Schendel. GRUNDZÜGE der ALGEBRA

N° 1064.

Grundzüge der Algebra

nach

Grafsmann'schen Prinzipien

von

Leopold Schendel.

S. Dickstein
Warszawa

Halle a. S.,
Druck und Verlag von H. W. Schmidt.
1885.

Inhaltsverzeichnis.

Erstes Kapitel.

Produkte und Determinanten.

Zweites Kapitel.

Alternierende Formen.

Drittes Kapitel.

Formen, deren Verhältnis für eine Anzahl gegebener Werte der Veränderlichen gegebene Werte annimmt.

Viertes Kapitel.

Resultanten und Diskriminanten.

Fünftes Kapitel.

Hyperdeterminanten und Invarianten.

Sechstes Kapitel.

Typische Darstellung der Formen.

Siebentes Kapitel.

Anwendung der Algebra auf die Geometrie.

Erstes Kapitel.

Produkte und Determinanten.

1. Es seien $e_1, \ldots, e_m$ und $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ zwei Gruppen von m von einander unabhängigen Gröfsen, welche die Eigenschaft besitzen, dafs für die multiplikative Verbindung von zwei den beiden Gruppen angehörigen Gröfsen die Gleichungen

$$e_\varkappa \varepsilon_\varkappa = 1,\ e_\varkappa \varepsilon_\lambda = 0 \text{ oder } \varepsilon_\varkappa e_\varkappa = 1,\ \varepsilon_\varkappa e_\lambda = 0$$

gelten. Diese Gröfsen sehen wir als Einheiten an, aus denen durch lineare Zusammensetzung andere Gröfsen entstehen. Wir bezeichnen sie, je nachdem die Einheiten, aus denen sie sich zusammensetzen, der ersten oder zweiten Gruppe angehören, durch die Buchstaben p und a, indem wir sie unter einander durch Indices unterscheiden, und erkennen vermittelst der obigen Gleichungen, dafs sie durch die Formen

$$p = p\varepsilon_1 \cdot e_1 + \ldots + p\varepsilon_m \cdot e_m,$$
$$a = ae_1 \cdot \varepsilon_1 + \ldots + ae_m \cdot \varepsilon_m,$$

in denen die Koefficienten $p\varepsilon_\varkappa$ und $ae_\varkappa$ Zahlengröfsen irgend welcher Art bedeuten, darstellbar sind.

Die Gröfsen p und a, zu denen offenbar auch die Einheiten selbst gehören, nehmen wir als den formalen arithmetischen Gesetzen unterworfen an, nur lassen wir für die multiplikative Verbindung der Gröfsen p und der Gröfsen a unter einander die Voraussetzung des kommutativen Gesetzes $ab = ba$, nach dem der Wert eines Produktes durch Vertauschung zweier Faktoren nicht geändert wird, fallen.

2. Unter dem Produkte $a_1 \ldots a_n$ der Gröfsen $a_1, \ldots, a_n$ — für die Gröfsen $p_1, \ldots, p_n$ gilt das Entsprechende — verstehen wir die Summe aller Ausdrücke von der Form

$$a_1 e_1 \ldots a_n e_s \cdot \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_s,$$

die man erhält, wenn man in allen möglichen Variationen mit Wiederholung die Einheiten $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ zu einem Produkte von n Faktoren verbindet und demselben als Koefficienten die Gröfse beifügt, die durch Verbindung der Faktoren des Produktes $a_1 \ldots a_n$ mit den Elementen der entsprechenden Variation der Einheiten $e_1, \ldots, e_m$ entsteht.

Eine jede Variation enthält von den Einheiten $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ r Einheiten, wenn durch r für $n \leqq m$ eine der Zahlen $1, \ldots, n$ und für $n > m$ eine der Zahlen $1, \ldots, m$ bezeichnet wird, und zwar eine $\varkappa_1$ mal, eine andere $\varkappa_2$ mal, u. s. w. Diese r Einheiten, sagen wir bezw. die Einheiten $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$, kommen bei gegebenen Werten der Zahlen $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_r$, die offenbar der Gleichung

$$\varkappa_1 + \ldots + \varkappa_r = n$$

genügen müssen, in

$$\binom{n}{\varkappa_1}\binom{n-\varkappa_1}{\varkappa_2} \ldots \binom{n-\varkappa_1-\ldots-\varkappa_{r-1}}{\varkappa_r} = \frac{n!}{\varkappa_1! \ldots \varkappa_r!}$$

Variationen vor. Denn denkt man sich in einem Produkte von n Faktoren diese Faktoren von ihren Stellen entfernt und stellt sich somit dasselbe als einen n Lücken enthaltenden Ausdruck vor, so kann man die Einheit ε_1 auf $\binom{n}{\varkappa_1}$ verschiedene Weisen in $\varkappa_1$ Lücken setzen und gelangt so zu $\binom{n}{\varkappa_1}$ Lückenausdrücken mit $n - \varkappa_1$ Lücken; in jedem dieser Ausdrücke kann man ferner die Einheit ε_2 auf $\binom{n-\varkappa_1}{\varkappa_2}$ verschiedene Weisen in $\varkappa_2$ Lücken setzen und erhält dadurch aus jedem Ausdrucke $\binom{n-\varkappa_1}{\varkappa_2}$ und im Ganzen $\binom{n}{\varkappa_1}\binom{n-\varkappa_1}{\varkappa_2}$ Lückenausdrücke mit $n - \varkappa_1 - \varkappa_2$ Lücken und folglich, wenn man so fortfährt, schliefslich in der That die angegebene Anzahl Variationen.

3. Nehmen wir nun erstens an, dafs ein Produkt von Einheiten unverändert denselben Wert behält, wenn man irgend zwei von ihnen mit einander vertauscht, so sind diese Variationen sämtlich gleich und durch das Produkt

$$\varepsilon_1^{\varkappa_1} \ldots \varepsilon_r^{\varkappa_r}$$

darstellbar, und wir können ihre Koefficienten zu einer Summe vereinigen und das Produkt $a_1 \ldots a_n$ durch die Form

$$a_1 \, . . \, a_n = (e, \varepsilon; m) \frac{n!}{\varkappa_1! \, . . \, \varkappa_r!} a_1 \, . . \, a_n e_1^{\varkappa_1} \, . . \, e_r^{\varkappa_r} \, . \, \varepsilon_1^{\varkappa_1} \, . . \, \varepsilon_r^{\varkappa_r}$$

darstellen, wenn wir durch das Zeichen $(e, \varepsilon; m)$ andeuten, dafs man den nebenstehenden Ausdruck für alle Kombinationen der Einheiten $\varepsilon_1, . ., \varepsilon_m$ zu je r für $r = 1, . ., n$ und für alle positiven ganzen Zahlen aufser Null, die der Gleichung $\varkappa_1 + . . + \varkappa_r = n$ genügen, zu bilden und die so entstehenden Ausdrücke zu addieren hat, und ferner unter dem Koefficienten

$$a_1 \, . . \, a_n e_1^{\varkappa_1} \, . . \, e_r^{\varkappa_r}$$

das arithmetische Mittel aller derjenigen Ausdrücke verstehen, die man erhält, wenn man auf alle möglichen Weisen die Einheiten $e_1, . . , e_r$ bezw. mit $\varkappa_1, . . , \varkappa_r$ Faktoren des Produktes $a_1 \, . . \, a_n$ oder $\varkappa_1, . . , \varkappa_r$ Faktoren dieses Produktes mit den Basen der Faktoren des Produktes $e_1^{\varkappa_1} \, . . \, e_r^{\varkappa_r}$ verbindet.

Das Produkt $a_1 \, . . \, a_n$, das sich offenbar auch, wenn wir den Zahlen $\varkappa$ auch den Wert Null anzunehmen gestatten, durch die Form

$$a_1 \, . . \, a_n = (e, \varepsilon; m) \frac{n!}{\varkappa_1! \, . . \, \varkappa_m!} a_1 \, . . \, a_n e_1^{\varkappa_1} \, . . \, e_m^{\varkappa_m} \, . \, \varepsilon_1^{\varkappa_1} \, . . \, \varepsilon_m^{\varkappa_m}$$

und somit als Summe aller derjenigen Ausdrücke, die für alle der Gleichung $\varkappa_1 + . . + \varkappa_m = n$ genügenden positiven ganzen Zahlen aus dem neben dem Zeichen $(e, \varepsilon; m)$ stehenden Ausdrucke hervorgehen, darstellen läfst, behält unverändert denselben Wert, wenn man irgend zwei seiner Faktoren mit einander vertauscht, und heifst ein algebraisches Produkt. Es setzt sich aus

$$\binom{n + m - 1}{m - 1}$$

Gliedern zusammen, denn ist die Anzahl der verschiedenen Werte von $\varkappa_1, . . , \varkappa_m$, die für $\varkappa = 0, . . , n$ die Gleichung $\varkappa_1 + . . + \varkappa_m = n$ befriedigen, für $m = r + 1$ durch $\binom{n + r}{r}$ gegeben, was für $r = 0$ in der That der Fall ist, so ist sie für $m = r + 2$

$$\binom{n + r}{r} + \binom{n - 1 + r}{r} + . . + \binom{r}{r} = \binom{n + r + 1}{r + 1},$$

weil $\varkappa_1 + . . + \varkappa_{r+1}$ für die Werte $0, 1, . . , n$ von $\varkappa_{r+2}$ die Werte $n, n-1, . . , 0$ annimmt.

Die Produkte, durch die sich die Koefficienten darstellen, sind natürlich auch algebraische Produkte und mit einander algebraisch verbunden.

Für $m = 2$ ist insbesondere

$$a_1 \ldots a_n = (e, \varepsilon; 2) \binom{n}{\varkappa} a_1 \ldots a_n e_1^{n-\varkappa} e_2^{\varkappa} \,.\, \varepsilon_1^{n-\varkappa} \varepsilon_2^{\varkappa}$$

und darin

$$a_1 \ldots a_n e_1^n = a_1 e_1 \ldots a_n e_1 ,$$

$$a_1 \ldots a_n e_1^{n-1} e_2 = \frac{1}{n} (a_1 e_2 a_2 e_1 \ldots a_n e_1 + \ldots + a_1 e_1 \ldots a_{n-1} e_1 a_n e_2),$$

u. s. w. und im Falle $a_1 = a, \ldots, a_n = a$

$$a^n e_1^n = a e_1^n, \; a^n e_1^{n-1} e_2 = a e_1^{n-1} a e_2 , \ldots$$

4. In dem besonderen Falle, wenn einem jeden algebraischen Produkte von Einheiten der Wert Null beigelegt wird, sobald in ihm zwei gleiche Einheiten vorkommen, fallen in dem Produkte $a_1 \ldots a_n$ alle Glieder, in denen die Gröſsen $\varkappa$ einen von Eins verschiedenen Wert haben, als mit der Null identisch fort, und es ist, wenn man darnach aus der Gleichung $\varkappa_1 + \ldots + \varkappa_r = n$ für r den allein in Betracht kommenden Wert n entnimmt und

$$n!\, a_1 \ldots a_n e_1 \ldots e_n = a_1 \ldots a_n \overset{\bullet}{|}\, e_1 \ldots e_n$$

setzt, für $n \leqq m$

$$a_1 \ldots a_n = (e, \varepsilon; m)\, a_1 \ldots a_n \overset{\bullet}{|}\, e_1 \ldots e_n \,.\, \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$$

und darin der Koefficient

$$a_1 \ldots a_n \overset{\bullet}{|}\, e_1 \ldots e_n$$

die Summe aller derjenigen Ausdrücke, die dadurch entstehen, daſs man die Elemente aller Permutationen der Einheiten $e_1, \ldots, e_n$ mit den Faktoren des Produktes $a_1 \ldots a_n$ oder die Elemente aller Permutationen der Gröſsen $a_1, \ldots, a_n$ mit den Faktoren des Produktes $e_1 \ldots e_n$ der Reihe nach verbindet. Für $n > m$ ist $a_1 \ldots a_n = 0$.

