WYDAWNICTWA TOWARZYSTWA POLSKIEGO
INSTYTUTU PEDAGOGICZNEGO W KRAKOWIE

DYDAKTYKA
PRZEDMIOTÓW NAUKI W SZKOLE ŚREDNIEJ

Nr. 6. i 7.

METODA MATEMATYKI

OPRACOWALI

ADAM PICHÓR I DR. ANTONI HOBORSKI

LWÓW MCMXIX
NAKŁADEM KSIĄŻNICY POLSKIEJ TOWARZYSTWA NAUCZYCIELI
SZKÓŁ WYŻSZYCH WE LWOWIE — WARSZAWA: BRACKA 18
POZNAŃ: W. NIEMIERKIEWICZ

WYDAWNICTWA TOWARZYSTWA POLSKIEGO
INSTYTUTU PEDAGOGICZNEGO W KRAKOWIE

DYDAKTYKA
PRZEDMIOTÓW NAUKI W SZKOLE ŚREDNIEJ

Nr. 6. i 7.

METODYKA MATEMATYKI

OPRACOWALI

ADAM PICHÓR I DR. ANTONI HOBORSKI

LWÓW MCMXIX
NAKŁADEM KSIĄŻNICY POLSKIEJ TOWARZYSTWA
NAUCZYCIELI SZKÓŁ WYŻSZYCH WE LWOWIE
WARSZAWA — GEBETHNER I WOLFF. — POZNAŃ
W. NIEMIERKIEWICZ

CZCIONKAMI DRUKARNI „GRAFIA“, LWÓW, UL. CHORĄŻCZYZNY 27.

ADAM PICHÓR

OGÓLNE ZASADY NAUCZANIA MATEMATYKI W KLASACH NIŻSZYCH SZKÓŁ ŚREDNICH

§ 1. NAUCZANIE I JEGO CELE

Życie w dzisiejszym świecie olbrzymiego rozwoju nauk technicznych wymaga dużych wiadomości. Stąd potrzeba nauki. Ale nauka może służyć bezpośrednio do celów praktycznych, a także i do wychowawczych. Kto chce nauczyć się obcego języka dla porozumiewania się w czasie podróży z otoczeniem, albo kto chce zdobyć wiadomości z elektryczności dla dobrego łączenia przewodów elektrycznych, ten z pewnością będzie dążył do tego, żeby wyuczyć się jak najprędzej, jak najłatwiej i jak najprzyjemniej z użyciem wszelkich mechanicznych sposobów do spamiętania i wyćwiczenia się. Przyszły miernik posługiwałby się chętnie metodą intuicyjno-doświadczalną Perry'ego dla wyuczenia się geometryi, bo wtedy twierdzenia geometryczne są faktami bezpośrednio widocznymi lub można je stwierdzić doświadczalnie [1]).

Pragnąłbym już tu nadmienić, że pomiar odcinków i pól, sprawdzanie faktów, odkrytych drogą rozumowania, jest konieczny na stopniu niższym nauki szkolnej, a bardzo korzystny w dalszym ciągu nauki z powodów, o których później będzie mowa.

[1]) S. Kwietniewski, Poradnik dla samouków, t. I, wyd. II, stopień II, str. 61.

Zdobycie praktycznych wiadomości nie wystarcza jednak nauce, nie jest ono także celem szkoły, która ma wychowywać. „Naród, któryby uprawiał umiejętności jedynie ze względu na ich zastosowania praktyczne i bezpośrednie, nie może sobie pochlebiać, żeby one mogły długo pośród niego kwitnąć“ (Gergonne).

Weźmy przykład z astronomii starożytnej. Babilończycy zajmowali się głównie astronomią praktyczną. Grecy zaczęli obserwacye później, ale obok obserwacyi budowali wciąż teorye, porywali się na rozwiązywanie wszelkich zadań i wiele z nich rozwiązali: wyjaśnili ruchy planet geocentrycznie, a Arystarch ze Samos zbudował nawet układ heliocentryczny, o którym później zapomniano zupełnie. Mimo wiekowych obserwacyi Babilończycy nie posunęli naprzód wybitnie wiedzy astronomicznej.

Koniecznie pracować trzeba nadto na zapas, robić odkrycia, budować teorye bez względu na ich bezpośrednie zastosowanie.

§ 2. WYCHOWAWCZY CHARAKTER NAUKI

Szkoła, a właściwie nauka zbiorowa w szkole — a o takiej tylko będziemy mówili na przyszłość — musi dostarczyć młodzieży wiadomości pozytywnych, bo nawet najzdolniejszy „z próżnego nie naleje“, choćby miał złote naczynie, t. j. umysł. Gromadzenie wiadomości jest więc koniecznością.

Ale jakie ma być to gromadzenie i w jakiej ilości?

Wielka ilość wiadomości nawet rozległych i gruntownych nie przynosi korzyści dla umysłu, lecz owszem szkodę, jeżeli te wiadomości nie mogą być strawione. Wiadomości trzeba zatem obrać odpowiednio do wieku, a wpajać je młodzieży tak, żeby przytem rozwijać umysł.

Choć zasób wiedzy i rozwinięte zdolności umysłowe są bardzo ważnym czynnikiem, to jednak jeszcze za mało, bo z tem wszystkiem mogą być natury bardzo bierne, niezdolne do żadnego postępu po ukończeniu szkoły. H. Sienkiewicz podał groźny przykład biernej natury w „Bez dogmatu“ — w Płoszowskim.

Potrzeba kształcić charakter, poczucie obowiązku i zamiłowanie do pracy.

Jak to wszystko uzyskać? Nie można zapominać, że wskazówki, ustawy, choćby najwspanialsze, są tylko literą, duszą jest nauczyciel. Dobra szkoła będzie złączona zawsze z dobrym, sumiennym nauczycielem, który zna gruntownie choćby jedną gałąź wiedzy, oraz drogi i rozkosz pracy twórczej.

Lecz o tem nie mam zamiaru mówić. Nauczyciel musi wiedzieć nie tylko to, czego ma uczyć, ale i to, jak ma uczyć. „Niedosyć jest, aby nauczyciel umiał nauki, które podawać podjął się przez swój urząd; ale nadto powinien pojąć ich całą treść, wiedzieć ich użycie i koniec (cel) i być sposobnym uczyć onych“ (Piramowicz), a i zasada ekonomii czasu powinna odgrywać rolę: „Miejcie tylko metodę, a zdziwicie się, ile wasi uczniowie nauczą się w jednym dniu“ (Pestalozzi).

§ 3. ZNAJOMOŚĆ DZIECKA PODSTAWĄ METODY NAUCZANIA

Czem się zajmuje chłopiec do 14. mniej więcej roku, jakie są jego potrzeby umysłowe? bo te muszą stanowić punkt zaczepny.

Prawda: „ignoti nulla cupido“, nikt nie pragnie tego, czego nie zna, a więc i dążenia i pragnienia mieszkańca wsi nie będą te same, co dziecka mieszczańskiego. Ale na ogół interesuje chłopca w tym wieku świat zewnętrzny, zjawiska konkretne, rzeczy i fakta, podpadające wprost pod zmysły. Każdą rzecz ogląda na wszystkie strony, chce zbadać, jak ona w środku wygląda, przytem wspina się i goni ciągle. Potem dopiero rodzi się chęć przeglądu zdobytej wiedzy i jej uporządkowania, umysł staje się podatniejszy dla pojęć ogólnych, abstrakcyjnych. Oczywiście zachodzą tu znaczne różnice w granicy wieku, oraz pomiędzy wychowankami miast i wsi.

To ważna wskazówka, czego mamy uczyć w tym wieku i jak?

Ustawy Komisyi Edukacyi narodowej z r. 1783. są w tym względzie — zdaje się — niewzruszalne: „Jest wielkiej wagi dla wszystkich nauczycieli, ażeby dzieci zrazu przez zmysły i doświadczenia własne nabierały poznania rzeczy, a gdy się z wiekiem rozum wzmoże, przychodziły racye, uwagi, wywody. Ta tylko nauka przyda się człowiekowi, którą na rozum jaśnie i gruntownie pojął, której użycie i zastosowanie widzi“.

Każdy uczeń pragnie poznać zastosowania praw matematycznych czy fizycznych i naodwrót takie zastosowania przyczyniają się ogromnie do zrozumienia i uznania teoryi. Zresztą to się odnosi nie tylko do wieku młodzieńczego. Można przecie znaleźć wyznania matematyków, że zrozumieli doniosłość pewnej teoryi z konkretnego przykładu (zastosowania).

Jakiż będzie zatem ogólny sposób zdobywania nowych wiadomości? Staramy się znaleźć związek nowej rzeczy czy wiadomości z zasobami, które się już znajdują w umyśle ucznia i skupiamy uwagę na tym przedmiocie. Zdążamy przez dokładniejsze badanie, aby uczeń sam spostrzegł i odczuł braki umysłowe w dotychczasowych wiadomościach. Ten nastrój wytworzy pęd wewnętrzny do usunięcia braków, stanu w każdym razie przykrego. Pokonanie trudu sprawi zadowolenie.

Weźmy przykład. Przy nauce o kwadracie (klasa III) uczeń widzi, że odcinkiem 5 cm można wprawdzie nakreślić dużo kwadratów, ale wszystkie będą równe, obwód każdego równa się 20 cm. Więc nie można nakreślić odcinkiem 5 cm dwu kwadratów różnej wielkości, obwód kwadratu zależy od boku i ta zależność jest mu znana. Wielkość obwodu kwadratu można wyrazić nie tylko jako zależną od długości boku, ale także od długości odcinka, przedstawiającego odległość środka kwadratu od wszystkich boków.

Przejdźmy do koła. Promieniem 5 cm można także nakreślić bardzo wiele kół, ale znowu wszystkie będą równe, co uczeń może sprawdzić przez wycięcie jednego z nich i przykładanie na innych. Jest jasne, że obwód zależy od promienia, ale tej zależności nie zna. Stąd niepokój wewnętrzny i dążność naturalna do jej znalezienia. Szkoła dobra nie poda mu jednak tej zależności gotowej, nie uwiąże mu jej także zbyt wysoko, jak Tatarzy pożywienie swym dzieciom na gałęziach drzew, bo popęd samozachowawczy jest bez porównania silniejszy w tym wieku, niż chęć zdobycia wiedzy. Szkoła naprowadzi chłopca na drogę, którą szedł Archimedes. Uczeń mierzy bok sześcioboku umiarowego, wpisanego w koło i wylicza, że stosunek przekątni, przechodzącej przez środek do własnego obwodu, w jakkolwiek wielkim sześcioboku jest stały; bok 12-boku umiarowego wpisanego może wyliczyć i znowu znajdzie stały stosunek do przekątni najdłuższej; bok 24-boku umiarowego znajdzie dla skrócenia roboty pomiarem, choć mógłby go wyrachować i znowu stały stosunek i t. d. Wniosek, że stosunek obwodu koła do średnicy musi być także stały, a większy od każdej ze znalezionych liczb, nasuwa się sam; z drugiej strony znowu ten stosunek jest mniejszy od 4, bo stosunek obwodu kwadratu opisanego na kole do średnicy tego koła równa się 4.

Następuje potem sprawdzanie π, przez pomiar nicią lub radełkiem, obwodów i średnic różnej wielkości kół, przytem w dalszych pomiarach dla zmniejszenia błędów pomiaru można otoczyć przedmiot okrągły n. p. 10 razy nicią i stąd wyliczyć obwód.

§ 4. ZAGADNIENIA POWINNY POWSTAĆ NA LEKCYI SZKOLNEJ

Ważną więc jest rzeczą nie tylko osiągnięcie wiadomości, ale także wskazanie dróg, które doprowadziły do znalezienia prawd, zwłaszcza gdy metody zdobywania prawd stosują się do wielu zadań, i tak naukę prowadzić, żeby problemy powstawały podczas lekcyi szkolnej, aby uczeń prawie miał złudzenie, że sam sobie zadania stawia, wynajduje drogi rozwiązania zadań i odkrywa nowe prawdy [1]).

I tu znowu dalsza wskazówka Komisyi Edukacyi narodowej: „Trzeba dzieciom dać wolność zadawania pytań, a ciekawość z łagodnością i dokładnie zaspokajać. Starać się trzeba, by dzieci naukę polubiły, przymus nic tu nie sprawi, polubią zaś ją niezawodnie, gdy się uczyć będą tego, co pod zmysły podpada, a doświadczenie więcej oświeci, niż słowa".

„Nie kłaść nigdy rzeczy albo wyrazów ogólnych przed szczególnymi, trudniejszych przed łatwiejszymi, złożonych przed pojedynczymi i prostymi, oderwanych myślą przed podpadającymi pod zmysły. Nieprzerwanem nauczyciela usiłowaniem być powinno, aby młódź sobie powierzoną wprawiał w zastanawianiu się nad rzeczami, myśleniu i uważaniu na siebie samych. Mniej się ma młodzież uczyć na pamięć, więcej powinna brać na rozum i pojęcie".

Prawdą jest także, że w nauce zbiorowej mamy do czynienia z różnorodną młodzieżą. Tok nauki zbyt powolny i stopniowy nuży ich, uczniowie ożywiają się natomiast przy rozwiązywaniu zadań trudniejszych, dlatego dobrze jest czasami odstępować od reguły przejścia stopniowego od rzeczy łatwiejszych do trudniejszych.

---

[1]) Dr. Jacob, Praktische Methodik des math. Unterrichts.

