GEOMETRYA WYKREŚLNA

wraz z zastósowaniem

do teoryi cieniów i wolnéj perspektywy

dla użytku

WYŻSZYCH SZKÓŁ REALNYCH

przez

DR. WIERZBICKIEGO
adjunkta obserwatoryum astronomicznego krakowskiego.

CZĘŚĆ DRUGA
z 17 tablicami.

KRAKÓW.

Nakładem Adolfa Dygasińskiego.

1875.

W drukarni dra L. Gumplowicza pod zarządem Stanisława Gralichowskiego.

SPIS RZECZY

zawartych

w części drugiéj geometryi wykreślnéj.

ROZDZIAŁ I.

O liniach krzywych w ogólności, konstrukcya krzywych rzędu drugiego, cykloid i spiralnych.

ROZDZIAŁ II.

Rzuty linij krzywych, zadania.

ROZDZIAŁ III.

O powierzchniach krzywych w ogólności. Powierzchnie prostokreślne.

ROZDZIAŁ IV.

Powierzchnie wichrowate.

ROZDZIAŁ V.

Powierzchnie obrotowe.

ROZDZIAŁ VI.

Powierzchnie owijalne.

ROZDZIAŁ I.

O liniach krzywych w ogólności, konstrukcya krzywych rzędu drugiego, cykloid i spiralnych.

---

§. 1.

O liniach krzywych w ogólności.

Jak każdą linią prostą uważać możemy jako powstałą przez ruch punktu w jednym a ściśle oznaczonym kierunku, tak znów, jeżeli punkt w ruchu swoim zmienia ciągle i to bez przerw ten kierunek podług pewnego prawa, opisuje wtedy linią, zwaną krótko krzywą *(eine krumme Linie, — une courbe)*. Przy takiém pojęciu powstawania linii bądźto prostéj, bądź krzywéj, punkt sam, jedną lub drugą z nich opisujący, zowie się punktem rodzącym. Jeżeli punkt odbywa ruch swój ciągle na jednéj płaszczyznie, krzywa przezeń opisana zowie się płaską *(eine ebene Krumme, — courbe plane)*, w przeciwnym zaś razie zowie się podwójnie krzywą *(eine gewundene* albo *doppeltgekrümmte Krumme, — courbe à double courbure)*.

Każda linia krzywa może być uważana za figurę złożoną z nieskończenie małych linij prostych, które nazywają się jéj elementami, i wtedy jest ona granicą, do któréj się linia łamana czyli wielokąt prostokreślny, bądźto na niéj opisany, bądź w nią wpisany, bez końca zbliża, jeżeli jego boki ciągle pomniejszamy, a tém samém liczbę ich zwiększamy. I tak np. powiększając ciągle liczbę boków wielokąta w koło wpisanego, boki te, które początkowo były cięciwami koła, stają się wreszcie elementami tegoż, a liczba ich staje się wtedy nieskończenie wielką.

Przedłużywszy którykolwiek z elementów krzywéj w jedną lub obie strony, otrzymamy stąd linią prostą oddalającą się od krzywéj, a mającą z nią tenże element wspólny. Prosta ta zowie się styczną krzywéj *(eine Tangente, — une droite tangente)*; zaś element sam, uważany jako nieskończenie mały, zowie się punktem styczności *(ein Berührungspunkt, — point de contact)*. Pojęcie to linii stycznéj jest, jak widzimy, więcéj ogólne, aniżeli pojęcie, jakie w planimetryi w zastósowaniu do koła podawaném bywa, i podług niego linia prosta może mieć z krzywą tylko jeden punkt wspólny, a przecież nie być jéj styczną, lub téż może dotykać krzywéj w jednym, a przecinać ją w drugim punkcie, czyli może być jéj styczną i sieczną zarazem, jak np. prosta *ab* (Fig. **148**) dotykająca krzywéj w punkcie *a*, i przecinająca takową w punkcie *b*.

Prosta przecinająca krzywą pod kątem prostym, czyli stojąca prostopadle do stycznej przez punkt przecięcia idącéj, nazywa się normalną krzywéj *(eine Normale, — une droite normale)*. Jeżeli krzywa jest płaską, wówczas tylko jedna normalna w każdym jéj punkcie jest możliwą.

Prosta łącząca dwa którekolwiek punkta krzywéj, nazywa się jéj cięciwą *(eine Sehne, — une corde)*. Przy liniach krzywych mających środek, jak np. przy kole, ellipsie itp. cięciwa przechodząca przez tenże, zowie się średnicą *(ein Durchmesser* albo *Diameter, — un diamètre)*. Dwie średnice tak ułożone, że każda z nich połowi cięciwy równoległe do drugiéj, zwią się średnicami sprzężonemi *(conjungirte Diameter, — diamètres conjugués)*, które znów, jeżeli wzajem są do siebie prostopadłe, zowią się osiami *(die Axen, — les axes)* krzywéj.

Jeżeli jakaś krzywa zbliża się ciągle do prostej nie osiągnąwszy jéj atoli nigdzie, wtedy prosta zowie się ledwoniestyczną albo assymptotą *(eine Assymptote, — une* *asymptote)*, i może być uważana za styczną, któréj punkt styczności leży w odległości nieskończenie wielkiéj.

Do krzywéj np. *abcde* (Fig. **149.**) przyłożywszy wzdłuż jéj obwodu nić giętką a nierozciągliwą, sięgającą jednym swym końcem do *a*, zaś drugim umocowaną stale w punkcie *e*, i następnie od obwodu krzywéj *abcde* oddalając koniec *a* téj nici w kierunku ku *m*, i to tak, iżby odwinięta część nici ciągle była wyprężoną, to koniec ten nici czyli punkt *a* opisze nową krzywą *amnop*, która ze względu na krzywą *abcde* zowie się jej rozwijającą (*die Evolvente, — dévellopante*), podczas gdy krzywa dana *abcde* zowie się rozwiniętą (*die Evolute, — dévellopée)* pierwszéj. Ponieważ jak widzimy, w czasie tego odwijania, odwinięta część nici musi zostać ciągle styczną do krzywéj *abcde*, zatém chcąc nakreślić rozwijającą téj ostatniéj, dość jest w punktach *b,c,d,e,* jak najbliżéj siebie na niéj obranych poprowadzić styczne $bm =$ łuk. ab, $cn =$ łuk. ac, $od =$ łuk. da itd., a następnie końce tych stycznych czyli punkta *a, m, n, o* i *p* ze sobą krzywą ciągłą połączyć. Ponieważ następnie, każda styczna do rozwiniętéj, a mianowicie jéj część zawarta między punktem styczności a linią rozwijającą *amnop*, jest równa odwiniętéj części krzywéj *abcde*, wypada stąd, że jeżeli krzywa dana jest ograniczoną, to styczna *ep* w ostatnim jéj punkcie tj. *e* poprowadzona, równa się co do długości samejże krzywej danej, i to z tém większą dokładnością, im więcéj punktów pośrednich między punktami *a* i *e* na krzywéj *abcde* obraliśmy. Konstrukcya ta ostatnia zowie się wyprostowaniem albo rektyfikacyą krzywéj (*die Rectification, — une rectification)*. Zrektyfikować krzywą znaczy to więc, znaleść prostą równą w przybliżeniu co do długości danéj krzywej, co albo uskutecznia się przez poprzednie wykreślenie jej rozwijającej, albo téż co krócéj, zwłaszcza jeżeli chodzi o samą rektyfikacyą, przenosząc za pomocą cyrkla na prostą gdziekolwiek nakreśloną, części tej krzywéj o ile można jak najmniejsze, tj. takie, któreby bez popełnienia wielkiéj niedokładności można było uważać za linie proste.

§. 2.

Konstrukcya linij stycznych i normalnych do krzywych płaskich w ogólności.

Przy prowadzeniu linij stycznych do linij krzywych najczęściéj zdarzyć się mogące wypadki są następujące: 1) dany jest punkt na krzywéj, czyli punkt styczności; 2) dany jest punkt zewnątrz krzywej, a przezeń poprowadzić mamy styczną, lub wreszcie 3) daną jest prosta, do której styczna krzywej ma być równoległą.

Jeżeli linia krzywa znaną jest ze swoich własności geometrycznych, wówczas łatwo jest znaleść sposób, w jaki w każdym z powyższych trzech przypadków styczna do niéj przez geometryczną konstrukcyą poprowadzoną być może. Jeżeli zaś danym jest obwód jakiejś krzywéj bez bliższego oznaczenia jéj własności, wówczas przez dokładne przyłożenie liniału wyznaczyć można kierunek stycznéj z taką ścisłością, jaka przy wszystkich konstrukcyach graficznych wymaganą i możliwą być może.

Inaczéj atoli ma się z punktem styczności, którego wyznaczenie w tym razie, mimo częstokroć wielkiéj jego ważności, z bardzo małą dokładnością uskutecznioném być może, zwłaszcza tam, gdzie z powodu niezbyt wydatnéj krzywizny linii krzywéj, styczna do niéj poprowadzona nie w jednym punkcie, ale w pewnéj części obwodu téjże krzywéj dotykać się zdaje. W przypadkach takich do wyznaczenia punktu styczności przynajmniéj z przybliżoną dokładnością, używa się tak zwanych krzywych pomocniczych. I tak:

Mając np. do krzywéj *MN* (Fig. **150**) poprowadzić styczną przez punkt *O* dany zewnątrz, prowadzimy przez tenże punkt kilka prostych przecinających krzywą daną, i części tych siecznych zawarte między ramionami krzywéj, czyli cięciwy *ab, cd, ef* itd. dzielimy w punktach *g, h, k* na połowę z połączenia tych punktów podziału krzywą ciągłą, otrzymamy krzywą pomocniczą *xy*, z przecięcia się zaś téjże z krzywą daną otrzymamy punkt *P*, który będzie punktem styczności dla stycznej szukanéj. Skoro bowiem krzywa pomocnicza *xy* przechodzi przez środki cięciw, punkt P zatém jest także środkiem cięciwy w tém miejscu poprowadzonéj; że zaś cięciwa ta jest tak małą, iż oba jéj końce zeszły się z sobą, czyli punkta przecięcia się odpowiednéj siecznej z krzywą daną zbliżyły się do siebie nieskończenie, sieczna więc ta na mocy tego stała się styczną, zaś punkt P punktem styczności.

Gdyby krzywa pomocnicza spotykała się z krzywą daną w dwóch lub więcéj punktach, to wtedy i stycznych do krzywej poprowadzić się mających, byłoby dwie lub więcéj.

Mając do krzywej np. MN (Fig. **151**.) poprowadzić styczną równolegle do prostéj danéj AB i punkt styczności wyznaczyć, prowadzimy szereg cięciw równoległych do AB, połowimy każdą z nich, i punkta podziału krzywą ciągłą xy ze sobą łączymy, a punkt P, w którym taż krzywa pomocnicza xy spotyka krzywą daną, będzie punktem styczności stycznéj żądanéj.

Ponieważ przy prowadzeniu linii normalnéj do lini krzywéj, również najczęściéj zdarzają się przypadki takie same, jakieśmy dla stycznéj na początku tego §fu przytoczyli, takowe więc tu tylko rozbieramy. I tak:

1) Jeżeli danym jest na krzywéj punkt, przez który normalna ma przechodzić, wówczas najprzód przez punkt ten prowadzimy styczną do krzywéj, a prosta prostopadle do téj stycznéj w punkcie danym poprowadzona, będzie normalną żądaną.
2) Jeżeli danym jest punkt zewnątrz krzywéj, i przezeń poprowadzić mamy normalną téjże, a co ważniejsza, spodek normalnéj o ile można, z jak największą dokładnością na krzywéj wyznaczyć, wówczas znów użyć można krzywéj, pomocniczéj; a mianowicie, z punktu O (Fig. **152**) danego zewnątrz krzywéj MN, nakreślamy kilka łuków dowolnym promieniem, byle przecinających krzywą daną; części tych łuków, zawarte między ramionami krzywéj danéj, połowimy w punktach g, h, k itd., i takowe łączymy z sobą krzywą ciągłą, a otrzymamy krzywą pomocniczą xy spotykającą krzywą MN w punkcie P, który połączony z punktem O da nam normalną żądaną

Skoro bowiem krzywa pomocnicza połowi wszystkie z punktu O zatoczone łuki, połowi zatém i łuk najmniejszy aPb tuż około P przechodzący, który z powodu swéj małości uważać można za prostą czyli cięciwę odpowiedniego koła; że zaś każda prosta łącząca środek koła ze środkiem cięciwy, jest do téj ostatniéj prostopadłą, prosta więc OP będąc prostopadłą do ab, jest tém samém normalną krzywéj danéj, a punkt P jéj spodkiem.

3) Jeżeli równolegle do prostéj danéj poprowadzić mamy normalną do krzywéj linii, wówczas prowadzimy najprzód gdziekolwiek prostą prostopadłą do prostéj danéj, równolegle zaś do téj prostopadłéj kreślimy styczną do krzywéj danéj, a punkt styczności téj stycznéj będzie spodkiem normalnéj szukanéj.

§. 3.

Krzywe rzędu drugiego. Ellipsa.

W szeregu licznych krzywych płaskich znanych z prawa ich rodzenia, a z których tylko niektóre ważniejsze, częstego w praktyce i innych umiejętnościach użytku i zastósowania, tutaj przejść zamierzamy, pierwsze miejsce bez wątpienia zajmują prócz koła, tak zwane przecięcia stożkowe, tj. ellipsa, parabola i hyperbola. Nie wdając się w umiejętne ich, jakotéż i innych krzywych traktowanie, rzecz ta bowiem jest działem geometryi analitycznéj, wskażemy tu tylko sposoby ich konstrukcyi i cechy pokrewieństwa między niemi, i to jeszcze ograniczając się o ile możności na rzeczach niezbędnych tj. takich, które przy dalszym postępie w naszym przedmiocie pożytecznemi lub nieodzownemi być nam mogą.

Ellipsa.

Krzywa zamknięta posiadająca tę własność, że summa odległości każdego jej punktu od dwóch punktów stałych jest stałą i niezmienną, zowie się ellipsą.

Taką krzywą przedstawia nam krzywa $ABCD$ (Fig. **153**.) Punkta stałe oznaczone tam przez F i F_1 zowią się o g n i -

skami ellipsy *(die Brennpunkte, — les foyers)*. Ilość stałą i niezmienną zwyż rzeczoną, a równającą się summie odległości każdego punktu téj krzywéj od obu ognisk, oznacza się zwykle w matematyce przez $2a$, a więc dla punktu np. S obranego gdziekolwiek na ellipsie jest $FS+F_1S=2a$. Odległości te FS i F_1S zowią się promieniami wodzącymi *(die Leitstrahlen,—rayons vecteurs)* punktu S. Punkt O leżący w środku między ogniskami, zwie się środkiem, zaś odległość $OF=OF_1$ tego środka od któregokolwiek z ognisk, zowie się mimośrodem ellipsy *(die Excentricität, — l'excentricité)*. Każda prosta przechodząca przez środek ellipsy, zwie się jéj średnicą, i jest w tym punkcie podzieloną na dwie połowy. Największą z tych średnic jest AB, tj. przechodząca przez oba ogniska, i zowie się ona osią wielką *(die grosse Axe, — le grand axe)*, podczas gdy najmniejsza CD zowie się osią małą *(die kleine Axe, — le petit axe)*, i jest zawsze prostopadłą w środku ellipsy do osi wielkiéj. Tę oś małą oznaczamy zwykle przez $2b$. Nareszcie punkta skrajne obu osi tj. A, B, C i D, zwią się wierzchołkami ellipsy.

Prócz rzeczonéj na początku własności ellipsy, a którą jako definicyę cechującą tę krzywą uważać możemy, ważne nam jeszcze i późniéj potrzebne będą następujące, zaczerpnięte z geometryi analitycznéj:

A) Ponieważ w ellipsie odległości ognisk F i F_1 od jéj wierzchołków A i B są sobie równe tj. $AF=BF_1$, zatém dla punktu A, jako leżącego na ellipsie, mamy $AF+AF_1=2a$ czyli $AF+BF=2a$, czyli jeszcze $AB=2a$, tj. że oś wielka ellipsy równa się zawsze ilości stałéj danéj, a następnie, że summa promieni wodzących dla każdego punktu ellipsy równa się osi wielkiéj.

B) Na osi wielkiéj AB zatoczywszy półkole, i przez punkt d na ellipsie obrany poprowadziwszy prostopadłą $rs \perp AB$, mamy $sd : sr = OD : OE = OD : OA$ tj. ponieważ w geometryi anal. linie sd i sr nazywają się przystawami punktu d i r (linia zaś Os ich odcinkiem, biorąc proste AB i CE za osie współrzędnych, zaś punkt O za ich początek), zatém przystawa ellipsy tak się ma do odpowiedniéj przystawy koła, jak się ma połowa osi małéj do połowy osi wielkiéj.

C) Do punktu np. S wziętego na ellipsie, poprowadziwszy promienie wodzące, takowe ze styczną QR i normalną SM przez tenże punkt poprowadzoną, tworzą kąty równe tj. kąt $FSQ = F_1SR$, jakotéż kąt $FSM = F_1SM$.

Na mocy tych kilku, z pomiędzy wielu innych, przytoczonych tu własności ellipsy, jesteśmy w stanie wykonać konstrukcyę zadań następujących:

Żadanie 1. *Nakreślić ellipsę, mając daną jéj oś wielką i oba ogniska.*

Pierwszy sposób. Niech F i F_1 (Fig. **154**.) będą danymi ogniskami, AB osią wielką daną, a więc punkt O środkiem ellipsy szukanéj. Między F i O obrawszy dowolne punkta *1, 2, 3.....*, następnie promieniem $A1$ z F i F_1 zataczamy cztery łuki i takowe przecinamy łukami z tychże punktów promieniem $B1$ zatoczonymi, skąd otrzymamy cztéry punkta m do ellipsy należące, summa bowiem promieni wodzących każdego z nich jest równa $AB = 2a$. Daléj z punktów F i F_1 zataczamy znów cztéry łuki promieniem $A2$, przecinamy je łukami promienia $B2$, a otrzymamy znów cztery punkta n, i tak samo postępujemy daléj. Nareszcie z F i F_1 zatoczywszy łuki promieniem AO, otrzymamy z ich przecięcia punkta C i D, czyli końce osi małéj. Wszystkie otrzymane w ten sposób punkta łączymy nakoniec należycie ze sobą linią krzywą, która będzie żądaną ellipsą, i to tém dokładniejszą, im więcéj punktów takich wyznaczyliśmy.

Drugi sposób. W ogniskach danych F i F_1 wbijmy dwie szpilki i do nich umocujmy nić, któréjby długość między obiema szpilkami zawarta, równała się AB tj. osi wielkiéj danéj. To mając, wyprężamy nić z pomocą np. ołówka tak, iżby przez to utworzył się trójkąt, którego podstawą będzie odległość obu ognisk, dwa zaś inne boki będą utworzone przez wyprężoną nić, a następnie posuwamy ołówkiem na papierze w jednę stronę (ale bacząc, by nić była bez przerwy wyprężoną), dopóki nie wrócimy do punktu, z któregośmy z ołówkiem wyszli. Krzywa tym sposobem ołówkiem zakreślona, będzie, jak łatwo pojąć, ellipsą.

Zadanie 2. *Nakreślić ellipsę, mając dane obie jéj osie.*

Pierwszy sposób. Mając dane obie osie AB i CD (Fig. **155.**), kreślimy je najprzód prostopadle do siebie, i to tak, iżby było $OA = OB$, zaś $OC = OB$, a następnie ze środka O promieniami równymi połowom osi danych zataczamy dwa koła współśrodkowe. To mając, prowadzimy gdziekolwiek promień Om, który przetnie koło mniejsze w punkcie n. Przez ten punkt kreślimy równoległą do osi wielkiéj tj. do OA, zaś przez m równoległą do osi małéj czyli do CD, a te dwie proste przetną się w punkcie r, który będzie punktem do ellipsy należącym. Skoro bowiem, jak z figury widoczna, jest $mp : rp = Om : On = OA : OC$, punkt zatém r odpowiada własności ellipsy pod B) powyżéj przywiedzionéj.

Prowadząc następnie więcéj takich promieni, i postępując daléj jak poprzednio, otrzymamy więcéj punktów ellipsy szukanéj, które wreszcie połączyć z sobą trzeba należycie.

Drugi sposób. Nakreśliwszy jak poprzednio obie osie dane AB i CD (Fig. **156.**), odcinamy na małéj linijce wyciętéj z drzewa, papieru lub karty, począwszy od jednego jéj końca np. s część $sm = OA$, zaś $sn = OC$. Następnie przyłożywszy tę linijkę do osi danych tak, iżby punkt m leżał na osi małéj, zaś n na osi wielkiéj, i poruszając ją we wszystkie strony, tak jednak, iżby ani punkt m z osi małéj, ani n z osi wielkiéj nie zeszedł, to w czasie tego ruchu punkt s opisze nam ellipsę, którą nakreślimy, znacząc ołówkiem jak najwięcéj miejsc, w których się punkt s w czasie tegoż ruchu znajduje. Skoro bowiem z m zatoczymy koło promieniem sm, i na jego średnicy równoległéj do OA odetniemy $mp = Or$ jako odcinek, to sp będzie przystawą koła, zaś sr przystawą ellipsy; że zaś $sp : sr = sm : sn = OA : OC$, zatém punkt s odpowiadając własności ellipsy pod B) przytoczonéj, jest punktem ellipsy szukanéj.

Zadanie 3. *Nakreślić ellipsę, mając daną jednę oś i punkt do obwodu ellipsy należący.*

Mając daną np. oś AB i punkt s do ellipsy należący (Fig. **156.**), w środku osi AB wystawiamy do niéj prostopadłą, a następnie promieniem OA z punktu s zataczamy łuk ef, który przetnie się z CD w punkcie m; punkt ten m połączywszy z punktem s, otrzymamy stąd punkt n, poczem reszta konstrukcyi już widoczna i znana.

Zadanie 4. *Mając daną ellipsę, znaleść jéj środek, osie i ogniska.*

Aby znaleść najprzód środek danéj ellipsy, prowadzimy gdziekolwiek dwie cięciwy do siebie równoległe, połowimy takowe, a prosta przez ich środki idąca, będzie średnicą, środek zaś téjże będzie środkiem ellipsy. Z tak znalezionego środka zataczamy następnie dowolnym promieniem koło, byle przecinające ellipsę w czterech punktach, i na cięciwy łączące po dwa z tych punktów, spuszczamy ze środka ellipsy prostopadłe, a te ostatnie będą osiami szukanemi. Nareszcie z końca osi małéj zatoczywszy łuk promieniem równym połowie osi wielkiéj, ten przetnie też oś wielką w dwóch punktach, które będą ogniskami szukanemi.

Zadanie 5. *Przez punkt dany na ellipsie poprowadzić do niéj styczną.*

Stósownie do własności ellipsy pod *C)* przytoczonéj, łączymy punkt dany z ogniskami, i kąt stąd otrzymany między promieniami wodzącymi dzielimy na dwie równe części, to linia dzieląca będzie normalną ellipsy w punkcie danym, — do któréj przez tenże punkt poprowadziwszy prostopadłą, ta będzie styczną żądaną. Albo, przedłużywszy jeden z promieni wodzących na zewnątrz ellipsy, dzielimy kąt między przedłużeniem tém a drugim promieniem wodzącym zawarty na dwie równe części, a linia dzieląca będzie styczną żądaną.

Zadanie 6. *Przez punkt dany zewnątrz ellipsy poprowadzić do niéj styczne.*

Mamy dany punkt O (Fig. **157.**), i ellipsę daną. Aby przez ten punkt poprowadzić styczne, zataczamy z niego jako środka łuk aF_1b promieniem równym odległości jego od jednego z ognisk, a więc promieniem OF_1; następnie z drugiego ogniska tj. F, promieniem równym osi wielkiéj zataczamy łuk drugi, który przetnie się z pierwszym w punkcie M i N. Punkta te łączymy z F, a proste stąd otrzymane przetną ellipsę w punktach R i S, które będą punktami styczności. Jakoż, ponieważ $MR+RF=AB=2a$, tudzież $RF_1+RF=2a$, zatém $MR=RF_1$, czyli trójkąt MRF_1 jest równoramienny. Że zaś i trójkąt OMF_1 jest równoramienny, prosta zatem OR dzieli kąt MRF_1 na dwie połowy, — skąd wypada, że także kąt $ORF_1=FRX$, co odpowiada zupełnie własności ellipsy pod $C)$ podanéj.

Zadanie 7. *Równolegle do prostéj danéj poprowadzić styczne do ellipsy.*

Kreślimy cięciwę równoległą do prostéj danéj i środek jéj łączymy ze środkiem ellipsy prostą, która w przedłużeniu przetnie ellipsę w dwóch punktach. Przez te punkta poprowadziwszy dwie proste, obie równolegle do prostéj danéj, otrzymamamy stąd dwie styczne żądane. Gdyby środek ellipsy nie był dany, wówczas zamiast jednéj, prowadzimy dwie cięciwy równoległe do prostéj danéj, a daléj postępujemy jak poprzednio.

Zadanie 8. Mając daną styczną do ellipsy, wyznaczyć jéj punkt styczności.

§ 4.

Parabola.

Krzywa posiadająca tę własność, że każden z jéj punktów jest równooddalony od prostéj stałéj i punktu stałego, zowie się parabolą.

Taką krzywą przedstawia nam krzywa XAY (Fig. **158**), gdzie prostą stałą jest MN, zwana kierownicą (die Leitlinie, — directrice), zaś punktem stałym jest F zwany ogniskiem paraboli. Prosta AZ zowie się osią paraboli, prostopadła do niéj, w ognisku poprowadzona tj. CD zwie się parametrem *(ein Parameter, — un paramétre)* punkt zaś A wierzchołkiem paraboli.

Poprowadziwszy gdziekolwiek dwie lub więcéj cięciw do siebie równoległych i środki ich ze sobą połączywszy, otrzymamy stąd prostą równoległą do osi, zwaną średnicą paraboli.

Prócz powyższéj własności paraboli, zapamiętać nam należy jeszcze następujące:

a) Wierzchołek A leży w środku między ogniskiem a kierownicą, a odległość jego od obojga z nich równa się $1/4$ parametru, tj. $AF = AB = 1/4\, CD$.

b) Przystawa każdego punktu na paraboli obranego, jest średnio-geometrycznie proporcyonalną między odpowiadającym jéj odcinkiem (licząc od wierzchołka) a parametrem paraboli, np. $RS^2 = AS \times CD$.

c) W paraboli wszystkie średnice są równoległe do siebie i do osi.

d) Styczna lub normalna do paraboli tworzy z promieniem wodzącym punktu styczności i średnicą przez tenże punkt poprowadzoną, kąty równe, tj. kąt $TOF = GOK$ zaś $FOL = LOG$.

Zadanie 9. *Nakreślić parabolę, mając daną jéj kierownicę i ognisko.*

Pierwszy sposób: Dana jest kierownica MN (Fig. **159**) i ognisko F. Aby z tych danych nakreślić parabolę, prowadzimy najprzód przez F prostopadłą DX do MN, a takowa będzie osią, zaś punkt A wzięty w środku DF, będzie wierzchołkiem paraboli. Aby otrzymać więcéj jéj punktów, obieramy na osi AX punkta *1, 2, 3, 4...*, przez nie prowadzimy prostopadłe do osi, i takowe przecinamy w dwóch punktach łukami zatoczonymi z punktu F promieniem równym odległości każdéj z tych prostopadłych od kierownicy, czyli od punktu D, (a więc np. przez *3* prowadzimy prostopadłą do osi i przecinamy ją łukiem promienia $D3$). Otrzymamy stąd punkta *a,b,c,d,e,f...*, które, jak łatwo dowieść, będą punktami do paraboli szukanéj należącymi, potrzeba je tylko połączyć z sobą należycie.

Drugi sposób: Do kierownicy MN przykładamy linią *mn* (Fig. **160**) wraz z ekierką prostokątną *prs,* wzdłuż *mn* przesuwać się dającą. Przy wierzchołku *r* mocujemy na ekierce nić długości boku *rs,* drugim zaś końcem utwierdzamy ją w danym ognisku F. Wyprężywszy następnie tę nić ołówkiem tak, iżby tenże dotykał się boku *rs,* i przesuwając ekierkę wzdłuż *mn,* a z ołówkiem posuwając się ciągle za ekierką, to jak łatwo zrozumieć, ołówek zakreśli nam krzywą żądaną tj. parabolę.

Zadanie 10. *Nakreślić parabolę, mając dany jéj wierzchołek i ognisko, albo mając dane ognisko i parameter.*

Oba te zadania dadzą się sprowadzić łatwo na poprzedzające, pamiętając o własności paraboli pod *A)* wyrażonéj.

Zadanie 11. *Nakreślić parabolę, mając daną jéj oś, wierzchołek i długość parametru.*

Pierwszy sposób. Od danego wierzchołka odciąwszy na osi w jednę i drugą stronę $^1/_4$ danego parametru, otrzymamy stąd dwa punkta, z których jeden będzie ogniskiem paraboli, w drugim zaś poprowadzona prostopadła do osi, będzie kierownicą, — a to mając, postępujemy daléj jak przy Zad. 9.

Drugi sposób. Na danéj osi AX (Fig. **161**) od wierzchołka odcinamy część AB równą danemu parametrowi i promieniem $AO=OB$ z punktu O zataczamy okrąg koła. Następnie przez punkt C obrany gdziekolwiek na średnicy AB prowadzimy do téjże prostopadłą, która przetnie koło w punkcie m. Połączywszy wreszcie punkt m z A i długość tę Am odciąwszy na prostopadłéj przez C poprowadzonéj po obu stronach punktu C tj. $CM=CN=AM$, otrzymamy stąd punkta M i N należące do szukanéj paraboli, którą nakreślimy, poszukawszy w ten sam sposób więcéj takich punktów. Konstrukcya ta polega na własności paraboli pod *B)* podanéj, gdyż $MC^2=AM^2=AB\times AC$.

Zadanie 12. *Mając daną parabolę, znaleść jéj oś.*

Poprowadziwszy między ramionami danéj paraboli dwie cięciwy do siebie równoległe, prosta łącząca środki tychże cięciw będzie średnicą paraboli; do średnicy téj następnie poprowadziwszy gdziebądź cięciwę prostopadłą, a przez środek téjże prostą równoległą do znalezionéj poprzednio średnicy, prosta ta będzie osią szukaną. Sposób ten jest wynikiem własności paraboli pod *C)* podanéj.

Zadanie 13. *Mając daną parabolę, znaleść wielkość jéj parametru.*

Przez wierzchołek A danéj paraboli (Fig. **162**) prowadzimy jakkolwiek cięciwę np. AC, do niéj zaś prostopadłą CD;

powstanie stąd trójkąt prostokątny *ACD,* w którym z wierzchołka *C* spuściwszy na oś prostopadłą *CG,* ta na jego podstawie odetnie część *GD* równą szukanemu parametrowi.

Zadanie 14. *Mając daną parabolę, znaleść jéj ognisko i kierownicę.*

Znalazłszy najprzód długość parametru *GD* (Fig. **162**) sposobem podanym w Zad. poprzedzającem, a następnie odciąwszy $AF=AK=\frac{1}{4}GD$, otrzymamy stąd punkt *F* jako ognisko i punkt *K,* przez który poprowadzona prosta *MN* prostopadle do osi *AX,* będzie kierownicą téj paraboli.

Zadanie 15. *Przez punkt dany na paraboli poprowadzić do niéj styczną lub normalną.*

Punkt dany na paraboli połączywszy z ogniskiem, a następnie przezeń poprowadziwszy równoległą do osi paraboli, powstaną stąd dwa kąty, z których dwusieczna jednego będzie styczną, zaś dwusieczna drugiego będzie normalną paraboli.

Zadanie 16. *Przez punkt dany zewnątrz paraboli poprowadzić do niéj styczne.*

Mając do danéj paraboli przez punkt np. *O* (Fig. **163**) poprowadzić styczne, zataczamy z tegoż punktu łuk promieniem *OF,* tj. odległością jego od ogniska, a łuk ten przetnie kierownicę paraboli w punktach *M* i *N.* Przez te punkta poprowadziwszy następnie proste *Mm* i *Nn* równolegle do osi *AX,* z przecięcia się ich z parabolą otrzymamy punkta *m* i *n,* które połączone z *O* dadzą nam styczne żądane, co łatwo dowieść na mocy własności pod *B)* przytoczonéj.

Zadanie 17. *Poprowadzić styczną do paraboli równolegle do prostéj danéj.*

Równolegle do prostéj danéj prowadzimy w paraboli cięciwę, a przez środek téjże prostą równoległą do osi czyli średnicę. Średnica ta przetnie parabolę w punkcie, przez który prosta równolegle do prostéj danéj poprowadzona, będzie styczną żądaną.

§ 5.

Hyperbola.

Krzywa mająca tę własność, że różnica odległości każdego jéj punktu od dwóch punktów stałych jest stałą i niezmienną, zowie się hyperbolą.

Taką krzywą przedstawia nam Fig. **164**, gdzie, podobnie jak przy ellipsie lub paraboli, punkta stałe F i F_1 zwią się jéj ogniskami, zaś odległości któregobądź punktu téj krzywéj od ognisk, promieniami wodzącymi. Ilość stałą oznaczywszy przez $2a$, mamy dla punktu np. S, na hyperboli obranego, $F_1S—FS=2a$, i tak samo dla każdego innego punktu. Krzywa ta składa się z dwóch odrębnych ale przystających do siebie części, a prosta przechodząca przez oba ogniska dzieli znów każdą z tychże na dwie przystające połowy. Punkta A i B, w których prosta, przechodząca przez oba ogniska, przecina hyperbolę, zwią się jéj wierzchołkami, część zaś samejże téj prostéj, zawarta między obu wierzchołkami, czyli prosta AB, zwie się osią główną albo rzetelną (*die Hauptaxe* albo *reelle Axe, — l'axe transverse*). Środek osi głównéj czyli punkt O nazywa się środkiem hyperboli, prosta zaś przezeń prostopadle do osi głównéj poprowadzona, zwie się osią urojoną (die imaginäre Axe, — l'axe non transverse).

Na prostéj F_1F jako średnicy zatoczywszy okrąg koła, w punktach A i B wyprowadziwszy prostopadłe cd i ef do F_1F i punkta ich przecięć się z tém kołem, tj. c z e, zaś d z f połączywszy, powstanie stąd równoległobok $cefd$, którego przekątnie ed i cf mają tę własność, że na przedłużeniu swojem ciągle zbliżają się do ramion hyperboli, nie osiągnąwszy ich atoli nigdzie i zwią się assymptotami hyperboli.

Wreszcie parametr, mimośród, średnica, przystawa lub odcinek mają tu to samo znaczenie, jakie miały przy krzywych poprzedzających.

Prócz powyższéj głównéj mamy i tu podobnież do zapamiętania następujące ważniejsze własności hyperboli:

a) Oś główna równa się ilości stałej tj. $AB=2a$, co widoczna z figury, wiedząc że $AF=BF_1$.

b) Co do długości osi urojonej, za takową przyjmuje się jej część *CD* zawartą między *ce* i *df,* i oznacza się ją przez $2b$. Połowa téj osi $CO=b$ jest przyprostokątnią w trójkącie *BOC,* w którym $BO=a$, zaś przeciwprostokątnia *BC* jest równa mimośrodowi *OF,* jak łatwo pojąć z figury.

c) Przez dwa dowolne punkta *m* i *n* na hyperboli obrane, poprowadziwszy prostą *mn* przecinającą obie assymptoty, w *r* i *p,* odcinki téj prostéj między assymptotami i hyperbolą zawarte, są sobie równe, tj. $mr=np$.

d) Styczna do hyperboli tworzy z promieniami wodzącymi punktu styczności kąty równe, a więc np. dla stycznéj *KL* jest kąt $FKL=F_1KL$.

Na podstawie tych własności hyperboli rozwiążemy następujące zadania:

Zadanie 18. *Mając daną oś główną i oba ogniska, nakreślić hyperbolę.*

Pierwszy sposób: Dane ogniska *F* i F_1 (Fig. **165**) łączymy z sobą, i na linii łączącéj od jéj środka *O* odcinamy po obu stronach połowę osi danéj, a otrzymamy stąd oba wierzchołki *A* i *B* hyperboli. Następnie promieniem jakimkolwiek byle większym od AF_1 lub *BF,* a więc np. promieniem *BC,* z obu ognisk zatoczywszy łuki nad i pod osią *AB,* przecinamy takowe łukami, zatoczonymi również z obu ognisk promieniem *AC;* otrzymamy stąd cztéry punkta a_1, a_2, a_3, a_4, które jak łatwo dowieść, odpowiadając głównej własności hyperboli, będą punktami do niéj należącymi. W ten sam sposób znalazłszy więcéj takich punktów i takowe z sobą należycie połączywszy, otrzymamy żądaną hyperbolę.

Drugi sposób. W jednem z ognisk np. F_1 (Fig. **165**) przytwierdzamy linią dowolnéj długości np. F_1m, a któraby się około F_1 poruszać dała; następnie bierzemy nić długości F_1m-2a, i takową jednym jéj końcem mocujemy na krawędzi linii w punkcie *m,* drugim zaś w ognisku *F.* To mając, wyprężamy nić z pomocą ołówka tak, iżby jéj część np. *cm* szczelnie przyległa do krawędzi linii, a następnie poruszamy linią około F_1, skutkiem czego ołówek na zgięciu nici ciągle będący, zakreśli nam jak łatwo udowodnić hyperbolę, a właściwie jedno jéj ramię. Jak zaś otrzymać drugie, snadno rozumieć z figury.

Zadanie 19. *Nakreślić hyperbolę, mając dane assymptoty i punkt jeden do obwodu hyperboli należący.*

Dane są assymptoty RS i FU (Fig. **166**), jako też punkt M. Aby z tych danych nakreślić hyperbolę, przez punkt M kreślimy linie aa', bb', cc', dd' itp. przecinające obie assymptoty, a następnie odcinamy $aM = a'm'$, $bM = b'm''$, $dM = d'n'$, $cM = c'n''$ itp; otrzymamy stąd punkta m', m''... do jednego ramienia, i punkta n', n''... do drugiego ramienia szukanéj hyperboli należące, a to na zasadzie własności hyperboli pod *C)* podanéj.

Zadanie 20. *Mając daną hyperbolę, znaleść jéj środek.*

Prowadzimy gdziekolwiek dwie cięciwy do siebie równoległe, a z połączenia ich środków otrzymamy średnicę hyperboli; następnie prowadzimy gdzieindziéj drugą parę cięciw równoległych, a łącząc ich środki otrzymamy drugą średnicę, przecinającą się z pierwszą w punkcie, który będzie środkiem szukanym.

Zadanie 21. *Mając daną hyperbolę, znaleść jéj oś główną.*

Ze środka danego lub znalezionego danéj hyperboli przecinamy łukiem dowolnego promienia hyperbolę w dwóch punktach, i środek łuku zawartego między tymi dwoma punktami łączymy ze środkiem hyperboli, a otrzymamy stąd tak kierunek osi szukanéj, jak i połowę jéj wielkości. Albo: punkta powyżéj otrzymane łączymy z sobą prostą, i na cięciwę tak otrzymaną ze środka hyperboli spuszczamy prostopadłą.

Zadanie 22. *Przez punkt dany na hyperboli poprowadzić do niéj styczną.*

Punkt dany na hyperboli łączymy z obu ogniskami, i kąt stąd powstały czyli kąt między obu promieniami wodzącymi dzielimy na dwie równe części, a dwusieczna tegoż będzie styczną żądaną.

Zadanie 23. *Przez punkt dany zewnątrz hyperboli poprowadzić do niéj styczną.*

Z punktu danego O (Fig. **167**.) jako środka zataczamy koło przechodzące przez jedno z ognisk np. F, z drugiego zaś ogniska tj. F_1 promieniem równym osi głównéj czyli AB zataczamy drugie koło, które z pierwszém przetnie się w punktach M i N. Punkta te połączone z F_1 prostemi, przetną w przedłużeniu swojém hyperbolę w punktach R i S, które będą punktami styczności, obie bowiem styczne tj. OR i OS odpowiadają, jak łatwo dowieść, własności hyperboli pod $D)$ podanéj.

Zadanie 24. *Równolegle do prostéj danéj poprowadzić styczną do hyperboli.*

Zadanie to podobnież się rozwiązuje jak przy ellipsie i paraboli, a więc: równolegle do prostéj danéj prowadzimy najprzód gdziekolwiek cięciwę hyperboli, przez środek zaś téjże średnicę; średnica ta przetnie hyperbolę w punkcie, który będzie punktem styczności i przez który prosta równolegle do prostéj danéj poprowadzona, będzie styczną żądaną.

§. 6.

Cykloidy w ogólności, cykloida właściwa.

Jeżeli krzywa płaska jakakolwiek toczy się po innéj linii, służącéj jéj za kierownicę ruchu i to, bądź to prostéj, bądź téż krzywéj, wówczas każdy punkt na krzywéj ruchoméj leżący w czasie tego ruchu opisuje krzywą zwaną ogólnie cykloidą *(eine Cykloide, — cycloide)*. Między krzywemi tego rodzaju najwięcéj znane są cykloidy opisane przez punkt wzięty gdziekolwiek na obwodzie koła toczącego się po linii prostéj lub obwodzie drugiego koła, i w tym razie krzywe te, a których tylko konstrukcyę tutaj wskażemy, mają swoje odrębne nazwiska w miarę tego, czém jest kierownica ich ruchu. I tak:

Jeżeli koło promienia danego toczy się wzdłuż prostéj danéj, tak, iż dotyka się ciągle takowéj i swój obwód na téj prostéj odwija, wówczas każdy punkt do obwodu tego koła należący, zakreśla cykloidę właściwą, czyli krótko cykloidę.

Koło toczące się po linii prostej, zowie się kołem rodzącém, prosta, po któréj się ono toczy, kierownicą, zaś punkt koła rodzącego opisujący cykloidę, zowie się punktem rodzącym. Odmianami takiéj cykloidy są: Cykloida skrócona *(eine verkürzte Cykloide, — cycloide raccour-*

cie), jeżeli punkt rodzący leży nie na obwodzie, lecz wewnątrz koła rodzącego, i 2) Cykloida wydłużona *(eine gestreckte Cykloide, — cycloide rallongée)*, jeżeli tenże punkt leży zewnątrz obwodu koła rodzącego.

Zadanie 25. *Nakreślić cykloidę, mając dany promień koła rodzącego.*

Pierwszy sposób. Ponieważ koło rodzące w czasie toczenia się swego wzdłuż kierownicy, pozostawać musi ciągle stycznem do téjże, za kierownicę więc przyjąwszy prostą AB (Fig. **168**.), zaś jako pierwotne położenie koła rodzącego, od którego ruch się rozpoczyna, przyjąwszy koło do niéj styczne, ze środkiem O a o promieniu danym OA, obieramy punkt A jako punkt rodzący cykloidę, czyli punkt, na którego położenie w czasie tego ruchu uważać nam należy, i takowe wyznaczyć. Ponieważ jak łatwo zrozumieć, gdy koło rodzące raz swój obrót wzdłuż AB ukończy, cały swój obwód na téjże rozwinie, odetnijmy więc AB równe obwodowi tegoż koła, co się uskuteczni w dość wielkiém przybliżeniu, podzieliwszy cięciwę CD do ćwiartki jego okręgu należącą na 5 równych części, i następnie odciąwszy $AB = 3AD + {}^1/_5\, CD$, a w ten sposób będziemy już mieli dwa punkta końcowe tj. A i B do szukanéj cykloidy należące. Aby teraz znaleść punkta pośrednie, odetnijmy $A8 = {}^1/_2\, AB$ tj. równe połowie obwodu koła rodzącego, i podzielmy tak pół-obwód tegoż, jak i $A8$ np. na 8 równych części w punktach I, II,..... VIII i $1, 2, \ldots\ldots 8$, a rzecz jasna, że podczas toczenia się koła wzdłuż AB, punkta témi samémi liczbami oznaczone, jak I i 1, II i 2 itp. padną na siebie. Przez punkta $1, 2, 3 \ldots. 8$ wreszcie poprowadźmy prostopadłe do AB aż do przecięcia się z równoległą do AB przez O poprowadzoną, a otrzymamy stąd punkta $1', 2', 3' \ldots. 8'$, w których kolejno znajdować się będzie środek O koła rodzącego, podczas gdy odpowiednie punkta tak koła jak kierownicy AB z sobą schodzić się będą.

To mając, łatwo znaleść, gdzie punkt rodzący A podczas toczenia się koła znajdować się będzie, do tego bowiem starczą nam odległości tegoż punktu od punktów I, II, III.... i od środka O. I tak: aby znaleść położenie punktu A wtedy, gdy koło rodzące z pierwotnego położenia swego potoczy się o tyle, że środek jego *O* przyjdzie do *1'*, i punkt 1 koła zejdzie się z *1* na *AB*, dość uważyć, że punkt *A* ani odległości swéj od I, ani od *O* skutkiem tego toczenia nie zmieni. Zatoczywszy więc z *1'* koło promieniem *OA*, dotykające się kierownicy w punkcie *1*, to gdzieś na jego obwodzie leżeć musi punkt *A*; że zaś pierwotnie tenże punkt od punktu I leżał w odległości *IA*, a punkt I leży teraz w *1*, z punktu więc *1* promieniem *IA* przecinamy koło zatoczone z 1', a otrzymamy stąd punkt a_1, jako szukane miejsce punktu *A* w tém położeniu koła rodzącego. I podobnież, aby znów znaleść miejsce tegoż punktu wtedy, gdy koło rodzące, a właściwie jego środek posunie się do *2'*, zataczamy z *2'* koło promieniem *OA* i przecinamy je łukiem zatoczonym z 2 promieniem *IIA*, skąd otrzymamy punkt a_2 jako szukane miejsce punktu *A*; w ten sam sposób postępując daléj, znajdziemy punkta a_3, $a_4 \ldots . a_8$, z których ostatni tj. a_8 będzie leżał w wysokości *VIIIA* nad kierownicą, i na prostopadłéj przez *8* do kierownicy poprowadzonéj. Aby otrzymać dalsze punkta, postępujemy albo w ten sam sposób jak dotąd, podzieliwszy wpierw tak drugą połowę koła rodzącego, jak i drugą połowę kierownicy na *8* równych części, albotéż, ponieważ jak łatwo zrozumieć, prosta $8a_8$ dzieli cykloidę na dwie przystające połowy, drugą zatém jéj połowę za pomocą pierwszéj znalezionéj wykreślić można, — a to kreśląc przez punkta a_7, a_6, ... równoległe do kierownicy, i na tychże po obu stronach prostéj $8a_8$ odcinając części równe; otrzymamy stąd drugi szereg punktów a_7, a_6, $a_5 \ldots . a_1$, które połączone kolejno ze sobą i z poprzedzającymi krzywą ciągłą, utworzą nam żądaną cykloidę, i w któréj prosta *AB* zowie się jej podstawą, zaś prosta $8a_8$ wysokością.