5. Die durch die algebraische multiplikative Verbindung der Gröſsen a^n und p^n hervorgehende, aus $\binom{n+m-1}{m-1}$ Gliedern zusammengesetzte Gröſse

$$ap^n = (e, \varepsilon; m) \frac{n!}{\varkappa_1! \ldots \varkappa_m!}\, a^n e_1^{\varkappa_1} \ldots e_m^{\varkappa_m} \,.\, p^n \varepsilon_1^{\varkappa_1} \ldots \varepsilon_m^{\varkappa_m}$$

nennen wir, sobald wir die Gröſsen $a^n e_1^{\varkappa_1} .. e_m^{\varkappa_m}$ als willkürlich gegebene Zahlengröſsen und die Gröſsen $p\varepsilon_1, .., p\varepsilon_m$, aus denen sich die Gröſsen $p^n \varepsilon_1^{\varkappa_1} .. \varepsilon_m^{\varkappa_m}$ zusammensetzen, als Veränderliche ansehen, unter der Voraussetzung, daſs n eine ganze positive Zahl ist, nach der Dimension, in welcher die Veränderlichen auftreten, eine Form $n$ten Grades für p und nach der Anzahl derselben eine Form $m$ter Ordnung, und insbesondere für $n = 1$, 2, 3 und 4 bezw. eine lineare, quadratische, kubische und biquadratische und für $m = 2$ und 3 eine binäre und ternäre Form. Die willkührlich gegebenen Zahlengröſsen heiſsen die Koefficienten der Form.

Die Gröſse a^n, die wir in derselben Weise als eine Gröſse $n$ten Grades und $m$ter Ordnung bezeichnen, können wir als ein Produkt von n linearen Faktoren in der Form

$$a^n = a_1 .. a_n$$

darstellen, wenn wir für die mn Zahlengröſsen $a_1 e_1, .., a_1 e_m; ..; a_n e_1, .., a_n e_m$ die $\binom{n+m-1}{m-1}$ Gleichungen, die sich aus der Gleichung

$$a^n e_1^{\varkappa_1} .. e_m^{\varkappa_m} = a_1 .. a_n e_1^{\varkappa_1} .. e_m^{\varkappa_m}$$

für $\varkappa_1 + .. + \varkappa_m = n$ ergeben, voraussetzen und in Bezug auf ihre Beschaffenheit nicht von vornherein annehmen, daſs sie von der Art der gegebenen Zahlengröſsen $a^n e_1^{\varkappa_1} .. e_m^{\varkappa_m}$ seien. Die Form $n$ten Grades ap^n ist dann in der Form

$$ap^n = a_1 p .. a_n p$$

darstellbar und verschwindet für die Gröſsen p, welche den Gleichungen

$$a_1 p = 0, .., a_n p = 0$$

genügen. Es sind n Gruppen, und die ihnen angehörigen Gröſsen p nennen wir die Verschwindungsgröſsen der Form $n$ten Grades ap^n oder die Wurzelgröſsen der Gleichung $n$ten Grades $ap^n = 0$. Im Falle $m = 2$ gehört einer jeden Gruppe nur eine Gröſse an. Die Gleichung $ap^n = 0$ ist für $m = 2$ eine homogene Gleichung der Gröſsen $p\varepsilon_1$, $p\varepsilon_2$, für die sich nach den letzten Gleichungen die Werte

$$p\varepsilon_1 \equiv a_1 e_2, p\varepsilon_2 \equiv - a_1 e_1; ..; p\varepsilon_1 \equiv a_n e_2, \; p\varepsilon_2 \equiv - a_n e_1$$

ergeben. Die Verhältnisse

$$- \frac{a_1 e_2}{a_1 e_1}, .., - \frac{a_n e_2}{a_n e_1}$$

oder

$$-a_1{}^0 e_1{}^{-1} e_2, \ldots, -a_n{}^0 e_1{}^{-1} e_2$$

sind ihre Wurzeln für

$$\frac{p\varepsilon_1}{p\varepsilon_2} \text{ oder } p^0 \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^{-1}$$

als Unbekannte derselben oder die Wurzeln der Gleichung $a^n \varepsilon_2{}^{-n} p^0 = 0$. Zwischen den Wurzeln und den Koefficienten der Gleichung bestehen Beziehungen, die man ohne Weiteres aus der Gleichung

$$a^n e_1{}^{n-\varkappa} e_2^{\varkappa} = a_1 \ldots a_n e_1^{n-\varkappa} e_2^{\varkappa}$$

erhält. Die Summe der Wurzeln ist gleich dem Quotienten $-\binom{n}{1} a^n e_1^{n-1} e_2 : a^n e_1^n$, die Summe ihrer Kombinationen zu je 2 gleich dem Quotienten $+\binom{n}{2} a^n e_1^{n-2} e_2^2 : a^n e_1^n$, u. s. w.

Eine Form mit 2 Reihen von Veränderlichen $p_1\varepsilon_1, \ldots, p_1\varepsilon_m$ und $p_2\varepsilon_1, \ldots, p_2\varepsilon_m$ stellt sich durch die Form $a_1 p_1^{n_1} a_2 p_2^{n_2}$ dar, wenn die Gröfsen

$$a^{n_1} e_1^{\varkappa_1} \ldots e_m^{\varkappa_m} \,.\, a_2^{n_2} e_1^{\lambda_1} \ldots e_m^{\lambda_m}$$

willkürlich gegebene Zahlengröfsen sind; sie ist vom Grade n_1 für p_1 und vom Grade n_2 für p_2. Im Falle die Gröfsen $a_1^{n_1} e_1^{\varkappa_1} \ldots e_m^{\varkappa_m}$ und $a_2^{n_2} e_1^{\lambda_1} \ldots e_m^{\lambda_m}$ für sich Repräsentanten willkürlich gegebener Zahlengröfsen sind, ist die Form $a_1 p_1^{n_1} a_2 p_2^{n_2}$ ein Produkt aus einer Form $n_1$ten Grades für p_1 und einer Form $n_2$ten Grades für p_2.

In entsprechender Weise ist eine Form mit beliebig vielen Reihen von Veränderlichen darstellbar.

6. Zweitens nehmen wir an, dafs ein Produkt von Einheiten sein Zeichen ändert, sonst aber denselben Wert behält, wenn man irgend zwei derselben mit einander vertauscht, und dafs es demnach den Wert Null hat, wenn in ihm zwei gleiche Einheiten vorkommen. In dem Produkte $a_1 \ldots a_n$ kommen alsdann, wie in jenem besonderen Falle der algebraischen Multiplikation, alle Variationen, in denen die Gröfsen $\varkappa$ einen von Eins verschiedenen Wert haben, als verschwindende Gröfsen nicht in Betracht, es bleiben nur für $n \leqq m$ die Kombinationen der Einheiten $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ zu je n und deren Permutationen, und es ist

$$a_1 \ldots a_n = (e, \varepsilon; m)\, a_1 \ldots a_n \mid e_1 \ldots e_n \cdot \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n,$$

wenn wir unter dem Koefficienten

$$a_1 \,.\,.\, a_n \mid e_1 \,.\, e_n$$

die Summe aller derjenigen Ausdrücke verstehen, die man erhält, wenn man die Elemente aller Permutationen der Einheiten $e_1, .\,., e_n$ mit den Faktoren des Produktes $a_1 \,.\,.\, a_n$ oder die Elemente aller Permutationen der Gröfsen $a_1, .\, , a_n$ mit den Faktoren des Produktes $e_1 \,.\,.\, e_n$ der Reihe nach verbindet und den dadurch entstehenden Produkten das Plus- oder Minuszeichen beilegt, je nachdem die Reihe der Indices der Permutationen durch eine gerade oder ungerade Anzahl von Vertauschungen zweier Indices in die Reihe $1, .\,., n$ übergeht. Ein jedes auf die erste Weise gebildete Glied können wir nämlich durch Permutationen seiner Faktoren in ein auf die zweite Weise gebildetes Glied überführen, welches, da die Anzahl der dazu nötigen Vertauschungen von zwei Faktoren gleich ist der Anzahl der Vertauschungen der Gröfsen e sowohl, als auch der Gröfsen a, dasselbe Zeichen hat. Es ist $a_1 \mid e_1 = a_1 e_1$, ferner $a_1 a_2 \mid e_1 e_2 = a_1 e_1 a_2 e_2 - a_1 e_2 a_2 e_1$ oder $a_1 e_1 a_2 e_2 - a_2 e_1 a_1 e_2$, u. s. w. Die Anzahl der Permutationen ist $n!$.

Das Produkt $a_1 \,.\,.\, a_n$ ändert sein Zeichen, behält aber sonst denselben Wert, wenn man irgend zwei seiner Faktoren mit einander vertauscht, und hat demnach im Falle der Gleichheit zweier Faktoren den Wert Null; man nennt es ein kombinatorisches Produkt. Es setzt sich aus $\binom{m}{n}$ Gliedern zusammen, denn diese Zahl ist die Anzahl der Kombinationen von m Elementen zu je n.

Die Produkte $a_1 \,.\,.\, a_n$ und $e_1 \,.\,.\, e_n$, durch die wir die Koefficienten dargestellt haben, sind gleichfalls kombinatorische Produkte, und zwar sind sie, wie die entsprechenden Produkte in den Koefficienten $a_1 \,.\,.\, a_n e_1^{\varkappa_1} \,.\,.\, e_r^{\varkappa_r}$ und $a_1 \,.\,.\, a_n \mid e_1 \,.\,.\, e_n$, algebraisch mit einander verbunden. Der vertikale Strich ist, wie der Punkt und auch das Zeichen $\dot{\mid}$, ein Multiplikationszeichen; wir wenden ihn an zur Bezeichnung der algebraischen multiplikativen Verbindung zweier kombinatorischen Produkte.

In dem Falle $n > m$ ist $a_1 \,.\,.\, a_n = 0$, und für $n = m$ hat man

$$a_1 \,.\,.\, a_m = a_1 \,.\,.\, a_m \mid e_1 \,.\,.\, e_m \,.\, \varepsilon_1 \,.\,.\, \varepsilon_m$$

und ersieht hieraus, dafs für die Gröfse $a_1 \,.\,.\, a_n \mid e_1 \,.\,.\, e_n$, die sich aus $n!$ zur Hälfte positiven und zur andern Hälfte negativen Gliedern zusammensetzt, die Gleichung

$$(a_1e_1 . \varepsilon_1 + \ldots + a_1e_n . \varepsilon_n) \ldots (a_ne_1 . \varepsilon_1 + \ldots + a_ne_n . \varepsilon_n)$$
$$= a_1 \ldots a_n \mid e_1 \ldots e_n . \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$$

und folglich auch, da zur Bildung der Glieder die Permutationen der Gröfsen a ebenso, wie die der Gröfsen e benutzt werden können und also die Gröfsen e vor den Gröfsen a nichts voraus haben, die Gleichung

$$(a_1e_1 . \varepsilon_1 + \ldots + a_ne_1 . \varepsilon_n) \ldots (a_1e_n . \varepsilon_1 + \ldots + a_ne_n . \varepsilon_n)$$
$$= a_1 \ldots a_n \mid e_1 \ldots e_n . \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$$

besteht.

7. Die Gröfse $a_1 \ldots a_n \mid e_1 \ldots e_n$ ist die aus den n^2 Gröfsen $a_1e_1, \ldots, a_ne_n$ gebildete, durch die Form

$$\begin{vmatrix} a_1e_1, \ldots, a_1e_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_ne_1, \ldots, a_ne_n \end{vmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{vmatrix} a_1e_1, \ldots, a_ne_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_1e_n, \ldots, a_ne_n \end{vmatrix}$$

dargestellte Determinante $n$ten Grades. Das $(\varkappa, \lambda)$te Element dieser Determinante $a_\varkappa e_\lambda$ befindet sich in der ersten Form, auf die allein wir uns weiterhin stets beziehen werden, in der $\varkappa$ten Horizontal- und der λten Vertikalreihe und in der andern Form in der $\varkappa$ten Vertikal- und der λten Horizontalreihe. Die Indices bezeichnen die Reihen, in denen die betreffenden Gröfsen a und e auftreten.

Aus der Form $a_1 \ldots a_n \mid e_1 \ldots e_n$ ergeben sich ohne Weiteres die fundamentalen Eigenschaften der Determinanten.