§ 5. PRZYKŁAD LEKCYI UŁAMKÓW W KLASIE DRUGIEJ

Zastosujmy to do kilku przykładów, przytem wybieram z umysłu rzeczy, uważane za najbardziej suche i trudne na tym stopniu: o ułamkach; o dzielnikach liczby, wspólnym dzielniku dwu liczb, największym wspólnym dzielniku i wspólnej wielokrotności najmniejszej.

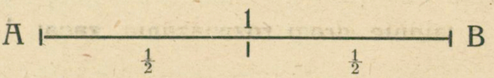
Naukę o ułamkach zwyczajnych dzieli się na dwie części:

I. przygotowawczą, w której rozwiązuje się zadania na podstawie poglądowej, bez korzystania z własności ogólnych

i II. systematyczną.

I. CZĘŚĆ PRZYGOTOWAWCZA*)

Dzieląc odcinek równy jednostce na dwie części równe



albo też jabłko, wreszcie kółko z papieru, przygotowujemy pojęcie połowy. Podział wykonuje się jednak mechanicznie, a więc ten, kto ma jabłko, ten je przekrawa, inny może to zrobić z burakiem, cebulą, listkiem drzewa, inny połowi znowu kółko i t. d. (Uwaga, że połowimy tutaj masę jabłka, buraka i t. d. należy do klasy IV). W ten sposób dochodzimy do stwierdzenia własności

$$1 = \frac{2}{2}.$$

Podobnie przekonamy się doświadczalnie, że

$$1 = \frac{3}{3}$$

i ogólnie $1 = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \; . \; . \; . \; . \; .$

Następnie wykonujemy zadania — znowu mechanicznie

$$2 = \frac{6}{3},\ 3 = \frac{12}{4},\ 2\tfrac{1}{5} = \frac{11}{5} \text{ i t. d.}$$

Teraz następują zadania, wykonywane w pamięci: np. $5 = \frac{35}{7}$ na podstawie wiadomości $1 = \frac{7}{7}$, więc 5 jednostek = 5 . 7. siódmych $= \frac{35}{7}$; $3\frac{2}{3} = 3 \,.\, 3$. trzecich + 2 trzecie $= \frac{11}{3}$.

Zadania odwrotne wykonuje się, naprzód składając trzecie części czy połówki lub ćwiartki jabłka, które uczeń ma przed sobą, np. $\frac{6}{3} = 2$, $\frac{6}{2} = 3$, $\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$, potem idą zadania pamięciowe np:

$$\frac{9}{3} = 3,\ \frac{12}{4} = 3,\ \frac{16}{4} = 4. \text{ i t. d.}$$

---

*) Według książki: Dr. J. Jacob, Praktische Methodik des math. Unter., str. 15 i nast.

Przy dzieleniu jabłka lub kółka na połówki, ćwiartki lub ósemki, sam uczeń dojdzie do równości:

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$ i t. d.

Podobnie: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{4}{12}$.

Wreszcie podział lub składanie uwidocznią mu związek:

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$; $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ i t. d.

Po tych wstępnych wiadomościach przechodzimy do działań ułamkami, które będziemy uważali w okresie przygotowawczym jako t. zw. „liczby mianowane“ [1]), n. p. $\frac{3}{4}$ = 3 ćwiartki, $\frac{5}{2}$ = 5 połówek i t. d.

Te rachunki wykonuje się jednak z wykluczeniem wszelkich twierdzeń, praw, wyłącznie tylko na podstawie poglądu i pojęcia ułamka. Pojęcia a nie prawa są narzędziami i podstawą wiedzy i na nich opiera się postęp, podczas gdy wygłoszone z pamięci zdania mogą być dla ucznia niezrozumiałe.

Wykonujemy naprzód dodawanie takich samych części jabłka, liścia czy odcinka równego jednostce:

$\frac{2}{4} + \frac{1}{4}$ = 2 ćwiartki + 1 ćwiartka = 3 ćwiartki.

(Czytelnik zechce wykonać sobie rysunek przy wszystkich zadaniach).

Potem dodajemy, ale znowu na przedmiotach:

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, jaka to część całości?

Jeżeli uczeń ma przed sobą przedmiot albo rysunek, to powie bez wahania

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

połówka a ćwiartka = 2 ćwiartki + 1 ćwiartka = 3 ćwiartki.

Teraz trzeba od ucznia wydobyć, że zadanie sprowadził w ten sposób do dodawania ułamków o równych mianownikach.

Tak postępujemy dalej ze wszystkiemi działaniami.

II. CZĘŚĆ SYSTEMATYCZNA, SZKICOWO

Po wstępnych wiadomościach przechodzimy do badania dokładniejszego ułamków, względnie działań ułamkami.

Z poprzedniej nauki wiemy, że

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}.$$

---

[1]) W sprawie niewłaściwości tego terminu zob. Zaremba: Zarys pierwszych zasad teoryi liczb całkowitych (1907), str. 18.

Wiadomość tę zdobywamy na podstawie obserwacyi. Rysując dwa razy jeden pod drugim odcinek równy jedności, dzielimy pierwszy na połowy, drugi na trzecie. Połowa jednostki zajmuje długość odcinka wynoszącego $\frac{1}{3}$ i jeszcze połowę $\frac{1}{3}$, więc

$$\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6}, \text{ a zatem}$$

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{3}, \text{ a to znowu}$$

$$= \tfrac{2}{6} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{2}{6} = \tfrac{5}{6}.$$

Przypatrzmy się bliżej tym mianownikom 2, 3 i 6, które umożliwiają nam rozwiązanie zadania. Mianownik wspólny 6 jest liczbą, w której mieszczą się mianowniki 2 i 3 bez reszty.

Weźmy teraz $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ i wykonajmy rysunek podobny do poprzedniego. Z rysunku widać, że

$$\tfrac{2}{4} = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{2}{6} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{3}{6},$$

więc $\frac{1}{4}$ musi być połową $\frac{3}{6}$, t j. $\frac{3}{6} : 2 = \frac{3}{12}$ (na podstawie części I).

$$\tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{12} \text{ zaś } \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{6} = \tfrac{4}{12}.$$

Ostatecznie więc

$$\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{4}{12} + \tfrac{3}{12} = \tfrac{7}{12}.$$

Możliwe byłoby wykonanie

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, ale kłopotów byłoby jeszcze więcej.

Z tych przykładów okazuje się, że dodawanie staje się coraz bardziej zawiłe i żmudne, a cóż dopiero gdybyśmy się pokusili o dodawanie ułamków o znacznych mianownikach.

Gdzie możliwe są ulepszenia naszej roboty, poczem możemy się spodziewać ułatwień? Widać, że rozchodzi się o szybkie znalezienie liczby, w której kilka z danych liczb się mieści, względnie o rozpoznanie szybkie, czy dana liczba mieści się w drugiej, n. p.

$$\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{2}{8} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{3}{8},$$

tu mianownik 4 mieści się w ośmiu.

§ 6. PRZYKŁAD LEKCYI Z ELEMENTARNEJ TEORYI LICZB

Zobaczymy zaraz inne powody, które nas skłonią do badania podzielności.

a) Jest uczniów w klasie 25. Czy można ich ustawić w dwójki, w trójki, czwórki, piątki i t. d.? Uczeń ma te dwójki utworzyć w klasie. Czy nie możnaby bez ustawiania trójek powiedzieć, czy się dadzą ustawić trójki — czy też coś jeszcze zostanie? Teraz zaczyna się zarysowywać korzyść z badania liczb i ułatwienie w pracy.

b) N. dostaje 87 koron na zakupno możliwie największej ilości książek, z których każda kosztuje 4 kor., reszta pozostała po zapłaceniu książek przypada jemu, ile dostanie koron? Na książki wyda 84, jemu zostanie 3 korony.

c) 1. grudnia 1917 było w sobotę, czy 1. stycznia 1918 będzie także w sobotę? W takim razie dni grudnia 31, podzielone na grupy po 7, nie dawałyby żadnej reszty; ponieważ z podzielenia 31 : 7 otrzymujemy resztę 3, więc 1. stycznia 1918 będzie dopiero we wtorek.

d) 1. stycznia 1917 był poniedziałek, czy 1. stycznia 1918 będzie także w poniedziałek?. Gdyby tak było, to dni roku 1917, podzielone na grupy po 7, nie dawałyby żadnej reszty; ale z podzielenia liczby 365 : 7 otrzymujemy resztę 1, więc 1. stycznia 1918 będzie we wtorek.

W pierwszem z tych zadań nie rozchodziło nam się o to, ile będzie np. dwójek, lecz czy zostanie 1 uczeń po ustawieniu dwójek, czy też nie zostanie nikt; w drugiem tak samo dla nas najważniejszą było rzeczą, ile koron zostanie; w trzeciem i w czwartem znowu rozchodziło się o resztę, a nie o ilość tygodni. Dochodzimy do przekonania, że czasem potrzeba nam jest znajomość reszty a nie ilorazu i jakby można tę resztę szybko otrzymać. W ten sposób wytworzymy zainteresowanie do rzeczy, nad którą się uczeń nie zastanawiał, t. j. do badania podzielności liczb.

Jak wywołać zajęcie i ciekawość dla wspólnego dzielnika?

Rysujemy prostokąt o bokach 8 cm i 12 cm i mamy ten prostokąt pokryć kwadratami o bokach równych całkowitej ilości jednostek. Uczeń, wykonując kwadraty do pomiaru, spostrzeże, że ten prostokąt można pokryć kwadratami, które mają bok równy 1 cm, albo też kwadratami o boku 2 cm, wreszcie o boku 4 cm. Jak można było do tego dojść prędko na podstawie badania liczb 8 i 12? Bok kwadratu musi się mieścić w jednym i w drugim boku prostokąta, więc liczba, wyrażająca długość boku kwadratu, musi się mieścić w liczbach 8 i 12, a te liczby są 1, 2, 4, zatem 4 jest największym wspólnym dzielnikiem liczb 8 i 12.

Zadaniem dla większej ilości dzielników wspólnych będzie np. następujące: Ma się wybrukować podwórze prostokątne o bokach

24 m i 36 m płytami kwadratowemi, możliwie największemi, jaki będzie bok tego kwadratu?

Może znajdzie się uczeń jeden lub drugi, który sam sobie postawi pytanie poszukiwania wspólnej miary odcinków, których długość podano np. w m, lub objętości; a gdyby to było niemożliwe, to przynajmniej niech uczniowie zmieniają daty zadania, postawionego przez nauczyciela. To wdrażanie do samodzielnie stawianych sobie pytań i szukaniu odpowiedzi na nie, jeżeli tylko nadarzy się sposobność już w tych latach, ma i teraz a szczególnie na przyszłość bardzo doniosłe znaczenie.

Naukę o najmniejszej wspólnej wielokrotności zaczniemy znowu zadaniem konkretnem, np. Obwód halerza ma 22 mm, dwuhalerzówki 28 mm; jaką drogę trzeba przebyć, aby obydwa wykonały całkowitą ilość obrotów? Każdy uczeń toczy halerzówki po ławce i szuka naprzód odpowiedzi drogą doświadczalną. Po przerobieniu takich przykładów i ujęciu rzeczy, przekonuje się uczeń, że te zadania można jednak rozwiązać rachunkiem prędzej i dokładniej.

§ 7. SZKODA, WYNIKAJĄCA ZE ZBYT WIELKIEGO ZASOBU WIADOMOŚCI

Nadmieniliśmy już, że pewien zasób wiedzy jest konieczny; ale wtłaczanie mas wiadomości, a co gorsza niezupełnie zrozumiałych, nie przyczynia się do rozwoju umysłu, bo wyczerpuje jego siłę, zabija własną myśl i twórczość. „Umysł ogranicza się wtedy do biernego przyjmowania. Szkoła, która gromadzi za wiele wiadomości, nie zostawia czasu na własną wyobraźnię uczniów i tłumi ją. Więc każde kształcenie powinno się ograniczyć do najkonieczniejszych podstaw nauki, a zostawić dosyć czasu dla rozwoju zapędów własnych każdego ucznia i rodzimej siły fantazyi“ [1]). Może ktoś niewiele sobie przyswoi, ale gruntownie, i jeżeli wiedzę tak mu podano, że go zainteresuje, że mu otwiera oczy na szersze pole, jeżeli rzecz pozna dokładnie i zrozumie drogi badania, to zysk dla wykształcenia będzie nieporównanie większy, aniżeli z udzielonej masy szczegółów. Dlatego dajemy przy nauczaniu pierwszeństwo metodom ogólnym przed szczególnemi, ważnemi tylko w szczególnych wypadkach, choćby te szczególne metody były nawet bardzo

[1]) Dr. L. Kulczyński, Ogólne zasady pedagogiki.

bystro pomyślane. Więc drugim celem szkoły jest rozwijanie zdolności umysłowych uczniów przy wytwarzaniu wiedzy.

§ 8. ROLA ZMYSŁÓW PRZY PRACY UMYSŁOWEJ

Każde nowe pojęcie musi być przedstawione jasno, wygłoszone dobitnie, w postaci przystosowanej do wieku i zrozumiałej. Wrażenia wybitne powinny przedewszystkiem odbierać zmysły ucznia: oko i ucho.

Psychologowie rozróżniają trzy typy ludzi: 1) typ wzrokowca, który we wszelkiej pracy posługuje się wyobrażeniami wzrokowemi; 2) typ słuchowca, który pracę umysłową wykonywa we wyobrażeniach słuchowych, i 3) typ ruchowca (zresztą dość rzadki), który pracuje umysłowo przy pomocy wyobrażeń ruchowych.

