

17/1984

Stefan Owczarek

WIELOMIANOWA POSTAĆ
ROZWIĄZANIA ZAGADNIEŃ
STATYSTYKI SPRĘŻYSTYCH
TARCZ PROSTOKĄTNYCH

17/1984

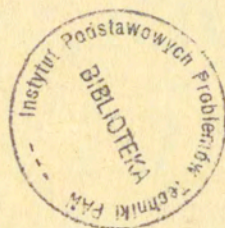
p. 269



WARSZAWA 1984

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 29 września 1983 r.

56965



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 150 egz. Ark.wyd. 6,7. Ark.druk. 9,5.
Oddano do drukarni w kwietniu 1984 r.
Nr zamówienia 280/84.

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

Stefan Owczarek

Pracownia Pól Odształceń IPPT

WIELOMIANOWA POSTAĆ ROZWIĄZANIA ZAGADNIENIA STATYKI SPRĘŻYSTYCH TARCZ PROSTOKĄTNYCH

1. Wstęp

W wyznaczaniu stanów naprężenia i odkształcenia w płaskich ośrodkach odkształconych w zakresie sprężystym stosowane są metody numeryczne. Istnieją monografie analizy stanu naprężenia w takich ośrodkach metodą różnic skończonych np. Anderman. Rozwój metody elementów skończonych zapoczątkowany został również głównie w zastosowaniach wyznaczania pól naprężeń i odkształceń w tarczach prostokątnych.

W niniejszej pracy przedstawiono metodę, która pozwala na wyznaczenie stanu naprężenia i odkształcenia w tarczach prostokątnych przy użyciu mini komputerów i wyzyskaniu macierzy, które zostały odwrócone na maszynach liczących.

Koncepcja metody opiera się na zastosowaniu wielomianów do wyznaczania stanu naprężenia. Metody wielomianowe były stosowane od dawna w analizie płaskich ośrodków /16/. Zdaniem autora, metody te były stosowane bez należytej systematyki, mniej lub więcej przypadkowo. Przypadkowość ta polegała na tym, że w zależności od problemu brzegowego przyjmowano takie lub inne wielomiany nie dając odpowiedzi w jaki sposób należy je dobrać dla dowolnych obciążeń. Stosowano więc metodę pórodrotną.

W niniejszej pracy wielomiany te wynikają z rozwiązania zagadnienia obszarowego i są określone jednoznacznie a ich liczbę przyjmuje się stosownie do żądanej dokładności metody. Przy wyprowadzaniu wzorów podstawowych oparto się na pracy /13/. Postępowanie w niej jest zbliżone z metodą funkcji początkowych, której podstawy podali W.W. Własow /2/ i

A.I. Lurie /9/. Rozwiązania zamknięte pewnych szczególnych przypadków obciążeń płaskiego ośrodka sprężystego przedstawiono w pracach /3/, /4/, /5/.

Problem wartości własnych zagadnienia brzegowego tarczy kwadratowej rozwiązano w pracy /6/.

Wyznaczenie stanu naprężenia i prędkości płaskich ośrodków plastycznych przy użyciu szeregów potęgowych przedstawiono w pracach /7/, /8/, /9/, /10/. Pewne rozwiązania za pomocą operatorów różniczkowych zagadnień brzegowych w płytach odkształconych sprężystości przedstawiono w pracach /14/ i /15/.

Otrzymane w pracy /13/ rozwiązania wielomianowe spełniają warunki brzegowe na górnej i dolnej krawędzi tarczy. Spełnienie warunków na lewej i prawej krawędzi wymaga uwzględnienia części niewielomianowej rozwiązania.

W niniejszych rozważaniach znaleziono wyrażenia na składowe tensora naprężenia, które spełniają warunki brzegowe wzdłuż osi układu odniesienia przyjętego w osiach symetrii tarczy /rys.1/. Zapewnia to symetrię wyjściowego rozwiązania względem układu odniesienia. Niniejsze rozwiązanie można również wyprowadzić w oparciu o wielomiany biharmoniczne /17/.

Otrzymane w postaci wielomianów składowe tensora naprężenia spełniają równania równowagi i ciągłości odkształceń. Wielomiany te występują w iloczynach ze współczynnikami stałymi. Są to kolejne pochodne w początku układu tensora naprężenia.

Uzyskane rozwiązanie rozłożone na cztery niezależne.

Każde z tych rozwiązań opisuje jeden stan obciążenia tarczy określony przez następujące cechy symetrii naprężeń normalnych względem przyjętych współrzędnych układu:

- SS /symetria względem współrzędnych x i y /
- SA /symetria względem współrzędnej x i antysymetria względem współrzędnej y /
- AS /antysymetria względem współrzędnej x i symetria względem współrzędnej y /
- AA /antysymetria względem współrzędnych x i y /

Występujące w rozwiązaniu współczynniki stałe wyznaczone z warunku minimalnego kwadratowego odchylenia od wartości

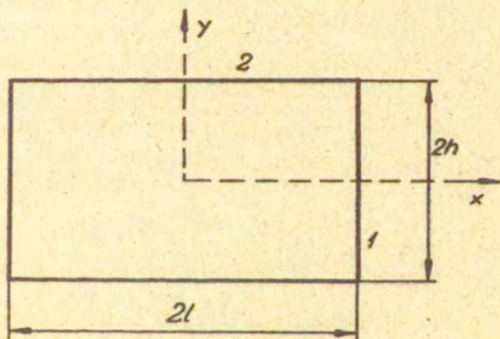
naprężeń na brzegu tarczy.

Przyjmując odpowiednią liczbę wielomianów można otrzymać dostatecznie dokładne rozwiązanie. Obliczenia macierzy równań podstawowych rozwiązania problemu w przypadku 65-ciu współczynników dokonano przy użyciu maszyny Odra 1305. Program jest tak zbudowany, że może generować układ równań przy dowolnie obranej liczbie współczynników. Wykonano również program pozwalający na określenie wszystkich niewiadomych zadania za pomocą tej maszyny.

W efekcie końcowym otrzymano składowe stanu naprężenia i przemieszczenia w obszarze tarczy w postaci wielomianów. Składowe te spełniają warunki obszarowe i minimalizują odchyłkę od wielkości naprężeń występujących na brzegach tarczy. Wykonano trzy przykłady obliczenia stanu naprężenia w tarczy kwadratowej. Do analizy przyjęto warunki brzegowe z rodzimymi naprężeniami brzegowymi nieciągłymi. Obliczenia zilustrowano wykresami.

Obecnie jest testowany program na opracowywanie wyników liczbowych naprężeń za pomocą maszyny Odra 1305.

Układ współrzędnych, numeracje boków i parametry geometryczne przyjęte do rozważań pokazano na rysunku 1.



Rys. 1. Układ współrzędnych i parametry geometryczne przyjęte w analizie ośrodka.

2. Ważniejsze założenia i oznaczenia przyjęte w pracy

a/ Przyjęto następujące oznaczenia naprężeń działających wzdłuż obranego układu współrzędnych /osie środkowe tarczy/

$$1. \quad y=0, \quad \sigma_{yy}^0 = p/x/, \quad \sigma_{xy}^0 = \tau/x/$$

$$2. \quad x=0, \quad \sigma_{xx}^0 = z/y/, \quad \sigma_{xy}^0 = t/y/$$

b/ Założono, że funkcje p, τ, z, t są klasy C^0 .

c/ Przyjęto założenia ośrodka płaskiego liniowej teorii sprężystości.

3. Wyprowadzenie wyrażeń symetrycznych względem układu odniesienia na funkcje składowych tensora naprężenia w obszarze tarczy

Przy wyprowadzeniu poszukiwanych funkcji oparto się na pracy /13/. Na stronie 8 wymienionej pracy składowe stanu naprężenia napisano w postaci szeregu nieskończonego. Wzory te przytoczono poniżej:

$$\sigma_{xx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n!} \left[J(n)(n+2) D^{n0} S - J(n+1)(n+1) D^{n-1} R + \right. \\ \left. + J(n) n D^{n0} P + J(n+1)(n-1) D^n \tau \right] y^n,$$

$$(1) \quad \sigma_{yy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n!} \left[-J(n) n D^{n0} S + J(n+1)(n-1) D^{n-1} R - \right. \\ \left. - J(n)(n-2) D^{n0} P - J(n+1)(n-3) D^n \tau \right] y^n,$$

$$\sigma_{xy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n!} \left[J(n+1)(n+1) D^{n0} S + J(n) n D^{n-1} R + \right. \\ \left. + J(n+1)(n-1) D^{n0} P - J(n)(n-2) D^n \tau \right] y^n,$$

We wzorach /1/ przyjęto następujące oznaczenia:

- $D = -$ - pochodna zwyczajna względem współrzędnej x
 $\overset{\circ}{p}/x/$ - funkcja naprężenia normalnego występującego wzdłuż osi $x/y=0/$
 $\overset{\circ}{t}/x/$ - funkcja naprężenia stycznego występującego wzdłuż osi $x/y=0/$
 $\overset{\circ}{S}/x/$ - funkcja naprężenia normalnego o kierunku x występująca wzdłuż osi $x/y=0/$
 $\overset{\circ}{R}/x/$ - funkcja pierwszej pochodnej względem współrzędnej y naprężenia normalnego o kierunku x występująca wzdłuż osi $x/y=0/$

$j/n, j/n+1/$ - funkcja dwuwartościowa $/0,1/$

$J/n, J/n+1/$ - funkcja trójwartościowa $/-1,0,1/$

$$(2) \quad j/n = \frac{1}{2} [(-1)^n + 1], \quad j/n+1 = \frac{1}{2} [(-1)^{n+1} + 1],$$

$$J/n = j/n/1^n,$$

$$J/n+1 = j/n+1/1^{n+1},$$

Łatwo zauważyć, że wyrażenia /1/ zależą w postaci wyraźnej jedynie od funkcji określonych na osi x . Brak jest symetrii w wyborze funkcji początkowych. Jest to mankament tej postaci rozwiązania.

Symetrię tę uzyskano eliminując z zależności /1/ funkcje $\overset{\circ}{S}/x/$, $\overset{\circ}{R}/x/$ a wprowadzając na ich miejsce funkcje $\overset{\circ}{z}/y/$, $\overset{\circ}{t}/y/$. Przy czym $\overset{\circ}{z}/y/$ - funkcja naprężenia normalnego $\overset{\circ}{\sigma}_{xx}$ występującego wzdłuż osi $y/x=0/$, $\overset{\circ}{t}/y/$ - funkcja naprężenia stycznego występującego wzdłuż osi $y/x=0/$

Występujące w wyrażeniach /1/ funkcje napisano w postaci nieskończonych szeregów potęgowych.

$$\overset{\circ}{S} = \sum_{i=0}^{\infty} \overset{\circ}{S}_1 x^i, \quad \overset{\circ}{R} = \sum_{i=0}^{\infty} \overset{\circ}{R}_1 x^i,$$

$$(3) \quad p = \sum_{i=0}^{\infty} p_i x^i, \quad t = \sum_{i=0}^{\infty} t_i x^i,$$

$$z = \sum_{i=0}^{\infty} z_i y^i, \quad \tau = \sum_{i=0}^{\infty} \tau_i y^i.$$

Wykonując operacje różniczkowania i podstawiania do wyrażeni /3/ otrzymano:

$$(4) \quad D^n S \Big|_{x=0} = n! S_n^0, \quad D^n R \Big|_{x=0} = n! R_n^0, \quad D^{n-1} R \Big|_{x=0} = (n-1)! R_{n-1}^0$$

$$D^n p \Big|_{x=0} = n! p_n^0, \quad D^n \tau \Big|_{x=0} = n! \tau_n^0.$$

Warunki brzegowe wzdłuż osi y o postaci:

$$(5) \quad \sigma_{xx} \Big|_{x=0} = z/y, \quad \sigma_{xy} \Big|_{x=0} = t/y$$

po uwzględnieniu /4/ w wyrażeniach /1/ otrzymując postać:

$$(6) \quad \sum_{n=0}^{\infty} z_n y^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n!} \left[J/n//n+2n! S_n^0 - J/n+1//n+1//n-1! R_{n-1}^0 + \right. \\ \left. + J/n/n \cdot n! p_n^0 + J/n+1//n-1/n! \tau_n^0 \right] y^n,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} t_n y^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n!} \left[J/n+1//n+1n! S_n^0 + J/n/n//n-1! R_{n-1}^0 + \right. \\ \left. + J/n+1//n-1/n! p_n^0 - J/n//n-2/n! \tau_n^0 \right] y^n.$$

Porównując współczynniki przy y^n otrzymane układ 2 równań liniowych o niewiadomych S_n^0, R_n^0 .

$$(7) \quad \begin{cases} J/n//n+2/S_n^0 - J/n+1//\frac{n+1}{n} R_{n-1}^0 = 2z_n - J/n/n p_n^0 - J/n+1//n-1/\tau_n^0 \\ J/n+1//n+1/S_n^0 + \frac{J/n/n}{n} R_{n-1}^0 = 2t_n - J/n+1//n-1/p_n^0 + J/n/n-2/\tau_n^0 \end{cases}$$

W celu rozwiązania układu /7/ obliczono wyznacznik główny W i wyznaczniki W_1, W_2 . Są one równe:

$$\begin{aligned}
 W &= -\frac{1}{n} \left[j/n/n/n+2/ + j/n+1//n+1/2' \right], \\
 (8) \quad W_1 &= -\frac{1}{n} \left\{ 2 \left[J/n/nz_n^{\circ} + J/n+1//n+1/t_n^{\circ} \right] + \left[-j/n/n^2-j/n+1/ \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \cdot/n^2 - 1/ \right] p_n^{\circ} \right\}, \\
 W_2 &= 2 \left[J/n//n+2/t_n^{\circ} - J/n+1//n+1/z_n^{\circ} + j/n//n^2-4/ + \right. \\
 &\quad \left. + j/n+1//n^2-1/t_n^{\circ} \right].
 \end{aligned}$$

Wyrażenia powyższe napisano przy wyzyskaniu związków:

$$(9) \quad J^2/n/ = j/n/, \quad J^2/n+1/ = j/n+1/.$$

Poszukiwane niewiadome S_n° i R_{n-1}° są równe:

$$\begin{aligned}
 (10) \quad S_n^{\circ} &= \frac{2J/n/}{n+2} z_n^{\circ} + \frac{2J/n+1/}{n+1} t_n^{\circ} - \left[\frac{j/n/n}{n+2} + \frac{j/n+1//n-1/}{n+1} \right] p_n^{\circ}, \\
 R_{n-1}^{\circ} &= 2n \left[\frac{J/n/}{n} t_n^{\circ} - \frac{J/n+1/}{n+1} z_n^{\circ} \right] + n \left[\frac{j/n//n-2/}{n} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{j/n+1//n-1/}{n+1} \right] t_n^{\circ}.
 \end{aligned}$$

Przy zmianie wskaźników przy S_n° według reguły $n=k$, przy R_{n-1}° i $n-1 = k$ wzory /10/ napisano w postaci:

$$\begin{aligned}
 (11) \quad S_k^{\circ} &= \frac{2J/k/}{k+2} z_k^{\circ} + \frac{2J/k+1/}{k+1} t_k^{\circ} - \left[\frac{j/k/k}{k+2} + \frac{j/k+1//k-1/}{k+1} \right] p_k^{\circ}.
 \end{aligned}$$

$$(11) \quad \overset{\circ}{R}_k = 2J/k \frac{1/k+1}{k+2} z_{k+1} + 2J/k+1 \overset{\circ}{t}_{k+1} + \left[\frac{1/k/k/k+1}{k+2} + \right. \\ \left. + 1/k+1//k-1/ \right] \overset{\circ}{t}_{k+1}.$$

Podstawiając otrzymane wyrażenia /11/ do /1/ przy wyzyskaniu rozwinięć /3/ otrzymano następujące wyrażenia na funkcje składowych tensora naprężenia w obszarze tarczy :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n!} \left\{ J/n//n+2/D^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2J/k}{k+2} \overset{\circ}{z}_k x^k + \right. \\ & - J/n+1//n+1/D^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2J/k//k+1}{k+2} \overset{\circ}{z}_{k+1} x^k + \\ & + J/n/n+2/D^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2J/k+1}{k+1} \overset{\circ}{t}_k x^k - J/n+1//n+1/D^{n-1} \cdot \\ & \cdot \sum_{k=0}^{\infty} 2J/k+1 \overset{\circ}{t}_{k+1} x^k + \\ & - J/n//n+2/D^n \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1/k/k}{k+2} + 1/k+1//k-1/ \right] \overset{\circ}{p}_k x^k + \\ & + J/n/nD^n \overset{\circ}{p} + \\ & - J/n//n+1/D^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1/k/k//k+1}{k+2} + 1/k+1//k-1/ \right] \overset{\circ}{t}_{k+1} x^k \\ & \left. + J/n+1//n-1/D^n \overset{\circ}{t} \right\} y^n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (12) \quad \sigma_{yy} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n!} \left\{ -J/n/nD^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2J/k/}{k+2} z_k^{\circ} x^k + J/n+1//n-1/D^{n-1} \right. \\
 &\quad \left. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2J/k//k+1/}{k+2} z_{k+1}^{\circ} x^k + \right. \\
 &\quad \left. -J/n/D^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2J/k+1/}{k+1} t_k^{\circ} x^k + J/n+1//n-1/D^{n-1} \right. \\
 &\quad \left. \cdot \sum_{k=0}^{\infty} 2J/k+1/t_{k+1}^{\circ} x^k + \right. \\
 &\quad \left. +J/n/nD^n \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1/k/k}{k+2} + \frac{1/k+1//k-1/}{k+1} \right] p_k x^k - \right. \\
 &\quad \left. - J/n//n-2/D^n p^{\circ} + J/n+1//n-1/D^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1/k/k+1/}{k+2} + \right. \\
 &\quad \left. + 1/k+1//k-1/ \right] t_{k+1}^{\circ} x^k + - J/n+1//n-3/D^n \left. \right\} y^n, \\
 \sigma_{xy} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n!} \left\{ J/n+1//n-1/D^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2J/k/}{k+2} z_k^{\circ} x^k + J/n/nD^{n-1} \right. \\
 &\quad \left. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2J/k//k+1/}{k+2} z_{k+1}^{\circ} x^k + \right. \\
 &\quad \left. + J/n+1//n+1/D^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2J/k+1/}{k+1} t_k^{\circ} x^k + J/n/nD^{n-1} \right. \\
 &\quad \left. \cdot \sum_{k=0}^{\infty} 2J/k+1/t_{k+1}^{\circ} x^k + \right. \\
 &\quad \left. - J/n+1//n+1/D^n \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1/k/k}{k+2} + J/k+1/ \frac{k-1/}{k+1} \right] p_k x^k + \right. \\
 &\quad \left. + J/n+1//n-1/D^n p^{\circ} + \right.
 \end{aligned}$$

$$+ J/n/nD^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{J/k/k/k+1/}{k+2} \rightarrow J/k+1/k-1/ \right] \overset{0}{\tau}_{k+1} x^k +$$

$$- J/n//n-2/D^n \overset{0}{\tau} \} y^n.$$

Rozkładając naprężenia występujące wzdłuż linii środkowych tarczy na część symetryczną i niesymetryczną według wzorów:

$$p^{\text{OS}} = \sum_{k=0}^{\infty} J/k/p_k = \frac{p/x/ + p/-x/}{2}, \quad p^{\text{OA}} = \sum_{k=0}^{\infty} J/k+1/p_k = \frac{p/x/-p/-x/}{2},$$

$$\tau^{\text{OS}} = \sum_{k=0}^{\infty} J/k/\tau_k = \frac{\tau/x/ + \tau/-x/}{2}, \quad \tau^{\text{OA}} = \sum_{k=0}^{\infty} J/k+1/\tau_k = \frac{\tau/x/-\tau/-x/}{2},$$

$$(13) \quad z^{\text{OS}} = \sum_{k=0}^{\infty} J/k/z_k y^k = \frac{z/y/+z/-y/}{2}, \quad z^{\text{OA}} = \sum_{k=0}^{\infty} J/k+1/z_k y^k = \frac{z/y//-z/-y/}{2},$$

$$t^{\text{OS}} = \sum_{k=0}^{\infty} J/k/t_k y^k = \frac{t/y/+t/-y/}{2}, \quad t^{\text{OA}} = \sum_{k=0}^{\infty} J/k+1/t_k y^k = \frac{t/y//-t/-y/}{2}.$$

oraz przyjmując następujące oznaczenia operatorów:

$$\sin/Dy/ = - \sum_{n=0}^{\infty} J/n+1/ \frac{Dy/n}{n!}, \quad \cos/Dy/ = \sum_{n=0}^{\infty} J/n/ \frac{Dy/n}{n!},$$

$$L_0/Dy/ = \frac{1}{2} Dy \cos Dy - 3 \sin Dy = - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} J/n+1/ \frac{n-3}{n!} /Dy/n,$$

$$L_1/Dy/ = \frac{1}{2} 2 \cos Dy - Dy \sin Dy = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} J/n/ \frac{n-2}{n!} /Dy/n,$$

$$(14) \quad L_2/Dy/ = \frac{1}{2} \sin Dy - Dy \cos Dy = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} J/n+1/ \frac{n-1}{n!} /Dy/n,$$

$$L_3/Dy/ = \frac{1}{2} Dy \sin Dy = - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} J/n/ \frac{n}{n!} /Dy/n,$$

$$(14) \quad L_4/Dy/ = \frac{1}{2}(\sin Dy + Dy \cos Dy) = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} J/n+1/ \frac{n+1}{n!} /Dy/^n,$$

$$L_5/Dy/ = \frac{1}{2} (2 \cos Dy - Dy \sin Dy) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} J/n/ \frac{n+2}{n!} /Dy/^n,$$

$$R_{xx}^{DS} = -L_3/yD/ - L_5/yD/xDx^{-2}D^{-1}x,$$

$$R_{xx}^{DA} = -L_3/yD/ - L_5/yD/x^2Dx^{-1}D^{-1},$$

$$R_{xx}^{CS} = L_2/yD/ + L_4/yD/D^{-1}x^2Dx^{-2},$$

$$R_{xx}^{CA} = L_2/yD/ + L_4/yD/x^2Dx^{-2}D^{-1},$$

$$R_{yy}^{DS} = -L_1/yD/ - L_3/yD/xDx^{-2}D^{-1}x,$$

$$R_{yy}^{DA} = -L_1/yD/ - L_3/yD/x^2Dx^{-2}D^{-1},$$

$$R_{yy}^{CS} = L_0/yD/ + L_2/yD/D^{-1}x^2Dx^{-2},$$

$$R_{yy}^{CA} = L_0/yD/ + L_2/yD/x^2Dx^{-2}D^{-1},$$

$$R_{xy}^{DS} = L_2/yD/ + L_4/yD/xDx^{-2}D^{-1}x,$$

$$R_{xy}^{DA} = L_2/yD/ + L_4/yD/x^2Dx^{-2}D^{-1},$$

$$R_{xy}^{CS} = -L_1/yD/ - L_3/yD/D^{-1}x^2Dx^{-2},$$

$$R_{xy}^{CA} = -L_1/yD/ - L_3/yD/x^2Dx^{-2}D^{-1}.$$

Przyjmując oznaczenia:

$$d = \frac{\partial}{\partial y}$$

można wykazać w oparciu o wzór /12/ że pozostałe operatory można napisać przez relacje /15/ do wyrażeń /14/

$$(15) \quad x \otimes y, \quad p \otimes z, \quad \overset{0}{\tau} \otimes \overset{0}{\tau}, \quad D \otimes d$$

$$\sin/dx/ = - \sum_{n=0}^{\infty} J/n+1/ \frac{dx^n}{n!}, \quad \cos/dx/ = \sum_{n=0}^{\infty} J/n/ \frac{dx^n}{n!},$$

$$L_0/dx/ = \frac{1}{2} dx \cos dx - 3 \sin dx/ = - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} J/n+1/ \frac{dx^{n-3}}{n!} /dx^n,$$

$$L_1/dx/ = \frac{1}{2} 2 \cos dx - dx \sin dx/ = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} J/n/ \frac{dx^{n-2}}{n!} /dx^n,$$

$$L_2/dx/ = \frac{1}{2} \sin dx - dx \cos dx/ = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} J/n+1/ \frac{dx^{n-1}}{n!} /dx^n,$$

$$L_3/dx/ = \frac{1}{2} dx \sin dx = - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} J/n/ \frac{dx^n}{n!} /dy^n,$$

$$L_4/dx/ = \frac{1}{2} \sin dx + dx \cos dx/ = - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} J/n+1/ \frac{dx^{n+1}}{n!} /dx^n,$$

$$L_5/dx/ = \frac{1}{2} 2 \cos dx - dx \sin dx/ = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} J/n/ \frac{dx^{n+2}}{n!} /dx^n,$$

$$R_{yy}^{QS} = - L_3/xd/ - L_5/xd/y dy^{-2} d^{-1} y,$$

$$R_{yy}^{QA} = - L_3/xd/ - L_5/xd/y^2 dy^{-1} d^{-1},$$

$$\begin{matrix} \text{oS} \\ R_{yy}^t \end{matrix} = L_2/xd/ + L_4/xd/d^{-1}y^2dy^{-2},$$

$$\begin{matrix} \text{oA} \\ R_{yy}^t \end{matrix} = L_2/xd/ + L_4/xd/y^2dy^{-2}d^{-1},$$

$$\begin{matrix} \text{oS} \\ R_{xx}^z \end{matrix} = -L_1/xd/ - L_3/xd/ydy^{-2}d^{-1}y,$$

$$\begin{matrix} \text{oA} \\ R_{xx}^z \end{matrix} = -L_1/xd/ - L_3/xd/y^2dy^{-2}d^{-1},$$

$$(16) \begin{matrix} \text{oS} \\ R_{xx}^t \end{matrix} = L_0/xd/ + L_2/xd/ d^{-1}y^2dy^{-2},$$

$$\begin{matrix} \text{oA} \\ R_{xx}^t \end{matrix} = L_0/xd/ + L_2/xd/y^2dy^{-2}d^{-1},$$

$$\begin{matrix} \text{oS} \\ R_{xy}^z \end{matrix} = L_2/xd/ + L_4/xd/ydy^{-2}d^{-1}y,$$

$$\begin{matrix} \text{oA} \\ R_{xy}^z \end{matrix} = L_2/xd/ + L_4/xd/y^2dy^{-2}d^{-1},$$

$$\begin{matrix} \text{oS} \\ R_{xy}^t \end{matrix} = -L_1/xd/ - L_3/xd/d^{-1}y^2dy^{-2},$$

$$\begin{matrix} \text{oA} \\ R_{xy}^t \end{matrix} = -L_1/xd/ - L_3/xd/y^2dy^{-2}d^{-1},$$

Przy pomocy oznaczeń /14/ i /16/ rozwiązanie /12/ napisano w postaci:

$$\begin{aligned} \zeta_{xx} = & R_{xx}^p \begin{matrix} \text{oS} \\ p \end{matrix} + R_{xx}^p \begin{matrix} \text{oA} \\ p \end{matrix} + R_{xx}^{\tau} \begin{matrix} \text{oS} \\ \tau \end{matrix} + R_{xx}^{\tau} \begin{matrix} \text{oA} \\ \tau \end{matrix} + R_{xx}^z \begin{matrix} \text{oS} \\ z \end{matrix} + \\ & + R_{xx}^z \begin{matrix} \text{oA} \\ z \end{matrix} + R_{xx}^t \begin{matrix} \text{oS} \\ t \end{matrix} + R_{xx}^t \begin{matrix} \text{oA} \\ t \end{matrix}, \end{aligned}$$

$$(17) \quad \begin{aligned} \sigma_{yy} = & R_{yy}^p \overset{oS}{p} + R_{yy}^p \overset{oA}{p} + R_{yy} \overset{oS}{p} + R_{yy} \overset{oA}{p} + R_{yy}^z \overset{oS}{z} + \\ & + R_{yy}^z \overset{oA}{z} + R_{yy}^t \overset{oS}{t} + R_{yy}^t \overset{oA}{t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} = & R_{xy}^p \overset{oS}{p} + R_{xy}^p \overset{oA}{p} + R_{xy} \overset{oS}{p} + R_{xy} \overset{oA}{p} + R_{xy}^z \overset{oS}{z} + \\ & + R_{xy}^z \overset{oA}{z} + R_{xy}^t \overset{oS}{t} + R_{xy}^t \overset{oA}{t} \end{aligned}$$

Wyrażając operatory przez nieskończone szeregi potęgowe poszczególne składniki wzoru można napisać następująco:

$$(18) \quad \begin{aligned} R_{xx}^p \overset{oS}{p} &= \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{n!} J/n/n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{J/k/}{k+2} \frac{k!}{/k-n/!} y^{k-n} x^n \overset{o}{p}_k, \\ R_{xx}^p \overset{oA}{p} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} J/n+1//n-1/ \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{J/k//k+1/!}{k+2} \frac{k!}{/k-n+1/!} y^{k-n+1} \overset{o}{p}_{k+1}, \\ R_{xx}^t \overset{oS}{t} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} J/n+1//n-1/ \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{J/k+1/}{k+2} \frac{k!}{/k-n+1/!} y^{k-n+1} x^n \overset{o}{t}_{k+1}, \\ R_{xx}^t \overset{oA}{t} &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} J/n/n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{J/k+1/}{k+1} \frac{k!}{/k-n/!} y^{k-n} x^n \overset{o}{t}_k, \\ R_{xx}^z \overset{oS}{z} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} J/n//n+2/ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{J/k/}{k+2} \frac{k!}{/k-n/!} x^{k-n} y^n \overset{o}{z}_k, \\ R_{xx}^z \overset{oA}{z} &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} J/n+1//n+1/ \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{J/k//k+1/!}{k+2} \frac{k!}{/k+1-n/!} x^{k+1-n} y^n \overset{o}{z}_{k+1} \end{aligned}$$

$$R_{xx}^{t \text{ os}} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} J/n+1//n+1/ \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{J/k+1/k!}{/k+1-n/!} x^{k+1-n} y^n t_{k+1}^{\circ}$$

$$R_{xx}^{t \text{ oa}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} J/n//n+2/ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{J/k+1/k!}{/k+1//k-n/} x^{k-n} y^n t_k^{\circ}$$

$$R_{yy}^{p \text{ os}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} J/n//n+2/ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{J/k/}{k+2/ /k-n/!} y^{k-n} x^n p_k^{\circ}$$

$$R_{yy}^{p \text{ oa}} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} J/n+1//n+1/ \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{J/k//k+1/!}{k+2//k+1-n/!} y^{k+1-n} x^n p_{k+1}^{\circ}$$

$$(18) R_{yy}^{t \text{ os}} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} J/n+1//n+1/ \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{J/k+1/k!}{/k+1-n/!} y^{k+1-n} x^n t_{k+1}^{\circ}$$

$$R_{yy}^{t \text{ oa}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} J/n//n+2/ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{J/k+1/}{k+1/ /k-n/!} y^{k-n} x^n t_k^{\circ}$$

$$R_{yy}^{z \text{ os}} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} J/n/n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{J/k/}{/k+2//k-n/!} x^{k-n} y^n z_k^{\circ}$$

$$R_{yy}^{z \text{ oa}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} J/n+1//n+1/ \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{J/k//k+1/!}{/k+2//k+1-n/!} x^{k+1-n} y^n z_{k+1}^{\circ}$$

$$R_{yy}^{t \text{ os}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} J/n+1//n-1/ \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{J/k+1/k!}{/k+1-n/!} x^{k+1-n} y^n t_{k+1}^{\circ}$$

$$R_{yy}^{t \text{ oa}} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} J/n/n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{J/k+1/}{/k+1/ /k-n/!} x^{k-n} y^n t_k^{\circ}$$

$$R_{xy}^{p \text{ os}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} J/n+1//n+1/ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{J/k/k!}{/k+2//k-n/!} y^{k-n} x^n p_k^{\circ}$$

$$R_{xy}^p \overset{OA}{p} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} J/n/n \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{J/k//k+1/!}{/k+2//k+1-n/!} y^{k+1-n} x^n \overset{O}{p}_{k+1}$$

$$R_{xy}^s \overset{OS}{t} = \overset{O}{t}_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} J/n/n \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{J/k+1/k!}{/k+1-n/!} y^{k+1-n} x \overset{O}{t}_{k+1}$$

$$R_{xy}^a \overset{OA}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} J/n+1//n+1/ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{J/k+1/}{/k+1//} \frac{x!}{k-n/!} y^{k-n} x^n \overset{O}{t}_k$$

$$R_{xy}^z \overset{OS}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} J/n+1//n+1/ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{J/k/k!}{/k+2//k-n/!} x^{k-n} y^n \overset{O}{z}_k$$

$$R_{xy}^z \overset{OA}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} J/n/n \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{J/k//k+1/!}{/k+2//k+1-n/!} x^{k+1-n} y^n \overset{O}{z}_{k+1}$$

$$R_{xy}^t \overset{OS}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} J/n/n \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{J/k+1/k!}{/k+1-n/!} x^{k+1-n} y^n \overset{O}{t}_{k+1}$$

$$R_{xy}^t \overset{OA}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} J/n+1//n+1/ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{J/k+1/k!}{/k+1//k-n/!} x^{k-n} y^n \overset{O}{t}_k$$

Wzory /18/ otrzymano podstawiając szeregi potęgowe do operatorów a następnie wykonując elementarne przekształcenia. Jako przykład przytoczono poniżej przekształcenia czynników

$$R_{xx}^p \overset{OS}{p}, 1 R_{xx}^p \overset{OA}{p}$$

$$R_{xx}^p \overset{OS}{p} = [-L_3/yD/ - L_5/yD/xDx^{-2}D^{-1}x] \sum_{k=0}^{\infty} j/k/p_k \overset{O}{x}^k$$

$$R_{xx}^p \overset{OA}{p} = [-L_3/yD/ - L_5/yD/x^2Dx^{-1}D^{-1}] \sum_{k=0}^{\infty} j/k+1/p_k \overset{O}{x}^k$$

Wyrażając operatory $L_3/Dy/$ i $L_5/Dy/$ przez szeregi potęgowe otrzymano:

$$\begin{aligned}
 R_{xx}^p \overset{oS}{p} &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} J/n/ \frac{n}{n!} / Dy/n \sum_{k=0}^{\infty} J/k/p_k x^k + \\
 &- \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} J/n/ \frac{n+2}{n!} / Dy/n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k+2} J/k/p_k x^k = \\
 &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J/n/n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} J/k/ \frac{k-n}{k+2} \frac{k!}{(k-n)!} p_k x^{k-n}
 \end{aligned}$$

Analogicznie:

$$R_{xx}^p \overset{oA}{p} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J/n/}{n!} y^n \sum_{k=0}^{\infty} J/k+1/ \frac{k-1-n/}{k+1} \frac{k}{k-n/} x^{k-n} p_k$$

Zmieniając wskaźniki według reguły: $k-n = N$, oraz uwzględniając zależność:

$$J/k-N/ = J/k/J/N/ + J/k+1/J/N+1/$$

$$J/k/j/k/ = J/k/ \text{ jest}$$

$$R_{xx}^p \overset{oS}{p} = \sum_{k=N}^{\infty} - \frac{1}{N!} J/N/N \sum_{N=0}^{\infty} \frac{J/k/k!}{k+2//k-N/!} x^N y^{k-N} p_k$$

$$R_{xx}^p \overset{oA}{p} = \sum_{k=N}^{\infty} - \frac{1}{N!} J/N+1//N-1/ \sum_{N=0}^{\infty} \frac{J/k+1/k!}{k+1//k-N/!} x^N y^{k-N} p_k$$

Zmieniając w ostatnim wyrażeniu wskaźniki według reguły $k=K+1$ jest :

$$R_{xx}^p \overset{oA}{p} = \sum_{K=N-1}^{\infty} \frac{1}{N!} J/N+1//N-1/ \sum_{N=0}^{\infty} \frac{J/k/K+1/!}{k+2//k+1-N/!} x^N y^{K+1-N} p_{K+1}$$

co jest zgodne z wyrażeniami /18/.

Wyrażenia /18/ można również napisać w postaci sum nieskoń-

czonych z iloczynów stałych współczynników p_k, τ_k, z_k, t_k przez wielomiany k -tego stopnia. Wystarczy w tym celu tam gdzie występują wskaźniki $k+1$ /118/ przy współczynnikach stałych p, z, τ, t zmienić je według relacji $K = k+1$, a następnie we wszystkich wyrażeniach zmienić kolejność sumowania. Postępując w ten sposób otrzymano:

$$\begin{aligned}
 R_{xx}^{p \circ S} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J/k/}{k+2} \sum_{n=0}^{n=k} J/n/n \binom{k}{n} y^{k-n} x^n p_k, \\
 R_{xx}^{p \circ A} &= - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J/k+1/}{k+1} \sum_{n=0}^{n=k} J/n+1/n-1 \binom{k}{n} y^{k-n} x^n p_k, \\
 R_{xx}^{\tau \circ S} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J/k/}{k} \sum_{n=0}^{n=k} J/n+1/n-1 \binom{k}{n} y^{k-n} x^n \tau_k, \\
 R_{xx}^{\tau \circ A} &= - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J/k+1/}{k+1} \sum_{n=0}^{n=k} J/n/n \binom{k}{n} y^{k-n} x^n \tau_k, \\
 (19) \quad R_{xx}^{z \circ S} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J/k/}{k+2} \sum_{n=0}^{n=k} J/n/n+2 \binom{k}{n} x^{k-n} y^n z_k, \\
 R_{xx}^{z \circ A} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J/k+1/}{k+1} \sum_{n=0}^{n=k} J/n+1/n+1 \binom{k}{n} x^{k-n} y^n z_k, \\
 R_{xx}^{t \circ S} &= - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J/k/}{k} \sum_{n=0}^{n=k} J/n+1/n+1 \binom{k}{n} x^{k-n} y^n t_k, \\
 R_{xx}^{t \circ A} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J/k+1/}{k+1} \sum_{n=0}^{n=k} J/n/n+2 \binom{k}{n} x^{k-n} y^n t_k, \\
 R_{yy}^{p \circ S} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J/k/}{k+2} \sum_{n=0}^{n=k} J/n/n+2 \binom{k}{n} y^{k-n} x^n p_k,
 \end{aligned}$$

$$R_{yy}^{p \text{ oA}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J/k+1/}{k+1} \sum_{n=0}^{n=k} J/n+1//n+1/ \binom{k}{n} y^{k-n} x^n \text{ o } p_k$$

$$R_{yy}^{t \text{ oS}} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J/k/}{k} \sum_{n=0}^{n=k} J/n+1//n+1/ \binom{k}{n} y^{k-n} x^n \text{ o } t_k$$

$$R_{yy}^{t \text{ oA}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J/k+1/}{k+1} \sum_{n=0}^{n=k} J/n//n+2/ \binom{k}{n} y^{k-n} x^n \text{ o } t_k$$

$$R_{yy}^{z \text{ oS}} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J/k/}{k+2/} \sum_{n=0}^{n=k} J/n//n \binom{k}{n} x^{k-n} y^n \text{ o } z_k$$

$$R_{yy}^{z \text{ oA}} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J/k+1/}{k+1} \sum_{n=0}^{n=k} J/n+1//n-1/ \binom{k}{n} x^{k-n} y^n \text{ o } z_k$$

$$R_{yy}^{t \text{ oS}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J/k/}{k} \sum_{n=0}^{n=k} J/n-1//n-1/ \binom{k}{n} x^{k-n} y^n \text{ o } t_k$$

(19)

$$R_{yy}^{t \text{ oA}} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J/k+1/}{k+1} \sum_{n=0}^{n=k} J/n/n \binom{k}{n} x^{k-n} y^n \text{ o } t_k$$

$$R_{xy}^{p \text{ oS}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J/k/}{k+2} \sum_{n=0}^{n=k} J/n+1//n+1/ \binom{k}{n} y^{k-n} x^n \text{ o } p_k$$

$$R_{xy}^{p \text{ oA}} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J/k+1/}{k+1} \sum_{n=0}^{n=k} J/n/n \binom{k}{n} y^{k-n} x^n \text{ o } p_k$$

$$R_{xy}^{t \text{ oS}} = \text{ o } t + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J/k/}{k} \sum_{n=0}^{n=k} J/n/n \binom{k}{n} y^{k-n} x^n \text{ o } t_k$$

$$R_{xy}^{t \text{ oA}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J/k+1/}{k+1} \sum_{n=0}^{n=k} J/n+1//n+1/ \binom{k}{n} y^{k-n} x^n \text{ o } t_k$$

$$R_{xy}^{oS} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J/k/}{k+2} \sum_{n=0}^{n=k} J/n+1//n+1/ \binom{k}{n} x^{k-n} y^n z_k^o,$$

$$R_{xy}^{oA} z = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J/k+1/}{k+1} \sum_{n=0}^{n=k} J/n/n \binom{k}{n} x^{k-n} y^n z_k^o,$$

$$R_{xy}^{oS} t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J/k/}{k} \sum_{n=0}^{n=k} J/n/n \binom{k}{n} x^{k-n} y^n t_k^o,$$

$$R_{xy}^{oA} t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J/k/}{k+1} \sum_{n=0}^{n=k} J/n+1//n+1/ \binom{k}{n} x^{k-n} y^n t_k^o.$$

W powyższych wyrażeniach $\binom{k}{n}$ jest symbolem Newtona, a

$$\binom{0}{0} = 1.$$

Wielomiany /19/ stanowiły podstawę opracowania metody wyznaczania składowych stanu naprężenia i przemieszczenia w tarczach prostokątnych. Powróćmy do nich w rozdziale 7.

