KLEIN

Differentialgl

S. W[illegible]

http://rcin.org.pl

http://rcin.org.pl

Jrew

Kryt.

Ausgewählte Kapitel aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

II.

Vorlesung

von

F. Klein.

gehalten während des Sommersemesters 1891.

Göttingen. 1891.

GABINET MATEMATYCZNY
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego
L. inw. 449

GABINET MATEMATYCZNY
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego

http://rcin.org.pl

opis nr: 46807

PAŃSTW. INSTYTUT MAT. BIBLIOTEKA

4449/II

http://rcin.org.pl

GABINET MATEMATYCZNY
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego

So. 25. 4. 1891.

Einleitung.

Die folgenden Vorlesungen sollen sich auf dieselben Differentialgleichungen beziehen, mit denen wir uns nun schon seit zwei Semestern beschäftigt haben, nämlich auf die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$0 = P'' + \left(\frac{1-\lambda'-\lambda''}{x-a} + \cdots\right)P' + \left(\frac{\lambda'\lambda''(a-b)\cdots(a-n)}{x-a} + \cdots + G_{n-2}(x)\right)\frac{P}{(x-a)\cdots(x-n)},$$

durch die wir die <u>allgemeinen P. functionen</u> definieren, oder auch auf die zugehörigen Differentialgleichungen dritter Ordnung:

$$\frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 = \left(\frac{1-\lambda^2}{2} \cdot \frac{(a-b)\cdots(a-n)}{x-a} + \cdots + 2\,G_{n-2}(x)\right) \cdot \frac{1}{(x-a)\cdots(x-n)},$$

denen ein beliebiger Quotient $\eta = \frac{P_1}{P_2}$ genügt. Und zuvor denken wir uns dabei die sämmtlichen Constanten: die Verzweigungswerthe $a, b, c, \ldots$, die Exponenten $\lambda', \lambda'', \ldots$ (deren Summe $= n-2$), oder doch die Exponenten-Differenzen $\lambda, \mu, \ldots$, endlich die accessorischen Parameter $A, B, \ldots$ (die Coëfficienten von G) zumeist als reell, so dass die Halbebene x vermöge η auf ein Kreisbogen-n-Eck mit den Winkeln $\lambda\pi, \mu\pi, \ldots$ abgebildet erscheint. In dem besonderen Falle $n = 3$ haben wir die Existenz dieser Abbildung bereits im vorigen Semester an die Spitze der Betrachtung gestellt. Unsere Aufgabe soll es jetzt sein, analoge Überlegungen für beliebigen Werth von n durchzuführen. Wir gehen <u>also darauf aus, eine allgemeine Theorie unserer Differentialgleichungen auf die Betrachtung der Kreisbogen-n-Ecke zu gründen</u>. Ich kann zwar kaum hoffen, das hiermit bezeichnete Programm in diesem Semester irgendwie in abschliessender Weise zur Geltung zu bringen: die Schwierigkeit, welche einer solchen Absicht entgegensteht, liegt, so viel ich sehen kann, auf rein geometrischem Gebiete und kommt darauf hinaus, dass es zur Zeit noch unmöglich sein dürfte, sich von der allgemeinen Gestalt eines Kreisbogen-n-Ecks eine adaequate Vorstellung zu bilden. Immer aber denke ich <u>einzelne Puncte</u> des bezeichneten Programm's zu erledigen, und ich verspreche mir, dass dadurch allein schon die Theorie unserer Differentialgleichungen einen neuen Aufschwung nehmen soll. —

Ich recapitulire hier zunächst die Hauptresultate, die wir für $n = 3$ gefunden hatten, soweit dieselben für unsere ferneren Betrachtungen wesentlich scheinen, in möglichst übersichtlicher Form:

1) <u>Von der wirklichen Gestalt des Kreisbogendreiecks $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$.</u>

Wir denken uns λ, μ, ν so geordnet, dass $\lambda \geq \mu \geq \nu$ und unterscheiden nun Kreisbogendreiecke <u>erster</u> oder <u>zweiter</u> Art, jenachdem $\lambda \leqq \mu+\nu$, oder $\lambda \geq \mu+\nu$. Wir bilden uns ferner den Begriff des <u>reducirten</u> Dreiecks. Hr. Schilling hat die Festsetzungen, welche ich in dieser Hinsicht früher traf (vergl. auch Annalen 37), etwas vereinfacht*). Wir nennen dementsprechend jetzt ein Dreieck λ_0, μ_0, ν_0 ($\lambda_0 \geq \mu_0 \geqq \nu_0$) reducirt, wenn $\lambda_0 < 2$, $\mu_0 < 1$. Unter a, b, c, A beliebige ganze Zahlen verstanden, ergibt sich aus dem reducirten Dreieck <u>das allgemeinste Dreieck erster Art</u>, indem wir schreiben:

$$\lambda = \lambda_0 + b + c,$$
$$\mu = \mu_0 + c + a,$$
$$\nu = \nu_0 + a + b,$$

<u>das allgemeinste Dreieck zweiter Art</u> aber, indem wir setzen:

$$\lambda = \lambda_0 + 2A + b + c,$$
$$\mu = \mu_0 + c,$$
$$\nu = \nu_0 + b.$$

Dem entsprechen die folgenden beiden geometrischen Sätze:

<u>Das allgemeinste Dreieck erster Art entsteht aus dem reducirten Dreieck</u>

*) Allerdings ist der Schilling'sche Reductionsprocess unter Umständen nicht eindeutig.

dadurch, dass man an dessen 3 Seiten beliebig viele Kreisscheiben (a, b, c Kreisscheiben) lateral anhängt.

Das allgemeine Dreieck zweiter Art aber dadurch, dass man an eine Ecke des reducierten Dreiecks, und ferner an die beiden von der Ecke auslaufenden Seiten, beliebig viele Kreisscheiben (A, b, c Kreisscheiben) polar, beziehungsweise lateral anhängt.

2) Von der Bedeutung der unter 1) entwickelten Sätze.

Die aufgestellten Sätze gewinnen insbesondere Bedeutung, wenn man fragt, wie oft irgend ein Functionszweig η, den wir für die positive Halbebene x definiert haben, innerhalb dieser Halbebene oder auf den drei dieselbe begränzenden Stücken der reellen Axe einen bestimmten Werth, z. B. den Werth 0, annimmt?

In der That lässt sich diese Frage in jedem Falle so beantworten, dass man zunächst untersucht, wie das zu unserem Functionszweige gehörige reducirte Dreieck gegen den Nullpkt der η-Ebene liegt, und dass man dann zusieht, wie oft der Nullpunkt von den anzuhängenden Kreisscheiben überdeckt wird oder auf deren Rande liegt. Meine Entwickelungen in Bd. 37 der Annalen, wo ich auf diese Weise die Anzahl der reellen Nullstellen bestimme, die $F(l, m, n, x)$ zwischen $x=0$ und $x=1$ besitzt, sind nur eine einzelne Anwendung des hiermit bezeichneten Princips. —

Alle Sätze, welche man über das Verschwinden irgend welcher Particularlösung der hypergeometrischen Differentialglchg. aufstellen kann, müssen sich aus unserem Princip ableiten lassen.

Ich betrachte beispielsweise die Frage nach den Nullstellen der Kugelfunctionen 2ter Art, welche Hermite und Stieltjes neuerdings (1891) in den Annales de Toulouse bearbeitet haben. Wir haben da auf der X Axe die 3 singulären Puncte bei ∞ und ± 1, die zugehörigen Exponentendifferenzen sind $2n+1, 0, 0$, geben also ein Dreieck mit den Winkeln $(2n+1)\pi$, $0.\pi$, $0.\pi$, dessen

„reducirte" Gestalt die Winkel $\pi, 0, 0$ aufweist. Wir setzen jetzt $\eta = \frac{Q^n(x)}{P^n(x)}$, wo $P^n(x)$ die Kugelfunction erster Art: $Q^n(x)$ wird überall verschwinden, wo dieses η zu Null wird, es sei denn, dass das Nullsein von η durch das Unendlich werden von P hervorgerufen wird. Wir betrachten zunächst, in der positiven wie in der negativen Halbebene x, denjenigen Zweig von $Q^n(x)$, welcher längs der Striche der x Axe, die von ± 1 ins Unendliche laufen, reell ist. Hier die Gestalt und Lage desjenigen reducirten Dreiecks, welches unter dieser Voraussetzung der positiven Halbebene x entspricht:

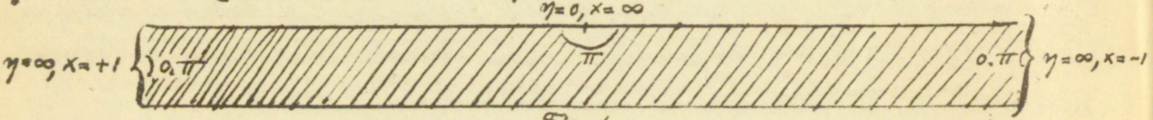


Fig. 1.

Wir steigen zu dem wirklichen Dreiecke auf, welches den Verlauf unseres η angibt, indem wir an die Ecke $\eta = 0$ der so gezeichneten Fig. n Halbebenen polar anhängen. So entsteht beispielsweise für $n = 1$:

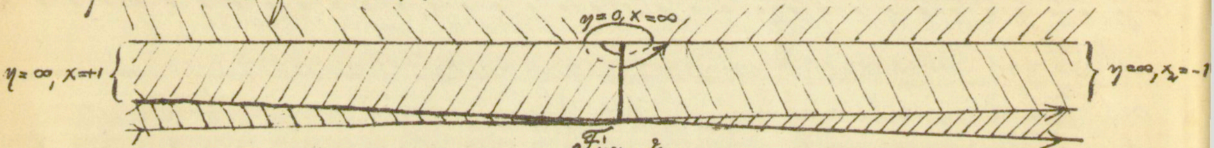


Fig. 2.

Wir erhalten die gewünschte Fig. für die negative Halbebene, indem wir das so erhaltene Dreieck an seiner oberen Begränzungsgeraden spiegeln. Man sieht: die Gesammtfig., welche solcherweise entsteht, überdeckt den Nullpkt. der η-Ebene nur vermöge des vielfachen Windungspktes., der $x = \infty$ entspricht und zwar $(2n+1)$. fach. Dieser Nullpkt. von η ist aber zum Teil auf Rechnung von $P(x)$ zu setzen (welches für $x = \infty$ n fach unendlich wird) Daher wird der zunächst betrachtete Zweig von $Q^n(x)$ innerhalb der positiven, wie innerhalb der negativen Halbebene x nirgends zu Null, ausser $(n+1)$ fach bei $x = \infty$.) — Ziehen wir jetzt einen weiteren Zweig von $Q^n(x)$ in Betracht, den wir erreichen, indem wir den bislang untersuch-

http://rcin.org.pl

den Zweig von der positiven Halbebene aus über das Intervall der x-Axe, welches von -1 bis $+1$ hinreicht, hinüber in die negative Halbebene fortsetzen. Wollen wir uns die x-Ebene längs des Stückes von -1 bis $+1$ aufgeschnitten denken! Das Bild, welches unser neuer Zweig, oder vielmehr der mit diesem Zweige gebildete Quotient η, von der so zerschnittenen Ebene entwirft, ergibt sich aus der eben betrachteten Gesamtfig. indem wir dieselbe um die doppelte Breite des in Fig. 1 gezeichneten Streifen's nach abwärts schieben. Hier wird nun diejenige Hälfte der neuen Fig., welche der positiven Halbebene x entspricht, vermöge der n an ihren Scheitel angehängten Halbebenen den Nullpkt. der η-Ebene n-fach überdecken; die andere Hälfte (welche der negativen Halbebene x entspricht) wird sich an den Nullpkt der η-Ebene überhaupt nicht heranziehen. Der neue Zweig von $Q_n(x)$ wird also n-mal in der positiven Halbebene x und zwar an lauter getrennten Stellen zu Null, keinmal aber in der negativen Halbebene. — Man sieht, wie man in solcher Weise fortfahren kann. Die Sätze aber, welche man so erhält, sind eben diejenigen, welche Hermite u. Stieltjes l. c. entwickelen.

3.) Welche Form nimt die Theorie der verwandten Functionen vermöge unserer Dreiecksfiguren an? Es ist dies eine Frage, welche ich wohl im Sommersemester 1890 gestreift habe, die dann aber im vergangenen Semester nicht weiter discutirt wurde.

Gauss nennt solche hypergeometrische Reihen

$$F(l, m, n, x) \text{ und } F(l', m', n', x)$$

verwandt, deren Elemente l, m, n und l', m', n' sich bez. nur um ganze Zahlen unterscheiden. Es kommt dies darauf hinaus, dass zwei η-Functionen

$$\eta(\lambda, \mu, \nu, x) \text{ und } \eta(\lambda', \mu', \nu', x)$$

verwandt genannt werden, sobald man setzen kann

$$\lambda' = \lambda \pm A, \quad \mu' = \mu \pm B, \quad \nu' = \nu \pm C,$$

unter A, B, C drei ganze Zahlen verstanden, deren Summe gerade ist.

http://rcin.org.pl

Wie aber drückt sich dies für die zugehörigen Dreiecke aus? In Bd. 25 der math. Anālen (1884) hat Hr. Papperitz das betr. einfache Resultat entwickelt. Zwei η. Functionen heissen verwandt, wen̄ man ihre Dreiecke in eine solche gegenseitige Lage bringen kan̄, dass sie von denselben Kreislinien umgränzt werden. Beispielsweise ist das reducirte Dreieck, das wir unter 1) betrachteten, mit den sämtlichen aus ihm abzuleitenden Dreiecken „verwandt." Aber ebensowohl ist dasselbe mit seinen „Nebendreiecken" verwandt, etc., etc.

Offenbar werden alle solche verwandten Dreiecke durch die nämlichen Spiegelungen sym̄etrisch vervielfältigt. Aus diesen Spiegelungen aber erwächst, wie wir wissen, durch Combination und Wiederholung die Gruppe der η. Function. Verwandte η. Functionen haben also identische Gruppen. Dieser schon von Rieman̄ aufgestellte Satz geht natürlich tiefer, als der Satz von den Kreislinien, weil er auch den Fall complexer λ, μ, ν umfasst, ist aber minder anschaulich. Im̄er wollen wir ihn benutzen, um den Begriff der Verwandtschaft zu erweitern. Zwei η. Functionen sollen im allgemeinen Sin̄e verwandt heissen, wen̄ ihre Gruppen commensurabel sind, d. h. eine gemeinsame Untergruppe haben. Diese allgemeinere Art der Verwandtschaft tritt beispielsweise ein, wen̄ man aus den Dreiecken der einen η. Function ein Polygon zusam̄ensetzen kan̄, das von denselben Kreislinien begränzt ist, wie ein aus Dreiecken der anderen η. Function zusam̄engesetztes Polygon. Sind die beiden Polygone identisch und nur aus einer endlichen Zahl von Dreiecken der einen wie der anderen Art zusam̄engesetzt, so hat man einen Specialfall der sogenan̄ten algebraischen Transformation (die allgemein von Papperitz und Goursat bearbeitet ist), d. h. $\eta(\lambda'\mu'\nu'x')$ geht aus $\eta(\lambda\,\mu\,\nu\,x)$ hervor, indem man x' als eine geeignete algebraische Func-

http://rcin.org.pl

tion von x einführt: Die algebraische Transformation wird zur <u>rationalen</u> Transformation, wenn das in Rede stehende Polygon nur aus <u>einem</u> Dreiecke η (oder η') besteht.

Die hiermit berührten Probleme verdienen wohl eine erneute Bearbeitung. Bei Herstellung der zugehörigen Formeln wird es zweckmässig sein, durchweg von der Spaltung des η in <u>homogene</u> Bestandtheile Π Gebrauch zu machen, die wir im vorigen Semester entwickelten. Dadurch werden alle die Aufgaben über rationale oder algebraische Functionen besonderer Art, mit denen man sich bei diesen Untersuchungen zu beschäftigen hat, von vorneherein in die ihnen am besten entsprechende formentheoretische Gestalt gesetzt.

4.) Die <u>analytische Fortsetzung</u> der η. Function lässt sich (Mi. 29.4.91. von der Dreiecksfig. aus besonders bequem übersehen; wir haben nur das anfängliche Dreieck imer wieder erneut nach dem <u>Princip der Symetrie</u> zu reproduciren. Hr. <u>Schwarz</u> hat diesen von ihm aufgestellten Grundsatz in der grundlegenden Abhandlung in Bd. 75 des Journals (1872) insbesondere nach 2 Seiten hin verfolgt:

a) Aufzählung aller $\eta(\lambda\,\mu\,\nu\,x)$, die von x algebraisch abhängen,

b) Nachweis, dass x in $\eta(\lambda\,\mu\,\nu\,x)$ dan u. nur dan eindeutig wird, wen $\lambda=\frac{1}{l}$, $\mu=\frac{1}{m}$, $\nu=\frac{1}{n}$, unter l, m, n ganze Zahlen verstanden. Hiermit hatten wir den einfachsten Fall derjenigen eindeutigen Functionen vor Augen, die wir als <u>automorphe</u> F. bezeichnen.

Wir selbst haben den gleichen Process dan noch für zweierlei Zwecke benutzt:

c) Nachweis, dass sich $\eta(\lambda\,\mu\,\nu\,x)$, reelle λ, μ, ν vorausgesetzt, dan u. nur dan auf ein unbestimtes Integral reduciert, wen sich das zugehörige Dreieck durch Inversion in ein geradliniges

http://rcin.org.pl

Dreieck verwandeln lässt.

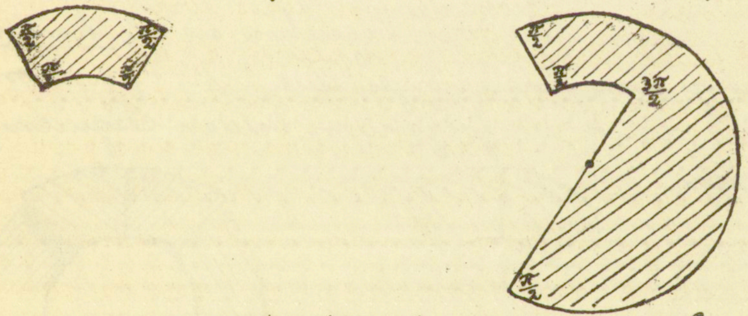
d) ~~Nachweis~~, dass $\eta(\lambda\mu\nu x)$ in $\eta(\frac{1}{l}, \frac{1}{m}, \frac{1}{n}, x)$ eindeutig ist, sobald die λ, μ, ν ganzzahlige Multipla von $\frac{1}{l}, \frac{1}{m}, \frac{1}{n}$ sind. Dies gab das einfachste Beispiel homomorpher Functionen.

Wir knüpfen hier noch folgende besondere Bemerkung an. Die Voraussetzung d) ist insbesondere erfüllt für alle diejenigen $\eta(\lambda, \mu, \nu, x)$, die mit $\eta(\frac{1}{l}, \frac{1}{m}, \frac{1}{n}, x)$ verwandt sind. Daher nimmt die Theorie der verwandten Functionen bei Zugrundelegung eines $\eta(\frac{1}{l}, \frac{1}{m}, \frac{1}{n}, x)$ eine besonders einfache Form an. In seiner Leipziger Dissertation (1885: conforme Abbildung sphärischer Dreiecke auf einander mittelst algebraischer Functionen) hat O. Fischer die betr. Untersuchung für den besonderen Fall des Ikosaeders durchgeführt, d. h. für $\eta(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, x)$; die Sache wird da besonders einfach, weil es sich um lauter algebraische Functionen handelt; man sollte aber wohl in demselben Sinne das allgemeine $\eta(1/l, 1/m, \ldots)$ behandeln.

5) Wir erinnern endlich davon, dass wir im vorigen Semester doch auch den Fall complexer λ, μ, ν beiläufig in Betracht zogen, wo dann an Stelle des Dreiecks mit den Winkeln $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$, — oder vielmehr der aus zwei nebeneinander liegenden Dreiecken gebildeten Fig. —, ein allgemeiner gestalteter „Fundamentalbereich" trat. Eine ganz analoge Verallgemeinerung wird bei den Untersuchungen, die wir nun über Kreisbogenpolygone folgen lassen, möglich sein u. späterhin durchgeführt werden müssen. In der That betrachten wir die Beschränkung auf reelle $\lambda, \mu, \ldots; a, b, \ldots; A, B, \ldots$ durchaus als eine vorläufige; unsere Absicht muss sein, auf dem Wege der geometrischen Betrachtung eine ganz allge-

meine Theorie der P. functionen zu schaffen.

So viel über $n = 3$. Aber auch den Fall $n = 4$ haben wir schon in speciellen Fällen im vorigen Semester in Betracht gezogen. Es handelte sich uns dabei allerdings noch nicht um eine selbständige Theorie des Kreisbogenvierecks, vielmehr benutzten wir die Vierecke wesentlich nur dazu die bei der *Hermite-Laméschen* Gleichung hervortretenden Resultate geometrisch zu *veranschaulichen*. Immer sind uns dabei eine Reihe geometrischer Verhältnisse entgegengetreten, welche es verdienen, als solche hervorgehoben zu werden. Ich will hier von dem besonderen Falle, der den Laméschen „Polynomen" entsprach u. uns desshalb vorwiegend interessirte, der Kürze halber ganz absehen. Es war das der Fall, wo alle Seiten des Vierecks verlängert durch einen gemeinsamen Punct liefen, das Viereck also geradlinig gewählt werden konnte. Von den übrigen Vierecken kann man sich folgendermassen eine Vorstellung machen. Wir zeichnen uns 2 Vierecke folgender Art

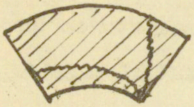


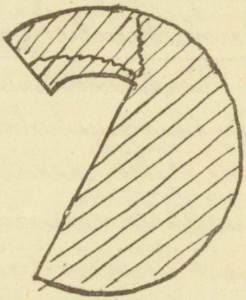
die wir als *reducirte* Vierecke bezeichnen. Es gilt, *aus diesen Vierecken durch geeignete „Erweiterungen" in allgemeinster Weise Vierecke herzustellen, welche die Winkel*

$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, (2\nu + 1/2)\pi \quad \text{resp.} \quad \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, (2\nu + 3/2)\pi$$

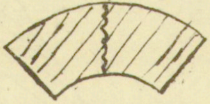
aufweisen.

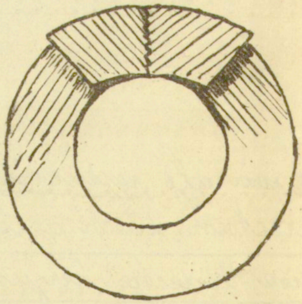
Laterale Anhängungen von Kreisscheiben kön̄en wir dabei nicht gebrauchen, weil dabei im̄er 4 Winkel geändert werden würden. Dagegen kan̄ polare Anhängung von Kreisscheiben von der einen Ecke aus sehr wohl erfolgen, u. zwar kön̄en wir dabei den für die einzelne Anhängung maassgebenden Verzweigungsschnitt von der bez. Ecke aus ganz nach Belieben nach der einen oder der anderen der beiden nicht angränzenden Seiten hinüberlaufen lassen:





Von dieser Möglichkeit der Erweiterung haben wir den̄ auch in ausgiebigster Weise Gebrauch gemacht. – Aber es gab noch eine andere Art der Erweiterung, die unter Umständen eintreten konnte u. für die beim Dreieck noch kein Raum war. Ich bezeichne sie als transversale Anhängung eines Kreisringes. Die betr. Operation wird hinreichend durch die folgenden beiden Figuren gekennzeichnet sein:



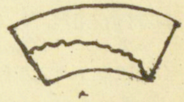


Dabei kan̄ der Verzweigungsschnitt ersichtlich nur solche zwei Gegenseiten verbinden, die, verlängert gedacht

http://rcin.org.pl

sich nicht schneiden. Die neue Operation lässt sich sehr wohl mit derjenigen Art der polaren Anhängung verbinden, deren Verzweigungsschnitt so liegt:

nicht aber mit der anderen, durch folgenden Verzweigungsschnitt gegebenen polaren Anhängung:



An sich wäre nun noch eine vierte Art der Erweiterung unseres Vierecks denkbar: die diagonale Anhängung einer Vollkugel, wie sie durch folgende Fig. wohl hinreichend gekennzeichnet sein wird:

Nur ist deren Auftreten gerade im Hermite-Lamé'schen Falle wieder von vorneherein ausgeschlossen, weil doch nur ein Winkel von $\pi/2$ verschieden werden darf. —

Wir beginnen nunmehr unsere neue Entwickelung.

Zur geometrischen Theorie der allgemeinen Kreisbogenpolygone.

Under einem Polygon versteht man wohl zumeist einen Linienzug: wir hier verstehen darunder natürlich ein Flächenstück. Wir denken uns dasselbe zunächst imer als einfach zusamenhängend u. als durchaus schlicht, d. h. ohne ineren Verzweigungspkt. Dagegen könen die Eckenwinkel gerne $> 2\pi$ sein (also Verzweigungspkte vorstellen), auch dürfen sich die Seiden beliebig oft überschlagen. Es ist eine durchaus elementargeometrische Aufgabe, sich über die allgemeinste Gestalt eines diesen Forderungen entsprechenden Kreisbogenpolygons Rechenschaft zu geben. Trotzdem scheint es, dass keinerlei Vorarbeiten in dieser Richtung vorliegen (wie überhaupt die Vertreter der Elementargeometrie es vorziehen, imer wieder den hergebrachten Lehrstoff ihrer Disciplin auf's neue zu systematisiren, statt den vielen u. interessanten Anregungen nachzugehen, die z. B. aus der Rieman'schen Functionentheorie fliessen).

Wir denken unsere Polygone in der Ebene oder besser gleich auf der $(x+iy)$-Kugel gelegen. Der functionentheoretischen Verwendung entsprechend, die wir im Sine haben, werden wir alle diejenigen Polygone als aequivalent ansehen, die aus einem einzelnen durch lineare Transformation $z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ hervorgehen, die also geometrisch, um mit Moebius zu reden, kreisverwandt (direct-kreisverwandt) sind. Die ∞^6 Umformungen der Kugelfläche in sich selbst, welche durch diese Transformationen vorgestellt werden, lassen sich auf andere Weise durch die ∞^6 Raum-Collineationen definiren, welche die Kugel in sich selbst überführen. Diese wieder stellen die ∞^6 Bewegungen derjenigen projectiven (Cayley'schen) Maassbestim̄ung vor, die man auf die Kugel als Fundamentalfläche gründen kan̄. Daher werden die Definitionen dieser Maassgeometrie hier für uns von Wichtigkeit. In dieser Hinsicht recapitulire ich aus den ausführlichen Entwickelungen, welche ich hierüber in meiner Vorlesung über Nichteuklidische Geometrie (1889-90) gegeben habe, folgendes:

1) Der Winkel zweier Geraden eines Büschels oder zweier Ebenen eines Büschels oder auch der Abstand zweier Pkte einer Pktreihe ist gleichförmig durch

$$c . \log D$$

zu definiren, wo c irgend eine Constante, D dasjenige Doppelverhältniss bezeichnet, welches die beiden in Betracht kom̄enden Elemente mit denjenigen Elementen ihres Trägers einschliessen, die der Kugel angehören (dieselbe berühren).

2) Wir werden zumeist mit solchen Geraden oder Ebenen zu thun haben, die sich innerhalb der Kugel schneiden. Dan̄ ist log D rein imaginär, daher zweckmässig c ebenfalls rein imaginär anzunehmen, also etwa, der gewöhnlichen Definition entsprechend, $= i/2$. Der Winkel erhält dadurch (der Periode $2i\pi$ des Logarithmus entsprechend) die reelle Periode π, - d.h. der Winkel zweier sich schneidender unbegränzter Geraden (oder Ebenen), der Winkel zweier Halbgeraden wird die Periode 2π haben.

3) Was Puncte angeht, so werden wir meist mit solchen 2 Pkten zu thun haben, die entweder beide innerhalb oder beide ausserhalb der Kugel gelegen sind. Dan̄ ist D

http://rcin.org.pl

reell u. positiv, also ein Werth von log D dadurch ausgezeichnet, dass er reell ist. Der Bequemlichkeit halber setzen wir also $c = K$, gleich einer reellen Constanten; die wir nicht weiter specificiren. Zwei reelle Pkte, die durch die Kugel von einander getrennt werden, haben dann einen Abstand, dessen imaginärer Theil die Form $(2h+1)\,K\,i\,\pi$ hat.

Zunächst noch eine Bemerkung zur Nicht-Euklidischen Geometrie. Wenn der Winkel φ, den zwei Halbgerade mit einander bilden, reell ist (vergl. die Fig.): So. 2. Mai 1891

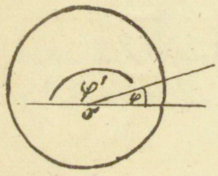


Fig. 1.

so ist sein Nebenwinkel $\varphi' = \pi - \varphi \pmod{2\pi}$. An derselben Formel werden wir festhalten, falls der Winkel imaginär sein sollte. Wenn beispielsweise in der nachstehenden Fig. $\varphi = i\psi \pmod{2\pi}$:

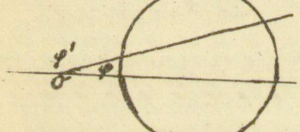


Fig. 2.

so werden wir $\varphi' = \pi - i\psi \pmod{2\pi}$ setzen. In Fig. 1 sind den beiden Winkeln φ, φ' zwei wohlbestimmte Stücke des absoluten Kegelschnitts zugeordnet, die insofern um 2π modificirt werden können, als man sie um volle Multipla der Kegelschnittperipherie vermehren kann:

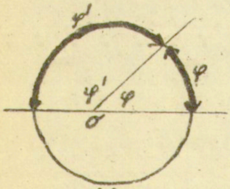
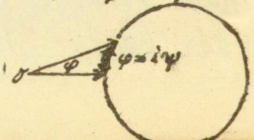


Fig. 3.

wir lassen dabei jedem Halbstrahl denjenigen Schnittpkt mit dem absoluten Kegelschnitt entsprechen, in welchem er denselben zuerst trifft. Ganz ähnlich wollen wir es bei Fig. 2 machen. Dem Winkel φ wird also das in der folgenden Fig. bezeichnete Kegelschnittstück (vorbehaltlich der Zufügung irgend welcher Multipla der Gesamtperipherie) zugeordnet sein:

dem Winkel $\varphi' = \pi - \varphi$ aber das folgende: Fig. 4.



http://rcin.org.pl

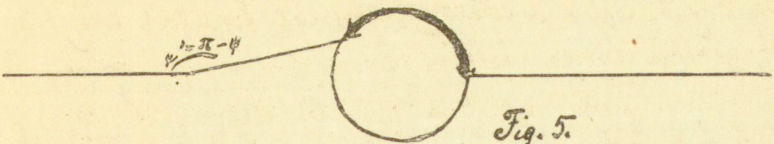
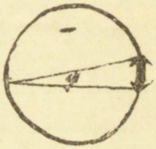


Fig. 5.

Rückt der Schnitt-pkt O der beiden Halbstrahlen auf den Kegelschnitt selbst, so wird der Winkel φ, wie er in der Fig. sammt dem zugehörigen Stücke des Absolutkegelschnittes dargestellt ist, unendlich klein sein: wir drücken dies aus, indem wir schreiben

Fig. 6.



$$\varphi = \varepsilon\,\psi.$$

Unter $\pi - \varphi$ werden wir dann wieder den Nebenwinkel verstehen, dem wir dasjenge Stück des Absolutkegelschnittes zuordnen, welches wir nunmehr durch die Pfeilspitzen markiren:

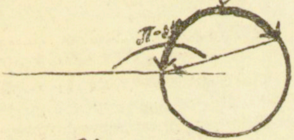


Fig. 7.

Von den 3n Maasszahlen unseres Kreisbogenpolygons.

Einem ebenen geradlinigen Polygon ordnet man in der elementaren Geometrie natürlich 2n Maasszahlen zu: seine n Winkel und seine n Seitenlängen zwischen denen dann die gewöhnlichen polygonometrischen Relationen bestehen, in welche die Winkel, da sie ja nur mod. 2π definirt sind, nur mit ihren Sinus u. Cosinus eintreten; Wenn wir dann später das Polygon nicht mehr als einen blossen Linienzug, sondern als eine von dem Linienzug begrenzte Fläche auf-

http://rein.org.pl

fassen wollen, so werden damit die Winkel $\lambda\pi, \mu\pi, \ldots$ der einzelnen Ecken absolut festgelegt werden:

$$\frac{\lambda}{2} = E\left(\frac{\lambda}{2}\right) + \left(\frac{\lambda}{2}\right), \quad \frac{\mu}{2} = E\left(\frac{\mu}{2}\right) + \frac{\mu}{2},$$

zugleich werden die Seiten jede mit einer gewissen Zahl von Selbstüberschlagungen in Rechnung zu stellen sein. Den gewöhnlichen polygonometrischen Relationen treten dann neue an die Seite, welche ich die *Ergänzungstheoreme* nenne, – Theoreme, durch welche die absoluten Beträge der Winkel mit den Selbstüberschlagungszahlen (oder „Charakteristiken") der einzelnen Seiten verbunden werden.

Genau so werden wir bei unseren Kreisbogenpolygonen *3n Maasszahlen* einführen. Um dies in gleichförmiger Weise zu thun, denken wir uns das Polygon auf der Kugel gelegen u. die Ebenen construirt, welche die Begränzungskreise des Polygon's aus der Kugel ausschneiden. Je zwei aufeinanderfolgende Ebenen (oder „*Seitenflächen*") haben eine *Kante* gemein, je drei aufeinanderfolgende eine *Ecke*; die Configuration, welche von diesen Seitenflächen, Kanten, Ecken gebildet wird, nenne ich *den Kern des Polygon's*. Diesem Kern nun legen wir 3n Maasszahlen bei, indem wir die zur Kugel gehörige projective Maassbestimmung heranziehen. Es sind dies

1) *n Kantenwinkel*, längs der einzelnen Kante von den beiden durch dieselbe gehenden Seitenflächen gebildet. – Dieselben erscheinen auf die Eckenwinkel unseres Polygons bezogen, u. wenn letztere ohne Weiteres absolut bestimmte Grössen sind (insofern wir uns das Polygon als eine Membran denken), so werden unsere Kantenwinkel immer noch modulo 2π bestimmt sein.

2) *n Seitenwinkel*, innerhalb der einzelnen Seitenfläche des Kern's von den beiden sich dort kreuzen-

den Kanten gebildet. Wir wollen uns vorstellen, dass man diese Kanten zum Zwecke der Bestimmung der in Rede stehenden Seitenwinkels so als Halbstrahlen von ihrem Kreuzungspkte auslaufen lässt, dass sie den zugehörigen Eckpkt des Polygon's erreichen, ohne vorher schon in einem anderen Punkte die Kugel durchsetzt zu haben. Unsere Seitenwinkel sollen die Winkel der beiden hiermit definirten Halbstrahlen sein; sie sind also auch modulo $\underline{2\pi}$ definirt.

3/ <u>n Kantenlängen.</u> Ich werde zwischen den beiden Stücken, in welche die Kante durch die beiden auf ihr liegenden Eckpkte zerlegt wird, nicht weiter unterscheiden. Diese Kantenlängen sind also nur modulo $\underline{2Ki\pi}$ (und nicht etwa modulo $4Ki\pi$) festgelegt.

<u>Diese 3 n Maasszahlen übertragen wir nun mit geeigneten Modificationen auf unser Kreisbogenpolygon.</u> Wir bemerkten bereits, dass den

<u>n Kantenwinkeln des Kerns</u> die <u>n Eckenwinkel $\lambda\pi, \mu\pi, \ldots$ des Polygons</u>

mit der Maassgabe entsprechen, dass sie absolut bestimmte Zahlen sind. Wir werden nun ferner

<u>die n Seitenwinkel des Kerns</u> als <u>die n Seitenlängen $l\pi, m\pi$. des Polygons</u>

bezeichnen, indem wir letztere wieder, entsprechend der Anzahl der Selbstüberschlagungen, welche die einzelne Seite darbietet, als absolut bestimmte Zahlen einführen. Endlich werden wir

<u>die n Kantenlängen des Kern's</u>

ebenfalls als Maasszahlen des Polygons gelten lassen,

http://rcin.org.pl

ohne sie bei diesem neu zu definiren u. ohne dieselben also auch als absolute Zahlen festzulegen. Ich bezeichne sie fernerhin als $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, ...

Hier einige Polygonformen, mit denen wir uns weiterhin besonders viel zu beschäftigen haben:

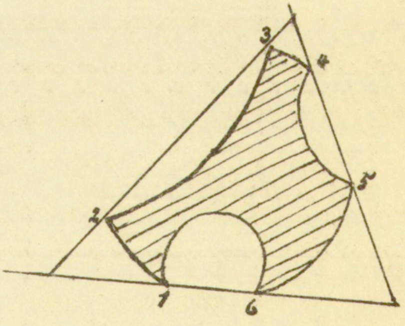
I. Polygone, bei denen alle Ecken des Kern's in einen Pkt. zusammengefallen sind, (so dass $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \ldots \equiv 0, 0, \ldots \pmod{2 k i \pi}$).

a) elliptische Polygone. – Das Centrum liegt innerhalb der Kugel, z. B. im Mittelpkt. derselben, wo dann alle Polygonseiten Stücke grösster Kugelkreise werden.

b) parabolische Polygone. — Centrum auf der Kugel. – Durch stereographische Projection in ebene geradlinige Polygone verwandelbar.

c) hyperbolische Polygone. – Centrum ausserhalb der Kugel. – Können im elementaren Sinne durch sog. pseudosphärische Polygone versinnlicht werden.

II. Kreisscheibenpolygon. Wir nennen ein Polygon ein Kreisscheibenpolygon, wenn die geraden oder die ungeraden Seiten alle in eine Ebene fallen (die Seitenzahl ist dabei natürlich als gerade Zahl vorausgesetzt). Man vergl. die Fig. Die Kanten sind hier paarweise zusammengefallen u. bilden eine ebene Fig. Die Seitenlängen 12, 34, 56 sind rein imaginär, die Seitenlängen 23, 45, 61 alle gleich π.



Ganz besonders werden wir nun weiter:

III. Durchaus rechtwinklige Polygone ins Auge fassen. Es entspricht dies der besonderen Wichtigkeit, die wir im vorigen Semester denjenigen Differentialgleichungen beilegten, deren Exponentendifferenzen

http://rcin.org.pl

alle $= \frac{1}{2}$ waren. Wir konnten damals die Fälle anderer Exponentendifferenzen dadurch entstehen lassen, dass wir bei einer Differentialglchg. der genannten Art (einer „Laméschen" Glchg. in dem damals festgehaltenen Sinne) zwei singuläre Puncte zusammenrücken liessen. Dementsprechend können wir Polygone mit beliebigen Eckenwinkeln immer als Gränzfälle durchaus rechtwinkeliger Polygone gelten lassen. Man vergleiche das nachstehende Dreieck u. das daneben gesetzte Sechseck:

Wir bemerken folgende Sätze: Ein durchaus rechtwinkeliges Polygon ist für $n = 3$ nothwendig elliptisch (Kugeloktant), für $n = 4$ parabolisch (geradliniges Rechteck), für $n > 4$ hyperbolisch, – sofern wir überhaupt verlangen, dass sich der Kern auf einen Pkt zusammenziehen soll. – Es hat keinerlei Schwierigkeit sich ein Kreisscheibenpolygon von beliebiger (gerader) Seitenzahl als ein durchaus rechtwinkeliges Polygon zu denken.

Zwischen den $3n$ Maasszahlen des Kerns, die wir definirten, werden jetzt polygonometrische Relationen bestehen müssen, zu denen dann, wenn wir zu den absolut definirten Maasszahlen des Polygons übergehen, Ergänzungstheoreme treten. Aber ehe wir hiervon handeln, müssen wir fragen, wie weit Kern u. Polygon durch ihre $3n$ Maasszahlen definirt sind. Ohne Weiteres sieht man: Der Kern ist durch seine $3n$ Maasszahlen durchaus festgelegt (abgesehen davon, dass man ihn natürlich durch die zur projectiven Maassbestimmung gehörigen Bewegungen

http://rcin.org.pl

in ∞^6 aequivalente Lagen bringen kann). Man kann nämlich zuerst eine Kante beliebig annehmen. Auf ihr sucht man sich dann einen beliebigen Pkt als ersten Eckpkt: innerhalb oder ausserhalb der Kugel, jenachdem der abzutragende Seitenwinkel reell oder imaginär ist. Vermöge dieses Seitenwinkels kommt man dann zur 2. Kante, etc. etc. — Ferner sieht man:

Hat man unter den beiden Schnittpkten, welche die erste Kante des Kerns mit der Kugel gemein hat, einmal gewählt so sind damit alle Eckpkte unseres Polygons auf der Kugel festgelegt. Denn die Winkel, welche 2 Kanten mit einander bilden, waren ja mit Rücksicht auf die Auswahl der Eckpkte, welche sie aus der Kugel ausschneiden sollen, modulo 2π festgelegt worden.

Aber nun kommt die Frage, die ich bis jetzt noch nicht habe entscheiden können, während doch andererseits ersichtlich ist, dass deren Beantwortung das eigentliche Fundament einer allgemeinen Theorie der Kreisbogenpolygone ausmachen muss:

Wird das Polygon (dessen Seitenflächen u. Ecken wir vom Kern aus bereits kennen, durch Angabe der zugehörigen absoluten Werthe der $\lambda, \mu, \ldots$ und der $l, m, \ldots$ eindeutig bestimmt sein?

oder anders ausgedrückt, indem wir 2 Polygone, welche dieselben Seitenflächen u. dieselben Eckpkte darbieten, „im engeren Sinne verwandt" nennen:

Können 2 im engeren Sinne verwandte Polygone dieselben $\lambda, \mu, \ldots, l, m, \ldots$ besitzen, ohne identisch zu sein?

Ich muss die Frage leider durchaus unentschieden lassen. — Immer werden wir uns weiterhin so ausdrücken, als wenn das Polygon durch seine $3n$ Maasszahlen wirklich vollständig bestimmt wäre.

http://rcin.org.pl

Mi. 6. Mai 1891.

Von den Relationen zwischen den Maasszahlen des Polygons.

Eine blosse Abzählung belehrt uns, dass zwischen den $3n$ Maasszahlen eines Kreisbogen-n-ecks 6 Relationen bestehen müssen. Das Polygon als solches, individuell genommen, hängt nämlich nur von $3n$ Constanten ab, indem wir auf jede seiner Begränzungsebenen drei Constanten zu rechnen haben. Die $3n$ Maasszahlen aber sind allen den ∞^6 Polygonen gemeinsam, welche aus dem einzelnen durch die ∞^6 projectiven Bewegungen hervorgehen. Daher also nothwendig 6 Relationen zwischen den $3n$ Maasszahlen.

Beschränken wir uns auf elliptische, parabolische, hyperbolische Polygone u. sehen deren Fixpkt als bekannt an, so stellt sich die Abzählung so: Auf jede der n Seitenebenen kommen jetzt 4 Constanten, andererseits haben wir noch ∞^3 Bewegungen um den Fixpkt. Daher werden zwischen den $4n$ Maasszahlen, welche wir im vorliegenden Falle unter Beiseitesetzung der n verschwindenden Kantenlängen noch zu betrachten haben, drei Relationen bestehen.

Sei endlich $n = 4n'$ und nehmen wir ein Kreisscheibenpolygon. Indem wir dessen ausgezeichnete Begränzungsebene wieder als bekannt gelten lassen, hängt das Polygon noch von $3n'$ Constanten ab. Aber es gibt wieder ∞^3 in Betracht kommende Bewegungen (die Bewegungen der ausgezeichneten Ebene in sich). Das Kreisscheibenpolygon hängt also von $3n'-3$ absoluten Constanten ab.

Es ist am bequemsten, die Definition derselben nicht aus den allgemeinen Festsetzungen der vorigen Stunde sondern direct aus der Fig. zu entnehmen: n' absolute Constante kommen auf die n' Winkel, welche die ungeraden Begränzungsebenen mit der Hauptebene bilden, $2n'-3$ weitere Maasszahlen sind auf das ebene Polygon zu rechnen, in denen die ungeraden Begränzungsebenen die Hauptebene durchdringen. Unmittelbar bietet dieses Polygon natürlich n' Seitenlängen u. n' Winkel, also $2n'$ Maasszahlen dar; zwischen diesen bestehen dann eben drei Relationen.

Handelt es sich nun um wirkliche Aufstellung der stattfindenden Relationen, so müssen wir, wie wir schon früher andeuteten, zwischen den gewöhnlichen polygonometrischen Relationen u. den Ergänzungstheoremen unterscheiden. Bei ersteren kommen die $\lambda, \mu, \ldots, l, m, \ldots$ etc nur mod. 2π in Betracht: sie enthalten nur die trigonometrischen Functionen Sinus u. Cosinus, also $\sin\lambda, \cos\lambda, \ldots$ und gelten darum gleichmässig für alle Polygone, die zu demselben Kern gehören. Die Ergänzungstheoreme geben dann an, wie beim einzelnen Polygon die absoluten Werthe der $\lambda, \mu, \ldots; l, m, \ldots$ mit einander verknüpft sind.

Was nun die Aufstellung der gew. polygonometrischen Relationen angeht, so erinnere man sich, wie wir beim Dreieck die bez. Relationen aus einem Ansatze von Hamilton abgeleitet hatten: Wir hatten das Dreieck mit seinen 3 Spiegelbildern umgeben:

u. nun die Drehungen betrachtet, welche um die 3 Ecken des Dreiecks (um die zugehörigen Kanten des Dreikants) durch die doppelten Winkel $2\lambda\pi$, $2\mu\pi$, $2\nu\pi$ stattfinden. Mögen dieselben $A_{2\lambda}$, $B_{2\mu}$, $\Gamma_{2\nu}$ heissen. $A_{2\lambda}$ führt dann das Spiegelbild 2 in 3 über, $B_{2\mu}$ 3 in 1, $\Gamma_{2\nu}$ 1 in 2. Dann ist:

$$\Gamma_{2\nu}\, B_{2\mu}\, A_{2\lambda} = 1,$$

u. die trigonometrischen Formeln der gew. Theorie ergeben sich, indem wir diese eine Glchg. entwickelten. Genau so werden wir nun unser Polygon von n Seiten mit n Spie-

http://rcin.org.pl

gelbildern umgeben u. mit Hülfe derselben erkennen, dass

$$N_{2\varrho} \ldots T_{2\nu} B_{2\mu} A_{2\lambda} = 1$$

sein muss, unter $N, \ldots T, B, A$ Drehungen um die Kanten des zugehörigen Kerns je durch den Doppelten Winkel $2\varrho\pi, \ldots 2\nu\pi, 2\mu\pi, 2\lambda\pi$ verstanden. Operiren wir allgemein, so gibt uns diese eine Formel gerade 6 Relationen, indem doch die allgemeine Bewegung des Raumes von 6 Constanten abhängt. Es kann natürlich sehr complicirt sein, diese 6 Relationen zu entwickeln, aber eine principielle Schwierigkeit dürfte in dieser Hinsicht nicht vorliegen.

Ganz anders ist es nun aber mit den Ergänzungstheoremen:

Wollen wir auch da die Analogie mit den früheren Dreiecksbetrachtungen voranstellen, so werden wir zuerst die Reductionsprocesse aufzählen, die ~~uns~~ bei unseren Polygonen zur Verfügung stehen:

Laterale } Abtrennung von Kreisscheiben.
Polare }

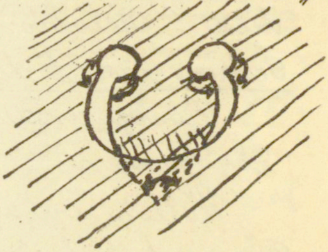
Transversale Abschnürung von Kreisringen
Diagonale " " von Vollkugeln.

Dann werden wir ein Polygon reducirt nennen, wenn es durch keinen dieser Processe mehr vereinfacht werden kann, u. natürlich den Satz haben, dass umgekehrt aus einem reducirten Polygon das allgemeinste Polygon durch beliebig wiederholte Anwendung der Anhängungsprocesse entsteht, welche die inversen der gerade genannten Processe sind.

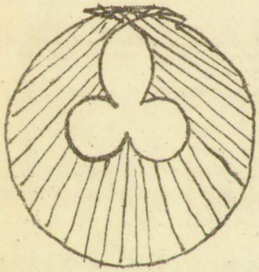
Aber nun ist die Schwierigkeit die, dass wir von der Gestalt eines reducirten n. Ecks uns bislang keine adäquate Vorstellung bilden können (~~was~~ doch nöthig wäre, um zu erfahren, welche Ergänzungstheoreme beim reducirten n. Eck Platz greifen, u. wie man das reducirte n. Eck

http://rcin.org.pl

durch irgendwelche Anhängungen erweitern kann). Hier zwei einfache Beispiele, welche zeigen sollen, wie verschiedene Möglichkeiten in dieser Hinsicht vorliegen. Ein reducirtes Dreieck überdeckte die Ebene nirgends doppelt, so lange nicht eine Seite desselben sich selbst überschlägt, u. Selbstüberschlagungen einer Seite kamen nur vor, weñ ein Winkel überstumpf wurde. Hier nun das Beispiel eines durchaus rechtwinkeligen Fünfecks, welches zweifellos reducirt ist, bei dem sich keine Seite überschlägt u. welches deñoch einen Theil der Ebene mehrfach bedeckt:

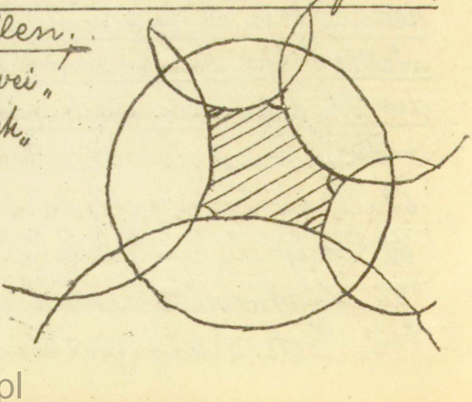


Hier ferner das Beispiel eines reducirten Fünfecks, dessen sämtliche Winkel gleich Null sind u. bei dem sich doch eine Kreisbogenseite selbst überschlägt:



Bei dieser Sachlage sehen wir uns genöthigt, von einer allgemeinen Aufstellung der Ergänzungstheoreme abzusehen u. denselben nur in einzelnen Fällen nachzugehen!

