

7029

GEOMETRYA
WYKREŚLNA

CZYLI

WYKŁAD RZUTOWYCH I OBRAZOWYCH
WYKREŚLEŃ

Z DODATKIEM PRAWIDEŁ OZNACZANIA CIENI I STOPNIOWANIA ŚWIATŁA
TAK W RZUTACH JAKO TEŻ W PERSPEKTYWIE.

NAPISANA

DLA UŻYTKU UCZNIÓW UNIWERSYTECKICH

PRZEZ

HIPOLITA RUMBOWICZA.

z 36 tablicami wzorów i jedną tablicą figur.

WILNO.

NAKŁADEM AUTORA. DRUKIEM JÓZEFA ZAWADZKIEGO.

1 8 2 9.

1800
1856
10011

opis: 44928

*Wolno drukować, z warunkiem złożenia w komitecie cenzury, po wydrukowaniu,
trzech exemplarzy. Wilno. d. 14 Czerwca 1829 r.*

MICHAŁ OCZAPOWSKI Professor Uniwer. Cenzor.

363D.
91B

W S T Ę P.

1. **UMIĘTNOŚĆ** dokładnych wykreśleń, przez które na iedney płaszczyźnie rozwiązuemy zadania, odnoszące się do wszelkich geometrycznych wielkości i postaci, zowiemy *Geometrią wykreslną*.

2. Bryły, bez względu na materyą, ich powierzchnie i wszelkie linie są *wielkościami geometrycznymi*; względne tych wielkości położenie, wymiary, mianowicie zaś ich postać iest w ogólności przedmiotem badań geometrycznych: w obecnym iednak stanie tey umiejętności, takie tylko postacie nazywamy geometrycznymi, które z łatwością poiąć i dokładnie opisać się mogą, albo ięzykiem geometrycznym, to iest przez stosowny rysunek, albo skróconym w wyrażeniach rachunku; iak *np.* postać płaszczyzny i linii prostey, oraz wielu powierzchni i linii krzywych.

3. Sposoby rozwiązywania zagadnień geometrii płaskiey właściwemi są takż i geometrii wykreslney; do nich się ostatecznie przywodzą wszystkie dalsze wykreślenia dokładne.

§. I. *Wyobrażenie rzutów.*

4. W każdym zadaniu, mającém się przez wykreślenie rozwiązać, potrzeba naprzód dane geometryczne wielkości określić na iedney płaszczyźnie właściwemi znakami; w tym celu używają się rozmaite rysy i kropki: podobnie iak w arytmetyce liczby a w rachunku litery i inne przyjęte znaki. Takimi znakami wyrażamy na *płaszczyźnie rysunku*, przeniesione na nią z płaszczyzn współuszykowanych, rzuty oznaczające dane geometryczne wielkości; teorya więc rzutów będzie zasadą geometrii wykreslney, podobnie iak iest w analityczney, czyli w zastosowaniach rachunku do geometrii.

5. Dla uproszczenia i większey zrozumiałości wykreśleń, płaszczyzny współuszykowane zwyczajnie się biorą w prostopadłym do siebie położeniu: niekiedy iednak wzajemna ich pochyłość innym kątem oznaczoną bywa. W pierwszym przypadku, punkta i linie danych wielkości, rzucają się prostopadłe na współuszykowane płaszczyzny, a rzuty tym sposobem oznaczone, *prostemi* mianujemy; w drugim zaś rzucamy je ukośnie po liniach równoległych względem siebie a skierowanych, ku współuszykowanym płaszczyznom, pod kątami równemi nacyścicy wzajemnemu nachyleniu tychże płaszczyzn i takie rzuty *ukośnemi* nazwiemy (*).

(*) Linie rzucające mogą bydź w ogólności pod rozmaitemi kątami nachylone do rzutowey płaszczyzny, zawsze iednak w pewnym i oznaczonym sposobie; iezeli *np.* tak są skierowane ku iednemu punktowi przestrzeni że, po ich przedłużeniu, wszystkieby się w tym punkcie przecięły, rzuty otrzymane za pomocą tych linii zowią się *obrazowe*, iako wyrażające pozorną przedmiotu postać, dla oka umieszczonego w pomienionym punkcie. Teorya rzutów obrazowych inaczey *biegunowemi* zwanych, stanowi oddzielną część nauki dokładnych wykreśleń, pod imieniem *Geometrii obrazowej*. O tym rodzaju wykreśleń obszerniejsza rzecz będzie w Rozdziale IV i dalszych.



7029

Naostatek współszykowane płaszczyzny, iakakolwiek iest ich pochyłość, zowią się w nauce geometryi wykreślney *płaszczyznami rzutów* albo *rzutowemi*. W dalszym iednak ciągu, ograniczając się wyłącznie prosłopadłém ich położeniem, przez wyraz *rzuty* rozumieć będziemy same tylko *rzuty proste*, toiest: pierwszego rodzaju. Zastosujemy to naprzód do znaiomych skąd inąd przykładów.

Tab. (A). 6. Mieysce poiedynczego punktu P, odniesionego do dwóch rzutowych płaszczyzn ASO i fig. 1. OSB, będzie wiadomem w przestrzeni gdy, wyprowadziwszy od tego punktu dwie linie Pp i Pp', prostopadłe do pomienionych płaszczyzn, oznaczysz dwa inne punkta p, p', w których ie przebią poprowadzone linie. Ostatnie te punkta na wskazanych rzutowych płaszczyznach będą, podług wyższego opisania, rzutami punktu P: którego mieysce, ieśliby zatartem było w przestrzeni, napowrót odkryesz, wyniosłszy z obudwu rzutów linie prostopadłe do płaszczyzn, na których leżą.

fig. 2. 7. Niech będzie ilekolwiek punktów P, M, N, wziętych na linii prostej, ich rzuty, na każdej z osobna płaszczyźnie, leżeć także będą w kierunku linii prostych: wyprowadziwszy albowiem od punktów P, M, N, i t. p. linie Pp, Mm, Nn..., prostopadłe na płaszczyznę rzutową ASO, wszystkie te linie znajdą się na iedney płaszczyźnie PNnp, prostopadłej do płaszczyzny ASO; punkta więc p, m, n... w których przebią tę ostatnią płaszczyznę wszystkie będą na wzajemném przecięciu się dwóch rzeczonych płaszczyzn, a przeto w kierunku linii prostej pn.

8. Pokazana dopiero własność służy bez wyjątku wszelkim innym punktom linii prostej PN: czyli, co iedno iest, służy całej tej linii; z tego następnie wypływa, naprzód że: *na płaszczyznach rzuty linii prostej, mówiąc w ogólności, są liniami prostemi*, powtóre że: iako rzut punktu iest w przecięciu się płaszczyzny rzutowej z prostopadłą do niej linią, z tegoż punktu wyprowadzoną, tak podobnie *przecięcie się płaszczyzny rzutowej z prostopadłą do niej płaszczyzną, przechodzącą przez daną linią prostą, iest rzutem tej ostatniej linii*.

9. Linie prostopadłe do płaszczyzn rzutowych, wyprowadzone od iednego punktu i służyące do oznaczenia rzutów iego na tych płaszczyznach, zowią się *liniami rzucającemi*; podobnie, dla oznaczenia rzutów linii prostej, poprowadzone przez nią płaszczyzny, prostopadłe do rzutowych, nazywać będziemy *płaszczyznami rzucającemi*.

10. Jeżeli iednak dana linia prosta iest oznaczonej długości, natenczas wynayduią się naprzód rzuty obudwu iey końców (6), a te na każdej z osobna płaszczyźnie rzutowej, łączą się liniami prostemi; tak oznaczone rzuty mogą wskazać nie tylko położenie lecz oraz i długość linii, która się przez wykreślenie łącno z nich wyprowadzić daie.

11. Jako rzuty mające postać linii prostych, pochodzą tylko od linii prostej, tak równie rzuty w postaci linii krzywych oznaczają, właściwe im, linie krzywe w przestrzeni. Linie, rzucające poiedyncze punkta tego rodzaju linii, należą do powierzchni walców prostopadłych na płaszczyzny rzutowe: które *powierzchni rzucających* noszą nazwisko. Postać tych powierzchni, podobnie iak linii krzywych od których pochodzą, nieskończenie rozmaity być może.

12. Umiejąc przez rzuty oznaczać punkta i linie proste, osobno uważane, można tём samém, przez dwie linie albo trzy punkta, stosownie na płaszczyźnie wzięte, wyrazić iey położenie w przestrzeni, tak względem płaszczyzn rzutowych iako też względem innych geometrycznych wielkości. Zwyczajnie iednak oznaczają się płaszczyzny przez ich *ślady*; tak zowiemy linie wynikię z przecięcia płaszczyzn rzutowych przez iaką bądź daną płaszczyznę. Niżej podadzą się sposoby wykreślenia śladów płaszczyzny oznaczonej przez rzuty trzech iey punktów albo dwóch linii prostych: iako też wzajemnie, mając przez ślady oznaczoną płaszczyznę, iak wynaleźć właściwe rzuty punktów i rozmaitych linii tej płaszczyzny, stosownie do wskazanych warunków.

13. Przez podobieństwo *ślada*mi linii prostej lub krzywej zowiemy te punkta, w których płaszczyzny rzutowe przebiega. Naostatek *ślady powierzchni* są to linie, w ogólności krzywe, wynikające ze wzajemnego przecięcia się danej powierzchni i rzutowych płaszczyzn; linie takie są rzeczywiście śladem pokazującym przeyscie części powierzchni danej z iedney na drugą stronę tych płaszczyzn.

14. Jeżeli dana płaszczyzna ogranicza się prostokreślnym iakimś wielokątem *np.* ACMNOS, a nie jest prostopadłą do żadney płaszczyzny rzutowej, natenczas wszystkich wierzchołków tego wielokąta wynalazłszy rzuty *a, c, m, n, o, s, á, é...* (6), gdy na każdej z osobna płaszczyźnie rzutowej, stosownie ie połączysz liniami prostemi, otrzymasz dwa inne wielokąty o tey samej liczbie boków; które będąc w ściśłym znaczeniu, rzutami pierwszego, oznaczają w przestrzeni postać tego wielokąta i położenie iego płaszczyzny. Toż samo się może zastosować do wszelkiego innego układu pojedynczych punktów: rzuty ich, wskazując dla każdego właściwe miejsce w przestrzeni, oznaczają razem *układ* tych punktów, toiest: położenie iednych względem drugich.

15. I tak *np.* odniosłszy do płaszczyzn rzutowych znaną prostokreślną bryłę AMNROS, na każdej z nich, oznacz rzuty wierzchołków wszystkich iey kątów i połącz ie liniami prostemi, odpowiadającemi krawędziom. Wykreślone tym sposobem figury *amnsro* i *ám'n's'r'o'* nazwać się mogą rzutami uważaney tu bryły: oznaczają albowiem nietylko względne położenie wierzchołków wszystkich iey kątów (14), lecz oraz wskazując postać, położenie i wielkość ścian i krawędzi tey bryły, niemogących się wspólnie do żadney inney przystosować, tém samém należycie ią określaia. Wzięty w tém znaczeniu *rzut prostokreślney bryły, może bydź, podobnie iak każda figura płaska, dokładnie na płaszczyźnie odrysowany*; następnie zaś wskaże się w iakim sposobie oba, lub więcey rzutów, iedney i tey samey bryły umieszczamy razem na *płaszczyźnie rysunku*: aby z nich przez dalsze wykreślenia, nayłatwiey wyprowadzić się mogła rzeczywista długość linii, oznaczonych przez rzuty, iako też postać i wielkość figur, temi liniami zamkniętych.

16. Wyiąwszy iednak prostokreślne bryły, inne wszelkie ograniczają się, iuż to złożoną iuż pojedynczą, krzywą powierzchnią: trzeba więc ieszcze umieć tego rodzaju bryły dokładnie przez rzuty oznaczać. To się opiera na właściwem geometrycznym opisanu zewnętrzney ich postaci, które wyciągamy z rozmaitych sposobów tworzenia się, osobno uważanych powierzchni.

§. II. Sposoby geometryczne oznaczania postaci powierzchni.

17. W niektórych rzemiosłach wyrabiaią się powierzchnie za pomocą takich narzędzi, których ostrze, mając postać linii do potrzeby stosowney, posuwa się podług oznaczonego prawa i tym sposobem przebiega w przestrzeni żadaną powierzchnią; to zapewne przywiódło geometrów do uważania wszelkich powierzchni iakby utworzonych przez pewne linie w ruchu będące. Aby więc powierzchnia znaną bydź mogła dosyć znać linią *tworzącą* i wiedzieć prawo iey ruchu; linie oznaczające to prawo, toiest: wskazujące drogę, którą tworząca ma przebydź, zowią się *kierownicami*.

18. Każda ieszcze powierzchnia może się utworzyć przez, dobraną stosownie, inną ruszającą się powierzchnią: tak utworzona zowie się *powłóką*, albo *powierzchnią powtórną*, ta zaś co ią tworzy *pierwotną* się mianuie. Powłoka znaiomą będzie, kiedy powierzchnia pierwotna i prawo iey ruchu są oznaczone.

19. Jedna i taż sama powierzchnia pierwotna wydać może rozmaite powłóki, czyli powierzchnie powtarne: może albowiem rozmaicie ruszać się w przestrzeni, a nieodmieniając postaci powiększać lub zmniejszać swą wielkość, podług oznaczonego prawa; różne te iednak

powierzchnie powtórne, których elementa ograniczają linie wynikające z przecięcia się lub dotknięcia następných położęń powierzchni ruchomey, wspólny mić będą charakter, zależący od wspólney im powierzchni pierwotney. Każda przeto linia wynika ze wzajemnego przecięcia lub dotknięcia się dwóch następných położęń powierzchni pierwotney *charakterystyką* się zowie. Można by ie także liniami *rodzaiowemi* nazwać.

20. Pierwszy sposób wyrażania postaci powierzchni przez linie kierownice i tworzącą, iako prostszy, używa się zwyczajnie do określenia ich przez rysunek; drugi zaś (19) lepiej się częstokroć nadaie w rozwiązywaniu geometrycznych zadań, tudzież w śledzeniu własności niektórych powierzchni, iak się to następnie da widzieć na szczególnych przykładach.

21. W stosowaniu geometryi wykreślney do przemysłowych robot najczęściej ma się do czynienia z powierzchniami tworzącemi się ruchem okręgu koła, albo linii prostej; między pierwszymi używaisze są, tak zwane: *powierzchnie brył toczonych* czyli *wirowe*, które się zwyczajnie wyrabiaią w warstatach tokarskich; powierzchnie zaś, utworzone ruchem linii prostej, albo *rozwiinalnemi* bydź mogą, albo *kosemi*. Aby w nauce czystey geometryi wykreślney przygotować się oraz do licznych i rozmaitych iey zastosowań, za szczególne przykłady, w rysunkowych ćwiczeniach, brać się będą pomienione powierzchnie i dla tego nad ważniejszymi ich własnościami zastanowić się tu nieco wypada.

22. Jakkolwiek ruch punktu tworzącego linią, albo linii tworzącej powierzchnią, ciągłym bydź bez przerwy powinien, w śledzeniu jednak postaci geometrycznych musimy częstokroć osobno uważać położenia ich *następne*, toiest: *nieskończenie bliskie i tuż zaraz iedne za drugimi idące* tak, że pomiędzy niemi żadne się inne nie zmieści. Położenia jednak takie w myśli tylko wyobrazić można, podobnie iak, złożone z nich, niezmiernie małe cząstki linii albo powierzchni, które w ogólności *elementami* nazywać będziemy: w ściślejszém zaś znaczeniu, przez element powierzchni rozumie się każda iey cząsteczka maiąca, nietylko w szerokość lecz i w kierunku długości, niezmiernie małe wymiary.

23. Powierzchnie, mogące się przez okrąg koła utworzyć, nazwiemy w ogólności *okręgowemi*; można ie także uważać iako powłóki (18) pierwotney powierzchni kuli: która odbywając ruch w przestrzeni, podług iakiegokolwiek bądź prawa, zawsze w następných przecięciach się okrąg tylko koła wydać iest zdolna.

fig. 4. 24. Niech będą na linii prostej AD, nakreślone, promieniami różney długości, np. KB i SC, przecinające się półokręgi BOA i COD: kaźden z nich, w obrocie około linii AD, utworzy przez ruch wirowy powierzchnią kuli, będącą miejscem geometrycznym wszystkich okręgów kół, nakreślonych przez pojedyncze punkta obracających się półokręgów. Jako zaś punkt O iest dla obu rzeczonych półokręgów wspólny, tak podobnie i okrąg koła, przebieżony tym punktem, wspólnym będzie dla obu utworzonych powierzchni. Z tego wnosimy, że: *powierzchnie dwóch kul, iednakiey lub rozmaitey wielkości, nie inaczey mogą się przeciąć iak po okręgu koła*; płaszczyzna takiego koła iest zawsze prostopadłą do linii prostej łączącej środki, przecinających się kulistych powierzchni i ma na sobie środek tego koła.

25. Powierzchnia okręgowa oznaczoną będzie, kiedy znaną iest droga którą ma przebydź środek ruchomey kuli, oraz prawo wzrostu lub zmniejszania się iey promienia, czyli odmian wielkości tej pierwotney powierzchni. Prawo to podobnie iak wspomniana droga, mogą się wskazać przez pewne linie krzywe: rzuty ich zatém oznaczą na płaszczyźnie postać i miejsce takiej powłóki w przestrzeni. Przykład tego rodzaju powierzchni przedstawia figura 5.

fig. 5. 26. Linia OSR, wskazująca drogę przebieżoną przez środek pierwotney powierzchni kuli, będąc miejscem środków wszystkich charakterystyk powłóki (24), iest tém samém środkową iey linią, a przeto *osią* tej powłóki nazwać się może. Albowiem dwa następnie punkta w elemencie np. S. pomienionej linii krzywey, wskazują kierunek styczney w tymże elemencie do

które prostopadłą będzie płaszczyzna okręgu koła, wynikłego z przecięcia się dwóch następujących położeń powierzchni pierwotnej kuli, mającej swe środki w dwóch wzmiankowanych punktach; okrąg taki jest oczywiście charakterystyką powłoki (25), odpowiednią elementowi S iey osi. Ztąd wypływa, że: przecięcie się tej powierzchni z płaszczyzną poprowadzoną, przez środek uważanego elementu, prostopadłe do linii stycznej w tymże elemencie, niczem się od wspomnianej charakterystyki nie różni: jest przeto okręgiem koła.

27. Wyprowadzona dopiero własność powierzchni okręgowych, nie zależąc bynajmniej od postaci ich osi, będzie miała miejsce i w tym szczególnym przypadku, gdy środek kuli pierwotnej posuwa się po linii prostej: powłoki, tak utworzone, nazwiemy *powierzchniami wirowymi*. Można je albowiem innym sposobem utworzyć, to jest: przez ruch wirowy pewnej linii obracającej się naokoło osi prostej.

28. Jakoż wyobraziwszy utworzoną już taką powierzchnią, a na niej nakreśloną jakąś fig. 6. linią krzywą, każdy punkt tej linii będzie należał do odpowiedniej charakterystyki powierzchni; lecz że w ruchu wirowym, naokoło osi tej powierzchni, punkt uważany przebiegłby okrąg koła, prostopadłego do tej osi i mającego na niej swój środek, a przeto nie różniący się od wspomnianej charakterystyki (26), byłby zatem ciągle na tej samej powierzchni, równie jak i wszystkie inne punkta nakreślonej na niej linii krzywej.

29. Charakterystyki powierzchni wirowych zowią się jeszcze *równoleżnikami*: będąc albowiem na płaszczyznach prostopadłych do jednej linii prostej, osi tego rodzaju powierzchni (27), są wzajemnie do siebie równoległymi. Płaszczyzna, przechodząca przez oś powierzchni wirowej, nosi nazwisko *płaszczyzny południkowej*: każda taka płaszczyzna, na jednej i tej samej powierzchni, przecina wszystkie równoleżniki w punktach jednostajnie uszykowanych względem iey osi, a zatem, w rozmaitych swych położeniach, tworzy na pomienionej powierzchni jednakie co do postaci i wielkości linie, które się *przecięciami* albo *liniami południkowymi* mianują.

30. Powierzchnia wirowa zwyczajnie się oznacza przez rzuty osi i linii południkowej i to jest najprostsze iey wyrażenie na płaszczyźnie rysunku. Mając wszelako dane rzuty osi i jakiegokolwiek innej linii tworzącej, potrafimy wykreślić przecięcie południkowe tej samej powierzchni, a następnie wyrazić ją przez rzuty tego przecięcia.

31. *Powierzchnia kuli*, najznajomsza z wirowych, zwyczajnie się wyobraża jakby utworzona ruchem wirowym okręgu koła, obracającego się naokoło jednej którejkolwiek średnicy. Jeżeli się okrąg koła tworzącego zamieni na elipsę, powierzchnia przybierze postać tak zwanej *ellipsoidy wirowej*: która będzie jakby spłaszczoną albo rozciągniętą, w jednym kierunku, powierzchnią kuli, stosownie do tego jak się obwód tworzącej ją elipsy, około najkrótszej lub najdłuższej średnicy obracał.

32. *Obrączkowa powierzchnia*, w ścisłym znaczeniu tego nazwiska, tworzy się także przez okrąg koła obracający się ruchem wirowym, nie już około średnicy lecz innej jakiegokolwiek linii prostej, na płaszczyźnie tegoż koła wziętej; rozmaite odmiany postaci i wielkości takiej powierzchni zależą od wielkości okręgu tworzącego ją koła, względnie do odległości środka tego koła od linii prostej, służącej mu za oś wirowego ruchu.

33. *Walce i ostrokregi proste*, o podstawach kołowych, mogą się także utworzyć ruchem wirowym linii prostej, obracającej się naokoło, równoległej albo przecinającej ją, osi prostej. Każda płaszczyzna, poprowadzona przez oś takiej powierzchni, przejdzie też przez odpowiednie położenie linii prostej tworzącej: przecięcie więc południkowe walców i ostrokregów wirowych zawsze jest w postaci linii prostych.

34. Linia prosta obracająca się ruchem wirowym, naokoło drugiej linii prostej, nie będąc do niej równoległą, może też iey zgoła nie przecinać, a to wtenczas kiedy razem z nią

nie leży na iedney płaszczyźnie: w takim sposobie utworzona powierzchnia będzie, nieiako pośrednią, między walcem i ostrokregiem wirowym (33). Niżej się przekonamy iż: południkowe iey przecięcie iest w postaci hiperboli, od której sama powierzchnia, *hiperboloidy wirowey* nosi nazwisko.

Ostatnie te trzy rodzaje są iakby przejściem, od wirowych, do rozwiałnych i kosych powierzchni: które takż, przez stosowny ruch linii prostey, utworzonymi bydź mogą (21).

35. *Rozwiałnemi* te nazywamy powierzchnie które, przypuszczając iż są doskonale giętkimi, dają się *rozwinąć* bez rozerwania lub rozciągnięcia, składających ie, elementów i tym sposobem we wszystkich swych punktach ściśle przystać do iedney płaszczyzny. Ostrokregowa np. lub walcowa powierzchnia, rozcięta w kierunku któregośkolwiek położenia linii prostey tworzącej, może bydź tak rozpostartą na iedney płaszczyźnie, iż pojedyncze iey elementa, nie rozrywając się ani fałdując, iedne obok drugich, we właściwym porządku razem się położą; linie zaś, nakreślone wprzód na powierzchni w jakimkolwiek kierunku, nie odmięną przez to długości. Ztąd wnioskujemy, że elementa płaszczyzny niczém się nie różnią od elementów tego rodzaju powierzchni, a zatem że ie utworzyć można przez płaszczyznę rzucającą się, wziętą za pierwotną ich powierzchnią (18).

36. Jakiękolwiek będzie prawo ruchu ciągłego płaszczyzny, jeżeli tylko nie iest równoległą w następnych swoich położeniach, zrodzić koniecznie musi rozwiałną powierzchnią. Jakoż: pierwiastkowe iey położenie przecina następne po linii prostey, to z następującem przetnie się także po innej linii prostey, trzecie z porządku podobnie się przetnie z czwartem i tak następnie; powłóka przeto, tego rodzaju pierwotney powierzchni, składać się będzie z ciągłego następstwa elementów płaskich, zawartych pomiędzy rzeczonymi liniami prostemi. Przypuściwszy że ostatni taki element, obracając się około linii prostey, po której przylega do poprzedzającego, położył się na iego płaszczyźnie i że razem z tym drugim, podobnie się położył na płaszczyźnie elementu trzeciego od końca i tak daley aż do nayszybszego: tym sposobem wszystkie elementa, iedne obok drugich, we właściwym porządku, razem się ułożą na iedney płaszczyźnie; powierzchnia zatem powłóki, składająca się wprzód z tych elementów, przez wsteczny ruch płaszczyzny pierwotney, całkowicie rozwiniętą zostanie. Z tego się uczymy że: *iako ruszająca się płaszczyzna zrodzić może tylko rozwiałną powierzchnią, tak wzajemnie każdą rozwiałną powierzchnią za powłókę płaszczyzny pierwotney uważać należy.*

37. Każde położenie płaszczyzny pierwotney ma na sobie dwie charakterystyki proste rozwiałney powierzchni, po których się przecina z tuż poprzedzającym i następnem położeniem swoim (19): linie te koniecznie się przetną, jeżeli nie są wzajemnie równoległemi. Ostatni ten przypadek ma miejsce, gdy ruszająca się płaszczyzna, statecznie będąc prostopadłą lub iednostaynie nachyloną do innej oznaczoney płaszczyzny, tworzy powłókę walcową, to iest: taką rozwiałną powierzchnią której wszystkie charakterystyki są równoległemi, a zatem każdy z osobna element iednaką ma wszędzie szerokość. Nayszybszy zaś charakterystyki przecinające się tworzą elementa z pojedynczym w pośrodku punktem, od którego na obie strony iednostaynie ciągnąc się bez granic, obeymują dwie iednakie połowy każdego w szczególności elementu. W powierzchniach ostrokregowych środki wszystkich takich elementów (22) zbiegają się do iednego punktu, zwanego *wierzchołkiem*, albo właściwiey *środkiem* tego rodzaju powierzchni: a które, uważane iako powłóki, tworzą się ruchem płaszczyzny przechodzącej stale przez ieden i tenże sam punkt przestrzeni.

38. W ogólności, charakterystyki następne rozwiałney powierzchni, w innych coraz przecinając się punktach, tworzą szereg elementów mających środkowe swe punkta uszykowane na, właściwiey im, linii krzywey; iest ona widoczną prawie we wszystkich rozwiałnych powierzchniach i każdą z osobna rozdziela na dwie, zupełnie iednakie, *poły*. Linia taka zowie się *kra-*

wędzią odbicia: a to nie tylko w rozwiałnych lecz oraz we wszelkich innych powłokach, których następane charakterystyki krzywe przecinają się, lub się wzajemnie dotykają w punktach, iedne za drugimi, idących.

39. Jako każde położenie płaszczyzny pierwotney ma na sobie element powtórney rozwiałney powierzchni, zawarty między iey dwiema następnymi charakterystykami (37), toż podobnie każda z osobna charakterystyka ma na sobie dwa następane punkta krawędzi odbicia, w których się przecina z tuż poprzedzającą i, zaraz pō niey, następną charakterystyką tego rodzaju powierzchni. Jak więc każde położenie płaszczyzny pierwotney dotyka się z rozwiałną powłoką we wszystkich punktach, wspólnego im, elementu płaskiego, tak równie, każda charakterystyka prosta tey powłoki, styczną iest do iey krawędzi odbicia. Lecz ponieważ styczne linii krzywey płaskiey wszystkie są na płaszczyźnie tey linii: a zatem *krawędź odbicia w rozwiałney powierzchni koniecznie byđ musi linią podwójney krzywizny*.

40. Od sposobu ruszania się płaszczyzny pierwotney zależy postać i układ elementów rozwiałney powłoki, a zatem i, szczególna dla każdej takiej powierzchni, postać i wielkość iey krawędzi odbicia; wzajemnie więc, każda linia podwójney krzywizny, uważana iako krawędź odbicia, może oznaczać właściwą sobie rozwiałną powierzchnią i takim to sposobem nayeściej ie wyrażamy w dokładnym geometrycznym rysunku. Wyłączyć tu w prawdzie należy walcowe i ostrokřegowe powierzchnie, nie mogące się oznaczyć przez krawędź odbicia, którey, w ścisłem znaczeniu, nie mają.

41. W ostrokřegu *np.* krawędź odbicia iest skupioną do iednego środkowego punktu, gdzie się przecinają wszystkie charakterystyki proste, wspólne dwóm iednakim połom takiej powierzchni (37). Dla oznaczenia przeto każdej z osobna charakterystyki trzeba ieszcze drugiego iey punktu; w tym celu bierze się iakakolwiek linia krzywa przecinająca wszystkie charakterystyki, za kierownicę linii prostej, posuwającej się po niey i statecznie przechodzącej przez punkt środkowej powierzchni. Taka linia, w następnich swych położeniach, mając po dwa punkta wspólne z następnymi charakterystykami prostymi ostrokřegowej powierzchni, ciągle na niey znajdować się będzie: wyrażenie więc geometryczne każdej takiej powierzchni przywodzi się, do oznaczenia przez rzuty iey środka i, stosownie dobranej, kierownicy krzywey.

42. Każda w szczególności poła ostrokřegowej powierzchni na walcową się przetworzy, gdy środkowy iey punkt odsunionym zostanie od kierownicy, do odległości nieskończenie wielkiej; w takim albowiem przypuszczeniu, wszystkie położenia linii tworzącej za równoległe uważać się mogą: w rzutach więc wyrażamy powierzchnią walcową przez kierownicę krzywą i jedno położenie linii prostej tworzącej, do którego wszystkie następane mają byđ równoległemi.

43. Walec lub ostrokřąg przywiedzie się do pojedynczej linii prostej, ieżeli ruch postępnny, pierwotney ich płaszczyzny, na wirowy się zamieni. Może albowiem ruszająca się płaszczyzna, przechodząc przez ieden punkt przestrzeni mieć oraz, na wszystkich swych położeniach, statecznie też samą linią prostą, na której się ten punkt znajduje: a zatem czynić zadosyć warunkom utworzenia tak walcowej iako też ostrokřegowej powierzchni (37); taka iednak linia, przez którą ruszająca się płaszczyzna ciągle przechodzi, oczywście będzie osią wirowego iey obrotu i razem wspólnem przecięciem się następných iey położeń: wszystkie przeto charakterystyki powierzchni powtórney, skupią się do iedney i tey samej linii prostej.

44. Wyłączywszy więc ruch wirowy płaszczyzny pierwotney i postępnny, w iednym takim przypadku, gdy wszystkie iey położenia wzajemnie są równoległemi (36), inny każdy ruch ciągły zrodzić iest zdolnym rozwiałną powłokę. Inaczej iest w tworzeniu się tych po-

wierzchni przez linią prostą: nayogólniejsze albowiem prawo iey ruchu wskazuje, iż ciągle bydź powinna styczną, do linii podwójney krzywizny (39), a zatem że następne iey położenia muszą się przecinać w punkcie wspólnym dwóm przyległym do siebie elementóm, po których się dotykają pomienioney linii krzywey; jeżeli więc ruszająca się linia prosta, w następnych położeniach swoich, ani jest równoległą, iak w tworzeniu się powierzchni walcowey (42), ani się przecina, iak w innych wszelkich rozwiałnych, natenczas utworzy, różną od nich, powierzchnią, które *kosemi* nazywać będziemy.

45. Powierzchnie rozwiałne dają iedynie czyste pojęcie linii *podwójney krzywizny*: nazwisko to służy bez wyjątku wszelkim linióm krzywym, których postać do płaszczyzny przystać nie może. Każda tego rodzaju linia, wzięta za krawędź odbicia, właściwey sobie rozwiałney powierzchni (39), jeżeli z nią razem, rozpoczynać będzie na iedney płaszczyźnie, tém samym przekształci się na inną linią, w ogólności krzywą, należącą iednak do rodzaju linii *plaskich*; aby więc mogła na powrót odzyskać pierwiastkową swą postać, elementa iey płaskie tak się powinny nawinąć na takżeż elementa wzmiankowaney powierzchni, aby następne styczne przypadły na linie proste tej powierzchni: musi zatem koniecznie przystać do iey krawędzi odbicia (38). Tak więc, oprócz krzywizny którą mieć mogła linia na płaszczyźnie leżąca, czyli właściwego tej linii *zgięcia*, nabędzie ieszcze drugiey krzywizny zwaney *wygięciem* linii.

46. Częstki czyli elementa, linii pojedynczey krzywizny uważane z osobna, mogą mieć większe lub mniejsze na płaszczyźnie zgięcie: styczne więc następne w tych częstkach, mniej lub więcej będąc nachylonemi ku sobie, tworzą kąty zależące od tego rodzaju krzywizny, które przeto *kątami zgięcia* nazwiemy. W liniach podwójney krzywizny, oprócz zgięcia właściwego płaskim ich częstkom, jest ieszcze wygięcie, które od wzajemnego nachylenia częstek pochodzi; że zaś każda z nich leży na płaszczyźnie odpowiednego elementu rozwiałney powierzchni (45), kąty przeto nachylenia tych płaszczyzn, zwane kątami *wygięcia* linii, wskazać mogą ich krzywiznę w tym drugim rodzaju.

47. Płaszczyzna każdego elementu rozwiałney powierzchni przechodzi przez dwie następne styczne krawędzi odbicia (44) i dla tego ściśle przystaie, do odpowiedney płaskiey częstki tej linii, iak wszelka inna przez iedną styczną poprowadzona; zowie się przeto *plaszczyną ściślestyczną* tego rodzaju linii. W liniach pojedynczey krzywizny płaszczyna ściślestyczna którejkolwiek częstki jest taką dla wszystkich innych: niczém się więc nie różni od płaszczyzny całej linii (*).

48. Jednym z nayprostszycy przykładów utworzenia powierzchni kosey przez linią prostą, jest: gdy się ta ciągle posuwa po dwóch innych liniach prostych, nierównoległych ani przecinających się; iako albowiem te linie nie mogą, bez odmiany mieysca, przystać do iedney płaszczyzny, tak równie i cztery punkta, w których się przecinają z niemi dwa następne położenia posuwającej się linii prostey, a zatem i same te położenia, iakkolwiek bliskie siebie, na żadney płaszczyźnie położyć się razem nie dadzą: zawarty więc pomiędzy niemi element będzie, w ścisłym znaczeniu, częsteczką powierzchni kosey (44). Dla dokładniejszego wskazania ruchu linii tworzącey bierze się ieszcze, oprócz dwóch kierownic prostych, tak zwana *kierująca* płaszczyna, do której wszystkie położenia linii prostey tworzącey równoległemi bydź powinny. Oznaczona tym sposobem powierzchnia kosa nosi imię *plaszczyny spączoney*: ma ona tę szczególną własność że dwoiakiem ruchem linii prostey utworzyć się daie.

(*) W liniach ciągłych krzywizna podwójna w iedną się nieiako zlewa i od pojedynczey krzywizny linii płaskich tém się tylko różni, że: następnych po sobie elementów, jest na inney coraz ściślestycznej płaszczyźnie; dla tego *Wallée*, w swoiey Geometrii wykresłney (str. 269.), radzi ie liniami *spączonemi* nazywać.

49. Weźmy pod uwagę część takiej powierzchni, obiętą czworokątem kosym $ABDC$, którego dwa przeciwległe boki AB i DC są np. kierownicami, a dwa inne AC i BD położeniami linii tworzącej. Przez punkt D , na jednym z tych położen wzięty, poprowadziwszy Dp , równoległą względem drugiego AC , oznaczymy kierującą płaszczyznę BDp , iako równoległą do obu wzmiankowanych, a zatem i do wszelkich innych, położen linii tworzącej (48). Przewidując zaś, że na tej samej powierzchni inny jeszcze może być szereg linii prostych, w rzędzie których są dwie kierownice AB i CD : podobnie więc dla tego drugiego szeregu oznaczymy kierującą płaszczyznę BAp , przez poprowadzenie linii Ap równoległej do CD ; wspólnym przecięciem się dwóch kierujących płaszczyzn będzie linia Bp . Według takiego założenia układ trzech płaszczyzn pDB , pAB i $ACDp$, posłuży do wykreślenia wszelkich położen linii prostej w obu wzmiankowanych szeregach.

50. Przez punkt K , obrany dowolnie na kierownicy CD , poprowadź po płaszczyźnie Cp linia Ks równoodległą od Dp , a przez punkt s , po płaszczyźnie BAp , linia sF równoodległą od pB : przez te dwie linie oznaczysz płaszczyznę KsF , równoległą względem kierującej BDp ; do niej więc także będzie równoległą linia KF łącząca dwa punkta kierownicy, w których przecinają się z poprowadzoną płaszczyzną KsF . Podobnie, przez inny jakikolwiek punkt kierownicy, np. K' , poprowadziwszy $K's$ i $s'F'$ równoległe względem Dp i pB , otrzymasz w tymże samym szeregu położenie $K'F'$ linii tworzącej, odpowiednie obranemu punktowi.

Tę samą drogą wynajdziesz w drugim szeregu wszelkie położenia linii prostej, posuwającej się po kierownicach AC i BD równoległe względem płaszczyzny BAp .

51. Przez jakikolwiek punkt kierownicy AC , np. M , poprowadzona płaszczyzna równoległa względem BAp przetnie się z płaszczyznami $ACDp$, pDB i sKF po liniach Mq , qN i rG , równoległych względem Ap , pB i sF ; podobne przeto trójkąty NDq i BDp , oraz dwa inne podobne sobie GKr i FKs , dadzą proporcje następujące:

$$\begin{aligned} Nq : Bp &= Dq : Dp \\ Gr : Fs &= Kr : Ks \end{aligned}$$

w których dwa drugie stosunki mają odpowiednie wyrazy równe, więc dwa pierwsze złożą proporcją:

$$Nq : Gr = Bp : Fs \dots \dots \dots (a)$$

Z podobieństwa trzeciej pary trójkątów pAB i sAF wypada:

$$pA : sA = Bp : Fs \text{ czyli, po podstawieniu zamiast } pA, sA$$

równych im qM , rM , będzie:

$$qM : rM = Bp : Fs \dots \dots \dots (b)$$

Z dwóch proporcji (a) i (b) otrzymasz:

$Nq : Gr = qM : rM$, która pokazuje że punkta M , G , N , są na jednej linii prostej, a zatem że położenie tworzącej NM , z szeregu drugiego (50), przecina położenie KF , należące do pierwszego szeregu linii prostych powierzchni. Lecz, ponieważ punkt K dowolnie był na kierownicy wzięty, toż samo więc, co się pokazało na linii KF , stosuje do wszelkich innych tego szeregu położen: linia przeto MN , ze wszystkimi się przecinając, cała leży na powierzchni zrodzonej sposobem pierwszym; iako zaś i linia MN jest także w położeniu dowolnym, każde przeto inne z szeregu drugiego wszystkie swe punkta na tejże samej powierzchni mieć musi. Z tego wypływa naprzód: że *płaszczyzna spączona dwoiakim ruchem linii prostej utworzyć się może*, powtóre: że *w każdym punkcie na tej powierzchni przecinają się dwie linie proste, należące do dwóch różnych szeregów położen linii tworzącej*.

52. Trzy którekolwiek linie proste jednego szeregu, mogą służyć, jako kierownice, do oznaczenia w szeregu drugim wszystkich położzeń linii tworzącej powierzchnię o której mowa. Jakoż, przez jedną z tych kierownic i punkt na drugiej wzięty, poprowadzona płaszczyzna, przetnie się z trzecią w poiedynczym punkcie, a zatem, przez punkt obrany na drugiej, jedna tylko może przechodzić linia prosta, przecinająca się razem ze wszystkiemi trzema kierownicami: taką zaś będzie linia łącząca wzmiankowane dwa punkta, wspólne dwóm drugim kierownicom i płaszczyźnie poprowadzonej przez pierwszą, cała albowiem znajdując się na tej płaszczyźnie, z pierwszą także kierownicą przeciąć się musi. Że zaś temu samemu warunkowi czyni zadosyć tworząca szereg drugi linii prostych powierzchni, oznaczona więc linia będzie jedném z położzeń tej tworzącej, odpowiedniém obranemu punktowi. Idzie zatem że: w każdym punkcie takiej powierzchni, oprócz dwóch linii prostych, należących do dwóch różnych szeregów położzeń linii tworzącej (51), żadna inna prosta poprowadzić się na tej powierzchni nie może; nadto, że: *płaszczyzna spaczona oznaczoną będzie kiedy, za kierownice linii prostey tworzącej, dane są tylko trzy linie proste równoległe względem iedney płaszczyzny*; kierownice te jednak nie powinny się przecinać, ani jedna względem drugiej bydź równoległemi.

53. Z poprzedzającego rozumowania pokazuje się iż: płaszczyzna spaczona iest szczególną odmianą powierzchni kosey o trzech kierownicach prostych, mogących nie bydź równoległemi względem żadney płaszczyzny, a która w tym ogólniejszym przypadku zowie się *hiperboloidą iednopołą* (*). Mamy się teraz przeświadczyć azali własność płaszczyzny spaczoney, tworzenia się dwoiakim ruchem linii prostey, służy zarówno i hiperboloidzie iednopołej.

fig. 8.

54. Niech linie proste AB, MN, CD, nie przecinające się i nie równoległe ani względem siebie ani względem żadney płaszczyzny, wyrażają trzy kierownice, posuwające się po nich, linii prostey tworzącej, którey trzy położenia, dosyć odległe od siebie, oznaczymy przez linie AC, FK, BD, przecinające się z pierwszemi; w takim założeniu każda para, z tych sześciu przecinających się z sobą linii, leży na odmienney płaszczyźnie: czworokąt zatem ABDC, podług przyjętego wyżey (49) znaczenia, iest figurą kosą.

55. Poprowadzone linie proste KN i MF, łączące punkta przecięcia się obwodu pomieszonego czworokąta z liniami środkującymi, leżą na płaszczyźnie tych ostatnich: a zatem albo są równoległemi, albo się wzajemnie przecinać muszą; w drugim tym przypadku, który teraz pod uwagę weźmiemy, punkt ich przecięcia się będzie na linii CB, przekątney czworokąta kosego ABDC. Albowiem jedna z nich KN, mająca dwa punkta wspólne z bokami trójkąta CBD, znajduje się tém samym na płaszczyźnie tego trójkąta, podobnie iak druga MF iest na inney płaszczyźnie trójkąta CBA: punkt więc tym liniom wspólny należy do obu tych płaszczyzn, a zatem nieinaczej tylko na linii CB, wzajemnego ich przecięcia się, będzie; takim iest tutaj punkt L. Dla dalszego wywodu poprowadź, przez punkt C, linią równoległą względem KNL, aż do zeyścia się z przedłużonym bokiem DB, w punkcie np. P.

56. Trójkąty CDP, KDN, podobne sobie, dadzą proporcją:

$$DK : CK = DN : NP.$$

z podobieństwa zaś dwóch drugich CBP i NBL wyprowadzisz:

$$CB : BL = BP : BN \text{ z której otrzymasz:}$$

$$CB + BL : BL = BP + BN : BN$$

$$\text{czyli } CL : BL = NP : BN;$$

rozmnóżwszy zaś odpowiednie wyrazy pierwszey i ostatney proporcji, mieć będziesz:

$$DK \cdot CL : CK \cdot BL = DN : BN, \text{ ta na koniec daie zrównanie:}$$

(*) O tém nazwaniu obacz przypisek na końcu książki.

$$BN. DK. CL = CK. DN. BL \dots \dots \dots (a)$$

Z drugiej strony przekątnej CB podobne poprzedzającemu wykreślenie (55) i porównanie wyników z tą trójkątów dałoby:

$$BF. AM. CL = CM. AF. BL \dots \dots \dots (b)$$

Pierwszą stronę równania (a) rozmnóżysz przez drugą w równaniu (b) i wzajemnie, oraz zniszczysz wspólne mnożniki, będzie:

$$AF. BN. DK. CM = BF. AM. CK. DN.$$

które wyraża związek pomiędzy częściami boków czworokąta kosego, rozciętych przez dwie środkujące linie, taki że: *mnożość ze czterech nie przyległych sobie części równa się mnożości czterech pozostałych.*

57. Ostatnie, otrzymane dopiero (56), równanie, pod inną wyrażone postacią:

$$\frac{AF. DK}{BF. CK} = \frac{AM. DN}{BN. CM} \dots \dots \dots (c)$$

uczycy, że stosunek mnożości z części naprzemian wziętych z boków AC i BD, rozciętych przez kierownicę MN, równym jest stosunkowi takichże mnożości z części odciętych na dwóch innych bokach CD i AB, przez położenie linii tworzącej KF. Jakikolwiek iednak, zamiast linii KF, wziąłbyś w czworokącie ABDC, inne pośrednie położenie tworzący, iak np. KF', zawszebyś też samą drogą otrzymał:

$$\frac{AF'. DK'}{BF'. CK'} = \frac{AM. DN}{BN. CM} \dots \dots \dots (d)$$

Wszystkie przeto podobne tym stosunki, z mnożości zmiennych takich części kierownic AB i CD, na rozmaite położenia linii tworzący są, w czworokącie ABDC, ciągle jednakiey wielkości.

