1837

1837

GEOMETRYA WYKREŚLNA.

GEOMETRYA WYKREŚLNA

wraz z zastósowaniem

do teoryi cieniów i wolnéj perspektywy

dla użytku

WYŻSZYCH SZKÓŁ REALNYCH

przez

DR. DANIELA WIERZBICKIEGO
adjunkta obserwatoryum astronomicznego krakowskiego.

CZĘŚĆ PIERWSZA
z 18 tablicami.

KRAKÓW.
Nakładem Adolfa Dygasińskiego i Spółki.
1875.

W drukarni dra Gumplowicza pod zarz. Stanisława Gralichowskiego.

SPIS RZECZY

zawartéj

w części pierwszej geometryi wykreślnej.

ROZDZIAŁ I.

Sposoby wyznaczania położenia punktu, prostéj i płaszczyzny, z osobna i w związkach między sobą.

ROZDZIAŁ II.

Nauka o kładach, obrotach i zmianie płaszczyzn rzutów.

ROZDZIAŁ III.

ROZDZIAŁ IV.

Wielościany, ich rzuty, przekroje i przecięcia wzajemne.

PRZEDMOWA.

Zaszczycony zaufaniem i zachęcony przez Wysoką c. k. Radę Szkolną Krajową, wziąłem się do napisania „Geometryi wykréślnéj“ w ramach zakreślonych przepisami organizacyjnemi dla wyższych szkół realnych. Trudności, z jakiemi walczyć musi każdy piszący podręczniki w szkołach używać się mające, znane mi są z praktyki własnéj, i nie bez obawy téż podjąłem się téj pracy, zwłaszcza, że pierwsza miała to być książka szkolna, w ojczystym języku przedmiot ten traktująca. Ale myśl, że praca moja bezwątpienia pociągnie za sobą i zachęci znawców i miłośników tego przedmiotu do napisania czegoś lepszego, zniewoliła mię do ogłoszenia drukiem tego, co w autografach własnych lub rękopisach posiadałem. Książką tą chcę przyjść w pomoc początkującym w tym przedmiocie, a przedewszystkiem uczniom, dla których wykład szkolny skutkiem rozmaitego ich uzdolnienia nie zawsze wystarcza, a w każdym razie wymaga powtórzenia go z tą ścisłością, z jaką prowadzony był w szkole. Jak się z zadania wywiązałem, niech znawcy osądzą, zwłaszcza ci, których długoletnie doświadczenie w zawodzie nauczycielskim dostarczyć może trafnych i pożytecznych wskazówek co do nauczania przedmiotu tak ważnego, jakim jest „Geometrya wykreślna“ dla ucznia, mającego się w przyszłości oddać zawodowi technicznemu. Tym więc znawcom ocenę méj pracy z spokojem oddaję, bo mam niezłomną wiarę, że takowa popłynie z serca i dobréj woli dla sprawy publicznéj, a więc z korzyścią dla uczącéj się młodzieży, a przytem i dla następców, których poczet przypadkowo otworzyć mi przyszło.

Wreszcie uważam sobie za miły obowiązek, złożyć tu serdeczne podziękowanie szanownemu nakładcy za gotowość, z jaką, nie szczędząc kosztów dość wielkich, a dbając tylko o porządne a uczciwe przeprowadzenie rzeczy, podjął się nakładu téj książki.

Kraków w styczniu 1875.

Autor.

ROZDZIAŁ I.

Sposoby wyznaczania położenia punktu, prostéj i płaszczyzny, z osobna i w związkach między sobą.

§. 1.

Cel i zadanie geometryi wykreślnéj.

Geometrya wykreślna (Géométrie descriptive, — die darstellende Geometrie) jest umiejętną podstawą wszelkich dokładnych rysunków. Figury i rysunki, jakie kréślimy na mocy prawd geometryi elementarnéj, są, prócz figur płaskich, kréślone po większéj części dowolnie i bez żadnéj prawie reguły, z wyjątkiem téj, którą nazywają smakiem lub gustem; to téż figury będące przedmiotem traktowania geometryi w przestrzeni, czyli stereometryi, a których rysunki nie są czém inném, jak tylko widokami wykonanymi według ugody wzajemnéj, są pozbawione częstokroć wszelkiéj dokładności. I tak, chcąc np. przedstawić rysunkiem walec opisany na kuli według sposobów przyjętych w stereometryi, kréślimy koło, które ma nam wyobrażać kulę, i na niém opisujemy prostokąt; mamy więc tu tylko widok tego, cośmy przedstawić zamierzyli, ale widok zupełnie niedokładny, nie dający nam należytego pojęcia o rzeczy przedstawionéj, i wymagający do należytego zrozumienia téjże przywołania w pomoc wyobraźni naszéj. Rysunek zwyczajny jest zupełnie nieprzydatnym, a przynajmniéj wielce niekorzystnym, zwłaszcza w zastósowaniu go do życia praktycznego, a więc np. gdzie idzie o maszynę lub budowlę, któréj różne składowe części przedstawić chcemy lub potrzebujemy; architekt bowiem lub inżynier robiąc rysunek tychże, nie może się zadowalniać ich widokiem, ale dbać musi o to, iżby z rysunku takiego mógł za pomocą cyrkla i kątomiaru wziąść wymiary dokładne wszystkich części, w skład rzeczy rysunkiem przedstawionéj wchodzących, czyli, iżby z pomocą rysunku tego mógł w razie potrzeby skonstruować też maszynę lub budowlę z wszelką ścisłością i dokładnością. Nie znając sposobów rysunkowych tym wymogom odpowiadających, pozostawałoby mu tylko sporządzić model z drzewa, metalu lub gipsu, która to rzecz jest zbyt rozwlekłą i kosztowną.

Brakom i niedogodnościom, jakie nastręcza zwyczajny rysunek linearny, zaradza geometrya wykreślna. Uczy ona bowiem, jak utwory przestrzenne, czyli ciała mające trzy wymiary, tj. szerokość, długość i wysokość przedstawić na jednéj płaszczyznie rysunkowéj, a więc papierze, tablicy itp., mającéj tylko dwa wymiary tj. szerokość i długość, tak, iżby nietylko oku naszemu był wyraźny obraz przedmiotu danego przedstawiony, ale co większa, iżby z niego prawdziwe wymiary tegoż, kształt, położenie i związki wzajemne w jego częściach składowych z jak największą dokładnością poznane i ocenione być mogły.

Mimo, że nauka ta po nasze czasy nie wiele lat bytu sobie liczy, gdyż pierwszy raz systematycznie jako umiejętność wykładaną ona była w szkole normalnéj paryzkiéj w roku 1795 przez Kaspra Monge, który jeżeli nie pierwszy do życia ją powołał, to przynajmniéj pierwszy był organizatorem téj nauki, znanéj poprzednio pod nazwą *Stereotomii,* a pierwsze dzieło w tym przedmiocie ukazało się również w tymże czasie — to przecież nauka ta dzisiaj zajmuje wcale poczesne stanowisko w rzędzie umiejętności technicznych, i słusznie uważaną być może za niezbędną dla każdego wykształconego technika. Nią się posługuje i na niéj się wspiera wiele innych sztuk i umiejętności, jak perspektywa, gnomonika, architektura, budownictwo, mechanika, kamieniarstwo itp. A prócz tego, konstrukcya ścisła w wykonywaniu rozlicznych zadań zastępując nam w niéj miejsce tego, czego w geometryi analitycznéj dostarcza rozbiór zrównań, prócz praktycznego swego użytku nie tylko wzmacnia za pomocą swéj metody nasz sąd i pogląd, ale także wpływa wielce korzystnie na rozwinięcie zmysłu matematycznego, wprowadzając go na tory zastósowane.

§ 2.

Wiadomości przygotowawcze.

Geometrya wykreślna, któréj nauka, podobnie jak i innych działów geometryi, rozpada się na objaśnienia, twierdzenia, zadania i dowody, wymaga znajomości prawd geometryi elementarnéj, zwłaszcza zaś stereometryi. Aby więc późniéj oszczędzić sobie dosłownego a częstego tychże prawd przytaczania, notujemy tu najważniejsze z nich, a mianowicie tyczące się linij prostych i płaszczyzny, z uwagą, że dla skrócenia linie proste krótko prostémi zwać będziemy.

1. Płaszczyzna powstaje przez ruch prostéj przecinającéj inną prostą, a równoległéj stale do kierunku danego, albo też przecinającéj dwie proste do siebie równoległe lub również z sobą się przecinające.
2. Płaszczyzna jest ściśle wyznaczoną za pomocą dwóch prostych do siebie równoległych lub z sobą się przecinających, albo też za pomocą trzech punktów nie leżących w jednym kierunku, albo wreszcie za pomocą prostéj i punktu zewnątrz niéj leżącego.
3. Prosta z płaszczyzną przecinać się może tylko w jednym punkcie.
4. Prosta leży na płaszczyznie, jeżeli z nią ma dwa punkta wspólne, albo też tylko jeden punkt, ale natomiast jest równoległą do innéj prostéj na téjże płaszczyznie leżącéj.
5. Jeżeli kilka prostych są prostopadłémi do innéj prostéj w jednym i tym samym punkcie, wtedy leżą one w jednéj płaszczyznie prostopadłéj do téjże prostéj. Albo inaczéj: jeżeli obrócimy kąt prosty około jednego z jego ramion, drugie ramię opisze płaszczyznę do pierwszego prostopadłą.
6. Jeżeli prosta jest prostopadłą do dwóch innych przez jéj spodek idących a na płaszczyznie położonych prostych,

wtedy jest prostopadłą i do saméjże płaszczyzny; i nawzajem, — jeżeli prosta jest prostopadłą do płaszczyzny, jest także prostopadłą do każdéj prostéj przez jéj spodek idącéj a na płaszczyznie poprowadzonéj.

7. Z punktu danego na płaszczyznie jednę tylko prostopadłą do téjże wyprowadzić, zaś z punktu nad płaszczyzną danego jednę tylko prostopadłą spuścić można.
8. Przez prostą prostopadłą do płaszczyzny przesunąwszy płaszczyznę, ta ostatnia prostopadłą będzie do pierwszéj płaszczyzny; zaś przez prostą, pochyłą względem płaszczyzny można tylko jednę płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny danéj przesunąć.
9. Dwie proste prostopadłe do jednéj i téj saméj płaszczyzny, są do siebie równoległe.
10. Jeżeli jedna z dwóch prostych równoległych jest prostopadłą do płaszczyzny, to i druga prostopadłą być musi; nawzajem, jeżeli dwie lub więcéj prostych stoją prostopadle do jednéj płaszczyzny, wtedy te proste muszą być do siebie równoległe.
11. Prosta równoległa do innéj prostéj a położonéj na płaszczyznie jest także równoległą i do saméjże płaszczyzny.
12. Jeżeli dwie proste, przecinające się z sobą są równoległe do płaszczyzny, to płaszczyzna przez nie przesunięta, także do téjże jest równoległą.
13. Dwie płaszczyzny przecinać się z sobą mogą tylko w jednéj prostéj.
14. Trzy płaszczyzny nie przechodzące przez jednę i tę samą prostą, przecinają się w trzech prostych albo do siebie równoległych, albo schodzących się w jednym punkcie; w tym ostatnim razie mówimy, że trzy płaszczyzny przecinają się w jednym punkcie.
15. Prosta przecięcia się dwóch płaszczyzn prostopadłych do trzeciéj — jest także do téj ostatniéj prostopadłą.
16. W punkcie obranym na przecięciu się dwóch do siebie prostopadłych płaszczyzn wystawiwszy prostopadłą do jednéj z nich, prostopadła ta paść musi na drugą płaszczyznę.

17. Jeżeli prosta jest prostopadłą do dwóch płaszczyzn, wtedy płaszczyzny te muszą być do siebie równoległe.
18. Jeżeli prosta jest równoległą do dwóch płaszczyzn, wtedy jest równoległą także i do prostéj przecięcia się tych płaszczyzn, i odwrotnie.
19. Płaszczyzna stojąca prostopadle do dwóch przecinających się płaszczyzn, jest także prostopadłą do ich wspólnego przecięcia, i odwrotnie.
20. Dwie płaszczyzny równoległe, przecięte trzecią, dają przecięcia do siebie równoległe.
21. Dwie płaszczyzny są do siebie równoległe, jeżeli przesunięte są przez dwa kąty, których ramiona są do siebie równoległe.
22. Płaszczyzna przesunięta przez dwie proste, przecinające się z sobą a równoległe do płaszczyzny danéj, jest także do téj ostatniéj równoległą.
23. Płaszczyzna prostopadła do jednéj z dwóch do siebie równoległych płaszczyzn, jest prostopadłą także i do drugiéj; nawzajem, jeżeli jedna z dwóch równoległych płaszczyzn jest prostopadłą do trzeciéj, wtedy i druga prostopadłą być musi.
24. Jeżeli trzy płaszczyzny stoją do siebie prostopadle, wtedy przecięcie dwojga z nich stoi prostopadle do trzeciéj płaszczyzny, wszystkie zaś trzy proste przecięcia są wzajem do siebie prostopadłe.
25. Z punktu obranego na prostéj przecięcia dwóch płaszczyzn poprowadziwszy dwie prostopadłe do tegoż przecięcia, z którychby atoli jedna leżała na jednéj, druga na drugiéj płaszczyznie, to kąt płaski między témi prostopadłémi zawarty, jest miarą nachylenia danych dwóch płaszczyzn względem siebie.

§ 3.

Sposoby wyznaczania położenia punktu w przestrzeni.

Aby położenie punktu danego w przestrzeni wyznaczyć, odnosimy go zwykle albo do trzech innych punktów znanych z położenia swego, albo do trzech płaszczyzn. I tak, mając trzy punkta *a, b, c* dane lub wiadome z położenia swego np. trzy narożniki pokoju, to położenie jakiegokolwiek czwartego punktu *d* w przestrzeni będzie znaném, czyli trafimy zawsze do tego punktu, jeżeli znać będziemy odległość jego od każdego z tamtych trzech; bo wiedząc, że odległość punktu *d* od punktu *a* wynosi np. 5 stóp, od punktu *b* stóp 8, zaś od punktu *c* stóp 9, to w punktach *a*, *b* i *c* umocowawszy sznurki długości odpowiedniéj odległościom powyższym i takowe wyprężywszy aż do wzajemnego zejścia się ich drugich końców ze sobą, właśnie ten punkt, w którym się one zejdą, będzie miejscem szukaném dla punktu *d*, gdyż położenie jego odpowiada warunkom zadania, tj. leży w odległościach danych od punktów *a*, *b, c.*

Podobnież wyznaczyć można położenie punktu w przestrzeni, znając jego odległość od trzech z sobą się przecinających płaszczyzn, a nachylonych ku sobie bądźto pod jakimkolwiek kątem, bądź téż co korzystniéj, prostopadłych do siebie, z których jedna jest poziomą, a tém samém dwie inne pionowémi. I tak, jeżeli ten punkt od pierwszéj płaszczyzny pionowéj odległym jest o dwa metry, znajduje się oczywiście gdzieś na płaszczyznie ustawionéj równolegle w odstępie dwóch metrów od pierwszéj płaszczyzny pionowéj; jeżeli daléj nam wiadomo, że od drugiéj płaszczyzny pionowéj jest o 3 metry odległy, to musi on także leżeć gdzieś na nowéj płaszczyznie w odstępie 3 metrów równolegle do drugiéj płaszczyzny pionowéj przesuniętéj; znajduje się więc dotąd równocześnie na dwu płaszczyznach, a zatém na ich wspólném przecięciu, czyli gdzieś na prostéj przecięcia. Jeżeli wreszcie ten punkt od płaszczyzny pozioméj jest o metr odległy, leżeć on będzie na płaszczyznie równoległéj do płaszczyzny poziooméj, w wysokości jednego metra przesuniętéj; a że leży on także na prostéj przecięcia dwóch pierwszych płaszczyzn, zatem będzie na przecięciu się téj prostéj z płaszczyzną równoległą do płaszczyzny poziooméj, a któreto przecięcie jest punktem.

Z pomiędzy wielu jeszcze innych, takich i tym podobnych sposobów wyznaczania położenia punktu w przestrzeni, a którymi obszernie zajmuje się geometrya analityczna trójwymiarowa, ostatni sposób ma zastosowanie swoje w geometryi wykreślnéj, z tém jednak ważném uproszczeniem, że zamiast odnoszenia punktu do trzech płaszczyzn, odnosimy go tu zwykle tylko do dwóch do siebie prostopadłych, poziomej i pionowéj, i to zapomocą rzutów, — z którego to powodu naukę tę także metodą albo umiejętnością rzutów (science des projections, — die Projectionslehre) nazywają. Nim atoli przejdziemy do właściwego traktowania rzeczy, poprzedzić je musimy niektórémi objaśnieniami.

§ 4.

Krótka nauka o rzutach prostokątnych, odniesionych do prostéj stałéj lub jednéj płaszczyzny.

Na linią prostą np. MN (fig. 1), któréj położenie jest oznaczoném, z punktów $ABCD$, leżących w téj saméj z prostą MN płaszczyznie, a stojących względem siebie bądźto w odosobnieniu, bądź téż należących do jakiéjkolwiek innéj prostéj lub krzywéj linii, spuściwszy prostopadłe Aa, Bb, Cc, Dd, spodki tych prostopadłych tj. punkta a, b, c, d, jakotéż ich długości, wyznaczą nam dokładnie położenie punktów $ABCD$. Odciąwszy bowiem na innéj prostéj odległości wzajemne tych spodków, i z tak otrzymanych punktów wystawiwszy do téjże prostéj prostopadłe, równe co do długości odpowiednim prostopadłym Aa,Bb,Cc, otrzymamy nowe punkta A,B,C, które względem téj prostéj będą w takiém samém położeniu, w jakiém były względem MN, a następnie i nowe linie łączące te punkta, jak BC i $DEFG$, będą równe poprzednim i również tego samego położenia względem téj prostéj, w jakiém były względem MN. Spodki a, b, c.... prostopadłych Aa, Bb, Cc.... zowią się rzutami punktów danych A,B,C... (die Projection, — projection), prosta bc zwie się rzutem prostéj BC, zaś dg rzutem krzywéj $DEFG$, wreszcie prostopadłe same Aa, Bb, Cc,.... zowią się liniami rzucającémi (die projicirende Linie, — ligne projetante). A więc: rzutem punktu na prostą daną, zowiemy spodek czyli punkt przecięcia się prostopadłéj, z punktu danego do téjże prostéj poprowadzonéj.

Téj metody rzutów używa się często w rysunkach, a mianowicie tam, gdzie idzie o przeniesienie punktów, linij i w ogóle jakichbądź figur płaskich z jednego rysunku na drugi.

Zadanie 1. Mając daną prostą stałą *MN* czyli linią rzutów, tudzież w jéj płaszczyznie wielokąt jakikolwiek, znaleść jego rzut a następnie figurę tę z linii *MN* przenieść na inną, i to albo 1) w wymiarach tych samych, 2) w wymiarach zwiększonych lub 3) w wymiarach zmniéjszonych.

Aby położenie punktu było wyznaczoném, trzeba więc mieć dany jak widzieliśmy jego rzut i długość linii rzucającéj. Jeżeliby bowiem danym był tylko jego rzut, np. *a*, chodziło zaś o znalezienie punktu *A*, którego on jest rzutem, to jasna, że wprawdzie gdzieś na prostopadłéj *Aa* z *a* do *MN* wyprowadzonéj leżeć on musi, gdzie atoli, nie wiemy, i mówimy wtedy, że prostopadła *Aa* jest m i e j s c e m g e o m e t r y c z n é m (der geometrische Ort, — lieu géométrique) punktu szukanego, tj. miejscem, na którém punktu tego szukać należy, a znajdzie się je, jeżeli będzie daną długość *Aa*.

Również tak samo rzecz się ma i z rzutem np. *bc* prostéj *BC*. Takowy mając tylko dany, położenia prostéj *BC* nie znajdziemy, wiedzieć tylko będziemy, że leżeć ona musi gdzieś między dwiema prostopadłémi z *b* i *c* do *MN* wyprowadzonémi, tak, iż znów płaszczyzna między niémi zawarta jest miejscem geometryczném linii szukanéj; jeden koniec prostéj szukanéj leżeć musi wprawdzie na jednéj, drugi na drugiéj prostopadłéj, gdzie atoli, — a więc jakie jest położenie téj prostéj i jaka jéj wielkość, — dowiemy się dopiero, jeżeli będą dane długości obu linij rzucających *Bb* i *Cc*.

Co się tyczé stósunku zachodzącego między prostą daną a jéj rzutem, to widzimy:

1) że jeżeli linie rzucające *Aa* i *Bb* (Fig. 2) punktów końcowych prostéj *AB* są sobie równe, wtedy tworzą one z prostą *AB* i jéj rzutem *ab* prostokąt, w którym $AB = ab$, jakotéż $AB \parallel ab$, tj. jeżeli prosta dana jest równoległą do linii rzutów *MN*, wtedy jéj rzut równa się saméjże prostéj danéj.

2) Jeżeli linie rzucające *Cc* i *Dd* są nierówne, wtedy figura *CcDd* jest trapezem, w którym $cd < CD$ tj., jeżeli prosta dana jest pochyłą względem linii rzutów, wtedy rzut jéj jest od niéj mniejszym.

3) Jeżeli prosta dana *EF* stoi prostopadle do linii rzutów, obie linie rzucające schodzą się z nią samą, zaś spodki ich padają na siebie, czyli rzutem prostéj w takim razie jest punkt.

Metoda ta rzutów odniesionych do prostéj stałéj *MN* jest bardzo ograniczoną, może bowiem być użytą tylko tam, gdzie idzie o rzuty punktów lub linij leżących z prostą *MN* w téj saméj płaszczyznie; zupełnie zaś zastósować się nie da przy szukaniu rzutów punktów lub linij leżących w różnych płaszczyznach, lub téż szukaniu rzutów brył i powierzchni. W przypadkach takich zamiast linii rzutów, użytą już być musi płaszczyzna rzutów (die Projectionsebene, — plan de projection.

I tak, jeżeli płaszczyzna *PQ* (Fig. **3**) przedstawia nam płaszczyznę rzutów, i jeżeli zewnątrz niéj leży punkt *A*, to spuściwszy z niego prostopadłą *Aa* na płaszczyznę, spodek jéj czyli punkt *a* spotkania się jéj z płaszczyzną, będzie rzutem punktu *A* na płaszczyznę *PQ*. Ponieważ w tém rozumieniu rzut punktu zawsze już nadal pojmować będziemy, zatém powiedzieć możemy: rzutem punktu nazywamy spodek prostopadłéj spuszczonéj z punktu danego na płaszczyznę.

Wiedząc, jak się znajduje rzut punktu, łatwo znaleść rzut prostéj. Jeżeli bowiem daną jest płaszczyzna rzutów *PQ* (Fig. **4**) i prosta *AB* zewnątrz niéj leżąca, dość obrać na niéj dwa dowolne punkta *A* i *B*, poszukać ich rzutów *a* i *b*, a prosta *ab*, łącząca takowe, będzie rzutem prostéj *AB* na płaszczyznę *PQ*.

Dowieść tego możemy w sposób następujący: ponieważ dwie linie rzucające *Aa* i *Bb* są do siebie równoległe (§ 2. Nr. 9), zatém przez nie da się przesunąć płaszczyzna *ABab*; płaszczyzna ta będzie prostopadłą do płaszczyzny *PQ* (§ 2. Nr. 8.), i na niéj będą leżeć wszystkie prostopadłe, spuszczone z punktów *C*, *D*, *E*, dowolnie na prostéj *AB* obranych, zaś spodki tychże prostopadłych leżeć będą na jéj przecięciu się z płaszczyzną *PQ*. Że zaś to przecięcie jest linią prostą (§ 2. N. 13), i na linii téj leżą rzuty *c, d, e,* wszystkich punktów do prostéj *AB* należących, zatém prosta *ab* jest rzutem prostéj *AB*.

Płaszczyzna *ABab* przez prostą *AB* prostopadle do płaszczyzny rzutów przesunięta, zowie się płaszczyzną rzucającą (die projicirende Ebene, — plan projetant) i ma ona tę ważną własność, że na jéj przecięciu się z płaszczyzną rzutów leży rzut prostéj *AB*.

Chcąc na płaszczyznie nakréślić rzut jakiéjś figury płaskiéj np. trójkąta *ABC* (Fig. **5**), szukamy rzutów jego wierzchołków i takowe ze sobą łączymy prostémi. Jeżeli linia dana w przestrzeni jest krzywą np. *DEFG*, to celem znalezienia jéj rzutu obieramy na niéj kilka punktów, między nimi zaś głównie te, w których linia się skręca, jak np. *E* i *G*, szukamy następnie rzutu każdego punktu z osobna, a z połączenia tych rzutów otrzymamy rzut krzywéj.

Aby wreszcie na płaszczyznie wyznaczyć rzut bryły jakiéjkolwiek, szukamy rzutów albo każdéj jéj ściany z osobna, albo téż każdéj krawędzi, albo wreszcie jéj narożników, i w tym ostatnim razie rzuty te łączymy w tym samym porządku, w jakim narożniki przy bryle się znajdują.

Rzuty, o jakich dotąd mówiliśmy, zowią się prostokątnymi (die rechtwinkelige albo orthogonale Projection — projection orthogonale) w odróżnieniu od ukośnych tj. takich, gdzie linia rzucająca punktu jest pochyłą względem linii lub płaszczyzny rzutów. W tym ostatnim razie, jak łatwo pojąć, tak do znalezienia rzutu punktu danego, jak i naodwrót do znalezienia samego punktu za pomocą jego rzutu, danym być musi wyraźnie kąt, pod jakim linia rzucająca poprowadzoną być ma względem linii lub płaszczyzny rzutów. Nadal jednak, mówiąc o rzutach, tylko rzuty prostokątne pod tém mianem rozumieć będziemy.

Na zakończenie pozostaje nam wreszcie zastanowić się nad tém, czy rzut, na jednéj płaszczyznie dany, wystarcza nam do ocenienia ustroju i położenia przedmiotu tym rzutem przedstawionego. Łatwa na to odpowiedź, że nie. Mając bowiem np. na płaszczyznie rzutów dany punkt *a* jako rzut, to najprzód wątpliwém jest, czy rzut ten *a* jest rzutem punktu, czy téż rzutem prostéj prostopadłéj do płaszczyzny rzutów, a prócz tego w pierwszym razie, jak wysoko leżeć ma punkt w przestrzeni ponad płaszczyzną, w drugim zaś, jak długą jest ta prostopadła. Idźmy daléj. Mając na płaszczyznie rzutów daną prostą jako rzut, może ona być rzutem albo prostéj równoległéj do płaszczyzny rzutów, albo pochyłéj, albo też może być rzutem jakiéjbądź figury płaskiéj leżącéj w płaszczyznie prostopadłéj do płaszczyzny rzutów. Jeżeli wreszcie daną jest na płaszczyznie rzutów figura jakaś np. kwadrat jako rzut, to ten znów może być albo rzutem kwadratu równoległego do płaszczyzny rzutów, albo rzutem prostokąta pochylonego pod kątem do płaszczyzny rzutów, albo też rzutem graniastosłupa prostego z podstawą kwadratową, równolegle do płaszczyzny rzutów leżącą; prócz tego w pierwszych dwóch razach niewiadomo, w jakiéj odległości mają leżeć wierzchołki tego kwadratu lub prostokąta od płaszczyzny rzutów, w ostatnim zaś razie, jak wysokim jest graniastosłup. W życiu praktyczném rysunek taki byłby zupełnie niepożytecznym. Przypuściwszy bowiem np., że dany mamy rzut na płaszczyznie pozioméj jakiéjś budowli wykonać się mającéj, to z rzutu tego możemy wprawdzie wedle załączonéj skali rozpocząć budowę, tj. takową na gruncie odznaczyć, fundamenta położyć a nawet i mury cokolwiek podnieść,—atoli wnet nastręczy się pytanie, jak wysoko te mury prowadzić, gdzie dać okna, drzwi i t. p., a o tém wszystkiém z tego jednego rzutu wiedzieć nie będziemy; ten bowiem wskaże nam długość i szerokość tak całości jak i pojedynczych części, ale trzeciego wymiaru tj. wysokości brak tam zupełny. Możnaby wprawdzie temu, tak w tym jak poprzednich przypadkach zaradzić, opisując dokładnie, czego rzutem jest rzut dany i podając długości linij rzucających, — atoli sposób ten byłby naturalnie nieodpowiednim duchowi i zadaniu rysunku, który sam za siebie mówić powinien. Niedogodności téj zaradza użycie dwóch płaszczyzn rzutów, od czego też właściwie dopiéro zaczyna się rzecz Geometryi wykreślnéj.

§. 5.

Wyznaczenie punktu za pomocą rzutów.

W poprzedzającym paragrafie widzieliśmy, że jeżeli danym jest rzut punktu na płaszczyznie, to tém samém daną jest prosta, na któréj punkt w przestrzeni leży. Uważmy teraz, że jeżeli prócz tego danym będzie rzut tegoż punktu na drugą płaszczyznę, byle nierównoległą do pierwszéj, to tém samém będzie znów daną druga prosta, na któréj ten punkt także leżeć musi; leżąc więc równocześnie na dwóch prostych, musi leżeć w punkcie ich wspólnego przecięcia, czyli położenie jego w przestrzeni będzie oznaczoném. Weźmy więc dwie płaszczyzny, przecinające się ze sobą, i to jednę poziomą, drugą pionową, a zatém prostopadłe do siebie. Płaszczyzny te zwać będziemy płaszczyznami rzutów, a mianowicie pozioma *abdc* (Fig. 6.) zwać się będzie płaszczyzną poziomą rzutów (plan horizontal des projections, — die horizontale Projectionsebene), zaś pionowa *efgh*, płaszczyzną pionową rzutów (plan vertical des projections, — die verticale Projectionsebene). Prosta *lk*, w któréj się z sobą te dwie płaszczyzny przecinają, zowie się osią rzutów albo liniją ziemną (l'axe des projections, la ligne de terre, — die Projectionsaxe). Oś rzutów dzieli każdą z tych płaszczyzn na dwie części, a mianowicie poziomą: na przodkową *lkcd* i tylną *ablk*, zaś pionową: na pionową górną *lkef* i dolną *lkgh*. Wyobrażając sobie te płaszczyzny rozciągnięte w nieskończoność, zobaczymy, że podzielą one przestrzeń na 4 części, a mianowicie na ćwiartkę I, będącą między płaszczyzną poziomą przodkową a pionową górną; ćwiartkę II, między płaszczyzną poziomą tylną a pionową górną; ćwiartkę III, między płaszczyzną poziomą tylną a pionową dolną, i wreszcie ćwiartkę IV, między płaszczyzną pionową dolną a poziomą przodkową. Ponieważ wykonywując jakikolwiek rysunek, nie możemy go wykonywać na dwóch do siebie prostopadłych płaszczyznach, bo płaszczyzna rysunkowa jak np. tablica, reisbret itp. jest tylko jedną płaszczyzną, wyobraźmy więc sobie płaszczyznę poziomą rzutów około osi *lk* tak obróconą, iżby jéj część przodkowa padła na płaszczyznę pionową dolną, zaś część tylna padła na płaszczyznę pionową górną, to tym sposobem obie płaszczyzny rzutów utworzą jednę płaszczyznę, na któréj wszystkie rysunki wykonać się dadzą. Zatém na téj jednéj płaszczyznie, a więc na tablicy, reisbrecie itp. poprowadziwszy prostą poziomą, takową uważać możemy za oś rzutów, część płaszczyzny rysunkowéj nad osią będącą za płaszczyznę pionową rzutów, zaś pod osią będącą za płaszczyznę poziomą rzutów, tak, iż zgiąwszy napowrót płaszczyznę rysunkową wzdłuż osi pod kątem prostym, otrzymamy napowrót płaszczyznę pionową i poziomą rzutów.

Przyjmijmy teraz, że dany mamy punkt A (Fig. 7.) w I. ćwiartce przestrzeni (a o téj tylko zawsze, wyjąwszy szczególnéj wzmianki mówić będziemy). Z punktu tego spuściwszy prostopadłą na płaszczyznę pionową rzutów aż do spotkania się z nią w a', punkt a' zwie się rzutem pionowym punktu A (projection vertical, — die verticale Projection); spuściwszy zaś z A prostopadłą na płaszczyznę poziomą rzutów aż do spotkania się z nią w a'', punkt ten a'' zwie się rzutem poziomym punktu A (projection horizontale,— die horizontale Projection). Prostopadłe Aa' i Aa'' zwią się liniami rzucającémi, a mianowicie pierwsza: linią rzucającą pionową, druga: rzucającą poziomą.

Przez te dwie prostopadłe Aa' i Aa'' przesunąwszy płaszczyznę $Aa'a''o$, ta, stojąc prostopadle do obu płaszczyzn rzutów, będzie prostopadłą także do osi lk (§. 2. N. 8, 19), i przetnie też płaszczyzny rzutów w prostych oa' i oa'', także prostopadłych do lk (§. 2, N. 24), a schodzących się z sobą w punkcie o na osi rzutów. Obróćmy teraz (celem otrzymania jednéj płaszczyzny rysunkowéj) płaszczyznę poziomą rzutów około osi tak, iżby padła w przedłużenie pionowéj, to w tym obrocie punkt a'' zakreśli łuk promieniem oa'', zaś prosta oa'' przyjdzie w położenie oa. Ponieważ zaś proste oa' i oa'' są prostopadłe do osi lk we wspólnym punkcie o, i prosta oa'' w czasie obrotu prostopadłą do lk być nie przestaje, po obrocie więc obie te proste utworzą jednę prostą, prostopadłą do osi lk,—a następnie, ponieważ wraz z płaszczyzną poziomą rzutów rzut poziomy a'' punktu A przyszedł pod oś, oba więc rzuty tego punktu znajdują się na jednéj prostopadłéj do osi, a mianowicie rzut pionowy nad, rzut poziomy pod osią (Fig. 8, I.). Wynika stąd nawzajem, że jeżeli dwa jakieś punkta naznaczone jeden nad, drugi pod osią, mają być rzutami punktu w przestrzeni, to leżeć one muszą na wspólnéj prostopadłéj do osi rzutów.

Aby naodwrót, mając dane rzuty punktów tj. a' i a, znaleść w przestrzeni punkt A przedstawiony tymi rzutami, wyobraźmy sobie płaszczyznę, na któréj one są dane, zgiętą w osi pod kątem prostym; następnie w a wystawmy prostopadłą do płaszczyzny pozioméj rzutów, zaś w a' do pionowéj, to na wspólném przecięciu się tych prostopadłych będzie leżał szukany punkt A. Albo krócéj: ponieważ w prostokącie $Aa'oa''$ (Fig. 7.) jest $a'o=Aa''$, zaś $a''o=ao=Aa'$, tj. ponieważ odległość rzutu pionowego a' od osi równa jest odległości punktu A od płaszczyzny pozioméj rzutów, zaś odległość rzutu poziomego a od osi równa jest odległości punktu A od płaszczyzny pionowéj rzutów, — zatém, mając dane rzuty a' i a, dość jest jak widzimy, albo na prostopadłéj z a do płaszczyzny poziméj rzutów wystawionéj, odciąć odległość rzutu pionowego a' od osi rzutów, albo téż na prostopadłéj z a' do płaszczyzny pionowéj rzutów wystawionéj, odciąć odległość rzutu poziomego a od osi, a znajdziemy miejsce punktu A.

Weźmy teraz pod uwagę punkt B położony w II. ćwiartce przestrzeni, tj. między płaszczyzną pionową górną, a poziomą tylną. Z punktu tego, spuściwszy prostopadłe Bb' i Bb'' na płaszczyzny rzutów, będzie b' rzutem pionowym, zaś b'' rzutem poziomym tegoż punktu. Obracając następnie płaszczyznę poziomą rzutów około osi sposobem wiadomym, to jak wiemy, płaszczyzna pozioma tylna padnie na płaszczyznę pionową górną, i równocześnie punkt b'' zakreśli łuk $b''b$, zaś prosta $o'b''$ po obrocie przyjdzie w położenie $o'b$, czyli padnie wzdłuż $o'b'$. Oba więc rzuty punktu B znajdują się znów na wspólnéj prostopadłéj do osi, a prócz tego, co jest cechą punktów położonych w II. ćwiartce przestrzeni, oba te rzuty leżą nad osią, czyli na płaszczyznie pionowéj rzutów (Fig. 8. II). Aby zaś módz odróżnić rzut pionowy od poziomego w takim i tych podobnych przypadkach, oznaczać będziemy nadal zawsze rzut poziomy punktu literą małą, zaś rzut pionowy takąż samą literą, ale z kréską u góry, podczas gdy odpowiedni tym rzutom punkt, w przestrzeni leżący, takąż, ale wielką literą znaczyć będziemy. A więc np. dla punktu jakiegoś D, położonego gdziekolwiek w przestrzeni, oznaczymy rzut pionowy przez d', zaś poziomy przez d.

Prócz dwóch poprzedzających, punkt może mieć jeszcze inne położenie między płaszczyznami rzutów, i tak:

a) Punt *C* znajduje się w III. ćwiartce przestrzeni, tj. między płaszczyzną poziomą tylną a pionową dolną; rzut pionowy w tym razie leży pod osią, zaś poziomy nad osią (Fig. **8**, III.).

b) Punkt *D* znajduje się w IV. ćwiartce przestrzeni, tj. między płaszczyzną pionową dolną, a poziomą przodkową; oba rzuty punktu w tym przypadku leżą pod osią rzutów (Fig. **8**. IV.).

c) Punkt *E* leży na płaszczyznie pozioméj rzutów; tutaj sam punkt jest swoim rzutem poziomym, zaś rzut jego pionowy będzie na osi (Fig. **8**. V.).

d) Punkt *F* leży na płaszczyznie pionowéj rzutów; tu znów sam punkt będzie swoim rzutem pionowym, zaś rzut jego poziomy będzie na osi (Fig. **8**. VI.); — wreszcie

e) Punkt *G* leży na osi rzutów; w tém położeniu oba jego rzuty będą na osi w miejscu, gdzie tenże punkt leży (Fig. **8**. VII.).

Ponieważ od kierunku prostopadłych *oa'* i *oa* (Fig. **7**.) względem osi, zależne są rzuty punktu, a więc i położenie punktu im odpowiadającego w przestrzeni, zatém przyjąwszy kierunek, jaki one w I. ćwiartce przestrzeni mają względem téjże osi, za dodatny, i oznaczywszy dla skrócenia *oa'*, czyli prostą równającą się odległości punktu *A* od płaszczyzny pozioméj rzutów przez *y*, zaś *oa* czyli prostą równającą się odległości tegoż punktu od płaszczyzny pionowéj rzutów przez x, otrzymamy:

dla punktu w I. ćwiartce przestrzeni	$x=+$, $y=+$
„ „ II. „ „	$x=-$, $y=+$
„ „ III. „ „	$x=-$, $y=-$
„ „ IV. „ „	$x=+$, $y=-$
dla punktu leżącego na płaszczyznie poziomej	$x=+$, $y=0$
„ „ „ „ „ pionowéj	$x=0$, $y=+$
zaś dla punktu leżącego na osi	$x=0$, $y=0$

Zadanie 2. Danym jest rzut poziomy punktu położonego w któréjkolwiek z cztérech ćwiartek przestrzeni, jako téż dana jest odległość tegoż punktu od płaszczyzny poziomej rzutów,— znaleść rzut drugi.

Zadanie 3. Znaleść oba rzuty punktu leżącego na płaszczyznie pozioméj rzutów, jeżeli daną jest jego odległość od płaszczyzny pionowéj.

Zadanie 4. Znaleść oba rzuty punktu leżącego na płaszczyznie pionowéj rzutów, mając daną jego odległość od płaszczyzny poziomej.

§. 6.

Wyznaczenie linii prostéj za pomocą rzutów.

Z §. 4. wiemy, że rzutem prostéj na płaszczyznę jest prosta, i że celem znalezienia takowego, dość poszukać rzutów dwóch punktów na prostéj danéj obranych lub danych, i rzuty te wreszcie ze sobą połączyć. Stósując więc tę rzecz teraz do dwóch płaszczyzn rzutów, jeżeli daną jest w przestrzeni prosta MN (Fig. **9**.), obieramy na niéj dwa punkta np. A i B, i szukamy ich rzutu tak poziomego jak pionowego, a prosta mn łącząca ich rzuty poziome a i b będzie poziomym, zaś $m'n'$ łącząca ich rzuty pionowe, będzie rzutem pionowym prostéj MN.

Obróciwszy nakoniec płaszczyznę poziomą rzutów około osi tak, iżby przyszła w położenie płaszczyzny pionowéj, to rzuty powyższe przedstawią się nam jako dwie proste, leżące jedna nad, druga pod osią (Fig. **10**. I). Aby zaś nie być w wątpliwości, która z tych prostych jest rzutem pionowym, a która poziomym, oznaczać będziemy podobnie, jak przy rzutach punktu uczyniliśmy, rzut pionowy dwoma literami małémi ale kreskowanémi, zaś poziomy takiémiż, ale bez krések.

Przez proste rzucające Aa *i* Bb (Fig. **9**.) przesunąwszy jednę, zaś przez Aa' *i* Bb' przesunąwszy drugą płaszczyznę, pierwsza z nich będzie prostopadłą do płaszczyzny pozioméj rzutów, czyli będzie r z u c a j ą c ą p o z i o m ą, druga zaś będzie prostopadłą do płaszczyzny pionowéj rzutów, czyli będzie r z u c a j ą c ą p i o n o w ą. Że zaś każda z nich przechodzi zarazem przez prostą daną MN, wypada stąd, że mając dane rzuty $a'b'$, ab (Fig. **10**.) prostéj AB położonéj w przestrzeni, możemy znaleść zawsze takową, przesunąwszy przez $a'b'$ płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny pionowéj rzutów, zaś przez ab płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny poziomej, a wspólne przecięcie się tych dwóch płaszczyzn będzie miejscem szukaném prostéj AB.

Z figury **8** mamy jeszcze następujące ważne wnioski:

1. Punkt leżący na prostéj danéj np. B ma swoje rzuty na rzutach téjże prostéj, tj. b' leży na $m'n'$, zaś $\bar{b}$ na mn.
2. Aby mieć rzuty punktu należącego do prostéj danéj w przestrzeni, dość do osi rzutów poprowadzić prostopadłą przecinającą rzuty prostéj, a przecięcia te będą rzutami punktu na prostéj danéj leżącego.
3. Jeżeli prosta jest ograniczonéj długości, to rzuty jéj są ograniczone rzutami dwóch jéj punktów końcowych.
4. Aby przez dwa punkta, których rzuty są dane, poprowadzić prostą, czyli wyznaczyć jéj rzuty, łączymy rzuty pionowe obu punktów ze sobą, zaś poziome ze sobą prostemi, które będą rzutami prostéj żądanéj.

Ponieważ prosta dana w przestrzeni może mieć rozmaite położenie względem płaszczyzn rzutów, więc też i jéj rzuty względem osi mogą być rozmaicie ułożone. I tak:

1. Jeżeli prosta dana AB jest prostopadłą do płaszczyzny pozioméj rzutów, wtedy jéj rzut pionowy będzie prostopadłym do osi i równym co do długości saméjże prostéj AB, poziomy zaś będzie punktem (Fig. **10**, II.).
2. Jeżeli prosta dana AB jest prostopadłą do płaszczyzny pionowéj rzutów, wtedy znów rzut poziomy będzie prostopadłym do osi i równym co do długości prostéj danéj, a poziomy punktem (Fig. **10**. III.).
3. Jeżeli prosta AB jest równoległą do płaszczyzny pozioméj rzutów, wtedy rzut jéj pionowy będzie równoległym do osi, zaś poziomy będzie względem téjże osi pod kątem równym kątowi, jaki prosta dana w przestrzeni tworzy z płaszczyzną pionową rzutów, a prócz tego będzie on równym co do długości téjże prostéj danéj (Fig. **10**. IV.).
4. Jeżeli prosta AB jest równoległą do płaszczyzny pionowéj rzutów, wtedy znów rzut poziomy będzie równoległym do osi, pionowy zaś będzie względem téjże osi pod kątem równym kątowi, jaki prosta dana w przestrzeni tworzy z płaszczyzną poziomą rzutów, a prócz tego będzie on równym co do długości téjże prostéj danéj (Fig. **10**. V.).

5. Jeżeli prosta AB jest równoległą do osi rzutów czyli do obu płaszczyzn rzutów, natenczas oba jéj rzuty są równoległe do osi, i oba są równe co do długości prostéj danéj w przestrzeni (Fig. **10**, VI.).
6. Jeżeli prosta leży na jednéj z płaszczyzn rzutów, wtedy na téj płaszczyznie sama jest swoim rzutem a więc i swoją długością prawdziwą, drugi zaś jéj rzut leży na osi (Fig. **10**, VII.).
7. Jeżeli prosta leży na osi rzutów, oba jéj rzuty leżą także na osi (Fig. **10**, VIII.).
8. Jeżeli prosta AB przechodzi przez punkt na osi, to i jéj rzuty oba przez tenże punkt przechodzić muszą (Fig. **10**, IX).
9. Jeżeli prosta AB jest prostopadłą do osi rzutów, wtedy oba jéj rzuty tworzą jednę prostopadłą do osi (Fig. **10**, X.).
10. Jeżeli prosta AB leży w II. ćwiartce przestrzeni tj. między płaszczyzną pionową górną a poziomą tylną, wtedy oba jéj rzuty leżą nad osią rzutów (Fig. **10**, XI.).
11. Jeżeli prosta AB znajduje się w III. ćwiartce przestrzeni tj. między płaszczyzną poziomą tylną a pionową dolną, wtedy jéj rzut poziomy będzie nad-, zaś pionowy pod osią (Fig. **10**, XII.).
12. Jeżeli prosta AB leży w IV. ćwiartce przestrzeni tj. między płaszczyzną pionową dolną a poziomą przodkową, natenczas oba jéj rzuty leżą pod osią rzutów (Fig. **10**, XIII).

Uzasadnienie wszystkich tych przypadków zostawia się uczącym.

Uwaga. Jeżeli, jak to w trzech ostatnich przypadkach miało miejsce, rzut poziomy prostéj przypada nad osią, a więc na płaszczyznie pionowéj rzutów, albo rzut pionowy pod osią, a więc na płaszczyznie pozioméj rzutów, wtedy rzuty te, jako leżące na nieodpowiednich sobie płaszczyznach, kréskami znaczymy.

Zadanie 5. Prosta prostopadła do płaszczyzny poziméj rzutów a długości 2″, jest od płaszczyzny pionowéj o $1^1/_2$″ odległą, dolny zaś jéj koniec od płaszczyzny poziméj o $^3/_4$″ odległym; nakréślić jéj rzuty.

Zadanie 6. Prosta długości $2^1/_2$″ a prostopadła do płaszczyzny pionowéj rzutów, jest od płaszczyzny poziméj o $1^3/_4$″ odległą, koniec jéj zaś bliższy płaszczyzny pionowéj jest od téjże o 0′ odległy; nakréślić jéj rzuty.

Zadanie 7. Prosta długości 2″, a równoległa do osi rzutów leży od płaszczyzny pozioméj rzutów w odległości $1^1/_4$″, zaś od pionowéj w odległości $^1/_2$″; nakréślić jéj rzuty.

Zadanie 8. Prosta długości $1^1/_2$″ leży od płaszczyzny pionowéj rzutów w odległości $1^3/_4$″, i tworzy z płaszczyzną poziomą rzutów kąt 30^0 (45^0, 60^0 itp.); nakréślić jéj rzuty, wiedząc jeszcze, że dolny jéj koniec od płaszczyzny pozioméj rzutów leży w odległości $2^1/_4$″.

Zadanie 9. Cztéry proste poziome, każda długości $2^1/_2$″, których jeden koniec ma wspólny rzut poziomy dla wszystkich, tworzą z płaszczyzną pionową rzutów kąty 0^0, $22^1/_2{}^0$, 30^0, 45^0; pierwsza z nich leży na płaszczyznie pozioméj rzutów, każda zaś następna leży od téjże płaszczyzny o $^1/_2$″ daléj, niźli poprzedzająca; nakréślić rzuty tych prostych.

§ 7.

Rzuty punktu i prostéj na trzech płaszczyznach.

Jak z jednego rzutu nie można nic o kształcie, wielkości i położeniu przedmiotu w przestrzeni powiedzieć, tak znów zachodzą, acz rzadko, przypadki, gdzie i dwa rzuty do tego nie wystarczają. I tak widzieliśmy w §. poprzedzającym, że z dwóch rzutów danych prostéj, można łatwo położenie jéj w przestrzeni wynaleść, a sposób ku temu podany da się we wszystkich wypadkach zastósować, wyjąwszy przypadek przytoczony pod N. 9. a mianowicie ten, gdy prosta jest prostopadłą do osi rzutów. W tym bowiem razie położenie prostéj w przestrzeni, mimo danych jéj dwóch rzutów, będzie nieoznaczoném, bo jakiekolwiek będzie jéj pochylenie względem jednéj z płaszczyzn rzutów, byleby ona była prostopadłą do osi, zawsze oba jéj rzuty będą w wspólnym punkcie prostopadłe do osi. Aby więc w takim przypadku prostą dokładnie za pomocą jéj rzutów wyznaczyć, używamy jeszcze trzeciéj płaszczyzny rzutów, prostopadłéj do obu poprzednich, a zwanéj p ł a s z c z y z n ą p o m o c n i c z ą (die Hilfsebene, — plan auxiliaire) i na niéj wykreślamy rzut prostéj. My nadal jednak płaszczyznę tę, dla odróżnienia od innych płaszczyzn pomocniczych, zwać będziemy p ł a s z c z y z n ą b o c z n ą, rzut zaś na niéj r z u t e m b o c z n y m.

Zacznijmy atoli najprzód od rzutów punktu na trzy płaszczyzny rzutów, a mianowicie od pokazania, jak z danych rzu-

2*

tów pionowego i poziomego, można znaleść rzut boczny punktu. Dane niech więc będą trzy płaszczyzny rzutów, pozioma I., (Fig. **11.**), pionowa II, i boczna III przecinająca się z poziomą w prostéj *by*, zaś z pionową w prostéj *bz*, i punkt dany *A* w przestrzeni. Z punktu tego poprowadziwszy linie rzucające do każdéj z tych trzech płaszczyzn, otrzymamy jego rzut poziomy *a*, pionowy *a'*, boczny zaś *a''*. Przez linie rzucające *Aa* i *Aa'* przesuńmy następnie jednę, przez *Aa'* i *Aa''* drugą, zaś przez *Aa* i *Aa''* trzecią płaszczyznę, to jak wiemy pierwsza z nich tj. *Aa'ao* będzie prostopadłą do *bx*, i przetnie płaszczyznę I i II w prostych *a'o* i *ao* także prostopadłych do *bx*, druga tj. *Aa'o'a''* będzie prostopadłą do *bz* i przetnie płaszczyznę II i III w prostych *a'o'* i *o'a''* także prostopadłych do *bz*, wreszcie trzecia tj. *Aa''o''a* będzie prostopadłą do *by* i przetnie płaszczyznę I i III w prostych *ao''* i *a''o''* prostopadłych do *by*. Obróćmy teraz płaszczyznę I, tj. poziomą około *bx*, zaś III tj. boczną około *bz* i to tak, iżby każda z nich przyszła w przedłużenie pionowéj, to skutkiem tego obrotu wszystkie trzy płaszczyzny rzutów utworzą nam jednę płaszczyznę rysunkową (Fig. **12.**), na któréj rzut pionowy i poziomy tj. *a* i *a'* będą leżały na jednéj prostopadłéj do osi *bx*, którą w tym razie nazywać będziemy osią główną, i podobnież znów boczny z pionowym będą leżały na jednéj prostopadłéj do osi *bz*, którą znów nazywać będziemy osią boczną. Że zaś w prostokącie *Aa'ao* (Fig. **11.**) jest $Aa' = ao$, zaś w prostokącie *Aa'o'a''* jest $Aa' = o'a''$, zatém $a''o' = ao$ tj. odległość rzutu bocznego od osi bocznéj równa się odległości rzutu poziomego od osi głównéj, a stąd wypada, że aby z danych rzutów poziomego i pionowego (Fig. **12.**) znaleść rzut boczny, potrzeba tylko na prostopadłéj, z rzutu pionowego do osi bocznéj poprowadzonéj, odciąć po drugiéj stronie téjże osi część równą odległości rzutu poziomego od osi głównéj, a koniec téj prostopadłéj będzie rzutem bocznym punktu.

