1.12 — metody probabilistyczne

14/1984

Zbigniew Kotulski

FUNKCJONAŁY CHARAKTERYSTYCZNE STOCHASTYCZNYCH PROCESÓW FALOWYCH

14/1984

Praca doktorska

WARSZAWA 1984

ISSN 0208-5658

P r a c a   d o k t o r s k a

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 2 marca 1984 r.

Serdecznie dziękuję
Panu Profesorowi
Kazimierzowi Sobczykowi
za opiekę i pomoc
przy pisaniu tej pracy

N a   p r a w a c h   r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 160 egz. Ark.wyd.6,1. Ark.druk. 10,75
Oddano do drukarni w marcu 1984 r.
Nr zamówienia 205/84.

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

Zbigniew Kotulski
Zakład Teorii Ośrodków Ciągłych

FUNKCJONAŁY CHARAKTERYSTYCZNE STOCHASTYCZNYCH PROCESÓW FALOWYCH

I. Wstęp

1. Fale w ośrodkach stochastycznych; podstawowe metody, momenty losowych pól falowych.

Szeroką klasę procesów fizycznych zachodzących w przyrodzie stanowią zjawiska falowe. Do ich matematycznego opisania mogą służyć równania różniczkowe, zwłaszcza równania różniczkowe cząstkowe /por. [1]/. Przedmiotem naszych zainteresowań są fale stochastyczne, których matematycznym modelem są równania różniczkowe /cząstkowe/ ze współczynnikami, warunkami początkowymi lub prawą stroną /wymuszeniem/ będącymi procesami stochastycznymi lub zmiennymi losowymi.

W chwili obecnej istnieje obszerna literatura dotycząca badania takich równań i opisanych przez nie zjawisk /por. [2], [3] /, jednak ze względu na trudności matematyczne brak jest ogólnego i jednolitego podejścia. Wszystkie obecnie znane metody bazują na przybliżeniach: bądź to matematycznych, bądź fizycznych.

Ogromna większość badań poświęconych propagacji fal w ośrodkach stochastycznych dotyczy problemów opisanych przez równania skalarne i oparta jest na założeniu, że ośrodek stochastyczny jest słabo niejednorodny. Założenie to pozwala zastosować do poszukiwania rozwiązań metodę perturbacyjną w różnych jej wersjach /por. [3] /.

Najstarszą z metod jest przybliżenie Borna, uwzględniające tylko efekty rozpraszania jednokrotnego. Zakłada się w niej, że niejednorodności ośrodka są małe /rzędu ε / i poszukuje rozwiązania w postaci rozwinięcia w szereg potęgowy względem ε. Metoda ta ma dość ograniczony zakres stosowalności, zaproponowano więc szereg innych przybliżeń, pozwalających uwzględniać efekty rozpraszania wielokrotnego. Jedną z nich jest "zrandomizowana" metoda optyki geometrycznej zakładająca, że długość fali λ dąży do zera i jest dużo mniejsza od rozmiaru niejednorodności ośrodka l. Wyjściowe równanie rozkłada się na dwa równania: dla amplitudy i dla fazy a następnie ich rozwiązań poszukuje się zakładając, że λ jest małym parametrem. Optyka geometryczna, w odróżnieniu od przybliżenia Borna, pozwala uwzględniać również rozpraszanie wielokrotne na małe kąty, jednak jej dodatkowym ograniczeniem jest fakt, że uzyskane tak rozwiązanie przybliżone jest dostatecznie dokładne jedynie w niewielkiej odległości L od źródła, tj. gdy $\lambda L \ll 1$. Tej ostatniej wady nie ma metoda Rytowa, w której funkcji falowej $P(\underline{r})$ opisanej stochastycznym równaniem Helmholtza poszukuje się w postaci wykładniczej $P(\underline{r}) = A_0 \exp\{iS(\underline{r})\}$, a uzyskane równanie dla $S(\underline{r})$ rozwiązuje się perturbacyjnie względem małego parametru $\frac{\lambda}{l}$. Metoda Rytowa daje dobre przybliżenie dla dużych $|\underline{r}|$, co jest zaletą w porównaniu z przybliżeniem Borna.

W szczególnym przypadku propagacji fali w wybranym kierunku x, przy założeniach metody Rytowa / $x \gg l \gg \lambda$ /, można poszukiwać rozwiązania w postaci:

$$P(\underline{r}) = U(\underline{r}) \exp\{ i k_0 x \} \qquad /1.1/$$

i zamiast równania Helmholtza dla $P(\underline{r})$, badać równanie paraboliczne dla $U(\underline{r})$:

$$2ik_0 \frac{\partial U(x,r_1)}{\partial x} + \Delta_{\perp} U(x,r_1) + k_0^2 \varepsilon(x,r_1) U(x,r_1) = 0 \qquad /1.2/$$

gdzie $\underline{r} = (x,r_1) = (x,y,z)$, $r_1 = (y,z)$,

$$\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad /1.3/$$

natomiast k_o jest tzw. liczbą falową ośrodka jednorodnego. Metoda ta nazywana jest przybliżeniem dyfuzyjnym /parabolicznym/; jej sens fizyczny polega na założeniu powolnego i niewielkiego rozpraszania energii w kierunku poprzecznym do x /por. [4]/.

Podane wyżej metody pozwalają uzyskać momenty niższych rzędów rozwiązania równania falowego. Jedynie w przypadku przybliżenia dyfuzyjnego, przy dodatkowym założeniu, że proces stochastyczny opisujący niejednorodności ośrodka $\varepsilon(x, r_1)$ ma funkcję korelacyjną będącą deltą Diraca względem x, uzyskano równania dla wszystkich momentów pola falowego /por. np. [5]/.

Ostatnia z metod, którą tu omówimy - metoda wygładzania, pochodząca od Kellera - pozwala badać szeroką klasę zagadnień falowych na bazie równania dla fali średniej /por. [6]/. W metodzie tej losowy operator falowy w równaniu:

$$L(\gamma)\, u = g \qquad /1.4/$$

$\gamma \in \Gamma, (\Gamma, \mathfrak{F}_\Gamma, P)$ - przestrzeń probabilistyczna, przedstawia się w postaci szeregu operatorów względem małego parametru ε:

$$L(\gamma) = L_o + \varepsilon L_1(\gamma) + \varepsilon^2 L_2(\gamma) + \ldots \qquad /1.5/$$

a następnie znajduje równanie dla średniej z dokładnością do ε^n, np. dla n = 2 otrzymujemy:

$$\left\{L_o + \varepsilon^2\left[\langle L_2\rangle - \langle L_1 L_o^{-1} L_1\rangle\right]\right\}\langle u\rangle = g + O(\varepsilon^3) \qquad /1.6/$$

Metoda ta okazała się szczególnie skuteczna; przy jej pomocy otrzymano szereg interesujących rezultatów dotyczących pola średniego i wyznaczono tzw. efektywne stałe rozważanych ośrodków stochastycznych /por. [3] /. Idea perturbacyjnego budowania równań dla momentów wyższych rzędów, aczkolwiek możliwa, jest niestety /ze względu na złożoność równań/ mniej efektywna, a poza tym przybliżenie pola falowego tak uzyskane może znacznie odbiegać od dokładnego /por.[7]/.

W przedstawionej sytuacji ważne jest znalezienie metody czy grupy metod powiązanych ze sobą, które obejmując szereg istniejących rezultatów, dawałyby dodatkowo nowe możliwości analizy fal stochastycznych. Wydaje się, że warunki te spełnia zastosowanie funkcjonałów charakterystycznych.

2. Funkcjonały charakterystyczne

Jednym z możliwych sposobów opisywania procesów stochastycznych /pól losowych/ są funkcjonały charakterystyczne /por.[8] /. Funkcjonał charakterystyczny, jako transformata Fouriera miary probabilistycznej określonej na przestrzeni realizacji, zawiera pełną informację o procesie stochastycznym. Zatem znając funkcjonał charakterystyczny możemy otrzymać inne wielkości związane z procesem, np. momenty dowolnego rzędu lub rozkłady skończenie wymiarowe. Można też powiedzieć, że rozwiązanie danego stochastycznego równania falowego to znalezienie funkcjonału charakterystycznego zadanego przez nie procesu.

Wstępnym krokiem do rozwiązania tak postawionego zagadnienia jest znalezienie równania spełnianego przez poszukiwany funkcjonał.

Po raz pierwszy równanie różniczkowe dla funkcjonału charakterystycznego zostało wyprowadzone przez Hopfa [9] na podstawie równań Naviera - Stokesa dla pola prędkości cieczy turbulentnej. Przedstawia ono w funkcjonalny sposób zmianę losowych zaburzeń początkowych cieczy opisanej deterministycznymi równaniami hydrodynamiki.

Idee Hopfa znalazły ostatnio matematyczne rozwinięcie przez Viszika, Fursikova i Komiecza /por. [10]/, którzy zbudowali dla równań Naviera - Stokesa /nieliniowych/ teorię propagacji losowych zaburzeń początkowych przy wykorzystaniu równań ewolucji miar w przestrzeniach funkcyjnych. Autorzy podali również równania ewolucji momentów rozwiązań /tensorów/ dowolnego rzędu.

Innym ważnym wynikiem dotyczącym równań dla funkcjonałów jest formuła Kaca [11] , podająca związek między równaniem parabolicznym

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - V(x)\Phi \quad , \quad \Phi(x,0) = x \qquad /1.7/$$

a funkcjonałem procesu ruchu Browna

$$\Phi(x,t) = E_x\left\{\exp\left[-\int_0^t V\big(x(s)\big)ds\right]\right\} \qquad /1.8/$$

gdzie $V(\cdot)$ jest funkcją, a E_x oznacza całkę względem miary Wienera procesu ruchu Browna startującego z x.

Relację /1.7/ i /1.8/ Donsker i Lions [12] a następnie Boylan [13] uogólnili na bardziej złożone funkcjonały procesów gaussowskich i równania różniczkowe o pochodnych wariacyjnych.

Powyższe rezultaty nie dają możliwości efektywnego skonstruowania równania dla funkcjonału charakterystycznego rozwiązania równania falowego z losowymi współczynnikami. Stosunkowo najłatwiej znaleźć można równania dla łącznego funkcjonału charakterystycznego rozwiązania i losowego współczynnika /por. [3] /, jednak ich analiza przedstawia duże trudności.

Pierwszym autorem, który znalazł równanie dla funkcjonału charakterystycznego samego rozwiązania dyfuzyjnego przybliżenia /1.2/ równania Helmholtza był Tatarskij [14] . Przy dodatkowym założeniu, że funkcja korelacji współczynnika $\mathcal{E}(x, r_1)$ ma postać:

$$E\left\{\mathcal{E}(x,r_1)\mathcal{E}(x',r_1')\right\} = 2A\left(r_1-r_1'\right)\delta(x-x') \qquad /1.9/$$

otrzymał równanie dla funkcjonału charakterystycznego rozwiązania $U(x, r_1)$ i rozwiązania sprzężonego $U^*(x,r_1)$:

$$\frac{\partial}{\partial x} F[x,\lambda,\lambda^*] = \frac{i}{2k_0}\int dr_1\left(\lambda(r_1)\Delta_\perp\frac{\delta F}{\delta\lambda(r_1)} - \lambda^*(r_1)\Delta_\perp\frac{\delta F}{\delta\lambda^*(r_1)}\right) -$$
$$- \frac{k_0^2}{4}\iint dr_1 dr_1' \, A\left(r_1-r_1'\right) \hat{M}(r_1)\, \hat{M}(r_1')\, F \qquad /1.10/$$

gdzie

$$\hat{M}(r_1) = \lambda(r_1)\frac{\delta}{\delta\lambda(r_1)} - \lambda^*(r_1)\frac{\delta}{\delta\lambda^*(r_1)} \qquad /1.11/$$

$\lambda(r_1), \lambda^*(r_1)$ - funkcje, $\Delta_\perp$ - oznacz. przez /1.3/.

Wynik Tatarskiego uogólnił Lee [15] uwzględniając możliwość znajdowania mieszanych momentów fal o różnych liczbach falowych.

Prace [14],[15] mają duże znaczenie praktyczne, jednak brak w nich dowodów matematycznej poprawności przeprowadzanych operacji oraz twierdzeń o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań uzyskanych równań.

Pełniejszą analizę przedstawił Chow [16], który znalazł równanie dla funkcjonału charakterystycznego rozwiązania równania parabolicznego:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \xi_i(t,x) \frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i} = K \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_i^2} \qquad /1.12/$$

gdzie $K > 0$, natomiast $\xi_i(t,x)$ - gaussowskie procesy stochastyczne o funkcji kowariancji

$$E\left\{\xi_i(t,x)\, \xi_j(s,y)\right\} = \delta(t-s) R_{ij}(x,y) \qquad /1.13/$$

i wykazał, że ma ono jednoznaczne rozwiązanie w postaci szeregu, którego współczynniki są momentami rozwiązania równania /1.12/. W swej analizie Chow posłużył się pojęciem całki wprowadzonym przez Dalieckiego i Paramonową [17],[18] oraz pewnymi ideami pracy [12].

W kolejnej pracy [19] Chow podał równanie dla funkcjonału charakterystycznego stochastycznego równania ewolucyjnego w przestrzeni Hilberta modelującego szereg zagadnień fizycznych, w tym również falowych. W swoim artykule nie rozważał jednak zagadnień istnienia i jednoznaczności jego rozwiązań, nie sformułował też równań dla momentów. Metodą zastosowaną przez Chowa było użycie lematu Ito do funkcji wykładniczej i potraktowania wyjściowego równania:

$$du = Audt + V(t,u)dt + \xi(t,u)dW_t \qquad /1.14/$$

gdzie

A - generator silnie ciągłej półgrupy operatorów w X

$V(t,x)$ - operator $[0,T] \times X \longrightarrow X$

W_t - proces Wienera o wartościach w przestrzeni Hilberta Y

$\xi(t,u)$ - funkcja: $[0,T] \times X \longrightarrow L(Y, X)$,

jako znanej różniczki.

Równanie dla funkcjonału charakterystycznego rozwiązania równania /1.14/ otrzymane w pracy [19] jest następujące:

$$\frac{\partial}{\partial t} F[t,\lambda] = \left(A^{*}\lambda, \delta F[t,\lambda]\right) + i\left\langle V(t,-i\delta)F[t,\lambda],\lambda\right\rangle -$$
$$- \frac{1}{2}\left\langle \left[\xi(t,-i\delta)\xi^{*}(t,-i\delta)F[t,\lambda]\right]\lambda, \lambda\right\rangle \qquad /1.15/$$

/lub z ostatnim członem równym

$$- \frac{1}{2}\left\langle \xi(t,-i\delta)\xi^{*}(t,-i\delta)\lambda F, \lambda\right\rangle \qquad /1.16/$$

gdy równanie /1.14/ rozumiemy w sensie Stratonowicza/, gdzie oznaczono:

$(\cdot,\cdot)$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ - iloczyny skalarne w X i pewnej podprzestrzeni X

δ - operator różniczkowania w sensie Frecheta.

Wadą wyniku pracy [19] jest trudność z praktycznym znajdowaniem operatorów "pseudoróżniczkowych": $V(t, -i\delta)$, $\xi(t, -i\delta)$ i $\xi^{*}(t, -i\delta)$. Zaznaczmy też, że wynik Chowa dotyczy silnego rozwiązania równania /1.14/.

Podobny rezultat, jednak dotyczący słabego rozwiązania równania stochastycznego, uzyskała Curtain [20]. Pokazała, że funkcjonał charakterystyczny słabego rozwiązania równania:

$$du = \big(A + E(t)\big)u_t \, dt + B(t) \, d W_t \qquad /1.17/$$

gdzie

A - generator scp. operatorów ograniczonych w X

$E(t)$ - operator ograniczony $X \longrightarrow X$ /ust. t/

W_t - proces Wienera o wartościach w Y

$B(t)$ - operator ograniczony $Y \longrightarrow X$ /ust. t/

spełnia równanie:

$$d F[t,\lambda] = \Big\langle \big(A^{*} + E^{*}(t)\big)\lambda, \delta F[t,\lambda] \Big\rangle - \frac{1}{2} F[t,\lambda] \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \langle \lambda, B(t) e_i \rangle^2 \qquad /1.18/$$

w którym:

$\lambda \in X$, $\langle \cdot , \cdot \rangle$- iloczyn skalarny w X,

α_i, e_i - odpowiednio wartości i wektory własne operatora kowariancji procesu W_t.

Osobnym trudnym problemem jest rozwiązanie równania dla funkcjonału charakterystycznego. Przegląd usiłowań w tej dziedzinie znajduje się w monografii Monina i Jagłoma [21]. Wśród podanych tam sposobów największe znaczenie praktyczne ma poszukiwanie rozwiązania w postaci szeregu potęgowego. Współczynnikami takiego szeregu są funkcje będące momentami procesu którego funkcjonału charakterystycznego poszukujemy.

Trudności związane z rozwiązywaniem równań dla funkcjonałów powodują, że warto podejmować wysiłki w celu znalezienia funkcjonału w inny sposób. Próbę rozwiązania tego zagadnienia podjęli Demienin i Koroliuk [22]. Konstruowali oni funkcjonał rozwiązania równania falowego przy pomocy funkcjonału warunków początkowych i wymuszenia oraz miary generowanej przez losowe współczynniki równania. Idea ta zostanie uogólniona na szerszą klasę równań stochastycznych w rozdziale piątym tej pracy.

3. Cel pracy

Przedstawione wyżej krótkie omówienie rezultatów w zakresie analizy fal stochastycznych i równań z nimi związanych wskazuje, iż istniejące metody mają szereg wad i ograniczeń aplikacyjnych, a przede wszystkim dają możliwość efektywnego wyznaczania jedynie momentów niższych rzędów rozważanych pól falowych. Z drugiej strony idea wykorzystania funkcjonałów charakterystycznych została - jak to wskazaliśmy - zaledwie zapoczątkowana i to głównie w odniesieniu do równań typu parabolicznego.

W takiej sytuacji istotne są wszelkie dalsze wysiłki mające na celu szersze /tj. dla szerszej klasy równań stochastycznych/ i bardziej efektywne wykorzystanie funkcjonałów charakterystycznych w badaniu losowych zjawisk fizycznych.

Celem niniejszej pracy jest próba ujednoliconego wykorzystania funkcjonałów charakterystycznych w analizie szerokiej klasy liniowych równań stochastycznych opisujących losowe procesy fizyczne, ze szczególnym uwzględnieniem losowych zjawisk falowych.

W rozdziale drugim zostały zebrane podstawowe pojęcia i fakty używane w dalszych - zasadniczych dla pracy - częściach.

Rozdział trzeci zawiera rezultaty teoretyczne: wyprowadzenie równania dla funkcjonału charakterystycznego rozwiązania liniowego stochastycznego równania ewolucyjnego w przestrzeni Hilberta, twierdzenie o jednoznaczności jego rozwiązania oraz wyprowadzenie równań dla momentów.

W rozdziale czwartym podane zostało zastosowanie teorii z rozdziału trzeciego do wybranych losowych procesów fizycznych, nie analizowanych w takim sformułowaniu wcześniej w literaturze. Rozpatrzono równania opisujące: drgania struny w losowym ośrodku, jednowymiarową falę termosprężystą w ośrodku stochastycznym oraz dyfuzję w turbulentnej cieczy.

Rozdział piąty zawiera nieco odmienną drogę wykorzystania funkcjonału charakterystycznego rozwiązania równania ewolucyjnego - bezpośrednio, bez wyprowadzania równania dla niego. Idea ta została następnie zilustrowana na kilku problemach praktycznych. W szczególności zbadano reakcję rozważanych układów fizycznych na niegaussowskie wymuszenia losowe w postaci serii impulsów losowych.

II. Preliminaria matematyczne

1. Przestrzenie

a/ Przestrzeń probabilistyczna

Niech $(\Gamma, \mathfrak{F}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną. W dalszym ciągu będziemy zakładali, że wszystkie występujące w pracy wielkości losowe są mierzalne względem σ-algebry zdarzeń $\mathfrak{F}_T \subset \mathfrak{F}$, takiej, że miara P na $\mathfrak{F}_T$ jest ośrodkowa /tj. ośrodkowa jest przestrzeń $L^2(\Gamma, \mathfrak{F}_T, P)$ - /por. [23]/ /.

b/ Podstawowe przestrzenie Hilberta

Załóżmy, że X jest zespoloną, ośrodkową przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym $(\cdot, \cdot)_X$. Y jest rzeczywistą ośrodkową przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y$. Będziemy w pracy zakładali, że rozwiązania równań przyjmują wartości z X lub rzeczywistej podprzestrzeni X, natomiast losowe parametry ośrodka - z Y.

c/ Przestrzenie tensorów

Niech H będzie ustaloną ośrodkową, zespoloną przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$. Oznaczmy przez $\overset{l}{\otimes}_H$ H produkt tensorowy l przestrzeni H. Wprowadźmy w zbiorze $\overset{l}{\otimes}_H$ H strukturę przestrzeni Hilberta przyjmując jako iloczyn skalarny pełne nasunięcie tensorów /por. [24]/:

$$\langle h_1, h_2 \rangle_{\overset{l}{\otimes}_H H} := h_1 \cdot \bar{h}_2 \qquad /2.1/$$

dla tensorów l-tego rzędu h_1 , $h_2 \in \overset{l}{\otimes}_H H$.
Przestrzeń ta, jako produkt przestrzeni ośrodkowych jest również ośrodkowa.
Tensor $h \in \overset{l}{\otimes}_H H$ będziemy nazywać prostym, gdy jest postaci :

$$h = h^1 \otimes \ldots \otimes h^l \qquad /2.2/$$

gdzie $h^i \in H$, $i = 1, .., l$.
Każdy tensor $h \in \overset{l}{\otimes}_H H$ może być przedstawiony w postaci skończonej sumy tensorów prostych/ H ma bazę złożoną z tensorów prostych/; przestrzeń $\overset{l}{\otimes}_H H$ ma bazę Schaudera, ortonormalną, $\{h_i, i=1,2,\ldots\}$, $h_i \in \overset{l}{\otimes}_H H$, zatem każdy tensor $h \in \overset{l}{\otimes}_H H$ może być przedstawiony w postaci zbieżnego szeregu /por. [25] /:

$$h = \sum_{i=1}^{\infty} a_i h_i \quad , \quad a_i \in \mathbb{C} \qquad /2.3/$$

d/ Przestrzenie tensorów losowych

Niech $H(\Gamma, \mathfrak{F}_T, P)$ będzie pewną przestrzenią zmiennych losowych o wartościach w H.
Przez $\tilde{\mathcal{L}}^l$ będziemy oznaczali iloczyn tensorowy l przestrzeni $H(\Gamma, \mathfrak{F}_T, P)$. Elementy $\tilde{\mathcal{L}}^l$ możemy uważać za zmienne losowe o wartościach w przestrzeni $\overset{l}{\otimes}_H H$.
Wprowadźmy w $\tilde{\mathcal{L}}^l$ iloczyn skalarny:

$$\langle h_1, h_2 \rangle_{\mathcal{L}^l} = E\left\{ \langle h_1, h_2 \rangle_{\overset{l}{\otimes}_H H} \right\} \qquad /2.4/$$

dla $h_1, h_2 \in \tilde{\mathcal{L}}^l$.
Oznaczmy przez $\mathcal{L}^l$ przestrzeń Hilberta takich elementów $h \in \tilde{\mathcal{L}}^l$ dla których $\langle h, h \rangle_{\mathcal{L}^l} < \infty$. Oczywiście $\mathcal{L}^l \subset \tilde{\mathcal{L}}^l$. Przestrzeń ta jest ośrodkowa, ponieważ $\overset{l}{\otimes}_H H$ jest ośrodkowa i miara P jest ośrodkowa /por. [23] /.
Każdy tensor $h \in \mathcal{L}^l$ można przedstawić w postaci skończonej sumy tensorów prostych z $\mathcal{L}^l$ lub w postaci zbieżnego szeregu /2.3//w $\mathcal{L}^l$ istnieje ortonormalna beza Schaudera/. Dla każdego $h \in \mathcal{L}^l$ istnieje wartość oczekiwana $E\{h\} \in \overset{l}{\otimes}_H H$.

e/ Przestrzenie funkcji całkowalnych z kwadratem

Wykorzystywać będziemy dwie zasadnicze przestrzenie:

$L^2([0,T], X)$ - funkcji całkowalnych z kwadratem na $[0,T]$ o wartościach w X /ośrodkowa, zespolona/.

$L^2([0,T], (\Gamma, \mathfrak{F}, P), X)$ - funkcji losowych całkowalnych z kwadratem na $[0,T]$ o wartościach w X /ośrodkowa, zespolona/.

Będziemy utożsamiać elementy X z pewnymi elementami $L^2([0,T],X)$ lub $L^2([0,T],(\Gamma,\mathfrak{F}_T,P),X)$ oraz elementy $L^2([0,T],X)$ z pewnymi elementami $L^2([0,T],(\Gamma,\mathfrak{F}_T,P),X)$. Oznaczmy przez $(.,.)$ iloczyn skalarny w przestrzeni $L^2([0,T],(\Gamma,\mathfrak{F}_T,P),X)$. Jest on również iloczynem skalarnym w $L^2([0,T],X)$. Fakt, że potrafimy utożsamiać elementy trzech powyższych przestrzeni powoduje, że możemy obliczać mieszane iloczyny skalarne $(.,.)$ elementów tych przestrzeni.

f/ Przykład przestrzeni tensorów. Funkcje o wartościach w przestrzeni tensorów

W dalszych rozważaniach podstawową rolę będą pełnić przestrzenie tensorów i tensorów losowych, gdy H=X oraz $H(\Gamma,\mathfrak{F}_T,P) = L^2((\Gamma,\mathfrak{F}_T,P),X)$ - zmienne losowe całkowalne z kwadratem /tj. takie h , dla których $E\{(h,h)_X\}<\infty$ /.

Elementy przestrzeni $L^2([0,T],X)$ /$L^2([0,T],(\Gamma,\mathfrak{F}_T,P),X)$ / przy ustalonym t należą do X /$L^2((\Gamma,\mathfrak{F}_T,P),X)$ /, zatem można je mnożyć tensorowo otrzymując elementy $\overset{l}{\otimes}_H H$ / $\mathcal{L}^1$-odpowiednio/. Po uzmiennieniu parametrów t uzyskujemy funkcję:

$$h:\ [0,T]^l \longrightarrow \overset{l}{\otimes}_H H \quad / \ [0,T]^l \longrightarrow \mathcal{L}^l \ / \qquad /2.5/$$

Może być ona przedstawiona jako szereg w bazie Schaudera:

$$h(t_1,\dots,t_l) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t_1,\dots,t_l)\,h_i\ ,\quad h_i\in \overset{l}{\otimes}_H H \quad /h_i\in\mathcal{L}^l/ \qquad /2.6/$$

gdzie $a_i(t_1,\dots,t_l)$ - funkcje zespolone :

$$a_i\ :\ [0,T]^l \longrightarrow \mathbb{C}\ ,\ i=1,2,\dots \qquad /2.7/$$

W szczególnym przypadku, gdy mnożymy tensorowo wartości funkcji z przestrzeni $L^2([0,T],X)$ /$L^2([0,T],(\Gamma,\mathfrak{F}_T,P),X)$ / w tej samej chwili t, otrzymujemy funkcję h :

$$h:\ [0,T] \longrightarrow \overset{l}{\otimes}_H H \ / [0,T] \longrightarrow \mathcal{L}^l \ / \qquad /2.8/$$

oraz rozwinięcie:

$$h(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t)\,h_i \quad ,h_i\in \overset{l}{\otimes}_H H \quad /h_i\in\mathcal{L}^l/ \qquad /2.9/$$

2. Proces Wienera , biały szum

a/ Niech $(\Gamma, \mathcal{F}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Oznaczmy przez $W(t,\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$, $t \in [0,T]$ proces Wienera o wartościach w przestrzeni Y czyli gaussowski proces stochastyczny taki, że /por. [26] /:

$$E\{W(t,\gamma)\} = 0 \qquad /2.10/$$

$$E\{W(t,\gamma) \otimes_Y W(s,\gamma)\} = Q \cdot t \wedge s \qquad /2.11/$$

gdzie $Q \in Y \otimes_Y Y$.

Oznaczmy przez $\mathcal{F}_T$ σ-algebrę zdarzeń generowanych przez $W(t,\gamma)$, $t \in [0,T]$; $\mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}$. Z faktów, że przestrzeń Y - ośrodkowa a proces $W(t,\gamma)$ - ciągły według prawdopodobieństwa wynika, że miara P na tak zdefiniowanej σ-algebrze $\mathcal{F}_T$ jest ośrodkowa /por. [23],[27]/. W pracy σ-algebrą $\mathcal{F}_T$ występującą w przestrzeniach zdefiniowanych w punkcie 2 tego rozdziału będzie σ-algebra $\mathcal{F}_T$ generowana przez proces Wienera.

Niech α_i, ρ_i będą odpowiednio wartościami i wektorami własnymi operatora Q - rozwiązaniami równania:

$$Q \cdot \rho_i = \alpha_i \rho_i \quad , \; i=1,2,\ldots \qquad /2.12/$$

gdzie "." jest działaniem nasunięcia wektora $\rho_i \in Y$ na tensor $Q \in Y \otimes_Y Y$.

Spełniają one następujące warunki /por. [26] /:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i < \infty \qquad /2.13/$$

$$\langle \rho_i , \rho_j \rangle_Y = \delta_{ij} \quad , \; i,j=1,2,\ldots \qquad /2.14/$$

a tensor Q ma reprezentację /szereg w bazie Schaudera/:

$$Q = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \, \rho_i \otimes_Y \rho_i \qquad /2.15/$$

Ponadto proces $W(t,\gamma)$ można zapisać w postaci:

$$W(t,\gamma) = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_i} \, \rho_i \, \beta_i(t,\gamma) \qquad /2.16/$$

gdzie

$$\beta_i(t,\gamma) \quad , \quad i=1,2,\ldots$$

są niezależnymi procesami Wienera o wartościach rzeczywistych i jednostkowych wariancjach /por. [26] /.

b/ Pochodną uogólnioną procesu $W(t,\gamma)$ nazywać będziemy białym szumem /por. [26], [28]/:

$$\xi(t,\gamma) := \frac{d}{dt} W(t,\gamma) \qquad /2.17/$$

Jest to zatem gaussowski proces stochastyczny o zerowej średniej i tensorze kowariancji:

$$E\left\{\xi(t,\gamma)\otimes_\gamma \xi(s,\gamma)\right\} = Q\cdot\delta(t-s) \qquad /2.18/$$

Analogicznie do /2.16/ biały szum można przedstawić w postaci:

$$\xi(t,\gamma) = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_i}\, \rho_i\, \dot{\beta}_i(t,\gamma) \qquad /2.19/$$

gdzie

$$\dot{\beta}_i(t,\gamma) \quad , \quad i=1,2,\ldots$$

są rzeczywistymi niezależnymi białymi szumami o jednostkowych intensywnościach.

c/ Przestrzeń $\mathcal{M}$ miar deterministycznych

Niech H będzie przestrzenią ciągów funkcji rzeczywistych

$$\varphi = \left(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots\right) \quad , \quad t\in[0,T]$$

takich, że

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_0^T \alpha_i \varphi_i^2(t)\,dt < \infty$$

W przestrzeni H można wprowadzić strukturę przestrzeni Hilberta przyjmując jako iloczyn skalarny:

$$\langle \varphi, \psi \rangle_H = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^T \alpha_i \varphi_i(t) \psi_i(t) dt$$

dla $\varphi(t), \psi(t) \in H$.

Każdemu elementowi φ przestrzeni H odpowiada addytywna funkcja zbioru określona na $\mathcal{G}([0,T])$ o wartościach w l_2 /również: l_1 / postaci:

$$\nu_\varphi = (\nu_{\varphi_1}(\cdot); \nu_{\varphi_2}(\cdot), \dots) \qquad /2.20/$$

gdzie

$$\nu_{\varphi_i}(\Delta) = \int_\Delta \alpha_i \varphi_i(t) dt \quad , \quad i=1,2,\dots, \Delta \in \mathcal{G}([0,T]).$$

Zbiór takich miar ν_φ dla $\varphi \in H$ oznaczymy przez $\mathcal{N}$. $\mathcal{N}$ możemy uważać za przestrzeń Hilberta z iloczynem skalarnym generowanym przez iloczyn skalarny w przestrzeni H, tzn. :

$$\langle \nu_\varphi, \nu_\psi \rangle_{\mathcal{N}} := \langle \varphi, \psi \rangle_H$$

d/ Przestrzeń $\mathcal{M}$ miar losowych

Niech $\beta(t,\gamma)$ będzie funkcją losową o wartościach w l_2 postaci:

$$\beta(t,\gamma) = (\sqrt{\alpha_1}\, \beta_1(t,\gamma), \sqrt{\alpha_2}\, \beta_2(t,\gamma), \dots) \qquad /2.21/$$

Przyjmiemy, że elementy przestrzeni $\mathcal{M}$ są postaci

$$\mathcal{M} \ni m = a\beta + \nu \qquad /2.22/$$

gdzie $a \in R$, $\nu \in \mathcal{N}$.

Wprowadzimy w $\mathfrak{M}$ iloczyn skalarny:

dla

$$m_1 = a_1 \beta + \nu_1$$

$$m_2 = a_2 \beta + \nu_2$$

$$\langle m_1, m_2 \rangle_{\mathfrak{M}} := a_1 a_2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i + \langle \nu_1, \nu_2 \rangle_{\mathfrak{N}} \qquad /2.23/$$

Z tak zdefiniowanym iloczynem skalarnym przestrzeń $\mathfrak{M}$ jest przestrzenią Hilberta.

3. Funkcjonały charakterystyczne

a/ Niech :

$$U(t,\gamma) \in L^2([0,T],(\Gamma, \mathcal{F}_\Gamma, P), X) \qquad /2.24/$$

$$\varkappa(t) \in L^2([0,T], X) \qquad /2.25/$$

i obie funkcje U i $\varkappa$ będą rzeczywiste.

Funkcjonał charakterystyczny procesu $U(t,\gamma)$ definiujemy jako /por. [8] /:

$$\Phi[\varkappa] := E\left\{ \exp\left\{ i \int_0^T \left(U(t,\gamma), \varkappa(t) \right)_X dt \right\} \right\} =$$

$$= \int \exp\left\{ i \int_0^T \left(U(t,\gamma), \varkappa(t) \right)_X dt \right\} \mu(dU) \qquad /2.26/$$

gdzie $\mu(\cdot)$ jest miarą probabilistyczną odpowiadającą procesowi U , określoną na $L^2([0,T], X)$.

Przestrzennym funkcjonałem charakterystycznym będziemy nazywać:

$$F[t,\lambda] := E\left\{\exp\left\{i\left(U(t,\gamma),\lambda\right)_X\right\}\right\} \qquad /2.27/$$

gdzie $U(t,\gamma)$ - jest takie jak w /2.24/ natomiast $\lambda \in X$, rzeczywiste.

Między Φ i F mamy następujący związek:

$$F[s,\lambda] = \Phi[\varkappa]\Big|_{\varkappa(t)=\lambda\cdot\delta(t-s)} \qquad /2.28/$$

jeżeli podstawienie takie jest wykonalne.

Przestrzenny funkcjonał charakterystyczny $F[t,\lambda]$ można zapisać w postaci równoważnej /2.27/:

$$F[t,\lambda] = \int \exp\left\{ i\left(U(t,\gamma),\lambda\right)_X\right\} \mu_t\left(dU(t)\right) \qquad /2.29/$$

gdzie $\mu_t(\cdot)$, $t\in[0,T]$ jest rodziną miar określonych na X, wyznaczających, przy ustalonym t, rozkład zmiennej losowej $U(t,\gamma)$.

b/ Przykłady

Proces gaussowski $U(t,\gamma)\in L^2([0,T],(\Gamma,\mathfrak{F}_\Gamma,P),X)$ o średniej i kowariancji odpowiednio:

$$E\left\{U(t,\gamma)\right\} = m(t)$$

$$E\left\{U(t,\gamma)\otimes U(s,\gamma)\right\} = R(t,s) \qquad /2.30/$$

na funkcjonał charakterystyczny postaci:

$$\Phi[\varkappa] = \exp\left\{i\int_0^T \left(m(t),\varkappa(t)\right)_X dt - \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^T R(t,s)\cdot\varkappa(t)\otimes\varkappa(s)\, ds\,dt\right\} \qquad /2.31/$$

gdzie $\varkappa\in L^2([0,T], X)$.

W szczególnym przypadku, gdy $X = L^2(R)$, /2.31/ przyjmuje postać:

$$\Phi[\varkappa] = \exp\left\{ i \int_0^T \int_R m(t,x)\varkappa(t,x)\,dxdt - \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^T\int_R\int_R R(t,s,x,y)\varkappa(t,x)\varkappa(s,y)\,dxdydsdt \right\} \qquad /2.32/$$

natomiast $\varkappa \in L^2([0,T] \times R)$.

Proces Wienera /2.16/ ma funkcjonał charakterystyczny:

$$\Phi[\tilde{\varkappa}] = \exp\left\{ -\frac{1}{2} Q \cdot \int_0^T \int_0^T t \wedge s\, \tilde{\varkappa}(t) \otimes_Y \tilde{\varkappa}(s)\, dsdt \right\} \qquad /2.33/$$

dla $\tilde{\varkappa} \in L^2([0,T], Y)$.

Dla białego szumu /2.17/ funkcjonał /2.26/ przybiera formę:

$$\Phi[\tilde{\varkappa}] = \exp\left\{ -\frac{1}{2} Q \cdot \int_0^T \tilde{\varkappa}(t) \otimes_Y \tilde{\varkappa}(t)\, dt \right\} \qquad /2.34/$$

gdzie $\tilde{\varkappa} \in L^2([0,T], Y)$.

Proces Poissona o wartościach w $X(\Gamma, \mathfrak{F}, P)$, tj. proces postaci:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{N_t} f_i \delta(t - t_i) \qquad /2.35/$$

gdzie $\{t_i\}_{i=1,\ldots,N_t}$ - proces Poissona o intensywności θ,

f_i - niezależne zmienne losowe o wartościach w X, o jednakowych rozkładach danych funkcjonałem charakterystycznym:

$$\chi(\lambda_1) := E\left\{ \exp\left\{ i(f_i, \lambda_1)_X \right\} \right\}, \quad i = 1,2,\ldots, \quad \lambda_1 \in X \qquad /2.36/$$

ma funkcjonał charakterystyczny postaci:

$$\Phi[\varkappa] = E\left\{\exp\left\{i \int_0^T \left(f(t), \varkappa(t)\right)_X dt\right\}\right\} =$$

$$= \exp\left\{\theta \int_0^T \left[\chi\left(\int_0^T \delta(t-t')\varkappa(t)dt\right) - 1\right] dt'\right\} \qquad /2.37/$$

Z postaci procesu /2.35/ / f(t) nie jest całkowalny z kwadratem/ wynika, że funkcjonał /2.37/ jest dobrze określony, gdy $\varkappa(\cdot)$ - funkcja ciągła /tj. $\varkappa \in C([0,T],X) \subset L^2([0,T],X)$ / .

4. Różniczkowanie funkcji w przestrzeni Hilberta

a/ Definicje pochodnej pierwszego i drugiego rzędu [29]

Niech będą dane dwie przestrzenie Hilberta:

H z normą $\|\cdot\|_H$ i G z normą $\|\cdot\|_G$.

