

4.42 — przystosowanie, nośność graniczna,  
belki plastyczne

16/1984

Tadeusz Sawicki

ANALIZA RUSZTÓW  
SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH  
PRZY OBCIĄŻENIACH ZMIENNYCH

16/1984

Praca doktorska



P. 269

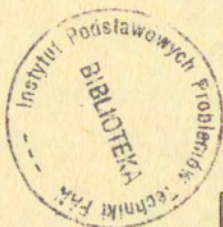
WARSZAWA 1984

Praca doktorska

Promotor Prof. dr hab. Jan A.König

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 28 listopada 1983 r.

56964



Na prawach rękopisu

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 160 egz. Ark.wyd. 7,5. Ark. druk. 10.

Odadano do drukarni w kwietniu 1984 r.

Nr zamówienia 246/84.

---

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa  
ul. Śniadeckich 8



Tadeusz Sawicki  
Zakład Teorii Konstrukcji  
IPPT PAN

## ANALIZA RUSZTÓW SPRĘŻYSTO - PLASTYCZNYCH PRZY OBCIĄŻENIACH ZMIENNYCH

### 1. WSTĘP

Racjonalne projektowanie konstrukcji inżynierskich przejawia się między innymi dążeniem do lepszego wykorzystania materiału. W przypadku stali, która charakteryzuje się dobrymi własnościami sprężystymi oraz plastycznymi /rys.1.2/ ograniczanie się wyłącznie do zakresu sprężystego prowadzi w wielu wypadkach do znacznego przewymiarowania konstrukcji. Fakty powyższe należy szczególnie podkreślić w świetle obowiązującej obecnie normy [230], która powstała w oparciu o podejście probabilistyczne i która nie precyzuje modelu materiału. Mówi się w niej natomiast o stanach granicznych - stanie granicznym nośności i stanie granicznym użytkowania. Innymi słowy, konstrukcja musi przenieść działające na nią obciążenia /stałe, zmienne, dynamiczne, e.t.c./, zachowując przy tym walory użytkowe /np. odpowiednio małe ugięcia/.

Obciążenia zmienne, z którymi mamy często do czynienia w praktyce /wiatr, śnieg, poruszające się pojazdy/ stwarzają przy projektowaniu plastycznym, [17], [231], szczególnie niebezpieczeństwo zniszczenia konstrukcji lub jej elementu jeszcze przed osiągnięciem stanu granicznego zwanego nośnością graniczną. Innymi słowy, stosowanie określonego współczynnika bezpieczeństwa względem nośności granicznej, przy obciążeniach zmiennych, nie daje pełnej gwarancji bezpieczeństwa. Gwarancję taką uzyskać możemy dopiero w oparciu o teorię przystosowania konstrukcji.

### 1.1. Opis obciążeń i ich zmian

W zadaniach, które się rozpatruje w mechanice budowli czy też w analizie nosności granicznej konstrukcji, mamy do czynienia z układem obciążeń proporcjonalnych do jednego parametru  $\mu$ , będącego funkcją czasu  $t$  i monotonicznie wzrastającego od zera do swej wielkości maksymalnej. Wówczas obciążenie całkowite  $\underline{P}$ , działające na konstrukcję można wyrazić następująco:

$$(1.1) \quad \underline{P}(\underline{x}, t) = \mu(t) \sum_{k=1}^s \underline{S}^k(\underline{x}) + \underline{S}_0(\underline{x}) \quad ,$$

gdzie:  $\underline{x}$  - precyzuje miejsce przyłożenia obciążenia,  $\underline{S}^k$  - oznacza określony schemat obciążenia, a  $\underline{S}_0$  jest wektorem obciążeń stałych. Przy projektowaniu konstrukcji budowlanych utożsamia się zwykle mnożnik  $\mu$  z określonym schematem obciążenia, biorąc następnie jego ekstremalne wartości, na podstawie czego oblicza się o obwiednie sił wewnętrznych /momenty, siły poprzeczne e.t.c./.

Kolejnym etapem jest wymiarowanie przekrojów. Spełniony tutaj być musi warunek, aby naprężenia obliczone na podstawie ekstremalnych sił wewnętrznych nie przekraczały wartości dopuszczalnych lub granicznych. Rozpatrywane są zatem jedynie możliwe kombinacje poszczególnych schematów obciążeń, co nie budzi zastrzeżeń zasadniczo wtedy, dopóki cała konstrukcja pracuje w zakresie liniowo sprężystym.

W rzeczywistości obciążenia działające na konstrukcje są zwykle bardziej skomplikowane. Praktycznie wystarczająco dokładnie można je opisać skończonym układem mnożników obciążenia  $\mu_1(t), \mu_2(t), \dots, \mu_s(t)$  w następujący sposób:

$$(1.2) \quad \underline{P}(\underline{x}, t) = \sum_{k=1}^s \mu_k(t) \underline{S}^k(\underline{x}) + \underline{S}_0(\underline{x}) \quad ,$$

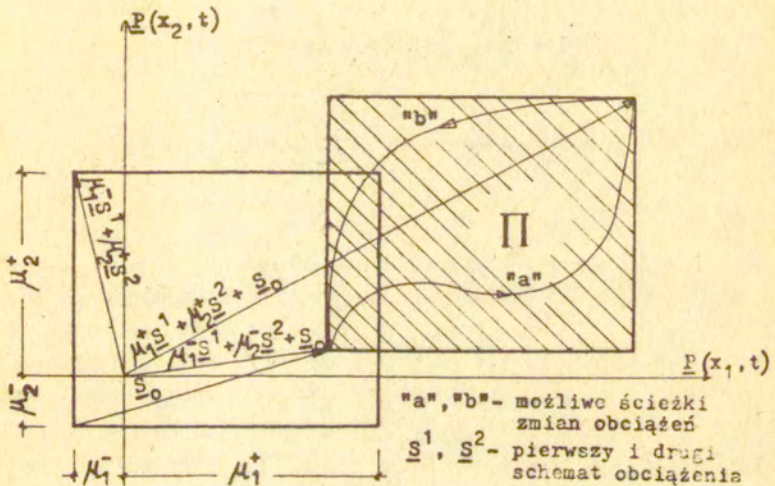
gdzie  $\underline{S}^k$  jest k-tym schematem obciążenia. Fakt, że każde z obciążeń może zmieniać się w pewnych granicach opisany jest układem nierówności

$$(1.3) \quad \mu_k^- \leq \mu_k(t) \leq \mu_k^+ \quad , \quad k=1, 2, \dots, s \quad .$$



gdzie  $\mu_k^-$ ,  $\mu_k^+$  są to wielkości znane, określone zazwyczaj przez normy obciążeń lub ogólniej przez warunki użytkowania konstrukcji. Podejście takie pozwala, obok opisu zmienności obciążeń w czasie, rozważać również takie przypadki jak obciążenia ruchome. Możemy na przykład z dowolną dokładnością opisać przypadek poruszającej się siły skupionej. Należy jednak zaznaczyć, że praktycznie nie znamy kształtu funkcji  $\mu_k(t)$ . Może ona przebiegać niekiedy zupełnie dowolnie /por. rys.1.1/ w obszarze określonym przez granice  $\mu_k^-$ ,  $\mu_k^+$ .

Uwaga ta nie ma znaczenia jedynie wówczas gdy rozważamy sprężystą pracę konstrukcji. Natomiast dla konstrukcji sprężystoplastycznej historia obciążenia jest już istotna i ma wpływ na otrzymane wyniki.

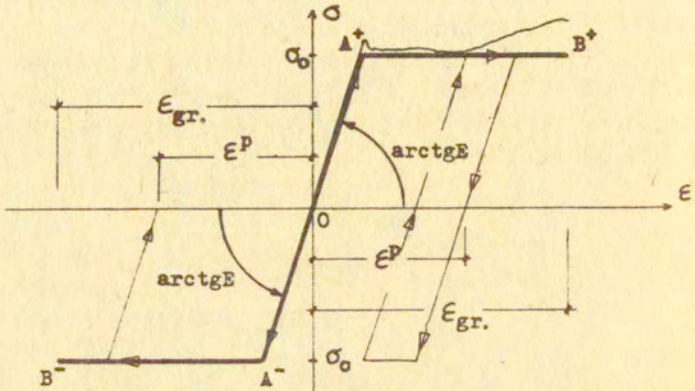


Rys.1.1

Na rysunku 1.1 przedstawiono schematycznie obszar  $\Pi$  możliwych zmian obciążeń  $\underline{P}(t)$  działających na konstrukcję. Przyjęto, że zmiany te są od siebie niezależne, co ma często miejsce w praktyce.

## 1.2 Zjawisko przystosowania ciał sprężysto- - idealnie plastycznych

W normalnych warunkach eksploatacji materiały konstrukcyjne takie jak stal wykazują przede wszystkim własności sprężyste i plastyczne, a efekty np. lepkie można pominąć. Prowadzi to do modelu ciała sprężysto - idealnie plastycznego. Model takiego wyidealizowanego materiału możemy przedstawić



Rys. 1.2

w układzie współrzędnych : naprężenie  $\sigma$  , odkształcenie  $\epsilon$  - rysunek 1.2. Przedstawiono na nim również krzywą doświadczalną /linia cienka/ z próby czystego rozciągania. Odcinkom  $\overline{OA^-}$  ,  $\overline{OA^+}$  odpowiada zachowanie się czysto sprężyste, natomiast odcinki  $\overline{A^-B^-}$  ,  $\overline{A^+B^+}$  określają zakres plastyczny materiału. Własności sprężyste scharakteryzowane są zarówno przy obciążaniu jak i odciążaniu przez moduł sprężystości  $E$ . Przekroczenie, przy pewnym cyklu obciążenia, wartości naprężenia równego granicy plastyczności  $\sigma_0$  spowodować może powstanie w ciele pewnych odkształceń plastycznych  $\epsilon^P$  i związanych z nimi naprężeń resztkowych. W wyniku tego kolejny cykl obciążenia, również o amplitudzie jednakowej jak poprzednio, wywołać może zupełnie inną reakcję materiału np. wyłącznie sprężystą. Ogólnie, na każdym cyklu obciążenia zmien-



nych, przy występowaniu odkształceń plastycznych, konstrukcja zachowywać się może w odmienny sposób.

Rozważmy konstrukcję z materiału sprężysto-idealnie plastycznego, na którą działają obciążenia wieloparametrowe zmienne i które wykraczają poza zakres jej sprężystego zachowania się. Wówczas, zależnie od intensywności obciążenia zmiennego, zaobserwować możemy kilka różnych przypadków zachowania się konstrukcji.

1<sup>o</sup> Po pewnej liczbie cykli obciążeń na skutek naprzemiennej plastyczności w niektórych przekrojach konstrukcji występuje zmęczenie niskocykliczne /"alternating plasticity"/, które prowadzi do pęknięcia materiału, a w konsekwencji do zniszczenia całej konstrukcji lub jej elementu - krzywa 1, rys. 1.3 .

2<sup>o</sup> Na każdym cyklu  $n$  obciążeń zmiennych obserwuje się malejący, lecz różny od zera przyrost odkształcenia plastycznego

$\Delta \mathcal{E}^P(n)$  oraz związany z nim stały wzrost całkowitego odkształcenia plastycznego  $\mathcal{E}^P$ . Mówimy wówczas o zjawisku zniszczenia przyrostowego /"incremental collapse"/ - krzywa 4, rys. 1.3 .

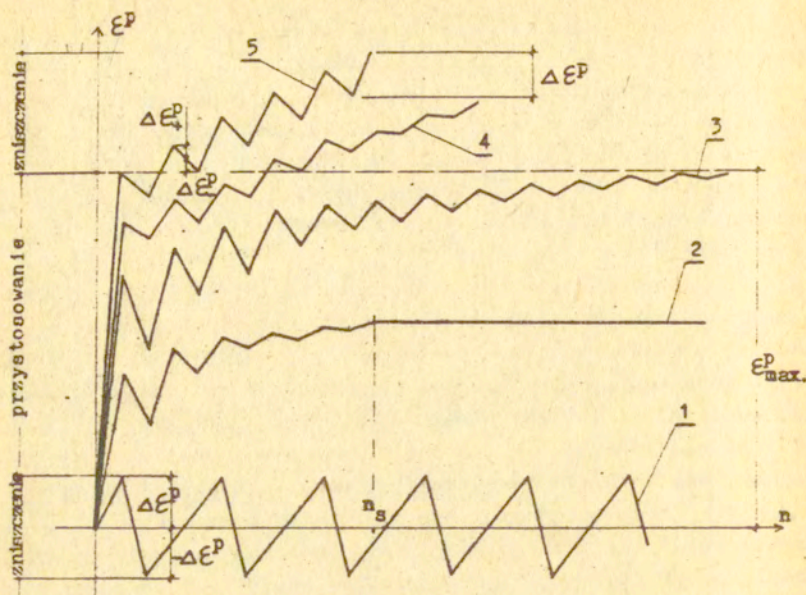
3<sup>o</sup> Dla pewnej amplitudy obciążenia zmiennego mamy jednocześnie do czynienia ze zjawiskami - "alternating plasticity" oraz "incremental collapse" - krzywa 5. Mamy zatem do czynienia ze stałym na każdym cyklu  $n$  przyrostem odkształceń plastycznych

$\Delta \mathcal{E}^P = \text{const.}$  oraz z coraz większym plastycznym odkształceniem całkowitym  $\mathcal{E}^P$  .

4<sup>o</sup> Po pewnej liczbie cykli obciążeń następuje stabilizacja odkształceń plastycznych tzn. :

- przyrosty odkształceń plastycznych  $\Delta \mathcal{E}^P$  znikają po pewnej liczbie cykli obciążeń  $n > n_s$  - krzywa 2,
- przyrosty odkształceń plastycznych  $\Delta \mathcal{E}^P$  maleją do dowolnie małej wielkości na każdym kolejnym cyklu obciążenia w ten sposób, że całkowite odkształcenie plastyczne  $\mathcal{E}^P(n)$  dąży asymptotycznie do pewnej skończonej maksymalnej wielkości  $\mathcal{E}_{\text{max}}^P$ , przy liczbie cykli obciążeń  $n$  dążących do nieskończoności - krzywa 3, rys. 1.3. W obu tych przypadkach

/krzywa 2,3/ mówimy o przystosowaniu konstrukcji do obciążeń zmiennych.



Rys. 1.3

Zjawisko przystosowania lub nieprzystosowania wygodnie jest czasami opisać wykorzystując do tego celu pojęcie szeregu. Rozpatrzmy mianowicie szereg przyrostów odkształceń plastycznych w poszczególnych cyklach zmian obciążeń

$$(1.4) \quad \Delta \varepsilon^P(1) + \Delta \varepsilon^P(2) + \dots + \Delta \varepsilon^P(n)$$

Jeżeli szereg ten jest rozbieżny, ale suma pozostaje ograniczona, to występuje zjawisko nieprzemiennej plastyczności - pkt 1<sup>o</sup>. W przypadku gdy szereg ten jest rozbieżny i nieograniczony, to mówimy o zniszczeniu przyrostowym - pkt 2<sup>o</sup>. Przystosowanie zajdzie natomiast wówczas jeżeli szereg ten będzie zbieżny.

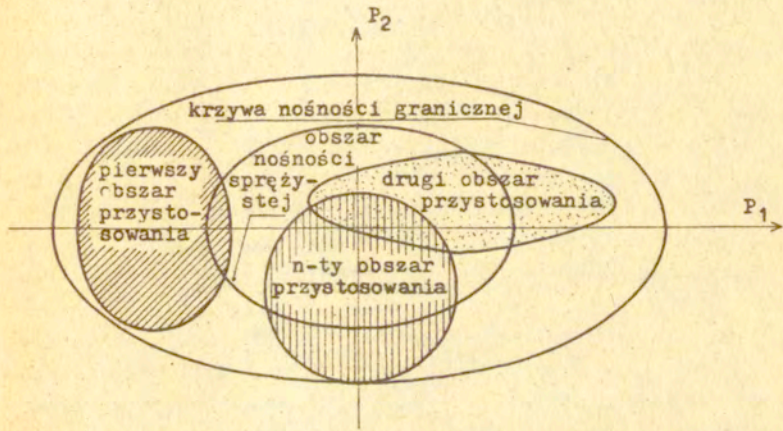
Szczególnie dobrą ilustracją opisanych zjawisk są wyniki otrzymane w przykładzie pierwszym w punkcie 2.6.3 pracy, por. rys. 2.8.



Widać tam wyraźnie obszar przystosowania oraz te obszary gdzie konstrukcji grozi niebezpieczeństwo wystąpienia zniszczenia przyrostowego, naprzemiennej plastyczności, bądź obu tych zjawisk równocześnie.

W zakończeniu tego rozdziału warto podkreślić, że:

1/ Dla danej konstrukcji istnieją ściśle określone obszary - obszar nośności granicznej oraz obszar nośności sprężystej. Natomiast obszarów przystosowania może być wiele i ogólnie zależą one będą od programu obciążeń. Przedstawiono to schematycznie na rysunku 1.4, gdzie zaznaczono schematycznie jednoznacznie określone obszary nośności sprężystej i nośności granicznej oraz kilku możliwych obszarów przystosowania.



Rys.1.4

Oczywiście żaden z obszarów nie musi być symetryczny. Warto też przy tym dodać, że w pewnych przypadkach wielkość obciążenia przystosowania równa być może nośności sprężystej, w innych natomiast być bliska lub równa nośności granicznej. Widać to wyraźnie na rysunku 2.9 w punkcie 2.6.3 pracy. Rozważa się tam dwa różne programy obciążeń i określa dla nich obszary przystosowania. Jak widać obszary te /obszar "B" oraz obszar "C", rys.2.9/ różnią się znacznie między sobą, bo ponad dwukrotnie. Również w jednym przypadku o zniszczeniu decyduje naprzemienna plastyczność, natomiast w drugim nara-

stanie odkształceń.

2/ W przypadku pracy konstrukcji w granicach zmian obciążeń będących z obszaru "alternating plasticity" odkształcenia mogą nadal pozostać małe, w związku z czym chwili zniszczenia mogą nie poprzedzić żadne możliwe do zaobserwowania zjawiska, a liczba cykli do zniszczenia wahać się może w szerokich granicach od 1 do 10 000.

3/ Zjawisko "incremental collapse" związane jest z narastaniem odkształceń, w związku z czym należy liczyć się z możliwością zniszczenia na skutek przekroczenia dopuszczalnej wydłużalności materiału lub też zadziałania efektów geometrycznych. Pojawia się tu zatem problem dużych odkształceń, podczas gdy kryteria przystosowania określono przy założeniu małych odkształceń.

4/ Konstrukcja, która przystosowała się reaguje na kolejne cykle obciążeń jak konstrukcja idealnie sprężysta. Związane jest to z powstaniem naprężeń resztkowych /na skutek odkształceń plastycznych/, które wpływają w istotny sposób na aktualne rozkłady naprężeń w konstrukcji. Są one zazwyczaj inne niż w trakcie początkowych cykli obciążeń.

5/ Wzmocnienie materiału powoduje "rozmycie" zarówno granic przystosowania jak też nośności granicznej. Potwierdzają to badania eksperymentalne [43], [51], [52], [201].

6/ Polska Norma Stalowa PN-80/3200 nakłada obowiązek sprawdzenia stanu granicznego nośności według teorii przystosowania w przypadku obciążeń zmiennych. Warunek bezpieczeństwa konstrukcji wymaga zatem obliczeń na przystosowanie.

### 1.3 Rys historyczny oraz przegląd dotychczasowych wyników

Na możliwość zniszczenia konstrukcji na skutek działania obciążeń zmiennych pierwszy zwrócił uwagę Gröning [71] w 1926 roku, a następnie Kazinczy w 1931 roku. Bleich [11] w 1932 roku przedstawił twierdzenie oraz dowód o przystosowaniu dla konstrukcji jedno- i dwukrotnie statycznie niewyznaczalnej. Dowód bardziej ogólny podany był przez Melana [145] w 1936 roku. Neal w 1950 roku [152] prezentuje dalsze rozszerzenie twierdzenia Melana oraz przedstawia pierwszy



wariant twierdzenia kinematycznego dla szczególnego przypadku. Zwraca przy tym uwagę, że przypadek obciążeń proporcjonalnych jest specyficznym przypadkiem obciążeń zmiennych, w związku z czym należałoby spodziewać się dualności sformułowań.

I tak w 1956 roku Koiter przedstawia twierdzenie kinematyczne teorii przystosowania [104]. Warto może tu dodać, że termin "przystosowanie" w literaturze anglosaskiej określanany jest wyrazem "shakedown", natomiast w Polsce używane są zwykle sformułowania: "przystosowanie", "adaptacja", "dostosowanie".

Dalsze prace dotyczące teorii przystosowania koncentrują się zasadniczo na zastosowaniu twierdzeń o adaptacji ośrodka do poszczególnych typów konstrukcji. Proponuje się różne metody obliczeń, których celem jest określenie granicznej wielkości współczynnika obciążenia  $\lambda_S$ . Jako przykład wymienić tu można prace [8], [33], [36], w których określa się bezpieczny zakres obciążeń zmiennych dla ośrodka dwuwymiarowego. Bardzo dużo prac, przykładowo [21], [57], [61], [119], dotyczy obliczeń na przystosowanie konstrukcji prętowych a szczególnie ram i belek. Zagadnienie przystosowania płyt omówione jest w pracach [109], [111], natomiast na temat przystosowania powłok znaleźć można w [191], [192]. Przypadek obciążeń termicznych omawia się w pracach [62], [112], [117], [193].

W roku 1950 Neal i Symonds [204] jako pierwsi proponują metodę, która pozwala w sposób systematyczny znajdować bezpieczne granice zmian obciążeń zmiennych. Można ją określić jako pierwowzór metody wykorzystującej technikę programowania liniowego. Stosowaniu technik programowania matematycznego poświęca się od tej pory coraz więcej uwagi [26], [35], [119], [136]. Związane to jest z faktem szybkiego rozwoju elektronicznej techniki obliczeniowej, a w związku z tym z możliwością pełnej automatyzacji obliczeń złożonych problemów teorii przystosowania [19], [134], [175]. Podejście probabilistyczne w odniesieniu do problemów przystosowania zastosowane było przez Horna [90] oraz przez Augustiego [4]. Pierwszy z nich badał między innymi częstotliwość występowania ekstremalnych obciążeń wiatrem oraz ekstremalnych obciążeń użytkowych budynków. Oceniał następnie prawdopodobieństwo wystą-

pienia zniszczenia przyrostowego bądź też zmęczenia niskocyklicznego. Przystosowanie konstrukcji w przypadku obciążenia ruchomego badane były przez Grundiego /1971/ [69] oraz Bleicha /1932/ [11]. Badania przystosowania rusztów znaleźć można w pracach [50], [53], [70], [165]. Badania te sprowadzają się do poszukiwania bezpiecznych granic zmian obciążeń przy założeniu istnienia wyłącznie jednej składowej uogólnionego naprężenia - momentu zginającego. Praca Spencera z 1976 roku [201] zawiera bogaty materiał eksperymentalny dotyczący przystosowania rusztów. Ogólnie w badaniach związanych z eksperymentem stosowano często jako materiał stal lub aluminium. Ma to swoje uzasadnienie, gdyż założenia przyjmowane w większości badań teoretycznych [43], [53], [126] pozwalają stosować wyniki tych prac zasadniczo do konstrukcji stalowych [119]. Wyjątek stanowią tu prace [60] oraz [186], które poświęcone są badaniom przystosowania konstrukcji żelbetowych. Z grona prac traktujących o przystosowaniu zdecydowanie mniejsza ich część nawiązuje do problemu przemieszczeń trwałych, które to zawsze towarzyszą procesowi przystosowania konstrukcji [18], [44], [178]. Zagadnienie to jest bardziej złożone. Prace na ten temat datują się z okresu stosunkowo bliskiego, dlatego też rozwój metod obliczeniowych omawia się osobno w rozdziale poświęconym ocenie przemieszczeń przystosowania.

#### 1.4 Tematyka i cel pracy

Praca poświęcona jest zasadniczo dwóm aspektom zagadnienia przystosowania. Pierwszy z nich dotyczy określania granic obciążeń zmiennych. Dotychczas w większości prac na ten temat ograniczano się do jednej składowej uogólnionego naprężenia - momentu zginającego [43], [119], [201], co ogólnie ogranicza klasę zastosowań otrzymanych w ten sposób wyników. W niniejszej pracy formułuje się problem przystosowania dla więcej niż jednej składowej uogólnionego naprężenia w przekroju. Pokazuje się jak przypadek taki sprowadzić można do problemu programowania matematycznego. Uwzględnia się przy tym szczególnie takie konstrukcje, których schematem statycznym są ruszty. Jest to wybór świadomy, gdyż bardzo często tego typu kon-



strukcje poddawane są obciążeniom, których znaczną część stanowią obciążenia zmienne. Wymienić tu można przykładowo konstrukcje mostowe, wszelkiego rodzaju przekrycia, wsporniki e. t. c. Również bardzo niewiele prac dotyczy zagadnienia przystosowania tego właśnie typu konstrukcji.

Drugim zagadnieniem, które rozważa się w pracy jest problem oceny przemieszczeń przystosowania. Przedstawia się metody rozwiązania zagadnień szacowania ugięć konstrukcji sprężysto-plastycznej przy dowolnym programie obciążeń zawartych w zadanych granicach. W zagadnieniach ugięć stosuje się techniki szacowania, gdyż ścisłe rozwiązanie jest praktycznie nie do uzyskania, szczególnie gdy weźmiemy pod uwagę często nieograniczoną liczbę możliwych dróg obciążeń. Dla każdej z nich wartość przemieszczeń sprężysto-plastycznych może być inna.

W pracy rozwiązuje się liczne przykłady stosując przy tym wyprowadzone jak i znane z literatury związki. W przypadku przemieszczeń otrzymane wyniki porównuje się z danymi eksperymentalnymi. Uzyskuje się przy tym dobrą zgodność obu rezultatów.

Do pracy załącza się liczną literaturę zawierającą bogaty materiał dotyczący konstrukcji rusztowych.

## 2. PRYZSTOSOWANIE KONSTRUKCJI PRĘTOWYCH

### 2.1 Ogólne twierdzenia teorii przystosowania

Rozpatrujemy ciało wykonane z materiału sprężysto-idealnie plastycznego, dla którego warunek plastyczności wygląda następująco :

$$(2.1) \quad \varphi(\sigma_{ij}) = k \quad ,$$

io którym zakłada się, że w przestrzeni stanów naprężenia - ogranicza obszar wypukły, przy czym  $\varphi = k$  tylko na brzegu. Obowiązuje stowarzyszone prawo płynięcia

$$(2.2) \quad \dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} \quad ,$$

gdzie skalar:  $\dot{\lambda} \geq 0$  jeżeli  $\varphi = k$  i  $\dot{\varphi} = 0$  ,  
 oraz  $\dot{\lambda} = 0$  jeżeli  $\varphi < k$  lub  $\dot{\varphi} < 0$  .

W pewnej chwili czasu  $t$  aktualny stan naprężenia  $\sigma_{ij}$  , odkształcania  $\epsilon_{ij}$  oraz przemieszczenia  $u_i$  można przedstawić:

$$(2.3) \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^e + \sigma_{ij}^r , \quad \epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^r + \epsilon_{ij}^p , \quad u_i = u_i^e + u_i^r ,$$

gdzie  $\sigma_{ij}^e$  ,  $\epsilon_{ij}^e$  ,  $u_i^e$  są odpowiednio naprężeniami, odkształceniami i przemieszczeniami w identycznym geometrycznie, lecz idealnie sprężystym ciele.

Wielkości  $\sigma_{ij}^r$  ,  $\epsilon_{ij}^r$  ,  $u_i^r$  oznaczają resztkowe naprężenie, odkształcenie oraz przemieszczenie spowodowane przez niezgodne pole odkształcenia plastycznego  $\epsilon_{ij}^p$  .

Oznaczając przez  $E_{ijkl}$  tensor modułów sprężystości możemy zapisać, że

$$(2.4) \quad \sigma_{ij}^e = E_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl}^e , \quad \epsilon_{ij}^r = E_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl}^r ,$$

oraz

$$(2.5) \quad \epsilon_{ij}^e = u_{(i,j)}^e , \quad \epsilon_{ij}^r + \epsilon_{ij}^p = u_{(i,j)}^r ,$$

gdzie symbol " , j " oznacza pochodną po zmiennej przestrzennej  $j$  , natomiast nawiasy oznaczają część symetryczną tensora.

W ciele z siłami masowymi  $X_i$  muszą zachodzić warunki równowagi, podobnie jak i na jego powierzchni o normalnej  $n_j$  :

$$(2.6) \quad \sigma_{ij,j}^e + X_i = 0 , \quad \sigma_{ij}^e n_j = P_i , \quad \sigma_{ij,j}^r = 0 , \quad \sigma_{ij}^r n_j = 0 .$$

Wielkość  $P_i$  oznacza obciążenia zewnętrzne.

Podstawowymi twierdzeniami teorii przystosowania ośrodka idealnie sprężysto-plastycznego do obciążeń zmieniających się dowolnie w danych granicach są twierdzenia Melana [146] oraz Koitera [104] , [105] . Są one uogólnieniem twierdzeń nośności granicznej na przypadek obciążeń zmiennych. Gdy więc amplituda obciążeń zmiennych dążyć będzie do zera, otrzymamy wówczas



problem nośności granicznej [83], [87], [153]. Twierdzenia te słuszne są ogólnie pod warunkiem, że funkcje opisujące stan naprężenia i odkształcenia nie zawierają osobliwości oraz, że objętość rozpatrywanej konstrukcji jest skończona. Zatem przypadki koncentracji naprężeń, naroża lub lokalne plastyczne płynięcie muszą być wykluczone. Twierdzenie Melana /statyczne/ brzmi [146]:

Do przystosowania ciała potrzeba i wystarcza, aby istniało niezależne od czasu pole naprężeń resztkowych  $\rho_{ij}(x)$  takie, by dla dowolnych zmian obciążeń w danych granicach zachodziła następująca nierówność,

$$(2.7) \quad \varphi \left[ \sigma_{ij}^e(x, t) + \rho_{ij}(x) \right] < k$$

przy czym -  $\sigma_{ij}^e(x, t)$  oznacza naprężenie w identycznym geometrycznie ciele idealnie sprężystym pod takimi samymi obciążeniami. Twierdzenie to odpowiada statycznemu twierdzeniu teorii nośności granicznej [158]. Twierdzenie Koitera /kinematyczne/ brzmi [105]:

Dla nieprzystosowania konstrukcji potrzeba, aby istniały, w pewnym przedziale czasowym  $(t_0, t_0 + T)$

1° cykl odkształceń plastycznych  $\epsilon_{ij}^p(x, t)$ , dający kinematycznie dopuszczalne przyrosty w tym przedziale czasowym:

$$(2.8) \quad \Delta \epsilon_{ij}^p = \epsilon_{ij}^p(x, t_0 + T) - \epsilon_{ij}^p(x, t_0) = \bar{u}_{(i, j)};$$

2° niezależny od niego cykl obciążeń, dających w wyniku cykl naprężeń sprężystych  $\sigma_{ij}^e$  i taki, że zachodzi nierówność

$$(2.9) \quad \int_{t_0}^{t_0+T} \int_V \sigma_{ij}^e \dot{\epsilon}_{ij}^p dV dt \geq \int_{t_0}^{t_0+T} \int_V D(\dot{\epsilon}_{ij}^p) dV dt$$

gdzie  $D$  jest dysypacją mocy odkształceń plastycznych oraz pole  $\bar{u}_1$  spełnia wymagane warunki brzegowe. Twierdzenie to odpowiada kinematycznemu twierdzeniu teorii nośności granicznej. Warto również dodać, że w praktyce /konstrukcje prętowe, płyty, e.t.c./ stosujemy zasadniczo oba twierdzenia /statyczne i kinematyczne/ wyrażone w wielkościach uogólnionych /uogólnionych naprężeniach/. Upraszcza to znacznie rozpatrywany

problem, jak też często warunkuje jego rozwiązanie. Pewne uwagi na temat błędów wynikłych z przejścia do opisu w wielkościach uogólnionych znaleźć można w pracy [124].

## 2.2. Opis w wielkościach uogólnionych

Dla różnych grup konstrukcji stosujemy uproszczony opis zachowania się przez wprowadzenie wielkości zwanych naprężeniami uogólnionymi  $Q_R$  oraz odkształceniami uogólnionymi  $q_R$ . Pozwala to znacznie uprościć rozpatrywane zagadnienia, często kosztem stosunkowo niewielkich niedokładności. Po przyjęciu hipotezy kinematycznej Bernoulli'ego o rozkładzie odkształceń w przekroju  $\xi$  konstrukcji, tensor odkształcenia  $\epsilon_{ij}(\underline{x})$  możemy w funkcji uogólnionego odkształcenia  $q_R(\xi)$  wyrazić następująco :

$$(2.10) \quad \epsilon_{ij}(\underline{x}) = \sum_R q_R N_{ij}^R(\underline{x}) \quad , \quad \underline{x} \in \xi ,$$

gdzie  $N_{ij}^R(\underline{x})$  określa nam rozkład odkształceń  $\epsilon_{ij}(\underline{x})$  w przekroju  $\xi$ , zgodnie z przyjętą hipotezą. W przypadku sprężystym zakładamy, że rozkład ten jest liniowy /hipoteza Bernoulli'ego dla prętów, hipoteza Love'a dla płyt/. Uogólnione naprężenia  $Q_R$  wprowadza się tak, aby zachodziła następująca równość [124] :

$$(2.11) \quad \sum_R Q_R q_R = \int_{\xi} \sigma_{ij}(\underline{x}) \epsilon_{ij}(\underline{x}) d\underline{x} .$$

Korzystając ze związków (2.10), (2.11) łatwo zauważyć, że zachodzi następujące równanie :

$$(2.12) \quad Q_R = \int_{\xi} \sigma_{ij}(\underline{x}) N_{ij}^R(\underline{x}) d\underline{x} .$$

Prawo Hooke'a możemy zapisać

$$(2.13) \quad \sigma_{ij}(\underline{x}) = E_{ijkl} \sum_R q_R N_{kl}^R(\underline{x}) ,$$

co daje nam sprężyste rozkłady naprężeń w przekroju. Ogólnie odwrócenie związku (2.12) nie jest możliwe z wyjątkiem przypadku gdy mamy do czynienia z ciałem idealnie sprężystym. Wówczas to znajdzie następujący związek:



$$(2.14) \quad \sigma_{ij}^e(\underline{x}) = \sum_R Q_R^e(\xi) a_{ij}^R(\underline{x}) \quad , \quad \underline{x} \in \xi ,$$

który określa nam w sposób jednoznaczny stan naprężeń sprężystych w przekroju  $\xi$  dla danych naprężeń uogólnionych  $Q_R^e$ . Wielkość  $a_{ij}^R$  jest sprężystym rozkładem naprężeń w przekroju, wywołanym jednostkową siłą uogólnioną  $Q_R = 1$ , podczas gdy pozostałe siły uogólnione są równe zero. Przez  $\sigma_{ij}^e$ ,  $Q_R^e$  oznaczono odpowiednio naprężenie oraz siłę uogólnioną w ciele idealnie sprężystym.

W ogólnym przypadku w przekroju występować mogą również takie pola naprężeń, że odpowiadające im wartości naprężenia uogólnionego  $Q_R$  równe są zero. Naprężenia takie nazywać będziemy resztkowymi naprężeniami przekrojowymi  $s_{ij}$ . Nieodwracalność związku (2.12) poza przypadkiem (2.14) jest właśnie związane z istnieniem takich naprężeń. Można zatem na podstawie (2.12) zapisać

$$(2.15) \quad \int_{\xi} s_{ij}(\underline{x}) N_{ij}^R(\underline{x}) d\underline{x} = 0 \quad .$$

Ostatecznie więc dowolny stan naprężenia  $\sigma_{ij}$  w punkcie przekroju  $\xi$  może być jednoznacznie przedstawiony w postaci

$$(2.16) \quad \sigma_{ij}(\underline{x}) = \sum_R Q_R a_{ij}^R(\underline{x}) + s_{ij}(\underline{x}) \quad , \quad \underline{x} \in \xi \quad .$$

Na szczeblu przekroju naprężenie  $s_{ij}$  jest zatem zgodnie z (2.15) w równowadze z zerowymi siłami uogólnionymi. Analogicznie na szczeblu konstrukcji pole naprężeń uogólnionych  $Q_R$  możemy przedstawić w postaci sumy uogólnionych naprężeń sprężystych  $Q_R^e$  oraz uogólnionych naprężeń resztkowych  $Q_R^o$ , które są w równowadze z zerowymi obciążeniami zewnętrznymi.

W przypadku liniowo geometrycznym równania równowagi wyrażone w siłach uogólnionych są liniowe

$$(2.17) \quad \sum_R L_{kr} Q_R + z_k = 0 \quad ,$$

i dla resztkowego pola sił uogólnionych  $Q_R^o$  przyjmują postać

$$(2.18) \quad \sum_R L_{kr} Q_R^o = 0 \quad ,$$

gdzie  $L_{KR}$  są liniowymi operatorami różniczkowymi, a  $Z_k$  obciążeniami zewnętrznymi. Stąd związek (2.16) możemy zapisać w następującej postaci

$$(2.19) \quad \sigma_{ij}(\underline{x}) = \sum_R (Q_R^e + Q_R^o) \cdot a_{ij}^R(\underline{x}) + s_{ij}(\underline{x}) \quad ,$$

gdzie  $Q_R^e$  jest sprężystym naprężeniem uogólnionym, to znaczy obliczonym przy założeniu, że konstrukcja wykonana jest z materiału idealnie sprężystego. Wielkość  $Q_R^o$  jest reszkowym naprężeniem uogólnionym. W szczegółowych zadaniach rozwiązanych w dalszej części pracy zobaczyć możemy przykłady reszkowych pól zarówno  $s_{ij}$  jak i  $Q_R^o$  /por. up. rys. 2.4 -  $s_{ij}$  oraz 3.9, 3.21/.

### 2.3. Podejście statyczne w wielkościach uogólnionych

Stosując podejście statyczne teorii przystosowania znaleźć możemy dolną ocenę zakresu zmian obciążeń umożliwiającą jeszcze przystosowanie. Możliwość uzyskania takiej oceny daje statyczne twierdzenie Bleicha [11]. Ocenę taką uzyskujemy konstruując odpowiednie pola naprężeń reszkowych. Stosując opis w wielkościach uogólnionych, przy podejściu statycznym wygodnie jest formułować zagadnienie przystosowania używając do tego celu pojęcia powierzchni sprężystej.

#### 2.3.1 Powierzchnie sprężyste

Powierzchnię sprężystą definiuje się jako brzeg obszaru w przestrzeni sił uogólnionych takiego, że gdy naprężenia uogólnione  $Q_R$  pozostają w nim, to żaden punkt przekroju nie doznaje uplastycznienia. Oznacza to, że powierzchnia sprężysta dla materiału sprężysto-plastycznego określona jest wobec (2.1), (2.16) warunkiem (2.20) w pewnym punkcie

$$(2.20) \quad \varphi \left[ \sum_R Q_R a_{ij}^R(\underline{x}) + s_{ij}(\underline{x}) \right] = k$$

przekroju, a w pozostałych  $\varphi \leq k$ , przy czym  $\varphi(\sigma_{ij}) = k$  jest warunkiem plastyczności. Każda z powierzchni sprężystych  $S_\xi$  określona jest jednoznacznie przez odpowiednie reszkowe



naprężenie przekrojowe  $s_{ij}$ . Powierzchnię sprężystą dla przypadku gdy,

$$(2.21) \quad s_{ij}(\underline{x}) = 0 \quad , \quad \underline{x} \in \xi \quad ,$$

nazywać będziemy początkową powierzchnią sprężystą.

W literaturze dotyczącej przystosowania brak jest systematycznych badań powierzchni sprężystych dla różnych rodzajów przekrojów i sił przekrojowych. Badania takich powierzchni stanowią przy podejściu statycznym punkt wyjścia do formułowania zagadnienia nośności przystosowania. Wykorzystuje je się również do szacowania energii, a następnie przemieszczeń trwałych konstrukcji, por. np. [195].

W pracy [114] podaje się dolną i górną ocenę przystosowania dla przypadku momentu zginającego i siły podłużnej oraz dla przekroju prostokątnego, opierając się przy tym o analizę powierzchni sprężystych. Pewne uwagi dotyczące również tego przypadku znaleźć można w pracach [68], [133], [174]. Okazuje się przy tym, że wpływ sił osiowych może spowodować istotną zmianę ostatecznego wyniku. Analizę powierzchni sprężystych oraz wykorzystanie tego do oceny przystosowania płyt podaje się w pracy [109] oraz [111].

### 2.3.2. Twierdzenie statyczne teorii przystosowania w wielkościach uogólnionych

Gdy korzystamy z opisu w wielkościach uogólnionych, wówczas naprężenia reszkowe z opisu kontynualnego  $\sigma_{ij}^r$  przedstawić można na podst. (2.3), (2.19) jako następującą sumę:

$$(2.22) \quad \sigma_{ij}^r(\underline{x}) = \sum_r Q_r^0 a_{ij}^r(\underline{x}) + s_{ij}(\underline{x}) \quad .$$

Twierdzenie statyczne brzmi [113] :

Dla przystosowania danej konstrukcji potrzeba i wystarcza, aby istniały stałe w czasie: pole reszkowych sił uogólnionych  $Q_r^0(\xi)$  oraz dla każdego przekroju  $\xi$  konstrukcji odpowiednia powierzchnia sprężysta  $S_\xi$  takie, że dla obciążeń zewnętrznych zmieniających się w przepisanych granicach pole sił wewnętrznych  $Q_r = Q_r^e + Q_r^0$  zmieściło się dla każdego

przekroju  $\xi$  w odpowiedniej powierzchni sprężystej  $S_\xi$ . Czyli

$$(2.23) \quad \left[ Q_R^e(\xi) + Q_R^o(\xi) \right] \subset S_\xi \quad ,$$

gdzie wielkość  $Q_R^e$  oznacza pole sił uogólnionych w identycznej geometrycznie, lecz idealnie sprężystej konstrukcji .

## 2.4 Podejście kinematyczne w wielkościach uogólnionych

Podejście to daje możliwość uzyskania górnej oceny zakresu zmian obciążeń umożliwiając jeszcze przystosowanie. Ocenę taką uzyskujemy przez dobranie mechanizmu ruchu plastycznego. Ocena taka gdy jest wystarczająco blisko oceny dolnej, może w przypadku praktycznym być zadowalająca.

### 2.4.1 Twierdzenie kinematyczne teorii przystosowania w wielkościach uogólnionych

Twierdzenie to brzmi :

Dla zaistnienia niebezpieczeństwa zniszczenia przez nieprzystosowanie potrzeba i wystarcza, aby istniały w pewnym przedziale czasowym  $(t_0, t_0 + T)$  ,

1° cykl uogólnionych odkształceń plastycznych  $q_R(\xi, t)$  spełniający kinematyczne warunki brzegowe oraz warunki nierozdzielności i dający kinematycznie dopuszczalne przyrosty w tym przedziale czasowym

$$(2.24) \quad \Delta q_R = q_R(\xi, t_0 + T) - q_R(\xi, t_0) \quad ;$$

2° niezależny od niego cykl obciążeń, dający w wyniku cykl uogólnionych naprężeń sprężystych  $Q_R^e$  /sił uogólnionych/ taki, że zachodzi następująca nierówność

$$(2.25) \quad \int_{t_0}^{t_0+T} \int_S Q_R^e \dot{q}_R \, dSdt \geq \int_{t_0}^{t_0+T} \int_S D(\dot{q}_R) \, dSdt \quad ,$$



gdzie  $D$  jest dysypacją mocy uogólnionych odkształceń plastycznych, a  $S$  polem wszystkich przekrojów danej konstrukcji. Należy jednak zdawać sprawę, że sformułowanie twierdzenia kinematycznego w wielkościach uogólnionych niesie ze sobą pewne nieścisłości, podobnie jak same wprowadzenie wielkości uogólnionych. Szczegóły na ten temat znaleźć można w pracy [124]. Zastosowanie twierdzenia kinematycznego do obliczeń na zastosowanie znaleźć można w pracach [21], [119], [153], [164]. Większość z nich dotyczy konstrukcji ramowych i belek.

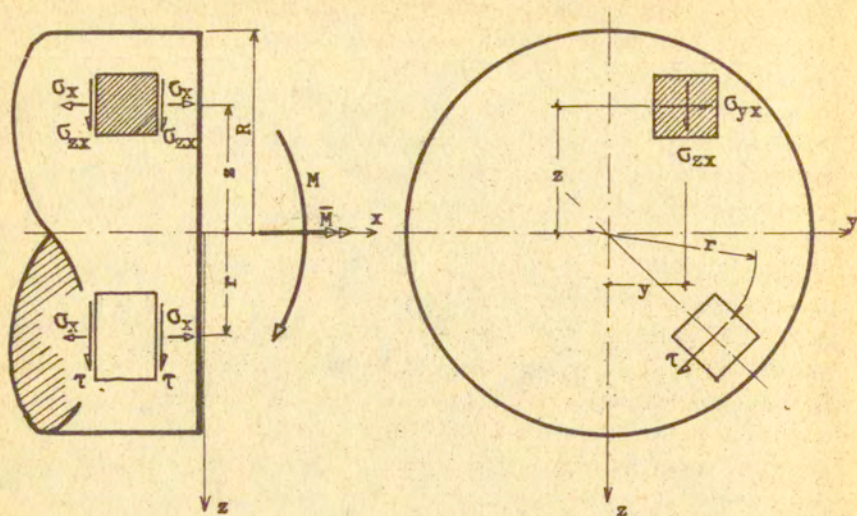
Dualność podejść statycznego i kinematycznego sprawia, że przed rozwiązaniem zadania szczegółowego możemy stanąć przed problemem wyboru. Oba podejścia prowadzą do rozwiązania problemów programowania matematycznego [63] i niekiedy może być trudno a priori preferować któreś z podejść. Podobnie jak przy obliczaniu nośności granicznej okazuje się, że łatwiejsza do stosowania w obliczeniach ręcznych jest metoda kinematyczna [119] [194] [163], [193]. Warto też dodać, że rozwiązania dopuszczalne obu sformułowań pozwalają na określenie przedziału, w którym na pewno zawarte jest rozwiązanie ściśle problemu. Ma to szczególne znaczenie wówczas, gdy otrzymanie wyniku pełnego jest uciążliwe lub wręcz niemożliwe, a uzyskane dolne i górne oceny leżą blisko siebie.