Obrót płaszczyzny bocznéj można jeszcze inaczéj wykonać, a mianowicie obrócić ją najprzód około *by* tak, iżby przyszła w przedłużenie poziomej, a następnie obie razem obrócić około *bx* tak, ażeby przyszły w przedłużenie pionowéj W skutek takiego obrotu płaszczyzna boczna leżeć teraz będzie pod osią główną (Fig. **13**.), rzut zaś boczny punktu będzie na jednéj prostopadłéj do osi bocznéj wraz z rzutem poziomym, i to, ponieważ $Aa = a'o$ (Fig. **11**.) i $Aa = a''o''$ czyli $a'o = a''o''$, będzie on w takiéj odległości od osi bocznéj, w jakiéj jest rzut pionowy od osi głównéj. Nadal jednak, mówiąc o rzucie bocznym, rozumieć go zawsze będziemy nie w tém, lecz w powyższém określeniu.

Konstrukcyą szukania rzutu bocznego na rysunkach wykonywa się zwykle w sposób następujący: nakreśliwszy gdziebądź oś boczną prostopadle do osi głównéj, z danych dwóch rzutów a' i a (Fig. **14**.), spuszczamy do niéj prostopadłe $a'b$ i ad, następnie promieniem cd z punktu c zataczamy łuk aż do g, stąd zaś kréślimy prostopadłą do osi głównéj aż do przecięcia się z przedłużoną $a'b$ w punkcie a'', który jest szukanym rzutem bocznym punktu $a'a$.

Tak wiedząc, jak się znajduje rzut boczny punktu z danych rzutów poziomego i pionowego, łatwo teraz zastósować rzecz tę do prostéj. Mając bowiem daną prostą, tj. dany jéj rzut poziomy i pionowy, szukamy rzutów bocznych dwóch punktów na niéj danych lub obranych sposobem powyżéj wskazanym, a prosta łącząca takowe będzie rzutem bocznym prostéj danéj. Zastosujmy to do przypadku, dla któregośmy konieczną potrzebę użycia płaszczyzny bocznéj uznali, czyli do prostéj prostopadłéj względem osi rzutów np. $a'b', ab$ (Fig. **15**.). W jakiéjkolwiek od rzutów danych odległości prowadzimy oś boczną, szukamy następnie punktów a'' i b'', czyli rzutu bocznego punktów $a'a$ i $b'b$, a prosta $a''b''$ będzie rzutem bocznym prostéj danéj. Z rzutu tego bocznego, ponieważ prosta sama będąc prostopadłą do osi, jest tém samém równoległą do płaszczyzny bocznéj, widzimy, że prosta dana rzutami $a'b', ab$ jest pochyloną do płaszczyzny pozioméj pod kątem równym kątowi, jaki rzut $a''b''$ tworzy z osią główną, lub do płaszczyzny pionowéj rzutów pod kątem równym kątowi, jaki tenże rzut $a''b''$ tworzy z osią boczną, a prócz tego jeszcze rzut $a''b''$ jest prawdziwą wielkością prostéj danéj (§. 6. N. 3 i 4).

Konieczność użycia płaszczyzny bocznéj, celem wyznaczenia położenia prostéj w przestrzeni, zachodzi tąkże wtedy, gdy prosta leży wprawdzie jakkolwiek względem osi rzutów, ale natomiast w płaszczyznie prostopadłéj do téjże osi. W tym bowiem razie oba jéj rzuty są także prostopadłe do osi, a mając takowe dane, z pomocą nich, położenia prostéj w przestrzeni wyznaczyć nie można, ale użytą być musi również płaszczyzna boczna, na któréj rzut téj prostéj wykreślony, wskaże nam jéj położenie między płaszczyznami rzutów. Przykłady tego wskazują nam figury **16**. i **17**.

Uwaga. Aby znaleść rzut boczny prostéj, powiedzieliśmy, że obrać trzeba na niéj dwa punkta, i poszukać ich rzutów bocznych. Ta rzecz atoli nie tyczé się prostéj, któréj oba rzuty są prostopadłe do osi, gdyż w tym razie rzuty tych punktów na rzutach prostéj muszą być wyraźnie dane, i z pomocą tychże a nie innych punktów, rzutu bocznego prostéj szukać należy. Wypada stąd jak widzimy, że prosta dana dwoma rzutami prostopadłymi do osi, jest wtedy tylko wyznaczoną co do położenia, jeżeli są dane dwa punkta na niéj leżące.

Zadanie 10. Mając dany rzut boczny i pionowy punktu lub prostéj, znaleść ich rzut poziomy.

Zadanie 11. Mając dany rzut boczny i poziomy punktu lub prostéj, znaleść ich rzut poziomy.

Zadanie 12. Nakréślić rzut boczny prostéj w każdym z przypadków podanych w paragrafie 6.

§ 8.

Ślady linii prostéj.

Śladami (die Spur, — une trace) prostéj nazywamy punkta, w których się prosta przecina z płaszczyznami rzutów. Punkt przecięcia się prostéj z płaszczyzną poziomą rzutów zwie się śladem poziomym prostéj (die horizontale Spur,— trace horyzontale), zaś punkt przecięcia się prostéj z płaszczyzną pionową, zwie się śladem pionowym prostéj (die verticale Spur, — trace verticale).

Zależnie od położenia względem płaszczyzny rzutów, prosta może miéć dwa, jeden, lub nie miéć żadnego śladu. I tak, jeżeli prosta jest równoległą do płaszczyzny poziomėj lub pionowéj rzutów, to ma tylko jeden ślad, a mianowicie, w pierwszym razie pionowy, w drugim poziomy; jeżeli jest prostopadłą do płaszczyzny poziomėj lub pionowéj rzutów, wtedy w pierwszym razie ma ślad tylko poziomy, w drugim tylko pionowy; wreszcie jeżeli prosta jest równoległą do osi rzutów, natenczas żadnego śladu nie ma, nie przecina się bowiem z żadną z płaszczyzn rzutów, jako od nich równoległa.

Aby mając dane rzuty prostéj $a'b'$,ab (Fig. **18**) znaleść np. jéj ślad poziomy, uważmy, że punkt ten leżeć musi na płaszczyznie pozioméj rzutów i na prostéj danéj, a więc, że rzut jego pionowy h' leżeć musi na osi rzutów (§ 5. Lit. c.) i na rzucie pionowym prostéj (§ 6. Wnios. 1.), czyli na ich wspólném przecięciu; co się tyczé rzutu poziomego, to ten znów z rzutem pionowym h' musi być na wspólnéj prostopadłéj do osi rzutów, a że także leżeć ma na rzucie poziomym ab prostéj danéj, a więc będzie w ich wspólném przecięciu, tj. w punkcie h, któryto punkt jest zarazem śladem poziomym prostéj danéj.

W podobnyż sposób wyznaczymy także ślad pionowy prostéj, a mianowicie, skoro ten punkt ma leżeć i na płaszczyznie pionowéj rzutów i na prostéj danéj, zatém rzut jego poziomy v musi być na osi i na rzucie poziomym prostéj, czyli w punkcie ich przecięcia się z sobą; co się zaś tyczé jego rzutu pionowego, to ten znów musząc leżeć i na prostopadłéj do osi rzutów, przez v poprowadzonéj, i na rzucie pionowym prostéj, leżeć musi w ich wspólném przecięciu tj. w punkcie v', któryto punkt jest zarazem śladem pionowym szukanym.

Czytamy stąd: Aby znaleść ślad poziomy prostéj, przedłużamy rzut jéj pionowy aż do przecięcia się z osią, i z punktu tak otrzymanego prowadzimy prostopadłą do téjże osi aż do przecięcia się z rzutem poziomym prostéj w punkcie, który będzie śladem poziomym żądanym. Zaś,

Aby znaleść ślad pionowy prostéj, przedłużamy rzut jéj poziomy aż do osi, i z punktu tak otrzymanego prowadzimy prostopadłą do téjże osi aż do przecięcia się z rzutem pionowym prostéj w punkcie, który będzie śladem pionowym.

Wniosek. Jak, mając dane rzuty prostéj, możemy znaleść jéj ślady, tak znów, mając dane ślady prostéj, łatwo nakréślić jéj rzuty, a tém samém prostą tę wyznaczyć; ślady bowiem prostéj są dwoma punktami na prostéj leżącymi. I tak, jeżeli (Fig. **18**) dane są ślady h i v' prostéj, a chcemy nakréślić jéj rzuty, prowadzimy przez h i v' prostopadłe hh' i vv' do osi, a następnie prowadzimy prostą $h'v'$, która będzie pionowym, i hv, która będzie poziomym śladem prostéj szukanéj.

Zadanie 13. Znaleść ślady prostéj leżącéj w II, III lub IV ćwiartce przestrzeni, i określić, gdzie w każdém z tych położeń prosta przecina się z płaszczyznami rzutów.

Zadanie 14. Znaleść ślady prostéj tak równoległéj jak prostopadłéj do płaszczyzny pozioméj lub pionowéj rzutów.

Zadanie 15. Ile ma śladów prosta leżąca na jednéj z płaszczyzn rzutów i jak się je znajdzie?

Zadanie 16. Nakréślić rzuty prostéj, mając dane oba jéj ślady albo nad osią rzutów, albo pod osią, albo téż pionowy ślad pod osią, zaś poziomy nad osią, i określić położenie tych prostych.

Zadanie 17. Nakréślić rzuty prostéj w I ćwiartce przestrzeni ale tak, iżby oba jéj ślady przypadły nad osią rzutów, albo pod osią.

Podany wyżéj sposób znalezienia śladów prostéj wystarcza we wszystkich możliwych położeniach prostéj, przytoczonych w § 6., wyjąwszy znów przypadku, gdy prosta leży w płaszczyznie prostopadłéj do osi rzutów, czyli gdy oba rzuty prostéj leżą w jednéj prostopadłéj do osi. W tym razie ślady te znaleść możemy za pomocą rzutu bocznego prostéj, a to w sposób następujący:

Mając prostą daną ab', ab (Fig. **19**), szukamy najprzód jéj rzutu bocznego $a''b''$; następnie biorąc pod uwagę tylko płaszczyznę boczną i pionową, postępujemy z rzutami na nich będącymi według reguły podanéj dla płaszczyzn pozioméj i pionowéj, tj., aby znaleść ślad pionowy prostéj danéj, przedłużamy jéj rzut boczny aż do spotkania się z osią (boczną) w punkcie v'', z punktu tego wyprowadzamy prostopadłą do osi (bocznéj) aż do spotkania się z rzutem pionowym prostéj w punkcie v', który będzie śladem pionowym prostéj danéj. Chcąc zaś znaleść ślad poziomy téj prostéj, należałoby, albo poszukać najprzód jéj rzutu na płaszczyznie bocznéj ale obróconéj około osi w przedłużenie płaszczyzny poziroméj, i z tymi dwoma rzutami tj. bocznym i poziomym postąpić jak poprzednio, albo téż, co łatwo uzasadnić, dość jest przedłużyć rzut boczny aż do przecięcia się z osią w punkcie c, następnie z punktu o promieniem oc zatoczyć łuk aż do h'', i wreszcie z h'' wystawić prostopadłą do *oh''* aż do przecięcia się z rzutem poziomym prostéj w punkcie *h*, który jest szukanym śladem poziomym.

Zadanie 18. W płaszczyznie prostopadłéj do osi leży prosta przecinająca płaszczyznę pionową górną i poziomą tylną, albo też poziomą przodkową i pionową dolną, nakréślić rzuty téj prostéj i wyznaczyć jéj ślady.

Zadanie 19. Znaleść ślady prostéj prostopadłéj do osi rzutów.

Zadanie 20. Znaleść ślad boczny prostéj prostopadłéj do osi rzutów, a leżącéj w II, III lub IV ćwiartce przestrzeni.

Uwaga. Dla uproszczenia konstrukcyi w zadaniach ostatnich korzystném jest, zamiast kréślić oś boczną w jakiéjkolwiek odległości od rzutów prostéj, nakréślić takową na rzutach prostéj, czego przykład wskazuje figura **20**, a następnie postąpić, jak powyżéj wskazano.

Jak śladu poziomego i pionowego, tak samo również szuka się śladu bocznego, czyli punktu przecięcia się prostéj danéj z płaszczyzną boczną rzutów. I tak:

Zadanie 21. *Dane są rzuty prostéj, znaleść jéj ślad boczny.*

Mając dane np. rzuty *a'b'*,*ab* prostéj *AB* (Fig. **21**), szukamy jéj rzutu bocznego *a''b''*, co najłatwiéj zrobić, poszukawszy rzutów bocznych śladu poziomego i pionowego, tj. *a''* i *b''*, i takowe ze sobą połączywszy. Biorąc następnie pod uwagę rzut boczny *a''b''* i pionowy *a'b'*, postępujemy z nimi w sposób podobny, w jaki postępowaliśmy przy szukaniu śladu poziomego lub pionowego, tj., aby znaleść ślad boczny téj prostéj, przedłużamy jéj rzut pionowy aż do osi (bocznéj) tj. do punktu *c'* i z punktu tego kréślimy prostopadłą do téjże osi aż do przecięcia się z rzutem bocznym w punkcie *c''*, który jest śladem bocznym żądanym. Ponieważ ślad ten wypadł u nas na płaszczyznie pionowéj, łatwo więc z tego wyrozumieć, że sama prosta spotyka się z płaszczyzną boczną dopiero na jéj przedłużeniu poza płaszczyzną pionową, a nad płaszczyzną poziomą rzutów.

Zadanie 22. Nakréślić rzuty prostéj, któréj ślad poziomy i pionowy leżą oba albo nad osią, albo oba pod osią; albo też poziomy nad, zaś pionowy pod osią; wyznaczyć następnie ich ślad boczny i określić położenie tych prostych między płaszczyznami rzutów.

§ 9.

Wzajemne położenie dwóch prostych w przestrzeni i układ ich rzutów.

Dwie proste w przestrzeni mogą być w trojakiém względem siebie położeniu. Są one albo 1) do siebie równoległe, albo 2) przecinają się wzajemnie, albo wreszcie 3) ani są do siebie równoległe, ani się téż nie przecinają. Chodzi więc o to, jakie położenie rzuty dwóch prostych w każdym z tych trzech przypadków zajmują względem siebie na płaszczyznach rzutów, i jak na odwrót z danych rzutów dwóch prostych można wnioskować o wzajemném położeniu w przestrzeni tychże prostych.

Co do Igo. Twierdzenie: *Jeżeli dwie proste w przestrzeni są do siebie równoległe, to i ich rzuty odpowiednie są także do siebie równoległe.*

Aby mieć rzuty poziome danych dwóch prostych AB i CD (Fig. **22.**), przesuwamy przez nie płaszczyzny rzucające poziome, a przecięcia tychże z płaszczyzną poziomą rzutów, tj. proste ab i cd, będą rzutami poziomymi tychże prostych (§ 4.). Ponieważ zaś te płaszczyzny rzucające są do siebie równoległe, a dwie płaszczyzny równoległe przecięte trzecią (tj. poziomą) dają przecięcia do siebie równoległe (§ 2. N. 20), zatém musi być $ab \parallel cd$. Podobnież dowieść można, że rzuty pionowe $a'b'$ i $c'd'$ tychże prostych będą także równoległe, jako proste przecięcia płaszczyzn rzucających pionowych przez proste AB i CD przesuniętych, z płaszczyzną pionową rzutów. Wynika stąd, 1) że mając nakréślić rzuty dwóch prostych równoległych, kréślimy ich rzuty pionowe równolegle do siebie, zaś poziome do siebie (Fig. **23.**); i 2) że jeżeli nawzajem jest $ab \parallel cd$ i $a'b' \parallel c'd'$, to proste AB i CD w przestrzeni, tymi rzutami przedstawione, są do siebie równoległe.

Wyjątek od téj ostatniéj reguły stanowić mogą dwie proste leżące w płaszczyznach prostopadłych do osi rzutów, a dla których dwie pary rzutów w téj mierze nie wystarczają. Rzuty te bowiem, mimo że są do siebie równoległe, należeć przecież mogą do dwóch prostych nierównoległych, a o tém dopiéro przekonać się można z trzeciéj pary rzutów tj. z rzutów bocznych, które w razie równoległości dwóch prostych w przestrzeni, także muszą być do siebie równoległe, — w przeciwnym zaś razie przecinać się z sobą będą. Przykłady tego wskazane są na figurach **24.** i **25.**

Co do 2go. Twierdzenie. *Jeżeli dwie proste w przestrzeni wzajemnie się przecinają, to ich rzuty odpowiednie także się przecinają, a punkta przecięć tych rzutów leżeć muszą na wspólnéj prostopadłéj do osi.*

Ponieważ punkt przecięcia się dwóch prostych AB i CD w przestrzeni jest wspólnym dla obu prostych, rzuty więc jego leżeć muszą na odpowiednich rzutach obu prostych, a mianowicie, jego rzut poziomy leżeć musi równocześnie na rzucie poziomym jednéj i drugiéj prostéj, a więc w punkcie m (Fig. **26.**) ich przecięcia się z sobą, zaś rzut pionowy na ich rzutach pionowych, tj. w punkcie m'. Że zaś m' i m są rzutami jednego i tego samego punktu M, bo dwie proste tylko w jednym punkcie przecinać się mogą, zatém leżeć one muszą na wspólnéj prostopadłéj do osi.

Co do 3go. Jeżeli wreszcie dwie proste nie są do siebie równoległe, ani się téż przecinają, to ich obie pary rzutów także ani są do siebie równoległe, ani się téż przecinać mogą w punktach leżących na jednéj prostopadłéj do osi. Mogą więc być bądźto tylko rzuty pionowe, bądź téż tylko poziome do siebie równoległe, mogą także rzuty pionowe ze sobą, a poziome ze sobą przecinać się wzajemnie, byle nie w punktach na jednéj prostopadłéj do osi leżących, a mimo tego proste takie w przestrzeni nie są równoległémi, ani się téż z sobą przecinają.

Zadanie 23. Nakréślić rzuty dwóch prostych do siebie równoległych, a leżących w I., II lub III. ćwiartce przestrzeni.

Zadanie 24. Nakréślić rzuty dwóch prostych przecinających się z sobą, tak jednak, iżby rzuty punktu przecięcia leżały oba pod osią, albo oba nad osią, albo rzut poziomy nad, zaś pionowy pod osią rzutów, i wykazać, gdzie te proste leżą.

§ 10.

Wyznaczenie płaszczyzny na dwóch płaszczyznach rzutów.

W § 2. N. 2. powiedzieliśmy, że płaszczyzna za pomocą trzech punktów nieleżących w jednéj prostéj, albo za pomocą prostéj i punktu zewnątrz niéj leżącego, albo wreszcie za pomocą dwóch z sobą się przecinających lub do siebie równoległych prostych jest dokładnie oznaczoną. Ponieważ zaś znamy już sposoby wyznaczania położenia punktów i linij zapomocą rzutów, rzuty więc któréjkolwiek z powyższych cztérech rzeczy na płaszczyznie obranych zupełnie wystarczą, ażeby położenie téjże płaszczyzny względem płaszczyzn rzutów wyznaczyć. Atoli przedstawienie płaszczyzny za pomocą trzech jéj punktów, albo za pomocą prostéj i punktu, nie da nam jasnego pojęcia o jéj położeniu w przestrzeni; przedstawienie zaś płaszczyzny za pomocą dwóch prostych, gdziekolwiek na niéj obranych, nie jest korzystném, samo bowiem wyznaczenie tychże prostych wymaga cztérech rzutów. Gdy zaś to jest obojętném, gdzie te dwie proste na płaszczyznie danéj obierzemy, obieramy je więc w takiém położeniu, w jakiém na obu płaszczyznach rzutów najłatwiéj nakreślone być mogą. Takiémi prostémi są proste przecięcia się płaszczyzny danéj z płaszczyznami rzutów; takowe bowiem nietylko są dostatecznémi do przedstawienia płaszczyzny, ale zarazem dozwalają nam jednym rzutem oka rozpoznać położenie płaszczyzny przez nie oznaczonéj. Proste te zowią się **śladami płaszczyzny** (traces d'une plan, — die Spuren der Ebene), a mianowicie, prosta przecięcia się płaszczyzny danéj z płaszczyzną poziomą rzutów, zowie się **śladem poziomym płaszczyzny**, zaś z płaszczyzną pionową, — **śladem pionowym płaszczyzny**, a wreszcie, w razie użycia także płaszczyzny bocznéj rzutów, prosta przecięcia się płaszczyzny danéj z płaszczyzną boczną, zwać się będzie jéj **śladem bocznym**.

A więc mając obie płaszczyzny rzutów i płaszczyznę P daną w przestrzeni (Fig. **27**.), przedłużamy ją aż do przecięcia się z płaszczyznami rzutów, a otrzymamy stąd dwie proste przecięcia się tj. p' i p, z których pierwsza jest śladem pionowym płaszczyzny, druga jéj śladem poziomym, obie zaś proste tj. oba ślady przecinają się czyli schodzą się z sobą na osi w punkcie O. Obróciwszy następnie płaszczyznę poziomą rzutów tak, iżby przyszła w przedłużenie płaszczyzny pionowéj, czyli iżby obie płaszczyzny rzutów utworzyły jednę płaszczyznę rysunkową, oba ślady p' i p przedstawią się nam jako dwie proste pochylone do siebie (Fig. **28**.), a przecinające się z sobą w jednym punkcie na osi, — i takoweto dwie proste naodwrót zawsze za ślady płaszczyzny uważać będziemy. Ślady te oznaczać nadal będziemy literami małémi jednobrzmiącémi z literą, oznaczającą nam płaszczyznę w przestrzeni; a więc np. dla płaszczyzny Q w przestrzeni leżącéj oznaczymy ślady przez q i q' itp.

I nawzajem, ażeby ze śladów danych mieć należyte wyobrażenie o położeniu saméj płaszczyzny względem płaszczyzn rzutów, należy przedstawić sobie płaszczyznę rysunkową zgiętą w osi pod kątem prostym, tj tak, iżby z tego napowrót powstały obie płaszczyzny rzutów prostopadle do siebie stojące, — a następnie przez ślady dane pomyśleć sobie przesuniętą płaszczyznę.

W miarę położenia, jakie płaszczyzna dana w przestrzeni zajmuje między płaszczyznami rzutów, ślady jéj będą miały kierunki rozmaite względem osi rzutów, i tak:

1. Jeżeli płaszczyzna jest prostopadłą do płaszczyzny pionowéj rzutów, ślad jéj poziomy będzie prostopadły do osi, zaś pionowy pochyły (Fig. **29**, I.).
2. Jeżeli płaszczyzna jest prostopadłą do płaszczyzny pozioméj rzutów, to znów ślad jéj pionowy będzie prostopadły do osi, zaś poziomy pochyły (Fig. **29**, II.).
3. Jeżeli płaszczyzna jest prostopadłą do obu płaszczyzn rzutów a więc tém samém do osi, oba jéj ślady będą prostopadłe do osi rzutów (Fig. **29**, III.).
4. Jeżeli płaszczyzna jest równoległą do płaszczyzny pionowéj rzutów, wtedy śladu pionowego nie będzie, poziomy zaś będzie równoległy do osi rzutów (Fig. **29**, IV.).
5. Jeżeli płaszczyzna jest równoległą do płaszczyzny pozioméj rzutów, ślad jéj pionowy będzie równoległym do osi, śladu zaś poziomego nie będzie (Fig. **29**, V.).
6. Jeżeli płaszczyzna jest równoległą do osi rzutów, wtedy oba jéj ślady będą także równoległe do osi (Fig. **29**, VI.).
7. Gdyby płaszczyna przechodziła wzdłuż osi rzutów, wtenczas obadwa ślady są na osi rzutów (Fig. **29**, VII.); w takim jednak razie ślady te dwa, jako schodzące się w jednę prostą, nie wystarczają do wyznaczenia położenia płaszczyzny, lecz musi być danym jeszcze ślad jéj trzeci p'' tj. boczny.
8. Jeżeli płaszczyzna jakakolwiek znajduje sie w II. ćwiartce

przestrzeni, tj. między płaszczyzną pionową górną a poziomą tylną, oba jéj ślady znajdować się będą nad osią rzutów (Fig. **29**, VIII.).

9. Jeżeli płaszczyzna leży w III ćwiartce przestrzeni, tj. między płaszczyzną poziomą tylną a pionową dolną, wtedy jej ślad poziomy będzie nad, zaś pionowy pod osią rzutów (Fig. **29**, IX.); wreszcie:

10. Jeżeli płaszczyzna leży w IV ćwiartce przestrzeni, tj. między płaszczyzną pionową dolną a poziomą przodkową, natenczas oba jéj ślady leżeć będą pod osią rzutów (Fig. **29**, X.).

W podobnych razach, jak przy 8. 9. i 10., ślad pionowy, jako leżący pod osią, czyli leżący na płaszczyznie poziomej rzutów; albo ślad poziomy jako leżący nad osią, czyli na płaszczyznie pionowéj rzutów, kreślimy nie pełnémi lecz przerywanémi liniami; tak, iżby już z samego rysunku ocenić można, w któréj przestrzeni płaszczyzna, dana śladami, się znajduje.

Zadanie 25. Wykreślić ślady płaszczyzny bądź prostopadłéj, bądź równoległéj do jednéj z płaszczyzn rzutów lub do osi, ale leżecéj w II., III. lub IV. ćwiartce przestrzeni.

§ 11.

Wyznaczenie płaszczyzny na trzech płaszczyznach rzutów.

Jak do wyznaczenia położenia prostéj w przestrzeni, dwa jéj rzuty tj. pionowy i poziomy nie zawsze wystarczają, ale w pomoc brać się musi trzeci jéj rzut tj. boczny, tak znów bywają przypadki, gdzie dwa ślady płaszczyzny nie są dostateczne bądźto do wyznaczenia jéj położenia w przestrzeni, a czego przykład widzieliśmy pod N. 7. w §. poprzedzającym, bądź téż, jak później zobaczymy do rozwiązywania niektórych zadań, związek z płaszczyzną mających. W takich przypadkach uciekamy się znów do płaszczyzny bocznéj, czyli do śladu bocznego. Chodzi więc teraz przedewszystkiém o to, jak z danych dwóch śladów płaszczyzny, tj. pionowego i poziomego znaleść można jéj ślad boczny, tj. prostą przecięcia się téj płaszczyzny z płaszczyzną boczną.

W tym celu weźmy znów trzy płaszczyzny rzutów (Fig. **30**.), tj. poziomą I, pionową II i boczną III; między niémi mamy daną płaszczyznę *P*, przecinającą się z płaszczyzną pionową w prostéj p', zaś z poziomą w prostéj p. Aby z tych dwóch prostych, czyli śladów p' i p otrzymać ślad boczny p'', dość zauważyć, że do jego wynalezienia potrzebne nam są tylko dwa punkta, które na płaszczyznie danéj, i na płaszczyznie bocznéj równocześnie leżą. Takimi atoli punktami są: punkt a, który otrzymamy, przedłużywszy p' aż do przecięcia się z osią OZ, i punkt b, otrzymany z przecięcia się przedłużonego śladu p z osią OY. Punkt bowiem np. a, leżąc na śladzie p' płaszczyzny, leży tém samém na płaszczyznie P; leżąc zaś na osi bocznéj, leży także na płaszczyznie bocznéj, — czyli jest punktem przecięcia się płaszczyzny P z płaszczyzną boczną. Jeżeli teraz płaszczyznę boczną obrócimy około osi OZ, a poziomą około osi OY tak, iżby przyszły w przedłużenie pionowéj, wtedy punkt a jako leżący na osi obrotu, zostanie na swojém miejscu, zaś punkt b, zatoczywszy łuk ze środka O promieniem Ob, leżeć będzie na przecięciu się tegoż łuku osią OY, która po obrocie płaszczyzny bocznéj przyjdzie na przedłużenie osi OX. Połączywszy wreszcie punkta a i b ze sobą, otrzymamy ślad boczny żądany.

Czytamy więc stąd: chcąc z danych dwóch śladów p' i p (Fig. **31**.) płaszczyzny, znaleść jéj ślad boczny, przedłużamy takowe aż do przecięcia się z osią boczną w punktach a i b, to punkt a będzie punktem należącym do śladu szukanego; z punktu następnie O, gdzie się przecinają obie osie, zatoczywszy łuk promieniem Ob aż do przecięcia się z przedłużoną osią główną, otrzymamy drugi punkt tj. b'', należący również do śladu szukanego, i który więc połączony z punktem a da nam prostą p'' jako ślad boczny płaszczyzny danéj.

W podobnyż sposób postąpić należy się także, jeżeli idzie o wyznaczenie śladu poziomego, z danych pionowego i bocznego, lub też o wyznaczenie śladu pionowego z danych poziomego i bocznego.

Zadanie 26. Znaleść ślad boczny płaszczyzny prostopadłéj do płaszczyzny pozioméj lub pionowéj rzutów.

Zadanie 27. Uzasadnić, dla czego płaszczyzna prostopadła do osi rzutów, śladu bocznego mieć nie może.

Zadanie 28. Znaleść ślad boczny płaszczyzny równoległéj do jednéj z płaszczyzn rzutów, lub równoległéj do osi.

Zadanie 29. Mając dany ślad pionowy i boczny płaszczyzny, znaleść ich ślad poziomy.

Zadanie 30. Mając dany ślad poziomy i boczny płaszczyzny, znaleść jéj ślad pionowy.

Zadanie 31. Znaleść ślad boczny płaszczyzny, któréj oba ślady tworzą jednę prostą pochyłą względem osi.

Zadanie 32. Znaleść ślad boczny płaszczyzny w razie 1) gdy ślad jéj pionowy przecina się z osią boczną pod osią główną; 2) gdy ślad poziomy przecina się z osią boczną nad osią główną; 3) gdy ślad poziomy przecina się z osią boczną nad, zaś pionowy pod osią główną.

§ 12.

Twierdzenia tyczące się wzajemnego położenia prostéj i płaszczyzny, jakotéż dwóch płaszczyzn w przestrzeni.

Twierdzenie I. *Jeżeli prosta leży na płaszczyznie, to ślady jej leżą na śladach płaszczyzny.*

Mamy płaszczyznę $p'Op$ położoną między płaszczyznami rzutów, a na niéj prostą AB (Fig. **32**); przypuściwszy, że prosta ta przecina się z płaszczyzną pionową rzutów w punkcie A, zaś z poziomą w B, trzeba nam dowieść, że punkt A czyli ślad pionowy prostéj leżeć musi na śladzie pionowym płaszczyzny $p'Op$, tj. na p', zaś ślad poziomy prostéj tj. punkt B leżeć musi na śladzie poziomym płaszczyzny czyli na p.

Jakoż, ponieważ wszystkie punkta leżące na prostéj AB są także punktami leżącymi na płaszczyznie $p'Op$, zatém i punkta, w których prosta AB przecina płaszczyzny rzutów, czyli jéj ślady, są wspólną własnością prostéj AB i płaszczyzny $p'Op$. Punkta te więc leżą na płaszczyznie $p'Op$, a leżąc równocześnie na płaszczyznach rzutów jako ślady prostéj AB, leżeć muszą na przecięciu się płaszczyzny $p'Op$ z płaszczyznami rzutów, czyli na śladach płaszczyzny.

Wynika stąd: 1) chcąc na płaszczyznie $p'p$ (Fig. **33**) nakréślić gdziebądź prostą, obieramy gdziekolwiek na jéj śladzie pionowym punkt np. a', zaś na poziomym punkt b, i uważając punkta te jako ślady prostéj, szukamy jéj rzutów sposobem wiadomym (§ 8); 2) jeżeli ślady prostéj leżą na równoimiennych śladach płaszczyzny, tj. a' na p', zaś b na p (Fig. **33**), to i prosta śladami tymi wyznaczona leży na płaszczyznie.

Twierdzenie 2. *Jeżeli prosta jest prostopadłą do płaszczyzny, to rzuty jéj są prostopadłe do odpowiednich śladów płaszczyzny.*

Daną jest płaszczyzna P (Fig. **34 a**) przecinająca się z płaszczyzną poziomą rzutów RS w prostéj p, i daną jest prosta AB do płaszczyzny P prostopadła, — mamy dowieść, że rzut poziomy prostéj AB jest do p czyli do śladu poziomego płaszczyzny P prostopadłym. W tym celu pomyślmy sobie przez prostą AB przesuniętą płaszczyznę rzucającą poziomą $ABab$, i przypuśćmy, że ona z płaszczyzną RS przecina się w prostéj ab, to na téj prostéj, jako na śladzie poziomym płaszczyzny rzucającéj pozioméj, leży rzut poziomy prostéj AB. Ale płaszczyzna $ABab$ jest także prostopadłą i do płaszczyzny P (§ 2. N. 8); będąc więc prostopadłą i do płaszczyzny RS i do płaszczyzny P, jest tém samém prostopadłą i do ich wspólnego przecięcia tj. do prostéj p, a stąd daléj wypada, że i jéj przecięcie się z płaszczyzną RS czyli prosta ab, a więc rzut poziomy prostéj AB, jest do p prostopadłym.

W podobnyż sposób można znów dowieść, że rzut pionowy prostéj, prostopadłéj do płaszczyzny, musi być prostopadłym do jéj śladu pionowego, wreszcie rzut boczny téj prostéj prostopadłym być musi do śladu bocznego płaszczyzny.

Wynika stąd: 1) aby na rysunku przedstawić prostą prostopadłą do płaszczyzny $p'p$ (Fig. **34 b**), kréślimy rzut pionowy $a'b'$ prostéj prostopadle do śladu pionowego płaszczyzny tj. do p', zaś rzut poziomy ab prostopadle do śladu poziomego płaszczyzny, tj. do p; 2) jeżeli rzuty prostéj są prostopadłe do odpowiednich śladów płaszczyzny, tj. jeżeli $a'b'$ jest prostopadłe do p', zaś ab prostopadłe do p, to prosta AB w przestrzeni jest prostopadłą do płaszczyzny P.

Wyjątkiem od téj reguły ostatniéj jest przypadek, gdy płaszczyzna jest równoległą do osi rzutów, zaś prosta leży w płaszczyznie do téjże osi prostopadłéj, — w tym bowiem razie, jakiekolwiek będzie położenie prostéj, zawsze jéj rzuty będą prostopadłe do śladów płaszczyzny. Czy prosta w przestrzeni zaś jest do płaszczyzny prostopadłą lub nie, przekonać się dopiero można za pomocą płaszczyzny bocznéj, gdzie w razie prostopadłości także rzut boczny téj prostéj musi być prostopadłym do śladu bocznego płaszczyzny.

Twierdzenie 3. *Jeżeli dwie płaszczyzny w przestrzeni są do siebie równoległe, to ślady ich równoimienne także do siebie równoległe być muszą.*

Ponieważ ślady płaszczyzn są jak wiemy prostémi przecięcia się tychże płaszczyzn z płaszczyznami rzutów, a dwie płaszczyzny równoległe przecięte trzecią, dają przecięcia do siebie równoległe (§ 2. Nr. 20), zatém więc ślady poziome dwóch płaszczyzn do siebie równoległych, jako proste przecięcia się ich z płaszczyzną poziomą rzutów, muszą być do siebie równoległe. Toż samo rozumieć się ma i o śladach pionowych dwóch płaszczyzn do siebie równoległych, a wreszcie także i o ich śladach bocznych.

Wynika stąd: 1) chcąc nakréślić dwie płaszczyzny P i Q do siebie równoległe, kréślimy je tak, iżby ich ślady pionowe do siebie, zaś poziome do siebie były równoległe tj. iżby było p' równoległe do q', zaś p do q (Fig. **35**); 2) jeżeli odpowiednie ślady dwóch lub więcéj płaszczyzn są do siebie równoległe, tj. jeżeli $p' \parallel q'$, zaś $p \parallel q$, wtedy także i płaszczyzny w przestrzeni tymi śladami przedstawione są do siebie równoległe tj. $P \parallel Q$.

Wyjątkiem od téj znów reguły mogą być dwie płaszczyzny równoległe do osi rzutów, których ślady jako równoległe do osi będą tém samém i do siebie równoległe, mimo, że same płaszczyzny w przestrzeni ze sobą się przecinają. W takim razie równoległość dwóch par śladów nie wystarcza, lecz do stanowczego orzeczenia, czy płaszczyzny tymi śladami dane są równoległe lub nie, potrzeba trzeciéj pary śladów tj. bocznych, które jeżeli także są równoległe, to i płaszczyzny w przestrzeni są równoległe, jeżeli zaś przecinają się z sobą, to i płaszczyzny w przestrzeni przecinać się wzajemnie muszą.

§. 13.

ZADANIA

tyczące się punktu, prostéj i płaszczyzny.

Nim przejdziemy do licznych zadań, jakie już na podstawie tego, cośmy dotychczas o punkcie, prostéj i płaszczyznie powiedzieli, jakotéż na mocy prawd solidometrycznych w §. 2. przywiedzionych, rozwiązać się dadzą, zwracamy uwagę, 1) że wyrażenie: dany jest punkt, prosta lub płaszczyzna, znaczy, iż dane są rzuty punktu lub prostéj, albo ślady płaszczyzny; 2) że rzeczy w zadaniu dane trzeba sobie zawsze przedstawić w przestrzeni, daléj poszukać myślą sposobów, jakimiby zadanie dane rozwiązać można, tj. na mocy jakich prawd lub twierdzeń, a dopiéro cały niejako szkic rozwiązania w myśli ułożywszy, przystąpić do wykréślenia zadania. Konieczną więc tu rzeczą, umieć sobie zdać sprawę z każdego zadania i sposobów jego rozwiązania, czyli zrozumieć, dlaczego tak a nie inaczéj zadanie pewne rozwiązać można, a potém dopiéro przenieść rzecz na tablicę lub papier.

Co się tyczé samego rysunku, zauważyć nam tu jeszcze przychodzi, co następuje:

Rysunki, mające za przedmiot przedstawienie wielkości geometrycznych, złożone są z linij, które według ich różnego znaczenia lub położenia w przestrzeni, rozmaicie rysowane być muszą, chcąc, aby one nam niejako rzecz, którą przedstawiać mają, same tłomaczyły. Pomyślmy sobie bowiem rysunek, z jakim późniéj często spotkać się nam przyjdzie, złożony z bardzo wielu linij, ale kréślonych jednakowo, i bez żadnéj odmiany, — to naturalnie, że z nagromadzonych tam linij trudno nam byłoby odgadnąć myśl i cel tego rysunku, bo nieuwidocznione tam linie lub ich części, które między innémi wybitniejsze względem oka naszego zajmują stanowisko. Że zaś mając dany rysunek jakiegoś przedmiotu w rzutach, rzut jego poziomy jest niczém innćm, jak tylko widokiem tegoż przedmiotu, obserwowanym przez oko będące w bardzo wielkiéj odległości pionowéj ponad płaszczyzną poziomą rzutów, zaś pionowy widokiem jego ale uważanym znów przez oko leżące w bardzo wielkiéj odległości pozioméj przed płaszczyzną pionową rzutów, zatém rzecz jasna, że skoro zależnie od tegoto położenia oka naszego względem przedmiotu inne jego części i linie patrząc nań z góry, a inne patrząc nań z poziomu widzieć będziemy,—że więc na rzutach i to na każdym z osobna rzecz ta uwzględnioną być powinna.

Aby więc rzut był wiernym obrazem jakiegoś przedmiotu, muszą w rysunku przedewszystkiem części jego widoczne i niewidoczne wyraźnie być przedstawione; do tego zaś celu służą następujące przyjęte sposoby:

1) Wszystkie linie główne, tj. takie, które są albo dane w zadaniu, albo są wynikiem rozwiązanego zadania, kréśli się liniami pełnemi jeżeli są widoczne.
2) Linie pomocnicze, tj. linie tylko do rozwiązania zadania służące, znaczy się liniami punktowanemi albo kréskowanemi lub także wiązanemi, tj. złożonemi naprzemian z punktów i krések.

Zadanie 33. *Mając dane odległości od obu płaszczyzn rzutów punktu, leżącego w którėjkolwiek z czterech ćwiartek przestrzeni, wykréślić jego rzuty.*

Rozwiązanie polega na rzeczy zawartéj w §. 5.

Zadanie 34. *Prostą daną ograniczonéj długości podzielić na dowolną liczbę części równych.*

Niech *ab, a'b'* (Fig. **36**.) będą rzutami prostéj ograniczonéj *AB*, którą np. na 3 części równe podzielić chcemy. Pomyślmy sobie prostą *AB* w przestrzeni, w żądany sposób podzieloną, i z punktów podziału spuszczone prostopadłe na jeden z jéj rzutów, to tenże rzut przez to podzielonym zostanie (podług znanego prawa w planimetryi) na tyleż części równych między sobą. Aby więc rzuty punktów podziału wyznaczyć, potrzeba tylko jeden z danych rzutów prostéj *AB*, np. *a'b'* podzielić na 3 równe części w punktach *c'* i *d'*, a te będą rzutami pionowymi punktów szukanych; rzuty ich zaś poziome znajdować się będą na przecięciu się prostopadłych do osi, z *c'* i *d'* poprowadzonych, z rzutem poziomym prostéj.

Zadanie 35. *Prostą daną ograniczonéj długości podzielić na dwie części, któreby się miały do siebie w stosunku dwóch innych linij danych.*

Aby, mając daną prostą ograniczonéj długości *a'b'*,*ab* (Fig. **37**.) podzielić ją np. w stósunku linij *m* i *n*, dzielimy odnośnie do tego, co się w poprzedzającém zadaniu powiedziało, jeden z jéj rzutów np. poziomy *ab* w danym stosunku (sposobem wiadomym z planimetryi), a otrzymamy rzut poziomy *c* punktu podziału. Rzutowi temu poszukawszy odpowiedniego mu rzutu pionowego *c'*, zadanie będzie rozwiązaném.

Zadanie 36. *Przez punkt dany poprowadzić prostą równoległą do prostéj danéj.*

Niech $ab, a'b'$ będą rzutami prostéj danéj AB, zaś $m'm$ rzutami danego punktu M (Fig. **38**.). Ponieważ prosta szukana ma przez punkt M przechodzić, rzuty jéj więc przez rzuty tegoż punktu tj. przez $m'm$ przechodzić muszą; gdy zaś prócz tego prosta ta ma być równoległą do prostéj AB, rzuty jéj zatém muszą być równoległymi do odpowiednich rzutów prostéj danéj. Aby więc zadanie rozwiązać, należy poprowadzić przez m' prostą $m'd' \parallel a'b'$, zaś przez m rzut $md \parallel ab$, a prosta MD będzie żądaną.

Zadanie 37. Nakréślić przez punkt dany prostą równoległą do prostéj danéj, jeżeli:

1) punkt leży w I ćwiartce przestrzeni
2) „ „ „ II „ „
3) „ „ „ III „ „
4) „ „ „ IV „ „
} zaś prosta w któréjkolwiek z tychże ćwiartek.

5) Punkt leży na jednéj z płaszczyzn rzutów, prosta zaś w któréjkolwiek z cztérech części przestrzeni i to jakkolwiek, prostopadle do jednéj z płaszczyzn rzutów, lub równolegle.

Zadanie 38. *Danym jest ślad poziomy płaszczyzny i punkt należący do śladu pionowego, nakréślić tenże ślad pionowy.*

Śladem danym niech będzie prosta p, zaś A punktem danym.

1. Jeżeli ślad dany przecina się z osią (Fig. **39**.), wtedy łączymy tylko punkt przecięcia się jego z osią rzutów tj. punkt O z punktem danym A, a otrzymamy ślad żądany pionowy.
2. Jeżeli ślad dany jest równoległym do osi rzutów, to i szukany będzie równoległym do téjże.
3. Jeżeli punkt przecięcia się śladu danego z osią wypada po za granicami rysunku (Fig. **40**.), w takim razie kréślimy trójkąt, którego jeden wierzchołek leży w punkcie danym A, drugi na osi, zaś trzeci na śladzie danym p, czyli trójkąt ABC; następnie prowadzimy $DE \parallel AB$, $EF \parallel CB$, zaś przez F równoległą do AC, a ta ostatnia przetnie DE w punkcie D, który połączony z A da nam ślad żądany.

Zadanie 39. *Przez prostą daną przesunąć płaszczyznę.*

Wiemy, że jeżeli prosta leży na płaszczyznie, to ślady jéj leżą na śladach płaszczyzny; a więc naodwrót, jeżeli płaszczyzna ma przechodzić przez prostą, to ślady jéj przechodzić muszą przez odpowiednie ślady prostéj. Mając więc daną prostą $a'b',ab$ (Fig. **41**.), dość jest poszukać jéj śladów a następnie, ponieważ przez jednę prostą da się bardzo wiele płaszczyzn przesunąć, którykolwiek punkt na osi połączyć z tymi śladami, czyli inaczéj mówiąc, dość jest np. przez ślad poziomy prostéj danéj poprowadzić jakkolwiek prostą, a ta będzie śladem poziomym płaszczyzny, wreszcie zaś punkt przecięcia się tego śladu z osią połączyć ze śladem pionowym prostéj, a otrzymamy ślad pionowy żądanéj płaszczyzny.

Jeżeli prosta dana jest równoległą do jednéj z płaszczyzn rzutów np. do pionowéj (Fig. **42**.), w takim razie, postępując wedle sposobu właśnie podanego, prowadzimy przez jéj ślad poziomy prostą jakkolwiek, a ta będzie śladem poziomym płaszczyzny. Aby zaś znaleść jéj ślad pionowy, potrzebujemy punkt przecięcia się śladu poziomego z osią, połączyć ze śladem pionowym prostéj; że zaś tego śladu nie ma, czyli, ponieważ ten ślad leży na prostéj a więc i na jéj rzucie pionowym w odległości nieskończenie wielkiéj, zatém przez punkt wyż rzeczony na osi poprowadziwszy prostą równoległą do $a'b'$, ta będzie śladem pionowym płaszczyzny, przez prostą daną przesuniętéj.

Jeżeli wreszcie prosta dana jest równoległą do osi rzutów, wtedy, ponieważ każda płaszczyzna przez nią przesunięta będzie także do téjże osi równoległą, chcąc ślady któréjkolwiek z tych płaszczyzn naznaczyć, obieramy na prostéj danéj $a'b',ab$ (Fig. **43**.) punkt np. $c'c$, i przezeń poprowadziwszy inną prostą jakkolwiek, przez ślady téj ostatniéj kréślimy ślady $p'p$ płaszczyzny równolegle do osi.

Najkrótszy atoli i najdogodniejszy sposób rozwiązania tego zadania, a dający się zastosować zawsze i wszędzie, jest przesuwanie płaszczyzny rzucającéj. Sposób ten jest wynikiem reguły ogólnéj powyżéj podanéj. Mając bowiem przez prostą $a'b',ab$ (Fig. **44**.) przesunąć płaszczyznę, wtedy po wyszukaniu jéj śladów, zamiast kreślenia śladu poziomego płaszczyzny jakkolwiek, kréślimy go wzdłuż rzutu poziomego prostéj, skutkiem czego ślad pionowy, (wypadający z połączenia śladu pionowego prostéj z punktem przecięcia się śladu poziomego płaszczyzny z osią) będzie prostopadłym do osi, a sama płaszczyzna będzie tym sposobem prostopadłą do płaszczyzny pozioméj rzutów, czyli będzie rzucającą poziomą. W ten sam sposób można znów nakréślić ślady płaszczyzny rzucającéj pionowéj, a przechodzącéj przez prostą daną. Czytamy stąd: jeżeli przez prostą daną chcemy przesunąć płaszczyznę rzucającą poziomą lub pionową, to nie szukając zupełnie śladów prostéj, w pierwszym razie ślad poziomy płaszczyzny leży na rzucie poziomym prostéj, pionowy zaś jest prostopadły do osi, w drugim razie ślad pionowy płaszczyzny leży na rzucie pionowym prostéj, a poziomy znów jest prostopadły do osi.

Zadanie 40. Nakréślić ślady płaszczyzny jakiéjkolwiek i rzucającéj, przesuniętéj 1) przez prostą leżącą w II, III lub IV ćwiartce przestrzeni; 2) przez prostą prostopadłą do jednéj z płaszczyzn rzutów lub do osi, i 3) przez prostą pochyłą przechodzącą przez oś rzutów.

Zadanie 41. *Daną jest płaszczyzna, nakréślić prostą jakąkolwiek na niéj leżącą.*

Ponieważ prosta mając leżeć na płaszczyznie, ślady swoje mieć musi na odpowiednich śladach płaszczyzny, zatém na śladzie poziomym płaszczyzny danéj obieramy gdziekolwiek punkt a, zaś na śladzie pionowym punkt b' (Fig. **41**), a następnie przez punkta te poprowadziwszy prostopadłe $a'a$ i $b'b$ do osi, łączymy a' z b', zaś a z b, a prosta $a'b'$, ab będzie żądaną.

Jeżeli płaszczyzna dana jest rzucającą np. poziomą, wtedy jéj ślad poziomy będzie zarazem rzutem poziomym każdéj prostéj na téj płaszczyznie leżącéj, rzutem pionowym zaś będzie prosta jakkolwiek nad osią rzutów nakréślona.

Ponieważ każdy ze śladów płaszczyzny jest zarazem prostą, na téj płaszczyznie leżącą, zatém potrzebując na płaszczyznie danéj nakréślić jakąkolwiejk prostą, najkrótszą jest rzeczą obrać zamiast tego którykolwiek z jéj śladów, przyczem uważać należy, że ślad poziomy płaszczyzny sam jest swoim rzutem poziomym, a rzut jego pionowy leży na osi, zaś ślad pionowy jest sam swoim rzutem pionowym, a rzut jego poziomy leży na osi.

Zadanie 42. *Daną jest płaszczyzna i jeden z rzutów prostéj leżącéj na téj płaszczyźnie; znaleść rzut drugi.*

Niech $p'p$ będą śladami płaszczyzny danéj (Fig. **45**) i niech będzie danym np. rzut poziomy ab prostéj na téj płaszczyznie leżącéj, mamy znaleść rzut jéj pionowy. Ponieważ ślad poziomy prostéj AB równie na rzucie danym, jak i na śladzie p leżeć musi, otrzymamy go więc, przedłużywszy rzut poziomy prostéj aż do przecięcia się w a ze śladem p. Ponieważ następnie punkt b, w którym się rzut dany prostéj przecina z osią, jest rzutem poziomym śladu pionowego prostéj, sam więc ślad pionowy prostéj musi leżeć na prostopadłéj z b do osi wyprowadzonéj, a musząc leżeć równocześnie i na śladzie p', będzie leżał w ich przecięciu tj. w b'. Tak mając teraz oba ślady prostéj wyznaczone, łatwo nakréślić jéj rzut żądany.

Zadanie 43. *Nakréślić ślady płaszczyzny, któraby przez punkt dany przechodziła.*

Mając przez dany punkt w przestrzeni przesunąć płaszczyznę, prowadzimy przez tenże punkt jakąkolwiek prostą, a przez tę prostą przesuwamy płaszczyznę podług zadania 39.

Zadanie 44. *Nakréślić rzuty punktu, któryby leżał na płaszczyznie danéj.*

Na płaszczyznie danéj kréślimy jakąkolwiek prostą a każdy punkt na téj prostéj obrany będzie punktem leżącym na płaszczyznie. A więc, mając płaszczyznę $p'p$ (Fig. **46**), kréślimy na niéj prostą jakąkolwiek np. $a'b',ab$ (Zad. 41), zaś na téj prostéj obieramy gdziekolwiek punkt $c'c$, $d'd$ itd., a każdy z nich będzie punktem żądanym.