Niech f będzie funkcją:

$$f: H \longrightarrow G \qquad /2.38/$$

Niech

$$h\ ,\ \delta h \in H\ .$$

Przez różniczkę operatora f na elemencie δh w punkcie h rozumiemy taki element $f'_h(\delta h)$ przestrzeni G, że spełniona jest równość:

$$\|f(h+\delta h) - f(h) - f'_h(\delta h)\|_G = o\left(\|\delta h\|_H\right) \qquad /2.39/$$

Pochodną f w punkcie h jest operator z H do G:

$$\frac{\delta f}{\delta h} := f'_h(\cdot) \qquad \in \quad L(H,G) \qquad /2.40/$$

Drugą różniczką operatora f na elemencie δh w punkcie h jest taki element $f''_h(\delta h, \delta h)$ przestrzeni G, że spełniona jest równość:

$$\left\| f(h+\delta h) - f(h) - f_h'(\delta h) - \frac{1}{2} f_h''(\delta h, \delta h) \right\|_G = o\left(\|\delta h\|_H^2 \right) \qquad /2.41/$$

gdy $\|\delta h\|_H \longrightarrow 0$.

Drugą pochodną f jest operator dwuliniowy z H x H do G:

$$\frac{\delta^2 f}{\delta h^2} := f_h''(\cdot,\cdot) \quad \in \quad L(H,H;G) \qquad /2.42/$$

Gdy różniczka f_h' istnieje, to prawdziwa jest następująca równość /por. [12]/:

$$f_h'(\delta h) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(h+\varepsilon\delta h)\Big|_{\varepsilon=0} \qquad /2.43/$$

b/ Pochodne procesów stochastycznych względem elementów przestrzeni $\mathcal{M}$

Niech U będzie odwzorowaniem:

$$U: [0,T]\times\mathcal{M} \longrightarrow L^2\left([0,T],(\Gamma,\mathcal{F}_T,P),X \right) \qquad /2.44/$$

takim, że

$$U\Big|_{[0,T]\times\mathcal{T}}: [0,T]\times\mathcal{T} \longrightarrow L^2\left([0,T],X \right) \qquad /2.45/$$

oraz przy ustalonym $t \in [0,T]$:

$$U(t,\cdot) : \mathcal{M} \longrightarrow X(\Gamma,\mathcal{F}_T,P) \qquad /2.46/$$

Przez $U(t,\beta)$ będziemy oznaczali wartość odwzorowania U w chwili $t\in[0,T]$ na elemencie $\beta\in\mathcal{M}$.

Przyjmijmy, że w definicji różniczki /2.39/:

$$H = \mathcal{M}$$
$$G = X(\Gamma,\mathcal{F}_T,P) \qquad /2.47/$$

Różniczka U w ustalonej chwili $t\in[0,T]$, w punkcie β na elemencie $\nu\in\mathcal{M}$ będzie miała postać:

$$U'_{\beta}(t,\nu) = \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta U(t,\beta)}{\delta \beta_k(s)}\, d\nu_k(s) \qquad /2.48/$$

natomiast pochodna będzie odpowiednim operatorem liniowym: $\mathcal{M} \longrightarrow X(\Gamma,\mathcal{F}_\Gamma,P)$ o współrzędnych $\frac{\delta U(t,\beta)}{\delta \beta_k(s)}$

c/ Pochodna przestrzennego funkcjonału charakterystycznego

Przestrzenny funkcjonał charakterystyczny /2.27/ jest odwzorowaniem:

$$F:\ [0,T]\times X \longrightarrow \mathbb{C} \qquad /2.49/$$

W celu obliczenia różniczki F w ustalonej chwili t przyjmijmy w definicji /2.39/:

$$\begin{aligned} H &= X \\ G &= \mathbb{C} \end{aligned} \qquad /2.50/$$

i skorzystajmy z /2.43/:

$$F'_{\lambda}[t,\delta\lambda] = \frac{\partial}{\partial\varepsilon} E\left\{\exp\, i\left(U(t,\gamma),\lambda+\varepsilon\delta\lambda\right)_X\right\}\Big|_{\varepsilon=0} = E\left\{i\left(U(t,\gamma),\delta\lambda\right)_X e^{i\left(U(t,\gamma),\lambda\right)_X}\right\}$$

$$= \left(iE\left\{U(t,\gamma)\, e^{i\left(U(t,\gamma),\lambda\right)_X}\right\},\delta\lambda\right)_X \qquad /2.51/$$

Ponieważ $F'_{\lambda}[t,\lambda]$ jest funkcjonałem na X to, zgodnie z twierdzeniem Riesza jest reprezentowany przez pewien element z X, czyli

$$F'_{\lambda}[t,\delta\lambda] = \left(\frac{\delta F[t,\lambda]}{\delta\lambda},\delta\lambda\right)_X \qquad /2.52/$$

a zatem z /2.51/:

$$\frac{\delta F[t,\lambda]}{\delta\lambda} = iE\left\{U(t,\gamma)e^{i(U(t,\gamma),\lambda)_X}\right\} \qquad /2.53/$$

a także:

$$\frac{\delta e^{i(U(t,\gamma),\lambda)_X}}{\delta\lambda} = iU(t,\gamma)e^{i(U(t,\gamma),\lambda)_X} \qquad /2.54/$$

Podobnie można obliczać pochodne F wyższych rzędów:

$$\frac{\delta^n F[t,\lambda]}{\delta\lambda^n} = i^n E\Big\{\underbrace{U(t,\gamma)\otimes\ldots\otimes U(t,\gamma)}_{n \text{ razy}}\, e^{i(U(t,\gamma),\lambda)_X}\Big\} \qquad /2.55/$$

oraz pochodne funkcjonału /2.26/ Φ.

d/ Druga pochodna iloczynu tensorowego względem elementów $\mathfrak{M}$

Niech g będzie odwzorowaniem takim, jak w /2.44-46/. Rozważmy iloczyn tensorowy $g(t,\beta)\otimes g(s,\beta)$, tj. elementów g z pierwszymi argumentami różnymi, drugimi - jednakowymi. Jest on odwzorowaniem:

$$g(\cdot,\cdot)\otimes g(\cdot,\cdot) : [0,T]\times[0,T]\times\mathfrak{M}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow L^2([0,T],(\Gamma,\mathcal{F}_T,P),X)\otimes L^2([0,T],(\Gamma,\mathcal{F}_T,P),X) \qquad /2.56/$$

Przy ustalonych t i s jest on odwzorowaniem:

$$g(t,\cdot)\otimes g(s,\cdot) : \longrightarrow \mathcal{L}^2 = X(\Gamma,\mathcal{F}_T,P)\otimes X(\Gamma,\mathcal{F}_T,P) \qquad /2.57/$$

Przyjmijmy w definicji drugiej różniczki /2.41/:

$$F = \mathfrak{M}$$

$$G = \mathcal{L}^2 \qquad /2.58/$$

Wówczas druga różniczka iloczynu /2.57/ w ustalonych chwilach t, s w punkcie β na elemencie $\nu \in \mathfrak{M}$ ma postać:

$$[g(t,\beta) \otimes g(s,\beta)]''(\nu,\nu) =$$

$$= \int_0^T \int_0^T \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{\delta^2[g(t,\beta) \otimes g(s,\beta)]}{\delta\beta_k(\tau)\delta\beta_l(\tau')} d\nu_k(\tau)\, d\nu_l(\tau') \qquad /2.59/$$

natomiast druga pochodna jest odpowiednim operatorem dwuliniowym z $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ do $\mathcal{L}^2$.

e/ Różniczkowanie funkcji złożonej

Niech f będzie funkcją:

$$f : G \longrightarrow \mathbb{C} \qquad /2.60/$$

oraz g operatorem:

$$g : H \longrightarrow G \qquad /2.61/$$

Wówczas złożenie d = f o g jest operatorem:

$$d : H \longrightarrow \mathbb{C} \qquad /2.62/$$

i dla h, $\delta h \in H$ spełniona jest zależność:

$$d(h+\delta h) = f(g(h+\delta h)) = f(g(h) + g'_h(\delta h) + \tilde{g}(\delta h)) \qquad /2.63/$$

gdzie

$$\|\tilde{g}(\delta h)\|_G = o(\|\delta h\|_H)$$

Następnie:

$$f(g(h) + g'_h(\delta h) + \tilde{g}(\delta h)) = f(g(h)) + f'(g(h))\, g'_h(\delta h) + \tilde{f}(\delta h) \qquad /2.64/$$

gdzie

$$\|\tilde{f}(\delta h)\|_{\mathbb{C}} = o\left(\|\delta h\|_H\right)$$

Zatem pochodna złożenia ma postać:

$$\frac{\delta f(g(h))}{\delta h} = f'\left(g(h)\right)\frac{\delta g(h)}{\delta h} \qquad /2.65/$$

Przyjmijmy w konkretnym przypadku:

$$\begin{aligned} &H = \mathfrak{M} \\ &G = X(\Gamma, \mathcal{F}_T, P) \\ &g(\cdot) = U(t,\cdot) \quad , \text{ gdzie } U \text{ spełnia } /2.44\text{-}46/ \\ &f(g) = e^{i(g,\lambda)_X} \quad \text{dla } \lambda \in X \end{aligned} \qquad /2.66/$$

Wówczas pochodna złożenia /2.65/ będzie miała postać/dla współrzędnej k - tej, k = 1,2,.../:

$$\frac{\delta e^{i(U(t,\beta),\lambda)_X}}{\delta\beta_k(s)} = ie^{i(U(t,\beta),\lambda)_X}\frac{\delta}{\delta\beta_k(s)}\left(U(t,\beta),\lambda\right)_X =$$

$$= ie^{i(U(t,\beta),\lambda)_X}\left(\frac{\delta U(t,\beta)}{\delta\beta_k(s)},\lambda\right)_X \qquad /2.67/$$

f/ Pochodne tensorów względem elementów X

Niech $\lambda \in X$, natomiast $T_1(t)$, $T_2(t)$ będą funkcjami o wartościach tensorowych, tj.:

$$T_1(t) \in L^2([0,T],X) \qquad /2.68/$$

$$T_2(t) \in L^2([0,T],X) \otimes L^2([0,T],X) \qquad /2.69/$$

Wówczas:

$$\frac{\delta\lambda}{\delta\lambda} = 1_X \quad / \, Id_X \, / \qquad /2.70/$$

$$\frac{\delta}{\delta\lambda} T_1(t)\cdot\lambda = T_1(t) \qquad /2.71/$$

$$\frac{\delta}{\delta\lambda} T_2(t)\cdot\lambda\otimes\lambda = T_2(t)\cdot\lambda + \lambda\cdot T_2(t) \qquad /2.72/$$

gdzie "." oznacza operację nasunięcia tensorów. Analogiczną postać mają pochodne podobnych nasunięć tensorów wyższych rzędów.

g/ W przypadku, gdy mamy do czynienia z funkcjami, pochodne /2.40/ i /2.42/ można rozumieć jako pochodne wariacyjne. W szczególności pochodna

$\frac{\delta}{\delta\beta_k(s)}$ rozumiana jako pochodna wariacyjna, jest wariacyjną pochodną $\frac{\delta}{\delta\beta_k(s)}$; tak więc mamy:

$$\frac{\delta\beta_k(t,\gamma)}{\delta\beta_l(s)} = \delta_{kl}\delta(t-s) \qquad /2.73/.$$

5. Całka względem procesu Wienera

a/ Przez całkę względem procesu Wienera rozumieć będziemy całkę względem elementu przestrzeni $\mathfrak{M}$ postaci /2.21/.

O funkcji całkowanej założymy, że spełnia warunki /2.44-46/; dokładniej mówiąc będziemy rozważać ciąg takich funkcji $g_k(t,\beta)$, $k = 1,2,\ldots$.

W celu zdefiniowania całki stochastycznej naśladować będziemy konstrukcję Dalieckiego i Paramonowej [17],[18] dla konkretnej przestrzeni i miary. W ich konstrukcji nie zakłada się progresywnej mierzalności całkowowanego procesu względem rodziny σ-ciał generowanych przez proces całkujący. Istotna jest tylko gaussowskość procesu względem którego całkujemy.

b/ Całka funkcji deterministycznej

Całka procesu względem funkcji $\beta(t,\gamma)\in\mathcal{M}$ rozumiana będzie w sensie średniokwadratowym - tj. w sensie zbieżności w $\mathcal{L}^2$.

Niech

$$g_k^d(t)\in L^2([0,T],X) \qquad , k=1,2,3,\ldots \qquad /2.74/$$

Całka względem $\beta(t,\gamma)$ ma postać:

$$\mathcal{Z}(g^d,\beta)=\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\alpha_k}\int_0^T g_k(t)\,d\beta_k(t,\gamma) \qquad \text{śr.kw.} \qquad /2.75/$$

Zmienna losowa /2.75/ $\mathcal{Z}(g,\beta)\in X(\Gamma,\mathfrak{F}_T,P)$, jako liniowe przekształcenie procesu gaussowskiego, jest gaussowska, o zerowej średniej:

$$E\left\{\mathcal{Z}(g^d,\beta)\right\}=0\in X \qquad /2.76/$$

i tensorze kowariancji:

$$E\left\{\mathcal{Z}(g^d,\beta)\otimes\mathcal{Z}(g^d,\beta)\right\}=\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k g_k^d(t)\otimes g_k^d(t)\,dt\in X\otimes X \qquad /2.77/$$

c/ Całka funkcji prostej zależnej od β

Załóżmy, że g_k^p są funkcjami spełniającymi /2.44-46/ postaci:

$$g_k^p(t,\beta) = \sum_{j=1}^{m} g_{kj}^p(\beta)\chi_{\Delta_j}(t) \quad , \quad k=1,2,\ldots \qquad /2.78/$$

gdzie:

$$\bigcup_{j=1}^{m}\Delta_j = [0,T] \; , \; \Delta_j \cap \Delta_i = \emptyset \; \text{dla} \; i \neq j \; , \; \Delta_j \in \mathcal{B}([0,T]) \; ,$$

$\chi_{\Delta_j}(\cdot)$ - jest funkcją charakterystyczną zbioru Δ_j.

Całka funkcji /2.78/ względem $\beta(t,\gamma)$ ma postać:

$$\mathcal{Z}(g^p,\beta) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m}\sqrt{\alpha_k}\, g_{kj}^p(\beta)\,\beta_k(\Delta_j,\gamma) \qquad /2.79/$$

gdzie

$\beta_k(\Delta_j,\gamma)$ są gaussowskimi zmiennymi losowymi o zerowych średnich i kowariancjach:

$$E\left\{\beta_k(\Delta_j,\gamma)\,\beta_l(\Delta_i,\gamma)\right\} = \delta_{kl}\,\delta_{ij}\, m(\Delta_j), \qquad /2.80/$$

mierzalnymi względem $\mathcal{B}\left(\beta_k(s,\gamma)\; , \; s\in\Delta_j\right)$.

gdzie m $(\cdot)$ jest miarą Lebesgue'a na prostej.

Załóżmy, że funkcje $g_{kj}^p(\beta)$ są dwukrotnie różniczkowalne względem β. /por. /2.48/, /2.59//. Wówczas dla całki /2.79/ obowiązują wzory analogiczne do wzorów Furutsu - Novikowa /por. [30], [31] /służących do rozdzielania średniej procesu gaussowskiego i jego funkcjonału:

$$E\left\{\mathcal{Z}(g^p,\beta)\right\} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m_k}\int_{\Delta_j}\sqrt{\alpha_k}\; E\left\{\frac{\delta g_{kj}(\beta)}{\delta\beta_k(t)}\right\} dt \qquad /2.81/$$

oraz

$$E\left\{\mathcal{Z}(g^P,\beta) \otimes \mathcal{Z}(g^P,\beta)\right\} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} \alpha_k \int_{\Delta_j} dt E\left\{g_{kj}(\beta) \otimes g_{kj}(\beta)\right\} + \qquad /2.82/$$

$$+ \sum_{k,l=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \int_{\Delta_i} \int_{\Delta_j} \sqrt{\alpha_k} \sqrt{\alpha_l} E\left\{\frac{\delta^2[g_{ki}(\beta) \otimes g_{lj}(\beta)]}{\delta\beta_k(t)\,\delta\beta_l(s)}\right\} ds\, dt$$

o ile całki po prawej stronie /2.81/, /2.82/ istnieją a szeregi są zbieżne.

d/ Całka funkcji dwukrotnie różniczkowalnej względem β

Niech funkcje $g_k(t,\beta)$, k = 1,2,3,... będą takie jak w /2.44-46/, niech będą dwukrotnie różniczkowalne względem drugiego argumentu oraz spełniają następujące trzy warunki:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \int_0^T \left\| g_k(t,\beta) \otimes g_k(t,\beta) \right\|_{\mathcal{L}^2} dt < \infty \qquad /2.83/$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_k} \int_0^T \left\| \frac{\delta g_k(t,\beta)}{\delta\beta_k(t)} \right\|_{X(\Gamma,\mathcal{F}_T,P)} dt < \infty \qquad /2.84/$$

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} \int_0^T \int_0^T \sqrt{\alpha_k} \sqrt{\alpha_l} \left\| \frac{\delta^2[g_k(t,\beta) \otimes g_l(s,\beta)]}{\delta\beta_k(t)\,\delta\beta_l(s)} \right\|_{\mathcal{L}^2} dt\, ds < \infty \qquad /2.85/$$

Niech:

$$\left\{g_k^{pi}(t,\beta)\ ,\ k = 1,2,\ldots\right\},\ i = 1,2,\ldots \qquad /2.86/$$

będzie ciągiem funkcji prostych, dwukrotnie różniczkowalnyc względem β i spełniających /2.83-85/, zbieżnych średnio-

kwadratowo razem ze swoimi pierwszymi i drugimi pochodnymi względem β do $\{g_k(t,\beta), k = 1,2,\ldots\}$ dla $i \longrightarrow \infty$.
Przez całkę funkcji $g(t,\beta)$ będziemy rozumieli granicę średnio-kwadratową całek funkcji prostych $g^{pi}(t,\beta)$, $i \longrightarrow \infty$, tj.

$$\mathcal{Z}(g,\beta) = \lim_{i\longrightarrow\infty} \text{śr.kw.}\, \mathcal{Z}(g^{pi},\beta) \qquad /2.87/$$

czyli

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_k} \int_0^T g_k(t,\beta)\, d\beta_k(t,\gamma) =$$

$$= \lim_{i\longrightarrow\infty} \text{śr.kw.} \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_k} \int_0^T g_k^{pi}(t,\beta)\, d\beta_k(t,\gamma) \qquad /2.88/$$

Całka /2.87/ spełnia związki podobne do /2.81, 2.82/:

$$E\left\{\mathcal{Z}(g,\beta)\right\} = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_k} \int_0^T E\left\{\frac{\delta g_k(t,\beta)}{\delta\beta_k(t)}\right\} dt \qquad /2.89/$$

$$E\left\{\mathcal{Z}(g,\beta) \otimes \mathcal{Z}(g,\beta)\right\} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \int_0^T E\left\{g_k(t,\beta) \otimes g_k(t,\beta)\right\} dt +$$

$$+ \sum_{k,l=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_k}\sqrt{\alpha_l} \int_0^T\int_0^T E\left\{\frac{\delta^2[g_k(t,\beta) \otimes g_l(s,\beta)]}{\delta\beta_k(t)\ \delta\beta_l(s)}\right\} dt\, ds \qquad /2.90/$$

Dowód związków /2.89/ i /2.90/ oraz /2.81/ i /2.82/ można przeprowadzić przy dodatkowym założeniu, że $g(\cdot,\cdot)$ można rozwinąć w szereg względem drugiego argumentu, w sposób analogiczny do dowodu wzoru Furutsu - Novikova w pracy [32] /por.

też [33]/.

Metoda ta polega na tym, że rozwija się $g(t, \beta+\nu)$/odpowiednio $g(t, \beta+\nu) \otimes g(s, \beta+\nu)$/w szereg w punkcie $\nu \in \Pi$ względem "potęg" $\beta(t,\gamma)$, wykonuje całkowanie względem $\beta(t,\gamma)$ /odpowiednio: podwójne całkowanie względem $\beta(t,\gamma)$ i $\beta(s,\gamma)$/oraz uśrednia. Następnie korzysta się z faktu, że momenty dowolnego rzędu procesu gaussowskiego można wyrazić przez jego średnią i kowariancję /por. [34]/i wydziela funkcję korelacyjną $\beta(t,\gamma)$ /odpowiednio: funkcję korelacyjną i iloczyn dwóch funkcji korelacyjnych/. Pozostały szereg sumuje się, zmienia oznaczenia pochodnej $\frac{\delta}{\delta \nu_k}$ na $\frac{\delta}{\delta \beta_k}$ i przyjmując $\nu = 0$ - otrzymuje /2.89/ /odpowiednio /2.90//.

Zauważmy, że funkcjami całkowalnymi w powyższym sensie nie są wszystkie funkcje dwukrotnie różniczkowalne względem β, lecz tylko spełniające warunki /2.83-2.85/ - takie, których szeregi są zbieżne z wagami α_k.

e/ Przypadek funkcji progresywnie mierzalnych

Załóżmy, że funkcje $g_k(t,\beta)$, $k = 1,2,\ldots$ są progresywnie mierzalne względem rodziny σ-ciał generowanych przez $\beta(t,\gamma)$. W tym wypadku całka /2.87/ jest całką Stratonowicza /por. [35]/, tj. całki względem $\beta_k(t,\gamma)$ są całkami Stratonowicza.

6. Silnie ciągłe półgrupy operatorów; równania stochastyczne

Niech $K(t)$, $t \in [0,T]$ będzie silnie ciągłą półgrupą operatorów ograniczonych /por. [26]/:

$$\begin{aligned} & K(t) : X \longrightarrow X \\ & K(0) = Id_X \\ & K(t+s) = K(t)K(s) \qquad\qquad /2.91/ \\ & \|K(t)u_0 - u_0\| \xrightarrow[t \to 0^+]{} 0 \text{ dla wszystkich } u_0 \in X \end{aligned}$$

Istnieją wówczas stałe: ω i M_ω, takie, że

$$\|K(t)\| \leqslant M_\omega e^{\omega t} \quad , \quad t \in [0,T] . \qquad /2.92/$$

Generatorem półgrupy $K(t)$ nazywamy operator
A taki, że:

$$Au_o = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \left(K(t) - Id_X\right)u_o \quad , \quad u_o \in X . \qquad /2.93/$$

Niech $D(A) \subset X$ oznacza zbiór takich $u_o \in X$, dla których /2.93/ istnieje. Wówczas:

$$A : D(A) \longrightarrow X .$$

Gdy $u_o \in D(A)$, to spełnione jest równanie:

$$\frac{d}{dt} K(t)u_o = A\,K(t)u_o = K(t)A\,u_o . \qquad /2.94/$$

Jeśli $K^*(t)$ - silnie ciągła półgrupa operatorów sprzężonych do $K(t)$ w X, to jej generatorem jest A^* - operator sprzężony do A w X.
Kryterium tego, czy dany operator A jest generatorem pewnej scp. $K(t)$ podaje tw. Hille - Yosidy - Phillipsa /por.[36] / lub pewne równoważne, prostsze w zastosowaniu twierdzenie/por.[37] /.
Spełnione są dwa twierdzenia dotyczące półgrup operatorów i ich generatorów.
Twierdzenie I /Trotter [38] /.
X - przestrzeń Hilberta,
A_1, A_2 : $X \longrightarrow X$ - operatory
A_1 - generuje scp $K^1(t)$
A_2 - generuje scp $K^2(t)$

Jeśli $K^1(t)$ i $K^2(s)$ komutują dla dowolnych t, $s \in [0,T]$, to dla każdego $a > 0$ operator $A_1 + a\, A_2$ generuje scp. operatorów $K_a(t)$, oraz:

$$K_a(t) = K^1(t)\, K^2(at). \qquad /2.95/$$

Twierdzenie II /Kato [39]/.

X - przestrzeń Hilberta,

$A, B : X \to X$,

A - generator scp. $\tilde{K}(t)$ i

$$\|\tilde{K}(t)\| \leqslant M_\omega e^{\omega t}, \qquad /2.96/$$

B - operator ograniczony,

$$\|B\| \leqslant c \qquad /2.97/$$

to

$A + B$ generuje scp. operatorów $K(t)$ oraz

$$\|K(t)\| \leqslant M_\omega e^{(\omega + cM_\omega)t}. \qquad /2.98/$$

Rozważać będziemy równania stochastyczne postaci /por. [40], [41], [42]/:

$$d\, U(t) = A\, U(t)\, dt + [B\, U(t)]\, d\, W(t) \qquad /2.99/$$
$$U(0) = U_0$$

gdzie:

$A : D(A) \to X$ jest generatorem silnie ciągłej półgrupy operatorów ograniczonych $K(t) : X \to X$,

B - operator ograniczony

$$B : X \to L(Y, X), \qquad /2.100/$$

oraz dla $\rho \in Y$, $U(\cdot) \in L^2([0,T], X)$ spełniona jest nierówność:

$$\int_0^t \|[BU(s)]\rho\|_X^2 \, ds \leqslant b^2 \int_0^t \|U(s)\|_X^2 \, ds \|\rho\|_Y^2, \qquad /2.101/$$

$W(t)$ - proces Wienera o wartościach w Y, o tensorze kowariancji Q,

$$U_0 \in X, \qquad /2.102/$$

Rozkładając proces Wienera zgodnie z /2.16/, równanie /2.99/ można zapisać w postaci:

$$d\,U(t) = A\,U(t)dt + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_k}\,[BU(t)]\,\rho_k\, d\beta_k(t) \qquad /2.103/$$

Rozwiązanie równania /2.99/ - /2.103/ można definiować w wieloraki sposób, jednak są wśród nich dwa istotne różne /por. [43]/: nazwiemy je silnym i słabym.

$U(t,\gamma)$ jest silnym rozwiązaniem równania /2.99/, gdy:

$\forall t \in [0,T]$, $\exists \Gamma_t \subset \Gamma$: $P(\Gamma_t) = 1$, taki, że $\forall \gamma \in \Gamma_t$

spełniona jest równość: /zbieżność śr.kw./

$$U(t,\gamma) = U_0 + \int_0^t AU(s,\gamma)\,ds + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \sqrt{\alpha_k}\,[BU(s,\gamma)]\,\rho_k d\beta_k(s,\gamma) \qquad /2.104/$$

gdzie $H(t)$ jest funkcją Heviside'a

$U(t,\gamma)$ jest słabym rozwiązaniem równania /2.99/, gdy w powyższej definicji równanie /2.104/ zastąpimy przez:

$$U(t,\gamma) = K(t)U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_k} \int_0^t K(t-s)\,[BU(s,\gamma)]\,\rho_k d\beta_k(s,\gamma) \qquad /2.105/$$

śr.kw.

Jeżeli $U(t,\gamma)$ jest słabym rozwiązaniem /2.99/ oraz spełnia dodatkowo warunek:

$$\forall t \in [0,T] \quad U(t,\gamma) \in D(A) \quad , \gamma \in \Gamma_t \qquad /2.106/$$

to jest silnym rozwiązaniem /2.99/ /por. [43]/.

Całki stochastyczne w /2.104/ i /2.105/ będziemy rozumieli w sensie Stratonowicza. /por. Uwaga 2 na str.42 /
Przy warunkach nałożonych przez nas na wielkości występujące w r - niu /2.99/, ma ono zawsze jednoznaczne słabe rozwiązanie /por. [44]/należące do $L^2([0,T],(\Gamma,\mathcal{F}_T,P),X)$.
Jeśli ponadto /por. [45] /:

$$K(t)U_o \in D(A) \ , \quad t \in [0,T] \ , \qquad /2.107/$$

oraz słabe rozwiązanie $U(t,\gamma)$ spełnia warunki:

$$K(t)\,[BU(t,\gamma)]\,\rho_k \in D(A) \ , \gamma \in \Gamma_t \ , \ k=1,2,\ldots \qquad /2.108/$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_k} \int_0^t E\left\{ \| AK(s)\,[BU(s)]\,\rho_k \|_X^2 \right\} ds < \infty \qquad /2.109/$$

to $U(t,\gamma)$ jest silnym rozwiązaniem równania /2.99/.

Rozwiązanie równania /2.99/ możemy uważać za funkcję procesu $\beta(t,\gamma)$ /2.21/:

$$U(t,\gamma) = U(t,\beta(\gamma)) \qquad /2.110/$$

zadaną w sposób uwikłany przez swoje równanie.

Całką stochastyczną w /2.104/ lub /2.105/ możemy uważać za całką postaci /2.88/ po przyjęciu:

$$g_k(s,\beta) = H(t-s)\,[BU(s,\beta(\gamma))]\,\rho_k \qquad /2.111/$$

Zauważmy, że tak zdefiniowane $g_k(t,\beta)$ spełniają warunki /2.44/, /2.45/ i /2.46/. Poprawne zdefiniowanie całki /2.88/ wymaga jeszcze, by $g_k(t,\beta)$, $k = 1,2,\ldots$ były dwukrotnie różniczkowalne względem β.

W pracy [46] podane są warunki dostateczne jakie muszą spełniać występujące w równaniu /2.99/ operatory, by rozwiązanie równania /2.89/ /słabe/ było analityczne względem β. Przedstawmy odwzorowanie B w /2.99/ w postaci:

$$[BU]v = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v,\rho_k\rangle_Y\, B_k U \qquad /2.112/$$

dla $U \in D(B) \subset X$, $v \in Y$ oraz $\{\rho_k\}$ - bazy ortonormalnej w Y. Załóżmy, że operatory B_k są ograniczone, samosprzężone i o wspólnym rozkładzie jedynki, tj.

$$B_k = \int_0^{\infty} f_k(\lambda)\, dE_\lambda \; . \qquad /2.113/$$

Jeżeli ponadto:

$$K(t)E_\lambda = E_\lambda K(t)\;,\; t \in [0,T]\;,\; \lambda \geqslant 0 \qquad /2.114/$$

czyli $K(t)$ oraz B_k komutują, oraz istnieje ciąg $\{a_k\} \in l^2$ taki, że

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_k(\lambda)|^2}{a_k^2} < \infty \qquad \text{dla } \lambda \in [0,\infty) \qquad /2.115/$$

to rozwiązanie równania /2.99/ - /2.105/ ma postać:

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} V^n(t) \qquad /2.116/$$

gdzie

$$V^n(t) = \qquad /2.117/$$

$$= K(t) \sum_{k_1 \ldots k_n = 1}^{\infty} \int_0^t \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_{n-1}} B_{k_1} B_{k_2} \ldots B_{k_n} U_o \, d\tilde{\beta}_{k_n}(t_n) \ldots d\tilde{\beta}_{k_1}(t_1) \,,$$

$$\tilde{\beta}_{k_i}(t) = \sqrt{\alpha_{k_i}} \, \beta_{k_i}(t) \quad .$$

7. Uwaga 1

Podstawowym wzorem wykorzystywanym w rozważaniach rozdziału trzeciego jest wzór /2.89/. Jest on konsekwencją następującego lematu /por. [18] /.

Oznaczmy:

$H, H_1, H_2, \mathcal{K}, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_0$ - przestrzenie Hilberta

$L(H_1, H_2)$ - przestrzeń operatorów ograniczonych z normą $\|\cdot\|$

$S_2(H_1, H_2)$ - ,, ,, Hilberta-Schmidta ,, σ_{2,H_1,H_2}

$S_1(H_1)$ - ,, ,, jądrowych

$C^1(\mathcal{K}, H, \mathcal{K}_1)$ - funkcje $\mathcal{K} \longrightarrow H$ różniczkowalne w kierunku $\mathcal{K}_1$

$C^{1,2}(\mathcal{K}, H, \mathcal{K}_1)$ -funkcje $f \in C^1(\mathcal{K}, H, \mathcal{K}_1)$, dla których $f'(x) \in S_2(\mathcal{K}_1, H)$

dla $Q \in S_1(\mathcal{K})$

$\mathcal{K}_0$ - przestrzeń z iloczynem skalarnym $(x,y)_{\mathcal{K}_0} = \left(Q^{-\frac{1}{2}}x, Q^{-\frac{1}{2}}y\right)_{\mathcal{K}}$

$$\mathcal{K}_0 \subseteq \mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}$$

Lemat

Niech

$f \in C^{1,2}(\mathcal{X}, H, \mathcal{X}_0)$

ξ - zmienna losowa gaussowska o wartościach w $\mathcal{X}$, o zerowej średniej i operatorze kowariancji Q

$A \in L(\mathcal{X}, H)$

$E\|f(\xi)\|_H^2 < \infty$, $E\sigma^2_{2,\mathcal{X}_0,H}(f'(\xi)) < \infty$.

Wówczas

$$E\left(f(\xi), A\xi\right)_H = E\left\{Tr_{\mathcal{X}} A^* f(\xi) Q\right\} . \qquad /2.118/$$

Zobaczymy, jak wygląda dowód wzoru /2.89/ w przypadku, gdy X = R.

Rozważmy całkę:

$$\mathcal{Z}(g,\beta) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_k} \int_0^T g_k(t,\beta)\, d\beta_k(t) \qquad /2.119/$$

w przypadku, gdy $g_k(t,\beta) = g_k(\beta)$.

Wówczas:

$$\mathcal{Z}(g,\beta) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(\beta)\sqrt{\alpha_k} \int_0^T d\beta_k(t) \quad . \qquad /2.120/$$

Przyjmując w lemacie:

$$\xi = \left(\sqrt{\alpha_1} \int_0^T d\beta_1(t) , \sqrt{\alpha_2} \int_0^T d\beta_2(t) , \ldots\ldots \right) ,$$

$$f(\xi) = g(\beta) = \left(g_1(\beta) , g_2(\beta) , \ldots\ldots \right) \quad ,$$

$A = Id_{\mathcal{X}}$, $\mathcal{X} = H = l^2$

otrzymujemy:

$$Q=\begin{bmatrix} \alpha_1\int_0^T dt & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \alpha_2\int_0^T dt & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}, \qquad /2.121/$$

$$f=\begin{bmatrix} \frac{\delta g_1}{\sqrt{\alpha_1}\,\delta\beta_1} & \frac{\delta g_2}{\sqrt{\alpha_1}\,\delta\beta_1} & \frac{\delta g_3}{\sqrt{\alpha_1}\,\delta\beta_1} & \cdots \\ \frac{\delta g_1}{\sqrt{\alpha_2}\,\delta\beta_2} & \frac{\delta g_2}{\sqrt{\alpha_2}\,\delta\beta_2} & \frac{\delta g_3}{\sqrt{\alpha_2}\,\delta\beta_2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} =: g \qquad /2.122/$$

oraz:

$$E\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^T g_k(\beta)\sqrt{\alpha_k}\,d\beta_k(t)\right\} = E\left\{Tr_{12}\,g'(\beta)Q\right\} =$$

$$= E\,Tr_{12}\begin{bmatrix} \sqrt{\alpha_1}\frac{\delta g_1}{\delta\beta_1}\int_0^T dt & \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1}}\frac{\delta g_2}{\delta\beta_1}\int_0^T dt & \cdots \\ \frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_2}}\frac{\delta g_1}{\delta\beta_2}\int_0^T dt & \sqrt{\alpha_2}\frac{\delta g_2}{\delta\beta_2}\int_0^T dt & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} E\left\{\frac{\delta g_k}{\delta\beta_k}\right\}\sqrt{\alpha_k}\int_0^T dt = \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^T \sqrt{\alpha_k}\,E\left\{\frac{\delta g_k}{\delta\beta_k}\right\} dt\,. \qquad /2.123/$$

Niech teraz $g(t,\beta)$ będzie funkcją prostą postaci:

$$g_k(t,\beta) = \sum_{i=1}^{m} g_{ki}(\beta)\chi_{\Delta_i}(t) \ , \qquad /2.124/$$

$\bigcup_{i=1}^{m} \Delta_i = [0,T]$, Δ_i - przedziały rozłączne.

Wówczas:

$$\mathcal{Z}(g,\beta) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T \sqrt{\alpha_k}\, g_k(t,\beta)\, d\beta_k(t) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m} g_{ki}(\beta)\sqrt{\alpha_k}\int_{\Delta_i} d\beta_k(t) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{\infty} g_{ki}(\beta)\sqrt{\alpha_k}\int_{\Delta_i} d\beta_k(t) \qquad /2.125/$$

oraz

$$E\left\{\mathcal{Z}(g,\beta)\right\} = E\left\{\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{\infty} g_{ki}(\beta)\sqrt{\alpha_k}\int_{\Delta_i} d\beta_k(t)\right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} E\left\{\sum_{k=1}^{\infty} g_{ki}(\beta)\sqrt{\alpha_k}\int_{\Delta_i} d\beta_k(t)\right\} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\alpha_k}\int_{\Delta_i} E\left\{\frac{\delta g_{ki}(\beta)}{\delta \beta_k(\Delta_i)}\right\} dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\alpha_k} \int_0^T E\left\{\frac{\delta g_k(t,\beta)}{\delta \beta_k(t)}\right\} dt \ , \qquad /2.126/$$

gdzie

$$\frac{\delta g_k(t,\beta)}{\delta \beta_k(t)} = \frac{\delta g_{ki}(\beta)}{\delta \beta_k(\Delta_i)} \quad \text{dla} \quad t \in \Delta_i \ .$$

Niech teraz

$$g_k^m(t,\beta) = \sum_{i=1}^{m} g_{ki}^m(\beta)\chi_{\Delta_i^m}(t) \qquad /2.127/$$

będzie takim ciągiem funkcji prostych, że:

$$g_{ki}^{m}(\beta) \xrightarrow[m\to\infty]{} g_k(t,\beta) \quad \text{średnio} \ , \qquad /2.128/$$

$$\frac{\delta g_{ki}^{m}(\beta)}{\delta\beta_k(\Delta_i^m)} \xrightarrow[m\to\infty]{} \frac{\delta g_k(t,\beta)}{\delta\beta_k(t)} \quad \text{średnio} \ , \qquad /2.129/$$

dla każdego $t\in\Delta_i^m$, $i=1,2,\dots,m$.

Wówczas

$$E\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^T\sqrt{\alpha_k}\, g_k(t,\beta)\, d\beta_k(t)\right\} = \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\alpha_k}\int_0^T E\left\{\frac{\delta g_k(t,\beta)}{\delta\beta_k(t)}\right\} dt \qquad /2.130/$$

przy założeniu całkowalności:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^T\sqrt{\alpha_k}\; E\left|\frac{\delta g_k(t,\beta)}{\delta\beta_k(t)}\right| dt \ . \qquad /2.131/$$

Analogicznie można udowodnić wzór /2.89/ gdy $X=R^n$ - niezależnie dla wszystkich współrzędnych funkcji g_k o wartościach w R^n

W przypadku gdy X - nieskończenie wymiarowa, ośrodkowa - - dowód przeprowadzamy dla współrzędnych funkcji g_k o wartościach w l^2.

Uwaga 2

W trzecim rozdziale tej pracy występującą w równaniach całkę stochastyczną:

$$\mathcal{Z}(g,\beta) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_k} \int_0^T g_k(t,\beta)\, d\beta_k(t) \quad \text{śr.kw.} \qquad /2.132/$$

będziemy rozumieli w sensie Stratonowicza; znaczy to, że całki względem rzeczywistych procesów Wienera $\beta_k(t)$ są całkami Stratonowicza / por.[35] /.