Mówimy tu o uczeniu zbiorowem w szkole. Gdybyśmy nawet przeprowadzili badania uczniów, to się okaże, że część będzie typu przeważnie słuchowców, u innych będą górowały wyobrażenia wzrokowe. Najczęściej będzie miał jednak nauczyciel do czynienia z typami mieszanymi, u których praca naukowa opiera się na materyale, zaczerpniętym z różnych zmysłów. Z tego powodu w zbiorowem nauczaniu musimy oddziaływać wybitnie przedewszystkiem na oko i ucho, a równocześnie myśl ucznia musi zdążać za myślą nauczyciela i rozumieć rzecz dokładnie, z tem jednak zastrzeżeniem, któreśmy już zrobili, że zagadnienia muszą powstawać w oczach uczniów i oni muszą mieć niemal złudzenie, że je sami rozwiązują.

W indywidualnem kształceniu trzeba oczywiście uwzględnić typ, jeżeli jest wyraźny.

Widoczne jest już teraz, że pojęcie ucznia o pewnym przedmiocie będzie tem wszechstronniejsze i trwalsze, im więcej zmysłów jest czynnych przy jego wytwarzaniu i im różnorodniejsze wrażenia do niego prowadzą. Dlatego oparcie geometryi dla klas niższych szkół średnich na składaniu papieru, wycinaniu, obrotach i przesunięciach, przy równoczesnem zastosowaniu figur geometrycznych do ozdób np. architektonicznych i zwracanie uwagi na takie ozdoby, należy uważać za rzeczywisty postęp w dydaktyce tego stopnia nauki.

§ 9. DWA PRZYKŁADY LEKCYI Z GEOMETRYI POGLĄDOWEJ

Rozważmy przykłady wstępnych lekcyi geometryi poglądowej w klasie pierwszej [1]). Na wezwanie nauczyciela przynoszą uczniowie ze sobą do szkoły kostki (sześciany drewniane) lub zabawki kostkowe, ziemniaki lub jakieś jarzyny dla zrobienia z nich sześcianu, nauczyciel przynosi również na godzinę nauki duży sześcian i model druciany. Przez porównanie powierzchni sześcianu z powierzchnią ziemniaka uświadamiają, względnie przypominają sobie uczniowie dokładnie różnicę powierzchni, otaczających bryły. Rozpoczyna się poszukiwanie powierzchni takich, jak na kostce, wskazywanie ich palcami i znajdywanie nazwy: powierzchnia płaska lub płaszczyzna. Jeżeli kostka stoi na stole, zwrócona jedną ścianą do uczniów, to będziemy mieli płaszczyzny na górze i na dole, po prawej i po lewej ręce, przednią i tylną. Łatwo więc podać ich liczbę. Kostka nazywa się sześcianem, sala szkolna, piórnik mają także po sześć ścian, a nie są sześcianami. Wycinamy jedną ścianę sześcianu z papieru i kładziemy ją kolejno na wszystkich ścianach i widzimy, że są równe; zaś o ścianach piórnika tego powiedzieć nie można; nazwa została wyjaśniona. Uczeń, zwrócony do klasy twarzą, kładzie dłonie np. na lewą i prawą ścianę kostki; takie dwie płaszczyzny są do siebie równoległe, a łatwo wyszukać jeszcze dwie inne pary płaszczyzn równoległych na każdej kostce. Przechodzimy teraz do badania krawędzi. Gdy sześcian znajduje się na stole, to mamy 4 górne krawędzie, 4 dolne i 4 boczne, z których każdą mają uczniowie sami pokazywać palcami na modelach. Przez pomiar krawędzi sześcianu, a ten pomiar wykonywa każdy z uczniów na swoim modelu, stwierdzamy równość krawędzi i każdy może już wykroić z ziemniaka lub ulepić z gliny kostkę. To trzeba tu nadmienić, że każdy z uczniów ma nie tylko badać model, ale nadto ma sobie go zawsze sam zrobić, to i własności badane utkwią mu najlepiej w pamięci i rzecz wystąpi najjaśniej.

Na ścianie przedniej są cztery krawędzie, kładąc palec na boczną lewą a palec drugiej ręki na krawędź boczną prawą, wskażemy dwie krawędzie do siebie równoległe; innych par krawędzi

---

[1]) R. Jamrógiewicz, K. Strutyński, Geometrya poglądowa, stopień niższy, Lwów 1911.

równoległych trzeba będzie zaraz poszukiwać, a odnalezione dwie wskazać tak samo układem palców. Wyciągając jeden palec wzdłuż krawędzi bocznej, a drugi wzdłuż górnej np. przedniej ściany, wskażemy dwie krawędzie do siebie prostopadłe, których pary i trójki następnie wyszukujemy. Wreszcie kładziemy dłoń np. na bocznej ścianie lewej, a palec na przedniej krawędzi górnej i otrzymujemy krawędź prostopadłą do ściany i t. d.

Na lekcyę o kole w klasie pierwszej przynoszą uczniowie ziemniaki możliwie kuliste lub jabłka, nadto obręcz do zabawy lub krążki tekturowe. Przekrawamy jabłko czy ziemniak nożem. Płaski przekrój otoczony linią krzywą nazywa się okręgiem. Bierzemy teraz krążek z tektury, badamy go, obwodzimy palcem po okręgu. Jeden z uczniów staje przy ścianie bokiem i przesuwa wyprostowaną rękę po ścianie. Dwu innych wychodzi na środek; jeden z nich stojąc trzyma koniec sznurka, a drugi drugi koniec i obchodzi swojego kolegę tak, żeby sznurek był stale naprężony. Własności koła już utkwią w umyśle. Gdy więc któryś dostanie zadanie ustawienia swoich kolegów w równej od siebie odległości, to nie sprawi mu ono żadnej trudności. Następnie rysujemy koła przy pomocy sznurka, skrawka papieru i cyrkla. Ogrodnicy rysują wielkie koła — także sznurem. Wykrawamy koło z papieru, znajdujemy inne koła, jak: moneta, koła u wozu, maszyn i t. d., wreszcie przechodzimy do zdobnictwa np. górne części okien, klomby kwiatowe i t. d.

§ 10. UWAGA I POGODNY STAN UCZUCIOWY UCZNIÓW, JAKO WARUNKI OWOCNEGO NAUCZANIA

Nowe pojęcia muszą wniknąć w głąb umysłu, więc tok lekcyi nie może być szybki i pospieszny, raczej stateczny i powolny. Inaczej rzecz się ma z tokiem nauki w czasie powtarzania. Tutaj powolność usposabiałaby tylko do ociężałości, zaś tok szybszy zniewala do bystrzejszej uwagi, rozwija temperament i czyni pracę umysłową przyjemniejszą. Wybitną rolę przy nauczaniu odgrywa uwaga. Jedni mogą uważać z wielkiem natężeniem i wytrwale przez czas dłuższy, inni nużą się szybko. Wymagania, które wolno stawiać, będą zależały od znajomości umysłu uczniów. Ze względu na wielkie braki w wychowaniu fizycznem (dziś w czasie wojny także z powodu złego odżywiania się) trzeba trwałość uwagi pilnie śledzić i gdy zaczyna mimo woli słabnąć, należy albo na chwilę przerwać naukę albo też wtrącać przygodnie w odpowiednich czasach epizody dla rozrywki. Te epizody mogą być związane z tokiem nauki. Można wprawdzie uwagę wykształcić przez przyzwyczajenie do nauki, ale i tu istnieje kres.

Warunkiem wewnętrznym korzystnego uczenia się jest pogodny stan uczuciowy; wszystkie uczucia przyjemne lub przykre, o ile tylko przekraczają pewną miarę, są przeszkodą w nauce. Oto wskazówki Ustaw Komisyi Edukacyjnej: „Niech naukę przerywają rozrywki, bo te budzą w młodzieży rzeźkość i pogodę umysłu. Atmosfera szkolna niech będzie swobodna i wesoła; niech nauczyciele w chwilach wolnych rozmawiają swobodnie z uczniami, niech biorą żywy udział w ich grach i zabawach".

§ 11. OGÓLNY TOK I PODZIAŁ LEKCYI SZKOLNEJ

Każda lekcya składa się z trzech części:

1. Powtórzenie wiadomości potrzebnych jako podstawy do nowej wiedzy;
2. wytworzenie nowych wiadomości;
3. zebranie przerobionego materyału.

Wtłaczanie wiadomości nie przynosi korzyści nauce, bo wytwarza natury bierne, niezdolne do postępu; a jeżeli nadto te wiadomości są luźne, niepowiązane, to wkrótce ulecą z pamięci. Nauczyciel nie mówi więc nigdy tego, co uczeń wie, albo co może od ucznia wydobyć. Nauka musi być heurystyczną i indukcyjną. Z zapasów wiadomości ucznia wydobywamy składowe części nowej budowy i łączymy je z nowemi wiadomościami, czyli łączymy wiedzę w grupy apercepcyjne.

Nauczyciel prowadzi tylko uczniów pytaniami, a wyniki muszą oni sami znajdywać. To twórczość myślowa, a obok nich występują przeżycia, doświadczenia, zdobyte pracą rąk.

Te przeżycia cielesne i twórczość duchowa sprawią, że wiedza nie uleci, lecz będzie pobudką wewnętrzną i dźwignią do coraz dalszego dążenia i postępu, fermentem do nieustannego udoskonalania się. Obudzą się siły umysłowe i talenta, obudzi się wiara w siebie u młodego chłopca i umiłowanie przedmiotu. A to dążenie do dalszej wiedzy — możemy przyjąć rzetelnej i zbawiennej — to dążenie trwałe, to już wola, oznaka charakteru.

I jeszcze jedno ważne przypomnienie.

A wielkość i obszar twórczości od czego one zależą? Przytoczę piękne słowa p. J. Łukasiewicza[1]):

„Kto pragnie być twórczym w dziedzinie nauki, winien pracę nad sobą podjąć w trzech kierunkach: niech kształci zmysły, ucząc się fakty spostrzegać i obserwować, bo fakty są punktem wyjścia i sprawdzianem teoryi; niech kształci uczucie, bo na tle bogatego życia wewnętrznego zrodzi się najprędzej myśl nowa a płodna; niech kształci rozum, bo z twórczych swych pomysłów musi wysnuć następstwa i zestawić je z faktami.

Twórca naukowy niech będzie pełnym człowiekiem".

Jak już nadmieniliśmy, przy końcu lekcyi uczniowie zbierają wiadomości nowe, przytem zbierają je uczniowie słabsi, nie najlepsi; w ten sposób nauczyciel ma pewność, czy uczniowie rzecz dobrze pojęli i czy nie trzeba będzie tego samego materyału jeszcze raz przerabiać. Gdyby zachodziła potrzeba powtarzania, to przerabia się w tym wypadku zupełnie inną drogą, aby nie wywołać nudów. Po przerobieniu pewnego działu następuje znowu powtórzenie wiadomości, tworzących pewną całość, n. p. o dzielnikach liczby i wspólnych dzielnikach liczb, wielokrotnościach liczby i wspólnych wielokrotnościach liczb, będzie to zarazem przygotowanie do systematycznej nauki o ułamkach. Potem powtarzamy razem naukę o ułamkach ze wstępnemi wiadomościami, przytem staramy się zebrać te wiadomości w możliwie małą ilość zdań ważnych a prostych. Następuje wkońcu powtórzenie materyału całego roku, zebrane znowu w niewielkiej ilości zdań, a więc czasu na to zbyt długiego nie potrzeba. Przy wypowiadaniu tych własności ogólnych trzeba uważać, żeby nie zawierały cech krępujących, a pomijały cechy istotne. Tak n. p. mówi się zwyczajnie i pisze:

„Sumę mnoży się przez liczbę, mnożąc każdy składnik przez tę liczbę i dodając do siebie tak powstałe iloczyny".

Nie ustanawiajmy takich praw, bo każdy uczeń myślący powie, że to droga długa, mozolna, w praktyce bez wartości, bo przyczynia tylko roboty. Zresztą sam nauczyciel będzie jej odradzał.

Gdy nam przyjdzie wyliczyć:

$(25 + 60 + 75 + 40) . 48$, to każdy będzie rachował

$25 + 75 = 100, \quad 100 + 60 = 160, \quad 160 + 40 = 200$

[1]) Poradnik dla samouków t. I. O nauce.

i wkońcu $200 \times 48 = 48 . 200 = 9600$,
a nigdy $25 . 48 + 60 . 48 + 75 . 48 + 40 . 48$.

Należałoby te własności wypowiadać w tej postaci n. p.: Z mnożenia sumy kilku składników przez liczbę otrzymamy ten sam wynik, co z pomnożenia każdego ze składników tej sumy i dodania iloczynów częściowych (Jacob); przez to uwydatni się własność odwrotna iloczynu.

§ 12. ZNACZENIE ZADAŃ DOMOWYCH UCZNIÓW

Zadania domowe pobudzają także do myślenia w wysokim stopniu, do samodzielności i przyczyniają się do wyrobienia wyobraźni, trzeba je tylko stosować do sił każdej jednostki, bo nadmiernie trudne odstraszają i łamią. Trudów i wysiłków, odpowiednich do wieku, nie można unikać, bo idzie o to, żeby wyrobić siłę myślenia. Ktoś powiedział, że szkoła łatwa jest zbrodnią względem społeczeństwa. Jeżeli się jednak zadania obmyśli i zada, to także trzeba przypilnować, aby były wykonane. Zadawać je trzeba i z tego powodu, żeby przyzwyczajać do pracy, a strzedz od lenistwa. Pokonany trud jeden własnemi siłami doda odwagi do przezwyciężenia nowych trudów.

