Miscellanea

Das Risiko

bei

Lebensversicherungen.

Entworfen

von

Dr. **C. Bremiker.**

Berlin.
Nicolaische Verlagsbuchhandlung.
(G. Parthey.)

1859.

Da die Prämien für Lebensversicherungen, abgesehen von den Zuschlägen für Verwaltungskosten, so bemessen werden, daſs unter Zugrundelegung einer Mortalitäts-Tabelle und eines bestimmten Zinsfuſses die Einnahmen der Kasse, vermehrt durch Zinseszins, gerade ausreichen, um für die nach der Mortalitäts-Tabelle eintretenden Todesfälle die fällig werdenden Versicherungen auszahlen zu können, so erleidet die Kasse einen Ausfall bei früh eintretendem Tode, hat dagegen Vortheil bei den lange Lebenden. Bei Renten-Versicherungen findet der umgekehrte Fall statt. Wie lange ein Versicherter leben muſs, so daſs die Kasse weder Vortheil noch Schaden hat, läſst sich genau angeben, ebenso welchen Vortheil oder Schaden die Kasse bei einem Todesfall hat, der nach n Jahren, unter n eine bestimmte Zahl verstanden, eintritt. Summirt man alle diese Vortheile und Nachtheile, so muſs, wenn die Vortheile mit $+$, die Nachtheile mit $-$ in Rechnung gebracht werden, die Summe $= 0$ sein. Dieses weicht jedoch von der Erfahrung wesentlich ab. Die Angaben der Mortalitäts-Tabelle, zwar gestützt auf langjährige Beobachtungen, sind nur als Mittelwerthe aus einer sehr grofsen Menge von Sterbefällen anzusehen und man darf voraussetzen, dafs bei einer geringeren Anzahl, um so mehr bei einzelnen Versicherungen erhebliche Abweichungen hiergegen eintreten werden.

Wenn einerseits der Versicherte die Absicht hat, sich gegen diese durch zu frühen Tod oder zu langes Leben eintretenden Eventualitäten zu schützen, so mufs andererseits die Versicherungsbank im Stande sein, das hiermit verbundene Risiko übernehmen zu können, d. h. sie mufs neben dem auf mittleres Absterben basirtem Reservefonds, bestimmt um alle fällig werdenden Summen daraus zahlen zu können, noch einen Fonds besitzen, durch welchen alle Abweichungen von der mittleren Mortalität gedeckt werden. Diesen Fonds zu bestimmen, das Verhältnifs desselben zur Menge und Höhe der Versicherungen festzustellen, ist der Zweck der gegenwärtigen Schrift. Dieser Fonds mufs jedenfalls im Grundkapital der Bank enthalten sein. Ob man nun das Grundkapital diesem Fonds gleich setzen, oder ob man es der gröfseren Sicherheit wegen doppelt oder dreimal so hoch nehmen will, ist unwesentlich. Die erste Bedingung bleibt immer die Auffindung des Maafsstabes selbst, und es ist erklärlich, dafs aus Mangel an einem solchen die Meinungen über das Grundkapital so sehr auseinander gehen.

1.

Das Risiko oder die Gefahr, welcher sich die Versicherungsbank und der Versicherte aussetzen, wird von der Höhe der Versicherungssumme sowohl als von der ungleichen Vertheilung der Vortheile und Nachtheile abhängen, welche der eine Versicherte vor dem andern durch den früher oder später eintretenden Tod hat. Einen bestimmten Begriff, wonach sich das Risiko berechnen liefse, findet man bei den Schriftstellern, die sich hiermit beschäftigt haben, nicht, er mufs vielmehr der Wahrscheinlichkeitsrechnung entnommen werden. Tetens [1]) scheint dieses ebenfalls gefühlt zu haben und schickt deshalb seinem Kapitel über das Risiko eine lange mathematische Abhandlung über die Binominal-Coefficienten eines Polynomiums voraus, Untersuchungen, welche in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts bei den Mathematikern sehr beliebt waren, und die, insofern sie Wahrscheinlichkeit betrafen, gegen Anfang dieses Jahrhunderts zu der Methode der kleinsten Quadrate führten. Tetens gelangt indessen nicht dahin, macht auch von den erwiesenen Sätzen keinen Gebrauch, sondern hält sich schliefslich an den möglichst gröfsten Gewinn und Verlust. Seine Vorstellungen über das Risiko schwanken hin und her und kommen zu kei-

---

[1]) **Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften. Leipzig 1785.**

nem klaren Begriffe. Der Methode der kleinsten Quadratsummen, der fruchtbarsten Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, war es vorbehalten, hierüber das nöthige Licht zu verbreiten. Sie giebt uns Mittel und Wege an, die Gefahr zu beurtheilen, welcher man bei dieser oder jener Gattung von Beobachtungen ausgesetzt ist, einen Fehler zu begehen. Erst durch sie haben sich feste Begriffe gebildet über mittlere und wahrscheinliche Fehler und über die Gefahr eines Fehlers bei einzelnen dem Zufalle unterworfenen Ereignissen einer bestimmten Art. Als Resultat aus den verschiedenen Beobachtungen eines und desselben Ereignisses führt diese Methode auf das arithmetische Mittel hin. Aber so wie das arithmetische Mittel auch schon früher als das wahrscheinlichste Resultat angesehen wurde, ehe noch die Methode der kleinsten Quadratsummen bekannt war, so hat man auch, unbekümmert um den Fehler desselben, den Werth einer Versicherung hiernach berechnet, indem dafür das Mittel aus allen, nach Maafsgabe der Mortalitäts-Tafel zu erwartenden Auszahlungen angenommen wurde. Von einer Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung konnte daher hierbei eigentlich nicht die Rede sein, und wenn wir dennoch in alten und neuen Lehrbüchern, welche von den Lebensversicherungen handeln, ein Kapitel über Wahrscheinlichkeitsrechnung vorfinden, so hätte dieses eben so gut fortbleiben können, da streng genommen eine Anwendung davon nicht gemacht ist. Die einzige Anwendung, welche man von der Wahrscheinlichkeit hätte machen können, wäre die gewesen, dafs man die Zuverlässigkeit der aus den Verhältnifszahlen der Mortalitäts-Tabelle gewonnenen Rechnungsresultate nach ihr beurtheilt oder die Wahrscheinlichkeit des Zutreffens derselben innerhalb gegebener Grenzen berechnet hätte. Hier würde sich der Wahrscheinlichkeitsrechnung ein weites und fruchtbares Feld eröffnet haben und seine Bearbeitung hätte zu den wichtigsten Resultaten, unter andern auch zu dem Begriff vom Risiko geführt. Dieser Weg würde nach dem jetzigen Standpunkt der Wissenschaft keine weiteren Schwierigkeiten darbieten, er ist aber seit Laplace[1]) nicht beschritten worden, entweder weil man von jeder Wahrscheinlichkeit überhaupt abstrahirte, oder sie nicht zu handhaben wufste. Man hat sich vielmehr damit begnügt, die mittleren Werthe für Renten und Lebensversicherungen nach irgend einer Mortalitäts-Tabelle zu berechnen, ohne sogar bei deren Auswahl eine besondere Sorgfalt zu beobachten. Dafs hierbei keine Wahrscheinlichkeitsrechnung gebraucht wird, mag noch an einigen Beispielen gezeigt werden.

Ich will die Angaben der Mortalitäts-Tabelle für lebende Männer im Alter a, $a+1$, $a+2, \ldots . . a+n \ldots . .$ mit M_a, M_{a+1}, $M_{a+2} \ldots M_{a+n} \ldots$ bezeichnen, die Zahl der im Lebensalter $a+1$, $a+2 \ldots . a+n+1 \ldots$ Sterbenden mit $S_{a+\frac{1}{2}}$, $S_{a+1+\frac{1}{2}} \ldots . S_{a+n+\frac{1}{2}} \ldots .$, so ist $S_{a+\frac{1}{2}} = M_a$

[1]) *Théorie des probabilités*, Paris 1812.

