H. F. C. –

WYKŁAD ELEMENTARNY

TEORYI LOGARYTMOW

p.

Władysława Jasińskiego

Planem na klassę V. Szkół Woiewódzkich przepisana teorya logarytmów, których użycie do wszystkich nauk matematycznych rozciąga się, z wszelką ile bydź może dokładnością wyłożoną bydź powinna. Ta część iéy szczególniéy, która sposoby skrócenia działań i używania tablic w sobie obeymuie, iest w zastosowaniu iéy do praktyki naywaźnieyszą. Atoli liczne do należytego iéy w klassie rozwinięcia, znayduie dla siebie przeszkody Nauczyciel. Wynikaią one stąd nadewszystko, że wspomniony oddział nauki o logarytmach, zupełnie prawie pominięty został w dziele elementarném, szkołom do użycia poleconém. Autor iego okazawszy, iak się wynayduią logarytmy ułomków $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{2}{3}$, tudzież liczby odpowiadaiące logarytmom 3,4383050, i 0,7235790 a nakoniec iak się dochodzi logarytm do liczby 879653 należący, (na stronie 236. §. 150) tak się wyraża:

«To cośmy dotąd o logarytmach powiedzieli, dostateczne iest do « okazania, iakim sposobem tablic logarytmowych do rachunku używać « należy. Prócz tego tablice te, maią na wstępie nietylko wykład po- « rządku podług którego są rozłożone i który iest w każdém niemal dziele « tablic odmienny; ale też podaią różne sposoby i skrócenia w działa- « niach z logarytmami używane. Wstęp więc takowy odczytać pierwéy « należy, nim się do używania tablic logarytmowych przystąpi.»

Lecz wstępy takowe pospolicie w obcych ięzykach są wyłożone; gdyż prócz piiarskich tablic logarytmów, których niepoprawne edycye wyczerpane zostały, nie mamy innych w kraiu drukowanych; nie mogą ich więc uczniowie, iako nie w oyczystym pisanych ięzyku, dostatecznie zrozumieć.— Nadto tablice logarytmów przez uczniów używane, różnych są Autorów, iako to: Wegi, Reynaud, Vlacqa, Lalanda, Calleta, Blanka i inne: przeto Nauczyciel musiałby, tyle razy dawać uczniom objaśnienia wstępów do tychże tablic; ile się tych ostatnich w klassie znayduie: czego wykonanie iest prawie niepodobne. Wszakże i tak mało bardzo zostaie mu czasu, do odrabiania w klassie przykładów i przekonywania się, do iakiego stopnia uczniowie, przez własną pracę domową, na zadawanych sobie zagadnieniach, potrzebnéy do rozwiązywania ich nabyli wprawy i łatwości: zaymuiąc się bowiem dyktowaniem prawideł działań, a przytém obowiązany, planem na klassę przepisany kurs, w przyzwoitym czasie ukończyć; na okazaniu małéy tylko liczby wzorów poprzestać, widzi się bydź zmuszonym.

W zamiarze przeto usunięcia trudności takowych, a tém samém ułatwienia uczniom klassy V. postępu w nauce, wyłożywszy właściwą teoryą logarytmów w sposób ile mi się zdaie dla poczynaiących naystosownieyszy; wykazałem nadto, głównieysze skrócenia działań odbywaiących się z logarytmami, i podałem ogólne sposoby używania do rachunku tablic logarytmowych, tak, iż prawidła w tym względzie przezemnie przytoczone, do wszelkich tablic zastosowane bydź mogą, iakakolwiek iest tych ostatnich rozciągłość i liczba cyfr dziesiętnych przewyżki.

Prócz tego, aby dać uczniom wyobrażenie, o początku i udoskonaleniu teoryi logarytmów, dołączyłem rzut oka na Historyą tego ważnego wynalazku. Trafia bowiem do przekonania moiego zdanie Delambra, w którém (*) radzi aby pisarze dzieł elementarnych, obok wykładu nauki, krótkiéy o Autorach wiadomości czynić niezaniedbywali. Jest ona istotnie nie małą dla uczniów do tychże nauk zachętą, a nawet pomocą.

Mniemaniem iest moiém wreszcie, że prace tego rodzaiu, iako bezpośrednią korzyść uczniów na celu maiące, naywłaściwiéy w programmatach szkolnych umieszczane bydź powinny. Mogą one z czasem przysposobić, dla chcącego się zaiąć, poprawą lub ułożeniem dzieła elementarnego, dostateczny zapas, na drodze doświadczenia zebranych materyałów.

Autorowie których dzieła do wykonania téy pracy, pomocą mi byli, są: X. Dąbrowski — Sniadecki — Autor zasad Arytmetyki — Konkowski — Lacroix — Bellavène — Bézout — Francoeur — Euler — Callet — Lalande — Reynaud — Wega — Büsch — Bossut — Montucla.

(*) W przedmowie do dzieła: *Abrégé d'Astronomie.*

ZASADY ELEMENTARNE
TEORYI LOGARYTMOW.

§. 1. Wszelka ilość maiąca za wykładnik o, znaczy to samo co iedność, maiąca zaś wykładnik odiemny, równa iest ułomkowi, którego licznikiem iest iedność, a mianownikiem taż sama ilość z tymże wykładnikiem, lecz zamienionym na dodayny. (Alg: Dąbr: §. 43). To wiedząc, ieżeli zastanowimy się nad rozmaitemi potęgami liczb całkowitych i ułomków, postrzeżemy łatwo:

1. Że za powiększeniem wykładnika całkowitego i dodaynego wszelkiéy liczby większéy od 1. rośnie coraz bardziéy potęga tymże wykładnikiem wskazana; za powiększeniem zaś iéy wykładnika całkowitego lecz odiemnego, taż potęga coraz się bardziéy zmnieysza. I tak: podnosząc do potęg takowych liczbę *np.* 10 wypada:

$10^0 = 1.$	$10^0 = 1.$
$10^1 = 10.$	$10^{-1} = \frac{1}{10}.$
$10^2 = 100.$	$10^{-2} = \frac{1}{100}.$
$10^3 = 1000.$	$10^{-3} = \frac{1}{1000}.$
$10^4 = 10000$ i t. d.	$10^{-4} = \frac{1}{10000}$ i t. d.

2. Że przeciwnie potęgi wszelkiéy liczby mnieyszéy od 1, gdy ich wykładniki są dodayne, staią się coraz mnieysze; a gdy są odiemne coraz większe. Jeżeli podnosić będziemy do tychże potęg ułomek *np.* $\frac{1}{2}$ okąże się, że

$\frac{10^1}{10^1} = 1$ albo $\frac{10^1}{10^1} = 10^{1-1} = 10^0$ a więc $10^0 = 1$

$(\frac{1}{2})^0 = 1.$	$(\frac{1}{2})^0 = 1$
$(\frac{1}{2})^1 = \frac{1}{2}.$	$(\frac{1}{2})^{-1} = \frac{1}{(\frac{1}{2})^1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 \times \frac{2}{1} = 2.$
$(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}.$	$(\frac{1}{2})^{-2} = \frac{1}{(\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 1 \times \frac{4}{1} = 4.$
$(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}.$	$(\frac{1}{2})^{-3} = \frac{1}{(\frac{1}{2})^3} = \frac{1}{\frac{1}{8}} = 1 \times \frac{8}{1} = 8.$
$(\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}.$ i t. d.	$(\frac{1}{2})^{-4} = \frac{1}{(\frac{1}{2})^4} = \frac{1}{\frac{1}{16}} = 1 \times \frac{16}{1} = 16$ itd.

Sama tylko iedność niepodlega temu ogólnemu prawidłu, wszelkim liczbom spólnemu, gdyż wszelka iéy potęga zawsze iest równa iedności.

§. 2. Dla wyrażenia ogólnie wszystkich tych własności, a razem dla poznania związków zachodzących między rozmaitemi wykładnikami iakiéykolwiek liczby, a odpowiadaiącemi im potęgami; nazwiymy tę liczbę a, dwa iéy nierówne wykładniki x, i x', a dwie odpowiadaiące im potęgi y i y', otrzymamy takie dwa równania:

$$a^x = y$$
$$a^{x'} = y'$$

strony odpowiadaiące pomnożywszy przez siebie, będzie

$$a^x \cdot a^{x'} = yy'$$

czyli $a^{x+x'} = yy'$ (Alg: Dąbr: §. 30.)

Równanie to okazuie, że chcąc dwie liczby y, y', czyli potęgi nierówne liczby a, wskazane wykładnikami x i x' przez siebie pomnożyć, dosyć iest wykładniki x i x' teyże liczby a do siebie dodać.

Strony odpowiadaiące tychże równań podzieliwszy przez siebie, będzie:

$$\frac{a^x}{a^{x'}} = \frac{y}{y'}$$

czyli $a^{x-x'} = \frac{y}{y'}$ (Alg: Dąbr: §. 42.)

To iest: chcąc też liczby y, y' przez siebie podzielić, dosyć iest wykładniki x, x', okazuiące iakiemi potęgami liczby a są liczby y, y', od siebie odiąć.

Obie strony równania $a^x = y$, podnośmy następnie do potęg, 2, 3, 4, i t. d. będzie:

$$a^x . a^x = y^2, \text{ czyli } a^{x+x} = y^2 \text{ czyli } a^{2x} = y^2$$

$$a^x . a^x . a^x = y^3 \text{ czyli } a^{x+x+x} = y^3 \text{ czyli } a^{3x} = y^3$$

$$a^x . a^x . a^x . a^x = y^4 \text{ czyli } a^{x+x+x+x} = y^4 \text{ czyli } a^{4x} = y^4 \text{ i t. d.}$$

a w ogólności $a^{mx} = y^m$

Równania te: $a^{2x} = y^2$, $a^{3x} = y^3$, $a^{4x} = y^4$ i t. d. uczą nas, że chcąc liczbę y, powstaiącą z podniesienia liczby a do potęgi x, podnieść do potęgi 2, 3, 4, i t. d. dosyć iest wykładnik x, okazuiący iaką potęgą liczby a iest liczba y, pomnożyć przez 2, 3, 4, i t. d. a w ogólności przez wykładnik m szukanéy potęgi.

Wyciąganie pierwiastków iest działaniem odwrotném podnoszeniu do potęg; zatém chcąc z liczby y wyciągnąć pierwiastek iakiegokolwiek stopnia, dosyć iest wykładnik x, okazuiący iaką potęgą liczby a iest liczba y, podzielić przez wykładnik znaku pierwiastkowego.