Jeżeli płaszczyzna dana jest rzucającą np. pionową (Fig. **47**), to rzut pionowy każdego punktu na niéj leżącego, znajduje się na śladzie pionowym płaszczyzny, zaś poziomy gdziekolwiek na prostopadłéj do osi. Rzecz ta jest wynikiem zadania 41.

Zadanie 45. Nakréślić rzuty punktu, leżącego na płaszczyznie równoległéj do jednéj z płaszczyzn rzutów lub do osi.

Zadanie 46. *Daną jest płaszczyzna i jeden z rzutów punktu na niéj leżącego; znaleść jego rzut drugi.*

Mając daną płaszczyznę $p'p$ (Fig. **48**) i rzut poziomy a punktu na téj płaszczyznie leżącego, a chcąc znaleść jego rzut pionowy, prowadzimy przez a rzut poziomy prostéj jakiéjkolwiek leżącego na płaszczyznie danéj, i szukamy odpowiedniego jéj rzutu pionowego (Zad. 42), to na przecięciu się tegoż z prostopadłą do osi z a wyprowadzoną, będzie leżał rzut pionowy punktu tj. a'.

Zadanie 47. *Przez punkt dany prprowadzić prostą równoległą do płaszczyzny dolnéj.*

Na płaszczyznie danéj nakreśliwszy jakąkolwiek prostą, zaś przez punkt dany prostą do niéj równoległą, ta ostatnia będzie równoległą i do saméjże płaszczyzny (§ 2. N. 11). A więc mając dane ślady płaszczyzny $p'p$ i rzuty punktu $a'a$ (Fig. **49**) kreślimy na płaszczyznie prostą $c'd',cd$ (Zad. 41), zaś przez $a'a$ do niéj równoległą tj. $a'g' \parallel c'd'$ zaś $ag \parallel cd$, a prosta $a'g',ag$ będzie żądaną.

Krócéj zadanie to można rozwiązać, zważywszy, że skoro ślad np. poziomy płaszczyzny tj. p jest także prostą leżącą na płaszczyznie, któréj rzut pionowy leży na osi, zatém dość jest przez rzut poziomy punktu tj. przez a (Fig. **50**) poprowadzić prostą równoległą do śladu poziomego płaszczyzny, zaś przez a' równoległą do osi, a rzuty te dwa $a'g',ag$ będą rzutami prostéj równoległéj do płaszczyzny danéj $p'p$. Podobnież zadanie rozwiązać można, obrawszy ślad pionowy płaszczyzny tj. p', jako prostą na téjże płaszczyznie leżącą i przez $a'a$ poprowadziwszy do niego równoległą $a'b',ab$.

Zadanie 48. Przez punkt dany poprowadzić prostą równoległa do płaszczyzny równoległéj lub prostopadłéj do jednéj z płaszczyzn rzutów.

Zadanie 49. *Przez dwie proste przecinające się z sobą przesunąć płaszczyznę.*

Ponieważ płaszczyzna ma przechodzić przez dwie proste, ślady jéj zatém muszą przechodzić przez ślady obu prostych, a mianowicie, ślad pionowy płaszczyzny szukanéj musi przechodzić przez ślady pionowe, zaś ślad poziomy przez ślady poziome prostych danych. A więc mając dane rzuty dwóch prostych tj. $a'b',ab$ i $c'd',cd$ (Fig. **51**.) przecinających się z sobą w punkcie $g'g$, szukamy ich śladów pionowych i poziomych, a następnie łączymy ślady pionowe ze sobą, zaś poziome ze sobą, to linie łączące będą śladami szukanéj płaszczyzny, a jako takie spotkać się muszą z sobą na osi.

Jako jeden z ważniejszych przypadków tego zadania weźmy następujący: *Obie proste dane AB i CD* (Fig. **52**.), *przecinające się z sobą, przechodzą przez oś rzutów, mamy przez nie przesunąć płaszczyznę.*

Ponieważ wszystkie ślady danych prostych leżą w tym razie na osi, zatém i oba ślady płaszczyzny szukanéj zejdą się z osią, a leżąc w ten sposób na jednéj linii, nie wystarczają do wyznaczenia położenia płaszczyzny. Aby temu zaradzić, potrzeba znaleść ślad boczny téjże płaszczyzny. Ślad ten atoli znajdziemy zważywszy, że skoro płaszczyzna szukana przechodząc przez oś rzutów jest tém samém prostopadłą do płaszczyzny bocznéj, czyli jest rzucającą boczną, zatém na jéj śladzie bocznym leżeć muszą rzuty boczne obu prostych, i nawzajem, — na rzutach bocznych tych prostych leżeć musi jéj ślad boczny. Że zaś wystarczy poszukać rzutu bocznego tylko dla jednéj z danych prostych, gdyż rzuty boczne obu prostych zejdą się z sobą, zatém przez punkt np. O na osi przesuwamy oś boczną, a następnie szukamy rzutu bocznego m'' punktu $m'm$, wspólnego obu prostym danym; połączywszy wreszcie O z m'', prosta Om'' będzie rzutem bocznym obu prostych danych i zarazem śladem bocznym p'' żądanéj płaszczyzny.

Zadanie 50. Przesunąć płaszczyznę przez dwie proste, jeżeli: 1) jedna z nich leży jakkolwiek, zaś druga równolegle do jednéj z płaszczyzn rzutów; 2) jedna z prostych jest równoległą do pionowéj, druga zaś do poziomej płaszczyzny rzutów; 3) jedna z prostych leży jakkolwiek, druga równolegle do osi; 4) obie proste leżą w któréjkolwiek, lub téż jedna w innéj, druga w innéj ćwiartce przestrzeni; 5) obie proste leżą gdziekolwiek i są do siebie równoległe; 6) jedna z prostych przechodzi przez oś rzutów, druga zaś jest równoległą lub prostopadłą do jednéj z płaszczyzn rzutów lub do osi.

Zadanie 51. *Przez dwie proste równoległe do siebie przesunąć płaszczyznę.*

Szukamy śladów danych dwóch prostych, i przez ślady te prowadzimy ślady płaszczyzny, które naturalnie zejść się z sobą muszą na osi rzutów.

Zadanie 52. *Przez dwie proste równoległe do siebie i do osi przesunąć płaszczyznę.*

Dane są dwie proste AB i CD (Fig. **53**.) równoległe do siebie i do osi. Dla znalezienia w tym razie śladów płaszczyzny, a która naturalnie także będzie równoległą do osi, szukamy rzutów bocznych danych prostych, a następnie ich śladów bocznych; rzuty te atoli $a''b''$ i $c''d''$ będą punktami, a więc zarazem i śladami bocznymi tych prostych. Połączywszy te ślady ze sobą, otrzymamy ślad boczny płaszczyzny szukanéj tj. p'', a mając takowy łatwo, jak to z rysunku widać, znaleść ślady p i p'.

Zadanie 53. *Przez trzy punkta dane, nie leżące w jednéj prostéj przesunąć płaszczyznę.*

Połączywszy jeden z punktów danych z dwoma innymi, otrzymamy stąd dwie proste, przecinające się z sobą, przez które sposobem wiadomym (Zad. 49.) przesunąwszy płaszczyznę, ta będzie żądaną. Albo też, łączymy jeden punkt dany z drugim, a otrzymamy stąd linią prostą; do téj prostéj przez trzeci punkt kréślimy prostą równoległą, i przez te równoległe wreszcie przesuwamy płaszczyznę.

Zadanie 54. Przez trzy punkta przesunąć płaszczyznę, jeżeli 1) jeden z nich leży na płaszczyznie pozioméj rzutów, drugi na pionowéj, trzeci na osi; 2) każden z nich leży w innéj ćwiartce przestrzeni.

Zadanie 55. *Przez prostą daną i punkt zewnątrz niéj leżący przesunąć płaszczyznę.*

Na prostéj danéj obrawszy gdziekolwiek punkt i połączywszy go z punktem danym, otrzymamy stąd prostą przecinającą się z prostą daną, z któremito dwiema prostemi postąpiwszy jak powyżéj (Zad. 49.), otrzymamy płaszczyznę żądaną. Albo téż krócéj: przez punkt dany prowadzimy prostą równoległą do prostéj danéj, a przez te dwie równoległe przesuwamy płaszczyznę.

Zadanie 56. Przesunąć płaszczyznę przez prostą i punkt, jeżeli 1) prosta leży na jednéj z płaszczyzn rzutów, punkt zaś na drugiéj; 2) prosta leży w innéj, zaś punkt w innéj ćwiartce przestrzeni itp.

Zadanie 57. *Przez punkt dany przesunąć płaszczyznę równoległą do płaszczyzny danéj.*

Na płaszczyznie danéj nakreśliwszy dwie proste jakiekolwiek, zaś przez punkt dany dwie do nich równoległe, przez te dwie ostatnie proste przesuwamy płaszczyznę, która będzie żądaną (§. 2. N. 12.). A więc, mając dany punkt $m'm$ (Fig. **54**.) i ślady $p'p$ płaszczyzny P, kréślimy najprzód dwie proste jakiekolwiek na téj płaszczyznie leżące (Zad. 41.), tj. proste

$a'b', ab$ i $c'd', cd$, następnie przez punkt $m'm$ prowadzimy $k'l' \parallel a'b'$ i $f'g' \parallel c'd'$ zaś $kl \parallel ab$ i $fg \parallel cd$, a nareszcie przez ślady tych dwóch nowych prostych przesuwamy ślady płaszczyzny $q'q$, która będzie żądaną, — a jeżeli rysunek dobrze wykonany, wtedy ślady płaszczyzny znalezionéj $q'q$ muszą być równoległe do śladów płaszczyzny danéj (§. 12. Tw. 3.) tj. musi być $q' \parallel p'$ zaś $q \parallel p$.

Albo krócéj: przez punkt dany $a'a$ (Fig. **55**.) kréślimy prostą $a'b', ab$ równoległą do śladu poziomego płaszczyzny danéj (Zad. 41), a następnie przez ślad pionowy téj prostéj tj. przez b' prowadzimy $q' \parallel p'$, zaś przez punkt O na osi prowadzimy $q \parallel p$, a płaszczyna $q'q$ będzie żądaną.

Naturalną rzeczą, że w podobnyż sposób można przez punkt $a'a$ poprowadzić prostą równoległą do śladu pionowego płaszczyzny danéj i postąpić daléj, jak poprzednio, — a jeżeli rysunek dobrze wykonany, to ślady płaszczyzny w ten znowu sposób znalezionéj, muszą paść na ślady $q'q$.

Zadanie 58. Przesunąć płaszczyznę równoległą do płaszczyzny danéj przez punkt, jeżeli 1) punkt leży w któréjkolwiek z cztérech ćwiartek przestrzeni, zaś płaszczyzna dana jest równoległa lub prostopadła do jednéj z płaszczyzn rzutów lub do osi; 2) punkt leży na jednéj z płaszczyzn rzutów, zaś płaszczyzna w któréjkolwiek z cztérech ćwiartek przestrzeni, itp.

Zadanie 59. *Przez punkt dany poprowadzić płaszczyznę równoległą do dwóch prostych danych przecinających się z sobą.*

Przez punkt dany kréślimy dwie proste równoległe do dwóch prostych danych i przez te dwie równoległe przesuwamy płaszczyznę, a ta będzie żądaną.

Zadanie 60. *Przez prostą daną przesunąć płaszczyznę równoległą do innéj prostéj danéj.*

Na prostéj danéj, przez którą mamy przesunąć płaszczyznę, obieramy gdziekolwiek punkt i przezeń prowadzimy prostą równoległą do drugiéj prostéj danéj; otrzymamy stąd dwie proste przecinające się z sobą, przez które przesunięta płaszczyzna będzie żądaną.

Zadanie 61. Przez jednę prostą przesunąć płaszczyznę równoległą do drugiéj, jeżeli 1) pierwsza z nich leży na płaszczyźnie pozioméj rzutów, druga na pionowéj lub na osi; 2) pierwsza jest równoległą do osi, druga do jednéj z płaszczyzn rzutów, itp.

Zadanie 62. *Znaleść przecięcie się dwóch płaszczyzn danych.*

Dwie płaszczyzny przecinają się z sobą zawsze w jednéj prostéj. Aby takową znaleść, dość zauważyć, że ta prosta przecięcia się jest linią wspólną dla obu płaszczyzn, czyli leżącą równocześnie na obu płaszczyznach danych. Mając więc dane ślady dwóch płaszczyzn P i Q (Fig. **56.**), i chcąc znaleść rzuty prostéj przecięcia, to, ponieważ ta prosta ma leżeć równocześnie tak na jednéj jak drugiéj płaszczyznie, ślady jéj zatém muszą leżeć na odpowiednich śladach obu płaszczyzn, czyli, ślad jéj pionowy musi leżeć tak na p' jak i na q', a więc w ich wspólném przecięciu tj. w punkcie b', zaś podobnież ślad jéj poziomy musi leżeć równocześnie na q i p, a więc w punkcie a. Wiedząc w ten sposób, gdzie leżą ślady prostéj szukanéj, potrafimy nakréślić jéj rzuty, czyli: *z punktu* b', *gdzie przecinają się ślady pionowe obu płaszczyzn danych, spuściwszy prostopadłą* b'b *do osi, zaś z punktu* a, *gdzie się przecinają ich ślady poziome, nakréśliwszy drugą prostopadłą* a'a, *łączymy* a' z b', *zaś* a z b, *a prosta* a'b',ab *będzie żądaną.*

Szczegółowe a ważniejsze przypadki tego zadania mogą być następujące:

1) Jedna z płaszczyn danych np. P (Fig. **57.**) *jest równoległą do płaszczyzny pozioméj rzutów.*

Ponieważ w tym razie prosta przecięcia się płaszczyzn P i Q będzie równoległą do śladu poziomego q, gdyż dwie płaszczyzny równoległe (tj. P i pozioma rzutów, przecięte trzecią (tj. Q) dają przecięcia do siebie równoległe, — zatém z punktu b', gdzie się przecinają ślady pionowe spuściwszy prostopadłą $b'b$ do osi, zaś przez b poprowadziwszy $ab \parallel q$, otrzymamy rzut poziomy prostéj szukanéj; że zaś jéj rzut pionowy musi być równoległym do rzutu pionowego śladu q czyli do osi i przechodzić winien przez b', padnie tém samém na ślad p'.

2) Ślady poziome lub pionowe obu płaszczyzn przecinających się z sobą, są: a) *do siebie równoległe, lub téż* b) *przecinają się wzajem, ale po za granicami rysunku.*

Co do a). Jeżeli np. ślady poziome dwóch płaszczyzn $p'p$ i $q'q$ (Fig. **58**) są do siebie równoległe, zaś pionowe przecinają się z sobą w punkcie b', wtedy podług reguły ogólnéj, którąśmy wyżéj uzasadnili, z punktu b' spuszczamy prostopadłą $b'b$ do osi, i łączymy punkt b z punktem, w którym się przecinają ślady poziome p i q, a otrzymamy rzut poziomy prostéj szukanéj. Że zaś te ślady przecinają się z sobą w nieskończoności, jako do siebie równoległe, zatém rzut poziomy ab linii przecięcia się płaszczyzny P i Q, a przechodzący przez b, przetnie się z tymi śladami także w nieskończoności, czyli będzie do nich równoległym; sama więc prosta przecięcia się płaszczyzny P i Q jest równoległą do płaszczyzny poziomej rzutów, skoro nie ma śladu poziomego, a jako taka, będzie miała swój rzut pionowy równoległy do osi, i naturalnie przez b' idący.

Co do b). Jeżeli np. ślady poziome płaszczyzn $p'p$ i $q'q$ (Fig. **59**.) mimo pochyłości do siebie nie przecinają się w granicach rysunku, wtedy do wyznaczenia rzutów linii przecięcia mamy tylko jeden punkt, a mianowicie $a'a$, w którym się przecinają ich ślady pionowe p' i q'. Aby zaś drugi a konieczny punkt téj linii wyznaczyć, postępujemy w sposób następny: obie płaszczyzny dane przecinamy trzecią jakąkolwiek, a najdogodniéj płaszczyzną R, równoległą do płaszczyzny pionowéj rzutów. Płaszczyzna ta przetnie się z płaszczyznami $p'p$ i $q'q$ w dwóch prostych $c'd',cd$ i $e'f',ef$, których punkt wzajemnego przecięcia tj. $b'b$ jest, jak łatwo udowodnić, drugim punktem do szukanéj linii należącym; połączywszy go zatém z punktem $a'a$ otrzymamy prostą żądaną.

Albo inaczéj. Znając jeden punkt tj. $a'a$ (Fig. **60**) należący do linii przecięcia się dwóch płaszczyzn $p'p$ i $q'q$, a będący punktem przecięcia się ich śladów poziomych, przecinamy jednę z płaszczyzn danych, a więc np. $q'q$ płaszczyzną $r'r$ równoległą do $p'p$, a otrzymamy stąd prostą $c'd',cd$. Ponieważ zaś dwie płaszczyzny równoległe $p'p$ i $r'r$ przecięte trzecią $q'q$, dać muszą przecięcia do siebie równoległe, zatém przez punkt $a'a$ poprowadziwszy prostą $a'b',ab$ równolegle do $c'd',cd$, prosta ta będzie żądaną.

3) Tak ślady poziome jak pionowe obu płaszczyzn przecinających się z sobą, są albo: a) *do siebie równoległe, albo* b) *przecinają się wzajem, ale po za granicami rysunku.*

Co do a). Przypadek taki zdarzyć się może przy dwóch płaszczyznach równoległych do osi rzutów, np. $p'p$ i $q'q$ (Fig. **61**.). Ponieważ w takiém położeniu płaszczyzn danych, prosta ich przecięcia a więc i rzuty takowéj są równoległe do osi, zatém wystarcza mieć tylko jeden punkt, przez który ona ma przechodzić. Aby zaś tenże znaleść, przecinamy obie płaszczyzny dane *P* i *Q* trzecią jakąkolwiek np. *R*, i szukamy prostéj przecięcia się płaszczyzny *R* z *P*, a potém *R* z *Q*, skąd otrzymamy dwie proste *b'd',bd* i *e'f',ef*; te dwie proste przetną się z sobą w punkcie *c'c*, przez który prosta *a'c'*, *ac*, równolegle do osi poprowadzona, będzie prostą szukaną. Punkt bowiem *c'c* leżąc równocześnie na dwóch prostych powyżéj rzeczonych, leży tém samém na płaszczyznach *P* i *Q*, a jako taki jest punktem do ich wzajemnego przecięcia należącym.

Krócéj ten przypadek rozwiązać można, przeciąwszy obie płaszczyzny *P* i *Q* płaszczyzną *R* prostopadłą do jednéj z płaszczyzn rzutów, — a jeszcze krócéj, poszukawszy ich śladów bocznych i przez punkt przecięcia się tychże, poprowadziwszy równoległą do osi rzutów.

Co do b). Jeżeli obie pary śladów dwóch płaszczyzn *p'p* i *q'q* (Fig. **62**.) mimo pochyłości do siebie nie przecinają się wzajem w granicach rysunku, wtedy przeciąwszy obie płaszczyzny dane najprzód płaszczyzną *R* równoległą do płaszczyzny pozioméj rzutów, a następnie znów płaszczyzną *S* równoległą do płaszczyzny pionowéj rzutów, otrzymamy sposobem powyżéj (pod 2) wskazanym punkta *a'a* i *b'b* należące do prostéj szukanego przecięcia, które tylko wreszcie połączyć z sobą należy.

4) Wszystkie ślady danych dwóch płaszczyzn schodzą się w jednym punkcie na osi rzutów.

Dane są dwie płaszczyzny *p'p* i *q'q* (Fig. **63**), ślady ich schodzą się w punkcie *b'* na osi. Aby znaleść prostą ich przecięcia, szukamy śladów bocznych *p''* i *q''*, a mając takowe postępujemy daléj sposobem wiadomym, tj. z punktu *a''*, gdzie przecinają się ślady boczne, spuszczamy prostopadłą *a'a''* do osi (bocznéj), toż samo z punktu *b'*, gdzie przecinają się ślady pionowe, prostopadłą *b'b''*; łączymy *a''* z *b''*, zaś *a'* z *b'*, a otrzymamy stąd rzut boczny i rzut pionowy prostéj przecięcia danych dwóch płaszczyzn. Aby zaś mieć jéj rzut poziomy, dość poszukać rzutu poziomego *a*, odpowiadającego rzutom punktu *a'a''*, i punkt ten połączyć z punktem *b* przecięcia się śladów poziomych płaszczyzn danych, a otrzymamy stąd rzut poziomy *ab*.

5) *Ślad poziomy z pionowym tak jednéj jak drugiéj płaszczyzny leżą na przedłużeniu wzajemném i wszystkie przecinają się w jednym punkcie na osi rzutów.*

Dane są dwie płaszczyzny $p'p$ i $q'q$ (Fig. **64**), których ślady tworzą dwie proste krzyżujące się w punkcie o na osi. Rzut pionowy prostéj przecięcia się tych dwóch płaszczyzn, jako téż i jéj rzut poziomy przechodzić musi przez punkt o, jako punkt przecięcia się ich śladów pionowych ze sobą, a poziomych ze sobą. Aby prostą tę wyznaczyć co do kierunku, przesuńmy płaszczyznę $r'r$ równoległą do $q'q$, i uważmy, że ponieważ dwie płaszczyzny równoległe $q'q$ i $r'r$ przecięte trzecią $p'p$ dać muszą przecięcia do siebie równoległe, zatém prosta szukana równoległą być musi do prostéj przecięcia płaszczyzn $q'q$ i $r'r$. Że zaś rzuty téj ostatniéj prostéj będą oba prostopadłe do osi (oba jéj ślady są w punkcie a'), zatém i rzuty prostéj szukanéj muszą być także prostopadłe do osi, a że prócz tego przechodzić muszą przez punkt o, będą więc oc', oc. Wykreśliwszy wreszcie rzut boczny téj prostéj, a który jak wiemy, równoległym być musi do rzutu bocznego prostéj przecięcia się płaszczyzn $p'p$ i $r'r$, otrzymamy prostą przecięcia szukaną, wyznaczoną dokładnie co do położenia.

Zadanie 63. Znaleść prostą przecięcia dwóch płaszczyzn, z których 1) jedna jest równoległa do płaszczyzny pozioméj, druga do pionowéj rzutów; 2) jedna jest równoległa do jednéj z płaszczyzn rzutów, druga zaś prostopadła; itp.

Zadanie 64. *Przez punkt dany poprowadzić prostą równoległą do dwóch płaszczyzn danych.*

Przez punkt dany prowadzimy prostą równoległą do prostéj, w któréj się obie dane płaszczyzny wzajem przecinają, a ta będzie żądaną, tj. szukamy najprzód rzutów przecięcia się obu płaszczyzn danych, zaś przez rzuty punktu danego kreślimy rzuty prostéj równoległe do rzutów prostéj przecięcia.

Zadanie 65. *Na płaszczyznie danéj przez punkt na niéj leżący poprowadzić prostą równoległą do jednéj z płaszczyzn rzutów.*

Jeżeli prosta szukana ma być równoległą np. do płaszczyzny pozioméj rzutów, to uważając ją jako prostą przecięcia się płaszczyzny danéj z płaszczyzną przez punkt dany równolegle do płaszczyzny pozioméj rzutów przesuniętą, będzie ona tém samém równoległą do śladu poziomego płaszczyzny danéj (§. 2. Nr. 20). A więc, mając daną płaszczyznę $p'p$ (Fig. **65**) i punkt na niéj dany $a'a$, prowadzimy przezeń prostą ad równolegle do śladu poziomego płaszczyzny, zaś $a'd'$ równolegle do osi, a otrzymamy prostą $a'd', ad$ jako szukaną.

Zadanie 66. *Znaleść punkt przecięcia się prostéj danéj z płaszczyzną daną.*

Przecięciem się płaszczyzny z linią prostą jest punkt. Aby go znaleść, przez prostą daną przesuwamy płaszczyznę jakąkolwiek, ta przetnie się z płaszczyzną daną w linii prostéj, a gdzie ta prosta przecina się z prostą daną, tam będzie punkt szukany. Mając więc dane ślady płaszczyzny P i rzuty prostéj AB (Fig. **66**), szukamy śladów prostéj AB i przez takowe kreślimy ślady płaszczyzny jakiéjkolwiek R; następnie szukamy przecięcia się płaszczyzny R z płaszczyzną daną P (Zad. 62), będzie niém prosta $c'd', cd$. Rzuty téj prostéj przetną się z odpowiednimi rzutami prostéj $a'b', ab$ w punktach e' i e, które będą rzutami szukanego punktu przecięcia się prostéj AB z płaszczyzną daną P, i które naturalnie wypaść muszą na jednéj prostopadłéj do osi rzutów.

Albo krócéj: Przez prostą daną AB (Fig. **67**) przesuwamy płaszczyznę nie jakąkolwiek, ale rzucającą np. poziomą (Zad. 39, Fig. **44**), to ślad jéj poziomy r pójdzie po rzucie poziomym prostéj tj. po ab, pionowy zaś r' będzie prostopadły do osi. Płaszczyzna ta R z płaszczyzną P przetnie się w prostéj $c'd', cd$, rzut zaś pionowy téj prostéj z rzutem $a'b'$ przetnie się w e', który będzie rzutem pionowym punktu szukanego. Aby mieć także jego rzut poziomy, dość z e' spuścić prostopadłą do osi aż do przecięcia się z ab w punkcie e, a punkt $e'e$ będzie żądanym.

Gdyby płaszczyzna dana $p'p$ (Fig. **68**) była równoległą do osi, zaś prosta dana $a'b', ab$ gdyby leżała w płaszczyźnie prostopadłéj do téjże osi, wtedy do znalezienia punktu ich wzajemnego przecięcia sposób wyżéj wskazany nie wystarcza, ale użytą być musi w tym razie płaszczyzna boczna, na któréj szukamy śladu bocznego p'' płaszczyzny danéj i rzutu bocznego $a''b''$ prostéj danéj. Ponieważ zaś płaszczyzna P będąc równoległą do osi, jest tém samém rzucającą boczną, zatem na jéj śladzie bocznym leżeć musi rzut boczny c'' punktu przecięcia szukanego; jak zaś z tego rzutu otrzymać rzut pionowy i poziomy, wskazuje figura.

Zadanie 67. Znaleść punkt przecięcia się prostéj z płaszczyzną, jeżeli: 1) prosta leży na jednéj z płaszczyzn rzutów, zaś płaszczyzna jakkolwiek, równolegle lub prostopadle do jednéj z płaszczyzn rzutów lub do osi; 2) prosta jest równoległą do jednéj z płaszczyzn rzutów lub do osi, płaszczyzna zaś jest rzucającą poziomą lub pionową, itp.

Zadanie 68. *Znaleść punkt przecięcia się trzech płaszczyzn danych.*

Wiemy, że trzy płaszczyzny nie przechodzące przez tę samą prostą, przecinać się z sobą mogą w trzech prostych, schodzących się w jednym punkcie (§. 2. N. 14). Aby, mając trzy takie płaszczyzny, znaleść ten punkt, szukamy prostéj, w któréj się dwie z tych płaszczyzn z sobą przecinają (Zad. 62.), a gdzie ta prosta przetnie się z płaszczyzną trzecią (Zad. 66.), tam będzie punkt szukany. Albolitéż, mając dane trzy płaszczyzny np. P,Q,R, szukamy prostéj przecięcia się płaszczyzn najprzód P i Q, potém P i R; te dwie proste przetną się z sobą w punkcie, który będzie żądanym, a jeżeli zadanie dobrze rozwiązane, to i prosta przecięcia się płaszczyzn Q i R przez tenże punkt przejść musi.

Zadanie 69. Znaleść przecięcie się trzech płaszczyzn, jeżeli 1) każda z nich leży w innéj ćwiartce przestrzeni; 2) jedna jest rzucającą poziomą, druga pionową, trzecia prostopadłą do osi itp.

Zadanie 70. *Dane są cztéry punkta; znaleść czy takowe leżą w jednéj płaszczyźnie lub nie.*

Punkta dane niech będą A,B,C,D. Aby się dowiedzieć, czy one leżą, czy nie, w jednéj płaszczyźnie, postępujemy w sposób następujący:

1) Łączymy punkt A z punktami B,C,D, a otrzymamy stąd trzy proste; jeżeli te trzy proste leżą w jednéj płaszczyźnie, to i 4 punkta dane, jako leżące na tych prostych, leżą także w jednéj płaszczyznie. A więc, mając rzuty punktów A,B,C,D, łączymy a' z b', c' i d' zaś a z b, c i d; szukamy następnie śladów trzech prostych stąd otrzymanych, a jeżeli ich ślady pionowe z osobna, zaś poziome z osobna będą leżały na dwóch liniach prostych, schodzących się z sobą na osi, wtedy te trzy proste, a tém samém i 4 punkta dane leżą na jednéj płaszczy-

znie, mianowicie na płaszczyznie, któréj śladami są dwie powyżéj rzeczone proste. Albo inaczéj:

2) Łączymy punkt A z B, zaś C z D, a otrzymamy stąd dwie proste AB i CD; jeżeli te dwie proste leżą w jednéj płaszczyznie, to i 4 punkta dane leżą w jednéj płaszczyznie. A więc, łączymy a' z b' i c' z d' zaś a z b i c z d, szukamy śladów prostych AB i CD stąd otrzymanych, i łączymy odpowiednie ich ślady liniami prostemi, a jeżeli takowe zejdą się z sobą w jednym punkcie na osi, to te dwie proste, a więc i 4 punkta dane leżą w jednéj płaszczyznie. Albo wreszcie:

3) Łączymy cztéry punkta dane w czworobok, i kreślimy obie jego przekątnie; jeżeli te przekątnie przecinają się z sobą, to 4 punkta dane leżą w jednéj płaszczyznie. Jeżeli bowiem te dwie przekątnie przecinają się z sobą, (czyli, jeżeli punkta przecięć ich rzutów leżą na jednéj prostopadłéj do osi), to przez nie płaszczyzna przesuniętą być może, a dane cztéry punkta, leżąc na końcach tych przekątni, będą tém samém leżały na téj płaszczyznie.

Zadanie 71. 1) Nakreślić rzuty cztérech, pięciu, sześciu itd. punktów, któreby leżały na jednéj płaszczyznie; 2) każdy z cztérech punktów danych leży w innéj, albo téż wszystkie leżą w II, III lub IV ćwiartce przestrzeni, znaleść, czy leżą w jednéj płaszczyznie.

Zadanie 72. *Danym jest rzut poziomy wielokąta płaskiego i rzut pionowy dwóch przyległych jego boków; uzupełnić ten ostatni rzut wielokąta.*

Ponieważ wszystkie boki tego wielokąta jako płaskiego leżeć muszą na jednéj płaszczyznie, dość więc na płaszczyznie przesuniętéj przez dwa boki, których rzuty pionowe także są dane, wykreślić kolejno rzuty pionowe reszty boków, co jest łatwém, ponieważ dane są ich rzuty poziome (Zad. 42), a jeżeli zadanie dobrze rozwiązane, to punkta przecięć tak znalezionych rzutów z odpowiednimi punktami na rzucie poziomym, będą leżały na prostopadłych do osi.

Albo krócéj: mając dany rzut pionowy $a'b'c'd'e'f'g'$ wielokąta (Fig. **69**), zaś z rzutu poziomego tylko dwa boki ag i gf, prowadzimy af i $a'f'$, to te linie będą rzutami przekątni AF wielokąta. Prowadzimy następnie $b'g'$, ta przetnie się z $a'f'$ w m', szukamy odpowiedniego m (będzie na pro-

4*

stopadłéj do osi z m' poprowadzonéj i na af), i łączymy m z g, zaś z b' spuszczamy prostopadłą do osi aż do przecięcia się z mg w punkcie b, a ten punkt będzie rzutem poziomym wierzchołka B w wielokącie, czyli będzie rzutem poziomym odpowiadającym punktowi b'; połączywszy go zaś z a, otrzymamy rzut poziomy boku AB. W tenże sam sposób otrzymać można rzuty poziome reszty wierzchołków tego wielokąta, a tém samém i boków.

Zadanie 73. *Przez punkt dany poprowadzić prostą prostopadłą do płaszczyzny danéj.*

Wiemy z §. 12 Tw. 2, że jeżeli prosta jest prostopadłą do płaszczyzny, to rzuty jéj są prostopadłe do odpowiednich śladów płaszczyzny. Mając więc dane rzuty punktu i ślady płaszczyzny, przez rzut pionowy punktu kreślimy prostopadłą do śladu pionowego, zaś przez poziomy prostopadłą do śladu poziomego płaszczyzny danéj, a te prostopadłe będą rzutami prostéj szukanéj.

Zadanie 74. *Przez punkt dany przesunąć płaszczyznę prostopadłą do prostéj danéj.*

Gdziekolwiek poprowadziwszy płaszczyznę prostopadłą do prostéj danéj, zaś przez punkt dany drugą do niéj równoległą, ta ostatnia będzie żądaną. A więc, mając dany punkt $a'a$ i prostą $b'c'$, bc (Fig. **70**), kreślimy gdziekolwiek ślady $r'r$ płaszczyzny do niéj prostopadłéj (§. 12 Tw. 2), następnie przez punkt $a'a$ kreślimy płaszczyznę $P \parallel R$, tj. przez $a'a$ prowadzimy prostą $a'd'$,ad równoległą do śladu poziomego r, i przez ślad pionowy d' téj prostéj kreślimy $p' \parallel r'$, przez O zaś $p \parallel r$ (Zad. 57), a otrzymamy ślady płaszczyzny żądanéj.

W praktyce, jak łatwo poznać z figury, można się obejść bez kreślenia płaszczyzny R a to w sposób: nakreśliwszy ad prostopadle do bc, zaś $a'd'$ równolegle do osi, przez ślad d' téj prostéj prowadzimy p' prostopadle do $b'c'$, zaś przez O prowadzimy p równolegle do ad.

Zadanie 75. *Z punktu danego spuścić prostopadłą na prostą daną.*

Przez punkt dany przesuwamy płaszczyznę prostopadłą do prostéj danéj (Zad. 74), i szukamy punktu przecięcia się téj płaszczyzny z prostą daną (Zad. 66), a punkt ten połączony z danym, da nam prostopadłą żądaną.

A więc, mając dane rzuty punktu A i prostéj BC (Fig. 71), prowadzimy przez A płaszczyznę P prostopadłą do BC podług zadania poprzedzającego; daléj przez prostą daną przesuwamy płaszczyznę rzucającą pionową $s's$ i szukamy prostéj przecięcia téj płaszczyzny $s's$ z płaszczyzną $p'p$, a prosta ta tj. $s'g', sg$ przetnie się z prostą $b'c', bc$ w punkcie $g'g$, który połączony z punktem $a'a$, da nam prostopadłą $a'g', ag$ szukaną.

Zadanie 76. Z punktu spuścić prostopadłą na prostą daną, jeżeli 1) punkt leży na jednéj z płaszczyzn rzutów, zaś prosta na drugiéj; 2) punkt leży na osi, zaś prosta jakkolwiek i gdziekolwiek itp.

Zadanie 77. *Przez prostą daną przesunąć płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny danéj.*

Na prostéj danéj obieramy gdziekolwiek punkt i przezeń prowadzimy prostą prostopadłą do płaszczyzny danéj (Zad. 73); przez tę prostopadłą i prostą daną przesuwamy wreszcie płaszczyznę, a ta będzie żądaną.

ROZDZIAŁ II.

Nauka o kładach, obrotach i zmianie płaszczyzn rzutów.

§. 14.

O kładach i obrotach w ogólności.

W poprzedzających paragrafach poznaliśmy najprzód sposoby wyznaczania położenia punktu, linii prostéj, płaszczyzny i figur płaskich, położonych w przestrzeni, za pomocą rzutów lub śladów odniesionych do dwóch płaszczyzn rzutów, a zespolonych na jednéj płaszczyznie rysunkowéj; daléj poznaliśmy sposoby rozwiązywania licznych zadań, tyczących się wzajemnego położenia linij prostych względem płaszczyzn; o wielkości jednak i wymiarach prawdziwych, bądźto rzeczy w zadaniu danych, bądź téż żądanych—mowy dotąd nie było. Gdy zaś dla utworzenia sobie dokładnego obrazu rzeczy rysunkiem przedstawionéj, nietylko znajomość jéj położenia w przestrzeni, ale i wielkość jéj jest niezbędną, o sposobach więc szukania téjże mówić teraz będziemy, a mianowicie, jak z danych rzutów linij prostych, kątów między temiż zawartych, figur płaskich itp. można wynaleść prawdziwą wielkość tychże rzeczy w przestrzeni, jakotéż wielkość ich wzajemnych stosunków i związków. A prócz tego, gdy konstrukcya rysunkowa przy rozwiązaniu jakiegoś zadania staje się często bardzo prostą, jeżeli figura dana w przestrzeni zajmuje korzystne położenie względem płaszczyzn rzutów, pożyteczną więc rzeczą umieć przywieść tę figurę w takie położenie, jakie do wykonania rysunku i zrozumienia tegoż najdogodniejszém być się nam wydaje. Do tych celów służy nauka o kładach (Rabattement, — die Umklappung) i obrotach (Rotation, — die Drehung), których podstawą jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie. *Jeżeli prosta ograniczona lub jakakolwiek figura płaska leży na jednéj z płaszczyzn rzutów lub jest do niéj równoległą, wtedy rzut jéj na też płaszczyznę daje nam prawdziwą wielkość téjże prostéj, jako téż prawdziwą wielkość i kształt figury płaskiéj.*

Co do pierwszego założenia, rzecz ta dowodu nie potrzebuje, gdyż w tym razie samaż linia prosta lub figura jest swoim rzutem na też płaszczyznę. Co do drugiego zaś, jeżeli prosta ograniczona np. AB jest równoległą do jednéj z płaszczyzn rzutów np. do pozioméj, to z końców jéj A i B spuściwszy prostopadłe Aa i Bb do téjże płaszczyzny, otrzymamy rzut poziomy ab téj prostéj, który jako bok przeciwny w prostokącie $ABab$ będzie równy co do długości saméjże prostéj. Jeżeli wreszcie figura płaska jest wielokątem, leżącym na płaszczyznie równoległéj do jednéj z płaszczyzn rzutów np. do poziomćj, wówczas przez jéj boki i odpowiednie rzuty poziome tychże przesunąwszy płaszczyzny, takowe utworzą nam graniastosłup, w którym figura płaska dana w przestrzeni, i jéj rzut na płaszczyznę poziomą do niéj równoległą, będą podstawami tegoż graniastosłupa, a jako takie są przystające i równe sobie.

§. 15.

O obrotach punktu, prostéj i płaszczyzny.

Zrobić obrót punktu, prostéj lub płaszczyzny i w ogóle jakiéjkolwiek figury płaskiéj, znaczy to, figurę tę około stósownie do tego obranéj osi obrócić tak, iżby ona, nie zmieniając płaszczyzn rzutów, zajęła względem tychże żądane, a jak zwykle się dzieje, korzystniejsze położenie, aniżeli przedtém miała. Ponieważ zaś głównym celem obrotów jest, dane albo też szukane figury płaskie przedstawić w ich prawdziwym kształcie i wielkości, zatém oś obrotu musi być przedewszystkiem równoległą do jednéj z płaszczyzn rzutów; obracając bowiem figurę płaską około prostéj pochyło względem płaszczyzn rzutów stojącéj, nie doprowadzimy jéj nigdy w położenie równoległe do jednéj z płaszczyzn rzutów, a tém samém nigdy z rzutów jéj, prawdziwéj jéj wielkości ocenić nie będziemy mogli. Oś ta zowie się osią obrotu (axe albo charnière de rotation, — die Drehungsaxe). Podczas takiego obrotu, wszystkie punkta figury opisują koła, których środki leżą na osi obrotu, a których promieniami są odległości tychże punktów od osi obrotu. Jeżeli za oś obrotu przyjmiemy prostą prostopadłą do jednéj z płaszczyzn rzutów, wtedy konstrukcya wielce się upraszcza, albowiem każde z tych kół, leżąc w płaszczyznie równoległéj do téjże płaszczyzny rzutów (§. 2 N. 5), pokaże się na niéj w prawdziwym kształcie i wielkości, na drugiéj zaś jako prosta równoległa do osi rzutów. To wiedząc, zacznijmy najprzód od punktu.

W tym celu niech będzie dany punkt $a'a$, oś obrotu $o'o$ (Fig. 72), znaleść mamy rzuty tego punktu po obrocie jego o kąt α.

Z punktu danego $a'a$ spuściwszy prostopadłą na oś obrotu, to rzutem jéj pionowym będzie $a'm'$ równoległa do osi rzutów, zaś poziomym am, tj. prosta łącząca rzut poziomy punktu ze spodkiem osi obrotu. Prostopadła ta jest promieniem obrotu dla punktu $a'a$, zaś prawdziwą jéj wielkością jako prostéj równoległéj do płaszczyzny pozioméj rzutów, jest jéj rzut poziomy. Promieniem więc am czyli ao zatoczywszy z punktu o jako ze spodka téj prostopadłéj koło, takowe jest rzutem poziomym a zarazem prawdziwą wielkością i kształtem drogi opisanéj przez punkt dany w czasie zupełnego obrotu około osi $o'o$, rzutem zaś jego pionowym jest prosta równoległa do osi rzutów przez a' poprowadzona. Chcąc następnie znaleść rzuty punktu danego po obrocie go tylko o kąt dany α, potrzeba w punkcie o na prostéj oa odciąć kąt $aoa_1 = \alpha$, a znajdziemy punkt a_1 będący rzutem poziomym punktu danego po uskutecznieniu obrotu, rzut zaś jego pionowy będzie na rzucie pionowym koła tj. w a'_1, czyli będzie w téj saméj odległości od osi rzutów, w jakiéj był przed obrotem, co jest zresztą rzeczą jasną, skoro punkt $a'a$, leżąc w czasie obrotu w płaszczyznie równoległéj do płaszczyzny pozioméj rzutów, odległości tém samém od téj płaszczyzny rzutów nie zmienił.

Rzecz łatwa do zrozumienia, że 1) otrzymać tu można także rzuty drugiego punktu tj. $a_2a'_2$, odpowiadające warunkowi zadania, a co się zdarza wtedy, gdy nie jest powiedzianém, w którą stronę obrót punktu ma być wykonanym; 2) że zamiast na rzucie poziomym kreślić cały okrąg koła, wystarczy zatoczyć promieniem oa tylko łuk aa_1 równy kątowi danemu (Fig. **73**), a koniec jego tj. punkt a_1 będzie rzutem poziomym punktu danego po obrocie, rzut zaś pionowy znajdzie się jak powyżéj.

Jeżeli oś obrotu zamiast do pozioméj stoi do pionowéj płaszczyzny rzutów prostopadle, wtedy do téj płaszczyzny odnieść trzeba wszystko to, cośmy powyżéj powiedzieli. Przykład obrotu w tym razie wskazuje figura **74**.

Zadanie 78. Dany punkt obrócić najprzód około osi pionowéj, potém około poziooméj o kąt 30^0, 60^0, 90^0, 150^0 itp., jeżeli 1) punkt leży na płaszczyznie poziooméj lub pionowéj rzutów; 2) jeżeli punkt leży w któréjkolwiek ćwiartce przestrzeni.

Zadanie 79. Mając daną oś obrotu pionową, rzuty punktu przed obrotem i rzut jego pionowy po obrocie, znaleść jego rzut poziomy, jako téż kąt obrotu.

Wiedząc już, w jaki sposób wykonywa się obrót punktu, łatwo teraz zastósować to do prostéj danéj, potrzebujemy bowiem tylko w sposób wiadomy uskutecznić obrót dwóch punktów gdziekolwiek na niéj obranych. Tu jednak odróżnić należy trzy przypadki, a mianowicie: 1) prosta dana nie przecina się z osią obrotu, a więc jest do niéj równoległą; 2) prosta dana przecina się z osią obrotu, i 3) ani się przecina, ani jest do niéj równoległą.

Co do I. Jeżeli prosta dana jest równoległą do osi obrotu, zaś oś obrotu jest prostopadłą np. do płaszczyzny poziooméj rzutów, to tém samém i prosta dana jest prostopadłą do téjże płaszczyzny. Że zaś w skutek obrotu prosta dana prostopadłości swojéj nie utraci, czyli, ponieważ po obrocie będzie ona tak samo jak i przed obrotem prostopadłą do téjże saméj płaszczyzny rzutów, zatém wystarcza poszukać rzutów tylko jednego jéj punktu po uskutecznieniu obrotu, i przez nie poprowadzić rzuty prostéj prostopadłéj do płaszczyzny pozioméj rzutów, a te będą rzutami prostéj danéj po wykonaniu obrotu żądanego. A więc, jeżeli prosta dana jest $a'b',ab$ (Fig. **75**), znaleść zaś mamy jéj rzuty po obrocie o kąt α, obieramy na niéj gdziekolwiek jeden punkt, najkorzystniéj atoli jéj ślad poziomy $b'b$, i szukamy rzutów jego po obrocie o kąt α; znalazłszy takowe tj. punkta b_1, i b'_1, prowadzimy przez b'_1 prostopadłą do osi rzutów, a ta będzie rzutem pionowym prostéj po obrocie, rzutem zaś jéj poziomym będzie punkt b_1.

Co do 2go. Jeżeli prosta dana przecina się z osią obrotu np. $a'b'ab$, (Fig. **76**), wtedy znów najkorzystniéj jest obrać ślad poziomy prostéj, tj. $b'b$ i punkt przecięcia się jéj z osią obrotu tj. $a'a$, jako dwa punkta na prostéj leżące i z nimi wykonać obrót o kąt dany np. α. Że zaś punkt $a'a$, jako leżący zarazem na osi obrotu, położenia swego nie zmieni, pozostaje więc tylko obrócić punkt $b'b$ o kąt α, czyli znaleść punkt $b_1b'_1$, który połączony z $a'a$ da nam położenie prostéj danéj po obrocie.

Co do 3go. Jeżeli prosta dana np. $a'b',ab$ (Fig. **77**) ani jest równoległą, ani się przecina z osią obrotu, a tém samém leży w innéj płaszczyznie aniżeli oś obrotu, wtedy już potrzeba wykonać obrót dwóch punktów na prostéj danéj obranych, np. śladu jéj poziomego $b'b$ i punktu $m'm$, którego rzut poziomy leży na prostopadłéj z o do ab wyprowadzonéj. I tak, punkt $m'm$ po obrocie o kąt dany np. α przyjdzie do $m_1m'_1$, rzut zaś poziomy prostéj w położenie m_1b_1; jak bowiem przed obrotem był on stycznym w punkcie m_1 do koła zatoczonego z punktu o promieniem om, takimże być musi i po obrocie, tj. stycznym do tegoż koła, ale w punkcie m_1. Aby zaś znaleść rzut pionowy téj prostéj po obrocie, szukamy rzutów punktu $b'b$ po zrobieniu obrotu o kąt α, a otrzymamy stąd punkt $b_1b'_1$, którego rzut pionowy b'_1 połączony z m'_1 da nam rzut pionowy żądany.

Zadanie 80. Obrócić prostą o kąt dany około osi pionowéj lub pozioméj, jeżeli 1) prosta leży na płaszczyznie poziomej lub pionowéj; 2) jeżeli prosta leży w którejkolwiek ćwiartce przestrzeni 3) prosta jest równoległa lub prostopadła do jednéj z płaszczyzn rzutów, w każdym zaś z tych przypadków prosta przecina się z osią obrotu lub nie.

Zadanie 81. Obrócić prostą o kąt dany około osi pionowéj z nią się przecinającéj, gdzie atoli rzut pionowy punktu przecięcia leży po za granicami rysunku.

Zadanie 82. Mając daną oś obrotu pionową, oba rzuty prostéj przed obrotem i rzut pionowy po zrobieniu obrotu, znaleść jéj rzut poziomy, jako téż kąt obrotu.

Znając sposoby wykonania obrotu punktu lub prostéj, również łatwo zastósować je znów do danéj płaszczyzny. I tak, aby znaleść położenie płaszczyzny np. $p'p$ (Fig. **78**), po obrocie jéj o kąt α około osi pionowéj $o'o$, wystarczy na téj płaszczyznie obrać dwie proste, uskutecznić ich obrót o kąt dany, a wreszcie przez ślady tak obróconych prostych przesunąć ślady płaszczyzny. Rzecz atoli uprości się wielce, jeżeli zamiast dwóch prostych jakbądź na płaszczyznie danéj leżących, obierzemy ślad poziomy płaszczyzny jako jednę, zaś prostą $c'b', cb$ do tegoż śladu równoległą, a przecinającą się przytem z osią obrotu, jako drugą prostą. Ślad bowiem poziomy p po obrocie go o kąt α, zostanie stycznym do koła opisanego z punktu o promieniem równym prostopadłéj oa spuszczonéj z punktu o na prostą p, i przyjdzie do p_2; co się zaś tyczé drugiéj prostéj tj. $c'b', cb$, ta zostając ciągle równoległą do p, będzie miała po obrocie za rzut poziomy prostą cb_1 równoległą do p_2, zaś jéj rzut pionowy zostaje ten sam tj. $b'c'$. Poszukawszy wreszcie śladu pionowego b'_1 téj prostéj $b'c', b_1c$ i takowy połączywszy z punktem przecięcia się śladu poziomego p_2 z osią rzutów, otrzymamy ślad pionowy płaszczyzny po obrocie.

Jeżeli płaszczyzna dana jest rzucającą poziomą, wtedy wystarcza wyznaczyć tylko położenie jéj śladu poziomego po obrocie, ślad bowiem pionowy będzie prostopadłym do osi.

Zadanie 83. Obrócić o kąt dany 1) płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny pozioméj rzutów około osi pionowéj, lub płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny pionowéj rzutów około osi poziomé j; 2) płaszczyznę leżącą w którejkolwiek ćwiartce przestrzeni około osi poziomé j lub pionowé j itp.

Prócz ogólnych powyższych, jako szczególne zastósowanie nauki o obrotach weźmy przykłady następujące:

Zadanie 84. *Znaleść za pomocą obrotu prawdziwą długość prostéj ograniczonéj, czyli znaleść odległość dwóch punktów danych.*

Dane są punkta $a'a$ i $b'b$ (Fig. **79**), których odległość mamy znaleść. Połączywszy te punkta ze sobą, otrzymamy ich odległość od siebie, czyli prostą $a'b',ab$ w rzutach, chodzi o jéj prawdziwą długość. Wiemy, że jeżeli prosta jest równoległą do płaszczyzny pionowéj rzutów, rzut jéj pionowy będzie jéj prawdziwą wielkością; jeżeli więc prosta zajmuje jakiekolwiek położenie w przestrzeni, należy ją obrócić około osi pionowéj tak, iżby się stała równoległą do płaszczyzny pionowéj rzutów. Za oś obrotu weźmy więc prostą prostopadłą do płaszczyzny poziomej rzutów, a przechodzącą przez punkt $a'a$, i poszukajmy rzutów obu punktów danych po obrocie. Punkt atoli $a'a$, jako leżący na osi obrotu, zostanie na swojém miejscu; co się zaś tyczé punktu $b'b$, to uważmy, że skoro prosta ma być po obrocie równoległą do płaszczyzny pionowéj rzutów, zatém rzut jéj poziomy przyjść musi w położenie ab_1 równoległe do osi, i na niém leżeć musi rzut poziomy punktu $b'b$ po obrocie. Promieniem więc ab z punktu a zatoczywszy łuk aż do przecięcia się z równoległą przez a do osi rzutów poprowadzoną, otrzymamy punkt b_1, jako rzut poziomy punktu $b'b$ po jego obrocie, poczém pionowy tj. b'_1 łatwy do znalezienia. Połączywszy wreszcie a' z b'_1 otrzymany rzut pionowy $a'b'_1$ prostéj danéj, ale leżącéj teraz równolegle do płaszczyzny pionowéj rzutów, a któryto rzut tém samém jest prawdziwą wielkością téjże prostéj.