Wir betrachten insonderheit ein reducirtes Polygon, welches keinen Theil der Ebene mehrfach überdeckt u. von dessen Begränzungskreisen sich im̃er nur die unmittelbar auf einander folgenden schneiden sollen. ein solches Polygon kañ beispielsweise als hyperbolisches Polygon gezeichnet werden:



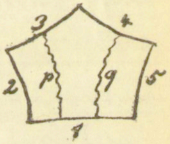
Wie viele Arten transversaler Anhängung von Kreisringen sind bei einem solchen Polygon neben einander möglich? Und

http://rcin.org.pl

wie viele Typen simultaner Anhängungen lassen sich dabei unterscheiden?

Wir werden die einzelne Anhängung von Kreisringen wieder dadurch bezeichnen, dass wir in unserem Polygon eine Querlinie ziehen, u. dann durch einen zugesetzten Buchstaben $p, q, \ldots$ andeuten, wie viele Kreisringe eingehängt werden sollen. Da ist der allgemeine Grundsatz, dass man nur solche Anhängungen neben einander ausführen kann, deren Querlinien so angeordnet werden können, dass sie sich wechselseitig nicht schneiden. Uebrigens aber kann man bei wachsendem n auf die verschiedenste Weise Systeme von $(n-3)$ einander nicht schneidenden Querlinien ziehen. —

Nehmen wir zuerst $n=5$, so wird folgendes die schematische Anordnung zweier verträglichen Anhängungen sein: Zugleich sieht man, dass bei $n=5$ kein anderer Typus der in Betracht kommenden Fig. existirt, als eben dieser. Nennen wir $X_1 \ldots X_5$ die Charakteristiken der Seiten des erweiterten Polygon's, so haben wir offenbar

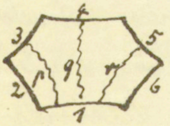


$$X_1 = p+q,\ X_2 = 0,\ X_3 = p,\ X_4 = q,\ X_5 = 0,$$

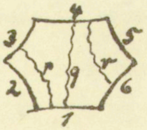
daher in diesem Falle als „Ergänzungstheoreme":

$$X_2 = 0,\ X_5 = 0,\ X_1 = X_3 + X_4. \text{ —}$$

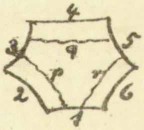
Bei $n=6$ sind drei einander nicht schneidende Querlinien zu ziehen. Ich finde, dass sich dies auf 3 verschiedene Weisen ermöglicht:



(a)



(b)



(c)

Im Falle a) haben wir:

$$x_2=0,\ x_6=0,\ x_1=x_3+x_4+x_5.$$

Im Falle b) dagegen:

$$x_2=0, x_5=0,\quad x_1-x_3=x_4-x_6.$$

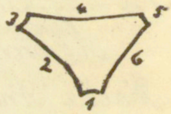
Im Falle c) endlich:

$$x_2=0,\ x_4=0,\ x_6=0,$$

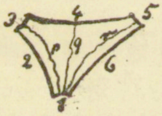
Daneben aber die Ungleichungen:

$$x_1<x_3+x_5,\ x_3<x_5+x_1,\ x_5<x_1+x_3.$$

So particulär diese Beispiele sein mögen, so genügen sie doch, um auf unsere frühere Theorie der Dreiecke, bez. der Hermite-Laméschen Vierecke ein neues Licht zu werfen. Man lasse das Sechseck der vorstehenden Figuren in folgender Weise in ein Dreieck ausarten:



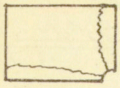
Dann geht der Anhängungsmodus b) verloren, weil sich die Kreislinien 4 u. 6, wenn wir zum Dreieck übergehen, selbstverständlich schneiden müssen. Fig. a) und c) aber ergeben gerade diejenigen beiden Erweiterungsprocesse des Dreiecks, die wir früher ohnehin studirt haben:



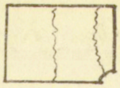
In der That haben wir linker Hand die Fig. vor uns stehen, wo an das Dreieck zwei laterale u. eine polare Anhängung gemacht werden, rechter Hand die andere, bei der drei laterale Anhängungen stattfinden. Analog ist es beim Hermite-Laméschen Viereck. Wenn wir bei diesem die „ausgezeichnete" Ecke durch einen kleinen Kreisbogen ersetzen u. nun die Figuren der zweierlei Anhängungen zeichnen, die wir da in Betracht gezogen hatten, so

http://rcin.org.pl

erhalten wir:



a

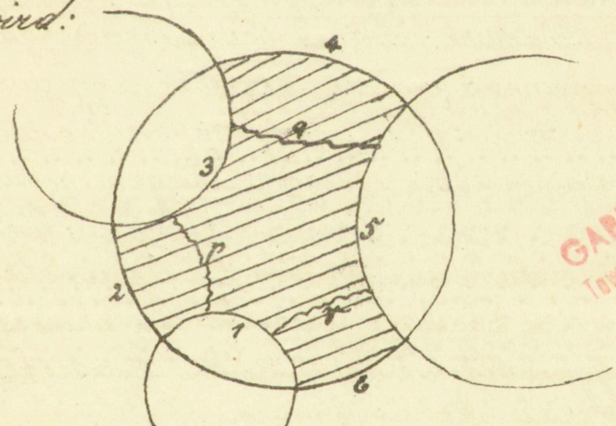


b

Man erkennt in den beiden Figuren Specialfälle der auf p. 25. für das Fünfeck gezeichneten Figur. Offenbar werden wir zusammenfassend sagen dürfen:

Schließen wir uns der wiederholt berührten Auffassung an, und betrachten Polygone mit beliebigen Winkeln als Gränzfälle von durchaus rechtwinkligen Polygonen, so werden die verschiedenen auf p. 23 namhaft gemachten Anhängungsprocesse als Grenzfälle eines einzigen Anhängungsprocesses, nämlich der transversalen Anhängung erscheinen.

Wir könnten die Erweiterungsprocesse jetzt beispielsweise weiter beim Kreisscheibenpolygon untersuchen. Beispielsweise gebe ich folgende Figur für $n = 6$, die ohne Weiteres verständlich sein wird:



GABINET MATEMATYCZNY
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego

Doch ist es Zeit, diese geometrischen Betrachtungen abzubrechen.

http://rcin.org.pl

Uebergang zu den Differentialgleichungen.

Die charakteristische Wendung, welche wir nunmehr unseren Betrachtungen geben, ist die, dass wir uns das Kreisbogenpolygon der η. Ebene (oder η. Kugel) nunmehr auf eine Halbebene x conform abgebildet denken (was nach der Theorie der conformen Abbildung im̄er möglich sein muss), u. dass wir diese conforme Abbildung dazu benutzen, um η als eine Function von x zu definiren.

Besagte Definition weist natürlich zunächst nur den Pkten x unserer Halbebene (sagen wir der „positiven" Halbebene) je einen Werth η zu: sie gibt, für die Halbebene, den Verlauf eines einzelnen Functionszweigs. Aber diesen Zweig werden wir nun analytisch fortsetzen, indem wir einerseits das Polygon, andererseits die Halbebene an den verschiedenen Stücken ihrer Begränzung spiegeln (sym̄etrisch vervielfältigen). Dadurch werden jedem x eine ganze Reihe von Werthen η zugewiesen, die in der Ebene η durch solche Pkte vorgestellt werden, welche an correspondirenden Stellen direct kreisverwandter Polygone liegen. η wird also eine solche Function von x, deren verschiedene Werthe sich aus einem derselben durch eine bestim̄te Gruppe linearer Substitutionen $\eta' = \frac{\alpha_i \eta + \beta_i}{\gamma_i \eta + \delta_i}$ ergeben. Wir schliessen daraus, dass der Differentialausdruck dritten Grades $[\eta]_x$ eine eindeutige Function von x ist: $[\eta]_x = F(x)$.

Aber diese $F(x)$ kan̄ nur an den singulären Stellen $a, b, c, ..$ der X-Axe unendlich werden, die den Ecken unseres Polygon's entsprechen, weil dort allein eine Abweichung der Abbildung von dem eigentlichen conformen Verhalten eintritt. Zugleich erfahren wir durch die nähere Betrachtung dieser Abweichung, dass $F(x)$ an der einzelnen singulären Stelle nur zweifach ∞ wird u. zwar mit einem gegebenen Coëfficienten. Von hier aus schliessen wir dan̄, dass $F(x)$ eine rationale Function von x von der folgenden Bauart sein muſs:

$$F(x) = \frac{1}{(x-a)(x-b)\dots}\left\{\frac{1-\lambda^2}{4}\cdot\frac{(a-b)(a-c)\dots}{x-a}+\dots+4\,G_{n-4}(x)\right\},$$

wo $G_{n-4}(x)$ eine ganze Function $A x^{n-4} + B x^{n-5} + \dots$ bezeichnet. Unsere Function η, die wir durch die conforme Abbildung definirten, genügt also eben einer solchen Differentialglchg. 3ter Ordnung, wie wir sie in diesem Semester betrachten wollten.

Und damit ist ersichtlich ein neuer Ansatz zum Studium dieser Differentialglchgen (wie der zugehörigen linearen Differentialglch. 2ter Ordnung) gewon̄en. Zunächst erscheinen diese Differentialgleichungen bestim̄t durch die in ihnen unmittelbar auftretenden Constanten, die wir die algebraischen Parameter nen̄en wollen:

die Exponentendifferenzen $\lambda, \mu \dots$
die Verzweigungswerthe $a, b, \dots$
die accessorischen Parameter $A, B, \dots$,

jetzt treten uns statt dessen die Maasszahlen des Polygons, die wir die transcendenten Parameter nen̄en wollen, entgegen. Um den Vergleich genauer durchzuführen, müſsen wir natürlich beachten, dass sich die Abbildung des η-Polygons auf die positive Halbebene x auf ∞^3 Weisen bewerkstelligen lässt, entsprechend einer linearen Transformation $x' = \frac{ax+b}{cx+d}$ mit reellen Coëfficienten (u. positiver Determinante), durch die wir unsere Halbebene auf sich selbst abbilden kön̄en. Es sind darum nicht sowohl die $a, b, \dots$ selbst, die zu Vergleich stehen, als die Doppelverhältnisse der $a, b, \dots$ Neben diese stellen sich dan̄ die $A, B, \dots$ Uebrigens bemerken wir ausdrücklich, dass die $\lambda, \mu, \dots$ gleich-

http://rcin.org.pl

zeitig algebraische u. transcendente Parameter sind, indem sie ja nicht nur die Exponentendifferenzen unserer Differentialglchg, sondern ebensowohl die Eckenwinkel unseres Polygons messen.

Vermöge unserer neuen Auffassung treten also wesentlich den Invarianten der $a, b, \ldots A, B, \ldots$ die Seitenlängen unseres Polygons, bez. die Kantenlängen seines Kerns als neue, transcendente Bestimmungsstücke gegenüber.

Wir werden übrigens weiterhin diese neue Auffassung nicht rein zur Geltung bringen (ausser bei Gelegenheit zwischendurch), vielmehr zwischen ihr u. der älteren Auffassung einen gewissen Mittelweg wählen, der zunächst der interessanteste scheint: *wir werden nämlich die Verzweigungswerthe $a, b, \ldots$, bez. ihre Doppelverhältnisse, als solche vorgeben, und dann nur fragen, wie weit wir noch über die Maassverhältnisse des zugehörigen Polygon's verfügen dürfen, um dadurch die accessorischen Parameter festzulegen.* Näheres darüber bald. Bemerken wir nur noch, dass für $n = 3$ alle diese verschiedenen Ansätze zusammenfallen, so dass Riemann's ursprüngliche Behandlung des Falles $n = 3$ weder zu Gunsten des einen noch zu Gunsten des anderen Ansatzes herangezogen werden kann. In der That: bei $n = 3$ bestimmen sich durch die λ, μ, ν die übrigen trancendenten Parameter von selbst, accessorische Parameter aber und Doppelverhältnisse der $a, b, ..$ gibt es überhaupt nicht. So bleiben für $n = 3$ als einzige Bestimmungsstücke, mögen wir die Sache so oder anders wenden, die von Riemann benutzten λ, μ, ν übrig.

Imer will ich an die Auffassung des unabhängig gegebenen η. Polygon's folgende Bemerkung anschliessen: An

http://rcin.org.pl

das gegebene Polygon können wir durch Anhängung oder Abtrennung von Kreisscheiben etc. ∞ viele andere verwandte Polygone schliessen. Wie hängen die zugehörigen Differentialgleichungen 3. Ordnung, wie insbesondere ihre Verzweigungsstellen von einander ab? Dies scheint ein interessantes Problem zu sein.

Zur Rechtfertigung des „Mittelweges", den wir am Schlusse der vorigen Stunde bezeichneten, können wir zunächst etwa anführen, dass wir denselben im Falle der Hermite-Lamé'schen Glchg. in der That benutzt haben. Dachten wir doch dort die Verzweigungsstellen e_1, e_2, e_3, ∞ als von vorneherein gegeben, um dann die volle Bestimmung der Differentialglchg aus allgemeinen Eigenschaften des Polygons, die wir verlangten, abzuleiten. – Wir dürfen uns aber ferner auf die Analogie mit Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale berufen. In letzterer gelten die Riemann'sche Fläche, welche das Integral trägt, und die Unendlichkeitsstellen des Integrals als das zunächst Gegebene, – das entspricht genau dem, dass wir für die η-Fct. die Verzweigungspkte geben; die Analogie wird noch deutlicher hervortreten, wenn wir demnächst Gelegenheit nehmen, η-Fctionen nicht auf der schlichten Ebene, sondern auf vorgeschriebener Riemann'scher Fläche zu betrachten (auf der dann wieder bestimmte Verzweigungspkte gegeben sein können. Riemann untersucht dann des Weiteren die transcendenten Eigenschaften des Integrals, d. h. die Perioden, die es bei Umläufen über die Fläche hin zeigt. Dem entspricht, dass wir die conforme Abbildung in Betracht ziehen, welche η von der zerschnittenen Ebene oder

So. 9. Mai 1891.

http://rcin.org.pl

Riemann'schen Fläche entwirft. Und nun benutzt R. diese Perioden, um mit ihrer Hülfe durch irgendwelches Bedingungssystem die p „accessorischen Parameter", welche das Integral (von der Integrationsconstante abgesehen) noch einschliesst, eindeutig festzulegen! Er zeigt beispielsweise, dass man zu diesem Zwecke die *reellen Bestandtheile* der $2p$ Perioden beliebig annehmen darf. Genau das Entsprechende ist nun, was wir beim η anstreben.

Allerdings müssen wir einstweilen auf eine *allgemeine* Erledigung des sonach gestellten Problems durchaus verzichten. Ich werde Ihnen vielmehr nur einzelne Fälle transcendenter Bedingungssysteme vorführen können, welche das Gewollte leisten, d. h. die accessorischen Parameter festlegen. Dieselben gruppiren sich um drei Sätze, über die ich vorab das Historische mittheilen will.

1) *das Kreisscheibentheorem,*
2) *das hyperbolische Theorem,*
3) *das Oscillationstheorem.*

Nr. 1 u. 2 beziehen sich auf die Untersuchungen, welche ich mit *Poincaré* zusammen in den Jahren 1881–82 über automorphe Functionen ausführte, Nr. 3 wurde kurz vorher (Frühjahr 1881) von mir durch physikalische Betrachtung gefunden.

Ehe ich 1) u. 2) bespreche, will ich doch, um den Berichte eine gewisse Allgemeinheit zu geben, *von den η. Functionen auf einer Riemann'schen Fläche* Näheres erzählen. Eine solche η. Function wird auf der R-Fläche bestimmte Puncte $a, b, \ldots$ in endlicher Zahl (n) zu singulären Pkten haben, deren nähere Natur durch gewisse Exponentendifferenzen $\lambda, \mu, \ldots$ festgelegt ist, übrigens aber wird sie überall auf der R. Fl. regulär verlaufen u. die charakteristische Eigenschaft besitzen, sich nach Durchlaufung irgend welchen auf der Riemañ'schen Fläche gelegenen geschlossenen Wges jedesmal in der Gestalt $\frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}$ zu reproduciren. Ist p das Geschlecht der Riemañ'schen Fläche, so findet man, dass in der Differentialglchg. 3. Ordg. der dieses η bezüglich irgend welcher auf der R. Fl. existiren der algebraischer Function x genügt:

$$[\eta]_x = \text{Algebraische Function der R. Fl.}.,$$

genau $n+3p-3$ accessorische Parameter enthalten sind. Diese $n+3p-3$ accessorischen Parameter werden dañ aus der Gestalt des „Fundamentalbereichs" festzulegen sein, auf welche unser η die zweckmässig zerschnittene R. F. abbildet. — Man sieht übrigens, dass für $p>0$ der Werth $n=0$ zulässig ist: es gibt dañ überall unverzweigte η. Functionen, ihre Anzahl ist (die 3 Integrationsconstanten des einzelnen η nicht mit eingerechnet) ∞^{3p-3}. Diese unverzweigten η. Functionen sind offenbar das Analogon der ∞^p überall endlichen Integrale, die zu der R. Fl. gehören. —

Ich wende mich nun zunächst zu Nr. 1.

Nr. 1. Das Kreisscheibentheorem.

Möge auf der x. Axe eine gerade Anzahl von singulären Punkten $a, b,$ – vorgegeben sein, durch welche dieselbe in die Segmente $1, 2, \ldots 2m$ zerfällt. Möge ferner die Exponentendiffanz einer jeden dieser singulären Pkte $= \frac{1}{2}$ genomen werden. Das Kreisscheibentheorem behauptet dañ:

Man kañ über die $2m-3$ in der Differentialglchg.

auftretenden accessorischen Parameter imer u. nur auf eine Weise so verfügen, dass unser η die Halbebene x auf ein reducirtes Kreisscheibenpolygon von $2n$ Seiten abbildet, dessen Hauptkanten den Segmenten $1, 3, 5, \ldots$ der x-Axe entsprechen.

Als „reducirtes" Kreisscheibenpolyon soll dabei ein solches bezeichnet werden, welches keine sich selbst überschlagende Kante hat, d. h. ein solches, wie es für $n=6$ die nachstehende Fig. darstellt:

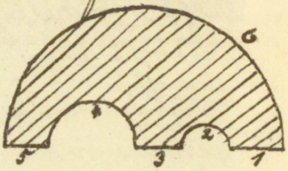


Fig. 1.

Ich habe dabei der Einfachheit halber den das Polygon unschliessenden Hauptkreis zur geraden Linie gestreckt, auch die Numern der einzelnen Segmente der X-Axe an die zugehörigen Polygonkanten angeschrieben. —

Das so formulirte Theorem ist ein sehr specieller Fall eines Satzes, den ich ursprünglich im Herbst 1881 fand (als ich mit meiner Schrift über Rieman̄'s Theorie beschäftigt war) u. den ich dan̄ im 19ten Bande der An̄alen unter dem 12. Jan. 1882 publicirte. Dieser Satz bezieht sich auf die ∞^{3p-3} η-Functionen, welche auf einer gegebenen Rieman̄'schen Fläche unverzweigt sind, u. besagt Folgendes:

Hat man die Rieman̄'sche Fläche irgendwie durch p einander nicht kreuzende Rückkehrschnitte zerschnitten, so gibt es unter den ∞^{3p-3} η. Functionen eine u. nur eine, welche die zerschnittene Fläche auf einen zusamenhängenden Bereich der η. Ebene abbildet, der letztere nirgendwo mehrfach überdeckt. Der betr. Bereich hat den $2p$ Ufern, welche unsere Rückkehrschnitte auf der Rieman̄'schen Fläche darbieten, entsprechend natürlich $2p$ Begränzungscurven, die durch lineare Substitutionen von η zusamen geordnet werden. Man kann diesen Begränzungscurven durch geeignete Wahl der Rückkehrschnitte, durch welche wir die gegebene R. Fl. zerschneiden, allemal kreisförmige Gestalt ertheilen.

Die folgenden Figuren mögen diese Verhältnisse schematisch erläutern: Wir zeichnen zuerst eine R. Fl. $p=3$ in Gestalt einer mehrfachen Ringfläche u. bringen auf ihr 3 Rückkehrschnitte an: (I, II, III):

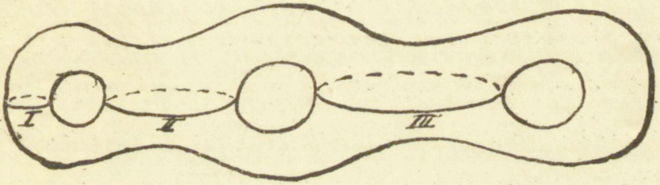


Fig. 2.

Ferner aber einen Bereich der η Ebene, der von 6 paarweise zusamengeordneten Kreisen begränzt ist:

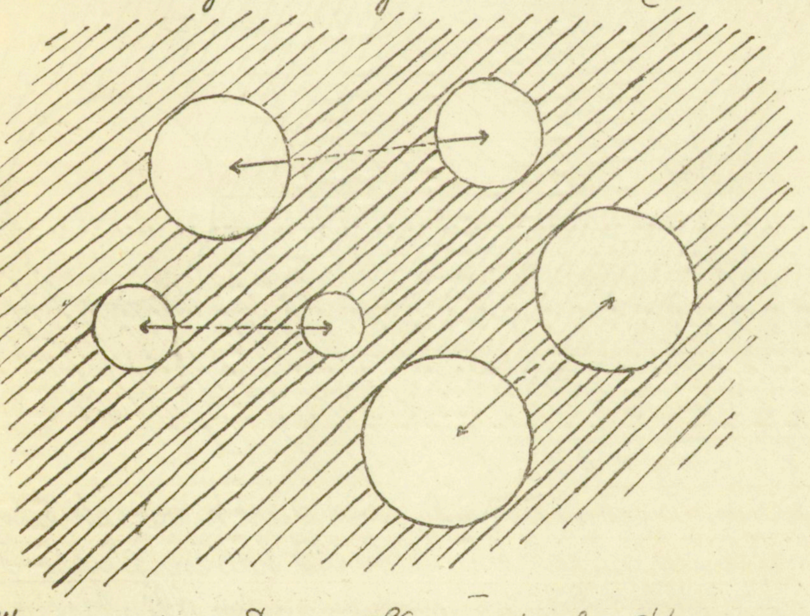


Fig. 3.

Wie nun hängt das Kreisscheibentheorem mit diesem allgemeinen Satze betr. beliebige R. Flächen zusamen? Wir müssen, um den Zusamenhang zu verstehen, die

http://rcin.org.pl

x. Ebene des Kreisscheibentheorems mit einer zweiblättrigen (hyperelliptischen) Fläche bedecken, deren beide Blätter an den vorgegebenen Verzweigungsstellen a, b, — zusammenhängen. — Also, um an die Verhältnisse der Fig. 1 anzuknüpfen:

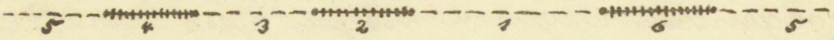


Fig. 4.

(hier sollen 2, 4, 6 diejenigen Stücke der X-Axe sein, längs deren sich die beiden Blätter der Fläche durchdringen, 1, 3, 5 aber die Stücke, längs deren die beiden Blätter getrennt über einander hinlaufen). Wollen wir uns nun zur Fig. 1) zurückwenden, u. diese einmal am Hauptkreise, d. h. an der horizontalen Begränzungslinie, dann aber am Kreise 6 durch Symmetrie vervielfachen. So entsteht folgende Fig:

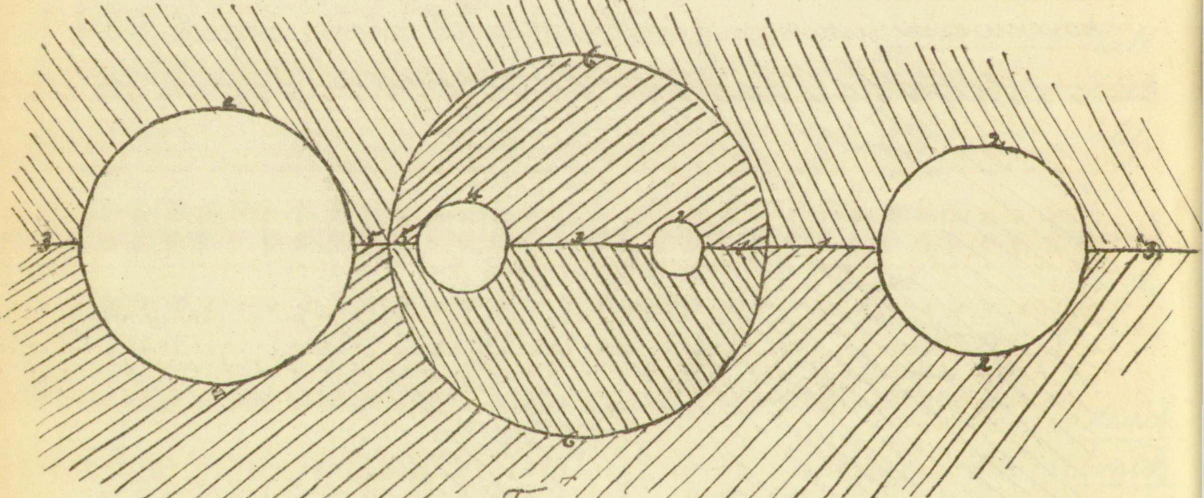


Fig. 5.

deren einzelne Bestandtheile wir durch verschiedenartige Schraffirung gekennzeichnet haben. Diese Fig. ist nun eine Abbildung unserer hyperelliptischen Fläche, wobei wir uns nun denken müssen, dass wir dieselbe längs der Stücke 2, 4 der x. Axe, d. h. längs zweier auf der hyperelliptischen Fläche einander nicht kreuzen„ der Rückkehrschnitte aufgeschlitzt haben. Eben darum aber haben wir es mit einem Specialfall der allgemei„ nen Fig. 3 zu thun (nur dass wir jetzt $p = 2$ angenom„ men haben). Wir steigen von Fig. 5 zu Fig. 1. herun„ ter, indem wir bemerken, dass Fig. 5, ebenso wie die zerschnittene hyperelliptische Fläche aus 4 zu einander symetrischen Theilen besteht. Das Kreisscheibentheo„ rem entsteht also aus dem allgemeinen Theorem von Nr. 19. indem man den Umstand benutzt, dass eine hy„ perelliptische Fläche 4 eindeutige Transformationen in sich besitzt, u. auf der hyperelliptischen Fläche die p Rück„ kehrschnitte so wählt, dass sie bei diesen Transformatio„ nen in sich selbst übergehen. —

Fig. 1, resp. Fig. 5 werden analytisch fortgesetzt wer„ den, indem man sie im̄er auf's Neue an den begränzen„ den Kreisbogen spiegelt, Fig. 3, indem man die Fig. den durch die Doppelpfeile angedeuteten linearen Substitutionen im̄er wieder auf's Neue unterwirft. Dass die neuen Figuren, welche man solcherweise erhält, sich glatt neben einander legen, ohne irgend welchen Theil der η- Ebene mehrfach zu überdecken, dass al„ so die Riemañ'sche Fl., Fig. 2 resp. Fig. 4, in η ein„ deutig - automorph wird, dürfte deutlich sein. Die allgemei„ nen automorphen Functionen, auf die wir hier kom̄en, wurden im Anschluss an einen Brief, den ich Poinca„ ré geschrieben, zuerst von Letzterem in den Comptes Rendus vom 27. Juni 1881 (t. 92, p. 1484) betrachtet. Den symetrischen Fall der Fig. 2 (dessen Fundamentalbe„

reich aus einem von $p+1$ Kreisen begränzten Stück der η. Ebene durch einmalige Spiegelung entsteht) war schon vorher in Anknüpfung an physikalische Fragestellungen von Riemann betrachtet worden (cf. Nr. 25 des Nachlasses in den 1876 herausgegebenen „Werken"), dann auch von Schottky in seiner Dissertation (1876, Breslau) u. bald darauf in einer Abhandlung in Bd. 83 des Journals (1877).

Nr. 2. Das hyperbolische Theorem.

Wieder beginnen wir mit der schlichten x-Ebene mit n der reellen Axe angehörigen singulären Puncten $a, b, \ldots$, denen wir jetzt Exponentendifferenzen $1/l$, $1/m$, $\ldots$ beilegen wollen (unter $l, m, \ldots$ ganze Zahlen verstanden, die auch ∞ sein können). Das Theorem lautet:

Man kann die $n-3$ accessorischen Parameter unter diesen Umständen gerade auf eine Weise so bestimmen, dass die Halbebene x auf ein reducirtes hyperbolisches Polygon der η. Ebene abgebildet sind:

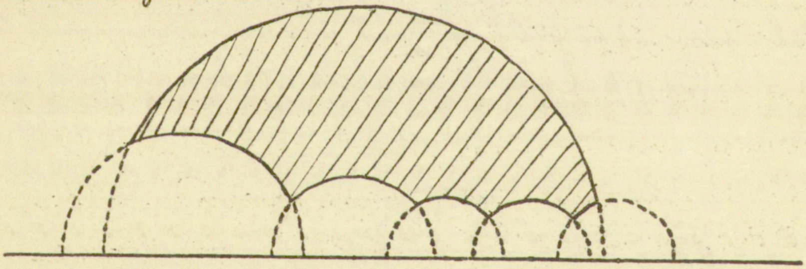


Fig. 6.

Nehmen wir insbes $l = m = \ldots = \infty$, so entsteht folgende Fig., die der Auffassung besonders zugänglich ist:

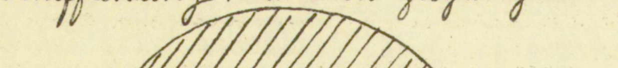


Fig. 7.

http://rcin.org.pl

Was die Entstehung des Theorems angeht, so wurde der Fall der Fig. 7 zuerst von Poincaré aufgestellt, vergl. t. 92 der Comptes Rendus vom 18. April 1881 (p. 957), der allgemeine Fall der Fig. 6 ergab sich erst später aus der Verallgemeinerung der Fig. 7, die ich mittlererweile für beliebige algebraische Gebilde gegeben hatte. Es handelt sich hier um das allgemeine Theorem, welches ich in Annalen XX unter dem 27. März Mi. 13/5. 91.
1882 veröffentlichte. Wir denken uns wieder eine beliebige R. Fl. vom Geschlechte p mit irgendwelchen singulären Puncten $a, b, \ldots$ gegeben, denen wir die Exponentendifferenzen $\lambda = \frac{1}{l}$, $\mu = \frac{1}{m}$, ... zuweisen. Wir denken uns die R. Fl. irgendwie durch $2p$ Querschnitte und n nach den Verzweigungspkten hinlaufende Einschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche zerschnitten. Das allgemeine Theorem besagt dann, dass man unter den zugehörigen ∞^{n+3p-3} η-Functionen gerade eine ausfindig machen kann, welche die zerschnittene R. Fl. auf einen reducirten hyperbolischen Fundamentalbereich abbildet, d. h. auf ein nirgends mehrfach bedecktes Stück der Halbebene x, dessen Begränzungskanten paarweise durch Substitutionen zusammengehören, bei denen die reelle x-Axe in sich selbst übergeht*). Dieses Theorem ist um so wichtiger, als sich die η-

*) In Ann. XX habe ich nur den Fall $l = m = \ldots = \infty$ berücksichtigt, obgleich ich den allgemeinen Fall kannte. der Fall beliebiger $l, m, \ldots$ ist dann von Poincaré in der Mittheilung an die Comptes Rendus vom 11. April 1882, in der er an meine Note anknüpft, hinzugefügt worden (C. R. t. 93, p. 1038). Unser persönliches Verhältniss hatte sich damals so gestaltet: Poincaré hatte schon in den Comptes Rendus von Aug. 1881 (t. 93, p. 301) bemerkt, dass man beliebige algebraische Gebilde durch die automorphen Functionen des hyperbolischen Falles eindeutig darstellen kann, aber er gebraucht dazu über die etwa vorgeschriebenen Verzweigungspkte hinaus allgemein zu reden eine grosse Zahl weiterer, erst aus seinem Ansatze entstehender Verzweigungspkte. Meine oben genannte Note in Ann. 19 hatte ihn dann veranlasst, auch seinerseits über η. Functionen nachzudenken, durch welche man beliebig vorgegebene R. Flchen in der Art eindeutig automorph darstellen kann, dass keine anderen Verzweigungspkte auftreten, als die vorgegebenen, eventuel also alle Verzweigungspkte fehlen. Er war dabei gerade auch zu dem Theorem von An. XX gekommen, als ich ihm mit meiner Publication zuvorkam. (Briefliche Mittheilung von 1882, mündliche von 1887). So gern ich dies anführe, so kann ich nicht zugeben, dass Poincaré, wie es in Frankreich u. anderwärts wohl geschieht, als alleiniger Entdecker des Theorems genannt wird! – ... sogar des Theorems von An. 19!

GABINET MATEMATYCZNY Towarzystwa Naukowego Warszawskiego

http://rcin.org.pl

Function, von der es handelt, als unabhängig von der Zerschneidung erweist, die wir für die Riemañ'sche Fl. wählen mögen: sie hängt nur von der R. Fl. als solcher u. von den auf ihr gegebenen Verzweigungspkten, bez. den zugehörigen $l, m, ..$ ab. Nimt man überhaupt keine Verzweigungspunkte an, so hat man ein η welches durch die R. Fl. selbst eindeutig bestimt ist!

Um die Beziehung dieses allgemeinen Satzes zu dem „hyperbolischen" Theoreme, welches uns hier eigentlich beschäftigt, bez. zu den Figuren 6 u. 7 zu kenzeichnen, genügt es, letztere Figuren durch Spiegelung an irgend einem ihrer Begränzungskreise zu verdoppeln u. dañ die Beziehung zur x-Ebene in's Auge zu fassen. Wählen wir z. B. bei Fig 6 den aeusseren Begränzungskreis als Spiegelkreis, so erhalten wir folgenden Bereich:

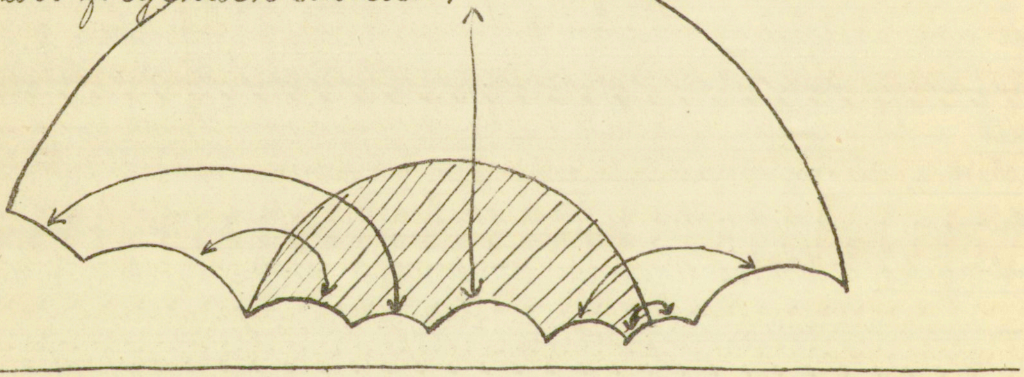
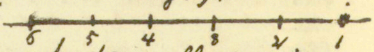


Fig. 8.

dessen Kanten in der Art paarweise zusamengehören, wie es durch die Doppelpfeile angedeutet ist. Offenbar ist dies ein „reducirter, hyperbolischer" Bereich, der ein Bild der „Gesamtebene" x vorstellt, die letztere längs der Stückes 1-2-3-4-5-6 der reellen Axe zerschnitten gedacht:

Fig. 9.



Eben einen solchen Bereich soll man noch dem allgemeinen Theoreme allemal finden köñen, weñ man in der x. Ebene irgend welche (nicht nothwendig reelle) Verzweigungspkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 annimt u. diese durch einen Einschnitt verbindet. Die Besonderheit der Fig. (8) besteht nur darin, dass sie sich aus 2 zu einander symmetrischen Hälften zusammensetzt. In diesem Sinne können wir sagen:

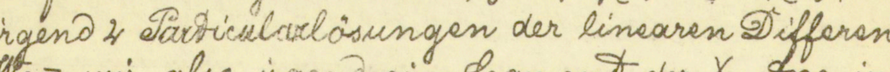
Unser Theorem vom hyperbolischen Polygon ist derjenige Specialfall des allgemeinen Theorems, der sich für $p=0$ im Falle der Symetrie einstellt.

Bemerken wir wieder kurz, dass die reducirten hyperbolischen Bereiche, welche uns das allgemeine Theorem vor Augen stellt, sowie insbesondere die hyperbolischen Polygone unseres Specialfalles analytisch reproducirt eine Ueberdeckung der η. Ebene ergeben, welche sich auf die positive Halbebene η beschränkt u. nirgendwo mehrfach ist. Indem wir η als unabhängige Variable einführen, entspringen also eindeutige automorphe Darstellungen unserer Riemann'schen Fl., bez. der Ebene x, welche nur in der positiven Halbebene x existiren. Ein ganz specieller Fall derselben wird durch die Dreiecksfunctionen gebildet, die wir vor Weihnachten ausführlich in Betracht zogen. Offenbar wird man für die hier vorliegenden allgemeineren Functionen ganz ähnliche Entwickelungen verlangen können, wie wir sie damals für die Dreiecksfunctionen gaben; es ist dies nur erst zum Theil von Poincaré ausgeführt. —

Uebrigens bemerke ich, dass die beiden Sätze über automorphe Functionen, die ich nunmehr besprach, (die Sätze von Bd. 19 u. 20, oder das Kreisscheibentheorem u. das hyperbolische Theorem), als Specialfälle eines umfasssenderen Theorems angesehen werden können, welches ich in Annalen 21 (Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie, p. 206 ff) formulirt habe. Ich gehe hierauf an gegenwärtiger Stelle nicht ein, weil ich im Augenblicke nichts Anderes bezwecke, als Ihnen eine vorläufige Vorstellung von der Art der hier in Betracht kom̄enden Sätze zu geben, u. dieses wird hinreichend durch die beiden Beispiele, die ich anführte (u. die in der That die einfachsten sind), erreicht sein.

Nr. 3. Das Oscillationstheorem.

Ich habe das Oscillationstheorem ursprünglich (1881, An. 18: Ueber Körper, welche von confocalen Flächen zweiten Grades begränzt sind) an die Hermite-Lamésche Glchg. angeknüpft; in meiner Vorlesung vom Winter 1889–90 (Ueber Lamésche Functionen) dehnte ich dasselbe sodan̄ auf allgemeine Lamésche Functionen, dieses Wort in dem damals entwickelten Sin̄e genom̄en, aus. Wir haben bei letzteren n singuläre Puncte, die alle als reell vorausgesetzt werden, u. bei jedem derselben die Exponentendifferenz $\frac{1}{2}$. Daneben dan̄ $n-3$ accessorische Parameter. Während wir nun früher darauf ausgingen, zuzusehen, wie die Oscillationen der Curven $y = P(x)$ von den Werthen dieser Parameter abhängen, geht das „Oscillationstheorem" davon aus, <u>umgekehrt gewisse Oscillationen der Curven zu verlangen u. hierdurch die accessorischen Parameter festzulegen</u>. Die Curven $y = P(x)$ bilden eine zweifach unendliche Schaar (wir haben, ausführlicher geschrieben, $y = c_1 P_1(x) + c_2 P_2(x)$, wo $P_1(x)$, $P_2(x)$ irgend 2 Particularlösungen der linearen Differentialglchg.) Wen̄ wir also irgend ein Segment der X-Axe in's Auge fassen, z. B. ab



so kön̄en wir im̄er eine solche Curve $y = P(x)$ aussuchen,

http://rcin.org.pl

welche durch den einen Endpkt dieses Segmentes, z. B. durch den Pkt a, hindurchgeht. Das Oscillationstheorem in seiner ursprünglichen Fassung verlangt nun, dass dieselbe Curve auch durch den anderen Endpkt b gehen soll, nachdem sei von a bis b eine gewisse Anzahl von Halboscillationen ausgeführt hat. Und zwar verlangt dasselbe das hiermit bezeichnete Verhalten gleichmässig bei $(n-3)$ irgendwie gelegenen (aber von einander getrennten, über keinen singulären Punct hinübergreifenden) Intervallen der x-Axe. Das Theorem behauptet dann, dass durch die so bezeichnete Forderung die $n-3$ accessorischen Parameter der Laméschen Glchg. gerade eindeutig bestimmt sind. Wir geben dem Theorem mit Richtigkeit eine Form, die unseren sonstigen, auf die η. Ebene bezüglichen Betrachtungen besser entspricht. Wenn die Curve $y = \mathcal{P}(x)$ von a bis b irgendwelche Zahl, sagen wir k, Halboscillationen ausführt, so wird das Kreisbogenstück, welches dem Segmente ab der x. Axe in der η. Ebene entspricht, sich genau k.mal überschlagen (k. mal eine volle Kreisbogenperipherie umspannen). Das Oscillationstheorem besagt also, dass man die $n-3$ accessorischen Parameter eindeutig festlegen kann, indem man von den Kreisbogenstücken, die $n-3$ getrennten, über keinen singulären Pkt hinübergreifenden Segmenten der x. Axe entsprechen, je eine bestimte Zahl genauer Selbstüberschlagungen verlangt. Indem wir das Theorem solcherweise aussprechen, bietet sich wie von selbst eine Verallgemeinerung (deren Richtigkeit zu prüfen bleibt): warum sollen wir von den genannten Kreisbogenstücken genaue Selbstüberschlagungen verlangen? Werden die $n-3$ accessorischen Parameter nicht auch eindeutig festgelegt sein, wenn wir die Längen der Kreisbogenstücke, gemessen in

http://rcin.org.pl

unserer Nichteuklidischen (projectiven) Maassbestimmung, irgendwie vorschreiben? Immer haftet auch diese Verallgemeinerung noch an der Betrachtung reeller Segmente, bez. reeller Differentialgleichgen. Wir werden für unser Oscillationstheorem eine allgemeine functionentheoretische Bedeutung erst dann gewonnen haben, wenn es gelingt, dasselbe auf complexe Bestimmungsstücke u. zuletzt auch auf die Fälle $p > 0$ auszudehnen.

Ueberhaupt aber stellen wir es als die Aufgabe der folgenden Vorlesungsstunden hin, nicht nur die bis jetzt gemachten Angaben über die Theoreme Nr. 1, 2, 3 des Näheren auszuführen, sondern diese Theoreme daneben zu entwickelen u. zu verallgemeinern, so dass sie womöglich in Wechselwirkung treten. In demselben Maasse, als uns dies gelingt, kommen wir einer allgemeinen Beantwortung des auf p. 30 aufgestellten Grundproblems näher.

Geometrische Ausführungen zum Kreisscheibentheorem und hyperbolischen Theorem.

Mi. 27/5. 91.

Indem wir jetzt dazu übergehen, zunächst die beiden Theoreme 1 u. 2 näher zu entwickeln, lassen wir die Verallgemeinerungen auf unsymetrische Bereiche eines beliebigen p, die wir vor Pfingsten zur Sprache brachten, nunmehr bei Seite: das Kreisscheibenpolygon als solches, u. das hyperbolische Polygon werden uns hinreichenden Stoff zu ferneren Betrachtungen liefern. Diese Betrachtungen kan̄ man dan̄ freilich im̄er auf die höheren Fälle ausdehnen, aber wir werden uns dabei nicht aufhalten, vielmehr die Ausführung der hier mit angedeuteten allgemeineren Betrachtungen späteren Semestern überlassen.

Wir handelen zunächst von den <u>automorphen Figuren</u>, welche aus dem Kreisscheibenpolygon, bez. dem hyperbolischen Polygon bei unbeschränkt wiederholter Anwendung des Spiegelungsprocesses entstehen, dan̄ von den <u>automorphen Functionen</u>, die sich an diese Figuren anschliessen. Dabei wolle man das, was im vorigen Wintersemester über Dreiecksfunctionen gesagt wurde, gegenwärtig halten u. insbesondere auch die einschlägigen Kapitel des Buches über Modulfunctionen (wo die Darstellung viel ausführlicher angelegt ist) zum Vergleich heranziehen.

Mögen die Kanten der Kreisscheibe, bez. des hyperbolischen Polygons mit Ziffern 1, 2, 3 . . . benant werden, also z. B. in den beiden hier gezeichneten Beispielen mit 1, 2, 3, 4, 5, 6:

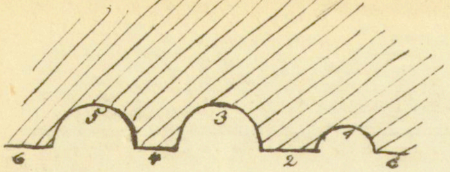


Fig 1. a

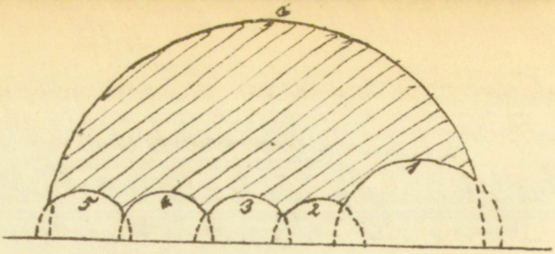


Fig. 1, b

(Ich habe dabei die Kreisscheibe so gewählt, was für die folgenden Zeichnungen bequem ist, dass sie sich ins Unendliche erstreckt). Wir haben dann beidemal 6 Spiegelungen

$$A_1, A_2, A_3, A_4\ A_5\ A_6$$

in Betracht zu ziehen, wobei natürlich im Falle der Kreisscheibe

$$A_2 = A_4 = A_6 \quad (= A,\ \text{wie wir kurzweg sagen wollen}).$$

Es handelt sich nun darum, die Gruppe der Operationen zu betrachten, welche aus diesen A_i als erzeugenden Operationen entspringt, u. die einzelnen Operationen der Gruppe durch die Fig., welche aus dem vorgegebenen Polygon durch die wiederholten Spiegelungen entsteht, zum geometrischen Verständnisse zu bringen. Wir wollen dabei, wie wir es früher thaten, alle die Polygone, welche aus dem anfänglichen durch eine gerade Anzahl von Spiegelungen entstehen, schraffieren, die anderen frei lassen.

Es ist jedenfalls ausserordentlich leicht, alle möglichen Operationen der in Betracht kommenden Gruppen aufzuzählen. Da für ein beliebiges A_i

$$A_i^2 = 1,$$

so brauchen wir aus den $A_1 \dots A_6$ nur alle möglichen Producte zu bilden, bei denen niemals zwei gleiche Factoren unmittelbar hinter einander stehen. Aber wir können im Falle der Kreisscheibe auch erreichen, dass wir keine der in Betracht kommenden Operationen mehrfach aufzählen.

Man hat zu dem Zwecke nur zu beachten, dass bei ihr A mit A_1, A_2, A_3 vertauschbar ist.

$$AA_1 = A_1A\ ,\ AA_3 = A_3A,\ AA_5 = A_5A,$$

während zwischen den A_1, A_3, A_5 selbst keinerlei Identität besteht. Wir werden daher alle möglichen Operationen der Gruppe u. jede nur einmal erhalten, wenn wir erstens alle Producte von Factoren A_1, A_3, A_5 bilden, in denen keine 2 aufeinanderfolgende Factoren gleich sind: $\Pi(A_1, A_2, A_3)$ u. dann eben diese Producte noch einmal hinzusetzen, nachdem wir den Factor A vorausgestellt haben: $\quad A\,\Pi(A_1, A_3, A_5)$.

Im hyperbolischen Falle ist die Sache etwas complicirter u. soll hier der Kürze halber übergangen werden.

Unter den Operationen der Gruppe werden wir jetzt solche der 1. Art unterscheiden, die aus einer <u>geraden</u> Anzahl der A_i erzeugt sind, – wir nennen sie S – u. solche der 2. Art Σ, die aus einer <u>ungeraden</u> Anzahl der A erzeugt sind. Die S werden analytisch durch lineare Substitutionen schlechtweg vorgestellt:

$$\eta' = \frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta},$$

die Σ durch Substitutionen der anderen Art:

$$\eta' = \frac{\alpha\bar{\eta}+\beta}{\gamma\bar{\eta}+\delta}$$ (Kreisverwandtschaft mit Umlegung der Winkel).

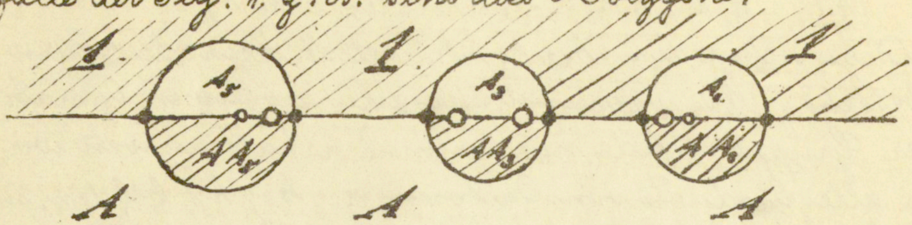
Die S bilden für sich eine Gruppe, u. diese Gruppe der S ist es, über die wir jetzt einige Angaben machen wollen. In der Fig., die wir uns aus dem Polygone 1 construirt denken, wird dieselbe durch die Gesamtheit der schraffirten Polygone vorgestellt.

Mögen wir unser anfängliches Polygon zunächst mit einem vollen Kranze nicht schraffirter Polygone umgeben. <u>Die einfachsten S sind dann diejeni-</u>

PAŃSTW. INSTYTUT MAT. BIBLIOTEKA

http://rcin.org.pl

gen, welche solche schraffirte Polygone liefern, die sich an diesen Kranz unmittelbar anlehnen. Im Kreisscheiben-falle der Fig. 1. z. B. sind dies 3 Polygone:



(Fig. 2)

nämlich

$$S_1 = A\,A_1, \quad S_3 = A\,A_3, \quad S_5 = A\,A_5$$

(wir benennen die Polygone immer durch diejenigen Operationen, durch welche sie aus dem Anfangspolygon 1 hervorgehen). Die so gewonnenen S sind dann die erzeugenden Operationen für die ganze Gruppe der S.