$-M_{a+1}$, $S_{a+1+\frac{1}{2}}=M_{a+1}-M_{a+2}, \ldots . S_{a+n+\frac{1}{2}}=M_{a+n}-M_{a+n+1}$. Ferner sollen M'_a, $M'_{a+1} \ldots .$ die discontirten Zahlen der Lebenden und eben so $S'_{a+\frac{1}{2}}$, $S'_{a+1+\frac{1}{2}} \ldots .$ $S'_{a+x+\frac{1}{2}}$ die discontirten Zahlen der Gestorbenen bezeichnen, welche gegeben sind durch die Gleichungen $M'_a=M_a \cdot r^{-a}$, $M'_{a+1}=M_{a+1} \cdot r^{-(a+1)}$, $M'_{a+2}=M_{a+2} \cdot r^{-(a+2)}$, $M'_{a+n}=M_{a+n} \cdot r^{-(a+n)} \ldots .$ $S'_{a+\frac{1}{2}}=S_{a+\frac{1}{2}} \cdot r^{-(a+\frac{1}{2})} \ldots .$ $S'_{a+n+\frac{1}{2}}=S_{a+n+\frac{1}{2}} \cdot r^{-(a+n+\frac{1}{2})}$ u. s. w., wobei $r=1+\frac{c}{100}$ gesetzt ist, und c der Zinsfufs bedeutet. Um den gegenwärtigen Werth einer Leibrente von 1 Thlr. für Männer im Alter a zu berechnen, verfährt man nun wie folgt: Man sagt, wenn von den nach der Mortalitäts-Tabelle im Alter a lebenden M_a Personen jeder sogleich 1 Thlr. erhält, so macht dieses M_a Thaler. Von diesen leben im Anfange des 2ten Jahres noch M_{a+1}, wovon jeder wieder 1 Thlr. erhält, der aber gegenwärtig nur den Werth r^{-1} hat, macht $M_{a+1} r^{-1}$; ebenso erhalten die im Anfange des $x+1$sten Jahres noch Lebenden M_{a+x} jeder 1 Thlr., welche den gegenwärtigen Werth $M_{a+x} r^{-x}$ haben und so fort, bis keiner mehr lebt. Der summarische Betrag aller dieser Renten ist

$$=M_a+M_{a+1} \cdot r^{-1}+M_{a+2} \cdot r^{-2} \ldots . M_{a+x} \cdot r^{-x} \ldots .$$
$$=r^a\left[M'_a+M'_{a+1}+M'_{a+2} \ldots . M'_{a+x} \ldots .\right]$$
$$=r^a \sum_{\text{von } x=0}^{\text{bis } x=\infty} M'_{a+x}$$

wo das Summenzeichen sich auf alle Werthe von M' bezieht, in welchen für x die Zahlen 0, 1, 2, 3 ... bis zur äufsersten Grenze gesetzt werden. Diese äufserste Grenze kann aber $= \infty$ gesetzt werden, da von einem bestimmten Gliede ab alle folgenden $= 0$ sind. Soll nun jede der M_a Personen für die zu empfangenden Renten gleich anfänglich den Betrag ϱ erlegen, so erhält die Kasse $M_a \cdot \varrho$ Thaler, welche dem gegenwärtigen Werthe aller zu zahlenden Renten gleich sein sollen. Man hat daher die Gleichung

$$(1) \qquad \varrho = \frac{r_a \Sigma M'_{a+x}}{M_a} = \frac{\Sigma M'_{a+x}}{M'_a} \qquad \begin{matrix} \text{von } x = 0 \\ \text{bis } x = \infty \end{matrix}$$

und diese Zahl ϱ wird der Werth einer gleich anfangenden Leibrente für Männer im Alter a genannt.

Ist ferner der Werth einer Lebensversicherung von 1 Thlr. für eine $a$jährige Person, beim Tode derselben zahlbar, zu berechnen, so ist das Verfahren genau dasselbe. Von M_a Personen im Alter a sterben nach der Mortalitäts-Tabelle im $x+1$sten Jahre, wo x jede beliebige Zahl von 0 bis ∞ vorstellen kann, $S_{a+x+\frac{1}{2}}$. Diese erhalten jeder 1 Thlr. und da angenommen werden kann, dafs die Sterbefälle sich gleichmäfsig auf das Jahr vertheilen, die durchschnittliche Lebenszeit vom Alter a an also $x+\frac{1}{2}$ Jahre betragen hat, so hat jeder Thaler den gegenwärtigen Werth $r^{-(x+\frac{1}{2})}$. Der Werth aller zu zahlenden Lebensversicherungen ist daher

$$\Sigma S_{a+x+\frac{1}{2}} \cdot r^{-(x+\frac{1}{2})} = r^a \Sigma S'_{a+x+\frac{1}{2}}$$

und wenn dieser baare Werth von den M_a Personen gleichmäfsig und baar gedeckt werden soll, so hat jede zu zahlen

$$(2) \qquad v = \frac{r^a \Sigma S'_{a+x+\frac{1}{2}}}{M_a} = \frac{\Sigma S'_{a+x+\frac{1}{2}}}{M'_a} \quad \begin{array}{l}\text{von } x=0\\ \text{bis } x=\infty\end{array}$$

welches der Werth der Lebensversicherung von 1 Thaler ist.

Man müfste sehr befangen sein, wollte man in diesen Rechnungen eine Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung erblicken. Es sind nur Durchschnittsrechnungen, wie sie bei Anwendung des arithmetischen Mittels vorkommen, wobei angenommen wird, dafs die Angaben der Mortalitäts-Tabelle für eine beliebige Anzahl anfänglicher Personen gleichen Alters maafsgebend sind, oder in Zeichen, dafs wenn vom M_a Personen im Alter a nach n Jahren noch M_{a+n} leben, dann von N Personen desselben Alters angenommen wird, dafs nach n Jahren noch $N \cdot \frac{M_{a+n}}{M_a}$ am Leben sind. Es heifst dieses nichts anders, als dafs von verschiedenen Gesellschaften gleichen Alters die Zahl der nach n Jahren noch Lebenden mit der Anzahl der anfänglich Lebenden in gleichem Verhältnisse steht. Mit gleichem Rechte würde die Bestimmung des Einsatzes bei einer Lotterie von 1000 Loosen, welche in Summa 10000 Thlr. als Gewinne vertheilt, der Wahrscheinlichkeitsrechnung anheim gegeben werden müssen, während Jeder denselben augenblicklich auf 10 Thlr. feststellen wird, ohne die Resultate jener erst abzuwarten.

In gleicher Weise, wie an diesen Beispielen gezeigt ist, lassen sich aber alle Arten von Versicherungen, von

Prämien für Zeit-, Lebens- und Wittwenrenten, sei es aufgeschobene, aufhörende, fallende oder steigende Prämien u. s. w. berechnen, ohne die geringste Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, und man hat noch den Vortheil einer viel klareren Anschauung, insofern jedes der Rechnung Fremdartige vermieden wird. Wollte man z. B. die mittlere Ehe- oder Ueberlebensdauer berechnen von N anfänglichen Paaren, bei welchen die Männer in dem Alter a, die Frauen im Alter b stehen, so würde man, unter Zuhülfenahme einer Mortalitäts-Tabelle für Frauen, welche für die Alter b, $b+1$, $b+2 \ldots b+n$ die Angaben W_b, W_{b+1}, $W_{b+2} \ldots W_{b+n}$ enthalten möge, wie folgt verfahren. Nach n Jahren leben von den Männern noch $N \cdot \frac{M_{a+n}}{M_a}$ und es würden noch ebensoviel Paare vorhanden sein nebst $\frac{N}{M_a}(M_a - M_{a+n})$ Wittwen, wenn in diesem Zeitraum nicht auch Frauen gestorben wären. Da aber von W_b Frauen im Alter b nach n Jahren nur noch W_{b+n} am Leben sind, so leben von den $N \cdot \frac{M_{a+n}}{M_a}$ Ehefrauen noch

$$N \cdot \frac{M_{a+n}}{M_a} \cdot \frac{W_{b+n}}{W_b}$$

welches zugleich die Anzahl der noch vorhandenen Ehen ist, und die Zahl der noch lebenden Wittwen reducirt sich in demselben Verhältniſs auf

$$\frac{N}{M_a W_b}(M_a - M_{a+n})\, W_{b+n}$$

Ebenso erhält man die Anzahl der nach n Jahren lebenden Wittwer =

$$\frac{N}{M_a W_b} (W_b - W_{b+n}) M_{a+n}$$

und die Zahl der ausgestorbenen Paare

$$= \frac{N}{M_a W_b} (M_a - M_{a+n}) (W_b - W_{b+n})$$

Hieran aber schliefsen sich die Verbindungsdauer, Ueberlebensdauer, die Berechnung der Ehe- und Wittwenrente unmittelbar an.

Dadurch, dafs man die Theorie der Versicherungen auf Wahrscheinlichkeit gestützt hat, sind nun auch Begriffe entstanden, welche dieser letzteren angehören, wie wahrscheinliche Lebens-, Ehe- und Ueberlebensdauer, welche jedoch, so viel mir bekannt, keine Anwendung gefunden haben. Man hat sich damit begnügt, hierfür die Zahlenwerthe zu ermitteln und in Tabelle zu bringen.

2.