Jeżeli *np.* $y^4 = a^{4x}$; $y^3 = a^{3x}$; $y^2 = a^{2x}$, będzie:

$$\sqrt[4]{y^4} = \sqrt[4]{a^{4x}} \text{ czyli } y = a^x;$$

$$\sqrt[3]{y^3} = \sqrt[3]{a^{3x}} \text{ czyli } y = a^x;$$

$$\sqrt[2]{y^2} = \sqrt[2]{a^{2x}} \text{ czyli } y = a^x.$$

§. 3. We wszystkich tych równaniach, wykładniki x, x' nazywaią się *Logarytmami*; rozmaite ważności y, y', są liczbami naturalnemi tymże

Logarytmom odpowiadaiącemi; ilość niezmienna a podnoszona do różnych potęg nazywa się *zasadą* logarytmów (basis logarithmorum). Za zmianą zasady a zmienia się logarytm x liczby y, i wzaiemnie za zmianą logarytmu x teyże liczby y zmienia się zasada a. Rozmaite zaś ważności y zależące od iedney i teyże samey zasady, zowią się *układem* logarytmów (systema logarithmorum).

§. 4. Zatem w równaniach:

$$10^0 = 1;\ 10^1 = 10;\ 10^2 = 100;\ 10^3 = 1000;\ 10^4 = 10000 \text{ i t. d.}$$

$$10^{-1} = \tfrac{1}{10};\ 10^{-2} = \tfrac{1}{100};\ 10^{-3} = \tfrac{1}{1000};\ 10^{-4} = \tfrac{1}{10000} \text{ i t. d.}$$

Zero i wykładniki dodayne 1, 2, 3, i t. d. są logarytmami liczb całkowitych, 1, 10, 100, 1000, 10000, i t. d.; wykładniki odiemne — 1, — 2, — 3, i t. d. są logarytmami ułomków $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, i t. d; niżey zaś okażemy sposób wynaydywania wykładników będących logarytmami wszelkich innych liczb całkowitych i ułomków; z tego więc wszystkiego okazuie się: *że logarytmy są to wykładniki potęg, do których podnosić trzeba obraną za zasadę iakąkolwiek liczbę, aby ztąd otrzymać wszelkie liczby iakie tylko bydź mogą.*

§. 5. Okazuie się nadto ze związków zachodzących między wykładnikami x i x', a odpowiadaiącemi im ważnościami y, i y', że logarytmy taką maią własność, iż zamiast mnożenia liczb zwyczaynych, ich logarytmy do siebie się dodaią; że niemniey dzielenie tychże liczb zamienia się na odeymowanie logarytmów; podnoszenie do potęg na mnożenie, a wyciąganie pierwiastków na dzielenie.

§. 6. Jeżeli przeto wypadnie liczby dane iedne przez drugie pomnożyć, dosyć będzie ich logarytmy do siebie dodać, a summa ich, będzie logarytmem iloczynu tychże liczb danych.

§. 7. Gdy potrzeba będzie dwie liczby przez siebie podzielić, natenczas logarytm dzielnika odeymiemy od logarytmu dzielney, a ich różnica będzie logarytmem szukanego ilorazu.

§. 8. Nakoniec ieżeli zechcemy liczbę daną podnieść do iakieykolwiek potęgi m, lub wyciągnąć z niéy pierwiastek stopnia m, wtedy logarytm teyże liczby, w pierwszym razie pomnożywszy przez m, w drugim podzieliwszy przez m, będzie iloczyn logarytmem potęgi m, a iloraz logarytmem pierwiastku stopnia m liczby danéy.

O tych własnościach przekonać się można, odbywaiąc wszystkie te działania na liczbach składaiących drugie strony równań wyżéy w §. 1. przytoczonych, lub iakichkolwiek innych, byleby te powstawały z podnoszenia do potęg iednéy i teyże saméy liczby, dowolnie za zasadę obranéy.

§. 9. Okazaliśmy że biorąc 10 za zasadę, logarytmami liczb całkowitych 1, 10, 100, 1000, i t. d. są liczby 0, 1, 2, 3, i t. d; pozostaie nam więc ieszcze wyłożyć sposób, iakim wynayduią się logarytmy innych liczb całkowitych.

Przypatruiąc się w tym celu równaniom

$10^0 = 1$, $10^1 = 10$, $10^2 = 100$ i t. d. postrzegamy że

Liczby, 1, 10, 100, 1000, 10000. . . .

składaią postęp ieometryczny rosnący,

a logarytmy 0, 1, 2, 3, 4. . . . .

tworzą takiż sam postęp arytmetyczny; zatém: *logarytmy liczb całkowitych, są to liczby postępu arytmetyczuego rosnącego, którego pierwszym wyrazem iest* 0 *a stosunkiem* 1, *odpowiadaiące liczbom tworzącym takiż sam postęp ieometryczny, którego pierwszym wyrazem iest* 1, *a stosunkiem zasada.*

Gdybyśmy przeto, wziąwszy dwa którekolwiek przyległe wyrazy postępu pierwszego *np.* 1 i 10, za wyrazy skrayne nowego postępu ieometrycznego, umieścili między niemi tyle wyrazów pośrednich ile ich umieścić potrzeba, aby między niemi znalazły się także i liczby 2, 3, 4, i t. d. aż do 9, włącznie; włożywszy natenczas między odpowiadaiące im wyrazy 0 i 1. postępu arytmetycznego takąż samę liczbę wyrazów; liczby postępu drugiego, odpowiadaiące liczbom 2, 3, 4,... 9 postępu pierwszego, byłyby tychże liczb 2, 3, 4, ... 9 logarytmami.

Działanie któreby dla wynalezienia tak wielkiey liczby wyrazów pośrednich między wyrazami skraynemi każdego z tych dwóch nowych postępów, odbywać wypadało, trudném byłoby do wykonania; skracamy ie przeto, przestaiąc na dochodzeniu logarytmu każdéy z tychże liczb 2, 3, 4, ... 9 poiedyńczo.

Skrócenie w tym razie polega na tém, że trzy wyrazy proporcyi ciągłéy, są zawsze trzema przyległemi wyrazami postępu: zamiast więc szukania powyższych dwóch szeregów liczb, składaiących wraz z wyrazami skraynemi dwa zupełne postępy, ieden ieometryczny, drugi arytmetyczny, wynayduiemy tak w iednym iak w drugim, następnie trzeci tylko wyraz pośredni między dwoma sobie przyległemi. W tym celu doszedłszy naprzód ważności, tak średniéy ieometrycznie proporcyonalnéy między 1 i 10, iako też średniéy arytmetycznie proporcyonalnéy między ich logarytmami 0 i 1, otrzymamy pierwsze dwie proporcye ciągłe.

W pierwszéy z nich, dwie liczby nayblizsze téy, któréy logarytmu szukamy, uważamy znowu za skrayne proporcyi ieometrycznéy i wynayduiemy między niemi średnio ieometrycznie proporcyonalną; dwa zaś logarytmy tymże liczbom nayblizszym odpowiadaiące, bierzemy za skrayne proporcyi arytmetycznéy, i szukamy między niemi średniéy proporcyonalnéy. Takież same działania odbywamy z wyrazami dwóch drugich proporcyy, które stąd powstaną, iako też i następnych, póki nie natrafimy na średnio ieometrycznie proporcyonalną, równą téy saméy liczbie któréy logarytmu szukamy, lub liczbie bardzo mało od niéy różniącéy się: odpowiadaiąca iéy średnio arytmetycznie proporcyonalna, będzie szukanym iéy logarytmem.

§. 10. Chcąc wynaleść logarytm liczby *np.* 3 tak postępuiemy:

1ód. Uważaiąc 1 i 10 za wyrazy skrayne proporcyi ieometrycznéy, a ich logarytmy 0 i 1, za wyrazy skrayne proporcyi arytmetycznéy, wynayduiemy między dwoma pierwszemi średnio ieometrycznie proporcyonalną, a między dwoma drugiemi średnio arytmetycznie proporcyonalną.

Nazwawszy pierwszą z nich przez x a drugą przez y, ieżeli przestaniemy na sześciu tylko cyfrach dziesiętnych będzie $1 : x = x : 10; \ldots 0 . y = y . 1.$
zatem $x^2 = 10; \ldots 2y = 0 + 1.$
a tém samém $x = \sqrt{10} = 3{,}162277;\ y = \frac{1}{2} = 0{,}5.$

2re Dwie te liczby 1 i 3,162277; z których pierwsza iest bezpośrednio mnieysza, a druga bezpośrednio większa od 3, bierzemy za wyrazy skrayne nowéy proporcyi ieometryczney, i wynayduiemy między niemi średnio proporcyonalną; dwa zaś ich logarytmy o i 0,5 uważamy za wyrazy skrayne proporcyi arytmetyczney i wynayduiemy między niemi średnią proporcyonalną.

Będzie $1 : x = x : 3,162277$, . . . $0 . y = y . 0,5$

zatém $x^2 = 3,162277$; . . . $2y = 0 + 0,5$

a tém samém $x = \sqrt{3,162277} = 1,778279$ . . $y = \frac{0,5}{2} = 0,25$

3cie Ta druga średnio ieometycznie proporcyonalna 1,778279 iest bezpośrednio mnieysza od 3, a pierwsza 3,162277 iest od niéy bezpośrednio większa; biorąc ie zatém za skrayne trzeciéy proporcyi ieometryczney ciągłéy, a odpowiadaiące im logarytmy 0,25 i 0,5 za skrayne proporcyi ciągłéy arytmetyczney,

będzie $1,778279 : x = x : 3,162277$; . . . $0,25 . y = y . 0,5$

zatém $x^2 = 1,778279 \times 3,162277$; . . . $2y = 0,25 + 0,5$

a tém samém $x = \sqrt{1,778279 \times 3,162277}$; . . . . $y = \frac{0,25 + 0,5}{2}$

czyli $x = 2,371373$; . . . . $y = \frac{0,75}{2} = 0,375$

Będzie więc do następuiącego działania, liczbą bezpośrednio mnieyszą 2,371373, a bezpośrednio większą zostanie ieszcze taż sama liczba 3,162277; odpowiadaiącemi zaś im logarytmami, będą ułomki 0,375 i 0,5.

4te Podobnymże sposobem wynayduiemy następnie średnio ieometrycznie proporcyonalne, między liczbami nayblizszemi liczby 3, tudzież średnio arytmetycznie proporcyonalne między odpowiadaiącemi im logarytmami.

2

Zbliżaiąc przez to coraz bardziéy ważność średnio ieometrycznie proporcyonalnych do liczby 3, natrafimy nakoniec między niemi na liczbę 2,999999 bardzo mało od niéy różniącą się. Średnio arytmetycznie proporcyonalna 0,47712, téy ostatniéy średnio ieometrycznie proporcyonalnéy odpowiadaiąca, będzie mogła bydź wzięta za logarytm liczby 3.

§. 11. Przez takież same działania możnaby wynaleść logarytmy innych liczb pośrednich, nietylko między 1 i 10, ale też między 10 i 100, między 100 i 1000, i t. d. a chociaż są na to inne ieszcze sposoby, przestaiemy iednak na dopiero wyłożonym, iako dla poczynaiących nayzrozumialszym a razem dostatecznym do należytego objaśnienia całéy teoryi logarytmów.

