

94/2005

Raport Badawczy

RB/23/2005

Research Report

**Równoważenie
drzew binarnych**

A. Barski

**Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk**

**Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences**



POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 8373578

fax: (+48) (22) 8372772

Kierownik Pracowni zgłaszający pracę:

Dr inż. Jan Owskiński

Warszawa 2005

Równoważenie drzew binarnych

Aleksy Barski

Instytut Badań Systemowych PAN

1. Abstrakt.

W artykule przedstawiono nowy rodzaj drzew binarnych, który pozwala na lepszą samoorganizację niż powszechnie stosowane drzewa AVL oraz R-B. Dodatkowym atutem tego rodzaju drzewa binarnego jest to że dla wyszukiwań związanych z numerem węzła w drzewie nie są potrzebne dodatkowe informacje w węzłach.

2. Drzewa binarne.

Drzewa binarne to skierowane drzewa w których każdy węzeł ma nie więcej niż dwóch potomków [22].

Drzewa binarne to powszechnie używana struktura danych pozwalająca na szybkie dodawanie rekordów do posortowanej kolekcji, szybkie usuwanie oraz szybkie wyszukiwanie rekordu wg klucza. Rekordy dodane do drzewa przechowywane są w węzłach.

Na każdym drzewie binarnym działają algorytmy nie zależne od rodzaju drzewa. Tak jest dla tego że bazują się one na podstawowych cechach drzewa binarnego:

- przegląd drzewa (kilka algorytmów);
- wyszukiwanie węzła wg klucza;
- usuwanie całego drzewa.

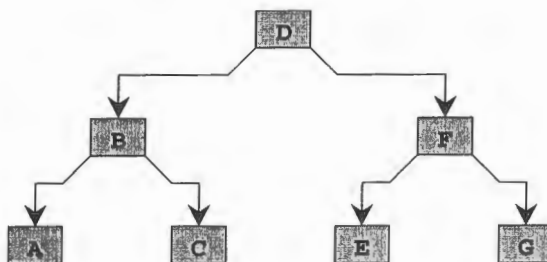
Każdy rodzaj drzewa binarnego powinien posiadać następujące algorytmy, zależne od rodzaju drzewa. Te algorytmy są ściśle związane z rodzajem drzewa, czyli z tym w jaki sposób przebiega samoorganizacja:

- dodawanie węzła;
- usuwanie węzła;

Często są przydatne następujące algorytmy dodatkowe, które potrzebują dodatkowych danych przechowywanych w węzłach:

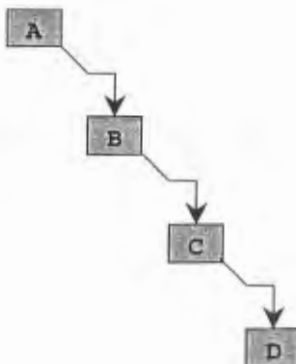
- wyszukiwanie numeru węzła wg klucza;
- wyszukiwanie węzła wg numeru;

Jeżeli drzewo jest idealnie zrównoważone (długości ścieżek od korzenia do liści nie różnią się więcej niż o jeden) rys. 1, to dla wyszukania węzła wg klucza potrzebne nie więcej niż $\lceil \log(N+1) \rceil$ porównań, gdzie N – ilość węzłów w drzewie.



Rys 1. Idealnie zrównoważone drzewo binarne

Jeżeli drzewo binarne nie posiada samoorganizacji, to dodając do niego węzły w uporządkowanej kolejności otrzymamy nie zrównoważone drzewo, rys. 2. Dla takiego „drzewa” średnia ilość porównań wynosi $N/2$, zaś maksymalna N .



Rys 2. Nie zrównoważone drzewo binarne

Dla tego tak ważna jest samoorganizacja – równoważenie na bieżąco po każdym dodaniu oraz usuwaniu węzła z drzewa. Najbardziej znane są algorytmy równoważenia drzew binarnych AVL oraz R-B (czerwono-czarne).

3. Drzewa AVL.

Nazwane tak wg nazwisk wynalazców Adelson-Velski i Landis. Opublikowane to zostało w roku 1962.

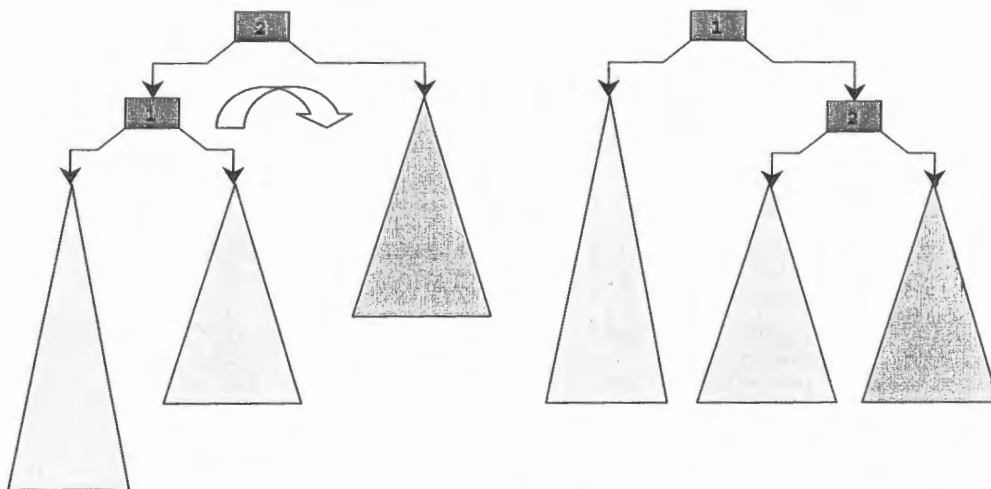
Drzewo binarne AVL ma następujące właściwości:

- Dla każdego węzła wysokość poddrzew różni się nie więcej niż o jeden.
- Każde poddrzewo jest drzewem AVL

Drzewo AVL nie jest idealnie zrównoważone, jednak pozwala na $O(\log(N))$ czas wyszukiwania, dodawania oraz usuwania. Do każdego węzła drzewa AVL dopisany jest wskaźnik równowagi, który może mieć tylko 3 różne wartości:

- Lewe poddrzewo jest wyższe
- Poddrzewa mają taką samą wysokość
- Prawe poddrzewo jest wyższe

Wskaźnik równowagi pozwala na określenie w którym miejscu trzeba poprawić równowagę drzewa oraz zrobić to w czasie $O(\log(N))$. Na rys 3. pokazany jest przykład równoważenia drzewa AVL po dodaniu nowego węzła po dodaniu węzła do lewego poddrzewa węzła 1, co spowodowało że wysokość lewego poddrzewa węzła 2 stała się większa od wysokości prawego poddrzewa o 2. Prawa rotacja pozwala na naprawienie równowagi.



Rys 3. Równoważenie drzewa AVL

4. Drzewa R-B (czerwono-czarne).

Dla drzew czerwono-czarnych przyjmuję się że drzewo się kończy liśćmi nie istniejącymi węzłami (NULL).

Drzewa czerwono-czarne mają następujące właściwości:

- Każdy węzeł jest czerwony lub czarny;
- Każdy liść (NULL) jest czarny;
- Jeżeli węzeł jest czerwony to obaj jego potomkowie są czarne;
- Każda prosta ścieżka od węzła do dowolnego podrzędnego liścia ma tyle samo czarnych węzłów.

Dla drzew czerwono-czarnych udowodniono:

Wysokość drzewa z N węzłami wewnętrznymi ma wysokość nie więcej niż $2(\log(N+1))$ [6].

Wskaźnikiem równowagi dla drzew R-B jest kolor węzła, pozwala on na określenie w którym miejscu trzeba poprawić równowagę drzewa oraz zrobić to w czasie $O(\log(N))$.

5. Narzędzia samoorganizacji.

Każdy rodzaj drzewa binarnego posługują się tym samym narzędziem – rotacją węzłów. Rotacja pozwala na przesunięcie równowagi drzewa operując tylko na czterech węzłach, i zachowuje przy tym uporządkowanie drzewa. Rozróżniane są rotacje prawe i lewe. Prawa rotacja przesuwa równowagę poddrzewa w prawo rys 4b,4a. Lewa rotacja przesuwa równowagę poddrzewa w lewo rys 4c,4a. Rodzaje drzew binarnych różnią się pomiędzy sobą jedynie sposobami określenia gdzie i kiedy przeprowadzić jakąś rotację. Dla tego celu służy dodatkowe pole dodane do każdego węzła – wskaźnik równoważenia.

6. Nowy rodzaj drzewa binarnego – Squeeze.

Algorytmy równoważące drzewa binarne na bieżąco w czasie $O(\log(N))$ posługują się rotacją węzła jako narzędziem równoważącym. Rozpatrzmy prawą rotację węzła E na rys 4a,4b, podsumowując zyski i straty. Na rysunku 4b przedstawione jest poddrzewo którego wierzchołek M może być korzeniem albo prawym potomkiem węzła A albo lewym potomkiem węzła O. Każdy z węzłów C,G,K,O może mieć potomków albo nie mieć. Ponieważ równoważenie drzewa binarnego potrzebne po to aby zmniejszyć średnie oczekiwaną ilość porównań dla wyszukiwania węzłów wg klucza i uwzględniając że w wyniku rotacji nie zmienia się ilość węzłów w poddrzewie, zyski i straty możemy liczyć

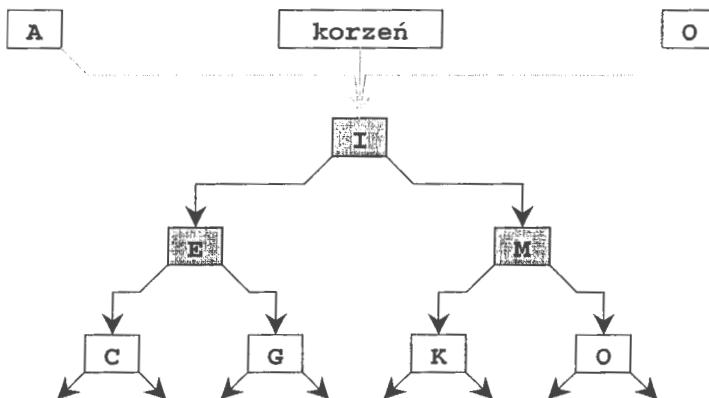
jako sumaryczną ilość porównań niezbędnych do odnalezienia każdego węzła w poddrzewie po kolei. Ilość porównań niezbędna dla odnalezienia węzła jest równa jego poziomowi w drzewie. Przed rotacją dla odnalezienia węzła M potrzebne jest jedno porównanie (poziom 1); dla węzłów I,O dwa porównania (poziom 2); dla E,K – trzy (poziom 3); dla C,G – cztery (poziom 4). Natomiast po rotacji: I – jedno (poziom 1); E,M – dwa (poziom 2); C,G,K,O – trzy (poziom 3).