4. Wyznaczenie składowych wektora przemieszczeń w obszarze tarczy przy zadanych naprężeniach wzdłuż jej osi symetrii

W tym rozdziale wyrażono składowe wektora przemieszczeń przez składowe tensora naprężeń występujące wzdłuż osi symetrii tarczy. Podobnie jak w przypadku tensora naprężenia składowe wektora przemieszczenia w obszarze tarczy wyrażono poprzez sumy nieskończone z iloczynów stałych współczynników P_k^o , T_k^o , t_k^o , z_k^o przez wielomiany k-tego stopnia. Składowe tensora odkształcenia wyrażają się wzorem:

$$(20) \quad \epsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}] \quad , \quad \nu = \epsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}].$$

Całkując pierwsze równanie /22/ względem x , a drugie względem y przy uwzględnieniu wyrażeń /17/ i /19/ otrzymano następujące wyrażenia na składowe wektora przemieszczeń w obszarze tarczy.

$$u = \frac{1}{E} \left[R_{u p}^{oS oS} + R_{u p}^{oA oA} + R_{u \tau}^{oS oS} + R_{u \tau}^{oA oA} + R_{u z}^{oS oS} + R_{u z}^{oA oA} + R_{u t}^{oS oS} + R_{u t}^{oA oA} \right] + \xi_o / y /$$

(21)

$$v = \frac{1}{E} \left[R_{v p}^{oS oS} + R_{v p}^{oA oA} + R_{v \tau}^{oS oS} + R_{v \tau}^{oA oA} + R_{v z}^{oS oS} + R_{v z}^{oA oA} + R_{v t}^{oS oS} + R_{v t}^{oA oA} \right] + f_o / x /$$

W wyrażeniach /21/ przyjęto następujące oznaczenia:

$$R_{u p}^{oS oS} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J/k/}{k+2} \sum_{n=0}^{n=k} \frac{J/n/}{n+1} \binom{k}{n} [n + \sqrt{n+2/}] y^{k-n} x^{n+1} P_k^o$$

$$R_{u p}^{oA oA} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J/k+1/}{k+1} \sum_{n=0}^{n=k} \frac{J/n+1/}{n+1} \binom{k}{n} [n-1/ + \sqrt{n+1/}] y^{k-n} x^{n+1} P_k^o$$

$$R_{u \tau}^{oS oS} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J/k/}{k} \sum_{n=0}^{n=k} \frac{J/n+1/}{n+1} \binom{k}{n} [n-1/ + \sqrt{n+1/}] y^{k-n} x^{n+1} \tau_k^o$$

$$R_{u \tau}^{oA oA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J/k+1/}{k+1} \sum_{n=0}^{n=k} \frac{J/n/}{n+1} \binom{k}{n} [n + \sqrt{n+2/}] y^{k-n} x^{n+1} \tau_k^o$$

(22)

$$R_{u z}^{oS oS} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J/k/}{k+1/ /k+2/} \sum_{n=0}^{n=k} J/n/ \binom{k+1}{n} [n+2 + \sqrt{n}] x^{k-n+1} y^n z_k^o$$

$$R_u^{oA} z^{oA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J/k+1//k+1/}{k+1//k+1/} \sum_{n=0}^{n=k} J/n+1/ \binom{k+1}{n} [n+1/ + \sqrt{n-1/}]$$

$$x^{k-n+1} y^n z_k^o,$$

$$R_u^{oS} t^{oS} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J/k/}{k/k+1/} \sum_{n=0}^{n=k} J/n+1/ \binom{k+1}{n} [n+1/ + \sqrt{n-1/}] x^{k-n+1} y^n t_k^o,$$

$$R_u^{oA} t^{oA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J/k+1//k+1/}{k+1//k+1/} \sum_{n=0}^{n=k} J/n/ \binom{k+1}{n} [n+2/ + \sqrt{n}] x^{k-n+1} y^n t_k^o,$$

$$R_v^{oS} p^{oS} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J/k/}{k+1//k+1/} \sum_{n=0}^{n=k} J/n/ \binom{k+1}{n} [n+2/+ \sqrt{n}] y^{k-n+1} x^n p_k^o,$$

$$R_v^{oA} p^{oA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J/k+1//k+1/}{k+1//k+1/} \sum_{n=0}^{n=k} J/n+1/ \binom{k+1}{n} [n+1/ + \sqrt{n-1/}] y^{k-n+1} x^n p_k^o,$$

$$R_v^{oS} \tau^{oS} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J/k/}{k/k+1/} \sum_{n=0}^{n=k} J/n+1/ \binom{k+1}{n} [n+1/+ \sqrt{n-1/}] y^{k-n+1} x^n \tau_k^o,$$

$$R_v^{oA} \tau^{oA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J/k+1//k+1/}{k+1//k+1/} \sum_{n=0}^{n=k} J/n/ \binom{k+1}{n} [n+2/+ \sqrt{n}] y^{k-n+1} x^n \tau_k^o,$$

$$R_v^{oS} z^{oS} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J/k/}{k+2} \sum_{n=0}^{n=k} \frac{J/n/}{J/n+1/} \binom{k}{n} [n+ \sqrt{n+2/}] x^{k-n} y^{n+1} z_k^o,$$

$$R_v^{oA} z^{oA} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J/k+1/}{k+1} \sum_{n=0}^{n=k} \frac{J/n+1/}{J/n+1/} \binom{k}{n} [n-1+ \sqrt{n+1/}] x^{k-n} y^{n+1} z_k^o,$$

$$R_v \overset{oS}{t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J/k/}{k} \sum_{n=0}^{n=k} \frac{J/n+1/}{/n+1/} \binom{k}{n} [n-1 + \checkmark/n+1/] x^{k-n} y^{n+1} \overset{o}{t}_k,$$

$$R_v \overset{oA}{t} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J/k+1/}{k+1} \sum_{n=0}^{n=k} \frac{J/n/}{/n+1/} \binom{k}{n} [n + \checkmark/n+2/] x^{k-n} y^{n+1} \overset{o}{t}_k.$$

Występujące w wyrażeniach /21/ funkcje $g_o/y/$ i $f_o/x/$ wyznaczono z równania geometrycznego /23/.

$$(23) \quad du + Dv = \frac{2/1 + \checkmark/}{E} \overset{o}{\rho}_{xy}.$$

Łatwo sprawdzić po podstawieniu do równania /23/ wyrażen /21/ i /17/, że wszystkie wielomiany występujące przy współczynnikach $p_k, z_k, \overset{o}{\tau}_k, \overset{o}{t}_k$ spełniają równanie /23/ tożsamościowo. Jedynym istotnym współczynnikiem w równaniu jest t . W ostateczności równanie /23/ przyjmuje postać:

$$(24) \quad dg_o/y/ + Df_o/x/ = \frac{2/1 + \checkmark/}{E} \overset{o}{t}$$

stąd wynika, że funkcje $f_o/x/$ i $g_o/y/$ muszą być liniowymi

$$(25) \quad f_o/x/ = a + bx, \quad g_o/y/ = c + dy$$

przy czym współczynniki b i d spełniają zależność

$$(26) \quad b + d = \frac{2/1 + \checkmark/}{E} \overset{o}{t}_o.$$

5. Rozkład rozwiązania na cztery niezależne stany naprężeń
i odkształceń tarczy prostokątnej

Uzyskane rozwiązanie /17/ i /21/ rozłożono na cztery niezależne stany. Każdy z tych stanów określony jest przez następujące cechy symetrii naprężeń normalnych względem przyjętych osi układu. Są to:

- SS, symetria względem współrzędnej x i y /27/,
- SA, symetria względem współrzędnej x i antysymetria względem y /28/,
- AS, antysymetria względem współrzędnej x, symetria względem y /29/,
- AA, antysymetria względem współrzędnej x i y /wzory 30/

Stan SS

$$\sigma_{xx}^{SS} = R_{xx}^p \overset{oS}{p} + R_{xx}^z \overset{oS}{z}, \quad x, y - \text{parzyste}$$

$$\sigma_{yy}^{SS} = R_{yy}^p \overset{oS}{p} + R_{yy}^z \overset{oS}{z}, \quad x, y - \text{parzyste}$$

$$(27) \quad \sigma_{xy}^{AA} = R_{xy}^p \overset{oS}{p} + R_{xy}^z \overset{oS}{z}, \quad x, y - \text{nieparzyste}$$

$$u^{AS} = \frac{1}{E} \left[R_u^p \overset{oS}{p} + R_u^z \overset{oS}{z} \right], \quad x - \text{nieparzyste}, y - \text{parzyste}$$

$$v^{SA} = \frac{1}{E} \left[R_v^p \overset{oS}{p} + R_v^z \overset{oS}{z} \right], \quad x - \text{parzyste}, y - \text{nieparzyste}$$

Stan SA

$$\sigma_{xx}^{SA} = R_{xx}^z \overset{oA}{z} + R_{xx}^t \overset{oA}{t}, \quad x - \text{parzyste}, y - \text{nieparzyste}$$

$$\begin{aligned}
 (28) \quad \delta_{yy}^{SA} &= R_{yy}^{z \ oA} z + R_{yy}^{\tau \ oA} \tau, \quad x\text{-parzyste, } y\text{-nieparzyste} \\
 \delta_{xy}^{AS} &= R_{xy}^{z \ oA} z + R_{xy}^{\tau \ oA} \tau, \quad x\text{-nieparzyste, } y\text{-parzyste} \\
 u^{AA} &= \frac{1}{E} \left[R_u^{z \ oA} z + R_u^{\tau \ oA} \tau \right], \quad x, y - \text{nieparzyste} \\
 v^{SS} &= \frac{1}{E} \left[R_v^{z \ oA} z + R_v^{\tau \ oA} \tau \right] + a, \quad x, y \text{ parzyste}
 \end{aligned}$$

Stan AS

$$\begin{aligned}
 (29) \quad \delta_{xx}^{AS} &= R_{xx}^p \ oA + R_{xx}^t \ oA, \quad x\text{-nieparzyste, } y\text{-parzyste} \\
 \delta_{yy}^{AS} &= R_{yy}^p \ oA + R_{yy}^t \ oA, \quad x\text{-nieparzyste, } y\text{-parzyste} \\
 \delta_{xy}^{SA} &= R_{xy}^p \ oA + R_{xy}^t \ oA, \quad x\text{-parzyste, } y\text{-nieparzyste} \\
 u^{SS} &= \frac{1}{E} \left[R_u^p \ oA + R_u^t \ oA \right] + c, \quad x, y - \text{parzyste} \\
 v^{AA} &= \frac{1}{E} \left[R_v^p \ oA + R_v^t \ oA \right], \quad x, y - \text{nieparzyste}
 \end{aligned}$$

Stan AA

$$\begin{aligned}
 (30) \quad \delta_{xx} &= R_{xx}^{\tau \ oS} \tau + R_{xx}^t \ oS, \quad x, y - \text{nieparzyste} \\
 \delta_{yy} &= R_{yy}^{\tau \ oS} \tau + R_{yy}^t \ oS, \quad x, y - \text{nieparzyste}
 \end{aligned}$$

$$u^{SA} = \frac{1}{E} \left[R_u^{\tau} \overset{oS}{\tau} + R_u^t \overset{oS}{t} \right] + dy, \quad x\text{-parzyste, } y\text{-nieparzyste}$$

$$v^{AS} = \frac{1}{E} \left[R_v^{\tau} \overset{oS}{\tau} + R_v^t \overset{oS}{t} \right] + bx, \quad x\text{-nieparzyste, } y\text{-parzyste}$$

Warunki brzegowe w wyróżnionych przypadkach symetrii stanu naprężenia są określone przez zadane wielkości naprężeń na brzegach tarczy w sposób następujący

Stan S-S

$$1, 2. y = \pm h, \quad \sigma_{yy} = p = \bar{p} = \frac{+SS}{\bar{p}} = \frac{+p/x + p/-x + \bar{p}/x + \bar{p}/-x}{4}$$

$$4. y = \pm h, \quad \sigma_{xy} = \tau = -\bar{\tau} = \frac{+\tau/x - \tau/-x - \bar{\tau}/x + \bar{\tau}/-x}{4}$$

/ 27a/

$$5, 6. x = \pm l, \quad \sigma_{xx} = z = \bar{z} = \frac{+z/y + z/-y + \bar{z}/y + \bar{z}/-y}{4}$$

$$7, 8. x = \pm l, \quad \sigma_{xy} = t = -\bar{t} = \frac{+t/y - t/-y - \bar{t}/y + \bar{t}/-y}{4}$$

Stan SA

$$1, 2. y = \pm h, \quad \sigma_{yy} = p = -\bar{p} = \frac{+SA - SA}{\bar{p}} = \frac{+p/x + p/-x - \bar{p}/x - \bar{p}/-x}{4}$$

$$3, 4. y = \pm h, \quad \sigma_{xy} = \tau = \bar{\tau} = \frac{+\tau/x - \tau/-x + \bar{\tau}/x - \bar{\tau}/-x}{4}$$

$$5, 6. x = \pm l, \quad \sigma_{xx} = z = \bar{z} = \frac{+SA - SA}{\bar{z}} = \frac{+z/y - z/-y + \bar{z}/y - \bar{z}/-y}{4}$$

/ 28a/

$$7, 8. x = \pm l, \quad \sigma_{xy} = t = \bar{t} = \frac{+SA - SA}{\bar{t}} = \frac{+t/y + t/-y - \bar{t}/y - \bar{t}/-y}{4}$$

Stan AS

$$1.2. y = +h, \quad \sigma_{yy} = \overset{+AS}{p} = \overset{-AS}{p} = \frac{\overset{+}{p/x} - \overset{+}{p/-x} + \overset{-}{p/x} - \overset{-}{p/-x}}{4},$$

$$3.4. y = +h, \quad \sigma_{xy} = \overset{+AS}{\tau} = \overset{-AS}{-\tau} = \frac{\overset{+}{\tau/x} + \overset{+}{\tau/-x} - \overset{-}{\tau/x} - \overset{-}{\tau/-x}}{4},$$

/29a/

$$5.6. x = +l, \quad \sigma_{xx} = \overset{+AS}{z} = \overset{-AS}{-z} = \frac{\overset{+}{z/y} + \overset{+}{z/-y} - \overset{-}{z/y} - \overset{-}{z/-y}}{4},$$

$$7.8. x = +l, \quad \sigma_{xy} = \overset{+AS}{t} = \overset{-AS}{t} = \frac{\overset{+}{t/y} - \overset{+}{t/-y} + \overset{-}{t/y} - \overset{-}{t/-y}}{4}.$$

Stan AA

$$1.2. y = +h, \quad \sigma_{yy} = \overset{+AA}{p} = \overset{-AA}{-p} = \frac{\overset{+}{p/x} - \overset{-}{p/-x} - \overset{-}{p/x} + \overset{-}{p/-x}}{4},$$

$$3.4. y = +h, \quad \sigma_{xy} = \overset{+AA}{\tau} = \overset{-AA}{-\tau} = \frac{\overset{+}{\tau/x} + \overset{+}{\tau/-x} + \overset{-}{\tau/x} + \overset{-}{\tau/-x}}{4},$$

/30a/

$$5.6. y = +l, \quad \sigma_{xx} = \overset{+AA}{z} = \overset{-AA}{-z} = \frac{\overset{+}{z/y} - \overset{+}{z/-y} - \overset{-}{z/y} + \overset{-}{z/-y}}{4},$$

$$7.8. x = +l, \quad \sigma_{xy} = \overset{+AA}{t} = \overset{-AA}{t} = \frac{\overset{+}{t/y} + \overset{+}{t/-y} + \overset{-}{t/y} + \overset{-}{t/-y}}{4}.$$

Funkcje $\overset{+}{p/x}$, $\overset{-}{p/x}$, $\overset{+}{\tau/x}$, $\overset{-}{\tau/x}$, $\overset{+}{z/y}$, $\overset{-}{z/y}$, $\overset{+}{t/y}$, $\overset{-}{t/y}$ są określone warunkami /31/.

6. Równania ogólne zagadnienia brzegowego prostokątnego obszaru płaskiego teorii sprężystości

Ogólnym będziemy nazywać rozwiązanie spełniające następujące warunki naprężeń na brzegach obszaru prostokątnego

$$1. y = h, \quad \sigma_{yy} = \overset{+}{p/x}, \quad 2. y = -h, \quad \sigma_{yy} = \overset{-}{p/x},$$

$$3. y = h, \quad \delta_{xy} = \overset{+}{\tau}/x/, \quad 4. y = -h, \quad \delta_{xy} = \overline{\tau}/x/,$$

/31/

$$5. x = l, \quad \delta_{xx} = \overset{+}{z}/y/, \quad 6. x = -l, \quad \delta_{xx} = \overline{z}/y/,$$

$$7. x = l, \quad \delta_{xy} = \overset{0}{t}/y/, \quad 8. x = -l, \quad \delta_{xy} = \overline{t}/y/$$

Wyznaczając z funkcji /31/ funkcje wynikające z symetryzacji według wzorów /27a-30a/ otrzymano 4 grupy naprężeń brzegowych odpowiadające wyróżnionym stanom symetrii tarczy. Równania ogólne zagadnienia brzegowego w poszczególnych stanach symetrii otrzymano podstawiając warunki /27a-30a/ do rozwiązań /27-30/ przy uwzględnieniu wyrażen /14/ i /15/. W ten sposób otrzymano:

Stan SS

$$\left\{ [-L_3/yD/ -L_5/yD/xDx^{-2}D^{-1}x]_p^{\text{OS}} + [-L_1/xd/-L_3/xd/ydy^{-2}d^{-1}y]_z^{\text{OS}} \right\}_{x=l} = \overset{+}{z}^{\text{SS}}/y/$$

$$\left\{ [-L_1/yD/-L_3/yD/xDx^{-2}D^{-1}x]_p^{\text{OS}} + [-L_3/xd/-L_5/xd/ydy^{-2}d^{-1}y]_z^{\text{OS}} \right\}_{y=h} = \overset{+}{p}^{\text{SS}}/x/$$

/32/

$$\left\{ [L_2/yD/+L_4/yD/xDx^{-2}D^{-1}x]_p^{\text{OS}} + [L_2/xd/+L_4/xd/ydy^{-2}d^{-1}y]_z^{\text{OS}} \right\}_{x=l} = \overset{+}{t}^{\text{SS}}/y/$$

$$\left\{ [L_2/yD/+L_4/yD/xDx^{-2}D^{-1}x]_p^{\text{OS}} + [L_2/xd/+L_4/xd/ydy^{-2}d^{-1}y]_z^{\text{OS}} \right\}_{y=h} = \overset{+}{\tau}^{\text{SS}}/x/$$

Stan SA

$$\left\{ [L_2/yD/+L_4/yD/x^2Dx^{-2}D^{-1}]_p^{\text{OA}} + [-L_1/xd/-L_3/xd/y^2dy^{-2}d^{-1}]_z^{\text{OA}} \right\}_{x=l} = \overset{+}{z}^{\text{SA}}/y/$$

33/

$$\left\{ [L_0/yD/+L_2/yD/x^2Dx^{-2}D^{-1}]_p^{\text{OA}} + [-L_3/xd/-L_5/xd/y^2dy^{-2}d^{-1}]_z^{\text{OA}} \right\}_{y=h} = \overset{+}{p}^{\text{SA}}/x/$$

$$\left\{ \left[-L_1/yD / -L_3/yD/x^2Dx^{-2}D^{-1} \right] \overset{OA}{\tau} + \left[L_2/xd / +L_4/xd/y^2dy^{-1}d^{-1} \right] \overset{OA}{z} \right\}_{x=h} = \overset{+SA}{\tau} / y /$$

$$\left\{ \left[-L_1/yD / -L_3/yD/x^2Dx^{-2}D^{-1} \right] \overset{OA}{\tau} + \left[L_2/xd / +L_4/xd/y^2dy^{-2}d^{-1} \right] \overset{OA}{z} \right\}_{y=h} = \overset{+SA}{\tau} / x /$$

Stan AS

$$\left\{ \left[-L_3/yD / -L_5/yD/x^2Dx^{-1}D^{-1} \right] \overset{OA}{p} + \left[L_0/xd / +L_2/xd/y^2dy^{-2}d^{-1} \right] \overset{OA}{t} \right\}_{x=h} = \overset{+AS}{z} / y /$$

$$\left\{ \left[-L_1/yD / -L_3/yD/x^2Dx^{-2}D^{-1} \right] \overset{OA}{p} + \left[L_2/xd / +L_4/xd/y^2dy^{-2}d^{-1} \right] \overset{OA}{t} \right\}_{y=h} = \overset{+AS}{p} / x /$$

/34/

$$\left\{ \left[L_2/yD / +L_4/yD/x^2Dx^{-2}D^{-1} \right] \overset{OA}{p} + \left[-L_1/xd / -L_3/xd/y^2dy^{-2}d^{-1} \right] \overset{OA}{t} \right\}_{x=h} = \overset{+AS}{t} / y /$$

$$\left\{ \left[L_2/yD / +L_4/yD/x^2Dx^{-2}D^{-1} \right] \overset{OA}{p} + \left[-L_1/xd / -L_3/xd/y^2dy^{-2}d^{-1} \right] \overset{OA}{t} \right\}_{x=h} = \overset{+AS}{\tau} / x /$$

Stan AA

$$\left\{ \left[L_2/yD / +L_4/yD/D^{-1}x^2Dx^{-2} \right] \overset{OS}{\tau} + \left[L_0/xd / +L_2/xd/d^{-1}y^2dy^{-2} \right] \overset{OS}{t} \right\}_{x=h} = \overset{+AA}{z} / y /$$

$$\left\{ \left[L_0/yD / +L_2/yD/D^{-1}x^2Dx^{-2} \right] \overset{OS}{\tau} + \left[L_2/xd / +L_4/xd/d^{-1}y^2dy^{-2} \right] \overset{OS}{t} \right\}_{y=h} = \overset{+AA}{p} / x /$$

/35/

$$\left\{ \left[-L_1/yD / -L_3/yD/D^{-1}x^2Dx^{-2} \right] \overset{OS}{\tau} + \left[-L_1/xd / -L_3/xd/d^{-1}y^2dy^{-2} \right] \overset{OS}{t} \right\}_{x=h} = \overset{+AA}{t} / y /$$

$$\left\{ \left[-L_1/yD / -L_3/yD/D^{-1}x^2Dx^{-2} \right] \overset{OS}{\tau} + \left[-L_1/xd / -L_3/xd/d^{-1}y^2dy^{-2} \right] \overset{OS}{t} \right\}_{y=h} = \overset{+AA}{\tau} / x /$$

W powyższy sposób problem brzegowy został rozłożony na cztery niezależne zadania. Tutaj zadań tych nie będziemy rozwiązywać. Będą one przedmiotem oddzielnej pracy autora. Łatwo zauważyć, że równania /32-35/ są symetryczne względem relacji /15/ tzn. każde z nich przechodzi przez tę relacje w inne, z tego samego układu.

7. Równania ogólne rozwiązania zagadnienia brzegowego sprężystego, prostokątnego obszaru płaskiego metodą przybliżoną, z kryterium minimalnego odchylenia kwadratowego

Chcąc otrzymać rozwiązanie ściśle zagadnienia brzegowego w naprężeniach, sprężystego prostokątnego obszaru płaskiego należałoby znaleźć rozwiązanie zupełne równań /32-35/. Rozwiązanie zupełne równań /32-35/ składa się z części wielomianowej i funkcji całkowanych /posiadających wszystkie pochodne niezerowe typu $\exp x$ /. Można sobie zadawać pytanie jakie przypadki naprężeń brzegowych mogą być rozwiązywane przez część wielomianową a jakie przez część niewielomianową. Nie będziemy na to pytanie odpowiadać. W dalszej części pracy zajęto się rozwiązaniem wielomianowym.

Uwzględniając we wzorach /27-30/ wyrażenia /19/, otrzymano wzory na składowe stanu naprężenia i przemieszczenia spełniające warunki równowagi, ciągłości deformacji i warunki geometryczne. Wyrażenia /27-30/ zawierają czynniki stałe $p_k, t_k, z_k, t_k, k=0,1,2,3,\dots$

W niniejszym rozdziale wyprowadzono równania na określenie tych współczynników z kryterium optymalnego spełnienia warunków brzegowych /27a-30a/. Kryterium to napisano w następującej postaci matematycznej:

$$\begin{aligned}
 \sigma = \min_{X_1} & \left\{ \int_0^h \left[z^{+S} - \sigma_{xx}^S / X_1, x, y / \Big|_{x=l} \right]^2 dy + \right. \\
 & + \int_0^h \left[t^{+S} - \sigma_{xy}^S / X_1, x, y / \Big|_{x=l} \right]^2 dy + \\
 /36/ & + \int_0^l \left[p^{+S} - \sigma_{yy}^S / X_1, x, y / \Big|_{y=h} \right]^2 dx + \\
 & + \int_0^l \left[t^{+S} - \sigma_{xy}^S / X_1, x, y / \Big|_{y=h} \right]^2 dx, \quad S=SS, AS, SA, AA \\
 X_1 = & p_k, z_k, t_k, t_k \quad k=0,1,2,\dots,n
 \end{aligned}$$

Przyrównując do zera pierwsze pochodne funkcji /36/ względem poszukiwanych zmiennych otrzymano warunki na wyznaczenie stałych $\overset{\circ}{p}_k, \overset{\circ}{z}_k, \overset{\circ}{t}_k, \overset{\circ}{t}_k$. Równania te mają postać:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^h [(\overset{\circ}{\delta}_{xx}^S | x=l) \frac{\partial \overset{\circ}{\delta}_{xx}}{\partial X_1} | x=l] dy + \int_0^h [(\overset{\circ}{\delta}_{xy}^S | x=l) \frac{\partial \overset{\circ}{\delta}_{xy}}{\partial X_1} | x=l] dy + \\
 (37) & + \int_0^l [(\overset{\circ}{\delta}_{yy}^S | y=h) \frac{\partial \overset{\circ}{\delta}_{yy}}{\partial X_1} | y=h] dx + \int_0^l [(\overset{\circ}{\delta}_{xy}^S | y=h) \frac{\partial \overset{\circ}{\delta}_{xy}}{\partial X_1} | y=h] dx = \\
 & = \int_0^h [z^+ \frac{\partial \overset{\circ}{\delta}_{xx}}{\partial X_1} | x=l] dy + \int_0^h [t^+ \frac{\partial \overset{\circ}{\delta}_{xy}}{\partial X_1} | x=l] dy + \\
 & + \int_0^l [p^+ \frac{\partial \overset{\circ}{\delta}_{yy}}{\partial X_1} | y=h] dx + \int_0^l [t^+ \frac{\partial \overset{\circ}{\delta}_{xy}}{\partial X_1} | y=h] dx \\
 & X_1 = \overset{\circ}{p}_k, \overset{\circ}{z}_k, \overset{\circ}{t}_k, \overset{\circ}{t}_k
 \end{aligned}$$

Obierając określoną liczbę współczynników stałych X_1 , otrzymuje się taką samą liczbę równań liniowych potrzebnych do określenia tych współczynników. Równania te wyprowadzimy oddzielnie dla poszczególnych stanów symetrii obciążenia tarczy.

Stan SS

Wzory /27/ wraz z wyrażeniami /19/ zawierają stałe czynniki $\overset{\circ}{p}_k, \overset{\circ}{z}_k, k = 0, 2, 4$ /parzyste/. Przyjmując w tych wzorach oznaczenia:

$$(38) \quad \overset{\circ}{z}_k = X_{k+1}, \quad \overset{\circ}{p}_k = X_{k+2}$$

a następnie sprowadzając indeksy przy X do jednego /"i"/
otrzymano:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \sum_{i=1}^{\infty} \left[- \frac{J/i+1}{i+1} \sum_{r=0}^{i-1} J/r//r+2/ \binom{i-1}{r} x^{i-1-r} y^r + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{J/i/}{1} \sum_{r=0}^{i-2} J/r/r \binom{i-2}{r} x^r y^{i-2-r} \right] X_i, \\
 \sigma_{yy} &= \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{J/i+1/}{i+1} \sum_{r=0}^{i-1} J/r/r \binom{i-1}{r} x^{i-1-r} y^r + \right. \\
 (39) \quad &\quad \left. - \frac{J/i/}{1} \sum_{r=0}^{i-2} J/r//r+2/ \binom{i-2}{r} x^r y^{i-2-r} \right] X_i, \\
 \sigma_{xy} &= \sum_{i=3}^{\infty} \left[- \frac{J/i+1/}{i-3} \sum_{r=1}^{i-2} J/r+1//r+1/ \binom{i-1}{r} x^{i-1-r} y^r + \right. \\
 &\quad \left. - \frac{J/i/}{1} \sum_{r=1}^{i-3} J/r+1//r+1/ \binom{i-2}{r} x^r y^{i-2-r} \right] X_i.
 \end{aligned}$$

Dokonując w powyższych wzorach jedynie zmiany indeksów,
oraz podstawiając $x=b$ i $y=1$ otrzymamy:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} |_{x=b} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[- \frac{J/k+1/}{k+1} \sum_{r=0}^{k-1} J/r//r+2/ \binom{k-1}{r} b^{k-1-r} y^r + \right. \\
 &\quad \left. - \frac{J/k/}{k} \sum_{r=0}^{k-2} J/r//k-2-r/ \binom{k-2}{r} b^{k-2-r} y^r \right] X_k, \\
 \sigma_{yy} |_{y=1} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[- \frac{J/k+1/}{k+1} \sum_{r=0}^{k-1} J/r//k-1-r/ \binom{k-1}{r} x^r + \right.
 \end{aligned}$$

$$- \frac{J/k/}{k} \sum_{r=0}^{k-2} J/r//r+2/ \binom{k-2}{r} x^r] X_k,$$

(40)

$$\begin{aligned} \delta_{xy} |_{x=b} = & \sum_{k=3}^{\infty} \left[- \frac{J/k+1/}{k+1} \sum_{r=1}^{k-2} J/r+1//r+1/ \binom{k-1}{r} b^{k-1-r} y^r + \right. \\ & \left. - \frac{J/k/}{k} \sum_{r=1}^{k-3} J/r+1//k-1-r/ \binom{k-2}{r} b^{k-2-r} y^r \right] X_k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{xy} |_{y=1} = & \sum_{k=3}^{\infty} \left[- \frac{1/k+1/}{k+1} \sum_{r=1}^{k-2} J/r//k-r/ \binom{k-1}{r} x^r + \right. \\ & \left. - \frac{J/k/}{k} \sum_{r=1}^{k-3} J/r+1//r+1/ \binom{k-2}{r} x^r \right] X_k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta_{xx}}{\partial X_1} |_{x=b} = & - \frac{J/1+1/}{1+1} \sum_{n=0}^{1-1} J/n//n+2/ \binom{1-1}{n} b^{1-1-n} y^n + \\ & - \frac{1/1/}{1} \sum_{n=0}^{1-2} J/n//1-2-n/ \binom{1-2}{n} b^{1-2-n} y^n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta_{xy}}{\partial X_1} |_{x=b} = & - \frac{J/1+1/}{1+1} \sum_{n=0}^{1-2} J/n+1//n+1/ \binom{1-1}{n} b^{1-1-n} y^n + \\ & - \frac{J/1/}{1} \sum_{n=1}^{1-3} J/n+1//1-1-n/ \binom{1-2}{n} b^{1-2-n} y^n, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \delta_{yy}}{\partial X_1} |_{y=1} = - \frac{1/1+1/}{1+1} \sum_{n=0}^{1-1} J/n//1-1-n/ \binom{1-1}{n} x^n +$$

$$- \frac{J/1/}{1} \sum_{n=0}^{i-2} J/n//n+2/ \binom{i-2}{n} x^n ,$$

$$\frac{\partial^6 XY}{\partial X_i^6} \Big|_{y=1} = - \frac{J/i+1/}{1+1} \sum_{n=1}^{i-2} J/n//1-n/ \binom{i-1}{n} x^n +$$

$$- \frac{J/1/}{1} \sum_{n=1}^{i-3} J/n+1//n+1/ \binom{i-2}{n} x^n .$$

Podstawiając wyrażenia /40/ do równania /37/ oraz przyjmując oznaczenia:

$$N_k^n = - \frac{J/k+1/}{k+1} \sum_{r=0}^{k-1} J/r//r+2/ \binom{k-1}{r} \frac{b^{k-1-r}}{n+1+r} +$$

$$- \frac{J/k/}{k} \sum_{r=0}^{k-2} J/r//k-2-r/ \binom{k-2}{r} \frac{b^{k-2-r}}{n+r+1} ,$$

$$NN_k^n = - \frac{J/k+1/}{k+1} \sum_{r=0}^{k-3} J/r//k-1-r/ \binom{k-1}{r} \frac{b^{n+r+1}}{n+r+1} +$$

$$- \frac{J/k/}{k} \sum_{r=0}^{k-2} J/r//r+2/ \binom{k-2}{r} \frac{b^{n+r+1}}{n+r+1} ,$$

$n=0, 2, 4$ /parzyste/, k - dowolne.