58. W układzie sześciu linii, które wykreślona przedstawia figura, weźmy trzy położenia linii tworzący AC, FK, BD za kierownice, postuwające się po nich, linii prostej: dawniejsze więc kierownice AB, MN, CD, iako przecinające się z niemi (54), będą trzema położeniami nowej linii tworzący. Lecz że takie przypuszczenie w niczem nie zmienia układu sześciu rzeczonych linii, wprzód więc wyprowadzone równanie (c) i tu ieszcze będzie miało miejsce; linią iednak NM można zastąpić przez każde inne, środkujące między bokami AB i CD, położenie linii tworzący: do wszystkich albowiem takich położen równie się da zastosować toż samo rozumowanie i podobne iak wyżey (55) wykreślenie. W położeniu więc np. N'M' nowej linii tworzący będzie:

$$\frac{AF. DK}{BF. CK} = \frac{AM' DN'}{BN' CM'} \dots \dots \dots (f)$$

Zrównania (f) i (d), przez wzgląd na otrzymane wyżey (c), dadzą:

$$\frac{AF'. DK'}{BF'. CK'} = \frac{AM DN'}{BN' CM'}$$

To ostatnie, ponieważ się niczem w swym składzie od równania (c) nie różni, możnaby ie więc, podobnie iak tamte, wyprowadzić: przypuściwszy tylko, że linie NM' i FK', od których zależy, wzajemnie się przecinają; otrzymane iednak inną zupełnie drogą, toż samo przypuszczenie na rzecz dowiedzioną zamienia.

59. Co się dopiero pokazało na liniach N'M' i FK' dowolnie wziętych wewnątrz czworokąta kosego ABDC, toż samo służy i wszystkim innym, podobnie iak one, oznaczonym przez trzy kierownice pierwszego (54) albo drugiego układu (58); nie masz więc na tej powierzchni żadnego takiego punktu, w którymby się nie przecinały dwie linie proste, należące do dwóch różnych szeregów położen linii tworzący. A zatem: *czyli to po trzech kierownicach danych*

posuwać się będzie linia prosta, czyli też po trzech dowolnych położeniach tej ostatniej, wziętej za nowe kierownice, powierzchnia, utworzona pierwszym lub drugim sposobem, będzie iedną i tąż samą hiperboloidą iednopola.

60. Może się niekiedy zdarzyć, że oznaczone wyżej (55) linie KN i MF, będąc wzajemnie równoległemi, nie inaczej się przetną z linią CB, iak w odległości nieskończenie wielkiej; w takim przypadku, bez dalszego wykreślenia mieć będziesz dwie pary trójkątów podobnych, to iest $\triangle CBD \sim \triangle KND$ i $\triangle CBA \sim \triangle MFA$; a zatem otrzymasz:

$$\text{z pierwszey } CK : DK = BN : DN$$

$$\text{z drugiey } BF : AF = CM : AM$$

po rozmnożeniu tych dwóch proporcyy wypadnie trzecia: którą zamieniwszy na mnogość ze skrajnych i średnich wyrazów, mieć będziesz zrównanie: $AF \cdot BN \cdot DK \cdot CM = BF \cdot AM \cdot CK \cdot DN$. z tego zaś wyprowadzisz, taki sam iak wyżej związek (c) między częściami boków czworokąta kosego ABDC; dalszy więc ciąg powyższego rozumowania (57, 58 i 59), służy i na ten szczególny przypadek.

61. Założywszy ze trzy kierownice AB, MN, CD, linii prostej, tworzący hiperboloidę iednopola; chociaż wzajemnie nie równoległe (54), są takimi iednak względem iakoweys płaszczyzny: można będzie poprowadzić trzy równoległe względem niej płaszczyzny, każdą z osobna przez iedną z tych kierownic: części więc położeń AC i BD linii tworzącej, zawarte między temi płaszczyznami, złożą proporcją (*) następną:

$$AM : BN = CM : DN \text{ z ktorey iest}$$

$$AM \cdot DN = BN \cdot CM, \text{ czyli}$$

$$\frac{AM \cdot DN}{BN \cdot CM} = 1; \text{ co wprowadziwszy do zrównania (c), wyżej otrzy-$$

manego (57), mieć będziesz:

$$\frac{AF \cdot DK}{BF \cdot CK} = 1, \text{ czyli } AF \cdot DK = BF \cdot CK, \text{ z kąd nakoniec ułożysz proporcją:}$$

$AF : CK = BF : DK$, pokazującą, że i linie AC, FK, BD, są takż na równoległych płaszczyznach. Lecz że się to zarównno stosuje do wszelkich innych położeń linii tworzącej, w przypadku więc rozważanym teraz, hiperboloida iednopola zamienia się na płaszczyznę spaczoną (52 i 53): a zatem własność pierwszey, tworzenia się dwoiakiem ruchem linii prostej, służyć powinna i tej ostatniej, iako szczególney iey odmianie, co się iuż wyżej (51) w innym sposobie dowiodło.

62. Oznaczenie przez trzy kierownice ruchu linii tworzącej hiperboloidę iednopola, do wszelkich innych powierzchni kosych zastosować się może: iakkolwiek albowiem na powierzchni tego rodzaju nakreślisz trzy linie krzywe, przecinające wszystkie położenia linii prostej tworzącej, dosyć będzie, dla ich oznaczenia, mieć te trzy linie dane, w takim samym położeniu, iak są na powierzchni. Uważając ie za kierownice linii prostej, razem po nich posuwającej się, gdy przez punkt wzięty na iedney któreykolwiek i przez każdą z dwóch pozostałych, oznaczysz dwie ostrokregowe powierzchnie (41), one w przecięciu wydadzą linią prostą, przechodzącą przez wspólny ich środek, a zatem iednocześnie przecinającą wszystkie trzy kierownice krzywe, podobnie iak w rozważanym wyżej (52) przykładzie. Wprawiwszy w ruch środek wspólny pomienionych dwóch ostrokregowych powierzchni, tak, iżby się posuwał po kierownicy do której należy, każdemu iey punktowi odpowiadać będą dwie, coraz inne, lecz oznaczo-

(*) Obacz podanie 17. xięgi XI. w początkach Geometrii *Euclidesa*. Wilno 1817. roku.

ne, ostrokątne powierzchnie; linie przeto ich przecięcia się złożą szereg następných położęń tworzący powierzchnią kąsą, na której te kierownice były nakreślone.

63. Mogą być jeszcze niektóre powierzchnie kose oznaczone, sposobem płaszczyzny spazzonej, przez dwie kierownice krzywe i kierującą płaszczyznę: lecz podobnie jak tamtą (52), można je także przez stosowne trzy kierownice krzywe zupełnie oznaczyć; każde albowiem trzy linie krzywe, przecinające wszystkie położenia linii tworzący, mogą je służyć za kierownice dla utworzenia tej samej powierzchni (62). Naostatek, zamiast linii i płaszczyzny, mogą służyć jako kierownice jedna lub więcej powierzchni i to się na swoim miejscu w przykładach pokaże; w ogólności zaś, jakimkolwiek sposobem oznaczone będzie prawo ruchu linii prostej, jeżeli się ona nie posuwa po jednej i tej samej płaszczyźnie, ani tworzy rozwijalnej powierzchni (44), musi koniecznie zrodzić powierzchnię kąsą.

64. Z uwag poprzedzających wypływa, że: *powierzchnia kosa znaiomą będzie kiedy trzy linie, dane są za kierownice linii prostej tworzący*; i to jest nayogólniejsze oznaczenie wszelkich tego rodzaju powierzchni. Jako jednak trzy linie proste nie w każdym położeniu mogą być kierownicami hiperboloidy jednopolej (54), lub płaszczyzny spazzonej (52), tak podobnie nie każde trzy kierownice krzywe oznaczają kąsą tylko powierzchnię; równie albowiem można na każdej rozwijalnej nakreślić takie trzy linie krzywe, któreby przecinając wszystkie położenia linii prostej tworzący, służyć mogły, jako kierownice (62), do oznaczenia rzeczonych położęń, a zatem i elementów rozwijalnej powierzchni temiż położeniami objętych.

65. W dalszym ciągu pokaże się, że hiperboloida jednopola uważana jako powłoka, może się utworzyć przez elipsoidę, odmieniającą stosownie swą wielkość i tak posuwającą się, aby jej środek kreślił linią prostą; wzajemnie zaś uważana jako powierzchnia pierwotna, taż sama hiperboloida jest w stanie zrodzić każdą inną powierzchnię kąsą, gdy podług rozmaitych odmian tych powierzchni, prawo wspólnego ruchu prostych jej kierownic stosownie oznaczonym będzie.

66. To, co się dotychczas powiedziało o okręgowych, rozwijalnych i kosych powierzchniach, możnaby rozciągnąć do wszelkich innych, postać geometryczną (2) mających; każdą więc z osobna taką powierzchnię, równie jak i samą płaszczyznę (12), potrafilibyśmy przez linie dokładnie w rysunku oznaczyć (15, 16) i to, po większej części, jest celem działań geometrii wykreselnej, w niektórych jej do przemysłu zastosowaniach. Częstość jednak zdarzają się zadania z wielu na raz geometrycznymi wielkościami, których nie tylko postać i wymiary, lecz też położenie jednych względem drugich i to wszystko co z takiego położenia wynika, umieć trzeba wysledzić i stosownymi wyrazić znakami, podług wskazanych zadaniem warunków. To będzie przedmiotem następujących z porządku uwag.

§. III. *O przecinaniu się i o wzajemnym dotykaniu się rozmaitych geometrycznych wielkości.*

67. Dwie płaszczyzny nie inaczej się mogą przeciąć jak po linii prostej; ta ponieważ jest miejscem wszystkich punktów wspólnych obu razem płaszczyznom, przez dwa, którekolwiek z nich, dokładnie oznaczoną będzie. Mając przeto dane przez ślady (12) dwie przecinające się płaszczyzny, jeżeli punkta przecięcia się tych śladów połączysz przez linią prostą, wyrazi ona przecięcie się rzeczonych dwóch płaszczyzn: każdy albowiem z tych punktów znajduje się na obudwu razem płaszczyznach, a zatem i na linii prostej wzajemnego ich przecięcia się.

68. Do poprzedzającego zadania przywodzi się oznaczenie punktu przebiecia płaszczyzny przez daną linią prostą. Jakkolwiek bowiem przez tę linią poprowadzisz płaszczyznę, punkt szukany, należąc do niej równie jak do płaszczyzny danej, będzie koniecznie na wzajemnym

ich przecięciu się; wykreślona więc linia prosta, wspólnego przecięcia się tych płaszczyzn (67), przetnie linią daną w pomienionym punkcie.

Na rozwiązaniu tych dwóch zadań zwyczajnie się kończy śledzenie punktów wspólnych płaszczyźnie, oznaczonej przez ślady i danej iakiejkolwiek powierzchni, iako też punktów należących do dwóch razem, lub większej liczby powierzchni: a od czego zawisło wykreślenie linii krzywych, ze wzajemnego ich przecięcia się wynikających. W tém jednak zdarzyć się mogą trzy rozmaite przypadki, stosownie iak linia, tworząca daną powierzchnię, iest albo prostą, albo krzywą płaską, lub nakoniec podwójney krzywizny: rozwiązanie dwóch pierwszych iest łatwe i w zastosowaniach bardzo częstego użycia, w ostatnim zaś, należącym raczey do teoretycznych tego rodzaju ćwiczeń, uczynić wprzód potrzeba pewne przygotowanie, nim się ostatecznie do jednego z pomienionych dwóch zadań wykreślenie przywiedzie.

69. Maiąc, z rodzaju kosych albo rozwiałnych, daną iakąbądź powierzchnię i oznaczoną przez ślady przecinaiającą się z nią płaszczyznę, iezeli, wykreśliwszy rozmaite położenia linii prostej tworzącey powierzchnię, powinayduiesz punkta w których one przebiiaią daną płaszczyznę (68), punkta te, będąc wspólnemi płaszczyznie i powierzchni razem, wskażą linią wzajemnego ich przecięcia się: tyle albowiem tych punktów wynaleźć się może, ile do ścisłego wykreślenia rzeczoney linii potrzeba.

70. Maiąc zaś oznaczyć przecięcie się płaszczyzny z powierzchnią okręgową (23), lub inną mogącą się utworzyć przez linią krzywą płaską, natenczas, którekolwiek weźmiesz położenie linii tworzącey, musisz wprzód wykreślić przecięcie się płaszczyzny tey tworzącey z płaszczyzną daną (67); linia taka może przeciąć uważaną linią tworzącą, iako razem z nią na iedney położoną płaszczyźnie, punkta więc wzajemnego ich przecięcia się będą oczewiście wspólnemi tak powierzchni iako też danej płaszczyźnie. Toż samo działanie, wykonane na innych coraz położeniach linii tworzącey, wyda szereg podobnego rodzaju punktów, w których następstwie upatrzwszy wiążące ie prawo, wykreślisz linią krzywą wzajemnego przecięcia się płaszczyzny i powierzchni danej.

71. Naostatek, iezeli iest taka powierzchnia że iey tworząca nie inną bydź może tylko podwójney krzywizny, aby, w oznaczeniu przecięcia tey powierzchni przez płaszczyznę daną, przywiedź zadanie do pierwszego przypadku, potrzeba, na każde z osobna położenie linii tworzącey, użyć inney coraz, przybranej na pomoc, powierzchni. I tak: do iednego którego bądź położenia linii tworzącey, przyday dwie linie proste i weź ie, razem z tym położeniem, za kierownice, posuwaiące się po nich, trzeciej linii prostej: tym sposobem oznaczysz powierzchnię kosą (62), której przecięcie się z daną płaszczyzną, podobnie iak wyżej (69), wykreślisz. Wykreślone to przecięcie się iest, na iedney przybranej powierzchni, razem z położeniem linii tworzącey, za kierownicę iey wziętém: a zatém, mówiąc w ogólności, może się z tém położeniem przeciąć; lecz że to ostatecznie należy do powierzchni danej, tamto zaś do danej płaszczyzny, wspólnie więc im punkta będą na linii krzywey wzajemnego przecięcia się rzeczoney płaszczyzny z powierzchnią.

72. Do uważanych dopiero przypadków łatwo się przywodzi wykreślenie linii wspólney dwóm albo większej liczbie iakichkolwiek przecinaiających się powierzchni: w tym celu dosyć iest razem ie przeciąć szeregiem oznaczonych płaszczyzn, i wynikające ztąd, linie wykreślić (69, 70, 71.); punkta wspólne tym powierzchniom będą oznaczonemi, na każdej z osobna płaszczyźnie, przez wzajemne przecięcie się wykreślonych linii. Większa lub mniejsza łatwość wykreślenia rzeczonych linii, zależy od układu płaszczyzn przybranych, względnie do rodzaju i położenia danych powierzchni.

73. Przecięcie się płaszczyzny z powierzchnią lub iedney powierzchni z drugą, może się zamienić na wzajemne ich *dotknięcie się*, iezeli, przez stosowną w położeniu odmianę, szereg

wspólnych im punktów zgrupował się do pojedynczego elementu powierzchni; w tym przypadku powiadamy że, płaszczyzna albo powierzchnia iedna, *styczną* jest do powierzchni drugiej. Element taki może mieć skończoną, lub nieograniczoną, rozciągłość w kierunku pewnej linii: iak w niektórych okręgowych i we wszystkich rozwijalnych powierzchniach (36); albo mieć obadwa nieskończenie małe wymiary; w ostatnim tym przypadku zwyczajnie się zowie *punktem wzajemnego dotknięcia się* pomienionych geometrycznych wielkości.

74. Jakkolwiek po płaszczyźnie stycznej poprowadzisz linią prostą, przechodzącą przez element dotknięcia się tej płaszczyzny z powierzchnią, linia taka w ogólności nie wspólnego nie może mieć z tą powierzchnią, oprócz punktów wzmiankowanego elementu: będzie więc styczną do niej w tymże elemencie; można zatem płaszczyznę styczną uważać jako miejsce geometryczne nieograniczonej liczby linii prostych, stycznych do powierzchni w tymże samym co i ona punkcie: dwie którekolwiek z tych linii mogą dokładnie wskazać położenie rzeczony płaszczyzny.

75. Ilekolwiek będzie powierzchni mających wspólny punkt albo element wzajemnego ich dotknięcia się (73), płaszczyzna, do iednej z nich w tym elemencie styczna, taką samą być musi i względem innych pozostałych. Każda albowiem inna płaszczyzna, przez element rzeczony przechodząca, przetnie płaszczyznę styczną po linii prostej, powierzchnie zaś po pewnych liniach krzywych, które wzajemnie do siebie i do tej linii prostej stycznymi będą w iednym i tymże samym punkcie, należącym do wzmiankowanego elementu powierzchni.

76. Płaszczyzna styczna, aczkolwiek jest miejscem nieograniczonej liczby stycznych do powierzchni linii (74), nie zawsze iednak przez te wszystkie przechodzi które, w punkcie dotknięcia się iey z powierzchnią, do tej ostatniej poprowadzonymi być mogą; to się zwyczajnie zdarza w punktach *wielokrotnych* powierzchni. Takie albowiem punkta są na zbieżeniu się dwóch albo więcej poł, mogących się, pod względem płaszczyzn stycznych, uważać za osobne powierzchnie. Płaszczyzna przecinająca tego rodzaju powierzchnię, jeśli przez wielokrotny iey punkt przechodzi, wyda najczęściej linię krzywą o tylu odnogach, do ilu poł różnych wzmiankowany punkt należał; linie do tych odnóg styczne we wspólnym ich punkcie, każda z osobna leży na innej płaszczyźnie stycznej: z kilku więc takich przecinających się płaszczyzn można nie tylko wysledzić rodzaj wielokrotnego punktu (*), lecz oraz oznaczyć wszystkie, w tym punkcie, płaszczyzny styczne: każdą przez dwie lub więcej linii prostych, stycznych do odpowiednich sobie odnóg linii krzywych, otrzymanych z przecięcia powierzchni przez poprowadzone płaszczyzny.

77. W zadaniach do geometrii wykreślnej należących, płaszczyzny styczne albo są oznaczone przez ślady (12) i wtenczas potrzeba częstokroć wynaleść punkta dotknięcia się ich z daną powierzchnią: albo, mając te ostatnie, szukamy właściwych tym płaszczyznom śladów; lub nakoniec wyprowadzamy je z innych podobnych temu warunków. Przystępując do rozwiązania tych zadań, zastanowimy się nad dwoiakiem sposobem dotknięcia się płaszczyzn, mianowicie z trzema rodzajami, znaiomych już po części, powierzchni.

78. Z rodzaju okręgowych wzięwszy naprzykład, opisaną wyżej (32), obręczkową powierzchnię, poprowadź przez środek koła tworzącego, płaszczyznę prostopadłą do osi: przetnie się ona z tą powierzchnią po największym i najmniejszym iey równoleżniku. Jeżeli taką płaszczyznę, w iedną lub drugą stronę, posuwać będziesz równolegle względem pierwiastkowego iey położenia, tedy, przecinając następnie powierzchnię w innych coraz równoleżnikach,

(*) Podług tego iak dwie, trzy, cztery lub więcej odnóg linii krzywey zbiegają się w tymże samym punkcie, zowiemy go *dwukrotnym*, *trzykrotnym*, *czterokrotnym* i t. d. Punkta tych rodzajów w powierzchniach są na zbieżeniu się dwóch, trzech i t. d. poł należących do iednej powierzchni.

naostatek zamiast dwóch, jeden tylko wspólny z tą powierzchnią mieć będzie: w tém położeniu, z przecinaiącey, na styczną się zamienu, we wszystkich punktach rzeczonego równoleżnika, zupełnie oraz zgadzając się z jego płaszczyzną.

79. Płaszczyzna południkowa obrączkowej powierzchni, przecina ją po dwóch osobnych okręgach tworzącego koła: okręgi te odmieniaią postać, gdy rzeczoną płaszczyznę będziesz posuwał w jedną lub drugą stronę, równolegle względem pierwiastkowego iey położenia: nie przestaną atoli być dwiema, zamkniętymi w sobie i osobnymi liniami, dopóki posuwająca się płaszczyzna przecina wszystkie równoleżniki uważanej powierzchni. Linie te wtenczas się dopiero zedydą, gdy posuwająca się płaszczyzna, zamiast przecięcia w dwóch punktach najmniejszego równoleżnika powierzchni, dotknie się go tylko; punkt albowiem takiego dotknięcia się, zarówno należąc do obu szeregów składających dwie wzmiankowane linie krzywe, będzie dla nich wspólnym dwukrotnym punktem, albo raczej *węzłem* ich połączenia. Poprowadzwszy przez ten punkt, po uważanej płaszczyźnie, linię równoległą względem osi, będzie ona prostopadłą do promienia tworzącego koła, styczną do iego okręgu, a zatem i do powierzchni, na której ten okrąg leży. Taż sama płaszczyzna w pomienionym punkcie, ma jeszcze na sobie drugą linię styczną do równoleżnika, z którym się wzajemnie dotyka; jest przeto, podług wyższego opisanie (74), styczną w tym punkcie do uważanej powierzchni: a jednak przecina ją po linii krzywej, przez tenże sam punkt przechodzący.

80. W drugim tym sposobie dotknięcia się płaszczyzny z obrączkową powierzchnią, linie wzajemnego ich przecięcia się, rozdziela tę ostatnią na części położone z przeciwnych stron pierwszej; linie więc krzywe, na tych częściach z osobna leżące, ku przeciwnym także stronom tej płaszczyzny wypukłością obróconemi będą: podobnie iak najmniejszy równoleżnik powierzchni i okrąg tworzącego koła, przechodzący przez punkt dotknięcia się iey z uważaną płaszczyzną.

81. W dalszém posuwaniu się rzeczoney płaszczyzny, podług wskazanego wyżej (79) kierunku, znówu się ona na przecinającą zamienu, lecz po linii pojedynczey i ciągle zmniejszającej się, w miarę oddalania się tej płaszczyzny od osi obrączkowej powierzchni: to jednak dopóty tylko, aż z największym równoleżnikiem jeden punkt wspólny, zamiast dwóch, mieć będzie. W takim położeniu, nie przecinając się z żadnym innym równoleżnikiem powierzchni, nie też z nią, oprócz rzeczonego punktu, wspólnego mieć nie może: zamienu się przeto z przecinaiącey na właściwą styczną; przejdzie albowiem nie tylko przez linię styczną do największego równoleżnika; lecz oraz przez drugą styczną w tymże punkcie do odpowiedniego okręgu tworzącego koła.

82. Na jednym więc, rozważanym dopiero przykładzie, powziąć można wyobrazenie dwoiakiego rodzaju płaszczyzn do powierzchni stycznych: jedne z nich dotykając się tylko, zgola nie przecinają powierzchni, podobnie iak w punktach największego równoleżnika i te *właściwemi stycznymi*, albo *stycznymi pierwszego rodzaju* nazywać będziemy; inne, podobne stycznymi w punktach równoleżnika najmniejszego, są oraz przecinającemi; aby jednak płaszczyzna taka nazwać się mogła *styczną drugiego rodzaju*, punkt iey dotknięcia się z powierzchnią, powinien być w szeregu wspólnych im innych punktów, czyli powinien się takż znajdować na wzajemném ich przecięciu się. Są oprócz tego na obrączkowej powierzchni dwa takie równoleżniki, których płaszczyzny z powierzchnią się dotykają po okręgach tychże równoleżników: płaszczyzny te pośrednie nieiako zajmują miejsce między pierwszym i drugim rodzajem: a ze sposobu dotknięcia się podobne są tym, które, po liniach prostych tworzących, stycznymi są do walcowych powierzchni.

83. Każda płaszczyzna, do powierzchni rozwijalney w jednym punkcie styczną, dotyka się z nią po linii prostej tworzącey, do której ten punkt należy, a w ogólności przecina ją oraz

po innej linii krzywej, mającej punkt wspólny z pierwszą. Każde albowiem położenie płaszczyzny pierwotnej ma na sobie element płaski powtórnej rozwiinalnej powierzchni (37): jest przeto stycznem do niej po liniach prostych, otaczających ten element; linie te nayeczęściej przecinają się z sobą (38) i z przyległemi położeniami linii prostej tworzącej: te ostatnie, w punktach przecięcia się z pierwszemi, przebią płaszczyznę przez nie przechodzącą, a która, iako się rzekło, jest do powierzchni styczną. Trzy, wymienione dopiero, punkta przecięcia się uważanych linii prostych, należą oczywiście do szeregu innych, w których następne położenia linii prostej tworzącej przebiąją też samą płaszczyznę styczną; przetnie się więc ona z powierzchnią po linii krzywej, utworzonej przez ciągle następstwo tych punktów, a zatem podług wyższego opisanja będzie styczną drugiego rodzaju.

84. Płaszczyzna styczna do ostrokręgu, po którémkolwiek położeniu linii prostej tworzącej, przejdzie koniecznie przez środek tej powierzchni i ze wszystkimi iey liniami prostemi przetnie się w tym środkowym punkcie (37), który zastąpi tu miejsce linii krzywej przecięcia się płaszczyzny stycznej z rozwiinalną powierzchnią (83): nie mniej jednak i w tym szczególnym przypadku, do drugiego rodzaju płaszczyzn stycznych policzyć ją należy.

85. Jedne tylko z rozwiinalnych, walcowe powierzchnie, dotykając się z płaszczyzną zgoła się z nią nie przecinają: każda albowiem płaszczyzna, do takiej powierzchni styczna, mając na sobie linię prostą, należącą do wspólnego iey elementu z powierzchnią, jest tém samém równoległą względem innych wszystkich położen linii prostej tworzącej (42).

86. Powierzchnie kose, podobnie iak rozwiinalne, w drugim wyłącznie sposobie dotykać się z płaszczyzną mogą: z tą jednak różnicą, że, nie po linii prostej tworzącej, lecz tylko w poiedynczym iey punkcie.

Niech będzie nayogólniej oznaczona przez trzy kierownice krzywe DE, FK, Lg, iaka fig. 9. bądź powierzchnia kosa, a na niej kilka położen linii prostej tworzącej (62), wyrażonych przez linie LFD, ABC, gKE i t. p. Przez jedną z tych linii, np. ABC, dowolnie poprowadź płaszczyznę XVOZ; przetnie się ona z przyległemi ABC i następnemi po nich, położeniami linii prostej tworzącej, w punktach np. M, G, p, q, N..... składających w ogólności linię krzywą, przecinającą się z prostą ABC (*). Pomiedzy temi dwiema liniami poprowadź ilekolewkie równoległych w dowolnym kierunku, iak np. sq, rp, i t. p.; wszystkie te linie będą na płaszczyźnie dwóch pierwszych XVOZ, iako mające z nią każda po dwa punkta wspólne; z powierzchnią zaś, oprócz tych punktów, nic więcej wspólnego nie będą miały. Punkta te tym są względem siebie bliższe, im która z poprowadzonych linii więcej przystępuje do punktu G, wzajemnego przecięcia się prostej ABC z krzywą MGN; przez ten więc punkt, równolegle do innych, poprowadzona linia XGO, zamiast dwóch, jeden tylko ten punkt wspólny z powierzchnią mieć może: z przecinającej więc zamieni się na styczną do tej powierzchni, a jednak razem z innemi równoległemi rp, sq,... do tej samej, co i one, płaszczyzny XVOZ należec będzie. Lecz że kierunek tych równoległych zupełnie jest dowolnym, pomieniona przeto płaszczyzna mieści na sobie nieograniczoną liczbę podobnych linii XO, stycznych w punkcie G, do powierzchni kosej: sama więc do niej styczną w tym punkcie będzie: a iako razem przecinająca ją po liniach AGC i MGN, przez punkt rzeczony przechodzących, tém samém do drugiego rodzaju płaszczyzn stycznych należy.

(*) Linia prosta powierzchni rozwiinalnej po której się z nią płaszczyzna styczna dotyka i linia krzywa, po której ją przecina, są wzajemnie do siebie stycznymi: mają albowiem, iako się wyżej (83) dowiodło, trzy punkta następne wspólne. W powierzchniach zaś kosych, dwóm takim liniom jeden jest tylko punkt wspólny: ponieważ następne położenia linii prostej tworzącej nie przecinają się, iak w rozwiinalnych powierzchniach.

87. Oznaczoną dopiero płaszczyznę $XVOZ$, iakkolwiek będziesz obracał na około linii prostej ABC , nie przestanie być ona styczną do powierzchni $LgED$, do której ta linia należy: punkt tylko G , wzajemnego ich dotknięcia się (86), posuwać się przez to musi po linii AC , w miarę iak płaszczyzna, odmienne biorąc położenie, w innych coraz liniach, różnych od MGN , z powierzchnią przecinać się będzie. Z tego wypływa, że: *każda płaszczyzna, poprowadzona przez linię prostą iakiejkolwiek bądź powierzchni kosej, styczną jest do niej w iednym punkcie tej linii, przez który przechodzi druga linia wzajemnego przecięcia się rzeczoney powierzchni z tąż samą płaszczyzną.*

88. Na powierzchniach hiperboloidy iednopolej i płaszczyzny spazzonej nie masz żadnego takiego punktu, w którymby się nie przecinały dwie linie proste tych powierzchni, należące do dwóch różnych szeregów położeń linii tworzącej (51, 59). Przez każde dwie takie linie przechodząca płaszczyzna jest w punkcie wzajemnego ich przecięcia się, do tych powierzchni styczną; toż samo albowiem stosuje się do niej, co się w ogólności wyżej (86) rzekło o płaszczyźnie styczney, do innej iakiejkolwiek powierzchni kosej. Ponieważ zaś każda linia prosta hiperboloidy iednopolej, albo płaszczyzny spazzonej, przecina wszystkie inne proste szeregu drugiego, a te, w ciągłym po sobie następstwie, gdy tworzą elementa powierzchni, nieskończenie mało iedne od drugich w położeniu się różnią, płaszczyzna więc, poprowadzona przez pierwszą i około niej obracająca się, następnie z porządku przez te drugie przechodzić będzie: a zatem, w punktach następnych pierwszej, nie przestanie być styczną do uważanych powierzchni. Ztąd wnioskujemy, że: *każda płaszczyzna, mająca na sobie linię prostą hiperboloidy iednopolej, albo płaszczyzny spazzonej, przecina te powierzchnie po innej linii prostej i oraz styczną jest do nich, w punkcie wzajemnego przecięcia się tychże linii; następnie zaś, że: w żadnym punkcie tych powierzchni nie można poprowadzić płaszczyzny styczney pierwszego rodzaju; lecz, że każda taka płaszczyzna przecina je oraz po dwóch liniach prostych, przechodzących przez punkt dotknięcia się i rozdzielających powierzchnią na cztery części; dwie z nich, obięte ramionami kątów wierzchołkami przeciwnych, leżą z iednej strony płaszczyzny styczney, inne zaś dwie z przeciwney strony być muszą: przyległe albowiem mają na tej płaszczyźnie wspólną sobie linię, a zatem, w przechodzie od iednej z nich do drugiej, przebić się przez płaszczyznę potrzeba.*

fig. 9.

89. Powierzchnia kosa w ogólności, chociaż się nie inaczej dotyka z płaszczyzną iak tylko w poiedynczym punkcie (87), może atoli we wszystkich razem punktach każdego z osobna położenia linii prostej tworzącej, dotknąć się z płaszczyzną stosownie spazoną, albo z hiperboloidą iednopola. I tak *np.* przez linię prostą AC wyobraź przechodzące dwie iakiejkolwiek płaszczyzny, różne od poprowadzonej wprzód $XVOZ$; punkta dotknięcia się ich z powierzchnią $LgED$, na tej samej linii podobnie wynadziesz iak, oznaczony wyżej (86), punkt G . Przez te trzy punkta poprowadź przecinające płaszczyzny, równoległe względem iakiejkolwiek dowolney: z takiego przecięcia mieć będziesz na powierzchni trzy linie krzywe, a na oznaczonych wprzód płaszczyznach trzy linie proste, styczne do pierwszych, i razem do powierzchni (74), we trzech wzmiankowanych punktach. Jeżeli po tych trzech stycznych, wziętych za kierownice, będziesz posuwał linią prostą AC , zrodzi ona płaszczyznę spazoną (52): która, we wszystkich punktach elementu AC , styczną być musi do powierzchni kosej $LgED$. Albowiem: ostatnią tę powierzchnię równiebyś utworzył, iuż to posuwając linię prostą AC po trzech kierownicach danych, iuż po oznaczonych dopiero, trzech liniach krzywych (62), a do których kierownice proste stycznymi są w punktach teyże samej linii AC ; punkta te są rzeczywiście elementami liniowemi, wspólnemi kierownicom prostym płaszczyzny spazzonej i krzywym powierzchni kosej. Będzie więc, oprócz położenia AC , drugie ieszcze, tuż po nim następnne, wspólne iednej i drugiej powierzchni, a zatem i element kosy, temiż położeniami

obięty: iako mający za kierownice rzeczony elementa liniowe, wspólne obudwu tym powierzchniom.

90. Ponieważ kierunek trzech równoległych płaszczyzn, przecinających się z oznaczonymi płaszczyznami stycznymi, zupełnie jest dowolnym, a następnie i kierunek układu trzech kierownic prostych, styczney płaszczyzny spaconey, wnieść przeto należy, iż: *do wszelkiej powierzchni kosey, może być nieograniczona liczba rozmaitych płaszczyzn spaczonych stycznych, w każdym z osobna elemencie, ciągnącym się wzdłuż któregośkolwiek położenia linii prostej tworzącej.*

91. Trzy kierownice proste, styczne do powierzchni kosey, aby mogły służyć takieży płaszczyźnie spaconey, powinny nie tylko być równoległemi względem iedney płaszczyzny (52), lecz oraz mieć punkta, dotknięcia się z tą powierzchnią, razem na iednym którémkolwiek położeniu linii prostej tworzącej. Bez tego ostatniego warunku, powierzchnie rzeczony, stycznymi być w żaden sposób nie mogą; od pierwszego zaś, iedynie tylko postać płaszczyzny spaconey zależy, tak dalece, że: na oznaczonych wyżej (89) trzech płaszczyznach stycznych, poprowadziwszy, przez punkta ich dotknięcia się z powierzchnią, iakiekolwiek inne linie proste, nie równoległe razem względem żadney płaszczyzny, możnaby wszelako do nich równie zastosować powyższe rozumowanie (89): biorąc je atoli za kierownice linii prostej tworzącej, otrzymalibyśmy, zamiast płaszczyzny spaconey, hiperboloidę iednopolą styczną do uważaney powierzchni. Lecz że układ takich kierownic nieskończenie rozmaitym być może, a zatém: *po każdym z osobna położeniu linii prostej, tworzącej powierzchnię kosą, mogą się iey dotykać inne coraz hiperboloidy iednopołe styczne*; takich zaś rozmaitych hiperboloid, równie iak płaszczyzn spaczonych, na każdy element iedney i tey samey powierzchni kosey, jest nieograniczona liczba.

92. Linia prostopadła do płaszczyzny styczney, wyniesiona od punktu dotknięcia się iey z powierzchnią, nazywa się *linią normalną*, albo *węgielną* powierzchni: podobnie iak w liniach pojedynczey krzywizny, prostopadła do linii styczney, przez punkt dotknięcia się iey z krzywą, po płaszczyźnie tey ostatniey poprowadzona, zowie się *węgielną* tego rodzaju linii. W liniach zaś podwójney krzywizny, węgielna jest to prostopadła do dwóch razem stycznych następnych, wyprowadzona z punktu wzajemnego ich przecięcia się; czyli, co na iedno wychodzi, jest to prostopadła do płaszczyzny ścięstyczney (47), w środkowym punkcie, odpowiednego tey płaszczyźnie, elementu linii krzywey.

93. Z pomiędzy mnóstwa rozmaitych płaszczyzn spaczonych, stycznych w tymże samym elemencie, do iedney powierzchni kosey, wybrać można taką: któreyby linie proste, należące do iednego szeregu z iey kierownicami, były prostopadłe względem położenia linii tworzącej, po którey się z pomienioną powierzchnią kosą dotyka. Jeżeli bowiem przez trzy punkta rzeczonygo położenia, w których płaszczyzny styczne oznaczyły się podanym wyżej (86) sposobem, poprowadzisz trzy inne płaszczyzny prostopadłe do tegoż położenia, a przecięcia się ich z płaszczyznami stycznymi wezmiesz za kierownice płaszczyzny spaconey (90), będą one, razem z innymi prostymi tegoż samego szeregu (52), prostopadłe do położenia linii tworzącej, wspólnego tey płaszczyźnie spaconey i uważaney powierzchni kosey. Oprócz tego: każda z opisanych dopiero linii, razem z wymienionem położeniem tworzącej, są na płaszczyźnie styczney, w punkcie ich przecięcia się, nie tylko do płaszczyzny spaconey (88) lecz oraz i do powierzchni kosey: iako mającey z pierwszą ten sam element wspólny, do którego rzeczony położenie należy. Taką płaszczyznę spaconą, obracając około linii prostej wzajemnego iey dotknięcia się z powierzchnią kosą, gdy w czwartey części całkowitego obrotu zatrzymasz, linie proste drugiego szeregu, nie przestając być do osi tego obrotu prostopadłemi, takimi oraz będą względem pierwiastkowego swojego położenia, a zatém i względem wymienionych pła-

szczyzn stycznych; z linii więc stycznych do powierzchni kosey zamienia się na iey węgielne (92). To dowodzi, że: *węgielne każdej powierzchni kosey, prowadzone w punktach następnich iednego któregokolwiek położenia linii prostej tworzącej, składają płaszczyznę spaczoną.*

94. Podanie poprzedzające pokazuje widoczną różnicę między krzywizną kosych i rozwiálnych powierzchni: węgielne albowiem tych ostatnich, odpowiadające punktóm iednego którego bądź położenia linii prostej tworzącej, będąc prostopadłemi do iedney i tey samey płaszczyzny, styczney z powierzchnią we wszystkich razem punktach tego położenia (83), składają, zamiast płaszczyzny spaczoney, iedną i prostopadłą do styczney, płaszczyznę węgielną.

Na wyłuszczonych dopiero własnościach, służących powierzchniom kosym, opierają się sposoby geometrycznego oznaczania płaszczyzn stycznych, nie tylko do iednych kosych, lecz i do wszelkich innych bez wyjątku powierzchni.

95. Maiąc *np.* na płaszczyźnie spaczoney lub hiperboloidzie iednopołey, dany punkt dotknięcia się ze styczną do nich płaszczyzną: gdy poprowadzisz przez ten punkt dwie linie proste tego rodzaju powierzchni (52, 59), oznaczysz przez nie położenie rzezoney płaszczyzny (88), a następnie, potrafisz wykreślić iey ślady (12), na rzutowych płaszczyznach.

96. Maiąc zaś, podobnie wskazany, punkt inney iakieykolwiek powierzchni kosey, dla wykreślenia śladów płaszczyzny w tym punkcie styczney: potrzeba naprzd oznaczyć przez kierownice hiperboloidę iednopołą albo płaszczyznę spaczoną, styczną do wymienioney powierzchni po linii prostej tworzącej, na której się punkt dany znajduje. Na ten koniec, przez tę ostatnią linię, poprowadź trzy iakieykolwiek płaszczyzny, a wykreśliwszy linie przecięcia się ich z powierzchnią (69), wynaddziesz punkta w których są do niey stycznymi (87); przez takie punkta, po oznaczonych dopiero płaszczyznach, iakkolwiek poprowadzisz trzy linie proste, wskażą one, iako kierownice, postać i położenie hiperboloidy iednopołey, styczney z powierzchnią kosą (91), po wspólney im linii prostej, do której punkt dany należy: oznaczona więc w tym punkcie płaszczyzna, styczna do przybraney na pomoc powierzchni (95), będzie takąż samą i względem powierzchni danej (75).

97. Do ostatnich dwóch zadań przywodzi się wykreślenie linii styczney, w punkcie danym na iakieykolwiek bądź linii krzywey. W tym celu do linii krzywey danej przydad jeszcze dwie linie proste, w dowolném lecz oznaczonym względem niey położeniu: a razem ie wzięwszy za kierownice linii prostej tworzącej, otrzymasz znaną powierzchnię kosą (62, 71), mającą na sobie linię krzywą daną; każda więc linia, styczna do tey ostatniey, taką samą będzie i względem przybraney powierzchni, a zatem na odpowiedney płaszczyźnie styczney leżeć musi (74).

98. W przypadku gdy linia krzywa iest płaską, linia styczna w danym iey punkcie będzie na płaszczyźnie teyże linii; umieściwszy ją przeto na oznaczoney powierzchni kosey (97), poprowadź, w punkcie wskazanym na linii krzywey, płaszczyznę do tey powierzchni styczną (96): żądana w tym punkcie linia styczna będzie razem na dwóch oznaczonych płaszczyznach, a zatem iako linia wzajemnego ich przecięcia się, wykreśloną bydz może (67).

fig. 10. 99. Toż samo zadanie daleko prościej rozwiązesz, gdy przez punkt A, dany na linii krzywey płaskiej ADB, poprowadziwszy znaczną liczbę przecinających ją linii prostych AB, AD i t. p. odetniesz na nich, w jednę stronę od punktów linii krzywey danej, iednaką, dowolnie obraną długość *np.* Bm; następstwo otrzymanych tym sposobem punktów m, n, o, r, s, do których i punkt dany A należy, ukaże postać inney linii krzywey, zależącej od postaci linii danej, którą tym dokładniej nakreślisz, im więcej, podobnych oznaczonym tu, wynaddziesz punktów. Na tak wykreśloney linii odciawszy od punktu A, w tę samą iak pierwey stronę, obraną długość Bm, znajdziesz punkt X, który, z punktem A połączony, wyda żadaną styczną. Należy

ona bowiem do układu innych przecinających linii Ao , An , Am , i t. p. na których punkta danej i przybranej linii krzywej są w różnym oddaleniu od punktu danego A : różnica jednak tego oddalenia, będąc statecznie równą długości wziętej Bm , pokazuje że, im który punkt linii przybranej bliżej przystępuje do tej odległości względem punktu A , tém linia łącząca go z tym punktem bliżej względem niego przecina linię daną; oba więc punkta przecięcia się linii AX z linią krzywą daną, razem byź muszą w tymże samym punkcie A , który przeto będzie punktem wzajemnego ich dotknięcia się.

Obraną długość Bm odciawszy na poprowadzonych liniach, w przeciwną iak pierwej stronę, wykreślisz drugą linię przybraną pAq , a na niej, podobnie iak X , znajdziesz inny punkt Z , do tej samej styczney AX należącej: która się przez to ieszcze dokładniey oznaczy. Oddalenie punktów Z , A , X , wskazujących kierunek żądanej styczney, zależy od dowolney wielkości Bm : dla tego więc ona dostateczną długość mieć powinna.

100. Jeżeli zaś linia dana jest podwójney krzywizny, tedy, sposobem wyżey wskazanym (97), umieścisz ją na dwóch oznaczonych kosych powierzchniach i do każdej z osobna, przez punkt na linii krzywej dany, poprowadzisz płaszczyznę styczną (96); wykreślona linia, wzajemnego przecięcia się takich dwóch płaszczyzn (67), będzie styczną, w pomienionym punkcie, do linii krzywej danej. Zamiast przybranych kosych powierzchni, zwyczajnie się używają dwie walcowe, rzucające linią krzywą daną (11): iak się to niżej (176) wyluszczy.

101. Maiąc w danym punkcie, na okręgowey lub inney iakieykolwiek powierzchni, oznaczyć płaszczyznę styczną, dosyć jest przez ten punkt poprowadzić dwie (*) iakieykolwiek przecinające płaszczyzny i , wynikłe zład na powierzchni, dwie linie krzywe wykreślić (70, 71): a następnie, do każdej z nich poprowadzić, w pomienionym punkcie, linię styczną (99); dwie takie styczne, razem wzięte, oznaczą położenie żądanej płaszczyzny styczney (74). Sposób ten jednak w tenczas tylko dostatecznym byź może, gdy punkt na powierzchni dany nie jest wielokrotnym: w ostatnim tym przypadku należy postąpić stosownie do powyższych uwag (76).

102. Oznaczenie płaszczyzn stycznych, prowadzonych przez punkt nie znajdujący się na powierzchni, albo równoległych względem linii prostej lub płaszczyzny danej, iako też przechodzących przez oznaczoną linię prostą i t. p. przywodzi się ostatecznie do rozwiązania dwóch następujących zadań, to jest: wykreślić linie styczne do linii pojedynczey krzywizny, prowadzone, albo przez punkt dany, nie znajdujący się na tej linii, albo równolegle względem oznaczonej linii prostej. Te jednak zadania wtedy tylko do rozwiązalnych policzyć się mogą, gdy punkt rzeczony wzięty jest na płaszczyźnie danej linii krzywej, linia zaś prosta, równoległa względem żądanych stycznych, gdy albo leży na tej płaszczyźnie, albo jest równoodległą od niej; wszystkie albowiem styczne, do linii krzywej tego rodzaju, są na płaszczyźnie takiej linii (47).

103. Niech, w opisanym dopiero sposobie, dany będzie punkt A , przez który linie sty- fig. 11.
czne do krzywej płaskiej $gCDa$ poprowadzić trzeba. W punktach a , b , d , e wziętych iakkolwiek na linii krzywej danej, oznacz iak wyżey (99) linie styczne, a za ich pomocą, wykreślisz w tychże punktach linie węgienne (92): do tych zaś ostatnich poprowadziwszy, przez punkt dany A , linie prostopadłe, otrzymasz z ich spotkania się szereg punktów m , n , o , p służących do nakreślenia przybranej linii krzywej; będzie ona miejscem punktów przecięcia się innych wszystkich węgielnych danej linii krzywej, z prostopadłemi do nich liniami, wychodzącemi od punktu A : przez takie bowiem punkta przybrana ta linia nakreślona została.

(*) Gdy powierzchnia dana do rozwiązalnych należy, wtenczas wystarcza jedna przecinająca płaszczyzna: styczna albowiem, w oznaczonym punkcie, do linii krzywej, otrzymaney (69) z takiego przecięcia, razem z położeniem linii tworzącej, na którym się ten punkt znajduje, wskażą położenie żądanej płaszczyzny styczney (85).