## 2.5. Przekrój kołowy - powierzchnie sprężyste dla przypadku zginania i skręcania

Rozważmy element konstrukcji w postaci pręta o przekroju kołowym. Załóżmy ponadto, że w przekroju pręta działają dwa uogólnione naprężenia - moment zginający  $M$  oraz moment skręcający  $\bar{M}$ . Trzy składowe tensora naprężenia są różne od zera  
/rys.2.1/

- naprężenie normalne  $\sigma_x = \sigma$  /w kierunku osi  $x$  pręta/
- naprężenie styczne  $\sigma_{zx}$
- naprężenie styczne  $\sigma_{yx}$ .

Zamiast tych dwu ostatnich wystarczy operować stycznymi naprężeniami wypadkowym  $\tau = \sqrt{\sigma_{zx}^2 + \sigma_{yx}^2}$  równym /w układzie współrzędnych cylindrycznych i w przypadku osiowej symetrii/ naprężeniu  $\sigma_{rx}$ .



Rys.2.1

Przyjmijmy dodatkowo, że pręt wykonany jest z materiału spełniającego warunek plastyczności Hubera - Misesa

$$(2.26) \quad \sigma^2 + 3\tau^2 \leq \sigma_0^2$$

gdzie  $\sigma_0$  jest granicą plastyczności materiału przy czystym rozciąganiu. W przypadku przekroju kołowego funkcje  $a_{ij}^r(x)$  ze związku (2.14) określające sprężyste rozkłady naprężeń przybierają postać ,

$$(2.27) \quad a_\sigma = \frac{z}{J} = \frac{4z}{\pi R^4}, \quad a_\tau = \frac{r}{J_0} = \frac{2r}{\pi R^4},$$

gdzie  $x$  jest osią pręta,  $xz$  - płaszczyzną zginania,  $r = \sqrt{z^2 + y^2}$ , a  $R$  promieniem przekroju. Wobec tego początkową powierzchnią sprężystą określimy na podstawie (2.20), (2.21) z następującego warunku :

$$(2.28) \quad \left(\frac{Mz}{J}\right)^2 + 3\left(\frac{\bar{M}r}{J_0}\right)^2 \leq \sigma_0^2$$

Łatwo jest stwierdzić, że warunek (2.28) będzie spełniony w każdym punkcie przekroju, jeżeli nie jest on przekroczony dla

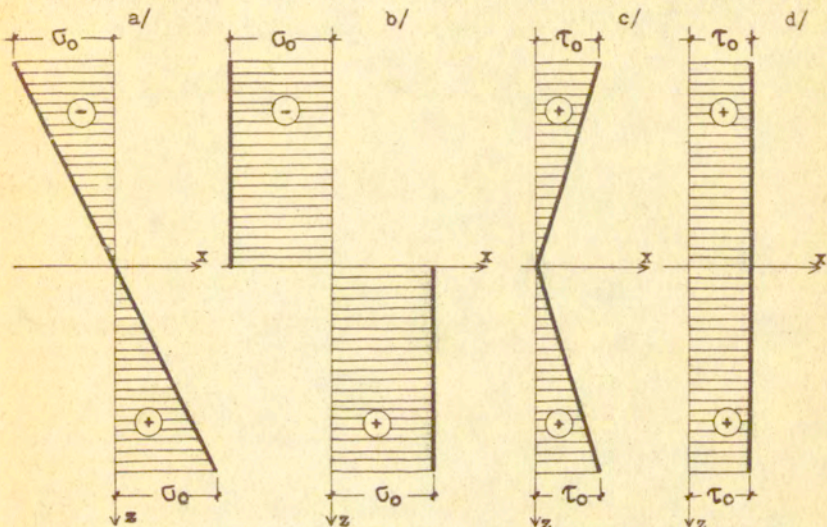


$z = r = R$ . Daje to poszukiwane równanie początkowej powierzchni sprężystej, które w postaci bezwymiarowej wygląda następująco:

$$(2.29) \quad \left( \frac{m}{3\pi/16} \right)^2 + \left( \frac{\bar{m}}{3/4} \right)^2 = 1$$

gdzie:  $m = M/M_0$ ,  $\bar{m} = \bar{M}/\bar{M}_0$  a  $M_0$  oraz  $\bar{M}_0$  oznaczają momenty przy pełnym uplastycznieniu przekroju, przy działaniu odpowiednio samego tylko momentu zginającego lub skręcającego - rysunki 2.2 b, 2.2 d. Wartości ich wynoszą odpowiednio:

$$(2.30) \quad M_0 = \frac{4}{3} \sigma_0 R^3, \quad \bar{M}_0 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \sigma_0 R^3$$



Rys.2.2

Jeżeli wprowadzić oznaczenia :

$$(2.31) \quad m' = \frac{16}{3\pi} m = \frac{M}{M_e}, \quad \bar{m}' = \frac{4}{3} \bar{m} = \frac{\bar{M}}{\bar{M}_e}$$

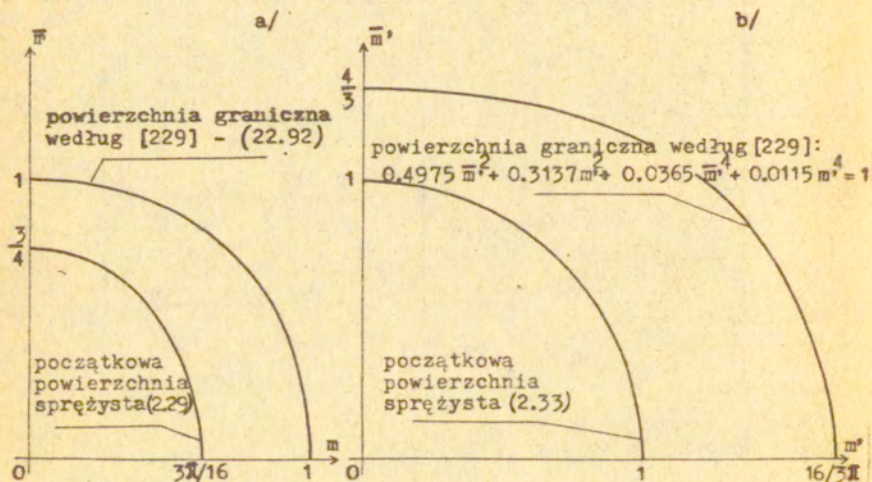
gdzie  $M^e$  oraz  $\bar{M}^e$  oznaczają maksymalne momenty sprężyste /rys. 2.2 a, 2.2 c /,

$$(2.32) \quad M^e = \frac{\pi}{4} G_0 R^3, \quad \bar{M}^e = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} G_0 R^3,$$

to równanie (2.29) przyjmuje bardzo prostą postać

$$(2.33) \quad (m')^2 + (\bar{m}')^2 = 1,$$

która jest bardziej korzystna w przypadku poszukiwania rozwiązań problemu przystosowania zarówno w sposób analityczny jak i graficzny. Brak jest do tej pory prac na temat bezpośrednich zastosowań powierzchni sprężystych do formułowania problemów przystosowania w postaci programowania matematycznego. W punkcie 2.6.1 pracy przedstawia się takie sformułowania, wykorzystując przy tym otrzymane równania powierzchni sprężystych.



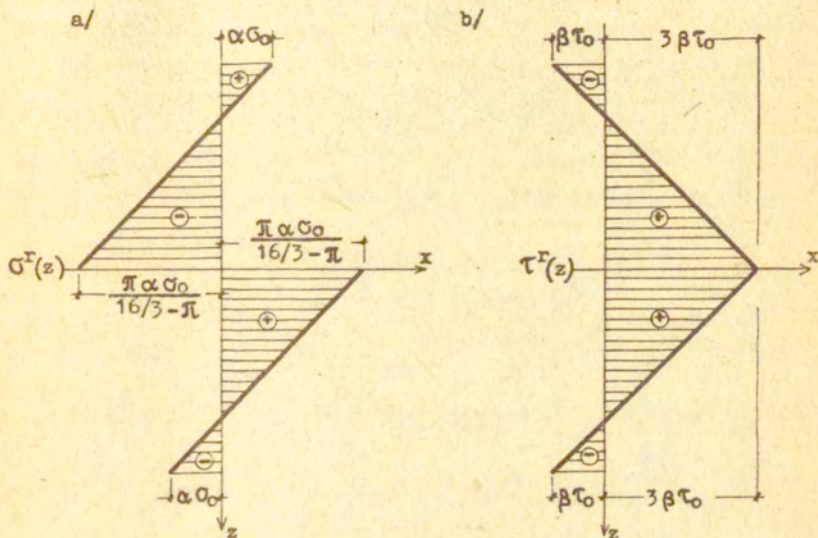
Rys.2.3



Początkową powierzchnię sprężystą, odpowiednio we współrzędnych  $[m, \bar{m}]$  oraz  $[m', \bar{m}']$  wraz z powierzchnią graniczną /aproxymacja według [229] / przedstawiono na rysunkach 2.3a oraz 2.3 b .

Jeżeli przyjąć rozkład samozrównoważonych-naprężeń  $s_{ij}$  w przekroju  $\xi$  , jak na rysunku 2.4 /powstaje on przez odjęcie rozkładu sprężystego

- rysunki 2.2 a, 2.2 c, od rozkładu "plastycznego"
- rysunki 2.2 b, 2.2 d, w założeniu równoważenia tych samych momentów, zginającego i skręcającego/, to otrzymamy dwu-parametrową rodzinę powierzchni sprężystych.



Rys.2.4

Sprawą istotną, mającą znaczenie dla dalszych obliczeń, jest fakt, że powierzchnie te powstają przez translację początkowej powierzchni sprężystej, a obwiednia tych powierzchni praktycznie pokrywa się z powierzchnią graniczną przekroju /rys. 2.5/. Rozkład przekrojowych naprężeń resztkowych  $s_{ij}$  zaproponowanych na rysunku 2.4 jest jedynie jednym z możliwych do przyjęcia rozkładów naprężeń w przekroju. Warto przy tym zaznaczyć, że od tego jakie rozkłady będziemy przyjmować

zależęć będą zasadniczo otrzymywane wyniki, por. [133].  
Rozkład naprężeń reszkowych taki jak na wysunku 2.4 zapisać  
można analitycznie zgodnie z przyjętym układem osi  $x, z$ , na-  
stępująco:

$$(2.34 \frac{a}{b}) \quad \sigma^r(z) = \left[ -\frac{\pi}{16/3 - \pi} - \left(1 + \frac{\pi}{16/3 - \pi}\right) \frac{z}{R} \right] \alpha \sigma_0, \quad \begin{array}{l} z \leq 0 \\ z > 0 \end{array}$$

$$(2.35) \quad \tau^r(z) = \left[ 3\beta \tau_0 - 4 \operatorname{sign}(z) \frac{z}{R} \beta \tau_0 \right]$$

Wartości  $\alpha$  oraz  $\beta$  są pewnymi współczynnikami liczbowymi  
określającymi stan zaawansowania odkształceń plastycznych  
odpowiednio przy zginaniu ( $\alpha$ ) oraz skręcaniu ( $\beta$ ), por. rys.  
2.4.

Wstawiając wielkości (2.34), (2.35) do wzoru (2.20) dla  
warunku plastyczności (2.26) i znajdując maksymalne wartości  
lewej strony, otrzymujemy

$$(2.36) \quad \left( \frac{16}{3\pi} m - \alpha \right)^2 + \left( \frac{4}{3} \bar{m} - \beta \right)^2 \leq 1$$

$$(2.37) \quad \left( \frac{\pi \alpha}{16/3 - \pi} \right)^2 + (3\beta)^2 \leq 1$$

lub we współrzędnych  $[m', \bar{m}']$

$$(2.38) \quad (m' - \alpha)^2 + (\bar{m}' - \beta)^2 \leq 1$$

$$(2.39) \quad \left( \frac{\pi}{16/3 - \pi} \alpha \right)^2 + (3\beta)^2 \leq 1$$

Warunek (2.36) lub (2.38) wynika z (2.20) dla punktów  $z = \pm R$ ,  
warunek (2.37) lub (2.39) dla punktu  $z = 0$ . Łatwo przekonać  
się, że warunek (2.37), (2.39) nakłada na wielkość translacji  
powierzchni sprężystej pewne ograniczenie. Jest to oczywiste,



gdyż powierzchnia sprężysta nie powinna "wyjść" poza powierzchnię graniczną. W pracy [195] znaleziono maksymalną translację /obwiednię/ takiej rodziny powierzchni sprężystych. Równanie takiej obwiedni przedstawia się następująco

$$(2.40) \quad \Phi(m, \bar{m}) = \left( \frac{16}{3\pi} m - \alpha \right)^2 + \left( \frac{4}{3} \bar{m} \frac{1}{(+)} \frac{1}{3} \sqrt{1 - k^2 \alpha^2} \right)^2 - 1 = 0 ,$$

gdzie :

$$k = \frac{\pi}{16/3 - \pi} ,$$

$$\alpha = -\frac{1}{4} p \frac{1}{(+)} \frac{1}{2} a \frac{1}{(-)} \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{p}{2} \frac{1}{(+)} a \right)^2 - 4(K \frac{1}{(-)} b)} ,$$

$$p = \frac{96}{\pi(k^2 - 9)} m ,$$

$$a = \sqrt{2K + \frac{p^2}{4} - q} ,$$

$$K = \frac{1}{6} q + \frac{3\sqrt{q^3 - \frac{4k^2 s}{(k^2 - 9)^2} \bar{m}^2 + \sqrt{D}}}{\sqrt{216} - \frac{4k^2 s}{(k^2 - 9)^2} \bar{m}^2 - \sqrt{D}} + \frac{3\sqrt{q^3 - \frac{4k^2 s}{(k^2 - 9)^2} \bar{m}^2 - \sqrt{D}}}{\sqrt{216} - \frac{4k^2 s}{(k^2 - 9)^2} \bar{m}^2 - \sqrt{D}} ,$$

$$q = \frac{16}{\left(k - \frac{9}{k}\right)^2} \bar{m}^2 + \frac{2304}{\pi^2 (k^2 - 9)^2} m^2 - \frac{1}{k^2} ,$$

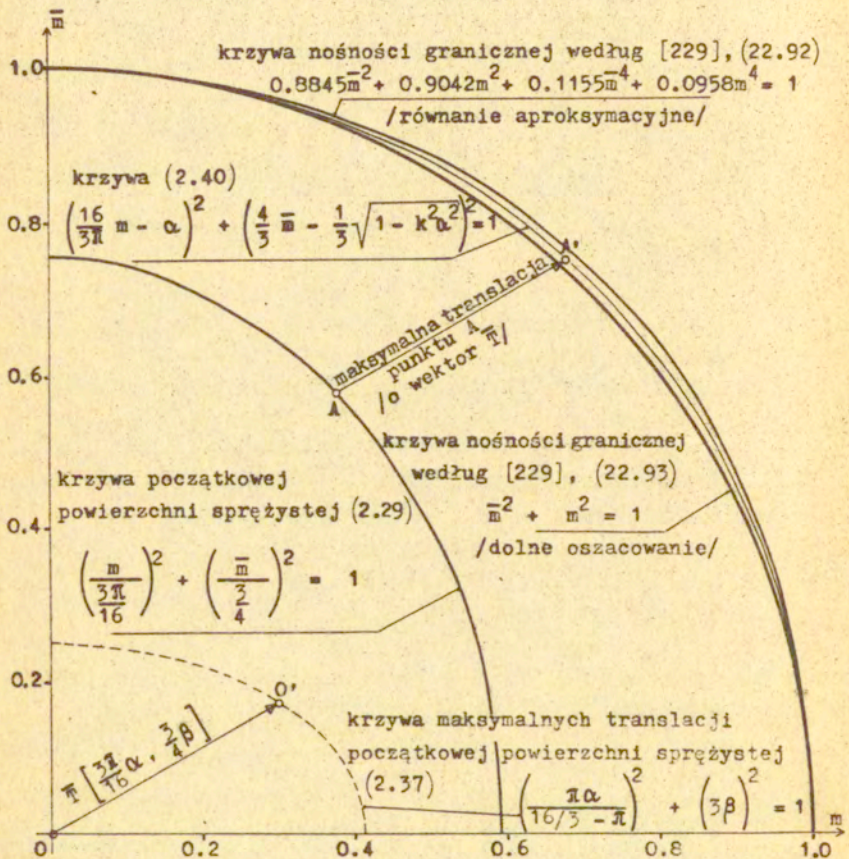
$$s = \frac{-2304}{\pi^2 k^2 (k^2 - 9)^2} m^2 ,$$

$$D = -\frac{1}{36^3} q^6 + \left( \frac{4k^2 s}{(k^2 - 9)^2} \bar{m}^2 - \frac{1}{216} q^3 \right)^2 ,$$

$$b = \frac{Kp - r}{2a}$$

$$r = \frac{96}{\pi k^2 (9 - k^2)} m$$

Porównano przebieg uzyskanej obwiedni z krzywą nośności granicznej podaną przez Życzkowskiego w pracy [229].



Rys. 2.5



Wyniki leżą pomiędzy dolnym oszacowaniem a rozwiązaniem aproksymacyjnym /rys. 2.5/.

Analizując przystosowanie wystarczy rozpatrywać jedynie rodzinę translacyjną powierzchni sprężystych.

## 2.6. Zagadnienie przystosowania jako problem programowania matematycznego

Ogromny rozwój elektroniki i w związku z tym coraz bardziej powszechne stosowanie elektronicznej techniki obliczeniowej przyczyniło się w wielu wypadkach do formułowania problemów mechaniki pod kątem stosowania komputerów. Stąd też często posługujemy się opisem dyskretnym /wykorzystanie rachunku macierzowego/ jak również sięgamy po techniki programowania matematycznego, por. np. [14] , [19] , [30] , [136] , [175] , [186] , [201] .

W dalszych rozważaniach przyjmować będziemy, że :

- 1<sup>o</sup> Materiał konstrukcji jest izotropowy, jednorodny idealnie sprężyste - plastyczny.
- 2<sup>o</sup> Posługujemy się zależnościami teorii geometrycznie liniowych, a zatem przemieszczenia powstałe w konstrukcji muszą być małe.
- 3<sup>o</sup> Obciążenia są quasi-statyczne przykładane w postaci skupionych sił i momentów.
- 4<sup>o</sup> Przekroje prętów są odcinkami stałe.

W świetle przyjętych założeń posługiwać się będziemy opisem dyskretnym, co związane jest z operowaniem pojęciem t.zw. przekroju krytycznego. Zdefiniujemy go jako przekrój konstrukcji, w którym:

- przyłożone jest obciążenie zewnętrzne, lub
- następuje zmiana przekroju, bądź też
- występuje ograniczenie kinematyczne lub węzeł.

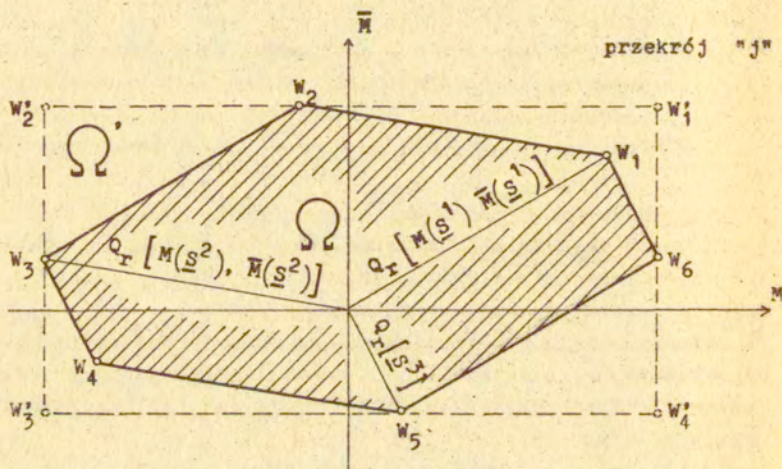
### 2.6.1 Podejście statyczne

W przypadku konstrukcji prętowej poddanej działaniu obciążeń skupionych zmiany sił wewnętrznych mają charakter liniowy. Wystarczy zatem w takim przypadku warunek przystosowania sprawdzić tylko w skończonej liczbie przekroi, nazywanych zwykle przekrojami krytycznymi.

Rozważmy w dalszym ciągu konstrukcję prętową o liczbie  $n$  przekroi krytycznych oraz o kołowym przekroju prętów. Niech jedynymi uogólnionymi naprężeniami będą moment zginający  $M$  oraz moment skręcający  $\bar{M}$ .

a/ Konstrukcje statycznie wyznaczalne.

Jeżeli konstrukcja jest statycznie wyznaczalna to, dla określonych granic zmian obciążeń zewnętrznych, obszar zmian sił przekrojowych określić można na podstawie wektorów sił przekrojowych  $Q_r(\underline{s}^k) = [M(\underline{s}^k), \bar{M}(\underline{s}^k)]$  od poszczególnych schematów obciążenia  $\underline{s}^k$ . Przykładowo dla pewnego przekroju  $j$  konstrukcji, w którym działają trzy schematy obciążenia, może mieć miejsce sytuacja jak na rysunku 2.6.



Rys. 2.6

Wówczas to obszar  $\Omega$  możliwych zmian sił przekrojowych  $Q_r$  określi sześć wierzchołków  $W_1$ , z których trzy są sumą trzech kolejnych wektorów  $Q_r$ .

Opierając się w dalszym ciągu na statycznym twierdzeniu (2.23) oraz korzystając z otrzymanych w rozdziale 2.5 związków (2.36) i (2.37), problem znalezienia mnożnika obciążenia  $\lambda_s$  poz-



walającego na przystosowanie konstrukcji sformułować można następująco :

znaleźć

$$(2.41) \quad \max \lambda ,$$

przy ograniczeniach:

$$(2.42) \quad \left[ \lambda \frac{16}{3\pi} m_j^e(w_1) - \alpha_j \right]^2 + \left[ \lambda \frac{4}{3} \bar{m}_j^e(w_1) - \beta_j \right]^2 \leq 1$$

$$(2.43) \quad \left( \frac{\pi}{16/3 - \pi} \alpha_j \right)^2 + \left( 3\beta_j \right)^2 \leq 1$$

dla  $j = 1, 2, \dots, n$  ,  $i = 1, 2, \dots, w$  ,  
gdzie :  $\lambda$  jest mnożnikiem określającym granice  $\mu_k^-$  ,  $\mu_k^+$   
zmian obciążeń,  $m_j$  ,  $\bar{m}_j$  są bezwymiarowymi momentami odpo-  
wiednio zginającymi i skręcającymi określonymi w wierzchołku  
 $W_1$  oraz w przekroju  $j$  dla konstrukcji idealnie sprężystej.  
Przez  $w$  oznaczono liczbę wierzchołków  $W_1$  obszaru  $\Omega$  , przez  
 $n$  liczbę przekroi, natomiast  $\alpha_j$  ,  $\beta_j$  są zmiennymi proble-  
mu.

Dostaliśmy ostatecznie zagadnienie programowania nieliniowego  
o liniowej funkcji celu [63] , [219] . Liczba ograniczeń (2.42),  
(2.43) równa tu będzie iloczynowi liczby przekrojów krytycz-  
nych  $n$  przez powiększoną o jeden liczbę wierzchołków obszaru  $\Omega$   
/zależącą od liczby schematów obciążenia/. Ogólnie zatem wiel-  
kość problemu (2.41) zależęć będzie od geometrii konstrukcji,  
sposobu obciążenia jak i liczby schematów obciążenia. Zmien-  
nymi są tutaj  $\lambda$  ,  $\alpha_j$  ,  $\beta_j$  , i jest ich  $2n + 1$ .

b/ Konstrukcje statycznie niewyznaczalne

W przypadku konstrukcji statycznie niewyznaczalnych  
należy uwzględnić obok naprężeń przekrojowych  $s_{ij}$  również  
uogólnione naprężenia reszkowe  $Q_R^0$  , por. (2.22) . Wówczas  
obszar  $\Omega$  z rysunku 2.6 ulegnie dodatkowo translacji o we-  
ktor  $Q_R^0 = [M^R, \bar{M}^R]$  . Stąd problem określenia obciążeń pozwala-  
jących konstrukcji na przystosowanie wygląda w tym przypadku  
następująco:

znaleźć

$$(2.44) \quad \max \lambda ,$$

przy ograniczeniach:

$$(2.45) \quad \left[ \lambda m_j^e(W_i) + \bar{m}_j^r \right]^2 + \left[ \lambda \bar{m}_j^e(W_i) + \bar{m}_j^r \right]^2 \leq 1 ,$$

$$(2.46) \quad \left[ \frac{\lambda m_j^e(W_i) - c_j}{3\pi/16} \right]^2 + \left[ \frac{\lambda \bar{m}_j^e(W_i) - \bar{c}_j}{3/4} \right]^2 \leq 1 ,$$

$$(2.47) \quad \sum_j [\gamma_{ij} \bar{\gamma}_{ij}] \cdot \begin{bmatrix} \bar{m}_j^r \\ \bar{m}_j^r \end{bmatrix} = 0 ,$$

gdzie  $[\gamma_{ij} \bar{\gamma}_{ij}]$  jest macierzą równowagi, [21], [194], a  $m_j, \bar{m}_j$ , podobnie jak w punkcie a/ oznaczają bezwymiarowy moment zginający i skręcający. W tak zapisanym zadaniu programowania wiadać wyraźnie rozbić na zniszczenie przyrostowe oraz zmęczenie niskocykliczne. Mianowicie warunki (2.45) zapobiegają przed wystąpieniem niebezpieczeństwa zniszczenia przyrostowego, natomiast warunki (2.46) przed wystąpieniem naprzemiennej plastyczności. Tak postawiony problem, lecz wyłącznie dla przypadku jednowymiarowego - momentu zginającego znaleźć można w literaturze, [119], [201].

Ograniczenie (2.47) jest nałożeniem wymogów na samonapężenia uogólnione - bezwymiarowy resztkowy moment zginający  $\bar{m}_j^r$  oraz bezwymiarowy resztkowy moment skręcający  $\bar{m}_j^r$ , aby były w równowadze z zerowymi obciążeniami zewnętrznymi.

Wielkości  $c_j, \bar{c}_j$  są zmiennymi problemu. Należy dodać, że przy formułowaniu zależności (2.45) wykorzystano dolne oszacowanie nośności granicznej /rys.2.5/ zamiast warunku (2.40), który jest bardzo złożony. Może to wpłynąć na ostateczny wynik jedynie nieznacznie i to na korzyść bezpieczeństwa /por. krzywe (2.62) i (2.40) - rys.2.8/. Warto też dodać, że rozważany problem można również sformułować w sposób analogiczny do (2.41) i na odwrót. Eksperymenty numeryczne mogłyby rozstrzygnąć sprawę efektywności obu sformułowań. Mianowicie problem (2.41) zawiera mniejszą liczbę ograniczeń /dla  $i > 1$  /, lecz z kolei zadanie (2.44) można rozbić na dwa zadania mniejsze /o mniejszej liczbie ograniczeń/. To znaczy na jedno z



ograniczeniami (2.45), (2.47) i  $\lambda = \max \lambda = \lambda^1$  oraz na drugie z grupą ograniczeń (2.46) i  $\lambda = \max \lambda = \lambda^a$ . Innymi słowy, określamy oddzielnie wartość mnożnika obciążenia dla zniszczenia przyrostowego -  $\lambda^1$  oraz niskocyklicznego -  $\lambda^a$ . W przypadku programowania liniowego jest na ogół tak, że korzystniej jest rozwiązać dwa zadania małe / o mniejszej liczbie ograniczeń / niż jedno zadanie duże. Jest to związane z tym, że ogólnie lepiej jest operować większą liczbą zmiennych, a mniejszą liczbą ograniczeń niż odwrotnie, w związku z czym stosuje się często sformułowanie dualne - [21], [63].

Z obu zadań, zarówno (2.41) jak i (2.44) widać, że nawet dla prostych przypadków dostać możemy duży problem programowania nieliniowego. Dlatego też cenne być mogą następujące spostrzeżenia:

1<sup>o</sup> Wektor momentów reszkowych  $\tilde{m}_1^r = [m_j^r \quad \bar{m}_j^r]$  wyrazić można poprzez macierz  $G_{1k}$  współczynników liczbowych, t.zn.,

$$(2.48) \quad \tilde{m}_1^r = \sum_k G_{1k} x_k, \quad \begin{matrix} l=1,2,\dots,2n, \\ k=1,2,\dots,p, \end{matrix}$$

gdzie  $x_k$  są wielkościami nadliczbowymi a  $p$  jest krotnością statycznej niewyznaczalności konstrukcji, por. [119].

2<sup>o</sup> Dla większej liczby schematów obciążenia określenie obszaru  $\Omega$ , który tworzą pewne kombinacje wektorów  $Q_r$ , może być kłopotliwe. Zadowalającym okazać się wówczas może problem uproszczony. Wystarczy mianowicie zastąpić obszar wielowierzchołkowy nieregularny  $\Omega$  przez obszar regularny  $\Omega'$ , na przykład czterowierzchołkowy /prostokąt/, por. rys.2.6.

W takim przypadku obszar  $\Omega'$  w odróżnieniu od obszaru  $\Omega$  znaleźć można natychmiast sumując odpowiednio dodatnie i ujemne składowe wektorów  $Q_r(S^k)$ . Spełniony będzie wówczas warunek  $\Omega' \subset \Omega$ , a stąd otrzymane rozwiązanie będzie górną oceną przystosowania konstrukcji. Zmalaże również liczba ograniczeń problemu (2.44) między innymi poprzez zastąpienie warunku (2.46) następującą zależnością:

$$(2.49) \quad \left[ \left( \lambda \max \frac{16}{3\pi} m_j^e - \lambda \min \frac{16}{3\pi} m_j^e \right)^2 + \left( \lambda \max \frac{4}{3} \bar{m}_j^e - \lambda \min \frac{4}{3} \bar{m}_j^e \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} < 2,$$

która wynika z tego, że przekątna obszaru  $\Omega$  zmieścić się musi w translacyjnej powierzchni sprężystej.

3<sup>o</sup> W odróżnieniu od problemu (2.44), w przypadku (2.41) dostaniemy zawsze po rozwiązaniu wartości  $\alpha_j$ ,  $\beta_j$ , od których to jak się później okaże zależy wielkość dysypowanej energii, co ma znaczenie przy określaniu przemieszczeń trwałych.

W zakończeniu warto dodać, że przy formułowaniu zagadnienia programowania matematycznego skorzystano z twierdzenia, które mówi, że warunek przystosowania wystarczy sprawdzić jedynie w wierzchołkach zmian obciążeń, o ile warunek plastyczności jest wypukły, [110].

### 2.6.2. Podejście kinematyczne

Pozostanmy nadal przy konstrukcji prętowej o kołowym przekroju prętów. Niech w przekroju  $j$  działają moment zginający  $M_j$  oraz moment skręcający  $\bar{M}_j$ . Wówczas po scałkowaniu po czasie, zależność (2.25) w przypadku opisu dyskretnego przybierze postać [123], [194]

$$(2.50) \quad \sum_j [M_j \theta_j + \bar{M}_j \bar{\theta}_j] \leq \sum_i a_i J_i$$

gdzie :

$$(2.51) \quad J_i = \sum_j [M_{ij}^e \theta_j + \bar{M}_{ij}^e \bar{\theta}_j]$$

$$(2.52) \quad a_i = \begin{cases} \mu_i^+ & \text{jeżeli } J_i > 0 \\ \mu_i^- & \text{jeżeli } J_i \leq 0 \end{cases}$$

$$(2.53) \quad M_j = \frac{M_{jo}^2}{\bar{M}_{jo} \sqrt{\left(\frac{\bar{\theta}_j}{\theta_j}\right)^2 + \left(\frac{M_{jo}}{\bar{M}_{jo}}\right)^2}}, \quad \bar{M}_j = \frac{\bar{M}_{jo}^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{\theta_j}{\bar{\theta}_j}\right)^2} \cdot \left(\frac{M_{jo}}{\bar{M}_{jo}}\right)^2}$$



Przez  $M_{ij}^e$ ,  $\bar{M}_{ij}^e$  oznaczono moment sprężysty odpowiednio zginający i skręcający działający w j-tym przekroju konstrukcji i pochodzący od i - tego schematu obciążenia  $S^i$ . Wielkości  $\theta_j$ ,  $\bar{\theta}_j$  są kątami wzajemnego obrotu i skręcania plastycznego elementów pręta po obu stronach j-tego przegubu plastycznego, natomiast  $M_{j0}$ ,  $\bar{M}_{j0}$  momentami granicznymi, por. (2.30). Związki (2.53) wyprowadzono wykorzystując dolne oszacowanie nośności granicznej (22.93) z pracy [229], por. rys.2.5.

Jeżeli granice zmian obciążeń dane będą z dokładnością do wspólnego mnożnika  $\lambda$ , to wówczas problem wyznaczenia maksymalnej wartości tego mnożnika, dla którego zajdzie jeszcze przystosowanie /nie wystąpi "incremental collapse"/ sprowadzić można do zadania programowania nieliniowego. Należy wówczas znaleźć

$$(2.54) \quad \lambda_s^i = \max \sum_{i,j} \left[ \mu_i M_{ij}^e \theta_j + \bar{\mu}_i \bar{M}_{ij}^e \bar{\theta}_j \right]$$

przy ograniczeniach:

$$(2.55) \quad \sum_j (M_j \theta_j + \bar{M}_j \bar{\theta}_j) = 1,$$

$$\mu_i^- \leq \mu_i \leq \mu_i^+$$

$$\begin{bmatrix} \theta_j \\ \bar{\theta}_j \end{bmatrix} = \sum_i \begin{bmatrix} \gamma_{ji} \\ \bar{\gamma}_{ji} \end{bmatrix} u_i$$

gdzie  $\begin{bmatrix} \gamma_{ji} \\ \bar{\gamma}_{ji} \end{bmatrix} = \tilde{\gamma}$  jest macierzą równowagi /tę samą co w (2.47) - por. dodatek C/, a  $u_i$  wektorem /w sensie algebraicznym/ wirtualnych przemieszczeń. Jak widać, liczba ograniczeń zależy będzie od ilości przekroi krytycznych i od liczby schematów obciążenia. Zmiennymi są tutaj  $\theta_j$ ,  $\bar{\theta}_j$ ,  $u_i$ ,  $\mu_i$ . Warto dodać, że problem ten dla przypadku jednego uogólnionego naprężenia - momentu zginającego znaleźć można wraz z przykładami w pracach [119], [21].

### 2.6.3. Przykład 1 - Przystosowanie na szczyblu przekroju

Niech na przekrój kołowy działają dwa niezależne obciąż-

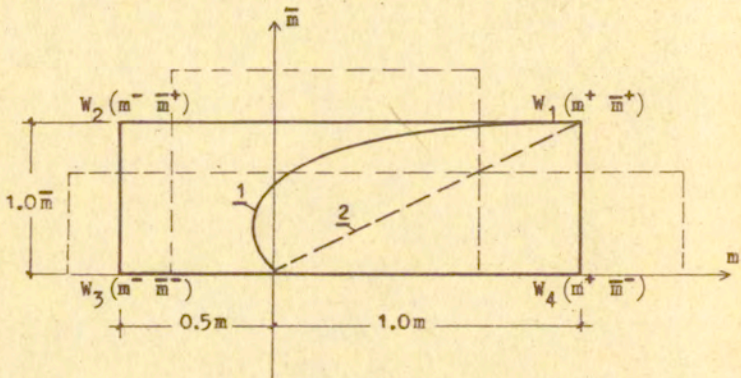
żenia zewnętrzne : bezwymiarowy moment zginający  $m$  oraz bezwymiarowy moment skręcający  $\bar{m}$  , rys.2.8a/. Wartości tych obciążeń zmieniają się dowolnie w czasie, lecz w zadanych granicach.

A/ To znaczy niech

$$(2.56) \quad -\frac{1}{2} m \leq m(t) \leq 1m \quad ,$$

$$0 \leq \bar{m}(t) \leq 1\bar{m} \quad ,$$

co odpowiada schematowi graficznemu przedstawionemu na rysunku 2.7, na którym zaznaczono również dwie możliwe ścieżki zmian obciążeń. Problem postawmy następująco : znaleźć maksymalną wartość mnożnika obciążenia  $\lambda$  , lecz w funkcji zmian



Rys. 2.7

granic obciążeń tzn.

$$\lambda = \lambda_{\max} (m^+ / \bar{m}^+)$$

Innymi słowy, poszukiwać będziemy nośności przystosowania dla różnych wariantów zmian obciążeń /obszary zaznaczone linią przerywaną, rys. 2.7/,lecz spełniając zawsze (2.56) . Rozwiązując postawiony problem skorzystamy ze sformułowania (2.44) wiedząc, że w przypadku konstrukcji statycznie wyznaczalnej  $m_j^r = \bar{m}_j^r = 0$ . Korzysta się celowo z tego sformułowania, aby móc wyodrębnić obszary nieprzystosowania z punktu widzenia naprzemiennej plastyczności oraz zniszczenia przy-



rostowego. W naszym zadaniu mamy jeden przekrój /j=1/ oraz cztery wierzchołki obszaru obciążenia (i=1-4) tzn. :  $W_1(m, \bar{m})$ ,  $W_2(-\frac{1}{2}m, \bar{m})$ ,  $W_3(-\frac{1}{2}m, 0)$ ,  $W_4(m, 0)$ , por. rys. 2.7.

a/ Zniszczenie niskocykliczne

Skorzystamy tu z zależności (2.46) w postaci

$$(2.58) \quad \left[ \frac{m(W_1)}{3\pi/16} - c \right]^2 + \left[ \frac{\bar{m}(W_1)}{3/4} - \bar{c} \right]^2 \leq 1$$

Po podstawieniu współrzędnych wierzchołków obciążenia  $W_i$ , otrzymamy

$$(2.59) \quad \begin{aligned} & \left( \frac{16}{3\pi} m - c \right)^2 + \left( \frac{4}{3} \bar{m} - \bar{c} \right)^2 \leq 1, \\ & \left( -\frac{8}{3\pi} m - c \right)^2 + \left( \frac{4}{3} \bar{m} - \bar{c} \right)^2 \leq 1, \\ & \left( -\frac{8}{3\pi} m - c \right)^2 + \left( \bar{c} \right)^2 \leq 1, \\ & \left( \frac{16}{3\pi} m - c \right)^2 + \left( \bar{c} \right)^2 \leq 1. \end{aligned}$$

Łatwo zauważyć, że maksymalne /graniczne/ wartości dopuszczalnych zmian momentów dostaniemy wówczas, gdy zależności (2.59) potraktujemy jako równania. Wówczas to obliczając z (2.59)  $3,4$  o oraz  $\bar{c}$  i podstawiając do (2.59)  $1$  lub (2.59)  $2$  dostaniemy

$$(2.60) \quad \frac{16}{\pi^2} m^2 + \left( \frac{4}{3} \bar{m} - \sqrt{1 - \frac{16}{\pi^2} m^2} \right)^2 - 1 = 0$$

Zależność ta określa nam wzajemne maksymalne wartości jakie przyjmować mogą moment zginający  $m$  oraz moment skręcający  $\bar{m}$ , aby nastąpiło przystosowanie /nie wystąpiło zjawisko naprzemiennej plastyczności/ do programu (2.56), rys. 2.7. Krzywą (2.60) przedstawiono na rysunku 2.8 i należy ją rozu-

mieć jako obwiednię obszarów przystosowania. To znaczy gdy znamy stosunek  $m^+ / \bar{m}^+$  oraz odpowiednio-znane są wartości  $m^- = f(m^+)$ ,  $\bar{m}^- = f(\bar{m}^+)$ , por. (2.56), wówczas sprecyzowany mamy punkt na krzywej (2.60) i punkt ten odpowiada maksymalnej wartości mnożnika obciążenia  $\lambda_{\max}^a$  z punktu widzenia naprzemiennej plastyczności.

b/ Zniszczenie przyrostowe

Można tu skorzystać z zależności (2.45) w postaci

$$(2.61) \quad [m(W_1)]^2 + [\bar{m}(W_1)]^2 \leq 1$$

gdzie podobnie jak poprzednio  $i = 1, 2, \dots, 4$ .

Jako, że warunek plastyczności tworzy obszar symetryczny względem początku układu współrzędnych, zatem wystarczy warunek (2.61) sprawdzić w jednym wierzchołku, w przypadku programu (2.56) w wierzchołku  $W_1$ , rys.2.7. W ten sposób warunek (2.61) dla pozostałych wierzchołków spełniony będzie automatycznie. Zatem warunek na zniszczenie przyrostowe wygląda

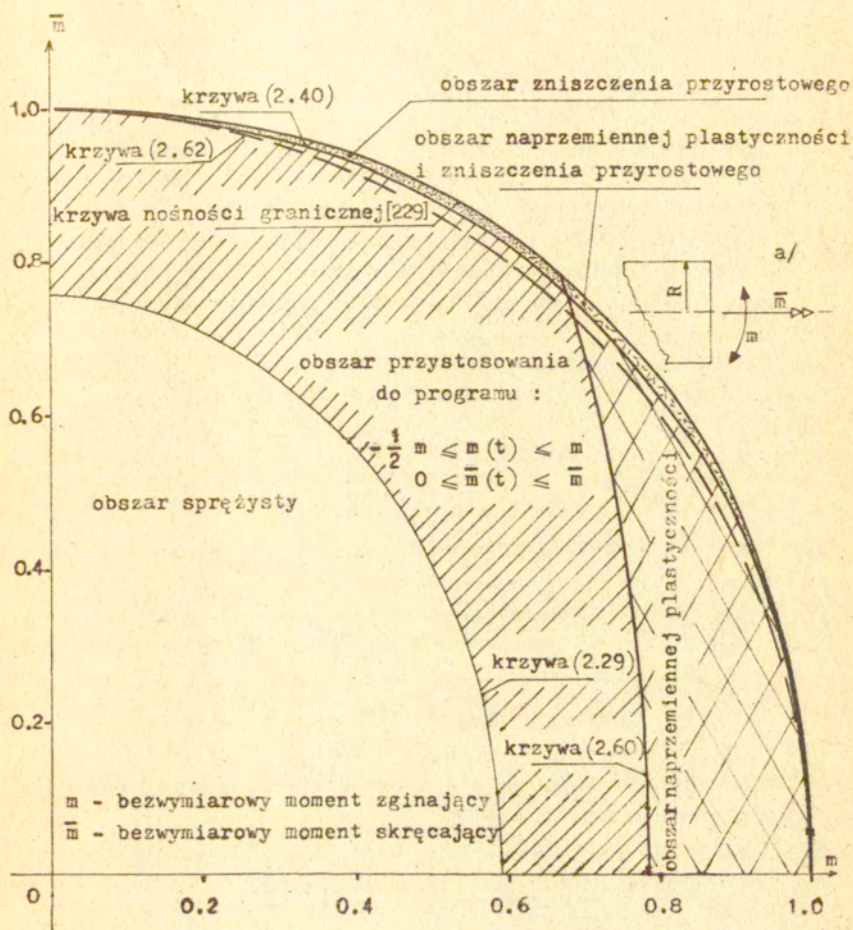
$$(2.62) \quad m^2 + \bar{m}^2 \leq 1$$

gdzie podobnie jak poprzednio maksymalne wartości momentów /mnożnika obciążenia/ otrzymamy spełniając warunek (2.62) jako równość. Można tu oczywiście posłużyć się warunkiem bardziej dokładnym to znaczy równaniem (2.40). Otrzymamy wówczas

$$(2.63) \quad \Phi(m, \bar{m}) = 0$$

Obszar określony funkcją  $\Phi$  zaznaczono na rysunku 2.8 linią ciągłą, natomiast obszar wynikający z (2.62) linią przerywaną. Podobnie jak poprzednio obszar ten rozumieć należy jako obwiednię określającą dopuszczalne obszary zmian obciążeń, obszary będące prostokątami sprecyzowanymi przez stosunek  $m^+ / \bar{m}^+$ . Zatem dla zadanego stosunku  $m^+ / \bar{m}^+$  określić można punkt na krzywej (2.63), punkt który odpowiadał będzie maksymalnej wartości mnożnika obciążenia  $\lambda_{\max}^i$  z punktu widzenia zniszczenia przyrostowego, por. rys.2.8.





Rys. 2.8

B/ Program obciążenia jest następujący :

$$(2.64) \quad \begin{aligned} -1m &\leq m(t) \leq 1m \\ -1\bar{m} &\leq \bar{m}(t) \leq 1\bar{m} \end{aligned} \quad ,$$

Postępując podobnie jak poprzednio okazuje się, że obszar przystosowania dla przypadku naprzemiennej plastyczności pokrywa się z początkową powierzchnią sprężystą ( $\sigma = \bar{\sigma} = 0$ ), natomiast obszar przystosowania dla przypadku zniszczenia przyrostowego, opisany będzie krzywą (2.40).

Ostatecznie więc nośność przystosowania określona mnożnikiem obciążenia  $\lambda$  następująco

$$(2.65) \quad \lambda_S = \max [\lambda_S^a, \lambda_S^i] = \lambda_S^a \quad ,$$

pokryje się z nośnością sprężystą przekroju, przy czym decyduje o tym naprzemienna plastyczność.

Przedstawiono to na rysunku 2.9.