Eine Determinante ändert ihr Zeichen, wenn eine Reihe mit einer parallelen Reihe vertauscht wird, und verschwindet, wenn die Elemente der ersteren denen der letzteren der Reihe nach gleich sind; denn das kombinatorische Produkt $a_1 \ldots a_n$ ändert bei Vertauschung zweier Faktoren sein Zeichen und ist bei Gleichheit zweier Faktoren gleich Null. Eine Determinante multipliziert man mit einem Faktor, indem man alle Elemente einer Reihe mit ihm multipliziert; denn es ist $v . a_1 \ldots a_n \mid e_1 \ldots e_n = (va_1)a_2 \ldots a_n \mid e_1 \ldots e_n$. Der Wert einer Determinante wird nicht geändert, wenn man zu den Elementen einer Reihe die mit einem gemeinschaftlichen Faktor multiplizierten Elemente einer parallelen Reihe addiert; denn es ist $(a_1 + va_2)a_2 \ldots a_n = a_1 \ldots a_n + v . a_2a_2 \ldots a_n = a_1 \ldots a_n$. U. s. w. Vergl. hier und weiterhin Baltzer's „Theorie und Anwendung der Determinanten. Leipzig, 1881.“

8. Ferner ist offenbar die aus den, durch die Verbindung der Gröſsen $a_1, .., a_n$ und $p_1, .., p_n$ mit den Einheiten $e_1, .., e_m$ und $\varepsilon_1, .., \varepsilon_m$ entstehenden 2 mal mn Gröſsen zusammengesetzte Determinante

$$(a_1e_1 \cdot \varepsilon_1 + .. + a_1e_m \cdot \varepsilon_m)..(a_ne_1 \cdot \varepsilon_1 + .. + a_ne_m \cdot \varepsilon_m) \mid p_1..p_n$$
$$= (e, \varepsilon; m) a_1..a_n \mid e_1..e_n \cdot p_1..p_n \mid \varepsilon_1..\varepsilon_n)$$

und ebenso die aus den, durch die Verbindung der Gröſsen $a_1, .., a_m$ und $p_1, .., p_m$ mit den Einheiten $e_1, .., e_n$ und $\varepsilon_1, .., \varepsilon_n$ entstehenden 2 mal mn Gröſsen zusammengesetzte Determinante

$$a_1e_1 \cdot p_1 + .. + a_me_1 \cdot p_m)..(a_1e_n \cdot p_1 + .. + a_me_n \cdot p_m) \mid \varepsilon_1..\varepsilon_n$$
$$= (a, p; m) a_1..a_n \mid e_1..e_n \cdot p_1..p_n \mid \varepsilon_1..\varepsilon_n.$$

Aus der ersten Gleichung ergiebt sich für die Gröſsen $a_{1,1}.., a_{1,n}$ und $a_{2,1}, .., a_{2,n}$ die Relation

$$a_{1,1}(e_1^2 + .. + e_m^2)..a_{1,n}(e_1^2 + .. + e_m^2) \mid a_{2,1}..a_{2,n}$$
$$= (e; m) a_{1,1}..a_{1,n} \mid e_1..e_n \cdot a_{2,1}..a_{2,n} \mid e_1..e_n$$

oder

$$(e_1^2 + .. + e_m^2)^n a_{1,1}..a_{1,n} \mid a_{2,1}..a_{2,n} = (e; m) a_{1,1}..a_{1,n} \mid e_1..e_n$$
$$\cdot a_{2,1}..a_{2,n} \mid e_1..e_n$$

und aus der zweiten für die Gröſsen $a_1, .., a_m$ die Formel

$$(a_1^2 + .+ a_m^2) e_1..(a_1^2 + .. + a_m^2) e_n \mid e_1..e_n^{\bar{}} = (a; m) a_1..a_n \mid e_1..e_n^2$$

oder, wenn wir das algebraische Quadrat des kombinatorischen Produktes $e_1..e_n$ durch $e_1..e_n\overset{2}{-}$ bezeichnen, die Formel

$$(a_1^2 + .. + a_m^2)^n e_1..e_n\overset{2}{-} = (a; m) a_1..a_n \mid e_1..e_n^2,$$

in der die links stehende Determinante die Eigenschaft besitzt, daſs in ihr das $(\varkappa, \lambda)$te und das $(\lambda, \varkappa)$te Element denselben Wert haben, nämlich den Werth

$$(a_1^2 + .. + a_m^2) e_\varkappa e_\lambda = a_1e_\varkappa a_1e_\lambda + .. + a_me_\varkappa a_me_\lambda.$$

Eine solche Determinante nennen wir eine algebraisch-symmetrische Determinante und bezeichnen ferner dementsprechend eine Determinante, in der das $(\varkappa, \lambda)$te und das $(\lambda, \varkappa)$te Glied entgegengesetzt gleich sind, als eine kombinatorisch-symmetrische Determinante. Wie man für $n = m$ erkennt, ist das Quadrat einer jeden Determinante eine algebraisch-symmetrische Determinante desselben Grades.

Für $n = m$ ergiebt sich allgemein, daſs das Produkt zweier Determinanten $m$ten Grades

$$a_1..a_m \mid e_1..e_m \cdot p_1..p_m \mid \varepsilon_1..\varepsilon_m$$

durch die Determinanten

$$(a_1 e_1 . \varepsilon_1 + \dots + a_1 e_m . \varepsilon_m) \dots (a_m e_1 . \varepsilon_1 + \dots + a_m e_m . \varepsilon_m) \mid p_1 \dots p_m,$$
$$(a_1 e_1 . p_1 + \dots + a_m e_1 . p_m) \dots (a_1 e_m . p_1 + \dots + a_m e_m . p_m) \mid \varepsilon_1 \dots \varepsilon_m$$
und demgemäfs auch ferner durch die Determinanten
$$(a_1 e_1 . p_1 + \dots + a_1 e_m . p_m) \dots (a_m e_1 . p_1 + \dots + a_m e_m . p_m) \mid \varepsilon_1 \dots \varepsilon_m,$$
$$(a_1 e_1 . \varepsilon_1 + \dots + a_m e_1 . \varepsilon_m) \dots (a_1 e_m . \varepsilon_1 + \dots + a_m e_m . \varepsilon_m) \mid p_1 \dots p_m,$$
also im Ganzen auf 4 im Allgemeinen verschiedene Weisen durch eine Determinante $m$ten Grades darstellbar ist. Will man das Produkt zweier Determinanten ungleichen Grades, z. B. der Determinanten $a_1 \dots a_m \mid e_1 \dots e_m$ und $p_1 \dots p_n \mid \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n$ bilden, so hat man für $n < m$ die Determinante $p_1 \dots p_n \mid \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n$ zunächst zu einer Determinante $m$ten Grades zu erweitern, d. h. durch die ihr offenbar gleichwertige Determinante $e_{n+1} \dots e_m p_1 \dots p_n \mid \varepsilon_{n+1} \dots \varepsilon_m \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n$ oder $p_1 \dots p_n e_{n+1} \dots e_m \mid \varepsilon_1 \dots e_m$ zu ersetzen.

Behaftet man die Gröfsen p und a mit Koefficienten, so nehmen die gegebenen Gleichungen zum Theil eine allgemeinere Form an. Es ergiebt sich z. B., wenn man die Gröfsen $a_1, \dots, a_m$ durch die Gröfsen $\sqrt{v_1} a_1, \dots, \sqrt{v_m} a_m$ ersetzt, dafs
$$(v_1 a_1^2 + \dots + v_m a_m^2)^n e_1 \dots e_n^2 = (a, v; m) v_1 \dots v_n \cdot a_1 \dots a_n \mid e_1 \dots e_n^2$$
ist.

9. Multipliziert man die Gleichung
$$a_1 \dots a_n = (e, \varepsilon; m) a_1 \dots a_n \mid e_1 \dots e_n . \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n$$
für $n < m$ kombinatorisch mit dem kombinatorischen Produkte $\varepsilon_{n+1} \dots \varepsilon_m$, so gelangt man, weil ein jedes kombinatorische Produkt, welches zwei gleiche Faktoren hat, verschwindet, zu der Gleichung
$$a_1 \dots a_n \varepsilon_{n+1} \dots \varepsilon_m = a_1 \dots a_n \mid e_1 \dots e_n \cdot \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n \varepsilon_{n+1} \dots \varepsilon_m$$
oder
$$a_1 \dots a_n \mid e_1 \dots e_n = \frac{a_1 \dots a_n \varepsilon_{n+1} \dots \varepsilon_m}{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n \varepsilon_{n+1} \dots \varepsilon_m},$$
aus der hervorgeht, dafs die durch die algebraische multiplikative Verbindung des kombinatorischen Produktes $a_1 . a_n$ mit einem aus n von den Einheiten $e_1, \dots, e_m$ gebildeten kombinatorischen Produkte entstehende Determinante sich durch einen Bruch darstellen läfst, dessen Zähler und Nenner man dadurch erhält, dafs man das kombinatorische Produkt $a_1 \dots a_n$ und das entsprechende aus n von den Einheiten $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ gebildete kombinatorische Produkt durch die in diesem nicht enthaltenen Einheiten zu $m$faktorigen Produkten er-

weitert. Hiernach hat jede durch die algebraische multiplikative Verbindung eines aus n von den Einheiten $\varepsilon_1, .., \varepsilon_m$ gebildeten kombinatorischen Produktes mit einem aus n von den Einheiten $e_1, .., e_m$ gebildeten kombinatorischen Produkte entstehende Determinante den Wert Null, sobald in beiden Produkten nicht durchweg dieselben Indices vorhanden sind, und im andern Falle den Wert der positiven oder negativen Einheit, je nachdem die Indices des einen Produktes durch eine gerade oder ungerade Anzahl von Vertauschungen zweier Indices die Reihenfolge der Indices des andern Produktes annehmen. Dieser Satz, der sich auch ohne Weiteres aus der Form

$$a_1 \,..\, a_n = (e, \varepsilon; m)\, a_1 \,..\, a_n \mid e_1 \,..\, e_n \,.\, \varepsilon_1 \,..\, \varepsilon_n$$

darbietet, enthält als speciellen Fall für $n = 1$ die von uns an den Eingang dieser Schrift gestellten Gleichungen.

Die Gröfsen $a_1 \,..\, a_n$, die sich in derselben Weise, wie die Gröfsen a aus den Einheiten $\varepsilon_1, .., \varepsilon_m$, aus den Kombinationen dieser Einheiten zu n zusammensetzen, sind, da die aus m Einheiten zusammengesetzten Gröfsen als Gröfsen $m$ter Ordnung bezeichnet werden, in Bezug auf die Einheiten $e_1 \,..\, e_n$, u. s. w. von der Ordnung $\binom{n}{\varkappa}$. Selbstverständlich gilt für die multiplikative Verbindung von solchen Gröfsen, wie überhaupt von Gröfsen, die sich aus Einheiten, die durch multiplikative Verbindung aus den ursprünglichen Einheiten e und ε entstanden sind, zusammensetzen, das associative Gesetz $a(bc) = abc$ nicht, sobald sie ohne Beziehung auf die ursprünglichen Einheiten in Betracht kommen. Es ist z. B. $(a_1 a_2)(a_3 a_4)$ nicht gleich $a_1 a_2 a_3 a_4$, wenn man bei den Gröfsen $a_1 a_2$ und $a_3 a_4$ ihre Zusammensetzung aus den Gröfsen a_1, a_2 und a_3, a_4 aufser Acht läfst und nur darauf Rücksicht nimmt, dafs sie Gröfsen sind, die sich aus den Einheiten $e_1 e_2, .., e_{m-1} e_m$ zusammensetzen.