Zważywszy, że punkta *I* i a_1, *II* i a_2, *III* i a_3 itp. leżeć muszą na jednéj równoległéj do kierownicy, łatwo mogą być geometrycznie usprawiedliwione dwa sposoby następujące:

Drugi sposób. Mając dane koło rodzące, poprowadźmy średnicę *AB* (Fig. **169**.) następnie *AA'* prostopadle do *AB* i równe połowie obwodu koła rodzącego. Prostą tę *AA'* jako też półobwód koła podzielmy na jednakową liczbę części równych np. na *8* i przez punkta podziału prostéj *AA'* poprowadźmy do AA' prostopadłe, zaś przez punkta podziału koła prostopadłe do AB. Otrzymamy stąd punkta c_1, c_2, $c_3 \ldots c_8$, zaś na średnicy AB punkta d_1, d_2, $d_3 \ldots d_8$. Odetnijmy wreszcie $Id_1 = c_1a_1$, $IId_2 = c_2a_2$, $IIId_3 = c_3a_3$ itp. a otrzymamy punkta a_1, a_2, $a_3 \ldots a_8$ należące do połowy cykloidy.

Trzeci sposób. W kole rodzącém daném prowadzimy średnicę AB (Fig. **170**.) a przez środek O do niéj prostopadłą OO' i równą połowie obwodu koła rodzącego. Prostą tę, jakotéż półobwód koła dzielimy na jednakową liczbę równych części np. na *8*, i przez punkta podziału koła prowadzimy równoległe do OO'. Następnie z punktu *1* zataczamy łuk promieniem OA aż do przecięcia się z równoległą do OO' przez I idącą w punkcie a_1, z punktu 2 takiż łuk tj. promieniem tym samym aż do przecięcia się z równoległą przez *II* idącą w punkcie a_2 itd., a otrzymamy stąd punkta a_1, a_2, $a_3 \ldots a_8$ do połowy szukanéj cykloidy należące.

Sposoby kreślenia cykloidy dotąd podane służą także i do kreślenia jéj odmian.

Żadanie 26. *Nakreślić cykloidę skróconą, mając dany promień koła rodzącego, i odległość punktu rodzącego od środka tegoż koła.*

Mając dane koło rodzące promienia OA (Fig. **171**.) i wewnątrz niego punkt a, który ma nam zatoczyć cykloidę, prowadzimy najprzód przez punkt a średnicę AB, zaś przez O prostopadłą do niéj OO' a równą obwodowi koła rodzącego. Następnie ze środka O promieniem Oa zatoczywszy koło, i takowe, jakotéż OO' podzieliwszy na jednakową liczbę części równych, — postępujemy daléj np. według sposobu trzeciego wyżéj podanego. A więc, przez punkta podziału koła mniejszego prowadzimy równoległe do OO', równoległą przez *I* idącą przecinamy łukiem z *1'* promieniem Oa zatoczonym, skąd otrzymamy punkt a_1, daléj równoległą przez *II* idącą przecinamy z 2' łukiem tego samego promienia, skąd otrzymamy punkt a_2 itd. Punkta te a_1, a_2, a_3, ... połączone ze sobą dadzą nam cykloidę skróconą, któréj podstawą będzie $aa' = OO' = 2\pi . OA$, zaś wysokością $8a_8 = ab$.

Zadanie 27. *Nakreślić cykloidę wydłużoną, ma-*

jąc dany promień koła rodzącego, i odległość punktu rodzącego od środka tegoż koła.

Mając dane koło rodzące promienia OA (Fig. **172.**) i punkt rodzący a zewnątrz niego leżący, prowadzimy przez tenże punkt średnicę AB, zaś do niéj przez a prostopadłą aa' równą obwodowi koła rodzącego tj. $aa' = 2\pi . OA$, a następnie promieniem Oa ze środka O zatoczywszy koło, dzielimy takowe jakoteż aa' na dowolną a jednakową liczbę części równych. Następnie prowadzimy przez I równoległą do aa', która przetnie ab w d_1, zaś przez 1 równoległą do ab, a te dwie równoległe przetną się z sobą w c_1; odciąwszy wreszcie $c_1a_1 = Id_1$ otrzymamy punkt a_1 do cykloidy należący. Podobnież przez II prowadzimy równoległą do aa', zaś przez 2 równoległą do ab, i odcinamy $c_2a_2 = IId_2$, a otrzymamy znów stąd punkt a_2 itd. Punkta tak otrzymane a_1, a_2, a_3.... połączywszy z sobą, dostaniemy cykloidę wydłużoną, któréj wysokością będzie $8a_8 = ab$, zaś podstawą aa', i w któréj jak z figury widoczna, każda nowa jéj gałęź przecina się ze sąsiednią w punkcie N, leżącym na prostopadłéj do podstawy aa' przez jéj koniec poprowadzonéj.

§. 7.

Epicykloida.

Jeżeli koło rodzące toczy się po obwodzie i to zewnętrznym drugiego koła służącego mu za kierownicę, wówczas punkt, wzięty gdziekolwiek na obwodzie koła pierwszego, zakreśla epicykloidę.

Jeżeli zamiast punktu na obwodzie koła rodzącego obierzemy takowy wewnątrz lub zewnątrz tegoż koła, otrzymamy *epicykloidę skróconą* lub *wydłużoną*. Znając sposoby kreślenia wszystkich gatunków cykloidy, łatwo po wprowadzeniu w nie małych zmian, zastósować takowe do konstrukcyi epicykloidy. I tak:

Zadanie 28. *Nakreślić epicykloidę, mając dany promień koła rodzącego i promień koła kierownicy.*

Niech koło dane za kierownicę będzie o promieniu Ca, zaś koło rodzące o promieniu Oa; punktem rodzącym niech będzie a (Fig. **173**.) leżący na linii łączącéj środki obu tych kół, czyli punkt ich styczności. Na obwodzie kierownicy od punktu a odcinamy część równą obwodowi koła rodzącego tj. $a123\ldots a' = 2\pi . Oa$, co łatwo osiągnąć, obliczywszy wielkość kąta wypukłego aCa' według proporcyi:

$$2\pi R : 360 = 2\pi r : aCa'$$

$$\text{skąd kąt } aCa' = \frac{r}{R} . 360,$$

a gdzie r jest promieniem koła rodzącego, zaś R promieniem koła kierownicy. I tak jeżeli, jak u nas na Fig. **173**. jest $Oa = r = 5$, zaś $Ca = R = 8$ (np. cali), zatém kąt $aCa' = {}^5/_8 . 360 = 225^0$, który to kąt bardzo łatwo bądźto z pomocą przenośnika, bądtéż jakimbądź sposobem geometrycznym odciąć należycie. To mając, dzielimy obwód koła rodzącego jakotéż łuk aa' jemu równy na jednakową liczbę części równych, a następnie ze środka C zatoczywszy łuk OO' promieniem OC, i poprowadziwszy promienie $1C$, $2C$, $3C$.... aż do przecięcia się ich z łukiem OO' w punktach $1'$, $2'$, $3'$,......, daléj postępujemy zupełnie tak samo jak przy cykloidzie, a mianowicie: z $1'$ zataczamy koło promieniem Oa, i przecinamy je łukiem ze środka 1 promieniem Ia zatoczonym, a otrzymamy stąd punkt a_1 do epicykloidy należący; podobnież z $2'$ zataczamy koło takież samo, przecinamy je łukiem promienia IIa ze środka 2, a otrzymamy znów punkt a_2 itd. Punkta wreszcie tak otrzymane połączywszy ze sobą, dostaniemy żądaną epicykloidę, w któréj łuk aa' nazywa się jéj p o d s t a w ą, zaś prosta $6a_6 = ab$ w y s o k o ś c i ą. Prosta ta $6a_6$ dzieli epicykloidę na dwie przystające połowy, skutkiem czego mając wyznaczone punkta do połowy epicykloidy należące, łatwo otrzymać też punkta dla drugiéj połowy, zważywszy tylko, że takowe leżeć muszą z odpowiednimi punktami pierwszéj połowy na jednym i tym samym łuku, współśrodkowym z kołem kierownicy.

Zważywszy następnie, że podobnież, jak przy cykloidzie na jednéj prostéj równoległéj do kierownicy, tak tutaj na jednym i tym samym łuku równoległym do koła kierownicy, leżeć muszą punkta I i a_1, II i a_2 itp., otrzymamy stąd krótsze sposoby kreślenia epicykloidy. I tak:

Drugi sposób. Mając dane koło kierownicę ze środkiem C (Fig. **174.**), zaś koło rodzące ze środkiem O, łączymy te dwa środki ze sobą prostą CB, i obrawszy na niéj punkt A (tj. punkt styczności obu kół) jako punkt rodzący, odcinamy na kierownicy łuk AA' równy połowie obwodu koła rodzącego. Łuk ten jakotéż połowę obwodu rodzącego koła podzieliwszy następnie na jednakową liczbę części równych, i poprowadziwszy promienie $C1$, $C2$, $C3, \ldots.$, ze środka C przez punkta podziału koła rodzącego kreślimy łuki aż do przecięcia się z odpowiednimi promieniami (tj. przez odpowiednie liczby na kierownicy poprowadzonymi) w punktach c_1, c_2, $c_3 \ldots\ldots$, zaś ze średnicą AB w punktach d_1, d_2, $d_3 \ldots.$ Odciąwszy wreszcie $Id_1 = c_1a_1$, $IId_2 = c_2a_2$, $IIId_3 = c_3a_3$ itd. otrzymamy punkta do połowy epicykloidy należące.

Trzeci sposób. Łączymy środek kierownicy ze środkiem koła rodzącego prostą CB (Fig. **175.**), odcinamy łuk AA_1 równy połowie obwodu koła rodzącego, i dzielimy też połowę jakotéż łuk AA_1 na jednakową liczbę części równych. Następnie poprowadziwszy promienie $C1'$, $C2'$, $C3', \ldots$ aż do przecięcia się z łukiem OO', ze środka C promieniem CO zatoczonym, w punktach $1'$, $2'$, $3', \ldots,$ z tychże punktów łukami promienia AO przecinamy łuki odpowiednie przez punkta I, II, $III, \ldots$ ze środka C zakreślone, a otrzymamy stąd punkta a_1, a_2, $a_3 \ldots a_8$ do połowy epicykloidy należące.

Zadanie 29. Nakreślić epicykloidę skróconą drugim, zaś wydłużoną trzecim sposobem, mając dane $R = 10$ zaś $r = 4$, gdzie R jest promieniem kierownicy, zaś r promieniem koła rodzącego, i gdzie w pierwszym razie odległość punktu rodzącego od środka kierownicy wynosi 12, w drugim zaś razie 8 jednostek promienia.

Zadanie 30. Nakreślić epicykloidę, mając dany promień koła rodzącego większy od promienia koła kierownicy, oba zaś koła stykają się zewnątrz.

Zadanie 31. Nakreślić epicykloidę pod tymi samymi warunkami, ale gdy oba koła są do siebie styczne wewnętrznie.

§. 8.

Hypocykloida.

Jeżeli koło rodzące toczy się wewnątrz obwodu drugiego koła służącego mu za kierownicę, wówczas punkt obrany gdziekolwiek na obwodzie koła rodzącego zakreśla hypocykloidę.

Prócz hypocykloidy tak powstałéj, może ona również być skróconą lub przedłużoną, jeżeli punkt rodzący obierzemy zewnątrz lub wewnątrz koła rodzącego. Sposoby, jakieśmy wskazali dla kreślenia epicykloidy, mogą tutaj być w zupełności użyte, i tak:

Zadanie 32. *Nakreślić hypocykloidę, mając dany promień koła rodzącego i promień kierownicy.*

Daną jest kierownica (lub tylko jéj część) promienia CA (Fig. **176**.), zaś koło rodzące promienia OA. Obrawszy punkt styczności tych kół tj. A jako punkt rodzący, odcinamy na kierownicy łuk $A8A'$ równy obwodowi koła rodzącego, i dzielimy toż koło jak i łuk $A8A'$ na jednakową liczbę części równych. Następnie prowadzimy promienie $1C$, $2C$, $3C\ldots$, z C odległością CO zataczamy łuk OO', a z punktów przecięcia się tegoż łuku z owymi promieniami, czyli z punktów $1'$, $2'$, $3'\ldots$ zataczamy koła promieniem AO. Nareszcie z punktu 1 promieniem AI przecinamy koło zatoczone z $1'$, z punktu 2 promieniem AII koło zatoczone z $2'$ itp., skąd otrzymamy punkta a_1, a_2, $a_3\ldots$ do hypocykloidy należące.

Drugi sposób. Łączymy środki koła rodzącego i kierownicy prostą OC, i przedłużywszy takową aż do A, odcinamy łuk AA' (Fig. **177**.) równy połowie obwodu koła rodzącego. Następnie podzieliwszy oboje na jednakową liczbę części równych, prowadzimy promienie $1C$, $2C$, $3C\ldots$, zaś z C zataczamy łuki przez punkta $I, II, III\ldots$, które z odpowiednimi promieniami przetną się w punktach c_1, c_2, .., zaś ze średnicą AB w punktach d_1, d_2, ...; odcinamy wreszcie $c_1a_1 = Id_1$, $c_2a_2 = IId_2$, $c_3a_3 = IIId_3\ldots$, a otrzymamy stąd punkta $a_1, a_2, a_3, \ldots a_6$ do połowy hypocykloidy należące.

Trzeci sposób. Odcinamy łuk AA_1 (Fig. **178**.) równy połowie obwodu koła rodzącego, dzielimy oboje na jednakową liczbę części równych, i poprowadziwszy promienie $1C$, $2C$, $3C$..., przecinamy takowe łukiem, z C promieniem OC zatoczonym, w punktach $1'$, $2'$, $3'$ ... $6'$. Następnie również z C zataczamy łuki przez punkta podziału koła rodzącego, i przecinamy je łukami promieniem AO z punktów odpowiednich $1'$, $2'$, $3'$,...$6'$ zakreślonymi, skąd otrzymamy punkta a_1, a_2, a_3 . . . a_6 do połowy hypocykloidy należące.

Zadanie 33. Nakreślić hypocykloidę skróconą i przedłużoną dla tych samych danych, jak przy epicykloidzie w Zadaniu 29.

Zadanie 34. Nakreślić hypocykloidę dla promienia kierownicy dwa razy większego od promienia koła rodzącego.

§ 9.

Linia sercowa, gwiazdowa i linie spiralne.

1) Jeżeli koło toczy się po obwodzie zewnętrznym drugiego koła równego z niém promienia, wtedy punkt którykolwiek na pierwszém kole obrany, zakreśla linią sercową (die Herzlinie, — cardioide).

Ponieważ linia sercowa, jak z jéj opisania widzimy, jest niczém inném, jak tylko szczególnym gatunkiem epicykloidy, którykolwiek więc ze trzech sposobów podanych w §. 7. dla kreślenia epicykloidy, może być tutaj użytym. Krótszy atoli sposób do nakreślenia sercowéj jest następujący: Mając dane koło kierownicę o promieniu OA (Fig. **179.**), i przyjąwszy punkt A jako początek krzywej szukanéj, obieramy na obwodzie koła kilka lub kilkanaście punktów M_1, M_2, M_3 ... i przez też punkta, jakotéż przez punkt A kreślimy proste. Następnie na tych prostych po obu stronach punktów M_1, M_2, M_3 ... odcinamy części sobie równe i równe średnicy koła danego, tj. $C_4M_1 = C_3M_1 = AB$, $C_5M_2 = C_2M_2 = AB$ itp. skąd otrzymamy punkta C_1, C_2, C_3 ...... C_7, C_8 ...... należące do krzywéj żądanéj.

2) Jeżeli koło promienia danego toczy się wewnątrz obwodu drugiego koła, ale promienia cztéry razy większego od promienia koła pierwszego czyli rodzącego, wtedy punkt którykolwiek na pierwszem kole obrany, zakreśla linią gwiazdową (die Sternlinie, — l'astrois).

Linia ta jest znów tylko szczególnym gatunkiem hypocykloidy, a do nakreślenia jéj służy którykolwiek ze sposobów podanych w §. poprzedzającym. Ponieważ skutkiem jednorazowego przetoczenia się koła rodzącego po obwodzie kierownicy, powstanie tylko hypocykloida o podstawie równéj ćwiartce obwodu kierownicy, zatém, jeżeli toż koło daléj ruch swój odbywa, i to aż do punktu, od którego się ruch rozpoczął, powstaną stąd 4 gałęzie hypocykloidalne przystające do siebie, które razem uważane, noszą nazwę linii gwiazdowéj. Krzywą taką przedstawia nam (Fig. **180**.).

3) Jeżeli punkt rodzący obracając się jednostajnie około innego a stałego punktu, zmienia ciągle od tegoż swą odległość według danego prawa, zakreśla wtedy krzywą, zwaną krótko spiralną (die Spirallinie, — la spirale).

Między takiemi krzywemi, a które mogą przychodzić w licznych odmianach zależnie od prawa danego dla obrotu punktu rodzącego, na szczególną uwagę zasługuje Spiralna Archimedesa, przy któréj, równie jak i przy innych, mogą być dwa przypadki, a mianowicie: *A)* jeżeli punkt rodzący przed rozpoczęciem ruchu swego schodzi się z punktem stałym, albotéż *B)* znajduje się zewnątrz niego.

Co do A). Aby Spiralną Archimedesa nakreślić w razie, gdy punkt rodzący a (Fig. **181**.) w pierwotném swojém położeniu schodzi się z punktem stałym O, przypuśćmy, iż punkt a oddalając się ciągle od punktu O i równocześnie około niego obiegając, po uskutecznieniu obrotu wynoszącego 360^0, przyjdzie do punktu a_8, i to tak, że dla równych kątów przezeń obieganych, odległości jego od punktu O stosunkowo wzrastają. Znając w ten sposób prawo jego ruchu, łatwo znajdziemy pojedyncze punkta krzywéj w czasie tego ruchu opisanéj. Podzieliwszy bowiem kąt 360^0 przy punkcie O (a więc np. koło promienia Oa_8) na dowolną liczbę części równych, np. na 8 w punktach $1, 2, 3 \ldots . 8$, jakotéż odległość daną Oa_8 na tyleż części równych w punktach $1', 2', 3', \ldots 8'$, to ponieważ punkt a, po obierzeniu przezeń kąta 45^0 około O, znajdować się musi na promieniu koła przez 1 poprowadzonym, a prócz tego znajdować się musi od O w odległości $^1/_8 a_8$, a więc na przecięciu się łuku przez $1'$ ze środka O zatoczonego z promieniem *O1,* zatém z punktu *O* zatoczywszy łuki przez punkta *1', 2', 3'... 8'* aż do przecięcia się ich z odpowiednimi promieniami (tj. przez odpowiednie liczby *1, 2, 3,.... 8,*) ze środka *O* poprowadzonymi, otrzymamy punkta a_1, a_2, a_3 ..... a_8 do spiralnéj należące. Aby zaś otrzymać jeszcze dalsze punkta téj krzywéj, wystarczy długość daną Oa_8 odciąć od punktów a_1, a_2, a_3 ..... a_8 na promieniach przez też punkta idących, skąd dostaniemy znów punkta a_9, a_{10}, a_{11}, ... a_{16} itp. Część spiralnéj zawarta między a i a_8, podobnież między a_8 i a_{16} zowie się jéj zwojem. Zwojów takich Spiralna Archimedesa może mieć jeden, dwa lub więcéj, w miarę jak punkt rodzący raz, dwa lub więcéj razy obiegnie około punktu stałego. Odległość dana Oa_8 zwie się szerokością zwoju, a ponieważ jest stałą, zwoje więc Spiralnéj Archimedesa są wszystkie od siebie w równéj odległosci.

Taką samą wreszcie spiralną i przystającą do otrzymanéj dostalibyśmy, gdyby punkt a zamiast ku dołowi, w górę swój ruch był rozpoczął.

Co do B). Konstrukcya spiralnéj zostaje taka sama, jeżeli punkt rodzący a (Fig. **182**.) znajduje się przed rozpoczęciem ruchu zewnątrz punktu stałego *O*. I tak na linii łączącéj punkt *O* z a odcinamy od a daną szerokość zwoju aa_8, i dzielimy takową jakotéż kąt 360° około *O*, począwszy od prostéj Oa na dowolną liczbę części równych, daléj zaś postępujemy jak poprzednio.

ROZDZIAŁ II.

Rzuty linij krzywych, zadania.

---

§. 10.

Przedstawienie linii krzywéj, jéj stycznych lub assymptot za pomocą rzutów.

Mając daną linię krzywą w przestrzeni np. AB (Fig. **183**.) przedstawić za pomocą rzutów, dzielimy ją na dowolną liczbę równych lub nierównych elementów, czyli co na jedno wychodzi, obieramy na niéj kilka lub kilkanaście punktów np. $C, D, E\ldots$, i robimy rzut tychże na płaszczyzny rzutów sposobem wiadomym. Rzuty te, które naturalnie są niczém innėm, jak rzutami poszczególnych położeń punktu rodzącego, łączymy pionowe z osobna a poziome z osobna w należytym porządku, skąd otrzymamy rzuty $a'b', ab$ wszystkich elementów krzywéj, czyli saméjże krzywéj danéj. Płaszczyznę poziomą rzutów obróciwszy wreszcie około osi rzutów tak, iżby przyszła w przedłużenie płaszczyzny pionowéj, otrzymamy rzuty krzywéj na jednéj płaszczyznie rysunkowéj (Fig. **184**.).

Ponieważ łączenie rzutów należących do punktów obranych na krzywéj, uskutecznia się za pomocą linij prostych, dokładność więc nakreślonych rzutów krzywéj polega na założeniu, że liczba punktów na krzywéj w przestrzeni obranych jest nieskończenie wielką, czyli, ponieważ w rysunku liczba tych punktów skończoną być musi, obranych więc tyle i tak, aby części krzywéj danéj między tymi punktami zawarte odpowiednio do żądanéj dokładności mogły być uważane za linie proste. Im większa jest więc krzywizna krzywéj danéj, albo im z większą dokładnością chcemy takową w rzutach przedstawić, tém więcéj punktów takich obrać należy, a przedewszystkiem pamiętać o punktach wybitniejszych krzywéj, a więc leżących np. na jéj zwrotach, zgięciach itp., w przeciwnym bowiem razie otrzymamy w rzutach linie łamane, nie będące wcale wiernym obrazem przedstawionéj nimi krzywéj.

Z różnych punktów krzywéj, położonéj w przestrzeni, pospuszczawszy prostopadłe do płaszczyzny rzutów np. *LM* (Fig. **183**.), takowe ograniczą nam powierzchnią krzywą *ABab*, zwaną w a l c e m r z u c a j ą c y m *(ein projicirender Cylinder, — cylindre projetant)*, na którego śladzie *ab*, czyli linii przecięcia się z płaszczyzną *LM*, leży rzut krzywéj *AB* na tęż płaszczyznę. Mając dwie płaszczyzny rzutów, i szukając rzutów krzywéj między niemi położonéj, otrzymujemy zarazem dwa takie walce, z których jeden zowie się r z u c a j ą c y m p o z i o m y m, drugi r z u c a j ą c y m p i o n o w y m. Z pomocą dwóch tych walców, możemy znaleść położenie krzywéj w przestrzeni, mając dane jéj rzuty. Zgiąwszy bowiem płaszczyznę rysunkową w osi pod kątem prostym, i następnie na rzucie poziomym krzywéj ustawiwszy walec prostopadły do płasczyzny pozioméj rzutów, zaś na pionowym walec prostopadły do płaszczyzny pionowéj, to krzywa wzajemnego ich przecięcia się z sobą, będzie zarazem krzywą szukaną.

Z tego, cośmy dotąd o rzutach krzywéj powiedzieli, wypada: 1) że jeżeli punkt leży na krzywéj, to rzuty jego leżą na odpowiednich rzutach téjże krzywéj; 2) że mając jeden z rzutów punktu do krzywéj należącego, łatwo znaleść drugi, ten bowiem leżeć musi na przecięciu się prostopadłéj do osi z danego rzutu wyprowadzonéj, z odpowiednim rzutem krzywéj.

Zależnie od położenia krzywéj w przestrzeni, rzuty takowéj mogą być albo oba liniami krzywemi, albo też jeden z nich, a nawet i oba mogą być prostemi, a to, jeżeli krzywa leży na płaszczyznie prostopadłéj do jednéj z płaszczyzn rzutów, lub téż do osi. Ta rzecz jednak tyczé się tylko linij płaskich, rzuty bowiem linij podwójnie krzywych są zawsze oba krzywemi. Jak się zaś dowiedzieć, czy krzywa, przedstawiona dwoma rzutami krzywymi, jest płaską lub nie, zobaczymy późniéj.

Ponieważ linie krzywe przychodzą najczęściéj w połączeniu z liniami prostemi, a mianowicie ze swojemi stycznemi, assymptotami itp., o tych więc jeszcze związkach powiedzieć nam wypada. I tak, co się szczególniéj tyczé stycznéj do linii krzywéj, to przypuściwszy, że rzutem krzywéj np. AB (Fig. **185.**) na płaszczyznę PQ jest krzywa ab, poprowadźmy przez dwa punkta krzywéj AB, jak najbliżéj siebie leżące np. M i M', sieczną MS, a rzutem téj stycznéj będzie prosta ms przez dwa punkta m i m' (tj. rzuty punktów M i M') idąca. Obracając następnie prostą MS około punktu M dopóty, dopóki punkt M' nie padnie na M, to punkt m' będzie się równocześnie zbliżać do m, tak iż nakoniec także na m padnie; a skoro skutkiem tego obrotu sieczna MS stanie się styczną krzywéj AB, rzut jéj ms stanie się znów równocześnie stycznym do rzutu krzywéj AB czyli do ab. Czytamy więc stąd: *jeżeli prosta jest styczną do krzywéj w przestrzeni, to rzuty stycznéj są stycznemi do rzutów krzywéj.*

Toż samo co o stycznéj, rozumié się także i o assymptotach krzywéj, a mianowicie, że rzuty ich są assymptotami rzutów krzywéj, — a rzecz jasna, że i naodwrót reguła postawioną być może, tj. że jeżeli rzuty prostéj są stycznemi lub assymptotami rzutów krzywéj, to i prosta tymi rzutami przedstawiona jest w przestrzeni styczną lub assymptotą saméjże krzywéj.

§. 11.

Zadania tyczące się linij krzywych.

Zadanie 35. *Nakreślić rzuty krzywéj płaskiéj, mając daną jéj płaszczyznę.*

Robimy kład płaszczyzny danéj na jednę z płaszczyzn rzutów np. poziomą, i tamże tj. na kładzie kreślimy krzywą, którą rzutami przedstawić chcemy. Na krzywéj téj następnie obrawszy kilka lub kilkanaście punktów, wracamy płaszczyznę daną w jéj pierwotne położenie, i po wynalezieniu poprzedniém kąta, jaki ona zawiera z płaszczyzną poziomą rzutów (Cz. I. Zad. 99.), szukamy rzutów każdego z obranych punktów z osobna, a te połączone z sobą należycie na obu płaszczyznach rzutów, dadzą nam rzuty szukane.

Zadanie 36. *Nakreslić rzuty koła, mając daną jego płaszczyznę, środek i wielkość promienia.*

Daną jest płaszczyzna $p'p$ (Fig. **186**.), na niéj punkt $o'o$ jako środek koła szukanego a na téj płaszczyznie położonego, i danym jest promień koła w prawdziwéj wielkości. Podług zadania poprzedzającego postępując, robimy kład poziomy płaszczyzny $p'p$, szukamy kładu poziomego punktu $o'o$, i z punktu tak znalezionego promieniem danym zataczamy koło. Na kole tém następnie obieramy dowolną byle dostateczną liczbę punktów, i szukamy ich rzutów po wróceniu płaszczyzny $p'p$ w jéj pierwotne położenie, a rzuty te połączone ze sobą krzywą ciągłą na każdéj z płaszczyzn rzutów z osobna, dadzą nam ellipsę jako rzut poziomy, i również ellipsę jako rzut pionowy koła danego.

Krótszy atoli i dokładniejszy sposób rozwiązania tego zadania, polegający na tém, że zamiast obierać na kole dowolne punkta, a których w tym razie większa liczba użytą być musi, obieramy tylko takie, które do wykreślenia ellips na obu płaszczyznach rzutów wystarczają, jest następujący:

Mając zrobiony już kład poziomy płaszczyzny danéj $p'p$, tak, iż jéj śladem pionowym na kładzie poziomym jest p'', daléj mając o'' jako kład środka koła czyli punktu $o'o$, a wreszcie ze środka tego zatoczone koło promieniem danym np. $O''A$, prowadzimy średnicę AB równolegle do osi kładu p, i szukamy rzutu poziomego punktów A i B, tj. szukamy a i b. Punkta te połączywszy ze sobą, otrzymamy prostą ab, która jak łatwo dowieść, jest równą średnicy koła tj. jest $ab = AB$, a prócz tego jest $ab \parallel p$, skoro prosta AB w czasie wracania płaszczyzny $p'p$ w jéj pierwotne położenie zostaje ciągle równoległą do osi obrotu, tj. do p; prosta ta ab jest osią wielką ellipsy szukanéj na rzucie poziomym, jej rzut pionowy $a'b'$ przechodzi przez o' i jest równoległym do osi. Poprowadziwszy następnie na kładzie średnicę CD prostopadłą do AB a tém samém i do p, szukamy rzutu poziomego jéj punktów skrajnych C i D, tj. szukamy c i d, z połączenia których otrzymamy prostą cd, prostopadłą do p, jako małą oś ellipsy szukanéj. Na tych dwóch osiach tj. ab i cd nakreśliwszy wreszcie ellipsę (Zad. 2.), ta jest rzutem poziomym koła danego.

Chcąc następnie otrzymać rzut pionowy koła danego, kreślimy na kładzie koła dwie średnice prostopadłe do siebie EF i GH, z których jedna tj. EF jest równoległą, druga zaś tj. GH jest prostopadłą do p''. Ponieważ w czasie wracania płaszczyzny $p'p$ w jéj pierwotne położenie, średnica EF zostaje ciągle równoległą do p'', będzie nią więc i wtedy, gdy p'' padnie na p'; a skoro w ten sposób jest ona równoległą do płaszczyzny pionowéj rzutów, rzutem jéj więc pionowym będzie $e'f'$, równoległa do p' i przez o' idąca, zaś poziomym ef tj. równoległa do osi. Prosta ta $e'f'$, która podobnież jak poprzednio ab, musi być równą średnicy koła danego, jest wielką osią ellipsy; małą oś tj. $g'h'$ otrzymamy zaś, poszukawszy rzutu pionowego średnicy GH. Na tych więc znów osiach $e'f'$ i $g'h$ opisawszy ellipsę, ta będzie rzutem pionowym koła danego.

Zadanie 37. *Nakreślić rzuty koła leżącego na płaszczyznie prostopadłéj do jednéj z płaszczyzn rzutów, mając dany jego środek i wielkość promienia lub średnicy.*

Daną jest płaszczyzna $p'p$ (Fig. **187**.) prostopadła do płaszczyzny pozioméj rzutów, na niéj punkt $o'o$ jako środek koła, i daną wielkość promienia. Ponieważ płaszczyzna $p'p$ jest rzucającą poziomą, rzut zatem poziomy koła będzie prostą ab leżącą na śladzie poziomym p, równą co do długości średnicy koła danego, a odciętéj w równych połowach po obu stronach punktu o. Rzutem pionowym koła będzie ellipsa, któréj osią wielką (podług zadania poprzedzającego) jest prosta $c'd' \parallel p'$, przez o' idąca, a równa także co do długości średnicy koła danego, zaś osią małą jest prostopadła w o' do $c'd'$, któréj punkta skrajne wyznaczy się za pomocą prostopadłych z a i b do osi wyprowadzonych.

Zadanie 38. *Mając dany jeden z rzutów krzywéj i ślady płaszczyzny, na któréj ona leży, znaleść jéj rzut drugi.*

Na rzucie danym np. poziomym obieramy kilka lub kilkanaście punktów, przez nie prowadzimy rzuty poziome jakichkolwiek prostych byle na płaszczyznie danéj leżących, i szukamy ich rzutów pionowych, — a na tychże, i na prostopadłych wyprowadzonych do osi z rzutów punktów obranych, znajdować się będą rzuty pionowe tychże punktów, które połączone z sobą krzywą ciągłą w należytym porządku, dadzą nam szukany rzut krzywéj.

Zadanie 39. *Wyznaczyć ślady płaszczyzny, na któréj krzywa dana rzutami leży.*

Zakładamy tu naturalnie, że rzuty dane należą do krzywéj płaskiéj. Aby znaleść płaszczyznę, na któréj leży taż krzywa, obieramy na jéj rzutach trzy dowolne punkta i przez takowe przesuwamy płaszczyznę, a ta będzie żądaną.

Jeżeli jeden z rzutów krzywéj np. poziomy jest prostą, wtedy ślad poziomy szukanéj płaszczyzny leży na rzucie poziomym krzywéj, drugi zaś jest prostopadłym do osi.

Zadanie 40. *Znaleść, czy krzywa dana dwoma rzutami krzywemi, jest płaską lub nie.*

Na rzutach krzywéj danéj obieramy najprzód trzy punkta dowolne i przez nie przesuwamy płaszczyznę. Następnie obieramy więcéj punktów i szukamy, czy każdy z nich leży na płaszczyznie znalezionéj, w tym bowiem tylko razie krzywa jest płaską.

Albo krócéj: jeden z rzutów krzywéj danéj, np. poziomy, przecinamy dwiema liniami równoległemi (Fig. **188**.), skąd otrzymamy punkta m, n, p, r; szukamy następnie rzutów pionowych tychże punktów, i łączymy je z sobą prostemi, które jeżeli będą do siebie równoległe tj. jeżeli $m'n' \parallel p'r'$, wówczas krzywa jest płaską, w przeciwnym zaś razie podwójnie krzywą.

Zadanie 41. *Znaleść punkta przecięcia się krzywéj płaskiéj danéj, z płaszczyzną daną.*

Przez krzywą daną przesuwamy płaszczyznę (Zad. 39.), szukamy przecięcia się téjże z płaszczyzną daną, a gdzie prosta stąd otrzymana przecina krzywą daną, tam będą punkta szukane. W razie, gdy prosta ta nie spotyka się z krzywą daną, nie otrzymamy żadnego punktu, co znaczy, że krzywa w przestrzeni także się z płaszczyzną daną nie przecina.

Zadanie 42. Mając dane rzuty krzywéj płaskiéj, znaleść jéj prawdziwy kształt i wielkość.

Zadanie 43. Mając dany rzut poziomy i pionowy linii krzywéj, znaleść jéj rzut boczny.

Zadanie 44. Nakreślić trzy rzuty koła mając dane rzuty trzech jego punktów, następnie wykreślić rozwijającą tego koła.

Zadanie 45. Nakreślić rzuty koła mając daną jego płaszczyznę i kawałek obwodu jego w prawdziwéj wielkości.

Zadanie 46. Trzy proste, z których każda przecina się z dwiema innemi, dane są w rzutach; nakreślić rzuty koła stycznego do tych trzech prostych i wyznaczyć punkta styczności.

ROZDZIAŁ III.

O powierzchniach krzywych w ogólności. Powierzchnie prostokreślne.

§. 12.

Ogólne własności powierzchni krzywych i ich odmiany.

Każda linia, poruszająca się w przestrzeni według pewnego a danego prawa, i zostawiająca we wszystkich poszczególnych położeniach w czasie tego ruchu, ślad swojéj tam bytności, ogranicza część przestrzeni, zwaną w ogóle powierzchnią *(eine Fläche, — une surface)*. Linia, przez którój ruch powstaje powierzchnia, zowie się rodzącą *(eine Erzeugende, — une génératrice)* téjże, a powierzchnia przez nią utworzona jest miejscem geometryczném wszystkich jéj położeń. Do utworzenia powierzchni potrzebną jest znajomość prawa kierującego ruchem rodzącéj, i prawa które określa, w jaki sposób rodząca położenie swoje ma zmieniać. Pierwsze prawo daném zwykle bywa za pomocą innéj linii, wzdłuż którój lub po którój rodząca ruch swój ma odbywać, a zwanéj kierownicą (*eine Leitende*, — *directrice)* powierzchni, drugie zaś bywa wyraźnie słowami określoném.

Każda powierzchnia krzywa uważaną być może za powierzchnię złożoną z nieskończenie małych ścianek, zwanych elementami powierzchni. Wyobraziwszy sobie jednę z takich ścianek czyli elementów, przedłużoną na wszystkie strony, otrzymamy stąd płaszczyznę, dotykającą się powierzchni w elemencie, który został przedłużonym. Płaszczyzna taka zowie się płaszczyzną styczną *(eine tangirende Ebene, — plan tangent)* do powierzchni krzywéj, a element, który jest wspólny téjże płaszczyznie i powierzchni, jest jéj punktem styczności.

Przez punkt dany lub obrany na powierzchni krzywéj można nieskończenie wiele linij krzywych na téjże powierzchni leżących, nakreślić. Do każdéj z tych krzywych poprowadziwszy w tym punkcie styczną, styczne te są zarazem stycznemi powierzchni, i leżą wszystkie na płaszczyznie stycznéj przez punkt zwyż rzeczony przesuniętéj. Że zaś do wyznaczenia płaszczyzny wystarczają dwie proste na téj płaszczyznie leżące i przecinające się z sobą, wypada stąd, że przez punkt dany na powierzchni poprowadziwszy dwie krzywe na niéj leżące, do każdéj zaś z nich w tym punkcie styczną, płaszczyzna przez te dwie styczne przesunięta, będzie styczną do powierzchni.

Przez punkt na powierzchni krzywéj dany lub obrany poprowadziwszy najprzód płaszczyznę styczną, a następnie do niéj prostą prostopadłą w tymże punkcie tj. w punkcie styczności, prostopadła ta zowie się linią normalną, każda zaś płaszczyzna przez linią normalną przesunięta, zowie się płaszczyzną normalną *(eine Normalebene, — plan normal)* powierzchni. Ponieważ zaś przez punkt na płaszczyznie dany, można tylko jednę prostopadłą do niéj poprowadzić, zaś przez prostą, płaszczyzn bardzo wiele przesunąć, wynika stąd, że każdemu punktowi czyli elementowi powierzchni odpowiada tylko jedna linia normalna, bardzo zaś wiele płaszczyzn normalnych, — podczas gdy z liniami i płaszczyznami stycznemi rzecz się ma przeciwnie, tj. w każdym punkcie powierzchni można bardzo wiele linij stycznych, a tylko jednę płaszczyznę styczną przesunąć. Wyjątkiem od tych reguł jest wierzchołek ostrokręgu, przez który płaszczyzny stycznéj poprowadzić nie można.

Zależnie od tego, czy rodzącą powierzchni jest linia prosta czy krzywa, podzielić można powierzchnie na dwie główne klassy, a mianowicie 1) na powierzchnie linijałowe czyli prostokreślne *(regelrechte Flächen, — surfaces réglées* albo *rectilignes)* i 2) powierzchnie krzywokreślne *(krummlinige Flächen, — surfaces curvilignes).* Do pierwszéj znów klassy należą: A) powierzchnie rozwijalne *(aufwickelbare Flächen, — surfaces developpables)* tj. takie, które bez zniszczenia ich związku i całości dadzą się na jednéj płaszczyznie rozwinąć czyli rozłożyć, i B) powierzchnie wichrowate *(windschiefe Flächen, — surfaces gauches)*, przy których rzecz powyższa miejsca mieć nie może. Do drugiéj klassy należą między innemi, a o których tu tylko późniéj mówić będziemy, powierzchnie obrotowe *(Umdrehungs-* albo *Rotationsflächen, — surfaces de revolution)*, powstałe przez obrót linii krzywéj około stałéj osi.

Na szczególną uwagę jeszcze zasługują tak zwane powierzchnie owijalne albo powłóczące *(Umhüllungsflächen, — surfaces enveloppables)*, które powstają przez ruch innéj powierzchni według danego prawa, a więc których rodzącą jest powierzchnia.

Mimo tego podziału powierzchni, nie można jednak ściśle i niewzruszenie powiedzieć, że ta lub owa powierzchnia do téj lub owéj klassy, do tego lub owego jéj działu należy, zależy to bowiem od sposobu, w jaki pojmujemy tworzenie się powierzchni. Z pomiędzy atoli tych sposobów pojmowania rodzenia się jakiéjś powierzchni, obieramy zawsze tylko takie, które nam są więcéj korzystne, a mianowicie, które dostarczają łatwiejszych sposobów do nakreślenia téj powierzchni na płaszczyznach rzutów.

§. 13.

Powierzchnie rozwijalne.

Co są powierzchnie rozwijalne i czém się różnią od innych, powiedzieliśmy powyżéj. Główną ich cechą jest, że 1) przez dwa po sobie następujące położenia ich linii rodzącéj da się przesunąć płaszczyzna, a więc, że te położenia muszą być albo do siebie równoległe, albo téż przecinać się wzajem, i 2) że płaszczyzny styczne dotykają się ich w linii prostéj rodzącéj. Do powierzchni tych należą:

A) powierzchnie walcowe *(cylindrische Flächen, — surfaces cylindriques)*, i

B) powierzchnie ostrokręgowe albo stożkowe *(die konischen* albo *Kegel-Flächen, — surfaces coniques)*.

A. Powierzchnie walcowe.

Powierzchnie walcowe powstają przez ruch prostéj posuwającéj się po krzywéj danéj z kształtu i położenia swego, i to równolegle zawsze do siebie saméj, lub równolegle do kierunku dla téj prostéj danego. Prosta ruchoma, jak już wiemy, nazywa się rodzącą, zaś krzywa, po któréj posuwa się rodząca, nazywa się kierownicą. Gdyby kierownica była linią prostą, wówczas rodząca w ruchu swoim opisze nam płaszczyznę. Rodzenie walca można sobie także przedstawić za pomocą ruchu kierownicy, któréjby każdy punkt na niéj obrany, w czasie tego ruchu kreślił proste równoległe do kierunku danego (czyli do rodzącéj danéj), a w którym to razie kierownica staje się rodzącą, i nawzajem. Z tego dwojakiego sposobu pojmowania rodzenia się walca wynika, że przez każdy punkt na jego powierzchni obrany, można poprowadzić dwie rodzące, jednę prostą, drugą krzywą.

Powierzchnie walcowe mają swe odmiany, i biorą nazwiska od swych podstaw. I tak, walec może być kołowy, eliptyczny, paraboliczny, hyperboliczny itd. w miarę, jak kierownica czyli podstawa jego jest kołem, ellipsą itd. Jeżeli kierownica jest linią krzywą zamkniętą, wtedy i powierzchnia walcowa jest zamkniętą, w przeciwnym zaś razie otwartą. Jeżeli taż kierownica jest krzywą mającą środek (jak np. koło, ellipsa), wówczas prosta równoległa do kierunku rodzącéj przez tenże środek poprowadzona, zowie się osią powierzchni walcowéj, — sama zaś powierzchnia zowie się prostą lub ukośną, zależnie od tego, czy taż oś stoi prostopadle lub pochyło względem płaszczyzny kierownicy.

Prócz własności ogólnych przysługujących powierzchniom walcowym jako rozwijalnym, są jeszcze szczególne następujące: 1) przecięcia walca płaszczyznami równoległemi do kierunku ich rodzącéj, są liniami prostemi, 2) przecięcia zaś płaszczyznami równoległemi do siebie, ale pochyłemi względem rodzącéj, są krzywemi do siebie przystającemi; 3) przecięcie walca płaszczyzną równoległą do płaszczyzny ich kierownicy, jest figurą przystającą do téjże kierownicy.

Jeżeli powierzchnia walca ograniczoną jest dwiema płaszczyznami równoległemi do siebie, a prostopadłemi lub pochyłemi do jego rodzącéj, wtedy figury przecięcia się walca z temi płaszczyznami, zowią się podstawami walca. Jeżeli kierownica walca leży na jednéj z tych płaszczyzn, wtedy jest ona zarazem jego podstawą. Wysokością walca nazywamy prostopadłą spuszczoną z któregokolwiek punktu jednéj podstawy na płaszczyznę podstawy drugiéj. Jeżeli walec jest prostym, wówczas oś jego jest zarazem wysokością.

Przechodząc teraz do sposobu przedstawienia graficznego powierzchni walcowych na płaszczyznach rzutów, widzimy z tego co dotychczas powiedziano, że ku temu potrzeba mieć daną kierownicę i kierunek rodzącéj, czyli potrzeba mieć dane rzuty jednéj i drugiéj, — poczém, aby powierzchnię tę w rysunku przedstawić, należy nakreślić tyle położeń rodzącéj, ile stósownie do wielkości i rozciągłości powierzchni za potrzebne uznajemy.

Zadanie 47. *Mając daną kierownicę walca, jakotéż kierunek rodzącéj, nakreślić rzuty tegoż.*

Na kierownicy obieramy dowolną a dostateczną liczbę punktów, i przez każdy z nich prowadzimy równoległe do rodzącéj danéj (lub do kierunku dla niéj danego); otrzymamy stąd tyleż położeń rodzącéj walca, ileśmy punktów na kierownicy obrali, a których naturalnie im jest więcéj, tém dokładniejszy otrzymamy obraz powierzchni przedstawionéj w ten sposób rzutami. A więc np. jeżeli *abcde* (Fig. **189**.) jest poziomym, zaś *a'c'* pionowym rzutem krzywéj danéj za kierownicę walca, prosta *S'M'* pionowym, zaś *SM* poziomym rzutem kierunku jego rodzącéj, obieramy na kierownicy punkta *a'a, b'b, c'c*......, i przez takowe, a mianowicie przez ich rzuty poziome prowadzimy równoległe do *SM*, a otrzymamy rzut poziomy *abcdeKW* walca, zaś przez rzuty pionowe tychże obranych punktów tj. przez *a',b',c'*... prowadzimy równoległe do *S'M'*, a otrzymamy rzut pionowy *a'c'b'RP* tegoż.