Połączywszy zatem punkt dany A z punktami C i D , wzajemnego przecięcia się linii przybraney z daną, otrzymasz styczne do niej żądane, iako prostopadłe w tych samych punktach do węgielnych tey ostatniej linii.

104. Od położenia punktu względem linii krzywey danej iako też od iey postaci, zależy postać linii przybraney i liczba punktów wzajemnego ich przecięcia się, a następnie i liczba stycznych, które do linii danej od oznaczonego punktu poprowadzić się mogą. Gdyby *np.* dana linia krzywa miała postać okręgu koła, linia przybrana, opisanych dopiero własności (103), nie różniłaby się od okręgu innego koła, mającego za średnicę linię łączącą środek danego z punktem przez który styczne poprowadzonymi być mają. Okrąg taki, iak wiadomo z początków geometryi, przecinaiąc się z danym we dwóch różnych punktach, dałby dwie odpowiedzi na podane zadanie.

105. Poprzedzający sposób, z niewielką odmianą, służy do wykreślenia linii węgielney przechodzącej przez punkt, dany gdziekolwiek na płaszczyźnie linii krzywey płaskiej. Jakoż: przez punkta na tey linii dowolnie wzięte, poprowadziwszy styczne (99), do nich zaś linie prostopadłe, od danego wychodzące punktu, jeżeli, przez punkta spotkania się ich z pierwszymi, nakreślisz linię krzywą, znajdziesz, na iey przecięciu się z daną, węgielne tey ostatniej, które przez punkt dany przeysć muszą.

fig. 12. 106. Maiąc na płaszczyźnie daną linię krzywą, *np.* adf i na tey samej, albo na równoległej płaszczyźnie linię prostą AB : aby do pierwszej poprowadzić styczną, równoległą względem tey ostatniej, należy wprzód, przez punkta *np.* a, b, c, d, \dots wzięte iakkolwiek na linii krzywey, wykreślić styczne do niej linie (99), a na tych, w iedną stronę od punktów dotknięcia się, odciąć dowolną iakowąż wielkość *np.* am . Przez oznaczone tym sposobem punkta, n, p, r, s, \dots poprowadź w stronę przeciwną linie równoległe, względem danej linii prostej AB i na nich odetnij ieszcze, obraną wprzód, długość am ; końce tych ostatnich linii dadzą szereg punktów $\varphi, \delta, \gamma, \beta, \dots$ przez które nakreślisz linię krzywą przybraną. W punktach takich, iak *np.* x , gdzie się przecinają linia krzywa dana z przybraną, poprowadziwszy równoległe względem danej linii prostej, otrzymasz linie styczne żądane. Każdy albowiem punkt linii przybraney taką ma własność, że: poprowadziwszy przezeń linię równoległą względem danej AB i, od tegoż samego punktu, odciawszy obraną długość am , gdy od końca tey odciętey długości wyprowadzisz styczną do linii krzywey danej, punkt iey dotknięcia się z tą krzywą będzie, względem punktu z którego się wyprowadziła, w oddaleniu równém tey samej linii am . Styczne zatem do linii krzywey danej czynią rozmaite równoramienne kąty z liniami równoległymi względem AB i końcami opartymi na linii przybraney; kąty te będą tym mniejsze, im odpowiednie punkta linii danej i przybraney bliżej siebie leżą: tam więc gdzie się te linie wzajemnie przecinają, iak *np.* w punkcie x , styczna do linii krzywey żadnego nie uczyni kąta z równoległą względem linii prostej AB , a przeto i do tey ostatniej równoległą będzie.

107. Do rozwiązanego dopiero zadania przywodzi się wykreślenie węgielnych linii krzywey płaskiej, równoległych względem prostej danej. Poprowadziwszy bowiem do tey prostej linię prostopadłą i, równoległe względem tey prostopadłej, styczne do linii krzywey danej (106), gdy, przez punkta dotknięcia się ich z tą krzywą, poprowadzisz prostopadłe do nich linie otrzymasz żądane węgielne.

108. Maiąc wykreślić linie styczne wspólne razem dwóm krzywym płaskim, na ieduey płaszczyźnie danym, poprowadzisz naprzód do iedney któreykolwiek znaczną liczbę linii stycznych (99) i, równoległe do nich, styczne drugiej linii krzywey oznaczysz (106): potem, gdzie te ostatnie dotykają się z krzywą, od każdego takiego punktu wyprowadzisz prostopadłą do równoległej z nią stycznej linii pierwszej, dla wskazania punktu wzajemnego ich spotkania się;

wynalazłszy zaś dosyć tego rodzaju punktów, zakresłisz przez nie przybraną linię krzywą: przetnie się ona z drugą linią daną w takich punktach, przez które poprowadzone do niej linie styczne (99), dotkną się także i pierwszej linii danej; będą bowiem na przejściu od linii stycznych tej ostatniej, które przecinały linię krzywą drugą, do tych które zewnątrz iey przechodziły: podobnie iak oznaczone punkta, przecięcia się tej drugiej krzywej z przybraną, są przechodem od jednego do przeciwnego mu kierunku linii, prostopadłych na pomienione styczne, wyprowadzonych z punktów drugiej linii krzywej danej.

109. Zamiast linii stycznych, iak w poprzedzającym przypadku (108), prowadząc, do dwóch krzywych danych, równoległe po parze węgielne i do każdej takiej pary linię prostopadłą, tak wszakże, aby te prostopadłe przechodziły przez punkta jedney z tych dwóch linii krzywych; szereg punktów spotkania się ich z odpowiadającymi węgielnymi linii drugiej, oznaczy krzywą przybraną, która przetnie się z pierwszą linią daną, w punktach gdzie iey węgielne takimi oraz będą i dla krzywej drugiej.

110. Naostatek mając wykreślić styczną do linii krzywej któraby węgielną była drugiej krzywej, leżącej razem z pierwszą na tej samej płaszczyźnie: poprowadzisz do pierwszej linii węgielne (92) i, równoległe do nich, styczne linii drugiej (106); te ostatnie będą prostopadłami do odpowiednich im stycznych linii pierwszej, które dla wykreślenia iey węgielnych oznaczonymi zostały. Punkta wzajemnego spotkania się takich, prostopadłych do siebie, stycznych posłużą do nakreślenia linii krzywej przybranej: ta zaś dotknie się z drugą linią daną, w tych właśnie punktach gdzie iey węgielne są oraz stycznymi do pierwszej linii krzywej danej.

111. Płaszczyzna styczna do powierzchni rozwijalnej może się oznaczyć, nie tylko przez punkt iey dotknięcia się, lecz oraz przez inny iakikolwiek, nie znajdujący się na tej powierzchni. Jeżeli bowiem przez taki punkt poprowadzisz płaszczyznę przecinającą się z rzeczoną powierzchnią i do otrzymanej, tym sposobem, linii krzywej (69), od tego samego punktu, wyprowadzisz linie styczne (103), te ostatnie, w punktach dotknięcia się z pomienioną linią krzywą, przetną się z odpowiednimi położeniami linii prostej tworzącej powierzchnią daną i oznaczają, razem z niemi, położenie płaszczyzn stycznych do powierzchni po tych liniach tworzących (83).

112. Zadanie to, należące w ogólności do rzędu nieoznaczonych, daie w rozwijalnych powierzchniach ograniczoną liczbę odpowiedzi; iakkolwiek bowiem przez punkt, dany zewnątrz tego rodzaju powierzchni, poprowadzisz linie proste, po oznaczonych raz płaszczyznach stycznych (111), będą one stycznymi do powierzchni w punktach przecięcia się z liniami prostymi, po których się z nią dotykają rzeczone płaszczyzny styczne (74): takimi zatem będą w tych punktach i do linii krzywych, wynikłych z przecięcia się powierzchni z płaszczyznami, iakkolwiek poprowadzonymi przez te linie styczne, a które i przez punkt dany przeysdź muszą. Wszystkie więc linie styczne do rozwijalnej powierzchni, wyprowadzone od iednego punktu, nie będącego na tej powierzchni, dotykają się z nią w punktach jedney, dwóch, a naywięcej kilku linii prostych tworzących, po których stycznymi są do tej samej powierzchni płaszczyzny, mogące się poprowadzić przez punkt rzeczony. Inaczej iest w innych wszelkich nierozwijalnych powierzchniach.

113. Przez punkt dany zewnątrz iakieykolwiek nierozwijalnej powierzchni, poprowadzisz kilka przecinających się z nią płaszczyzn, do krzywych zaś, z takiego przecięcia otrzymanych (69, 70, 71), linie styczne od tegoż samego punktu wychodzące, a przez punkta dotknięcia się ich z krzywymi, płaszczyzny do powierzchni styczne: te ostatnie, mając na sobie oznaczone linie styczne (74), muszą przez punkt dany przechodzić. Że zaś takich przecinających płaszczyzn, rozmaicie położenie odmieniać można, liczba zatem płaszczyzn stycznych do powierzchni i przechodzących przez punkt dany, nieograniczoną bydź musi; szereg zaś pun-

któw, w których się z powierzchnią dotykają, złoży pewną linię krzywą: która będzie oraz linią dotknięcia się tej samej powierzchni ze stycznym do niej ostrokretem, mającym swój środek w pomienionym punkcie. Wszystkie albowiem linie proste tego ostrokretu, znajdując się na odpowiednich płaszczyznach stycznych do powierzchni danej, nie z nią wspólnego mieć nie mogą, oprócz punktów rzeczonyj linii krzywey.

114. Każda płaszczyzna styczna do powierzchni danej i przechodząca przez środek stycznego do niej ostrokretu, musi być także i do powierzchni tego ostrokretu styczną (75); można go zatem, przez wzgląd na tę płaszczyznę, uważać jako powierzchnią powtórzną, utworzoną przez ciągle następstwo różnych tej płaszczyzny położeń (37), zadość czyniących obu wymienionym warunkom. Wykreślenie takiego ostrokretu jest zupełnym nieiako rozwiązaniem zadania, skąd inąd nieoznaczonego: iak przez punkt, nie znajdujący się na powierzchni, poprowadzić do niej płaszczyznę styczną? Drugie podobne temu zadanie, to jest: oznaczenie płaszczyzn stycznych do powierzchni, równoległych względem danej linii prostej, prowadzi do walca stycznego z tą powierzchnią i równoległego względem pomienioney linii; miejsce albowiem wszystkich takich punktów powierzchni danej, w których prowadzone do niej płaszczyzny styczne (101) czynią zadość warunkom rzeczonyj zadania, będzie na linii krzywey wzajemnego dotknięcia się tej powierzchni ze stycznym do niej, opisanym dopiero walcem.

115. Mając przez oznaczoną linię prostą, wskazany kierunek elementów walca stycznego do powierzchni danej, łatwo jest wykreślić linię krzywą, po której się z tą powierzchnią dotyka i tym sposobem wyrazić go przez tę linię krzywą, iako-kierownicę linii prostej tworzącej (42), równoległej względem prostej danej. W tym celu przetni daną powierzchnię szeregiem płaszczyzn, równoległych względem pomienioney linii prostej, a do otrzymanych ztąd linii krzywych (60, 70, 71), poprowadź linie styczne, równoległe względem tej samej prostej (106): będą one połoženiami linii tworzącej powierzchnię opisanego tu walca; żadaną zaś linię krzywą, po której dotyka się powierzchni danej, nakreślisz przez oznaczone punkta dotknięcia się z tą powierzchnią poprowadzonych linii stycznych, równoległe względem prostej danej. Jeżeli jednak powierzchnia dana do rodzaju rozwiałnych należy, walec taki przywieździe się do jedney, dwóch, a naywięcej kilku płaszczyzn, stycznych do tej powierzchni i równoległych względem oznaczonej linii prostej (112).

116. Rozwiązane wyżej zadania na liniach płaskich (103, 106), mogą się teraz rozciągnąć do wszelkich innych podwójney krzywizny: z tą jednak odmianą w warunkach ich rozwiązalności, że punkt, przez który mają się poprowadzić linie styczne, powinien się znajdować na rozwiałney powierzchni, mającej za krawędź odbicia linię krzywą daną; dana zaś linia prosta, równoległa względem innych żądanych stycznych, powinna mieć na tej powierzchni kilka, lub przynajmniej jedno, równoległe względem niej, położeń linii prostej tworzącej; taka albowiem powierzchnia jest geometrycznym miejscem wszystkich bez wyjątku stycznych (40), do wzmiankowaney linii krzywey.

117. Daną linię podwójney krzywizny umieściwszy na oznaczonej powierzchni kosej (71, 97), punkt zaś, przez który masz poprowadzić styczne do tej linii, wzięwszy za środek ostrokretu stycznego z tą powierzchnią, gdy linię wzajemnego ich dotknięcia się wykreślisz (113), będzie ona miejscem wszystkich takich punktów przybraney powierzchni kosej, w których dotykają się z nią linie do tej powierzchni styczne i przez punkt dany przechodzące, a do których i żądane styczne należeć muszą. Ponieważ zaś punkta dotknięcia się tych ostatnich z powierzchnią, nie inaczej być mogą, tylko na linii krzywey danej: będą więc one wspólnemi obudwu rzeczonym liniom krzywym. Otrzymasz przeto żądane linie styczne, gdy punkta przecięcia się tych dwóch linii krzywych z punktem danym, przez linie proste, połączysz.

118. Maiąc zaś poprowadzić styczne do linii podwójney krzywizny, równoległe względem prostej danej, umieścisz ją, iak w poprzedzającym zadaniu, na oznaczonej powierzchni kosej i wykreślisz linią krzywą, po której się z tą powierzchnią dotyka walec równoległy względem danej linii prostej (115); punkta przecięcia się danej i wykreślonej linii krzywej będą miejscem dotknięcia się powierzchni danej z żądanymi liniami stycznymi: które mieć będziesz poprowadziwszy przez te punkta linie równoległe względem prostej danej.

119. Linia węgielna, w danym punkcie na iakiejkolwiek powierzchni, łącno się wykreślić może, iako prostopadła do płaszczyzny stycznej w tym punkcie (92), a którą na każdy przypadek oznaczać umiemy (95, 96, 101). W wirowych jednak powierzchniach bez tej płaszczyzny obejść się można: każda albowiem węgielna linii południkowej jest nią i względem samej tego rodzaju powierzchni.

120. Przez punkt *np.* A, dowolnie wzięty na powierzchni wirowej, poprowadź jedną płaszczyznę przechodzącą przez oś, drugą zaś prostopadłą do niej; linie krzywe, z takiego przecięcia otrzymane (70) będą: pierwsza południkiem, a druga równoleżnikiem powierzchni (29); styczne zaś AF i AC, poprowadzone, w danym punkcie A, do tych linii, oznaczą położenie płaszczyzny, stycznej w tymże punkcie do uważanej powierzchni (101). Poprowadź jeszcze, w równoleżniku ADE, promień AS i średnicę ESD, równoległą względem stycznej AC: średnica ta, będąc prostopadłą do tego promienia, jest oraz prostopadłą do osi SO, a zatem i do płaszczyzny południkowej OSA; styczna więc AC, równoległa od tej średnicy, musi być także prostopadłą do tej samej płaszczyzny. Ztąd wniesiesz *naprzód*, że: płaszczyzna FAC, styczna w punkcie A do powierzchni wirowej, jest prostopadłą do przechodzącej przez ten punkt, płaszczyzny południkowej; *powtóre*, że: węgielna linii południkowej w tym punkcie, jest prostopadłą do linii AF, a następnie i do płaszczyzny stycznej FAC: czyli że w tym samym punkcie jest oraz węgielną powierzchni (92). Na tej własności opiera się sposób prowadzenia linii węgielnych przez punkt, nie znajdujący się na powierzchni wirowej, iako też równoległe względem danej linii prostej.

121. Przez punkt dany wewnątrz lub za powierzchnią wirową, i przez oś tej powierzchni poprowadziwszy płaszczyznę, wykreślisz na niej (70) linią południkową, do której, wskazanym wyżej (99) sposobem, poprowadzisz znaczną liczbę linii stycznych; do tych ostatnich, od danego punktu, wyprowadzając linie prostopadłe, otrzymasz z ich spotkania się szereg punktów, przez które na tej samej płaszczyźnie, nakreślisz drugą linią krzywą (105). Naostatek, łącząc liniami prostymi punkt dany, z punktami wspólnymi wykreślonymi dwóm liniom krzywym, mieć będziesz linie węgielne do pierwszey, a zatem i do powierzchni danej (120) przez oznaczony punkt przechodzące.

122. Maiąc wykreślić węgielne do powierzchni wirowej, równoległe względem prostej danej, oznacz *naprzód* płaszczyznę południkową równoległą do tej linii, na tej zaś płaszczyźnie poprowadź inną linią prostopadłą do pierwszey: będzie ona równoległą względem stycznych do południkowej linii w tych punktach, gdzie żądane węgielne poprowadzonymi być mogą. Wykreśliwszy przeto na poprowadzonej płaszczyźnie linią południkową powierzchni (70), a do niej oznaczywszy styczne równoległe względem poprowadzonej linii prostej (106), gdy przez punkta ich dotknięcia się z tą południkową wyprowadzisz do tych stycznych linie prostopadłe, te ostatnie będą węgielnymi powierzchni wirowej (120), równoległymi względem prostej danej.

123. Przez punkt nie znajdujący się na rozwijalnej powierzchni, mając poprowadzić do niej linią węgielną, należy *naprzód* wykreślić znaczną liczbę położzeń linii prostej tworzącej (40, 64) i oznaczyć, w tych położeniach, płaszczyzny do powierzchni styczne (101). Wyprowadzając potem od punktu danego, linie prostopadłe do wzmiankowanych położzeń, tudzież inne prostopadłe do oznaczonych płaszczyzn, otrzymasz, ze spotkania się pierwszych z liniami

prostemi powierzchni, drugich zaś z płaszczyznami do niej stycznymi (68), dwa różne szeregi punktów, przez które na powierzchni nakreślisz dwie linie krzywe; punkta przecięcia się tych linii połączone z danym wskażą żądane węgielne rozwijalnej powierzchni: takie bowiem linie łączące, będą w pomienionych punktach, nie tylko prostopadłami do odpowiednich położów linii prostej tworzącej, co jest własnością punktów przybranej linii pierwszej, lecz prostopadłami oraz do płaszczyzn stycznych z powierzchnią po tych liniach tworzących, a co służy wszystkim punktom, przybranej na pomoc linii drugiej.

124. Jeśliby dana rozwijalna powierzchnia była z rodzaju walcowych, natenczas, linie prostopadłe do rozmaitych położów tworzącej od jednego wyprowadzone punktu, byłyby razem na jedney płaszczyźnie prostopadłe do wzmiankowanych położów; w tym więc przypadku dosyć jest, przez oznaczony punkt poprowadzić płaszczyznę, prostopadłą przecinającą daną walcową powierzchnię i do linii krzywej, otrzymanej (69) z takiego przecięcia, oznaczyć węgielne przechodzące przez punkt rzeczony (105): takimi one będą i względem powierzchni danej.

125. Mając zaś podobnie oznaczyć (123) linią węgielną do powierzchni kosej, wyprowadź od punktu danej linie prostopadłe do rozmaitych położów prostej tworzącej, a przez punkta ich spotkania się nakreślisz na powierzchni przybraną linią krzywą. Przez te same położenia prostej tworzącej poprowadź płaszczyzny prostopadłe do oznaczonych wprzód linii prostych; przez punkta zaś dotknięcia się ich z powierzchnią (87), nakreślisz drugą linią krzywą. Połączwszy więc punkt dany z punktami przecięcia się dwóch przybranych linii krzywych, otrzymasz węgielne żądane: iako prostopadłe do płaszczyzn stycznych w punktach dotknięcia się ich z daną powierzchnią.

126. Prowadzenie do powierzchni kosej lub rozwijalnej linii węgielnych równoległych względem prostej danej, przywodzi się do wynalezienia na tych powierzchniach wszystkich takich punktów, w których płaszczyzny styczne w prostopadłym są położeniu do pomienionej linii: czyli w równoległym względem innej płaszczyzny, prostopadłe do niej poprowadzonej. Jeżeli więc przez rozmaite położenia prostej, tworzącej daną powierzchnię kąsą, poprowadzisz płaszczyzny prostopadłe do linii prostej danej, szereg punktów, w których stycznymi są do tej powierzchni (87), posłuży do nakreślenia linii krzywej będącej miejscem wszystkich innych tego rodzaju punktów. Lecz gdy płaszczyzny styczne do powierzchni w tych punktach, prostopadłami są do linii danej, wszystkie zatem węgielne powierzchni w punktach rzeczonyj linii krzywej, muszą być równoległymi względem tej danej linii.

127. Stosując do rozwijalnej powierzchni zadanie poprzedzające, wyobraź naprzód dwie płaszczyzny prostopadłe względem linii danej, z których jedna styczną jest do uważanej powierzchni. Obie te płaszczyzny i razem z nimi powierzchnię, przetnij inną iakąkolwiek płaszczyzną, a otrzymasz dwie równoległe linie proste tych płaszczyzn i krzywą rozwijalnej powierzchni; jedna z dwóch pierwszych, która do płaszczyzny stycznej należy, musi być styczną i względem tej powierzchni (74), a zatem taką samą będzie i do pomienionej linii krzywej, iako leżącej z nią razem na jedney przecinającej płaszczyźnie. Z tego wypływa następny sposób prowadzenia do każdej rozwijalnej powierzchni, linii węgielnych równoległych względem prostej danej.

128. Do linii prostej danej poprowadziwszy prostopadłą płaszczyznę, przetnij ją razem z daną rozwijalną powierzchnią, przez inną iakąkolwiek płaszczyznę, a linie wynikające z takiego przecięcia na tej ostatniej wykreślisz (67, 69). Do jedney z nich, to jest krzywej, otrzymanej z przecięcia powierzchni, poprowadź styczne równoległe względem wykreślonej prostej (106), a przez punkta dotknięcia się ich z tą krzywą, linie proste danej rozwijalnej powierzchni; te ostatnie, razem z odpowiednimi im stycznymi, oznaczą położenie płaszczyzn stycznych z tą powierzchnią (101) i prostopadłych do linii prostej danej. Jeżeli zatem, przez nakreślo-

ne dopiero linie proste powierzchni, poprowadzisz płaszczyzny prostopadłe do oznaczonych płaszczyzn stycznych, otrzymasz *płaszczyzny węgielne*, to jest przechodzące przez wszystkie linie węgielne powierzchni w punktach rzeczonych linii prostych. Ponieważ zaś te węgielne płaszczyzny są równoległemi względem danej linii prostej, będą więc miejscem żądanych, równoległych do niej, linii węgielnych danej rozwiiałnej powierzchni; prowadząc jednak po tych płaszczyznach linie prostopadłe do znajdujących się na nich linii prostych powierzchni, nie zawsze one będą równoległemi względem prostej danej: w szczególnych więc tylko przypadkach zadanie to rozwiązane być może.

129. W poprzedzającym sposobie, czyli to szukamy linii węgielnych danej rozwiiałnej powierzchni, albo tylko płaszczyzn węgielnych równoległych względem oznaczonej linii prostej, poprowadziwszy płaszczyznę iedną prostopadłą do tej linii, zamiast drugiej przecinaiącej (128) można użyć w podobnym celu któreykolwiek płaszczyzny rzutowey: natenczas linie otrzymane z takiego przecięcia będą śladami danej powierzchni i poprowadzonej płaszczyzny (12, 13); styczne więc do śladu powierzchni, równoległe względem śladu płaszczyzny, będą śladami płaszczyzn stycznych, prostopadłych do żądanych płaszczyzn węgielnych danej rozwiiałnej powierzchni.

W podanych tu sposobach, rozwiązania głównych geometryi wykreślney zadań (66), mianym był wzgląd na ścisłość rozumowania więcey, iak na praktyczne tych sposobów użycie; rodzaj wszelako przyjętych znaków (4), i wynikających zład a właściwych tej umiejętności działań są przyczyną dla której te sposoby, naginane do rozmaitych szczególnych przypadków, mniej lub więcey odmianie ulegać muszą. Nim iednak na stosownych wskaże się przykładach, pod iakimi względami i iak te odmiany korzystnie wprowadzać się mogą, potrzeba się wprzód dobrze spoufalić z początkowemi działaniami tego rodzaju wykreśleń, uważanych iuż to iak sposób dochodzenia nie znanych ze znaiomych rzeczy, iuż iako pewien rodzaj rysunku, przedstawiający na iedney płaszczyźnie różne strony dokładnie określonego przedmiotu (15, 16).

§. IV. *O położeniu względném na płaszczyźnie rysunku rzutów punktu, rozmaitych linii, i śladów płaszczyzny; oraz o zwyczajnym znakowaniu sposobie.*

130. Układ punktów lub innych geometrycznych wielkości, nie leżących wespół na iedney płaszczyźnie, odnosimy, iak się to na początku rzekło (4), do oznaczonych rzutowych płaszczyzn: tém one są dla takiego układu punktów (14), czém osie przystaw i ucinów dla punktów znajdujących się razem na płaszczyźnie tych osi; wszakże gdy te ostatnie wprost możemy rysunkiem oznaczyć, tamte nie inaczej, iak tylko przez wykreślenie ich rzutów: a to jeszcze po uprzedniém rozłożeniu płaszczyzn rzutowych, na iedney gdzie się ma rysunek wykonać.

131. W określaniu przez rzuty rozmaitych brył, a mianowicie takich z którymi się ma do czynienia w rozlicznych konstrukcyi i sztuk przemysłowych rodzajach, rysunek zrozumiałszym się staje gdy iedna z płaszczyzn rzutowych jest w położeniu poziomém; dla tej przyczyny i w rozwiązywaniu teorycznych zadań podobne się położenie płaszczyznom rzutowym nadaie: zkad dla rozróżnienia iedney od drugiej, poszło nazwanie *poziomey* i *pionowey* płaszczyzny, a następnie i rzutów, uważanych z osobna na każdej z tych płaszczyzn, które się *poziomemi* lub *pionowemi* mianują. Takie wszelako nazwisko rzutom tylko prostym (5) właściwe być może.

132. Niech prostokąt FOG ukośnie widziany wyraża część płaszczyzny poziomey i drugi fig. 13. MSN podobnie oznaczony, część drugiej rzutowey płaszczyzny, pionową zwaney: do nich zaś odniesione cztery punkta A, B, C, D, wzięte we czterech różnych częściach przestrzeni roz-

dzieloney przez te płaszczyzny. Rzuty proste tych punktów a, a', b, b', \dots wskazane przez linie rzucające Aa, Aa', Bb, \dots oznaczają każdemu z nich właściwe w przestrzeni miejsce (6), oddalenie zaś względem tych płaszczyzn równa się odległości ich rzutów od linii SO . Jakoż: poprowadziwszy *np.* przez linie rzucające Aa i Aa' , płaszczyznę $Aaqa'$, będzie ona prostopadłą do obu płaszczyzn rzutowych, a następnie i do linii OS wzajemnego ich przecięcia się: do tej więc ostatniej prostopadłemi będą linie aq i $a'q$, po których płaszczyzna poprowadzona przecina obiedwie rzutowe: w prostokącie zatem $Aaqa'$, bok Aa , wyrażający oddalenie punktu A od płaszczyzny pionowej, równa się $a'q$, odległości rzutu poziomego od linii SO , i na wzajem odległość rzutu pionowego a' od tej linii równa się Aa , to jest oddaleniu punktu A od płaszczyzny poziomej. Toż samo się rozumie o trzech pozostałych punktach, i o wszelkich innych równie iak one odniesionych do rzutowych płaszczyzn.

133. Dla skrócenia i jednostajności dalszych opisów, rzuty należące do jednego punktu lub linii będziemy, gdzie można, nazywać temiż samemi literami: rozróżniając je wszakże przez kréski, położone nad literami rzuty pionowe oznaczającemi. Tak *np.* pisząc, punkt (a, a'), albo linia (ab, ab'), rozumieć będziemy punkt oznaczony przez rzuty a i a' , tudzież linią wyrażoną przez rzut poziomy ab i pionowy ab' ; ten sam znakowania sposób rozciągniemy później i do wszelkich powierzchni.

fig. 13. 134. Linia SO bierze się za oś obrótu iedney z dwóch płaszczyzn rzutowych, aby ją położywszy na drugiej, przenieść potem razem z oznaczonemi rzutami na płaszczyznę rysunku (130): dla tego pomienioną linią zowiemy *osią rzutowych płaszczyzn*, lub zwyczajniey *osią rzutów*. W takiem działaniu odległości rzutów względem tej osi odmienić się nie mogą: a przeto i na płaszczyźnie rysunku wyrażą oddalenie odpowiednich im punktów przestrzeni, od obudwu rzutowych płaszczyzn.

fig. 13. 135. Przypuściwszy że płaszczyzna FOG , obracając się około osi SO , padła na płaszczyznę MSN , rzuty a' i a, b' i b, i t. p. znajdą się razem na pojedynczych liniach prostych aa', bb', \dots prostopadłych do osi rzutów SO : a zatem i na płaszczyźnie rysunku nie inaczej względem siebie bydz mogą; iak się to oznaczyło na figurze następuiącey.

fig. 14. Ztąd się uczymy, że dwa punkta dane iako rzuty na płaszczyźnie rysunku, jeżeli się nie znajdują razem na iedney linii prostopadłej do osi rzutów wtedy, pochodząc właściwie od dwóch różnych punktów przestrzeni, żadnego z nich oznaczyć nie mogą.

136. Płaszczyznę rysunku, która nayeczęściej jest w poziomém położeniu powierzchni rozpostartego papieru, rozdzielamy cienkim rysem w kierunku linii prostej, na dwie równie mniey więcey części: ta co jest nad nim wyraża część widzialną płaszczyzny pionowych rzutów, a pod nim rozciągająca się takąż część płaszczyzny poziomej; sam zaś ten rys oznacza oś rzutów, iakby położoną razem z płaszczyznami rzutowemi, na wyrównaney powierzchni papieru. Inny ieszcze rys, albo przecięcie się krótkich łuków, wskazuje kierunek linii prostopadłych do pierwszey, na których się powinny znajdować odpowiednie sobie rzuty punktów pojedynczych przestrzeni. Od dokładnego naznaczenia tego kierunku zależy ścisłość wszystkich dalszych wykreszeń; nie spuszcziąc się przeto na węgelnicę trójkątną, która się zwyczajnie do prowadzenia linii prostopadłych i równoległych w rysowaniu używa, raczej za pomocą cérkla rzeczony kierunek oznaczyć należy.

137. Płaszczyzny rzutowe, rozdzielające geometryczną przestrzeń na cztery równe części, uważamy iako ciągnące się bez ograniczenia: część więc płaszczyzny rysunku leżąca nad osią rzutów, będzie miejscem nie tylko widzialney części płaszczyzny pionowej, lecz oraz inney zakrytey części drugiej rzutowey płaszczyzny, a następnie miejscem nie tylko pionowych, ale i zakrytych przez płaszczyznę pionową wszelkich poziomych rzutów. Równie też druga część płaszczyzny rysunku mieć będzie na sobie nie tylko rzuty poziome, należące do widzialney

części takiej rzutowej płaszczyzny, lecz razem z niemi i pionowe rzuty, przypadające na zakrytą część płaszczyzny pionowej, którą pod osią rzutów uważać należy, iakby położoną z drugiej strony powierzchni papieru.

138. Stosownie do tego iak w którym kącie między płaszczyznami rzutowemi, punkt który przestrzeni jest dany, rzuty tego punktu przypadną na otaczających ten kąt częściach rzutowych płaszczyzn; wzajemnie przeto na płaszczyźnie rysunku z położenia rzutów odpowiednich sobie, względem linii wyrażającej oś płaszczyzn rzutowych (136), sądzić możemy na których częściach tych płaszczyzn znajdują się wyrażone rzuty, a następnie w iakim międy niemi kącie leżą punkta przestrzeni oznaczone temi rzutami. Rzuty *np.* punktu (a, a') fig. 14. będąc na częściach widzialnych rzutowych płaszczyzn, pokazują oczywiście że ten punkt widzialnym bydź musi: oko albowiem widza wyobraża się zwyczajnie iakby umieszczone w kącie obiętym rzeczonemi częściami tych płaszczyzn. Inne dwa punkta (b, b') i (d, d') mają po iednym swym rzucie na zakrytych częściach, pierwszego na płaszczyźnie poziomej a drugiego na płaszczyźnie pionowej, same więc te punkta będą zakrytymi w przestrzeni, pierwszy przez pionową drugi zaś przez poziomą płaszczyznę. Naostatek punkt (c, c') , mając oba swe rzuty na niewidzialnych częściach pionowej i poziomej płaszczyzny, będzie równie przez tę ostatnią iak przez pierwszą zakrytym: a przeto musi znajdować się w części przestrzeni obiętej kątem przeciwnym temu, gdzie oko widza i punkt (a, a') umieszczonemi zostały.

Opisane dopiero przypadki stosując do rozmaitych linii, tudzież do innych wszelkich geometrycznych wielkości, powiemy, że:

139. Gdy rzuty odpowiadające części lub całej linii albo powierzchni (16), tak leżą na płaszczyźnie rysunku, że pionowy nad osią a poziomy pod nią się znajduje, część lub cała wielkość oznaczona temi rzutami, będzie przed pionową i oraz nad poziomą płaszczyznę. Jeżeli zaś rzut pionowy razem z poziomym nad osią lub pod osią rzutów są dane, odpowiednia im w przestrzeni geometryczna wielkość, w pierwszym przypadku za płaszczyznę pionową, a w drugim pod poziomą będzie. Nakoniec, gdy rzut poziomy nad osią a pionowy pod nią leży, wielkość przez takie wyrażona rzuty, będzie nietylko pod płaszczyznę poziomą lecz oraz za płaszczyznę pionową: to jest w kącie obiętym niewidzialnemi ich częściami, czyli przeciwnym temu gdzie oko widza jest umieszczone.

140. W układzie danych wielu razem geometrycznych wielkości, trudno jest takie położenie nadać rzutowym płaszczyznom, aby która z tych wielkości na drugą ich nie przechodziła stronę: owszem nawet, mając nacyjęściej do czynienia z wielkościami ciągnącemi się bez granic, iakimi są linie proste, płaszczyzny, tudzież wiele powierzchni i linii krzywych, rzeczoney przypadek jest pospolitym we wszystkich wykreśleniach rzutowych: które staćby się mogły bardzo zawilęmi gdyby przyszło, bez różnicy znaków, wyrażać na płaszczyźnie rysunku, razem iak nacyjęściej wypada pionowe i poziome rzuty. Z tego powodu rysy odnoszące się do zakrytych przez płaszczyzny rzutowe części lub całych wielkości, oznaczają się kropkami; rysami zaś pełnemi, to jest iednym ciągiem prowadzonemi, te tylko wyrażamy rzuty, które się odnoszą do części nie zakrytych ani przez pomienione płaszczyzny, ani też przez inne podobnie oznaczone wielkości. Rzuty bowiem, pod tym uważane względem, są nieiako obrazem różnych stron oznaczonego przez nie przedmiotu. Gdyby *np.* oko widza, z nieskończenie wielkiej odległości od iednej którejkolwiek płaszczyzny rzutowej, skierowane na nią prostopadłe, mogło widzieć na tej płaszczyźnie wykreślony rzut prosty iakiegoś przedmiotu, pokazałby się on razem z tym rzutem iednakiey postaci: w takim albowiem przypuszczeniu promienie widzenia niczémby się nie różniły od linii rzucających (5) punkta widziane rzeczonego przedmiotu. A chociaż idzie zatém że: *rzuty proste nie są dokładnemi obrazami przedmiotów które oznaczają*, wszelako, gdy stosownie do tego celu będą wykreślone, mogą je w wielu przypadkach

zastąpić, dając dla wprawnego oka dosyć jasne pojęcie postaci i wymiarów wyrażonego tym sposobem przedmiotu.

141. Wykreślenia rzutowe, uważane ogólnie jako sposób rozwiązywania zadań geometrycznych, zyskują także na zrozumiałości przez powyższy znakowania sposób; żeby zaś tém łatwiejszemi do pojęcia i nieiako wyczytania bydź mogły, rysy *kropkowe* i pełne, albo właściwie mówiąc *ciągłone*, używają się do wyrażania danych tylko lub wynalezionych wielkości: wszystkie zaś inne, prowadzące od iednych do drugich, lubo się zostawiają dla nie zatarcia odbytych działań, żeby iednak zbyt nie zaciemniały rysunku, zwyczajnie się wyrażają kreskami, i takie rysy *kreskowemi* nazywać będziemy. Te ostatnie ieszcze, dla prędszego pojęcia samychże działań, częstokroć iedne rozróżniają się od innych, kładąc między kreskami po iedney, dwie, lub więcej kropek, przez co się ważniejsze lub mniej zwyczajne, a do wykreślenia wprowadzone wskazują wielkości; rysy oznaczające ie *przerywanemi* nazwiemy. W rozwiązaniem wszakże zadaniu wszelkie wielkości, wprowadzone dla otrzymania wypadku, uważają się iakby ich nie było w przestrzeni; tym sposobem ułatwiamy sobie pojęcie względnego położenia, wymiarów i postaci danych i wynalezionych rzeczy.

142. Dla iednostayności graficznych działań, musimy oznaczać przez rzuty te nawet punkta i linie które bezpośrednio na płaszczyznach rzutowych leżą; takimi zaś, oprócz innych, są ślady linii, płaszczyzn i powierzchni, rozmaicie w przestrzeni danych.

Każdy punkt leżący na płaszczyźnie rzutowey iest na niey rzutem samego siebie, drugi zaś odpowiedny mu przypada na osi rzutów; wzajemnie więc, gdy na płaszczyźnie rysunku niektóre z rzutów znajdują się na osi, punkta odpowiadające tym rzutom będą na tey samey płaszczyźnie, tam właśnie gdzie drugie ich przypadają rzuty. Punkta np. (X, X') , (X, Z') , (Y, Y') , (V, V') , są w opisanym dopiero przypadku: pierwszy z nich razem z poziomym swym rzutem, drugi zaś wspólnie z pionowym, leżą na widzialnych częściach rzutowych płaszczyzn, dwa inne, będące tam gdzie ich rzuty Y' , V , są oczewiście na zakrytych częściach tychże płaszczyzn.

143. Każdą z osobna płaszczyznę rzutową dopóki iest w położeniu prostopadłym do drugiej, można uważać jako rzucającą (9) wszystkie iakkolwiek nakreślone na niey linie: rzuty więc ich na drugiej płaszczyźnie rzutowey bez różnicy na oś rzutów przypadną, na pierwszy zaś będą rzutami samych siebie, podobnie iak pojedyncze punkta (142) razem z niemi na tey samey płaszczyźnie leżące. Stosując to do śladów, oznaczających położenie iakichkolwiek bądź płaszczyzn danych (12), każdy z nich na tey rzutowey płaszczyźnie gdzie leży iest rzutem samego siebie, drugi zaś odpowiedny mu na osi rzutów bydź musi.

144. Każda płaszczyzna należąca do rzeczy danych, lub do wypadku zadania, jeżeli nie iest prostopadłą do płaszczyzny rzutowey, zakryie ją w części lub zupełnie dla oka, prostopadłe na tę ostatnią skierowanego; stosownie więc do przyjętego znakowania sposobu (140), wszystkie linie położone na zakrytey części rzutowey płaszczyzny oznaczamy, zamiast ciągłonych, kropkowemi rysami. Jako zaś rozmaitym położeniom płaszczyzny względem rzutowych, rozmaite a stosowne odpowiada położenie iey śladów względem osi rzutów, nauczymy się więc z tego ostatniego sądzić o pierwszym; aby przez to ułatwić stosowanie do następnych wykreśleń wymienionych tu znakowania prawideł.

145. Jeżeli dana płaszczyzna nie iest do osi rzutów równoległą, to ją koniecznie przetnie w iednym punkcie, wspólnym tey płaszczyźnie i obu płaszczyznom rzutowym: linie przeto wzajemnego tych płaszczyzn przecięcia się przez punkt rzeczony przeysdź muszą; co pokazuje, że ślady płaszczyzny w takim położeniu będącey, muszą się przecinać w punkcie położonym na osi rzutów. Wzajemnie przeto, gdy płaszczyzna wydaie ślady przecinające się na osi rzutów, to znaczy, że nie iest równoległą do żadney z dwóch płaszczyzn rzutowych; takie

wszakże iey położenie wyrażone częstokroć bywa przez dwa zgoła nie przecinające się ślady: wtenczas gdy płaszczyzna, będąc równoległą względem osi rzutów, przecina obiedwie płaszczyzny rzutowe. Odmieniając albowiem położenie płaszczyzny danej, tak iżby iey ślady coraz pod mniejszym kątem przecinały się z osią rzutów, następnne położenia tey płaszczyzny mniej coraz do pomienioney osi nachyleniemi będą; ztąd wypływa że: gdy dana płaszczyzna jest równoległą do osi rzutów, nie będąc jednak taką do żadney z dwóch płaszczyzn rzutowych, oba iey ślady względem tey osi będą liniami równoległemi.

146. Płaszczyzna równoległa do iedney któreykolwiek płaszczyzny rzutowey, przecinając z nich drugą wyda linią równoległą do osi; takie więc położenie płaszczyzny przez ieden tylko ślad, równoległy względem osi rzutów, oznaczone będzie.

147. Gdy ieden ślad płaszczyzny prostopadłym jest do osi rzutów, takim będzie koniecznie i względem drugiey płaszczyzny rzutowey, a następnie i płaszczyzna tego śladu do tey samey rzutowey prostopadłą być musi; wzajemnie przeto: gdy płaszczyzna dana jest prostopadłą do iedney z dwóch płaszczyzn rzutowych, ślad iey na płaszczyźnie drugiey będzie prostopadłym do osi rzutów. Lecz że płaszczyzna rzutowa prostopadła do danej, taką jest i względem drugiey rzutowey, oś więc rzutów i ślad nie prostopadły do tey osi, tworzą kąt pokazujący nachylenie danej do tey drugiey rzutowey płaszczyzny. Jakoż: gdy oba ślady iakoweyś płaszczyzny są do osi rzutów prostopadłemi, tworząc tym sposobem na płaszczyźnie rysunku poiedynczą linią prostą, wyrażona przez nie płaszczyzna będzie prostopadłą razem do obu rzutowych.

148. Niech *np.* linia ABC, prostopadła do osi rzutów SO, wyraża na płaszczyźnie ry- fig. 15.
sunku położenie śladów AB i BC płaszczyzny prostopadłej do tey osi, a zatem i do obu płaszczyzn rzutowych; taka płaszczyzna, iakkolwiek bez granic ciągnąca się, nie może być jednak na zawadzie promieniem widzenia prostopadłym do poziomey albo pionowey płaszczyzny, a przeto nie zakryje ich zgoła dla oka patrzącego, z odległości nieskończenie wielkiej (140), na iedną lub na drugą z osobna, w prostopadłym kierunku.

149. Płaszczyznę ABC, obracając około poziomego iey śladu BC, gdy nachylisz ku płaszczyźnie poziomey w stronę *np.* prawą, ślad iey pionowy AB w tę samą stronę przychyli się do osi rzutów OS; rzeczona zaś płaszczyzna w iednym z takich położeń wyrażona przez ślady BC i BD, chociaż nie zakryje żadney części płaszczyzny pionowey będąc prostopadłą do niey (147), lecz iako nachylona ku płaszczyźnie poziomey w prawą stronę względem śladu prostopadłego BC, część iey BCS, leżącą z tey samey strony względem pomienionego śladu, koniecznie zakryć musi. Dla teyże przyczyny inna płaszczyzna EBC, prostopadła takż do pionowey, lecz ku poziomey na lewą pochyłona stronę, zakryje część iey BCO, ciągnącą się z tey samey strony względem śladu prostopadłego BC, w którą stronę ślad drugi EB więcej jest przychylonym do osi rzutów.

150. Uważając też samą płaszczyznę ABC obracającą się naokoło pionowego iey śladu AB, wnieslibyśmy że, podług iey nachylenia do płaszczyzny pionowey, mierzącego się w tym przypadku pochyłością drugiego śladu do osi rzutów (147), zakryje część pomienioney płaszczyzny z tey strony względem śladu AB, w którą stronę ślad drugi będzie pochyłonym do osi rzutów. Podobnie się zastanawiając nad płaszczyznami IKL i FGH łącno poymiemy, że pierwsza z nich zakrywa część prawą względem śladu KL, druga zaś względem śladu GH część lewą płaszczyzny poziomey: bo ich pionowe ślady IK i FG, pierwszy na stronę prawą, drugi na lewą nachyleniemi są do osi rzutów; poziome ich ślady KL i GH pokazują, że obie te płaszczyzny zakrywają na płaszczyźnie pionowych rzutów części leżące ze strony lewey względem śladów IK i FG.

151. Jakie jest nachylenie śladów iakieykolwiek płaszczyzny do osi rzutów w położeniu prostopadłym rzutowych płaszczyzn, także same będzie kiedy się one razem położą na iedney

plaszczynie rysunku (134), chociaż się przez to odmieni wzajemna pochyłość tych śladów. Widocznie to pokazują płaszczyzny ABC i PQR: których ślady na płaszczyźnie rysunku składają linie proste, w przestrzeni iednak przy punktach B i Q musiały czynić pewne kąty, zależące od położenia rzeczonych płaszczyzn względem obudwu rzutowych. Niżej poda się sposób wyprowadzenia kąta pochyłości dwóch śladów, iaki czyniły na płaszczyznach rzutowych, z tego który jest na płaszczyźnie rysunku danym; tym czasem dosyć jest wiedzieć: że, gdy ślad pionowy w iedną stronę ku osi rzutów tyle jest nachylony o ile poziomy w stronę iey przeciwną, dwa takie ślady, do iedney należące płaszczyzny, złożą na płaszczyźnie rysunku pojedynczą linią prostą; kąty albowiem nachylenia ich do osi, będą na pomienioney płaszczyźnie wierzchołkami przeciwnie ku sobie.