10. Verbindet man die Gleichung

$$a_1 \,..\, a_n = (e, \varepsilon; m)\, a_1 \,..\, a_n \mid e_1 \,..\, e_n \,.\, \varepsilon_1 \,..\, \varepsilon_n$$

durch kombinatorische Multiplikation mit der Gleichung

$$a_{n+1} \,..\, a_{n+r} = (e, \varepsilon; m)\, a_{n+1} \,..\, a_{n+r} \mid e_1 \,..\, e_r \,.\, \varepsilon_1 \,..\, \varepsilon_r,$$

so erhält man, da ein jedes kombinatorische Produkt, welches zwei gleiche Faktoren hat, verschwindet, die Gleichung

$$a_1 \,..\, a_{n+r} = (e, \varepsilon; m)\, a_1 \,..\, a_n \mid e_1 \,..\, e_n \,.\, a_{n+1} \,..\, a_{n+r} \mid e_{n+1} \,..\, e_{n+r} \\ .\, \varepsilon_1 \,..\, \varepsilon_n \varepsilon_{n+1} \,..\, \varepsilon_{n+r},$$

in der die Glieder der rechts stehenden Summe dadurch entstehen, daſs man für $e_1 \,.\,.\, e_n$ und $\varepsilon_1 \,.\,.\, \varepsilon_n$ eine jede, in beiden Fällen aber gleiche Kombination der Einheiten $e_1, .\,., e_m$ und $\varepsilon_1, .\,., \varepsilon_m$ zu n und für $e_{n+1} \,.\,.\, e_{n+r}$ und $\varepsilon_{n+1} \,.\,.\, \varepsilon_{n+r}$ in gleicher Weise eine jede Kombination der in jener nicht enthaltenen Einheiten zu r setzt. Die Anzahl der Glieder ist somit $\binom{m}{n}\binom{m-n}{r}$. Allgemein gilt darnach offenbar die Gleichung

$$\begin{aligned} a_1 \,.\,.\, a_{n_1+\,.\,.\,+n_r} = (e, \varepsilon; m)\, & a_1 \,.\,.\, a_{n_1} \mid e_1 \,.\,.\, e_{n_1} \\ & .\, a_{n_1+1} \,.\,.\, a_{n_1+n_2} \mid e_{n_1+1} \,.\,.\, e_{n_1+n_2} \,.\,. \\ .\,.\, a_{n_1+\,.\,.\,+n_{r-1}+1} \,.\,.\, a_{n_1+\,.\,.\,+n_r} & \mid e_{n_1+\,.\,.\,+n_{r-1}+1} \,.\,.\, e_{n_1+\,.\,.\,+n_r} \\ .\, \varepsilon_1 \,.\,.\, \varepsilon_{n_1}\, \varepsilon_{n_1+1} \,.\,.\, \varepsilon_{n_1+n_2} & \,.\,.\, \varepsilon_{n_1+\,.\,.\,+n_{r-1}+1} \,.\,.\, \varepsilon_{n_1+\,.\,.\,+n_r}, \end{aligned}$$

die das links stehende kombinatorische Produkt durch eine Summe von

$$\binom{m}{n_1}\binom{m-n_1}{n_2} \,.\,.\, \binom{m-n_1-\,.\,.\,-n_{r-1}}{n_r} = \frac{m!}{n_1! \,.\,.\, n_r!\,(m-n_1-\,.\,.\,-n_r)!}$$

Gliedern darstellt. Aus ihr ergiebt sich, wenn wir

$$n_1 + \,.\,.\, + n_r = m$$

setzen, durch algebraische Multiplikation mit dem kombinatorischen Produkte $e_1 \,.\,.\, e_m$ der Laplace'sche Determinantensatz

$$\begin{aligned} a_1 \,.\,.\, a_m \mid e_1 \,.\,.\, e_m = (e, \varepsilon; m)\, & \varepsilon_1 \,.\,.\, \varepsilon_{n_1} \varepsilon_{n_1+1} \,.\,.\, \varepsilon_{n_1+n_2} \\ .\,.\, \varepsilon_{n_1+\,.\,.\,+n_{r-1}+1} \,.\,.\, \varepsilon_m \mid e_1 \,.\,.\, e_m \,.\, & a_1 \,.\,.\, a_{n_1} \mid e_1 \,.\,.\, e_{n_1} \\ & .\, a_{n_1+1} \,.\,.\, a_{n_1+n_2} \mid e_{n_1+1} \,.\,.\, e_{n_1+n_2} \,.\,. \\ .\,.\, a_{n_1+\,.\,.\,+n_{r-1}+1} \,.\,.\, a_m & \mid e_{n_1+\,.\,.\,+n_{r-1}+1} \,.\,.\, e_m, \end{aligned}$$

demzufolge eine Determinante $m$ten Grades als eine Summe von

$$\frac{m!}{n_1! \,.\,.\, n_{r-1}!\,(m-n_1-\,.\,.\,-n_{r-1})!}$$

Produkten von je r Determinanten vom Grade $n_1, .\,., n_{r-1}$, $m-n_1-\,.\,.\,-n_{r-1}$ darstellbar ist. Die Glieder der Summe entstehen in der Weise, daſs man die kombinatorischen Produkte $a_1 \,.\,.\, a_{n_1}$, $a_{n_1+1} \,.\,.\, a_{n_1+n_2}, \ldots, a_{n_1+\,.\,.\,+n_{r-1}+1} \,.\,.\, a_m$ mit den verschiedenen Kombinationen der Einheiten $e_1, \ldots, e_m$ zu je $n_1, .\,., n_{r-1}$, $m-n_1-\,.\,.\,-n_{r-1}$ oder — in dem Zeichen $(e, \varepsilon; m)$ kann man e mit a vertauschen — die kombinatorischen Produkte $e_1 \,.\,.\, e_{n_1}$, $e_{n_1+1} \,.\,.\, e_{n_1+n_2}$, $.\,.\,, e_{n_1+\,.\,.\,+n_{r-1}+1} \,.\,.\, e_m$ mit den entsprechenden verschiedenen

Kombinationen der Gröfsen $a_1, .., a_m$ durch algebraische Multiplikation verbindet und den Produkten dieser Verbindungen das Plus- oder Minuszeichen beifügt, je nachdem die Reihe der Indices durch eine gerade oder ungerade Anzahl von Vertauschungen zweier Indices in die Reihe $1, .., m$ übergeht.

11. Setzen wir

$$\bar{a}_\varkappa a_1 .. a_m = (-1)^{\varkappa-1} a_1 .. a_{\varkappa-1} a_{\varkappa+1} .. a_m$$

und bezeichnet somit in Folge der Gleichung

$$a_1 .. a_m = (-1)^{\varkappa-1} a_\varkappa a_1 .. a_{\varkappa-1} a_{\varkappa+1} .. a_m$$

das vor dem kombinatorischen Produkte $a_1 .. a_m$ stehende Symbol $\bar{a}_\varkappa$ das Entfernen der Gröfse $a_\varkappa$ aus der ersten Faktorenstelle, so ist offenbar

$$a_\varkappa \bar{a}_\varkappa a_1 .. a_m = a_1 .. a_m$$

und folglich die Determinante $a_1 .. a_m \mid e_1 .. e_m$ in der Form

$$a_\varkappa \bar{a}_\varkappa a_1 .. a_m \mid e_\lambda \bar{e}_\lambda e_1 .. e_m$$

darstellbar. Der Koefficient des Elementes $a_\varkappa e_\lambda$ in der Entwickelung der Determinante $a_1 .. a_m \mid e_1 .. e_m$ ist daher

$$\bar{a}_\varkappa a_1 .. a_m \mid \bar{e}_\lambda e_1 .. e_m$$

und wird somit abgesehen von dem Faktor $(-1)^{\varkappa+\lambda}$ aus ihr durch Entfernung der $\varkappa$ten Horizontal- und der λten Vertikalreihe erhalten. Und die Determinante $a_1 .. a_m \mid e_1 .. e_m$ ist ein Aggregat von Gliedern, die aus dem Ausdrucke

$$a_\varkappa e_\lambda . \bar{a}_\varkappa a_1 .. a_m \mid \bar{e}_\lambda e_1 .. e_m$$

bei gegebenem $\varkappa$ für $\lambda = 1, .., m$ und bei gegebenem λ für $\varkappa = 1, .., m$ hervorgehen.

12. Nach dem Laplace'schen Determinantensatze ist

$$a_1 .. a_m \mid e_1 .. e_m = (e, \varepsilon; m)\, \varepsilon_1 .. \varepsilon_n \varepsilon_{n+1} .. \varepsilon_m \mid e_1 .. e_m$$
$$. a_1 .. a_n \mid e_1 .. e_n . a_{n+1} .. a_m \mid e_{n+1} .. e_m$$

und folglich, da

$$\varepsilon_1 .. \varepsilon_n a_{n+1} .. a_m = a_{n+1} .. a_m \mid e_{n+1} .. e_m . \varepsilon_1 .. \varepsilon_n \varepsilon_{n+1} .. \varepsilon_m$$

ist,

$$a_1 .. a_m \mid e_1 .. e_m = (e, \varepsilon; m)\, \varepsilon_1 .. \varepsilon_n a_{n+1} .. a_m \mid e_1 .. e_m . a_1 .. a_n \mid e_1 .. e_n.$$

Auf Grund dieser Gleichung führen wir, indem wir unter der

Operation $\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_n$ ein der Reihe nach vorzunehmendes Entfernen der Gröfsen $a_1, \ldots, a_n$ verstehen, die Gröfse

$$\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_n a_1 \ldots a_m \mid e_1 \ldots e_m = a_{n+1} \ldots a_m \mid e_1 \ldots e_m$$

durch die Gleichung

$$a_{n+1} \ldots a_m \mid e_1 \ldots e_m = (e, \varepsilon; m)\, \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n a_{n+1} \ldots a_m \mid e_1 \ldots e_m \,.\, e_1 \ldots e_n$$

ein und erkennen aus derselben, dafs sie, die wir mit Rücksicht auf die Gleichung

$$e_1 \ldots e_m \mid \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m = 1$$

auch in der Form

$$\frac{\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_n a_1 \ldots a_m}{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m}$$

darstellen, eine Gröfse von der Art der Gröfsen $p_1 \ldots p_n$ ist, und dafs bei der algebraischen multiplikativen Verbindung derselben mit einem $n$faktorigen kombinatorischen Produkte von der Form $a_1 \ldots a_n$ dieses als kombinatorischer Faktor vor das Produkt $\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_n a_1 \ldots a_m$ oder $a_{n+1} \ldots a_m$ tritt. Wir können also

$$p_1 \ldots p_n \equiv a_{n+1} \ldots a_m \mid e_1 \ldots e_m$$

setzen, und es ist dann $a_1 \ldots a_n \mid p_1 \ldots p_n \equiv a_1 \ldots a_m \mid e_1 \ldots e_m, p_1 \ldots p_n \mid \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n \equiv \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n a_{n+1} \ldots a_m \mid e_1 \ldots e_m$, u. s. w., und ferner, da

$$a_{n+1} \ldots a_m \mid e_1 \ldots e_m = (-1)^{(m-n)n} a_{n+1} \ldots a_m \bar{a}_1 a_1 \ldots \bar{a}_n a_n \mid e_1 \ldots e_m$$

und folglich

$$a_{n+1} \ldots a_m \mid e_1 \ldots e_m \,.\, \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m = (-1)^{(m-n)n} a_{n+1} \ldots a_m$$

ist,

$$a_{n+1} \ldots a_m \equiv (-1)^{(m-n)n}\, p_1 \ldots p_n \mid \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m .$$

Sind also z. B. für $m = 2$ die Gröfsen a und p mit einander durch die Gleichung

$$p = a \mid e_1 e_2$$

oder $p = e_1 a e_2 - e_2 a e_1$ verbunden, so ist

$$a = -p \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2 .$$

Die Vertauschung zweier Gröfsen in dem Operationssymbole $\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_n$ bewirkt vor dem kombinatorischen Produkte $a_1 \ldots a_m$ eine Änderung des Zeichens, da dieses Produkt bei Vertauschung derselben Gröfsen sein Zeichen ändert. Es verhält sich also vor dem kombinatorischen Produkte wie ein kombinatorisches Produkt und ist daher als ein solches anzusehen. Darnach nimmt z. B $\bar{a}_\varkappa \bar{a}_\lambda a_1 \ldots a_m$ bei Vertauschung des $\varkappa$ und λ den entgegengesetzten Wert an und ist daher im Falle $\varkappa = \lambda$ gleich Null.