§ 13. KOŃCOWE WNIOSKI W SPRAWIE ZAWODOWEGO KSZTAŁCENIA SIĘ NAUCZYCIELI

Dużo bardzo zagadnień ważnych nie poruszono, ale na to nadaje się obszerna dydaktyka szczegółowa. Pozostawiam nierozstrzygnięte pytanie, do jakiego wieku wyrabiać musimy pojęcia przy pomocy pracy rąk, bo pod tym względem można zauważyć w tej samej szkole duże różnice w jednym roku, a także i z biegiem lat, a cóż dopiero gdy pójdziemy z miasta do miasta.

Odczyty, pisma pobudzają do rozważania kwestyi dydaktycznych, ale ta droga do doskonalenia się jest zbyt długa, krótką i bezpośrednią jest droga przykładów. Dlatego dla dobra szkoły i społeczeństwa można sobie serdecznie życzyć:

1) wzorowych lekcyi jak najwięcej nie dla wzajemnego poniżania się, lecz podnoszenia;

2) odwiedzania się wzajemnego na lekcyach;

3) odczytów treści naukowej i pedagogicznej.

Nie każdy z nauczycieli może korzystać z porady wybitnych sił pedagogicznych. Długie może odbywać próby młody wychowawca, nim się przekona, że pewna droga jest złą, a inna dobrą, a nieraz — i to prawda — nie ma zbyt wiele czasu zastanawiać się nad metodą, bo musi dbać przedewszystkiem o pogłębianie samego przedmiotu. Jeżeli uwzględnimy jeszcze i to, że szczególnie w klasach niższych uczą nie matematycy, to może nie od rzeczy będzie życzenie, żeby powstał u nas podręcznik metodyczny do nauczania matematyki w klasach niższych, któryby przedstawiał wiernie przebieg każdej lekcyi z pytaniami i możliwemi odpowiedziami uczniów, coś w rodzaju „Szkoły chemii" Ostwalda, z krótkiem uzasadnieniem poglądów psychologicznych. Pierwsze jego wydanie, jak każda próba zbiorowa, pozostawiałoby może dużo do życzenia, ale późniejsze wydania byłyby z pewnością dobre i bardzo pożyteczne.

* * *

Dzieła, z których korzystałem przy spisywaniu tych uwag:

Dr. L. Kulczyński, Ogólne zasady pedagogiki.

Poradnik dla samouków t. I, wyd. 2. dział matematyka, stopień I, II i metodyka nauczania S. Kwietniewskiego.

Dr. A. Höfler, Didaktik des mathem. Unterrichts.

Dr. I. Jacob, Praktische Methodik des mathem. Unterrichts.

Ustawy Komisyi Edukacyi narodowej z r. 1783.

SPIS RZECZY

DR. ANTONI HOBORSKI

UWAGI O DYDAKTYCE MATEMATYKI DLA WYŻSZYCH KLAS GIMNAZYÓW KLASYCZNYCH

PRZEDMOWA

Niniejsze „Uwagi“ są powtórzeniem (niemal bez zmiany) odczytu, jaki wypowiedziałem na posiedzeniu Towarzystwa Instytutu pedagogicznego w Krakowie dnia 15. lutego r. 1917.

„Uwagi“, jak i odczyt, nie miały zadania przynieść rzeczy nowe (poza pewnymi szczegółami wszystko można też znaleźć w odnośnej literaturze), ale mają raczej być wskazówką i pobudką do zastanowienia się nad sprawami dydaktyki dla młodego adepta zawodu nauczycielskiego, który, zazwyczaj pozostawiony samemu sobie, robi przez całe lata próby niepotrzebne.

Przedewszystkiem powinien początkujący w zawodzie nauczycielskim zapoznać się z interesującą książką A. Scheindlera: Praktische Methodik für den höheren Unterricht (tom I, 1912); stałymi zaś towarzyszami kilkuletniej pracy nauczycielskiej winny być dwie książki: jedna obszerna A. Höflera: Didaktik des mathematischen Unterrichtes (1910), zawierająca mnóstwo zagadnień z dydaktyki praktycznej, podająca nawet kilka lekcyi szkolnych; druga niewielka, zwięzła Jacoba: Praktische Methodik des mathematischen Unterrichts (1913). Nie wystarcza książki te szybko przeczytać i do nich więcej nie zaglądać, ale sądzę, że opracowanie każdej lekcyi szkolnej winna wyprzedzić znajomość obcych prób, a do tego celu nadają się znakomicie obie książki; oczywiście jestem daleki od tego, bym zachęcał do naśladownictwa bezwzględnego obcych wzorów.

Oprócz tych książek polecam czasopisma: Lehrproben und Lehrgänge (które od czasu do czasu przynoszą opracowanie lekcyi szkolnych) i Zeitschrift für das Realschulwesen. Bardzo rzadko można znaleźć artykuły z dydaktyki matematyki w czasopiśmie: Zeitschrift für österr. Gymnasien.

Z polskich pism można zalecić Wektor, wychodzący od kilku lat w Warszawie.

Do zestawienia niniejszych uwag posługiwałem się głównie cytowanemi książkami Scheindlera, Höflera i Jacoba. Pozatem korzystałem nieco z następujących dwóch dzieł: Duhamel, Des methodes dans les sciences de raisonnement (cztery tomy).

Dauge, Cours de mèthodologie mathématique.

Ponadto przeglądnąłem cytowane czasopisma. Ze zakresu ogólnej dydaktyki (zob. § 1) zasługuje na wzmiankę artykuł Hönnigsberga p. t. Über die Behandlung der Mathematik am Obergymnasium, umieszczony w t. III (1852) czasopisma Zeitschrift für österr. Gymnasien.

§ 1. OKREŚLENIE PRZEDMIOTU ODCZYTU. DWA CELE NAUCZANIA MATEMATYKI

Aby określić przedmiot, którego dotyczą niniejsze „Uwagi“, podzielę dydaktykę matematyki dla klas gimnazyalnych od 4-tej do 7-mej włącznie [1]) na dwie części: ogólną i szczegółową. Przez ogólną dydaktykę będę rozumiał zbiór zasad i metod nauczania bez względu na to, do jakiej z klas od 4-tej do 7-mej uczęszcza uczeń i jaki będzie materyał naukowy z matematyki, który ma uczeń sobie przyswoić.

Zrozumiałem będzie, że treść tak pojętej ogólnej dydaktyki nie może być obszerną.

Szczegółową zaś dydaktyką nazwę zbiór zasad i metod nauczania w ścisłem zastosowaniu do klasy, do której uczeń uczęszcza,

---

[1]) Odtąd stale bliższe określenia pomijam i używam wyłącznie słowa „dydaktyka“.

i do materyału naukowego, jakiego się udziela. Rozmaitość treści będzie w drugim wypadku wielka, bo niemal każda lekcya nasunie kilka istotnych uwag dydaktycznych. Stąd też wynika, że omówienie ogólnej dydaktyki może być treścią jednego odczytu, kiedy szczegółowa dydaktyka (może więcej interesująca), o ile chodzi o jej całokształt, może być raczej przedmiotem (nie odczytu, ale) wielkiego tomu.

Dlatego poniżej ograniczam się do rozwinięcia kilku myśli z dydaktyki ogólnej, nie roszcząc sobie pretensyi, że temat wyczerpałem.

Z takiego ograniczenia treści nie wynika bynajmniej, że wolno o celu nauczania matematyki zamilczeć; sądzę przeciwnie, że i ogólna dydaktyka zależy od celu, jaki sobie przy nauczaniu postawimy.

Jakiż więc cel nauczania matematyki przyjąć?

W tym właśnie kierunku ostatnie plany austr. ministerstwa oświaty są zbyt lakoniczne. Dlatego, nie dbając przesadnie o oficyalne plany, sądzę przedewszystkiem, że nauczyciel, jeżeli tylko rozumie specyalną rolę matematyki wśród umiejętności, będzie chciał dla szkoły wydobyć z niej tyle, ile ona może dać — przy oczywistem uwzględnieniu warunków nauczania. Sądzę więc, że nauczyciel wytknie sobie dla klas wyższych podwójny cel nauczania matematyki.

A mianowicie: nauczyciel będzie uczył tak, aby uczniowie przyswoili sobie pewien zasób wiadomości i utrwalili go w swej pamięci na całe życie; oprócz tego będzie się starał wyszkolić uczniów w logicznem myśleniu, zwłaszcza w ścisłem wyprowadzaniu wniosków ze założeń i uświadomić uczniów w tym kierunku; ta część nauczania odbywać się będzie także na materyale naukowym, którego trwałe pamiętanie nie jest konieczne.

Obydwa cele mają różnorodny charakter: pierwszy ma znaczenie czysto praktyczne, kiedy drugi ma na oku formalne wykształcenie uczniów. Określając właśnie także drugi cel nauczania, nie godzę się z tymi, którzy uważają formalne wykształcenie za coś nieosiągalnego w szkole średniej, bo owszem sądzę, że dla każdego wieku ucznia (począwszy przynajmniej od 15-go roku jego życia) można określić odpowiedni stopień wykształcenia formalnego.

Trzeba wprawdzie przyznać bez ogródek, że młody zwłaszcza umysł — co jest dla niego charakterystycznem — żąda raczej coraz to nowszych rezultatów, niżby dbał o stronę formalną rozumowania; ale nietrudno z czasem uświadomić ucznia w tym kierunku, że „wiedza nieścisła“ nie jest wiedzą, że na każdym kroku okazać się muszą braki, że każde twierdzenie nie jest „pewnem“, jak długo go nie udowodniliśmy; wtedy, jak sądzę, obudzi się u ucznia potrzeba świadomego, ścisłego rozumowania.

Odpowiednio do dopiero co określonych dwóch celów nauczania rozpada się niniejszy odczyt na dwie części.

W jednej rozpatrzę metody tego nauczania, które pragnie, żeby uczniowie przyswoili sobie pewien materyał naukowy; w drugiej będzie mowa o wymaganiach, stawianych temu nauczaniu, które ma uczniów kształcić formalnie.

§ 2. STOSUNEK MATERYAŁU NAUKOWEGO LEKCYI DO NAUKI CZYSTEJ

Najpierw rozpatrzymy stosunek materyału naukowego jednej lub kilku lekcyi szkolnych do nauki czystej.

W tym celu trzeba w ogólnym przypadku wyróżnić w materyale naukowym szkolnym układ pojęć pierwotnych (sc. matematycznych) jak i pojęć pochodnych; nadto układ prawd matematycznych, które są albo aksyomatami albo twierdzeniami i wreszcie pewien zbiór zagadnień, o których zresztą później obszerniej mówić będę.

Pierwszy warunek dobrego nauczania, polegający na tem, by nauczyciel dobrze rozumiał materyał naukowy, jako sam przez się zrozumiały, pomijam.

Choć w każdej teoryi matematycznej można — jak wiadomo — mówić o pojęciach pierwotnych właściwie nieokreślanych i o aksyomatach recte zdaniach nieudowadnianych, to jednakowoż, mówiąc o pojęciach pierwotnych i aksyomatach, ma się zwykle na myśli: początki analizy i początki geometryi, które w szkole przypadają na stopniu średnim na klasę 4-tą, t. j. z reguły na uczniów czternastoletnich, kiedy oczywiście nie można się spodziewać zrozumienia nowocześnie pojętej nauki dedukcyjnej, na to bowiem potrzeba i umysłu dojrzałego i pewnej znajomości logiki.

Dlatego nie będzie dziwnem, gdy w nauczaniu szkolnem będzie i pojęć pierwotnych i aksyomatów więcej [1]) niż w nauce abstrakcyjnej. Nauka, jak zresztą wiadomo, nie zna jednego i jedynego

[1]) Można np. przyjąć za aksyomat zdanie: wszystkie kąty proste są sobie równe.

układu pojęć pierwotnych i aksyomatów — układów jest już kilka i będzie ich prawdopodobnie jeszcze kilka. Nadto często przyjmuje się zasadę, że ten układ jest doskonalszy, który posługuje się mniejszą ilością matematycznych pojęć pierwotnych. Otóż geometrya M. Pascha (Vorlesungen über neuere Geometrie, 1882, drugie wyd. z r. 1912) ma cztery geometryczne pojęcia pierwotne (punkt, odcinek, płaszczyzna, nakładalność figur), elementarna geometrya G. Peana (Sui fondamenti della Geometria, Rivista di matematica, t. 4, 1894) posługuje się tylko trzema pojęciami pierwotnemi (punktu, odcinka i ruchu), geometrya Pieri'ego (przetłóm. także na język polski [1]) ma tylko dwa pojęcia pierwotne (punktu i kuli), w „Grundlagen der Geometrie“ Hilberta jest aż pięć pojęć pierwotnych (punkt, prosta, płaszczyzna, pojęcie „między“, równość odcinków).

Ze stanowiska dydaktyki trzeba będzie te geometrye inaczej wartościować, aniżeli to czyni np. K. Th. Vahlen, który żąda (zob. jego Abstrakte Geometrie; Einleitung, str. 1, 1905) od systemu geometryi, aby ilość pojęć pierwotnych i treść aksyomatów była możliwie najmniejsza. Dlatego też kilku autorów nowszych podręczników geometryi dla wyższych klas szkół średnich używa kilku geometrycznych pojęć pierwotnych i pojęcia ruchu, jak n. p. E. Borel.