Zadanie 48. *Mając daną kierownicę i rodzącą powierzchni walcowéj, wyznaczyć jéj ślady na płaszczyznach rzutów.*

Śladami powierzchni nazywamy przecięcia się jéj z płaszczyznami rzutów. Aby znaleść takowe, obieramy na danéj kierownicy dowolną liczbę punktów, prowadzimy przez nie rodzące, i szukamy śladów tychże rodzących; ślady te połączone ze sobą, tak poziome, jak pionowe krzywą ciągłą, dadzą nam ślady żądane. A więc np. na (Fig. **189**.) po poprowadzeniu rodzących walca przez punkta obrane $a'a$, $b'b$..., i wyszukaniu ich śladów poziomych czyli punktów A_1, B_1, C_1, D_1, otrzymamy z połączenia ich krzywą ciągłą, figurę $A_1B_1C_1D_1E_1$ jako ślad poziomy walca, i w podobnyż sposób, tj. wyszukawszy śladów pionowych poszczególnych rodzących, otrzymamy ślad pionowy tegoż, tj. krzywą $A_2B_2C_2D_2E_2$.

Uwaga. Do rzutów kierownicy poprowadziwszy styczne równoległe do $S'M'$, SM (Fig. **189**.), takowe oddzielają nam na powierzchni walcowéj połowę widoczną od zakrytéj, a mianowicie, na rzucie poziomym połowę górną czyli widoczną od dolnéj czyli zakrytéj, zaś na rzucie pionowym połowę przodkową czyli widoczną od tylnéj czyli zakrytéj. Styczne te, które naturalnie zarazem są rodzącemi walca, zowią się r o d z ą c e m i k o n t u r o w e m i, a rzuty walca, w których tylko rodzące konturowe są nakreślone, zowią się k o n t u r a m i walca.

Zadanie 49. *Mając dane ślady powierzchni walcowéj, naznaczyć rzuty rodzących oddzielających połowę widoczną od zakrytéj na obu płaszczyznach rzutów.*

Mając dany ślad poziomy walca $A_1B_1C_1D_1E_1$ (Fig. **189**.), zaś pionowy $A_2B_2C_2D_2E_2$, i chcąc najprzód na rzucie poziomym oddzielić połowę górną od dolnéj, czyli widoczną od zakrytéj, prowadzimy do śladu pionowego $A_2B_2C_2D_2E_2$ dwie styczne prostopadłe do osi rzutów, skąd otrzymamy punkta styczności B_2 i M_2; poszukawszy następnie rzutów poziomych tychże punktów tj. B_2' i M_2' (które naturalnie będą na osi), i przez takowe poprowadziwszy znów styczne do śladu poziomego $A_1B_1C_1D_1E_1$, styczne te oddzielą nam na rzucie poziomym połowę walca widoczną od zakrytéj. Podobnież zupełnie postępujemy, iżby na rzucie pionowym odgraniczyć część przednią od tylnéj.

Zadanie 50. *Mając dane ślady powierzchni walcowéj, i jeden z rzutów punktu na niéj leżącego, wynaleść jego rzut drugi.*

Dany jest np. punkt n (Fig. **189**.), jako rzut poziomy punktu N na walcu leżącego, mamy znaleść jego rzut pionowy. Ponieważ punkt leżąc na walcu, leżeć tém samém musi na jednéj z rodzących tego walca, przez punkt zatém n prowadzimy rzut poziomy rodzącéj (tj. prostą równoległą do SM) aż do przecięcia się ze śladem poziomym walca w punkcie G_1; szukamy następnie rzutu pionowego téjże rodzącéj (poszukawszy rzutu pionowego G_1' i przezeń poprowadziwszy równoległą do $S'M'$), a na nim jakotéż na prostopadłéj do osi z n wyprowadzonéj, leżeć będzie n', tj. rzut pionowy szukany. Jeżeli nie jest wyraźnie powiedzianém, na któréj stronie powierzchni punkt dany N leży, (tj. czy na widocznéj, czy zakrytéj) wtedy otrzymamy drugie rozwiązanie, czyli drugi punkt n' jako rzut pionowy przynależny rzutowi danemu n, a którego znalezienie łatwo wyrozumieć z figury.

Zadanie 51. Nakreślić rzuty walca prostego, mając daną jego podstawę i wysokość.

Zadanie 52. Walec prosty dany z podstawą kołową, leżącą na płaszczyznie poziomej rzutów, pochylić tak, iżby pozostał równoległym do płaszczyzny pionowéj rzutów, zaś do płaszczyzny pozioméj nachylonym był pod kątem 30°.

Zadanie 53. Nakreślić trzy rzuty walca prostego elliptycznego, równoległego do płaszczyzny poziomej rzutów, zaś względem pionowéj nachylonego pod kątem 45°.

Zadanie 54. Walec prosty równolegle do pionowéj płaszczyzny rzutów stojący obrócić tak, iżby stanął pochyło względem téjże płaszczyzny, a mianowicie, iżby oś jego na rzucie poziomym tworzyła z osią rzutów kąt 60°.

Ostatnie cztery zadania rozwiązać można na mocy wskazówek podanych w części I. Zad. 147, 148 i 151.

Zadanie 55. Nakreślić rzuty walca prostego, którego podstawą jest ellipsa leżąca na płaszczyznie równoległéj do płaszczyzny poziomej rzutów, zaś rodząca równa się co do długości prostéj danéj.

Zadanie 56. Nakreślić rzuty walca prostego, którego podstawą jest koło promienia danego leżące na płaszczyznie prostopadłéj do płaszczyzny poziomej rzutów a nachylonéj pod kątem 30^0 względem pionowéj, wysokość zaś jego równa się długości danéj.

Zadanie 57. Nakreślić rzuty walca prostego, którego podstawą jest koło promienia danego leżące na płaszczyznie nachylonéj pod kątem 60^0 względem poziomej, zaś pod kątem 45^0 względem pionowéj płaszczyzny rzutów, wysokość zaś jego równa się średnicy podstawy.

Zadanie 58. Nakreślić rzuty walca ukośnego z podstawą kołową, leżącą na płaszczyznie poziomej rzutów, a któregoby oś tworzyła z płaszczyzną poziomą rzutów kąt 30^0, zaś z pionową kąt 45^0.

Zadanie 59. Mając dane rzuty walca, znaleść kąty, pod jakimi nachylonym on jest względem płaszczyzn rzutów.

Zadanie 60. Mając dane rzuty walca ukośnego, którego jedna podstawa leży na płaszczyznie poziomej rzutów, druga zaś na płaszczyznie równoległéj do płaszczyzny poziomej rzutów, znaleść wysokość jego i prawdziwą długość rodzącéj, jakotéż kąty nachylenia walca względem płaszczyzn rzutów.

B. Powierzchnie ostrokręgowe.

Powierzchnie ostrokręgowe albo stożkowe powstają przez ruch prostéj po obwodzie krzywéj, danéj z kształtu i położenia, i to tak, że prosta ruchoma ciągle przez jeden i ten sam punkt stały przechodzi. Prosta ruchoma zwie się **rodzącą**, krzywa dana **kierownicą**, punkt zaś stały **wierzchołkiem** albo **środkiem** *(die Spitze, — sommet* albo *centre)* powierzchni ostrokręgowéj. Prosta rodząca jako nieograniczona może być przedłużoną w obie strony punktu nieruchomego czyli wierzchołka, i wtedy zrodzi w czasie swego ruchu dwie powierzchnie ostrokręgowe ze wspólném wierzchołkiem, które razem uważane zowią się **powierzchnią ostrokręgową** albo **ostrokręgiem o dwóch powłokach** *(Kegel mit zwei Fächern, — cone a deux nappes*). Powierzchnię ostrokręgową można sobie także pomyśleć jako zrodzoną przez ruch krzywéj (tj. kierownicy), ciągle równolegle do siebie saméj, i to tak, iż każdy jéj punkt przebiega prostą przechodzącą przez punkt stały. W tym razie krzywa ta musi naturalnie zmniejszać swą wielkość i to proporcyonalnie zbliżaniu się swemu do wierzchołka; doszedłszy do wierzchołka staje się ona punktem, pozań zaś przeszedłszy, w tym samym stosunku wielkość jéj powiększać się musi, w jakim poprzednio malała. Z tego dwojakiego sposobu pojmowania rodzenia się powierzchni ostrokręgowéj wynika, że przez każdy punkt na jéj powierzchni obrany lub dany, można poprowadzić dwie rodzące, jednę prostą, drugą krzywą.

Jeżeli kierownica jest krzywą zamkniętą, wtedy i obie powłoki ostrokręgowe są zamknięte. Jeżeli kierownica jest krzywą ze środkiem, wtedy prosta łącząca tenże środek z wierzchołkiem powierzchni, zowie się jéj osią; a jeżeli taż oś jest prostopadłą do płaszczyzny kierownicy, wtedy powierzchnia ostrokręgowa czyli ostrokrąg, nazywa się prostym, w przeciwnym razie pochyłym. Jeżeli ostrokrąg ograniczony jest płaszczyzną, wówczas biorąc pod uwagę tylko część jego zawartą między tąż płaszczyzną a wierzchołkiem, figura z przecięcia się ostrokręgu z tą płaszczyzną otrzymana, zowie się podstawą. Wysokością ostrokręgu jest prostopadła spuszczona z wierzchołka na jego podstawę. W ostrokręgu prostym, oś jego jest zarazem wysokością. Zależnie od kształtu podstawy, ostrokrąg może być kołowy, elliptyczny, paraboliczny itp.

Prócz własności przysłużających powierzchniom ostrokręgowym jako rozwijalnym, są jeszcze szczególne następujące: 1) z przecięcia powierzchni ostrokręgowych płaszczyznami przechodzącemi przez ich wierzchołek, otrzymujemy linie proste; 2) z przecięcia zaś płaszczyznami do siebie równoległemi, otrzymujemy krzywe do siebie podobne.

Zadanie 61. *Mając daną kierownicę i wierzchołek powierzchni ostrokręgowéj, nakreślić rzuty téjże.*

Niech *abcde* (Fig. **190**.) będzie poziomym, zaś *a'c* pionowym rzutem kierownicy, *s's* rzutami jego wierzchołka. Ponieważ każda rodząca ostrokręgu przechodzić musi przez punkt *s's* jakotéż punkt na obwodzie jego kierownicy leżący, obieramy więc na téj ostatniéj dowolną a dostateczną liczbę punktów, i przez takowe jakotéż wierzchołek *s's* prowadzimy proste czyli rodzące powierzchni ostrokręgowéj, które łącznie z daną kierownicą dadzą nam rzuty téjże powierzchni. Między temi rodzącemi szczególniéj te są ważne, które odgraniczają część widoczną powierzchni od niewidocznéj. Na rzucie poziomym znajdujemy zaś takowe, poprowadziwszy z *s* dwie styczne *sv* i *se* do *abcde;* styczne te podzielą koło *abcde* na dwa łuki *eabv* i *vme,* a każda rodząca przechodząca przez punkt leżący na łuku pierwszym, będzie należała do widocznéj, zaś przechodząca przez punkt na łuku drugim leżący, do niewidocznéj części powierzchni. Również w łatwy sposób oddzielić można rodzące widoczne od niewidocznych na rzucie pionowym, poprowadziwszy dwie styczne tj. *aa'* i *ee'* do *abcde* ale prostopadłe do osi rzutów, które znów podzielą *abcde* na dwa łuki *abc* i *cmea;* rzuty pionowe rodzących idących przez punkta łuku *abc* będą widoczne, reszta zaś niewidoczne.

Zadanie 62. *Mając dane rzuty powierzchni ostrokręgowéj, znaleść jéj ślady.*

Szukamy śladów poziomych każdéj rodzącéj, i łączymy takowe ze sobą krzywą ciągłą, a otrzymamy ślad poziomy żądany, i podobnież postępujemy dla otrzymania śladu pionowego. I tak na Fig. **190**. jest $A_1B_1C_1D_1E_1$ poziomym, zaś $A_2B_2C_2D_2E_2$ pionowym śladem ostrokręgu, któregośmy rzuty w poprzedzającém zadaniu wyznaczyli.

Zadanie 63. *Mając dany jeden z rzutów punktu leżącego na powierzchni ostrokręgowéj, znaleść rzut jego drugi.*

Ponieważ rodząca ostrokręgu przez wszystkie punkta jego powierzchni przechodzić musi, zatém punkt, którego rzut ma być wyszukanym, musi leżeć na jedném z takich położeń rodzącéj, a nawzajem rodząca przez tenże punkt przechodzić musi. Mając więc dany np. rzut poziomy x punktu na ostrokręgu leżącego, prowadzimy przezeń i przez rzut poziomy wierzchołka prostą, a ta będzie rzutem poziomym rodzącéj, na któréj ów punkt leży; poszukawszy następnie rzutu pionowego téjże rodzącéj, a mianowicie, poszukawszy rzutów punktu, w którym rodząca ta przecina się z kierownicą, tj. punktu $O'O$, i przez O' i s' poprowadziwszy prostą, ta będzie rzutem pionowym rodzącéj, i na niéj, jakotéż na prostopadłéj do osi z x wyprowadzonéj leżeć będzie x', czyli rzut pionowy szukany. Łatwo wreszcie rozumieć, że rzutowi danemu x odpowiadać mogą dwa rzuty pionowe, a mianowicie wtedy, gdy nie jest wyraźnie powiedzianém, na któréj stronie ostrokręgu punkt X leży, kierownica zaś jest krzywą zamkniętą; może być także i więcéj jak dwa rzutów pionowych, jeżeli kierownicą jest krzywa o kilku skrętach.

Zadanie 64. Nakreślić rzuty ostrokręgu prostego, mając daną jego podstawę i wysokość.

Zadanie 65. Mając dane rzuty ostrokręgu prostego z podstawą leżącą na płaszczyznie pozioméj rzutów, pochylić tenże ostrokrąg tak, iżby oś jego tworzyła z płaszczyzną poziomą rzutów kąt 30°, zaś do pionowéj została równoległą.

Zadanie 66. Nakreślić rzuty ostrokręgu prostego kołowego, któregoby oś tworzyła z płaszczyzną poziomą rzutów kąt 75°, zaś rzut poziomy téjże osi z osią rzutów kąt 30°.

Trzy te ostatnie zadania rozwiązać można na mocy wskazówek danych w Części I., Zad. 169.

Zadanie 67. Nakreślić rzuty ostrokręgu prostego kołowego, mając dany promień jego podstawy, jéj płaszczyznę nachyloną pod dowolnymi kątami względem płaszczyzn rzutów, i mając daną wysokość ostrokręgu.

Zadanie 68. Mając dane rzuty ostrokręgu i rzuty punktu leżącego w granicach rzutów jego, sprawdzić, czy ten punkt leży, czy nie, na powierzchni ostrokręgu.

Zadanie 69. Mając dane ślady powierzchni ostrokręgowéj, naznaczyć rodzące, które oddzielają część widoczną od zakrytéj na obu płaszczyznach rzutów.

Zadanie 70. Nakreślić rzuty ostrokręgu prostego kołowego, którego podstawa leży na płaszczyznie pozioméj rzutów, mając dane 1) promień koła podstawy i daną oś; 2) mając dany promień koła i długość prawdziwą rodzącéj; 3) mając daną oś i długość rodzącéj.

Zadanie 71. Nakreślić rzuty ostrokręgu ukośnego, mając dany jego wierzchołek, jakotéż prawdziwą wielkość podstawy leżącéj na płaszczyznie rzucającéj poziomej, a nachylonéj pod kątem 30° do płaszczyzny pionowéj rzutów.

Zadanie 72. Mając dane oba rzuty ostrokręgu, nakreślić rzut jego boczny.

Zadanie 73. Nakreślić rzuty ostrokręgu jakiegokolwiek 1) opartego swym wierzchołkiem o płaszczyznę pionową lub poziomą rzutów; 2) leżącego całą swą długością swéj rodzącéj na płaszczyznie poziomej rzutów; 3) z podstawą leżącą na płaszczyznie prostopadłéj do osi rzutów, zaś z wierzchołkiem na osi.

§. 14.

Linie szrubowe, walcowe i ostrokręgowe.

Między liniami krzywemi podwójnego zakrzywienia, jedną z mających w praktyczném użyciu najwięcéj zastosowania, jest l i n i a s z r u b o w a *(die Schraubenlinie, — l'hélice)*, któréj konstrukcyą, poznawszy już sposoby przedstawiania w rzutach walców i ostrokręgów, opisać nam teraz wypada. Linią szrubową nazywamy krzywą leżącą na powierzchni walcowéj lub ostrokręgowéj, a przecinającą rodzące jednéj lub drugiéj powierzchni pod kątem stałym i niezmiennym. Prawo rodzenia się téj krzywéj możemy opisać w następujący sposób: jeżeli punkt rodzący obrany gdziekolwiek na obwodzie podstawy walca lub ostrokręgu, porusza się po jego powierzchni tak, że części odcięte przezeń na poszczególnych rodzących, licząc od kierownicy, są proporcyonalne do łuków zawartych między początkiem ruchu a spodkiem odpowiedniéj rodzącéj, wtedy powstaje linia szrubowa. I tak, mając walec prosty *abcdhg* (Fig. **191**.), po którego powierzchni porusza się punkt *b*, obrany na obwodzie jego podstawy, to na mocy definicyi powyżéj podanéj dla linii szrubowéj, musi być:

$$kc : el : fm : bn = \text{łuk. } bc : \text{łuk. } be : \text{łuk. } bf : \text{łuk. } bdfb.$$

Część linii szrubowéj, zawarta między dwoma po sobie następującymi punktami przecięć się ich z jedną i tą samą rodzącą, jak np. część *bklmn*, zowie się krokiem szruby *(eine Schraubengang, — pas de l'hélice)*, zaś część saméj rodzącéj, między tymi dwoma punktami zamknięta, jak np. *bn*, *ko*... zowie się wysokością kroku szruby *(die Höhe eines Schraubenganges, — l'hauteur d'un pas de l'hélice)*. Linie szrubowe mogą być rozmaite, zależnie od kształtu kierownicy walca lub ostrokręgu, na którym są opisane. Jeżeli kierownicą jest koło, wówczas linia szrubowa zowie się kołową itp.

Znając ogólne prawo rodzenia się linii szrubowéj, łatwo zrozumieć konstrukcyę następujących zadań:

Zadanie 74. *Na danym walcu prostym kołowym, stojącym na płaszczyznie pozioméj rzutów, nakreślić linię szrubową, i przedstawić ją w rzutach, mając daną wysokość kroku.*

Mając dany walec z podstawą promienia *oa* (Fig. **192**.) i wysokość kroku xy, obok pionowego rzutu walca kreślimy prostą prostopadłą do osi rzutów, a równą danéj wysokości kroku, tj. $a'a'' = xy$, i dzielimy takową w punktach $1', 2', 3'$... jakotéż podstawę walca na jednakową liczbę części równych, np. na 16, następnie zaś przez punkta podziału prostéj $a'a''$ prowadzimy proste równoległe do osi rzutów. Przyjąwszy daléj, że punktem rodzącym obranym na podstawie jest punkt *mm'*, i że tenże porusza się w kierunku *1 — 2 — 3*, to jasna, że gdy on w ruchu swoim obrotowym po powierzchni walca przebieży $^1/_{16}$ całego obrotu tj. $^1/_{16}.360^0$, czyli, gdy znajdować się będzie na rodzącéj przez *1* poprowadzonéj, to wysokość jego wtedy nad płaszczyzną poziomą rzutów będzie równa $^1/_{16}\,a'a''$; rzut więc jego pionowy leżeć będzie na przecięciu się rodzącéj przez *1* poprowadzonéj, z równoległą do osi przez *1'* idącą, zaś rzut poziomy będzie w punkcie *1* na obwodzie podstawy. Gdy punkt w dalszym swoim ruchu przebieży $^2/_{16}.360^0$, tj. gdy znajdować się będzie na rodzącéj przez *2* idącéj, to wysokość jego nad płaszczyzną poziomą rzutów będzie wtedy $^2/_{16}\,a'a''$, czyli rzut jego pionowy będzie w punkcie przecięcia się rodzącéj przez *2* idącéj, z równoległą przez *2'* do osi poprowadzoną, zaś rzut poziomy w punkcie *2*. W ten sam sposób postępując daléj, czyli prowadząc przez punkta *3, 4, 5,...* rodzące walca, i szukając ich przecięć z odpowiedniemi równoległemi do osi przez *3', 4', 5',...* poprowadzonemi, wyznaczymy resztę punktów należących do rzutu pionowego szukanéj linii szrubowéj, które połączone ze sobą krzywą ciągłą, dadzą nam ów rzut pionowy, a mianowicie rzut jednego kroku linii szrubowéj, podczas gdy rzut poziomy leży na obwodzie podstawy, czyli na śladzie poziomym walca, co jest naturalna zważywszy, że sam walec jest rzucającym poziomym. Aby otrzymać drugi krok w rzutach, potrzeba albo na prostopadłéj *a'a''* odciąć powyżéj punktu *a''* część równą danéj wysokości kroku, a następnie postąpić jak poprzednio, — albolitéż co krócéj, daną wysokość kroku odciąć od każdego, poprzednim sposobem znalezionego punktu linii szrubowéj, na odpowiedniéj rodzącéj, a otrzymamy stąd rzuty pionowe punktów do drugiego kroku należące.

Zadanie 75. *Powierzchnię walca prostego kołowego wraz z linią szrubową na nim nakreśloną rozwinąć na płaszczyznie.*

Mamy dany walec kołowy prosty (Fig. **192**.), a na nim dwa kroki linii szrubowéj. Co się tycze najprzód rozwinięcia powierzchni walca na płaszczyznie, takowe otrzymamy, nakreśliwszy prostokąt *amrs* (Fig. **193**.), którego podstawa *am* równa się obwodowi koła w podstawie walca, zaś wysokość *as* równa się wysokości walca. Na tak rozwiniętéj powierzchni chcąc następnie nakreślić rozwiniętą linię szrubową, dzielimy podstawę *am* prostokąta na 16 równych części w punktach *1, 2, 3*..., i przez takowe prowadzimy równoległe do *as*, a te przedstawiać nam będą rodzące walca, na których leżą poszczególne punkta linii szrubowéj. Odciąwszy następnie na równoległéj przez *1* idącéj, część $1'1$ równą $\frac{1}{16}$ wysokości kroku linii szrubowéj (tj. $1'1 = \frac{1}{16}ap$, gdzie $ap = \frac{1}{2}as$), daléj na równoległéj przez *2* idącéj, część $2'2$ równą $\frac{2}{16}$ téjże wysokości itp., otrzymamy stąd punkta *1', 2', 3'*.... *15', 16'*, należące do jednego kroku linii szrubowéj, a które jak łatwo dowieść, połączone ze sobą leżeć będą wszystkie na jednéj prostéj *an*. Widzimy stąd, 1) że, aby otrzymać drugi krok na rozwinięciu, wystarczy przez punkt *p* poprowadzić prostą *pr* i 2) że rozwinięty krok linii szrubowéj na walcu kołowym opisanéj, równa się przeciwprostokątni trójkąta, w którym jedna przyprostokątnia równa się obwodowi podstawy walca, druga zaś wysokości kroku téjże linii szrubowéj.

Zadanie 76. *Na ostrokręgu prostym kołowym, wspartym podstawą na płaszczyznie pozioméj rzutów, nakreślić linię szrubową i przedstawić ją w rzutach, mając daną wysokość kroku.*

Mając dany ostrokrąg prosty (Fig. **194**.), którego podstawą w prawdziwéj wielkości jest koło promienia *sa*, zaś wierzchołkiem punkt *s's*, i chcąc na nim nakreślić linię szrubową dla danéj wysokości kroku *m*, postępujemy zupełnie tak samo, jak przy zadaniu poprzedzającém, a mianowicie: dzielimy kierownicę czyli podstawę ostrokręgu na dowolną liczbę części równych np. na 12, i punkta podziału łączymy na obu rzutach z wierzchołkiem *s's*; otrzymamy stąd rodzące ostrokręgu dzielące jego powierzchnię na 12 równych części, a których rzuty poziome podzielą znów kąt przy *s* na tyleż części równych. Następnie na prostopadłéj do osi rzutów, gdziekolwiek obok rzutu pionowego ostrokręgu poprowadzonéj, odciąwszy daną wysokość kroku tj. $MN = m$, i podzieliwszy ją również na 12 części równych w punktach *I, II, III*..., to jasna, że *MI* będzie wysokością, do jakiéj punkt rodzący np. *a* obrany na kierownicy się wzniesie, skoro w obrocie swym około osi ostrokręgu dojdzie do rodzącéj *s1,s'1'*, czyli skoro przebieży kąt $\frac{1}{12}.360^0$; podobnież *MII* będzie wysokością punktu *a*, skoro tenże dojdzie do rodzącéj s*2*, *s'2'*, czyli skoro przebieży kąt $\frac{2}{12}.360$ itp. Poprowadziwszy zatém przez punkta *I, II, III...*, równoległe do osi rzutów aż do przecięcia się ich z rzutami pionowymi odpowiednich rodzących w punktach *b', c' d'*..., takowe będą punktami do rzutu pionowego szukanéj linii szrubowéj należącymi, — skąd następnie otrzymamy łatwo ich rzuty poziome, które połączone z sobą, dadzą nam spiralną Archimedesa, jako rzut poziomy linii szrubowéj żądanéj. Otrzymawszy w ten sposób rzuty jednego kroku szruby, i chcąc prowadzić je daléj, potrzeba wysokość kroku odciąć od punktu *N* na linii *MN*, i postąpić następnie jak poprzednio.

§. 15.

Przekroje płaskie powierzchni rozwijalnych.

A. Powierzchnie walcowe.

Jakąkolwiek powierzchnię krzywą przeciąwszy płaszczyzną, otrzymujemy z przecięcia krzywą płaską na téjże płaszczyznie leżącą, a kształt i wielkość téj krzywéj zależy od położenia płaszczyzny przecinającéj względem powierzchni przeciętéj. Przy niektórych powierzchniach, a między niemi przy rozwijalnych, i przy szczególném położeniu płaszczyzn je przecinających, otrzymujemy z przecięcia także linie proste. Sposób, w jaki pojmujemy tworzenie się powierzchni krzywéj, prowadzi nas do sposobów, jakimi przecięć płaskich tychże powierzchni szukać mamy. I tak przyjmując, że powierzchnia krzywa powstaje przez ruch prostéj lub krzywéj rodzącéj według danego prawa, wynika stąd, że taż powierzchnia jest miejscem geometryczném wszystkich możliwych położeń rodzącéj w czasie tego ruchu zajmowanych, i nawzajem, że rodząca w każdém swém położeniu w całéj swéj rozciągłości leży na powierzchni przez nią zrodzonéj. Aby więc znaleść przecięcie powierzchni płaszczyzną, potrzeba jak z tego widzimy, szukać punktów przecięcia się poszczególnych położeń rodzącéj z tąż płaszczyzną, a takowe leżąc współcześnie na rodzącéj a tém samém i na powierzchni krzywéj, i leżąc na płaszczyznie przecinającéj, są punktami do szukanego przecięcia należącymi, potrzeba je tylko należycie ze sobą krzywą ciągłą połączyć. Ponieważ zaś w rysunku nie można szukać przecięcia wszystkich położeń rodzącéj z płaszczyzną, zatem ograniczamy się zwykle tylko na takich jéj położeniach, które już odpowiednio do ustroju powierzchni ważniejszemi nam się być wydają, i na takiéj ich liczbie, jaka stósownie do dokładności szukanéj linii przecięcia jest potrzebną.

Stosując sposób ten szukania przekrojów powierzchni najprzód do powierzchni walcowych, to widoczna, że niczém on się nie różni od sposobu, w jaki szukaliśmy przecięć brył graniastych, — z tą tylko różnicą, że co tam była mowa o krawędziach brył, tu mowa o rodzących powierzchni, co rzecz zupełnie naturalna zważywszy, że walec można uważać za graniastosłup o bardzo wielkiéj liczbie ścian. Z przecięcia powierzchni walcowych możemy otrzymać albo linię krzywą, albo linię prostą; krzywą w ogóle otrzymujemy wtedy, gdy każda gdziekolwiek poprowadzona rodząca powierzchni walcowéj, lub téż tylko niektóre z nich, są tąż płaszczyzną przecięte, — prostą zaś wtedy, gdy płaszczyzna przecinająca równoległą jest do rodzących, a w którymto razie prosta przecięcia leży wzdłuż jednéj z tychże rodzących.

Zadanie 77. *Znaleść w rzutach i prawdziwéj wielkości przecięcie walca prostego płaszczyzną prostopadłą do jednéj z płaszczyzn rzutów.*

Walcem danym niech będzie walec kołowy prosty $A'A$ (Fig. **195**.), zaś płaszczyzna $p'p$ prostopadła do płaszczyzny pionowéj rzutów, a pochylona do poziomej pod kątem 45^0, płaszczyzną przecinającą. Na kierownicy walca obieramy kilka lub kilkanaście punktów, i przez takowe prowadzimy rodzące tegoż; następnie szukamy punktów przecięcia się każdéj z tych rodzących z płaszczyzną daną, a punkta te połączone ze sobą, dadzą nam szukaną krzywą przecięcia w rzutach. Punkta te atoli łatwo znaleść, zważywszy, że skoro płaszczyzna przecinająca jest rzucającą pionową, zatém rzuty ich pionowe leżeć muszą na śladzie pionowym p'; a że leżeć także muszą na rzutach pionowych odpowiednich rodzących, będą to więc punkta $1'$, $2'$, $3'$, $4'$...., których rzuty poziome $1, 2, 3$...., padną wszystkie na kierownicę walca. Z połączenia tych punktów otrzymamy następnie prostą *1'7'* jako rzut pionowy szukanego przecięcia, rzut zaś jego poziomy zejdzie się z rzutem poziomym kierownicy, czyli będzie w naszym razie kołem. Aby wreszcie znaleść prawdziwą wielkość tego przecięcia, robimy kład poziomy lub pionowy płaszczyzny *p'p* sposobem wiadomym, a otrzymamy stąd ellipsę, któréj osią wielką jest *MN*, zaś osią małą jest *CD*.

Gdyby płaszczyzna przecinająca była prostopadłą do płaszczyzny poziomej rzutów, jak np. płaszczyzna *q'q*, wówczas będąc ona zarazem równoległą do rodzących walca, przetnie takowy w dwóch rodzących idących przez punkta *x'x* i *y'y* tj. przez punkta, w których ślad poziomy *q* téjże płaszczyzny przecina kierownicę walca.

Zadanie 78. *Znaleść w rzutach i prawdziwéj wielkości przecięcie walca ukośnego płaszczyzną prostopadłą do jednéj z płaszczyzn rzutów.*

Rozwiązanie takie samo jak przy zadaniu poprzedzającém.

Zadanie 79. *Znaleść w rzutach i prawdziwéj wielkości przecięcie walca płaszczyzną stojącą jakkolwiek względem obu płaszczyzn rzutów.*

Danym jest walec *A'A* (Fig. **196**.) wsparty podstawą na płaszczyznie poziomej rzutów, i płaszczyzna przecinająca *p'p*. Aby najprzód znaleść krzywą przecięcia w rzutach, kreślimy na powierzchni walca dowolną byle dostateczną liczbę rodzących, i szukamy punktu przecięcia się każdéj z nich z płaszczyzną daną. Otrzymamy stąd szereg punktów *1, 2, 3,... 1', 2', 3'...* tak na rzucie poziomym, jak pionowym, które połączone z sobą należycie krzywą ciągłą, dadzą nam rzuty szukanego przecięcia. Mając zaś rzuty, znajdziemy jego prawdziwą wielkość I, II, III..., robiąc np. kład poziomy płaszczyzny *p'p*.

Zupełnie tak samo się postępuje, jeżeli walec dany nie jest wsparty podstawą swoją na żadnéj z płaszczyzn rzutów, lecz stoi jakkolwiek między temiż.

Podobnie jak przy szukaniu przecięć brył graniastych, również i tutaj z korzyścią często może być użytym sposób polegający na zmianie płaszczyzn rzutów, mocą któréj płaszczyzna przecinająca staje się prostopadłą do jednéj z nich.

Gdy zaś tamże (Część I, Zad. 190) dostatecznie uzasadniliśmy ten sposób, tu więc takowy do przykładu wprost zastósujemy.

Danym jest walec AA' (Fig. **197**.) wsparty podstawą elliptyczną na płaszczyznie poziomej rzutów, i płaszczyzna przecinająca $p'p$. Zmieńmy płaszczyznę pionową rzutów, biorąc za takową płaszczyznę $s's$ prostopadłą do płaszczyzny poziomej rzutów i do płaszczyzny $p'p$ (jéj więc ślad s' będzie prostopadły do osi, zaś ślad s będzie prostopadły do p), a skutkiem tego ślad s będzie nową osią rzutów. Do tego nowego układu płaszczyzn rzutów potrzebujemy teraz mieć odniesione rzeczy dane w zadaniu. Co się najprzód tyczé rzutów walca, rzut jego poziomy zostaje ten sam, skoro płaszczyzna pozioma rzutów została na swojém miejscu; rzut zaś jego na nową płaszczyznę rzutów $s's$ znajdziemy jak następuje: rzutem nowym jego kierownicy będzie prosta $a''c''$ na śladzie s (czyli nowéj osi rzutów) leżąca; aby znaleść kierunek rzutów jego rodzących, na rodzącéj przez $b'b$ idącéj obieramy gdziekolwiek punkt $m'm$, i szukamy jego rzutu nowego m'' (Część I, Zad. 133), a ten połączony z b'', da nam prostą $b''m''$ jako rzut rodzącéj walca na płaszczyznę $s's$, poczém rzut A'' walca łatwy do nakreślenia, zważywszy, że rodzące jego wszystkie są do siebie równoległe. Co się następnie tyczé płaszczyzny przecinającéj $p'p$, ślad jéj poziomy zostaje na swojém miejscu, ale naturalnie sięga teraz tylko do osi rzutów s, zaś ślad pionowy przyjdzie w położenie p'' (Cz. I. Zad. 135.).

Tak mając te rzeczy wyznaczone, bierzemy pod uwagę rzuty walca $A''A$ i płaszczyznę przecinającą $p''p$, a z temi danemi postąpiwszy według Zad. 77 (gdyż płaszczyzna przecinająca jest teraz prostopadłą do jednéj z płaszczyzn rzutów), otrzymamy rzuty $1''2''3''$..., 123... przecięcia szukanego, zaś z pomocą tego ostatniego rzutu tj. poziomego, znajdziemy łatwo rzut pionowy $1'2'3'$.., — przyczém jako sprawdzenie rysunku służy tą okoliczność, że odległości punktów $1', 2', 3'$... od osi rzutów, muszą być równe odległościom punktów $1'', 2'', 3''$.. od osi s. Jak zaś mając rzuty przecięcia, znaleść przecięcie to w prawdziwéj wielkości, rzecz dostatecznie znana.

Gdyby walec nie był wsparty na żadnéj płaszczyznie rzutów, ale stał jakkolwiek między niemi, wtedy potrzeba wyznaczyć najpierw nowy rzut jego podstawy (obierając na niéj kilka lub kilkanaście punktów, i szukając ich rzutów), a potém postąpić jak poprzednio.

Zadanie 80. *Znaleść przecięcie walca płaszczyzną równoległą do jednéj z płaszczyzn rzutów.*

Zadanie to zamienia się na Zad. 77., skoro płaszczyzna przecinająca będąc równoległą do jednéj z płaszczyzn rzutów, jest tém samém prostopadłą do drugiéj.

Zadanie 81. *Przez punkt dany zewnątrz powierzchni walcowéj przesunąć płaszczyznę, któraby przecinała téż powierzchnię w rodzących.*

Przez punkt dany przesunąwszy najprzód prostą równoległą do rodzących walca, a przez tę prostą płaszczyznę, takowa albo będzie żądaną tj. przetnie walec w rodzących, idących przez punkta przecięcia się śladu poziomego płaszczyzny ze śladem poziomym walca, albo téż będzie tylko do niego styczną, gdy ślad jéj poziomy dotyka tegoż śladu, albo wreszcie będzie przechodziła mimo walca, gdy ślad jéj poziomy ani dotyka śladu walca, ani go téż przecina. Jeżeli śladu poziomego walca nie mamy, natomiast podstawa jego daną jest na jakiéjbądź płaszczyznie, wtedy do téj podstawy poprzednie nasze uwagi w zupełności stosujemy.

Zadanie 82. *Przez prostą daną przesunąć płaszczyznę, któraby przecinała powierzchnię walcową w rodzących.*

Na prostéj danéj obrawszy punkt, i przezeń poprowadziwszy drugą prostą równoległą do rodzących walca, płaszczyzna przez te dwie proste przesunięta, albo będzie żądaną tj. przetnie walec i to w rodzących, idących przez punkta przecięcia się śladu poziomego téj płaszczyzny ze śladem poziomym lub kierownicą walca, albo téż przejdzie zewnątrz walca, jeżeli jéj ślad poziomy nie przecina tegoż śladu lub kierownicy.

Zadanie 83. *Znaleść punkta przecięcia się prostéj danéj z powierzchnią walcową.*

I-szy Sposób. Przez prostą daną przesunąwszy płaszczyznę, ta przetnie powierzchnię walcową w linii krzywéj, któréj punkta przecięcia się z prostą daną, są punktami szukanymi.

2gi Sposób. Na prostéj danéj obieramy punkt, i przezeń prowadzimy prostą równoległą do rodzących walca. Następnie przesunąwszy przez te dwie proste płaszczyznę, ta przetnie walec w jednéj lub więcéj rodzących, których punkta przecięcia się z prostą daną, będą punktami szukanymi.

Zadanie 84. *Znaleść punkta przecięcia się linii krzywéj z płaszczyzną daną.*

Przyjmując krzywą daną za kierownicę walca, którego rodzące są równoległe do płaszczyzny danéj, to walec ten przecięty zostanie płaszczyzną daną w rodzących, których punkta przecięcia się z krzywą daną, będą punktami szukanymi. I tak, mając np. krzywą daną *abcd, a′b′c′d′* (Fig. **198**.) i płaszczyznę *p′p*, na rzutach krzywéj danéj konstruujemy rzuty walca, któregoby rodzące były równoległe do płaszczyzny *p′p*, a więc co najkróćéj, kreślimy rzuty pionowe tychże rodzących równolegle do śladu *p′*, zaś poziome równolegle do osi. Następnie szukamy rodzących *mx* i *ny* (ich rzut poziomy wystarczy), w których walec tak otrzymany przecięty zostanie płaszczyzną *p′p*, tj. szukamy najpierw śladu poziomego *1234* . . . tego walca, a potém przez punkta *m* i *n* przecięcia się tego śladu ze śladem *p* prowadzimy rodzące *mx* i *ny*; punkta *x′x* i *y′y* leżące na przecięciu się tych rodzących z krzywą daną (czyli kierownicą walca), są punktami szukanymi.

B. Przecięcia ostrokręgowe.

Z przecięcia powierzchni ostrokręgowéj płaszczyzną otrzymać można albo linią krzywą, gdy płaszczyzna przecinająca przecina wszystkie lub niektóre jéj rodzące, albotéż linię prostą jednę lub więcéj, a leżącą wzdłuż rodzącéj ostrokręgu, gdy płaszczyzna przecinająca przechodzi przez jego wierzchołek. Kształt i wielkość krzywéj przecięcia zależy naturalnie zawsze od położenia płaszczyzny przecinającéj względem powierzchni ostrokręgowéj. I tak np. ze soldometryi już wiadomą jest rzeczą, że przeciąwszy ostrokrąg płaszczyzną równoległą do płaszczyzny jego kierownicy (czyli do jego podstawy), otrzymujemy z przecięcia krzywą podobną do téjże kierownicy; a więc jeżeli ostrokrąg jest kołowym, elliptycznym, cykloidalnym, spiralnym, itp., z przecięcia jego tak ułożoną płaszczyzną otrzymamy koło, ellipsę, cykloidę lub spiralną, a wymiary tych krzywych przecięcia będą proporcyonalne do wymiarów samychże kierownic.

Biorąc pod uwagę najczęściéj w praktyce i umiejętności przychodzący ostrokrąg kołowy lub elliptyczny, to w kształtach przecięć przez płaszczyznę na nim otrzymanych, zachodzi wielka rozmaitość, i tak: 1) jeżeli, jakeśmy to już i wyżéj wspomnieli, płaszczyzna przecinająca jest równoległą do płaszczyzny kierownicy, otrzymamy z przecięcia tego koło lub ellipsę w miarę tego, czy ostrokrąg jest kołowym lub elliptycznym; 2) jeżeli płaszczyzna przecinająca jest pochyłą względem płaszczyzny kierownicy, z przecięcia możemy otrzymać koło lub ellipsę, niezależnie od kształtu kierownicy; 3) jeżeli płaszczyzna przecinająca przechodzi przez wierzchołek ostrokręgu, czyli co na jedno wychodzi, przecina wszystkie jego rodzące w jednym wspólnym punkcie tj. wierzchołku, wówczas zależnie od tego, czy taż płaszczyzna przecina kierownicę w jednym lub w dwóch punktach, będzie ona albo styczną do ostrokręgu, lub téż przecinać go będzie w dwóch prostych, czyli jego rodzących; 4) jeżeli płaszczyzna przecinająca jest równoległą do jednéj z rodzących ostrokręgu, przecina wtedy wszystkie inne rodzące w punktach, które połączone z sobą tworzą parabolę; 5) nareszcie, jeżeli taż płaszczyzna jest równoległą do dwóch rodzących ostrokręgu, wtedy przetnie jednę część reszty rodzących na dolnéj powłoce tegoż ostrokręgu w punktach, które utworzą jedno ramię hyperboliczne, drugą zaś część rodzących przetnie na ich przedłużeniu, tj. na górnéj powłoce ostrokręgu w punktach, które utworzą drugie ramię hyperboliczne, — czyli z przecięcia otrzymamy w tym razie hyperbolę.

Z przecięcia zatem ostrokręgu kołowego lub elliptycznego płaszczyzną, możemy otrzymać ellipsę, parabolę lub hyperbolę, i z téjto okoliczności te trzy krzywe, swe wspólne miano przecięć ostrokręgowych albo stożkowych wywodzą. (Obraz tych przecięć wskazuje nam Fig. **199**.). Ściśle rzecz biorąc, należy jeszcze do nich punkt, gdy płaszczyzna przecina ostrokrąg tylko w wierzchołku, jako téż linia prosta i koło. Aby zaś naprzód ocenić, jaką linię przecięcia przy danéj płaszczyźnie przecinającéj otrzymamy, dość przez wierzchołek ostrokręgu poprowadzić płaszczyznę równoległą do danéj, i poszukać prostéj przecięcia się jéj z płaszczyzną kierownicy ostrokręgu. Jeżeli taż prosta przechodzi zewnątrz kierownicy jego, otrzymamy z przecięcia ellipsę lub koło; jeżeli ta prosta styczną będzie do kierownicy, otrzymamy parabolę; a wreszcie, jeżeli przecinać będzie kierownicę, otrzymamy hyperbolę.

W każdym z tych ostatnich i innym przypadku, szukanie przecięcia ostrokręgu nie nastręcza żadnéj trudności, dość bowiem, jakeśmy to we wstępie do tego §. wspomnieli, poszukać punktów przecięcia się pewnéj a dostatecznéj liczby rodzących z płaszczyzną daną, i takowe punkta ze sobą połączyć.

Zadanie 85. *Znaleść w rzutach i w prawdziwéj wielkości przecięcie powierzchni ostrokręgowéj płaszczyzną prostopadłą do jednéj z płaszczyzn rzutów.*

Danym ostrokręgiem niech będzie ostrokrąg kołowy prosty $A'A$ (Fig. **200**.) wsparty podstawą na płaszczyznie pozioméj rzutów, zaś płaszczyzna $p'p$ prostopadła do pionowéj rzutów, płaszczyzną przecinającą. Ponieważ płaszczyzna $p'p$ jest rzucającą pionową, zatém rzuty pionowe punktów przecięcia się rodzących, w dowolnéj a dostatecznéj liczbie na tym ostrokręgu poprowadzonych, z płaszczyzną daną, będą leżały na śladzie pionowym płaszczyzny $p'p$; że zaś leżeć także muszą i na rzucie pionowym tychże rodzących, będą więc w punktach $1'$, $2'$, $3'$,... które mając, łatwo znaleść ich rzuty poziome $1, 2, 3$... Z połączenia należycie tych punktów otrzymamy następnie na rzucie pionowym prostą, zaś na poziomym ellipsę, jako rzuty szukanego przecięcia, a zrobiwszy wreszcie co najkrócéj w tym razie, kład pionowy płaszczyzny $p'p$, otrzymamy ellipsę *abcd*.... jako prawdziwą wielkość tegoż przecięcia.

Podobnież zupełnie się postępuje, gdyby ostrokrąg był ukośny, i podobnież, gdyby nie był wsparty podstawą swoją na żadnéj z płaszczyzn rzutów.

Zadanie 86. *Znaleść w rzutach i prawdziwéj wielkości przecięcie powierzchni ostrokręgowéj płaszczyzną równoległą do jednéj z płaszczyzn rzutów.*

Jeżeli płaszczyzna przecinająca jest równoległą do jednéj z płaszczyzn rzutów, jest tém samém prostopadłą do drugiéj, — a skutkiem tego zadanie to zamienia się na poprzedzające.

Zadanie 87. *Znaleść w rzutach i prawdziwéj wielkości krzywą przecięcia powierzchni ostrokręgowéj płaszczyzną pochyloną do obu płaszczyzn rzutów.*

I-szy Sposób. Przez punkta obrane na kierownicy ostrokręgu prowadzimy rodzące tegoż, i szukamy następnie punktów przecięcia się każdéj z nich płaszczyzną daną, — z połączenia zaś tych punktów ze sobą krzywą ciągłą, otrzymamy rzuty przecięcia szukanego.

2-gi Sposób. Zmieniamy jednę z płaszczyzn rzutów tak, iżby skutkiem tego płaszczyzna przecinająca stała się do niéj prostopadłą. Konstrukcya na tym sposobie polegająca, ze stósownemi zmianami jest ta sama co przy Zad. 79.