W szczególności, gdy funkcje $g_k(t,\beta)$ są różniczkowalne względem β, definicja powyższej całki Stratonowicza jest równoważna definicji całki Dalieckiego wprowadzonej w punkcie 5 tego rozdziału. Jednakże, ponieważ nie istnieje teoria równań stochastycznych Dalieckiego, będziemy mówić o równaniach Stratonowicza, natomiast odpowiadające im wzory /2.89-2.90/ potraktujemy jako własności ich rozwiązań przy dodatkowym założeniu różniczkowalności względem β. Pewne warunki dostateczne istnienia rozwiązań różniczkowalnych względem β przytoczone są /por.[46] / w punkcie 6 rozdziału II /por./2.11?/ i dalej/.

III. Równanie dla funkcjonału charakterystycznego rozwiązania stochastycznego równania w przestrzeni Hilberta

1. Uwagi wstępne

Rozważmy następujące stochastyczne równania ewolucyjne w przestrzeni Hilberta X:

$$\frac{dU}{dt} = AU + [BU]\,\xi(t) \qquad /3.1/$$

$$U(0) = U_0$$

gdzie

$$U_0 \in X \qquad /3.2/$$

$$A : X \ni D(A) \longrightarrow X \qquad /3.3/$$

$$B : X \longrightarrow L(Y, X) \qquad /3.4/$$

są takie same, jak w równaniu /2.99/, natomiast proces stochastyczny $\xi(t)$ jest białym szumem o operatorze kowariancji Q.

W postaci /3.1/ można przedstawić szereg równań liniowych: równania różniczkowe zwyczajne i cząstkowe, równania różniczkowe funkcjonalne /z odchylonym argumentem/ i wiele innych /por. [37]/. Zatem /3.1/ może być modelem /zapisanym w postaci abstrakcyjnej/ wielu zjawisk fizycznych, w tym również interesującego nas rozprzestrzeniania się fal w ośrodkach ciągłych. Warunki które muszą być spełnione, aby równanie /3.1/, w konkretnych przypadkach, mogło opisywać proces falowy /zwłaszcza: kiedy $\xi(t)$ jest białym szumem /, były badane między innymi w pracach: [47], [48], [49].

Celem tego rozdziału jest uzyskanie równania dla funkcjonału charakterystycznego /przestrzennego/ rozwiązania równania /3.1/ rozumianego jako równanie Stratonowicza:

$$\begin{aligned} dU &= AUdt + [BU]dW(t) \\ U(0) &= U_0 \end{aligned} \qquad /3.5/$$

/por. rozdz. II punkt 5e/.

2. Twierdzenie o postaci równania dla przestrzennego funkcjonału charakterystycznego

Załóżmy, że $U(t,\beta)$ jest słabym rozwiązaniem równania /3.5/ czyli rozwiązaniem następującego równania całkowego:

$$U(t,\beta) = K(t)U_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\alpha_k}\int_0^t K(t-s)\,[BU(s,\beta)]\,\rho_k d\beta_k(s) \qquad /3.6/$$

W celu otrzymania równania dla przestrzennego funkcjonału charakterystycznego /2.27/ $U(t,\beta)$, wykorzystamy kilka lematów /podobnie jak w pracy [16]/. Pierwszy z nich mówi o postaci pochodnej względem β procesu stochastycznego $U(t,\beta)$ spełniającego /3.6/.

Lemat 1

Niech $U(t,\beta)$ będzie rozwiązaniem równania /3.6/ jednokrotnie różniczkowalnym względem β /w sensie pochodnej względem elementu przestrzeni $\mathfrak{M}$ / oraz niech

$$U(t,\beta)\ , \quad [BU(t,\beta)]\,\rho_k\ , \quad \frac{\delta U(t,\beta)}{\delta\beta_k(s)}\ , \quad \left[B\frac{\delta U(t,\beta)}{\delta\beta_k(s)}\right]\rho_k$$

będą ograniczone i ciągłe względem t przy $t \neq 0$.

Wówczas:

$$\frac{\delta U(t,\beta)}{\delta \beta_k(s)} = 0 \quad \text{dla} \quad s > t \qquad /3.7/$$

$$\frac{\delta U(t,\beta)}{\delta \beta_k(s)} = H(t-s)\sqrt{\alpha_k}\, K(t-s)\, [BU(s,\beta)]\, \rho_k +$$

$$+ \sum_{l=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_l} \int_s^t K(t-\tau) \left[B \frac{\delta U(\tau,\beta)}{\delta \beta_k(s)}\right] \rho_l \, d\beta_l(\tau) \qquad /3.8/$$

gdzie $H(t)$ jest funkcją Heviside'a:

$$H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2} & t=0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \qquad /3.9/$$

Dowód lematu 1.

Z różniczkowalności $U(t,\beta)$ względem β wynika /por. /2.43//, że:

$$U'_\beta(t;\nu) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} U(t, \beta + \varepsilon\nu)\Big|_{\varepsilon=0} \qquad /3.10/$$

Korzystając z /2.48/ oraz postaci równania /3.6/ otrzymujemy:

$$U'_\beta(t;\nu) = \int_0^T \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\delta U(t,\beta)}{\delta \beta_l(s)}\, d\nu_l(s) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left\{K(t)U_o + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_k}\int_0^t K(t-s)\left[BU(s,\beta+\varepsilon\nu)\right]\rho_k\left(d\beta_k(s)+\varepsilon d\nu_k(s)\right)\right\}\Bigg|_{\varepsilon=0} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_k}\int_0^t K(t-s)\left[BU(s,\beta)\right]\rho_k d\nu_k(s) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_k}\int_0^t K(t-s)\left[BU'_\beta(s,\beta)\right]\rho_k d\beta_k(s) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_k}\int_0^t K(t-s)\left[BU(s,\beta)\right]\rho_k d\nu_k(s) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_k}\int_0^t K(t-s)\left[B\int_0^T \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\delta U(s,\beta)}{\delta \beta_l(\tau)}\right]\rho_k d\nu_l(\tau)\, d\beta_k(s) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_k}\int_0^T \Big\{ H(t-s)\; K(t-s)\left[BU(s,\beta)\right]\rho_k +$$

$$+ \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^t K(t-\tau)\left[B\frac{\delta U(\tau,\beta)}{\delta \beta_k(s)}\right]\rho_l d\beta_l(\tau)\Big\}\, d\nu_k(s) \qquad /3.11/$$

po zamianie oznaczeń s i τ oraz kolejności całkowania.

Operatory A i B w równaniu /3.5/ spełniają warunek przyczynowości, tzn. nie uzależniają wartości procesu U w chwili t od jego wartości w chwilach $s > t$ oraz wartości β w $s > t$. Zatem $U(t,\beta)$ nie zależy funkcyjnie od $\beta(s)$ dla $s > t$. Wynika stąd /3.7/ w tezie lematu oraz

$$\int_0^t K(t-\tau)\left[B\frac{\delta U(\tau,\beta)}{\delta \beta_k(s)}\right]\rho_l d\beta_l(\tau) =$$

$$= \int_s^t K(t-\tau)\left[B\frac{\delta U(\tau,\beta)}{\delta \beta_k(s)}\right]\rho_l d\beta_l(\tau) \qquad /3.12/$$

Z /3.11/, przy uwzględnieniu /3.12/ otrzymujemy tezę /3.8/ lematu. Kolejne lematy mają charakter techniczny i obejmują fragmenty przekształceń wzorów w dowodzie twierdzenia 1.

Lemat 2.

Niech $U(t,\beta)$ będzie słabym rozwiązaniem równania /3.5/ oraz niech $g(t)$ będzie dowolną gładką funkcją $[0,T]\to C$. Niech $\lambda \in D(A)$.

Wówczas:

$$iE\left\{\int_0^T g(t)\left(U(t,\beta),A^*\lambda\right)_X e^{i(U(t,\beta),\lambda)_X}\,dt\right\} =$$

$$= \int_0^T \left(\frac{\delta F[t,\lambda]}{\delta\lambda}, A^*\lambda\right)_X g(t)\,dt \qquad /3.13/$$

Dowód lematu 2.

$$E\left\{\int_0^T g(t)\left(iU(t,\beta)e^{i(U(t,\beta),\lambda)_X}, A^*\lambda\right)_X dt\right\} = (\text{por.}/2.54/)$$

$$= E\left\{\int_0^T g(t)\left(\frac{\delta e^{i(U(t,\beta),\lambda)_X}}{\delta\lambda}, A^*\lambda\right)_X dt\right\} = \qquad (\text{por.}/2.27/)$$

$$= \int_0^T g(t)\left(\frac{\delta F[t,\lambda]}{\delta\lambda}, A^*\lambda\right)_X dt$$

Lemat 3

Przy założeniach lematu 1:

$$\frac{\delta}{\delta\beta_k(t)} e^{i(U(t,\beta),\lambda)_X} = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha_k}\left(\left[B\frac{\delta}{\delta\lambda} e^{i(U(t,\beta),\lambda)_X}\right]\rho_k,\lambda\right)_X$$

/3.14/

Dowód lematu 3.

$$\frac{\delta}{\delta\beta_k(t)} e^{i(U(t,\beta),\lambda)_X} \overset{/2.67/}{=} \left(i \frac{\delta U(t,\beta)}{\delta\beta_k(t)},\lambda\right)_X e^{i(U(t,\beta),\lambda)_X} \overset{/3.8/}{=}$$

$$= \frac{i}{2}\sqrt{\alpha_k}\left([BU(t,\beta)]\,\rho_k,\lambda\right)_X e^{i(U(t,\beta),\lambda)_X} \overset{/2.54/}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\alpha_k}\left(\left[B \frac{\delta}{\delta\lambda} e^{i(U(t,\beta),\lambda)_X}\right]\rho_k,\lambda\right)_X$$

Lemat 4.

Niech $g(t)$ będzie funkcją $[0,T]\to C$, dowolną gładką. Niech spełnione będą założenia lematu 1 oraz dla funkcji:

$$g_k(t,\beta) = \left[B \frac{\delta e^{i(U(t,\beta),\lambda)_X}}{\delta\lambda}\right]\rho_k, \quad k=1,2,\ldots$$

spełniony będzie warunek /2.84/.

Wówczas:

$$E\left\{\int_0^T g(t)\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\alpha_k}\, i\,[BU(t,\beta)]\,\rho_k e^{i(U(t,\beta),\lambda)_X}\, d\beta_k(t)\right\} =$$

/3.15/

$$= \frac{1}{2}\int_0^T g(t)\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\alpha_k}\left[B \frac{\delta}{\delta\lambda}\left(\left[B \frac{\delta}{\delta\lambda} F[t,\lambda]\right]\rho_k,\lambda\right)_X\right]\rho_k\, dt$$

Dowód lematu 4.

$$E\left\{\int_0^T g(t)\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\alpha_k}\, i\,[BU(t,\beta)]\,\rho_k e^{i(U(t,\beta),\lambda)_X} d\beta_k(t)\right\} \overset{/2.54/}{=}$$

$$= E\left\{\int_0^T g(t)\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\alpha_k}\left[B \frac{\delta e^{i(U(t,\beta),\lambda)_X}}{\delta\lambda}\right]\rho_k d\beta_k(t)\right\} \overset{\text{wzór F-N /2.89/}}{=}$$

$$= \int_0^T g(t)\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\alpha_k}\, B\left[\frac{\delta}{\delta\lambda} E\left\{\frac{e^{i(U(t,\beta),\lambda)_X}}{\delta\beta_k(t)}\right\}\right]\rho_k dt \overset{/3.14/ \text{ i } /2.27/}{=}$$

$$= \int_0^T g(t) \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_k}\left[B\, \frac{\delta}{\delta\lambda} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\alpha_k} \left(B\left[\frac{\delta}{\delta\lambda} F[t,\lambda]\right]\rho_k, \lambda\right)_X \right]\rho_k dt =$$

$$= \int_0^T g(t) \cdot \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_k}\left[B\, \frac{\delta}{\delta\lambda}\left(\left[B\, \frac{\delta}{\delta\lambda} F[t,\lambda]\right]\rho_k, \lambda\right)_X\right]\rho_k dt$$

Lemat 5. (*)

Niech $U(t,\beta)$ będzie słabym rozwiązaniem równania /3.5/ i niech $\lambda \in D(A)$. Wówczas:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(U(t,\beta),\lambda\right)_X = \left(U(t,\beta), A^{*}\lambda\right)_X +$$

$$+ \lim_{\tau \to t}\left(\frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{\tau} K(t-s) \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_k}\left[BU(s,\beta)\right] \rho_k d\beta_k(s), \lambda\right)_X \qquad /3.16/$$

Dowód lematu 5.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(U(t,\beta),\lambda\right)_X \overset{/3.6/}{=} \frac{\partial}{\partial t}\left(K(t)U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_k} \int_0^t K(t-s)\left[BU(s,\beta)\right] \rho_k d\beta_k(s), \lambda\right)_X =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(U_0, K^{*}(t)\lambda\right)_X + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_k} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \left(\left[BU(s,\beta)\right]\rho_k, K^{*}(t-s)\lambda\right)_X d\beta_k(s) \overset{/2.94/}{=}$$

$$= \left(U_0, K^{*}(t)A^{*}\lambda\right)_X + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_k} \int_0^t \left(\left[BU(s,\beta)\right]\rho_k, K^{*}(t-s)A^{*}\lambda\right)_X d\beta_k(s) +$$

$$+ \lim_{\tau \to t} \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_k} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{\tau} \left(\left[BU(s,\beta)\right]\rho_k, K^{*}(t-s)\lambda\right)_X d\beta_k(s) =$$

$$= \left(K(t)U_0, A^{*}\lambda\right)_X + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_k} \int_0^t K(t-s)\left[BU(s,\beta)\right] \rho_k d\beta_k(s), A^{*}\lambda\right)_X +$$

$$+ \lim_{\tau \to t}\left(\frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{\tau} K(t-s) \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_k}\left[BU(s,\beta)\right] \rho_k d\beta_k(s), \lambda\right)_X =$$

(*) lemat ten należy uważać za fragment przekształceń dowodu twierdzenia 1 - różniczkowanie pod znakiem całki

$$= \left(U(t,\beta), A^{*}\lambda\right)_X + \lim_{\tau \to t} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{\tau} K(t-s) \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_k}\,[BU(s,\beta)]\,\rho_k\, d\beta_k(s), \lambda \right)_X$$

Możemy teraz sformułować twierdzenie o postaci równania dla przestrzennego funkcjonału charakterystycznego słabego rozwiązania stochastycznego równania ewolucyjnego.

Twierdzenie 1

Załóżmy, że $U(t,\beta)$ jest słabym rozwiązaniem równania /3.5/, spełniającym założenia lematów 1-5.

Niech $F[t,\lambda]$ będzie przestrzennym funkcjonałem charakterystycznym /2.27/ procesu $U(t,\beta)$ takim, że jego pochodna względem t jest ciągła na $[0,T]$.

Niech $\lambda \in D(A)$.

Wówczas funkcjonał $F[t,\lambda]$ spełnia równanie:

$$\frac{\partial}{\partial t} F[t,\lambda] = \left(\frac{\delta F[t,\lambda]}{\delta \lambda}, A^{*}\lambda \right)_X + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left(\left[B \frac{\delta}{\delta \lambda} \left(\left[B \frac{\delta}{\delta \lambda} F[t,\lambda] \right] \rho_k, \lambda \right)_X \right] \rho_k, \lambda \right)_X \qquad /3.17/$$

oraz warunek początkowy:

$$F[0,\lambda] = \exp\left\{ i(U_0,\lambda)_X \right\} \qquad /3.18/$$

i warunek normujący:

$$F[t,0] = 1 \qquad /3.19/$$

Dowód twierdzenia 1.

Niech $g(t)$ będzie dowolną gładką funkcją $[0,T] \longrightarrow C$.

Wówczas:

$$\int_0^T g(t)\frac{\partial}{\partial t} F[t,\lambda]\, dt \overset{/2.65/}{=}$$

$$= iE\left\{\int_0^T g(t)\,\frac{\partial}{\partial t}\left(U(t,\beta),\lambda\right)_X e^{i\left(U(t,\beta),\lambda\right)_X}\, dt\right\} \overset{/3.16/}{=}$$

$$= iE\left\{\int_0^T g(t)\left(U(t,\beta),A^{*}\lambda\right)_X\, e^{i\left(U(t,\beta),\lambda\right)_X}\, dt\right\} +$$

$$+ iE\left\{\int_0^T \lim_{\tau\to t} g(t)\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^\tau K(t-s)\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\alpha_k}\, BU(s,\beta)\;\rho_k d\beta_k(s),\lambda\right)_X \times\right.$$

$$\left.\times\, e^{i\left(U(t,\beta),\lambda\right)_X}\, dt\right\} \overset{/3.13/}{=}$$

$$= \int_0^T g(t)\left(\frac{\delta F[t,\lambda]}{\delta\lambda}\,,A^{*}\lambda\right)_X dt +$$

$$+ iE\left\{\int_0^T \lim_{\tau\to t} g(t)\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^\tau K(t-s)\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\alpha_k}\,[BU(s,\beta)]\,\rho_k\,\frac{d\beta_k(s)}{ds}\, ds,\lambda\right)_X \times\right.$$

$$\left.\times\, e^{i\left(U(t,\beta),\lambda\right)_X}\right\} dt \quad =$$

$$\overset{/*/}{=} \int_0^T g(t)\left(\frac{\delta F[t,\lambda]}{\delta\lambda}\,,\,A^{*}\lambda\right)_X dt +$$

$$+ iE\left\{\int_0^T g(t)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\alpha_k}\,[BU(t,\beta)]\,\rho_k,\lambda\right)_X e^{i\left(U(t,\beta),\lambda\right)_X} d\beta_k(t)\right\} \overset{/3.15/}{=}$$

$$= \int_0^T g(t)\left(\frac{\delta F[t,\lambda]}{\delta\lambda}\,,\,A^{*}\lambda\right)_X dt +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\int_0^T g(t)\left(\left[B\,\frac{\delta}{\delta\lambda}\left(\left[B\,\frac{\delta}{\delta\lambda}\,F[t,\lambda]\right]\rho_k,\lambda\right)_X\right]\rho_k,\lambda\right)_X dt$$

Co z dowolności funkcji $g(t)$ daje tezę twierdzenia /3.17/.

/x/ W równaniu oznaczono różniczkę Stratonowicza jako $\frac{d\beta_k(s)}{ds}\, ds$; w istocie w trakcie przekształceń występują: przed różniczkowaniem - różniczka $d\beta_k(s) =: \frac{d\beta_k(s)}{ds}\, ds$,

po zróżniczkowaniu i przejściu do granicy - różniczka $d\beta_k(t) =: \frac{d\beta_k(t)}{dt}\, dt$

Uwaga

Jeżeli rozwiązanie $U(t,\beta)$ równania /3.5/ jest silnym rozwiązaniem, to wówczas /3.17/ w twierdzeniu 1 można zastąpić przez:

$$\frac{\partial}{\partial t} F[t,\lambda] = \left(A \frac{F[t,\lambda]}{\delta\lambda}, \lambda\right)_X + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left(\left[B \frac{\delta}{\delta\lambda}\left(\left[B \frac{\delta}{\delta\lambda} F[t,\lambda]\right]\rho_k, \lambda\right)_X\right]\rho_k, \lambda\right)_X \qquad /3.20/$$

Podane w tym punkcie równanie różniczkowe /o pochodnych funkcjonalnych/ dla funkcjonału charakterystycznego rozwiązania różniczkowego równania stochastycznego, można rozumieć jako odpowiednik /w przestrzeni nieskończenie wymiarowej/ znanego równania Fokkera - Planka - Kołmogorowa.

3. Przypadek równania w sensie Ito

a/ Rozważmy równanie postaci:

$$dU(t,\gamma) = AU(t,\gamma)dt + [BU(t,\gamma)]\, dW(t), \quad U(0) = U_0 \qquad /3.21/$$

przy założeniu, że różniczka $dW(t)$ jest rozumiana w sensie Ito.

W celu znalezienia równania dla przestrzennego funkcjonału charakterystycznego rozwiązania równania /3.21/ posłużymy się lematem Ito w nieskończonym wymiarze / por. [19]/.

Lemat Ito.

Niech $U(t,\gamma)$ będzie silnym rozwiązaniem równania :

$$\begin{aligned} dU(t,\gamma) &= a(t,U)dt + b(t,U)dW(t) \\ U(0) &= U_o \end{aligned} \qquad /3.22/$$

gdzie U jest procesem stochastycznym o wartościach w X, $W(t)$ jest procesem Wienera o wartościach w Y , o operatorze kowariancji

$$Q = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \, \rho_i \otimes_Y \rho_i \quad ,$$

a i b spełniają zwykłe założenia.

Niech $\varphi(t,u)$ będzie odpowiednio gładką funkcją $[0,T] \times X \longrightarrow C$. Wówczas $\varphi(t,U(t,\gamma))$ jest rozwiązaniem równania :

$$d\varphi(t,U(t,\gamma)) = \left\langle b^*(t,U(t,\gamma)) \left.\frac{\delta\varphi(t,U)}{\delta U}\right|_{U=U(t,\gamma)} , dW(t) \right\rangle_Y +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,U(t,\gamma))\,dt + \left(a(t,U(t,\gamma)) \, , \left.\frac{\delta\varphi(t,U)}{\delta U}\right|_{U=U(t,\gamma)} \right)_X dt +$$

$$+ \frac{1}{2}\, tr_Y \left\{ b^*(t,U(t,\gamma)) \left.\frac{\delta^2\varphi(t,U)}{\delta U^2}\right|_{U=U(t,\gamma)} b(t,U(t,\gamma))\, Q \right\} dt \qquad /3.23/$$

z warunkiem początkowym:

$$\varphi(0,U(0,\gamma)) = \varphi(0,U_o)$$

Przyjmijmy

$$\varphi(t,U) = \exp\left\{i(U,\lambda)_X\right\} \qquad /3.24/$$

dla $U \in X$, $\lambda \in X$ - ustalonego.

oraz

$$a(t,U) = AU \qquad /3.25/$$

$$b(t,U) = [BU] \qquad /3.26/$$

i zastosujmy wzór /3,23/.

Otrzymamy:

$$d\, e^{i(U(t,\gamma),\lambda)_X} = \left\langle [BU(t,\gamma)]^* \frac{\delta e^{i(U(t,\gamma),\lambda)_X}}{\delta U}, \dot{dW}(t) \right\rangle_Y +$$

$$+ \left(AU(t,\gamma), \frac{\delta e^{i(U(t,\gamma),\lambda)_X}}{\delta U} \right)_X dt + \qquad /3.27/$$

$$+ \frac{1}{2} tr_Y \left\{ [BU(t,\gamma)]^* \frac{\delta^2 e^{i(U(t,\gamma),\lambda)_X}}{\delta U^2} [BU(t,\gamma)]\, Q \right\} dt$$

Uśrednijmy teraz obie strony równości /3.27/ i przekształćmy poszczególne człony. Otrzymamy:

$$E\left\{d\, e^{i(U(t,\gamma),\lambda)_X}\right\} = dF[t,\lambda] \ , \qquad /3.28/$$

$$E\left\{\left\langle [BU(t,\gamma)]^* \frac{\delta e^{i(U(t,\gamma),\lambda)_X}}{\delta U}, dW(t) \right\rangle_Y\right\} =$$

$$= E\left\{\left(i\lambda e^{i(U(t,\gamma),\lambda)_X}, [BU(t,\gamma)]\,dW(t)\right)_X\right\} =$$

$$= E\left\{\left(\lambda, \left[B\frac{\delta}{\delta\lambda} e^{i(U(t,\gamma),\lambda)_X}\right]dW(t)\right)_X\right\} = 0 \quad , \qquad /3.29/$$

$$E\left\{\left(AU(t,\gamma), \frac{\delta e^{i(U(t,\gamma),\lambda)_X}}{\delta U}\right)_X dt\right\} =$$

$$= E\left\{\left(A\frac{\delta e^{i(U(t,\gamma),\lambda)_X}}{\delta\lambda}, \lambda\right)_X dt\right\} = \left(A\frac{\delta F[t,\lambda]}{\delta\lambda}, \lambda\right)_X dt \qquad /3.30/$$

$$E\left\{\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}_Y\left\{[BU(t,\gamma)]^{*}\frac{\delta^2 e^{i(U(t,\gamma),\lambda)_X}}{\delta U^2}[BU(t,\gamma)]\,Q\right\}dt\right\} =$$

$$= E\left\{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left\langle [BU]^{*}\frac{\delta^2 e^{i(U(t,\gamma),\lambda)_X}}{\delta U^2}[BU(t,\gamma)]\,Q\cdot\rho_k, \rho_k\right\rangle_Y dt\right\} =$$

$$= E\left\{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\left(\frac{\delta^2 e^{i(U(t,\gamma),\lambda)_X}}{\delta U^2}[BU(t,\gamma)]\rho_k, [BU(t,\gamma)]\rho_k\right)_X dt\right\} =$$

$$= -E\left\{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\left(e^{i(U(t,\gamma),\lambda)_X}\lambda\left([BU(t,\gamma)]\rho_k,\lambda\right)_X, [BU(t,\gamma)]\rho_k\right)_X dt\right\}$$

$$= -E\left\{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\left([BU(t,\gamma)]\rho_k,\lambda\right)_X^2 e^{i(U(t,\gamma),\lambda)_X}dt\right\} =$$

$$= E\left\{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\left(\left[B\frac{\delta}{\delta\lambda}\right]\rho_k,\lambda\right)_X^2 e^{i(U(t,\gamma),\lambda)_X}dt\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\left(\left[B\frac{\delta}{\delta\lambda}\right]\rho_k,\lambda\right)_X^2 F[t,\lambda]\,dt \qquad /3.31/$$

Zatem z /3.27/ ,po uwzględnieniu /3.28-31/ otrzymujemy równanie dla F:

$$\frac{\partial}{\partial t} F[t,\lambda] = \left(A \frac{\delta F[t,\lambda]}{\delta \lambda}, \lambda\right)_X + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left(\left[B \frac{\delta}{\delta\lambda}\right] \rho_k, \lambda\right)_X^2 F[t,\lambda]$$

/3.32/

b/ Przekształćmy teraz formalnie równanie /3.32/ zakładając, że $Q = Id_Y$. Zapiszmy Q symbolicznie jako:

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \otimes_Y \rho_k \, , \qquad /3.33/$$

traktując /3.33/ jako operator identycznościowy przedstawiający każdy element $v \in Y$ w postaci szeregu Fouriera, tzn.

$$Qv = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, \rho_k \rangle_Y \, \rho_k \qquad /3.34/$$

Szereg /3.31/ można wówczas przekształcić podstawiając

$\alpha_k = 1$ dla $k = 1, 2, \ldots$

/ o ile pozostanie on zbieżny po tym podstawieniu/:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left[B \frac{\delta}{\delta\lambda}\right] \rho_k, \lambda \right)_X^2 F[t,\lambda] \, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle \rho_k \, , \left[B \frac{\delta}{\delta\lambda}\right]^* \lambda \right\rangle_Y^2 F[t,\lambda] \, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \left\langle \left[B \frac{\delta}{\delta\lambda}\right]^* \lambda \, , \left[B \frac{\delta}{\delta\lambda}\right]^* \lambda \right\rangle_Y F[t,\lambda] \, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left[B \frac{\delta}{\delta\lambda}\right] \left[B \frac{\delta}{\delta\lambda}\right]^* F[t,\lambda] \lambda, \lambda \right)_X dt \qquad /3.35/$$

Równanie /3.32/, przy uwzględnieniu /3.35/, przyjmuje postać analogiczną jak w artykule Chowa [19] - por. /1.15/:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \left(A \frac{\delta F}{\delta \lambda}, \lambda\right)_X + \frac{1}{2}\left(\left(\left[B \frac{\delta}{\delta \lambda}\right]\left[B \frac{\delta}{\delta \lambda}\right]^{*} F\right)\lambda, \lambda\right)_X \qquad /3.36/$$

Uwaga:

$Q = Id_Y$ można przyjąć wprowadzając w równaniu /3.21/ nowy operator

$$\widetilde{[BU]} = [BU]\, Q^{\frac{1}{2}} \qquad /3.37/$$

i nowy proces Wienera

$$\widetilde{W}(t) = Q^{-\frac{1}{2}} W(t) \qquad /3.38/$$

Zamiana ta nie ma wpływu na sumowalność szeregu /3.31/ przy $\tilde{\alpha}_k = 1$, $k = 1, 2, \ldots$; pozwala jedynie zapisać równanie dla funkcjonału w postaci /3.36/ z nowym operatorem $\widetilde{[B\cdot]}$.

c/ Znajdziemy teraz związek między równaniami w sensie Stratonowicza /3.5/ i w sensie Ito /3.21/.

Wykonajmy w /3.20/ w drugim członie prawej strony jedno różniczkowanie względem λ /zewnętrzne/. Otrzymujemy:

$$\frac{\partial}{\partial t} F[t,\lambda] = \left(A \frac{\delta}{\delta\lambda} F[t,\lambda], \lambda\right)_X + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left(\left[B \frac{\delta}{\delta\lambda}\right]\rho_k, \lambda\right)_X^2 F[t,\lambda] +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left(\left[B\left[B \frac{\delta}{\delta\lambda} F[t,\lambda]\right]\rho_k\right]\rho_k, \lambda\right)_X \qquad /3.39/$$

Widzimy, że w /3.39/ jest dodatkowy człon w porównaniu z /3.20/. Łącząc go z wyrażeniem zawierającym operator A możemy stwierdzić, że równaniu stochastycznemu Stratowicza:

$$dU = AUdt + [BU]\, dW(t) \qquad /3.40/$$

odpowiada równanie Ito z poprawką przy różniczce dt:

$$dU = \left(AU + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left[B\left\{[BU]\rho_k\right\}\right]\rho_k \right)dt + [BU]dW(t) \qquad /3.41/$$

Analogicznie, należy przypuszczać, że w przypadku nieliniowych operatorów A(U) i B(U) równaniu Stratonowicza:

$$dU = A(U)dt + B(U)dW(t) \qquad /3.42/$$

odpowiadałoby równanie Ito:

$$dU = \left(A(U) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left\{\frac{\delta}{\delta U} B(U)\rho_k\right\} B(U)\rho_k\right)dt + B(U)dW(t) \qquad /3.43/$$

d/ Zwróćmy jeszcze uwagę na fakt, że powtarzając postępowanie punktu 2 tego rozdziału dla równania /1.17/ otrzymamy równanie dla funkcjonału w postaci identycznej jak Curtain /por. /1.18//. Jego postać nie zależy przy tym od rozumienia sensu równania /1.17/: Stratonowicza lub Ito.

4. Równania dla momentów. Twierdzenie o jednoznaczności rozwiązania równania dla funkcjonału charakterystycznego

a/ Twierdzenie 1 można wypowiedzieć w następujący sposób: Jeżeli F jest funkcjonałem charakterystycznym /spełniającym odpowiednie warunki/, to jest on rozwiązaniem /jednym z rozwiązań/ równania /3.17/. Spróbujemy teraz wypowiedzieć twierdzenie odwrotne: kiedy rozwiązanie równania /3.17/ istnieje, kiedy jest jedyne i jest funkcjonałem charakterystycznym.

Rozważymy, dla uproszczenia zapisów, równanie /3.20/, jednakże otrzymane wyniki będą się odnosić do równania /3.17/, o ile rozwiązania wyprowadzonych równań dla momentów będziemy rozumieli w słabym sensie.

Rozwiązania problemu początkowego:

$$\frac{\partial}{\partial t} F[t,\lambda] = \left(A \frac{\delta F[t,\lambda]}{\delta\lambda}, \lambda\right)_X + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left(\left[B \frac{\delta}{\delta\lambda}\left(\left[B \frac{\delta}{\delta\lambda} F[t,\lambda]\right]\rho_k, \lambda\right)_X\right]\rho_k, \lambda\right)_X \qquad /3.44/$$

$$F[0,\lambda] = \exp\left\{i\left(U_0,\lambda\right)_X\right\} \qquad /3.45/$$

$$F[t,0] = 1 \qquad /3.46/$$

będziemy poszukiwać, jak to się często czyni, w postaci szeregu:

$$\tilde{F}[t,\lambda] = \Gamma_0(t) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(i)^l}{l!} \Gamma_l(t)\cdot \underbrace{\lambda\otimes\ldots\otimes\lambda}_{l \text{ razy}} \qquad /3.47/$$

Ze zróżniczkowania /3.47/ względem λ otrzymujemy:

$$\frac{1}{(i)^l} \frac{\delta^l \tilde{F}[t,\lambda]}{\delta \lambda^l}\Bigg|_{\lambda=0} = \Gamma_l(t) \qquad /3.48/$$

zatem z /2.55/ widzimy, że $\Gamma_l(t)$ są momentami l - tego rzędu procesu, którego funkcjonałem charakterystycznym jest $\tilde{F}[t,\lambda]$.

Podstawiając $\lambda = 0$ w /3.47/ widzimy, że

$$\tilde{F}[t,0] = \Gamma_0(t) \; ; \qquad /3.49/$$

stąd, przy uwzględnieniu /3.46/ znajdujemy, że

$$\Gamma_0(t) = 1 \qquad /3.50/$$

Znajdziemy teraz równania, które muszą spełniać współczynniki Γ_l, $l = 1,2,\ldots$, by szereg /3.47/ mógł być rozwiązaniem równania /3.44/.

Podstawmy $\tilde{F}[t,\lambda]$ na miejsce F w /3.44/. Otrzymujemy:

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(i)^l}{l!} \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_l(t)\cdot\lambda\otimes\ldots\otimes\lambda =$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(i)^l}{l!} \left(A \frac{\delta}{\delta\lambda}\left\{ \Gamma_l(t)\cdot\lambda\otimes\ldots\otimes\lambda\right\}, \lambda \right)_X +$$

$$/3.51/$$

$$+ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i)^l}{l!} \frac{1}{2}\alpha_k \left(\left[B \frac{\delta}{\delta\lambda} \left(\left[B \frac{\delta}{\delta\lambda} \left\{ \Gamma_l(t)\cdot\lambda\otimes\ldots\otimes\lambda\right\}\right] \rho_k, \lambda \right)_X \right] \rho_k, \lambda \right)_Y$$

Przekształcimy prawą stronę równania /3.51/.

Pierwszy człon ma postać:

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(i)^l}{l!}\left(A \frac{\delta}{\delta\lambda}\left\{\Gamma_l(t)\cdot\lambda\otimes\ldots\otimes\lambda\right\},\lambda\right)_X =$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(i)^l}{l!} \sum_{j=1}^{l}\left\{A_j\,\Gamma_l(t)\right\}\cdot\lambda\otimes\ldots\otimes\lambda \qquad /3.52/$$

gdzie $A_j\,\Gamma_l(t)$ jest określone na tensorze prostym

$$\Gamma_l(t) = \gamma_1(t)\otimes\ldots\otimes\gamma_l(t) \qquad /3.53/$$

jako

$$A_j\,\Gamma_l(t) = \gamma_1(t)\otimes\ldots\otimes A\,\gamma_j(t)\otimes\ldots\otimes\gamma_l(t) \qquad /3.54/$$

Drugi człon prawej strony /3.51/ ma postać:

$$\sum_{l,k=1}^{\infty} \frac{(i)^l}{l!}\,\frac{1}{2}\alpha_k\left(\left[B\frac{\delta}{\delta\lambda}\left(\left[B\frac{\delta}{\delta\lambda}\left\{\Gamma_l(t)\lambda\otimes\ldots\otimes\lambda\right\}\right]\rho_k,\lambda\right)_X\right]\rho_k,\lambda\right)_X =$$

$$= \sum_{l,k=1}^{\infty} \frac{1}{2}\alpha_k\left(\left[B\frac{\delta}{\delta\lambda}\left\{\sum_{i=1}^{l}\left[B_i\Gamma_l(t)\right]\rho_k^i\cdot\lambda\otimes\ldots\otimes\lambda\right\}\right]\rho_k\cdot\lambda\right)_X \frac{(i)^l}{l!} =$$

$$= \sum_{l,k=1}^{\infty} \frac{(i)^l}{l!}\frac{1}{2}\alpha_k\sum_{i,j=1}^{l}\left[B_j\left\{\left[B_i\Gamma_l(t)\right]\rho_k^i\right\}\right]\rho_k^j\cdot\lambda\otimes\ldots\otimes\lambda \qquad /3.55/$$

gdzie operacja $\left[B_i\Gamma_l(t)\right]\rho_k^i$ jest określona na tensorze prostym /3.53/ jako:

$$\left[B_i\Gamma_l(t)\right]\rho_k^i = \gamma_1(t)\otimes\ldots\otimes\left[B\gamma_i(t)\right]\rho_k\otimes\ldots\otimes\gamma_l(t) \qquad /3.56/$$

Porównując współczynniki przy tensorach $\lambda\otimes\ldots\otimes\lambda$ jednakowego rzędu w /3.44/, przy uwzględnieniu /3.52/ i /3.55/ otrzymujemy ciąg równań dla $\Gamma_l(t)$, $l = 1,2, \ldots$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_l(t) = \sum_{j=1}^{l} A_j\Gamma_l(t) + \tag{3.57}$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{l}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\left[B_j\left\{[B_i\Gamma_l(t)]\rho_k^i\right\}\right]\rho_k^j$$

Warunki początkowe odpowiadające równaniom /3.57/ otrzymujemy z /3.45/:

$$\Gamma_l(o) = \underbrace{U_o\otimes\ldots\otimes U_o\otimes\ldots\otimes U_o}_{l\ \text{razy}} \tag{3.58}$$

Otrzymany wynik można sformułować w postaci następującego lematu:

Lemat 6

Jeżeli szereg /3.47/ jest rozwiązaniem równania /3.44/ z warunkami /3.45/ i /3.46/, to jego współczynniki $\Gamma_l(t)$ spełniają następujące zagadnienia Cauchy'ego:

$$\Gamma_o(t) = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_l(t) = \sum_{j=1}^{l} A_j\,\Gamma_l(t) + \tag{3.59}$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{l}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\left[B_j\left\{[B_i\Gamma_l(t)]\rho_k^i\right\}\right]\rho_k^j$$

$$\Gamma_l(0) = \overbrace{U_o\otimes\ldots\otimes U_o}^{l\ \text{razy}}\ ,\quad l=1,2,3,\ldots \tag{3.60}$$

Ponadto: jeśli szereg /3.47/ jest rozwiązaniem równania /3.17/, to jego współczynniki są słabymi rozwiązaniami równań dla momentów /3.59/. Nie musi on być wówczas rozwiązaniem równania /3.44/.

b/ Do stwierdzenia faktu, że szereg /3.47/ jest rozwiązaniem równania /3.44/ należy jeszcze pokazać, że:

- każde z równań /3.59/ ma jednoznaczne rozwiązanie,
- szereg /3.47/ jest bezwzględnie zbieżny.

Funkcjonał $\tilde{F}[t,\lambda]$ można oszacować z góry:

$$\left|\tilde{F}[t,\lambda]\right| \leqslant 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \left\|\Gamma_l(t)\right\|_{\overset{l}{\otimes}X} \cdot \|\lambda\|_X^l \qquad /3.61/$$

Zatem badanie zbieżności szeregu /3.47/ sprowadza się do znalezienia oszacowania momentów $\Gamma_l(t)$, takich, że szereg z prawej strony /3.61/ jest zbieżny, czyli ograniczeń typu:

$$\left\|\Gamma_l(t)\right\|_{\overset{l}{\otimes}X} \leqslant \left[M(t)\right]^l \left\|U_o\right\|_X^l \qquad /3.62/$$

dla pewnego $M(t)$ i każdego $l = 1,2, \ldots$.

Gdy /3.62/ jest spełnione, to

$$\left|\tilde{F}[t,\lambda]\right| \leqslant e^{\|\lambda\|\cdot M(t)\cdot \|U_o\|_X} \qquad /3.63/$$

czyli szereg /3.47/ jest bezwzględnie zbieżny.