Nachdem ich glaube dargethan zu haben, dafs die Versicherungsrechnungen es mit der Wahrscheinlichkeit nicht zu thun haben, komme ich auf das Risiko zurück. Der Begriff mufs, wie eingangs schon hervorgehoben, aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung und zwar aus dem seit Anfang dieses Jahrhunderts durch Legendre, Gauss, Laplace und Andern cultivirtem Theile derselben, der

Methode der kleinsten Quadratsummen entnommen werden. Hier wird der Begriff des mittleren Fehlers aufgestellt, welcher als Maafs für die Gefahr angesehen wird, der man in einem einzelnen Falle sich aussetzt. Dieser mittlere Fehler ist die Quadratwurzel aus der Summe aller Fehlerquadrate, dividirt durch deren Anzahl, und die Fehlerquadrate selbst entstehen aus den Abweichungen aller einzelnen Fälle gegen den Durchschnitts- oder wahrscheinlichsten Werth. Bei den von Leben und Sterben abhängigen Versicherungen ist ebenfalls der Werth nach dem Durchschnitt berechnet, so dafs wenn alle Versicherte gestorben sind, abgesehen von den Zuschlägen für Verwaltungskosten, auf keiner Seite ein Ueberschufs vorhanden ist, wenn die Sterblichkeit den Mittelzahlen folgt, wie sie die Mortalitäts-Tabelle angiebt. Dieser Durchschnittswerth ist die sogenannte reine Prämie, welche entweder eine einmalige ist, oder in vorher stipulirten Terminzahlungen besteht. Nach der Mortalitäts-Tabelle lassen sich nun aber im voraus alle Abweichungen, oder die Gewinne und Verluste berechnen, welche durch das frühere oder spätere Absterben entstehen. Sämmtliche Abweichungen quadrirt, die Summe derselben durch ihre Anzahl dividirt und die Quadratwurzel davon genommen, ergeben den Werth für die mittlere Gefahr oder das Risiko für eine einzelne Versicherung. Zur näheren Erläuterung mögen hiervon einige Anwendungen gemacht werden.

3.

Eine Versicherungsbank habe für eine gleich anfangende Leibrente von 1 Thlr. den oben in (1) berechneten Betrag

$$\varrho = \frac{\Sigma M'_{a+x}}{M'_a}$$

baar erhalten und soll dafür im Anfange eines jeden Jahres an die zur Zeit noch Lebenden 1 Thlr. bezahlen. Die baaren Werthe dieser Zahlungen sind

$$1 + r^{-1} + r^{-2} + \ldots\ldots r^{-m} = \frac{1 - r^{-(m+1)}}{1 - r^{-1}}$$

wenn der Renteninhaber im $m+1$sten Jahre stirbt und also $m+1$ mal die Rente bezogen hat. Ist nun diese Summe $= \varrho$, so dafs die Anzahl der Jahre, welche der Renteninhaber noch gelebt hat, durch folgende Gleichung ausgedrückt ist:

$$(3) \qquad m = -\frac{\log(r + \varrho - r\varrho)}{\log r}$$

so hat die Kasse weder Vortheil noch Schaden. Für jeden andern Werth x von m hat die Kasse den Vortheil oder Schaden

$$(4) \qquad \varrho - \frac{1 - r^{-(x+1)}}{1 - r^{1}}$$

und zwar Vortheil, wenn dieser Ausdruck positiv ist, und Schaden, wenn der Minuend der kleinere ist. Die Anzahl von Personen, mit welchen dieser Vertrag abgeschlossen ist, ist gleichgültig, weshalb dafür M_a selbst genommen werden kann. Von diesen sterben nun im $x+1$sten Jahre nach Abschlufs des Vertrages $S_{a+x+\frac{1}{2}}$, bei welchen allen der oben berechnete Vortheil oder Schaden gemacht wird. Da nun x jede beliebige Zahl vorstellen kann, von 0 bis zur höchsten, so ist

$$\Sigma S_{a+x+\frac{1}{2}}\left(\varrho-\frac{1-r^{-(x+1)}}{1-r^{-1}}\right)^2 \qquad \begin{matrix}\text{von } x=0\\ \text{bis } x=\infty\end{matrix}$$

die Summe der Quadrate aller Abweichungen. Wird diese Summe durch die Anzahl aller Sterbefälle, oder was dasselbe ist, durch die Anzahl aller Versicherten M_a dividirt und die Quadratwurzel genommen, so erhält man das Risiko, welches mit $\mathfrak{R}$ bezeichnet sein mag

$$(5) \qquad \mathfrak{R}=\sqrt{\frac{\Sigma S_{a+x+\frac{1}{2}}}{M_a}\left(\varrho-\frac{1-r^{-(x+1)}}{1-r^{-1}}\right)^2}$$

In diesem Ausdrucke ist für x jede ganze Zahl von 0 bis zur höchsten zu setzen, wodurch alle einzelnen Summanden hervorgehen. Diese Summe ist bezüglich ϱ ein Minimum, welches leicht dadurch bewiesen werden kann, dafs, wenn man ϱ als variabel gedacht so bestimmt, dafs die Quadratsumme ein Minimum wird, der oben in (1) gegebene Werth von ϱ hervorgeht. Zu dem Ende mufs die Ableitung nach ϱ, $=0$ gesetzt werden, nämlich

$$\frac{d\Sigma}{d\varrho}\frac{S_{a+x+\frac{1}{2}}}{M_a}\left(\varrho-\frac{1-r^{-(x+1)}}{1-r^{-1}}\right)^2=0$$

woraus $$\Sigma S_{a+x+\frac{1}{2}}\left(\varrho - \frac{1-r^{-(x+1)}}{1-r^{-1}}\right) = 0$$

oder

$$\varrho \Sigma S_{a+x+\frac{1}{2}} = \Sigma S_{a+x+\frac{1}{2}} \cdot \frac{1-r^{-(x+1)}}{1-r^{-1}}$$

Es ist aber

$$\varrho \Sigma S_{a+x+\frac{1}{2}} = \varrho M_a$$

und
$$\begin{aligned}\Sigma S_{a+x+\frac{1}{2}} \frac{1-r^{-(x+1)}}{1-r^{-1}} = & \; S_{a+\frac{1}{2}} \\ & + S_{a+1+\frac{1}{2}}(1+r^{-1}) \\ & + S_{a+2+\frac{1}{2}}(1+r^{-1}+r^{-2}) \\ & + S_{a+3+\frac{1}{2}}(1+r^{-1}+r^{-2}+r^{-3}) \\ & + \ldots\ldots\ldots \\ & + S_{a+x+\frac{1}{2}}(1+r^{-1}+r^{-2}+\ldots r^{-x}) \\ & + \ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

welche Reihe so weit fortzusetzen ist, bis die S der 0 gleich werden. Summirt man nun diese Reihe in vertikalem Sinne, so ist die erste Vertikalreihe

$$S_{a+\frac{1}{2}} + S_{a+1+\frac{1}{2}} + \ldots S_{a+x+\frac{1}{2}} + \ldots = M_a$$

die zweite

$$r^{-1}(S_{a+1+\frac{1}{2}} + S_{a+2+\frac{1}{2}} + \ldots S_{a+x+\frac{1}{2}} + \ldots) = r^{-1} M_{a+1}$$

die dritte $\qquad = r^{-2} M_{a+2}$ etc.

die $x+1$ste $\qquad = r^{-x} M_{a+x}$

so daſs man erhält

$$\Sigma S_{a+x+\frac{1}{2}} \frac{1-r^{-(x+1)}}{1-r^{-1}} = M_a + r^{-1} M_{a+1} + \ldots r^{-x} M_{a+x} + \ldots$$

Diese Summe zur Rechten kann aber auch so geschrieben werden

$$r^a \left[M'_a + M'_{a+1} + \ldots M'_{a+x} + \ldots\right] = r^a \Sigma M'_{a+x}$$

Die Gleichung für das Minimum geht daher über in

$$\varrho M_a = r^a \Sigma M'_{a+x}$$

woraus für ϱ derselbe Ausdruck wie in (1) folgt, nämlich:

$$\varrho = \frac{\Sigma M'_{a+x}}{M'_a}$$

so dafs die unter dem Wurzelzeichen vorkommende Summe der Quadrate in der That ein Minimum ist, wie sich auch aus andern Gründen erwarten liefs.

4.