(41)

$$T_k^n = - \frac{J/k+1/}{k+1} \sum_{r=1}^{k-2} J/r+1//r+1/ \binom{k-1}{r} \frac{b^{k-1-r}}{n+r+1} +$$

$$- \frac{J/k/}{k} \sum_{r=1}^{k-3} J/r+1//k-1-r/ \binom{k-2}{r} \frac{b^{k-2-r}}{n+r+1} ,$$

$$TT_k^n = - \frac{j/k+1}{k+1} \sum_{r=1}^{k-2} J/r+1//k-1/ \binom{k-1}{r} \frac{b^{n+r+1}}{n+r+1} +$$

$$- \frac{J/k}{k} \sum_{r=1}^{k-3} J/r+1//r+1/ \binom{k-2}{r} \frac{b^{n+r+1}}{n+r+1} ,$$

$n = 1, 3, 5 \dots$ /nieparzyste/ $k = 1, 2, 3 \dots$ /dowolne

Współczynniki równania liniowego

$$(42) \quad \sum_{k=1}^{\infty} A_{1k} X_k = P_1$$

mają postać /43/

$$(43) \quad A_{1k} = \left[- \frac{J/i+1}{i+1} \sum_{n=0}^{i-1} J/n//n+2/ \binom{i-1}{n} b^{i-1-n} + \right.$$

$$\left. - \frac{j/i/}{i} \sum_{n=0}^{i-2} J/n//1-2-n/ \binom{i-2}{n} b^{i-2-n} \right] N_k^n +$$

$$+ \left[- \frac{j/i+1/}{i+1} \sum_{n=0}^{i-3} J/n//i-1-n/ \binom{i-1}{n} + \right.$$

$$\left. - \frac{J/i/}{i} \sum_{n=0}^{i-2} J/n//n+2/ \binom{i-2}{n} \right] NN_k^n +$$

$$+ \left[- \frac{J/i+1/}{i+1} \sum_{n=1}^{i-2} J/n+1//n+1/ \binom{i-1}{n} b^{i-1-n} + \right.$$

$$\left. - \frac{j/i/}{i} \sum_{n=1}^{i-3} J/n+1//i-1-n/ \binom{i-2}{n} b^{i-2-n} \right] T_k^n +$$

$$+ \left[\frac{j/i+1/}{i+1} \sum_{n=1}^{i-2} J/n+1//i-n/ \binom{i-1}{n} + \right.$$

$$- \frac{J/1/}{1} \sum_{n=1}^{i-3} J/n+1//n+1/ \left(\begin{matrix} i-2 \\ n \end{matrix} \right)] TT_k^n .$$

Prawe strony równania /42/ są obliczane z identycznych wzorów jak współczynniki A_{ik} tj.

$$(44) \quad P_1 = A_{1k}$$

w którym N_k^n , NN_k^n , T_k^n i TT_k^n mają inną interpretację. A mianowicie

$$N_k^n \rightarrow BN_k^n, \quad NN_k^n \rightarrow BNN_k^n, \quad T_k^n \rightarrow BT_k^n, \quad TT_k^n \rightarrow BTT_k^n$$

Wielkości BN_k^n , BNN_k^n , BT_k^n , BTT_k^n są obliczane z warunków brzegowych według wzorów:

$$BN_k^n = \int_0^1 z^{+SS} y^n dy, \quad BT_k^n = \int_0^1 t^{+SS} y^n dy$$

$$(45) \quad BNN_k^n = \int_0^1 p^{+SS} x^n dx, \quad BTT_k^n = \int_0^1 \tau^{+SS} x^n dx .$$

Stan SA

Wzory /28/ wraz z wyrażeniami /19/ zawierają stałe czynniki τ_k^0 , z_k^0 $k=1,3,5$ /nieparzyste/. Przyjmując w tych wzorach oznaczenie:

$$(38a) \quad \tau_k^0 = X_k, \quad z_k^0 = X_{k+1},$$

a następnie sprowadzając indeksy przy X do jednego /"i"/ otrzymano:

$$\sigma_{xx} = \sum_{i=1}^{\infty} \left[- \frac{J/i+1/}{i+1} \sum_{r=0}^{i-1} J/r/ \binom{i}{r} x^r y^{i-r} + \right. \\ \left. + \frac{J/i/}{i} \sum_{r=1}^{i-1} J/r+1//r+1/ \binom{i-1}{r} x^{i-1-r} y^r \right] X_i,$$

$$\sigma_{yy} = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{J/i+1/}{i+1} \sum_{r=0}^{i-1} J/r//r+2/ \binom{i}{r} x^r y^{i-r} + \right.$$

(39a)

$$\left. - \frac{J/i/}{i} \sum_{r=1}^{i-1} J/r+1//r-1/ \binom{i-1}{r} x^{i-1-r} y^r \right] X_i,$$

$$\sigma'_{xy} = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{J/i+1/}{i+1} \sum_{r=1}^i J/r+1//r+1/ \binom{i}{r} y^{i-r} x^r + \right.$$

$$\left. - \frac{J/i/}{i+1} \sum_{r=1}^i J/r/ r \binom{i-1}{r} y^r x^{i-1-r} \right] X_i.$$

Dokonując we wzorach /39a/ jedynie zmiany indeksów, oraz podstawiając $x=b$, $y = i$ otrzymano:

$$\sigma_{xx} |_{x=b} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[- \frac{J/k+1/}{k+1} \sum_{r=1}^k J/r+1//k-r/ \binom{k}{r} b^{k-r} y^r + \right. \\ \left. + \frac{J/k/}{k} \sum_{r=1}^{k-1} J/r+1//r+1/ \binom{k-1}{r} b^{k-1-r} y^r \right] X_k,$$

$$\sigma_{yy} |_{y=1} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{J/k+1/}{k+1} \sum_{r=0}^{k-1} J/r//r+2/ \binom{k}{r} x^r + \right. \\ \left. - \frac{J/k/}{k} \sum_{r=0}^{k-2} J/r//k-2-r/ \binom{k-1}{r} \right] X_k,$$

$$\delta_{xy} \Big|_{x=b} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1/k+1/}{k+1} \sum_{r=0}^{k-1} J/r//k-r+1/ \binom{k}{r} b^{k-r} y^r + \right. \\ \left. - \frac{J/k/}{k} \sum_{r=0}^{k-2} J/r/r \quad \frac{k-1}{r} b^{k-r-1} y^r \right] X_k,$$

(40a)

$$\delta_{xy} \Big|_{y=1} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{J/k+1/}{k+1} \sum_{r=1}^k J/r+1//r+1/ \binom{k}{r} x^r + \right. \\ \left. + \frac{1/k/}{k} \sum_{r=1}^{k-1} J/r+1//k-r-1/ \binom{k-1}{r} x^r \right] X_k,$$

$$\frac{\partial \delta_{xy}}{\partial X_1} \Big|_{x=b} = - \frac{1/1+1/}{1+1} \sum_{n=1}^1 J/n+1//1-n/ \binom{1}{n} b^{1-n} y^n + \\ + \frac{J/1/}{1} \sum_{n=1}^{1-1} J/n+1//n+1/ \binom{1-1}{n} b^{1-1-n} y^n,$$

$$\frac{\partial \delta_{xy}}{\partial X_1} \Big|_{x=b} = \frac{1/1+1/}{1+1} \sum_{n=0}^{1-1} J/n//1-n+1/ \binom{1}{n} b^{1-n} y^n + \\ - \frac{J/1/}{1} \sum_{n=0}^{1-2} J/n/n \binom{1-1}{n} b^{1-n-1} y^n,$$

$$\frac{\partial \delta_{yy}}{\partial X_1} \Big|_{y=1} = \frac{J/1+1/}{1+1} \sum_{n=0}^{1-1} J/n//n+2/ \binom{1}{n} x^n + \\ - \frac{1/1/}{1} \sum_{n=0}^{1-2} J/n//1-2-n/ \binom{1-1}{n} x^n,$$

$$\frac{\partial^6 xy}{\partial x_1^6} \Big|_{y=1} = \frac{J/1+1/}{1+1} \sum_{n=1}^1 J/n+1//n+1/ \binom{1}{n} x^n +$$

$$+ \frac{j/1/}{1} \sum_{n=1}^{1-1} J/n+1//1-n-1/ \binom{1-1}{n} x^n ;$$

Podstawiając wyrażenie /40a/ do równania /37/ oraz przyjmując oznaczenia:

$$N_k^n = - \frac{j/k+1/}{k+1} \sum_{r=1}^{r=k} J/r+1//k-r/ \binom{k}{r} \frac{b^{k-r}}{n+r+1} +$$

$$+ \frac{J/k/}{k} \sum_{r=1}^{k-1} J/r+1//r+1/ \binom{k-1}{r} \frac{b^{k-1-r}}{n+r+1} , n=1,3,\dots \text{nieparz.}$$

$$NN_k^n = \frac{J/k+1/}{k+1} \sum_{r=0}^{k-1} J/r//r+2/ \binom{k}{r} \frac{b^{n+r+1}}{n+r+1} +$$

$$- \frac{j/k/}{k} \sum_{r=0}^{k-2} J/r//k-2-r/ \binom{k-1}{r} \frac{b^{n+r+1}}{n+r+1} , n=0,2,\dots \text{parzyste}$$

(41a)

$$T_k^n = \frac{j/k+1/}{k+1} \sum_{r=0}^{k-1} J/r//k+1-r/ \binom{k}{r} \frac{b^{k-r}}{n+r+1} +$$

$$- \frac{J/k/}{k} \sum_{r=0}^{k-2} J/r/ r \binom{k-1}{r} \frac{b^{k-r-1}}{n+r+1} , n=0,2 \text{ parzyste}$$

$$TT_k^n = \frac{J/k+1/}{k+1} \sum_{r=1}^k J/r//r+1/ \binom{k}{r} \frac{b^{n+r+1}}{n+r+1} +$$

$$+ \frac{j/k/}{k} \sum_{r=1}^{k-1} J/r+1//k-r-1/ \binom{k-1}{r} \frac{b^{n+r+1}}{n+r+1} , n=1,3,5 \text{ nieparzyste}$$

Współczynniki równania liniowego /42/ mają postać:

$$\begin{aligned}
 A_{ik} = & \left[- \frac{J/i+1/}{i+1} \sum_{n=1}^{i-1} J/n+1/ \binom{i}{n} /i-n/b^{i-n} + \right. \\
 & \left. + \frac{J/i/}{i} \sum_{n=1}^{i-1} J/n+1/ \binom{i-1}{n} b^{i-1-n} \right] N_k^n + \\
 /43a/ & \left[\frac{J/i+1/}{i+1} \sum_{n=1}^{i-1} J/n//n+2/ \binom{i}{n} + \right. \\
 & \left. - \frac{J/i/}{i} \sum_{n=0}^{i-2} J/n//i-2-n/ \binom{i-1}{n} \right] NN_k^n + \\
 & \left[\frac{J/i+1/}{i+1} \sum_{n=0}^{i-2} J/n/ /i-n+1/ \binom{i}{n} b^{i-n} + \right. \\
 & \left. - \frac{J/i/}{i} \sum_{n=0}^{i-2} J/n/n \binom{i-1}{n} b^{i-n+1} \right] T_k^n + \\
 & \left[\frac{J/i+1/}{i+1} \sum_{n=1}^i J/n+1//n+1/ \binom{i}{n} + \right. \\
 & \left. + \frac{J/i/}{i} \sum_{n=1}^{i-1} J/n+1//i-n-1/ \binom{i-1}{n} \right] TT_k^n .
 \end{aligned}$$

Prawe strony równań /42a/ są obliczane ze wzoru /44/ w którym polimomenty BN_k^n , BNN_k^n , BT_k^n , BTT_k^n są obliczane z warunków brzegowych dla stanu SA.

Stan AS

Wzory /39b/ na składowe stanu naprężenia w stanie AS napisano poniżej. Pomiędzy wzorami /39a/ i /39b/ zachodzi relacja:

$$x \Leftrightarrow y, \quad \overset{\circ}{t} \rightarrow \overset{\circ}{t}, \quad \overset{\circ}{s} \rightarrow \overset{\circ}{p}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = & \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{J/i+1/}{i+1} \sum_{r=0}^{i-1} J/r//r+2/ \binom{i}{r} x^{i-r} y^r + \right. \\ & \left. - \frac{J/i/}{i} \sum_{r=1}^{i-1} J/r+1//r+1/ \binom{i-1}{r} y^{i-1-r} x^r \right] X_i, \end{aligned}$$

(39b)

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} = & \sum_{i=1}^{\infty} \left[- \frac{J/i+1/}{i+1} \sum_{r=0}^{i-1} J/r/r \binom{i}{r} y^r x^{i-r} + \right. \\ & \left. + \frac{J/i/}{i} \sum_{r=1}^{i-1} J/r+1//r+1/ \binom{i-1}{r} y^{i-1-r} x^r \right] X_i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} = & \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{J/i+1/}{i+1} \sum_{r=1}^i J/r+1//r+1/ \binom{i}{r} x^{i-r} y^r + \right. \\ & \left. - \frac{J/i/}{i} \sum_{r=1}^{i-1} J/r/r \binom{i-1}{r} x^r y^{i-1-r} \right] X_i. \end{aligned}$$

Analogicznie do wzorów /40a/ napisano wzory /40b/ :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} |_{x=b} = & \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{J/k+1/}{k+1} \sum_{r=0}^{k-1} J/r//r+2/ \binom{k}{r} y^r b^{k-r} + \right. \\ & \left. - \frac{J/k/}{k} \sum_{r=0}^{k-2} J/r//k-2-r/ \binom{k-1}{r} y^r b^{k-1-r} \right] X_k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} |_{y=1} = & \sum_{k=1}^{\infty} \left[- \frac{J/k+1/}{k+1} \sum_{r=1}^k J/r+1//k-r/ \binom{k}{r} x^r + \right. \\ & \left. + \frac{J/k/}{k} \sum_{r=1}^{k-1} J/r+1//r+1/ \binom{k-1}{r} x^r \right] X_k. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{xy} |_{x=b} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{J/k+1}{k+1} \sum_{r=1}^k J/r+1//r+1/ \binom{k}{r} b^{k-r} y^r + \right. \\ &\quad \left. + \frac{J/k}{k} \sum_{r=1}^{k-1} J/r+1//k+r-1/ \binom{k-1}{r} b^{k-r-1} y^r \right] X_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{xy} |_{y=1} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{J/k+1}{k+1} \sum_{r=0}^{k-1} J/r//k-r+1/ \binom{k}{r} x^r + \right. \\ &\quad \left. - \frac{J/k}{k} \sum_{r=0}^{k-2} J/r/ r \binom{k-1}{r} x^r \right] X_k \end{aligned}$$

(40b)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^6 \delta_{xx}}{\partial X_1} |_{x=b} &= \frac{J/1+1/}{1+1} \sum_{n=0}^{1-1} J/n//n+2/ \binom{1}{n} b^{1-n} y^n + \\ &\quad - \frac{J/1/}{1} \sum_{n=0}^{1-2} J/n//1-2-n/ \binom{1-1}{n} b^{1-1-n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^6 \delta_{xy}}{\partial X_1} |_{x=b} &= \frac{J/1+1/}{1+1} \sum_{n=1}^{n=1} J/n+1//n+1/ \binom{1}{n} b^{1-n} y^n + \\ &\quad + \frac{J/1/}{1} \sum_{n=1}^{1-1} J/n+1//1-n-1/ \binom{1-1}{n} b^{1-n-1} y^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^6 \delta_{yy}}{\partial X_1} |_{y=1} &= - \frac{J/1+1/}{1+1} \sum_{n=1}^1 J/1+1//n-1/ \binom{1}{n} x^n + \\ &\quad + \frac{J/1/}{1} \sum_{n=1}^{1-1} J/n+1//n+1/ \binom{1-1}{n} x^n \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^6 xy}{\partial x^1} y=1 = \frac{j/1+1/}{1+1} \sum_{n=0}^{1-1} J/n//1-n+1/ \binom{1}{n} x^n +$$

$$- \frac{J/1/}{1} \sum_{n=0}^{1-2} J/n/ n \binom{1-1}{n} x^n.$$

Podstawiając wyrażenia /40b/ do równania /37/ oraz przyjmując oznaczenia:

$$N_k^n = \frac{J/k+1/}{k+1} \sum_{r=0}^{k-1} J/r//r+2/ \binom{k}{n} \frac{b^{k-r}}{n+r+1} +$$

$$- \frac{J/k/}{k} \sum_{r=0}^{k-2} J/r//k-2-r/ \binom{k-1}{n} \frac{b^{k-1-r}}{n+r+1}, \quad n=0,2 \text{ parzyste}$$

$$NN_k^n = - \frac{j/k+1/}{k+1} \sum_{r=1}^{r=k} J/r+1//k-r/ \binom{k}{r} \frac{b^{n+r+1}}{n+r+1} +$$

(41b)

$$+ \frac{J/k/}{k} \sum_{r=1}^{k-1} J/r+1//r+1/ \binom{k-1}{r} \frac{b^{n+r+1}}{n+r+1},$$

$n=1,3,5 \dots$ nieparzyste

$$T_k^n = \frac{J/k+1/}{k+1} \sum_{r=1}^k J/r+1//r+1/ \binom{k}{r} \frac{b^{k-r}}{n+r+1} +$$

$$+ \frac{j/k/}{k} \sum_{r=1}^{k-1} J/r+1//k-r-1/ \binom{k-1}{r} \frac{b^{k-r-1}}{n+r+1},$$

$n= 1,3 \dots$ nieparzyste

$$TT_k^n = \frac{j/k+1/}{k+1} \sum_{r=0}^{k-1} J/r//k-r+1/ \binom{k}{r} \frac{b^{n+r+1}}{n+r+1} +$$

$$- \frac{J/k/}{k} \sum_{r=0}^{k-2} J/r/ r \binom{k-1}{r} \frac{b^{n+r+1}}{n+r+1}, \quad n=0,2.. \text{ parzyste}$$

Współczynniki równania liniowego /42/ mają postać:

$$\begin{aligned}
 A_{ik} = & \left[+ \frac{J/i+1/}{i+1} \sum_{n=0}^{i-1} J/n//n+2/ \binom{i}{n} b^{i-n} + \right. \\
 & \left. - \frac{J/i/}{i} \sum_{n=0}^{i-2} J/n//i-2-n/ \binom{i-1}{n} b^{i-1-n} \right] N_k^n + \\
 (43b) \quad & + \left[- \frac{J/i+1/}{i+1} \sum_{n=1}^i J/i+1//i-n/ \binom{i}{n} + \right. \\
 & + \frac{J/i/}{i} \sum_{n=1}^{i-1} J/n+1//n+1/ \binom{i-1}{n} \left. \right] NN_k^n + \\
 & + \left[\frac{J/i+1/}{i+1} \sum_{n=1}^{n=1} J/n+1//n+1/ \binom{i}{n} b^{i-n} + \right. \\
 & + \frac{J/i/}{i} \sum_{n=1}^{i-1} J/n+1//i-n-1/ \binom{i-1}{n} b^{i-n-1} \left. \right] T_k^n + \\
 & + \left[\frac{J/i+1/}{i+1} \sum_{n=0}^{i-1} J/n/ /i-n+1/ \binom{i}{n} + \right. \\
 & \left. - \frac{J/i/}{i} \sum_{n=0}^{i-2} J/n/ n \binom{i-1}{n} \right] TT_k^n.
 \end{aligned}$$

Łatwo zauważyć, że w przypadku tarczy kwadratowej macierze współczynników A_{ik} w obydwu stanach SA i AS są równe. Prawe strony równań /42b/ są obliczane ze wzoru /44/ w którym polimomenty brzegowe BN_k^n , BNN_k^n , BT_k^n , BTT_k^n są obliczane z warunków brzegowych dla stanu AS według wzorów /45/.

Stan AA

Wzory /35/ wraz z wyrażeniami /19/ zawierają stałe czynniki $\overset{0}{t}_k$, $\overset{0}{t}_k$, $k=0,2,4$ /parzyste/.

Przyjmując w tych wzorach oznaczenia:

$$(38a) \quad \overset{o}{t}_k = X_k, \quad \overset{o}{t}_k = X_{k+1},$$

a następnie sprowadzając indeksy do jednego "i" otrzymano:

$$\begin{aligned} \delta_{xx} = & \sum_{i=2}^{\infty} - \left[\frac{J/i}{1} \sum_{r=1}^{i-1} J/r+1//r+1/ \binom{i}{r} x^{i-r} y^r + \right. \\ & \left. + \frac{J/i-1/}{1-1} \sum_{r=1}^{i-2} J/r+1//r-1/ \binom{i-1}{r} x^r y^{i-1-r} \right] X_i, \end{aligned}$$

$$(39a) \quad \begin{aligned} \delta_{yy} = & \sum_{i=2}^{\infty} \left[\frac{J/i}{1} \sum_{r=1}^{i-1} J/r+1//r-1/ \binom{i}{r} x^{i-r} y^r + \right. \\ & \left. + \frac{J/i+1/}{1-1} \sum_{r=1}^{i-2} J/r+1//r+1/ \binom{i-1}{r} x^r y^{i-1-r} \right] X_i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{xy} = & X_1 + \sum_{i=2}^{\infty} \left[\frac{J/i}{1} \sum_{r=2}^i J/r/ r \binom{i}{r} x^{i-r} y^r + \right. \\ & \left. - \frac{J/i+1/}{1-1} \sum_{r=2}^{i-1} J/r/ r \binom{i-1}{r} x^r y^{i-1-r} \right] X_i. \end{aligned}$$

Dokonując we wzorach /39c/ zmiany indeksów oraz podstawiając $x=b$, $y=1$ otrzymano:

$$\begin{aligned} \delta_{xx} |_{x=b} = & - \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{J/k}{k} \sum_{r=1}^{k-1} J/r+1//r+1/ \binom{k}{r} b^{k-r} y^r + \right. \\ & \left. - \frac{J/k+1/}{k-1} \sum_{r=1}^{k-2} J/r//k-2-r/ \binom{k-1}{r} b^{k-1-r} y^r \right] X_k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} |_{y=1} = & \sum_{k=2}^{\infty} \left[-\frac{j/k/}{k} \sum_{r=1}^{k-1} J/r+1//k-1-r/ \binom{k}{r} x^r \right. \\ & \left. + \frac{J/k+1/}{k-1} \sum_{r=1}^{k-2} J/r+1//r+1/ \binom{k-1}{r} x^r \right] X_k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} |_{x=b} = & X_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{J/k/}{k} \sum_{r=2}^k J/r/ r \binom{k}{r} b^{k-r} y^r + \right. \\ & \left. - j/k+1/ \sum_{r=2}^{k-1} J/r//k-1-r/ \binom{k-1}{r} b^{k-1-r} y^r \right] X_k, \end{aligned}$$

(40c)

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} |_{x=1} = & X_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{j/k/}{k} \sum_{r=0}^{k-2} J/r//k-r/ \binom{k}{r} x^r + \right. \\ & \left. - \frac{J/k+1/}{k-1} \sum_{r=2}^{k-1} J/r/r \binom{k-1}{r} x^r \right] X_k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial X_1} |_{x=b} = & -\frac{J/1/}{1} \sum_{n=1}^{1-1} J/n+1//n+1/ \binom{1}{n} b^{1-n} y^n + \\ & -\frac{j/1+1/}{1-1} \sum_{n=1}^{1-2} J/n//i-2-n/ \binom{1}{n} b^{1-1-n} y^n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial X_1} |_{x=b} = & -\frac{j/1/}{1} \sum_{n=1}^{1-1} J/n+1//1-1-n/ \binom{1}{n} x^n + \\ & + \frac{J/1+1/}{1-1} \sum_{n=1}^{1-2} J/n+1//n+1/ \binom{1-1}{n} x^n, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial X_1} |_{x=b} = 1,$$

$$\frac{\partial^6 xy}{\partial x_1} \Big|_{x=b} = \frac{J/i/}{1} \sum_{n=2}^1 J/n/n \binom{1}{n} b^{i-n} y^n +$$

$$- \frac{1/i+1/}{i-1} \sum_{n=2}^{i-1} J/n//i-1-n/ \binom{i-1}{n} b^{i-1-n} y^n, \quad i=2,3,4$$

$$\frac{\partial^6 xy}{\partial x_1} \Big|_{x=1} = 1,$$

$$\frac{\partial^6 xy}{\partial x_1} = \frac{1/i/}{1} \sum_{n=0}^{i-2} J/n//i-n/ \binom{1}{n} x^n +$$

$$- \frac{J/i+1/}{i-1} \sum_{n=2}^{i-1} J/n/ n \binom{i-1}{n} x^n, \quad i=2,3,4.$$

Podstawiając wyrażenia /40c/ do równania /37/ oraz przyjmując oznaczenia:

$$N_1^n = 0,$$

$$N_k^n = - \frac{J/k/}{k} \sum_{r=0}^{k-1} J/r+1//r+1/ \binom{k}{r} \frac{b^{k-r}}{n+r+1} +$$

$$- \frac{1/k+1/}{k-1} \sum_{r=1}^{k-2} J/r//k-2-r/ \binom{k-1}{r} \frac{b^{k-r-1}}{n+r+1}, \quad k=2,3,4,\dots$$

(41c)

$$NN_1^n = 0,$$

$$NN_k^n = - \frac{J/k/}{k} \sum_{r=1}^{k-1} J/r+1//k-1-r/ \binom{k}{r} \frac{b^{n+r+1}}{n+r+1} +$$

$$+ \frac{J/k+1/}{k-1} \sum_{r=1}^{k-2} J/r+1//r+1/ \binom{k-1}{r} \frac{b^{n+r+1}}{n+r+1},$$

$$T_1^n = \frac{1}{n+1}$$

$$T_k^n = \frac{J/k/}{k} \sum_{r=2}^k J/r/r \binom{k}{r} \frac{b^{k-r}}{n+r+1} +$$

$$- \frac{J/k+1/}{k-1} \sum_{r=2}^{k-1} J/r//k-1-r/ \binom{k-1}{r} \frac{b^{k-1-r}}{n+r+1}$$

$$TT_1^n = \frac{b^{n+1}}{n+1}$$

$$TT_k^n = \frac{J/k/}{k} \sum_{r=0}^{k-2} J/r//k-r/ \binom{k}{r} \frac{b^{n+r+1}}{n+r+1} +$$

$$- \frac{J/k+1/}{k-1} \sum_{r=2}^{k-1} J/r/r \binom{k-1}{r} \frac{b^{n+r+1}}{n+r+1}$$

Współczynniki równania liniowego /42/ mają postać:

$$A_{1k} = T_k^0 + TT_k^0, \quad k=1,2,3,\dots \text{ /dowolne}$$

$$(43c) \quad A_{1k} = \left[- \frac{J/i/}{i} \sum_{n=1}^{i-1} J/n+1//n+1/ \binom{i}{n} b^{i-n} + \right.$$

$$\left. - \frac{J/i+1/}{i-1} \sum_{n=1}^{i-2} J/n//1-2-n/ \binom{i-1}{n} b^{i-1-n} \right] N_k^n +$$

$$+ \left[- \frac{J/i/}{i} \sum_{n=1}^{i-1} J/n+1//1-1-n/ \binom{i}{n} + \right.$$

$$\left. + \frac{J/i+1/}{i-1} \sum_{n=1}^{i-2} J/n+1//n+1/ \binom{i-1}{n} \right] NN_k^n +$$

$$+ \left[\frac{J/i/}{i} \sum_{n=2}^1 J/n/ n \binom{i}{n} b^{i-n} + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1/1+1}{1-1} \left[\sum_{n=2}^{1-1} J/n//1-1-n/ \binom{1-1}{n} b^{1-1-n} \right] T_k^n + \\
 & + \left[\frac{1/1/}{1} \sum_{n=0}^{1-2} J/n//1-n/ \binom{1}{n} + \right. \\
 & \left. - \frac{J/1+1}{1-1} \sum_{n=2}^{1-1} J/n/ n \binom{1-1}{n} \right] T_k^n
 \end{aligned}$$

$i = 2, 3, 4, \dots$ $k = 1, 2, 3$ /dowolne/

8. Wyrażenia na składowe stanu naprężenia w przypadku ograniczenia się do pierwszych kolejnych wielomianów stopnia $n/14, 15, 16/$.

W poprzednich rozdziałach posługiwano się wyrażeniami, które zawierały nieskończoną liczbę współczynników stałych i nieskończoną liczbę wielomianów odpowiadającą tym współczynnikom. W konkretnych obliczeniach liczba tych współczynników i odpowiadające im stopnie wielomianów muszą być ograniczone. W obliczeniach, które przeprowadzono w dalszym ciągu ograniczono się do 16 współczynników w stanie SS, SA, AS oraz 17 w stanie AA:

Odpowiada to następującym stopniom "n" wielomianów w poszczególnych stanach:

SS-14, SA i AS - 15, AA - 16.

Poniżej napisano w postaci wyraźniej wzory na składowe stanu naprężenia w przypadku obrania wymienionej wyżej liczby współczynników w poszczególnych stanach.

Stan SS

$$\begin{aligned}
 6_{xx} = & z_0^0 + z_2^0 \frac{1}{2} / 2y^2 - x^2 / - \frac{p_2^0}{2} x^2 + \frac{z_4^0}{3} / 3y^4 - 12x^2y^2 + x^4 / + \\
 & + \frac{p_4^0}{3} 2 / 3x^2y^2 - x^4 / + \frac{z_6^0}{4} / 4y^6 - 45x^2y^4 + 30x^4y^2 - x^6 / + \\
 & + \frac{p_6^0}{4} / - 15x^2y^4 + 30x^4y^2 - 3x^6 / + \frac{z_8^0}{5} / 5y^8 - 112x^2y^6 + \\
 & + 210x^4y^4 - 56x^6y^2 + x^8 / + \frac{p_8^0}{5} / 28x^2y^6 - 140x^4y^4 + \\
 & + 84x^6y^2 - 4x^8 / + \frac{z_{10}^0}{6} / 6y^{10} - 225x^2y^8 + 840x^4y^6 - \\
 & - 630x^6y^4 + 90x^8y^2 - x^{10} / + \frac{p_{10}^0}{6} / - 45x^2y^8 + 420x^4y^6 - \\
 & - 630x^6y^4 + 180x^8y^2 - 5x^{10} / + \frac{z_{12}^0}{7} / 7y^{12} - 396x^2y^{10} + \\
 & + 2475x^4y^8 - 3696x^6y^6 + 1485x^8y^4 - 132x^{10}y^2 + x^{12} / + \\
 & + \frac{p_{12}^0}{7} / 66x^2y^{10} - 990x^4y^8 + 2772x^6y^6 - 1980x^8y^4 + 330x^{10}y^2 - \\
 & - 6x^{12} / + \frac{z_{14}^0}{8} / 8y^{14} - 637x^2y^{12} + 6006x^4y^{10} - 15015x^6y^8 + \\
 & + 12012x^8y^6 - 3003x^{10}y^4 + 182x^{12}y^2 - x^{14} / + \frac{p_{14}^0}{8} / - 91x^2y^{12} + \\
 & + 2002x^4y^{10} - 9009x^6y^8 + 12012x^8y^6 - 5005x^{10}y^4 + 546x^{12}y^2 - \\
 & - 7x^{14} / .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \overset{\circ}{k}_{yy} = & \overset{\circ}{p}_0 + \frac{\overset{\circ}{p}_2}{2} / -y^2 + 2x^2 / - \frac{\overset{\circ}{z}_2}{2} y^2 + \frac{\overset{\circ}{z}_4}{3} 2 / -y^4 + 3x^2 y^2 / + \\
 & + \frac{\overset{\circ}{p}_4}{3} / y^4 - 12x^2 y^2 + 3x^4 / + \frac{\overset{\circ}{z}_6}{4} / -3y^6 + 30x^2 y^4 - 15x^4 y^2 / + \\
 & + \frac{\overset{\circ}{p}_6}{4} / -y^6 + 30x^2 y^4 - 45x^4 y^2 + 4x^6 / + \frac{\overset{\circ}{z}_8}{5} / -4y^8 + \\
 & + 84x^2 y^6 - 140x^4 y^4 + 28x^6 y^2 / + \frac{\overset{\circ}{p}_8}{5} / y^8 - 56x^2 y^6 + \\
 & + 210x^4 y^4 + - 112x^6 y^2 + 5x^8 / + \frac{\overset{\circ}{z}_{10}}{6} / -5y^{10} + 180x^2 y^8 - \\
 & - 630x^4 y^6 + 420x^6 y^4 - \dots - 45x^8 y^2 / + \frac{\overset{\circ}{p}_{10}}{6} / -y^{10} + \\
 & + 90x^2 y^8 - 630x^4 y^6 + 840x^6 y^4 - 225x^8 y^2 + 6x^{10} / + \frac{\overset{\circ}{z}_{12}}{7} + \\
 & + / -6y^{12} + 330x^2 y^{10} - 1980x^4 y^8 + 2772x^6 y^6 - 990x^8 y^4 + \\
 & + 66x^{10} y^2 / + \frac{\overset{\circ}{p}_{12}}{7} / y^{12} - 132x^2 y^{10} + 1485x^4 y^8 - 3696x^6 y^6 + \\
 & + 2475x^8 y^4 - 396x^{10} y^2 + 7x^{12} / + \frac{\overset{\circ}{z}_{14}}{8} / -7y^{14} + 546x^2 y^{10} - \\
 & - 5005x^4 y^{10} + 12012x^6 y^8 - 9009x^8 y^6 + 2002x^{10} y^4 - 91x^{12} y^2 / + \\
 & + \frac{\overset{\circ}{p}_{14}}{8} / -y^{14} + 182x^2 y^{12} - 3003x^4 y^{10} + 12012x^6 y^8 - \\
 & - 15015x^8 y^6 + 6006x^{10} y^4 - 637x^{12} y^2 + 8x^{14} / . \\
 \overset{\circ}{k}_{xy} = & \overset{\circ}{z}_2 xy + \overset{\circ}{p}_2 xy + \frac{\overset{\circ}{z}_4}{3} 4 / 2xy^3 - x^3 y / + \frac{\overset{\circ}{p}_4}{3} 4 / -xy^3 + 2x^3 y / +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{x_6^0}{2} / 9xy^5 - 20x^3y^3 + 3x^5y / + \frac{p_6^0}{2} / 3xy^5 - 20x^3y^3 + \\
 & + 9x^5y / + \frac{x_8^0}{5} / 32xy^7 - 168x^3y^5 + 112x^5y^3 - 8x^7y / + \\
 & + \frac{p_8^0}{5} / -8xy^7 + 112x^3y^5 - 168x^5y^3 + 32x^7y / + \frac{x_{10}^0}{3} / 25xy^9 - \\
 & - 240x^3y^7 + 378x^5y^5 - 120x^7y^3 + 5x^2y / + \frac{p_{10}^0}{3} / 5xy^9 - \\
 & - 120x^3y^7 + 378x^5y^5 - 240x^7y^3 + 25x^9y / + \frac{x_{12}^0}{7} / 72xy^{11} - \\
 & - 1100x^3y^9 + 3168x^5y^7 - 2376x^7y^5 + 440x^9y^3 - 12x^{11}y / + \\
 & + \frac{p_{12}^0}{7} / -12xy^{11} + 440x^3y^9 - 2376x^5y^7 + 3168x^7y^5 - 1100x^9y^3 + \\
 & + 72x^{11}y / + \frac{x_{14}^0}{4} / 49xy^{13} - 1092x^3y^{11} + 5005x^5y^9 - 6864x^7y^7 + \\
 & + 3003x^9y^5 - 364x^{11}y^3 + 7x^{13} / + \frac{p_{14}^0}{4} / 7xy^{13} - 364x^3y^{11} + \\
 & + 3003x^5y^9 - 6864x^7y^7 + 5005x^9y^5 - 1092x^{11}y^3 + 49x^{13}y / .
 \end{aligned}$$

Stan S-A

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} & = x_1y + \frac{x_3^0}{3} \frac{3}{2} x^2y + \frac{x_3^0}{2} / 2y^3 - 3x^2y / + \frac{x_5^0}{5} \frac{10}{5} / -x^2y^3 + \\
 & + x^4y / + \frac{x_5^0}{3} / 3y^5 - 20x^2y^3 + 5x^4y / + \frac{x_7^0}{4} / 21x^2y^5 - 70x^4y^3 + \\
 & + 21x^6y / + \frac{x_7^0}{4} / 4y^7 - 63x^2y^5 + 70x^4y^3 - 7x^6y / + \frac{x_9^0}{5} / -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - 36x^2y^7 + 252x^4y^5 - 252x^6y^3 + 36x^8y/ + \frac{x_9^0}{5}/5y^9 - \\
 & - 144x^2y^7 + 378x^4y^5 - 168x^6y^3 + 9x^8y/ + \frac{\tau_{11}^0}{6}/55x^2y^9 - \\
 & - 660x^4y^7 + 1386x^6y^5 - 660x^8y^3 + 55x^{10}y/ + \frac{x_{11}^0}{6}/6y^{11} - \\
 & - 275x^2y^9 + 1320x^4y^7 - 1386x^6y^5 + 330x^8y^3 - 11x^{10}y/ + \\
 & + \frac{\tau_{13}^0}{7}/-78x^2y^{11} + 1430x^4y^9 - 5148x^6y^7 + 5148x^8y^5 - \\
 (47) \quad & - 1430x^{10}y^3 + 78x^{12}y/ + \frac{x_{13}^0}{7}/7y^{13} - 468x^2y^{11} + 3575x^4y^9 - \\
 & - 6864x^6y^7 + 3861x^8y^5 - 572x^{10}y^3 + 13x^{12}y/ + \frac{\tau_{15}^0}{8}/105x^2y^{13} - \\
 & - 2730x^4y^{11} + 15015x^6y^9 - 25740x^8y^7 + 15015x^{10}y^5 - \\
 & - 2730x^{12}y^3 + 105x^{14}y/ + \frac{x_{15}^0}{8}/8y^{15} - 735x^2y^{13} + 8190x^4y^{11} - \\
 & - 25025x^6y^9 + 25740x^8y^7 - 9009x^{10}y^5 + 910x^{12}y^3 - 15x^{14}y/ \\
 5_{yy} = & - \tau_1 y + \frac{\tau_3}{2}/y^3 - 6x^2y/ + \frac{x_3^0}{2}/-\frac{1}{2}y^3/ + \frac{\tau_5^0}{3}/-y^5 + 20x^2y^3 - \\
 & - 15x^4y/ + \frac{x_5^0}{3}/-2y^5 + 10x^2y^3/ + \frac{\tau_7^0}{4}/y^7 - 42x^2y^5 + \\
 & + 105x^4y^3 - 28x^6y/ + \frac{x_7^0}{4}/-3y^7 + 42x^2y^5 - 35x^4y^3/ + \\
 & + \frac{\tau_9^0}{5}/-y^9 + 72x^2y^7 - 378x^4y^5 + 336x^6y^3 - 45x^8y/ +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{z_9^0}{5} / -4y^9 + 108x^2y^7 - 252x^4y^7 + 84x^6y^3 / + \frac{\tau_{11}^0}{6} / y^{11} - \\
 & - 110x^2y^9 + 990x^4y^7 - 1848x^6y^5 + 825x^8y^3 - 66x^{10}y / + \\
 & + \frac{z_{11}^0}{6} / -5y^{11} + 220x^2y^9 - 990x^4y^7 + 924x^6y^5 - 165x^8y^3 / + \\
 & + \frac{\tau_{13}^0}{7} / -y^{13} + 156x^2y^{11} - 2145x^4y^9 + 6864x^6y^7 - 6435x^8y^5 + \\
 & + 1716x^{10}y^3 - 91x^{12}y / + \frac{z_{13}^0}{7} / -6y^{13} + 390x^2y^{11} - 2860x^4y^9 + \\
 & + 5148x^6y^7 - 2574x^8y^5 + 286x^{10}y^3 / + \frac{\tau_{15}^0}{8} / y^{15} - 210x^2y^{13} + \\
 & + 4095x^4y^{11} - 20020x^6y^9 + 32175x^8y^7 - 18018x^{10}y^5 + \\
 & + 3185x^{12}y^3 - 120x^{14}y / + \frac{z_{15}^0}{8} / -7y^{15} + 630x^2y^{13} - 6825x^4y^{11} + \\
 & + 20020x^6y^9 - 19305x^8y^7 + 6006x^{10}y^5 - 455x^{12}y^3 / . \\
 \zeta_{xy} = & \tau_1^0 x + \frac{\tau_3^0}{2} / -3xy^2 + 2x^3 / + z_3 \frac{3}{2} xy^2 + \frac{\tau_5^0}{3} / 5xy^4 - \\
 & - 20x^3y^2 + 3x^5 / + z_5 \frac{10}{5} / xy^4 - x^3y^2 / + \frac{\tau_7^0}{4} / -7xy^6 + 70x^3y^4 - \\
 & - 63x^5y^2 + 4x^7 / + \frac{z_7^0}{4} / 21xy^6 - 70x^3y^4 + 21x^5y^2 / + \\
 & + \frac{\tau_9^0}{5} / 9xy^8 - 168x^3y^6 + 378x^5y^4 - 144x^7y^2 + 5x^9 / + \\
 & + \frac{z_9^0}{5} / 36xy^8 - 252x^3y^6 + 252x^5y^4 - 36x^7y^2 / + \frac{\tau_{11}^0}{6} / -11x^{10} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 330x^3y^8 - 1386x^5y^6 + 1320x^7y^4 - 275x^9y^2 + 6x^{11} + \\
 & + \frac{x^{11}}{6} / 55xy^{10} - 660x^3y^8 + 1386x^5y^6 - 660x^7y^4 + \\
 & + 55x^9y^2 + \frac{t_{13}}{7} / 13xy^{12} - 572x^3y^{10} + 3861x^5y^8 - \\
 & - 6864x^7y^6 + 3575x^9y^4 - 468x^{11}y^2 + 7x^{13} + \frac{x^{13}}{7} / 78xy^{12} - \\
 & - 1430x^3y^{10} + 5148x^5y^8 - 5148x^7y^6 + 1430x^9y^4 - 78x^{11}y^2 + \\
 & + \frac{t_{15}}{8} / 15xy^{14} + 910x^3y^{12} - 9009x^5y^{10} + 25740x^7y^8 - \\
 & - 25025x^9y^6 + 8190x^{11}y^4 - 735x^{13}y^2 + 8x^{15} + \\
 & + \frac{x^{15}}{8} / 105xy^{14} - 2730x^3y^{12} + 15015x^5y^{10} - 25740x^7y^8 + \\
 & 15015x^9y^6 - 2730x^{11}y^4 + 105x^{13}y^2.
 \end{aligned}$$