Zapiszemy równanie /3.59/ dla ustalonego l w postaci operatorowej:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_l(t) = \mathcal{R}_l\, \Gamma_l(t) \qquad /3.64/$$

$$\Gamma_l(0) = U_o \otimes \ldots \otimes U_o$$

gdzie oznaczyliśmy:

$$R_l = A_l + B_l \qquad /3.65/$$

$$A_l = \sum_{j=1}^{l} A_j \qquad /3.66/$$

$$B_l\,\Gamma_l(t) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{l}\ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left[B_j\left[B_i\,\Gamma_l(t)\right]\rho_k^i\right]\rho_k^j \qquad /3.67/$$

R_l, A_l, B_l są operatorami $\overset{l}{\otimes} X \longrightarrow \overset{l}{\otimes} X$.

Ponadto operatory A_j można traktować jako generatory półgrup

$$K_j(t) = Id_X \otimes \ldots \otimes \underset{\substack{j\text{-te}\\ \text{miejsce}}}{K(t)} \otimes \ldots \otimes Id_X : \overset{l}{\otimes} X \longrightarrow \overset{l}{\otimes} X \ , \qquad j = 1,2, \ldots ,l . \qquad /3.68/$$

Tak rozumiane operatory $K_j(t)$, $j = 1, .. l$ - komutują.
Zatem, zgodnie z twierdzeniem I rozdz. II punkt 6, operator $A_l = \sum_{j=1}^{l} A_j$ generuje silnie ciągłą półgrupę operatorów ograniczonych $\tilde{K}_l(t)$:

$$\tilde{K}_l(t) = \underbrace{K(t) \otimes .. \otimes K(t)}_{l \text{ razy}} , \qquad /3.69/$$

przy czym, zgodnie z /2.92/

$$\left\| \tilde{K}_l(t) \right\| \leqslant M_\omega^l \, e^{l\omega t} . \qquad /3.70/$$

Z kolei $[B_i \cdot]\,\rho^i$ można traktować jako operatory:

$$[B_i \cdot]\rho^i = Id_X \otimes \ldots \otimes \underbrace{[B\cdot]\rho}_{\substack{i\text{-te}\\ \text{miejsce}}} \otimes \ldots \otimes Id_X : \overset{l}{\otimes} X \longrightarrow \overset{l}{\otimes} X \qquad /3.71/$$

Z ograniczoności operatora $[B\cdot]\cdot$ względem obu zmiennych oraz warunku /2.13/-/2.14/ wynika, że operator B_l jest też ograniczony i

$$\|B_l\| \leqslant l^2 C \qquad /3.72/$$

gdzie C jest pewną stałą.

Możemy teraz skorzystać z twierdzenia II rozdz. II pkt. 6 i uwzględniając /3.70/ i /3.72/ stwierdzić, że operator R_l generuje silnie ciągłą półgrupę operatorów ograniczonych na $\overset{l}{\otimes} X$, $K_l(t)$, $t \geqslant 0$, spełniających warunek:

$$\|K_l(t)\| \leqslant M_\omega^l \, e^{(l\omega + M_\omega^l l^2 C)t} \qquad /3.73/$$

Zatem prawdziwy jest następujący lemat:

Lemat 7

Jeśli A - generator silnie ciągłej półgrupy operatorów ograniczonych, B - ograniczony, to równania /3.50/ z warunkami /3.60/ mają zawsze jednoznaczne słabe rozwiązania:

$$\Gamma_l(t) = K_l(t)\,\Gamma_l(0) \qquad , \ l = 1,2, \ldots \qquad /3.74/$$

Jeśli dodatkowo $U_0 \in D(A)$, to rozwiązania te są również silnymi rozwiązaniami /3.59/.

Ponadto spełniają one oszacowanie:

$$\|\Gamma_l(t)\| \leqslant M_\omega^l \, e^{(l\omega + M_\omega^l l^2 C)t} \, \|U_0\|_X^l \qquad /3.75/$$

Wnioskiem z lematów 6 i 7 jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2 /o jednoznaczności/.

Przy założeniach lematu 7 równanie dla funkcjonału /3.44/ /a także /3.17//ma najwyżej jedno rozwiązanie dające się przedstawić w postaci szeregu /3.47/.

c/ Problem zbieżności szeregu /3.47/ pozostaje nadal otwarty. Oszacowanie /3.75/ nie spełnia warunku zbieżności /3.62/, zatem zagadnienie istnienia rozwiązania analitycznego /tj. danego szeregiem /3.47//równania /3.17/ lub /3.44/ nie zostało wyjaśnione. Z /3.75/ widać, że oszacowanie zbieżne szeregu /3.47/ można uzyskać, gdy:

- A generuje półgrupę kontrakcji, tj. $M_\omega = 1$
- dla operatora B_1 można znaleźć oszacowanie rzędu 1, tj.

$$\| B_1 \| \leqslant 1C \qquad /3.76/$$

Założenia przyjęte przez nas odnośnie operatorów A i B nie wystarczają do uzyskania tego wyniku. Jako przykład rozważmy stochastyczne równanie różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu /rozumiane w sensie Stratonowicza/:

$$d\,u = a\,u\,dt + b\,u\,dw(t) \quad , \qquad /3.77/$$

$$u\,(0) = u_0$$

a, b - stałe

w(t) - proces Wienera o wariancji ρ^2

W tym wypadku równanie /3.44/ dla funkcjonału /funkcji charakterystycznej jednowymiarowego rozkładu procesu u(t)/ma postać:

$$\frac{\partial}{\partial t} F[t,\lambda] = a\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} F[t,\lambda] + \frac{1}{2} b^2 \lambda \rho^2 \frac{\partial}{\partial \lambda} \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} F[t,\lambda] \qquad /3.78/$$

a uzyskane zeń równania dla momentów:

$$\Gamma_0 = 1 \ ,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Gamma_l(t) = al\Gamma_l(t) + \frac{1}{2} b^2 \rho^2 l^2 \Gamma_l(t) \ , \qquad /3.79/$$

$$\Gamma_l(0) = u_0^l \qquad , \ l = 1,2, \ \ldots .$$

Rozwiązania równań /3.79/ mają postać:

$$\Gamma_l(t) = u_0^l \, e^{(al + \frac{1}{2} b^2\rho^2 l^2)t} \qquad /3.80/$$

i widać, że uzyskany z nich szereg:

$$\tilde{F}[t,\lambda] = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i)^l}{l!} u_0^l \lambda^l \, e^{(al + \frac{1}{2} b^2\rho^2 l^2)t} \qquad /3.81/$$

jest rozbieżny, zatem nie może być rozwiązaniem równania /3.78/. Mimo to uzyskane tą drogą momenty $\Gamma_l(t)$ są takie same, jak momenty obliczone z równania Fokkera - Plancka- Kołmogorowa odpowiadającego równaniu /3.77/ /Stratonowicza/.

Jak zatem widać problem istnienia rozwiązania równania dla funkcjonału charakterystycznego /3.44/ musi być badany oddzielnie dla każdego konkretnego równania postaci /3.5/.

d/ Powyższy przykład sugeruje, że choć funkcjonał charakterystyczny rozwiązania r - nia /3.5/ nie jest analityczny względem λ, to jednak podstawienie /3.47/ do /3.44/ prowadzi do poprawnych równań dla momentów.

Takie same równania dla momentów można uzyskać bezpośrednio z równania /3.5/, znajdując związki, które spełniają l-te iloczyny tensorowe.

Związki te mają postać odpowiednio:

jako równanie różniczkowe z białym szumem $\xi(t)$:

$$\frac{d}{dt}\{\underbrace{U(t)\otimes..\otimes U(t)}_{l\ \text{razy}}\} = \sum_{i=1}^{l} U(t)\otimes..\otimes \underbrace{AU(t)}_{\substack{i\text{-te}\\ \text{miejsce}}}\otimes..\otimes U(t) + \qquad /3.82/$$

$$+ \sum_{i=1}^{l} U(t)\otimes..\otimes \underbrace{[BU(t)]\xi(t)}_{i\text{-te miejsce}}\otimes..\otimes U(t) ,$$

jako równanie różniczkowe Stratonowicza - Dalieckiego :

$$d\{U(t)\otimes..\otimes U(t)\} = \left\{\sum_{i=1}^{l} U(t)\otimes..\otimes AU(t)\otimes..\otimes U(t)\right\}dt + \qquad /3.83/$$

$$+ \sum_{i=1}^{l} U(t)\otimes..\otimes [BU(t)]\, dW(t)\otimes..\otimes U(t)$$

jako równanie całkowe /po uwzględnieniu /2.16//:

$$U(t)\otimes...\otimes U(t) - U(0)\otimes...\otimes U(0) =$$

$$= \int_0^t \left\{\sum_{i=1}^{l} U(s)\otimes...\otimes \underbrace{AU(s)}_{i\text{-te}}\otimes...\otimes U(s)\right\}ds + \qquad /3.84/$$

$$+ \sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t \sqrt{\alpha_k}\left\{U(s)\otimes..\otimes \underbrace{[BU(s)]}_{i\text{-te}}\rho_k\otimes..\otimes U(s)\right\}d\beta_k(s)$$

Weźmy wartość oczekiwaną obu stron /3.84/. Otrzymujemy:

$$\Gamma_l(t) - \Gamma_l(0) = \int_0^t \sum_{i=1}^{l} A_i\Gamma_l(s)\, ds + \qquad /3.85/$$

$$+ \sum_{i=1}^{l} E\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t \sqrt{\alpha_k}\left\{U(s)\otimes..\otimes \underbrace{[BU(s)]}_{i\text{-te}}\rho_k\otimes..\otimes U(s)\right\}d\beta_k(s)\right.$$

Przekształcimy ostatni człon /3.85/, stosując do niego wzór /2.89/ /przyjmujemy: $g_k = \{U\otimes...\otimes\underbrace{[BU]}_{i\text{-te}}\rho_k\otimes...\otimes U\}$, $i=1,..,l$/:

$$\sum_{i=1}^{l} E\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t \sqrt{\alpha_k}\left\{U(s)\otimes..\otimes \underset{i\text{-te}}{[BU(s)]}\rho_k\otimes..\otimes U(s)\right\}d\beta_k(s)\right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t \sqrt{\alpha_k}\, E\left\{\frac{\delta}{\delta\beta_k(s)}\left\{U(s)\otimes..\otimes \underset{i\text{-te}}{[BU(s)]}\rho_k\otimes..\otimes U(s)\right\}\right\} ds =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t \sqrt{\alpha_k}\, E\left\{U(s)\otimes..\otimes \underset{\substack{j\text{-te}\\ \text{miejsce}}}{\frac{\delta}{\delta\beta_k(s)}U(s)}\otimes..\otimes \underset{\substack{i\text{-te}\\ \text{miejsce}}}{[BU(s)]}\rho_k\otimes..\otimes U(s)\right\}\times$$

$$\times\, ds$$

/3.86/

Należy teraz obliczyć pochodną wariacyjną $\frac{\delta}{\delta\beta_k(s)}U(s)$.
Do tego celu możemy wykorzystać Lemat 1, wzór /3.8/:

$$\frac{\delta}{\delta\beta_k(s)}U(s) = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha_k}\,[BU(s)]\rho_k \qquad /3.87/$$

Po podstawieniu /3.87/ do /3.86/ otrzymujemy:

$$\sum_{i=1}^{l} E\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t \sqrt{\alpha_k}\left\{U(s)\otimes..\otimes \underset{i\text{-te}}{[BU(s)]}\rho_k\otimes..\otimes U(s)\right\}d\beta_k(s)\right\} =$$

$$= \sum_{i,j}^{l}\frac{1}{2}\alpha_k\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t \left[B_i\left[B_j\Gamma_l(s)\right]\rho_k^j\right]\rho_k^i\, ds \qquad /3.88/$$

i równanie całkowe /3.85/ przyjmuje postać:

$$\Gamma_1(t) - \Gamma_1(0) = \int_0^t \sum_{i=1}^{1} A_i \Gamma_1(s)\, ds +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \int_0^t \sum_{i,j=1}^{1} \left[B_i \left[B_j \Gamma_1(s)\right] \rho_k^j\right] \rho_k^i \, ds \qquad /3.89/$$

gdzie A_i, B_i są zdefiniowane przez /3.54/ i /3.56/.

Otrzymane z /3.89/ równania różniczkowe mają postać /3.59/ czyli taką, jak uzyskane z funkcjonału charakterystycznego.

Zauważmy jeszcze, że w powyższym wyprowadzeniu nie było istotne, że A jest generatorem silnie ciągłej półgrupy operatorów ograniczonych a B jest ograniczony. Wynik analogiczny do lematu 1 można otrzymać bez tych założeń; istotne są tylko warunki ciągłości odpowiednich funkcji. Jednakże przyjęte przez nas założenia o A i B gwarantują istnienie i jednoznaczność rozwiązań uzyskanych równań dla momentów /por. lemat 7/.

5. Przypadek zespolony

a/ Często zdarza się, że równania opisujące zjawisko fizyczne są zespolone. W takim przypadku nasze równania dla funkcjonału ulegają pewnej modyfikacji; również szukany funkcjonał charakterystyczny musi zostać nieco zmodyfikowany w stosunku do przypadku rzeczywistego.

Rozważmy następujące równanie:

$$dU = AU\, dt + [BU]\, dW(t) \qquad /3.90/$$
$$U(0) = U_0$$

- w sensie Stratonowicza - Dalieckiego.

Występujące w nim operatory A i B są zespolone, warunek początkowy U_0 - również, zatem i rozwiązanie $U(t)$ jest zespolone. O procesie $W(t)$ założymy, że jest rzeczywisty. W wypadku, gdy proces $W(t)$ w równaniu opisującym badane zjawisko fizyczne jest zespolony, zapisujemy go w postaci:

$$W(t) = \operatorname{Re} W(t) + i \operatorname{Im} W(t) \qquad /3.91/$$

i sprowadzamy wyjściowe równanie do postaci /3.90/ z rzeczywistym procesem

$$W_1(t) = \begin{bmatrix} \operatorname{Re} W(t) \\ \operatorname{Im} W(t) \end{bmatrix} \qquad /3.92/$$

odpowiednio modyfikując przestrzeń Y i operator B.

W przypadku zespolonym przestrzenny funkcjonał charakterystyczny procesu $U(t)$ ma postać:

$$F[t,\lambda,\lambda^*] = E\left\{\exp\left\{ i\left[\left(U(t),\lambda\right)_X + \left(\bar{U}(t),\lambda^*\right)_X\right]\right\}\right\} \qquad /3.93/$$

gdzie $\bar{U}(t)$ jest sprzężeniem zespolonym $U(t)$, λ i λ^* są dwoma niezależnymi elementami X.
Zmodyfikowane twierdzenie 1 dla tak zdefiniowanego funkcjonału charakterystycznego /3.93/ ma postać:

Twierdzenie 1'

Przy założeniach analogicznych jak w Twierdzeniu 1 funkcjonał charakterystyczny /3.93/ rozwiązania równania /3.90/ spełnia równanie:

$$\frac{\partial}{\partial t} F[t,\lambda,\lambda^*] = \left(\frac{\delta}{\delta\lambda} F[t,\lambda,\lambda^*], A^*\lambda\right)_X + \left(\frac{\delta}{\delta\lambda^*} F[t,\lambda,\lambda^*], \bar{A}^*\lambda^*\right)_X +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\Big\{\Big(\Big[B\frac{\delta}{\delta\lambda}\Big(\Big[B\frac{\delta}{\delta\lambda}F[t,\lambda,\lambda^*]\Big]\rho_k,\lambda\Big)_X\Big]\rho_k,\lambda\Big)_X +$$

$$+\Big(\Big[B\frac{\delta}{\delta\lambda}\Big(\Big[\bar{B}\frac{\delta}{\delta\lambda^*}F[t,\lambda,\lambda^*]\Big]\rho_k,\lambda^*\Big)_X\Big]\rho_k,\lambda\Big)_X + \qquad /3.94/$$

$$+\Big(\Big[\bar{B}\frac{\delta}{\delta\lambda^*}\Big(\Big[B\frac{\delta}{\delta\lambda}F[t,\lambda,\lambda^*]\Big]\rho_k,\lambda\Big)_X\Big]\rho_k,\lambda^*\Big)_X +$$

$$+\Big(\Big[\bar{B}\frac{\delta}{\delta\lambda^*}\Big(\Big[\bar{B}\frac{\delta}{\delta\lambda^*}F[t,\lambda,\lambda^*]\Big]\rho_k,\lambda^*\Big)_X\Big]\rho_k,\lambda^*\Big)_X\Big\}$$

z warunkiem początkowym:

$$F[0,\lambda,\lambda^*] = \exp\Big\{i(U_0,\lambda)_X + i(\bar{U}_0,\lambda^*)_X\Big\} \qquad /3.95/$$

i warunkiem normującym:

$$F[t,\ 0,\ 0] = 1 \qquad /3.96/$$

gdzie $\bar{A}$, $\bar{B}$ - oznaczają sprzężenia zespolone operatorów A i B, natomiast A^*, $\bar{A}^*$ - oznaczają sprzężenia operatorów A i $\bar{A}$ w X.

Oznaczmy teraz:

$$\lambda_1 = \lambda\ ,\quad \lambda_2 = \lambda^*\ ,\quad U_1 = U\ ,\quad U_2 = \bar{U} \qquad /3.97/$$

$$A^1 = A\ ,\quad A^2 = \bar{A}\ ,\quad B^1 = B\ ,\quad B^2 = \bar{B} \qquad /3.98/$$

oraz

$$\Gamma_{k_1 \ldots k_l}(t) = E\left\{ U_{k_1}(t) \otimes \ldots \otimes U_{k_l}(t) \right\} \qquad /3.99/$$

dla $k_i = 1, 2$, $i = 1, 2, \ldots, l$

Szereg odpowiadający /3.47/ będzie miał w przypadku zespolonym postać:

$$F[t,\lambda,\lambda^*] = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{l} \frac{(i)^l}{p!\,(l-p)!} \Gamma_{k_1 \ldots k_l}(t) \cdot \lambda_{k_1} \otimes \ldots \otimes \lambda_{k_l} \qquad /3.100/$$

gdzie

$$\left.\begin{array}{l} k_i = 1 \quad \text{dla } i = 1, \ldots, p \\ k_i = 2 \quad \text{dla } i = p+1, \ldots, l \end{array}\right. - \text{dla } p = 1, \ldots, l \qquad /3.101/$$

lub $k_i = 2$ dla $i = 1, \ldots, l$ - dla $p = 0$.

Przyjmując szereg /3.100/ jako funkcjonał charakterystyczny utożsamiamy tym samym tensory kowariancji będące średnią iloczynu p elementów U i l - p elementów $\bar{U}$, niezależnie od ich wzajemnego rozmieszczenia /permutacji elementów w iloczynie tensorowym /3.99//.

Otrzymane z /3.94/ po wstawieniu /3.100/ równania dla momentów mają postać:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{k_1 \ldots k_l}(t) = \sum_{i=1}^{l} A_i^{k_i} \Gamma_{k_1 \ldots k_l}(t) + \qquad /3.102/$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{l} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left[B_j^{k_j} \left[B_i^{k_i} \Gamma_{k_1 \ldots k_l}(t) \right] \rho_k^i \right] \rho_k^j \quad , \; l = 1, 2, \ldots$$

z warunkami początkowymi:

$$\Gamma_{k_1 \ldots k_l}(0) = U_{k_1}(0) \otimes \ldots \otimes U_{k_l}(0) \qquad /3.103/$$

przy czym równanie /3.102 - 103/ jest prawdziwe również dla wskaźników k_i nie spełniających warunku /3.101/.

*/ Jako przykład rozważmy "dyfuzyjne" przybliżenie stochastycznego równania Helmholtza /1.2/:

$$2ik_o \frac{\partial U(x)}{\partial x} + \Delta_\perp U(\underline{r}) + k_o^2 \varepsilon(\underline{r}) U(\underline{r}) = 0 \qquad /3.104/$$

$$U(0) = U_o$$

które sprowadzone do ewolucyjnej postaci /3.90/ można zapisać:

$$dU = AU\, dx + [BU]\, d\, W(x) \qquad /3.105/$$

gdzie

zmieniliśmy oznaczenie t na x, natomiast odpowiednie operatory oznaczyliśmy jako:

$$A = \frac{i}{2k_o} \Delta_\perp = \frac{i}{2k_o}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \qquad /3.106/$$

$$B = \frac{ik_o}{2} \qquad /3.107/$$

operacja [ ] występująca w [B] jest mnożeniem przez proces W, natomiast

$$W(x) = \varepsilon(x, y, z) \qquad /3.108/$$

Przestrzenie występujące w naszym schemacie postępowania są równe odpowiednio:

$$X = L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}) \qquad /3.109/$$

$$Y = L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \qquad /3.110/$$

przy czym proces $\varepsilon(x,y,z)$ jest wzgl. y i z na tyle gładki.., by iloczyn $U \cdot \varepsilon$ należał do L^2.

Załóżmy, że

$$E\left\{\varepsilon(x,y,z)\,\varepsilon(x',y',z')\right\} = Q(y-y', z-z')\delta(x-x') \qquad /3.111/$$
$$= Q(r_1-r_1')\delta(x-x')$$

Wówczas α_k, ρ_k są rozwiązaniami równania:

$$\iint Q(r_1-r_1')\,\rho_k(r_1')\,dr_1' = \alpha_k\,\rho_k(r_1) \qquad /3.112/$$

oraz

$$Q(r_1-r_1') = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\,\rho_k(r_1)\,\rho_k(r_1') \qquad /3.113/$$

Poza tym:

$$\bar{A} = -\frac{i}{2k_0}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \qquad /3.114/$$

$$\bar{B} = -\frac{ik_0}{2} \qquad /3.115/$$

Operator A jest generatorem silnie ciągłej półgrupy operatorów ograniczonych w $L^2(R^2, C)$ /dla operatora parabolicznego w $L^2(R^1, C)$ postać tej półgrupy jest podana w /5.119//, operator B jest ograniczony. Równanie /3.105/ ma w tym wypadku również silne rozwiązanie.

Równanie dla funkcjonału charakterystycznego silnego rozwiązania równania /3.104/ ma zatem, zgodnie z /3.94/, postać:

$$\frac{\partial}{\partial x} F[x,\lambda,\lambda^*] = \frac{i}{2k_0}\iint dr_1\Big(\Delta_\perp \frac{\delta}{\delta\lambda(r_1)} F[x,\lambda,\lambda^*]\cdot\lambda(r_1) -$$

$$-\Delta_\perp \frac{\delta}{\delta\lambda^*(r_1)} F[x,\lambda,\lambda^*]\ \lambda^*(r_1)\Big) -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{k_0^2}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\iint dr_1\iint dr_1'\ \rho_k(r_1)\rho_k(r_1')\Big[\lambda(r_1)\frac{\delta}{\delta\lambda(r_1)}\Big(\lambda(r_1')\frac{\delta}{\delta\lambda(r_1')}F\Big)-$$

$$-\lambda(r_1)\frac{\delta}{\delta\lambda(r_1)}\Big(\lambda^*(r_1')\frac{\delta}{\delta\lambda^*(r_1')}F\Big) - \lambda^*(r_1)\frac{\delta}{\delta\lambda^*(r_1)}\Big(\lambda(r_1')\frac{\delta}{\delta\lambda(r_1')}F\Big)+$$

$$+\lambda^*(r_1)\frac{\delta}{\delta\lambda^*(r_1)}\Big(\lambda^*(r_1')\frac{\delta}{\delta\lambda^*(r_1')}F\Big)\Big] \qquad /3.116/$$

Po skorzystaniu z /3.113/ i podstawieniu:

$$Q(r_1 - r_1') = 2A(r_1 - r_1') \qquad /3.117/$$

widzimy, że otrzymane przez nas równanie /3.116/ ma dokładnie postać równania dla funkcjonału charakterystycznego uzyskanego dla rozwiązania /3.104/ w pracy [14] /por. /1.10-11//.

Uwaga

Otrzymanie równań dla momentów rozwiązań równań stochastycznych było przedmiotem prac wielu autorów. Obszerny przegląd literatury na ten temat /dotyczącej momentów różnych procesów fizycznych/ znajduje się w monografii [50]. /por. też [3]/.

Wśród prac matematycznych na ten temat interesująca jest praca [51]. Autorzy znaleźli w niej równania dla średniej i kowariancji rozwiązania równania Ito w przestrzeni Hilberta H:

$$du_t + \left\{A(t,Z_t)u_t + g(t,Z_t)\right\}dt = \left[B(t,Z_t)u_t + h(t,Z_t)\right]d\overline{W}_t \qquad /3.118/$$

gdzie

Z_t - jest procesem Markowa o wartościach w R^d będącym rozwiązaniem równania:

$$dZ_t = b(t,Z_t)\,dt + \sigma(t,Z_t)\,dW_t \qquad /3.119/$$

A,B - są operatorami /mogą być nieograniczone/ w H zależącymi od Z_t,

$\begin{bmatrix} W_t \\ \overline{W}_t \end{bmatrix}$ - jest procesem Wienera o wartościach w $R^d \times K$, gdzie K jest przestrzenią Hilberta

Równanie /3.118/ jest bardziej ogólnej postaci niż rozważane przez nas równanie /3.90/, jednak, jak już wspominaliśmy, w pracy [51] badano jedynie dwa pierwsze momenty jego rozwiązania. Ponadto, rozważane tam przykłady zastosowania otrzymanych wzorów obejmują jedynie równania typu parabolicznego, mające w opisie propagacji fal mniejsze znaczenie niż np. równania hiperboliczne.

6. Przykłady; porównania

W charakterze przykładu ilustrującego otrzymane w tym rozdziale wyniki rozważymy dwa równania różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu opisujące drgania oscylatora harmonicznego:

pierwsze - ze współczynnikami sprężystości

drugie - z tłumieniem

będącymi procesami stochastycznymi.

Przykład 1

Rozważmy równanie różniczkowe postaci:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2h\frac{du}{dt} + \omega_0^2\big(1 + \xi(t)\big)u = 0 \qquad /3.120/$$

$$u(0) = u_0$$

$$\frac{d}{dt}u(0) = v_0$$

gdzie h, ω_0^2 - stałe, $\xi(t)$ gaussowski proces stochastyczny o średniej i kowariancji:

$$E\{\xi(t)\} = 0 \qquad /3.121/$$
$$E\{\xi(t)\xi(s)\} = \sigma^2\delta(t-s)$$

Zapisane w postaci ewolucyjnej /3.1/ ma ono postać:

$$\frac{du}{dt} = v \qquad , \quad u(0) = u_0$$
$$\qquad /3.122/$$
$$\frac{dv}{dt} = -2hv - \omega_0^2u - \omega_0^2u\,\xi(t) \qquad , \quad v(0) = v_0$$

czyli

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & , & 1 \\ -\omega_0^2 & , & -2h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & , & 0 \\ -\omega_0^2 & , & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\xi(t) \qquad /3.123/$$

$$\begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$$

Odpowiednie przestrzenie i operatory mają w tym przypadku postać:

$$X = R^2,\ Y = R,$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & , & 1 \\ -\omega_0^2 & - & 2h \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 0 & , & 0 \\ -\omega_0^2 & , & 0 \end{bmatrix} \qquad /3.124/$$

oraz

$$\alpha_1 = \sigma^2,\ \rho_1 = 1,\ \alpha_k, \rho_k = 0 \text{ dla } k = 2,3,\ldots \qquad /3.125/$$

Równanie Langevina /3.123/ rozumiane jako równanie Stratonowicza ma taką samą postać, jak równoważne mu równanie Ito, ponieważ poprawka w /3.41/ jest równa:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\left[B\left\{[B\bar{U}]\,\rho_k\right\}\right]\rho_k =$$

$$= \frac{1}{2}\sigma^2\begin{bmatrix} 0 & , & 0 \\ -\omega_0^2 & , & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & , & 0 \\ -\omega_0^2 & , & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad /3.126/$$

W wypadku równania /3.123/ przestrzenny funkcjonał charakterystyczny /2.27/ jest funkcją charakterystyczną zmiennych losowych $\{u(t), v(t)\}$.

Równanie /3.17/ ma zatem postać:

$$\frac{\partial}{\partial t} F[t,\lambda_1,\lambda_2] = \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} - \left(\omega_0^2 \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} + 2h \frac{\partial F}{\partial \lambda_2}\right)\lambda_2 + \frac{1}{2}\sigma^2 \omega_0^4 \lambda_2^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_1^2} \qquad /3.127/$$

z warunkami początkowymi:

$$F[0,\lambda_1,\lambda_2] = \exp\left\{iu_0\lambda_1 + iv_0\lambda_2\right\}$$

$$F[t, 0, 0] = 1$$

Oznaczmy:

$$u^1 = u(t)$$
$$u^2 = v(t) \qquad /3.128/$$

i niech $\Gamma^{i_1 \ldots i_l}$ oznacza:

$$\Gamma^{i_1 \ldots i_l}(t) = E\left\{u^{i_1}(t)u^{i_2}(t)\ldots u^{i_l}(t)\right\} \qquad /3.129/$$

$$\text{dla } i_1, \ldots, i_l = 1,2, \; l = 1,2, \ldots.$$

Przy tych oznaczeniach równania dla momentów /3.59/ mają postać:

$$\frac{d}{dt}\Gamma^{i_1\ldots i_l}(t) = \sum_{r_1,\ldots,r_l=1}^{2}\Bigg[\sum_{p=1}^{l}\delta_{i_1r_1}\ldots\delta_{i_{p-1}r_{p-1}}\Big(\delta_{i_p1}\,\delta_{r_p2} -$$

$$-\,\delta_{i_p2}\left(\omega_o^2\,\delta_{r_p1} + 2h\,\delta_{r_p2}\right)\Big)\;\ldots\;\delta_{i_lr_l} + \tag{3.130}$$

$$+\,\frac{1}{2}\,\sigma^2\omega_o^4\sum_{p,q=1}^{l}\delta_{i_1r_1}\ldots\,\delta_{i_p2}\,\delta_{r_p1}\ldots\,\delta_{i_q2}\,\delta_{r_q1}\ldots\delta_{i_lr_l}\Bigg]\,\Gamma^{r_1\ldots r_l}$$

$$i_1,\ldots,i_l=1,2\;;\quad l=1,2,\ldots$$

W szczególnym przypadku dla $l = 1,2$ otrzymujemy z /3.130/:

$$\Gamma^1 = E\{u\}\;,\quad \Gamma^2 = E\{v\} \tag{3.131}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\Gamma^1 = \Gamma^2 \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\Gamma^2 = -\omega_o^2\,\Gamma^1 - 2h\,\Gamma^2 \end{cases} \tag{3.132}$$

czyli równanie dla Γ^1:

$$\frac{d^2}{dt^2}\,\Gamma^1 + 2h\,\dot\Gamma^1 + \omega_o^2\,\Gamma^1 = 0 \tag{3.133}$$

oraz:

$$\Gamma^{11} = E\{u^2\}\;,\quad \Gamma^{12} = E\{uv\}\;,\quad \Gamma^{22} = E\{v^2\} \tag{3.134}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\Gamma^{11} = 2\,\Gamma^{12} \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\Gamma^{12} = \Gamma^{22} - \omega_o^2\,\Gamma^{11} - 2h\,\Gamma^{12} \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\Gamma^{22} = -\,4h\,\Gamma^{22} - 2\omega_o^2\,\Gamma^{12} + \sigma^2\omega_o^4\,\Gamma^{11} \end{cases} \tag{3.135}$$

Analogiczne równania dla momentów pierwszego i drugiego rzędu rozwiązania równania /3.120/ otrzymano w pracy [48] stosując wzór Furutsu - Novikowa. /por. też [52]/.

Przykład 2

Rozważmy równanie różniczkowe postaci:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2h\left(1 + \xi(t)\right)\frac{du}{dt} + \omega_o^2 u = 0 \qquad /3.136/$$

$$u(0) = u_o$$

$$\frac{d}{dt}u(0) = v_o$$

które jako równanie ewolucyjne /3.1/ jest równe:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & , & 1 \\ -\omega_o^2 & , & -2h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & , & 0 \\ 0, & & -2h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\xi(t) \qquad /3.137/$$

gdzie wszystkie występujące wielkości, oprócz operatora B są takie jak w przykładzie 1.

Operator B w równaniu /3.137/ ma postać:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & , & 0 \\ 0 & , & -2h \end{bmatrix} \qquad /3.138/$$

Jeżeli równanie /3.123/ będziemy rozumieli w sensie Stratonowicza:

$$d\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & , & 1 \\ -\omega_o^2 & , & -2h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}dt + \begin{bmatrix} 0 & , & 0 \\ 0 & , & -2h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} dw(t) \qquad /3.139/$$

to równoważne mu równanie Ito różni się o człon:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\left[B\left\{[BU]\,\rho_k\right\}\right]\rho_k =$$

$$= \frac{1}{2}\sigma^2\begin{bmatrix}0, & 0\\ 0, & -2h\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0, & 0\\ 0, & -2h\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix} = 2\,h^2\sigma^2\begin{bmatrix}0\\ v\end{bmatrix} \qquad /3.140/$$

czyli ma postać:

$$d\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0, & 1\\ -\omega_0^2, & 2h^2\sigma^2-2h\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}dt + \begin{bmatrix}0, & 0\\ 0, & -2h\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}dw(t)/\mathrm{Ito}/ \qquad /3.141/$$

Podobnie jak w przykładzie 1 uzyskujemy równanie dla funkcjonału /3.17/:

$$\frac{\partial}{\partial t}F = \lambda_1\frac{\partial F}{\partial\lambda_2} - \left(\omega_0^2\frac{\partial F}{\partial\lambda_1} + 2h\frac{\partial F}{\partial\lambda_2}\right)\lambda_2 + 2h^2\sigma^2\lambda_2\frac{\partial}{\partial\lambda_2}\left(\lambda_2\frac{\partial}{\partial\lambda_2}F\right) \qquad /3.142/$$

i równania dla momentów /3.59/:

$$\frac{d}{dt}\Gamma^{i_1\ldots i_l} = \sum_{r_1\ldots r_l=1}^{2}\Bigg[\sum_{p=1}^{l}\delta_{i_1r_1}\ldots\Big(\delta_{i_p1}\delta_{r_p2} -$$

$$-\,\delta_{i_p2}\left(\omega_0^2\,\delta_{r_p1} + 2h\,\delta_{r_p2}\right)\Big)\ldots\delta_{i_lr_l} +$$

$$+\,\frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{l}\delta_{i_1r_1}\ldots\delta_{i_p2}\,\delta_{r_p2}\ldots\delta_{i_q2}\,\delta_{r_q2}\ldots\delta_{i_lr_l}\cdot 4h^2\sigma^2\Bigg]\Gamma^{r_1\ldots r_l} \qquad /3.143/$$

gdzie $i_1,\ldots,i_l=1,2\ ;\ l=1,2,\ldots$

odpowiednie symbole są zdefiniowane w /3.128-129/.

W szczególności równania dla średniej /3.131/ i kowariancji /3.134/ mają postać:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Gamma^1 = \Gamma^2 \\ \frac{d}{dt}\Gamma^2 = -\omega_o^2\Gamma^1 - 2h\Gamma^2 + 2\sigma^2h^2\Gamma^2 \end{cases} \quad /3.144/$$

czyli dla samego Γ^1:

$$\frac{d^2}{dt^2}\Gamma^1 + 2\left(h - \sigma^2h^2\right)\frac{d}{dt}\Gamma^1 + \omega_o^2\Gamma^1 = 0 \quad /3.145/$$

oraz:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Gamma^{11} = 2\Gamma^{12} \\ \frac{d}{dt}\Gamma^{12} = \Gamma^{22} - \omega_o^2\Gamma^{11} - 2h\Gamma^{12} + 2h^2\sigma^2\Gamma^{12} \\ \frac{d}{dt}\Gamma^{22} = -4h\Gamma^{22} - 2\omega_o^2\Gamma^{12} + 8h^2\sigma^2\Gamma^{22} \end{cases} \quad /3.146/$$

Równanie takie otrzymali autorzy w pracy [52] z równania Fokkera - Plancka - Kołmogorowa.

Powyższe wzory dla funkcji charakterystycznych i momentów można wyprowadzić z równań Fokkera - Plancka - Kołmogorowa /w Przykładzie 2 - uwzględniając fakt, że równanie jest w sensie Stratonowicza/, całkując je z odpowiednimi wagami / por. [53]/. Równania dla momentów pierwszego rzędu,można również znaleźć jako szczególny przypadek równań dla wartości średnich rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych n - tego rzędu ze współczynnikami będącymi białymi szumami podanych w pracy [54] , a otrzymanych przy użyciu formuły Furutsu - Novikowa. Zauważmy, że otrzymane przez nas równania dla średnich potwierdzają znany fakt /por.[54]/, iż wartość średnia rozwiązania równania zwyczajnego n - tego rzędu zależy od współczynnika będącego białym szumem jedynie wówczas, gdy stoi on przy pochodnej rzędu n - 1 / por. wzory /3.136-145//, a nie zależy od takich współczynników przy pochodnych niższych rzędów /por. wzory /3.120 - 133//.

Na zakończenie tego rozdziału porównajmy otrzymane tutaj równanie dla funkcjonału charakterystycznego z równaniami znanymi z literatury, omówionymi w punkcie drugim wstępu.

Równanie /1.10/ rozważaliśmy w punkcie 5b tego rozdziału - por./3.116/, gdzie pokazaliśmy, że może być ono otrzymane jako szczególny przypadek równania /3.94/ dla procesu o wartościach zespolonych.

Równanie dla funkcjonału charakterystycznego rozwiązania równania /1.12/ będzie przedmiotem analizy w punkcie 3 rozdziału czwartego, gdzie również zostanie omówiona różnica wyników: otrzymanego naszą metodą i metodą pracy [16].

Równanie /1.15/ związane z równaniem ewolucyjnym w sensie Itc rozważaliśmy w punkcie 3 tego rozdziału - por./3.32/-/3.36/.

Analogicznie możemy porównać równanie w pracy Chowa zawierające człon /1.16/ z naszym równaniem /3.17/ dla stochastycznego równania ewolucyjnego w sensie Stratonowicza.

Wyrażenie /1.16/ dla równania postaci /3.5/ jest równe:

$$-\frac{1}{2}\left\langle \xi(t,-i\delta)\xi^{*}(t,-i\delta)\lambda F,\lambda \right\rangle_X = \frac{1}{2}\left\langle \left[\tilde{B}\frac{\delta}{\delta\lambda}\right]\left[\tilde{B}\frac{\delta}{\delta\lambda}\right]^{*}\lambda F,\lambda \right\rangle_X \qquad /3.147/$$

gdzie $\tilde{B}$ oznacza operator B zmodyfikowany w sposób taki, jak w /3.37/.