Jeżeli więc w nauce szkolnej będzie pojęć pierwotnych i aksyomatów więcej, niż w nauce abstrakcyjnej, to ścisłość przez to samo bynajmniej nie ucierpi. Że na ścisłości powinno nauczycielowi zależeć, tego, jak sądzę, nie potrzeba dowodzić wobec wywodów z § 1; można jeszcze tyle dodać, że nauka szkolna jest wprawdzie popularyzacyą wiedzy, ale też, że czasy, w których ścisły rezultat nauki przedstawiano w sposób błędny ze stanowiska naukowego, minęły (jak się zdaje) bezpowrotnie.

Na zarzut nieścisłości nie zasłuży sobie też nauczyciel, gdy nie dowodzi wszystkich twierdzeń, o ile tylko wyraźnie się do tego przyznaje; będzie zaś nieścisłym i szkodnikiem, jeżeli używa wśród nauki założeń utajonych przed uczniami, posługuje się niedokładnemi definicyami pojęć i podaje błędne dowody twierdzeń. Nadmienić też wypada o tem, że niektórzy w celu ułatwienia wprowadzają w tok nauczania wyrazy, znaki graficzne, czy pojęcia, bez

---

[1]) M. Pieri, Geometrya elementarna, oparta na pojęciach punktu i kuli. Warszawa 1915, Biblioteka Wektora.

których się odbywa nauka abstrakcyjna (np. gotowa suma, z dwu liczb różnoznakowych jedna przeważa itd.); uważam ten sposób za dozwolony, byle te pomocnicze znaki graficzne czy pojęcia były dokładnie określane.

§ 3. PRZYKŁAD PRAKTYCZNY DLA ZAINTERESOWANIA UCZNIÓW NAUKĄ

Nauczyciel powinien być tego wszystkiego świadomy, co wyżej powiedziałem, i wyobraźmy sobie, że pewną lekcyę czy też kilka lekcyi przygotował w sposób, odpowiadający powyżej skreślonym wskazówkom. Jednakowoż samo przygotowanie rzeczowe do lekcyi nie może wystarczać, towarzyszyć mu powinno także przygotowanie metodyczne. Zadajmy więc sobie pytanie następujące: jakich sposobów ma użyć nauczyciel, aby nauczyć uczniów tego, co przygotował.

Odpowiedź na to pytanie nie może być ujęta w jedno zdanie, będzie bowiem zawierała kilka ważnych zasad dydaktycznych.

Nasamprzód powinien nauczyciel dbać o to, by obudził u uczniów zainteresowanie dla treści lekcyi. Zdaje się, że to jest bez przesady nadzwyczaj ważną, ale i niemal najtrudniejszą częścią wszelkiego nauczania.

W tym celu często (choć nie zawsze) można obmyśleć prakyczny przykład z życia codziennego, w ten sposób ułożony, aby uczniów niejako zmuszał do utworzenia nowego pojęcia lub wysłowienia nowego zagadnienia.

Objaśnię tę zasadę na następującym przykładzie.

Wyobraźmy sobie, że nauczyciel ma na stopniu średnim (w klasie 4-tej) określić pojęcie wspólnego podzielnika dwóch liczb całych i ich największego wspólnego podzielnika. Oczywiście uczniowie nie odczuwają umysłowej potrzeby myślenia o takich pojęciach. Nie wystarcza więc, gdy nauczyciel na przykładzie dwu liczb, np. 12 i 18, wykaże, że te liczby są równocześnie podzielne przez liczby 1, 2, 3, 6 i stąd określi pojęcie wspólnego podzielnika itd. Taki sposób uczenia można, jak sądzę, słusznie uważać za niedostateczny; trzeba raczej wyszukać praktyczny przykład dla wzbudzenia zainteresowania u uczniów i dla pobudzenia ich do samodzielnego myślenia. W obecnym wypadku rzeczywiście łatwo o taki przykład:

Z 12-tu uczniów gimnazyalnych (lub piechurów) i 18-tu uczniów szkół realnych (lub jeźdźców) mają być utworzone oddziały, ale w ten sposób, by oddziały były równoliczne i by gimnazyaliści nie nie byli pomieszani w żadnym oddziele z realistami; ilu uczniów ma przeto liczyć każdy oddział i kiedy ilość oddziałów jest najmniejsza? [1]) Przez przykład tego rodzaju osiągnie nauczyciel i tę korzyść, że uniknie „wykładu“, znanego pod popularną nazwą „wmawiania“ wiedzy w uczniów.

O ile chodzi o stanowisko czysto naukowe w tym względzie, to wiadomo, że rzecz w nauce abstrakcyjnej ma się tak: przykład może być tylko zastosowaniem pojęć czy zagadnień abstrakcyjnych i dopiero po nich może być rozważany; przy nauczaniu szkolnem porządek jest właśnie odwrotny i tem samem często więcej zbliżony do historyi powstania odnośnych ogólnych pojęć i zagadnień. Zagadnienie teoretyczne powstaje więc w szkole zwykle przez abstrakcyę ze zagadnień praktycznych.

Mówi się też w szkole o równaniach nieoznaczonych stopnia 1-go o dwu niewiadomych. Zagadnienie: „rozwiązać takie równanie w liczbach całych i bezwzględnych“ mogłoby się wydawać uczniom czemś bardzo sztucznem i nieinteresującem, gdyby nauczyciel nie podał najpierw praktycznego przykładu, któryby właśnie niejako zmuszał uczniów do wysłowienia poprzednio podanego abstrakcyjnego zagadnienia. Jak poprzednio powiedziałem, przykłady praktyczne mają u uczniów budzić zainteresowanie dla nowych pojęć i zagadnień. Gdzie zaś o takie przykłady pokusić się nie można, to zwłaszcza konstrukcya nowych pojęć natrafia przy nauczaniu na liczne trudności. Pojęcie np. kąta między prostą a płaszczyzną, między dwiema płaszczyznami, stosunku dwu odcinków, funkcyi trygonometrycznych itd., należą prawdopodobnie do najtrudniejszych w szkole i wymagają wielkiej cierpliwości ze strony nauczyciela. W pewnych wypadkach np., gdy rozchodzi się o pojęcie kąta między prostą i płaszczyzną lub między dwiema płaszczyznami, można się uczniów zapytać, coby przez to rozumieli i jakieby określenia zaproponowali, a nauczyciel powinien tylko myśl uczniów skierować na właściwe tory. Dopiero co podane pojęcia, jak dodatkowo warto zauważyć, określa się genetycznie; ta właśnie forma definicyi po-

[1]) Porównaj z powyższem zadanie Jacoba: Praktische Methodik des mathematischen Unterrichts, 1913, na str. 17, ustęp 5-ty.

siada wielką wartość dydaktyczną, gdyż łączy się ściśle z pewną czynnością fizyczną, co uważam za moment dla nauczania bardzo ważny.

Jak też wiadomo, pojęcia tworzą się przez abstrakcyę z konkretnych wyobrażeń, co z powyższem jest w zupełnej zgodności; trzeba więc wywołać w umyśle ucznia wyobrażenia szczegółowe tak, aby uczeń z możliwie najmniejszą pomocą nauczyciela nabywał nowych pojęć i je określał.

Innemi słowy: metoda nauczania powinna być indukcyjną, t. zn. od konkretnych wyobrażeń powinien uczeń dochodzić do ogólnych pojęć, od przykładów szczegółowych, praktycznych do zagadnień abstrakcyjnych.

§ 4. HEURYSTYCZNA METODA NAUCZANIA

Zasada praktycznego przykładu, o której poprzednio była mowa, dla tego celu, aby uczniowie samodzielnie określali pojęcia i wysławiali nowe zagadnienie, jest pod tym względem szczególnym przypadkiem ogólnej zasady, a mianowicie zasady metody heurystycznej w nauczaniu szkolnem.

Metoda heurystyczna polega na tem, że nauczyciel przy pomocy odpowiednio zadawanych pytań naprowadza uczniów do nowych pojęć i ich określeń, do wypowiedzenia nowych twierdzeń i dowodów tych twierdzeń, do wysłowienia nowych zagadnień itd., unikając wykładu, który w zasadzie jest najmniej skuteczną formą nauczania młodzieży. Niestety, nie zawsze może być ta metoda stosowaną, ale tam, gdzie można jej użyć, daje wyniki bardzo korzystne. Zmusza bowiem ucznia do ciągłej uwagi, bo w każdej chwili może być uczeń wywołany do odpowiedzi, przymusza do myślenia w pewnym stopniu samodzielnego, a pod względem formalnym kształci biegłość w mówieniu i we wypowiadaniu własnych myśli; nadto łączy się z pewnem ostrzeżeniem dla nauczycieli pod tym względem, że bardzo często można ze słusznością powiedzieć, iż tylko te pojęcia, te zagadnienia i twierdzenia nie przekraczają zdolności umysłowych ucznia, które zdoła uczeń sam skonstruować, względnie rozwiązać czy udowodnić; ta właśnie okoliczność nabiera specyalnie na wadze przez to, że nauczanie jest masowem i wskutek tego nauczyciel bardzo niedokładnie zna swoich uczniów.

Jak już zaznaczyłem, byłoby mniemanie błędnem, że można czy też należy każdą czy całą lekcyę przeprowadzić metodą heurystyczną. Są bowiem wiadomości, których nauczyciel musi uczniom udzielić, bo przekraczają zdolność inwencyi uczniów. Dla wyjaśnienia podam konkretny przykład i dokładnie go zanalizuję.

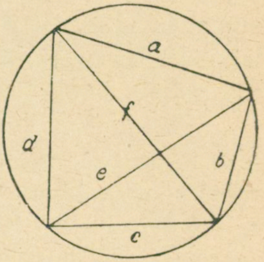
Przyjmijmy tedy, że nauczyciel pragnie uczniów nauczyć planimetrycznego twierdzenia, t. zw. twierdzenia Ptolomeusza, o czworoboku wypukłym wpisanym w koło, któreto twierdzenie łączy w prosty związek liczby mierzące boki czworoboku z liczbami mierzącemi jego przekątnie. Metoda heurystyczna, skrajnie w obecnym wypadku stosowana, wymagałaby, żeby nauczyciel uczniom twierdzenia nie podawał; ponieważ zaś rozumowanie metodą heurystyczną prowadzone, jak zresztą każde rozumowanie, musi posiadać określony cel, przeto nauczyciel przez szereg odpowiednich pytań będzie się starał uzyskać od uczniów odpowiedź, że między liczbami mierzącemi boki i przekątnie czworoboku wypukłego wpisanego w koło musi istnieć związek matematyczny, skąd wynika bezpośrednio nowe zadanie dla uczniów: ów związek znaleźć.

Trzeba zaraz zauważyć, że wysłowienie twierdzenia, choćby na razie we formie nieokreślonego bliżej związku, jest dla wyszukania jego ścisłej postaci jeszcze niewystarczającem, gdyż nauczyciel będzie zmuszony podać pewną pomocniczą konstrukcyę geometryczną; jeżeli więc ją wskaże uczniom, to będzie potem kierował we wyborze trójkątów podobnych itd., aż po dłuższem rozumowaniu dojdzie uczeń do celu, upragnionego przez nauczyciela.

Otóż mojem zdaniem, nie można podobnego sposobu uczenia uważać za właściwy, wszak uczeń podczas całego rozumowania, nie widząc celu, do którego ma dążyć, zachowuje się raczej biernie i nie uczy się bynajmniej samodzielnie myśleć. Założenie tej metody było błędne: uczeń przeciwnie powinien znać dokładnie cel rozumowania, t. j. twierdzenie, zwłaszcza gdy rozumowanie będzie dłuższe.

Powstaje więc pytanie: czy nauczyciel ma wprost powiedzieć uczniom twierdzenie, nim je z uczniami udowodni.

Jeszcze jeden widzę tu sposób, czyniący zadość zasadzie, aby nauczyciel możliwie najmniej wiadomości podawał wprost uczniom i by przez to uczeń jak najwięcej robił samodzielnych „odkryć naukowych“. Mam mianowicie na myśli sposób, praktykowany na stopniu niższym, którego można bez skrupułu użyć w takim jak obecnie rozważanym przypadku: oto uczniom poleca się wykonać starannie figurę wypukłego czworoboku wpisanego w koło, a następnie zmierzyć jego boki i przekątnie (fig. obok); jeżeli przez a, b, c, d, e, f oznaczymy liczby mierzące boki i przekątnie, oblicza się iloczyny ac, bd, ef; nauczyciel może się spodziewać, że na 20-tu do 30-tu uczniów klasy znajdzie się co najmniej jeden, który będzie przypuszczał, że zachodzi właśnie związek:



$$(1)\quad ac + bd = ef.$$

Następnie będzie się rozchodziło o to, by to przypuszczenie ściśle uzasadnić.