Stan A - S

$$\begin{aligned}
 6_{xx} = & - t_1x + \frac{t_3}{2} / -6xy^2 + x^3 + \frac{p_3}{3} / -\frac{1}{2}x^3 + \frac{t_5}{3} / -15xy^4 + \\
 & + 20x^3y^2 - x^5 + \frac{p_5}{3} / 10x^3y^2 - 2x^5 + \frac{t_7}{4} / -28xy^6 + \\
 & + 105x^3y^4 - 42x^5y^2 + x^7 + \frac{p_7}{4} / -35x^3y^4 + 42x^5y^2 - \\
 & - 3x^7 + \frac{t_9}{5} / -45xy^8 + 336x^3y^6 - 378x^5y^4 + 72x^7y^2 -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - x^9 / + \frac{p_9}{5} / 84x^3y^6 - 252x^5y^4 + 108x^7y^2 - 4x^9 / + \\
 & + \frac{t_{11}}{6} / -66xy^{10} + 825x^3y^8 - 1848x^5y^6 + 990x^7y^4 - 110x^9y^2 + \\
 & + x^{11} / + \frac{p_{11}}{6} / -165x^3y^8 + 924x^5y^6 - 990x^7y^4 + 220x^9y^2 - \\
 & - 5x^{11} / + \frac{t_{13}}{7} / -91xy^{12} + 1716x^3y^{10} - 6435x^5y^8 + 6864x^7y^6 - \\
 & - 2145x^9y^4 + 156x^{11}y^2 - x^{13} / + \frac{p_{13}}{7} / 286x^3y^{10} - 2574x^5y^8 + \\
 & + 5148x^7y^6 - 2860x^9y^4 + 390x^{11}y^2 - 6x^{13} / + \frac{t_{15}}{8} / -120xy^{14} + \\
 (48) & + 3185x^3y^{12} - 18018x^5y^{10} + 32175x^7y^8 - 20020x^9y^6 + \\
 & + 4095x^{11}y^4 - 210x^{13}y^2 + x^{15} / + \frac{z_{15}}{8} / -455x^3y^{12} + \\
 & + 6006x^5y^{10} - 19305x^7y^8 + 20020x^9y^6 - 6825x^{11}y^4 + \\
 & + 630x^{13}y^2 - 7x^{15} / . \\
 \\
 \zeta_{yy} & = p_1x + \frac{t_3}{2} / 3xy^2 + \frac{p_3}{2} / -3xy^2 + 2x^3 / + \frac{t_5}{3} / 10/xy^4 - x^3y^2 / + \\
 & + \frac{p_5}{3} / 5xy^4 - 20x^3y^2 + 3x^5 / + \frac{t_7}{4} / 21xy^6 - 70x^3y^4 + \\
 & + 21x^5y^2 / + \frac{p_7}{4} / -7xy^6 + 70x^3y^4 - 63x^5y^2 + 4x^7 / + \frac{t_9}{5} / 36xy^8 - \\
 & - 252x^3y^6 + 252x^5y^6 - 36x^7y^2 / + \frac{p_9}{5} / 9xy^8 - 168x^3y^6 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 378x^5y^4 - 144x^7y^2 + 5x^9/ + \frac{t_{11}^0}{8}/55xy^{10} - 660x^3y^8 + \\
 & + 1386x^5y^6 - 660x^7y^4 + 55x^9y^2/ + \frac{p_{11}^0}{8}/-11xy^{10} + \\
 & + 330x^3y^8 - 1386x^5y^6 + 1320x^7y^4 - 275x^9y^2 + 6x^{11}/ + \\
 & + \frac{t_{13}^0}{7}/78xy^{12} - 1430x^3y^{10} + 5148x^5y^8 - 5148x^7y^6 + \\
 & + 1430x^9y^4 - 78x^{11}y^2/ + \frac{p_{13}^0}{7}/13xy^{12} - 572x^3y^{10} + \\
 & + 3861x^5y^8 - 6864x^7y^6 + 3575x^9y^4 - 468x^{11}y^2 + 7x^{13}/ + \\
 & + \frac{t_{15}^0}{8}/105xy^{14} - 2730x^3y^{12} + 15015x^5y^{10} - 25740x^7y^8 + \\
 & + 15015x^9y^6 - 2730x^{11}y^4 + 105x^{13}y^2/ + \frac{p_{15}^0}{8}/-15xy^{14} + \\
 & + 910x^3y^{12} - 9009x^5y^{10} + 25740x^7y^8 - 25025x^9y^6 + \\
 & + 8190x^{11}y^4 - 735x^{13}y^2 + 8x^{15}/. \\
 \sigma_{xy} = & \frac{t_1^0}{1}y + \frac{t_3^0}{2}/2y^3 - 3x^2y/ + \frac{p_3^0}{2}3x^2y + \frac{t_5^0}{3}/3y^5 - 20x^2y^3 + \\
 & + 5x^4y/ + \frac{p_5^0}{3}10/-x^2y^3 + x^4y/ + \frac{t_7^0}{4}/4y^7 - 63x^2y^5 + \\
 & + 70x^4y^3 - 7x^6y/ + \frac{p_7^0}{4}/21x^2y^5 - 70x^4y^3 + 21x^6y/ + \\
 & + \frac{t_9^0}{5}/5y^9 - 144x^2y^7 + 378x^4y^5 - 168x^6y^3 + 9x^8y/ +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{p_9}{5} / -36x^2y^7 + 252x^4y^5 - 252x^6y^3 + 36x^8y / + \\
 & + \frac{t_{11}}{6} / 6y^{11} - 275x^2y^9 + 1320x^4y^7 - 1386x^6y^5 + 330x^8y^3 - \\
 & - 11x^{10}y / + \frac{p_{11}}{6} / 55x^2y^9 - 660x^4y^7 + 1386x^6y^5 + \\
 & + 660x^8y^3 + 55x^{10}y / + \frac{t_{13}}{7} / 7y^{13} - 468x^2y^{11} + 3575x^4y^9 - \\
 & - 6864x^6y^7 + 3861x^8y^5 - 572x^{10}y^3 + 13x^{12}y / + \\
 & + \frac{p_{13}}{7} / -78x^2y^{11} + 1430x^4y^9 - 5148x^6y^7 + 5148x^8y^5 - \\
 & - 1430x^{10}y^3 + 78x^{12}y / + \frac{t_{15}}{8} / 8y^{15} - 735x^2y^{13} + \\
 & + 8190x^4y^{11} - 25025x^6y^9 + 25740x^8y^7 - 9009x^{10}y^5 + \\
 & + 910x^{12}y^3 - 15x^{14}y / + \frac{p_{15}}{8} / 105x^2y^{13} - 2730x^4y^{11} + \\
 & + 15015x^6y^9 - 25740x^8y^7 + 15015x^{10}y^5 - 2730x^{12}y^3 + \\
 & + 105x^{14}y / -
 \end{aligned}$$

Stan A - A

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} = & - 2t_2xy + t_4 / - 4xy^3 + 2x^3y / + \tau_4 / 2x^3y + \frac{t_6}{3} / -18xy^5 + \\
 & + 40x^3y^3 - 6x^5y / + \frac{t_6}{3} / -20x^3y^3 + 12x^5y / + \frac{t_8}{8} / -8xy^7 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 42x^3y^5 - 28x^5y^3 + 2x^7y/+ \overset{0}{\tau}_8/14x^3y^5 - 28x^5y^3 + 6x^7y/+ + \\
 & + \frac{\overset{0}{t}_{10}}{5}/-50xy^9 + 480x^3y^7 - 756x^5y^5 + 240x^7y^3 - 10x^9y/+ + \\
 & + \frac{\tau_{10}}{5}/-120x^3y^7 + 504x^5y^5 - 360x^7y^3 + 40x^9y/+ + \\
 & + \frac{t_{12}}{3}/-36xy^{11} + 550x^3y^9 - 1584x^5y^7 + 1188x^7y^5 - \\
 & - 220x^9y^3 + 6x^{11}y/+ + \frac{\tau_{12}}{3}/110x^3y^9 - 792x^5y^7 + 1188x^7y^5 - \\
 & - 440x^9y^3 + 30x^{11}y/+ + \frac{t_{14}}{7}/-98xy^{13} + 2184x^3y^{11} - \\
 & - 10010x^5y^9 + 13728x^7y^7 - 6006x^9y^5 + 728x^{11}y^3 - \\
 & - 14x^{13}y/+ + \frac{\tau_{14}}{7}/-364x^3y^{11} + 4004x^5y^9 - 10296x^7y^7 + \\
 & + 8008x^9y^5 - 1820x^{11}y^3 + 84x^{13}y/+ + t_{16}/-16xy^{15} + \\
 & + 490x^3y^{13} - 3276x^5y^{11} + 7150x^7y^9 - 5720x^9y^7 + 1638x^{12}y^5 - \\
 & - 140x^{13}y^3 + 2x^{15}y/+ + \tau_{16}/70x^3y^{13} - 1092x^5y^{11} + 4290x^7y^9 - \\
 (49) & - 5720x^9y^7 + 2730x^{11}y^5 - 420x^{13}y^3 + 14x^{15}y/.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{yy} & = - 2\tau_2xy + 2t_4xy^3 + \overset{0}{\tau}_4/2xy^3 - 4x^3y/+ + \frac{\overset{0}{t}_6}{3}/12xy^5 - \\
 & - 20x^3y^3/+ + \frac{\overset{0}{\tau}_6}{3}/-6xy^5 + 40x^3y^3 - 18x^5y/+ + \overset{0}{t}_8/6xy^7 -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - 28x^3y^5 + 14x^5y^3 / + \overset{0}{\mathcal{L}}_8 / 2xy^7 - 28x^3y^5 + 42x^5y^3 - \\
 & - 8x^7y / + \overset{0}{\mathcal{L}}_{10} / 40xy^9 - 360x^3y^7 + 504x^5y^5 - 120x^7y^3 / + \\
 & + \overset{0}{\mathcal{L}}_{10} / -10xy^9 + 240x^3y^7 - 756x^5y^5 + 480x^7y^3 - 50x^9y / + \\
 & + \overset{0}{\mathcal{L}}_{12} / 30xy^{11} - 440x^3y^9 + 1188x^5y^7 - 792x^7y^5 + 110x^9y^3 / + \\
 & + \overset{0}{\mathcal{L}}_{12} / 6xy^{11} - 220x^3y^9 + 1188x^5y^7 - 1584x^7y^5 + 550x^9y^3 - \\
 & - 36x^{12}y / + \overset{0}{\mathcal{L}}_{14} / 84xy^{13} - 1820x^3y^{11} + 8008x^5y^9 - \\
 & - 10296x^7y^7 + 4004x^9y^5 - 364x^{11}y^3 / + \overset{0}{\mathcal{L}}_{14} / -14xy^{13} + \\
 & + 728x^3y^{11} - 6006x^5y^9 + 13728x^7y^7 - 10010x^9y^5 + 2184x^{11}y^3 - \\
 & - 98x^{13}y / + \overset{0}{\mathcal{L}}_{16} / 14xy^{15} - 420x^3y^{13} + 2730x^5y^{11} - 5720x^7y^9 + \\
 & + 4290x^9y^7 - 1092x^{11}y^5 + 70x^{13}y^3 / + \overset{0}{\mathcal{L}}_{16} / 2xy^{15} - 140x^3y^{13} + \\
 & + 1638x^5y^{11} - 5720x^7y^9 + 7150x^9y^7 - 3276x^{11}y^5 + 490x^{13}y^3 - \\
 & - 16x^{15}y / .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta_{xy} & = \overset{0}{\mathcal{L}}_0 + \overset{0}{\mathcal{L}}_2 y^2 + \overset{0}{\mathcal{L}}_2 x^2 + \overset{0}{\mathcal{L}}_4 / y^4 - 3x^2y^2 / + \overset{0}{\mathcal{L}}_4 / -3x^2y^2 + x^4 / + \\
 & + \overset{0}{\mathcal{L}}_6 / y^6 - 10x^2y^4 + 5x^4y^2 / + \overset{0}{\mathcal{L}}_6 / 5x^2y^4 - 10x^4y^2 + x^6 / +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + t_8^0/y^8 - 21x^2y^6 + 35x^4y^4 - 7x^6y^2/+ \tau_8^0/-7x^2y^6 + \\
 & + 35x^4y^4 - 21x^6y^2 + x^8/+ t_{10}^0/y^{10} - 36x^2y^8 + 126x^4y^6 - \\
 & - 84x^6y^4 + 9x^8y^2/+ \tau_{10}^0 /9x^2y^8 - 84x^4y^6 + 126x^6y^4 - \\
 & - 36x^8y^2 + x^{10}/+ t_{12}^0/y^{12} - 55x^2y^{10} + 330x^4y^8 - \\
 & - 462x^6y^6 + 165x^8y^4 - 11x^{10}y^2/+ \tau_{12}^0/-11x^2y^{10} + \\
 & + 165x^4y^8 - 462x^6y^6 + 330x^8y^4 - 55x^{10}y^2 + x^{12}/ + \\
 & + t_{14}^0/y^{14} - 78x^2y^{12} + 715x^4y^{10} - 1716x^6y^8 + 1287x^8y^6 - \\
 & - 286x^{10}y^4 + 13x^{12}y^2/+ \tau_{14}^0/13x^2y^{12} - 286x^4y^{10} + \\
 & + 1287x^6y^8 - 1716x^8y^6 + 715x^{10}y^4 - 78x^{12}y^2 + x^{14}/ + \\
 & + t_{16}^0/y^{16} - 105x^2y^{14} + 1365x^4y^{12} - 5005x^6y^{10} + \\
 & + 6435x^8y^8 - 3003x^{10}y^6 + 455x^{12}y^4 - 15x^{14}y^2/+ \tau_{16}^0/ \\
 & /-15x^2y^{14} + 455x^4y^{12} - 3003x^6y^{10} + 6435x^8y^8 - \\
 & - 5005x^{10}y^6 + 1365x^{12}y^4 - 105x^{14}y^2 + x^{16}/.
 \end{aligned}$$

9. Tarcza kwadratowa. Podstawowe układy równań i macierze odwrotne.

Występujące we wzorach /46-49/ stałe są wyznaczone z równań /42/. Opracowano program na maszynie Odra 1305 generujący macierze podstawowe dowolnego rzędu równań /42/. W niniejszej pracy zamieszczono macierze podstawowe A_{ij} o rzędzie odpowiadającym ilości niewiadomych występujących we wzorach /46-49/. A mianowicie: SS, SA, AS -16 niewiadomych, AA-17 niewiadomych. Macierze podstawowe /50/ jak i do nich odwrotne /51/ obliczono przy użyciu maszyny Odra 1305. Macierze te drukowane z dokładnością do sześciu miejsc po przecinku zamieszczono poniżej:

Równania podstawowe

Macierze podstawowe generowane i odwrócone na maszynie Odra 1305 zestawiono poniżej

Stan SS

Macierz podstawowa /50/

	1	2	3	4
1.	1,000000	0,000000	-0,166667	-0,500000
2.	0,000000	1,000000	-0,500000	-0,166667
3.	-0,166667	-0,500000	1,033333	0,833333
4.	-0,500000	-0,166667	0,833333	1,033333
5.	-0,800000	0,000000	0,565079	1,288889
6.	0,000000	-0,800000	1,288889	0,565079
7.	0,142857	1,000000	-1,793651	-1,000000
8.	1,000000	0,142857	-1,000000	-1,793651
9.	1,777778	-0,000000	-1,166869	-2,880000
10.	-0,000000	1,777778	-2,880000	-1,166869
11.	-0,242424	-2,666667	4,531469	2,181818
12.	-2,666667	-0,242424	2,181818	4,531469
13.	-4,923077	-0,000000	3,057666	7,886970
14.	-0,000000	-4,923077	7,886970	3,057666
15.	0,533333	8,000000	-13,207843	-5,866667
16.	8,000000	0,533333	-5,866667	-13,207843

	5	6	7	8
1.	-0.800000	0.000000	0.142857	1.000000
2.	0.000000	-0.800000	1.000000	0.142857
3.	0.565079	1.288889	-1.793651	-1.000000
4.	1.288889	0.565079	-1.000000	-1.793651
5.	3.267725	-0.948148	0.176623	-4.304762
6.	-0.948148	3.267725	-4.304762	0.176623
7.	0.176623	-4.304762	8.124542	3.021645
8.	-4.304762	0.176623	3.021645	8.124542
9.	-7.681326	1.379125	2.044746	13.622147
10.	1.379125	-7.681326	13.622147	2.044746
11.	-0.598868	11.689644	-22.722062	-6.718615
12.	11.689644	-0.598868	-6.718615	-22.722062
13.	21.274627	-2.786395	-6.776346	-39.650568
14.	-2.786395	21.274327	-39.650568	-6.776346
15.	1.594680	-34.788371	67.524576	17.428827
16.	-34.788671	1.594680	17.428827	67.524576

	9	10	11	12
1.	1.777778	0.000000	-0.242424	-2.666667
2.	0.000000	1.777778	-2.666667	-0.242424
3.	-1.166869	-2.880000	4.531469	2.181818
4.	-2.880000	-1.166869	2.181818	4.531469
5.	-7.681326	1.379125	-0.598868	11.689644
6.	1.379125	-7.681326	11.689644	-0.598868
7.	2.044746	13.622147	-22.722062	-6.718615
8.	13.622147	2.044746	-6.718615	-22.722062
9.	28.247498	-4.633859	-0.349687	-45.880464
10.	-4.633859	28.247498	-45.880464	-0.349687
11.	-0.349687	-45.880464	84.347819	19.745635
12.	-45.880464	-0.349687	19.745635	84.347819
13.	-86.468413	11.172290	11.479032	155.149630
14.	11.172299	-86.468413	155.149630	11.479032
15.	-3.229083	144.923524	-275.917849	-55.316872
16.	144.923524	-3.229083	-55.316872	-275.917849

	13	14	15	16
1	-4.923077	-0.000000	0.533333	8.000000
2	-0.000000	-4.923077	8.000000	0.533333
3	3.057666	7.886970	-13.207843	-5.866667
4	7.886970	3.057666	-5.866667	-13.207843
5	21.274627	-2.786395	1.594680	-34.788671
6	-2.786395	21.274627	-34.788671	1.594679
7	-6.776346	-39.650568	67.524576	17.428827
8	-39.650568	-6.776346	17.428827	67.524576
9	-86.468413	11.172299	-3.229083	144.923524
10	11.172299	-86.468413	144.923524	-3.229083
11	11.479032	155.149630	-275.917850	-55.316872
12	155.149630	11.479032	-55.316872	-275.917850
13	309.801920	-35.104766	-9.399491	-543.141725
14	-35.104766	309.801920	-543.141725	-9.399491
15	-9.399488	-543.141726	1006.916497	-171.673625
16	-543.141725	-9.399489	171.673625	1006.916498

Macierz odwrócona (51)

	1	2	3	4
1	2.250538	-0.804641	-4.266007	3.925622
2	-0.804641	2.250538	3.925622	-4.266007
3	-4.266007	3.925622	21.780800	-14.060654
4	3.925622	-4.266007	-14.060654	21.780800
5	0.523635	0.705241	-4.987595	-6.515268
6	0.705241	0.523635	-6.515268	-4.987595
7	-0.425927	0.284245	4.694879	1.198490
8	0.284245	-0.425927	1.198489	4.694879
9	0.437289	-0.113474	-5.672551	-2.539890
10	-0.113474	0.437289	-2.539889	-5.672551
11	-0.302373	0.324912	2.049872	-1.532669
12	0.324912	-0.302373	-1.532669	2.049872
13	0.007313	-0.000922	-0.721069	-0.678058
14	-0.000922	0.007313	-0.678057	-0.721069
15	-0.034091	0.033337	0.119484	-0.264087
16	0.033337	-0.034091	-0.264087	0.119484

	5	6	7	8
1	0.523635	0.705241	-0.425927	0.284245
2	0.705241	0.523635	0.284245	-0.425927
3	-4.987596	-6.515268	4.694879	1.198489
4	-6.515268	-4.987596	1.198489	4.694879
5	19.826521	0.167564	-18.359063	7.166707
6	0.167563	19.826521	7.166707	-18.359063
7	-18.359063	7.166707	25.345155	-9.981567
8	7.166707	-18.359063	-9.981568	25.345155
9	10.914032	5.077835	-14.180084	-5.124646
10	5.077834	10.914032	-5.124644	-14.180084
11	-5.015011	3.870872	8.467062	-5.259026
12	3.870872	-5.015010	-5.259027	8.467061
13	1.429024	1.545666	-2.616300	-2.835067
14	1.545665	1.429024	-2.835066	-2.616300
15	-0.112751	0.437983	0.118652	-0.778088
16	0.437984	-0.112751	-0.778089	0.118652
	9	10	11	12
1	0.437289	-0.113474	-0.302373	0.324912
2	-0.113474	0.437289	0.324912	-0.302373
3	-5.672551	-2.539889	2.049872	-1.532669
4	-2.539889	-5.672551	-1.532669	2.049872
5	10.914031	5.077835	-5.015010	3.870871
6	5.077835	10.914031	3.870872	-5.015010
7	-14.180082	-5.124646	8.467060	-5.259025
8	-5.124646	-14.180083	-5.259026	8.467061
9	18.365817	6.999133	-8.171256	4.345277
10	6.999130	18.365817	4.345279	-8.171257
11	-8.171257	4.345277	7.908695	-6.756115
12	4.345278	-8.171256	-6.756115	7.908695
13	3.885255	3.195009	-0.979299	-0.521186
14	3.195008	3.885255	-0.521185	-0.979299
15	-0.281596	1.182836	0.680353	-0.855158
16	1.182836	-0.281595	-0.855158	0.680353

	13	14	15	16
1	0,007313	-0,000922	-0,034091	0,033337
2	-0,000922	0,007313	0,033337	-0,034091
3	-0,721069	-0,678058	0,119484	-0,264087
4	-0,678057	-0,721069	-0,264087	0,119484
5	1,429023	1,545666	-0,112751	0,437983
6	1,545666	1,429023	0,437983	-0,112751
7	-2,616300	-2,835067	0,118652	-0,778088
8	-2,835067	-2,616300	-0,778088	0,118652
9	3,885255	3,195009	-0,281595	1,182836
10	3,195008	3,885254	1,182836	-0,281596
11	-0,979299	-0,521186	0,680353	-0,855158
12	-0,521185	-0,979298	-0,855158	0,680353
13	1,466572	1,019646	0,027093	0,319596
14	1,019646	1,466571	0,319596	0,027093
15	0,027093	0,319596	0,183573	-0,123313
16	0,319596	0,027093	-0,123313	0,183573

Stan AS i SA

Macierz podstawowa (50a,b)

	1	2	3	4
1	2,333333	0,000000	0,700000	1,500000
2	0,000000	0,333333	0,500000	-0,300000
3	0,700000	0,500000	2,542857	-0,600000
4	1,500000	-0,300000	-0,600000	1,742857
5	-2,412698	0,444444	0,285714	-3,015873
6	-0,444444	-0,634921	-2,698413	0,603175
7	-1,222222	-1,000000	-4,775758	0,533333
8	-3,000000	0,777778	0,800000	-3,975758
9	5,410909	-1,280000	-0,588531	7,127273
10	1,280000	1,570909	6,720000	-0,995804
11	3,076923	2,666667	12,225641	-0,879121
12	8,000000	-2,256410	-1,582418	10,819048
13	-14,976871	3,918367	1,344538	-19,983673
14	-3,918367	-4,527891	-19,200000	2,128211
15	-8,941176	-8,000000	-35,731682	1,882353
16	-24,000000	7,058824	3,764706	-32,594427

	5	6	7	8
1	-2.412698	-0.444444	-1.222222	-3.000000
2	0.444444	-0.634921	-1.000000	0.777778
3	0.285714	-2.698413	-4.775758	0.800000
4	-3.015873	0.603175	0.533333	-3.975758
5	7.447170	0.902998	1.770526	9.710438
6	0.902998	4.230239	7.690236	-0.249676
7	1.770526	7.690236	17.961150	-2.275680
8	9.710438	-0.249676	-2.275680	15.360373
9	-18.082824	-0.699887	0.159803	-28.934266
10	-2.355405	-11.460753	-26.544336	2.549733
11	-5.193517	-20.851445	-51.251709	4.418971
12	-27.129019	1.084058	5.523714	-45.727995
13	50.554921	-0.159353	-3.103153	85.372782
14	6.715575	33.367602	81.270650	-7.205285
15	15.263780	61.772732	154.049201	-9.916127
16	81.638344	-4.601831	-14.323295	140.827698

	9	10	11	12
1	5.410909	1.280000	3.076923	8.000000
2	-1.280000	1.570909	2.666667	-2.256410
3	-0.588531	6.720000	12.225641	-1.582418
4	7.127273	-0.995804	-0.879121	10.819048
5	-18.082824	-2.355405	-5.193517	-27.129019
6	-0.699887	-11.460753	-20.851445	1.084058
7	0.159803	-26.544336	-51.251709	5.523714
8	-28.934266	2.549733	4.418971	-45.727995
9	61.534488	5.068189	8.140165	97.227085
10	5.068189	44.525388	86.270269	-2.816651
11	8.140165	86.270269	181.696710	-15.211725
12	97.227085	-2.816651	-15.211725	165.102101
13	-189.437562	-9.084995	-4.551117	-322.513355
14	-16.753423	-143.426996	-301.773676	16.188562
15	-33.034617	-272.044679	-595.361088	38.927157
16	-311.758492	6.677195	45.415017	-549.946071

	13	14	15	16
1	-14.976871	-3.918367	-8.941176	-24.000000
2	3.918367	-4.527891	-8.000000	7.058824
3	1.344538	-19.200000	-35.731682	3.764706
4	-19.983673	2.128211	1.882353	-32.594427
5	50.554921	6.715575	15.263780	81.638344
6	-0.159353	33.367602	61.772732	-4.601831
7	-3.103153	81.270650	154.049201	-14.323295
8	85.372782	-7.205285	-9.916127	140.827698
9	-189.437562	-16.753423	-33.034617	-311.756493
10	-9.084995	-143.426996	-272.044080	6.677196
11	-4.551117	-301.773676	-595.361089	45.415018
12	-322.513356	16.188562	38.927158	-549.946072
13	661.645047	40.962381	57.591970	1128.781874
14	40.962381	527.509735	1041.555676	-29.634234
15	57.591973	1041.555678	2135.228355	-133.660658
16	1128.781880	-29.634228	-133.660665	1992.656965

Macierz odwrócona (51a,b)

	1	2	3	4
1	5.552172	-0.145628	-4.031657	-9.447175
2	-0.145628	6.339065	0.303926	-2.093253
3	-4.031657	0.303926	9.728329	0.772844
4	-9.447174	-2.093253	0.772843	27.377452
5	0.348433	0.022502	-8.903899	7.415820
6	1.877349	4.190009	5.910802	-15.498214
7	-2.353238	-1.455479	7.561146	1.209511
8	-1.693443	-2.485662	0.195638	8.039349
9	0.884425	-0.282821	-5.032990	2.463622
10	-0.039965	0.732612	5.248888	-6.321993
11	-0.562979	-0.411938	1.115232	1.341258
12	-0.719475	-0.369905	0.527715	2.464188
13	0.014712	-0.022732	-0.792044	0.807115
14	-0.024596	-0.037296	0.992648	-0.913905
15	-0.057901	0.001056	-0.067587	0.275352
16	-0.046512	-0.012071	0.137702	0.044712

	5	6	7	8
1	0,348432	1,877350	-2,353238	-1,693444
2	0,022502	4,190009	-1,455480	-2,485662
3	-8,903899	5,910801	7,561146	0,195640
4	7,415820	-15,498215	1,209509	8,039350
5	19,774171	-1,913204	-14,050671	-9,743940
6	-1,913205	23,509594	-1,914484	-18,621752
7	-14,050672	-1,914487	17,842911	4,014760
8	-9,743937	-18,621752	4,014755	27,706873
9	8,271431	-3,968797	-12,609986	4,812572
10	-2,167505	14,202765	5,852154	-16,680785
11	-4,538967	-3,748825	6,240636	4,006526
12	-4,755211	-6,335700	4,406905	8,907269
13	0,805077	-1,680703	-2,223457	2,878310
14	-0,901038	2,049649	2,408763	-3,187110
15	-0,210611	-0,628135	0,141658	0,814352
16	-0,475831	-0,213161	0,784446	0,099017
	9	10	11	12
1	0,884424	-0,039964	-0,562979	-0,719475
2	-0,282821	0,732612	-0,411938	-0,369906
3	-5,032990	5,248886	1,115233	0,527717
4	2,463623	-6,321995	1,341258	2,464188
5	8,271431	-2,167500	-4,538968	-4,755214
6	-3,968799	14,202766	-3,748824	-6,335700
7	-12,609989	5,852146	6,240639	4,406911
8	4,812576	-16,680786	4,006524	8,907267
9	13,679314	-7,174636	-5,132806	-3,370884
10	-7,174644	17,489791	-1,561561	-6,671619
11	-5,132805	-1,561566	3,827276	3,834273
12	-3,370879	-6,671624	3,834271	6,744424
13	2,673121	-3,114482	-0,683715	0,852593
14	-2,172345	4,171344	0,209277	-1,451079
15	-0,238725	-0,946152	0,392103	0,698420
16	-0,929035	0,002199	0,543404	0,425565

	13	14	15	16
1	0.014711	-0.024596	-0.057901	-0.046512
2	-0.022732	-0.037296	0.001056	-0.012071
3	-0.792046	0.992647	-0.067587	0.137702
4	0.807116	-0.913905	0.275352	0.044712
5	0.805077	-0.901037	-0.210612	-0.475831
6	-1.680703	2.049649	-0.628135	-0.213161
7	-2.223456	2.408760	0.141659	0.784447
8	2.878311	-3.187110	0.814352	0.099016
9	2.673120	-2.172341	-0.238726	-0.929035
10	-3.114484	4.171344	-0.946151	0.002200
11	-0.683714	0.209275	0.392104	0.543404
12	0.852595	-1.451081	0.698420	0.425565
13	1.244065	-0.986985	0.071617	-0.276372
14	-0.986986	1.345254	-0.266855	0.069329
15	0.071617	-0.266856	0.116917	0.067518
16	-0.276371	0.069328	0.067518	0.139923

Stan AA

Macierz podstawowa (50c)

	1	2	3	4
1	2.000000	1.333333	1.333333	-0.800000
2	1.333333	2.533333	0.666667	-0.190476
3	1.333333	0.666667	2.533333	-2.400000
4	-0.800000	-0.190476	-2.400000	3.606349
5	-0.800000	-2.400000	-0.190476	0.609524
6	-1.523810	-3.936508	-1.142857	1.103608
7	-1.523810	-1.142857	-3.936508	5.841270
8	1.777778	1.002020	5.333333	-8.284693
9	1.777778	5.333333	1.002020	-0.775758
10	3.490909	9.622378	2.909091	-2.041692
11	3.490909	2.909091	9.622378	-14.411189
12	-4.923077	-3.422711	-14.769231	22.560655
13	-4.923077	-14.769231	-3.422711	1.500366
14	-9.752381	-27.607843	-8.533333	4.556647
15	-9.752381	-8.533333	-27.607843	40.873950
16	15.058824	11.536292	45.176471	-67.783577
17	15.058824	45.176471	11.536292	-3.522532

	5	6	7	8
1	-0.800000	-1.523810	-1.523810	1.777778
2	-2.400000	-3.936508	-1.142857	1.002020
3	-0.190476	-1.142857	-3.936508	5.333333
4	0.609524	1.103608	5.841270	-8.284693
5	3.606349	5.841270	1.103608	-0.775758
6	5.841270	12.023532	0.877345	-0.415348
7	1.103608	0.877345	12.023532	-17.865631
8	-0.775758	-0.415348	-17.865631	30.653540
9	-8.284693	-17.865631	-0.415348	2.227817
10	-14.411189	-32.040744	-2.600067	4.487779
11	-2.041692	-2.600067	-32.040744	55.538626
12	1.500366	1.570623	51.244128	-92.549169
13	22.560655	51.244128	1.570623	-5.091542
14	40.873950	93.415866	8.462463	-13.590290
15	4.556647	8.462463	93.415866	-168.447472
16	-3.522532	-7.167388	-156.652022	287.231644
17	-67.783577	-156.652022	-7.167388	12.764653

	9	10	11	12
1	1.777778	3.490909	3.490909	-4.923077
2	5.333333	9.622378	2.909091	-3.422711
3	1.002020	2.909091	9.622378	-14.769231
4	-0.775758	-2.041692	-14.411189	22.560655
5	-8.284693	-14.411189	-2.041692	1.500366
6	-17.865631	-32.040744	-2.600067	1.570623
7	-0.415348	-2.600067	-32.040744	51.244128
8	2.227817	4.487779	55.538626	-92.549169
9	30.653540	55.538626	4.487779	-5.091542
10	55.538626	109.287919	5.194464	-5.326944
11	4.487779	5.194464	109.287919	-184.886470
12	-5.091542	-5.326944	-184.886470	329.817795
13	-92.549169	-184.886470	-5.326944	15.088890
14	-168.447472	-347.314031	-16.079309	29.635763
15	-13.590290	-16.079310	-347.314031	623.699279
16	12.764653	11.862844	598.376851	-1104.072859
17	287.231644	598.376851	11.862844	-42.401700

	13	14	15	16	17
1	-4.923077	-9.752381	-9.752381	15.058824	15.05882
2	-14.769231	-27.607843	-8.533333	11.536292	45.17647
3	-3.422711	-8.533333	-27.607843	45.176471	11.53629
4	1.500366	4.556647	40.873950	-67.783577	-3.52253
5	22.560655	40.873950	4.556647	-3.522532	-67.78358
6	51.244128	93.415866	8.462463	-7.167388	-156.65202
7	1.570623	8.462463	93.415866	-156.652022	-7.16739
8	-5.091542	-13.590290	-168.447472	287.231645	12.76465
9	-92.549169	-168.447472	-13.590290	12.764653	287.23164
10	-184.886470	-347.314032	-16.079309	11.862845	598.37685
11	-5.326944	-16.079309	-347.314032	598.376851	11.86284
12	15.088890	29.635763	623.699280	-1104.072854	-42.40169
13	329.817795	623.699280	29.635763	-42.401696	-1104.07285
14	623.699280	1221.234103	42.643988	-56.067428	-2177.63270
15	29.635762	42.643989	1221.234105	-2177.632700	-56.06743
16	-42.401697	-56.067420	-2177.632700	3983.760653	133.18811
17	-1104.072856	-2177.632692	-56.067429	133.188106	3983.76063

Macierz odwrotna (51c)

	1	2	3	4
1	1.467916	-1.041741	-1.041741	0.674055
2	-1.041741	7.601680	-4.936224	-8.170874
3	-1.041741	-4.936224	7.601680	5.422963
4	0.674053	-8.170874	5.422962	16.148481
5	0.674053	5.422963	-8.170874	0.223909
6	-0.845905	3.897437	-0.458269	-11.543676
7	-0.845905	-0.458271	3.897437	-5.459354
8	0.038522	-3.280492	2.795859	9.659643
9	0.038522	2.795861	-3.280494	1.265103
10	-0.132388	1.208414	-0.337305	-7.113707
11	-0.132388	-0.337307	1.208416	-4.944365
12	-0.014879	-0.954174	1.000226	1.854392
13	-0.014879	1.000226	-0.954174	-0.935920
14	0.002072	0.013709	0.028796	-1.038864
15	0.002072	0.028796	0.013710	-1.073322
16	0.000793	-0.073086	0.075324	-0.027142
17	0.000793	0.075324	-0.073086	-0.231906

	5	6	7	8
1	0.674053	-0.845905	-0.845905	0.038522
2	5.422962	3.897438	-0.458269	-3.280494
3	-8.170874	-0.458271	3.897437	2.795861
4	0.223911	-11.543674	-5.459360	9.659643
5	16.148481	-5.459354	-11.543677	1.265105
6	-5.459360	21.123244	-2.482626	-17.713594
7	-11.543673	-2.482637	21.123244	5.589401
8	1.265110	-17.713580	5.589389	19.952980
9	9.659641	5.589403	-17.713584	-4.010567
10	-4.944374	11.068777	2.606121	-12.434743
11	-7.113704	2.606103	11.068781	-3.702930
12	-0.935915	-5.417760	4.346235	6.445378
13	1.854388	4.346242	-5.417755	-3.843784
14	-1.073325	1.234935	1.262933	-2.014607
15	-1.038864	1.262928	1.234937	-2.104819
16	-0.231905	-0.193566	0.512969	0.086836
17	-0.027143	0.512970	-0.193564	-0.653899
	9	10	11	12
1	0.038522	-0.132388	-0.132388	-0.014879
2	2.795859	1.208417	-0.337306	-0.954175
3	-3.280493	-0.337307	1.208416	1.000227
4	1.265111	-7.113708	-4.944373	1.854390
5	9.659645	-4.944367	-7.113710	-0.935920
6	5.589388	11.068787	2.606116	-5.417759
7	-17.713582	2.606103	11.068784	4.346245
8	-4.010550	-12.434749	-3.702946	6.445374
9	19.952982	-3.702929	-12.434749	-3.843787
10	-3.702952	12.624644	4.320545	-5.101123
11	-12.434743	4.320523	12.624643	2.652391
12	-3.843773	-5.101132	2.652381	4.205349
13	6.445370	2.652392	-5.101124	-3.522238
14	-2.104825	2.389991	1.860357	-0.555345
15	-2.014608	1.860352	2.389992	-0.260884
16	-0.653897	-0.140464	0.753097	0.340260
17	0.086833	0.753098	-0.140461	-0.446746

	13	14	15	16	17
1	-0.014879	0.002071	0.002072	0.000793	0.00079
2	1.000227	0.013710	0.028796	-0.073086	0.07532
3	-0.954175	0.028796	0.013710	0.075324	-0.07309
4	-0.935916	-1.038865	-1.073324	-0.027143	-0.23191
5	1.854393	-1.073323	-1.038865	-0.231907	-0.02714
6	4.346238	1.234939	1.262931	-0.193565	0.51297
7	-5.417762	1.262928	1.234937	0.512971	-0.19357
8	-3.843777	-2.014611	-2.104822	0.086835	-0.65390
9	6.445380	-2.104819	-2.014609	-0.653900	0.08684
10	2.652379	2.389994	1.860356	-0.140462	0.75310
11	-5.101130	1.860351	2.389992	0.753099	-0.14046
12	-3.522235	-0.555349	-0.260886	0.340259	-0.44675
13	4.205348	-0.260883	-0.555346	-0.446747	0.34026
14	-0.260888	0.762005	0.517223	0.029425	0.16971
15	-0.555347	0.517222	0.762004	0.169708	0.02942
16	-0.446747	0.029424	0.169708	0.086258	0.04893
17	0.340259	0.169708	0.029425	-0.048929	0.08626

Prawe strony równań podstawowych

Prawe strony równań (42) są obliczane według poniższych wzorów. We wzorach napisanych poniżej w oznaczeniach polimomentów brzegowych BN_k^n , BNN_k^n , BT_k^n , BTT_k^n w celu skrócenia zapisu opuszczono literę B.