§. 12. Ze sposobu tu podanego okazuie się, że logarytmy niezupełnie odpowiadaią liczbom pośrednim między 1 i 10, między 10 i 100 i t. d. lecz liczbom bardzo mało od nich różniącym się. Jakoż wynayduiąc logarytm liczby 3 z sześciu cyframi dziesiętnemi, natrafiamy za 20m działaniem nie na samę liczbę 3, lecz na liczbę 2,999999, różniącą się od niey o 0,000001. Gdybyśmy każdą z średnich ieometrycznie proporcyonalnych, wyrachowywali z 7miu, 8miu, 9ciu i t. d. cyframi, musielibyśmy więcéy odbywać działań, a różnica między ostatnią średnio proporcyonalną a liczbą 3, iako zachodząca w dziesiętnych, coraz wyższego rzędu, tém samém coraz bardziéy zmnieyszałaby się; widocznie iednak nie mogłaby się nigdy na zero zamienić.

Stąd wynika, 1od że w układzie którego zasadą iest 10, logarytmy samych tylko potęg zasady, to iest liczb 10, 100, 1000 i t. d. są liczbami *spółmiernemi*; logarytmy zaś wszystkich innych liczb całkowitych są *niespółmierne* i tylko przez przybliżenie wyrachowane bydź mogą. 2re że działania na liczbach za pomocą logarytmów odbywane, daią nam wprawdzie wypadki niezupełnie prawdziwe, tak znacznie iednak do nich zbliżone, że uchybienia stąd wypływaiące, wtenczas nawet kiedy nam o iak nayściśleyszą dokładność chodzić będzie, za żadne uważać można.

§. 13. Każdy logarytm składa się z dwóch części przecinkiem od siebie oddzielonych, to iest, z liczby całkowitéy, lub z zera na iéy mieyscu położonego, i z ułomku, który zamieniony bywa na dziesiętny z dowolną liczbą cyfr, pospolicie naymniéy do pięciu posuniętą. Całkowita takowa, lub zero iéy mieysce zastępuiące, nazywaią się *cechą* logarytmu, (characteristica), ułomek zaś dziesiętny zwykle wyrazem łacińskim *Mantissa*, z greckiego pochodzącym, mianowany bywa. My go tu *przewyżką* zwać będziemy.

Nayważnieyszą częścią logarytmu iest iego cecha, gdyż z niéy poznać można z ilu cyfr składa się liczba danemu logarytmowi odpowiadaiąca. I tak, ponieważ logarytmem 1 iest 0, a logarytmem 10 iest 1; zatém logarytmy liczb pośrednich między 1 i 10 czyli iednocyfrowych, muszą bydź ułomkami, bo są większe od 0 a mnieysze od 1: przeto samą cechą logarytmu każdéy z tychże *liczb iednocyfrowych* musi bydź *zero*.

Podobnież, ponieważ logarytmem 10 iest 1, a logarytmem 100 iest 2; zatém logarytmy liczb pośrednich między 10 i 100 czyli *dwucyfrowych*, są większe od 1 a mnieysze od 2; przeto samo cechą logarytmu każdéy z *liczb dwucyfrowych* iest 1.

Tak samo okazać można że cechą logarytmu każdéy liczby *trzycyfrowéy* iest 2, *czterocyfrowéy* 3, i t. d.

W ogólności, ieżeli liczba iaka składa się z cyfr m, cecha logarytmu teyże liczby zawierać będzie iedności $m - 1$, i wzaiemnie, ieżeli cecha logarytmu zawiera iedności m, liczba odpowiadaiąca temu logarytmowi składać się będzie z cyfr $m + 1$.

§. 14. Sposobem wyżéy wyłożonym (9 i 10) wyrachowano logarytmy liczb pierwszych, to iest takich, które tylko przez 1 i przez siebie same bez reszty podzielić się daią; logarytmy zaś innych liczb całkowitych, zwanych wielokrotnemi, mogą bydź wynalezione przez skrócenia, zasadzaiące się na ogólnych własnościach logarytmów.

Jakoż liczby wielokrotne czyli takie, które nietylko przez 1 i przez siebie same, ale nadto i przez inne liczby bez reszty podzielić się daią, albo są iloczynami czynników nierównych, albo też potęgami czyli iloczynami czynników równych.

2*

1ᵒᵈ Otrzymuiemy logarytmy liczb wielokrotnych, które są iloczynami czynników nierównych, dodaiąc do siebie logarytmy wszystkich czynników, na iakie też liczby wielokrotne rozłożone bydź mogą; gdyż summa logarytmów dwóch lub więcéy liczb danych, iest logarytmem tychże liczb iloczynu. (6) Aby więc wynaleść logarytm liczby np. 15, dosyć iest dodać do siebie logarytmy iéy czynników 3 i 5, które są liczbami pierwszemi, będzie więc:

$$\begin{array}{lr} & \log 3 = 0{,}47712 \\ & \log 5 = 0{,}69897 \\ \hline \text{zatém} & \log 15 = 1{,}17609 \end{array}$$

Podobnież chcąc wynaleść logarytm liczby 105, dosyć iest dodać do siebie logarytmy iéy czynników 3, 5, 7. —

Jednym z czynników liczb kończących się na iedno lub więcéy zer, są liczby 10, 100, 1000 i t. d; że zaś logarytmami tych ostatnich, są liczby 1, 2, 3, i t. d; więc aby wynaleść logarytm iloczynu dwóch czynników, z których ieden iest którąkolwiek z tychże liczb 10, 100, 1000 i t. d. dosyć iest do cechy logarytmu drugiego iéy czynnika dodać 1, 2, 3, i t. d. iedności. — Odwrotnie, ponieważ odeymowanie logarytmów odpowiada dzieleniu liczb (7), zatém chcąc liczbę daną podzielić przez 10, 100, 1000 i t. d. dosyć iest od cechy logarytmu teyże liczby odiąć 1, 2, 3, i t. d. iedności.

Z téy przyczyny logarytmy liczb dziesięciokrotnych, czyli następnie po dziesięć razy od siebie większych lub mnieyszych, maią przewyżki iednakowe, i różnią sie od siebie samą tylko cechą.

Jeżeli logarytm	25380	=	4,40449
będzie logarytm	2538	=	3,40449
. . . .	253,8	=	2,40449
. . . .	25,38	=	1,40449 i t. d.

2ʳᵉ Chcąc wynaleść logarytm liczby wielokrotnéy będącéy iloczynem czynników równych czyli potęgą, trzeba pomnożyć logarytm iednego z tychże czynników czyli pierwiastku przez liczbę czynników równych, to iest przez

nb Potęga iest iloczyn otrzymany z liczby pewną liczbę razy wziętey za czynnik. np 3×3×3×3 = 81 iest potęgą 4tą liczby 3 wziętey za czynnik.

wykładnik potęgi; gdyż mnożenie logarytmów, odpowiada podnoszeniu liczb do potęg (8). Liczba *np.* 81, iest czwartą potęgą liczby 3; zatém pomnożywszy logarytm 3ch 0,47712 przez 4; iloczyn 1,90848, będzie logarytmem liczby 81.

Nakoniec, ieżeli między czynnikami liczby wielokrotnéy znayduią się czynniki sobie równe: wtedy logarytmy potęg wskazanych liczbą tych czynników równych, dodaią się do logarytmów czynników pozostałych.

Liczba *np.*	24	$= 2.2.2.3.$
zatém logarytm	24	$= log\ 2.3 + log\ 3.$
Podobnież	360	$= 2.2.2.3.3.5.$
zatém *log*	360	$= log\ 2.3 + log\ 3.2 + log\ 5.$

§. 15. Za pomocą tak wyrachowanych logarytmów liczb całkowitych wynayduią się logarytmy wszelkich ułomków, sposobem który niżéy wyłożymy. Wypada tu tylko okazać, dla czego logarytmy ułomków muszą bydź odiemne, i co iest logarytmem zera.

Logarytmy wszelkich liczb całkowitych mieszczących się między granicami 0 i ∞, to iest: między zerem i liczbą nieskończoną, są dodayne, iako potęgi ilości dodaynych. Zmnieyszaią się one, w miarę zmnieyszania się liczb którym odpowiadaią; że zaś logarytmem 1, iest 0, a wszelka ilość która w ubywaniu swoiém przeydzie granicę zerem wskazaną, zamienia się na odiemną; przeto logarytmy liczb mnieyszych od 1, czyli ułomków, muszą bydź odiemne, iakeśmy to iuż wyżéy (4) uważali.

Takowa odiemna ważność logarytmu ułomku, tym iest większa, im mnieyszy iest ułomek, któremu tenże logarytm odiemny odpowiada; tak, że ieżeli wystawimy sobie ułomek mnieyszy od wszelkiéy ilości naznaczonéy, logarytm iego będzie miał ważność odiemną nieskończenie wielką, która nie może bydź nigdy uczynioną taką aby odpowiadała zeru. Z téy więc przyczyny 0 ma za logarytm ilość nieskończoną, wziętą ze znakiem —, co się zwykle przez skrócenie tak wyraża $log\ 0 = -\infty$. Z tego się zaś okazuie, że ponieważ liczby całkowite maią logarytmy dodayne, a ułomki maią logarytmy odiemne, przeto ilości odiemne, nie mogą mieć żadnych logarytmów.

§. 16. Wynalezione logarytmy liczb całkowitych, układaią się w tablice, pisząc ie porządkiem obok tych liczb naturalnie po sobie idących, do których należą. W tablicach takowych znayduią się zwykle same tylko przewyżki, i zero położone na mieyscach cechy, gdyż takowéy gdy dana iest liczba, łatwo domyślić się można (13). Z resztą takowe tablice obeymuią logarytmy liczb od 1 do 1000, lub od 1 do 10000 i t. d. i są wyrachowane z dowolną liczbą cyfr dziesiętnych. Na wstępie, zwykle bywa dołączone opisanie porządku, podług którego są ułożone.

§. 17. Logarytmy o których tu mówimy, liczbę 10 za zasadę maiące, nazywaią się pospolitemi, logarytmy zaś których zasadą iest inna iaka liczba, inne maią nazwiska. Zasługuią między niemi na wspomnienie logarytmy *Nepera*, pierwszego ich wynalazcy, liczbę 2,71828.... za zasadę maiące.

§. 18. We wszystkich układach logarytmem 1 iest 0; gdyż iakakolwiek iest ważność zasady, nazwawszy ią ogólnie przez a, zawsze będzie $a^0 = 1$. Wszelkiéy innéy liczby logarytmy, podług odmiennych zasad wyrachowane, różnić się od siebie muszą; bo ieżeli dla otrzymania liczby y wypada zasadę a podnieść do potęgi x, tedy inną zasadę A dla otrzymania teyże saméy liczby y, widocznie do innéy potęgi podnieść trzeba będzie. Wykładniki więc zasad a i A, czyli logarytmy liczby y, wzięte z dwóch odmiennych układów, nie mogą bydź sobie równe.