Sprowadzając to do tablicy dostajemy:

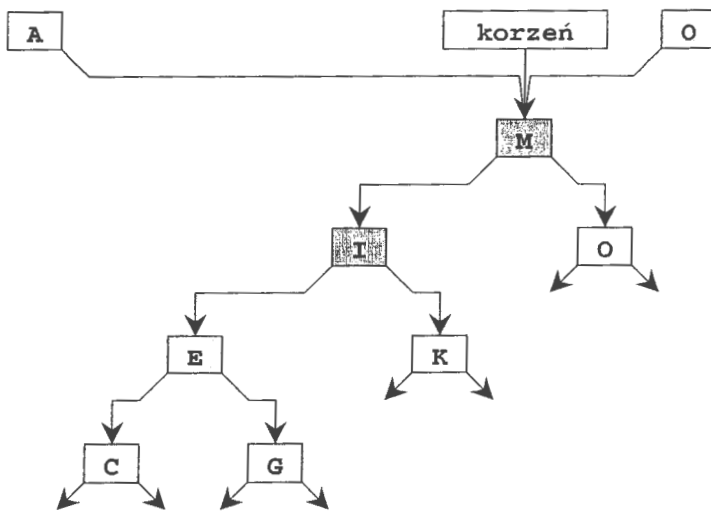
Węzeł	Poziom węzła		Zysk	Strata
	Przed rotacją	Po rotacji		
C	4	3	+1+C.IloscPodrzendnych	
E	3	2	+1	
G	4	3	+1+G.IloscPodrzendnych	
I	2	1	+1	
K	3	3		
M	1	2		-1
O	2	3		-1-O.IloscPodrzendnych
Razem			+1+I.IloscLewych()	-1-M.IloscPrawych()
Czy opłaca się P rotacja?			I.IloscLewych() > M.IloscPrawych()	

Analogicznie dla lewej rotacji węzła M rys 4a,4c:

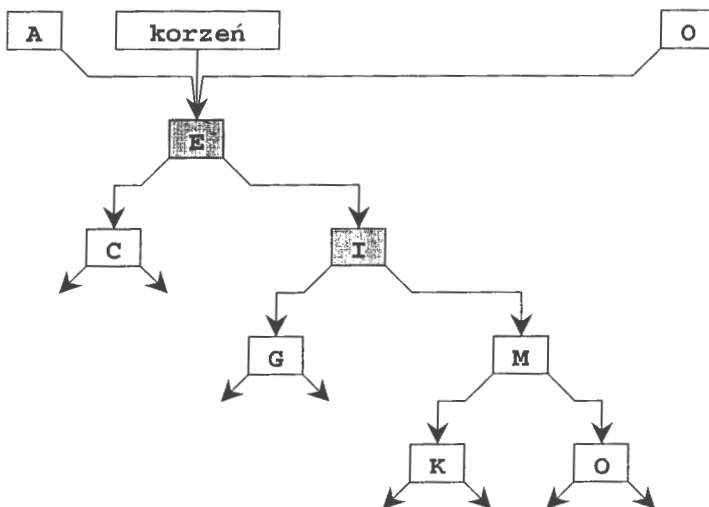
Węzeł	Poziom węzła		Zysk	Strata
	Przed rotacją	Po rotacji		
C	2	3		-1-C.IloscPodrzendnych
E	1	2		-1
G	3	3		
I	2	1	+1	
K	4	3	+1+K.IloscPodrzendnych	
M	3	2	+1	
O	4	3	+1+O.IloscPodrzendnych	
Razem			+1+I.IloscPrawych()	-1-E.IloscLewych()
Czy opłaca się L rotacja?			I.IloscPrawych() > E.IloscLewych()	



Rys 4a. Po rotacji na rysunkach 4b,4c,4d,4e



Rys 4b. Prawa rotacja węzła E przed rotacją



Rys 4c. Lewa rotacja węzła M przed rotacją

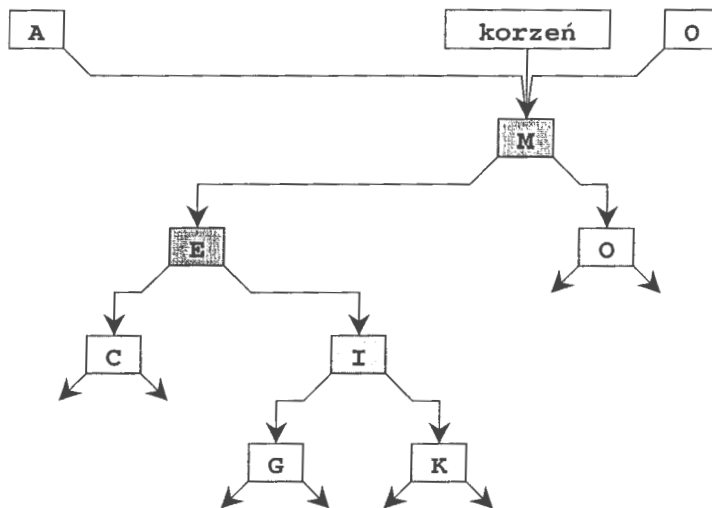
W podobny sposób przeanalizujemy wyniki podwójnych rotacji lewo-prawo i prawo-lewo:

Dla lewej-prawej rotacji węzła I rys 4a,4d:

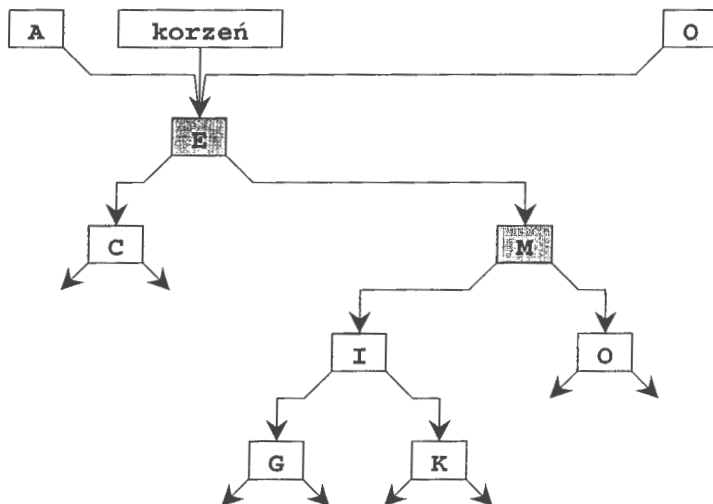
Węzeł	Poziom węzła		Zysk	Strata
	Przed rotacją	Po rotacji		
C	3	3		
E	2	2		
G	4	3	+1+G.IloscPodrzendych	
I	3	1	+1+1	
K	4	3	+1+K.IloscPodrzendych	
M	1	2		-1
O	2	3		-1-O.IloscPodrzendych
Razem			+1+E.IloscPrawych()	-1-M.IloscPrawych()
Czy opłaca się LP rotacja?			E.IloscPrawych() > M.IloscPrawych()	