152. Ślady płaszczyzny IKL podobnie są nachylonemi względem osi rzutów, iak uważaney dopiero PQR: do niey więc toż samo zastosować można, co się wprzód (150) o pierwszey płaszczyźnie rzekło; a następnie w ogólności powiemy że: *gdy ślady iakiejkolwiek płaszczyzny w przeciwne strony do osi rzutów są nachylonemi, części zakryte rzutowych płaszczyzn w przeciwne także strony od śladów tey płaszczyzny rozciągają się będą.* Jako zaś każda taka płaszczyzna iedną swą stroną ku płaszczyźnie rzutowey iedney a przeciwną ku drugiey nachyloną być musi, więc i dla oka skierowanego prostopadłe, raz ku iedney, drugi raz ku płaszczyźnie rzutowey drugiey, przeciwne swe strony ukaże: a następnie, tak na płaszczyznach rzutowych iako też i w przestrzeni, co będzie przed nią ze strony oka, umieszczonego w położeniu pierwszym, to w drugim jego położeniu ze strony przeciwney, czyli za tą płaszczyzną; rzuty więc tegoż samego przedmiotu, jeżeli ieden kropkami, tedy drugi odpowiedny przez rysy ciągnięte oznaczyć się powinny.

153. Płaszczyzna poprowadzona przez os rzutów, pomiędzy widzialnemi częściami dwóch rzutowych płaszczyzn, będzie do nich nachyloną przeciwnemi stronami: jeżeli przeto nie zakrywa iakiegoś przedmiotu, dla oka skierowanego prostopadłe na iedną rzutową płaszczyznę, to go zakryć koniecznie musi gdy w takimże kierunku, z nieskończoney odległości, ku drugiey obrócone będzie; każdego więc przedmiotu razem z taką płaszczyzną danego w przestrzeni, odpowiednie rzuty znakami odmiennemi wyrażać się powinny. Wszakże od tego prawidła wyłączają się linie na płaszczyznach rzutowych bezpośrednio leżące: które wraz z temi płaszczyznami, dla obu wymienionych położzeń oka, całkowicie zakrytemi być muszą.

154. Os rzutów będąc zarówno poziomym iak pionowym śladem, dla każdej poprowadzoney przez nią płaszczyzny (12), żadney z nich w szczególności oznaczyć nie jest w stanie; wyrażenie więc przez ślady takowych płaszczyzn wymaga albo zmiany rzutowych albo, co jest zwyczajniey, użycia na pomoc płaszczyzny trzeciej: która dla iednostayności wykreśleń, bierze się w położeniu prostopadłym względem dwóch głównych rzutowych, i albo się *plaszczyną przybraną*, albo *trzecią rzutową* mianuje.

155. Mając wskazany przez rzuty ieden punkt płaszczyzny przechodzący przez os rzutów, położenie tey płaszczyzny zupełnie oznaczone będzie, i ślad iey na trzeciej rzutowey fig. 18. łačno wykreślonym być może. Jakoż: niech np. punkt (A, A') należy do takiej płaszczyzny, a której ślad masz wykreślić na trzeciej rzutowey PSQ, wziętey w położeniu prostopadłym (147) względem dwóch głównych PO i OQ. Ślady PS i SQ płaszczyzny rzutowey trzeciej, są w pierwotnym iey położeniu prostopadłemi do siebie; takimi więc być muszą i na płaszczyźnie rysunku; ieden z nich przeto wzięwszy za os obrotu rzeczoney płaszczyzny, gdy ją położysz na odpowiedney temu śladowi płaszczyźnie rzutowey, drugi padnie koniecznie na osi rzutów OS. Żądany więc trzeci rzut punktu (A, A') będzie raz na linii A'a'', poprowadzoney przez pionowy rzut jego prostopadłe do śladu PS (135), drugi raz na prostopadłej Aa do poziomego śladu SQ; jeżelibyś obracając około tego ostatniego rzeczoną płaszczyznę PSQ,

położył ją na płaszczyźnie poziomey. Punkt a , w położeniu PR trzeciej rzutowej płaszczyzny, znajdzie się w punkcie m , w takiej samej co i pierwszy odległości względem punktu S : przedłużenie więc prostopadłej Aa wyrazisz na płaszczyźnie rysunku przez linię mA' , wyniesioną z punktu m prostopadłe do SR ; przecięcie się zatem tej ostatniej z poprowadzoną w przód $A'a$ wskaże na położony trzeciej rzutowej płaszczyźnie PR rzut prosty A' punktu danego (A, A').

156. Linia ($Aa, A'a$), jedna z rzucających punkt dany (A, A', A''), wspólnie z osią OS prostopadłemi są do trzeciej rzutowej płaszczyzny PSQ : a zatem muszą się razem znajdować na płaszczyźnie przechodzącej przez tę oś i punkt dany (A, A', A''); punkta więc S i A'' , będąc wspólnymi obudwu tym płaszczyznom, wskażą linią SA'' : to jest ślad tej ostatniej zostawiony na płaszczyźnie pierwszej (12). Płaszczyzna więc OSA'' , wyrażona przez dwa swoje ślady OS i SA'' , jest tą samą która z początku przez jeden iey punkt (A, A') i oś rzutów OS oznaczoną była.

157. Płaszczyzna OSA'' , równie iak każda inna przez oś rzutów poprowadzona, przecięte przez trzecią rzutową dadzą, wspólnie z głównymi płaszczyznami rzutów, linie pokazujące wzajemne ku sobie nachylenie tych wszystkich płaszczyzn. Jako zaś linie rzezone, razem z trzecią płaszczyzną rzutową na której się znajdują, położone na płaszczyźnie rysunku nie mogą zmienić pochyłości swojej: kąty więc iakie iak PSA'' i $A''SR$ mierzą na tej ostatniej, pierwszy nachylenie płaszczyzny OSA'' względem pionowej, drugi pochyłość iey do płaszczyzny poziomey.

158. Z wyrażonych na płaszczyźnie rysunku śladów ilukolwiek płaszczyzn danych bez dalszego wykreślenia sądzić mniej więcej można, iak one nie tylko względem rzutowych lecz i względem siebie leżą; mianowicie zaś kiedy te ślady albo się przecinają na każdej z osobna płaszczyźnie rzutowej, albo są do siebie równoległemi: nie będąc niemi wszakże względem osi rzutów.

Co do pierwszego: jeżeli na jednej którejkolwiek płaszczyźnie rzutowej ślady dwóch płaszczyzn danych przecinają się, znakiem jest że te dwie płaszczyzny wzajemnie się przecinają, chociażby drugie ich ślady równoległemi byż miały; punkt albowiem przecięcia się pierwszych należeć musi do linii prostej wspólnej obudwu rzezonym płaszczyznom. Taka linia w ogólności prześchy powinna przez punkt przecięcia się śladów drugich (67): w przypadku więc równoległego położenia tych ostatnich, jeżeli ie za przecinające się w nieskończony gdzieś odległości uważać będziemy, tedy łączno się pojąć daie że linia wzajemnego przecięcia się takowych płaszczyzn równoległą byż musi z pomienionemi śladami.

159. Płaszczyzny równoległe razem przecięte przez którąkolwiek rzutową muszą na niej zostawić równoległe ślady; wzajemnie więc gdy dwie lub więcej płaszczyzn dane są, albo każda przez jeden ślad równoległy do osi rzutów (146), albo przez dwa przecinające się na osi lecz oraz względem odpowiednich śladów innych płaszczyzn danych równoległe, to znaczy: że takie płaszczyzny w ostatnim przypadku są względem siebie równoległemi, w pierwszym zaś nie tylko do siebie lecz i do jednej z dwóch rzutowych płaszczyzn, na której nie wydadają śladów.

160. Mogą byż albowiem przez równoległe ślady oznaczone dwie przecinające się płaszczyzny: a to natenczas kiedy obiedwie są w położeniu równoległym do osi rzutów (145); wysłedenie w tym przypadku właściwego położenia jednej płaszczyzny względem drugiej danej, wymaga użycia trzeciej rzutowej płaszczyzny i wykreślenia na niej śladów dwóch płaszczyzn danych: trzecie te ślady, czyli to równoległemi lub przecinającemi się będą, wskażą w pierwszym razie równoległość, w drugim przecinanie się takowych płaszczyzn.

161. Wyżey się pokazało (157) że wzajemne nachylenie płaszczyzn przechodzących przez

oś rzutów mierzy się przez pochyłość ich śladów, wykreślonych na trzeciej rzutowej płaszczyźnie: do której nie tylko rzutowe główne lecz i wszystkie pomienione płaszczyzny są prostopadłymi. Można to zastosować do innych wszelkich przecinających się płaszczyzn prostopadłych względem którejkolwiek płaszczyzny rzutowej głównej: na tej albowiem ostatniej przecinające się ich ślady ukażą wzajemnie ku sobie nachylenie takowych płaszczyzn.

162. Rzuty proste linii prostopadłej do płaszczyzny, prostopadłymi są do odpowiednich śladów teyże płaszczyzny. Każda bowiem płaszczyzna rzuciąca linią prostopadłą do płaszczyzny danej, jest równie do niej prostopadłą iak i do płaszczyzny rzutowej (9); ślad zatem danej płaszczyzny, iako wspólnie iey przecięcie się z płaszczyzną rzutową (12), będzie prostopadłym do płaszczyzny rzuciącej a następnie i do rzutu uważanej linii prostej.

163. Każda płaszczyzna prostopadła do którejkolwiek rzutowej, będąc miejscem linii rzuciających wszystkie tey płaszczyzny punkta, jest oraz płaszczyzną rzuciącą (7, 9) wszelkie położone na niej linie. Jakiekolwiek przeto, proste lub krzywe, równoległe przecinające się lub wzajemnie siebie dotykające linie, będą nakreślone na iednej takiej płaszczyźnie, iaką jest fig. 15. np. DBC, ślad iey BD na tey płaszczyźnie rzutowej do której jest prostopadłą, będzie wspólnym rzutem wszystkich wymienionych linii: które iednak rozróżnić i każdą z osobna oznaczyć można przez odpowiadające rzuty wykreślone na drugiej rzutowej płaszczyźnie. Lecz gdyby dane linie znajdowały się na płaszczyźnie np. ABC prostopadłej do obudwu rzutowych, natenczas wszystkie ich rzuty przypadłyby razem na iednej linii prostej ABC, żadney z nich osobno nie oznaczając. Takie położenie linii wymaga albo zmiany płaszczyzn rzutowych, albo co jest zwyczajniey, użycia na pomoc trzeciej rzutowej płaszczyzny i wykreślenia na niej rzutów tychże linii, przez które iedne od drugich rozróżnić i każdą w szczególności oznaczyć będzie można.

164. Rzuty punktu znajduącego się na linii są koniecznie na rzutach tey linii (7, 8): podobnie ślady linii, leżącey na płaszczyźnie lub oznaczoney powierzchni, muszą być na odpowiednich śladach teyże płaszczyzny albo powierzchni; co o czewiście wypływa ze znaczenia iakie się wyżej przywiązało do tego nazwiska (12, 13). Na tych prawdach opierają się sposoby oznaczania przez rzuty punktu albo linii, danych przez rzut ieden i płaszczyznę lub powierzchnią do której należą; będzie to w dalszym ciągu przedmiotem właściwych geometryi wykreślney zadań.

165. Jako ze śladów sądzić możemy o położeniu płaszczyzny, od której pochodzą, tak podobnie z położenia rzutów linii względem osi rzutów wnioskujemy iak ta linia leży względem rzutowych płaszczyzn.

Linia prosta w rozmaitych zmianach iey nachylenia do obu płaszczyzn rzutowych, może być równoległą lub prostopadłą do iedney którejkolwiek: albo, znajdując się na płaszczyźnie przechodzącej przez oś rzutów, może się z tą osią przecinać lub być równoodległą od niej.

Linia krzywa płaska będzie w położeniu osobliwém, gdy iey płaszczyzna jest rzuciącą tę linią, a to natenczas kiedy jest prostopadłą do którejkolwiek bądź rzutowej: mogąc być oraz równoległą lub iakkolwiek nachyloną do drugiej albo trzeciej płaszczyzny rzutowej. Naostattek, kiedy płaszczyzna linii krzywey płaskiej przechodzi przez oś rzutów i rozdziela kąt ieh pochyłości na dwie równe części, położenie linii w takim razie iednakowe będzie względem obu pomienionych płaszczyzn. Przebieżmy z porządku wyliczone tu szczególne przypadki.

fig. 16. 166. Linia prosta wyrażona przez rzuty AB i A'B' jest w przecięciu się płaszczyzn poprowadzonych przez te rzuty, prostopadłe do rzutowych na których leżą (8). Lecz iedna z tych rzuciających płaszczyzn AB, jest równoległą do płaszczyzny pionowej (146), pokazuje przeto że znajduiąca się na niej linia (AB, A'B) nigdzie się z tą ostatnią spotkać nie może, czyli że jest do niej równoległą; wzajemnie więc każdej linii równoległej względem której-

kolwiek płaszczyzny rzutowey, rzut na płaszczyźnie drugiey musi być równoległym do osi rzutów: drugi zaś *np.* $A'B'$, iakkolwiek jest nachylnym do tej osi, będzie zawsze równoległym względem pomienionej linii. Może być i ten drugi rzut równoległym także względem osi rzutów: w tenczas linia prosta, przez takie wyrażona rzuty, będzie razem do obudwu płaszczyzn rzutowych a następnie i do osi rzutów równoległą.

167. Linia prostopadła do iedney z dwóch rzutowych płaszczyzn, chociaż tём samém równoległą jest względem drugiey, rzut iey wszelako na płaszczyźnie pierwszej musi być poiedynczym punktem. W takim albowiem położeniu dana linia prosta będzie dla wszystkich swych punktów rzucającą (9), na płaszczyznę do której jest prostopadłą; punkt zaś gdzie tę ostatnią przebiła, iako wspólny rzut wszystkich pomienionych punktów, będzie nim i dla całej linii. Płaszczyzna poprowadzona przez tę linię, prostopadła do drugiey rzutowey, musi być taką i względem rzutowey pierwszej: przecięcie się więc drugiey z poprowadzoną, czyli drugi rzut uważanej linii, będzie prostopadłym do pierwszej, a następnie i do osi rzutów. Ślad drugi poprowadzoney płaszczyzny przetnie linię daną w punkcie przecięcia się tej linii z płaszczyzną rzutową pierwszą (68), na płaszczyźnie zaś rysunku złoży z poprzedzającym śladem poiedynczą linię prostą (147); mając przeto na iedney płaszczyźnie rzutowey dany *np.* rzut C , prostopadły do niej linii, poprowadziwszy przez ten linię CC' prostopadłą do osi rzutów, wynadziessz drugi odpowiedny mu rzut $C'C'$ tej samey linii. Podobnie oznaczoną została linia (EE , E') prostopadła w danym punkcie E' do drugiey rzutowey płaszczyzny; linie zaś (D , DD') i (GG' , G') są w punktach D i G' prostopadłemi, pierwsza do poziomey a druga do płaszczyzny pionowej: pierwsza więc na pionowej a druga na poziomey całkowicie leży; co także skąd inąd wypada: rzuty ich albowiem D i G' są na osi rzutów, linie więc od których one pochodzą, nie co innego być mogą (143) iak drugie ich rzuty DD' i GG' .

fig. 16.

168. Linia prosta wyrażona przez rzuty równoległe względem osi rzutów (166), musi być razem z nią na iedney płaszczyźnie. Na tej samey płaszczyźnie mogą być także inne linie proste nierównoległe względem tej osi; punkta wszelako gdzie ją przecinają, będą oczywiście wspólnemi odpowiednim im rzutom: co na płaszczyźnie rysunku cechuje takowe położenie linii o których mowa. W dowolnym atoli obieraniu przykładów unikamy zwyczajnie takiego położenia linii: rzuty ich bowiem można częstokroć wziąć fałszywie za ślady płaszczyzny (145), jeżeli o tём nie ostrzegają wyraźnie albo warunki samego zadania albo inne z wykreślenia wynikające względy.

169. Niech będzie *np.* punkt (C , C') wyrażony przez dwa rzuty, wzięte w iednakowej odległości względem osi rzutów: punkt taki musi być o tyleż oddalony od poziomey, iak i od pionowej płaszczyzny (132, 134): płaszczyzna więc, przez ten punkt i os rzutów przechodząca, rozdzieli kąt pochyłości rzeczonych płaszczyzn na dwie równe części, to jest że do każdej z nich o połowę kąta prostego nachylną będzie. Wziąwszy dowolnie na osi rzutów iakkolwiek punkt *np.* D , jeżeli go z poprzedzającym połączysz przez linię prostą (DC , $D'C'$), ta ostatnia w całej swej długości na wzmiankowanej płaszczyźnie znajdować się musi; rzuty takiej linii iednako są położone względem osi rzutów: co w wyrażonym tu przykładzie z przedstawiania trójkątów DmC i DmC' oczywiście wypływa. Przez rzuty tegoż samego punktu (C , C') poprowadziwszy linie AB i AB' , równoległe względem osi rzutów, oznaczysz przez nie linię (AB , AB') równoległą do tej osi (166), która leżąc na płaszczyźnie przechodzącej przez tę os i punkt (C , C'), wyraża się także przez dwa rzuty iednostajnie położone względem osi rzutów. W ogólności przeto można powiedzieć, że każdej linii prostej która leży na płaszczyźnie przechodzącej przez os rzutów, i dzielącej w połowie kąt nachylenia dwóch rzutowych płaszczyzn, odpowiadają rzuty iednakowo położone względem osi rzutów; wzaiennie więc każde dwa rzuty dane w tym sposobie, cechują opisane tu położenie oznaczoney przez

5*

nie linii prostej: a co się zarówno może rozciągnąć i do wszelkich innych pojedynczej krzywizny.

fig. 18. 170. Niech *np.* linia SA'' , poprowadzona na trzeciej rzutowej płaszczyźnie, rozdziela kąt prosty PSR na dwie równe części: płaszczyzna OSA'' będzie iednostajnie nachyloną do obu dwu głównych rzutowych płaszczyzn OPS i OQS (157); oznaczywszy dowolnie rzut ieden, *np.* pionowy $ABCD'$, linii krzywej leżącej na tej płaszczyźnie, wynajdziesz łącno odpowiedny poziomy za pomocą trzeciego, który musi być koniecznie na śladzie SA'' płaszczyzny tej linii krzywej, jako prostopadły do trzeciej rzutowej płaszczyzny (7, 8). Przez punkta bowiem $A', B', C', D' \dots$ wzięte na oznaczonym wprzód rzucie, poprowadziwszy $A'A'', B'B'', C'C'', D'D'' \dots$ prostopadłe do śladu PS płaszczyzny rzutowej trzeciej, znajdziesz na rzucie trzecim SA'' odpowiednie trzecie rzuty A', B', C', D', \dots punktów tej samej linii do której rzut pierwszy $ABCD'$ należy (164). Od wynalezionych dopiero rzutów poprowadziwszy do drugiego śladu SR linie prostopadłe $A'm, B'k, C'n, D'o \dots$ punkta zaś $m, k, n, o \dots$ w takiej iak są odległości względem punktu S , przeniosłszy na ślad SQ , jeżeli przez te ostatnie poprowadzisz linie równoległe do osi rzutów i inne prostopadłe do niej $A'A, B'B, C'C, D'D \dots$ przez obrane wprzód rzuty $A', B', C', D' \dots$ znajdziesz na przecięciu się odpowiednich sobie poprowadzonych tym sposobem linii, punkta $A, B, C, D \dots$ wyrażające rzuty poziome punktów płaszczyzny OSA'' (155), odpowiednie pionowym $A', B', C', D' \dots$. A jako pierwsze są na pionowym rzucie linii krzywej ($ABCD', A'D''$), tak te ostatnie, należąc do poziomego iey rzutu, posłużą do wykreślenia go na płaszczyźnie rysunku. Oba te rzuty muszą być iednakie i iednostajnie położone względem osi rzutów: troykąty albowiem $SmA'', SkB'', SnC'', SoD'' \dots$ będąc równoramiennymi, pokazują że oddalenie punktów $A', B', C', D' \dots$ rzutu pionowego względem osi rzutów także same iest iak odpowiednich im punktów rzutu poziomego; że zaś odpowiednie te punkta są iak być powinny (135), na tych samych liniach prostopadłych do osi rzutów, więc i położenie iednych względem drugich, a następnie postać i wielkość linii krzywych do których należą zupełnie iednaka być musi.

171. Wyprowadzone dopiero prawidło (169, 170), że linia oznaczona przez rzuty iednakie i iednostajnie położone względem osi rzutów, znajdzie się na płaszczyźnie przechodzącej przez tę oś i dzielącej kąt nachylenia głównych rzutowych płaszczyzn na dwie równe części, może częstokroć wydać się fałszywem, kiedy nie damy baczności na przyzwoite iego zastosowanie do szczególnych przypadków. I tak *np.* dwa wykreślone rzuty $ABCD$ i $A'B'C'D'$, pochodzące od linii płaskiej, wzięte na płaszczyźnie OSA'' (170), lubo nawzajem oznaczają postać i położenie tej linii w przestrzeni, mogą iednak należeć do innej oraz linii nie znajdujących się zgoła na pomienionej płaszczyźnie. Biorąc albowiem na tych rzutach w odmiennym porządku następujące po sobie punkta, nie w iednakowych odległościach względem osi rzutów, iak *np.* (B, D') , (D, B') i t. p. wskazalibyśmy przez nie pewne punkta przestrzeni (135), mogące być na linii krzywej oznaczonej przez te same rzuty $ABCD$ i $A'B'C'D'$ (8, 11). Szeręg punktów w takim następujących porządku, wyrażony przez trzecie ich rzuty (155), posłużył tu do nakreślenia trzeciego rzutu linii rzeczonej która, oprócz takich iakim iest (C, C', C'') punktów, nic wspólnego z linią płaską ($ABCD, A'B'C'D', D'A''$) mieć nie może: sama zaś będzie płaską lub podwójney krzywizny, stosownie do postaci i względnego położenia dwóch rzutów danych; będzie pojedynczą o iedney lub kilku odnogach albo też z dwóch lub więcej osobnych linii złożoną, podług tego iak ieden lub kilka różnych układów następujących po sobie punktów przez dwa dane rzuty krzywe oznaczyć się może: czyli, co na iedno wychodzi, iak wiele różnych punktów rzutu iednego z pojedynczym punktem drugiego może być na tej samej linii prostej prostopadłej do osi rzutów. Ponieważ zaś wszystkie punkta, do pomienionych układów należące, znajdują się na rzuciających walcowych powierzchniach, któ-

rych śladami są dwa rzuty dane (11): rozmaite więc linie krzywe, tym oznaczone sposobem, złożą razem wspólnie przecięcie się rzeczonych powierzchni; powyższe jednak prawidło do tej się tylko części tego przecięcia stosuje, której na dwóch rzutach danych odpowiadaia punkta leżące w równej odległości względem osi rzutów. Postać wszakże innych tego przecięcia się części, wielkość i względne ich położenie łatwo się da wysledzić za pomocą trzeciej rzutowej płaszczyzny (155), a w rysunku przez wykreślenie trzech odpowiednich rzutów dokładnie wyrazić.

172. Płaszczyzna linii krzywej płaskiej może być oraz rzucającą iey płaszczyzną na tę rzutową, do której jest prostopadłą (163): natenczas, stosownie iak jest lub nie jest równoległą względem rzutowej drugiej, rzut linii krzywej na płaszczyźnie pierwszej będzie równoległym lub nachylnym do osi rzutów (146). W przypadku więc gdy rzut linii krzywej jest na jednej płaszczyźnie rzutowej, linią prostą równoległą względem osi rzutów, płaszczyzna tej linii, będąc równoległą względem rzutowej drugiej, pokazuje, że na tej ostatniej rzut pomienionej krzywej niczem się od niej w postaci i wielkości nie różni: iako dwa przecięcia powierzchni tegoż samego rzucającego walca przez równoległe ku sobie płaszczyzny.

173. *Dwóch albo więcej linii przecinających się rzuty przecinać się muszą*; na każdej albowiem rzutowej płaszczyźnie rzut punktu wspólnego kilku liniom, musi być na rzutach tychże linii: a zatem w ogólności na wzajemnym ich przecięciu się. Jeżeli jednak przecinające się linie są razem na płaszczyźnie prostopadłej do którejkolwiek rzutowej, rzuty ich na tej ostatniej składają, iako się wyżej rzekło (163), pojedynczą linią prostą; łatwo jest wszakże oznaczyć na niej rzut punktu wspólnego pomienionym liniom, iako znajdujący się na linii prostopadłej do osi rzutów (135), razem z punktem przecięcia się odpowiednich rzutów tychże linii wykreślonych na drugiej rzutowej płaszczyźnie.

174. *Rzuty linii równoległych są w ogólności, na każdej z osobna płaszczyźnie rzutowej, liniami równoległymi*. Mając albowiem dane równoległe linie proste, gdy na każdej z nich obierziesz po jednym punkcie, od tych zaś punktów do płaszczyzny rzutowej poprowadzisz linie prostopadłe, te ostatnie razem z liniami danymi oznaczą rzucające tych linii płaszczyzny (9), które, iako równoległe, wydadzą równoległe ślady (159): a te na uważanej rzutowej płaszczyźnie będą rzutami danych równoległych linii. Wszakże i w tym przypadku rzuty rozmaitych równoległych linii mogą na jednej z płaszczyzn rzutowych złożyć pojedynczą linią prostą, wtenczas kiedy się te linie razem znajdują na tej samej rzucającej płaszczyźnie (163).

175. Rzuty iednakich i równoległych względem siebie linii krzywych są w takimże przypadku iak podobnego położenia linii prostych: to samo albowiem może się zastosować do rzucających ie walcowych powierzchni, co się dopiero rzekło (174) o płaszczyznach rzucających równoległe linie proste.

176. Linie proste uważane razem z krzywymi, czyli się przecinają lub dotykają nawzajem, rzuty wspólnych im punktów takimi będą dla rzutów tychże linii (173): w szczególności zaś, *rzuty linii stycznych muszą być do siebie stycznymi na każdej z osobna płaszczyźnie rzutowej*. Płaszczyzna bowiem i walcowa powierzchnia, rzucające linią krzywą i styczną do niej linią prostą, są wzajemnie stycznymi po linii prostej, rzucającey punkt dotknięcia się uważanych dwóch linii stycznych (obacz przypisek do Nru 101): w przecięciu się zatem z płaszczyzną rzutową wydadzą rzut linii prostej styczney względem rzutu krzywej (74, 75). Na tej prawdziwie, stosującey się do wszelkich bez wyjątku linii krzywych, opiera się sposób prowadzenia stycznych tak do linii krzywych płaskich, oznaczonych przez ich rzuty, iako też gdy są podwójnej krzywizny (100): a wykreślenie w obu tych przypadkach, przywiedzione do rzutów tych linii, wykonywa się podług opisanych wyżej sposobów (99, 103, 106, 108, 110).

177. Dokładność wymienionych tu sposobów zależy po większej części od dokładnego kreślenia przybranych linii krzywych: które, podobnie iak wiele innych, oznaczają się przez

wynalezienie dostateczney liczby ich punktów, zadosyc czyniących pewnemu prawu następstwa w kierunku linii ciągłej. Jako bowiem powierzchnie i linie, wchodzące do geometrycznych zadań, są najczęściej ciągłemi, tak podobnie i te linie krzywe, które przez wykreślenie otrzymujemy z pierwszych, prawu ciągłości zadosyc czynić powinny. Przedewszystkiem tedy potrzeba się dobrze rozpatrzeć, azali który w szeregu oznaczonych tych linii punktów, nie jest na zawadzie ciągłemu ich w postrzeżonym kierunku następstwu: coby znaczyło, że albo taki punkt nie dosyc dokładnie się wynalazł, albo że upatrzone między innymi następstwo nie jest właściwe linii wykreślić się mającey. W takim razie należy powtórzyć te działania przez które się otrzymały punkta na zawadzie będące, dla sprostowania omyłki lub niedokładności jeżeli iaka w tych działaniach zaszła: przekonawszy się zaś o właściwem położeniu rzeczonych punktów, wynaleźć tyle innych aż się da widzieć ciągle między wszystkiemi następstwu; natenczas wolnym prowadzeniem ręki łączymy je razem przez rys ile bydyż może ciągły, to jest przechodzący nieznacznie z iedney krzywizny w drugą. Tak nakreśloną linią krzywą uważamy iako miejsce geometryczne wszystkich pośrednich między oznaczonemi punktów, tymże samym co i one zadosyc czyniących warunkom. A lubo kreślenie takie nie może się za dokładne w ścisłym znaczeniu uważać, błędy wszelako, przez wprawną zkąd inąd popelnione rękę, zwyczajnie nie bywaią większe od tych, które się w działaniach rysowniczych przy pomocy cerkla i liniału zdarzaią.

178. Ale też i wykreślenia z narzędziami geometrycznemi wykonywane nie dają zawsze dokładnych wypadków: co zależy *naprzód*: od rodzaju i stopnia dokładności samychże narzędzi, iako też od wprawy ich użycia, *powtóre* od rodzaju geometrycznych działań i sposobu ich wyrażania. Okrąg *np.* koła zakreślony zbyt małym albo wielkim cerkla otworem, najczęściej nie jest dokładnym okręgiem: linia prosta, oznaczona przez dwa zbyt bliskie siebie punkta, rzadko się we właściwym narysować może kierunku: naostatek kropka lub przecięcie się by i nacyjniejszych rysów nie wskazuje w ścisłości miejsca punktu geometrycznego, zwłaszcza kiedy te rysy pod ostrym przecinaią się kątem, a tém bardziej gdy przez wzajemne ich dotknięcie się punkta oznaczać wypada (110). Dla uniknienia wyliczonych dopiero i podobnych tym przyczyn niedokładności, używamy częstokroć przydłuższych na pozór lecz pewniejszych działań, naginaiąc oraz sposoby ogólne do szczególnych tego rodzaju przypadków; a to już przechodzi zakres pierwszych nauki początków i właściwie do rysunkowych w niey ćwiczeń należy: podobnie iak same upraszczania rzeczonych sposobów, przez wzgląd na postać lub położenie danych geometrycznych wielkości (129).

179. Pomimo tylu przyczyn mających wpływ na niedokładność geometrycznych wykreśleń, wypadki iednak otrzymywane tą drogą są częstokroć zadziwiającey ścisłości: a mianowicie, gdy wchodzi do wykreślenia wiele podobnych a razem tak powiązanych działań, że w nich też same lecz w brew sobie przeciwne uchybienia wzajemnie się wynagradzaią. Przekonywamy się zaś o dokładności wypadków przez tak nazwane *sprawdzenia*, toiest: przez powtórzenie pewnych wykreśleń na każdej z porządku płaszczyźnie rzutowey prowadzących do tegoż samego wypadku; albo przez użycie odmiennych nieco sposobów a następnie i rysunkowych działań: lub nakoniec śledząc, azali otrzymany wypadek czyni zadosyc nie tylko tym warunkom zadania, z których się wyprowadził, lecz i takim oraz które dokładności iego dowodzą. Oprócz zaś wprawy oka i ręki, mogących się nabydyż przez stosowne praktyczne ćwiczenia, przydatną jest także w wykreśleniach dokładnych umiejetność przystosowań rachunku do geometryi, a mianowicie, tak zwana, geometrya wyższa: za iey bowiem pomocą przewiduiąc z łatwością wypadki, prostuiemy błędy wykreślenia, albo częstokroć zupełnie ich unikamy przez użycie pewniejszych rysowniczych działań.

ROZDZIAŁ I.

ZADANIA GEOMETRYCZNE ODNOSZĄCE SIĘ DO PUNKTÓW LINII I PŁASZCZYZN.

Naznaczyć ślady linii, danej przez dwa rzuty.

180. Maiąc np. linią prostą oznaczoną przez rzuty (A, A') , jeżeli od punktu C gdzie rzut poziomy przecina oś rzutów, poprowadzisz do niej prostopadłą CC' , aż do spotkania drugiego rzutu linii: z punktu zaś B' przecięcia się tego drugiego z osią poprowadzisz drugą prostopadłą BB' aż się spotka z rzutem pierwszym: wynadziesz na pionowym rzucie linii danej ślad iey pionowy C' , a na poziomym ślad poziomy B . Ślady albowiem linii, iako punkta wspólne iey i płaszczyznom rzutowym (13), mają swe rzuty i na rzutach tey linii i oraz na osi rzutów (142); do której takż prostopadłą bydź powinna linia prosta łącząca dwa odpowiednie rzuty każdego w szczególności śladu (135).

To samo wykreślenie zastosowane do linii krzywey (D, D') , dało iey ślady (E, E') i (F, F') ; pierwszy z nich to iest pionowy, znajduie się na płaszczyźnie rzutów pionowych w punkcie E , razem z pionowym swym rzutem: drugi zaś poziomy, wespół z rzutem poziomym, iest w punkcie F na płaszczyźnie poziomey (142).

181. Obięta śladami część linii danej, jeżeli się znajduie w widzialnym płaszczyzn rzutowych kącie (136, 138), iak to wzór 1. wyraża, wtedy przedłużone tey części rzuty będą razem albo pod osią rzutów, gdzie iest ślad poziomy linii, albo nad tą osią, gdzie ślad pionowy przypada; iedne i drugie wskazały się kropkowemi rysami: iako pochodzące od części linii zakrytych iuż to przez poziomą iuż przez pionową płaszczyznę (139).

182. Poprzedzające wykreślenie w części lub całkowiec niepodobne będzie do wykonania, gdy ieden którykolwiek, albo obadwa rzuty linii prostej danej równoległemi są względem osi rzutów; taka albowiem linia, iako równoległa do iedney lub dwóch rzutowych płaszczyzn (166), ieden tylko lub żadnego na nich nie zostawi śladu. Linia zaś krzywa jeżeli iest w sobie zamknięta, lub przez iakikolwiek warunek mającą ograniczoną długość, wtenczas tylko da ślady na rzutowych płaszczyznach, kiedy z osią rzutów przecinaią się iey rzuty; z tą wszakże od linii prostej różnicą, że w ogólności, na każdej z osobna płaszczyźnie rzutowey, więcej iak ieden ślad zostawić może.

Maiąc przez ślady oznaczone położenie płaszczyzny i rzut ieden punktu leżącego na niej, wynaleść odpowiedny mu drugi.

183. Przez dany rzut P poprowadź iakkolwiek na płaszczyźnie rysunku linią prostą EF , przecinającą oś rzutów i ten ślad danej płaszczyzny (AB, CD) , który się z rzutem P na ie-

dnej rzutowey płaszczyźnie znajduie. Od punktu F, wspólnego linii poprowadzoney i osi rzutów, wynieś prostopadłą do tey ostatniey, aż się spotka ze śladem CD pomienioney płaszczyzny: punkt wyrażony przez dwa rzuty (F, F'), iedno iest co rzut iego F' (142): leży przeto na śladzie CD płaszczyzny daney. Od punktu E, wspólnego linii EF i pierwszemu śladowi AB, spuść prostopadłą na oś rzutów: punkt oznaczony rzutami (E, E'), dla podobney przyczyny będzie na śladzie AB tey samey płaszczyzny. Poprowadziwszy zatém linią prostą E'F', wyrazisz przez rzuty linią (EF, E'F') łączącą pomienione dwa punkta (10) śladów płaszczyzny daney (AB, CD): wszystkie przeto iey punkta na tey płaszczyźnie bydź muszą (164); iako więc dany rzut P iest na iednym z rzutów pomienioney linii, tak równie drugi będzie na drugim iey rzucie, nie inaczey wszakże tylko w kierunku linii prostey, poprowadzoney przez rzut dany P prostopadle do osi rzutów (135). Tym sposobem wynalazłszy żądany rzut P' na przecięciu się dwóch nakreślonych linii E'F' i PP', oznaczysz dwóma rzutami miejsce punktu (P, P') wskazanego zadaniem przez ieden z nich P i płaszczyznę (AB, CD) na której ten punkt leży.

wzór 3. 184. *Inny sposób.* Do śladu AB daney płaszczyzny ABC, znajduiącego się razem z rzutem danym P na iedney płaszczyźnie rzutowey, poprowadź równoległą PF: z punktu zaś przecięcia się iey z osią rzutów wyniesiesz prostopadłą do niey FF', aż się spotka z drugim płaszczyzny śladem BC; przez tak oznaczony punkt F' poprowadzisz równolegle do osi rzutów linią prostą F'P' i przetniesz ją przez prostopadłą do tey osi PP' od danego rzutu P wyrowadzoną. Punkt albowiem (F, F') mający ieden rzut F na osi, iest wspólny z drugim swym rzutem F' (142) na śladzie BC daney płaszczyzny ABC; linia przeto (FP, F'P') mająca go na sobie i równoległa względem drugiego śladu AB (143, 174), cała na tey płaszczyźnie leży: punkt zatém (P, P') wyrażony dwóma rzutami iest, iak bydź powinien podług zadania, w miejscu oznaczoném przez ieden rzut P na płaszczyźnie daney ABC.

Drugi ten sposób chociaż się częścicy od poprzedzaiącego w wykreśleniach używa, wszakże nie może go zastąpić w takim razie kiedy płaszczyzna dana równoległą iest do osi rzutów (145): a i wtedy nawet nie iest zupełnie dogodnym gdy ślady rzeczoney płaszczyzny tworzą z osią rzutów nader ostre kąty (178).

Wysledzić iak względem daney płaszczyzny leży punkt oznaczony przez dwa rzuty.

185. Stosując do tego zadania iedno którekolwiek z dwóch poprzedzaiących wykreśleń (183, 184), oznaczysz na płaszczyźnie daney punkt odpowiedny np. poziomemu rzutowi punktu danego. Obadwa te punkta będą miały wspólną linią rzucaiącą na płaszczyznę poziomą (9): następuie więc z położenia ich rzutów na płaszczyźnie pionowey osądzisz, czyli punkt dany razem z wynalezionym iedno i toż samo zajmują miejsce, a zatém że pierwszy z nich iest na płaszczyźnie daney: czyli też bliżey lub daley iak punkt wynaleziony leży względem płaszczyzny poziomey, to iest: czyli się nad płaszczyznę daną lub pod nią znajduie, względem oka skierowanego prostopadle na płaszczyznę rzutów poziomych (140). Podobnym sposobem wynalazłszy inny punkt płaszczyzny daney, odpowiedny pionowemu rzutowi tegoż samego danego punktu, wysledziłbyś iego położenie względem tey płaszczyzny, odnosząc ie do oka skierowanego prostopadle na płaszczyznę pionową; co wszakże z pierwszego wykreślenia łatwo

się może ocenić, przez wzgląd na ślady płaszczyzny danej w jakim one sposobie nachyleniami Tab. I. są do osi rzutów (152, 153).

Wyrazić w rzutach linią prostą poprowadzoną na płaszczyźnie oznaczonej przez ślady.

186. Jeżeli takowej linii ieden którykolwiek z rzutów iest dany, tedy ona przez ten rzut i płaszczyznę, na której leży, zupełnie oznaczoną będzie. Maiąc ją wszakże, w sposobie zwy- czaynym, przez dwa wyrazić rzuty, obierz na danym dwa iakiekolwiek punkta: które uwa- żając iako rzuty dwóch punktów płaszczyzny danej, iacno wynaydziesz odpowiednie im dru- gie (183, 184); te ostatnie połączywszy przez linią prostą, otrzymasz drugi żądany rzut linii leżącej na płaszczyźnie danej.

187. Zamiast iakichkolwiek dwóch dowolnych punktów biorą się zwykle na rzucie danym takowe, w których przecina oś rzutów i ślad iednego z nim nazwiska płaszczyzny danej. Przez pierwszy z nich prowadzi się prostopadła do osi rzutów, aż spotka ślad drugi danej płaszczy- zny: od drugiego spuszcza się prostopadła na tę oś, a punkt gdzie ją przetnie, z poprzedza- jącym punktem spotkania śladu, łączy się przez linią prostą. Ta ostatnia będzie drugim żada- nym rzutem linii leżącej na płaszczyźnie danej: albowiem ślady takowej linii (180) będą, iak bydyć powinny (164), na śladach rzeczoney płaszczyzny. Wzór 2 daie przykład tego wykre- ślenia (183).

188. Jeżeli linia ma bydyć dowolnie na płaszczyźnie danej poprowadzoną, tedy na każdym z osobna tey płaszczyzny śladzie obiera się dowolnie punkt ieden: będą one śladami linii żada- nej i razem rzutami samych siebie (142); następnie więc, poprowadziwszy od tych punktów linie prostopadłe do osi rzutów, oznaczysz na niey drugie odpowiednie im rzuty. Tak wyra- żonych śladów rzuty iednego nazwiska, gdy połączyz liniami prostemi, mieć będziesz rzuty żądanej linii prostey. Albo inaczej:

189. Na iedney z płaszczyzn rzutowych obierz dowolnie rzuty dwóch punktów danej płaszczyzny, i w tém przypuszczeniu wynaydyz odpowiednie drugie ich rzuty (183, 184); te ostatnie połączyz przez linią prostą, i to będzie ieden rzut linii żądanej: pierwsze, podobnie złączone, dadzą rzut drugi. Każda zatem linia prosta, podobnie iak pojedynczy punkt, może bydyć dokładnie oznaczoną przez rzut ieden i ślady płaszczyzny, na której leży: a to równie się stosuje i do wszelkich innych linii krzywych płaskich. Maiąc albowiem ślady płaszczyzny takowej linii krzywey, razem z iednym którymkolwiek iey rzutem na płaszczyźnie rysunku dane: jeżeli, punktom na tym rzucie dowolnie obranym, powynayduiesz odpowiednie rzuty na drugiej rzutowey płaszczyźnie, tedy za ich pomocą nakreślisz, podobnie iak wyżey (170), rzut drugi pomienoney linii.

Wykreślić rzuty linii wzajemnego przecięcia się dwóch płaszczyzn oznaczonych przez ślady.

190. Niech będą takie *np.* dane płaszczyzny ABC i DEF, których ślady przecinają się wzór 4. na każdej w szczególności płaszczyźnie rzutowey. Od punktów wspólnych tym śladom po- prowadz GG' i II' prostopadłe do osi rzutów: tym sposobem wyrażone przez rzuty (142) dwa punkta (G, G') i (I, I'), wspólne rzeczonym płaszczyznom, gdy połączyz (8, 10) przez linią

Tab. I. prostą $(GI, G'I)$, będzie ona żądaniem przecięciem się danych dwóch płaszczyzn ABC i DEF (67).

191. Ślady linii wzajemnego przecięcia się dwóch płaszczyzn, są w punktach przecięcia się ich śladów: stosownie więc iak te punkta przypadają na widzialnych lub zakrytych częściach rzutowych płaszczyzn (137), część pomienoney linii między temi śladami będzie widzialną, lub przez płaszczyzny rzutowe zakrytą; pierwszy z tych przypadków iest przedstawiony na wzorze: wykreślona przeto linia $(GI, G'I)$ oznaczyła się pomiędzy iey śladami przez rysy *ciągnione*. Część płaszczyzny GBI' będąca w kącie widzialnym, zakrywa ślady GE i EI' płaszczyzny drugiej (150), a następnie i wszystkie iey punkta aż do linii $(GI, G'I)$ wzajemnego ich przecięcia się; od tey dopiero przejdzie ona na drugą stronę płaszczyzny pierwszej i ią nawzajem zakryje: dla tego za punktami G i I' ślady iey naznaczone są *kropkowemi* rysami. Wszystko więc co z iedney strony linii wzajemnego przecięcia się dwóch płaszczyzn danych iest, na któreykolwiek z nich, wskazane rysem *ciągnionym*, to ze strony przeciwney powinno się kropkami wyrazić, i wzajemnie.

W wykreślaniu linii wspólney dwóm płaszczyznom danym, zdarzają się niektóre szczególne przypadki: a mianowicie gdy ślady przecinających się płaszczyzn, poziome lub pionowe tylko, albo iedne i drugie zgoła się nie przecinają.