3-ci Sposób. Może być zastósowanym w razie, gdy kierownicą ostrokręgu jest koło leżące na jednéj z płaszczyzn rzutów, lub téż na płaszczyznie do niéj równoległéj. I tak, mając np. ostrokrąg ukośny $A'A$ (Fig. **201**.), wsparty podstawą kołową na płaszczyznie pozioméj rzutów i płaszczyznę przecinającą P, w dowolnéj odległości od płaszczyzny poziomej rzutów, przesuwamy płaszczyznę R_1 do niéj równoległą. Płaszczyzna ta z płaszczyzną P przetnie się w prostéj AB, zaś z ostrokręgiem przetnie się w kole, którego środek F będzie leżał na linii SE łączącéj wierzchołek ostrokręgu ze środkiem podstawy, a średnicą (tudzież rzutem pionowym) tego koła będzie $c'd'$, tj. część śladu r_1' zawarta między rodzącemi granicznemi (konturowemi) ostrokręgu. Połową zatém téj średnicy z punktu f zatoczywszy koło, takowe będzie rzutem poziomym, a zarazem i prawdziwą wielkością przecięcia ostrokręgu płaszczyzną R_1; koło to z prostą AB leżąc w jednéj płaszczyznie, przetnie się z tą ostatnią w punktach $k'k$ i $h'h$, które jak łatwo pojąć, są punktami do szukanego w zadaniu przecięcia należącymi. W ten sam sposób, tj. przesunąwszy więcéj takich płaszczyzn pomocniczych, jak R_2, R_3 itp., otrzymamy więcéj punktów, z których połączenia ze sobą należycie krzywą ciągłą, otrzymamy rzuty przecięcia szukanego.

Gdyby płaszczyzna przecinająca była prostopadłą do jednéj z płaszczyzn rzutów, a więc przypuściwszy np. gdyby ślad p' był śladem płaszczyzny rzucającéj pionowéj, wówczas część $m'n'$ tegoż śladu byłaby rzutem pionowym szukanego przecięcia, — skąd wypada, że w tym razie używając zwyż opisanego sposobu, przesuwanie płaszczyzny pomocniczéj R ani powyżéj punktu m', ani poniżéj n', nie miałoby celu, gdyż tam nie otrzymalibyśmy żadnego punktu do przecięcia ostrokręgu z płaszczyzną daną należącego.

Żadanie 88. *Mając dany ostrokrąg, przeciąć takowy płaszczyzną w hyperboli.*

Wiemy, że iżby z przecięcia ostrokręgu płaszczyzną otrzymać hyperbolę, tenże musi być kołowy lub elliptyczny a do tego dwupowłokowy, płaszczyzna zaś przecinająca musi być równoległą do dwóch jego rodzących. Aby zaś, mając dane rzuty ostrokręgu, płaszczyznę taką nakreślić, najkrócéj jest przez wierzchołek ostrokręgu przesunąć najprzód płaszczyznę pomocniczą przecinającą go w dwóch rodzących (a więc ślad poziomy téj płaszczyzny musi przecinać ślad poziomy ostrokręgu w dwóch punktach), a następnie poprowadzić drugą płaszczyznę równoległą do poprzedniéj i przecinającą ostrokrąg, która będzie tém samém równoległą do dwóch jego rodzących, a mianowicie do rodzących przecięcia ostrokręgu płaszczyzną pomocniczą. To mając, szukamy następnie krzywéj przecięcia jednym ze sposobów w zadaniu poprzedniém podanych.

Zadanie 89. *Dany ostrokrąg przeciąć płaszczyzną w paraboli.*

Zadanie to również jak poprzednie, może być rozwiązaném tylko w razie, jeżeli ostrokrąg dany jest kołowym lub elliptycznym, co się zaś tyczé płaszczyzny przecinającéj, takowa winna być równoległą do jednéj z rodzących ostrokręgu. Aby płaszczyznę taką nakreślić, przez ślady któréjkolwiek z tychże rodzących kreślimy najprzód ślady płaszczyzny pomocniczéj tak, iżby ślad poziomy był stycznym do kierownicy ostrokręgu, — następnie zaś równolegle do niéj prowadzimy drugą płaszczyznę, byle przecinającą ostrokrąg. Poszukawszy wreszcie jednym ze sposobów wiadomych krzywéj przecięcia się téj płaszczyzny z ostrokręgiem, otrzymamy żądaną parabolę najprzód w rzutach, a następnie za pomocą kładu płaszczyzny przecinającéj dostaniemy takową w prawdziwéj wielkości.

Zadanie 90. *Przez punkt dany zewnątrz ostrokręgu przesunąć płaszczyznę, którąby przecinała go w rodzących.*

Ponieważ płaszczyzna szukana przecinać ma ostrokrąg w rodzących, przechodzić zatém musi przez jego wierzchołek; a że przechodzić ma także i przez punkt dany, będzie to więc płaszczyzna przesunięta przez prostą łączącą wierzchołek z punktem danym, tak jednak, iżby prosta przecięcia się téj płaszczyzny z płaszczyzną kierownicy ostrokręgu, przecinała też kierownicę (a więc np. iżby jéj ślad poziomy przecinał ślad poziomy ostrokręgu, jeżeli tenże wsparty jest na płaszczyznie pozioméj rzutów).

Zadanie 91. *Przez prostą daną przesunąć płaszczyznę, któraby przecinała ostrokrąg w rodzących.*

Rozwiązanie zadania tego nie zawsze jest możliwém. Skoro bowiem płaszczyzna szukana przecinać ma ostrokrąg w rodzących, przechodzić więc musi przez jego wierzchołek, a gdy prócz tego według warunku zadania, przechodzić ma i przez prostą daną, więc jest już tém samém ściśle wyznaczoną. Przez wierzchołek zatém ostrokręgu poprowadziwszy najprzód prostą przecinającą się z prostą daną, a przez te dwie proste płaszczyznę, jeżeli ślad poziomy téj płaszczyzny przecina kierownicę ostrokręgu (przypuściwszy, że takowa leży na płaszczyznie pozioméj rzutów), wtedy otrzymamy z przecięcia ostrokręgu tąż płaszczyzną rodzące, w przeciwnym zaś razie, tj. gdy ów ślad płaszczyzny mija kierownicę, zadanie jest nierozwiązalném.

Zadanie 92. *Znaleść punkta przecięcia się prostéj danéj z powierzchnią ostrokręgową.*

I-szy Sposób. Przez prostą daną przesuwamy płaszczyznę jakąkolwiek, a więc najkorzystniéj prostopadłą do jednéj z płaszczyzn rzutów, i szukamy krzywéj przecięcia się téjże płaszczyzny z ostrokręgiem; gdzie zaś ta krzywa przecina się z prostą daną, tam będą punkta szukane.

2-gi Sposób. Przez prostą daną i wierzchołek ostrokręgu przesuwamy płaszczyznę; ta przetnie ostrokrąg w jednéj lub więcéj rodzących, których punkta przecięcia się z prostą daną będą punktami żądanymi.

Zadanie 93. Znaleść przecięcie ostrokręgu kołowego, prostego lub ukośnego, płaszczyzną prostopadłą do jego osi.

Zadanie 94. Ostrokrąg kołowy prosty, z podstawą leżącą na płaszczyźnie pozioméj rzutów, przeciąć płaszczyzną w kole, któregoby promień był połową promienia podstawy ostrokręgu.

Zadanie 95. Ostrokrąg elliptyczny prosty, z podstawą leżącą na płaszczyźnie pozioméj rzutów, przeciąć płaszczyzną, przechodzącą w danéj odległości od wierzchołka, tak, iżby podstawa górna powstałego stąd ostrokręgu ściętego nachyloną była pod kątem 30^0 do podstawy jego dolnéj.

Zadanie 96. Walec kołowy prosty, równoległy do obu płaszczyzn rzutów, przeciąć płaszczyzną pochyłą przez oś jego idącą, lub téż płaszczyzną prostopadłą do jego rodzących.

Zadanie 97. Walec prosty z podstawą kołową promienia danego, oparty jedną swą rodzącą o płaszczyznę poziomą, zaś drugą o płaszczyznę pionową rzutów, przeciąć płaszczyzną przez też rodzące przechodzącą.

§. 16.

Rozwijanie powierzchni walcowych i ostrokręgowych.

Jeżeli na jakiéjkolwiek powierzchni dwa po sobie następujące położenia jéj rodzącéj leżą w jednéj płaszczyznie, wtedy tęż powierzchnię uważać możemy jako złożoną ze ścianek albo pasków nieskończenie małych, których krawędziami są rodzące powierzchni, i wtedy wszystkie te ścianki można na jednéj płaszczyznie obok siebie ułożyć, czyli inaczéj, powierzchnię całą na jednéj płaszczyznie rozwinąć. Obracając bowiem jedną taką ściankę około jéj krawędzi, dopóki nie przyjdzie w przedłużenie ścianki drugiéj bezpośrednio do niéj przyległéj, te znów dwie obracając razem około krawędzi wspólnéj, między drugą a trzecią ścianką leżącéj, dopóki nie przyjdą w przedłużenie téj ostatniéj itp., otrzymamy w ten sposób kolejno postępując, rozwinięcie całéj powierzchni na jednéj płaszczyznie. Co się tyczé konstrukcyjnego wykonania rozwinięcia powierzchni walcowych i ostrokręgowych, takowe polegać może na znajomym nam już sposobie robienia siatek brył graniastych. A więc np. chcąc otrzymać rozwinięcie, czyli co na jedno wychodzi, siatkę walcową lub ostrokręgową, należałoby powierzchnię ich podzielić o ile możności na jak największą liczbę ścianek, a następnie zrobiwszy kład każdéj z tychże na jednę i tę samę płaszczyznę, zestawić je potém w należytym porządku obok siebie. Sposób ten atoli byłby w niektórych razach nader mozolnym zważywszy, że dokładność mającego się otrzymać rozwinięcia zależy od mniejszéj lub większéj mnogości utworzonych przez nas ścianek na powierzchni danéj, — dlatego jak późniéj zobaczymy, zastąpimy go innym nierównie łatwiejszym, a mimo tego równie przybliżone co i tamten wypadki dającym.

Jeżeli na powierzchni znajduje się jakakolwiek krzywa nakreślona, takowa po rozwinięciu powierzchni, a właściwie mówiąc, na rozwiniętéj powierzchni pokaże się w téj saméj tj. w prawdziwéj swojéj wielkości, atoli nie w tym samym kształcie, — i tamże zwie się ona krzywą przekształconą (*Verwandelte*, — *transformée*). Ponieważ zaś kąty, jakie poszczególne elementa krzywéj leżącéj na powierzchni, tworzą z rodzącemi powierzchni, po rozwinięciu téj ostatniéj zostają te same i niezmienne, wypada stąd, że jeżeli krzywa na powierzchni leżąca, otrzymaną została z przecięcia powierzchni płaszczyzną prostopadłą do jéj rodzących, czyli płaszczyzną normalną, po rozwinięciu powierzchni będzie ona linią prostą, gdyż w tym razie wszystkie elementa przekroju normalnego stoją prostopadle do rodzących. Przekształcona zatem krzywéj powstałéj z przecięcia normalnego powierzchni, jest zawsze prostą prostopadłą do rodzących powierzchni, a o ile przydatną nam ona być może przy rozwijaniu powierzchni walcowych, zobaczymy przy jedném z zadań następujących:

Zadanie 98. *Mając dane rzuty walca prostego, rozwinąć jego powierzchnię i nakreślić przekształconą przekroju ukośnego.*

Danym jest walec kołowy prosty $A'A$ (Fig. **202**.) i daną płaszczyzna go przecinająca $p'p$. Ponieważ w walcu tym jako prostym stoją wszystkie rodzące prostopadle do podstawy, a więc także i do elementów obwodu podstawy górnéj i dolnéj, zatém dwie którekolwiek, byle sąsiednie rodzące, tworzą z temiż elementami podstaw paski prostokątne. Jeżeli jeden z takich prostokątów obrócimy około wspólnego boku z prostokątem mu przyległym, aż oba zejdą się w jednéj płaszczyznie, wtedy podstawy obu będą stały prostopadle do wspólnéj im rodzącéj (czyli osi obrotu), i utworzą jednę prostą. Gdy zaś to samo, co o tych dwóch prostokątach, rozumié się także i o każdéj innéj parze sąsiednich sobie elementów powierzchni, wynika stąd, że podstawy wszystkich tych prostokątów, po rozwinięciu będą leżały w jednéj prostéj, cała zaś powierzchnia boczna walca będzie prostokątem, o podstawie równéj obwodowi podstawy walca, a o wysokości równéj jego rodzącéj. Nakreśliwszy więc prostokąt $ABCD$, gdzie podstawa AB jest równa obwodowi koła $abcd$, zaś wysokość $AD = a'x'$, otrzymamy rozwinięcie powierzchni walca prostego. Aby na tak rozwiniętéj powierzchni otrzymać krzywą powstałą z przekroju walca płaszczyzną $p'p$, kreślimy na témże rozwinięciu pewną liczbę rodzących, (a to odcinając $AE =$ łuk. ab, $EF =$ łuk. bc, $FG =$ łuk. cd itd., a następnie prowadząc EL, FK itd. prostopadle do AB), i odciąwszy na nich długości $AM = a'm'$, $EN = b'n'$, $FR = c'r'$ itd., łączymy punkta M, N, R, O... krzywą ciągłą, a ta będzie krzywą żądaną, — zaś powierzchnia $AMRMB$ będzie rozwinięciem walca ściętego $a'c'r'm'$.

Gdyby na rozwiniętéj powierzchni potrzeba było wyznaczyć punkt dany na rzutach walca, np. punkt $z'z$ leżący na przodkowéj jego połowie, wtedy odcinamy $AS =$ łuk. as, następnie zaś $SZ = s'z'$ tj. równe długości rodzącéj, zawartéj między punktem danym i podstawą walca, a otrzymamy stąd punkt Z jako miejsce punktu $z'z$ po rozwinięciu powierzchni.

Zadanie 99. *Mając dane rzuty walca ukośnego, rozwinąć jego powierzchnię.*

Przyjmijmy, że oś walca danego ukośnego $A'A$ (Fig. **203**.) jest równoległą do płaszczyzny pionowéj rzutów. Przez punkt dowolnie obrany na któréjkolwiek z rodzących, a więc np. przez punkt $a'a$, przesuwamy płaszczyznę normalną $p'p$ przecinającą walec dany, a więc płaszczyznę, któréj ślady są prostopadłe do odpowiednich rzutów rodzących walca. Z przecięcia tego otrzymamy ellipsę, któréj rzutem pionowym jest prosta $a'1'$ (poziomy nam niepotrzebny). Następnie kreślimy na walcu dowolną liczbę rodzących, i szukamy punktów przecięcia się tychże rodzących z płaszczyzną $p'p$, (wystarczą nam tylko ich rzuty pionowe $1'$, $2'$, $3'$...), poczém jako prawdziwą wielkość przecięcia normalnego, znajdziemy za pomocą kładu poziomego ellipsę $I\ II\ III$... Zrektyfikowawszy teraz tak znalezioną ellipsę (Cz. II, §. 1), otrzymamy stąd prostą *I′ II′ III′ ... I′*, do któréj znów po obu jéj stronach wystawiwszy w punktach *I′, II′, III′...* prostopadłe, równe odcinkom rodzących przez odpowiednie punkta *1′, 2′...* na walcu idących (a więc np. $I'm = 1'c'$, zaś $I'n' = 1'h'$ itp.), otrzymamy stąd punkta $m, r, s, t...$ $m_1, r_1, s_1, t_1...$, które połączone ze sobą krzywą ciągłą, zamkną nam figurę, będącą rozwinięciem walca danego.

Zadanie 100. *Mając dane rzuty ostrokręgu kołowego prostego, rozwinąć jego powierzchnię i znaleść przekształconą przekroju ukośnego.*

Ponieważ w ostrokręgu prostym wszystkie rodzące są sobie równe, każde zatém dwie z nich, byle sąsiednie, tworzą z elementem obwodu podstawy między niemi leżącym, trójkąt równoramienny. Skutkiem tego, końce rodzących po rozwinięciu elementów powierzchni na jednę płaszczyznę, będą leżeć w równéj odległości od wierzchołka, tj. będą leżeć na łuku o promieniu równym rodzącéj ostrokręgu, długość zaś tego łuku będzie równa obwodowi podstawy, musi bowiem być równa sumie podstaw wszystkich trójkątów równoramiennych, czyli elementów składających powierzchnię ostrokręgu. A więc, mając ostrokrąg prosty np. *A′A* (Fig. **204.**) z podstawą kołową leżącą na płaszczyznie pozioméj rzutów, z wierzchołka jego lub punktu *L* na boku leżącego, promieniem *c′S′* zataczamy łuk (gdyż prosta ta *c′S′* jest prawdziwą wielkością rodzących ostrokręgu jako równoległa do płaszczyzny pionowéj rzutów), a następnie na tymże łuku odciąwszy część *C′C* równą obwodowi podstawy *abcd*, i połączywszy *C* i *C′* z *L*, otrzymamy powierzchnię *C′LCDAB*, będącą rozwinięciem powierzchni ostrokręgu danego.

Aby na tak rozwiniętéj powierzchni nakreślić przekształconą przekroju ostrokręgu płaszczyzną *p′p*, kreślimy na rozwinięciu dowolną liczbę promieni np. *LB, LD, LA...*, odpowiadających z położenia swego rodzącym na rzutach ostrokręgu nakreślonym, (a to odciąwszy łuk *CB* = łuk. *ab*, łuk *BA* = łuk. *bc* itp.), i odcinamy na nich począwszy od *L* długości *LO, LN, LG...* równe prawdziwéj długości odcinków *S′m′, Sm, S′n′, Sn......*; punkta stąd znalezione tj. *O, N, G, M...* łączymy następnie krzywą ciągłą, która będzie przekształconą żądaną, i która odgraniczy nam powierzchnię *OC′ACOG* będącą rozwinięciem ostrokręgu ściętego *a′m′n′c′*.

Aby mając rzuty punktu na rzutach ostrokręgu, punkt takowy wyznaczyć na rozwiniętéj powierzchni, postępujemy tak samo jak przy walcu, biorąc w pomoc rodzącą, idącą przez punkt dany.

Zadanie 101. *Mając dane rzuty ostrokręgu ukośnego, rozwinąć jego powierzchnią.*

Ponieważ na ostrokręgu ukośnym rodzące nie są sobie równe, a więc i elementa powierzchni są trójkątami różnobocznymi, szukamy zatém prawdziwéj wielkości dwóch rodzących, o ile możności jak najbliżéj siebie poprowadzonych, jakotéż części obwodu podstawy między niemi leżącéj, skąd otrzymamy prawdziwą wielkość trójkąta równego co do powierzchni (jednak tylko w przybliżeniu) odpowiedniemu elementowi powierzchni ostrokręgu. W ten sam sposób postępując daléj, a w końcu tak otrzymane na kładzie trójkąty zestawiwszy obok siebie należycie, znajdziemy rozwiniętą powierzchnią ostrokręgu danego.

§. 17.

Konstrukcya linij stycznych do powierzchni rozwijalnych.

Najczęściéj w praktyce zastósowanie swoje mające przypadki prowadzenia linij stycznych do powierzchni krzywych są te, w których albo 1) danym jest punkt na powierzchni, a przezeń styczna do téjże ma przechodzić, albo 2) danym jest punkt zewnątrz powierzchni, albotéż 3) daną jest prosta, równolegle do któréj styczna powierzchni ma być poprowadzoną. W każdym z tych trzech przypadków, stycznych rozwiązujących zadanie jest bardzo wiele, i takowe wszystkie, zależnie od ustroju powierzchni, albo tylko są jéj stycznemi, albotéż niektóre z nich są stycznemi i siecznemi powierzchni zarazem. Prócz tego, co dla konstrukcyi tych stycznych jest ważną rzeczą, leżą one wszystkie albo (jak w przypadku 1)) w jednéj, albo (jak w przypadku 2) i 3)) w kilku płaszczyznach, które w każdym razie są także stycznemi do powierzchni, i ze sobą albo się przecinają, albo są do siebie równoległe.

Zadanie 102. *Przez punkt dany na powierzchni walcowéj poprowadzić do téjże linią styczną.*

Przez punkt dany przesuwamy płaszczyznę przecinającą walec, a prosta stycznie do krzywéj przecięcia stąd otrzymanéj poprowadzona, będzie styczną do powierzchni walca. A więc np. mając dany walec $A'A$ i punkt na nim $a'a$ (Fig. **205**.), przesuwamy przez tenże punkt płaszczyznę np. rzucającą pionową $p'p$, i szukamy krzywéj przecięcia się téj płaszczyzny z walcem; będzie nią krzywa $x'z',xz$, do któréj styczna $m'n',mn$ będzie styczną żądaną powierzchni.

Ponieważ przez punkt dany $a'a$ można bardzo wiele płaszczyzn przecinających walec przesunąć, wypada stąd, że linij stycznych do powierzchni przez punkt na niéj dany można także bardzo wiele poprowadzić; że zaś wszystkie te styczne leżą w tym razie w jednéj płaszczyznie stycznéj do walca, a mianowicie dotykającéj go w rodzącéj $a'b',ab$ przez punkt dany $a'a$ idącéj, wypada znów stąd, że na téjże płaszczyznie, jako mającéj z kierownicą walca wspólny element $b'b$, leżeć także musi styczna $b'r',br$ w punkcie $b'b$ do téjże kierownicy poprowadzona. Na mocy téj uwagi otrzymujemy łatwiejszy sposób rozwiązania naszego zadania następujący: przez punkt dany $a'a$ (Fig. **206**.) na walcu prowadzimy rodzącą aż do przecięcia się jéj z kierownicą walca w punkcie $b'b$, i w punkcie tym $b'b$ kreślimy styczną $b'r',br$ do téjże kierownicy, a prosta $m'n',mn$ równolegle do $b'r',br$ przez punkt dany $a'a$ poprowadzona, będzie styczną żądaną powierzchni walca. Aby zaś tych stycznych mieć więcéj, dość którykolwiek punkt stycznéj $b'r',br$ np. punkt $c'c$ połączyć z punktem danym $a'a$, a prosta $a'c',ac$ będzie także styczną do powierzchni.

Zadanie 103. *Przez punkt dany zewnątrz powierzchni walcowéj poprowadzić do téjże linią styczną.*

Przesunąwszy przez punkt dany płaszczyznę przecinającą walec, i do krzywéj przecięcia stąd otrzymanéj przez tenże punkt poprowadziwszy styczną, ta będzie styczną żądaną.

Ponieważ, jak łatwo zrozumieć, wszystkie przez punkt $a'a$ do walca poprowadzone styczne, leżą na płaszczyznach przecinających się w prostéj równoległéj do rodzącéj walca, a przez punkt dany $a'a$ przechodzącéj, zatém, jeżeli kierownica walca jest krzywą płaską, konstrukcya stycznéj do walca upraszcza się w sposób następujący: przez punkt dany *a'a* (Fig. **207.**) prowadzimy prostą *a'd',ad* równolegle do rodzących walca, i szukamy punktu przecięcia się jéj z płaszczyzną kierownicy walca, a więc jak u nas punktu *d'd*, czyli jéj śladu poziomego; z punktu tego następnie prowadzimy do kierownicy walca styczne *dm* i *dn* (ich rzuty pionowe na osi), zaś przez punkta *m'm* i *n'n* ich styczności z kierownicą, prowadzimy rodzące *m'x',mx* i *n'y',ny,* — a którykolwiek punkt na tych rodzących obrany, np. *c'c* i *k'k,* połączony z punktem danym *a'a,* da nam prostą, która będzie styczną do powierzchni.

Zadanie 104. *Równolegle do prostéj danéj poprowadzić styczną do powierzchni walcowéj.*

Równolegle do prostéj danéj przesuwamy dowolną, a więc najkorzystniéj rzucającą płaszczyznę, byle przecinającą walec; szukamy krzywéj przecięcia, i do takowéj wreszcie prowadzimy styczne równoległe do prostéj danéj, a te będą żądanemi.

Zważywszy, że wszystkie w ten sposób znalezione styczne leżą na jednéj lub kilku płaszczyznach stycznych do powierzchni walca wzdłuż jego rodzących, a równoległych do prostéj danéj, można łatwo w razie, gdy kierownica walca jest krzywą płaską, uniknąć poprzedniego konstruowania krzywéj przecięcia walca płaszczyzną. I tak mając np. dany walec *A'A* (Fig. **208.**), którego kierownica leży na płaszczyznie pozioméj rzutów, i mając daną prostą *c'd',cd,* przesuwamy przez nią płaszczyznę *p'p* równoległą do rodzących walca, i równolegle do jéj śladu poziomego (czyli ogólnie mówiąc, równolegle do prostéj przecięcia się téj płaszczyzny z płaszczyzną kierownicy walca) prowadzimy proste *mn* i *rs* stycznie do kierownicy walca (ich rzuty pionowe są na osi). Przez otrzymane stąd punkta styczności *a'a* i *b'b* poprowadziwszy następnie rodzące *a'x',ax* i *b'y',by,* takowe będą miejscem geometryczném punktów styczności wszystkich stycznych, jakie do walca równolegle do prostéj danéj poprowadzić można, tak, iż każda prosta np. *h'k',hk* przez punkt *o'o,* gdziekolwiek na jednéj z tych prostych obrany, a równolegle do prostéj danéj poprowadzona, jest jedną ze stycznych żądanych.

B. Powierzchnie ostrokręgowe.

Zadanie 105. *Przez punkt dany na powierzchni ostrokręgowéj poprowadzić do téjże linią styczną.*

Przez punkt dany przesunąwszy płaszczyznę przecinającą ostrokrąg, i do krzywéj przecięcia stąd otrzymanéj, w punkcie danym poprowadziwszy styczną, ta będzie zarazem styczną i do powierzchni.

Ponieważ przez punkt dany można płaszczyzn bardzo wiele przesunąć, wynika stąd, że i stycznych do powierzchni przez tenże punkt można bardzo wiele poprowadzić. Że zaś wszystkie te styczne leżą w jednéj płaszczyznie przechodzącéj przez wierzchołek, a dotykającéj się ostrokręgu wzdłuż rodzącéj przez punkt dany idącéj, zatém konstrukcya tego zadania upraszcza się w sposób następujący:

Mając dany ostrokrąg $A'A$ (Fig. **209**.) i na nim punkt $a'a$, prowadzimy przez tenże punkt rodzącą $b's',bs$, w punkcie $b'b$ przecięcia się jéj z kierownicą kreślimy styczną $d'e',de$ do téjże kierownicy, zaś przez punkt dany $a'a$ do niéj równoległą tj. $h'k',hk \parallel d'e',de$, która będzie jedną ze stycznych do powierzchni w punkcie danym poprowadzonych. Aby ich mieć więcéj, dość którykolwiek punkt na stycznéj $d'e',de$ obrany, połączyć z punktem danym $a'a$.

Zadanie 106. *Przez punkt dany zewnątrz powierzchni ostrokręgowéj poprowadzić do téjże linią styczną.*

Przez punkt dany przesuwamy płaszczyznę przecinającą ostrokrąg, szukamy krzywéj przecięcia stąd powstałéj, i do krzywéj téj kreślimy przez punkt dany wszystkie możliwe styczne, które będą zarazem stycznemi powierzchni.

Stycznych odpowiadających tu warunkowi zadania można bardzo wiele otrzymać zważywszy, że przez punkt dany można bardzo wiele płaszczyzn przecinających ostrokrąg przesunąć, do każdéj zaś krzywéj przecięcia stąd otrzymanéj, poprowadzić styczną. Że zaś wszystkie te styczne leżeć będą w płaszczyznach przechodzących przez punkt dany, dotykających powierzchni ostrokręgu wzdłuż rodzących jego, ze sobą zaś przecinających się w prostéj przez wierzchołek ostrokręgu i punkt dany przechodzącéj, zatém na mocy tego, zadanie nasze, w razie gdy kierownica ostrokręgu jest krzywą płaską, rozwiąże się krótko w sposób następujący:

Mając dany ostrokrąg *A'A* (Fig. **210**.) i punkt *a'a* dany zewnątrz, łączymy tenże punkt z wierzchołkiem *s's* ostrokręgu prostą *a's',as* i szukamy punktu *b'b* przecięcia się téj prostéj z płaszczyzną kierownicy; następnie przez punkt *b'b* prowadzimy styczne *b'c',bc* i *b'd',bd* do kierownicy ostrokręgu, a otrzymamy stąd punkta *c'c* i *d'd*, przez które poprowadzone rodzące *c's',cs* i *d's',ds* ostrokręgu, będą miejscem geometryczném punktów styczności wszelkich stycznych, przez punkt dany *a'a* do powierzchni poprowadzonych, — tak, iż połączywszy punkt, gdziekolwiek na jednéj z tych rodzących obrany, np. punkt *m'm*, z punktem danym *a'a*, prosta *a'm',am* będzie styczną żądaną powierzchni.

Zadanie 107. *Równolegle do prostéj danéj poprowadzić styczną do powierzchni ostrokręgowéj.*

Przez prostą daną, lub téż równolegle do takowéj przesuwamy płaszczyznę przecinającą ostrokrąg, i do krzywéj przecięcia stąd otrzymanéj kreślimy styczną równoległą do prostéj danéj, a ta będzie także styczną powierzchni.

Z powodu, że przez prostą daną, lub téż do niéj równolegle, płaszczyzn przecinających ostrokrąg można dowolną liczbę przesunąć, wypada, że i stycznych żądanych w zadaniu można otrzymać bardzo wiele. Wszystkie te atoli styczne, jak np. styczne przez punkta *1, 2, 3, 4....* (Fig. **211**.) równolegle do prostéj danéj *AB* poprowadzone, leżą w płaszczyznach *MKN* lub *NKO* dotykających ostrokręgu wzdłuż rodzących *CS* i *DS*, a przecinających się z sobą w prostéj *SR* równoległéj do prostéj *AB*. Że zaś przeciąwszy ostrokrąg i płaszczyzny *MKN* i *NKO* płaszczyzną jakąkolwiek *QR*, otrzymamy stąd dwie proste *KM* i *KO* przecinające się w punkcie *K*, a styczne do krzywéj przecięcia ostrokręgu płaszczyzną *QR*, zatém, w razie gdy kierownica ostrokręgu jest krzywą płaską, krótszy sposób rozwiązania naszego zadania, jest następujący:

Przez wierzchołek *s's* ostrokręgu danego *A'A* (Fig. **212**.) prowadzimy prostą *s'k',sk* równoległą do prostéj danéj *a'b',ab*, i szukamy punktu *k'k* przecięcia się jéj z płaszczyzną ostrokręgu; przez punkt ten następnie poprowadziwszy styczne *k'm',km* i $k'o',ko$ do téjże kierownicy, otrzymamy stąd na niéj punkta styczności $m'm$ i $o'o$, przez które poprowadzone rodzące $o's',os$ i $m's',ms$ ostrokręgu, będą miejscem geometryczném punktów styczności wszystkich stycznych odpowiadających warunkowi zadania. Przez którykolwiek więc punkt jednéj z tych stycznych poprowadziwszy prostą np. $x'y',xy$ równolegle do prostéj danéj $a'b',ab$, ta będzie styczną żądaną powierzchni.

§. 18.

Konstrukcya płaszczyzn stycznych, linij i płaszczyzn normalnych do powierzchni rozwijalnych.

Jedną z najważniejszych części geometryi wykreślnéj, traktujących o powierzchniach krzywych, jest nauka o prowadzeniu płaszczyzn i linij normalnych pod różnymi danymi warunkami do tychże powierzchni. Nauka ta ma liczne zastósowanie. Perspektywa, teorya cieniów, są niczém inném, jak tylko szczególnymi przypadkami prowadzenia płaszczyzn stycznych, w budownictwie doskonałość spajania kamieni czyli zworników, składających budowę sklepienia, od znajomości téj nauki zależy. Przy budowie fortyfikacyj ma ona także bardzo ważne zastósowanie, jako zagadnienie tyczące się tak zwanego osłonienia *(defilement)*, a polegające na prowadzeniu płaszczyzny stycznéj przez prostą lub punkt dany do powierzchni ziemi, itp.

Przechodząc najprzód do powierzchni rozwijalnych, przypomnieć nam sobie przedewszystkiem należy bardzo ważną własność tychże, a mianowicie, że płaszczyzna styczna dotyka się tych powierzchni w linii prostéj rodzącéj, — własność, która konstrukcyą płaszczyzn stycznych wielce upraszcza i ułatwia.

A. Powierzchnie walcowe.

Zadanie 108. *Przez punkt dany na powierzchni walcowéj przesunąć płaszczyznę do niéj styczną.*

Z §. 12 wiadomo nam, że celem przesunięcia płaszczyzny stycznéj do jakiéjkolwiek powierzchni przez punkt na niéj dany lub obrany, dość jest 1) poprowadzić przez tenże punkt dwie styczne do dwóch krzywych jakichbądź, byle na powierzchni danéj leżących i przez punkt dany przechodzących, a następnie 2) przez te dwie styczne przesunąć płaszczyznę.

Stosując ogólną tę regułę do powierzchni rozwijalnych, a w szczególności do powierzchni walcowéj, te styczne dwie, w mowie będące a przez punkt dany na walcu przechodzące, możemy otrzymać albo sposobem w Zad. 102 wskazanym, albo co krócéj, — zważywszy, że rodząca na walcu przez punkt dany idąca, może być uważana za krzywą na powierzchni leżącą, a przytém i styczną saméj siebie, — dość jest prócz rodzącéj téj, jeszcze jednę styczną do walca przez punkt dany poprowadzić. Aby styczną zaś tę otrzymać, uważmy, że ponieważ płaszczyzna styczna szukana dotykać będzie walca wzdłuż rodzącéj przez punkt dany poprowadzonéj, będzie więc styczną do niego także i w punkcie przecięcia się téj rodzącéj z podstawą czyli kierownicą walca, — a więc, że przez tenże punkt zamiast przez punkt dany, poprowadziwszy do walca styczną, ta wraz z powyżéj rzeczoną rodzącą, wyznaczy nam płaszczyznę styczną szukaną. Zatém, mając dany walec $A'A$ (Fig. **213**.), i na nim punkt $m'm$, prowadzimy przezeń rodzącą $m'b',mb$, zaś przez punkt $b'b$ przecięcia się jéj z podstawą walca prowadzimy styczną do téjże podstawy, a płaszczyzna $p'p$ przez tę styczną i rodzącą $m'b',mb$ przesunięta, jest styczną żądaną. (Ślad poziomy téj płaszczyzny leży na rzucie poziomym stycznéj do podstawy, zaś dla znalezienia śladu pionowego wziętą w pomoc została na figurze prosta $m'c',mc$, równoległa do śladu p a przechodząca przez punkt $m'm$, a to z przyczyny, że w granicach rysunku nie można było znaleść śladu pionowego rodzącéj $m'b',mb$).

Ponieważ jak z figury widoczna, ślad poziomy płaszczyzny stycznéj $p'p$ jest stycznym do śladu poziomego walca, czytamy więc stąd ważną dla nas nadal regułę, że jeżeli płaszczyzna jest styczną do walca, to ślad jéj poziomy do poziomego, zaś pionowy do pionowego śladu walca stycznym być musi.

Prosta $m'b', mb$, w któréj płaszczyzna styczna dotyka się walca, zowie się r o d z ą c ą s t y c z n o ś c i.

Reguła powyższa stosuje się w zupełności i do powierzchni ostrokręgowych.

Zadanie 109. *Przez punkt dany zewnątrz powierzchni walcowéj poprowadzić do niéj płaszczyznę styczną.*

Danym jest walec $A'A$ (Fig. **214**.) i punkt zewnątrz niego leżący $m'm$. Uważmy, że poprowadziwszy przez punkt $m'm$ prostą $m'b', mb$ równoległą do rodzących walca, to płaszczyzna styczna szukana (jako równoległa do rodzących walca) przez téż prostą, a więc jéj ślad poziomy, przez ślad poziomy b téj prostéj przechodzić musi; że zaś tenże ślad stycznym prócz tego być musi do śladu poziomego walca, zatém styczna bc, przez b do tegoż śladu poprowadzona, będzie śladem poziomym szukanéj płaszczyzny. Mając zaś ślad poziomy, łatwo wynaleść pionowy, takowy bowiem przez ślad pionowy prostéj $m'b', mb$ przechodzić musi. Przez punkt wreszcie $c'c$ poprowadziwszy rodzącą, ta będzie rodzącą styczności, a jako taka ślady swoje mieć musi na śladach płaszczyzny znalezionéj.

Uwaga. Jeżeli, jak u nas na Fig. **214**. ma to miejsce, z punktu b poprowadzić można dwie styczne do śladu poziomego walca, wówczas otrzymamy dwie płaszczyzny styczne, a oczywista, że można ich otrzymać i więcéj, jeżeli śladem walca jest krzywa o kilku zgięciach.

Zadanie 110. *Równolegle do prostéj danéj przesunąć płaszczyznę styczną do powierzchni walca.*

Danym jest walec $A'A$ (Fig. **215**.) i prosta $a'a$. Przez punkt $m'm$, gdziekolwiek na prostéj $a'a$ obrany, poprowadziwszy prostą $b'b$ równolegle do rodzących walca, a następnie przez proste $a'a$ i $b'b$ przesunąwszy płaszczyznę $p'p$, takowa będzie równoległą do szukanéj płaszczyzny stycznéj, czyli wyznaczy nam jéj kierunek. Płaszczyzna bowiem styczna musi być równoległą do prostéj $b'b$, skoro jako styczna dotykać się ma walca w jednéj z rodzących, a prócz tego podług warunku zadania musi być równoległą do prostéj $a'a$, — obie zaś te proste leżą na płaszczyznie $p'p$. Skoro więc płaszczyzna szukana musi być równoległą do $p'p$, ślady ich więc muszą być do siebie równoległe. Że zaś ślad poziomy płaszczyzny stycznéj musi dotykać śladu poziomego walca, znajdziemy więc takowy, poprowadziwszy do tegoż śladu styczną s równoległą do p, a jeżeli jak u nas na Fig. **215**. dwie takie styczne są możliwe, tj. jeżeli także $r \parallel p$, otrzymamy wtedy ślady poziome dwóch płaszczyzn stycznych, odpowiadających warunkowi zadania. Co się wreszcie tyczy ich śladów pionowych, znajdziemy takowe zważywszy, że muszą one być do p' równoległe.

Zadanie 111. *Przez prostą daną przesunąć płaszczyznę styczną do powierzchni walcowwéj.*

Zadanie to nie w każdym razie może być rozwiązaném. Skoro bowiem szukana płaszczyzna przechodzić ma przez prostą daną, a prócz tego jako styczna musi przechodzić przez jednę z rodzących, obie więc te proste tj. prosta dana i rodząca muszą na niéj leżeć, co jest tylko możliwém wtedy, gdy są albo do siebie równoległe, albo się ze sobą przecinają. Aby zaś, mając dany walec np. $A'A$ (Fig. **216**.) i prostą daną $a'a$, dowiedzieć się, czy można przez tę prostą przesunąć płaszczyznę styczną czy nie, obieramy na niéj gdziekolwiek punkt $m'm$, i przezeń prowadzimy prostą $b'b$, równoległą do rodzących walca, następnie zaś przez te dwie proste przesuwamy płaszczyznę $p'p$. Jeżeli ślad poziomy p téj płaszczyzny będzie stycznym do śladu poziomego walca, wtedy płaszczyzna $p'p$ jest styczną, w przeciwnym zaś razie, jak to u nas ma miejsce, płaszczyzna styczna jest niemożliwą.

Zadanie 112. *Równolegle do płaszczyzny danéj przesunąć płaszczyznę styczną do powierzchni walcowéj.*

To zadanie również nie we wszystkich razach jest rozwiązalném. Skoro bowiem szukana płaszczyzna ma być styczną do walca, musi zatém być równoległą do jego rodzących, skąd wypada, że i płaszczyzna dana musi być do tychże rodzących równoległą. Iżby zaś w danym razie przekonać się, czy płaszczyzna styczna jest możliwą czy nie, to przypuściwszy, że walcem danym jest np. walec kołowy $A'A$ (Fig. **217**.), wsparty podstawą na płaszczyznie pionowéj rzutów, zaś płaszczyzną daną $p'p$ — przesuńmy tę płaszczyznę równolegle do siebie samej w położenie $q'q$ tak, iżby jéj ślad pionowy był zarazem stycznym do śladu pionowego walca, — to jeżeli ta płaszczyzna $q'q$ jest rzeczywiście styczną do powierzchni danéj, wówczas rodząca, przez punkt styczności $a'a$ poprowadzona, leżeć musi na płaszczyznie $q'q$, czyli ślady jéj leżeć muszą na śladach płaszczyzny $q'q$. Jeżeli zaś to (jak u nas na Fig. **217**.) nie ma miejsca, wtedy płaszczyzna, odpowiadająca zadość warunkowi zadania, jest niemożliwą.

Zadanie 113. *Do dwóch walców danych przesunąć płaszczyznę wspólnie styczną.*

Dane są dwa walce *A'A* i *B'B* (Fig. **218.**) wsparte podstawami swemi na płaszczyznie pozioméj rzutów. Ponieważ płaszczyzna szukana ma być styczną do obu tych walców, zatém jako taka musi być równoległą do rodzących obojga z nich, czyli musi być równoległą do płaszczyzny *p'p*, przesuniętéj przez dwie proste *BC* i *CD* przecinające się z sobą, a z których *BC* jest równoległą do rodzących walca *A'A*, zaś *CD* równoległą do rodzących walca *B'B.* Mając w ten sposób wyznaczony kierunek płaszczyzny *p'p* a więc i płaszczyzny stycznéj szukanéj, przesuwamy też płaszczyznę *p'p* równolegle do siebie samej tak, iżby przyszła w położenie *q'q* lub *r'r,* a zarazem, iżby każda z nich była styczną do walca *B'B,* co naturalnie jest możliwem, skoro każda z nich jest równoległą do płaszczyzny *p'p,* a tém samém równoległą do rodzących tegoż walca. Pytanie teraz tylko o to, czy która z tych płaszczyzn tj. *q'q* lub *r'r* jest równocześnie styczną do walca *A'A.* Ale o tém można łatwo się przekonać, zobaczywszy tylko, czy ślad poziomy którejkolwiek z nich jest stycznym zarazem i do śladu poziomego walca *A'A,* — co jeżeli jak u nas na Fig. **218.** nie ma miejsca, wtedy i płaszczyzny wspólnie stycznéj do obu tych walców być nie może.

B. Powierzchnie ostrokręgowe.

Te same przypadki prowadzenia płaszczyzn stycznych, jakieśmy dotąd rozebrali przy powierzchniach walcowych, zastósujemy teraz do powierzchni ostrokręgowych. I tak:

Zadanie 114. *Przez punkt dany na powierzchni ostrokręgowéj przesunąć do niéj płaszczyznę styczną.*

Danym jest ostrokrąg *A'A* (Fig. **219.**) z podstawą leżącą na płaszczyznie poziomej rzutów, i na nim punkt *m'm.* Ponieważ płaszczyzna styczna do tegoż ostrokręgu w punkcie danym, będzie styczną do niego wzdłuż całéj rodzącéj przez punkt *m'm* idącéj, a poziomy ślad płaszczyzny stycznéj musi być stycznym do poziomego śladu powierzchni w punkcie, gdzie rodząca zwyż rzeczona spotyka się z tymże śladem (Zad. 108), prowadzimy więc najprzód przez punkt dany rodzącą *s'm',sm,* aż do przecięcia się jéj z poziomym śladem ostrokręgu w punkcie *b*, następnie zaś przez *b* prowadzimy styczną do śladu poziomego ostrokręgu, a styczna ta będzie zarazem poziomym śladem szukanéj płaszczyzny. Pionowy jéj ślad znajdziemy łatwo, pamiętając, że płaszczyzna ta przez rodzącą *s'b',sb* przechodzić musi.

Zadanie 115. *Przez punkt dany zewnątrz powierzchni ostrokręgowéj, poprowadzić do niéj płaszczyznę styczną.*

Dany jest ostrokrąg *A'A* (Fig. **220**.), krzywa *abcd* jest jego śladem poziomym, *s's* wierzchołkiem; przez punkt *m'm* zewnątrz leżący mamy poprowadzić płaszczyznę styczną. Ponieważ płaszczyzna styczna jako taka, dotknie się ostrokręgu wzdłuż jednéj z rodzących, zatém przechodzić musi przez jego wierzchołek *s's*, a stąd wypada daléj, że przechodzić musi przez prostą *s'm',sm* łączącą wierzchołek z punktem danym. Jeżeli więc śladem poziomym téj prostéj jest punkt *k*, to przezeń iść musi ślad poziomy szukanéj płaszczyzny. Gdy zaś tenże ślad poziomy musi zarazem dotykać krzywéj *abcd,* zatém przez punkt *k* poprowadziwszy styczną *p* do śladu *abcd*, ta będzie śladem poziomym żądanéj płaszczyzny, — ślad zaś jéj pionowy przejść musi przez ślad pionowy prostéj *s'm',sm*, lub przez ślad pionowy rodzącéj przez punkt styczności *c'c* poprowadzonéj.

Jeżeli z punktu *k* tj. śladu poziomego prostéj *s'm',sm*, da się więcej stycznych do kierownicy ostrokręgu poprowadzić, to każda z nich wraz z rodzącą przez punkt jéj styczności poprowadzoną, wyznaczy nam płaszczyznę styczną. I tak na Fig. **220**. są p_1 i p_2 śladami poziomymi dwóch innych płaszczyzn stycznych, a z których pierwsza przecina zarazem powierzchnię ostrokręgu w prostéj *o's',os*.

Zadanie 116. *Równolegle do prostéj danéj poprowadzić płaszczyznę styczną do powierzchni ostrokręgowéj.*

Przez wierzchołek danego ostrokręgu prowadzimy prostą równoległą do prostéj danéj, a wyszukawszy jéj śladu poziomego, postępujemy następnie jak w zadaniu poprzedzającém.

Zadanie 117. *Przez prostą daną przesunąć płaszczyznę styczną do powierzchni ostrokręgowéj.*

Zadanie to tak samo, jak podobneż przy powierzchniach walcowych nie zawsze jest rozwiązalném. Skoro bowiem szukana płaszczyzna przez daną prostą $a'b', ab$ (Fig. **221**), jakotéż jako styczna przez wierzchołek $s's$ danego ostrokręgu $A'A$ ma przechodzić, zaś przez prostą daną i punkt dany jedna tylko płaszczyzna przesuniętą być może, wypada więc stąd, że płaszczyzna temi danemi już naprzód co do położenia swego wyznaczona, nie zawsze będzie żądaną tj. styczną do powierzchni. Aby się zaś przekonać, czy przy daném położeniu ostrokręgu i prostéj, możliwą jest płaszczyzna styczna, przez wierzchołek $s's$ i prostą $a'b', ab$ przesuwamy płaszczyznę $p'p$, a jeżeli ślad jéj poziomy jest stycznym do kierownicy, wtedy płaszczyzna $p'p$ jest styczną do ostrokręgu, i to w rodzącéj poprowadzonéj przez punkt styczności, na jego śladzie poziomym leżący; jeżeli zaś ślad p przecina kierownicę, lub téż, jak u nas na Fig. **221**. przechodzi zewnątrz téjże, wówczas płaszczyzna styczna przy tych danych nie jest możliwą.

