odtąd opuszczany/:

$$/1.6/ \quad V_p^I = P_e T_e(\alpha_i) e^{i \alpha_{e2} [\beta_{e1}(\alpha_i) x + \alpha_i y]} e^{i Y_2} \quad x > 0$$

$$V_p^{II} = V_i + P_e R_e(\alpha_i) e^{i \alpha_{e2} [-\beta_{e2}(\alpha_i) x + \alpha_i y]} e^{i Y_2} \quad x < 0$$

gdzie:

$$\beta_{e1}(\kappa) = +\sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_1}} \sqrt{n_e^2 - \kappa^2}, \quad n_e = \frac{\alpha c_1}{\alpha c_2}, \quad \alpha c_1 = +\sqrt{\kappa c_1^2 - \gamma^2},$$

$$T_e(\kappa) = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} [1 + R_e(\kappa)], \quad R_e(\kappa) = \frac{\beta_{e2}(\kappa) - \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \beta_{e1}(\kappa)}{\beta_{e2}(\kappa) + \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \beta_{e1}(\kappa)}$$

Współczynniki odbicia $R_e(\kappa)$ i transmisji $T_e(\kappa)$ zostały obliczone z warunków ciągłości na granicy ośrodków.

Potencjały pola pierwotnego są zatem znane i zagadnienie zostało dalej sformułowane dla nieznanych potencjałów U , V pola ugiętego.

Poszukiwane potencjały pola ugiętego powinny spełniać równania /1.3/ oraz następujące warunki brzegowe:

I. Warunki ciągłości w aperturze $/x=0, y>0, \hat{z} /:$

$$\mu U^I = \mu_0 U^{II} \quad \epsilon V^I = \epsilon_0 V^{II}$$

/1.7/

$$\frac{\partial U^I}{\partial x} = \frac{\partial U^{II}}{\partial x} \quad \frac{\partial V^I}{\partial x} = \frac{\partial V^{II}}{\partial x}$$

II. Warunki na doskonale przewodzącym ekranie

$/x=0, y<0, \hat{z} /:$

$$\begin{aligned} /1.8/ \quad -\omega \mu \gamma U^I + \frac{\partial^2 (V_e^I + V^I)}{\partial x \partial y} &= 0 & -i\omega \mu \frac{\partial U^I}{\partial y} + i\gamma \frac{\partial (V_e^I + V^I)}{\partial x} &= 0 \\ -\omega \mu_0 \gamma U^{II} + \frac{\partial^2 (V_e^{II} + V^{II})}{\partial x \partial y} &= 0 & -i\omega \mu_0 \frac{\partial U^{II}}{\partial y} + i\gamma \frac{\partial (V_e^{II} + V^{II})}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

III. Warunki w otoczeniu krawędzi ekranu $/r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0 /:$

$$/1.9/ \quad U = \text{const} + O(\tau^{\tau+1}), \quad V = \text{const} + O(\tau^{\tau+1}), \quad \tau, \tau' > 0$$

IV. W strefie dalekiej / $r \rightarrow \infty$ / potencjały pola ugiętego powinny mieć postać fali wybiegającej.

Warunek /1.8/ sprzęga ze sobą funkcje U i V , a więc pomimo, że fala padająca jest typu TM, rozwiązanie musi się składać zarówno z pola TM jak i TE. Na tym polega istotna wektorowość /dwumodowość/ rozważanego problemu.

2. Konstrukcja rozwiązania

Rozwiązanie problemu wektorowego zostało skonstruowane z rozwiązań pomocniczych zagadnień skalarnych metodą podaną w pracy [2] i użytą w pracy [1].

Warunki /1.8/ zostały rozdzielone kosztem włączenia do nich dwóch nieznanych stałych A i B /wykorzystuje się przy tym fakt, że ze względu na jednorodność struktury wzdłuż osi z , wszystkie człony rozwiązania muszą zależeć od z tak, jak fala padająca tzn. jak $e^{i\gamma z}$:

$$U^I = \frac{e^{i\gamma z}}{\omega\mu} [Ae^{-\gamma y} - Be^{-\gamma y}] , \quad \frac{\partial V^I}{\partial x} = -\frac{\partial V_F^I}{\partial x} + e^{i\gamma z} [Ae^{-\gamma y} + Be^{-\gamma y}]$$

/2.1/

$$\mu_0 V^{II} = \mu U^I , \quad \frac{\partial V^{II}}{\partial x} = \frac{\partial V^I}{\partial x}$$

Wówczas problem rozpada się na dwa oddzielne zagadnienia TE i TM.

Dla każdego z tych zagadnień z osobna zostały znalezione formalne rozwiązania U i V , zawierające dwie nieznanne, lecz wspólne stałe A i B .

Żądając spełnienia warunku na krawędzi /1.9/ dla każdego z tych rozwiązań oddzielnie, otrzymano dwa algebraiczne równania, z których wyznaczono stałe A i B .

2.1. Rozwiązanie formalne zagadnienia TM

Warunek /2.1/ dla funkcji V składa się z trzech liniowo niezależnych członów. Ze względu na liniowość równań /1.3/ i wa-

runków w aperturze można poszukiwać rozwiązania w postaci trzech składników:

$$/2.1.1/ \quad V = v + v_1 + v_2 \quad ,$$

z których każdy spełnia niezależnie warunki /1.7/, a na ekranie jednoczłonowy warunek postaci:

$$/2.1.2/ \quad \frac{\partial v}{\partial x} = d \cdot e^{i k_{e2} d_{oe}} e^{i \delta z}$$

gdzie:

$$d \equiv \begin{cases} -\rho e^{i k_{e2} T e(k_i)} \beta e^{i(k_i)} \\ A \\ B \end{cases} \quad d_o \equiv \begin{cases} d_i \\ -\frac{i v}{k_{e2}} \equiv -d_{oe} \\ \frac{i v}{k_{e2}} \equiv d_{oe} \end{cases} \quad \text{dla } v = \begin{cases} v \\ v_1 \\ v_2 \end{cases}$$

W ten sposób formalne zagadnienie TM rozpadło się na trzy pomocnicze, typowe zagadnienia skalarne. Aby te zagadnienia były postawione jednoznacznie każda z funkcji v powinna również niezależnie spełniać warunki w strefie dalekiej, oraz powinna być skończona w otoczeniu krawędzi:

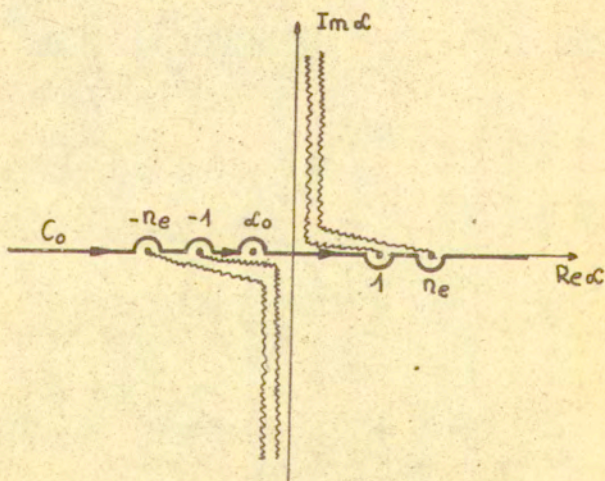
/2.1.3/

$$v = \text{const} + O(\tau) \quad , \quad \tau > 0 \quad / \text{warunek słabszy od /1.9//}$$

Rozwiązania założono w postaci całkowej superpozycji fal płaskich o nieznanach amplitudach:

$$\begin{aligned}
 /2.1.4/ \quad \psi^I &= \frac{e^{i\gamma z}}{2\pi i} \int_{C_0} F_e(\alpha) e^{i\alpha z_2 \beta_{e1}(\alpha)x + i\alpha z_2 d y} d\alpha & x > 0 \\
 \psi^{II} &= \frac{e^{i\gamma z}}{2\pi i} \int_{C_0} G_e(\alpha) e^{-i\alpha z_2 \beta_{e2}(\alpha)x + i\alpha z_2 d y} d\alpha & x < 0
 \end{aligned}$$

Kontur całkowania C_0 przedstawiono na rysunku 2:



Rys.2.