W wyniku szeregu przekształceń /3.147/ otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}\left\langle \left[\tilde{B}\frac{\delta}{\delta\lambda}\right]\left[\tilde{B}\frac{\delta}{\delta\lambda}\right]^{*}\lambda F,\lambda \right\rangle_X = \frac{1}{2}\left\langle \left[\tilde{B}\frac{\delta}{\delta\lambda}\right]^{*}\lambda,\left[\tilde{B}\frac{\delta}{\delta\lambda}\right]^{*}\lambda \right\rangle_Y F =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left\langle\left[\tilde{B}\frac{\delta}{\delta\lambda}\right]^{*}\lambda,\rho_k\right\rangle_Y\left\langle\left[\tilde{B}\frac{\delta}{\delta\lambda}\right]^{*}\lambda,\rho_k\right\rangle_Y F =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left\langle\left[\tilde{B}\frac{\delta}{\delta\lambda}\right]\rho_k,\lambda\right\rangle_X\left\langle\left[\tilde{B}\frac{\delta}{\delta\lambda}\right]\rho_k,\lambda\right\rangle_X F =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left\langle\left[\tilde{B}\frac{\delta}{\delta\lambda}\left\langle\left[\tilde{B}\frac{\delta}{\delta\lambda}F\right]\rho_k,\lambda\right\rangle_X\right]\rho_k,\lambda\right\rangle_X =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\left\langle\left[B\frac{\delta}{\delta\lambda}\left\langle\left[B\frac{\delta}{\delta\lambda}F\right]\rho_k,\lambda\right\rangle_X\right]\rho_k,\lambda\right\rangle_X \qquad /3.148/$$

czyli wzór uzyskany przez nas w punkcie 1 tego rozdziału. Zatem, jak to pokazaliśmy, obie metody prowadzą do równoważnych wyników, jednak wzór /3.148/ ma tę przewagę ,że wszystkie występujące w nim operacje można łatwo wykonać; nie ma w nim, jak w /3.147/ operacji sprzężonych do różniczkowania. Ta prosta forma równania pozwoliła nam otrzymać równania dla momentów i twierdzenie o jednoznaczności jego rozwiązania.

Ostatni z podanych wzorów - /1.18/, jak już pisaliśmy, może być również otrzymany prezentowaną w tym rozdziale metodą, przy czym wynik nie zależy tu od rozumienia sensu różniczki - Ito lub Stratonowicza.

IV. Zastosowanie do analizy losowych pól falowych

1. Jednowymiarowa fala skalarna w ośrodku z losowymi fluktuacjami parametrów

Rozważmy dwa równania falowe ze współczynnikiem będącym procesem stochastycznym, różniące się umiejscowieniem tego współczynnika, odpowiednio przy pierwszej pochodnej i funkcji szukanej:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = a\,\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + \xi(t,x)\,\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \qquad /4.1/$$

oraz

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = a\,\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + \xi(t,x)\,u(t,x) \qquad /4.2/$$

$$t \in [0,T], \quad x \in [0\,,\,1]\,, \quad a > 0$$

z jednakowymi warunkami początkowymi:

$$u\,(0,x) = u_0(x) \qquad /4.3/$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\,u(0,x) = v_0(x)$$

i warunkami brzegowymi:

$$u(t,0) = u(t,1) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\,u(t,0) = \frac{\partial}{\partial t}\,u(t,1) = 0 \qquad /4.4/$$

Równania takie opisują drgania zamocowanej struny pod wpływem losowych zmian ośrodka, w którym się ona znajduje

/por. [55]/:

- równanie /4.1/ uwzględnia losowe zmiany sprężystych własności materiału, z którego zrobiona jest struna;
- równanie /4.2/ uwzględnia losowe zmiany sprężystych właściwości ośrodka, w którym znajduje się struna /np. podłoża/.

Oznaczmy:

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} \qquad /4.5/$$

$$U = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad U_o = \begin{bmatrix} u_o \\ v_o \end{bmatrix} \qquad /4.6/$$

Można teraz równania /4.1/ i /4.2/ zapisać w postaci:

$$\frac{d}{d\,t} U = AU + [BU]\xi \qquad /4.7/$$

gdzie w obu przypadkach:

$$A = \begin{bmatrix} 0, & 1 \\ a\frac{\partial^2}{\partial x^2}, & 0 \end{bmatrix} \qquad /4,8/$$

natomiast B jest różne dla każdego równania:

dla /4.1/

$$B = B_1 = \begin{bmatrix} 0, & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}, & 0 \end{bmatrix} \qquad /4.9/$$

dla /4.2/

$$B = B_2 = \begin{bmatrix} 0, & 0 \\ 1, & 0 \end{bmatrix} \qquad /4.10/$$

W obu przypadkach $[\cdot\cdot]\xi$ oznacza mnożenie przez proces $\xi(t)$, Operatory A, B_1, B_2 traktujemy jako odwzorowania

$$A,\ B_1,\ B_2\ :\ L^2(0,1)\times L^2(0,1) \longrightarrow L^2(0,1)\times L^2(0,1) \qquad /4.11/$$

natomiast $\xi(t,x)$ jako proces o wartościach w $L^2(0,1)$, dostatecznie gładki względem drugiej zmiennej.

Operator A zdefiniowany w /4.8/ traktowany jako odwzorowanie:

$$A\ :\ D(A)= H^2(0,1)\times H^1(0,1) \to X=H^1_0(0,1)\times L^2(0,1) \qquad /4.12/$$

jest generatorem silnie ciągłej półgrupy operatorów ograniczonych:/por. [37]/

$$K(t)\ :\ X \to X \qquad /4.13/$$

Iloczyn skalarny w $X = H^1_0(0,1)\times L^2(0,1)$ można przedstawić w równoważny sposób jako:

$$(U_1,\ U_2)_X = a\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}u_1(x)\frac{\partial}{\partial x}u_2(x)\,dx + \int_0^1 v_1(x)\,v_2(x)\,dx \qquad /4.14/$$

dla $U_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}$, $U_2 = \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \in X$.

Oba operatory: B_1 i B_2, traktowane jako odwzorowania liniowe $X \to X$ są ograniczone:

$$\|B_1U\|^2_X = \int_0^1\left(\frac{\partial}{\partial x}\,u_1(x)\right)^2 dx \leqslant C\ \|U\|^2_X \qquad /4.15/$$

dla każdego $U\in X$ i pewnego C,

oraz:

$$\|B_2U\|^2_x = \int_0^1 (u(x))^2\,dx \leqslant C_1\ \ \|U\|^2_x \qquad /4.16/$$

z równoważności normy i seminormy w $H^1_0(0,1)$ /por. nierówność Poincaré- Fridrichsa, [56] /.

O procesie $\xi(t,x)$ zakładamy, że jest gaussowski o zerowej średniej i kowariancji:

$$E\left\{\xi(t,x)\,\xi(s,y)\right\} = \delta(t-s)\,R(x,y) \qquad /4.17/$$

Wartości i wektory własne α_k i ρ_k są rozwiązaniami równania:

$$\int_0^1 R(x,y)\,\rho_k(y)\,dy = \alpha_k\,\rho_k(x) \qquad /4.18/$$

spełniającymi warunki:

$$\int_0^1 \rho_k(x)\,\rho_l(x)\,dx = \delta_{kl} \qquad /4.19/$$

oraz

$$R(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\,\rho_k(x)\,\rho_k(y) \qquad /4.20/$$

Możemy teraz, korzystając z wyników rozdziału 3, zapisać równania dla funkcjonałów charakterystycznych /3.17/ słabych rozwiązań równań /4.1/ i /4.2/.

Mają one postać:

dla równania /4.1/:

$$\frac{\partial}{\partial t}F[t,\lambda_1,\lambda_2] = -a\int_0^1\left\{\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\delta}{\delta\lambda_1(x)}\,F\,\frac{\partial}{\partial x}\lambda_2(x) + \frac{\delta}{\delta\lambda_2(x)}\,F\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\lambda_1(x)\right\}dx\, +$$

$$+\,\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 R(x,y)\,\lambda_2(y)\,\lambda_2(x)\,\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\delta^2 F}{\delta\lambda_1(y)\,\delta\lambda_1(x)}\,dx\,dy \qquad /4.21/$$

dla równania /4.2/:

$$\frac{\partial}{\partial t}F[t,\lambda_1,\lambda_2] = -a\int_0^1\left\{\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta}{\delta\lambda_1(x)}F\frac{\partial}{\partial x}\lambda_2(x) + \frac{\delta}{\delta\lambda_2(x)}F\frac{\partial^2}{\partial x^2}\lambda_1(x)\right\}dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 R(x,y)\,\lambda_2(y)\,\lambda_2(x)\,\frac{\delta^2 F}{\delta\lambda_1(x)\,\delta\lambda_1(y)}\,dx\,dy \qquad /4.22/$$

z jednakowymi warunkami początkowymi:

$$F[0,\lambda_1,\lambda_2] = \exp\left\{i\int_0^1\left[a\frac{\partial}{\partial x}\lambda_1(x)\frac{\partial}{\partial x}u_0(x) + \lambda_2(x)\,v_0(x)\right]dx\right\} \qquad /4.23/$$

$$F[t,\,0,0] = 1 \qquad /4.24/$$

$$\text{gdzie} \quad = \begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix} \in D(A) \qquad /4.25/$$

Przy znajdowaniu równań /4.21/ i /4.22/ skorzystaliśmy z zależności /4.20/.

Równania dla momentów rozwiązań równań /4.1/ i /4.2/ mają postać odpowiednio:

dla równania /4.1/:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^{j_1\ldots j_l}(t,x_1,\ldots,x_l) =$$

$$= \sum_{r_1\ldots r_l=1}^{2}\left\{\sum_{p,q=1}^{l}\left(\delta_{j_1r_1}\cdots\delta_{j_p2}\cdots\delta_{j_q2}\cdots\delta_{j_lr_l}\delta_{r_p1}\delta_{r_q1}\right)\times\right.$$

$$\times\left(a\delta_{pq}+\frac{1}{2}(1-\delta_{pq})R(x_p,x_q)\right)\frac{\partial^2}{\partial x_p\partial x_q}\Gamma^{r_1\ldots r_l}(t,x_1,\ldots,x_l) +$$

$$\left.+\sum_{p=1}^{l}\delta_{j_1r_1}\cdots\delta_{j_p1}\cdots\delta_{j_lr_l}\,\delta_{r_p2}\Gamma^{r_1\ldots r_l}(t,x_1,\ldots,x_l)\right\} \qquad /4.26/$$

$j_1,\ \ldots\ ,j_l = 1,2\ ,\ l = 1,2,3\ \ldots\ .$

dla równania /4.2/:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^{j_1\cdots j_l}(t,x_1,\dots,x_l) =$$

$$= \sum_{r_1\cdots r_l=1}^{2}\left\{\sum_{p,q=1}^{l}\left(\delta_{j_1r_1}\cdots\delta_{j_p2}\cdots\delta_{j_q2}\cdots\delta_{j_lr_l}\delta_{r_p1}\delta_{r_q1}\right)\times\right.$$

$$\times\left(a\,\delta_{pq}\frac{\partial^2}{\partial x_p\partial x_q}+\frac{1}{2}\left(1-\delta_{pq}\right)R(x_p,x_q)\right)\Gamma^{r_1\cdots r_l}(t,x_1,\dots,x_l) +$$

$$\left.+\sum_{p=1}^{l}\delta_{j_1r_1}\cdots\delta_{j_p1}\cdots\delta_{j_lr_l}\,\delta_{r_p2}\Gamma^{r_1\cdots r_l}(t,x_1,\dots,x_l)\right\} \qquad /4.27/$$

$j_1, \dots, j_l = 1,2 \quad , \quad l = 1,2,3 \dots$

z jednakowymi warunkami początkowymi:

$$\Gamma^{j_1\cdots j_l}(0,x_1,\dots,x_l) = \tilde{u}_{j_1}(x_1)\cdots\tilde{u}_{j_l}(x_l) \qquad /4.28/$$

$$j_1, \dots, j_l = 1,2$$

gdzie oznaczyliśmy:

$$u^1 = u \quad , \quad u^2 = v \qquad /4.29/$$

$$\Gamma^{j_1\cdots j_l}(t,x_1,\dots,x_l) = E\left\{u^{j_1}(t,x_1)\cdots u^{j_l}(t,x_l)\right\} \qquad /4.30/$$

$$j_1,\dots,j_l = 1,2$$

$$\tilde{u}_1(x) = u_0(x) \quad , \quad \tilde{u}_2(x) = v_0(x) \qquad /4.31/$$

Z faktu ograniczoności operatorów B_1 i B_2 w równaniu /4.7/ odpowiadającemu każdemu z równań /4.1/ i /4.2/ wynika, /por. Lemat 7/, że dla $l = 1,2, \dots$, równania /4.26/ i /4.27/ mają jednoznaczne rozwiązanie. Wnioskujemy stąd również /por. Twierdzenie 2/, że rozwiązania analityczne /tj. mające reprezentację w postaci szeregu /3.47// równań dla funkcjonałów /4.21/ i /4.22/, jeżeli istnieją, to są jednoznaczne.

Wyjaśnienia wymaga jedynie problem istnienia tych rozwiązań, czyli zbieżność szeregów postaci /3.47/.

Rozważmy równanie /4.21/ i odpowiadający mu ciąg równań dla momentów /4.26/. Przyjmijmy, że $a=1$.

Zapiszmy /4.26/ w innej, równoważnej postaci:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^{j_1\ldots j_l} = \sum_{r_1\ldots r_l=1}^{2}\Bigg\{\sum_{p,q=1}^{l}\left(\delta_{j_1r_1}\ldots\delta_{j_p2}\ldots\delta_{j_q2}\ldots\delta_{j_lr_l}\delta_{r_q1}\right)\times \\ \times\left[\delta_{pq}\frac{\partial^2}{\partial x_p\partial x_q}\right]\Gamma^{r_1\ldots r_l} + \sum_{p=1}^{l}\delta_{j_1r_1}\ldots\delta_{j_p1}\ldots\delta_{j_lr_l}\delta_{r_p2}\Gamma^{r_1\ldots r_l}\Bigg\} + \\ + \sum_{r_1\ldots r_l=1}^{2}\sum_{p,q=1}^{l}\left(\delta_{j_1r_1}\ldots\delta_{j_p2}\ldots\delta_{j_q2}\ldots\delta_{j_lr_l}\delta_{r_p1}\delta_{r_q1}\right)\times \\ \times\left[\frac{1}{2}\left(1-\delta_{pq}\right)R(x_p,x_q)\frac{\partial^2}{\partial x_p\partial x_q}\right]\Gamma^{r_1\ldots r_l}\end{aligned} \qquad /4.32/$$

Układ /4.32/ bez ostatniego członu, odpowiada równaniu deterministycznemu i ma rozwiązanie spełniające ograniczenie /3.62/:

$$\left\|\Gamma_l(t)\right\| \leqslant \left(M(t)\right)^l \cdot \left|U_0\right|^l \qquad /4.33/$$

gdzie z [36] wiemy, że $M(t) = e^{\omega t}$ dla pewnego ω.

Z ogólnych metod /por. /3.75// wynika, że rozwiązanie równania /4.26 - 4.32/ ma rozwiązanie spełniające ograniczenie:

$$\left\|\Gamma_l(t)\right\| \leqslant e^{(l\omega + l^2 c)t}\left\|U_0\right\|^l \qquad /4.34/$$

gdzie C jest pewną stałą zależącą od normy operatora B_1 i funkcji kowariancji $R(x,y)$.

Celem naszym będzie pokazanie, że rozwiązanie równania /4.26/ ma również oszacowanie postaci:

$$\|\Gamma_1(t)\| \leqslant e^{klt} \|U_0\|^1 \tag*{/4.35/}$$

gdzie k jest pewną stałą niezależną od l.

Załóżmy, że $R(x, x) < 2$ dla każdego $x \in [0,1]$. Wówczas macierz współczynników w równaniu /4.26/:

$$\left[\delta_{pq} + \tfrac{1}{2}(1-\delta_{pq})R(x_p,x_q)\right] = \left[\tfrac{1}{2}R(x_p,x_q) + \delta_{pq}\left(1-\tfrac{1}{2}R(x_p,x_q)\right)\right] \tag*{/4.36/}$$

jako suma dwóch macierzy dodatnio określonych, jest dodatnio określona; ponadto, gdy

$$R(x,x) < 2 - c, \quad c > 0, \quad x \in [0,1] \tag*{/4.37/,}$$

to odpowiedni operator różniczkowy w /4.26/ jest mocno eliptyczny.

Zatem równanie /4.26/ z operatorem eliptycznym:

$$\left[\delta_{pq} + \tfrac{1}{2}(1 - \delta_{pq})\, R(x_p,x_q)\right] \frac{\partial^2}{\partial x_p \partial x_q} \tag*{/4.38/}$$

ma rozwiązanie spełniające takie samo oszacowanie, jak rozwiązanie równania /4.32/ bez ostatniego członu, z operatorem eliptycznym

$$\delta_{pq} \frac{\partial^2}{\partial x_p \partial x_q} \tag*{/4.39/}$$

//4.38/ można sprowadzić do postaci /4.39/ przez zamianę zmiennych x_p/.

Tym samym pokazaliśmy, że gdy tylko funkcja kowariancji procesu $\xi(t,x)$ spełnia warunek /4.37/, to rozwiązanie równania /4.26/ ma rozwiązanie spełniające warunek:

$$\| \Gamma_l(t) \| \leqslant e^{klt} \| U_o \|^l \quad , \quad l = 1,2, \dots \qquad /4.40/$$

dla pewnego k nie zależącego od l.
Zatem z /3.61/ wynika, że szereg momentów /3.47/ jest zbieżny, czyli równanie dla funkcjonału /4.21/ ma rozwiązanie analityczne postaci /3.47/.

Zbadajmy teraz to samo zagadnienie dla równania /4.2/. Zapiszmy równanie /4.27/ w równoważnej formie: /a=1/

$$\frac{\partial}{\partial t} \Gamma^{j_1 \dots j_l} =$$

$$= \sum_{r_1 \dots r_l = 1}^{2} \Big\{ \sum_{p,q=1}^{l} (\delta_{j_1 r_1} \dots \delta_{j_p 2} \dots \delta_{j_q 2} \dots \delta_{j_l r_l} \delta_{r_p 1} \delta_{r_q 1}) \times$$

$$\times \left[\delta_{pq} \frac{\partial^2}{\partial x_p \partial x_q} \right] \Gamma^{r_1 \dots r_l} +$$

$$+ \sum_{p=1}^{l} \delta_{j_1 r_1} \dots \delta_{j_p 1} \dots \delta_{j_l r_l} \delta_{r_p 2} \Gamma^{r_1 \dots r_l} \Big\} + \qquad /4.41/$$

$$+ \sum_{r_1 \dots r_l = 1}^{2} \sum_{p,q=1}^{l} \delta_{j_1 r_1} \dots \delta_{j_p 2} \dots \delta_{j_q 2} \dots \delta_{j_l r_l} \delta_{r_p 1} \delta_{r_q 1} \cdot \frac{1}{2} (1 - \delta_{pq}) R(x_p, x_q) \Gamma^{r_1 \dots r_l}$$

Równanie /4.41/ bez ostatniego członu jest takie samo jak równanie /4.32/ bez ostatniego członu, zatem ma rozwiązanie spełniające warunek /4.33/. Rozwiązanie pełnego równania /4.41/ nie spełnia warunku /4.33/, bowiem zawiera dodatkowo operator ograniczony, który ma normę rzędu $l^2 - l$ /ostatni wyraz/. Zatem szereg rozwiązań równań /4.27/ dla l = 1,2,3,..., jest rozbieżny i równanie dla funkcjonału charakterystycznego /4.22/ nie ma rozwiązania analitycznego.

Zapiszmy w postaci jawnej równania dla momentów /4.26/ i /4.27/ dla l = 1,2 .

Równania dla wartości średnich rozwiązań równań /4.1/ i /4.2/ są tej samej postaci:

$$\frac{\partial \Gamma^1}{\partial t} = \Gamma^2$$

$$\frac{\partial \Gamma^2}{\partial t} = a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Gamma^1 \qquad /4.42/$$

$$\Gamma^1(0) = u_o \ , \ \Gamma^2(0) = v_o$$

lub jako jedno równanie dla Γ^1 :

$$\frac{\partial^2 \Gamma^1}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Gamma^1$$

$$\Gamma^1(0) = u_o \qquad /4.43/$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Gamma^1(0) = v_o$$

Widzimy, że zarówno dla równania /4.1/, jak i /4.2/ równanie dla średniej ma taką postać, jakby w równaniu wyjściowym nie było losowości. Mamy tu zatem analogię z równaniami różniczkowymi zwyczajnymi, w których równanie dla średniej nie zależy od "szumów" we współczynnikach przy pochodnych rzędu niższego o więcej niż jeden od rzędu równania; w /4.1/ i /4.2/ proces $\xi(t)$ występuje przy "zerowej" pochodnej, równanie jest rzędu drugiego.

/Na przykład:

średnia wartość rozwiązania równania:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \xi(t,x) \frac{\partial u}{\partial t} \qquad /4.44/$$

spełnia równanie:

$$\frac{\partial^2 \Gamma^1}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 \Gamma^1}{\partial x^2} + \frac{1}{2} R(x,x) \frac{\partial \Gamma^1}{\partial t} \qquad /4.45/ \; /$$

Dla l=2 momenty drugiego rzędu rozwiązania równania /4.1/ spełniają układ równań:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} \Gamma^{11} = \Gamma^{21} + \Gamma^{12} \\
&\frac{\partial}{\partial t} \Gamma^{12} = a \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \Gamma^{11} + \Gamma^{22} \\
&\frac{\partial}{\partial t} \Gamma^{21} = a \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \Gamma^{11} + \Gamma^{22} \qquad\qquad /4.46/ \\
&\frac{\partial}{\partial t} \Gamma^{22} = a \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \Gamma^{12} + a \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \Gamma^{21} + R(x_1,x_2) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \Gamma^{11}
\end{aligned}$$

/przy założeniu, że $R(x_1, x_2) = R(x_2, x_1)$ /

z warunkami początkowymi:

$$\begin{aligned}
&\Gamma^{11}(0) = u_o(x_1) u_o(x_2) \quad , \quad \Gamma^{21}(0) = v_o(x_1) u_o(x_2) \\
&\Gamma^{12}(0) = u_o(x_1) v_o(x_2) \quad , \quad \Gamma^{22}(0) = v_o(x_1) v_o(x_2) \qquad /4.47/
\end{aligned}$$

Analogicznie, dla równania /4.2/ formuły dla momentów drugiego rzędu przyjmą postać:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} \Gamma^{11} = \Gamma^{21} + \Gamma^{12} \\
&\frac{\partial}{\partial t} \Gamma^{12} = a \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \Gamma^{11} + \Gamma^{22} \\
&\frac{\partial}{\partial t} \Gamma^{21} = a \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \Gamma^{11} + \Gamma^{22} \qquad\qquad /4.48/ \\
&\frac{\partial}{\partial t} \Gamma^{22} = a \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \Gamma^{12} + a \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \Gamma^{21} + R(x_1,x_2) \Gamma^{11}
\end{aligned}$$

z warunkami początkowymi /4.47/.

Korzystając z równań /4.42/, /4.46/ i /4.48/ zbadamy stabilność rozwiązań równań /4.1/ i /4.2/. Będziemy badali stabilność w sensie ograniczoności normy, tzn. o rozwiązaniu równania powiemy, że jest stabilne, gdy z ograniczoności jego normy w chwili $t = 0$ wyniknie ograniczoność jego normy w chwilach $t > 0$.

Zbadajmy najpierw stabilność rozwiązań /4.1/ i /4.2/ średnią w sensie normy w X, czyli stabilność w sensie normy rozwiązania równania /4.42/.

Norma w X ma postać:

$$\|\Gamma_1\|^2 = \int_0^1 \left\{ a\left(\frac{\partial}{\partial x}\Gamma^1(x)\right)^2 + \left(\Gamma^2(x)\right)^2 \right\} dx \qquad /4.49/$$

dla $\Gamma_1 \in X$.

Niech $\Gamma_1(t) = \begin{bmatrix} \Gamma^1(t) \\ \Gamma^2(t) \end{bmatrix}$ będzie rozwiązaniem równania /4.42/.

Mamy zatem:

$$\frac{d}{dt}\|\Gamma_1(t)\|^2 = \int_0^1 \left\{ 2a\frac{\partial}{\partial x}\Gamma^1(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t}\Gamma^1(t,x) + 2\Gamma^2(t,x)\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^2(t,x) \right\} dx =$$

$$= \int_0^1 \left\{ 2a\frac{\partial}{\partial x}\Gamma^1(t,x)\frac{\partial}{\partial x}\Gamma^2(t,x) + 2a\Gamma^2(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Gamma^1(t,x) \right\} dx = \qquad /4.50/$$

$$= \int_0^1 \left\{ 2a\frac{\partial}{\partial x}\Gamma^1(t,x)\frac{\partial}{\partial x}\Gamma^2(t,x) - 2a\frac{\partial}{\partial x}\Gamma^2(t,x)\frac{\partial}{\partial x}\Gamma^1(t,x) \right\} dx = 0$$

Jak widać z /4.50/ - norma $\Gamma_1(t)$ nie rośnie w czasie /jest stała/ czyli rozwiązania równań /4.1/ i /4.2/ są średnio stabilne w sensie normy.

Zbadajmy stabilność średniokwadratową rozwiązań równań /4.1/ i /4.2/ czyli stabilność w sensie normy w $X \otimes X$ rozwiązań równań /4.46/ i /4.47/.

Norma w X⊗X ma postać:

$$\|\Gamma_2\|^2 = \int_0^1\int_0^1 \Big\{ a^2\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\Gamma^{11}(x_1,x_2)\Big)^2 + a\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Gamma^{12}(x_1,x_2)\Big)^2 +$$

$$+ a\Big(\frac{\partial}{\partial x_2}\Gamma^{21}(x_1,x_2)\Big)^2 + \Big(\Gamma^{22}(x_1,x_2)\Big)^2\Big\}\, dx_1 dx_2 \qquad /4.51/$$

dla $\Gamma_2 \in X{\otimes}X$.

Niech $\Gamma_2(t)$ będzie rozwiązaniem równania /4.46/.

Otrzymujemy:

$$\frac{d}{dt}\|\Gamma_2(t)\|^2 = \int_0^1\int_0^1 \Big\{ 2a^2 \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\Gamma^{11}(t,x_1,x_2)\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^{11}(t,x_1,x_2) +$$

$$+ 2a\frac{\partial}{\partial x_1}\Gamma^{12}(t,x_1,x_2)\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^{12}(t,x_1,x_2) + 2a\frac{\partial}{\partial x_2}\Gamma^{21}(t,x_1,x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial t}\cdot$$

$$\cdot\Gamma^{21}(t,x_1,x_2) + 2\Gamma^{22}(t,x_1,x_2)\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^{22}(t,x_1,x_2)\Big\}\, dx_1 dx_2 =$$

$$= \int_0^1\int_0^1 \Big\{ 2a^2 \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\Gamma^{11}(t,x_1,x_2)\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\Big(\Gamma^{21}(t,x_1,x_2) + \Gamma^{12}(t,x_1,x_2)\Big) +$$

$$+ 2a\frac{\partial}{\partial x_1}\Gamma^{12}(t,x_1,x_2)\frac{\partial}{\partial x_1}\Big(a\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\Gamma^{11}(t,x_1,x_2) + \Gamma^{22}(t,x_1,x_2)\Big) +$$

$$+ 2a\frac{\partial}{\partial x_2}\Gamma^{21}(t,x_1,x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}\Big(a\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\Gamma^{11}(t,x_1,x_2) + \Gamma^{22}(t,x_1,x_2)\Big) +$$

$$+ 2\Gamma^{22}(t,x_1,x_2)\Big(a\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\Gamma^{12}(t,x_1,x_2) + a\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\Gamma^{21}(t,x_1,x_2) +$$

$$+ R(x_1,x_2)\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\Gamma^{11}(t,x_1,x_2)\Big)\Big\}\, dx_1 dx_2 =$$

$$= 2\int_0^1\int_0^1 R(x_1,x_2)\,\Gamma^{22}(t,x_1,x_2)\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\Gamma^{11}(t,x_1,x_2)\, dx_1 dx_2 \geqslant 0$$

/4.52/

ponieważ wszystkie funkcje występujące pod całką o /4.52/ są dodatnio określone.

Analogicznie, dla rozwiązania równania /4.48/ otrzymujemy:

$$\frac{d}{dt}\|\Gamma_2(t)\|^2 = 2\int_0^1\int_0^1 R(x_1,x_2)\,\Gamma^{22}(t,x_1,x_2)\,\Gamma^{11}(t,x_1,x_2)\,dx_1dx_2 \geqslant 0 \qquad /4.53/$$

Nierówności /4.52/ i /4.53/ pokazują, że rozwiązania równań /4.1/ i /4.2/ są niestabilne średniokwadratowo w sensie normy.

Reasumując:
człony losowe postaci /4.1/ i /4.2/ w równaniu struny nie powodują utraty stabilności średniej, powodują natomiast utratę przez układ stabilności średniokwadratowej w sensie normy.

Równania dla drugich momentów w postaci układów /4.46/ lub /4.48/, można, podobnie jak /4.42/, zapisać jako jedno równanie. Na przykład, z równania /4.46/ możemy otrzymać jedno równanie czwartego rzędu dla $\Gamma^{11}(t, x_1, x_2)$:

$$\frac{\partial^4}{\partial t^4}\Gamma^{11} = 2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\Gamma^{11} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)^2\Gamma^{11} +$$

$$+ R(x_1,x_2)\frac{\partial^3}{\partial x_1\partial x_2\partial t}\Gamma^{11} \qquad /4.54/$$

z warunkami początkowymi:

$$\Gamma^{11}(0, x_1, x_2) = u_0(x_1)\,u_0(x_2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^{11}(0,x_1,x_2) = u_0(x_1)v_0(x_2) + v_0(x_1)u_0(x_2)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Gamma^{11}(0,x_1,x_2) = 2v_0(x_1)v_0(x_2) + u_0(x_1)\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}u_0(x_2) +$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u_o(x_1) u_o(x_2)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial t^3} \Gamma^{11}(0, x_1, x_2) = u_o(x_1) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} v_o(x_2) + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} v_o(x_1) u_o(x_2) +$$

$$+ 3 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u_o(x_1) v_o(x_2) + 3 v_o(x_1) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u_o(x_2) +$$

$$+ 2R(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} u_o(x_1) \frac{\partial}{\partial x_2} u_o(x_2) \qquad /4.55/$$

o ile warunki początkowe są dostatecznie gładkie.

Jak z powyższego widać, otrzymane równanie /4.54/ z warunkami początkowymi /4.55/ jest niewiele prostsze do rozwiązania niż układ wyjściowy /4.46/. Fakt, iż zawiera ono współczynnik $R(x_1, x_2)$ zależny od zmiennych x_1, x_2, sprawia, że można je próbować rozwiązywać jedynie numerycznie. Z kolei niestabilność momentów w czasie powoduje, że należy się spodziewać dużych kłopotów obliczeniowych przy numerycznym całkowaniu /4.54/.

Rozważmy równanie postaci /4.44/ - równanie telegraficzne dla fali w ośrodku z losowym tłumieniem:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b \frac{\partial u}{\partial t} + \xi(t, x) \frac{\partial u}{\partial t} \qquad /4.56/$$

$a, b > 0$, gdzie $\xi(t, x)$ jest procesem takim jak w równaniach /4.1/ i /4.2/.

Równania dla rozwiązania średniego mają w tym wypadku postać:

$$\frac{\partial \Gamma^1}{\partial t} = \Gamma^2$$

$$\frac{\partial \Gamma^2}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \Gamma^1}{\partial x^2} + \frac{1}{2} R(x, x) \Gamma^2 - b \Gamma^2 \qquad /4.57/$$

czyli jako jedno równanie:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Gamma^1 = a\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Gamma^1 + \left(\frac{1}{2}R(x,x) - b\right)\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^1 \qquad /4.58/$$

Równania dla drugich momentów rozwiązania /4.56/ mają postać:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^{11} = \Gamma^{21} + \Gamma^{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^{12} = a\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\Gamma^{11} - b\Gamma^{12} + \Gamma^{22}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^{21} = a\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\Gamma^{11} - b\Gamma^{21} + \Gamma^{22} \qquad /4.59/$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^{22} = a\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\Gamma^{12} + a\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\Gamma^{21} - 2b\Gamma^{22} + $$

$$+ \frac{1}{2}\left(R(x_1,x_1) + R(x_2,x_2) + 2R(x_1,x_2)\right)\Gamma^{22}$$

Zbadajmy stabilność średnią rozwiązania równania /4.57/ w sensie stabilności normy Γ_1 w X /por./4.49//. Wykonując różniczkowanie analogiczne do /4.50/ i podstawiając /4.57/ otrzymujemy:

$$\frac{d}{dt}\left\|\Gamma_1(t)\right\|^2 = \int_0^1 \left(R(x,x) - 2b\right)\left(\Gamma^2\right)^2 dx \qquad /4.60/$$

skąd otrzymujemy, że warunkiem dostatecznym średniej stabilności rozwiązania równania /4.56/ jest:

$$R(x,x) \leqslant 2b \qquad \forall x \qquad /4.61/$$

Zbadajmy teraz stabilność średniokwadratową rozwiązania równania /4.56/ w sensie normy Γ_2 w $X \otimes X$ /por./4.51//. Wykonując różniczkowanie analogiczne do /4.52/ i podstawiając /4.59/ uzyskujemy:

$$\frac{d}{dt}\left\|\Gamma_2(t)\right\|^2 = \int_0^1\int_0^1 \Big\{ -2ab\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Gamma^{12}\right)^2 - 2ab\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\Gamma^{21}\right)^2 -$$

$$- 4b\left(\Gamma^{22}\right)^2 + \Big(R(x_1,x_1) + R(x_2,x_2) + 2R(x_1,x_2)\Big)\left(\Gamma^{22}\right)^2\Big\} dx_1 dx_2 \qquad /4.62/$$

skąd otrzymujemy warunek dostateczny stabilności średniokwadratowej rozwiązania równania /4.56/:

$$R(x_1,x_1) + R(x_2,x_2) + 2R(x_1,x_2) \leqslant 4b \;\; \forall x_1,x_2 \qquad /4.63/$$

W szczególnym przypadku, gdy

$$R(x_1,x_2) = \sigma^2 \exp\left\{\frac{-(x_1-x_2)^2}{2\, l_x^2}\right\} \qquad /4.64/$$

otrzymujemy jako warunek stabilności średniej /4.61/:

$$\sigma^2 \leqslant 2b \qquad /4.65/$$

i jako warunek stabilności średniokwadratowej /4.63/:

$$\sigma^2 \leqslant b \qquad /4.66/$$

2. Jednowymiarowa fala termosprężysta w ośrodku stochastycznym

a/ Opis procesu falowego w ośrodku sprężystym, w miarę uwzględniania kolejnych zjawisk fizycznych zachodzących w rzeczywistym ciele, prowadzi do coraz bardziej skomplikowanych modeli. I tak uwzględnienie tylko zjawisk mechanicznych prowadzi /przy założeniu małych odkształceń/ do teorii nazwanej liniową sprężystością. Uwzględnienie w procesie falowym również zjawisk cieplnych daje liniową termosprężystość; podstawowe rezultaty tej teorii otrzymane są jednak przy założeniu, że własności ośrodka są stałe. Okazuje się, że występujący w równaniach liniowej termosprężystości współczynnik rozszerzalności cieplnej α w sposób istotny zależy od temperatury. Potwierdzają to badania doświadczalne /por. [58], [59] /.

Uwzględnienie tej zależności w sposób jawny, prowadzi do równań nieliniowych i tym samym stwarza duże kłopoty rachunkowe/por. [62] /. Poza tym często zależność α od temperatury jest na tyle skomplikowana, że nie potrafimy jej wyrazić funkcyjnie.

W pracy tej, pozostając w ramach modelu liniowego, a zarazem uwzględniając ową skomplikowaną zmienność współczynnika rozszerzalności cieplnej przyjmujemy, że α jest losową funkcją zmiennej czasowej t i przestrzennej x.

b/ W celu uzyskania równań ruchu dla niejednorodnego /stochastycznie/ ośrodka termosprężystego posłużymy się metodą podobną do metody zastosowanej w pracy [63].

Rozważmy jednowymiarową falę termosprężystą w obszarze ograniczonym $D \subset R$. Przyjmijmy, że funkcja energii swobodnej $\mathcal{X}(t,x,\gamma)$ jest określona jako:

$$\rho\mathcal{X}(t,x,\gamma) = \frac{1}{2}(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - (3\lambda+2\mu)\alpha(t,x,\gamma)\theta\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}\rho c_\varepsilon\frac{\theta^2}{T_0} \qquad /4.67/$$

gdzie oznaczono:

ρ - gęstość ośrodka

λ, μ - stałe Lamego

T_o - temperatura odniesienia

c_ε - ciepło właściwe przy stałym odkształceniu na jednostkę masy

$\theta = \theta(t,x,\gamma)$ - fluktuacja temperatury

$u = u(t,x;\gamma)$ - przemieszczenie ośrodka

Z równania /4.67/ otrzymujemy równania konstytutywne dla naprężenia $\sigma(t,x,\gamma)$:

$$\sigma(t,x,\gamma) = \rho \frac{\partial \mathcal{F}(t,x,\gamma)}{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)} = (\lambda+2\mu)\frac{\partial u}{\partial x} - (3\lambda+2\mu)\alpha(t,x,\gamma)\theta \qquad /4.68/$$

oraz entropii $s(t,x,\gamma)$:

$$\rho s(t,x,\gamma) = -\rho\frac{\partial \mathcal{F}(t,x,\gamma)}{\partial\theta} = \rho c_\varepsilon \frac{\theta}{T_o} + (3\lambda+2\mu)\alpha(t,x,\gamma)\frac{\partial u}{\partial x} \qquad /4.69/$$

Dołączmy do tego prawo Fouriera /bez źródeł ciepła/:

$$q = -\beta\frac{\partial\theta}{\partial x} \qquad /4.70/$$

gdzie

$q = q(t,x,\gamma)$ - strumień ciepła

β - stały współczynnik przewodnictwa cieplnego,

oraz dwa prawa zachowania:

zasadę zachowania pędu

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\sigma \qquad /4.71/$$

i zasadę zachowania energii

$$\rho T_o \frac{\partial s}{\partial t} = - \frac{\partial q}{\partial x} \qquad /4.72/$$

Podstawiając do równania /4.71/ związek /4.68/ a do równania /4.72/ - związki / 4.69/ i /4.70/ otrzymujemy sprzężony układ równań termosprężystości dla ośrodka stochastycznie niejednorodnego:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (3\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial x}\left[\alpha(t,x,\gamma)\theta\right] \qquad /4.73/$$

$$\rho c_\varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - T_o(3\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial t}\left[\alpha(t,x,\gamma)\frac{\partial u}{\partial x}\right] \qquad /4.74/$$

Oznaczmy:

$$\tilde{\alpha}(t,x,\gamma) = \frac{\partial}{\partial x}\alpha(t,x,\gamma) \qquad /4.75/$$

oraz przyjmijmy $\rho = 1$ /tzn. wprowadzamy nowe oznaczenia:

$$\beta = \frac{\beta}{\rho}, \quad \lambda = \frac{\lambda}{\rho}, \quad \mu = \frac{\mu}{\rho} \quad /.$$

Układ równań /4.73-74/ można teraz zapisać w postaci:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (3\lambda+2\mu)\alpha(t,x,\gamma)\frac{\partial}{\partial x}\theta - (3\lambda+2\mu)\tilde{\alpha}(t,x,\gamma)\theta \qquad /4.76/$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta = \frac{\beta}{c_\varepsilon}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta - T_o(3\lambda+2\mu)\alpha(t,x,\gamma)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - T_o(3\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial t}\alpha(t,x,\gamma)\frac{\partial u}{\partial x} \qquad /4.77/$$

Powyższy układ równań nie mieści się w ramach naszego modelu ewolucyjnego; spowodowane jest to istnieniem w równaniu /4.77/ ostatniego członu zawierającego $\frac{\partial}{\partial t}\alpha(t,x,\gamma)$.