192. Płaszczyzny prostopadłe do iedney któreykolwiek z rzutowych przetną się po linii prostopadłej do tey rzutowey płaszczyzny: na niey więc punkt przecięcia się ich śladów, będzie oraz rzutem pomienoney linii (167). Dosyć iest przeto od tego punktu wyprowadzić prostopadłą do osi rzutów, i przeciągnąć ią na drugą rzutową płaszczyznę: a to przedłużenie będzie drugim rzutem linii wzajemnego przecięcia się takowych płaszczyzn.

wzór 5. 193. Dwie dane przecinające się płaszczyzny $(AB, A'B')$ i $(CD, C'D')$, równoległe względem osi rzutów (160), muszą bydź prostopadłemi do trzeciej rzutowey płaszczyzny PQR (154); od punktu więc X'' , gdzie przecinają się trzecie ich ślady Bb' i $D'd'$, poprowadziwszy prostopadłe $X''X'$ i $X''x$ do śladów trzeciej rzutowey płaszczyzny, położoney wspólnie z głównymi na iedney płaszczyźnie rysunku (155), wynadziessz na tych ostatnich rzuty X' , x pomienoney punktu, a które na głównych rzutowych płaszczyznach będą X' , X . Przez te ostatnie gdy poprowadzisz $X'z'$ i Xz równoległe względem osi rzutów, otrzymasz żądane rzuty linii prostej wzajemnego przecięcia się danych dwóch płaszczyzn $(AB, A'B')$ i $(CD, C'D')$. Albo toż samo inaczej:

194. Na poziomych *np.* śladach dwóch płaszczyzn danych weź iakiekolwiek dwa punkta n, o , tak aby łącząca ie linia prosta przecinała oś rzutów, w miejscu nie przechodzącem za brzegi płaszczyzny na której się wykreślenie odbywa. Punkta n, o , są oraz poziomemi rzutami samych siebie, a pionowe odpowiednie mają w punktach n', o' , na osi rzutów (142). Jeżeli, poprowadziwszy linią prostą nom , uważać ią będziesz iako rzut poziomy dwóch linii leżących poosobno na płaszczyznach danych, to punkt m będzie poziomym rzutem śladów pionowych tychże linii (180.), a które, wspólnie z pionowemi ich rzutami, bydź muszą i na pionowych śladach rzeczonych płaszczyzn (164), i razem z punktem m na linii prostopadłej do osi rzutów; będą przeto w punktach m' i m'' . Naostatek: gdy pionowe rzuty n' i m' ,

punktów (n, n') i (m, m') leżących na śladach płaszczyzny $(CD, C'D')$, połączysz przez linię Tab. I. prostą nm' i podobnie dwa inne o' i m'' : wyrazisz w rzutach dwie linie $(nm, n'm')$ i $(nm', o'm'')$, z których każda ma w tym sposobie ślady swoje na śladach dwóch płaszczyzn danych; co oczywiście dowodzi (164), że jedna z nich na jednej a druga na płaszczyźnie drugiej całkowicie leży. Oprócz tego, obiedwie te linie, iako mające wspólny sobie rzut nm na jednej z dwóch rzutowych płaszczyzn, są oraz na tej samej rzucającej je płaszczyźnie nmn'' (163); drugie więc przecinające się ich rzuty $n'm'$ i $o'm''$ ukazują, że się te linie w punkcie (z, z') przecinają z sobą (173): a następnie, że ten punkt należy do linii wzajemnego przecięcia się dwóch płaszczyzn danych. Dla wykreślenia przeto tej ostatniej linii, dosyć jest przez rzuty z i z' poprowadzić zX , $z'X'$ równoległe do osi rzutów.

Obadwa opisane dopiero wykreślenia (193 i 194), razem na tym samym wykonane tu wzorze, są wzajemnie jedno dla drugiego sprawdzeniem (179).

195. Położenie wykreślonych trzecich śladów Bb i Dd dwóch płaszczyzn danych, pokazanie na oko iakimi znakami główne ich ślady wyrazić należy: linia zaś $(zX, z'X')$, wspólna tym płaszczyznom, przez żadną z nich zakrytą być nie może; lecz, iako równoległa do osi, a zatem i do płaszczyzn rzutów, czyli to w widzialnym ich kącie, czyli też w jednym z zakrytych się znajdzie tedy nie inaczej, tylko w całej swojej długości: położenie więc punktu (z, z') względem rzutowych płaszczyzn, wskaże iakiego znaku do wyrażenia rzutów pomienionej linii użyć należy. A chociaż jest ona równoległą (174) do równoległych śladów płaszczyzn $(AB, A'B')$ i $(CD, C'D')$, na których zarówno leży, można ją wszakże uważać iako z temi śladami przecinającą się w odległości nieskończenie wielkiej, i pod tym względem ma także swoje ślady na śladach rzeczonych dwóch płaszczyzn (191); ztąd podobnie iak wyżey (158) wnioskujemy, że w każdym innym przecinających się płaszczyzn nachyleniu do rzutowych, jeżeli na któreykolwiek z tych ostatnich równoległe są ich ślady, linia prosta wzajemnego przecięcia się takowych płaszczyzn będzie równoległą do ich równoległych śladów. A przeto:

196. Mając dane dwie przecinające się płaszczyzny nie prostopadłe do żadnej z rzutowych (192), lecz wyrażone na jednej z nich przez równoległe ślady: dla nakreślenia rzutów linii wzajemnego przecięcia się takowych płaszczyzn, poprowadź, na drugiej płaszczyźnie rzutowej, od punktu gdzie się przecinają ich ślady, linią prostopadłą do osi rzutów, a przez tak oznaczony punkt na tej osi linią równoległą do równoległych śladów: będzie to ieden rzut linii żądanej (143); drugi zaś odpowiedny nakreślisz, równoległe do osi rzutów (174, 143), przez punkt wspólny przecinającym się śladom.

Wynaleść rzuty punktu, gdzie oznaczona linia prosta lub krzywa przebiega daną płaszczyznę.

197. Niech będzie np. dana płaszczyzna $A'BC$ i linia prosta $(DE, D'E')$: tej ostatniej, wzór 6. na sposób zadania pierwszego (180), naznaczysz ślady F i E' . Przez ieden z nich, np. poziomy F , poprowadź dowolnie linią prostą FC przecinającą także sam ślad płaszczyzny danej: punkt zaś G , w którym ta linia przecina oś rzutów, połącz z drugim śladem E' także przez linią prostą: tym sposobem wyrazisz przez ślady płaszczyznę $A'GC$, na której

Tab. I. dana linia (DE, DE) w całej swej długości znajdować się będzie (164). Następnie więc, za pomocą punktów (C, C') i (A, A') , wspólnych odpowiednim śladom danej i poprowadzonej płaszczyzny, wykreśliwszy linią $(AC, A'C')$ wzajemnego ich przecięcia się (190.), wyndziesz punkt (x, x') wspólny iey z linią $(DE, D'E')$, w którym ta ostatnia przebiega daną płaszczyznę $A'BC$ (68).

Linia prosta xx' , łącząca rzuty tak oznaczonego punktu, powinna być prostopadłą do osi rzutów (135): sprawdzić to należy dla przekonania się o dokładności wypadku.

Możnaby wykonać toż samo wykreślenie za pomocą płaszczyzny przybranej, wyrażonej przez ślady składające iedną linią prostą (151), a która przechodzić powinna przez obadwa ślady linii danej (164). Jeżeli ślady takiej przybranej płaszczyzny przecinają się ze śladami danej, w punktach nie przechodzących za brzegi płaszczyzny rysunku, tedy pomieniona płaszczyzna równie dogodną będzie w dalszém wykreśleniu, iak wskazana na wzorze przez dwa przecinające się ślady CG i GA' . Przykład takowej przybranej płaszczyzny przedstawi wzór 2 na Tab. III. (222).

198. Płaszczyzna dana $A'BC$ zakrywa na pionowej (150) ślad E' linii danej: część iey przeto $(xE, x'E)$, zawarta pomiędzy tym śladem a punktem (x, x') leżącym na płaszczyźnie $A'BC$ (197), iako zakryta dla oka prostopadłe ku pionowej skierowanego, wyraziła się rzutem kropkowym na tej płaszczyźnie; części zaś przechodzącej na drugą stronę płaszczyzny danej, takież sam rzut $x'D$ wskazał się przez rys ciągniony. Lecz, ponieważ płaszczyzna $A'BC$ jest w położeniu takim, że: co zakrywa na iednej rzutowej płaszczyźnie, tego na drugiej zakryć nie może (152); rzuty więc poziome, odpowiadające dwóm pomienionym częściom linii danej, przeciwnie iak pierwsze naznaczyć przystało, to jest: $x'D$ kropkami a xE rysem ciągnionym. Pomiędzy wielkościami prowadzącemi od danych do wynalezionych rzeczy, dla rozróżnienia na oko rzutów linii $(AC, A'C')$ od śladów płaszczyzny $A'GC$, te ostatnie naznaczyły się przerywanemi rysami (141).

199. *Inny sposób.* Zamiast prowadzenia iakiejkolwiek bądź płaszczyzny przez linią prostą daną (68, 197), może służyć w podobnym celu każda z rzucających ją płaszczyzn; wykreślenie przez to nieco się upraszcza, i dla tego, gdzie można, częściej ie wykonywamy w tym drugim sposobie. Niekiedy wszakże, albo ze względu na szczupłość miejsca przeznaczonego na rysunek, albo że ślady przybranej rzucającej płaszczyzny, przecinają się ze śladami danej pod kątami nader ostrymi (178), użyć koniecznie trzeba sposobu poprzedzającego.

Tab. II. 200. Niech będą *np.* dana płaszczyzna CBA' i linia prosta $(DE, D'E')$. Przez punkt E , wzór 1. gdzie rzut *np.* poziomy tej linii przecina oś rzutów, poprowadź prostopadłą do niej EA' po płaszczyźnie pionowej: płaszczyzna $A'ED$ będzie do poziomej prostopadłą (147); mając zaś na swoim poziomym śladzie takież sam rzut linii danej, jest przeto rzucającą iey płaszczyzną, równie iak innych wszelkich, które na niej być mogą (163); a mianowicie linii wzajemnego iey przecięcia się z płaszczyzną daną. Tej ostatniej poziomym rzutem będzie też sama linia EF ; wynalazłszy przeto odpowiedni iey rzut pionowy AT' (186), oznaczysz linią (EF, AT') , leżącą na płaszczyźnie danej ABC i oraz, wspólną z linią $(ED, E'D')$, na płaszczyźnie poprowadzonej $A'ED$. Pionowe tych linii przecinające się rzuty ukazują, że się one przecinają

z sobą, a zatem że linia $(ED, E'D')$ przebiega daną płaszczyznę w punkcie wzajemnego przecięcia się tych dwóch linii (68); przez pionowy więc jego rzut x' poprowadziwszy prostopadłą do osi rzutów, znajdziesz na wspólnym tych linii poziomym rzucie ED , odpowiedni rzut x tegoż samego punktu (173).

201. Z położenia śladów danej płaszczyzny $\Delta'BC$, względem osi rzutów, wnosimy, że: co zakrywa dla oka prostopadle skierowanego na płaszczyznę poziomą, toż samo zakryć powinna, kiedy się na pionową prostopadle zwróci; że zaś na tej ostatniej ślad E' linii danej jest przez nią zakrytym (150), część przeto $(Ex, E'x')$ rzeczonej linii, zawarta pomiędzy tym śladem a punktem (x, x') , gdzie pomienioną płaszczyznę przebiega, oznaczyła się kropkami.

Ostatni z wyłożonych dwóch sposobów służy do wysledzenia i takich oraz punktów, w których daną płaszczyznę przebiega oznaczona linia krzywa: z tą jednak odmianą, że tu, zamiast przybranej płaszczyzny (199), użyć potrzeba jednej z dwóch walcowych powierzchni, rzucających daną linią krzywą (11).

202. Mając *np.* daną płaszczyznę ABC i linią krzywą $(DE, D'E')$, naznacz na jednym z dwóch jego rzutów ilekółwiek dowolnych punktów *np.* $m, n, o, q, r \dots$ a wzięwszy je za rzuty punktów płaszczyzny danej, powynajduiesz odpowiednie im drugie, sposobem opisanym wyżej (184). Tak tedy mieć będziesz w rzutach oznaczone punkta (m, m') , (n, n') , (o, o') i t. p. leżące na danej płaszczyźnie i mające poziome swe rzuty na takimże rzucie linii krzywej danej; co znaczy, że te punkta są oraz na powierzchni walcowej rzucającej pomienioną linią na płaszczyznę poziomą: iako więc wspólne tej powierzchni i danej płaszczyźnie, będą tém samym na linii krzywej wzajemnego ich przecięcia się. Rzut poziomy tej ostatniej jest ten sam DE , co i linii krzywej danej: pionowy zaś tak nakreślisz aby, czyniąc zadosyć prawu ciągłości (177), przechodził oraz przez wszystkie wynalezione pionowe rzuty m', n', o' i t. d. Ponieważ zaś linia krzywa $(mor, m'or')$, iako wspólne przecięcie się powierzchni walcowej DE z płaszczyzną daną ABC , na pierwszej z nich równie iak na tej ostatniej całkowicie leży: punkt przeto s będzie poziomym tej linii śladem (164); pionowy więc jego rzut s' (180), razem z wynalezionymi $m', n', o' \dots$ powinni być na takimże rzucie pomienionej linii krzywej $(mor, m'or')$. Ta ostatnia, wspólnie z linią krzywą daną, są na tej samej rzucającej powierzchni DE , a zatem mogą się wzajemnie przeciąć w jednym lub kilku punktach, podług tego w jakim się sposobie przecinają pionowe ich rzuty $m'or'$ i $D'E'$. W wykreślonym tu wzorze jeden się taki punkt x' otrzymał: dana więc linia $(DE, D'E')$ w jednym tylko punkcie (x, x') przecina się z drugą linią krzywą $(mor, m'or')$, a zatem i z płaszczyzną ABC , na której, iako się rzekło, ta druga całkowicie leży.

203. W przypadku gdyby się pionowe rzuty danej i wykreślonej (202) linii przeciąć z sobą nie mogły, wniesłoby należało, że linia krzywa dana nie przebiega danej płaszczyzny: co się zarówno i do linii prostej stosuje; tak więc, chociażby się nie otrzymał wypadek żądany, samo jednak wykreślenie nauczyłoby, że się w zadaniu z wielkościami w pewnym sposobie oznaczonymi, rzeczy niepodobnej do znalezienia szukało. W dalszym ciągu więcę się jeszcze przekonamy o tém, iak wykreślenie o nierozwiązalności lub o nieoznaczonym stanie zadania nauczyć może.

Tab. II. Dla wykreślenia wzoru 2 stosownie do przyjętych znakowania prawideł (140, 141), pamiętać należy co się w tym względzie o dwóch poprzedzających mówiło (198, 201).

204. Dana płaszczyzna może być prostopadłą do którejkolwiek rzutowej głównej, a wtedy ślad iey na tej płaszczyźnie będzie miejscem rzutów wszystkich punktów na niej znajdujących się (163): więc i takich, gdzie ją przebiegają dane krzywe lub proste linie; lecz że rzuty tych punktów muszą być oraz na odpowiednich rzutach wzmiankowanych linii, będą zatem w przecięciu się tych rzutów z pomienionym śladem płaszczyzny. Jeżeli więc od punktów takowego przecięcia się poprowadzisz linie prostopadłe do osi, te ostatnie spotkają odpowiednie rzuty linii danych, w takich właśnie punktach, które, wspólnie z poprzedzającymi, wskażą gdzie te linie przebiegają daną płaszczyznę.

205. Płaszczyzna, w opisanym dopiero położeniu, nie zgoła zakryć nie może na tej rzutowej, do której jest prostopadłą (144): to też rzuty linii danych wyrazisz na tej ostatniej rysami ciągnionymi; na drugiej zaś łącznie zakryte ich części od widzialnych rozróżnisz, dając baczność na położenie śladów tych linii względem śladu płaszczyzny danej prostopadłego do osi rzutów, zważając oraz w jaką stronę drugi iey ślad więcej jest nachylonym ku tej osi (149).

206. Uwagi poprzedzające stosują się także i do płaszczyzny w równoległym będącej położeniu, względem jednej którejkolwiek rzutowej głównej; będzie ona albowiem prostopadłą do drugiej, gdzie leży pojedynczy iey ślad (146) równoległy do osi rzutów. Od punktów zatem przecięcia się tego śladu z rzutami, prostych lub krzywych linii danych, znajdującymi się na tej samej co i on płaszczyźnie rzutowej, poprowadziwszy prostopadłe do osi rzutów, aż się spotkają z drugimi rzutami pomienionych linii, oznaczysz wszystkie te punkta, w których one przebiegają płaszczyznę daną.

Części rzutów linii oznaczonych na tej płaszczyźnie rzutowej względem której dana jest równoległą, odpowiadające częściom drugich rzutów tych linii, zawartym pomiędzy osią a równoległym do niej śladem danej płaszczyzny, wyrazisz kropkami: jako należące do części samychże linii znajdujących się pod płaszczyzną daną; na drugiej zaś rzutowej, z obu stron pomienionego śladu, rzuty odpowiednie tym liniom naznaczysz ciągnionymi rysami (205).

207. Jeżeli dana płaszczyzna, nie równoległa ani prostopadła do żadnej z dwóch rzutowych głównych, jest wszakże równoległą względem osi rzutów: natenczas, wzięwszy na pomoc płaszczyznę rzutową trzecią, przypadek ten przywiedziesz do opisanego wyżej (204), i podane tam wykreślenie łącznie do tego ostatniego zastosować potrafisz.

Mając oznaczoną płaszczyznę przez dwie przecinające się lub równoległe linie proste, albo przez linię prostą i punkt ieden, albo nakoniec przez trzy punkta dane, wyrazić ją w sposobie zwyczajnym, przez ślady.

wzór 3. 208. Mając naprzód dane dwie linie proste $(BC, B'C')$ i $(DE, D'E')$ przecinające się w punkcie $np.$ (A, A') , gdy naznaczysz obudwu tych linii ślady C, E i D', B' (180), a pionowy z pionowym, poziomy zaś z poziomym połączysz przez linie proste EC i $B'D'$, otrzymasz żądane ślady płaszczyzny, przechodzący razem przez obiedwie linie dane. Tak oznaczone ślady albo

się przecina na osi rzutów, iak w przedstawionym tu wzorze, albo obadwa równoległemi do Tab. II. niey bydź muszą (145): wypadek albowiem nie czyniący zadosyc jednemu z tych dwóch warunków wskazałby albo niedokładność wykreślenia (179), albo sprzeczność w samym zadaniu: iako *np.* iesliby dwóch linii prostych, mających wspólnie na iedney leżeć płaszczyźnie, rzuty dane przecinały się w punktach niezaydujących się na linii prostopadłej do osi rzutów (135, 173).

Ślady płaszczyzny BFE, iako wypadek zadania, i linie proste (BC, B'C'), (DE, D'E'), iako rzeczy dane a nie zakryte przez tę płaszczyznę, bo na niey całkowicie leżą, oznaczyły się ciągionemi rysami.

209. Jeżeli iedna z dwóch linii danych jest równoległą do któreykolwiek płaszczyzny rzutowey, tedy żądany ślad na tey płaszczyźnie równoległym będzie względem rzutu pomienioney linii (166, 182).— Jeżeli oraz dana linia druga do drugiey rzutowey płaszczyzny jest równoległą, to i drugi żądany ślad równoległym będzie do rzutu iednakowego z nim nazwania tey linii drugiey. Znaiąc przeto kierunek żądanych śladów, dosyc będzie, dla ich nakreślenia, wynaleźć po iednym punkcie należącym do każdego z osobna; takimi zaś będą ślady linii danych, oznaczone na tych rzutowych płaszczyznach, z któremi się przeciąć mogą (182).

Jeśli nakoniec obie przecinające się linie dane są równoległemi do iedney i tey samey płaszczyzny rzutowey, natenczas wspólny ich rzut (173), równoległy do osi rzutów (166), będzie oraz śladem płaszczyzny mającey na sobie takie dwie linie, a która, iako równoległa względem pomienioney rzutowey, przez ieden ślad na drugiey rzutowey główney zupełnie oznaczoną będzie (146).

210. Wykreślenie śladów płaszczyzny, oznaczoney przez linią prostą i punkt nie zaydujący się na tey linii, iacno się przywodzi do poprzedzającego przypadku (208). Jeżeli albowiem punkt, wzięty dowolnie na tey linii, połączysz z danym przez linią prostą, tedy ona w caley swey długości będzie na wzmiankowanej płaszczyźnie, wspólny z linią daną, którą przecina; podobnie przeto, iak wyżej, przez wynalezione ślady tych dwóch linii (180), oznaczysz żądane ślady płaszczyzny.

Pomieniona linia prosta może się niekiedy zaydować na rzutowey płaszczyźnie, a wtenczas będzie na niey iednym z dwóch żądanych śladów; drugi więc tylko nakreślić wypadnie opisanym dopiero sposobem. Samo zaś zadanie, na ten szczególny przypadek, tak się właściwie wyrazi: *Mając dany ieden ślad płaszczyzny i którykolwiek z iey punktów, oznaczony przez rzuty, wykreślić ślad drugi.*

211. Mając oznaczone położenie płaszczyzny przez trzy punkta, nie będące w linii prostej: ieszeli ieden z nich z dwóma pozostałemi połączysz przez linie proste, i tym sposobem pomienioną płaszczyznę przez dwie przecinające się linie wyrazisz, nakreślenie żądanych tey płaszczyzny śladów przywiedziesz także do pierwszego przypadku (208). Dwa zaś nie złączone z sobą punkta ieszcze przez linią trzecią połączysz, to i tey ostatniey, równie iak dwóch poprzedzających, ślady bydź powinny na śladach tey samey płaszczyzny. Będzie to pewnym rodzajem sprawdzenia, które i do poprzedzających przypadków zastosować można.

Tu się oraz uczynimy, że: iako z rzutów oznaczonego trojkąta ślady płaszczyzny iego wykreślić się daią, tak podobnie z rzutów inney wszelkiey prostokreślney a płaskiey figury, za po-



Tab. II. Średnictwem dwóch którychkolwiek iey boków, możnaby nakreślić ślady płaszczyzny, na której leży. A iako na śladach takowey płaszczyzny powinny być ślady wszystkich innych boków pomienioney figury, jeżeli te ślady dokładnie naznaczone będą: tak nawzajem jeśli trzech którychkolwiek boków wielokąta w rzutach określonego ślady iednego nazwania nie przypadają w kierunku linii prostych: a chociażby i to miało miejsce, jeśli takowe dwie linie nie przecinają się na osi rzutów, ani są do niej równoległemi, wniesiesz że wielokąt wzięty pod uwagę nie jest figurą płaską. Przeciwny temu wniosek wtenczas z pewnością uczynić się może, kiedy ślady boków nieprzyległych w danym wielokącie, wszystkie są względem siebie w opisaném dopiero położeniu; boki albowiem pośrednie, razem z uważanemi, będą na tej samey płaszczyźnie.

212. Dwie równoległe linie oznaczające płaszczyznę, kiedy do żadney z rzutowych nie są równoległemi, wtedy ślady ich tegoż samego nazwiska, połączone liniami prostemi, dadzą żądane ślady rzeczoney płaszczyzny. Jeżeli zaś, albo do iedney którejkolwiek, albo do obudwu są równoległemi, to w razie pierwszym oznaczona przez nie płaszczyzna będzie, razem z nimi do tej samey rzutowey, a w drugim do osi rzutów równoległą. W pierwszym więc przypadku płaszczyznę taką przez ieden tylko iey ślad wyrazisz, połączywszy ślady dwóch danych linii, na tej rzutowey wynalezione (182) do której nie są równoległemi. Tak oznaczony ślad będzie koniecznie równoległym do osi rzutów (146).

213. W przypadku drugim, kiedy linie oznaczające daną płaszczyznę równoległemi są do osi rzutów, płaszczyzna taka zwyczajnie się wyrazi przez dwa ślady równoległe do tej osi (145); znając przeto ich kierunek dosyć będzie, dla wykreślenia każdego z osobna, mieć ieden punkt, przez który przechodzić powinien. Te ostatnie wynaydziesz następującym sposobem.

Na każdej z dwóch linii danych obierz dowolnie po iednym punkcie, połącz je przez linią prostą, i naznaczywszy iey ślady przez każdy z nich poprowadź linią równoległą do osi rzutów: a te będą śladami pomienioney płaszczyzny.

wzór 4. 214. W opisanym dopiero sposobie może się zdarzyć, że linia $(ab, a'b')$, łącząca dwa punkta wzięte na danych liniach $(am, a'm')$ i $(bn, b'n')$, przecina oś rzutów, to jest: że obadwa iey rzuty przecinają się w punkcie np . C leżącym na tej osi (168); taki punkt będzie zarówno poziomym iak pionowym tej linii śladem (13): płaszczyzna więc, mająca na sobie obiedwie linie dane, przejdzie nie tylko przez każdą inną, tak poprowadzoną iak $(ab, a'b')$, lecz tém samém i przez oś rzutów: która zastąpi miejsce obudwu głównych tej płaszczyzny śladów, nie oznaczając wszelako iey nachylenia względem rzutowych głównych. W takowym razie zwyczajnie się bierze płaszczyzna rzutowa trzecia, aby na niej przez ślad trzeci wyrazić to nachylenie (157); a następnie, przez ten ślad wspólnie z osią rzutów, oznaczyć położenie rzeczoney płaszczyzny. Pomieniony ślad trzeci wskażą punkta R, N, M, w których oś rzutów i dwie dane linie przecinają się z trzecią rzutową płaszczyzną PRQ (156), a które powinny być razem na iedney linii prostej.

215. Wykreślenie opisane wyżej (213) możnaby poprzedzającym (214) zastąpić. Oznaczywszy albowiem, na trzeciej rzutowey płaszczyźnie, ślady dwóch danych linii, i połączywszy je przez linią prostą, wyrazisz ślad trzeci płaszczyzny mającey na sobie obiedwie rzeczony linie; punkta więc, w których ten ślad przetnie ślady trzeciej rzutowey płaszczyzny, będą na żądanych głównych dwóch śladach równoległych do osi rzutów.

Wykreślić rzuty linii prostej, przechodzącej przez punkt dany i równoległej względem drugiej danej linii prostej. Tab. II.

216. Na ten koniec, przez ieden rzut punktu danego, poprowadzisz linią prostą równoległą względem takiegoż samego rzutu linii danej, i podobnie przez rzut drugi, równoległą względem drugiego iey rzutu; tak poprowadzone linie będą żądanymi rzutami linii prostej mającej na sobie punkt dany (7, 8) i równoległej względem prostej danej (174). Taką jest na wzorze 3. Tab. I. linia (PF, PF) poprowadzona przez punkt (P, P) równoległe do śladu AB (184), który iak wiadomo jest rzutem samego siebie a drugi odpowiedny ma na osi rzutów (142).

Wykreślić ślady płaszczyzny równoległej względem danej linii prostej i mającej na sobie drugą, nie równoległą do pierwszej, linią prostą daną.

217. Przez obrany dowolnie punkt na linii drugiej poprowadzisz równoległą względem pierwszej danej (216), naznaczywszy zaś ślady tej poprowadzonej równie iak pomienionej drugiej (180), połączysz pionowe przez iedną a poziome przez drugą linią prostą. Tak poprowadzone dwie linie, czyli się przetną w punkcie na osi rzutów leżącym, czyli też względem niej będą równoległymi, oznaczą (208) żądane ślady płaszczyzny, mającej na sobie (164) iedną z linii danych i linią poprowadzoną: a zatem równoległą względem drugiej danej.

Wykreślić ślady płaszczyzny przechodzącej przez punkt dany i równoległej albo względem drugiej płaszczyzny, oznaczonej przez ślady, albo względem dwóch danych, nierównoległych do siebie, linii prostych.

218. *Naprzód:* mając daną płaszczyznę ABC i punkt (P, P'), przez rzuty iego poprowadź linie PE, P'E', równoległe do takichże rzutów śladu *np.* pionowego AB (143) płaszczyzny danej. Oznaczona tym sposobem linia prosta (PE, P'E'), iako mająca na sobie punkt dany (164) i równoległa do iednego ze śladów danej płaszczyzny (216), cała się na żądanej płaszczyźnie znajduje: poziomy przeto ślad E tej linii (180, 182) do takiegoż śladu płaszczyzny żądanej należy. Ponieważ zaś płaszczyzny równoległych ślady iednego nazwania są względem siebie równoległymi (159): poprowadziwszy więc przez punkt E linią równoległą do poziomego śladu CB płaszczyzny danej, otrzymasz taki sam ślad płaszczyzny żądanej i oraz punkt *np.* E na osi rzutów, przez który drugi ślad tej płaszczyzny przechodzić (145) i do drugiego śladu AB płaszczyzny danej równoległym być powinien. A tak wyrazisz przez ślady żadaną płaszczyznę EFD, które na wzorze, iako zakryte przez płaszczyznę daną (150), kropkami się nazwały.

219. Przez tenże sam punkt (P, P') możnaby ieszcze drugą linią, równoległą względem poziomego śladu CB, przez rzuty wyrazić (218): która takż w całej swej długości, wspólnie z poprowadzoną (PE, P'E'), na żądanej płaszczyźnie znajdowaćby się powinna; oznaczyłbyś przeto takową płaszczyznę dwiema przecinającymi się liniami prostymi, za pomocą których wykreśliłbyś żądane ślady. Oba te ślady nie tylko że na osi rzutów przeciąćby się powinny, lecz oraz, iako równoległe względem odpowiednich im rzutów linii poprowadzonych (209), mu-

Tab. II. siałyby tém samém bydź równoległemi do śladów, iednego z niemi nazwiska, płaszczyzny danej; co takóž mogłoby służyć za dowód, podanego na inném miejscu (159), twierdzenia.

wzór 6. 220. *Powtóre.* Maiąc dane dwie linie proste *np.* $(AB, A'B')$ i $(CD, C'D')$ nie równoległe (174), ani przecinające się (173, 135), tudzież punkt (P, P') , należący do płaszczyzny równoległej względem obudwu tych linii: dla oznaczenia iey w sposobie zwyczajnym, przez ślady, poprowadzisz przez punkt rzeczony linią do kaźdey z dwóch danych równoległą; za pośrednictwem tych ostatnich linii, łącznobyś wykreślił ślady płaszczyzny, na której razem się znajdują (208), i jako równoległe względem linii danych, oznaczą iey położenie stosowne do warunków zadania. Wzór iednak przedstawia taki przypadek, kiedy dwie linie dane i równoległe do nich $(PE, P'E')$ i $(PF, P'F')$, przez punkt dany (P, P') poprowadzone, są naprzemian równoległemi do rzutowych płaszczyzn, to iest, do poziomey iedna z kaźdey pary, do pionowej zaś druga: a zatém kiedy kaźda z tych linii ieden tylko ślad na pomienionych płaszczyznach zostawić może (166, 182); wszelako i w tym szczególnym przypadku ślady żądane, iako równoległe do odpowiednych im rzutów PF i $P'E'$ linii poprowadzonych (164, 184), i iako przechodzące przez ślady E i F' tychże linii, zupełnie co do kierunku i położenia oznaczonymi będą. Wzór ten służy oraz za przykład wyżej opisanych wykreśleń (209, 219).

Wykreślić ślady płaszczyzny przechodzącej przez punkt dany i prostopadłej względem oznaczonej w rzutach linii prostej.

Tab. III. 221. Danemi są: punkt (P, P') i linia prosta $(AB, A'B')$. Wystaw sobie gdziekolwiek na wzór 1. osi, rzutów wzięty punkt i przezeń poprowadzone po płaszczyznach rzutowych dwie linie prostopadłe do rzutów linii danej: płaszczyzna przesunięta po takich dwóch liniach byłaby prostopadłą do linii danej (162); żądana zatém, a mająca się poprowadzić przez punkt (P, P') , powinna bydź do tamtej równoległą. Tą drogą niniejsze zadanie, przywiodłszy do poprzedzającego (218), rozwiążesz iak następuie.

Przez dany punkt (P, P') poprowadź równoległą do poziomego *np.* śladu płaszczyzny wyobrażoney. Rzutami tey linii będą: poziomy PF , równoległy względem takiegoż śladu rzeczoney płaszczyzny, a zatém do poziomego rzutu AB danej linii prostopadły: pionowy zaś $P'F'$ równoległy do pionowego rzutu tegoż samego śladu (216), to iest, do osi rzutów. Tak nakreślona linia $(PF, P'F')$ leży na płaszczyźnie żądanej, a zatém ślad iey pionowy F' (182) musi bydź na śladzie tegoż samego nazwiska rzeczoney płaszczyzny; będzie więc tym śladem linia $F'E'$, prostopadła do pionowego rzutu $A'B'$ linii danej. Drugi żądany nakreślisz prowadząc przez punkt C , gdzie pierwszy przecina ós rzutów, linią CD prostopadłą do drugiego odpowiedniego rzutu AB linii danej. Płaszczyzna przeto $F'CD$, iako mająca na sobie punkt dany (P, P') i oraz do linii danej $(AB, A'B')$ prostopadła (184, 162), rozwiązuie podane tu zadanie.

Wykreślenie dopiero opisane, co do samego sposobu, żadney nie podlega zmianie chociażby punkt (P, P') danym był na linii prostej $(AB, A'B')$. Wszelkie zaś tego zadania szczególne przypadki, zależące od położenia, względem rzutowych płaszczyzn, iuż to linii, iuż punktu danego, albo razem obudwu tych wielkości, łączno rozwiążesz na podobieństwo wyżej przywiedzionych, a do poprzedzających zadań odnoszących się.

Wykreślić rzuty linu prostej, przez dany punkt przechodzącej i prostopadłej do innej, Tab. III. oznaczonej w rzutach, linii prostej.

222. Poprowadziwszy przez punkt dany płaszczyznę prostopadłą do linii danej, a gdzie ją przetnie, połączywszy ten punkt z punktem danym, otrzymasz linię żadaną: jako całkowicie leżącą na poprowadzonej płaszczyźnie i przechodzącą przez taki iey punkt, w którym tę płaszczyznę linia dana prostopadle przebiega.

Punkt (P, P) i linia prosta $(AB, A'B')$ wyrażają na wzorze wielkości dane; linia $(PF, P'F')$ wzór 2. poprowadzona, przez ten punkt, równolegle do poziomego śladu płaszczyzny, mającej się podobnie, jak wyżej (221) oznaczyć, daie punkt F' (182) pionowego tej płaszczyzny śladu: będąc więc nim linia $F'D$, spuszczone prostopadle na takiż rzut AB linii danej. Drugi poziomy nakreślisz przez punkt D , gdzie pierwszy przecina oś rzutów, w kierunku prostopadłym do poziomego rzutu AB tej samej linii. Dla wskazania punktu gdzie linia $(AB, A'B')$ przebiega tak oznaczoną płaszczyznę $F'DC$, wprowadziła się tutaj, na sposób opisany wyżej (197), płaszczyzna przybrana AEB , mająca na sobie tę linię (164); punkta (J, J) i (K, K') , wspólnie odpowiednim śladom dwóch poprowadzonych płaszczyzn, złączone z sobą dały linię prostą (JK, JK') , wzajemnego ich przecięcia się: która w przecięciu się z linią daną $(AB, A'B)$ wskazuje (68) punkt (x, x') , gdzie ta ostatnia jest prostopadłą i do poprowadzonej przez punkt (P, P) płaszczyzny $F'DC$, a tém samém i do linii $(Px, P'x')$, jako łączącej dwa punkta teyże płaszczyzny.

Wykreślić ślady płaszczyzny poprowadzonej, przez linię prostą, prostopadle względem danej płaszczyzny.

223. Na linii danej obierz dowolnie punkt iakikolwiek, a przez rzuty tego punktu, do śladów iednakowego z niemi nazwiska płaszczyzny danej, poprowadź linie prostopadłe: będą one rzutami linii prostopadłej do tej płaszczyzny (162), i w obranym punkcie przecinającej się z linią daną. Płaszczyzna przesunięta przez takie dwie linie uczyni zadosyc podanemu zadaniu; przechodząc albowiem przez daną linię będzie oraz prostopadłą do płaszczyzny danej, jako mająca na sobie linię poprowadzoną. Wypadek tego zadania, to jest, ślady rzeczoney płaszczyzny, wynadziesz jak wyżej (208): oznaczywszy zaś wzajemne iey przecięcie się z płaszczyzną daną (190), części śladów iedney przez drugą zakrytych rysami kropkowemi, a nie zakrytych ciągnionemi nakreślisz (191).

224. Do żadnego z rozwiązanych dotąd zadań nie wchodziło ieszcze, ważne skąd inąd, działanie zwańe w wykreśleniach *kładzeniem*: a które na tém pospolicie zależy, aby punkt oznaczony przez rzuty, albo linię prostą lub krzywą płaską, w takimże sposobie dane, położyć na płaszczyźnie rzutowej, na której się poprzedniczo nie znajdowały. Uskutecznia się to działanie za pomocą innej dowolney, lub według potrzeby dalszego wykreślenia, i rodzaju wielkości położyć się mającej, przesuniętey przez tę wielkość płaszczyzny, a która się zwykle

Tab. III. *plaszczyną kładową* mianuie. Z tego wypływa, że: *kładem* punktu, linii prostej, płaskiego kąta, albo wielokąta prosto lub krzywo-kreślnego, albo iakiejkolwiek pojedynczey linii krzywey piaskiey, będzie takaż sama wielkość wykreślona na płaszczyźnie rysunku, stosownie do sposobu w iakim się iey płaszczyzna kładowa na tey ostatniey położy. Żeby zaś pod tym względem działanie takowe, iednostaynym w wykreśleniach, pewnym i oznaczonym uczynić, statecznie go odbywamy iednakim sposobem, to jest: przez obrót płaszczyzny kładowej około linii wzajemnego iey przecięcia się z płaszczyzną, na której się kładnie; linią taką, w czasie opisanego tu działania, *osią kładową* nazywać będziemy.

225. Nie potrzebuemy zwykle kładów przez rzuty wyrażać: chociaż i do nich daie się toż samo zastosować, co się wyżej mówiło (142 i 143) o punktach i liniach bezpośrednio znajdujących się na płaszczyznach rzutowych. Często iednak nie można kładów inaczej iak tylko w rzutach nakreślić: a to kiedy wskazać ie mamy, nie na płaszczyźnie rysunku lub rzutowych, co iedno w wykreśleniach znaczy (136), lecz na innych oznaczonych przez ślady; te ostatnie *plaszczynami kładu* nazwiemy. Nayeczęściej płaszczyzna kładu bierze się w położeniu równoległym względem iedney którejkolwiek rzutowey: a wtenczas położone na niey wielkości i rzuty ich na tey rzutowey, do której pierwsza jest równoległą, niczémby się w postaci, wielkości i położeniu względnym, iedne od drugich różnić nie mogły (172); rzuty takowe zastępują w wykreśleniach rzeczywiste kłady: iak się to czynić zwykło w rozwiązywaniu zadań tyjących się wirowych, oraz niektórych innych powierzchni. W działaniach iednak tego rodzaju ciągle prawie od-kładów, do pierwiastkowego położenia odpowiednich im wielkości, wyrażonego w rzutach, powracać musimy: co w szczególności, równie iak każde inne działanie przeciwne kładzeniu, *powrótem do rzutów* się zowie. Wszystkie opisane tu wyrazy i działania, do których się odnoszą, lepiej dadzą się na przykładach objaśnić w rozwiązywaniu następujących z kolei zadań.

wzór 3. *Mając na płaszczyźnie rysunku wskazane ślady linii prostej, wykreślić rzeczywistą iaka jest pomiędzy nimi odległość w położeniu prostopadłym rzutowych płaszczyzn, oraz kąt pod iakimi do tych płaszczyzn jest nachyloną.*

226. Odległością żadaną będzie część (AB, A'B') samey linii danej, pomiędzy naznaczonymi śladami iey A i B' (180) zawarta: a która pospolicie dłuższą jest od każdego z osobna tey odległości rzutu; za ich iednak pomocą można będzie rzeczywistą iey długość na płaszczyźnie rysunku nakreślić, i to jest dla czego ią kładniemy na iedney którejkolwiek z rzutowych płaszczyzn, gdzie dane iey rzuty bezpośrednio leżą. Ku temu zaś celowi służyć może, iako płaszczyzna kładowa, każda z rzucających tę linią płaszczyzn: podług tego więc iak ią na iedney lub drugiey rzutowey położyć mamy, osią kładowej będzie ieden iey ślad, który oraz jest rzutem uważaney linii, albo drugi (224) prostopadły do osi rzutów. Wykonaymy to działanie w iednym i drugim sposobie:

227. *Naprzód*, kiedy płaszczyznę np. ABB', rzucającą linią daną na płaszczyznę poziomych rzutów, masz na tey ostatniey położyć: osią kładowej będzie poziomy iey ślad AB, który tém samym, iak iest, pozostanie na swoim miejscu; drugi zaś BB', iako prostopadły

w punkcie B do płaszczyzny poziomej, a zatem i do pomienionej osi AB, padnie na linię Tab. III. Bb , prostopadle do niej poprowadzoną przez ten punkt stały B, przy którym obrót swój odbywać będzie. Znając przeto kierunek tak położonego śladu BB , jeżeli od rzeczzonego punktu B odetniesz rzeczywistą jego długość, wziętą z płaszczyzny rysunku, znajdziesz kład b drugiego tej długości końca, czyli, co jedno jest, śladu pionowego B linii danej. Ślad ten poziomy A, iako leżący w tym działaniu na osi kładowej, miejsca odmienić nie może: będzie więc także kładem samego siebie; a następnie i linia Ab , łącząca klady obudwu pomienionych śladów, razem otrzymane przez obrót tej samej kładowej, będzie oczywiście kładem linii prostej łączącej te ślady, w pierwotnym ich położeniu na prostopadłych do siebie głównych rzutowych płaszczyznach: wyrazi przeto na płaszczyźnie rysunku rzeczywistą ich pod tym względem odległość.

228. *Powtóre.* Też samą rzucającą płaszczyznę ABB mając na pionowej położyć, ślad ten pionowy BB' zostanie na miejscu, a poziomego punkt tylko B niewzruszonym będzie: cały zaś padnie na oś rzutów, iako w pierwotnym swym położeniu prostopadły w punkcie B do osi kładowej BB' . Odciawszy zatem na osi rzutów, od punktu nieporuszonego B, rzeczywistą długość obracającego się śladu BA , wziętą z poziomej płaszczyzny, wynaddziesz na pionowej kład a poziomego śladu A linii danej, wraz z kładem B' śladu drugiego, który, iako się rzekło, będzie nim dla samego siebie. Linia przeto aB' , łącząca klady obudwu śladów danej linii, oznaczone przez poedyńczy obrót wspólnej im płaszczyzny kładowej, wyrazi kład wzajemnego ich oddalenia, pod tym jednak warunkiem, że płaszczyzny rzutowe są do siebie prostopadłemi.

229. Obrawszy za płaszczyznę kładową tę, która daną linią na płaszczyznę pionową rzuca, i kładąc ją raz na pionowej (228), drugi raz na poziomej płaszczyźnie (227), otrzymałbyś jeszcze dwa klady tej samej linii ($AB, A'B'$): które tak pomiędzy sobą iako też poprzedzającym powinny być równe, jeżeli się wszystkie te działania dokładnie uskuteczniły; tym sposobem jedne sprawdzamy przez drugie i wzajemnie (179). W dalszych wszakże i więcej złożonych zadaniach na iednym z tych działań zwykle przestawać będziemy: wybierając z nich to mianowicie, które na miejscu wolniejszém od innych wykreślenia rysów odbyć się może.

230. Po takim rozwiązaniu pierwszej części tego zadania, drugiej oraz zadosyć się stało. Jakoż: przez kąt nachylenia linii do płaszczyzny rozumiemy ten, który tworzy z rzutem swoim prostym, oznaczonym na tejże płaszczyźnie; a który jest najmniejszym ze wszystkich innych, iako przy punkcie w którym ją przebiega, uczynić może z liniami poprowadzonymi na tej samej płaszczyźnie. Że zaś wykreślone tu klady, każdy osobno uważany, tak leży na płaszczyźnie rysunku wspólnie z rzutem służącym mu za oś kładowej, iak w pierwotnym swym położeniu względem tegoż rzutu zostawał: kąt przeto BAb , albo równy mu $B'aB$, pomiędzy kładami linii ($AB, A'B'$) i poziomego ten rzutu zawarte, ukażą na płaszczyźnie rysunku nachylenie tej linii względem płaszczyzny poziomej. Nachylenie zaś do pionowej wskazałyby kąty między kładami tej samej linii i pionowego ten rzutu, razem wykreślonemi już to na pionowej już na poziomej (229), albo właściwie mówiąc, na płaszczyźnie rysunku.

Tab. III. *Wykreślić na płaszczyźnie rysunku rzeczywistą odległość dwóch punktów oznaczonych przez rzuty: czyli, co-iedno iest, wyrazić rzeczywistą długość linii prostej, danej przez rzuty ograniczonej długości.*

wzór 3. 231. Obierzmy na tym samym wzorze dwa którekolwiek linii (AB, A'B) punkta, np. (P, P) i (Q, Q'): łącząca ie linia prosta (PQ, P'Q') będzie wzajemną ich odległością, którą na płaszczyźnie rysunku przez kład wyrazić mamy. Z tego już widać, że to zadanie iest poprzedzającym objęte, i ażeby go do tamtego przywieśdź, dosyć będzie linią (PQ, P'Q'), w rzutach oznaczoną, przedłużyć aż do otrzymania iey śladów (180. Potém, wykreśliwszy ieden którykolwiek z kładów tak przedłużoney linii, np. Ab (227), wyprowadzić, od rzutów P i Q znajdujących się na osi kładowey AB linie do tey osi prostopadłe, które na wykreślonym kładzie odetną część pq ukazującą odległość wzajemną danych dwóch punktów (P, P) i (Q, Q').

Z podobieństwa albowiem trójkątów: $ABb \sim A'Qq \sim APp$ oraz innych $ABB' \sim A'Q'n \sim A'P'm$, za pośrednictwem trójkątów trzeciego układu podobnych sobie $AA'B' \sim PmB' \sim QnB$, otrzymasz następujące stosunki równe:

$$Bb : Qq : Pp = B'B : Q'n : P'm$$

gdzie ponieważ pierwsze wyrazy dwóch stron porównywanych są z wykreślenia równemi (227), więc i dalsze odpowiednie sobie takimiż bydź powinny. Z tego następnie wniesiesz, że czworokąt PQqp iest kładem, takiego iak on sam, czworokąta innego, znajdującego się na płaszczyźnie ABB' , w którym bok przeciwny wspólny ich podstawie PQ iest to linia łącząca dwa punkta (P, P) i (Q, Q'). Jakoż: dwa przyległe a prostopadłe do podstawy tey boki, są liniami rzucającemi na poziomą dwa rzezone punkta, a zatem równe liniom $Q'n$ i $P'm$ (134): czyli, iak się dopiero dowiodło, równe liniom Qq i Pp , wykreślonym na płaszczyźnie poziomey, przy podstawie tegoż czworokąta i w takim względem niey położeniu iak poprzedzające. Ztąd oczywiście wypływa, że bok czwarty pq czworokąta wykreślonego iest prawdziwym kładem boku odpowiedniego w czworokącie pierwszym, a zatem że na płaszczyźnie rysunku daie rzeczywistą długość wzajemnego oddalenia dwóch punktów (P, P) i (Q, Q').