Na rysunku 2 pokazano również punkty rozgałęzienia funkcji podcałkowych oraz położenie ich bieguna dla przypadku $\alpha_0 = \alpha_c$.

Wstawiając wyrażenia /2.1.4/ do warunków /1.7/ i /2.1/, otrzymano zależność:

$$/2.1.5/ \quad G_e(\alpha) = - \frac{\beta_{e1}(\alpha)}{\beta_{e2}(\alpha)} F_e(\alpha)$$

oraz parę równań całkowych;

$$/2.1.6/ \quad \int_{C_0} \frac{\beta_{e1}(\alpha)}{L_e(\alpha)} F_e(\alpha) e^{i\alpha e_2 \alpha y} d\alpha = 0, \quad y > 0$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \beta_{e1}(\alpha) F_e(\alpha) e^{i\alpha e_2 \alpha y} d\alpha = \frac{d}{i\alpha e_2} e^{i\alpha e_2 \alpha y}, \quad y < 0$$

gdzie:

$$L_e(\alpha) = \frac{2 \beta_{e2}(\alpha) \beta_{e1}(\alpha)}{\beta_{e1}(\alpha) + \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \beta_{e2}(\alpha)}$$

W celu wyznaczenia nieznannej amplitudy $F_e(\alpha)$, równania /2.1.6/ sprowadzono [1] do równania Wienera-Hopfa:

$$/2.1.7/ \quad L_e \phi^+ + H^+ - \phi^- = 0$$

gdzie:

$$\phi^+ \equiv \frac{\beta_{e1}}{L_e} F_e, \quad \phi^- \equiv \beta_{e1} F_e + H^+, \quad H^+ \equiv \frac{d}{i\alpha e_2} \frac{1}{\alpha - \alpha_0}$$

Symbolami "+" i "-" oznaczono funkcje regularne odpowiednio powyżej i poniżej konturu całkowania C_0 /a także w pewnym otoczeniu C_0 /. Symbol " α_0 " wskazuje, że kontur powyżej którego regularna jest funkcja H^+ , omija biegun " α_0 " górną.

Równanie /2.1.7/, zawierające dwie nieznanne funkcje ϕ^+ i ϕ^- , zostało rozwiązane metodą Wienera-Hopfa. Metoda ta wymaga przeprowadzenia faktoryzacji funkcji $L_e(\alpha)$, tzn. przedstawienia jej w postaci:

$$/2.1.8/ \quad L_e(\alpha) = \frac{L_e^+(\alpha)}{L_e^-(\alpha)}$$

Podobnie jak w przypadku, gdy jeden z ośrodków jest izotropowy [1], faktoryzację udało się tu przeprowadzić efektywnie, co zostanie pokazane w rozdziale 2.3.

Wyznaczone z równania /2.1.7/ amplitudy mają postać:

$$/2.1.9/ \quad F_e(\alpha) = - \frac{d}{i\alpha_{e2}} \frac{L_e^-(\alpha_0)}{L_e^-(\alpha)} \frac{1}{\beta_{e1}(\alpha)(\alpha - \alpha_0)}$$

$$G_e(\alpha) = - \frac{\beta_{e1}(\alpha)}{\beta_{e2}(\alpha)} F_e(\alpha)$$

Wstawiając te wyrażenia do /2.1.4/ otrzymujemy:

$$/2.1.10/ \quad v^I = - \frac{e^{i\gamma z}}{2\pi i} d \frac{L_e^-(\alpha_0)}{i\alpha_{e2}} \int_{\alpha_0}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_{e2}\beta_{e1}(\alpha)x + i\alpha_{e2}\alpha y}}{\beta_{e1}(\alpha)L_e^-(\alpha)(\alpha - \alpha_0)} d\alpha, \quad x > 0$$

$$v^{II} = \frac{e^{i\gamma z}}{2\pi i} d \frac{L_e^-(\alpha_0)}{i\alpha_{e2}} \int_{\alpha_0}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha_{e2}\beta_{e2}(\alpha)x + i\alpha_{e2}\alpha y}}{\beta_{e2}(\alpha)L_e^-(\alpha)(\alpha - \alpha_0)} d\alpha, \quad x < 0$$

Zastępując d i α_0 przez odpowiednie wartości dane wzorem /2.1.2/ otrzymamy wyrażenia określające \mathcal{U} , \mathcal{U}_1 i \mathcal{U}_2 , których suma /por. /2.1.1// jest rozwiązaniem formalnym zagadnienia TM.

2.2. Rozwiązanie formalne zagadnienia TE

Warunek /2.1/ dla funkcji U składa się z dwóch członów. Postępując analogicznie jak w przypadku TM, znaleziono formalne rozwiązanie zagadnienia TE:

$$/2.2.1/ \quad U^I = -\frac{e^{i\gamma z}}{2\pi i} \frac{b}{\mu} L_m(\tilde{\alpha}_0) \int_{\tilde{C}_0} \frac{e^{i\alpha_m z \beta_{m1}(k)x + i\alpha_m z \mu y}}{L_m(k)(\alpha - \tilde{\alpha}_0)} d\alpha; \quad x > 0$$

$$U^{II} = -\frac{e^{i\gamma z}}{2\pi i} \frac{b}{\mu_0} L_m(\tilde{\alpha}_0) \int_{\tilde{C}_0} \frac{e^{-i\alpha_m z \beta_{m2}(k)x + i\alpha_m z \mu y}}{L_m(k)(\alpha - \tilde{\alpha}_0)} d\alpha; \quad x < 0$$

gdzie: $\alpha_{m1} = +\sqrt{k_{m1}^2 - \gamma^2}$, $\alpha_{m2} = +\sqrt{k_{m2}^2 - \gamma^2}$, $\beta_{m1} = +\sqrt{\frac{\mu}{\mu_1}} \sqrt{n_m^2 - \alpha^2}$

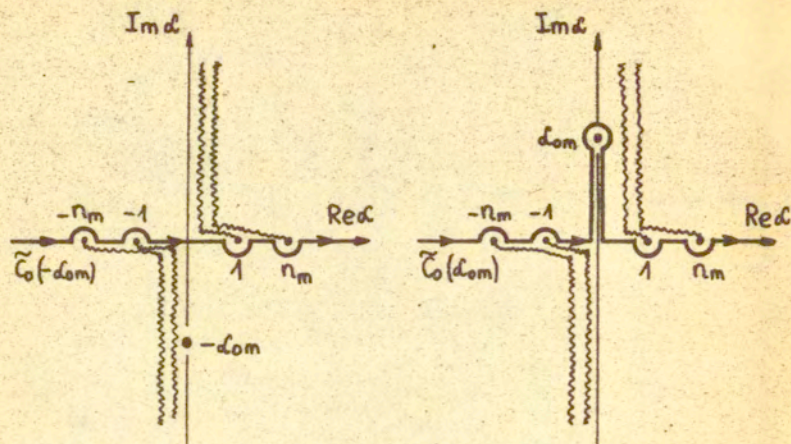
/2.2.2/

$$\beta_{m2} = +\sqrt{\frac{\mu_0}{\mu_2}} \sqrt{1 - \alpha^2}, \quad n_m = \frac{\alpha_{m1}}{\alpha_{m2}}, \quad L_m(\alpha) = \frac{2}{\beta_{m1}(k) + \frac{\mu}{\mu_2} \beta_{m2}(k)}$$

$$/2.2.3/ \quad b \equiv \begin{cases} \frac{A}{\omega} \\ -\frac{B}{\omega} \end{cases} \quad \tilde{\alpha}_0 \equiv \begin{cases} -\frac{i\gamma}{\alpha_{m2}} \equiv -\alpha_{0m} \\ \frac{i\gamma}{\alpha_{m2}} \equiv \alpha_{0m} \end{cases} \quad \text{dla } u = \begin{cases} u_1 \\ u_2 \end{cases}$$

/2.2.4/

$$U = u_1 + u_2$$



Rys. 3

Kontury całkowania \tilde{C}_0 , oraz biegun i punkty rozgałęzienia funkcji podcałkowych w /2.2.1/.