Um auch einen numerischen Ueberblick zu gewinnen, will ich das Risiko der Lebensrente für einige Altersstufen berechnen und dabei die Mortalitäts-Tabelle, welche Heym[1]) mit vieler Umsicht aus den Brune'schen Beobachtungen, angestellt bei der Allgemeinen Wittwenverpflegungs-Anstalt zu Berlin, abgeleitet hat, verbunden mit einem Zinsfufs von 4 % zum Grunde legen. Die Rechnung selbst darf ich wohl übergehen, da ich später darauf zurückkomme und will nur vorläufig bemerken, dafs die Berechnung des Ausdrucks (5) neben den Summen der Le-

[1]) Masius Rundschau Band IV, pag. 289.

benden und discontirten Zahlen der Lebenden und Sterbenden, die ohnedem gebraucht werden, noch eine besondere Summation erfordert, woraus dann die Werthe für die verschiedenen Altersstufen ziemlich leicht hervorgehen. Sie sind in nachstehendem Täfelchen für Männer, in welchem a das Alter, ϱ den Werth einer gleich beginnenden Lebensrente von 1 Thlr., oder was dasselbe ist, den Werth einer jährlichen Pränumerando-Zahlung von 1 Thlr. und $\mathfrak{R}$ das Risiko bezeichnen, zusammengestellt.

a	ϱ	$\mathfrak{R}$
25	18,467	5,168
30	17,160	5,142
35	16,565	5,206
40	15,417	5,204
45	14,159	5,141
50	12,753	5,015
55	11,235	4,817
60	9,664	4,540
65	8,101	4,176
70	6,694	3,656
75	5,329	2,982
80	3,957	2,237

Der Gang der Werthe für das Risiko zeigt sich im Allgemeinen abnehmend bei zunehmendem Alter, in Prozenten von ϱ ausgedrückt jedoch zunehmend.

Soll das Risiko für aufgeschobene oder aufhörende, oder für aufgeschobene und aufhörende Leibrenten berechnet werden, so bleibt die Formel (5) dieselbe, nur dafs die Summation zwischen andern Grenzen zu bewirken ist. Soll z. B. die Rente nach b Jahren zum erstenmal und nach $c-1$ Jahren zum letztenmal, also überhaupt $c-b$mal gezahlt werden, so ist der Werth derselben

$$\varrho_{c-b} = \frac{\Sigma M'_{a+x}}{M'_a} \qquad \begin{matrix} \text{von } x=b \\ \text{bis } x=c \end{matrix}$$

und das Risiko ist

$$\sqrt{\Sigma \frac{S_{a+x+\frac{1}{2}}}{M_a} \left(\varrho - \frac{1-r^{-(x+1)}}{1-r^{-1}}\right)^2}$$

wo die obere Grenze b ist, die untere c. Die numerische Auswerthung bleibt ebenfalls dieselbe und die zur Berechnung von (5) gemachten Summationen finden auch hier Anwendung.

Vergebens suchen wir nach einer Vergleichung bezüglich dieser Resultate mit Andern. Tetens [1]) macht so viele Unterscheidungen und hat so viele Arten von Risikos, dafs er jeden beliebigen ihm convenirenden Werth finden kann. Andere, wie Florencourt [2]), Littrow [3]), Baily [4]), Jones [5]) beschäftigen sich gar nicht damit.

---

[1]) Am angeführten Orte.

[2]) Abhandlungen aus der juristischen Rechenkunst Altenburg 1781.

[3]) Lebensversicherungen und Versorgungs-Anstalten. Wien 1832.

[4]) *The Doctrine of Life Annuities and Assurances.* London 1813.

[5]) *On the value of Annuities and Reversionary Payments.* London 1843.

Raedell[1]) scheint der Ansicht zu sein, dafs das Risiko dem Mittelwerth aus allen zu erwartenden Verlusten gleich zu setzen sei, den Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung entgegen; denn dieser Grundsatz wird zwar ausgesprochen aber nicht durchgeführt, insofern für den Ankauf und Verkauf derselben Versicherung das Risiko verschieden gefunden wird, während doch bei jeder Versicherung die baaren Werthe aller möglichen Verluste den möglichen Gewinnen in Summa gleich sind. Es darf aber nicht befremden, dafs Widersprüche hervortreten, wo die Induction die Stelle der mathematischen Begründung vertreten soll. Nur die mathematische Behandlung ist im Stande, da wo sie sich einmal des Gegenstandes bemächtigt hat, die Consequenzen richtig zu ziehen und sie kann um so weniger entbehrt werden, wenn der innere Zusammenhang der Sache ein versteckter ist. Es nützt wenig, wenn die Wahrscheinlichkeitsrechnung mit besonderer Vorliebe da in den Vordergrund gestellt wird, wo es sich einfach um das arithmetische Mittel handelt, und sie vernachlässigt, wenn ihre Anwendung eigentlich erst beginnen sollte; denn das arithmetische Mittel ist zwar ein Ausflufs der Methode der kleinsten Quadratsummen, aber noch lange nicht diese selbst, eben so wenig, als die Kepplerschen Gesetze, obgleich lange vorher bekannt, das Gravitationsgesetz sind, wenn sie auch darin ihre Begründung finden.

---

[1]) Lebensfähigkeit von Versicherungs-Anstalten. Berlin 1857.

§. 5.

Obgleich es nicht die Absicht ist, für alle Zweige der Versicherung specielle Formeln zur Berechnung des Risikos hinzustellen, wodurch leicht die gegenwärtige Abhandlung zu einem starken Bande anwachsen könnte, so dient es doch vielleicht zur besseren Erläuterung des eingeschlagenen Verfahrens, wenn dasselbe auch auf eine andere vorzugsweise häufig zur Anwendung kommende Versicherung speciell angewendet wird, nämlich auf die einfache Lebensversicherung.

Der Werth einer solchen Lebensversicherung ist oben, in Gleichung (2) zu

$$v = \frac{\Sigma S'_{a+n+\frac{1}{2}}}{M'_a}$$

berechnet. Es sterben aber von M_a Personen im Alter a, welche diese Lebensversicherung für den Ankaufspreis v erworben haben, im $m+1$sten Jahre nach Abschlufs dieser Verträge $S_{a+m+\frac{1}{2}}$ Personen, an welche die Versicherung 1 zu zahlen ist. Werden diese Versicherungen wieder für $m+\frac{1}{2}$ Jahre zurückdiscontirt, so erhält man den gegenwärtigen Werth

$$S_{a+m+\frac{1}{2}} \cdot r^{-(m+\frac{1}{2})} = r^a S'_{a+m+\frac{1}{2}}$$

Hierfür hat die Kasse erhalten

$$v \cdot S_{a+m+\frac{1}{2}}$$

und der Nutzen oder Schaden, den sie bei diesen im $m+1$sten Jahre Sterbenden macht, ist daher

$$S_{a+m+\frac{1}{2}}\left(v - r^{-(m+\frac{1}{2})}\right)$$

und zwar Nutzen oder Schaden, je nachdem dieser Ausdruck positiv oder negativ ist. Setzt man für m alle Werthe von 0 bis zur höchsten Altersstufe, oder was dasselbe ist, von 0 bis ∞ und addirt alle so entstehenden Summanden, so wird die Summe $= 0$. Nimmt man aber die Summe der Quadrate und dividirt solche durch ihre Anzahl, so giebt die Quadratwurzel aus diesem Quotienten das Risiko, welches mit $\mathfrak{R}'$ bezeichnet sein mag, nämlich

$$(6) \qquad \mathfrak{R}' = \sqrt{\Sigma \frac{S_{a+x+\frac{1}{2}}}{M_a}\left(v - r^{-(x+\frac{1}{2})}\right)^2}$$

wo x an die Stelle von m geschrieben ist, mit den Grenzen von $x = 0$ bis $x = \infty$.

Von diesem Ausdrucke läſst sich in derselben Weise, wie es bei (5) geschehen ist, zeigen, daſs er bezüglich v ein Minimum ist. Auch die numerische Auswerthung kann auf die zu (5) erforderlich gewesenen Summationen zurückgeführt werden, wobei ich mich indeſs hier nicht länger aufhalten, sondern nur zur Illustration der Formel die Resultate hersetzen will, welche ich aus einer kleinen Rechnung erhalten habe, unter Zugrundelegung derselben Mortalitäts-Tabelle und desselben Zinsfuſses. Sie sind in nachstehendem Täfelchen enthalten, wo a das Alter bedeutet, in welchem die Versicherung erworben wird, v den Werth oder die Ankaufsprämie für eine Versicherung von 1 Thlr. und $\mathfrak{R}'$ das Risiko

a	*v*	$\mathfrak{R}'$
25	0,28872	0,20469
30	0,32267	0,20367
35	0,36414	0,20616
40	0,40965	0,20610
45	0,45957	0,20367
50	0,51497	0,19862
55	0,57511	0,19079
60	0,63736	0,17980
65	0,69933	0,16541
70	0,75520	0,14481
75	0,80958	0,11811
80	0,86472	0,08860

Der Anblick dieses Täfelchen zeigt, daſs Lebensversicherungen, welche gegen Erlegung des baaren Werthes erworben werden, der Kasse ein viel gröſseres Risiko auferlegen, wenn die Personen jung sind, als im höheren Alter, auch dann noch, wenn das Risiko in Procentsätzen des Werths der Versicherung ausgedrückt wird.

6.