Stan . SS

$$\begin{aligned}
 (52) \quad P_1 &= N^0 \\
 P_2 &= NN^0 \\
 P_3 &= -\frac{1}{2}N^0 + N^2 - \frac{1}{2}NN^0 + T^1 + TT^1 \\
 P_4 &= -\frac{1}{2}N^0 - \frac{1}{2}NN^0 + NN^2 + T^1 + TT^1, \\
 P_5 &= \frac{1}{3}N^0 - 4N^2 + N^4 - \frac{2}{3}NN^0 + 2NN^2 - \frac{4}{3}T^1 + \frac{8}{3}T^3 + \frac{8}{3}TT^1 - \frac{4}{3}TT^3
 \end{aligned}$$

$$P_6 = -\frac{2}{3}N^0 + 2N^2 + \frac{1}{3}NN^0 - 4NN^2 + NN^4 + \frac{8}{3}T^1 - \frac{4}{3}T^3 - \frac{4}{3}TT^1 + \frac{8}{3}TT^3,$$

$$P_7 = \frac{1}{4}/-N^0 + 30N^2 - 45N^4 + 4N^6 / + \frac{1}{4}/-3NN^0 + 30NN^2 - 15NN^4 / + \\ + \frac{1}{2}/3T^1 - 20T^3 + 9T^5 / + \frac{1}{2}/9TT^1 - 20TT^3 + 3TT^5 / ,$$

$$P_8 = \frac{1}{4}/-3N^0 + 30N^2 - 15N^4 / + \frac{1}{4}/-NN^0 + 30NN^2 - 45NN^4 + 4NN^6 / + \\ + \frac{1}{2}/9T^1 - 20T^3 + 3T^5 / + \frac{1}{2}/3TT^1 - 20TT^3 + 9TT^5 / ,$$

$$P_9 = \frac{1}{5}/N^0 - 56N^2 + 210N^4 - 112N^6 + 5N^8 / + \frac{1}{5}/-4NN^0 + 84NN^2 - 140NN^4 + \\ + 28NN^6 / + \frac{1}{5}/-8T^1 + 112T^3 - 168T^5 + 32T^7 / + \frac{1}{5}/32TT^1 - 168TT^3 + \\ + 112TT^5 - 8T^7 / ,$$

$$P_{10} = \frac{1}{5}/-4N^0 + 84N^2 - 140N^4 + 28N^6 / + \frac{1}{5}/NN^0 - 56NN^2 + 210NN^4 - \\ - 112NN^6 + 5NN^8 / + \frac{1}{5}/32T^1 - 168T^3 + 112T^5 - 8T^7 / + \frac{1}{5}/-8TT^1 + \\ + 112TT^3 - 168TT^5 + 32TT^7 / ,$$

$$P_{11} = \frac{1}{6}/-N^0 + 90N^2 - 630N^4 + 840N^6 - 225N^8 + 6N^{10} / + \frac{1}{6}/-5NN^0 + \\ + 180NN^2 - 630NN^4 + 420NN^6 - 45NN^8 / + \frac{1}{3}/5T^1 - 120T^3 + 378T^5 - \\ - 240T^7 + 25T^9 / + \frac{1}{3}/25TT^1 - 240TT^3 + 378TT^5 - 120TT^7 + 5TT^9 / ,$$

$$P_{12} = \frac{1}{6}/-5N^0 + 180N^2 - 630N^4 + 420N^6 - 45N^8 / + \frac{1}{6}/-NN^2 + 90NN^2 - \\ - 630NN^4 + 840NN^6 - 225NN^8 + 6NN^{10} / + \frac{1}{3}/25T^1 - 240T^3 + 378T^5 - \\ - 120T^7 + 5T^9 / + \frac{1}{3}/5TT^1 - 120TT^3 + 378TT^5 - 240TT^7 + 25TT^9 / ,$$

$$P_{13} = \frac{1}{7}/N^0 - 132N^2 + 1495N^4 - 3696N^6 + 2475N^8 - 396N^{10} + 7N^{12} / +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{7} / -6NN^0 + 330NN^2 - 1980NN^4 + 2772NN^6 - 990N^8 + 66NN^{10} / + \\
 & + \frac{1}{7} / -12T^1 + 440T^3 - 2376T^5 + 3168T^7 - 1100T^9 + 72T^{11} / + \\
 & + \frac{1}{7} / 72TT^1 - 1100TT^3 + 3168TT^5 - 2376TT^7 + 440TT^9 - 12TT^{11} / ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{14} = & \frac{1}{7} / -6N^0 + 330N^2 - 1980N^4 + 2772N^6 - 990N^8 + 66N^{10} / + \\
 & + \frac{1}{7} / NN^0 - 132NN^2 + 1485NN^4 - 3696NN^6 + 2475NN^8 - 396NN^{10} + \\
 & + 7NN^{12} / + \frac{1}{7} / 72T^1 - 1100T^3 + 3168T^5 - 2376T^7 + 440T^9 - \\
 & - 12T^{11} / + \frac{1}{7} / -12TT^1 + 440TT^3 - 2376TT^5 + 3168TT^7 - 1100TT^9 + \\
 & + 72TT^{11} / ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{15} = & \frac{1}{8} / -N^0 + 182N^2 - 3003N^4 + 12012N^6 - 15015N^8 + 6006N^{10} - \\
 & - 637N^{12} + 8N^{14} / + \frac{1}{8} / -7NN^0 + 546NN^2 - 5005NN^4 + 12012NN^6 - \\
 & - 9009NN^8 + 2002NN^{10} - 91NN^{12} / + \frac{1}{4} / 7T^1 - 364T^3 + 3003T^5 - \\
 & - 6864T^7 + 5005T^9 - 1092T^{11} + 49T^{13} / + \frac{1}{4} / 49TT^1 - 1092TT^3 + \\
 & + 5005TT^5 - 6864TT^7 + 3003TT^9 - 364TT^{11} + 7TT^{13} / .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{16} = & \frac{1}{8} / -7N^0 + 546N^2 - 5005N^4 + 12012N^6 - 9009N^8 + 2002N^{10} - 91N^{12} / + \\
 & + \frac{1}{8} / -NN^0 + 182NN^2 - 3003NN^4 + 12012NN^6 - 15015NN^8 + 6006NN^{10} - \\
 & - 637N^{12} + 8NN^{14} / + \frac{1}{4} / 49T^1 - 1092T^3 + 5005T^5 - 6864T^7 + \\
 & + 3003T^9 - 364T^{11} + 7T^{13} / + \frac{1}{4} / 7TT^1 - 364TT^3 + 3003TT^5 - \\
 & - 6864TT^7 + 5005TT^9 - 1092TT^{11} + 49TT^{13} / .
 \end{aligned}$$

Stan S-A

$$\begin{aligned}
 (52a) \quad P_1 &= -NN^0 + T^0 + TT^1, \\
 P_2 &= N^1, \\
 P_3 &= \frac{3}{2}N^1 + \frac{1}{2}/NN^0 - 6NN^2 + \frac{1}{2}/2T^0 - 3T^2 + \frac{1}{2}/-3TT^1 + 2TT^3/, \\
 P_4 &= \frac{1}{2}/-3N^1 + 2N^3 - \frac{1}{2}NN^0 + \frac{3}{2}T^2 + \frac{3}{2}T^1, \\
 P_5 &= \frac{10}{3}/N^1 - N^3 + \frac{1}{3}/-NN^0 + 20NN^2 - 15NN^4 + \frac{1}{3}/3T^0 - 20TT^3 + 3TT^5 + \\
 &\quad + \frac{1}{3}/5TT^1 - 20TT^3 + 3TT^5/, \\
 P_6 &= \frac{1}{3}/5N^1 - 20N^3 + 3N^5 + \frac{1}{3}/-2NN^0 + 10NN^2 + \frac{10}{3}/-T^2 + T^4 + \\
 &\quad + \frac{10}{3}/TT^1 - TT^3/, \\
 P_7 &= \frac{1}{4}/21N^1 - 70N^3 + 21N^5 + \frac{1}{4}/NN^0 - 42NN^2 + 105NN^4 - 28NN^6 + \\
 &\quad + \frac{1}{4}/4T^0 - 63T^2 + 70T^4 - 7T^6 + \frac{1}{4}/-7TT^1 + 70TT^3 - 63TT^5 + 4TT^7/, \\
 P_8 &= \frac{1}{4}/-7N^1 + 70N^3 - 63N^5 + 4N^7 + \frac{1}{4}/-3NN^0 + 42NN^2 - 35NN^4 + \\
 &\quad + \frac{1}{4}/21T^2 - 70T^4 + 21T^6 + \frac{1}{4}/21TT^1 - 70TT^3 + 21TT^5/, \\
 P_9 &= \frac{1}{5}/36N^1 - 252N^3 + 252N^5 - 36N^7 + \frac{1}{5}/-NN^0 + 72NN^2 - 378NN^4 + \\
 &\quad + 336NN^6 - 45NN^8 + \frac{1}{5}/5T^0 - 144T^2 + 378T^4 - 168T^6 + 9T^8 + \\
 &\quad + \frac{1}{5}/9TT^1 - 168TT^3 + 378TT^5 - 144TT^7 + 5TT^9/, \\
 P_{10} &= \frac{1}{5}/9N^1 - 168N^3 + 378N^5 - 144N^7 + 5N^9 + \frac{1}{5}/-4NN^0 + 108NN^2 - \\
 &\quad - 252NN^4 + 84NN^6 + \frac{1}{5}/-36T^2 + 252T^4 - 252T^6 + 36T^8 + \\
 &\quad + \frac{1}{5}/36TT^1 - 252TT^3 + 252TT^5 - 36TT^7/,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{11} = & \frac{1}{6}/55N^1 - 660N^3 + 1386N^5 - 660N^7 + 55N^9 / + \\
 & + \frac{1}{6}/NN^0 - 110NN^2 + 990NN^4 - 1848NN^6 + 825NN^8 - 66NN^{10} / + \\
 & + \frac{1}{6}/6T^0 - 275T^2 + 1320T^4 - 1386T^6 + 330T^8 - 11T^{10} + \\
 & + \frac{1}{6}/-11TT^1 + 330TT^3 - 1386TT^5 + 1320TT^7 - 275TT^9 + 6TT^{11} / ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{12} = & \frac{1}{6}/-11N^1 + 330N^3 - 1386N^5 + 1320N^7 - 275N^9 + 6N^{11} / + \\
 & + \frac{1}{6}/-5NN^0 + 220NN^2 - 990NN^4 + 924NN^6 - 165NN^8 / + \\
 & + \frac{1}{6}/55T^2 - 660T^4 + 1386T^6 - 660T^8 + 55T^{10} / + \\
 & + \frac{1}{6}/55TT^1 - 660TT^3 + 1386TT^5 - 660TT^7 + 55TT^9 / ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{13} = & \frac{1}{7}/78N^1 - 1430N^3 + 5148N^5 - 5148N^7 + 1430N^9 - 78N^{11} / + \\
 & + \frac{1}{7}/-NN^0 + 156NN^2 - 2145NN^4 + 6864NN^6 - 6435NN^8 + 1716NN^{10} - \\
 & - 91NN^{12} / + \frac{1}{7}/7T^0 - 468T^2 + 3575T^4 - 6864T^6 + 3861T^8 - \\
 & - 572T^{10} + 13T^{12} / + \frac{1}{7}/13TT^1 - 572TT^3 + 3861TT^5 - 6864TT^7 + \\
 & + 3575TT^9 - 468TT^{11} + 7TT^{13} / ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{14} = & \frac{1}{7}/13N^1 - 572N^3 + 3861N^5 - 6864N^7 + 3575N^9 - 468N^{11} + 7N^{13} / + \\
 & + \frac{1}{7}/-6NN^0 + 390NN^2 - 2860NN^4 + 5148NN^6 - 2574NN^8 + 286NN^{10} / + \\
 & + \frac{1}{7}/-78T^2 + 1430T^4 - 5148T^6 + 5148T^8 - 1430T^{10} + 78T^{12} / + \\
 & + \frac{1}{7}/78TT^1 - 1430TT^3 + 5148TT^5 - 5148TT^7 + 1430TT^9 - 78TT^{11} / ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{15} = & \frac{1}{8}/105N^1 - 2730N^3 + 15015N^5 - 25740N^7 + 15015N^9 - 2730N^{11} + \\
 & + 105N^{13} / + \frac{1}{8}/NN^0 - 210NN^2 + 4095NN^4 - 20020NN^6 + 32175NN^8 -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_5 &= 2N^1 + 2NN^1 - 4NN^3 + T^0 - 3T^2 + -3TT^2 + TT^4, \\
 P_6 &= \frac{1}{3} / -6N^1 + 40N^3 - 18N^5 / + \frac{1}{3} / 12NN^1 - 20NN^3 / + 5T^2 - 10T^4 + T^6 + \\
 &\quad + TT^0 - 10TT^2 + 5TT^4, \\
 P_7 &= \frac{1}{3} / 12N^1 - 20N^3 / + \frac{1}{3} / -6NN^1 + 40NN^3 - 18NN^5 / + T^0 - 10T^2 + 5T^4 + \\
 &\quad + 5TT^2 - 10TT^4 + TT^6, \\
 P_8 &= 2N^1 - 28N^3 + 42N^5 - 8N^7 + 6NN^1 - 28NN^3 + 14NN^5 + -7T^2 + 35T^4 - \\
 &\quad - 21T^6 + T^8 + TT^0 - 21TT^2 + 35TT^4 - 7TT^6, \\
 P_9 &= 6N^1 - 28N^3 + 14N^5 + 2NN^1 - 28NN^3 + 42NN^5 - 8NN^7 + T^0 - 21T^2 + \\
 &\quad + 35T^4 - 7T^6 + -7TT^2 + 35TT^4 - 21TT^6 + TT^8, \\
 P_{10} &= \frac{1}{5} / -10N^1 + 240N^3 - 756N^5 + 480N^7 - 50N^9 / + \frac{1}{5} / 40NN^1 - \\
 &\quad - 360NN^3 + 504NN^5 - 120NN^7 / + 9T^2 - 84T^4 + 126T^6 - 36T^8 + T^{10} + \\
 &\quad + TT^0 - 36TT^2 + 126TT^4 - 84TT^6 + 9TT^8, \\
 P_{11} &= \frac{1}{5} / 40N^1 - 360N^3 + 504N^5 - 120N^7 / + \frac{1}{5} / -10NN^1 + 240NN^3 - \\
 &\quad - 756NN^5 + 480NN^7 - 50NN^9 / T^0 - 36T^2 + 126T^4 - 84T^6 + 9T^8 / + \\
 &\quad + 9TT^2 - 84TT^4 + 126TT^6 - 36TT^8 + TT^{10} /, \\
 P_{12} &= \frac{1}{3} / 6N^1 - 220N^3 + 1188N^5 - 1584N^7 + 550N^9 - 36N^{11} / + \frac{1}{3} / 30NN^1 - \\
 &\quad - 440NN^3 + 1188NN^5 - 792NN^7 + 110NN^9 / + -11T^2 + 165T^4 - 462T^6 + \\
 &\quad + 330T^8 - 55T^{10} + T^{12} + TT^0 - 55TT^2 + 330TT^4 - 462TT^6 + 165TT^8 - \\
 &\quad - 11TT^{10}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{13} = & \frac{1}{3}/30N^1 - 440N^3 + 1188N^5 - 792NN^7 + 110NN^9 / + \frac{1}{3}/6NN^1 - \\
 & - 220NN^3 + 1188NN^5 - 1584NN^7 + 550NN^9 - 36NN^{11} / + /T^0 - 55T^2 + \\
 & + 330T^4 - 462T^6 + 165T^8 - 11T^{10} / + /-11TT^2 + 165TT^4 - 462TT^6 + \\
 & + 330TT^8 - 55TT^{10} + TT^{12} / ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{14} = & \frac{1}{7}/-14N^1 + 728N^3 - 6006N^5 + 13728N^7 - 10010N^9 + 2184N^{11} - \\
 & - 98N^{13} / + \frac{1}{7}/84NN^1 - 1820NN^3 + 8008NN^5 - 10296NN^7 + \\
 & + 4004NN^9 - 364NN^{11} / + /13T^2 - 286T^4 + 1287T^6 - 1716TT^6 + \\
 & + 715T^{10} - 78T^{12} + T^{14} / + /TT^0 - 78TT^2 + 715TT^4 - 1716TT^6 + \\
 & + 1287TT^8 - 286TT^{10} + 13TT^{12} / ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{15} = & \frac{1}{7}/84N^1 - 1820N^3 + 8008N^5 - 10296N^7 + 4004N^9 - 364N^{11} / + \\
 & + \frac{1}{7}/-14NN^1 + 728NN^3 - 6006NN^5 + 13728NN^7 - 10010NN^9 + \\
 & + 2184NN^{11} - 98NN^{13} / + /T^0 - 78T^2 + 715T^4 - 1716T^6 + 1287T^8 - \\
 & - 286T^{10} + 13T^{12} / + /13TT^2 - 286TT^4 + 1287TT^6 - 1716TT^8 + \\
 & + 715TT^{10} - 78TT^{12} + TT^{14} / ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{16} = & 2N^1 - 140N^3 + 638N^5 - 5720N^7 + 715N^9 - 3276N^{11} + 490N^{13} - \\
 & - 16N^{15} + 14NN^1 - 420NN^3 + 2730NN^5 - 5720NN^7 + 4290NN^9 - \\
 & - 10920NN^{11} + 70NN^{13} / + /-15T^2 + 455T^4 - 3003T^6 + 6435T^8 - \\
 & - 5005T^{10} + 1365T^{12} - 105T^{14} + T^{16} / + /TT^0 - 105TT^2 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 1365TT^4 - 5005TT^6 + 6435TT^8 - 3003TT^{10} + 455TT^{12} - \\
 & - 15TT^{14} / , \\
 P_{17} = & 14N^1 - 420N^3 + 2730N^5 - 5720N^7 + 4290N^9 - 1092N^{11} + \\
 & + 70N^{13} + 2NN^1 - 140NN^3 + 1638NN^5 - 5720NN^7 + 7150NN^9 - \\
 & - 3276NN^{11} + 490NN^{13} - 16NN^{15} + T^0 - 105T^2 + 1365T^4 - \\
 & - 5005T^6 + 6435T^8 - 3003T^{10} + 455T^{12} - 15T^{14} + \\
 & - 15TT^2 + 455T^4 - 3003TT^6 + 6435TT^8 - 5005TT^{10} + \\
 & + 1365TT^{12} - 105TT^{14} + TT^{16} .
 \end{aligned}$$

10. Przykłady analizy tarczy kwadratowej

Wyniki uzyskiwane prezentowaną metodą są ścisłe, jeżeli naprężenia brzegowe (31) są takie, że rozwiązanie ścisłe zagadnienia brzegowego w obszarze wyraża się poprzez wielomiany. Również jeżeli rozwiązania ścisłe są niewielomianowe, a naprężenia brzegowe (31) są ciągłe można się spodziewać, że uzyskane niniejszą metodą rozwiązania są bardzo dobrym przybliżeniem rozwiązań ścisłych. W przypadku naprężeń brzegowych nieciągłych uzyskane prezentowaną metodą wyniki stanowią pewne przybliżenie rozwiązań ścisłych. W dalszym ciągu pracy wykonano 3 przykłady w których do analizy przyjęto naprężenia brzegowe nieciągłe.

Obciążenia. Założono że: $\bar{t} = \bar{t} = z = z = t = t = 0$, natomiast funkcje p i ph są przedziałami ciągłe i określone następującymi wyrażeniami:

$$-h \leq x < -t \quad - \frac{\begin{matrix} + \\ p \\ ph^2 \end{matrix}}{h-t/h+t/} \quad - \frac{\begin{matrix} - \\ p \\ ph \end{matrix}}{h-t}$$

$$\begin{aligned}
 (53) \quad & -t < x < 0 && 0 && 0 \\
 & 0 < x < t && -2p && 0 \\
 & t < x \leq h && -2p + \frac{ph^2}{h-t//h+t/} && -\frac{ph}{h-t}
 \end{aligned}$$

Wyrażenia (53) określają rodzinę "t" naprężeń p , p . Z rodziny (53) do obliczeń przyjęto naprężenia brzegowe p , p określone przez $t = 0.5$, $t = 0.9$, $t = 0.99$. Schemat obciążeń odpowiadających tym parametrom przedstawiono na rysunkach 2, 3 i 4. Naprężenia brzegowe p/x wzdłuż linii BC^1 odpowiadające wyróżnionym stanom symetrii tarczy obliczone ze wzorów (27-30) podano w tablicy.

Stan symetrii	$0 < x < t$	$t < x \leq h$
SS	$- 0.5p$	$-0.5p - \frac{0.5ph}{h-t}$
SA	$- 0.5p$	$-0.5p + \frac{0.5ph}{h-t}$
AS	$- 0.5p$	$-0.5p + \frac{0.5ph^2}{h-t//h+t/}$
AA	$- 0.5p$	$-0.5p + \frac{0.5ph^2}{h-t//h+t/}$

Przyjmując kolejno $t=0.5h$, $t=0.9h$ i $t=0.99h$ otrzymano trzy zestawy danych naprężeń brzegowych przyjętych w wykonanych obliczeniach /rys.2,3,4/.

Przykład 1 $t = 0.5h$

Stan symetrii	$0 < x < 0.5h$	$0.5h < x \leq h$
SS	$- 0.5p$	$- 1.5p$
SA	$- 0.5p$	$+ 0.5p$
AS	$- 0.5p$	$1/6p$
AA	$- 0.5p$	$1/6p$

Przykład 2 $t = 0.9h$

Stan symetrii	$0 < x < 0.9h$	$0.9h < x \leq h$
SS	$- 0.5p$	$- 5.5p$
SA	$- 0.5p$	$4.5p$
AS	$- 0.5p$	$2 \frac{5}{38}p$
AA	$- 0.5p$	$2 \frac{5}{38}p$

Przykład 3 $t = 0.99h$

Stan symetrii	$0 < x < 0.99h$	$0.99h < x \leq h$
SS	$- 0.5p$	$- 50.5p$
SA	$- 0.5p$	$49.5p$
AS	$- 0.5p$	$24 \frac{249}{398}p$
AA	$- 0.5p$	$24 \frac{249}{398}p$

Polimomenty brzegowe

Przyjmując $h-t = r$ otrzymano następujące wzory na polimomenty w poszczególnych stanach tarczy kwadratowej $/h=1/$.

Stan SS

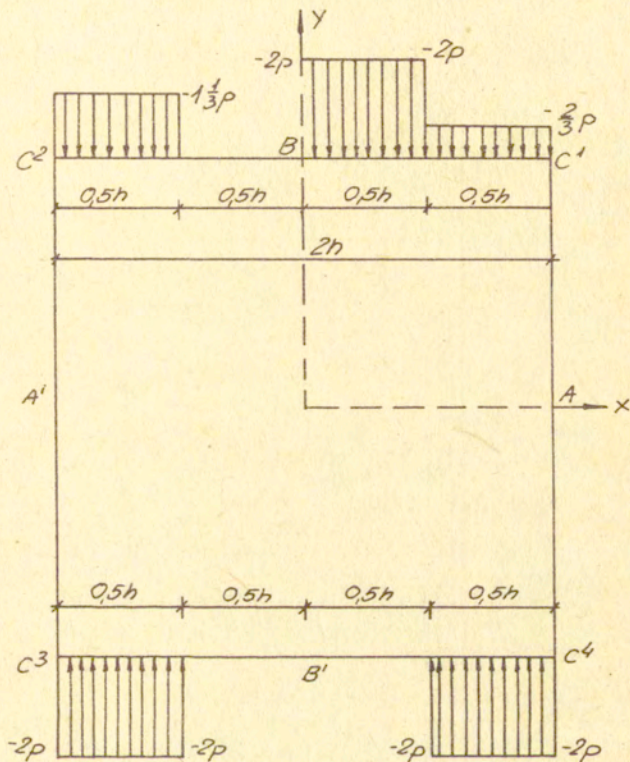
$$BNN_r^n = - \int_0^h \frac{p}{2} x^n dx - \int_{h-r}^h \frac{ph}{r} x^n dx =$$

$$= - \frac{p}{2/n+1} \left\{ h^{n+1} + \frac{h}{r} \left[/h-r/^{n+1} h^{n+1} \right] \right\}$$

$h = 1$

Przykład 1

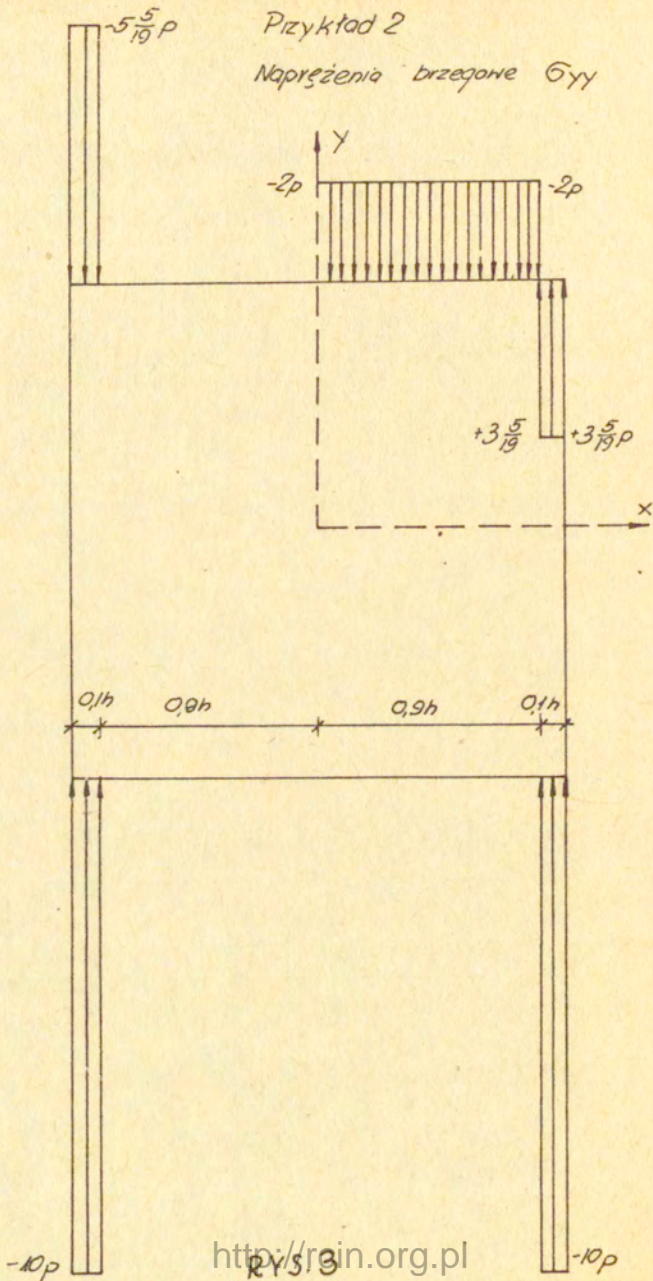
Napężenia bieżące tarczy (σ_{yy})



RYS. 2

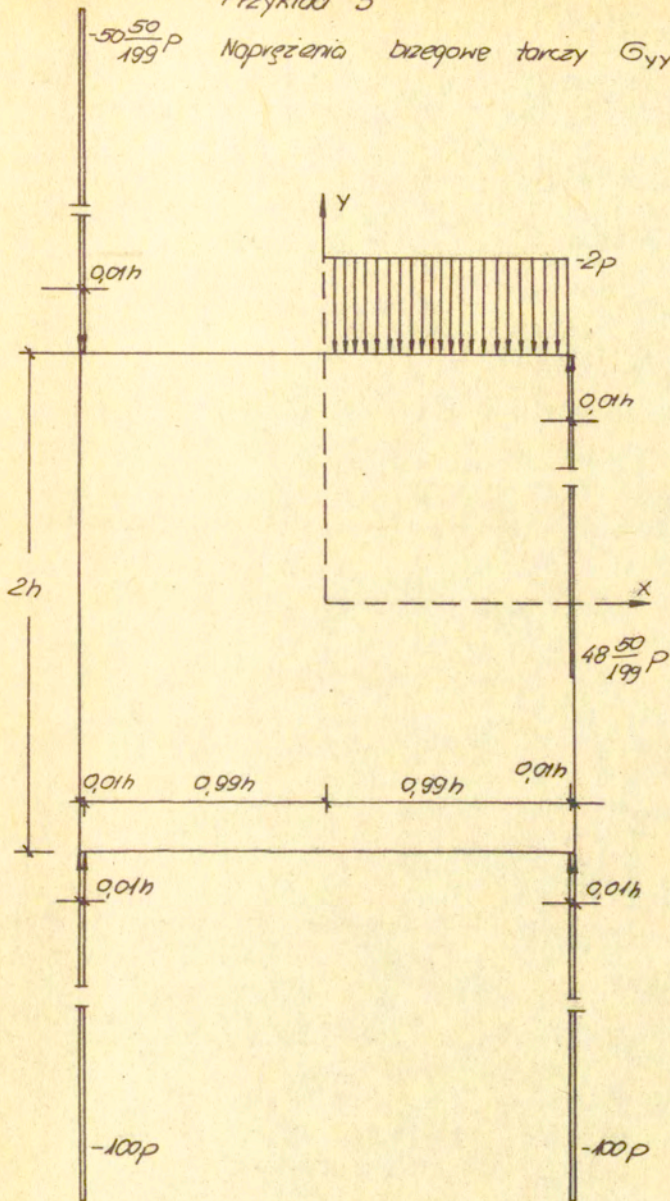
Przykład 2

Naprężenia brzegowe σ_{yy}



Przykład 3

Napężenia brzegowe tarczy σ_{yy}



RYS. 4

$$BNN_r^n = - \frac{p}{2/n+1/} \left\{ 1 + \frac{1}{r} \left[\sum_{s=0}^{n+1} /-1/s \left(\frac{n+1}{s} \right) r^s - 1 \right] \right\} =$$

$$= - \frac{p}{2/n+1/} \left\{ 1 - \sum_{s=1}^{n+1} /-1/s \left(\frac{n+1}{s} \right) r^{s-1} \right\}$$

$n = 0, 2, 4, \dots, S$ $S=14$ $s=1, 2, 3, \dots, n+1$

$$BTT_r^n = BT_r^n = BN_r^n = 0$$

W trzech przypadkach $r = 0.5, 0.1, 0.01$

Stan SA

Podobnie jak w poprzednim stanie można wyprowadzić wzór:

$$BNN_r^n = - \frac{p}{2/n+1/} \left[1 + \sum_{s=1}^{n+1} /-1/s \left(\frac{n+1}{s} \right) r^{s-1} \right]$$

$n = 0, 2, 4, \dots, M-1$ $M=15$ $s=1, 2, \dots, n+1$

$$BTT_r^n = BT_r^n = BN_r^n = 0$$

w trzech przypadkach $r = 0.5, 0.1, 0.01$

Stan AS i AA

W analizowanych przykładach w stanach AS i SA obciążenia są identyczne, stąd i polimomenty w obydwu stanach są takie same:

$$BNN_r^n = - \frac{p}{2/n+1/} \left[1 + \frac{1}{2-r} \sum_{s=1}^{n+1} /-1/s \left(\frac{n+1}{s} \right) r^{s-1} \right],$$

$n = 1, 3, 5, \dots, A$ $A = 15$ $s=1, 2, 3, \dots, n+1$

$$BTT_r^n = BT_r^n = BN_r^n = 0$$

w trzech przypadkach $r = 0.5, r=0.1, r=0.01$

Wartości polimomentów i prawych stron układu równań /42/ obliczonych przy użyciu maszyny Odra 1305 w poszczególnych przypadkach "r" w czterech wyróżnionych stanach symetrii zamieszczono poniżej.

Tablice polimomentów

Stan SS

	0,01	0,10	0,50
N= 0	-1,0000000	-1,0000000	-1,0000000
N= 2	-0,6616833	-0,6183333	-0,4583333
N= 4	-0,5900995	-0,5095100	-0,2937500
N= 6	-0,5566761	-0,4440736	-0,2131696
N= 8	-0,5360153	-0,3958775	-0,1664497
N=10	-0,5211898	-0,3573588	-0,1363192
N=12	-0,5095345	-0,3253129	-0,1153752
N=14	-0,4998055	-0,2980363	-0,0999980

Stan SA

	0,01	0,10	0,50
N= 0	0,0000000	0,0000000	0,0000000
N= 2	0,3283500	0,2850000	0,1250000
N= 4	0,3900995	0,3095100	0,0937500
N= 6	0,4138189	0,3012165	0,0703125
N= 8	0,4249042	0,2847664	0,0553385
N=10	0,4302807	0,2664497	0,0454102
N=12	0,4326114	0,2483898	0,0384521
N=14	0,4331388	0,2313696	0,0333313

Stan AS

	0,01	0,10	0,50
N= 1	0,0000000	0,0000000	0,0000000
N= 3	0,1225125	0,1012500	0,0312500
N= 5	0,1617247	0,1221750	0,0260417
N= 7	0,1801360	0,1248463	0,0205078
N= 9	0,1902460	0,1214004	0,0166016
N=11	0,1962210	0,1156953	0,0138753
N=13	0,1998460	0,1092541	0,0119019
N=15	0,2020136	0,1027464	0,0104160

	0.01	0.10	0.50
N= 1	0.0000000	0.0000000	0.0000000
N= 3	0.1225125	0.1012500	0.0312500
N= 5	0.1617247	0.1221750	0.0260417
N= 7	0.1801360	0.1248463	0.0205078
N= 9	0.1902460	0.1214004	0.0166016
N=11	0.1962210	0.1156953	0.0138753
N=13	0.1998460	0.1092541	0.0119019
N=15	0.2020136	0.1027464	0.0104160

Wartości prawych stron w poszczególnych stanach obliczone według wzorów /46/ zamieszczono poniżej:

Stan SS

i	r=0.5	r=0.10	r=0.01
1	0.0000000	0.0000000	0.0000000
2	-1.0000000	-1.0000000	-1.0000000
3	0.5000000	0.5000000	0.5000000
4	0.0416667	-0.11833333	-0.1616833
5	-0.2500000	-0.5700000	-0.6567000
6	1.2062500	1.6304900	1.7233005
7	-1.5859375	-1.9768375	-1.9997519
8	-0.0959821	0.9004139	1.3693183
9	0.1312500	2.1914676	3.0891199
10	-2.7956163	-5.1227146	-5.6397967
11	4.2535807	7.6658096	7.9960696
12	0.3972094	-3.2920457	-6.1534041
13	0.1795480	-7.4084699	-12.9725692
14	7.4811649	17.8191299	20.5294014
15	-12.0615082	-29.2616854	-31.9645910
16	-0.9596242	10.8691180	25.5535353

Stan SA

i	r=0.5	r=0.10	r=0.01
1	0.0000000	0.0000000	0.0000000
2	0.0000000	0.0000000	0.0000000
3	-0.3750000	-0.8550000	-0.9850500
4	0.0000000	0.0000000	0.0000000
5	0.3645833	0.3524500	0.2385025
6	0.4166667	0.9500000	1.0945000
7	0.6562500	3.0236220	3.8957043
8	0.4921875	0.2842875	0.0343044
9	-1.0605469	-1.6161048	-0.7787869
10	-0.8437500	-4.3828668	-5.6164966

	r=0,5	r=0,10	r=0,01
11	-1.3696289	-10.7060997	-15.4183294
12	-1.5791016	-2.0628849	-0.2836653
13	2.7646310	7.1805171	2.8068530
14	1.8770926	17.1185520	24.5812510
15	3.8484650	37.7579678	61.0293192
16	4.1862030	10.9203811	1.7173621

Stan AS

i	r=0,5	r=0,1	r=0,01
1	0.0000000	0.0000000	0.0000000
2	0.0000000	0.0000000	0.0000000
3	0.0000000	0.0000000	0.0000000
4	0.0312500	0.1012500	0.1225125
5	-0.1041667	-0.3375000	-0.4083750
6	-0.1822917	-0.5528250	-0.6550253
7	-0.4101562	-1.1304563	-1.2949142
8	0.1572266	-0.0275349	-0.2230588
9	-0.4101562	0.1557265	0.6793140
10	0.3447266	2.3602566	3.1122938
11	0.4744466	4.4646677	5.8109842
12	-0.5321859	-0.6359765	0.4863222
13	0.9226772	0.8627055	-1.8896942
14	-0.7362148	-8.9309367	-13.2020948
15	-1.1906815	-17.1310270	-25.1273983
16	1.4024372	4.3782783	-0.9898185

Stan AA

i	r=0,5	r=0,1	r=0,01
1	0.0000000	0.0000000	0.0000000
2	0.0000000	0.0000000	0.0000000
3	0.0000000	0.0000000	0.0000000
4	0.0000000	0.0000000	0.0000000
5	-0.1250000	-0.4050000	-0.4900500
6	-0.2083333	-0.6750000	-0.8167500
7	0.2604167	0.6169500	0.6631520
8	-0.5104167	-1.1245500	-1.1662047
9	0.0546875	1.2975795	1.9209980
10	-0.1171875	2.0289285	3.1576822
11	-0.6347656	-2.8416181	-3.1815732
12	0.9238281	5.0232219	5.4942499
13	0.0698242	-4.0941544	-7.5293052
14	0.2771810	-6.7630101	-13.1773206
15	1.5472412	11.5100853	13.6252377
16	-2.4339600	-20.9918486	-24.4534253
17	-0.1125794	12.7125410	29.5069536

Rozwiązania układu równań

Rozwiązania układu równań w poszczególnych stanach dla analizowanych trzech przypadków zamieszczono poniżej.

Tablice niewiadomych.

Stan SS

X	r=0,5	r=0,1	r=0,01
1	-0.20566910	-0.40222256	-0.44915941
2	-0.71034852	-0.48805911	-0.44313869
3	0.28263201	0.87897406	1.02795794
4	-1.22135015	-1.70589922	-1.80565122
5	0.40562551	1.02347755	0.79706374
6	0.70277555	-0.28505264	-0.04001372
7	0.13795619	-0.68750692	-0.85131357
8	-0.16702293	0.66589988	-0.45259723
9	0.22247633	-0.25226112	0.21156472
10	-0.10411534	0.58254684	1.89217270
11	-0.08818491	0.04433843	0.24655386
12	0.19165996	-0.68593934	-1.67247076
13	0.00411238	0.38658885	1.39273215
14	-0.06597840	0.28554829	0.47799984
15	-0.03106467	0.03737148	-0.05262392
16	0.03061620	0.05752283	0.37973147

Stan SA

X	r=0,5	r=0,1	r=0,01
1	0.62323415	1.00438814	1.12673564
2	0.11230094	0.14694773	0.16157785
3	-0.83509137	-0.56552297	-0.39081344
4	-0.53719616	-1.50799353	-2.07599014
5	0.24873570	-0.74494749	-0.17383367
6	-0.28429337	-0.13247430	1.23903519
7	0.06252163	-0.13396468	-0.80262186
8	-0.17224904	0.72538844	-1.06314406
9	-0.25358686	0.78059694	1.30491907
10	-0.09680970	-0.04294038	1.46470289
11	0.18323098	-0.43962839	-1.07684976
12	0.10978138	-0.26365154	-1.97101530
13	-0.06386865	0.07439204	-0.59324412
14	0.01419563	-0.23790872	-0.09572458
15	0.02187482	0.03861472	0.05763993
16	0.02840600	-0.01211877	0.07830847

Stan AS

X	r=0.5	r=0.1	r=0.01
1	-0.20014797	-0.39702612	-0.45149184
2	-0.26713576	-0.49835485	-0.53596156
3	-0.26233465	-0.27662070	-0.36756551
4	0.96367756	1.46852538	1.68511616
5	-0.02132333	0.48447222	0.77623097
6	-1.20693964	-0.97487763	-1.13164239
7	0.07482880	0.12739687	-0.74052917
8	0.97811437	0.12706328	0.82703117
9	0.18940829	-0.07260485	0.82221016
10	-0.61722025	-0.20497995	-1.22193203
11	0.12093125	-0.05776916	-0.60446317
12	0.25300563	0.28125346	0.78280556
13	0.06572005	0.09497785	0.82582778
14	-0.08299098	-0.18323165	-0.73596154
15	0.01909763	0.03749520	0.06045287
16	0.00658573	0.00781443	-0.18611101

Stan AA

X	r=0.5	r=0.1	r=0.01
1	-0.05934426	-0.12018537	-0.13293704
2	-0.30325079	-0.54018846	-0.611111312
3	0.50929966	0.88768471	0.97949809
4	-0.14255075	0.16905572	0.23273308
5	-0.98239335	-1.15171753	-1.25472371
6	0.03894524	0.40609246	0.14503100
7	0.97883732	0.40436442	0.75974087
8	0.12501154	-0.08015573	-0.09914330
9	-0.73916650	-0.21041436	-0.97872715
10	0.18375483	-0.05701438	0.13044199
11	0.40930242	0.41271620	1.07582742
12	0.09524819	0.07081719	0.20473438
13	-0.14935109	-0.29879340	-0.76199239
14	0.04748768	0.09538896	0.49613776
15	0.04361686	0.11362445	0.18479682
16	0.01067900	0.02977289	0.01959966
17	-0.00147751	-0.00209642	0.11018128

Opracowanie wyników obliczeń

Wzory do opracowania wyników obliczeń

Wzory /39/ na składowe stanu naprężenia wyrażono w postaci $\sigma_{ij} = p \sum_s^N \sum_m^{N-s} W_{sm} x^s y^m$ dogodnej w analizie wielomianowej.