2.3. Faktoryzacja funkcji L_m i L_e

$$/2.3.1/ \quad L_m(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_4}} \sqrt{n_m^2 - \alpha^2} + \frac{\mu_1}{\mu_0} \sqrt{\frac{\mu_0}{\mu_2}} \sqrt{1 - \alpha^2}}$$

Faktoryzację funkcji L_m , polegającą na przedstawieniu jej w postaci

$$/2.3.2/ \quad L_m(\alpha) = \frac{L_m^+(\alpha)}{L_m^-(\alpha)}$$

gdzie $L_m^+(\alpha)$ regularna w obszarze powyżej konturu C_0 , a $L_m^-(\alpha)$ poniżej C_0 , zastąpiono rozkładem pochodnej logarymicznej tej funkcji na sumę funkcji regularnych odpowiednio powyżej i poniżej C_0 w płaszczyźnie (α) :

$$/2.3.3/ \quad K_m \equiv \frac{d}{d\alpha} \ln L_m = \frac{d}{d\alpha} \ln L_m^+ - \frac{d}{d\alpha} \ln L_m^- \equiv K_m^+ + K_m^-$$

Tutaj:

$$/2.3.4/ \quad K_m(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} \ln L_m(\alpha) = \frac{\alpha}{\bar{b}^2 - \alpha^2} - \frac{W^2}{\bar{b}^2 - \alpha^2} \cdot M(\alpha)$$

gdzie:

$$M(\alpha) \equiv \frac{\alpha}{\sqrt{n_m^2 - \alpha^2} \sqrt{1 - \alpha^2}} \quad , \quad W^2 \equiv \frac{\sqrt{\frac{\mu_1 \mu}{\mu_2 \mu_0}} (n_m^2 - 1)}{\frac{\mu_1 \mu}{\mu_2 \mu_0} - 1} \quad //$$

/2.3.5/

$$\bar{b}^2 \equiv \frac{\frac{\mu_1 \mu}{\mu_2 \mu_0} - n_m^2}{\frac{\mu_1 \mu}{\mu_2 \mu_0} - 1}$$

Funkcja $K_m(\alpha)$ o postaci danej wzorem /2.3.4/ została rozłożona na K^+ i K^- w pracy [1]. W rozważanym obecnie przypadku wystarczy skorzystać z wyniku pracy [1] podstawiając w miejsce \bar{b} i W odpowiednie wartości dane wzorem /2.3.5/ do wyrażień:

$$/2.3.6/ \quad K_m^+(\alpha) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\bar{b} + \alpha} - W^2 \frac{M_m^+(\alpha) - M_m^+(\bar{b})}{\bar{b}^2 - \alpha^2}$$

$$K_m^-(\alpha) = \frac{1}{2} \frac{1}{\bar{b} - \alpha} - W^2 \frac{M_m^-(\alpha) + M_m^-(\bar{b})}{\bar{b}^2 - \alpha^2}$$

Rozkład $M_m(\alpha)$ jest znany z pracy Stöckla [3]. Ostatecznie:

$$L_m^+(\alpha) = \sqrt{L_m(0)} e^{\int_0^\alpha K_m^+(\alpha') d\alpha'}$$

/2.3.7/

$$L_m^-(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{L_m(0)}} e^{-\int_0^\alpha K_m^-(\alpha') d\alpha'} ; L_m^-(\alpha) = \frac{1}{L_m^+(\alpha)}$$

Analogiczną drogą dla funkcji $L_e(\alpha)$ otrzymano:

$$L_e^+(\alpha) = \sqrt{L_e(0)} \sqrt{n_e + \alpha} \sqrt{1 + \alpha} e^{\int_0^\alpha K_e^+(\alpha') d\alpha'}$$

/2.3.8/

$$L_e^-(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{L_e(0)}} \frac{1}{\sqrt{n_e - \alpha} \sqrt{1 - \alpha}} e^{-\int_0^\alpha K_e^-(\alpha') d\alpha'}$$

gdzie:

$$K_e^+(\alpha) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\beta^2 + \alpha} - W^{1/2} \frac{M_e^+(\alpha) - M_e^-(\beta^2)}{\beta^{1/2} - \alpha^2}$$

/2.3.9/

$$K_e^-(\alpha) = \frac{1}{2} \frac{1}{\beta^2 - \alpha} - W^{1/2} \frac{M_e^-(\alpha) + M_e^+(\beta^2)}{\beta^{1/2} - \alpha^2}$$

/2.3.10/

$$M_e(\alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{n_e^2 - \alpha^2} \sqrt{1 - \alpha^2}} ; W^{1/2} \equiv \frac{\sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon}{\epsilon_2 \epsilon_0}} (n_e^2 - 1)}{\frac{\epsilon_1 \epsilon}{\epsilon_2 \epsilon_0} - 1}$$

$$\beta^2 \equiv \frac{\frac{\epsilon_1 \epsilon}{\epsilon_2 \epsilon_0} - n_e^2}{\frac{\epsilon_1 \epsilon}{\epsilon_2 \epsilon_0} - 1}$$

Rozkład $M_e(\kappa)$ na M_e^+ i M_e^- znany z pracy [3].

2.4. Zachowanie rozwiązań w otoczeniu krawędzi.

Wyznaczanie stałych A i B.

Analiza potencjałów \mathcal{V} i u w otoczeniu krawędzi przeprowadzona dla analogicznych wyrażeń w pracy [1] wykazała, że przy zbliżaniu się do krawędzi od strony apertury $|y| > 0$ zachowują się one następująco:

$$\mathcal{V} = \text{const} + C \cdot d \cdot L_e^-(\kappa_0) y^{\frac{1}{2}} + D(d, \kappa_0) y^{\frac{3}{2}} + \dots$$

/2.4.1/

$$u = \text{const} + C' \cdot b \cdot L_m^-(\tilde{\kappa}_0) y^{\frac{1}{2}} + D'(b, \tilde{\kappa}_0) y^{\frac{3}{2}} + \dots$$

gdzie:

C - stała wspólna dla \mathcal{V} , \mathcal{V}_1 i \mathcal{V}_2 /czyli niezależna od d i κ_0 /

C' - stała wspólna dla u_1 i u_2 /niezależna od b i $\tilde{\kappa}_0$ /

D i D' - funkcje parametrów d, κ_0 i $b, \tilde{\kappa}_0$.

Żadna z funkcji \mathcal{V} , \mathcal{V}_1 czy \mathcal{V}_2 z osobna nie spełnia warunku /1.9/, gdyż zawierają one zbyt osobliwy człon rzędu $y^{\frac{1}{2}}$. To samo dotyczy funkcji u_1 i u_2 . Spełnienia tego warunku zażądano dla całego rozwiązania $V = \mathcal{V} + \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2$ formalnego zagadnienia TM oraz dla całego rozwiązania $U = u_1 + u_2$ formalnego zagadnienia TE. Sprowadza się to do zażądania aby zniknęły współczynniki przy członach rzędu $y^{\frac{1}{2}}$ rozwiązań V i U .

Wstawiając w miejsce d i κ_0 oraz b i $\tilde{\kappa}_0$ odpowiednie wartości dane wzorami /2.12/ i /2.2.3/ otrzymano:

$$-P_e i \alpha_{e2} T_e(\kappa_i) \beta_{e1}(\kappa_i) L_e^-(\kappa_i) + A L_e^-(\kappa_{0e}) + B L_e^-(\kappa_{0e}) = 0$$

/2.4.2/

$$A L_m^-(\kappa_{0m}) - B L_m^-(\kappa_{0m}) = 0$$

Skąd wyznaczono nieznanne dotąd stałe A i B:

$$A = \frac{P_{e1} \alpha_{e2} T_e(\alpha_1) B_{e1}(\alpha_1) L_e^-(\alpha_1) \cdot L_m^-(\alpha_{om})}{L_e^-(\alpha_{oe}) L_m^-(\alpha_{om}) + L_e^-(\alpha_{oe}) L_m^-(\alpha_{om})}$$

/2.4.3/

$$B = \frac{L_m^-(\alpha_{om})}{L_m^-(\alpha_{om})} \cdot A$$

Wyznaczenie A i B kończy proces konstrukcji rozwiązania wektorowego problemu dyfrakcji na półpłaszczyźnie.