Zaraz na wstępie tego dowodu występuje nowy szczegół dydaktyczny; dowód rozpoczyna się bowiem od konstrukcyi pewnego pomocniczego trójkąta. Wskutek tego ma nauczyciel dwie drogi metodyczne do wyboru: albo wskaże uczniom wprost konstrukcyę, jaką należy wykonać (jeśli żaden z uczniów nie zdoła jej przewidzieć, co jest prawie pewnem i nawet mało pożądanem); albo ponieważ coś istotnego musi uczniom powiedzieć, wskaże im na coś takiego, co ich może i powinno pobudzić do namysłu. W tym celu równość (1) pisze nauczyciel w postaci:

$$(2)\quad \frac{ac}{e} + \frac{bd}{e} = f,$$

co uczynić wolno, bo jest $e \neq 0$. Otóż równość (2) powinna uczniom wskazywać na to, że przekątnia, mierząca się liczbą f, jest sumą dwóch odcinków o liczbach wymiarowych g i h takich, iż jest:

$$(3)\quad \frac{ac}{e} = g, \quad \frac{bd}{e} = h; \quad g + h = f,$$

Jeżeli pierwszą z równości (3) napisze uczeń pod postacią:

$$(4)\quad \frac{a}{e} = \frac{g}{c},$$

to natychmiast zauważy, że wynika ona z podobieństwa dwóch trójkątów, które z łatwością uczeń wyszuka, a właśnie wyszukanie trójkątów podobnych, któreby pozwoliły ostatnią równość napisać, prowadzi do konstrukcyi pomocniczej, rozpoczynającej dowód twierdzenia (1). Resztę dowodu pomijam. W ten sposób może być przeprowadzona lekcya metodą heurystyczną w zastosowaniu do poszukiwania twierdzenia i jego dowodu. Przykład, przeze mnie obrany, nie jest zanadto prosty, wskutek czego może służyć do objaśnienia następujących zasad:

1. Najlepszą metodą nauczania jest metoda heurystyczna, polegająca na tem, żeby przez szereg odpowiednio zadawanych pytań pobudzić uczniów do celowego, we wysokim stopniu samodzielnego myślenia twórczego, co stanowi (bez przesady) najwyższy ideał wykształcenia, danego przez szkołę średnią. Nauczyciel, posługujący się metodą heurystyczną przy nauczaniu, jest raczej kierownikiem myśli uczniów. Nadto metoda heurystyczna jest wprost konieczna we wypadku nauczania masowego, którem jest nauczanie szkolne [1]).

2. Wprawdzie powinna ta metoda mieć jak najszersze zastosowanie, jednakowoż nie w każdym wypadku daje się użyć.

3. Gdy więc w nauczaniu zachodzi chwila, kiedy nauczyciel ma podać uczniom pewien zasób nowych wiadomości, na któreby się uczeń zdobyć nie mógł, to powinien uczący zastanowić się nad tem, czy niema sposobu podania dalszych wiadomości, któryby uczniów mógł pobudzić do jak najszerszego myślenia twórczego.

4. Analityczna czyli dedukcyjna forma dowodu bez podania twierdzenia, jako celu rozumowania, jest nieodpowiednia przy nauczaniu szkolnem, zwłaszcza gdy chodzi o dowód dłuższy, który wtedy powinien mieć formę redukcyi, gdy go nauczyciel przeprowadza z uczniami metodą heurystyczną.

5. Lekcya, poprowadzona metodą heurystyczną, wymaga tego, co się w dydaktyce nazywa syntezą, t. j. wymaga powtórzenia, zebrania i uszeregowania nowych wiadomości, zdobytych na lekcyi przez heurezę. Przeto też dowód twierdzenia, który, uzyskany metodą heurystyczną, ma postać dowodu syntetycznego czyli redukcyi, należy powtórzyć we formie analitycznej czyli dedukcyjnej.

---

[1]) Nie przesadzę mówiąc, że metoda heurystyczna ma największe zastosowanie na lekcyach matematyki. Wszak faktów historycznych lub wyników doświadczenia uczeń zawsze przewidzieć nie może. Jeszcze wynik doświadczenia dałby się jakościowo i dość często przewidzieć, gdyby uczeń znał hypotezy naukowe, ale oczywiście przy nauczaniu fizyki etc. należy bardzo skrupulatnie na to uważać, by hypotezy nie wyprzedzały faktów.

§ 5[1]). EGZAMIN ORYENTACYJNY; PYTANIA NAUCZYCIELA I ODPOWIEDZI UCZNIÓW

Kontrola uczniów w tym celu, aby się przekonać, czy materyał naukowy lekcyi poprzedniej uczniowie dobrze zrozumieli i utrwalili w pamięci, znana pod nazwą egzaminu „oryentacyjnego", jest nauczaniu, pojętemu w ściślejszem znaczeniu, niemal równorzędną częścią nauczania, rozumianego szerzej. Nie można bowiem myśleć o jakimkolwiek prawdziwym postępie w nauce bez należytego zrozumienia dawnego materyału naukowego, o który ma się nowy opierać. Nadto egzamin oryentacyjny jest również formą powtórzenia wiadomości dla utrwalenia ich w pamięci; powtarzanie, choćby tylko dla takiego celu podjęte, nie może się odbywać w sposób mechaniczny, ale powinno być rozumowane. Dlatego też zdanie, które nieraz słyszałem i które wydaje się w pierwszej chwili paradoksalnem, a które głosi, że komenda nauczyciela na lekcyi: „powtórz" (sc. to, co tamten powiedział) jest zupełnie błędną ze stanowiska pedagogiki, — zdanie takie ma przecież dużo słuszności. Odpowiedź ucznia powinna być bowiem odpowiedzią na określone pytanie, a nie być powtórzeniem (może bezmyślnem i mechanicznem) obcych słów, raczej być powinna wyrazem własnych myśli ucznia w jego własnych słowach.

Z tego wszystkiego wynika, że egzamin oryentacyjny nie powinien być jakiemś skróceniem i do tego dorywczem „na prędce" ostatniej lekcyi, ale powinien mieć cechę swobodnego i zarazem dokładnego sprawozdania. Egzamin oryentacyjny pozwala także błędne pojmowanie rzeczy przez uczniów sprostować przy ich pomocy.

W każdym razie, jak sądzę, trzeba przyjąć następującą zasadę: nie wolno nauczycielowi podawać uczniom nowych wiadomości naukowych, nim nie skontrolował, czy dawniejsze dobrze pojęli. Nie można jednak zaprzeczyć temu, że bezwzględna interpretacya tej zasady pozostaje w pewnej sprzeczności z nauczaniem szkolnem, które, jako takie, jest masowem.

Przy sposobności nie mogę pominąć sprawy pytań nauczyciela i odpowiedzi uczniów, mimo że nie zajmuję się ogólną dydaktyką. Wszak właśnie przy nauczaniu metodą heurystyczną odgrywa pytanie nauczyciela wielką rolę. A zadawanie pytań poprawnych

---

[1]) § 5. nie był objęty odczytem.

nie jest wcale łatwem, dlatego też nauczyciel powinien je obmyśleć podczas swego przygotowania metodycznego do lekcyi szkolnych.

Poprawne pytanie powinno spełniać pewne warunki. Oto powinno być co do swej formy prostem, częściej zdaniem pojedynczem, niż złożonem; powinno być określonem, t. zn. takiem, że na nie możliwa tylko jedna trafna odpowiedź; nie powinno pytanie używać słów dla ucznia niezrozumiałych, a pod względem językowym powinno być poprawne. Pytania zatem: „jaka to liczba?“ „te liczby będą równe, jeżeli co będzie?“ itd. są widocznie niepoprawne. Pytanie powinien nauczyciel zwracać do całej klasy, a nie do jednego tylko ucznia.

Odpowiedź ucznia może być albo błędną albo trafną albo może się zdarzyć, że uczeń nie daje żadnej odpowiedzi. Otóż staranne nauczanie wymaga, żeby nauczyciel nad żadną z tych trzech ewentualności nie przechodził do porządku dziennego.

Bardzo rzadko można w klasach wyższych brak odpowiedzi przypisać nieśmiałości ucznia, zwykle przyczyną braku odpowiedzi jest nieuwaga lub brak wiadomości. We wielu przypadkach może nauczyciel znaleźć właściwą przyczynę i obmyśleć środek zaradczy. Błędną odpowiedź powinni uczniowie prostować, a nie nauczyciel; jednakowoż błędna odpowiedź u większości uczniów niech będzie przestrogą dla nauczyciela, że niewątpliwie popełnił błąd metodyczny w nauczaniu. Odpowiedź trafna, o ile jest bardzo krótka, może nieraz pochodzić z t. zw. „podpowiadania“, może być też „mimo woli“ ucznia trafną. Nauczyciel powinien bezwzględnie zwalczać „podpowiadanie“, bo ono czyni wszelkie nauczanie illuzorycznem. Jednym ze sposobów zaradczych jest żądanie odpowiedzi całem zdaniem, a nie jednem słowem. Trafną odpowiedź, którą uczeń dał „mimo swej woli“, t. j. nieświadomie, bo rzecz odgadł, wypowiada zwykle tonem niepewnym, który powinien ostrzedz nauczyciela o tem, że ona nie jest konsekwencyą rozumowania, że uczeń nie nabył przekonania o prawdziwości tego, co mówi. Zasadą, jak powiedziałem, bardzo ogólną jest następująca: i trafna odpowiedź i błędna podlegają rozbiorowi, którego dokonać powinni uczniowie przy pomocy nauczyciela.

§ 6. NAUCZANIE POJĘĆ NAUKOWYCH

Przechodzę obecnie do drugiej części „Uwag“.

Jak to już w §. 2 powiedziałem, treść matematyki ze stanowiska formalnej logiki można podzielić na układ pojęć pierwotnych, tj. nieokreślanych i pojęć pochodnych, tj. definiowanych, z aksyomatów, tj. zdań przyjmowanych za prawdziwe bez dowodu, z twierdzeń, których się dowodzi i wreszcie ze zagadnień [1]).

Obecnie zastanowimy się nad tem, czego należy przestrzegać przy nauce szkolnej, jeżeli ona ma kształcić formalnie.

Otóż aksyomaty uchodzą w nauce abstrakcyjnej za ukryte definicye pojęć pierwotnych, w nauce szkolnej mają być nadto świadomem wysłowieniem częstokroć nieświadomego poglądu, np. geometrycznego. Nauczyciel powinien dbać o to, by uczeń przez spostrzeżenia i wyobrażenia nabył pojęcia pierwotne, zgodnie z nauką; w przeważnej części dzieje się to na stopniu niższym, na stopniu wyższym ma nauczyciel raczej skontrolować, czy uczniowie posiadają matematyczne pojęcia pierwotne.

Nie trzeba dodawać, że aksyomaty powinien uczeń sam wypowiadać.

Co się tyczy pojęć pochodnych czyli określanych w nauczaniu szkolnem, to trzeba sobie zdać jasno sprawę z tego, że pojęcia a zwłaszcza ich definicye wymagają nieraz znacznego rozwoju umysłowego; dlatego też plany oficyalne słusznie oświadczają: „Poprawne co do formy definicye pojęć matematycznych są na stopniu niższym bezwarunkowo zbędne, lecz także na stopniu średnim i wyższym należy je wprowadzać z tem większą ostrożnością, im ogólniejsze i prostsze są te pojęcia“ [2]). Tylko przy powolnem tempie nauczania, przez wielokrotne zastosowania dochodzi się do tego, że uczeń zdaje sobie dokładnie sprawę z cech i zakresu pojęć pochodnych. Definicya pojęcia łączy się częstokroć z twierdzeniem, że istnieje przedmiot definicyi, jednakowoż pojęcia matematyczne szkoły średniej są tak elementarne, że konstrukcya przykładu, stwierdzającego to istnienie, jest bardzo łatwa, zresztą tok nauki szkolnej jest częstokroć o tyle odwrotny, że przykłady wyprzedzają

---

[1]) Zagadnieniom można nadać postać zdania, które jest twierdzeniem; wymaga to znajomości rozwiązania tego zagadnienia.

[2]) Zob. Dodatek 2 do rocznika 25 czasopisma: Muzeum (1909). Nowe plany naukowe (Tłóm. Dr. Maryan Janelli) (Str. 78).

definicye nowych pojęć. Nie określa się np. najpierw liczby (bezwzględnie) pierwszej, a potem na przykładzie liczb 2, 3, 5, 7 itd. wykazuje, że klasa liczb pierwszych nie jest pustą, ale czyni się w szkole średniej w porządku odwrotnym.

Pojęcia matematyczne, które w nauce szkolnej są pochodnemi, określa się albo przez definicyę scholastyczną albo genetycznie; o wartości dydaktycznej drugiej formy określeń już poprzednio (§ 3) wspomniałem.

Są też w nauce pojęcia, które mają tę samą nazwę, co pojęcia znane uczniom z życia codziennego; z matematycznych należą do nich: pojęcie prawdopodobieństwa matematycznego i pewne pojęcia geometryczne, np. podobieństwo figur płaskich i prostoliniowych, koło itd. I kiedy pojęcia potoczne (tak nazwę dla krótkości wysłowienia się pojęcia, zaczerpnięte z życia codziennego) są często niedokładne i niestałe, to pojęcie naukowe jest określone jednoznacznie i oczywiście nie powinno pozostawać w rażącej sprzeczności z pojęciem potocznem tej samej nazwy; to właśnie podobieństwo obu pojęć ma nauczyciel wyzyskać w ten sposób, aby, wychodząc z pojęcia potocznego, doprowadzał uczniów do określenia pojęcia naukowego. Zachodzi tu także okoliczność, jak sądzę, interesująca, a zauważona przez A. Höflera [1]). Oto Höfler twierdzi, że potoczne pojęcie koła nie zawiera cechy stałości promienia, ale raczej stałości krzywizny, tj. pojęcia niejasnego przed określeniem koła; podobnie też naiwny pogląd na równoległe nie podkreśla tej cechy, którą podaje naukowe określenie równoległych, ale łączy pojęcie prostych równoległych ze stałą odległością obu prostych, jak zresztą na to wskazuje polska nazwa.