W ten sposób otrzymano:

Stan SS

$$\sigma_{xx} = p \sum_s^n \sum_m^{n-s} \left[-1/\sqrt{2} \right]^{\frac{s}{2}} \frac{m+2}{s+m+2} \binom{s+m}{m} X_{s+m+1} +$$

$$+ \left[-1/\sqrt{2} \right]^{\frac{m}{2}+1} \frac{s}{s+m+2} \binom{s+m}{s} X_{s+m+2} \Big] x^s y^m,$$

$s, m = 0, 2, \dots, n \quad s+m \leq n$

$$\sigma_{yy} = p \sum_s^n \sum_m^{n-s} \left[-1/\sqrt{2} \right]^{\frac{s}{2}+1} \frac{m}{s+m+2} \binom{s+m}{m} X_{s+m+1} +$$

$$+ \left[-1/\sqrt{2} \right]^{\frac{m}{2}} \frac{s+2}{s+m+2} \binom{s+m}{s} X_{s+m+2} \Big] x^s y^m, \quad s+m \leq n$$

$s, m = 0, 2, \dots, n$

$$\sigma_{xy} = p \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{m=1}^{n-s} \left[-1/\sqrt{2} \right]^{\frac{s+3}{2}} \frac{m+1}{m+s+2} \binom{s+m}{m} X_{s+m+1} +$$

$$+ \left[-1/\sqrt{2} \right]^{\frac{m+3}{2}} \frac{s+1}{s+m+2} \binom{s+m}{s} X_{s+m+2} \Big] x^s y^m \quad s+m \leq n$$

$s, m = 1, 3, \dots, n-1$

Stan SA

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = p \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{m=1}^{n-s} & \left[-1/\sqrt{2} \frac{m+3}{s+m+1} \binom{m+s}{s} X_{m+s} + \right. \\ & \left. + /-1/\sqrt{2} \frac{s}{s+m+1} \binom{m+s}{m} X_{m+s+1} \right] x^s y^m \quad s+m \leq n \\ s = 0, 2, \dots, n-1, \quad m = 1, 3, \dots, n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} = p \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{m=1}^{n-s} & \left[-1/\sqrt{2} \frac{m+1}{m+s+1} \binom{m+s}{s} X_{m+s} + \right. \\ & \left. + /-1/\sqrt{2} \frac{s+2}{m+s+1} \binom{m+s}{m} X_{m+s+1} \right] x^s y^m \quad s+m \leq n \\ s = 0, 2, \dots, n-1, \quad m = 0, 2, \dots, n-1 \quad m= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} = p \sum_{s=1}^n \sum_{m=0}^{n-s} & \left[-1/\sqrt{2} \frac{s+1}{m+s+1} \binom{m+s}{s} X_{m+s} + \right. \\ & \left. + /-1/\sqrt{2} \frac{s+3}{m+s+1} \binom{m+s}{m} X_{m+s+1} \right] x^s y^m \quad s+m \leq n \\ s = 1, 3, \dots, n \quad m = 0, 2, \dots, n-1 \end{aligned}$$

Stan AS

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = p \sum_{s=1}^n \sum_{m=0}^{n-s} & \left[-1/\sqrt{2} \frac{s+1}{m+s+1} \binom{m+s}{m} X_{m+s} + \right. \\ & \left. + /-1/\sqrt{2} \frac{m+2}{m+s+1} \binom{m+s}{s} X_{m+s+1} \right] x^s y^m \quad s+m \leq n \\ s = 1, 3, \dots, n \quad r = 0, 2, \dots, n-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} = p \sum_{s=1}^n \sum_{m=0}^{n-s} & \left[-1/\sqrt{2} \frac{s+3}{m+s+1} \binom{m+s}{m} X_{m+s} + \right. \\ & \left. + /-1/\sqrt{2} \frac{s+1}{m+s+1} \binom{m+s}{s} X_{m+s+1} \right] x^s y^m \quad s+m \leq n \end{aligned}$$

$$\sigma_{xy} = p \sum_{s=1}^n \sum_{m=0}^{n-s} \left[/-1/\sqrt{2} \frac{s}{m+s+1} \binom{m+s}{m} X_{m+s} + \right. \\ \left. + /-1/\sqrt{2} \frac{m+3}{m+s+1} \binom{m+s}{s} X_{m+s+1} \right] x^s y^m$$

$$m = 1, 3, \dots, n, \quad s = 0, 2, \dots, n-1 \quad m+s \leq n$$

Stan AA

$$\sigma_{xx} = p \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{m=1}^{n-s} \left[/-1/\sqrt{2} \frac{s+1}{m+s} \binom{m+s}{m} X_{m+s} + \right. \\ \left. + /-1/\sqrt{2} \frac{m+3}{m+s} \frac{s-1}{m+s} \binom{m+s}{s} X_{m+s+1} \right] x^s y^m$$

$$m, s = 1, 3, \dots, n-1 \quad r+s \leq n$$

$$\sigma_{yy} = p \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{m=1}^{n-s} \left[/-1/\sqrt{2} \frac{s+3}{m+s} \binom{m+s}{m} X_{m+s} + \right. \\ \left. + /-1/\sqrt{2} \frac{m+1}{m+s} \left(\frac{s+1}{m+s} \right) \binom{m+s}{s} X_{m+s+1} \right] x^s y^m$$

$$m, s = 1, 3, \dots, n-1 \quad r+s \leq n$$

$$\sigma_{xy} = p \sum_{s=0}^n \sum_{m=0}^{n-s} W_{sm} x^s y^m \quad s+m \leq n$$

$$s = m = 0 \quad W_{sm} = W_{00} = X_1$$

$$s = 0, m = 2, \dots, n \quad s = 2, 4, \dots, n \quad m = 0, 2, \dots, n-s$$

$$W_{sm} = /-1/\sqrt{2} \frac{s}{m+s} \binom{m+s}{m} X_{m+s} + /-1/\sqrt{2} \frac{s}{m+s} \binom{s+m}{s} X_{m+s+1}$$

Wielomianowe funkcje składowych tensora naprężenia określone w obszarze tarczy w analizowanych przykładach

Składowe tensora naprężenia w obszarze tarczy wyrażają się wielomianami, których współczynniki podano w tablicach

Stan SS

Przykład 1. $r = 0.5$

$$\sigma_{xx} = p W_{sm} x^s y^m \quad s, m = 0, 2, \dots, 14 \quad s+m \leq 14$$

We wzorze należy wykonać sumowania po indeksach wskazanych powyżej. Obliczone współczynniki W_{sm} zebrano poniżej w tablicy

s^m	0	2	4	6	8	10	12	14
0	-0.206	+0.283	+0.406	+0.138	+0.222	-0.088	0.004	-0.031
2	0.469	-0.217	-0.926	-5.567	+1.869	-0.855	2.125	
4	-0.333	-0.218	+12.259	+1.070	+10.785	-15.660		
6	+0.091	-4.241	-10.865	-28.299	+23.827			
8	+0.128	+4.427	+19.535	-0.673				
10	-0.145	-3.188	-7.493					
12	+0.057	+1.383						
14	-0.023							
	+0.038	-1.771	+12.916	-33.330	+36.704	-16.603	2.129	-0.031

Suma iloczynów z sum poszczególnych kolumn tablicy przez współzrędną y w odpowiedniej potędze określa składową σ_{xx} wzdłuż linii $x = 1$ to jest

$$\frac{\sigma_{xx}}{p} \Big|_{x=1} = 0.038 - 1.771y^2 + 12.916y^4 - 33.33y^6 + 36.704y^8 - 16.603y^{10} + 2.129y^{12} - 0.031y^{14}.$$

Suma iloczynów z sum poszczególnych wierszy przez współzrędną x w odpowiedniej potędze stanowi składową σ_{xx} wzdłuż linii $y = 1$ to jest:

$$\frac{\sigma_{xx}}{p} \Big|_{y=1} = 0.728 - 3.100x^2 + 7.903x^4 - 19.487x^6 + 23.416x^8 + \\ -10.826x^{10} + 1.440x^{12} - 0.023x^{14}.$$

Podobną interpretację w stanie SS mają pierwsza kolumna i pierwszy wiersz tabelicy. A mianowicie: Suma iloczynów czynników pierwszej kolumny przez współrzędną x w odpowiedniej potęgę określa składową σ_{xx} wzdłuż osi x / $y=0$ / tj. $\sigma_{xx}|_{y=0} = \frac{\beta}{x}$ / Suma iloczynów czynników pierwszego wiersza przez współrzędną y w odpowiedniej potęgę określa składową σ_{xx} wzdłuż osi y / tj. $\sigma_{xx}|_{x=0} = \frac{\beta}{y}$ /

$$\sigma_{yy} = p \sum_{s,m} w_{sm} x^s y^m \quad s, m = 0, 2 \dots 14 \quad s+m \leq 14$$

s \ m	0	2	4	6	8	10	12	14
0	-0.710	+0.469	-0.036	-0.062	-0.199	+0.042	-0.013	+0.023
2	-1.221	-2.000	-0.218	+4.904	0.229	+1.438	-1.424	
4	+0.703	1.362	-10.602	-10.865	-15.160	+7.942		
6	-0.167	3.578	+20.659	+36.465	-0.673			
8	-0.104	-6.526	-23.910	-22.480				
10	+0.192	+3.771	+15.211					
12	-0.066	-2.084						
14	+0.031							
Σ	-1.344	-1.430	+1.105	+7.962	-15.803	+9.422	-1.437	+0.023

$$\sigma_{yy} \Big|_{y=1} = -0.486 + 1.708x^2 - 26.620x^4 + 59.862x^6 - 53.020x^8 + \\ + 19.174x^{10} - 2.150x^{12} + 0.031x^{14}.$$

$$\sigma_{xy} = p \sum_{s,m} w_{sm} x^s y^m \quad s, m = 1, 3 \dots 13 \quad s+m \leq 14$$

s \ m	1	3	5	7	9	11	13	Σ
1	-0.939	+0.145	+0.370	+1.590	-0.415	+0.155	-0.327	0.580
3	+1.333	+0.291	-9.807	-0.612	-4.793	+5.695		-7.894
5	-0.545	+8.482	+13.038	+24.256	-15.885			+29.347
7	-1.022	-11.805	-31.256	+0.770				-43.314
9	+1.450	+10.627	+14.987					+27.063
11	-0.686	-5.531						-6.217
13	+0.327							0.327
Σ	-0.087	+2.207	-12.668	+26.005	-21.093	+5.850	-0.327	

$$\sigma_{xy|y=1} = 0.580x - 7.894x^3 + 29.346x^5 - 43.314x^7 + 27.063x^9 + \\ - 6.217x^{11} + 0.320x^{13}.$$

Przykład 2. $r=0.1$

$$\sigma_{xx} = p \sum_{sm} x^s y^m \quad s, m = 0, 2 \dots 14 \quad s+m = 14$$

s \ m	0	2	4	6	8	10	12	14
0	-0.402	+0.879	+1.023	-0.688	-0.252	-0.044	+0.387	+0.037
2	+0.413	-4.664	+5.237	+8.913	+3.482	-19.178	-3.630	
4	+0.531	-0.162	-26.906	-41.808	+96.302	+42.452		
6	-0.328	+12.612	+67.368	-91.042	-134.919			
8	-0.516	-19.913	+1.243	+142.484				
10	+0.564	+6.172	-50.016					
12	-0.190	+4.776						
14	-0.055							
Σ	+2.018	-0.300	-2.051	+17.859	-35.388	+23.319	-3.249	+0.037

$$\frac{\sigma_{xx}}{p} | y=1 = 1.029 - 9.426x^2 + 70.408x^4 - 146.309x^6 + 123.297x^8 + \\ - 43.280x^{10} + 4.587x^{12} - 0.055x^{14}.$$

$$\sigma_{yy} = p \sum_{sm} x^s y^m \quad s, m = 0, 2 \dots 14 \quad s+m = 14$$

s \ m	0	2	4	6	8	10	12	14
0	-0.488	+0.413	-0.777	+0.349	+0.318	+0.077	-0.291	-0.040
2	-1.706	+3.187	-0.162	-10.763	-8.959	+12.840	+3.859	
4	-0.285	-4.913	+31.530	+67.368	-48.772	-44.973		
6	+0.666	-14.462	-92.928	+2.320	+142.484			
8	+0.583	+25.390	+46.287	-150.048				
10	-0.686	-12.509	+52.538					
12	+0.286	-5.005						
14	+0.058							
Σ	-1.573	-7.898	+36.488	-90.774	+85.071	-32.055	+3.569	-0.04

$$\frac{\hat{\sigma}_{xy}}{p} |_{y=1} = -0.438 - 1.703x^2 - 0.045x^4 + 38.080x^6 - 77.788x^8 + 39.343x^{10} - 4.720x^{12} + 0.058x^{14}.$$

$$\hat{\sigma}_{xy} = p \sum_{s,m} w_{sm} x^s y^m \quad s, m = 1, 3, \dots, 13 \quad s+m = 14$$

s \ m	1	3	5	7	9	11	13
1	-0.827	+3.109	-2.095	-2.547	-0.774	+3.487	+0.558
3	-2.125	+0.216	+21.525	+23.891	-42.801	-15.437	
5	+1.965	-25.224	-80.842	+78.036	+89.946		
7	+4.132	+53.101	-1.988	-162.839			
9	-5.642	-20.572	+100.032				
11	+2.274	-19.105					
13	+0.770						
Σ	+0.548	-8.474	+36.632	-63.459	+46.372	-11.950	+0.558

$$\frac{\hat{\sigma}_{xy}}{p} |_{y=1} = 0.912x - 14.731x^3 + 63.882x^5 - 107.593x^7 + 73.818x^9 - 16.830x^{11} + 0.770x^{13}.$$

Przykład 3. $r = 0.01$

$$\hat{\sigma}_{xx} = p \sum_{s,m} w_{sm} x^s y^m \quad s, m = 0, 2, \dots, 14 \quad s+m = 14$$

s \ m	0	2	4	6	8	10	12	14
0	-0.449	+1.028	+0.797	-0.851	+0.212	+0.247	+1.393	-0.053
2	+0.389	-3.268	+11.275	+5.857	+3.298	-74.282	-0.129	
4	+0.292	-9.779	-44.095	-82.556	+424.828	+55.520		
6	+0.552	+29.419	+149.721	-546.075	-328.856			
8	-1.471	-46.476	+160.253	+491.152				
10	+1.353	-3.729	-217.816					
12	-0.211	+24.720						
14	-0.326							
Σ	+0.129	-8.086	+60.135	-132.473	+99.481	-18.515	+1.264	-0.053

$$\frac{\hat{\sigma}_{xx}}{p} |_{y=1} = 2.323 - 56.861x^2 + 344.210x^4 - 695.239x^6 + 603.458x^8 - 220.192x^{10} + 24.509x^{12} - 0.326x^{14}.$$

$$\hat{\sigma}_{yy} = p \sum_{s,m} W_{sm} x^s y^m \quad s, m = 0, 2, 4, \dots, 14 \quad s+m \leq 14$$

s \ m	0	2	4	6	8	10	12	14
0	-0.443	+0.389	-0.545	+0.752	+0.209	+0.073	-1.125	-0.001
2	-1.806	+1.754	-9.779	-17.638	-17.690	+56.644	+5.047	
4	-0.040	+8.284	+73.547	+149.721	-292.540	-109.619		
6	-0.453	-41.200	-216.887	+299.139	+491.152			
8	+1.892	+60.869	-27.965	-653.448				
10	-1.672	-13.910	+271.915					
12	+0.478	-29.638						
14	+0.380							
Σ	-1.664	-13.451	+90.286	-221.424	+181.130	-52.902	+3.922	-0.001

$$\frac{\hat{\sigma}_{yy}}{p} |_{y=1} = -0.692 + 16.532x^2 - 170.646x^4 + 531.751x^6 - 618.653x^8 + 256.333x^{10} - 29.160x^{12} + 0.380x^{14}.$$

$$\hat{\sigma}_{xy} = p \sum_{s,m} W_{sm} x^s y^m \quad s, m = 1, 3, \dots, 13 \quad s+n \leq 14$$

s \ m	1	3	5	7	9	11	13
1	-0.778	+2.179	-4.510	-1.673	-0.733	+13.506	0.020
3	-1.169	+13.039	+35.276	+47.175	-188.812	-20.189	
5	-3.314	-58.838	-179.666	+468.065	+219.237		
7	11.771	+123.935	-256.405	-561.317			
9	-13.526	+12.429	+435.632				
11	+2.529	-98.878					
13	+4.560						
Σ	+0.073	-6.133	+30.328	-47.751	+29.692	-6.683	+0.020

$$\frac{\hat{\sigma}_{xy}}{p} |_{y=1} = 8.011x - 114.681x^3 + 445.485x^5 - 682.014x^7 + 434.535x^9 - 96.349x^{11} + 4.560x^{13}.$$

Stan SA

Przykład 1 $r = 0.5$

$$\hat{\sigma}_{xx} = p \sum_{sm} W_{sm} x^s y^m \quad s=0,2,\dots,14 \quad m=1,3,\dots,15$$

$$s+m \leq 15$$

$s \backslash m$	1	3	5	7	9	11	13	15
0	+0.112	-0.537	-0.284	-0.172	-0.097	+0.110	+0.014	+0.028
2	-0.447	+1.066	+3.041	+4.614	-3.352	-0.237	-2.323	
4	+0.355	-4.108	-20.100	+3.997	-5.798	+21.616		
6	+0.630	+16.034	+16.967	+33.051	-47.802			
8	-2.000	-14.117	-39.141	+21.014				
10	+1.478	+11.888	+9.068					
12	-0.685	-4.234						
14	+0.234							
Σ	-0.323	+5.991	-30.449	+62.504	-57.048	+21.488	-2.309	+0.028

$$\frac{\hat{\sigma}_{xx}}{p} |_{y=1} = -0.826 + 2.362x^2 - 4.038x^4 + 18.880x^6 - 34.244x^8 +$$

$$+ 22.433x^{10} - 4.919x^{12} + 0.234x^{14}.$$

$$\hat{\sigma}_{yy} = p \sum_{sm} W_{sm} x^s y^m \quad s=0,2,\dots,14 \quad m=1,3,\dots,15 \quad s+m \leq 15$$

$s \backslash m$	1	3	5	7	9	11	13	15
0	-0.623	-0.149	+0.107	+0.145	+0.128	-0.061	-0.003	-0.022
2	+2.505	+0.711	-2.465	-5.743	+0.666	-0.632	+1.663	
4	-1.244	+3.148	+24.050	+12.119	+13.771	-13.037		
6	-0.438	-18.668	-39.529	-52.188	+16.344			
8	+2.282	+22.175	+53.494	+19.431				
10	-2.016	-15.077	-27.942					
12	+0.830	+7.093						
14	-0.328							
Σ	+0.970	-0.766	+7.715	-26.236	+30.910	-13.730	+1.660	-0.022

$$\frac{\hat{\sigma}_{yy}}{p} |_{y=1} = -0.479 - 3.296x^2 + 38.809x^4 - 94.478x^6 + 97.382x^8 +$$

$$- 45.034x^{10} + 7.924x^{12} - 0.328x^{14}.$$

$$\hat{\sigma}_{xy} = p \sum_{sm} w_{sm} x^s y^m \quad s=1,3..15 \quad m=0,2\dots14 \quad s+m \leq 15$$

s \ m	0	2	4	6	8	10	12	14
1	-0.623	+0.447	-0.533	-1.014	-1.153	+0.670	+0.040	+0.332
3	-0.835	-0.711	+4.108	+13.400	-1.998	+2.319	-7.205	
5	+0.249	-1.889	-24.050	-16.967	-24.788	+28.681		
7	+0.063	+8.000	+28.235	+52.188	-21.014			
9	-0.254	-7.392	-29.719	-15.113				
11	+0.183	+4.112	+12.701					
13	-0.064	-1.637						
15	+0.022							
Σ	-0.013	+0.931	-9.258	+32.495	-48.954	+31.670	-7.165	+0.332

$$\frac{\hat{\sigma}_{xy}}{p} |_{y=1} = -0.588x + 9.078x^3 - 38.765x^5 + 67.472x^7 - 52.477x^9 + 16.996x^{11} - 1.701x^{13} + 0.022x^{15}$$

Przykład 2. $r = 0.1$

$$\hat{\sigma}_{xx} = p \sum_{sm} w_{sm} x^s y^m \quad s=0,2\dots14, \quad m=1,3..15 \quad s+m \leq 15$$

s \ m								
0	+0.147	-1.508	-0.132	+0.725	-0.043	-0.264	-0.238	-0.012
2	+1.414	+3.366	-12.128	-4.384	+8.054	+15.077	+1.620	
4	-2.704	+15.039	+36.096	-9.644	-106.306	-25.584		
6	-1.973	-37.899	-40.651	+178.577	+110.385			
8	+5.543	+33.858	-76.514	-163.235				
10	-3.547	+4.243	+86.122					
12	+0.387	-14.556						
14	+0.530							
Σ	-0.203	+2.543	-7.207	+2.039	+12.090	-10.771	+1.382	-0.012

$$\frac{\hat{\sigma}_{xx}}{p} |_{y=1} = -1.325 + 13.019x^2 - 93.103x^4 + 208.438x^6 - 200.348x^8 + 86.818x^{10} - 14.169x^{12} + 0.530x^{14}$$

$$\sigma_{yy} = p \sum_{s,m} w_{sm} x^s y^m \quad s = 0, 2, \dots, 14 \quad m = 1, 3, \dots, 15 \quad s+m \leq n$$

s \ m	1	3	5	7	9	11	13	15
0	-1.004	+0.471	+0.337	-0.578	-0.122	+0.146	+0.193	+0.015
2	+1.697	-5.408	+9.023	+10.313	-1.607	-11.597	+1.968	
4	+3.725	-9.864	-56.849	-29.036	+74.407	+30.105		
6	+0.938	-51.735	+94.803	-102.018	-126.961			
8	-7.025	-53.199	+19.095	+184.548				
10	+4.836	+8.516	-96.068					
12	-0.967	+16.063						
14	-0.579							
Σ	1.621	+8.315	-29.659	+63.229	-54.283	+18.654	-1.775	+0.015

$$\frac{\sigma_{xy}}{p} |_{y=1} = -0.542 + 0.453x^2 + 12.488x^4 - 81.503x^6 + 143.420x^8 - 82.716x^{10} + 15.096x^{12} - 0.579x^{14}$$

$$\sigma_{xy} = p \sum_{s,m} w_{sm} x^s y^m \quad s = 1, 3, \dots, 15 \quad m = 0, 2, \dots, 14 \quad s+m \leq n$$

s \ m	0	2	4	6	8	10	12	14
1	+1.004	-1.414	-1.683	+4.043	+1.096	-1.611	-2.513	-0.231
3	-0.566	+5.408	-15.039	-24.064	+4.822	+42.522	+8.528	
5	-0.745	+5.918	+56.849	+40.651	-133.932	-66.230		
7	-0.134	-22.172	-67.717	+102.018	+163.236			
9	+0.781	+17.733	+10.608	+143.537				
11	-0.440	-2.323	+43.667					
13	+0.074	-3.707						
15	+0.039							
Σ	+0.013	-0.557	+5.469	-20.889	+35.222	-25.320	+6.015	-0.231

$$\frac{\sigma_{xy}}{p} |_{y=1} = -1.309x + 21.611x^3 - 97.490x^5 + 175.231x^7 - 135.631x^9 + 40.904x^{11} - 3.633x^{13} + 0.039x^{15}$$

Przykład 3 $r = 0,01$

$$\hat{\sigma}_{xx} = p \sum_{sm} w_{sm} x^s y^m \quad s = 0, 2, \dots, 14 \quad m = 1, 3, \dots, 15 \quad s+m \leq 15$$

$s \ m$	1	3	5	7	9	11	13	15
0	+0.162	-2.076	+1.239	-1.063	+1.465	-1.971	-0.096	+0.078
2	+2.528	-7.681	+12.531	-51.579	+20.469	+13.010	-6.438	
4	+1.486	-4.559	+176.499	-315.170	-170.079	+60.499		
6	-2.353	-114.982	+206.552	+530.153	-136.777			
8	+12.032	-10.048	-489.088	+66.501				
10	-6.258	+129.014	+19.998					
12	-6.788	-10.762						
14	+0.610							
Σ	+1.419	-1.000	-72.269	+228.842	-224.924	+71.538	-6.534	+0.078

$$\frac{\hat{\sigma}_{xx}}{p} \Big|_{y=1} = -2.262 + 42.835x^2 - 251.324x^4 + 482.594x^6 - 400.507x^8 + 142.753x^{10} - 17.550x^{12} + 0.610x^{14}.$$

$$\hat{\sigma}_{yy} = p \sum_{sm} w_{sm} x^s y^m \quad s = 0, 2, \dots, 14, \quad m = 1, 3, \dots, 15 \quad s+m \leq 15$$

$s \ m$	1	3	5	7	9	11	13	15
0	-1.127	+0.843	-0.768	+0.597	-1.433	+1.463	+0.167	-0.061
2	+1.172	+2.971	-2.735	+50.428	-52.528	-18.554	+4.654	
4	+0.869	-11.766	-172.473	+147.537	+220.897	-37.302		
6	+5.618	+112.298	+28.133	-652.117	+51.723			
8	-11.744	-93.864	+580.560	+42.853				
10	+11.845	-149.341	-71.030					
12	+7.712	+18.494						
14	-0.865							
Σ	+13.480	-120.365	+361.687	-410.702	+218.659	-54.393	+4.821	-0.061

$$\frac{\hat{\sigma}_{yy}}{p} \Big|_{y=1} = -0.319 - 14.592x^2 + 147.762x^4 - 454.345x^6 + 517.805x^8 - 208.526x^{10} + 26.206x^{12} - 0.865x^{14}.$$

$$\sigma_{xy} = p \sum_{s+m \leq 15} w_{sm} x^s y^m \quad s = 1, 3, \dots, 15, \quad m = 0, 2, \dots, 14 \quad s+m \leq 15$$

s \ m	0	2	4	6	8	10	12	14
1	+1.127	-2.528	+3.840	-4.177	+12.895	-16.093	-2.168	+0.92
3	-0.391	-2.971	+4.559	-117.666	+157.585	+68.032	-20.166	
5	-0.174	+7.060	+172.473	-206.552	-397.615	+82.063		
7	-0.803	-48.128	-20.095	+652.117	-66.501			
9	+1.305	+31.288	-322.533	-33.330				
11	-1.077	+40.729	+32.286					
13	-0.593	-4.268						
15	+0.058							
Σ	-0.548	+21.182	-129.470	+290.392	-293.636	+134.004	-22.334	+0.92

$$\frac{\sigma_{xy}}{p} \Big|_{y=1} = -6.184x + 88.982x^3 - 342.743x^5 + 316.590x^7 - 323.270x^9 + 71.938x^{11} - 4.861x^{13} + 0.058x^{15}.$$

Stan AS

Przykład 1 . r = 0.5

$$\sigma_{xx} = p \sum_{s+m \leq 15} w_{sm} x^s y^m \quad s = 1, 3, \dots, 15 \quad m = 0, 2, \dots, 14 \quad s+m \leq 15$$

s \ m	0	2	4	6	8	10	12	14
1	+0.200	+0.787	+0.107	-0.504	-1.705	-1.330	-0.854	-0.286
3	-0.613	-4.165	-6.594	+2.359	+9.670	+12.720	+7.229	
5	+0.812	+9.484	+16.789	+1.716	-29.898	-38.068		
7	-8.715	-10.604	-21.792	+3.409	+60.916			
9	+0.456	+7.060	+13.769	-31.311				
11	-0.191	-3.159	+4.157					
13	+0.062	+0.017						
15	-0.003							
Σ	+0.008	-0.580	+6.436	-24.351	+38.983	-26.678	+6.375	-0.286

$$\frac{\sigma_{xx}}{p} \Big|_{y=1} = -3.605x + 20.606x^3 - 39.165x^5 + 31.214x^7 - 10.026x^9 + 0.807x^{11} + 0.079x^{13} - 0.003x^{15}.$$

$$\sigma_{yy} = p w_{sm} x^s y^m \quad s = 1, 3, \dots, 15 \quad m = 0, 2, \dots, 14 \quad s+m \leq 15$$

$s \backslash m$	0	2	4	6	8	10	12	14
1	-0.267	-1.839	-2.083	-1.319	+0.253	+0.644	+0.578	+0.238
3	+0.964	+8.117	+15.807	+11.192	+0.613	-6.644	-5.768	
5	-1.207	-15.012	-37.116	-30.509	+2.557	+28.428		
7	+0.978	+16.412	+42.359	+33.046	-40.257			
9	-0.617	-10.488	-28.959	+15.243				
11	+0.253	+4.816	+0.225					
13	-0.083	-0.354						
15	+0.007							
Σ	+0.027	+1.652	-9.767	+27.653	-36.834	+22.428	-5.190	+0.238

$$\frac{\sigma_{yy}}{p} \Big|_{y=1} = -3.795x + 24.281x^3 - 52.859x^5 + 52.538x^7 - 24.821x^9 + 5.294x^{11} - 0.437x^{13} + 0.007x^{15}$$

$$\sigma_{xy} = p w_{sm} x^s y^m \quad s = 0, 2, \dots, 14 \quad m = 1, 3, \dots, 15 \quad s+m \leq 15$$

$s \backslash m$	1	3	5	7	9	11	13	15
0	-0.200	-0.262	-0.021	+0.075	+0.189	+0.121	+0.066	+0.019
2	+1.839	+4.165	+3.956	-1.010	-3.023	-3.469	-1.668	
4	-4.059	-15.807	-16.789	-1.226	+16.660	+17.304		
6	+5.004	+24.744	+30.509	-3.409	-47.379			
8	-4.103	-21.179	-24.785	+40.257				
10	+2.098	+11.584	-9.146					
12	-0.803	-0.075						
14	+0.051							
Σ	-0.175	+3.170	-16.276	+34.687	-33.803	+13.956	-1.602	+0.019

$$\frac{\sigma_{xy}}{p} \Big|_{y=1} = -0.014 + 0.590x^2 - 3.960x^4 + 9.469x^6 - 9.810x^8 + 4.536x^{10} - 0.878x^{12} + 0.051x^{14}$$

Przykład 2 $r = 0.1$

$$\sigma_{xx} = p \sum_{s,m} x^s y^m, \quad s=1,3,\dots,15 \quad m=0,2,\dots,14 \quad s+m \leq 15$$

$s \setminus m$	0	2	4	6	8	10	12	14
1	+0.397	+0.829	-2.422	-0.892	+0.653	0.635	-1.234	-0.562
3	-0.873	-0.020	+2.232	-8.323	-15.678	+15.797	+14.483	
5	+0.488	-0.004	+15.820	+61.106	-19.935	-78.582		
7	-0.063	-5.473	-55.939	-41.621	+131.944			
9	+0.179	+11.372	+45.759	-74.276				
11	-0.244	-8.092	+12.526					
13	+0.143	-0.369						
15	-0.002							
Σ	+0.025	-1.757	+17.976	-64.006	+96.984	-62.150	+13.249	-0.562

$$\frac{\sigma_{xx}}{p} \Big|_{y=1} = -2.596x + 7.618x^3 + 21.107x^5 + 28.850x^7 - 16.966x^9 + 4.190x^{11} - 0.226x^{13} - 0.002x^{15}.$$

$$\sigma_{yy} = p \sum_{s,m} x^s y^m \quad s=1,3,\dots,15, \quad m=0,2,\dots,14 \quad s+m \leq 15$$

$s \setminus m$	0	2	4	6	8	10	12	14
1	-0.498	-2.618	-0.010	+0.446	-0.892	-1.045	+0.718	+0.477
3	+1.469	+4.884	-0.006	+10.547	+21.824	-4.430	-11.906	
5	-0.975	-1.332	-19.156	-78.314	-31.216	+61.573		
7	+0.127	+6.426	+68.230	+109.822	-95.498			
9	-0.205	-13.420	-74.176	+45.929				
11	+0.281	+11.192	-4.795					
13	-0.183	-0.226						
15	+0.008							
Σ	+0.024	+4.906	-29.913	+88.430	-105.782	+56.098	-11.188	+0.477

$$\frac{\sigma_{yy}}{p} \Big|_{y=1} = -3.422x + 22.382x^3 - 69.420x^5 + 89.107x^7 - 41.872x^9 + 6.678x^{11} - 0.409x^{13} + 0.008x^{15}.$$

$$\sigma_{xy} = p \sum_{s,m} w_{sm} x^s y^m \quad s = 0, 2, \dots, 14 \quad m = 1, 3, \dots, 15 \quad s+m \leq 15$$

s \ m	1	3	5	7	9	11	13	15
0	-0.397	-0.277	+0.484	+0.127	-0.072	-0.058	+0.095	+0.038
2	+2.618	+0.020	-1.339	+3.567	+5.226	-4.308	-3.342	
4	-2.442	+0.006	-15.820	-43.647	+11.075	+35.719		
6	+0.444	+12.771	+78.314	+41.621	-102.075			
8	-1.607	-34.115	-82.367	+95.498				
10	+2.684	+29.671	-27.558					
12	-1.865	+1.598						
14	+0.032							
Σ	-0.533	+9.674	-48.286	+97.166	-86.394	+31.353	-3.247	+0.038

$$\frac{\sigma_{xy}}{p} \Big|_{y=1} = -0.060 + 2.442x^2 - 15.109x^4 + 30.527x^6 - 22.591x^8 + 4.797x^{10} - 0.267x^{12} + 0.032x^{14}.$$

Przykład 3

$$\sigma_{xx} = p \sum_{s,m} w_{sm} x^s y^m, \quad s = 1, 3, \dots, 15 \quad m = 0, 2, \dots, 14 \quad s+m \leq 15$$

s \ m	0	2	4	6	8	10	12	14
1	0.451	+1.103	-3.881	+5.184	-7.400	+6.649	-10.736	-0.907
3	-1.026	+1.403	-26.675	+34.724	-104.641	+172.377	+34.653	
5	+0.496	+16.459	-0.574	+306.727	-488.548	-275.878		
7	-0.805	-14.554	-228.899	+268.536	+692.243			
9	+0.813	+39.785	+47.636	-617.026				
11	-0.753	-22.599	+189.720					
13	+0.513	-16.243						
15	+0.170							
Σ	-0.141	+5.354	-22.673	-1.855	+91.654	-96.852	+23.917	-0.907

$$\frac{\sigma_{xx}}{p} \Big|_{y=1} = -9.537x + 110.815x^3 - 441.318x^5 + 716.521x^7 - 528.792x^9 + 166.368x^{11} - 15.730x^{13} + 0.170x^{15}.$$

$$\sigma_{yy} = p \sum_{s=0}^15 \sum_{m=0}^{15-s} x^s y^m \quad s=1,3,\dots,15, \quad m=0,2,\dots,14 \quad s+m \leq 15$$

$s \setminus m$	0	2	4	6	8	10	12	14
1	-0.536	-3.079	+0.701	-5.335	+3.720	-6.976	+7.835	+1.142
3	+1.685	+4.957	+27.432	-0.383	+109.545	-108.566	-41.800	
5	-1.132	-16.914	-50.939	-320.459	+201.402	+323.047		
7	+0.827	+29.271	+238.708	+114.325	-793.319			
9	-1.222	-41.420	-207.161	+695.641				
11	+0.783	+40.002	+211.161					
13	-0.736	+17.892						
15	-0.186							
Σ	-0.517	+30.709	-202.420	+483.790	-478.652	+207.505	-33.965	+1.14

$$\frac{\sigma_{yy}}{p} \Big|_{y=1} = -2.528x - 7.129x^3 + 135.005x^5 - 410.188x^7 + 445.838x^9 - 170.376x^{11} + 17.156x^{13} - 0.186x^{15}$$

$$\sigma_{xy} = p \sum_{s=0}^{14} \sum_{m=1}^{15-s} x^s y^m \quad s=0,2,\dots,14 \quad m=1,3,\dots,15 \quad s+m \leq 15$$

$s \setminus m$	1	3	5	7	9	11	13	15
0	-0.451	-0.368	+0.776	-0.740	+0.822	-0.604	+0.826	+0.060
2	+3.079	-1.403	+16.005	-14.882	+34.880	-47.012	-7.997	
4	-2.478	-27.432	+0.574	-219.091	+271.416	+125.399		
6	+5.638	+33.959	+320.459	-268.536	-538.411			
8	-7.318	-119.354	-85.744	+793.319				
10	+8.284	+82.865	-417.385					
12	-6.667	+70.387						
14	-2.556							
Σ	-2.469	+38.654	-165.315	+290.070	-231.293	+77.783	-7.171	+0.060

$$\frac{\sigma_{xy}}{p} \Big|_{y=1} = 0.321 - 17.330x^2 + 148.388x^4 - 446.891x^6 + 580.903x^8 - 326.236x^{10} + 63.720x^{12} - 2.556x^{14}$$

Stan AA

Przykład 1 $r=0.5$

$$\hat{\sigma}_{xx} = p W_{sm} x^s y^s \quad s, m = 1, 3, \dots, 15 \quad s+m = 16$$

$s \setminus m$	1	3	5	7	9	11	13	15
1.	+0.607	+0.570	-0.234	-1.000	-1.838	-1.143	-0.665	-0.171
3	-2.250	-6.006	-5.098	+7.817	+11.986	+12.548	+5.129	
5	+3.837	+17.196	+13.474	-10.862	-42.959	-33.371		
7	-4.185	-20.650	-21.425	+28.976	+70.976			
9	+2.907	+14.920	+9.153	-52.633				
11	-1.303	-6.402	+13.459					
13	+0.428	-0.875						
15	+0.001							
Σ	+0.042	-1.246	+9.330	-27.702	+37.206	-21.966	+4.464	-0.171

$$\frac{\hat{\sigma}_{xx}}{p} |_{y=1} = -3.873x + 24.127x^3 - 52.684x^5 + 52.733x^7 - 25.652x^9 + 5.754x^{11} - 0.446x^{13} + 0.001x^{15}.$$

$$\hat{\sigma}_{yy} = p W_{sm} x^s y^m \quad s, m = 1, 3, \dots, 15 \quad s+m = 16$$

$s \setminus m$	1	3	5	7	9	11	13	15
1	-1.019	-2.250	-1.802	-0.728	+0.651	+0.654	+0.483	+0.147
3	+3.930	+12.792	+17.196	+6.416	-3.017	-7.811	-4.278	
5	-5.873	-29.295	-43.364	-21.425	+16.903	+26.734		
7	+5.913	+34.882	+53.712	+15.691	-52.633			
9	-4.093	-23.889	-35.209	+35.249				
11	+1.792	+11.139	-6.821					
13	-0.611	+0.024						
15	+0.024							
Σ	+0.063	+3.404	-16.288	+35.203	-38.096	+19.577	-3.796	+0.147

$$\frac{\hat{\sigma}_{yy}}{p} |_{y=1} = -3.864x + 25.227x^3 - 56.320x^5 + 57.568x^7 - 27.942x^9 + 6.110x^{11} - 0.587x^{13} + 0.024x^{15}.$$

$$\sigma_{xy} = p \sum_{s,m} x^s y^m \quad s, m = 0, 2, \dots, 16 \quad s+m \leq 16$$

$s \backslash m$	0	2	4	6	8	10	12	14	16
0	-0.059	-0.303	-0.143	+0.039	+0.125	+0.184	+0.095	+0.047	+0.011
2	+0.509	+3.375	+4.505	+2.549	-2.931	-3.596	-3.137	-1.099	
4	-0.982	-9.594	-21.495	-11.228	+6.789	+21.479	+13.905		
6	+0.979	+14.647	+36.137	+24.996	-25.354	-49.011			
8	-0.739	-13.081	-33.570	-13.730	+59.212				
10	+0.409	+7.167	+17.605	-24.674					
12	-0.149	-2.785	+2.842						
14	+0.044	-0.005							
16	-0.001								
Σ	+0.009	-0.579	+5.880	-22.049	+37.840	-30.944	+10.863	-1.052	+0.011

$$\sigma_{xy} |_{y=1} = -0.004 + 0.174x^2 - 1.127x^4 + 2.393x^6 - 1.908x^8 + 0.506x^{10} - 0.092x^{12} + 0.039x^{14} - 0.001x^{16}.$$

Przykład 2 $r=0.1$

$$\sigma_{xx} = p \sum_{s,m} x^s y^m \quad s, m = 1, 3, \dots, 15 \quad s+m \leq 16$$