Zadanie 118. *Równolegle do płaszczyzny danéj przesunąć płaszczyznę styczną do powierzchni ostrokręgowéj.*

Przez wierzchołek ostrokręgu przesuwamy płaszczyznę równoległą do płaszczyzny danéj, a jeżeli ślad jéj poziomy jest stycznym do śladu poziomego ostrokręgu, wówczas ta płaszczyzna jest styczną do ostrokręgu, w przeciwnym zaś razie płaszczyzna styczna przy tych danych jest niemożliwą.

Zadanie 119. *Do dwóch ostrokręgów przesunąć płaszczyznę wspólnie styczną.*

O możliwości rozwiązania zadania przekonać się można w podobnyż sposób, jak przy płaszczyznie wspólnie stycznéj do dwóch walców (Zad. 113.), pamiętając tylko, że płaszczyzna styczna szukana przez wierzchołki obu ostrokręgów, a tém samém przez prostą łączącą też wierzchołki przechodzić musi.

Zadanie 120. *Do powierzchni walcowéj i ostrokręgowéj przesunąć płaszczyznę wspólnie styczną.*

Przez wierzchołek ostrokręgu prowadzimy prostą równoległą do rodzących walca, a przez tę prostą przesunąwszy najprzód wszystkie możliwe płaszczyzny styczne do ostrokręgu danego, dochodzimy następnie sposobami wiadomymi, czy która z nich jest zarazem styczną do walca.

Zadanie 121. *Przez punkt dany na powierzchni walcowéj lub ostrokręgowéj, poprowadzić linią normalną.*

Przez punkt dany przesuwamy najprzód płaszczyznę styczną do danéj powierzchni (Zad. 108. i 114.), a następnie w punkcie danym wystawiwszy prostą prostopadłą do téjże płaszczyzny, takowa będzie normalną żądaną powierzchni.

Zadanie 122. *Przez punkt dany na powierzchni walcowéj lub ostrokręgowéj przesunąć płaszczyznę normalną.*

W punkcie danym wystawiamy najprzód linią normalną do danéj powierzchni (Zad. 121.), a każda płaszczyzna przez tę prostą przesunięta, będzie żądaną.

Zadanie 123. *Przez punkt dany na powierzchni walcowéj lub ostrokręgowéj przesunąć płaszczyznę normalną, któraby przecinała powierzchnią daną wzdłuż rodzącéj przez tenże punkt idącéj.*

W danym punkcie wystawiamy linią normalną dó danéj powierzchni (Zad. 121.), poczem przez tę prostą, jakotéż przez rodzącą przez punkt dany poprowadzoną przesunąwszy płaszczyznę, ta będzie żądaną.

Zadanie 124. *Przesunąć płaszczyznę styczną do powierzchni walcowéj lub ostrokręgowéj w którymkolwiek z przypadków podanych w zadaniach 108—119 w razie atoli, gdy podstawą swoją powierzchnia nię jest wspartą na żadnéj z płaszczyzn rzutów.*

Szukamy najpierw śladów danéj powierzchni, a następnie postępujemy według wskazówek w powyższych zadaniach danych. Jeżeli daną jest płaszczyzna, na któréj podstawa powierzchni leży, wówczas do téj płaszczyzny stósujemy regułę znajomą o płaszczyznach stycznych, a mianowicie, że prosta przecięcia się płaszczyzny stycznéj z płaszczyzną, na któréj leży podstawa powierzchni, musi być styczną do téjże podstawy.

§. 19.

Przecięcia wzajemne powierzchni rozwijalnych, jakotéż przecięcia tychże z bryłami graniastemi.

Dwie powierzchnie krzywe przecinać się z sobą mogą albo całkowicie, gdy jedna z nich przechodzi wskróś drugiéj, albo téż częściowo, gdy tylko część jednéj przecina się z częścią drugiéj powierzchni, albo wreszcie mogą być do siebie styczne. W pierwszym i drugim razie otrzymujemy z przecięcia krzywą podwójnego zakrzywienia, która może być albo krzywą zamkniętą, albo rozciągającą się bez granic, albo wreszcie — co najczęściéj, składać się może z kilku oddzielnych części. Aby w ogólności krzywą takową znaleść, szukamy pojedynczych punktów do tegoż przecięcia należących, a potém punkta te należycie z sobą krzywą ciągłą łączymy. Do szukania zaś tych punktów może być w zupełności ten sam sposób zastósowanym, jakiegośmy przy szukaniu wzajemnego przecięcia brył graniastych używali, — mianowicie w granicach przecięcia się powierzchni danych prowadzimy jakąkolwiek płaszczyznę, która przetnie obie powierzchnie w figurach płaskich, a te znów, leżąc na jednéj płaszczyznie, przecinać się z sobą będą w punktach należących do szukanego przecięcia, jako leżących współcześnie na obu powierzchniach danych, Prowadząc następnie drugą, trzecią, a w ogóle szereg płaszczyzn przecinających i równoległych do pierwszéj, otrzymamy stąd szereg punktów wspólnych obu powierzchniom, z których należytego połączenia otrzymamy krzywą przecięcia.

Łatwo zrozumieć, że celem znalezienia pojedynczych punktów w szczególności, a całéj krzywéj przecięcia w ogólności, należy płaszczyzny pomocnicze czyli przecinające tak obierać, iżby konstrukcya cała o ile możności była jak najłatwiejszą. Czy atoli da się to osiągnąć rzeczywiście i w jakich przypadkach, zależy naturalnie od natury i ustroju, jakotéż od wzajemnego względem siebie położenia powierzchni danych. Nie można więc w téj mierze żadnéj stanowczéj reguły ustanowić, natomiast w każdym szczególnym przypadku proste zastanowienie się nad własnościami powierzchni się przecinających, i ich wzajemném względem siebie położeniem, wskaże nam korzystną drogę, jaką najprędzéj do celu trafić można.

Zadanie 125. *Znaleść krzywą przecięcia się dwóch walców.*

Dane są dwa walce $A'A$ i $B'B$ (Fig. **222**.), oba wsparte na płaszczyznie pozioméj rzutów. Odnośnie do uwag poprzednich, najkorzystniejszą tu rzeczą będzie użyć płaszczyzn pomocniczych przecinających obie powierzchnie w rodzących, a więc w liniach prostych. Aby położenie takiéj płaszczyzny wyznaczyć, przez punkt $a'a$ gdziekolwiek obrany prowadzimy prostą $X'X$ równoległą do rodzących walca $A'A$, zaś prostą $Y'Y$ do rodzących walca $B'B$, a następnie przez te dwie proste przesuwamy płaszczyznę P (któréj ślad poziomy p wystarczy). To mając, prowadzimy płaszczyznę Q_1 równoległą do P a styczną do walca $B'B$ (również tak téj, jak i reszty płaszczyzn pomocniczych ślady poziome q_1, q_2, q_3 zupełnie nam wystarczą), to takowa dotknie walca $B'B$ w rodzącéj idącéj przez punkt $b'b$, zaś walec $A'A$ przetnie w dwóch rodzących idących przez punkta $c'c$ i $d'd$. Te dwie ostatnie rodzące z pierwszą przetną się punktach $1'1$ i $2'2$, które, jak łatwo dowieść, należą do szukanego przecięcia obu walców danych. Podobnież otrzymamy dwa punkta $3'3$ i $4'4$ prowadząc płaszczyznę Q_5 równoległą do P, a styczną do walca $A'A$. Aby następnie więcéj punktów otrzymać, między płaszczyzną Q_1 i Q_5 prowadzimy płaszczyzny Q_2, Q_3, Q_4 równoległe do P, a każda z nich przetnie oba walce w dwóch rodzących, z których wzajemnego przecięcia ze sobą otrzymamy po 4 punkta szukane. W ten sposób uzyskawszy dostateczną ilość punktów, łączymy wreszcie takowe ze sobą krzywą ciągłą w należytym porządku.

Uwaga I. Co się tyczy poprzedniego ocenienia, czy przecięcie dwóch walców jest całkowitém czy częściowém, a więc czy takowe składać się będzie z jednéj lub dwóch krzywych, daléj, w jakim porządku znalezione poszczególne punkta do tego przecięcia należące łączyć z sobą należy, a wreszcie które części otrzymanéj lub otrzymanych krzywych przecięcia są widoczne a które zakryte, — do tego służą w zupełności uwagi podane w zadaniu o przecięciu się dwóch graniastosłupów (Cz. I. Zad. 202), z tą tylko odmianą, że w miejsce krawędzi graniastosłupów wchodzą tu rodzące walców, zaś płaszczyznami pomocniczemi skrajnemi (Q_1 i Q_5), wyznaczającemi nam zarazem granice szukanego przecięcia, są płaszczyzny, z których każda będąc styczną walca jednego, jest zarazem sieczną walca drugiego.

Uwaga 2. Gdyby kierownica jednego z walców, przecinających się z sobą, leżała na jednéj, drugiego zaś na drugiéj płaszczyznie rzutów, wówczas potrzebne są oba ślady płaszczyzn pomocniczych siecznych.

Zadanie 126. *Znaleść krzywą przecięcia się dwóch ostrokręgów danych.*

Dane są dwa ostrokręgi kołowe, *ABO* i *CDS* (Fig. **223**.) wsparte podstawami swemi na płaszczyznie pozioméj rzutów. Konstrukcya celem znalezienia przecięcia się ich wzajemnego jest taka sama, jaka była przy szukaniu przecięcia dwóch ostrosłupów, a mianowicie: łączymy wierzchołki $S'S$ i $O'O$ obu ostrokręgów prostą $S'O', SO$ i przez takową przesuwamy dowolną, byle dostateczną liczbę płaszczyzn pomocniczych R_1, R_2.. przecinających oba ostrokręgi, których więc ślady poziome r_1, r_2, r_3... (a te do konstrukcyi zupełnie wystarczą) przez ślad poziomy prostéj $S'O', SO$ przechodzić i ślady poziome ostrokręgów przecinać muszą. Każda z tych płaszczyzn przetnie jeden i drugi ostrokrąg w rodzących, z których przecięcia się znów wzajemnego otrzymamy punkta do krzywéj szukanéj należące.

Podobnie jak przy szukaniu przecięcia dwóch walców, tak i tutaj między płaszczyznami pomocniczemi ważne są R_1 i R_6 stycznie do ostrokręgu *ABO* poprowadzone, a sieczne ostrokręgu drugiego; takowe bowiem naprzód nas uprzedzają, że krzywa przecięcia składać się będzie z dwóch oddzielnych części.

Zadanie 127. *Znaleść krzywą przecięcia się walca z ostrokręgiem.*

Przez wierzchołek ostrokręgu prowadzimy prostą równoległą do rodzących walca, i przez takową prowadzimy szereg płaszczyzn pomocniczych R_1, R_2, R_3... przecinających obie powierzchnie dane w rodzących, które znów, przecinając się wzajem, dostarczą nam punktów do szukanéj krzywéj, lub krzywych, należących. Do rozstrzygnięcia zaś, czy z przecięcia się tych dwóch powierzchni danych otrzymamy jednę lub dwie krzywe, służą uwagi przy przecięciu się dwóch walców podane.

Zadanie 128. *Znaleść krzywą przecięcia dwóch walców prostych kołowych, których osie stoją do siebie prostopadle.*

Ustawiwszy oba walce tak, iżby oś jednego stała prostopadle do płaszczyzny poziomej rzutów, drugiego zaś była równoległą do osi rzutów, przecinamy je szeregiem płaszczyzn pomocniczych równoległych do płaszczyzny pozioméj rzutów. Każda z tych płaszczyzn przetnie walec pierwszy w kole, zaś drugi w dwóch rodzących, przecinających rzeczone koło w punktach, które będą należały do szukanego przecięcia. — W nauce budownictwa przecięcie się dwóch takich walców ma zastósowanie swoje przy sklepieniach, pod nazwą sklepienia krzyżowego.

Zadanie 129. *Znaleść punkta przecięcia się linii krzywéj płaskiéj z walcem.*

Krzywą daną uważamy za kierownicę walca, któregoby rodzące były równoległe do rodzących walca danego; walce te dwa przetną się w rodzących, których znów punkta przecięcia się z krzywą daną będą punktami szukanymi. A więc np. przypuściwszy, że walca danego podstawa albo kierownica leży na płaszczyznie pozioméj rzutów, szukamy śladu poziomego walca przez krzywą daną przesuniętego, to ślad ten przetnie się z kierownicą walca danego w punktach, które będą punktami należącymi do rodzących przecięcia się obu walców.

W razie, gdy rodzące przecięcia się obu walców otrzymane nie przecinają krzywéj danéj, to znaczy, że walec i krzywa ta nie spotykają się z sobą w przestrzeni.

Zadanie 130. *Znaleść punkta przecięcia się krzywéj płaskiéj z ostrokręgiem.*

Krzywą daną przyjmujemy za kierownicę ostrokręgu, któregoby wierzchołek schodził się z wierzchołkiem ostrokręgu danego; ostrokręgi te dwa przetną się z sobą w rodzących, których punkta przecięcia się z krzywą daną (jeżeli takowe przecięcie rzeczywiście istnieje) będą punktami szukanymi.

Zadanie 131. *Znaleść figurę przecięcia się powierzchni walcowéj z graniastosłupem.*

Obie bryły przecinamy szeregiem płaszczyzn pomocniczych, równoległych równocześnie tak do krawędzi graniastosłupa, jakotéż do rodzących walca. Każdą z tych płaszczyzn graniastosłup zostanie przecięty w prostych równoległych do jego krawędzi, zaś walec w jego rodzących, — a punkta przecięć się tych ostatnich prostych z prostemi, na graniastosłupie

14

otrzymanemi, należeć będą do szukanego przecięcia obu powierzchni.

Zadanie 132. *Znaleść figurę przecięcia się powierzchni walcowéj z ostrosłupem.*

Przecinamy obie bryły szeregiem płaszczyzn pomocniczych przechodzących przez wierzchołek ostrosłupa, a równoległych do rodzących walca. Z przecięcia każdą z tych płaszczyzn otrzymamy na ostrosłupie proste idące przez jego wierzchołek, na walcu zaś proste równoległe do jego rodzących, — a punkta wzajemnego przecięcia się tych prostych na jednéj i drugiéj bryle otrzymanych, byle należących do téj saméj płaszczyzny przecinającéj, będą punktami do szukanego przecięcia obu powierzchni należącymi.

Żadanie 133. *Znaleść figurę przecięcia się powierzchni ostrokręgowéj z graniastosłupem.*

Zadanie to rozwiąże się wedle wskazówek podanych przy szukaniu figury przecięcia ostrosłupa z graniastosłupem.

Zadanie 134. *Znaleść figurę przecięcia się powierzchni ostrokręgowéj z ostrosłupem.*

Rozwiązanie podobne jak w zadaniu o przecięciu się dwóch ostrosłupow lub dwóch ostrokręgów.

Zadanie 135. Znaleść krzywą przecięcia się dwóch walców lub ostrokręgów, jeżeli podstawy ich leżą na płaszczyznach dowolnych.

Zadanie 136. Znaleść krzywą przecięcia się dwóch ostrokręgów prostych kołowych, których osie stoją do siebie prostopadle.

Zadanie 137. Znaleść krzywą przecięcia się dwóch walców lub ostrokręgów kołowych prostych, których osie stoją do siebie równolegle.

Zadanie 138. Znaleść przecięcie dwóch ostrokręgów prostych, jeżeli jeden z nich wsparty jest podstawą a drugi wierzchołchołkiem na płaszczyznie pozioméj rzutów, osie ich zaś schodzą się wzajem.

ROZDZIAŁ IV.

Powierzchnie wichrowate.

§. 20.

Sposoby powstawania najważniejszych powierzchni wichrowatych.

Co są powierzchnie wichrowate i czém się różnią od spowinowaconych z niemi powierzchi rozwijalnych, powiedzianém było w §. 12. Przechodząc do szczególnego traktowania tych powierzchni, pierwszą rzeczą jest przedewszystkiem poznać warunki, pod jakimi one przez ruch prostéj powstają, a przynajmniéj warunki, które nas prowadzą do poznania najważniejszych powierzchni do tego działu należących, a to z powodu ich użytku w praktycznéj technice.

Do powierzchni wichrowatych zaliczamy:

I. H y p e r b o l o i d a o j e d n é j p o w ł o c e *(das Hyperboloid mit einem Mantel, — hyperboloide à une nappe).* Powstaje ona, gdy prosta ślizga się po trzech innych prostych stałych, które ani są równoległe do téj saméj płaszczyzny, ani też żadne dwie z nich nie leżą w jednéj płaszczyznie. Ostatnie te trzy proste są k i e r o w n i c a m i, zaś prosta po nich się ślizgająca, a więc i w każdém swém położeniu z każdą z nich mająca punkt wspólny, jest r o d z ą c ą powierzchni

14*

wichrowatéj. Aby też rodzącą co do jéj położenia przy danych trzech prostych kierownicach wyznaczyć, postępujemy w sposób następny: przyjąwszy, że kierownicami danemi są proste *AB, CD* i *EF* (Fig. **224**.), obieramy gdziekolwiek na kierownicy *AB* punkt *M*, przezeń i przez kierownicę drugą *CD* przesuwamy płaszczyznę *P*, która z kierownicą trzecią tj. *EF* przetnie się w punkcie *N;* połączywszy ten ostatni punkt z punktem *M*, otrzymamy prostą *MN*, która przetnie kierownicę *CD* w punkcie *K* czyli otrzymamy prostą mającą z każdą z kierownic punkt wspólny, a więc rodzącą szukaną. A że na kierownicy *AB* możemy obrać dowolną liczbę punktów, otrzymamy więc w ten sposób także dowolną liczbę położeń rodzącéj, które ograniczą nam powierzchnią zwaną hyperboloidą o jednéj powłoce, a którą to powierzchnią z jéj kształtu poznamy bliżéj i łatwiéj przy powierzchniach obrotowych.

II. Paraboloida hyperboliczna *(das hyperbolische Paraboloide, — paraboloide hyperbolique)*. Powstaje ona, gdy prosta rodząca ślizga się po dwóch innych prostych stałych nie leżących w jednéj płaszczyznie, tak atoli, że prosta rodząca w ciągu tego ruchu pozostaje ciągle równoległą do danéj płaszczyzny, zwanéj płaszczyzną kierowniczą *(die leitende Ebene, — un plan directeur)*. Chcąc w tym razie wyznaczyć szereg różnych położeń rodzącéj, przecinamy dane dwie proste kierownice szeregiem płaszczyzn równoległych do płaszczyzny kierowniczéj, — szukamy punktów przecięcia się tychże płaszczyzn z kierownicami, i z takowych po dwa należące do téj saméj płaszczyzny przecinającéj łączymy z sobą prostemi, które będą rodzącemi szukanemi. Przykład konstrukcyi takiéj powierzchni wskazuje (Fig. **225**.), gdzie kierownicami są proste *AB* i *CD*, zaś płaszczyzną kierowniczą jest płaszczyzna pionowa rzutów.

Jeżeli zamiast dwóch prostych dane są dwie krzywe kierownice, po których prosta rodząca ślizga się ciągle równolegle do jednéj z płaszczyzn rzutów, wówczas powstaje powierzchnia wichrowata kształtu siodła, jak np. powierzchnia na Fig. **226**., gdzie płaszczyzną kierowniczą jest również płaszczyzna pionowa rzutów.

III. Konoid *(das Conoid, — Conoïde)*. Powstaje on, gdy prosta rodząca ślizga się po dwóch danych kierownicach, z których jedna jest prostą, druga zaś krzywą, i to tak, że w ruchu tym jest ona ciągle równoległą do płaszczyzny danéj, czyli do płaszczyzny kierowniczéj. Szczególnym gatunkiem téj powierzchni, o którym następnie z powodu jego ważności mówić będziemy, jest powierzchnia szrubowa.

§. 21.

Konstrukcya Konoidu i powierzchni szrubowéj z gwintem płaskim i ostrym.

Między Konoidami, których naturalnie mogą być liczne odmiany zależnie od kształtu krzywéj kierownicy, jakotéż wzajemnego położenia obu kierownic i płaszczyzny kierowniczéj względem siebie, na szczególną uwagę zasługują:

Konoid kołowy prosty zwany także helisoidą kołową prostą i 2) Konoid kołowy stoczysty zwany także helisoidą kołową stoczystą.

I. Konoid prosty.

Powstaje on, gdy prosta rodząca ślizga się równolegle do płaszczyzny kierowniczéj po dwóch kierownicach, jednéj prostéj, drugiéj krzywéj, a z których kierownica prosta stoi prostopadle do płaszczyzny kierowniczéj, zaś linia krzywa jest linią szrubową opisaną na walcu kołowym prostym. I tak, przyjmijmy (Fig. **227**.) płaszczyznę poziomą rzutów za płaszczyznę kierowniczą, oś $x'y', xy$ walca kołowego prostego stojącego na płaszczyznie pozioméj rzutów za jednę, zaś linią szrubową $a'b'c'd'$ .... $abcd$ .... na tymże walcu opisaną, za drugą kierownicę. Aby przy tych danych dla któregokolwiek punktu np. $m'm$ linii szrubowéj nakreślić rodzącą powierzchni konoidu, dość zauważyć, że rodząca ta tak w tém, jak w każdém inném położeniu musi być równoległą do płaszczyzny poziomé j rzutów czyli do płaszczyzny kierowniczéj, a nadto prócz tego że przechodzić ma przez punkt $m'm$, przecinać ona jeszcze musi kierownicę prostą $x'y', xy$ pod kątem prostym, skoro taż jest prostopadłą do płaszczyzny kierowniczéj. Przez punkt zatém *m'm* poprowadziwszy prostą *m'z'*, *mz*, równoległą do płaszczyzny poziioméj rzutów a przecinającą się z osią *x'y'*, *xy* walca w punkcie *z'z*, prosta ta będzie rodzącą szukaną.

W ten sam sposób i dla innych punktów dowolnie obranych na linii szrubowéj, lub téż kolejno wziętych, prowadząc więcéj rodzących, otrzymamy powierzchnię konoidalną, która wprawdzie przez linią szrubową i oś walca jest ograniczoną, może atoli być uważaną jako rozciągnięta w nieskończoność w kierunku jéj rodzących.

Zadanie 139. *Mając dany jeden z rzutów punktu leżącego na powierzchni konoidu prostego, znaleść rzut jego drugi.*

Dany jest np. rzut pionowy *s* punktu leżącego na powierzchni konoidu (Fig. **227**.), mamy znaleść — pionowy. Ponieważ punkt leżąc na powierzchni konoidu, leżeć tém samém musi na rodzącéj jego przez tenże punkt idącéj, zatém nakreśliwszy naprzód prostą *so*, która będzie rzutem poziomym téj rodzącéj, a następnie po znalezieniu *o'* nakreśliwszy prostą równoległą do osi rzutów przez *o'*, otrzymamy rzut pionowy téjże rodzącéj, na którym jakotéż na prostopadłéj do osi rzutów z *s* wyprowadzonéj, będzie leżał szukany rzut pionowy *s'*.

2. Konoid stoczysty.

Powstaje, gdy kierownicami danemi jest podobnież jak poprzednio linia szrubowa i oś walca, na którym ona jest opisaną, prosta atoli rodząca w ruchu swoim nie przecina téjże osi czyli kierownicy prostéj pod kątem prostym, ale pod kątem ostrym, stałym i niezmiennym. I tak, niech znów linia szrubowa *a'b'c'd'*.... *abcd*.... (Fig. **228**.), jakoteż oś *x'y'*, *xy* walca kołowego prostego, na którym jest ona opisaną, będą kierownicami, kątem zaś, pod którym rodząca przecinać ma oś walca, niech będzie kąt $a'1y' < 90^0$. Aby przy tych warunkach danych nakreślić rodzącą powierzchni dla któregokolwiek punktu linii szrubowéj, a więc np. dla punktu *m'm*, prowadzimy przez tenże punkt prostą *m'p'*, *mp* równoległą do płaszczyzny poziioméj rzutów, a następnie począwszy od *p'* odciąwszy na *x'y'* część $p'n' = y'1$, prowadzimy prostą *n'm'*, która będzie pionowym, zaś mx poziomym rzutem szukanéj rodzącéj, — gdyż takowa przecina oś $x'y'$, xy rzeczywiście pod kątem danym, co z przystawania trójkątów $a'1y'$ i $m'n'p'$ widoczna.

W ten sam sposób można dla któregobądź punktu na kierownicy krzywéj danego, nakreślić rodzącą téj powierzchni, — albotéż co wygodniéj, postąpić można w sposób następujący: podzieliwszy krok linii szrubowéj danéj na pewną liczbę części równych np. 12, (a co już przy konstrukcyi téjże linii uczynioném być musiało) i poszukawszy odpowiednich punktów podziału na samééjże linii szrubowéj, tj. punktów $b'b$, $c'c$, $d'd$ itd. odcinamy następnie na $x'y'$, licząc od punktu 1 w górę, części równe sobie i równe $\frac{1}{12}$ wysokości kroku, a wreszcie stąd otrzymane punkta $2'$, $3'$, $4'$... kolejno z punktami b', c', d', e'.. łączymy prostemi, które będą rzutami pionowymi rodzących, zaś proste łączące punkta b, c, d... z punktem x będą ich rzutami poziomymi.

Zadanie 140. *Mając dany jeden z rzutów punktu leżącego na powierzchni konoidu stoczystego, wynaleść rzut drugi.*

Aby, mając dany np. rzut poziomy s (Fig. **228.**) punktu należącego do powierzchni, znaleść rzut jego pionowy, prowadzimy przez s rzut poziomy ms odpowiedniéj rodzącéj, szukamy następnie jéj rzutu pionowego $m'n'$ sposobem wskazanym poprzednio, a na tymże i na prostopadłéj do osi rzutów z s wyprowadzonéj będzie leżał szukany rzut pionowy s'.

Obie powyżéj opisane powierzchnie konoidalne mają ważne swoje zastósowanie, a mianowicie pierwsza przy szrubie z gwintem płaskim *(eine Schraube mit flachen Gewinden, — une vis à filet carré)*, druga zaś przy szrubie z gwintem ostrym *(eine Schraube mit scharfen Gewinden, — une vis à filet triangulaire)*, których konstrukcyą teraz wskażemy.

I. Szruba z gwintem płaskim.

Przyjmijmy, że prosta OO_1 (Fig. **229.**) jest osią walca kołowego prostego na płaszczyznie pozioméj rzutów stojącego, oc promieniem jego kierownicy, p śladem płaszczyzny P równoległéj do płaszczyzny pionowéj rzutów a przechodzacéj przez oś OO_1, wreszcie $a'b'c'd', abcd$ prostokątem leżącym w płaszczyznie P i to tak, że jeden jego bok tj. $c'd', cd$ schodzi się z rodzącą walca, zaś dwa inne tj. $a'c', ac$ i $b'd', bd$ są prostemi poziomemi przecinającemi w przedłużeniu oś oo_1. Te rzeczy mając dane, nakreślmy z punktu c' linią szrubową $c' c'_1 c_2' \ldots$ o wysokości kroku $c'c'_2 = 2c'd'$, tj. równéj podwójnie wziętéj wysokości prostokąta, i takąż samą linią szrubową z punktu d' (ich rzuty poziome zejdą się z kierownicą walca); następnie przedstawmy sobie, że obie proste $a'c', ac$ i $b'd', bd$ poruszają się według prawa przepisanego dla konoidu prostego, to w ciągu ruchu swego opiszą one dwie równoległe do siebie powierzchnie wichrowate, czyli dwa konoidy. Powierzchnie te będą miały za granice najprzód dwie linie szrubowe z punktów $c'c$ i $d'd$ opisane, a następnie, — ponieważ punkta $a'a$ i $b'b$, będąc stale połączone z punktami $c'c$ i $d'd$, podczas ruchu prostych $a'c', ac$ i $b'd', bd$ takiż sam ruch odbywają jak i te punkta ostatnie, czyli opisują również linie szrubowe o téj saméj wysokości kroku, tylko że na walcu współśrodkowym z walcem pierwszym, a którego kierownicą jest koło promienia oa, zatém te dwie nowe linie szrubowe $a' a'_1 a'_2 \ldots$ i $b' b'_1 b'_2 \ldots$ (ich rzuty poziome schodzą się z rzutem poziomym kierownicy walca zewnętrznego) będą również granicami tych powierzchni. Połączywszy wreszcie odpowiednie punkta obu powierzchni walcowych, a co z rysunku dostatecznie widoczna, otrzymamy powierzchnią szruby z gwintem płaskim. Walec wewnętrzny tj. walec o podstawie promienia oc zowie się przy szrubach w r z e c i o n e m *(ein Schraubenspindel)*.

2. Szruba z gwintem ostrym.

Zostawiwszy wszystkie dane, jakie były użyte przy konstrukcyi szruby z gwintem płaskim, tylko zamiast prostokąta wziąwszy trójkąt równoramienny $a'b'c', abc$ (Fig. **230**.), którego podstawa $a'c', ac$ leży wzdłuż rodzącéj walca, otrzymamy szrubę z gwintem ostrym w sposób następujący:

Z punktu $a'a$ nakreślmy linią szrubową $a'a'_1 c'c'_1 \ldots$ o wysokości kroku równéj podstawie trójkąta, a następnie z punktu $c'c$ takąż samą linią szrubową $c'c'_1 c'_2 \ldots\ldots$ (rzut poziomy obu tych linij jest kołem promienia $oa = oc$, czyli schodzi się z kierownicą wrzeciona), to jasną jest rzeczą, że punkt $a'a$ po odbyciu pierwszego kroku i dojściu do $c'c$, odtąd pójdzie koniecznie po lini szrubowéj przez punkt $c'c$ opisanéj. Uważmy daléj, że ramiona $a'b'$, ab i $b'c'$, bc trójkąta danego są równo pochylone do jego podstawy, a tém samém i do osi walca; jeżeli więc, biorąc za kierownice też oś walca i linią szrubową przez punkt $a'a$ opisaną, pomyślimy sobie te proste odbywające ruch po nich i to tak, że w każdém swojém położeniu będą tworzyły z osią walca kąty sobie równe i równe kątowi w pierwotném ich położeniu, wówczas te dwie proste opiszą nam dwie powierzchnie wichrowate, a mianowicie dwa konoidy stoczyste. Te dwie powierzchnie przetną się z sobą w linii szrubowéj $b'b'_1b'_2$... (o wysokości kroku takiéj saméj, jaką jest wysokość linij szrubowych poprzednio nakreślonych) opisanéj z punktu $b'b$ na walcu współśrodkowym z walcem pierwszym czyli wrzecionem, a któregoto walca podstawą i zarazem rzutem poziomym linii szrubowéj na nim opisanéj, jest koło promienia ob. Połączywszy wreszcie odpowiednie punkta ze sobą, co już z rysunku widoczna, otrzymamy szrubę z gwintem ostrym czyli trójkątnym.

§. 22.

Przekroje płaskie powierzchni wichrowatych.

Sposób, w jaki szukaliśmy przecięć powierzchni rozwijalnych płaszczyznami, służy w zupełności i dla powierzchni wichrowatych, a mianowicie, — iżby znaleść przecięcie takiéj powierzchni płaszczyzną, szukamy punktów przecięcia się poszczególnych rodzących z tąż płaszczyzną, i takowe ze sobą krzywą ciągłą łączymy. Jeżeli powierzchnia wichrowata daną jest tylko za pomocą swych kierownic, wtedy oczywista, potrzeba najprzód wykreślić dostateczną liczbę rodzących, i z takowemi postąpić następnie wedle sposobu podanego.

Zadanie 141. *Znaleść przecięcie powierzchni wichrowatéj płaszczyzną prostopadłą do jednéj z płaszczyzn rzutów.*

Niech A', A (Fig. **231.**) będą rzutami powierzchni wichrowatéj jakiéjkolwiek, a mianowicie krzywa $abc \ldots a'b'c' \ldots$, rzutami jéj kierownicy, i zarazem śladem poziomym téj powierzchni, zaś proste przez punkta $a'a, b'b, c'c \ldots$ idące, rzutami jéj rodzących; płaszczyzną przecinającą jest płaszczyzna rzucająca pozioma P. Sposobem wiadomym szukamy punktów przecięcia się poszczególnych rodzących z płaszczyzną P, tj. punktów $1, 2, 3, \ldots$ $1', 2', 3' \ldots$, a takowe krzywą ciągłą połączone, dadzą nam przecięcie szukane. Zrobiwszy jeszcze kład poziomy lub pionowy płaszczyzny P, znajdziemy wreszcie krzywą przecięcia w prawdziwym kształcie i wielkości.

Zadanie 142. *Znaleść punkt przecięcia się powierzchni wichrowatéj z prostą daną.*

Przez prostą daną $m'm$ (Fig. **231.**) przesuwamy płaszczyznę P, szukamy krzywéj przecięcia się téjże płaszczyzny z powierzchnią daną $A'A$, a punkt $x'x$, w którym prosta dana spotyka się z krzywą znalezioną, jest punktem szukanym.

Zadanie 143. Znaleść przecięcie powierzchni wichrowatéj jakiéjkolwiek płaszczyzną pochyłą względem obu płaszczyzn rzutów.

Zadanie 144. Znaleść przecięcie konoidu prostego lub stoczystego płaszczyzną prostopadłą do jednéj z płaszczyzn rzutów, równoległą do płaszczyzny kierowniczéj, lub pochyłą względem obu płaszczyzn rzutów.

§ 23.

Konstrukcya linij stycznych do powierzchni wichrowatych.

Zadanie 145. *Przez punkt dany na powierzchni wichrowatéj poprowadzić do téjże linią styczną.*

Powierzchnią daną niech będzie np. konoid stoczysty (Fig. **232.**), zaś punktem, przez który do téj powierzchni poprowadzić mamy styczną, punkt $a'a$. Jedną z wielu stycznych, jakie przez ten punkt do powierzchni poprowadzić można, jest rodząca konidu $o's'$, os przez tenże punkt nakreślona. Aby otrzymać inną, przesuwamy przez punkt $a'a$ płaszczyznę P przecinającą konoid, szukamy krzywéj przecięcia $1'2'3'4'$, $1\,2\,3\,4$ stąd powstałéj, i do téjże krzywéj przez $a'a$ prowadzimy styczną $b'c'$, bc, a ta będzie zarazem styczną do powierzchni.

Zadanie 146. *Przez punkt dany zewnątrz powierzchni wichrowatéj poprowadzić do téjże linią styczną.*

Przez puukt np. $m'm$ dany zewnątrz konoidu (Fig. **232**.) przesuwamy dowolną byle przecinającą konoid płaszczyznę P, szukamy krzywéj przecięcia $1'2'3'4', 1\,2\,3\,4$ stąd powstałéj, i do téjże przez punkt $m'm$ prowadzimy styczną $b'c', bc$, która będzie jedną ze stycznych, jakie z punktu $m'm$ w tenże sam sposób do powierzchni poprowadzić można.

Zadanie 147. *Równolegle do prostéj danéj poprowadzić styczną do powierzchni wichrowatéj.*

Prostą daną jest np. prosta $x'y', xy$, zaś powierzchnią daną, konoid (Fig. **232**.). Równolegle do prostéj $x'y', xy$ przesuńmy płaszczyznę P przecinającą konoid, a otrzymamy stąd krzywą $1'2'3'4', 1\,2\,3\,4$ na powierzchni konoidu leżącą, do któréj równolegle do prostéj $x'y', xy$ poprowadziwszy styczną $b'c', bc$, ta będzie styczną żądaną.

§. 24.

Konstrukcya płaszczyzn stycznych, linij i płaszczyzn normalnych do powierzchni wichrowatych.

Płaszczyzna w jakimkolwiek kierunku przesunięta przez rodzącą powierzchni wichrowatéj, przecina też powierzchnią w linii krzywéj, która wraz z tą rodzącą prostą leżąc na jednéj płaszczyznie przecinającéj powierzchnią i znajdując się z obu stron téjże rodzącéj, przetnie się z nią w punkcie; że zaś przez ten punkt poprowadziwszy styczną do téj krzywéj, takowa także leży na zwyż rzeczonéj płaszczyznie przecinającéj, zatém płaszczyzna ta jest styczną do powierzchni w tym punkcie. Na mocy téj uwagi otrzymujemy następujące bardzo ważne wnioski i własności, tyczące się płaszczyzn stycznych do powierzchni wichrowatych: 1) każda płaszczyzna, przez rodzącą powierzchni wichrowatéj przesunięta, jest styczną do powierzchni, i to w jednym punkcie na owéj rodzącéj leżącéj, w każdym zaś innym jéj punkcie, płaszczyzna ta jest sieczną powierzchni; 2) każdy punkt, na rodzącéj powierzchni wichrowatéj leżący, jest punktem styczności jednéj z płaszczyzn, jakie przez prostą tę rodzącą poprowadzić można; 3) iżby punkt styczności którějkolwiek z płaszczyzn przez rodzącą powierzchni wyznaczyć, dość poszukać krzywéj, jaką z przecięcia powierzchni tąż płaszczyzną otrzymamy, a punkt przecięcia się téj krzywéj z rodzącą będzie punktem styczności.

Zadanie 148. *Przez punkt dany na powierzchni wichrowatéj przesunąć do téjże płaszczyznę styczną.*

Ponieważ jak wiemy wszystkie przez punkt dany na powierzchni poprowadzone styczne, a więc także i rodząca przez tenże punkt idąca, leżą w płaszczyznie stycznéj szukanéj, zatém przez punkt np. $a'a$ dany na powierzchni konoidu stoczystego (Fig. **232**.) poprowadziwszy najprzód rodzącą $o's', os$, a następnie styczną $b'c', bc$ do powierzchni (Zad. 145), płaszczyzna przez te dwie proste przesunięta będzie płaszczyzną styczną żądaną.

Zadanie 149. *Przez punkt dany zewnątrz powierzchni wichrowatéj przesunąć do niéj płaszczyznę styczną.*

Punktem danym jest $a'a$, zaś powierzchnią daną, — konoid stoczysty (Fig. **233**.). Przez punkt $a'a$ prowadzimy linie styczne do konoidu (Zad. 146.), np. styczne $a'b', ab$, $a'c', ac$, $a'd', ad$, zaś przez punkt styczności każdéj z nich z powierzchnią daną, tj. przez punkt $1'1$, $2'2$, lub $3'3$, prowadzimy rodzącą powierzchni, a płaszczyzna przez każdą z tych rodzących i odpowiednią jéj, tj. przecinającą się z nią linią styczną przesunięta, będzie płaszczyzną styczną żądaną.

Albo krócéj: ponieważ każda płaszczyzna przesunięta przez rodzącą powierzchni wichrowatéj jest płaszczyzną styczną do powierzchni, zatem przez punkt dany i którąkolwiek z rodzących przesunąwszy płaszczyznę, ta będzie żądaną, a punkt jéj styczności znajdzie się sposobem powyżéj wspomnianym.

Płaszczyzn stycznych odpowiadających warunkowi zadania może być, jak widzimy, bardzo wiele; wyznaczywszy punkt styczności każdéj z nich powierzchnią daną, i otrzymany stąd szereg tych punktów w należyty sposób, tj. w porządku rodzących, krzywą ciągłą ze sobą połączywszy, znajdziemy tak zwaną k r z y w ą s t y c z n o ś c i, którą biorąc za kierownicę, zaś punkt dany za wierzchołek ostrokręgu, otrzymamy stąd o s t r o k r ą g s t y c z n y do powierzchni wichrowatéj. Rodzącemi tego ostrokręgu będą proste łączące punkt dany ze znalezionymi poprzednio punktami styczności poszczególnych płaszczyzn stycznych, a które to proste, leżąc na tych płaszczyznach, są tém samém stycznemi do danéj powierzchni.

Zadanie 150. *Równolegle do prostéj danéj przesunąć płaszczyznę styczną do powierzchni wichrowatéj.*

Poprowadziwszy równolegle do prostéj danéj styczną do powierzchni wichrowatéj (Zad. 147.), zaś przez punkt jéj styczności poprowadziwszy rodzącą powierzchni, płaszczyzna przez te dwie proste przesunięta będzie żądaną.

Albo: przez którąkolwiek z rodzących danéj powierzchni przesunąwszy płaszczyznę równoległą do prostéj danéj, takowa będzie żądaną, tj. styczną do powierzchni w punkcie. Punkt ten następnie sposobem wiadomym, tak dla téj, jakotéż każdéj innéj płaszczyzny warunkowi zadania odpowiadającéj wyznaczywszy, otrzymamy z ich połączenia krzywą styczności. A że każda z tych płaszczyn jest równoległą do prostéj danéj, na każdéj zatém z nich przez odpowiedni jéj punkt styczności można poprowadzić prostą równoległą również do prostéj danéj, a która naturalnie będzie styczną do powierzchni, — wszystkie zaś te proste styczne uważać można jako rodzące walca mającego za kierownicę zwyż wspomnianą krzywą styczności. Walec ten z tego powodu zowie się walcem stycznym do powierzchni wichrowatéj.

Zadanie 151. *Przez prostą daną przesunąć płaszczyznę styczną do powierzchni wichrowatéj.*

Na prostéj danéj obrawszy gdziekolwiek dwa punkta, szukamy krzywéj styczności płaszczyzny, przesuniętéj stycznie do powierzchni danéj najprzód przez pierwszy, a następnie takiejże krzywéj dla płaszczyzny przesuniętéj przez drugi z punktów obranych. Punkt, w którym tak znalezione krzywe przetną się z sobą, będzie punktem styczności szukanéj płaszczyzny, która przez proste łączące punkta obrane na prostéj danéj ze znalezionym punktem styczności, a więc tém samém przez dwie proste styczne do danéj powierzchni, dokładnie będzie wyznaczoną.

Jeżeli krzywe zwyż rzeczone przecinają się z sobą w kilku punktach, wtedy otrzymamy tyleż płaszczyzn stycznych odpowiadających warunkowi zadania.

Zadanie 152. *Przez punkt dany na powierzchni wichrowatéj poprowadzić do téjże linią normalną.*

Przez punkt dany przesunąwszy najprzód płaszczyznę styczną, do téj zaś w tymże punkcie wystawiwszy prostą prostopadłą, prostopadła ta będzie normalną żądaną powierzchni.

Zadanie 153. *Przez punkt dany na powierzchni wichrowatéj przesunąć do téjże płaszczynę normalną.*

W punkcie danym kreślimy najprzód linią normalną do powierzchni, a każda płaszczyzna przez tę prostą przesunięta będzie normalną powierzchni.

§. 25.

Przecięcia wzajemne powierzchni wichrowatych ze sobą, jakotéż z innemi powierzchniami.

Zadanie 154. *Znaleść krzywą przecięcia się dwóch powierzchni wichrowatych.*

Dane są dwie powierzchnie wichrowate jakiekolwiek $A'A$ i $B'B$ (Fig. **234**.), mamy znaleść krzywą ich przecięcia się wzajemnego. W tym celu przez którąkolwiek z rodzących np. a', a powierzchni $A'A$, przesuwamy płaszczyznę P_1, i szukamy sposobem wiadomym krzywéj b', c', bc przecięcia się téjże płaszczyzny z drugą powierzchnią daną tj. z $B'B$. Gdzie zaś tak znaleziona krzywa spotyka się z rodzącą a', a, tam otrzymamy punkt m', m do wspólnego przecięcia się obu powierzchni danych należący. Powtarzając taką konstrukcyą z wszystkiemi innemi rodzącemi powierzchni $A'A$, otrzymamy stąd szereg punktów, które połączone należycie ze sobą krzywą ciągłą, dadzą nam przecięcie szukane $m'n', mn$. Z postępowania tego czerpiemy więc regułę, że celem znalezienia przecięcia się dwóch powierzchni wichrowatych, szukamy przecięcia się każdéj rodzącéj jednéj powierzchni z powierzchnią drugą, i otrzymane stąd punkta ze sobą łączymy.

Zadanie 155. *Znaleść krzywą przecięcia się powierzchni wichrowatéj z powierzchnią walcową.*

Obie powierzchnie przecinamy szeregiem płaszczyzn równoległych do rodzących walca, a przesuniętych przez rodzące powierzchni wichrowatéj; stąd otrzymamy proste leżące na jednéj i drugiéj powierzchni, które przecinając się wzajem, dadzą nam punkta do szukanego przecięcia należące. I tak, niech $A'A$ (Fig. **235**.) będą rzutami powierzchni wichrowatéj, zaś $B'B$ powierzchni walcowéj. Przez punkt n', n gdziekolwiek obrany na rodzącéj a', a powierzchni wichrowatéj prowadzimy prostą c', c równoległą do kierunku czyli do rodzących walca, a następnie przez obie te proste tj. a', a i c', c przesuwamy płaszczyznę P_1 (jéj ślad poziomy wystarczy). Płaszczyzna ta przetnie nam walec w rodzącéj b', b, zaś powierzchnią wichrowatą w prostéj a', a, punkt więc $1'1$, w którym te dwie proste wzajem się spotykają, jest punktem należącym do szukanego przecięcia. W ten sam sposób, wyszukawszy więcéj takich punktów i takowe ze sobą krzywą ciągłą połączywszy, otrzymamy przecięcie żądane obu powierzchni. Dla łatwiejszéj zaś konstrukcyi obieramy, jak figura wskazuje, na następnych rodzących powierzchni wichrowatéj punkta o', o r', r... tak, iż ich rzuty pionowe leżą na przecięciu się rzutów pionowych tychże rodzących z rzutem pionowym prostéj c', c już poprzednio nakreślonéj.

Zadanie 156. *Znaleść krzywą przecięcia się powierzchni wichrowatéj z ostrokręgową.*

Przez wierzchołek ostrokręgu i rodzące powierzchni wichrowatych przesuwamy szereg płaszczyzn przecinających obie powierzchnie; otrzymamy stąd proste przecięcia na jednéj i drugiéj powierzchni, których to prostych punkt wzajemnego spotkania się z sobą będzie należał do szukanego przecięcia obu powierzchni. I tak np. mamy powierzchnią wichrowatą $A'A$ (Fig. **236**.) i ostrokręgową $B'B$. Na rodzącéj a', a powierzchui wichrowatéj obieramy gdziekolwiek punkt n', n, i przezeń jakotéż przez wierzchołek $s's$ ostrokręgu prowadzimy prostą c', c. Przez te dwie proste tj. a', a i c', c przesunięta płaszczyzna P_1, przetnie ostrokrąg w rodzącéj $b's', bs$, zaś powierzchnią wichrowatą w rodzącéj a', a, skąd punkt $1'1$ wzajemnego spotkania się tych dwóch rodzących prostych, będzie punktem należącym do szukanego przecięcia. W ten sam sposób szukamy następnie więcéj takich punktów, obierając również i tutaj dla uproszczenia konstrukcyi, rzuty pionowe punktów o', o, r', r... na przecięcięciu się rzutów pionowych poszczególnych rodzących powierzchni wichrowatéj z rzutem pionowym prostéj c', c, poprzednio nakreślonéj.