§ 7. NOWE WIADOMOŚCI W STOSUNKU DO DAWNIEJ PRZEZ UCZNIA NABYTYCH

Ostatnie uwagi ilustrują tę ważną dydaktyczną zasadę, że nowe wiadomości, które ma uczeń sobie przyswoić, należy wprowadzić w pewien związek ze zasobem wiadomości, przez ucznia już poprzednio nabytych. Ściśle logiczny związek lub analogia czy przeciwieństwo będą właśnie temi więzami między szeregami myśli już

---

[1]) A. Höfler: Didaktik des mathematischen Unterrichts (1910); str. 439.

przyswojonych przez ucznia a szeregami nowych idei. O tej zasadzie już wspomniałem i zresztą jest implicite zawarta w zasadzie metody heurystycznej dla nauczania szkolnego.

W myśl tej zasady powiązania nowych idei z faktycznym zasobem wiadomości będzie właśnie postępował nauczyciel, gdy uczniów zaprawia do uogólnienia dobrze im znanych prawd matematycznych. Sądzę, że nie potrzebuję się rozpisywać nad ważnością tego kształcenia umysłu, które uczy ucznia świadomie poszukiwać uogólnień poznanych myśli, taką bowiem nauką budzi się myślenie twórcze, a nauczanie matematyki dostarcza częstych sposobności do uogólniań faktów.

§ 8. NAUKA MECHANICZNA

Określaniu pojęć pochodnych, o czem poprzednio była mowa, powinny w odpowiednich do tego chwilach towarzyszyć bogato przykładami ilustrowane uwagi o celu definicyi, o zakresie i cechach pojęć, o wzajemnym stosunku zakresu i cech pojęcia i o własnościach poprawnej definicyi. Ostatnią sprawę najlepiej omawiać we wypadku zauważonego u ucznia błędu w tym względzie. Dość częstym błędem jest podawanie przez ucznia definicyi „idem per idem“; nauczyciel powinien w takich wypadkach naprowadzić ucznia do przeświadczenia, iż w ten sposób pojęcia nie określił. Nawiasem dodam, że wyszukiwanie błędu w odpowiedzi ucznia można często powierzyć innym uczniom. Podawanie pojęć zbyt zacieśnionych lub zbyt rozszerzonych jest też nierzadkim objawem. Cech konsekutywnych w określeniu pojęć słyszy się także dość często od ucznia ale i podręczniki nie powinny określać trójkątów podobnych, jako trójkąty o odpowiednio równych kątach i proporcyonalnych bokach. Niestety najczęstszy błąd uczniów polega na tem, że uczeń pamięta tylko nazwę pojęcia, nie myśląc o jego cechach. Ten objaw łączy się ściśle z częstą u uczniów mechaniczną nauką, nauką czysto pamięciową, polegającą na powtarzaniu słów, bez zdania sobie sprawy z treści słów. Wobec tej — nie przesadzam — plagi szkolnej jest nauczyciel częstokroć wprost bezradny. Jeżeli stara się ją zwalczać przez to, że obmyśla sposoby, jakby się zdawało, zdolne do tego, by ją wprost uniemożliwić, to niebawem się przekona o tem, że uczniowie zdołali te właśnie specyalne sposoby wyzyskać do nauki pamięciowej. Obecnie po tylu latach nauczania upatruję skuteczną metodę zwalczania bezmyślnej nauki w możliwie wielkiej redukcyi ilości wzorów matematycznych do stałego zapamiętania przez uczniów i w rozwiązywaniu znacznej liczby najróżnorodniejszych zagadnień słownych, które właśnie przez swą rozmaitość przekonają ucznia, że dobrego rezultatu ze swego bezmyślnego „kucia" spodziewać się nie może, w następstwie czego zabierze się do gruntownej zmiany charakteru swej pracy. Dobrym także środkiem, zwykle stosowanym, jest zmiana oznaczeń pojęć czy składowych części figur etc. To kurczowe trzymanie się oznaczeń, użytych na poprzedniej lekcyi, jest właśnie charakterystycznem dla ucznia bezmyślnie się uczącego. Tymczasem matematyka posiada niewielką ilość symbolów powszechnie przyjętych, tak iż oznaczenia odgrywają w niej rolę drugorzędną, w szkole średniej zaś niemal dziesięciorzędną. Idealnym środkiem byłby następujący: obywać się zupełnie bez wzorów i w każdem zagadnieniu wychodzić z definicyi pojęć. Jednakowoż widoczne, że taki sposób postępowania w szkole średniej jest bardzo rzadko możliwy do zastosowania.

§ 9. NAUCZANIE DOWODÓW MATEMATYCZNYCH

Przechodzę z kolei do dalszego przedmiotu nauczania, tj. do twierdzeń i ich dowodów.

Zasady naukowej, że każde twierdzenie powinno być udowodnione, nie można przyjąć w nauczaniu szkolnem i to nie tylko dlatego, że, jak w § 2. powiedziałem, pewne twierdzenia naukowe można w szkole przenieść do klasy aksyomatów, ale nieraz dlatego, że dowód jest zbyt długi lub zbyt abstrakcyjny. W takich wypadkach powinno się dowód bezwarunkowo opuścić; równocześnie trzeba, aby nauczyciel wyraźnie zaznaczył, że dowód opuszcza, a o słuszności twierdzenia przekonał uczniów na kilku odpowiednio dobranych przykładach. Do klasy takich twierdzeń należy np. następujące: jeżeli iloczyn liczb całkowitych $a \cdot b$ jest podzielny przez liczbę całkowitą c i jeżeli liczby a, c są względem siebie pierwsze, to liczba b jest podzielna przez liczbę c. Są też twierdzenia, których ogólny dowód jest dla uczniów zbyt trudny, kiedy we wypadku szczególnym jest dość łatwym i nie pozbawionym walorów dydaktycznych; np. dowód teorematu dodawania dla funkcyi $\sin x$, t. j.

twierdzenia, że jest $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$, można ograniczyć do przypadku, kiedy x, y oznaczają takie ostre (dodatnie) kąty, że ich suma jest znów kątem ostrym; przy użyciu wspomnianego już twierdzenia Ptolomeusza w dowodzie może być suma ostrych kątów x, y kątem rozwartym. Ścisłość wymaga, aby nauczyciel wyraźnie wskazał na to, że dowodzi twierdzenia tylko w przypadku szczególnym, że jednakowoż twierdzenie jest ogólnie prawdziwe, co powinien też objaśnić na kilku dobranych przykładach.

Gdy nauczyciel dowodu nie pomija, to dowód powinien być ścisły; trzeba bowiem uświadomić uczniów, choćby zwolna, w tym kierunku, że matematyka jest nauką dedukcyjną, że opiera się na kilku aksyomatach, że ma formę wnioskowania ze założeń i że ścisłość jest dominującą cechą jej wywodów; jest więc najlepszą szkołą ścisłego myślenia, ale oczywiście będzie taką w szkole tylko wtedy, gdy nauczyciel ani uczniom nie pozwoli na błędy przeciw ścisłości ani sam takich błędów nie będzie popełniał.

Dowód twierdzenia polega na zręcznem, bo celowem zestawieniu aksyomatów i twierdzeń, uczniowi już znanych. Nierzadko jest korzystnem przed rozpoczęciem dowodu powtórzyć z uczniami aksyomaty i twierdzenia, na które trzeba się w dalszym ciągu powołać, zwłaszcza gdyby ich powtórzenie późniejsze mogło znacznie przerwać tok dowodu; ale ogólnych prawideł dawać nie można w tej sprawie.

Rozważmy szczególny przykład, mianowicie planimetryczne twierdzenie: gdy przez środek jednego boku poprowadzi się równoległą do drugiego boku, to ona przepołowi trzeci bok tego trójkąta. Twierdzenie to mogą uczniowie „odkryć“ przez staranny rysunek i pomiar, dowód można poprowadzić metodą heurystyczną, jeżeli wdrożyło się uczniów w to, że równości odcinków bardzo często można dowieść przez wyszukanie dwóch przystających trójkątów, których bokami są uważane odcinki. Otóż dowód cytowanego twierdzenia polega na następujących faktach, które powinny być uczniowi znane: na t. zw. aksyomacie Pascha[1]), na twierdzeniu, że równość odcinków ma własność przechodnią, na równości kątów t. zw. odpowiednich, powstałych przy przecięciu dwóch równoległych sieczną, na równości boków przeciwległych w równoległoboku i na jednem

[1]) Hilbert: Grundlagen der Geometrie, wyd. z r. 1903, str. 4, aks. II. 4.

z twierdzeń o przystawaniu trójkątów. Otóż w tym przypadku nie można przepisywać nauczycielowi, czy ma przed rozpoczęciem dowodu powtórzyć powyżej podane fakta pomocnicze; znajomość uczniów raczej o tem decyduje. Jest bowiem i to zrozumiałe, że takie powtórzenia czynią potem myślową pracę uczniów znacznie mniej samodzielną.

Podczas każdego dowodu należy oczywiście wykazać, że i w którem miejscu zrobiono użytek ze założenia.

Twierdzenie geometryczne, powyżej zacytowane, zezwala na nietrudne uogólnienie, do czego, jak już wspomniałem, powinien nauczyciel uczniów zaprawiać. To też twierdzenie, jak wiele innych, można odwrócić, jednakowoż należy zwrócić uwagę uczniów na to, że nie każde twierdzenie daje się odwrócić i że odwrotne twierdzenie także wymaga dowodu.

Najbardziej może interesującem twierdzeniem, nie dającem się odwrócić, jest następujące: jeżeli a, b, c oznaczają liczby i jeżeli jest $a = b$, to jest też $a c = b c$. Właśnie na odwróceniu tego twierdzenia polega kilka sofizmatów, których podanie uczniom może być w nauczaniu instruktywne.

§ 10. DOWODY WPROST I NIE WPROST

Dwie zna — jak wiadomo — nauka formy dowodzenia twierdzeń i obie weszły też w tok nauki szkolnej, t. j. i forma dowodu bezpośredniego i postać dowodu apagogicznego, zwanego częściej dowodem per reductionem ad absurdum. Ta druga zwykle nie przedstawia dla uczniów trudności, gdy nauczyciel uświadomi uczniów, na czem taki dowód polega, a mianowicie na wykazaniu, że układ wszystkich prawd matematycznych, dotąd przez ucznia poznanych, wraz ze założeniem rozważanego twierdzenia i zaprzeczeniem wniosku twierdzenia tworzą układ zdań ze sobą sprzecznych.

§ 11. UWAGI O ZAGADNIENIACH MATEMATYCZNYCH

Przechodzę z kolei do uwag nad zagadnieniami matematycznemi; dotąd o nich wprawdzie było mało wzmianek, ale ponieważ niejedną poprzednią zasadę, wypowiedzianą dla nauki dowodu matematycznego, można zastosować do wypadku, gdy chodzi o rozwiązywanie zagadnień, przeto mogę być zwięzłym i wskutek tego też ograniczam się do omówienia pokrótce dwu ważnych grup zagadnień.

(Uważam za banalną chęć uzasadnienia potrzeby zagadnień przy nauczaniu matematyki).

Jedną grupą zagadnień, o których pragnę mówić, to ćwiczenia, które przerabia się tylko w tym celu, aby uczniowie nabyli wprawy w przekształceniach algebraicznych. Należą do nich ćwiczenia tego rodzaju, jak następujące: znaleźć *u, v, w* tak, aby było:

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{\left[\frac{a^2 b x^3}{(a^2 b^2 x)^{-5}}\right]^{1/2}}} = a^u \; b^v \; x^w.$$

Poniekąd słusznie naigrawa się z nich A. Höfler[1]) i przyrównywa je do pewnych zadań greckich. Jednakowoż nie chcę być skrajnym przez zupełne usunięcie tego rodzaju zagadnień, ale wołałbym, by ich nie było dużo i tylko na to, by przy ich pomocy przyswoili sobie uczniowie definicye pojęć i pewną dość skromną ilość twierdzeń. Wszak wprawa w przekształceniach algebraicznych bez znajomości uzasadnienia tych przekształceń nie może być celem nauczania.

Żeby nie dopuścić do zmechanizowania (a dość łatwo o to w podobnych ćwiczeniach), trzeba będzie ucznia zapytać o to, jakie liczby może przedstawiać litera, użyta w ćwiczeniu matematycznem.

Przez pytania tego rodzaju uzyskuje się możność odnowy wiadomości dawniej nabytych. Jeżeli uczeń np. wykonywa mnożenie lub dzielenie potęg:

$$a^{x+y} \cdot a^{x-y} = a^{2x} \quad \text{lub} \quad a^{2x+3y} : a^{x-y} = a^{x+4y},$$

a poznał definicyę potęg o wykładnikach jedynie całkowitych i bezwzględnych, to pytanie o liczby, które mogą przedstawiać litery a, x, y, prowadzi do zagadnienia interesującego.

Druga grupa zagadnień, której kilka słów pragnę poświęcić, to ćwiczenia biegunowo tamtym przeciwne, zagadnienia, które u nas prawie nie weszły do nauczania szkolnego; mam na myśli zagadnienia, połączone z t. zw. dyskusyą. Mają one tę dobrą stronę,

---

[1]) A. Höfler: loc. cit. str. 35.

że uczą myśleć, a tę złą, że często mają postać abstrakcyjną. Do takich należy np. zadanie[1]) następujące: „Określić liczbę rzeczywistą m w ten sposób, aby trójmian:

$$(m+1)\,x^2 - 2\,(m-1)\,x + 3m - 3$$

miał wartość ujemną dla każdej rzeczywistej wartości na x“. Takie zadania mało nadają się do klas od 4 do 7 gimnazyum klasycznego, bo tylko w ścisłej łączności z przedstawieniem graficznem trójmianu stopnia 2-go, a więc dopiero w klasie najwyższej można je przerabiać, gdyż dyagramy funkcyi przed nauką geometryi analitycznej przedstawiają znaczne trudności.