$s \backslash m$	1	3	5	7	9	11	13	15
1	1.080	-0.676	-2.437	+0.641	+0.570	-0.850	-1.335	-0.476
3	-1.965	+2.719	-6.312	-15.379	+2.027	+23.853	+14.442	
5	+0.805	+8.136	+50.222	+41.490	-71.413	-95.247		
7	-1.423	-32.452	-90.946	+19.946	+203.883			
9	+3.416	+38.630	+48.143	-158.31				
11	-2.846	-19.622	+43.045					
13	+1.173	-3.288						
15	+0.030							
Σ	+0.230	-6.554	+42.382	-11.611	+135.067	-72.244	+13.107	-0.477

$$\frac{\sigma_{xx}}{p} |_{y=1} = -3.483x + 19.385x^3 - 66.006x^5 + 99.675x^7 - 68.121x^9 + 20.577x^{11} - 2.115x^{13} + 0.0302x^{15}.$$

$$\hat{b}_{yy} = p \sum_{sm} w_{sm} x^s y^m \quad s, m = 1, 3, \dots, 15 \quad s+m \leq 16$$

$s \backslash m$	1	3	5	7	9	11
1	-1.775	-1.965	+0.816	-0.902	-1.282	+0.111
3	+4.607	+2.684	+8.136	+23.915	+11.525	-12.984
5	-2.426	-9.960	-68.150	-90.279	+11.635	+77.846
7	+1.685	+40.989	+139.067	+82.530	-158.310	
9	-4.127	-52.182	-107.921	+112.736		
11	+3.586	+30.490	-25.644			
13	-1.591	+1.057				
15	+0.034					
Σ	-0.010	+11.114	-53.696	+128.002	-136.431	+64.973

$$\frac{\hat{b}_{yy}}{p} \Big|_{y=1} = -3.668x + 25.672x^3 - 81.333x^5 + 105.960x^7 - 51.495x^9 + 8.432x^{11} - 0.533x^{12} + 0.034x^{15}$$

$$\hat{b}_{xy} = p \sum_{sm} w_{sm} x^s y^m \quad s, m = 0, 2, \dots, 16 \quad s+m \leq 16$$

$s \backslash m$	0	2	4	6	8	10	12	14	16
0	-0.120	-0.540	+0.169	+0.406	-0.080	-0.057	+0.071	+0.095	+0.030
2	+0.888	+2.948	-2.039	+3.156	+5.767	-0.608	-5.963	-3.095	
4	-1.152	-2.013	-10.170	-41.852	-25.931	+35.706	+39.686		
6	+0.404	+4.980	+56.791	+105.325	-17.452	-142.718			
8	-0.210	-15.371	-86.917	-72.214	+178.098				
10	+0.413	+15.654	+53.960	-78.915					
12	-0.299	-7.622	+10.685						
14	+0.113	-0.226							
16	-0.002								
Σ	+0.035	-2.191	+22.480	-84.094	+140.401	-107.677	+33.794	-2.999	+0.03

$$\frac{\hat{b}_{xy}}{p} \Big|_{y=1} = -0.026 + 1.054x^2 - 5.725x^4 + 7.330x^6 + 3.386x^8 - 8.888x^{10} + 2.763x^{12} - 0.113x^{14} - 0.002x^{16}$$

Przykład 3 $r = 0.01$

$$\sigma_{xx} = p_{sm}^w x^s y^m \quad s, m, \dots, 15 \quad s+m \leq 16$$

$s \backslash m$	1	3	5	7	9	11	13	15
1	+1.222	-1.011	-0.870	+0.793	-1.304	-2.457	-6.945	-0.314
3	-2.004	-3.131	-17.866	-13.297	+9.594	+145.186	+17.317	
5	+2.749	+30.180	+88.721	+93.066	-603.773	-184.527		
7	-6.071	-71.198	-220.674	+701.187	+612.816			
9	+8.346	+96.745	-214.279	-742.347				
11	-7.210	+3.551	+332.899					
13	+1.225	-49.020						
15	+1.582							
Σ	-0.161	+6.116	-32.068	+39.402	+17.333	-41.798	+10.371	-0.314

$$\sigma_{xx}|_{y=1} = -10.887x + 135.798x^3 - 573.584x^5 + 1016x^7 + \\ -851.535x^9 + 329.240x^{11} - 47.795x^{13} + 1.582x^{15}.$$

$$\sigma_{yy} = p_{sm}^w x^s y^m \quad s, m = 1, 3 \dots 15 \quad s+m = 16$$

$s \backslash m$	1	3	5	7	9	11	13	15
1	-1.959	-2.004	-0.939	-2.552	-1.108	+0.523	+5.584	+0.495
3	+5.019	+9.163	+30.180	+42.248	+25.852	-109.777	-23.657	
5	-4.558	-42.495	-149.517	-220.674	+409.026	+233.984		
7	+7.830	+100.149	+348.282	-367.335	-742.347			
9	-10.83	-132.192	+19.531	+871.879				
11	+9.144	+31.857	-382.357					
13	-2.587	+55.361						
15	-1.767							
Σ	+0.337	+19.840	-134.819	+323.568	-308.578	+124.730	-18.073	+0.495

$$\sigma_{yy}|_{x=1} = -1.961x - 20.972x^3 + 225.766x^5 - 653.421x^7 + \\ + 748.460x^9 - 341.355x^{11} + 52.774x^{13} - 1.763x^{15}.$$

$$\sigma_{xy} = p W_{sm} x^s y^m \quad s, m = 0, 2, \dots, 16 \quad s + m = n$$

s \ m	0	2	4	6	8	10	12	14	16
0	-0.133	-0.611	+0.253	+0.145	-0.099	+0.130	+0.205	+0.496	+0.02
2	+0.980	+3.006	+2.348	+8.934	+4.987	-2.878	-36.296	-3.711	
4	-1.255	-6.872	-37.725	-73.934	-58.166	+301.887	+76.886		
6	+0.760	+21.247	+124.597	+257.453	-613.539	-428.970			
8	-0.979	-37.556	-217.676	+321.418	+835.141				
10	+1.076	+39.658	-9.766	-610.315					
12	-0.762	-7.964	+159.315						
14	+0.185	-11.863							
16	+0.110								
	-0.110	-0.956	+21.346	-96.299	+168.323	-129.832	+40.794	-3.214	+0.02

$$\frac{\sigma_{xy}}{p} \Big|_{y=1} = 0.405 - 22.631x^2 + 200.82x^4 - 638.452x^6 + 900.348x^8 - 579.348x^{10} + 150.589x^{12} - 11.678x^{14} + 0.110x^{16}.$$

Warto zwrócić uwagę na interpretację matematyczną elementów zamieszczonych powyżej tabelic. Interpretacja ta jest następująca. Element tablicy "W_{sm}" jest wartością pochodnej rzędu "s+m" funkcji odpowiedniej składowej tensora naprężenia w początku układu współrzędnych. To jest

$$W_{sm} = D^s d^m \sigma_{ij} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}}$$

W oparciu o powyżej zamieszczone tablice wykonano obliczenia wartości naprężeń występujących w poszczególnych stanach wzdłuż linii brzegowych i środkowych tarczy. Tablice wartości tych naprężeń zestawiono w dalszym ciągu pracy.

Stan SS

Przykład 1 $r = 0,5$

Współrzędna x lub y	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Linia											
OB $x=0$	+0,206	+0,203	-0,194	-0,177	-0,149	-0,107	-0,042	+0,057	+0,205	+0,422	+0,728
OA $y=0$	-0,206	-0,201	-0,187	-0,166	-0,138	-0,108	-0,074	-0,041	-0,009	+0,019	+0,038
AC $x=1$	+0,038	+0,022	-0,014	-0,038	-0,028	+0,009	+0,040	+0,026	-0,022	-0,031	+0,052
BC $y=1$	+0,728	+0,698	+0,615	+0,500	+0,369	+0,224	+0,058	-0,122	-0,263	-0,247	+0,052
OB $x=0$	-0,710	-0,706	-0,692	-0,668	-0,636	-0,597	-0,552	-0,507	-0,469	-0,456	-0,486
OA $y=1$	-0,710	-0,722	-0,758	-0,815	-0,888	-0,975	-1,067	-1,161	-1,248	-1,317	-1,344
AC $x=1$	-1,344	-1,358	-1,399	-1,459	-1,521	-1,561	-1,555	-1,507	-1,456	-1,464	-1,501
BC $y=1$	-0,486	-0,471	-0,456	-0,507	-0,681	-0,976	-1,307	-1,542	-1,586	-1,492	-1,501
AC $x=1$	0,00	-0,007	-0,003	+0,008	+0,014	+0,001	-0,024	-0,029	+0,016	+0,068	-0,115
BC $y=1$	0,000	+0,050	+0,062	+0,023	-0,037	-0,068	-0,037	+0,036	+0,071	-0,006	-0,115

Przykład 2. $r = 0.1$

Współrzędna x lub y	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
Linia											
OB $x=0$	-0.402	-0.393	-0.366	-0.315	-0.238	-0.130	+0.011	+0.185	+0.390	+0.640	+1.029
OA $y=0$	-0.402	-0.398	-0.385	-0.361	-0.324	-0.272	-0.206	-0.127	-0.047	+0.015	+0.018
AC $x=1$	+0.018	+0.015	+0.004	-0.015	-0.030	-0.023	+0.017	+0.054	+0.014	-0.090	+0.250
BC $y=1$	+1.029	+0.941	+0.755	+0.652	+0.801	+1.227	+1.753	+2.050	+1.833	+1.101	+0.250
OB $x=0$	-0.488	-0.484	-0.473	-0.457	-0.440	-0.427	-0.419	-0.415	-0.410	-0.405	-0.438
OA $y=0$	-0.488	-0.505	-0.557	-0.643	-0.765	-0.920	-1.102	-1.296	-1.476	-1.598	-1.573
AC $x=1$	-1.573	-1.649	-1.837	-2.050	-2.222	-2.385	-2.680	-3.315	-4.405	-5.831	-7.214
BC $y=1$	-0.438	-0.455	-0.503	-0.568	-0.602	-0.537	-0.359	-0.241	-0.712	-2.696	-7.214
AC $x=1$	+0.000	+0.047	+0.053	+0.012	-0.040	-0.052	-0.005	+0.048	+0.022	-0.049	+0.227
BC $y=1$	0.000	+0.077	+0.084	+0.009	-0.081	-0.093	+0.005	+0.115	+0.061	-0.145	+0.227

Przykład 3 $r = 0,01$

Współrzędna x lub y	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
Linia											
OB $x=0$	-0.449	-0.439	-0.407	-0.351	-0.268	-0.154	-0.007	+0.184	+0.467	+1.012	+2.322
OA $y=0$	-0.449	-0.445	-0.433	-0.411	-0.378	-0.330	-0.263	-0.175	-0.066	+0.055	+0.129
AC $x=1$	+0.129	+0.054	-0.106	-0.201	-0.104	+0.167	+0.393	+0.249	-0.355	-0.655	+1.882
BC $y=1$	+2.323	+1.788	+0.556	-0.475	-0.438	+0.906	+2.883	+4.217	+3.938	+2.463	+1.882
OB $x=0$	-0.443	-0.439	-0.428	-0.412	-0.392	-0.368	-0.336	-0.296	-0.255	-0.289	-0.692
OA $y=0$	-0.443	-0.461	-0.515	-0.606	-0.733	-0.898	-1.096	-1.319	-1.546	-1.719	-1.663
AC $x=1$	-1.663	-1.789	-2.071	-2.293	-2.299	-2.188	-2.408	-3.632	-6.372	-10.392	-14.155
BC $y=1$	1-0.692	-0.543	-0.271	-0.238	-0.616	-1.089	-0.951	+0.172	+1.131	-1.748	-14.155
AC $x=1$	0.000	+0.001	-0.025	-0.080	-0.124	-0.100	+0.015	+0.178	+0.254	+0.075	-0.454
BC $y=1$	0.000	+0.691	+0.819	+0.249	-0.581	-0.934	-0.380	+0.652	+0.936	-0.273	-0.454

Stan SA

Przykład 1 $r = 0.5$

Współrzędna x lub y	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
Linia												
$\sqrt{0} a$	OB $x=0$	0.000	+0.011	+0.018	+0.018	+0.007	-0.021	-0.076	-0.169	-0.316	-0.534	-0.826
	AC $x=1$	0.000	-0.026	-0.025	+0.003	+0.031	+0.023	-0.018	-0.041	+0.002	+0.053	-0.118
	BC $y=1$	-0.826	-0.803	-0.736	-0.634	-0.494	-0.306	-0.068	+0.176	+0.317	+0.217	-0.118
$\sqrt{1} a$	OB $x=0$	0.000	-0.062	-0.126	-0.191	-0.257	-0.326	-0.392	-0.454	-0.499	-0.512	-0.479
	AC $x=1$	0.000	+0.096	+0.190	+0.284	+0.382	+0.479	+0.546	+0.544	+0.469	+0.405	+0.500
	BC $y=1$	-0.479	-0.508	-0.554	-0.524	-0.340	-0.015	+0.339	+0.558	+0.574	+0.485	+0.500
$\sqrt{0} a$	OA $y=0$	0.000	+0.061	+0.118	+0.165	+0.198	+0.215	+0.213	+0.190	+0.145	+0.076	-0.012
	AC $x=1$	-0.012	-0.005	+0.011	+0.016	+0.003	-0.013	-0.008	+0.018	+0.018	-0.042	+0.036
	BC $y=1$	0.000	-0.050	-0.057	-0.011	+0.046	+0.062	+0.013	-0.055	-0.052	+0.044	+0.036

Przykład 2 $r = 0.1$

Współrzędna x lub y	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
Linia											
OB $x=0$	0.000	+0.013	+0.017	+0.003	-0.038	-0.114	-0.229	-0.386	-0.588	-0.860	-1.325
AC $x=1$	0.000	-0.018	-0.023	-0.009	+0.014	+0.026	+0.009	-0.025	-0.021	+0.044	-0.139
BC $y=1$	-1.325	-1.204	-0.940	-0.768	-0.894	-1.333	-1.850	-2.067	-1.728	-0.943	-0.139
OB $x=0$	0.000	-0.100	-0.197	-0.288	-0.369	-0.437	-0.491	-0.532	-0.565	-0.586	-0.540
AC $x=1$	0.000	+0.170	+0.382	+0.651	+0.966	+1.319	+1.749	+2.369	+3.313	+4.623	+6.115
BC $y=1$	-0.541	-0.535	-0.507	-0.449	-0.397	-0.437	-0.620	-0.773	-0.310	+1.732	+6.115
OA $y=0$	0.000	+0.100	+0.196	+0.284	+0.358	+0.408	+0.425	+0.397	+0.314	+0.179	+0.013
AC $x=1$	0.013	+0.009	-0.001	-0.005	0.000	+0.005	-0.001	-0.006	+0.016	0.030	-0.277
BC $y=1$	0.000	-0.110	-0.118	-0.010	+0.115	+0.124	-0.015	-0.157	-0.067	+0.197	-0.277

Przykład 3 $r=0.01$

Współrzędna x lub y	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
Linia												
M a	OB $x=0$	0.000	+0.014	+0.016	-0.005	-0.057	-0.146	-0.277	-0.458	-0.725	-1.204	-2.262
	AC $x=1$	0.000	+0.140	+0.255	+0.268	+0.082	-0.292	-0.594	-0.375	+0.533	+0.993	-2.847
	BC $y=1$	-2.262	-1.859	-0.920	-0.116	-0.113	-1.149	-2.798	-4.133	-4.324	-3.434	-2.847
M a	OB $x=0$	0.000	-0.111	-0.219	-0.317	-0.403	-0.479	-0.546	-0.607	-0.656	-0.634	-0.320
	AC $x=1$	0.000	+1.231	+1.844	+1.587	+0.775	+0.190	+0.731	+2.912	+6.484	+10.379	+13.127
	BC $y=1$	-0.320	-0.451	-0.694	-0.735	-0.415	-0.006	-0.128	-1.128	-1.993	+0.743	+13.127
M a	OA $y=0$	0.000	+0.112	+0.222	+0.327	+0.422	+0.505	+0.564	+0.585	+0.528	+0.271	-0.548
	AC $x=1$	-0.548	-0.349	+0.110	+0.503	+0.537	+0.172	-0.323	-0.535	-0.267	+0.216	+0.508
	BC $y=1$	0.000	-0.533	-0.628	-0.179	+0.476	+0.758	+0.315	-0.540	-0.837	+0.108	+0.508

Stan AS

Przykład 1 $r=0,5$

Współrzędna x lub y	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
Linia												
$\frac{x}{a} \frac{y}{b}$	OA y=0	0,000	+0,019	+0,035	+0,045	+0,048	+0,044	+0,035	+0,022	+0,010	+0,002	+0,007
	AC x=1	+0,007	+0,002	-0,007	-0,008	+0,002	+0,011	+0,004	-0,016	-0,010	+0,032	-0,093
	BC y=1	0,000	-0,340	-0,568	-0,613	-0,476	-0,226	+0,018	+0,144	+0,105	-0,033	-0,093
$\frac{x}{a} \frac{y}{b}$	OA y=0	0,000	-0,026	-0,046	-0,057	-0,056	-0,044	-0,024	+0,001	+0,024	+0,037	+0,027
	AC x=1	+0,027	+0,043	+0,079	+0,115	+0,133	+0,139	+0,152	+0,185	+0,216	+0,208	+0,207
	BC y=1	+0,000	-0,357	-0,581	-0,600	-0,425	-0,149	+0,097	+0,215	+0,194	+0,138	+0,207
$\frac{x}{a} \frac{y}{b}$	OB x=0	0,000	-0,020	-0,042	-0,067	-0,096	-0,133	-0,174	-0,217	-0,246	-0,216	-0,014
	AC x=1	0,000	-0,014	-0,014	+0,001	+0,015	+0,012	-0,006	-0,017	-0,001	+0,014	+0,027
	BC y=1	-0,013	-0,008	+0,004	+0,013	+0,012	-0,001	-0,013	-0,012	+0,004	+0,015	+0,027

Przykład 2 $r = 0,1$

Współrzędna x lub y	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
Linia												
$\frac{x a}{b}$	OA $y=0$	0.000	+0.039	+0.073	+0.097	+0.108	+0.104	+0.087	+0.059	+0.028	+0.008	+0.025
	AC $x=1$	+0.025	+0.009	-0.020	-0.028	-0.000	+0.031	+0.018	-0.034	-0.030	+0.073	-0.238
	BC $y=1$	0.000	-0.252	-0.465	-0.618	-0.724	-0.811	-0.901	-0.979	-0.971	-0.762	-0.238
$\frac{x a}{b}$	OA $y=0$	0.000	-0.048	-0.088	-0.112	-0.115	-0.095	-0.055	-0.002	+0.047	+0.071	+0.023
	AC $x=1$	+0.023	+0.069	+0.177	+0.280	+0.341	+0.401	+0.577	+0.984	+1.621	+2.341	+3.053
	BC $y=1$	0.000	-0.320	-0.526	-0.572	-0.512	-0.465	-0.520	-0.608	-0.406	+0.636	+3.053
$\frac{x a}{b}$	OB $x=0$	0.000	-0.040	-0.081	-0.125	-0.171	-0.217	-0.258	-0.283	-0.282	-0.227	-0.060
	AC $x=1$	0.000	-0.044	-0.043	+0.003	+0.049	+0.039	-0.026	-0.066	+0.002	+0.085	-0.229
	BC $y=1$	-0.060	-0.037	+0.016	+0.058	+0.055	-0.001	-0.066	-0.070	+0.024	+0.107	-0.229

Przykład 3 $r = 0.01$

Współrzędna x lub y	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
Linia											
OA $y=0$	0.000	+0.044	+0.082	+0.109	+0.119	+0.108	+0.071	+0.005	-0.092	-0.190	-0.141
AC $x=1$	-0.141	-0.090	+0.037	+0.161	+0.177	+0.020	-0.234	-0.308	+0.092	+0.563	-1.503
BC $y=1$	0.000	-0.847	-1.153	-0.795	-0.199	-0.063	-0.791	-2.031	-2.780	-2.305	-1.503
OA $y=0$	0.000	-0.052	-0.094	-0.118	-0.117	-0.088	-0.033	+0.039	+0.093	+0.020	-0.517
AC $x=1$	-0.517	-0.229	+0.418	+0.930	+0.904	+0.394	+0.020	+0.654	+2.745	+5.635	+7.592
BC $y=1$	0.000	-0.258	-0.524	-0.703	-0.647	-0.350	-0.143	-0.516	-1.314	-0.359	+7.592
OB $x=0$	0.000	-0.046	-0.093	-0.144	-0.197	-0.252	-0.303	-0.343	-0.344	-0.219	+0.320
AC $x=1$	-0.000	-0.210	-0.234	-0.040	+0.211	+0.282	+0.074	-0.231	-0.278	+0.070	+0.319
BC $y=1$	+0.320	+0.162	-0.162	-0.327	-0.136	+0.246	+0.384	+0.018	-0.443	-0.135	+0.319

Stan AA

Przykład 1 $r = 0.5$

Współrzędna x lub y	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
Linia												
$\frac{AX}{\sqrt{9}}$	AC x=1	0.000	+0.003	+0.001	-0.004	-0.004	+0.003	+0.007	-0.002	-0.010	+0.010	-0.042
	BC y=1	0.000	-0.364	-0.598	-0.628	-0.465	-0.203	+0.029	+0.127	+0.076	-0.031	-0.042
$\frac{AA}{\sqrt{9}}$	AC x=1	0.000	+0.010	+0.035	+0.078	+0.125	+0.158	+0.174	+0.187	+0.205	+0.208	+0.213
	BC y=1	0.000	-0.362	-0.588	-0.603	-0.421	-0.141	+0.102	+0.210	+0.186	+0.138	+0.213
$\frac{AX}{\sqrt{9}}$	OB x=0	-0.059	-0.062	-0.072	-0.088	-0.111	-0.143	-0.182	-0.224	-0.252	-0.220	-0.004
	OA y=0	-0.059	-0.054	-0.040	-0.021	0.000	+0.019	+0.032	+0.037	+0.032	+0.021	+0.010
	AC x=1	+0.010	+0.005	-0.005	-0.008	-0.001	+0.008	+0.006	-0.006	-0.006	+0.008	-0.020
	BC y=1	-0.004	-0.002	+0.001	+0.004	+0.004	0.000	-0.005	-0.004	+0.003	+0.008	-0.020

Przykład 2 $r = 0.1$

Współrzędna x lub y	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
Linia												
$\frac{x}{a}$	AC $x=1$	0.000	+0.021	+0.014	-0.015	-0.028	-0.002	+0.034	+0.019	-0.031	-0.001	-0.058
$\frac{y}{a}$	BC $y=1$	0.000	-0.330	-0.561	-0.661	-0.683	-0.727	-0.864	-1.046	-1.095	-0.804	-0.058
$\frac{x}{a}$	AC $x=1$	0.000	-0.010	+0.071	+0.192	+0.334	+0.470	+0.648	+0.994	+1.594	+2.356	+3.070
$\frac{y}{a}$	BC $y=1$	0.000	-0.342	-0.553	-0.583	-0.496	-0.435	-0.503	-0.621	-0.435	+0.636	+3.070
$\frac{x}{a}$	OB $x=0$	-0.120	-0.126	-0.142	-0.167	-0.201	-0.239	-0.275	-0.301	-0.300	-0.239	-0.026
$\frac{y}{a}$	OA $y=0$	-0.120	-0.111	-0.087	-0.049	-0.006	+0.036	+0.067	+0.082	+0.076	+0.052	+0.035
$\frac{x}{a}$	AC $x=1$	+0.035	+0.016	-0.021	-0.033	-0.003	+0.029	+0.015	-0.035	-0.019	+0.070	-0.221
$\frac{y}{a}$	BC $y=1$	-0.026	-0.016	+0.007	+0.028	+0.027	-0.001	-0.038	-0.039	+0.023	+0.078	-0.221

Przykład 3 $r = 0.01$

Współrzędna x lub y	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
Linia												
$\frac{X P}{10}$	AC x=1	0.000	-0.011	+0.007	+0.047	+0.067	+0.004	-0.129	-0.188	+0.052	+0.393	-1.121
	BC y=1	0.000	-0.958	-1.262	-0.787	-0.082	+0.037	-0.806	-2.075	-2.630	-1.925	-1.121
$\frac{X P}{6}$	AC x=1	0.000	+0.055	+0.193	+0.383	+0.490	+0.434	+0.399	+0.891	+2.452	+5.045	+7.528
	BC y=1	0.000	-0.215	-0.496	-0.734	-0.703	-0.350	-0.070	-0.477	-1.386	-0.370	+7.528
$\frac{X P}{6}$	OB x=0	-0.133	-0.139	-0.157	-0.186	-0.224	-0.268	-0.313	-0.350	-0.349	-0.208	+0.406
	OA y=0	-0.133	-0.123	-0.096	-0.054	-0.006	+0.043	+0.083	+0.109	+0.090	+0.089	-0.019
	AC x=1	-0.019	-0.026	-0.028	+0.008	+0.078	+0.112	+0.039	-0.112	-0.170	+0.009	+0.162
BC y=1	+0.406	+0.199	-0.217	-0.414	-0.158	+0.311	+0.435	-0.037	-0.505	-0.028	+0.162	

Mając tablice wartości naprężeń występujących w poszczególnych stanach obliczono wartości sumaryczne w analizowanych trzech przypadkach. Zsumowane /z czterech stanów/ wartości liczbowe naprężeń wzdłuż linii brzegowych i środkowych tarczy podano poniżej:

Końcowe wyniki analizy naprężeń. Zsumowanie wyników.

Zamieszczone powyżej wyniki we wszystkich czterech stanach odnoszą się do pierwszej ćwiartki przyjętego układu współrzędnych /rys.2,3,4/. W oparciu o wyniki czterech stanów pierwszej ćwiartki obliczono wartości sumaryczne we wszystkich ćwiartkach przyjętego układu współrzędnych. Wzory sumacyjne wyrażające wartości końcowe poszczególnych ćwiartek poprzez odpowiadające im z pierwszej ćwiartki stanów: SS, SA, AS i AA są następujące:

Ćwiartka I.

Zsumowanie wartości ze stanów SS, SA, AS i AA według wzorów:

$$\bar{\sigma}_{xx} = \bar{\sigma}_{xx}^{SS} + \bar{\sigma}_{xx}^{SA} + \bar{\sigma}_{xx}^{AS} + \bar{\sigma}_{xx}^{AA} ,$$

$$\bar{\sigma}_{yy} = \bar{\sigma}_{yy}^{SS} + \bar{\sigma}_{yy}^{SA} + \bar{\sigma}_{yy}^{AS} + \bar{\sigma}_{yy}^{AA} ,$$

$$\bar{\sigma}_{xy} = \bar{\sigma}_{xy}^{SS} + \bar{\sigma}_{xy}^{SA} + \bar{\sigma}_{xy}^{AS} + \bar{\sigma}_{xy}^{AA} ,$$

Ćwiartka II.

Zsumowanie wartości ze stanów SS, SA, AS i AA według wzorów:

$$\bar{\sigma}_{xx} = \bar{\sigma}_{xx}^{SS} + \bar{\sigma}_{xx}^{SA} - \bar{\sigma}_{xx}^{AS} - \bar{\sigma}_{xx}^{AA}$$

$$\bar{\sigma}_{yy} = \bar{\sigma}_{yy}^{SS} + \bar{\sigma}_{yy}^{SA} - \bar{\sigma}_{yy}^{AS} - \bar{\sigma}_{yy}^{AA}$$

$$\bar{\sigma}_{xy} = - [\bar{\sigma}_{xy}^{SS} + \bar{\sigma}_{xy}^{SA} - \bar{\sigma}_{xy}^{AS} - \bar{\sigma}_{xy}^{AA}]$$

Ćwiartka III

Zsumowanie wartości ze stanów SS, SA, AS i AA według wzorów:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^{SS} - \sigma_{xx}^{SA} - \sigma_{xx}^{AS} + \sigma_{xx}^{AA}$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{yy}^{SS} - \sigma_{yy}^{SA} - \sigma_{yy}^{AS} + \sigma_{yy}^{AA}$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{xy}^{SS} - \sigma_{xy}^{SA} - \sigma_{xy}^{AS} + \sigma_{xy}^{AA}$$

Ćwiartka IV

Zsumowanie wartości ze stanów SS, SA, AS i AA według wzorów:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^{SS} - \sigma_{xx}^{SA} + \sigma_{xx}^{AS} - \sigma_{xx}^{AA}$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{yy}^{SS} - \sigma_{yy}^{SA} + \sigma_{yy}^{AS} - \sigma_{yy}^{AA}$$

$$\sigma_{xy} = - \left[\sigma_{xy}^{SS} - \sigma_{xy}^{SA} + \sigma_{xy}^{AS} - \sigma_{xy}^{AA} \right]$$

Wzory powyższe są łatwe do zapamiętania, jeżeli zauważymy, że ujemnej wartości współrzędnej przy jej asymetrii odpowiada wartość logiczna minus w naprężeniach normalnych.

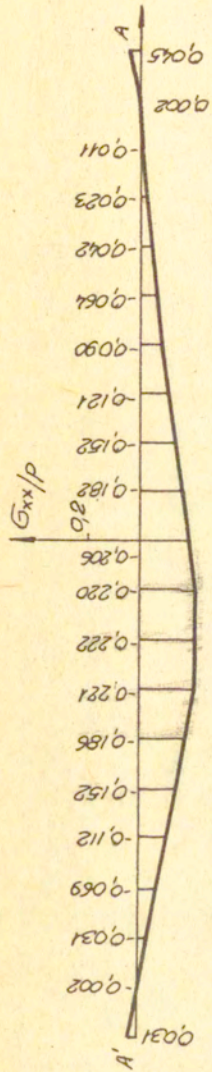
W naprężeniach stycznych ujemnej wartości współrzędnej przy jej symetrii odpowiada znak logiczny minus. Wszystkie inne przypadki mają znak logiczny plus.

Według powyższych wzorów w dalszym ciągu pracy zestawiono wyniki obliczeń naprężeń trzech prezentowanych przykładów.

Przykład 1 $r = 0.5$ Składowe $\frac{\sigma_{xx}}{p}$

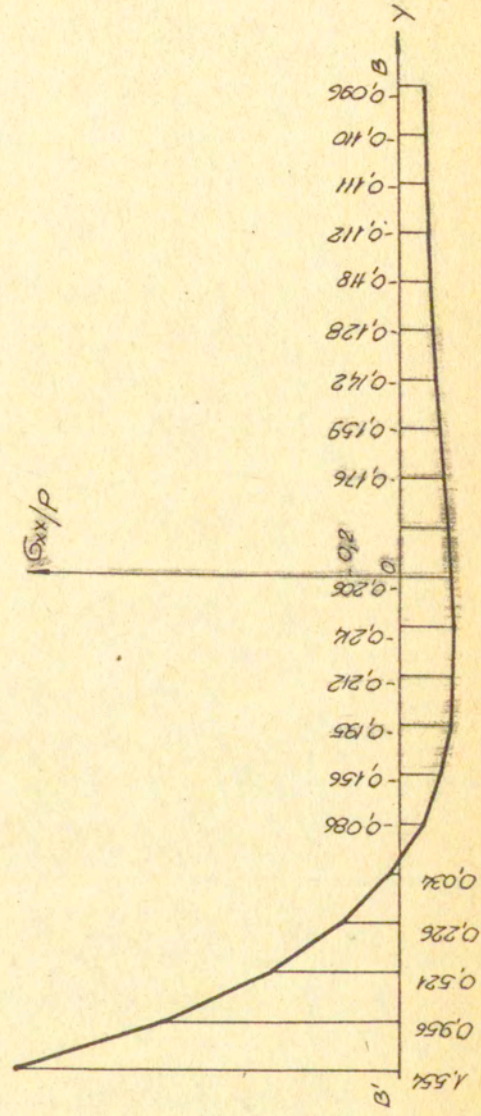
Współrzędna x lub y	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Linia											
0B $x=0$	-0,206	-0,192	-0,176	-0,159	-0,142	-0,128	-0,118	-0,112	-0,111	-0,112	-0,096
0B ¹ $x=0$	-0,206	-0,214	-0,212	-0,195	-0,156	-0,086	+0,034	+0,226	+0,521	+0,956	+1,554
0A $y=0$	-0,206	-0,182	-0,152	-0,121	-0,090	-0,064	-0,042	-0,020	+0,001	+0,022	+0,045
0A ¹ $y=0$	-0,206	-0,220	-0,222	-0,211	-0,186	-0,152	-0,110	-0,064	-0,020	+0,017	+0,031
AC ¹ $x=1$	+0,045	+0,001	+0,045	-0,047	+0,001	+0,046	+0,033	-0,033	-0,040	+0,064	-0,201
AC ⁴ $x=1$	+0,045	+0,047	+0,003	-0,045	-0,053	-0,006	+0,055	+0,053	-0,024	-0,062	+0,109
A ¹ C ² $x=-1$	+0,031	-0,009	-0,033	-0,023	+0,005	+0,018	+0,011	+0,003	0,000	-0,020	+0,079
A ¹ C ³ $x=-1$	+0,031	+0,049	+0,019	-0,037	-0,065	-0,021	+0,061	+0,081	-0,024	-0,106	+0,211
BC ¹ $y=1$	-0,098	-0,809	-1,287	-1,375	-1,066	-0,511	+0,037	+0,325	+0,235	-0,094	-0,201
BC ² $y=1$	-0,098	+0,599	+1,045	+1,107	+0,816	+0,347	-0,056	-0,217	-0,127	-0,034	+0,079
B ¹ C ³ $y=-1$	+1,554	+1,477	+1,321	+1,119	+0,874	+0,553	+0,137	-0,315	-0,609	-0,462	+0,211
B ¹ C ⁴ $y=-1$	+1,554	+1,525	+1,381	+1,149	+0,852	+0,507	+0,115	-0,281	-0,551	-0,466	+0,109

Przykład 1. Składowa naprężenia σ_{xx}



Zmienne: wartość osi x ($y=0$)

Zmienne: wartość osi y ($x=0$)

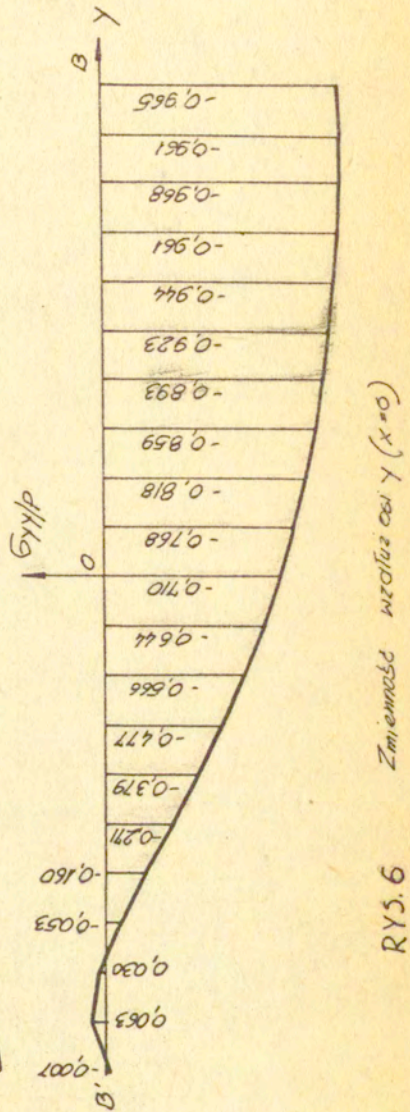
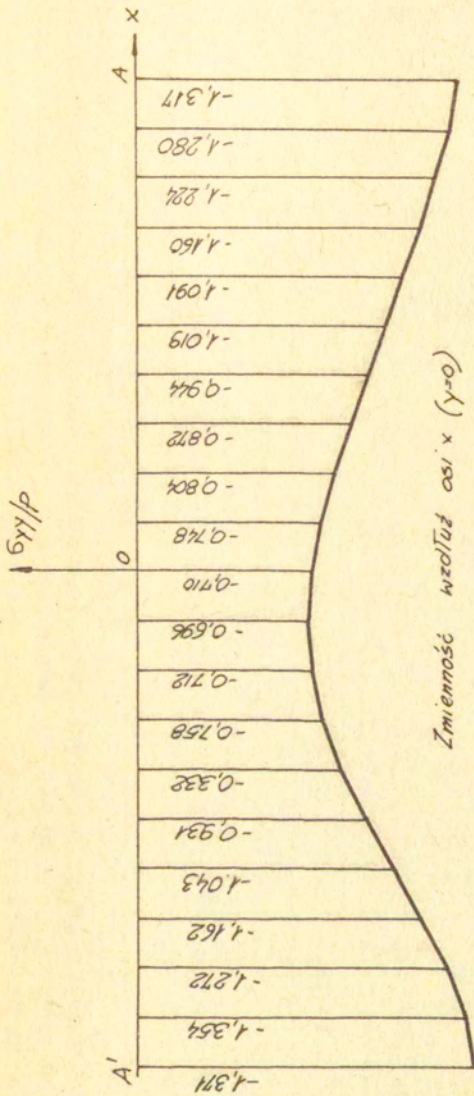


RYS. 5

Składowa $\frac{xy}{p}$

Współrzędna x lub y	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
Linia OBx=0	-0.710	-0.768	-0.818	-0.859	-0.893	-0.923	-0.944	-0.961	-0.968	-0.961	-0.965
OB ¹ x=0	-0.710	-0.644	-0.566	-0.477	-0.379	-0.271	-0.160	-0.053	+0.030	+0.063	-0.007
OA y=0	-0.710	-0.748	-0.804	-0.872	-0.944	-1.019	-1.091	-1.160	-1.224	-1.280	-1.317
OA ¹ y=0	-0.710	-0.697	-0.712	-0.758	-0.832	-0.930	-1.043	-1.162	-1.272	-1.355	-1.371
AC ¹ x=1	-1.317	-1.209	-1.095	-0.982	-0.881	-0.785	-0.683	-0.591	-0.566	-0.643	-0.581
AC ⁴ x=1	-1.317	-1.421	-1.545	-1.706	-1.895	-2.059	-2.123	-2.053	-1.914	-1.869	-2.007
A ¹ C ² x=-1	-1.371	-1.315	-1.323	-1.368	-1.397	-1.379	-1.335	-1.335	-1.407	-1.475	-1.421
A ¹ C ³ x=-1	-1.371	-1.487	-1.633	-1.780	-1.911	-2.021	-2.079	-2.049	-1.936	-1.869	-1.995
BC ¹ y=1	-0.965	-1.698	-2.179	-2.234	-1.867	-1.281	-0.769	-0.559	-0.632	-0.731	-0.581
BC ² y=1	-0.965	-0.260	+0.159	+0.172	-0.175	-0.701	-1.167	-1.409	-1.392	-1.283	-1.421
B ¹ C ³ y=-1	-0.007	+0.031	+0.091	+0.014	-0.337	-0.953	-1.641	-2.105	-2.168	-1.977	-1.995
B ¹ C ⁴ y=-1	-0.007	+0.042	+0.105	+0.020	-0.345	-0.969	-1.651	-2.095	-2.152	-1.977	-2.007