Dla prawej-lewej rotacji węzła I rys 4a,4e:

Węzeł	Poziom węzła		Zysk	Strata
	Przed rotacją	Po rotacji		
C	2	3		-1-C.IloscPodrzendych
E	1	2		-1
G	4	3	+1+G.IloscPodrzendych	
I	3	1	+1+1	
K	4	3	+1+K.IloscPodrzendych	
M	2	2		
O	3	3		
Razem			+1+M.IloscLewych()	-1-E.IloscLewych()
Czy opłaca się PL rotacja?			M.IloscLewych() > E.IloscLewych()	



Rys 4d. Lewa-prawa rotacja węzła I przed rotacją



Rys 4e. Prawa-lewa rotacja węzła I przed rotacją

Podsumowując uzyskane wyniki, można stwierdzić nie tylko czy jakiś z rodzaju rotacji się opłaca, ale również gdzie tą rotację należy zastosować. Po dodaniu węzła do drzewa lub usunięciu węzła z drzewa należy sprawdzić całą ścieżkę przodków pod względem opłacalności rotacji.

Agregując powyższe obliczenia można wywnioskować: dla każdego węzła na ścieżce przodków dodawanego lub usuwanego węzła należy sprawdzić:

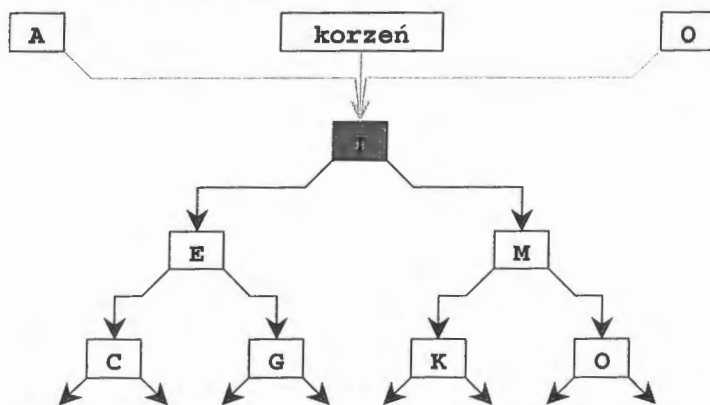
1. Jeżeli liczba lewych potomków jest mniejsza niż liczba prawych potomków prawego potomka, to podnosimy prawego potomka (prawa rotacja);
2. Jeżeli liczba lewych potomków jest mniejsza niż liczba lewych potomków prawego potomka, to podnosimy najpierw lewego potomka prawego potomka (lewa rotacja), a potem podnosimy (już nowego) prawego potomka (prawa rotacja);
3. Jeżeli liczba prawych potomków jest mniejsza niż liczba lewych potomków lewego potomka, to podnosimy lewego potomka (lewa rotacja);
4. Jeżeli liczba prawych potomków jest mniejsza niż liczba prawych potomków lewego potomka, to podnosimy najpierw prawego potomka lewego potomka (prawa rotacja), a potem podnosimy (już nowego) lewego potomka (lewa rotacja);

Na rys 5. przedstawiony jest schemat porównań :

1. Jeżeli rozmiar poddrzewa E jest mniejszy niż poddrzewa O, to dokonaj P rotacji M;
(warunek może zajść w przypadku dodania węzła pod węzeł O, lub usunięcia węzła spod węzła E)
2. Jeżeli rozmiar poddrzewa E jest mniejszy niż poddrzewa K, to dokonaj LP rotacji K;
(warunek może zajść w przypadku dodania węzła pod węzeł K, lub usunięcia węzła spod węzła E)
3. Jeżeli rozmiar poddrzewa M jest mniejszy niż poddrzewa C, to dokonaj L rotacji E;
(warunek może zajść w przypadku dodania węzła pod węzeł C, lub usunięcia węzła spod węzła M)
4. Jeżeli rozmiar poddrzewa M jest mniejszy niż poddrzewa G, to dokonaj PL rotacji G;
(warunek może zajść w przypadku dodania węzła pod węzeł G, lub usunięcia węzła spod węzła M)

Z tego wynika że:

1. W przypadku dodawania węzła, ponieważ wiadomo gdzie on został dodany, tylko jedna rotacja jest kandydatem do sprawdzenia.
2. W przypadku usuwania węzła, ponieważ wiadomo gdzie on został usunięty, jest tylko dwie rotacje są kandydatami.



Rys 5. Schemat porównań dla węzła I

Praktyczne testy pokazały, że proponowany rodzaj drzewa binarnego ma lepsze równoważenie niż drzewa AVL oraz lepsze równoważenie niż drzewa czerwono-czarne. Dla rozmiarów drzewa 1-13 węzłów przeprowadzone testy na wszystkich permutacjach, czyli sprawdzone zostały wszystkie możliwe kolejności dodawania rekordów do drzewa. Dla większych rozmiarów drzewa pobrano 10000 próbek.