Wird eine Lebensversicherung von 1 Thlr. gegen eine jährlich pränumerando zu zahlende Prämie auf Lebenszeit erworben, und ist die Prämie $= p$, so ist deren Werth $= \varrho p$, weil nach (1) der Werth einer solchen Prämie von

1 Thlr. $= \varrho$ ist. Und da v der Werth der Versicherung ist, so hat man zur Bestimmung der Prämie p die Gleichung

$$(7) \qquad \varrho p = v \quad \text{oder} \quad p = \frac{v}{\varrho}$$

Von M_a Personen im Alter a sterben im $m+1$sten Jahre $S_{a+m+\frac{1}{2}}$ Personen, von welchen jeder $m+1$mal die Prämie p gezahlt hat. Der gegenwärtige Werth dieser Zahlungen ist

$$p\left[1+r^{-1}+r^{-2}+r^{-3}+\ldots r^{-m}\right]=p\,\frac{1-r^{-(m+1)}}{1-r^{-1}}$$

Dagegen ist der Werth der hiergegen zu zahlenden Versicherung 1, auf $m+\frac{1}{2}$ Jahr rückwärts discontirt

$$= r^{-(m+\frac{1}{2})}$$

und der durchschnittliche Gewinn oder Verlust bei jedem dieser im $m+1$sten Jahre Sterbenden

$$= p\,\frac{1-r^{-(m+1)}}{1-r^{-1}} - r^{-(m+\frac{1}{2})}$$

Hieraus ergiebt sich das Risiko bei dieser Art von Versicherung, wenn solches mit $\mathfrak{R}''$ bezeichnet wird

$$(8) \qquad \mathfrak{R}'' = \sqrt{\Sigma\,\frac{S_{a+x+\frac{1}{2}}}{M_a}\left(p\,\frac{1-r^{-(x+1)}}{1-r^{-1}} - r^{-(x+\frac{1}{2})}\right)^2}$$

Die numerische Berechnung giebt für die verschiedenen Altersstufen a, in welchen die Versicherung erworben wird, die in folgendem Täfelchen mit p zusammengestellten Werthe von $\mathfrak{R}''$

a	p	$\mathfrak{R}''$
25	0,01563	0,28544
30	0,01832	0,29780
35	0,02198	0,32055
40	0,02657	0,34428
45	0,03246	0,37035
50	0,04038	0,40110
55	0,05119	0,43732
60	0,06595	0,47914
65	0,08632	0,52581
70	0,11282	0,55712
75	0,15193	0,57080
80	0,21856	0,57669

7.

Es möge genügen, an diesen drei Arten von Versicherungen nachgewiesen zu haben, wie das Risiko in jedem Falle berechnet werden kann. Das Verfahren ist immer ein ähnliches und kann leicht auf Versicherungen, die von dem Zusammenleben mehrerer Personen abhängen, ausgedehnt werden, da das Princip dasselbe ist. Einige Schwierigkeit dürfte mitunter die Reduction der Ausdrücke für das Risiko auf bestimmte Summationen machen, welches Geschäft man ihre Integration nennen könnte, die aber erforderlich ist, wenn man eine von x unabhängige Formel haben und nicht genöthigt sein will, für jedes Alter besonders eine mühsame numerische Summation zu machen. Auch würde, wenn man sich mit den Gleichungen (5), (6) und (8) begnügen wollte, der analytische Zusammenhang der Formeln gänzlich verloren gehen, insofern derselbe hier, wo bei den verschiedenen Arten von Versicherungen der Ausdruck für das Risiko sich wesentlich verschieden gestalten kann, wie nicht zu läugnen ist, versteckter liegt, als bei den Versicherungsrechnungen selbst. Hierüber sollen weiter unten, soweit es sich mit unserem Zwecke vereinigen läfst, noch einige Andeutungen gegeben werden.

8.

Bisher ist nur für die Rente 1 und für die Lebensversicherung 1 das Risiko berechnet. Ist aber letzteres mit $\mathfrak{R}$ bezeichnet, und der baare Werth der Rente mit ϱ, so hat man, wenn R die jährliche Rente sein soll, ihren baaren Werth $= \varrho R$ und das Risiko $= \mathfrak{R} R$ zu setzen. Ebenso erhält man, wenn statt 1, V die Lebensversicherung ist, deren Ankaufspreis $= v V$, mit dem Risiko $\mathfrak{R}' V$, und die Jahresprämie $= p V$, mit dem Risiko $= \mathfrak{R}'' V$. Dieses folgt unmittelbar daraus, dafs alle berechneten baaren Werthe sowohl als die Gewinne und Verluste immer der Gröfse der Versicherungs-Summen selbst oder der Rente proportional sind. Hat man daher für die Versicherung 1 die nöthigen Tabellen entworfen, woraus für jedes Alter die gesuchten Werthe entnommen werden können, so brauchen diese letzteren nur mit der Höhe der Versicherung multiplicirt zu werden, um die entsprechenden Zahlen zu erhalten. Wollte z. B. eine Versicherungsbank an eine 35jährige Person die lebenslängliche Rente von 200 Thlr. verkaufen, so würde sie sich dafür den in 4. für ϱ angegebenen Werth 200mal zahlen lassen, nämlich $200 \times 16{,}565 = 3313$ Thlr., und das Risiko, welches die Bank übernimmt, würde $200 \times 5{,}206 = 1041$ Thlr. sein. Für eine Lebensversicherung von 1200 Thlr. an eine 35jährige Person würde sich die Bank entweder $v\,V = 1200 \times 0{,}36414 = 437$ Thlr. baar einzahlen lassen, oder eine jährliche pränumerando zu zahlende Prämie auf Lebenszeit von $p\,V = 1200 \times 0{,}02198 = 26{,}376$ Thlr. zur Bedingung machen, und das von der Bank übernommene Risiko würde beziehungsweise $1200 \times 0{,}206 = 247$ oder $1200 \times 0{,}321 = 385$ Thlr. sein, nach 5. und 6.

9.

Hat die Bank mehrere Versicherungen gleichzeitig übernommen und bezeichnet man die für jede Versicherung einzeln nach 4., 5. und 6. zu berechnenden Risikos mit $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3 \ldots . \mathfrak{R}_\mu$, das Gesammtrisiko mit $\mathfrak{R}_0$, so hat man nach den Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung

$$(9) \qquad \mathfrak{R}_0 = \sqrt{\mathfrak{R}_1^2 + \mathfrak{R}_2^2 + \mathfrak{R}_3^2 + \ldots \mathfrak{R}_\mu^2}$$

Dieses Gesammtrisiko mufs durch das Grundkapital der Versicherungsbank gedeckt sein, als eine Garantie sowohl den Versicherten gegenüber, als auch um den Geschäften der Bank einen gleichmäfsigen ungestörten Gang zu sichern. Die Bedingungen der Gegenseitigkeit, welche häufig die Stelle des Grundkapitals vertreten, haben den Nachtheil, dafs bei ungünstigen Conjuncturen die Anforderungen an die Versicherten zu hoch gespannt werden müssen, wogegen ein zu grofses Grundkapital Verluste herbeiführen kann, welche in dem Versicherungs-Geschäft selbst nicht begründet sind. Beides aber kann den Versicherten zum gröfsten Nachtheile gereichen, ja sogar den Ruin der Gesellschaft herbeiführen. Wenn wir daher häufig sehen, wie die eine Gesellschaft die Höhe ihres Grundkapitals als eine besondere Empfehlung für sich in Anspruch nimmt, eine andere in der Gegenseitigkeit die gröfste Bürgschaft und Heil zu finden glaubt, so kann dieses bei uns nur die Vermuthung erwecken, dafs irgendwo eine Täuschung zu Grunde liegt, entweder eine beabsichtigte oder aus Unkenntnifs herbeigeführte. Zur Ehre der Sache und der Versicherungs-Gesellschaften wollen wir das letztere annehmen, da in der That das Verhältnifs, in welchem das Grundkapital zu dem Umfang der Geschäfte stehen mufs, meines Wissens bisher nicht Gegenstand einer erschöpfenden Untersuchung gewesen ist. Eine besondere Wichtigkeit gewinnt dieser Gegenstand für die Aufsichtsbehörde, welche vor Ertheilung der Concession sich die Ueberzeugung von der Lebensfähigkeit zu verschaffen, also auch die Höhe des Grundkapitals in gründliche Erwägung zu ziehen hat. Nur wenn alle Faktoren im richtigen Einklange stehen, läfst sich eine gedeihliche Wirksamkeit erwarten.

10.

Angenommen, eine Versicherungs-Gesellschaft übernehme Versicherungen auf Leben nur bis zur Höhe von 2000 Thlr. und decke sich für alle höheren Summen durch Rückversicherungen, so dafs einschliefslich der niedrigen Summen 1200 Thlr. als der durchschnittliche Betrag einer Versicherung angesehen werden könne. Es soll die Höhe des zur Deckung des Risikos erforderlichen Grundkapitals angegeben werden, wenn 10000 solcher Versicherungen abgeschlossen sind. Nimmt man 35 Jahr als das durchschnittliche Alter der Versicherten an, so ist nach 8. das Risiko der einzelnen Versicherung bei Prämienzahlung 385 Thlr. Die Formel (9) giebt alsdann, da alle $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ .... einander gleich und $= 385$ sind, das Gesammtrisiko

$$\mathfrak{R}_0 = \sqrt{10000 \cdot (385)^2} = 38500 \text{ Thlr.}$$

Wären aufser diesen noch 5000 ähnliche Versicherungen gegen Erlegung des baaren Werths gemacht, für welche nach (8) das Risiko $= 247$ Thlr. ist, so würde hiermit ein Risiko von

$$\mathfrak{R}_0 = \sqrt{5000 \cdot (247)^2} = 17466 \text{ Thlr.}$$

verbunden sein.