§. 19. Maiąc iednek logarytm iakieykolwiek liczby y, wyrachowany podług iednéy zasady a można otrzymać logarytm teyże saméy liczby y, stosowny do innéy iakieykolwiek zasady A.

Nazwawszy te dwa nierówne sobie logarytmy przez x i x', otrzymamy dwa następuiące równania:

$$a^x = y$$
$$A^{x'} = y$$

porównawszy ie z sobą, będzie $a^x = A^{x'}$ . . . . (1); że zaś chcąc ilości a i A podnieść do potęg x i x', dosyć iest logarytmy tychże ilości pomnożyć w pierwszym razie przez x, w drugim przez x' (8);

więc wskazawszy działanie takowe przéz logarytmy, wyrachowane podług zasady a, które dla skrócenia nazywamy przez log będzie $x.\ log\ a = x'.\ log\ A$.

Rozwiązawszy to równanie na x', będzie . . . : . $x' = \frac{x.\ log\ a.}{log\ A.}$

czyli . . . . : . . . . . . $x' = \frac{log\ a}{log\ A}.x.$

że zaś logarytmem zasady a iest 1, więc . . . . . , $x' = \frac{1}{log\ A}.\ x.$

Równanie to okazuie nam, że chcąc logarytm x, liczby y, wyrachowany podług zasady a przerobić na teyże liczby logarytm x' stosowny do innéy zasady A, dosyć iest dany logarytm x, pomnożyć przez ułomek wypadaiący z podzielenia 1, przez logarytm zasady A, wyrachowany podobnież podług zasady a.

Daymy na to, że a znaczy zasadę logarytmów pospolitych, czyli 10, A znaczy zasadę logarytmów neperyańskich czyli 2,71828. . . i że zamienić chcemy logarytm pospolity 0,77815 liczby 6, na logarytm neperyański teyże samey liczby.

Ponieważ logarytmem pospolitym zasady 2,71828. . . iest 0,43429, (*) więc w równaniu powyższém położywszy zamiast x', $log\ A$, i x ich ważności, będzie $log\ nep.\ 6 = \frac{1}{0{,}43429} \times 0{,}77815.$

czyli, wykonawszy dzielenie, będzie

$$log.\ nep.\ 6 = 2{,}30260\ .\ 0{,}77815 = 1{,}79176. . .$$

Chcąc podobnież wynaleść logarytm neperyanski liczby 10, dosyć iest, logarytm pospolity liczby 10 czyli 1, pomnożyć przez 2,30260; będzie zatém logarytm neperyański liczby 10 = 2,30260.

(*) Sposób iakim ten logarytm wynalezionym bydź może, późniéy wyłożymy.

W ogólności zamieniamy wszelki logarytm pospolity liczby danéy, na logarytm neperyański teyże liczby, mnożąc pierwszy z nich przez 2,30260.

Mnożnik ten, za pomocą którego przerabiamy logarytmy iednego układu, na logarytmy układu drugiego, nazywa się *zamiennik* (Modulus).

Aby podać sposób zamieniania nawzaiem logarytmów neperyańskich na pospolite, w obu stronach równania

$$a^x = A^{x'}$$

wskażmy działanie które przez logarytmy neperyańskie, przy podnoszeniu do potęg x i x', zasad a i A, odbydźby wypadało; nazywaiąc takowe logarytmy dla skrócenia a razem różnicy od pierwszych przez *Log*;

będzie . . . . $x \,.\, Log\ a = x' \,.\, Log\ A$.
rozwiązawszy to równanie na x, będzie

$$x = \frac{Log\ A}{Log\ a} \,.\, x'$$

że zaś logarytmem neperyańskim zasady A, iest 1, a takiż sam logarytm zasady 10 iakeśmy wyrachowali wyżéy iest 2,30260, zatém w równaniu powyższém zamiast $Log\ A$ i $Log\ a$ położywszy ich ważności, będzie

$x = \frac{1}{2,30260} \,.\, x'$, czyli wykonawszy dzielenie będzie $x = 0,43429 \,.\, x'$

Równanie to okazuie, że każdy logarytm neperyański x' danéy liczby y, pomnożony przez zamiennik, 0,43429, da na iloczyn logarytm pospolity teyże liczby y.

Doszliśmy wyżéy że logarytmem neperyańskim liczby 6, iest 1,79176. . . zamieniaiąc go na powrót na pospolity, będzie *log* pospolity $6 = 0,43429 \times 1,79176 = 0,77815$.

Uwaga. Widzimy więc że każdy układ logarytmów, ma swóy osobny zamiennik, który się wynayduie dzieląc iedność czyli logarytm zasady układu danégo. przez takiż logarytm zasady tego układu, na który tablice iuż wyrachowane przerobić chcemy.

Okazuie się nadto że zamiennik 2,30260 za pomocą którego przerabiamy logarytmy pospolite na neperyańskie, równy iest logarytmowi neperyańskiemu liczby 10, to iest zasady logarytmów pospolitych; i wzaiemnie, zamiennik 0,43429 za pomocą którego przerabiamy logarytmy neperyańskie na pospolite, równy iest logarytmowi pospolitemu zasady 2,71828 neperyańskiéy.

Modulus – zamiennik

(1) – $\dot{x} = \left(\frac{1}{\log. A}\right) . x$ = formuła na wyrażenie logarytmów [illegible] zasady [illegible] 2,71828 –

modulus

(2). $x = \left(\frac{1}{\log a}\right) \dot{x}$ = formuła [illegible] logarytmów pospolitych = 10!

albo Bryga

$\dot{x} = \frac{1}{\log: 2,71828} \times x$ [illegible]

$x = \frac{1}{\log 10} \dot{x}$ [illegible] neperyańskie

O używaniu tablic logarytmów pospolitych i o skróceniu za ich pomocą działań arytmetycznych.

I.

Nazywamy dopełnieniem arytmetycznem logarytmu, różnicę zachodzącą między liczbą 10 a logarytmem iakieykolwiek liczby. Naprzykład;

log 35 = 1,54407 a iego dopełnieniem iest 8,45593;
log 36 = 1,55630 a iego dopełnieniem iest 8,44370 (*).

Dopełnienia arytmetyczne służą do ułatwienia działań na logarytmach odbywanych: gdyż za ich pomocą odeymowanie logarytmów, większéy niż dodawanie wymagaiące uwagi, zamienia się na dodawanie. I tak: zamiast odeymować logarytm dzielnika od logarytmu dzielnéy, iak tego wymaga prawidło wyżéy (§. 7.) podane, dodaiemy dopełnienie arytmetyczne logarytmu dzielnika, do logarytmu dzielnéy, a od cechy summy tych dwóch logarytmów, odeymuiemy 10. Dzieląc *np.* 36 przez 4 będzie:

$$\begin{array}{rl} \textit{log}\ 36 = & 1,55630 \\ \textit{dop. log}\ 4 = & 9,39794 \\ \hline \end{array}$$

od téy Summy 10,95424 odjąwszy 10, będzie 0,95424 logarytmem szukanego ilorazu 9.

(*) Gdyby cecha logarytmu danego zawierała w sobie iedności więcéy niż 10, co się iednak w praktyce rzadko wydarza, wynaleźlibyśmy iego dopełnienie, odeymuiąc go nie od 10 lecz od 100.

Sposób ten postępowania, zgadza się z zasadami działań algebraicznych; odeymuiąc *np.* b od a wypada $a - b$: lecz działanie to możemy ieszcze i tak odbydź: naprzód b odeymuiemy od 10 zostanie $10 - b$; potém tę resztę dodaymy do a i będzie $a + 10 - b$; nakoniec od téy summy odjąwszy 10 otrzymamy różnicę $a + 10 - b - 10$, czyli $a - b$, równą powyższéy.

Jakkolwiek zdawać się może iż działanie przez dopełnienia zawilszém iest od tego które odbywamy, odeymuiąc bezpośrednio logarytm dzielnika od logarytmu dzielnéy, przekonamy się iednak późniéy, że one rachunek znacznie skracaią.

Używamy dopełnień arytmetycznych i wtenczas także, kiedy mamy od pewnéy summy logarytmów, odjąć summę innych logarytmów. W tym przypadku, do pierwszéy z tych dwóch summ, dodaiemy summę dopełnień logarytmów, które maią bydź odięte, a od cechy summy dopełnień i logarytmów, odeymuiemy tyle dziesiątków ile braliśmy dopełnień.

Wypadek zatém liczebny tego *np.* wyrażenia:

$log\ 15 + log\ 4 + log\ 3 - log\ 6 - log\ 5 - log\ 2$, równy będzie wypadkowi tego wyrażenia:

$(log\ 15 + log\ 4 + log\ 3 + dop.\ log\ 6 + dop.\ log\ 5 + dop.\ log\ 2) - 30.$

Inny ieszcze użytek dopełnień arytmetycznych logarytmów, niżéy poznamy.

II.

Tablice zwyczayne rozciągaią się zwykle naywyżéy do 100000, i obeymuią w sobie logarytmy samych iedynie liczb całkowitych. Gdybyśmy więc nie podali sposobów wynaydywania logarytmów liczb nie znayduiących się w tablicy, tudzież dochodzenia liczb odpowiadaiących logarytmom tąż tablicą nie obiętym; działania arytmetyczne na tych tylko liczbach odbywać by się mogły, które tablice w sobie zawieraią; co rzadko kiedy w praktyce się wydarza.

Rozwiązanie tych dwóch głównych zagadnień, na téy wspiera się zasadzie, że *różnice między liczbami mało od siebie różniącemi się, mogą bydź uważane za proporcyonalne różnicom zachodzącym między logarytmami tymże liczbom odpowiadaiącemi.*

Aby się o tém przekonać, weźmy trzy liczby iakiekolwiek większe od 1000 następnie po sobie idące, a oraz ich logarytmy *np.*

$$\log 6218 = 3{,}79365$$
$$\log 6217 = 3{,}79358$$
$$\log 6216 = 3{,}79351$$

i ułóżmy taką proporcyą: różnica między liczbą naywiększą a naymnieyszą, to iest: 2, tak się ma do różnicy między liczbą naywiększą a średnią to iest: do 1; iak różnica między logarytmami dwóch pierwszych liczb, to iest: 0,00014, do różnicy między logarytmami dwóch drugich, to iest: do 0,00007. Ponieważ w proporcyi téy . . . 2 : 1 = 0,00014 : 0,00007, iloczyn wyrazów skraynych, równy iest iloczynowi wyrazów średnich, a to nietylko w tym iednym przypadku, lecz i w innych iemu podobnych, mamy więc prawo wnosić, że powyższa zasada nie iest fałszywa.