C/ Zmiany obciążeń zawarte są w granicach

$$(2.66) \quad \begin{aligned} 0 &\leq m(t) \leq 1m \\ 0 &\leq \bar{m}(t) \leq 1\bar{m} \end{aligned} \quad ,$$

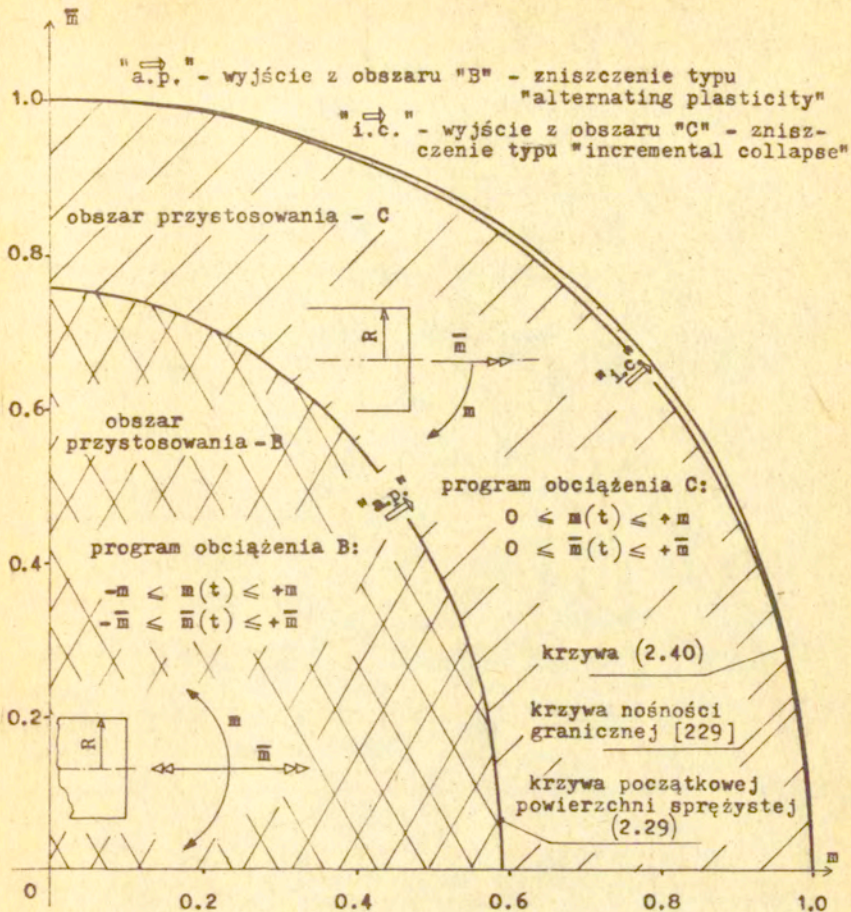
W tym przypadku okazuje się, że o przystosowaniu decyduje zniszczenie przyrostowe, to znaczy

$$(2.67) \quad \lambda_S = \max [\lambda_S^a, \lambda_S^i] = \lambda_S^i \quad ,$$

gdź obszar wynikający z warunku (2.58) jest następujący ,

$$(2.68) \quad \frac{m^2}{\left(\frac{3\pi}{8}\right)^2} + \frac{\bar{m}^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} \leq 1 \quad ,$$





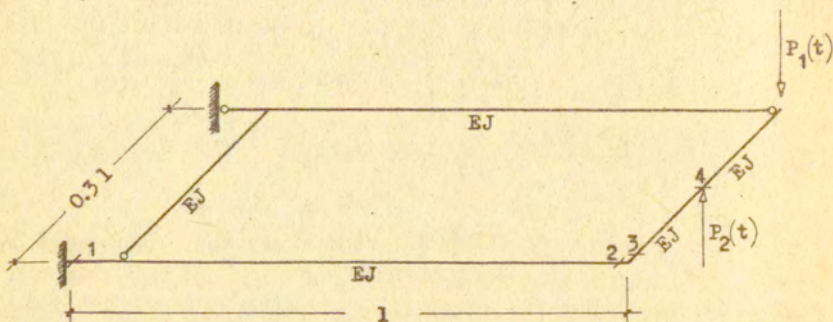
rys. 2.9

a zatem znacznie wykracza poza nośność graniczną. Należy również zaznaczyć, że podobnie jak w przykładzie A określony tu obszar przystosowania należy rozumieć jako obwiednię określającą możliwe wzajemne zmiany granic obciążeń  $m^+$ ,  $\bar{m}^+$ , por. (2.66). To znaczy po obszarze opisanym funkcją  $\Phi$  - równanie (2.40) - nie możemy poruszać się dowolnie, lecz w ramach przyjętego programu (2.66), czyli po obszarze prosto-

kąta, którego wierzchołek leży na krzywej (2.40) gdy  $\lambda = \lambda_s$ . Przykłady B i C obrazują w sposób szczególny jak bardzo różni się mogą obszary przystosowania w zależności od programu obciążenia. W jednym przypadku nośność przystosowania pokrywa się z nośnością sprężystą konstrukcji, w innym praktycznie równa jest nośności granicznej, por. krzywe (2.29) i (2.40), rys. 2.9.

#### 2.6.4. Przykład 2 - Przystosowanie na szczelbu konstrukcji

Rozważmy ruszt wspornikowy o geometrii i obciążeniach jak na rysunku 2.10:



Rys.2.10

Założmy, że pręty rusztu mają przekrój kołowy oraz, że są o jednakowej sztywności.

a/ Granice zmian obciążeń określone są następująco:

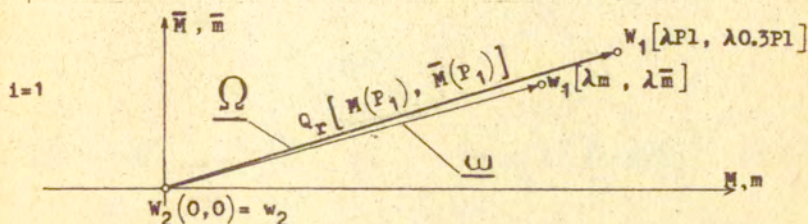
$$(2.69) \quad 0 \leq P_1(t) \leq P \quad ,$$

$$P_2(t) = 0 \quad .$$

Poszukajmy wartości mnożnika przystosowania  $\lambda_s$  do programu (2.69). Łatwo spostrzec, że w analizie wystarczy rozpatrywać



jedynie trzy przekroje krytyczne 1,2,3 - rys. 2.10 oraz, że tylko przekrój pierwszy jest w złożonym stanie naprężenia /pomijamy siły tnące/, to znaczy działa tu zarówno moment zginający  $M$  jak i moment skręcający  $\bar{M}$ . Biorąc pod uwagę (2.30) oraz geometrię rusztu okaże się, że stosunek bezwymiarowego momentu zginającego  $m$  do bezwymiarowego momentu skręcającego  $\bar{m}$  wynosi  $m/\bar{m} = 3$ . Uwzględniając dalej fakt, że mamy do czynienia z jednym schematem obciążenia, obszar  $\Omega$  zmian uogólnionych sił w przekroju pierwszym /  $\omega$  - we współrzędnych bezwymiarowych/ wygląda jak na rys. 2.11.



Rys.2.11

Liczba przekroi wynosi trzy, schemat obciążenia jest jeden, zatem problem (2.41) posiadać będzie liczbę ograniczeń wynoszącą dziewięć

$$(2.70) \quad n \cdot (w + 1) = 3 \cdot (2 + 1) = 9$$

Wygląda on w naszym przypadku następująco:

znaleźć

$$\max \lambda = \lambda_g,$$

przy ograniczeniach:

$$(2.71)_1 \quad \left. \begin{aligned} & \left( \frac{16}{3\pi} \lambda - \alpha_1 \right)^2 + \left( \frac{4}{3} \frac{\lambda}{3} - \beta_1 \right)^2 \leq 1, & i=1 \\ & \left( \frac{16}{3\pi} 0 - \alpha_1 \right)^2 + \left( \frac{4}{3} 0 - \beta_1 \right)^2 \leq 1, & i=2 \\ & \left( \frac{\pi}{16/3 - \pi} \alpha_1 \right)^2 + \left( 3 \beta_1 \right)^2 \leq 1, & \end{aligned} \right\} j=1,$$

$$\left. \begin{aligned}
 & \left( \frac{16}{3\pi} 0 - \alpha_2 \right)^2 + \left( \frac{4}{3} \frac{\lambda}{3} - \beta_2 \right)^2 \leq 1, \quad i=1 \\
 (2.71)_2 & \left( \frac{16}{3\pi} 0 - \alpha_2 \right)^2 + \left( \frac{4}{3} 0 - \beta_2 \right)^2 \leq 1, \quad i=2 \\
 & \left( \frac{\pi}{16/3 - \pi} \alpha_2 \right)^2 + \left( 3 \beta_2 \right)^2 \leq 1,
 \end{aligned} \right\} j=2,$$

$$\left. \begin{aligned}
 & \left( \frac{16}{3\pi} \frac{\lambda}{3} - \alpha_3 \right)^2 + \left( \frac{4}{3} 0 - \beta_3 \right)^2 \leq 1, \quad i=1 \\
 (2.71)_3 & \left( \frac{16}{3\pi} 0 - \alpha_3 \right)^2 + \left( \frac{4}{3} 0 - \beta_3 \right)^2 \leq 1, \quad i=2 \\
 & \left( \frac{\pi}{16/3 - \pi} \alpha_3 \right)^2 + \left( 3 \beta_3 \right)^2 \leq 1.
 \end{aligned} \right\} j=3,$$

Łatwo jest zauważyć z otrzymanego układu ograniczeń, że warunki zapisane dla wierzchołka  $W_2(0, 0)$  można pominąć, co wynika również z rysunku 2.12 gdzie widać, że początek układu współrzędnych jest zawsze zawarty w powierzchni-sprężystej o ile nie wybiega ona /co zapewniają warunki (2.71)<sub>3,6,9</sub> / poza powierzchnię (2.40). Również warunki dla przekroju drugiego i trzeciego nie odgrywają roli. Wystarczy zatem ograniczyć się do przekroju pierwszego. Mamy więc znaleźć

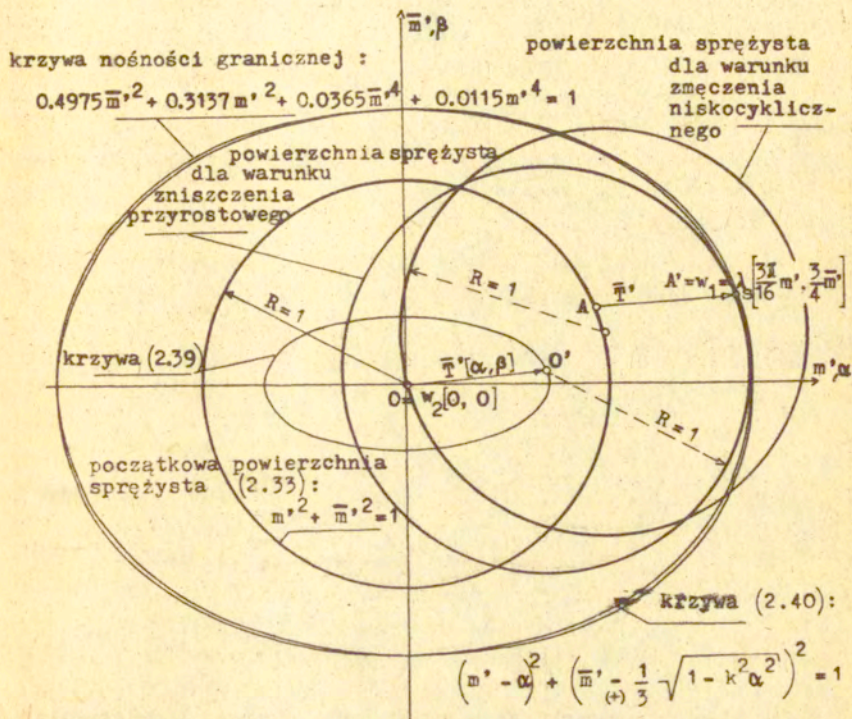
$$(2.72) \quad \max \lambda = \lambda_s$$

dla

$$(2.73)_1 \quad \left( \frac{16}{3\pi} \lambda - \alpha_1 \right)^2 + \left( \frac{4}{3} \frac{\lambda}{3} - \beta_1 \right)^2 \leq 1,$$



$$(2.73)_2 \quad \left( \frac{\pi}{16/3 - \pi} \alpha_1 \right)^2 + \left( 3 \beta_1 \right)^2 \leq 1$$



Rys.2.12

Zakładając, że rozwiązanie optymalne leży na elipsie (2.73)<sub>2</sub> /czego należy się spodziewać z postaci ograniczeń, por. również rys.2.12/, wartość  $\lambda_S$  można znaleźć poprzez obliczenie  $\beta_1$  (lub  $\alpha_1$ ) z (2.73)<sub>2</sub>, podstawienie do (2.73)<sub>1</sub>, obliczenie pochodnej po  $\alpha_1$  i wyznaczenie stąd  $\alpha_1$  oraz  $\lambda_{\max} = \lambda_S$ . Znacznie prościej jest znaleźć  $\lambda_S$  numerycznie poszukując maksymalnej wartości  $\lambda$  dla  $\alpha_1$

z przedziału  $\left(0 + \frac{16/3 - \lambda}{\lambda}\right)$ . Otrzymano w ten sposób

$$(2.74) \quad \lambda_s = 0.9530 \quad , \quad [M_0 / P1]$$

Pomijając skręcanie otrzymamy

$$(2.75) \quad \lambda_s = 1.000 \quad , \quad [M_0 / P1]$$

co stanowi różnicę rzędu 5%.

Sformułowanie analogiczne do (2.44) wygląda tutaj /dla przekroju pierwszego/ następująco:

znaleźć

$$(2.76) \quad \max \lambda$$

przy ograniczeniach:

$$(2.77) \quad \left. \begin{aligned} & \left(\lambda\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\lambda\right)^2 \leq 1 \quad , \quad i=1 \\ & \left(\lambda_0\right)^2 + \left(\lambda_0\right)^2 \leq 1 \quad , \quad i=2 \\ & \left(\frac{\lambda - c_1}{3\pi/16}\right)^2 + \left(\frac{\lambda/3 - \bar{c}_1}{3/4}\right)^2 \leq 1 \quad , \quad i=1 \\ & \left(\frac{\lambda_0 - c_1}{3\pi/16}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_0 - \bar{c}_1}{3/4}\right)^2 \leq 1 \quad , \quad i=2 \end{aligned} \right\} j=1,$$

Jak widać w stosunku do poprzedniego, obecne sformułowanie zawierałoby o trzy ograniczenia więcej oraz tyle samo zmiennych. W tym przypadku widać jednakże wyraźne rozbitcie problemu, mianowicie dwa pierwsze ograniczenia zabezpieczają przed zniszczeniem przyrostowym natomiast dwa ostatnie przed niskocyklicznym zmęczeniem. Zadanie można zatem rozbić na dwa, /co w poprzednim wypadku wymagałoby odpowiedniego grupowania ograniczeń - 1 & 2 i 1 z 3/, skąd z pierwszego otrzymamy

$$(2.78) \quad \max \lambda = \lambda_s^1 = 0.9487 \quad , \quad [M_0 / P1]$$

natomiast z drugiego,

$$(2.79) \quad \max \lambda = \lambda_s^2 = 1.1397 \quad , \quad [M_0 / P1] (c_1 = 0.9675) \quad ,$$



zatem,

$$(2.80) \quad \lambda_s = \min [\lambda^i, \lambda^a] = 0.9487 \quad , \quad [M_0/P1]$$

Jak widać o przystosowaniu decyduje zniszczenie przyrostowe. Wartość  $\lambda_s^a$  określono tutaj podobnie jak poprzednio dla (2.73), to znaczy przyjmując, że rozwiązanie leży na elipsie (2.77)<sup>4</sup>, co w świetle interpretacji geometrycznej /por. rys. 2.12/ wydaje się być słusznym. Potwierdza to również wynik otrzymany na innej drodze. Żądamy mianowicie, aby odcinek  $\overline{w_1 w_2}$  /rys. 2.11/ zawarty był w okręgu o promieniu jednostkowym /taki promień ma powierzchnia sprężysta we współrzędnych  $m', \bar{m}'$  /.

Czyli

$$(2.81) \quad \overline{w_1 w_2} = \sqrt{\left(\frac{16}{31} \lambda\right)^2 + \left(\frac{4}{3} \frac{\lambda}{3}\right)^2} = 2$$

i stąd ,

$$(2.82) \quad \lambda_s^a = 1.1397 \quad , \quad [M_0/P1]$$

Przy większej liczbie schematów obciążenia otrzymanie wyniku w ten sposób wymaga więc znalezienia maksymalnej przekątnej obszaru  $\Omega$  /por. rys. 2.6/. W przypadku obliczeń numerycznych może to być jednak prostsze niż rozwiązywanie problemu programowania nieliniowego.

Mnożnik przystosowania otrzymany w drugim przypadku (2.78), (2.80), jest mniejszy niż w pierwszym - (2.74).

Wynika to z faktu zastąpienia w sformułowaniu (2.44) równania (2.40) przez równanie (22.93) z pracy [229] /por. rys. 2.5/.

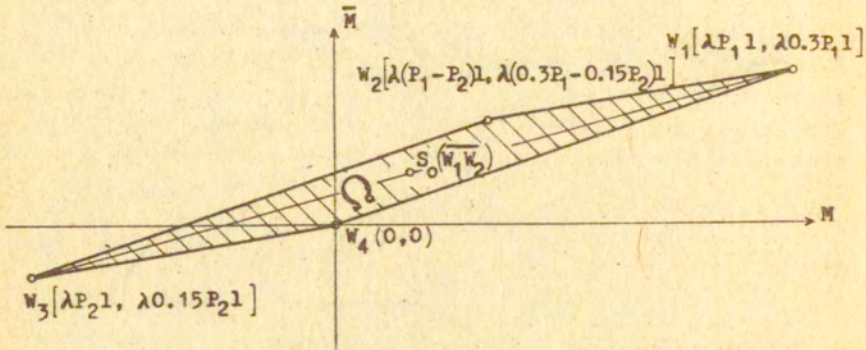
Jak widać różnica wyników jest pomijalnie mała, bo rzędu pół procenta.

b/ Granice zmian obciążeń określone są następująco:

$$(2.83) \quad \begin{aligned} 0 &\leq P_1(t) \leq P_1 \quad , \\ 0 &\leq P_2(t) \leq P_2 \quad . \end{aligned}$$

Chcemy określić obszar zmian obciążeń  $P_1, P_2$ , dla którego następuje przystosowanie konstrukcji z rys. 2.10 /tzn. nie zajdzie ani zjawisko zniszczenia przyrostowego ani zjawisko

naprzemiennej plastyczności/.Obszar  $\Omega$  dla przekroju pierwszego wygląda tu następująco - rys.2.13.



Rys.2.13

Pomijając zapis problemu programowania, który w zasadniczy sposób nie różni się od przypadku a/, ograniczmy się do komentarza otrzymanych wyników - rys.2.14.

- Zniszczenie przyrostowe

Korzystając z dolnego oszacowania nośności granicznej (22.93) - [229] /rys.2.5/, otrzymano obszar zmian obciążeń  $P_1, P_2$ , który jest prostokątem nieznacznie tylko mniejszym od prostokąta nośności granicznej otrzymanego na podstawie równania aproksymacyjnego (22.92) - [229] :

- Zniszczenie niskocykliczne

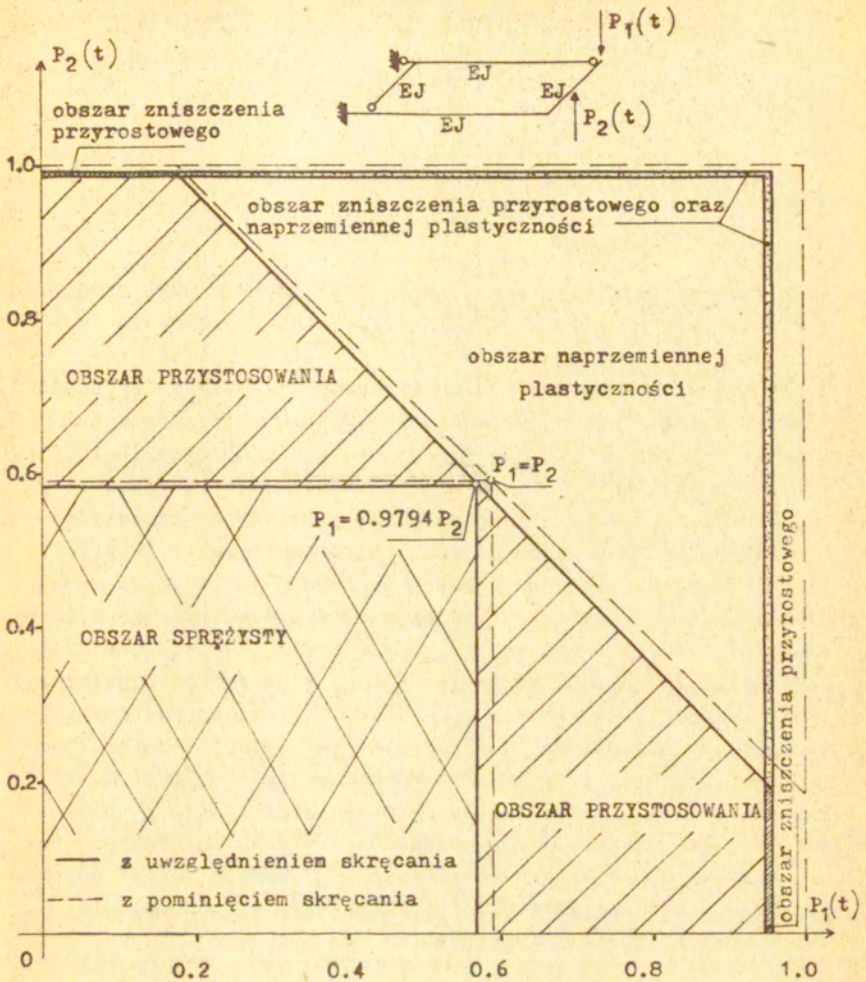
O zniszczeniu podobnie jak poprzednio decyduje tutaj przekrój trzeci. Z warunku zapisanego dla tego przekroju otrzymano wartości  $\lambda_s^a(P_1, P_2)$ . Warunek ten wygląda, por. rys.2.13

(2.84)

$$\overline{w_1 w_3} = 2$$

to znaczy żądamy aby najdłuższa przekątna obszaru  $\Omega$  zawarta





Rys.2.14

była w średnicy dowolnie przesuniętej powierzchni sprężystej. Prowadzi to do następującej zależności:

$$(2.85) \quad \lambda^a = \frac{2}{\sqrt{\frac{256}{9\pi^2}(1+k_p)^2 + \frac{16}{81}(1+k_p/2)^2}}, \quad k_p = \frac{P_2}{P_1} \in (0+1),$$

oraz

$$(2.86) \quad \lambda^a = \frac{2}{\sqrt{\frac{256}{9\pi^2}(1+k_p)^2 + \frac{16}{81}(k_p + 0.5)^2}}, \quad k_p = \frac{P_1}{P_2} \in (0+1).$$

Identyczne wyniki otrzymamy żądając, aby powierzchnia sprężysta zawierała środek odcinka  $\overline{W_1W_3}$  i wierzchołek odpowiednio  $W_1$  i  $W_3$ .

Otrzymane wyniki naniesiono na rysunku 2.14. Jak widać, obszar "alternating plasticity" znacznie ograniczył dopuszczalne zmiany obciążeń  $P_1$ ,  $P_2$ , a dla pewnej ich kombinacji ( $P_1 = 0.98P_2$ ) wartość mnożnika  $\lambda_s$  równa się wartości mnożnika sprężystego  $\lambda_e$ . Mimo to, obszar przystosowania jest jeszcze znacznie większy od obszaru nośności sprężystej konstrukcji, który określono w oparciu o równanie początkowej powierzchni sprężystej (2.29). Linia przerywaną naniesiono na rysunku 2.14 wszystkie omówione wcześniej obszary z tym, że przy pominięciu działania momentu skręcającego  $\overline{M}$  w przekroju konstrukcji. Łatwo zauważyć, że zadanie a/ - (2.69) jest szczególnym przypadkiem zadania ogólniejszego b/ - (2.83). Zatem kładąc w (2.83)  $P_2 = 0$  otrzymamy na osi odciętych /rys. 2.14/ wyniki zadania a/. Z otrzymanych rezultatów wynika również wniosek, że podobnie jak w przykładzie pierwszym, także i tutaj wartość mnożnika przystosowania  $\lambda_s$  bardzo zależy od programu obciążeń /od wartości  $P_1$ ,  $P_2$ / i waha się od nośności sprężystej po nośność graniczną.

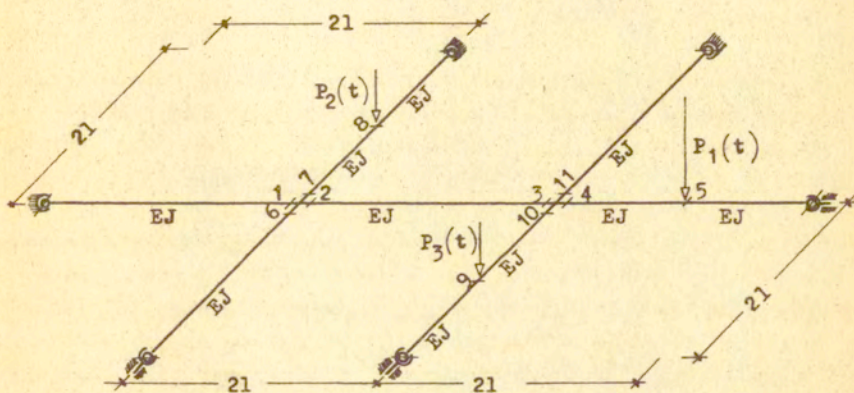
### 2.6.5. Przykład 3 - Przystosowanie na szczeblu konstrukcji - podejście kinematyczne

Niech dany będzie ruszt o geometrii jak na rysunku 2.15. Obciążenia zewnętrzne przyłożone są w trzech punktach i zmieniają się w czasie w sposób niezależny od siebie. Niech granice tych zmian zadane będą z dokładnością do wspólnego mnoż-



nika  $\lambda$  . To znaczy niech

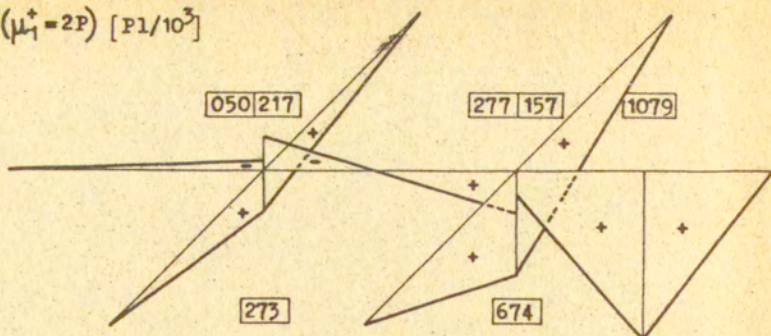
$$(2.87) \quad \begin{aligned} 0 &\leq P_3(t) \leq \lambda P, \\ 0 &\leq P_2(t) \leq \lambda P, \\ 0 &\leq P_1(t) \leq \lambda 2P. \end{aligned}$$



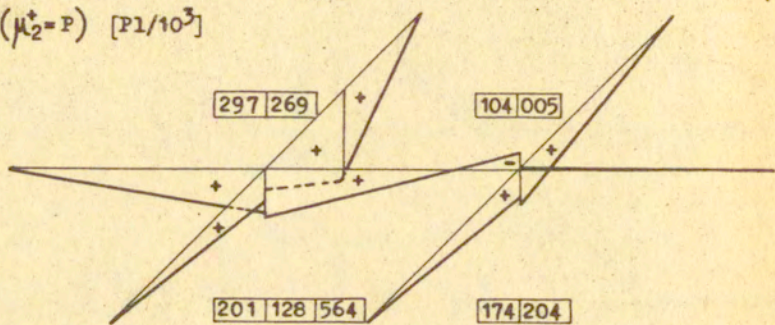
Rys. 2.15

Założmy dodatkowo jednakową sztywność  $EJ$  elementów rusztu, sztywne połączenie węzłów oraz kołowy przekrój prętów. Wielkość rozważanego przykładu pozwala na znalezienie wartości mnożnika przystosowania  $\lambda_s^1$  bez potrzeby uciekania się do techniki programowania matematycznego, to znaczy na znalezienie  $\lambda_s^1$  bezpośrednio z zależności (2.50). Należy jednak w tym celu rozważyć wszystkie możliwe schematy kinematyczne rusztu, a następnie dla każdego z nich obliczyć lewą i prawą stronę zależności (2.50). Określamy zatem na podstawie wykresów sił wewnętrznych /rys. 2.16, 2.17/ macierz  $[M_{ij}^e \bar{M}_{ij}^e]$  i dla określonego schematu kinematycznego macierz  $[\theta_j \bar{\theta}_j]$ .

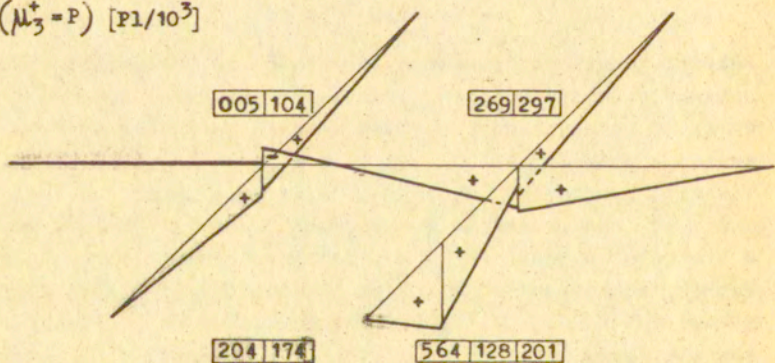
$M^e (\mu_1^+ = 2P) [P1/10^3]$



$M^e (\mu_2^+ = P) [P1/10^3]$

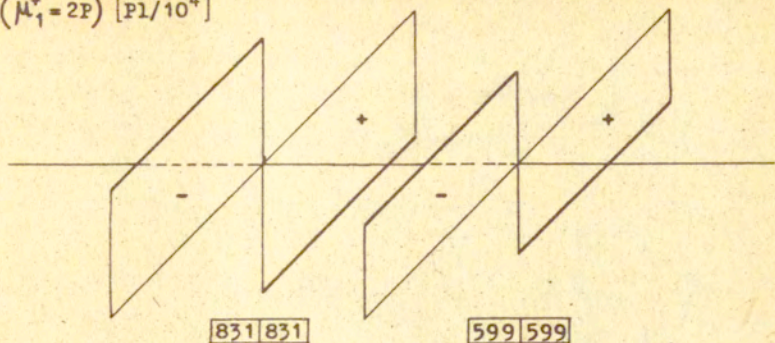


$M^e (\mu_3^+ = P) [P1/10^3]$

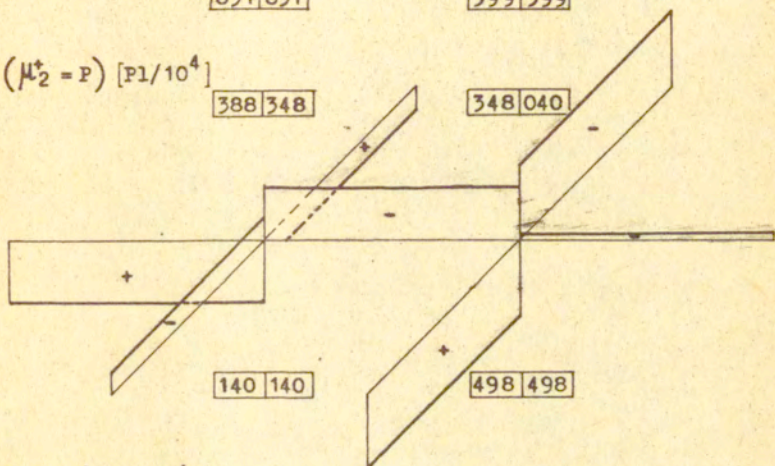




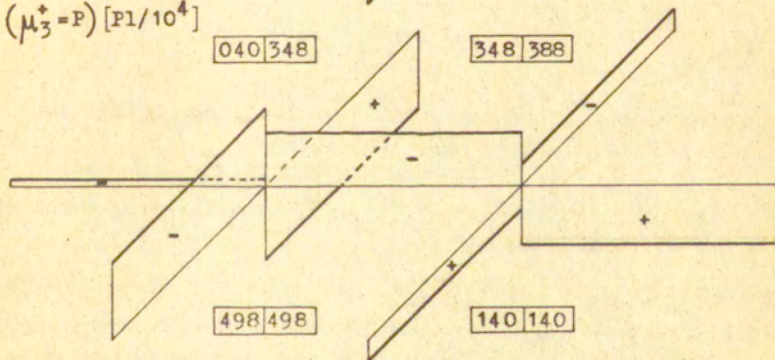
$\bar{M}^e (\mu_1^+ = 2P) [Pl/10^4]$



$\bar{M}^e (\mu_2^+ = P) [Pl/10^4]$



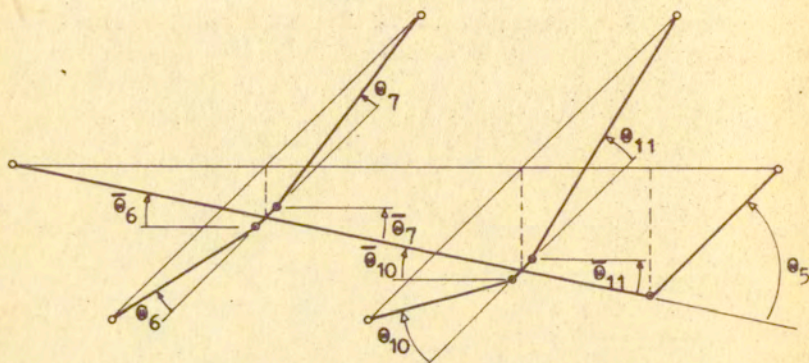
$\bar{M}^e (\mu_3^+ = P) [Pl/10^4]$



Rys. 2.17

Stąd obliczamy  $J_1$ , pracę plastyczną oraz wartości  $\lambda$ .  
 Najmniejsza z nich jest mnożnikiem przystosowania -  $\lambda_s$ .  
 Otrzymano go ze schematu kinematycznego przedstawionego na  
 rysunku 2.18, a wartość jego wynosi

$$(2.88) \quad \lambda_s^1 = 1.2315 \quad , \quad [\sigma_0 R^3 / P_1] .$$



Rys. 2.18

Korzystając z obliczonych wartości lewej strony nierówności  
 (2.50) otrzymano również mnożnik obciążenia  $\lambda_1$ , dla któ-  
 rego konstrukcja osiąga stan nośności granicznej. Wraz z mnoż-  
 nikiem nośności sprężystej  $\lambda_e$  porównanie otrzymanych wy-  
 ników wygląda następująco:

$$(2.89) \quad \lambda_e = 0.6397 \leq \lambda_s^1 = 1.2315 \leq \lambda_1 = 1.2328 \quad , \quad [\sigma_0 R^3 / P_1] .$$

Jak widać, istnieje duża różnica pomiędzy nośnością przysto-  
 sowania a nośnością sprężystą, na co niewątpliwy wpływ ma





Ostatecznie więc mamy

$$\lambda_B = \min [\lambda^i, \lambda^a] = 1.2315, \quad [G_0 R^3 / P_1]$$

oraz bez skręcania

$$(2.93) \quad \lambda_B = \min [\lambda^i, \lambda^a] = 1.2147, \quad [G_0 R^3 / P_1].$$

Zatem w przypadku  $\lambda > \lambda_B$  konstrukcji grozi niebezpieczeństwo zniszczenia przyrostowego, chociaż należy zwrócić uwagę, że  $\lambda_B^i$  różni się od  $\lambda_B^a$  o zaledwie 3.5%.

### 3. OCENA PRZEMIESZCZEŃ PRZYSTOSOWANIA

Spełnienie warunku przystosowania, który możemy traktować jako stan graniczny nośności, nie jest wystarczające do właściwej eksploatacji budowli. Warunki normowe wymagają dodatkowo spełnienia stanu granicznego użytkowania. Dlatego sam warunek przystosowania, który niejako zapewnia, że przemieszczenia będą skończone, nie wystarcza. Ważna jest również wielkość tych przemieszczeń. Znalazienie ich lub przynajmniej ich oceny górnej jest więc niezbędnym uzupełnieniem obliczeń na przystosowanie. Należy również tu podkreślić, że same twierdzenia o przystosowaniu wyprowadzono przy założeniu małych przemieszczeń.

Formułowanie problemu przemieszczeń przystosowania podejmowane było przez wielu autorów [20], [24]; [43], [51], [132], [172]. Pierwszą pracę na ten temat przedstawił König w roku 1971, [116]. W pracy tej problem oceny przemieszczeń sprowadził do zadania programowania liniowego. Kontynuacją tej metody są prace Brzezińskiego i Königa [18], [19]. Oszacowanie od góry wielkości ugięć sprężysto-plastycznych dla konstrukcji w opisie kontynualnym podali Capurso [24] i Ponter [178]. Oceny odkształceń i przemieszczeń w dyskretnym opisie konstrukcji dotyczą prace Vitiella [212] oraz Maiera i Corradiego [136], [32]. Posługiwano się przy tym założeniami, które w mniejszym lub większym stopniu ograniczały zasięg stosowalności danej metody. W przypadku konstrukcji prętowej przyjmuje się hipotezę idealnego przekroju dwuteowego. Przyjęcie tej hipotezy pozwala na uzyskanie dobrych ocen przystosowania,



jak też nośności granicznej konstrukcji. Natomiast wartości otrzymanych przemieszczeń nie zawsze będą miarodajne i w pewnych przypadkach potrzebne są uściślenia. Chodzi tu o wpływ stref plastycznych na wielkość przemieszczeń trwałych. Zagadnienie to jest omawiane w pracy Dorosza [44], gdzie podaje się metodę oceny przemieszczeń przystosowania na przykładach belek zginanych o przekroju prostokątnym. Warto dodać, że założenie idealnych przegubów plastycznych znacznie upraszcza analizę przemieszczeń, chociaż w pewnych przypadkach, por. [43], może to prowadzić do nieścisłości na niekorzyść bezpieczeństwa. Należy też podkreślić, że w problemie przystosowania historia obciążenia nie jest znana, w związku z czym możemy mówić raczej o granicy wielkości przemieszczeń niż o ich konkretnej wartości. Kryterium jakim się tutaj posługujemy jest wartość energii dysypowanej w procesie obciążeń zmiennych.

### 3.1 Górna ocena pracy dysypowanej w procesie przystosowania

Przebieg procesu przystosowania związany jest z dysypacją energii plastycznej, zachodzącą aż do chwili stabilizacji odkształceń trwałych. Ocenę wielkości tej energii podał Koiter w pracy [105].

Wynosi ona

$$(3.1) \quad \int_0^{\infty} \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p \, dV dt \leq \frac{s}{s-1} \frac{1}{2} \int_V E_{ijkl}^{-1} \rho_{ij} \bar{\rho}_{kl} \, dV = K.$$

gdzie:  $\rho_{ij}$  jest tensorem naprężenia resztkowego,  $s$  - współczynnikiem bezpieczeństwa względem nieprzystosowania,  $V$  - objętością ciała, a  $E_{ijkl}$  - macierzą współczynników sprężystości. Zależność (3.1) uzyskano w dowodzie statycznego twierdzenia teorii przystosowania - Koiter 1960, [105]. Podobnie jak w przypadku twierdzeń ogólnych o przystosowaniu tak i tutaj korzystnie jest sformułować zależność (3.1) w wielkościach uogólnionych. Ma to znaczenie w rozwiązywaniu zadań szczegółowych. Korzystając z (2.3)<sub>1</sub> oraz (2.19) możemy zapisać,

$$(3.2) \quad \sigma_{ij}^r = \rho_{ij} = \sum_r q_r^0 a_{ij}^r + s_{ij}$$

gdzie:  $Q_r^0$  jest uogólnionym naprężeniem resztkowym,  $s_{ij}$  - resztkowym naprężeniem przekrojowym, a  $a_{ij}^r$  - funkcją rozkładu naprężeń. Na tej podstawie związek (3.1) przybierze postać,

$$(3.3) \int_0^\infty \int_V G_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p dV dt \leq \frac{s}{s-1} \frac{1}{2} \left[ \int_{\xi} B_{r1} Q_r^0 Q_l^0 d\xi + \int_V E_{ijkl}^{-1} s_{ij} s_{kl} dV \right] = K,$$

gdzie  $B_{r1}$  jest sztywnością przekroju konstrukcji, a całkowanie odbywa się po obszarach, w których sprężyste siły uogólnione przekroczyły wartości odpowiadające początkowej powierzchni sprężystej.

Z zależności (3.3) korzystać będziemy przy szacowaniu przemieszczeń, które powstają w konstrukcji prętowej w procesie przystosowania. Określi się wpływ skręcania na wielkość tych przemieszczeń. Pokaże się również jakie zmiany powoduje przyjęcie hipotezy idealnego przegubu plastycznego. W punkcie 3.2 pracy szacuje się wartość energii  $K$  dla różnych amplitud obciążenia zmiennego, wykorzystując przy tym związek (3.3). Zaznacza się tam wyraźnie nieliniowy charakter zmian wartości tej energii w odniesieniu do amplitud zmian obciążenia zewnętrznego.

W pracy Polizzotto z 1978 roku, [172] wyprowadzono warunki na podstawie których granicę dysypacji energii otrzymać można w inny sposób. Mianowicie spełniając warunki (2.3)+(2.6) wprowadza się jednocześnie zamiast warunku plastyczności (2.1) warunek następujący, por. [172],

$$(3.4) \quad \varphi_\alpha = f_\alpha(g \sigma_{ij}) \quad \text{w } V + \bar{\pi},$$

przy czym

$$(3.5) \quad \varphi_\alpha \leq 0, \quad l_\alpha \geq 0, \quad \varphi_\alpha l_\alpha = 0 \quad \text{w } V + \bar{\pi},$$

$$(3.6) \quad d_{ij} = \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \sigma_{ij}} l_\alpha, \quad q_{ij} = \int_{\bar{\pi}} d_{ij} d\bar{\pi}, \quad D_\alpha = \int_{\bar{\pi}} \sigma_{ij} d_{ij} d\bar{\pi} \quad \text{w } V,$$

skąd następnie otrzymano, [172]

$$(3.7) \quad \frac{1}{2} \int_V E_{ijkl}^{-1} \rho_{ij} \rho_{kl} dV = \omega G \int_V \bar{\gamma} g^{-1} D_\alpha dV,$$



gdzie

$$(3.8) \quad G = \max_{x \in V} g(x) ,$$

$\rho_{ij}$  - jest polem naprężeń resztkowych,

$f_{\alpha}$  - wypukłym warunkiem plastyczności,  $\sigma_{ij}^e$  - polem naprężenia dla konstrukcji idealnie sprężystej,  $d_{ij}$  - polem prędkości odkształceń plastycznych,  $\pi$  - obszarem opisującym zmiany obciążeń,  $V$  - objętością ciała. Funkcja  $g(x)$  opisana na ciele wyraża się,

$$(3.9) \quad g(x) = \omega \bar{\gamma}(x) + 1 ,$$

gdzie  $\bar{\gamma}(x)$  jest dowolną funkcją opisaną na ciele i spełniającą warunek  $\bar{\gamma}(x) \geq 0$ , natomiast  $\omega$  - jest zmiennym mnożnikiem większym od zera. Funkcję  $\bar{\gamma}(x)$  wygodnie jest ponadto przyjąć w następujący sposób [172] :

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \bar{\gamma}(x) &= 1 && \text{w } \Delta V , \\ \bar{\gamma}(x) &= 0 && \text{w } V - \Delta V , \end{aligned}$$

przy czym jako  $\Delta V$  przyjmuje się te obszary ciała, w których resztkowe pole naprężenia  $\rho_{ij}(x)$  niejako "redukuje" zmienne pole naprężenia  $\sigma_{ij}^e(x, t)$ . Wobec tego związek graniczny (3.7) przybiera postać następującą,

$$(3.11) \quad \frac{1}{2} \int_V E_{ijkl}^{-1} \rho_{ij} \rho_{kl} dV = \omega \int_V D_e dV \quad \text{w } \Delta V ,$$

Przykłady obliczeń, por. np. [172] , [175] , pokazały, że oszacowanie energii uzyskane na podstawie (3.11) daje bardzo dobre wyniki. W związku z tym również to oszacowanie wykorzystano do oceny przemieszczeń konstrukcji prętowych /rusztów płaskich/. Traktuje o tym rozdział 3.4 pracy.

### 3.2. Przykład - Zginanie ze skręcaniem wspornika

Rozważmy wspornik jak na rysunku 3.1 , Niech sposób zmian obciążeń zewnętrznych będzie narzucony z góry i taki jak na rys. 3.3 a/, gdzie  $\bar{m} = \bar{M} / \bar{M}_0$  jest bezwymiarowym

momentem skręcającym, natomiast  $p = Pl/M_0$  bezwymiarową siłą skupioną. Założmy również maksymalne wartości jakie mogą przyjąć obciążenia zewnętrzne, takie jednak, aby nastąpiło przystosowanie wspornika. Jak łatwo sprawdzić /por. rys. 2.5/ dla  $m = 0.9$  i  $\bar{m} = 0.3$  znajdzie przystosowanie, gdyż istnieje powierzchnia sprężysta / w naszym przypadku cała rodzina powierzchni sprężystych/, w której mieści się pole sił wewnętrznych /wierzchołki obszaru zmian sił wewnętrznych/, por. [113], [205]. Bardziej szczegółowo zadanie przystosowania takiego wspornika omawia się w pracy [195].

W przypadku konstrukcji złożonej z prętów o przekrojach kołowych, poddanych zginaniu oraz skręcaniu, podstawiając (2.34), (2.35) do prawej strony (3.3) wiedząc, że zachodzi (2.27), otrzymamy

$$(3.12) \quad K = \bar{K} + \bar{K} = \frac{s}{2(s-1)} \int_{\xi} \left[ \frac{[M^R(x)]^2}{EJ} + \frac{[\bar{M}^R(x)]^2}{2GJ_0} \right] d\xi + \frac{s}{2(s-1)} \int_A \int_{\xi} \left[ \frac{[\sigma^R(z)]^2}{E} + \frac{[\tau^R(z)]^2}{2G} \right] d\xi dA.$$

Widać stąd, że wielkość  $K$ , będąca oceną energii dysypowanej w procesie przystosowania, określona jest przez same tylko momenty reszkowe - zginający  $M^R$  oraz skręcający  $\bar{M}^R$ . Obliczając dwie ostatnie całki dla samonaprężeń przekrojowych jak na rysunku 2.4 otrzymamy

$$(3.13) \quad \int_A \frac{[\sigma^R(z)]^2}{E} dA = \frac{\frac{\pi^3}{256} - \frac{\pi}{36}}{\left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}\right)^2} \cdot \frac{\sigma_0 R^2}{E} \alpha^2,$$

$$\int_A \frac{[\tau^R(z)]^2}{2G} dA = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{\sigma_0 R^2}{G} \beta^2.$$

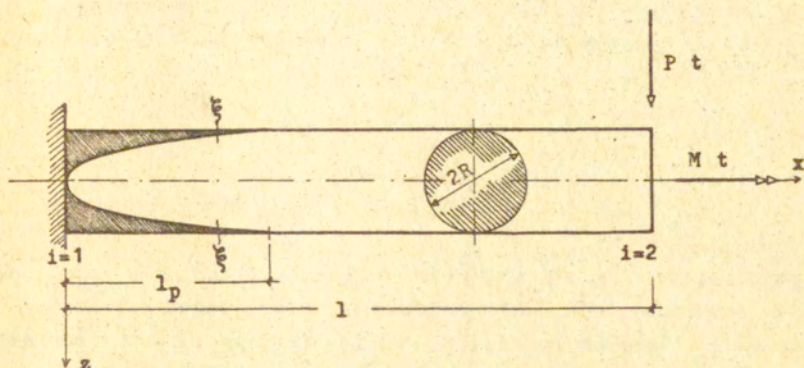
W przypadku konstrukcji statycznie wyznaczalnej jaką jest wspornik, wartości dwóch pierwszych całek ze wzoru (3.12) są równe zero.