Zadanie 85. *Znaleść kąty nachylenia, jakie prosta dana tworzy z płaszczyznami rzutów.*

Ponieważ, jeżeli prosta jest równoległą do płaszczyzny pionowéj rzutów, kąt między jéj rzutem pionowym a osią rzutów równym jest kątowi, jaki prosta tworzy z płaszczyzną poziomą rzutów, zatém mając prostą daną jakkolwiek, obracamy ją tak, iżby przyszła w położenie równoległe do płaszczyzny pionowéj rzutów, a otrzymamy kąt nachylenia jéj ku płaszczyznie poziroméj rzutów. Obróciwszy następnie prostą daną tak, iżby przyszła znów w położenie równoległe do płaszczyzny poziroméj rzutów, znajdziemy kąt, jaki ona tworzy z płaszczyzną pionową rzutów, a mianowicie będzie to kąt zawarty między rzutem poziomym prostéj obróconéj a osią rzutów.

Zadanie 86. *Na prostéj danéj ograniczonéj odciąć od jednego jéj końca część równą długości danéj.*

Mając na prostéj $a'b', ab$ (Fig. **79**), licząc od jéj końca $a'a$ odciąć część równą długości m, obracamy ją tak, iżby stanęła równolegle do płaszczyzny pionowéj rzutów, a następnie na jéj rzucie pionowym $a'b'_1$ odcinamy $a'c'_1 = m$; wróciwszy wreszcie z prostą daną w jéj pierwotne położenie, znajdziemy rzuty $c'c$ punktu szukanego, tj. odcinającego na rzutach prostéj danéj długość żądaną.

Zadanie 87. *Znaleść kąt nachylenia do siebie dwóch płaszczyzn, których ślady poziome lub pionowe są do siebie równoległe.*

Dane są dwie płaszczyzny $p'p$ i $q'q$ (Fig. **80**), których ślady np. poziome są do siebie równoległe. Obracając współcześnie obie płaszczyzny dane około osi prostopadłéj do płaszczyzny pozioméj rzutów, ślady ich poziome w czasie tego obrotu zostają ciągle do siebie równoległe; obróciwszy je zaś tak, iżby ślady te stanęły prostopadle do osi rzutów, to skutkiem takiego obrotu, obie płaszczyzny dane będą prostopadłe do płaszczyzny pionowéj rzutów, a miarą ich kąta dwuściennego będzie kąt zawarty między śladami pionowymi po obrocie znalezionymi. A więc, wziąwszy dla uproszczenia konstrukcyi za oś obrotu prostopadłą $b'b$, przechodzącą przez punkt przecięcia się śladów pionowych danych płaszczyzn, obracamy ślady poziome p i q, aż przyjdą w położenie p_1 i q_1, prostopadłe do osi rzutów, poczém połączywszy punkta przecięć się ich z osią rzutów (tj. punkta C i D) z punktem b', który w czasie obrotu miejsca swego nie zmienił, otrzymamy ślady pionowe p'_1 i q'_1, a następnie kąt $Cb'D$ jako kąt żądany.

Zadanie 88. Znaleść za pomocą obrotu odległość prawdziwą dwóch punktów, z których 1) jeden leży na pozioméj, drugi na pionowéj płaszczyznie rzutów; 2) każdy z nich leży w innéj ćwiartce przestrzeni itp.

Zadanie 89. Znaleść kąty nachylenia prostéj względem płaszczyzn rzutów, jeżeli 1) prosta przechodzi przez oś rzutów; 2) prosta leży w któréjkolwiek ćwiartce przestrzeni.

Zadanie 90. Na płaszczyznie prostopadłéj do płaszczyzny poziooméj rzutów danym jest punkt; obrócić tę płaszczyznę tak, iżby stanęła równolegle do płaszczyzny pionowéj rzutów, i znaleść położenie rzutów punktu danego po obrocie.

Zadanie 91. *Płaszczyznę pochyłą względem obu płaszczyzn rzutów obrócić tak, iżby stanęła równolegle do płaszczyzny pozioméj.*

Dla rozwiązania tego zadania potrzeba zrobić dwa obroty danéj płaszczyzny, a mianowicie: obrócić ją należy najprzód około osi pionowéj, dopóki nie stanie prostopadle do płaszczyzny pionowéj rzutów, a następnie tak obróconą, przywieść znów za pomocą obrotu około osi poziomej (tj. prostopadłéj do płaszczyzny pionowéj rzutów) w położenie równoległe do płaszczyzny poziomej rzutów.

§. 16.

O kładach i ich zastosowaniu.

Kład płaszczyzny zrobić, znaczy to płaszczyznę tę około jéj śladu jako osi obrócić tak, iżby padła na tę płaszczyznę rzutów, na któréj ów ślad czyli oś leży. Chcąc więc zrobić kład płaszczyzny danéj na płaszczyznę poziomą rzutów, obracać ją musimy około śladu poziomego; zaś chcąc otrzymać jéj kład na płaszczyznę pionową rzutów, obracać ją musimy około śladu pionowego. W pierwszym razie mówimy, że robimy kład poziomy płaszczyzny, w drugim razie, pionowy. Ślad, około którego płaszczyznę obracamy, zowie się osią kładu (l'axe du rabattement, — die Umlegungsaxe). I tak np. jeżeli płaszczyzna P (Fig. **81**) przedstawia nam płaszczyznę poziomą rzutów, zaś Q jakąkolwiek inną, to obróciwszy tę ostatnią około jéj śladu poziomego, a więc około MN tak, iżby padła na płaszczyznę P, otrzymamy kład poziomy płaszczyzny danéj Q. Prosta MN jest osią kładu. W obrocie tym, każdy punkt płaszczyzny danéj, np. punkt A zatacza łuk, którego promieniem jest prostopadła AO spuszczona z tego punktu na oś kładu, zaś środkiem punkt O, tj. punkt przecięcia się téj prostopadłéj z osią kładu; płaszczyzna tego łuku, będąc opisana przez promień AO stale prostopadły do osi kładu, będzie tém samém także prostopadłą do téjże osi (§ 2, Nr. 5).

Przez kład punktu, linii prostéj i w ogóle jakiéjkolwiek figury płaskiéj rozumiemy to ich położenie, jakie one zajmą, skoro wraz z płaszczyzną, na któréj w przestrzeni leżą, położone zostaną na jednéj z płaszczyzn rzutów. Chcąc zatem zrobić kład punktu lub prostéj, przesuwamy wpierw przez nie dowolną płaszczyznę i kład takowéj robimy; chcąc zaś zrobić kład figury płaskiéj, musimy mieć daną lub téż musimy dopiero wyznaczyć płaszczyznę, na któréj ona leży, a następnie jéj kład uskutecznić.

Zadanie 92. *Danym jest punkt na płaszczyznie prostopadłéj do jednéj z płaszczyzn rzutów; znaleść jego położenie po zrobieniu kładu płaszczyzny.*

Niech $p'p$ (Fig. **82**) będą śladami płaszczyzny rzucającéj pozioméj, zaś $c'c$ rzutami punktu na niéj leżącego; chcemy znaleść najprzód jego kład poziomy. W tym celu obracamy płaszczyznę $p'p$ około jéj śladu poziomego p jako osi, dopóki nie padnie na płaszczyznę poziomą rzutów. Ponieważ linia rzucająca pozioma punktu C w przestrzeni, jest prostopadłą w c do śladu p, i w czasie obrotu płaszczyzny $p'p$ zostaje ciągle do niego prostopadłą, bedzie nią więc także i po skończonym obrocie, tj. wtedy, gdy zajmie położenie cc''. Że zaś prosta ta, mierząc odległość punktu w przestrzeni od jego rzutu poziomego, w skutek obrotu długości swéj nie zmienia, a długość ta pierwotnie była $c'b$, zatém odciąwszy $cc''=c'b$, znajdziemy punkt c'' jako szukany kład punktu danego.

Aby znów znaleść kład pionowy punktu $c'c$, obracamy płaszczyznę $p'p$ około jéj śladu pionowego jako osi. Ponieważ linia rzucająca pozioma punktu C w czasie obrotu płaszczyzny $p'p$ zostaje ciągle prostopadłą do płaszczyzny pozioméj rzutów, będzie nią więc także i wtedy, gdy spodek jéj tj. punkt c, zatoczywszy łuk z punktu o promieniem co, wraz z śladem poziomym p przyjdzie na oś rzutów, tj. do punktu c_1, czyli rzucająca pozioma punktu C po obrocie zajmie położenie $c_1c'_1$ prostopadłe do osi rzutów. Że zaś punkt C w przestrzeni, w skutek tego obrotu płaszczyzny $p'p$, odległości swéj od płaszczyzny poziomej rzutów nie zmieni, a miarą téj jego odległości jest $c'b$, zatem punkt C po zrobieniu kładu pionowego leżeć będzie w c'_1 tj. w odległości $c'_1c_1=c'b$.

Z pomocą poprzedniego łatwo rozwiązać następujące dwa zadania:

Zadanie 93. Mając daną płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny poziomej rzutów i kład punktu na téj płaszczyznie leżącego, znaleść rzuty jego po wróceniu płaszczyzny w jéj pierwotne położenie.

Zadanie 94. Znaleść kład punktu leżącego na płaszczyznie prostopadłéj do osi rzutów i naodwrót.

Zadanie 95. *Zrobić kład prostéj ograniczonéj śladami i znaleść jéj prawdziwą długość.*

Daną jest prosta $a'b'$,ab (Fig. **83**) ograniczona śladami a i b'. Aby otrzymać jéj kład np. pionowy, przesuwamy przez nią płaszczyznę rzucającą poziomą $s's$, i tę obracamy około śladu s', dopóki nie padnie na płaszczyznę pionową rzutów. Ponieważ w obrocie tym oś kładu s' zostanie nieruchomą a więc i ślad b', zaś każdy punkt śladu s zatacza łuk na płaszczyznie pozioméj rzutów promieniem równym odległości tegoż punktu od osi kładu, a więc od punktu b, zatem i ślad poziomy prostéj tj. punkt a zatoczy łuk promieniem ab ze środka b, i przyjdzie wraz ze śladem s na oś rzutów czyli do punktu a''; ślad a'' leżąc teraz na osi, leży tém samém na płaszczyznie pionowéj rzutów, a gdy i ślad b' tamże leży, połączywszy więc z sobą takowe, otrzymamy kład pionowy, a tém samém i prawdziwą długość $a''b'$ prostéj danéj.

Aby otrzymać kład poziomy téj prostéj a zarazem jéj długość, obracamy płaszczyznę $s's$ około śladu poziomego tj. s, dopóki nie padnie na płaszczyznę poziomą rzutów. W tym znowu obrocie oś kładu s zostaje nieruchomą a więc i punkt a na niéj leżący, zaś ślad s' stojąc poprzednio prostopadle do śladu s, zostanie także po obrocie prostopadłym do s, tj. zajmie położenie bb'', a ślad b' prostéj zatoczywszy z punktu b łuk promieniem bb', przyjdzie do b''; gdy więc już oba ślady prostéj, czyli jéj końce leżą teraz na płaszczyznie pozioméj rzutów, połączone zatem z sobą, dadzą nam kład poziomy ab'' prostéj, a zarazem i jéj długość prawdziwą.

Tak kład poziomy lub pionowy, jak i prawdziwą długość prostéj AB, można także otrzymać, przesunąwszy przez nią płaszczyznę rzucającą pionową i zrobiwszy kład takowéj na płaszczyznę pionową lub poziomą rzutów.

Zadanie 96. *Znaleść kąty, jakie prosta dana ograniczona śladami tworzy z płaszczyznami rzutów.*

Aby znaleść kąt, jaki prosta dana *a'b'*, *ab* (Fig. **83**) tworzy z płaszczyzną poziomą rzutów, przesuwamy przez nie płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny pozioméj rzutów, czyli płaszczyznę rzucającą poziomą, a kąt zawarty między prostą przecięcia się téjże płaszczyzny z płaszczyzną poziomą rzutów a prostą daną, jest kątem szukanym. Aby go otrzymać w rysunku, dość jest zrobić kład téj płaszczyzny przez *AB* przechodzącéj, czyli płaszczyzny *s's*, na płaszczyznę pionową rzutów, a kąt zawarty między kładem prostéj danéj tj. między *a''b'* a osią rzutów, czyli kąt α, będzie żądanym. Tenże sam kąt na kładzie poziomym będzie, jak łatwo zrozumieć, między *ab''* i *ab*.

Podobnież zupełnie postępując, można znowu znaleść kąt, jaki prosta dana tworzy z płaszczyzną pionową rzutów, tj. przesuwamy przez nią płaszczyznę rzucającą pionową i robimy jéj kład na płaszczyznę pionową lub poziomą rzutów.

W praktyce, jak to łatwo z figury wyrozumieć, celem znalezienia tych kątów postąpić można krótko w sposób następujący: na rzutach prostéj danéj obieramy gdziekolwiek punkt (np. *b'b*) i z rzutu jego poziomego wyprowadzamy prostopadłą do rzutu poziomego prostéj, a równą co do długości linii rzucającéj poziomej punktu obranego (tj. $bb''=b'b$); koniec téj prostopadłéj łączymy następnie ze śladem poziomym prostéj danéj, a otrzymamy stąd trójkąt prostokątny *(abb'')*, w którym kąt między przeciwprostokątnią a rzutem poziomym prostéj zawarty jest kątem, jaki prosta dana tworzy z płaszczyzną poziomą rzutów. I podobnież znów, z rzutu pionowego punktu obranego wyprowadziwszy prostopadłą do rzutu pionowego prostéj, a równą co do długości linii rzucającéj pionowéj tegoż punktu, i koniec jéj połączywszy ze śladem pionowym prostéj,—kąt między prostą łączącą a rzutem pionowym prostéj danéj zawarty będzie kątem, jaki prosta ta tworzy z płaszczyzną pionową rzutów.

Zadanie 97. Znaleść prawdziwą długość prostéj ograniczonéj śladami a leżącéj w II, III lub IV ćwiartce przestrzeni, jako téż kąty, jakie ona tworzy z płaszczyznami rzutów.

Zadanie 98. *Znaleść prawdziwą długość prostéj ograniczonéj dwoma punktami, czyli znaleść odległość dwu punktów danych za pomocą kładu.*

Niech *a'b',ab* (Fig. **84**) będą rzutami prostéj ograniczonéj czyli rzutami odległości punktów danych *a'a* i *b'b*. Prostą *AB* w przestrzeni uważać możemy jako bok trapezu, którego podstawą jest jéj rzut poziomy ab, zaś bokami do siebie równoległymi są linie rzucające poziome punktów A i B, a więc prostopadłe do ab, i których wielkości w rysunku tj. $a'c$ i $b'd$ są dane. Obróciwszy ten trapez około ab, dopóki nie padnie na płaszczyznę poziomą rzutów, to tak w czasie obrotu, jak i po skończeniu tegoż, oba te boki równoległe trapezu zostaną prostopadłymi do ab. Wystawiwszy zatem w a i b prostopadłe do ab, odciąwszy na nich $aa''=a'c$, zaś $bb''=b'd$, i połączywszy a'' z b'', otrzymamy kład tego trapezu, w którym bok $a''b''$ będzie szukaną długością prostéj $a'b'$,ab.

W tenże sam sposób można otrzymać prawdziwą długość prostéj AB na kładzie pionowym, a mianowicie do rzutu pionowego $a'b'$ w punktach a' i b' kreślimy prostopadłe, na nich odcinamy $b'b'''=bd$, zaś $a'a'''=ac$, i punkta stąd otrzymane a''' i b''' łączymy z sobą prostą $a'''b'''$, która będzie długością szukaną.

Zadanie 99. *Znaleść kąty nachylenia płaszczyzny danéj względem płaszczyzn rzutów.*

Wiemy (§. 2. Nr. 25), że miarą kąta nachylenia dwóch płaszczyzn do siebie czyli kąta dwuściennego, jest kąt płaski zawarty między dwoma prostopadłemi, wyprowadzonemi z wspólnego punktu ich przecięcia, a z których jedna leży na jednéj, druga na drugiéj płaszczyznie. Chcąc więc znaleść np. kąt, jaki płaszczyzna $p'p$ (Fig. **85**) tworzy z płaszczyzną poziomą rzutów, potrzeba nam takich dwóch prostopadłych, — otrzymamy je zaś, przesunąwszy przez którykolwiek punkt na śladzie p (jako na przecięciu płaszczyzny $p'p$ z płaszczyzną poziomą rzutów) płaszczyznę $s's$ prostopadłą do tegoż śladu, i poszukawszy prostych, w których ona przecina się z płaszczyzną $p'p$ i z płaszczyzną poziomą rzutów. I tak, płaszczyzna $s's$ przecina się z płaszczyzną $p'p$ w prostéj $a'b'$, ab, zaś z płaszczyzną poziomą rzutów w śladzie s, którego rzut pionowy leży na osi; kąt więc między rzutami pionowymi tych dwóch prostych tj. między $a'b'$ i osią rzutów zawarty, będzie rzutem pionowym kąta szukanego. Aby zaś mieć prawdziwą wielkość tego kąta, uważmy, że on jako zawarty między dwiema prostopadłemi powyżéj rzeczonemi, jest zarazem tym samym kątem, jaki prosta $a'b', ab$ tworzy z płaszczyzną poziomą rzutów, a którÿto kąt podług zadania 96 znaleść umiemy. A więc, mając już prostą $a'b', ab$, szukamy jéj kładu pionowego tj. $a''b'$, a kąt α, zawarty między $a''b'$ i osią rzutów, będzie prawdziwą wielkością kąta nachylenia płaszczyzny danéj względem płaszczyzny pozioméj rzutów.

Jak to z figury widoczne, postąpić można dla znalezienia tego kąta krótko w sposób następujący: kreślimy płaszczyznę $s's$ prostopadłą do śladu p, a następnie ze środka b promieniem ba zataczamy łuk aż do osi; otrzymamy stąd punkt a'', który połączony z b' da nam prostą $a''b'$, zamykającą z osią rzutów kąt żądany.

Aby zaś znaleść kąt, jaki płaszczyzna dana $p'p$ tworzy z płaszczyzną pionową rzutów, kreślimy płaszczyznę $r'r$ (Fig. **86**), prostopadłą do śladu p', a następnie ze środka b' promieniem $b'a'$ zataczamy łuk aż do osi, tj. do punktu a''; punkt ten połączony z b da nam prostą $a''b$, między którą a osią rzutów kąt zawarty β będzie kątem żądanym. Uzasadnienie tego sposobu również polega na tém, co się powyżéj powiedziało.

Zadanie 100. Znaleść kąty, jakie płaszczyzna równoległa do osi rzutów tworzy z płaszczyznami rzutów.

Zadanie 101. *Na płaszczyznie pochyłéj względem płaszczyzn rzutów, danym jest punkt; znaleść jego położenie po zrobieniu kładu płaszczyzny na jednę z płaszczyzn rzutów.*

Mamy daną płaszczyznę Q, na któréj leży punkt A (Fig. **87**); przyjąwszy, że płaszczyzna P jest płaszczyzną poziomą rzutów, chcemy znaleść kład punktu A na téj płaszczyznie. Wiemy, że obracając w tym celu płaszczyznę Q około jéj śladu MN, punkt A zatoczy łuk promieniem AO równym odległości tego punktu od osi kładu; ponieważ zaś płaszczyzna tego łuku jest do MN prostopadłą, zatem jest prostopadłą tak do płaszczyzny Q, jak i do P (§. 2 N. 19), czyli jest rzucającą poziomą, i przetnie się z płaszczyzną P w prostéj $a''O$ prostopadłéj do MN. Punkt A w czasie obrotu swego ciągle się znajduje w płaszczyznie tego łuku; że zaś, skoro płaszczyzna Q padnie na P, znajdować się on musi także na płaszczyznie P, będzie więc na wspólném przecięciu się płaszczyzny łuku z płaszczyzną P, czyli na $a''O$. Ponieważ następnie na téjże prostéj tj. $a''O$ leży także rzut poziomy a punktu danego, gdyż płaszczyzna łuku zatoczonego przez punkt A jest, jakeśmy wyżéj rzekli, rzucającą poziomą, i na niéj punkt ten ciągle leży, zatém powiedzieć możemy, że punkt A po zrobieniu kładu płaszczyzny Q znajduje się gdzieś na prostopadłéj $a''O$ do osi kładu MN, przez rzut poziomy a punktu danego poprowadzonéj. Aby zaś wiedzieć gdzie, potrzebujemy tylko znaleść promień obrotu tj. AO. Promień ten atoli jest przeciwprostokątnią w trójkącie AaO, w którym jedna przyprostokątnia tj. Aa jest odległością punktu A od płaszczyzny pozioméj rzutów, druga zaś tj. aO jest odległością rzutu jego poziomego od osi kładu MN; z tych zatém danych znalazłszy długość promienia AO, odcinamy $a''O = AO$, a znajdziemy miejsce punktu danego po zrobieniu kładu poziomego płaszczyzny Q.

Widzimy stąd: 1) że kład poziomy punktu z jego rzutem poziomym leżą zawsze na jednéj prostopadłéj do osi kładu, a nadto 2) jak figura wskazuje, kąt $AOa'' = \alpha$ jest kątem nachylenia płaszczyzny Q względem P (§. 2. N. 25).

Stosując teraz te rzeczy do naszego rysunku, tj. chcąc znaleść kład poziomy punktu $a'a$ (Fig. **88**) leżącego na płaszczyznie, któréj tylko ślad poziomy p jest dany, postępujemy w sposób następujący:

Z rzutu poziomego a prowadzimy najprzód prostopadłą do osi kładu, która z tąż osią przetnie się w punkcie o; następnie do ao wystawiamy w punkcie a prostopadłą $ac = a'b$ (czyli równoległą do osi kładu) i punkt c łączymy z o, a otrzymamy stąd trójkąt prostokątny aoc, w którym oc jest promieniem obrotu dla punktu danego, zaś kąt $aoc = \alpha$ jest kątem nachylenia płaszczyzny danéj względem płaszczyzny poziomej rzutów. Odciąwszy wreszcie $a''o = oc$, czyli promieniem oc z punktu o zatoczywszy łuk aż do przecięcia się z przedłużoną prostopadłą oa, otrzymamy a'' tj. kład poziomy szukany punktu danego.

W przypadku powyżéj rzeczonym płaszczyzna, na któréj punkt dany leży, obróconą została około śladu p w lewo; jeżeli zaś, jak na fig. **89**, obróconą zostanie w prawo, wtedy kład punktu $a'a$ będzie leżał z téj saméj strony osi kładu, z któréj leży rzut poziomy punktu danego.

Zupełnie w podobny sposób jak poprzednio postąpić należy w przypadku, gdy dany tylko ślad pionowy p' płaszczyzny i rzuty $a'a$ (Fig. **90**) punktu na niéj leżącego, a chcemy znaleść kład jego pionowy. A mianowicie, ponieważ kład punktu z rzutem jego pionowym leżeć teraz muszą na jednéj prostopadłéj do osi kładu p', zatem przez a' prowadzimy najprzód prostopadłą do p', następnie na $a'b$ jako jednéj przyprostokątni wystawiamy trójkąt prostokątny, którego drugą przyprostokątnią jest $a'c=am$, i nareszcie promieniem równym jego przeciwprostokątni tj. bc zataczamy łuk do a''', a punkt ten a''' będzie szukanym kładem pionowym punktu A. Przy tém rozwiązaniu otrzymujemy znowu kąt $\beta=a'bc$ jako kąt nachylenia płaszczyzny P względem płaszczyzny pionowéj rzutów.

Gdyby były dane rzuty punktu A i ślad pionowy płaszczyzny P, a chcieliśmy znaleść kład poziomy punktu, to postępujemy jak poprzednio, poszukawszy atoli wpierw śladu poziomego płaszczyzny na mocy prawd znanych.

Zadanie 102. Mając dane 1) rzut poziomy punktu, ślad poziomy płaszczyzny i kąt nachylenia téjże do płaszczyzny pozioméj rzutów, znaleść kład poziomy punktu, a następnie rzut jego pionowy; 2) dane są oba ślady płaszczyzny i rzut poziomy punktu na niéj leżącego, znaleść jego kład poziomy.

Zadanie 103. *Daną jest płaszczyzna i kład punktu na niéj leżącego; nakreślić rzuty punktu tego po wróceniu płaszczyzny w jéj pierwotne położenie.*

Zadanie to jest odwrotném poprzedzającemu. Mogą tu być dane albo oba ślady płaszczyzny, albo tylko jeden z nich. Jeżeli dane są oba ślady płaszczyzny P, jakotéż np. kład poziomy a'' punktu A (Fig. **91**), to celem znalezienia rzutów jego spuszczamy z a'' prostopadłą na p i przy punkcie b kreślimy kąt α, jaki płaszczyzna P zawiera z płaszczyzną poziomą rzutów, a któryto kąt podług zadania 99 znaleść umiemy. Na ramieniu tego kąta odciąwszy następnie $bc=a''b$, i z punktu c spuściwszy prostopadłą ac na $a''b$, znajdziemy punkt a, który będzie rzutem poziomym punktu A wróconego wraz z płaszczyzną P w pierwotne położenie, rzut zaś jego pionowy będzie na prostopadłéj do osi z a wyprowadzonéj, i to w odległości

$a'm=ac$ od osi. Powody téj konstrukcyi leżą w zadaniu poprzedzającém.

Jeżeli zaś jest dany tylko jeden ślad płaszczyzny np. pionowy, to musi być także dany kąt, jaki ona tworzy z płaszczyzną pionową rzutów. Sposób rozwiązania zadania w tym razie jest ten sam, co poprzednio.

Zadanie 104. *Daną jest płaszczyzna i prosta na niéj leżąca, znaleść położenie prostéj po zrobieniu kładu płaszczyzny.*

Jeżeli tylko chodzi o samo położenie prostéj na kładzie poziomym lub pionowym, wówczas obieramy dwa dowolne punkta na prostéj i szukamy ich kładów (podług zad. 101) a takowe połączone ze sobą, dadzą nam położenie szukane prostéj.

Jeżeli zaś żądaną jest zarazem prawdziwa wielkość prostéj leżącéj na danéj płaszczyznie, wtedy zamiast obierać na niéj dwa dowolne punkta, obieramy jéj dwa ślady, skutkiem czego trzeba będzie poszukać kładu tylko jednego z nich, drugi bowiem już leży na téj płaszczyznie, na którą kład robimy. — A więc mając np. płaszczyznę P, tudzież prostą na niéj leżącą AB (Fig. **92**) i chcąc znaleść jéj położenie i wielkość np. na kładzie poziomym, szukamy tylko kładu poziomego śladu $b'b$, ślad bowiem $a'a$ leżąc już na płaszczyznie pozioméj, a prócz tego i na osi kładu, położenia swego nie zmieni; z punktu zatem b spuszczamy prostopadłą na p, szukamy następnie promienia obrotu dla punktu B albo sposobem wiadomym, albo krócéj, zrobiwszy kład trójkąta $b'bc$ na płaszczyznę pionową rzutów, gdzie przeciwprostokątnia $b'd$ będzie żądanym promieniem,—i odcinamy wreszcie $cb''=b'd$, a prosta ab'' będzie żądaną co do wielkości i położenia. W podobnyż sposób można otrzymać kład pionowy prostéj AB.

Zadanie 105. *Mając dany którykolwiek kład płaszczyzny i na nim nakreśloną prostą, wyznaczyć rzuty téj prostéj, skoro płaszczyzna dana wróci w pierwotne położenie między płaszczyznami rzutów.*

Zadanie to znów jest odwrotném poprzedzającemu. Aby otrzymać rzuty szukane, obieramy na prostéj danéj na kładzie dwa dowolne punkta, i z nimi postępujemy podług Zad. 103 a jeżeli zadanie dobrze rozwiązane, to ślady prostéj rzutami nowo znalezionymi przedstawionéj, muszą leżeć na śladach płaszczyzny danéj.

Zadanie 106. *Mając dane rzuty figury płaskiéj prostokreślnéj, znaleść jéj kład.*

Szukamy najprzód śladów płaszczyzny, na któréj leży figura płaska dana; znalazłszy takowe, robimy kład każdego z wierzchołków téjże figury podług Zad. 101, a wierzchołki te na kładzie połączone ze sobą dadzą nam kład całéj figury.

Zadanie 107. Nakreślić rzuty pięciokąta, sześciokąta płaskiego itp. a następnie zrobić ich kład na obie płaszczyzny rzutów.

Zadanie 108. *Daną jest figura prostokreślna na kładzie, ślad poziomy płaszczyzny na któréj ona leży, a około którego kład został dokonanym, nareszcie dany kąt nachylenia téj płaszczyzny względem płaszczyzny pozioméj rzutów; nakreślić rzuty téjże figury po wróceniu płaszczyzny w jéj pierwotne położenie.*

Z każdym z wierzchołków danéj figury płaskiéj postępujemy według Zad. 103; otrzymamy stąd ich rzuty poziome i pionowe, które połączone odpowiednio ze sobą, dadzą nam rzuty całéj figury. Zastosujmy to np. do sześciokąta $a''b''c''d''e''f''$ leżącego na kładzie poziomym (Fig. **93**), mając także dany ślad p płaszczyzny jako oś kładu i kąt α, tj. kąt nachylenia płaszczyzny P do płaszczyzny pozioméj rzutów. Aby dla każdego punktu z osobna, szukając jego rzutów, nie potrzeba było odcinać kąta α w wiadomy sposób, prowadzimy w pobliżu figury danéj prostopadłą ts do p, i przy punkcie n przecięcia się jéj z osią kładu odcinamy kąt $snm=\alpha$, a następnie z każdym z punktów postępujemy w sposób jak np. z punktem a''; tj. z a'' spuszczamy prostopadłą $a''a'''$ na ts, promieniem na''' z punktu n zataczamy łuk do a^{IV} tj. do przecięcia się z nm, nareszcie prowadzimy $a^{IV}a$ prostopadle do ts, zaś $a''a$ prostopadle do p, a punkt wzajemnego ich przecięcia się tj. punkt a będzie rzutem poziomym punktu A, zaś rzut jego pionowy będzie na prostopadłéj do osi przez a poprowadzonéj w odległości $a^{IV}g$ od osi. Otrzymawszy w ten sam sposób także punkta $b'b, c'c$ itd., łączymy je z sobą w porządku, w jakim znajdują się na kładzie, a otrzymamy rzuty figury danéj.

Zamiast kąta α mogą być dane w tym zadaniu oba ślady płaszczyzny P, a w takim razie potrzeba najprzód znaleść sposobem wiadomym (Zad. 99) kąt, jaki płaszczyzna P tworzy z płaszczyzną tą, na którój kład figury leży, a następnie postąpić, jak poprzednio.

Zadanie 109. Na płaszczyznie poziomój rzutów dany jest kład trójkąta, prostokąta, kwadratu, pięciokąta lub koła; nakreślić ich rzuty, skoro figury te podniesione zostaną za pomocą obrotu około danéj osi kładu tak, iżby płaszczyzna ich z płaszczyzną poziomą rzutów tworzyła kąt 30^0, 60^0, 90^0, 45^0, $22^1/_2{}^0$, itp.

Zadanie 110. *Znaleść kąt, jaki dwa ślady danéj płaszczyzny ze sobą tworzą.*

Dane są oba ślady p' i p płaszczyzny P (Fig. **94**), chcemy znaleść kąt między nimi zawarty. W tym celu potrzebujemy zrobić kład płaszczyzny danéj na jednę z płaszczyzn rzutów, np. poziomą, czyli znaleść kład obu jej śladów, a kąt między nimi tamże zawarty—będzie żądanym. Ponieważ zaś ślad p już leży na płaszczyznie pozioméj rzutów, czyli sam jest swoim kładem poziomym, potrzeba więc tylko zrobić kład poziomy śladu p'. Ale skoro jeden punkt tego śladu tj. O leżąc na osi, leży tém samém na płaszczyznie poziomój rzutów, dość więc zrobić kład drugiego punktu na tym śladzie obranego, a więc np. punktu $a'a$. Po zrobieniu kładu punkt ten jak wiemy, leżeć musi na prostopadłéj aa'' do osi kładu poprowadzonéj, a że prócz tego leżeć musi na łuku, jaki w czasie obrotu zatacza około punktu O promieniem Oa', leżeć więc musi w ich wspólném przecięciu tj. w punkcie a''; punkt wreszcie a'' połączony z punktem O da nam kład poziomy p'' śladu p', skąd otrzymamy kąt $pOp''=\beta$ jako kąt szukany.

Zadanie 111. *Znaleść kąt zawarty między dwiema prostemi przecinającemi się z sobą.*

Przez obie proste dane przesuwamy płaszczyznę, następnie robimy kład téjże wraz z prostemi (Zad. 104) na płaszczyznę poziomą lub pionową rzutów, a otrzymamy tamże kąt szukany w prawdziwéj wielkości; jeżeli zaś rysunek dobrze wykonany, to punkt przecięcia się prostych na kładzie np. poziomym otrzymanych, z punktem przecięcia się ich rzutów poziomych, muszą leżeć na jednéj prostopadłéj do osi kładu. Albo też:

Mając dane proste AB i AC (Fig. **95**), szukamy ich śladów poziomych b i c, i łączymy z sobą takowe prostą bc; prosta ~~ta~~ będzie podstawą trójkąta, mającego wierzchołek w punkcie A, w którym dane dwie proste są bokami, kąt zaś przy wierzchołku jest równy kątowi szukanemu. Aby zaś ten trójkąt, a więc i kąt szukany otrzymać w prawdziwéj wielkości, robimy jego kład na płaszczyznę poziomą rzutów około osi kładu bc, a właściwie tylko kład jego wierzchołka A, skoro podstawa jego już leży na płaszczyznie pionowéj rzutów. Kład wierzchołka zaś możemy zrobić albo sposobem podanym w zad. 101, albo téż prowadzimy do bc prostopadłą ad, która będzie rzutem poziomym wysokości trójkąta w mowie będącego, skąd następnie łatwo otrzymamy rzut pionowy $a'd'$ téjże wysokości. Mając oba te rzuty, szukamy za pomocą obrotu (Zad. 84) prawdziwéj jéj długości, będzie nią $a'd'''$; odcinamy następnie $da''=a'd'''$, i łączymy a'' z b i c, a otrzymamy trójkąt $ba''c$ jako kład trójkąta bac, w nim zaś kąt $ba''c$ jako kąt szukany.

Zadanie 112. Znaleść kąt zawarty między dwiema prostemi przecinającemi się z sobą, z których jedna leży jakkolwiek, druga zaś jest równoległą lub prostopadłą do osi rzutów, albo téż jest równoległą lub prostopadłą do jednéj z płaszczyzn rzutów itp.

Zadanie 113. *Podzielić kąt zawarty między dwiema prostemi przecinającemi się z sobą, na pewną liczbę równych części.*

Szukamy najprzód kąta zawartego między dwiema danemi prostemi na kładzie, i tamże dzielimy go na żądaną liczbę równych części liniami prostemi. To mając, szukamy wreszcie rzutów tych linij dzielących (Zad. 105.), a otrzymamy stąd rzuty kątów z podziału otrzymanych.

Zadanie 114. *Przez punkt dany poprowadzić prostą, któraby z prostą daną przecinała się pod kątem danym.*

Robimy kład punktu danego i prostéj danéj na jednę z płaszczyzn rzutów; tamże tj. na kładzie kreślimy następnie przez kład punktu danego prostą przecinającą kład prostéj danéj pod kątem danym, a wreszcie szukamy rzutów prostéj tak otrzymanéj sposobem wiadomym.

Zadanie 115. *Znaleść kąt nachylenia prostéj danéj względem płaszczyzny danéj.*

Iszy Sposób. Z któregokolwiek punktu prostéj danéj spuszczamy prostopadłą na płaszczyznę daną, a kąt, jaki taż prostopadła tworzy z prostą daną, jest dopełnieniem kąta szukanego do 90^0. A więc, mając dane rzuty prostéj AB i ślady płaszczyzny P (Fig. **96**.), obieramy gdziekolwiek na prostéj AB punkt C, spuszczamy z niego prostopadłą $c'd'$, cd (Zad. 73.) na płaszczyznę P, i szukamy kąta zawartego między prostemi AB i CD podług zad. 111.; będzie nim kąt $bc''d$, dopełnienie zaś tego kąta, tj. kąt α, jest kątem szukanym.

2gi sposób. Przez prostą daną przesuwamy płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny danéj (Zad. 77), szukamy prostéj przecięcia się téj nowéj płaszczyzny z płaszczyzną daną, a kąt zawarty między tą prostą a prostą daną, jest kątem szukanym, należy go tylko otrzymać w prawdziwéj wielkości za pomocą kładu obu prostych.

Zadanie 116. *Znaleść kąt nachylenia dwóch płaszczyzn danych względem siebie.*

Zadanie to jest uogólnieniem zadania 99., gdzieśmy szukali kąta, jaki płaszczyzna dana zawiera z płaszczyzną poziomą rzutów, a więc także kąta między dwiema płaszczyznami. Teraz zatém postąpić należy tak samo, tj. przez którykolwiek punkt wspólnego przecięcia się danych dwóch płaszczyzn (Zad. 62.) przesuwamy płaszczyznę prostopadłą do tegoż przecięcia (Zad. 74.), a kąt zawarty między prostemi przecięcia się téj płaszczyzny z płaszczyznami danemi, jest kątem żądanym, potrzeba go tylko za pomocą kładu na jednę z płaszczyzn rzutów wyszukać w prawdziwéj wielkości.

Jako szczegółowe przypadki tego zadania, zważmy następujące:

1. Jeżeli obie płaszczyzny dane są prostopadłe do płaszczyzny pionowéj rzutów, to kąt między ich śladami pionowymi zawarty, jest miarą ich kąta nachylenia; jeżeli zaś są prostopadłe do płaszczyzny poziooméj rzutów, to znów kąt między ich śladami poziomymi jest kątem szukanym.
2. Jeżeli płaszczyzny P i Q są tak dane z położenia swego, iż ich ślady np. poziome są do siebie równoległe (Fig. **97**.), zaś pionowe przecinają się wzajem, wówczas rzecz wielce się upraszcza. Prostą bowiem przecięcia się tychże dwóch

płaszczyzn będzie $a'b'$, ab, tj. równoległa do płaszczyzny poziomėj rzutów (Zad. 62.), zaś płaszczyzna $r'r$ do niéj prostopadła, a przechodząca np. przez punkt $a'a$ téjże prostéj, będzie także prostopadłą i do płaszczyzny poziomėj rzutów. Płaszczyzna ta $r'r$ przetnie się z płaszczyzną P w prostéj $a'c'$, ac, zaś z płaszczyzną Q w prostéj $a'd'$, ad, skąd powstanie trójkąt mający za podstawę $c'd'$, cd, zaś wierzchołek w punkcie $a'a$, a w którym kąt przy $a'a$ jest kątem żądanym, potrzeba go tylko otrzymać w prawdziwéj wielkości. Tym celem robiąc kład poziomy tego trójkąta około r, to punkt a' zatoczy z punktu a łuk promieniem aa' i przyjdzie do punktu a'', który połączony z punktami c i d da nam kąt żądany tj. kąt $ca''d$.

3. Jeżeli obie płaszczyzny dane P i Q (Fig. **98**) są równoległe do osi rzutów, wtedy celem znalezienia kąta między niemi, albo postępujemy sposobem ogólnym powyżéj wskazanym, albo téż co krócéj, zważywszy, że płaszczyzna równoległa do osi rzutów jest tém samém prostopadłą do płaszczyzny bocznéj, szukamy śladów bocznych p'' i q'' danych dwóch płaszczyzn, a kąt między nimi zawarty, jest kątem żądanym w prawdziwéj wielkości.

Zadanie 117. Znaleść kąt między dwiema płaszczyznami, jeżeli 1) jedna z nich jest równoległą do płaszczyzny poziomėj lub pionowéj rzutów, druga zaś prostopadłą; 2) obie płaszczyzny tak są dane, że ich ślady wszystkie schodzą się w jednym punkcie na osi rzutów.

Zadanie 118. *Znaleść odległość punktu od prostéj.*

Przez punkt dany i prostą daną przesuwamy płaszczyznę, i robimy kład téjże wraz z punktem i prostą na jednę z płaszczyzn rzutów, a prostopadła spuszczona z punktu na kładzie otrzymanego na kład prostéj, będzie odległością szukaną. A więc, mając dane rzuty punktu A i prostéj BC (Fig. **99**), sposobem wiadomym (Zad. 55.) przesuwamy przez nie płaszczyznę P, i robimy kład téjże np. poziomy, a znajdziemy punkt a'' jako kład punktu danego, zaś bc'' jako kład prostéj danéj. Z punktu a'' spuściwszy następnie prostopadłą $a''d''$ na bc'', ta prostopadła będzie odległością szukaną. Chcąc ją mieć w rzutach, postąpić należy według Zad. 105., a jeżeli rysunek dobry, to rzuty punktu d'' muszą wypaść na rzutach prostéj danéj.

z płaszczyzną daną, odcinamy odległość daną, a znajdziemy stąd punkt, przez który poprowadzona płaszczyzna równolegle do płaszczyzny danéj, będzie żądaną. A więc, mając daną płaszczyznę P (Fig. **102**), i mając w odległości m poprowadzić do niéj płaszczyznę równoległą, kreślimy najprzód prostą $a'b', ab$ prostopadłą do P, i szukamy punktu spotkania się jéj z płaszczyzną P (Zad. 66.),—będzie nim punkt $a'a$. Aby teraz znaleść punkt, któryby leżał od punktu $a'a$ w odległości danéj m, przesuwamy przez $a'b', ab$ płaszczyznę $r'r$, i robimy jéj kład na płaszczyznę poziomą rzutów, to punkt $a'a$ przyjdzie do a'', zaś prostopadła $a'b', ab$ zajmie położenie $a''c''$. Na niéj od punktu a'' odcinamy $a''c''=m$, i szukamy rzutów $c'c$ punktu c'', które leżeć muszą na odpowiednich rzutach prostéj $a'b', ab$, poczem połączywszy a' z c' zaś a z c, otrzymamy rzuty danéj odległości m. Przez punkt wreszcie $c'c$ przesuwamy płaszczyznę Q równolegle do P (Zad. 57.), a ta będzie żądaną.

Zadanie 126. *Przez punkt dany poprowadzić prostą, którąby z płaszczyznami rzutów tworzyła kąty dane.*

Punkt dany jest $x'x$ (Fig. **103**), przezeń mamy poprowadzić prostą, którąby z płaszczyzną poziomą rzutów tworzyła kat m, zaś z pionową kąt n. W tym celu przez punkt b, gdziekolwiek na osi obrany, pomyślmy sobie prostą pod danymi kątami względem płaszczyzn rzutów poprowadzoną, a następnie nie zmieniając jéj nachylenia względem płaszczyzny pozioméj rzutów, obróćmy ją około punktu b tak, iżby padła na płaszczyznę pionową rzutów, to w tém położeniu utworzy ona z osią rzutów kąt dany $A'ba=m$. Wracając teraz z tą prostą w pierwotne jéj położenie, to punkt np. A', gdziekolwiek na niéj na kładzie leżący, zostanie ciągle w téj saméj odległości tj. $A'a$ od płaszczyzny poziomej rzutów, a więc rzut jego pionowy leżeć będzie gdzieś na równoległéj $A'd'$ przez A' do osi poprowadzonéj, zaś poziomy na łuku acd, zatoczonym z punktu b promieniem ba.

Obróćmy następnie prostą pierwotnie pomyślaną około punktu b tak, iżby znów nie zmieniając nachylenia swego względem płaszczyzny pionowéj rzutów, padła na płaszczyznę poziomą, to teraz utworzy ona z osią rzutów kąt $Aba'=n$, zaś tenże sam punkt A', leżący wpierw na jéj kładzie pionowym, leżeć będzie w A, w odległości $bA=bA'$; następnie wracając napowrót z nią w pierwotne położenie, punkt tenże A zostanie ciągle w odległości Aa' od płaszczyzny pionowéj rzutów, czyli rzut jego poziomy znajdować się musi gdzieś na równoległéj Ad, przez A do osi poprowadzonéj, zaś pionowy na łuku $a'c'd'$ z b promieniem ba' zatoczonym. Skoro więc rzut poziomy tego samego punktu (tj. A lub A') prostéj, znajdować się ma i na równoległéj Ad i na łuku acd, musi więc leżeć w punkcie ich przecięcia tj. w c, a podobnież znów rzut pionowy leżeć musi w c', tj. w punkcie przecięcia się równoległéj $A'd'$ z łukiem $a'c'd'$. Połączywszy tak znaleziony punkt $c'c$ z punktem nieruchomym b, otrzymamy prostą bc, bc' nachyloną pod kątami danymi tj. m i n względem płaszczyzn rzutów, a przez punkt dany $x'x$ poprowadziwszy wreszcie do niéj równoległą $x'y', xy$, — ta będzie żądaną.

Uwaga 1. Ponieważ prosta Ad z łukiem acd, zaś prosta $A'd'$ z łukiem $a'c'd'$ przecinają się także w punktach d i d', zatem prosta bd, bd' będzie także pod danymi kątami nachyloną względem płaszczyzn rzutów; a gdy prócz tego cała konstrukcya taka sama może być wykonaną także poza płaszczyzną pionową rzutów, — wypada stąd, że można przez punkt dany przeprowadzić cztéry proste różne co do kierunku, a odpowiadające warunkowi zadania.

Uwaga 2. Jeżeli summa kątów danych m i n jest równą albo większą od 90^0, wtedy zadanie jest w pierwszym razie nieoznaczone, w drugim zaś nierozwiązalne, — czyli, że summa kątów, jakie prosta tworzy z płaszczyznami rzutów, nie może wynosić więcéj nad 90^0. Aby się o tém przekonać, weźmy najprzód prostą $ab, a'b$ (Fig. **104**.) prostopadłą do osi rzutów, a wyznaczoną za pomocą punktu $a'a$ na niéj danego. Z punktu a poprowadźmy do ab prostopadłą ac, odetnijmy $ac=ba'$, i połączmy b z c, to kąt abc jest kątem nachylenia prostéj danéj $a'b, ab$ względem płaszczyzny pozioméj rzutów (Zad. 96.); podobnież znów na prostopadłéj do $a'b$ z a' wystawionéj odciąwszy $a'd=ab$, i połączywszy d z b, kąt dba' jest kątem nachylenia prostéj danéj względem płaszczyzny pioz płaszczyzną daną, odcinamy odległość daną, a znajdziemy stąd punkt, przez który poprowadzona płaszczyzna równolegle do płaszczyzny danéj, będzie żądaną. A więc, mając daną płaszczyznę P (Fig. **102**), i mając w odległości m poprowadzić do niéj płaszczyznę równoległą, kreślimy najprzód prostą $a'b',ab$ prostopadłą do P, i szukamy punktu spotkania się jéj z płaszczyzną P (Zad. 66.),—będzie nim punkt $a'a$. Aby teraz znaleść punkt, któryby leżał od punktu $a'a$ w odległości danéj m, przesuwamy przez $a'b',ab$ płaszczyznę $r'r$, i robimy jéj kład na płaszczyznę poziomą rzutów, to punkt $a'a$ przyjdzie do a'', zaś prostopadła $a'b',ab$ zajmie położenie $a''c''$. Na niéj od punktu a'' odcinamy $a''c''=m$, i szukamy rzutów $c'c$ punktu c'', które leżeć muszą na odpowiednich rzutach prostéj $a'b',ab$, poczem połączywszy a' z c' zaś a z c, otrzymamy rzuty danéj odległości m. Przez punkt wreszcie $c'c$ przesuwamy płaszczyznę Q równolegle do P (Zad. 57.), a ta będzie żądaną.

Zadanie 126. *Przez punkt dany poprowadzić prostą, któraby z płaszczyznami rzutów tworzyła kąty dane.*

Punkt dany jest $x'x$ (Fig. **103**), przezeń mamy poprowadzić prostą, któraby z płaszczyzną poziomą rzutów tworzyła kat m, zaś z pionową kąt n. W tym celu przez punkt b, gdziekolwiek na osi obrany, pomyślmy sobie prostą pod danymi kątami względem płaszczyzn rzutów poprowadzoną, a następnie nie zmieniając jéj nachylenia względem płaszczyzny pozioméj rzutów, obróćmy ją około punktu b tak, iżby padła na płaszczyznę pionową rzutów, to w tém położeniu utworzy ona z osią rzutów kąt dany $A'ba=m$. Wracając teraz z tą prostą w pierwotne jéj położenie, to punkt np. A', gdziekolwiek na niéj na kładzie leżący, zostanie ciągle w téj saméj odległości tj. $A'a$ od płaszczyzny poziomej rzutów, a więc rzut jego pionowy leżeć będzie gdzieś na równoległéj $A'd'$ przez A' do osi poprowadzonéj, zaś poziomy na łuku acd, zatoczonym z punktu b promieniem ba.

Obróćmy następnie prostą pierwotnie pomyślaną około punktu b tak, iżby znów nie zmieniając nachylenia swego względem płaszczyzny pionowéj rzutów, padła na płaszczyznę poziomą, to teraz utworzy ona z osią rzutów kąt $Aba'=n$, zaś tenże sam punkt A', leżący wpierw na jéj kładzie pionowym, leżeć będzie w A, w odległości $bA=bA'$; następnie wracając napowrót z nią w pierwotne położenie, punkt tenże A zostanie ciągle w odległości Aa' od płaszczyzny pionowéj rzutów, czyli rzut jego poziomy znajdować się musi gdzieś na równoległéj Ad, przez A do osi poprowadzonéj, zaś pionowy na łuku $a'c'd'$ z b promieniem ba' zatoczonym. Skoro więc rzut poziomy tego samego punktu (tj. A lub A') prostéj, znajdować się ma i na równoległéj Ad i na łuku acd, musi więc leżeć w punkcie ich przecięcia tj. w c, a podobnież znów rzut pionowy leżeć musi w c', tj. w punkcie przecięcia się równoległéj $A'd'$ z łukiem $a'c'd'$. Połączywszy tak znaleziony punkt $c'c$ z punktem nieruchomym b, otrzymamy prostą bc, bc' nachyloną pod kątami danymi tj. m i n względem płaszczyzn rzutów, a przez punkt dany $x'x$ poprowadziwszy wreszcie do niéj równoległą $x'y'$, xy, — ta będzie żądaną.

Uwaga 1. Ponieważ prosta Ad z łukiem acd, zaś prosta $A'd'$ z łukiem $a'c'd'$ przecinają się także w punktach d i d', zatem prosta bd, bd' będzie także pod danymi kątami nachyloną względem płaszczyzn rzutów; a gdy prócz tego cała konstrukcya taka sama może być wykonaną także poza płaszczyzną pionową rzutów, — wypada stąd, że można przez punkt dany przeprowadzić cztéry proste różne co do kierunku, a odpowiadające warunkowi zadania.

Uwaga 2. Jeżeli summa kątów danych m i n jest równą albo większą od 90^0, wtedy zadanie jest w pierwszym razie nieoznaczone, w drugim zaś nierozwiązalne, — czyli, że summa kątów, jakie prosta tworzy z płaszczyznami rzutów, nie może wynosić więcéj nad 90^0. Aby się o tém przekonać, weźmy najprzód prostą $ab, a'b$ (Fig. **104**.) prostopadłą do osi rzutów, a wyznaczoną za pomocą punktu $a'a$ na niéj danego. Z punktu a poprowadźmy do ab prostopadłą ac, odetnijmy $ac=ba'$, i połączmy b z c, to kąt abc jest kątem nachylenia prostéj danéj $a'b, ab$ względem płaszczyzny pozioméj rzutów (Zad. 96.); podobnież znów na prostopadłéj do $a'b$ z a' wystawionéj odciąwszy $a'd=ab$, i połączywszy d z b, kąt dba' jest kątem nachylenia prostéj danéj względem płaszczyzny pionowéj rzutów. Że zaś trójkąt $a'bd \cong acb$, zaś $abc+acb=90^0$, zatém $abc+a'bd=90^0$.