Bardziej odpowiedniem będzie zagadnienie, jeżeli ma szaty praktyczne. Uważajmy np. zadanie następujące: „W trójkąt o podstawie a cm (gdzie a powinno przedstawiać pewną szczególną liczbę bezwzględną) wpisać prostokąt w ten sposób, by jeden z boków prostokąta leżał na boku trójkąta, zaś pozostałe dwa wierzchołki prostokąta na pozostałych dwu bokach trójkąta; określić boki prostokąta tak, aby stosunek powierzchni prostokąta do powierzchni trójkąta był daną a priori liczbą s“. Zagadnienie to łączy się z dyskusyą, chodzi bowiem o wyznaczenie przedziału dla liczby s. Ponieważ nie można zaprzeczyć temu, że i tego rodzaju zagadnienia przedstawiają niejedną trudność dla uczniów, więc tylko te z nich będą w szkole dopuszczalne, których dyskusya jest dość krótka i prosta i w których zachodzi tylko jeden parametr, podlegający dyskusyi.

§ 12. POMIARY PRZY NAUCE GEOMETRYI

Dwukrotnie wspomniałem poprzednio o pomiarach, wykonywanych przez uczniów. Należy je robić często, ilekroć razy nasuwa się ku temu sposobność i nie tylko na stopniu niższym.

W nich bowiem upatruję główne źródło zainteresowania uczniów geometryą; wartość dydaktyczna pomiarów już dlatego jest wielka. Z kilku powodów, powszechnie znanych, dla których należy je polecać, godzi się nadmienić następujący: oto dowody twierdzeń, o ile są ścisłe, są przekonywujące i wystarczające dla dorosłych, nie zaś dla dziecka, jego nic tak silnie nie przekonywa o prawdziwości twierdzenia, jak własny pomiar; przez to bynajmniej nie mówię, że

---

[1]) Vuibert: Problémes de Baccalaureat str. 15, zad. 85.

pomiar ma dowód zastępować; owszem nauczyciel powinien dobitnie podkreślać, że pomiar nie może służyć za dowód. Pomiar ułatwia także utrwalenie faktów geometrycznych w pamięci. Dlatego linijka z podziałką centymetrową, cyrkiel, trójkąt (ekierka), kątomierz i papier kratkowany [1]) powinny być w użyciu na każdej lekcyi matematyki lub przynajmniej geometryi.

§ 13. ZADANIA DOMOWE UCZNIÓW

Osobną gałęzią nauczania jest nauczanie przez zadania domowe, racyonalnie prowadzone uczą samodzielnego myślenia. Dlatego właśnie warto ćwiczenia domowe zadawać, choćby na klasę przypadało ledwie 10% uczniów, rozwiązujących zadania domowe bez obcej pomocy, a reszta je odpisywała; jeżeli nauczyciel będzie żądał dokładnego sprawozdania z każdego zadania domowego od kilku z tych, których podejrzywa o odpisywanie ćwiczeń domowych, to wprawdzie może nie zapobiegnie odpisywaniu zadań, ale uchyli bezmyślne ich odpisywanie. Wprawdzie wtedy wysoki cel wypracowań domowych jest jeszcze daleki, ale nauczycielowi zostaje nadzieja niezłudna, że przez wytrwałą kontrolę zwolna zwiększy się procent rozwiązujących zagadnienia samodzielnie.

Wobec tego więc, że zadania domowe wymagają od ucznia samodzielnej pracy, choćby tylko przez samodzielne stosowanie poznanej metody, które uczą choćby kilku uczniów pokonywać trudności bez obcej pomocy, uważam je za konieczne i nie mogę się zgodzić na zdanie tych, którzy, odmawiając zadaniom domowym wszelkiej wartości dydaktycznej z powodu wyżej wspomnianego ich odpisywania, wcale zadań domowych nie zadają uczniom.

§ 14. NOWE PRĄDY NAUCZANIA MATEMATYKI

Pragnę jeszcze omówić nowe prądy w nauczaniu matematyki, zwłaszcza że zostały uwzględnione w ostatnich planach szkolnych z r. 1909. Jak zobaczymy, wpłynęły te nowe idee na pewne zwiększenie materyału naukowego.

---

[1]) Wyłączne i stałe używanie papieru t. zw. milimetrowego uważam za szkodliwe dla oka.

Główny ich rzecznik w Niemczech, F. Klein, profesor matematyki w uniwersytecie w Getyndze, domagał [1]) się już od kilku lat zmiany w sposobie nauczania matematyki i zdaje się, że Austrya pierwsza poszła za jego głosem.

Nowe prądy zasadzają się głównie na następujących czterech programowych tezach: 1. Uczniów należy wdrożyć w myślenie funkcyjne; 2. należy kształcić w sposób wydatny wyobraźnię przestrzeni; 3. na stopniu niższym ma istnieć ścisłe zespolenie między nauką planimetryi i stereometryi; 4. w szkole średniej należy uczyć elementów rachunku nieskończonościowego.

Idee Kleina stały się wnet źródłem mnóstwa projektów reformy nauczania matematycznego, często przesadnych a nawet śmiesznych; istnieją bowiem tacy reformatorzy, którzy w szale usuwania z nauki szkolnej wszystkiego, co nie posiada cechy praktyczności, pragnęliby poprostu naukę arytmetyki i algebry przekształcić w naukę rachunków kupieckich, inni chcieliby z matematyki zrobić naukę aproksymacyjną. Ale i na tezy, powyżej podane, nie mogę się bez zastrzeżeń pisać, mianowicie na tezę czwartą, gdyż wymaga znacznego zwiększenia materyału naukowego, kiedyby go raczej należało nieco skrócić (zob. § 15). Zasady, choćby tylko rachunku różniczkowego, wymagają wielu nowych pojęć, a przyswojenie sobie nowego pojęcia (jak zresztą już zaznaczyłem) połączone jest z wielkiemi trudnościami natury dydaktycznej; wszak nie idzie o mechaniczne zaznajomienie się ze symbolami różniczki i całki; nadto uczeń pragnie widzieć cel swego wysiłku umysłowego, jego użyteczność, co znów prowadziłoby do dalszego zwiększenia materyału naukowego. Z tego powodu oświadczam bez obawy o zarzut skrajności nieusprawiedliwionej, że tezę czwartą należy w całości odrzucić. O tezie trzeciej nie będę mówił, ponieważ się odnosi do stopnia niższego nauczania szkolnego.

Pierwsza teza żąda, aby ucznia oswoić z pojęciem zmiennej, niezależnej i zależnej czyli funkcyi. Że to na każdem miejscu nie jest możliwe, jak chcieliby niektórzy, to widoczne stąd, że, chcąc mówić o pojęciu funkcyi przy sposobności rozwiązania pewnego zagadnienia, trzebaby rozważać ogólne zagadnienie i nie przyjmo-

[1]) Zob. broszurę p. t. F. Klein, Über eine zeitgemässe Umgestaltung des mathematischen Unterrichts an den höheren Schulen. Vorträge gehalten bei Gelegenheit des Ferienkurses für Oberlehrer der Mathematik und Physik, Göttingen, Ostern 1904. von...

wać odrazu danych wartości liczebnych w obliczeniach. Objaśnię to na następującym przykładzie. Chcąc mówić o zależności funkcyjnej z okazyi zagadnienia: „Obliczyć objętość ostrosłupa prostego, wysokiego na 8 cm, którego podstawą jest trójkąt równoboczny, jeżeli ostrosłup jest wpisany w kulę o promieniu 5-ciu cm“, trzebaby to zagadnienie zastąpić następującem ogólnem: „Obliczyć objętość ostrosłupa prostego, wysokiego na w cm, którego podstawą jest trójkąt równoboczny, jeżeli ostrosłup jest wpisany w kulę o promieniu r cm“. Oczywiście ścisłość będzie wymagała, aby podać przedziały, w których powinny pozostawać zmienne r i w. Nieraz jednakowoż będzie pedagogiczniej rozważać zagadnienie konkretne, a nie ogólne.

Jak to widać z podręczników, które pragną urzeczywistnić idee Kleina, rozchodzi się w tezie pierwszej o rzecz dokładniejszą, niż o ogólnikowe pojęcie zmiennej niezależnej i funkcyi, a mianowicie o to, by uczeń zdawał sobie we wypadku funkcyi jednej zmiennej sprawę z funkcyjnej zależności, t. j. wiedział, czy wzrasta czy maleje i jak rośnie lub maleje ze wzrostem zmiennej niezależnej; innemi słowy, by miał ten pogląd na zmienność funkcyi, jaki daje jej dyagram. Temu należy przeciwstawić rzecz następującą: zrozumienie obrazów funkcyi jednej zmiennej we formie krzywych nie jest ze strony uczniów należyte, jak długo uczeń nie uczył się geometryi analitycznej, a każdemu chyba, który uczył rysować dyagram funkcyi liniowej $y = ax + b$ w klasie piątej, jest aż nadto dobrze znanem to wprost rozpaczliwe pomieszanie pojęć równań i funkcyi, które wtedy u uczniów zwykło się objawiać; nadto uczeń nie ma do swej dyspozycyi tych metod, któreby mu pozwoliły narysować dyagram funkcyi nawet dość elementarnej, jeżeli każdy szczegół rysunkowy ma być uzasadniony; dotyczy to zwłaszcza wklęsłości i wypukłości krzywej wobec osi x, maximów i minimów, stycznych, asymptot etc.

Jednakowoż wyraźnie zaznaczam, że powyższe uwagi krytyczne nie mają tezie pierwszej odmówić wielkiego znaczenia, owszem uważam urzeczywistnienie tezy pierwszej za wielki postęp, tylko pragnąłem zastrzedz się przeciwko wszelkiej przesadzie w tym kierunku, przesadzie, która, jak wiem, i u nas ma wielu zwolenników.

Przechodząc z kolei do drugiej tezy, wymagającej kształcenia wyobraźni przestrzeni, trzeba zauważyć, że tej tezie można uczynić zadość wtedy, gdy się nie będzie uważało stereometryi jedynie za naukę o obliczaniu powierzchni i objętości brył, ale także za naukę o własnościach punktów, prostych, płaszczyzn i (pewnych) krzywych powierzchni. Nadto sądzę, że nic tak nie rozwija wyobraźni o stosunkach w przestrzeni, jak geometrya wykreślna, której (przynajmniej) elementy powinny wejść w skład nauki szkolnej gimnazyów klasycznych; w gimnazyach tych niema jej dotąd, gdyż dwie czy trzy lekcye o rzutach poziomych i pionowych trudno uważać za wystarczające w tym kierunku.

§ 15. PROJEKT ZMNIEJSZENIA MATERYAŁU NAUKOWEGO

Jak już zaznaczyłem, materyał naukowy z matematyki należałoby nie rozszerzyć, ale raczej nieco skrócić. I właśnie chciałbym przedstawić pewien projekt skrócenia materyału w klasach od czwartej do siódmej (włącznie).

Propozycye w tej materyi są oczywiście bardzo trudne, wszak już niejednokrotnie robiono skrócenia; z dawniejszego planu klasy 4-tej usunięto rozdział z geometryi o elementarnych własnościach przecięć stożkowych, później usunięto zasady teoryi wyznaczników, ułamków ciągłych (łańcuchowych). A wykreślenie pewnej partyi początkowej w nauczaniu może łatwo spowodować skrócenia dalsze, które — jak się słusznie można obawiać — pociągnęłyby za sobą zatracenie celu nauczania matematyki.

Dlatego też wydatniejsze skrócenia mogą raczej dotyczyć końcowych partyi nauki szkolnej.

Wobec tego proponuję dla klas 4-tej i 5-tej pewne ograniczenia w rozdziale o przekształceniach algebraicznych nad ułamkami (kl. 4-ta) i pierwiastkami (kl. 5-ta). Z nauki klasy 6-tej proponuję usunięcie rozdziału o liczbach zespolonych.

Propozycya moja w nauce geometryi jest nieco radykalniejsza, bo przewiduje znaczne skrócenie geometryi analitycznej i przeznacza dla niej zaledwie jedno półrocze, t. j. drugie półrocze klasy siódmej; z doświadczenia wiadomo każdemu nauczycielowi, że geometrya analityczna sprawia uczniom trudności dość wielkie, a do rozwoju wyobraźni przestrzeni prawie wcale się nie przyczynia [1]).

---

[1]) Program naukowy średnich szkół francuskich z r. 1902 nie zawiera geometryi analitycznej.

Wobec tego, nie zwiększając czasu na trygonometryę, można uzyskać nieco więcej czasu na planimetryę, której nie podobna wyczerpać w klasie czwartej, i nieco więcej czasu na stereometryę, przez co zyskałaby właściwa nauka o przestrzeni.

Plan nauki geometryi przedstawiałby się więc według powyższej propozycyi w sposób następujący:

1. planimetrya w kl. 4-tej i przez pół pierwszego półrocza klasy piątej;

2. stereometrya w kl. 5-tej ($1^1/_2$ półrocza) i przez pierwsze półrocze kl. 6-tej;

3. trygonometrya w drugiem półroczu klasy 6-tej i pierwszem półroczu klasy siódmej;

4. skrócona geometrya analityczna w drugiem półroczu klasy 7-mej.

SPIS RZECZY