Gdybyśmy iednak, wziąwszy trzy liczby mnieysze od 1000, a oraz ich logarytmy, w tenże sam sposób ułożyli proporcyą; iloczyn wyrazów skraynych, nie byłby w niéy zupełnie równy iloczynowi wyrazów średnich, to iest: różnice liczb takowych, nie byłyby zupełnie proporcyonalne różnicom ich logarytmów. Pochodzi to stąd, że liczby składaiące postęp ieometryczny, nie powiększaią się iednostaynie w tymże samym stosunku co ich logarytmy, postęp arytmetyczny tworzące; i dla tego też w założeniu naszém powiadamy, że różnice liczb mało od siebie różniących się, mogą bydź uważane za proporcyonalne, różnicom odpowiadaiących im logarytmów: bo, im większe są liczby, tym stosunek ich różnic zbliża się bardziéy do stosunku różnic logarytmów tymże liczbom odpowiadaiących. Jakož, każda z liczb pośrednich między 1 i 10, między 10 i 100, między 100 i 1000 i t. d. ma za logarytm 0 i ułomek, 1 i ułomek, 2 i ułomek i t. d. to iest: do cechy logarytmu każdéy liczby przestępuiącéy iedną z tych granic 10, 100 . . . przybywa następnie 1, a przewyżka tworzy się, przez podzielenie się drugiéy iedności na tyle części, ile iest liczb między granicami 1 i 10, 10 i 100, 100 i 1000 i t. d. pośrednich: że zaś między liczbami 10 i 100 iest więcéy liczb pośrednich niż między 1 i 10 między liczbami 100 i 1000 iest ich znowu więcéy niż między 10 i 100 i t. d. więc liczby pośrednie między 1 i 10, między 10 i 100, między 100 i 1000 i t. d. podzielaią między siebie iedność, następnie na coraz większą liczbę części, a tém samém różnice zachodzące między logarytmami liczb, coraz bardziéy się zmnieyszaią, im te liczby są większe.

Stąd wynika: 1od, że proporcya którą powyższym sposobem układamy, lubo oczywiście fałszywa, zbliża się iednak coraz bardziéy do prawdziwéy.

2re Że działania które za pomocą logarytmów odbywamy, daią nam wypadki tym bardziéy do prawdziwych zbliżone, im są większe liczby do tychże działań wchodzące.

Uwagi te ułatwią nam zrozumienie następuiących zagadnień.

III.

Zagadnienie I.

Maiąc daną liczbę, nie znayduiącą się w zwyczaynych tablicach logarytmów, wynaleść iéy logarytm. —

W zagadnieniu tém następuiące wydarzyć się mogą przypadki:

Przypadek I. Jeżeli liczba dana iest całkowita, lecz przewyższa naywiększą liczbę tablicy, wtedy iéy logarytm tak wynayduiemy.

1od W liczbie danéy odcinamy od prawéy ku lewéy stronie tyle cyfr na dziesiętne, aby liczba po lewéy stronie przecinka pozostała, mogła bydź wynaleziona w tablicy: otrzymamy tym sposobem liczbę 10, 100, 1000 i t. d. razy mnieyszą od danéy.

2re Liczbę po lewéy stronie przecinka położoną, powiększywszy iednością, następuiącą układamy proporcyą: tak się ma różnica między liczbą iednością większą od téy, która się po lewey stronie przecinka pozostała, a tąż liczbą po lewéy stronie przecinka będącą, to iest: 1, do różnicy logarytmów odpowiadaiących tymże liczbom; iak się ma różnica między liczbą po lewéy stronie przecinka pozostałą wraz z iéy ułomkiem, a tąż liczbą bez ułomka, to iest: ułomek dziesiętny, którego licznik wyrażony iest cyframi od prawéy ku lewéy stronie odciętemi; do czwartego wyrazu ieometrycznie proporcyonalnego.

3cie Doszedłszy ważności tego wyrazu czwartego, ieżeli go dodamy do logarytmu liczby po lewéy stronie przecinka położonéy, i logarytmowi który stąd wypadnie, nadamy cechę przyzwoitą, otrzymamy logarytm liczby danéy, przewyższaiącéy naywiększą liczbę tablicy.

Daymy na to, że mamy wynaleść logarytm liczby 52347, za pomocą tablicy rozciągaiącéy się do 10000.

Wzór działania.

$$\begin{array}{lll} \log 5235 = 3{,}71892 & & 5234{,}7 \\ \log 5234 = 3{,}71883 & & 5234 \\ \hline 1 \;:\; 0{,}00009 & = & 0{,}7 : x. \end{array}$$

$$\begin{array}{lrl} \text{zatém} & x & = 0{,}000063 \\ \text{że zaś} & \log 5234 & = 3{,}71883 \\ \hline \text{więc} & \log 52347 & = 4{,}71889 \end{array}$$

Uwaga I. Gdy czwarty wyraz powyższéy proporcyi zawiera zawsze więcéy cyfr dziesiętnych niż przewyżki logarytmów tablicą objętych; przestaiemy zatém na tylu tylko cyfrach dziesiętnych, ile ich też przewyżki obeymuią, zachowuiąc co do cyfr opuszczonych prawidło w arytmetyce wyłożone (obacz Zasady Arytm. str: 90. §. 187).

Uwaga II. Działanie to w praktyce skrócić się daie. Także pierwszym wyrazem proporcyi powyższéy iest zawsze 1; zatém aby wynaleść czwarty iéy wyraz, dosyć iest różnicę logarytmów w tablicy położoną (*), pomnożyć przez ułomek dziesiętny, którego licznik iest wyrażony cyframi od prawéy ku lewéy stronie w liczbie danéy odciętemi; iloczyn ten dodadź do logarytmu liczby po lewéy stronie przecinka położonéy, i logarytmowi który stąd powstanie, dać cechę przyzwoitą.

Przypadek II. Jeżeli liczba dana iest ułomkową dziesiętną, to iest: ieżeli zawiera całkowite i ułomek dziesiętny, wtedy:

1od Znosimy w niéy przecinek, a tém samém mnożymy ią przez 10, 100, 1000 i t. d. to iest przez 1 z tylu zerami, ile iest cyfr w liczniku ułomku dziesiętnego.

2re Wynayduiemy logarytm liczby całkowitéy stąd wynikaiącéy, 10, 100, 1000 i t. d. razy większéy od liczby danéy.

3cie Odjąwszy zatém od cechy tego logarytmu tyle iedności, aby logarytm pozostały odpowiadał liczbie po lewéy stronie przecinka położonéy, otrzymamy logarytm liczby danéy.

Daymy na to że mamy wynaleść logarytm liczby 2,71828, która iest zasadą logarytmów neperyańskich (§. 19. *przyp.*).

Wzór działania.

W liczbie danéy zniósłszy przecinek, otrzymamy liczbę 271828, 100000 razy większą od danéy. Jéy logarytmem który podług przypadku poprze-

---

(*) Różnica takowa umieszczona iest w kolumnie tablicy pospolicie przez *D* lub *dif* (differentia) oznaczonéy; cyfry w niéy obok dwóch logarytmów przyległych położone są końcowe cyfry różnicy, zachodzącéy między ich przewyżkami. W tablicy w którey taż przewyżka wyrachowana iest do pięciu dziesiętnych, iedna cyfra, w kolumnie *D* znaczy piątą dziesiętną; a dwie, czwartą i piątą dziesiętną: *np.* 5 znaczy 0,00005; 14, znaczy 0,00014; w tablicy zaś w któréy przewyżka 7 cyfr dziesiętnych obeymuie, iedna cyfra iest siódmą, a dwie szóstą i siódmą; zatém 5 znaczy 0,0000005, a 14, znaczy 0,0000014.

popięciu cyfrach

działącego wynaleść można iest 5,43429; zatém logarytmem 2,71828, będzie 0,43429.

Przypadek III. Jeżeli liczba iest ułomkową zwyczayną, to iest: ieżeli zawiera całkowitę i ułomek zwyczayny; natenczas całkowitę i ułomek zamieniamy na ułomek niewłaściwy, a potém logarytm iego mianownika, odeymuiemy od logarytmu licznika; gdyż ułomek wskazuie nam iloraz, maiący wypaść z podzielenia licznika przez mianownik.

Logarytm *np.* $19\frac{4}{7}$ tak wynayduiemy:

Wzór działania.

10
0,84510
9,15490

$$19\tfrac{4}{7} = \frac{137}{7}$$

zatém $log\ 19\frac{4}{7} = log\ 137 - log\ 7 = (log\ 137 + dop.\ log\ 7) - 10.$

$$\begin{array}{rrl} & log\ 137 = & 2,13672 \\ & dop.\ log\ \ 7 = & 9,15490 \\ \hline \text{będzie więc} & log\ 19\frac{4}{7} = & 11,29162. - 10 \\ & = & 1,29162. - \end{array}$$

log. 7 = 0,84510

Przypadek IV. Jeżeli liczba dana iest ułomkiem zwyczaynym, należałoby podobnież odiąć logarytm mianownika od logarytmu licznika; że zaś w ułomkach zwyczaynych mianownik iest większy od licznika, a tém samém logarytm mianownika iest większy od logarytmu licznika; wypada więc odiąć ilość większą od mnieyszéy. W takim razie postępuiemy przeciwnie, to iest: odeymuiemy ilość mnieyszą czyli logarytm licznika, od ilości większéy czyli od logarytmu mianownika, a przed resztą położywszy znak — otrzymamy na logarytm ułomku, liczbę odiemną.

Aby więc wynalesć logarytm ułomku *np.* $\frac{7}{8}$ tak postępuiemy.

Wzór działania.

$$\begin{array}{rrr} & log\ 8 = & 0,90309 \\ & log\ 7 = & 0,84510 \\ \hline \text{zatém} & log\ \frac{7}{8} = & -\ 0,05799. \end{array}$$

Tenże sam otrzymalibyśmy wypadek, dodaiąc dopełnienie arytmetyczne logarytmu mianownika do logarytmu licznika i od summy stąd wypadaiącéy odeymuiąc 10. Lecz że summa ta iest mnieysza od 10, przeto postępuiemy znowu przeciwnie, to iest summę tę odeymuiemy od 10, a przed resztą kładziemy znak — .

To ostatnie działanie można dwoma sposobami wykonać, to iest: albo odeymuiąc od 10 summę logarytmu licznika i dopełnienia logarytmu mianownika, skąd otrzymany wypadek odiemny, zgodzi się z tym do którego doszliśmy nie używaiąc dopełnienia; albo też odeymuiąc samę tylko cechę summy od 10, skąd otrzymamy nowéy natury logarytm, w praktyczném użyciu od poprzedzaiącego dogodnieyszy, to iest taki, którego sama tylko cecha będzie odjemna, przewyżka zaś iego dodayną pozostanie.