Size	Tests	Kind	Search	Compare	Single	Double	Var	Ideal
1		Sqz	1	0	0	0	1	1
		AVL	1	0	0	0	1	1
		RB	1	0	0	0	1	1
2		Sqz	6	2	0	0	2	2
		AVL	6	2	0	0	2	2
		RB	6	2	0	0	2	2
3		Sqz	30	16	2	2	1	6
		AVL	30	16	2	2	1	6
		RB	30	16	2	2	1	6
4	24	Sqz	192	112	8	8	4	24
		AVL	192	112	8	8	4	24
		RB	192	112	8	8	4	24
5	120	Sqz	1320	848	64	64	6	120
		AVL	1320	848	64	64	6	120
		RB	1320	848	64	64	6	120
6	720	Sqz	10080	7008	624	624	4	720
		AVL	10080	7008	624	624	4	720
		RB	10368	7008	480	480	12	432
7	5040	Sqz	88560	63456	5088	5088	17	2160
		AVL	88560	63456	5088	5088	17	2160
		RB	90864	63744	4080	4080	29	1296
8	40320	Sqz	852480	631488	50784	50784	24	34560
		AVL	861120	631488	46464	46464	32	25920
		RB	871488	636096	40128	40128	40	20736
9	362880	Sqz	9072000	6858432	526176	526176	28	362880
		AVL	9158400	6867072	487296	487296	44	276480
		RB	9165312	6918912	440640	440640	46	285120
10	3628800	Sqz	105235200	80922240	5987520	5987520	56	3628800
		AVL	105494400	81095040	5771520	5771520	60	3369600
		RB	105494400	81620352	5266944	5266944	76	3369600
11	39916800	Sqz	1317254400	1031667840	76749120	76749120	70	39916800
		AVL	1317254400	1033827840	74891520	74891520	70	39916800
		RB	1324836416	1039606272	65816064	65816064	190	32742144
12	479001600	Sqz	17815127040	14136353280	1034622720	1034622720	184	386933760
		AVL	17815334400	14162273280	1012227840	1012227840	184	386726400
		RB	17979107328	14238996480	868921344	868921344	456	260527104
13	6227020800	Sqz	258448112640	207335738880	14934378240	14904518400	284	3086760960
		AVL	258941836800	207672906240	14382904320	14382904320	476	3054412800
		RB	261648838656	208834080768	12230341632	12230341632	904	1586330000
11	10000	Sqz	330000	258288	19099	19187	10000	10000
		AVL	330000	258909	18635	18806	10000	10000
		RB	331903	260486	16433	16471	8154	8154
12	10000	Sqz	371899	295113	21509	21705	8107	8107
		AVL	371882	295618	21119	21158	8118	8118
		RB	375323	297183	18099	18173	5463	5463
13	10000	Sqz	419059	332930	24107	23764	4941	4941
		AVL	418828	333513	23250	22952	4894	4894
		RB	420760	335278	19681	19580	2582	2582
14	10000	Sqz	458862	371850	26539	26449	2185	2185
		AVL	460990	372480	24944	25071	1785	1785
		RB	465687	374659	21320	21242	867	867
15	10000	Sqz	504005	411935	29164	28751	455	455
		AVL	507201	412920	27208	26923	424	424
		RB	511796	415253	23103	22873	163	163
16	10000	Sqz	550041	452434	31262	31066	1674	1674
		AVL	554030	453484	28866	28818	1126	1126
		RB	558429	456005	24793	24664	578	578
17	10000	Sqz	597210	494468	33498	33697	3241	3241
		AVL	601394	495906	30948	31336	1884	1884
		RB	605893	498773	26466	27113	1222	1222
18	10000	Sqz	644918	537252	36101	36157	5114	5114
		AVL	648814	538861	33519	33621	2936	2936
		RB	654467	542089	28623	28918	2118	2118
19	10000	Sqz	693449	580543	38589	38407	6568	6568
		AVL	696605	582143	35900	35825	4101	4101
		RB	703534	585490	30544	30524	3036	3036
20	10000	Sqz	742720	624599	41076	40688	7525	7525
		AVL	745228	626476	38364	38377	5195	5195
		RB	753881	630337	32421	32292	3573	3573
21	10000	Sqz	792455	669553	43813	43143	7888	7888
		AVL	794824	671415	41065	40675	5952	5952
		RB	804485	675673	34452	33980	3684	3684
22	10000	Sqz	843065	715210	46132	45833	7339	7339
		AVL	845447	717175	42997	43463	6032	6032
		RB	856114	721529	35918	36175	3291	3291
23	10000	Sqz	894288	761041	48548	48005	6165	6165
		AVL	897125	763363	45494	45301	5402	5402
		RB	908308	768671	37963	37921	2583	2583
24	10000	Sqz	946049	808172	51176	50743	4628	4628
		AVL	949548	810416	47639	47603	4249	4249
		RB	961101	816080	39742	39701	1655	1655
25	10000	Sqz	998440	855671	53731	53252	3184	3184
		AVL	1002415	857843	49838	49820	3014	3014
		RB	1013988	863620	41750	41498	946	946