W strefie dalekiej ($\tau \rightarrow \infty$) rozwiązanie ścisłe można z powodzeniem zastąpić wyrażeniami asymptotycznymi, które mają bardziej przejrzystą postać i nadają się do interpretacji fizycznej. Poświęcono temu rozdział 3.

3. Asymptotyczne własności potencjałów strefy dalekiej.

Znalezione wyrażenia /2.1.10/ i /2.2.1/ określające potencjały v i u mają postać analogiczną jak w przypadku rozważanym w pracy /1/. Analogia ta pozwala niemal automatycznie wykorzystać wyniki tej części wspomnianej pracy, gdzie posługując się metodą punktu siodłowego znaleziono asymptotyczne postacie potencjałów V i U . Różnice, które pojawiają się w półprzestrzeni $x < 0$ zostaną omówione przy okazji fizycznej interpretacji przedstawionych tu wyników.

Dla każdego z czterech wyrażeń v^I, v^{II}, u^I, u^{II} oddzielnie wprowadzono w miejsce x, y , z współrzędne biegunowe w odpowiednio dobranych przeskalowanych układach współrzędnych kartezjańskich. Ponadto w każdym z tych wyrażeń zamieniono zmienne całkowania tak, aby występujące tam cztery całki przyjęły jak najprostszą postać, łatwo poddającą się analizie metodą punktu siodłowego. Nowe współrzędne i zmienne całkowania przedstawiono w tabelach 1 a i 1 b:

Tabela 1 a ($x > 0$)

TM (v^I)	TE (u^I)
$x_{e1} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}} x = \rho_{e1} \cos \varphi_{e1}$ $y_{e1} = y = \rho_{e1} \sin \varphi_{e1}$ $z_{e1} = z$ $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi_{e1} \leq \frac{\pi}{2}$ (ekran) $d = \rho_e \sin \vartheta$ $\tilde{d}_0 \equiv \rho_e \sin \vartheta_{e1}^0$ $-\frac{\pi}{2} \leq \text{Re } \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$ $-\frac{\pi}{2} < \text{Re } \vartheta_{e1}^0 < \frac{\pi}{2}$	$x_{m1} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_0}} x = \rho_{m1} \cos \varphi_{m1}$ $y_{m1} = y = \rho_{m1} \sin \varphi_{m1}$ $z_{m1} = z$ $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi_{m1} \leq \frac{\pi}{2}$ (ekran) $d = \rho_m \sin \vartheta$ $\tilde{d}_0 \equiv \rho_m \sin \vartheta_{m1}^0$ $-\frac{\pi}{2} \leq \text{Re } \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$ $\text{Re } \vartheta_{m1}^0 = 0$

Tabela 1 b ($x < 0$)

TM (v^{II})	TE (u^{II})
$x_{e2} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_0}} x = -\rho_{e2} \cos \varphi_{e2}$ $y_{e2} = y = -\rho_{e2} \sin \varphi_{e2}$ $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi_{e2} \leq \frac{\pi}{2}$ (ekran) $d = \sin \vartheta$ $\tilde{d}_0 \equiv \sin \vartheta_{e2}^0$ $-\frac{\pi}{2} \leq \text{Re } \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$ $-\frac{\pi}{2} < \text{Re } \vartheta_{e2}^0 < \frac{\pi}{2}$	$x_{m2} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_0}} x = -\rho_{m2} \cos \varphi_{m2}$ $y_{m2} = y = -\rho_{m2} \sin \varphi_{m2}$ $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi_{m2} \leq \frac{\pi}{2}$ (ekran) $d = \sin \vartheta$ $\tilde{d}_0 \equiv \sin \vartheta_{m2}^0$ $-\frac{\pi}{2} \leq \text{Re } \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$ $\text{Re } \vartheta_{m2}^0 = 0$

W tak wprowadzonych współrzędnych ϱ, φ i zmiennych całkowania ϑ , wyrażenia na potencjały pomocniczych zagadnień skalar-nych przyjmują następującą postać:

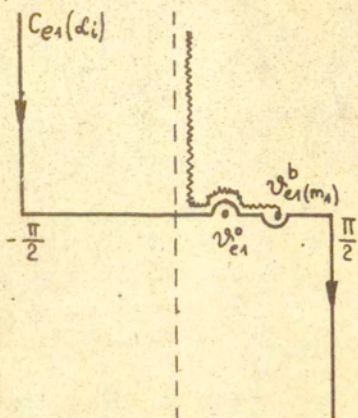
TM:

$$/3.1/ \quad \psi(\alpha_0, \varrho_e, \varphi_e) = -\Pi_e(\alpha_0) \frac{e^{i\vartheta^2}}{2\pi i} \int_{C_e(\alpha_0)} f_e(\alpha_0, \vartheta) e^{i\alpha_0 \varrho_e \cos(\vartheta - \varphi_e)} d\vartheta$$

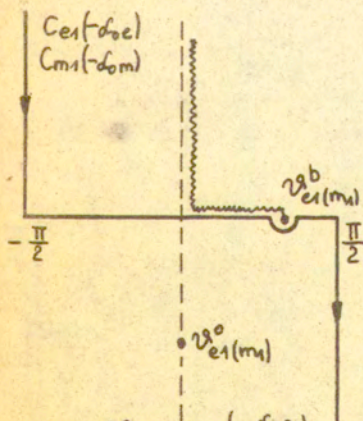
Znaczenie symboli oznaczonych indeksem „e”, dla $x > 0$ oraz dla $x < 0$ podano w tabeli 2. Kształty konturów $C_e(\alpha_0)$ dla I i II przedstawiono odpowiednio na rysunkach 4 i 5.

$$/3.2/ \quad u(\tilde{\alpha}_0, \varrho_m, \varphi_m) = -\Pi_m(\tilde{\alpha}_0) \frac{e^{i\vartheta^2}}{2\pi i} \int_{C_m(\tilde{\alpha}_0)} f_m(\tilde{\alpha}_0, \vartheta) e^{i\tilde{\alpha}_0 \varrho_m \cos(\vartheta - \varphi_m)} d\vartheta$$

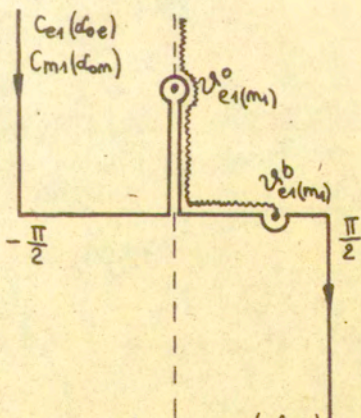
Objaśnienia symboli oznaczonych indeksem „m” i konturów $C_m(\tilde{\alpha}_0)$ znajdują się w tabeli 3 i na rysunkach 4 i 5, gdzie uwidoczni-
no również punkty rozgałęzienia funkcji f_e i f_m na płaszczyź-
nie zmiennej zespolonej (ϑ) .



a) $v_{e1}^o = \arcsin\left(\frac{d_i}{n_e}\right)$



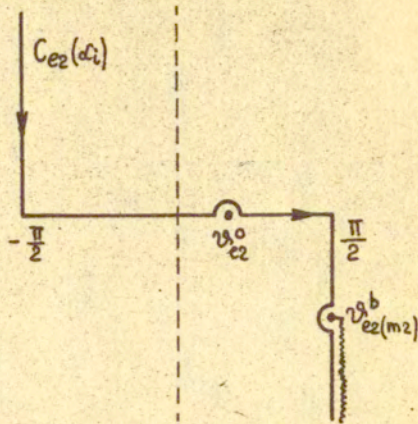
b) $v_{e1}^o = \arcsin\left(-\frac{d_{oe}}{n_e}\right)$
 $v_{m1}^o = \arcsin\left(-\frac{d_{om}}{n_m}\right)$