Für 1000 Rentenversicherungen à 200 Thlr. an 35jährige Personen gegen Erlegung des baaren Werths, für deren jede in 8. das Risiko zu 1041 Thlr. berechnet ist, ergiebt die Formel das Risiko

$$\mathfrak{R}_0 = \sqrt{1000 \cdot (1041)^2} = 41443 \text{ Thlr.}$$

Und wenn alle diese Versicherungen bei derselben Bank gemacht wären, so würde das Gesammtrisiko sich auf

$$\mathfrak{R}_0 = \sqrt{10000 \cdot (385)^2 + 5000\,(247)^2 + 1000\,(1041)^2}$$

berechnen, welches $= 53582$ beträgt, bei einem Versicherungsobject von über 21 Millionen.

Hätte dagegen eine Versicherungsbank an 45jährige Personen 1000 Versicherungen zu 10000 Thlr. und 550 Versicherungen zu 20000 Thlr., sämmtlich gegen jährliche Prämien gemacht, so würde das Versicherungsobject beinahe dasselbe sein, das Risiko aber ein beträchtlich verschiedenes. Für eine Versicherung der ersten Art ist nämlich das Risiko $= 10000 \times 0{,}370 = 3700$ Thlr., und für die zweite Art $= 20000 \times 0{,}370 = 7400$ Thlr., das Gesammtrisiko daher

$$= \sqrt{1000 \times (3700)^2 + 550 \times (7400)^2} = 209300 \text{ Thlr.,}$$

oder beiläufig viermal so groſs, als im vorigen Falle.

Ueberhaupt wird das Risiko um so höher, auf je weniger Personen die versicherte Summe sich vertheilt, und steigt zuletzt, wenn alles an eine Person versichert ist, auf 37 $\frac{0}{0}$ der versicherten Summe, die Person zu 45 Jahr alt angenommen.

Es darf hierbei nicht unbemerkt bleiben, dafs das in dem Bisherigen der Erörterung unterzogene Risiko nur aus den Zufälligkeiten, die im Leben und Sterben der Versicherten eintreten können und jedenfalls eintreten werden, herrührt. Ein anderes Risiko übernimmt die Bank dadurch, dafs sie voraussetzt, ihre Kapitalien immer zu dem Zinsfufs verwerthen zu können, welcher den Rechnungen zum Grunde liegt. Es läfst sich aber auch dieses Risiko aus den erfahrungsmäfsig vorkommenden Schwankungen des Zinsfufses ableiten, welches jedoch nicht der Zweck dieser Schrift ist und daher unberücksichtigt bleiben mufs.

11.

Obgleich im Bisherigen die Principien, wie ich glaube, ziemlich klar dargelegt sind, nach welchen das Risiko bei Lebensversicherungen sich richtet, so dürfte es doch für diejenigen, welche sich specieller damit beschäftigen und selbst Rechnungen anstellen wollen, nicht überflüssig sein, wenn über die Integration der Ausdrücke (5), (6) und (8) noch einige Andeutungen hinzugefügt werden. Die Schwierigkeit besteht meistens immer darin, dafs man die gesuchte Form, welche zur numerischen Auswerthung die bequemste sein soll, im Voraus nicht kennt, und man daher auf ein unbestimmtes Analysiren des vorliegenden Ausdrucks verwiesen ist, um zunächst den innern Zusammenhang näher zu erforschen. Ist dieser erkannt und sind alle Beziehungen der eingeführten Begriffe zu einander klar dargelegt, so kann man mit gröfserer Bestimmtheit darüber urtheilen, welches die einfachsten Formen sind. Es wird daher nöthig sein, von den ersten Begriffen auszugehen.

Alle Rechnungen stützen sich auf die Mortalitäts-Tabelle, von welcher vorausgesetzt wird, dafs sie die Sterblichkeit richtig darstellt, oder mathematisch aufgefafst, dafs die darin enthaltenen Zahlen die Mittelwerthe aus einer sehr grofsen Anzahl von Beobachtungen sind. Diese Zahlen, welche mit M_a, M_{a+1}, $M_{a+2}, \ldots . M_{a+x} \ldots .$ bezeichnet sein mögen, stellen die von einer Anzahl M_0 gleichzeitig Geborner in den Altern a, $a+1$, $a+2 \ldots a+x$ noch Lebenden dar, und sie sind es, welche als Verhältnifszahlen auf jede beliebige gegebene andere Zahl N_a von Personen im Alter a angewendet werden. Man sagt z. B., es leben von N_a Personen nach x Jahren noch $N_a \cdot \frac{M_{a+x}}{M_a}$, unbekümmert darum, dafs dieses nur eine geringe Wahrscheinlichkeit hat, und zwar eine um so geringere, je kleiner N ist; aber man hat nicht die Absicht, sich mit der Wahrscheinlichkeit zu beschäftigen, sondern nur mit den Consequenzen der Zahlen der Mortalitäts-Tabelle, welche daher auch nur für eine unendlich grofse Anzahl von Personen Gültigkeit haben, so dafs der eben gezogene Schlufs nur richtig ist für $N = \infty$. Auf die Geldverhältnisse wird die Rechnung mit Zinseszinsen angewendet, wonach, wenn c jährlich vom 100 gezahlt werden, und $r = 1 + \frac{c}{100}$ gesetzt wird, 1 Thlr. nach x Jahren zur Summe r^x anwächst. Wird halbjährlich $\frac{1}{2}c$ oder vierteljährlich $\frac{1}{4}c$ gezahlt, so hat r einen andern Werth, nämlich im ersten Falle $= \left(1 + \frac{c}{200}\right)^2$, im andern $= \left(1 + \frac{c}{400}\right)^4$. Hiernach hat 1 Thlr., der erst nach x Jahren zu zahlen oder zu empfangen ist, den gegenwärtigen Werth r^{-x}, und ein Kapital A würde unter gleichen Umständen den Werth $A \cdot r^{-x}$ haben. Haben nun M_a Personen, die das Alter a haben, bis an ihren Tod jeder zu Anfang eines jeden Jahres, wo sie noch am Leben sind, 1 Thlr. zu zahlen, so macht dieses im Anfange des ersten Jahres M_a, im Anfange des zweiten M_{a+1}, im Anfange des dritten M_{a+2} etc., im Anfange des $x+1$sten, welches jedes beliebige sein kann, M_{a+x}, und der gegenwärtige Werth aller dieser Zahlungen ist

$$M_a + M_{a+1}\,r^{-1} + M_{a+2}\,r^{-2} + \ldots\ldots M_{a+x}\,r^{-x} + \ldots\ldots$$

welche Reihe so weit fortzusetzen ist, als die Mortalitäts-Tabelle noch Zahlen nachweist. Setzt man nun für jeden Werth von x, $M_{a+x} \cdot r^{-(a+x)} = M'_{a+x}$, so geht durch Substitution die Reihe in folgende über

$$r^a\left[M'_a + M'_{a+1} + \ldots\ldots M'_{a+x} + \ldots\ldots\right] = r^a \Sigma M'_{a+x}$$

wo das Summenzeichen sich auf alle M' bezieht, in welchen 1, 2, 3 .... an die Stelle von x gesetzt ist, und welche Reihe so weit auszudehnen ist, bis die Glieder 0 werden, so daſs man die obere Grenze von $x = \infty$ nehmen kann. Alle diese Summen sind leicht ein- für allemal auszurechnen und in Tabelle zu bringen, aus welcher dann jede mit dem Argument a entnommen werden kann; das unbestimmte x ist daraus verschwunden. Wird die Summe $r^a \Sigma M'_{a+x}$ durch die anfängliche Anzahl M_a dividirt, so erhält man den Durchschnitt oder das arithmetische Mittel aus den von jeder Person geleisteten Zahlungen, welches man den Werth einer gleich anfangenden Leibrente nennt, nämlich

$$\varrho = \frac{\Sigma M'_{a+x}}{M'_a}$$

dieses ist die Gleichung (1).