26	10000	Sqz	1051396	903372	56171	55558	1853
		AVL	1056312	903708	51754	51734	1708
		RB	1067546	911751	43383	43292	424
		Sqz	1104856	952071	58947	58073	807
27	10000	AVL	1110552	955071	54305	54012	854
		RB	1121483	962100	45516	45484	171
		Sqz	1158772	1001374	61509	60765	377
28	10000	AVL	1165193	1004070	56171	56319	348
		RB	1175407	1011497	47558	47332	67
		Sqz	1213352	1050923	64015	63147	113
29	10000	AVL	1220415	1053717	58315	58313	98
		RB	1229734	1061676	49480	49342	11
		Sqz	1268242	1101299	66788	65878	20
30	10000	AVL	1276001	1104635	60774	60753	19
		RB	1285027	1112388	51602	51435	3
		Sqz	1323880	1151557	69017	68206	2
31	10000	AVL	1331882	1155320	62881	62841	2
		RB	1340399	1163269	53319	53502	0
		Sqz	1379767	1203304	72178	70870	22
32	10000	AVL	1388028	1207040	65544	64930	18
		RB	1396680	1215973	55651	55579	2
		Sqz	1436097	1254383	74510	73259	69
33	10000	AVL	1444160	1258473	67778	67518	32
		RB	1453102	1267336	57856	57380	2
		Sqz	1493046	1306421	76894	75893	169
34	10000	AVL	1500934	1310622	70077	69800	66
		RB	1510493	1319988	59634	59607	22
		Sqz	1550187	1358370	79341	78226	369
35	10000	AVL	1557992	1362751	72204	72100	133
		RB	1568125	1372268	61301	61702	52
		Sqz	1607887	1411257	82078	80656	709
36	10000	AVL	1615315	1415834	74768	74370	261
		RB	1626937	1426035	63418	63357	94
		Sqz	1666158	1464347	84731	82758	1048
37	10000	AVL	1673636	1469038	77108	76645	348
		RB	1685801	1478877	65365	65138	158
		Sqz	1724535	1518486	87294	85940	1512
38	10000	AVL	1731920	1523530	79451	79802	552
		RB	1745320	1533756	67120	67419	242
		Sqz	1783092	1572027	89747	88367	2020
39	10000	AVL	1790695	1577600	81683	82285	771
		RB	1805191	1587831	69141	69012	354
		Sqz	1842393	1626146	92378	90548	2480
40	10000	AVL	1850094	1631977	84330	84069	1042
		RB	1865517	1642720	70878	70948	455
		Sqz	1902032	1681648	95363	93950	2783
41	10000	AVL	1909948	1686968	86824	86540	1256
		RB	1926458	1698904	72972	72908	509
		Sqz	1961944	1735581	97288	95441	2920
42	10000	AVL	1970256	1741268	88803	88403	1384
		RB	1987154	1753759	74847	74374	528
		Sqz	2021985	1791765	99784	98019	2974
43	10000	AVL	2030872	1797638	90625	91452	1546
		RB	2048871	1810120	76293	76639	505
		Sqz	2082655	1846858	102265	100878	2790
44	10000	AVL	2092239	1853287	93324	92855	1540
		RB	2110375	1866208	78144	78328	421
		Sqz	2143489	1903200	105131	103562	2514
45	10000	AVL	2153233	1909683	95353	95817	1538
		RB	2172467	1923002	80206	80106	366
		Sqz	2204806	1959430	107791	105658	2043
46	10000	AVL	2214870	1965834	97940	97477	1368
		RB	2234219	1979649	82088	81733	316
		Sqz	2266188	2015935	110179	108347	1744
47	10000	AVL	2277019	2022957	100076	99797	1135
		RB	2296823	2036893	83954	83721	221
		Sqz	2327758	2073673	113526	111160	1261
48	10000	AVL	2339370	2081197	102744	102582	903
		RB	2359264	2095950	86283	86346	156
		Sqz	2389955	2130939	116122	113491	930
49	10000	AVL	2402126	2138535	104815	104628	710
		RB	2422329	2152895	87798	87862	95
		Sqz	2452455	2188884	119058	115984	599
50	10000	AVL	2465250	2196377	107458	106605	437
		RB	2485620	2211055	90109	89448	53
		Sqz	2515258	2246347	120876	118816	320
51	10000	AVL	2528253	2254122	109176	109322	271
		RB	2549226	2269020	91786	91316	24
		Sqz	2578098	2305051	123570	121883	215
52	10000	AVL	2592120	2312938	111322	111626	177
		RB	2612637	2328623	93291	93616	16
		Sqz	2641334	2362960	126320	123748	101
53	10000	AVL	2655853	2371302	113563	113635	85
		RB	2677031	2387079	95050	95413	7
54	10000	Sqz	2704741	2420858	129016	125509	68