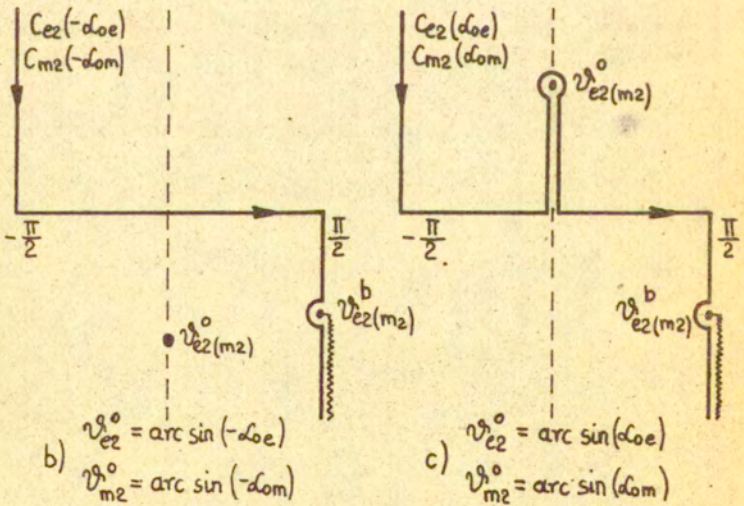
c) $v_{e1}^o = \arcsin\left(\frac{d_{oe}}{n_e}\right)$
 $v_{m1}^o = \arcsin\left(\frac{d_{om}}{n_m}\right)$

Rys. 4

($x > 0$) $v_{e1(m_2)}^b = \arcsin\left(\frac{1}{n_{e(m_2)}}\right)$



a) $\vartheta_{e2}^0 = \arcsin(\alpha_i)$



b) $\vartheta_{e2}^0 = \arcsin(-\alpha_{oe})$
 $\vartheta_{m2}^0 = \arcsin(-\alpha_{om})$

c) $\vartheta_{e2}^0 = \arcsin(\alpha_{oe})$
 $\vartheta_{m2}^0 = \arcsin(\alpha_{om})$

RYS. 5

($x < 0$) $\vartheta_{e2}(m_2) = \arcsin(\alpha_{e2}(m_2))$

gdzie: $k^2 = \omega^2 \epsilon \mu$, $k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$, $H(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi > 0 \\ 0 & \xi < 0 \end{cases}$

3.1.3/ $H^*(\xi, \Delta) \equiv H(\xi + \Delta) \cdot H(-\xi + \Delta) = \begin{cases} 1 & -\Delta < \xi < \Delta \\ 0 & \xi > \Delta, \xi < -\Delta \end{cases}$

$$|\sqrt{2\alpha_e \beta_e} \sin \delta_e| \gg 1$$

3.1.4/
$$V_c = \sqrt{\frac{i}{2\pi}} \Pi_e(\alpha_e) \left\{ f_e(\varphi_e) + \frac{1}{2i\alpha_e \beta_e} [f_e''(\varphi_e) + \frac{1}{4} f_e(\varphi_e)] \right\} \cdot \frac{e^{i\gamma_2} e^{i\alpha_e \beta_e}}{\sqrt{\alpha_e \beta_e}} + O[(\alpha_e \beta_e)^{\frac{5}{2}}]$$

$$V_b = \sqrt{\frac{1}{\pi i}} \Pi_e(\alpha_e) [\sqrt{v - v_0^b} f_b(v)]_{v=v_0^b} = \frac{e^{i\gamma_2} e^{i\alpha_e \beta_e \cos(\gamma_0^b - \varphi_e)}}{[\alpha_e \beta_e \sin(\gamma_0^b - \varphi_e)]^{\frac{3}{2}}} + O[(\alpha_e \beta_e)^{\frac{5}{2}}]$$

3.1.5/

$$e^{i\alpha_e \beta_e \cos(\gamma_0^b - \varphi_e)} = \begin{cases} e^{i\alpha_e \beta_e \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_1}} \sqrt{n_2^2 - 1} x + i\alpha_e \beta_e y} & x > 0 \\ e^{-\alpha_e \beta_e \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon_2}} \sqrt{n_2^2 - 1} |x| + i\alpha_e \beta_e y} & x < 0 \end{cases}$$

3.1.6/
$$V_{\alpha_e} = S_e e^{i\gamma_2} I(\delta_e) + S_e \sqrt{\frac{i}{\pi}} \left\{ g_e(\varphi_e) + \frac{1}{2i\alpha_e \beta_e} [g_e''(\varphi_e) + \frac{1}{4} g_e(\varphi_e)] \right\}$$

$$\frac{e^{i\gamma_2} e^{i\alpha_e \beta_e}}{\sqrt{\alpha_e \beta_e}} + O[(\alpha_e \beta_e)^{\frac{5}{2}}]$$

$$/3.1.7/ \quad I(\delta_e) = \operatorname{sgn}(\delta_e) e^{i\alpha_e \beta_e \cos \delta_e} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix^2} dx + H(-\delta_e) e^{i\alpha_e \beta_e \cos \delta_e} \sqrt{2\alpha_e \beta_e} \left| \sin \frac{\delta_e}{2} \right|$$

Znaczenie symboli oznaczonych indeksem "e" podano w tabeli 2a.

$$v_\lambda = \sqrt{\frac{i}{2\pi}} \prod_{e_1}(\delta_{e_1}) e^{ik^2} e^{i\alpha_{e_1} \beta_{e_1}} \left[\frac{f_{e_1}(v_{e_1}^b)}{\sqrt{\alpha_{e_1} \beta_{e_1}} \cos \frac{\lambda_{e_1}}{2}} + \frac{e^{-i\alpha_{e_1} \beta_{e_1} \sin \frac{2\lambda_{e_1}}{2}}}{\sqrt{2\alpha_{e_1} \beta_{e_1}}} \right]$$

/3.1.8/

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{(1-n)\frac{\pi i}{2}}}{(2\alpha_{e_1} \beta_{e_1})^{\frac{n}{2}}} D_{n-\frac{1}{2}}(-i\sqrt{2\alpha_{e_1} \beta_{e_1}} b_e)$$

$$\lambda_e \equiv v_{e_1}^b - \varphi_{e_1} \quad ,$$

$D_{n-\frac{1}{2}}(X)$ - funkcja Webera ,

$$b_e \equiv \sqrt{2i} \sin \frac{\lambda_e}{2} \quad ,$$

$$a_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n G_e}{d(\sqrt{s-b_e})^n} \right]_{s=b_e}$$