Takowy logarytm odróżnia się od całkowicie odjemnego pospolicie tém, że się między iego cechą i przewyżką nie kładzie przecinek, lecz kropka.

Wynaleść *np.* logarytm tegoż samego ułomka $\frac{7}{8}$.

Wzór działania.

$$\begin{array}{rr} log \quad 7 = & 0{,}84510 \\ dop.\ log \quad 8 = & 9{,}09691 \\ \hline log\,7 + dop.\,log\,8 = & 9{,}94201 \end{array}$$

tę summę odjąwszy od 10, będzie:

$$log\ \tfrac{7}{8} = -\ 0{,}05799$$

odjąwszy zaś samę tylko cechę teyże summy od 10, będzie:

$$log\ \tfrac{7}{8} = -\ 1.94201.$$

Logarytm ten równy iest poprzedzaiącemu; gdyż

$$-\ 1.94201 = -\ 1 + 0{,}94201 = -\ 0{,}05799.$$

Przypadek V. Jeżeli liczba dana iest ułomkiem dziesiętnym, wyraziwszy go w kształcie zwyczaynego, szukamy tego ostatniego ułomku logarytmu: że zaś mianownik ułomku dziesiętnego składa się z iedności z pewną liczbą zer, a tém samém logarytmem iego iest zawsze iedna z liczb całkowitych 1,2,3, i t. d. więc aby wynaleść logarytm ułomku dziesiętnego, dosyć iest od liczby ~~cyfr licznika~~, która się równa liczbie zer mianownika, odjąć logarytm licznika, a przed resztą położyć znak —, skąd wynikły logarytm będzie cały odjemny; albo też od teyże liczby cyfr, odiąć samę tylko cechę, skąd powstaiący logarytm będzie miał cechę odjemną a przewyżkę dodayną.

która przedstawia liczbę cyfr dziesiętnych licznika

Wynaleść logarytm 0,025.

Wzór działania.

$$0{,}025 = \frac{25}{1000}$$

log 25 = 1,39794, *log* 1000 = 3.
zatém *log* 0,025 = — 1,60206
lub *log* 0,025 = — 2.39794.

Uwaga. Jeżeli ułomek dziesiętny dany iest peryodyczny; wyrażamy go w kształcie zwyczaynego, (Zasady Arytm: §§. 183. 184), a potém wynayduiemy logarytm tego ostatniego ułomku, podług przypadku 4go.

Zagadnienie II.

~~zadanie~~ Maiąc logarytm

~~*Wynaleść liczbę odpowiadaiącą logarytmowi*~~, *w danéy tablicy logarytmów nie znayduiącemu się*, wynaleść liczbę odpowiadaiącą temu logarytmowi

Rozwiązanie rozmaitych przypadków w zagadnieniu tém wydarzyć się mogących, wspiera się podobnież iak poprzedzaiące na téy zasadzie, że różnice liczb mało od siebie różniących się, mogą bydź uważane za proporcyonalne różnicom logarytmów tymże liczbom odpowiadaiących.

Przypadek I. Jeżeli cecha logarytmu danego zawiera w sobie tyle iedności mniéy iedną, ile obeymuią w sobie cyfr naywiększe liczby tablicy,

bo cecha logarytmu liczb iednocyfrowych iest zero.

i sama tylko iego przewyżka tablicą nie iest objęta, wnosimy stąd, że liczba do tegoż logarytmu należąca musi bydź równa mnieyszéy z tych dwóch, między które dany logarytm wpada, i ułomkowi, który tak wynayduiemy:

Wyszukawszy w tablicy dwóch logarytmów przyległych, z którychby ieden był bezpośrednio większy a drugi bezpośrednio mnieyszy od logarytmu danego, w ten sposób układamy proporcyą: tak się ma różnica dwóch logarytmów, to iest bezpośrednio większego i mnieyszego od danego, do różnicy liczb tymże dwom logarytmom odpowiadaiących; iak różnica między logarytmem danym a bezpośrednio mnieyszym, do wyrazu czwartego ieometrycznie proporcyonalnego. Ten czwarty wyraz będzie szukanym ułomkiem, który zamieniony na dziesiętny, iak się to pospolicie czynić zwykło, i dodany do liczby odpowiadaiącéy logarytmowi bezpośrednio mnieyszemu, da liczbę należącą do logarytmu danego.

Wynaleść liczbę odpowiadaiącą logarytmowi 3,61778.

Wzór działania.

$$\begin{array}{lll} 3{,}61784 = \log 4148. & & 3{,}61778 \\ 3{,}61773 = \log 4147. & & 3{,}61773 \\ \hline 0{,}00011 \; : & 1 = & 0{,}00005 : x \end{array}$$

$$\text{zatém } x = \frac{0{,}00005}{0{,}00011} = \frac{5}{11} = 0{,}4545 \ldots$$

$$\text{zatém } 3{,}61778 = \log 4147{,}\,4545 \ldots$$

Uwaga. Działanie to w praktyce skrócić się daie. Jakož, drugim wyrazem proporcyi powyższéy iest zawsze 1; zatém aby wynaleść czwarty iéy wyraz dosyć iest różnicę między logarytmem danym a bezpośrednio mnieyszym podzielić przez różnicę dwóch logarytmów przyległych, między które logarytm dany wpada, a w tablicy obok nich położoną.

Przypadek II. Jeżeli cecha logarytmu danego zawiera tyle lub więcéy iedności, niż obeymuią w sobie cyfr naywiększe liczby tablicy; wtedy od teyże cechy odeymuiemy tyle iedności, aby logarytm pozostały, odpowiadał liczbie iedney z tych które naywiększą liczbą cyfr są wyrażone w tablicy: tym sposobem otrzymamy logarytm liczby 10, 100, 1000 i t. d. razy mnieyszéy od téy któréy logarytm iest dany; wynalazłszy zatém sposobem wyłożonym w przypadku poprzedzaiącym liczbę odpowiadaiącą logarytmowi pozostałemu, mnożymy ią na powrót przez 1 z tylu zerami, ile iedności odięliśmy od cechy. Iloczyn który stąd wypadnie, będzie liczbą odpowiadaiącą logarytmowi danemu.

Wynaleść liczbę odpowiadaiącą logarytmowi 5,51128.

Wzór działania.

którą iest = 3245.

Wynaydźmy naprzód liczbę odpowiadaiącą logarytmowi 3,51128.

Różnica między logarytmem danym a bezpośrednio mnieyszym iest 0,00007; różnica zaś logarytmów między które dany logarytm wpada, iest 0,00014. Dzieląc pierwszą z tych różnic przez drugą otrzymamy ułomek $\frac{0,00007}{0,00014} = \frac{7}{14} = 0,5$. Ułomek ten dodany do liczby 3245 odpowiadaiącéy logarytmowi bezpośrednio mnieyszemu, daie liczbę 3245,5 należącą do logarytmu 3,51128. Zatém tenże logarytm wzięty z cechą 5, o dwie iedności większą, odpowiadać będzie liczbie 324550, sto razy większéy.

Uwaga. Działanie to znacznie się skraca wtenczas, gdy logarytm pozostały, po odięciu pewnéy liczby iedności od cechy logarytmu danego będzie iednym z logarytmów tablicą obiętych; w tym bowiem przypadku dosyć iest dla otrzymania powyższego iloczynu, po prawéy stronie liczby całkowitéy do niego należącéy, dopisać tyle zer, ile iedności odięliśmy od cechy logarytmu danego.

Wynaleść liczbę odpowiadaiącą logarytmowi 6,97585.

Wzór działania.

Logarytm ten wzięty z cechą 3, odpowiada liczbie 9459, zatém logarytm dany 6,97585 którego cecha zawiera 3 iedności więcéy, należy do liczby 9459000 tysiąc razy większéy.

Przypadek III. Jeżeli cecha logarytmu danego zawiera w sobie mniéy iedności, a niżeli obeymuią cyfr naywiększe liczby tablicy; wtedy dla otrzymania wypadku zbliżonego tym bardziéy do prawdziwego (II. 2re), dadaiemy do cechy logarytmu danego tyle iedności, aby logarytm stąd wypadaiący odpowiadał, równie iak w przypadku poprzedzaiącym, liczbie iednéy z tych, które naywiększą liczbą cyfr w tablicy są wyrażone. Wynalazłszy następnie liczbę należącą do logarytmu z tak powiększoną cechą, dzielimy ią przez 1 z tylu zerami, ile iedności dodaliśmy do cechy logarytmu danego.

Wynaleść liczbę odpowiadaiącą logarytmowi 0,67920.

Wzór działania.

Logarytm ten wzięty z cechą 3, odpowiada liczbie 4777,44; podzieliwszy ią przez 1000 będzie 4,77744 liczbą należącą do logarytmu danego 0,67920.

Przypadek IV. Jeżeli logarytm dany iest odiemnym, to iest: gdy liczba iemu odpowiadaiąca iest ułomkiem, na to wzgląd mieć należy, czy tenże logarytm iest cały odiemny, czy też sama tylko iego cecha iest odiemna.

W pierwszym razie: odeymuiemy logarytm dany bez względu na znak który ma przed sobą, od liczby całkowitéy i dodaynéy, a razem takiéy, aby cecha logarytmu który stąd wypadnie, zawierała tyle iedności, mniéy iedną, ile obeymuią cyfr, naywiększe liczby tablicy. W działaniu tém pozorne tylko wykonywamy odeymowanie, gdyż właściwie dodaiemy przez to do logarytmu odiemnego pewną liczbę iedności; zatém logarytm który stąd wypadnie należeć będzie do liczby 10, 100, 1000, i t. d. razy większéy od ułomku danemu logarytmowi odpowiadaiącego. Jeżeli więc wynalezioną liczbę podzielimy przez 1 z tylu zerami, ile iedności dodaliśmy do cechy logarytmu danego, iloraz będzie szukanym ułomkiem.

Wynaleść ułomek odpowiadaiący logarytmowi — 0,23973.

Wzór działania.

Do logarytmu tego dodawszy 4 iedności, będzie 3,76027 = *log* 5758; liczbę tę podzieliwszy przez 10000, będzie — 0,23973 = *log* 0,5758.

W drugim razie: Jeżeli sama tylko cecha logarytmu danego iest odiemna działanie staie się łatwieyszém od poprzedzaiącego; gdyż wówczas nie cały logarytm lecz samę tylko iego cechę odeymuiemy, bez względu na znak, od liczby takiéy, aby pozostały logarytm odpowiadał liczbie iednéy z tych, które w tablicy naywięcéy cyfr w sobie obeymuią: zresztą zaś postępuiemy tak iak wyżéy.

Wynaleść liczbę odpowiadaiącą logarytmowi: — 1.69329.

Wzór działania.