Weźmy teraz inną prostą np. af, $a'f$ przechodzącą przez oś rzutów. Na prostopadłych w a i a' do af i $a'f$ wyprowadzonych odciąwszy $ag=ba'=ac$, zaś $a'h=ba=a'd$, i poprowadziwszy proste fg i fh, to kąty afg i $a'fh$ będą kątami nachylenia prostéj $af, a'f$ względem płaszczyzn rzutów. Że zaś w trójkątach prostokątnych gaf i cab, jest $ag=ac$, zaś $af>ab$, czyli kąt $afg<abc$, i również znów w trójkątach $ha'f$ i $da'b$ jest kąt $a'fh<a'bd$, zatém $afg+a'fh<abc+a'bd$ czyli $afg+a'fh<90^0$.

Jeżeli teraz położenie prostéj w przestrzeni jest jakiekolwiek, to przez punkt dowolny na osi można zawsze do niéj równoległą poprowadzić, a następnie i dowieść jak poprzednio, że summa jéj kątów nachylenia względem płaszczyzn rzutów musi być mniejszą od 90^0; jeżeli bowiem summa ta wynosi 90^0, wtedy prosta w przestrzeni musi być prostopadłą do osi rzutów, a tém samém nie jest dokładnie wyznaczoną.

Zadanie 127. *Przez punkt dany w przestrzeni przesunąć płaszczyznę nachyloną względem płaszczyzn rzutów pod kątami danymi.*

Mając przez punkt dany np. A przesunąć płaszczyznę nachyloną względem płaszczyzny pozioméj rzutów pod kątem m, zaś względem pionowéj pod kątem n, kreślimy gdziekolwiek, a najkorzystniéj przez punkt gdzieś na osi obrany, prostą, któraby z płaszczyzną poziomą rzutów tworzyła kąt $90-m$, zaś z pionową kąt $90-n$ (Zad. 126), to płaszczyzna, prostopadle do téj prostéj przez punkt A przesunięta, będzie żądaną. Uzasadnić to możemy w sposób następujący:

Niech płaszczyzna RQ (Fig. **105**) przedstawia nam płaszczyznę pionową rzutów, zaś RS poziomą; między niemi znajduje się płaszczyzna P, przecinająca się z RQ w prostéj p', zaś z RS w prostéj p. Przez punkt o, obrany gdzieś na osi RX, poprowadźmy prostą oa prostopadłą do płaszczyzny P i przypuśćmy, że przetnie się ona z płaszczyzną P w punkcie a; następnie z punktu tego a poprowadźmy ab prostopadle do p', a tém samém i do płaszczyzny pionowéj rzutów, zaś ac prostopadle do p a tém samém i do płaszczyzny pozioméj rzutów. Przez proste ao i ab przesuńmy teraz płaszczyznę *oab*, to takowa będąc prostopadłą i do płaszczyzny *P*, i do płaszczyzny pionowéj rzutów, będzie tém samém prostopadłą i do ich wspólnego przecięcia *p'*, a następnie i prosta *ab* przecięcia się jéj z płaszczyzną *P*, jako téż prosta *ob* przecięcia się z płaszczyzną pionową rzutów, będą także do *p'* prostopadłe, zaś kąt między niemi zawarty tj. $abo=m$ będzie miarą nachylenia płaszczyzny *P* względem płaszczyzny pionowéj rzutów. Ponieważ następnie na prostéj *ob* (jako na śladzie pionowym płaszczyzny rzucającéj pionowéj *oab*) leży rzut pionowy prostéj *oa*, zatém kąt *aob* jest znów miarą nachylenia prostéj *oa* względem płaszczyzny pionowéj rzutów, a gdy wreszcie w trójkącie *abo* kąt przy *a* jest prostym, zatem kąt $abo+aob=90^0$, czyli $m+aob=90^0$, skąd kąt $aob=90^0-m$.

Podobnież znów, przez proste *oa* i *ac* przesunąwszy płaszczyznę, ta przetnie się z płaszczyzną *P* w prostéj *ac*, zaś z płaszczyzną poziomą rzutów w prostéj *oc*; skoro zaś płaszczyzna ta, będąc prostopadłą i do płaszczyzny *P*, i do płaszczyzny pozioméj rzutów, jest tém samém prostopadłą do prostéj *p*, zatém i proste *ac* i *oc* są także do *p* prostopadłe, i tworzą z sobą kąt $aco=n$, będący miarą nachylenia płaszczyzny *P* względem płaszczyzny pozioméj rzutów. Ponieważ następnie na prostéj *oc* (jako na śladzie poziomym płaszczyzny *aoc* prostopadłéj do płaszczyzny poziomej rzutów), leży rzut poziomy prostéj *ao*, zatém znów kąt *aoc* jest miarą nachylenia prostéj *ao* względem płaszczyzny poziomej rzutów; że zaś wreszcie w trójkącie *aoc* kąt przy *a* jest prosty, zatém kąt $aco+coa=90^0$, czyli $n+coa=90^0$, skąd kąt $coa=90^0-n$.

Widzimy więc stąd, że skoro, gdy płaszczyzna jakaś tworzy płaszczyzną rzutów kąty *m* i *n*, to prosta do niéj prostopadła tworzy z temiż płaszczyznami odpowiednio kąty 90^0-m i 90^0-n, zatem nawzajem, poprowadziwszy prostą pod kątami 90^0-m i 90^0-n względem płaszczyzn rzutów, to płaszczyzna do niéj prostopadła z temiż płaszczyznami utworzy kąty *m* i *n*.

Uwaga I. Ponieważ przez punkt obrany na osi poprowadzić można cztéry proste różne co do położenia, a tworzące z płaszczyznami rzutów kąty dane (Zad. 126. Uw. 2.), zatém i płaszczyzn odpowiadających warunkowi naszego zadania może być cztéry, różnych co do położenia.

Uwaga 2. Ponieważ summa kątów, jakie prosta tworzy z płaszczyznami rzutów, wynosić może najwięcéj 90^0 zaś najmniéj 0^0, zatém summa kątów nachylenia płaszczyzny względem płaszczyzn rzutów wynosić znów może najwięcéj 180^0, a najmniéj 90^0, — i w pierwszym razie płaszczyzna będzie prostopadłą do osi, w drugim zaś równoległą do osi.

Zadanie 128. *Znaleść najkrótszą odległość dwóch prostych nie leżących w jednéj płaszczyznie.*

Najkrótszą odległością dwóch prostych nie leżących w jednéj płaszczyznie, jest wspólna do nich prostopadła. Aby znaleść takową, postępujemy w sposób następujący: Mając dane proste AB i CD (Fig. **106**), przez jednę z nich np. AB przesuwamy płaszczyznę MN równoległą do prostéj CD, przez CD zaś płaszczyznę $CDPQ$ prostopadłą do płaszczyzny MN. Płaszczyzny te tj. MN i $CDPQ$ przetną się w prostéj PQ, równoległéj do CD, zaś prosta PQ z prostą AB przetną się w punkcie G. Z punktu G wystawiwszy prostopadłą GH do płaszczyzny MN, ta naturalnie leżeć będzie na płaszczyznie $CDPQ$, i przetnie prostą CD w punkcie H. Ponieważ zaś prosta GH, będąc prostopadłą do AB i do PQ, jest tém samém prostopadłą i do CD, zatém jest ona najkrótszą odległością między prostemi AB i CD.

Stosując rzecz tę do naszego rysunku, gdzie proste dane $a'b', ab$ i $c'd', cd$ (Fig. **107**.) ani są do siebie równoległe, ani się z sobą przecinają, przesuwamy najprzód przez $a'b', ab$ płaszczyznę $p'p$ równoległą do $c'd', cd$ i przez punkt $c'c$, gdziekolwiek na $c'd', cd$ obrany, prowadzimy prostą $o'c', oc$ prostopadłą do płaszczyzny $p'p$; szukamy następnie punktu $o'o$ przecięcia się téj prostopadłéj z płaszczyzną $p'p$, i przezeń prowadzimy prostą $r'o', ro$ równolegle do $c'd', cd$, a prosta ta $r'o', ro$ będzie przecięciem się płaszczyzny $p'p$ z płaszczyzną do niéj prostopadłą, a przez $c'd', cd$ przesuniętą. Prosta $r'o', ro$ z prostą $a'b', ab$ przetną się w punkcie $g'g$, przez który prostopadle do płaszczyzny $p'p$, aż do przecięcia się z prostą $c'd', cd$, poprowadzona prosta $g'h', gh$, będzie odległością szukaną w rzutach, potrzeba ją tylko wreszcie za pomocą obrotu otrzymać w prawdziwéj wielkości.

§. 17.

O zmianie płaszczyzn rzutów.

Mniéj lub więcéj łatwa konstrukcya w rozwiązaniu jakiegoś zadania, zależy, jakeśmy to już na kilku przykładach poznać mieli sposobność, od mniéj lub więcéj korzystnego położenia rzeczy danych w zadaniu względem płaszczyzn rzutów. Nauka o obrotach i kładach wskazała nam sposoby, jak można zmieniać położenie tych rzeczy względem płaszczyzn rzutów, nie zrywając obopólnego między niemi związku, — nauka o zmianie płaszczyzn rzutów wskaże nam znów sposoby, jak można, nie zmieniając położenia rzeczy danych w zadaniu, zmienić tylko położenie płaszczyzn rzutów,—obu, albo tylko jednéj, i to tak, iżby skutkiem téj zmiany wielkości dane, mimo że nieruszane ze swego miejsca — stanęły względem zmienionych płaszczyzn rzutów w jak najkorzystniejszém położeniu. Pożytki takiéj zmiany poznaliśmy już przy zadaniach wymagających użycia płaszczyzny bocznéj, gdzie ta płaszczyzna jest niczém inném, jak tylko zmienioną co do położenia płaszczyzną pionową rzutów; — dalsze pożytki poznamy późniéj. Teraz chodzi przedewszystkiém o to, jak dane rzuty lub ślady wielkości danéj w przestrzeni, przenieść z jednego układu prostokątnego płaszczyzn rzutów na inny również prostokątny, którego położenie względem pierwszego jest znaném.

I. Zmiana równoległa jednéj z płaszczyzn rzutów.

Zadanie 129. *Znaleść rzuty punktu danego, skoro płaszczyzna pozioma rzutów podniesioną lub zniżoną zostanie o długość daną.*

Danym jest punkt $a'a$ (Fig. **108**) odniesiony do osi rzutów xy; przypuśćmy, że płaszczyzna pozioma rzutów podniesioną ze swego miejsca i ustawioną została równolegle do siebie saméj, a to w odległości danéj mn od swego pierwotnego położenia, tak iż prosta $x'y'$ jest śladem pionowym nowéj płaszczyzny pozioméj rzutów, a tém samém nową osią rzutów, do któréj odnieść mamy rzuty punktu danego. Aby je znaleść, uważmy, że skoro płaszczyzna pionowa rzutów została na swojém miejscu, zatém tak rzut pionowy punktu danego A, jak i odległość jego od płaszczyzny pionowéj rzutów zmianie żadnéj nie uległy. Rzut więc pionowy a' zostanie na swojém miejscu, poziomy zaś a'', skoro miarą odległości punktu w przestrzeni od płaszczyzny pionowéj rzutów jest odległość jego rzutu poziomego od osi, będzie w odległości $ma''=na$ od nowéj osi rzutów.

Zadanie 130. *Znaleść rzuty prostéj danéj, skoro płaszczyzna pozioma rzutów podniesioną lub zniżoną zostanie o długość daną.*

Mając daną prostą $a'b',ab$ (Fig. **109**) odniesioną do osi xy, a chcąc znaleść położenie jéj rzutów po podniesieniu płaszczyzny pozioméj rzutów o wysokość daną mn, obieramy na prostéj dwa punkta, szukamy ich nowych rzutów poziomych sposobem wyżéj wskazanym, i takowe z sobą łączymy; rzuty ich zaś pionowe, a więc i rzut pionowy prostéj zostaną na swojém miejscu. Albo krócéj—zważywszy, że nowy rzut poziomy $a''b''$ prostéj musi być równoległym do rzutu dawnego ab, gdyż dwie płaszczyzny równoległe (tj. dawna i nowa pozioma rzutów) przecięte trzecią (tj. płaszczyzną rzucającą poziomą, przez AB przesuniętą) dają przecięcia równoległe, zatém dość jest obrać tylko na prostéj jeden punkt np. $a'a$, poszukać jego nowego rzutu poziomego a'', i przezeń poprowadzić $a''b''$ równolegle do ab.

Zadanie 131. *Znaleść ślady płaszczyzny danéj, skoro płaszczyzna pozioma rzutów podniesioną lub zniżoną zostanie o długość daną.*

Daną jest płaszczyzna $p'p$ (Fig. **110**.), dawna oś rzutów xy i nowa $x'y'$. Ślad pionowy p' płaszczyzny zostanie na swojém miejscu, i przetnie oś rzutów $x'y'$ w punkcie O, przez który nowy ślad poziomy przechodzić musi. Że zaś dwie płaszczyzny równoległe przecięte trzecią (tj. dawna i nowa płaszczyzna pozioma rzutów, przecięte płaszczyzną $p'p$), dają przecięcia do siebie równoległe, zatém przez O poprowadziwszy p'' równolegle do p, otrzymamy ślad poziomy płaszczyzny danéj na zmienionéj płaszczyznie poziméj rzutów.

W podobnyż sposób, jak dotąd płaszczyznę poziomą rzutów, możemy znów cofać w tył lub wysuwać naprzód płaszczyznę pionową rzutów, nie zmieniając poziméj, lub też równocześnie przesuwać obie równolegle do siebie samych, i to albo o długości równe sobie lub téż różne.

Jako przykład zastosowania zmiany równoległéj jednéj z płaszczyzn rzutów, możemy wziąść znane nam już skądinąd zadanie, a mianowicie:

Zadanie 132. *Znaleść punkt przecięcia się prostéj danéj z płaszczyzną daną za pomocą zmiany płaszczyzn rzutów.*

Daną jest płaszczyzna $p'p$ (Fig. [illegible].) i prosta $a'b',ab$. Aby znaleść punkt ich przecięcia się z sobą, przesuwamy przez prostą $a'b',ab$ płaszczyznę rzucającą np. poziomą $s's$, i szukamy prostéj przecięcia się płaszczyzn $p'p$ i $s's$. Przypuśćmy atoli, że ślady ich poziome nie przecinają się w granicach rysunku, skutkiem czego téj prostéj znaleść nie można. Aby temu zaradzić, podnieśmy płaszczyznę poziomą rzutów, nie zmieniając pionowéj, i niech nową osią rzutów będzie $x'y'$, to na tak zmienionych płaszczyznach rzutów będzie p'' śladem poziomym płaszczyzny a ślad pionowy p' zostaje na swojém miejscu, zaś $c''a''$ będzie rzutem poziomym prostéj danéj, a rzut pionowy zostaje $a'c'$. Do płaszczyzny $p'p''$ i prostéj $a'c',a''c''$ stosujemy teraz znaną nam regułę, a mianowicie: przesuwamy przez prostą $a'c',a''c''$ płaszczyznę rzucającą $r'r$; ta przetnie się z płaszczyzną $p'p''$ w prostéj $m'n',m''n''$, punkt zaś $o'o''$, w którym ta prosta przecina się z prostą $a'c',a''c''$, będzie punktem szukanym, ale odniesionym do nowego układu płaszczyzn rzutów. Aby go wreszcie mieć odnośnie do dawnego, zniżamy znowu płaszczyznę poziomą rzutów do jéj pierwotnego położenia, a skutkiem tego, ponieważ rzut pionowy o' zostanie na swojém miejscu, zaś poziomy przyjdzie do o, punkta $o'o$ będą rzutami punktu szukanego na pierwotnych płaszczyznach rzutów.

II. Zmiana pod kątem danym jednéj z płaszczyzn rzutów.

Zamiast zmiany równoległéj jednéj z płaszczyzn rzutów, można także ustawić którąkolwiek z nich tak, iżby nowe jéj położenie z pierwotném tworzyło kąt dany, skutkiem czego naturalnie kąt, jaki nowa oś rzutów utworzy z osią dawną, musi być równym kątowi danemu. Do takiéj zmiany zaliczyć można znajome nam już wprowadzanie płaszczyzny bocznéj rzutów, która jest płaszczyzną pionową rzutów ale ustawioną pod kątem 90^0 względem swego pierwotnego położenia, to też kąt, jaki w tym razie nowa oś rzutów (tj. boczna) tworzy z osią dawną, jest prostym.

Zadanie 133. *Znaleść rzuty punktu danego, skoro płaszczyzna pionowa rzutów skręconą zostanie o kąt dany tj. skoro zostanie ustawioną pod kątem danym względem pierwotnego swego położenia.*

Dany punkt $a'a$ (Fig. **112**) i dany kąt α, jaki nowa płaszczyzna pionowa rzutów tworzyć ma z pierwotną. Pod kątem danym α względem osi rzutów xy nakreśliwszy prostą $x'y'$, ta będzie śladem poziomym nowéj płaszczyzny rzutów, i zarazem będzie nową osią rzutów. Aby znaleść rzuty punktu $a'a$ odnośnie do téj osi, uważmy, że skoro płaszczyzna pozioma rzutów została ta sama, zatem i rzut poziomy a punktu danego zostanie na swojém miejscu; gdy zaś przez zmianę płaszczyzny pionowéj rzutów, odległość punktu danego w przestrzeni od płaszczyzny poziomej rzutów się nie zmienia, a miarą téj odległości jest na' tj. odległość rzutu pionowego a' od osi rzutów, zatem rzut pionowy a'' punktu znajdować się będzie na prostopadłéj do nowéj osi rzutów z a wyprowadzonéj, i to w odległości $ma'' = na'$.

Zadanie 134. *Znaleść rzuty prostéj danéj, skoro płaszczyzna pionowa rzutów skręconą zostanie o kąt dany.*

Mając daną prostą $a'b', ab$ (Fig. **113**) i nową oś rzutów $x'y'$ pochyloną względem dawnéj pod kątem danym α, obieramy na prostéj gdziekolwiek dwa punkta np. $a'a$ i $b'b$, szukamy ich nowych rzutów pionowych a'' i b'', a z połączenia ich otrzymamy nowy rzut pionowy $a''b''$ prostéj danéj, poziomy zaś zostaje na swojém miejscu.

Zadanie 135. *Znaleść ślady płaszczyzny danéj, skoro płaszczyzna pionowa rzutów skręconą zostanie o kąt dany.*

Daną jest płaszczyzna $p'p$ (Fig. **114**) i nowa oś rzutów $x'y'$. Płaszczyzna pozioma rzutów wraz ze śladem p płaszczyzny danéj, na niéj leżącym, zostają na swojém miejscu, a punkt s, gdzie ten ślad przecina oś rzutów $x'y'$, jest punktem należącym do nowego śladu pionowego. Aby znaleść jeszcze jeden punkt tego śladu, uważmy, że nowa płaszczyzna pionowa rzutów przecina pierwotną w prostéj $m'm$, prostopadłéj w punkcie m do xy, zaś prosta $m'm$ przecina znów ślad pionowy p' w punkcie m'; że zaś punkt ten m' leży współcześnie i na płaszczyznie danéj i na nowéj płaszczyznie rzutów, jest więc punktem należącym do ich wspólnego przecięcia, czyli do szukanego śladu pionowego. Zrobiwszy wreszcie kład nowéj płaszczyzny rzutów na płaszczyznę poziomą, prosta $m'm$ przyjdzie w położenie mm'', zaś punkt m' przyjdzie do m'', tak iż $mm''=mm'$; połączywszy więc punkt m'' z punktem s, otrzymamy ślad p'' płaszczyzny danéj na nowéj płaszczyznie pionowéj rzutów.

Jako przykład zastosowania takiéj znów zmiany jednéj z płaszczyzn rzutów, weźmy zadanie następujące:

Zadanie 136. *Znaleść kąt, jaki płaszczyzna dana tworzy z płaszczyzną poziomą rzutów.*

Daną jest płaszczyzna $p'p$ (Fig. **115**). Wiemy, że jeżeli płaszczyzna jest prostopadłą do płaszczyzny pionowéj rzutów, wtedy miarą kąta, jaki ona tworzy z płaszczyzną poziomą rzutów, jest kąt zawarty między jéj śladem pionowym a osią rzutów. Zmieńmy więc płaszczyznę pionową rzutów tak, iżby nasza płaszczyzna $p'p$ stanęła do niéj prostopadle, czyli weźmy nową oś rzutów prostopadle do p, to śladem pionowym płaszczyzny danéj na téj nowéj płaszczyznie rzutów będzie p'', zaś poziomy p zostaje na swojém miejscu. Że zaś ślad ten p jest teraz prostopadłym do osi rzutów $x'y'$, sama więc płaszczyzna pp'' jest prostopadłą do nowéj płaszczyzny pionowéj rzutów, i kąt α, jaki jéj ślad p'' tworzy z osią $x'y'$, jest kątem szukanym.

Zadanie 137. Za pomocą stosownéj zmiany jednéj z płaszczyzn rzutów 1) znaleść kąt między dwiema płaszczyznami, których ślady pionowe są do siebie równoległe; 2) znaleść punkt przecięcia się prostéj z płaszczyzną; 3) znaleść odległość dwóch prostych lub dwóch płaszczyzn do siebie równoległych.

ROZDZIAŁ III.

§. 18.

O kątach bryłowych trójściennych.

Trzy płaszczyzny AOB, AOC i BOC (Fig. **116**.) przecinające się z sobą w punkcie O tworzą kąt bryłowy trójścienny (der triädrische Winkel, — l'angle trièdre). Proste przecięcia się tychże płaszczyzn ze sobą tj. AO, BO i CO zowią się krawędziami (die Kanten, — les arêtes), zaś płaszczyzny wyżéj rzeczone kąt bryłowy zamykające, zwią się jego ścianami (die Seitenflächen, — les faces). Punkt, w którym się wszystkie ściany z sobą przecinają, zwie się wierzchołkiem (die Ecke, — le sommet) kąta bryłowego. W kącie bryłowym trójściennym jest 6 rzeczy do uważania, a mianowicie 3 kąty płaskie i 3 kąty dwuścienne. Kątami płaskimi zowiemy kąty zawarte między krawędziami, ze wspólnym wierzchołkiem w punkcie O, a więc kąty: $BOC=k_1$, $COA=k_2$ i $BOA=k_3$; kąty zaś dwuścienne są kątami mierzącymi nachylenie względem siebie ścian, kąt bryłowy składających. Z tych sześciu rzeczy, mając 3 wiadome i dane, pozostałe 3 przez konstrukcyą znalezione być mogą. Wypada stąd możliwych 6 zadań przy kątach bryłowych trójściennych, a mianowicie mogą być dane:

1. trzy jego kąty płaskie;
2. dwa kąty płaskie i kąt dwuścienny między nimi zawarty;

3. dwa kąty płaskie i kąt dwuścienny przeciwległy jednemu z tychże kątów płaskich;
4. trzy kąty dwuścienne;
5. dwa kąty dwuścienne i kąt płaski między nimi zawarty; wreszcie
6. dwa kąty dwuścienne i kąt płaski jednemu z tychże przeciwległy.

Z punktu obranego gdziekolwiek wewnątrz kąta bryłowego trójściennego poprowadziwszy prostopadłe do ścian jego, a następnie, przez każde dwie z tych prostopadłych przesunąwszy płaszczyznę, płaszczyzny te utworzą nowy kąt bryłowy trójścienny, zwany kątem trójściennym spełniającym (der triädrische Supplementar-Winkel, — l'angle trièdre supplémentaire). Z pomocą takiego kąta spełniającego trzy ostatnie zadania powyżéj podane mogą być zamienione na odpowiednie im trzy pierwsze, a to na mocy znów następującego związku, jaki istnieje między kątem bryłowym trójściennym, a kątem bryłowym spełniającym:

Twierdzenie. *Kąt płaski kąta bryłowego trójściennego z kątem przeciwległym dwuściennym kąta bryłowego spełniającego, wynoszą razem 180^0, i nawzajem.*

Wewnątrz kąta bryłowego $BOCA$ (Fig. **116**) obierzmy gdziekolwiek punkt o, i z niego spuśćmy prostopadłe na każdą ze ścian kąta bryłowego, a więc np. $oa \perp BOC$, $ob \perp COA$ i $oc \perp AOB$. Przez dwie z tych prostopadłych tj. ob i oc przesuńmy płaszczyznę $Acob$, to ta przechodząc przez $ob \perp COA$ i $oc \perp AOB$, będzie tém samém prostopadłą do ścian COA i AOB, a więc także prostopadłą i do ich wspólnego przecięcia czyli do krawędzi OA. Płaszczyzna ta $Acob$ przetnie się następnie ze ścianą BOA w prostéj Ac, zaś ze ścianą COA w prostéj Ab, które także będą prostopadłemi do AO; że zaś wychodzą one z jednego punktu A na téjże krawędzi, i jedna z nich tj. Ac leży na ścianie AOB, druga zaś tj. Ab na ścianie COA, kąt więc między niemi zawarty tj. s_1 jest miarą nachylenia do siebie ścian AOB i COA, czyli kątem dwuściennym między temiż. Z tegoż samego powodu płaszczyzna $Boac$ przesunięta przez oa i oc jest prostopadłą do ścian AOB i BOC, a tém samém prostopadłą do krawędzi OB, zaś kąt zawarty między Bc i Ba czyli kąt s_2 jest miarą nachylenia ścian tychże do siebie, czyli miarą kąta dwuściennego $AOBC$. Nareszcie przez proste ob i oa przesunąwszy płaszczyznę $Coab$, ta będzie znów prostopadłą do ścian COA i COB, a więc prostopadłą i do krawędzi OC, zaś kąt s_3 zawarty między Cb Ca będzie miarą kąta dwuściennego $AOCB$.

Wskutek przesunięcia tych trzech nowych płaszczyzn powstał kąt bryłowy trójścienny o, którego kąty płaskie oznaczmy przez k'_1, k'_2, k'_3. Aby znaleść jego kąty dwuścienne, uważmy, że krawędź jego ob będąc z założenia prostopadłą do płaszczyzny COA, jest tém samém prostopadłą do każdéj prostéj przez jéj spodek idącéj a na téj płaszczyznie położonéj, a więc jest prostopadłą do bC i bA; proste te zaś bC i bA, będąc prostopadłe do krawędzi ob, wychodząc z jednego jéj punktu i będąc położone na dwóch różnych płaszczyznach, tworzą kąt s'_2, który jest miarą kąta dwuściennego $AobC$, czyli miarą nachylenia dwóch ścian $Aboc$ i $Cboa$ względem siebie. Podobnież rozumując, znajdziemy, że kąt s'_3 jest miarą kąta dwuściennego między ścianami $Aboc$ i $Bcoa$, nareszcie kąt s_1' miarą kąta dwuściennego między ścianami $Bcoa$ i $Cboa$.

Tak mając wyznaczone wszystkie kąty płaskie i dwuścienne obu kątów bryłowych O i o, łatwo dowiedziemy twierdzenia założonego; uważmy bowiem, że w czworoboku $Aobc$ jest kąt $Aco=Abo=90^0$, a stąd wypada, że summa dwóch innych tj.

$s_1+k'_1=180^0$. Podobnież w czworoboku $Bcoa$ mamy

$s_2+k'_2=180^0$ jako też w czworoboku $Cboa$

$s_3+k'_3=180^0$ tj. że którykolwiek kąt dwuścienny kąta bryłowego O z kątem mu przeciwległym płaskim kąta bryłowego o spełniają się wzajem do 180^0.

Uważmy daléj, że w czworoboku $OBaC$ jest kąt $OBa=OCa=90^0$, a stąd wypada, że summa dwóch innych tj.

$k_1+s'_1=180^0$. Daléj w czworoboku $OAbC$ mamy

$k_2+s'_2=180^0$, nareszcie w czworoboku $OBcA$ mamy

$k_3+s'_3=180^0$, tj. że którykolwiek kąt płaski kąta bryłowego O z przeciwległym mu kątem dwuściennym kąta bryłowego o, spełniają się również do 180^0.

Zadanie 138. *Mając dane trzy kąty płaskie* k_1, k_2, k_3 *kąta bryłowego trójściennego, znaleść trzy jego kąty dwuścienne* s_1, s_2 i s_3.

Dane kąty płaskie k_1, k_2, k_3 kréślimy obok siebie przy wspólnym wierzchołku O na płaszczyznie poziomej rzutów (Fig. 117.), ale tak, iżby krawędź jednego z nich np. kąta k_2 czyli krawędź AO stała prostopadle do osi rzutów. Nie ruszając kąta k_2, a obracając równocześnie płaszczyznę kąta k_1 około krawędzi OA, zaś płaszczyznę kąta k_3 około OC w górę dopóty, dopóki krawędzie OB i OD nie zejdą się wzajem, to trzy płaszczyzny dane k_1, k_2 i k_3 utworzą nam kąt bryłowy trójścienny. Ponieważ zaś przy zejściu się krawędzi OB i OD, zejdą się także te ich punkta ze sobą, które są równo oddalone od punktu O, zatém odciąwszy $Oa=Ob$, punkta a i b spotkać się muszą wzajem w jednym punkcie, którego rzuty będą wspólnymi dla obu tych punktów. Aby znaleść najprzód rzut poziomy tego punktu, dość zauważyć, że rzut poziomy punktu a jako leżącego na kładzie poziomym, po zrobieniu obrotu będzie się znajdował gdzieś na prostopadłéj do osi obrotu OA, a rzut poziomy punktu b na prostopadłéj do osi obrotu OC; że zaś oba te punkta mają mieć wspólny rzut poziomy, takowy więc będzie w punkcie przecięcia się obu tych prostopadłych tj. w punkcie s. Aby następnie znaleść rzut pionowy tegoż punktu, uważmy, że mamy dany do tego kład punktu a, jego rzut poziomy s i oś kładów OA, a chodzi o znalezienie rzutu pionowego; zatém (podług Zad. 103.) przez s prowadzimy równoległą do osi kładu, promieniem ac z punktu c zataczamy łuk do przecięcia się z tąż równoległą w g, i łączymy c z g, a otrzymamy stąd trójkąt prostokątny csg, w którym sg jest miarą podniesienia punktu S nad płaszczyznę poziomą rzutów. Toż samo zrobiwszy dla punktu b, tj. przez jego rzut poziomy s poprowadziwszy równoległą do osi kładu OC, i promieniem bd z punktu d zatoczywszy łuk aż do przecięcia się z tą prostopadłą w punkcie h, to w trójkącie prostokątnym dsh jest sh miarą téj saméj odległości punktu S od płaszczyzny pozioméj rzutów, i jeżeli rysunek dobry, musi być $sg=sh$. Odciąwszy więc na prostopadłéj do osi z s wyprowadzonéj $s'k=sg=sh$, znajdziemy s' czyli rzut pionowy punktu S.

Rzut pionowy s' można także otrzymać inaczéj, zważywszy, że leżeć on musi na prostopadłéj z s do osi wyprowadzonéj i na rzucie pionowym koła zatoczonego przez punkt a

promieniem $o'm=ac$, a które to koło na rzucie pionowym pokaże się w prawdziwéj wielkości, płaszczyzna jego bowiem stoi równolegle do płaszczyzny pionowéj rzutów.

Mając tak wyznaczone rzuty punktu S, łączymy je z odpowiednimi rzutami wierzchołka kąta bryłowego tj. z O i O', a otrzymamy stąd Os i $O's'$ tj. rzuty krawędzi kąta bryłowego podniesionéj ponad płaszczyznę poziomą rzutów, podczas gdy dwie pozostałe krawędzie tj. OA i OC pozostały wraz z kątem k_2 na płaszczyznie pozioméj rzutów, a więc ich rzuty pionowe leżą na osi rzutów.

Aby wreszcie, mając już trzy krawędzie kąta bryłowego OO' wyznaczone w rzutach, wyznaczyć jego kąty dwuścienne, dość zauważyć, że w trójkącie prostokątnym csg kąt $scg=kO's'=s_3$ jest kątem, jaki płaszczyzna AOB tworzy z płaszczyzną poziomą rzutów, a więc i z płaszczyzną AOC (Zad. 101), czyli jest kątem dwuściennym między niemi zawartym, i podobnież w trójkącie prostokątnym shd jest kąt $sdh=s_1$ kątem nachylenia płaszczyzny COD do płaszczyzny AOC. Aby zaś znaleść trzeci kąt dwuścienny s_2 czyli kąt nachylenia płaszczyzn AOB i COD, prowadzimy przez punkt np. $s's$ obrany na krawędzi $Os, O's'$ płaszczyznę prostopadłą do téjże krawędzi sposobem wiadomym, to śladem poziomym téj płaszczyzny będzie MN; otrzymamy stąd rzut poziomy kąta szukanego tj. kąt rsn, a zrobiwszy jego kład około MN na płaszczyznę poziomą rzutów, znajdziemy tenże kąt tj. $rs''n=s_2$ w prawdziwéj wielkości.

Uwaga. Z trzech kątów płaskich chcąc złożyć kąt bryłowy trójścienny, musi być 1) summa wszystkich trzech mniejszą od 360^0, a prócz tego 2) największy z nich musi być mniejszym od summy dwóch innych.

Zadanie 139. *Dane są dwa kąty płaskie* k_1 *i* k_2, *tudzież kąt dwuścienny* s_3 *między nimi zawarty; znaleść dwa kąty dwuścienne* s_1 *i* s_2, *jakotéż kąt płaski* k_3 *między nimi zawarty.*

Kréślimy dwa dane kąty płaskie k_1 i k_2, podobnie jak w zadaniu poprzedzającém, na płaszczyznie pozioméj rzutów (Fig. **118**), i nie ruszając kąta k_2, obracamy płaszczyznę kąta k_1 około osi AO dopóty, dopóki nie utworzy ona z płaszczyzną poziomą rzutów danego kąta s_3, czyli dopóki ślad jéj pionowy $O'L'$, który zarazem jest rzutem pionowym krawędzi OB po obrocie, nie utworzy z osią rzutów tegoż kąta s_3. Skutkiem tego rzut poziomy punktu a, obranego gdziekolwiek na krawędzi OB przyjdzie do s, zaś pionowy do s', i prosta OL będzie rzutem poziomym krawędzi OB po wykonanym obrocie, a kąt LOC rzutem poziomym kąta szukanego k_3. Aby tenże kąt znaleść w prawdziwéj wielkości, prowadzimy $sm \perp OC$, a następnie z punktu O promieniem Oa zataczamy łuk aż do przecięcia się z tąż prostopadłą w pnnkcie b, który połączony z O, da nam kąt trzeci płaski w prawdziwéj wielkości. Aby znaleść następnie kąt dwuścienny s_1, postępujemy według zadania poprzedzającego, tj. promieniem bm z punktu m zataczamy łuk aż do przecięcia się z równoległą do OC przez s poprowadzoną w punkcie e, a powstanie stąd trójkąt sme, w którym kąt $sme = s_1$ jest kątem dwuściennym między k_3 i k_2 — i jeżeli rysunek dobry, musi być $sd = se = s'g$. Nareszcie, aby znaleść kąt dwuścienny s_2, prowadzimy również jak przy zadaniu poprzedzającém, przez ss płaszczyznę prostopadłą do OL', OL, — to ślad poziomy téj płaszczyzny będzie MN, zaś rzut poziomy kąta szukanego będzie hsk; zrobiwszy jégo kład na płaszczyznę poziomą rzutów, znajdziemy kąt $hs''k = s_2$ w prawdziwéj wielkości.

Zadanie 140. *Dane są dwa kąty płaskie* k_2 k_3, *jako téż kąt dwuścienny* s_3 *przeciwległy kątowi* k_3; *znaleść trzeci kąt płaski* k_1, *i 2 kąty dwuścienne* s_1 *i* s_2.

Mając dane kąty płaskie k_2 i k_3, kładziemy je obok siebie na płaszczyznie pozioméj rzutów tak samo, jak przy zadaniach poprzedzających (Fig. **119**). Ponieważ zaś danym jest także kąt dwuścienny s_3, zatém płaszczyzna kąta płaskiego nieznanego tj. k_1 musi stać do płaszczyzny kąta k_2 a więc i do płaszczyzny poziomej rzutów pod tymże kątem, — czyli płaszczyzna AOL przesunięta przez AO pod kątem s_3 względem płaszczyzny poziomej rzutów, będzie płaszczyzną kąta k_1. Obracając teraz płaszczyznę kąta k_3 około OC w górę dopóty, dopóki krawędź OD nie padnie na płaszczyznę $AO'L'$, to po zejściu się ich wzajemném ze sobą powstanie kąt bryłowy trójścienny, w którym przedewszystkiém chodzi o wyznaczenie położenia krawędzi OD po uskutecznieniu obrotu kąta k_3.

W tym celu uważmy, że punkt b obrany gdziekolwiek na krawędzi OD podczas obrotu kąta k_3 zatacza koło, którego płaszczyzna nmm' jest prostopadłą do osi obrotu OC, a więc jest także prostopadłą do płaszczyzny pozioméj rzutów, i że punkt przecięcia się tego koła z płaszczyzną $AO'L$ będzie położeniem punktu b po obrocie. Że zaś ten punkt przecięcia leżeć musi na prostéj przecięcia się płaszczyzny $AO'L$ z płaszczyzną nmm', szukamy więc najprzód téj prostéj (będzie nią prosta $nm, O'm'$), a następnie robimy jéj kład, jakotéż koła leżącego w płaszczyznie nmm', na płaszczyznę poziomą rzutów. Otrzymany stąd kład prostéj nm'', z kładem koła przecinają się w dwóch punktach, tj. w k i k_1, co znaczy, że mogą tu być dwa rozwiązania, czyli mogą powstać stąd dwa kąty bryłowe, odpowiadające warunkom zadania. Aby rzut poziomy trzeciéj krawędzi tych dwóch kątów bryłowych wyznaczyć, potrzeba tylko teraz punkta k i k_1 wrócić z kładu nazad w płaszczyznę nmm', czyli poszukać ich rzutów poziomych, tj. z k i k_1 poprowadzić prostopadłe do osi kładu nm, a otrzymane stąd punkta r i r_1 (jako leżące na rzucie poziomym prostéj $nm, O'm'$) połączyć z punktem O, tak, iż dla jednego kąta bryłowego rzutami krawędzi podniesionéj ponad płaszczyznę poziomą rzutów, będą $OL, O'L'$, zaś dla drugiego będą OL_1, OL_1. Co się wreszcie tycze kątów dwuściennych s_1 i s_2, takowe dla każdego z tych kątów bryłowych znajdzie się sposobem, jak przy Zad. 138. lub 139., kąt zaś płaski k_1 w prawdziwéj wielkości znajdzie się tak samo jak kąt k_3 w Zad. 139.

Nie zawsze jednak przy tém zadaniu są dwa rozwiązania możliwe; a mianowicie w przypadku, gdy prosta nm'' jest styczną do koła na kładzie otrzymanego, w takim razie zadanie jest ściśle oznaczonem, tj. otrzymamy tylko jedno rozwiązanie. W przypadku wreszcie, gdy ta prosta nm'' nie jest ani styczną ani sieczną, nie otrzymamy żadnego rozwiązania, czyli w takim razie z rzeczy danych w zadaniu, kąt bryłowy skonstruowanym być nie może.

Zadanie 141. *Dane są trzy kąty dwuścienne* s_1 s_2 *i* s_3 *kąta bryłowego trójściennego, znaleść trzy jego kąty płaskie* k_1, k_2 *i* k_3.

Powiedziano na początku tego §fu., że z 6 zadań tam przytoczonych, ostatnie trzy z pomocą kąta bryłowego spełniającego na trzy pierwsze sprowadzić można. Jakoż, mając dane kąty s_1, s_2 i s_3, tém samém mamy wiadome kąty płaskie kąta bryłowego spełniającego, tj. $k'_1=180^0-s_1$, $k'_2=180^0-s_2$, $k'_3=180^0-s_3$,— a więc z tych trzech ostatnich rzeczy skonstruowawszy kąt bryłowy spełniający, znajdziemy podług Zad. 138 trzy jego kąty dwuścienne tj. s'_1, s'_2 i s'_3. Te zaś mając znalezione, mieć tém samém będziemy kąty płaskie szukane, gdyż $k_1=180^0-s'_1$, $k_2=180^0-s'_2$ zaś $k_3=180^0-s'_3$.

Zadanie 142. *Dane są dwa kąty dwuścienne* s_1 *i* s_2 *kąta bryłowego trójściennego i kąt płaski* k_3 *między nimi zawarty; znaleść trzeci kąt dwuścienny* s_3 *i dwa kąty płaskie* k_1 *i* k_2.

Mając dane s_1, s_2 i k_3, tém samém mamy wiadome w kącie trójściennym spełniającym k'_1, k'_2 i s'_3; z tych trzech ostatnich rzeczy podług Zad. 139 znajdziemy s'_1, s_2' i k'_3, a te znów mając znalezione, otrzymamy $s_3=180^0-k'_3$, $k_1=180^0-s'_1$; zaś $k_2=180^0-s'_2$.

Zadanie 143. *Dane są dwa kąty dwuścienne* s_2 *i* s_3 *kąta bryłowego trójściennego i kąt płaski* k_2 *jednemu z nich przeciwległy; znaleść kąt dwuścienny* s_1, *jako téż kąty płaskie* k_1 *i* k_3.

Zadanie to zamieni się na Zad. 140, gdyż dla kąta trójściennego spełniającego mamy wiadome $k_2,=180^0-s_2$, $k'_3=180^0-s'_3$, jako téż $s'_2=180^0-k_2$, skąd znalazłszy k'_1 tudzież s'_1 i s'_3 otrzymamy rzeczy szukane, a mianowicie będzie $s_1=180-k'_1$, $k_1=180^0-s'_1$, zaś $k_3=180^0-s'_3$.

ROZDZIAŁ IV.

Wielościany, ich rzuty, przekroje i przecięcia wzajemne.

§ 19.

O wielościanach w ogólności.

Przestrzeń ograniczoną ze wszech stron płaszczyznami przecinającemi się z sobą zowiemy w i e l o ś c i a n e m (das Polyeder, — polyèdre). Płaszczyzny wielościan ograniczające, zowią się jego ś c i a n a m i; proste, w których się ściany z sobą przecinają, zowią się k r a w ę d z i a m i, a wreszcie punkta, w których się krawędzie przecinają, zowią się n a r o ż n i k a m i albo w i e r z c h o ł k a m i wielościanu. Zależnie od liczby ścian ograniczających wielościan, tenże przyjmuje szczegółową nazwę; i tak np. pięciościan oznacza przestrzeń ograniczoną pięciu ścianami, dwunastościan oznacza przestrzeń ograniczoną dwunastu ścianami itp. Aby przestrzeń ze wszech stron ograniczyć, potrzeba najmniéj cztérech płaszczyzn czyli ścian, z warunkiem jednakże, iżby każda z nich trzy inne przecinała; jeżeli bowiem nietylko cztéry, ale i więcéj ścian przecina się ale tak, że wszystkie mają jeden punkt wspólny, to przecież nie zamykają one ze wszech stron przestrzeni i nie tworzą wielościanu, ale tylko kąt bryłowy wielościenny.

Między wielościanami na szczególną uwagę zasługują: g r a n i a s t o s ł u p (das Prisma, — prisme), o s t r o s ł u p (die Piramide, — pyramide), jako téż tak zwane bryły foremne (die regelmässigen Polyeder, — polyèdres réguliers), których jest pięć, a mianowicie: 1) czworościan (das regelmässige Tetraeder, — tetraèdre regulier), 2) sześcian czyli kostka (das Hexaeder albo Cubus, — hexaeder albo cube), 3) ośmiościan (das Octaeder, — octaèdre), 4) dwunastościan (das Dodekaeder, — dodécaèdre) i 5) dwudziestościan (das Ikosaeder, — icosaèdre).

Poznawszy dotąd sposoby przedstawiania punktów, linij prostych, figur prostokreślnych, a w ogólności płaszczyzn w najrozmaitszych ich położeniach za pomocą rzutów lub śladów, następnie zaś z rzutów danych wyznaczania prawdziwéj wielkości tychże, łatwo sposoby te zastosować do wielościanów; zważywszy, że ich granicami są płaszczyzny, granicami płaszczyzn krawędzie, a granicami tych ostatnich są narożniki czyli wierzchołki wielościanów; albo krótko mówiąc, że każdy wielościan uważać można jako dany i oznaczony, jeżeli dane są z położenia jego wierzchołki, a prócz tego jeżeli wiadomém jest, w jakim porządku wierzchołki te wzajem parami do siebie należą. Aby zaś konstrukcyą kreślenia rzutów wielościanów ułatwić sobie o ile możliwém, ustawiamy je lub téż wyobrażamy je sobie ustawione w jak najkorzystniejszém położeniu względem płaszczyzn rzutów, a mianowicie w takiém, w którémby rzuty jak największéj liczby ścian lub krawędzi pokazały się w prawdziwéj swéj wielkości. Co się wreszcie tyczé tego, iżby dla oka naszego rzut był wiernym obrazem rzeczy nim przedstawionéj, do tego służą uwagi podane na początku §. 13., mianowicie, iżby na każdym rzucie były wyraźnie odróżnione części widoczne wielościanu od niewidocznych.

§. 20.

Rzuty graniastosłupów.

Jeżeli kilka płaszczyzn przecinających się tak, że wspólne przecięcia się każdych dwóch są do siebie równoległe, przetniemy dwiema płaszczyznami do siebie równoległemi, otrzymamy ze wszech stron ograniczoną przestrzeń, a zatém ciało geometryczne, które graniastosłupem nazywamy. Dwie ostatnie płaszczyzny po przecięciu się z pierwszemi, i to z każdą z nich w linii prostéj, dadzą nam dwa wielokąty do siebie przystające, które się zowią podstawami (die Basis, — la base) graniastosłupa, a mianowicie jedna dolną, druga górną. Zważywszy, że wszystkie inne płaszczyzny, przecinając się z dwiema podstawami, dają nam tyle równoległoboków, ile jest płaszczyzn, czyli—ile każda z podstaw ma boków, zatém graniastosłup otrzymać można, nakreśliwszy na jakiéjkolwiek płaszczyznie wielokąt prostokreślny, i przez wszystkie jego wierzchołki poprowadziwszy nad lub pod jego płaszczyzną proste równoległe równe sobie, a potém łącząc ich końce prostemi; otrzymamy bowiem stąd wielokąt przystający do poprzednio nakreślonego, proste zaś równoległe wraz z bokami tych dwóch równych wielokątów zamkną równoległoboki, które uważane jako płaszczyzny, zamkną znów przestrzeń ze stron wszystkich, t. j. utworzą graniastosłup. Czyli inaczéj mówiąc, graniastosłup uważać można, jako bryłę powstałą przez ruch prostéj ograniczonéj, posuwającéj się ciągle równolegle do siebie saméj i do danego kierunku po obwodzie wielokąta płaskiego, uważanego za podstawę graniastosłupa. Prosta ruchoma zowie się w takim razie rodzącą (die Erzeugende, — la génératrice), zaś wielokąt, po którym ona się posuwa, zowie się kierownicą (die Leitende, — directrice).

Wysokością (die Höhe, — la hauteur) graniastosłupa zowiemy prostopadłą spuszczoną z któregokolwiek punktu płaszczyzny jednéj podstawy na płaszczyznę podstawy drugiéj.

Stereometrya uczy, że przeciąwszy graniastosłup płaszczyzną równoległą do jednéj z jego podstaw, figura przecięcia jest wielokątem przystającym do podstawy. Wypływa stąd, że graniastosłup uważać znów można jako powstały przez ruch jego podstawy, równolegle do pierwszego jéj położenia, wzdłuż któréjkolwiek krawędzi czyli prostéj ograniczonéj, — a w takim znów razie wielokąt podstawy jest linią rodzącą, zaś krawędź graniastosłupa jéj kierownicą.

Płaszczyzna nie równolegle, lecz pod jakiémkolwiek nachyleniem względem podstawy graniastosłupa poprowadzona, dzieli tenże graniastosłup na dwa inne, zwane graniastosłupami ściętymi (ein abgestumpftes Prisma, — un tronc de prisme).

Graniastosłupy przybierają nazwy od liczby ścian bocznych, czyli, co na jedno wychodzi, od liczby boków wielokąta służącego im za podstawę. I tak są graniastosłupy trójścienne, czworościenne itp., w miarę tego, czy podstawą ich jest trójkąt, czworokąt itp.

Graniastosłup zowiemy prostym (ein senkrechtes Prisma, — un prisme droit), jeżeli krawędzie jego są do podstaw prostopadłe; w tym razie każda krawędź jest zarazem wysokością graniastosłupa, ściany zaś boczne są prostokątami. Każdy inny graniastosłup zowie się ukośnym (ein schiefes Prisma, — un prisme oblique). Jeżeli podstawą graniastosłupa prostego jest wielokąt foremny, wtedy graniastosłup zowie się foremnym (ein reguläres Prisma, — prisme régulier). W takim graniastosłupie znów wszystkie ściany boczne są prostokątami sobie równymi.

Jeżeli w graniastosłupie podstawy są równoległobokami, wtedy zowie się on równoległościanem (ein Parallelopiped, — un parallélépipède); może on być prostym lub ukośnym, w miarę tego, czy krawędzie jego są prostopadłe do podstaw, czy nie. Równoległościan prosty nazywa się prostokątnym, jeżeli prócz prostopadłości krawędzi, podstawy jego są prostokątami.

Wiedząc z tego, co się zwyż powiedziało, w jaki sposób pojmować i tłomaczyć sobie możemy powstawanie graniastosłupa, łatwo rzecz tę zastosować teraz do nakreślenia jego rzutów, do tego bowiem potrzebujemy mieć tylko dane rzuty jego kierownicy i rzuty kierunku rodzącéj czyli krawędzi. I tak:

Zadanie 144. *Nakreślić rzuty graniastosłupa, mając dany wielokąt jako jego kierownicę i kierunek krawędzi.*

Danym jest czworobok $abcd, a'b'c'd'$ (Fig. **120**) i prosta $g'g$. Aby z tych danych nakréślić rzuty graniastosłupa, prowadzimy przez wierzchołki czworoboku danego tj. przez punkta $a'a$, $b'b$, $c'c$ i $d'd$ proste równoległe do prostéj danéj a mianowicie, przez a', b', c' i d' prowadzimy równoległe do g', zaś przez a, b, c i d równoległe do g; otrzymamy stąd rzuty krawędzi graniastosłupa, które wraz z rzutami kierownicy dadzą nam $abcda_1b_1c_1d_1$ jako rzut poziomy, zaś $a'b'c'd'a'_1b'_1c'_1d'_1$ jako rzut pionowy graniastosłupa.

Zadanie 145. *Mając dane rzuty graniastosłupa, wyznaczyć jego ślady.*

Śladami graniastosłupa, a w ogóle jakiegobądź wielościanu, nazywamy figury powstałe z przecięcia się tegoż wielościanu z płaszczyznami rzutów. Aby znaleść takowe, szukamy śladów poziomych h_1, h_2, h_3, h_4 (Fig. **120**) i pionowych v_1, v_2, v_3, v_4 wszystkich krawędzi danego graniastosłupa, i ślady te na każdym rzucie z osobna łączymy z sobą prostemi w należytym porządku, a otrzymamy stąd czworokąt $h_1h_2h_3h_4$ jako poziomy, zaś $v_1v_2v_3v_4$ jako pionowy ślad danego graniastosłupa.

Zadanie 146. *Mając dany jeden z rzutów punktu na graniastosłupie leżącego, znaleść rzut jego drugi.*

Ponieważ punkt leżąc na graniastosłupie, leży tém samém na rodzącéj graniastosłupa przezeń poprowadzonéj, rzuty więc jego na rzutach téjże rodzącéj leżeć muszą. Jeżeli zatem danym jest np. rzut pionowy m' (Fig. **120**) punktu M, znaleść zaś mamy rzut jego poziomy, prowadzimy przez m' prostą $n's'$ równoległą do rzutu pionowego krawędzi graniastosłupa, a prosta ta będzie rzutem pionowym rodzącéj przez punkt M poprowadzonéj; prosta ta przetnie się z rzutem pionowym $a'b'c'd'$ kierownicy graniastosłupa w punkcie n', dla którego znalazłszy rzut poziomy n (będzie on na rzucie poziomym $abcd$ kierownicy), prowadzimy przezeń prostą ns równolegle do rzutu poziomego krawędzi graniastosłupa, a otrzymamy stąd rzut poziomy téjże rodzącéj. Mając takowy, łatwo znajdziemy rzut poziomy m punktu M, znajdować się on bowiem musi na prostopadłéj do osi z m' poprowadzonéj i na ns, tj. na rzucie poziomym rodzącéj, a więc na ich wspólném przecięciu.