Warunkiem dostatecznym, który musi być spełniony, by człon ten można było pominąć, jest:

$$\left|\alpha(t,x,\gamma)\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\right| \gg \left|\frac{\partial}{\partial t}\alpha(t,x,\gamma)\frac{\partial u}{\partial x}\right| \qquad /4.78/$$

Warunek /4.78/ zawiera, niestety, oprócz pola losowego $\alpha(t,x,\gamma)$ - charakteryzującego własności ośrodka, również samo poszukiwane pole fizyczne - rozwiązanie równania $u(t,x)$. Dlatego też w pełni zadowalające ustalenie granic jego stosowalności sprawia poważny problem; odpowiednia interpretacja fizyczna uzasadniająca spełnienie powyższego warunku przez pole średnie będzie podana na końcu tego paragrafu - przy wykorzystaniu wyrażeń dla pola średniego.

W dalszym ciągu przedmiotem naszej analizy będzie układ równań /4.76-77/ z równaniem /4.77/ bez ostatniego członu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (3\lambda+2\mu)\alpha(t,x,\gamma)\frac{\partial}{\partial x}\theta - (3\lambda+2\mu)\tilde{\alpha}(t,x,\gamma)\theta \qquad /4.79/$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta = \frac{\beta}{c_\varepsilon}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta - T_0(3\lambda+2\mu)\alpha(t,x,\gamma)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} \qquad /4.80/$$

Oznacza to, że będziemy poszukiwać takiego rozwiązania układu /4.76-77/, którego fluktuacje w czasie są dużo większe niż fluktuacje w czasie współczynnika rozszerzalności cieplnej.

Załóżmy, że pole losowe $\alpha(t,x,\gamma)$ jest stacjonarne /wzgl.t/ i statystycznie jednorodne /wzgl.x/, i przedstawmy je w postaci:

$$\alpha(t,x,\gamma) = \langle\alpha\rangle + \alpha_1(t,x,\gamma) \qquad /4.81/$$

gdzie $\langle\alpha\rangle$ jest stałe, dodatnie, natomiast $\alpha_1(t,x,\gamma)$ jest gaussowskim polem losowym o zadanej funkcji kowariancji

$$K(t-s,x-y) = E\{\alpha_1(t,x,\gamma)\alpha_1(s,y,\gamma)\} \qquad /4.82/$$

i zerowej średniej.

Proces postaci /4.81/ - jako gaussowski - może przyjmować z dodatnim prawdopodobieństwem również wartości ujemne. Jednak na ogół w takiej sytuacji przyjmuje się, że gdy wariancja fluktuacji $\alpha_1(t,x,\gamma)$ jest dostatecznie mała, można $\alpha(t,x,\gamma)$ uważać za dodatnie /zasada trzech sigma/.

Załóżmy poza tym, że

$$K(t-s,x-y) \approx \delta(t-s)\, R(x-y) \qquad /4.83/$$

Powyższe założenie o braku korelacji czasowej jest uzasadnione /por. [48], [49]/, gdy

$$l_x \gg l_t \qquad /4.84/$$

gdzie l_x i l_t oznaczają, odpowiednio, przestrzenny i czasowy promień korelacji:

$$l_x = \sqrt{\frac{K(0,0)}{\left.\frac{\partial^2}{\partial x^2}K(s,x)\right|_{x=s=0}}} \qquad /4.85/$$

$$l_t = \sqrt{\frac{K(0,0)}{\left.\frac{\partial^2}{\partial s^2}K(s,x)\right|_{x=s=0}}} \qquad /4.86/$$

Uwzględniając /4.81/ możemy układ równań /4.79-80/ zapisać w postaci:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (3\lambda+2\mu)\langle\alpha\rangle\frac{\partial}{\partial x}\theta - (3\lambda+2\mu)\alpha_1(t,x,\gamma)\frac{\partial}{\partial x}\theta -$$

$$- (3\lambda+2\mu)\tilde{\alpha}_1(t,x,\gamma)\,\theta \qquad /4.87/$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta = \frac{\beta}{c_\varepsilon}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta - T_0(3\lambda+2\mu)\langle\alpha\rangle\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} - T_0(3\lambda+2\mu)\alpha_1(t,x,\gamma)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}$$

/4.88/

W celu zapisania układu równań /4.87-88/ w postaci ewolucyjnej oznaczmy:

$$v := \frac{\partial u}{\partial t}$$ /4.89/

Otrzymujemy układ trzech równań:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = (\lambda+2\mu)\frac{\partial^2}{\partial x^2}u - (3\lambda+2\mu)\langle\alpha\rangle\frac{\partial}{\partial x}\theta - (3\lambda+2\mu)\theta\,\tilde{\alpha}_1(t,x,\gamma) -$$

$$- (3\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial x}\theta\;\alpha_1(t,x,\gamma)$$ /4.90/

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta = \frac{\beta}{c_\varepsilon}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta - T_0(3\lambda+2\mu)\langle\alpha\rangle\frac{\partial}{\partial x}v - T_0(3\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial x}v\cdot\alpha_1(t,x,\gamma)$$

lub w postaci abstrakcyjnej /3.1/:

$$\frac{d}{dt}U = AU + [BU]\xi$$ /4.91/

gdzie oznaczyliśmy:

$$U = \begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{bmatrix}, \quad \xi = \begin{bmatrix} \alpha_1(t,x,\gamma) \\ \tilde{\alpha}_1(t,x,\gamma) \end{bmatrix}$$ /4.92/

oraz operatory:

liniowy względem U

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ (\lambda+2\mu)\frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & -(3\lambda+2\mu)\langle\alpha\rangle\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & -T_o(3\lambda+2\mu)\langle\alpha\rangle\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\beta}{c_\varepsilon}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix} \qquad /4.93/$$

dwuliniowy względem U i ξ

$$B = \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(3\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & -T_o(3\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(3\lambda+2\mu) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right] \qquad /4.94/$$

Przez rozwiązanie równania /4.91/ będziemy rozumieli rozwiązanie równania całkowego /Stratonowicza/ postaci/3.6/:

$$U(t) = \int_0^t AU(s)\,ds + \int_0^t [BU(s)]\,dW(s) \qquad /4.95/$$

gdzie $W(t)$ jest procesem Wienera o operatorze kowariancji Q:

$$Q = Q(x-y) = \begin{bmatrix} R(x-y) & \frac{\partial}{\partial y}R(x-y) \\ \frac{\partial}{\partial x}R(x-y) & \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}R(x-y) \end{bmatrix} \qquad /4.96/$$

Oznaczmy:

$$R_{11} = R(0)$$
$$R_{22} = \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}R(x-y)\Big|_{x=y} \qquad /4.97/$$

Korzystając z ogólnej postaci /3.59/ równań dla momentów rozwiązania równania /4.95/, otrzymujemy następujące równania dla średniej:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\langle u\rangle = \left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\,\frac{T_o}{c_\varepsilon}(3\lambda+2\mu)^2 R_{11}\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial t}\right]\langle u\rangle - (3\lambda+2\mu)\langle\alpha\rangle\frac{\partial}{\partial x}\langle\theta\rangle$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\theta\rangle = -\frac{T_o}{c_\varepsilon}(3\lambda+2\mu)\langle\alpha\rangle\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\langle u\rangle + \left[\frac{\beta}{c_\varepsilon}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\,\frac{T_o}{c_\varepsilon}(3\lambda+2\mu)^2\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(R_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - R_{22}\right)\right]\langle\theta\rangle \qquad /4.98/$$

Rozwiązania układu równań /4.98/ będziemy poszukiwać w postaci:

$$\begin{bmatrix}\langle u\rangle\\ \langle\theta\rangle\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}M\\ N\end{bmatrix} e^{ipx-i\omega t} \qquad /4.99/$$

Celem naszym jest znalezienie związku dyspersyjnego w ośrodku, w którym fala średnia opisana jest układem /4.98/.
Podstawiając /4.99/ do /4.98/ i eliminując stałe M i N otrzymujemy związek dyspersyjny w postaci równania dwukwadratowego:

$$ap^4 + bp^2 + c = 0 \qquad /4.100/$$

gdzie oznaczono:

$$a = \underline{\frac{\beta}{c_\varepsilon}(\lambda+2\mu)} + \frac{T_o}{2c_\varepsilon}(3\lambda+2\mu)^2(\lambda+2\mu)R_{11} -$$

$$- i\omega\frac{T_o}{4c_\varepsilon^2}(3\lambda+2\mu)^2 R_{11}\left[(3\lambda+2\mu)^2 T_o R_{11} + 2\beta\right] \qquad /4.101/$$

$$b = \underline{-\left[i\omega\frac{T_o}{c_\varepsilon}(3\lambda+2\mu)^2\langle\alpha\rangle^2 + \frac{\beta}{c_\varepsilon}\omega^2 + i\omega(\lambda+2\mu)\right]} -$$

$$- \frac{T_o}{c_\varepsilon}(3\lambda+2\mu)^2 R_{11}\omega^2 + (\lambda+2\mu)\frac{T_o}{2c_\varepsilon}(3\lambda+2\mu)^2 R_{22} - i\omega\frac{T_o^2}{4c_\varepsilon^2}(3\lambda+2\mu)^4 R_{11}R_{22}$$

$$/4.102/$$

$$c = i\omega^3 - \frac{T_0}{2c_\varepsilon}(3\lambda+2\mu)^2 R_{22}\,\omega^2 \qquad /4.103/$$

Rozwiązania równania /4.100/ mają postać:

$$p^2_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad /4.104/$$

gdzie a i b są dane przez /4.101/ i /4.102/, natomiast Δ jest równa:

$$\Delta = \left[\frac{\beta}{c_\varepsilon}\omega^2 + i\omega\left((\lambda+2\mu) + \frac{T_0}{c_\varepsilon}(3\lambda+2\mu)^2\langle\alpha\rangle^2\right)\right]^2 - 4i\omega^3\frac{\beta}{c_\varepsilon}(\lambda+2\mu) +$$

$$+ \frac{T_0^2}{4c_\varepsilon^2}(3\lambda+2\mu)^4 R_{22}^2\left[(\lambda+2\mu) - \frac{iT_0}{2c_\varepsilon}(3\lambda+2\mu)^2 R_{11}\omega\right]^2 -$$

$$- \frac{iT_0^2}{c_\varepsilon^2}(3\lambda+2\mu)^4\langle\alpha\rangle^2\omega\left[(\lambda+2\mu)R_{22} - 2R_{11}\omega^2\right] -$$

$$- R_{11}R_{22}(3\lambda+2\mu)^4\omega^2\frac{T_0^2}{2c_\varepsilon^2}\left[\frac{T_0}{c_\varepsilon}(3\lambda+2\mu)^2\langle\alpha\rangle^2 + i\omega\frac{\beta}{c_\varepsilon} + (\lambda+2\mu)\right] +$$

$$+ (3\lambda+2\mu)^2 R_{22}(\lambda+2\mu)\frac{T_0}{c_\varepsilon}\left[-i\omega(\lambda+2\mu) + \frac{\beta}{c_\varepsilon}\omega^2\right] \qquad /4.105/$$

Prześledźmy teraz, jaką postać mają pierwiastki /4.104/ dla różnych przypadków fal termosprężystych.

Gdy przyjmiemy, że ośrodek ma współczynnik rozszerzalności cieplnej równy zeru /$\alpha = 0$ /, to układ równań /4.98/ rozpada się na dwa niezależne równania: równanie falowe i równanie przepływu ciepła; ich rozwiązania opisują, odpowiednio, falę czysto sprężystą i falę czysto cieplną /por. [60] /. Odpowiednie prędkości i tłumienia mają postać:

dla fali czysto sprężystej

$$\begin{aligned} v_1^0 &= \frac{\omega}{\mathrm{Re}\, p_1} = \sqrt{\lambda+2\mu} \\ \vartheta_1^0 &= \mathrm{Im}\, p_1 = 0 \end{aligned} \qquad /4.106/$$

dla fali czysto cieplnej

$$\begin{aligned} v_2^0 &= \frac{\omega}{\mathrm{Re}\, p_2} = \sqrt{2\frac{\beta}{c_\varepsilon}\omega} \\ \vartheta_2^0 &= \mathrm{Im}\, p_2 = \sqrt{\frac{c_\varepsilon}{2\beta}\omega} \end{aligned} \qquad /4.107/$$

Widzimy, że fala sprężysta nie podlega dyspersji i nie jest tłumiona, natomiast fala czysto termiczna podlega zarówno dyspersji, jak i tłumieniu.

W ośrodku termosprężystym z deterministycznym sprzężeniem $/\alpha = \langle\alpha\rangle/$ występują również dwie fale: quasi-termiczna i quasi-sprężysta /por. [60], [61] /; obie podlegają zarówno dyspersji, jak i tłumieniu.

Wartość prędkości falowej i tłumienia dla obu tych fal wyrazić można przez pierwiastki związku dyspersyjnego /4.104/ w których jako a, b i Δ przyjmie się podkreślone części wyrażeń /4.101/, /4.102/ i /4.105/ - por. rys.1.
Istotną różnicą w stosunku do poprzedniego przypadku jest tutaj pojawienie się tłumienia dla fali quasi-sprężystej. Przebiega ono, w zależności od ω , przedział: od 0 /dla $\omega=0$/ do

$$\vartheta_1^\infty = \frac{T_0\langle\alpha\rangle^2(3\lambda+2\mu)^2}{2\beta\sqrt{\lambda+2\mu}} \qquad /4.108/$$

/dla $\omega \to \infty$ /. Pozostałe wielkości, dla wartości stałych materiałowych odpowiadających realnym ciałom, niewiele odbiegają od modelu bez sprzężenia /por. rys. 1/.

W przypadku z losową rozszerzalnością cieplną występują również dwie fale: quasi-termiczna i quasi-sprężysta. Obie podlegają tłumieniu i dyspersji. Ich własności dokładniej zilustrujemy na przykładzie.

c/ Przykład liczbowy

Załóżmy, że funkcja korelacyjna $R(x-y)$ /por./4.83// ma postać:

$$R(x-y) = \sigma^2 \exp\left\{\frac{-(x-y)^2}{l_x^2}\right\} \qquad /4.109/$$

czyli

$$R_{11} = \sigma^2$$
$$R_{22} = 2\frac{\sigma^2}{l_x^2} \qquad /4.110/$$

Przykładem ośrodka ciągłego niech będzie miedź, dla której wartości stałych materiałowych podano w tabeli:

T_o	293,15 K
ρ	8960 $\frac{kg}{m^3}$
c_ε	385 $\frac{J}{kg\ deg}$
β	393 $\frac{W}{m\ deg}$
$\langle\alpha\rangle$	$1{,}669\times10^{-5}$ $\frac{1}{deg}$
λ	$8{,}4582\times10^{10}$ $\frac{N}{m^2}$
μ	$4{,}229\times10^{10}$ $\frac{N}{m^2}$

Na wykresach 2-6 przedstawiono, dla różnych σ^2, odpowiednio:

$$a/\ \frac{v_1}{v_1^o}\ ,\quad b/\ \frac{\vartheta_1}{\vartheta_1^\infty}\ ,\quad c/\ \frac{v_2}{v_2^o}\ ,\quad d/\ \frac{\vartheta_2}{\vartheta_2^o} \qquad /4.111/$$

czyli-

wykresy a/ i b/ odnoszą się do średniej fali quasi-sprężystej

wykresy c/ i d/ - do średniej fali quasi-termicznej.

Wielkości /4.111/ przedstawiono w zależności od zmiennej χ :

$$\chi = \frac{\beta}{(\lambda+2\mu)c_\varepsilon}\omega \approx 6{,}04\times10^{-12}\,\omega \qquad /4.112/$$

Stwierdzono, że przedstawiane wielkości bardzo słabo zależą od l_x i wobec tego wszędzie przyjęto $l_x=1$.

Założenie, że współczynnik rozszerzalności cieplnej zależy od czasu powoduje, że energia swobodna w danym punkcie fluktuuje w czasie na skutek pewnych niezależnych od zmiennych stanu u i θ czynników - mamy do czynienia z wymuszeniem parametrycznym /por./4.67//. Powoduje to z kolei silne zmiany własności ośrodka w porównaniu z własnościami ośrodka nie zaburzonego.

Widzimy /por. rys.2-6 a,b/,że średnia fala quasi-sprężysta w ośrodku z losowościami ma prędkość dużo większą, niż fala quasi-sprężysta w ośrodku deterministycznym. Podobnie, jej tłumienie jest większe w ośrodku z losowościami. Można zaobserwować, że dla $\omega \to 0$ zarówno prędkość, jak i tłumienie fali średniej dążą do prędkości i tłumienia fali quasi-sprężystej. Widać też, że wraz ze wzrostem σ^2 rośnie zasięg średniej fali quasi-sprężystej, bowiem rośnie jej prędkość a maleje tłumienie. Prędkość i tłumienie średniej fali quasi-sprężystej silnie zależą od ω .

Inaczej przedstawia się sprawa średniej fali quasi-termicznej. W tym wypadku zarówno prędkość, jak i tłumienie słabo zależą od częstotliwości /za wyjątkiem małych częstości/. Dla pewnych ω wielkości te mają minimum - i pod tym względem są podobne do prędkości i tłumienia fali quasi-termicznej w ośrodku deterministycznym. Od zachowania średniej fali quasi-sprężystej różni ją to, że dla wszystkich σ^2 jej prędkość jest większa a tłumienie mniejsze niż analogiczne wielkości modelu deterministycznego. Podobnie jak dla średniej fali quasi-sprężystej i tu zasięg fali rośnie wraz ze wzrostem σ^2 /por. rys. 2-6 c,d/.

Uzyskane wyniki są odmienne od tych, jakich można by się spodziewać na podstawie analizy fal w ośrodku z przestrzennymi losowymi niejednorodnościami. W takim przypadku owe niejednorodności powodują zmniejszenie się prędkości fali średniej i wzrost tłumienia/por.[3]/. Jednak, jak wykazują również inne prace, fluktuacje własności ośrodka w czasie powodują istotne zmiany fizycznego obrazu zjawiska. Na przykład, w pracy [57] stwierdzono, że fala elektromagnetyczna w ośrodku z losowo fluktuującą w czasie przenikalnością dielektryczną doznaje wzmocnienia a energia całkowitego pola - wzrasta. W naszym przypadku nie ma wprawdzie narastania fali w czasie, jednak jej zachowanie znacznie odbiega od zachowania fali w klasycznym ośrodku niejednorodnym.

d/ Uzasadnienie warunku stosowalności przybliżenia /4.78/

W naszych rozważaniach poczyniliśmy szereg założeń które nakładają pewne warunki ograniczające na parametry ośrodka.

Przyjęliśmy, że α jest gaussowskie, co pociąga za sobą warunek małej wariancji α_1 :

$$\sigma \ll \langle \alpha \rangle \qquad /4.113/$$

Następnie aproksymowaliśmy zadane pole losowe $\alpha_1(t,x,\gamma)$ białym szumem o wartościach w przestrzeni funkcji, co pociągnęło za sobą warunek/4.84/:

$$l_x \gg l_t \qquad /4.114/$$

Ostatnim przybliżeniem które uczyniliśmy było pominięcie jednego członu w równaniach ruchu - pod warunkiem /4.78/ lub innym warunkiem dostatecznym:

$$\left|\alpha_1(t,x,\gamma)\, \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\right| \gg \left|\frac{\partial}{\partial t}\, \alpha_1(t,x,\gamma)\, \frac{\partial u}{\partial x}\right| \qquad /4.115/$$

Nie jesteśmy w stanie wyrazić /4.115/ bez użycia rozwiązania u. Podamy jednak pewien warunek konieczny, który musi być spełniony, by /4.115/ mogło zachodzić.

Rozwiązanie równań /4.90//również- /4.76-77// można przedstawić w postaci:

$$U = \langle U \rangle + U_1 \qquad /4.116/$$

gdzie

$$E\{U_1\} = 0$$

Aby mogło ono spełniać warunek /4.115/, również jego wartość średnia musi spełniać ten warunek - co dla rozwiązania średniego postaci /4.99/ daje:

$$|\alpha_1(t,x,\gamma)\omega| \gg \left|\frac{\partial}{\partial t}\alpha_1(t,x,\gamma)\right| \quad \text{P p.w.} \qquad /4.117/$$

Z /4.117/ otrzymujemy kolejno:

$$\alpha_1^2(t,x,\gamma)\omega^2 \gg \left(\frac{\partial}{\partial t}\alpha_1(t,x,\gamma)\right)^2 \quad \text{P p.w.} \qquad /4.118/$$

$$E\left\{\alpha_1^2(t,x,\gamma)\omega^2\right\} \gg E\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t}\alpha_1(t,x,\gamma)\right)^2\right\}, \qquad /4.119/$$

a po uwzględnieniu /4.82/ -

$$K(0,0)\omega^2 \gg \frac{\partial^2}{\partial s^2}K(s,x)\Big|_{s=x=0} \qquad /4.120/$$

Z /4.120/ po podstawieniu /4.86/ otrzymujemy:

$$\omega \gg \frac{1}{I_t} \qquad /4.121/$$

jako konieczny warunek poprawności przybliżenia równania /4.77/ równaniem /4.80/.

Ostatecznie, warunki /4.113/,/4.114/ i /4.121/ można zapisać jako

$$\omega \gg \frac{1}{I_t} \gg \frac{1}{I_x} \quad \text{i} \quad \sigma \ll \langle\alpha\rangle \qquad /4.122/$$

Uwaga. Podobne warunki pomijania pewnych członów w równaniach były , dla równań opisujących zjawiska w ośrodkach turbulentnych, badane w monografiach [21]-tom 1 i [72] .

3. Dyfuzja w turbulentnej cieczy

Rozważmy równanie typu parabolicznego /1.12/ które było badane przez Chowa w pracy [16] , a które może opisywać pewne zjawiska falowe /por. [19] /:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \xi_i(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u \qquad /4.123/$$

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$$
$$u(0,x) = u_0(x)$$

gdzie $\xi_i(t,x)$ są gaussowskimi procesami stochastycznymi o zerowych średnich i funkcjach kowariancji:

$$E\left\{ \xi_i(t,x) \ \xi_j(s,y) \right\} = \delta(t-s)\rho_{ij}(x,y) \qquad /4.124/$$
$$i,j = 1,2,3$$

Różnica między naszym podejściem a podejściem Chowa polega na zastosowaniu odmiennej definicji całki względem procesów gaussowskich - stąd różne wyniki.

Równanie /4.123/ może również opisywać dyfuzję pewnej domieszki w cieczy płynącej w sposób turbulentny z zadaną prędkością będącą procesem stochastycznym/por.[21],t.1 str.516/

Niech $u(t,x)$ oznacza ułamkową koncentrację pewnej domieszki w cieczy w chwili t , w punkcie x , przy czym w chwili $t=0$ koncentracja ta w punkcie x jest równa $u_0(x)$. Zakładamy, że przepływ cieczy opisany jest przez pole prędkości

$$\xi(t,x) = \left(\xi_1(t,x),\ \xi_2(t,x),\ \xi_3(t,x)\right) \qquad /4.125/$$

zdefiniowanym przez /4.124/ , czyli turbulencja ma charakter ruchu Browna /względem czasu/.

Przy powyższych założeniach równanie /4.123/ opisuje dyfuzję domieszki w cieczy, uwzględniając dwa jej rodzaje:

- dyfuzję molekularną, charakteryzowaną przez współczynnik /tzw. współczynnik dyfuzji molekularnej/
- dyfuzję turbulentną, generowaną przez pole prędkości cieczy $\xi(t,x)$.

Zwróćmy uwagę, że choć w przepływach turbulentnych decydujące znaczenie ma dyfuzja turbulentna, która powoduje największe i najszybsze przemieszczenie domieszki, to jednak nie powoduje ona mieszania faz /tj. cieczy i domieszki/ -w jej wyniku powstają skomplikowane obszary o stałej koncentracji: ciecz-domieszka. Dopiero dyfuzja molekularna powoduje zatarcie się granic i wymieszanie faz.

Zapiszmy równanie /4.123/ w postaci ewolucyjnej:

$$\frac{dU}{dt} = AU + [BU]\xi \qquad /4.126/$$
$$U(0) = u_0$$

gdzie przyjęliśmy:

$$X = L^2(R^3) \, ,$$
$$D(A) = H^2(R^3) \, , \qquad /4.127/$$
$$Y = L^2(R^3, R^3)$$

$$A: D(A) = H^2(R^3) \longrightarrow X$$
$$A = K\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \qquad /4.128/$$

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} , \quad \xi(t) = \begin{bmatrix} \xi_1(t,x) \\ \xi_2(t,x) \\ \xi_3(t,x) \end{bmatrix} \qquad /4.129/$$

przy czym :

- $D(B) = H^1(R^3)$
- operacja $[\ ]_W$ $[B]$ jest mnożeniem skalarnym w R^3,
- operator B jako odwzorowanie $X \to X$ nie jest ograniczony.

Operator A jest generatorem silnie ciągłej półgrupy operatorów ograniczonych w X i jest samosprzężony w X.

Przy powyższych oznaczeniach równanie /3.20/ dla funkcjonału charakterystycznego rozwiązania równania /4.123/ ma postać:

$$\frac{\partial}{\partial t} F[t,\lambda] = \kappa \sum_{i=1}^{3} \int_{R^3} \lambda(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} F[t,\lambda]\, dx + \qquad /4.130/$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \int_{R^k} \lambda(y) \sum_{i=1}^{3} \rho_k^i(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{\delta}{\delta\lambda(y)} \int_{R^3} \lambda(x) \sum_{j=1}^{3} \rho_k^j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\delta F[t,\lambda]}{\delta\lambda(x)}\, dx\,dy$$

gdzie

$\lambda(y) \in X$

$\rho_k = [\rho_k^1, \rho_k^2, \rho_k^3]^T$ i α_k spełniają równania :

$$\sum_{j=1}^{3} \int_{R^3} \rho_{ij}(x,y)\, \rho_k^j(y)\, dy = \alpha_k\, \rho_k^i(x) \qquad /4.131/$$

z warunkiem :

$$\sum_{j=1}^{3} \int_{R^3} \rho_k^j(x)\, \rho_l^j(x)\, dx = \delta_{kl} \qquad /4.132/$$

Funkcja kowariancji ma przedstawienie:

$$\rho_{ij}(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\, \rho_k^i(x)\, \rho_k^j(y) \qquad /4.133/$$

Równania dla momentów /3.59/ mają postać:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_l(t,x_1,\dots,x_l) = K\sum_{p=1}^{l}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial(x_p^i)^2}\Gamma_l(t,x_1,\dots,x_l) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{p,q=1}^{l}\alpha_k\sum_{i=1}^{3}\rho_k^i(x_p)\frac{\partial}{\partial x_p^i}\sum_{j=1}^{3}\rho_k^j(x_q)\frac{\partial}{\partial x_q^j}\Gamma_l(t,x_1,\dots,x_l)$$

/4.134/

gdzie $x = (x^1,x^2,x^3)\in R^3$.
W szczególności równanie dla wartości średniej ma postać:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_1(t,x) = K\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial(x^i)^2}\Gamma_1(t,x) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\sum_{i,j=1}^{3}\rho_k^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}\rho_k^j(x)\frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma_1(t,x)$$

/4.135/

czyli po zróżniczkowaniu $\rho_k^j(x)$ i skorzystaniu z /4.133/ :

$$\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_1(t,x) = K\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial(x^i)^2}\Gamma_1(t,x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\rho_{ij}(x,x)\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}\Gamma_1(t,x) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\tilde{\rho}_{ij}(x,x)\frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma_1(t,x)$$

/4.136/

gdzie oznaczyliśmy:

$$\tilde{\rho}_{ij}(x,x) = \frac{\partial}{\partial y^i}\rho_{ij}(x,y)\Big|_{x=y}$$

/4.137/

Podobnie równania /4.134/ dla momentów dowolnego rzędu można zapisać w postaci:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_l(t,x_1,\dots,x_l) =$$

$$=\sum_{p,q=1}^{l}\sum_{i,j=1}^{3}\left(K\delta_{ij}\,\delta_{pq}+\frac{1}{2}\rho_{ij}(x_p,x_q)\right)\frac{\partial^2}{\partial x_p^i\partial x_q^j}\Gamma_l(t,x_1,\dots,x_l) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{l}\sum_{i,j=1}^{3}\tilde{\rho}_{ij}(x_p,x_q)\frac{\partial}{\partial x_p^i}\Gamma_l(t,x_1,\dots,x_l) \qquad /4.138/$$

gdzie $\tilde{\rho}_{ij}(x,x)$ określone jest w /4.137/

Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania równania dla przestrzennego funkcjonału charakterystycznego /4.130/ można otrzymać na podstawie równań /4.134/ podobnie jak w pracy Chowa [16]. Chow w swoim artykule używał jednakże nieco innej definicji całki stochastycznej, toteż jego równania dla momentów /również równanie dla funkcjonału/ są odmienne : we wzorach /4.138/ w wersji Chowa nie ma członów z pierwszymi pochodnymi. W szczególności równania dla średnich /4.136/ są takie, jakby było:

$$\tilde{\rho}_{ij} = 0 \text{ dla } i,j = 1,2,3 \qquad /4.139/$$

czyli

$$\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_1(t,x) = K\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial(x^i)^2}\Gamma_1(t,x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\rho_{ij}(x,x)\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}\Gamma_1(t,x)$$

/4.140/

Równanie dyfuzji /4.123/ było również przedmiotem badań fizyków, opierających swoje rozważania nie tylko na regułach matematycznych, lecz również na eksperymencie. Otrzymane przez nich równania dla średniej koncentracji $\bar{u}$ są, dla dowolnego pola prędkości $\xi(t,x)$ będącego procesem stochastycznym, postaci /por. [21] /:

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial t} = K\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial(x^i)^2}\bar{u} + \sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^i}A_{ij}(x,t)\frac{\partial}{\partial x^j}\bar{u} \qquad /4.141/$$

czyli:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \kappa \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial (x^i)^2} \bar{u} + \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \bar{u} + \sum_{i,j=1}^{3} B_{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \bar{u}$$

/4.142/

gdzie A_{ij} , B_{ij} są pewnymi funkcjami zmiennych przestrzennych i czasu.

Jak zatem widać, uzyskany drogą przekształceń matematycznych wzór /4.136/ bardziej odpowiada "półempirycznemu" wzorowi /4.142/ niż wzór /4.140/ . Zauważmy jednak, że gdy pole prędkości $\xi(t,x)$ jest jednorodne w przestrzeni, to $\tilde{\rho}_{ij}(x,x)=0$ i wzory /4.136/ i /4.140/ pokrywają się; zatem różnica wyników otrzymanych przez nas i Chowa nie jest zbyt duża.

Zagadnienie dyfuzji w przypadku, gdy pole prędkości ξ jest stałe w czasie, badano również /metodą homogenizacji/ w pracy [64]. Otrzymany tam wynik dla średniej koncentracji ma postać równania /4.142/ z $B_{ij} = 0$. Można zatem wnioskować, że dyfuzja pod wpływem pola prędkości jednorodnego w przestrzeni i będącego szumem w czasie ma taki sam charakter, jak dyfuzja pod wpływem pola prędkości stałego w czasie.

V. Konstruowanie funkcjonałów charakterystycznych losowych procesów fizycznych

1. Sformułowanie

a/ W poprzednich rozdziałach celem naszych rozważań było znalezienie równania spełnianego przez funkcjonał charakterystyczny procesu będącego rozwiązaniem danego równania stochastycznego. Jak zauważyliśmy, otrzymanie z jego pomocą funkcjonału charakterystycznego jest bardzo trudne; w pracy tej udało nam się jedynie znaleźć równania /w szczególnych przypadkach/ dla współczynników szeregu będącego rozwinięciem funkcjonału. W tej sytuacji wydaje się celowe próbować skonstruować funkcjonał charakterystyczny bez znajdowania równania które on spełnia. Podobnie jak w poprzednim przypadku proces, którego funkcjonału charakterystycznego będziemy poszukiwać, jest rozwiązaniem pewnego równania stochastycznego. Metoda postępowania, którą do tego celu zastosujemy jest uogólnieniem wyników pracy [22] na przypadek równań ewolucyjnych w przestrzeni Hilberta. W efekcie jej zastosowania wyrażamy poszukiwany funkcjonał poprzez funkcjonał charakterystyczny warunków początkowych i wymuszenia oraz miarę probabilistyczną generowaną przez losowe współczynniki równania.

Skonstruowanie funkcjonału wymaga ponadto rozwiązania pewnego równania całkowego uzyskanego z wyjściowego równania ewolucyjnego, a opisującego w równoważny sposób /łącznie z funkcjonałem charakterystycznym warunku początkowego i wymuszenia/ badane zjawisko fizyczne.

Wyniki zaprezentowane tutaj są przedmiotem publikacji [65].

b/ Rozważmy stochastyczne równanie ewolucyjne nieco ogólniejszej postaci niż /3.5/:

$$\frac{dU}{dt} = AU + B(\eta, t)\, U + f(t)\,, \quad t \in [0,T]$$
$$U(0) = U_0 \qquad /5.1/$$

gdzie:

A jest generatorem infinitezynalnym silnie ciągłej półgrupy operatorów ograniczonych $K(t)$ i

$K(t): X \longrightarrow X$ dla $t \in [0,T]$ /5.2/

$B(\eta, t)$ jest rodziną operatorów ograniczonych $X \longrightarrow X$ zależącą od $t \in [0,T]$ i pewnego procesu stochastycznego $\eta(\gamma, t)$ o wartościach w przestrzeni Banacha Y, $\gamma \in \Gamma$, gdzie $(\Gamma, \mathfrak{F}_T, P)$ jest przestrzenią probabilistyczną,

$$U_0 = U_0(\gamma) \in X(\Gamma, \mathfrak{F}_T, P) \qquad /5.3/$$

$$f(t) \in L^2\left([0,T], (\Gamma, \mathfrak{F}_T, P), X\right) \qquad /5.4/$$

Przyjmijmy, że wszystkie funkcje należą do rzeczywistych podprzestrzeni odpowiednich przestrzeni. Załóżmy, że η oraz para $(U_0, f(t))$ są statystycznie niezależne.

Niech $\Phi_0[a, b]$ oznacza łączny funkcjonał charakterystyczny /2.26/ pary (U_0, f), tj.:

$$\Phi_0[a,b] = \left\langle \exp\left\{ i(U_0,a)_X + i\int_0^T (b(t),f(t))_X dt \right\} \right\rangle \qquad /5.5/$$

gdzie

$$a \in X \qquad /5.6/$$

$$b \in L_2([0,T], X) \qquad /5.7/$$

natomiast $\langle \cdot \rangle$ w /5.5/ oznacza uśrednienie ze względu na miarę probabilistyczną na $X \times L_2([0,T], X)$ generowaną przez $(U_0, f(t))$.

Naszym celem jest skonstruowanie funkcjonału charakterystycznego /2.26/ $\Phi[\varkappa]$ słabego rozwiązania /por. /2.105// $U(t)$ równania /5.1/, tj.:

$$\Phi[\varkappa] = \left\langle \exp\left\{ i\int_0^T (U(t),\varkappa(t))_X dt \right\} \right\rangle = \int \exp\left\{ i\int_0^T (U(t),\varkappa(t))_X dt \right\} \mu(dU) \qquad /5.8/$$

gdzie $\mu(\cdot)$ jest miarą probabilistyczną na $L_2([0,T], X)$ generowaną przez $U(t)$, $\varkappa(t) \in L_2([0,T], X)$.

Przedstawmy równanie /5.1/ w postaci /2.105/ :

$$U(t) - \int_0^t K(t-s)B(\eta,s)U(s)ds = K(t)U_0 + \int_0^t K(t-s)f(s)ds \qquad /5.9/$$

Niech

$$S(t) \in L^2([0,T], (\Gamma, \mathcal{F}_T, P), X) \qquad /5.10/$$

Wówczas z /5.9/ otrzymujemy:

$$\int_0^T (U(t),S(t))_X dt - \int_0^T \left(\int_0^t K(t-s)B(\eta,s)U(s)ds, S(t) \right)_X dt =$$
$$/5.11/$$
$$= \int_0^T (K(t)U_0, S(t))_X dt + \int_0^T \left(\int_0^t K(t-s)f(s)ds, S(t) \right)_X dt$$

Drugi człon w /5.11/, po przekształceniach, przyjmuje postać:

$$\int_0^T\left(\int_0^t K(t-s)B(\eta,s)U(s)\,ds\,,\;S(t)\right)_X dt =$$
$$= \int_0^T\left(U(t),\;B^*(\eta,t)\int_t^T K^*(s-t)S(s)\,ds\right)_X dt \qquad /5.12/$$

gdzie

$B^*(\eta,t)$ i $K^*(s-t)$ oznaczają operatory sprzężone do $B(\eta,t)$ i $K(s-t)$ w X, odpowiednio.

Trzeci i czwarty człon w /5.11/ mogą być przekształcone do postaci:

$$\int_0^T\left(K(t)U_0,S(t)\right)_X dt = \left(U_0,\;\int_0^T K^*(t)S(t)\,dt\right)_X \qquad /5.13/$$

$$\int_0^T\left(\int_0^t K(t-s)f(s)\,ds,\;S(t)\right)_X dt = \int_0^T\int_t^T\left(K(s-t)f(t),\;S(s)\right)_X ds\,dt =$$
$$= \int_0^T\left(f(t),\;\int_t^T K^*(s-t)S(s)\,ds\right)_X dt \qquad /5.14/$$

Uwzględniając /5.12/ - /5.14/, równanie /5.11/ można zapisać w postaci:

$$\int_0^T\left(U(t)\,,\;S(t) - B^*(\eta,t)\int_t^T K^*(s-t)S(s)\,ds\right)_X dt =$$
$$= \left(U_0,\int_0^T K^*(t)S(t)\,dt\right)_X + \int_0^T\left(f(t),\int_t^T K^*(s-t)S(s)\,ds\right)_X dt \qquad /5.15/$$

Niech $S(t)$ będzie rozwiązaniem równania:

$$S(t) - B^*(\eta,t)\int_t^T K^*(s-t)\,S(s)\,ds = \varkappa(t) \qquad /5.16/$$

Wykorzystując /5.15/ i /5.16/ i biorąc pod uwagę fakt, że miara μ definiująca rozwiązanie $U(t)$ jest generowana /przez równanie /5.1// poprzez miarę ν określającą losowy współczynnik $\eta(t)$ i niezależną miarę odpowiadającą parze (U_0, f), mamy:

$$\Phi[\varkappa] = \left\langle \exp\left\{ i\int_0^T\left(U(t)\,,\varkappa(t)\right)_X dt\right\}\right\rangle_\mu =$$

$$= \left\langle \exp\left\{ i\left(U_0, \int_0^T K^*(t)S(t,\varkappa)dt\right)_X + i\int_0^T\left(f(t), \int_t^T K^*(s-t)S(s,\varkappa)ds\right)_X dt\right\}\right\rangle =$$

$$= \left\langle \Phi_0\left[\int_0^T K^*(t)S(t,\varkappa)dt\ ,\ \int_t^T K^*(s-t)S(s,\varkappa)ds\right]\right\rangle_{\nu} \qquad /5.17/$$

Zatem funkcjonał charakterystyczny słabego rozwiązania równania /5.1/ ma postać:

$$\Phi[\varkappa] = \int \Phi_0\left[\int_0^T K^*(t)S(t,\varkappa)dt, \int_t^T K^*(s-t)S(s,\varkappa)ds\right]\nu(d\eta) \qquad /5.18/$$

gdzie Φ_0 jest danym funkcjonałem charakterystycznym /5.5/ warunku początkowego i wymuszenia $(U_0, f(t))$, natomiast $S(t) = S(t,\varkappa)$ jest rozwiązaniem równania całkowego /5.16/, zależącym od $\varkappa$ i parametru losowego η; całkowanie w /5.18/ przebiega względem miary probabilistycznej ν związanej z procesem $\eta(t)$.

c/ Rozwiązanie równania /5.16/ w ogólnym przypadku nie jest zagadnieniem łatwym. W celu wskazania warunków, przy których rozwiązanie owo istnieje, przepiszmy /5.16/ w postaci:

$$S(t) - \underline{C}(\eta)S(t) = \varkappa(t) \qquad /5.19/$$

gdzie

$$\underline{C}(\eta)S = B^*(\eta, t)\int_t^T K^*(s-t)S(s)ds \qquad /5.20/$$

jest losowym operatorem z $L^2([0,T],(\Gamma,\mathfrak{F}_T, P), X)$ do $L^2([0,T],(\Gamma,\mathfrak{F}_T, P), X)$.