Cechę tego logarytmu, bez względu na znak —, odiąwszy od 4, zostanie logarytm 3,69329, odpowiadaiący liczbie 4935; liczbę tę podzieliwszy przez 10000 będzie — 1.69329 = *log* 0,4935.

IV.

O działaniach do których wchodzą logarytmy ułomków.

Działania do których wchodzą logarytmy ułomków, większéy wymagaią uwagi, niż te, które na logarytmach liczb całkowitych odbywamy, dla tego, iż te logarytmy są liczbami odiemnemi. Dla uniknienia pomyłek, iakieby z téy przyczyny do rachunku wcisnąć się mogły, na to tylko wzgląd mieć należy, że aby dodać do siebie dwie ilości, z których iedna iest dodayna a druga odiemna, trzeba stosownie do zasad na których się działania algebraiczne wspieraią, mnieyszą z nich odiąć od większéy, a przed resztą położyć znak taki, iaki był przed większą; *np.* + 6 — 2 = 4; — 6 + 2 = — 4. Aby zaś odiąć daną ilość od innéy iakieykolwiek, dosyć iest przed pierwszą z nich położony znak + zamienić na — lub — na + a potém postępować tak iak w dodawaniu; odiąwszy *np.* + 4 od + 6 zostanie + 2; odiąwszy zaś — 4 od + 6 lub — 4 od — 6, zostanie w pierwszym razie + 10 w drugim — 2.

Chcąc przeto liczbę całkowitą *pomnożyć* przez ułomek którego logarytm iest cały odiemny, trzeba logarytm ułomku, dodać do logarytmu całkowitéy; a że logarytm ułomku iest odiemny, przeto wypada stosownie do powyższych zasad, logarytm ułomku *odiąć* od logarytmu całkowitéy. Przeciwnie aby *podzielić* całkowitę przez ułomek, należałoby logarytm ułomku odiąć od logarytmu całkowitéy (7); że zaś pierwszy z nich iest odiemny, przeto przemieniwszy znak — przed nim położony na +, wypadnie logarytm ułomku *dodać* do logarytmu całkowitéy. W pierwszym razie różnica logarytmów będzie logarytmem iloczynu, w drugim, summa logarytmów będzie logarytmem ilorazu szukanego.

Pomnożyć 36 przez $\frac{3}{4}$.

Wzór działania.

$$\begin{array}{rcl} \log 4 & = & 0{,}60206 \\ \log 3 & = & 0{,}47712 \\ \hline \log \frac{3}{4} & = & -\ 0{,}12494 \\ \log 36 & = & 1{,}55630 \\ \hline \log (\frac{3}{4} \times 36) & = & 1{,}43136. \end{array}$$

Logarytm ten odpowiada szukanemu iloczynowi 27.

Podzielić 36 przez $\frac{3}{4}$.

Wzór działania.

$$\begin{array}{rcl} \log 36 & = & 1{,}55630 \\ \log \frac{3}{4} & = & -\ 0{,}12494 \\ \hline \log \left(\frac{36}{\frac{3}{4}}\right) & = & 1{,}68124. \end{array}$$

Logarytm ten odpowiada szukanemu ilorazowi 48.

Aby ułomek któ·rego logarytm iest cały odiemny, podnieść do potęgi, lub aby wyciągnąć z niego pierwiastek, dosyć iest logarytm ułomku danego w pierwszym razie pomnożyć przez wykładnik potęgi, w drugim podzielić przez wykładnik znaku pierwiastkowego, a wypadek w obu razach odiemny, będzie logarytmem potęgi lub pierwiastku ułomku danego.

Ułomek $\frac{3}{4}$ podnieść do potęgi trzeciéy.

Wzór działania.

$$\log \tfrac{3}{4} = -\ 0{,}12494$$

pomnożywszy go przez 3

będzie . . . $-\ 0{,}37482$

dodawszy do niego $+\ 4,$

będzie . . $3{,}62518.$

Logarytm ten odpowiada liczbie 4218,75, którą podzieliwszy przez 10000, będzie 0,421875 trzecią potęgą ułomku $\frac{3}{4}$.

Z ułomku $\frac{27}{64}$ wyciągnąć pierwiastek sześcienny.

$$\log 64 = 1{,}80618$$
$$\log 27 = 1{,}43136$$

$$\log \frac{27}{64} = -\ 0{,}37482$$

zatém $\dfrac{0{,}37482}{3} = -\ 0{,}12494.$

Logarytm ten $-\ 0{,}12494$ odpowiada ułomkowi $0{,}75 = \frac{3}{4}$ który iest pierwiastkiem sześciennym ułomku danego $\frac{27}{64}$.

Uwaga. Działanie które dla podniesienia ułomku do potęgi m lub wyciągnienia z niego pierwiastku stopnia m odbywaliśmy, inaczéy ieszcze tak wykonywamy: W pierwszym razie mnożymy, a w drugim dzielimy osobno logarytm mianownika, i osobno logarytm licznika, przez m; odjąwszy zaś iloczyn mnieyszy od większego, lub iloraz mnieyszy od większego, przed pozostałą resztą kładziemy znak —.

Łatwieysze są iednak działania z logarytmami takiemi, których sama tylko cecha iest odiemna.

1od Chcąc pomnożyć liczbę całkowitą przez ułomek, którego iest dany takowy logarytm, dodaiemy logarytm ułomku wzięty z cechą o, do logarytmu całości, a od cechy ich summy odeymuiemy, ~~bez względu na znak,~~ cechę logarytmu ułomku danego.

Pomnożyć 30 przez ułomek którego dany iest logarytm — 1.66901.

Wzór działania.

$$
\begin{array}{rcl}
\log 30 & = & 1,47712. \\
\log \text{ dany } - 1.66901 & = & -1 + 0,66901. \\
\hline
\text{Summa} & = & -1+\ 2,14613.
\end{array}
$$

odjąwszy od cechy summy 1, będzie 1,14613. Logarytm ten odpowiada liczbie 14 która iest szukanym iloczynem.

2re Jeżeli wypada podzielić liczbę całkowitą przez ułomek, którego dany iest takiż sam logarytm; wtedy postępuiemy przeciwnie, to iest: przewyżkę logarytmu ułomku, odeymuiemy od logarytmu całości, a cechy uważaiąc obie tak iakby były dodayne, do siebie dodaiemy.

Podzielić 49 przez ułomek którego dany iest tenże logarytm — 1.66901.

Wzór działania.

$$
\begin{array}{rcl}
\log 49 & = & 1,69020 \\
\log \text{ ułomku} & = & -1.66901 \\
\hline
\text{wypadek} & = & 2,02119.
\end{array}
$$

Logarytm ten odpowiada w tablicy liczbie 105, która iest szukanym ilorazem.

3cie Aby podnieść ułomek którego dany iest logarytm z samą tylko cechą odjemną, do iakieykolwiek potęgi; trzeba logarytm ułomku danego pomnożyć przez wykładnik szukaney potęgi. Działanie to w ten sposób odbywamy: mnożymy osobno przewyżkę dodayną i osobno cechę odjemną logarytmu danego, przez wykładnik potęgi, a odjąwszy iloczyn drugi, iak

5

tego wymaga znak — przed nim będący, od cechy iloczynu pierwszego, przed resztą kładziemy znak —. Wypadek ten będzie logarytmem potęgi szukanéy, maiącym samę tylko cechę odjemną.

Podnieść do potęgi piątéy ułomek, którego iest dany logarytm — 1.77815.

Wzór działania.

$$0{,}77815 \times 5 = 3{,}89075$$
$$-\ 1 \times 5 = -\ 5$$
$$\text{zatém} -\ 1.77815 \times 5 = -\ 2.89075.$$

Ułomek $0{,}07776 = \frac{243}{3125}$ odpowiadaiący logarytmowi — 2.89075, iest piątą potęgą ułomka $\frac{3}{5}$ którego dany iest logarytm — 1.77815.

4te Chcąc z ułomku którego dany iest logarytm z cechą tylko odjemną, wyciągnąć pierwiastek iakieykolwiek potęgi, trzeba do cechy logarytmu danego (ieżeli takowa nie iest podzielna bez reszty przez wykładnik znaku pierwiastkowego), dodać dwie liczby równe, iednę dodayną a drugą odjemną, tak, iżby summa téy ostatniéy wraz z cechą odjemną danego logarytmu, była równa wykładnikowi znaku pierwiastkowego. Potém, dodawszy do siebie oba wyrazy odjemne, logarytm dany rozłożony zostanie na dwa wyrazy; pierwszy odjemny i zawieraiący tyle iedności, ile ich obeymuie wykładnik znaku pierwiastkowego, drugi dodayny, złożony z liczby którą do cechy logarytmu danego przydać wypadało i z iego przewyżki. Dzieląc następnie oba te wyrazy przez wykładnik znaku pierwiastkowego, otrzymamy szukanego pierwiastku logarytm, którego sama tylko cecha będzie odjemna.

Wyciągnąć pierwiastek piątéy potęgi z ułomku którego dany iest logarytm — 2.89075.

Wzór działania.

$$-\ 2.89075 = -\ 3 + 3 -\ 2.89075 = -\ 5 + 3{,}89075$$
$$\frac{-\ 5 + 3{,}89075}{5} = -\ 1.77815.$$

Wypadek ten — $\overline{1}.77815$, iest logarytmem ułomku $\frac{3}{5}$, będącego pierwiastkiem piątéy potęgi ułomku $\frac{243}{3125}$, którego logarytmem iest — $\overline{2}.89075$.

Uwaga I. Przytoczone tu przykłady są takie, że w nich wypadki działań, dla tym łatwieyszego sprawdzenia, nie są przybliżonemi lecz zupełnie prawdziwemi ważnościami szukanych ilości niewiadomych. Sposoby postępowania we wszelkich innych przypadkach, zgadzaią się, bezwzględnie na takowe ważności, z temi któreśmy wyłożyli. Dla otrzymania iednak tym prawdziwszego wypadku działań, odbywanych szczególniéy przy podnoszeniu liczb do potęg, używaią się logarytmy takie, których przewyżka obeymuie większą nieco liczbę cyfr dziesiętnych. *Callet* do zwyczaynéy tablicy dołączył dwie inne, w których wyrachowane są logarytmy z dwudziestu i z sześćdziesiąt ieden cyframi dziesiętnemi. Można zatém brać z nich logarytmy z tylu cyframi dziesiętnemi, ile tego potrzeba wymaga.

Uwaga II. W dwóch pierwszych przypadkach z powyższych czterech, można uniknąć zupełnie logarytmów odjemnych, ieżeli dany iest ułomek przez który mamy mnożyć lub dzielić całkowitę. Odbywaiąc mnożenie ułomku przez całość bez pomocy logarytmów, mnożymy licznikiem całkowitę, a iloczyn stąd wypadły, dzielimy przez mianownik; wykonywaiąc zatém toż działanie przez logarytmy, dodaiemy do siebie logarytm całości, logarytm licznika i dopełnienie arytmetyczne logarytmu mianownika, a od cechy ich summy odjąwszy 10, otrzymamy logarytm szukanego iloczynu.