Uebrigens ist es im Falle der Fig. 2 sehr einfach, sich die Bedeutung der S_1, S_3, S_5 klar zu machen. Jedenfalls ist $S_i^2 = A\,A_i\,A\,A_i = A^2 A_i^2 = 1$; die S_1, S_2, S_3 sind also elliptische Substitutionen von der Periode Zwei. Zugleich erkennt man in den beiden Puncten, in welchen der Kreis 1 von der X. Axe getroffen wird (in Fig. 2 sind dieselben besonders markirt) die beiden Fixpkte von S_1: denn diese beiden Pkte werden weder bei A noch bei A_1 geändert. Wir haben uns S_1 als eine Drehung um 180° Grad um diese beiden Pkte vorzustellen. Genau so haben wir die beiden Fixpkte von S_3, S_5 auf dem Kreise 3, bez. 5. Aber es ist ersichtlich: wenn wir die Fig. (2) in die kleinen Oeffnungen hinein, die bei ihr noch vorhanden sind, durch wiederholte Spiegelung fortsetzen, so werden die beiden Pkte in denen irgend einer der kleinen Kreise von der X. Axe begränzt werden, immer wieder die Fixpkte einer elliptischen Substitution von der Periode 2 sein. Damit sind denn aber auch sämmtliche elliptische Substitutionen, welche in der Gruppe der S vorkommen, aufgezählt. Denn die Fixpkte irgend welcher elliptischer Substitution können immer nur da liegen, wo mehrere schraffirte (oder nicht schraffirte) Polygone zusammenstossen u. es gibt keine anderen Stellen dieser Art, als die Schnittpkte der X. Axe mit unsern kleinen Kreisen. Eben darum kann es under den S auch keine parabolischen Substitutionen geben: denn im Fixpkte der parabolischen Substitution müssten ∞ viele schraffirte (oder nicht schraffirte) Polygone zusammenstossen. Die sämtlichen übrigen S können also nur hyperbolische Substitutionen sein u. ihre Fixpunkte müssen under den ∞ vielen Gränzpkten zu suchen sein, denen die immer zahlreicher u. immer kleiner werdenden Oeffnungen unserer Fig. zustreben.

Ich habe diese Erläuterungen zunächst an die Kreisscheibe angeknüpft, wo sie sich am einfachsten gestalten. Beim hyperbolischen Polygon werden wir als die einfachsten S diese haben:

$$A_i\ A_k.$$

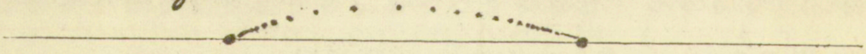
Under ihnen sind elliptisch diejenigen, deren Indices i, k consecutive Zahlen vorstellen, also

$$A_i\ A_{i+1},\ \text{und}\ A_i\ A_{i-1};$$

derjenige Eckpkt des Polygons, in welchem die Kanten $i, i+1$ bez. $i, i-1$ zusammenstossen, ist ein zugehöriger Fixpkt; der andere Fixpkt liegt symetrisch zu diesem in Bezug auf die X. Axe. Ist $\frac{\pi}{l}$ der Winkel under welchem die beiden Kanten $i, i+1$ zusammenstossen, so ist die Periode von $S = A_i A_{i+1}$ gleich l. Feder

Eckpkt des hyperbolischen Polygons ist also Fixepkt für eine l. gliedrige Gruppe elliptischer Substitutionen: $1, S, S^2, \ldots S^{l-1}$. Das Analoge gilt wieder für die Eckpuncte aller anderen Polygone, welche aus dem Ausgangspolygon vermöge unserer Spiegelungen entstehen. Damit sind die sämtlichen elliptischen Substitutionen unserer Gruppe aufgezählt. Parabolische Substitutionen können nur im Gränzfall vorhanden sein, wen̄ das anfängliche Polygon, u. also alle aus ihm hervorgehenden Polygone, sich mit einem Winkel $= 0$ (mit einem sog. Zipfel) an die X. Axe heranzieht. Alle anderen S sind hyperbolisch.

Mögen wir nun insbesondere die Fixepkte der hyperbolischen S betrachten. Wen̄ wir eine beliebige hyperbolische Substitution positiv oder negativ genom̄en im̄er auf's Neue wiederholen, so rückt ein irgendwie in der η. Ebene angenom̄ener Punct auf den einen oder anderen der beiden Fixepkte im̄er näher zu:



(Fig. 3)

Jetzt unterwerfe man der hyperbolischen Substitution S die beiden Fixepkte der gleichfalls hyperbolischen Substitution S'. Wir erhalten 2 neue Pkte, welche ihrerseits ebenfalls Fixepkte einer hyperbolischen Substitution sein werden, nämlich der Substitution $S^{-1}.\ S'.\ S$ (von links nach rechts zu lesen). Derselbe Schluss bleibt bestehen, wen̄ wir die Fixepkte von S' der Substitution S beliebig oft unterwerfen. Daher der Satz:

http://rcin.org.pl

Die Fixpkte unserer hyperbolischen Substitutionen haben jedenfalls die Eigenschaft, sich in der Nähe eines beliebigen derselben unbegränzt zu häufen.

Wollen wir tiefer in das Wesen des solcherweise entstehenden Punctaggregates eindringen, so müssen wir an die Begriffsbestimmungen Anschluss nehmen, welche *Georg Cantor* in seinen Aufsätzen *über endliche lineare Punctmannigfaltigkeiten* in den Bänden 15, 17, 20, 21, 22 der Math. Annalen (1878–1883) entwickelt hat {vergl. auch dessen zusammenfassende Schrift: Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, Leipzig 1883, sowie die Uebersetzungen in Bd. II der Acta Math.}. Cantor nennt eine Pktmenge *abzählbar*, wenn man ihre Pkte einzeln den Zahlen 1, 2, 3, . . . der natürlichen Zahlenreihe zuweisen kann, u. es ist eines seiner wesentlichsten Resultate, dass zwar gewisse Pktmengen, von denen man es kaum erwarten sollte, abzählbar sind (z. B. die Gesammtheit der rationalen Pkte, wie die Gesammtheit der algebraischen Pkte), dass es aber ebensowohl *nicht* abzählbare Pktmengen gibt (z. B. die Gesammtheit aller irrationalen Pkte). *Unsere hyperbolischen Fixpkte sind im Kreisscheibenfalle wie im hyperbolischen Falle abzählbar.* Denn man kann überhaupt die Gesammtheit der S in eine abzählbare Reihenfolge bringen, indem man etwa beginnt (wie wir es eben thaten), zuerst diejenigen schraffirten Polygone aufzuzählen, welche das Ausgangspolygon am engsten umgeben, dann diejenigen, welche sich um die somit aufgezählten am nächsten herumlegen, etc, etc.

Cantor nennt eine Punctmenge in einem Seg-

http://rcin.org.pl

mente der X. Axe überall dicht, wenn man in dem Segmente kein endliches Intervall finden kann, welches nicht irgend einen Punct der Menge enthielte. Die hyperbolischen Fixepkte des Kreisscheibenfalles sind in keinem Theile der X. Axe überall dicht. Denn die sämtlichen Fixepkte sind, wie wir bemerkten, alle innerhalb der „Oeffnungen" zu suchen, welche die Polygonfig. nach Ausübung einer beliebigen Anzahl von Spiegelungen noch zulässt. Nun werden diese Oeffnungen zwar immer zahlreicher, je weiter man mit den Spiegelungen fortschreitet, aber zugleich wird die Summe ihrer Durchmesser immer geringer u. sinkt schliesslich auf Null herab. Die hyperbolischen Fixepkte des hyperbolischen Falles dagegen überdecken die X. Axe überalldicht. Wir sehen dies z. B. schon bei den Modulfunctionen. Ebendarum ist die X. Axe für die bez. automorphen Functionen eine „natürliche Gränze".

Cantor nennt eine unendliche Punctmenge perfect, wenn sie alle ihre Gränzpkte enthält. Nun haben wir zwar eben gesehen, dass jedes einzelne unserer hyperbolischen Fixepkte Gränzpkt unendlich vieler anderen ist, aber eben so leicht ist es, Gränzpkte unserer ∞ vielen Fixepkte aufzusuchen, welche selbst keine Fixepkte sind. Die Mannigfaltigkeit der hyperbolischen Fixepkte ist daher weder im Kreisscheibenfalle noch im hyperbolischen Falle eine perfecte Mannigfaltigkeit. —

Ich verzichte darauf, diese Angaben über unsere automorphen Figuren noch weiter auszuführen, u. knüpfe daran nur noch 2 Bemerkungen:

1) Bei der Unmöglichkeit, unsere unendlichen Pktaggregate, oder überhaupt die unendliche Zahl unserer Polygone anschauungsmässig zu überblicken, tritt uns der Unterschied

entgegen zwischen der naiven Geometrie, welche nur mit der Anschauung operirt u. die man unwillkürlich bei den Anwendungen der Mathematik zu Grunde legt, u. der dialektisch zugeschärften begrifflichen Geometrie, auf welche sich die Sätze der reinen Mathematik beziehen. Wenn ich bei meinen Vorlesungen von der geometrischen Anschauung so ausgiebigen Gebrauch mache, so geschieht es nicht, weil ich meine, dass sie die strengen Betrachtungen anderer Mathematiker ersetzt, sondern weil ich der Ansicht bin, dass sie den Zugang zu den strengen Betrachtungen erleichtert.

4) Die sogenannten Paradoxieen der neueren Mathematik (unendliche Pktgruppen, stetige Functionen ohne Differentialquotienten etc.) erscheinen in der That wohl nur desshalb dem Anfänger so schwierig oder auch so nutzlos, weil man sie gewöhnlich an rein analytische Formeln anknüpft, die eigens zu dem Zwecke construirt zu sein scheinen. Dem gegenüber ist das Auftreten solcher Pktgruppen u. weiterhin auch von Curven etc. bei unseren automorphen Figuren besonders lehrreich. Denn diese Figuren entstehen aus ganz elementaren Polygonen durch Wiederholung des elementaren Processes der Spiegelung. Man erkennt, dass man bei ihnen die Betrachtung unendlicher Pktgruppen gar nicht vermeiden kann, hat aber zugleich alle Mittel vor Augen, um die Eigenschaften dieser Pktgruppen zur Discussion zu bringen. Die Pktgruppen liegen dabei über die Anschauung hinaus, aber die Anschauung giebt die beste Anleitung, um sie zu verstehen. Indem ich also die Begrenztheit der Anschauung durchaus anerkenne, trete ich auf

das Lebhafteste für ihre Benutzung auch bei den Fragen der hier vorliegenden Art ein.

Wir fahren heute fort, zwecks einer ersten Uebersicht über den Gegenstand gewisse wesentliche Pkte aus der Theorie der automorphen Functionen zu besprechen. So. 30. M. 1891.

Wir berühren zuerst eine zahlentheoretische Frage: Welches ist, bei unseren Gruppen $\eta' = \frac{\alpha_i \eta + \beta_i}{\gamma_i \eta + \delta_i}$ das zahlentheoretische Gesetz der Coefficienten? Es ist natürlich nicht schwer, im einzelnen Falle die erzeugenden Substitutionen wirklich hinzuschreiben u. es dem Leser zu überlassen sich die $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ daraus zusammenzusetzen (vergl. Rausenberger in den Math. Ann. 20, 21, 25). Aber man möchte mehr. Man möchte die $\alpha_i, \beta_i, \ldots$, welche bei einer Gruppe auftreten, explicite zahlentheoretisch charakterisiren, so wie wir das im Falle der Modulgruppe können, wo die α_i, β_i, -- einfach durch die Gesamtheit der ganzen Zahlen vorgestellt werden, deren Determinante = 1 ist. Aber mit den heutigen Mitteln der Zahlentheorie erscheint es unmöglich, das hiermit gestellte Problem allgemein zu erledigen; wir werden es als eine wesentliche Aufgabe ansehen dürfen, die Zahlentheorie in dieser Hinsicht auszubilden. Wir müssen uns einstweilen begnügen die Sache umzukehren, u. uns zu fragen: Lehrt uns die heutige Zahlentheorie vermöge der in ihr fertig vorliegenden Entwickelungen nicht wenigstens einige Gruppen mit übersichtlich gebildeten Coefficienten $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ kennen? In dieser Hinsicht hat Poincaré einen besonders schönen Ansatz gegeben (L'Arithmétique et les fonctions fuchsiennes, Journal de Math. sér 4, t. 3, 1887), der neuer-

http://rcin.org.pl

dings von <u>Fricke</u> in nähere Durchführung gebracht ist (Math. Ann. 38, I, 1891, sowie demnächst in 39, I)*). Sei

$$F = ax^2 + 2bxy + \dots + fz^2$$

eine <u>indefinite</u> ternäre quadratische Form, die also, gleich 0 gesetzt, einen eintheiligen Kegelschnitt der Ebene vorstellt. Man lernt in der Zahlentheorie alle ganzzahligen ternären Substitutionen der xyz kennen, welche F in sich überführen. Aber für den Parameter η, durch den man die Pkte des Kegelschnittes $F = 0$ eindeutig darstellen kann, gewinnen diese ternären Substitutionen von selbst die Bedeutung linear gebrochener Transformationen $\eta' = \frac{\alpha_i \eta + \beta_i}{\gamma_i \eta + \delta_i}$, die natürlich eine Gruppe bilden. Da kennen wir also in der That eine solche Gruppe in zahlentheoretischer Form, u. es bleibt uns unbenommen, nun hinterher (wie dies Hr. Fricke in Beispielen ausführt) deren Fundamentalpolygon u. sonstige geometrische Eigenthümlichkeiten zu finden.

Wir schreiten zu neuen <u>geometrischen</u> Entwickelungen. Die Verallgemeinerung der automorphen Figuren, die wir aus unseren Kreisbogenpolygonen durch wiederholte Spiegelungen ableiten (man könnte sie <u>regulär-symmetrische</u> Figuren nennen) auf nur <u>reguläre</u>, sowie auf <u>höhere p</u>, haben wir vor Pfingsten kurz gestreift. Wir werden jetzt 2 andere Verallgemeinerungen geben, bei denen wir an der Erzeugung der Fig. durch Spiegelung von einem Kreisbogenpolygon festhalten. Es sind dies:

α) <u>Die Variirung der hyperbolischen Polygone</u> (vergl.

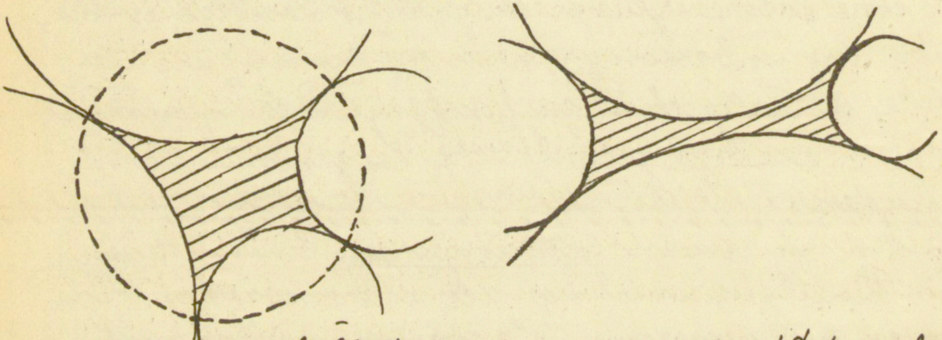
---

*) vergl. auch eine Arbeit von <u>Stouff</u> in den Annales de Toulouse 1891: Sur certains groupes fuchsiens formés avec les racines d'équations binômes.

GABINET MATEMATYCZNY Towarzystwa Naukowego Warszawskiego

http://rcin.org.pl

meinen Brief an Poincaré, von letzterem in den Comptes Rendus vom 27. Juni 1881 zum Theil reproducirt) — Man variire ein hyperbolisches Polygon unter Festhaltung seiner Winkelgrössen so, dass seine Begränzungskreise nicht mehr auf einem Hauptkreise senkrecht stehen. So lange hierbei keine neuen Schnittpkte der Begränzungskreise auftreten, werden die ∞ vielen Polygone, die man aus dem 1. durch wiederholte Spiegelung ableitet, sich auch noch, ohne irgendwo zu collidiren, glatt neben einander legen u. also in ihrer Gesamtheit eine automorphe Fig. vorstellen. So sind beispiels, die beiden Vierecke:



(hyperbolisch; die 4 Ecken auf einem Hauptkreis) (nicht hyperbolisch; die 4 Ecken liegen sicher nicht auf Kreis.)

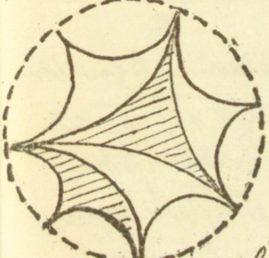
zur Erzeugung einer automorphen Fig. gleich brauchbar. Aber welches wird im Falle des variirten Polygons die Gränzcurve sein? Wäre sie analytisch, so könnte man in Anbetracht der ∞ vielen linearen Transformationen, durch welche sie in sich übergeht, leicht beweisen, dass sie ein Kreis sein muss. Aber ein Kreis kann sie nicht sein; desshalb ist sie eine nicht-analytische Linie (cf. Poincaré, Acta math. III, p. 77ff.) Es liegt hier eines der einfachsten Beispiele vor, dass eine rein geometri-

http://rcin.org.pl

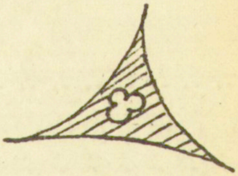
sche Fragestellung zu einer nicht analytischen Curve hinführen kañ. Wir merken uns:

Die automorphen Functionen mit Gränzkreis sind nur ein specieller Fall der automorphen Functionen mit Gränzcurve. Die letztere ist von den hyperbolischen Fixpkten der Gruppe, ebenso wie von den parabolischen (sofern es deren gibt) überall dicht überdeckt.

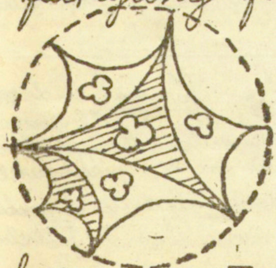
b) Der Process der Ineinanderschiebung (vergl. meinen Aufsatz in Math. Añalen Bd. 21) (1884). — Man denke sich in früherer Weise eine automorphe Fig. entworfen, indem man z. B. von einem Dreieck ausgeht, dessen 3 Winkel = 0 sind:



Jetzt aber versehe man das Ausgangsdreieck mit einem iñeren Rande, der selbst ein solches Polygon vorstellt, welches, nach iñen hin vervielfältigt, eine automorphe Fig. liefert, – also etwa folgendermassen, wo wir als diese neue Begränzung abermals ein Dreieck mit verschwindenden Winkeln wählen:



Nun köñen wir diese Fig. gleichzeitig an ihrem äusseren u. iñeren Rande vervielfältigen, – u. da jedes abgeleitete Polygon selbst wieder eine iñere Oeffnung trägt, iñer auch da hinein die Vervielfältigung fortsetzen:



Wir bekoñen in der Ebene eine automorphe Fig., welche im Falle des Beispiels augenscheinlich von ∞ vielen Gränzkreisen begränzt ist. Hätten wir statt eines hyperbolischen Polygons ein „variirtes" Polygon genoñen, so würden wir statt der ∞ vielen Gränzkreise

http://rcin.org.pl

∞ viele nicht analytische Gränzcurven bekommen. Daher: Die automorphen Figuren mit Gränzcurve sind specieller Fall der automorphen Figuren mit ∞ vielen Gränzcurven.

Nimmt man insbesondere die „ineinandergeschobenen" Ränder des Ausgangspolygons als Vollkreise, so werden sich die ∞ vielen Gränzcurven auf ∞ viele Gränzpkte zusammenziehen u. wir kommen zu der Riemann-Schottky'schen Fig. zurück, die wir vor Pfingsten besprachen.

Die beiden Processe a, b wollen natürlich neben den früheren Verallgemeinerungen berücksichtigt sein, wenn wir uns die Aufgabe stellen, sämtliche automorphe Figuren (sämtliche regulär-symmetrische oder nur reguläre Eintheilungen der Kugelfläche, oder von Stücken der Kugelfläche) aufzuzählen. Dieses allgemeine Problem hat inzwischen durch Poincaré eine neue Formulirung gefunden, welche die Uebersicht wesentlich erleichtert. Poincaré stellt nämlich neben die Kugeltheilungen die zugehörigen Raumeintheilungen (hervorgebracht von den Ebenen, welche die Kugel in den Begränzungskreisen der aequivalenten Bereiche schneiden.*)

---

*) Poincaré operirt selbst allerdings nicht mit der $x+iy$-Kugel u. den im Texte genannten Ebenen, sondern mit der $x+iy$ Ebene u. den Halbkugeln, welche aus dieser die Begränzungskreise der Bereiche ausschneiden (Comptes Rendus vom 11. Juli 1881; Acta Math. III, 1883). Es ist diess aber, wie in der nichteuklidischen Vorlesung ausgeführt wurde, nur eine andere Ausdrucksweise. Vergl. hierzu Dyck in den sächs. Berichten vom Dec. 83 [Ueber regulär-symmetrische Raumtheilungen.].

http://rcin.org.pl

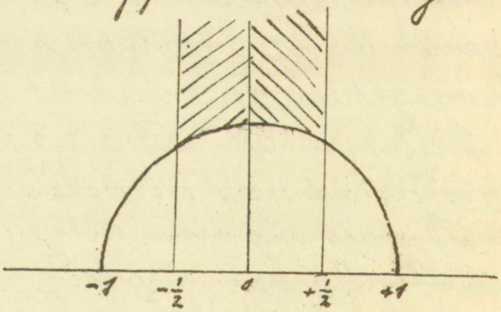
Diese Raumeintheilungen sind im Siñe der zur Kugel gehörigen Nichteuklidischen Geometrie selber regulär, bez. regulär-symetrisch. Die Aufgabe wird sein, alle solche regulären etc. Raumeintheilungen aufzuzählen.

Die Raumtheilung, welche zu einer Kugeltheilung gehört, macht man sich am besten zuerst am hyperbolischen Falle klar: der Raum wird da in aequivalente Pyramiden mit gemeinsamer Spitze zerlegt (diese Spitze ist der Pol des bei der hyperbolischen Theilung auftretenden Gränzkreises). Hierbei erkeñt man auch sofort, wañ umgekehrt eine Raumtheilung zu einer Kugeltheilung Anlass gibt. Es ist dies offenbar dañ u. nur dañ möglich, weñ sich das Ausgangspolyeder der Raumtheilung mit einem endlichen Gebiete durch die Kugelfläche hindurchzieht. In dieser hinzutretenden Bedingung liegt die besondere Schwierigkeit des Problems der Kugeltheilung. Wollen wir nur Raumtheilung haben, köñen wir viel allgemeinere Sätze aussprechen. Beispielsweise werden wir iṁer eine brauchbare Raumeintheilung bekoṁen, weñ wir von einem ebenen Polyeder ausgehen, dessen sämtliche Seitenflächen die Kugel treffen, u. die mit einander Winkel einschliessen, die, soweit sie reell sind, aliquote Theile von π sind. (Die Idee ist, dass wir dieses Polyeder iṁer wiederholt an seinen Seitenflächen spiegeln).

Uebrigens köñte man dieses Problem der Raumtheilung als das Problem der Nichteuklidischen Krystallographie bezeichnen (vergl. was die gew. Krystallographie angeht, die neueren Arbeiten von Schönflies in den Math. Añalen u. anderwärts). Diese Nichteuklidische Krystallographie ist allerdings viel complicirter, als die gewöhnliche, insofern die 6. fach unendliche Bewegungsgruppe des Euklidischen Raumes eine 3. fach unendliche ausgezeichnete Untergruppe, die Gruppe der ∞^3 Translationen, enthält. Mit dieser wird man beginnen, um alle automorphen Raumtheilungen zu construiren, u. daher erhält man die Fundamentalräume eines beliegen Krystallsystems, indem man den Raum zunächst einmal in lauter congruente Parallelepipede zerlegt, u. es dann unternimmt, das einzelne Parallelepipedon wieder in kleinere aequivalente Bereiche zu spalten. –

Von den so erhaltenen Raumtheilungen sind *unmittelbar* functionentheoretisch brauchbar natürlich nur diejenigen, welche von einer zugehörigen Kugeltheilung begleitet sind. *Aber kann man darum die anderen Raumtheilungen nicht vielleicht für allgemeinere Zwecke der Analysis, bez. Functionentheorie benützen?* Dies ist in der That der Fall, wie ich durch 2 Bemerkungen belegen will:

1) Man erinnere sich, dass das Doppeldreieck der gewöhnlichen Modultheilung:



(d. h. der Raum, der durch folgende Ungleichungen festgelegt ist:
$-\frac{1}{2} \leqq x \leqq +\frac{1}{2}$, $x^2+y^2 \geqq 1$)
Fundamentalbereich der Substitutionsgruppe

$$\eta' = \frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}, \quad \alpha\delta-\beta\gamma=1,$$

ist, deren Coëfficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ als *reelle* ganze Zahlen definirt sind. *Bianchi* hat neuerdings gefunden, dass ein ganz entsprechendes Raumpolyeder als Fundamentalbereich derjenigen Gruppe:

http://rcin.org.pl

$$\eta' = \frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}, \quad \alpha\delta-\beta\gamma=1$$

angesehen werden kann, deren $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ complexe ganze Zahlen (von der Form $m+ni$) sind. {Vergl. Math. Annalen 38, III, 1891}. Indem wir η in der $x+iy$. Ebene deuten, handelt es sich einfach um das Polyeder:

$$0 \leqq x \leqq +\tfrac{1}{2}, \quad -\tfrac{1}{2} \leqq y \leqq +\tfrac{1}{2}, \quad x^2+y^2+z^2 \geqq 1.$$

Die Raumtheilung, welche sich an dieses Polyeder anschliesst, ist dann in demselben Sinne z. B. für die Theorie der binären quadratischen Formen mit complexen ganzen Zahlen als Coefficienten brauchbar, wie dies die gew. Modultheilung der Ebene für die gewöhnlichen reellen, ganzzahligen binären quadratischen Formen ist.

2) Sei $\eta' = \frac{\alpha_i\eta+\beta_i}{\gamma_i\eta+\delta_i}$ irgend eine Gruppe, welche zwar zu einer Raumtheilung aber nicht zu einer Kugeltheilung führt. So betrachte ich 2 cogrediente complexe Veränderliche η, ζ, d. h. 2 Veränderliche, welche simultan immer dieselbe Substitution

$$\eta' = \frac{\alpha_i\eta+\beta_i}{\gamma_i\eta+\delta_i}, \quad \zeta' = \frac{\alpha_i\zeta+\beta_i}{\gamma_i\zeta+\delta_i}$$

erfahren sollen. Ich sage, dass vermöge dieser Substitutionen der vierfach ausgedehnte Raum der η, ζ in aequivalente Bereiche von endlicher Ausdehnung zerlegt wird u. dass also die Möglichkeit vorliegt, Functionen der 2 Veränderlichen η, ζ zu bilden, $f(\eta, \zeta)$, welche gegenüber den simultanen Transformationen der η, ζ automorph sind. Man deute nämlich η und ζ durch 2 Pkte unserer Kugelfläche. Der in Rede stehende vierfach ausgedehnte Raum wird dann durch die ∞ Raumgeraden vorgestellt, welche die Kugel in allen möglichen Punctepaaren η, ζ treffen. Nun wird aber doch vermöge unserer

http://rcin.org.pl

Gruppe der dreifach ausgedehnte Pktraum bereits in aequivalente Bereiche von endlicher Ausdehnung zerlegt. Da scheint es selbstverständlich, dass das Gleiche für den vierfach ausgedehnten Linienraum gilt.

Es scheint mir nützlich, die Stellung der von uns betrachteten Substitutionsgruppen innerhalb des Gesamtgebiets der Gruppentheorie kurz zu charakterisiren. Mi. 3. Juni 91.

Als eine Transformationsgruppe überhaupt werden wir jedes Aggregat von Transformationen

$$z' = f_i(z)$$

bezeichnen, so beschaffen, dass

$$f_i f_s = f_k.$$

Unter ihnen ziehen wir aber nur diejenigen näher in Betracht, welche zu jeder Operation f_i auch die inverse enthalten:

$$z' = f_i^{-1}(z).$$

(Es ist dies, sobald man Gruppen mit unendlich vielen Operationen betrachtet, eine wirkliche Einschränkung des Gruppenbegriffs).

Wir unterscheiden nun vor allen Dingen continuirliche u. discontinuirliche Transformationsgruppen. Die ersteren sind diejenigen, deren f_i ein Continuum bilden (vermöge der in ihnen enthaltenen, continuirlich veränderlichen Parameter); sie bilden den Gegenstand der Lie'schen Untersuchungen. Unsere functionentheoretischen Betrachtungen beziehen sich umgekehrt nur auf discontinuirliche Gruppen. Natürlich kann man auch Gruppen von gemischtem Charakter aufstellen. Betrachten wir z. B. die Gesamtheit der linearen Transformationen erster u. zweiter Art:

$$\mathrm{I.}\ \eta' = \frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}\,,\quad \mathrm{II.}\ \eta' = \frac{\alpha\bar{\eta}+\beta}{\gamma\bar{\eta}+\delta}\,,$$

so haben wir in I allein eine continuirliche Gruppe, in I + II eine gemischte Gruppe.

Eben dieses Beispiel gibt uns Anlafs, einen Pkt. zur Sprache zu bringen, der für die Theorie der continuirlichen Gruppen wesentlich scheint u. wohl noch nicht hinreichend bearbeitet ist. Die Formel I enthält in den Verhältnissen der $\alpha:\beta:\gamma:\delta$ drei complexe Constante, d. h., wen̄ wir reell u. imaginär tren̄en, sechs reelle Constanten. Stellen wir nun das Problem, alle continuirlichen Untergruppen aufzuzählen, welche in I enthalten sind, so wird es einen Unterschied machen, ob wir die genan̄ten Constanten als untren̄bare complexe Grössen oder vielmehr ihre reellen u. imaginären Bestandtheile als selbständige Parameter ansehen wollen. Ersteres ist der Standpkt von Lie, der z. B. den Satz gibt:

Es existiren in̄erhalb I vor 3 Arten continuirlicher Untergruppen, nämlich eine zweigliedrige Gruppe, der man die Gestalt geben kann:

$$\eta' = \alpha\eta + \beta,$$

u. 2 Arten eingliedriger Untergruppen, die bez. folgende kanonische Form haben:

$$\eta' = \alpha\eta\,,\quad \eta' = \eta + \beta.$$

Die andere Auffassung liegt uns näher. Wir sind gewohnt, die Substitutionen I als die ∞^6 Bewegungen des Nichteuklidischen Raumes zu deuten u. in̄erhalb dieser Bewegungen insbesondere diejenigen in's Auge zu fassen, welche irgend einen Raumpkt festlassen, — mag nun der letztere ausserhalb der Kugel, auf der Kugel, in̄erhalb der Kugel liegen. Analytisch werden diese Gruppen bekan̄tlich dar-

http://rcin.org.pl

gestellt:

1) durch $\eta' = \frac{a\eta + b}{c\eta + d}$, wo die a, b, c, d reell.

2) durch $\eta' = e^{i\varphi}\eta + b' + i b''$, wo φ, b', b'' reell.

3) durch $\eta' = \frac{(a+id)\eta + (b+ic)}{(-b+ic)\eta + (a-id)}$, wo die a, b, c, d reell;

sie sind also in der That analytisch definirt, indem man die reellen u. imaginären Bestandteile der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gesonderten Bedingungen unterwirft. — Es muss möglich sein, die sämtlichen Sätze der Lie'schen Theorie von hieraus umzuarbeiten u. zu erweitern.

Was nun die <u>allgemeinste discontinuirliche</u> Gruppe angeht, die in I+II enthalten ist, so werden wir diese einfach erhalten, wenn wir irgendwelche Substitutionen erster oder zweiter Art:

$$S_1, \; S_2, \; \ldots \ldots$$

herausgreifen u. beliebig wiederholen, bez. combiniren. Es wird für unsere Zwecke ausreichen, uns die Zahl dieser erzeugenden Operationen als <u>endlich</u> vorzustellen. Dann wird die Zahl der erzeugten Operationen, auch wenn sie unendlich sein sollte, doch immer <u>abzählbar</u> sein.

Die erste Eintheilung dieser discontinuirlichen Gruppen (die man übrigens auch bei Aufzählung der „gemischten" Gruppen aufrecht erhalten kann), ist die in <u>Gruppen der ersten u. der zweiten Art.</u> Gruppen erster Art enthalten nur Operationen I, Gruppen zweiter Art daneben Operationen II (vergl. den Unterschied der bloss regulären, u. der regulär-symetrischen Raumtheilungen). Und welches ist das Verhältniss dieser beiden Arten? Man findet sofort:

<u>Die Gruppen 2^ter^ Art enthalten immer eine Gruppe 1^ter^ Art als ausgezeichnete Untergruppe vom Index 2.</u>

Aber das Umgekehrte findet keineswegs immer statt: <u>eine Gruppe erster Art kann keineswegs immer zu einer Gruppe 2ter</u>

Art erweitert werden. Die Gruppen 1. Art sind also im Grunde die allgemeineren.

Schwerer zu verstehen ist die Eintheilung der discontinuirlichen Gruppen in eigentliche u. uneigentliche. Wir betrachten etwa vorab die Gruppe, welche aus der einzelnen elliptischen Substitution

$$\eta' = e^{i\varphi} \cdot \eta$$

durch unbegränzte Wiederholung entsteht. Ist φ comensurabel mit π, so wird diese Gruppe nur eine endliche Zahl von Operationen umfassen. Wie aber steht die Sache, wenn φ zu π incomensurabel? Dann werden die ∞ vielen Transformationen:

$$\eta' = \alpha \cdot \eta,$$

die erzeugt werden, den Raum aller Transformationen

$$\eta' = \alpha \cdot \eta$$

überall dicht ausfüllen (ohne darum, wohlverstanden, diesen Raum zu erschöpfen). Die Gruppe enthält, können wir sagen, infinitesimale Substitutionen, d. h. solche, welche beliebig wenig von der identischen Substitution abweichen. Sie komt also einer continuirlichen Gruppe gewissermassen nahe, u. eben darum nennen wir sie uneigentlich discontinuirlich. Wir können sagen:

Die eigentlich discontinuirlichen Gruppen sind dadurch charakterisirt, dass sie nur solche elliptische Substitutionen enthalten, welche periodisch sind.

Natürlich sind für unsere Raumeintheilungen nur die eigentlich discontinuirlichen Gruppen brauchbar, diese aber auch alle. Für die Kugeltheilungen müssen wir freilich, wie wir früher ausführten, die brauchbaren Gruppen noch erst vermöge einer Nebenbedingung aussuchen.

Beschränken wir uns, wie dies Poincaré zuerst that, auf hyperbolische Gruppen, d. h. auf Substitutionen

http://rcin.org.pl

$\eta' = \frac{a\eta + b}{c\eta + d}$, so ist jede eigentlich discontinuirliche Gruppe direct zur Kugeltheilung verwendbar. Denn die Fundamentalbereiche, in welche eine solche Gruppe den Raum zerlegt, sind, wie wir lernten, Pyramiden, durchziehen also ein jeder unsere Kugel in endlichen Gebieten. Von hier aus wird nun die Terminologie verständlich, welche Poincaré ursprünglich gebrauchte, u. die immer noch hie u. da verwandt wird. Von den uneigentlich discontinuirlichen Gruppen sah P. überhaupt ab; er betrachtete sie wohl als continuirliche Gruppen. Andererseits beschränkte er sich, wie wir sagten, auf Substitutionen mit reellen Coefficienten. Desswegen bezeichnete er damals die functionentheoretisch brauchbaren Gruppen schlechtweg als groupes discontinus. Später hat er seine Betrachtungen natürlich ausgedehnt u. es dürften seine Entwickelungen in Bd. III der Acta (1883), die hier hauptsächlich in Betracht kommen, von den jetzt von mir gegebenen nicht so sehr verschieden sein.*)

Zur Entwickelungsgeschichte der automorphen Functionen.

Poincaré hat, wie Sie wissen, zur Bezeichnung der einzelnen Gruppenarten Personalbenennungen gewählt (gr. fuchsiens, kleinéens): die Fuchs'schen Gruppen sind diejenigen, die er zuerst hatte, d. h. die hyperbolischen Gruppen, die Klein'schen die allgemeinen. Ich habe diese Benennungen in Bd. 19 der Annalen

---

*) Vielleicht wäre es zweckmässig, die direct functionentheoretisch brauchbaren Gruppen, wie dies Bianchi l. c. thut, schlechtweg als automorphe Gruppen zu bezeichnen; das kann jedenfalls im Zusammenhange kein Missverständniss geben.

http://rcin.org.pl

(1881-2, p. 564) als unzweckmässig bezeichnet u. den Vorschlag gemacht, von jeder Personalbenennung abzusehen. Es hat mich dies in eine Polemik mit Fuchs verwickelt, auf die ich nun kurz eingehen will, weil Sie doch nicht vermeiden können, gelegentlich von derselben Act zu nehmen, u. weil ich hoffen darf, durch die folgende ausführliche Auseinandersetzung meine Auffassung ein für allemal hinreichend dargelegt zu haben. In der That will ich versuchen, Ihnen eine zusammenhängende Uebersicht über die Entstehungsgeschichte der automorphen Functionen zu geben. Endliche Gruppen u. dementsprechend algebraische automorphe Functionen will ich dabei zur Seite lassen. In der That habe ich ja von den Irrationalitäten der regulären Körper, die hier zu betrachten sein würden, früher schon ausführlich gehandelt: wollte ich aber den Ausblick auf endliche Gruppen linearer Substitutionen mehrerer Veränderlichen nehmen, so müsste ich auch ganz fernliegende Dinge, wie die Theorie der symmetrischen Functionen beliebig vieler Variabelen, heranziehen, was zu weit ab führen würde x/. Die unendlichen Gruppen mehrerer Variabelen können wir leichter besprechen, weil da nur erst wenig gearbeitet ist. In diesem Sinne berichte ich also über die unendlichen automorphen Gruppen schlechtweg, bez. über die transcendenten automorphen Functionen, wobei ich die Hauptpkte, die ich zu berühren habe, numerire:

1) Die ältesten transcendenten automorphen Functionen sind natürlich die einfach periodischen Functionen einer Variabelen, wie $\sin \eta$, $\cos \eta$, e^{η}; man

---

x/ vergl. übrigens die Vorlesungen über das Ikosaeder, p. 123 ff.

http://rcin.org.pl

hat sie von je in der Analysis gebracht.

2) Dann war es in den zwanziger Jahren dieses Jahrhunderts, dass <u>Abel</u> u. <u>Jacobi</u> durch Umkehr der Theorie der elliptischen Integrale die Theorie der doppeltperiodischen Functionen geschaffen haben. Die Gruppe hat hier folgende einfache Form:

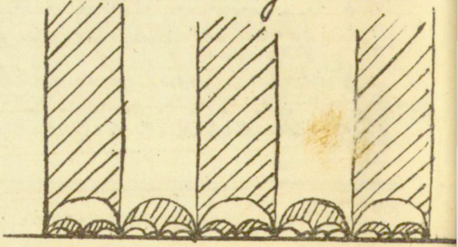
$$\eta' = \eta + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2;$$

ω_1, ω_2 sind Constanten, deren Quotient nicht reell sein darf, m_1 u. m_2 sind beliebige ganze Zahlen.

3) Aber die nähere Betrachtung der doppeltperiodischen Functionen mußte von selbst zu einer neuen Art automorpher Functionen, zu den <u>elliptischen Modulfunctionen</u> hinleiten. Die charakteristische Stelle, bei welcher Jacobi die bez. Wendung nimmt, findet sich in den <u>Notices sur les fonctions elliptiques</u> (Crelle III, 1828), (Werke I, p. 263): Unter K^2 die Constante (das Modulquadrat) des elliptischen Integrals verstanden, erscheint

$$K^2(\omega), \text{ — wo } \omega = \frac{\omega_1}{\omega_2} \text{ — },$$

als eine eindeutige Function von ω, welche bei allen ganzzahligen linearen Substitutionen $\omega' = \frac{a\omega + b}{c\omega + d}$, welche die Determinante $ad - bc = 1$ haben u. überdies modulo 2 zur Identität congruent sind, ungeändert bleibt. Inzwischen bot diese Function $K^2(\omega)$ damals, als die geometrischen Methoden der Functionentheorie deren wir uns heute bedienen, noch nicht ausgebildet waren, des Räthselhaften Vieles.



Wir wissen jetzt, dass wir die Ebene ω der Ebene K^2 entsprechend in unendlich viele <u>Kreisbogendreiecke</u> zu zerlegen haben,

http://rcin.org.pl

die sich aus einem ersten durch fortgesetzte Spiegelung ergeben:

Wie will man die Verhältnisse dieser Fig.x/, insbesondere ihr Verhalten bei Annäherung an die reelle Axe, ohne Zuhülfenahme geometrischer Vorstellungen verständlich machen? Desshalb sehen wir auch, dass die namhaftesten Analysten, die bei dem Jacobischen Ideenkreise stehen geblieben sind, wie z. B. *Hermite*, Schwierigkeiten finden, wo für denjenigen, der die Kreisbogendreiecke versteht, überhaupt kaum Frage~~n~~stellungen vorliegen, weil Alles an sich klar ist. Ich möchte dies an einem besonderen Satze erläutern. Es wird $k^2(\omega') = k^2(\omega)$ sein, sobald, wie wir bemerkten,

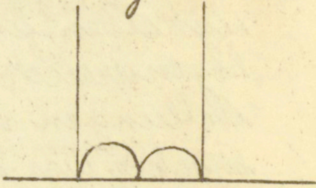
$$\omega' = \frac{a\omega + b}{c\omega + d} \equiv \omega \pmod{2}; \quad ad - bc = 1.$$

Aber folgt umgekehrt, dass ω' mit ω in einer solchen linearen Beziehung stehen muss, sobald $k^2(\omega') = k^2(\omega)$? Die Theorie der Kreisbogendreiecke bejaht diesen Satz unmittelbar, weil nämlich das einzelne Dreieck das *eindeutige* (conforme) Abbild der Halbebene x ist u. die linearen Substitutionen $\omega' = \frac{a\omega + b}{c\omega + d}$ etc. eben daraus erwachsen, dass man dieses 1. Dreieck nach dem functionentheoretischen Gesetz der Symetrie vervielfältigt. Indem wir das *Doppeldreieck* betrachten, welches aus 2 nebeneinanderliegenden Einzeldreiecken besteht, können wir den wahren Grund des Satzes prägnant dahin bezeichnen: *der Satz besteht, weil dasselbe Doppeldreieck erzeugendes Polygon der Gruppe u. eindeutiges Abbild der x. Ebene ist.*

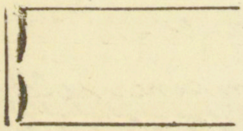
x/ oder vielmehr die entsprechenden Eigenschaften der Function $k^2(\omega)$.

http://rcin.org.pl

4) Wir müssen nun einer Stelle bei Gauss gedenken, die in Bd. III der Werke p. 477 – 478 abgedruckt ist u. die wohl zuerst nicht verstanden wurde oder doch nicht beachtet wurde, als Bd. III 1869 erschien. Nach den Bemerkungen des Herausgebers datirt dieselbe wahrscheinlich aus 1827. Es ist ganz unverkennbar, dass Gauss dort genau die geometrische Schlussweise im Sinne hat, für die wir soeben eintraten. Es wird nämlich zweimal das Doppeldreieck gezeichnet:



(nur dass die Figur um 90° gedreht ist u. statt der beiden begränzenden Kreise beim Abdruck Klamern gesetzt sind:



und das einemal demselben der Zusatz gemacht (den ich gleich in unsere Bezeichnung umsetze):

„Raum für ω und $-\frac{1}{\omega}$",

das andere Mal aber angegeben,

„dass K^2 in diesem Raume jeden Werth einmal u. nur einmal annehme."

5) Aber abgesehen von dieser Stelle im Gaussischen Nachlasse ist die erste Arbeit, in welcher das Wesen der elliptischen Modulfunctionen geometrisch klar gestellt wurde, die Arbeit von Schwarz über die hypergeometrische Reihe im 75ten Bande des Journals (1871–72). Ihrer Ueberschrift nach bezieht sich die Arbeit zwar nur auf die algebraisch bestimmbaren Fälle der hypergeometrischen Reihe, u. wir sind der dabei entwickelten Theorie der regulären Körper bereits anderweitig gerecht geworden. Thatsächlich aber bietet die Arbeit bezüglich der transcendenten Fälle mindestens gerade so

http://rcin.org.pl

Wichtiges. Indem sie die Betrachtung des Kreisbogen-dreiecks u. dessen Reproduction durch Symetrie voranstellt, entdeckt Schwarz die eindeutig umkehrbaren Dreiecks-functionen – also eine neue, allgemeinere Art eindeutiger automorpher Functionen u. giebt damit zugleich die geometrische Theorie des speciellen Falles der ellipt. Modulfunctionen. (vergl. Journal Bd. 75, p. 319 ff.; Ges. Abh. I, p. 239 ff.). Eben hier habe ich später mit meinen Untersuchungen über elliptische Functionen angeknüpft (nachdem ich vorher, wie früher angegeben, auf eigenem Wege zu den regulären Körpern geführt worden war).

6) Wir sind damit bis zu den Jahren 1876–77 gekomen, in denen von verschiedenen Seiten her unabhängig eine ganze Reihe von Arbeiten zur Theorie der automorphen Functionen veröffentlicht wurde. So. 6. Jun. 1891.

Vor allen Dingen erschienen 1876 Rieman̄'s Gesamelte Werke u. in diesen unter N. XXV die schon früher genan̄te Untersuchung über die Vertheilung der Electricität auf Rotationscylindern mit parallelen Axen, –

andererseits auch Schottky's Dissertation (Breslau), in der dieselbe Art automorpher Functionen (die durch fortgesetzte Spiegelung eines von irgend welchen Vollkreisen begränzten ebenen Bereiches entsteht) eingehender untersucht wurde. Weiter ausgeführt erschien Schottky's Arbeit im folgenden Jahre (1877) in Crelle 83.

Das Jahr 1877 brachte sodan̄:

1) in Crelle 83 einen Brief von Fuchs an Hermite über die elliptischen Modulfunctionen (geschr. Nov. 76),

http://rcin.org.pl

2) ebenfalls in Crelle 83 einen Brief von Dedekind an Borchardt über denselben Gegenstand,

3) in den Memorie della R. Accademia dei Lincei t. I, eine Abhandlung von Stephen Smith, vorgelegt im Februar, gleichfalls auf elliptische Modulfunctionen bezüglich.

Dedekind u. Smith verbinden in diesen Arbeiten Beide die Dreieckstheilung der w. Ebene mit der Zahlentheorie: Dedekind in mehr elementarer Weise mit der Theorie der binären quadratischen Formen von negativer Determinante, Smith auf eine sehr interessante Art mit der Theorie der bin. qu. Formen von positiver Determinante. Beide Autoren haben sich augenscheinlich schon länger mit dem Gegenstande beschäftigt, wie denn Smith später angiebt, dass seine Abhandlung ursprünglich 1874 der Pariser Akademie vorgelegt war. Dedekind erläutert auch ausführlich den auf p. 68 besprochenen Fundamentalsatz der Modulfunctionen. Smith hatte denselben schon 1865 in seinem letzten Report „on the theory of numbers" (Reports, British Association) dahin verallgemeinert, dass er nicht nur $k^2(\omega)$, sondern $k(\omega)$, $\sqrt{k(\omega)}$, $\sqrt[4]{k(\omega)}$ in Betracht zog.

Fuchs beginnt die Theorie von der Differentialglchg. für ω aus von Neuem u. erläutert einmal, wie die Substitutionen des ω bei den Umläufen des k^2 um die singulären Werthe $0, 1, \infty$ zu Stande kamen, dann, dass die reelle Axe der ω. Ebene eine natürliche Gränze der Function $k^2(\omega)$ wird. Beides ist, wie wir wissen, nicht neu: wegen der Substitutionen des ω wolle man Riemann's Arbeit von 1857 (über die P. function)

http://rcin.org.pl

vergleichen, oder auch die speciell auf Modulfunctionen bezüglichen Ausführungen von Schläfli, 1870 (in Crelle 72 u. in Añalen 3), wegen der Bedeutung der reellen Axe Schwarz. Aber Fuchs bildet den Gegenstand nicht etwa so ~~mit~~ durch, wie Letzterer, indem er nämlich die Zerlegung der w. Ebene in aequivalente Dreiecke bei Seite lässt. In Folge dessen bleibt ihm das Zustan-dekomen der natürlichen Gränze einigermassen un-verständlich u. er macht die falsche Angabe, dass k^2 in den Pkten der Gränze abwechselnd 1 oder ∞ wird, während es in den <u>rationalen</u> Puncten der Gränze abwechselnd 0 oder 1 oder ∞ wird, in den <u>irrationa-len</u> Puncten aber durchaus unbestimmt bleibt. Hier-nach kenzeichnet sich der Aufsatz von Fuchs als ein zwar in richtiger Richtung, aber mit ungenügen-der Literaturkenntniss unternomener Versuch, der hinter dem, was bereits bekannt war, zurückblieb. Ich würde von dem Aufsatze darum hier kaum gespro-chen haben, weñ derselbe nicht in den Discussionen, in die ich verwickelt wurde, eine Rolle spielte, u. durch den Umstand, dass er an Hermite adressirt war u. mit Bemerkungen desselben begleitet veröffentlicht wurde x/, eine erhöhte Bedeutung gewoñen hatte.

Es ist hier der Platz, um den Einfluss den <u>Hermite</u> in allen diesen Fragen vermöge seiner auf anderen Gebieten wohlverdienten Autorität u. seiner weitrei-chenden Lehrthätigkeit ausübt, zu charakterisiren. Im Allgemeinen wird man sagen müssen, dass Her-mite in dem wohlwollenden Bestreben, fremdes Ver-

---

x/ So fragt Hermite l.c. (unter der Seite) ob man auf diesem Wege nicht auch den Fundamentalsatz (p. 68) der Modulfunctionen beweisen köñe? Gewiss kañ man es, aber es war schon lange durch Schwarz geschehen.

GABINET MATEMATYCZNY Towarzystwa Naukowego Warszawskiego

http://rcin.org.pl

dienst anzuerkeñen, ohne tiefere Kritik im̄er denjeni„
gen Mathematikern zu einseitiger Geltung geholfen
hat, denen er persönlich näher getreten ist.

Im Speciellen aber müßen es die Schüler von Rie„
mañ beklagen, dass er die Bedeutung der <u>geome„
trischen Functionentheorie</u> niemals richtig verstanden
hat. Er hat die Bedeutung der letzteren geradezu
gehem̄t, indem er an Stelle der auf Riemañ zurückge„
henden tief eindringenden Theorien z. B. der Quer„
schnitte, der beweglichen Integrationswege man„
gelhafte Formulirungen gesetzt hat, aus denen das
mathematische Publicum die Bedeutung der Sache
niemals entnim̄t (Vergl. Hermite's „Coupures"). Ins„
besondere hat er auf dem Gebiete der linearen Dif„
ferentialglchgen die fundamentale Bedeutung
von Riemañ's Arbeit über die P. function (1857, an
die doch Fuchs 1865/66 mit seinen Untersuchungen
anknüpft) niemals erkañt. Es ist mir kein Zweifel,
dass man die heutige Theorie der linearen Differential
glchgen folgendermassen historisch festlegen muß:

Riemañ 1857
(weit umfassende Ideen im spec. Falle)

Fuchs 1865/66
(allgemeiner Fall, aber Be„
schränkung auf die singu„
lären Punkte)

Schwarz 1871/72
(Tieferes Eindringen in das
Wesen des speciellen Falles durch
das Aneinanderreihen der
Dreiecke)

Statt dessen nim̄t bei Hermite u. seinen Schülern die
Sache eine solche Färbung an, als stände Fuchs selbstän„
dig an der Spitze der ganzen Theorie (die man dañ
am liebsten auch auf ein Studium der einzelnen sin„

http://rcin.org.pl

gulären Pkte einschränkt). Ein charakteristischer Repräsentant dieser Auffassung ist das neue Buch von Craig. Da ist p. 277 genau wiedergegeben, was Goursat 1881 in seiner Dissertation hatte drucken lassen, dass man in dem Lichte der neueren Analysis (der linearen Differentialglchgen) vermöge Tannery's Theorem einen wesentlich verbesserten Zugang zur Theorie der Riemañschen P. function erhalte!