Korzystając w dalszym ciągu ze wzoru na zasięg strefy plastycznej  $l_p$ ,



$$(3.14) \quad l_p = \left[ 1 - \frac{3\pi}{16} \frac{1}{p} \sqrt{1 - \left(\frac{\bar{m}}{3/4}\right)^2} \right] l$$

otrzymanego z zależności na początkową powierzchnię sprężystą



Rys.3:1

oraz przyjmując,

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \alpha(x) &= \alpha(1 - x/l_p) & , & & x \in (0+l_p), \\ \alpha(x) &= 0 & , & & x \in (l_p+l), \\ \beta(x) &= \beta(1 - x/l_p) & , & & x \in (0+l_p), \\ \beta(x) &= 0 & , & & x \in (l_p+l), \end{aligned}$$

po przeprowadzeniu całkowania po długości strefy plastycznej  $l_p$  otrzymamy następującą zależność na energię dysypowaną w tej strefie:

$$(3.16) \quad K = \frac{s}{2(s-1)} \frac{G_0^2 R^2}{E} \frac{1}{3} \left[ 1 - \frac{3\pi}{16p} \sqrt{1 - \frac{\bar{m}^2}{(3/4)^2}} \right] \left[ \left( \frac{\pi^3}{256} - \frac{\pi}{36} \right) \alpha^2 + \frac{35\pi}{81} \beta^2 \right]$$

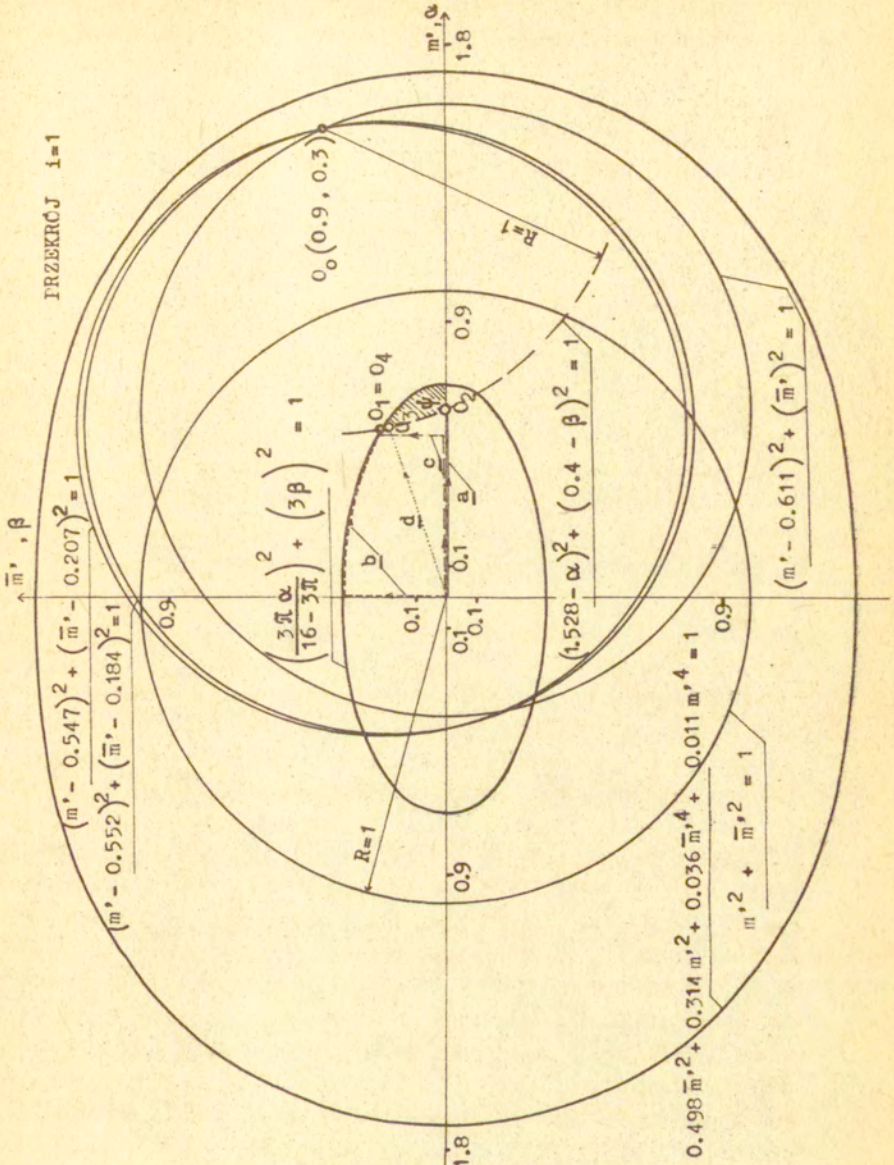
Przyjęty rozkład  $\alpha(x)$  oraz  $\beta(x)$  wynika z formy przyjętych naprężeń przekrojowych /rys.2.4/ oraz z faktu, że moment zginający  $M(x)$  zmienia się liniowo po długości pręta  $l$ , natomiast moment skręcający  $\bar{M}(x)$  przyjmuje na całej długości  $l$  wartość stałą. Wielkości  $\alpha, \beta$  we wzorze (3.16) są wartościami  $\alpha(x)$  oraz  $\beta(x)$  dla punktu utwierdzenia wspornika. Przyjęto dodatkowo  $E/G = 70/27$  oraz, że  $\tau_0 = \tau_0 / \sqrt{3}$ . Korzystając z wcześniej wyprowadzonych równań na powierzchnię sprężystą w postaci

$$(3.17) \quad (\alpha - m')^2 + (\beta - \bar{m}')^2 \leq 1$$

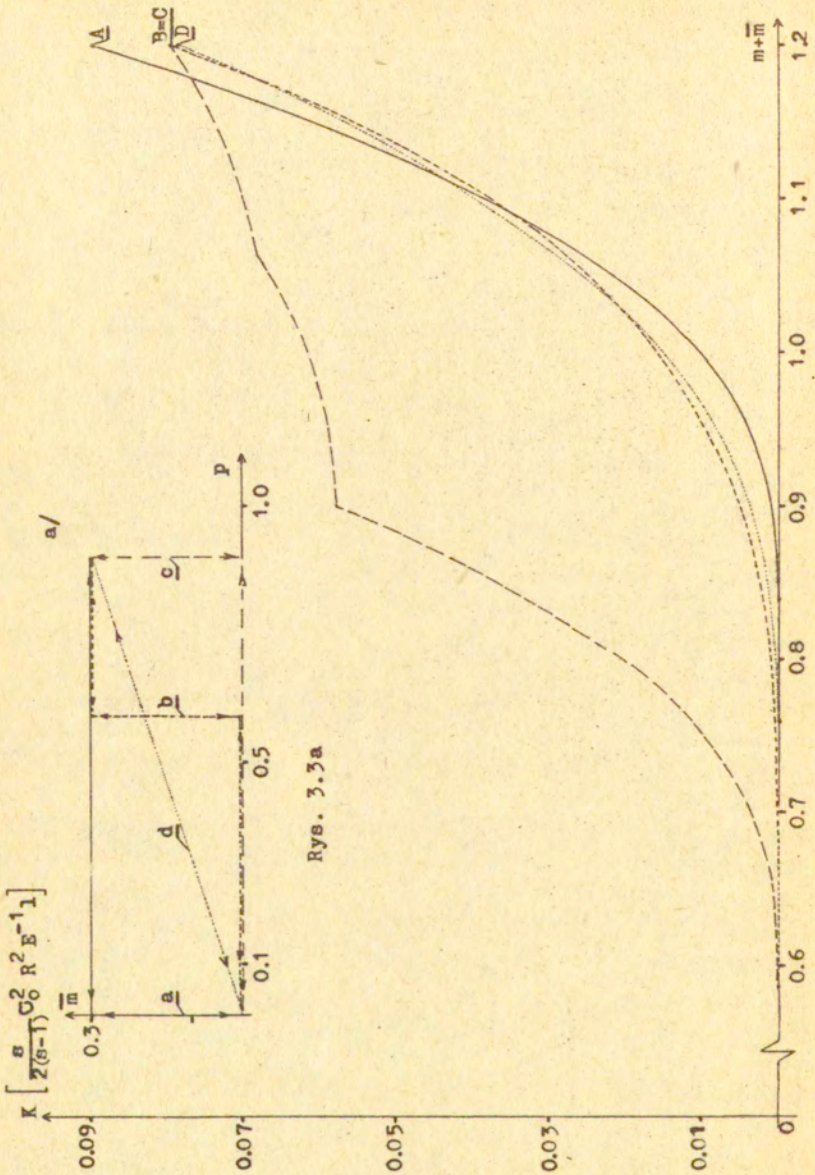
$$(3.18) \quad \left(\frac{3\pi\alpha}{16-3\pi}\right)^2 + (3\beta)^2 \leq 1$$

można obliczyć  $\alpha$  i  $\beta$  dla przyjętej ścieżki obciążeń /rys.3.3a/ oraz założonej "wędrówki" początkowej powierzchni sprężystej /rys.3.2/. Stąd na podstawie (3.16) określimy wartości energii  $K$ . Należy dodać, że "przyporządkowanie" ścieżkom obciążeń "a" + "d" /rys.3.3a/ określonych wędrówek początkowej powierzchni sprężystej /rys.3.2/ dokonano w sposób bardzo intuicyjny. Pozwoliło to jednak pokazać charakter zmian energii  $K$  w zależności od pewnej historii obciążenia. Okazało się przy tym, że ostateczna wartość energii  $K$  /dla maksymalnych wartości momentów zginającego i skręcającego/ będzie różna dla różnych ścieżek obciążeń. Innymi słowy, zależnie od tego czy środek początkowej powierzchni sprężystej znajdzie się w punkcie  $O_1, O_2$  czy też  $O_3$  /dla wszystkich tych punktów nastąpi przystosowanie/ otrzymamy różne wartości  $K$  /por.pkt. A,B,D, rys.3.3/. W praktyce interesować nas będzie minimalna wartość energii, gdyż wówczas otrzymamy najlepsze oceny przemieszczeń trwałych. W naszym przypadku zajdzie to wtedy/co wynika z postaci równania (3.16) oraz zależności (3.17) i (3.18) gdy środek początkowej powierzchni sprężystej znajdzie się na odcinku okręgu o środku  $O_0$  ( $m = 0.9$   $\bar{m} = 0.3$ ) - odcinku, który ogranicza obszar  $\psi$  dopuszczalnych translacji środka początkowej powierzchni sprężystej /tzn. takich dla których zajdzie jeszcze przystosowanie/, por.rys.3.2. Po obliczeniu pochodnej





Rys. 3.2



Rys. 3.3a

Rys. 3.3



z funkcji  $K$  okazało się, że będzie to punkt o współrzędnych  $\alpha = 0.554$ ,  $\beta = 0.175$ , a więc praktycznie punkt  $O_3$ , por. rów. [195] .

### 3.3. Ocena przemieszczeń konstrukcji prętowych w elementach zginanych i skręcanych z uwzględnieniem rozciągłości stref plastycznych

Przemieszczenie sprężysto-plastyczne układów prętowych są zwykle wyznaczone przy założeniu, że wszystkie elementy konstrukcji zachowują pierwotną sztywność, aż do chwili osiągnięcia w pewnym przekroju stanu granicznego, kiedy to tworzy się tam przegub plastyczny, a sztywność maleje lokalnie do zera. Dalszemu wzrostowi obciążenia towarzyszy obrót  $\Theta_1$  oraz skręcenie  $\bar{\Theta}_1$  w przegubie plastycznym, podczas gdy sztywność w innych przekrojach pozostaje niezmienną, aż do utworzenia się kolejnego przegubu i lokalnego tam wówczas spadku sztywności do zera.

Dokładne wyznaczanie przemieszczeń dla konstrukcji obciążanej monotonicznie przy uwzględnieniu aktualnego kształtu strefy plastycznej nie nastrocza z formalnego punktu widzenia zasadniczych trudności. W równaniu linii ugięcia należy uwzględnić zmienną sztywność przekrojów /malejącą w miarę rozprzestrzeniania się obszarów uplastycznienia/. Jednak nawet dla prostych belek obciążanych monotonicznie efektywne obliczanie ugięć sprężysto-plastycznych, przy zachowaniu wymogów ciągłości odkształceń na granicach obszarów uplastycznionych, jest uciążliwe [5] . Dla teorii przystosowania, gdzie nie znamy historii obciążenia, a tylko granice zmian, zagadnienie komplikuje się jeszcze bardziej, a dokładne rozwiązanie wymagałoby podjęcia żmudnej procedury przebadania "krok za krokiem" wszystkich możliwych historii obciążeń. Dlatego też w praktyce korzysta się z metod przybliżonych i z oszacowań pozwalających efektywnie wyznaczać wielkości przemieszczeń.

#### 3.3.1. Zależności podstawowe

W przypadku gdy przekroje prętów poddawane są działaniu momentów zginającego i skręcającego, to znaczy gdy pomijamy

siły osiowe i poprzeczne, wówczas uogólnione naprężenia  $Q_r(\xi)$  oraz uogólnione odkształcenia  $q_r(\xi)$ , spreoyzować możemy następująco:

$$(3.19) \quad Q_1(\xi) = M_j, \quad Q_2(\xi) = \bar{M}_j, \quad q_1(\xi) = \theta_j, \quad q_2(\xi) = \bar{\theta}_j$$

lub w postaci macierzowej

$$(3.20) \quad Q = [M \quad \bar{M}] \quad , \quad q = [\theta \quad \bar{\theta}]^T \quad ,$$

a równania równowagi obciążeń zewnętrznych  $P_i$   $i=1, 2, \dots, p$  z momentami zginającymi  $M_j$  i momentami skręcającymi  $\bar{M}_j$ ,  $j=1, 2, \dots, n$  w  $n$  przekrojach krytycznych mogą być napisane w postaci układu równań algebraicznych :

$$(3.21) \quad P_i = \sum_{j=1}^n \left[ \gamma_{ij} \quad \bar{\gamma}_{ij} \right] \cdot \begin{bmatrix} M_j \\ \bar{M}_j \end{bmatrix} \quad ,$$

przy czym współczynniki  $\gamma_{ij}$  oraz  $\bar{\gamma}_{ij}$  zależą tylko od geometrii konstrukcji. Jeżeli założyć hipotezę idealnych przegubów plastycznych, to znaczy koncentrowanie się odkształceń w przekrojach krytycznych, to kąty obrotu plastycznego  $\theta_j$  oraz kąty skręcenia plastycznego  $\bar{\theta}_j$  wyrażą się poprzez przemieszczenia uogólnione  $u_i$  za pomocą tych samych macierzy ,

$$(3.22) \quad \begin{bmatrix} \theta_j \\ \bar{\theta}_j \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^p \begin{bmatrix} \gamma_{ji} \\ \bar{\gamma}_{ji} \end{bmatrix} u_i \quad .$$

Macierze te można otrzymać zastępując układ statycznie niewyznaczalny układem statycznie wyznaczalnym oraz pisząc dla tego układu równania momentów w przekrojach krytycznych. Ręgując z tak powstałego układu równań wielkości nadliczbowe otrzymamy zależność (3.21) . W przypadku drugim /podejście kinematyczne/ należy budować mechanizmy podstawowe, to znaczy układ przegubów plastycznych w określonych przekrojach krytycznych. Pisząc związki geometryczne dla każdego mechanizmu otrzymamy równanie (3.22) . Należy tu podkreślić istotną rolę macierzy równowagi  $\tilde{Z}^T = [\gamma_{ij} \quad \bar{\gamma}_{ij}]$ , zarówno dla analizy przysto-



sowania jak też nośności granicznej. W przypadku automatycznego rozwiązywania powyższych problemów przy użyciu maszyny cyfrowej, macierz równowagi  $\tilde{\gamma}$  tworzy tam istotny element zbioru ograniczeń problemu programowania matematycznego, do którego to zarówno problem przystosowania jak też nośności granicznej sprawdzają się, [21], [119], [201], [64].

Uogólnione siły w sprężysto-plastycznej konstrukcji mogą być przedstawione w następującej formie

$$(3.23) \quad M(x, t) = M^e(x, t) + M^r(x, t) \quad ,$$

$$(3.24) \quad \bar{M}(x, t) = \bar{M}^e(x, t) + \bar{M}^r(x, t) \quad ,$$

gdzie:  $M^e$ ,  $\bar{M}^e$  oznaczają odpowiednio moment zginający i skręcający w takiej samej konstrukcji, lecz idealnie sprężystej, a  $M^r$  i  $\bar{M}^r$  są momentami resztkowymi, odpowiednio zginającym i skręcającym /uogólnione naprężenia resztkowe/.

Podobnie przemieszczenia mogą być przedstawione w następującej postaci, por. np. [18], [47],

$$(3.25) \quad u(x, t) = u^e(x, t) + u^r(x, t) \quad ,$$

gdzie:  $u^e$  są przemieszczeniami w konstrukcji idealnie sprężystej, natomiast  $u^r$  przemieszczeniami resztkowymi. Przemieszczenia  $u^e$  są liniowymi funkcjami aktualnego obciążenia, dlatego ich wielkości można łatwo obliczyć, natomiast resztkowe przemieszczenia  $u^r$  zależą od obrotów plastycznych w przegubach plastycznych oraz od kształtu i zasięgu stref plastycznych.

Uogólnione odkształcenia można przedstawić następująco:

$$(3.26) \quad \chi(x, t) = \chi^e(x, t) + \chi^r(x, t) + \chi^p(x, t) \quad ,$$

$$\bar{\chi}(x, t) = \bar{\chi}^e(x, t) + \bar{\chi}^r(x, t) + \bar{\chi}^p(x, t) \quad ,$$

gdzie wskaźniki "e", "r", "p", oznaczają odpowiednio sprężysty, resztkowy, plastyczny. Symbole  $\chi$ ,  $\bar{\chi}$  są uogólnionymi odkształceniami odpowiednio przy zginaniu i skręcaniu. Spełnione być muszą przy tym następujące zależności:

$$(3.27) \quad \chi = d^2 u / dx^2 = M/EJ \quad , \quad \bar{\chi} = d\varphi / dx = \bar{M}/GJ_0 \quad ,$$

$$(3.28) \quad \chi^e = d^2 u^e / dx^2 = M^e/EJ \quad , \quad \bar{\chi}^e = d\varphi^e / dx = \bar{M}^e/GJ_0 \quad ,$$

$$(3.29) \quad \chi^r = M^r/EJ \quad , \quad \bar{\chi}^r = \bar{M}^r/GJ_0 \quad ,$$

$$(3.30) \quad \chi^r + \chi^p = d^2 u^r / dx^2 \quad , \quad \bar{\chi}^r + \bar{\chi}^p = d\varphi^r / dx \quad ,$$

$$(3.31) \quad \chi^p = \sum_1 \Theta_1 \delta(x-x_1) \quad , \quad \bar{\chi}^p = \sum_1 \bar{\Theta}_1 \delta(x-x_1) \quad ,$$

gdzie  $\delta(x-x_1)$  jest funkcją Diraca.

W celu określenia przemieszczeń trwałych konstrukcji prętowej o elementach zginanych i skręcanych wykorzystamy wyniki otrzymane w pracy [43], gdzie rozważa się belki zginane jedno- i dwuprzęsłowe. Otrzymamy tam związek szacujący od góry wartości przemieszczeń konstrukcji sprężysto-plastycznej, w przypadku gdy znamy wartość energii plastycznej  $K$  dysypowanej w procesie przystosowania wygląda następująco,

$$(3.32) \quad u_i^r(x^0) \leq \max_V \left( \frac{\sqrt{\hat{G}_{1j} \hat{G}_{1j}}}{\hat{\chi}} \right) \frac{K}{\hat{P}_1} \quad ,$$

gdzie:  $x^0$  jest punktem, w którym szacujemy przemieszczenia resztkowe,  $\hat{P}_1$  - oznacza fikcyjną siłę jednostkową przyłożoną w punkcie 1 kierunku poszukiwanych przemieszczeń,  $u_i^r$  - rzeczywiste uogólnione przemieszczenie resztkowe w punkcie przyłożenia i kierunku siły  $\hat{P}_1$ ,  $\hat{\chi}$  - stała zależna od postaci warunku plastyczności,  $\hat{G}_{1j}$  - pole naprężenia sprężystego od siły  $\hat{P}_1$ , [43].

W ramach przyjmowanej teorii w wielkościach uogólnionych, wobec (2.14) mamy

$$(3.33) \quad \hat{G}_{1j} = \sum_r \hat{Q}_r a_{1j}^r \quad ,$$



gdzie  $\hat{Q}_r$  - jest sprężystym polem sił uogólnionych przy obciążeniu  $\hat{P}_i$ . Zatem

$$(3.34) \quad \max_V \sqrt{\hat{G}_{ij} \hat{G}_{ij}} = \max_V \sqrt{\sum_r \sum_s \hat{Q}_r \hat{Q}_s a_{ij}^r a_{ij}^s}$$

W przypadku konstrukcji złożonej z prętów o przekrojach kołowych, poddanych zginaniu i skręcaniu, podstawiając (2.27) do (3.34) zgodnie z (3.20) otrzymamy

$$(3.35) \quad \max_V \sqrt{\hat{G}_{ij} \hat{G}_{ij}} = \max_L \sqrt{\frac{\hat{M}^2 R^2}{J^2} + \frac{\hat{M}^2 R^2}{J_0^2}}$$

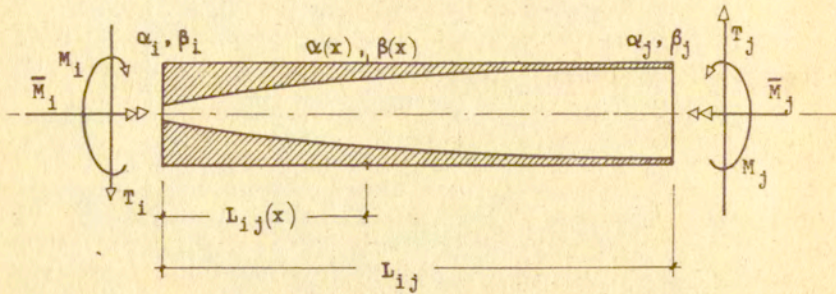
### 3.3.2 Przykład - Przemieszczenia rusztu płaskiego

Rozważać będziemy ruszt o geometrii i sztywnościach prętów jak na rysunku 2.15 z tym, że żebra rusztu są swobodnie podparte /w przekrojach 6, 7, 10, 11 -  $\bar{M} = 0$ /. Chcąc wykorzystać wcześniej wyprowadzone związki na translacyjną rodzinną powierzchni sprężystych założmy, że pręty mają przekrój kołowy.

W celu określenia energii  $K$  dysypowanej w strefach plastycznych, rozpatrzmy myślowo wycięty element rusztu z rozwiniętą strefą plastyczną, rys. 3.4. Wielkości  $M$ ,  $\bar{M}$ ,  $T$ , oznaczają ekstremalne wartości momentów odpowiednio zginającego, skręcającego oraz siły poprzecznej /pominiętej w rozważaniach/ na krawędziach elementu wyznaczonych przez sąsiednie przekroje krytyczne  $i$  oraz  $j$ .

W przypadku gdy strefa plastyczna nie rozciąga się na całą długość elementu  $L_{ij}$ , wówczas należy obliczyć długość strefy plastycznej  $L_{ij}^p$ . Korzystamy przy tym z równania (2.29) na początkową powierzchnię sprężystą. Po przekształceniach otrzymano,

$$(3.36) \quad L_{ij}^p = \frac{4G_0 R^3 L_{ij}}{3(M_j - M_i)} \left[ \frac{3\pi}{16} \sqrt{1 - \left( \frac{2\sqrt{3}}{\pi G_0 R^3} \bar{M}_{ij} \right)^2} - \frac{3M_i}{4G_0 R^3} \right]$$



Rys. 3.4

gdzie  $M_i$ ,  $M_j$  są wartościami momentów zginających odpowiednio w przekrojach  $i$  oraz  $j$ ,  $\bar{M}_{ij}$  - jest wartością momentu skręcającego,  $R$  - promieniem przekroju pręta. Stała wartość momentu skręcającego  $\bar{M}_{ij}$  na długość elementu  $L_{ij}$  wynika z przyjętego wcześniej charakteru obciążeń w postaci sił skupionych lub też skupionych momentów zginających czy skręcających. Wówczas to również uogólnione siły wewnętrzne w konstrukcji pomiędzy sąsiednimi przekrojami krytycznymi zmieniają się w sposób liniowy. Zatem wartości współczynników  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$  opisujących zmiany samonaprężeń przekrojowych  $s_{mn}(x)$  na długości strefy plastycznej  $L_{ij}^p$  możemy opisać w sposób następujący:

$$(3.37) \quad \alpha(x) = \alpha_i + (x/L_{ij})(\alpha_j - \alpha_i) \quad ,$$

$$\beta(x) = \beta_i + (x/L_{ij})(\beta_j - \beta_i) \quad ,$$



gdzie  $\alpha$ ,  $\beta$  są wartościami współczynników  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$  na brzegu elementu  $i$  lub  $j$ , dobranymi z kryterium minimalizacji energii dysypowanej  $\bar{K}$ . Wykorzystując obliczone wcześniej wartości całek (3.13), po podstawieniu do nich zależności (3.37) i przeprowadzeniu całkowania po długości strefy plastycznej  $L_{ij}^p$ , otrzymamy następującą zależność na wartość energii /jej górną ocenę/ dysypowanej w strefie plastycznej  $L_{ij}^p$ ,

$$(3.38) \quad \bar{K} = \frac{\sigma_0^2 R^2 L_{ij}^p s}{6E(s-1)} \left[ \frac{\frac{\pi^3}{256} - \frac{\pi}{36}}{\left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}\right)^2} (\alpha_i^2 + \alpha_i \alpha_j + \alpha_j^2) + \frac{35\pi}{81} (\beta_i^2 + \beta_i \beta_j + \beta_j^2) \right].$$

Podobnie jak w przykładzie 3.2 interesować nas będzie wartość minimalna wyrażenia w nawiasie z tym, że teraz mamy dwa obszary -  $\Psi_i$ ,  $\Psi_j$ , po których należy minimalizować wyrażenie na  $\bar{K}(\alpha, \beta)$ , por. rys.3.5. Obszary  $\Psi_i$ ,  $\Psi_j$  opisane są tu układem następujących nierówności :

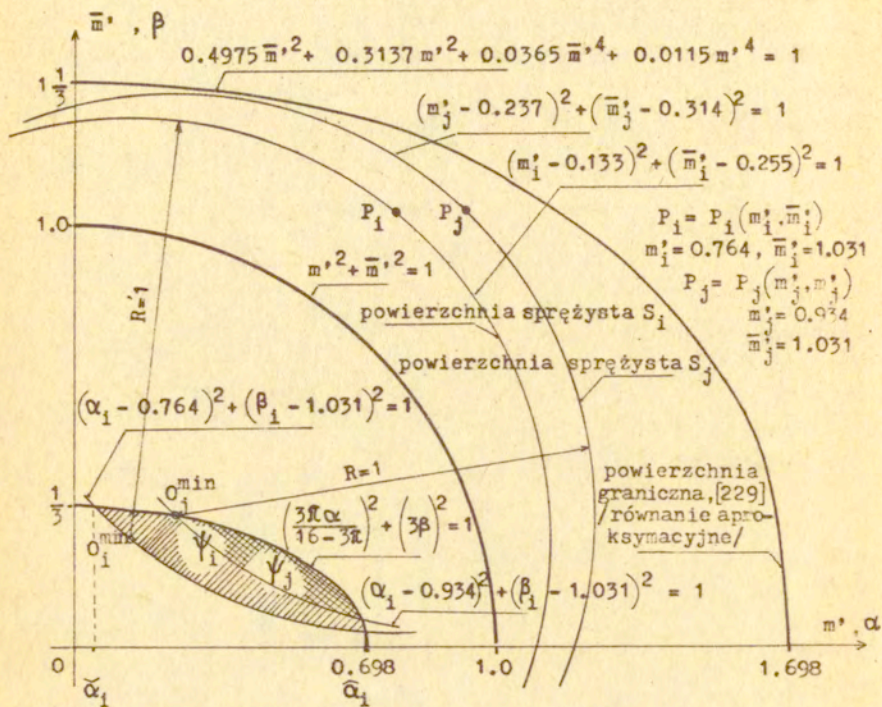
$$(3.39) \quad \begin{aligned} (\alpha_i - m'_i)^2 + (\beta_i - \bar{m}'_i)^2 &\leq 1, \\ \left(\frac{3\pi}{16-3\pi} \alpha_i\right)^2 + (3\beta_i)^2 &\leq 1, \\ (\alpha_j - m'_j)^2 + (\beta_j - \bar{m}'_j)^2 &\leq 1, \\ \left(\frac{3\pi}{16-3\pi} \alpha_j\right)^2 + (3\beta_j)^2 &\leq 1, \end{aligned}$$

gdzie :

$m' = \frac{16}{3\pi} m$ ,  $\bar{m}' = \frac{4}{3} \bar{m}$  oraz  $m$  jest bezwymiarowym momentem zginającym,  $\bar{m}$  - bezwymiarowym momentem skręcającym.

Dla sytuacji jak na rysunku 3.5, gdzie przykładowo przyjęto  $m_i = 0.45$ ,  $m_j = 0.55$ ,  $\bar{m}_i = \bar{m}_j = 0.77$ , minimalną wartość energii  $\bar{K}$  poszukiwać należy na brzegach obszarów  $\Psi_i$ ,  $\Psi_j$  opisanych przez równania (3.39)<sub>1</sub>, (3.39)<sub>3</sub> /wynika to z postaci funkcji  $\bar{K}(\alpha, \beta)$  /. Obliczając zatem z tych równań

$\beta_i, \beta_j$  i wstawiając do (3.38) otrzymamy



Rys. 3.5

$$(3.40) \quad \bar{K} = \frac{\sigma_0^2 R^2 L_{ij} s}{6E(s-1)} \left\{ \frac{\pi^3}{256} - \frac{\pi}{36} \right\} (\alpha_i^2 + \alpha_i \alpha_j + \alpha_j^2) + \frac{35\pi}{81} \left[ (\bar{m}_i - \sqrt{1 - (\alpha_i - m_i')^2})^2 + (\bar{m}_i - \sqrt{1 - (\alpha_i - m_i')^2}) \cdot (\bar{m}_j - \sqrt{1 - (\alpha_j - m_j')^2}) + (\bar{m}_j - \sqrt{1 - (\alpha_j - m_j')^2})^2 \right]$$

Można już stąd znaleźć  $\min \bar{K}(\alpha_i, \alpha_j)$ , na przykład obliczając wartość  $\bar{K}$  dla zadanych przyrostów  $\Delta\alpha_i, \Delta\alpha_j$  w przedziałach  $\check{\alpha}_i + \hat{\alpha}_i$  oraz  $\check{\alpha}_j + \hat{\alpha}_j$ , gdzie wartości  $\check{\alpha}_i,$



$\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_j, \hat{\alpha}_j$  obliczymy rozwiązując układy równań odpowiednio (3.39)<sub>1,2</sub> oraz (3.39)<sub>3,4</sub>. Dla zadania pomocniczego z rysunku 3.5 funkcja  $\bar{K}$  przyjmuje wartość minimalną dla

$\alpha_1 = 0.133, \alpha_j = 0.237$  oraz  $\beta_1 = 0.255, \beta_j = 0.314$ , co odpowiada położeniu środków powierzchni sprężystych  $S_1, S_j$  w punktach  $O_1^{\min}, O_j^{\min}$ . Wynosi ona  $\bar{K}_{\min} = 0.1737 \frac{s}{2(s-1)} G_0^2 R^2 L_{ij} / E$ .

Celem określenia energii  $\bar{K}$  dysypowanej w strefach plastycznych w rozważanym ruszcie, należy strefy te zlokalizować i określić ich zasięg, korzystając przy tym z wykresów sprężystych oraz resztkowych momentów zginających i skręcających. W rozważanym przypadku nie zachodzi potrzeba poszukiwania minimalnej wartości energii  $\bar{K}$ , gdyż w strefie plastycznej gdzie występuje skręcanie /pod siłą  $P_1$  - rys.3.7/ tworzy się przegub plastyczny oraz strefa plastyczna nie rozciąga się na całą długość elementu rusztu, por.rys.3.6. W związku z tym wartość energii plastycznej jest określona jednoznacznie, co związane jest z faktem, że istnieje tylko jedna powierzchnia sprężysta zawierająca punkt leżący na krzywej opisanej równaniem (2.40), por.również rys.2.12. Innymi słowy  $\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_1$  /układ równań (3.39)<sub>1,2</sub> posiada jedną parę rozwiązań/, a zatem środek powierzchni sprężystej znajduje się na elipsie (3.39)<sub>2</sub> i obszar  $\Psi_i$  redukuje się do jednego punktu  $O_i$ . Wartość  $\alpha_j$  wyniosła tutaj  $\alpha_j = 0.697447$  /z pominięciem skręcania.

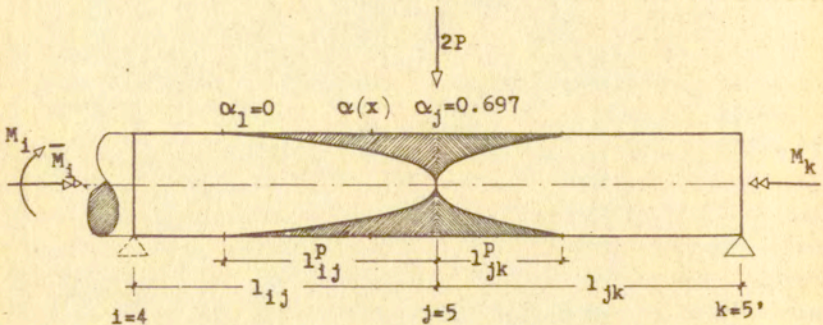
$\alpha_j = 0.697653$ , a zasięg strefy plastycznej na podstawie (3.36) wyniósł  $l_{ij}^p = 0.695922 l_{ij}$  /bez skręcania  $l_{ij}^p = 0.694888 l_{ij}$  / oraz  $l_{jk}^p = 0.411252 l_{ij}$  /bez skręcania  $l_{jk}^p = 0.410641 l_{ij}$  /.

Ostatecznie wartości energii plastycznej dysypowanej w belkach  $l_{ij}$  oraz  $l_{jk}$  wyniosły odpowiednio:

$$(3.41) \quad \bar{K}_{ij} = 0.610761, \quad \bar{K}_{jk} = 0.360926 \frac{s G_0^2 R^2 l_{ij}}{2(s-1)3E}$$

Postępując w podobny sposób dla pozostałych elementów rusztu otrzymamy energię dysypowaną we wszystkich strefach plastycznych rusztu. Wynosi ona:

$$(3.42) \quad \bar{K} = \frac{s}{2(s-1)} \int_V \left[ \frac{(\sigma^r)^2}{E} + \frac{(\tau^r)^2}{2G} \right] dV = \sum_z \bar{K}_{1-j}^z = 2.554 \frac{s}{2(s-1)} \frac{\sigma_0^2 R^2 l}{E}$$



Rys.3.6

gdzie \$z\$ jest ilością stref plastycznych w ruszcie.

Na podstawie (3.12) energia dysypowana w przegubach plastycznych wyniesie

$$(3.43) \quad K^0 = \frac{s}{2(s-1)} \int_l \left[ \frac{(M^r)^2}{EJ} + \frac{(\bar{M}^r)^2}{2GJ_0} \right] dl = 1.981 \frac{s}{2(s-1)} \frac{\sigma_0^2 R^2 l}{E}$$

a stąd ,

$$(3.44) \quad K = \bar{K} + K^0 = 4.535 \frac{s}{2(s-1)} \frac{\sigma_0^2 R^2 l}{E}$$

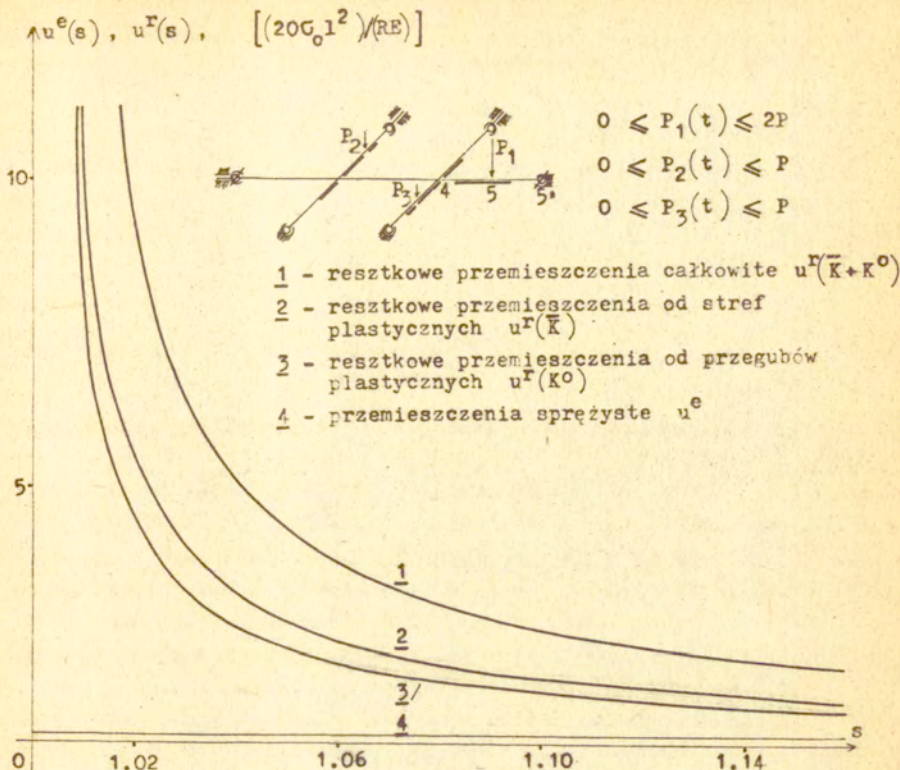
Na tej podstawie w oparciu o (3.32) można już oszacować przemieszczenia trwale konstrukcji. Przykładowo dla przekroju piątego /rys.3.7/ wyniesie ono [43]

$$(3.45) \quad u_5^r = \frac{\max|\hat{M}|}{w\sqrt{2/3}\sigma_0} K = 3.946 \frac{s}{s-1} \frac{\sigma_0 l^2}{RE}$$

Wartość przemieszczenia sprężystego w analogicznym punkcie wyniesie

$$(3.46) \quad u_5^e = 2.002 \frac{\sigma_0 l^2}{ER} \frac{1}{s}$$





Rys.3.7

Obliczone wartości przemieszczeń w funkcji współczynnika bezpieczeństwa  $s$  przedstawiono na rysunku 3.7. Wartości przemieszczeń z pominięciem skręcania nie naniesiono, gdyż są one niemal równe wartościom otrzymanym z uwzględnieniem skręcania /por. wartości  $\alpha_j$  oraz  $l_{ij}^p$  /.

### 3.4. Ocena przemieszczeń konstrukcji prętowych w oparciu o hipotezę idealnych przegubów plastycznych

Konstrukcja, która przystosowała się do danego programu obciążeń zmiennych, zachowuje się w sposób czysto sprężysty. W konstrukcji takiej nawet przy zerowym obciążeniu zewnętrznym

występują zwykle pewne ugięcia trwałe, których wielkość może nie mieścić się w "zakresie" umownie przyjętych "małych przemieszczeń". Z drugiej strony w praktyce potrzebna jest znajomość przemieszczeń konstrukcji, ze względu na wymagania normowe stanu granicznego użytkowania. Tak więc określanie ugięć sprężysto-plastycznych bądź przynajmniej ich szacowanie, koniecznym jest przy projektowaniu konstrukcji poddanych obciążeniom zmiennym.

### 3.4.1 Założenia i zależności podstawowe

Analiza przemieszczeń prowadzona będzie w oparciu o następujące założenia:

1° Konstrukcja wykonana jest z prętów o przekroju idealnym dwupunktowym.

2° Przy czystym zginaniu założenie płaskich przekrojów obowiązuje również w obecności odkształceń plastycznych.

3° Obciążenia zewnętrzne są siłami skupionymi o wartościach zmieniających się w zadanych z góry granicach. Działają one w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny rusztu.

4° Deformacja plastyczna koncentruje się w przekrojach, w których został osiągnięty moment graniczny.

5° Jedynym naprężeniem uogólnionym jest moment zginający, a odkształceniem uogólnionym krzywizna osi pręta.

6° Węzły rusztu nie przenoszą momentów skręcających.

Między obciążeniami  $P_i$  zaozpiezionymi w  $p$  punktach, a momentami zginającymi  $M_j$  w  $n$  przekrojach krytycznych, zachodzą zależności wynikające z wymogów równowagi. W ramach teorii geometrycznie liniowej równania równowagi mają postać następującej zależności liniowej

$$(3.47) \quad P_i = \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} M_j \quad , \quad i=1,2,\dots,p.$$

Z podejścia kinematycznego wynika z kolei następujący związek geometryczny [21]:

$$(3.48) \quad \theta_j = \sum_{i=1}^p \gamma_{ji} u_i \quad , \quad j=1,2,\dots,n,$$



w którym  $\Theta_j$  oznaczają obroty w przekrojach krytycznych, a  $u_i$  są przemieszczeniami uogólnionymi odpowiadającymi obciążeniom  $P_i$ . Macierz  $\gamma_{ij}$  w obu przypadkach (3.47), (3.48) jest ta sama, co wynika z zasady prac przygotowanych / por. dodatek C/. Liczba  $p$  równa jest różnicy liczby przekroi krytycznych  $n$  oraz stopnia statycznej niewyznaczalności konstrukcji  $l$ .

Zgodnie z przyjętymi założeniami, pole momentów zginających  $M(x, t)$  może być jednoznacznie opisane przez podanie wartości momentów  $M_j$  w  $n$  przekrojach krytycznych. Z kolei wobec (2.3) pole momentów zginających  $M(x, t)$  może być określone na podstawie pola momentów sprężystych  $M^e(x, t)$  i resztkowych  $M^r(x, t)$  czyli,

$$(3.49) \quad M(x, t) = M^e(x, t) + M^r(x, t)$$

Podobnie postąpić możemy z przemieszczeniami  $u(x, t)$  oraz z krzywizną osi pręta  $\chi(x, t)$ :

$$(3.50) \quad u(x, t) = u^e(x, t) + u^r(x, t)$$

$$(3.51) \quad \chi(x, t) = \chi^e(x, t) + \chi^r(x, t) + \chi^p(x, t)$$

gdzie:

$$(3.52) \quad \chi^p = \sum_j \Theta_j^p \delta(x - x_j) \quad , \quad \chi^r + \chi^p = d^2 u^r / dx^2$$

Wartość  $M^e(x, t)$  oraz  $u^e(x, t)$  są odpowiednio momentami i przemieszczeniami konstrukcji idealnie sprężystej. Wielkość  $\delta(x - x_j)$  jest uogólnioną funkcją Diraca. Operując w dalszym ciągu momentami zginającymi  $M_j(t)$  w  $n$  przekrojach krytycznych, zgodnie z (1.2), (1.3) sprężyste momenty zginające  $M_j^e$  przedstawione być mogą jako kombinacja liniowa mnożników obciążenia

$$(3.53) \quad M_j^e(t) = \sum_k M_{jk}^e \mu_k(t) \quad , \quad \begin{matrix} j=1, 2, \dots, n \\ k=1, 2, \dots, s \end{matrix}$$

Analogicznie przemieszczenia sprężyste  $u_i^e$  wyniosą

$$(3.54) \quad u_i^e(t) = \sum_k u_{ik}^e \mu_k(t) \quad , \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, p \\ k = 1, 2, \dots, s \end{matrix}$$

Ineksy "e", "r", "p" przy wielkościach momentów  $M$ , ugięć  $u$  oraz krzywizn  $\kappa$  należy rozumieć jako: sprężyste, resztkowe, plastyczne. Różnica  $M_j^r = M_j - M_j^e$  jest polem samozrównoważonych momentów resztkowych, powstałych na skutek obrotów plastycznych  $\Theta_j^p$  w określonych przekrojach krytycznych konstrukcji. Momenty resztkowe  $M_j^r$  są jednoznacznie określone przez aktualne deformacje plastyczne  $\Theta_j^p$  /o ile stałe sprężyste nie ulegają zmianie/, -por. (3.59). Całkując mianowicie ostatnią z zależności (3.52) oraz korzystając z warunków ciągłości i brzegowych dostaniemy [196]

$$(3.55) \quad \underline{u}^p = [A] \underline{M}^r + [B] \underline{\Theta}^p,$$

gdzie:  $[A]$ ,  $[B]$  są macierzami współczynników liczbowych, a  $\underline{M}^r$ ,  $\underline{u}^p$ ,  $\underline{\Theta}^p$ ,  $n$  - wymiarowymi wektorami momentów resztkowych oraz przemieszczeń i obrotów plastycznych. Wygodnie jest przy tym posługiwać się lokalnym układem współrzędnych dla elementu prętowego pomiędzy sąsiednimi przekrojami krytycznymi. Z kolei wektor momentów resztkowych  $\underline{M}^r$ , może być jednoznacznie określony poprzez  $l$  - wymiarowy wektor wielkości nadliczbowych  $\underline{X}$ ,

$$(3.56) \quad \underline{M}^r = [C] \underline{X},$$

gdzie  $[C]$  jest macierzą współczynników liczbowych, a  $l$  stopniem statycznej niewyznaczalności konstrukcji. Stąd otrzymamy następnie

$$(3.57) \quad \underline{u}^p = [A][C] \underline{X} + [B] \underline{\Theta}^p.$$

Pozostałe warunki ciągłości pozwalają wyznaczyć wartość wektora  $\underline{X}$  w funkcji obrotów plastycznych  $\underline{\Theta}^p$

$$(3.58) \quad \underline{X} = [D] \underline{\Theta}^p,$$

gdzie  $[D]$  jest macierzą współczynników liczbowych. Zatem ostatecznie

$$(3.59) \quad \underline{M}^r = [C][D] \underline{\Theta}^p = [K] \underline{\Theta}^p,$$

przy czym

$$(3.60) \quad [K] = [C][D].$$



Korzystając w dalszym ciągu z (3.59) równanie (3.55) możemy przedstawić w postaci

$$(3.61) \quad \underline{u}^P = [A][C][D] \underline{e}^P + [B] \underline{e}^P = [U^P] \underline{e}^P,$$

gdzie : 
$$[U^P] = [A][C][D] + [B].$$

Macierz  $[K]$  można również wyznaczyć z rozwiązania sprężystego. Wyznacznik tej macierzy równy jest zero, nie możemy zatem związku (3.59) odwrócić w sposób jednoznaczny. Związane to jest z istnieniem takich pól obrotów plastycznych  $\underline{e}^{pm}$  zwanych mechanizmami, dla których to  $\underline{M}^T = 0$  czyli,

$$(3.62) \quad [K] \underline{e}^{pm} = \underline{0}$$

Łatwo jest stwierdzić, że macierz  $[K]$  jest również macierzą symetryczną.