232. Na drugim kładzie B'a (228) tey samey przedłużoney linii (AB, A'B) odetniesz żądaną odległość punktów (P, P) i (Q, Q'), kiedy przez drugie ich rzuty P' i Q' poprowadzisz linie P'r' i Q'o', równoległe do osi rzutów. Wykreślając bowiem kład B'a należało uważać płaszczyznę kładową ABB' obracającą się około pionowego iey śladu BB' ; w działaniu zaś tego rodzaju, każdy punkt obracającej się płaszczyzny kreśli łuk prostopadły do osi obrótu, i na niey mający swój środek, co nieodzowną iest własnością każdego wirowego ruchu; łuki więc takowe będą w tym razie równoległemi do płaszczyzny poziomey. Ztąd wypływa, że pionowe ich rzuty wyrażą się przez linie proste równoległe do osi rzutów (146), a poziome przez takież iak one łuki (172), zakreślone z punktu B, który iest poziomym rzutem wszystkich punktów wzmiankowaney osi BB' . To samo stosując do łuków przebieżonych przez punkta (P, P) i (Q, Q'), poziomemi tych łuków rzutami będą zakreślone przez takież rzuty P i Q wymienionych punktów, łuki Pr i Qo, ze wspólnego ich środka B; pionowemi zaś linie proste P'r' i Q'o' wprzód poprowadzone, równoległe do osi rzutów, przez pionowe rzuty P' i Q'

tychże samych punktów. W śladach pionowych oznaczonych tym sposobem łuków ($Pr, P'r'$) Tab. III. i ($Qo, Q'o'$), przypadną oczywiście kładzie punktów po tych łukach bieżących; lecz że one odbywają swą drogę razem z linią ($AB, A'B'$), więc też i na kładzie iey $B'a$ znajdować się także powinny. Idzie za tém, że: końce r', o' , odciętey wprzód na tym kładzie długości, muszą bydz nie tylko śladami rzeczonych łuków, to iest: odpowiadać poziomym tych śladów rzutom r, o (180), ale oraz i kładami punktów (P, P') i (Q, Q'); a następnie, że długość odcięta $r'o'$ nie co innego bydz może, iedno żądany kład wzajemney ich odległości.

Opisané dopiero wykreslenia, chociaż wprost z poprzedzających wypływają, rzadko się wszakże zdarzy ich kiedy użyć w dalszych zadaniach: zwyczajnie bowiem odległość danych dwóch punktów kreślimy w sposób następujący:

233. Na iedney któreykolwiek płaszczyźnie rzutowey, przez rzut punktu danego bliższy osi rzutów, prowadzi się do niey linia równoległa: a od punktu gdzie przecina prostopadłą na tę oś, poprowadzoną przez rzut punktu drugiego, odcina się na równoległej długość równająca się wzajemnemu oddaleniu drugich rzutów tych samych dwóch punktów; naostatek dopełnia się trójkąt prostokątny, którego iednym bokiem, przy kącie prostym, iest długość odcięta na linii równoległej do osi rzutów, drugim zaś iest przez tę równoległą odcięta na prostopadłej do osi, od rzutu znajdującego się na tey prostopadłej. Przeciwpromokątna takiego trójkąta będzie żadaną długością, pokazującą na płaszczyźnie rysunku wzajemne oddalenie dwóch punktów, oznaczonych na tey płaszczyźnie przez rzuty. Działanie to pod dwoma różnemi względami wytłumaczyć się daie.

234. *Pod względem pierwszym:* trójkąt $CS'Q'$, wykreslony na płaszczyźnie pionowej, może przystać do trójkąta pdq , który, przez poprowadzenie linii pq równoległej do podstawy czworokąta $PQqp$, leżącego na poziomey, od tegoż czworokąta odetniesz. Obadwa bowiem rzeczone trójkąty są w punktach C i d prostokątnemi, mają boki $S'C$ i pd równe temuż samemu rzutowi PQ , i nakoniec drugie $Q'C$ i qd także sobie równe, iako wyrażające różnicę długości linii rzuciających dwa punkta dane (231); trzeci zaś bok $S'Q'$, równy otrzymanemu wprzód kładowi pq wzajemney tych punktów odległości, wskaże ią, iak się żądało, na płaszczyźnie rysunku.

235. *Pod względem drugim:* ten sam trójkąt $CS'Q'$ można także uważać iako rzut pionowy kładu trójkąta pdq , umieszczonego na płaszczyźnie QS tegoż kładu, równoległej względem pionowej (225). Jeżeli bowiem czworokąt $PQqp$, razem z odciętym na nim trójkątem pdq , podniesiesz z płaszczyzny poziomey, tak aby obracając się około podstawy swojej PQ zatrzymał się w prostopadłym położeniu do tey płaszczyzny: wtedy boki iego Pp i Qq , równe $P'm$ i $Q'n$ (231), czyli równe liniom rzuciającym na poziomą dane dwa punkta (P, P') i (Q, Q'), tak się umieszczą na tych rzuciających, że końcami swemi p, q padną na pomienione dwa punkta. Podniesiony w tym sposobie czworokąt, obracając około boku ($Q, Q'n$), kiedy położysz na płaszczyźnie kładu QS , to punkt (Q, Q'), iako będący na osi obrótu, w pierwszym swém pozostanie miejscu, a tylko drugi punkt dany (P, P') przebieży drogę postaci łuku ($PS, P'S'$) prostopadłego do osi obrótu ($Q, Q'n$) i na niey mającego swój środek (Q, C); łuk ten przebieie płaszczyznę kładu QS (206) w punkcie (S, S'), który oczywiście

Tab. III. będzie na niej kładem punktu (P, P') . Kład przeto linii prostej $(PQ, P'Q')$ przeniesionej na płaszczyznę kładu QS w rzutach się tak wyrazi $(SQ, S'Q')$: z których pionowy SQ , iako równy rzeczonemu kładowi (225, wskaże na płaszczyźnie rysunku wzajemne oddalenie danych dwóch punktów (P, P') i (Q, Q') .

Toż samo rozumowanie przypada i do trójkąta PDV , wykreślonego, podobnie iak poprzedzający CQS , na drugiej rzutowej płaszczyźnie (233); a otrzymane w różnym sposobie czterykłady tey samej linii $(PQ, P'Q')$, iakimi są na wzorze: $pq, r'o', PV, S'Q'$, w dokładnym wykreśleniu będą miały iednostayną długość.

236. Każdy z kładów linii $(PQ, P'Q')$, oznaczonej przez rzuty podług warunku tego zadania, ukaże na płaszczyźnie rysunku nie tylko rzeczywistą długość tey linii, lecz oraz iey nachylenie do obu rzutowych płaszczyzn. Jakoż: w trójkątach $CQ'S'$ i dqp kąty S' i p , równe pomiędzy sobą i każdemu ze trzech kątów r', α, A , są widocznie miarą pochyłości linii $(PQ, P'Q')$ względem płaszczyzny poziomej (230); dla tego więc w trójkącie PDV , wykreślonym na tey ostatniej podobnie iak $CQ'S'$ na pionowej, kąt DVP będzie miarą nachylenia rzeczonej linii do płaszczyzny pionowych rzutów.

Dla oszczędzenia miejsca, obadwa zadania na iednym się tu rozwiązały wzorze: aby go iednak nie uczynić przez to trudnym do wyrozumienia, użyło się znaków właściwych zadaniu drugiemu; wykreślenia zaś do poprzedzającego tylko odnoszące się, iako wyrażone kreskowymi rysami, tém samém, w opisanu i pojęciu wykreśleń następującego zgoła zawadzać nie mogły (141).

Wykreślić kład punktu albo linii, mając dane ich rzuty i płaszczyznę kładową oznaczoną przez ślady.

wzór 4. 237. Niech będzie dany punkt (P, P') leżący na płaszczyźnie $M'CN$ (184), wziętej w dowolnem nachyleniu względem rzutowych, i mającey mu za kładową służyć (224). Jeżeli za oś tey kładowej płaszczyzny poziomy iey ślad obierziesz, tedy punkt (P, P') , razem z nią obracający się, kreślić będzie łuk prostopadły do tey osi CN i mający na niej swój środek. Poprowadziwszy zatem przez punkt (P, P') płaszczyznę PMM' prostopadłą do osi CN (162, 221), będzie ona miejscem rzeczonego łuku: środek iego musi bydź w punkcie N , wspólnym osi CN i poprowadzonej płaszczyźnie (204), a koniec, którym się oprze na płaszczyźnie poziomej, kiedy punkt bieżący po nim na tey ostatniej się położy, będzie oczywiście na poziomym śladzie MN płaszczyzny tego łuku. To mając, obierz poprowadzoną płaszczyznę NMM' za przybraną kładową punktu danego (P, P') : a gdy ją, przez obrót około linii NM , położysz na płaszczyźnie poziomej, tedy ona przeniesie na tę płaszczyznę punkt wzmiankowany i rzucającą go linią $(P, P'o)$. Ponieważ w ciągu tego działania linia NM nie poruszona zostaje, będzie więc, iak na początku, ciągle w punkcie P prostopadłą do linii $(P, P'o)$; kład przeto tey ostatniej na płaszczyźnie poziomej wyrazi linia Pp , prostopadła w tymże samym punkcie do osi obrotu NM i równa pierwotney swojej długości $P'o$ (134), a koniec iey p wskaże kład początku łuku, który ma bydź przebieżonym przez punkt (P, P') w obrócie około osi CN kładowej iego płaszczyzny. Zakreśliwszy zatem ze środka nieporuszonego N , łuk po-

czyniący się w punkcie p , a kończący się na poziomym śladzie MN rzeczonej płaszczyzny, Tab. III. otrzymasz na tym śladzie punkt np . K , który, w powrocie płaszczyzny kładowej nakreślonego łuku pK do pierwszego iey położenia KMM , pozostanie na swoim miejscu i będzie na poziomej końcem łuku przebieżonego przez punkt P, P' , po płaszczyźnie NMM , w obrocie wirowym około linii CN ; to jest żądanym tego punktu kładem, otrzymanym z obrotu danej kładowej $M'CN$ około poziomego iey śladu CN .

Podobną drogą przyyschy można do wynalezienia, na drugiey rzutowej, kładu tegoż samego punktu (P, P') , biorąc drugi ślad CM danej kładowej płaszczyzny za oś wirowego iey obrotu.

238. Gdyby punktem danym był np . M , znajdujący się na iednym którymkolwiek śladzie płaszczyzny kładowej $M'CN$, wtenczas kiedy drugi ślad CN za oś tey kładowej ma służyć: to i do tego stosując przypadku wykreślenie poprzedzające, otrzymasz kład żądany na prostopadłym do osi kładowej śladzie MN płaszczyzny $M'MN$, poprowadzonej przez punkt dany M' prostopadle do tey osi; taka albowiem płaszczyzna będzie miejscem łuku przebieżonego przez punkt M , w obrocie około śladu CN danej kładowej $M'CN$. Poprowadzoną płaszczyznę $M'MN$, uważając iako przybraną kładową punktu danego M , gdy razem z nim na poziomej położysz, tedy kład posiłkowy tego punktu będzie m (227): żądany zatem padnie na przecięcie się k poziomego śladu MN tey kładowej z łukiem mk zakreślonym z punktu N przez kład posiłkowy m (237).

239. Ostatnie to wykreślenie rozwiązanie oraz takowe zadanie: *określić na płaszczyźnie rysunku miejsce zajęte przez część kładu płaszczyzny danej zawartą pomiędzy naznaczonemu iey śladami; albo, co iedno iest, wynaleść rzeczywistą wielkość kąta iaki czynią ślady płaszczyzny danej znajdujące się we właściwym dla nich miejscu na rzutowych prostopadłych do siebie płaszczyznach.* Jakoż: na iednym którymkolwiek danej płaszczyzny śladzie obrawszy dwa dowolne punkta, a drugi wzięwszy za oś wirowego iey obrotu, wynaydziesz kłady obudwu tych punktów (238): łącząca ie linia prosta będzie kładem obracającego się płaszczyzny śladu, i takie na płaszczyźnie rysunku przyymie położenie względem drugiego nieruchomego, w iakim są rzeczywiście dane tu ślady na prostopadłych rzutowych płaszczyznach; czyli więc były równoległemi, czyli się przecinały na osi rzutów (145), kłady ich muszą byđz albo równoległe, albo w iednym z niemi punkcie, pod kątem żądanym, przecinające się: a to oraz będzie sprawdzeniem dokładności samegoż wykreślenia (179).

240. Na przyłączonym tu wzorze, daną płaszczyzną iest $M'CN$: punktu zaś M' , wziętego dowolnie na iednym iey śladzie CM' , kładem będzie k (238): linia przeto Ck wyrazi na płaszczyźnie rysunku kład tego śladu (239), kiedy drugi CN za oś kładowej obierzesz, utworzy więc z tym ostatnim kąt kCN , równy wzajemnemu nachyleniu śladów CM' i CN w czasie znajdowania się ich na prostopadłych do siebie rzutowych płaszczyznach. Zważając oraz, że wynaleziony kład k , z odpowiednym mu punktem M' są w iednakowej odległości względem punktu stałego C : dla skrócenia przeto działań, dosyć będzie na iednym którymkolwiek bądź śladzie płaszczyzny danej obrac iakikolwiek punkt, np . M' , a przez drugi rzut M tego punktu (142) poprowadzić prostopadłą do śladu drugiego; do punktu zaś przecięcia się danych

Tab. III. dwóch śladów, odległością jego względem obranego punktu, przeciąć tę prostopadłą, i tym sposobem wskazać kład jego k na drugiej rzutowej płaszczyźnie: który, połączony iak wprzód z stałym punktem C, wyda kład Ck śladu drugiego i oraz kąt kCN rzeczywistego nachylenia ku sobie tych dwóch śladów.

Działając odwrotnie możnaby powrócić od naznaczonego kładu Ck do właściwego mu położenia CM na drugiej rzutowej płaszczyźnie, a następnie rozwiązać takie w ogólności zadanie: *maiąc dany kąt rzeczywistego nachylenia dwóch śladów płaszczyzny, i ieden z nich na płaszczyźnie rysunku wskazany, iak wykreślić stosownie do tego ślad drugi.*

241. Wskazany dopiero sposobem określiwszy na płaszczyźnie rysunku część iakiejkolwiek płaszczyzny danej, zawartą pomiędzy iey śladami, jeżeli się te ostatnie przecinają z sobą, tedy, za pośrednictwem ich kładów, łączno wynaydziesz kład każdego tej płaszczyzny punktu: co się już wyżej (237) w innym rozwiązało sposobie. Kład $np.$ punktu (P, P') , danego na płaszczyźnie MCN , po wykreśleniu iey kładu kCN (240) na płaszczyźnie rzutów poziomych, łączno oznaczysz, kiedy, poprowadziwszy rzut pionowy $P'R$, linii przechodzącej przez ten punkt i równoległej do śladu nieruchomego CN (181), punkt R' gdzie taka linia przecina ślad drugi przeniesiesz, w równej od osi rzutów odległości, na oznaczony kład Ck tego drugiego śladu. Potem zaś, przez wskazany tym sposobem punkt r , poprowadziwszy równoległą rK do śladu nieruchomego CN i drugą prostopadłą PK przez poziomy rzut punktu danego, wynaydziesz żądany kład K na przecięciu się tych dwóch ostatnich linii. Jedną bowiem z nich rK przechodzi przez kład r śladu linii równoległej względem osi kładowej CN i mającej na sobie punkt dany (P, P') : a że jest równoległą względem kładu tej osi, wyraża przeto kład rzeczonyj linii, następnie więc musi być miejscem żadanego kładu punktu (P, P') ; który, iako się wyżej dowiodło (237), będzie także i na linii MK , poprowadzonej prostopadłe do osi kładowej CN przez rzut danego punktu, leżący z tą osią na iednej rzutowej płaszczyźnie.

Obrawszy ślad CM' za oś obrótu danej płaszczyzny NCM' i wykreśliwszy kład drugiego iey śladu (240), wynalazłbyś kład punktu (P, P') na płaszczyźnie rzutów pionowych, podobnie iak na poziomej kład jego k dopiero oznaczonym został.

242. Maiąc na płaszczyźnie kładowej, wskazanej przez ślady, daną linią prostą: kładem iey będzie także linia prosta łącząca klady dwóch którychkolwiek tej linii punktów, oznaczone podanym wyżej sposobem (237). Albo, kiedy wykreślisz naprzód klady śladów płaszczyzny kładowej (239) i znaydziesz na nich klady śladów linii na tej płaszczyźnie danej: łącząca je linia prosta będzie na płaszczyźnie-rysunku żadanym tej linii kładem; co się w każdym przypadku łączno wykonać może. Ślad albowiem danej linii, znaydujący się na osi kładowej, będzie oraz kładem samego siebie: kład zaś drugi padnie na kład śladu drugiego płaszczyzny kładowej, w takiej odległości od punktu przecięcia się tego śladu z osią rzutów, w iakiej zostawał ślad odpowiadający temu kładowi. Jeżeliby zaś obracający się ślad płaszczyzny kładowej, a następnie i kład tego śladu były równoległymi do osi rzutów, natenczas punkta takiego śladu i klady tych punktów będą na liniach prostopadłych do tej osi, względem której musi być w tym przypadku równoległą oś danej płaszczyzny kładowej.

243. Maiąc wykreślić na płaszczyźnie rysunku kład linii krzywey płaskiey, jedna tylko Tab. III. płaszczyzna tey linii może iey w tém działaniu za kładową służyć. Na podobieństwo zaś linii prostej, wynaydując kłady punktów (237, 241) branych dowolnie na takiej linii krzywey; im więcej tych punktów wezmiesz i dokładniey naznaczysz ich kłady, tym pewnieyszy będzie do pociągnięcia rys (177), mający ukazać rzeczywistą postać i wielkość, oznaczoney przez rzuty, linii krzywey płaskiey. Wynaydując w sposobie pierwszym 237) kłady takowych punktów, odległości ich od osi kładowej, iako przeciwprostokątne równoległych i podobnych sobie trójkątów, będą i na płaszczyźnie rysunku równoległemi: iednę z nich przeto wykreśliwszy dokładnie, inne wszystkie z łatwością naznaczysz.

Od danego kładu punktu albo linii powrócić do rzutów: kiedy położenie pierwotne płaszczyzny kładowej iest wskazane przez ślady.

244. Niech będzie też sama co i w poprzedzających zadaniach dana płaszczyzna $M'CN$, wzór 4. z naznaczonym kładem K pewnego iey punktu: który iako się na tey płaszczyźnie w pierwotnym swém położeniu znajdował, przez rzuty wyrazić mamy. Odwrotne to działanie, podobnie iak wynaydowanie kładów, dwoiako się skutecznieć może: raz za pomocą kładowej przybranej (237), drugi raz bez tego, lecz za uprzedniem położeniem płaszczyzny kładowej daney (241).

Naprzód przez dany kład K poprowadź KM prostopadłą do śladu CN , znajdującego się wespół z tym kładem na iedney rzutowey płaszczyźnie, a przez punkt M , gdzie przecina oś rzutów, drugą prostopadłą MM' do tey osi. Kład tedy dany w powrocie na pierwsze swe miejsce będzie przebiegał w kierunku wstecznym łuk prostopadły do osi kładowej CN i mający na niey swój środek (237); płaszczyzną więc takiego łuku iest oczywiście NMM' , iako prostopadła do tey osi (162) i przez pomieniony kład przechodząca (143). Ponieważ zatem kład K nie inaczej iak po płaszczyźnie KMM' może być na płaszczyznę $M'CN$ do pierwotnego położenia odprowadzonym, to więc ostatnie położenie iego wskaże linia prosta przecięcia się tych dwóch płaszczyzn, oznaczona przez swoje ślady N i M' (190). Kład Nm rzeczoney linii tak iako wyżey (237) nakreśliż, wespół z kładem Kp łuku mającego się przebiec w ruchu wstecznym danego kładu K . Tak więc oznaczywszy kład posilkowy p punktu żądanego, i poprowadziwszy przezeń linią pP prostopadłą do osi NM przybranej kładowej NMM' , otrzymasz żądany rzut poziomy P , a za nim odpowiedny pionowy P' znajdziesz na przecięciu się pionowego rzutu $N'M'$, linii na której punkt żądany leży, z prostopadłą PP' do osi rzutów, poprowadzoną przez wynaleziony rzut iego P .

245. *Powtóre.* Na tey płaszczyźnie rzutowey, gdzie dany kład K leży, wynaydź nasamprzód kład Ck (240) drugiego śladu CM' daney kładowej płaszczyzny $M'CN$: potem poprowadź linią Kr , równoległą do osi tey kładowej, która będzie kładem linii poprowadzoney przez punkt żądany równoległe względem teyże osi CN (241); taka więc linia ieden tylko pionowy ślad dadź może (182), a ten na pionowym śladzie CM' , płaszczyzny, na której ta linia leży, wynaydziesz odcinając od punktu C rzeczywistą iego odległość równą długości Cr , w iakiey iest względem stałego punktu C kład r wzmiankowanego śladu. Przez rzuty zaś R' i R tego śladu

Tab. III. (142), poprowadziwszy linią (RP, R'P) równoległą do CN (216, oznaczysz na niej rzuty żądanego punktu, gdy przez dany jego kład K poprowadzisz prostopadłą do CN, a od punktu P gdzie spotka poziomy rzut RP, tej linii, prostopadłą PP do osi rzutów. Oznaczony tym sposobem punkt (P, P'), obracając się razem z kładową jego płaszczyzną M'CN, przypadłoby na poziomej w miejscu danego kładu K (237); wskazuje przeto, jak wymaga zadanie, pierwotne położenie takowego kładu.

246. Umiejąc od kładów pojedynczych punktów powrócić do rzutów pierwotnego ich położenia, łatwo zastosujesz toż samo działanie do wszelkich, jak wyżej (242, 243), pojedynczych linii, tudzież kątów lub wielokątów prosto i krzywo-kreślnych, danych jako kłady na płaszczyźnie rysunku, wraz z kładowemi ich płaszczyznami, wskazanemi przez ślady. W takim powrócie jeżeli użyjesz sposobu drugiego (245), a danym kładem jest linia prosta, tedy, zamiast obrania na nim dwóch jakichkolwiek bądź punktów, dogodniej będzie tak go przedłużyć aby się przeciął z kładami obudwu śladów danej kładowej płaszczyzny; jeden z punktów tego przecięcia się, znajdujący się na osi kładowej, będzie śladem żądanego położenia linii; drugi zaś, wyrażając kład drugiego tej linii śladu (242), wskaże jego odległość od punktu przecięcia się z osią rzutów pomienionej kładowej płaszczyzny; mając tedy ślady wynajdziesz tym samym żądaną linię rzuty (142, 180.) W sposobie pierwszym (244) jeden tylko ślad takiej linii, na przecięciu się danego jej kładu z osią kładowej, mieć będziesz: dla wykreślenia więc rzutów tej linii potrzeba jeszcze na oznaczonym jej kładzie obrać dowolnie punkt jeden i wynaleźć rzuty ukazujące położenie jego pierwotne (244), a dopiero potem połączyć je z odpowiednemi rzutami śladu znanego: który, znajdując się na osi kładowej równie należy do kładu danego jak i do żądanych rzutów linii.

Mając przez ślady oznaczoną płaszczyznę, wykreślić kłady kątów mierzących jej nachylenie do rzutowych, kiedy te ostatnie wzajemnie są prostopadłemi.

wzór 4.

247. Daną płaszczyznę jest jeszcze też sama M'CN: żądane zaś kąty, mierzące nachylenie jej względem rzutowych, mieć będą, jak wiadomo, wierzchołki swoje na śladach tej płaszczyzny, a ramiona na płaszczyznach prostopadłych do tych śladów. Jeżeli przeto na poziomym np. śladzie CN obierzesz dowolny punkt N i poprowadzisz przezeń płaszczyznę NMM' prostopadłą do tego śladu, tedy ona przetnie poziomą po linii NM (162), daną zaś po linii łączącej dwa punkta N i M' (190), a te dwie linie, prostopadłe przy punkcie N do śladu CN, oznaczą przez wzajemne ich nachylenie, pochyłość danej do poziomej płaszczyzny. Dla wskazania więc rzeczywistej wielkości tego kąta potrzeba na płaszczyźnie rysunku wykreślić kład trójkąta mającego swoje wierzchołki w punktach N, M, M'; co, podług sposobów podanych wyżej, dwojako się skutecznie może: raz na płaszczyźnie poziomej (227) i takim będzie trójkąt NMm oznaczający przy punkcie N wielkość żądanego kąta; drugi raz na płaszczyźnie pionowej (228), gdzie kład M'Mn tegoż samego trójkąta, przy wierzchołku swoim n, żądany kąt mieć będzie. Toż samo wykreślenie, zastosowane do pionowego śladu danej płaszczyzny, wskazałoby jej pochyłość względem płaszczyzny pionowej.

248. Kłady NMm i MM'n prostokątnych trójkątów, do których wchodzi żądany kąt po-

chyłości płaszczyzny wyrażoney przez dwa ślady, możnaby równie wykreślić, mając ieden Tab. III. z tych śladów wspólnie z pomienionym kątem: a następnie umieścić ie w takim położeniu aby przeciwprostokątna padła na płaszczyznę, do której ślad dany należy, i tym sposobem znaleźć punkt na śladzie drugim. Odwrotne to działanie służy na taki przypadek, *kiedy, mając naznaczony ślad ieden płaszczyzny i wiadome iey nachylenie względem którejkolwiek rzutowey, szukamy śladu drugiego.* I tak np. gdyby wspólnie z pionowym płaszczyzny śladem dane było iey nachylenie względem poziomey, natenczas, przez obrany na tym śladzie punkt którykolwiek M' , poprowadziłbyś prostopadłą $M'M$ do osi rzutów, a na tey prostopadłej przy punkcie rzeczonym wykreśliłbyś kąt MMn dopełniający danemu do wielkości kąta prostego; potem zaś wzięwszy za środek rzut M obranego punktu i długością Mn , odciętą na osi rzutów, zakreśliwszy łuk nN , poprowadziłbyś przez punkt C styczną CN do tego łuku. Tym sposobem wyraziłbyś przez dwa ślady płaszczyznę MCN , mając dany ieden z nich CM' , tudzież kąt $M'nM$ nachylenia tey płaszczyzny względem poziomey (247).

Mając dane rzuty dwóch linii prostych wykreślić na płaszczyźnie rysunku miarę wzajemnego ich nachylenia.

249. Dwie nierównoległe linie proste mogą się wzajemnie przecinać i wtedy leżą wspólnie na iedney płaszczyźnie: albo, gdy po obudwu razem żadna płaszczyzna przesunąć się nie może, natenczas zgoła się nie przecinają; w obu atoli przypadkach miarą wzajemnego ich ku sobie nachylenia jest kąt, iaki w razie pierwszym czynią przy punkcie wzajemnego przecięcia się, w drugim zaś ten, iaki którakolwiek z dwóch linii danych, przy punkcie dowolnie na niey wziętym, tworzy z równoległą do drugiej przez ten punkt poprowadzoną. Z tego względu podane zadanie w pierwszym tylko rozwiążemy przypadku.

250. Niech dwiema liniami danemi będą np. $(AB, A'B')$ i $(DC, D'C')$ które się w punkcie wzór 5. (P, P') przecinają wzajemnie (135, 173). Kąt przy tym punkcie oznaczony przez rzuty $(APD, A'P'D')$ jest na płaszczyźnie kładowey $A'FC$ przesuniętey po dwóch liniach danych (208): tę obracając już to około poziomego iey śladu FC , już około pionowego $A'F$, wynaydziesz na poziomey lub na pionowej płaszczyźnie żądany kład wierzchołka rzeczonego kąta. Pierwszy z tych kładów K jest na linii Pn , poprowadzoney przez poziomy rzut P prostopadłe do takiegoż śladu FB płaszczyzny kładowey, w oddaleniu od tego śladu na długość Kn , równą przeciwprostokątney nq trójkąta prostokątnego w punkcie P , wykreślonego z linii Pn i $P'o$ (237); linie zaś KB i KC , łączące go z kładami B i C śladów dwóch linii danych (242), tworzą na płaszczyźnie rysunku żądany kład kąta wzajemney ku sobie pochyłości tych dwóch linii. Takimże kładem na płaszczyźnie pionowej jest kąt bQc , który tworzą kłady linii danych wykreślone na tey drugiej płaszczyźnie, za pomocą linii Fe (242), będącey kładem śladu poziomego płaszczyzny kładowey $A'FC$ (240). Przeniesione bowiem na ten kład ślady poziome B i C , w takiej iak są odległości względem punktu stałego F , i połączone z kładami A' i B' drugich nieruchomych w tém działaniu śladów linii danych, dały ich kłady bA' i cD' przecinające się w punkcie Q : który, iako wierzchołek żadanego kąta, powinien być oraz kładem punktu (P, P') . W dokładnym przeto wykreśleniu kład takowy będzie także na linii $P'm$, poprowadzoney przez

Tab. III. rzut pionowy wzmiankowanego punktu prostopadle do takiegoż śladu $A'F$ kładowey iego płaszczyzny: tudzież na kładzie sQ linii przechodzącej przez ten sam punkt i równoległej do tego śladu, a której rzut poziomy PS , równoległy do osi rzutów, wskaźnie poziomy iey ślad S , następnie zaś i kład s tego śladu (241).

Wykreślić miarę nachylenia linii prostej, oznaczonej przez rzuty, względem płaszczyzny wyrażonej przez ślady.

251. Przez daną linią prostą poprowadzisz płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny danej (223) i linią wzajemnego przecięcia się tych dwóch płaszczyzn oznaczysz (190): będzie ona rzutem prostym danej linii na płaszczyźnie danej (8), a kąt jaki z tą linią uczyni wskaże wzajemne do siebie nachylenie danych dwóch wielkości (230); żądany zaś kład tego kąta albo wprost wynaydziesz poprzedzającym sposobem (250), albo, dla uproszczenia wykreśleń, szukając wprzód dopełnienia iego do kąta prostego, iak następuje:

wzór 6. 252. Ku temu celowi obierz na linii danej ($ED, E'D'$) punkt dowolny *np.* (E, E') i poprowadź przezeń linią ($Es, E's'$) prostopadłą do danej płaszczyzny ACB' (162); kąt ($DEs, D'E's'$) razem z żądanym złożone utworzyłyby kąt prosty. Punkta albowiem w których linia dana i poprowadzona przebiiają daną płaszczyznę, wspólnie z punktem (E, E') są wierzchołkami kątów prostokątnego trójkąta: a zatem jeden z nich, mierzący wzajemne nachylenie linii i płaszczyzny danej (251), będzie oczywiście dopełnieniem kąta ($DEs, D'E's'$). Wykreśliwszy przeto kład sKr tego ostatniego (250), a przez wierzchołek K poprowadziwszy prostopadłą do jednego któregoś ramienia, otrzymasz dopełnienie tego kąta do kąta prostego, iak jest mKr , ukazujące nachylenie linii ($ED, E'D'$) do płaszczyzny danej ACB' .

Wykreślić miarę wzajemnego nachylenia dwóch płaszczyzn oznaczonych przez ślady.

Tab. IV. 253. Na linii ($BAP, B'A'P'$), po której się przecinają dwie dane płaszczyzny $A'CE$ i $A'DF$ (190), obierz dowolnie punkt (P, P') i poprowadź przezeń płaszczyznę EIN prostopadłą do tej linii (221); przetnie ona dwie dane płaszczyzny po liniach czyniących kąt wzajemnego do siebie nachylenia tych płaszczyzn, którego kład masz wykreślić na płaszczyźnie rysunku. W rzutach ten kąt oznaczyć się może przez wierzchołek (P, P') i punkta E, F , albo N, M , należące do ramion tego kąta, iako wspólne płaszczyźnie poprowadzonej EIN i każdej w szczególności z dwóch płaszczyzn danych. Jeżeli więc tę płaszczyznę, iako kładową rzeczzonego kąta (250), będziesz obracał około poziomego śladu EI , tedy punkta E i F pozostaną na swoim miejscu, a wierzchołek wzmiankowanego kąta (P, P') padnie w punkcie K (237): łączące zatem linie KE i KF będą kładami obudwu iego ramion. Obracając zaś około drugiego iey śladu IN , kład tegoż samego wierzchołka znaydziesz w innym punkcie Q , a połączywszy go z punktami N i M , należącemi do ramion tegoż kąta, otrzymasz drugi kład iego MQS . Oba te kłady naznaczyły się kropkowemi rysami iako zakryte przez płaszczyzny dane.

wzór 2. 254. *Inny sposób.* Do linii ($AB, A'B'$) wzajemnego przecięcia się danych dwóch płaszczyzn ACB' i ADB' (190) poprowadź gdziekolwiek prostopadłą płaszczyznę EIN (162); będzie ona kładową żadanego kąta, mającego swój wierzchołek w tym punkcie gdzie ją przebie pomie-

niona linia (252). Dla wykreślenia zaś kładu tego wierzchołka na płaszczyźnie *np.* poziomey, Tab. IV. obierziesz płaszczyznę *ABB* za przybraną jego kładową: będzie on przeto na linii wzajemnego przecięcia się tych dwóch kładowych płaszczyzn, równie jak na oznaczoney przez rzuty linii (*AB, A'B'*). Kładem przybrany tym ostatni, na płaszczyźnie rzutów poziomych, jest *Ab* (227): pierwszy zaś przejdzie przez punkt *p* (190) w kierunku prostopadłym do wykreślonego już kładu *Ab*, i tak się tu poprowadziła linia *pq*; w pierwotnym albowiem położeniu swoim jest ona prostopadłą do linii (*AB, A'B'*). Tym sposobem wynalazłszy kład przybrany *q* wierzchołka żadanego kąta, wskażesz na płaszczyźnie rysunku rzeczywistą odległość *pq* tego wierzchołka od poziomego śladu *IE* głównej kładowej płaszczyzny *EIN*. Kładąc ją zatem na płaszczyźnie poziomey, wzmiankowany wierzchołek padnie w punkcie *Q*, na prostopadłej *Ap* do osi tej kładowej (237): ślady zaś *F* i *E* ramion żadanego kąta (253) pozostaną na swoim miejscu; połączone więc z wynalezionym kładem *Q*, utworzą na płaszczyźnie rysunku kąt *FQE* mierzący wzajemnie ku sobie nachylenie dwóch płaszczyzn danych. Dla sprawdzenia możnaby podobne temu wykreślenie powtórzyć na drugiej rzutowej płaszczyźnie: albo wynaleźć na tej samej kłady pionowych śladów ramion rzeczzonego kąta (242), przez które wykreślone dopiero kłady tych ramion przechodzić takż powinny (250).

Używając w sposobie odwrotnym tych samych działań rozwiążemy następujące z kolei zadanie.

Wykreślić ślady płaszczyzny poprowadzonej przez daną linią prostą, tak aby jej pochyłość do innej oznaczonej płaszczyzny równą była kątowi danemu.

255. Pomijając szczególne położenia linii i płaszczyzny danej względem rzutowych (221), zastanowimy się tu tylko nad trzema przypadkami w jakich te dwie wielkości względem siebie być mogą, to jest: kiedy linia prosta, przez którą ma przechodzić żadana płaszczyzna, leży na płaszczyźnie danej, albo kiedy jest równoległą, lub nakoniec kiedy jest iakkolwiek nachyloną do niej.

Naprzód. Mając daną płaszczyznę *ACB'* z linią prostą (*AB, A'B'*) na niej leżącą (164, 188), do tej ostatniej poprowadź prostopadłą inną płaszczyznę *FLN* (162), kładową kąta pochyłości płaszczyzny żadanej względem płaszczyzny danej (254), którego wielkość wskazana jest przez kąt *np.* *V*. Wynalazłszy potem punkt (*P, P'*), gdzie dana linia (*AB, A'B'*) przebiega poprowadzoną płaszczyznę *FLN* (197), umieścisz w tym punkcie wierzchołek danego kąta *V*, tak aby jedno jego ramie znajdowało się na linii (*FO, F'O'*), wspólnej płaszczyźnie danej i poprowadzonej (190), drugie zaś znajdując się na poprowadzonej, będzie oraz na płaszczyźnie żadanej. Na ten koniec wynadziej kład *K* (237) punktu (*P, P'*), tudzież kład *KO* (242) linii (*FPO, F'P'O'*): a na tym ostatnim przy punkcie *K* wykreślisz kąt równy danemu *V*; takimi są: z jednej strony kładu *KO*, kąt *OKN*, z drugiej zaś *OKI*; będą one kładami kątów pochyłości płaszczyzny danej względem dwóch innych, które, podług warunków zadania, przez linią (*AB, A'B'*) poprowadzić można. Obracając następnie ruchem wstecznym, około śladu poziomego *LN*, kładową tych kątów płaszczyznę, i tym sposobem przeniosłszy wspólny ich wierzchołek *K* na właściwe mu miejsce (*P, P'*), punkta *N* i *I* ramion tych kątów, będące na osi

wzór 3.

Tab. IV. kładowey, pozostaną w pierwszym swém miejscu, to jest na płaszczyźnie poziomey, i iako poziome ślady tych ramion, wspólnie z takimże śladem A linii daney, dadzą poziome ślady ANE i AID, a następnie i pionowe EB' i DB' obudwu położen płaszczyzny żądaney.

256. *Powtóre*: kiedy linia prosta, przez którą ma przechodzić płaszczyzna żądana, jest równoległą do płaszczyzny daney, płaszczyzna taka przetnie tę ostatnią po linii równoległej względem daney linii prostej; płaszczyzna zatem kąta wzajemney pochyłości tych płaszczyzn będzie prostopadłą do linii daney. Jeśli więc przez punkt, wzięty dowolnie na linii daney, poprowadzisz prostopadłą do niej płaszczyznę i linią prostopadłą do płaszczyzny daney (162): a tak poprowadzoną płaszczyznę położywszy na płaszczyźnie rysunku, jeśli, przy kładzie obranego punktu, z obu stron kładu linii poprowadzoney, wykreślisz kąty równe i dopełniające z osobna kąt dany do wielkości kąta prostego: natenczas umieściwszy je, razem z kładową ich płaszczyzną, we właściwem dla niej miejscu, ramie wspólne tych kątów powróci do prostopadłego położenia względem płaszczyzny daney, a drugie ich ramiona będą nachylone do niej pod kątami równającemi się kątowi danemu (252). Każde przeto z tych ramion, wspólnie z linią daną, oznaczy (208) jedno z dwóch położen płaszczyzny, zadosyć czyniącey zadaniu w tym drugim przypadku.

wzór 4. 257. *Naostatek*, niech będzie dana linia (AB, A'B'), iakkolwiek nachylona do płaszczyzny LCE', i przebiegająca ją (199, 200) w punkcie *np.* (*s, s'*): przez który przejdą linie przecięcia się tej płaszczyzny z dwoma położeniami płaszczyzny żądaney (255), nachylonemi do niej pod kątem danym *bVd*. Przez punkt *np.* (A, A'), obrany na linii daney, poprowadziwszy prostopadłą (AG, A'G') do płaszczyzny daney LCE' (162) naznacz punkt (G, G') wzajemnego ich przecięcia się (199): każda tedy linia, przechodząca przez punkt (A, A') i nachylona do płaszczyzny LCE' pod kątem równym danemu *bVd*, uczyni z linią (AG, A'G') kąt dopełnienia i w iednakiey od punktu (G, G') odległości przebieie tę płaszczyznę; miejscem więc wszystkich takich punktów przebiecia będzie okrąg koła zakreślony na płaszczyźnie rzeczoney z oznaczonego na niej środka (G, G'). Na poziomey *np.* położywszy płaszczyznę LEE', kładową dwóch linii (AG, A'G') i (LE, L'E'), kładem tej ostatatniej będzie Lk (237, 242), a prostopadła do niej *ha* poprowadzona przez kład *h* punktu (G, G') wyrazi kład pierwszy: kład zaś punktu (A, A') wypadnie na przecięciu się tej prostopadłej z linią *Aa*, przechodzącą przez poziomy rzut tegoż punktu i prostopadłą do osi kładowey AE. Przy punkcie zatem *a*, na linii *ah*, wykreśliwszy kąt *haf* równy *bVa*, to jest: dopełniający do kąta prostego dany kąt *bVd*, wynaydziesz kład *af* linii przechodzącey przez punkt (A, A') i nachyloney do płaszczyzny LCE' pod kątem równym danemu *bVd*; punktu więc gdzie tę płaszczyznę przebieie będzie oczywiście kładem punkt *f*, a linia *fh* wyrazi długość promienia okręgu koła mającego się, ze środka (G, G'), na płaszczyźnie daney zakreślić. Tę ostatnią kiedy położysz na płaszczyźnie poziomey otrzymasz, za pomocą kładów posiłkowych *f, h*, (237), kłady H i F środka i iednego punktu okręgu, wspólnie z kładem *q* punktu (*s, s'*), należącego do linii po których płaszczyzna dana będzie przeciętą przez obadwa położenia płaszczyzny żądaney. Lecz że takowe linie powinny mieć także po iednym punkcie na tym okręgu, kładami ich przeto będą linie styczne do kładu tego okręgu, przez punkt *q* poprowadzone; iaką tu jest linia *qr*, a odpowie-

wiedna iey (246) na płaszczyźnie daney ($sR, s'R$). W punkcie albowiem gdzie ta ostatnia sty- Tab. IV.
czną jest do okręgu mającego na sobie punkta przebicia daney płaszczyzny, przez oznaczone
wyżey linie, jest prostopadłą do promienia tego koła, a następnie i do płaszczyzny przechodzący przez ten promień i linią ($GA, G'A$), tudzież do linii łączącej punkt dotknięcia się z punktem (A, A'), która z tym promieniem czyni kąt równy danemu bVd ; ten zaś, iako miara nachylenia płaszczyzny daney do płaszczyzny przechodzący przez dwie linie ($As, A's$), ($Rs, R's$), pokazuje, że ta ostatnia jest jednym z dwóch położen płaszczyzny żądanej: które się tu oznaczyło przez ślady $R'DI$ wskazanym wyżey (208) sposobem. Drugi tego zadania wypadek podobnieby się wyraził za pomocą drugiej styczney, poprowadzoney przez punkt q , do kładu wzmiankowanego okręgu.

258. Ostatni ten sposób uczy, iak *wykreślić ślady płaszczyzny przechodzący przez daną linią prostą i nachyloney do którejkolwiek płaszczyzny rzutowey pod pewnym naznaczonym kątem*. Na ten koniec, przez punkt obrany na linii daney, poprowadzisz linią prostopadłą do pomienioney rzutowey płaszczyzny, tudzież drugą nachyloną pod kątem równym danemu: a przez punkt gdzie ta ostatnia przebie rzezoną płaszczyznę zakreśliwszy okrąg koła, z punktu gdzie ią przebiia linia pierwsza, poprowadzisz stycznę do tego okręgu, przechodzące przez ślad linii daney oznaczony na tey samey rzutowey płaszczyźnie. Stycznę takowe będą śladami dwóch różnych położen płaszczyzny żądanej: drugie ich ślady przejdą przez drugi ślad linii daney, tudzież przez punkta przecięcia się pierwszych z osią rzutów. I tak *np.* ięśli jest dany kąt pochylności płaszczyzny żądanej względem pionowey, tedy rzut pionowy punktu obranego na linii daney będzie środkiem koła, które masz zakreślić na płaszczyźnie pionowey; promień zaś ięgo łączno wynaydziesz na linii poprowadzoney przez ten środek równolegle do osi rzutów. Poprowadziwszy albowiem przez drugi rzut tego punktu linią nachyloną do osi rzutów pod kątem równym danemu, to ięst: czyniącą kąt dopełnienia z linią łączącą takowe dwa rzuty, poprowadzisz przez punkt przecięcia się iey z osią rzutów linią prostopadłą do tey osi, która na poprowadzoney linii równolegley wskaże punkt należący do okręgu wzmiankowanego koła, iako ślad pionowy linii równolegley do płaszczyzny poziomey, a z pionową czyniącey kąt równy danemu.

Wykreślić wzajemną odległość dwóch linii prostych nie przecinaiących się.

259. Dane w tym sposobie dwie linie proste iężeli są równoległemi, tedy wzajemne ich oddalenie, iędnakie w całej długości, mierzy się, iak wiadomo, na linii prostopadle do nich poprowadzoney po płaszczyźnie wspólney tym dwóm liniom. Wykreśliwszy przeto ślady takowey płaszczyzny (212), iężeli ią, razem z liniami danemi, położysz na którejkolwiek rzutowey, a do wykreślonych kładów tych linii (242) poprowadzisz wspólną prostopadłą: to część tey prostopadley, zawarta pomiędzy rzezonemi kładami, ukaże na płaszczyźnie rysunku iaka jest rzeczywista odległość dwóch linii danych.