		AVL	2719514	2429757	116185	115231	57
		RB	2741039	2449484	97352	97063	5
		Sqz	2768752	2481185	131643	128949	31
55	10000	AVL	2784002	2400437	118000	118662	19
		RB	2805776	2507308	99404	99755	2
		Sqz	2832578	2539332	134200	130845	11
56	10000	AVL	2848084	2549143	120787	120112	11
		RB	2870301	2565835	101099	101008	0
		Sqz	2896830	2598117	136879	133513	4
57	10000	AVL	2912781	2608514	122848	122398	2
		RB	2935249	2626401	103229	103087	1
		Sqz	2961625	2658995	139413	136112	1
58	10000	AVL	2977589	2669162	125468	124699	0
		RB	3000043	2686983	105532	104822	0
		Sqz	3026209	2718555	141438	139003	0
59	10000	AVL	3042419	2728487	127042	127245	1
		RB	3065988	2747709	105599	107470	0
		Sqz	3091442	2779613	144789	141349	0
60	10000	AVL	3108206	2790154	128932	129473	0
		RB	3132198	2808759	109132	108839	0
		Sqz	3156778	2839791	147239	143696	0
61	10000	AVL	3173457	2850368	132054	131749	0
		RB	3197629	2868536	111100	110928	0
		Sqz	3222016	2899989	149485	146379	0
62	10000	AVL	3238849	2911297	133992	134556	0
		RB	3264247	2930711	112659	112870	0
		Sqz	3288002	2961166	151913	149132	0
63	10000	AVL	3304764	2972224	136075	136796	0
		RB	3330926	2992441	114403	114966	0
		Sqz	3353798	3022860	152269	151519	0
64	10000	AVL	3370753	3034442	139444	138802	0
		RB	3398045	3056131	117267	116544	0
		Sqz	3420229	3084260	157776	153986	0
65	10000	AVL	3437125	3095881	141183	141295	0
		RB	3464652	3116588	118884	118471	0
		Sqz	3486885	3145846	159962	156859	0
66	10000	AVL	3503940	3158091	143506	143840	0
		RB	3532321	3179572	120545	120601	0
		Sqz	3553202	3207587	162456	159406	0
67	10000	AVL	3570500	3219432	145961	145870	0
		RB	3599346	3241366	122215	122470	0
		Sqz	3620095	3270271	165137	162509	0
68	10000	AVL	3637651	3282874	148397	148685	0
		RB	3667880	3305468	124304	124685	0
		Sqz	3688953	3332332	168434	164332	1
69	10000	AVL	3704733	3345446	151186	151005	0
		RB	3735082	3367670	126347	126593	0
		Sqz	3754422	3395084	171202	166832	0
70	10000	AVL	3772451	3407950	153300	153288	1
		RB	3803429	3430583	128104	128474	0
		Sqz	3821928	3457315	172757	169895	0
71	10000	AVL	3840359	3470659	155111	155792	0
		RB	3871968	3494543	129513	130971	0
		Sqz	3889874	3521369	176895	171962	5
72	10000	AVL	3908382	3533969	158155	157561	0
		RB	3940018	3558032	132203	132271	0
		Sqz	3957114	3583839	178690	175187	12
73	10000	AVL	3976394	3597257	159909	160438	1
		RB	4009167	3621675	133847	134249	0
		Sqz	4025562	3647358	181438	177334	18
74	10000	AVL	4044854	3660364	162464	162428	4
		RB	4078227	3686234	135913	136072	0
		Sqz	4093624	3709409	183833	178624	26
75	10000	AVL	4113286	3723323	164820	163819	5
		RB	4147498	3749549	137838	137439	0
		Sqz	4162408	3774816	188784	182678	48
76	10000	AVL	4182145	3790084	167563	167946	6
		RB	4216884	3815573	140085	140243	1
		Sqz	4230699	3838334	189966	184466	67
77	10000	AVL	4251859	3854803	170301	169419	14
		RB	4286317	3879572	142388	141337	2
		Sqz	4299732	3902198	191744	187497	82
78	10000	AVL	4320781	3917812	171877	172026	16
		RB	4355097	3942498	143673	143777	1
		Sqz	4368476	3966060	194340	189878	151
79	10000	AVL	4389439	3981073	173748	174401	24
		RB	4425510	4008716	145227	146306	1
		Sqz	4438146	4031219	192720	192426	141
80	10000	AVL	4459606	4046674	176758	175919	26
		RB	4495747	4073330	147351	147240	3
		Sqz	4507614	4096011	199929	195108	192
81	10000	AVL	4529512	4111482	178479	178999	36
		RB	4566431	4140695	149489	149567	4
82	10000	Sqz	4576974	4159797	202784	196579	264
		AVL	4599319	4178643	181395	180521	43

		RB	4639453	4204576	151242	151189	0
		Sqz	4648921	4226397	205135	200805	230
83	10000	AVL	4659302	4242166	183541	183484	37
		RB	4707530	4272213	153245	153722	5
		Sqz	4716554	4290947	208383	202323	297
84	10000	AVL	4739781	4307034	186076	185495	61
		RB	4777446	4336525	155147	155241	5
		Sqz	4786689	4355768	210833	204517	297
85	10000	AVL	4810614	4373062	188633	187030	56
		RB	4847820	4402564	157644	157011	9
		Sqz	4858963	4421673	213035	207801	344
86	10000	AVL	4881579	4438810	189957	190114	62
		RB	4918714	4468495	159003	159124	7
		Sqz	4927501	4488871	216314	211110	309
87	10000	AVL	4951825	4505310	191961	192227	75
		RB	4989865	4534372	160718	161420	5
		Sqz	4998317	4552965	218088	212571	272
88	10000	AVL	5024187	4570446	194005	194877	68
		RB	5061837	4601672	162995	163039	5
		Sqz	5068550	4618207	220637	214995	282
89	10000	AVL	5094548	4636813	196953	196710	76
		RB	5132908	4668861	164563	165052	5
		Sqz	5140016	4685895	223765	217978	228
90	10000	AVL	5166174	4704259	199287	199829	76
		RB	5204813	4734988	166840	167089	3
		Sqz	5210974	4751902	226231	220433	212
91	10000	AVL	5237125	4770009	201660	201564	76
		RB	5276153	4803516	168598	168978	0
		Sqz	5282255	4818782	229394	222924	182
92	10000	AVL	5309520	4837464	204170	204024	58
		RB	5348420	4870463	170765	170842	3
		Sqz	5353917	4885279	231544	225498	135
93	10000	AVL	5380980	4903073	205827	205952	40
		RB	5420543	4936690	172111	172704	1
		Sqz	5425192	4952664	234317	228538	117
94	10000	AVL	5453474	4970968	208129	208225	49
		RB	5492535	5004565	174361	174791	7
		Sqz	5496833	5018731	237142	230292	84
95	10000	AVL	5525229	5039242	211427	210634	37
		RB	5565257	5073584	176630	176668	2
		Sqz	5568662	5086214	240256	232776	67
96	10000	AVL	5597716	5106004	213722	212497	22
		RB	5637122	5139803	179056	178330	0
		Sqz	5640837	5152781	241583	235692	44
97	10000	AVL	5670371	5172944	214982	215137	23
		RB	5709736	5208624	180426	180913	2
		Sqz	5712792	5221205	244780	238878	39
98	10000	AVL	5742655	5240887	217457	217801	18
		RB	5783465	5278281	182414	182795	0
		Sqz	5785475	5288105	246837	240904	23
99	10000	AVL	5816031	5308351	219288	219886	10
		RB	5856598	5345455	183640	184470	0
		Sqz	5857423	5356620	250707	243562	14
100	10000	AVL	5888373	5377234	222524	222210	5
		RB	5929308	5413320	186754	186324	0
		Sqz	5930966	5425007	253761	246050	15
101	10000	AVL	5961438	5448068	224886	224544	3
		RB	6002672	5483608	188209	188733	0
		Sqz	6002253	5492335	256759	248457	8
102	10000	AVL	6034666	5513652	227247	226628	1
		RB	6076517	5551098	190546	190248	0
		Sqz	6076083	5580765	258179	251381	5
103	10000	AVL	6107522	5582735	229709	228953	2
		RB	6150514	5620460	192413	192203	0
		Sqz	6149133	5628233	261078	252916	2
104	10000	AVL	6181471	5651512	231714	231343	3
		RB	6223362	5689281	193988	194273	0
		Sqz	6222227	5696576	263278	255619	2
105	10000	AVL	6254965	5719677	234217	232944	1
		RB	6296932	5757531	196611	195561	0
		Sqz	6295840	5766003	266619	258309	1
106	10000	AVL	6328613	5789201	236679	235890	0
		RB	6371567	5827897	198063	198604	0
		Sqz	6369900	5833768	268977	260345	0
107	10000	AVL	6402496	5857673	238533	237695	0
		RB	6444836	5894658	199917	199402	0
		Sqz	6442427	5902874	271464	263413	0
108	10000	AVL	6476318	5926554	240773	240369	0
		RB	6520293	5965391	201849	202266	0
		Sqz	6516212	5971677	274011	265749	0
109	10000	AVL	6549417	5995010	243289	242403	0
		RB	6595693	6036782	203896	203670	0
		Sqz	6590589	6042416	276444	269623	0
110	10000	AVL	6624268	6066177	244959	245578	0
		RB	6669006	6105717	205158	206839	0