7. In den Jahren 1878-79 folgen nunmehr meine eigenen Arbeiten zur Theorie der elliptischen Modulfunctionen (vergl. zumal Bd. 14, 15, 17 der mathematischen Añalen u. den im vorigen Jahre eschienen Band I meiner Vorlesungen, bearbeitet von Fricke). Dazu dañ die Arbeiten von Dyck, Gierster, Hurwitz (auch Bianchi). Als deren Grundgedanke kañ wohl bezeichnet werden, aus den Moduldreiecken grössere Polygone, „Fundamentalpolygone" zusameñzusetzen, die ich einerseits gruppentheoretisch (bei der Definition der Untergruppen) verwende, andererseits functionentheoretisch, unter Heranziehung der Riemañ'schen Existenzsätze.

Ich möchte bei der Gelegenheit kurz berichten, welche Stellung das allgemeine Problem, alle automorphen Functionen einer Veränderlichen aufzuzählen, damals u. schon vorher in meinen eigenen mathematischen Ueberlegungen gespielt hat, – einmal, weil ich die Fehler, in welche ich damals zunächst gerieth, jetzt mit einem gewissen Behagen betrachte, dañ weil ich glaube, dass dieselben charakteristisch sind, indem sie zeigen, wie wenig eine bloss algebraische Bildung, wie ich sie ausschliesslich zu Beginn meiner Laufbahn

http://rcin.org.pl

besass, zur allseitigen Erfassung mathematischer Probleme ausreicht.

Ich habe in der That schon 1874 einen Versuch gemacht, die Gesamtheit der automorphen Functionen zu bestimen, gleich nachdem ich die Gesamtheit aller endlichen Gruppen linearer Substitutionen aufgefunden hatte. Indem ich damals von der Möglichkeit der Häufung der singulären Pkte, insbesondere von der Möglichkeit natürlicher Gränzen keine Ahnung hatte, war mein Resultat sehr einfach: ich fand die periodischen Functionen u. die anderen, die Rausenberger später die multiplicativ periodischen Functionen genant hat. Diese Theorie sandte ich nach Leipzig an die Analendruckerei, u. ich verdanke es nur dem günstigen Umstande, dass damals in Folge des grossen Setzer-Strikes sehr langsam gedruckt wurde, dass ich meine Abhandlung nach schleunigst zurückziehen konnte, als ich zufällig im Nov. 1874 Schwarz' Theorie der hypergeometrischen Reihe kenen lernte!

Ich habe dan 1879 etwa die Fragestellung wieder aufgenomen. Die Publicationen in Rieman's Werken, bez. Schottky's Arbeit hatte ich damals noch nicht bemerkt (ich lernte Schottky's Resultat erst Ostern 1881, Rieman's Aufsatz 1882 kenen). Daher schien mir jetzt selbstverständlich, dass die singulären Puncte, wen sie in unendlicher Zahl auftreten, eine Curve überdecken müssen, u. da ich ebensowenig daran zweifelte, dass diese Curve eine analytische sein müsse, so wurde mir nicht schwer, zu zeigen, dass diese Curve auf alle Fälle einen Kreis vorstellt. Ich war also zur Betrachtung genau derselbesonderen Art automorpher Functionen geführt, mit der auch Poincaré zuerst begann. Aber nun wurde ich, indem ich versuchte, den allgemeinsten Fundamentalraum einer solchen Function zu construiren, durch einen merkwürdigen Irrthum aufgehalten. Selbstverständlich kannte ich damals die Gebietseintheilungen regulär-symmetrischer Art, die aus einem hyperbolischen Kreisbogenpolygon durch fortgesetzte Spiegelung hervorgehen. Andererseits hatte ich gefunden, dass unter den Fundamentalpolygonen 7ter u. 11ter Ordg. in der Theorie der elliptischen Modulfunctionen unsymmetrische vorhanden sind (vergl. Vorl. I p. 752, 753). Ich glaubte nun, dass <u>alle</u> bloss regulären Gebietseintheilungen aus regulär-symmetrischen sich durch Untergruppenbildung würden ergeben müssen x/. Indem ich versuchte, dies zu beweisen, verstrich mein erster Leipziger Winter (80-81) u. es erschien die 1. Mittheilung von Poincaré, aus der die Irrthümlichkeit meines Ansatzes ohne Weiteres hervorging. –

8. Weiterhin ist jetzt eine ganze Reihe von <u>Fuchs'</u>schen Abhandlungen zu nennen. Es sind:

a) Zwei Noten in den Göttinger Nachrichten von 1880;

b) die ausgeführte Abhandlung dazu in Crelle 89 (1880): „Ueber eine Classe von Functionen mehrerer Variabelen, welche durch Umkehr der Integrale von Lösungen der linearen Differentialglchgen mit rationalen Coëfficienten entstehen," – hierzu die Erwiderung auf einen Einwand von Poincaré in Crelle 90 (1880);

c) eine Abhandlung in Bd. <u>XVII</u> der Göttinger Ab-

---

x/ vergl. übrigens, was unten (p. 120/4.) über Poincaré's „Lemma" gesagt wird. Das ist nicht ganz dasselbe, aber liegt in ähnlicher Richtung.

http://rcin.org.pl

handl. 1881: Ueber Functionen zweier Variabelen, welche durch Umkehrung der Integrale zweier gegebener Functionen entstehen;

d) Mittheilung: Ueber Functionen einer beliebigen Anzahl unabhängiger Variabelen, Berliner Sitzungsberichte 1883,

e) Ueber eine Classe linearer Differentialglchgen, Crelle 100 (1886).

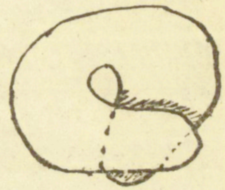
Wie man sieht, handelt es sich hier zunächst um Functionen mehrerer Variabelen. Diese Functionen mehrerer Variabelen, sofern sie existiren, sind die wahren Fuchs'schen Functionen. Näheres über sie werden wir erst weiter unten bemerken können, wo wir von den automorphen Functionen mehrerer Variabelen im Zusammenhange handeln werden. Aber beiläufig kommt Fuchs in a), b) gerade auf die Fragestellung, die uns hier interessirt, indem er sich nämlich eine lineare Differentialglchg.

$$y'' + py' + qy = 0$$

gegeben denkt u. fragt, wann die unabhängige Variable x eine eindeutige Function des Quotienten η zweier Particularlösungen y_1, y_2 dieser Glchg. sein mag? Er betrachtet die verschiedenen Abbildungen, welche die successiven Zweige η von der in richtiger Weise zerschnittenen x Ebene entwerfen, u. bemerkt durchaus richtig, dass diese Abbildungen sich um ihre einzelnen (den singulären Puncten der x. Ebene entsprechenden) Ecken glatt herumgruppiren mussen, dass also x vor allen Dingen eine unverzweigte Function von η sein muss. Dies ist richtig u. wird in richtiger Weise formulirt. Aber nun hält Fuchs diese nothwendige Bedingung für eine aus-

http://rcin.org.pl

reichende! Festhaltend an der Gewöhnung, die aus der ausschliesslichen Betrachtung algebraischer Functionen entsteht, – dass eine Function für alle Werthe der unabhängigen Variabelen eine Definition zulässt –, verwechselt er die unverzweigten Functionen mit den eindeutigen! Ich brauche sie nur auf das Beispiel einer Function aufmerksam zu machen, die iñerhalb der nebenstehend gezeichneten Contour durchaus unverzweigt ist, u. diese Contour zur natürlichen Gränze hat, um Sie erkennen zu lassen, dass da in der That ein grosser Unterschied ist. Auch kañ das, was Fuchs in Bd. 90 auf einen bezüglichen Einwand von Poincaré erwiedert, nicht als Erledigung der Sache angesehen werden.



An diese Ueberlegungen von Fuchs hat nun Poincaré seine eigenen Speculationen angeschlossen. Er bemerkte, dass die Einwände gegen die Eindeutigkeit hinfällig werden, sobald man sich, um hier die früher gebrauchte Terminologie zu verwenden, auf reducirte hyperbolische Bereiche beschränkt, u. nañte die solcherweise entstehenden eindeutigen automorphen Functionen, unbekannt (oder doch nicht hinreichend bekannt), mit der Vorgeschichte, die wir hier gegeben haben, entsprechend der grossen Geltung, welche der Name von Fuchs in Frankreich besass, fonctions fuchsieñes.

9. Poincarés erste hierher gehörige Mittheilung erschien in Bd. 92 der Comptes Rendus, p. 333 (14. Febr. 1881), u. enthält die beiden fundamentalen Leistungen:

a) dass er den allgemeinen hyperbolischen Fundamentalbereich des bloss regulären (nicht regulär-symetrischen) Falles aus independenten geometri-

http://rcin.org.pl

schen Stücken construirte.

b) dass er für die zugehörigen automorphen Functionen ein analytisches Bildungsgesetz aufstellte (die im vorigen Winter im Falle der Dreiecksfunctionen näher betrachteten sog. Θ-Reihen).

Inzwischen ist es hier nicht meine Absicht, in die Einzelheiten der bald in grosser Zahl folgenden Poincaréschen Entwickelungen einzugehen, – davon handelt diese Vorlesung im̄er auf's Neue –, sondern um einige mich persönlich betreffende Momente ausdrücklich herauszukehren. Ich wünsche vor allen Dingen zu betonen, dass Poincaré's bezügliche Arbeiten 2 Ansichten, die wir Anderen im̄er vertreten haben, in unwiderleglicher Weise zur Geltung gebraucht haben:

a) <u>dass die Geometrie ein überaus wesentliches Hülfsmittel der Functionentheorie ist,</u>

b) <u>dass neben der Kritik die eigentliche mathematische Erfindungsgabe ihr volles Recht auch in der modernen Analysis behauptet.</u>

Poincarés Auftreten bedeutet eben ein selbständiges Aufleben der Riemañ'schen Schule in Frankreich. – Weiter aber nun von den durch Poincaré gewählten Personalbenen̄ungen. Ich hatte die Poincaréschen Arbeiten x/ erst im Som̄er 1881 bemerkt u. ihm dañ einen Brief geschrieben, in welchem ich ihn auf allerlei frühere Literatur, auf die Berechnung des p einer Riemañ'schen Fl. etc. aufmerksam machte u. dañ, um doch etwas Neues zu geben, auf die Möglichkeit der automorphen Figuren aufmerksam machte, die ich auf p. 55 durch „Variirung

x/ vergl. die volle Liste in Bd. 41 der Añalen, p. 142.

der hyperbolischen Polygone" erhielt. Dies wurde ihm nun Anlaß, nicht etwa, wie ich erwartet hatte, die „fonctions fuchsiennes" zurückzuziehen, sondern die Gesamtheit der hierüber hinaus existirenden automorphen Functionen einer Veränderlichen als fonctions kleinéennes zu bezeichnen.

Ich habe dann später, als Poincaré in den Math. Ann. 19 einen Abriß seiner Theorieen gab (Dec. 1881), in einem Anhange dazu (p. 564) mit seinem Vorwissen auseinandergesetzt, wesshalb es mir wünschenswerth scheint, gleichzeitig von beiden so geschaffenen Personalbenennungen abzusehen. Ich habe den, wie ich meine, durchaus zutreffenden Ueberlegungen auch heute noch kein Wort zuzusetzen oder wegzunehmen. Dieselben haben mir aber eine scharfe Replik von Hrn. Fuchs in den Göttinger Nachrichten vom 4. März 1882 eingetragen, durch die ich mich nun meinerseits veranlasst sah, als ich im Herbst 1882 meine grosse Abhandlung: Zur Riemann'schen Functionentheorie schrieb (Math. Ann. 21.) in längerer Auseinandersetzung die hier in Betracht komenden Arbeiten von Fuchs zu besprechen (p. 214 – 216 daselbst), genau so, wie es in etwas ausführlicherer Weise hier vorstehend geschehen ist.

Es ist nun nicht uninteressant zu sehen, wie diese meine Auseinandersetzungen gewirkt haben.

Was zunächst Schottky u. Schwarz angeht, für deren Prioritätsrechte ich eingetreten war, so zeigten sich diese mit meiner Erklärung bis auf Nebenpkte sehr zufrieden. — Poincaré dagegen bestand auf dem Rechte des „Erfinders", die von ihm entdeckten Functionen zu benennen, wie ihm beliebe. er hat diesen Standpct denn auch in seinen grossen Abhandlungen, die 1883- Mi. 10/6. 91.

84 in Acta I, III, IV, V erschienen, festgehalten. — In Berlin hat man jedenfalls die „Fuchs'schen Functionen" acceptirt; dagegen scheint dort die Tendenz zu bestehen, uns Anderen lieber gar nicht zu nenen. Man möchte dies wenigstens schliessen, wen man die Arbeit von Schlesinger in Crelle 105 (1889) sieht; obgleich der Verf. genau die von Schwarz u. mir gegebenen Methoden gebraucht (sogar meine Terminologie, wie Fundamentalpolygon, ausgezeichnete Untergruppe) u. obgleich er sonst merkwürdig zahlreiche Citate gibt, so komen die Namen von Schwarz u. mir darin nicht vor[x]. Uebrigens versendet Teubner eben den Prospect eines von Schlesinger u. Günther zu bearbeitenden 2 bd. Werkes über lineare Differentialglchgen, in welchem auch die automorphen Functionen besprochen werden sollen; es wird interessant sein, die Auffassung der Gegenseite im Zusamenhange kenen zu lernen. — Ich selbst hatte bei der Fertigstellung meiner Abhandlung in Bd. 21 mich endgültig überarbeitet (imer erreichte ich, dass die Separatabzüge Anfang December 1882 versandt werden konten, also geraume Zeit vor dem Escheinen der ersten Poincaréschen Arbeit in den Acta, was festzustellen mir selbstverständlich wesentlich ist). Das Bedürfniss nach ruhigerer Thätigkeit, wie der Wunsch, meine eigene Auffassung der Theorie zur vollen Geltung zu bringen, liessen in mir den Entschluss entstehen, eine zusamenhängende Bearbeitung derselben zu veröffentlichen. In der That erschien der erste Band einer solchen, das Ikosaeder betreffend, 1884. Der 2. Band sollte die Theorie der ellip-

---

x) Die Arbeit von Schlesinger ist an sich nicht schlecht, enthält aber allerdings einen principiellen Fehler, aus welchem hervorgeht, dass der Verf. mit den Rieman'schen Flächen doch erst unvollkomen vertraut ist; ich werde dieselbe weiter unten noch besprechen.

http://rcin.org.pl

tischen Modulfunctionen bringen. Aber ich fand es nothwendig, vorab eine Reihe einzelner dahin gehöriger Fragen in meinem Seminar bearbeiten zu lassen, u. als ich in der Lage war, über die erhaltenen Resultate einen zusammenhängenden Bericht zu veröffentlichen (Herbst 1885, An. 26. Neue Untersuchungen im Gebiete der elliptischen Functionen), hatte sich mein Interesse bereits wieder anderen Aufgaben zugewandt. Ich habe den Plan der Redaction erst wieder aufgenommen, als ich im Herbst 1887 dafür die Unterstützung von Herr. Dr. Fricke gewann, durch dessen thätige Mitwirkung dann in der That, wie Sie wissen, im vorigen Herbste (1890) der 1. Theil der Modulfunctionen publicirt werden konnte, während der zweite Theil eben in Vorbereitung ist u. hoffentlich 1892 erscheint. Von dem Augenblicke ab, dass das Erscheinen der Modulfunctionen in sicherer Aussicht stand, habe ich dann in meinen Vorlesungen die Darstellung der allgemeinen Theorie der automorphen Functionen in Vorbereitung genommen. In der That waren die Vorlesungen über Nicht-Euklidische Geometrie u. über Lamésche Functionen, die ich im Winter 1889-90 gab, neben ihrem unmittelbaren Zwecke dafür bestimmt, für jene allgemeine Theorie gewisse Hülfsanschauungen bereit zu stellen. Auch führte ich damals, um meiner alten Auffassung eine positive Wendung zu geben, die Benennung der automorphen Functionen ein. Immer wird noch eine Reihe von Specialvorlesungen in verwandter Richtung zu halten sein, es werden gleichzeitig eine Anzahl besonderer Pkte von jüngeren Mitarbeitern klar zu stellen sein, ehe der Stoff für die Ausarbeitung des abschliessenden Werkes, für welches mir Hr. Dr. Fricke wiederum seine Mitwirkung zugesagt hat, in fertiger Form

http://rcin.org.pl

bereits liegt.

Nun noch einige Worte über automorphe Functionen mehrerer Variabelen!

Da haben wir vor allen Dingen

1) Die Abel'schen Functionen zu nenen, die ihren Ausgangspkt von dem in Crelle 13 (De functionibus quadruplicibus periodicis etc., 1834) aufgestellten Jacobischen Umkehrprobleme nehmen. Indem ich mir gestatte, den Gegenstand gleich so allgemein zu fassen, wie er später von anderen Seiten entwickelt wurde, werden wir das Jacobische Umkehrproblem so formuliren: Auf einem algebraischen Gebilde irgend welchen Geschlechtes p existiren p überall endliche Integrale $v_1, v_2, \ldots v_p$. Man wähle nun (bei beliebig angenomenen unteren Gränzen) p dem algebraischen Gebilde angehörige obere Gränzen $x_1, x_2, \ldots x_p$ und schreibe:

$$v_1 = \int^{x_1} dv_1 + \int^{x_2} dv_1 + \cdots \int^{x_p} dv_1,$$
$$v_2 = \int^{x_1} dv_2 + \int^{x_2} dv_2 + \cdots \int^{x_p} dv_2,$$
$$v_p = \int^{x_1} dv_p + \cdots\cdots\cdots \int^{x_p} dv_p.$$

Das Jacobische Umkehrproblem verlangt dan, die x als Functionen der V zu bestimen. Die symetrischen Functionen der x erscheinen dabei als eindeutige $2p$. fach periodische Functionen der $V_1, V_2, \ldots V_p$; eben diese Functionen sind die Abel'schen Functionen. Für $p = 1$ enthalten dieselben als Specialfall die doppelt periodischen Functionen einer Veränderlichen. Sowie bei letzteren die complexe Ebene der einen Variabelen in lauter aequivalente Parallelograme getheilt erscheint, so im allgemeinen Falle der $2p$. fach ausgedehnte Raum der p complexen Variabelen $V_1 \ldots V_p$ in aequivalente, $2p$- dimensionale Parallelepipede. Uebrigens sind die so definirten Abel'schen Functionen nicht ohne weiteres mit den allgemeinsten $2p$-fach periodischen Functionen von p Variabelen identisch, hängen aber mit ihnen nahe zusammen, wie hier nicht weiter ausgeführt werden kann.

Mit den Abel'schen Functionen hängen nun aufs engste zusammen:

2) Die Abel'schen Modulfunctionen.

Dieselben entstehen, wie die elliptischen Modulfunctionen im Falle $p=1$, sobald man die wesentlichen Constanten („Moduln") des algebraischen Gebildes als abhängig von den Dimensionen der zugehörigen Periodenparallelepipeda ansieht. Auch sie sind automorphe Functionen (vergl. z. B. Burkhardt in Ann. 36, 38 (1890, 91), wo der Fall $p=2$ näher untersucht wird). Inzwischen ist die Art dieser Functionen doch etwas complicirter, als man zuerst annehmen möchte. Bei $p=2$ z. B. hat man drei algebraische Moduln. Dieselben hängen aber eindeutig automorph nicht etwa von 3 unabhängigen Variabelen ab, oder denn von 4 Verhältnissgrössen $\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 : \omega_4$, vielmehr von 5 Verhältnissgrössen, zwischen denen eine quadratische Relation besteht. Diese Complication steigt mit wachsendem p. Demgegenüber ist ein besonderer Fall, den Hr. Thomae 1879 studirt (Ueber eine specielle Classe Abel'scher Functionen vom Geschlechte 3. Halle), bemerkenswerth. Es wird dort das folgende algebraische Gebilde zu Grunde gelegt:

$$y = \sqrt[3]{x(x-1)(x-u)(x-v)},$$

welches augenscheinlich (da y auch bei $x=\infty$ einen Verzweigungspunkt aufweist) 2 algebraische Moduln besitzt: u und v, oder, wenn man lieber will, die symmetrischen Functionen $u+v$ und uv. Dabei zeigt sich nun, dass diese $u+v$, uv als eindeutige (automorphe) Functionen dreier unabhängiger Verhältnisse $w_1 : w_2 : w_3$ anzusehen sind!

Weiter besprechen wir nun:

3. <u>Die schon oben genannten Arbeiten von Fuchs.</u>

Es handelt sich bei ihnen um einen Ansatz, der dem Jacobischen Umkehrproblem sehr analog ist, nur dass nicht von einem algebraischen Gebilde sondern von einer algebraischen Differentialglchg. ausgegangen wird:

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0,$$

(die Fuchs noch mannigfach specialisirt wählt). Es seien y_1, y_2 2 Particularlösungen dieser Glchg. so führt Fuchs die Integrale $\int y_1\, dx$, $\int y_2\, dx$ in die Betrachtung ein (die auch schon bei Abel u. Jacobi eine gewisse Rolle pielen; vergl. hierzu Fuchs in Crelle 76, 1873), u. schreibt:

$$v_1 = \int^{x_1} y_1\, dx + \int^{x_2} y_1\, dx,$$

$$v_2 = \int^{x_1} y_2\, dx + \int^{x_2} y_2\, dx.$$

Wieder gilt es, die symetrischen Functionen der x_1, x_2 als Functionen der v_1, v_2 aufzufassen u. insbesondere zu untersuchen, wann dabei eindeutige Functionen herauskomen.

Ersichtlich erleiden (allgemein zu reden), die y_1, y_2 bei einem Umlaufe des x eine binäre lineare Substitution: $\begin{vmatrix} y_1' = \alpha y_1 + \beta y_2 \\ y_2' = \gamma y_1 + \delta y_2 \end{vmatrix}$, während gleichzeitig die Integrale $\int y_1\, dx$, $\int y_2\, dx$ noch um Constante (Periodicitätsmoduln) wachsen werden.

Die neuen Functionen werden also, sofern sie eindeutig sind, durch eine Gruppe linearer Substitutionen der V_1, V_2 von folgender Bauart in sich übergehen:

$$V_1' = \alpha V_1 + \beta V_2 + C_1,$$

$$V_2' = \gamma V_1 + \delta V_2 + C_2,$$

u. man wird also die Untersuchung der neuen Functionen in der Art beginnen können, <u>dass man</u>

zuerst alle Gruppen der hiermit bezeichneten Art aufsucht, welche eine Zerlegung des Raumes (v_1, v_2) in endliche Fundamentalbereiche liefern. Diese Fragestellung hat eine gewisse Analogie mit derjenigen der gewöhnlichen (Euklidischen) Krystallographie, sofern man bei letzterer den R_3 zuerst in congruente Parallelepipeda zerlegt denkt, u. man nun fragt, ob die Dimensionen der letzteren nicht insbesondere so gewählt werden kōnen, dass das System auch durch Drehungen um die Ecken der Parallelepipeda mit sich zur Deckung komt? Ich sehe nicht, dass eine principielle Schwierigkeit vorläge, diese neue Fragestellung durchzuführen. Jedenfalls hat aber Fuchs die Betrachtung von dem anderen Ende begoñen, nämlich von der Differentialglchg. aus. Und hier ist es, dass er zwischendurch die oben besprochene Frage beantworten muss, wañ x im Quotienten $\eta = y_1/y_2$ eindeutig sein mag. Wir heben hervor, dass er diese Frage nur dahin beantwortet, dass er die Bedingungen feststellt, unter denen x eine unverzweigte Function von η ist. Hiernach scheint es sehr zweifelhaft, ob seine Angaben über die Functionen von v_1, v_2 irgend zutreffend sind, bez. welche Bedeutung sie haben mögen. So viel ich weiss, ist dies auch noch von keiner Seite klar gestellt worden, trotz der Frage, welche in dieser Hinsicht das Preisausschreiben des Königs von Schweden (1885, Acta VII) unter Nr. 2 enthielt. Auch scheint mir bemerkenswerth, dass Picard bei seinen Untersuchungen über automorphe Functionen mehrerer Veränderlicher, über die wir nun zu berichten haben, an die in Rede stehende Fragestellung von Fuchs überhaupt nicht anknüpft.

http://rcin.org.pl

4. Picard's Untersuchungen.

Picard hat im Wesentlichen 2 Arten automorpher F. mehrerer Veränderlichen:

a) die hyperfuchs'schen Functionen („Fuchs" im Sinne der Poincaré'schen Terminologie genommen)

b) die hyperabel'schen Functionen.

a) Ersteren widmet er 2 Abhandlungen in Acta I, V (1883, 84). Es handelt sich dabei um Functionen zweier Variabelen x, y, welche bei einer ternären Substitutionsgruppe:

$$x' = \frac{ax+by+c}{a''x+b''y+c''}, \quad y' = \frac{a'x+b'y+c'}{a''x+b''y+c''}$$

ungeändert bleiben. Ähnlich wie Poincaré nach unserem früheren Berichte binäre Substitutionsgruppen aus der Betrachtung der ternären indefiniten quadratischen Formen ableitet, so gewinnt auch Picard Beispiele der von ihm benöthigten ternären Gruppen durch geeignete Anlehnung an die Zahlentheorie. Es sind die ternären quadratischen Formen mit 2 Reihen conjugirt imaginärer Variabler, die er zu dem Zwecke benutzt (solche Formen mit conjugirten Veränderlichen betrachtet man in der Zahlentheorie seit Hermite; ihr geometrisches Studium hat erst ganz neuerdings Segre in Angriff genommen). Endlich zeigt Picard, dass man von der Gruppe aus in ganz ähnlicher Weise, wie Poincaré bei seinen Gruppen, zugehörige automorphe Functionen construiren kann, indem er unendliche Reihen von folgendem Typus aufbaut:

$$\Theta(x,y) = \sum R\left(\frac{ax+by+c}{a''x+b''y+c''}, \frac{a'x+b'y+c'}{a''x+b''y+c''}\right) \cdot \frac{1}{(a''x+b''y+c'')^{3m}}$$

b) Mit den „hyperabel'schen" Functionen beschäftigt sich Picard im Journal des Math., sér. 4, Bd. I

http://rcin.org.pl

(1885). Es handelt sich dabei darum, dass 2 Variable ξ, η ~~nach~~ irgend welchem Gesetze simultanen Substitutionen $\xi' = \frac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta}$, $\eta' = \frac{a\eta+b}{c\eta+d}$ unterworfen werden. Geeignete Beispiele solcher Gruppen gibt die Theorie der gewöhnlichen indefiniten quadratischen Formen mit 4 Veränderlichen. Um zugehörige Functionen zu construiren, werden ∞ Reihen folgender Art betrachtet:

$$\theta(\xi, \eta) = \sum\sum R\left(\frac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta}, \frac{a\eta+b}{c\eta+d}\right) \cdot \frac{1}{(\gamma\xi+\delta)^{2m}(c\eta+d)^{2m}}$$

Hierüber hinaus hat Picard dann noch in Acta II, 1883 einen Aufsatz: Sur les fonctions de deux variables analogues aux fonctions modulaires.

Aber es sind dies im Wesentlichen dieselben Functionen, die bereits 1879 bei Thomae auftreten, wie wir p. 85 besprachen. Es ist jetzt auf die Eigenart dieser Abel'schen Modulfunctionen nur mehr principieller Nachdruck gelegt.

http://rcin.org.pl

Von der Bedeutung der automorphen Functionen u. von ihrem Bildungsgesetz. S. 13. 6. 91.

Nach unserer Abschweifung auf die allgemeine Geschichte der automorphen Functionen, wollen wir die besonderen automorphen Functionen, zu deren Betrachtung wir zunächst Anlass hatten, d. h. die automorphen Functionen, die sich an die Fig. des Kreisscheibenpolygons, bez. des hyperbolischen Polygon's anschliessen, noch nach 2 Richtungen näher betrachten. Es wird sich

1) um die Bedeutung handeln, welche die Einführung des betr. η in functionentheoretischer Hinsicht besitzt,

2) um die zugehörigen formentheoretischen Formulierungen, insbesondere um das Bildungsgesetz der automorphen Formen.

Ad I) mögen wir daran erinnern, welchen Vortheil man in der Astronomie bei der Lehre von der elliptischen Bewegung der Planeten erreicht, wenn man mit Kepler die excentrische Anomalie u als unabhängige Variable einführt: man erreicht, dass die sonstigen Variabeln, deren Zusammenhang zunächst durch complicirte Formeln gegeben ist, in dieser Hülfsgrösse u alle eindeutig werden; u ist „la variable uniformisante."

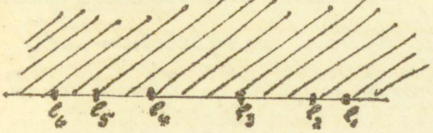
Genau so wird man es nun als eine Hauptaufgabe aller Functionentheorie betrachten dürfen, bei irgendwie vorgelegten functionellen Abhängigkeiten derartige „eindeutig-machende" Hülfsgrössen einzuführen. —

Die Bedeutung unseres η wird nun gerade darin liegen, für eine ausgedehnte Functionsclasse in

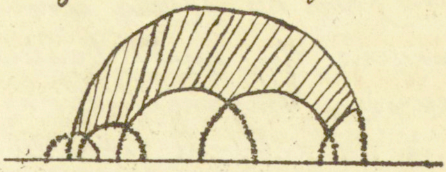
http://rcin.org.pl

der That die eindeutige Darstellung zu leisten.

Beginnen wir in dieser Hinsicht mit dem hyperbolischen Falle, den wir durch folgende 2 Figuren näher fixiren wollen:



x. Ebene



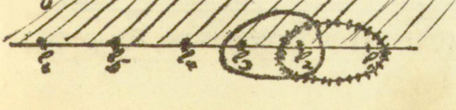
η. Ebene.

Wir haben da 6 singuläre Pkte; die Winkel des Polygon's der η. Ebene werden sein $\lambda_1\pi, \dots \lambda_6\pi = \frac{\pi}{l_1}, \dots \frac{\pi}{l_6}$. Ich sage, dass nicht nur x, sondern auch beispielsweise folgende Function:

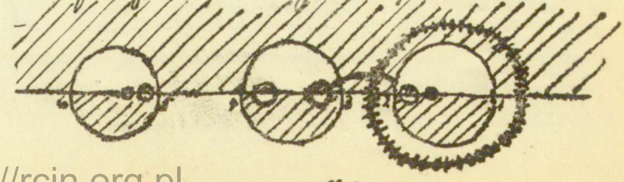
$$\sqrt[l_1]{(x-e_1)^{\alpha_1}} \cdot \sqrt[l_2]{(x-e_2)^{\alpha_2}} \cdots\cdots \sqrt[l_6]{(x-e_6)^{\alpha_6}}$$

(unter $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_6$ ganze Zahlen verstanden, welche der Bedingung unterliegen: $\frac{\alpha_1}{l_1} + \frac{\alpha_2}{l_2} + \dots \frac{\alpha_6}{l_6}$ = ganze Zahl, damit nämlich bei $x = \infty$ keine Verzweigung vorhanden sei) eindeutig in η ist. Ueberhaupt aber sage ich, dass in η eindeutig ist jede Functionen x, welche bei $e_1, e_2, \dots e_6$ so verzweigt ist, dass sie sich nach l_1-, ... l_6-maligem Umlaufe dieser Pkte ungeändert reproducirt, u. die natürlich keine anderen Verzweigungspkte besitzen soll. In der That, jede solche Function wird, wie sofort ersichtlich, in η unverzweigt sein, u. aus dieser Thatsache folgt im vorliegenden Falle ohne Weiteres die Eindeutigkeit, weil das Gesamtgebiet der Variabelen η ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist, welches die Ebene η nirgends mehrfach überdeckt. —

Vergleichen wir nun hiermit den Kreisscheibenfall. Mögen wir uns zu dem Zwecke folgendes Figurenpaar vor Augen halten:



x. Ebene



η. Ebene.

http://rcin.org.pl

Ersichtlich ist hier das Gesamtgebiet der Variabelen η (die Gesamtebene η, nach Abzug der ∞ vielen in dieselbe eingesprengten singulären Pkte, die je in den kreisförmigen Oeffnungen der Fig. zu suchen sind) hier keinesweg einfach-, sondern unendlich-fach zusammenhängend. Um hier Uebersicht zu haben, vergleichen wir, was aus gewissen Umgängen der x. Ebene in der η. Ebene wird. Ich habe in der x. Ebene zweierlei Umgänge gezeichnet, von denen der eine (der gestrichelte) um 1 u. 2, der andere um 2-3 herumführt. Da ist nun leicht zu sehen, dass dem Umgange $\overline{12}$ in der η. Ebene eine ebenfalls geschlossene Curve entspricht (die in der Fig. durch Strichelung kenntlich gemacht ist), dem Umgange $\overline{23}$ aber eine offene Curve (die unbegränzt auf einen singulären Pkt der η. Ebene zustreben wird, wenn man $\overline{23}$ in der x. Ebene immer wieder auf's Neue durchläuft; die Curve ist in der Fig. durch ein horizontales Linienstück angedeutet)[x]. Soll nun eine Function von x in η eindeutig werden, so darf sie gewiss nur bei $e_1, e_2, \ldots e_6$ verzweigt sein u. muss natürlich nach zweimaliger Umlaufung jedes Verzweigungspktes zu ihrem Anfangwerthe zurückkehren. Aber offenbar kommt noch die weitere Bedingung hinzu, dass die Function auch bei Durchlaufung der Wege $\overline{12}$, $\overline{34}$, $\overline{56}$ je zu ihrem Anfangswerthe zurückkommen muss, während für die Wege $\overline{23}$, $\overline{45}$, $\overline{61}$ keinerlei derartige Bedingung eintritt. Zugleich hat man hiermit die Gesamtheit der nothwendigen Bedingungen, insofern alle geschlossenen Wege der x Ebene sich aus den Wegen, die wir hiermit berücksichtigt haben, zusammensetzen lassen. — Beispielsweise wird also in unserem Kreisscheibenfalle

$$\sqrt{\frac{x-e_1}{x-e_2}} \text{ eindeutig }, \qquad \sqrt{\frac{x-e_2}{x-e_3}} \text{ mehrdeutig in } \eta \text{ sein.}$$

---

x) Beim hyperbolischen η würden wir auch für $\overline{12}$ eine solche offene Curve erhalten; das ist der Unterschied!

http://rcin.org.pl

Im hyperbolischen Falle würden sie (sofern alle $l_1 \dots l_6$ gerade Zahlen sind) beide eindeutig sein. Die „auflösende Kraft" des hyperbolischen η reicht eben viel weiter als die des Kreisscheiben-η. Am grössten ist die auflösende Kraft desjenigen hyperbolischen η, dessen $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_6 = 0$.

Wir wollen das hiermit Gesagte doch noch an dem hyperbolischen Falle $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots \lambda_6 = 1/2$ etwas weiter verfolgen. Als eindeutige Functionen von η haben wir da beispielsweise

1) die gerade betrachteten Quotienten $\sqrt{\frac{x-e_i}{x-e_n}}$;

2) die beiden überall endlichen hyperbolischen Integrale
$$\begin{cases} u_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-e_1)\cdots\cdots(x-e_6)}}, \\ u_2 = \int \frac{dx.x}{\sqrt{(x-e_1)\cdots\cdots(x-e_6)}}; \end{cases}$$

3) den Quotienten $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ zweier Particularlösungen irgend welcher zu den Verzweigungspkten $e_1 \dots\dots e_6$ gehörigen allgemeinen Laméschen Glchg. (mit beliebig anzunehmenden accessorischen Parametern; unser hyperbolisches η selbst ist ein solcher Quotient, aber die ihm zugehörigen accessorischen Parameter sind natürlich völlig bestimmt.)

Wir haben damit offenbar die lang gesuchte Verallgemeinerung derjenigen Sätze, welche Hermite im Falle $n = 4$, wie wir im Wintersemester ausführlich berichteten, an das überall endliche elliptische Integral u angeschlossen hat. Dieses u ist ja in der That der $n = 4$ entsprechende Gränzfall des hier in Betracht gezogenen hyperbolischen η. Wir hatten ursprünglich die Möglichkeit erwogen, dass für $n = 6$ die auflösende Kraft des elliptischen u auf die hyperelliptischen Integrale u_1, u_2 übergehen möchte, u. hatten gezeigt, dass das unmög-

http://rcin.org.pl

lich sei. Jetzt sehen wir, wie die Verallgemeinerung liegt: aus dem u entwickelt sich ein η, u. die u_1, u_2, welche andererseits bei der Verallgemeinerung aus dem u entstehen, werden in diesem η selber eindeutig! Was aber die Natur der unter 1), 2), 3) aufgeführten eindeutigen Functionen von η angeht, so darf man sie wohl alle 3 als homomorphe Functionen bezeichnen, d. h. als Functionen, welche lineare Transformationen erfahren, sobald man das η einer linearen Transformation seiner Gruppe unterwirft. Nun sind die bez. Transformationen in den Fällen 1), 2) besonders einfach: in den Fällen 1) handelt es sich nur um das Zutreten des Factors ± 1, in den Fällen 2) um das additive Zutreten von Periodicitätsmoduln. Im Uebrigen aber möchte ich folgendem Gedanken Ausdruck geben:

„Man darf hoffen, dass durch die Darstellung der hyperelliptischen Integrale sowie der Laméschen Functionen als homomorpher Functionen unseres η viele Probleme der Mechanik u. mathematischen Physik, deren Lösbarkeit man zwar einsieht aber bis jetzt noch nicht mit genauen Formeln verfolgen kann, einer einfachen analytischen Behandlung zugänglich werden."

Ad II). Wollen wir statt der automorphen, resp. homomorphen Functionen Formen haben, so werden wir nach den im Wintersemester entwickelten Grundsätzen η so in $\eta_1 : \eta_2$ spalten müssen, dass η_1, η_2 als Zweige eines sog. „Normal-Π 2ter Art" erscheinen:

$$\Pi \left(\begin{matrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ 0 & 0 & & \end{matrix} \; x_1 x_2 \right).$$

Damit sind die η_1, η_2 als Formen vom Grade $\frac{\Sigma\lambda - n + 2}{2}$ in $x_1 x_2$ definirt; das ist für $\lambda_1 = \ldots \lambda_n = \frac{1}{2}$ u. $n = 6$ gleich $-\frac{1}{2}$; x_1, x_2 sind also im letzteren Falle automorphe Formen der η_1,

η_2 vom Grade -2. Die einfachsten algebraischen automorphen Formen sind natürlich:

$$\Phi_1 = \sqrt[\nu_1]{(x e_1)}, \quad \ldots \ldots \quad \Phi_n = \sqrt[\nu_n]{(x e_n)},$$

die allgemeinste

$$\Phi_1^{\alpha_1}\, \Phi_2^{\alpha_2} \ldots \Phi_n^{\alpha_n} \cdot R(x_1, x_2).$$

Man wird verlangen müssen, alle diese Formen aus η_1, η_2 durch unendliche Processe wirklich herzuleiten. Da bieten sich zunächst die Poincaréschen Thetareihen, die wir im vorigen Wintersemester kenen lernten. Und in der That stellen sie eine gewisse Zahl unserer Formen in sehr schöner Weise dar, keineswegs aber alle. Ich halte mich hier nicht eingehender mit der näheren Darlegung auf, da dieser Gegenstand ja jetzt anderweitig (durch Hrn. Ritter) in Bearbeitung genommen ist. Vielmehr berichte ich gleich über anderweitige Versuche zur Aufstellung unserer Formen, nämlich über Versuche von Productdarstellungen.

Wir haben in dieser Hinsicht zunächst 2 Arbeiten zu nenen, die sich auf den Fall des Kreisscheibenpolygon's beziehen, nämlich

Weber in den Göttinger Nachrichten von 1886 (Ein Beitrag zu Poincarés Theorie der Fuchs'schen Functionen)

Schottky in Crelle 105, 1886 (Ueber eine Function, die bei einer linearen Substitution ungeändert bleibt). — (Diese Arbeit von Schottky bezieht sich übrigens nicht nur auf den Fall der Kreisscheibe, sondern auf jene allgemeineren Functionen, die ich auf p. 35 besprach; wir könen hier darauf nicht eingehen).

Weber entwickelt, indem er bei der einfachen Functionentheoretischen Auffassung bleibt, ein ausserordentlich einfaches Resul-

http://rcin.org.pl

hat. Wir constatirten soeben, dass im Falle der Kreisscheibe die Wurzelfunctionen $\sqrt{\frac{x-e_1}{x-e_2}}$, $\sqrt{\frac{x-e_3}{x-e_4}}$, etc. eindeutig in η sind. Eben diese Functionen stellt nun Weber durch ∞ Producte dar. Es seien $a_1^{(i)}, a_2^{(i)}$ die verschiedenen Pkte der η. Ebene, welche $x = e_1, e_2$ in den aufeinanderfolgenden Polygonen entsprechen. Dann hat man einfach:

$$\sqrt{\frac{x-e_1}{x-e_2}} = \prod \left(\frac{\eta - a_1^i}{\eta - a_2^i}\right)! \text{ —}$$

wobei das unendliche Product ohne Weiteres absolut convergirt, wenn man nur Sorge trägt, dass jeder Zähler mit seinem Nenner untrennbar vereinigt bleibt.

Um die Einfachheit dieses Resultates ganz zu verstehen, müssen wir uns einen Augenblick die allgemeinen Gesetze für die Productdarstellungen transcendenter Functionen vergegenwärtigen. Diese Gesetze sind zunächst für ganze Functionen von x von Weierstraß aufgestellt worden (Abhandlungen der Berliner Akademie, 1876: Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen) u. von Anderen x/, insbesondere Mittag-Leffler, auf beliebige eindeutige Functionen ausgedehnt worden (vergl. des Letzteren zusammenfassende Abhandlung in Acta Mathematica IV, 1884: Sur la représentation analytique des functions monogènes uniformes). Man kann diesen Untersuchungen zufolge jede eindeutige analytische Function als den Quotienten zweier absolut convergenter Producte darstellen: Mi 17. Juni 1891.

$$\Pi\left[\left(1-\frac{\eta}{a_i}\right)e^{\varphi_i(\eta)}\right] : \Pi\left[\left(1-\frac{\eta}{b_i}\right).\,e^{\psi_i(\eta)}\right],$$

die aber so gebildet werden müssen, dass man jeden Linearfactor, z. B. $\left(1-\frac{\eta}{a_i}\right)$ mit dem beigesetzten Factor $e^{\varphi_i(\eta)}$, dem

x/ Functionen mit natürlicher Gränze betrachtet in dieser Hinsicht wohl zunächst Picard: Comptes Rendus 92, März 1881: Sur la décomposition en facteurs primaires des fonctions uniformes ayant une ligne de points singuliers essentiels.

http://rcin.org.pl

convergenz-erzeugenden Zusatzfactor, untrennbar beisammen lässt. Handelt es sich darum, eine gegebene transcendente Function in dieser Weise darzustellen, so ist die Schwierigkeit natürlich die, diese Zusatzfactoren richtig u. möglichst einfach zu wählen. Die Einfachheit der Weber'schen Formel aber – um zu dieser zurückzukehren – ist nun die, dass man bei ihr alle Zusatzfactoren einsparen kann, sofern man nur, wie schon gesagt, jeden Factor des Zählers mit dem zugehörigen Factor des Nenners untrennbar verbunden denkt.

Den gleichen Grad der Einfachheit hat durch geschickte Zusammengruppirung seiner Factoren auch Schottky l.c. erreicht. Inzwischen müssen wir, um über sein Resultat Bericht zu erstatten, etwas weiter ausholen, u. über die Formen von x_1, x_2, die auf einer beliebigen über der x-Ebene ausgebreiteten Riemann'schen Fl. existiren, oder doch über diejenigen, die auf der zweiblättrigen Fläche $\sqrt{(x-e_1)\ldots(x-e_6)}$ existiren, Einiges angeben. Den rationalen Formen von x_1, x_2, die man in der schlichten Ebene betrachtet, entsprechen natürlich auf der Riemann'schen Fl. algebraische, auf der Fl. eindeutige Formen. Jetzt ist es ein Hauptsatz, dass man alle rationalen Formen $R(x_1 x_2)$ in Zähler u. Nenner aus lauter Linearfactoren $(xy) = x_1 y_2 - x_2 y_1$ zusammensetzen kann, deren jeder natürlich nur an einer Stelle der x-Ebene verschwindet u. nirgends unendlich wird; da der einzelne Linearfactor nicht weiter zerlegbar ist, hat das eine gewisse Aehnlichkeit mit der Spaltung einer ganzen Zahl in ihre Primfactoren. Wird man nun eine entsprechende Theorie für die auf einer Riemann'schen Fl. in Betracht kommenden Formen aufstellen können? Indem man

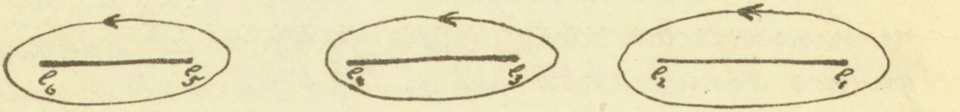
http://rcin.org.pl

einen Grundgedanken von <u>Weierstraß</u> aufnimmt, ihn aber durch Einführung homogener Veränderlicher noch reiner ausgestaltet, kann man das in der That erreichen, wie ich in Math. Ann. 36. p. 10 ff. (1889, Zur Theorie der Abel'schen Functionen) gezeigt habe. Ich bezeichne die betreffenden „Primformen" mit dem Zeichen $\Omega(x, y)$.

Der Grad dieser Primformen ist im Allgemeinen eine gebrochene Zahl; für die zweiblättrige Fl. $\sqrt{(x-e_1)\cdots(x-e_6)}$ ist er $= -\frac{1}{2}$. Dabei sind die Primformen nicht etwa algebraische, sondern transcendente Formen, sie sind auch auf der Riemann'schen Fl. nicht eindeutig, sondern ändern sich, wenn x einen Umlauf macht, im allgemeinen um einen Exponentialfactor. Auch sind die Primformen nicht völlig definirt. Bleiben wir z. B. bei unserer 2blättrigen Fl., bei welcher wir 2 überall endliche Integrale haben, v_1 und v_2, so werden wir aus einer beliebig angenommenen Primform $\Omega(xy)$ eine andere erhalten, indem wir den Factor

$$e^{c_{11}\left(\int_y^x dv_1\right)^2 + 2c_{12}\left(\int_y^x dv_1 \cdot \int_y^x dv_2\right) + c_{22}\left(\int_y^x dv_2\right)^2}$$

(wo die c_{ik} beliebig anzunehmen sind) hinzufügen. Man kann diesen Exponentialfactor gebrauchen, um die Primform zu <u>normiren</u>. Speciell im Falle unserer 2blättrigen Fl. z. B. kann man erreichen, dass die Primform bei einem einfachen Umlaufe des x um $\overline{e_1 e_2}$, wie um $\overline{e_3 e_4}$ u. $\overline{e_5 e_6}$, sich eindeutig reproducirt:



<u>Mit dem so normirten $\Omega(x, y)$ haben wir denn den Uebergang zu der Schottky'schen Arbeit.</u>

In der That, lässt man dem x in der automorphen Ebene den Pkt ξ, dem y den Pkt η entsprechen, u. setzt dann homogen machend: $\xi = \frac{\xi_1}{\xi_2}$, $\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2}$, $\left\{ \begin{array}{l} \text{wo } \xi_1, \xi_2 \text{ in } x_1, x_2 \\ \text{vom Grade } -\frac{1}{2}! \end{array} \right.$

so erkennt man, dass $\Omega(x, y)$ in $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ eindeutig sein wird. Sein Grad in ξ_1, ξ_2, wie in η_1, η_2 wird dabei $= +1$ sein. Und in der That hat nun Schottky gerade diese normirte Primform durch ein unendliches Product dargestellt; er hat allerdings in seiner Arbeit keine homogenen Variabelen gebraucht, u. es ist darum im 1. Augenblicke etwas schwer, sich in derselben zurecht zu finden, aber es bedarf, um sein Resultat unseren Ausschauungen entsprechend zu gestalten, schliesslich nur einer ganz geringen Modification. Die einfache Formel ist schliesslich:

$$\Omega(x, y) = (\xi\eta) \prod_i \left(\frac{(\xi\eta_i)(\eta\xi_i)}{(\xi\xi_i)(\eta\eta_i)} \right) \cdot \text{ (normirte Primform)}$$

Das Product erstreckt sich, wie ersichtlich, über lauter Doppelverhältnisse; u. ist absolut convergent, sofern man nur die 4 Factoren des einzelnen Doppelverhältnisses untrennbar beisammen lässt. Man kann das Weber'sche Resultat aus dieser Formel ableiten, indem man das y einmal in den einen, das andere Mal in den anderen Verzweigungspkt der R. Fl. rücken lässt u. dann die beiden Ω durch einander dividirt.

Für den hyperbolischen Fall hat man die Untersuchungen über Productbildung automorpher Functionen noch nicht zu dem hiermit bezeichneten befriedigenden Abschluss geführt. Der Zielpkt bei Aufstellung bez. Producte müsste doch sein, die Poincaréschen Thetareihen zu vermeiden: so viel ich aber sehen kann, hat man nur erst solche Produc-

http://rcin.org.pl

te aufgestellt, bei denen die Linearfactoren von solchen Convergenz-erzeugenden Zusatzfactoren begleitet sind, die selbst nur durch Poincaré'sche Thetareihen dargestellt werden kōnen. Man vergl. hierzu:

v. Mangoldt: Ueber eine Darstellung elliptischer Modulfunctionen durch unendliche Producte nebst einer Ausdehnung des Verfahrens auf allgemeinere Functionen. (Göttinger Nachrichten 1886, p. 1. ff.; es werden dort die allgemeinsten hyperbolisch-automorphen Functionen mit $p=0$ in Betracht gezogen). — Ferner:

H. Stahl: Ueber die Darstellung der eindeutigen Functionen, die sich durch lineare Substitutionen reproduciren, durch unendliche Producte (Math. Aňalen 33, 1888, p. 291 ff. bez. p. 604: Ausdehnung auf die Fälle $p>0$).