260. Dwie linie proste nieprzecinaiące się iężeli też nie są równoległemi, to chociaż nie mogą bydź razem na iędney płaszczyźnie, atoli i w tym przypadku wzajemne ich oddalenie mierzymy przez część linii prostopadley do obu, a która łączy tych dwóch linii punkta nay-

Tab. IV. więcey ku sobie zbliżone. Jeżeli przeto po iedney z nich poprowadzisz płaszczyznę równoległą do drugiej (217), tedy stateczna odległość tey płaszczyzny względem wszystkich punktów linii drugiej, równą będzie naywiększemu zbliżeniu się punktów wzmiankowanych dwóch linii, czyli, iak się zwykle mówi, naykrótszey ich odległości. Jeżeli zaś na płaszczyźnie w tym sposobie poprowadzoney wykreślisz rzut prosty (5, 8) linii drugiej, a od punktu w którym się przebie z pierwszą, wyprowadzisz prostopadłą do tey płaszczyzny, natenczas taka prostopadła, iako znajduiąca się na płaszczyźnie rzuciącey linią drugą, musi ją koniecznie spotkać i równie do niey, iak do pierwszej linii daney, bydź prostopadłą. Ostatnie to wykreślenie wykonamy na wzorze.

Tab. V.
wzór 1. 261. Przez ieden ze śladów (A, A'), lub inny iakikolwiek punkt daney linii ($AB, A'B'$), poprowadź ($AE, A'E'$), równoległą do drugiej daney ($CD, C'D'$), a przez ślady pierwszej daney i tak poprowadzoney nakreślisz ślady płaszczyzny AFB' , przechodzącey przez linią ($AB, A'B'$) i równoległej do ($CD, C'D'$). Na tey ostatniey obrawszy dowolnie punkt *np.* (C, C'), poprowadź linią ($CK, C'K'$) prostopadłą do płaszczyzny AFB' (162), przez punkt zaś (K, K'), gdzie ona tę płaszczyznę przebie (199), drugą linią ($KX, K'X'$) równoległą (216) względem daney ($CD, C'D'$). Tym sposobem, na płaszczyźnie AFB' , otrzymasz (166) rzut prosty linii ($CD, C'D'$): płaszczyzna bowiem przesunięta po tych dwóch równoległych liniach, przejdzie też i przez trzecią ($CK, C'K'$), a zatem prostopadle rzuci linią ($CD, C'D'$) na poprowadzoną płaszczyznę AFB' . Nakoniec przez punkt (X, X'), wspólny linii daney ($AB, A'B'$) i rzutowi ($KX, K'X'$) linii drugiej, gdy po rzuciącey ją płaszczyźnie poprowadzisz linią równoległą względem ($CK, C'K'$), część tey równoległej ($XY, X'Y'$) pomiędzy dwiema danymi zawarta, oznaczy w rzutach naykrótszą ich odległość: będzie albowiem do obudwu razem prostopadłą (260); sposobem zaś wyżey podanym (233) potrafisz wykreślić na płaszczyźnie rysunku rzeczywistą długość tey odległości. Dokładność samego wykreślenia da się widzieć na końcu, kiedy wynalezione rzuty X i X' , tudzież Y i Y' , należące do poiedynczych punktów przestrzeni, są, iak bydź powinny (135), na liniach prostopadłych do osi rzutów.

wzór 2. 262. W przypadku kiedy iedna z dwóch linii danych prostopadłą iest do którejkolwiek płaszczyzny rzutowey, iak *np.* ($A, A'Z'$), wtedy naykrótsza iey odległość od drugiej daney ($CD, C'D'$), z którą się ani przecina, ani iest równoległą (173, 174), wypada z nader prostego wykreślenia. Jakoż: dosyć iest w tym razie przez punkt A , będący rzutem iedney linii daney, poprowadzić prostopadłą do takiegoż, iak on rzutu CD linii drugiej, a od punktu X , gdzie go ta prostopadła napotka, wynieść inną prostopadłą XX' do osi rzutów; nakoniec, równoległe do tey osi, poprowadzić linią $X'Z'$ przez punkt przecięcia się drugiej prostopadłej z rzutem $C'D'$ linii daney. Linia oznaczona rzutami ($XA, X'Z'$) iest oczywiście prostopadłą do obudwu linii danych: wskaże przeto naywiększe ich ku sobie zbliżenie; będąc zaś równoległą względem iedney rzutowey płaszczyzny (166), wyrazi, przez długość wykreślonego na niey rzutu XA , rzeczywistą wielkość takiego zbliżenia.

263. Opisane tu wykreślenie wprost z poprzedzającego (260) wypływa: linia albowiem ($X, E'X'$), wspólna płaszczyznom CDD' i ABC' (192), prostopadłym do siebie (161), iest rzutem prostym daney linii ($A, A'Z'$) na równoległej do niey płaszczyźnie CDD' ; przecina za-

tém drugą linią daną ($CD, C'D'$). Naostatek linia (XA, XZ), przechodząca przez punkt (X, X') Tab. V. przecięcia się jedney linii danej z pomienionym rzutem linii drugiey, iest, iak bydz powinna (260), prostopadłą do płaszczyny CDD' (162).

Toż samo uproszczenie wykreśleń i wtenczas może mieć miejsce kiedy jedna z dwóch danych linii iest równoległą do osi rzutów: tém samém albowiem będzie prostopadłą do rzutowey trzeciey.

Przez punkt przecięcia się dwóch danych linii prostych poprowadzić trzecią, tak, aby tworzyła z niemi kąty wskazaney wielkości.

264. Weźmy np. dwie linie proste ($AB, A'B'$) i ($DC, D'C'$), oraz kąty r, s , w iakiém wzór 3. do nich nachyleniu ma się poprowadzić żądana linia trzecia, przez punkt (P, P') wzajemnego przecięcia się takowych linii. Ku temu celowi naznaczywszy ślady obudwu linii danych, a następnie, wskazawszy kładową ich płaszczynę DEA' (208), wykreślisz, iak wyżej (242) kłady BK i DK pomienionych linii, mierzące kątem oKm wzajemne ich nachylenie (250). Potém na ramionach wykreślonego kąta, przy wierzchołku K , położysz dwa inne oKG i mKF , równe danym s, r , wyrażającym nachylenie linii danych, odpowiednich kładom oKB i mKD , względem żądanej trzeciey; na skrajnych zaś ramionach wykreślonych tym sposobem kątów obrawszy, w iednakowém oddaleniu od wspólnego ich wierzchołka K , dwa dowolne punkta np. G i F , iezelibyś ie obracał naokoło ramion środkowego kąta oKm , dopóki się nie spotkają z sobą, tedy oczywiście położenie takowe ramion trzech wykreślonych tu obok siebie kątów GKo, oKm, mKF , byłoby podobne temu, w iakiém powinna się poprowadzić linia żądana względem dwóch linii danych. Oznaczywszy zatém pochyłość płaszczyny rzeczonych kątów (265), poprowadzisz przez każdą z dwóch danych linii dwie płaszczyny, w takiém nachyleniu do płaszczyny DEA' (255) na której leżą, iaka iest pochyłość płaszczyny kąta przyległego kładowi tej linii względem płaszczyny rysunku; cztery oznaczone tym sposobem płaszczyny wzajemnie się przetną po dwóch liniach danych i dwóch innych zadosć czyniących zadaniu: które z tego względu do nieoznaczonych należy.

265. Pochyłość płaszczyny rysunku, na której kąt oKm nieporuszonym zostaje, do dwóch innych oKG i mKF tak nachylonych ku sobie, że skrajne ich ramiona a mianowicie punkta G i F razem się w ieden zeszyły, łatwo wynadziesz prowadząc przez kłady tych punktów linie Gy i Fy prostopadłe do osi ich obrotu (264); będą one albowiem, na płaszczynie rysunku, rzutami prostemi łuków przebieżonych przez pomienione punkta (163), a wzajemném przecięciem się wskażą rzut y punktu wspólnego tym łukom, to iest: miejsce spotkania się punktów G i F biegnących po tych łukach, które takóž bydz musi i na linii prostopadłej w punkcie y do płaszczyny rysunku. Nakreśliwszy zatém, ze środków o, m , promieniami oG i mF , kłady Gp i Fn wzmiankowanych łuków, a przez punkt y poprowadziwszy prostopadłe yp i yn do osi Gy i Fy kładowych płaszczyn, wynadziesz dwa przybrane kłady p, n , punktu wspólnego tym łukom, a następnie kłady poy i nmy żądanych kątów nachylenia, w iakiém mają bydz poprowadzone, względem płaszczyny DEA' , cztery inne przechodzące przez linie dane

Tab. V. (264). Nie koniecznie atoli masz wykreślać ślady takowych płaszczyzn: obadwa bowiem wypadki tego zadania nierównie prościej otrzymasz następującym sposobem.

266. Na płaszczyźnie *np.* pionowych rzutów, uczyniwszy przygotowanie podobne poprzedzającemu (264), wynajdziesz rzut x i kład posilkowy l takiego punktu, przez który przejdzie linia zbiegu dwóch ramion Qg i Qf wykreślonych iak wyżey kątów, równaiących się danym s , r . Jeśli przeto kład Q odprowadzisz do pierwotnego położenia (P, P') i na kładowey jego płaszczyźnie DEA' , wynajdziesz punkt (X, X') , odpowiadający wskazanemu na płaszczyźnie rysunku rzutowi x (244), tedy poprowadzona przez ten punkt linia $(YZ, Y'Z')$, prostopadła do płaszczyzny DEA' , wyrazi, przeniesioną w tym sposobie, linią prostopadłą w punkcie x do płaszczyzny rysunku. Lecz, ponieważ na tey ostatniej linii, w odległości xl względem rzutu x , zbiegają się punkta g, f , obracających się ramion Qg i Qf , równie z iedney iak z przeciwney strony płaszczyzny rysunku: odciawszy przeto pomienioną długość xl , w obie strony od punktu (X, X') , na prostopadłej $(YZ, Y'Z')$ wynajdziesz (267) dwa punkta (X, X') i (Y, Y') oznaczające, wspólnie z punktem (P, P') , obadwa położenia linii żądaney. Jedno z nich $(PY, P'Y)$, wyrażone na wzorze, wspólnie z liniami danemi, tworzy przy punkcie (P, P') ieden z dwóch kątów tróyciennych składający się z kąta $(BPD, B'P'D')$ tudzież dwóch innych $(BPN, B'PN')$ i $(DPN, D'PN')$ równych danym s, r . Sciany tego bryłowego kąta, przecinając płaszczyznę poziomych rzutów, zostawiają na niey tróykąt BDN : a przedłużone za wierzchołek (P, P') tworzą z płaszczyzną pionową inny tróykąt $A'CM'$: które na tych płaszczyznach są podstawami dwóch ostrosłupów tróyciennych, mających wspólny wierzchołek w punkcie danym (P, P') , a w tym wierzchołku iednacie i przeciwległe tróycienne kąty. Dwa także same ostrosłupy otrzymałbyś przez wykreślenie drugiego wypadku tego zadania; pochyłość ich atoli do rzutowych płaszczyzn, a następnie i podstawy ich na tych płaszczyznach byłyby w ogólności różne od podstaw i nachyleńia wykreślonych tu ostrosłupów.

267. Dla odcięcia na linii $(YZ, Y'Z')$ wspomnianych długości, posłużył tu przybrany kład α (244) punktu (X, X') . Poprowadzona bowiem, przez ten kład, prostopadła $\beta\delta$ do kładu $w\lambda$ linii $(vX, v'X')$, wspólney płaszczyźnie DEA' i prostopadłej z nią $x'v'v$, iest oczywiście kładem linii $(YZ, Y'Z')$; na nim więc w obie strony od kładu α odciać wprzód należało długość xl , wziętą z płaszczyzny rysunku, aby, wskazane tym sposobem kłady β, δ , końców takowey długości, przenieść na rzut pionowy $Y'Z'$, po liniach $\beta Y', \delta Z'$ prostopadłych do osi kładowey $v'x'$, a na poziomy YZ po prostopadłych $Y'Y, Z'Z$ do osi rzutów.

Po rozwiązaniu tego zadania możnaby iuż wykreślenia z powierzchniami rozpocząć, iako przywodzące się po naywiększey części do wyłożonych działań z liniami i płaszczyznami: a które pod tym względem elementarną nieiako część nauki składają. Następujące iednak z kolej ćwiczenia ukażą *naprzód*: taki rodzaj tróywymiarowych działań, które za pomocą iedney tylko rzutowey płaszczyzny, będącey oraz płaszczyzną rysunku, przez właściwe im wykreślenia wykonywamy: a to natenczas kiedy wielkość geometryczna daie się przywieść do pewnego układu niewielu punktów, w którym położenie każdego względem trzech innych znanych, albo iest dane, albo z warunków zadania łatwo wynalezionem bydź może. *Powtóre*: na przykładach brył prostokręślnych foremnych, wskaże się iak inne wszelkie tego rodzaju w rzu-

tach wyrażamy, kiedy są dokładnie w sposobie geometrycznym opisanemi; tudzież iak, za Tab. V. odmianą albo położenia bryły, albo rzutowych płaszczyzn, od iednych do drugich przychodzimy rzutów. Działanie to w geometryi wykreslney, chociaż nie tak częstego użycia iak w analityczney, przyda się atoli w dalszym ciągu, mianowicie w zagadnieniach odnoszących się do wirowych powierzchni.

ĆWICZENIA.

Znając wielkość trzech kątów płaskich, składających kąt trójskienny, wynaleść trzy inne, mierzące wzajemne nachylenie ścian tego kąta.

268. Weźmy *np.* wykreslony wyżej (266) kąt (PBDN, P'B'D'N') składający się ze trzech wzór 3. kątów płaskich, których rzeczywistą wielkość ukazują kąty r , s , oKm , dane na płaszczyźnie rysunku; na niey podobnie wyrazić potrzeba inne trzy żądane, mierzące wzajemną pochyłość ścian rzeczzonego kąta: a co się iuż w części uskutečniło rozwiązując poprzedzające zadanie. Jakoż: umieściwszy obok siebie, na płaszczyźnie rysunku, dane trzy kąty, tak aby ich wierzchołki w ieden się punkt schodziły, i wykonawszy opisane wyżej (264) dalsze przygotowanie, wynaydziesz kąty *po*y, *ny*m, pokazujące nachylenie płaszczyzn GK o i FK m , danych kątów s , r , względem trzeciego oKm , iakie mają w złożonym z nich trójskiennym kącie; pozostaie więc tylko wynaleść kąt trzeci, wzajemnego nachylenia płaszczyzn GK o , FK m , co uskuteczysz następującym sposobem.

269. Od punktów F i G, obranych na ramionach skrajnych, w iednakowém oddaleniu od wspólnego wierzchołka trzech wykreslonych obok siebie kątów, poprowadź linie GL i FH prostopadłe do tych skrajnych ramion: a płaszczyzna przesunięta po tych dwóch prostopadłych liniach, w czasie kiedy pomienione ramiona składają iedną krawędź bryłowego kąta, będzie oczywiście prostopadłą do tej krawędzi; płaszczyznę zaś kąta przeciwnego oKm przetnie po linii LH. Obracając zatém około tej ostatniej linii wzmiankowaną płaszczyznę, iako kładową żadanego kąta, kład q , wierzchołka iego, wynaydziesz na przecięciu się łuków zakreślonych z punktów L i H, promieniami LG i HF: a połączywszy go ze śladami ramion, znajdującemi się na osi kładowey w punktach L i H, otrzymasz rzeczywistą wielkość LqH trzeciego kąta, wzajemney pochyłości ścian (BPN, B'P'N') i (DPN, D'P'N'), na których leżą dane kąty s , r .

Mając w kącie trójskiennym znane dwa kąty płaskie i wzajemną pochyłość ich płaszczyzn, wynaleść kąt trzeci i nachylenie iego płaszczyzny względem płaszczyzn dwóch danych kątów.

270. Dane dwa kąty płaskie, *np.* r , s , połóż na płaszczyźnie rysunku ieden obok wzór 4. drugiego, tak aby ich wierzchołki składały punkt ieden K; obrawszy potem na ramieniu wspólném punkt którykolwiek *np.* n , poprowadź przezeń ślad nF płaszczyzny prostopadłej

Tab. V. do tego ramienia, a mającey służyć jako kładowa trzeciemu kątowi N , mierzącemu wzajemne nachylenie płaszczyzn dwóch kątów danych w trójsięnnym bryłowym kącie. Wyobraź że dwa wykreślone kąty FKn i nKm przyjęły względem siebie takowe położenie, i że pomieniona kładowa płaszczyzna, obracając się około śladu Fn , przeniosła na płaszczyznę rysunku dany kąt pochyłości: kład jego będzie miał swój wierzchołek w punkcie n , jedno ramie na osi kładowej nF , a wielkość naznaczoną zadaniem, to jest: równą wielkości kąta danego N . Lecz, ponieważ płaszczyzna kładowa Fn wspólnie z kątem pochyłości pnF , przeniesie oraz na płaszczyznę rysunku łuk Fp zakreślony ze środka n długością promienia nF , a po którym punkt F przejdzie z płaszczyzny rysunku na właściwe mu miejsce, kiedy się płaszczyzna FKn nachyli ku płaszczyźnie mKn pod kątem danym wzajemnej ich pochyłości, to jest: kiedy się ten punkt znajdzie na ramieniu kąta pnF mierzącego takową pochyłość. Nakreślone więc klady łuku i pomienionego ramienia, za pośrednictwem jedney kładowej płaszczyzny Fn , wskażą przecięciem się wzajemnym kład p tego miejsca gdzie właściwie punkt F znajdować się powinien: a prostopadła py do osi kładowej poprowadzona, odległość jego względem płaszczyzny rysunku.

271. Oznaczony w tym sposobie punkt (y, p) , wspólnie z wierzchołkiem K , wskazują takie położenie ramienia FK względem dwóch innych Km i Kn , iakie być powinno w kącie bryłowym trójsięnnym, złożonym podług warunków zadania. Obracając zatem pomienione ramie naokoło Km , z którym tworzy żądany kąt płaski, punkt (y, p) tego ramienia przejdzie na płaszczyznę rysunku po łuku prostopadłym do osi obrotu, którego początek jest w punkcie (y, p) a koniec na płaszczyźnie rysunku; jeśli przeto kładową jego płaszczyznę yG na tej ostatniej położysz, tedy początek (y, p) przejdzie na linię (y, v) , prostopadłą do osi tej kładowej, w odległości od rzutu y równającej się linii yp : środek zaś m , z którego masz go zakreślić, pozostanie na pierwszym swém miejscu. Przecięcie się nakreślonego w tym sposobie kladu vG z rzutem yG tegoż samego łuku, służącym oraz za oś obrotu płaszczyzny kładowej ymG , oznaczy ślad jego G na płaszczyźnie rysunku, w tém właśnie miejscu przypadający, gdzie się powinien znaleźć punkt (y, p) , po tym łuku biegnący wraz z ramieniem nieznanego kąta, obracającym się naokoło drugiego Km . Połączywszy zatem kład wynaleziony G z punktem stałym K , iako znajdującym się na osi takowego obrotu, wynajdziesz kład KG obracającego się ramienia, a tém samym i wielkość mKG trzeciego płaskiego kąta. Mając zaś w tym sposobie wykreślone na płaszczyźnie rysunku wszystkie kąty płaskie, wchodzące do składu danego trójsięnnego kąta, oznaczysz, iak wyżej (268, 269), miarę wzajemnej ścian pochyłości, to jest: oprócz kąta pny równego danemu N , inne dwa ymv i aoc pozostałe do wynalezienia.

W kącie trójsięnnym, znając dwa kąty płaskie i nachylenie jednego z nich względem płaszczyzny kąta nieznanego, wynaleźć trzeci kąt płaski i dwa inne kąty węgłowe.

wzór 5. 272. Mając np. dane dwa kąty płaskie R , S , i pochyłość pierwszego z nich względem płaszczyzny trzeciego nieznanego, wskazaną kątem Q : dla wynalezienia trzech innych żądanych, połóż na płaszczyźnie rysunku, podobnie iak w poprzedzającym zadaniu, dwa kąty

FKA i AKB równe danym S i R. Na skrajnym zaś ramieniu kąta, którego znasz pochyłość, Tab. V. obierz dowolny punkt *np.* *q*: a przy tym punkcie, na linii *qA* poprowadzonej prostopadle do tegoż ramienia, narysuj kąt *Aqo* równy trzeciemu danemu Q; będzie to kład pochyłości płaszczyzny kąta nieznanego względem AKF, to jest względem płaszczyzny rysunku, na której leży; prostopadła zaś do linii *Aq*, wyprowadzona z punktu A, gdzie się ta linia ze wspólnym danych dwóch kątów ramieniem przecina, napotka kład *qo* drugiego ramienia kąta pochyłości w punkcie *np.* *o*, i tym sposobem wskaże odległość *Ao*, względem płaszczyzny rysunku, punktu (A, o) znajdującego się na płaszczyźnie szukanego kąta. Przez ten punkt poprowadź płaszczyznę FAB prostopadłą do ramienia AK, a tym samym i do płaszczyzny rysunku; będzie ona miejscem biegu punktu B, jeśli go, razem z kątem BKA, około ramienia KA obracać będziesz. Pomieniony zatem punkt nie inaczej się spotka z płaszczyzną nieznanego kąta, iedno na linii wzajemnego ich przecięcia się z płaszczyzną FAB; lecz że droga jego na tej ostatniej jest łukiem zakreślonym z punktu A, promieniem AB: stosownie więc iak pomieniona linia przecina ten łuk w dwóch punktach, lub się go w iednym dotyka, albo żadnego z nim punktu wspólnego nie ma, zadanie będzie albo *nieoznaczoném*, to jest: dwa różne wypadki dającém, albo *oznaczoném* z iednym tylko wypadkiem, albo nakoniec *nierozwiązalnym*, iezeli z trzech rzeczy danych zgoła się kąt trójścienny złożyć nie może. Dla wyśledzenia przeto takowych przypadków potrzeba wykreślić klady łuku i wzmiankowanej linii, za pomocą wspólnej im kładowej płaszczyzny FAB: przez co się oraz i samemu zadaniu, kiedy jest rozwiązalnym, zadosyć uczyni.

273. Punkt (A, o) należący równie do płaszczyzny FAB, iak do płaszczyzny kąta nieznanego, razem z punktem F, wspólnym obudwu tym płaszczyznom, oznaczają linią prostą wzajemnego ich przecięcia się. Kład pierwszego z tych punktów wynaddziesz na linii AK, prostopadłej do osi kładowej FB, odcinając od punktu A odległość jego *Ao* względem tej osi, nasamprzód wynalezioną; drugi zaś F, iako znajdujący się na osi kładowej, będzie kładem samego siebie. Kład przeto linii, wspólnej dwóm wzmiankowanym płaszczyznom, wyrazi linia prosta FC: łuk zaś BLI, zakreślony z punktu A promieniem AB, będzie kładem drogi punktu B. Ponieważ dwa te klady wzajemnie się przecinają w punktach L i I, punkt przeto B na ten przypadek dwakroć z płaszczyzną nieznanego kąta spotkać się może. W pierwszym takowym spotkaniu się, linie oznaczonej długości BK, KF i FL złożą trójkąt, mający przy punkcie K ieden z rozwiązujących zadanie kątów: a takim jest XKF; w powtórnym zaś złożą się inny trójkąt z długości BK, KF i FI, za pomocą których wykreślił się drugi kąt YKF rozwiązujący, podobnie iak pierwszy, toż samo zadanie. Każdy albowiem z tych kątów, wspólnie z dwoma danymi, może utworzyć kąt trójścienny mający pochyłość dwóch ścian wskazaną zadaniem: ich zaś nachylenie względem ściany trzeciej, podobnie iak wyżej (268, 269), z naznaczonej wielkości trzech kątów płaskich iacno wyprowadzić potrafisz.

274. Z sześciu wielkości trójściennego kąta, to jest: trzech kątów płaskich i zależącego od nich nachylenia ścian, mogą być którekolwiek trzy znane; wynadowanie zatem innych niewiadomych prowadzi do sześciu rozmaitych zadań, z których dotąd trzy tylko rozwiązaliśmy. Podane atoli wykreślenia i do trzech pozostałych mogą się zastosować przez pośredni-

Tab. V. ctwo takiego bryłowego kąta, którego by ściany do krawędzi kąta wskazanego zadaniem, a następnie i do ścian jego były prostopadłemi. Przecięcia się albowiem ścian przybranego w tym sposobie kąta, czyli jego krawędzie, będą nawzajem prostopadłemi do odpowiednich ścian kąta drugiego; kąty zaś pochyłości ścian jednego, z odpowiednimi kątami płaskimi w drugim, i wzajemnie, brane po parze będą się dopełniały do dwóch kątów prostych. Znając przeto pochyłość ścian jednego z takowych bryłowych kątów, będą tём samém oznaczone w drugim wszystkie trzy kąty płaskie: z których wyprowadziwszy wzajemne nachylenie ścian tego drugiego (268, 269), znajdziesz kąty płaskie, z których pierwszy, stosownie do wskazaney pochyłości ścian, złożyć się może i t. n. Pierwsze zaś z rozwiązanych trzech zadań rozwiązuie oraz z kolei 4_{te}: *znając pochyłość ścian w kącie bryłowym trójsściennym, oznaczyć kąty płaskie z których się składa.* Drugie z porządku, za pośrednictwem przybranego bryłowego kąta, rozwiązuie 5_{te}: *znając wielkość jednego płaskiego kąta i pochyłość płaszczyzny jego względem ścian dwóch innych nieznanomych kątów, oznaczyć ich wielkość i wzajemne ku sobie nachylenie.* Naostatek trzecie, zastosowane do kąta bryłowego dopełniającego kąt dany, rozwiąże na nim zadanie 6_{te}: *znając jeden kąt płaski, nachylenie jego względem płaszczyzny kąta nieznanego, oraz wzajemną pochyłość dwóch nieznanomych kątów, wchodzących do składu bryłowego trójsściennego kąta, wynaleźć trzy pozostałe wielkości, z takowego składu wynikające.*

275. Wymienione dopiero zadania, wspólnie z poprzedzającymi (268....273), zastosowane do kulistego trójkąta, stanowią sześć głównych trygonometrii kulistej zagadnień: na które, ile dokładność właściwa geometrycznym wykreśleniom pozwala, odpowiedzieć tym sposobem można. Każdemu albowiem trójkątowi kulistemu towarzyszy w środku kuli kąt bryłowy trójsścienny, utworzony przez płaszczyzny kół wielkich, do których boki rzeczzonego trójkąta należą. Kąty płaskie, składające kąt tego rodzaju, mierzą się iak wiadomo bokami kulistego trójkąta: a wzajemne ich nachylenie pokazują linie styczne do tych boków, przez wierzchołki trójkąta poprowadzone, czyli odpowiednie kąty tegoż samego trójkąta.

Mając dane rzuty sześciannu w położeniu równoległym dwóch jego ścian względem płaszczyzny rzutowey, nachylić go razem z płaszczyzną któreykolwiek prostopadłej ściany pod pewnym naznaczonym kątem.

Tab. VI. 276. *Naprzód* określisz w rzutach sześciannu zbudowany na podstawie *np.* (*abcd*, *d'b'*), różnoległy względem płaszczyzny poziomey. W takim jego położeniu rzutem poziomym ściany przeciwległej podstawie będzie, wspólny im, kwadrat *abcd*; w wierzchołkach zaś kątów tego kwadratu przypadną rzuty poziome prostopadłych do podstawy krawędzi. Na pionowej zaś płaszczyźnie, w odległości równej bokowi rzeczzonego kwadratu, od rzutu *d'b'* poprowadziwszy równoległą *yr*, a przez wierzchołki kątów rzutu poziomego prostopadłe *ay*, *cx*, *br*, *ds*, do osi rzutów, wykreślisz rzut pionowy sześciannu *d'yrb'*. *Powtóre* dla oznaczenia w jakim sposobie ma się nachylić ten sześciann ku płaszczyźnie poziomey, pod kątem danym *K*, wskazać należy płaszczyznę jedney któreykolwiek ściany, iak iest *np.* *PNM*, tudzież ślad około którego i w iaką ma się obracać stronę, unosząc z sobą pomieniony sześciann.

277. Jeżeli poziomy ślad PN ma być *np.* osią obrotu płaszczyzny kładowey PNM, tedy Tab. VI. inna, prostopadła do tej osi, bEH będzie miejscem kąta K mierzącego to nachylenie, iakie ma przyjąć, wspólnie z oznaczonym sześcianem ($abcd, a'yrb'$), względem płaszczyzny poziomey. Na ramieniu zatem Eb takowego kąta (247), wykreśliwszy przy punkcie b kład iego GbR , równy danemu K , i odprowadziwszy go na płaszczyznę HEb , kład F , pionowego śladu ramienia Gb , padnie na pionowym śladzie HE tej płaszczyzny, w odległości FE od punktu E , to jest: w punkcie E' pod osią rzutów, jeżeli część Gb tego ramienia ma być nad płaszczyznę poziomą; w razie przeciwnym padłby w punkcie L nad tą osią: druga albowiem część tej linii, pomiędzy śladem pionowym L a poziomym b zawarta, znalazłaby się nad płaszczyznę poziomą. Jeżeli zatem żądane położenie sześcianu ma być w widzialnym płaszczyzn rzutowych kącie, to linia ENQ wyrazi ślad pionowy płaszczyzny kładu: na której się położy ściana ($db, d'srb'$) obracająca się wspólnie z danym sześcianem około drugiego tej płaszczyzny śladu NP , należącego oraz do płaszczyzny kładowey PNM.

278. Krawędź ($b, b'r$) określonego sześcianu, w przejściu na płaszczyznę PNQ , nie inaczej iak po płaszczyźnie bEH drogę swą odbywać będzie: padnie więc na linię wzajemnego ich przecięcia się; na kładzie zatem bG takowej linii (277), odciawszy od punktu b długości ob' i or , pokazujące oddalenie od tego punktu obu końców rzeczoney krawędzi, wskażesz iey kład $\beta\varrho$ na płaszczyźnie poziomey. Ponieważ zaś, oprócz tej krawędzi, ma jeszcze na sobie kładowa iey płaszczyzna całą kwadratową ścianę ($bc, brxc'$), kładem więc tej ostatney będzie kwadrat $\varrho\beta a\gamma$, wykreślony na kładzie wzmiankowaney krawędzi: a odprowadzony razem z płaszczyznę kładową na właściwe iey miejsce bEH , oznaczy się przez rzuty czterech iego wierzchołków, przypadające na płaszczyźnie poziomey w tém miejscu gdzie ślad Eb pomienioney kładowey płaszczyzny przetną linie prostopadłe $\beta B, \varrho R, aC, \gamma X$, poprowadzone przez kłady takowych wierzchołków (244); na pionowej zaś te co odpowiadają rzutom B i R , należącym do punktów płaszczyzny PNQ , wynalazły się przez jedno z początkowych wykreśleń (184), a dwa pozostałe, iako rzuty końców krawędzi prostopadłych w punktach (B, B') i (R, R') do tej samey płaszczyzny, muszą być na liniach $B'C'$ i $R'X'$ poprowadzonych prostopadłe do pionowego iey śladu NQ , podobnie iak są poziome na prostopadłej Rb do śladu poziomego PN (162). Linie zatem $C'X'$ i $B'R'$, łączące po parze wynalezione rzuty, wspólnie z dwiema prostopadłemi $B'C'$ i $R'X'$ określily rzut pionowy ściany ($CR, C'X'R'B$) sześcianu, nachylonego iak być powinien ku płaszczyźnie poziomey.

279. *Naostatek*, dla dopełnienia rzutów całej pomienioney bryły, poprowadziły się przez wierzchołki kątów wykreślonego kwadratu linie ($CA, C'A'$), ($XY, X'Y'$), ($RS, R'S'$), ($BD, B'D'$) prostopadłe do iego płaszczyzny REH (162), to jest: wyrażające cztery krawędzie sześcianu, oparte iednymi końcami na tej płaszczyźnie, drugimi zaś na równoległej z nią ścianie: której ślad poziomy aS wskaże poziome rzuty A, Y, S, D , tych drugich końców, a następnie i odpowiednie im pionowe (204). Te ostatnie, połączone liniami prostemi, wydały rzut pionowy ściany ($AS, A'Y'S'D'$) przeciwległej kwadratowi ($CR, C'X'R'B$). Określiwszy w tym sposobie żądane położenie bryły, masz jeszcze do uważania, na każdej z osobna płaszczyźnie rzutowey, iak leżą rzuty krawędzi względem osi rzutów; z tego zaś łatwo osądzisz, które

Tab. VI. z nich na płaszczyźnie drugiej kropkami, a które rysami ciągnionemi wyrazić się powinny, i wzajemnie: a to podług mniejszego lub większego oddalenia odpowiednich tym rzutom krawędzi.

Na trójkącie równobocznym, do płaszczyzny poziomej równoległym, a do pionowej mającym bok ieden prostopadły, wykreślić czworościan: potem zaś odnieść go do innych rzutowych prostopadłych płaszczyzn.

wzór 2. 280. Na bokach danego równobocznego trójkąta (abd , $a'd$) ieślibyś wykreślił takież same trójkąty, iedną z nim składające płaszczyznę równoległą względem poziomej, tedy pionowe ich rzuty będą na pionowym tej płaszczyzny śladzie $H'M$ (146, 163); poziome zaś wyrazisz przez równoboczne trójkąty abp , adn , bdm , wykreślone na bokach rzutu poziomego podstawy. Obracając ie potem naokoło boków podstawy aż do zeyścia się w punkt ieden wierzchołków (p, p), (n, d) i (m, d), zamkniesz temi trójkątami żadaną czworościenną bryłę. Lecz że w takowym obrocie, drogi wymienionych wierzchołków będą łukami prostopadłemi do boków podstawy (237), a zatem i do płaszczyzny poziomej: rzuty więc poziome tych łuków wyrazisz przez linie proste pc , nc , mc (163) prostopadłe do takichże rzutów (162) odpowiednich boków podstawy: a punkt c , wspólny nakreślonym rzutom, będzie oczywiście rzutem poziomym wierzchołka żadanego czworościanu; łącząc go zatem z takimiż rzutami a , b , d , innych wierzchołków tej bryły, wyrazisz rzuty ac , bc , dc , krawędzi kąta bryłowego w pomienionym wierzchołku.

Bok (ab , a') danej podstawy, będąc z założenia prostopadłym do płaszczyzny pionowej, pokazuje że łuk, po którym punkt (p, p') drogę swą odbywał, jest równoległym do tej płaszczyzny; a następnie, że pionowym rzutem tej drogi będzie takiż sam łuk $p'c'$ (172), zakreślony z punktu a' ; gdzie rzut iego środka przypada. Ponieważ zaś ta droga zmierza ku wierzchołkowi żadanej bryły i tam się kończy, a poziomy tego wierzchołka rzut c iest już wynaleziony: więc i odpowiedny mu c' na łuku pc naznaczysz (135), a zatem i całej bryły rzut $a'c'd'$ na płaszczyźnie pionowej określiš.

Trzeci iey rzut na płaszczyźnie RST , wskazany iest przez linie rzucające cztery wierzchołki tej bryły, to iest: (aa , $a'M$), (dd , $d'M$), ($c\delta$, $c'\gamma$) i ($b\beta$, $a'M$), rzuty zaś tych wierzchołków przeniesione, iak wyżej (155), na płaszczyznę rysunku i połączone liniami prostemi, wydały kład iego $c'd'a'b$: który, na podobieństwo dwóch rzutów głównych, zwykle się trzecim rzutem nazywa.

281. Maiąc, w tym sposobie określoną bryłę ($cdba$, $c'd'a'$, $c'd'a'b$), odnieść do innej pionowej płaszczyzny np. OPQ , poprowadzisz naprzód prostopadłe do niej (162) linie (ah , $a'h'$), (bk , $a'k'$), (do , $d'h'$), (cg , $c'g'$), rzucające cztery wierzchołki tej bryły: potem zaś wynalazszy punkta (h , h'), (k , k'), (o , o'), (g , g') gdzie przebiiaią takąw płaszczyznę (204), klady ich A , B , D , C na płaszczyźnie poziomej naznaczysz (237). Te ostatnie połączywszy liniami prostemi, mieć będziesz klady rzutów krawędzi (242), określające na płaszczyźnie rysunku kład rzutu (hgk , $h'g'k'$): który wspólnie z poziomym $cdab$ oznaczą ten sam czworościan ($cdab$, $CDAB$) odniesiony, iak wyżej (280), do prostopadłych rzutowych płaszczyzn, lecz mających za oś linią PQ .

282. Naostatek jeżeli osiǳ rzutowych prostopadłych do siebie płaszczyzn jest *np.* wspólny Tab. VI. pionowy ich ślad OP prostopadły do osi PS dwóch rzutów danych, poziome zaś PQ i PY prostopadłe, iak bydź powinny (161), ku sobie: natomiast, stosownie iak dany rzut *cdab* leży względem tych śladów, rzuty żądane ukażą na płaszczyźnie rysunku odpowiednie im strony wzmiankowanej bryły, któremi jest obrócona ku nowym płaszczyznom rzutowym OPQ i OPY. Takowe rzuty wskażesz naprzód przez linie (*ah, a'h'*), (*cg, c'g'*) i t. p. tudzież (*ar, a'H*), (*ct, c'G*) rzucające cztery wierzchołki bryłowych kątów na pomienione płaszczyzny: punkta zaś, w których ie przebiǳ (204) położysz na pionowej, a otrzymane tym sposobem kłady G, L, H, K, i G', L', H', K', połączywszy liniami prostemi, mieć będziesz żądane rzuty czworościanu na płaszczyźnie rysunku.

Tak więc ieden i ten sam czworościan, odniesiony do różnych rzutowych płaszczyzn, określił się na płaszczyźnie rysunku przez rzuty rozmaitey postaci, ukazujące innǳ coraz stronę tey bryły; do zupełnego atoli iey oznaczenia wystarczają dwa którekolwiek odpowiednie sobie, to iest: (*edba, c'd'a'*), kiedy za oś rzutów obierzesz liniǳ PS: albo (*c'd'a', c'd'b'a''*), gdy osiǳ jest RS: albo (*cabd, CABD*), gdy osiǳ rzutów iest PQ: albo nakoniec (*GHKL, GHK'L'*), kiedy osiǳ rzutów iest OP.

283. Na takimże tróykǳcie i w podobnym położeniu względem głównych rzutowych płaszczyzn, iak iest wykreslony dopiero czworościan, ieslibyś postawił ośmiościan lub dwudziestościan foremny, tedy dla łatwiejszego wykreslenia rzutów, potrzeba ie wyobrazić iakby złożone z brył prostszych, to iest: ośmiościan ze dwóch czworościennych ostrosłupów podstawami kwadratowymi złączonych, a dwudziestościan ze dwóch pięciokątnych, obeymujących foremnemi pięciokątnymi podstawami pośredniǳ między niemi część bryły, ograniczonǳ zewnątrz pasmem dziesięciu tróykątnych ścian dwudziestościanu. Rzuty, iuż to ostrosłupów składających ośmiościan foremny, iuż wymienionych trzech części takiegoż dwudziestościanu, wykreslisz podobnie iak czworościanu (280), rozkładając ściany ich powierzchni na płaszczyźnie danej podstawy. Takim zaś sposobem z rzutów części mając złożone, na głównych rzutowych płaszczyznach, całkowite rzuty żądanej bryły, łatwo iǳ odniesiesz do innych rzutowych płaszczyzn (281, 282). Obiǳnimy to następującym przykładem.

Na tróykǳcie równobocznym, do płaszczyzny poziomey równoległym a do pionowej mającym bok ieden prostopadły, wykreslić dwudziestościan foremny.

284. Z głównej cechy brył foremnemi zwanych wynika *naprzód*: że w takim dwudziestościanie, podobnie iak w sześcianie, ośmiościanie lub dwunastościanie foremnym, ściany przeciwległe sobie są na równoległych płaszczyznach; *potóre*: że którykolwiek z wierzchołków bryłowych iego kątów uważać będziesz iako wierzchołek ostrosłupa wchodzącego do składu tey bryły, tedy, poniewǳ pięć krawędzi zbiegających się w tym wierzchołku, są równe i iednostajnie nachylone ku sobie, podstawǳ takiego ostrosłupa musi bydź płaski i oraz foremny pięciokąt; *potrzecie*: że pasmo z dziesięciu ścian tróykątnych, przy obwodzie tego pięciokąta uszykowanych podstawami i wierzchołkami naprzemian, ogranicza się z drugiej strony takimże samym pięciokątem, leżącym na płaszczyźnie równoległej względem pierwszego i służą-

Tab. VI. cym za podstawę drugiemu pięciokątnemu ostrosłupowi: linia zaś łącząca środki tych pięciokątów, czyli opisujących je równoległych okręgów, jest prostopadłą do płaszczyzn na których leżą; przedłużona więc przejdzie przez wierzchołki obudwu pomienionych ostrosłupów; z tego nakoniec wypływa *poczwarte*: że każda płaszczyzna, poprowadzona przez wierzchołki dwóch którychkolwiek przeciwległych w dwudziestościanie bryłowych kątów, jest zawsze prostopadłą do pięciokątnych podstaw dwóch ostrosłupów, mających w swoich wierzchołkach rzeczone bryłowe kąty; jeżeli zatem przechodzi przez krawędź jednego z tych ostrosłupów, tedy przejdzie koniecznie i przez równoległą do tej krawędzi w ostrosłupie drugim.

wzór 3. 285. Niech będzie *np.* podstawą żądanej bryły trójkąt (*adb*, *a'b'*) z bokiem (*ad*, *a'*) prostopadłym względem płaszczyzny pionowej. Na tym boku odrysuy trójkąt równoboczny (*acd*, *a'c'*) i pięciokąt foremny (*aqgp'd*, *a'p'g'*) w położeniu poziomém, to jest: na tej samej co i podstawa dana płaszczyźnie NMO. Pięciokąt ten i trójkąt, przez obrót na około wspólnego im boku (*ad*, *a'*), mogą przyjąć takie położenie, że pierwszy z nich będzie podstawą a drugi ścianą ostrosłupa pięciokątnego, wchodzącego do składu żądanej bryły. Wtedy zaś to nastąpi kiedy wierzchołek rzeczonego trójkąta znajdzie się w jednym z wierzchołków bryłowych iego kątów, a wierzchołki pięciokąta w innych takichże wierzchołkach. Lecz ponieważ, w obrocie około boku (*ad*, *a'*), wierzchołki wzmiarkowane kreślą łuki prostopadłe do tego boku, czyli do pionowej płaszczyzny równoległe, iakimi są: (*co*, *c's'*), (*go*, *g'o'*), (*qx*, *p'x'*), (*py*, *p'x'*); na rzutach więc takowych łuków znajdą się rzuty właściwego tych wierzchołków położenia. Wiadomo zaś z poprzedzającego (284), że wierzchołek ostrosłupa, gdzie punkt (*c*, *c'*) umieścić się powinien, znajduie się, razem z wierzchołkiem przeciwległego mu w dwudziestościanie bryłowego kąta, na płaszczyźnie prostopadłej do pięciokątnej jego podstawy: a tą jest płaszczyzna łuku po którym, w obrocie około boku *ad*, punkt (*c*, *c'*) bieży; na śladzie więc *co* takowej płaszczyzny znajdą się poziome rzuty obudwu pomienionych wierzchołków (163). Jako zaś ten ślad jest nietylko prostopadłym do rzutu *ad* boku danej podstawy, lecz oraz przechodzi przez wierzchołek *b* przeciwległego temu rzutowi kąta, tak podobnie poprowadzone dwie linie *xah*, *ydf* będą śladami płaszczyzn prostopadłych do poziomej i przechodzących, każda przez inne dwa wierzchołki bryłowych przeciwległych kątów dwudziestościanu; na oznaczonych więc w tym sposobie śladach przypadną poziome tych wierzchołków rzuty. Dwa z nich przyległe wierzchołkom (*a*, *a'*) i (*d*, *a'*), oraz temu gdzie punkt (*c*, *c'*) umieścić należy, pokazują właściwe położenie punktów (*p*, *p'*) i (*q*, *q'*) obracającego się pięciokąta; ich zatem poziome rzuty będą takż na rzutach *qx* i *py* łuków po których biegą, to jest nie inaczej iak w punktach *x*, *y*, na wzajemnym przecięciu się tych rzutów z nakreślonymi śladami: odpowiednie zaś pionowe w punkcie *x'* wspólnego tym łukom rzutu *p'x'*. Na linii przeto *a'x'*, iako śladzie płaszczyzny mającey cztery oznaczone już wierzchołki pięciokąta, wynadziesz rzut pionowy *o'* wierzchołka piątego, gdzie się przecina z tym śladem rzut pionowy *g'o'* łuku przebieżonego przez ten wierzchołek: odpowiedny zaś poziomy na rzucie poziomym *go* tegoż samego łuku. Naostatek, ponieważ w wierzchołku ostrosłupa zbudowanego na pięciokątnej podstawie (*axoyd*, *a'x'o'*), zejść się powinien wierzchołek (*c*, *c'*) trójkątnej iego ściany (*acd*, *a'c'*), z końcem krawędzi opartej w punkcie (*o*, *o'*) i równoległej względem płaszczyzny

pionowej (166): długością zatem krawędzi dwudziestościanu zakreśliwszy z punktu o' łuk $k's'$, Tab. VI. na przecięciu się jego z łukiem $c's'$, zarysowanym z punktu a' wynajdziesz rzut pionowy s' , a na linii co odpowiedni poziomy s pomienionego wierzchołka. Połączywszy zaś liniami prostymi wierzchołki kątów pięciokąta, w porządku iak idą po sobie: tudzież wszystkie razem z wynalezionym dopiero s, s' , określisz w rzutach ostrosłup ($oydaxs, o'x'a's'$) należący do foremnego dwudziestościanu, którego podstawą jest dany trójkąt $adb, a'b'$.