111	10000	Sqz	6664078	6111082	280506	270548	d
		AVL	6696452	6135716	248644	247051	d
		RB	6745177	6177176	208506	207482	d

Przedstawiony rodzaj drzewa binarnego ma jednak wadę – musi mieć większego rozmiaru wskaźnik równoważenia. Dla drzew AVL ten wskaźnik może być zapisany w dwóch bitach; dla drzew czerwono-czarnych w jednym bicie; dla proponowanego rodzaju musi być wystarczającego rozmiaru, aby móc zapisać rozmiar poddrzewa. Jednak przy użyciu drzew czerwono-czarnych oraz AVL dla realizacji algorytmów: wyszukiwanie numeru węzła według klucza oraz wyszukiwanie węzła według numeru, potrzebna jest dodatkowa informacja przechowująca ilość lewych potomków. Taka dodatkowa informacja nieco komplikuje algorytm rotacji dla tych drzew. W proponowanym drzewie binarnym dla realizacji algorytmów: wyszukiwanie numeru węzła wg klucza oraz wyszukiwanie węzła wg numeru, nie są potrzebne dodatkowe informacje.

7. Wnioski.

Przedstawiony został nowy rodzaj drzewa binarnego, posiadający następujące wady i zalety:

Wady

- Potrzebuje większego wskaźnika równoważenia.

Zalety

- Pozwala na lepszą samoorganizację drzewa ocenianą jako średnie oczekiwany czas wyszukiwania.
- Nie potrzebuje dodatkowych pól dla realizacji algorytmów związanych z numerem porządkowym w drzewie.

8. Literatura.

1. A.V.Aho, J.D.Ullman: "Projektowanie i analiza algorytmów komputerowych", PWN, 1983
2. S.Baase: "Computer algorithms", Addison-Wesley, 2000
3. L.Banachowski, K.Diks, W.Rytter: "Algorytmy i struktury danych", WNT, 1996
4. L.Banachowski, A.Kreczmar: "Elementy analizy algorytmów", WNT 1978
5. J.Bentley: "Perleki oprogramowania", WNT, 1992
6. T.H.Cormen, Ch.E.Leiserson, R.L.Rivest: "Wprowadzenie do algorytmów", WNT, 1997
7. D.Harel: "Rzecz o istocie informatyki", WNT, 1992
8. D.E.Knuth: "Sztuka programowania", WNT, 2002
9. W.Lipski: "Kombinatoryka dla programistów", WNT, 1989
10. W.Niklaus: "Algorytmy + struktury danych = programy", WNT, 2002
11. R.Sedgewick: "Algorithms", Addison-Wesley, 1983
12. R.Sedgewick: "Algorytmy w C++", RM, 1999
13. M.Systo: "Algorytmy", WSiP, 1997
14. R.J. Wilson, Wprowadzenie do teorii grafów, PWN 1985
15. P.Wróblewski: "Algorytmy struktury danych i techniki programowania, Helion, 1997
16. G.M. Adelson-Velskii, E.M. Landis. "An algorithm for the organization of information", 1962
17. D. Sleator, R. Tarjan. "Self-adjusting Binary Search Trees", 1985
18. "Symmetric binary B-trees. Data structure and maintenance algorithms", 1972
19. L.J. Guibas, R. Sedgewick. "A diochromatic framework for balanced trees", 1978
20. <http://www.cs.auckland.ac.nz/software/AlgAnim/AVL.html>
21. http://www.cs.auckland.ac.nz/software/AlgAnim/red_black.html
22. <http://www.findanyisp.com/glossary/Binary+Tree.html>
23. <http://webpages.ull.es/users/jrriera/Docencia/AVL/AVL%20tree%20applet.htm>
24. http://www.delorie.com/gnu/docs/avl/libavl_276.html
25. <http://www.cs.mcgill.ca/~cs251/OldCourses/1997/topic19/>
26. Otoo, Effah. "Red-Black Balanced Trie Hashing", (1995)
27. S. Nilsson, M. Tikkanen. "An Experimental Study of Compression Methods for Dynamic Tries", Algorithmica, V33, N1, 2002