Ingleichen sollen von M_a Personen im Alter a, die bei ihrem Eintritt v Thlr. zur Kasse zahlen, jeder bei seinem Tode 1 Thlr. erhalten. Es sterben aber im $a + x + 1$sten Jahre $M_{a+x} - M_{a+x+1}$, welche Differenz mit $S_{a+x+\frac{1}{2}}$ bezeichnet wird, und da diese von ihrem Eintritt an noch durchschnittlich $x + \frac{1}{2}$ Jahre gelebt haben, so hat die zu leistende Zahlung den gegenwärtigen Werth

$$S_{a+x+\frac{1}{2}} \cdot r^{-(x+\frac{1}{2})} = r^a S'_{a+x+\frac{1}{2}}$$

Giebt man dem x alle Werthe von 0 bis ∞ und summirt, so erhält man den Werth aller zu leistenden Zahlungen, welcher den Einlagen gleich sein soll, daher

$$M_a \cdot v = r^a \Sigma S'_{a+x+\frac{1}{2}}$$

oder $$v = \frac{\Sigma S'_{a+x+\frac{1}{2}}}{M'_a}$$

welches die Gleichung (2) ist und der Werth einer Lebensversicherung von 1 Thlr. genannt wird. Dieses v ist also der durchschnittliche Werth des an jeden Sterbenden zu zahlenden Thalers. Die Summen $\Sigma S'_{a+x+\frac{1}{2}}$ können leicht ein- für allemal berechnet und mit dem Argument a in Tafel gebracht werden. Soll die Lebensversicherung im Contributionsfuſs gegen jährliche Prämie p erworben werden, so hat nach (1) dieselbe den summarischen Werth $= p r^a \Sigma M'_{a+x}$, welcher dem vorigen $r^a \Sigma S'_{a+x+\frac{1}{2}}$ gleich sein soll, so daſs man hat

(10) $$p = \frac{\Sigma S'_{a+x+\frac{1}{2}}}{\Sigma M'_{a+x}}$$

Aus diesen drei Gleichungen (1), (2) und (10) lassen sich nun sogleich neue Gleichungen ableiten, welche den Zusammenhang zwischen ϱ, v, p und r nachweisen.

12.

Substituirt man für $\Sigma S'_{a+x+\frac{1}{2}}$ aus (10) den Werth in die Gleichung (2), so erhält man

$$\frac{v}{p} = \frac{\Sigma M'_{a+x}}{M'_a}$$

welcher Ausdruck nach (1) $= \varrho$ ist. Daher die Gleichung

(11) $$v = p\varrho$$

in welcher v, p und ϱ sich auf dasselbe Alter beziehen.

Da ferner

$$S'_{a+x+\frac{1}{2}} = \frac{M_{a+x} - M_{a+x+1}}{r^{a+x+\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{r^{a+x} M'_{a+x} - r^{a+x+1} M'_{a+x+1}}{r^{a+x+\frac{1}{2}}} = r^{-\frac{1}{2}} M'_{a+x} - r^{\frac{1}{2}} M'_{a+x+1}$$

so hat man

$$\Sigma S'_{a+x+\frac{1}{2}} = r^{-\frac{1}{2}} \Sigma M'_{a+x} - r^{\frac{1}{2}} \Sigma M'_{a+x+1}.$$

Es ist aber

$$\Sigma M'_{a+x+1} = \Sigma M'_{a+x} - M'_a$$

daher

(12) $$\Sigma S'_{a+x+\frac{1}{2}} = (r^{-\frac{1}{2}} - r^{\frac{1}{2}}) \Sigma M'_{a+x} + r^{\frac{1}{2}} M'_a$$

Diese Gleichung drückt den Zusammenhang der Summen $\Sigma S'$ und $\Sigma M'$ zu einander aus. Wird dieser Ausdruck für $\Sigma S'_{a+x+\frac{1}{2}}$ in die Gleichungen (2) und (10) substituirt, so erhält man, unter Berücksichtigung der Gleichung (1)

(13) $$v = r^{\frac{1}{2}} - (r^{\frac{1}{2}} - r^{-\frac{1}{2}})\varrho \text{ und}$$

(14) $$p = \frac{r^{\frac{1}{2}}}{\varrho} - (r^{\frac{1}{2}} - r^{-\frac{1}{2}})$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen lassen sich die v und p aus der Leibrente ϱ ableiten, so daſs die Berechnung der S' und deren Summation überflüssig wird. Da aber v und p vermöge der Gleichungen (13) und (14) durch Differenzen ausgedrückt werden, so wird man doch entweder die Formeln (2) und (10) vorziehen, oder ϱ mit mehr Decimalstellen, als sonst erforderlich wäre, berechnen, damit die v und p mit der gewünschten Schärfe sich ergeben.

Aus (13) erhält man noch

$$(15) \qquad r^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\varrho - 1}[\sqrt{\varrho(\varrho - 1) + \tfrac{1}{4}v^2} - \tfrac{1}{2}v$$

wodurch der Zinsfuſs sich berechnen läſst, wenn für ein beliebiges Alter der Werth der Leibrente $= \varrho$ und der der Lebensversicherung $= v$ gegeben sind. Wäre z. B. bekannt, daſs nach irgend einer Mortalitäts-Tabelle der Werth der Leibrente für eine 40jährige Person zu 15,417 sich ergeben hätte, und die Lebensversicherung zu 0,40965, so hätte man folgende Rechnung zu machen:

$\log \varrho$	1,18800	$\sqrt{\ldots}$	$= 14{,}9100$
$\log \varrho - 1$	1,15888	$\frac{1}{2}v$	$= 0{,}2048$
$\log \frac{1}{2}v$	9,31139	log diff.	1,16748
$\varrho(\varrho - 1)$	222,270	$\log(\varrho - 1)$	1,15888
$\frac{1}{4}v^2$	0,042	$\log r^{\frac{1}{2}}$	0,00860
log	2,34696	$r^{\frac{1}{2}}$	1,02000

Man erhält also $r^{\frac{1}{2}} = 1{,}02$ oder den halbjährlichen Zinsfuſs $= 2\,\frac{0}{0}$, welcher in der That den Rechnungen in 4. und 5. zu Grunde gelegt ist. Will man die etwas weitläufige Rechnung vermeiden, so kann man statt der (15) folgende Näherungsformel gebrauchen, bei welcher die höheren Potenzen von v vernachlässigt sind

$$r^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\varrho}{\varrho - 1}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{2} v}{\varrho - 1}$$

Hiernach würden sich, auf das obige Beispiel angewandt, die halbjährigen Zinsen zu 1,98 %, also nicht erheblich verschieden ergeben haben.

12.

Die im vorigen Abschnitt entwickelten Formeln lassen sich nun ferner anwenden, um für das Risiko einfachere und für die numerische Auswerthung bequemere Ausdrücke zu erhalten. Das Verfahren ist bei allen fast genau dasselbe, weshalb es genügt, wenn solches an einer dieser Gleichungen näher erörtert wird. Es möge zu dem Ende die Gleichung (5)

$$\mathfrak{R} = \sqrt{\frac{\Sigma S_{a+x+\frac{1}{2}}}{M_a}\left(\varrho - \frac{1 - r^{-(x+1)}}{1 - r^{-1}}\right)^2}$$

weiter behandelt und umgeformt werden. Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen zerfällt zunächst, durch Auflösung der Klammer, in die drei Summen

$$\frac{\Sigma S_{a+x+\frac{1}{2}}}{M_a}\,\varrho^2 - 2\varrho\,\frac{\Sigma S_{a+x+\frac{1}{2}}}{M_a}\,\frac{1 - r^{-(x+1)}}{1 - r^{-1}}$$
$$+ \frac{\Sigma S_{a+x+\frac{1}{2}}}{M_a}\left(\frac{1 - r^{-(x+1)}}{1 - r^{-1}}\right)^2$$

wovon die erste $= \varrho^2$ ist, weil $\Sigma S_{a+x+\frac{1}{2}} = M_a$. Die zweite ist

$$= -\frac{2\varrho}{(1-r^{-1})M_a}\left[\Sigma S_{a+x+\frac{1}{2}} - \Sigma S_{a+x+\frac{1}{2}} \cdot r^{-(x+1)}\right]$$

$$= -\frac{2\varrho}{(1-r^{-1})M_a}\left[M_a - r^{a-\frac{1}{2}}\,\Sigma S'_{a+x+\frac{1}{2}}\right]$$

$$= -\frac{2\varrho}{1-r^{-1}} + \frac{2\varrho\, r^{-\frac{1}{2}}}{1-r^{-1}}\,\frac{\Sigma S'_{a+x+\frac{1}{2}}}{M'_a}$$

$$= -\frac{2\varrho}{1-r^{-1}}\left[1-r^{-\frac{1}{2}}v\right] = -2\varrho^2$$

Der dritte Theil ist

$$\frac{1}{(1-r^{-1})^2 M_a}\left[\Sigma S_{a+x+\frac{1}{2}} - 2\Sigma S_{a+x+\frac{1}{2}} \cdot r^{-(x+1)} + \Sigma S_{a+x+\frac{1}{2}} \cdot r^{-(2x+2)}\right]$$

$$= \frac{1}{(1-r^{-1})^2 M_a}\left[M_a - 2r^{a-\frac{1}{2}}\,\Sigma S'_{a+x+\frac{1}{2}} + r^{2a-1}\,\Sigma S_{a+x+\frac{1}{2}} \cdot r^{-(2a+2x+1)}\right]$$