Jeśli norma operatora $\underline{C}(\eta)$ jest mniejsza od 1, to rozwiązanie równania /5.16/ - /5.19/ może być przedstawione w postaci szeregu:

$$S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \underline{C}^k \varkappa(t) \qquad /5.21/$$

gdzie

$$\underline{C}^0 \varkappa = \varkappa, \quad \underline{C}^{k+1}\varkappa = \underline{C}(\underline{C}^k \varkappa), \quad k = 0,1,2,\ldots \qquad /5.22/$$

Znajdziemy teraz oszacowanie normy operatora $\underline{C}(\eta)$.

Niech:

$\|\cdot\|_0$ - oznacza normę operatora w $L\Big(L^2([0,T],(\Gamma,\mathcal{F}_T,P),X),\ L^2([0,T],(\Gamma,\mathcal{F}_T,P),X)\Big)$,

$\|\cdot\|$ - oznacza normę w $L^2([0,T],(\Gamma,\mathcal{F}_T,P),X)$ /Hilberta/

$\|\cdot\|_1$ - oznacza normę w $X(\Gamma,\mathcal{F}_T,P)$ /Hilberta/

Wówczas:

$$\|\underline{C}(\eta)S\|^2 = \Big\|B^*(\eta,t)\int_t^T K^*(s-t)S(s)\,ds\Big\|^2 = \int_0^T\Big\|B^*(\eta,t)\int_t^T K^*(s-t)S(s)\,ds\Big\|_1^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^T \|B^*(\eta,t)\|_0^2 \Big\|\int_t^T K^*(s-t)S(s)\,ds\Big\|_1^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^T \|B^*(\eta,t)\|_0^2 \Big(\int_t^T \|K^*(s-t)S(s)\|_1 ds\Big)^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^T \|B^*(\eta,t)\|_0^2 \Big(\int_t^T \|K^*(s-t)\|_0 \|S(s)\|_1\, ds\Big)^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^T \|B^*(\eta,t)\|_0^2 \Big(\int_t^T \|K^*(s-t)\|_0^2\, ds \int_t^T \|S(s)\|_1^2\, ds\Big) dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^T \|B^*(\eta,t)\|_0^2 \Big(\int_t^T \|K^*(s-t)\|_0^2\, ds\Big) dt \int_0^T \|S(s)\|_1^2\, ds =$$

$$= \int_0^T \|B^*(\eta, t)\|_o^2 \left(\int_t^T \|K^*(s-t)\|_o^2 \, ds\right) dt \; \|S\|^2 \qquad /5.23/$$

Zatem z /5.23/:

$$\|\underline{S}(\eta)\|_o \leqslant \sqrt{\int_0^T \|B^*(\eta, t)\|_o^2 \left(\int_t^T \|K^*(s-t)\|_o^2 \, ds\right) dt} \qquad /5.24/$$

i równanie /5.19/ ma rozwiązanie postaci /5.21/ gdy wyrażenie po prawej stronie nierówności /5.24/ jest mniejsze od jedności.

d/ Załóżmy teraz, że operator A w równaniu /5.1/ jest samosprzężony w X oraz rezolwenta $R(\lambda_o, A) = (\lambda_o Id_X - A)^{-1}$ - jest zwarta. Wówczas A może być przedstawiony w postaci /por. [26]/:

$$AU = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \sum_{k=1}^{r_j} (U, e_{jk})_X \, e_{jk} \qquad /5.25/$$

gdzie $\{\lambda_j , j = 1,2,\ldots\}$ jest nieskończonym ciągiem różnych wartości własnych A, każda o krotności r_j /równej wymiarowi odpowiadającej jejprzestrzeni własnej/ i odpowiadających im ortonormalnych wektorach własnych e_{jk}, $k = 1,\ldots r_j$.
W tym wypadku półgrupa generowana przez A ma postać:

$$K(t)U = \sum_{j=1}^{\infty} e^{\lambda_j t} \sum_{k=1}^{r_j} (U , e_{jk})_X \, e_{jk} \qquad /5.26/$$

oraz $K^*(t) = K(t)$.

Równanie całkowe /5.16/ dla $S(t)$ ma wtedy postać:

$$S(t) - B^*(\eta, t) \sum_{j=1}^{\infty} \int_t^T e^{\lambda_j (s-t)} \sum_{k=1}^{r_j} (S(s), e_{jk})_X \, e_{jk} \, ds = \mathcal{X}(t) \qquad /5.27/$$

a funkcjonał charakterystyczny /5.18/:

$$\Phi[\varkappa] = \Phi_o\Big[\int_0^T \sum_{j=1}^{\infty} e^{\lambda_j t} \sum_{k=1}^{r_j} \big(S(t),\ e_{jk}\big)_X\ e_{jk}\ dt\ , \qquad /5.28/$$

$$\int_t^T \sum_{j=1}^{\infty} e^{\lambda_j (s-t)} \sum_{k=1}^{r_j} \big(S(s),\ e_{jk}\big)_X\ e_{jk}\ ds\Big]\ \nu(d\eta)$$

W szczególnym przypadku, gdy $U_o = 0$ oraz $B(\eta,\ t) = 0$,

/5.28/ przyjmuje postać:

$$\Phi[\varkappa] = \Phi_o\Big[\int_t^T \sum_{j=1}^{\infty} e^{\lambda_j (s-t)} \sum_{k=1}^{r_j} \big(\varkappa(s), e_{jk}\big)_X\ e_{jk}\ ds\Big] \qquad /5.29/$$

gdzie Φ_o jest danym funkcjonałem charakterystycznym wymuszenia losowego $f(t)$.

2. Równanie zwyczajne pierwszego rzędu

Rozważmy najprostsze równanie postaci:

$$\frac{du}{dt} = \big(a + \eta(t)\big)\,u + f(t) \qquad /5.30/$$

$$u(0) = u_o.$$

gdzie

u_o - zmienna losowa

$f(t), \eta(t)$ - procesy stochastyczne

Zastosowanie schematu z poprzedniego punktu daje:

$X = R$

$K(t) = e^{at}$

$S(t)$ - funkcja o wartościach w R, rozwiązanie równania:

$$S(t) - \eta(t) \int_t^{T} e^{a(s-t)} S(s)ds = \varkappa(t) \qquad /5.31/$$

$$\Phi[\varkappa] = \int \Phi_o\Big[\int_0^T e^{at} S(t)dt, \int_t^T e^{a(s-t)} S(s)ds\Big] \nu(d\eta) \qquad /5.32/$$

czyli po rozwiązaniu /5.31/ i wstawieniu do /5.32/:

$$\Phi[\varkappa] = \int \Phi_o\Big[\int_0^T \varkappa(r)\, e^{ar + \int_0^r \eta(s)ds} dr,$$
$$\int_t^T \varkappa(r)\, e^{a(r-t) + \int_t^r \eta(s)ds} dr\Big] \nu(d\eta) \qquad /5.33/$$

gdzie, jak w /5.5/, Φ_o jest funkcjonałem charakterystycznym warunku początkowego i wymuszenia.

Załóżmy teraz, że $f = 0$, natomiast u_o jest zmienną losową gaussowską o funkcji charakterystycznej

$$\Phi_o[\alpha] = \exp\Big\{-\tfrac{1}{2}\sigma^2\alpha^2\Big\} \qquad /5.34/$$

W tym wypadku /5.33/ przyjmuje postać:

$$\Phi[\varkappa] = \int \exp\Big\{-\tfrac{1}{2}\sigma^2\Big(\int_0^T \varkappa(r)\, e^{ar + \int_0^r \eta(s)ds} dr\Big)^2\Big\} \nu(d\eta) \qquad /5.35/$$

Wiadomo, że gdy w /5.30/ $\eta = f = 0$, natomiast u_o jest gaussowskie, to rozwiązanie $u(t)$ jest stale gaussowskie. Interesujące jest, jaki wpływ na gaussowskość $u(t)$ może mieć proces $\eta(t)$. Korzystając z /5.35/ zbadamy, jak pojedyńczy impuls losowy współczynnika a oddziałuje na rozwiązanie. Rozważymy dwa przypadki:

Prz.1. $\eta(t) = b\,\delta(t-t_o(\gamma))$ gdzie b - stała, $t_o(\gamma)$ ma rozkład jednostajny na $[T_1, T_2]$, $0 \leqslant T_1 \leqslant T_2 \leqslant T$

Prz.2. $\eta(t) = b(\gamma)\,\delta(t-t_o(\gamma))$ gdzie $b=\begin{cases} 1 & \text{z pr. } \frac{1}{2} \\ -1 & \text{z pr. } \frac{1}{2} \end{cases}$, $t_o(\gamma)$ jest zmienną losową niezależną od $b(\gamma)$ i o rozkładzie jak wyżej.

W przypadku 1 $\Phi[\varkappa]$ ma postać:

$$\Phi[\varkappa] = \frac{1}{T_2-T_1} \int_{T_1}^{T_2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2\left(\int_0^T \varkappa(s)\, e^{as+bH(s-t_o)}\, ds\right)^2\right\} dt_o \qquad /5.36a/$$

W przypadku 2:

$$\Phi[\varkappa] = \frac{1}{2(T_2-T_1)} \int_{T_1}^{T_2} \left[\exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2\left(\int_0^T \varkappa(s)\, e^{as-H(s-t_o)}\, ds\right)^2\right.\right. + \qquad /5.36b/$$

$$\left.\left. + \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2\left(\int_0^T \varkappa(s)\, e^{as+H(s-t_o)}\, ds\right)^2\right\}\right] dt_o$$

Nie będziemy tu podawali szczegółowych obliczeń - podamy jedynie współczynniki skośności $\varepsilon_1(t)$ i spłaszczenia $\varepsilon_2(t)$ /por. [66]/:

	Przypadek 1	Przypadek 2
$\varepsilon_1(t)=$	0	0
$\varepsilon_2(t)=$	$0\,,\ t\in[0,T_1]$	$0\,,\ t\in[0,T_1]$
	$\dfrac{3(T_2-T_1)\left((t-T_1)e^{4b}+T_2-t\right)}{\left((t-T_1)e^{2b}+T_2-t\right)^2}-3$, $t\in[T_1,T_2]$	$\dfrac{6(T_2-T_1)\left((t-T_1)(e^4+e^{-4})+2T_2-2t\right)}{\left((t-T_1)(e^2+e^{-2})+2T_2-2t\right)^2}-3$, $t\in[T_1,T_2]$
	$0\,,\ t\in[T_2,T]$	$\dfrac{6(e^4+e^{-4})}{(e^2+e^{-2})^2}-3\,,\ t\in[T_2,T]$

Widzimy, że w obu przypadkach rozwiązania $u(t)$ jest gaussowskie w tych chwilach, o których wiemy, że impuls jeszcze nie wystąpił/ $t \in [0,T_1]$/. Dla $t \in [T_1, T_2]$ - przestaje być gaussowskie - nie wiadomo czy impuls już nadszedł. Później/ $t \in [T_2,T]$ / w przypadku 1 - powraca do gaussowskiego (można powiedzieć: uzyskaliśmy pełną informację o impulsie), w przypadku 2 - pozostaje niegaussowskie (nie wiadomo, czy zaistniały impuls był dodatni czy ujemny). Wartości $\varepsilon_2(t)$ dla konkretnych b przedstawiono na wykresie /por. rys. 7 i 8/..

5. Oscylator harmoniczny z losowym wymuszaniem

Oscylator harmoniczny z losowymi parametrami był przedmiotem badań wielu autorów /por. [67]/. Rozważmy i my, następujące równanie zwyczajne:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2h\,\frac{du}{dt} + [\omega_0^2 + \eta(t)]u = f \qquad /5.37/$$

$$u(0) = u_0 \quad , \quad \frac{du}{dt}(0) = v_0$$

W operatorowej notacji /5.1/ równanie /5.37/ przyjmie postać:

$$\frac{dU}{dt} = AU + B(\eta)U + f \qquad /5.38/$$

$$U(0) = U_0$$

gdzie : $X=R^2$,

$$U=\begin{bmatrix} u \\ v=\dot{u} \end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix} 0\ , & 1 \\ -\omega_0^2, & -2h \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 0\ , & 0 \\ -\eta(t), & 0 \end{bmatrix},\ f=\begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix} \qquad /5.39/$$

Silnie ciągła półgrupa operatorów generowana przez A jest równa:

$$K(t) = e^{-ht}\begin{bmatrix} \cos\omega_h t + \frac{h}{\omega_h}\sin\omega_h t & ; \frac{1}{\omega_h}\sin\omega_h t \\ - \frac{\omega_o^2}{\omega_h}\sin\omega_h t & ; - \frac{h}{\omega_h}\sin\omega_h t + \cos\omega_h t \end{bmatrix} \qquad /5.40/$$

gdzie

$$\omega_h^2 = \omega_o^2 - h^2 \qquad /5.41/$$

W tym wypadku:

$$A^{*} = A^{T}$$

$$K^{*}(t) = K^{T}(t) \qquad /5.42/$$

$$B^{*}(\eta) = B^{T}(\eta)$$

Niech proces stochastyczny $S(t)$ i funkcja $\varkappa(t)$ będą postaci:

$$S(t) = \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{bmatrix}, \quad \varkappa(t) = \begin{bmatrix} \varkappa_1(t) \\ \varkappa_2(t) \end{bmatrix} \qquad /5.43/$$

Równanie /5.16/ dla $S(t)$ ma w rozważanym przypadku postać układu:

$$\varphi(t) - \eta(t)\int_t^T \frac{1}{\omega_h} e^{-h(s-t)}\sin\omega_h(s-t)\varphi(s)\,ds -$$

$$-\eta(t)\int_t^T e^{-h(s-t)}\left(\cos\omega_h(s-t) - \frac{h}{\omega_h}\sin\omega_h(s-t)\right)\psi(s)\,ds = \varkappa_1(t) \qquad /5.44/$$

$$\psi(t) = \varkappa_2(t)$$

lub w postaci równoważnej:

$$\varphi(t) - \eta(t)\int_t^T \frac{1}{\omega_h} e^{-h(s-t)} \sin\omega_h(s-t)\varphi(s)\,ds =$$
$$= \eta(t)\int_t^T e^{-h(s-t)}\left(\cos\omega_h(s-t) - \frac{h}{\omega_h}\sin\omega_h(s-t)\right)\varkappa_2(s)\,ds + \varkappa_1(t) \qquad /5.45/$$

Funkcjonał charakterystyczny /5.18/ rozwiązania $U = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ jest równy:

$$\Phi[\varkappa_1,\varkappa_2] = \int \Phi_0\Big[\int_0^T e^{-ht}\left(\cos\omega_h t + \frac{h}{\omega_h}\sin\omega_h t\right)\varphi(t;\eta,\varkappa_1,\varkappa_2)\,dt\,,$$
$$\int_0^T \frac{1}{\omega_h} e^{-ht}\sin\omega_h t\,\varphi(t;\eta,\varkappa_1,\varkappa_2)\,dt + \int_0^T e^{-ht}\left(\cos\omega_h t - \frac{h}{\omega_h}\sin\omega_h t\right)\varkappa_2(t)\,dt$$
$$\int_t^T \frac{1}{\omega_h} e^{-h(s-t)}\sin\omega_h(s-t)\varphi(s;\eta,\varkappa_1,\varkappa_2) + \left(\cos\omega_h(s-t) - \frac{h}{\omega_h}\sin\omega_h(s-t)\right)\varkappa_2(s)\,\times$$
$$\times\, ds\Big]\,\nu(d\eta) \qquad /5.46/$$

gdzie

$\Phi_0[a,\ b,\ z(t)]$ jest łącznym funkcjonałem charakterystycznym u_0, v_0 i $f(t)$; podobnie jak w /5.18/ całkowanie w /5.46/ przebiega względem miary probabilistycznej ν określającej proces $\eta(t)$.

Przeprowadzenie całkowania funkcjonalnego w /5.46/ jest w ogólnym przypadku niemożliwe; mimo to warto rozważyć przykład, w którym jedynie zewnętrzne wymuszenie $f(t)$ jest losowe i niegaussowskie.

Załóżmy, że w równaniu /5.37/ $u_0 = v_0 = 0$, $\eta(t) = 0$ natomiast wymuszenie f jest procesem Poissona /2.35/ o stałej amplitudzie a. Funkcjonał charakterystyczny f ma postać /por. /2.37// :

$$\Phi_0[z(t)] = \exp\left\{\theta\int_0^T\left[\exp\left\{ia\int_0^T \delta(t-t')\,z(t)\,dt\right\} - 1\right]dt'\right\} \qquad /5.47/$$

Funkcjonał charakterystyczny rozwiązania przyjmie formę:

$$\Phi[\varkappa_1] = \Phi_o\left[\int_t^T \frac{1}{\omega_h} e^{-h(s-t)} \sin\omega_h(s-t)\varkappa_1(s)\,ds\right] =$$

$$= \exp\left\{\theta\int_0^T\left[\exp\left\{\frac{ia}{\omega_h}\int_0^T H(t-t')\,e^{-h(t-t')}\sin\omega_h(t-t')\varkappa_1(t)\,dt\right\}-1\right]dt'\right\} \tag{5.48}$$

gdzie $H(t)$ jest funkcją Heviside'a.

Oznaczmy:

$$P\left(t',\varkappa_1\right) = \int_0^T p(t,t')\varkappa_1(t)\,dt \tag{5.49}$$

$$p\left(t,t'\right) = \frac{a}{\omega_h} H(t-t')\,e^{-h(t-t')}\sin\omega_h(t-t') \tag{5.50}$$

W tych oznaczeniach, po rozwinięciu wewnętrznego exp w /5.48/ w szereg, funkcjonał /5.48/ przyjmie postać:

$$\Phi[\varkappa_1] = \exp\left\{\theta\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i^k}{k!}P^k(t',\varkappa_1)\,dt'\right\} \tag{5.51}$$

Biorąc pochodne /5.51/ względem $\varkappa_1$ uzyskujemy momenty:

$$m_1(t) = \frac{1}{i}\left.\frac{\delta\Phi[\varkappa_1]}{\delta\varkappa_1(t)}\right|_{\varkappa_1(t)=0} = \theta\int_0^T p(t,t')\,dt' \tag{5.52}$$

$$m_2(t) = \frac{1}{i^2}\left.\frac{\delta^2\Phi[\varkappa_1]}{\delta\varkappa_1^2(t)}\right|_{\varkappa_1(t)=0} = \left(\theta\int_0^T p(t,t')\,dt'\right)^2 - \theta\int_0^T p^2(t,t')\,dt' \tag{5.53}$$

$$m_3(t) = \frac{1}{i^3}\left.\frac{\delta^3\Phi[\varkappa_1]}{\delta\varkappa_1^3(t)}\right|_{\varkappa_1(t)=0} = \left(\theta\int_0^T p(t,t')\,dt'\right)^3 +$$

$$+ 3\theta^2 \int_0^T p^2(t,t')\,dt' \int_0^T p(t,t')\,dt' + \theta \int_0^T p^3(t,t')\,dt' \qquad /5.54/$$

$$m_4(t) = \frac{1}{i^4} \frac{\delta^4 \Phi[\varkappa_1]}{\delta \varkappa_1^4(t)}\Bigg|_{\varkappa_1(t)=0} = \theta^4 \left(\int_0^T p(t,t')\,dt' \right)^4 + 6\theta^3 \int_0^T p^2(t,t')\,dt' \,\times$$

$$\times \left(\int_0^T p(t,t')\,dt' \right)^2 + 4\theta^2 \int_0^T p^3(t,t')\,dt' \int_0^T p(t,t')\,dt' + 3\theta^2 \left(\int_0^T p(t,t')\,dt' \right)^2 +$$

$$+ \theta \int_0^T p^4(t,t')\,dt' \qquad /5.55/$$

Centralne momenty rozwiązania są równe:

$$\mu_2 = m_2 - m_1^2 = \theta \int_0^T p^2(t,t')\,dt' \qquad /5.56/$$

$$\mu_3 = m_3 - 3\cdot m_1 \cdot m_2 + 2\cdot m_1^3 = \theta \int_0^T p^3(t,t')\,dt' \qquad /5.57/$$

$$\mu_4 = m_4 - 4\cdot m_1 \cdot m_3 + 6\cdot m_1^2 \cdot m_2 - 3\cdot m_1^4 =$$

$$= \theta \int_0^T p^4(t,t')\,dt' + 3\theta^2 \left(\int_0^T p^2(t,t')\,dt' \right)^2 \qquad /5.58/$$

Współczynniki skośności i spłaszczenia - charakteryzujące odległość odpowiedzi od rozkładu gaussowskiego - są postaci:

$$\varepsilon_1(t) = \frac{\mu_3}{\sqrt{\mu_2^3}} = \frac{1}{\sqrt{\theta}} \frac{\int_0^t e^{3ht'} \sin^3\omega_h(t-t')\,dt'}{\sqrt{\left(\int_0^t e^{2ht'} \sin^2\omega_h(t-t')\,dt' \right)^3}} \qquad /5.59/$$

$$\varepsilon_2(t) = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 = \frac{1}{\theta} \frac{\int_0^t e^{4ht'} \sin^4\omega_h(t-t')\,dt'}{\left(\int_0^t e^{2ht'} \sin^2\omega_h(t-t')\,dt' \right)^2} \qquad /5.60/$$

Formuły /5.59/ i /5.60/ uzyskane przez zróżniczkowanie funkcjonału charakterystycznego /5.48/ pokazują, jak odchylenie rozwiązania /5.37/ od rozkładu gaussowskiego /mierzone przez $\varepsilon_1(t)$ i $\varepsilon_2(t)$/ zależy od parametrów systemu h, ω_0

i intensywności Θ poissonowskiego strumienia impulsów. Widzimy też, kiedy zbieżność do rozkładu normalnego jest możliwa. Warto zauważyć, że warunek zbieżności wyprowadzony z /5.59/ i /5.60/, czyli:

$$\Theta \longrightarrow \infty \quad , \qquad h, \omega_0 \text{ - ustalone}$$

może być mylący. Powinien on również zależeć od amplitudy impulsów a, jak to widać z postaci funkcjonału charakterystycznego /5.48/. Z rozwinięcia w szereg drugiego exp w /5.48/, które prowadzi do /5.51/ widać, że gdy

$$a \longrightarrow 0$$

wyrazy proporcjonalne do a^k, $k > 2$ można uważać za małe i funkcjonał /5.51/ jest w przybliżeniu postaci /2.32/ - funkcjonału procesu gaussowskiego. Zatem warunek $a \rightarrow 0$ staje się innym kryterium zbieżności odpowiedzi do gaussowskiej. Żeby uniknąć tego kłopotu, pytanie o zbieżność powinno być zadane w następujący sposób:

Kiedy rozkład rozwiązania równania /5.37/ zbiega do normalnego o skończonej wariancji? Zgodnie z /5.56/ otrzymujemy:

$$\sigma_u^2 = \Theta \int_0^T p^2(t,t')\,dt' = \frac{\Theta a^2}{\omega_h^2} \int_0^t e^{-2h(t-t')} \sin^2 \omega_h (t-t')\,dt' = C < \infty \qquad /5.61/$$

Powyższe wyrażenie razem z uzyskanymi poprzednio warunkami daje odpowiedź na zadane pytanie:

proces stochastyczny będący odpowiedzią oscylatora na impulsy poissonowskie zbiega do gaussowskiego, gdy:

$$\begin{aligned} &\theta \to \infty \\ &a \to 0 \\ &\theta a^2 = c < \infty \end{aligned} \qquad /5.63/$$

Uzyskany wynik pokrywa się z rezultatem pracy [68] /por. też [69]/.

4. Losowy proces falowy

Rozważmy teraz sprężyste drgania skończonej struny opisane poprzez następujący problem brzegowo - początkowy:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \eta(t,x)u + f(t,x) \qquad . /5.64/$$

$$u(t,0) = u(t,1) = 0$$

$$u(0,x) = u_o(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u \Big|_{t=0} = v_o(x)$$

gdzie $\eta(t,x)$ jest danym procesem stochastycznym, natomiast $u_o(x)$, $v_o(x)$ oraz $f(t,x)$ są, odpowiednio, losowymi warunkami początkowymi i losowym wymuszeniem.

Zagadnienie /5.64/ może być zapisane w ewolucyjnej formie /5.1/ /por. też /4.7//, gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} 0, & 1 \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}, & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0, & 0 \\ \eta(t), & 0 \end{bmatrix}, \; f = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t,x) \end{bmatrix}, \; U_o = \begin{bmatrix} u_o(x) \\ v_o(x) \end{bmatrix} \qquad /5.65/$$

oraz $X = H_o^1(0,1) \times L_2(0,1)$ z iloczynem skalarnym /4.14/:

$$(U_1, U_2)_X = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} u_1(x) \frac{\partial}{\partial x} u_2(x)\,dx + \int_0^1 v_1(x) v_2(x)\,dx \qquad /5.66/$$

gdzie

$$U_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}, \; U_2 = \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \in X \qquad /5.66/$$

Półgrupa operatorów $X \longrightarrow X$ generowana przez A ma postać:

$$K(t)\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2\left[\left\{u(t), e_k\right\}\cos k\pi t + \frac{1}{k\pi}\left\{v(t), e_k\right\}\sin k\pi t\right] e_k \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2\left[-k\pi\left\{u(t), e_k\right\}\sin k\pi t + \left\{v(t), e_k\right\}\cos k\pi t\right] e_k \end{bmatrix} \qquad /5.67/$$

gdzie

$U(t) \in X$ dla ustalonego t,

$$e_k = e_k(x) = \sin k\pi x \qquad /5.68/$$

oraz

$$\left\{u(t), e_k\right\} = \int_0^1 u(t, x) e_k(x)\, dx \qquad /5.69/$$

Odpowiednie operatory sprzężone są równe:

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 , & -1 \\ -\frac{\partial^2}{\partial x^2}, & 0 \end{bmatrix} \qquad /5.70/$$

$$B^* U(t) = \begin{bmatrix} -\int\limits_0^x \int\limits_0^y \eta(t,z) v(t,z)\, dz\, dy \\ 0 \end{bmatrix} . \qquad /5.71/$$

Oznaczając:

$$S(t) = \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{bmatrix} , \quad \varkappa(t) = \begin{bmatrix} \varkappa_1(t) \\ \varkappa_2(t) \end{bmatrix} \qquad /5.72/$$

uzyskujemy następującą postać równania całkowego /5.16/ dla $S(t)$:

$$\varphi(t,x) + \int_t^T \sum_{k=1}^{\infty} 2 \int_0^x \int_0^y \eta(t,z)\, e_k(z)\,dz\, dy \Big[k\pi \{\varphi(s), e_k\} \sin k\pi(s-t) + \{\psi(s), e_k\} \cos k\pi(s-t) \Big] ds = \varkappa_1(t,x) \qquad /5.73/$$

$$\psi(t) = \varkappa_2(t)$$

Jeśli przez $\Phi_o[a, b, z(t)]$ oznaczymy łączny funkcjonał charakterystyczny u_o, v_o, $f(t)$, to funkcjonał rozwiązania $[u(t,x), v(t,x)]$ jest równy:

$$\Phi[\varkappa_1, \varkappa_2] = \int \Phi_o \Big[\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} 2 \Big[\{\varphi(t), e_k\} \cos k\pi t - \frac{1}{k\pi} \{\varkappa_2(t), e_k\} \sin k\pi t \Big] e_k\, dt,$$

$$\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} 2 \Big[k\pi \{\varphi(t), e_k\} \sin k\pi t + \{\varkappa_2(t), e_k\} \cos k\pi t \Big] e_k\, dt, \qquad /5.74/$$

$$\int_t^T \sum_{k=1}^{\infty} 2 \Big[k\pi \{\varphi(s), e_k\} \sin k\pi(s-t) + \{\varkappa_2(s), e_k\} \cos k\pi(s-t) \Big] e_k\, ds \Big] \nu(d\eta)$$

W szczególnym przypadku gdy $u_o = v_o = 0$ oraz $\eta(t) = 0$ funkcjonał charakterystyczny pary (u, v) przybiera postać:

$$\Phi[\varkappa_1, \varkappa_2] = \tilde{\Phi}_o \Big[\int_t^T \sum_{k=1}^{\infty} 2 \Big[k\pi \{\varkappa_1(s), e_k\} \sin k\pi(s-t) + \{\varkappa_2(s), e_k\} \cos k\pi(s-t) \Big] e_k \cdot ds \Big] \qquad /5.75/$$

gdzie $\tilde{\Phi}_o$ jest funkcjonałem charakterystycznym $f(t)$.

Załóżmy, że proces $f(t)$ w /5.64/ jest procesem Poissona o stałej amplitudzie $g(x)\cdot a$, g - funkcja, a - stała, i intensywności Θ /por./2.35//. Jego funkcjonał charakterystyczny ma postać:

$$\tilde{\Phi}_o[z(t)] = \exp\Big\{ \Theta \int_0^T \Big[\exp\Big\{ ia \int_0^T \delta(t-t') \{g, z(t)\}\, dt \Big\} - 1 \Big] dt' \Big\} \qquad /5.76/$$

natomiast

$$\Phi[\varkappa_1,\varkappa_2] = \exp\Big\{\theta\int_0^T\Big[\exp\Big\{ia\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}2\{g,e_k\}H(t-t')\, x$$

/5.77/

$$x\Big[k\pi\{\varkappa_1(t),e_k\}\sin k\pi(t-t') + \{\varkappa_2(t),e_k\}\cos k\pi(t-t')\Big]\,dt\Big\}-1\Big]\,dt'\Big\}$$

Rozwinięcie w szereg wewnętrznego exp w /5.77/ daje:

$$\Phi[\varkappa_1,\varkappa_2] = \exp\Big\{\theta\int_0^T\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(2ia)^l}{l!}\Big(\int_0^T H(t-t')\sum_{k=1}^{\infty}\{g,e_k\}\, x$$

/5.78/

$$x\Big[k\pi\{\varkappa_1(t),e_k\}\sin k\pi(t-t') + \{\varkappa_2(t),e_k\}\cos k\pi(t-t')\Big]\,dt\Big)^l dt'\Big\}$$

Przez różniczkowanie uzyskujemy średnią:

$$\begin{bmatrix} E\{u(t)\} \\ \\ E\{v(t)\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\theta a\sum_{k=1}^{\infty}k\pi\int_0^t \sin k\pi(t-t')\,dt'\{g,e_k\}e_k \\ \\ 2\theta a\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t \cos k\pi(t-t')\,dt'\{g,e_k\}e_k \end{bmatrix} \qquad /5.79/$$

oraz elementy macierzy kowariancji $\underline{Q}(t, s, x, y) = (Q_{ik})$, $i, k=1,2$:

$$Q_{11}(t,s,x,y) = E\{u(t,x)u(s,y)\} - E\{u(t,x)\}\cdot E\{u(s,y)\} =$$

$$=4\theta a^2\int_0^{\min(t,s)}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}k\pi\sin k\pi(t-t')\{g,e_k\}e_k(x)\Big)\Big(\sum_{l=1}^{\infty}l\pi\sin l\pi(s-t')$$

/5.80/

$$\cdot\{g,e_l\}e_l(y)\Big)\,dt'$$

$$Q_{12}(t,s,x,y) = E\{u(t,x)v(s,y)\} - E\{u(t,x)\}\cdot E\{v(s,y)\} =$$

$$=4\theta a^2\int_0^{\min(t,s)}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}k\pi\sin k\pi(t-t')\{g,e_k\}e_k(x)\Big)\Big(\sum_{l=1}^{\infty}\cos l\pi(s-t')$$

/5.81/

$$\{g,e_l\}e_l(y)\Big)\,dt'$$

$$Q_{21}(t, s, x, y) = Q_{12}(s, t, y, x) \qquad /5.82/$$

$$Q_{22}(t,s,x,y) = E\{v(t,x)v(s,y)\} - E\{\overset{\circ}{v}(t,x)\}\cdot E\{v(s,y)\} =$$

$$=4\theta a^2 \int_0^{\min(t,s)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \cos k\pi(t-t')\{g,e_k\}e_k(x)\right)\left(\sum_{l=1}^{\infty} \cos l\pi(s-t')\{g,e_l\}e_l(y)\right) dt' \qquad /5.83/$$

Łatwo zauważyć, że

$$\underline{Q}\,(t,s,x,y) = a^2\theta\,\underline{R}\,(t,s,x,y) \qquad /5.84/$$

gdzie elementy $\underline{R}\,(t,s,x,y)$ nie zależą od a i θ.

Oznaczmy:

$$\underline{R}\,(t) = \underline{R}\,(t,t,x,x) \qquad /5.85/$$

i interpretujemy $\underline{R}\,(t)$ jako funkcję operatorową.

Niech:

$$\tilde{U}\,(t) = \frac{1}{a\sqrt{\theta}}\left(\underline{R}(t)\right)^{-\frac{1}{2}}\left(U\,(t) - E\{U\,(t)\}\right), \qquad /5.86/$$

gdzie $U = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$.

Funkcjonał charakterystyczny $\bar{\Phi}$ procesu /5.86/ ma postać:

$$\bar{\Phi}[\varkappa] = \Phi\left[\frac{1}{a\sqrt{\theta}}\left(\underline{R}^{-\frac{1}{2}}(t)\right)^{*}\varkappa\right] \exp\left\{-\frac{1}{a\sqrt{\theta}}\left(\underline{R}^{-\frac{1}{2}}(t)\,E\{U(t)\},\varkappa(t)\right)_X\right\} \qquad /5.87/$$

gdzie

$\left(\underline{R}^{-\frac{1}{2}}(t)\right)^{*}$ jest sprzężeniem $\underline{R}^{-\frac{1}{2}}\,(t)$ jako operatora $X \to X$.

Rozumowanie analogiczne do przeprowadzonego w punkcie 3 prowadzi do podobnych wniosków:

Odpowiedź dąży do procesu gaussowskiego gdy spełnione są warunki /5.63/. Stwierdzenie to jest prawdziwe zarówno dla pary (u, v), jak i dla samych u lub v.

5. Równanie przewodnictwa cieplnego w obszarze ograniczonym

Rozważmy teraz równanie paraboliczne modelujące przewodnictwo ciepła w skończonym pręcie, gdy źródło ciepła ma charakter losowo przybywających impulsów. Równanie takie ma postać:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu + f(t,x) \ , \ x \in [0,1] \ , \ t \in [0,T] \qquad /5.88/$$

$$u(0,x) = u_0(x)$$

$$u(t,0) = u(t,1) = 0$$

gdzie, jak zwykle, $f(t,x)$ opisuje źródło ciepła, b jest parametrem skalarnym charakteryzującym odpływanie ciepła do otaczającego ośrodka. W terminach punktu 1 równanie /5.88/ może być sprowadzone do postaci /5.1/, gdy

$$X = L^2_0\,(0,1)$$

$$A = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \qquad /5.89/$$

$$B = 0 \ ,$$

oraz przedstawione w formie /5.25/ - /5.26/, gdy:

$$r_j = 1$$

$$\lambda_j = b - j^2\pi^2$$

$$e_j = e_j(x) = \sqrt{2}\sin j\pi x$$

$$(u, e_j)_X = \int_0^1 u(x) e_j(x)\,dx \qquad /5.90/$$

Załóżmy, że $u_\infty(x) = 0$, natomiast $f(t,x)$ jest procesem Poissona o funkcjonale charakterystycznym /5.76/. Stosując /5.29/ i /5.76/ znajdujemy funkcjonał charakterystyczny rozwiązania /5.88/:

$$\Phi[\varkappa] = \exp\Big\{\Theta\int_0^T\Big[\exp\Big\{ia\sum_{j=1}^{\infty} H(t-t')\, e^{\lambda_j(t-t')}\big(\varkappa(t), e_j\big)_X \times (g, e_j)_X\,dt\Big\} - 1\Big]\,dt'\Big\} \qquad /5.91/$$

Rozwinięcie w szereg drugiego exp w /5.91/ daje:

$$\Phi[\varkappa] = \exp\Big\{\Theta\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(ia)^k}{k!}\Big(\int_0^T\sum_{j=1}^{\infty} H(t-t')\, e^{\lambda_j(t-t')}\big(\varkappa(t), e_j\big)_X \times (g, e_j)_X dt\Big)^k\,dt'\Big\} \qquad /5.92/$$

Podobnie jak w punkcie 3 możemy otrzymać /przez różniczkowanie/, centralne momenty rozwiązania /5.88/ w chwili t i punkcie x, a następnie znaleźć współczynniki skośności i spłaszczenia, mierzące odległość zachowania naszego układu od gaussowskiego.

Mają one wartość:

$$\varepsilon_1(t,x) = \frac{1}{\sqrt{\Theta}}\;\frac{\displaystyle\int_0^t\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2}(g, e_k)_X\exp\big\{(b-k^2\pi^2)(t-s)\big\}\sin k\pi x\Big)^3 ds}{\displaystyle\Big(\int_0^t\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2}(g, e_k)_X\exp\big\{(b-k^2\pi^2)(t-s)\big\}\sin k\pi x\Big)^2 ds\Big)^{\frac{3}{2}}} \qquad /5.93/$$

$$\varepsilon_2(t,x) = \frac{1}{\Theta}\;\frac{\displaystyle\int_0^t\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2}(g, e_k)_X\exp\big\{(b-k^2\pi^2)(t-s)\big\}\sin k\pi x\Big)^4 ds}{\displaystyle\Big(\int_0^t\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2}(g, e_k)_X\exp\big\{(b-k^2\pi^2)(t-s)\big\}\sin k\pi x\Big)^2 ds\Big)^{2}} \qquad /5.94/$$

Wariancja rozwiązania w (t,x) jest równa:

$$\sigma^2(t,x)=\theta a^2\int_0^t\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2}\,(g,e_k)_X\exp\{(b-k^2\pi^2)(t-s)\}\sin k\pi x\right)^2 ds \qquad /5.95/$$

Szeregi w /5.93 - 95/ są szybko zbieżne, dlatego też możliwe jest numeryczne wykonanie całkowania.

Załóżmy, że $g(x)=1$ dla $x\in[0,1]$.