Zadanie 147. *Nakreślić rzuty graniastosłupa prostego, mając daną jego podstawę i wysokość.*

Daną podstawę graniastosłupa np. pięciokąt foremny $abcde$ (Fig. **121**.) kréślimy na płaszczyznie pozioméj rzutów, to ona będzie zarazem swoim rzutem poziomym, jéj zaś rzut pionowy $a'b'c'd'e'$ będzie na osi. Ponieważ następnie w graniastosłupie prostym wszystkie krawędzie są prostopadłe do podstawy i równe wysokości graniastosłupa, a podstawa zaś ta leży na płaszczyznie pozioméj rzutów, zatém krawędzie tego graniastosłupa będą prostopadłe do płaszczyzny pozioméj rzutów; będąc zaś prostopadłemi do pozioméj, są tém samém równoległemi do płaszczyzny pionowéj rzutów, i pokażą się na téjże płaszczyznie w prawdziwéj swéj wielkości, a mianowicie równéj wysokości danéj. Przez punkta więc a', b', c', d' i e' poprowadziwszy prostopadłe $a'g'$, $b'h'$, $c'k'$ ... do osi i równe wysokości danéj m, takowe będą rzutami pionowymi krawędzi graniastosłupa, ich zaś rzuty poziome będą w punktach a, b, c...; połączywszy wreszcie punkta g', h', k' ..., otrzymamy prostą równoległą do osi jako rzut pionowy podstawy górnéj, rzut zaś jéj poziomy zejdzie się z rzutem poziomym podstawy dolnéj.

Zadanie 148. *Graniastosłup prosty dany, wsparty podstawą na płaszczyznie poziooméj rzutów, pochylić tak, iżby pozostał równoległym do płaszczyzny pionowéj rzutów, zaś do poziooméj był nachylonym pod kątem danym.*

Przypuśćmy najprzód, że graniastosłup dany np. $M'M$ (Fig. **122***a.*), z podstawą prostokątną, ustawionym jest tak, że jedna krawędź podstawy jego np. $ab, a'b'$ stoi prostopadle do płaszczyzny pionowéj rzutów. Aby graniastosłup ten, nie zmieniając równoległości jego do płaszczyzny pionowéj, ustawić tak, iżby był nachylonym pod kątem danym względem płaszczyzny poziooméj, obróćmy go około krawędzi $ab, a'b'$, i uważmy, że skutkiem tego każda ściana jego przez tę krawędź przechodząca, lub téż do niéj równoległa (jak np. obie podstawy), będą w czasie obrotu ciągle prostopadłemi do płaszczyzny pionowéj rzutów, zaś każda ściana prostopadła do krawędzi obrotu, a tém samém równoległa do płaszczyzny pionowéj rzutów, jakotéż wszystkie kąty i krawędzie boczne na tych ścianach leżące, zostaną równoległemi do téjże płaszczyzny rzutów. Ponieważ zaś wszystkie krawędzie obu podstaw graniastosłupa leżą na ścianach czyli płaszczyznach przechodzących przez krawędź obrotu, lub téż do niéj równoległych, zaś wszystkie krawędzie boczne na płaszczyznach prostopadłych do krawędzi obrotu, zatém obie podstawy i krawędzie boczne po uskutecznieniu obrotu pokażą się na rzucie pionowym jako proste téj saméj jak i przed obrotem długości, i pod takimiż kątami względem siebie, jak były przed obrotem, tj. prostopadłę do siebie, —

czyli, rzut pionowy graniastosłupa po wykonanym obrocie będzie figurą przystającą do rzutu pionowego w pierwotném jego położeniu, tj. zatrzyma on swój kształt i wielkość, a zmieni tylko swoje względem osi położenie. Położenie to znajdziemy zważywszy, że skoro graniastosłup ma być nachylonym względem płaszczyzny pozioméj rzutów pod kątem danym np. α, tém krawędzie jego boczne z płaszczyzną poziomą rzutów tworzyć muszą kąt α; że zaś te krawędzie są równoległemi do płaszczyzny pionowéj rzutów, zatém ich rzuty pionowe z osią rzutów tworzyć muszą kąt α. Nakréśliwszy więc przez punkt a' (Fig. **122**b.), gdziekolwiek na osi obrany, prostą pod kątem α względem osi, i na niéj wystawiwszy figurę przystającą do rzutu pionowego graniastosłupa w pierwotném jego położeniu, otrzymamy rzut pionowy tegoż po ustawieniu go pod kątem α względem płaszczyzny poziooméj rzutów. Rzut ten mając, łatwo znajdziemy rzut poziomy, wiedząc, że krawędzie boczne tego graniastosłupa są wszystkie równoległe do płaszczyzny pionowéj rzutów, zaś wierzchołki jego pozostały w téj saméj odległości od płaszczyzny pionowéj rzutów.

Przykład ustawienia graniastosłupa prostego pod kątem danym względem płaszczyzny poziooméj rzutów, a równolegle do pionowéj, wskazuje jeszcze figura **123**a i **123**b.

Jeżeli graniastosłup prosty, stojący pierwotnie prostopadle do płaszczyzny pionowéj rzutów, ma być obróconym tak, iżby jego krawędzie boczne zostały równoległe do płaszczyzny poziooméj rzutów, zaś z pionowym tworzyły kąt dany α, wówczas postępowanie zupełnie podobne do zwyż opisanego.

Zadanie 149. Nakreślić wszystkie trzy rzuty graniastosłupa prostego ośmiościennego, którego krawędzie boczne są równoległe do płaszczyzny pionowéj rzutów, zaś względem poziooméj nachylone są pod kątem 30°.

Zadanie 150. Nakreślić rzuty graniastosłupa prostego pięciościennego równoległego do płaszczyzny poziooméj rzutów, zaś nachylonego względem pionowéj pod kątem 45°.

Zadanie 151. *Dany graniastosłup prosty, równolegle do jednéj z płaszczyzn rzutów stojący, obrócić tak, iżby stanął pochyło względem téjże płaszczyzny.*

Mając dany graniastosłup np. MM (Fig. **124**a.) równolegle do pionowéj, zaś pod kątem α względem poziooméj płaszczyzny rzutów stojący, obróćmy go około osi pionowéj przez jeden z jego wierzchołków poprowadzonéj, i to tak, iżby kąt nachylenia tak krawędzi bocznych, jako téż i podstaw jego względem płaszczyzny pozioméj rzutów się nie zmienił. Skutkiem takiego obrotu rzut poziomy M graniastosłupa nie zmieni swego kształtu i wielkości, lecz zmieni tylko swoje położenie, a więc przyjdzie np. w położenie M_1 (Fig. **124**b.); rzut zaś ten mając, łatwo znaleść pionowy M'_1 zważywszy, że skoro graniastosłup w czasie obrotu wysokości swojéj ponad płaszczyzną poziomą rzutów nie zmienił, zatem odległości rzutów pionowych od osi wszystkich jego wierzchołków zostaną takie same, jak były poprzednio.

Gdyby krawędzie boczne graniastosłupa były pierwotnie równoległe do płaszczyzny poziomej rzutów, wtedy ten graniastosłup można znów obrócić około osi prostopadłéj do płaszczyzny pionowéj rzutów, i to tak, że kąt nachylenia krawędzi jego względem płaszczyzny pionowéj rzutów, daléj kształt i wielkość jego rzutu pionowego, a wreszcie odległości wszystkich jego wierzchołków od płaszczyzny pionowéj rzutów zostaną te same, a zmieni się tylko położenie rzutu pionowego graniastosłupa danego. Przykład takiego obrotu wskazuje figura **125**a i **125**b.

Zadanie 152. Graniastosłup prosty sześciościenny fig. **123**b. obrócić tak, iżby krawędzie jego boczne na rzucie poziomym tworzyły z osią rzutów kąt 45°.

Zadanie 153. *Nakreślić rzuty graniastosłupa, mając daną jego podstawę i dwie przyległe sobie ściany.*

Daną podstawę np. pięciokąt $ABCDE$ (Fig. **126**.) kreślimy na płaszczyznie poziomej rzutów, to ona będzie zarazem swoim rzutem poziomym, rzut zaś jéj pionowy będzie na osi; tamże, czyli na kładzie poziomym, kreślimy następnie także dane dwie przyległe ściany tj. $abf''g''$ i $aeh''g''_1$. Aby z tych danych nakreślić rzuty graniastosłupa, pomyślmy sobie podniesione obie dane ściany $abf''g''$ i $aeh''g''_1$ z kładu poziomego w górę, a właściwie obrócone pierwsza około ab, druga około ae tak, iżby się krawędziami swemi ag'' i ag''_1 zeszły ze sobą; skutkiem tego, ponieważ wszystkie punkta tych krawędzi, równo oddalone od punktu a, zejdą się także ze sobą, zatém i punkta g'' i g''_1 padną również na siebie (gdyż $ag'' \parallel ag''_1$), i utworzywszy w przestrzeni jeden punkt G, będą miały tém samém wspólny im obojgu rzut poziomy i pionowy. Rzut poziomy tego punktu znajdziemy zważywszy, że tenże znajdować się musi na prostopadłéj $g''k$ z kładu g'' do osi kładu ab, i na prostopadłéj g''_1l z g''_1 do ae wyprowadzonéj, a więc, że leżeć on musi w ich wspólném przecięciu tj. w punkcie g. Rzut poziomy już mając, łatwo daléj znajdziemy rzut pionowy, ku temu bowiem mamy daną oś kładu ab lub ae, kład punktu i rzut jego poziomy; poprowadziwszy zatém przez g równoległą gx do osi kładu np. ab, i promieniem $g''k$ z punktu k zatoczywszy łuk aż do x, będzie gx miarą odległości punktu G od płaszczyzny pozioméj rzutów, czyli miarą odległości jego rzutu pionowego od osi. Że zaś tenże rzut pionowy leżeć musi na prostopadłéj do osi rzutów z g wyprowadzonéj, odciąwszy więc $g'z = gx$, otrzymamy punkt g'.

W ten sposób znalazłszy rzuty punktu G, który naturalnie jest wierzchołkiem podstawy górnéj graniastosłupa, reszta konstrukcyi jest bardzo prostą; połączywszy bowiem najprzód punkt a z g, zaś a' z g', otrzymamy rzuty jednéj krawędzi graniastosłupa,— a gdy w graniastosłupie wszystkie krawędzie są do siebie równoległe i równe sobie, prowadzimy więc następnie przez rzuty poziome wierzchołków podstawy tj. przez punkta b, c, d, e proste bf, cm, dn i eh równolegle do ag i równe ag, zaś przez ich rzuty pionowe tj. przez punkta b', c', d', e' proste $b'f'$, $c'm'$, $d'n'$ i $e'h$ równolegle do $a'g'$ i równe $a'g'$, a otrzymamy stąd rzuty poziome i pionowe reszty krawędzi. Połączywszy wreszcie punkta g, f, m, n, h w należytym porządku, otrzymamy pięciobok, jako rzut poziomy podstawy górnéj graniastosłupa, podczas gdy rzut jéj pionowy będzie prostą równoległą do osi rzutów, łączącą punkta g', f', m', n', h', — a jeżeli rysunek dobry, to punkta $f'f$, $m'm$, $n'n$, $h'h$ leżeć muszą na prostopadłych do osi rzutów.

Zadanie 154. *Nakreślić rzuty graniastosłupa, mając daną jego podstawę, jednę ścianę i kąt nachylenia téjże ściany ku podstawie.*

Daną podstawę np. $ABCDE$ (Fig. **126**.) kréślimy na płaszczyznie poziom éj rzutów, to tamże będzie jéj rzut poziomy *abcde*, zaś pionowy $a'b'c'd'e'$ będzie na osi; również na kładzie poziomym kréślimy następnie daną ścianę np. $aeh''g''_1$. Kątem danym dwuściennym zawartym w przestrzeni między tą ścianą a podstawą, niech będzie kąt α. Ponieważ w graniastosłupie wszystkie krawędzie są do siebie równoległe i równe sobie, wystarczy więc znaleść rzuty jednéj z nich np. krawędzi ag''_1 po ustawieniu ściany $aeh''g''_1$ pod kątem α względem płaszczyzny pozioméj rzutów, czyli względem podstawy *abcde*. W tym celu podnieśmy w górę tę ścianę z kładu poziomego, czyli obróćmy ją około osi *ae* i ustawmy tak, iżby z płaszczyzną poziomą rzutów utworzyła kąt α, to skutkiem tego jeden punkt krawędzi ag''_1 tj. punkt $a'a$ zostanie na swojém miejscu, zaś punkt g''_1 podniesie się ponad płaszczyznę poziomą, a więc rzuty jego znaleść potrzeba. Do znalezienia tych rzutów mamy daną oś kładu *ae*, kład punktu tj. g''_1 i kąt α, jaki płaszczyzna jego tworzyć ma z płaszczyzną poziomą rzutów; poprowadziwszy więc prostopadłą g''_1g do osi kładu *ae*, i w punkcie *l* przecięcia się jéj z tąż osią odciąwszy kąt $glr = \alpha$, a następnie promieniem lg'_1 z punktu *l* zatoczywszy łuk aż do punktu *r*, zaś przez *r* poprowadziwszy równoległą do osi kładu aż do przecięcia się z prostą lg''_1, otrzymamy punkt *g* jako rzut poziomy punktu g''_1 po obrocie, — rzut zaś jego pionowy g' będzie na prostopadłéj do osi rzutów z *g* wyprowadzonéj i to w odległości $g'z = gr$. To mając, łączymy punkt $g'g$ z punktem $a'a$, a znajdziemy rzuty podniesionéj o kąt α krawędzi ag''_1, następnie zaś przez resztę wierzchołków podstawy danéj tj. przez punkta $b'b$, $c'c$... prowadzimy proste równoległe do $a'g', ag$ i równe téjże krawędzi, a te będą rzutami krawędzi bocznych graniastosłupa; połączywszy wreszcie ich końce w należytym porządku na każdym z rzutów z osobna, otrzymamy rzuty górnéj podstawy graniastosłupa.

Zadanie 155. **Mając dany rzut poziomy i pionowy graniastosłupa, znaleść jego rzut boczny i ślad boczny.*

Szukamy rzutu bocznego każdéj krawędzi z osobna, czyli rzutu bocznego każdego z wierzchołków podstawy górnéj i dolnéj, a następnie punkta tak otrzymane łączymy należycie ze sobą.

Zadanie 156. *Mając dane rzuty graniastosłupa, znaleść kąt nachylenia dwóch ścian jego przyległych, lub téż kąt nachylenia któréjkolwiek ściany względem podstawy.*

Na wspólnéj krawędzi dwóch ścian, których kąt nachylenia znaleść chcemy, obieramy gdziekolwiek punkt i przezeń przesuwamy płaszczyznę prostopadłą do téjże krawędzi; następnie szukamy prostych, w których ta płaszczyzna przecina się z obiema ścianami, a znajdziemy stąd rzuty kąta żądanego, który późniéj tylko w prawdziwéj poszukać należy wielkości.

Zadanie 157. *Mając dane rzuty graniastosłupa, nakreślić jego siatkę, czyli rozwinąć całą jego powierzchnią na jednéj płaszczyznie.*

Mając dane rzuty graniastosłupa $N'N$ (Fig. **127**.) opartego podstawą *ghiklm* na płaszczyznie pozioméj rzutów, robimy kład poziomy wszystkich jego ścian bocznych, biorąc kolejno za oś kładu krawędzie *gh, hi, ik...*, a które za ślady poziome odpowiednich im ścian bocznych uważać można. I tak, aby znaleść kład poziomy np. ściany *afmg*, a więc i jéj prawdziwy kształt i wielkość, uważmy, że punkt *f* po zrobieniu kładu będzie się znajdował gdzieś na prostopadłéj *fr* do osi kładu *mg* z punktu *f* poprowadzonéj; aby zaś znaleść gdzie, szukamy albo kładu tego punktu sposobem wiadomym, mając do tego daną oś kładu *mg* i oba rzuty punktu $f'f$, — albo téż szukamy prawdziwéj długości krawędzi $m'f',mf$ za pomocą obrotu (Zad. 84.), tj. szukamy $m'o'$, a następnie promieniem $m'o'$ z punktu *m* zataczamy łuk, który przetnie *fr* w punkcie szukanym f''. Połączywszy następnie punkt f'' z punktem *m*, który w czasie kładu zostaje na swojém miejscu, otrzymamy kład krawędzi $m'f',mf$. Ponieważ zaś krawędź $a'g',ag \parallel m'f',mf$, jakotéż $a'g',ag=m'f',mf$, poprowadziwszy więc ga'' równolegle do mf'' i równe temuż, a wreszcie a'' z f'' połączywszy, otrzymamy $mga''f''$ jako kład ściany $mgaf,m'g'a'f'$.

W ten sam sposób znalazłszy kład reszty ścian bocznych graniastosłupa, otrzymamy siatkę jego czyli rozłożoną jego powierzchnią boczną na jednéj płaszczyznie, do czego dołączywszy jeszcze obie jego podstawy w téj wielkości i kształcie, jak są na rzucie poziomym, otrzymamy siatkę całéj powierzchni graniastosłupa.

Zadanie 158. Nakreślić rzuty graniastosłupa prostego, którego podstawą jest sześciokąt foremny, leżący na płaszczyznie równoległéj do płaszczyzny poziroméj rzutów a w odległości danéj od téjże przesuniętéj, zaś krawędzią jego jest długość dana, a następnie znaleść siatkę tego graniastosłupa.

Zadanie 159. Nakreślić rzuty graniastosłupa prostego, którego podstawa sześciokąt foremy leży na płaszczyznie prostopadłéj do płaszczyzny pionowéj rzutów, a nachylonéj pod kątem danym względem poziroméj, wysokość zaś graniastosłupa równa się długości danéj.

Zadanie 160. Nakreślić rzuty graniastosłupa prostego, którego podstawą jest pięciokąt foremny dany, leżący w płaszczyznie prostopadłéj do osi rzutów, wysokość zaś równa się podwójnéj średnicy koła na tym pięciokącie opisanego.

Zadanie 161. Nakreślić rzuty graniastosłupa ukośnego wspartego jednym wierzchołkiem lub jedną krawędzią swéj podstawy na płaszczyznie poziroméj rzutów.

Zadanie 162. Nakreślić rzuty równoległościanu prostego mając dane długości trzech jego krawędzi w jednym wierzchołku się zbiegających, i kąt, jaki dwie z tych krawędzi na podstawie tworzą.

Zadanie 163. Nakreślić rzuty równoległościanu prostokątnego, mając daną jego szerokość, grubość i wysokość.

Zadanie 164. Mając dane rzuty równoległościanu prostego lub prostokątnego, nakreślić jego siatkę.

Zadanie 165. Znaleść kąty, pod jakimi graniastosłup dany jakikolwiek nachylonym jest względem płaszczyzn rzutów.

§ 21.

Rzuty ostrosłupów.

Jeżeli ilekolwiek płaszczyzn przecinających się z sobą tak, iż mają jeden punkt wspólny, przetniemy inną płaszczyzną ze strony otwartéj, ta z pierwszemi zamknie zupełnie przestrzeń czyli ciało geometryczne, o s t r o s ł u p e m albo p i r a m i d ą zwane. Podobnie jak w graniastosłupie, płaszczyzny ostrosłup ograniczające zowią się jego ś c i a n a m i, proste, w których takowe się przecinają, k r a w ę d z i a m i, punkt wspólny wszystkim ścianom, w i e r z c h o ł k i e m, zaś płaszczyzna przecinająca wszystkie inne, albo raczéj wielokąt wypadający z przecięcia się ścian ostrosłupa z tąż płaszczyzną, zowie się jego p o d s t a w ą. W y s o k o ś c i ą ostrosłupa zowiemy prostopadłą spuszczoną z wierzchołka jego na płaszczyznę podstawy.

Ostrosłupy przybierają nazwy od liczby ścian bocznych; a że liczba tych ostatnich jest równą liczbie boków wielokąta służącego za podstawę lub kierownicę ostrosłupa, zatem ostrosłup zwać się będzie trójściennym, jeżeli podstawa jest trójkątem, czworościennym, jeżeli taż podstawa jest czworokątem itp.

Jeżeli podstawą ostrosłupa jest wielokąt foremny, prosta łącząca wierzchołek ze środkiem podstawy, nazywa się osią ostrosłupa. Jeżeli taż oś jest prostopadłą do podstawy, ostrosłup nazywa się prostym (eine gerade Pyramide, — une pyramide droit). W takim ostrosłupie wszystkie ściany boczne są trójkątami równobocznymi przystającymi do siebie, skąd wypada, że także wszystkie krawędzie boczne są między sobą równe.

Ostrosłup uważać można jako bryłę powstałą przez ruch prostéj, suwającéj się po obwodzie wielokąta danego i przechodzącej w czasie tego ruchu przez punkt dany, nieruchomy. Wielokąt ten nazywa się kierownicą, zaś prosta ruchoma rodzącą ostrosłupa.

Zadanie 166. *Nakreślić rzuty ostrosłupa, mając dane rzuty jego kierownicy i rzuty wierzchołka.*

Łączymy rzut pionowy wierzchołka z rzutami pionowymi wierzchołków wielokąta danego za kierownicę, zaś rzut poziomy z ich rzutami poziomymi; otrzymamy stąd rzuty krawędzi ostrosłupa szukanego, które łącznie z rzutami kierownicy stanowić będą rzuty tegoż ostrosłupa.

Zadanie 167. *Mając dane rzuty ostrosłupa, znaleść jego ślady.*

Szukamy śladów każdéj krawędzi ostrosłupa i znalezione stąd punkta łączymy ze sobą prostemi w należytym porządku, a otrzymamy figury wielokątne, będące śladami szukanymi.

Zadanie 168. *Mając dany jeden z rzutów punktu leżącego na powierzchni ostrosłupa, znaleść rzut jego drugi.*

Jeżeli danym jest np. rzut pionowy punktu leżącego na powierzchni ostrosłupa, to tém samém danym jest rzut pionowy rodzącéj, na któréj ten punkt w przestrzeni leży; takowy bowiem przechodzić musi przez dany rzut pionowy punktu, jako téż przez rzut pionowy wierzchołka ostrosłupa. Rzut pionowy téj rodzącéj z rzutem pionowym kierownicy przetnie się w punkcie, dla którego poszukawszy odpowiedniego mu rzutu poziomego na rzucie poziomym kierownicy, i ten znów z rzutem poziomym wierzchołka ostrosłupa połączywszy, otrzymamy rzut poziomy rodzącéj, — na któréj, jako téż na prostopadłéj do osi rzutów z danego rzutu pionowego punktu wyprowadzonéj, leżeć będzie rzut szukany punktu.

Zadanie 169. *Nakreślić rzuty ostrosłupa prostego, mając daną jego podstawę i wysokość.*

Daną podstawę np. pięciokąt $ABCDE$ kreślimy na płaszczyznie pozioméj rzutów, to tamże będzie ona zarazem swoim rzutem poziomym $abcde$ (Fig. **128 a**), rzut zaś jéj pionowy $a'b'c'd'e'$ będzie na osi. Ponieważ zaś w ostrosłupie prostym wysokość jego jest prostopadłą do podstawy i przechodzi przez środek téjże, i ponieważ następnie wysokość ta u nas będąc prostopadłą do płaszczyzny poziomej rzutów, jest tém samém równoległą do pionowéj, zatem pokaże się ona na rzucie pionowym w prawdziwéj swojéj wielkości jako prosta prostopadła do osi rzutów, rzut zaś jéj poziomy będzie punktem. Na prostopadłéj więc do osi ze środka wielokąta $abcde$ wyprowadzonéj, odciąwszy nad osią część $s'o'$ równą wysokości danéj, ta będzie zarazem rzutem pionowym téjże wysokości, jéj rzutem poziomym będzie punkt o; że zaś w ten sposób otrzymamy zarazem rzuty $s's$ wierzchołka ostrosłupa, takowe więc połączywszy z rzutami podstawy jego, otrzymamy rzuty krawędzi bocznych a więc i samegoż ostrosłupa.

W podobny sposób rzecz tłomacząc, jakeśmy to przy graniastosłupie uczynili (Zad. 148 i 151), można z łatwością, mając dane rzuty ostrosłupa prostego z podstawą leżącą na płaszczyznie poziomej rzutów, znaleść jego rzuty, skoro ostrosłup ten względem téjże lub względem obu płaszczyzn rzutów pochylonym zostanie. I tak, przez punkt a'_1 gdziekolwiek (Fig. **128 b**) na osi obrany, poprowadziwszy prostą $a'_1d'_1$ pod kątem np. α względem téjże osi, a równą co do długości rzutowi pionowemu $a'd'$ podstawy ostrosłupa, i na prostéj téj wystawiwszy figurę $a'_1d'_1s'_1$ przystającą do rzutu jego pionowego $a'd's'$, ta będzie rzutem pionowym ostrosłupa w nowém jego położeniu; rzut poziomy zaś znajdziemy, szukając rzutów poziomych wszystkich wierzchołków ostrosłupa, a które zostaną w téj saméj odległości od osi rzutów, w jakiéj były pierwotnie, i takowe wreszcie łącząc ze sobą należycie. W otrzymaném stąd nowém położeniu ostrosłupa jest podstawa jego nachyloną pod kątem α względem płaszczyzny pozioméj rzutów, a prostopadłą względem pionowéj, wysokość zaś jego jest nachyloną pod kątem $90^0-\alpha$ względem pozioméj, a równoległą względem pionowéj płaszczyzny rzutów.

Aby znów z tego położenia ostrosłupa znaleść rzuty jego skoro zostanie on, a więc i oś jego nachyloną względem płaszczyzny pionowéj rzutów, kreślimy rzut jego poziomy $a_2b_2c_2...s_2$ (Fig. **128 c**) równy zwyż znalezionemu $a_1b_1c_1...s_1$ co do kształtu i wielkości, ale różny co do położenia, a następnie szukamy rzutów pionowych wierzchołków ostrosłupa, które znajdować się będą w téj saméj wysokości nad osią rzutów, w jakiéj były poprzednio, i takowe łączymy z sobą prostemi; otrzymamy stąd oba rzuty ostrosłupa, którego podstawa i wysokość zostały pod tymi samymi kątami względem płaszczyzny pozioméj rzutów, pod jakimi były poprzednio, względem zaś pionowéj są teraz nachylone pod kątami, które łatwo znaleść, poszukawszy kąta, jaki oś ostrosłupa w tém jego położeniu tworzy z płaszczyzną pionową rzutów.

Zadanie 170. Nakreślić rzuty ostrosłupa prostego sześciościennego, mając daną długość boku jego podstawy i daną wysokość; oś ostrosłupa tego ma być nachyloną względem płaszczyzny pionowéj rzutów pod kątem $37^1/_2{}^0$, jéj zaś rzut pionowy tworzyć ma z osią rzutów kąt 45^0.

Zadanie 171. *Nakreślić rzuty ostrosłupa, mając daną jego podstawę i dwie przyległe sobie ściany.*

Daną podstawę kréślimy na płaszczyznie pozioméj rzutów np. *abcdef* (Fig. **129**), to tamże będzie jéj rzut poziomy, rzut zaś pionowy będzie na osi; również na kładzie czyli na płaszczyznie poziomej rzutów, kreślimy obok podstawy dane dwie ściany przyległe np. abo'' i afo''_1. Aby z tych danych nakreślić teraz rzuty ostrosłupa; potrzebujemy tylko znaleść rzuty jego wierzchołka; takowe znajdziemy zaś zważywszy, że obracając ścianę abo'' około ab, zaś ścianę afo''_1 około af dopóty, dopóki się ich krawędzie ao'' i ao''_1 ze sobą nie zejdą, to wówczas i końce tych krawędzi, tj. punkta o'' i o''_1 zejść się z sobą muszą w jednym punkcie czyli wierzchołku ostrosłupa, i wówczas oba te punkta będą miały rzuty wspólne. Że zaś rzut poziomy punktu o'' leżeć musi na prostopadłéj do osi kładu ab z o'' poprowadzonéj, zaś rzut poziomy punktu o''_1 na prostopadłéj do osi kładu ae z o''_1 poprowadzonéj, znajdować się więc będzie rzut poziomy wierzchołka na przecięciu się tych dwóch prostopadłych tj. w punkcie o; mając poziomy, łatwo znaleść rzut pionowy o' sposobem wiadomym za pomocą trójkąta prostokątnego omk. Połączywszy wreszcie rzuty $o'o$ wierzchołka z odpowiednimi rzutami wierzchołków podstawy, otrzymamy rzuty ostrosłupa, który jest ukośnym, skoro rzut poziomy wierzchołka jego wypadł zewnątrz środka jego podstawy.

Zadanie 172. *Nakreślić rzuty ostrosłupa pięciościennego, któregoby podstawa leżała na płaszczyznie danéj, zaś wierzchołek w punkcie danym.*

Na płaszczyznie danéj obieramy pięć punktów i takowe przyjmujemy za wierzchołki podstawy ostrosłupa; następnie łączymy ich rzuty poziome ze sobą w pięciobok, jako też łączymy je z rzutem poziomym danego wierzchołka ostrosłupa, a otrzymamy stąd rzut poziomy tegoż; uczyniwszy wreszcie toż samo z rzutami pionowymi, otrzymamy rzut pionowy szukanego ostrosłupa.

Zadanie 173. *Nakreślić rzuty ostrosłupa, któregoby podstawą był sześciokąt foremny leżący na płaszczyznie danéj, zaś wierzchołek w punkcie danym.*

Robimy kład płaszczyzny danéj na jednę z płaszczyzn rzutów, i tamże tj. na kładzie, kreślimy sześciokąt foremny mający być podstawą ostrosłupa; następnie szukamy rzutów tego sześciokąta po wróceniu płaszczyzny danéj w jéj pierwotne położenie, i łączymy wreszcie rzuty jego wierzchołków z odpowiednimi rzutami wierzchołka ostrosłupa.

Zadanie 174. Nakreślić rzuty ostrosłupa prostego, mając daną jego podstawę i jednę ścianę.

Zadanie 175. Nakreślić rzuty ostrosłupa, mając daną podstawę, jednę ścianę i wysokość jego.

Zadanie 176. Nakreślić rzuty ostrosłupa, mając daną podstawę, jednę ścianę i kąt między niemi zawarty.

Zadanie 177. Mając dane rzuty ostrosłupa, znaléść kąt nachylenia dwóch jego ścian przyległych sobie, lub téż kąt zawarty między podstawą, a którąkolwiek ścianą.

Zadanie 178. Mając dane dwa rzuty ostrosłupa, znaleść trzeci rzut tj. boczny.

Zadanie 179. Mając dane rzuty ostrosłupa prostego lub ukośnego, rozłożyć jego powierzchnię czyli nakreślić jego siatkę.

Zadanie 180. Nakreślić rzuty ostrosłupa jakiegokolwiek 1) wspartego swym wierzchołkiem na płaszczyznie pozioméj rzutów; 2) opartego jedną krawędzią boczną o płaszczyznę pionową rzutów; 3) opartego podstawą na płaszczyznie pozioméj rzutów, zaś wierzchołkiem o pionową; 4) z podstawą leżącą na płaszczyznie prostopadłéj do osi rzutów, zaś z wierzchołkiem na osi itp.

§ 22.

Rzuty brył czyli wielościanów foremnych.

Wiemy już, że jeżeli przestrzeń ograniczymy ilukolwiek płaszczyznami i w jakikolwiek sposób, otrzymamy stąd ciało geometryczne, zwane w ogólności w i e l o ś c i a n e m. Między wielościanami, których naturalnie może być nieskończona ilość i rozmaitość, najwięcéj znane są wielościany Archimedesa i Pitagorejskie. Do pierwszych liczą się wszystkie, w których każda ściana jest wielokątem foremnym, do drugich zaś te, w których oprócz foremności, ściany są przystającemi do siebie, jakotéż pochyłości każdych dwóch ścian, czyli kąty dwuścienne, są między sobą równe, a skąd także wypada, że i krawędzie ich jakotéż kąty płaskie są sobie nawzajem równe. Na mocy własności kątów bryłowych, jakiéj nam Stereometrya dostarcza, a mianowicie, że summa kątów płaskich kąt bryłowy składających, musi być mniejszą od cztérech kątów prostych, możliwych jest tylko 5 wielościanów foremnych, a nimi są wyliczone powyżéj w §. 20. Między nimi czworościan, ośmiościan i dwudziestościan ograniczone są odpowiednią ich nazwie liczbą trójkątów równobocznych, sześcian kwadratami, wreszcie dwunastościan pięciokątami.

Zadanie 181. *Nakreślić rzuty czworościanu, mając daną wielkość jego krawędzi.*

Pomyślmy sobie, że czworościan stoi jedną swoją ścianą na płaszczyznie pozioméj rzutów, wówczas trójkąt równoboczny *abc* (Fig. **130**) nakreślony na téj płaszczyznie, a któregoby bok równał się krawędzi danéj, będzie rzutem poziomym jego podstawy, rzut zaś jéj pionowy będzie na osi. Aby otrzymać rzuty krawędzi bocznych czworościanu, potrzeba znaleść rzuty jego wierzchołka, i takowe z rzutami wierzchołków podstawy połączyć. Ale rzut poziomy tego wierzchołka znajdziemy zważywszy, że czworościan foremny jest zarazem ostrosłupem prostym, a więc że rzut tenże leżeć musi w środku geometrycznym podstawy *abc* tj. w punkcie *s;* połączywszy punkt *s* z punktami *a, b* i *c* otrzymamy rzut poziomy krawędzi bocznych a zarazem i całego czworościanu. Aby znaleść następnie rzut poziomy wierzchołka, potrzeba znać wysokość czworościanu; że zaś wysokość ta jest bokiem trójkąta prostokątnego, w którym przeciwprostokątnia jest równą danéj krawędzi czworościanu, zaś drugi bok równy jéj rzutowi poziomemu, zatem na boku *bs* nakréśliwszy trójkąt prostokątny *bsd,* w którym bok *bd=ab,* będzie *sd* żądaną wysokością czworościanu, którą tylko na prostopadłéj z *s* do osi wyprowadzonéj odciąć potrzeba, a znajdziemy *s'*. Połączywszy wreszcie *s'* z rzutami pionowymi wierzchołków podstawy tj. z *a'*, *b'* i *c'*, otrzymamy rzut pionowy czworościanu.

Zadanie 182. *Nakreślić rzuty sześcianu czyli kostki, mając daną wielkość jego krawędzi.*

Rzuty te najłatwiéj nakreślić, wyobraziwszy sobie sześcian ustawiony na płaszczyznie pozioméj rzutów tak, iżby jedna z jego krawędzi leżała równolegle do osi rzutów, wtedy bowiem tak rzut poziomy jak i pionowy sześcianu (Fig. **131**) będzie kwadratem, o boku równym krawędzi danéj.

Zadanie 183. *Nakreślić rzuty ośmiościanu, mając wiadomą długość jego krawędzi.*

Wyobraźmy sobie ustawiony ośmiościan jednym z jego wierzchołków na płaszczyznie poziomej rzutów tak, iżby z 3-ch jego przekątni, czyli prostych łączących wierzchołki przeciwległe, jedna tj. *AB* (Fig. **132**.) stała prostopadle do płaszczyzny poziomej, zaś druga *CD* prostopadle do płaszczyzny pionowéj rzutów, to trzecia z nich tj. *EF* będzie tém samém równoległą do osi. W tém położeniu ośmiościanu rzuty jego pokażą się nam jako kwadraty o boku równym krawędzi danéj, a w których połowy ich przekątni będą rzutami krawędzi bocznych ośmiościanu.

Zadanie 184. *Nakreślić rzuty dwunastościanu, mając daną jego krawędź.*

Na płaszczyznie poziomćj rzutów kréślimy pięciokąt foremny *abcde* (Fig. **133**.) o boku równym krawędzi danéj, i takowy przyjmujemy za podstawę dwunastościanu na téjże płaszczyznie stojącego, to pięciokąt ten będzie zarazem rzutem poziomym téjże podstawy. Aby znaleść rzut poziomy krawędzi bocznéj, wychodzącéj np. z punktu e podstawy, na płaszczyznie pozioméj rzutów wykreślmy pięciokąty $eaf''g''h''$ i $edl''k''h''$, przystające do podstawy *abcde* i przylegające do niéj wzdłuż boków *ae* i *ed*, a następnie obróćmy je około *ae* i *ed*, dopóki się ich boki eh'' i eh''_1 ze sobą nie zejdą w krawędzi *EH*. Stąd sposobem wiadomym znajdziemy rzut poziomy punktu *H* tj. *h*, a połączywszy *e* z *h*, znajdziemy rzut poziomy krawędzi *EH*. Ponieważ zaś, jak łatwo dowieść, prosta *eh* w swém przedłużeniu dzieli kąt *dea* na dwie równe części, zatém, aby otrzymać rzuty poziome krawędzi wychodzących z punktów *a, b, c, d* podstawy, prowadzimy proste *af, bn, cp, dl* tak, iżby w przedłużeniu swém połowiły kąty odpowiednie wewnętrzne pięciokąta, i przytém były równe krawędzi *eh*. Ponieważ następnie w pięciokącie foremnym poprowadziwszy którąkolwiek przekątnią, takowa odcina trapez, zatém poprowadziwszy $dk \parallel eh$, zaś $ek \parallel dl$, otrzymamy na przecięciu tych prostych punkt *k*, czyli rzut poziomy wierzchołka jednéj ściany bocznéj. W podobnyż zupełnie sposób otrzymamy wierzchołki *r, s, t, u*, które połączywszy z końcami krawędzi obok leżących, otrzymamy rzut poziomy jednéj połowy dwunastościanu. Aby znaleść rzut drugiéj połowy, dość uważyć, że w dwunastościanie dwie przeciwległe sobie krawędzie są zawsze do siebie równoległe i równe, czyli, jeżeli jedna jest *eh*, to przeciwległa jéj, czy idąca przez punkt *s*, będzie $sv \#\!\# eh$, podobnież $tw \#\!\# dl$ itp.; połączywszy wreszcie z sobą punkta *v,w,x,y,z*, otrzymamy rzut żądany.

Co się tyczé rzutu pionowego, takowy sposobami znanymi łatwo nakreślić. I tak, rzuty pionowe wierzchołków podstawy dolnéj *abcde* będą na osi; rzuty wierzchołków *h,f,n,p, l* będą na równoległéj do osi przez h' poprowadzonéj (h' się znajdzie zważywszy, że mamy kład h'' i rzut poziomy h, jakotéż oś kładu de), zaś rzuty wierzchołków k,r,s,t,u będą na równoległéj do osi przez k' poprowadzonéj (k' się znajdzie podobnież, zważywszy, że k'' jest kładem punktu k około osi de); nareszcie, ponieważ jak wyżéj rzeczono, krawędź $SV \# EH$, zatém musi być i $s'v' \# e'h'$, a mając stąd v', na równoległéj do osi przez v' poprowadzonéj będą leżeć rzuty pionowe reszty wierzchołków podstawy górnéj $vwxyz$.

Zadanie 185. *Nakreślić rzuty dwudziestościanu, mając daną jego krawędź.*

Wyobraźmy sobie ustawioną oś dwudziestościanu, czyl linią łączącą jego dwa przeciwległe sobie wierzchołki, prostopadle do płaszczyzny pozioméj rzutów, wówczas podstawy obu pięciościennych ostrosłupów, których ściany boczne zbiegają się w tychże wierzchołkach, będą równoległe do płaszczyzny poziomej rzutów, i rzuty ich poziome pokażą się w prawdziwéwielkości i kształcie jako pięciokąty foremne o wspólnym środku i bokach do siebie równoległych, a równych krawędzi danéj. Ustawiwszy prócz tego jeszcze dwudziestościan tak, iżby krawędź jednéj z tych podstaw, a więc i krawędź jéj przeciwległa drugiéj podstawy, stała prostopadle do płaszczyzny pionowéj rzutów, wtedy rzuty poziome tych krawędzi będą prostopadłe do osi. A więc na płaszczyznie poziomej rzutów nakréśliwszy pięciokąt foremny $abcde$ (Fig. **134**) o boku równym krawędzi danéj, tak, iżby np. bok dc był prostopadłym do osi, środek o tego pięciokąta będzie rzutem poziomym wierzchołków obu wyżéj wspomnianych ostrosłupów, a połączywszy go z punktami a,b,c,d,e, otrzymamy rzuty poziome krawędzi bocznych ostrosłupa dolnego. Aby otrzymać takież rzuty dla górnego ostrosłupa, prowadzimy $hk \# dc$, $kl \# cb$ itd. tak jednak, iżby środek s pięciokąta $fghkl$ stąd powstałego, leżał w punkcie o (a więc wierzchołki jego muszą leżeć na obwodzie tegoż samego koła z punktu o promieniem oa zatoczonego), to $fghkl$ będzie rzutem jego podstawy, zaś sf, sg, sh ... będą rzutami jego krawędzi bocznych. Mając rzuty dwóch ostrosłupów, a tém samém rzuty wszystkich wierzchołków dwudziestościanu, łatwo znaleść rzuty reszty ścian bocznych, środkujących między oboma ostrosłupami; połączywszy bowiem punkt np.

e z *k* i *l*, daléj punkt *l* z *d* i *e* itp., otrzymamy trójkąty *elk*, *lde*, *dfl* itd. jako rzuty poziome tychże ścian.

Co się wreszcie tyczé rzutu poziomego, takowy znajdzie się sposobem wiadomym, jako téż zważywszy, że w tém położeniu dwudziestościanu, ściany czyli trójkąty *COD* i *DCF* pokażą się na rzucie pionowym jako proste równe prawdziwéj wysokości tychże trójkątów, i że rzut pionowy krawędzi *FS* będzie równy saméjże krawędzi.

Zadanie 186. *Mając daną krawędź któréjkolwiek z brył foremnych, nakreślić jéj siatkę.*

Poznawszy sposoby, jak z danéj krawędzi można nakreślić rzuty któréjkolwiek z brył foremnych, łatwo następnie sposobem znanym, a mianowicie, robiąc kład ich ścian bocznych na płaszczyznę poziomą rzutów, nakreślić ich siatkę. W ten sposób otrzymamy siatkę czworościanu (Fig. **135**), sześcianu (Fig. **136**.), ośmiościanu (Fig. **137**.), dwunastościanu (Fig. **138**) i dwudziestościanu (**139**.).

§. 23.

Przecięcia wielościanów płaszczyznami i liniami prostemi.

Znaleść przecięcie wielościanu płaszczyzną, znaczy to znaleść położenie, kształt i wielkość prawdziwą wielokąta, utworzonego przez proste powstałe z przecięcia się płaszczyzny danéj ze ścianami wielościanu danego. To położenie, kształt i wielkość przy jednym i tym samym wielościanie mogą być rozmaite, zależnie od położenia płaszczyzny przecinającéj względem niego. I tak, co się tyczé najprzód graniastosłupa, płaszczyzna przecinająca tenże, może być albo równoległą do krawędzi jego bocznych, a w takim razie przecina ona powierzchnią boczną graniastosłupa w prostych równoległych do tychże krawędzi bocznych, jakotéż przecina obie podstawy; albo może być równoległą do podstawy, a wtedy przecina wszystkie ściany boczne w prostych równoległych do odpowiednich boków podstawy i z przecięcia daje figurę przystającą do podstawy; albo téż płaszczyzna przecinająca może leżeć jakkolwiek, a wtedy przecina albo wszystkie ściany, albo tylko niektóre z nich i jednę podstawę, albo wreszcie niektóre ściany i obie podstawy. Odnośnie znów do płaszczyzn rzutów, płaszczyzna przecinająca może być albo równoległą do jednéj z nich, albo prostopadłą, lub wreszcie pochyloną do obu. W każdym z tych przypadków chcąc znaleść przecięcie graniastosłupa a ogólnie wielościanu płaszczyzną, albo szukamy prostych przecięcia się téj płaszczyzny ze ścianami wielościanu, i z tych prostych bierzemy tylko części zawarte między przynależnemi krawędziami, albo też krócéj, szukamy punktów przecięcia się krawędzi wielościanu z płaszczyzną daną, i takowe odpowiednio liniami prostemi ze sobą łączymy.

Zadanie 187. *Znaleść przecięcie graniastosłupa płaszczyzną prostopadłą do jednéj z płaszczyzn rzutów.*

Danym jest graniastosłup $ABCDEF...$ (Fig. **140**.) oparty podstawą na płaszczyznie poziomej rzutów, i płaszczyzna przecinająca P prostopadła do płaszczyzny pionowéj. Aby znaleść punkta przecięcia się téj płaszczyzny z krawędziami graniastosłupa, uważmy, że płaszczyzna P będąc prostopadłą do płaszczyzny pionowéj rzutów, jest zarazem rzucającą pionową wszystkich punktów i prostych na niéj leżących, a więc, że rzuty pionowe wszystkich punktów przecięcia się jéj z krawędziami graniastosłupa leżeć muszą na jéj śladzie pionowym p'; że zaś leżeć one muszą i na rzutach pionowych odpowiednich krawędzi, będą więc w punktach m', n', o', r', s', — tak, iż rzutem pionowym wielokąta przecięcia będzie prosta $m's'$. Aby znaleść rzut jego poziomy, szukamy rzutów poziomych powyższych punktów; leżeć one będą na rzutach poziomych przynależnych krawędzi, połączone zaś z sobą dadzą nam rzut poziomy przecięcia tj. pięciokąt $mnors$. Celem znalezienia wreszcie prawdziwéj wielkości i kształtu tego przecięcia, robimy kład poziomy lub pionowy płaszczyzny P sposobem wiadomym, a otrzymamy stąd na kładzie wielokąt $m''n''r''o''s''$.

Zadanie 188. *Znaleść przecięcie graniastosłupa płaszczyzną równoległą do jednéj z płaszczyzn rzutów.*

Ponieważ płaszczyzna przecinająca będąc równoległą do jednéj z płaszczyzn rzutów, jest tém samém prostopadłą do drugiéj, zadanie więc to zamienia się na poprzedzające.

Zadanie 189. *Znaleść przecięcie graniastosłupa* *płaszczyzną równoległą do jego krawędzi bocznych, a prostopadłą do płaszczyzny poziomej rzutów.*

Dany np. graniastosłup czworościenny $R'R$ (Fig. **141.**) wsparty jak z rzutów widoczna, wierzchołkiem A na płaszczyznie pozioméj rzutów, i dane p jako ślad poziomy płaszczyzny przecinającéj (zaś ślad p' jest domyślny i to prostopadły do osi rzutów według warunku zadania). Ponieważ płaszczyzna przecinająca jest prostopadłą do płaszczyzny poziomej rzutów, zatém rzut poziomy figury przecięcia będzie leżał na jéj śladzie poziomym, czyli będzie to prosta $klmn$, a mając rzut poziomy, łatwo znaleść pionowy tj. $k'l'm'n'$. Chcąc wreszcie znaleść prawdziwą wielkość i kształt tego przecięcia, robimy kład jego na płaszczyznę poziomą rzutów, biorąc p za oś kładu, a następnie krótko jak z figury widoczna, prowadząc np. z k prostopadłą do p, i na niéj odcinając $k''k=k'o$; podobnież postąpiwszy z punktami l,m,n, otrzymamy punkta l'', m'' i n'', które połączone w czworobok, dadzą nam żądaną figurę przecięcia.

Zadanie 190. *Znaleść przecięcie graniastosłupa płaszczyzną jakąkolwiek.*

Danym jest np. graniastosłup pięciościenny $ABCDEF$... (Fig. **142**), oparty podstawą swoją na płaszczyznie poziomej rzutów i płaszczyzna przecinająca P, pochyła względem obu płaszczyzn rzutów. Aby otrzymać w tym razie wielokąt przecięcia, szukamy punktów przecięcia się każdéj krawędzi graniastosłupa z płaszczyzną P (podług Zad. 166), a mianowicie, przez każdą krawędź przesuwamy płaszczyznę rzucającą pionową, szukamy prostéj przecięcia się téj płaszczyzny z płaszczyzną daną, a gdzie ta prosta przecina krawędź graniastosłupa, tam jest punkt do wzajemnego przecięcia krawędzi graniastosłupa z płaszczyzną daną należący. W ten sposób otrzymawszy punkt na każdéj krawędzi z osobna, i punkta te wreszcie tak na rzucie poziomym jak pionowym połączywszy prostemi w należytym porządku, otrzymamy rzuty figury przecięcia szukanego tj. $klmnr$, $k'l'm'n'r'$, skąd następnie, robiąc kład poziomy lub pionowy téj figury wraz z płaszczyzną P, na któréj ona leży, otrzymamy prawdziwy jéj kształt i wielkość.

Ponieważ konstrukcya w wyszukaniu przecięcia graniastosłupa najprostszą jest wtedy, gdy płaszczyzna przecinająca jest prostopadłą do jednéj z płaszczyzn rzutów, dlatego korzystną częstokroć jest rzeczą umieć każden inny przypadek na takowy sprowadzić. To osiągnąć można za pomocą stósownéj zmiany płaszczyzn rzutów, a mianowicie zmiany, mocą któréj płaszczyzna przecinająca graniastosłup, aczkolwiek nie ruszana ze swego danego położenia, stanie się prostopadłą do jednéj z płaszczyzn rzutów.

Dla objaśnienia rzeczy na przykładzie, poszukajmy przecięcia graniastosłupa czworościennego $K'K$ (Fig. **143**) płaszczyzną $p'p$. W tym celu nie zmieniając płaszczyzny pozioméj rzutów, przesuńmy gdziekolwiek płaszczyznę $s's$ prostopadłą do niéj i do płaszczyzny danéj P (ślady jéj zatem muszą być prostopadłe do ich wspólnego przecięcia, a więc do śladu poziomego p), i takową przyjmijmy za nową płaszczyznę pionową rzutów; skutkiem tego ślad s będzie nową osią rzutów, część płaszczyzny rysunkowéj, z lewéj strony téj nowéj osi leżąca, będzie poziomą, zaś z prawéj strony leżąca, będzie pionową płaszczyzną rzutów. Na płaszczyznie pozioméj rzutów zostaje, jak był, rzut graniastosłupa i ślad poziomy płaszczyzny P, ale naturalnie ten ostatni teraz sięga tylko do punktu w, tj. aż do punktu przecięcia się z nową osią rzutów; potrzebujemy więc mieć jeszcze wyznaczony rzut graniastosłupa i ślad płaszczyzny P na nowéj płaszczyznie rzutów.

Co się tyczé najprzód nowego śladu pionowego płaszczyzny P, ten znajdzie się według Zad. 135 tj. będzie nim prosta p''. Aby zaś znaleść nowy rzut pionowy graniastosłupa, dość uważyć, że odległość wierzchołków jego od płaszczyzny poziomėj rzutów, przez zmianę płaszczyzny pionowéj zupełnie się nie zmieniła, a więc, że odległość rzutu pionowego każdego z nich od nowéj osi rzutów, będzie taka sama, jaką była względem dawnéj osi, i każden z nich leżeć musi na prostopadłéj do nowéj osi z jego rzutu poziomego wyprowadzonéj. Na prostopadłych zatem z punktów a, b, c... do osi s wyprowadzonych, odciąwszy długości równe odpowiednim odległościom punktów a', b', c'.... od dawnéj osi rzutów, znajdziemy nowe rzuty wierzchołków graniastosłupa, tj. punkta a_1, b_1, c_1...., które połączywszy ze sobą należycie prostemi, otrzymamy rzut K_1 graniastosłupa na nowéj płaszczyznie rzutów.

To mając, łatwo teraz znajdziemy żądane przecięcie, a mianowicie, biorąc pod uwagę rzuty K i K_1 graniastosłupa jako też płaszczyznę pp_1, która teraz jest rzucającą względem nowéj płaszczyzny rzutów, otrzymamy (według Zad. 187) najprzód rzuty $m_1n_1o_1r_1$ i $mnor$ tegoż przecięcia, z pomocą zaś tego ostatniego znajdziemy następnie rzut pionowy $m'n'o'r'$ — a jeżeli rysunek dobry, to odległości punktów m',n',o',r' od osi głównéj, muszą wypaść równe odległościom punktów m_1,n_1,o_1,r_1 od osi s.