### 3.4.2 Przemieszczenia przystosowania jako problem programowania liniowego

W pracach [18], [19], [126] zaproponowano metodę oceny granicznej wielkości przemieszczeń, która podobnie jak zagadnienie określenia bezpiecznych granic zmian obciążeń [21], [119] może być sprowadzona do problemu programowania liniowego [63]. Ograniczenia nakładane na funkcję celu /przemieszczenia  $u$ / wynikają z następujących warunków :

- obciążenia nie mogą przekraczać wartości danych przez nierówności (1.3)
- całkowita energia dysypowana w procesie przystosowania jest mniejsza niż wartości dane przez (3.3)
- moment zginający nie może w żadnym przekroju konstrukcji naruszać warunku plastyczności tzn.  $|M_j(x,t)| \leq M_{0j}(x)$ .

Otrzymuje się stąd problem, który wygląda następująco : znaleźć ,

$$(3.63) \quad \max (\min) u_i = u_i^e + u_i^p = U_{ik}^e / \mu_k + U_{ij}^p \Theta_j^p, \quad \begin{matrix} j=1,2,\dots,n, \\ i=1,2,\dots,p, \\ k=1,2,\dots,s, \end{matrix}$$

przy ograniczeniach:

$$(3.64) \quad \mu_k^- \leq \mu_k(t) \leq \mu_k^+, \quad k=1,2,\dots,s,$$

$$(3.65) \quad \sum_j M_{0j} |\Theta_j^p| \leq K, \quad j=1,2,\dots,n,$$

$$(3.66) \quad -M_{0j} \leq M_{jk}^e \mu_k + K_{ij} \Theta_j^p \leq M_{0j}, \quad \begin{matrix} k=1,2,\dots,s, \\ i=j=1,2,\dots,n, \end{matrix}$$

gdzie :  $U_{ik}^e$  - jest macierzą określającą wielkość przemieszczeń sprężystych w przekroju  $i$  od  $k$ -ego schematu obciążenia,  $M_{Oj}$  - jest wektorem momentów granicznych w  $n$  przekrojach krytycznych,  $K$  - jest energią plastyczną dysypowaną w procesie obciążeń zmiennych, por.(3.3),  $M_{jk}^e$  - jest macierzą określającą wartości momentów sprężystych w  $j$ -tym przekroju konstrukcji od  $k$ -ego schematu obciążenia. Rozwiązanie problemu (3.63) otrzymać można ze standardowych procedur programowania liniowego [18], [125]. Jednakże już dla zadań średniej wielkości z (3.65) dostaniemy bardzo dużo ograniczeń, których liczba rośnie wykładniczo do ilości przekrojów krytycznych  $n$ . Przykładowo dla rusztu z rysunku 3.8 liczba ta wynosi już 128. Dlatego też bardzo korzystnie jest rozbić problem (3.63) na zadania mniejsze. W ten sposób korzystając z faktu, że

$$(3.67) \quad \max(\min)[u_1^e + u_1^p] = \max(\min)[u_1^e] + \max(\min)[u_1^p] \quad ,$$

z (3.63) dostaniemy:

A/ Problem przemieszczeń sprężystych :  
znaleźć

$$(3.68) \quad \max(\min) u_i^e = U_{ik}^e \mu_k \quad , \quad \begin{matrix} i=1,2,\dots,p \\ k=1,2,\dots,s \end{matrix}$$

przy ograniczeniach:

$$(3.69) \quad \mu_k^- \leq \mu_k(t) \leq \mu_k^+ \quad , \quad k=1,2,\dots,s$$

którego rozwiązanie uzyskać można bardzo szybko wiedząc, że [119]

$$(3.70) \quad \max(\min) u_i^e = U_{ik}^e \eta_k \quad \begin{matrix} i=1,2,\dots,p \\ k=1,2,\dots,s \end{matrix}$$

gdzie :

$$(3.71) \quad \eta_k = \begin{cases} \mu_k^+ & \text{jeżeli } u_i^e > 0 \\ \mu_k^- & \text{jeżeli } u_i^e < 0 \end{cases}$$

B/ Problem przemieszczeń trwałych :  
znaleźć

$$(3.72) \quad \max(\min) u_1^p = U_{ij}^p \theta_j^p \quad , \quad \begin{matrix} j=1,2,\dots,n \\ i=1,2,\dots,p \end{matrix}$$

przy ograniczeniach:

$$(3.73) \quad \mu_k^- \leq \mu_k(t) \leq \mu_k^+ \quad , \quad k=1,2,\dots,s$$

$$(3.74) \quad \sum_j M_{Oj} |\theta_j^p| \leq K \quad , \quad j=1,2,\dots,n$$

$$(3.75) \quad -M_{Oj} \leq M_{jk}^e \mu_k + K_{ij} \theta_j^p \leq M_{Oj} \quad \begin{matrix} k=1,2,\dots,s \\ i=j=1,2,\dots,n \end{matrix}$$

Przy omawianiu rozwiązania tego problemu dla uproszczenia zapisu pomijając będziemy symbol "p" przy kącie obrotu plastycznego  $\theta_j^p$



oraz przy przemieszczeniu  $u_1^p - u_1$ . Podzielmy następnie pole uogólnionych odkształceń plastycznych na dwa następujące :

- pole  $\Theta_j^n$  takie, które w konstrukcji powoduje powstanie pola uogólnionych naprężeń  $M_j^r$ , które nazywamy naprężeniami resztkowymi, To znaczy

$$(3.76) \quad K_{ij} \Theta_j^n = M_i^r \quad i = j = 1, 2, \dots, n,$$

- pole  $\Theta_j^m$  takie, które nie powoduje powstania w konstrukcji uogólnionych naprężeń /momentów zginających/. Zachodzi wówczas

$$(3.77) \quad K_{ij} \Theta_j^m = 0, \quad i = j = 1, 2, \dots, n.$$

W literaturze [119], [193] pola  $\Theta_j^m$  nazywa się często mechanizmami i posługujemy się tymi polami do wyznaczania nośności granicznej konstrukcji, por. np. [194], [201]. Zgodnie z przyjętym podziałem według kryteriów (3.76), (3.77) całkowite pole deformacji plastycznych  $\Theta_j$  wyniesie

$$(3.78) \quad \Theta_j = \Theta_j^n + \Theta_j^m.$$

Zatem znając pola  $\Theta_j^n$ ,  $\Theta_j^m$  określić możemy "wypadkowe" pole  $\Theta_j$  chociaż, co należy zaznaczyć mając pole  $\Theta_j^m$ , nie możemy w sposób jednoznaczny określić pól  $\Theta_j^n$ ,  $\Theta_j^m$ . Podstawiając (3.78) do problemu B/, po uwzględnieniu (3.76),

(3.77) dostaniemy:

$$(3.79) \quad \max(\min) u_1^p = U_{ij}^p \Theta_j \quad \begin{matrix} i=1, 2, \dots, p, \\ j=1, 2, \dots, n. \end{matrix}$$

przy :

$$(3.80) \quad \mu_k^- \leq M_k(t) \leq \mu_k^+, \quad k=1, 2, \dots, s,$$

$$(3.81) \quad \sum_j M_{0j} \left| \Theta_j^n + \Theta_j^m \right| \leq K, \quad j=1, 2, \dots, n,$$

$$(3.82) \quad -M_{0j} \leq M_{jk}^e \mu_k + K_{ij} \Theta_j^n \leq M_{0j} \quad \begin{matrix} k=1, 2, \dots, s, \\ i=j=1, 2, \dots, n. \end{matrix}$$

Dalsze rozumowanie w oparciu o problem (3.79) i bazujące na (3.78) miało będzie na celu pokazanie, że możliwe jest uzyskanie dolnej i górnej oceny rozwiązania optymalnego (3.79) oraz, że możliwe jest również uzyskanie rozwiązania ścisłego w sposób niestandardowy.

a/ Dolna ocena rozwiązania ścisłego -  $\tilde{u}_1$

Wyberzmy z grupy ograniczeń (3.82) tyle ile wynosi stopień statycznej niewyznaczalności konstrukcji. Niech również granice zmian obciążeń zewnętrznych dane będą z dokładnością do wspólnego mnożnika  $\lambda$ . Wówczas po rozwiązaniu problemu A/ /znalezieniu obwiedni/ z (3.82) dostaniemy

$$(3.83) \quad M_{\max j}^e \lambda + K_{ij} \Theta_j^n \leq M_{Oj}, \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, l \end{matrix}$$

gdzie  $l$  jest stopniem statycznej niewyznaczalności konstrukcji. Po założeniu postaci pola niezgodnych obrotów  $\Theta_j^n$ , można z (3.83) wyznaczyć jego składowe

$$(3.84) \quad \Theta_j^n = K_{ij}^{-1} (M_{Oj} - M_{\max j}^e \lambda), \quad i=j=1, 2, \dots, l, \quad \lambda > \lambda^1$$

Po obliczeniu w ten sposób wartości  $\Theta_j^n$  należy następnie sprawdzić czy pozostała z (3.82) grupa ograniczeń będzie spełniona. Warto dodać, że z zależności (3.82) najkorzystniej jest wybierać ograniczenia odpowiadające tym przekrojom konstrukcji, w których w stanie granicznym przystosowania -  $\lambda = \lambda_s$  pojawia się przegub plastyczny /tzn.  $\Theta_j \neq 0$  czyli  $M_j^r + M_j^e = M_{Oj}$  /.

Ważnym jest również fakt, że w miarę zmniejszania się wartości mnożnika obciążenia  $\lambda$  od wartości  $\lambda_s$  do wartości  $\lambda_e$ , jeden z elementów macierzy  $\Theta_j^n$  przyjmie wartość zero /nastąpi zmiana znaku/, co należy interpretować jako fakt utraty aktywności przez jedno z ograniczeń (3.83). Jest to zrozumiałe, gdyż dla mniejszego obciążenia w mniejszej liczbie przekroi krytycznych osiągnięty mógł będzie moment graniczny.

Po dojściu do takiej wartości  $\lambda = \lambda^1$ , dla której określony element wektora  $\Theta_j^n$  wyniesie zero, należy zredukować układ (3.83) o jedno ograniczenie takie, które będzie następnie spełnione dla nowego wektora  $\Theta_{j-1}^n$  i dla  $\lambda \leq \lambda^1$ . To znaczy dla  $\lambda \leq \lambda^1$  obowiązuje układ

$$(3.85) \quad \Theta_{j-1}^n = K_{i-1 j-1}^{-1} (M_{Oj-1} - M_{\max j-1}^e \lambda)^{i=j=1, 2, \dots, l, \quad \lambda \leq \lambda^1$$



Procedurę taką prowadzimy aż do momentu  $j = 1$  kiedy to nadal zmniejszając  $\lambda$  otrzymamy

$$(3.86) \quad \theta_j^n = 0, \quad j = 1,$$

co zajdzie dla  $\lambda = \lambda_e$ . Dokładny opis powyższego postępowania przedstawiono na przykładzie rusztu w dalszej części pracy.

Przejdźmy do warunku (3.81). Wiedząc, że zachodzi

$$(3.87) \quad \sum_j M_{0j} |\theta_j^n + \theta_j^m| \leq \sum_j M_{0j} (|\theta_j^n| + |\theta_j^m|), \quad j=1,2,\dots,n,$$

warunek (3.81) możemy zapisać następująco

$$(3.88) \quad \sum_j M_{0j} (|\theta_j^n| + |\theta_j^m|) \leq K, \quad j=1,2,\dots,n,$$

wiedząc, że znajdujemy się w ten sposób po stronie bezpiecznej rozwiązania. Stąd

$$(3.89) \quad \begin{aligned} K^m &= \sum_j M_{0j} |\theta_j^m| = K - \sum_j M_{0j} |\theta_j^n| = \sum_{j=1,2,\dots,1} M_{0j} |\theta_j^n|, \\ &= K - \sum_j M_{0j} |K_{ij}^{-1} (M_{0j} - M_{\max j}^e \lambda)|, \quad \lambda > \lambda^1. \end{aligned}$$

Przyjmując następnie pewien mechanizm z dokładnością do współczynników  $H_j$  potrafimy już wyznaczyć wektor  $\theta_j^m$

$$(3.90) \quad \theta_j^m = \frac{H_j \cdot K^m}{\sum_j H_j M_0},$$

gdzie  $M_0$  jest porównawczym momentem granicznym. Znaleźliśmy więc wartości wektora  $\theta_j^n$  oraz  $\theta_j^m$ , a więc również zgodnie z (3.78) znamy wartości wektora  $\theta_j$ . Wektor ten spełniać będzie wszystkie ograniczenia problemu B - (3.72), a więc jest wektorem rozwiązań dopuszczalnych. Innymi słowy, otrzymaliśmy dolną ocenę  $\hat{u}_1^D$  rozwiązania optymalnego zadania programowania liniowego. Warto też dodać, że umiejętne dobranie pól  $\theta_j^n$  oraz  $\theta_j^m$  sprawi, że uzyskana ocena będzie bardzo blisko rozwiązania ścisłego lub się nawet z nim pokrywać.

b/ Górna ocena rozwiązania optymalnego problemu B - (3.72) -  $\hat{u}_1$

Wiadomo jest, że gdy z problemu programowania odrzucimy część ograniczeń i rozwiążemy pozostały problem, to otrzymane w ten sposób rozwiązanie będzie górną oceną rozwiązania ścisłego. Odrzucimy zatem z problemu (3.72) ograniczenia (3.73), (3.75). Rozwiązanie tak uproszczonego problemu wyniesie [19]

$$(3.91) \quad \hat{u}_i^p = U_{ij} \hat{\theta}_j = U_{ij} \frac{K}{M_{0j}}, \quad j=1,2,\dots,n,$$

co jest jednoznaczne z przyjęciem założenia, że cała praca plastyczna  $K$  koncentruje się w jednym przegubie plastycznym takim, dla którego iloraz  $|U_{ij} / M_{0j}|$  jest maksymalny, por. [126].

c/ Rozwiązanie optymalne zadania B programowania liniowego -  $u_i$

Rozwiązanie takie uzyskać możemy w oparciu o algorytm zaproponowany w punkcie a/. Wystarczy mianowicie rozpatrzyć dla danej konstrukcji wszystkie możliwe pola obrotów plastycznych niezgodnych  $\theta_j^n$  oraz wszystkie pola obrotów plastycznych zgodnych  $\theta_j^m$  /mechanizmów/. Obliczając dla każdej możliwej kombinacji pól  $\theta_j^n$  oraz  $\theta_j^m$  wartości  $u_i^p$  i wybierając z nich wartość maksymalną /minimalną/ uzyskamy pełne rozwiązanie problemu B/ - (3.79). Rozwiązanie takie uzyskano w przykładzie pierwszym w dalszej części pracy. Należy jednak dodać, że dla konstrukcji większych rozpatrywanie wszystkich kombinacji pól  $\theta_j^n$ ,  $\theta_j^m$  może być kłopotliwe. Dlatego też kosztem nieznacznego /ponieważ  $K^m \approx K$ / pogorszenia rozwiązania /na korzyść bezpieczeństwa/ możemy obliczać oddzielnie przemieszczenia plastyczne niezgodne  $u_i^n$  oraz przemieszczenia plastyczne zgodne  $u_i^m$ . To znaczy mamy:

$$(3.92) \quad \max(\min) u_i^p = U_{ij}^p \theta_j = U_{ij}^p (\theta_j^n + \theta_j^m) = u_i^n + u_i^m.$$

Podstawiając za  $\theta_j^n$ ,  $\theta_j^m$  wartości (3.84), (3.90) po przekształceniach otrzymamy

$$\max(\min) u_i^p = U_{ij}^p \left[ K_{ij}^{-1} (M_{0j} - M_{\max}^e j^\lambda) + \frac{H_j}{\sum_j H_j} \frac{K}{M_0} + \right]$$



$$\begin{aligned}
 & - \left. \frac{H_j}{\sum_j H_j} \sum_j \frac{M_{Oj}}{M_o} \left| K_{ij}^{-1} (M_{Oj} - M_{\max j}^e \lambda) \right| \right\} < \\
 (3.93) & < U_{ij}^p \left[ K_{ij}^{-1} (M_{Oj} - M_{\max j}^e \lambda) + \frac{H_j}{\sum_j H_j} \frac{K}{M_o} \right] = \\
 & = U_{ij}^p K_{ij}^{-1} (M_{Oj} - M_{\max j}^e \lambda) + U_{ij}^p \frac{H_j}{\sum_j H_j} \frac{K}{M_o} = \\
 & = u_i^n + u_i^m = \tilde{u}_i
 \end{aligned}$$

C/ Dolna ocena przemieszczeń trwałych w oparciu o oszacowanie energii (3.7), [172] -  $\bar{u}_i$

Załóżmy z góry postać pól  $\Theta_j^n$ ,  $\Theta_j^m$ . Podobnie jak w punkcie B/ mamy tu grupę zależności wynikających ze spełnienia warunku plastyczności oraz warunków ograniczających wartość pracy plastycznej. Biorąc pod uwagę (3.4) oraz (3.9), (3.10) pierwsza grupa warunków wygląda :

$$(3.94) \quad -M_{Oj} \leq \left[ M_j^r(X_i) + M_{\min}^e j \lambda \right] (1 + \omega) \leq M_{Oj}, \quad \begin{matrix} j=1,2,\dots,\xi, \\ i=1,2,\dots,l. \end{matrix}$$

$$(3.95) \quad -M_{Oj} \leq \left[ M_j^r(X_i) + M_{\min}^e j \lambda \right] (1 + 0) \leq M_{Oj}, \quad \begin{matrix} j=\xi,\dots,n, \\ i=1,2,\dots,l. \end{matrix}$$

Z kolei warunek (3.11) przyjmie postać

$$(3.96) \quad \int_1 \frac{M^r(X_i) M^r(X_i)}{2EJ} dl = \omega \sum_j \left[ M_j^r(X_i) + M_{\min}^e j \lambda \right] \left[ \Theta_j^n(X_i) + \Theta_j^m \right], \quad \begin{matrix} j=1,2,\dots,n, \\ i=1,2,\dots,l. \end{matrix}$$

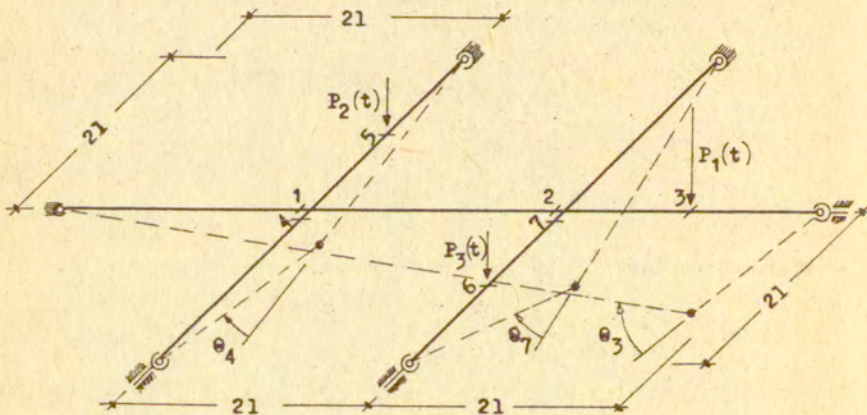
Z powyższych zależności podobnie jak w punkcie a/ wyznaczyć można wartości obrotów plastycznych  $\Theta_j^n$ ,  $\Theta_j^m$  i następnie

przy pomocy macierzy  $U_{ij}^p$  wielkość przemieszczeń trwałych  $u_1^p$ . Warto dodać, że w odróżnieniu od problemu (3.79) kiedy zawsze  $\Theta_j^m \neq 0$ , tutaj można znaleźć taką wartość mnożnika obciążenia  $\lambda = \lambda^{n-m}$ , kiedy to w skład pola  $\Theta_j$  nie będzie wchodzić mechanizm  $\Theta_j^m$ . Innymi słowy, dla  $\lambda \leq \lambda^{n-m}$  zachodzi  $\Theta_j = \Theta_j^n$ , natomiast dla  $\lambda > \lambda^{n-m}$  -  $\Theta_j = \Theta_j^n + \Theta_j^m$ . W rozważanym problemie poprzez zmienne  $X_i$ , por. (3.56), wraz ze zmianą  $\lambda$  zmienia się "kształt" pola resztkowego  $M^r$ , podczas gdy poprzednio wartość całki (3.96) była stała i określona dla  $\lambda = \lambda_S$ .

Ogólne sformułowanie problemu przemieszczeń bazujące na zależnościach (3.4) + (3.8) znaleźć można w pracy [175]. Prowadzi to do złożonych zadań programowania matematycznego. Ze względu na aktualność prowadzonych badań numerycznych w literaturze znaleźć można dotychczas zaledwie nieliczne i bardzo proste przykłady rozwiązań [162], [174], [175].

### 3.4.3 Przykład 1 - Ocena ugięć rusztu płaskiego

Rozważmy ruszt o geometrii i sztywnościach prętów jak w punkcie 2.6.5, lecz o węzłach nie połączonych w sposób sztywny. Ruszt poddany jest analogicznym obciążeniami zmiennymi.



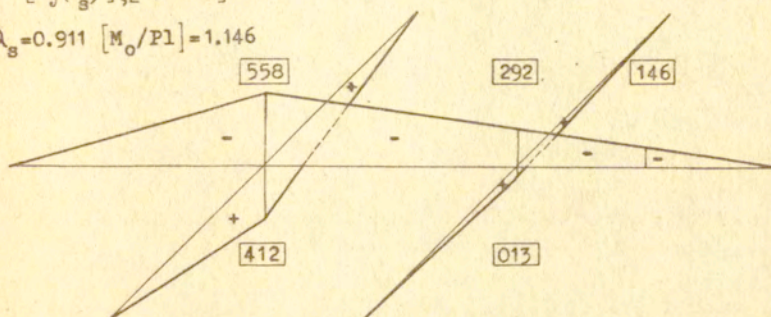
Rys.3.8



Oznaczmy kolejne przekroje krytyczne rusztu w sposób jak na rysunku 3.8. Zaznaczono na nim również schemat kinematyczny, dla którego  $\lambda = \lambda_{\min} = \lambda_S$ . Schemat taki pozwala zorientować się o sposobie narastania ugięć po przekroczeniu wartości mnożnika przystosowania  $\lambda_S$ . W przypadku podejścia

$$M^r [e_j^n(\lambda)], [M_0/10^3]$$

$$\lambda_S = 0.911 [M_0/P1] = 1.146$$

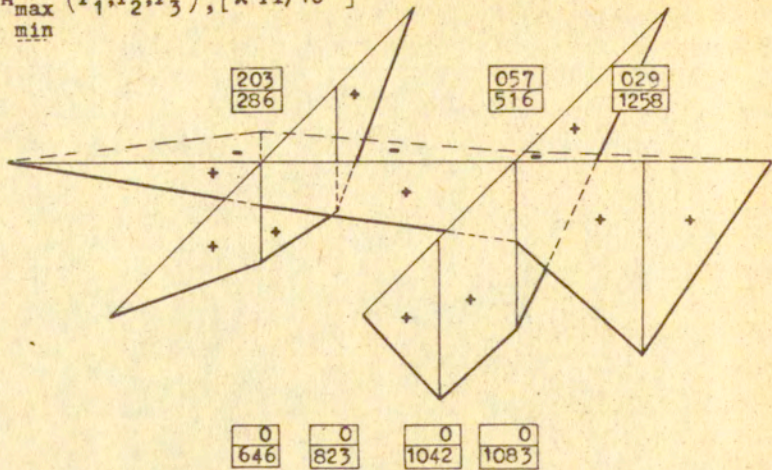


Rys. 3.9

statycznego te same informacje dostaniemy na podstawie wykresów pól momentów : resztkowego  $M^r(\lambda_S)$  - rys.3.9 oraz idealnie sprężystego - obwiedni  $M^e(\lambda_S)$  - rys. 3.10. Nałożenie tych pól uwidacznia przekroje, w których osiągnąty jest moment graniczny /rys. 3.11/

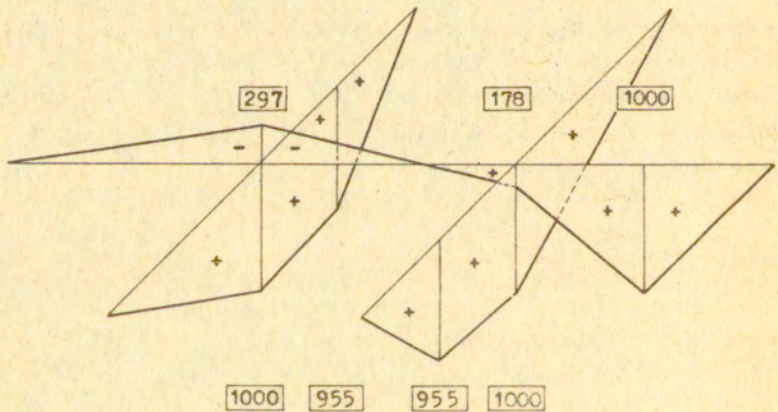
$$M_{\max}^e (P_1, P_2, P_3), [\lambda P_1 / 10^3]$$

$$M_{\min}^e$$



Rys. 3.10

$$M^r [\theta_3^n(\lambda_s)] + M_{\max}^e [P(\lambda_s)], [M_o / 10^3]$$



Rys. 3.11



A/ Rozwiązanie w oparciu o punkt  
3.4.2 - B pracy

Niech granice zmian obciążeń zewnętrznych dane będą z dokładnością do wspólnego mnożnika  $\lambda$ . Wartość maksymalną tego mnożnika w odniesieniu do przystosowania obliczyć można z następującego układu równań:

$$(3.97) \quad M_j^e \lambda + M_j^r(\theta_1^n) \leq M_{0j} \quad , \quad \begin{matrix} j=1,2,\dots,7 \\ i=1,2. \end{matrix}$$

zapisanego dla trzech przekroji: trzeciego, czwartego, siódmego /por.rys.3.8, 3.11/ i dla dowolnego wektora  $\theta_1^n$  o dwóch składowych. Wartość ta wynosi

$$(3.98) \quad \lambda_s = 1.145907$$

Przy określaniu  $M_j^r(\theta_1^n)$  skorzystano z macierzy  $K_{ij}$ , która dla rozważanego rusztu ma postać:

$$K_{ij} = \begin{bmatrix} 375000 & 125000 & 062500 & -312500 & -156250 & 031250 & 062500 \\ 125000 & 375000 & 187500 & 062500 & 031250 & -156250 & -312500 \\ 062500 & 187500 & 093750 & 031250 & 015625 & -078125 & -156250 \\ -312500 & 062500 & 031250 & 343750 & 171875 & -109375 & -218750 \\ -156250 & 031250 & 015625 & 171875 & 859375 & -546875 & -109375 \\ 031250 & -156250 & -078125 & -109375 & -546875 & 859375 & 171875 \\ 062500 & -312500 & -156250 & -218750 & -109375 & 171875 & 343750 \end{bmatrix} \left[ \frac{EJ}{10^6} \right]$$

a/ Dolna ocena rozwiązania problemu (3.79)

Niech wektor  $\theta_j$  rozwiązań dopuszczalnych problemu (3.79) ma postać następującą:

$$(3.99) \quad \theta_j = \theta_j^n + \theta_j^m = [0 \ 0 \ \theta_3^n \ 0 \ 0 \ \theta_7^n] + [0 \ 0 \ \theta_3^m \ \theta_4^m \ 0 \ 0 \ \theta_7^m]$$

Uwzględniając następnie fakt, że /por.rów.rys.3.8/

$$(3.100) \quad M_j^e(\lambda_s) + M_j^r(\lambda_s) = M_{0j} \quad , \quad j=3,4,7$$

wyberzmy z grupy ograniczeń (3.82) te, które odpowiadają przekrojom trzeciemu i siódmemu ( $M_4^e \leq M_7^e \leq M_3^e$ , por. rys. 3.10). Otrzymamy w ten sposób :

$$(3.101) \quad \begin{bmatrix} 1.258 \\ 1.083 \end{bmatrix} \lambda P_1 + \begin{bmatrix} 0.09375 & -0.15625 \\ -0.15625 & 0.34375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_3^n \\ \Theta_7^n \end{bmatrix} \frac{EJ}{l} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} M_0$$

skąd, zgodnie z (3.84) kąty obrotów plastycznych niezgodnych  $\Theta_j^n$  wyniosą /por. linia 198 programu, dodatek A/ :

$$(3.102) \quad \begin{bmatrix} \Theta_3^n \\ \Theta_7^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 & 20 \\ 20 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.258 - 1.258\lambda \\ 1.258 - 1.083\lambda \end{bmatrix} \frac{P_1 l^2}{EJ}, \quad \text{dla } \lambda > \lambda^2.$$

Podstawiając otrzymane wartości  $\Theta_j^n$  dla konkretnego  $\lambda$  do pozostałych ograniczeń (3.82) okaże się, że są one spełnione. Należy jednak zaznaczyć, że poczynając od wartości mnożnika  $\lambda = \lambda^2$ , jedna składowa wektora  $\Theta_j^n$  wyzeruje się /dla  $\lambda^2 = 1.045$  /, w związku z czym z układu (3.101) należy odrzucić jedno równanie - te które będzie następnie spełnione jako nierówność dla obliczanego następnie wektora  $\Theta_j^n(\lambda < \lambda^2)$ . Mamy zatem

$$(3.103) \quad [1.258] \lambda P_1 + [0.09375] \Theta_3^n \frac{EJ}{l} = [1] M_0$$

skąd, por. (3.85),

$$(3.104) \quad [\Theta_3^n] = [10 \frac{2}{3}] [1.258 - 1.258\lambda] \frac{P_1 l^2}{EJ}, \quad \text{dla } \lambda < \lambda^2.$$

Dla przyjętego zgodnie z (3.99) pola  $\Theta_j^m$ , odpowiadające dwudziestemu wierszowi macierzy H /por. rys. 3.8/, z (3.90) otrzymamy,

$$(3.105) \quad \Theta_j^m = \frac{H_j}{\sum_j H_j} \cdot \frac{K^m}{M_0} = \left[ 0 \quad \Theta \frac{3}{6} \Theta^m \quad \frac{1}{6} \Theta^m \quad 0 \quad 0 \quad \frac{2}{6} \Theta^m \right] \frac{K^m}{M_0}$$

co odpowiada linii 640' programu - por. dodatek A.

Stąd można już otrzymać dolną ocenę rozwiązania (3.79), to znaczy

$$(3.106) \quad \tilde{u}_i = U_{1j} (\Theta_j^n + \Theta_j^m) \left[ \frac{M_0 l^2}{EJ} \right]$$





posługując się przy tym zależnością (3.91), por. [19].  
 W naszym przypadku wartości  $M_{0j}$  są te same dla całego rusztu, zatem całą deformację plastyczną "koncentrujemy" w przegubie plastycznym odpowiadającym maksymalnej /minimalnej/ wartości elementu macierzy  $U_{ij}$ . Itak dla  $u_1$  będzie to przekrój czwarty  $U_{1j}^{\min} = U_{14} = -0.542/$ , dla  $u_3$  przekrój trzeci  $U_{3j}^{\min} = U_{33} = 0.557/\text{e.t.c.}$   
 Otrzymane wartości przemieszczeń  $-u_1, -u_2, u_3$  naniesiono odpowiednio na rysunkach 3.13, 3.14, 3.15, dla różnych wartości współczynnika bezpieczeństwa  $s$ .

c/ Rozwiązanie dokładne problemu (3.79)

W tym przypadku musimy rozważyć wszystkie możliwe kombinacje pól  $\Theta_j^n$  oraz  $\Theta_j^m$ . Podobnie jak w punkcie a/ rozpatrywać będziemy przekroje trzeci i siódmy, którym odpowiadają następujące wiersze macierzy  $K_{ij}$ ,  $i=1,2, j=1,2,\dots,7$ :

$$K_{ij} = \begin{bmatrix} 062500 & 187500 & 093750 & 031250 & 015625 & -078125 & -156250 \\ 062500 & -312500 & -156250 & -218750 & -109375 & 171875 & 343750 \end{bmatrix} \frac{EJ}{l^3}$$

To znaczy na podstawie ograniczeń trzeciego i siódmego obliczać będziemy pola  $\Theta_j^n$ , które jak się okaże spełniać będą pozostałe pięć ograniczeń (3.97). Tworząc z kolumn macierzy  $K_{ij}$  ( $i=1,2, j=1,2,\dots,7$ ) macierze kwadratowe nieosobliwe  $K_{ij}$  ( $i=j=2$ ), po odwróceniu ich dostaniemy:

$$\begin{bmatrix} 10 & 06 \\ 02 & -02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 06 \\ 04 & -04 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 & 02 \\ 08 & -08 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 & 05 \\ -04 & 04 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 & 05 \\ -02 & 02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 07 & 01 \\ -10 & -06 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 07 & 01 \\ -10 & -06 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 07 & 01 \\ -20 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 22 & 10 \\ 40 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 22 & 10 \\ 20 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 & 02 \\ -10 & -06 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 & 02 \\ -20 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 44 & 20 \\ 40 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 44 & 20 \\ 20 & 12 \end{bmatrix} \frac{-1}{3} \begin{bmatrix} 44 & 20 \\ 56 & 08 \end{bmatrix} \frac{-1}{3} \begin{bmatrix} 44 & 20 \\ 28 & 04 \end{bmatrix} \frac{-1}{3} \begin{bmatrix} 88 & 40 \\ 56 & 08 \end{bmatrix} \frac{-1}{3} \begin{bmatrix} 88 & 40 \\ 28 & 04 \end{bmatrix}$$

co odpowiada macierzom  $K_{ij}^{-1}$  z zależności (3.84). W oparciu o nie można już wyznaczyć z (3.84) wszystkie możliwe pola obrotów plastycznych niezgodnych  $\Theta_j^n$ ,  $j=1,2$ . Będzie ich osiemnaście  $\binom{7}{2} - 3$ , gdyż trzy pola tworzą mechanizmy lokalne /pola  $\Theta_j^m$ /, dla których to  $|K_{ij}| = 0$ . Jak wspomniano wcześniej, w trakcie obliczania pól  $\Theta_j^n$  dla malejących wartości mnożnika obciążenia od  $\lambda_s$



do  $\lambda_e$ , w pewnym momencie /dla  $\lambda = \lambda^2$  wartość  $\lambda^2$  może być różna dla różnych pól  $\Theta_j^n$ ,  $j = 1, 2$ / jedna ze składowych wektora  $\Theta_j^n$  wyzeruje się /nastąpi zmiana znaku/. Oznaczać to będzie utratę aktywności przez jedno z ograniczeń /trzecie lub siódme/. Wystąpi to dla następujących wartości mnożnika  $\lambda$  :

$$(3.107) \quad \lambda = \lambda^2(\Theta_j^n) = \begin{cases} 1.054873 \\ 1.045313 \\ 1.017646 \end{cases}$$

Poczynając zatem od wartości  $\lambda \leq \lambda^2$  pola  $\Theta_j^n$ ,  $j = 1$ , obliczać będziemy z zależności (3.85), gdzie macierz  $K_{i-1}^{-1}$   $j-1$  jest już jednoelementowa. Odrzucamy przy tym ograniczenie siódme, które zawsze będzie spełnione /dla  $\lambda < \lambda^2$  /dla obliczanych na podstawie ograniczenia trzeciego pól  $\Theta_j^n$ ,  $j=1$ . Macierze  $K_{i-1}^{-1}$   $j-1$  z (3.83) wyglądają tutaj następująco :

$$[16] \quad [5\frac{1}{3}] \quad [10\frac{2}{3}] \quad [32] \quad [64] \quad [-12.8] \quad [-6.4] \quad .$$

Kontynuując obliczenia dla  $\lambda < \lambda^2$  dojdziemy znowu do wartości  $\lambda = \lambda^1$ , kiedy to kolejny element wektora  $\Theta_j^n$  wyzeruje się. W naszym przypadku wektor  $\Theta_j^n$  jest już / dla  $\lambda^2 > \lambda > \lambda^1$  / jednoelementowy, zatem  $\Theta_j^n(\lambda = \lambda^1) = 0$  i  $\lambda^1 = \lambda_e$ . Innymi słowy doszliśmy do wartości mnożnika obciążenia odpowiadającego nośności sprężystej konstrukcji, kiedy to nie występują naprężenia resztkowe  $M_1^r = K_{1j} \Theta_j^n$ . I wówczas wszystkie ograniczenia (3.82) problemu (3.79) będą zawsze spełnione / dla  $\lambda < \lambda_e$  / - będą ograniczeniami nie aktywnymi.

Mając obliczone pola  $\Theta_j^n$  znajdujemy następnie na podstawie (3.90) pola  $\Theta_j^m$ . Jest ich 23, por. macierz  $H^T$ . Ostatecznie więc dla każdego z osiemnastu pól  $\Theta_j^n(\lambda > \lambda^2)$  dobieramy dwadzieścia trzy pola mechanizmów  $\Theta_j^m$  oraz dla każdego z siedmiu pól  $\Theta_j^n(\lambda \leq \lambda^1)$  dobieramy również dwadzieścia trzy mechanizmy  $\Theta_j^m$ . Istnieje zatem  $23 \times 18 = 414$  pól  $\Theta_j = \Theta_j^n + \Theta_j^m$  dla  $\lambda > \lambda^2$  oraz  $7 \times 18 = 126$  tychże pól dla  $\lambda \leq \lambda^2$ . Nas interesuje te pole  $\Theta_j(\Theta_j^n, \Theta_j^m)$ , dla którego zgodnie z (3.79) wartość ugięć trwałych będzie maksymalna /minimalna/.

Procedurę obliczania pól  $\Theta_j^n$  oraz  $\Theta_j^m$ , a następnie wyboru  $\max(\min) u_1^p$  przeprowadzono automatycznie.

Jako dane wprowadzono macierze :  $K_{ij}(\lambda > \lambda^2)$  ,  $i = j = 1, 2$  ,  $K_{ij}(\lambda \leq \lambda^2)$  ,  $i = j = 1$  , por. odpowiednio wiersze 000 do 306 oraz 000' do 108' programu "a" w dodatku A. Podobnie zapisano macierz mechanizmów H , por. wiersze 500 + 700 oraz 480' + 700' , program "a", dodatek A. Wzytując dodatkowo jeden z wierszy macierzy  $U_{ij}$  oraz współczynnik bezpieczeństwa s obliczano  $\max(\min) u_1^p$  dla konkretnego przekroju "i" konstrukcji. Obliczenia przeprowadzono dla różnych wartości s dla trzech przekroi krytycznych - pierwszego, drugiego i trzeciego, por. rys. 3.8, a wyniki przedstawiono na rys. 3.13, 3.14, 3.15. Warto dodać, że wielkość zadania (3.79) dla rozważanego rusztu umożliwiła przeprowadzenie obliczeń na programowanym kalkulatorze TI - 59 , por. [54] , podczas gdy rozwiązanie tego zadania w tradycyjny sposób /np. metoda Simplex/ wymagałoby już użycia dużego komputera.

#### B/ Rozwiązanie w oparciu o punkt 3.4.2 - C pracy

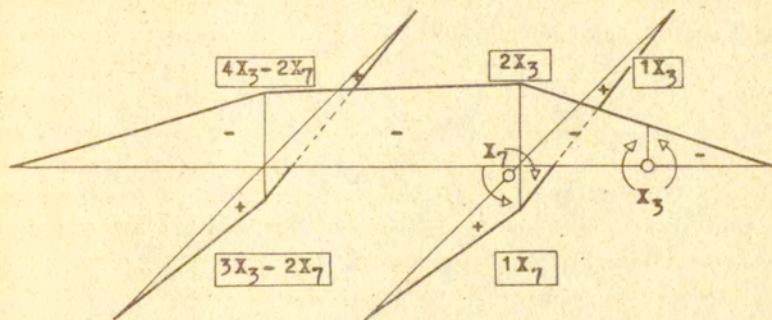
Dla rozpatrywanego rusztu z rysunku 3.8 funkcja  $\bar{\gamma}(x)$  ze związku (3.10) przyjmie wartości  $\bar{\gamma}(x) = 1$  dla przekroi pierwszego, drugiego i trzeciego, natomiast  $\bar{\gamma}(x) = 0$  dla przekroi od czwartego do siódmego włącznie. Wynika to bezpośrednio z pól momentów  $M_j^F$  oraz  $M_j^E$  /rysunki 3.9, 3.10/ gdzie następuje ich wzajemna redukcja lub superpozycja. W poprzednim punkcie a/ pracy znaleziono wartości przemieszczeń dla narzuconej z góry postaci pól  $\Theta_j^n$  ,  $\Theta_j^m$  - (3.99) . Załóżmy tu taką samą ich postać, czyniąc w ten sposób wyniki w pewnym sensie porównywalne. To znaczy niech

$$(3.108) \quad \begin{aligned} \Theta_j^m &= [0 \ 0 \ \Theta_3^m \ \Theta_4^m \ 0 \ 0 \ \Theta_7^m] \\ \Theta_j^n &= [0 \ 0 \ \Theta_3^n \ 0 \ 0 \ 0 \ \Theta_7^n] \end{aligned} \quad .$$

Wówczas pole momentu resztkowego  $M_j^R(x_3, x_7)$  wygląda jak na rysunku 3.12 .

Podobnie jak w poprzednim punkcie a/ wybierzemy z grupy warunków (3.94) , (3.95) te, które odpowiadają przekrojom konstrukcji: trzeciemu, czwartemu i siódmemu, rys. 3.8. Po otrzymaniu rozwiązania okaże się, że pozostałe warunki (3.94) , (3.95) będą spełnione.





Rys. 3.12

Mamy zatem :

$$(-1X_3 + 1.258 \lambda P l) \cdot (1 + \omega) \leq M_{03} \quad ,$$

(3.109)

$$(3X_3 - 2X_7 + 0.646 \lambda P l) \cdot (1 + 0) \leq M_{04} \quad ,$$

$$(1X_7 + 1.083 \lambda P l) \cdot (1 + 0) \leq M_{07} \quad ,$$

por. rys. 3.10, 3.12. Wartość całki (3.96) wynosi

$$(3.110) \quad \int_1 \frac{[M^r(\bar{X}_3, \bar{X}_7)]^2}{2EJ} dl = (22X_3^2 + 6X_7^2 - 20X_3X_7) \frac{1}{EJ} \quad ,$$

natomiast :

$$\Theta_3(X_3, X_7) = (44X_3 - 20X_7) \frac{1}{EJ} \quad ,$$

(3.111)

$$\Theta_7(X_3, X_7) = (20X_3 - 12X_7) \frac{1}{EJ} \quad .$$

Wprowadzając wielkości bezwymiarowe :

$$(3.112) \quad x_3 = X_3/M_0 \quad , \quad x_7 = X_7/M_0 \quad ,$$

oraz wiedząc, że  $M_0 = 1.258 P l$  , warunki (3.109) wraz z (3.96) wyglądają :

$$(-x_3 + \lambda)(1 + \omega) \leq 1$$

$$[3x_3 - 2x_7 + (0.646/1.258)\lambda](1 + 0) \leq 1$$

$$(3.112) \quad [x_7 + (1.083/1.258)\lambda](1 + 0) \leq 1$$

$$22x_3^2 + 6x_7^2 - 20x_3x_7 = [(-x_3 + \lambda)(44x_3 - 20x_7 + 3\theta_4^m) + (x_7 + (1.083/1.258)\lambda)(20x_3 - 12x_7 + 2\theta_4^m)] \omega$$

przy czym wektor  $\theta_j^m$  z (3.108)<sub>1</sub> określono z dokładnością do  $\theta_4^m$ , por. rys. 3.8. Dostaliśmy ostatecznie układ, z którego można wyznaczyć wartości  $x_3$ ,  $x_7$ ,  $\theta_4^m$ ,  $\omega$ , a w dalszej kolejności również  $\theta_3$ ,  $\theta_7$  na podstawie (3.111).

a/ W skład pola  $\theta_j$  wchodzi mechanizm  $\theta_j^m$  ( $\lambda > \lambda^{n-m}$ )  
Wartość mnożnika obciążenia  $\lambda = \lambda^{n-m}$  poczynając od którego w skład pola obrotów plastycznych  $\theta_i$  wejdzie mechanizm, wyznaczyć możemy z układu (3.112) kładąc  $\theta_4^m = 0$ . Otrzymamy wówczas

$$(3.113) \quad \lambda^{n-m} = 1.116$$

Rozwiązując dalej układ (3.112) dla mnożnika  $\lambda$  z przedziału  $(\lambda^{n-m} + \lambda_s)$  otrzymamy :

.1649317971	x-3	.1458818037	x-3
.0352959873	x-7	0.013288677	x-7
.2616545144	$\theta$ -4	257.6626811	$\theta$ -4
.0470456424	OMEG	.0003319139	OMEG
1.12	LAMB	1.14555	LAMB
0.157475831	x-3	.1457401404	x-3
.0266825586	x-7	.0131250219	x-7
1.512646569	$\theta$ -4	612712.2716	$\theta$ -4
.0282520804	OMEG	.0000001404	OMEG
1.13	LAMB	1.14574	LAMB
.1500198649	x-3	.1457326844	x-3
.0180691299	x-7	.0131164084	x-7
7.001358126	$\theta$ -4	-4968.887344	$\theta$ -4
.0101212788	OMEG	-.0000173153	OMEG
1.14	LAMB	1.14575	LAMB

Jak widać wartość  $\omega$  maleje do zera wraz ze zbliżaniem się z mnożnikiem obciążenia do wartości  $\lambda_s$ . Można zatem kła-



dąc  $\omega = 0$  z układu (3.112) wyznaczyć wartość mnożnika przystosowania  $\lambda_g$ .

b/ W skład pola  $\Theta_j$  nie wchodzi mechanizm  $\Theta_j^m$  ( $\lambda < \lambda^{n-m}$ )

W tym przypadku należy z układu (3.112) odrzucić jedną z zależności (3.112)<sub>1,2,3</sub> - tą, która będzie następnie spełniona dla wyznaczonych wartości  $x_3$ ,  $x_7$ , oraz  $\omega$ . Innymi słowy w konstrukcji dwukrotnie statycznie niewyznaczalnej maksymalnie dwóch przekrojach warunek plastyczności może być spełniony jako równość ( $M = M_0$ ), aby zachodziło  $\Theta_j = \Theta_j^n$  /wykluczamy mechanizmy lokalne/. W naszym przypadku odrzucić należy równanie (3.112)<sub>2</sub>. Również ( $\Theta_j^m = 0$ ) w równaniu (3.112)<sub>4</sub> kładziemy  $\Theta_4^m = 0$ .