$$G_e(s) = f_{e_1}(v(s)) \frac{dv}{ds} \quad ,$$

$$s = \sqrt{2i} \sin \frac{v - \varphi_{e_1}}{2}$$

Tabela 2 /TM/

Symbol	Określenie symbolu w obszarze I ($x > 0$)	Określenie symbolu w obszarze II ($x < 0$)
$\Pi_e(\alpha_0)$	$\Pi_{e1}(\alpha_0) = \frac{d \cdot \bar{L}_e(\alpha_0)}{i \chi_{e2}} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon}}$	$\Pi_{e2}(\alpha_0) = -\frac{d \cdot \bar{L}_e(\alpha_0)}{i \chi_{e2}} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_0}}$
$\chi_e \beta_e$	$\chi_{e1} \beta_{e1} = \chi_{e1} \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_1} x^2 + y^2}$	$\chi_{e2} \beta_{e2} = \chi_{e2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon_2} x^2 + y^2}$
φ_e	$\varphi_{e1} = \arccos \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon}} \frac{y}{x} \right)$	$-\varphi_{e2} = -\arccos \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_0}} \frac{y}{x} \right)$
$f_e(\vartheta)$	$f_{e1}(\vartheta) = 1/\bar{L}_e(n_e \sin \vartheta) [n_e \sin \vartheta - \alpha_0]$	$f_{e2}(\vartheta) = 1/\bar{L}_e(\sin \vartheta) [\sin \vartheta - \alpha_0]$
ϑ_e^i	$\vartheta_{e1}^i = \arcsin \left(\frac{\alpha_0}{n_e} \right)$	$\vartheta_{e2}^i = \arcsin(\alpha_0)$
ϑ_e	$\vartheta_{e1} = \arccos \left(\frac{\chi_{e1}}{k_{e1}} \right)$	$\vartheta_{e2} = \arccos \left(\frac{\chi_{e2}}{k_{e2}} \right)$
ϑ_e^b	$\vartheta_{e1}^b = \arcsin \left(\frac{1}{n_e} \right)$	$\vartheta_{e2}^b = \arcsin(n_e)$
$\delta_e = \varphi_e - \vartheta_e^i$	$\delta_{e1} \equiv \varphi_{e1} - \vartheta_{e1}^i$	$\delta_{e2} \equiv -\varphi_{e2} - \vartheta_{e2}^i$
S_e	$S_{e1} = -P_e T_e(\alpha_i)$	$S_{e2} = P_e [1 - \operatorname{Re}(\alpha_i)]$
$g_e(\vartheta)$	$g_{e1}(\vartheta) = \sqrt{n_e^2 - \alpha_0^2} \bar{L}_e(\alpha_i) f_{e1}(\vartheta) + \frac{1}{2 \sin \frac{\vartheta - \vartheta_{e1}^i}{2}}$	$g_{e2}(\vartheta) = \sqrt{1 - \alpha_0^2} \bar{L}_e(\alpha_i) f_{e2}(\vartheta) + \frac{1}{2 \sin \frac{\vartheta - \vartheta_{e2}^i}{2}}$

Asymptotyczna postać potencjału V reprezentującego część TM pola ugiętego jest sumą:

$$/3.1.9/ \quad V = v + v_1 + v_2 = v(\alpha_i) + v(-\alpha_{oe}) + v(\alpha_{oe})$$

3.2. Potencjały pól dalekich ($\alpha_m \beta_m \gg 1$) typu TE.

$x > 0$

$$u^I = \begin{Bmatrix} u_1^I \\ u_2^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{A}{\omega \mu} e^{i\gamma z} e^{ikx + \gamma y} H(-\varphi_{m1} - \vartheta_{m1}) \\ -\frac{B}{\omega \mu} e^{i\gamma z} e^{ikx - \gamma y} H(-\varphi_{m1} + \vartheta_{m1}) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_c(-d_{om}) \\ u_c(d_{om}) \end{Bmatrix} +$$

$$/3.2.1/ + \begin{Bmatrix} u_\lambda(-d_{om}) - u_c(-d_{om}) \\ -u_\lambda(d_{om}) - u_c(d_{om}) \end{Bmatrix} H^*(\varphi_{m1} - \vartheta_{m1}^b, -\lambda_m) + \begin{Bmatrix} u_b(-d_{om}) \\ u_b(d_{om}) \end{Bmatrix} H(\varphi_{m1} - \vartheta_{m1}^b + \lambda_m)$$

$$\lambda_b \equiv \vartheta_{m1}^b - \varphi_{m1} \quad , \quad |\sqrt{4\alpha_{m1}\beta_{m1}} \sin \frac{\lambda_m}{2}| \gg 1$$

$x < 0$

$$u^{II} = \begin{Bmatrix} u_1^{II} \\ u_2^{II} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{A}{\omega \mu_0} e^{i\gamma z} e^{-ikx + \gamma y} H(\varphi_{m2} - \vartheta_{m2}) \\ -\frac{B}{\omega \mu_0} e^{i\gamma z} e^{-ikx - \gamma y} H(\varphi_{m2} + \vartheta_{m2}) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_c(-d_{om}) \\ u_c(d_{om}) \end{Bmatrix} +$$

$$/3.2.2/ + \begin{Bmatrix} u_b(-d_{om}) \\ u_b(d_{om}) \end{Bmatrix} H(-\varphi_{m2} - \vartheta_{m1}^b)$$

gdzie: $H(\xi)$, $H^*(\xi)$ - por. wzór /3.1.3/

u_c , u_b i u_λ - mają postać, którą można natychmiast otrzymać z wyrażeń u_c , v_b i v_λ , zamieniając we wzorach /3.1.4/, /3.1.5/ i /3.1.8/ indeks "e" na indeks "m", oraz α_0 na $\tilde{\alpha}_0$.

Natomiast znaczenia symboli oznaczonych indeksem "m" należy odczytać z tabeli 3:

Tabela 3 /TE/

Symbol	Określenie symbolu w obszarze I ($x > 0$)	Określenie symbolu w obszarze II ($x < 0$)
$\Pi_m(\alpha_0)$	$\Pi_{m1}(\alpha_0) = \frac{b}{\mu} L_m(\alpha_0)$	$\Pi_{m2}(\alpha_0) = \frac{b}{\mu_0} L_m(\alpha_0)$
$\alpha_m \beta_m$	$\alpha_{m1} \beta_{m1} = \alpha_{m1} \sqrt{\frac{\mu}{\mu_1} x^2 + y^2}$	$\alpha_{m2} \beta_{m2} = \alpha_{m2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\mu_2} x^2 + y^2}$
φ_m	$\varphi_{m1} = \arctg \left(\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu}} \frac{y}{x} \right)$	$-\varphi_{m2} = -\arctg \left(\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_0}} \frac{y}{x} \right)$
$f_m(\psi)$	$f_{m1}(\psi) = \frac{n_m \cos \psi}{L_m (n_m \sin \psi) [n_m \sin \psi - \alpha_0]}$	$f_{m2}(\psi) = \frac{\cos \psi}{L_m (\sin \psi) [\sin \psi - \alpha_0]}$
ψ_m^b	$\psi_{m1}^b = \arcsin \left(\frac{1}{n_m} \right)$	$\psi_{m2}^b = \arcsin (n_m)$
ψ_m	$\psi_{m1} = \arccos \left(\frac{\alpha_{m1}}{k_{m1}} \right)$	$\psi_{m2} = \arccos \left(\frac{\alpha_{m2}}{k_{m2}} \right)$

Asymptotyczna postać potencjału U reprezentującego część TE pola ugiętego jest sumą:

$$/3.2.3/ \quad U = u_1 + u_2 = u(-d_{om}) + u(d_{om})$$

3.3. Interpretacja fizyczna wyników.

Całkowite pole elektromagnetyczne dla rozważanego problemu dyfrakcyjnego jest reprezentowane przez dwa potencjały $V_{całk}$ i $U_{całk}$, których asymptotyczną postać otrzymuje się natychmiast dodając do znalezionych wyrażen V /por. /3.1.9// i U /por. /3.2.3// potencjały pola pierwotnego V_p /por. 1.6//:

$$/3.3.1/ \quad \begin{aligned} V_{całk} &= V_p + V \\ U_{całk} &= U \quad (U_p = 0) \end{aligned}$$

Z $V_{całk}$ i $U_{całk}$ wyodrębniono część V_g i U_g odpowiadającą przybliżeniu optyki geometrycznej. W tym wypadku ma ona charakter jednorodnych fal płaskich TM: padającej, odbitej i przechodzącej:

$$/3.3.2/ \quad V_g = \begin{cases} P_e T_e(\alpha_i) \cdot H(\phi - \phi_t) \mathcal{V}_i(\alpha_i) \\ V_i + [H(\phi - \phi_r) + R_e(\alpha_i) H(\phi_r - \phi)] \mathcal{V}_r(\alpha_i) \end{cases}$$

$$U_g = 0$$

gdzie: V_i - potencjał fali padającej /por. /1.6//

$\mathcal{V}_t, \mathcal{V}_r$ - potencjały fal przechodzącej i odbitej wzięte z amplitudami jednostkowymi /por. /3.1.1/ i /3.1.2//

ϕ - kąt obserwacji w płaszczyźnie $Z = \text{const}$ w układzie $/x, y, z/$:

$$x = \begin{cases} r \cos \phi & x > 0 \\ -r \cos \phi & x < 0 \end{cases}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$$

/3.3.3/

$$y = \begin{cases} r \sin \phi & x > 0 \\ -r \sin \phi & x < 0 \end{cases}$$

$$z = z$$

$$\phi_r = -\arctg\left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon_2} \tan \theta_i\right) = -\phi_i \quad /granica cienia fali odbitej/$$

/3.3.4/

$$\phi_t = \arctg\left(\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \frac{\alpha_i}{\sqrt{n_2^2 - \alpha_i^2}}\right) \quad /granica cienia fali przechodzącej/$$

W obszarze $[\frac{\pi}{2}, \phi_r]$ fala padająca odbija się od doskonale przewodzącej półpłaszczyzny ze współczynnikiem równym jedności. Natomiast w obszarze $[\phi_r, -\frac{\pi}{2}]$ jej współczynnik odbicia jest równy $\text{Re}(k_i)$ / częściowe odbicie od granicy dwóch ośrodków/.