13. Offenbar ist den Gleichungen $e_\varkappa \varepsilon_\varkappa = 1$, $e_\varkappa \varepsilon_\lambda = 0$ zufolge

$$e_\varkappa = \bar{\varepsilon}_\varkappa \varepsilon_1 \,.\,.\, \varepsilon_m \mid e_1 \,.\,.\, e_m$$

oder

$$e_\varkappa = \frac{\bar{\varepsilon}_\varkappa \varepsilon_1 \,.\,.\, \varepsilon_m}{\varepsilon_1 \,.\,.\, \varepsilon_m}$$

und deſshalb die Gröſse

$$a = a e_1 \,.\, \varepsilon_1 + \,.\,.\, + a e_m \,.\, \varepsilon_m ,$$

die nach ihrer Form mit den Einheiten $\varepsilon_1, \,.\,.\, , \varepsilon_m$ auch durch die kombinatorische Gleichung

$$a \varepsilon_1 \,.\,.\, \varepsilon_m = 0$$

verbunden ist, auch durch die Form

$$a = a \bar{\varepsilon}_1 \,.\, \varepsilon_1 + \,.\,.\, + a \bar{\varepsilon}_m \,.\, \varepsilon_m$$

darstellbar, wenn wir uns bei den Symbolen $\bar{\varepsilon}_1, \,.\,.\, , \bar{\varepsilon}_m$ den Quotienten

$$\frac{\varepsilon_1 \,.\,.\, \varepsilon_m}{\varepsilon_1 \,.\,.\, \varepsilon_m}$$

hinzudenken.

Nehmen wir also statt der Einheiten $\varepsilon_1, \,.\,.\, , \varepsilon_m$, welche selbst zu den Gröſsen a gehören, irgend welche andere Gröſsen $a_1, \,.\,.\, , a_m$ die wie jene von einander unabhängig, d. h. durch keine lineare Gleichung mit einander verbunden und also von der Art sind, daſs ihr kombinatorisches Produkt nicht verschwindet, als Einheiten für die Gröſsen a an, so ist die Gröſse a in der Form

$$a = a \bar{a}_1 \,.\, a_1 + \,.\,.\, + a \bar{a}_m \,.\, a_m$$

darstellbar, und demnach, wenn wir die Gleichung

$$a_1 \,.\,.\, a_m = a_1 \,.\,.\, a_m \mid e_1 \,.\,.\, e_m \,.\, \varepsilon_1 \,.\,.\, \varepsilon_m$$

berücksichtigen,

$$a_1 \,.\,.\, a_m \mid e_1 \,.\,.\, e_n \,.\, a = a \bar{a}_1 a_1 \,.\,.\, a_m \mid e_1 \,.\,.\, e_m \,.\, a_1 + \,.\,. \\ + a \bar{a}_m a_1 \,.\,.\, a_m \mid e_1 \,.\,.\, e_m \,.\, a_m \,.$$

14. Die Einheiten $e_1, \,.\,.\, , e_m$ und $\varepsilon_1, \,.\,.\, , \varepsilon_m$ sind mit einander durch die Gleichung

$$e_{\varkappa_1} \,.\,.\, e_{\varkappa_n} = \frac{\bar{\varepsilon}_{\varkappa_1} \,.\,.\, \bar{\varepsilon}_{\varkappa_n} \varepsilon_1 \,.\,.\, \varepsilon_m}{\varepsilon_1 \,.\,.\, \varepsilon_m}$$

verbunden, da ihre rechte Seite durch algebraische Multiplikation mit $\varepsilon_{\varkappa_1} \cdot\cdot\, \varepsilon_{\varkappa_n}$ der Eins und mit einer jeden andern Kombination der

Einheiten $\varepsilon_1, .., \varepsilon_m$ der Null gleich wird, und es besteht daher die Gleichung

$$\frac{\bar{\varepsilon}_{\varkappa_1} \varepsilon_1 .. \varepsilon_m}{\varepsilon_1 .. \varepsilon_m} .. \frac{\bar{\varepsilon}_{\varkappa_n} \varepsilon_1 .. \varepsilon_m}{\varepsilon_1 .. \varepsilon_m} = \frac{\bar{\varepsilon}_{\varkappa_1} .. \bar{\varepsilon}_{\varkappa_n} \varepsilon_1 .. \varepsilon_m}{\varepsilon_1 .. \varepsilon_m}$$

oder

$$\bar{\varepsilon}_{\varkappa_1} \varepsilon_1 .. \varepsilon_m .. \bar{\varepsilon}_{\varkappa_n} \varepsilon_1 .. \varepsilon_m = \varepsilon_1 .. \varepsilon_m^{\;n-1} . \bar{\varepsilon}_{\varkappa_1} .. \bar{\varepsilon}_{\varkappa_n} \varepsilon_1 .. \varepsilon_m .$$

Diese Gleichung, in der für die kombinatorische multiplikative Verbindung der aus den Einheiten gebildeten kombinatorischen Produkte das associative Gesetz nicht Geltung hat, bringt den Satz zum Ausdruck, daſs es gleich ist, ob man den Quotienten

$$\frac{\varepsilon_1 .. \varepsilon_m}{\varepsilon_1 .. \varepsilon_m}$$

dem kombinatorischen Produkte $\bar{\varepsilon}_{\varkappa_1} .. \bar{\varepsilon}_{\varkappa_n}$ oder den einzelnen Faktoren desselben beifügt.

Nach diesem Satze ist

$$\bar{e}_{\varkappa_1} e_{\varkappa_1} .. e_{\varkappa_n} .. \bar{e}_{\varkappa_n} e_{\varkappa_1} .. e_{\varkappa_n} = e_{\varkappa_1} .. e_{\varkappa_n}^{\;n-1},$$

und folglich gilt ferner, wenn wir die Eingangs gegebene und die aus ihr hervorgehende Gleichung

$$\bar{e}_{\varkappa_\lambda} e_{\varkappa_1} .. e_{\varkappa_n} = \frac{\varepsilon_{\varkappa_\lambda} \bar{\varepsilon}_{\varkappa_1} .. \bar{\varepsilon}_{\varkappa_n} \varepsilon_1 .. \varepsilon_m}{\varepsilon_1 .. \varepsilon_m}$$

in Anwendung bringen, die Gleichung

$$\varepsilon_{\varkappa_1} \bar{\varepsilon}_{\varkappa_1} .. \bar{\varepsilon}_{\varkappa_n} \varepsilon_1 .. \varepsilon_m .. \varepsilon_{\varkappa_n} \bar{\varepsilon}_{\varkappa_1} .. \bar{\varepsilon}_{\varkappa_n} \varepsilon_1 .. \varepsilon_m = \bar{\varepsilon}_{\varkappa_1} .. \bar{\varepsilon}_{\varkappa_n} \varepsilon_1 .. \varepsilon_m^{\;n-1} . \varepsilon_1 .. \varepsilon_m ,$$

aus der sich der entsprechende Satz ergiebt, daſs es gleich ist, ob man den Quotienten

$$\frac{\bar{\varepsilon}_{\varkappa_1} .. \bar{\varepsilon}_{\varkappa_n} \varepsilon_1 .. \varepsilon_m}{\bar{\varepsilon}_{\varkappa_1} .. \bar{\varepsilon}_{\varkappa_n} \varepsilon_1 .. \varepsilon_m}$$

dem kombinatorischen Produkte $\varepsilon_{\varkappa_1} .. \varepsilon_{\varkappa_n}$ oder den einzelnen Faktoren desselben beifügt.

Verbindet man die Gleichung

$$\bar{a}_{\varkappa_1} a_1 .. a_m .. \bar{a}_{\varkappa_n} a_1 .. a_m = a_1 .. a_m^{\;n-1} . \bar{a}_{\varkappa_1} .. \bar{a}_{\varkappa_n} a_1 .. a_m ,$$

die in dem Falle, wenn die Gröſsen $a_1, . , a_m$ nicht unabhängig von einander sind, identisch verschwindet, algebraisch mit der Gleichung, die sich aus dem kombinatorischen Produkte $\bar{e}_{\lambda_1} .. \bar{e}_{\lambda_n}$ ergiebt, so erhält man die Gleichung

$$\bar{a}_{\varkappa_1} a_1 .. a_m .. \bar{a}_{\varkappa_n} a_1 .. a_m \mid \bar{e}_{\lambda_1} e_1 .. e_m .. \bar{e}_{\lambda_n} e_1 .. e_m$$

$$= a_1 .. a_m \mid e_1 .. e_m{}^{n-1} . \bar{a}_{\varkappa_1} .. \bar{a}_{\varkappa_n} a_1 .. a_m \mid \bar{e}_{\lambda_1} .. \bar{e}_{\lambda_n} e_1 .. e_m ,$$

die vermittelst des ersten Satzes aus der Determinante $\bar{a}_{\varkappa_1} .. \bar{a}_{\varkappa_n} \mid \bar{e}_{\lambda_1} .. \bar{e}_{\lambda_n}$ durch Beifügung der zugehörigen Quotienten hervorgeht.

Insbesondere ist für $n = m$

$$\bar{a}_1 a_1 .. a_m .. \bar{a}_m a_1 .. a_m \mid \bar{e}_1 e_1 .. e_m .. \bar{e}_m e_1 .. e_m = a_1 .. a_m \mid e_1 .. e_m{}^{m-1}$$

und für $n = m - 1$

$$\overline{\bar{a}_\varkappa a_1 .. a_m}\; \bar{a}_1 a_1 .. a_m .. \bar{a}_m a_1 .. a_m \mid \overline{\bar{e}_\lambda e_1 .. e_m}\; \bar{e}_1 e_1 .. e_m .. \bar{e}_m e_1 .. e_m$$

$$= a_1 .. a_m \mid e_1 .. e_m{}^{m-2} . a_\varkappa e_\lambda .$$

In derselben Weise geht ferner aus dem zweiten Satze der Sylvester'sche Determinantensatz

$$a_{\varkappa_1} \bar{a}_{\varkappa_1} .. \bar{a}_{\varkappa_n} a_1 .. a_m .. a_{\varkappa_n} \bar{a}_{\varkappa_1} .. \bar{a}_{\varkappa_n} a_1 .. a_m \mid e_{\lambda_1} \bar{e}_{\lambda_1} .. \bar{e}_{\lambda_n} e_1 .. e_m$$

$$.. e_{\lambda_n} \bar{e}_{\lambda_1} .. \bar{e}_{\lambda_n} e_1 .. e_m$$

$$= \bar{a}_{\varkappa_1} .. \bar{a}_{\varkappa_n} a_1 .. a_m \mid \bar{e}_{\lambda_1} .. \bar{e}_{\lambda_n} e_1 .. e_m{}^{n-1} . a_1 .. a_m \mid e_1 .. e_m$$

hervor, dem man insbesondere die Form

$$a_1 a_{n+1} .. a_m .. a_n a_{n+1} .. a_m \mid e_1 e_{n+1} .. e_m .. e_n e_{n+1} .. e_m$$

$$= a_{n+1} .. a_m \mid e_{n+1} .. e_m{}^{n-1} . a_1 .. a_m \mid e_1 .. e_m$$

geben kann.

Eine Determinante von der Form $\bar{a}_{\varkappa_1} .. \bar{a}_{\varkappa_n} a_1 .. a_m \mid \bar{e}_{\lambda_1} .. \bar{e}_{\lambda_n} e_1 .. e_m$ nennt man eine Subdeterminante $(m-n)$ten Grades der m^2 Gröfsen $a_1 e_1, .., a_m e_m$; sie entsteht aus der Determinante $a_1 .. a_m \mid e_1 .. e_m$, abgesehen von einer als Faktor hinzutretenden Potenz der negativen Einheit, durch Entfernung der durch die Indices $\varkappa_1, .., \varkappa_n$ und $\lambda_1, .., \lambda_n$ bezeichneten Horizontal- und Vertikalreihen.