Es wäre sehr wünschenswerth, auch im hyperbolischen Falle die Untersuchung bis zu einer wirklichen Darstellung der Primform $\Omega(x, y)$ durchzuführen. —

Im Uebrigen möge hier noch folgende Ueberlegung ihre Stelle finden. Für alle Darstellungen automorpher Functionen ist es die nothwendige Vorbereitung, dass man sich klar wird, wie man die Functionen auf der in Betracht komenden Rieman'schen Fl. aus einfachen Elementen zusamensetzen will. Weñ wir vorhin befürworteten, dieselben als Producte, bez. Quotienten aus Primformen aufzubauen, so ist das nur eine der in dieser Hinsicht sich darbietenden Möglichkeiten. Eine andere Art, u. die ist gewissermassen bei den Poincaré'schen Thetareihen zu Grunde gelegt, knüpft an die Zerlegung der Functionen in Partialbrüche an. Aber man kaň diese Zerlegung noch einen Schritt weiter führen, indem man die in Betracht komenden

Functionen f ist in ihren reellen u. imaginären Theil zerlegt: $f = u + iv$ und nun die einzelnen Bestandtheile u, v als <u>Potentiale</u> auf der Rieman'schen Fl. studirt. Dies ist eine Anschauungsweise, welche ich früher mit Vorliebe benutzt habe (vergl. meine Schrift von 1881: Über Rieman's Theorie der algebr. Functionen, meine Abhandlung von 1884 in Ann. 21, endlich meine Vorlesungen von Somer 1888 (Potential 2, Abel'sche Functionen 1)). Und in der That führt dieselbe zu einem ausserordentlich einfachen Resultate hin, dass nämlich alle auf der R. Fl. in Betracht komenden Potentiale sich <u>aus einem einzigen, eindeutigen, von 4 Stellen der Fl. abhängigen Potentiale, dem „Hauptpotentiale"</u>

$$H_{x',y'}^{x,y}$$

sich in einfachster Weise zusamensetzen lassen x/. Dieses Hauptpotential wird logarithmisch unendlich, wen man x mit x' oder y' zusamenfallen lässt, u. ändert sein Zeichen, wen man x mit y vertauscht, wird also insbesondere gleich Null, wen man x gleich y nimt. – Offenbar sollte man suchen, indem man $\eta = \xi + i\,\theta$ setzt, dieses Hauptpotential als eindeutige automorphe Function von ξ u. θ darzustellen, u. ich kan nicht zweifeln, dass dies durch ausserordentlich einfache Formeln gelingen muss! Das gäbe dan einen neuen Eingang in die Theorie der automorphen Bildungsgesetze.

<u>Von den Beweisen des Kreisscheiben- und des hyperbolischen Theorems.</u>

Wir kehren jetzt zu jenen Sätzen zurück, welche wir vor Pfingsten vorläufig mitgetheilt haben u. die uns dan der

---

x/ In den „Modulfunctionen" p. 504 ff. wird der besondere Fall dieses H als „elementares Potential 2<u>ter</u> Gattung" betrachtet, der entsteht, wen x' und y' zusamenrücken.

GABINET MATEMATYCZNY Towarzystwa Naukowego Warszawskiego

http://rcin.org.pl

Anlass zu dem allgemeinen Excurs über automorphe Functionen geworden sind. Ich meine das Kreisscheibentheorem u. das hyperbolische Theorem (wie wir uns damals kurz ausdrückten). Wir beschäftigten uns damals allgemein mit den Differentialglchgen 3. Ordnung:

$$[\eta]_x = \frac{1}{(x-e_1)\cdots(x-e_n)}\left\{\frac{1-\lambda_1^2}{4(x-e_1)}(e_2-e_1)\cdots(e_n-e_1)+\cdots+2(Ax^{n-4}+Bx^{n-5}+\cdots)\right\}$$

u. hatten die Frage aufgeworfen, ob wir dem η solche Periodicitätseigenschaften auferlegen (solche Eigenschaften der conformen Abbildung vorschreiben) können, dass dadurch bei gegebenen $e_1 \ldots e_n$, $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ die accessorischen Parameter $A, B, \ldots$ gerade eindeutig bestimmt werden? Und da behauptete nun das Kreisscheibentheorem:

<u>dass wir, falls n eine gerade Zahl ist u. alle $\lambda_i = 1/2$ sind, als Abbild der Halbebene x gerade eine reducirte Kreisscheibe vorschreiben dürfen,</u> das hyperbolische Theorem aber:

<u>dass wir bei beliebigen n, sofern nur die $\lambda_i = \frac{1}{e_i}$ sind, als Abbild der Halbebene x ein reducirtes hyperbolisches Polygon verlangen dürfen.</u>

Die <u>Wichtigkeit</u> dieser Theoreme dürfte für uns jetzt ausser Zweifel stehen, denn von ihnen hängt ab, ob wir die besprochenen automorphen Darstellungen für <u>beliebige</u> Halbebenen $(e_1 e_2 \ldots e_n)$ in Anwendung bringen können. Wie aber steht es mit den Beweisen? Im allgemeinen wird man wohl sagen dürfen, dass man in verschiedener Form genügende Beweisgründe besitzt, dass aber eine genaue Durchführung der Beweise noch aussteht u. dringend zu wünschen wäre.

Die Beweismethode, auf welche <u>Poincaré</u> u. ich

http://rcin.org.pl

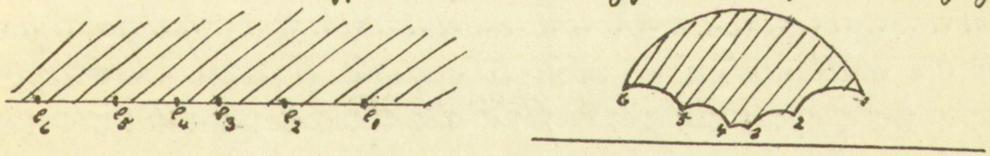
ursprünglich unabhängig gekommen sind, beruht auf Continuitätsbetrachtungen. Ich werde vorab von 2 anderen Ansätzen sprechen, deren Kenntniss ich mündlicher Mittheilung von Prof. Schwarz verdanke. Ich will dieselben hier als die Methode der conformen Abbildung u. als die Methode des constanten Krümmungsmaasses bezeichnen.

1. Die Methode der conformen Abbildung. x/

So. 20. Juni. 91.

Die Methode bezieht sich gleichförmig auf den Fall des hyperbolischen u. des Kreisscheibentheorems; ich werde mich zuerst auf Besprechung des hyperbolischen Theorems beschränken. Die allgemeine Idee ist, die fundamentalen Sätze über die conforme Abbildung einfach zusammenhängender Bereiche auf solche Gebiete auszudehnen, welche die Ebene x in Gestalt einer unendlich-blättrigen R. Fl. überdecken.

Nehmen wir zunächst an, wir haben der Halbebene x mit den Verzweigungsstellen $e_1, e_2 \dots e_n$ in der That ein reducirtes hyperbolisches Polygon der η. Ebene zugewiesen:



Aus letzterem entsteht dann in bekannter Weise durch immer wiederholte Spiegelung eine Eintheilung der Halbebene η in unendlich viele, abwechselnd schraffirte und nicht schraffirte

x/ Die bez. Ideen wurden mir von Prof. Schwarz Ostern 1882 mitgetheilt, als ich eben in Bd. 29 der Annalen das allgemeine (auf beliebiges p bezügliche) hyperbolische Theorem hatte drucken lassen, u. ich Station in Göttingen machte.

GABINET MATEMATYCZNY Towarzystwa Naukowego Warszawskiego

http://rcin.org.pl

te Polygone. Der neue Gedanke, den wir jetzt erfassen, ist der, dass wir diese Eintheilung der η. Ebene in eine über der x. Ebene ausgebreitete R. Fl. umsetzen, – die R. Fl., welche den Verlauf der Function $\eta(x)$ darstellt u. deren unendlich viele die beiden Halbebenen x überdeckenden Halbblätter ebenso unter einander zusammenhängen, wie die entsprechenden Polygone der η. Ebene. Augenscheinlich können wir von dieser R. Fl. eine Definition geben, ohne die Existenz der Function $\eta(x)$ zu kennen. Wir haben nur folgendermassen zu sagen: <u>Die Fläche hat unendlich viele Blätter, welche nur so mit einander zusammenhängen, dass um den einzelnen Pkt l_i herum jedesmal l_i Blätter im Cyclus verbunden sind</u>. Der grösseren Deutlichkeit halber werden wir die Fl. nach der von mir in Bd. 14 der Annalen eingeführten Ausdrucksweise (Ueber die Transformation siebenter Ordg. der elliptischen Functionen, 178) als eine <u>reguläre</u>, oder noch besser als eine <u>regulär-symmetrische</u> Fl. bezeichnen: die Regularität beruht darin, dass jedes Blatt derselben genau so mit den Nachbarblättern verzweigt ist, wie jedes andere. die Symmetrie darin, dass die Fl. auch noch bei Spiegelung an der reellen Axe in sich übergeht. Diesen Attributen entsprechend gestattet die Fläche unendlich viele eindeutige Transformationen der einen wie der anderen Art in sich selbst (unendlich viele conforme Abbildungen auf sich selbst, ohne u. mit Umlegung der Winkel), vermöge deren einem beliebigen Halbblatte der Fl. ein beliebiges Halbblatt zugewiesen werden kann.

Besagte unendlich-blättrige Fläche erscheint vermöge der Function $\eta(x)$ (deren Existenz wir einen Augenblick lang wieder voraussetzen) auf die Halb-

http://rcin.org.pl

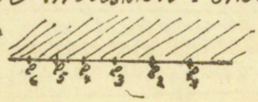
ebene η genau so conform abgebildet, als wenn sie eine einfach zusammen hängende einfach berandete Fläche wäre. Und nun ist der weitere Gedanke, den Prof. Schwarz in Anregung bringt, dieser, dass die Existenz der Function $\eta(x)$ mit allen ihren Eigenschaften folgt, so bald es gelingt, die Abbildbarkeit der independent definirten unendlich blättrigen Fl. auf die Halbebene η darzuthuen! Im 1. Augenblicke scheint allerdings nur zu folgen, dass die Halbebene η den unendlich vielen Halbblättern unserer Fl. entsprechend in unendlich viele Bereiche getheilt sein wird, welche so neben einander liegen, wie die Halbebenen zusammenhängen, so also, dass in einem Pkte, der $x = e_i$ entspricht, immer $2\,l_i$ Bereiche zusammenstossen, – man sieht nicht, wesshalb diese Bereiche alle kreisverwandt sein sollen. Aber dies ergibt sich sofort, sobald man sich an die unendlich vielen eindeutigen Transformationen erinnert, durch welche unsere ∞. blättrige Fläche in sich überging. Diesen unendlich vielen eindeutigen Transformationen müssen natürlich ebenso viele conforme Abbildungen der Halbebene η auf sich selbst entsprechen, vermöge deren man jeden Bereich der η. Ebene jedem anderen zuordnen kann. Und nun braucht man sich nur zu erinnern, dass es keine anderen eindeutigen Transformationen der Halbebene η in sich gibt, als diejenigen, die durch lineare Transformation gegeben werden!

Die Existenz der η. Function ist so, wie man sieht, an ein bestimmtes Theorem aus der Lehre von der conformen Abbildung gebunden. Aber zugleich ergibt ein Blick auf die uns bekannte Eintheilung der η. Ebene einen Ansatz, wie man besagtes Theorem wird beweisen können.

http://rcin.org.pl

Man betrachte ein erstes Polygon P_0 der η. Ebene, u. umgebe dies successive mit einem im̄er breiter werdenden Kranze weiterer Polygone. Möge so aus P_0 zuerst P_1, dan̄ P_2, … hervorgehen. Augenscheinlich dürfen wir die Halbebene η als die Gränze ansehen, der diese Polygonreihe: P_0, P_1, P_2, … zustrebt. Man denke sich jetzt die Bereiche x_0, x_1, x_2, … über der x. Ebene construirt, welche diesen P_0, P_1, … entsprechen: x_0 ist einfach die erste Halbebene x selbst, x_1 ist ein Aggregat von Halbebenen, x_2 ein noch zahlreicheres Aggregat, etc. etc. Augenscheinlich ist die unendlich-blättrige R. Fl., welche wir über der x. Ebene zu construiren haben, als Gränze dieser successiven Bereiche x_0, x_1, x_2, … anzusehen. Nun werden wir folgendermassen sagen: Nach dem Fundamentalsatz der conformen Abbildung kann man jeden einzelnen dieser Bereiche: x_0, x_1, x_2, …, insofern er einfach zusam̄enhängend u. einfach berandet ist, auf eine Halbebene η conform abbilden. Die Abbildung unserer unendlich-blättrigen Fläche auf die Halbebene η, deren Möglichkeit wir beweisen wollen, erscheint als Endpkt dieser ganzen Reihe conformer Abbildungen. *Alles kom̄t also darauf an, nachzuweisen, dass die verschiedenen Bilder, welche ein beliebiges Stück von x_0 bei diesen aufeinander folgenden Abbildungen zugewiesen erhält, einer bestim̄ten, wohldefinirten Gränze zustreben!*

So viel über das hyperbolische Theorem. Was das Kreisscheibentheorem angeht, so wird man den Beweis nur in 2 Punkten modificiren müssen. Nehmen wir die folgenden beiden Figuren:



Die unendlich blättrige über der x. Ebene auszubreitende Riemann'sche Fläche wird jetzt so definirt werden müssen, dass wir ausser cyclischem Zusammenhange von je zwei Blättern um die Puncte $e_1 \dots e_6$ herum auch noch verlangen, dass die in der Figur angedeuteten Umgänge um 1 und 2, um 3 u. 4, um 5 u. 6 jeweils in das Blatt, von dem wir ausgingen, zurückführen. Andererseits werden wir die so entstehende unendlichblättrige Fl. nicht auf die Halbebene η abbilden wollen, vielmehr müssen wir versuchen, dieselbe, als wenn sie eine geschlossene Fl. $p=0$ wäre, auf die Gesamtebene η abzubilden. Die unendlich vielen zugehörigen linearen Substitutionen des η ergeben sich dann daraus, dass das Gesamtgebiet η, ebenso wie vorhin die Halbebene, nicht anders eindeutig auf sich selbst bezogen werden kann, als durch lineare Substitution. —

Die hiermit berührten Gedankenreihen sind nun von Poincaré aufgenommen worden x/. Aber Poincaré begnügte sich nicht damit, die Zuverlässigkeit derselben zu prüfen, vielmehr bemerkte er, dass man vermöge derselben ohne Vermehrung der eigentlichen Schwierigkeit des Beweises ein sehr viel allgemeineres Theorem beweisen könne, welches unser hyperbolisches Theorem (mitsamt seiner Erweiterung auf beliebiges p) als ganz speciellen Fall umfasst. Hierauf bezieht sich seine Mittheilung:

Sur un théorème de la théorie générale des fonctions im Bulletin de la Société Mathématique de France vom 18. Mai 1883 (p. 112-125 daselbst).

---

x/ Nach persönlicher Besprechung mit Prof. Schwarz, Paris, Ostern 1883.

Es handelt sich um Folgendes. Wir gedachten bereits vor Pfingsten der Erweiterung des hyperbolischen Theorems auf die Fälle $p > 0$. Wenn irgend eine endlichblättrige Riemann'sche Fl. über der x-Ebene gegeben ist, etwa durch eine algebraische Glchg: $f(y, x) = 0$, so kann man dieselbe immer u. nur auf eine Weise (eventuel noch unter Berücksichtigung irgend welcher auf der Fl. vorgeschriebener Verzweigungspkte $e_1, e_2, \ldots$) auf einen reducirten hyperbolischen Bereich der η-Ebene abbilden, so dass y und x reell automorphe eindeutige Functionen von η werden (die nur in der Halbebene η existiren). Auf diesen Fall überträgt sich die Betrachtungsweise von Schwarz ohne Weiteres, nur dass nicht die x-Ebene sondern die Riemann'sche Fl. $f(y, x) = 0$ es ist, welche man „in regulärer Weise" mit der unendlich-blättrigen R. Fl. zu überdecken hat, deren Abbildung auf die Halbebene η zu bewerkstelligen ist. – Poincaré hat nun an Stelle der algebraischen Gl. $f(y, x) = 0$ irgendwelche analytische Glchg. $f(y, x) = 0$ in Betracht gezogen. Da wird gleich die 1. Fl., welche y als Function von x definirt, unendlich viele Blätter haben können. Zeigen diese Blätter unter einander keinen anderen Zusammenhang als um ihre Verzweigungspkte herum, so wird diese Fl. selbst bereits zur Abbildung auf die Halbebene η geschickt sein. Wo nicht, muss man sie mit einer neuen unendlich-blättrigen Fl. überdecken, die eben dadurch definirt sein soll, dass sie ganz dieselben Verzweigungspkte besitzt, wie die ursprüngliche Fl., aber neben dem durch die einzelnen Verzweigungspkte vermittelten Blätterzusammenhange keinen anderen Blätterzusammenhang aufweist. Diese neue Fl. bil-

http://rcin.org.pl

den wir dann auf die Halbebene η ab. Dann erreichen wir offenbar, u. dies ist der neue Satz, <u>dass die durch $f(y,x)=0$ irgendwie an einander geketteten y, x beide durch eindeutige Functionen einer Hülfsgrösse η dargestellt sind, u. zwar durch solche eindeutige Functionen, die nur in der Halbebene η existiren.</u> Dabei werden die Functionen $y=\varphi(\eta)$, $x=\psi(\eta)$ jedesmal dann <u>automorphe</u> Functionen sein, wenn die R. Fl. $y(x)$ noch anderen Blätterzusammenhang besass, als den durch ihre Verzweigungspkte direct gebotenen. —

Es ist klar, wie wichtig die hier mit angedeuteten Entwickelungen*) einerseits durch ihre Methode andererseits durch ihr Resultat sind. In ersterer Hinsicht bezeichnen sie durch die grosse Allgemeinheit ihrer Prämissen sozusagen den Gipfelpkt, welchen die geometrische Functionentheorie, die von den R. Fl. auf die Existenz der Functionen schliesst, bis jetzt erreicht hat. In letzterer Hinsicht brauche ich nur an die frühere Bemerkung zu erinnern, derzufolge es bei beliebig vorgelegten analytischen Abhängigkeiten jedes Mal eine Hauptaufgabe ist, eine „eindeutig machende" Variable zu finden. Um so mehr

---

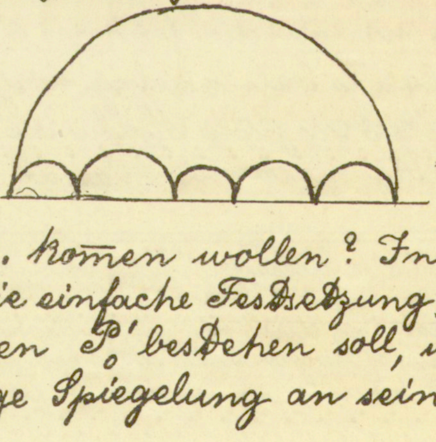
*) Ich habe dieselben gegenüber dem Poincaréschen Originale ein wenig modificirt: P. nimmt der Einfachheit der Darstellung wegen an, dass die unendlich-blättrig. Fl., die auf die Halbebene η abgebildet werden soll, auch um die Verzweigungspkte herum nie in das Anfangsblatt zurückführt.

http://rcin.org.pl

wird zu untersuchen sein, ob die von Poincaré gegebenen Beweisgründe, bez. die Voraussetzungen, die er der Function $y(x)$ auferlegt, für die Geltung des Theorems ausreichend sind. x/—

Zu dem in Rede stehenden Beweise des hyperbolischen Theorems ist nun vor allen Dingen Poincaré in Acta IV (1883) zu vergleichen (Sur les groupes des équations linéaires, hier in Betracht komend das „Troisième problème", von S. 1, p. 294 beginend). Aber wir ziehen vor, auf die genante Abhandlung erst später im Zusammenhang zurückzukomen, u. besprechen lieber vorab nur den besonderen Fall der bez. Ueberlegungen, der von Schlesinger in der schon genanten Arbeit: Zur Theorie der Fuchs'schen Functionen in Bd. 105 des Journals (1889) ausgeführt worden ist. Mi. 2 Jun 189.

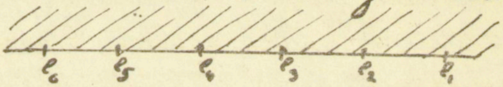
Schlesinger beschränkt sich auf denjenigen Fall $p = 0$ mit lauter reellen Verzweigungspkten $e_1\, e_2 \ldots e_n$, wo alle $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ gleich Null sind, wo also das einzelne Polygon der η. Ebene etwa folgende Gestalt hat:



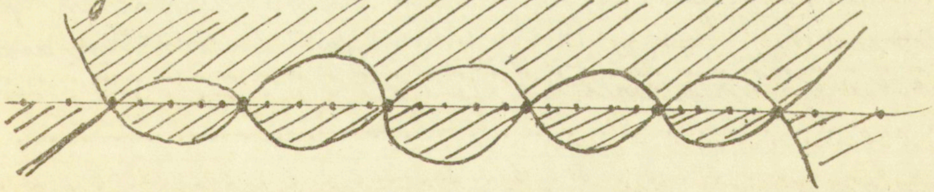
Nehmen wir dies gezeichnete Polygon als P_0, so ist die Frage, durch welchen bestimmte Process wir von P_0 zu P_1, weiter von P_1 zu P_2 etc. komen wollen? In dieser Hinsicht trifft Schl. die einfache Festsetzung, dass P_1 aus P_0 u. den n Polygonen P_0' bestehen soll, welche aus P_0 durch einmalige Spiegelung an seinen

x/ vergl. die Bemerkungen von Harnack in der Vorrede zu seiner Schrift: „Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentials u. der eindeutigen Potentialfunctionen in der Ebene" (1887).

verschiedenen Seiten entstehen. P_1 hat hiernach $n + n(n-2) = n(n-1) = n_1$ Ecken. Von P_1 gehen wir dan vermöge desselben Gesetzes zu P_2 über (das also neben P_1 noch n_1 Spiegelpolygone P_1' enthalten wird), von P_2 abermals vermöge desselben Gesetzes zu P_3, etc. etc. Es ist kaum nöthig, von den Aggregaten $x_0, x_1, x_2, ..$ von Halbebenen zu sprechen, welche diesen $P_0, P_1, P_2 ...$ über der z. Ebene correspondiren. Vielmehr wollen wir gleich dazu übergehen, $P_0, P_1, P_2, ..$ auf eine einfache Halbebene abzubilden, die dan beziehungsweise $\eta_0, \eta_1, \eta_2, ...$ heissen mag, u. den Zusamenhang zwischen den aufeinanderfolgenden Variabelen $\eta_0, \eta_1, \eta_2 ...$ zu erforschen, deren letzte, η_∞, eben das η ist, auf dessen Construction wir schliesslich abzielen. Die Ebene η_0 ist natürlich keine andere als x_0 u. demnach so vorzustellen:



Wir zeichnen ferner die Ebene η_1 und markiren, wie sie den zweierlei Halbebenen η_0 entsprechend in $2n+2$ Parzellen zerfällt. Es gibt dies folgende Figur:



(bei der wir die $n_1 = n(n-1)$ Verzweigungspkte, welche die reelle Axe trägt, sämtlich markirt haben). Diese Fig. kan natürlich dadurch ersetzt werden, dass man über der Ebene η_0 eine $(n+1)$-blättrige Fläche derart ausbreitet, dass an den Stellen $e_1 e_2 ...$

http://rcin.org.pl

e_n jedesmal 3 der $(n+1)$ Blätter im Cyclus vereinigt sind; nur muss man dabei wohl auf die richtige Aufeinanderfolge der mit einander verzweigten Blätter achten, u. da diese nur complicirt zu beschreiben ist, so bleiben wir schliesslich am besten bei der gerade in der η_1-Ebene gezeichneten Fig., in der diese Aufeinanderfolge von selbst hervortritt. x/ Jedenfalls ist nach dem hiermit Gesagten

$$\eta_0 = R^{(0)}_{n+1}(\eta_1),$$

unter R^{0}_{n+1} eine rationale Function $(n+1)$ten Grades verstanden, denen Coëfficienten von den $e_1 \ldots e_n$ in bestimmter Weise abhängen müssen; Schl. unternimmt nicht weiter, dieses R_{n+1} wirklich zu bilden. Weiterschliessend werden wir dann genau entsprechende Formeln haben:

$$\eta_1 = R^{(1)}_{n_1+1}(\eta_2),$$

$$\eta_2 = R^{(2)}_{n_2+1}(\eta_3), \ldots$$

(wo die $R^{(1)}, R^{(2)}, \ldots$ alle das gleiche noch unbekannte Bildungsgesetz haben), schliesslich ist

$$x = \eta_0 = R^{(0)}_{n+1}\left(R^{(1)}_{n_1+1}\left[R^{(2)}_{n_2+1} \text{---} (\eta_\infty = \eta)\right]\right)$$ und

dabei natürlich zu zeigen (was Schl. ausführt), dass die Aufeinanderfolge der unendlich vielen rationalen Operationen $R^{(0)}_{n+1}, R^{(1)}_{n_1+1}, R^{(2)}_{n_2+1} \ldots$ einen bestimmten analytischen Limes besitzt. —

---

x) Auf diese Verhältnisse bezieht sich, was ich oben über eine wesentliche Unrichtigkeit in der Schlesinger'schen Arbeit sagte. Schl. drückt sich so aus, als wenn die $(n+1)$ blättrige Fl. durch die Angabe, dass an den Stellen $e_1 \ldots e_n$ jedesmal 3 Blätter cyclisch verbunden sind, eindeutig bestimmt sei. Dies ist natürlich falsch: die Aufgabe, eine R. Fl. aus der Lage der Verzweigungspkte in der x-Ebene u. der zugehörigen Multiplicitäten zu bestimmen, ist, allgemein zu reden, eine ausserordentlich vieldeutige. In neuester Zeit hat sich Hurwitz mit dem in dieser Hinsicht vorliegenden Problem eingehend beschäftigt; die Arbeit erscheint demnächst in Ann. 39, 2.

http://rcin.org.pl

4. Die Methode des constanten Krümungsmaasses.

Diese 2te Methode bezieht sich ausschliesslich auf den hyperbolischen Fall. Sie geht davon aus, dass man die bei ihm in Betracht komenden linearen Substitutionen $\eta' = \frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}$ in bekander Weise als Bewegungen einer Nichteuklidischen Maassbestimung (einer Maassbestimung constander negativer Krümung) ansehen kan, für welche die reelle Axe der η. Ebene das Unendlich-Weite vorstellt. Setzen wir $\eta = \zeta + i\theta$ u. verstehen wir under K den (willkürlich anzunehmenden) Betrag des bez. Krümungsmaasses, so wird das zugehörige Bogenelement durch folgende Formel gegeben sein:x/

$$4\,ds = \sqrt{\frac{d\zeta^2 + d\theta^2}{-K\cdot\theta^2}}$$

Dieses Bogenelement betrachten wir jetzt, indem wir $x = y + iz$ setzen, in der x. Ebene. Indem die η. Ebene u. x. Ebene, allgemein zu reden, conform aufeinander bezogen sind, werden wir von vorneherein setzen dürfen: $ds^2 = E(dy^2 + dz^2)$;
es handelt sich nur noch darum, die Grösse E als reelle Function der reellen Variabelen y, z zu bestimen. Und da ist nun das Wesentliche, dass wir bei ihr ohne Weiteres das Vorhandensein gewisser einfacher Eigenschaften erkenen, welche rückwärts für dieselbe charakteristisch sind. Wir bemerken:

1) dass E als reelle Function der reellen y, z jedenfalls eindeutig ist xx/ (weil die unendlich vielen Stellen

---

xx/ E kan darum als Function der complexen Variabelen y, z noch beliebig vieldeutig sein, wie wir doch ausdrücklich hervorheben wollen, damit in dieser Hinsicht keine falsche Auffassung entsteht.

x/ vergl. z. B. meine Nichteuklidische Vorlesung, Februar 1890. – Diese Formel lässt die automorphen Figuren des hyperbolischen Falles sofort in congruente Gebietseintheilungen auf Flächen constander Krümung übertragen, was besonders anschaulich ist. vergl. Schwarz, Abhandl. II; p. 367–368.

http://rcin.org.pl

der η Ebene, oder den der Fl. constanter negativer Krümmung, welche einer Stelle der x. Ebene entsprechen, alle dasselbe ds^2 liefern!);

2) das $\mathcal{E}$ in der x. Ebene überall stetig ist, ausser in den Pkten $e_1 \ldots e_n$, in denen es in bestimter Weise algebraisch unendlich wird.

3) dass $\mathcal{E}$ für unendlich grosse Werthe der y, z in bestimter Weise verschwindet;

4) dass $\mathcal{E}$ den folgenden Ausdruck für das Krümmungsmaass liefert:

$$K = \frac{\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z}\right)^2}{2\mathcal{E}^3} - \frac{\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial z^2}}{2\mathcal{E}^2},$$

u. daher der durch diese Formel vorgestellten partiellen Differentialglchg. (in der wir K als eine vorgegebene Constante ansehen werden) genügt.—

In der That, nehmen wir an, dass wir eine reelle Function $\mathcal{E}$ der reellen y z kennen, welche diese 4 Bedingungen befriedigt, so wird die Formel

$$ds^2 = \mathcal{E}(dy^2 + dz^2)$$

von selbst eine Abbildung unserer x. Ebene auf die Fl. constanter Krümmung, bez. die η. Ebene, ergeben, welche automorph ist etc. etc. u. damit allen Anforderungen des hyperbolischen Theorems genügt.—

Damit also stellt sich der Beweis des hyperbolischen Theorem's so, dass man verlangen wird, durch directe Betrachtung die Existenz einer Function $\mathcal{E}(y, z)$ nachzuweisen, welche den aufgezählten 4 Bedingungen genügt!

Wir vereinfachen diese Fragestellung noch so dass wir $\mathcal{E} = e^{u(y,z)}$ setzen. Die partielle Differentialglchg.

http://rcin.org.pl

4) nimmt dann die einfache Form an:

$$\frac{d^2u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -2Ke^u$$

während sich 2) u. 3) in leicht ersichtlicher Weise modificiren. Damit haben wir nun geau die Preisaufgabe, welche die Göttinger Societät im Dec. 1889 für 1891 gestellt hat! (vergl. G. Nachrichten von 1889, p. 560 ff.)

Hierzu ist Folgendes zu bemerken:

1) Wenn wir hier eine Frage aus der Theorie der analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen auf die Integration einer partiellen Differentialglchg. im Gebiete zweier reellen Veränderlichen zurückführen, so ist das genau in Uebereinstimmung mit der Rolle, welche die einfachere partielle Differentialglchg. $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ in den Elementen der Riemann'schen Functionentheorie spielt.

2) Man hat dabei die letztere Differentialglchg. bekanntlich so zu behandelen, dass man zuerst die Randwerthaufgabe studirt, ~~d. h. die Aufgabe, u auf einer berandeten Fl. aus den für den Randwerthaufgabe studirt~~, d. h. die Aufgabe, u auf einer berandeten Fl. aus den für den Rand vorgeschriebenen Werthen (u. etwaigen im Inneren vorgeschriebenen Unendlichkeitsstellen) zu bestimmen, u. dann von der berandeten Fl. den Gränzübergang zur geschlossenen Fl. macht. Genau so wird man bei unserer neuen partiellen Differentialglchg. verfahren wollen (vergl. den Wortlaut der Preisaufgabe).

3) Als weitere Vergleichspkte wird man bei dieser Aufgabe natürlich die Theorie allgemeinerer Differentialglchgen verwandter Art in Betracht ziehen wollen. Man vergleiche in dieser Hinsicht die Festschrift von Schwarz von 1885 (Ges. Abhandl. I, p. 223 ff.) sowie das neuerdings erschienene Buch von Pockels:

http://rcin.org.pl

Ueber die Glchg. $\Delta u + K^2 u = 0$ und ihr Auftreten in der mathematischen Physik. (Leipzig 1891). —

In der That hat nun Picard die hiermit bezeichne„den Ansätze neuerdings in Untersuchung gezogen. In den Comptes Rendus vom 23. Sept. 1889 u. 13. Juni 1890 kündigt er sogar an, dass ihm die volle Erledigung der Frage gelungen sei. Aber der Gränzübergang von der berandeten Fl. zur geschlossenen Fl. erwies sich bei näherem Zusehen noch nicht als stichhaltig. So ist den in Picard's grosser Abhandlung in t. 6 des Journal de Mathématiques (ser. 4, 1890): Sur la theorie des équations aux dérivées partielles et la methode des approximations successives, in welcher Kap. IV speciell un„serer Differentialglchg. gewidmet ist, für diese nur erst die Randwerthaufgabe behandelt. —

Rückständig ist jetzt nur noch die Besprechung des von Poincaré u. mir aufgestellten Conti„nuitätsbeweises. Wir leiten dieselbe ein, indem wir jetzt nachträglich über die schon auf p. 110 genante Arbeit Poincarés referiren (Acta IV: Sur les groupes des équations linéaires; dat. Okt. 1883), die unter den 5 hier in Betracht komenden Abhand„lungen, welche Poincaré in den Acta veröffentlicht hat, wohl die wichtigste ist. Die Arbeit umfasst 3 Thei„le, die wir der Reihe nach besprechen. Mi. 8. Juli 1891.

Theil I, l. c. p. 201–221. Hier handelt es sich all„gemein um die Zusamenhänge, welche die algebra„ischen Parameter einer linearen Differentialglchg. (ihre Verzweigungswerthe, Exponenten, accessorischen Parameter) und die Coefficienten der bei Umläufen

http://rcin.org.pl

von x auftretenden linearen Substitutionen (also die transcendenten Parameter) darbieten. Die Sache ist insofern allgemeiner gefasst, als in der vorliegenden Vorlesung, als imer lineare Differentialglchgen beliebiger (p^{ter}) Ordg. mit in Discussion gezogen werden. Auch erledigt Poincaré die analytischen Beweise der Convergenz u. Stetigkeit viel eingehender, als hier in der Vorlesung geschieht,*) wie er den, z. B. den schönen Satz aufstellt, dass die transcendenten Parameter ganze Functionen der Exponenten u. der accessorischen Parameter sind. Aber es scheint, dass unsere Darstellung nach 2 Richtungen tiefer eindringt, als die seinige. Erstlich geschieht dies durch die Verwendung homogener Variabler u. die dadurch ermöglichte Heranziehung formentheoretischer Gesichtspkte. Ich glaube allerdings, dass Poincaré den Gebrauch homogener Variabler sehr wohl kent u. nur aus Rücksicht auf die Gewöhnung des mathematischen Publicums von ihrer Verwendung bei der Reduction seiner Arbeiten absieht! (wie er das auch mit der Nichteuklidischen Geometrie thut, in Übereinstimung mit den traditionellen Redactionsprincipien der Franzosen, welche die subjectiven Anschauungsweisen, deren sich ein Autor bei seinen Untersuchungen bedient haben mag, durchgängig zurückdrängen, dafür aber auch die eigentliche Quelle der Überlegungen vielfach verdecken). Imerhin hat ihn diese Rücksichtnahme auf die Anschauungsweisen

---

*) Dies gilt zugleich für alle seine folgenden Entwickelungen.

http://rcin.org.pl

Anderer wohl gehindert, das Princip der homogenen Variabelen nach allen seinen Consequenzen durchzudenken. — Zweitens aber verfügt unsere Darstellung, indem sie durchweg von der Fig. in der η. Ebene ausgeht, u. nicht bloss von den Substitutionen, durch welche deren Ränder zusammengehören, über ein neues Element. Sei $\frac{\eta'-a}{\eta'-b} = \varrho e^{i\varphi} \cdot \frac{\eta-a}{\eta-b}$ eine der in Betracht komenden Substitutionen. Für die Poincaré'sche Darstellungsweise ist dann die Amplitude φ nur modulo (2π) bestimmt, für uns aber ist sie eine ihrem absoluten Betrage nach festgelegte Grösse. Poincaré kann also, von Seiten der transcendenten Parameter aus, nicht zwischen gleichgruppigen (verwandten Functionen unterscheiden; bei uns rückt diese Unterscheidung in den Vordergrund, u. es ist eben in dieser Hinsicht, wie sie wissen, dass ich hoffe, die Theorie der linearen Differentialglchgen zu einer neuen Entwickelung führen zu können. Dabei können wir unsere Untersuchungen sehr wohl auf lineare Differentialglchgen p^{ter} Ordg. ausdehnen. Wir müssen dann nur statt der einen Complexen Grösse $\eta = y_1 : y_2$, die wir bislang zu betrachten pflegen, die $(p-1)$ complexen Verhältnisse $y_1 : y_2 : \ldots y_p$ in die Betrachtung einführen u. also, um geometrisch operiren zu können, einen Raum von $2p-2$ Dimensionen zu Grunde legen. Ist $\frac{y_\nu}{y_p} = \mathfrak{Z}_\nu + i\,\Theta_\nu$, so liegt es natürlich am nächsten, geradezu die $\mathfrak{Z}_\nu$, Θ_ν als ebensoviele Cartesische Coordinaten anzusehen. Aber schon für $p=2$ ist dies Verfahren, wie wir wissen, unzweckmässig, wegen der besonderen u. dem Wesen der Sache nicht entsprechenden

http://rcin.org.pl

Verhältnisse, die dabei betreffs der ∞ grossen Werthe der Veränderlichen hervortreten. Eben darum führt man statt der $(\xi + i\,\theta)$ – Ebene mit Rieman̄ die $(\xi + i\,\theta)$ – Kugel ein. Wie man analog hierzu im Falle einer beliebig grossen Zahl von Variabelen zu verfahren hat, hat Segre neuerdings gezeigt (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. V, 1891: Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi).

Theil II, p. 222–284. Hier entwickelt Poincaré insbesondere den Continuitätsbeweis, – und zwar ausschliesslicher Bezugnahme auf das hyperbolische Theorem, während ich bei meinen Erläuterungen in An̄alen 41 (Abschnitt IV daselbst, p. 206–212) die Betrachtungen allgemeiner angelegt habe. Ich habe schon im vorigen Winter darauf hingewiesen (p. 111–112 der Autographie), dass Poincaré dabei ausführlich gewisse Gränzfälle der in der η. Ebene gelegenen Bereiche discutirt, bei denen sogenan̄te „hyperbolische Zipfel" auftreten. Ich habe lange nicht glauben wollen, dass dies wesentlich ist u. dass die Nichtberücksichtigung der genan̄ten Gränzfälle daher eine principielle Lücke meiner Auseinandersetzungen vorstellt. Ich habe mich aber inzwischen überzeugt, dass dem in der That so ist, u. werde dem Rechnung tragen, indem ich bei der folgenden Besprechung des Continuitätsbeweises auf diesen Pct ganz besonders eingehe, wobei ich hoffe, das Zustandekom̄en u. die eigentliche Bedeutung der betreffenden Gränzfälle bis zur vollen Evidenz klar zu stellen *).

---

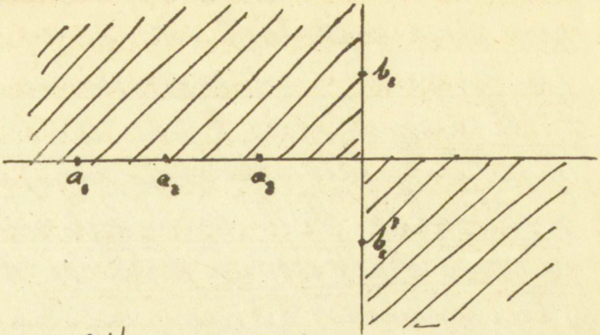
*) Eine andere Frage ist, ob damit allein schon allen Anforderungen der Vollständigkeit hinreichend Rechnung getragen ist, ob man nicht über Poincaré hinausgehend ~~ist~~ noch andere Gränzfälle wird in Betracht ziehen müssen.

http://rcin.org.pl

Hier vorab rerferire ich über eine besondere Entwickelung, welche Poincaré in § 11 seiner Arbeit (p. 246 ff.) gibt. Es handelt sich dort darum (wenn ich die Sache gleich etwas allgemeiner bezeichnen darf) das Studium der unsymmetrichen R. Flächen auf das Studium der symmetrischen Flächen zurückführen. Ist (x, y) ein Pkt. der unsymmetrischen Fl., so kann man eine symmetrische Fl. (X, Y) derart construiren, dass $X = R_1(x, y)$, $Y = R_2(x, y)$, wo R_1, R_2 rationale Functionen. Die unsymmetrische Fl. setzt sich dann also aus einer endlichen Zahl von Bereichen zusammen, deren jeder ein volles Abbild der symmetrischen Fl. ist. — Von dem allgemeinen hiermit angedeuteten Satz betrachtet Poincaré allerdings nur einen Specialfall, der für seine Zwecke ausreicht, u. den ich hier als Poincarés Lemma bezeichnen will. Es ist eine Ebene x mit irgendwelchen reellen Verzweigungspuncten a_1, a_2 ... a_m u. anderen imaginären Verzweigungspkten b_1, b_2, .. b_n gegeben, von denen der Einfachheit halber angenommen sei, dass sie keine 2 conjugirt-imaginären Pkte enthalten. Man kann dann X so als rationale reelle Function $R(x)$ einführen, dass den sämtlichen Pkten $a_1 \ldots a_m$, $b_1 \ldots b_n$ reelle Werthe $A_1 \ldots A_m$, $B_1 \ldots B_n$ von X entsprechen. Denkt man sich also die X. Ebene durch ihre relle Axe in 2 Halbebenen zerlegt, so werden diesen Halbebenen Parzellen der x. Ebene entsprechen derart, dass die Pkte a, b sämtlich auf die Abgränzungslinien der Parzellen zu liegen kommen.

Der Beweis dieses Lemma's ist so einfach wie möglich. Sei b_1' zu b_1 conjugirt imaginär. So setzen wir $x_1 = (x - b_1)(x - b_1')$. Dann werden den Werthen $a_1 \ldots a_m$, b_1 von x bereits lauter reelle Werthe von x_1 entsprechen: $a_1^{(1)} \ldots a_m^{(1)}$, $b_1^{(1)}$; die

Zerlegung der Ebene in x in Parzellen (den Halbebenen x_1 entsprechend) ist einfach diese:



Dagegen werden den $b_2, b_3, \ldots$ (allgemein zu reden) in der X_1 Ebene wieder imaginäre Pcte $b_2^{(1)}$, $b_3^{(1)}$, .. $b_m^{(1)}$ correspondiren. Jetzt setzen wir: $X_2 = (X_1 - b_2^{(1)})(X_1 - b_2'^{(1)})$ u. haben dan in der X_2 Ebene noch $m-2$ imaginäre Pcte. So fortfahrend erreichen wir offenbar unser Ziel, indem wir $X = X_m$ nehmen. Den singulären Pcten $A_1, \ldots A_n, B_1, \ldots B_n$ der X. Ebene werden natürlich rückwärts in der x. Ebene neben den vorgegebenen a, b noch eine ganze Reihe weiterer singulärer Pcte entsprechen x/.

Theil III, p. 285-309. In diesem 3ten Theile handelt es sich nunmehr um die Herstellung des hyperbolischen η, welches zu einer vorgegebenen Riemañ'schen Fl. oder zu einer x. Ebene mit vorgegebenen Verzweigungspcten a, b gehört, – die Existenz dieses η ist ja schon durch Theil II sicher gestellt. Hier benutzt Poincaré nun gerade das oben geschilderte Verfahren der conformen Abbildung (p. 103-105), nur dass er den dort postulirten Convergenzbeweis dafür, dass die unendliche Reihe der conformen Abbildungen einem Limes zustrebt, nicht

x/ Eben auf dieses Lemma geht Poincaré's ursprüngliche Methode zurück (auf welche oben, p. 39, hingewiesen wurde), beliebige algebraische Irrationalitäten durch automorphe Functionen des hyperbolischen Typus eindeutig darzustellen: er sucht nämlich ein zur Halbebene X gehöriges hyperbolisches Polygon u. überzeugt sich dan, dass auch x und diejenigen Functionen von x, die nur an den gegebenen Stellen verzweigt sind, in diesem η eindeutig sind.

mehr zu führen hat, insofern er ja der Existenz dieses Limes, d. h. des η, von Vorneherein sicher ist. Des Näheren aber gestaltet sich seine Darlegung so, dass er das genannte Verfahren direct nur für die symmetrischen Fälle benutzt (wo die in der x. Ebene gegebenen Verzweigungspcte alle reell sind) u. dann für die unsymmetrischen Fälle vermöge seines Lemma's einen indirecten Rückschluss macht. Wir werden uns leicht klar machen können, wesshalb er diesen Umweg wählt.

Betreffs der symmetrischen Fälle haben wir dabei nur Weniges zu sagen, da wir uns ganz auf die Besprechung der Schlesinger'schen Arbeit zurückbeziehen können. Poincarés Ansatz ist nur viel allgemeiner, als der von Schlesinger durchgeführte, weil er es ganz dahin gestellt sein lässt, wie wir vom Polygon P_0 der η. Ebene zu immer weiter ausgedehnten Polygonen $P_1, P_2, ..$ derselben übergehen wollen. Wir bekommen dann wieder entsprechend über der Ebene x gewisse Aggregate von Halbebenen:

$$x_0, x_1, x_2, \ldots$$

die wir auf einfache Halbebenen

$$\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots$$

conform abbilden. Dabei ist dann

$$x = x_0 = \eta_0,$$
$$\eta_0 = r_1(\eta_1),$$
$$\eta_1 = r_2(\eta_2)$$
$$\vdots$$
$$\eta_\infty = \eta,$$

unter $r_1, r_2, ..$ eine Reihenfolge von rationalen Functionen verstanden, u. also schliesslich $x = r_1(r_2(r_3 \ldots (\eta)))$

http://rcin.org.pl

der gewünschte analytische Zusammenhang zwischen x und η.

Was jetzt die unsymmetrischen Fälle angeht, so können wir allerdings zunächst einen ganz ähnlichen Ansatz machen, wie in den symmetrischen Fällen. Nur werden wir jetzt mit $P_0, P_1, \ldots$ nicht Polygone der η. Ebene bezeichnen können, welche der Halbebene x, bez. Aggregaten von Halbebnen x entsprechen. Vielmehr sind jetzt $P_0, P_1, \ldots$ Bereiche der η. Ebene, denen die in richtiger Weise zerschnittene Vollebene x, bez. eine zerschnittene R. Fl. entsprechen, die einer endlichen Zahl solcher Vollebenen entspricht. Nichts hindert, diese zerschnittenen Ebenen, bez. Flächen, die wir $x_0; x_1, x_2, \ldots$ nennen mögen, je auf eine Halbebene $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots$ abzubilden. Auch wird das schliesslich gewünschte η als η_0 bezeichnet werden können. Aber es ist jetzt kein Grund mehr vorhanden, wesshalb $x = x_0 = \eta_0, \eta_0 = \nu_1(\eta_1), \ldots$ sein sollte. Vielmehr sind die Functionszeichen $\Phi_0, \Phi_1, \ldots$ in den Formeln, die wir natürlich aufstellen können: $x = \Phi_0(\eta_0), \eta_0 = \Phi_1(\eta_1), \eta_1 = \Phi_2(\eta_2), \ldots$, ihrer analytischen Natur nach uns ganz unbekannt u. nicht anders, als eben durch die aufeinanderfolgenden conformen Abbildungen zu definiren. So. 11. Juli 1891.

Desshalb enthält dann auch die Schlussformel:

$$x = \Phi_0(\Phi_1(\Phi_2(\cdots(\eta))))$$

kein wirkliches Bildungsgesetz für die Abhängigkeit von x und η.

Es sind vermuthlich eben die hier mit bezeichneten Schwierigkeiten gewesen, welche Poincaré zu seinem nun zu besprechenden indirecten Verfahren veranlasst haben. Es gilt, zu einem gewissen unsymmetrischen x (zu einer Ebene x mit nicht bloss reellen Verzweigungspunkten) das zu-

http://rcin.org.pl

gehörige η hinzuzuconstruiren. Da führt dann Poincaré zunächst $X = R(x)$ vermöge seines „Lemma" so ein, dass in der X. Ebene nur reelle Verzweigungspcte liegen.

Jetzt construirt er vermöge der für den symmetrischen Fall geltenden Regeln das zugehörige H (welches wir mit einem grossen griechischen Buchstaben bezeichnen). In diesem H ist dann zwar das ursprüngliche x ohne weiteres eindeutig, aber H hat als Function von x noch unnöthige Verzweigungspkte, so dass es kein volles Aequivalent für das gesuchte η ist. Da hilft denn die Bemerkung, dass η selbst eine eindeutige Function von H sein muss (dass H eine dem η „übergeordnete" Irrationalität ist). In Folge dessen kann man nämlich nun hinterher η dadurch gewinnen, dass man es als eindeutige (homomorphe) Function von H darstellt!

Und hierzu gibt dann Poincaré noch einen neuen, besonders einfachen convergenten Ansatz, der viel Aehnlichkeit mit demjenigen Process darbietet, den wir auf pag. 101 behufs directer Darstellung des zur x. Ebene gehörigen „Hauptpotentials" postulirten.

So weit unser Referat. Wir wenden uns nun wirklich zu dem immer wieder in Aussicht gestellten

Continuitätsbeweis.

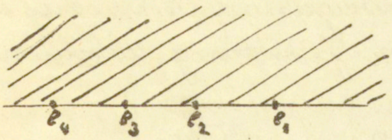
Ich will mich dabei, um nur das Wesentliche zur Geltung zu bringen, auf den einfachsten Fall der zu erbringenden Theoreme beschränken, nämlich auf das Kreisscheibentheorem für $n = 4$ unter Mitheranziehung des unsymmetrischen Falles. Wir formuliren zunächst die bez. Behauptungen: x/

x/ die wir alle, wie ohne Weiteres ersichtlich, aus der Theorie der elliptischen Functionen ableiten können, was für die Controle der mitzutheilenden Betrachtungen nicht unwesentlich scheint.

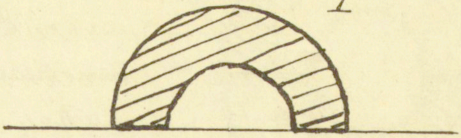
http://rcin.org.pl

1) Symetrischer Fall.