Rozwiązując powstały w ten sposób układ trzech równań dla wartości  $\lambda$  z przydziału ( $\lambda_g + \lambda^{n-m}$ ), otrzymano:

.0760205078	x-3	.0936669922	x+3
.1386571315	x-7	.0783631307	x-7
.4648513526	↑-1	.6743660938	↑-1
1.	LAMB	1.07	LAMB
.0722705078	x-3	.1089306641	x-3
.1300437028	x-7	0.069749702	x-7
.4759692509	↑-1	.7425250077	↑-1
1.01	LAMB	1.08	LAMB
.0689501953	x-3	.1248974609	x-3
.1214302741	x-7	.0611362733	x-7
.4883762117	↑-1	.8127932966	↑-1
1.02	LAMB	1.09	LAMB
.0665283203	x-3	.1411767570	x-3
.1128168455	x-7	.0525228447	x-7
0.503478485	↑-1	.8839990855	↑-1
1.03	LAMB	1.1	LAMB
.0661474609	x-3	.1576220700	x-3
.1042034163	x-7	0.043909416	x-7
.5247038051	↑-1	.9557029213	↑-1
1.04	LAMB	1.11	LAMB
.0701708984	x-3	.1677860859	x-3
.0955899881	x-7	.0386035439	x-7
.5591420159	↑-1	.9999795935	↑-1
1.05	LAMB	1.11616	LAMB
.0800341797	x-3	.1678076172	x-3
.0869765594	x-7	.0385949305	x-7
0.611099758	↑-1	1.000060555	↑-1
1.06	LAMB	1.11617	LAMB

gdzie symbolem "  $\uparrow - 1$  " oznaczono obliczane wartości lewej strony zależności (3.112)<sub>2</sub>.

Korzystając w dalszym ciągu ze znalezionych wartości  $x_3(\lambda)$ ,  $x_7(\lambda)$  wyznaczyć możemy wielkości  $\Theta_3$ ,  $\Theta_7$  na podstawie (3.111), a stąd wartość przemieszczeń trwałych

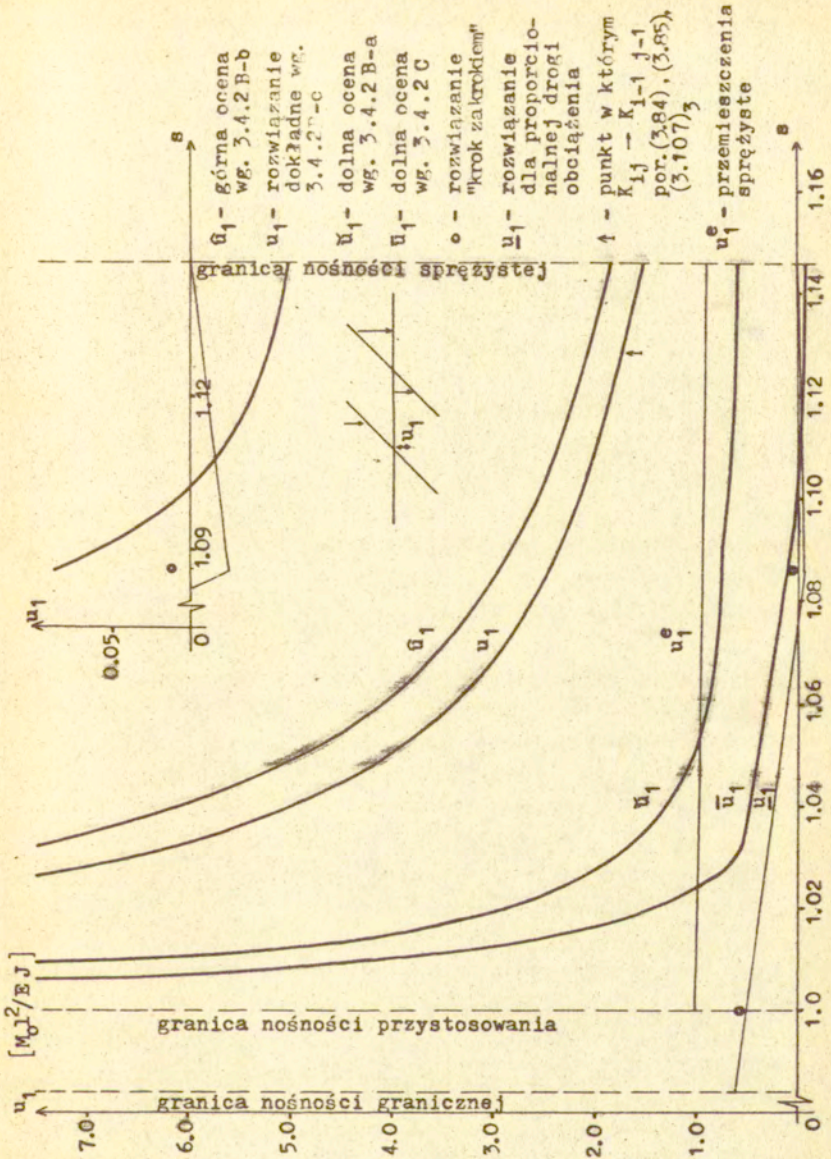
$$(3.114) \quad \bar{u}_i^P(\Theta_3, \Theta_4, \Theta_7) = \bar{u}_{ij} \Theta_j$$

Obliczone w ten sposób wartości przemieszczeń naniesiono na wykresach na rysunkach 3.13, 3.14, 3.15, odpowiednio dla przekrojów rusztu pierwszego, drugiego i trzeciego. Widać, że nawet dla niewielkich wartości współczynnika bezpieczeństwa otrzymuje się bardzo dobre wyniki w porównaniu z dolną oceną z poprzedniej metody.

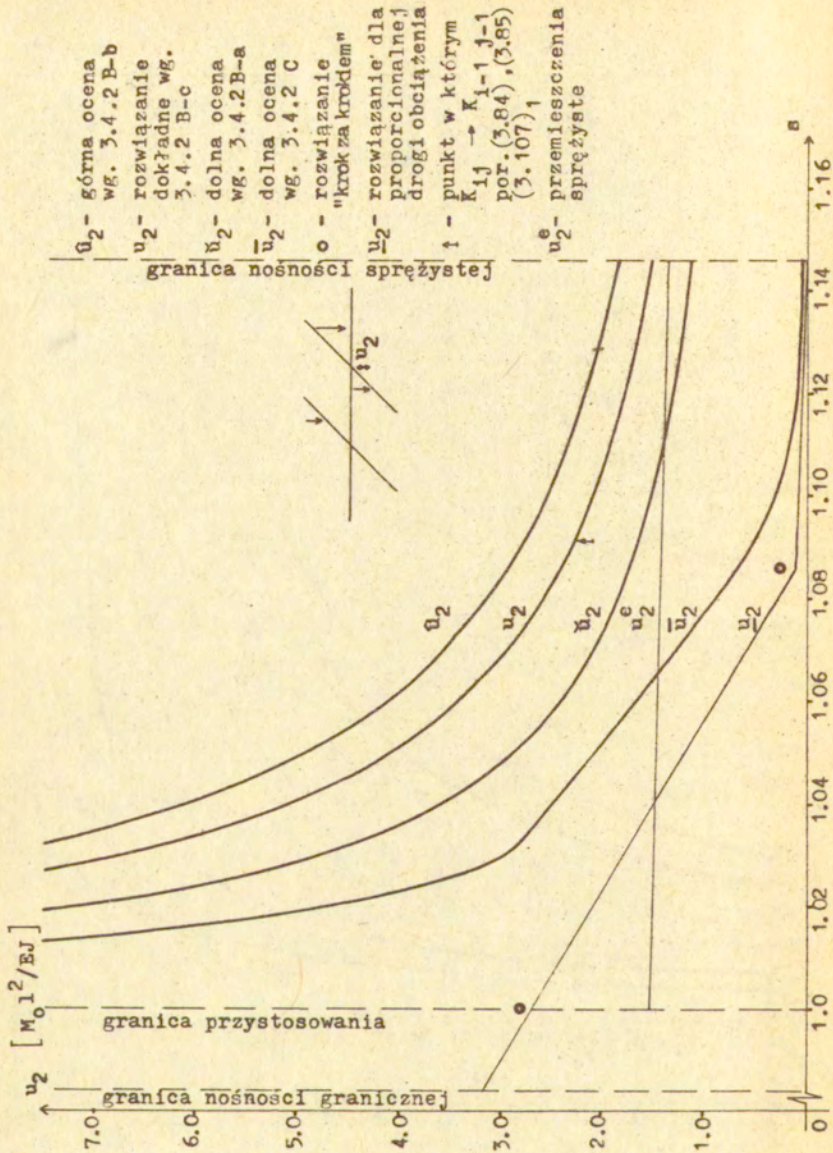
Celem weryfikacji otrzymanych wyników poszukano dodatkowo dwóch kolejnych rozwiązań: przemieszczeń przy proporcjonalnej drodze obciążenia  $\bar{u}_i$  oraz przemieszczeń przy obciążeniach proporcjonalnych zmiennych. Wybrano przy tym intuicyjnie najniekorzystniejszą kombinacją schematów obciążeń zewnętrznych to znaczy przypadek, gdy wszystkie obciążenia działają równocześnie, por. rys. 3.8, 3.16. W przypadku obciążeń zmiennych obliczenia przeprowadzono dla dwóch wybranych wartości mnożnika obciążenia  $\lambda_1 = 1.06$  oraz  $\lambda_2 = 1.146$ . Drugiej wartości odpowiada nośność przystosowania. Po każdym cyklu obciążeń otrzymano pewne pole obrotów plastycznych  $\Theta_j$ . W pierwszym przypadku dla  $\lambda_1 = 1.06$  były to obroty w przekrojach trzecim i siódmym /rys. 3.8/, natomiast w drugim przypadku dla  $\lambda_2 = 1.146$  były to obroty w przekrojach trzecim, czwartym i siódmym. Zatem dla  $\lambda \leq 1.06$  żaden mechanizm nie wchodzi w skład pola obrotów plastycznych, natomiast dla  $\lambda = 1.146$  istnieje już taki mechanizm, lecz stanowi on jedynie 0,8% całkowitej dysypowanej energii.

Wartości obrotów plastycznych w funkcji liczby cykli obciążeń  $c$  przedstawiono na rysunku 3.17. Dodatkowo na rysunku 3.18 pokazano wartości ugięć trwałych punktu pierwszego rusztu po każdym cyklu  $c$  obciążeń zmiennych. Na podstawie rysunku 3.17 widać wyraźnie, że zasadnicza część energii plastycznej dysypuje się na pierwszym cyklu obciążenia, w szczególności dla dużej wartości mnożnika obciążenia  $\lambda$ . I tak dla  $\lambda = \lambda_1$ ,



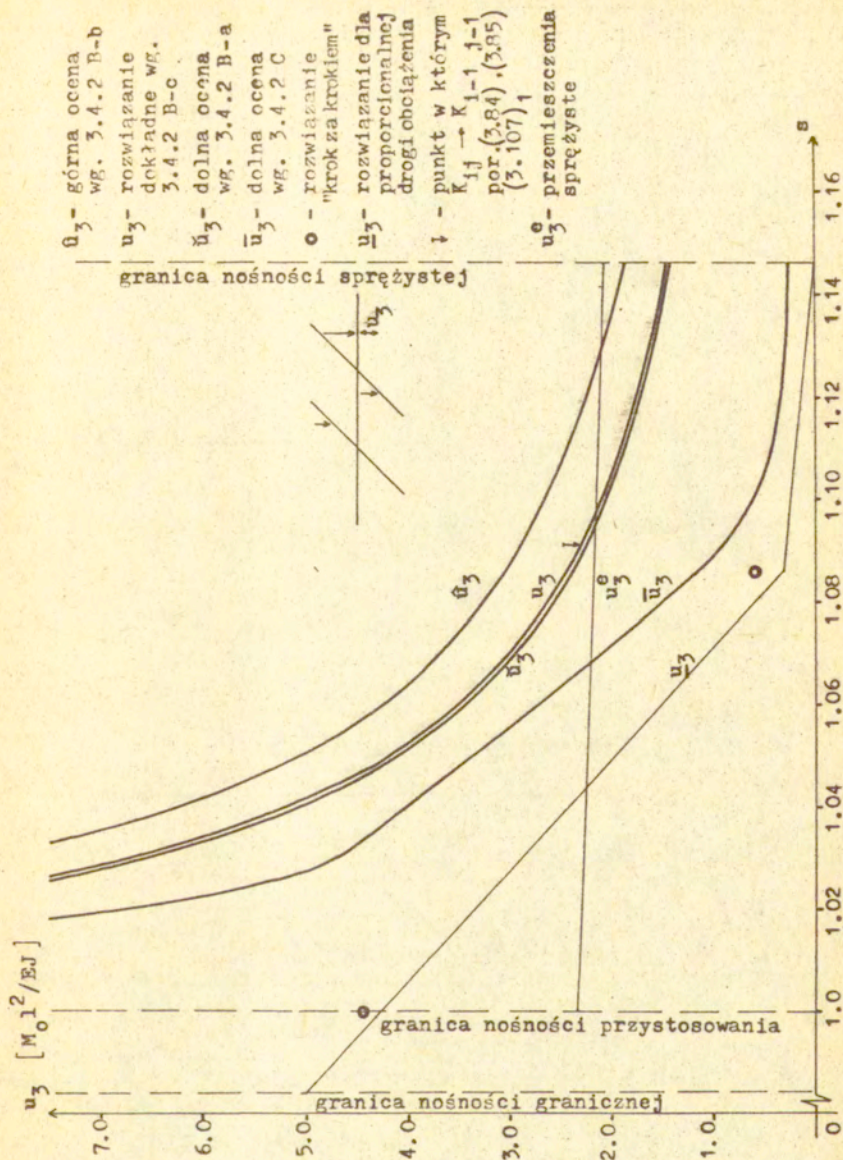


Rys. 3.13

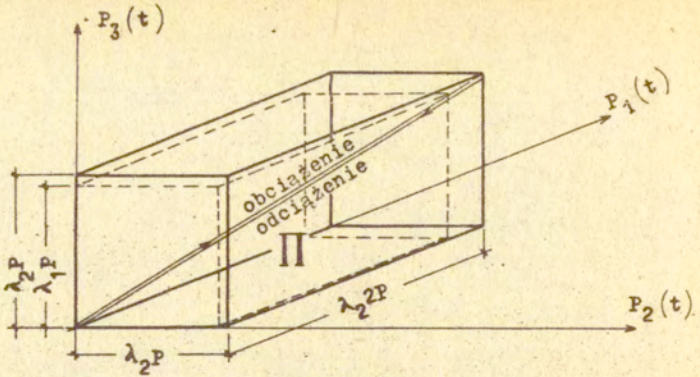


Rys. 3.14

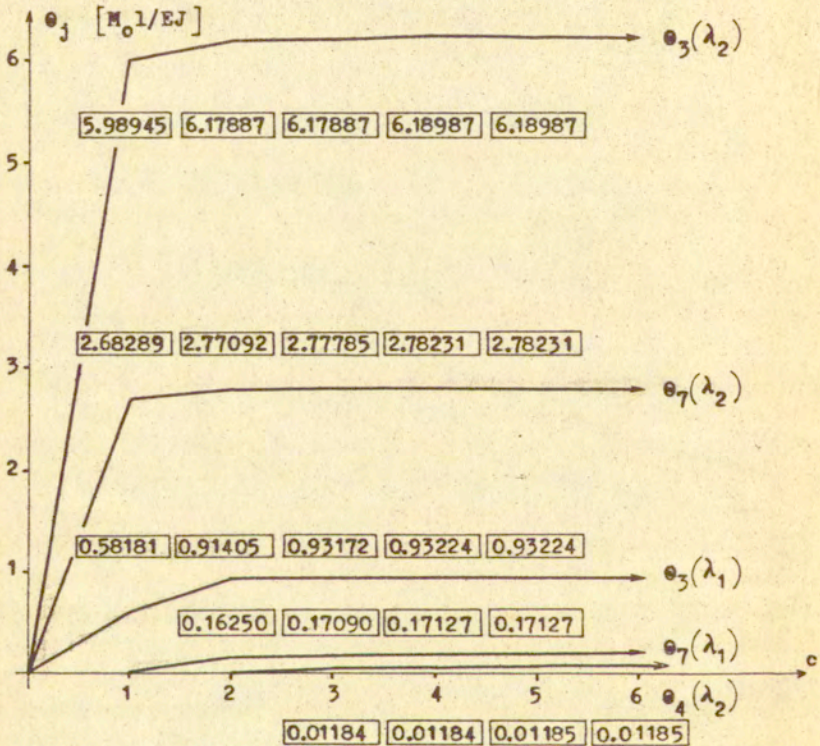




Rys. 3.15



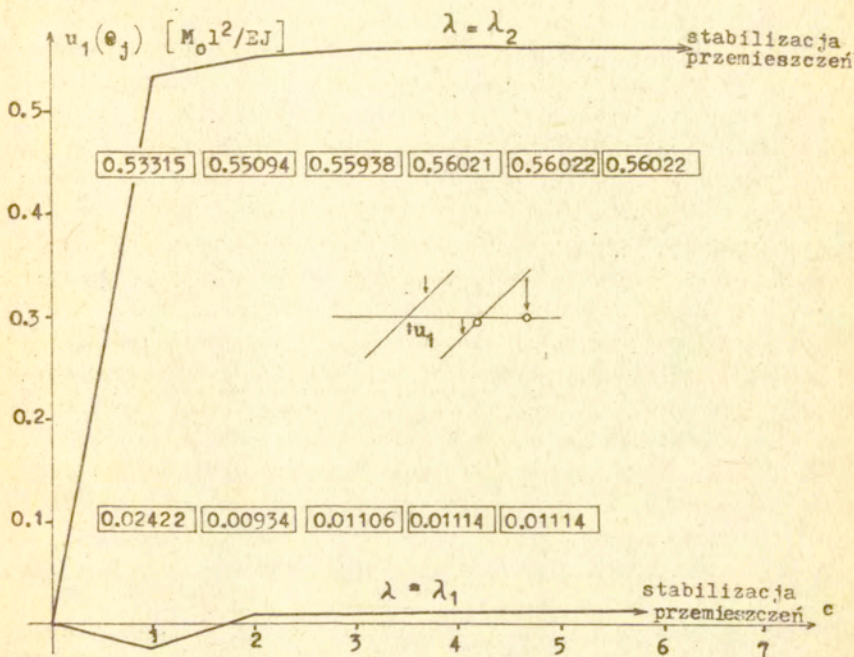
Rys. 3.16



Rys. 3.17



po pierwszym cyklu dysypuje się 52.7% całkowitej energii plastycznej, natomiast dla  $\lambda = \lambda_2$  po pierwszym cyklu dysypuje



Rys. 3.18

się aż 96.5% całkowitej energii plastycznej. Fakt powyższy znajduje również potwierdzenie w badaniach eksperymentalnych, por. rys. 3.26 oraz [43], [51], [201]. Z rys. 3.18 widać również, że przystosowanie zachodzi już po czterech ( $\lambda_1$ ) lub po pięciu ( $\lambda_2$ ) cyklach obciążeń dla sprecyzowanej zgodnie z rysunkiem 3.16 drogi obciążenia. Wartości przemieszczeń po stabilizacji naniesiono w postaci dwóch punktów na wykresach na rysunkach 3.13, 3.14, 3.15, odpowiednio dla przekroi pierwszego, drugiego i trzeciego. Korzystano przy tym z macierzy  $U_{1j}$ , por. (3.114). Na podstawie otrzymanych pól  $\theta_j$ , łatwo jest przy pomocy macierzy  $K_{1j}$  skonstruować pola resztkowe  $M_j^R(\theta_j)$ , które różnią się na kolejnych

początkowych cyklach obciążenia aż do chwili stabilizacji przemieszczeń trwałych /do chwili utworzenia się określonego pola obrotów  $\Theta_j^n$ /, por. [196]. Dodatkowa analiza pól momentów reszkowego  $M_j^r$  oraz idealnie sprężystego  $M_j^e$  wykazała, że pole reszkowe powstałe wskutek globalnego obciążenia według ścieżki z rysunku 3.16 nie powoduje w dalszym ciągu odkształceń plastycznych dla każdej innej kombinacji obciążeń zewnętrznych. Odciążanie nie powoduje również w żadnym przypadku naruszenia warunku plastyczności. Okazało się również, że drogi obciążenia w kierunku pozostałych wierzchołków obszaru  $\Pi$  /rys. 3.16/ spowodować mogą obroty plastyczne jedynie w przekrojach trzecim, czwartym i siódmym. Zatem pole  $\Theta_j = \Theta_j^n + \Theta_j^m$  jakie przyjęto wcześniej dla uzyskania dolnej oceny rozwiązania problemu programowania liniowego jest zarazem polem obrotów plastycznych jakie mogą się praktycznie zrealizować. Oczywiście w przypadku większej i bardziej złożonej konstrukcji praktycznie niemożliwym jest określenie przekrojów, w których mogą zachodzić obroty plastyczne. Poza tym przypadkiem jest, że w rozważanym przykładzie mogą to być jedynie obroty  $\Theta_3$ ,  $\Theta_4$ ,  $\Theta_7$ . Ogólnie zależnie od drogi obciążenia będą to za każdym razem inne pola.

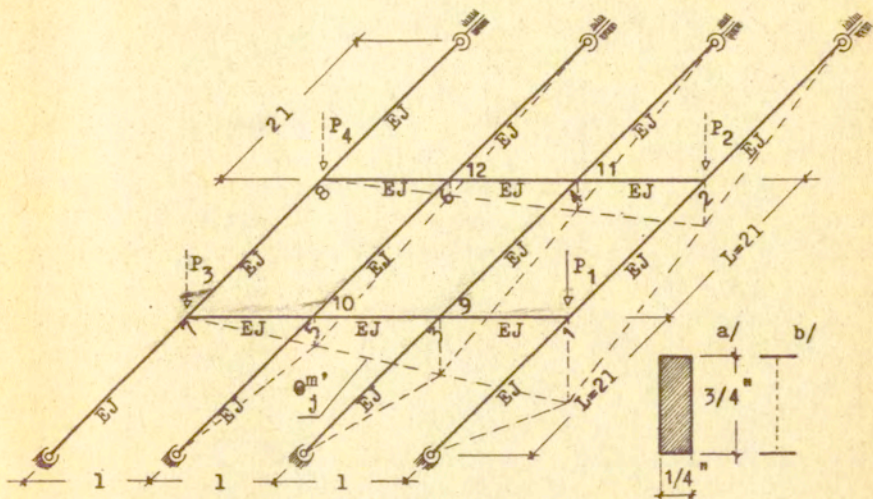
Celem określenia wpływu cykliczności obciążeń na wartość przemieszczeń trwałych poszukano rozwiązania dla proporcjonalnej wzrastającej drogi obciążenia, biorąc również do obliczeń obciążenie globalne  $-P_1 + P_2 + P_3$ , rys. 3.16. Wyniki przedstawiono na rysunkach 3.13, 3.14, 3.15. Jak widać przemieszczenia te są tylko nieznacznie mniejsze od analogicznych przemieszczeń, lecz powstałych na skutek kilkakrotnego przyłożenia tych samych obciążeń. Zaznaczono również wartości przemieszczeń sprężystych  $u_1^e$ , które jak widać są tego samego rzędu co przemieszczenia trwałe nawet dla niewielkich wartości współczynnika bezpieczeństwa  $s$ .

#### 3.4.4 Przykład 2 - Ocena ugięć rusztu płaskiego typu mostowego

Rozważa się ruszt wykonany z prętów o jednakowych sztywnościach  $EI$  i jednakowym momencie granicznym  $M_0$  - rys. 3.19.



Zakłada się dodatkowo, że węzły rusztu nie są połączone w



Rys. 3.19

sposób sztywny, to znaczy nie uwzględnia się momentów skręcających. Obciążenie zewnętrzne przykładane jest w czterech węzłach rusztu 1,2,7,8 w postaci sił skupionych. Zakres zmian tych obciążeń określa układ nierówności :

$$(3.115) \quad \begin{aligned} 0 &\leq P_1(t) \leq \lambda P & , \\ 0 &\leq P_2(t) \leq \lambda P & , \\ 0 &\leq P_3(t) \leq \lambda P & , \\ 0 &\leq P_4(t) \leq \lambda P & , \end{aligned}$$

gdzie górne granice tych zmian dane są z dokładnością do wspólnego mnożnika  $\lambda$ . Przyjmuje się dodatkowo, że obciążenia nie zmieniają się zupełnie dowolnie, to znaczy przykładane są pojedynczo w węzłach rusztu, por. rys. 3.19. Wartości

mnożników obciążenia dla nośności sprężystej, przystosowania i granicznej, wynoszą tu odpowiednio :

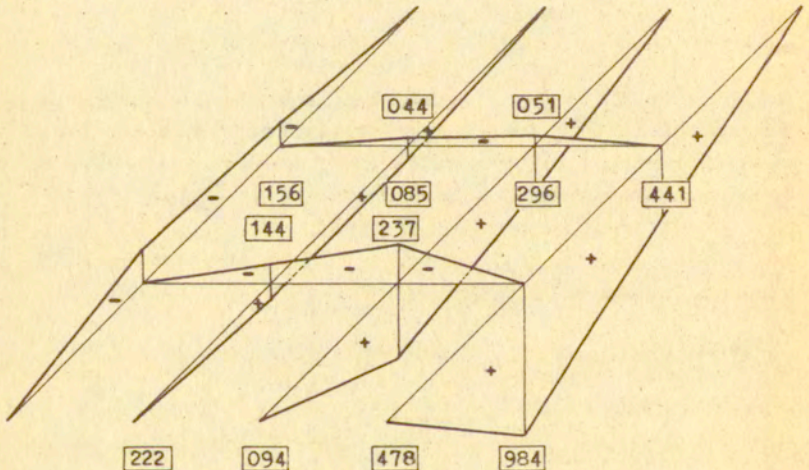
$$(3.116) \lambda_e = 1.0167(0.6778) < \lambda_s = 1.3686(1.1062) < \lambda_1 = 1.5000 \quad , \quad \left[ \frac{M_0}{P_1} \right]$$

gdzie wartość w pierwszym nawiasie dotyczy przekroju prostokątnego, a wartość w nawiasie drugim jest mnożnikiem dla naprzemiennej plastyczności  $\lambda_s^a$  dla tegoż przekroju.

Omawiany ruszt - rys. 3.19 - rozważany był w pracy Spencera z 1976 roku [201] . Oblicza się tam nośność przystosowania oraz graniczną i przeprowadza badania eksperymentalne. Ograniczymy się tutaj zatem do obliczeń przemieszczeń.

Pole momentów zginających od siły  $P_1$  przyłożonej w punkcie pierwszym, przedstawiono na rysunku 3.20

$$M^e(P_1) \quad [ \lambda P_1 / 10^3 ]$$



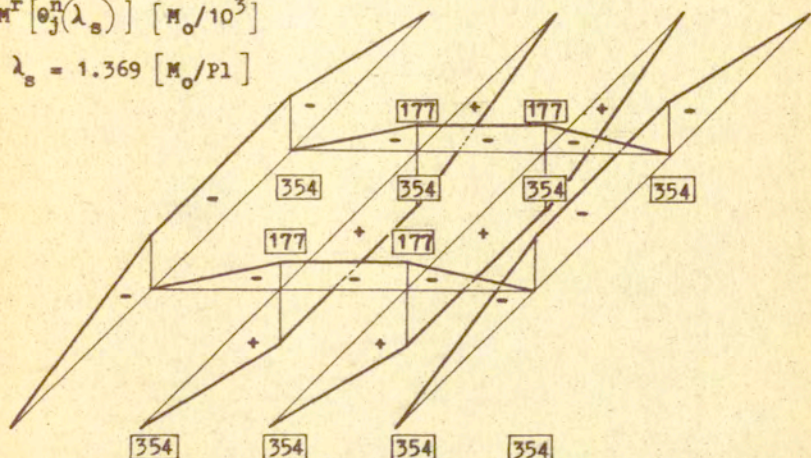
Rys. 3.20



Natomiast pole momentów resztkowych dla  $\lambda = \lambda_s$  pokazano na rysunku 3.21. Macierz  $U_{ij}$  dla rozważanego rusztu umieszczono na stronie 108. Na rysunku 3.19 zaznaczono również schemat kinematyczny, dla którego otrzymać można na podstawie metody kinematycznej wartość  $\lambda = \lambda_s$ .

$$M^r [\theta_j^n(\lambda_s)] [M_o/10^3]$$

$$\lambda_s = 1.369 [M_o/Pl]$$



Rys. 3.21

A/ Rozwiązanie w oparciu o punkt 3.4.2 - B pracy

Górną ocenę przemieszczeń  $\hat{u}_1$ , por. (3.91), dla przekroju pierwszego rusztu - rys.3.19, dostaniemy natychmiast wiedząc, że w naszym przypadku

$$(3.117) \quad K = 0.4245 \frac{s}{s-1} \frac{M_o^2 L}{EJ}$$

oraz, że element pierwszy wiersza pierwszej macierzy  $U_{ij}$  (str 108) jest większy od każdego pozostałego elementu tegoż wiersza. Stąd

$$(3.118) \quad \hat{u}_1 = U_{11} \theta_1 = 0.2102 \frac{s}{s-1} \frac{M_o L^2}{EJ}$$

-49521	-21987	-23607	-14811	-04224	-04417	+10685	+07882	+11472	+06744	+02774	+02540
-21987	-49521	-14811	-23607	-04417	-04224	+07882	+10685	+02774	+02540	+11472	+06744
-23607	-14811	-23677	-08128	-15159	-05977	-04224	-04417	-16201	-02015	-03008	-02305
-14811	-23607	-08128	-23677	-05977	-15159	-04417	-04224	-03008	-02305	-16201	-02015
-04224	-04417	-15159	-05977	-23677	-08128	-23607	-14811	-02015	-16201	-02305	-03008
-04417	-04224	-05977	-15159	-08128	-23677	-14811	-23607	-02305	-03008	-02015	-16201
+10685	+07882	-04224	-04417	-23607	-14811	-49521	-21987	+06744	+11472	+02540	+02774
+07882	+10685	-04417	-04224	-14811	-23607	-21987	-49521	+02540	+02774	+06744	+11472

[v] =

Uwaga : Wartości elementów macierzy [U] należy przemnożyć przez  $1/10^5$



Wielkości tak obliczonych przemieszczeń przekroju pierwszego rusztu dla różnych wartości współczynnika bezpieczeństwa  $s$  naniesiono na rysunku 3.23.

Przejdźmy teraz do określenia dolnej oceny  $\check{u}_1$  rozwiązania ściśłego problemu (3.79). Potrzebną do tego celu macierz  $K_{1j}$  przedstawiono na stronie 110. Jak widać jest to macierz symetryczna, a wyznacznik jej równy jest zero. Podobnie jak w poprzednim przykładzie przyjąć należy postacie pól  $\Theta_j^n$  oraz  $\Theta_j^m$ . Niech będą one następujące, por. rys. 3.23 a/ :

$$(3.119) \quad \Theta_j^n = \begin{bmatrix} \Theta_1^n & \Theta_2^n & 0 & 0 & 0 & 0 & \Theta_7^n & \Theta_8^n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Theta_j^m = \begin{bmatrix} \Theta_1^m & \Theta_2^m & \Theta_3^m & \Theta_4^m & \Theta_5^m & \Theta_6^m & \Theta_7^m & \Theta_8^m & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jak widać wektor  $\Theta_j^n$  ma cztery składowe niezerowe, gdyż rozważany ruszt jest czterokrotnie statycznie niewyznaczalny. Biorąc w dalszym ciągu pod uwagę te ograniczenia z (3.82), które dotyczą przekroi 1,2,7,8, otrzymamy zależność (3.83), która w naszym wypadku wygląda :

$$(3.120) \quad \begin{bmatrix} 0.9836 \\ 0.9836 \\ 0.9836 \\ 0.9836 \end{bmatrix} \lambda P_1 + \begin{bmatrix} -3449 & 0030 & -1955 & -0273 \\ 0030 & 3449 & -0273 & -1955 \\ -1955 & -0273 & -3449 & 0030 \\ -0273 & -1955 & 0030 & -3449 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_1^n \\ \Theta_2^n \\ \Theta_7^n \\ \Theta_8^n \end{bmatrix} \frac{EJ}{10^4 L} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} M_0.$$

Stąd wektor  $\Theta_j^n$  wyniesie, por. (3.84):

$$(3.121) \quad \begin{bmatrix} \Theta_1^n \\ \Theta_2^n \\ \Theta_7^n \\ \Theta_8^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.4167 & -0.6667 & 2.5625 & 0.7500 \\ -0.6667 & -4.4167 & 0.7500 & 2.5625 \\ 2.5625 & 0.7500 & -4.4167 & -0.6667 \\ 0.7500 & 2.5625 & -0.6667 & -4.4167 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \lambda \\ 1 - \lambda \\ 1 - \lambda \\ 1 - \lambda \end{bmatrix} \frac{M_0 L}{EJ}$$

-34493	+00302	+49437	-03336	+04605	+05765	-19549	-02731	-34644	-18183	+17549	+07043
+00302	-34493	-03336	+49437	+05765	+04605	-02731	-19549	+17549	+07043	-34644	-18183
+49437	-03336	-94270	+12436	+40228	-14865	+04605	+05765	+51105	+01723	-28054	+03462
-03336	+49437	+12436	-94270	-14865	+40228	+05765	+04605	-28054	+03462	+51105	+01723
+04605	+05765	+40228	-14865	-94270	+12436	+49437	-03336	+01723	+51105	+03462	-28054
+05765	+04605	-14865	+40228	+12436	-94270	-03336	+49437	+03462	-28054	+01723	+51105
-19549	-02731	+04605	+05765	+49437	-03336	-34493	+00302	-18183	-34644	+07043	+17549
-02731	-19549	+05765	+04605	-03336	+49437	+00302	-34493	+07043	+17549	-18183	-34644
-34644	+17549	+51105	-28054	+01723	+03462	-18183	+07043	-43418	-21705	+34871	+16135
-18183	+07043	+01722	+03462	+51105	-28054	-34644	+17549	-21705	-43418	+16135	+34871
+17549	-34644	-28054	+51105	+03462	+01722	+07043	-18183	+34871	+16135	-43418	-21705
+07043	-18183	+03462	+01723	-28054	+51105	+17549	-34644	+16135	+34871	-21705	-43418

[K]=

<http://rcin.org.pl>

Uwaga : wartości elementów macierzy [K] należy pomnożyć przez  $\frac{EJ}{L \cdot 10^5}$





Przedstawiono je na rysunku 3.23. Podano tam również przemieszczenia sprężyste  $u_1^e$  rozważanego rusztu. Wykorzystując związek (3.93) poszukano następnie rozwiązania przybliżonego  $\tilde{u}_1$  pomijając przy tym człon  $u_1^n$ , który szczególnie dla niewielkich wartości współczynnika bezpieczeństwa stanowi niewielki procent przemieszczeń zgodnych  $u_1^m$ . Program "b" obliczeń wartości  $\tilde{u}_1 \approx u_1^m$  zamieszczono w dodatku A. Linie programu 000 - 390 odpowiadają kolejnym wektorom mechanizmów  $\Theta_j^m$ , których jest w tym przypadku czternaście. Wartości tak otrzymanych przemieszczeń  $\tilde{u}_1$  naniesiono na rysunku 3.23.

B/ Rozwiązanie w oparciu o punkt

3.4.2 - C pracy

Biorąc pod uwagę wykresy momentów zginających  $M^e$  oraz  $M^r$  rys. 3.20, 3.21 przyjmijmy następujące wartości funkcji  $\bar{\gamma}(x)$

$$(3.128) \quad \begin{aligned} \bar{\gamma}(x) &= 1 && \text{dla przekrojów } x=j=1,2,7,8, \\ \bar{\gamma}(x) &= 0 && \text{dla przekrojów } x=j=3,4,5,6, \\ & && 9,10,11,12. \end{aligned}$$

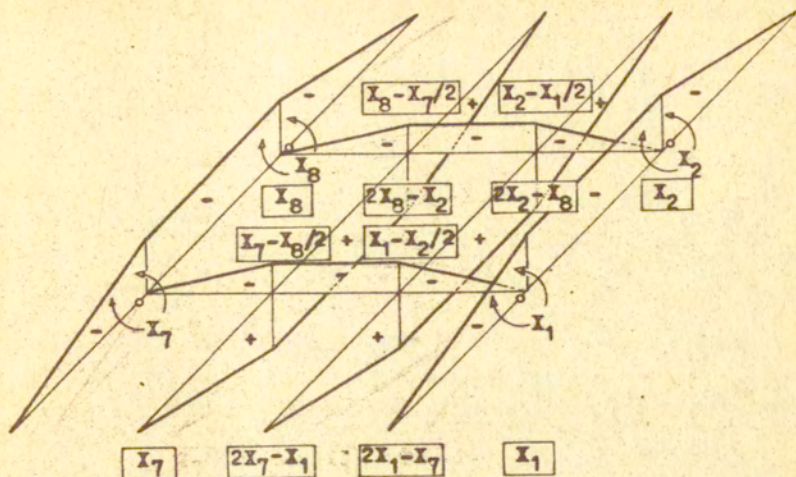
oraz pola  $\Theta_j^n$ ,  $\Theta_j^m$  takie jak w (3.119).

Wówczas pole momentu resztkowego  $M_j^r(x_1, x_2, x_3, x_4)$  wyglądać będzie jak na rysunku 3.22.

Potrzebne równania dostaniemy pisząc warunek plastyczności (3.94), (3.95) dla przekrojów 1,2,...,8. Wyglądają one następująco:

$$(3.129) \quad \begin{aligned} (-X_1 + 0.9836 \lambda P l) (1 + \omega) &= M_{o1}, && i=1,2,7,8, \\ (2X_1 - X_7 + 0.4777 \lambda P l) (1 + 0) &= M_{o3}, \\ (2X_2 - X_8 + 0.4777 \lambda P l) (1 + 0) &= M_{o4}, \\ 2X_7 - X_1 + 0.4777 \lambda P l) (1 + 0) &= M_{o5}, \\ (2X_8 - X_2 + 0.4777 \lambda P l) (1 + 0) &= M_{o6}. \end{aligned}$$





Rys. 3.22

i wynika z nich, że  $X_1 = X_2 = \dots = X_8 = X$ . Pozostałe warunki (3.95) będą spełnione dla obliczanych wartości  $X, \omega$ .  
Wiedząc, że :

$$(3.130) \quad \int_1 \frac{[M^r(X_i)]^2}{2EJ} dl = \frac{85}{24} X^2 \frac{L}{EJ} \quad , i=1,2,7,8$$

oraz ,

$$(3.131) \quad \Theta_1^n = \frac{85}{48} X \frac{L}{EJ} \quad , i=1,2,7,8,$$

po wprowadzeniu wielkości bezwymiarowych z (3.94) ÷ (3.96) dostaniemy :

$$(3.132) \quad \begin{aligned} (-x + \lambda)(1 + \omega) &= 1 \quad , \\ [x + (0.4777/0.9836)\lambda] &= 1 \quad , \end{aligned}$$

$$4(-x + \lambda) \left( \frac{85}{48} \frac{xL}{EJ} + \Theta^m \right) \omega = \frac{85}{24} x^2 \frac{L}{EJ} \quad ,$$

gdzie :  $x = X / M_0$ , a wektor  $\Theta_j^m$  - rys. 3.23 a/ określono z dokładnością do obrotu plastycznego  $\Theta^m$ . Rozwiązując układ równań (3.132) dostaniemy:

$$(3.133) \quad x = 1 - \frac{0.4777}{0.9836} \lambda, \quad \omega = \frac{1}{\frac{0.4777 + 0.9836}{0.9836} \lambda - 1},$$

$$\Theta^m = \frac{85}{96} \left[ \frac{1 - \left( \frac{0.4777}{0.9836} \lambda \right)^2}{2 - \frac{0.4777 + 0.9836}{0.9836} \lambda} - 2 \left( 1 - \frac{0.4777}{0.9836} \lambda \right) \right] \frac{M_0 L}{EJ}$$

przy czym należy zaznaczyć, że otrzymane wartości są ważne dla  $\lambda > \lambda^{n-m}$ , to znaczy gdy w skład pola  $\Theta_j^m$  wchodzi mechanizm  $\Theta_j^m$ . Dla przypadku gdy  $\lambda \leq \lambda^{n-m}$  ( $\Theta^m = 0$ ) po odrzuceniu równania (3.132)<sub>2</sub> dostaniemy:

$$(3.134) \quad x = 2(\lambda - 1), \quad \omega = \frac{1 - \lambda}{\lambda - 2}$$

Wartość  $\lambda^{n-m}$  wyznaczyć można kładąc  $\Theta^m = 0$  i rozwiązując układ (3.132). Otrzymamy wówczas

$$(3.135) \quad \lambda^{n-m} = 1.2069$$

Podstawiając natomiast  $\omega = 0$  otrzymać można z (3.132)<sub>1,2</sub> wartość mnożnika przystosowania,

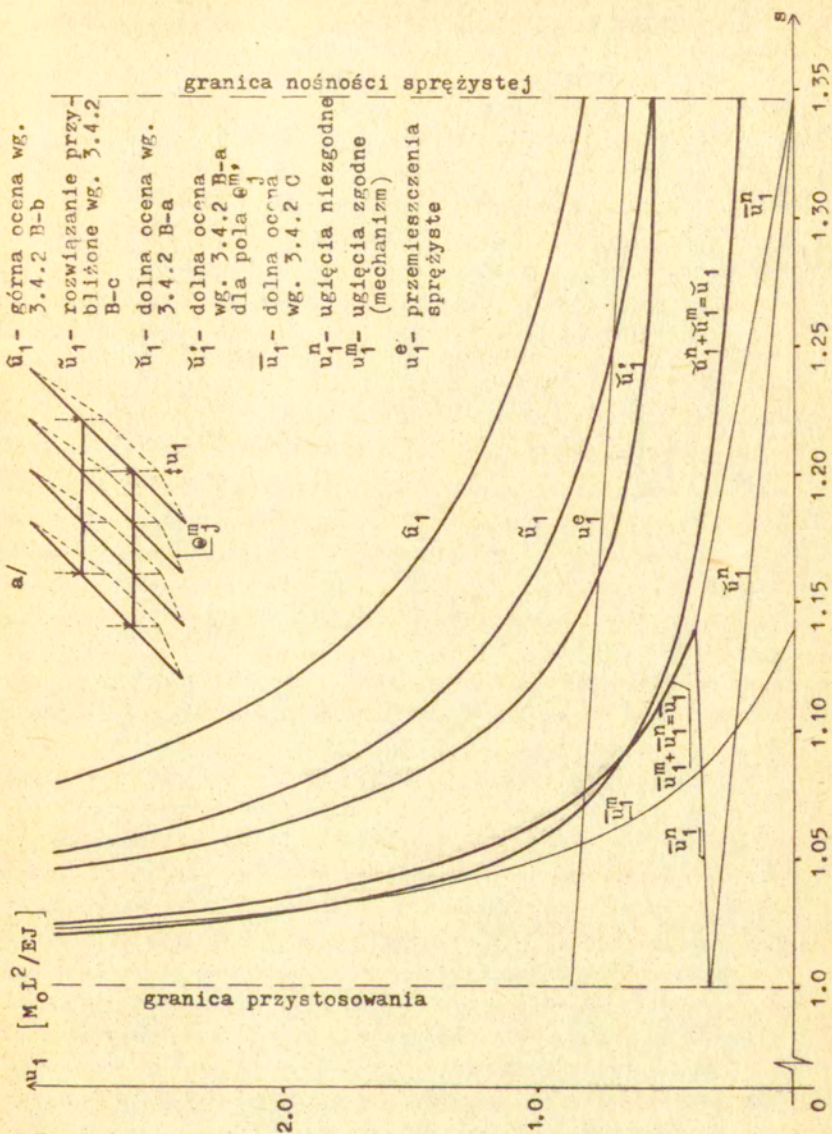
$$(3.136) \quad \lambda_s = 1.3462$$

Korzystając z wyznaczonych wartości  $x$  oraz (3.131) można już obliczyć wartości przemieszczeń trwałych  $\bar{u}_i$ , które wyniosą

$$(3.137) \quad \bar{u}_i = \bar{u}_i^n + \bar{u}_i^m = U_{ij}^n \Theta_j^n(\lambda) + U_{ij}^m \Theta_j^m(\lambda)$$

Tak obliczone wartości przemieszczeń naniesiono na wykresie na rysunku 3.23. Jak widać, różnica pomiędzy przemieszczeniami  $\bar{u}_i$  oraz  $\check{u}_i$  jest tutaj mniejsza niż w poprzednim przykładzie, por. rys. 3.13, 3.14, 3.15.