15. Wendet man die Operation $\bar{a}_1 \bar{a}_\varkappa$ auf das kombinatorische Produkt $\bar{a}_2 .. \bar{a}_{\varkappa-1} a_1 .. a_n$ an, so ergiebt sich die Gleichung

$$(\bar{a}_2 .. \bar{a}_{\varkappa-1} \bar{a}_1)(\bar{a}_2 .. \bar{a}_{\varkappa-1} \bar{a}_\varkappa) = \bar{a}_2 .. \bar{a}_{\varkappa-1} . \bar{a}_2 .. \bar{a}_{\varkappa-1} \bar{a}_1 \bar{a}_\varkappa$$

oder

$$(\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_{\varkappa-1})(\bar{a}_2 \ldots \bar{a}_\varkappa) = \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_{\varkappa-1} \cdot \bar{a}_1 \ldots \bar{a}_\varkappa,$$

und es ist daher

$$(\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_{\varkappa-1})(\bar{a}_2 \ldots \bar{a}_\varkappa) \mid (\bar{e}_1 \ldots \bar{e}_{\varkappa-1})(\bar{e}_2 \ldots \bar{e}_\varkappa)$$
$$= \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_{\varkappa-1} \mid \bar{e}_2 \ldots \bar{e}_{\varkappa-1} \cdot \bar{a}_1 \ldots \bar{a}_\varkappa \mid \bar{e}_1 \ldots \bar{e}_\varkappa.$$

Entwickeln wir die links stehende Determinante und dividieren dann die Gleichung durch das Produkt

$$\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_{\varkappa-1} \mid \bar{e}_1 \ldots \bar{e}_{\varkappa-1} \cdot \bar{a}_1 \ldots \bar{a}_\varkappa \mid \bar{e}_1 \ldots \bar{e}_\varkappa,$$

so gelangen wir zu der Gleichung

$$\frac{\bar{a}_2 \ldots \bar{a}_\varkappa \mid \bar{e}_2 \ldots \bar{e}_\varkappa}{\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_\varkappa \mid \bar{e}_1 \ldots \bar{e}_\varkappa} - \frac{\bar{a}_2 \ldots \bar{a}_{\varkappa-1} \mid \bar{e}_2 \ldots \bar{e}_{\varkappa-1}}{\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_{\varkappa-1} \mid \bar{e}_1 \ldots \bar{e}_{\varkappa-1}}$$

$$= \frac{\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_{\varkappa-1} \mid \bar{e}_2 \ldots \bar{e}_\varkappa \cdot \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_\varkappa \mid \bar{e}_1 \ldots \bar{e}_{\varkappa-1}}{\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_{\varkappa-1} \mid \bar{e}_1 \ldots \bar{e}_{\varkappa-1} \cdot \bar{a}_1 \ldots \bar{a}_\varkappa \mid \bar{e}_1 \ldots \bar{e}_\varkappa},$$

in der der Minuendus für $\varkappa = n$ den Wert

$$\frac{\bar{a}_2 \ldots \bar{a}_n \mid \bar{e}_2 \ldots \bar{e}_n}{\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_n \mid \bar{e}_1 \ldots \bar{e}_n} = a_1 e_1$$

und der Subtrahendus und der rechts stehende Quotient bezw. für $\varkappa = 2$ und $\varkappa = 1$ den gemeinsamen Wert

$$\frac{1}{\bar{a}_1 \mid \bar{e}_1} = \frac{a_1 \ldots a_n \mid e_1 \ldots e_n}{a_2 \ldots a_n \mid e_2 \ldots e_n}$$

annehmen. Setzen wir daher $\varkappa = 2, \ldots, n$ und addieren die dadurch entstehenden Gleichungen, so erhalten wir den Kronecker'schen Subdeterminantensatz

$$a_1 e_1 = \sum_1^n \frac{\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_{\varkappa-1} \mid \bar{e}_2 \ldots \bar{e}_\varkappa \cdot \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_\varkappa \mid \bar{e}_1 \ldots \bar{e}_{\varkappa-1}}{\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_{\varkappa-1} \mid \bar{e}_1 \ldots \bar{e}_{\varkappa-1} \cdot \bar{a}_1 \ldots \bar{a}_\varkappa \mid \bar{e}_1 \ldots \bar{e}_\varkappa}.$$

16. Durch Anwendung dieses Satzes auf die kombinatorischen Produkte

$$a_1 p_1 a_1 e_1 \ldots a_1 e_m, \quad a_2 p_2 a_2 e_1 \ldots a_2 e_m$$

ergiebt sich die Gleichung

$$a_1 p_1 a_2 p_2 = \frac{a_1 p_1 a_1 e_1 \ldots a_1 e_m \mid a_2 p_2 a_2 e_1 \ldots a_2 e_m}{a_1 e_1 \ldots a_1 e_m \mid a_2 e_1 \ldots a_2 e_m}$$

$$+ \sum_1^m \frac{\overline{a_1 p_1}\,\overline{a_1 e_1} \ldots \overline{a_1 e_{\varkappa-1}} \mid \overline{a_2 e_1} \ldots \overline{a_2 e_\varkappa} \cdot \overline{a_1 e_1} \ldots \overline{a_1 e_\varkappa} \mid \overline{a_2 p_2}\,\overline{a_2 e_1} \ldots \overline{a_2 e_{\varkappa-1}}}{\overline{a_1 p_1}\,\overline{a_1 e_1} \ldots \overline{a_1 e_{\varkappa-1}} \mid \overline{a_2 p_2}\,\overline{a_2 e_1} \ldots \overline{a_2 e_{\varkappa-1}} \cdot \overline{a_1 p_1}\,\overline{a_1 e_1} \ldots \overline{a_1 e_\varkappa} \mid \overline{a_2 p_2}\,\overline{a_2 e_1} \ldots \overline{a_2 e_\varkappa}}$$

und folglich unter Berücksichtigung des Umstandes, daſs jene beiden kombinatorischen Produkte infolge der Gleichung $p = p\varepsilon_1 \cdot e_1 + \ldots + p\varepsilon_m \cdot e_m$ identisch verschwinden, die Formel

$$a_1 p_1 a_2 p_2 = \sum_1^m \frac{a_1 e_\varkappa \ldots a_1 e_m \mid a_1 p_2 a_2 e_{\varkappa+1} \ldots a_2 e_m \cdot a_1 p_1 a_1 e_{\varkappa+1} \ldots a_1 e_m \mid a_2 e_\varkappa \ldots a_2 e_m}{a_1 e_\varkappa \ldots a_1 e_m \mid a_2 e_\varkappa \ldots a_2 e_m \cdot a_1 e_{\varkappa+1} \ldots a_1 e_m \mid a_2 e_{\varkappa+1} \ldots a_2 e_m}.$$

Die Form $a_1 p_1 a_2 p_2$ ist für jede der beiden Gröſsen p_1 und p_2 eine lineare Form und heiſst deshalb eine bilineare Form, und die gegebene Formel stellt die Jacobi'sche Transformation derselben dar. Die Determinanten

$$a_1 p_1 a_1 e_{\varkappa+1} \ldots a_1 e_m \mid a_2 e_\varkappa \ldots a_2 e_m, \quad a_1 e_\varkappa \ldots a_1 e_m \mid a_2 p_2 a_2 e_{\varkappa+1} \ldots a_2 e_m$$

enthalten infolge der Gleichung $p = p\varepsilon_1 \cdot e_1 + \ldots + p\varepsilon_m \cdot e_m$ die Gröſsen $p_1 \varepsilon_{\varkappa+1}, \ldots, p_1 \varepsilon_m$ und $p_2 \varepsilon_{\varkappa+1}, \ldots, p_2 \varepsilon_m$ nicht, sondern nur die Gröſsen $p_1 \varepsilon_1, \ldots, p_1 \varepsilon_\varkappa$ und $p_2 \varepsilon_1, \ldots, p_2 \varepsilon_\varkappa$.

Läſst man die Indices der Gröſsen a und p weg, so ergiebt sich für die quadratische Form ap^2 die Darstellung

$$ap^2 = \sum_1^m \frac{(a^2)^{m-\varkappa+1}\, p e_{\varkappa+1} \ldots e_m \mid e_\varkappa \ldots e_m^{\;2}}{(a^2)^{m-\varkappa+1}\, e_\varkappa \ldots e_m^{\;2} \cdot (a^2)^{m-\varkappa}\, e_{\varkappa+1} \ldots e_m^{\;2}}.$$

17. Gelten für die Gröſsen $p\varepsilon_1, \ldots, p\varepsilon_m$ oder die Gröſse p die $m-1$ linearen Gleichungen

$$a_1 p = 0, \ldots, a_{m-1} p = 0,$$

so ist

$$p \equiv a_1 \ldots a_{m-1} \mid e_1 \ldots e_m,$$

weil die rechts stehende Gröſse bei der algebraischen multiplikativen Verbindung mit einer jeden der Gröſsen $a_1, \ldots, a_{m-1}$ den Wert Null annimmt, und folglich, wenn wir mit

$$\varepsilon_\varkappa = \frac{\bar{e}_\varkappa e_1 \ldots e_m}{e_1 \ldots e_m}$$

multiplizieren,

$$p\varepsilon_\varkappa \equiv a_1 \ldots a_{m-1} \mid \bar{e}_\varkappa e_1 \ldots e_m$$

und

$$\frac{p\varepsilon_\varkappa}{p\varepsilon_m} = -\frac{a_1 \ldots a_{m-1} \mid e_m \bar{e}_\varkappa e_1 \ldots e_{m-1}}{a_1 \ldots a_{m-1} \mid e_1 \ldots e_{m-1}}.$$

Sind ferner die m linearen Gleichungen

$$a_1 p = v_1, \ldots, a_m p = v_m$$

gegeben, so ist, wenn wir die Gleichungen

$$a_\varkappa \bar{a}_\varkappa = 1,\ a_\varkappa \bar{a}_\lambda = 0;\ \varepsilon_\varkappa = \bar{e}_\varkappa$$

berücksichtigen,

$$p = v_1 \bar{a}_1 + \ldots + v_m \bar{a}_m$$

und

$$p\varepsilon_\varkappa = (v_1 \bar{a}_1 + \ldots + v_m \bar{a}_m)\bar{e}_\varkappa$$

oder, wenn wir den Operationssymbolen die zugehörigen Quotienten beifügen,

$$a_1 \ldots a_m \mid e_1 \ldots e_m \,.\, p = (v_1 \bar{a}_1 + \ldots + v_m \bar{a}_m) a_1 \ldots a_m \mid e_1 \ldots e_m$$

und

$$a_1 \ldots a_m \mid e_1 \ldots e_m \,.\, p\varepsilon_\varkappa = (v_1 \bar{a}_1 + \ldots + v_m \bar{a}_m) a_1 \ldots a_m \mid \bar{e}_\varkappa e_1 \ldots e_m .$$

Die m linearen Gleichungen

$$(a_1 e_1 \,.\, \varepsilon_1 + \ldots + a_m e_1 \,.\, \varepsilon_m) p = v_1, \ldots, (a_1 e_m \,.\, \varepsilon_1 + \ldots + a_m e_m \,.\, \varepsilon_m) p = v_m$$

enthalten dieselben Koefficienten, wie die vorigen Gleichungen, nur in einer andern Anordnung, und gehen aus ihnen durch Vertauschung von a und e hervor, wenn man sie in der entwickelten Form

$$(a_1 e_1 \,.\, \varepsilon_1 + \ldots + a_1 e_m \,.\, \varepsilon_m) p = v_1, \ldots, (a_m e_1 \,.\, \varepsilon_1 + \ldots + a_m e_m \,.\, \varepsilon_m) p = v_m$$

darstellt. Es ist also für sie

$$p\varepsilon_\varkappa = \bar{a}_\varkappa (v_1 \bar{e}_1 + \ldots + v_m \bar{e}_m).$$