Wówczas:

$$(g,e_k)_X=(1,e_k)_X=\sqrt{2}\int_0^1\sin k\pi x\,dx=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}}{k\pi}, & k=2i-1\\ 0, & k=2i\end{cases} \qquad /5.96/$$

$i=1,2,3\ldots$

Na przykład, w chwili $t=1$ i punkcie $x=\frac{1}{2}$, /5.93 -95/ przyjmuje postać:

$$\varepsilon_1\left(1,\tfrac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{\theta}}\,\frac{\displaystyle\int_0^1\left(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{4}{(2k-1)\pi}\exp\{(b-k^2\pi^2)(1-s)\}\right)^3 ds}{\left(\displaystyle\int_0^1\left(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{4}{(2k-1)\pi}\exp\{(b-k^2\pi^2)(1-s)\}\right)^2 ds\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad /5.97/$$

$$\varepsilon_2\left(1,\tfrac{1}{2}\right)=\frac{1}{\theta}\,\frac{\displaystyle\int_0^1\left(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{4}{(2k-1)\pi}\exp\{(b-k^2\pi^2)(1-s)\}\right)^4 ds}{\left(\displaystyle\int_0^1\left(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{4}{(2k-1)\pi}\exp\{(b-k^2\pi^2)(1-s)\}\right)^2 ds\right)^2} \qquad /5.98/$$

oraz

$$\sigma^2\left(1,\ \frac{1}{2}\right)=\Theta a^2\int_0^1\left(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{4}{(2k-1)\pi}\exp\left\{\left(b-k^2\pi^2\right)(1-s)\right\}\right)^2 ds \qquad /5.99/$$

Dla kilku ustalonych wartości b całki powyższe przyjmują następujące wartości:

b	ε_1	ε_2	σ^2
-3	$3{,}26\ \frac{1}{\sqrt{\Theta}}$	$11{,}5\ \frac{1}{\Theta}$	$0{,}055a^2\Theta$
-1	$2{,}95\ \frac{1}{\sqrt{\Theta}}$	$9{,}59\frac{1}{\Theta}$	$0{,}067a^2\Theta$
0	$2{,}82\ \frac{1}{\sqrt{\Theta}}$	$8{,}76\frac{1}{\Theta}$	$0{,}075a^2\Theta$
1	$2{,}68\ \frac{1}{\sqrt{\Theta}}$	$7{,}9\ \frac{1}{\Theta}$	$0{,}083a^2\Theta$
3	$2{,}38\ \frac{1}{\sqrt{\Theta}}$	$6{,}26\frac{1}{\Theta}$	$0{,}108a^2\Theta$

Można zauważyć, że rozwiązanie równania /5.88/ jest bardziej gaussowskie dla niefizycznych wartości b /$b > 0$ /, i mniej gaussowskie dla b opisującego przepływ ciepła do otoczenia/ $b \leqslant 0$/. Otrzymane tu wyniki zilustrowano na wykresie /rys. 9,10 i 11/.

6. Równanie paraboliczne w obszarze nieograniczonym

Zbadamy teraz warunki istnienia rozwiązania równania /5.16/ na przykładzie równania parabolicznego:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \eta(t,x)u + f(t,x) \qquad /5.100/$$

$$u(0,x) = u_0(x)\ ; \quad x \in R, \quad t \in [0,T]$$

W tym przypadku oznaczenia równania /5.1/ mają następujący sens:

$$A = a\frac{\partial^2}{\partial x^2} = A^*, \ X = L^2(R), \ B(\eta,t) = B^*(\eta,t) = \eta(t,x) \qquad /5.101/$$

$$K^*(t) = K(t) \text{ oraz}$$

$$K^*(t)U = \int_R \frac{1}{\sqrt{4\pi at}} \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{4at}\right\} u(y)\,dy \qquad /5.102/$$

oraz równanie /5.16/ przyjmuje postać:

$$S(t,x) - \eta(t,x)\int_t^T\int_R \frac{1}{\sqrt{4\pi a(s-t)}} \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{4a(s-t)}\right\} S(s,y)\,dy\,ds =$$

$$= \mathcal{H}(t,x) \qquad /5.103/$$

Z /5.103/ widać, że operator $\underline{C}(\eta)$ ma postać:

$$\underline{C}(\eta)S = \eta(t,x)\int_t^T\int_R \frac{1}{\sqrt{4\pi a(s-t)}} \exp\left\{\frac{-(x-y)^2}{4a(s-t)}\right\} S(s,y)\,dy\,ds \qquad /5.104/$$

$\underline{C}(\eta)$ jest operatorem $L^2\big([0,T],(\Gamma,\mathfrak{F},P),X\big) \to L^2\big([0,T],(\Gamma,\mathfrak{F}_T,P),X\big)$, gdy $\eta(t,x)$ jest ograniczone P - prawie wszędzie, tzn. istnieje taka stała c, że

$$\sup_{x,t} \eta^2(t,x,\gamma) \leqslant c \quad \text{z prawdopodobieństwem } 1, \qquad /5.105/$$

czyli $\|B^{\varkappa}(\eta,t)\| \leqslant c$.

Wiadomo /por. [36] /, że

$$\|K^{\varkappa}(t)\| \leqslant e^{(2a+\varepsilon)t} \qquad \text{dla } \varepsilon > 0 \qquad /5.106/$$

zatem z /5.24/ znajdujemy:

$$\|\underline{C}(\eta)\| \leqslant \sqrt{\frac{c}{4(2a+\varepsilon)^2}\left[e^{2T(2a+\varepsilon)} - 1 - 2T(2a+\varepsilon)\right]} \qquad /5.107/$$

czyli rozwiązanie równania /5.103/ postaci /5.21/ istnieje, gdy:

$$c \leqslant \frac{4(2a+\varepsilon)^2}{\left[e^{2T(2a+\varepsilon)} - 1 - 2T(2a+\varepsilon)\right]} \qquad /5.108/$$

7. Przypadek zespolony

Załóżmy teraz, że wszystkie występujące w /5.1/ funkcje i operatory są zespolone. W tym wypadku równanie /5.1/ można zastąpić przez dwa równania - dla U i dla $\bar{U}$:

$$\frac{dU}{dt} = AU + B(\eta,t)U + f(t)\ , \quad U(0) = U_0 \qquad /5.109/$$

$$\frac{d\bar{U}}{dt} = \bar{A}\bar{U} + \bar{B}(\eta,t)\,\bar{U} + \bar{f}(t),\ \bar{U}(0) = \bar{U}_0 \qquad /5.110/$$

Poszukiwany będzie funkcjonał charakterystyczny pary $\left(U,\ \bar{U}\right)$:

$$\Phi[\varkappa,\tilde{\varkappa}] = \left\langle \exp\left\{ i\int_0^T \left(U(t),\varkappa(t)\right)_X dt + i\int_0^T \left(\bar{U}(t),\tilde{\varkappa}(t)\right)_X dt \right\}\right\rangle \qquad /5.111/$$

gdzie $\varkappa$ i $\tilde{\varkappa}$ są dwiema niezależnymi funkcjami z przestrzeni $L^2\left([0,T],\ X\right)$.
Niech $\Phi_0\left[\ a,\ \tilde{a},\ b(t),\ \tilde{b}(t)\right]$ będzie łącznym funkcjonałem charakterystycznym $\left(U_0\ \bar{U}_0, f(t),\ \bar{f}\ (t)\right)$.

Wówczas funkcjonał /5.111/ ma postać:

$$\Phi[\varkappa,\tilde{\varkappa}] = \int \Phi_0\left[\ \int_0^T K^*(t)S(t)dt\ ,\ \int_0^T \bar{K}^*(t)\tilde{S}(t)dt\ ,\right.$$
$$\left.\int_t^T K^*(s-t)S(s)ds\ ,\ \int_t^T \bar{K}^*(s-t)S(s)ds\right]\nu(d\eta) \qquad /5.112/$$

gdzie $S(t)$ i $\tilde{S}(t)$ są rozwiązaniami równań całkowych:

$$S(t) - B^*(\eta,t)\int_t^T K^*(s-t)S(s)ds = \varkappa(t) \qquad /5.113/$$

$$\tilde{S}(t) - \bar{B}^*(\eta,t)\int_t^T \bar{K}^*(s-t)\tilde{S}(s)ds = \tilde{\varkappa}(t) \qquad /5.114/$$

Jako przykład rozważmy równanie paraboliczne /1.2/

w dwóch wymiarach, tj.:

$$2ik \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 \eta u = 0 \qquad /5.115/$$

$$u(0,y) = u_0(y)$$

czyli

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{i}{2k} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{ik}{2} \eta u \qquad /5.116/$$

W tym wypadku utożsamiamy t w /5.1 / ze zmienną x,

$$A = \frac{i}{2k} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad , \quad \bar{A} = \frac{-i}{2k} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad , \quad B = \frac{ik}{2} \quad , \quad \bar{B} = \frac{-ik}{2} \qquad /5.117/$$

a zatem równanie sprzężone /5.110/ ma postać:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = - \frac{i}{2k} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \frac{ik}{2} \eta \bar{u} \qquad /5.118/$$

Półgrupy generowane przez A i $\bar{A}$ są odpowiednio równe:

$$K(x)U = \int_R \sqrt{\frac{-ik}{2\pi x}} \exp\left\{ \frac{ik(y-y')^2}{2x} \right\} U(y') \, dy' \qquad /5.119/$$

$$\bar{K}(x)\widetilde{U} = \int_R \sqrt{\frac{ik}{2\pi x}} \exp\left\{ \frac{-ik(y-y')^2}{2x} \right\} U(y') \, dy' \qquad /5.120/$$

oraz:

$$K^* = \bar{K} \quad , \quad \bar{K}^* = K$$
$$B^* = \bar{B} \quad , \quad \bar{B}^* = B \qquad /5.121/$$

Można teraz zapisać równania dla S i $\tilde{S}$ /5.113/ i /5.114/:

$$S(x,y) + \frac{ik}{2}\eta(x,y)\int_x^X\int_R\sqrt{\frac{ik}{2\pi(x'-x)}}\exp\left\{\frac{-ik(y-y')^2}{2(x'-x)}\right\}S(x',y')\,dy'dx' = \varkappa(x,y) \qquad /5.122/$$

$$\tilde{S}(x,y) - \frac{ik}{2}\eta(x,y)\int_x^X\int_R\sqrt{\frac{-ik}{2\pi(x'-x)}}\exp\left\{\frac{ik(y-y')^2}{2(x'-x)}\right\}S(x',y')\,dy'dx' = \tilde{\varkappa}(x,y) \qquad /5.123/$$

oraz funkcjonał /5.112/:

$$\Phi[\varkappa,\tilde{\varkappa}] = \int\Phi_0\left[\int_0^X\int_R\sqrt{\frac{ik}{2\pi x}}\exp\left\{\frac{-ik(y-y')^2}{2x}\right\}S(x,y')\,dy'dx\,,\right.$$

$$\left.\int_0^X\int_R\sqrt{\frac{-ik}{2\pi x}}\exp\left\{\frac{ik(y-y')^2}{2x}\right\}S(x,y')\,dy'dx\right]\nu(d\eta) \qquad /5.124/$$

VI. Podsumowanie

Na zakończenie zreasumujmy uzyskane wyniki.

Praca zawiera dwie zasadnicze części. Pierwsza, obejmująca rozdziały II,III i IV dotyczy równań dla funkcjonałów charakterystycznych i związanych z nimi równań dla momentów, druga /rozdział V/ - konstruowania funkcjonałów.

Motywem przewodnim naszego postępowania była chęć uzyskania takich wyników, które można użyć do analizy problemów fizycznych. Dlatego też jako metodę wyprowadzenia równania dla funkcjonału charakterystycznego zostało wybrane zastosowanie uogólnienia,znanego w stochastycznej analizie fal, wzoru Furutsu-Nowikowa, dającego tam efektywne wyniki. Uzyskane tą drogą równanie jest, w porównaniu z równaniem z pracy Chowa, łatwiejsze do wykorzystania. Dzięki jego prostej formie udało się nam znaleźć równania dla momentów dowolnego rzędu rozwiązania stochastycznego równania ewolucyjnego. Nie były one znane do tej pory w literaturze - uzyskano jedynie takie równania dla pewnych szczególnych typów równań/ układy równań zwyczajnych, równania typu parabolicznego/. Zauważmy również, że wyprowadzone w niniejszej pracy równania dla momentów rozwiązań równań Stratonowicza mogą być, dzięki znalezionej przez nas poprawce "Itowskiej" /por./3.41//, zastosowane również do równań typu Ito. Także poprawka ta w nieskończonym wymiarze nie była nam znana z literatury.

Uzyskane wyniki zostały zweryfikowane na przykładzie równania opisującego falę w strunie, dla którego wykazano istnienie rozwiązania równania dla funkcjonału charakterystycznego.

Następnie rozważony został problem propagacji jednowymiarowej fali termosprężystej w ośrodku z przestrzennie-czasowymi fluktuacjami jego własności. Ze względu jednak na podstawowe założenie modelu /współczynniki odpowiednich równań są δ-skorelowane/ analiza ta mogła być przeprowadzona przy pewnych dodatkowych ograniczeniach na rozpatrywany ruch falowy.

Na zakończenie pierwszej części - w celu porównania z istniejącymi rezultatami - został krótko przeanalizowany problem dyfuzji w cieczy turbulentnej.

W rozdziale V przedstawione zostało odmienne podejście do wyznaczania funkcjonałów charakterystycznych rozwiązań równań stochastycznych - nie wymagające założenia o δ-korelacji współczynników. Podana została idea konstruowania funkcjonału rozwiązania - bez wyprowadzania równań funkcjonalnych.

Ważnym rezultatem aplikacyjnym tego rozdziału jest badanie zbieżności rozwiązań równań stochastycznych z impulsowymi wymuszeniami do procesu gaussowskiego - nie, jak w literaturze, poprzez badanie zbieżności rozkładów jednowymiarowych, lecz wszystkich rozkładów - czyli zbieżności funkcjonału charakterystycznego.

Przedstawione w pracy rezultaty stanowią pewien krok na drodze lepszego zrozumienia funkcjonałowej analizy równań stochastycznych i możliwości jej zastosowań. Nie rozważaliśmy tu szeregu problemów które wymagają dalszych badań.

Należy do nich, między innymi, zagadnienie skonstruowania jednolitej teorii równań stochastycznych w oparciu o całkę Dalieckiego-Paramonowej zdefiniowaną w rozdziale drugim.

Ciekawe może być również porównanie prezentowanego tu podejścia z pracami Malliavina i jego kontynuatorów/por. [70], [71] /,którzy także rozumieją rozwiązanie równania stochastycznego jako funkcję procesu Wienera i różniczkują je względem realizacji procesu ruchu Browna. Wydaje się, że takie rozumienie rozwiązania może ułatwić znajdowanie rozwiązań równań stochastycznych.

Innym ważnym problemem jaki wyłania się z przedstawionych w tej pracy rozważań jest potrzeba bardziej systematycznego podejścia do analizy równań różniczkowych dla funkcjonałów charakterystycznych.

Najistotniejszym zagadnieniem jest jednak zastosowanie uzyskanych już rezultatów do konkretnych problemów fizycznych. Najciekawszych wyników można się spodziewać badając zjawiska zachodzące w plaźmie, gdzie często przyjmuje się, że parametry ośrodka są δ-skorelowane.

Literatura cytowana

[1] G.B. Whitham "Linear and Nonlinear Waves", J. Wiley 1974

[2] J.B. Keller "Progress and prospects in the theory of linear wave propagation", SIAM REV., 21, No. 2, 229-245, 1979

[3] K. Sobczyk "Fale stochastyczne", PWN, 1982

[4] F.D. Tappert "The Parabolic Approximation Method"in"Wave Propagation and Underwater Acoustics", J. Keller, J. Papadakis ed., 1977, Springer

[5] W.P. Brown "Moment Equations for Waves Propagated in Random Media", J. Op. Soc. Am, 62 , No. 1, 45-54, 1972

[6] J.B. Keller "Stochastic equations and wave propagation in random media", Proc. Symp. Appl. Math. 13 , 227-246, AMS, Providence, 1964

[7] J.A. Morrison, J. Mc Kenna "Moments and correlation functions of solutions of a stochastic differential quations, J. Math. Phys.,Vol 11 , No. 8, Aug. 1970

[8] A.B. Скороход "Конструктивные методы задания случайных процессов", Успехи Мат. Наук,Т.20,в.3(123),67-87,1965

[9] E. Hopf "Statistical hydrodynamics and functional calculus", J. Rat. Mech. Anal., 1, 87-123, 1952

[10] М.И. Вишик, А.В. Фурсиков "Математические задачи статистической гидромеханики", Наука 1980

[11] M. Kac "Probability and Related Topics in Physical Sciences", Interscience Publ. London, N.Y, 1957

[12] M.D. Donsker, J.L. Lions "Volterra variational equations, boundary value problems and function space integrals", Acta Math., Vol.108, 147-228, 1962

[13] S.L. Boylan "Fourier Transforms in Function Space and Parabolic Differential Equations", J. Math. Anal. and Applications, 56, 529-547, /1976/

[14] В.I. Татарский "Распространение света в среде со случайными неоднородностями показателя преломления в приближении марковского случайного процесса", ЖЭТФ, 56, 2106-2117, 1969

[15] L.C. Lee "Wave propagation in a random medium . A complete set of the moment equations with different wavenumbers ", J. Math. Phys. Vol. 15, No. 9, 1431-35, 1974

[16] P.L. Chow "Function - Space Differential Equations Associated with a Stochastic Partial Differential Equations" Indiana Univ. Math. Journal, 25, No. 7, 609-627, 1976

[17] Ю. Далецкий, С.Н. Парамонова "Стохастические интегралы по нормально распределенной аддитивной функции множеств", ДАН СССР, 1973, Т.208, №3, 512-515

[18] Ю. Далецкий, С.Н. Парамонова "Об одной формуле теории гауссовых мер и оценке стохастических интегралов", Теор.вер.прим. Т.XIX, в.6, 844-848, 1974

[19] P.L. Chow "Stochastic Partial Differential Equations in Turbulence Related Problems" in A.T. Bharucha - Reid "Prob. Analysis and Related Topics", 1, A.P. 1978

[20] R. Curtain "Markov Processes generated by linear stochastic evolution equations", Stochastics, No. 1-2, 1981, preprint no 219, Univ. Groningen

[21] А.С. Монин, А.М. Яглом "Статистическая гидромеханика", Наука , Т.I-1965, Т.II-1967

[22] А.Н. Деменин, В.С. Королюк "Характеристические функционалы случайных волновых полей в неоднородных средах" в "Физико-технические приложения краевых задач" Наукова Думка 1978

[23] J. Musielak "Wstęp do analizy funkcjonalnej", PWN 1976

[24] J. Ostrowska-Maciejewska "Podstawy mechaniki ośrodków ciągłych", PWN, 1982

[25] S.G. Krejn "Analiza funkcjonalna", PWN 1967

[26] R. Curtain, I. Prichard "Infinite dimensional linear systems theory", Lect. Not. Contr. Inf. Th. Vol. 8, 1978, Springer

[27] A.D. Wentzell "Wykłady z teorii procesów stochastycznych", PWN 1980

[28] E. Wong "Procesy stochastyczne w teorii informacji i układach dynamicznych", WNT 1976

[29] R. Pallu de la Barrière "Matematyczne podstawy teorii sterowania automatycznego", PWN 1972

[30] K. Furutsu "On the statistical theory of electromagnetic waves in a fluctuating medium", I.J. Res. Bur. Stand, 67 D /1963/

[31] Е.А. Новиков "Функционалы и метод случайных сил в теории турбулентности",ЖЭТФ,47 ,5(1964),1919

[32] В.И. Татарский "Некоторые методы решения стохастических дифференциальных уравнений",Изв.ВУЗ-Радиофизика,17 , №4, 570-595,1974

[33] В.И. Кляцкин "Статистическое описание динамических систем с флюктуирующими параметрами",Наука 1975

[34] И.И Гихман, А.В. Скороход "Введение в теорию случайных процессов" Наука 1965

[35] L. Arnold"Stochastic differential equations. Theory and applications", J. Wiley, 1974

[36] K. Yosida "Functional Analysis", Springer 1965

[37] J. Walker "Dynamical Systems and Evolution Equations", Plenum Press, 1980

[38] H. Trotter "On the Product of Semigroup of Operators ", Proc. A.M.S. 10 /1959/, 545-551

[39] T. Kato "The Cauchy Problem for Quasi-Linear Symmetric Hyperbolic Systems", Arch. Rat. Mech. Anal. 58 /1975/, 181-205

[40] D.A. Dawson "Stochastic Evolution Equations", Math. Biosciences, 15, 287-316 /1972/

[41] D.A. Dawson "Stochastic Evolution Equations and Related Measure Processes", Journ. Multivariate Anal. 5, 1-52 /1975/

[42] R. Curtain "Stochastic Evolution Equations with General White Noise Disturbance", J. Math. Anal. and Appl., 60 , 570-595 /1977/

[43] A. Chojnowska-Michalik, "Stochastic Differential Equations in Hilbert Space", Probab. Theory, Banach Center Publ., Vol. 5, pp. 53-74, 1979

[44] A. Ichikawa "Linear Stochastic Evolution Equations in Hilbert Space", J. Diff. Equat., 28, 266-277 /1978/

[45] L. Arnold, R. Curtain, P. Kotelenez "Nonlinear Stochastic Evolution Equations in Hilbert Space, Univ. Bremen, rep. No. 17, 1980

[46] A. Shimizu "Construction of a Solution of Linear Stochastic Evolution Equations on a Hilbert Space", Proc. Int. Symp. SDE. Kyoto, 1976, pp. 385-395

[47] N.G. Van Kampen "Ito Versus Stratonovich ", Jour. Statist. Physics, Vol. 24, No. 1, 175-187, 1981

[48] В.И Кляцкин "Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах",Наука 1980

[49] С.М. Рытов, Ю.А. Кравцов, В.И. Татарский "Введение в статистическую радиофизику.Ч.II.Случайные поля",Наука 1978

[50] В.Л. Миронов "Распространенпе лазерного пучка в турбулентной атмосфере", Наука 1981

[51] R. Bouc, E. Pardoux "Moments of semi - linear random evolutions", Publications de mathematiques appliques Marseille - Toulon, 80-5 ; SIAM ...

[52] S.T. Ariaratnam, P.W.U. Graefe "Linear Systems with Stochastic Coefficients", Int. Journal of Control,

I Vol. 1, No. 3, pp. 239-250 , March. 1965
II Vol. 2, No. 2, pp. 161-169 , Aug. 1965
III Vol. 2, No. 3, pp. 205-210 , Sept. 1965

[53] K. Sobczyk "Metody dynamiki statystycznej", PWN - 1973

[54] О.В. Музычук "К построению точного решения уравнения Дайсона для средней функции Грина", Теорет. и математ. физика, Т.28,№3,371-380,1976

[55] R. Gutowski "Wprowadzenie do stateczności ruchu układów ciągłych"w"Stateczność i wrażliwość układów mechanicznych", Ossolineum 1978

[56] V. Girault, P - A. Raviart "Finite Element Approximation of the Navier - Stokes Equations", Lect. Nol. in Math, 749, Springer 1979

[57] В.Г. Гавриленко, Я.М. Дорфман "К теории рассеяния в средах с пространственно-временными флюктуациями",Изв.ВУЗ--Радиофизика,15 , №2,249-256,1972

[58] J. Minardi "Effect of Variations in the Coefficient of Thermal Expansion upon Thermal Stress", AIAA Journal, Vol. 4, No. 3, March 1966, pp. 542-544

[59] Y. Stawsky "Thermoelastic Field Equations of Inhomogeneous Media", Israel Journal of Technology, Vol. 2, No. 1, 1964, pp. 58-63

[60] W. Nowacki "Dynamiczne zagadnienia termosprężystości ", Warszawa 1966, PWN

[61] P. Chadwick, I.N. Sneddon, Plane waves in an elastic solid conducting heat", J. Mech. Phys. of Solids, 6 /1958/

[62] M. Sokołowski ed. "Sprężystość", PWN 1978

[63] C. Dafermos "On the existence and asymptotic stability of solutions of the equations of linear thermo elasticity", ARMA, Vol. 29, pp. 241-271, 1968

[64] G.C. Papanicolau, S.R.S. Varadhan "Diffusion in Regions with Many Small Holes", in Lecture Notes in Contr. and Inf. Sc. 25, Stochastic Differential Systems, pp. 190-206, Springer 1980

[65] Z. Kotulski, K. Sobczyk "Characteristic Functionals of Randomly Excited Physical Systems", wysłano do Physica A.

[66] H. Cramer "Metody matematyczne w statystyce", PWN 1958

[67] N.G. Van Kampen "Stochastic differential equations", Phys. Rep. 24C, 1976, 173

[68] B. Roberts Distribution of the response of linear systems to Poisson distributed random pulses", J. Sound and Vibrations, 28 /1/, 1973, p. 93

[69] Z. Kotulski, K. Sobczyk "Linear Systems and Normality", J. Statistical Physics, 24, 2, 1981

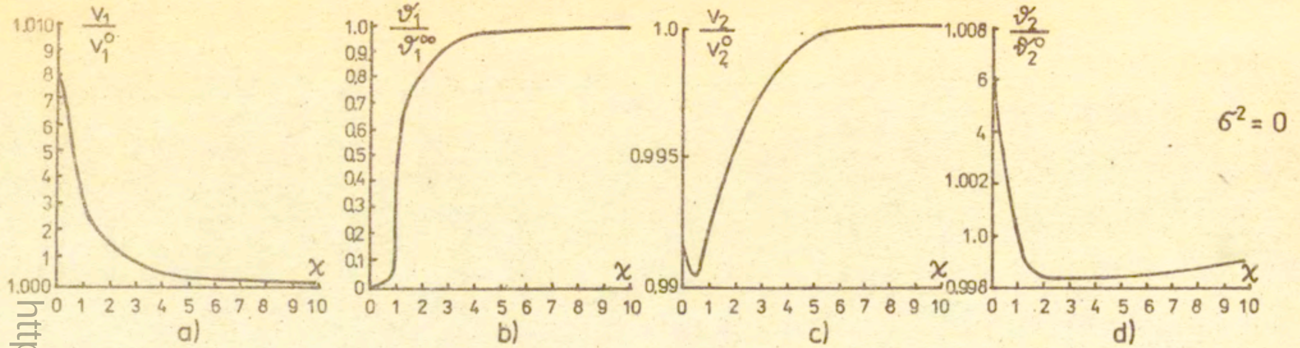
[70] P. Malliavin "Analyse différentielle sur l'espace de Wiener" materiały ICM-82

[71] N. Ikeda, S. Watanabe "Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes",North-Holland/Kodansha 1981

[72] В.И. Татарский "Распространение волн в турбулентной атмосфере", Наука 1967

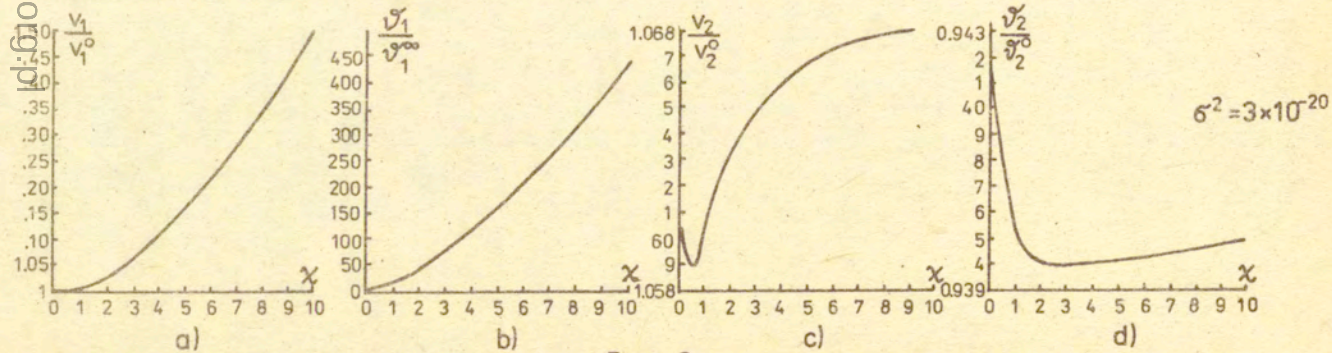
VIII. WYKRESY

Rysunek 1 - dotyczy str.114
Rysunki 2-6 - dotyczą str.115-117
Rysunki 7 i 8 - dotyczą str.134-135
Rysunki 9-11 - dotyczą str.148-149



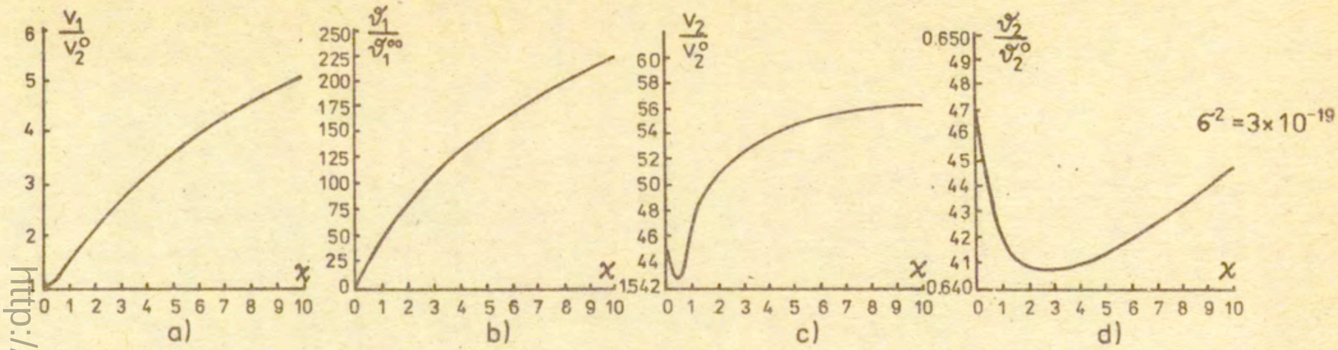
$\frac{v_1}{v_1^o}$
$\frac{\vartheta_1}{\vartheta_1^\infty}$
$\frac{v_2}{v_2^o}$
$\frac{\vartheta_2}{\vartheta_2^o}$
x
a)
b)
c)
d)
$\sigma^2 = 0$

Rys. 1

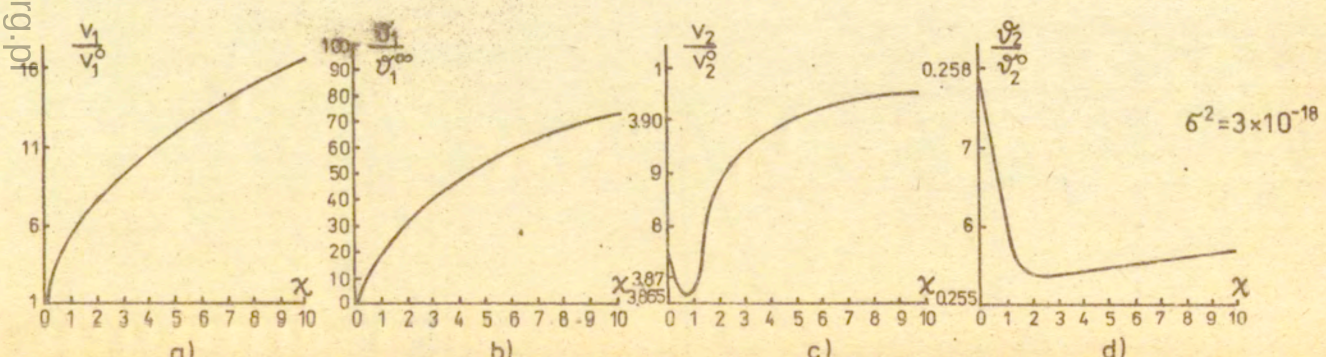


$\frac{v_1}{v_1^o}$
$\frac{\vartheta_1}{\vartheta_1^\infty}$
$\frac{v_2}{v_2^o}$
$\frac{\vartheta_2}{\vartheta_2^o}$
x
a)
b)
c)
d)
$\sigma^2 = 3\times10^{-20}$

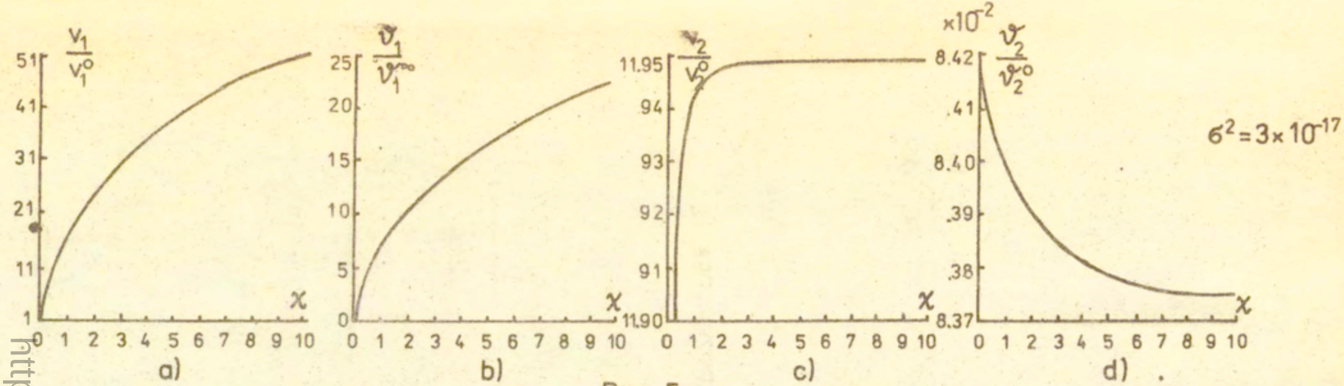
Rys. 2


$\frac{v_1}{v_2^o}$
$\frac{\vartheta_1}{\vartheta_1^{oo}}$
$\frac{v_2}{v_2^o}$
$\frac{\vartheta_2}{\vartheta_2^o}$
x
a)
b)
c)
d)
$\sigma^{-2} = 3 \times 10^{-19}$

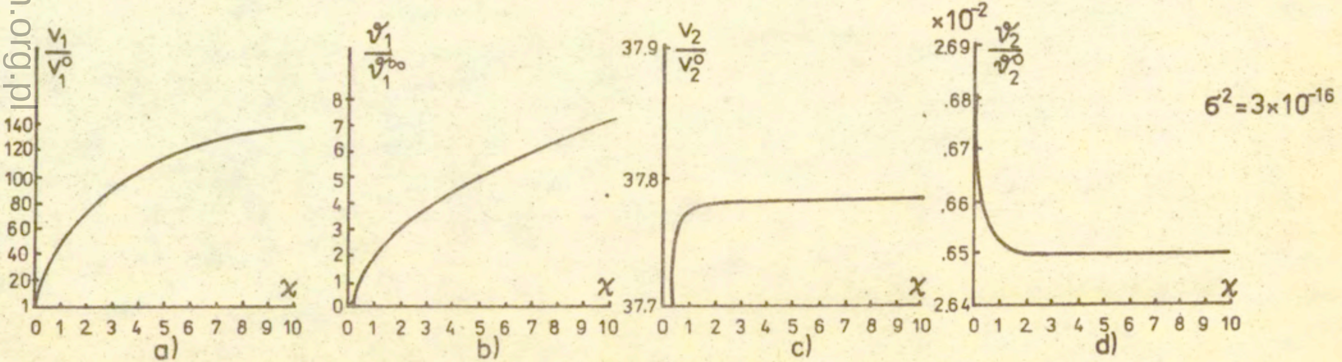
Rys. 3


$\frac{v_1}{v_1^o}$
$\frac{\vartheta_1}{\vartheta_1^{oo}}$
$\frac{v_2}{v_2^o}$
$\frac{\vartheta_2}{\vartheta_2^o}$
x
a)
b)
c)
d)
$\sigma^{-2} = 3 \times 10^{-18}$

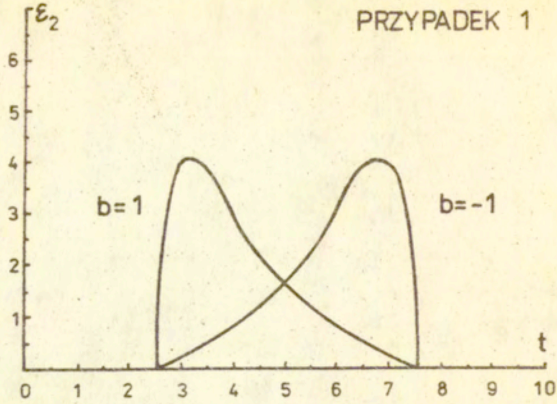
Rys. 4



Rys. 5

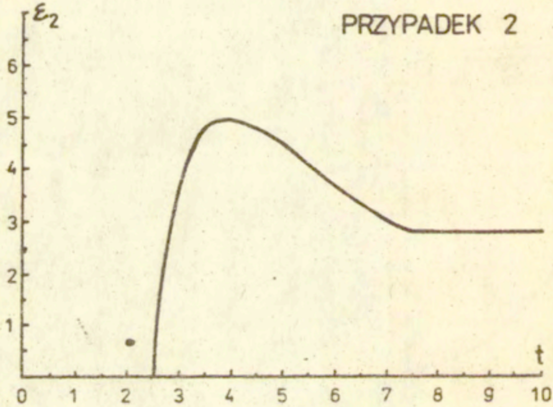


Rys. 6



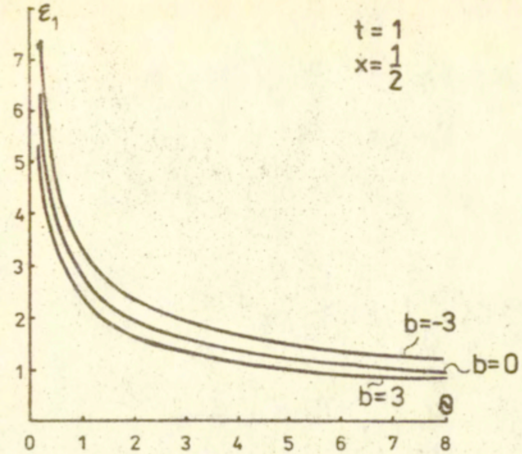
ε_2
PRZYPADEK 1
b=1
b=-1
t
6
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Rys. 7



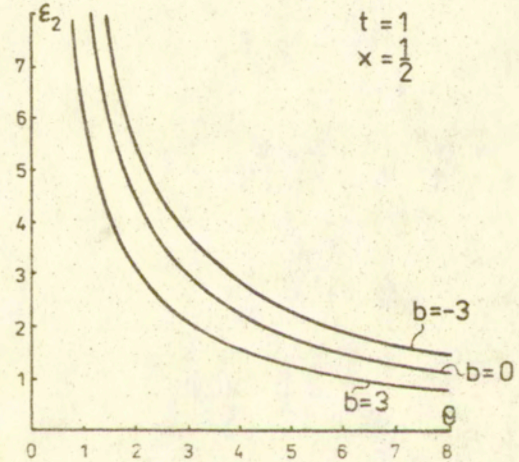
ε_2
PRZYPADEK 2
t
6
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Rys. 8



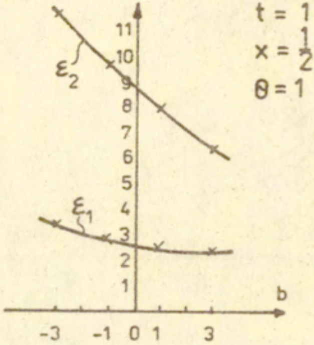
ε_1
t = 1
x = 1/2
b=-3
b=0
b=3
θ
0 1 2 3 4 5 6 7 8
1 2 3 4 5 6 7

Rys. 9



ε_2
t = 1
x = 1/2
b=-3
b=0
b=3
θ
0 1 2 3 4 5 6 7 8
1 2 3 4 5 6 7

Rys. 10



Rys. 11

SPIS TREŚCI