- $u_1$  - górna ocena wg. 3.4.2 B-b
- $u_1$  - rozwiązanie przybliżone wg. 3.4.2 B-c
- $u_1$  - dolna ocena wg. 3.4.2 B-a
- $u_1$  - dolna ocena wg. 3.4.2 B-a dla pola  $e_j^m$
- $u_1$  - dolna ocena wg. 3.4.2 C
- $u_1^n$  - ugięcia niezgodne
- $u_1^m$  - ugięcia zgodne (mechanizm)
- $u_1^e$  - przemieszczenia sprężyste

Rys. 3.23

### 3.5 Porównanie teoretycznej oceny przemieszczeń przystosowania z wynikami eksperymentalnymi

Celem dokonania takiego porównania posłużono się wynikami eksperymentu przeprowadzonego przez Spencera w Australii. W pracy [201], z której zaczerpnięto wyniki przedstawiona jest analiza przystosowania oraz nośności granicznej dla grupy rusztów o regularnej prostokątnej siatce prętów. Praca zawiera również bogaty materiał eksperymentalny dotyczący przemieszczeń i ich stabilizacji w procesie obciążeń zmiennych. W pracy tej nie podaje się natomiast metody pozwalającej określić wielkość tych przemieszczeń po procesie przystosowania.

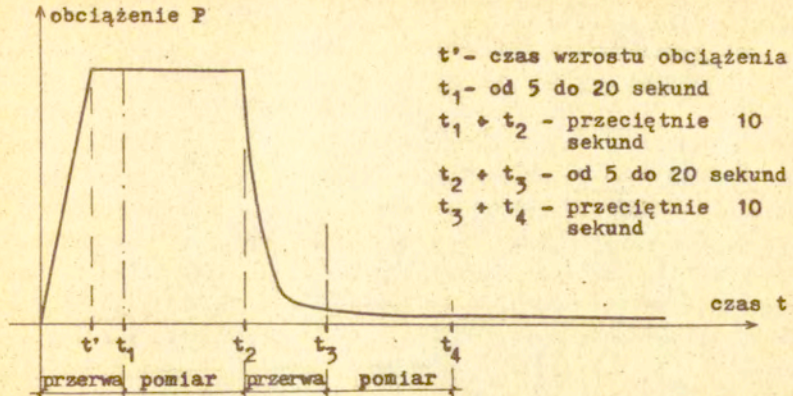
#### 3.5.1 Opis eksperymentu

Do eksperymentu zaprojektowano specjalną aparaturę pozwalającą na cykliczne przykładanie obciążenia według przyjętego programu oraz na ciągłe nagrywanie wartości przemieszczeń w czasie i po obciążeniu. Zmienność obciążenia oraz przykładanie jego w kolejnych węzłach modelowego rusztu uzyskano dzięki urządzeniu hydraulicznemu z dystrybutorom ciśnienia. W ten sposób jeden cykl obciążenia realizowano poprzez przyłożenie i zdjęcie obciążenia w kolejnych punktach 1,2,7 oraz 8 rusztu - rys. 3.19. Zależnie od wymagań ilość takich cykli mogła być dowolna dla danej amplitudy obciążenia. Przeprowadzane to było pod kontrolą minikomputera. Przed testem na zniszczenie przyrostowe /"incremental collapse"/ ruszty poddawano wcześniej obciążeniom cyklicznym w zakresie sprężystym, celem sprawdzenia poprawności funkcjonowania całego systemu w tym m.in. sprawdzenia poziomu przyłożonego obciążenia, wielkości ugięć sprężystych, wielkości odkształceń zdjętych z tensometrów e.t.c. Sekwencje obciążeń zmiennych przykładano w taki sposób, aby zachować ich statyczny charakter. Przedstawiono to schematycznie na rys. 3.24. W ten sposób test zniszczenia przyrostowego trwał około 8 godzin.

Jak wspomniano wcześniej badania miały charakter modelowy. Ruszt z rys. 3.19 miał globalne wymiary 1200 x 600 mm tzh.

L = 400 mm. Pręty rusztu łączono w sposób mający zapewnić





Rys. 3.24

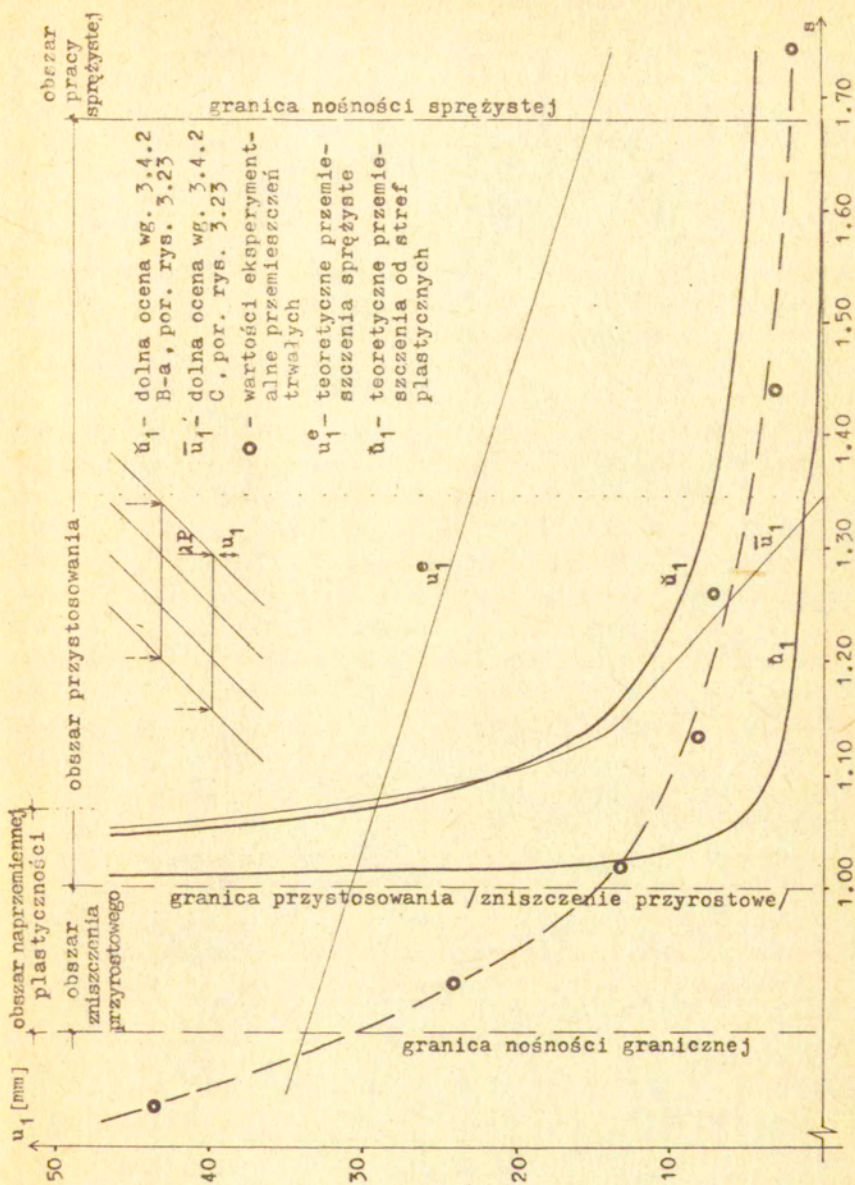
maksymalną eliminację momentu skręcającego. Przekrój prętów rusztu był prostokątny o wymiarach nominalnych  $3/4 \times 1/4$  cala, por. rys. 3.19 a/. Ruszt wykonany był ze stali miękkiej o dolnej granicy plastyczności  $\sigma_0 = 288 \text{ MPa}$ . Dane dotyczące materiału otrzymano z dodatkowego testu na rozciąganie przeprowadzonego zgodnie z normami australijskimi i poprzedzającego właściwy eksperyment. Obciążenie przystosowania otrzymane teoretycznie było bardzo bliskie wartościom eksperymentalnym /w rozważanym przypadku różnica rzędu 1%/. W przypadku eksperymentu pod kryterium przystosowania rozumiano stabilizację odkształceń trwałych. Należy też dodać, że w przypadku rozważanego rusztu stosunek mnożnika obciążenia  $\lambda_S^i$  związanego ze zniszczeniem przyrostowym do mnożnika  $\lambda_S^a$  związanego z naprzemienną plastycznością wynosi 1.24 /por. 3.116/ co oznacza teoretycznie, że zmęczenie niskocykliczne winno wystąpić przed zniszczeniem przyrostowym. W eksperymencie obserwowano jednak zawsze zniszczenie typu przyrostowego. Jest to spowodowane niską liczbą cykli obciążeń zastosowaną w eksperymencie, jak również innymi czynnikami, które omawia się dokładnie w pracy [201].

### 3.5.2 Porównanie wyników teoretycznych z eksperymentalnymi.

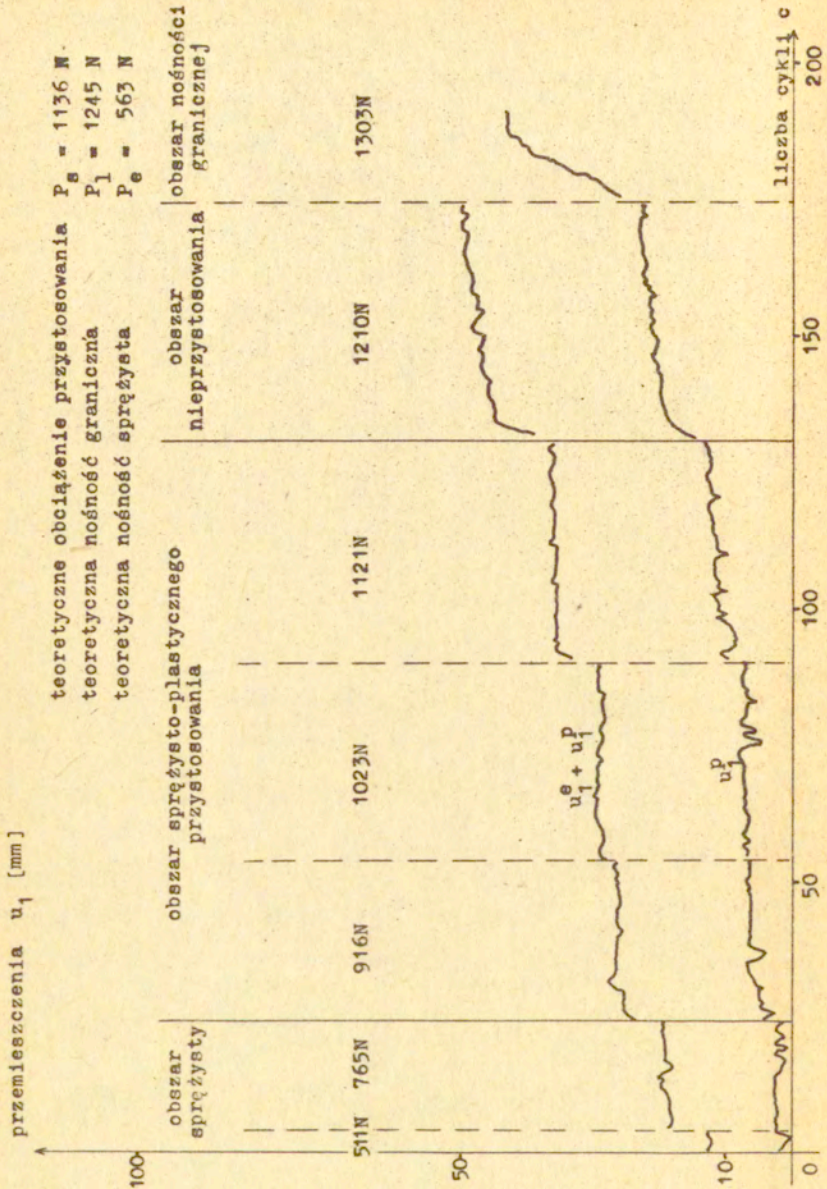
Obliczone wcześniej wartości teoretyczne przemieszczeń  $\bar{u}_1$  oraz  $\check{u}_1$  - rys. 3.23, przedstawiono na rys. 3.25. Wartości eksperymentalne  $u_1$  zaznaczono tutaj w postaci siedmiu punktów /siedem amplitud zmian obciążeń, por. rys. 3.26/ przez które poprowadzono krzywą aproksymującą. Zaznaczono również obszary sprężysty (linią kropkowaną dla przekroju idealnego, por. rys. 3.19 b/), przystosowania oraz nośności granicznej. Jak widać wartości teoretyczne przemieszczeń  $\check{u}_1$  leżą zawsze powyżej wartości eksperymentalnych, co nie ma miejsca w przypadku przemieszczeń  $\bar{u}_1$ , dla których to począwszy dopiero od wartości współczynnika bezpieczeństwa  $s \approx 1.26$  przewidywane ugięcia przewyższają wartości doświadczalne. Należy w tym miejscu szczególnie podkreślić, że zarówno wartości  $\check{u}_1$  jak i  $\bar{u}_1$  określono przy założeniu przekroju idealnego dwupunktowego, podczas gdy w eksperymencie pręty rusztu miały przekrój prostokątny (por. rys. 3.19 a/b/), zatem znacznie odbiegający od założonego. Również niedoskonałość aparatury sprawiła, że dla zakresu teoretycznie sprężystego w doświadczeniu otrzymano pewne ugięcia trwałe, por. rys. 3.26. Spowodowane to było m.in. szcążkowym obciążeniem związanym z niedoskonałością urządzeń t.zn. tarcie e.t.c. Szczegóły z tym związane omawia się w pracy [201].

Na rysunku 3.26 przedstawiono wielkość eksperymentalnych przemieszczeń trwałych oraz całkowitych w funkcji liczby cykli obciążenia. Począwszy od szóstego poziomu obciążenia (1210 N) zaobserwować tu można brak stabilizacji przemieszczeń trwałych, co sygnalizuje występowanie zniszczenia przyrostowego. Krzywe eksperymentalne charakteryzują skoki związane m.in. z niedoskonałością aparatury, co szczegółowo omawia się również w pracy [201].





Rys. 3.25



Rys. 3.26

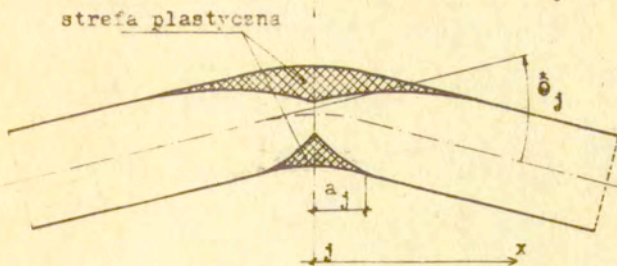


### 3.6 Uwagi na temat stref plastycznych

Założenie o koncentracji odkształceń plastycznych w określonych przekrojach konstrukcji prętowej znacznie upraszcza obliczanie przemieszczeń, może jednak dawać ich wartości mniejsze od rzeczywistych, por. rys. 3.25. Możliwe jest to szczególnie wtedy gdy mamy do czynienia z przekrojem prostokątnym, kołowym czy też innym znacznie odbiegającym kształtem od przekroju idealnego. Dlatego też w przypadkach takich poszukuje się metod, które pozwoliłyby uwzględnić fakt istnienia stref plastycznych w określonych obszarach konstrukcji.

Większość znanych metod szacowania przemieszczeń przystosowania słuszną jest w zasadzie jedynie dla konstrukcji o przekrojach idealnie warstwowych /sandwiczowych/. Metoda, która pozwala uwzględniać zmiany sztywności elementów konstrukcji wskutek powstawania i propagacji stref plastycznych jest zaproponowana przez St. Dorosza. Omówienie tej metody znaleźć można w pracy [43]. Są tam również rozwiązane przykłady dla belek jedno - i dwuprzęsłowych jak też podane wyniki badań eksperymentalnych. Pewne wyniki związane z tą metodą znaleźć można także w pracy [46]. W pracy [195] zastosowano tą metodę z tym, że dodatkowo obok momentu zginającego uwzględniono działanie momentu skręcającego w przekroju konstrukcji. Rozwiązano tam dwa przykłady - wspornika i rusztu.

W niniejszym punkcie chce się zwrócić uwagę na możliwość uproszczonego podejścia do zagadnienia stref plastycznych [47]. Idea podejścia polega na zastąpieniu strefy plastycznej powstałej po obu stronach  $j$ -ego przekroju krytycznego przez skupiony /zastępczy/ obrót plastyczny  $\delta_j$  - rys. 3.27



rys. 3.27  
<http://rcin.org.pl>

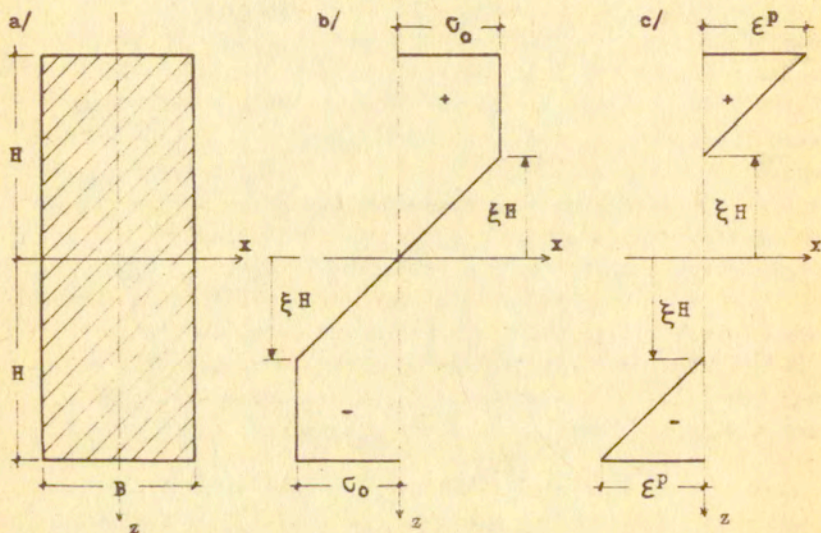
Zastąpienie strefy plastycznej obrotem skupionym prowadzi do określenia związku

$$(3.138) \quad \bar{\sigma}_j = \int_0^{a_x} \chi^T dx, \quad j=1,2,\dots,n,$$

gdzie  $\chi^T$  jest krzywizną trwałą pręta będącą funkcją momentu zginającego  $M$ , natomiast  $a_x$  zasięgiem strefy plastycznej. Poszukujemy związku (3.138) dla przykładowo przekroju prostokątnego. Wprowadzimy w tym celu oznaczenia jak na rysunku 3.28. W oparciu o nie łatwo zauważyć, że wartość momentu sprężysto-plastycznego /rys. 3.28b/ wyniesie

$$(3.139) \quad M = \sigma_0 B H^2 (1 - \xi^2/3), \quad \text{dla } |M| \geq \frac{2}{3} M_0,$$

gdzie  $\sigma_0$  jest granicą plastyczności,  $M_0$  momentem granicznym,



Rys.3.28

natomiast krzywizna osi pręta  $\chi$  równać się będzie

$$(3.140) \quad \chi = \frac{\epsilon_1}{\xi H} = \frac{\sigma_0}{E \xi H}$$



gdzie  $\varepsilon_1$  jest odkształceniem na granicy strefy sprężysto-plastycznej /na wysokości  $\xi_H$  /, a  $E$  modułem Younga. Stąd odkształcenia  $\varepsilon(z)$  oraz naprężenia  $\sigma(z)$  w funkcji wysokości przekroju wyniosą

$$(3.141) \quad \varepsilon(z) = \varepsilon^e(z) + \varepsilon^p(z) = \chi \cdot z = z \frac{\sigma_0}{\xi E H}$$

gdzie wskaźniki "e", "p" oznaczają "sprężyste" i "plastyczne" oraz

$$(3.142) \quad \sigma(z) = \begin{cases} \sigma_0 & \xi_H \leq z \leq H \\ \sigma_0 \frac{z}{\xi_H} & \text{dla } -\xi_H \leq z \leq \xi_H \\ \sigma_0 & -H \leq z \leq -\xi_H \end{cases}$$

Stąd wartość odkształceń plastycznych  $\varepsilon^p(z)$  obliczyć można następująco

$$(3.143) \quad \varepsilon^p = \varepsilon - \varepsilon^e = \varepsilon - \frac{\sigma(z)}{E} = \begin{cases} \frac{\sigma_0}{E} \left( \frac{z}{\xi_H} - 1 \right) & \xi_H \leq z \leq H \\ 0 & \text{dla } -\xi_H \leq z \leq \xi_H \\ \frac{\sigma_0}{E} \left( \frac{z}{\xi_H} + 1 \right) & -H \leq z \leq -\xi_H \end{cases}$$

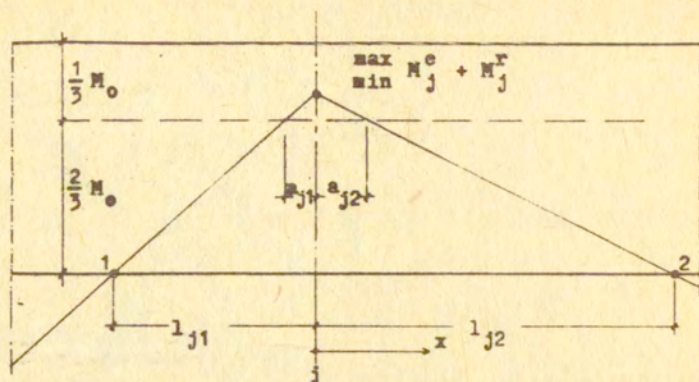
a interesująca nas wartość krzywizny  $\chi^T$  wyniesie

$$(3.144) \quad \chi^T = \chi - \chi^e = \frac{\sigma_0}{\xi E H} - \frac{M}{EJ} = \frac{M_0}{EJ} \left( \frac{2}{3\sqrt{3} - 3m} - m \right)$$

gdzie  $m = M/M_0$  jest bezwymiarowym momentem zginającym, a  $J$  momentem bezwładności wynoszącym w naszym przypadku  $J = (2/3) \cdot BH^3$ , rys. 3.28 a/. Ostatecznie plastyczny obrót zastępczy  $\hat{\theta}_j$  w przekroju  $j$  obliczony zgodnie z definicją (3.138) wyniesie

$$(3.145) \quad \hat{\theta}_j = \int_0^{a_j} \chi^T dx = \left( \frac{2}{3m_j} - \frac{m_j}{2} - \frac{4\sqrt{1-m_j}}{3\sqrt{3}m_j} \right) \frac{M_0 l_j}{EJ}$$

przy czym  $l_j$  jest długością pręta pomiędzy  $j$ -tym przekrojem krytycznym a punktem, w którym wartość momentu zginającego  $m_j$  wynosi zero, por. rys. 3.29. Wartość  $a_j$  określa długość



Rys. 3.29

/zasięg/ strefy plastycznej w pręcie. Związek (3.145) otrzymać można w podobny sposób dla innych kształtów przekrojów konstrukcji. Posługiwać się przy tym można również kryterium energetycznym, to znaczy skorzystać w miejsce (3.138) z zależności następującej, [42] :

$$(3.146) \quad M_0 \ddot{\Theta}_j = \dot{K}_j, \quad j=1,2,\dots,n,$$

gdzie  $\dot{K}_j$  jest energią dysypowaną w j-tej strefie plastycznej. Okazuje się, że korzystanie z kryterium (3.138) bądź też (3.146) nie prowadzi do znacznie większych rozbieżności. W dalszej części pracy korzystać będziemy z zależności (3.146) oraz (3.147) otrzymanej w pracy [43] na wartość energii  $\dot{K}_j$  dysypowanej w j-tej strefie plastycznej pręta o przekroju prostokątnym. Energia ta wyraża się zależnością

$$(3.147) \quad \dot{K}_j = \frac{s}{s-1} \left[ \frac{2}{3} - \frac{40}{81m_j} - \frac{1}{6}m_j^2 + \frac{8(1-m_j)^{3/2}}{3 \cdot 5/2 m_j} \right] \frac{M_0 l_j^2}{EJ}, \quad j=1,2,\dots,n.$$

Stąd poprzez związek (3.146) można wyznaczyć zastępczy obrót



plastyczny  $\bar{\theta}_j$  .

Poszukajmy przemieszczeń pochodzących od zastępczych obrotów plastycznych  $\bar{\theta}_j$  dla rusztu z przykładu drugiego /rys.3.19/, korzystając przy tym z macierzy  $U_{ij}$  i związku

$$(3.148) \quad \bar{u}_i = U_{ij} \bar{\theta}_j, \quad i = 1, 2, \dots, p, \\ j = 1, 2, \dots, n$$

Rozbijmy podobnie jak w przypadku idealnych przegubów plastycznych pole  $\bar{\theta}_j$  na zgodne  $\bar{\theta}_j^m$  oraz niezgodne  $\bar{\theta}_j^n$  . To znaczy niech

$$(3.149) \quad \bar{\theta}_j = \bar{\theta}_j^n + \bar{\theta}_j^m, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Wówczas korzystając z (3.146) oraz wiedząc, że elementy macierzy  $K_{ij}$  :  $K_{11}$ ,  $K_{71}$ ,  $K_{81}$  są ujemne, a  $K_{21}$  bliski zeru możemy zapisać

$$(3.150) \quad \bar{\theta}_j^n = \left[ \frac{2}{3} - \frac{40}{81m_j} - \frac{m_1^2}{6} + \frac{8(1-m_j)^{3/2}}{3^{5/2}m_j} \right] \frac{M_{01}}{EJ}, \quad j=1, 2, 7, 8.$$

Komentarza wymaga sposób określenia bezwymiarowego momentu zginającego  $m_j$  . Będzie on składał się z części sprężystej  $m_j^e$  oraz reszkowej  $m_j^r$  . Należy znaleźć jego wartość ekstremalną, to znaczy

$$(3.151) \quad m_j = \max_{\min} (m_j^e + m_j^r), \quad |m| \leq 1,$$

przy czym

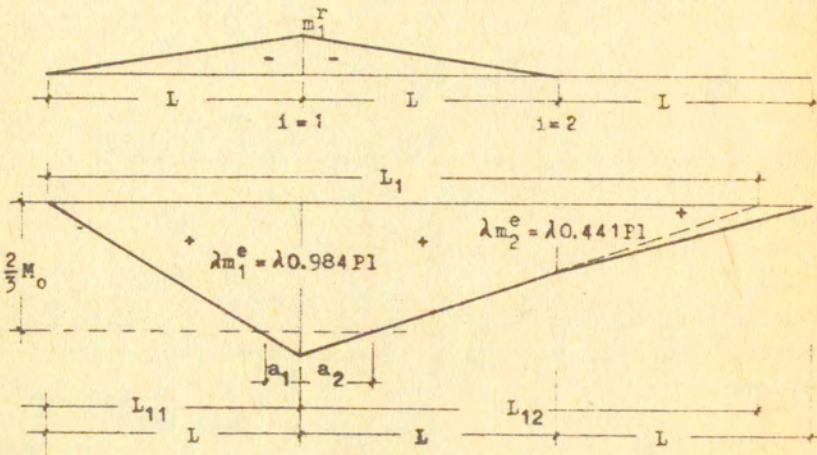
$$(3.152) \quad m_i^r = K_{ij} (\bar{\theta}_j^n + \bar{\theta}_j^m), \quad i=j=1, 2, \dots, n$$

Jako, że wielkość  $\bar{\theta}_j^n$  jest funkcją momentu  $m_j$  , zatem wartość tą znaleźć można na drodze iteracyjnej. Korzystając z rysunku 3.30 określono wartość  $l_j = L_1$  , która wynosi

$$(3.153) \quad L_1 = \left[ 2 + \frac{m_2^e}{\lambda(m_1^e - m_2^e) - m_1^r} \right] L$$

gdzie  $m_1^e$  ,  $m_2^e$  są bezwymiarowymi sprężystymi momentami zginającymi w przekrojach odpowiednio pierwszym i drugim, natomiast  $m_1^r$  jest bezwymiarowym reszkowym momentem zgin-

jącym w przekroju pierwszym, por. rys. 3.30. Stąd wartość za-



Rys. 3.30

stępczego obrotu  $\Theta_j^r$  wyniesie

$$(3.154) \quad \Theta_j^r = \left[ \frac{2}{3} - \frac{40}{81(\lambda m_1^e - m_1^r)} - \frac{\lambda m_1^e - m_1^r}{6} + \frac{8(1 - \lambda m_1^e + m_1^r)^{3/2}}{3^{5/2}(\lambda m_1^e - m_1^r)} \right] \cdot$$

$$\left[ 2 + \frac{\lambda m_2^e}{\lambda(m_1^e - m_2^e) - m_1^r} \right] \frac{M_0 L}{EJ}, \quad j=1,2,7,8,$$

gdzie bezwymiarowy moment resztkowy w przekroju pierwszym wynosi, por. macierz  $K_{1j}$



$$(3.155) \quad m_1^r = \sum_j K_{1,j} \Theta_j = 0.5647 \bar{\Theta}^n, \quad |m_1| > \frac{2}{3}, \quad j=1, 2, 7, 8.$$

Z zależności (3.154) wynika, że wielkość  $m_1^r$  zmniejsza wartość bezwymiarowego momentu globalnego  $m_1$  /por. rys. 3.30/, zwiększając jednocześnie zasięg strefy plastycznej  $L_1$ , por.

(3.153). Obliczono zatem wartość  $\bar{\Theta}_j^n$  dwukrotnie, tzn. w sposób iteracyjny gdy  $m_1^r \neq 0$  oraz wprost gdy  $m_1^r = 0$  /np. pierwszy cykl obciążenia/. Okazało się, że wartości większe  $\bar{\Theta}_j^r$  otrzyma się przy  $m_1^r = 0$ , co przedstawiono w tabelce 3.1 poniżej

Tabela 3.1.

$\lambda$	2/3	0.7	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
$\bar{\Theta}_j^n (m_1^r \neq 0) \cdot 10^6$	0	1	39	262	979	2739	6534	14661
$\bar{\Theta}_j^n (m_1^r = 0) \cdot 10^6$	0	1	39	263	992	2818	6954	17366

Podstawiając następnie większe wartości  $\bar{\Theta}_j^n$  do zależności (3.148) otrzymamy przemieszczenia niezgodne  $\bar{u}^n$  od zastępczych obrotów plastycznych /od stref plastycznych wokół przekrojów krytycznych  $i = 1, 2, 7, 8$  /. Przedstawiono je na rysunku 3.31. Należy zatem jeszcze obliczyć przemieszczenia związane z mechanizmem  $\bar{\Theta}_j^n$ , to znaczy gdy zaczną tworzyć się strefy plastyczne wokół przekrojów od trzeciego do szóstego, por. rys. 3.19. Okazało się przy tym, że dla belek poprzecznych /przekroje 9+12/ spełniony jest zawsze warunek  $m_j = m_j^e + m_j^r < 2/3$ ,  $j = 9, 10, 11, 12$ . Korzystając z zależności (3.147) otrzymano

$$(3.156) \quad \sum_{j=1}^8 M_{0,j} \bar{\Theta}_j^m = \bar{K}^m = \bar{K} - \bar{K}^n = \bar{K} - 4M_0 \bar{\Theta}_1^n =$$

$$= \frac{1}{s-1} 4 \left[ \frac{2}{3} - \frac{40}{81m_1} - \frac{m_1^2}{6} + \frac{8(1-m_1)^{3/2}}{3^{5/2}m_1} \right] \left[ 2 + \frac{\lambda m_2^e}{\lambda(m_1^e - m_2^e) - m_1^r} \right] +$$

$$+ \frac{s}{s-1} 4 \left[ \frac{2}{3} - \frac{40}{81m_3} - \frac{m_3^2}{6} + \frac{8(1-m_3)^{3/2}}{3^{5/2}m_3} \right] \left[ 2 + \frac{\lambda m_4^e}{\lambda(m_3^e - m_4^e) + m_3^r} \right] \frac{M_{O.I.}}{EJ}$$

gdzie drugi człon związany jest z tworzeniem się strefy plastycznej wokół przekrojów 3 + 6, oraz

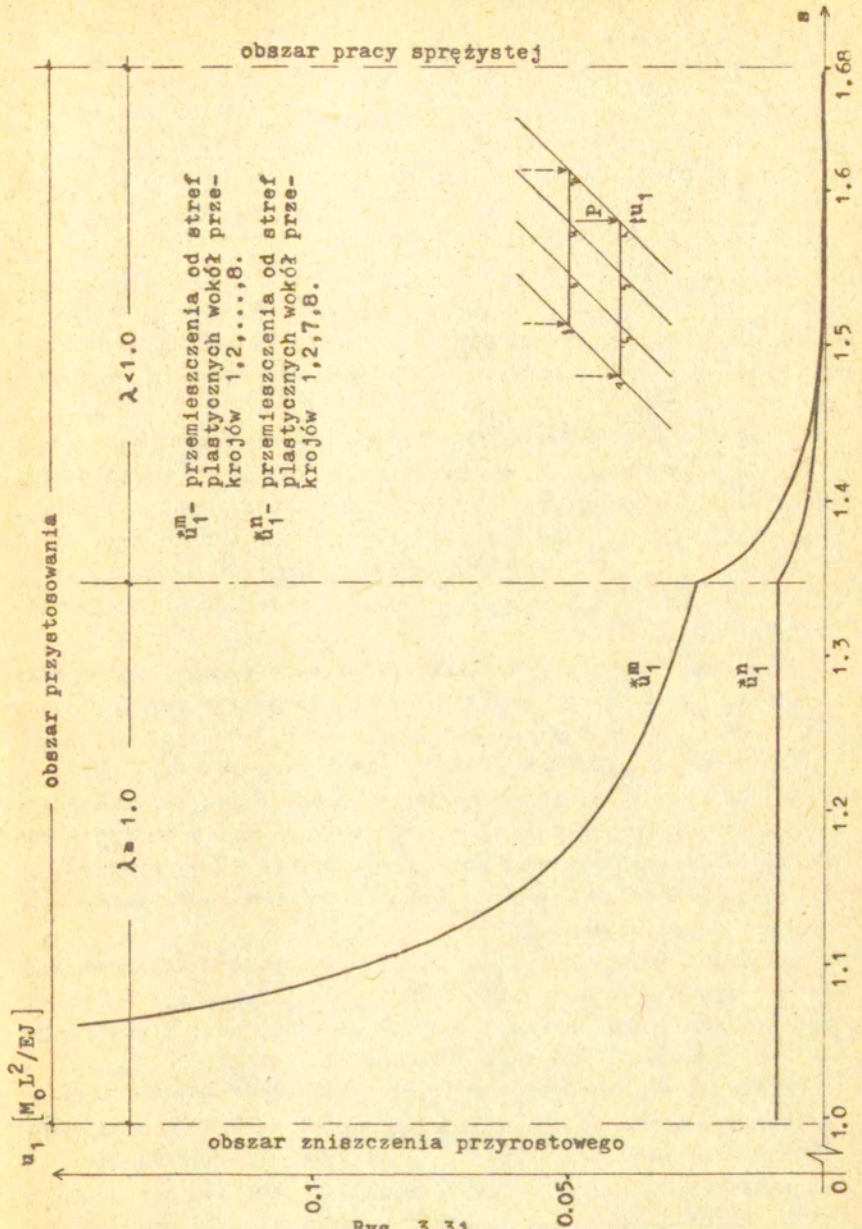
$$(3.157) \quad m_j^r = 0.5647 (\theta_i^r + \theta_i^n) \quad , \quad i=1,2,7,8 \quad .$$

Obliczając z (3.156) wartość  $\theta_j^{*m}$  po podstawieniu do (3.148) otrzymamy

$$(3.158) \quad \theta_j^{*m} = U_{1j} \theta_j^{*m} \quad j = 1,2,\dots,8 \quad .$$

Tak otrzymane wartości  $\theta_j^{*m}$  oraz wcześniej obliczone  $\theta_j^{*r}$  przedstawiono na rysunku 3.31. Wartość całkowitą przemieszczeń zastępczych  $\bar{u}_1$  naniesiono również linią ciągłą na rysunku 3.25.





Rys. 3.31

## WNIOSKI

W większości prac dotyczących problemów przystosowania, tam gdzie stosuje się opis w wielkościach uogólnionych, rozważa się jedyną składową uogólnionego naprężenia - moment zginający. Są jednak przypadki gdy musimy wyjść poza jedną składową uogólnionego naprężenia. W związku z tym nasuwają się następujące spostrzeżenia :

1/ Dla konstrukcji rusztowych, w przypadku gdy obciążenia zewnętrzne są siłami skupionymi, tylko nieznaczny wpływ na wielkość mnożnika przystosowania ma moment skręcający. Podobnie jest w przypadku przemieszczeń sprężystych jak i sprężysto-plastycznych.

2/ Jeżeli w konstrukcji moment skręcający występuje jako obciążenie zewnętrzne lub też geometria konstrukcji wskazuje na występowanie w niej znacznych momentów skręcających, to wówczas należy wykorzystać związki uwzględniające działanie momentu skręcającego w przekrojach konstrukcji. Odnosi się to zarówno do obliczeń na przystosowanie jak też do problemu szacowania ugięć.

3/ Wyprowadzone w pracy związki dla momentu zginającego i skręcającego przy kołowym przekroju pręta, można również / z pewnym przybliżeniem / wykorzystać dla innych typów przekrojów, np. sześciokątnego, pięciokątnego czy nawet grubościennej rury.

4/ Zagadnienie nośności granicznej różnych przekrojów /kołowe, rurowe, kwadratowe e.t.c./ przy złożonym stanie naprężenia jest dobrze opracowane w literaturze, por. np. [229], natomiast brak jest podobnych i systematycznych badań w odniesieniu do problemu przystosowania.

Znaczną część niniejszej pracy poświęcono problemowi przemieszczeń z odniesieniem do konstrukcji rusztowych obciążonych siłami skupionymi gdzie przyjęto założenie o przekroju idealnym. Nasuwają się tutaj następujące wnioski :

1/ W przypadku konstrukcji belkowych poddanych działaniu momentu zginającego metoda szacowania ugięć w oparciu o hipotezę przekroju idealnego i w oparciu o oszacowanie energii dane przez Koitera [105] jest wystarczająco dokładna i nie zachodzi potrzeba dodatkowego uwzględniania stref plastycznych, tym



bardziej, że :

- w praktyce konstrukcje zginane wykonywane są z profili walcowanych, a nie pełnych np. prostokątnych
  - oszacowanie energii plastycznej dysypowanej w procesie obciążeń zmiennych i dane przez Koitera jest oszacowaniem od góry
  - metoda Brzezińskiego, Königa [19] oceny przemieszczeń przystosowania jest również metodą ich górnej oceny /gdyż odrzucono pewne ograniczenia, co pozwoliło sformułować problem programowania liniowego/
  - nawet w przypadku przekroju prostokątnego błąd wynikający z powodu pominięcia wpływu stref plastycznych jest rzędu kilka procent
  - otrzymana w pracy dolna ocena problemu przemieszczeń przystosowania w oparciu o oszacowanie energii dane przez Koitera jest większa dla każdej wartości współczynnika bezpieczeństwa. s od analogicznych wartości eksperymentalnych, por. rys. 3.25.
- 2/ W pracy poszukuje się rozwiązania problemu programowania liniowego w oparciu o określanie aktywności ograniczeń. Warto dodać, że również w badaniach teoretycznych z zakresu programowania matematycznego znany jest kierunek badań polegający na poszukiwaniu aktywnych ograniczeń problemu, por. np. [37], [97].
- 3/ Dalszych badań wymagają następujące zagadnienia w odniesieniu do konstrukcji prętowych :
- określenie związków /powierzchni sprężystych, rodzin translacyjnych, e.t.c./ dla różnych typów przekrojów pręta oraz różnych przypadków sił uogólnionych
  - sformułowanie w oparciu o otrzymane związki zagadnień programowania matematycznego
  - testowanie numeryczne w oparciu o znane procedury programowania matematycznego takich konstrukcji, jak : ramy przestrzenne, ruszty przestrzenne e.t.c.
- 4/ Więcej uwagi w aspekcie praktycznym należy poświęcić na takie zagadnienia, jak: wzmocnienie materiału, obciążenia termiczne, inny niż sprężysto-plastyczny model materiału /beton, kompozyty e.t.c./.

DODATEK A

Program "a" :

000	10 B 6 C	SM01	2 B -2 C	SM2	N N GTO	D
018	10 B 6 C	SM01	4 B -4 C	SM3	N N GTO	D
036	14 B 2 C	SM01	4 B -4 C	SM4	N N GTO	D
054	14 B 2 C	SM01	8 B -8 C	SM5	N N GTO	D
072	11 B 5 C	SM01	-4 B 4 C	SM6	N N GTO	D
090	11 B 5 C	SM01	-2 B 2 C	SM7	N N GTO	D
108	7 B 1 C	SM02	-10 B -6 C	SM4	N GTO	D
126	7 B 1 C	SM02	-20 B -12 C	SM5	GTO	D
144	22 B 10 C	SM02	40 B 24 C	SM6	GTO	D
162	22 B 10 C	SM02	20 B 12 C	SM7	GTO	D
180	44 B 20 C	SM03	40 B 24 C	SM6	GTO	D
198	44 B 20 C	SM03	20 B 12 C	SM7	GTO	D
216	14 B 2 C	SM03	-10 B -6 C	SM4	GTO	D
234	14 B 2 C	SM03	-20 B -12 C	SM5		D
252	44 B 20 C E	SM04	56 B 8 C E	SM6		D
270	44 B 20 C E	SM04	28 B 4 C E	SM7		D
288	88 B 40 C E	SM05	56 B 8 C E	SM6		D
306	88 B 40 C E	SM05	28 B 4 C E	SM7		D

Lbl D

B' If  $\text{flgO}\sqrt{x}$  RCL0 + (CE - 1) × 0.430637276

Lbl lnx

- RCL Ind9 |x| Des9 lnx = 88 B' D' RCL8 + GTO Ind19

Lbl B

× (RCL0 - 3.777 + 3.296) + INV SBR

Lbl C

× ((3.572864 × RCL00 - 3.517468) + 4.149664) = +/-  
INV SBR

Lbl B'

7 S9 INV SBR

Lbl E'

20 SM19 RCL19 - 720 = CP x=t INV GTO Ind18

Lbl INV

480 S19 18 SM18 RCL18 - 324 = x=t SBR GTO Ind18

Lbl A

INV Write SBR778 1 = RCL0 - 1.16 = INV x=t A' 1.01 SO A



500 5 = SM1 SM2 SMO7 -1 P01 2 P02 2 P7 GTO A'  
 520 7 = SM1 SM2 SMO5 2 P01 -1 P02 4 P5 GTO A'  
 540 7 = SM1 SM2 SMO6 -1 P01 2 P02 4 P6 GTO A'  
 560 9 = SM1 SM4 SMO7 3 P01 4 P04 2 P7 N GTO A'  
 580 11 = SM1 SM4 SMO6 3 P01 4 P04 4 P6 GTO A'  
 600 13 = SM1 SM5 SMO7 3 P01 8 P05 2 P7 GTO A'  
 620 5 = SM1 SM2 SMO4 2 P01 -1 P02 2 P4 GTO A'  
 640 18 = SM3 SM5 SMO6 6 P03 4 P05 8 P6 GTO A'  
 660 3 = SM2 SM3 N N -1 P02 2 P3 N N N GTO A'  
 680 3 = SM4 SM5 N N -1 P04 2 P5 N N N GTO A'  
 700 3 = SM1 SM3 SMO4 -1 P01 1 P03 -1 P04

Lbl A'

St flg0 GTO Ind18

Lbl  $\sqrt{x}$

INV St flg0

Lbl CLR

RCL Ind09  $\times$  10 SM9 RCL Ind9 + 10 INV SM9 Dsz9 CLR 0 =  
 $x_{st}$  B' D' RCL10 INV  $x_{gt}$  E'  $x_{st}$  S10 GTO E'

Lbl SBR

RCL10 Prt RCL0 Prt 0.01 SMO0 0 S10 S18 RST

Lbl D'

0 S Ind9 Dsz9 D' INV SBR

Lbl E

+ 3+/- = INV SBR

480' 7 = SM1 SM3 SMO7 -1 P01 4 P03 2 P7 GTO A'  
 500' 15 = SM1 SM5 SMO6 3 P01 8 P05 4 P6 GTO A'  
 520' 4 = SM1 SM3 SMO5 1 P01 -1 P03 2 P5 GTO A'  
 540' 9 = SM1 SM3 SMO6 -1 P01 4 P03 4 P6 GTO A'  
 560' 9 = SM2 SM4 SMO7 3 P02 2 P04 4 P7 N GTO A'  
 580' 13 = SM2 SM4 SMO6 3 P02 2 P04 8 P6 GTO A'  
 600' 11 = SM2 SM5 SMO7 3 P02 4 P05 4 P7 GTO A'  
 620' 15 = SM2 SM5 SMO6 3 P02 4 P05 8 P6 GTO A'  
 640' 6 = SM3 SM4 SMO7 3 P03 1 P04 2 P7 N GTO A'  
 660' 8 = SM3 SM4 SMO6 3 P03 1 P04 4 P6 N GTO A'  
 680' 7 = SM3 SM5 SMO7 3 P03 2 P05 2 P7 N GTO A'  
 700' 3 = SM6 SM7 N N 2 P06 -1 P7 N N N N Lbl

karta magnetyczna

000'	16	B O = +/- SM1	N N N N N N N N	GTO D
018'	5.33333333	B O = +/- SM2		GTO D
036'	10.66666667	B O = +/- SM3		GTO D
054'	32	B O = +/- SM4	N N N N N N N N	GTO D
072'	64	B O = +/- SM5	N N N N N N N N	GTO D
090'	12.8 +/-	B O = +/- SM6	N N N N N	GTO D
108'	6.4 +/-	B O = +/- SM7		GTO D

dla  $\lambda = \lambda^2$



Program "b" :

```

000 5 = S1 S2 S9 NN 2P01 -1P02 -2P9 NNNNNNN GTO D
030 6 = S1 S2 S9 S11 1P01 P02 -2P9 P11 NNNNNNNNN GTO D
060 9 = S1 S9 S11 3P01 -4P09 -2P11 NNNNNNNNN GTO D
090 9 = S2 S9 S11 3P02 -2P09 -4P11 NNNNNNNNN GTO D
120 7.5 = S1 S3 S10 S12 3P01 1.5P03 -2P10 -1P12 GTO D
150 7.5 = S2 S4 S10 S12 3P02 1.5P04 -1P10 -2P12 GTO D
180 18 = S1 S5 S10 S12 3P01 -P06 -8P10 -4P12 NNN GTO D
210 18 = S2 S6 S10 S12 3P02 -P06 -4P10 -8P12 NNN GTO D
240 6 = S2 S6 S8 NN 1.5P02 -P06 -3P8 NNNNNN GTO D
270 6 = S1 S5 S7 NN 1.5P01 -P05 -3P7 NNNNNN GTO D
300 6 = S1 S3 S7 NN 3P01 1.5P03 -P7 NNNNNNN GTO D
330 6 = S2 S4 S8 NN 3P02 1.5P04 -P8 NNNNNNN GTO D
360 9 = S1 S3 S5 NN 4.5P01 3P03 1.5P5 NNN GTO D
390 9 = S2 S4 S6 NN 4.5P02 3P04 1.5P6 NNN GTO D
420 Lbl B
+ (CE - 1) X 0.424487 S15 OS19 S14 B' D'
Ibl C'
B' RCL15 + GTO Ind19
Lbl D'
O S Ind0 Dsz0 D' INV SBR
Lbl B'
12 SO INV SBR
Lbl E'
30 SM19 RCL19 - 420 = CP INV x=t C' RCL14 INV SBR
Lbl D
RCL Ind0 X 20 SMO RCL Ind0 + 20 INV SMO Dsz0 D O = xgt
B' D' RCL14 INV xgt E' xgt S14 GTO E'

```

Uwaga:

S - oznacza STO /store/ ,  
 SM - oznacza SUM ,  
 P - oznacza Prd /product/ ,  
 N - oznacza Nop /no operation/ , por. [54] .