Pozostała po wyodrębnieniu części geometrycznej część potencjałów $V_{\text{całk}}$ i $U_{\text{całk}}$; to potencjały pola dyfrakcyjnego V_d i U_d :

$$\begin{aligned} /3.3.5/ \quad V_d &= V_{\text{całk}} - V_0 \\ U_d &= U \end{aligned}$$

Ze wzorów /3.1.1/ i /3.2.1/ widać, że pole dyfrakcyjne w obszarze $x > 0$ składa się z:

1. Dwóch fal eliptycznych TM i TE:

$$/3.3.6/ \quad V_c^{\bar{I}} \equiv U_c^{\bar{I}}(k_i) + U_c^{\bar{I}}(-\alpha_{oe}) + U_c^{\bar{I}}(\alpha_{oe}) \sim \frac{e^{i\gamma z} e^{i\alpha_c \beta e}}{\sqrt{\alpha_e \beta e}}$$

$$U_c^{\bar{I}} \equiv U_c^{\bar{I}}(-\alpha_{om}) + U_c^{\bar{I}}(\alpha_{om}) \sim \frac{e^{i\gamma z} e^{i\alpha_m \beta m}}{\sqrt{\alpha_m \beta m}}$$

Fala eliptyczna TE istnieje wszędzie poza otoczeniem granicy cienia ϕ_{bm} fali bocznej TE. Natomiast fala eliptyczna TM oprócz otoczenia granicy cienia ϕ_{be} fali bocznej TM, nie istnieje również w otoczeniu granicy cienia ϕ_t fali przechodzącej.

2. W pobliżu wspomnianych granic cienia pole ma charakter przejściowy opisywany przy pomocy funkcji Webera /dla ϕ_{be} i ϕ_{bm} / i całki Fresnela /dla ϕ_t /.
3. Dwóch jednorodnych fal bocznych TM i TE:

$$V_b^I \equiv U_b^I(\alpha_i) + V_b^I(-\alpha_{oc}) + U_b^I(\alpha_{oc}) \sim \frac{e^{i\gamma z} e^{i\alpha_{e2} \beta_{e1}(\alpha_i)x + i\alpha_{e2} \alpha_i y}}{[\alpha_{e1} \beta_{e1} \sin(\gamma_{e1}^b - \varphi_{e1})]^{3/2}}$$

/3.3.7/

$$U_b^I \equiv U_b^I(-\alpha_{om}) + U_b^I(\alpha_{om}) \sim \frac{e^{i\gamma z} e^{i\alpha_{m2} \beta_{m1}(\alpha_i)x + i\alpha_{m2} \alpha_i y}}{[\alpha_{m1} \beta_{m1} \sin(\gamma_{m1}^b - \varphi_{m1})]^{3/2}} \quad |$$

które występują w obszarach przyległych do granicy dwóch ośrodków. Dla V_b jest to sektor $]\phi_{be}, \frac{\pi}{2}]$, a dla U_b $]\phi_{bm}, \frac{\pi}{2}]$, gdzie

$$\phi_{be} = \arctg \left(\sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_1}} \frac{1}{\sqrt{n_e^2 - 1}} \right)$$

/3.3.8/

$$\phi_{bm} = \arctg \left(\sqrt{\frac{\mu}{\mu_1}} \frac{1}{\sqrt{n_m^2 - 1}} \right)$$

3. Oraz dwóch niejednorodnych fal płaskich typu TEM:

$$a/ \begin{Bmatrix} V_{(+)TEM}^I \\ U_{(+)TEM}^I \end{Bmatrix} = A \begin{Bmatrix} \frac{1}{ik} \\ \frac{1}{\omega\mu} \end{Bmatrix} e^{i\gamma z} e^{ikx + \gamma y}$$

/3.3.9/

$$b/ \begin{Bmatrix} V_{(-)TEM}^I \\ U_{(-)TEM}^I \end{Bmatrix} = B \begin{Bmatrix} \frac{1}{ik} \\ -\frac{1}{\omega\mu} \end{Bmatrix} e^{i\gamma z} e^{ikx - \gamma y}$$

Łatwo sprawdzić /por. /1.2//, że wszędzie tam, gdzie występuje para potencjałów $V_{(+)}^I$ i $U_{(+)}^I$ jednocześnie, generowane przez nie pole jest w sumie równe zero. Jednakże, ze względu na anizotropię ośrodka, obszary istnienia tych potencjałów nie pokrywają się. Toteż para ta daje niezerowy wkład do pola dyfrakcyjnego w postaci niejednorodnej fali płaskiej TEM jedynie w sektorze, gdzie jeden z potencjałów tej pary nie znika, a drugi jest równy zero.

Ponieważ $V_{(+)}^I$ istnieje w obszarze $[-\frac{\pi}{2}, -\phi_{e1}]$, a $U_{(+)}^I$ w obszarze $[-\frac{\pi}{2}, -\phi_{m1}]$ gdzie:

$$\phi_{e1} = \arctg \left(\sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_1}} \frac{\gamma}{\alpha_{e1}} \right)$$

/3.3.10/

$$\phi_{m1} = \arctg \left(\sqrt{\frac{\mu}{\mu_1}} \frac{\gamma}{\alpha_{m1}} \right)$$

to pole generowane przez tę parę potencjałów nie znika jedynie w sektorze między $-\phi_{e1}$ i $-\phi_{m1}$.

Analogicznie pole od drugiej pary potencjałów $V_{(-)}^I$ i $U_{(-)}^I$ jest niejednorodną falą płaską typu TEM występującą jedynie w sektorze zawartym między ϕ_{m1} i ϕ_{e1} .

W miarę oddalania się od krawędzi, amplitudy obu fal $TEM_{(+)}$ i $TEM_{(-)}$ maleją wykładniczo w obszarach swego występowania.

Pole dyfrakcyjne strefy dalekiej w obszarze II ($x < 0$) zawiera /por. /3.1.2/ i /3.2.3//:

1. Dwie fale eliptyczne TM i TE:

$$V_c^{\bar{u}} \equiv \mathcal{U}_c^{\bar{u}}(\alpha_1) + \mathcal{U}_c^{\bar{u}}(-\alpha_{0c}) + \mathcal{U}_c^{\bar{u}}(\alpha_{0c}) \sim \frac{e^{i\gamma z} e^{i\alpha_{e2} \beta_{e2}}}{\sqrt{\alpha_{e2} \beta_{e2}}}$$

/3.3.11/

$$U_c^{\bar{u}} \equiv \mathcal{U}_c^{\bar{u}}(-\alpha_{0m}) + \mathcal{U}_c^{\bar{u}}(\alpha_{0m}) \sim \frac{e^{i\gamma z} e^{i\alpha_{m2} \beta_{m2}}}{\sqrt{\alpha_{m2} \beta_{m2}}}$$

przy czym fala U_C^{II} występuje dla wszystkich kątów obserwacji, a fala V_C^{II} istnieje wszędzie poza otoczeniem granicy światła odbitego ($\phi_r = -\phi_i$).

2. Pole o charakterze przejściowym w sektorze zawierającym granicę cienia ϕ_t fali odbitej. Pole to opisywane jest całką Fresnela.