Ebene x



Ebene η



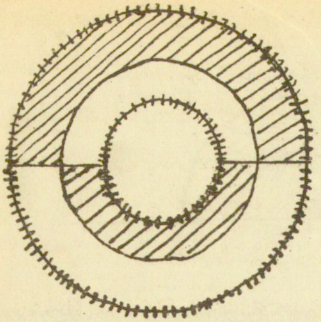
(Kreisscheibe, der Halbebene x endsprechend)

Die Behauptung ist, dass man in der zur Halbebene x gehörigen Differentialglchg. 3. Ordg. den vorkom̄enden accessorischen Parameter so festlegen kan̄, dass als Abbild der Halbebene in der η. Ebene eine reducirte Kreisscheibe endsteht. —

Um die Behauptung gleich so zu fassen, wie es für die Verallgemeinerung auf den unsym̄etrischen Fall zweckmässig ist, wollen wir statt der Halbebene x die Vollebene, oder vielmehr gleich die 2blättrige R. Fl. betrachten, welche $e_1\ e_2\ e_3\ e_4$ zu Verzweigungspcten hat u. deren Blätter längs der geradlinigen Stücke $\overline{e_1 e_2}$, $\overline{e_3 e_4}$ zusam̄enhängen mögen:

Diese Fl. zerschneiden wir, wie in der Fig. angedeutet, durch einen von e_4 nach e_1 (durch's Unendliche laufenden) geradlinigen Schnitt, der beide Blätter durchdringt (der also auf der R. Fl. die Bedeutung eines Rückkehrschnittes hat. Der solcherweise zerschnittenen Fl. wird dan̄ in der η. Ebene ein ringförmiger Raum endsprechen, welcher aus 4 Kreisscheiben zusam̄engesetzt ist und dessen beide kreisförmige Ränder (die den beiden Ufern unseres Rückkehrschnittes bez. endsprechen) durch eine hyperbolische Substitution zusam̄engehören:

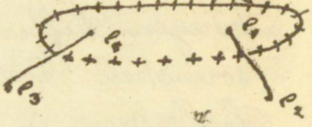
http://rcin.org.pl



Unser zu beweisendes Theorem besagt nicht mehr u. nicht minder, als dass man die zerschnittene R. Fl. auf einen derartigen Kreisring abbilden kann.

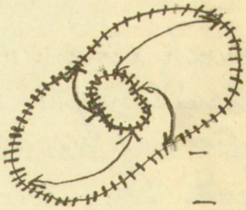
2) Unsymetrischer Fall.

Es seien jetzt in der x Ebene die 4 Verzweigungsstellen $e_1\ e_2\ e_3\ e_4$ irgendwie unsymetrisch gegeben. Wir denken uns sofort die zugehörige zweiblättrige R. Fl. construirt u. diese durch irgendwelchen Rückkehrschnitt (wie in der Fig. bereits angedeutet ist) zerschnitten.

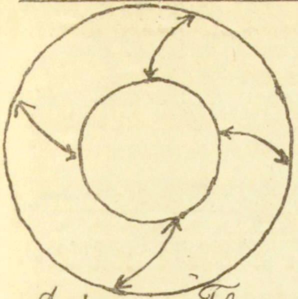


Die Behauptung wird sein, dass immer ein zugehöriges η existirt, welches die so zerschnittene Fl. auf einen einfachen Ring der η. Ebene abbildet, dessen Begränzungscurven natürlich durch eine lineare Substitution zusammengeordnet sind, welche, allgemein zu reden, eine loxodromische Substitution sein wird, wie in der Fig. durch die gekrümmten Pfeile angedeutet.

Von den Fixpcten dieser Substitution wird der eine innerhalb der Ringöffnung, der andere ausserhalb des Ringes zu suchen sein. Natürlich kann man dem Ring ohne Weiteres die Gestalt eines Kreisringes ertheilen.



Wir brauchen nur in der η. Ebene irgend welchen Kreis zu ziehen, der die Fixpcte der genannten linearen Substitution von einander trennt, u. ihn durch die Substitution zu transformieren. Der zwischen den beiden Kreisen liegende Ringraum kann dan sofort als Abbildung der x. Fläche angesehen werden:



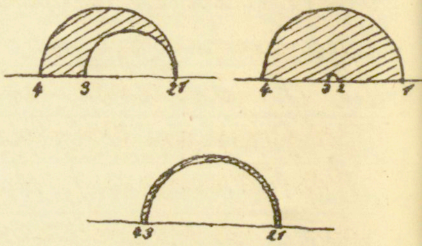
Wir haben so den Vorzug, in der η. Ebene eine übersichtlichere Fig. vor uns zu haben, u. dieser Vorzug ist uns so wesentlich, dass wir fernerhin von ihr ausschliesslich Gebrauch machen werden. Aber dadurch wird dan dem auf der 2blättrigen Fl. zu ziehenden Rückkehrschnitt, der zunächst völlig willkürlich war, ein bestimtes Gesetz auferlegt: er muss eine der 3fach unendlich vielen Curven der K. Fl. sein, welche den 3fach unendlich vielen Kreisen unserer η. Ebene entsprechen, durch welche die beiden in dieser Ebene liegenden Fixpcte von einander getrent werden. Und eben hiermit schaffen wir uns, wie wir bald sehen werden, die Schwierigkeit, die fernerhin in der Theorie der unsymetrischen Fälle auftritt, u. die also nicht eigentlich die Sache betrifft, sondern die Form, in der wir dieselbe darstellen. —

Wir besprechen nun den Continuitätsbeweis zunächst für den symetrischen Fall. Die charakteristische Gedankenwendung ist die, dass wir die Gesamtheit der Kreisscheiben einerseits, die Gesamtheit der Halbebenen x andererseits als 2 Manigfaltigkeiten einführen u. uns darüber klar zu werden suchen, wie diese beiden Mannigfaltigkeiten auf einander bezogen sind.

Wir haben zunächst die Manigfaltigkeit der Kreisscheiben. Dieselbe hat zuvörderst, da man die Ecken 1, 2, 3, 4 irgendwie auf der reellen η. Axe annehmen darf, 4 Dimensionen. Aber da solche

η, die linear mit einander zusammenhängen ($\eta' = \frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}$, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ reell und $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ genommen sein mag) für uns gleichwerthig sind, so werden wir unsere Mannigfaltigkeit lieber als eine solche von ~~un~~ einer Dimension bezeichnen u. dementsprechend mit M_1 benennen.

Wir müssen nun ganz besonders auf die Gränzelemente dieser M_1 achten. Da sind zunächst Gränzelemente 1. Stufe, welche dem Zusammenrücken zweier Eckpte der Kreisscheibe entsprechen, ferner Gränzelemente 2ter Stufe, bei denen 2 mal 2 Wurzeln zusammenrücken. Rücken 3 oder mehr Wurzeln zusammen, so hat man ein uneigentliches Gränzelement.



Man kann nämlich in $\eta' = \frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}$ unter Aufrechterhaltung der Bedingung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ den $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ derartige unendlich grosse Werthe beilegen, dass irgend welche vorgegebene allgemeine Kreisscheibe in eine solche mit 3 oder 4 zusammenrückenden Eckpkten übergeht.

Bemerken wir noch, dass unsere M_1 eine durchaus zusammenhängende Mannigfaltigkeit ist, d.h. dass man von jeder Kreisscheibe zu jeder anderen durch das Innere von M_1 hierdurch gelangen kann, i.e., indem man stetig eine Reihenfolge nicht ausgearteter Kreisscheiben durchwandert. — Dieser M_1 der Kreisbogenpolygone tritt nun die Mannigfaltigkeit der mit 4 Verzweigungspkten ausgestatteten Halbebenen X entgegen. Auch sie bildet eine durchaus zusammenhängende Mannigfaltigkeit einer Dimension, die wir mit M_1' bezeichnen wollen; dieselbe hat wieder Gränzelemente 1. u. 2. Stufe etc. –

Es handelt sich aber um die Beziehung der beiden Mannigfaltigkeiten auf einander.

Das Theorem, welches wir in dieser Hinsicht beweisen müssen, ist dieses: Jedem allgemeinen Pct. von M_1', (d. h. jedem Pcte, der kein Gränzelement ist) entspricht ein allgemeiner Pct von M_1. Und nun baut sich der Continuitätsbeweis auf folgenden Überlegungen auf:

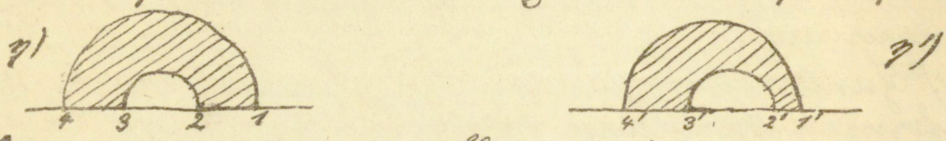
1) Zunächst ist aus den Grundsätzen der conformen Abbildung klar (Riemann's Existenztheorem), dass jedem allgemeinen Pcte von M_1 ein allgemeiner Pct von M_1' entspricht. Es wird auch nicht schwer sein, zu zeigen, dass einer stetigen Verschiebung des ersteren Pctes innerhalb M_1 eine stetige Verschiebung des entsprechenden Pctes innerhalb M_1' entspricht. Wie ist es, wenn der Pct von M_1 an ein Gränzelement heranrückt? Man wird unbedenklich sagen dürfen, dass dann der entsprechende Pct von M_1' ebenfalls an einem Gränzfall heranrückt. Dagegen würde es schwierig sein, direct behaupten zu wollen, dass jedem Gränzfalle von M_1 direct ein Gränzfall von M_1' entspricht. Beispielsweise lässt sich doch der auf p. 128 an 3. Stelle gemeinte Gränzfall, insofern sich dort der Fundamentalbereich auf eine blosse Curve zusammengezogen hat, direct gar nicht auf eine Halbebene beziehen. Er ist aber Gränze einer Kreisscheibe, der eine Halbebene $e_1 e_2 e_3 e_4$ entspricht, bei

Mi. 15. Juli 1891.

welcher e_1 u. e_2, e_3 u. e_4 im̄er näher an einander rücken.

2) An 2. Stelle werden wir folgendes Lem̄a aufstellen: Keinem (allgemeinen) Pkte von M', kön̄en zwei oder mehr verschiedene (allgemeine) Pkte von M, entsprechen.

Möge nämlich der Halbebene x mit den 4 getrennten Verzweigungspunkten $e_1\, e_2\, e_3\, e_4$ einerseits die Kreisscheibe η, andererseits die Kreisscheibe η' entsprechen:



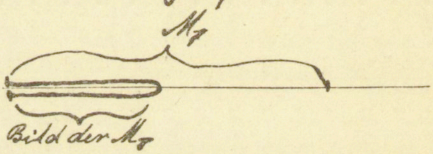
Dan̄ werden die beiden Kreisscheiben einander conform zugewiesen sein. Aber diese conforme Beziehung kön̄en wir nach dem Gesetze der Sym̄etrie fortsetzen, indem wir die beiden Kreisscheiben je an entsprechenden Kreisen spiegeln.

Wir erreichen so, dass die ganzen Halbebenen η, η' sich conform entsprechen mit alleiniger Ausnahme vielleicht der beiderseitigen Fixpkte (denen wir bei der fortgesetzten Spiegelung unbegränzt zustreben, ohne sie zu erreichen). Nun prüfe man aber genau den Beweis des Satzes, dass 2 Halbebenen η, η' nicht anders conform auf einander abgebildet werden kön̄en, als durch eine lineare Substitution $\eta' = \frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}$. Man wird finden, dass der Beweis gültig bleibt auch wen̄ „Randpkte unbekanter Beschaffenheit" bei der Abildung zu

http://rcin.org.pl

gelassen werden sollten. Daher ist auch in unserem Falle η' eine lineare Function von η, die beiden Kreisscheiben sind nicht wesentlich verschieden u. bezeichnen darum denselben Pct von M_1. –

Nehmen wir jetzt 1) u. 2) zusammen. Da werden wir zunächst sagen (nach 1)), dass der durchaus zusammenhängenden, zwischen ihren Gränzpcten ausgespannten Mannigfaltigkeit M_1 nothwendig über M_1' ein ebenfalls durchaus zusammenhängendes Stück entspricht, welches von Gränzpcten des M_1' begränzt wird. Nun kann man zunächst denken, dass dieses Stück, indem es an irgendwelcher Stelle von M_1' umbiegt, nur einen Theil von M_1' überdeckt:



Aber dann würde ein Theil von M_1' eben doppelt überdeckt sein, u das ist wegen des Lemma's 2) nicht möglich! Daher bleibt dass die ganze M_1' von dem Bilde der M_1 überdeckt sein muss, was zu beweisen war.

Dies ist, für den vorliegenden speciellen Fall, der Continuitätsbeweis. Es scheint unzweifelhaft, dass derserselbe, gehörig ausgeführt, alle Elemente eines wirklichen Beweises enthält, aber freilich ist eine nähere Ausführung noch wünschenswerth. Es wird sich namentlich darum handeln, sich von der Eigenart der beiden Mannigfaltigkeiten M_1, M_1', welche, obgleich nur 1ster Dimension, Gränzfälle 1. u. 2. Stufe enthalten, insbesondere auch von der Bedeutung der bei ihnen auftretenden uneigentlichen Gränzfälle, ein klares Bild zu machen. Es ist dies übrigens, wie man sieht, eine Fragestellung, die eigentlich in das Gebiet der linearen Invariantentheorie hineingehört.

Wir wenden uns jetzt zum Continuitätsbeweis für den unsymmetrischen Fall, den wir zunächst in ganz entsprechender Weise gliedern.

Wir haben da zuvörderst 2 Mannigfaltigkeiten von 2 Dimensionen, M_2 u. M_2' einander gegenüber zu stellen; M_2 ist die Mannigfaltigkeit der mit einer loxodromischen Substitution ausgestatteten η. Ebenen. Dieselbe hat in der That 2 Dimensionen, insofern man der loxodromischen Substitution die kanonische Form ertheilen kann:

$$\eta' = \varrho e^{i\varphi} \cdot \eta,$$

in welcher ϱ u. φ wesentliche Constante sind. Ebenso ist M_2', die Mannigfaltigkeit der mit 4 Verzweigungspcten ausgestatteten zweiblättrigen Flächen, 2dimensional. Denn die einzelne derartige Fl. hängt wesentlich nur von dem Doppelverhältniss der 4 Verzweigungspcte ab, u. dieses ist als complexe Grösse für 2 willkürliche Constanten zu zählen. Nun wird aber gar nicht behauptet, dass jedem Pcte von M_2' nur ein Pct. von M_2 entsprechen soll. Vielmehr müssen wir zuerst eine Unterscheidung machen zwischen den unendlich vielen Arten von Rückkehrschnitten, die man auf der einzelnen Fl. von M_2' ziehen kann. Wir rechnen alle solche Rückkehrschnitte zu derselben Art, die man durch continuirliche Verschiebung über die Fl. hin mit einander zur Deckung bringen kann. Die Anzahl der hiernach zu unterscheidenden Arten ist hiernach (wie die Theorie der elliptischen Functionen lehrt) nun zwar immer noch unendlich, aber es ist dies eine abzählbare Unendlichkeit. Daher denn die verschiedenen Arten der zerschnittenen R. Flächen immer noch nur eine Mannigfaltigkeit von 2 Dimensionen ausmachen, die wir vielleicht (M_2') nennen. Das Theorem, welches wir beweisen wollen, ist dann dieses:

<u>dass jedem Pcte von (M_2') ein Pct von M_2 zugehöre.</u>

Aber so gefasst ist das Theorem scheinbar sehr unbestimmt, insofern die Gestalt des anzuwendenden Rückkehrschnitts gar nicht specificirt ist. Wollen wir also jetzt der Bestimmtheit halber verabreden, dass der Fundamentalbereich, den wir in der η. Ebene betrachten wollen, <u>kreisförmig</u> begränzt sein solle! Den einen Gränzkreis können wir dabei unter Berücksichtigung einfacher Ungleichungen beliebig annehmen, der andere Gränzkreis wird derjenige sein, der aus ihm durch die loxodromische Substitution entsteht (vergl. Fig. auf p. 127). Die Einführung der Kreise bringt also 3 neue Constanten mit, u. wir werden sagen dürfen, dass die kreisförmigen Bereiche, welche wir fortan zu Grunde legen, <u>eine Mannigfaltigkeit M_5 von 5 Dimensionen ausmachen.</u> Ihr tritt dann eine Mannigfaltigkeit (M_5') entgegen, die aus der vorbenannten

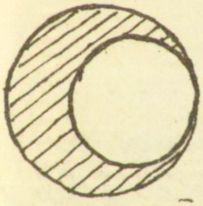
(M'_4) entsteht, indem man den Rückkehrschnitt der einzelnen in (M'_4) vorkommenden zerschnittenen R. Fl. unter einer der ∞^3 Curven wählt, welche auf der Fl. den in Betracht kommenden Kreisen der η. Ebene correspondiren. Die ganze Schwierigkeit, welche wir sogleich bei der Formulirung des Continuitätsbeweises antreffen werden, würde als solche fortfallen, wenn wir uns zunächst die Zeit nehmen wollten, zu untersuchen, was (das) für 3-fach unendlich viele Curven sind, die hiernach auf der einzelnen R. Fl. neben einander in Betracht kommen. Aber ich will die Sache so schildern, wie sie bei Poincaré zur Geltung kommt, u. beginne darum sofort mit der Beziehung der beiden Mannigfaltigkeiten M_5 u. (M'_5) auf einander.

Zuvörderst ist klar, dass wieder jedem allgemeinen Pcte von M_5 ein allgemeiner Pct. von (M'_5) eindeutig entspricht. Denn der Kreisring mit loxodromisch zusammengeordneten Rändern, p. 127, genügt den Bedingungen, die wir auf p. 112, 113 der Autographie des Wintersemesters als hinreichend für die Brauchbarkeit eines Bereiches als functionentheoretischen Fundamentalbereichs erkannten. Auch wird man leicht beweisen können, dass es sich dabei um eine stetige Zuordnung der beiden Mannigfaltigkeiten handelt, – dass nämlich der Pct. von (M'_5) sich stetig verschiebt, wenn man den Pct. von M_5 continuirlich ändert. – Aber wie ist es nun mit den Gränzfällen der M_5? Da eben liegt die Schwierigkeit. Bei gewissen Gränzfällen allerdings ist ganz klar, was deren

Approximirung bedeutet, aber bei anderen Gränzfällen finden wir uns in dieser Hinsicht zunächst in voller Unkentniß.

Als ein Beispiel für einen Gränzfall 1. Art führen wir an, dass die loxodromische Substitution in eine parabolische übergeht, so etwa, dass der Kreisring der p. 127 in einen Parallelstreif ausartet. Offenbar hat sich dann die zugehörige K. Fl. der (M_2) in eine solche mit $p = 0$ verwandelt. Vergleiche die Fig. 8. auf p. 106 der Winterautographie.

Als ein Beispiel für einen Gränzfall 2. Art aber wählen wir den, auf welchen Poincaré bei seinen (etwas anders geordneten Betrachtungen) ausschliesslich geführt wird. Er nim̄t genau den Fall, der in Fig. 9. p. 107 der Winterautographie betrachtet wird: Unser Ringraum ist in eine Sichel ausgeartet, deren Ränder durch eine hyperbolische Substitution zusam̄engeordnet sind:



Was in aller Welt kan̄ der hindurch gegebene Gränzfall von M_2 bedeuten, nachdem wir doch l.c. (Winterautographie p. 107–110) ausführlich gezeigt haben, dass eine solche Sichel als Fundamentalbereich unzulässig ist?

Wir könten natürlich noch eine ganze Reihe ebenso unverständlicher Gränzfälle anführen. Was bedeutet eine Sichel, wie die auf dieser Seite gezeichnete, wen̄ ihre Gränzkreise durch eine loxodromische Substitution zusam̄engeordnet werden (von welcher dan̄ ein Fixpct im in̄eren Hohlraum, der andere im aeusseren Hohlraum liegt)? Was ein Ring, p. 127, wen̄ die

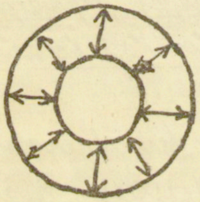
GABINET MATEMATYCZNY Towarzystwa Naukowego Warszawskiego

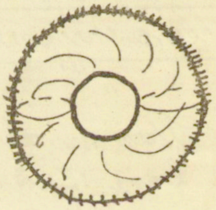
http://rcin.org.pl

beiden Gränzkreise zusammenrücken (so dass der Ring unendlich schmal wird), während die loxodromische Substitution in eine elliptische von nicht verschwindender Amplitude ausartet? Wir gehen auf diese weiteren Gränzfälle hier nur darum nicht ein, weil die Discussion des Poincaréschen Gränzfalles bereits ausreichen dürfte, um den gemeinsamen Charakter aller Gränzfälle dieser Art erkennen zu lassen. —

Um jetzt zur Erklärung des Poincaréschen Gränzfalles übergehen, wollen wir vor allen Dingen die 2blättrige Fl. über der x. Ebene, was bekanntlich möglich ist, durch einen <u>geschlossenen Ring</u> (im Raume gelegen) ersetzen. Sei hier zunächst der offene Ring der η. Ebene u. dieser geschlossene Ring nebeneinander gezeichnet:

η. Ebene. Raumring.

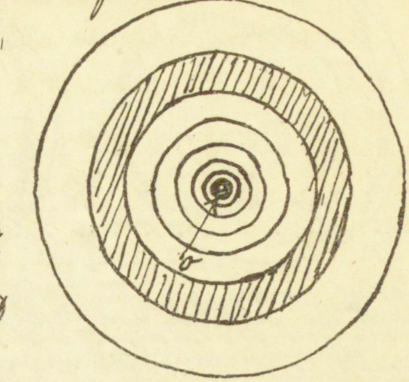




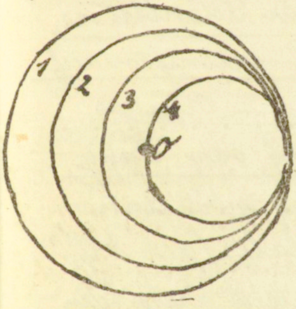
Die Zuordnung der beiden Randen des Rings in der η. Ebene sei einfach durch eine hyperbolische Substitution vermittelt, sagen wir etwa geradezu durch eine von 0 ausgehende Aehnlichkeitstransformation. Den beiden Randen selbst möge dabei als Rückkehrschnitt auf dem Raumringe die aeussere Aequatorcurve entsprechen die wir in der Fig. durch Strichelung besonders kenntlich gemacht haben. Wir vervielfältigen jetzt den Ring der η. Ebene beliebig oft durch die zugehörige Aehnlichkeitstransformation, worauf schliesslich

http://rcin.org.pl

die ganze y. Ebene in unendlich viele concentrische Ringe getheilt sein wird, die sich um O häufen:



Man mache sich klar, wie diesen neben einander liegenden Ringen der y. Ebene eine imer fortschreitende Umwickelung des Raumringes mit einem unbegränzt wachsenden Flächenstück entspricht. Nach diesen Vorbereitungen wird man mit Leichtigkeit die Frage beantworten, die wir nun aufwerfen, welche Curven nämlich auf dem Raumringe den verschiedenen Kreislinien der y. Ebene entsprechen, insbesondere, wie sich der ursprüngliche Rückkehrschnitt des Raumringes modificiert, wen̄ man den äusseren Gränzkreis des Ringes der y. Ebene vielleich von links her immer mehr auf den Pct O hinzieht, bis er durch O hindurchgeht. Man vergleiche die verschiedenen Kreise 1, 2, 3, 4 der folgenden Fig:



Die Antwort ist offenbar diese: Dem Kreise 1 entspricht der Rückkehrschnitt unserer anfänglichen Fig. Dem Kreise 2 wird eine Curve auf unserem Raumringe entsprechen, welche rechts den alten Rückkehrschnitt berührt, deren linker Scheitel aber nach vorne um den Ring sich herumschiebt.

Geht nun diese Herumschiebung des Scheitels links weiter vor sich, so bleibt doch die Krümung am linken Scheitel stets endlich. Die Windungen welche aber doch die Curve zwischen dem rechten u.

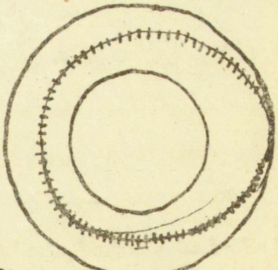
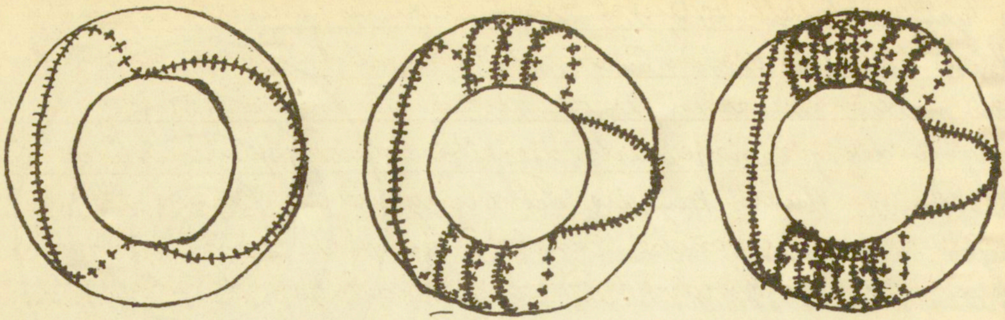


Fig 1.

http://rcin.org.pl



linken Scheitel um den Ring herum nach u. nach bilden muß, müssen sich daher, da auch rechts die Krümung endlich bleibt, am oberen u. unteren Teile des Ringes drängen, wie die aufeinanderfolgenden Figuren 1) bis 4) veranschaulichen. Beim Kreise 4) ist dieser Umwickelungsprocess ins Unendliche fortgeschritten, so dass unsere Curve ∞ oft um den oberen wie den unteren Theil des Ringes herumgeschlagen ist!

Und nun sieht man deutlich, was entsteht, weñ man diese Gränzcurve für die Zerschneidung des Ringes als Rückkehrschnitt benutzen will. Indem der Schnitt vermöge seiner unendlich dicht werdenden Windungen auf der oberen wie auf der unteren Hälfte unseres Ringes sich sozusagen selbst abschnürt, zerfällt der Ring bei der Zerschneidung in 2 Theile. Und das wird dañ die Bedeutung des Poincaréschen Gränzfalls (der hyperbolischen Doppelsichel sein), dass er nicht mehr den vollen Raumring, sondern nur den einen dieser beiden Theile, also sozusagen nur ein offenes Ringstück, abbildet!

Offenbar köñen wir so sagen, - u. damit treffen wir jedenfalls auch die Bedeutung der anderen auf p. 135 oben angeführten Gränzfälle unserer M_5. – : der Poincaré-

sche Gränzfall bedeutet nicht etwa ein Ausarten oder Unbestim̄twerden der in Betracht kom̄enden Rieman̄'schen Fl., sondern ein Ausarten der auf dieser Fl. anzuwendenden Zerschneidung, vermöge deren dieselbe sozusagen illusorisch wird.

Und eben darin lag die Schwierigkeit des Gränzfalles, die durch die so gewon̄ene Einsicht gehoben sein dürfte, dass man an die Möglichkeit einer derartigen Ausartung der Zerschneidung als solcher nicht gedacht hatte. —

Wie aber wollen wir uns nun nehmen, nachdem wir diese Möglichkeit erkan̄t haben? Offenbar trifft Poincaré das Richtige, indem er davon abgeht, die Man̄igfaltigkeiten M_5 u. (M'_5) in ihrer ganzen Ausdehnung zu vergleichen, sich vielmehr nur auf gewisse *Theile* derselben beschränkt, in die man allemal durch geschickte Wahl der Gränzkreise, bez. Rückkehrschnitte hineingelangen kan̄, u. die dan̄ an die Gränzfälle 2. Art nicht heranreichen. Wie dies im Einzelnen auszuführen ist, muss natürlich überlegt werden. Im Uebrigen kön̄en wir, indem wir eine in der Zahlentheorie übliche Ausdrucksweise aufnehmen, uns so aeussern: *Poincaré beschränkt sich darauf, nur solche Ringe der η. Ebene, bez. nur solche zerschnittene Rieman̄'sche Flächen zu betrachten, deren Begränzung, resp. Zerschneidung man als „reducirt" bezeichnen darf.*

Von hier ab gliedert sich nun der Continuitätsbeweis gerade wie früher. Wir werden zuerst wieder das Lem̄a beweisen, dass jedem Pcte von (M'_5) nicht mehr als ein Pct. der M_5 entsprechen kan̄, etc. etc. —

Machen wir zum Schlusse noch darauf aufmerksam, dass die Gränzfälle 2. Art bei dem Ansatze, den wir für die sym̄etrischen Fälle in Anwendung brachten, in der

http://rcin.org.pl

That nicht auftreten können. Einmal nämlich ist die Zerschneidung der symmetrischen R. Flächen für uns ja von vorneherein gegeben (längs der reellen Axe), u. kann darum nicht ausarten. Andererseits, wenn eine Kreisscheibe durch Zusammenrücken zweier Verzweigungspcte einen Zipfel bekommt, u. wir reproduciren sie nun durch Symmetrie, so wird sich der Zipfel als Fixpct einer parabolischen Substitution, niemals aber als Fixpct einer hyperbolischen Substitution erweisen.

S. 18. Juli 1891.

Wir schliessen unsere Theorie der Kreisscheiben u. des hyperbolischen Theorems, indem wir noch einige lose Bemerkungen hinzufügen, bei denen wir uns der Kürze halber auf denjenigen Fall des hyperbolischen Theorems beschränken wollen, bei welchem alle $\lambda_i = \frac{1}{2}$ (d. h. auf den allgemeinen Laméschen Fall).

1. <u>Zur Herstellung der η-Function.</u>

Der linearen Differentialglchg. 2. Ordg. der Laméschen Functionen haben wir früher die Normalform ertheilt: $(\Pi, f_n)_4 = \varphi_{n-4}\,\Pi$, wo $f_n = C\Pi(x_1 - e_i x_2)$ $\cancel{(x_1 - e_i x_2)}$ gleich Null gesetzt die e_i zu Wurzeln hat u. die Coëfficienten der Form φ_{n-4} die accessorischen Parameter sind. Jetzt kann man die Herstellung des hyperbolischen η (welches die Halbebene X auf ein reducirtes hyperbolisches Polygon abbildet) jedenfalls so in Angriff nehmen, dass man verlangt, die Coëfficienten des zugehörigen φ zu bestimmen. – In dieser Richtung bietet sich nun für Denjenigen, der die moderne Anwendung der Invariantentheorie bei sonstigen transcendenten Functionen, z. B. im Falle der Abel'schen Functionen, kennt (cf. Math.

An. 36, 1889), wie von selbst eine Schlussweise dar, die in ihrer Einfachheit zunächst merkwürdig zwingend erscheint, sich dann aber bei näherer Ueberlegung als falsch erweist. Ich wünsche Beides hier darzulegen, insofern es sich dabei um einen principiell wichtigen Pct handelt.

Zunächst ist klar:

a) die Coëfficienten von φ sind in den Coëfficienten von f von der $+1$ten Dimension,

b) sie hängen von der Coefficienten von f eindeutig u. ganz ab,

c) φ selbst kann als Covariante von f bezeichnet werden.

Man möchte nun aus b) schliessen, dass φ eine rationale ganze Covariante von f ist. Dann gibt a) sofort, dass φ identisch Null sein muss, denn es gibt keine andere rationale ganze Covariante von f ersten Grades in den Coefficienten. Und das Resultat, dass die von uns gesuchte Glchg. einfach $(\Pi, f)_z = 0$ sein möchte, erscheint um so plausibler, als doch diese einfache Glchg. jedenfalls etwas Specifisches bedeutet u. eine anderweitige Bedeutung derselben nicht bekannt sein dürfte. —

Dem gegenüber zeigt nun leider ein Beispiel, dass dies Resultat nicht richtig sein kann. Wir lassen 2 Wurzeln von f, e_i u. e_{i+1}, zusammenfallen. Das zugehörige hyperbolische Polygon erhält dann einen Winkel $=0$ (einen parabolischen Zipfel). Aber die Exponentendifferenz, welche $(\Pi, f)=0$ für die Doppelwurzel $e_i = e_{i+1}$ liefert, ist nach der allgemeinen auf pag. 131 der Winterautographie gegebenen Formel, keineswegs Null sondern:

$$\sqrt{\frac{1-n}{2n+2}}$$

Die beiden Angaben sind offenbar unvereinbar.

Demgegenüber wird es nun gelten, den Fehler der vorbezeichneten Schlussweise zu erkeñen. Sei der einzelne Coëfficient a von f folgendermassen in reellen u. imaginären Bestandtheil gespalten: $a = a' + i a''$. Ich erblicke den Fehler nun darin, dass man die durch f eindeutig bestimten Coëfficienten von φ keineswegs als Functionen der complexen Veränderlichen $a' + i a''$ ansehen darf, <u>sondern nur als Functionen der Einzelbestandtheile a', a''</u>. Von diesen Functionen wissen wir dañ freilich, dass sie eindeutig u. ganz für alle <u>reellen</u> Werthe des a', a'' sind, aber hieraus allein kañ man nicht etwa schliessen wollen, dass es rationale, ganze Functionen der a', a'' sind! Unsere Fragestellung hat uns eben aus dem Gebiet der complexen Variabeln $a' + i a''$, in welchem wir uns sicher bewegen, hinausgeführt in das Gebiet der doppelt so zahlreichen reellen Variabelen a', a'', in welchem uns keinerlei allgemeine Gesetze zur Verfügung stehen. Fast scheint es, als weñ etwas Aehnliches überall bei den jetzt von uns verfolgten Untersuchungen der Fall wäre, so dass wir durch neuen Verfolg der functionentheoretischen Fragen von selbst wieder aus dem Gebiet der Functionentheorie heraus in das Gebiet der reellen Variabelen zurückgeführt sind, – nur dass die Zahl dieser Variabelen dem elementaren Ansatze gegenüber verdoppelt erscheint.

2. Zur allgemeinen Classification der linearen Differentialglchgen u. über die Einordnung unseres hyperbolischen Falles in dieselbe.

Das Classificationsprincip, welches ich hier im Siñe habe, komt darauf zurück, dass ich jeder linearen Dif-

http://rcin.org.pl

ferentialglchg. beliebiger Ordg. welche y als Function von x bestimmt, eine gewisse continuirliche Transformationsgruppe zuordne. Es wird genügen, wenn ich das hier für die beiden Lösungen y_1, y_2 einer linearen Differentialglchg. 2. Ordg. auseinandersetze, oder gleich für deren Quotienten $\eta = y_1/y_2$. Die Sache stellt sich da folgendermassen: Macht x in seiner Ebene beliebige Umläufe, so erleidet η gewisse lineare Substitutionen $\eta' = \frac{a_i \eta + b_i}{c_i \eta + d_i}$, die in ihrer Gesamtheit eine discontinuirliche Gruppe bilden. Ich werde nun als die zur Glchg. gehörige continuirliche Gruppe diejenige kleinste continuirliche Gruppe linearer Substitutionen bezeichnen, in welcher die genannte discontinuirliche Gruppe enthalten ist. In der That wird man der Differentialglchg. für η je nach der Art dieser continuirlichen Gruppe eine andere u. andere Gestalt ertheilen können, indem ja ohne Weiteres klar ist, dass die Differentialinvarianten der in Rede stehenden Gruppe von x jeweils eindeutig abhängen.

Ich führe dies hier ein wenig für diejenigen continuirlichen Untergruppen der Gesamtgruppe $\eta' = \frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}$ aus, die man gewöhnlich aufzählt. Es sind dies:

Eingliedrige Gruppe I : $\eta' = \eta + \beta$,
Eingliedrige Gruppe II : $\eta' = \alpha\,\eta$,
Zweigliedrige Gruppe III : $\eta' = \alpha\eta + \beta$,
Dreigliedrige Gruppe IV : $\eta' = \frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}$.

Für jede dieser Gruppen gibt es eine einfachste Differentialinvariante, aus der sich alle anderen Differentialinvarianten ableiten. es sind dies beziehungsweise:
für I : η', für II : $\frac{\eta'}{\eta}$, für III : $\frac{\eta''}{\eta'}$, für IV : $\frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2$.
Die zugehörigen Differentialglchgen werden natürlich so zu bilden sein, dass man die eine oder andere dieser

http://rcin.org.pl

Invarianten einer Function $f(x)$ gleichsetzt. Da sieht man deutlich, dass jede dieser Glchgen ein eigenartiges Integrationsproblem vorstellt. Nr. I erledigt sich durch dasjenige Verfahren, welches man in den Elementen der Integralrechnung kennen lernt u. als Quadratur bezeichnet: $\eta = \int f(x).dx$. Aber auch II u. III können auf Quadraturen zurückgeführt werden, man hat einfach $\eta = e^{\int f(x) dx}$, beziehungsweise $\eta = \int e^{\int f(x) dx}.dx$. Es hängt das offenbar damit zusammen, dass II mit I ähnlich ist, während III eine zusammengesetzte Gruppe ist, die aus einer Gruppe I u. aus einer II durch Ineinanderschiebung aufgebaut werden kann. Auf der anderen Seite ist IV eine einfache Gruppe u. ebendarum nicht auf Quadraturen reducirbar. Ich habe in Bd. 23 der math. Annalen (1883) versucht, eine nähere Vorstellung von dem Gränzprocess zu geben, den man bei der Integration von Glchg. IV zu vollziehen hat; die entsprechenden Entwickelungen für die allgemeinen linearen Glchgen n^{ter} Ordg. gibt Hr. Volterra in Bd. 6 der Memorie di Napoli (1887)*). Augenscheinlich wird jede einfache Gruppe linearer Substitutionen bei einer beliebigen Zahl von Veränderlichen jedesmal in entsprechendem Sinne einen bestimmten Gränzprocess definiren, u. man könnte sich eine Anordnung der Integralrechnung denken, bei welcher man nach Festlegung des Begriffs der „Quadratur" der Reihe nach alle die hier in Betracht kommenden Gränzprocesse discutirte. —

Nun erweitert sich aber das hiermit Gesagte noch durch einen Umstand, den wir schon früher bei Gelegenheit hervorgehoben haben. Wir bemerkten nämlich (p. 63), dass die Gruppen I–IV nur dann die einzigen continuirlichen Untergruppen der linearen Gruppe sind, wenn man alle vorkommenden Parameter, wie man dies gewöhnlich stillschweigend thut, als beliebiger complexer Werthe fähig ansehen will. Damit aber eine Untergruppe conti-

---

*) vid. Memorie der Società Italiana dei XL: „Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari" Pte I.

http://rcin.org.pl

närlich sei, genügt es, dass die Parameter als reelle Grössen angesehen werden. Dan sind also (indem man die complexen Grössen für 2 reelle rechnet) I u. II zweigliedrige Untergruppen, III ist viergliedrig, IV sechsgliedrig. Neben ihnen aber gibt es u. A. die 3gliedrigen Untergruppen: $V: \eta' = \frac{a\eta+b}{c\eta+d}$

$$\left.\begin{array}{l} \\ VI: \eta' = \frac{(a+id)\,\eta+(b+ic)}{(-b+ic)\,\eta+(a-id)} \end{array}\right\}$$ wo die a, b, c, d reell.

Offenbar müssen wir jetzt auch ihnen entsprechende Differentialprobleme aufstellen, u. dabei wird der Fall V für uns um so wichtiger sein, als sich unter ihn das Problem des reducirten hyperbolischen Polygons wird unterbegreifen lassen müssen.

Welches aber werden die Differentialinvarianten z. B. der Gruppe V sein? Augenscheinlich wird man, um dieselben zu gewinnen, wieder die reellen u. imaginären Bestandteile trenen müssen. Wir setzen $\eta = \xi + i\theta$, $x = y + iz$, und haben dan zunächst die Differentialquotienten 1. Ordg.: $\frac{\partial\xi}{\partial y} = \frac{\partial\theta}{\partial z}$, $\frac{\partial\theta}{\partial y} = -\frac{\partial\xi}{\partial z}$, dan entsprechende Differentialquotienten 2. Ordg. etc. Aus ihnen werden sich 2 einfachste Differentialinvarianten J_1 u. J_2 zusamensetzen lassen müssen (die ich mir leider nie wirklich berechnete) u. indem wir sie eindeutigen Functionen von y und z gleichsetzen: V. $J_1 = f_1(y, z)$, $J_2 = f_2(y, z)$, haben wir diejenigen Differentialprobleme vor uns, welche der Gruppe V entsprechen, u. deren Integration uns wieder als Definition einer neuen Art von Gränzprocess erscheinen muss.

Für unser hyperbolisches Theorem aber bedeutet dieser Ansatz, dass bei ihm die accessorischen Parameter (die Coëfficienten von φ) so bestimt werden müssen, dass die zugehörige Differentialglchg., also etwa $(\Pi, f) = \varphi \cdot \Pi$, auf ein Differentialproblem V. zurückkomt. Praktisch ist damit freilich zunächst gar Nichts gewonen. Den 1. ist wieder keineswegs sicher, dass die dabei resultirenden f_1. f_2 rationale Functionen von y, z sein sollen: sie haben nur für reelle y, z eindeutig zu sein. Zweitens aber werden wir eben nun sehen, dass neben der einen Glchg., die

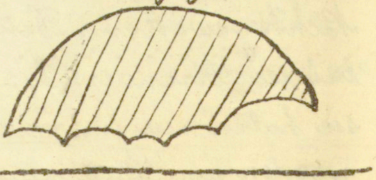
http://rcin.org.pl

das reducirte hyperbolische Polygon liefert, unter den Glchgen $(\Pi, f) = q\Pi$ noch unendlich viele andere auftreten, welche gleichfalls hyperbolische Polygone ergeben, u. also ebenso auf Differentialprobleme V reducirbar sein müssen.

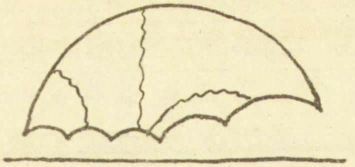
3. Verallgemeinerung des hyperbolischen Theorems. Mi. 22. Juli 18

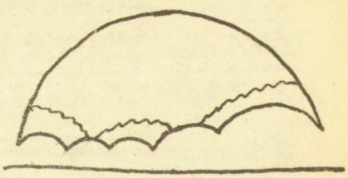
Die Fragestellung, von der wir vor Pfingsten ausgegangen sind, war die gewesen: dem Polygone der η. Ebene solche Bedingungen aufzuerlegen, durch welche die in der Differentialglchg. noch unbestimmten (accessorischen) Parameter eindeutig festgelegt wurden. Das hyperbolische Theorem, wie das Kreisscheibentheorem, mit denen wir uns seitdem so lange beschäftigt haben, sollten nur je ein Beispiel für eine derartige Festlegung sein. Das besondere Interesse dieser Beispiele, dem wir dañ ausführlich Rechnung getragen haben, lag in ihrer Beziehung zur Theorie der automorphen Functionen. Eben darum sind diese Beispiele in der Literatur vielfach behandelt worden. Aber im Siñe unserer ursprünglichen Fragestellung ist diese Beziehung gleichgültig, u. in der That möchte ich jetzt Verallgemeinerungen des hyperbolischen Theorems (wie des Kreisscheibentheorems) zur Sprache bringen, bei welchen keinerlei Beziehung zur Theorie der automorphen Functionen mehr besteht. Ich habe übrigens die Zulässigkeit dieser Verallgemeinerungen bis jetzt in keiner Weise bewiesen; dieselben erscheinen mir nur plausibel, u. ich trage sie hier nur vor, um unserer sonst zu verschwom̄enen allgemeinen Fragestellung die Richtung auf concrete Ziele zu geben.

Sei hier zunächst ein reducirtes hyperbolisches 6eck gezeichnet.



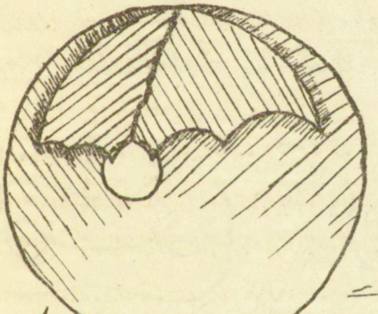
So haben wir früher gelernt, dass wir dasselbe durch Anhängung von Kreisringen in verschiedener Weise erweitern kañ. Wir hatten zu dem Zwecke zunächst 3 Transversalen im 6eck zu ziehen, die selbst in man̄igfacher Art angeordnet sein konnten:



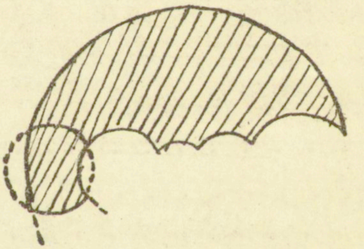


I II III

Dabei wolle man jetzt noch einen Unterschied machen zwischen Trans- versalen, welche mit einer Kante „parallel" sind (d. h. durch Verschie- bung mit einer Kante zur Deckung gebracht werden kön̄en), u. solchen, die es nicht sind: bei I u. II sind nur 2 der Transver- salen mit einer Kante parallel, bei III alle 3 Transversalen. Die Sache ist dan̄ die, dass wir unser 6eck „erweitern kön̄en, indem wir an jede der Transversalen eine beliebige Anzahl kreisförmiger Voll- ringe anhängen, oder auch, wen̄ es sich um eine Transversale han- delt, die einer Kante parallel sind, eine beliebige Anzahl kreis- förmiger Halbringe.



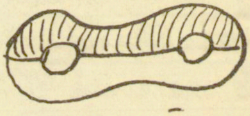
Anhängung eines Vollrings an die Mitteldiagonale bei I



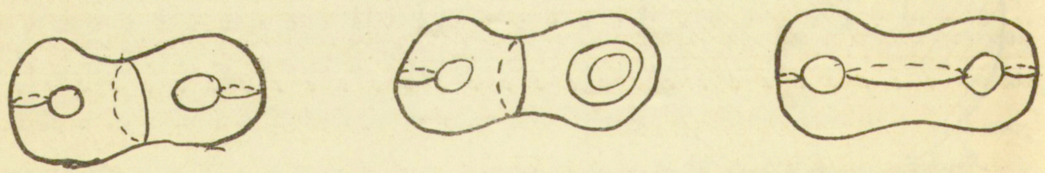
Anhängung eines Halbrings an die Seitendiagonale lin- ker Hand.

Auf diese Weise entsteht dan̄ aus unserem „reducirten" Sechs- eck eine unendliche Zahl neuer „Typen" erweiterter hyperboli- scher Sechseck. Und unsere Behauptung ist, dass wir bei irgend vor- gegebener Halbebene x mit 6 auf ihrem Rande befindlichen ein

<u>gulären Pcten $e_1 \ldots e_6$ die accessorischen Parameter der Differentialglchg. im̄er u. nur auf eine Weise so bestim̄en kön̄en, dass in der η. Ebene ein hyperbolisches Sechseck von irgend welchem vorgegebenen Typus entsteht.</u>
Es liegt mir daran, diesen Satz von der Halbebene mit 6 Verzweigungspcten auf die zugehörige 2blättrige Fl. mit 6 Verzweigungspcten zu übertragen, um ihn dan̄ auf beliebige, auch unsym̄etrische Flächen $p = 2$ verallgemeinern zu kön̄en. Den in I, II, III gezeichneten Transversalen des 6eck's entsprechen auf der x Ebene Linienzüge, die wir nach dem Princip der Sym̄etrie so fortsetzen mögen, dass sie uns auf der 2blättrigen Fl. gewisse „Rückkehrschnitte" liefern. Art u. Lage dieser Rückkehrschnitte werden wir am leichtesten übersehen, wen̄ wir statt der 2-blättrigen Fläche gleich den „Doppelring im Raume" setzen, auf welchen man jene 2blättrige Fl. bekan̄tlich abbilden kan̄:



Unsere Halbebene, oder auch des 6eck der η-Ebene entspricht dabei in leicht ersichtlicher Weise der in der Fig. schraffirten oberen Hälfte der uns zugekehrten Vorderhälfte der Ringfl.. Auf dieser Ringfl. werden wir nun den Figuren I, II, III entsprechend, folgende Tripel „sym̄etrischer" Rückkehrschnitte haben:

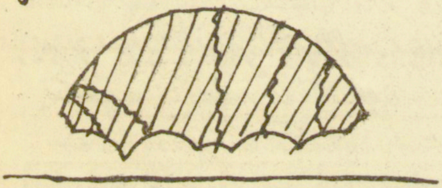


Ersichtlich haben die 3 Figuren folgende Eigenthümlichkeit gemein: Man verstehe (wie <u>Moebius</u> das seiner Zeit that) unter einer „Elementarform" eine von 3 Randcurven begränzte 3fach zusammenhängende Fl. <u>Bei sämtlichen 3 Figuren erweist sich der Doppelring $p = 2$ nach Ausführung der Rückkehrschnitte in 2 Elementarformen zerlegt.</u>

http://rcin.org.pl

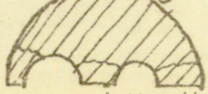
Nun kön̄en wir Systeme von 3 Rückkehrschnitten, welche eine solche Zerlegung bewirken, natürlich auf jeder geschlossenen Fl. $p=2$, nicht nur auf den sym̄etrischen Fl. der hier betrachteten Art, construiren. Wir kön̄en sie also auch auf jedem irgendwie gegebenen reducirten hyperbolischen Fundamentalbereiche der η. Ebene, der das Geschlecht 2 aufweist, construiren. Und nun wird offenbar der Erweiterung unseres Sechsecks durch Anhängung von Vollringen oder Halbringen hier beim allgemeinen Fundamentalbereich $p=2$ entsprechen, dass wir ihm längs der genan̄ten Rückkehrschnitte je beliebig viele kreisförmige Vollringe einfügen. So stellen sich dan̄ neben den „reducirten" hyperbolischen Bereich des Geschlechtes $p=2$ unendlich viele Typen „erweiterter" hyperbolischer Bereiche desselben Geschlechtes. Wir werden den einzelnen Typus zu bezeichnen haben, indem wir auf einem Bereiche des reducirten Typus 3 Rückkehrschnitte zeichnen u. ihnen 3 ganze Zahlen ν_1, ν_2, ν_3 zusetzen. Und wie wird das zugehörige „erweiterte" hyperbolische Theorem lauten? Es soll irgendwelche hyperelliptische Fl. $p=2$ gegeben sein. Auf ihr werden wir dan̄ zunächst ebenfalls irgendwie ein geeignetes System von 3 Rückkehrschnitten aussuchen u. diesem 3 ganze Zahlen ν_1, ν_2, ν_3 beifügen: — wir werden das fernerhin kurz als die Festlegung eines Charakteristikensystems für die auf der Fl. existirende η. Function bezeichnen (insofern wir ja mit „Charakteristik" die Anzahl von Malen meinten, dass sich ein Kreisbogen oder Kreisring der η. Ebene selbst überschlägt). Wir betrachten jetzt eine auf der Fl. $p=2$ unverzweigte η. Function. Und da wird der Satz der sein müssen: dass wir die accessorischen Parameter in der Differentialglchg. des η im̄er u. nur auf eine Weise so werden bestim̄en kön̄en, dass das η die solcherweise präparirte Fl. auf einen hyperbolischen Bereich des entsprechenden Typus abbildet.