Zadanie 191. *Znaleść punkta przecięcia się graniastosłupa z prostą daną.*

Przez prostą daną przesuwamy płaszczyznę jakąkolwiek, lub co najkorzystniéj, prostopadłą do jednéj z płaszczyzn rzutów, i szukamy przecięcia się téj płaszczyzny z graniastosłupem danym (Zad. 187), a punkta, w których prosta dana spotyka się z tak otrzymanym wielokątem przecięcia, będą punktami szukanymi.

Zadanie 192. Znaleść przecięcie graniastosłupa płaszczyzną prostopadłą do jego krawędzi bocznych, i przecięcie to przenieść na siatkę graniastosłupa.

Zadanie 193. Znaleść przecięcie graniastosłupa płaszczyzną którąby przecinała trzy jego krawędzie boczne w punktach danych

Zadanie 194. Dany graniastosłup przeciąć płaszczyzną tak, aby jedna z krawędzi jego bocznych podzieloną została pod kątem prostym na dwie równe połowy.

To, cośmy dotychczas o sposobach znalezienia przecięcia graniastosłupa płaszczyzną lub linią prostą powiedzieli, da się w zupełności zastosować i do ostrosłupów. Płaszczyzna przecinająca ostrosłup może mieć najrozmaitsze względem niego położenie, od którego zależy kształt i wielkość wielokąta przecięcia. I tak, płaszczyzna może być równoległą do podstawy ostrosłupa, a w takim razie przecina wszystkie krawędzie jego boczne, i z przecięcia daje figurę podobną do podstawy; może być prostopadłą do podstawy, a wtedy przecina niektóre krawędzie i podstawę, albo też przechodząc zarazem przez wierzchołek ostrosłupa, przecina tylko dwie krawędzie w podstawie i daje z przecięcia dwie proste przez wierzchołek ostrosłupa idące, a z podstawą jego się przecinające, itp. W każdym z tych przypadków szukamy tak, jak i przy graniastosłupie, punktów przecięcia się płaszczyzny z każdą z krawędzi przeciętych, i punkta tak otrzymane łączymy z sobą, lub téż wyznaczamy ślady ścian przeciętych, i szukamy przecięć każdéj tak otrzymanéj płaszczyzny z płaszczyzną daną.

Zadanie 195. *Znaleść przecięcie ostrosłupa płaszczyzną prostopadłą do jednéj z płaszczyzn rzutów.*

Dany np. ostrosłup prosty $ABC...S$ (Fig. **144**), stojący podstawą na płaszczyznie pioméj rzutów, i dana płaszczyzna przecinająca P, prostopadła do płaszczyzny pionowéj rzutów. Ponieważ płaszczyzna ta jest rzucającą pionową, zatem rzuty pionowe punktów przecięcia się jéj z krawędziami ostrosłupa leżeć będą na jéj śladzie pionowym; a że leżeć muszą i na rzutach pionowych tychże krawędzi, zatem będą w punktach m', n', o', r', t', x' — czyli rzutem pionowym wielokąta przecięcia będzie prosta $m'x'$. Mając rzuty pionowe tych punktów, znajdziemy również łatwo ich rzuty poziome, a stąd otrzymamy następnie rzut poziomy figury przecięcia tj. sześciokąt $nmotxr$, który tylko potrzeba wreszcie znanym sposobem otrzymać w prawdziwéj wielkości, a jak w tym przypadku, najkróćéj za pomocą kładu pionowego.

Zadanie 196. Znaleść przecięcie ostrosłupa prostego lub ukośnego płaszczyzną prostopadłą do płaszczyzny pionowéj rzutów, a przechodzącą przez wierzchołek ostrosłupa.

Zadanie 197. Znaleść przecięcie ostrosłupa jakiegokolwiek, wspartego jedną krawędzią swéj podstawy na płaszczyznie pozioméj rzutów, z płaszczyzną pochyłą względem obu płaszczyzn rzutów.

Zadanie 198. Znaleść przecięcie ostrosłupa jakiegokolwiek, wspartego jednym wierzchołkiem swéj podstawy na płaszczyznie poziomej rzutów, z płaszczyzną jakąkolwiek, za pomocą zmiany płaszczyzn rzutów.

Zadanie 199. Znaleść przecięcie ostrosłupa płaszczyzną równoległą do jego podstawy, i przecięcie to przenieść na siatkę ostrosłupa.

Zadanie 200. Znaleść przecięcie ostrosłupa prostego płaszczyzną równoległą do jego osi.

Zadanie 201. Znaleść przecięcie ostrosłupa płaszczyzną, którąby trzy krawędzie jego boczne przecinała w odległościach danych od wierzchołka, i przecięcie to przenieść na siatkę ostrosłupa.

§. 24.

Przecięcia wzajemne wielościanów.

W poprzedzającym §. widzieliśmy, że przecinając wielościan płaszczyzną, otrzymujemy z przecięcia wielokąt płaski na téjże płaszczyznie leżący; inaczéj rzecz się ma, gdy dwa wielościany wzajem się z sobą przecinają, wtedy bowiem otrzymujemy z przecięcia wprawdzie figurę prostokreślną, zwykle atoli wierzchołki jéj, a więc i boki leżą na różnych płaszczyznach czyli ścianach, jeden lub drugi wielościan otaczających. Różne mogą być sposoby znalezienia takowego przecięcia, a od korzystnego obrania w danym razie któregoś z nich, zależy mniéj lub więcéj łatwe wykonanie jego konstrukcyi. Do sposobów tych należą następujące: 1) albo szukamy punktów, w których krawędzie jednego wielościanu przecinają się ze ścianami drugiego i nawzajem, a następnie należycie łączymy te punkta ze sobą; albo téż 2) szukamy prostych, w których ściany jednego przecinają się ze ścianami drugiego wielościanu, i z tych prostych bierzemy te ich części, które leżą w granicach przecinających się ścian obu wielościanów; albo wreszcie 3) przecinamy oba wielościany szeregiem płaszczyzn pomocniczych równoległych do siebie, a otrzymamy stąd na każdéj płaszczyznie przecinającéj dwa wielokąty (będące przecięciami wielościanów tąż płaszczyzną), które przecinając się wzajem, dadzą nam punkta do szukanego przecięcia obu wielościanów należące. Ostatni ten sposób jest wielce korzystny i prędko do celu prowadzący, baczyć tylko należy, aby przez stósowne obranie kierunku płaszczyzn pomocniczych, unikać o ile możności wprowadzania w rysunek wielu linij, przez które tenże tylko na wyrazistości a więc i dokładności swojéj traci. Przykłady tego zobaczymy w następujących zadaniach:

Zadanie 202. *Znaleść przecięcie dwóch graniastosłupów, stojących podstawami swemi na płaszczyznie pozioméj rzutów.*

Wiemy, że przecinając graniastosłup płaszczyzną równoległą do jego krawędzi bocznych, otrzymujemy z przecięcia proste równoległe do tychże krawędzi, a na powierzchni graniastosłupa leżące; przeciąwszy zatem oba graniastosłupy płaszczyzną równoległą współcześnie do krawędzi jednego i drugiego z nich, otrzymamy takie proste z osobna na każdym graniastosłupie. Proste te wzajem przecinać się muszą, tj. prosta leżąca na jednym graniastosłupie przetnie się z prostą na drugim graniastosłupie leżącą, a otrzymaną z przecięcia jedną i tą samą płaszczyzną, — równoległe bowiem do siebie być nie mogą, gdyż wtedy i krawędzie boczne obu graniastosłupów, a więc i sameż graniastosłupy musiałyby być wzajem do siebie równoległe, co się sprzeciwia założeniu. Punkta nareszcie, w których te proste przecinają się z sobą, są punktami należącymi do szukanego przecięcia, albowiem leżąc równocześnie na dwóch prostych, z których każda leży na innym graniastosłupie, leżą tém samém na wspólném przecięciu się graniastosłupów danych.

Aby więc znaleść figurę przecięcia się dwóch graniastosłupów danych np. $R'R$ i $S'S$ (Fig. **145**), postępujemy w sposób następujący: 1) Obieramy gdziekolwiek punkt $m'm$; 2) przezeń prowadzimy dwie proste, z których jedna jest równoległą do krawędzi bocznéj jednego, druga równoległą do krawędzi drugiego graniastosłupa; 3) przez te dwie proste przesuwamy płaszczyznę P (jéj ślad poziomy p wystarczy), a ta będzie równoległą do obu graniastosłupów danych; 4) przez wierzchołki śladów poziomych obu graniastosłupów, a równolegle do śladu poziomego tak znalezionéj płaszczyzny P prowadzimy ślady poziome płaszczyzn pomocniczych $p_1, p_2, p_3 \dots$, przecinających oba graniastosłupy, i szukamy rzutów prostych przecięcia, — a punkta przecięć się ich rzutów poziomych ze sobą będą należeć do poziomego, zaś punkta przecięć się ich rzutów pionowych, do pionowego rzutu szukanéj figury przecięcia obu graniastosłupów. I tak np. płaszczyzna pomocnicza P_1, któréj śladem poziomym jest prosta p_1 przez a równolegle do p poprowadzona, przetnie graniastosłup $R'R$ w prostéj $ax,a'x'$, zaś graniastosłup $S'S$ w dwóch prostych tj. $nz,n'z'$ i $my,m'y'$; prosta $ax,a'x'$ z prostemi $nz,n'z'$ i $my,m'y'$ przecina się w punktach $1'1$ i $2'2$, które należą do linii szukanego przecięcia. 5) Z pomocą płaszczyzn pomocniczych otrzymawszy dostateczną liczbę takich punktów, łączymy je wreszcie ze sobą w należytym porządku.

Uwaga 1. Dwa graniastosłupy mogą się przecinać wzajem w dwojaki sposób, a mianowicie, albo jeden z nich przechodzi na wskróś przez wnętrze drugiego, albo téż jeden z nich swoją powierzchnią odcina część powierzchni drugiego graniastosłupa. W pierwszym razie mówimy, że przecięcie jest całkowitém, w drugim zaś częściowém. Przecięcie całkowite składa się z dwóch odrębnych figur, tj. z figury wejścia i wyjścia, częściowe zaś tylko z jednéj. Aby zaś mając dane dwa graniastosłupy, naprzód ocenić, czy przecięcie ich jest całkowitém czy częściowém, dość jest przez najdaléj i najbliżéj od osi rzutów leżący wierzchołek poziomego śladu jednego z graniastosłupów danych, a więc np. przez *a* i *c*, przeprowadzić proste równoległe do śladu poziomego płaszczyzny P i zobaczyć, czy obiema temi prostemi ślad poziomy drugiego graniastosłupa jest przeciętym, czy téż tylko jedną z nich. W pierwszym razie otrzymamy dwa wielokąty przecięcia się obu graniastosłupów, w drugim zaś tylko jeden.

Uwaga 2. Aby ocenić, która część znalezionego przecięcia jest widoczną lub niewidoczną na każdym z rzutów, potrzeba wyznaczyć, które z punktów znalezionych a do tego przecięcia należących, są widoczne lub nie. W tym celu zaś dość zauważyć, że jeżeli punkt leży na przecięciu się dwóch prostych widocznych, w takim razie i on sam jest widoczny, jeżeli zaś leży na dwóch prostych, z których przynajmniéj jedna jest niewidoczną, wtedy i on jest niewidocznym.

Uwaga 3. Co się tyczé tego, iżby znalezione punkta należycie ze sobą połączyć, uważyć trzeba, że tylko takie dwa punkta ze sobą łączyć można, które leżą na téj saméj ścianie jednego, i na téj saméj ścianie drugiego graniastosłupa. I tak np. mówiąc tylko o rzucie poziomym, ponieważ punkta *2* i *6* leżą oba na ścianie *ef*, (tj. na ścianie bocznéj przylegającéj do boku *ef* podstawy) w graniastosłupie *S*, i leżą oba na ścianie *ab* graniastosłupa *R*, zatem prosta *26* jest prostą przecięcia się ściany *ef* jednego, ze ścianą *ab* drugiego graniastosłupa; daléj, ponieważ punkta *2* i *3* leżą na ścianie *ef* graniastosłupa *S*, zaś na ścianie *ad* graniastosłupa *R*, zatem znów prosta *23* jest prostą przecięcia się ścian *ef* i *ad* obu tych graniastosłupów itp.

Zadanie 203. *Znaleść przecięcie dwóch ostrosłupów, wspartych podstawami swemi na płaszczyznie pozioméj rzutów.*

Ponieważ każda płaszczyzna przesunięta przez wierzchołek ostrosłupa, a przecinająca jego powierzchnią, daje z przecięcia dwie proste przez tenże wierzchołek idące, poprowadziwszy więc prostą łączącą wierzchołki obu ostrosłupów i przez tę prostą przesunąwszy płaszczyznę przecinającą oba ostrosłupy, otrzymamy z przecięcia takież proste z osobna na każdym z ostrosłupów danych. Proste te przecinać się wzajem będą, a mianowicie, prosta na jednym ostrosłupie leżąca, przetnie prostą na drugim ostrosłupie i na téjże saméj płaszczyznie przecinającéj leżącą, punkta zaś tych przecięć leżąc w ten sposób równocześnie na powierzchniach obu ostrosłupów, będą punktami do szukanego przecięcia należącymi, potrzeba je tylko wreszcie połączyć ze sobą w należytym porządku.

A więc, mając dane dwa ostrosłupy $O'O$ i $S'S$ (Fig. **146**), łączymy ich wierzchołki prostą $mf,m'f'$ i przez nią, jakotéż przez krawędzie boczne danych ostrosłupów przesuwamy płaszczyzny pomocnicze P_1, P_2, P_3..., przecinające równocześnie oba ostrosłupy (ślady poziome p_1,p_2,p_3... tych płaszczyzn wystarczą, a przechodzą one przez wierzchołki rzutów poziomych obu podstaw i są równoległe do mf, gdyż prosta $m'f'$,mf jest u nas równoległą do płaszczyzny pozioméj rzutów). I tak np. płaszczyzna P_1 przesunięta przez prostą $mf,m'f'$ i przez krawędź $mh,m'h'$ ostrosłupa $O'O$, a któréj śladem poziomym będzie prosta p_1 przez h równolegle do mf poprowadzona, przetnie tenże ostrosłup w prostéj $mh,m'h'$, zaś ostrosłup $S'S$ w prostych $nf,n'f'$ i $rf,r'f'$; te dwie ostatnie proste z prostą $mh,m'h'$ przetną się następnie w punktach $2'2$ i $3'3$, które są punktami do szukanego przecięcia należącymi. W ten sam sposób, tj. prowadząc ślady poziome p_2,p_3... płaszczyzn pomocniczych, znajdziemy więcéj takich punktów, które połączone ze sobą należycie, dadzą nam jedenastokąt jako przecięcie szukane.

Co się tyczé ocenienia, które części znalezionego wielokąta przecięcia są widoczne, a które nie, daléj, czy przecięcie tych dwóch ostrosłupów jest całkowitém lub częściowém, a wreszcie, w jaki sposób znalezione punkta, a do przecięcia należące, łączyć ze sobą potrzeba,—do tego wszystkiego stosują się uwagi 1, 2 i 3 podane w zadaniu poprzedzającém.

Zadanie 204. *Znaleść przecięcie graniastosłupa z ostrosłupem, wspartych podstawami swemi na płaszczyznie pozioméj rzutów.*

Danym jest graniastosłup $O'O$ i ostrosłup $Z'Z$ (Fig. **147**) Aby znaleść wzajemne ich przecięcie, przez wierzchołek ostrosłupa prowadzimy prostą równoległą do krawędzi bocznych graniastosłupa, a następnie przez tę prostą przesuwamy płaszczyzny pomocnicze, przecinające oba wielościany dane; każda z tych płaszczyzn przetnie ostrosłup w prostych przechodzących przez jego wierzchołek, zaś graniastosłup w prostych równoległych do krawędzi jego bocznych. Proste na ostrosłupie leżące, przecinać się będą z prostemi na graniastosłupie, a na jednéj i téj saméj płaszczyznie przecinającéj leżącemi, w punktach, które należą do szukanego przecięcia.

A więc, przez wierzchołek $s's$ ostrosłupa danego poprowadziwszy najprzód prostą $sm,s'm'$ równoległą do kierunku graniastosłupa, następnie przez ślad poziomy téj prostéj, jakotéż przez wierzchołek c podstawy ostrosłupa, poprowadziwszy ślad poziomy p (a ten wystarczy) płaszczyzny przecinającéj P, ta przetnie ostrosłup w prostéj $cs,c's'$, zaś graniastosłup w dwóch prostych $kx,k'x'$ i $ly,l'y'$, któreto dwie ostatnie proste z prostą $cs,c's'$ przetną się w punktach $1'1$ i $2'2$, do szukanego przecięcia należących. Prowadząc następnie przez ślad poziomy prostéj $sm,s'm'$, jakotéż przez resztę wierzchołków tak ostrosłupa jak graniastosłupa, ślady poziome płaszczyzn przecinających $P', P_2, P_3 \ldots$, otrzymamy stąd więcéj takich punktów, które należycie połączone ze sobą, dadzą nam przecięcie szukane, złożone z dwóch wielokątów.

Co się tyczé należytego łączenia poszczególnych punktów przecięcia ze sobą, ich widoczności, a wreszcie, czy utworzą one jeden, czy dwa wielokąty przecięcia, do tego służą znów uwagi 1, 2 i 3 podane w zadaniu 202.

Zadanie 205. *Znaleść przecięcie dwóch graniastosłupów, dwóch ostrosłupów, lub wreszcie graniastosłupa z ostrosłupem, jeżeli podstawy ich nie leżą na żadnéj z płaszczyzn rzutów.*

Szukamy śladów np. poziomych obu przecinających się wielościanów, i ślady te przyjmując chwilowo za ich podstawy, postępujemy następnie według jednego z trzech zadań powyższych.

Zadanie 206. *Znaleść przecięcie dwóch graniastosłupów, jeżeli krawędzie boczne jednego są prostopadłe do płaszczyzny pozioméj rzutów, drugiego zaś są pod kątem 30^0 względem pozioméj, a równoległe względem pionowéj płaszczyzny rzutów.*

Przecinamy oba graniastosłupy płaszczyznami równoległemi do płaszczyzny pionowéj rzutów, prowadząc ślady poziome tychże przez rzuty poziome wierzchołków ich podstaw.

Zadanie 207. Znaleść przecięcie dwóch graniastosłupów foremnych prostych, jeżeli ich krawędzie boczne wzajem są do siebie równoległe.

Zadanie 208. Znaleść przecięcie dwóch graniastosłupów prostych, z których podstawa jednego leży na płaszczyznie pozioméj rzutów, drugiego zaś na pionowéj, — i figurę przecięcia przenieść na siatki obu graniastosłupów.

Zadanie 209. Znaleść przecięcie dwóch ostrosłupów, z których podstawa jednego leży na płaszczyznie poziomėj rzutów, drugiego zaś na płaszczyznie prostopadłéj do płaszczyzny poziomėj rzutów.

Zadanie 210. Znaleść przecięcie dwóch ostrosłupów prostych, jeżeli ich osie przecinają się pod kątem prostym.

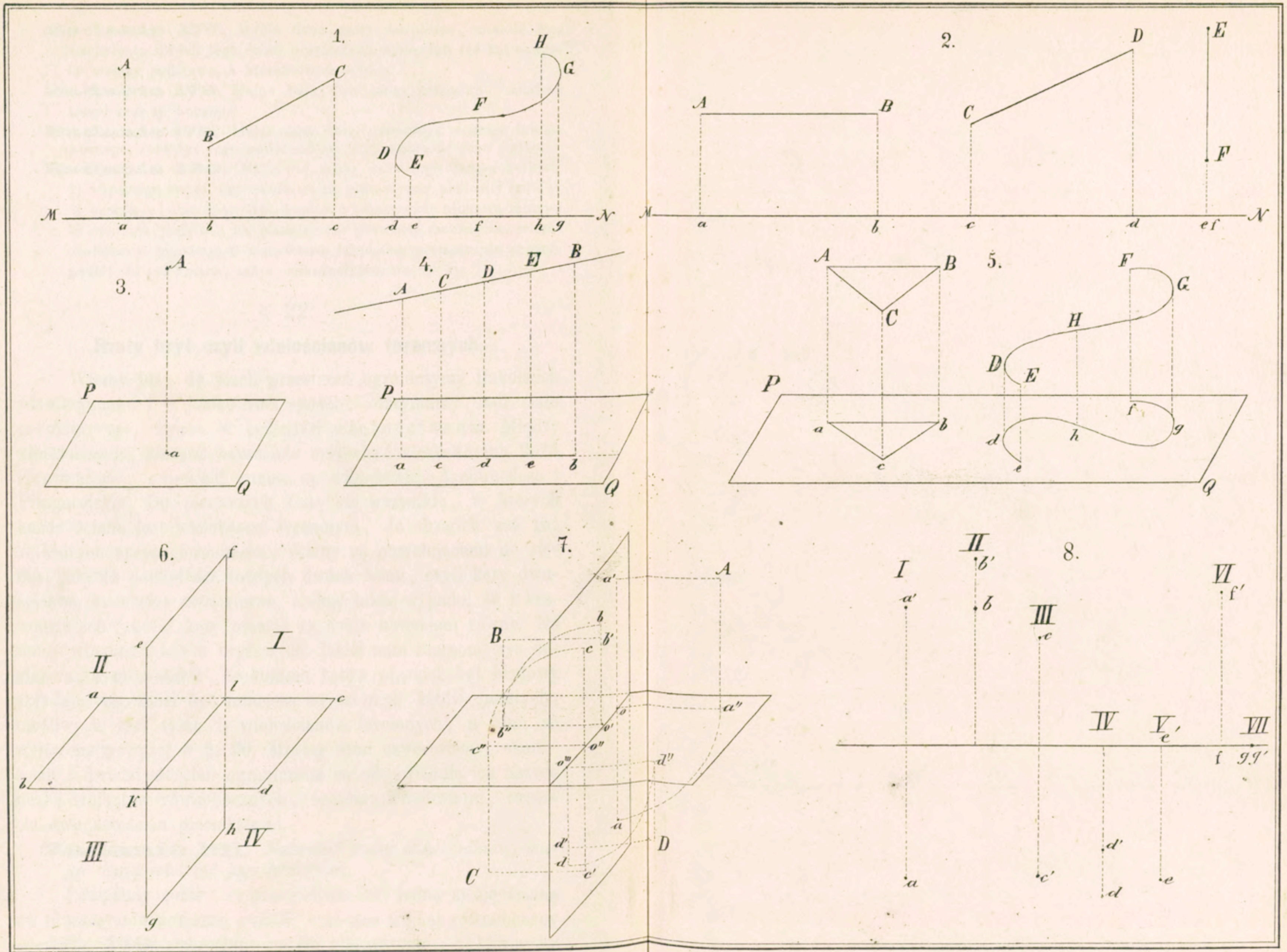
Zadanie 211. Znaleść przecięcie dwóch ostrosłupów prostych, jeżeli ich osie stoją do siebie równolegle, i figurę przecięcia przenieść na siatkę obu ostrosłupów.

Zadanie 212. Znaleść trzy rzuty przecięcia dwóch ostrosłupów, jeżeli podstawa jednego leży na płaszczyznie poziomėj rzutów a wierzchołek na pionowéj, drugiego zaś podstawa leży na pionowéj a wierzchołek na poziomej płaszczyznie rzutów.

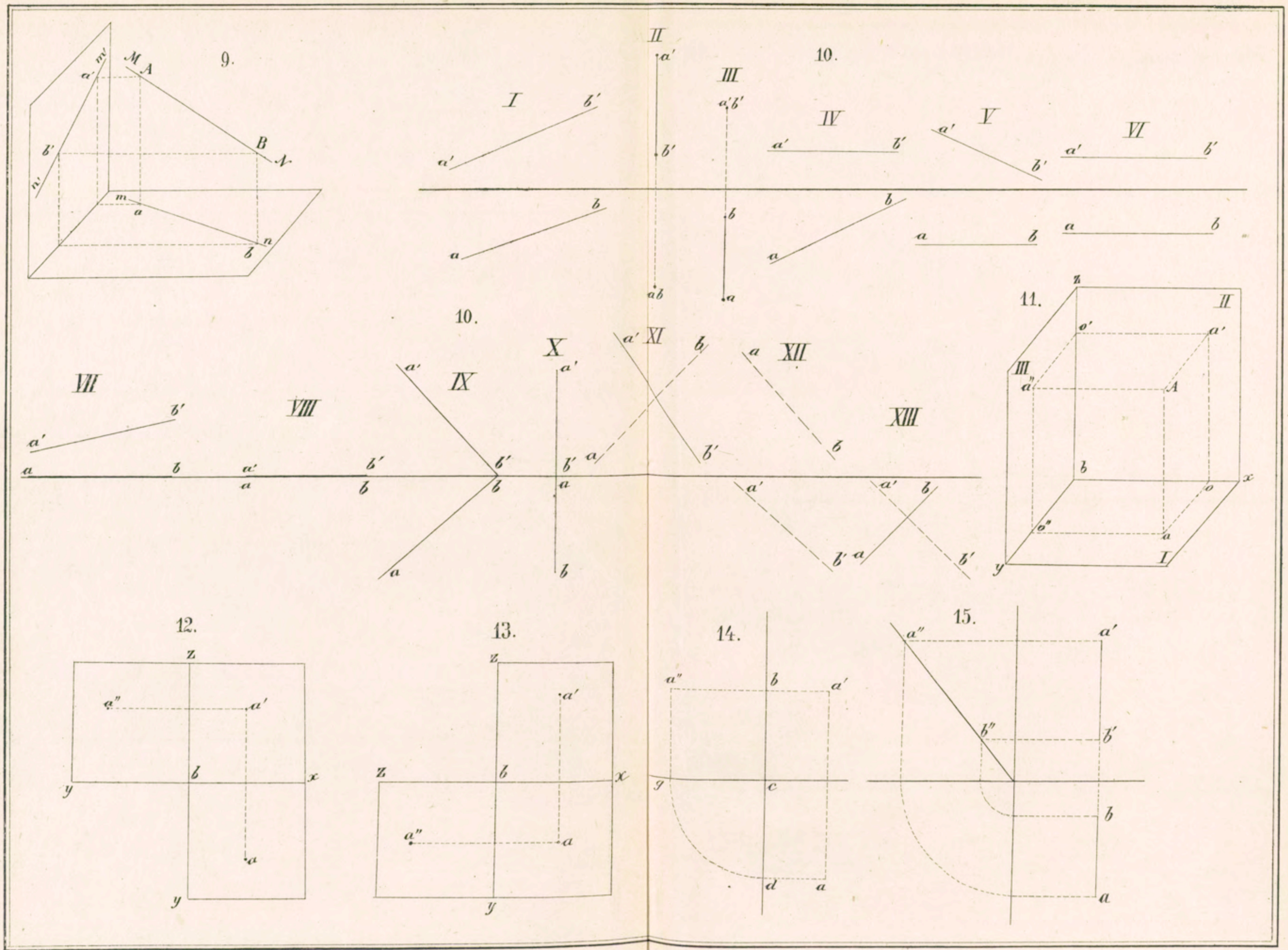
Zadanie 213. Znaleść przecięcie dwóch ostrosłupów prostych, jeżeli jeden z nich wsparty jest podstawą a drugi wierzchołkiem na płaszczyznie pozioméj rzutów, osie ich zaś obu padają na siebie.

Zadanie 214. Znaleść przecięcie równoległościanu prostego z ostrosłupem prostym, jeżeli oś ostrosłupa schodzi się z linią łączącą środki geometryczne obu podstaw równoległościanu.

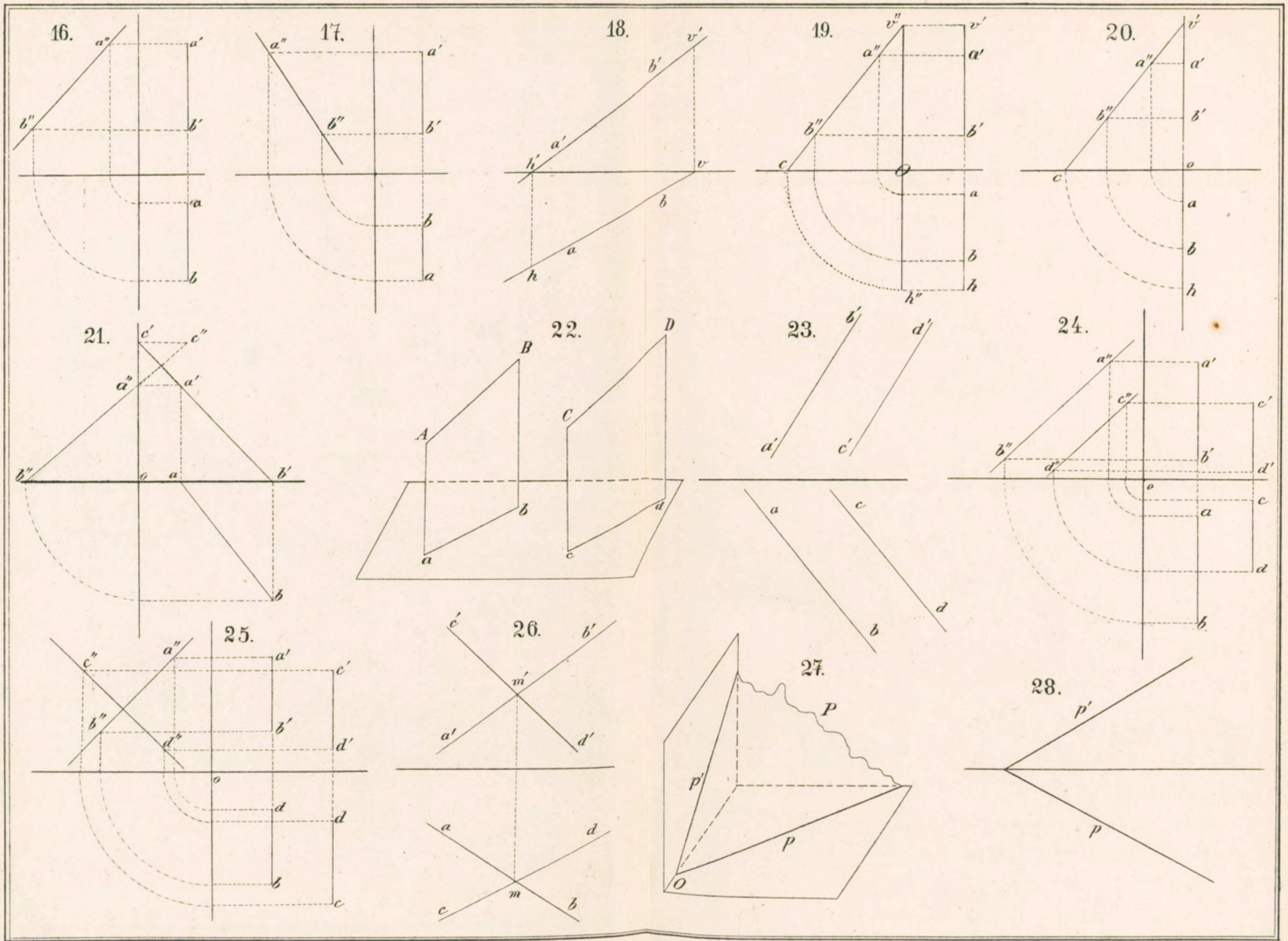
KONIEC CZĘŚCI PIERWSZÈJ.



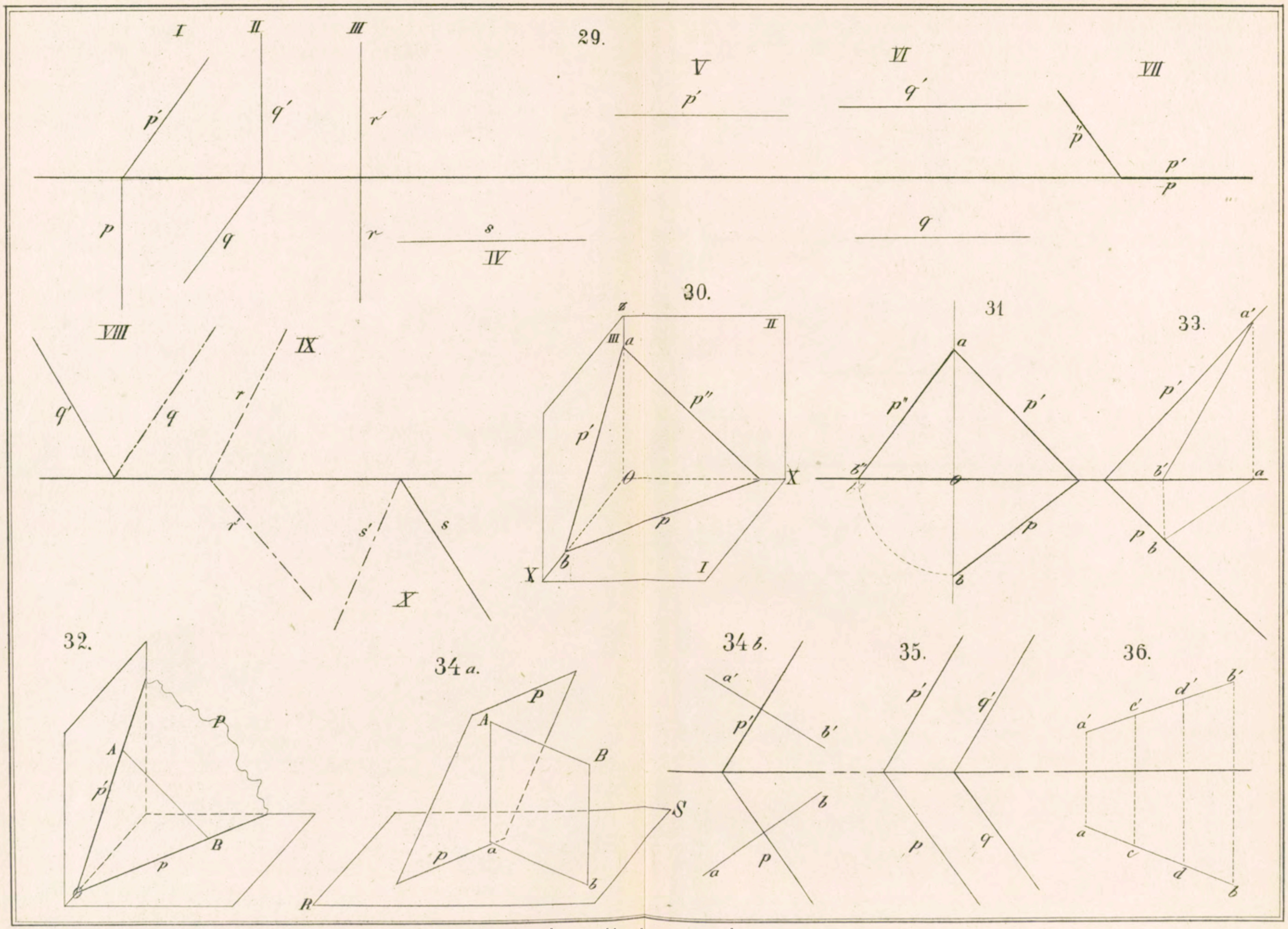
Lit. A. Pruszyński w Krakowie.



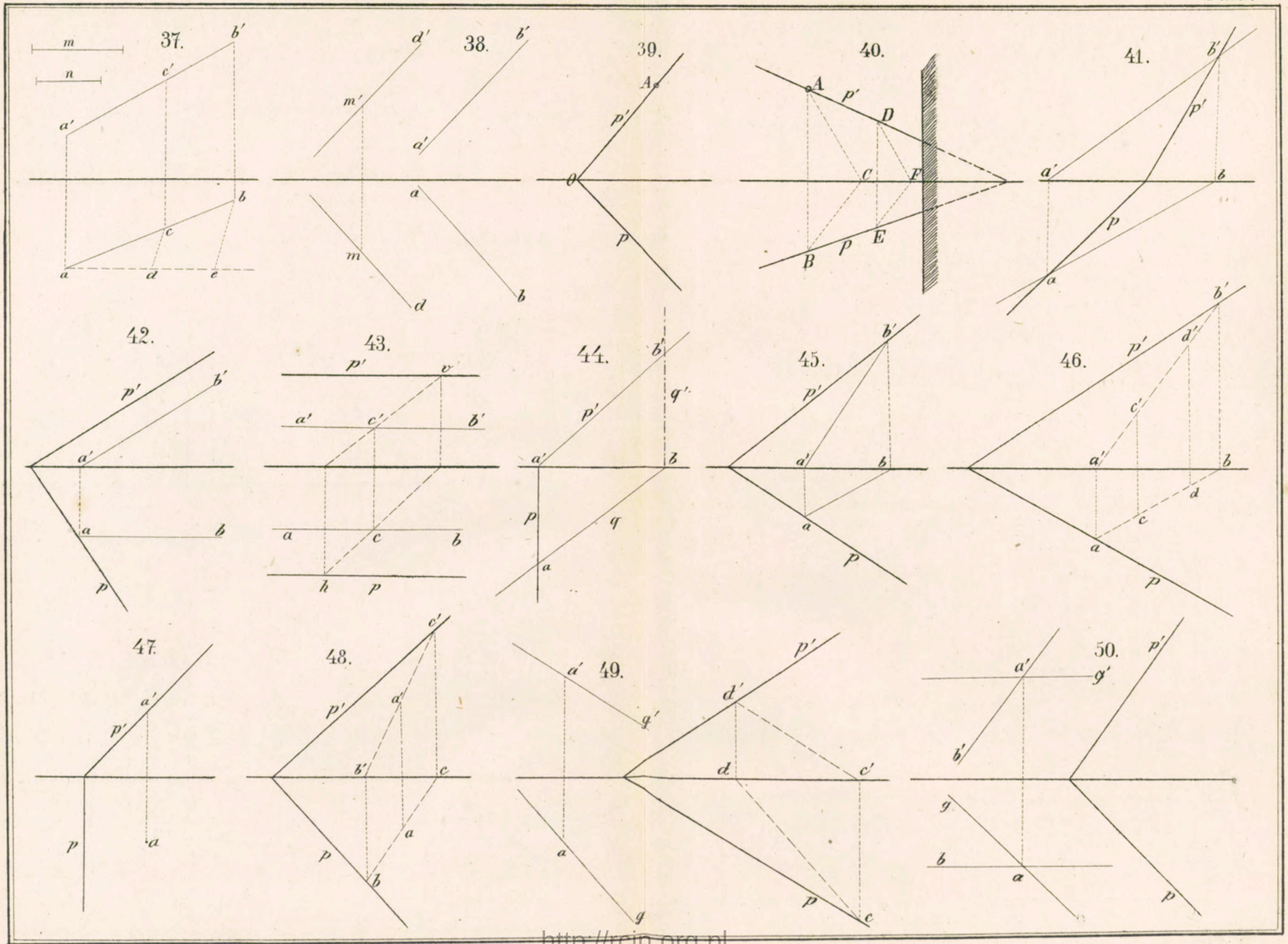
Lit. A. Pruszyński w Krakowie.



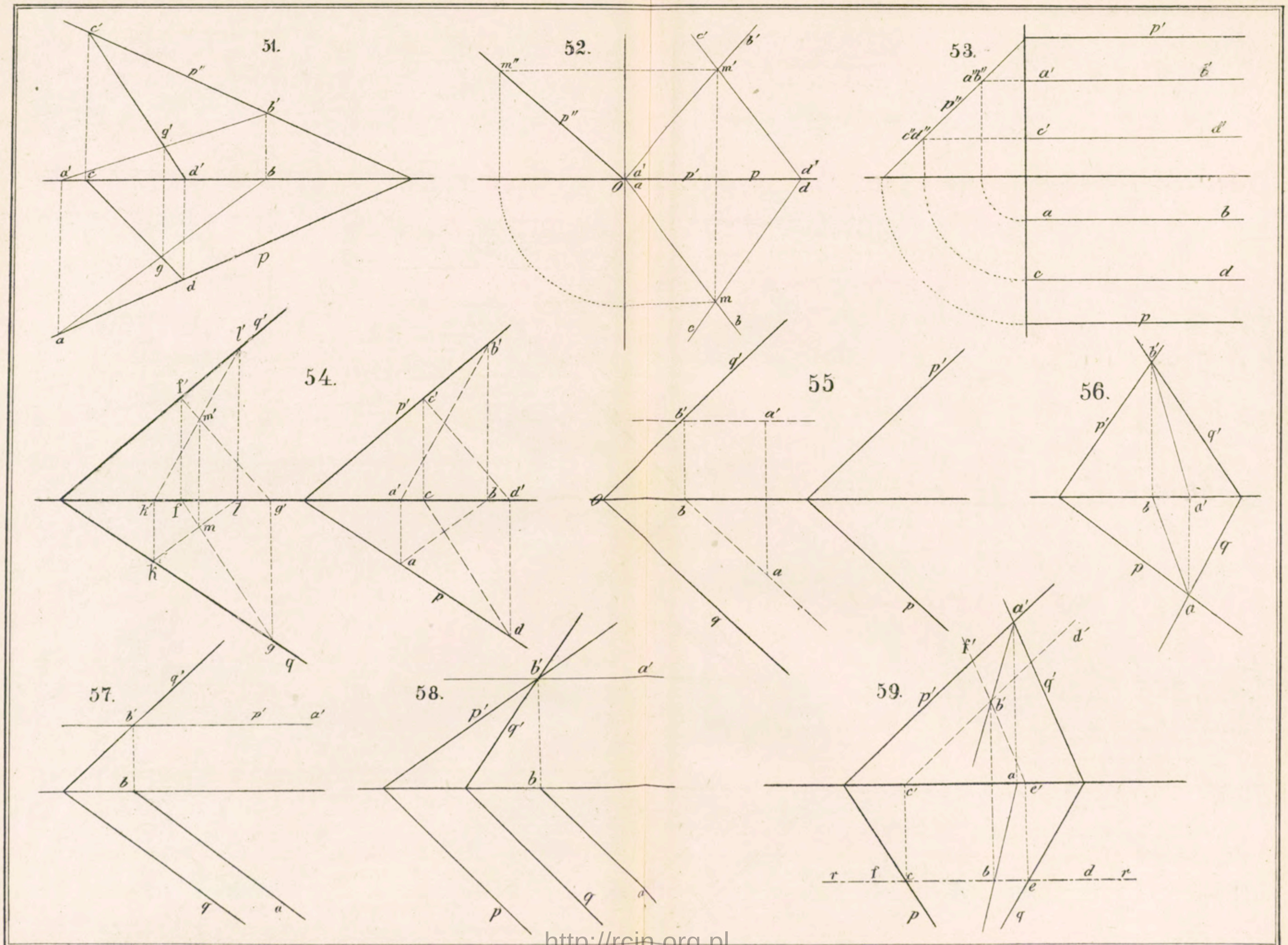
Lit. A. Pruszyński w Krakowie.



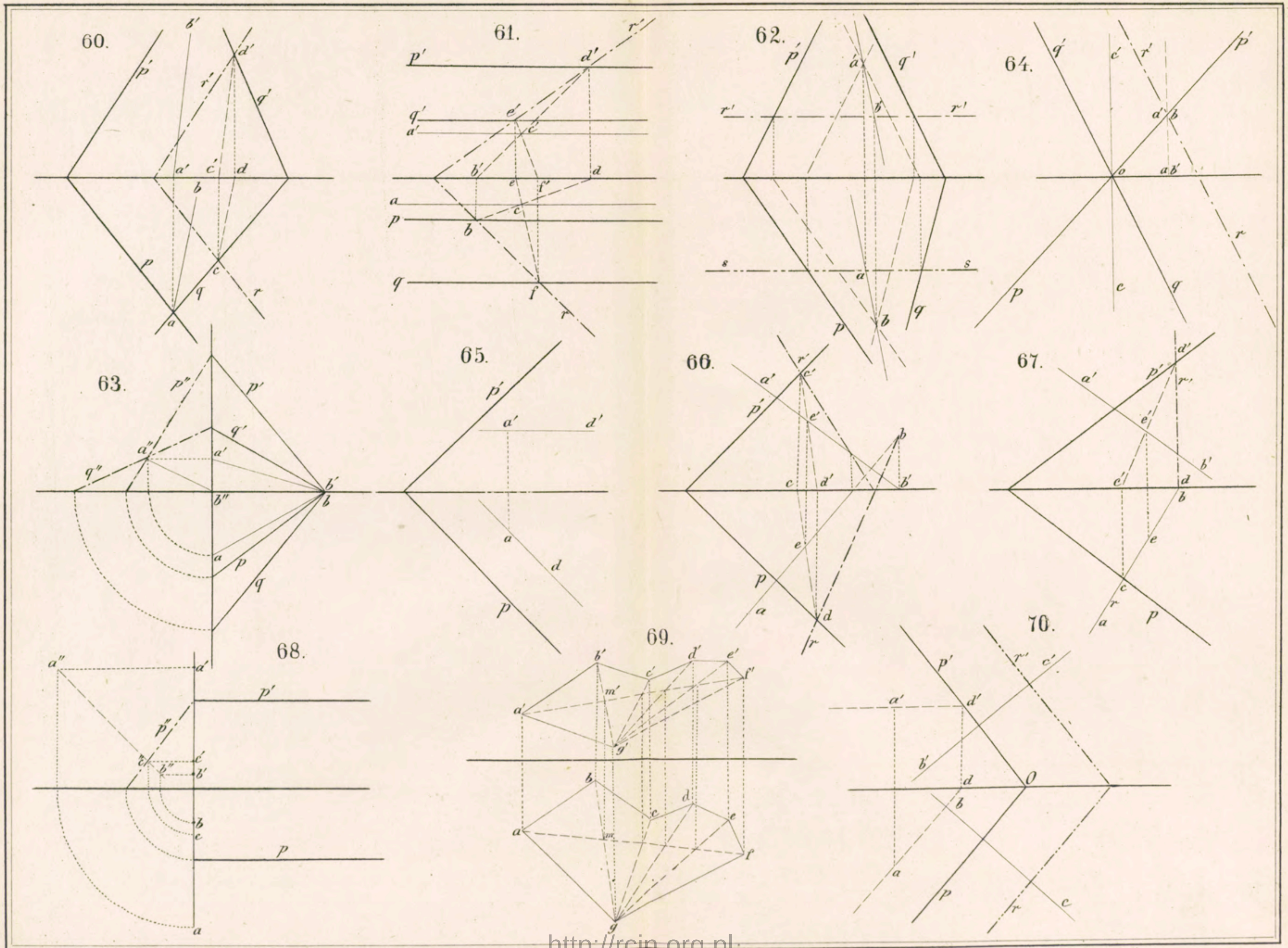
Lit. A. Pruszyński w Krakowie.