Jeżeli wypada podzielić liczbę całkowitą przez ułomek zwyczaynym sposobem, mnożymy całkowitę przez mianownik, a iloczyn dzielimy przez licznik; zatém uskuteczniaiąc toż działanie przez logarytmy, dosyć będzie dodać do siebie logarytm całkowitéy, logarytm mianownika i dopełnienie arytmetyczne logarytmu licznika, a od cechy ich summy odjąwszy 10, otrzymamy logarytm szukanego ilorazu.

Pomnożyć 54 przez $\frac{8}{9}$. $= 8/9$

Wzór działania.

10,

$$
\begin{array}{rrcl}
 & \log 54 & = & 1{,}73239 \\
 & \log 8 & = & 0{,}90309 \\
 & \text{dop.} \log 9 & = & 9{,}04576 \\
\hline
\log 54 + \log 8 + & \text{dop.} \log 9 & = & 11{,}68124.
\end{array}
$$

log 9 = 0,95424
9,04576

$$\text{zatém } \log \left(54 \times \tfrac{8}{9}\right) = 1{,}68124.$$

Wypadek ten 1,68124 iest logarytmem liczby 48, która iest szukanym iloczynem.

Podzielić 56 przez $\frac{8}{9}$.

Wzór działania.

$$\text{Ponieważ } 56 : \tfrac{8}{9} = 56 \times \tfrac{9}{8} \text{ zatém}$$

$$
\begin{array}{rrcl}
 & \log 56 & = & 1{,}74819 \\
 & \log 9 & = & 0{,}95424 \\
 & \text{dop.} \log 8 & = & 9{,}09691 \\
\hline
\log 56 + \log 9 + & \text{dop.} \log 8 & = & 11{,}79934. \; -10
\end{array}
$$

log 8 = 0,90309

$$\text{zatém } \log 56 : \tfrac{8}{9} = 1{,}79934.$$

Wypadek ten 1,79934 iest logarytmem liczby 63, która iest szukanym ilorazem.

V.

Ogólny rzut oka na historyą logarytmów.

Logarytmy ułatwiaiące działania arytmetyczne, służą oraz do dochodzenia ważności liczebnych wyrażeń algebraicznych, i do rozwiązywania równań takich, w których ilość niewiadoma iest wykładnikiem. Znayduiemy prócz tego ich użycie w Trygonometryi prostokreślnéy i kulistéy, iako też w rozmaitém zastosowaniu do praktyki innych nauk matematycznych.

Pierwsze zasady tego ważnego wynalazku, umieszczone są w dziele *Michała Stiefel* (kaznodziei niemieckiego rodem z Eslingen) wydaném w Norymberdze r. 1544, pod tytułem: *Stiefelii Arithmetica integra* (a). Matematyk ten porównywaiąc z sobą dwa postępy $\div\!\div\ \frac{1}{8}:\frac{1}{4}:\frac{1}{2}:1:2\ 4:8:16:32:64:$ / $\div\ -3-2-1.0.1.2.3.4.5.6.$ ieometryczny i arytmetyczny (Lib. 1. Cap. 4. p. 35. Lib. 3. Cap. 5. p. 249, 250.) uczynił postrzeżenie na którém się teorya logarytmów opiera; że mnożenie i dzielenie wyrazów postępu pierwszego, odpowiada dodawaniu i odeymowaniu wyrazów postępu drugiego. Uwaga ta iednak, nie rozwinięta należycie, żadnéy dla nauki nie przyniosła korzyści.

Późniéy *Justus Byrge*, Astronom w *Landgrabstwie Heskiem* wydał r. 1620 początek tablic logarytmów, które iednak nie były dokończone, ani do użycia zastosowane (b). Utrzymuie nawet *Kepler*, *Byrgego* za wynalazcę logarytmów poczytuiący, że dzieło to nigdy drukiem ogłoszone nie było (c).

Słusznie więc chwała wynalazku tego przyznaną została *Janowi Neper*, Baronowi *Merchistonu*, rodem Szkotowi (d), który go upowszechnił przez dzieło swoie wydane w Edymburgu r. 1614, pod tytułem: *Logarithmorum canonis descriptio*, *seu arithmeticæ supputationum mirabilis abbreviatio* (e).

Logarytmy iego *Neperyańskiemi*, *naturalnemi* lub *hyperbolicznemi* nazwane, w praktyczném użyciu niedogodnemi się okazały; gdyż podług iego układu wyrazom 0, 1, 2, 3, 4 i t. d. postępu arytmetycznego, nie odpowiadałyby liczby całkowite 1, 10, 100, 1000 i t. d. postęp ieometryczny

---

(a) Hist. des Math: par Montucla T. II. p. 10. — Handbuch der Erfindungen v. Busch 3. B. S. 355. Dzieło to Stiefela znayduie się w Bibliotece tuteyszéy publicznéy.

(b) Hist. des Math: par Ch. Bossut T. I. p. 285.

(c) Hist. des Math: par Montucla T. II. p. 10, 11.

(d) Urodził się r. 1550.

(e) Wydanie dzieła tego w Lugdunie r. 1620 znayduie się w Bibliotece naszéy publicznéy.

stanowiące, lecz liczby takie, które oprócz pierwszéy są ułomkowemi, co działania na nich wykonywane utrudnia, a niekiedy nawet znacznych pomyłek staie się przyczyną. Są one nadto i w tém niedogodne, że w nich logarytmem promienia wziętego za 1 czyli wstawy całéy, iest 0, skąd powstaią logarytmy odjemne, które w działaniach za ich pomocą odbywanych większéy niż dodayne wymagaią uwagi. Sam iuż *Neper* przekonał się o niedogodnościach pierwiastkowego układu swoiego, a porozumiawszy się z *Henrykiem Briggsem* Professorem matematyki w *Gresham*, nad odmianą onegoż pracować począł; lecz śmierć nie dozwoliła mu przedsięwziętego zamiaru do skutku doprowadzić. Umarł r. 1618 powszechną zjednawszy sobie sławę.

Z pisma *Appendix de logarithmorum praestantiori usu*, które ogłosił syn iego, przy powtórném wydaniu wzmiankowanego dzieła, okazuie się, że *Neper* miał zamiar przerobić swe logarytmy na daleko dogodnieysze, liczbę 10 za zasadę maiące. *Henryk Briggs*, któremu *Neper* takowy swóy zamiar objawił, zaiął się z niezmordowaną gorliwością iego wykonaniem. Jemu winniśmy zastosowanie teoryi logarytmów do skrócenia działań arytmetycznych, które się na liczbach naturalnych odbywaią. Ogłosił on pierwszą próbę swéy pracy w tym samym roku w którym umarł *Neper*; wydaniem tablicy logarytmów pospolitych liczb naturalnych od 1 do 1000; w roku zaś 1624 dopełnił iéy nową tablicą wydaną (in fol.) w *Londynie* pod tytułem: *Arithmetica logarithmica*. Rozciągała się ona od 1 do 20,000 i od 90,000 do 101,000 a przewyżki po 14 cyfr dziesiętnych w sobie obeymowały. Trudnił się nadto *Briggs* ułożeniem podług teyże zasady drugiéy ieszcze tablicy, obeymuiącéy logarytmy liczb, które są ważnościami wstaw i stycznych, lecz w ciągu tego dzieła umarł.

Henryk Gellibrand Astronom Londyński, tę rozpoczętą przez *Briggsa* pracę dokończył, i tablice logarytmów liniy trygonometrycznych wydał w Londynie r. 1630 pod tytułem: *Trigonometria Britannica*.

Nakoniec *Adryan Vlacq* Niderlandczyk iest iednym z tych, którzy się po *Neperze* i *Briggsie* do należytego rozwinięcia i zastosowania teoryi logarytmów naywięcéy przyczynili. On bowiem przerwę w tablicy *Briggsa* zostawioną zapełnił, dorobieniem podług tegoż samego układu, logarytmów liczb naturalnych, pośrednich między 20,000 i 90,000, które w ten sposób po raz pierwszy od 1 aż do 101,000 uzupełnione, umieścił w nowém wydaniu dzieła Briggsa *Arithmetica logarithmica*, *sive logarithmorum chiliades centum* etc. *Goudæ* 1628. Ułożył on prócz tego tablice trygonometryczne, z większą do użycia wygodą, wyrachowawszy w nich ważności wstaw i stycznych, wraz z ich logarytmami, i rozciągnął ie aż do dziesiątków minut drugich. Te nowe i obszerne iego tablice, wydane zostały podobnież w Gudzie r. 1633 pod tytułem: *Trigonometria Artificialis sive magnus Canon triangulorum logarithmicus*, wraz z logarytmami liczb naturalnych od 1 do 20,000 (f) przez *Henryka Briggsa* ułożonemi.

Dzieła o których dotąd mówiliśmy, nie przestaną nigdy bydź ważnemi, szczególniéy dla tych, którzy się z historyą logarytmów należycie obeznać zechcą. Będą one zawsze przypominać, wytrwałą cierpliwość i niezmordowaną pracę, z iaką wyrachowaniem logarytmów pierwiastkowo, zaymować się musiano.

Postępuiąc w ten sposób utorowaną iuż drogą przez *Nepera*, *Briggsa*, *Gellibranda* i *Vlacqa*, wielka liczba autorów trudniła się pisaniem teoryi logarytmów, iako też wyrachowywaniem i udoskonaleniem ich tablic. Niektórzy z nich nadto gorliwi, te ostatnie nad wszelką potrzebę i miarę uobszernili, przez zbyteczne pomnażanie liczby cyfr dziesiętnych przewyżki; praca ich bowiem okazała się w praktyce zupełnie nie przydatną, uczyniła zaś dzieła ich kosztownemi i do używania niedogodnemi. Nie będziemy się tu zaymować szczegółowém opisywaniem w rozliczne sposoby układanych tablic logarytmowych; bezkorzystną bowiem byłaby praca takowa: tyle tylko nadmienić nam wypada, że całą i istotną dzieł tego rodzaiu zaletą, iest ich poprawność. Zaszczycaią się nią z dawniéy wydanych tablic *Scherwina* drukowane w *Londynie* r. 1705 i *Gardinera*, których poprawne wydanie wyszło w *Avignon* r. 1770; z późnieyszych zaś prócz innych, tablice *Jerzego Barona Wegi* w *Wiedniu* r. 1820 i stereotypowane tablice *Calleta*, *Lalanda* i *Plauzola*, z których trzy ostatnie są naypoprawnieysze, do odbywania wszelkich działań dostateczne i z téy przyczyny naywięcéy używane.

(f) Oba te dzieła rzadkie posiada Biblioteka nasza.

6 10

3 6 10

3 6

3 7

13