286. Przyległa temu ostrosłupowi bryła ograniczy się z jedney strony pięciokątem iuż wykreślonym ($axoyd, a'o'$), a z przeciwney takimże samym drugim pięciokątem, na równoległej płaszczyźnie leżącym (284): pionowy zatem rzut jego będzie na linii $b'n'$ równoległej względem $a'o'$. Zewnętrzzną powierzchnię tej bryły złoży dziesięć ścian dwudziestościanu obiętych dwoma rzeczonemi pięciokątami: z tych przeciwległa daney podstawie ($adb, a'b'$) wyda na płaszczyźnie pionowej rzut on' równoległy do $a'b'$, w którym punkt o' jest rzutem wierzchołka, drugi zaś m' takimże rzutem krawędzi prostopadłej do tej płaszczyzny; następnie zatem oznaczy się odpowiedni mu poziomy onm . Punkta (x, x') , (y, y') , połączone z punktami (n, n') , (m, m') , dadzą rzuty dwóch ścian ($onx, o'n'x'$) i ($omy, o'n'x'$) przyległych trójkątowi ($onm, o'n'$): przeciwległe zaś tym ścianom, a oparte na bokach ($ab, a'b'$) i ($db, a'b'$) podstawy dwudziestościanu, ograniczą się liniami ($dh, a'f'$) i ($af, a'f'$) równoległemi do $(xn, x'n')$ i $(ym, y'm')$, tudzież ($bf, b'f'$) i ($bh, b'f'$) równoległemi do $(oy, o'y')$ i $(ox, o'x')$. Naostatek punkta (x, x') , (y, y') połączywszy z punktami (f, f') , (h, h') , otrzymasz dwie pozostałe ściany ($xnf, x'n'f'$) i ($ymh, y'm'h'$) zamykające pasmo dziesięciu ścian trójkątnych powierzchni żądanej dwudziestościanu.

287. Ponieważ nietylko pięciokątne podstawy ($axoyd, a'x'o'$) i ($nfbhm, n'f'b'$) dwóch ostrosłupów wchodzących do składu pomienionego dwudziestościanu, lecz i odpowiednie ich krawędzie, brane po parze, są wzajemnie do siebie równoległemi (284): dla dopełnienia więc żądanych tej bryły rzutów dosyć będzie, przez wierzchołki kątów drugiej podstawy, poprowadzić linie ($br, b'r'$), ($fr, f'r'$) i t. p. równoległe względem oznaczonych iuż ($os, o's'$), ($ys, y's'$) i dalszych, a przechodzących przez odpowiednie wierzchołki podstawy pierwszej.

Za pomocą wyrażonych dwóch rzutów dwudziestościanu, wynajdując na trzeciej rzutowej płaszczyźnie RST (155) rzuty wszystkich wierzchołków bryłowych jego kątów, i stosownie je łącząc liniami prostymi, określisz rzut trzeci; od tych zaś łącno będzie przejść do innych rzutów na oznaczonych, iak wyżej (281, 282), prostopadłych rzutowych płaszczyznach.

288. Dla przekonania się o dokładności odbytych wykreśleń, posłużyć tu mogą następujące uwagi. *Naprzód* wierzchołki dwóch ostrosłupów mające rzuty poziome w punktach s, r , tak leżą względem daney podstawy ($adb, a'b'$) iak dwa inne odpowiadające rzutom y, f , albo x, h : ztąd wypada, że nie tylko dwa trójkąty adb i nmo mogą się iednym okręgiem koła opisać, lecz nadto inny współśrodkowy z nim okrąg, zakreślony przez ieden którykolwiek z wymienionych rzutów, przez wszystkie pozostałe przejść musi: a zatem że poziomy rzut dwudziestościanu ogranicza się sześciokątem foremnym. *Powtóre*: uważając kąty bryłowe (o, o') i (b, b') iako będące w wierzchołkach dwóch ostrosłupów wchodzących do składu tegoż samego dwudziestościanu, wypada: że ich podstawy ($sxnmy, s'x'n'$) i ($afrhd, a'f'r'$) są foremne-

Tab. VI. mi pięciokątami (284); płaszczyzny zaś na których te pięciokąty leżą, iako przechodzące przez krawędzie (nm, n') i (ad, a'), że są prostopadłe do płaszczyzny pionowej, a zatem, że pionowe rzuty $x'n'$ i $f'r'$ części obwodów tych pięciokątów, razem z rzutami $s'x'$ i $a'f'$ pozostałych części, powinny na płaszczyźnie pionowej składać linie proste $s'n'$ i $a'r'$. *Naostatek*: trzecie rzuty tych pięciokątów, na płaszczyźnie RST, powinny być figurami iednakowej postaci i wielkości, iakimi są $s'x'n'm'y$ i $r'f'a'd'h$.

Na pięciokącie foremny, do płaszczyzny poziomey równoległym a do pionowej mającym bok ieden prostopadły, wykreślić dwunastościan foremny.

wzór 4. 289. Przy bokach danego pięciokąta ($acbgd, a'c'b'$) wyobraź także same pięciokąty złożone na iednej z nim płaszczyźnie NMO, równoległej względem poziomey: które obracając około pomienionych boków, aż do wzajemnego spotkania się przyległych, ułożyłbyś na podstawie danej połowę powierzchni żadanego dwunastościanu. Lecz że przyległe te podstawie ściany będą w takim razie ku sobie i ku tej podstawie iednakowo nachylone: wierzchołki przeto obracających się pięciokątów iednostaynie się uszykują względem wierzchołków podstawy, to iest: nie inaczej iak na okręgach kół równoległych względem okręgu opisującego podstawę. Na iednym z nich, gdzie przypadają wierzchołki kątów w zetknięciu z sobą będące, znajdą się oraz wierzchołki pojedynczych kątów drugiey połowy powierzchni dwunastościanu, dla złożenia z niemi tróyciennych bryłowych kątów; natenczas zaś wierzchołki pojedynczych kątów pierwszey połowy, wspólnie z wierzchołkami drugiey zetkniętymi z sobą po parze, złożą inne bryłowe kąty na okręgu drugim równoległym względem okręgu opisującego ścianę przeciwną danej podstawie. Z tego oczywiście wypływa *naprzód*: że rzuty czterech pomienionych okręgów na płaszczyźnie podstawy, lub innej równoległej do niej, będą okręgami współśrodkowymi. *Powtóre*: że ponieważ ściana przeciwna podstawie iest iey podobna i równa, rzuty więc opisujących ie okręgów, iako współśrodkowe, złożą pojedynczy okrąg. *Potrzenie*: że iako obiedwie połowy uważaney powierzchni są zupełnie podobne sobie, tak i okręgi na których się znajdują wierzchołki pojedynczych kątów płaskich iedney, w zetknięciu z parami kątów drugiey, i wzajemnie, muszą być iednakiey wielkości; a zatem że obudwu takowym okręgom odpowiada rzut wspólny na każdej płaszczyźnie równoległej względem podstawy. Rzuty więc dwunastościanu, zbudowanego na foremnym danym pięciokącie ($acbgd, a'c'b'$), w oznaczonym tu położeniu łącno się wykreślić mogą.

290. W tym celu odrzysuy na dwóch którychkolwiek przyległych bokach rzutu poziomego podstawy także same iak ten rzut pięciokąty foremne $acnkf$ i $admhl$, a przez wierzchołki ich kątów poprowadź do tych boków prostopadłe ny, lx, fv , tudzież mw, hz, lv ; będą one na poziomey płaszczyźnie rzutami łuków po których wierzchołki pięciokątów foremnych, odpowiednich wykreślonym, obracając się około boków ($ac, a'c'$) i ($ad, a'd'$), przejdą z płaszczyzny NMO, gdzie leżą, na wierzchołki kątów bryłowych dwunastościanu. Punkt v przecięcia się dwóch przyległych rzutów takowych łuków, iest oczywiście rzutem punktu zbieżenia się przyległych sobie wierzchołków: będzie przeto na wspólnym rzucie dwóch okręgów mających na sobie wierzchołki kątów bryłowych żadanego dwunastościanu (289). Ze środka więc rzutu

podstawy $acbgd$ zakreśliwszy jeden opisujący ją okrąg a drugi przechodzący przez punkt v , Tab. VI. na przecięciu się tego ostatniego z liniami prostopadłymi kx , hz , ny , $m\omega$, wynajdziesz rzuty x , z , y , ω , dalszych czterech wierzchołków, gdzie się umieszczą punkta wskazane przez rzuty k , h , n , m ; odciąwszy zaś na pozostałej części okręgu odległość dwóch którychkolwiek przyległych sobie np . vx , wskażesz wszystkie rzuty wierzchołków bryłowych kątów, przypadające na tym okręgu: które połączywszy liniami prostemi, naprzód w porządku, iak idą po sobie, potem z rzutami wierzchołków podstawy przyległe tym rzutom, iakimi są: v , γ , ω ... otrzymasz poziomy rzut połowy dolnej powierzchni dwunastościanu.

291. Przy punkcie v , któremu odpowiadają wierzchołki dwóch kątów płaskich f , l , razem z sobą zetkniętych, odrzysny równy im trzeci, tak, aby jego ramiona iednostajnie były nachylone do linii vx i vz ; ramionami tego kąta będą vr i vo , równoległe względem ac i ad . Na tych ramionach odetnij długość krawędzi dwunastościanu; a wykreślony w tym sposobie kąt zamkniesz pięciokątem foremnym, w którym przeciwległy bok pq będzie prostopadłym do płaszczyzny pionowej. Ten pięciokąt uważany iako rzut takiegoż samego równoległego z nim pięciokąta, umieszczonego przy wierzchołku odpowiednym rzutowi v , wskaże na płaszczyźnie poziomej rzuty łuków po których wierzchołki dwóch jego kątów przejdą na wierzchołki kątów dwunastościanu, oznaczone przez rzuty x , z ; takimi albowiem rzutami będą linie ox i rz , łączące rzuty początków z rzutami końców tych łuków. Że zaś w takowym przeysciu dwa pozostałe wierzchołki, odpowiadające rzutom p , q , nakreślą łuki równoległe z poprzedzającemi; rzuty ich zatém na płaszczyźnie poziomej wyrazisz przez linie pE i qB , równoległe poprowadzone do rzutów ox i rz ; punkta więc E i B , przecięcia się tych rzutów z okręgiem opisującym rzut podstawy dwunastościanu, będą rzutami dwóch wierzchołków bryłowych jego kątów, do których składu wchodzi kąt płaski ściany przeciwległej podstawie (289), tudzież kąt pięciokąta odpowiadające rzutom p , q , kiedy on, w zetknięciu się boków wyrażonych przez rzuty vo i vr , z krawędziami odpowiadającemi rzutom vx i vz , przyymie położenie ściany tej bryły. Oznaczona tym sposobem cięciwa BE zmieści się razy cztery na pozostałej części okręgu opisującego poziomy rzut podstawy, i złoży pięciokąt foremny wyrażający takież sam rzut ściany przeciwległej podstawie ($acbgd$, $a'c'b'$). Następnie zatém połączywszy wierzchołki kątów tego ostatniego rzutu z przyległemi im rzutami x , z , u , e , t , wskazanych pierwiej wierzchołków dwunastościanu, określisz poziomy rzut drugiey połowy jego powierzchni.

292. Krawędź odpowiadająca rzutowi av , iako równoległa względem płaszczyzny pionowej (166), wyrazi się na tej ostatniej przez rzut iednakiey z nią długości: który mając ieden swój koniec w punkcie a' , drugim oparty będzie na łuku $s'v'$ zakreślonym z tego punktu promieniem (as , $a's'$) równaiącym się takowey krawędzi: przypadnie zatém w punkcie v' na prostopadłej $v'v'$ do osi rzutów. A iako wierzchołek bryłowego kąta (v , v') iest z innemi czterema w równej odległości względem podstawy dwunastościanu (289), tych więc rzuty pionowe, odpowiadające poziomym y , ω , δ , β , wynajdziesz na linii $v'\beta'$ równoległej do osi rzutów; które z przyległemi im na płaszczyźnie pionowej rzutami wierzchołków podstawy, gdy połączysz przez linie proste, otrzymasz rzuty $c'y'$, $b'\beta'$, $a'v'$ pięciu krawędzi dwunastościanu, na podstawie jego opartych. Na tej samey linii $v'\beta'$ przypadną rzuty pionowe v' , o' , p' , wierzchołków pięciokąta wyra-

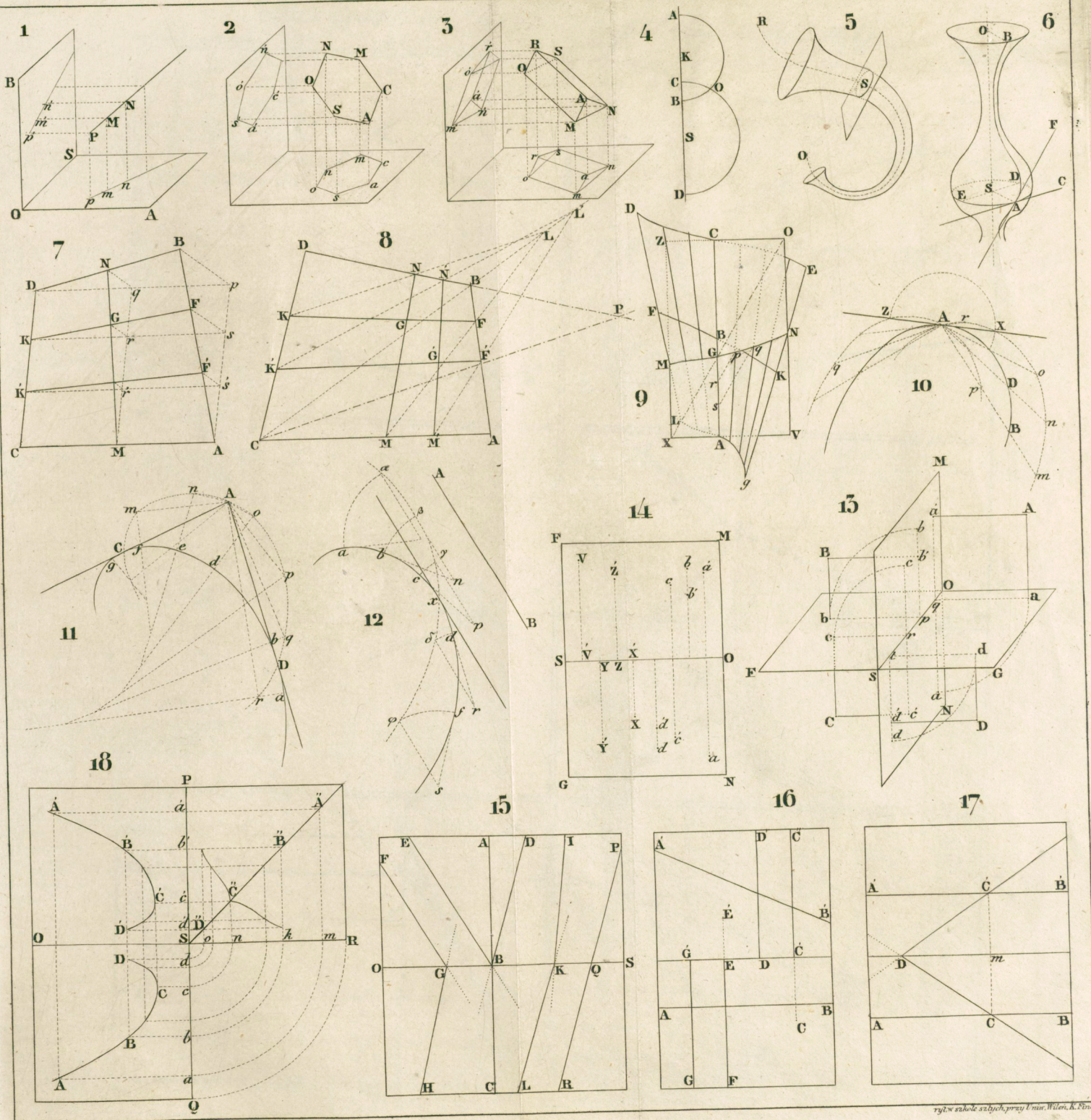
Tab. VI. Żonęgo przez rzut poziomy *vopqr* (291): a łuki $p'E'$ i $o'a'$, zakreślone ze wspólnego ich środka v' , będą na pionowej płaszczyźnie rzutami równoległych do niej łuków, po których te wierzchołki przejdą na właściwe im miejsce wskazane przez rzuty poziome x, z, E, B ; wynadziesz zatem odpowiadające im pionowe x', E' : a te razem z rzutem v' przypadną w kierunku linii prostej $v'E'$, iako należące do wierzchołków ściany ($vxE'Bz, v'xE'E'$) prostopadłej względem płaszczyzny pionowej. Ściana przeciwległa podstawie oznaczy się na pionowej także przez linią prostą $E'A'$ równoległą do osi rzutów: a na innej równoległej linii $x'e'$ znajdziesz rzuty pionowe t', e' pozostałych trzech wierzchołków, znajdujących się w jednakowej odległości względem tej ściany (289) z wierzchołkami (x, x') i (z, z'); te wszystkie połączywszy liniami prostymi, tak iak są złączone na płaszczyźnie poziomej, określisz rzut pionowy dwunastościanu, w którym linie $D't', A'e', b'\beta'e' t'\beta'$, powinny być równoległymi względem $c'y', a'u', E'x'v', x'y'$, i to będzie znakiem dokładnego wykreślenia. Na trzeciej zaś rzutowej płaszczyźnie wynalazłszy rzuty wszystkich wierzchołków tej bryły, stosownie ie także połączysz liniami prostymi, zważając oraz aby te linie, odpowiadające przeciwległym po parze krawędziom, były, iak być powinny (289), równoległymi.

293. Użycie znaków właściwych rzutom brył prostokreślnych, pokazane w przykładzie na czterech ostatnich wzorach (Tab. VI), przywodzi się w ogólności do dwóch następujących prawideł: *naprzód* linie ograniczające rzut prostokreślnej bryły powinny się rysami ciągnionymi wyrażać; ściany bowiem lub krawędzie odpowiadające takowym liniom są oczywiście na przysięciu od widzialnej do zakrytej części powierzchni tej bryły (140). Takowy atoli *obrys* na rozmaitych rzutowych płaszczyznach innym coraz odpowiada ścianom lub krawędziom w ieduey i tej samey bryle. *Powtóre*: wysłedziwszy, za pomocą odpowiednich sobie rzutów, położenie innych wszelkich ścian i krawędzi względem płaszczyzny rzutowej na której kreślisz, zaczniesz nasamprzód od najdalszych i te ciągnionemi rysami oprowadzać będziesz, aż do linii składających wykreślony już obrys: inne zaś pozostałe kropkami naznaczysz; co wszakże stosnie się tylko do brył znajdujących się w widzialnym płaszczyzn rzutowych węgle (137, 138), i zgoła nie zakrytych przez inne płaszczyzny lub powierzchnie, wchodzące do wzoru iako rzezy dane lub iako wypadek zadania.

W następujących zadaniach, stosowanych z kolei do prostokreślnych powierzchni (*), zachowamy też same prawidła w wykreślaniu ich rzutów: z dodatkiem atoli innych szczególnych wypływających z rodzaju i względnego położenia takowych wielkości. Ostrokregi i walce dadzą nayprostsze przykłady tego rodzaju powierzchni, a rozwiązane na nich stosowne zadania wskażą sposoby geometrycznych działań właściwe innym wszelkim rozwiialnym powierzchniom: uważane zaś iako rzucające, przygotują tak do rzutowych iak obrazowych z liniami krzywymi wykreśleń.

(*) Tak zowiemy powierzchnie tworzące się przez linią prostą (21), dla tego, że na płaszczyźnie rysunku rzuty ich nacyjęściey ograniczają się liniami prostymi: tudzież że, iak na powierzchni brył prostokreślnych, może się na nich w pewnym sposobie linia prosta nakreślić.





rys. J. Drzewicki.

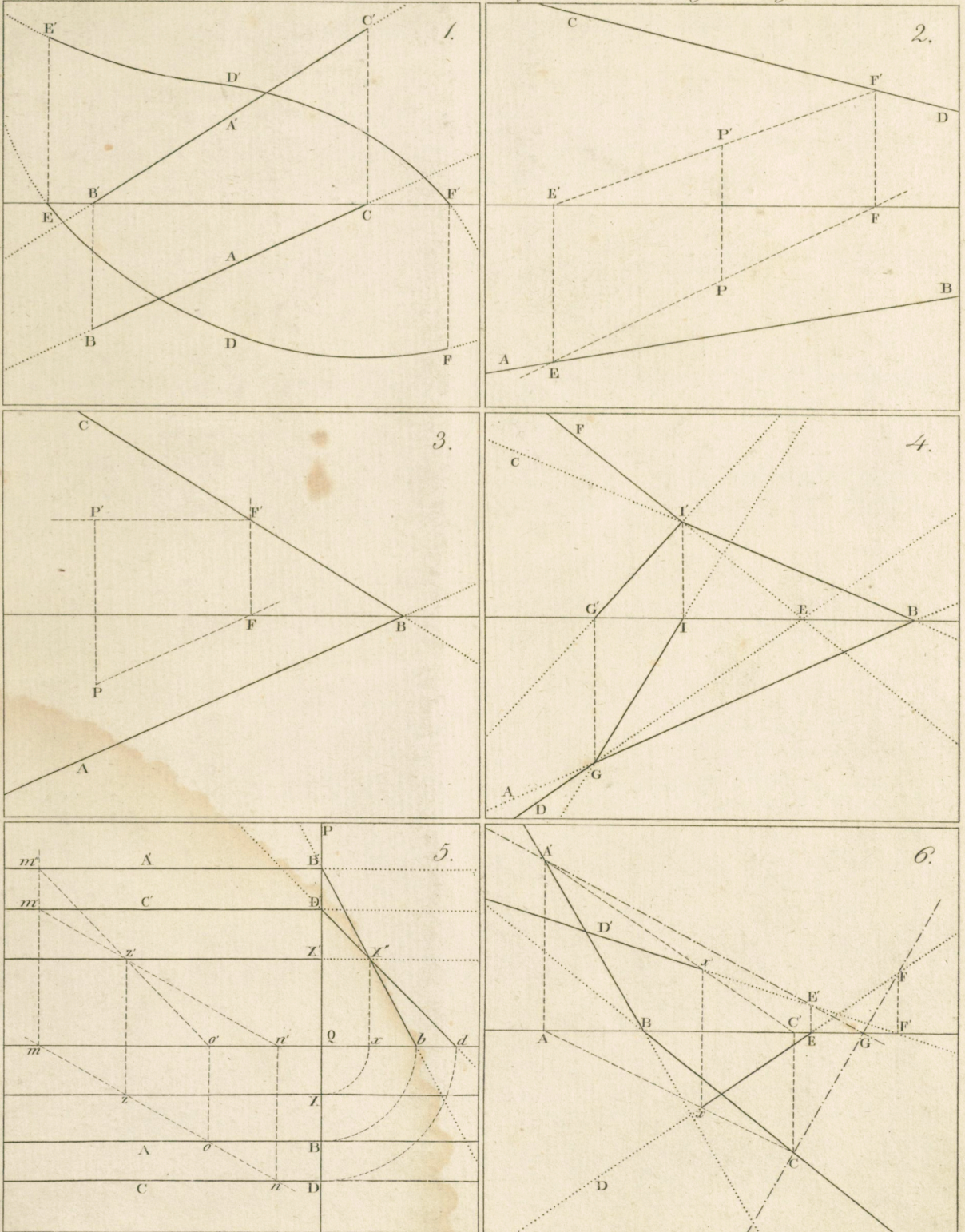
rys. w szkole szlubiach, przy U. n. w. Wileń. K. Fink.



Punkta linie i płaszczyzny

Gamdzya wykrowna

Tab. I

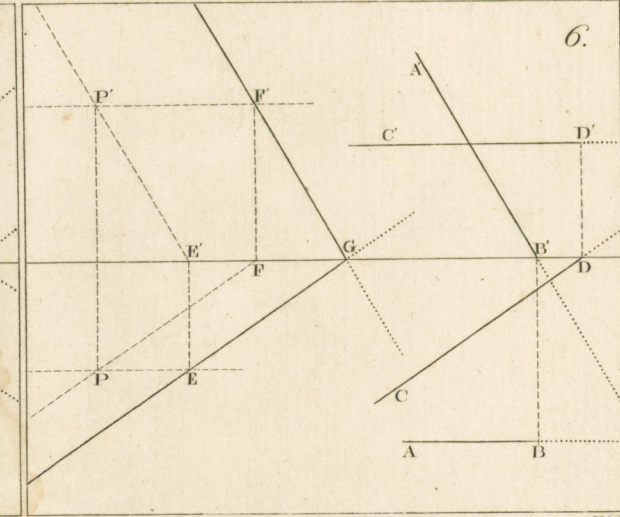
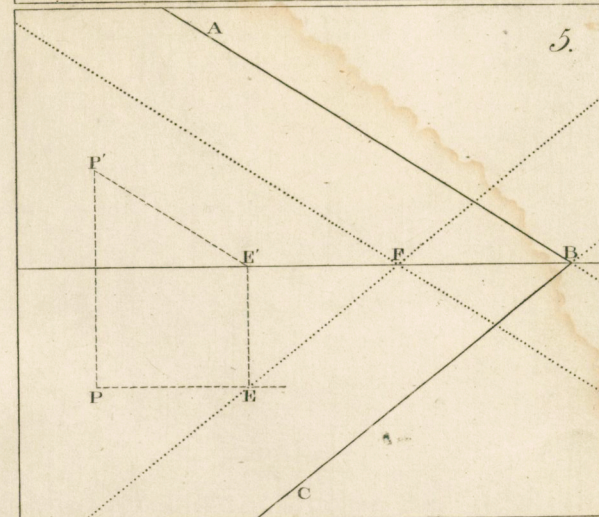
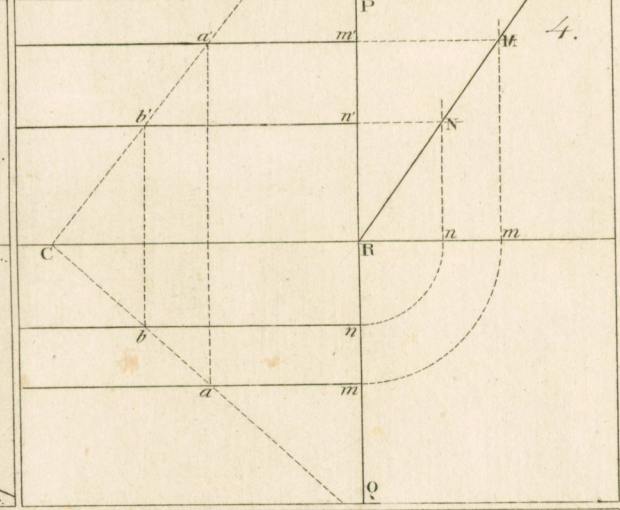
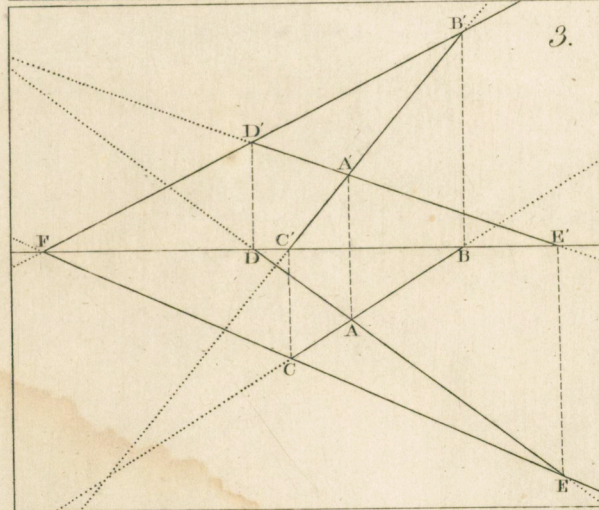
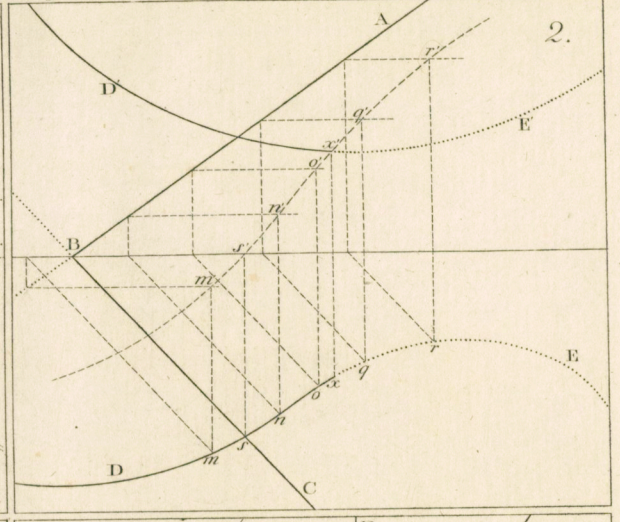
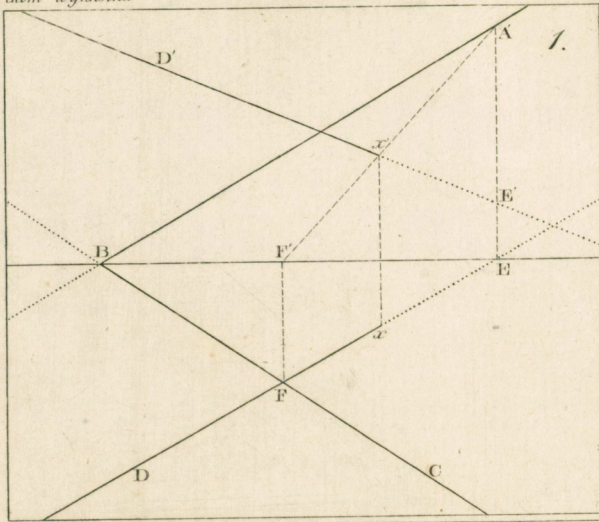


rylowal. F. Basiacki

rylowal H. R.

Punkta linie i płaszczyzny.

Geom. wykreślna

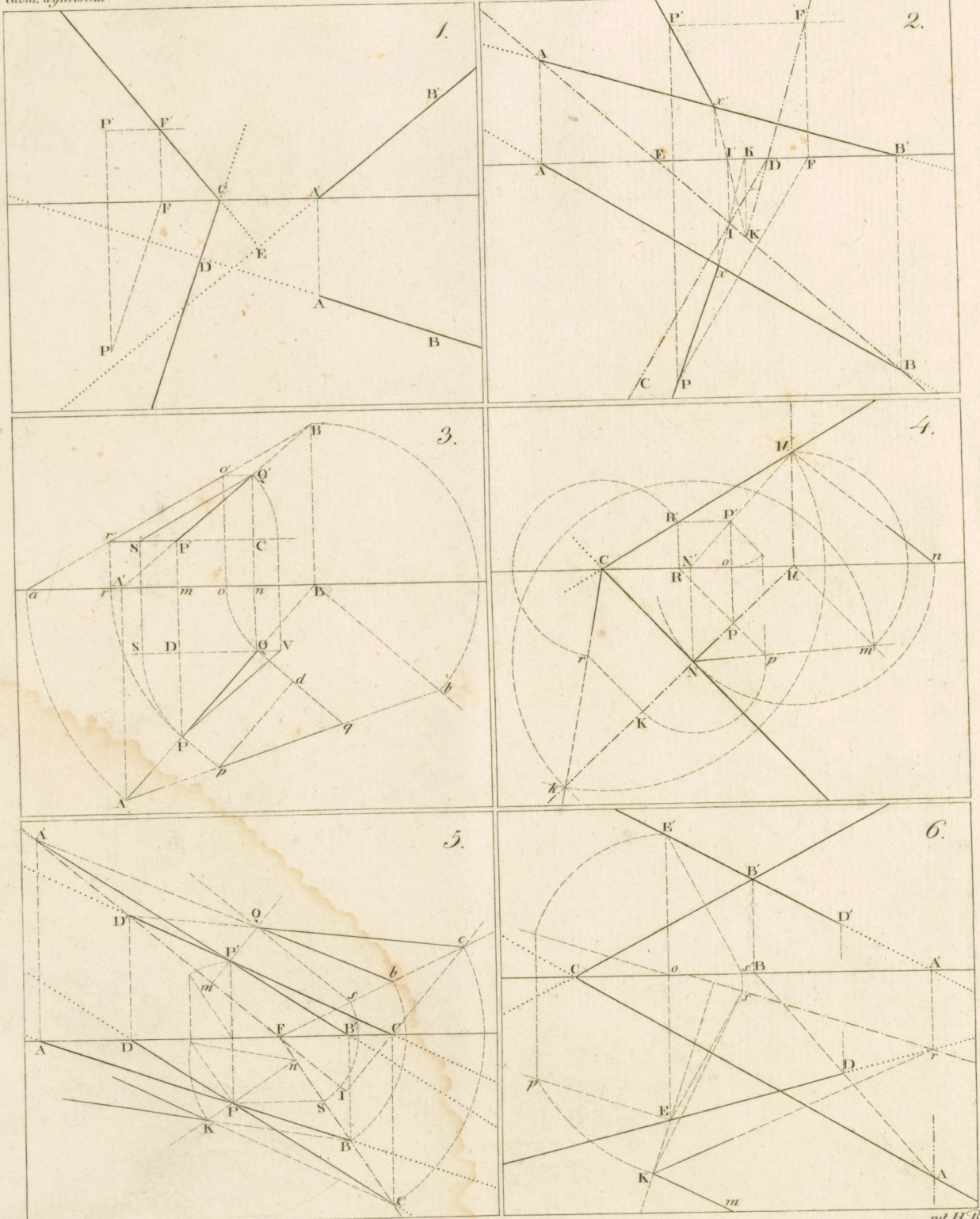


rys. A. Niawiarowicz

ryt. H. R.

Punkta linie i płaszczyzny

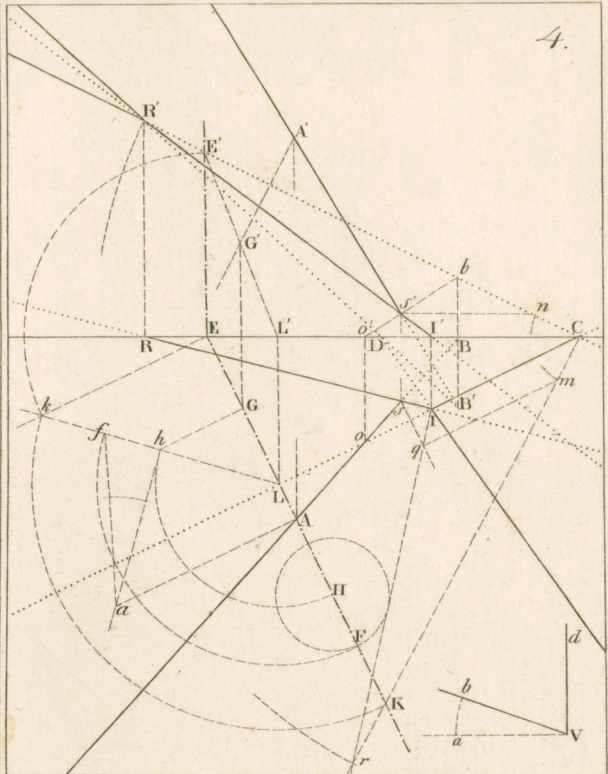
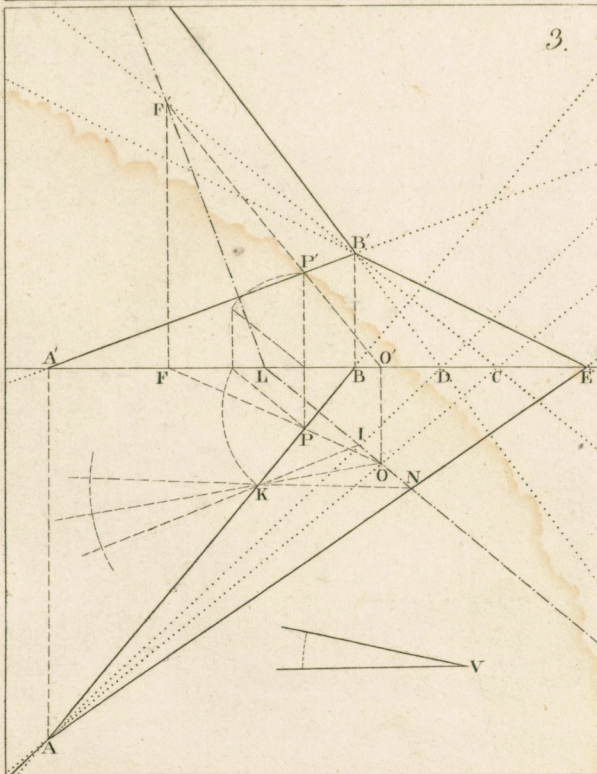
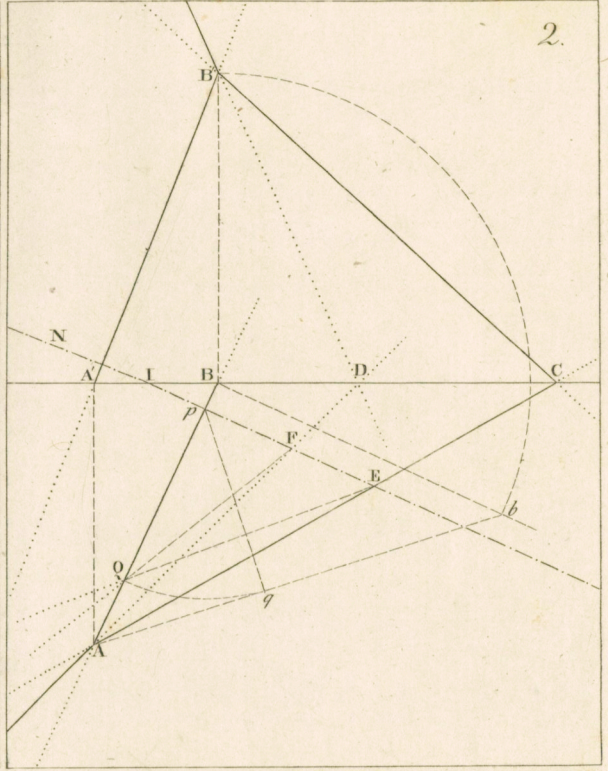
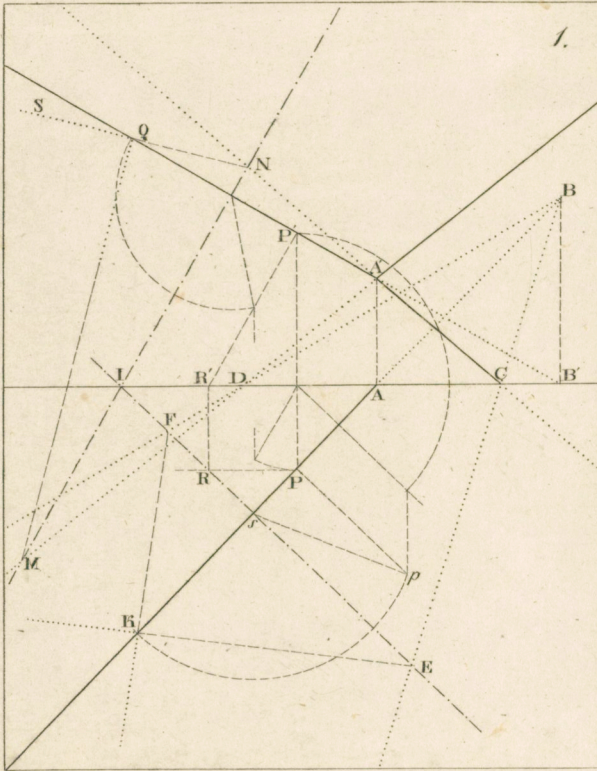
Geom. wykresowa



rys. Ta. Bohatkiewicza

ryt. H. R.

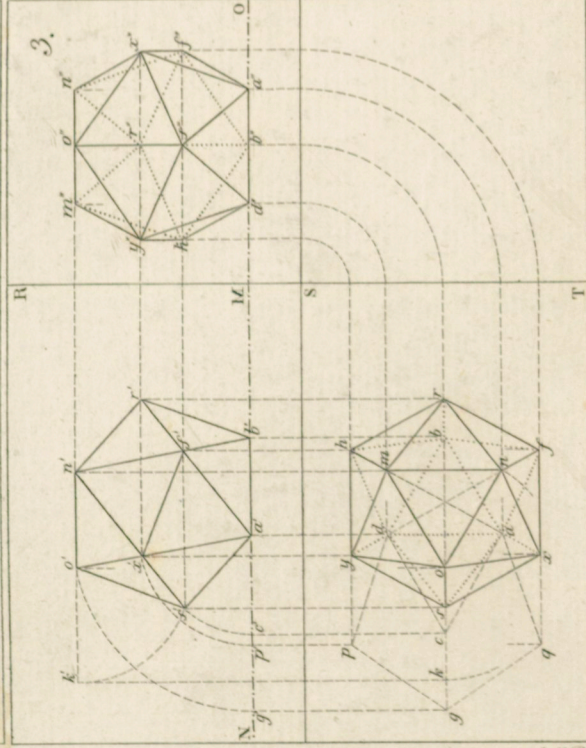
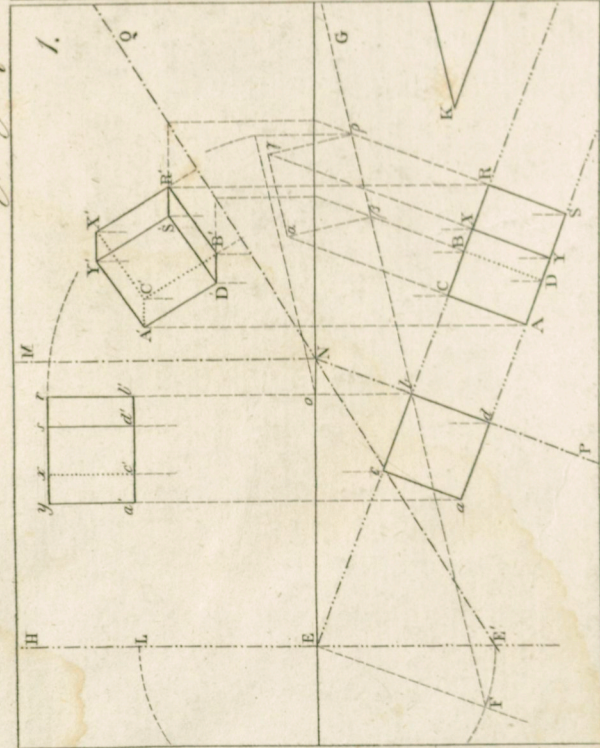
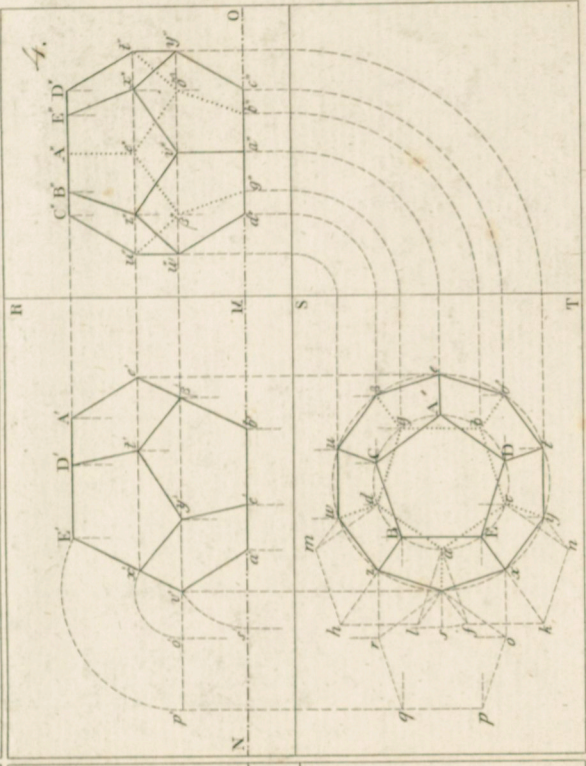
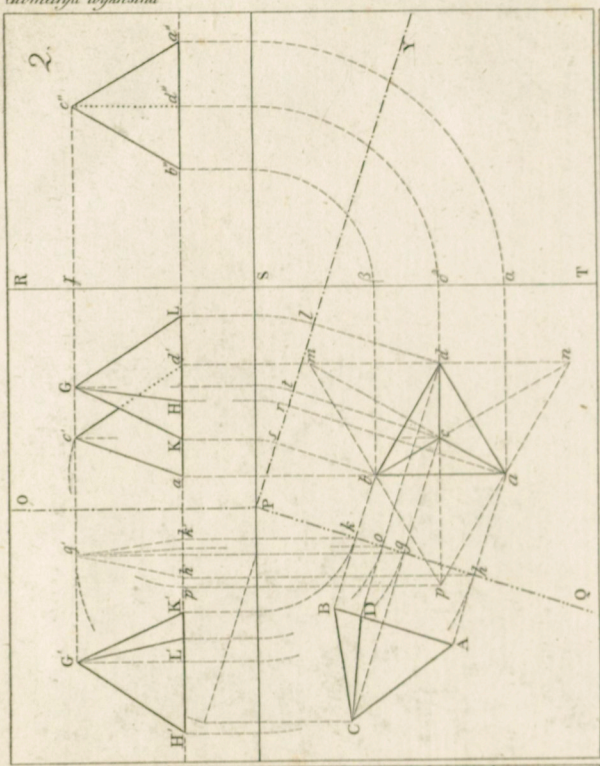
Linie i płaszczyzny



rys. Jasiuk St.

ryt. H.R.

Bryły prostokresne



ryc. J. Szumski

ryc. H. R.