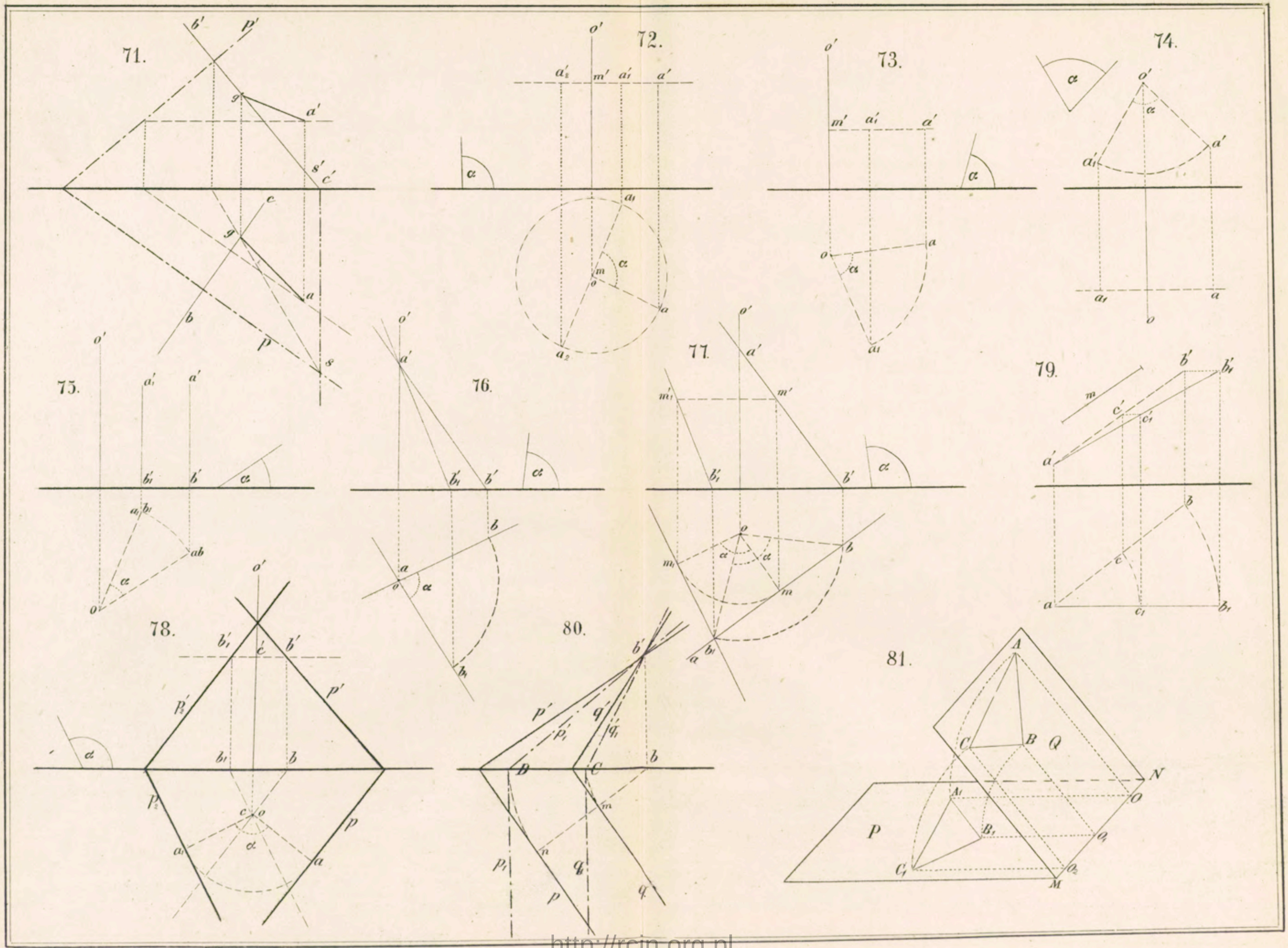
Lit. A. Pruszyński w Krakowie



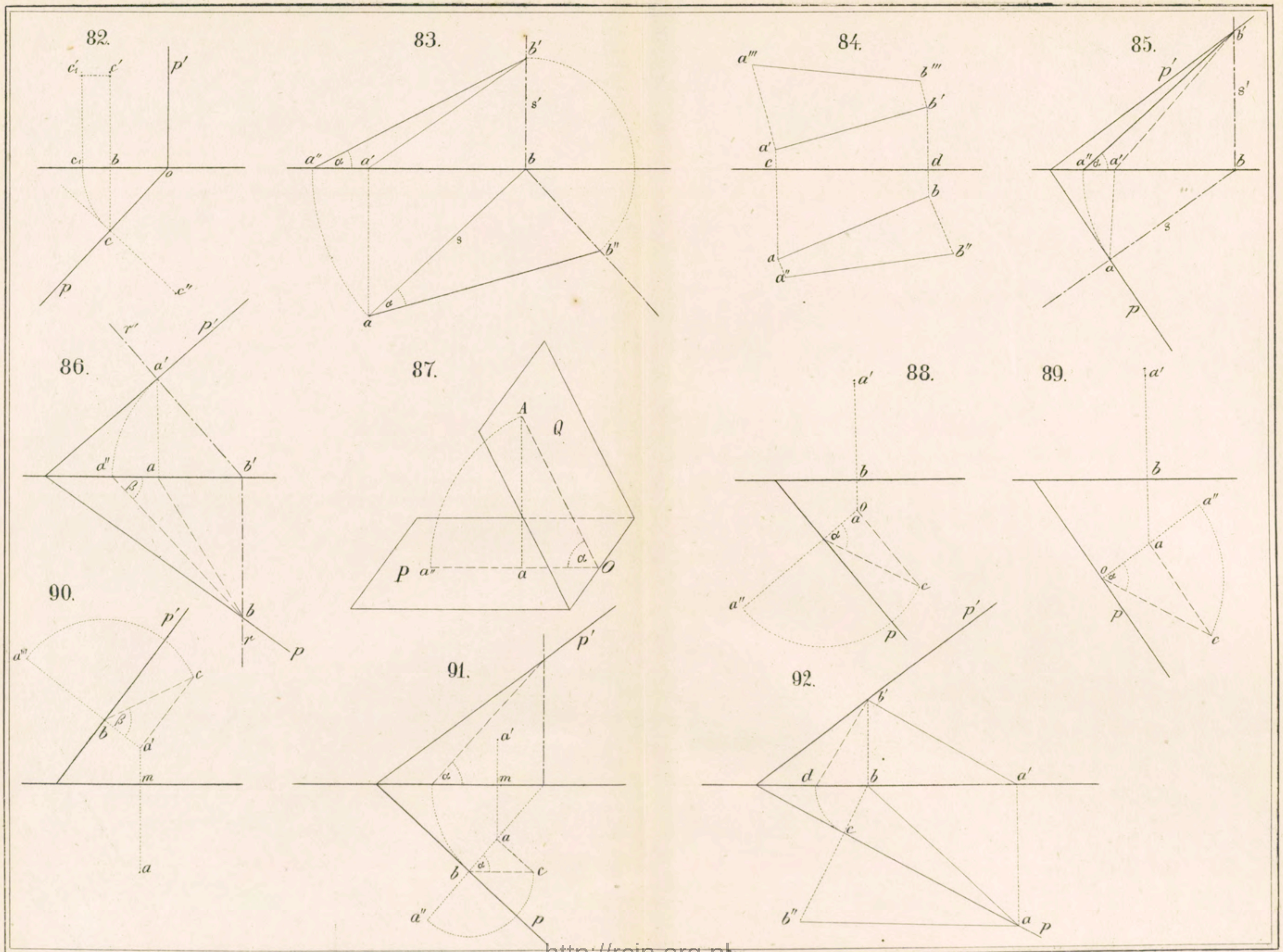
Lit. A. Pruszyński w Krakowie



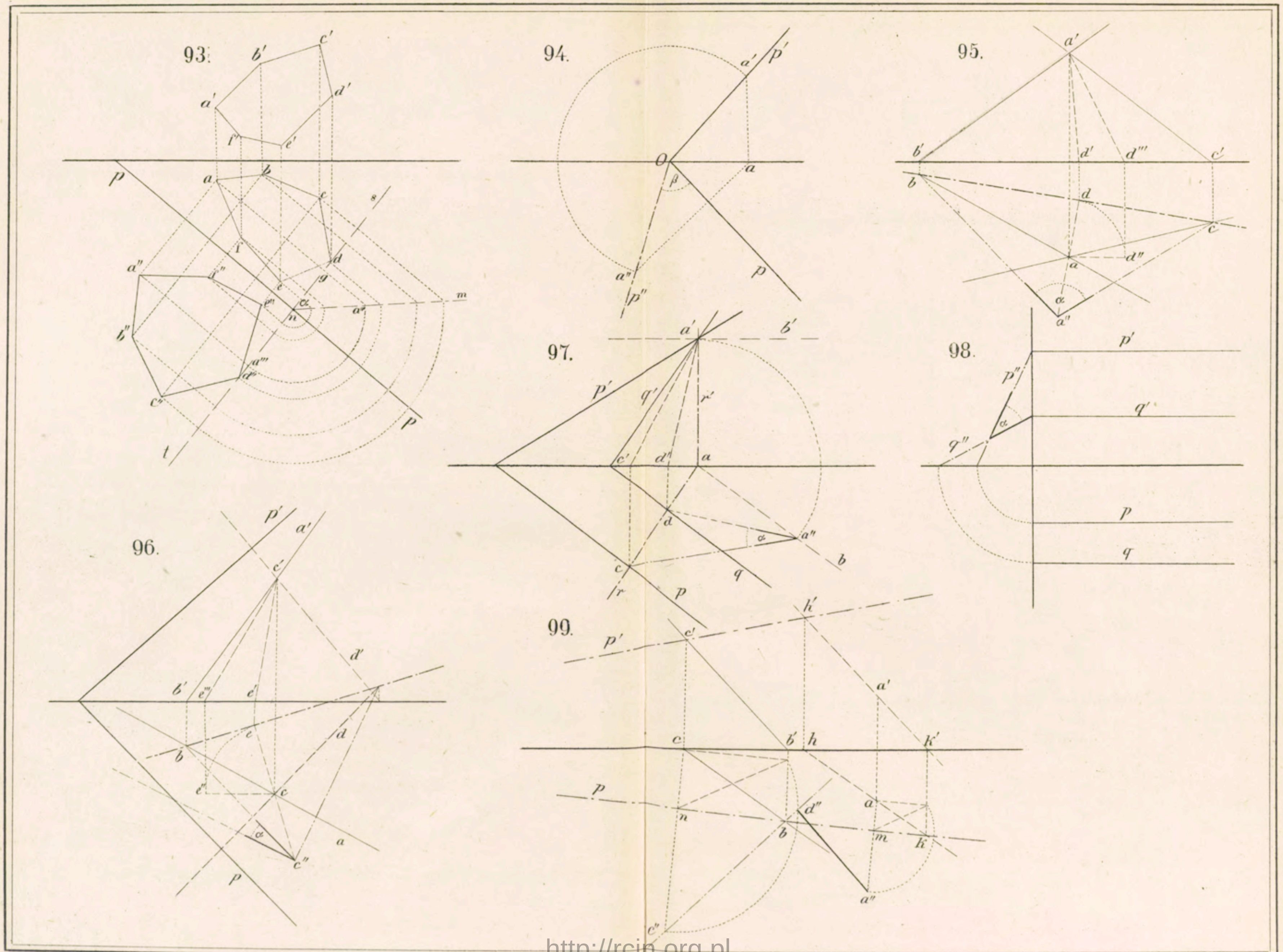
Lit. A. Pruszyński w Krakowie.



Lit. A. Pruszyński w Krakowie.

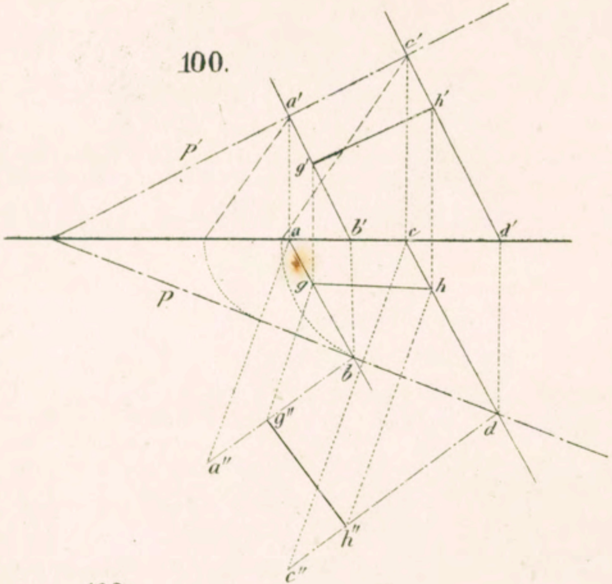


Lit. A. Pruszyński w Krakowie.

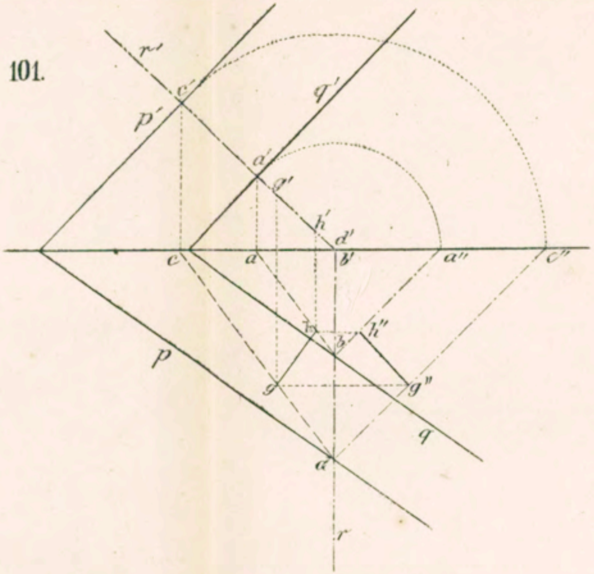


Lit. A. Pruszyński w Krakowie.

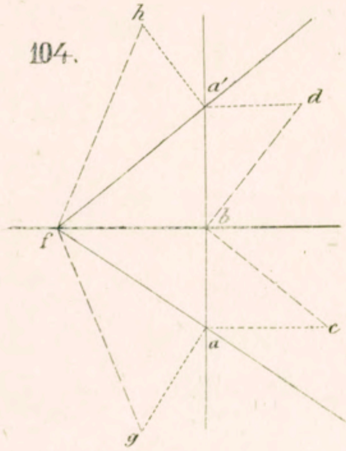
100.



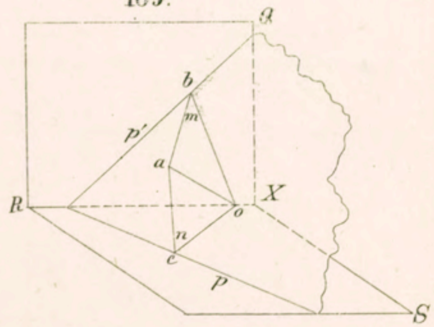
101.



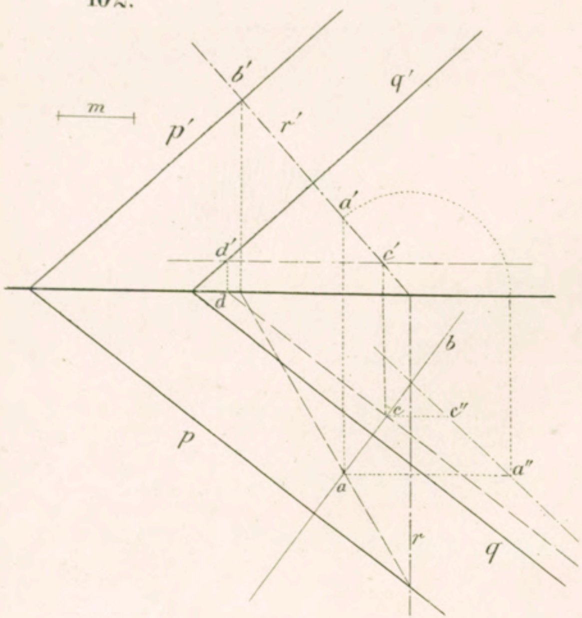
104.



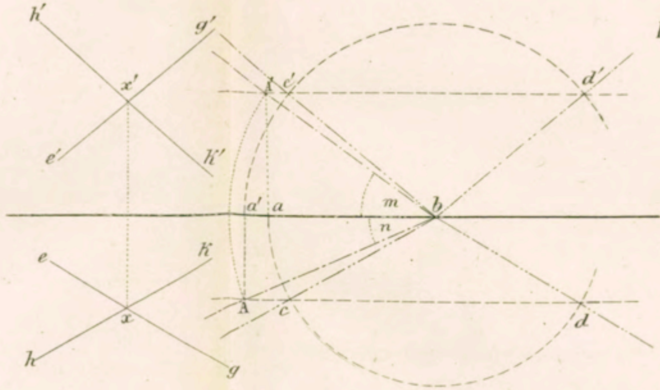
105.



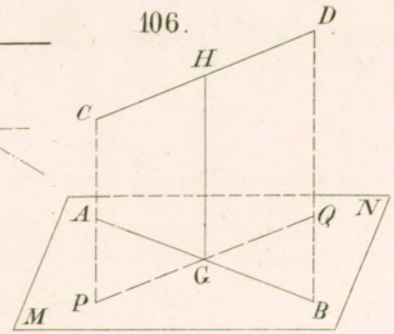
102.



103.

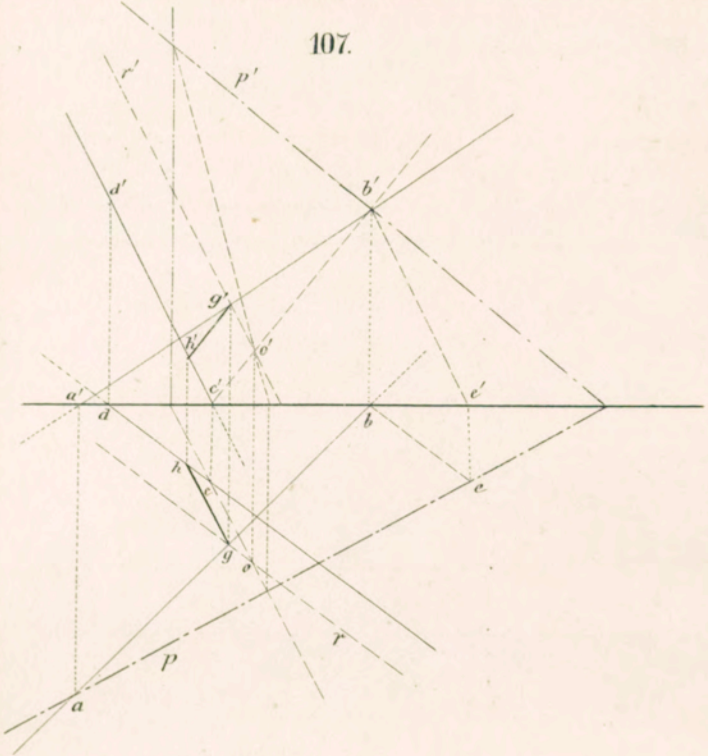


106.

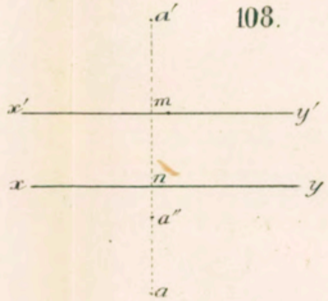


Lit. A. Pruszyński w Krakowie.

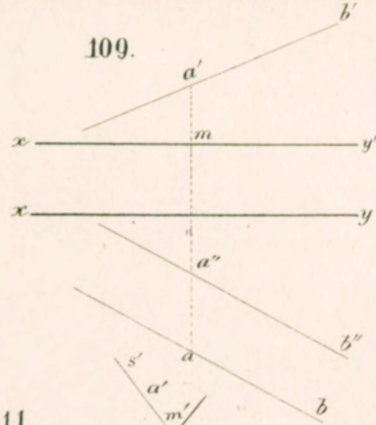
107.



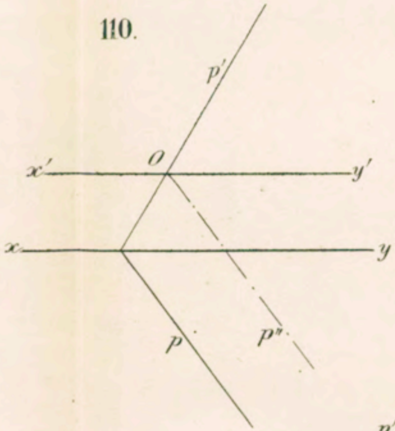
108.



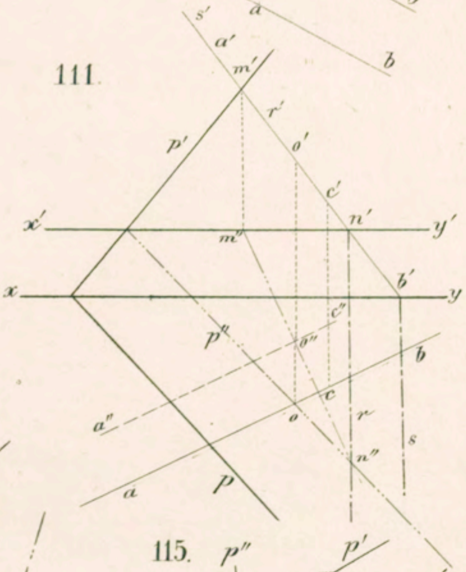
109.



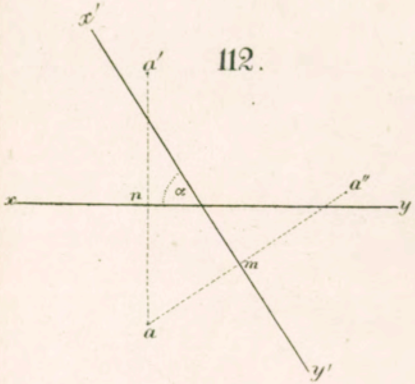
110.



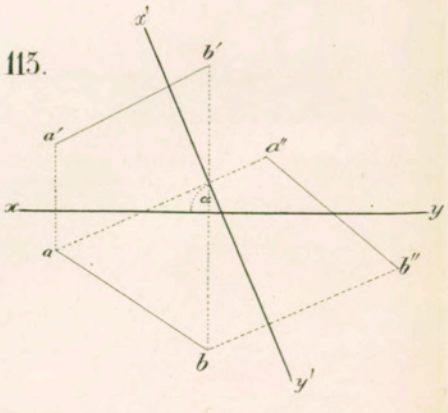
111.



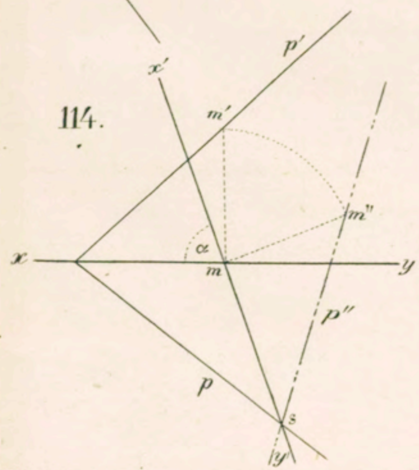
112.



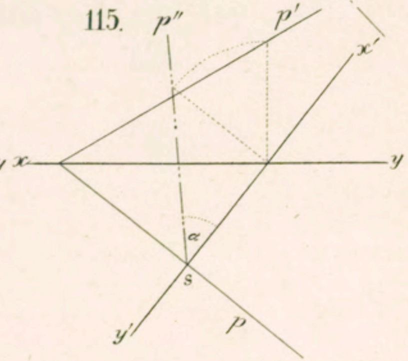
113.



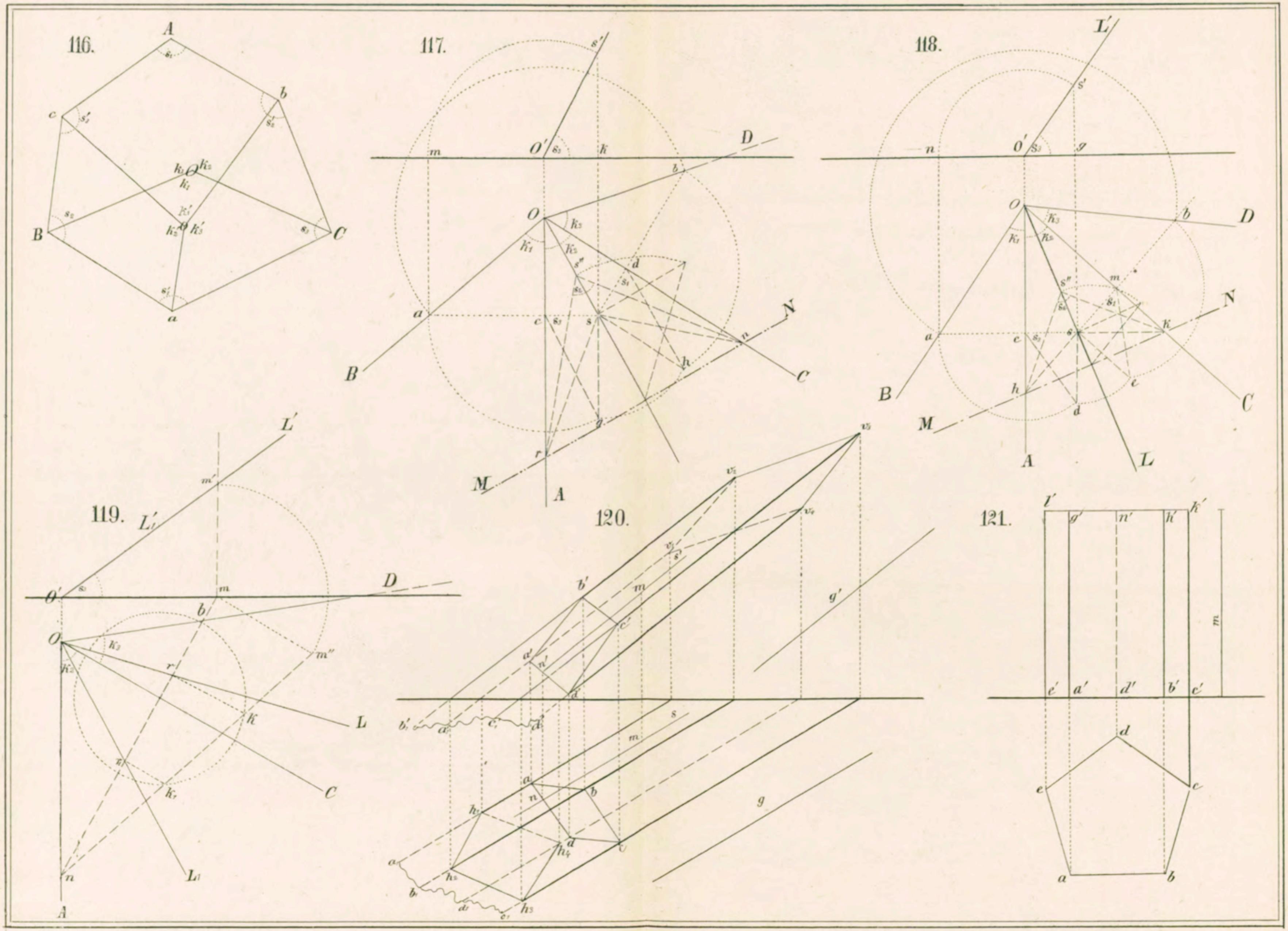
114.



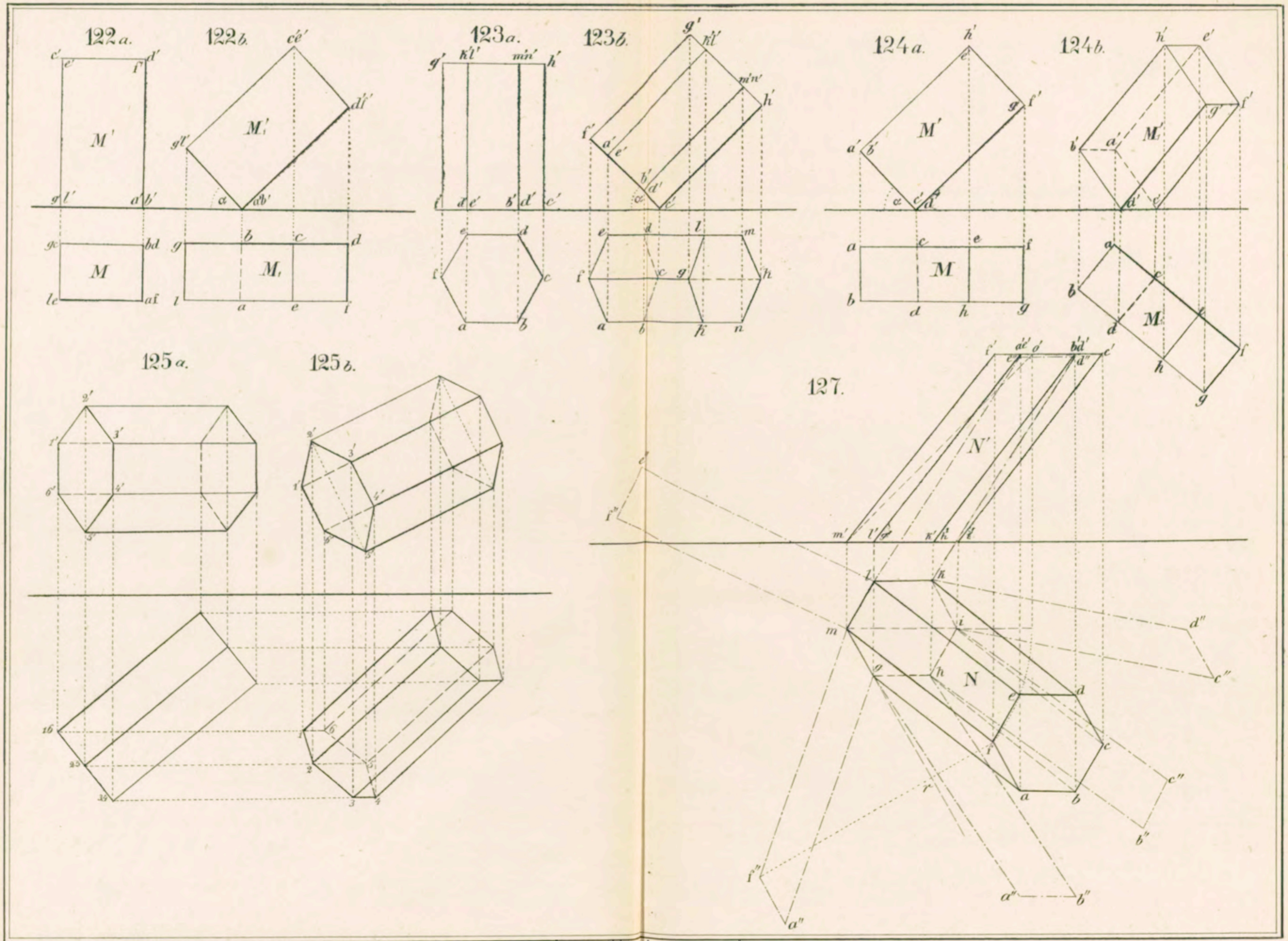
115.



Lit. A. Pruszyński w Krakowie.

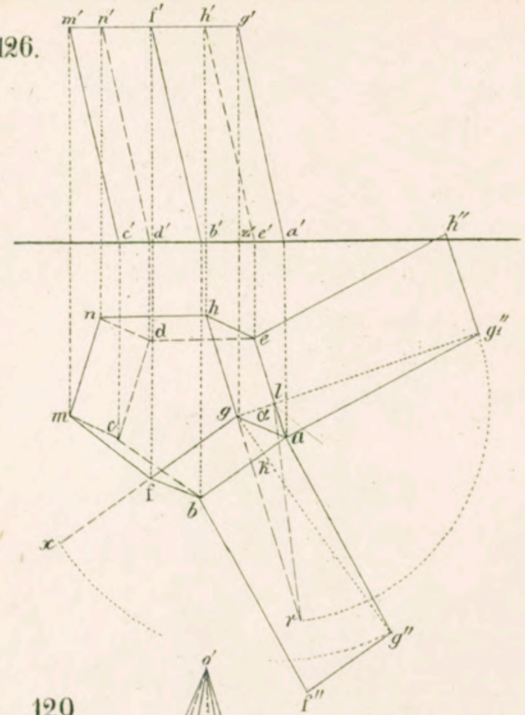


Lit. A. Pruszyński w Krakowie.

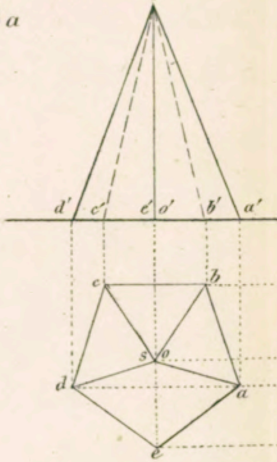


Lit. A. Pruszyński w Krakowie.

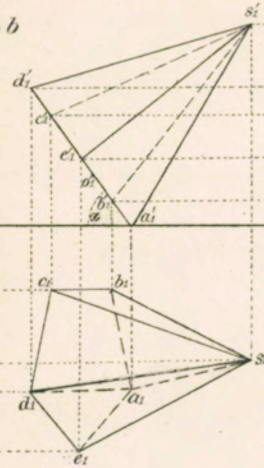
126.



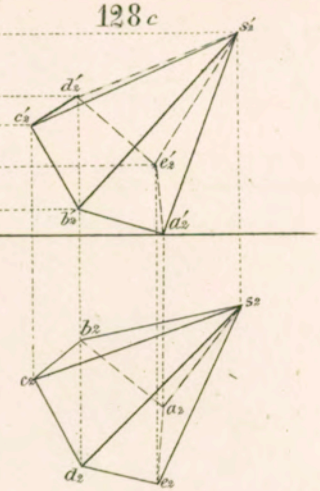
128 a



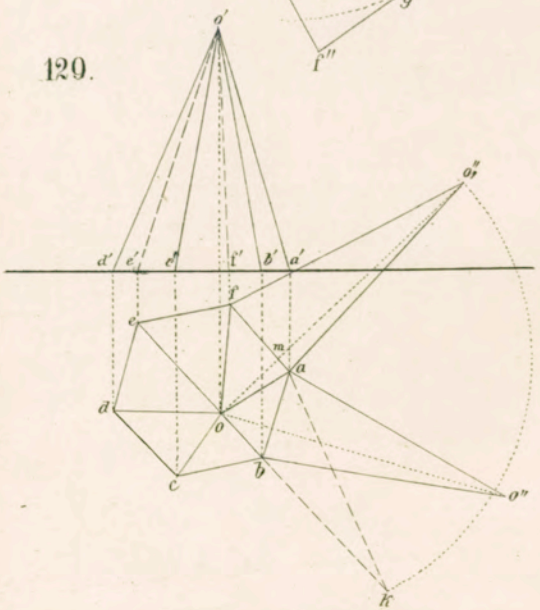
128 b



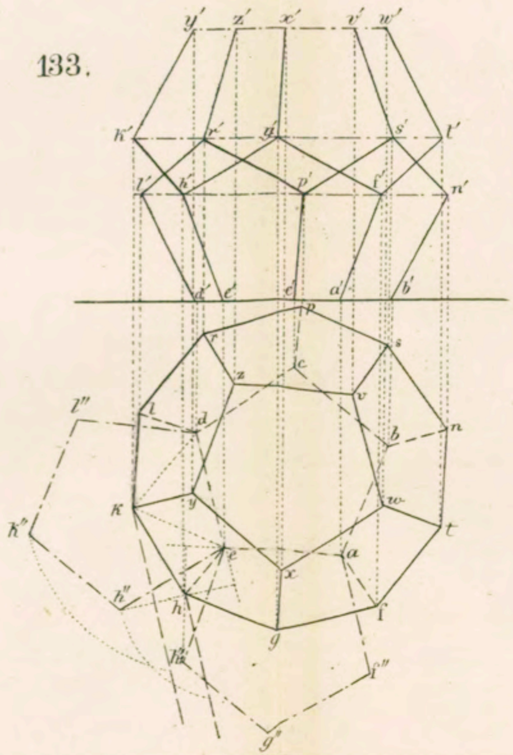
128 c



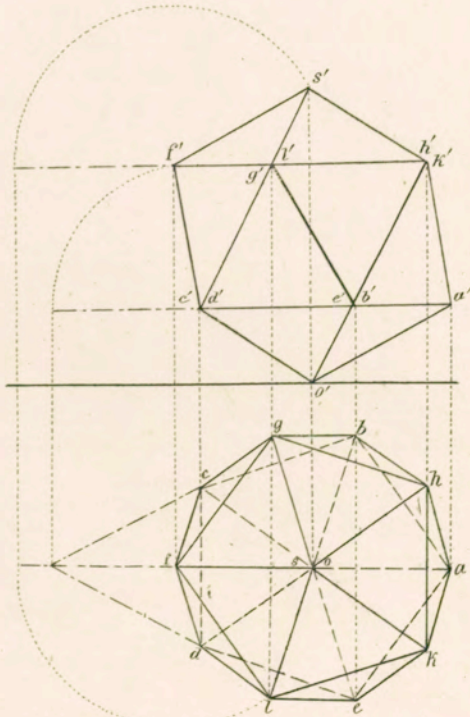
129.



133.

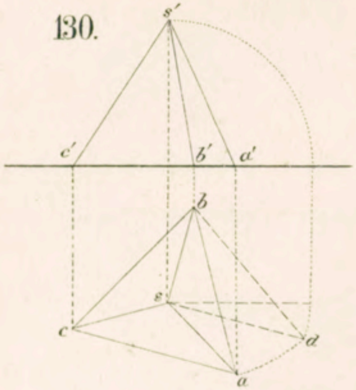


134.

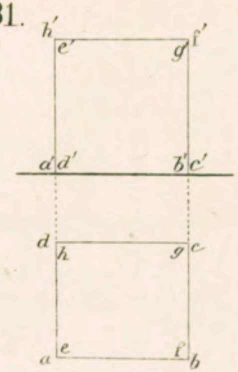


Lit. A. Pruszyński w Krakowie.

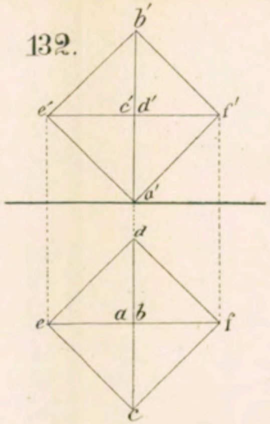
130.



131.

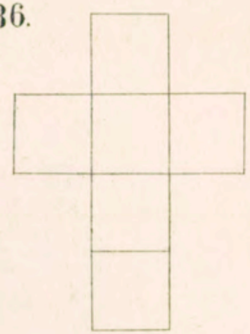


132.

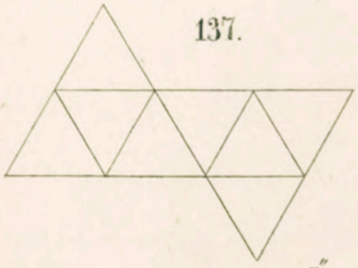


135.

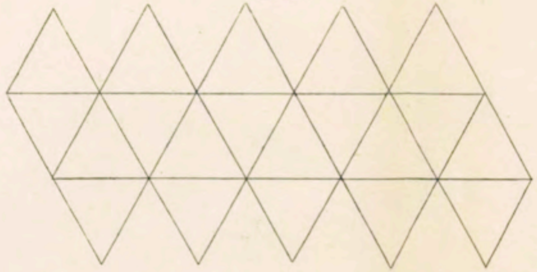
136.



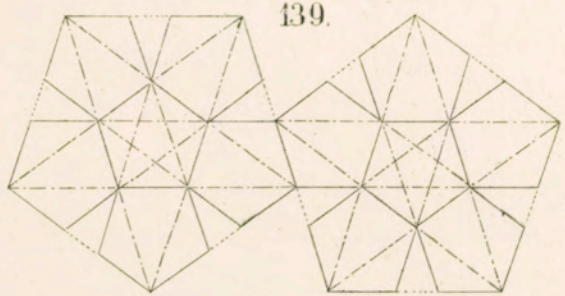
137.



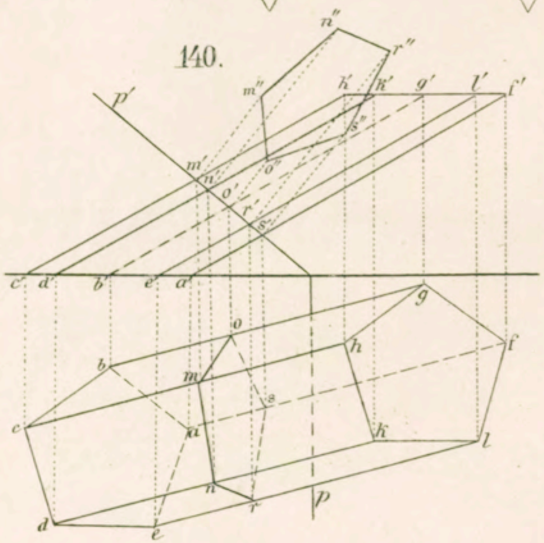
138.



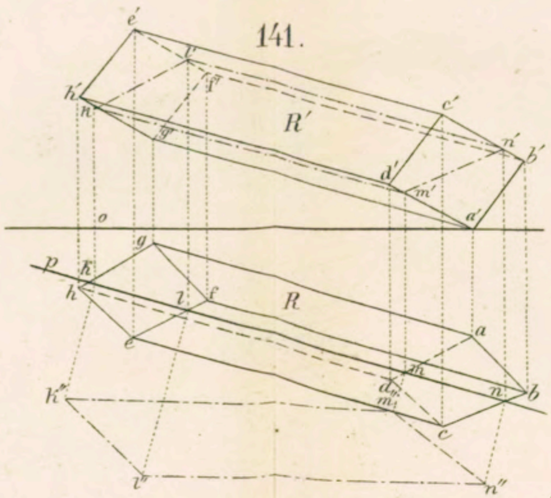
139.



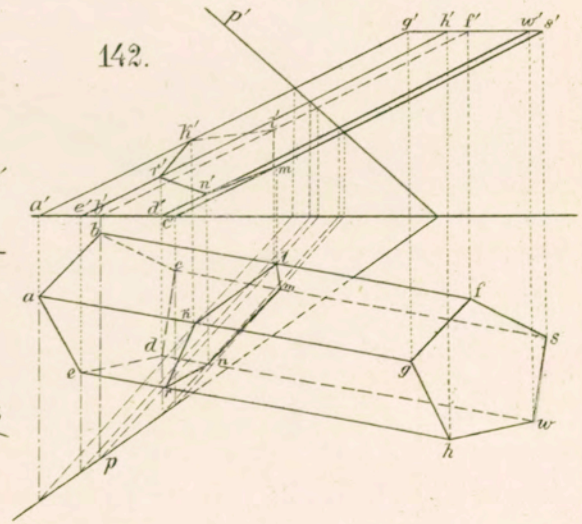
140.



141.

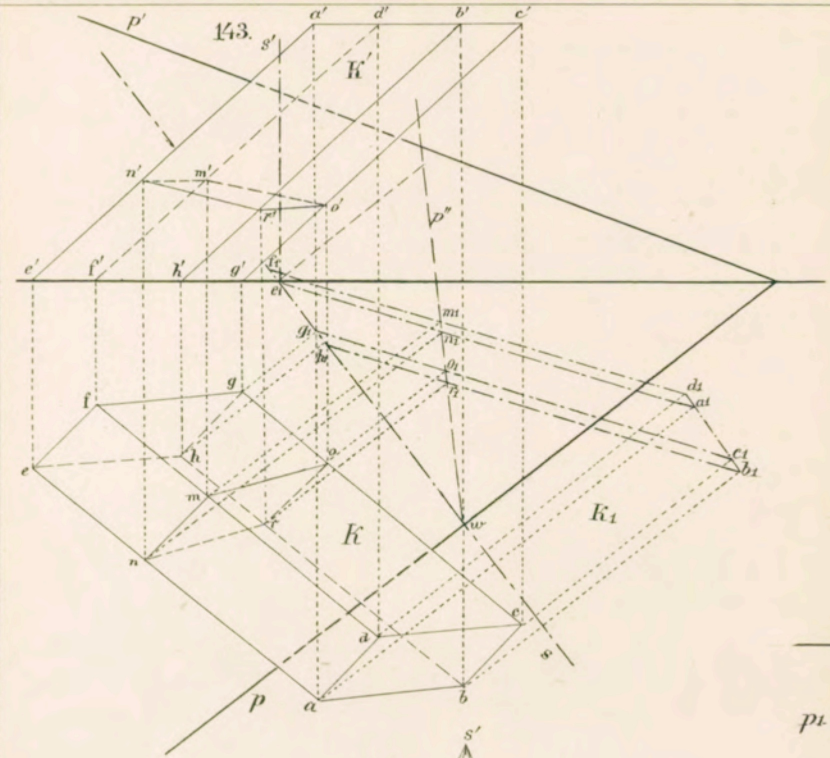


142.

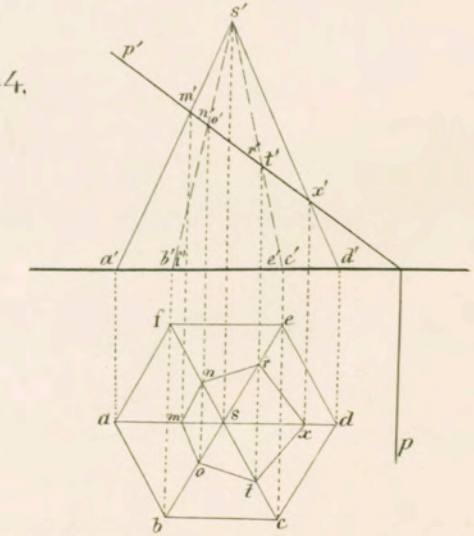


Lit. A. Pruszyński w Krakowie.

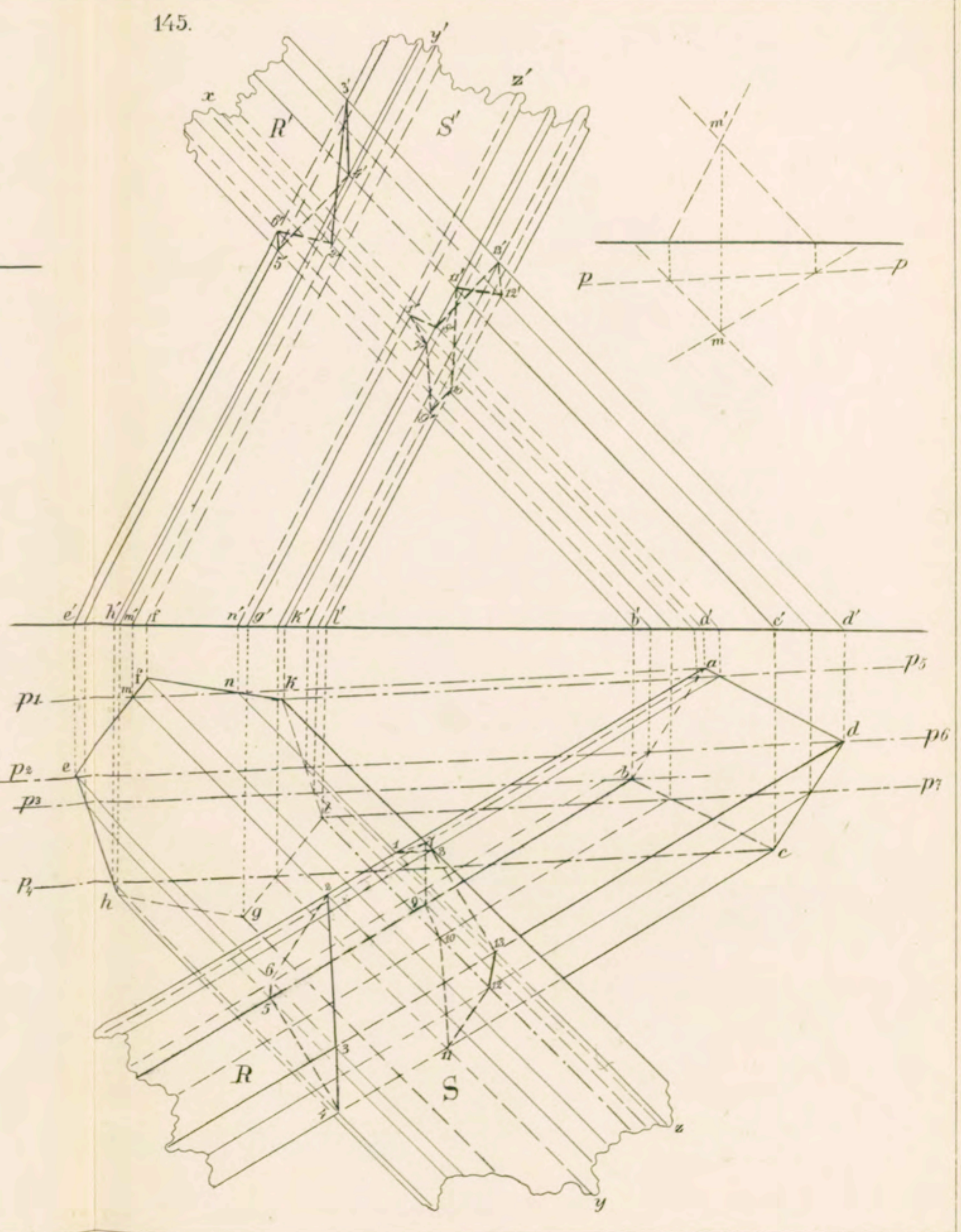
143.



144.

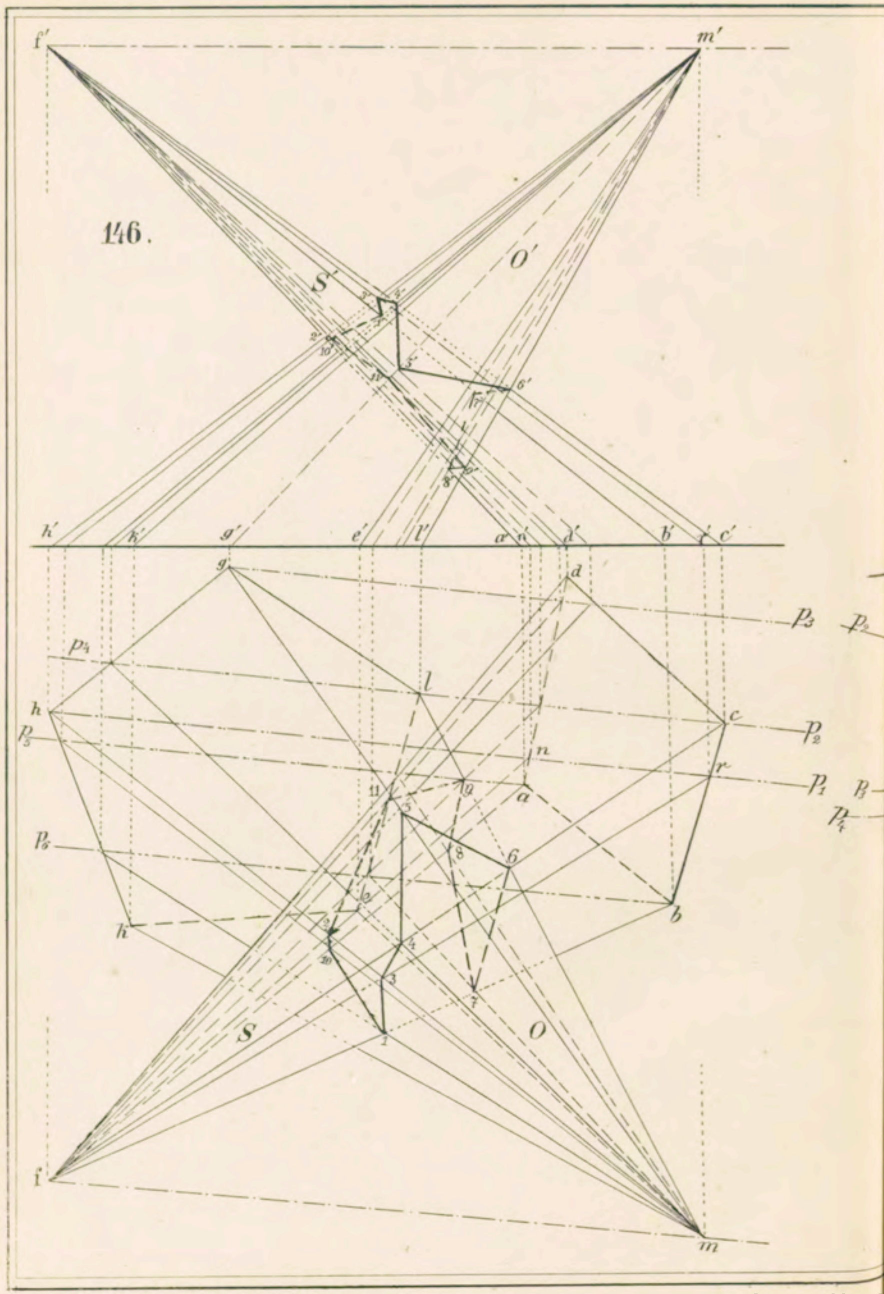


145.

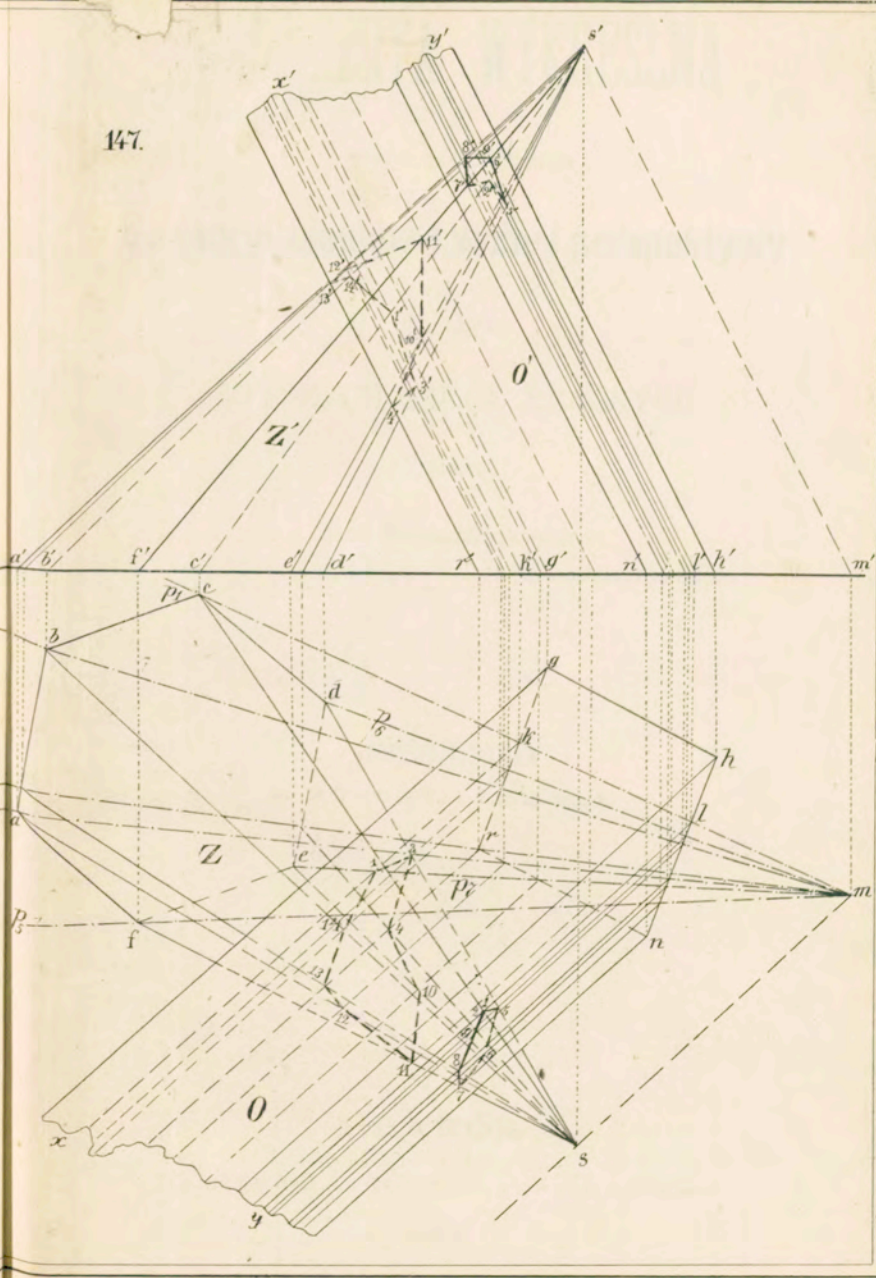


Lit. A. Pruszyński w Krakowie

146.



147.



Lit. A. Pruszyński w Krakowie.