Ich habe das nur erst für $p=2$ auseinandergesetzt; wie wird es bei grösseren Werthen von p sein? Damit eine Halbebene mit n Verzweigungspcten vervierfacht auf eine 4blättrige Fl. vom Geschlecht p führt, müssen wir $n = 2p+2$ nehmen. Auf dem n. Eck der η. Ebene kön̄en wir dan̄ nach früheren Angaben $n-3 = 2p-1$ Transversalen neben einander ziehen. Andererseits beweist man, dass zur Zerlegung einer R. Fl. vom Geschlechte p in Elementarformen $3p-3$ Rückkehrschnitte erforderlich sind (vermöge deren dan̄ die Fl. in $\frac{2\cdot 3p-3}{3} = 2p-2$ Elementarformen zerlegt wird). Wie werden diese beiden Zahlenangaben, die für $p > 2$ verschieden scheinen, dennoch mit einander verträglich sein? Die folgende Fig. für $p=3$ mag in dieser Hinsicht die erforderliche Erläuterung geben. Wir haben da erstlich auf einem 8eck fünf Transversalen, dan̄ aber auf der nebenstehenden symmetrischen Fl. $p=3$ 6 entsprechende, symmetrisch angeordnete Rückkehrschnitte:



(von denen oben einer das allein mit dem Polygon in Vergleich stehende schraffirte Stück der Fl. $p=3$ nicht durchsetzt). —

— Der hier mit besprochenen Erweiterung des hyperbolischen Theorems entspricht eine ganz ähnliche Erweiterung des Kreisscheibentheorems, über die ich hier nur kurze Andeutung machen will. Auf einer Kreisscheibe vom $n = 2p+2$ Seiten wird man wieder Systeme von $n-3 = 2p-1$ Transversalen construiren kön̄en, die man dan̄ zur „Erweiterung" der Kreisscheibe durch Anhängung von Vollringen u. Halbringen benutzen kan̄:



Solcherweise entstehen aus der „reducirten" Kreisscheibe unendlich viele Typen „erweiterter" Kreisscheiben. Die Behauptung wird sein, dass man eine irgendwie vorgegebene Halbebene x jeweils durch eine u. nur eine zugehörige η. Function auf eine Kreisscheibe von irgend welchem vorgegebenen Typus abbilden kann. –

Aber noch eine andere Erweiterung des hyperbolischen Theorem's werden wir hier zur Sprache bringen. Wir wollen wieder ein reducirtes Polygon zu Grunde legen. Die Winkel desselben dachten wir letzthin als rechte Winkel, immer aber haben wir sie, um Fühlung mit den automorphen Functionen zu halten, in der Form $\frac{\pi}{l_i}$ vorausgesetzt, wo die l_i ganze Zahlen. Nun ist aber geometrisch dafür, dass ein reducirtes hyperbolisches Polygon construirt werden kann, die hiermit eingeführte Beschränkung gar nicht nöthig. Vielmehr wird man die Winkelgrössen $\lambda_i\pi$ nur diesen Bedingungen zu unterwerfen haben:

$$\lambda_i < 1, \quad \sum_i^n \lambda_i < n-2.$$

Ich behaupte nun: dass man bei gegebener Halbebene x, wenn die den singulären Ecken e_i beigefügten λ_i nur vorstehende Ungleichheiten befriedigen, allemal auch die accessorischen Parameter der für das zugehörige η geltenden Differentialglchg. so bestimmen kann, u. nur auf eine Weise so bestimmen kann, dass in der η. Ebene ein reducirtes hyperbolisches Polygon entsteht. –

Soviel von diesen Verallgemeinerungen. Ich hoffe zum Schluss der Vorlesung noch auf sie zurückkommen u. dann ein ganz allgemeines Theorem formulieren zu können, welches sie u. die aus dem Oscillationstheorem hervorgehenden Sätze gleichförmig umfasst. Ich wende mich nun endlich zu den auf letzteres Theorem bezüglichen Betrachtungen.

http://rcin.org.pl

Vom Oscillationstheorem.

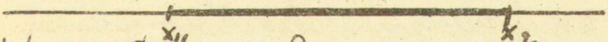
Das Theorem, welches ich als Oscillationstheorem bezeichne, ist ursprünglich aus physikalischen Betrachtungen erwachsen; hier wird vor allen Dingen seine functionentheoretische Bedeutung darzulegen sein, wobei die Variabelen, die beim physikalischen Ansatze natürlich nur reeller Werthe fähig sind, beliebig complexe genommen werden können. Ich darf wegen der physikalischen Betrachtungen einmal auf meine Vorlesung über Lamésche Functionen von Winter 1889-90 verweisen, dann auf die Preisarbeit von Bôcher, die eben nun gedruckt ist u. in der die Bedeutung des Theorems für die Reihenentwickelungen der Potentialtheorie ausführlich entwickelt wird, endlich auf das Buch von Pockels über $\Delta u + K^2 u = 0$, woselbiges in der Theorie der Eigenschwingungen elastischer Körper zur Geltung gelangt.

Die hier zu gebenden Erläuterungen fasse ich under einer Reihe von Nummern zusammen:

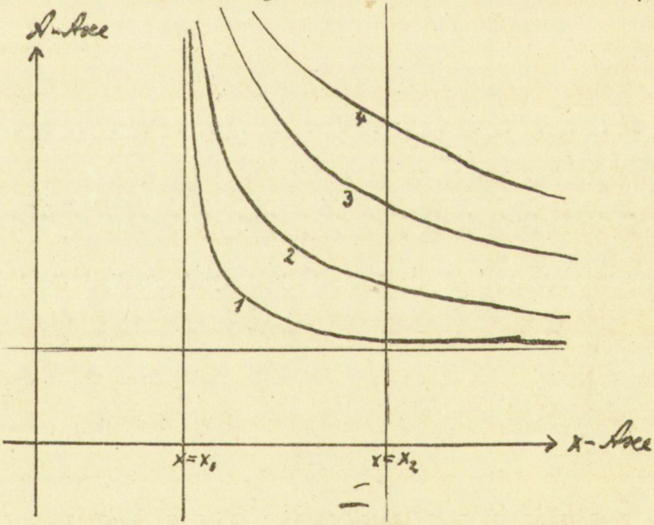
1. Die ursprüngliche Form des Theorems, wie dieselbe der Hauptsache noch schon bei Sturm in Liouville's Journal II (1836) vorliegt. — Das Oscillationstheorem wird überhaupt darauf ausgehen, irgendwelche in einer linearen Glchg. 2. Ordg. linear vorkommende Constante (accessorische Parameter, oder auch Exponentendifferenzen der singulären Pcte.) dadurch festzulegen, dass man von geeigneten Particularlösungen der Glchg. Oscillationseigenschaften in geeigneten Intervallen der x-Axe verlangt. Die ursprüngliche Form des Theorems bezieht sich darauf, dass nur ein Parameter in solcher Weise festgelegt werden soll. Es sei eine Glchg. vorgelegt

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (Au+v)\,y,$$

wo u, v Functionen von x sind, die in einem zu betrachtenden Intervalle der x-Axe



endlich u. stetig sind, u. von denen u noch die Eigenschaft haben soll, im ganzen Intervalle ein festes Vorzeichen zu besitzen. Es gibt dann sicher eine Particularlösung $y_1(x)$, welche für $x=x_1$ verschwindet. Wir verfolgen den weiteren Verlauf der Functionen $y_1(x)$ in unserem Intervalle, indem wir denselben vielleicht durch eine Curve $y=y_1(x)$ versinnlichen. Das Oscillationstheorem behauptet dann, dass man den Parameter A der Differentialglchg. gerade auf eine Weise so festlegen kann, dass $y_1(x)$ nicht nur im anderen Endpkte des Intervalls, bei $x=x_2$, ebenfalls verschwindet, sondern auch zwischen x_1 und x_2 eine vorgegebene Zahl, sagen wir ν, Nullstellen hat. Wir können dies noch deutlicher machen, indem wir uns über der Ebene (x, A) die Fl. $y=y_1(x, A)$ construirt denken, u. deren Schnitt mit der Ebene (x, A) hier zeichnen. Dieser Schnitt besteht, wie die Fig. aufweist, aus einer Reihenfolge hyperbelartiger Züge 1, 2, 3, 4, .. u. unser Theorem ruht



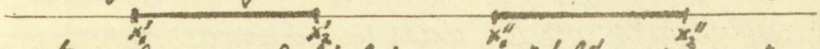
darauf dass die Ordinate $x=x_2$ einen jeden dieser Züge nothwendig einmal u. nur einmal schneidet.

Bei der Anwendung des Oscillationstheorems, welche Sturm l. c. zunächst im Sine hat, komt neben der Randbedingung: $y=0$ auch die andere: $y'=0$, oder die noch allgemeinere: $\frac{y'}{y}$ = gegebene Grösse, in Betracht (wobei die letztere die beiden ersteren als specielle Fälle in sich schliesst); dabei gilt wieder, dass bei irgendwelchen für x_1, x_2 geltenden Randbedingungen der Parameter A der Differentialglchg. durch die Zahl der zwischen x_1 und x_2 fallenden Nullstellen eindeutig bestimt ist. Unsere Fig. gestattet uns, allgemein anzugeben, welche Randbedingungen $f(y, y') = C$ in diesem Sine, mit dem Oscillationstheorem" verträglich sind. Offenbar ist dazu erforderlich u. hinreichend, dass $f(y, y') = C$ innerhalb der Ebene x, A eine Curve liefert, die aus unendlich vielen Zügen besteht, von denen imer einer innerhalb eines jeden der Streifen liegt, in welche die Ebene durch die Curve $y=0$ zertheilt wird, u. dass jeder dieser Züge, zum mindesten für das Intervall, welches man in Betracht ziehen will, A als eindeutige Function von x definirt. Doch dieses nur beiläufig. S. 25. Juli 1891.

2. <u>Die Erweiterung des Theorems auf den Fall mehrerer linear vorkomender Parameter $A, B, \ldots$, die dadurch eindeutig festgelegt werden, dass man für mehrere Intervalle Oscillationsbedingungen vorschreibt.</u> Ich will in dieser Hinsicht <u>ad α)</u> den Fall anführen, den ich ursprünglich in Math. An. 18 behandelt habe. Es handelt sich dort um die gewöhnliche Lamésche Glchg: $\frac{d^2y}{dt^2} = (Ax+B)y$, wo $t = \int \frac{dx}{2\sqrt{x-e_1 \cdot x-e_2 \cdot x-e_3}}$; A u. B sind zunächst beide unbestimt. Die Glchg. hat 3 singuläre Pcte im Endlichen, nämlich $x = e_1, e_2, e_3$, je mit den Exponenten $\left\{ {1/2 \atop 0} \right\}$. Ausserdem hat sie einen singulären Pct bei $x=\infty$, dessen Exponenten ϱ', ϱ'' durch die Bedingungen gegeben sind: $\varrho' + \varrho'' = 1/2$, $\varrho'\varrho'' = A$. Hiernach

http://rcin.org.pl

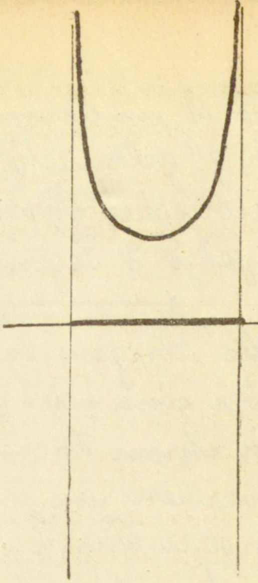
ist also A ein Parameter, der zur Bestimmung der Exponenten ρ', ρ'' gebraucht wird; nur B ist im engeren Sinne ein „accessorischer" Parameter. Um A u. B festzulegen, werden wir jetzt 2 Segmente der X-Axe in Betracht ziehen:



die übrigens beliebig gewählt sein mögen, aber weder über einander greifen sollen, noch einen singulären Pkt in ihrem Inneren oder als Endpct enthalten sollen. Wir werden uns jetzt für jedes unserer Intervalle eine besondere Particularlösung unserer Differentialglchg. aussuchen, die wir (was ja wohl keine Verwechselung mit sich bringen wird) y' und y'' nennen wollen. Die Lösung y' soll für $x = x_1'$, y'' für $x = x_1''$ verschwinden. Wir verlangen dann, dass y' auch für $x = x_2'$, y'' entsprechend für $x = x_2''$ verschwinden soll, so zwar, dass beim y' ν', beim y'' ν'' Nullstellen im Inneren des zugehörigen Segmentes auftreten. Und nun behaupten wir, dass durch diese Forderung die beiden Parameter A, B gerade eindeutig festgelegt werden.

Ich habe das damals in der Art bewiesen, dass ich zunächst den Ausdruck $Ax + B$ durch eine „Hülfsgerade": $y = Ax + B$ versinnlichte u. nun nach den verschiedenen Lagen fragte, welche diese Hülfsgerade annehmen wird, wenn man zunächst nur für das eine der beiden Intervalle Erfüllung des vorgeschriebenen Bedingungssystems verlangt. Es ergab sich, dass dieselbe dann eine Curve, eine „Hüllcurve", berühren muss, welche nach Art der nebenstehenden Figur in den Streifen, der von den Linien $x = x_1$, $x = x_2$ begränzt wird, asymptotisch eingezwängt ist, u. die kein Paar paralleler Tangenten u. darum auch keinen Wendepct besitzt. (Wegen der Einzelheiten darf

http://rcin.org.pl

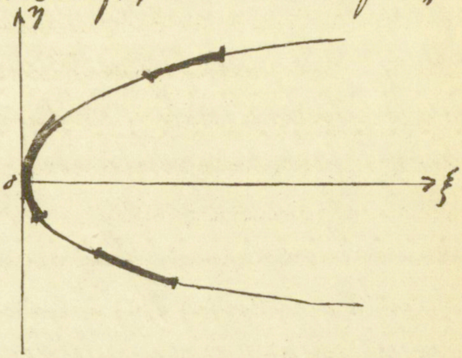


ich schon hier auf die Darstellung von Bôcher in seiner Preisschrift verweisen). Und nun beruht das zugehörige Oscillationstheorem einfach darauf, dass die beiden zu unseren 2 Segmenten in diesem Sinne zugehörigen Hüllcurven vermöge ihrer Gestalt & Lage nothwendig eine u. nur eine gemeinsame Tangente besitzen. Es ist das, wie Sie bemerken, sozusagen ein Satz der Analysis situs. Zu seiner Begründung berufe ich mich auf die unmittelbare Evidenz, ohne zu verkennen, dass eine genauere Beweisführung in analytischer Form hier wie anderwärts wünschenswerth wäre. —

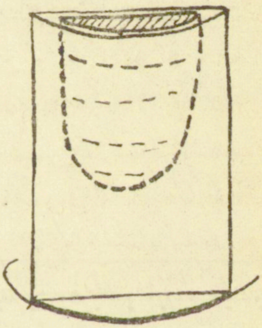
Ich nehme nun ferner ad 6) die etwas allgemeinere Differentialglchg.: $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(Ax+B-\frac{f''(x)}{16}\right)y$, welche in Bôchers Preisschrift zu Grunde gelegt ist. Hier ist $f(x) = (x-e_1) - - - (x-e_1)\ldots(x-e_5)$ $t = \int\frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$; wir haben also jetzt 5 singuläre Pkte $e_1 \ldots e_5$ im Endlichen (denen wieder die Exponenten $1/2$, 0 zukommen) u. ausserdem bei $x = \infty$ einen sog. scheinbar singulären Pkt, d. h. einen singulären Pkt, dessen Exponenten ($5/4$ u. $1/4$) um die Einheit differiren u. in dessen Nähe trotzdem keine Logarithmen auftreten. Dementsprechend sind jetzt beide Parameter A, B. eigentliche accessorische Parameter. Der Beweis des Oscillationstheorems ist jetzt aber gegen den Beweis ad a) nur dadurch abzuändern, dass die Hüllcurve der einzelnen Segmente unter Berücksichtigung der Curve 3. Ordg. $y = -\frac{f''(x)}{16}$ zu construiren ist. Vergl. Alles Weitere bei Bôcher.

Ad $\frac{16}{c}$) ziehen wir nunmehr den Fall einer Differentialglchg. in Betracht: $\frac{d^2y}{dt^2} = (Ax^2+Bx+C)y$, wo wieder (bei beliebiger Zahl der singulären Pkte $e_1, e_2, \ldots$), $t = \int\frac{dx}{\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)\ldots}}$

Ich habe für diesen Fall mir in der Wintervorlesung 189-90 dadurch eine geometrische Hülfsvorstellung gebildet, dass ich $x^2 = \xi$, $x = \eta$ setzte, — so dass also der Pct ξ, η in einer Ebene die Parabel $\xi = \eta^2$ durchläuft, die wie auf nebenstehender Fig. andeuten —,



u. nun die Ebene $\zeta = A\xi + B\eta + C$ in Betracht zog. Die 3 Segmente der X. Axe, welche von jetzt vorgegeben sein werden, sind in der Fig. bereits auf die Parabel übertragen. Welche *Hüllfläche* wird unsere Ebene berühren, wen̄ wir von unserer Differentialglchg. nichts Anderes verlangen, als dass sie betreffs *eines* der Segmente die in Betracht kom̄ende Oscillationsbedingung befriedige? Ich finde durch eine geometrische Betrachtung, deren genaue Controlirung wie sehr erwünscht sein würde, dass es sich dabei um eine Fl. handelt, welche eine *sackartige* Gestalt besitzt u. in den Cylinderförmigen Raum asymptotisch *hinein gezwängt* ist, der sich über dem Stücke der $\xi\eta$. Ebene, welches einerseits vom Parabelsegmente, andererseits von der zugehörigen geradlinigen Sehne umgränzt ist, vertical erhebt.



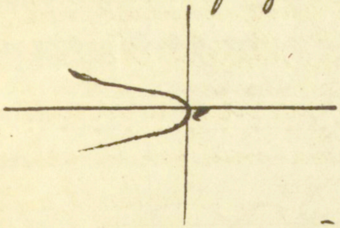
Diese „Hüllsfl." hat wieder die Eigenschaft, kein Paar paralleler Tangentialebenen zuzulassen, u. eben darum besitzen die 3 Hüllflächen, welche den 3 neben einander in Betracht kom̄enden Parabelsegmenten entsprechen, nothwendig *eine u. nur eine gemeinsame* Tangentialebene. Eben dies aber ist die Behauptung des Oscillationstheorems.

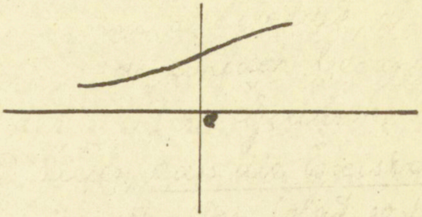
Ad d) wird man endlich Glgen $\frac{d^2 y}{dt^2} = (Ax^{n-4} + Bx^{n-5} + \dots)\,y$

mit einer beliebigen Zahl linear vorkomender Parameter in Betracht ziehen u. natürlich die Behauptung aufstellen, dass $A, B, ..$ eindeutig bestimt sind, sobald man für eine entsprechende Zahl von Intervallen Oscillationsbedingungen der früheren Art vorschreibt. Den Beweis denke ich mir dan ganz ähnlich, wie bei c), nur dass Constructionen in einem höheren Raum auszuführen sind. Statt der Ebene ξ, η werden wir einen $(n-4)$ fach ausgedehnten Raum betrachten müssen, in welchem die parabelartige Curve $\xi = x^{n-4}, \eta = x^{n-5}, \ldots$ verläuft, auf der wir unsere $(n-3)$ Segmente abtragen, um dan über ihnen zunächst cylinderartige Raumstücke des R_{n-3} abzugränzen, etc. etc. – Das ist, wie Sie ohne Weiteres sehen, Alles sehr plausibel, aber allerdings macht sich hier, um die eindeutige Bestimtheit der $A, B, ..$ durch die auf die $(n-3)$ Segmente bezüglichen Oscillationsbedingungen darzuthun, in erhöhtem Maasse das Bedürfniss nach einer genauen analytischen Formulirung des nur in unbestimter Allgemeinheit angedeuteten geometrischen Beweisganges doppelt fühlbar.

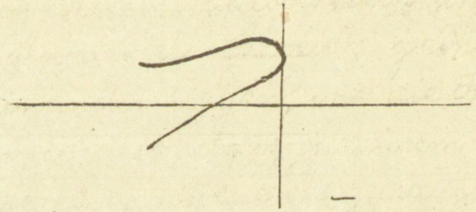
3. Fernere Erweiterungen des Theorems, wie sie sich bei den physikalischen Anwendungen von selbst darbieten (vergl. auch hier die Darlegungen in Hrn. Bôcher's Preisschrift.

Wir haben vorstehend durchweg mit solchen Differentialglchgen zu thun, deren im Endlichen gelegene singuläre Pcte als Exponenten ½ u. 0 haben. Hierin liegt, dass wir unser Oscillationstheorem nicht nur auf Segmente ausdehnen dürfen, welche sich an die singulären Pcte heranziehen, sondern auch auf Segmente, welche in den singulären Pcten umbiegen. Was wir dabei meinen, wird sofort klar sein, wen wir untersuchen, wie die Integralcurven unserer Differentialglchg. auf der einen Seite eines singulären Pctes $x = e$ verlaufen. Wir werden da vor allen Dingen die beiden Fundamentallösungen der Glchg. anzuschreiben haben, die zum Pcte $x=e$ gehören; ich wähle dieselben so: $y_1 = \sqrt{e-x} \cdot \mathfrak{P}_1(e-x)$, $y_2 = \mathfrak{P}_2(e-x)$ (unter $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ in üblicher Weise Potenzreihen verstanden). Die Curven $y=y_1(x)$ $y=y_2(x)$ haben dabei folgende Gestalt:

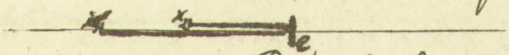




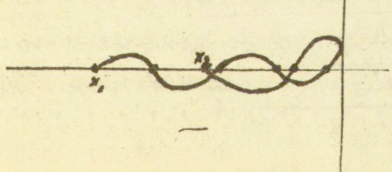
In Folge dessen wird die Curve, welche der allgemeinen Lösung unserer Differentialglchg entspricht: $y = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$, so lange α_1, α_2 reell sind, links von e liegen u. bei $x=e$ umbiegen: u. man kann in diese Regel sogar die Curve $y=y_2(x)$ einbegreifen, wenn man sich vorstellen will, dass ihr links von $x=e$ liegender Theil aus den



beiden Zweigen einer parabelartig umbiegenden Curve durch Zusammenrücken der beiden Zweige entstanden ist, während der rechts von $x=e$ liegender Theil durch entsprechende Vereinigung zweier imaginärer Bestandtheile hervorkommt. – In der That wird nun sofort klar sein, was wir meinen, wenn wir folgendes Segment x_1, x_2 zeichnen



u. nun verlangen, dass eine zugehörige Particularlösung $y(x)$ bei x_1 und x_2 verschwindet u. im Inneren des Segmentes ν Nullstellen hat. Wir meinen einen Verlauf der Curve $y=y(x)$ von folgender Art:

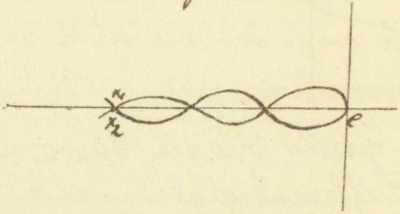


| 5 Nullstellen im Intervalle |

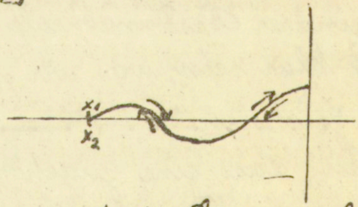
Für solche erweiterte Intervalle wird dann das Oscillationstheorem, wie ich schon in Math. Ann. 18

bemerkte, ungeändert weiterbestehen.

Nun muss besonders hervorgehoben werden, dass die so verallgemeinerte Art von Bedingungen 2 besonders einfache Specialfälle enthält. Dieselben treten ein, sobald x_1 mit x_2 auf der X-Axe zusammenfällt. Ist dann für das Segment $x_1 x_2$ eine *ungerade* Zahl von Nullstellen vorgeschrieben, so wird man folgenden Curvenverlauf haben:



wir brauchen dann offenbar nur von dem einfachen Segmente $\overline{x_1 = x_2 \wedge e}$ zu reden, in der Art, dass wir verlangen, die Particularlösung y_1, welche bei $x_1 = x_2$ verschwindet, solle auch bei $x = e$ verschwinden u. zwischendurch eine vorgegebene Zahl von Nullstellen darbieten. Wir drücken das dann kurz so aus, dass wir sagen, *unsere Lösung solle bei $x_1 = x_2$ verschwinden u. bei $x = e$ sich wie die Fundamentallösung y_1 verhalten.* — Nun mag aber für das in $x = e$ umbiegende Intervall $\overline{x_1 x_2}$ eine *gerade* Zahl von Nullstellen vorgeschrieben sein. Dann ist die Sache offenbar die, dass es sich um eine doppeltzählende Curve handelt, welche bei $x = e$ einfach umkehrt:



Nehmen wir nun auch da statt des Segmentes x_1, x_2 das einfache Stück der X-Axe von $x_1 = x_2$ bis $x = e$ in Betracht, so haben wir offenbar bei $x = e$ die neue Randbedingung, *dass sich die Lösung y bei $x = e$ wie die Fundamentallösung y_2 verhalten solle.*

Alle die hiermit berührten Möglichkeiten können natürlich in Combination auftreten. Ich werde die Stücke der X-Axe, welche von den aufeinanderfolgenden singulären Stellen begrenzt werden, als *Intervalle der X-Axe* bezeichnen. Wir könen dan „Segmente" der X. Axe in Betracht ziehen, welche sich um ein Intervall mehrfach herumwinden, u. weñ ein solches Segment in einem Endpckt des Intervalls selber seinen Abschluss findet, so könen wir iṁer noch nach Belieben festsetzen, ob die zugehörige Lösung y sich dort wie die Fundamentallösung y_1 oder wie die Fundamentallösung y_2 verhalten solle. Ich will nun insbesondere von einem ausgezeichneten Bedingungssysteme reden, sobald alle $n-3$ in Betracht zu ziehenden Segmente ausgezeichnete Segmente sind, d. h. Segmente, welche beiderseits ihren Abschluss in einem singulä. Pcte finden. Die Differentialglchgen aber, welche durch ein derartiges ausgezeichnetes Bedingungssystem im Siñe des Oscillationstheorems festgelegt werden, neñe ich ausgezeichnete Differentialglchgen. Mit ihnen werden wir uns in der Folge ganz besonders beschäftigen.

4. Neue Erweiterungen des Oscillationstheorems.

Mi. 29. Juli 1891.

α. Eriñern wir uns zuvörderst, dass es 2 Umänderungen einer Differentialglchg. 2. Ordg. gibt, welche dieselbe nur unwesentlich beeinflussen. Die 1. besteht darin, dass wir das y der Glchg. mit irgend einem Factor $M(x)$ multipliciren (der sich aus dem Quotienten $\eta = \frac{y_1}{y_2}$ wieder heraushebt), die andere darin, dass wir für x irgend ein $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ einführen. Unser Oscillationstheorem bleibt unabhängig von diesen Modificationen bestehen, sofern wir nur solche Nullstellen, welche für y_1 und y_2 gemeinsam in dem zu betrachtenden Segmente durch Verschwinden des $M(x)$ entstehen (scheinbar singuläre Pcte), nicht mitzählen. In der linearen Transformation des x liegt insbesondere das Mittel, auch solche Segmente dem Oscillationstheorem zugänglich zu machen, welche sich sonst ins Unendliche erstrecken, oder auch, weñ $x=\infty$ ein dazu geeigneter singulärer Pct ist, im Unendlichen umbiegen. Man würde übrigens jede solche auf den Pct.

http://rcin.org.pl

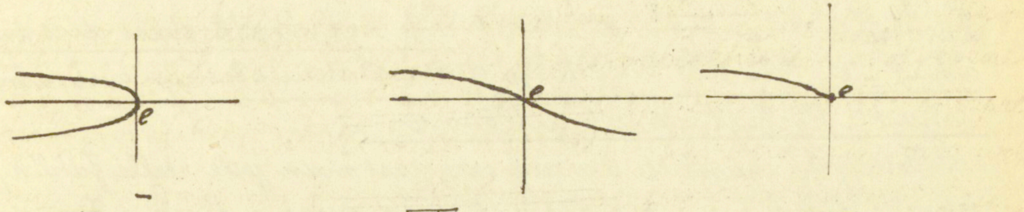
$x=\infty$ bezügliche Specialdiscussion von vorneherein vermeiden können, wenn man sich entschliessen wollte, überall statt der „Functionen" $y(x)$ „Formen" $\Pi(x, x_2)$ zu betrachten, (wo man denn statt der Schnittpcte der Curve y mit der x. Axe die Verschwindungspcte der Π abzählen müsste).

b. Wichtiger ist es zu fragen, ob man die bisher dargelegte Theorie von der gewöhnlichen Laméschen Glchg. (deren sämtliche singuläre Pcte, soweit sie im Endlichen liegen, die Exponentendifferenz $\frac{1}{2}$ aufweisen) auf allgemeinere lineare Differentialglchgen 2. Ordg. übertragen kann. Für Segmente, welche nicht an singuläre Puncte heranreichen, ist dies sicher ohne Weiteres der Fall. Aber natürlich interessiren wie uns gerade für Segmente, welche an singuläre Pcte heranreichen. Ich will hier zunächst annehmen, dass der in Betracht zu ziehende singuläre Pct ein <u>regulärer</u> Pct. sein soll, dem eine <u>reelle</u>, <u>nichtganzzahlige</u> Exponentendifferenz λ zugehört, welche wir (ohne damit eine Einschränkung einzuführen) als <u>positiv</u> voraussetzen wollen. Ich will mir ferner die zugehörige Differentialglchg. 2. Ordg. so normirt denken, dass ihre beiden zum singulären Pcte gehörigen Exponenten λ und 0 sind. Dann hat man also in der Umgebung des singulären Pctes folgende 2 Fundamentallösungen: $y_1=(e-x)^{\lambda}\cdot \mathfrak{P}_1(e-x)$, $y_2=\mathfrak{P}_2(e-x)$. Wir betrachten vor allen Dingen den Verlauf der beiden Curven $y=y_1(x)$ und $y=y_2(x)$ in der Nähe des singulären Pctes. Ueber die Curve y_2 ist dabei nichts Besonderes zu sagen: sie zieht einfach durch die Ordinate $x=e$ hindurch, welchen Werth auch λ haben möge.

Ganz anders ist es mit der Curve y_1. Hier müssen wir unterscheiden, ob λ eine <u>rationale</u> Zahl $\frac{m}{n}$ mit <u>geradem</u> Nenner ist, oder eine <u>rationale</u> Zahl mit <u>ungeradem</u> Nenner, oder

http://rcin.org.pl

endlich eine irrationale Zahl. Im ersteren Falle wird die Curve y_1 so wie wir es von der Laméschen Glchg. kanten bei $x = e$ umbiegen, im 2. die Ordinate $x = e$ einfach durchsetzen im 3. Falle bei $x = e$ überhaupt abbrechen:



I II III

In Folge dessen wird man nur im Falle I alle die Betrachtungen wiederholen kōnen, die wir bei der Laméschen Glchg. über Segmente austellten, die bei $x = e$ umbiegen. Es scheint aber auch keinerlei Schwierigkeit vorzuliegen, die Betrachtungen dañ gerade so durchzuführen u. dem Oscillationstheorem also dieselbe Tragweite zu ertheilen, wie im Laméschen Falle. Insbesondere werden wir also von „ausgezeichneten" Segmenten sprechen dürfen, die beiderseits in einem singulären Pcte endigen, u. bei jedem solchen ausgezeichneten Segmente das eine von 4 „ausgezeichneten" Bedingungssystemen einführen dürfen, nämlich dass sich die von uns in Betracht zu ziehende Particularlösung der Differentialglchg. in den beiden singulären Endpcten des Segmentes jenachdem wie die zugehörige Fundamentallösung y_1 oder wie y_2 verhalten soll. Ganz anders aber liegt es in den Fällen II und III. Da kañ von Segmenten, die im singulären Pcte e umbiegen, überhaupt nicht die Rede sein, u. weñ wir añehmen, dass 2 auf der X-Axe aufeinanderfolgende singuläre Pcte e_i u. e_{i+1} beide einer dieser Kategorieen II oder III angehören, so komt als „ausgezeichnetes" Segment bei einer solchen Differentialglchg. nur dasjenige in Betracht, welches

GABINET MATEMATYCZNY Towarzystwa Naukowego Warszawskiego

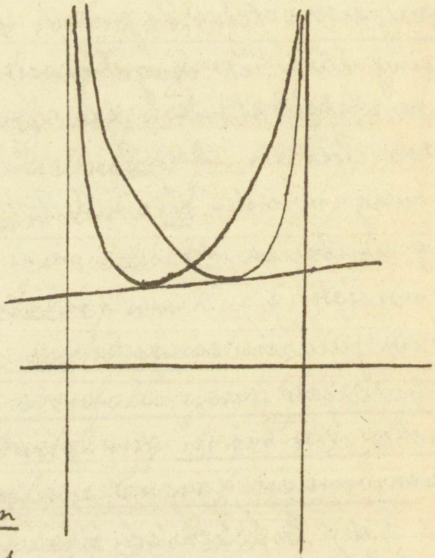
http://rcin.org.pl

sich von e_i bis e_{i+1} längs der X. Axe einfach hinzieht. Werden wir nun wenigstens ein solches einfaches Segment mit einem der 4 zugehörigen „ausgezeichneten" Bedingungssysteme ganz in früherer Weise beim Oscillationstheoreme benutzen dürfen? Ich behaupte, dass dies in der That der Fall ist, u. stütze diese Behauptung auf eine besondere Stetigkeitsbetrachtung.

Ich gehe nämlich darauf aus, dass man jede reelle Zahl λ, welche selbst keine rationale Zahl mit geradem Nenner ist, zwischen 2 andere rationale Zahlen mit geradem Nenner: λ_1 u. λ_2 beliebig enge einschliessen kann. Nun wird für die Erstreckung des einfachen Intervalls zwischen einer Function y, welche einer linearen Differentialglchg mit den Exponenten λ und 0 und irgend welchen vorgegebenen Werthen der accessorischen Parameter genügt, u. einer anderen Function, welche einer linearen Differentialglchg. mit denselben Werthen der accessorischen Parameter, aber den Exponenten $\left.\begin{matrix}\lambda_1\\0\end{matrix}\right\}$, beziehungsweise $\left.\begin{matrix}\lambda_2\\0\end{matrix}\right\}$ genügt, nur ein unmerklicher Unterschied sein. Bei letzterer Function aber liefert das in Rede stehende ausgezeichnete Bedingungssystem eine solche Einschränkung der accessorischen Parameter, wie wir sie für das Oscillationstheorem gebrauchen können; also schliesse ich, dass das auch bei der Differentialglchg. mit den Exponenten $\left.\begin{matrix}\lambda\\0\end{matrix}\right\}$ der Fall ist. —

c) Ich betrachte noch kurz das etwaige Auftreten anders gearteter singulärer Pcte. Natürlich muss die Differentialglchg. bei welcher wir unsere Oscillationsbetrachtungen anstellen, durchaus reelle Coefficienten haben. Wenn dann ein singulärer Pct. regulär sein soll, so braucht darum seine Exponentendifferenz nicht reell zu sein, sie kann auch (wie wir das schon bei der hypergeometrischen Differentialglchg. lernten) rein imaginär sein. Aber eben bei der hypergeometrischen Differentialglchg. haben wir auch gesehen, wie sich die Lösung y bei Annäherung an einen solchen singulären Pct verhält: sie führt unendlich viele Oscillationen aus. Desshalb kann natürlich nicht davon die Rede sein, dass wir für ein Segment, welches sich bis an den singulären Pct. heranzieht, eine bestimmte endliche Zahl von Nullstellen vorschreiben: es geht nicht an, das Oscillationstheorem auf ein solches Segment auszudehnen. – Wie aber ist es, wenn der singuläre Pct irregulär sein soll? Da liegen jedenfalls sehr verschiedene Möglichkeiten vor. Man denke nur, wie das bei dem irregulären Pcte der Bessel'schen Differentialglchg ist, wo sich bei Annäherung von der einen Seite her unendlich viele Oscillationen des y einstellen, von der anderen Seite gar keine. Wir werden uns vorsichtiger Weise dahin aeussern wollen, dass es im Falle eines irregulären singulären Punctes jeweils besonderer Untersuchung bedürfen wird, um zu entscheiden, ob man auf ein Segment, welches sich bis an den singulären Pct. dehnt, das Oscillationstheorem anwenden darf oder nicht.

d) Endlich erwähne ich einer letzten Erweiterung des Oscillationstheorems. Wir unterwarfen unsere $(n-3)$ Parameter ebensovielen auf $(n-3)$ verschiedene Intervalle bezüglichen Bedingungen. Können wir nicht für einzelne Intervalle Doppelbedingungen in Betracht ziehen (wobei dann natürlich die Zahl der Intervalle entsprechend zu verkleineren wäre)? Ich denke daran, für „ausgezeichnete" Segmente Doppelbedingungen in der Art einzuführen, dass ich verlange: nicht nur die Lösung, welche am linken Ende des Segmentes mit y_1 übereinstimmt, soll am rechten Ende mit y_2 stimmen, sondern auch soll die Lösung, die sich am linken Ende wie y_2 verhält, sich am rechten Ende wie y_1 verhalten. Natürlich wird man daneben für die beiden Lösungen innerhalb des Segmentes nur je dieselbe Anzahl von Nullstellen vorschreiben dürfen, diese aber will kürlich wählen können. Ich will an dem Beispiele einer Glchg. mit nur 2 Parametern A, B dies noch näher ausführen. Wir haben da die Hülfsgerade $y = Ax + B$ u. den beiden Hälften unserer Doppelbedingung entsprechend 2 Hüllcurven in Betracht zu ziehen. Ich denke mir nun, dass diese beiden Hüllcurven so gegeneinander liegen, wie in der nebenstehenden Fig., wo die eine an die Ordinate links, die andere an die Ordinate rechts stärker asymptotisch herangedrängt ist. Die beiden Hüllcurven haben in einem solchen Falle in der That eine u. nur eine gemeinsame Tangente, so dass also eindeutige Bestimmtheit der A, B, d. h. Geltung des Oscillationstheorems resultirt. —



5. Von der einfachsten analytischen Anwendung des Oscillationstheorems, nämlich von der Anwendung auf die Theorie der Laméschen Polynome.

Diese „einfachste" analytische Anwendung soll die Einleitung zu ferneren functionentheoretischen Anwendungen bilden, auf die wir erst weiter unten zurückkommen.

Wir handeln zunächst von den Laméschen Polynomen im engeren Sinne u. recapitulieren zunächst die wesentlichen Resultate, die sich bezüglich derselben auf p. 162–177 der Winterautographie abgeleitet finden. Wir gehen dabei von der Differentialglchg. aus: $\frac{d^2y}{dt^2} = (Ax^{n-4} + Bx^{n-5} + \dots)\,y$, wo $t = \int \frac{dx}{2\sqrt{(x-e_1)\dots(x-e_{n-2})}}$ d. h. von einer Differentialglchg. mit $n-2$ singulären Pkten im Endlichen, deren jeder die Exponenten $0, \frac{1}{2}$ besitzt. Für den ebenfalls singulären Pkt. $x = \infty$ kommen dann die Exponenten ρ', ρ'', wo $\rho' + \rho'' = \frac{n-4}{4}$, $\rho'\rho'' = A$. Die Frage ist, ob man die $n-3$ Parameter $A, B, \dots$

so bestimen kañ, dass eine algebraische Particularlösung $E(x)$ der folgenden Form existirt:

$$E(x) = \Pi (x-e_i)^{\varepsilon_i/2} \cdot \Phi_K(x).$$

Hier sollen die ε_i jenachdem 0 oder 1 bedeuten; wir unterscheiden danach verschiedene Typen Laméscher Polynome; – $\Phi_K(x)$ aber (das eigentliche Lamésche Polynom) soll eine rationale ganze Function Kten Grades von x bezeichnen. Wir haben dañ gelernt, dass diese Frage bei beliebig vorgegebenen ε_i, K zu bejahen ist, u. dass jedesmal eine ganze Reihe verschiedener Lösungen existiren, für welche folgende Gesetze gelten:

1) Alle jeweils existirenden $\Phi_K(x)$ sind reell, d. h. haben reelle Coefficienten,

2) Jedes $\Phi_K(x)=0$ ergibt K getreñte reelle Wurzeln, welche zwischen e_1 und e_{n-2} liegen, ohne mit einem der intermediären e zusamenzufallen.

3) Das einzelne $\Phi_K(x)$ ist durch die Art u. Weise eindeutig charakterisirt, wie sich seine Wurzeln auf die $(n-3)$ Intervalle $e_1 e_2, e_2 e_3, \ldots e_{n-3} - e_{n-2}$ vertheilen, u. zwar correspondirt jeder möglichen Vertheilungsweise auch jedesmal ein zugehöriges $\Phi_K(x)$. —

Es wäre nun die Frage, wie weit dieses Resultat vom Oscillationstheorem aus zugänglich ist. Es ist leicht zu sehen, dass dies in der That der Fall ist bis auf einen einzigen später noch zu bezeichnenden Pkt., dass aber dabei die Ueberlegungen gerade in umgekehrter Reihenfolge geordnet werden müssen, wie bei der gewöhnlichen Theorie.

Wir werden nämlich damit begiñen, dass wir die Existenz einer Particularlösung verlangen, welche sich in den $n-2$ singulären Pkten e_i wie $\Pi(x-e_i)^{\varepsilon_i/2}$ verhält u. iñerhalb der $n-3$ zwischen diesen Pkten einfach hinerstreckten Segmente je eine bestim̃te Anzahl von Malen, sagen wir ν_i mal, verschwindet. Wir haben damit für jedes der $n-3$ Segmente ein „ausgezeichnetes" Bedingungssystem

http://rcin.org.pl

vorgeschrieben; das Oscillationstheorem besagt also, dass damit die zugehörige Diff. glchg. vollkomen bestimt ist.

Wir schliessen jetzt ferner, dass das fragliche $E(x) = \Pi(x-e_i)^{\varepsilon_i/2}\,\phi_K(x)$ sein wird, unter $\phi_K(x)$ ein Polynom verstanden. Den $\phi_K(x) = \frac{E(x)}{\Pi(x-e_i)^{\varepsilon_i/2}}$ wird, indem es unserer Diff. gleichung genügt, für alle endlichen Werthe von x stetig u. eindeutig sein, es wird sich überdies bei $x = \infty$ insofern doch der Coëfficient A durch unsere Oscillationsbedingungen als endliche Grösse festgelegt ist, wie eine algebraische Function verhalten.

Aber wie gross ist nun der Grad K dieses Polynoms? Hier ist der Pct, wo die blosse Betrachtung des Oscillationstheorems nicht ausreicht, wo „ergänzende Entwickelungen" verlangt werden, denen wir sogleich Nr. 6 widmen wollen. Es ist nämlich zunächst nur zu sehen, dass $K \geqq \Sigma\nu$ sein muss, keineswegs aber, dass $K = \Sigma\nu$ sein muss. In der That besagt uns das Oscillationstheoren gar nichts drüber, ob nicht $\Phi_K(x)$ möglicherweise auch noch auf den beiden „aeusseren" Intervallen, die zwischen ∞ u. e_1, bez. zwischen e_{n-2} u. ∞ liegen, verschwindet, namentlich aber nichts darüber ob $\phi_K(x) = 0$ nicht möglicherweise complexe Wurzeln hat. – Diese Frage nach dem K, die wir durch ergänzende Betrachtungen lösen müssen, kōnen wir schliesslich als die Frage nach den Exponenten ϱ', ϱ'' des singulären Punctes $x = \infty$ bezeichnen. Wen wir andererseits bestimen, wie oft $\phi_K(x)$ noch auf den beiden äusseren Segmenten verschwindet, so wird damit die Frage nach den Charakteristiken χ, die diesen Segmenten im Sine des vorigen Semesters beizulegen sind, beantwortet sein. –

Noch ein Pct bleibt bei dieser vom Oscillationstheorem ausgehenden Definition der ϕ_K unerledigt. Wir construiren eine gewisse Zahl reeller ϕ_K, aber woher wissen wir, dass wir die Lamésche Glchg. bei geeigneten Werthen der A, B_i nicht auch durch E, resp. ϕ_K mit imaginären Coëfficienten

S. 1. Ausg.

http://rcin.org.pl

befriedigen könen? Es folgt dies natürlich sofort, wen wir beachten, dass die Zahl der reellen Φ_K, die wir construiren, mit dem Grade des algebraischen Problems, welches wir für die Coëfficienten von Φ_K früher aufstellten, übereinstimt. Jedenfalls aber bedarf das Oscillationstheorem, bez. die von ihm ausgehende Entwickelung, auch in dieser Hinsicht der Ergänzung. —

Wir erweitern jetzt die ganze Frage der Laméschen Polynome auf den Fall, wo als Exponenten der Pcte $e_1, e_2, \ldots e_{n-2}$ nicht $1/2$ u. 0 vorgeschrieben sind, sondern beziehungsweise λ_i u. 0, wo die λ_i irgend welche reelle Grössen sein sollen, die wir unbeschadet der Allgemeinheit als positiv voraussetzen könen. Wir schränken die λ_i nur insofern ein, als wir voraussetzen wollen, dass sie nicht ganzzahlig sind; doch geschieht dies nur der Kürze halber, um nicht von dem Auftreten logarithmischer Terme sprechen zu müssen; eine wirkliche Schwierigkeit wird das Auftreten ganzzahliger λ_i wohl nicht mit sich bringen. Unsere Diff. glchg. enthält auch jetzt $n-3$ linear vorkomende Parameter $A, B, \ldots$ wird es möglich sein, dieselben so festzulegen, dass es eine Particularlösung der Form $E = \Pi(x-e_i)^{\varepsilon_i \lambda_i}\Phi_K(x)$ gibt.[2] Die hier auftretenden ε_i, die beliebig gegeben werden sollen, bedeuten wieder 0 oder 1. —

In dieser Hinsicht liegen nun 2 Ansätze vor:

1) Der Ansatz von Stieltjes, über den in der Winterautographie p. 175–177 berichtet ist. Derselbe ist nicht allgemein, sondern bezieht sich nur auf solche Fälle, bei denen $\varepsilon_i \lambda_i < 1$. Für diese Fälle findet Stieltjes genau dieselbe Zahl der Φ_K u. dieselben Theoreme über ihre u. ihrer Wurzeln Realität, wie wir sie vorhin hatten, als alle $\lambda_i = 1/2$ waren. Wird dies Resultat nun auch bleiben, wen nicht mehr alle $\varepsilon_i \lambda_i < 1$? Aus den Betrachtungen von Stieltjes scheint hervorzugehen, dass es dan nicht weiter bestehen kan; doch hat Stieltjes selbst diesen Pct nicht klar gestellt.

http://rcin.org.pl

4) Der vom <u>Oscillationstheorem</u> ausgehende Ansatz. Da scheint es, dass wir ganz unabhängig von den $\varepsilon\lambda_i$ vorgehen kōnen. Indem wir $E = \prod(x-e_i)^{\varepsilon\lambda_i} \cdot \phi_K(x)$ setzen u. nun für ϕ_K im Intervalle $e_1 e_2$ als Zahl der Nullstellen ν', im Intervalle $e_2 e_3$ als Zahl der Nullstellen ν''. . . vorschreiben, wird dadurch, wie früher, über die Parameter der Differentialglchg. eindeutig bestimt, u. man schliesst wieder, dass $\phi_K(x)$ ein Polynom sein muss.

Aber wie lassen sich diese beiden Ansätze, sobald ein $\varepsilon\lambda_i > 1$, mit einander vereinen? Der Ausgleich muss darin liegen, dass wir vom Oscillationstheorem aus nur schliessen kōnen, dass der Grad K des Polynoms $\phi(x) \geqq \sum \nu$ ist, während er sich im Falle von Stieltjes direct $= \sum \nu$ erweist. Ich vermuthe also, dass K, sobald nur ein $\varepsilon_i \lambda_i > 1$ wird, $> \sum \nu$ wird, u. dementsprechend daū $\phi_K(x) = 0$ entweder noch weitere reelle Wurzeln in den beiden „äusseren" Intervallen $e_{n-1} \infty$, $\infty \sim e_1$ oder aber complexe Wurzeln bekomt. Hierüber kaū uns das Oscillationstheorem als solches keine Antwort geben; wir werden wieder ergänzende Betrachtungen verlangen müssen. Da muss sich deū nicht nur zeigen, wie bei gegebenen K es um die Realität der Wurzeln der zugehörigen reellen ϕ_K u. um die Vertheilung der Wurzeln auf die verschiedenen Intervalle bestellt ist, sondern auch, ob es (bei gegebenem K) nur <u>reelle</u> ϕ_K gibt, ob nicht der algebraische Ansatz, durch den wir ϕ_K definiren kōnen, einige complexe ϕ_K liefert. —

Nun noch eine letzte Erweiterung unserer Fragestellung. Statt der $n-1$ Verzweigungsstellen $e_1 \ldots e_{n-2}, \infty$ von denen die letzte unbestimte Exponenten besass, denken wir uns jetzt <u>n</u> Verzweigungstellen $e_1, \ldots e_n$, alle mit bestimten Exponenten $\lambda_i, 0$ gegeben (wo die λ_i wieder beliebige, reelle, positive, nicht ganzzahlige Grössen vorstellen sollen). Natürlich werden wir, weū wir unser dieser einfachen Vorschrift an.

http://rcin.org.pl

schliessen wollen, ohne noch bei $x = \infty$ oder sonstwo einen scheinbar singulären Pct. in Kauf zu nehmen, uns der formentheoretischen Formulirung bedienen müssen. Sei es inzwischen der Kürze halber gestattet, uns trotzdem, etwas ungenau, wie früher auszudrücken. Wir haben in unserer Differentialglchg. jetzt $n-3$ eigentliche accessorische Parameter: Wird es möglich sein, dieselben so festzulegen, dass eine Particularlösung E unserer Differentialglchg. von folgender Form existirt: $E = \prod_1^{n-2} (x-e_i)^{\varepsilon_i \lambda_i} \cdot F(x)$, unter $F(x)$ eine Function verstanden, die bei $e_1 \ldots e_{n-2}$ unverzweigt u. von Null verschieden ist, sofern wir noch vorschreiben, dass F im Intervalle $e_1\, e_2$ ν'mal, im Intervalle $e_2\, e_3$ ν''mal, . . . verschwinden soll? Das Oscillationstheorem besagt, dass das in der That u. nur auf eine Weise möglich ist. Aber darüber hinaus werden wir über $F(x)$ Weiteres wissen wollen. $F(x)$ ist jetzt natürlich kein Polynom, nicht einmal eine eindeutige Function von x, sondern (allgemein zu reden) bei e_{n-1} u. e_n verzweigt. Um einen bestimmten Functionszweig $F(x)$ zu isoliren, werden wir jetzt von $e_{n-1} - e_n$ einen Querschnitt führen, längs dessen übrigens unser $F(x)$ gar nicht reell zu sein braucht. Wir werden vor allen Dingen fragen, wie oft $F(x)$ noch in den Intervallen $e_{n-2} \sim e_{n-1}$ und $e_n \sim e_1$ (in denen es noch reell ist) verschwindet, u. wie oft es übrigens in der complexen Ebene verschwindet? Andererseits werden wir fragen, welches dann die Charakteristik X der Differentialglchg. für das letzte Intervall sein wird? Diese Charakteristik X tritt, wie wir bemerken, an Stelle des Exponenten $-K$, den wir vorhin für den singulären Pct. ∞ (in den damals das Intervall $e_{n-1} \sim e_n$ zusammengeschrumpft war) suchten. Die hierin liegende Verglchg. wird uns später, wie wir hier vorab bemerken, in noch viel prägnanterer Weise entgegentreten, indem wir mit der Exponentendifferenz eines singulären Pctes,

http://rcin.org.pl

d. h. der Grösse eines Winkels in unserem η. Polygon, gradezu die Nichteuklidische Länge einer Polygonseite parallelisiren, also nicht nur die Zahl der Selbstüberschlagungen des Winkels mit der Zahl der Selbstüberschlagungen der Seite.