Zadanie 157. *Znaleść punkt przecięcia się powierzchni wichrowatéj z krzywą daną.*

Krzywą daną np. $n'n$ (Fig. **231**.) uważamy za kierownicę walca rzucającego, a więc walca, któregoby rodzące były np. prostopadłe do płaszczyzny pionowéj rzutów. Szukamy następnie krzywéj $g h k \ldots, g' h' k' \ldots$ przecięcia się obu tych powierzchni (rzut pionowy punktów do tego przecięcia należących leżeć będzie na śladzie pionowym walca, czyli rzucie pionowym krzywéj danéj, i na rzucie pionowym rodzących powierzchni danéj), a punkt $z'z$, w którym krzywa dana spotyka się z krzywą znalezioną, jest punktem szukanym.

Zadanie 158. Znaleść krzywą przecięcia się walca kołowego, prostopadle do płaszczyzny poziomėj rzutów stojącego, z powierzchnią wichrowatą jakąkolwiek.

Zadanie 159. Znaleść krzywą przecięcia się walca jakiegokolwiek z paraboloidą hyperboliczną, któréj płaszczyzna kierownicza jest równoległą do rodzącéj walca.

Zadanie 160. Znaleść krzywą przecięcia się dwóch paraboloidów hyperbolicznych, mających wspólną płaszczyznę kierowniczą.

Zadanie 161. Znaleść krzywą przecięcia się konoidu stoczystego lub prostego z ostrokręgiem, którego wierzchołek leży na osi konoidu.

ROZDZIAŁ V.

Powierzchnie obrotowe.

§. 26.

O powierzchniach obrotowych w ogólności.

Obracając jakąkolwiek linią prostą lub krzywą, płaską lub podwójnego zakrzywienia, około prostéj nieruchoméj, z którą pierwsza jest stale połączona, powstaje powierzchnia obrotowa. Linia ruchoma zowie się z tego powodu rodzącą powierzchni, zaś prosta nieruchoma zowie się jéj osią obrotu. W czasie ruchu rodzącéj każdy jéj punkt opisuje koło, którego promień jest równym odległości tegoż punktu od osi obrotu, środek zaś jego leży na saméjże osi obrotu. Płaszczyzna tego koła przechodząc przez prostą prostopadłą do osi, sama tém jest do téj osi prostopadłą, — skąd nawzajem wynika, że każda płaszczyzna prostopadła do osi powierzchni obrotowéj, przecina takową w kole. Koła te zowią się równoleżnikami *(Parallelkreise, — parallèles)*. Jeżeli który z równoleżników dzieli powierzchnią na dwie przystające połowy, wtedy zowie się równikiem *(Aequator, — équateur)*. Równoleżnik opisany przez punkt rodzącéj najdaléj od osi leżący, zowie się równoleżnikiem największym, zaś opisany przez punkt najbliżéj osi leżący, równoleżnikiem najmniejszym. Jeżeli oś przecina powierzchnią, wtedy punkta tego przecięcia zowią się **biegunami** *(der Pole, — un pôle)*, a są one niczém innèm, jak również równoleżnikami o promieniu nieskończenie małym. Część powierzchni obrotowéj zawarta między dwoma równoleżnikami, nazywa się **pasem** *(eine Zone, — une zone)*.

Przez oś obrotu powierzchni obrotowéj przesunąwszy płaszczyznę, takowa z każdym jéj równoleżnikiem przetnie się w dwóch punktach; punkta te połączone ze sobą, tworzą krzywą płaską zwaną **południkiem** *(ein Meridian, — un méridien)*, złożoną z dwóch równych, systematycznych, po obu stronach osi leżących części, płaszczyzna zaś sama zowie się **południkową**. Południk taki leży naturalnie w całéj swéj rozciągłości na powierzchni obrotowéj; obróciwszy go więc około osi obrotu, zrodzi on nam tę samą powierzchnią, i z tego powodu za rodzącą powierzchni na któréj leży uważanym także być może. Ponieważ przez oś można bardzo wiele płaszczyzn przesunąć, zatém także i południków powierzchnia obrotowa ma bardzo wiele, a wszystkie są krzywemi do siebie przystającemi. Część powierzchni obrotowéj zamknięta między dwoma południkami zowie się jéj **wrzecionem** *(ein Spindel, — un fuseau)*.

Do graficznego przedstawienia powierzchni obrotowych najkorzystniejszą rzeczą jest ustawić ich oś obrotu prostopadle do płaszczyzny pozioméj rzutów. Skutkiem bowiem takiego ustawienia, otrzymujemy dla konstrukcyi tych powierzchni następujące korzyści: 1) wszystkie równoleżniki pokazują się nam na rzucie poziomym w prawdziwym kształcie i wielkości, tj. jako koła współśrodkowe, mające swój środek w rzucie poziomym osi obrotu; 2) rzuty pionowe tych równoleżników są prostemi równoległemi do osi rzutów, równemi co do długości średnicom odpowiednich równoleżników na rzucie poziomym, a przytém podzielone są przez rzut pionowy osi obrotu pod kątem prostym na dwie równe części; 3) rzut poziomy każdego południka leży na śladzie poziomym płaszczyzny południkowéj, a więc jest prostą przechodzącą przez ślad poziomy osi obrotu, — czyli wszystkie południki pokazują się na rzucie poziomym jako średnice równoleżnika największego. W tém położeniu osi obrotu powierzchni, między wszystkimi jéj południkami na szczególną uwagę zasługuje południk powstały z przecięcia powierzchni płaszczyzną przechodzącą przez jéj oś, a przytém równoległą do płaszczyzny pionowéj rzutów, zwany **południkiem głównym**; takowy bowiem na rzucie pionowym ukazuje się w prawdziwym kształcie i wielkości, a prócz tego stanowi granice dla rzutu pionowego całéj powierzchni i oddziela część widoczną powierzchni od niewidocznéj na tymże rzucie. Podobnież znów granicami rzutu poziomego powierzchni będą w tym razie równoleżnik największy i najmniejszy, które zarazem oddzielają część widoczną powierzchni od niewidocznéj na rzucie poziomym.

Przy kreśleniu powierzchni obrotowych jeszcze jedna okoliczność z korzyścią użytą być może, a mianowicie, że zamiast brać jakąkolwiek krzywą za rodzącą powierzchni, bierzemy za takową krzywą południkową, i to najdogodniéj krzywą południka głównego, przez to bowiem unikamy wprowadzania w rysunek krzywych podwójnego zakrzywienia. Rodzącą tę będziemy nazywać **rodzącą południkową**.

Zależnie od kształtu rodzącéj, mogą być najrozmaitsze powierzchnie obrotowe; między niemi atoli na szczególną uwagę zasługują następujące:

1) **Kula** *(die Kugel, — une sphére)*, gdy rodzącą południkową jest koło, zaś osią obrotu średnica tegoż koła.

2) **Ellipsoida obrotowa** *(das Rotationsellipsoid, — l'ellipsoïde de révolution)*, gdy rodzącą jest ellipsa, zaś osią obrotu, jéj oś mała lub wielka; w pierwszym razie powstaje **ellipsoida soczewkowata** *(das linsenförmige Ellipsoid)*, w drugim **jajowata** *(das eiförmige Ellipsoid)*.

2) **Hyperboloida obrotowa** (*das Rotationshyperboloid, — hyperboloïd de révolution)*, jeżeli rodzącą jest hyperbola, osią zaś obrotu jéj oś urojona lub rzetelna; w pierwszym znów razie powstaje **hyperboloida o jednéj powłoce** *(das Hyperboloid mit einem Mantel, — hyperboloïde de révolution à une nappe)*, w drugim zaś razie **hyperboloida o dwu powłokach** albo **dwupowłokowa** *(das Hyperboloid mit zwei Mänteln, — hyperboloïde de révolution à deux nappes)*. Hyperboloida o jednéj powłoce, jak to późniéj zobaczymy, powstaje także przez obrót prostéj pochyłéj około prostéj pionowéj.

15*

4) Paraboloida obrotowa *(das Rotationsparaboloid, — paraboloïd de révolution)*, gdy rodzącą jest parabola, a jéj oś jest osią obrotu.

5) Powierzchnia pierścieniowa *(die Ringfläche* albo *der Wulst, — surface annulaire)*, gdy rodzącą jest koło, zaś osią obrotu prosta gdziekolwiek w płaszczyznie tego koła leżąca.

Wreszcie do powierzchni obrotowych policzyć można znajomy nam już walec i ostrokrąg, a w takim razie rodzącą pierwszego jest prosta równoległa do osi obrotu, rodzącą zaś drugiego prosta przecinająca oś obrotu.

§. 27.

Zadania tyczące się rzutów powierzchni obrotowych.

Zadanie 162. *Mając daną oś obrotu i rodzącą powierzchni obrotowéj, przedstawić takową w rzutach.*

Niech osią obrotu będzie prosta $a'b', ab$ (Fig. **237.**) prostopadła do płaszczyzny pozioméj rzutów, zaś rodzącą krzywa podwójnego zakrzywienia $c'd'e'f'$.... $cdef$... Ponieważ przedstawienie powierzchni obrotowéj w rzutach polega na nakreśleniu jak największéj liczby jéj równoleżników i południków, zatém, obrawszy na rodzącéj danéj kilka punktów np. $c'c$, $d'd$, $e'e$..., szukamy najprzód rzutów równoleżników, przez te punkta podczas obrotu opisanych. Ale rzutami poziomymi a zarazem i prawdziwą wielkością tychże będą koła współśrodkowe z punktu a promieniami ac, ad, ae... zatoczone; pionowe zaś otrzymamy, prowadząc przez punkta c', d', e', równoległe $g'h', k'l', m'n'$... do osi rzutów, i na nich po obu stronach osi obrotu odcinając części, równe promieniom odpowiednich równoleżników na rzucie poziomym; — albo téż co krócéj, prowadząc z punktów g, k, m, h, l, n prostopadłe do osi rzutów aż do przecięcia się ich z odpowiednimi rzutami pionowymi równoleżników w punktach g', m', k', l', n'. Aby następnie otrzymać przedewszystkiem rzuty południka głównego, prowadzimy przez oś obrotu płaszczyznę równoległą do płaszczyzny pionowéj rzutów (śladem jéj poziomym będzie prosta przez a idąca a równoległa do osi rzutów), i szukamy następnie punktów przecięcia się téj płaszczyzny z wszystkimi równoleżnikami; punktami tymi będą $g'g$, $h'h$, $m'm$... $k'k$, $l'l$, $n'n$..., z połączenia których, jako rzut poziomy południka głównego, otrzymamy prostą gh leżącą na śladzie poziomym płaszczyzny południkowéj (co jest naturalne, skoro płaszczyzna ta jest rzucającą poziomą), jako zaś rzut pionowy, otrzymamy dwie przerwane krzywe $r'k'm'g's'$, $u'l'n'h't'$, które są zarazem prawdziwym kształtem i wielkością tegoż południka i które, zamykając kontury rzutu pionowego, dają nam wyobrażenie o kształcie powierzchni przez obrót danéj rodzącéj powstałéj. Aby wreszcie więcéj południków nakreślić, postępujemy tak samo, kreśląc najprzód ich rzuty poziome, które pokażą się jako średnice równoleżnika największego, a następnie szukając rzutów pionowych punktów, w których płaszczyzny tych południków przecinają się z równoleżnikami, i wreszcie te punkta łącząc krzywemi ciągłemi ze sobą.

Co się nakoniec tyczy odróżnienia widocznych równoleżników i południków od niewidocznych, to naturalnie z równoleżników będą widoczne na rzucie poziomym te, których rzuty pionowe leżą między $r'n'$ i $k'l'$, a następnie między $m'n'$ i $g'h'$, podczas gdy rzuty pionowe wszystkich są widoczne; z południków zaś na rzucie poziomym widoczne wszystkie, na pionowym atoli te tylko ich połowy, których rzutami poziomymi są promienie pod rzutem poziomym południka głównego leżące.

Zadanie 163. *Mając daną oś obrotu i rodzącą powierzchni obrotowéj, nakreślić rzuty równoleżnika odpowiadającego punktowi, którego jeden z rzutów jest danym.*

Jeżeli danym jest rzut poziomy x (Fig. **237**.) punktu, wtedy najprzód kreślimy rzut poziomy równoleżnika żądanego,— będzie nim koło z punktu a promieniem ax zatoczone. Koło to przetnie rzut poziomy rodzącéj tj. krzywą $cdef$ w punkcie o, dla którego rzut pionowy znajdziemy na prostopadłéj do osi rzutów i na rzucie pionowym rodzącéj, a więc w punkcie o'. Przez o' wreszcie poprowadziwszy równoległą do osi rzutów i na niéj po obu stronach odciąwszy części równe ax, otrzymamy rzut pionowy równoleżnika szukanego.

Jeżeli zaś jest dany rzut pionowy x' punktu, wówczas znów najprzód prowadzimy przez x' równoległą do osi rzutów, a ta przetnie rzut pionowy rodzącéj tj. $c'd'e'f'$ w punkcie o'; poczém po wynalezieniu rzutu poziomego o, promieniem ao zatoczywszy koło ze środka a, takowe będzie rzutem poziomym równoleżnika, z pomocą którego łatwo ograniczymy wielkość jego rzutu pionowego, na zwyż nakreślonéj równoległéj leżącego.

Gdyby danemu rzutowi poziomemu x punktu, odpowiadało kilka rzutów pionowych x', wtedy otrzymamy kilka także równoleżników, które będą miały wspólny rzut poziomy; a jeżeliby danemu rzutowi pionowemu x' punktu, odpowiadało kilka rzutów poziomych, wtedy płaszczyzna prostopadła do osi obrotu przecina powierzchnią w kilku równoleżnikach współśrodkowych, mających wspólny rzut pionowy.

Zadanie 164. *Mając dany jeden z rzutów punktu na powierzchni obrotowéj leżącego, znaleść rzut drugi.*

Nakreśliwszy najprzód rzuty równoleżnika przynależnego punktowi, którego rzut jest dany (Zad, 163.), to rzut szukany punktu będzie leżał na równoimiennym rzucie równoleżnika i na prostopadłéj do osi rzutów, z rzutu danego wyprowadzonéj.

Zadanie 165. *Mając daną oś obrotu i rodzącą powierzchni obrotowéj, nakreślić rzuty południka przez dany punkt idącego.*

Rzut poziomy punktu danego łączymy z rzutem poziomym osi obrotu, a prosta ta będzie rzutem poziomym szukanego południka. Poszukawszy następnie rzutów pionowych kilku punktów na prostéj téj obranych (podług zad. poprzedniego), i takowe ze sobą krzywą ciągłą połączywszy, otrzymamy rzut pionowy południka żądanego.

W zadaniu 162 widzieliśmy, jak mając krzywą podwójnéj krzywizny daną jako rodzącą powierzchni obrotowéj, można z łatwością nakreślić rzuty téjże powierzchni. Rzecz atoli upraszcza się nieco, jeżeli zamiast rodzącéj jakiéjkolwiek, daną jest rodząca południkowa, o któréj już w §. poprzedzającym wzmiankę uczyniliśmy, — aczkolwiek w głównych swych częściach konstrukcya pozostaje ta sama. I tak zobaczmy to na przykładzie.

Zadanie 166. *Nakreślić rzuty powierzchni obrotowéj, mając dane wymiary rodzącéj południkowéj.*

Przypuśćmy, że rodzącą południkową daną w swoich wymiarach, jest ellipsa, a chcemy nakreślić rzuty ellipsoidy soczewkowatéj czyli spłaszczonéj. W tym celu na płaszczyznie pionowéj rzutów kreślimy tę ellipsę w prawdziwym jéj kształcie i wielkości, a przytém tak, iżby jéj oś mała *a'b'* (Fig. **238**.) była prostopadłą do osi rzutów; rzutem poziomym téjże ellipsy będzie prosta *cd*, przez rzut poziomy *ab* osi małéj, która tu jest zarazem osią obrotu powierzchni, równolegle do osi rzutów poprowadzona. To mając, obieramy na rodzącéj danéj najprzód punkta *cc'* i *dd'* tj. końce osi wielkiéj, a następnie z punktu *a* promieniem $ac = ad$ zataczamy koło, które będzie rzutem poziomym równoleżnika największego i jego prawdziwą wielkością, i które łącznie z krzywą południka głównego czyli ellipsą, na rzucie pionowym nakreśloną, przedstawia nam żądaną powierzchnią ellipsoidy, a właściwie jéj kontury na obu płaszczyznach rzutów. Aby w razie żądanym mieć jeszcze kilka równoleżników i południków na téj powierzchni, obieramy na rodzącéj południkowéj kilka punktów np. *f'f, g'g*..., to rzutami poziomymi równoleżników przez te punkta przechodzących będą koła z punktu *a* promieniami *af, ag*... zatoczone, zaś pionowymi — prostopadłe do rzutu pionowego osi obrotu z punktów *f, g*... poprowadzone; południki wreszcie otrzymamy, prowadząc przez punkt *a* ślady poziome płaszczyzn południkowych, które wzięte w granicach równoleżnika największego są zarazem rzutami poziomymi południków a następnie — szukając rzutów pionowych punktów, w których każda z tych płaszczyzn przecina się z poszczególnymi równoleżnikami, i takowe należycie ze sobą łącząc krzywą ciągłą.

W ten sam sposób, mając dany promień koła, wymiary paraboli lub hyperboli, otrzymać można rzuty kuli (Fig. **239**.), rzuty paraboloidy (Fig. **240**.), następnie rzuty hyperboloidy o dwóch powłokach (Fig. **241**.), a to obracając hyperbolę daną około jéj osi rzetelnéj, i rzuty hyperboloidy o jednéj powłoce (Fig. **242**.), obracając też samą hyperbolę około jéj osi urojonéj.

Ostatnia ta powierzchnia tj. hyperboloida o jednéj powłoce posiada tę szczególną własność, że utworzoną także być może przez obrót prostéj a pochyłéj linii *ab,a'b'* (Fig. **243**.) około prostéj pionowéj *o'o*. W obrocie tym punkt *a'a* lub *b'b*, jako najdaléj od osi obrotu leżący opisze nam równoleżnik największy, zaś punkt $n'n$ najbliżéj téjże osi leżący, równoleżnik najmniejszy, którego rzut poziomy naturalnie będzie stycznym do rzutu poziomego prostéj rodzącéj. Aby zaś otrzymać rodzącą w różnych jéj położeniach podczas obrotu, dzielimy rzut poziomy równoleżnika największego na pewną liczbę części równych np. na 16, i przez punkta podziału prowadzimy styczne do rzutu poziomego równoleżnika najmniejszego, a takowe będą rzutami poziomymi rodzącéj; szukając następnie rzutów pionowych tych punktów, w których każda styczna, czyli rzut poziomy rodzącéj przecina się z rzutem poziomym równoleżnika największego, — przyczém uważać należy, że jeden z tych punktów leżeć będzie na rzucie pionowym równoleżnika przez punkt a', drugi zaś na rzucie pionowym równoleżnika przez punkt b' zakreślonego, — i punkta te łącząc prostą ze sobą, otrzymamy rzuty pionowe różnych położeń rodzącéj. Aby wreszcie otrzymać krzywą południkową, a więc np. krzywą południka głównego, to albo szukamy punktów przecięcia się rodzących poprzednio nakreślonych z płaszczyzną p tegoż południka, albo téż nakreśliwszy kilka równoleżników, szukamy również punktów przecięcia się ich z tąż płaszczyzną, a punkta te na rzucie pionowym połączone ze sobą, jako krzywą żądaną, dadzą nam hyperbolę.

Powierzchnie ostrokręgu i walca kołowego są niczém innem, jak odmianami hyperboloidy o jednéj powłoce. I tak, jeżeli rodząca $a'b', ab$ takiéj hyperboloidy zbliża się coraz więcéj do osi obrotu, wówczas równoleżnik najmniejszy, coraz bardziéj maleje, a nakoniec, gdy rodząca przetnie się z tąż osią, wówczas powierzchnia hyperboloidy zamienia się na ostrokręgową kołową o dwóch powłokach, z wierzchołkiem w punkcie przecięcia się téjże osi z prostą rodzącą. Jeżeli zaś rodząca prosta obraca się około linii rzucającéj pozioméj punktu $n'n$ tak, iż ciągle zbliża się ona do położenia pionowego, wówczas powierzchnia hyperboloidy wydłuża się coraz więcéj w kierunku swéj osi i nareszcie zamienia się na powierzchnią walcową kołową, skoro taż rodząca zajmie położenie pionowe, czyli równoległe do osi obrotu.

Na Fig. **244**. mamy nareszcie przedstawione rzuty powierzchni pierścieniowéj, powstałéj przez obrót koła promienia $c'd'$ około osi pionowéj $a'a$, w jego płaszczyznie leżącéj. Krzywa południka głównego składa się tu z dwóch kół równych kołu rodzącemu. Na płaszczyznie pozioméj p' idącéj przez środek c' koła rodzącego, leży zarówno największy, jak i najmniejszy równoleżnik téj powierzchni.

§. 28.

Rozwijanie powierzchni obrotowych.

Rozwijanie powierzchni obrotowych może być tylko w przybliżeniu wykonaném; ściśle bowiem rzecz biorąc, nie można tych powierzchni bez zerwania ciągłości między ich pojedynczemi częściami składowemi na jednéj płaszczyznie rozpostrzeć. Gdy atoli w praktyce potrzeba takowego rozwijania często zachodzi i, aczkolwiek w przybliżeniu, jednak z dość dalece posuniętą dokładnością uskutecznioném ono być może, dlatego wskażemy tu sposoby ku temu prowadzące. Sposobów tych jest dwa, a mianowicie: — poprowadziwszy najprzód na powierzchni obrotowéj danéj do rozwinięcia pewną, a dostateczną stósownie do żądanéj dokładności, liczbę równoleżników i południków, i podzieliwszy przez to daną powierzchnią na drobne trapezy, następnie albo 1) zestawiamy te trapezy w prawdziwéj ich wielkości na jednéj płaszczyznie, idąc porządkiem wrzecion zamkniętych między południkami, albotéż 2) zestawiamy je obok siebie postępując porządkiem pasów zawartych między równoleżnikami. Zobaczmy tę rzecz na przykładzie.

Zadanie 167. *Rozwinąć na płaszczyznie powierzchnią kuli.*

Daną jest kula promienia $o'z' = oz$ (Fig. **245**.). Oba koła wielkie, będące granicami pionowego i poziomego jéj rzutu, dzielimy na dowolną liczbę części równych np. na 16, i przez wszystkie punkta podziału prowadzimy równoleżniki i południki; skutkiem tego cała powierzchnia kuli podzieloną zostanie na 96 trapezów i prócz tego na 32 trójkątów, mających swe wierzchołki w biegunach kuli. Tak trójkąty jak i trapezy mają jednaką wysokość tj. równą $^1/_{16}$ części koła wielkiego, podstawą zaś każdego z nich jest $^1/_{16}$ odpowiedniego mu równoleżnika, a która na płaszczyznie pozioméj rzutów znajduje się w prawdziwéj swéj wielkości. To mając i wiedząc, na linii AB obok leżącéj odcinamy część $xy = mm$ tj. część równą $^1/_{16}$ równoleżnika największego, a takowa będzie dolną podstawą trapezu a równego trapezowi a' na kuli leżącemu; wysokością jego będzie wyprostowany łuk $o1$ (Część II., §. 1), a górną podstawą będzie $x'y' = nn$ (tj. $^1/_{16}$ równoleżnika przez punkt n idącego), odcięta w równych połowach po obu stronach prostopadłéj, ze środka podstawy dolnéj wyprowadzonéj. Podstawa górna tego trapezu będzie dolną dla trapezu b, równego trapezowi b' na kuli leżącemu, wysokością jego będzie znów wyprostowany łuk $12 = 12'$, a podstawą górną będzie $x_2y_2 = rr$, czyli $^1/_{16}$ część równoleżnika przez r idącego. W ten sam sposób postępując daléj, otrzymamy trzy trapezy a, b, c równe trapezom a', b', c' na kuli leżącym i trójkąt d równy trójkątowi d', — a konstrukcyą tę powtórzywszy jeszcze 15 razy wzdłuż linii AB, otrzymamy rozwiniętą górną połowę powierzchni kuli danéj.

Drugi sposób rozwijania polega, jakeśmy wyżéj powiedzieli, na zestawieniu tych trapezów pasami, tj. na układaniu wszystkich trapezów w jednym i tym samym pasie leżących, obok siebie. Rozwińmy tym ostatnim sposobem dolną połowę powierzchni kuli. Aby sobie tu konstrukcyą ułatwić, uważamy pierwszy pas składający się z trapezów a', a', a'... jako powierzchnią stożka ściętego, którego wierzchołek leży w punkcie s, tj. w punkcie przecięcia się osi kuli z przedłużoną cięciwą łuku $o1$. Pod tém założeniem, z punktu s', gdzieś na boku obranego, zataczamy łuk promieniem $so = s'o'$, i na tymże łuku odcinamy 16 części równych mm, tj. równych $^1/_{16}$ równoleżnika największego; następnie na prostéj $s'o'$ odciąwszy $o'1'$ równe wysokości tych trapezów, czyli wyprostowanemu łukowi $o1$, zataczamy drugi łuk promieniem $s'1'$, i wreszcie punkta podziału na pierwszym łuku łączymy z punktem s', a otrzymamy stąd 16 trapezów a, a, a..., równych trapezom a', a', a'... na kuli w pierwszym pasie leżącym.

W ten sam sposób postępujemy daléj, tj. uważając drugi pas kuli jako powierzchnią ostrokręgu ściętego z wierzchołkiem w punkcie *t*, promieniem $t'1' = t1$ zataczamy łuk, na nim odcinamy 16 części równych *nn*, punkta podziału łączymy z t', a następnie odciąwszy jeszcze $1'2' = o'1'$, zataczamy łuk drugi promieniem $t'2'$, — otrzymamy stąd znów 16 trapezów *b, b, b*... obok siebie, równych trapezom b', b', *b*... na kuli leżącym, itp. Dokładność całéj konstrukcyi rozwinięcia, bądźto pierwszym, bądź drugim sposobem wykonanego, zależy tu naturalnie od podziału kół wielkich (czyli konturowych) na tyle części, iżby łuki stąd powstałe jak najmniejszéj były krzywizny, czyli iżby jak najmniéj od swych cięciw zbaczały.

Zastósowanie rozwinięcia powierzchni kuli ma miejsce przy sztucznych globusach i kartach geograficznych. Przy globusach rozwinięcie to uskutecznianém bywa pierwszym sposobem — i po zadrukowaniu tegoż, — na kulę nalepioném; — przy kartach zaś geograficznych drugim sposobem tj. pasami. Prócz tego bywa ono jeszcze użytku częstego przy konstrukcyi balonów, jakotéż w architekturze przy podziale tak zwanych sklepień kulistych.

§. 29.

Przekroje płaskie powierzchni obrotowych.

Uwzględniając okoliczność, że przy powierzchniach obrotowych równoleżniki i linie południkowe za rodzące tychże powierzchni uważane być mogą, znajdziemy przecięcie jakiéjkolwiek powierzchni obrotowéj płaszczyzną, szukając w dostatecznéj liczbie punktów, w których ta ostatnia przecina się z równoleżnikami lub południkami, i punkta takowe łącząc z sobą krzywą ciągłą w należytym porządku. Zrobiwszy wreszcie kład płaszczyzny przecinającéj na jednę z płaszczyzn rzutów, otrzymamy krzywą przecięcia szukanego w prawdziwym kształcie i wielkości.

Zależnie od płaszczyzny przecinającéj względem osi powierzchni obrotowéj, krzywe przecięcia płaszczyzną jednéj i téj saméj powierzchni mogą być rozmaite, i tak np. z przecięcia ellipsoidy płaszczyzną otrzymać można koło lub ellipsę, z przecięcia paraboloidy koło, ellipsę lub parabolę, a mianowicie tę ostatnią wtedy, gdy płaszczyzna przecinająca jest równoległą do osi obrotu paraboloidy; z przecięcia hyperboloidy o jednéj powłoce otrzymać można koło, ellipsę, daléj parabolę, gdy płaszczyzna przecinająca jest równoległą do rodzącéj prostéj téj powierzchni, lub hyperbolę, gdy w ogóle odległość płaszczyzny przecinającéj od osi obrotu powierzchni mniejszą jest od promienia równoleżnika najmniejszego itp. Między wszystkiemi powierzchniami obrotowemi jedna tylko znajduje się kula, z przecięcia któréj płaszczyzną jakkolwiekbądź względem niéj położoną, zawsze otrzymujemy koło, a mianowicie, albo tak zwane koło wielkie czyli koło promienia równego promieniowi kuli, gdy płaszczyzna przechodzi przez środek kuli, lub téż koło małe, gdy taż płaszczyzna idzie zewnątrz środka kuli.

Zadanie 168. *Znaleść krzywą przecięcia powierzchni obrotowéj płaszczyzną prostopadłą do jednéj z płaszczyzn rzutów.*

Powierzchnią przeciętą niech będzie powierzchnia kuli $A'A$ (Fig. **246.**), zaś $p'p$ płaszczyzną przecinającą. Celem znalezienia wspólnego ich przecięcia prowadzimy płaszczyznę pomocniczą R_1 równoległą do płaszczyzny pozioméj rzutów, a ta przetnie kulę w równoleżniku $a'a$, zaś płaszczyznę daną w prostéj $b'b$; prosta ta przetnie się z równoleżnikiem $a'a$ w dwóch punktach (ich rzuty poziome są *1* i *2*), które należą do krzywéj przecięcia szukanego. W ten sam sposób, tj. prowadząc następnie płaszczyzny R_2, R_3..... wyznaczymy więcéj takich punktów, które połączone z sobą należycie, dadzą nam na rzucie poziomym ellipsę, zaś na pionowym prostą, jako rzuty szukanego przekroju.

W razie gdy rzuty szukanego przekroju są nam niepotrzebne, a tylko prawdziwy jego kształt i wielkość, można otrzymać bezpośrednio takowe w sposób następujący: płaszczyznę przecinającą np. S prostopadłą do płaszczyzny pozioméj rzutów, obracamy około linii rzucającéj pionowéj punktu $d'd$, — na téj płaszczyznie obranego — dopóty, dopóki ona nie przyjdzie w położenie S'' równoległe do płaszczyzny pionowéj rzutów; w tym obrocie punkt e, który jest środkiem koła szukanego przecięcia, opisze łuk ee'', a jego rzut pionowy przyjdzie do e'''. Z punktu tego e''' wreszcie promieniem $e'''x''' = ex$ zakreśliwszy koło, takowe jest prawdziwą wielkością przecięcia szukanego. Rzecz ta jest łatwą do zrozumienia zważywszy, że gdy przekrój kuli płaszczyzną jest zawsze kołem, zatém punkt $e'e$, gdzie prostopadła $Ae, A'e'$ ze środka kuli wyprowadzona trafia płaszczyznę przecinającą, jest środkiem koła szukanego, a następnie, — że wszystkie średnice tegoż koła w rzutach swoich pokazują się skrócone z wyjątkiem średnicy $z'x', zx$, któréj rzut poziomy z powodu równoległości rzutu pionowego do osi (a więc z powodu równoległości saméjże średnicy do płaszczyzny pionowéj rzutów), jest prawdziwą wielkością średnicy koła szukanego. Z tych samych zupełnie powodów i przy poprzedniéj płaszczyznie przecinającéj tj. $p'p$, jest punkt $c'c$ środkiem koła przecięcia, zaś średnicą jego w prawdziwéj wielkości jest $v'w'$.

Z otrzymanego w ten sposób przecięcia w prawdziwéj wielkości łatwo w razie potrzeby otrzymać jego rzut pionowy; rzut bowiem pionowy np. punktu m''', obranego na kole przecięcia, będzie leżał na przecięciu równoległéj $m'''m'$ do osi rzutów z prostopadłą do téjże osi z m wyprowadzoną, — i podobnież rzuty pionowe innych punktów.

Zadanie 169. *Znaleść przekrój powierzchni obrotowéj płaszczyzną ukośnie względem obu płaszczyzn rzutów stojącą.*

Używamy w tym razie również płaszczyzn pomocniczych prostopadłych do osi powierzchni obrotowéj. Każda z takich płaszczyzn przetnie powierzchnią daną w kole, zaś płaszczyznę daną w prostéj, których punkta wzajemnego się z sobą spotkania są punktami do szukanego przecięcia należącymi. Jako przykład weźmy powierzchnią pierścieniową $A'A$ (Fig. **247**.) i płaszczyznę ją przecinającą $p'p$. Przesunąwszy najprzód płaszczyznę r_1 prostopadłą do osi powierzchni, a więc równoległą do płaszczyzny poziomej rzutów, ta przetnie też powierzchnią w dwóch kołach $c'c$ i $c'c_1$, zaś płaszczyznę $p'p$ przetnie w prostéj $a'a$, która to prosta z poprzednio otrzymanemi dwoma kołami przetnie się znów w czterech punktach tj. $11'$, $22'$, $33'$ i $44'$ do szukanego przecięcia należących. Poprowadziwszy następnie drugą płaszczyznę np. r_4, otrzymamy 4 inne punkta, — a w ten sposób postępując daléj, dopóki nie dostaniemy dostatecznéj liczby tychże punktów, łączymy wreszcie takowe należycie ze sobą, skąd otrzymamy krzywą szukanego przecięcia w rzutach; aby mieć zaś prawdziwy kształt i wielkość téjże, robimy kład płaszczyzny $p'p$ na jednę z płaszczyzn rzutów.

Zamiast płaszczyzn pomocniczych prostopadłych do osi obrotu, używać można także płaszczyzn południkowych, i to nawet z korzyścią wtedy, gdy proste i koła, z użycia pierwszych płaszczyzn otrzymane, przecinają się pod bardzo ostrymi kątami, skutkiem czego położenie punktów przecięcia nie jest dokładnie wyznaczoném. Przypadek taki jest u nas w pobliżu punktów $55'$ i $66'$. Prowadząc zatém płaszczyzny południkowe w tych stronach krzywéj szukanéj, te przetną powierzchnią daną w liniach południkowych, których konstrukcyi uniknąć można przez obrót samychże płaszczyzn południkowych, dopóki nie przyjdą w położenie płaszczyzny południka głównego. I tak np. używszy płaszczyzny południkowéj $r_2r'_2$, to skutkiem wspomnionego obrotu, krzywa przecięcia powierzchni tą płaszczyzną padnie na południk główny, zaś prosta przecięcia się z płaszczyzną daną $p'p$ będzie a''; prosta ta przetnie się z południkiem głównym w punktach ss' i zz', po wróceniu których nazad w pierwotne położenie płaszczyzny $r_2r'_2$, otrzymamy punkta $55'$ i $66'$ do szukanego przecięcia należące. W podobnyż sposób otrzymane zostały na figurze punkta $77'$ i $88'$, w płaszczyznie południkowéj $r_3r'_3$ leżące.

Jak małe zastanowienie się nad własnościami téj lub owéj powierzchni prowadzi nas często do obrania innéj a krótszéj drogi, aniżeli jest droga ogólną regułą wskazana, zobaczmy to szukając przecięcia hyperboloidy o jednéj powłoce $A'A$ (Fig. **248**.) z płaszczyzną ukośną $p'p$. Tu bowiem zamiast szukać takowego albo za pomocą płaszczyzn pomocniczych prostopadłych do osi powierzchni, albo za pomocą płaszczyzn południkowych, najkorzystniejszą rzeczą będzie użyć płaszczyzn przecinających też powierzchnią w jéj rodzących prostych. I tak przesunąwszy przez rodzącą $vo, v'o'$ płaszczyznę r_1, ta przetnie hyperboloidę w téjże rodzącéj, zaś płaszczyznę $p'p$ w prostéj $b'b$, — a punkt $m'm$ wzajemnego przecięcia się obu tych prostych jest punktem, do szukanego przecięcia należącym. W ten sam sposób postępując daléj, czyli co na jedno wychodzi, szukając przecięcia się płaszczyzny danéj *p'p* z rodzącemi prostemi hyperboloidy, otrzymamy więcéj punktów, z których należytego połączenia ze sobą, dostaniemy następnie krzywą szukanego przecięcia.

Zadanie 170. *Znaleść punkta przecięcia się powierzchni obrotowéj z prostą daną.*

Postępując wedle ogólnego sposobu już nam dawno znanego, przesuwamy przez prostą daną płaszczyznę i to najkorzystniéj jednę z płaszczyzn rzucających, następnie zaś szukamy krzywéj przecięcia się powierzchni danéj z tąż płaszczyzną, a punkt lub punkta przecięcia się znów téj krzywéj z prostą daną będą punktami szukanymi.

Jako przykład świadczący tylko o wielkiéj rozmaitości dróg, jakiemi postępować i w jakich wybierać można, aby tylko prędzéj lub dokładniéj trafić do celu, poszukajmy punktów przecięcia się kuli $A'A$ (Fig. **249.**) z prostą $m'n', mn$. Otóż przesuńmy najprzód przez tę prostą płaszczyznę rzucającą P, a ta przetnie jak wiemy kulę w kole, którego rzutem poziomym jest prosta bc. Poprowadźmy następnie płaszczyznę boczną R równoległą do P, to na takowéj otrzymamy to koło w prawdziwéj jego wielkości, — promieniem jego będzie $\frac{1}{2}bc$, zaś środek jego o'' leżeć będzie na prostopadłéj oo'' do r, i to w odległości $f''o''=f'o'$ od tegoż r. Poszukajmy wreszcie rzutu prostéj danéj na tęż płaszczyznę boczną R. Ale takowy otrzymamy, znalazłszy rzuty dwóch punktów na niéj obranych; i tak rzutem bocznym jéj śladu poziomego s będzie punkt s'', zaś rzutem bocznym punktu $a'a$, gdziekolwiek obranego, będzie punkt a'', który połączony z s'' da nam prostą $s''a''$, jako rzut boczny prostéj danéj. To mając, łatwo znajdziemy punkta szukane w zadaniu; prosta bowiem $s''a''$ przecina się z rzutem bocznym koła przecięcia w punktach c'' i d'', dla których odwrotną drogą poszukawszy $c'c$ i $d'd$, te ostatnie będą punktami przecięcia się kuli z prostą $m'n', mn$.

Zadanie 171. *Znaleść punkta przecięcia się kuli z prostą przechodzącą przez jéj środek.*

Daną jest kula (Fig. **250**.) i prosta $m'n', mn$ przez jéj środek $o'o$ idąca. Przez prostą daną przesunąwszy płaszczyznę rzucającą P, ta będzie zarazem płaszczyzną południkową i przetnie kulę w kole wielkiém. Aby koło to nakreślić, obróćmy płaszczyznę P około osi kuli, dopóki nie przyjdzie w położenie równoległe do płaszczyzny pionowéj rzutów, a skutkiem tego rzut pionowy południka głównego będzie także rzutem pionowym koła przecięcia się płaszczyzny P z kulą. Co się tyczy prostéj $m'n', mn$, ta naturalnie skutkiem obrotu płaszczyzny P także zmieni swoje miejsce, a mianowicie, ponieważ punkt $s's$ na niéj obrany po obrocie płaszczyzny P przyjdzie do $s''s'''$, zaś punkt $o'o$ téjże prostéj w czasie obrotu zostaje ciągle na swojém miejscu, zatém prosta dana $m'n', mn$ po obrocie przyjdzie w położenie $os'', o's'''$. Z przecięcia się prostéj $o's'''$ z rzutem pionowym południka głównego otrzymamy punkta g''' i h''', z których — po wróceniu P a tém samém i prostéj $os'', o's'''$ w ich pierwotne położenie tj. w położenie $m'n', mn$, — otrzymamy punkta g' i h', a wreszcie g i h jako rzuty szukanych punktów przecięcia.

Zadanie 172. Przez punkt dany na kuli przesunąć płaszczyznę, któraby przecinała też kulę w kole promienia danego.

Zadanie 173. Hyperboloidę o jednéj lub dwóch powłokach przeciąć płaszczyzną w hyperboli, któréjby wierzchołki leżały od siebie w odległości danéj.

Zadanie 174. Powierzchnią pierścieniową przeciąć linią prostą w cztérech punktach. itp.

§. 30.

Konstrukcya linij stycznych do powierzchni obrotowych.

Zadanie 175. *Przez punkt dany na powierzchni obrotowéj poprowadzić do téjże linią styczną.*

Przez punkt dany prowadzimy płaszczyznę przecinającą powierzchnią daną (a więc najkorzystniéj płaszczyznę rzucającą poziomą lub pionową), i do krzywéj przecięcia stąd otrzymanéj prowadzimy linie styczne, a te będą rzutami stycznéj żądanéj. Albo:

Przez punkt dany kreślimy równoleżnik powierzchni danéj i do rzutów tegoż prowadzimy w punkcie danym linie styczne, a te będą rzutami stycznéj i do saméjże powierzchni. Albo wreszcie:

Przez punkt dany i oś obrotu powierzchni danéj przesuwamy płaszczyznę (czyli płaszczyznę południkową), a ta przetnie powierzchnią w linii południkowéj, do któréj rzutów poprowadziwszy linie styczne, te będą rzutami stycznéj do powierzchni. Jak zaś można, z wielką korzyścią dla dokładności w wyznaczeniu linii stycznéj, uniknąć tu kreślenia linii południkowéj, zobaczymy to przy jedném z zadań następujących (Zob. Zad. 180.).

Zadanie 176. *Przez punkt dany zewnątrz powierzchni obrotowéj poprowadzić do téjże linią styczną.*

Przez punkt dany przesuwamy płaszczyznę, którąby przecinała powierzchnią, a więc najkrócéj jednę z płaszczyzn rzucających, i do rzutów krzywéj przecięcia stąd otrzymanéj prowadzimy linie styczne, które będą rzutami jednéj ze stycznych, jakie przez punkt dany do powierzchni poprowadzić można.

W sposób dopiero opisany poprowadziwszy do powierzchni kilka lub kilkanaście stycznych, i punkta ich styczności na powierzchni danéj wyznaczywszy, z połączenia takowych otrzymamy na téjże powierzchni krzywą, zwaną krzywą styczności, którą za kierownicę ostrokręgu stycznego do powierzchni uważać można, a którego rodzącemi są właśnie wszystkie zwyż wspomniane styczne, zaś wierzchołkiem punkt dany. Kształt téj krzywéj styczności zależy od położenia punktu danego i kształtu powierzchni danéj; jeżeli powierzchnią tą jest np. kula, wówczas krzywa styczności jest kołem.

Zadanie 177. Nakreślić ostrokrąg styczny do powierzchni ellipsoidy, paraboloidy lub hyperboloidy obrotowéj, mając dany wierzchołek tegoż ostrokręgu.

Zadanie 178. *Równolegle do prostéj danéj poprowadzić linią styczną do powierzchni obrotowéj.*

Przesunąwszy równolegle do prostéj danéj płaszczyznę przecinającą powierzchnię daną, otrzymamy stąd krzywą na téj powierzchni leżącą, do któréj styczna (lub styczne) równolegle do prostéj danéj poprowadzona, będzie styczną żądaną do powierzchni. A więc jeżeli powierzchnią obrotową daną jest $A'A$ (Fig. **251**.), zaś prostą daną prosta $m'n', mn$, przesuwamy gdziebądź płaszczyznę P równolegle do téj prostéj, byle przecinającą powierzchnią daną, a otrzymamy stąd krzywą przecięcia $1'2'3'4'$, 1234; do krzywéj téj poprowadziwszy wreszcie styczne $a'x'$, ax i $b'y'$, by, te będą stycznemi żądanemi.

Jeżeli miast gdziekolwiek, przesuniemy przez oś powierzchni płaszczyznę równoległą do prostéj danéj, np. płaszczyznę R, wówczas oszczędzimy sobie konstruowania krzywéj przecięcia, czyli krzywéj południkowéj; obróciwszy bowiem płaszczyznę tę około osi obrotu powierzchni, dopóki nie stanie równolegle do płaszczyzny pionowéj rzutów, krzywą przecięcia powierzchni będzie jéj południk główny, — poczém jeszcze prostą daną $m'n'$, mn również obróciwszy tak, iżby zajęła położenie $m'n'''$, mn'' równoległe do płaszczyzny pionowéj rzutów, równolegle do tego nowego jéj położenia prowadzimy styczne $c'''d'$, $c''d$ i $e'''f'$, $e''f$ do krzywéj południka głównego. Otrzymamy stąd punkta styczności $c'''c''$ i $e'''e''$, z pomocą których, wróciwszy nazad płaszczyznę R w jéj pierwotne położenie, otrzymamy punkta $c'c$ i $e'e$, które znów połączone z punktami $d'd$ i $f'f$, dadzą nam proste $c'd'$, cd i $e'f'$, ef jako styczne żądane powierzchni.

Stycznych żądanych tu w zadaniu może być bardzo wiele. Wszystkie razem uważane, utworzą powierzchnię walcową styczną do powierzchni obrotowéj danéj, a mianowicie styczną do téjże w krzywéj łączącéj punkta styczności poszczególnych stycznych, zwanéj krzywą styczności.

Zadanie 179. Nakreślić walec styczny do powierzchni kuli, ellipsoidy, paraboloidy lub hyperboloidy obrotowéj, mając dany kierunek rodzącéj jego.

§. 31.

Konstrukcya płaszczyzn stycznych, linij i płaszczyzn normalnych do powierzchni obrotowych.

Płaszczyzny styczne do powierzchni obrotowych dotykać się mogą takowych w jednym lub kilku naraz punktach, a to zależnie od kształtu rodzącéj południkowéj; w tym ostatnim atoli razie, wszystkie punkta styczności nie znajdują się ani w tak ciągłym między sobą związku, ani téż w takiej liczbie, jak to miało miejsce przy powierzchniach rozwijalnych, lecz leżą one pojedynczo na różnych miejscach powierzchni, i liczba ich jest ograniczoną. Jeżeli powierzchnia jest wypukłą, jak np. kula, ellipsoida, wówczas jest tylko jeden punkt styczności. Prócz tego płaszczyzna styczna podobnie jak przy powierzchniach wichrowatych, może być tutaj zarazem i sieczną powierzchni, a nawet może ona przecinać powierzchnią w krzywéj idącej przez punkt styczności, jak to ma miejsce przy płaszczyznie stycznéj do wewnętrznéj krzywizny powierzchni pierścieniowéj. Co się wreszcie tyczé saméj konstrukcyi przy prowadzeniu płaszczyzn stycznych do powierzchni obrotowéj, to takowa polega na tych samych zasadach, jakiemi kierowaliśmy się przy powierzchniach prostokreślnych.