Setzt man

(16) $$M_a \cdot r^{-2a} = M''_a \text{ und}$$

(17) $$S_{a+x+\frac{1}{2}} \cdot r^{-(2a+2x+1)} = S''_{a+x+\frac{1}{2}}$$

so dafs also M'' und S'' die doppelt discontirten Zahlen M und S sind, so geht durch deren Substitution der letzte Ausdruck ferner über in

$$\frac{1}{(1-r^{-1})^2}\left\{1-2r^{-\frac{1}{2}}\,\frac{\Sigma S'_{a+x+\frac{1}{2}}}{M'_a} + r^{-1}\,\frac{\Sigma S''_{a+x+\frac{1}{2}}}{M''_a}\right\}$$

$$= \frac{1}{(1-r^{-1})^2}\left\{1-2r^{-\frac{1}{2}}v + r^{-1}\,\frac{\Sigma S''_{a+x+\frac{1}{2}}}{M''_a}\right\}$$

Vereinigt man wieder alle drei Summen, so hat man

$$\frac{1}{(1-r^{-1})^2}\left\{1-(1-r^{-1})^2\varrho^2 - 2r^{-\frac{1}{2}}v + r^{-1}\,\frac{\Sigma S''_{a+x+\frac{1}{2}}}{M''_a}\right\}$$

Da aber nach (13)

$$(1-r^{-1})\,\varrho = 1 - r^{-\frac{1}{2}} v$$

$$\text{und } (1-r^{-1})^2 \varrho^2 = 1 - 2r^{-\frac{1}{2}} v + r^{-1} v^2$$

so hat man

$$1-(1-r^{-1})^2 \varrho^2 - 2r^{-\frac{1}{2}} v = -r^{-1} v^2$$

wodurch die letztere Summe übergeht in

$$\frac{r^{-1}}{(1-r^{-1})^2} \left\{ \frac{\Sigma S''_{a+x+\frac{1}{2}}}{M''_a} - v^2 \right\}$$

Der Ausdruck für $\mathfrak{R}$ wird daher

$$(18) \qquad \mathfrak{R} = \frac{1}{r^{\frac{1}{2}} - r^{-\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{\Sigma S''_{a+x+\frac{1}{2}}}{M''_a} - v^2}$$

Die numerische Rechnung nach dieser Formel wird nun sehr einfach. Sind die Werthe von ϱ, v und p in Tafel gebracht, so hat man nur noch die doppelt discontirten Zahlen von M und S nach (16) und (17) zu berechnen, die Summen von S'' auf die gewöhnliche Weise zu bilden, indem man bei dem höchsten Alter anfängt und zu den niedrigeren aufsteigt, weil für jedes a, $\Sigma S''_{a+\frac{1}{2}} = \Sigma S''_{a+1+\frac{1}{2}} + S''_{a+\frac{1}{2}}$ ist, endlich diese Summen durch die M'' zu dividiren. Die Quotienten erscheinen dann als Functionen von a, und wenn davon die entsprechenden Werthe von v^2 abgezogen werden, und die Wurzel der Reste genommen wird, so erhält man für jedes a den Werth der Quadratwurzel ebenfalls in tabellarischer Form. Der unbestimmte Buchstabe x ist verschwunden und die Gleichung (18) kann als das Interal der Gleichung (5) angesehen werden.

13.

Die Reduction der Ausdrücke (6) und (8) kann in derselben Weise gemacht werden. Ich begnüge mich daher damit, die Resultate hier anzuführen, und überlasse es denjenigen, welche sich dafür interessiren, die Beweise selbst zu suchen. Ich finde für $\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{R}''$ die Ausdrücke

$$\mathfrak{R}' = \sqrt{\frac{\Sigma S''_{a+x+\frac{1}{2}}}{M''_a} - v^2} \quad \text{und} \tag{19}$$

$$\mathfrak{R}'' = \frac{1}{(1-r^{-1})\varrho} \sqrt{\frac{\Sigma S''_{a+x+\frac{1}{2}}}{M''_a} - v^2} \tag{20}$$

Hieraus ergeben sich nun noch einige Beziehungen zwischen den verschiedenen $\mathfrak{R}$. Eliminirt man nämlich die Wurzelgröfse, so erhält man die Gleichungen

$$\mathfrak{R}' = (r^{\frac{1}{2}} - r^{-\frac{1}{2}})\,\mathfrak{R} \tag{21}$$

$$\mathfrak{R}'' = \frac{r^{\frac{1}{2}}}{\varrho}\,\mathfrak{R} \tag{22}$$

und wenn aus diesen Gleichungen auch noch r eliminirt wird:

$$\mathfrak{R}'' = \mathfrak{R}' + p\,\mathfrak{R} \tag{23}$$

14.

Das Risiko läfst sich auch in Procenten des Werths der Versicherung ausdrücken. Bezeichnen für die betrachteten Versicherungen $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}'$, $\mathfrak{r}''$ diese Risikos, so hat man

$$\mathfrak{r} = \frac{100}{\varrho}\,\mathfrak{R}, \quad \mathfrak{r}' = \frac{100}{v}\,\mathfrak{R}', \quad \mathfrak{r}'' = \frac{100}{v}\,\mathfrak{R}''$$

und statt der Relation (23) erhält man

(24) $$\mathfrak{r} + \mathfrak{r}' = \mathfrak{r}''$$

Substituirt man in die Formel für das Gesammtrisiko die Ausdrücke in $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}'$, $\mathfrak{r}''$ und bezeichnet man den Werth der einzelnen Versicherung mit w, so dafs $\mathfrak{R}_1 = \frac{w_1 \mathfrak{r}_1}{100}$, $\mathfrak{R}_2 = \frac{w_2 \mathfrak{r}_2}{100}$ etc., ferner den Werth aller Versicherungen mit w_0, so erhält man, wenn μ die Anzahl der Versicherungen ist

(25) $$w_0 = w_1 + w_2 + \ldots\ldots w_\mu \text{ und}$$

(26) $$w_0 \mathfrak{r}_0 = \sqrt{w^2{}_1 \mathfrak{r}^2{}_1 + w^2{}_2 \mathfrak{r}^2{}_2 + w^2{}_3 \mathfrak{r}^2{}_3 + \ldots w^2{}_\mu \mathfrak{r}^2{}_\mu}$$

Dieses in Procenten des Gesammtwerths w_0 ausgedrückte Gesammtrisiko $\mathfrak{r}_0$ wird bei einer unendlichen Anzahl von Versicherungen unendlich klein. Denn denkt man sich unter dem Wurzelzeichen für jeden Summanden den gröfsten derselben gesetzt, der mit $w^2{}_\nu \mathfrak{r}^2{}_\nu$ bezeichnet sein möge, so ist offenbar

$$w_0 \mathfrak{r}_0 < w_\nu \mathfrak{r}_\nu \sqrt{\mu}$$

ferner ist, wenn w_λ ein Mittelwerth aus allen w ist, so dafs $w_0 = \mu w_\lambda$,

$$\mathfrak{r}_0 < \frac{w_\nu \mathfrak{r}_\nu}{w_\lambda} \sqrt{\frac{1}{\mu}}$$

so dafs, wenn der gröfste Werth gegen den Mittelwerth der Versicherungen innerhalb bestimmter Grenzen bleibt, das Risiko um so kleiner wird, je gröfser die Zahl der

Versicherungen μ ist, und mit unendlich grofsem μ selbst unendlich klein wird.

Die numerische Auswerthung der $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}'$ und $\mathfrak{r}''$ ist in folgendem Täfelchen enthalten

a	$\mathfrak{r}$	$\mathfrak{r}'$	$\mathfrak{r}''$
25	28,0	70,9	98,9
30	29,2	63,1	92,3
35	31,4	56,6	88,0
40	33,7	50,3	84,0
45	36,3	44,3	80,6
50	39,3	38,6	77,9
55	42,9	33,2	76,1
60	47,0	28,2	75,2
65	51,5	23,7	75,2
70	54,6	19,2	73,8
75	56,0	14,6	70,6
80	56,5	10,3	66,8

woraus zu sehen, dafs bei Rentenversicherungen das Risiko in höherem Alter gröfser ist, bei Lebensversicherungen aber geringer, und dafs bei letzteren das Versichern gegen jährliche Prämien mit viel gröfserem Risiko verbunden ist, als gegen Erlegung des Ankaufswerthes.

Gedruckt bei A. W. Schade in Berlin, Grünstr. 18.