Genügt die Gröfse p den m Gleichungen

$$a_1 p = 0, \ldots, a_m p = 0,$$

so kann man den Wert, der sich für sie z. B. aus den letzten $m-1$ Gleichungen ergiebt, in die erste einsetzen und erhält dadurch als Resultat der Elimination der Gröfse p aus den gegebenen Gleichungen die sogenannte Resultante

$$a_1 \ldots a_m \mid e_1 \ldots e_m = 0.$$

Da die Determinante $a_1 \ldots a_m \mid e_1 \ldots e_m$, die man die Resultante der Formen $a_1 p, \ldots, a_m p$ nennt, ein Aggregat von Gliedern ist, die für eine jede der Zahlen $\varkappa = 1, \ldots, m$ aus dem Ausdrucke

$$a_\varkappa e_\lambda \,.\, \bar{a}_\varkappa a_1 \ldots a_m \mid \bar{e}_\lambda e_1 \ldots e_m$$

für $\lambda = 1, \ldots, m$ hervorgehen, so sind die Gröfsen $p\varepsilon_1, \ldots, p\varepsilon_m$ proportional den Subdeterminanten

$$\bar{a}_\varkappa a_1 \ldots a_m \mid \bar{e}_1 e_1 \ldots e_m, \ldots, \bar{a}_\varkappa a_1 \ldots a_m \mid \bar{e}_m e_1 \ldots e_m .$$

In der That ergiebt sich aus je $m-1$ von den gegebenen m Gleichungen

$$p \equiv \bar{a}_\varkappa a_1 \ldots a_m \mid e_1 \ldots e_m .$$

18. Nach dem 11ten Abschnitte ist die Determinante

$$a_1 \,..\, a_m \mid e_1 \,..\, e_m = (a_1 e_\lambda \,.\, \bar{a}_1 + \,..\, + a_m e_\lambda \,.\, \bar{a}_m) a_1 \,..\, a_m \mid \bar{e}_\lambda e_1 \,..\, e_m$$

und folglich der Ausdruck

$$(a_1 e_\varkappa \,.\, \bar{a}_1 + \,..\, + a_m e_\varkappa \,.\, \bar{a}_m) a_1 \,..\, a_m \mid \bar{e}_\lambda e_1 \,..\, e_m$$

für $\varkappa \lesseqgtr \lambda$ gleich Null und für $\varkappa = \lambda$ gleich der Determinante $a_1 \,..\, a_m \mid e_1 \,..\, e_m$, denn er hat den Wert der Determinante, die aus dieser dadurch hervorgeht, dafs man in ihr $e_\varkappa$ an die Stelle von e_λ setzt. Es hat also

$$(a_1 e_\varkappa \,.\, \bar{a}_1 + \,..\, + a_m e_\varkappa \,.\, \bar{a}_m)\, \bar{e}_\lambda$$

und natürlich ebenso

$$(a_\varkappa e_1 \,.\, \bar{e}_1 + \,..\, + a_\varkappa e_m \,.\, \bar{e}_m)\, \bar{a}_\lambda$$

den Wert Eins oder Null, je nachdem $\varkappa$ und λ gleich oder ungleich sind.

Multipliziert man den Ausdruck

$$(a_1 e_\varkappa \,.\, \bar{a}_1 + \,..\, + a_m e_\varkappa \,.\, \bar{a}_m)\, \bar{e}_\lambda$$

mit $p\varepsilon_\varkappa$ für $\varkappa = 1, .., m$, so erhält man durch Addition die Gleichung

$$p\varepsilon_\lambda = (a_1 p \,.\, \bar{a}_1 + \,..\, + a_m p \,.\, \bar{a}_m)\, \bar{e}_\lambda$$

und aus dieser die Gleichung

$$p = a_1 p \,.\, \bar{a}_1 + \,..\, + a_m p \,.\, \bar{a}_m\,,$$

durch welche sich, wenn wir

$$a_1 p = v_1\,, \,..\,, a_m p = v_m$$

setzen, die Gröfse p bestimmt, die diesen Gleichungen genügt.

19. Die Subdeterminante

$$\bar{a}_\varkappa a_1 \,..\, a_m \mid \bar{e}_\lambda e_1 \,..\, e_m\,,$$

welche den Koefficienten des Elementes $a_\varkappa e_\lambda$ in der Entwickelung der Determinante $a_1 \,..\, a_m \mid e_1 \,..\, e_m$ darstellt, kann man für $\lambda = 1, .., \varkappa - 1, \varkappa + 1, .., m$ in der Form

$$a_\mu \bar{a}_\varkappa \bar{a}_\mu a_1 \,..\, a_m \mid e_\varkappa \bar{e}_\lambda \bar{e}_\varkappa e_1 \,..\, e_m$$

oder

$$-a_\mu \bar{a}_\varkappa \bar{a}_\mu a_1 \,..\, a_m \mid e_\varkappa \bar{e}_\varkappa \bar{e}_\lambda e_1 \,..\, e_m$$

darstellen und somit aus Gliedern zusammensetzen, die aus dem Ausdrucke

$$-a_\mu e_\varkappa \,.\, \bar{a}_\varkappa \bar{a}_\mu a_1 \,..\, a_m \mid \bar{e}_\varkappa \bar{e}_\lambda e_1 \,..\, e_m$$

für $\mu = 1, .., \varkappa - 1, \varkappa + 1, .., m$ hervorgehen.

Folglich ist

$$a_1 \ldots a_m \mid e_1 \ldots e_m - a_\varkappa e_\varkappa \, . \, \bar{a}_\varkappa a_1 \ldots a_m \mid \bar{e}_\varkappa e_1 \ldots e_m$$

ein Aggregat von Gliedern, die man aus dem Ausdrucke

$$-a_\varkappa e_\lambda \, . \, a_\mu e_\varkappa \, . \, \bar{a}_\varkappa \bar{a}_\mu a_1 \ldots a_m \mid \bar{e}_\varkappa \bar{e}_\lambda e_1 \ldots e_m$$

für $\lambda = 1, \ldots, \varkappa - 1, \varkappa + 1, \ldots, m$ und $\mu = 1, \ldots, \varkappa - 1, \varkappa + 1, \ldots, m$ oder, wir können auch sagen, für $\lambda = 1, \ldots, m$ und $\mu = 1, \ldots, m$ erhält.

Als Beispiel zu diesem sogenannten Cauchy'schen Determinantensatze betrachten wir die Determinante

$$(a^n p^{n-2})^{m+1} p e_1 \ldots e_m^{\,2},$$

welche offenbar verschwindet, weil $p = p\varepsilon_1 \, . \, e_1 + \ldots + p\varepsilon_m \, . \, e_m$ und deshalb $pe_1 \ldots e_m = 0$ ist. Es ist

$$(a^n p^{n-2})^{m+1} p e_1 \ldots e_m^{\,2} - ap^n \, . \, (a^n p^{n-2})^m e_1 \ldots e_m^{\,2}$$

ein Aggregat von Gliedern, die aus dem Ausdrucke

$$-a^n p^{n-1} e_\lambda \, . \, a^n p^{n-1} e_\mu \, . \, (a^n p^{n-2})^{m-1} \bar{e}_\mu e_1 \ldots e_m \mid \bar{e}_\lambda e_1 \ldots e_m,$$

und folglich

$$ap^n \, . \, (a^n p^{n-2})^m e_1 \ldots e_m^{\,2}$$

ein Aggregat von Gliedern, die aus dem Ausdrucke

$$a^n p^{n-1} e_\lambda \, . \, a^n p^{n-1} e_\mu \, . \, (a^n p^{n-2})^{m-1} \bar{e}_\mu e_1 \ldots e_m \mid \bar{e}_\lambda e_1 \ldots e_m$$

für $\lambda = 1, \ldots, m$ und $\mu = 1, \ldots, m$ hervorgehen.

Die Form

$$(a^n p^{n-2})^m e_1 \ldots e_m^{\,2} = (a^n)^m e_1 \ldots e_m^{\,2} p^{m(n-2)}$$

ist die sogenannte Hefse'sche Determinante der Form ap^n und

$$(a^n p^{n-2})^{m-1} \bar{e}_\mu e_1 \ldots e_m \mid \bar{e}_\lambda e_1 \ldots e_m$$

der Koefficient des Elementes $a^n p^{n-2} e_\lambda e_\mu$ in der Entwickelung dieser offenbar algebraisch-symmetrischen Determinante. Die Form

$$a_1^{n_1} p^{n_1 - 1} \ldots a_m^{n_m} p^{n_m - 1} \mid e_1 \ldots e_m = a_1^{n_1} \ldots a_m^{n_m} \mid e_1 \ldots e_m \;\; p^{n_1 + \ldots + n_m - m}$$

wird die Jacobi'sche Determinante der Formen $a_1 p^{n_1}, \ldots, a_m p^{n_m}$ genannt, und es ist also die Hefse'sche Determinante der Form ap^n die Jacobi'sche Determinante der Formen $a^n e_1 p^{n-1}, \ldots, a^n e_m p^{n-1}$.

20. Die Determinante

$$(q_1 \varepsilon_1 + a_1) \ldots (q_n \varepsilon_n + a_n) \mid e_1 \ldots e_n$$

stimmt, da ihr $(\varkappa, \lambda)$tes Element $(q_\varkappa \varepsilon_\varkappa + a_\varkappa) e_\lambda$ für $\lambda \lessgtr \varkappa$ gleich $a_\varkappa e_\lambda$ und für $\lambda = \varkappa$ gleich $q_\varkappa + a_\varkappa e_\varkappa$ ist, in allen Elementen mit ungleichen Indices mit der Determinante

$$a_1 \, . \, . \, a_n \mid e_1 \, . \, . \, e_n$$

überein und unterscheidet sich von ihr nur in den Elementen mit gleichen Indices um die additiven Gröfsen $q_1, \, . \, . \, , q_n$. Durch Entwickelung des links stehenden kombinatorischen Produktes ergiebt sich unter Berücksichtigung der Gleichung

$$\varepsilon_1 \, . \, . \, \varepsilon_\varkappa a_{\varkappa+1} \, . \, . \, a_n \mid e_1 \, . \, . \, e_\varkappa e_{\varkappa+1} \, . \, . \, e_n = a_{\varkappa+1} \, . \, . \, a_n \mid e_{\varkappa+1} \, . \, . \, e_n,$$

dafs sie als ein Aggregat von Gliedern darstellbar ist, die man aus dem Ausdrucke

$$(q; n) \, q_1 \, . \, . \, q_\varkappa \, . \, a_{\varkappa+1} \, . \, . \, a_n \mid e_{\varkappa+1} \, . \, . \, e_n$$

oder

$$(a, e; n) \, a_1 \, . \, . \, a_\varkappa \mid e_1 \, . \, . \, e_\varkappa \, . \, q_{\varkappa+1} \, . \, . \, q_n$$

für $\varkappa = 0, \, . \, . \, , n$ erhält.

21. Die Determinante

$$(a_1 - a_1 e_1 \, . \, \varepsilon_1) \, . \, . \, (a_n - a_n e_n \, . \, \varepsilon_n) \mid e_1 \, . \, . \, e_n$$

unterscheidet sich von der Determinante $a_1 \, . \, . \, a_n \mid e_1 \, . \, . \, e_n$ nur dadurch, dafs ihre Elemente mit gleichen Indices Nullen sind. Determinanten dieser Art treten in der Entwickelung der Determinante

$$a_1 \, . \, . \, a_n \mid e_1 \, . \, . \, e_n$$

nach den Produkten der Elemente mit gleichen Indices auf. Da nämlich

$$a_1 \, . \, . \, a_n = (a_1 e_1 \, . \, \varepsilon_1 + (a_1 - a_1 e_1 \, . \, \varepsilon_1)) \, . \, . \, (a_n e_n \, . \, \varepsilon_n + (a_n - a_n e_n \, . \, \varepsilon_n))$$

ist, so kann man sie aus Gliedern zusammensetzen, die aus dem Ausdrucke

$$(ae; n) \, a_1 e_1 \, . \, . \, a_\varkappa e_\varkappa \, . \, (a_{\varkappa+1} - a_{\varkappa+1} e_{\varkappa+1} \, . \, \varepsilon_{\varkappa+1}) \, . \, . \, (a_n - a_n e_n \, . \, \varepsilon_n) \mid e_{\varkappa+1} \, . \, . \, e_n$$

für $\varkappa = 0, \, . \, . \, , n$ hervorgehen.