Zadanie 180. *Przez punkt dany na powierzchni obrotowéj poprowadzić do niéj płaszczyznę styczną.*

Ponieważ na powierzchni obrotowéj równoleżniki i południki uważać można za jéj rodzące, zatem przez punkt dany poprowadziwszy dwie płaszczyzny, jednę prostopadłą do osi obrotu powierzchni, drugą zaś przez samąże oś, te przetną powierzchnią obrotową w krzywych rodzących, do których proste styczne przez punkt dany poprowadzone, wyznaczą nam położenie płaszczyzny stycznéj żądanéj. Jako przykład weźmy ellipsoidę (Fig. **252**.), na któréj jest dany punkt $a'a$. Przez ten punkt kreślimy najprzód równoleżnik (którego rzutem poziomym jest koło promienia oa), a do niego styczną; rzutem poziomym téj stycznéj będzie prosta at, pionowym zaś będzie $a't'$, czyli rzut pionowy samegoż równoleżnika. Następnie przez tenże sam punkt dany prowadzimy płaszczyznę południkową, — to rzutem poziomym linii południkowéj stąd otrzymanéj a przez ten punkt idącéj, będzie prosta mn, pionowy zaś należałoby dopiero wynaleść sposobem wiadomym i wreszcie potem poprowadzić rzuty drugiéj stycznéj. Aby atoli uniknąć szukania rzutu pionowego tegoż południka, wyobraźmy sobie płaszczyznę jego obróconą około osi powierzchni, dopóki nie przyjdzie w położenie południka głównego, a skutkiem tego obrotu punkt dany przyjdzie w położenie $a''a'''$, zaś linią południkową dla niego będzie teraz krzywa południka głównego. Do téj krzywéj poprowadźmy styczną $s'k''', sk''$ przez punkt $a''a'''$, i wróćmy następnie z tą styczną w pierwotne położenie płaszczyzny południkowéj; skutkiem znów tego obrotu ślad poziomy k'' stycznéj zatoczy łuk promieniem ok'' i przyjdzie do k (jego rzut pionowy k' na osi), zaś punkt $s's$ na téjże stycznéj leżący miejsca swego nie zmieni, jako leżący zarazem na osi obrotu. Połączywszy wreszcie s' z k', otrzymamy rzut pionowy stycznéj do południka bez kreślenia samegoż południka, (rzut ten musi przejść przez a'), podczas gdy sk jest jéj rzutem poziomym. Mając w ten sposób wyznaczone rzuty dwóch stycznych tj. $a't', at$ i $s'k', sk$ przez punkt dany idących, przesuwamy przez nie płaszczyznę P, która będzie żądaną.

Zadanie 181. *Do powierzchni kuli przesunąć przez punkt na niéj dany płaszczyznę styczną.*

Daną jest kula $A'A$ (Fig. **253**.), a na niéj punkt $m'm$. Rozwiązanie zadania w tym razie znacznie się upraszcza zważywszy, że podług praw Soldometryi, płaszczyzna styczna do kuli jest prostopadłą do promienia przez punkt styczności idącego. Poprowadziwszy zatém promień $om, o'm'$, a następnie przez punkt dany przesunąwszy płaszczyznę P doń prostopadłą (Część I., Zad. 74), ta będzie styczną żądaną. Z mocy téj własności kuli wynika zarazem, że skoro jéj promień $om, o'm'$ jest prostopadłym do płaszczyzny P, jest on zatem normalną do powierzchni w punkcie $m'm$, a następnie i każda płaszczyzna przez ten promień przesunięta, jest płaszczyzną normalną.

Zadanie 182. *Przez punkt dany zewnątrz powierzchni obrotowéj poprowadzić do niéj płaszczyznę styczną.*

Podobnie jak przy powierzchniach wichrowatych, tak i tu płaszczyzn odpowiadających warunkowi zadania może być bardzo wiele, i każda z nich ma odrębny punkt swéj styczności na powierzchni, każda z nich bowiem może być obróconą około powierzchni tak, iż styczną być nie przestanie i punktu danego nie opuści. Aby zaś którąkolwiek z tych płaszczyzn nakreślić, prowadzimy przez punkt dany zewnątrz linią styczną do powierzchni (Zad. 176.), zaś przez punkt styczności stąd otrzymany prowadzimy drugą linią styczną, a więc co najkrócéj styczną do równoleżnika powierzchni przez tenże punkt idącego, — a płaszczyzna przez te dwie styczne przesunięta będzie żądaną. Punktem styczności téj płaszczyzny będzie naturalnie punkt, w którym styczna przez punkt dany zewnątrz powierzchni poprowadzona, dotyka się powierzchni.

Zadanie 183. *Równolegle do prostéj danéj przesunąć płaszczyznę styczną do powierzchni obrotowéj.*

Podobnie jak w zadaniu poprzedzającém tak i w tém, płaszczyzn stycznych odpowiadających warunkowi zadania może być bardzo wiele. Aby jednę którąkolwiek z nich wyznaczyć, równolegle do prostéj danéj prowadzimy linię styczną do powierzchni (Zad. 178.), zaś przez punkt jéj styczności prostą styczną do równoleżnika przez tenże punkt idącego, a płaszczyzna przez te dwie styczne przesunięta będzie żądaną. A więc np. jeżeli powierzchnią daną jest powierzchnia pierścieniowa (Fig. **254**.), zaś prostą daną, prosta $m'n', mn$, obracamy najprzód prostą tę tak, iżby przyszła w położenie równoległe do płaszczyzny pionowéj rzutów, tj. w położenie $n'm''', nm''$, i równolegle do tak obróconéj prostéj prowadzimy styczną $s'a''', sa''$ do południka głównego powierzchni. Ze styczną tą wróciwszy następnie w położenie równoległe do prostéj $m'n'$, mn, a skutkiem czego zajmie ona położenie $s'a', sa$, otrzymamy jéj punkt styczności $a'a$.

Przez punkt nareszcie $a'a$ poprowadziwszy styczną $p'q'$, pq do powierzchni, a więc styczną do równoleżnika przez tenże punkt idącego, i przez obie proste $s'a', sa$ i $p'q', pq$ jako styczne do powierzchni w punkcie $a'a$ (z których pierwsza jest równoległą do prostéj danéj) przesunąwszy płaszczyznę $r'r$, ta będzie styczną żądaną.

Zadanie 184. *Przez prostą daną przesunąć płaszczyznę styczną do powierzchni obrotowéj.*

Na prostéj danéj obieramy gdziekolwiek dwa punkta, i dla każdego z nich podług Zad. 176. szukamy krzywéj styczności. Jeżeli otrzymane stąd dwie krzywe przecinają się z sobą, wówczas punkta tego przecięcia się, są zarazem punktami styczności płaszczyzn przez prostą daną idących i stycznych do powierzchni, gdyż proste od punktów na prostéj danéj obranych do tych punktów styczności poprowadzone, są stycznemi do powierzchni. Liczba tych płaszczyzn zależną jest od liczby punktów, w których obie krzywe styczności z sobą się przecinają, i każda z nich przez prostą daną i wynaleziony dla niéj punkt styczności jest dokładnie wyznaczoną.

Zadanie 185. *Równolegle do płaszczyzny danéj przesunąć płaszczyznę styczną do powierzchni obrotowéj.*

Ponieważ przy powierzchniach obrotowych każda płaszczyzna styczna jest prostopadłą do płaszczyzny południka przez punkt styczności przechodzącéj, przesunąwszy zatém przez oś powierzchni danéj płaszczyznę prostopadłą do danéj, przetnie ona powierzchnią w krzywéj południkowéj, zaś płaszczyznę daną w prostéj, a równolegle do téj ostatniéj do zwyż rzeczonéj krzywéj południkowéj i to w jéj płaszczyznie poprowadzone styczne, dadzą nam punkta styczności płaszczyzn stycznych szukanych. I tak, jeżeli powierzchnią daną jest np. ellipsoida (Fig. **255**.), do któréj równolegle od płaszczyzny $p'p$ poprowadzić mamy płaszczyznę styczną, wówczas prowadzimy najprzód płaszczyznę południkową $r'r$ prostopadle do płaszczyzny danéj $p'p$ i szukamy prostéj ef', ef, w któréj te dwie płaszczyzny ze sobą się przecinają. Prostą tę następnie obracamy wraz z jéj płaszczyzną $r'r$ około osi powierzchni, dopóki nie przyjdzie w położenie równoległe do płaszczyzny pionowéj rzutów, skutkiem czego zajmie ona położenie $e''f'', e'''f'''$. Że zaś krzywą południkową z przecięcia powierzchni płaszczyzną $r'r$ otrzymaną, skutkiem rzeczonego obrotu płaszczyzny $r'r$, będzie krzywa południka głównego, zatém równolegle do rzutu pionowego $e'''f'''$ poprowadziwszy styczne $g'''h'''$ i $k'''i'''$ do tegoż południka, punkta styczności $g'''g''$ i $k'''k'''$ stąd otrzymane, będą punktami styczności płaszczyzn szukanych, potrzeba tylko wrócić się z nimi w pierwotne położenie płaszczyzny $r'r$, czyli wyznaczyć punkta $g'g$ i $k'k$, przez które płaszczyzny równolegle do płaszczyzny danéj $p'p$ poprowadzone, będą stycznemi żądanemi.

Zadanie 186. *W punkcie danym na jakiéjkolwiek powierzchni obrotowéj poprowadzić do téjże linią normalną.*

Zadanie 187. *Przez punkt dany na jakiéjkolwiek powierzchni obrotowéj przesunąć płaszczyznę normalną do téjże.*

§. 32.

Przecięcia wzajemne powierzchni obrotowych między sobą i z innemi powierzchniami.

Przy przecinaniu się z sobą dwóch powierzchni obrotowych, co do położenia wzajemnego ich osi obrotu mogą zajść następujące cztery przypadki: 1) też osie schodzą się z sobą; 2) są do siebie równoległe; 3) przecinają się z sobą i 4) ani się przecinają ani są do siebie równoległe.

Co do I. Jeżeli osie obrotu obu powierzchni schodzą się z sobą, czyli jeżeli obie powierzchnie mają wspólną oś, wówczas krzywą przecięcia się ich ze sobą jest wspólny obu powierzchniom równoleżnik, a mianowicie równoleżnik przechodzący przez punkt, którego rzut pionowy leży na przecięciu się rzutów pionowych południków głównych. Przez punkt ten bowiem przesunąwszy płaszczyznę prostopadłą do wspólnéj osi obrotu, ta przetnie obie powierzchnie w równoleżnikach czyli w kołach, które mając wspólny środek na osi obrotu, i prócz tego jeden punkt wspólny na swym obwodzie, schodzić się z sobą muszą w całéj swéj długości. Naturalną jest rzeczą, że dwie powierzchnie w tym przypadku przecinać się z sobą mogą nietylko w jednym, ale w kilku naraz równoleżnikach, a to zależnie od liczby punktów, w których rzuty pionowe ich południków głównych z sobą się przecinają.

Co do 2. Jeżeli osie obrotu przecinających się z sobą powierzchni są do siebie równoległe, wtedy krzywą przecięcia znajduje się łatwo prowadząc szereg płaszczyzn pomocniczych prostopadłych do jednéj a tém samém i do drugiéj osi obrotu; każda bowiem z tych płaszczyzn przetnie jedną i drugą powierzchnią w równoleżniku, punkta zaś, w których dwa równoleżniki na téj saméj płaszczyznie pomocniczéj leżące przecinają się z sobą, są punktami do szukanego przecięcia należącymi.

Co do 3. Jeżeli osie obrotu danych powierzchni przecinają się z sobą, wtedy miasto płaszczyzn pomocniczych przecinających obie powierzchnie, używamy kul pomocniczych, których środki leżą w punkcie przecięcia się obu osi obrotu. Każda z tych kul przetnie jedną i drugą powierzchnią w kole, a punkta, w których tak otrzymane koła przecinają się z sobą, należą do szukanego przecięcia.

Co do 4. Jeżeli wreszcie osie obrotu powierzchni danych ani się przecinają ani są do siebie równoległe, wtedy przecinamy obie powierzchnie płaszczyznami pomocniczemi prostopadłemi do osi obrotu jednéj z nich, szukamy krzywych przecięcia stąd powstałych, a wreszcie punktów, w których te krzywe płaskie z sobą się przecinają. Punkta w ten sposób w dostatecznéj liczbie otrzymane, należeć będą do krzywéj szukanego przecięcia.

Zadanie 188. *Znaleść krzywą przecięcia się dwóch powierzchni obrotowych, których osie obrotu przecinają się wzajem.*

Ustawmy dla łatwiejszéj konstrucyi płaszczyzny rzutów tak, aby jedna z nich była prostopadłą do osi obrotu jednéj powierzchni, druga zaś była równoległą do osi obrotu obu powierzchni, czyli — niech oś obrotu jednéj z powierzchni danych np. paraboloidy $A'A$ (Fig. **256**.) stoi prostopadle do płaszczyzny pozioméj rzutów, drugiéj zaś tj. ellipsoidy B oś $m'n'$, mn niech leży równolegle do płaszczyzny pionowéj rzutów. Skutkiem takiego ustawienia osi, a właściwie mówiąc, płaszczyzny pionowéj rzutów, rzut pionowy ellipsoidy jest zarazem prawdziwą wielkością jéj rodzącéj południkowéj (jako rzut na płaszczyznę równoległą do jéj osi obrotu), bez rzutu zaś poziomego, który naturalnie w tém położeniu powierzchni nie będzie kołem lecz ellipsą, obejść się tutaj możemy. Linie południkowe obu powierzchni są do płaszczyzny pionowej rzutów równoległe i leżą w jednéj płaszczyznie; punkta zatém g' i h' w których one się przecinają, są rzutami pionowymi punktów do szukanego przecięcia należących. Aby otrzymać więcéj takich punktów, z punktu m' (czyli rzutu pionowego punktu, w którym się obie osie obrotu z sobą przecinają) zataczamy dowolnym promieniem łuk $r'k's'l'$, i takowy uważamy za linią południkową kuli pomocniczéj; kula ta (podług tego, cośmy na początku tego §. pod N. 1. powiedzieli) przetnie się z paraboloidą w równoleżniku, którego rzutem pionowym jest prosta $k'l'$ a poziomym koło promienia al, — zaś z ellipsoidą w równoleżniku, którego rzutem pionowym jest prosta $r's'$. Rzuty pionowe tych dwóch równoleżników czyli proste $r's'$ i $k'l'$ przecinają się z sobą w punkcie x', z którego poprowadziwszy prostopadłą do osi aż do przecięcia się z rzutem poziomym równoleżnika paraboloidy, otrzymamy dwa punkta x i x_1, jako rzuty poziome odpowiadające punktowi x', czyli otrzymamy stąd dwa punkta xx' i x_1x', w których się też dwa równoleżniki z sobą w przestrzeni przecinają, i które są punktami do szukanego przecięcia należącymi. W ten sam sposób postępując daléj, a więc z punktu m' zatoczywszy drugie, trzecie itd. koło, i każde z nich uważając za rzut pionowy kuli, z tegoż punktu opisanéj, z pomocą każdéj z tych kul otrzymamy dwa punkta wspólne obu powierzchniom danym, któreto punkta wreszcie połączone z sobą należycie, dadzą nam krzywą szukanego przecięcia.

Zadanie 189. *Znaleść krzywą przecięcia się powierzchni obrotowéj z walcową.*

Jeżeli oś obrotu powierzchni obrotowéj stoi prostopadle do płaszczyzny pozioméj rzutów, zaś walec podstawą swoją wspartym jest na téjże płaszczyznie rzutów, wówczas przeciąwszy obie powierzchnie płaszczyzną prostopadłą do osi obrotu pierwszéj powierzchni, czyli równoległą do płaszczyzny poziométj rzutów, ta przetnie powierzchnią obrotową w równoleżniku, zaś walcową w krzywéj przystającéj do jéj podstawy, — obie zaś te krzywe tak otrzymane przetną się znów z sobą w punktach, które należą do przecięcia szukanego. Jako przykład poszukajmy krzywéj przecięcia się powierzchni kuli $A'A$ (Fig. **257**.) z powierzchnią walca kołowego $B'B$, wspartego swą podstawą na płaszczyznie poziométj rzutów, a którego osią jest prosta $a'b', ab$. W tym celu przesunąwszy płaszczyznę p_1, otrzymamy stąd na kuli równoleżnik promienia $c'd', cd$, na walcu zaś koło przystające do jego podstawy, środkiem tego koła będzie punkt $m'm$, którego rzut pionowy leży na przecięciu się śladu p_1 z prostą $a'b'$, tj. z rzutem pionowym osi walca, zaś poziomy leży na prostopadłéj z m' do osi rzutów i na prostéj ab. Rzuty poziome tych kół na obu powierzchniach otrzymanych, przecinają się z sobą w punktach 1 i 2, dla których znalazłszy odpowiednie im rzuty pionowe, otrzymamy punkta $1'1$ i $2'2$ do szukanego przecięcia obu powierzchni danych należące. W ten sam sposób, tj. prowadząc więcéj płaszczyzn pomocniczych, jak $p_2, p_3, p_4 \ldots$, otrzymamy także więcéj takich punktów, które wreszcie z sobą w należytym porządku połączone, dadzą nam rzuty szukanego przecięcia obu powierzchni. Przecięcie to składa się z dwóch krzywych, tj. z krzywéj wejścia i wyjścia, a z których tylko te części są widoczne, które leżą współcześnie na widocznych połowach obu powierzchni.

Gdyby walec podstawą swoją nie był wsparty na płaszczyznie pozioméj rzutów, wtedy poszukawszy najprzód jego śladu poziomego sposobem wiadomym, postępujemy następnie jak poprzednio.

Zadanie 190. *Znaleść krzywą przecięcia się powierzchni obrotowéj z ostrokręgową.*

Jeżeli oś powierzchni obrotowéj stoi prostopadle do płaszczyzny poziomej rzutów, zaś ostrokrąg wspartym jest na téjże płaszczyznie rzutów, wówczas używamy płaszczyzn pomocniczych prostopadłych do osi obrotu pierwszéj powierzchni, czyli równoległych do płaszczyzny poziomej rzutów; z przecięcia bowiem obu powierzchni każdą z tych płaszczyzn otrzymamy na powierzchni obrotowéj równoleżnik, zaś na ostrokręgowéj krzywą podobną do jego podstawy, która z powyżéj rzeczonym równoleżnikiem przetnie się w jednym lub więcéj punktach, do szukanego przecięcia obu powierzchni należących. Jeżeli ostrokrąg nie wspiera się podstawą swoją na płaszczyznie poziomej rzutów, wtedy znów szukamy najpierw jego śladu poziomego, a następnie postępujemy, jak powyżéj wskazano.

W niektórych razach używa sie także z wielką korzyścią płaszczyzn południkowych powierzchni obrotowéj jako płaszczyzn pomocniczych, a mianowicie wtedy, gdy wierzchołek ostrokręgu leży na osi obrotu powierzchni obrotowéj, — w tym bowiem razie liniami przecięcia ostrokręgu każdą z tych płaszczyzn, będą linie proste. Jako przykład tego, poszukajmy przecięcia kuli $A'A$ (Fig. **258**.) z ostrokręgiem $B'B$, którego wierzchołek leży w środku kuli. Otóż uważmy najprzód, że płaszczyzna południka głównego kuli, przecina ostrokrąg w dwóch prostych SE i SG; rzuty pionowe tych prostych tj. $s'e'$ i $s'g'$ z rzutem pionowym południka głównego kuli przecinają się w punktach $1'$ i $2'$, dla których znalazłszy odpowiednie im rzuty poziome, otrzymamy dwa punkta do przecięcia obu powierzchni danych należące. Aby otrzymać więcéj tych punktów, prowadzimy na ostrokręgu gdziekolwiek rodzącą np. *s'k', sk* i przez nią przesuwamy płaszczyznę południkową, a więc prostopadłą do płaszczyzny poziomej rzutów. Płaszczyznę tę następnie obracamy około osi *SO* tj. koło osi kuli, dopóki nie przyjdzie w położenie równoległe do płaszczyzny pionowéj rzutów, a skutkiem tego obrotu krzywa przecięcia kuli tą płaszczyzną zejdzie się z jéj południkiem głównym, zaś prosta przecięcia ostrokręgu tj. *s'k', sk* przyjdzie w położenie *s'l', sl*, i przetnie się z południkiem głównym w punkcie *m'm*. Teraz wracając nazad z płaszczyzną południkową w jéj pierwotne położenie, punkt *m* zatoczy łuk *m3* i przyjdzie do *3*, zaś jego rzut pionowy do *3'*, tak, iż punkt *33'* jest znów punktem do szukanego przecięcia obu powierzchni należącym. W ten sam sposób postępujemy i daléj, tj. przez rodzące ostrokręgu dowolnie obierane, przesuwamy płaszczyzny południkowe, i z temi postępujemy sposobem wyżéj opisanym, skąd otrzymamy szereg punktów, które połączone z sobą należycie na obu rzutach, dadzą nam rzuty szukanego przecięcia.

Zadanie 191. *Znaleść krzywą przecięcia się powierzchni obrotowéj z wichrowatą.*

Obie powierzchnie dane przeciąwszy płaszczyzną równoległą do płaszczyzny pozioméj rzutów, otrzymamy stąd na powierzchni obrotowéj koło czyli równoleżnik, zaś na wichrowatéj linią krzywą; ta ostatnia z równoleżnikiem przetnie się w jednym lub kilku punktach, które należą do szukanego przecięcia. Aby więcéj takich punktów otrzymać, postępujemy daléj w tenże sam sposób.

Zadanie 192. *Znaleść punkta przecięcia się powierzchni obrotowéj z jakąkolwiek krzywą.*

Krzywą daną biorąc za kierownicę walca rzucającego czyli prostopadłego do jednéj z płaszczyzn rzutów, szukamy sposobem znanym krzywéj przecięcia się tego walca z powierzchnią obrotową daną, a punkta, w których krzywa tak otrzymana przecina się z krzywą daną, są punktami szukanymi.

Zadanie 193. Znaleść krzywą przecięcia się kuli z walcem, którego rodzące są równoległe do płaszczyzny pionowéj rzutów.

Zadanie 194. Znaleść krzywą przecięcia się paraboloidy z walcem, którego rodzące są równoległe do osi rzutów.

ROZDZIAŁ VI.

Powierzchnie owijalne.

§. 33.

Ogólny pogląd na powierzchnie owijalne.

Na zakończenie o powierzchniach krzywych pozostaje nam jeszcze mówić o powierzchniach owijalnych. Niektóre z powierzchni do tego działu należących, aczkolwiek pod innèm mianem, mieliśmy już sposobność poznać przy prowadzeniu płaszczyzn stycznych do powierzchni wichrowatych i obrotowych, a mianowicie pod nazwą ostrokręgów lub walców stycznych do tamtychże powierzchni. Bliższe zaznajomienie się z tą klassą powierzchni pozostawiając następnie szerszemu traktowaniu całego przedmiotu, tu opiszemy takowe tylko w krótkości, celem zyskania ogólnego na nie poglądu.

Powierzchnia owijalna powstaje przez ruch jakiéjkolwiek innéj powierzchni według pewnego a danego prawa. Każde dwa bowiem bezpośrednio po sobie następujące położenia téj powierzchni ruchoméj, przecinając się wzajem z sobą, dadzą nam szereg linij prostych lub krzywych przecięcia, które uważane w jednym a nieprzerwanym z sobą związku i ciągłości, zamkną nam nową powierzchnią, zwaną o w i j a l n ą, o b w i e d n i ą albo p o w ł ó c z y s t ą. Powierzchnia ruchoma, która zarazem kształt swój lub wielkość swoją podług danego prawa zmieniać może, zwie się owiniętą *(die umhüllte Fläche)*, a w każdém jéj położeniu styczną do niéj jest powierzchnia owijalna, i to w linii, która jest przecięciem się tegoż jéj położenia z bezpośrednio po niém następującém. Linia ta zwie się linią cechującą albo charakterystyką *(die Charakteristik)* powierzchni owijalnéj. I tak przypuśćmy, że na płaszczyznie daną mamy krzywą *fghk* i prostą *xy* (Fig. **259**.). Wzdłuż téj ostatniéj porusza się środek kuli zmiennego promienia, a mianowicie prawo zmienności jego jest, że koła przecięcia się kuli ruchoméj z płaszczyzną krzywéj *fghk* i prostéj *xy*, dotykać się mają zawsze téjże krzywéj *fghk*. Punkta *a,b,c,d*..... niech będą środkami poszczególnych położeń kuli, a więc także i środkami odpowiednich kół wielkich, dotkniętych przez krzywą daną w punktach *f, g, h* i *k*. Obróciwszy całą tę figurę około prostéj *xy* jako osi, z obrotu kół otrzymamy kule w odpowiednich im położeniach, krzywa zaś dana *fghk* opisze powierzchnią obrotową. Gdy zaś każde dwa z tych kół, bezpośrednio po sobie leżących, przecinają się z sobą w dwóch punktach, zatém kule przez obrót ich zrodzone przetną się z sobą w kole, którego płaszczyzna do osi obrotu *xy* stoi prostopadle, zaś promieniem jego jest połowa wspólnéj im cięciwy. Dwa koła którekolwiek np. koła, których środkami są punkta *a* i *b*, dotykają się krzywéj danéj w punktach *f* i *g*, i to tém bliżéj siebie leżących, im bliżéj siebie leżą ich środki *a* i *b*; tak samo rzecz się ma również i z punktem *m* (tj. z punktem przecięcia się obu tych kół) odnośnie do punktów styczności *f* i *g*. Jeżeli więc kule około *a* i *b* opisane, a więc i odpowiednie im koła, leżą w odległości nieskończenie małéj, wtedy punkta styczności *f* i *g* także nieskończenie blisko siebie leżą, punkt zaś *m* pada w tym razie na krzywą *fghk*. Wynika stąd, że koło, w którém się dwa bezpośrednio po sobie następujące położenia kuli ruchoméj przecinają, pada w całym swym obwodzie na powierzchnią obrotową zrodzoną obrotem krzywéj *fghk*, a następnie w ten sam sposób tłomacząc, że na nią padają wszystkie przecięcia kul po sobie następujących. W tym przypadku więc, zwyż rzeczona powierzchnia obrotowa jest powierzchnią owijalną wszystkich tych kul do niéj stycznych, a charakterystyką jéj jest koło.

Zależnie od prawa ruchu powierzchni owiniętéj, zmienia się kształt powierzchni owijalnéj; i tak, jeżeli powierzchnią owiniętą jest kula, któréj środek posuwa się wzdłuż prostéj stałéj, kula atoli nie zmienia swojego promienia, wtedy powierzchnia owijalna ma kształt walca prostego kołowégo. Jeżeli zaś kula posuwając się swym środkiem wzdłuż prostéj, zmienia swą wielkość w ten sposób, że promień jéj maleje w stosunku odległości jéj środka od pewnego a stałego punktu, na prostéj danego lub obranego, wtedy znów powierzchnia owijalna stąd powstała ma kształt stożka prostego. Jeżeli znów kula nie zmieniając swego promienia porusza się tak, iż środek jéj przebiega po obwodzie koła danego, powierzchnia owijalna przybiera wtedy kształt pierścieniowéj. W ten sam sposób rzecz uważając, można jak widzimy, każdą powierzchnię obrotową lub rozwijalną wliczyć do klassy powierzchni owijalnych, biorąc powierzchnią kuli za ruchomą czyli owiniętą. Podobnie jak kulę, możemy także jakąkolwiek inną powierzchnią uważać za ruchomą czyli owiniętą, a otrzymamy odpowiednią prawu jéj ruchu powierzchnią owijalną. I tak np., jeżeli ostrokrąg nie zmieniając kształtu swego i wielkości, suwa się wierzchołkiem wzdłuż swojéj osi, otrzymamy stąd walec jako powierzchnią owijalną; jeżeli walec, również niezmiennego kształtu, porusza się tak, że oś jego suwa się równolegle do siebie saméj wzdłuż prostéj danéj, otrzymamy stąd płaszczyznę itp.

Powierzchnią owiniętą może być także płaszczyzna, a wtedy charakterystyką powierzchni owijalnéj, przez jéj ruch powstałéj, jest linia prosta. Z trzech po sobie bezpośrednio następujących położeń téj płaszczyzny ruchoméj, otrzymujemy w tym razie dwa po sobie następujące położenia linii cechującéj, które jako leżące obie na środkowéj płaszczyznie, muszą być albo do siebie równoległe, albo się téż z sobą przecinać. W pierwszym razie powierzchnią owijalną będzie powierzchnia walcowa, w drugim zaś mogą znów być dwa przypadki, a mianowicie, — trzecia najbliżéj położona linia cechująca albo przechodzi przez punkt przecięcia się dwóch bezpośrednio przed nią idących, alboli téż nie. W pierwszym z tych przypadków powierzchnią owijalną będzie powierzchnia stożkowa, w drugim zaś, z trzech położeń linii cechującéj twórzy średnia z każdą ze skrajnych odrębne części dwóch różnych powierzchni stożkowych, stycznych ze sobą w témże średniém położeniu linii cechującéj.

Z tego, co się dotąd o sposobach powstawania różnych powierzchni owijalnych powiedziało, łatwo zrozumieć, że można je uważać jako zrodzone według danego prawa przez ruch linii cechującéj, która tém samém staje się linią rodzącą. Jak ten zaś sposób pojmowania rzeczy wpływa wielce na uproszczenie konstrukcyi graficznego przedstawienia tych powierzchni, zobaczymy to w następstwie na kilku powierzchniach. I tak, między powierzchniami owijalnemi powstałemi przez ruch kuli, czyli, co na jedno wychodzi odpowiednio do tego, cośmy właśnie powiedzieli, przez ruch koła, jako linii cechującéj, na szczególną uwagę zasługują następujące, nieznane nam zupełnie dotąd, a mające w przemyśle zwłaszcza w architekturze swoje zastósowanie.

Powierzchnia świdrowata tępa. Powstaje ona, gdy koło stałego promienia ślizga się swym środkiem po helissie czyli po linii szrubowéj, opisanéj na walcu kołowym, i to tak, że płaszczyzna tego koła jest zawsze prostopadłą do osi walca. Aby tę powierzchnią nakreślić, najkorzystniéj jest ustawić oś helissy prostopadle np. do płaszczyzny pozioméj rzutów, w tym bowiem razie na mocy zwyż rzeczonego prawa ruchu dla koła rodzącego, rzuty poziome tych kół czyli rodzących powierzchnią świdrowatą, będą kołami, pionowe zaś liniami prostemi. I tak, mając daną helissę kołową $ghkl \dots g'h'k'l' \dots$ (Fig. **260**.), koło rodzące $acd, a'c'd'$, którego środek oo' bieży po helissie, podzielmy tę ostatnią w punktach $g'g$, $h'h$, $k'k$, $l'l \dots$ na części równe, następnie z rzutów poziomych tych punktów jako środków zakreślmy koła promienia równego promieniowi koła rodzącego, zaś przez odpowiednie rzuty pionowe tychże punktów poprowadźmy proste równoległe do osi rzutów i równe średnicy koła rodzącego, — a otrzymamy toż koło rodzące w różnych jego położeniach.

Ponieważ w czasie ruchu koła rodzącego, każdy jego punkt opisuje helissę, mając zatém wyznaczone już rzuty tegoż koła w różnych położeniach, łatwo nakreślić którąkolwiek z tych heliss, a mianowicie odpowiadającą któremukolwiek punktowi na kole rodzącém obranemu. I tak np., helissa opisana przez punkt *a'a* będzie mieć za rzut poziomy koło promienia *ax,* pionowy zaś znajdziemy, prowadząc z punktów przecięcia się tego koła z rzutami poziomymi koła rodzącego prostopadłe do osi, i to aż do przecięcia się z jego odpowiednimi rzutami pionowymi, a następnie punkta tak znalezione tj. a'_1, a'_2, a'_3, a'_4.... łącząc ze sobą. W ten sam sposób wyznaczone są także na figurze hellissy odpowiadające punktom *c'c* i *d'd* koła rodzącego.

2. *Powierzchnia świdrowata ostra.* Powstaje, gdy koło ślizga się swym środkiem po helissie czyli linii szrubowéj, ale opisanéj na ostrokręgu kołowym prostym, i to tak, że płaszczyzna jego jest zawsze prostopadłą do osi ostrokręgu, promień zaś jego maleje w miarę zbliżania się ku wierzchołkowi ostrokręgu. Aby taką powierzchnią nakreślić, dość uważyć, że każdy punkt koła rodzącego w czasie ruchu jego opisuje helissę ostrokręgową, a następnie, że wszelka płaszczyzna prostopadła do osi ostrokręgu przecina tę powierzchnią w okręgach kół rodzących, skąd wypada, że ustawiwszy oś ostrokręgu prostopadle do płaszczyzny pozioméj rzutów, to rzutami poziomymi koła rodzącego będą koła w prawdziwéj wielkości, zaś pionowymi proste równoległe do osi rzutów. I tak, mając daną helissę $aa_1a_2a_3.....a'a'_1a'_2a'_3.....$ (Fig. **261**.) opisaną na ostrokręgu prostym z podstawą kołową promienia *oa,* daléj mając dane koło rodzące promienia *sm,* a leżące przed rozpoczęciem ruchu na płaszczyznie poziomėj rzutów, i chcąc wyznaczyć w rzutach różne położenia tegoż koła suwającego się swym środkiem *s's* po helissie danéj według prawa zwyż rzeczonego, postępujemy w sposób następujący: koło służące za podstawę ostrokręgu podzielmy na części równe, i przez punkta podziału poprowadźmy rzuty poziome rodzących tegoż ostrokręgu, to takowe podzielą nam najprzód rzut poziomy helissy w punktach $a, a_1, a_2, a_3.....$ na części proporcyonalne, a następnie tak samo podzielą i jéj rzut pionowy po wyznaczeniu poprzedniém rzutu pionowego tychże punktów, tj. punktów $a', a'_1, a'_2....$ Punkta te $a'a,\ a'_1a_1,\ a'_2a_2.....$ biorąc teraz za środki koła rodzącego w czasie jego ruchu, potrzeba jesz-

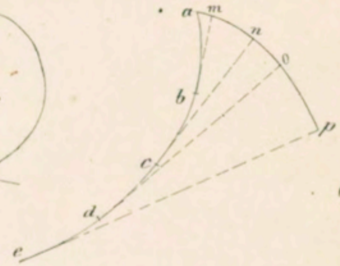
cze wyznaczyć promień koła rodzącego dla każdego z tych środków. Tym celem podzielmy promień jego w pierwotném położeniu, tj. promień *sm*, na tyleż części równych, na ile podzieloną była podstawa kołowa ostrokręgu, to promień ten *sm* zmniejszony o jedną, dwie, trzy itd. takich części, będzie promieniem koła rodzącego w pierwszém, drugiém, trzeciém itd. położeniu licząc od rozpoczęcia ruchu. Tak wyznaczonymi promieniami z punktów a_1, a_2, a_3..... zatoczywszy koła, otrzymamy rzuty poziome kół rodzących, rzuty ich zaś pionowe będą proste równoległe do osi rzutów przez a_1, a_2, a_3..... poprowadzone, a równe średnicom kół im odpowiednich, na rzucie poziomym nakreślonych. Jak zaś wreszcie na powierzchni tak powstałéj nakreślić helissę opisaną przez którybądź punkt koła rodzącego, łatwo wyrozumieć z tego, co się w zadaniu poprzedniém powiedziało.

3. *Powierzchnia pierścieniowa ogólna.* Powstaje, gdy krzywa płaska, stała lub zmienna w swéj wielkości, ale niezmienna w swym kształcie, bieży swym środkiem po innéj krzywéj danéj, i to tak, że jéj płaszczyzna jest zawsze normalną do téj ostatniéj krzywéj. Jeżeli krzywą rodzącą jest koło stałego promienia, a suwa się ono swym środkiem również po kole, powstaje wtedy powierzchnia pierścieniowa poznana już przy powierzchniach obrotowych.

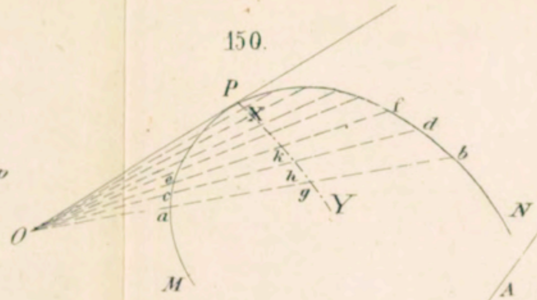
KONIEC CZĘŚCI DRUGIÉJ.

148.

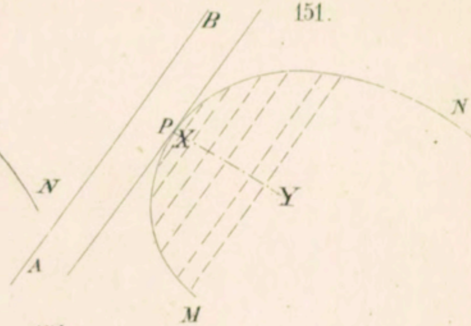
149.



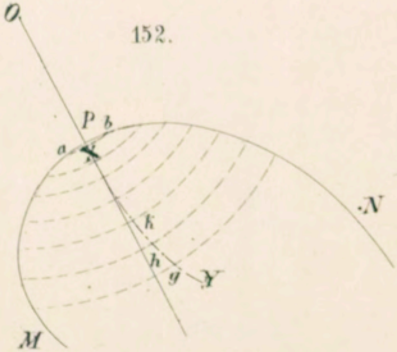
150.



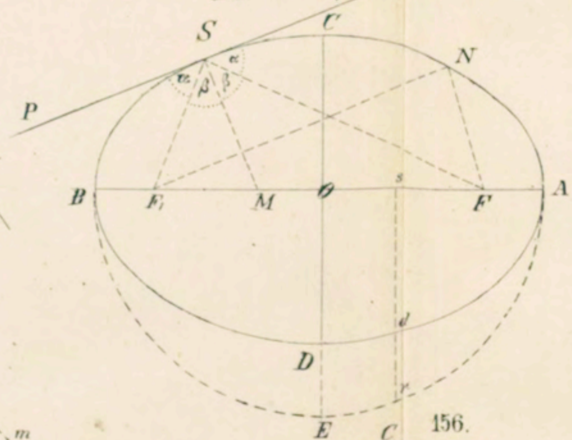
151.



152.

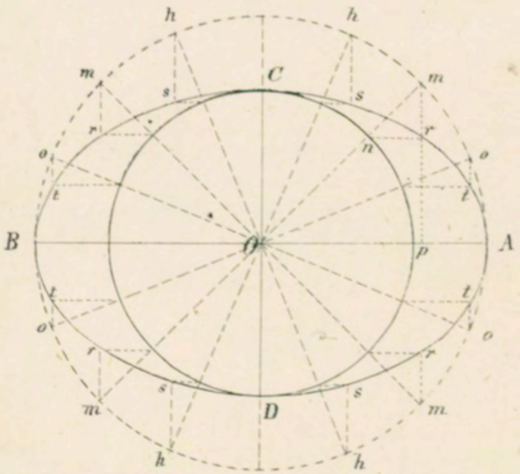


153.

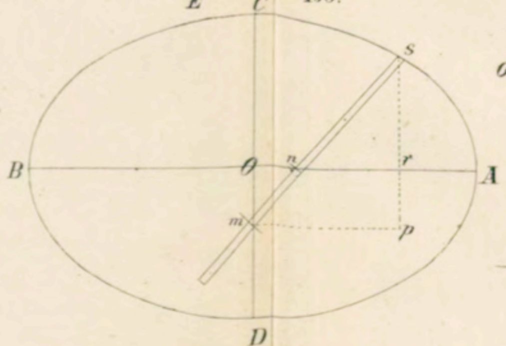


154.

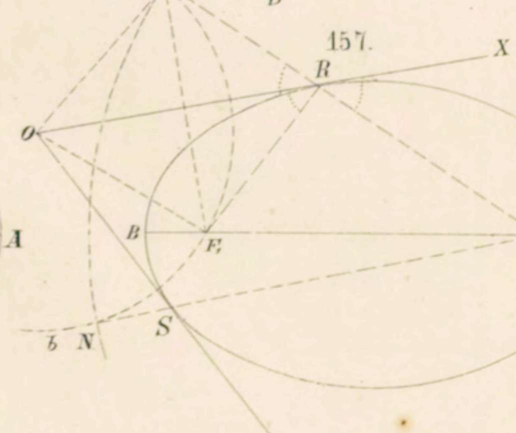
155.



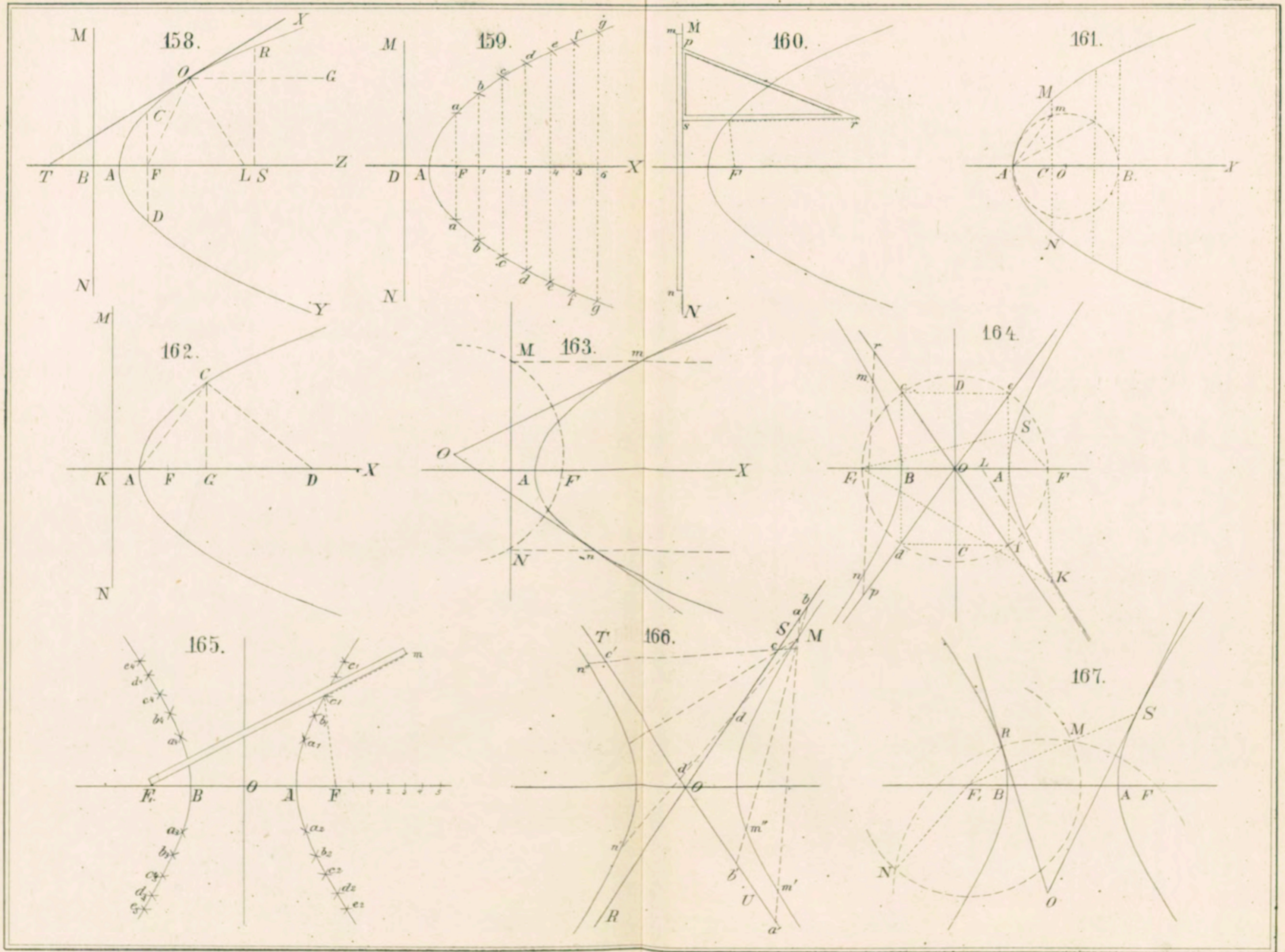
156.



157.

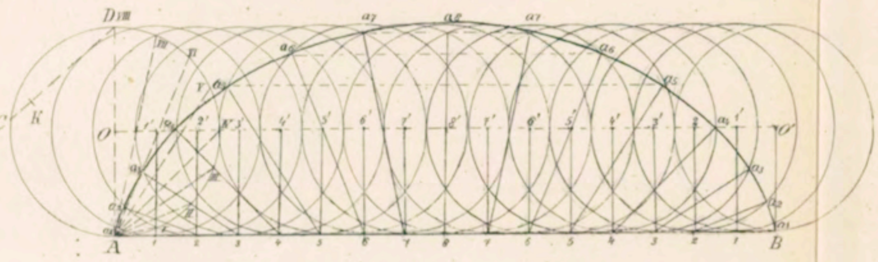


Lit. A. Pruszyński w Krakowie.

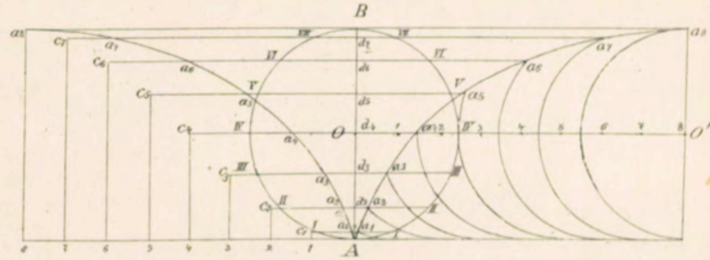


Lit. A. Pruszyński w Krakowie.

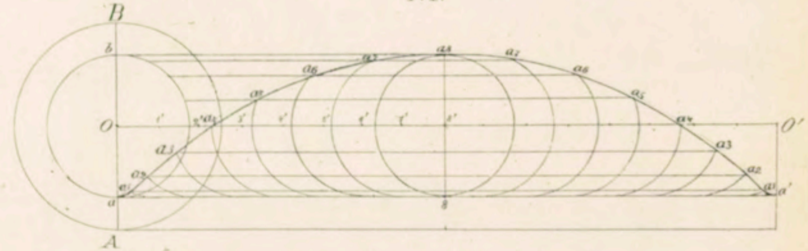
168.