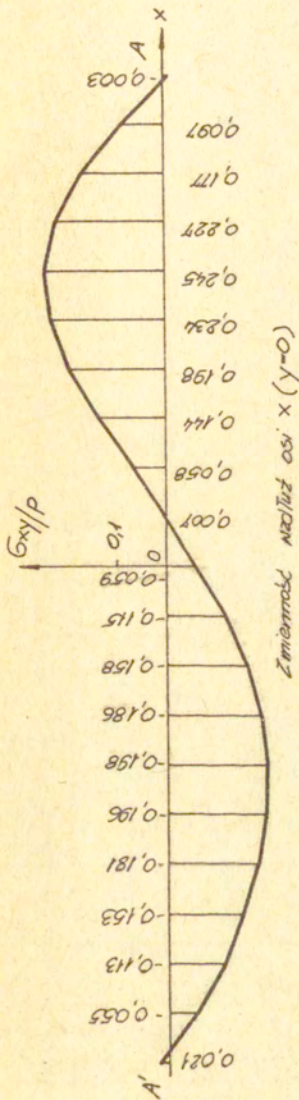
Przykład 1. Składowa naprężenia σ_{xy}



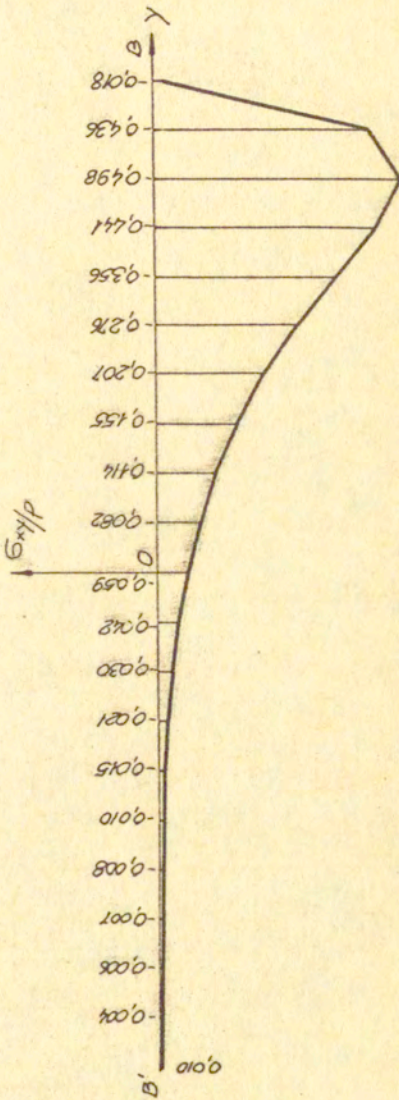
RY. 6

Współrzędna x lub y	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
Linia											
OB x=0	-0.059	-0.082	-0.114	-0.155	-0.207	-0.276	-0.356	-0.441	-0.498	-0.436	-0.018
OB ¹ x=0	-0.059	-0.042	-0.030	-0.021	-0.015	-0.010	-0.008	-0.007	-0.006	-0.004	+0.010
OA y=0	-0.059	+0.007	+0.058	+0.144	+0.198	+0.234	+0.245	+0.227	+0.177	+0.097	-0.003
OA ¹ y=0	-0.059	-0.115	-0.158	-0.184	-0.198	-0.196	-0.181	-0.153	-0.113	-0.055	+0.021
AC ¹ x=1	-0.003	-0.022	-0.012	+0.016	+0.031	+0.008	-0.032	-0.034	+0.030	+0.045	+0.033
AC ⁴ x=1	-0.003	+0.020	+0.022	-0.002	-0.027	-0.018	+0.028	+0.058	-0.006	-0.113	+0.089
A ¹ C ² x=-1	+0.021	+0.002	-0.028	-0.032	-0.003	+0.032	+0.032	-0.012	-0.044	-0.001	+0.071
A ¹ C ³ x=-1	+0.021	+0.016	-0.006	-0.018	-0.005	+0.010	-0.004	-0.036	-0.004	+0.101	-0.183
BC ¹ y=1	-0.017	-0.008	+0.013	+0.034	+0.031	0.000	-0.033	-0.025	+0.037	+0.074	+0.033
BC ² y=1	-0.017	-0.012	-0.003	0.000	+0.001	-0.002	-0.003	-0.007	-0.023	-0.028	+0.071
B ¹ C ³ y=-1	+0.009	+0.108	+0.119	+0.030	-0.085	-0.122	-0.033	+0.109	+0.133	-0.044	-0.183
B ¹ C ⁴ y=-1	+0.009	-0.096	-0.125	-0.048	+0.069	+0.124	+0.049	-0.093	-0.135	+0.030	+0.089

Przykład 1. Składowa naprężenia σ_{xy}



Zmienną wartość osi x ($y=0$)



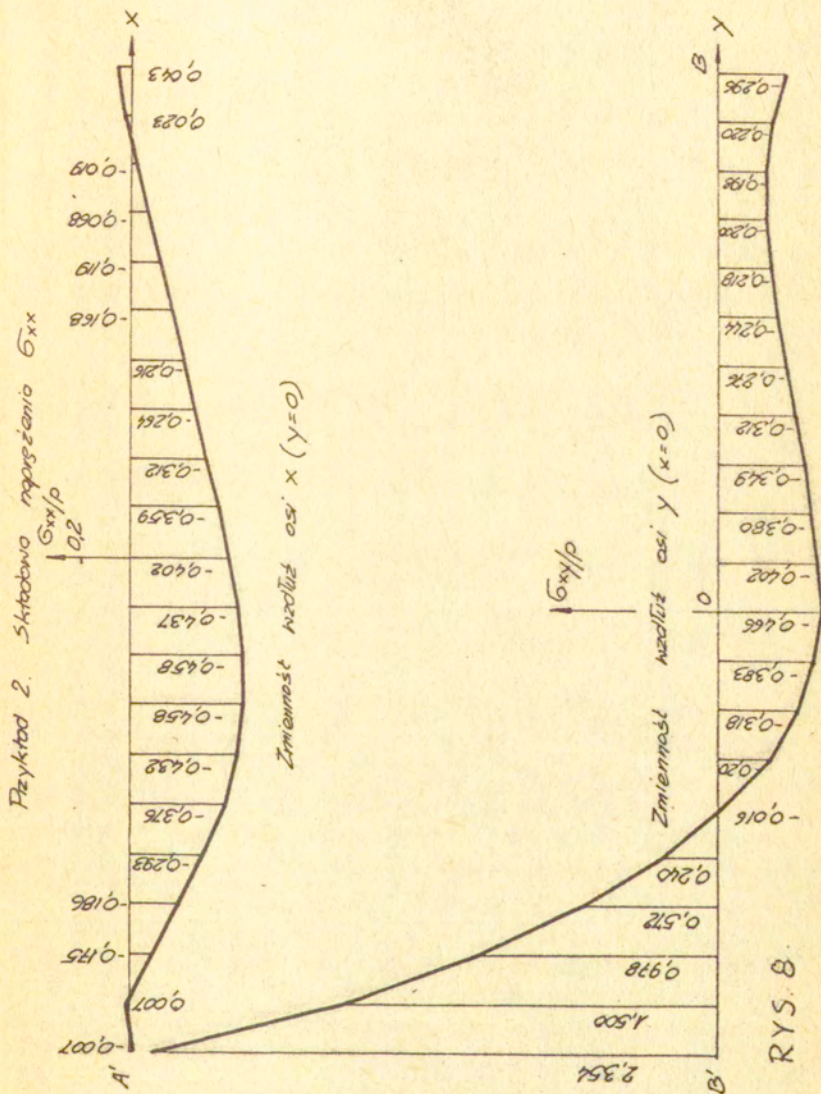
Zmienną wartość osi y ($x=0$)

RYS 7

Przykład 2 $r = 0,1$

Składowa $\frac{\sigma_{xx}}{P}$

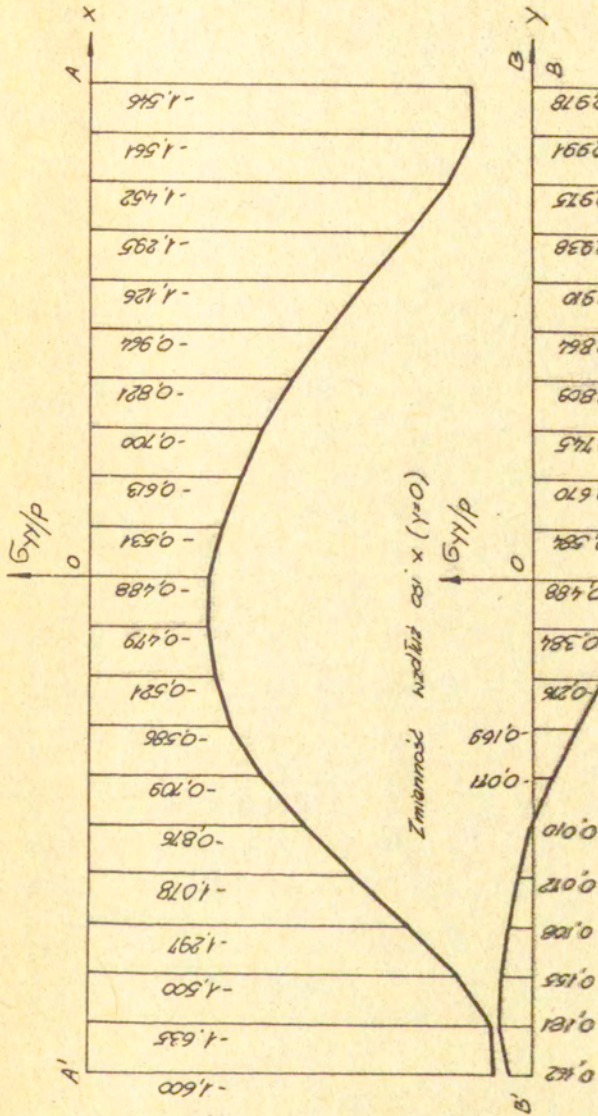
Współrzędna x lub y	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
Linia											
OB $x=0$	-0.402	-0.380	-0.349	-0.312	-0.276	-0.244	-0.218	-0.200	-0.198	-0.220	-0.296
OB ¹ $x=0$	-0.402	-0.406	-0.383	-0.318	-0.200	-0.016	+0.240	+0.572	+0.978	+1.500	+2.354
OA $y=0$	-0.402	-0.359	-0.312	-0.264	-0.216	-0.168	-0.119	-0.068	-0.019	+0.023	+0.043
OA ¹ $y=0$	-0.402	-0.437	-0.458	-0.458	-0.432	-0.376	-0.293	-0.186	-0.075	+0.007	-0.007
AC ¹ $x=1$	+0.043	+0.027	-0.025	-0.067	-0.047	+0.032	+0.078	+0.014	-0.074	+0.028	-0.185
AC ⁴ $x=1$	+0.043	+0.021	-0.007	-0.019	-0.019	-0.016	-0.008	+0.026	+0.032	-0.058	+0.209
A ¹ C ² $x=-1$	-0.007	-0.033	-0.013	+0.019	+0.015	-0.026	-0.026	+0.044	+0.058	-0.116	+0.408
A ¹ C ³ $x=-1$	-0.007	+0.045	+0.061	+0.007	-0.069	-0.082	+0.024	+0.132	+0.038	-0.206	+0.492
BC ¹ $y=1$	-0.296	-0.844	-1.211	-1.398	-1.500	-1.644	-1.862	-2.042	-1.961	-1.375	-0.185
BC ² $y=1$	-0.296	+0.319	+0.841	+1.163	+1.314	+1.432	+1.668	+2.008	+2.154	+1.691	+0.408
B ¹ C ³ $y=-1$	+2.354	+2.068	+1.599	+1.377	+1.736	+2.644	+3.640	+4.060	+3.454	+2.036	+0.492
B ¹ C ⁴ $y=-1$	+2.354	+2.229	+1.791	+1.463	+1.654	+2.476	+3.566	+4.174	+3.665	+2.056	+0.209



Składowa $\frac{\sigma_{yy}}{p}$

Współrzędna x lub y	ρ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
Linia											
OB x=0	-0.488	-0.584	-0.670	-0.745	-0.809	-0.864	-0.910	-0.948	-0.975	-0.991	-0.978
OB ¹ x=0	-0.488	-0.384	-0.276	-0.169	-0.071	+0.010	+0.072	+0.118	+0.155	+0.181	+0.102
OA y=0	-0.488	-0.554	-0.645	-0.756	-0.881	-1.016	-1.156	-1.295	-1.429	-1.527	-1.546
OA ¹ y=0	-0.488	-0.457	-0.468	-0.531	-0.650	-0.826	-1.046	-1.297	-1.523	-1.669	-1.600
AC ¹ x=1	-1.550	-1.400	-1.207	-0.927	-0.581	-0.195	+0.288	+1.027	+2.125	+3.490	+5.024
AC ⁴ x=1	-1.550	-1.760	-2.113	-2.613	-3.181	-3.773	-4.506	-5.693	-7.692	-10.469	-13.346
A ¹ C ² x=-1	-1.596	-1.558	-1.703	-1.871	-1.931	-1.937	-2.162	-2.923	-4.305	-6.096	-7.222
A ¹ C ³ x=-1	-1.596	-1.878	-2.325	-2.789	-3.195	-3.635	-4.364	-5.679	-7.733	-10.430	-13.312
BC ¹ y=1	-0.979	-1.652	-2.089	-2.172	-2.014	-1.874	-2.002	-2.243	-1.863	+0.308	+5.024
BC ² y=1	-0.979	-0.328	+0.069	+0.138	+0.009	-0.074	+0.044	+0.215	-0.181	-2.236	-7.222
B ¹ C ³ y=-1	+0.103	+0.058	-0.023	-0.130	-0.189	-0.070	+0.278	+0.519	-0.431	-4.428	-13.312
B ¹ C ⁴ y=-1	+0.103	+0.102	+0.031	-0.108	-0.221	-0.130	+0.244	+0.545	-0.373	-4.428	-13.346

Przykład 2. Składowo napięzenia σ_{yy}

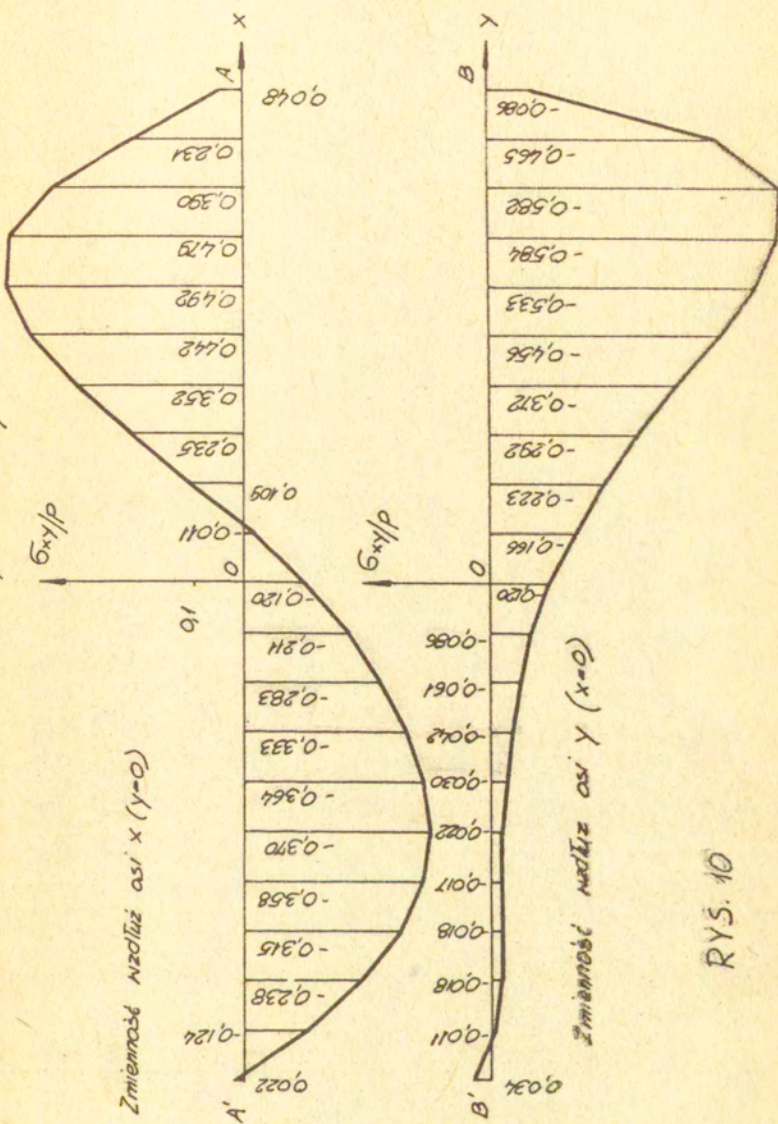


RYS. 9 Zmiennosci wartosci osi y ($x=0$)

Składowa $\frac{\sigma_{xy}}{p}$

Współrzędna x lub y	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
Linia											
OB x=0	-0.120	-0.166	-0.223	-0.292	-0.372	-0.456	-0.533	-0.584	-0.582	-0.465	-0.086
OB ¹ x=0	-0.120	-0.086	-0.061	-0.042	-0.030	-0.022	-0.017	-0.018	-0.018	-0.011	+0.034
OA y=0	-0.120	+0.011	+0.109	+0.235	+0.352	+0.442	+0.492	+0.479	+0.390	+0.231	+0.048
OA ¹ y=0	-0.120	-0.211	-0.283	-0.333	-0.364	-0.370	-0.358	-0.315	-0.238	-0.124	-0.022
AC ¹ x=1	+0.048	+0.027	-0.013	-0.023	+0.006	+0.006	-0.017	-0.059	+0.015	+0.112	-0.270
AC ⁴ x=1	+0.048	+0.021	-0.033	-0.053	-0.012	+0.032	+0.045	-0.023	-0.033	+0.040	-0.514
A ¹ C ² x=-1	+0.022	-0.085	-0.117	-0.037	+0.086	+0.100	-0.005	-0.143	-0.049	+0.210	-0.432
A ¹ C ³ x=-1	+0.022	+0.097	+0.075	-0.075	-0.019	-0.092	-0.082	+0.085	-0.009	-0.058	+0.328
BC ¹ y=1	-0.086	-0.086	-0.011	+0.085	+0.116	+0.029	-0.114	-0.151	+0.041	+0.237	-0.270
BC ² y=1	-0.086	-0.020	+0.057	+0.087	+0.048	-0.033	-0.094	-0.067	+0.053	+0.133	-0.432
B ¹ C ³ y=-1	+0.034	+0.208	+0.193	-0.011	-0.224	-0.217	+0.048	+0.303	+0.127	-0.371	+0.328
B ¹ C ⁴ y=-1	+0.034	-0.166	-0.211	-0.049	+0.168	-0.217	+0.008	-0.241	-0.129	+0.313	-0.514

Przykład 2. Sztokowa naprężenia σ_{xy}

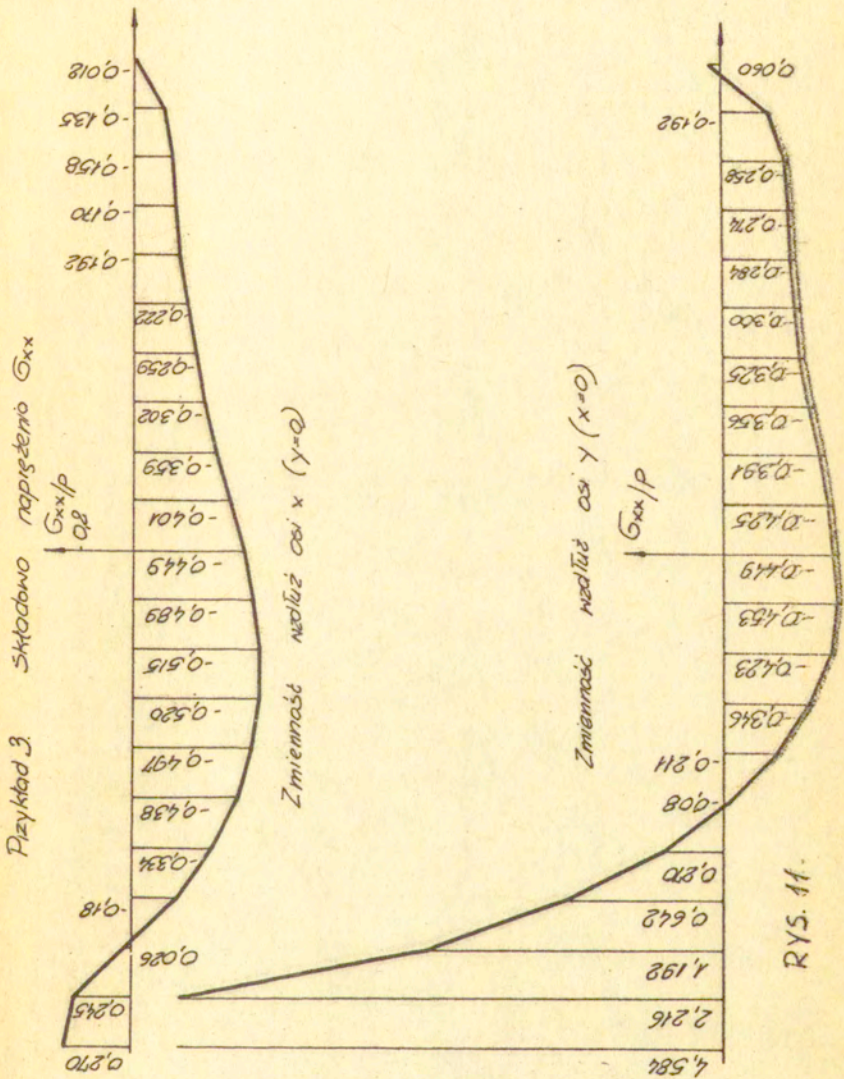


RY. 10

Przykład 3 $r = 0.01$

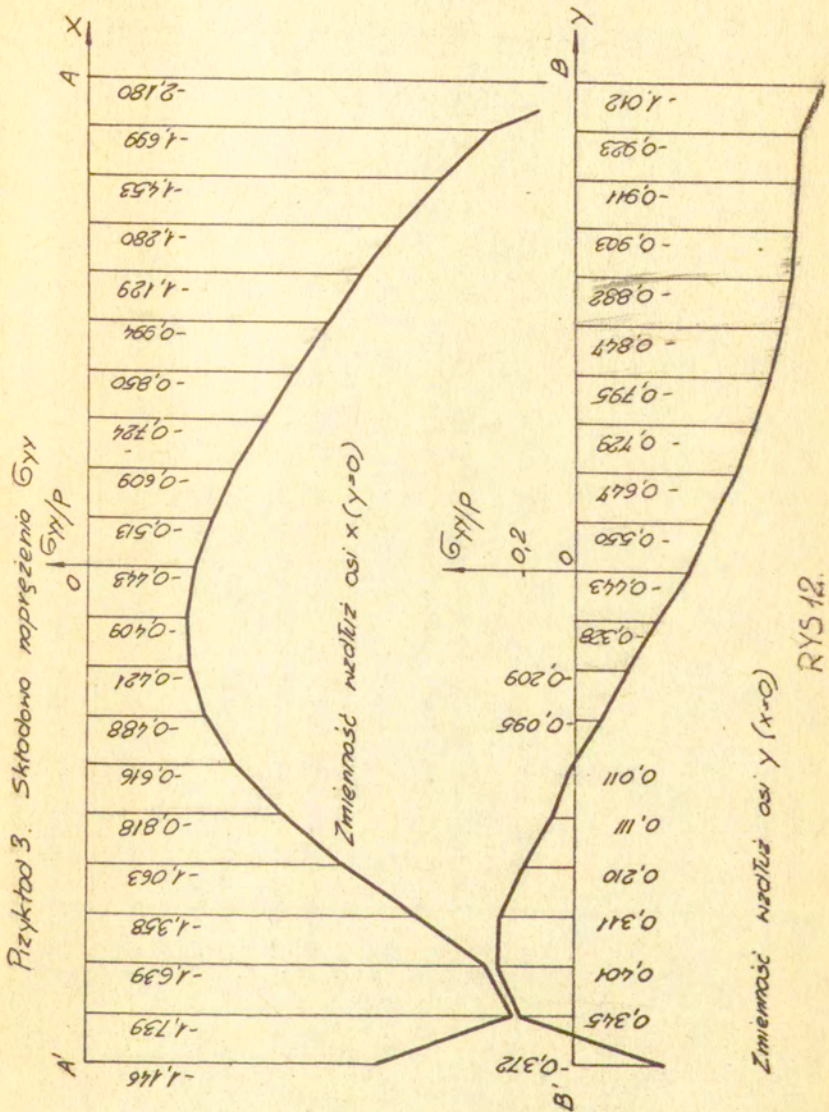
Składowa $\frac{6}{p}$

Współrzędna x lub y	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
Linia											
OB ^{x=0}	-0.449	-0.425	-0.391	-0.356	-0.325	-0.300	-0.284	-0.274	-0.258	-0.192	+0.060
OB ¹	-0.449	-0.453	-0.423	-0.346	-0.211	-0.008	+0.270	+0.642	+1.192	+2.216	+4.584
OA ^{y=0}	-0.449	-0.401	-0.351	-0.302	-0.259	-0.222	-0.192	-0.170	-0.158	-0.135	-0.012
OA ¹	-0.449	-0.489	-0.515	-0.520	-0.497	-0.438	-0.334	-0.180	+0.026	+0.245	+0.270
AC ¹	-0.012	+0.093	+0.193	+0.275	+0.222	-0.101	-0.564	-0.622	+0.345	+1.294	-3.589
AC ⁴	-0.012	-0.165	-0.331	-0.355	-0.076	+0.483	+0.882	+0.504	-0.871	-1.478	+4.347
A ¹ C ²	+0.270	+0.291	+0.105	-0.141	-0.266	-0.149	+0.162	+0.370	+0.031	-0.618	+1.659
A ¹ C ³	+0.270	-0.007	-0.391	-0.583	-0.296	+0.443	+1.092	+0.744	-0.925	-1.818	+5.111
BC ¹	+0.061	-1.876	-2.779	-2.173	-0.832	-0.269	-1.512	-4.022	-5.796	-5.201	-3.589
BC ²	+0.061	+1.734	+2.051	+0.991	-0.270	-0.217	+1.682	+4.190	+5.024	+3.259	+1.659
B ¹ C ³	+4.585	+3.536	+1.367	-0.351	-0.208	+2.155	+5.666	+8.306	+8.412	+6.277	+5.111
B ¹ C ⁴	+4.585	+3.758	+1.585	-0.367	-0.442	+1.955	+5.696	+8.394	+8.112	+5.519	+4.347



Składowa $\frac{\sigma_{xy}}{p}$

Współrzędna x lub y	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
Linia											
OE x=0	-0.443	-0.550	-0.647	-0.729	-0.795	-0.847	-0.882	-0.903	-0.911	-0.923	-1.012
OE ¹ x=0	-0.443	-0.328	-0.209	-0.095	+0.011	+0.111	+0.210	+0.311	+0.401	+0.345	-0.372
OA y=0	-0.443	-0.513	-0.609	-0.724	-0.850	-0.994	-1.129	-1.280	-1.453	-1.699	-2.180
OA ¹ y=0	-0.443	-0.409	-0.421	-0.488	-0.616	-0.818	-1.063	-1.358	-1.639	-1.739	-1.146
AC ¹ x=1	-2.180	-0.732	+0.384	+0.607	-0.130	-1.170	-1.258	+0.825	+5.307	+10.667	+14.092
AC ⁴ x=1	-2.180	-3.304	-3.690	-3.333	-2.660	-2.418	-3.518	-6.781	-12.565	-20.181	-27.218
A ¹ C ² x=-1	-1.146	-0.384	-0.838	-2.019	-2.918	-2.826	-2.096	-2.265	-5.083	-10.693	-16.148
A ¹ C ³ x=-1	-1.146	-2.736	-4.140	-4.427	-3.488	-2.338	-2.760	-6.307	-13.147	-2.361	-27.346
BC ¹ y=1	-1.012	-1.467	-1.985	-2.410	-2.381	-1.795	-1.292	-1.949	-3.539	-1.743	+14.092
BC ² y=1	-1.012	-0.521	+0.055	+0.464	+0.319	-0.395	-0.866	+0.037	+1.815	-0.275	-16.148
B ¹ C ³ y=-1	-0.372	-0.049	+0.451	+0.466	-0.257	-1.083	-0.750	+1.339	+3.075	-1.811	-27.346
B ¹ C ⁴ y=-1	-0.372	-0.135	+0.395	+0.528	-0.145	-1.083	-0.896	+1.261	+3.173	-2.480	-27.218

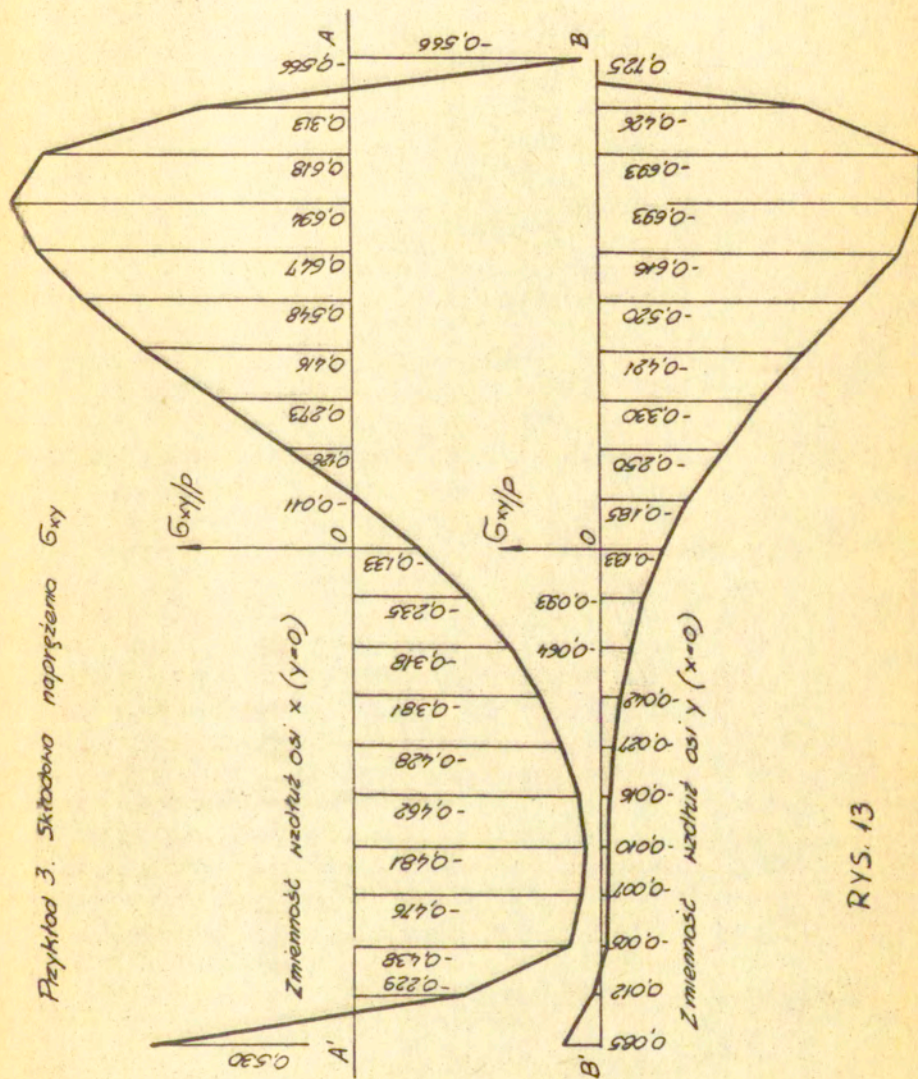


Składowa $\frac{\sigma_{xy}}{p}$

Współrzędna x lub y	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
Linia											
OB x=0	-0.133	-0.165	-0.250	-0.330	-0.421	-0.520	-0.616	-0.693	-0.693	-0.426	+0.725
OB ¹ x=0	-0.133	-0.093	-0.064	-0.042	-0.027	-0.016	-0.010	-0.007	-0.005	+0.012	+0.085
OA y=0	-0.133	-0.011	+0.126	+0.273	+0.416	+0.548	+0.647	+0.694	+0.618	+0.313	-0.566
OA ¹ y=0	-0.133	-0.235	-0.318	-0.381	-0.428	-0.462	-0.481	-0.476	-0.438	-0.229	+0.530
AC ¹ x=1	-0.566	-0.584	-0.177	+0.392	+0.702	+0.467	-0.194	-0.700	-0.460	+0.374	-0.382
AC ⁴ x=1	-0.566	-0.166	+0.341	+0.472	+0.528	+0.103	+0.372	-0.594	-0.412	+0.084	-0.112
A ¹ C ² x=-1	+0.530	+0.112	-0.347	-0.454	-0.124	+0.323	+0.422	+0.014	-0.434	-0.208	+1.346
A ¹ C ³ x=-1	+0.530	+0.534	+0.071	-0.534	-0.794	-0.441	+0.304	+0.832	+0.630	-0.198	-0.200
BC ¹ y=1	+0.725	+0.519	-0.188	-0.671	-0.399	+0.380	+0.806	+0.093	-0.849	-0.324	-0.382
BC ² y=1	+0.725	+0.203	-0.570	-0.811	-0.189	+0.732	+0.936	-0.131	-1.047	+0.006	+1.346
B ¹ C ³ y=-1	+0.085	+1.261	+1.392	+0.341	-1.079	-1.628	-0.592	+1.137	+1.711	-0.270	-0.200
B ¹ C ⁴ y=-1	+0.085	-1.187	-1.502	-0.515	+1.035	+1.756	+0.798	-1.247	-1.835	+0.492	-0.112

Dla przyjętych do analizy 3 przykładów obciążeń tarcz wykonano wykresy naprężeń wzdłuż linii układu współrzędnych. Przedstawiono je na rysunkach 5-14.

Przykład 3. Składowo naprężenia σ_{xy}



RYŚ. 13

11. Wnioski

Rozwiązania prezentowanych przykładów są przybliżeniem rozwiązań ścisłych. Nieścisłość metody polega na przybliżonym spełnieniu warunków brzegowych. Miarą dokładności jest zgodność otrzymanych w metodzie wartości naprężeń na brzegu z wielkościami zadanymi. W przypadku warunków brzegowych spełniających kryterium wielomianowości rozwiązania w obszarze, prezentowana metoda dostarcza rozwiązań ścisłych. Przy naprężeniach brzegowych ciągłych można się spodziewać bardzo dobrej zgodności wyników z rozwiązaniem ścisłym.

W analizowanych przykładach najlepszą zgodność naprężeń brzegowych otrzymano w przykładzie pierwszym /patrz tablica strona 132-6/. W drugim przykładzie zgodność ta jest mniejsza. Natomiast trzeci przykład wykazuje rozbieżność znaczną. Można wyciągnąć wniosek, że rozbieżność warunków brzegowych jest proporcjonalna do występujących nieciągłości w zadanych naprężeniach na brzegu tarczy. Metoda ta przy nieciągłościach takich jak w przykładzie 1 i 2 jest na tyle dobra, że może być stosowana w zagadnieniach inżynierskich, natomiast przy nieciągłościach jak w przykładzie 3 jej dokładność jest niezadawalająca.

Dokładność prezentowanej metody jest różna w różnych obszarach tarczy. W części środkowej jest ona najlepsza, a w okolicach występowania nieciągłości naprężeń brzegowych najgorsza. Zatem jeżeli chodzi o wartości stanu naprężenia wzdłuż linii współrzędnych to wydaje się, że uzyskiwane tutaj wyniki nie różnią się więcej niż 5% od rozwiązań ścisłych. W celu zwiększenia dokładności obliczeń należałoby uwzględnić wyższe stopnie wielomianów. Będzie to przedmiotem rozważań innej pracy, w której rozwiązano powyższe przykłady przy następujących stopniach wielomianów: SS-22, SA, AS-23, AA-24.

Podwyższenie stopnia uwzględnianych wielomianów wiąże się ze znacznym zwiększeniem objętości pracy, w przypadku gdyby się chciało wyrażenia wypisać *explicite*. Przedstawiona metoda wielomianów o stopniu nie większym niż 16 może być wykorzystana przy użyciu mini komputerów. Należy jedynie z niniejszej pracy zaczerpnąć macierze odwrotne. Wszystkie inne rachunki mogą być wykonane za pomocą mini komputerów z łatwością. Przy zastosowaniu wielomianów wyższych stopni wzrasta ilość wykonywanej pracy, tak, że rachunki stają się żmudne. Naprzykład przy wielomianach 24 stopnia ilość wykonywanej pracy wzrasta trzykrotnie w stosunku do przedstawionych powyżej wielomianów 16 stopnia. Dlatego też wydaje się, że liczenie może być wykonywane przy użyciu wielomianów wyższych stopni tylko za pomocą maszyn liczących, takich jak Odra 1305. Metoda ta daje się bardzo łatwo programować. Liczenie na maszynie Odra 1305 trwa kilka sekund. Wydaje się również celowym i bardzo łatwym przedsięwzięciem wykonanie programów do omówionej metody rysowania wykresów za pomocą plotterów.

12. Prace cytowane w tekście

1. F. Andermah, Tarcze prostokątne, Arkady, Warszawa 1966
2. В.В. Власов, Метод начальных функций в плоской задаче теории упругости, Известия АН СССР, ОН, Строительство и архитектура № 2, 1958
3. В.В.Власов, Метод начальных функций в задачах теории упругости, Известия АН СССР, ОН, 1955, № 7.
4. В.В.Власов. Применение метода начальных функций в плоской задаче теорий упругости для прямоугольной области, Известия АН СССР, ОН, Механика и машиностроение № 3, 1959.
5. В.В.Власов, Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики, Москва, Стройиздат 1975.

6. Padle J. Die Selbstspannungs - Eigenfunktionen der quadratischen Scheibe, Ingenieur Archiv, XI, N 4. 1940.
7. S. Komljenovic, J. Rychlewski, The Cauchy problem for the case of plane plastic strain solved with the use of power series, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser., Sci. Techn., 11/1963/, 285/409/.
8. J. Lenart, J. Ostrowska, The State of Stress and the Velocity Field in the Neighbourhood of the Envelope of Characteristics in the Plane Stress Problem of Plasticity, Bull. Acad. Polon., Sci, Ser. Sci. Techn. 22, 9/1974/ 441/717/.
9. А. И. Лурье, Пространственные задачи теории упругости, Москва, Гостехиздат, 1955.
10. J. Ostrowska, J. Rychlewski, Naprężenia w otoczeniu obwiedni charakterystyk w stanie granicznym ośrodka sypkiego, Rozpr. Inżyn., 20/1972/ 577-586.
11. J. Ostrowska, J. Rychlewski, A power series-method for constructing a velocity field in a plane plastic flow, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn., 21/1973/.
12. S. Owczarek, Stan naprężeń obrzeża odkształconego w zakresie sprężystym, Prace IPPT, Nr 24 /1969/.
13. S. Owczarek, Rozwiązanie zagadnień brzegowych w tarczach prostokątnych metodą szeregów potęgowych, Prace IPPT, Nr 34 /1976/.
14. B. Rogowski, Zagadnienia równowagi grubej płyty poprzecznie izotropowej, Rozprawy Inżynierskie 22, 3, 1974.
15. J. Sułocki, Zastosowanie operatorów różniczkowych do zadań w teorii sprężystości, Rozprawy Inżynierskie 2, 12, 1964.
16. S. Timoshenko, J. N. Goodier, Teoria sprężystości /tłum. z angielskiego/ Warszawa 1962 r.
17. K. Zwellling, Grundlagen Einer Theorie der Biharmonischen Polynome, Verlag Technik, Berlin 1952.

Spis treści

	str.
1. Wstęp	2
2. Ważniejsze założenia i oznaczenia przyjęte w pracy	5
3. Wyprowadzenie wyrażeń symetrycznych względem układu odniesienia na funkcje składowych tensora naprężenia w obszarze tarczy	5
4. Wyznaczenie składowych wektora przemieszczeń w obszarze tarczy	21
5. Rozkład rozwiązania na cztery niezależne stany naprężeń i odkształceń tarczy prostokątnej	25
6. Równania ogólne zagadnienia brzegowego prostokątnego obszaru płaskiego teorii sprężystości	28
7. Równania ogólne rozwiązania zagadnienia brzegowego sprężystego prostokątnego obszaru płaskiego metodą przybliżoną, z kryterium minimalnego odchylenia kwadratowego	31
8. Wyrażenia na składowe stanu naprężenia w przypadku ograniczenia się do pierwszych kolejnych wielomianów stopnia $n/14, 15, 16/$	50
9. Tarcza kwadratowa. Podstawowe układy równań i macierze odwrotne	63
10. Przykłady analizy tarczy kwadratowej	83
11. Wnioski	149