Dodatek B

Macierze A, B, C, D, z rozdziału 3.4.4 wyglądają następująco /por. rów. (3.55) + (3.61) / :

$$[A] = \begin{bmatrix} 18 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 4 & 4,5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 8 & 3 & 4,5 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 6 & 0 & 0 & 4,5 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 12 & 0 & 0 & 3 & 4,5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{M_1 L^2}{-36EJ}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 24 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 12 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 8 & 6 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 0 & 12 & 6 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 16 & 0 & 0 & 6 & 12 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{6 L}{-36}$$

$$[C]^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -8 & -4 & 4 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -8 & -4 & 4 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -4 & -8 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -4 & -8 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3}$$

Uwaga : w przypadku macierzy C, nadliczbowe  $\underline{I}$  są momentami zginającymi zaczepionymi odpowiednio w punktach 9,10,11,12 - rys.3.19.



$$[D]= \begin{bmatrix} -3464 & 17549 & 51105 & -28054 & 01722 & 03462 & -18183 & 07043 & -43418 & -21705 & 34871 & 16135 \\ -18183 & 07043 & 01722 & 03462 & 51105 & -28054 & -34644 & 17549 & -21705 & -43418 & 16135 & 34871 \\ 17549 & -34644 & -28054 & 51105 & 03462 & 01722 & 07043 & -18183 & 34871 & 16135 & -43418 & -21705 \\ 07043 & -18183 & 03462 & 01722 & -28054 & 51105 & 17549 & -34644 & 16135 & 34871 & -21705 & -43418 \end{bmatrix}$$

Uwaga : elementy macierzy należy pomnożyć przez  $-\frac{EJ}{10L}$

DODATEK C

Niech  $\underline{P}$  oznacza wektor obciążeń zewnętrznych,  $\underline{u}$  - wektor wirtualnych przemieszczeń,  $\underline{Q}$  - wektor sił uogólnionych,  $\underline{q}$  - wektor przemieszczeń uogólnionych.

Równanie równowagi, związek geometryczny oraz zasadę prac wirtualnych możemy zapisać następująco :

$$\underline{P} = \underline{\gamma}^T \underline{Q} \quad , \quad \underline{q} = \underline{\tilde{\gamma}} \underline{u} \quad , \quad \underline{Q}^T \underline{q} = \underline{P}^T \underline{u} = \underline{u}^T \underline{P} \quad .$$

Na podstawie tego otrzymamy kolejno

$$\underline{P}^T \underline{u} = (\underline{\gamma}^T \underline{Q})^T \underline{u} = \underline{Q}^T \underline{\gamma} \underline{u} \quad .$$

$$\underline{Q}^T \underline{q} = \underline{Q}^T \underline{\tilde{\gamma}} \underline{u} \quad ,$$

$$\underline{P}^T \underline{u} - \underline{Q}^T \underline{q} = 0 \quad , \quad \underline{Q}^T \underline{\gamma} \underline{u} - \underline{Q}^T \underline{\tilde{\gamma}} \underline{u} = 0 \quad ,$$

$$\underline{Q}^T (\underline{\gamma} - \underline{\tilde{\gamma}}) \underline{u} = 0 \quad , \quad (\underline{\gamma} - \underline{\tilde{\gamma}}) = 0 \quad , \quad \underline{\gamma} = \underline{\tilde{\gamma}} \quad ,$$

$$\gamma_{ij} = \tilde{\gamma}_{ij} \quad \text{c.b.d.o.}$$

Należy również zaznaczyć, że składowe macierzy równowagi  $\gamma_{ij}$  są stałe i jednoznacznie określone dla danej konstrukcji. Zależą one jedynie od jej geometrii. Macierz równowagi  $\gamma_{ij}$  wpływa natomiast w sposób zasadniczy na postać macierzy sztywności.

Mianowicie, niech  $\underline{E}$  oznacza macierz konstytutywną, to związek konstytutywny możemy zapisać następująco :

$$\underline{Q} = \underline{E} \underline{q}$$

Stąd korzystając z dwóch pierwszych równań dodatku otrzymamy :

$$\underline{P} = \underline{\gamma}^T \underline{Q} = \underline{\gamma}^T \underline{E} \underline{q} = \underline{\gamma}^T \underline{E} \underline{\gamma} \underline{u} = \underline{K} \underline{u} \quad ,$$

gdzie

$$\underline{K} = \underline{\gamma}^T \underline{E} \underline{\gamma}$$

jest sztywnością konstrukcji.



Dokonując przekształceń i podstawień otrzymamy

$$\underline{u} = \underline{K}^{-1} \underline{P} \quad , \quad \underline{q} = \underline{\gamma} \underline{K}^{-1} \underline{P} \quad , \quad \underline{Q} = \underline{E} \underline{\gamma} \underline{K}^{-1} \underline{P} = \underline{W} \underline{P} \quad ,$$

gdzie

$$\underline{W} = \underline{E} \underline{\gamma} \underline{K}^{-1}$$

jest macierzą wiążącą wektor sił uogólnionych z wektorem obciążeń zewnętrznych.

Powyższy sposób zapisu równań równowagi, związków geometrycznych i konstytutywnych można często spotkać w literaturze dotyczącej analizy plastycznej konstrukcji, por. np. [35], [136].

Pragnę serdecznie podziękować  
prof.dr hab. Janowi A. Kőnięowi  
za czas poświęcony na konsultacje  
w trakcie opracowywania niniejszej  
pracy

Tadeusz Sawicki

LITERATURA :

1. ASKARI M.R., Le calcul des réseaux de poutres croisées à l'état ultime. Thèse présentée à l'Université de Paris VI pour l'obtention du titre de Docteur-Ingénieur, 30 juin 1973.
2. ASKARI M.R., Analyse limite des réseaux de poutres croisées en négligeant l'effet de torsion, *Constr. Mét.*, 4, 1973, 19-36.
3. ASKARI M.R., Calcul de la charge ultime des grillages compte de la rigidité a la torsion des poutres. *Constr. Met.*, 1, 1974, 39-57.
4. AUGUSTI G., BARRATA A., Limit and shakedown analysis of structures with stochastic strengths. 2<sup>nd</sup> Int. Conf., Berlin, September 1973.
5. BANDYSZEWSKI W., SAWCZUK A., Assesment of deflection of elastic-plastic structures by step-wise rigidity method. *Stareb. Cos.*, c.9, VEDA Bratislava 1975.
6. BAREŠ R., MASSONNET C., Analysis of beam grids and orthotropic plates, Crosby Lockwood, London 1966.
7. BARTSCH H.J., *Mathematische Formeln*, VEB Fachbuch Verlag, Leipzig, 1981.
8. BELYTSCHKO T., Plane stress shakedown analysis by finite elements. *Int. J. Mech. Sci.*, 14, 7, 1972, 619-625.
9. BHUSHAN N., No-torsion analysis of reinforced concrete grids, *The Indian Concrete Journal*, 57, 3, 1983, 76-81.
10. BIEZUCHOW N.J., *Wwiedienije w teoriju uprugosti i p̄lasticznosti*. Gosudarstviennoje Izdatielstwo Stroitelnoj Literatury, 1950.
11. BLEICH H., Über die Bemessung statisch unbestimmter Stahlwerke unter Berücksichtigung des elastisch-plastischen Verhaltens des Baustoffes. *Bauingenieur*, 13, 1932, 261-267.
12. BONI B., KLEIBER M., Limit analysis of plane bending-and-torque supporting grids. *Arch. Inż. Łąd.*, 21, 1, 1975, 69-87.
13. BONI B., KLEIBER M., Numerical plastic collapse analysis of plane bending-and-torque supporting grids. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 19, 1979, 1-19.



14. BORKOWSKI A., Programowanie matematyczne w zagadnieniach nieliniowej statyki, Prace IPPT-PAN, 36, 1978.
15. BRUNARSKI L., GÓRECKI B., RUNKIEWICZ L., Zbiór zadań z teorii sprężystości i plastyczności. Wyd. Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 1971.
16. BRÓDKA J., Zginanie i skręcanie dwuteownika cienkościennego w fazie odkształceń sprężysto-plastycznych. Inż. Bud., 18, 1961, 395-401.
17. BRÓDKA J., Techniczne uwarunkowania wykorzystania rezerwy plastycznej konstrukcji stalowych. Inż. Bud., 11-12, 1982, 316-318.
18. BRZEZIŃSKI R., KÖNIG J. A., Ocena ugięć sprężysto-plastycznych konstrukcji ramowych przy obciążeniach zmiennych. Prace IPPT-PAN, 60, 1971.
19. BRZEZIŃSKI R., KÖNIG J.A., Evaluation of shakedown deflections of framed structures by linear programming. Symp. on plastic analysis of structures, Jassy 6-8 Sept. 1972, Romania, 101-116.
20. BRZEZIŃSKI R., KÖNIG J.A., Deflection Analysis of Elastic-Plastic Frames at Shakedown. J. Struct. Mech. 2, 3, 1973.
21. BRZEZIŃSKI R., KÖNIG J.A., Obliczanie ram według teorii adaptacji. Prace IPPT-PAN, 6, 1973.
22. BURZYŃSKI W., Skręcanie bez skręcania, Przegląd mechaniczny, 49, Warszawa.
23. CANNAROZZI A.A., SACCHI P.L., TRALLI A., On the limit analysis of steel structures in presence of shear. J. Méc. Théor. Appl., 1, 3, 1982.
24. CAPURSO M., A displacement bounding principle in shakedown of structures subjected to cyclic loads. Int. J. Sol. Struct., 10, 1974, 77-92.
25. CELIGOJ C., Geometrisch quadratische Biegetorsionstheorie gerader elastischer Stäbe. Ing. Arch., 48, 2, 1979, 113-119.
26. CHARNES A.C., GREENBERG H.J., Plastic collapse and linear programming. Bull. Amer. Math. Soc., 57, 1951.

27. CHEN W.F., ATSUTA T., Interaction equation for biaxially loaded sections. *J. Struct. Div., ASCE*, 98, 5, 1972, 1035-1052.
28. CHENG M.C., New Criteria for the Simplex Algorithm. *Math. Progr.*, 19, 1980, 230-286.
29. CIAMPI V., GAVARINI C., Optimal choice of elastic parameters for systems in conditions of static or dynamic shakedown. *Arch. Inż. Łąd.*, 27, 3, 1981, 451-465.
30. COHN M.Z., Introduction to engineering plasticity by mathematical programming, in: *Engineering Plasticity by Mathematical Programming*, M.Z. Cohn, G. Maier, D.E. Grierson /eds./. Proc. NATO-ASI, Waterloo, August 1977, Pergamon Press, New York, 1978.
31. COLLINGS G.A., Analysis of some double layer grids. *J. Struct. Div., ASCE*, 102, 8, 1976, 1591-1608.
32. CORRADI L., NOVA R., Estimates of Maximum Deformations in Inelastic Beams and Frames under Variable Repeated Loads. Technical Report No. 664, Del. Politecnica Di Milano.
33. CORRADI L., ZAVELANI A., A linear programming approach to shakedown analysis of structures. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 3, 1974, 37-53.
34. COURBON J., Résistance des matériaux. Tome 2, Dunod, Paris, 1965.
35. ČYRAS A.A., *Mietody liniejnowo programmirowanija pri razczotie uprugoplasticzieskich sistiem.* Izd. po Stroit., Leningrad, 1969.
36. DANG H.N., PALGEN L., Shakedown analysis by displacement method and equilibrium finite element. Université de Liège, Laboratoire de Mécanique des Matériaux et de Statique des Constructions, Quai Banning 6, B-4000 Liège, Belgium, L3/3.
37. DANILCZENKO J.A., MAKARENKOW J.M., PTIENNOWA E.F., *Mietod priedwaritelnowo sokraszczienija razmiernosti zadacz liniejnowo programmirowanija s nieotricatielnoj matriciej usłowij.* *Kibernetika*, 3, 1980, 103-103.



38. DANILCZENKO J.A., MAKARENKOW J.M., PTIENNOWA E.F., Ispolzowanie błoczno-diagonalnoj sistiemy ograniczijenij liniejnowo programmirowanija. Kibernetika, 6, 1981, 54-57.
39. DAVIES J.M., Variable repeated loading and the plastic design of structures. Struct. Eng., 48, 1970, 181-194.
40. DEAN D.L., Lamella beams and grids. J. Eng. Mech. Div., 90, 2, 1964.
41. DINNO K.S., SAFFARINI A.R., An elastic-plastic analysis of grid structures. 2<sup>nd</sup> Int. Conf. on Space Structures, Univ. of Surrey, Guildford, England, 1975, 589-597.
42. DOROSZ S., KÖNIG J.A., Iteracyjna metoda określenia ugięć ram sprężysto-plastycznych. Prace IPPT-PAN, Warszawa, 46/1983.
43. DOROSZ S., Metoda szacowania ugięć konstrukcji sprężysto-plastycznych w stanie przystosowania. Prace IPPT-PAN, 65, 1977 /praca doktorska/.
44. DOROSZ S., An Upper Bound to Maximum Residual Deflections of Elastic-Plastic Structures at Shakedown. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Techn., 24, 1976, 167-174.
45. DOROSZ S., An assessment of deflections bound for frames and beams of arbitrary cross-section at shakedown. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Techn., 26, 1977.
46. DOROSZ S., An improved bound to maximum deflections of elastic-plastic structures at shakedown. J. Struct. Mech., 6, 1978, 267-287.
47. DOROSZ S., SAWCZUK A., Deflections of Elastic-Plastic Beams at Finite Spread of Plastic Zones. IUTAM Symp., Senlis, France, May 27-30, 1980.
48. DOROSZ S., KÖNIG J.A., SAWCZUK A., BIEGUS A., KOWAL Z., SEIDEL W., Deflections of elastic-plastic hyperstatic beams under cyclic loading. Arch. Mech., 33, 5, 1981, 611-624.
49. EMPACHER A.B., Mały słownik matematyczny, Wiedza Powszechna, Warszawa, 1974.

50. EYRE D.G., Shakedown of Continuous Bridges. Thesis presented to Washington University in partial fulfillment of the requirements for the Degree of Doctor of Science, June 1969.
51. EYRE D.G., GALAMBOS T.V., Deflection analysis for shakedown. J. Struct. Div., ASCE, 96, 7, 1970, 1359-1376.
52. EYRE D.G., GALAMBOS T.V., Shakedown test on steel bars and beams. J. Struct. Div., 96, 1970, 1284-1304.
53. EYRE D.G., GALAMBOS T.V., Shakedown of grids. J. Struct. Div., 99, -10, 1973, 2049-2060.
54. FARISH R.F., O'GRADY Ch.D., OLIVA R.A., Personal Programming. Texas Instruments Incorporated, 1977, Printed in USA.
55. FRĄCKIEWICZ H., Mechanika ośrodków siatkowych. PWN, Warszawa, 1970.
56. FRITSCHÉ I., Die Tragfähigkeit von Balken aus Baustahl bei beliebig oft wiederholter Belastung. Bauingenieur, 12, 1931, p. 827.
57. FUKUMOTO Y., YOSHIDA H., Deflections stability of beams under repeated loads. J. Struct. Div., ASCE, 95, 3, 1969, 1443-1458.
58. GALAMBOS T.V., EYRE G.D., Shakedown of bars under extreme loads. J. Struct. Div., 101, 9, 1975.
59. GAYDON F.A., NUTTAL H., On the combined bending and twisting of beams of various sections. Int. J. Mech. Phys. Solids, 5, 1, 1957, 17-26.
60. GERSTLE K., TULIN L., Shakedown of continuous concrete beams. Proc. RILEM Symp., 5, Mexico City, 1966.
61. GHANI A.F.M., ROUSHAN A., Shakedown analysis of nonprismatic beams. J. Struct. Div., 93, 1967, 25-54.
62. GOKHFELD D.A., Niesuszczaja sposobnost' konstrukcij w usłowijach tiepłosmien. Maszinstrojenije, Moskwa, 1970.
63. GRABOWSKI W., Programowanie matematyczne, PWE, Warszawa 1980.
64. GRIERSON D.E., GLADWELL G.M.L., Collapse load analysis using linear programming. J. Struct. Div., ASCE, ST5, 1971, 1561-1573.



65. GRIERSON D.E., Elastic-plastic deformation analysis using linear programming. Rep. No. 88, SMD, Univ. of Waterloo, July 1971.
66. GRIGORIAN M., A lower bound solution to the collapse of uniform rectangular grids on simple support. Int. J. Mech. Sci., 13, 9, 1971, 755-761.
67. GRIGORIAN M., The plastic design of orthotropic grids with fixed supports. Int. J. Mech. Sci., 14, 1972, 197-204.
68. GRUNDY P., Shakedown of bars in bending and tension. J. Eng. Mech. Div., ASCE, 95, 3, 1969, 519-529.
69. GRUNDY P., Shakedown under moving loads. Civil Eng. Trans., CE 13, Apr. 1971, 31-34.
70. GRUNDY P., SPENCER W.Y., Shakedown of Elastoplastic Grids. Proc. Austral. Conf. Mech. Struct. Mater., 5<sup>th</sup>, Melbourne, 1975, 219-236.
71. GRÜNING M., Die Tragfähigkeit statisch unbestimmten Tragwerke aus Stahl bei beliebig häufig wiederholter Belastung. Springer, Berlin 1926.
72. GURALNICK S.A., Incremental collapse under condition of partial unloading. Publ. IABSE, 33-II, 1973, 69-84.
73. GUTKOWSKI W., Plane polygonal bars. Bull. de l'Académie Polonaise des Sciences, 12, 9, 1964.
74. GUTKOWSKI W., OBRĘBSKI J., Ruszt o sześciokątnej siatce prętów. Rozpr. Inż., 19, 3, 1971.
75. GUTKOWSKI W., OBRĘBSKI J., The hexagonal grid. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Techn., 19, 5, 1971.
76. HEINS P.C., HUMPHREYS S.R., Bending and torsion interaction of box girders. J. Struct. Div., ASCE, 105, 5, 1979, 891-905.
77. HEKI K., FUJITANI Y., The stress analysis of grid under the action of bending and shear. Space structures, Blackwell Scientific Publication, Oxford and Edinburgh, 1967.
78. HENDRY A.W., Plastic analysis and design of mild steel vierendeel griders. Struct. Eng., 33, 213, 1955.

79. HENDRY A.W., JAEGER L.G., The analysis of Grid Frameworks and Related Structures. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1959.
80. HEYMAN J., PROVIDENCE R.I., The Limit Design of Space Frames. J. Appl. Mech., 17-18, 2, 1950-1951, 157-162.
81. HEYMAN J., The limit design of a transversely loaded square grid. J. Appl. Mech., 19, 2, 1952, 153-158.
82. HEYMAN J., The plastic design of grillages. Engineering, 176, 52, 1953, 802-809.
83. HEYMAN J., Plastic analysis of structures, 2. Applications. Cambridge press, 1971, 23-42.
84. HILL R., SIEBEL M.P.L., On Combined Bending and Twisting of thin Tubes in the Plastic Range, Phil. Mag., 42, 7, 1951, 722-733.
85. HILL R., SIEBEL M.P.L., On the plastic distortion of solid bars by combined bending and twisting. J. Mech. Phys. Solids, 1, 1953, 207-214.
86. HODGE P.G., SANKARANARAYANAN R., The determination of safe loads of beams subjected to combined twisting and biaxial bending moments. J. Appl. Mech., 26, E, 1959, 442-447.
87. HODGE P.G., Plastic analysis of structures. McGraw-Hill, N.Y., 1959.
88. HODGE P.G., Limit analysis with multiple load parameters. Int. J. Sol. Struct., ASCE, 96, 6, 1970, 661-675.
89. HONGLADAROMP T., ROSSOW C.E., LEE S.L., Analysis of elastic-plastic grid systems. J. Eng. Mech. Div., ASCE, 94, 1, 1968, 241-270.
90. HORNE M.R., The effect of variable repeated loads in building structures designed by the plastic theory. Proc. of the IABSE, 14, 1954, 53-74.
91. HUMAR J.L., Composite beams under cyclic loading. J. Struct. Div., ASCE, 105, 10, 1979.
92. HUNG N.D., KÖNIG J.A., A finite element formulation for shakedown problems using a yield criterion of the mean, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 8, 2, 1976.



93. IMEGWU E.D., Combined plastic bending and torsion. *J. Mech. Phys. Solids*, 10, 1962, 277-282.
94. JERCHOW M.I., Teoriya idealno-plasticzieskich tieł i konstrukcij. Nauka, Moskwa, 1978.
95. JOHNSON G.C., On the Applicability of Acoustoelasticity for Residual Stress Determination. *J. Appl. Mech.*, 48, 1981, 791-796.
96. JOHNSON W., YU T.X., Influence of axial force on the elastic-plastic bending and springback of a beam. *J. Mech. Work. Techn.*, 6, 1982, 5-21.
97. JOSZOWICZ J.W., MAKARENKOW J.M., O metodach sokraszczenia razmiernosti zadacz liniejnowo programmirowanija. *Ekonomika i matematieczieskiye metody*, 11, 3, 1975, 516-524.
98. KAMIŃSKI L., Teoria konstrukcji inżynierskich, PWN, Warszawa, 1982.
99. KLEIBER M., KÖNIG J.A., SAWCZUK A., Studies on plastic structures : stability, anisotropic hardening, cyclic loads. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 33, 1-3, 1982, 487-556.
100. KLEMN P., Przybliżone rozwiązania jednorodnych siatek rusztowych. *Arch. Inż. Łąd.*, 2, 13, 1967, 215-223.
101. KLEMN P., WOŹNIAK C., Pewne zagadnienia statyki gęstych siatek rusztowych. *Rozpr. Inż.*, 2, 17, 1967, 227-246.
102. KLEMN P., Niektóre kożowo symetryczne zagadnienia statyki prętowych siatek rusztowych. *Arch. Inż. Łąd.*, 16, 1970.
103. KOITER W.T., Some remarks on plastic shakedown theorems. *Proc. 8<sup>th</sup> Int. Congr. Appl. Mech.*, Istanbul, 1, 1952, p220.
104. KOITER W.T., A New General Theorem on Shakedown of Elastic-Plastic Structures. *Proc. Kon. Ned. Ak. Wet.*, B, 59, 1956, 14-34.
105. KOITER W.T., General theorems for elastic-plastic solids. *Progress in Solid Mechanics*. North Holland, Amsterdam, 1960, 165-221.
106. KONIECZNY S., O zastosowaniu teorii ośrodków włóknistych do obliczania rusztów pierścieniowych. *Arch. Inż. Łąd.*, 1, 13, 1967, 91-108.

107. KOSIDREK K., Nośność i odkształcalność betonu w węzłach rusztów żelbetowych. 14 Konferencja Naukowa KI PAN : KN PZITB, Krynica, 1968.
108. KOSIOREK K., SZUCHNICKI W., SZULCZYŃSKI T., Wpływ częściowego wstępnego uplastycznienia strefy przywęzłowej na pracę elementarnych rusztów żelbetowych i ich nośność. 17 Konferencja Naukowa KI PAN i KN PZITB, Krynica, 1971.
109. KÖNIG J.A., Zagadnienie teorii dostosowywania się konstrukcji sprężysto-plastycznych /praca doktorska/. IPPT-PAN, 1965.
110. KÖNIG J.A., Theory of Shakedown of Elastic-Plastic Structures. Arch. Mech. Stos., 18, 1966, 227-238.
111. KÖNIG J.A., Shakedown theory of plates. Arch. Mech. Stos. 21, 1969, 623-637.
112. KÖNIG J.A., A shakedown theorem for temperature dependent elastic moduli. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Techn., 17, 1969.
113. KÖNIG J.A., Podstawowe twierdzenia z zakresu teorii dostosowywania się konstrukcji sprężysto-plastycznych do obciążeń zmiennych w czasie. Mech. Teor. Stos., 8, 2, 1970, 149-158.
114. KÖNIG J.A., A method of shakedown analysis of frames and arches. Int. J. Sol. Struct., 7, 1971, 327-344.
115. KÖNIG J.A., On shakedown criterion. Proc. Int. Symp. Found. Plast. Warszawa 1972, 2, 56-60.
116. KÖNIG J.A., Shakedown deflections. A finite element approach. Bulg. Ac. Sci. Theoret. Appl. Mech., Sofia 1972, 3, 2, 65-69.
117. KÖNIG J.A., Deflection bounding at shakedown under thermal and mechanical loadings. Int. Conf. SMIRT, 5-L, 7/3, 1973.
118. KÖNIG J.A., Projektowanie konstrukcji sprężysto-plastycznych przy obciążeniach zmiennych. Prace IPPT-PAN, 24, 1974.
119. KÖNIG J.A., SAWCZUK A., PAPROCKA-GRABCZYŃSKA W., Obliczanie ram i belek na przystosowanie. Zeszyty problemowe "Mostostal", 2, Warszawa 1974.
120. KÖNIG J.A., Engineering application of shakedown theory. CISM Lecture Notes, Udine 1977.



121. KÖNIG J.A., KLEIBER M., On a new method of shakedown analysis. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Techn., 26, 1978, 165-171.
122. KÖNIG J.A., On upper bounds to shakedown loads. ZAMM, 59, 8, 1979, 349-354.
123. KÖNIG J.A., On stability of incremental collapse process. Arch. Inż. Łąd., 26, 1, 1980.
124. KÖNIG J.A., On Exactness of the Kinematical Approach in the Structural Shakedown and Limit Analysis. Second Symp. on Inelastic Solids and Structures, Bad Honef, Sept. 1981, Ing-Arch. 52, 1982, 421-428.
125. KÖNIG J.A., BORKOWSKI A., ATKOČIŪNAS J., Improved bounds for displacements at shakedown. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 28, 3, 1981.
126. KÖNIG J.A., Shakedown analysis in structural design, Mechanics of Inelastic Media, Editors: O. Mahrenholz and A. Sawczuk, PWN, Warszawa-Poznań 1982.
127. KWIECIŃSKI M., KLEIBER M., Limit load of polar grids treated as plane fibrous bodies, Arch. Inż. Łąd., 17, 2, 1971, 223-237.
128. KWIECIŃSKI M., Comment on : A lower bound solution to the collapse of uniform rectangular grid on simple supports, by M. Grigorian, Int. J. Mech. Sci., 14, 1972, 469-470.
129. LADERER F., Grid shells composed of steel tubes. Proc. of the Symp. on Shell Research, Delf, Aug. 30-Sept. 2, 1961.
130. LETH C.F., The effect of shear stresses on the carrying capacity of I - beams. Techn. Rep. A 11-107, Brown Univ., 1954.
131. LOI T.F., Shakedown and Deflections Prediction of Steel Frame Structures. Ph.D. thesis, Monash Univ., Melbourne, Australia, 1977.
132. LOI T. F., Deflection bounding at shakedown. J. Struct. Div., ASCE, 106, 5, 1980, 1209-1215.

133. LUBAROW B.I., Niekatoryje zadaczi prisposobliajemości uprugo-plastycznych tież. *Stroit. Mech. Ras. Sooruz.*, 1, 1967, 31-34.
134. MAIER G., Quadratic Programming and Theory of Elastic-Perfectly-Plastic Structures. *Meccanica*, 3, 1978, 265-273.
135. MAIER G., KÖNIG J.A., Shakedown analysis of elasto-plastic structures : a survey of recent results. 3<sup>rd</sup> SMIRT Conf., London 1975.
136. MAIER G., Metody programowania matematycznego w analizie konstrukcji sprężysto-plastycznych. *Arch. Inż. Łąd.*, 21,3, 1975, 387-411.
137. MAKINO M., LEE S.L., Analysis of Corner Supported grillages, *Publ. IABSE*, 20, 1960.
138. MAKOWSKI Z.S., RIVIERA A.R., Nowoczesne konstrukcje rusztowe o regularnej siatce sześciokątnej. *Technika i Nauka*, No. 5, 7/1959-60.
139. MAKOWSKI Z.S., LEE H., Study of factors affecting stress distribution in double-layer grids of square-and-diagonal type. *Architectural Science Review*, 20, 4, 1977.
140. MANSUR M.A., Bending-torsion interaction for concrete beams reinforced with steel fibres. *Magazine of Concrete Research*, 34, 121, 1982.
141. MARTIN J.B., The elastic analysis of simple rectangular grids by virtual work method. *J. Struct. Div., ASCE*, 41, June 1963.
142. MARTIN J.B., Plasticity. Fundamentals and general results. The Massachusetts Institute of Technology Press, 1975.
143. MATTAVI J.L., Low cycle fatigue behaviour under biaxial strain distribution. *J. Basic Eng.*, 91, 1969, 23-31.
144. MEGUID S.A., CAMPBELL J.D., Elastic-Plastic Tension-Torsion in a Circular Bar of Rate-Sensitive Material. *J. Appl. Mech.*, 46, June 1979.
145. MELAN E., Theorie statisch unbestimmter Systeme aus ideal plastischen Baustoff. *Sitz. Ber. Akad. Wiss.*, 2a, 145, 1936, 195-218.



146. MELAN E., Der Spannungszustand eines Hencky-Miseschen Kontinuums bei veränderlicher Belastung. Sitz. Ber. Akad. Wiss., Wien 2a, 147, 1938, 73-87.
147. MELAN E., Zur Plastizität des räumlichen Kontinuums. Ing. Arch., 9, 1938, 116-126.
148. MELCHERS R.E., Deflection of Statically Indeterminate Structures. Int. J. Mech. Sci., 24, 6, 1982, 341-347.
149. MORROW J., Cyclic Plastic Strain Energy and Fatigue of Metals. Special Technical Publ., No.378 of the ASTM, Internal Friction, Damping and Cyclic Plasticity, 1965, 45-87.
150. MOSKVIȚIN V.V., Cikliczieskije nagruženija elementow konstrukcij, Nauka, Moskwa 1981.
151. MRÓZ Z., On the theory of steady plastic cycles in structures. 1<sup>st</sup> SMIRT Conf., Berlin 1971, paper I5/6.
152. NEAL B.G., The Behaviour of Framed Structures Under Repeated Loading. Quart. J. Mech. Appl. Math., 4, 1, 1951, p78.
153. NEAL B.G., The plastic Methods of Structural Analysis. Chapman and Hall, London, 1965.
154. NOOR K.A., Thermal stress analysis of double layered grids. J. Struct. Div., 104, 2, 1978.
155. NOWACKI W., Z zagadnień teorii rusztów płaskich. Arch.Mech. Stos., 1, 6, 1954.
156. NOWACKI W., Mechanika budowli. PWN, Warszawa 1975.
157. OBREŃBSKI J.B., Zastosowanie maszyn cyfrowych do rozwiązywania rusztów o regularnej sześciokątnej siatce prętów. Mech. Teor. Stos., 10, 1, 1972.
158. OLSZAK W., PERZYNA P., SĄWCZUK A., Teoria plastyczności. PWN, Warszawa 1965.
159. ONAT E.T., SHIELD R.T., The influence of shearing forces on the plastic bending of wide beams. Techn. Rep., A11-103/10, Brown Univ., 1953.
160. OSTACHOWICZ W., Zastosowanie metody sztywnych elementów skończonych do analizy drgań rusztów obciążonych osiowo. Mechanika i Komputer, 2, IPET-PAN, 1980, 121-129.

161. OZERDINC M.E., LAMPERT P., COLLINS M.P., Torsion-bending-redistribution at cracking - an experimental investigation. Civil Eng. Publ., Univ. of Toronto, 1972.
162. PANZECA T., POLIZZOTTO C., Bounds to internal forces for elastic-plastic solids subjected to variable loads. Meccanica, 14, 4, 1979.
163. PAPROCKA-GARLICKA W., Zasady i metoda projektowania sprężysto-plastycznych belek ciągłych poddanych obciążeniom ruchomym. Roz. Inż., 27, 1, 1979.
164. PĄPROCKA-GARLICKA W., Przystosowanie belek ciągłych obciążonych grupami sił skupionych. Prace IPPT-PAN, 4, 1982.
165. PĄPROCKA-GARLICKA W., Zagadnienia udźwigu żelbetowych i stalowych konstrukcji ze wstępnymi naprężeniami. Prace IPPT-PAN , 33/1983 .
166. PATTON E.C., GORBUNOW B.M., Tragfähigkeit von geschweissten Trägern, welche bei wiederholter Belastung plastische Verformungen erfahren. Der Stahlbau, 9, 1936, 3-7.
167. PIECHNIK S., Wytrzymałość materiałów, PWN, Warszawa-Kraków, 1980.
168. PIECHNIK S., ŻYCZKOWSKI M., On the Plastic Interaction Curve for Bending and Torsion of a Circular Bar. Arch. Mech. Stos., 13, 1961, 669-692.
169. PISCOPO G., PRETE G., Double layer crossed grids for large space-frame roofs. Constr. Met., 34, 3, 1982.
170. PIWOWARSKI K., KUŚ Z., Obliczanie rusztów żelbetowych metodą nośności granicznej. Zesz. Nauk. Pol. Gdań., maj 1975.
171. PIWOWARSKI K., KUŚ Z., Badania doświadczalne nośności granicznej rusztów żelbetowych. Arch. Inż. Łąd., 22, 3, 1976, 461-475.
172. POLIZZOTTO C., A local bounding principle for dissipation energy in shakedown of elastic-perfectly plastic solids. Facolta die Architettura di Palermo, Palermo, Nov. 1978.



173. POLIZZOTTO C., A Unified Approach to Quasi-static Shakedown Problems of Elastic-Plastic Solids with Piecewise Linear Yield Surface. Techn. Rep. SISTAR-78-OMS-1, Facolta di Architettura di Palermo, Palermo, 1978.
174. POLIZZOTTO C., Upper Bounds on Plastic Strains for Elastic-Perfectly Plastic Solids Subjected to Variable Loads. Int. J. Mech. Sci., 21, 1979, 317-327.
175. POLIZZOTTO C., A unified treatment of shakedown theory and related bounding techniques. Sol. Mech. Arch. 7, 1, 1982, 19-75.
176. POLIZZOTTO C., Shakedown under elastic support conditions. J. Struct. Div., ASCE, 108, 6, 1982.
177. POLIZZOTTO C., Bounding principles for elastic-plastic-creeping solids loaded below and above the shakedown limit. Meccanica, 17, 3, 1982, 143-148.
178. PONTER A.R.S., An upper bound on the small displacement of elastic, perfectly plastic structures. J. Appl. Mech., 39, 4, 1972, 959-963.
179. POPOV E.D., WILLIS J.A., Plastic design of cover-plated continuous beams. J. Eng. Mech. Div., ASCE, 84, 1494, 1958.
180. RAKOWSKI G., SZUBERT L., Macierzowa analiza rusztów na podłożu odkształcalnym. Inż. Bud., 8, 1979.
181. RAKOWSKI G., SZUBERT L., Uwzględnianie wymiarów węzła w analizie statycznej rusztów. Inż. Bud., 11-12, 1982, 300-302.
182. REDDY D.V., HENDRY A.W., A moment distribution method for the elasto-plastic analysis of grid frameworks. Civ. Eng. Publ. Works Review, 56, 1961, 1051-1054.
183. RENTON J.D., On the analysis of triangular mesh grillages. Int. J. Sol. Struct., 2, 1966, 307-318.
184. RENTON J.D., The related behaviour of plane grids, space grids and plates. Space Structures, Blackwell Sci. Publ., Oxford and Edinburgh, 1967.

185. RENTON J.D., General properties of space grids. *Int. J. Mech. Sci.*, 12, 1970, 801-810.
186. RONCA P., COHN M.Z., Shakedown analysis of reinforced concrete arch bridges. *J. Méc. appl.*, 4, 4, 1980, 367-384.
187. ROZENBLUM W.I., K teorii prisposoblaemosti uprugoplastičieskich tieł. *Izd. AN SSSR, OTN Mech. Masz.*, 6, 1958, 47-53.
188. RUSIŃSKI E., Analiza statyczna konstrukcji prętowo-płytowych metodą elementów skończonych z uwzględnieniem skręcania nieswobodnego, *Mech. Teor. Stos.*, 4, 19, 1981.
189. RYCHLEWSKI J., O podstawowych twierdzeniach teorii przystosowania się ciał sprężysto-plastycznych. 11 *Konf. Mech. Ciał Stałych, Bielsko-Biała 1967*.
190. RZANICYN P.A., Rascziot sooruženij s ucetom płaścieskich swoistw materiałow. *Gos. Izd. Lit. Stroit. Archit.*, Moskwa 1954.
191. SAWCZUK A., On incremental collapse of shells under cyclic loading. *Proc. IUTAM Sym. Kopenhagen 1967, Theory of Thin Shells*. Springer Verlag, 1969, 328-340.
192. SAWCZUK A., Evaluation of upper bounds to shakedown loads for shells. *J. Mech. Phys. Solids*, 17, 1969, 291-301.
193. SAWCZUK A., JANAS M., KÖNIG J.A., Analiza plastyczna konstrukcji. Ossolineum, Wrocław 1972.
194. SAWICKI T., Przykład zastosowania teorii przystosowania do analizy rusztu płaskiego. *Prace IPPT-PAN*, 15, 1980.
195. SAWICKI T., Ocena sprężysto-plastycznych ugięć konstrukcji prętowych o elementach poddanych zginaniu oraz skręcaniu z uwzględnieniem rozciągłości stref plastycznych. *Prace IPPT-PAN*, 20, 1982.
196. SAWICKI T., Ugięcia rusztu sprężysto-plastycznego przy obciążeniach zmiennych. *Rozpr. Inż.*, 30, 3-4, 1982, 299-316.
197. SAWKO F., Analysis of Grillages in the Elasto-Plastic Range. *Civil Eng. Public Work Review*, 59, 695, 696, 1964, 737-739, 866-869.



198. SAWKO F., Effect of Strain Hardening on the Elasto-Plastic Behaviour of beams and Grillages, Proc. Instn. Civil Eng., 28, Aug. 1964, 489-504.
199. SHAW F.S., Limit analysis of grid frame works. J. Struct. Div., ASCE, 89, Oct. 1963.
200. SMITH J.C., DEAN L.D., Field analysis of torsionless bridge grids. J. Struct. Div., 99, 9, 1973, 1837-1849.
201. SPENCER W.J., Shakedown of elastoplastic grids. Ph.D. thesis, Monash Univ., Victoria, Australia 1976.
202. STEELE M.C., The Plastic Bending and Twisting of Square Section Member. J. Mech. Phys. Solids, 3, 1954, 156-166.
203. STRELBICKA A.I., Predelnoje sostojanije ram iz tonkostien-nych stierzniej pri izgibie s kruczienijem. Naukowa Dumka, Kijów, 1964.
204. SYMONDS P.S., NEAL B.G., The calculation of Failure Loads on Plane Frames Under Arbitrary Loading Programmes. I. Instn. Civil Eng., 35, Nov. 1950, 41-61.
205. SYMONDS P.S., Shakedown in Continuous Media. J. Appl. Mech., 18, March 1951, 85-89.
206. SZUBERT L., Wpływ wymiarów i odkształcalności węzła na stan sił wewnętrznych w rusztach. Praca doktorska, Politechnika Warszawska 1980.
207. TAIRA S., INOUE T., TAKAHASHI M., Low cycle fatigue under multiaxial stress. Proc. 10<sup>th</sup> Japan Congr. Testing Materials. Kyoto 1967, 18-23.
208. TELEGA J., Cśrodki idealnie plastyczne pod obciążeniem wieloparametrowym. Rozpr. Inż., 20, 2, 1972.
209. TEZCAN S., The analysis of grid frameworks whose girders are considered to have torsional rigidities. Bull. Istambul Tek. Univ., 14, 2, 1961.
210. TOMA S., CHEN W.F., Cyclic inelastic analysis of tubular column sections. Comp. Struct., 16, 6, 1983.
211. TUCKER R.L., A General Method for Solving Grid-Beam and Plate Problems. Dissertation presented to the University of Texas at Austin, Tex., in 1963.

212. VITIELLO E., Upper bounds to plastic strains in shakedown of structures subjected to cyclic loads. *Meccanica*, 7, 3, 1972, 205-213.
213. VORA R.M., MATLOCK M., Anisotropic skew plates and grids. *J. Eng. Mech. Div., ASCE*, 105, 2, 1979, 237-253.
214. WAK THEIN, Analysis of laterally loaded grid works. *J. Eng. Mech. Div.*, 90, 2, 1964.
215. WALSH P.F., Limit Analysis of Grids Including Torsion. *Civ. Eng. Trans.*, CE12, 1970, 90-93.
216. WÄVER J., Kinetische Stabilitätstheorie elastischer Stäbe unter Beachtung nichtlinearer Krümmungen und Torsion. *Ing. Arch.*, 46, 1977, 161-168.
217. WNUK M., Limit state of a bar with arbitrary cross-section under tension and torsion. *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Techn.*, 10, 1962, 221-230.
218. WNUK M., Yield curves for bars of various cross-sections under combined torsion and tension. *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Techn.*, 11, 1963, 371-378.
219. WOLFE P., The simplex method for quadratic programming. *Econometrica*, 27, 1959, 382-398.
220. WOŁOWICKI W., Nośność graniczna rusztów mostowych z betonu zbrojonego. Rozprawa doktorska, Politechnika Poznańska, 1971.
221. WOŁOWICKI W., Redystrybucja wielkości statycznych w rusztach żelbetowych typu mostowego. 28 Konferencja Naukowa KI PAN : KN PZITB, Krynica 1972.
222. WOŁOWICKI W., Aktualnie prowadzone prace naukowo-badawcze nad stanami granicznymi rusztów mostowych. *Zeszyty problemowe techniki mostowej*, 1, 1973.
223. WOOD W.A., Recent Observations on Fatigue Failure in Metals. *ASTM Special Techn. Publ.*, 237, 61<sup>st</sup> Ann. Meet. Pap., Symp. Basic Mechanisms of Fatigue, 1958, 110-121.
224. WOŹNIAK C., On the stability of dense plane bar grids. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sre. Sci. Techn.*, 4, 13, 1965, 53-59.



225. WOŹNIAK C., ŻUKOWSKI M., Siatki prętowe na podłożu sprężystym. Arch. Hydrotechniki, 14, 1967, 135-139.
226. WOŹNIAK C., Siatkowe dziwigary powierzchniowe. PWN, Warszawa, 1970.
227. WYNHOVEN J.H., ADAMS F.P., Behaviour of structures under loads causing torsion. J. Struct. Div., 99, 8, 1973.
228. ZARKA J., On simplified mathematical modelling of cyclic behaviour. Res. Mech., 4, 1982, 203-223.
229. ŻYCKOWSKI M., Ociążenia złożone w teorii plastyczności, PWN, Warszawa, 1973.
230. PN-80/B-3200, Konstrukcje stalowe. Obliczenia statyczne i projektowanie. Wyd. Norm, Warszawa, 1977.
231. Wytyczne obliczania i projektowania konstrukcji stalowych z uwzględnieniem rezerwy plastycznej. Branżowy Ośrodek Informacji Technicznej i Ekonomicznej "Mostostal", Warszawa 1980.

## SPIS TREŚCI

1. WSTĘP	3
1.1. Opis obciążeń i ich zmian	4
1.2. Zjawisko przystosowania ciał sprężyste - idealnie plastycznych	6
1.3. Rys historyczny oraz przegląd dotychczasowych wyników	10
1.4. Tematyka i cel pracy.	12
2. PRZYSTOSOWANIE KONSTRUKCJI PRĘTOWYCH	13
2.1. Ogólne twierdzenia teorii przystosowania	13
2.2. Opis w wielkościach uogólnionych	16
2.3. Podejście statyczne w wielkościach uogólnionych	18
2.3.1. Powierzchnie sprężyste	18
2.3.2. Twierdzenie statyczne teorii przystosowania w wielkościach uogólnionych	19
2.4. Podejście kinematyczne w wielkościach uogólnionych	20
2.4.1. Twierdzenie kinematyczne teorii przystosowania w wielkościach uogólnionych	20
2.5. Przekrój kołowy - powierzchnie sprężyste dla przypadku zginania i skręcania	21
2.6. Zagadnienie przystosowania jako problem programowania matematycznego	29



2.6.1	Podjęcie statyczne	29
2.6.2	Podjęcie kinematyczne	34
2.6.3	Przykład 1 - Przystosowanie na szczeblu przekroju	35
2.6.4	Przykład 2 - Przystosowanie na szczeblu konstrukcji	42
2.6.5	Przykład 3 - Przystosowanie na szczeblu konstrukcji - podjęcie kinematyczne	50
3.	OCENA PRZEMIESZCZEŃ PRZYSTOSOWANIA	56
3.1	Górna ocena pracy dysypowanej w procesie przystosowania	57
3.2	Przykład - Zginanie ze skręcaniem wspornika	59
3.3.	Ocena przemieszczeń konstrukcji prętowych o elementach zginanych i skręcanych z uwzględnieniem rozciągłości stref plastycznych	65
3.3.1	Zależności podstawowe	65
3.3.2	Przykład - Przemieszczenia rusztu płaskiego	69
3.4.	Ocena przemieszczeń konstrukcji prętowych w oparciu o hipotezę idealnych przegubów plastycznych	75
3.4.1	Założenie i zależności podstawowe	76
3.4.2	Przemieszczenia przystosowania jako problem programowania liniowego	79
3.4.3	Przykład 1 - Ocena ugięć rusztu płaskiego	86

3.4.4	Przykład 2 - Ocena ugięć rusztu płaskiego typu mostowego	104
3.5.	Porównanie teoretycznej oceny przemieszczeń z wynikami eksperymentalnymi	116
3.5.1	Opis eksperymentu	116
3.5.2	Porównanie wyników teoretycznych z eksperymentalnymi	118
3.6	Uwagi na temat stref plastycznych	121
	WNIOSKI	130
	DODATEK A	132
	DODATEK B	136
	DODATEK C	138
	LITERATURA	140