6). <u>Verwendung des η. Polygon's zur Aufstellung der anzustrebenden Ergänzungstheoreme.</u>

Was Formulirung u. Beweis der unter 5/ verlangten Ergänzungstheoreme angeht, so bietet sich uns naturgemäss die Idee, hierfür jetzt die Polyone der η Ebene heranzuziehen.

In der That haben sich die η. Polygone uns schon 2mal in diesem Sinne als nützlich erwiesen: Das 1. Mal bei der hypergeometrischen Diff. glchg. $(n=3)$, indem wir durch Betrachtung des Kreisbogendreiecks mit den Winkeln $\lambda_1\pi$, $\lambda_2\pi$, $\lambda_3\pi$ die Charakteristiken X der 3 Intervalle $e_1 e_2$, $e_2 e_3$, $e_3 e_1$ explicit festlegten (Sommer 1890, Annalen 37). Dann wieder bei der Lamé'schen Glchg. $n=4$, bei der $x=\infty$ noch unbestimmten Exponenten hatte: wir haben auf p. 217ff. der Winterautographie entwickelt, wie der zu $x=\infty$ gehörige Winkel des η. Polygons u. die Selbstüberschlagungen der Seiten des bez. Kreisbogenvierecks unter einander verknüpft sind u. damit in geometrischer Form die sämtlichen Ergänzungstheoreme festgelegt.

So nun werden wir auch hier die η. Polygone benutzen wollen.

Ich handele zunächst von dem allgemeinen Falle mit $(n-1)$ Verzweigungspcten $e_1, e_2, \ldots e_{n-2}, \infty$. Ausgehend von der besonderen Particularlösung, die da existiren soll: $\mathcal{E} = \Pi(x-e_i)^{\varepsilon_i\lambda_i} \cdot \Phi_\kappa(x)$. wählen wir $\eta = \int \frac{dx}{\Pi(x-e_i)^{1-\lambda_i}\,\mathcal{E}(x)^2} = \int \frac{dx}{\Pi(x-e_i)^{1+(2\varepsilon_i-1)\lambda_i}\,\Phi_\kappa(x)^2}$, und bemerken, dass dieses η die Halbebene x auf ein <u>geradliniges</u> Polygon abbildet, für welches wir folgende Angaben haben:

1) Die Winkel, welche den $n-2$ Ecken $x = e_1, e_2, \ldots e_{n-2}$

zugehören, sind als $\lambda_1\pi, \dots \lambda_{n-2}\pi$ gegeben. dagegen ist der Winkel der letzten Ecke, $x=\infty$, unbestimmt.

2) Aus der Formel für η folgt, dass alle diejenigen Ecken $x=e_i$ im Unendlichen liegen, für welche $\varepsilon_i=1$; die anderen liegen im Endlichen. Ebenso ist aus der Formel leicht abzulesen, ob die Ecke $x=\infty$ in der η: Ebene im Endlichen oder Unendlichen liegt.

3) Die Seite $e_1 e_2$ zieht ν'mal, die Seite $e_2 e_3$ ν''mal, ... durch's Unendliche.

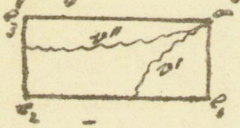
Dem Oscillationstheorem als solchen entnehmen wir, dass es jedenfalls möglich sein muss, für beliebige Werthe der ε_i, λ_i, ν ein geradliniges Polygon dieser Art zu construiren. Die geometrische Discussion aber soll uns darüber aufklären:

4) wie oft nun die beiden letzten Polygonseiten $e_{n-2}\infty$, ∞e_1,

5) wie oft die „Fläche" des Polygons durch's Unendliche zieht, u. 6) wie gross dementsprechend der in der Ecke $x=\infty$ gelegene Winkel ist. Ich glaube nicht, dass es irgend schwer sein kann, diese Fragen allgemein zu beantworten, habe aber leider keine Zeit gehabt, mich hinreichend lange damit zu beschäftigen. —

Wir sprechen ferner von dem Falle, wo n Verzweigungspcte $e_1, e_2, \dots e_n$ jeder mit einem zugehörigen λ_i gegeben sind. Wir setzen da natürlich $\eta=\int\frac{dx}{(x-e_i)^{1+(2\varepsilon_i-1)\lambda_i}\,F(x)^2}$ u. fragen wieder nach der Art des in der η. Ebene gelegenen Polygons. Wir sehen vor allen Dingen, dass $(n-1)$ der n Seiten dieses Polygons, — diejenigen nämlich, welche den Intervallen $e_n e_1, e_1 e_2, \dots\quad e_{n-3} e_{n-2}, e_{n-2} e_{n-1}$ der X. Axe entsprechen — auch wieder gerade Linien sind, die $n$te Seite aber, — die dem Intervalle e_{n-1}, e_n der x: Axe entspricht –, allgemein zu reden ein Kreis ist. Uebrigens denke ich mir, dass es nicht schwer sein wird, die Gestalt dieses Polygons durch eine Art Continuitätsverfahren festzulegen, indem man von dem soeben bestimmten geradlinigen $(n-1)$ Eck ausgeht. Ein Beispiel wird diesen Gedanken genauer feslegen:

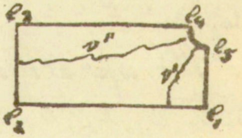
Wir beginnen mit dem geradlinigen Viereck, welches dem Schema $\begin{array}{ccccccc} e_1 & \nu' & e_2 & \nu'' & e_3 & & \infty \\ \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & ? \end{array}$ entspricht (diese Bezeichnungsweise wird an sich verständlich sein). Wir bekommen dasselbe, wenn wir von einem gewöhnlichen Rechteck ausgehen, u. diesem von der einen Ecke aus $\nu'+\nu''$ Halbebenen polar anhängen, vergl. die folgende Fig.:



(worauf dann der Winkel in der Ecke $x=\infty$ den Betrag $\frac{\pi}{2}+2\pi(\nu'+\nu'')$ haben wird).

Von hieraus gehen wir nun folgendermassen zu dem Polygon:

$\begin{array}{ccccccc} e_1 & \nu' & e_2 & \nu'' & e_3 & e_4 & e_5 \\ \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$ Wir schneiden die Ecke $x=\infty$ unseres Rechtecks durch einen kleinen Kreis ab u. bezeichnen die beiden neu dabei entstehenden Ecken mit e_4 und e_5:



Dann aber hängen wir längs der beiden in der Fig. bereits markirten Transversalen ν', bez. ν'' volle Kreisringe an dieses reducirte Fünfeck an.

Wir erkennen: Weder die Seite $e_3\,e_4$, noch $e_5\,e_1$, noch die Fl. des so entstandenen Fünfecks geht durch's Unendliche. Die Seite $e_4\,e_5$ aber hat die Nichteuklidische Länge $(2\nu'+2\nu''+\frac{1}{2})\pi$ (dieselbe Zahl, welche wir vorhin für den Winkel $x=\infty$ fanden). Das heisst dann, rückwärts auf die Diff.glchg. übertragen:

http://rcin.org.pl

$F(x)$ verschwindet weder im Intervall $e_3\, e_4$ noch im Intervall $e_5\, e_1$ (der x. Axe); gleichzeitig ist die Charakteristik X der Intervalls $e_4 - e_5$ gleich $(\nu' + \nu'')$.

7) Von der allgemeinen functionentheoretischen Bedeutung des Oscillationstheorem's. Mi. 5. Aug. 91.

Nachdem wir in 5), 6) nur erst specielle Fälle des Oscillationstheorems functionentheoretisch interpretirt u. entwickelt haben, wird die Frage nach der allgemeinen functionentheoretischen Bedeutung des Theorem's, d. h. nach seiner allgemeinen Bedeutung für das η. Polygon entstehen.

Bleiben wir zunächst bei der ursprünglichen Fassung des Theorems, wo $n-3$ Segmente $x'x''$ der x. Axe in Betracht gezogen sind, für deren jedes eine Particularlösung y existirt, die an beiden Enden des Segmentes verschwindet u. im Inneren je eine vorgeschriebene Anzahl Nullstellen besitzt: keines dieser Segmente wird sich an einen singulären Pct der X-Axe heranziehen. Wir wissen, das dann $n-3$ Abschnitte der Polygonseiten der η. Ebene, ein jeder eine bestimmte Anzahl voller Kreisperipherieen umspannen muss. Und das Oscillationstheorem behauptet, dass bei gegebenen $e_1\, e_2 \ldots e_n$ der x. Ebene das η. Polygon durch das hiermit bezeichnete Verhalten der $(n-3)$ Abschnitte eindeutig festgelegt ist. Offenbar ist hiermit aber direct nicht viel anzufangen, weil die Abschnitte zu den Polygonseiten selbst in keiner direct erkennbaren geometrischen Beziehung stehen. Wir verweilen daher nicht länger bei dieser allgemeinen Formulirung, sondern wenden uns gleich zu den Fällen „ausgezeichneter" Bedingungssysteme, d. h. solcher Segmente, welche je ein Intervall der X. Axe einfach oder mehrfach vollständig überdecken. Wir müssen dabei die Fälle einfacher Ueberdeckung vorweg nehmen; die anderen folgen erst hinterher.

http://rcin.org.pl

8) Von den ausgezeichneten Bedingungssystemen für den Fall einfacher Intervalle.

Unter den n Intervallen $e_1 e_2, e_2 e_3, \dots e_n e_1$ denken wir uns irgend $(n-3)$ herausgegriffen. Für jedes einzelne derselben werden wir dann nach Früherem 4 Bedingungssysteme in Betracht ziehen dürfen. Für jeden der beiden Endpkte e_i, e_{i+1} eines solchen Intervalls können wir nämlich verlangen, dass die von uns im Intervall in Betracht zu ziehende Particularlösung y sich dort wie die eine zugehörige Fundamentallösung $y_1 = (x-e_i)^{\lambda i} \mathfrak{P}_1(x-e_i)$ verhalten soll, oder wie die andere zugehörige Fundamentallösung. Wir werden die 4 solcherweise entstehenden Möglichkeiten kurzweg mit $\overline{y_1 y_1}$, $\overline{y_1 y_2}$, $\overline{y_2 y_1}$, $\overline{y_2 y_2}$ benennen. Ausserdem wird natürlich die Zahl der Nullstellen, ν, vorgeschrieben, die y im Intervalle haben soll. Indem wir für jedes von $n-3$ Intervallen solcherweise ein bestimmtes Bedingungssystem aufstellen, wird die zugehörige Diff. glchg. vollkommen bestimmt sein, u. es ist nun die Frage, wie so hiermit das zugehörige η. Polygon bestimmt ist.

Bemerken wir zunächst, dass in diesem Ansatze die unter 5) benützte Bestimmungsweise als particulärer Fall enthalten ist. Wir hatten damals das Vorhandensein einer Lösung verlangt:

$$\mathcal{E} = \prod^{n-2} (x-e_i)^{\varepsilon i \lambda i} \cdot F(x).$$

Da haben wir in der That für jedes der $n-3$ Intervalle $e_1 e_2, e_2, e_3, \dots \dots e_{n-3} e_{n-2}$ eines der hier in Betracht komenden Bedingungssysteme vor uns. Aber die Particularisation liegt darin, dass wir 1) die betr. $(n-3)$ Intervalle consecutiv genomen haben u. dass wir 2) für jeden Pkt. $e_2, \dots e_{n-3}$ ein u. dasselbe

http://rcin.org.pl

Verhalten der von uns in Betracht zu ziehenden Particularlösung angenommen haben, mögen wir von links oder von rechts an den Pct e_i herangehen. Eben in letzterem Umstande ist es natürlich begründet, dass hier <u>ein u. dieselbe</u> Particularlösung $\mathcal{E}$ in sämtlichen $n-3$ Intervallen die vorzuschreibenden Oscillationsbedingungen befriedigt, während im Allgemeinen bei unserem jetzigen Ansatze in jedem der $n-3$ Intervalle eine eigene Particularlösung in Betracht kamt.

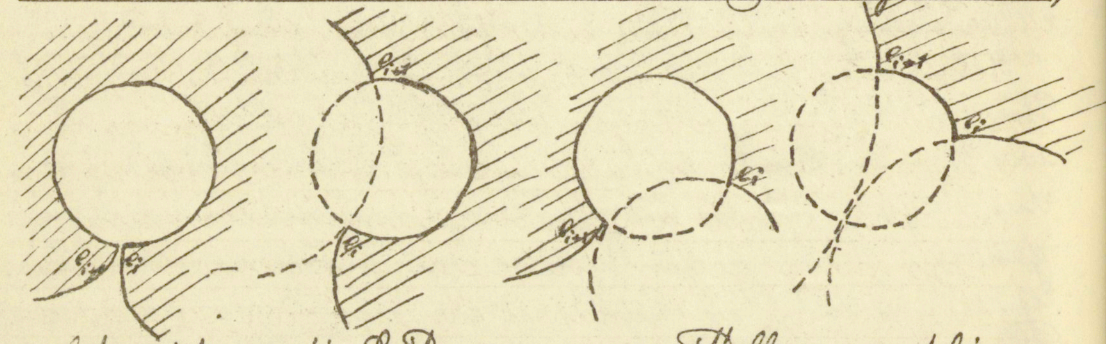
Uebrigens verfahren wir jetzt ganz ähnlich, wie in 5). Um zu verstehen, was die Oscillationsbedingung, die wir dem Intervall $e_i\, e_{i+1}$ auferlegt haben mögen, für das Polygon der η. Ebene besagt, nehmen wir die zugehörige Particularlösung y und bilden uns ihr entsprechend das besondere η: $\eta = \int \frac{dx}{\Pi(x-e_\kappa)^{1-\lambda_\kappa}\cdot y^2}$. Da ist ersichtlich, dass im zugehörigen η. Polygon nicht nur dem Intervalle $e_i\, e_{i+1}$, sondern auch dem voraufgehenden u. dem nachfolgenden Intervalle <u>je eine geradlinige Seite entsprechen wird</u> (ganz dem entsprechend, dass in Nr. 6 die $n-1$ Seiten $e_1\, e_2, \dots e_{n-3}\, e_{n-2}$ alle geradlinig wurden). Ferner sieht man, dass die Ecken $x = e_i, e_{i+1}$ in der η. Ebene <u>im Unendlichen oder im Endlichen liegen werden</u>, jenachdem bei e_i, resp. e_{i+1} die Bedingung γ_1 oder die Bedingung γ_2 vorgeschrieben ist. Endlich ist klar, dass sich die Seite $e_i - e_{i+1}$ noch <u>ν. mal durch's Unendliche hindurch ziehen wird</u>.

Wir dürfen aber jetzt bei diesen Formulirungen nicht stehen bleiben, weil ja nicht dasselbe particuläre <u>η</u> für alle Intervalle benutzt werden kann. Vielmehr müssen wir aussprechen, wie sich die vorstehenden Sätze für

http://rcin.org.pl

ein beliebiges η gestalten, d. h. wie sich dieselben modificiren, wenn wir die geradlinige Fig. einer beliebigen Transformation durch reciproke Radien unterwerfen. Ich will $\lambda_i = \lambda_{i+1} = 1/2$ der Einfachheit halber setzen u. zunächst $\nu = 0$ nehmen. Dann ergeben sich den 4 Fällen $\widehat{y_1 y_1}$, $\widehat{y_1 y_2}$, $\widehat{y_2 y_1}$, $\widehat{y_2 y_2}$ entsprechend offenbar folgende 4 Figuren:

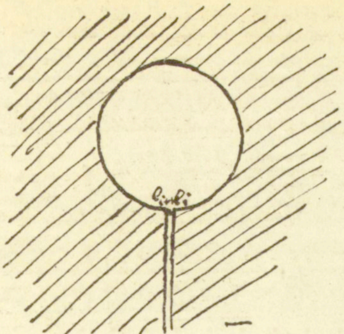
Beidemal berühren sich die beiden Kreisbogenseiten,

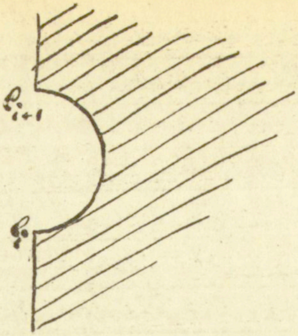


welche sich an die Seite $e_i e_{i+1}$ unmittelbar anschliessen; ob aber die Ecke e_i, resp. e_{i+1} in diesen Berührungspct. oder in den 2ten Schnittpct. der bet. Kreislinie mit dem Kreise $e_i e_{i+1}$ fällt, das hängt davon ab, ob für e_i, resp. e_{i+1} die Bedingung y_1 oder die Bedingung y_2 vorgeschrieben ist. — Will man diese Figuren auf den Fall eines beliebigen ν übertragen, hat man denselben nur noch ν mal die Peripherie des Kreises $e_i e_{i+1}$ hinzuzufügen.

(Nebenbei bemerkt erkennen wir hier, was die Doppelbedingung $(\widehat{y_1 y_1}, \nu)$; $(\widehat{y_2 y_2}, \nu+1)$ resp. die Doppelbedingung $(\widehat{y_1 y_2}, \nu)$; $(\widehat{y_2 y_1}, \nu)$ für unser η. Polygon besagt. Es folgt nämlich im Falle einer solchen Doppelbedingung, dass sich die beiden an $e_i e_{i+1}$ anschliessenden Kreise in 2 Pcten berühren müssen, d. h. dass sie identisch sein müssen. Daher sehen die Figuren, wenn wir zunächst $\nu = 0$ setzen, so aus:

http://rcin.org.pl





worauf man wieder durch Zuführung von ν vollen Kreisperipherien zum Falle eines beliebigen ν aufsteigt).

Doch kehren wir zur Bedeutung des Oscillationstheorems für den bei uns vorliegenden Fall zurück. Offenbar ruht dieselbe jetzt darin, dass unser η. Polygon vollkomen bestimmt sein wird, sobald wir für $n-3$ seiner Seiten eine solche Anordnung gegen die beiden anstossenden Seiten vorschreiben, wie sie (zunächst für den Fall $\nu=0$) durch die 4 Figuren der vorstehenden pag. vorgestellt wird.

Sache der geometrischen Betrachtung wird es wieder sein, hierzu nun die ergänzenden Theoreme zu liefern, welche sich auf die Länge u. insbesondere die Zahl der Selbstüberschlagungen der 3 noch unbekannten Polygonseiten etc. beziehen.

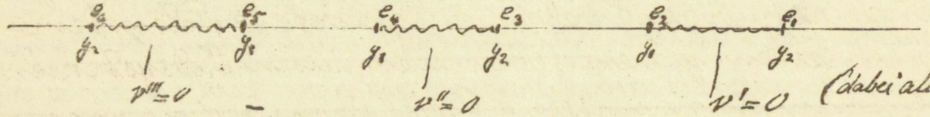
Ich habe dieses Theorem bereits im Winter 89–90 (in der Vorlesung über Laméschen Functionen) entwickelt u. dañ in den Göttinger Nachrichten, März 1890 (p 85 ff.) veröffentlicht. Zugleich gedachte ich damals, indem ich mich auf den Fall $n=6$ u. die ursprüngliche Form des Kreisscheibentheorems beschränkte, seines Zusammenhangs mit eben diesem Kreisscheibentheorem. Indem ich mich dazu wende, diesen Zusamenhang hier ausführlicher darzulegen, stelle ich die zu beweisenden Behauptungen voran:

http://rcin.org.pl

Sofern man sich auf den Fall $n=6$ beschränkt, ergibt sich das Kreisscheibentheorem sowohl in seiner ursprünglichen als in seiner erweiterten Form als specieller Fall der hier entwickelten Deutung des Oscillationstheorems.

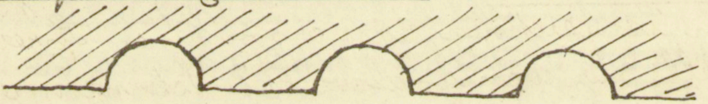
Will man aber auch für $n>6$ die Kreisscheibentheoreme in entsprechender Weise ableiten, so wird man bei Aufstellung des Oscillationstheorems Doppelbedingungen zu Grunde legen müssen.

a) Um bei $n=6$ das einfache Kreisscheibentheorem zu gewiñen, führe ich die folgenden Oscillationsbedingungen ein:



(dabei alle $\lambda_i = \frac{1}{2}$)

Das entstehende Sechseck muss dañ dreimal eine solche Anordnung seiner Kreisbogenseiten zeigen, wie sie uns von der 2., bez. 3. Fig. der p. 178 bekañt ist. Und nun behaupte ich: ein solches Sechseck hat nothwendig die Gestalt der einfachen Kreisscheibe:



Dies implicirt natürlich, dass für die Intervalle $e_1 e_2$ $e_3 e_4$ $e_5 e_6$ eo ipso die complementären Bedingungen zu den zunächst vorgeschriebenen, also $y_1 y_2$ $y_1 y_2$ $y_2 y_1$ erfüllt sein sollen, u. dass die Charakteristiken χ der anderen Intervalle $e_2 e_3$ $e_4 e_5$ $e_6 e_1$ gleichfalls Null sind.

Um dies in widerspruchsfreier Weise abzuleiten, begiñen wir wohl am besten so, dass wir uns eine Kreisscheibe gegeben denken, die wir auf eine Halbebene

http://rcin.org.pl

mit den singulären Stellen $e_1' \dots e_6'$ abbilden. Wen̄ wir dan̄ bei dieser Halbebene die vorgeschriebenen 3 Oscillationsbedingungen einführen, kom̄en wir natürlich zur Kreisscheibe zurück: den̄ die Oscillationsbedingungen sollen doch ein η. Polygon eindeutig festlegen u. sind in der That bei der Kreisscheibe, von der wir ausgehen, erfüllt. Es gibt also jedenfalls Pctsysteme $e_1', \dots e_6'$, bei denen unsere Oscillationsbedingungen eine Kreisscheibe liefern.

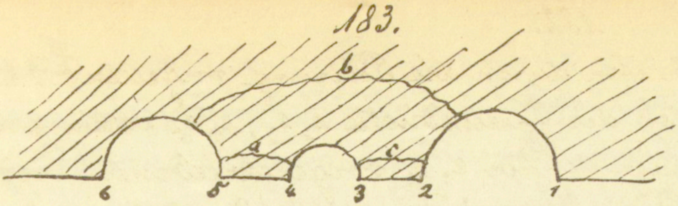
Aber aus dem Pctsystem $e_1', \dots e_6'$ kan̄ jedes andere $e_1 \dots e_6$ continuirlich abgeleitet werden, ohne dass zwischendurch irgendwelche ausgeartete Pctsysteme zu überschreiten wären. Bei allen diesen Pctsystemen halte man nun unsere 3 Oscillationsbedingungen fest, so ist offenbar nur folgendes zu beweisen: Wen̄ bei $e_1', \dots e_6'$ unsere Bedingungen zur Kreisscheibe führen, u. wir ändern dan̄ die $e_1', \dots e_6'$ unendlich wenig ab, so führen unsere Bedingungen gleichfalls wieder zur Kreisscheibe. In der That dürfen wir jetzt letzteres Polygon so zeichnen, dass es von einer Kreisscheibe jedenfalls nur wenig abweicht. Ich nehme dabei $e_1 e_6$ geradlinig durch's Unendliche gehend an, was keine Particularisation ist. Auch müssen dan̄, wegen unserer Bedingungen, $e_1 e_2$, $e_6 e_5$ genaue Halbkreise sein, die nicht über einander greifen, d. h. e_2 u. e_5 müssen auf der Verlängerung des geradlinigen Stückes $e_1 e_6$ so liegen, wie vorstehende Fig. aufweist:

Dan̄ bleibt für die 3 Kreisbogenstücke $e_2 e_3$, $e_3 e_4$, $e_4 e_5$ ein

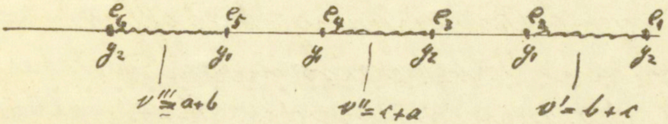
Linienzug, wie wir ihn durch die Schirung angedeutet haben. Aber nun sollen sich die Kreisstücke $e_2 e_3$, $e_4 e_5$ verlängert ein Stück e_n berühren (wegen der für $e_3 e_4$ vorgeschriebenen Oscillationsbedingung). Dies aber wird gar nicht anders möglich, als wenn $e_2 e_3$, $e_4 e_5$ beide auch in die gerade Linie fallen, der bereits $e_1 e_6$ angehört. Damit haben wir aber wieder die Kreisscheibe, w. z. b. w. —

Der so eingeschlagene Beweisgang hat offenbar den Vortheil, dass man von Vornherein nur mit Polygonen zu thun hat, die wenig von der Kreisscheibe abweichen. Wollte man direct vorgehen, so würde man sich einer grossen Zahl schwer übersehbarer Möglichkeiten gegenübersehen; man müsste proben, ob man unseren Oscillationsbedingungen nicht möglicherweise durch 6ecke gerecht werden könnte, bei denen sich die Strecken $e_6 e_1$, $e_2 e_3$, $e_4 e_5$ mannigfach überschlagen, etc. Das angedeutete indirecte Verfahren wird wahrscheinlich auch bei allgemeineren Polygonuntersuchungen mit Vortheil gebraucht werden können. Man beginne also immer mit einem Beispiele der zu construirenden Polygone u. schliesse dann: da die darzustellenden Halbebenen $e_1 \ldots e_n$ ein Continuum bilden, so müssen auch die zugehörigen Polygone aus einander durch Continuität hervorgehen —

Jedenfalls beweisen wir auf diesem Wege für $n = 6$ sofort auch das erweiterte Kreisscheibentheorem. Wir bekommen die allgemeinste „erweiterte" Kreisscheibe aus der „reducirten", wenn wir an letztere längs 3 richtig gewählter Transversalen irgend a, b, c Kreisringe anhängen, wie dies in der Fig. angedeutet ist:



Indem wir eine solche Kreisscheibe auf eine Halbebene x abbilden, finden wir, dass beispielsweise folgende 3 Oscillationsbedingungen befriedigt sind:



Umgekehrt schliessen wir jetzt: wenn die x. Ebene mit ihren Verzweigungsstellen $e_1 \dots e_6$ beliebig gegeben ist u. wir schreiben die genannten Oscillationsbedingungen vor, so kommen wir in der η. Ebene nothwendig zu einer Kreisscheibe von dem zunächst ins Auge gefassten Typus. —

Wollen wir noch bemerken, dass der hiermit für das erweiterte Kreisscheibentheorem geführte Beweis nicht nur formal sondern auch materiell einen Fortschritt vorstellt: denn das erweiterte Theorem hatten wir früher, als wir es zuerst aufstellten, in keiner Weise bewiesen oder auch nur plausibel zu machen gesucht. —

Was jetzt die Fälle $n > 6$ angeht, so sind die Oscillationsbedingungen, welche ich vorschreibe, um zur einfachen Kreisscheibe zu gelangen, diese (wobei man beachte, dass n natürlich als gerade Zahl vorausgesetzt ist):

Für $e_1 e_2$, $e_3 e_4$, $e_5 e_6$ nehme ich wie vorhin $\widehat{\eta_2\eta_1}$, $\widehat{\eta_2\eta_1}$, $\widehat{\eta_1\eta_2}$ und übrigens $\nu = 0$, dann aber für die $\frac{n-6}{2}$ weiteren Intervalle $e_7 e_8$, $e_9 e_{10}$, $\dots e_{n-1}, e_n$ die Doppelbedingungen $\left\{\begin{matrix}\widehat{\eta_1\eta_2}\\ \widehat{\eta_2\eta_1}\end{matrix}\right\}$ mit $\nu = 0$. Das sind insgesamt $n-3$ Bedingungen, die sicher erfüllt sind, wenn man von einer einfachen Kreisscheibe des betr. n ausgeht. Alles Weitere folgt nun wie bei $n = 6$. Auch wird die Betrachtung der erweiterten Kreis-

http://rcin.org.pl

schreibe keine neue Schwierigkeit verursachen. Es ist nur zu prüfen, wie weit unser Oscillationstheorem auch noch für den Fall von Doppelbedingungen zuverlässig ist; wir sind oben über diesen Pkt wohl zu rasch hinweggegangen.

9.) Von den ausgezeichneten Bedingungssystemen für mehrfache Intervalle. Do. 6.

Wir nehmen bei den folgenden Betrachtungen die λ_i vorab alle $= 1/2$. Sei jetzt ein Segment gegeben, welches das Intervall $e_i\, e_{i+1}$ ϱ-fach überdeckt (wo dann natürlich der Anfangspkt mit dem Endpcte zusammenfällt, sobald ϱ eine gerade Zahl ist).

Für ein solches Segment werden wir wieder die 4erlei Randbedingungen $y_1 y_1$, $y_1 y_2$, $y_2 y_1$, $y_2 y_2$ vorschreiben wollen, – daneben dann die Zahl ν der Nullstellen der zugehörigen Particularlösung y im Inneren des Segmentes.

Da ist zunächst klar, dass, wenn wir doch einmal die Idee der mehrfachen Ueberdeckung eines Intervalls aufnehmen, die Bedingungssysteme $y_1 y_2$ u. $y_2 y_1$ ihre selbständige Bedeutung verlieren. In der That brauche ich nur das Intervall 2ϱ mal zu durchlaufen, um je nach der Wahl des Ausgangspctes das Bedingungssystem $(y_1 y_2, 2\nu)$ oder $(y_2 y_2, 2\nu+1)$ vor Augen zu haben.

Wollen wir uns nun zunächst auf das Bedingungssystem $y_1 y_1$ beschränken; wir werden bald sehen, dass damit das Bedingungssystem $y_2 y_2$ von selber miterledigt wird.

Im Übrigen aber überlege man: Durchlaufen wir unser Intervall nicht ϱ mal (wobei wir im Inneren der durchlaufenen Strecke auf ν Nullstellen des zugehörigen y stossen, die zu den beiden Nullstellen am Anfang u.

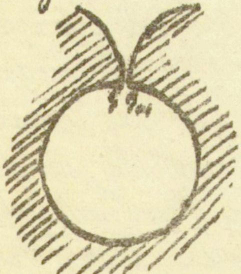
http://rcin.org.pl

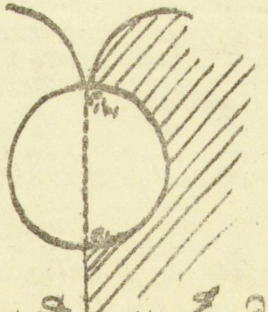
Ende der Strecke hinzutreten), sondern $m\varrho$ mal, so haben wir wieder das Bedingungssystem γ, γ_1 vor uns, nun aber im Inneren des Segmentes $m\nu + m - 1$ Nullstellen. Die Bedingung $\gamma, \gamma_1, \nu, \varrho$ ist also dasselbe wie die Bedingung $\gamma, \gamma_1, m\nu + m - 1, m\varrho$. Aber augenscheinlich kōnen wir den Satz auch umkehren. Daher werden wir, um bei unseren Betrachtungen nicht imer wieder bereits erledigte Fälle behandelen zu wissen, verabreden, dass wir nur solche Zahlenpaare ν, ϱ in Betracht ziehen wollen, bei denen $\nu+1$ u. ϱ relativ prim sind.

Auf Grund dieser Verabredung lassen sich dan diejenigen Fälle, welche durch eine Bedingung γ, γ_2 festgelegt werden kōnen, einfach als die Fälle mit geradem ϱ charakterisiren.

Die Fälle aber, welche wir unter 8) behandelten (die Fälle „einfacher" Intervalle) sind einfach die Fälle $\varrho = 1$ u. $\varrho = 2$. Für unsere neuen Betrachtungen wird also ϱ imer > 2 vorauszusetzen sein.

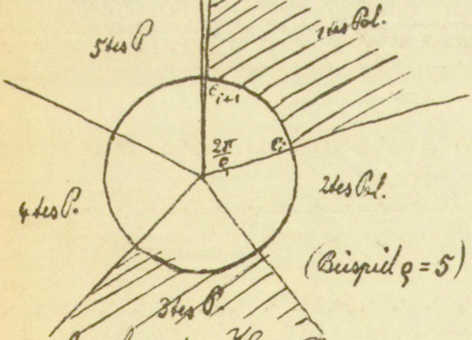
Nach diesen Vorbemerkungen untersuchen wir die geometrische Bedeutung des Bedingungssystems $(\gamma, \gamma_1, \nu, \varrho)$ für das η. Polygon zunächst im Falle $\nu = 0$. Wäre $\varrho = 1$ oder 2, so wissen wir, dass die Gestalt des Polygons die folgende ist:





Das eine Mal fällt Anfangspct z_i u. Endpct z_{i+1} der in Betracht komenden Kreisbogenseite direct zusamen, das 2. Mal fällt der Endpct e_{i+1} mit dem entsprechenden Pcte des an der Seite e_i genomenen Spiegelbildes zusamen. Ist nun $\varrho > 2$, so werden wir jedenfalls auch so beginen müssen (den ϱ Umlaufungen des Intervalls $e_i\ e_{i+2}$ der x-Axe entsprechend), dass wir neben das ursprüngliche Polygon eine Reihe von $\varrho - 1$ Spiegelbildern setzen, die dadurch entstehen, dass wir das ursprüngliche Polygon abwechselnd an den Kanten e_i, e_{i+1} spiegeln. Wir haben so eine Kette von ϱ Polygonen, ein jedes mit einer Kante $e_i\ e_{i+1}$. Die Bedingung ist, dass der 1. Eckpct des 1. Polygons mit dem letzten Eckpct des ϱ^{ten} Polygons zusamen fallen soll, u. zwar in der Weise, dass die ϱ Kanten $e_i\ e_{i+1}$ zusamen genomen einen Linienzug vorstellen, der sich keinmal selbst überschlägt.

Die geometrische Ueberlegung zeigt, dass diese Bedingung darauf hinauskomt, anzunehmen, dass sich die Kanten e_i, e_{i+1} unseres Polygons verlängert unter einem Winkel von $\frac{2\pi}{\varrho}$ schneiden. Wir dürfen diese Kanten unbeschadet der Allgemeinheit als gerade Linien zeichnen. Sobald $\varrho > 2$ liegt deren Schnittpct. natürlich im Endlichen u. wir haben folgende Fig.:



(Beispiel $\varrho = 5$)

Da ist nun das Merkwürdige (den Fällen $\varrho = 1, 2$ der vorigen Seite gegenüber), dass nicht nur der 1. Eckpct (e_{i+1}) des 1^{ten} Polygons mit dem letzten Eckpct. des letzten Polygons zusamenfällt, sondern auch die von dem 1^{ten} Eckpcte auslaufende Kante e_{i+1} mit der bez. Kante des letzten Polygons. Im Hinblick auf die Figuren der pag. 179, die den Doppelbedingungen $\widehat{y_1 y_1}$, $\widehat{y_2 y_2}$, resp. $\widehat{y_1 y_2}$, $\widehat{y_2 y_1}$ entsprechen, werden wir schliessen, dass hier (für $\varrho > 2$), die Bedingung ($\widehat{y_1 y_1}$, $\nu = 0$) von selber die Bedingung ($\widehat{y_2 y_2}$, $\nu = 1$) nach sich gezogen hat. In ganz entsprechender Weise wird für $\varrho > 2$ ganz allgemein $\widehat{y_1 y_1}$, ν nichts Anderes besagen, als $\widehat{y_2 y_2}$, $\nu + 1$, so dass die Randbedingung $\widehat{y_2 y_2}$ hier ihre selbständige Bedeutung verliert. Eben darum haben wir uns nun von vorneherein auf die Besprechung der Bedingung $\widehat{y_1 y_1}$ beschränken dürfen.

Doch kehren wir zur unmittelbaren Betrachtung unserer Fig. zurück. Wir bemerken zunächst, dass wir dieselbe sofort auch für $\nu > 0$ entwerfen können, wir müssen dann statt des Centriwinkels $\frac{2\pi}{\varrho}$ einfach den Centriwinkel $\frac{2\pi(\nu+1)}{\varrho}$ in Anwendung bringen (so dass sich die von den ϱ aufeinanderfolgenden Kanten $e_i e_{i+1}$ überdeckte Kreislinie ν. fach überschlägt, ehe sie sich schliesst). Aber der Betrag dieses Centriwinkels ist doch zugleich im Nichteuklidischen Sinne die Länge $l\pi$ der Polygonseite $e_i e_{i+1}$ selbst. Daher werden wir uns folgendermassen aeusseren dürfen:

Das geometrische Aequivalent des Bedingungssystems $\widehat{y_1 y_2}$, ν, ϱ in der η Ebene ist für $\varrho > 2$ dieses, dass die Nichteuklidische Länge der Kreisbogenseite $e_i e_{i+1}$ durch folgende Formel gegeben sein soll: $l\pi = \frac{2\pi(\nu+1)}{\varrho}$.

Die Bedeutung des Oscillationstheorems aber, die sich einstellt, wenn wir besagtes Bedingungssystem für $n-3$ Intervalle der X. Axe in Anwendung bringen, ist diese,

dass das η Polygon völlig festgelegt ist, sobald wir für $n-3$ seiner Seiten die Nichteuklidischen Maasszahlen vorschreiben: $l_\kappa = \frac{2(\nu_\kappa+1)}{\varrho_\kappa}$ $(\varrho_\kappa > 2)$.

http://rcin.org.pl

Hier sind die l_κ zunächst rationale reelle Brüche; aber es ist klar, dass man auch irrationale Werthe der l_κ als Gränzfälle wird gelten lassen können. Nur ganzzahlige Werthe der l_κ bleiben ausgeschlossen, insofern wir für sie zu den Figuren der p. 185 zurückgeführt werden, bei denen zwar Anfangs. u. End. pct. der Polygonreihe aber nicht Anfangs- u. End-kante zusammenfallen.

Jetzt wird es sich noch handelen, ob wir das schöne, hiermit erreichte Theorem noch von der Bedingung frei machen können, dass die Winkel $\lambda_i \pi$ unseres Polygons rechte Winkel sein sollen. Ich finde gar keine Schwierigkeit, die Figuren u. die Schlussweise der p. 185/86 auf diejenigen Fälle zu übertragen, wo die λ_i reelle rationale Zahlen mit geradem Nenner sind. In der That können wir dann gerade so wie bei $\lambda_i = 1/2$ längs eines Intervalles $e_i\, e_{i+1}$ der X. Axe ς mal hin u. her gehen, wie wir dies früher auseinandersetzten. In der η Ebene aber müssen sich die ς entsprechenden Kantenstücke $e_i\, e_{i+1}$ eben auch wieder zu einem vollen Kreise zusammenreihen. Nur dies ist der Unterschied, dass der Winkel $l\pi$, den die Kanten e_i, e_{i+1} des Polygons verlängert gedacht jetzt mit einander einschliessen u. der nach unseren früheren Verabredungen das Nichteuklidische Maass der Kante $e_i\, e_{i+1}$ selbst vorstellt, jetzt nicht mehr $\frac{2\pi(\nu+1)}{\varsigma}$ sondern ein anderer reeller Bruch ist, dessen Betrag sich trigonometrisch berechnen lässt. — Aber ich sage, dass unser Satz auch auf den Fall solcher λ_i übertragen werden kann, die rational mit ungeradem Nenner oder geradezu irrational sind. In der That ist ja in der Aussage des Satzes gar nicht von dem Hin u. Hergehen längs des Intervalles der X. Axe die Rede; wir gebrauchen das letzteren nur als ein Beweismittel. Es hat ebensogut einen Sinn, den Betrag l_K einer Polygonseite zu geben, wenn die λ_i der angränzenden Winkel rational mit geradem Nenner sind, als wenn sie es nicht sind. Dass aber auch unser Satz über die eindeutige Bestimmtheit des Polygons durch $n-3$ Zahlen l_K dabei bestehen bleibt, schliesse ich wie früher wieder daraus, dass beliebige reelle λ_i durch solche λ_i, welche rational mit geradem Nenner sind, beliebig approximirt werden können. Nur die ganzzahligen λ_i bleiben ausgeschlossen, weil in den Figuren eine Unstetigkeit auftritt, sobald ein λ_i ganzzahlig wird. —

Fassen wir zusammen, so haben wir also den folgenden allgemeinen Satz gewonnen:

Ist die Halbebene x mit ihren singulären Stellen $e_1, e_2 \ldots e_n$ gegeben, u. werden die Maasszahlen $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ der Winkel des η Polygons irgendwie als reelle nicht ganzzahlige Grössen vorgeschrieben, so wird das Polygon eindeutig bestimmt sein, sobald man noch die Maasszahlen $l_1, \ldots l_{n-3}$ von irgend $n-3$ Polygonseiten als reelle nicht ganzzahlige Grössen kennt.

Dieser Satz ist das allgemeinste Resultat, welches hier aus dem Oscillationstheorem abgeleitet werden sollte. Für $n=3$ geht er in den alten Satz über, mit dem wir diese Vorlesungen begannen, dass das Kreisbogendreieck durch seine 3 Winkel $\lambda_1\pi, \lambda_2\pi, \lambda_3\pi$ allein völlig bestimmt ist, womit wir sozusagen einen Maassstab dafür haben, inwiefern wir im Laufe der Vorlesungen weiter gekommen sind. Vielleicht übrigens sollte man den Satz so fassen, dass man den Unterschied der λ u. der l ganz aufhebt, u. also davon spricht, dass irgend $2n-3$ der $2n$ Zahlen λ_i, l_K als reelle, nicht ganzzahlige Grössen gegeben sein sollen, Doch bedarf dies noch der näheren Untersuchung. Man vergleiche hiermit in Beziehung stehende Entwickelungen der Arbeit von Böcher.

10) Rückblick u. Einordg. der erhaltenen Resultate in den Gesamtgedankengang dieser Vorlesung. Fr. 7. Au[g]. 91.

Wen̄ wir das so erhaltene Resultat mit den übrigen Entwickelungen dieser Vorlesung in Verbindung setzen wollen, so haben wir uns der fundamentalen Fragestellung zu erin̄ern, die wir auf p. 28 ff. entwickelt haben. Ist eine Halbebene x mit den auf der reellen Axe befindlichen singulären Stellen $e_1 \ldots e_n$ vorgelegt, so enthält die zugehörige Differentialglchg. für η noch $2n-3$ linear vorkom̄ende Parameter (von denen n auf die Exponentendifferenzen λ_i der singulären Pcte kom̄en). Die allgemeine Frage war, ob wir u. wie wir durch irgendwelche dem η. Polygon aufzuerlegende Bedingungen diese $2n-3$ Parameter eindeutig festlegen kön̄en. In dieser Hinsicht lernten wir nun im Laufe der Vorlesung verschiedene Möglichkeiten ken̄en: das Kreisscheibentheorem u. das hyperbolische Theorem mit ihren Verallgemeinerungen, die geradlinigen Polygone, welche im Falle der Laméschen Polynome auftreten. Unser letztes Theorem bezeichnet eine neue in dieser Hinsicht vorliegende Möglichkeit.

Sollen wir einen gemeinsamen Charakter aller der so gefundenen Theoreme angeben, so ist es nützlich, sich an die früheren Erläuterungen zu erin̄ern (p. 17 ff.), welche dem η. Polygon seinen „Kern" gegenüberstellten. Der Kern war durch $3n$. Maasszahlen charakterisirt: seine n Kantenwinkel, n Seitenwinkel, n Kantenlängen, lauter Grössen, die nur mod. 2π beim Kern in Betracht kom̄en, während beim zugehörigen Polygon die Kantenwinkel, resp. Seitenwinkel (die Eckenwinkel u. Seitenlängen des Polygons) als absolut bestim̄te Grössen erscheinen. Es ist nun für alle unsere Theoreme charakteristisch, dass sie $2n-3$ Bestimmungen für die Maasszahlen des Kerns enthalten u. dann immer noch $2n-3$ ganzzahlige Elemente, die sich auf die absoluten Werthe der beim Polygon auftretenden Maasszahlen beziehen. Es wird überflüssig sein, dies noch ins Einzelne auszuführen. Während bei unserem letzten Theoreme neben den n Kantenwinkeln des Kerns $n-3$ seiner Seitenwinkel als Bestimmungsstücke auftreten, sind es beim hyperbolischen Theorem $n-3$ seiner Kantenlängen (die gleich Null gewählt werden, worauf die übrigen 3 Kantenlängen auch Null sind; vergl. p. 18). Man möchte fragen, ob es nicht auch Theoreme der hier gesuchten Art gibt, bei denen gleichzeitig Kantenwinkel, Seitenwinkel u. Kantenlängen des Kerns als Bestimmungsstücke in Betracht kommen. — Sollen wir dann noch einen Vorausblick auf die analogen ~~Auf~~ Aufgaben werfen, die in Betracht kommen, wenn die singulären Pcte $e_1 \ldots e_n$ nicht mehr auf der X. Axe, sondern beliebig in der X. Ebene liegen, oder wenn gar statt der X. Ebene irgend eine R. Fl. $p > 0$ gesetzt ist, so werden wir etwa Folgendes zu bemerken haben:

Indem wir die R. Fläche u. die n singulären Stellen auf ihr, unseren sonstigen Ideen entsprechend, als gegeben ansehen, haben wir in der η. Diff. glchg., wie wir schon bei Gelegenheit bemerkten, $2n+3p-3$ linear vorkommende Parameter (von denen n auf die Exponentendifferenzen der singulären Pcte kommen). Dieser Diff. glchg. tritt nun zur Seite:

einerseits, dem bisher betrachteten Kern entsprechend, die Gruppe der linearen Substitutionen, welche η erfährt, wenn man auf der Riemann'schen Fl. irgendwelche geschlossene Wege beschreibt, bez. der Inbegriff der bezüglichen erzeugenden Substitutionen;

andererseits, dem Polygon der früheren Betrachtungen coordinirt, der Bereich auf der η. Kugel, auf welchen die in geeigneter Weise zerschnittene R. Fl. abgebildet erscheint, ein Bereich, der den beiden Ufern des einzelnen Schnittes entsprechend jedesmal 2 Kanten aufweist, die durch eine lineare Substitution der Gruppe zusammengeordnet sind.

Um nun die $2n + 3p - 3$ Parameter der Differentialglchg. auf transcendentem Wege festzulegen, wird man jedenfalls wieder zunächst $2n + 3p - 3$ Bedingungen für die Gruppe des η aufführen wollen, und darüber hinaus dann noch $2n + 3p - 3$ ganze Zahlen geben, welche den Bereich, der bei der Gruppe in Betracht kommen soll, näher charakterisiren.

In der That subsumirt sich hierunter, was früher über die Ausdehnung des Kreisscheibentheorems, resp. des hyperbolischen Theorems auf die hier vorliegenden Fälle gesagt wurde.

Indem es natürlich scheint, überhaupt einmal alle die Entwickelungen, die wir für den symetrischen Fall $p = 0$ gemacht haben, auf die allgemeinen hier vorliegenden Voraussetzungen zu übertragen, bietet sich offenbar als 1. neue Frage diese dar:

Wie überträgt sich auf die Fl. (p, n) das Oscillationstheorem?

Dann aber insbesondere:

Wie

Wie überträgt sich die Theorie der Laméschen Polynome? Und was ist das Analogon derjenigen Bedingungssysteme, die wir im symetrischen Falle $p=0$ als „ausgezeichnete" bezeichnet haben?

Ich muss mich heute begnügen, diese Frage zu nennen; ihre Behandlung muss späteren Vorlesungen vorbehalten bleiben.

Im Uebrigen aber muss ich darauf hinweisen, dass es mir in dieser Sommervorlesung mehr um vorläufige Formulirung unbestimmter Ideen, als um Entwickelung bestimmter Theoreme gehandelt hat. Ich bin leider in keiner Weise in der Lage gewesen, die Probleme, die sich mir aufdrängten, bis zu Ende durchzudenken. Auch die Einzelangaben, welche ich gemacht habe, bedürfen vielfach noch der genauen Controle.

---

http://rcin.org.pl

http://rcin.org.pl

Inhaltsangabe. — pag.

Einleitung.

Zur geometrischen Theorie der allgemeinen Kreisbogenpolygone.

Übergang zu den Differentialgleichungen.

Geometrische Ausführungen zum Kreisscheibentheorem, bez. hyperbolischen Theorem.

Zur Entwickelungsgeschichte der automorphen Functionen.

http://rcin.org.pl

II.

GABINET MATEMATYCZNY Towarzystwa Naukowego Warszawskiego
PAŃSTW. INSTYTUT MAT. BIBLIOTEKA
http://rcin.org.pl

http://rcin.org.pl

GABINET MATEMATYCZNY
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego

http://rcin.org.pl

http://rcin.org.pl

http://rcin.org.pl