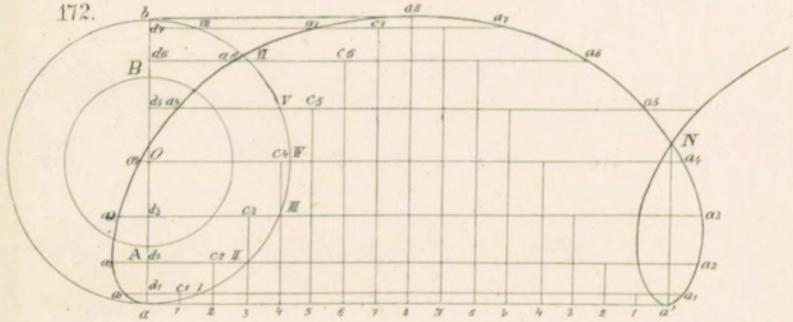
169. 170.



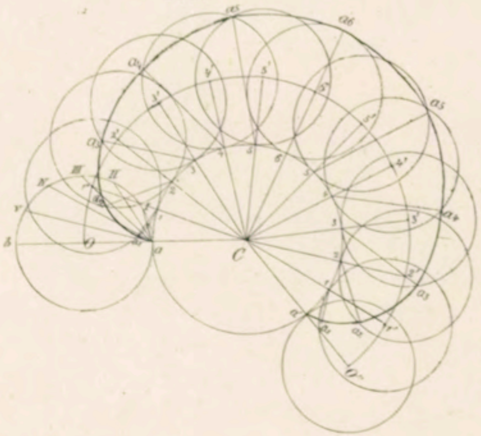
171.



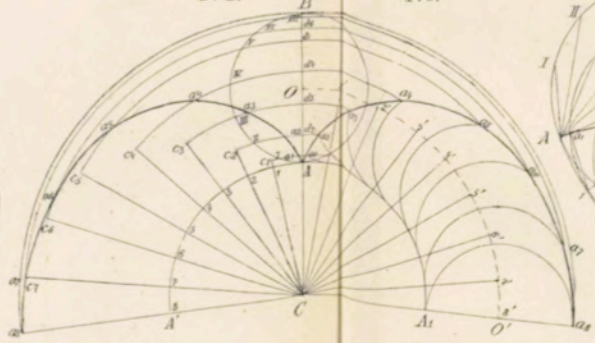
172.



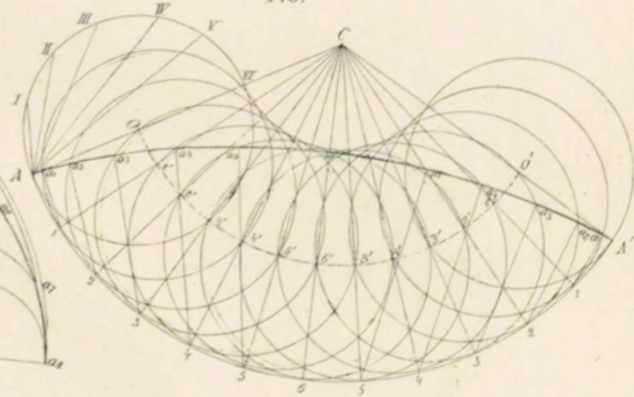
173.



174. 175.

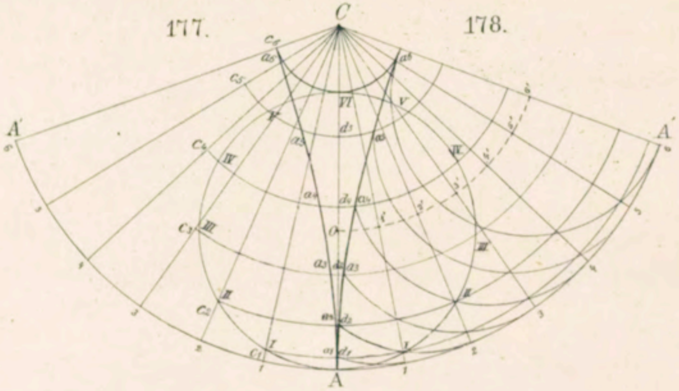


176.

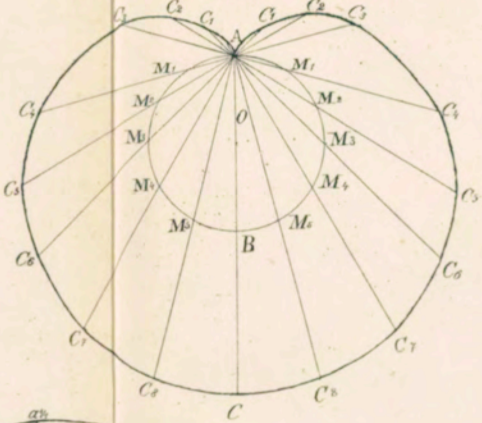


Lit. A. Pruszyński w Krakowie.

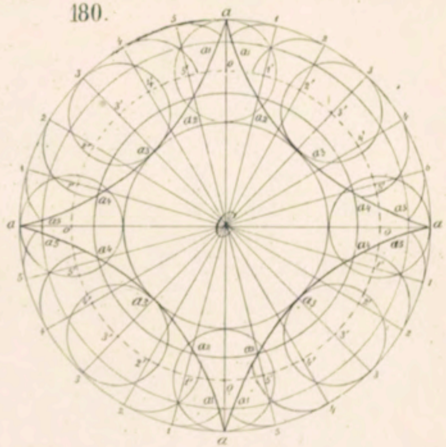
177. 178.



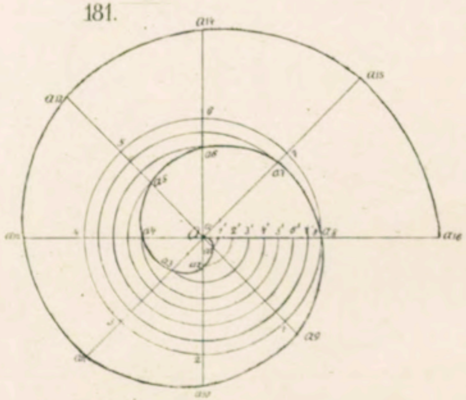
179.



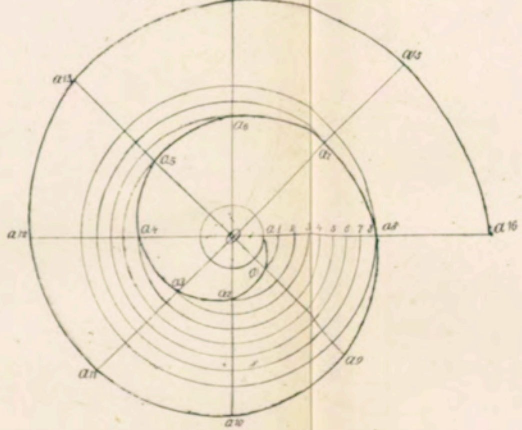
180.



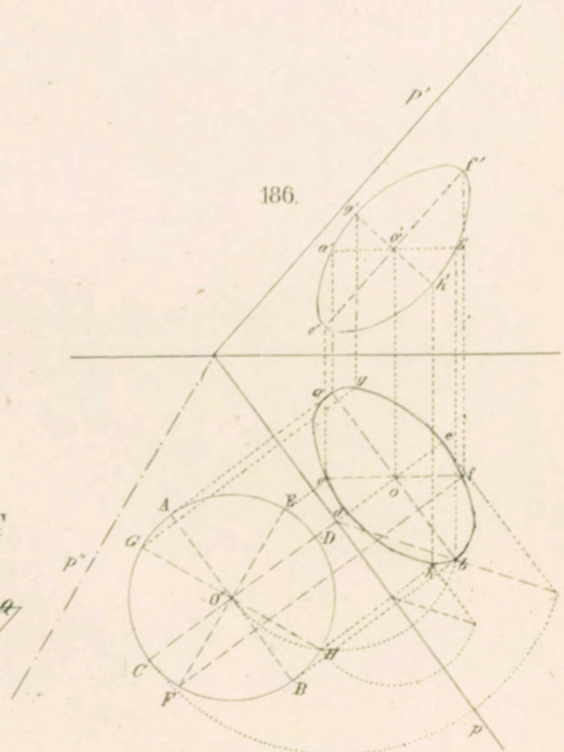
181.



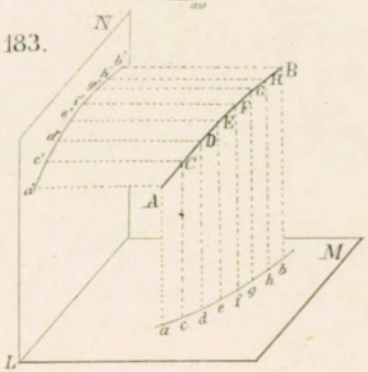
182.



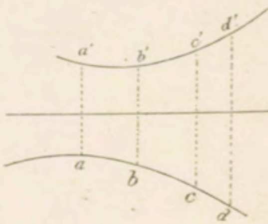
186.



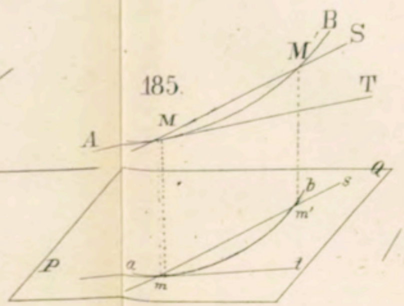
183.

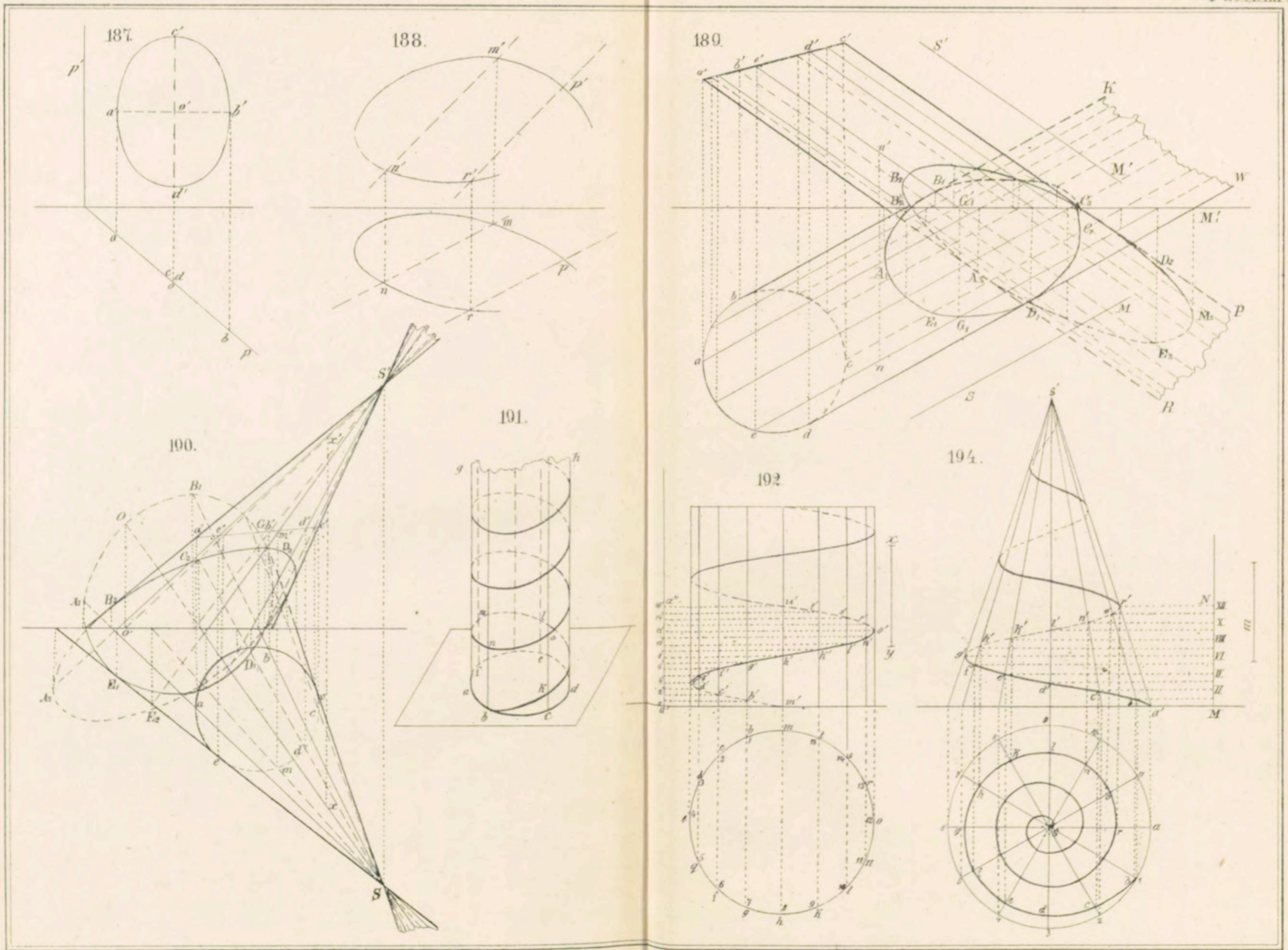


184.

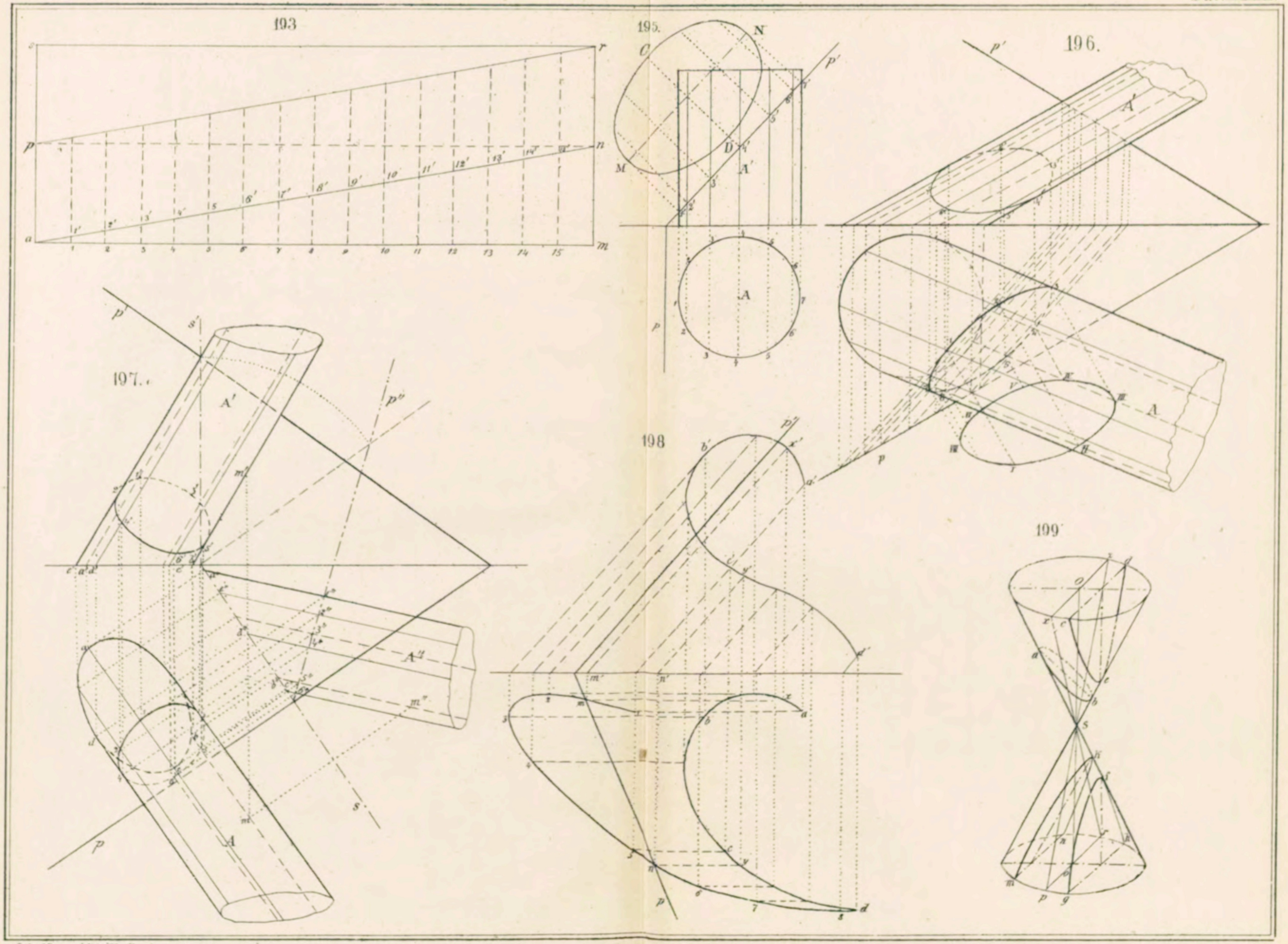


185.

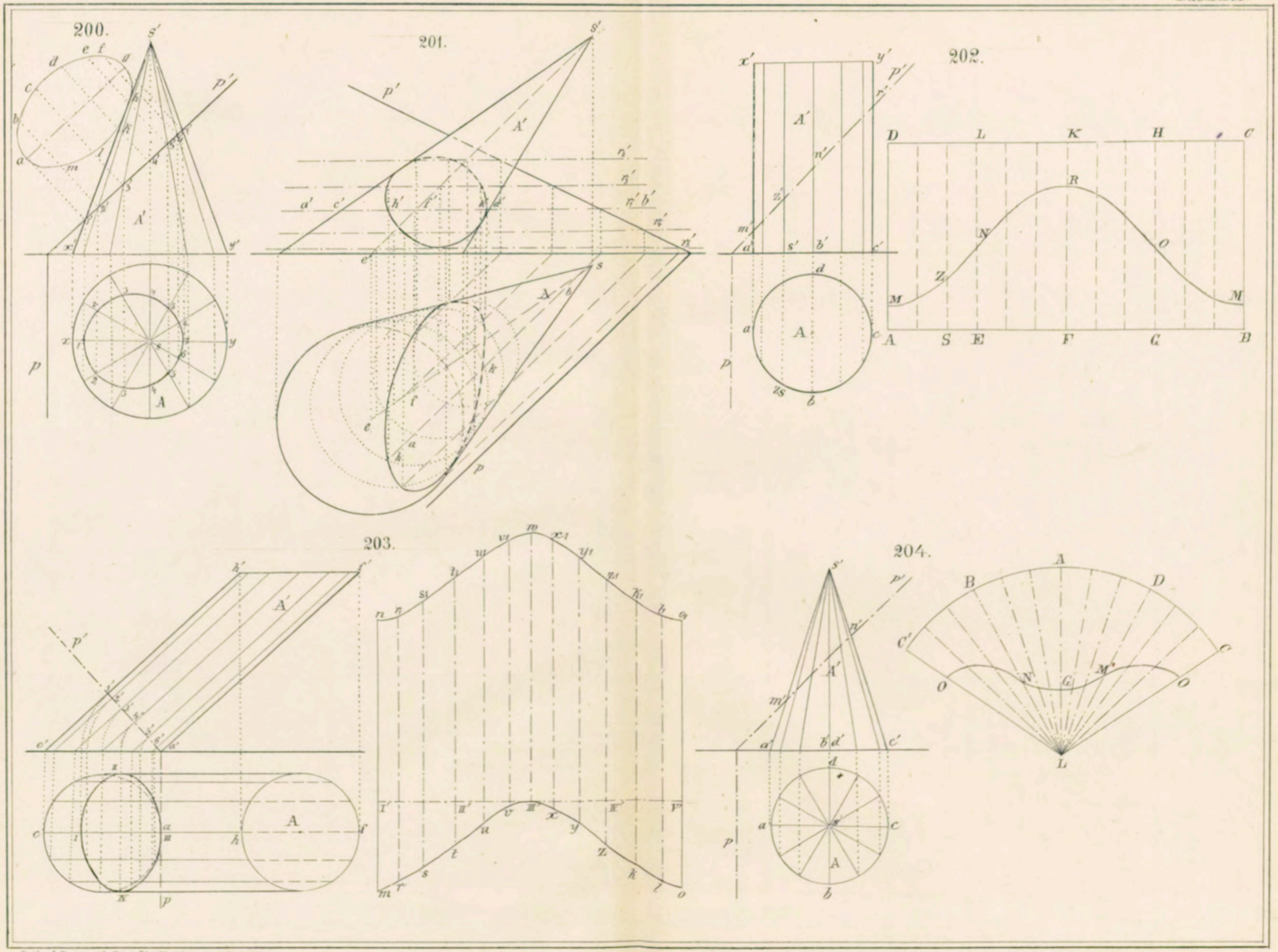




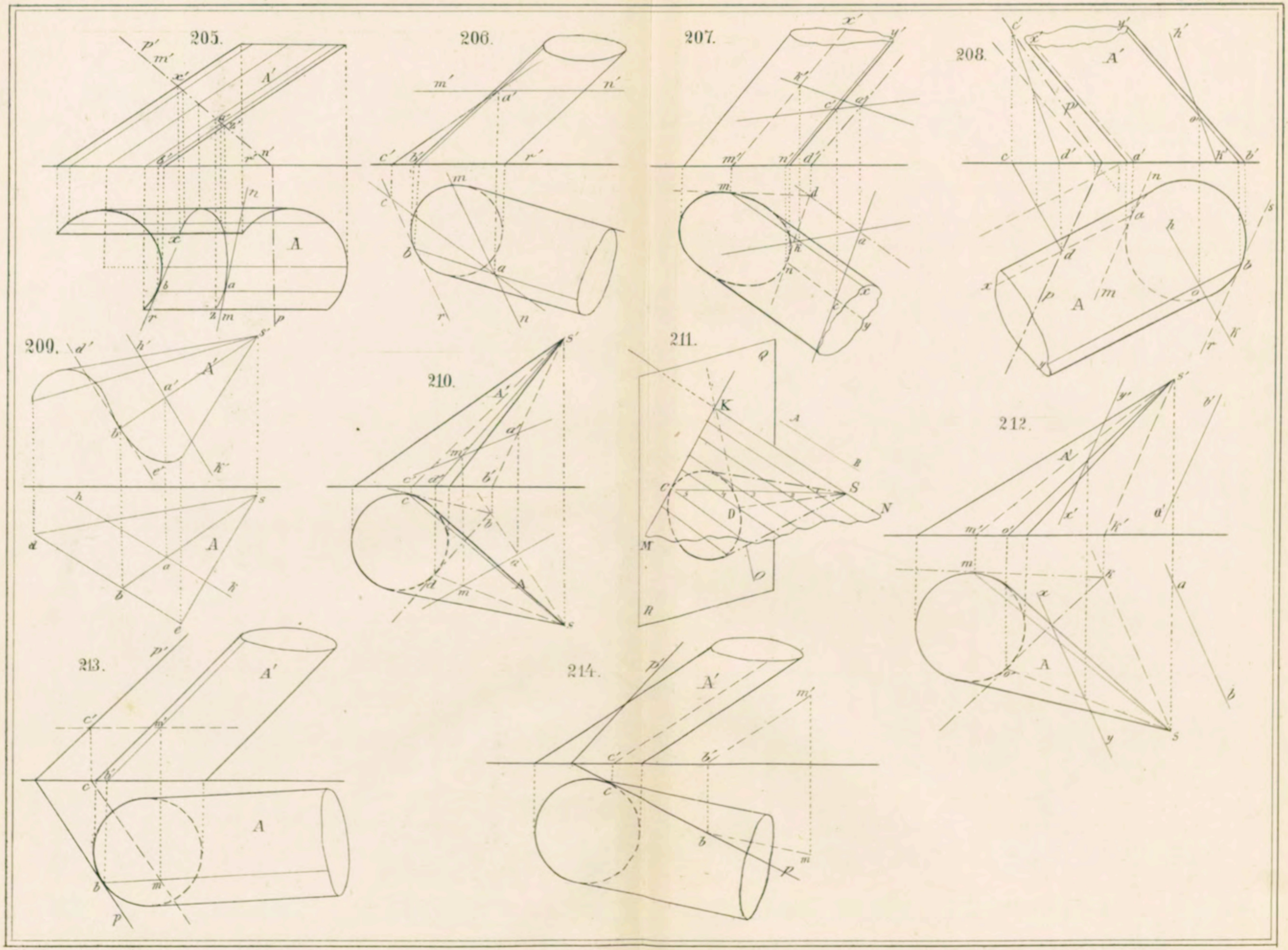
Lit. A. Pruszyński w Krakowie.



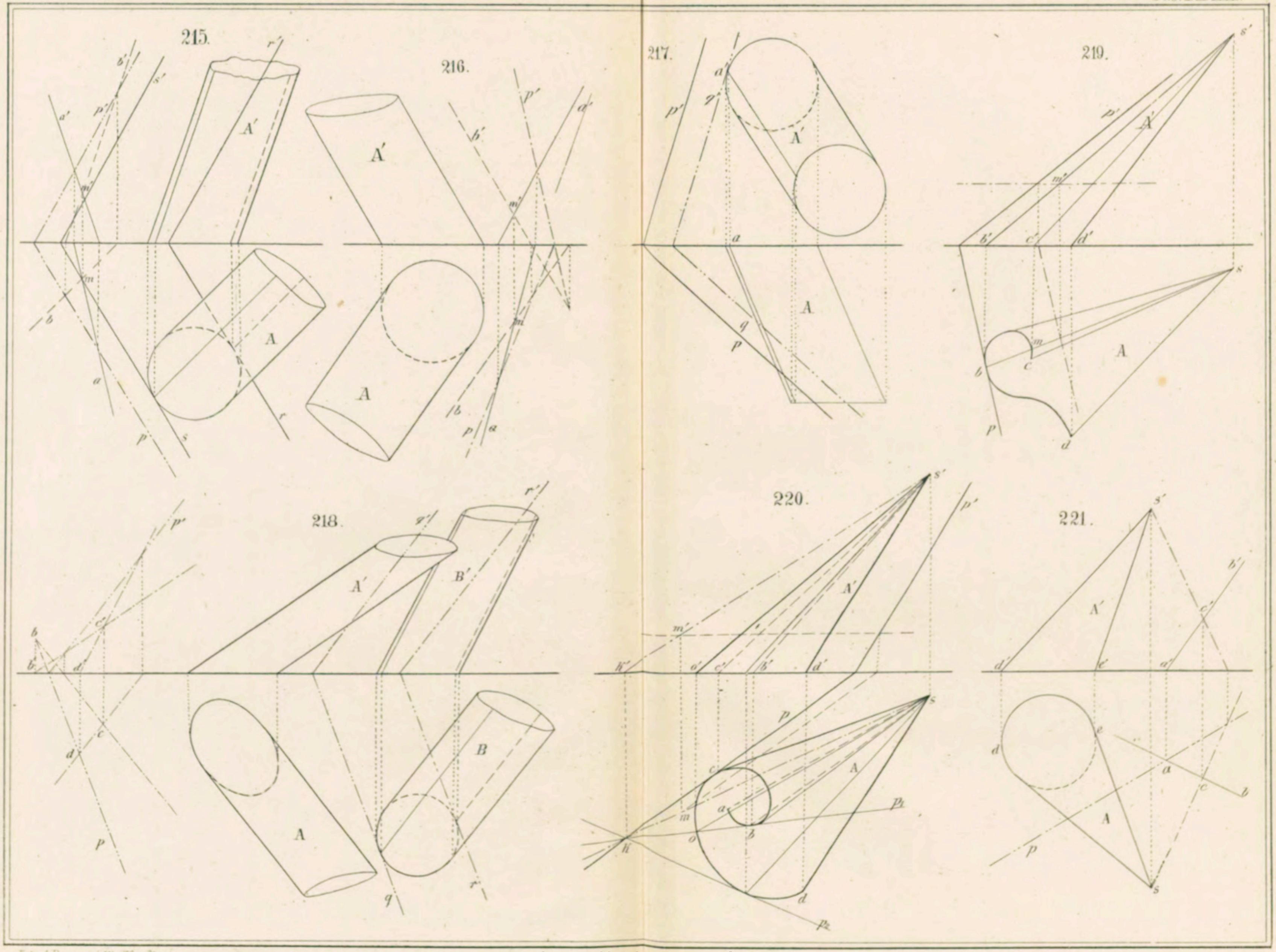
Lit. A. Pruszyński w Krakowie.



Lit. A Pruszyński w Krakowie

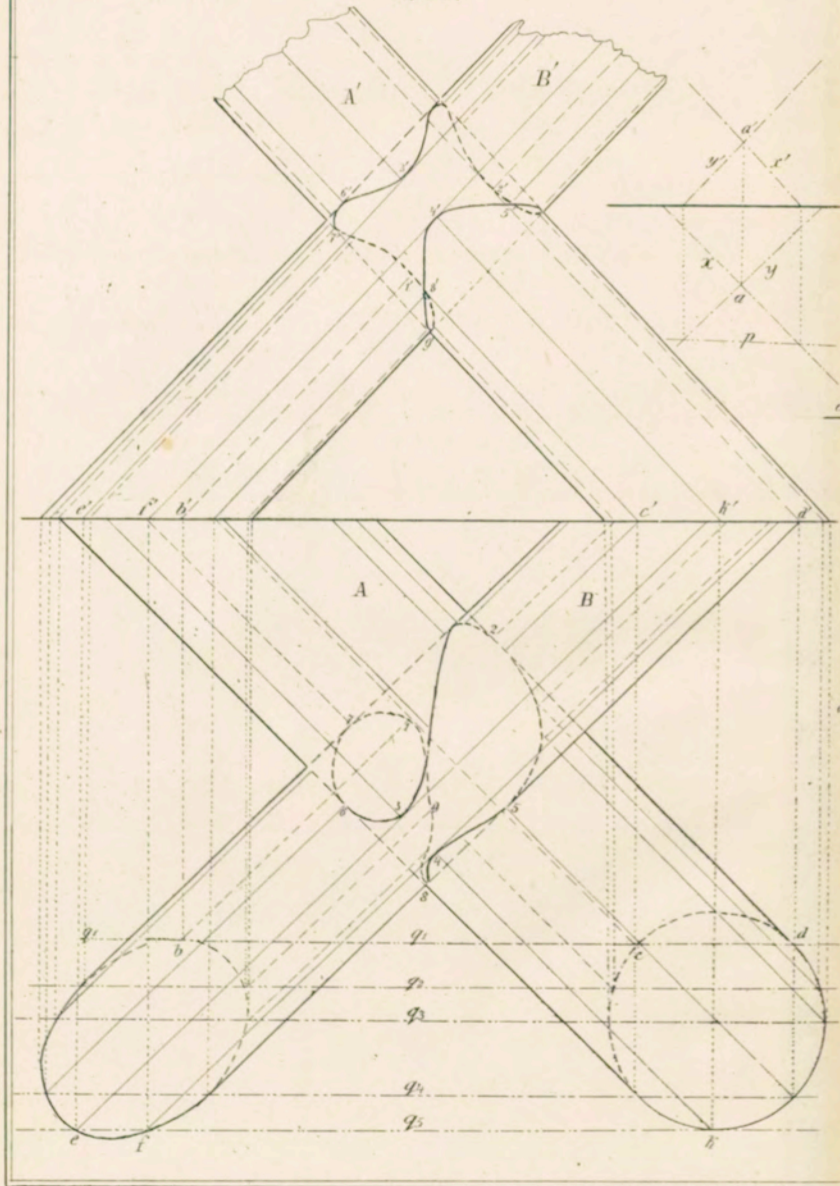


Lit. A. Pruszyński w Krakowie.

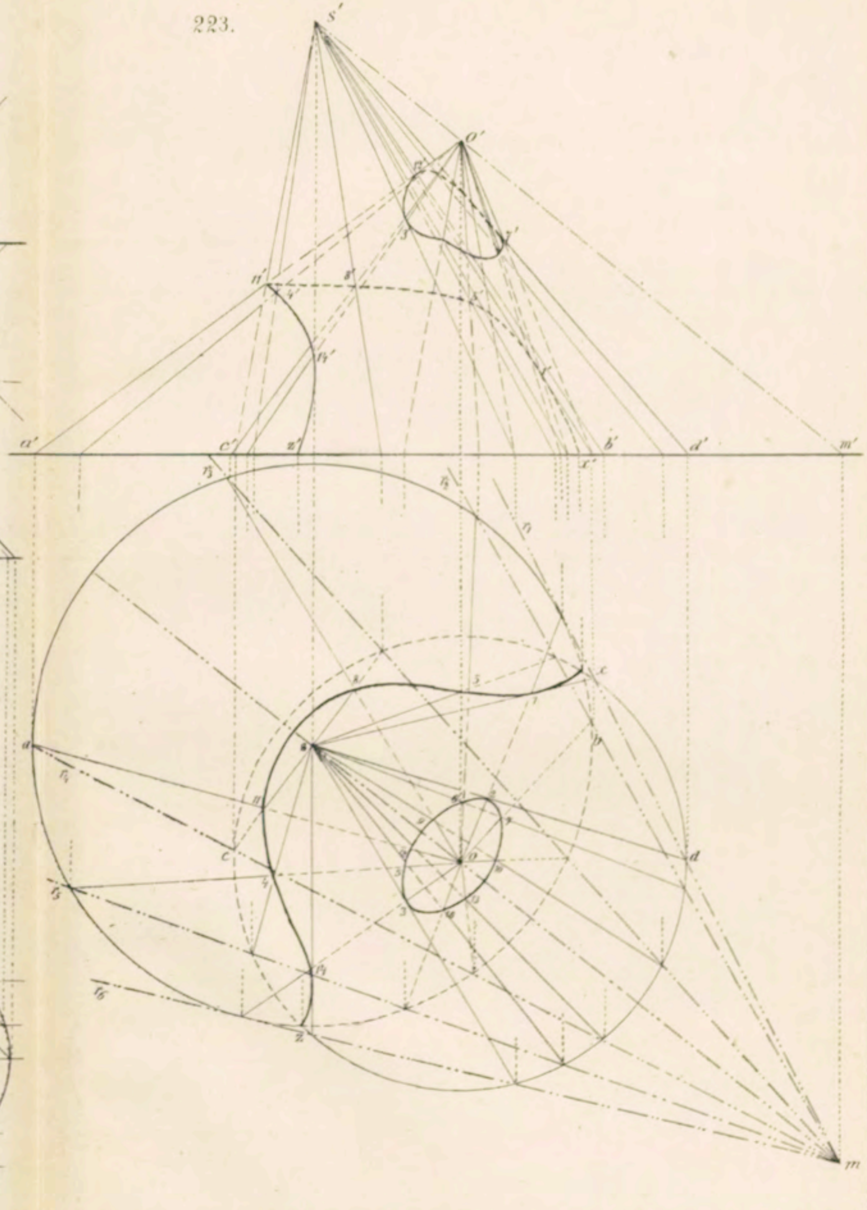


Lit. A. Pruszyński w Krakowie.

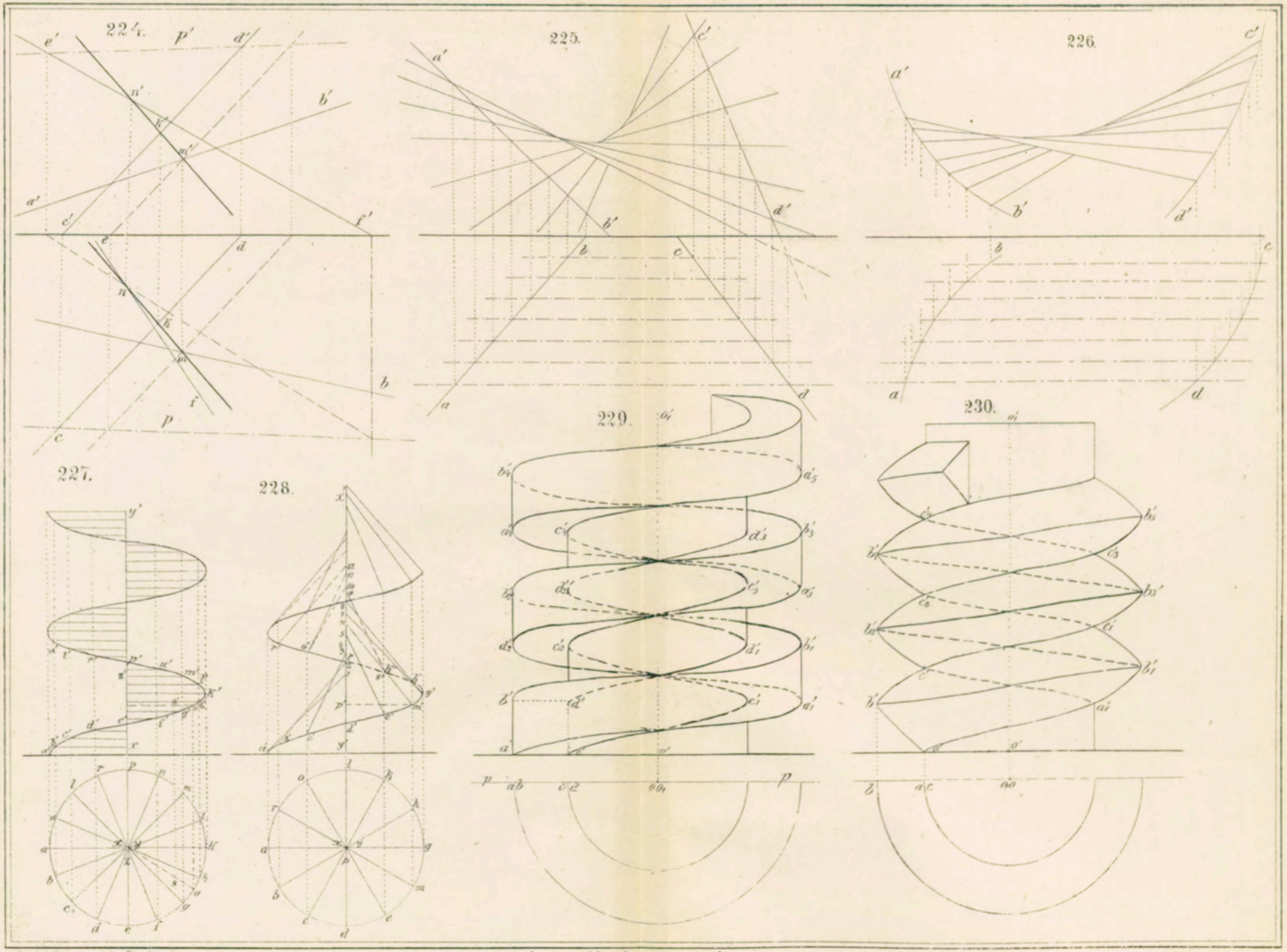
222.



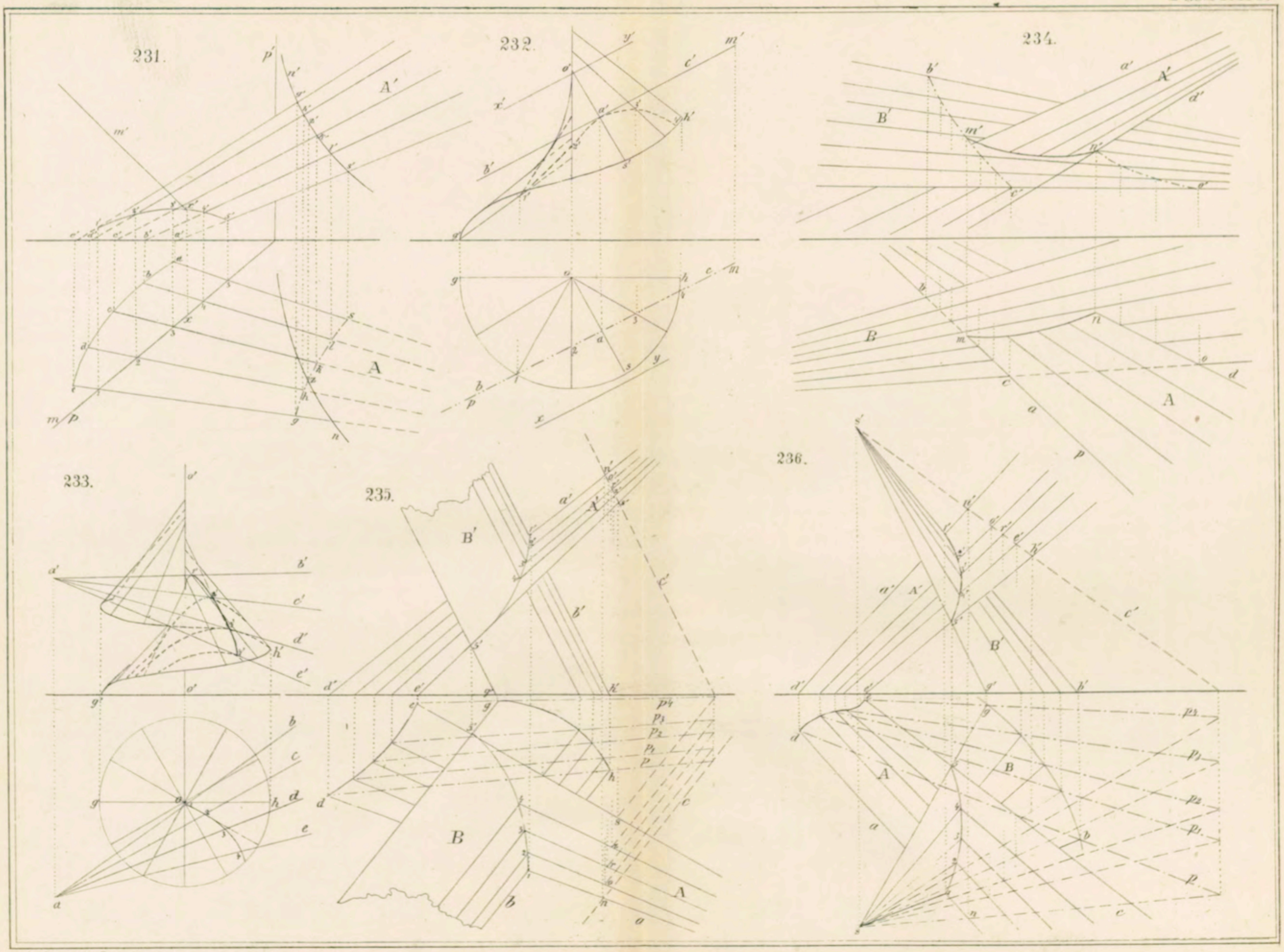
223.



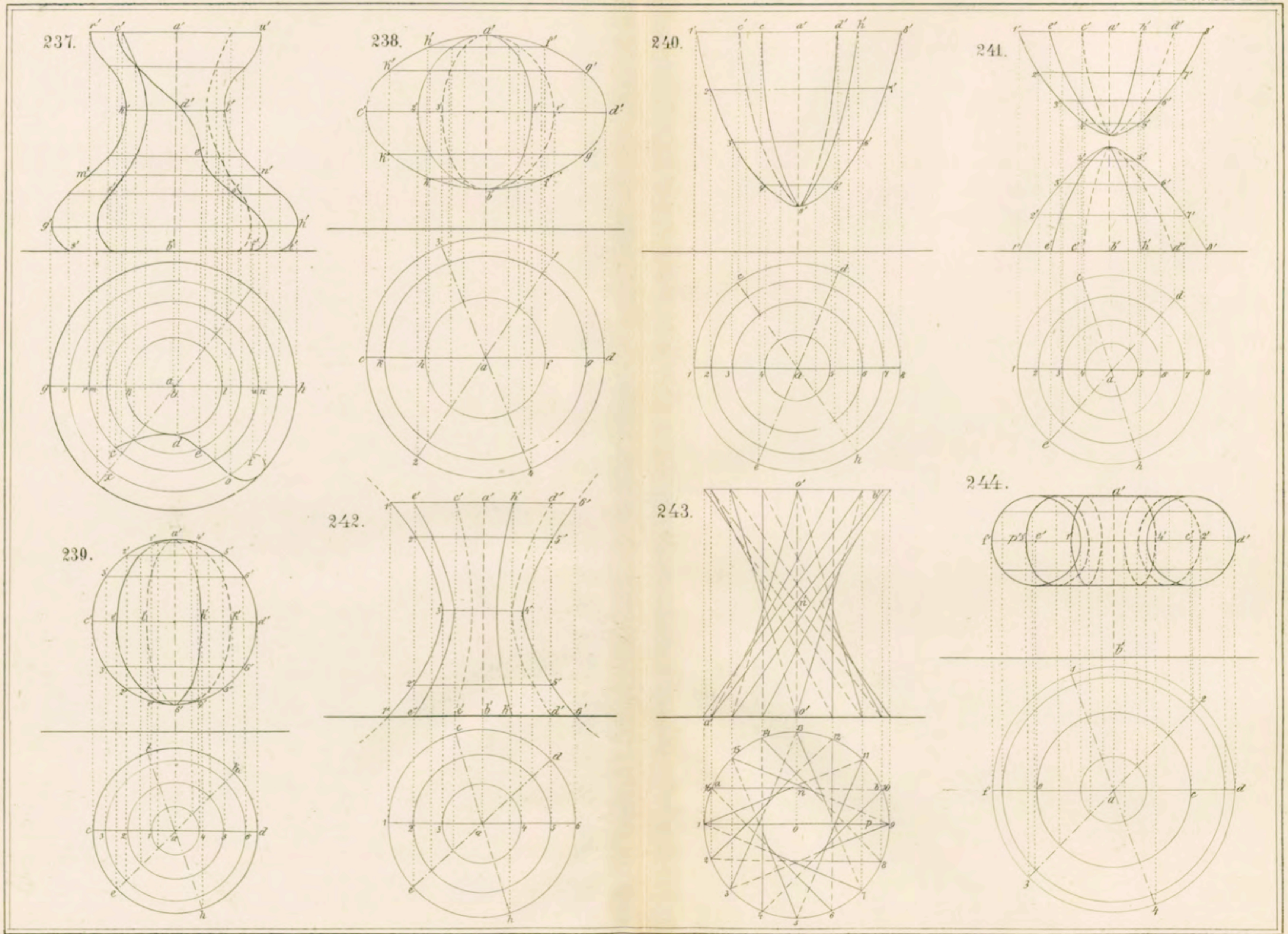
Lit. A. Pruszyński w Krakowie.



Lit. A. Pruszyński w Krakowie.



Lit. A. Pruszyńskiego w Warszawie.



Lit. A. Pruszyński w Krakowie