3. Dwie niejednorodne fale boczne TM i TE:

$$V_b^{\text{II}} \equiv V_b^{\text{II}}(\alpha_i) + V_b^{\text{II}}(-\alpha_{oe}) + V_b^{\text{II}}(\alpha_{oe}) \sim \frac{e^{i\gamma_2 z} e^{-\alpha_{e2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon_2} (n_m^2 - 1)} |x| + i\alpha_{e1} y}}{[\alpha_{e2} \beta_{e2} \sin(\gamma_{e2}^b - \varphi_{e2})]^{3/2}}$$

/3.3.12/

$$U_b^{\text{II}} \equiv U_b^{\text{II}}(-\alpha_{oe}) + U_b^{\text{II}}(\alpha_{oe}) \sim \frac{e^{i\gamma_2 z} e^{-\alpha_{m2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon_2} (n_m^2 - 1)} |x| + i\alpha_{m2} y}}{[\alpha_{m2} \beta_{m2} \sin(\gamma_{e2}^b - \varphi_{e2})]^{3/2}}$$

występujące w obszarach przyległych do granicy rozdzielającej dwa ośrodki, tj. $[-\frac{\pi}{2}, -\tilde{\phi}_{be}]$ dla TM i $[-\frac{\pi}{2}, -\tilde{\phi}_{bm}]$ dla TE, gdzie:

$$\tilde{\phi}_{be} = \arctg \left[\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon_2}} \frac{1}{\sqrt{n_m^2 - 1}} \right]$$

/3.3.13/

$$\tilde{\phi}_{bm} = \arctg \left[\sqrt{\frac{\mu_0}{\mu_2}} \frac{1}{\sqrt{n_m^2 - 1}} \right]$$

Fale te propagują się równoległe do płaszczyzny granicznej $x = 0$ z prędkościami fazowymi charakterystycznymi dla sąsiedniego ośrodka. Przy oddalaniu się od płaszczyzny granicznej amplitudy tych fal maleją wykładniczo.

4. Dwie niejednorodne fale płaskie typu TEM

$$a) \begin{cases} V_{(+)\text{TEM}}^{\text{II}} \\ U_{(+)\text{TEM}}^{\text{II}} \end{cases} = -A \begin{cases} \frac{1}{ik_0} \\ -\frac{1}{\omega\mu_0} \end{cases} e^{i\gamma z} e^{-ik_0x + \gamma y}$$

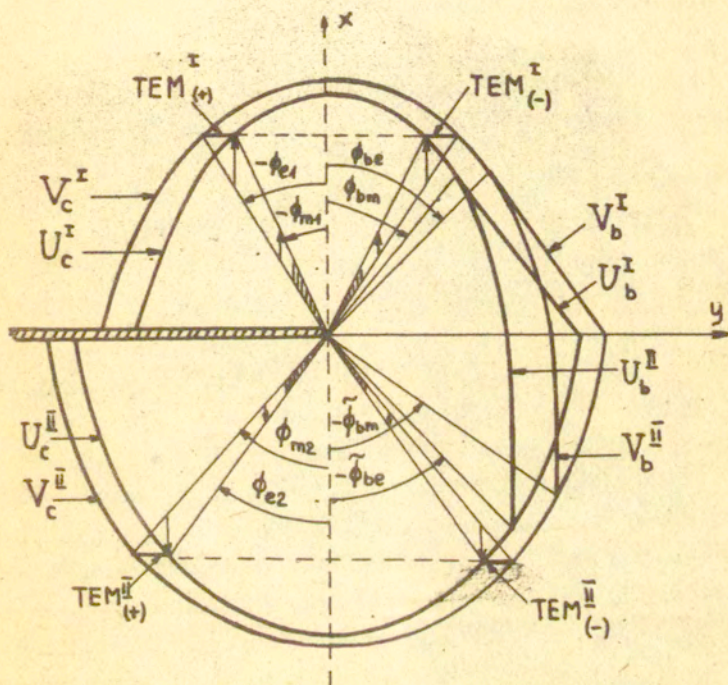
/3.3.14/

$$b) \begin{cases} V_{(-)\text{TEM}}^{\text{II}} \\ U_{(-)\text{TEM}}^{\text{II}} \end{cases} = -B \begin{cases} \frac{1}{ik_0} \\ \frac{1}{\omega\mu_0} \end{cases} e^{i\gamma z} e^{-ik_0x - \gamma y}$$

których pola, na mocy rozważań analogicznych jak w przypadku ośrodka górnego ($x > 0$), istnieją jedynie w sektorach kątowych zawartych między ϕ_{e2} i ϕ_{m2} dla $\text{TEM}_{(+)}$ i między $-\phi_{m2}$ i $-\phi_{e2}$ dla $\text{TEM}_{(-)}$

$$/3.3.15/ \quad \phi_{e2} = \arctg \left(\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon_2}} \frac{\gamma}{\alpha_{e2}} \right)$$

$$\phi_{m2} = \arctg \left(\sqrt{\frac{\mu_0}{\mu_2}} \frac{\gamma}{\alpha_{m2}} \right)$$



Rys. 6

Przecięcie frontów falowych pola dyfrakcyjnego z płaszczyzną $z = \text{const}$ /z pominięciem stref gdzie pole ma charakter przejściowy/.

4. Podsumowanie

Rozwiązany wcześniej [1] problem dyfrakcyjny, w którym dolny ($x < 0$) ośrodek był izotropowy, stanowi przypadek częściowo zdegenerowany w stosunku do zagadnienia rozważanego obecnie.

/Dalszą degenerację wprowadziłoby rozpatrywanie dwóch ośrodków izotropowych/. Główne różnice wynikające z usunięcia tej degeneracji występują zatem w postaci pola w dolnym ośrodku. Są to:

1. Zmiana kształtu frontów fal stożkowych ($V_c^{\bar{H}}, U_c^{\bar{H}}$) z kołowych na eliptyczne.
2. Rozdzielenie się frontów fali eliptycznej $V_c^{\bar{H}}$ typu TM ($V_c^{\bar{H}}$) i fali eliptycznej typu TE ($U_c^{\bar{H}}$). Fronty te poruszają się obecnie z różnymi prędkościami.
3. Pojawienie się dwóch fal płaskich typu TEM w sektorach kątowych położonych symetrycznie względem płaszczyzny $y = 0$.

Wszystkie te własności pola są wynikiem anizotropii dolnego ośrodka. Przy czym należy dodać, że w przypadku dwuwymiarowym; gdy wektor falowy fali padającej leży w płaszczyźnie $z = 0$, fale typu TEM nie występują.

LITERATURA

- [1] B. JASKORZYŃSKA-DZIECIASZEK - Dyfrakcja fali płaskiej na półpłaszczyźnie położonej na granicy ośrodka izotropowego i jednoosiowo-anizotropowego. Prace IPPT 28/1980.
- [2] S. PRZEŹDZIECKI - Diffraction by a half-plane perpendicular to the distinguished axis of uniaxially anisotropic medium. J. Appl. Phys. 37, 1966, 2768-2775.
- [3] H. STOCKEL - Die Beugung einer ebenen elektromagnetischen Welle an einer bzw. zwei idealeitenden Halbebenen in der Trennebene zwischen zwei homogenen, isotropen Medien, Ann. Physik, 12, No 3-4, 1963, 156-185.

SPIS TRESCI

	str
1. Sformułowanie problemu	5
2. Konstrukcja rozwiązania	8
2.1. Rozwiązanie formalne zagadnienia TM	8
2.2. Rozwiązanie formalne zagadnienia TE	13
2.3. Faktoryzacja funkcji L_m i L_e	14
2.4. Zachowanie rozwiązań w otoczeniu krawędzi Wyznaczanie stałych A i B	17
3. Asymptotyczne własności potencjałów strefy dalekiej	18
3.1. Potencjały pól dalekich ($\alpha_e \beta_e \gg 1$) typu TM	23
3.2. Potencjały pól dalekich ($\alpha_m \beta_m \gg 1$) typu TE	27
3.3. Interpretacja fizyczna wyników	28
4. Podsumowanie	36