22. Eine algebraisch- und eine kombinatorisch-symmetrische Determinante ist durch die Determinante

$$ae_1 a \, . \, . \, ae_n a \mid e_1 \, . \, . \, e_n$$

darstellbar, wenn wir das Produkt $ae_\varkappa ae_\lambda$ oder $a^2 e_\varkappa e_\lambda$, welches ihr $(\varkappa, \lambda)$tes Element darstellt, im ersten Falle als ein algebraisches und im zweiten Falle als ein kombinatorisches Produkt ansehen. Der algebraisch-symmetrischen Determinante können wir aber die noch einfachere Form

$$(a^2)^n \, e_1 \, . \, . \, e_n^{\,2}$$

geben.

23. Die algebraisch-symmetrische Determinante
$$(a^2)^n e_1 \, .. \, e_n^{\,2}$$
hat, wenn die Summe der Elemente einer jeden Reihe verschwindet oder also
$$a^2 e_\varkappa (e_1 + .. + e_n) = 0$$
ist, als in der Form $(a^2)^n e_1 \, .. \, e_n \mid (e_1 + .. + e_n)\, e_2 \, .. \, e_n$ darstellbar den Wert Null und ferner die Eigenschaft, daſs in ihr alle Elemente gleiche Koefficienten haben. Der Wert des Koefficienten des Elementes $a^2 e_\varkappa e_\lambda$
$$(a^2)^{n-1} \bar{e}_\varkappa e_1 \, .. \, e_n \mid \bar{e}_\lambda \; e_1 \, .. \, e_n$$
ist nämlich von $\varkappa$ und λ unabhängig, weil man in dieser Determinante z. B. das kombinatorische Produkt $\bar{e}_\lambda e_1 \, .. \, e_n$ für $\lambda > 1$ durch $-e_1 \bar{e}_\lambda e_2 \, .. \, e_n$ und darnach durch $(e_2 + .. + e_n)\, \bar{e}_\lambda \, e_2 \, .. \, e_n = e_\lambda \bar{e}_\lambda e_2 \, .. \, e_n = e_2 \, .. \, e_n$ ersetzen kann.

Die Determinante
$$(a^2)^{n-1} \, e_2 \, .. \, e_n^{\,2},$$
welche den allen Elementen gemeinsamen Koefficienten darstellt, kann durch Determinanten von derselben Form, aber von niedrigerem Grade ausgedrückt werden, wenn man in ihr das $(\varkappa, \varkappa)$te Element $a^2 e_{\varkappa+1}^2$ durch die übrigen Elemente der $\varkappa$ten Horizontal- oder Vertikalreihe in der Form
$$- a^2 \, e_{\varkappa+1} (e_1 + .. + e_\varkappa + e_{\varkappa+2} + .. + e_n)$$
darstellt. Denn sie läſst sich, wenn man ihr die Form
$$(a^2)^{n-1} \left(-e_2 e_1 \cdot \varepsilon_2 + e_2 \left(1 - (e_2 + .. + e_n)\varepsilon_2\right)\right) .. \left(-e_n e_1 \, . \, \varepsilon_n - e_n \left(1 - (e_2 + .. + e_n)\varepsilon_n\right)\right) \mid e_2 \, .. \, e_n$$
giebt, nach den Produkten der in ihren Elementen mit gleichen Indices auftretenden Gröſsen
$$a^2 e_2 e_1 \, , .. , \, a^2 e_n e_1$$
aus Gliedern zusammensetzen, die aus dem Ausdrucke
$$(-1)^\mu \, (a^2 e e_1 \, ; n-1) \, a^2 e_2 e_1 \, .. \, a^2 e_{\mu+1} e_1 \, .$$
$$(a^2)^{n-\mu-1} \, e_{\mu+2} \left(1 - (e_2 + .. + e_n)\varepsilon_{\mu+2}\right) .. \, e_n \left(1 - (e_2 + .. + e_n)\varepsilon_n\right) \mid e_{\mu+2} \, .. \, e_n$$
für $\mu = 0, .. , n-1$ oder, da die dem Werte $\mu = 0$ entsprechende algebraisch-symmetrische Determinante
$$(a^2)^{n-1} \, e_2 \left(1 - (e_2 + .. + e_n)\varepsilon_2\right) .. \, e_n \left(1 - (e_2 + .. + e_n)\varepsilon_n\right) \mid e_2 \, .. \, e_n$$
infolge des Verschwindens der Summe der Elemente einer jeden

Reihe den Wert Null hat, für $\mu = 1, .., n-1$ hervorgehen, und die in diesem Ausdrucke auftretende Determinante

$$(a^2)^{n-\mu-1} e_{\mu+2}(1-(e_2+..+e_n)\varepsilon_{\mu+2})..e_n(1-(e_2+.. \\ +e_n)\varepsilon_n) \mid e_{\mu+2}..e_n$$

entsteht, da ihr $(\varkappa, \lambda)$tes Element für $\lambda \lessgtr \varkappa$ die Form

$$a^2 e_{\mu+\varkappa+1} e_{\mu+\lambda+1}$$

und für $\lambda = \varkappa$ die Form

$$-a^2 e_{\mu+\varkappa+1}(e_2+..+e_{\mu+\varkappa}+e_{\mu+\varkappa+2}+..+e_n)$$

hat, aus der Determinante

$$(a^2)^{n-\mu-1} e_2..e_{n-\mu}^{\;2},$$

deren $(\varkappa, \lambda)$tes Element für $\lambda \lessgtr \varkappa$ die Form

$$a^2 e_{\varkappa+1} e_{\lambda+1}$$

und für $\lambda = \varkappa$ die Form

$$-a^2 e_{\varkappa+1}(e_1+..+e_\varkappa+e_{\varkappa+2}+..+e_{n-\mu})$$

hat, dadurch, dafs man in dieser die Indices um μ vergröfsert und das aus e_1 entstehende $e_{\mu+1}$ durch $e_2+..+e_{\mu+1}$ ersetzt.

24. Die kombinatorisch-symmetrische Determinante

$$ae_1a..ae_na \mid e_1..e_n$$

hat bei ungeradem n den Wert Null, denn es ist

$$(-1)^n ae_1a.\,ae_na \mid e_1..e_n = aae_1..aae_n \mid e_1..e_n$$

und somit, da $e_1..e_n \mid aae_1..aae_n = ae_1a..ae_na \mid e_1..e_n$ ist,

$$(-1)^n ae_1a..ae_na \mid e_1..e_n = ae_1a..ae_na \mid e_1..e_n.$$

Und ebenso ergiebt sich die Gleichung

$$(-1)^{n-1}\,\overline{ae_\varkappa a}\,ae_1a..ae_na \mid \bar{e}_\lambda e_1..e_n = \overline{ae_\lambda a}\,ae_1a..ae_na \mid \bar{e}_\varkappa e_1..e_n$$

und damit der Satz, dafs die Subdeterminante

$$\overline{ae_\varkappa a}\,ae_1a..ae_na \mid \bar{e}_\lambda e_1..e_n$$

bei Vertauschung von $\varkappa$ und λ bei ungeradem n denselben und bei geradem n den entgegengesetzten Wert annimmt.

Hiernach ist ferner, wie die Betrachtung der Determinante

$$\overline{ae_{n-1}a}\,\overline{ae_na} \mid \bar{e}_{n-1}\bar{e}_n$$

zeigt, bei geradem n

$$ae_1a..ae_na \mid e_1..e_n \,.\, ae_1a..ae_{n-2}a \mid e_1..e_{n-2} \\ = \overline{ae_na}\,ae_1a..ae_na \mid \bar{e}_{n-1}e_1..e_n^{\;2}$$

und also $ae_1a..ae_na \mid e_1..e_n$ ein Quadrat, wenn $ae_1a..ae_{n-2}a \mid e_1..e_{n-2}$

ein Quadrat ist. Nun ist $(ae_1a)(ae_2a) \mid e_1 e_2 = ae_1ae_2{}^2$; folglich ist die kombinatorisch-symmetrische Determinante $ae_1a..ae_na \mid e_1..e_n$ bei geradem n ein Quadrat.

25. Die kombinatorisch-symmetrische Determinante $ae_1a..ae_na \mid e_1..e_n$ setzt sich nach dem Cauchy'schen Determinantensatze aus Gliedern zusammen, die aus dem Ausdrucke

$$a^2e_1e_\varkappa\; a^2e_1e_\lambda \cdot \overline{ae_\varkappa a}\; ae_2a..ae_na \mid \bar{e}_\lambda e_2..e_n$$

für $\varkappa = 2,..,n$ und $\lambda = 2,..,n$ hervorgehen. Nun ist bei geradem n, wie sich bei Bezug auf die in diesem Falle verschwindende Determinante $ae_2a..ae_na \mid e_2..e_n$ aus der Determinante

$$\overline{ae_\varkappa a}\;\overline{ae_\lambda a} \mid \bar{e}_\varkappa \bar{e}_\lambda$$

ergiebt,

$$\overline{ae_\varkappa a}\; ae_2a..ae_na \mid \bar{e}_\lambda e_2..e_n{}^2 = \overline{ae_\varkappa a}\; ae_2a..ae_na \mid \bar{e}_\varkappa e_2..e_n \cdot \overline{ae_\lambda a}\; ae_2a..ae_na \mid \bar{e}_\lambda e_2..e_n$$

oder

$$\overline{ae_\varkappa a}\; ae_2a..ae_na \mid \bar{e}_\lambda e_2..e_n = \sqrt[2]{\overline{ae_\varkappa a}\; ae_2a..ae_na \mid \bar{e}_\varkappa e_2..e_n} \cdot \sqrt[2]{\overline{ae_\lambda a}\; ae_2a..ae_na \mid \bar{e}_\lambda e_2..e_n}\,,$$

also ist, da die Zeichen der Wurzeln, wie aus der Annahme $\varkappa = \lambda$ erhellt, einander gleich sind und daher dasselbe von den Zeichen sämtlicher den Werten von λ und den Werten von $\varkappa$ entsprechenden Wurzeln gilt, die kombinatorisch-symmetrische Determinante $ae_1a..ae_na \mid e_1..e_n$ bei geradem n das Quadrat eines Aggregats von $n-1$ Gliedern, die aus dem Ausdrucke

$$a^2e_1e_\varkappa \sqrt[2]{\overline{ae_\varkappa a}\; ae_2a..ae_na \mid \bar{e}_\varkappa e_2..e_n}$$

oder

$$(-1)^{\varkappa-2} a^2e_1e_\varkappa \sqrt[2]{ae_2a..(ae_{\varkappa-1}a)(ae_{\varkappa+1}a)..ae_na \mid e_2..e_{\varkappa-1}e_{\varkappa+1}..e_n}$$

bei gleichen Zeichen der Wurzeln für $\varkappa = 2,..,n$ hervorgehen. Ebenso ist die unter dem Wurzelzeichen stehende Determinante das Quadrat eines Aggregats von $n-3$ Gliedern von entsprechender Form, u. s. w. Folglich ist die kombinatorisch-symmetrische Determinante $ae_1a..ae_na \mid e_1..e_n$ das Quadrat der Summe aller derjenigen Ausdrücke, die man aus dem Produkte $ae_1..ae_n$ dadurch erhält, dafs man auf alle möglichen Weisen die n Faktoren zu zweien kombiniert und den dadurch entstehenden, $\frac{n}{2}$ Faktoren enthaltenden Produkten das Plus- oder Minuszeichen beifügt, je nachdem die Reihe der Indices durch eine gerade oder ungerade Anzahl von Vertauschungen zweier Indices in die Reihe $1,..,n$ übergeht. Diese Summe, deren Gliederzahl $(n-1)(n-3)..3.1$ ist, heifst die Pfaff'sche Form und mag durch das Zeichen

$$a^n(2)e_1..e_n,$$

in dem, da die Summe bei Vertauschung zweier Indices das entgegengesetzte Zeichen annimmt, $e_1..e_n$ ein kombinatorisches Produkt ist, bezeichnet werden. Es ist dann

$$ae_1a..ae_na \mid e_1..e_n = a^n(2)e_1..e_n^2$$

und ferner die Pfaff'sche Form $a^n(2)e_1..e_n$ ein Aggregat von Gliedern, die aus dem Ausdrucke

$$a^2e_1e_\varkappa a^{n-2}(2)\bar{e}_\varkappa e_2..e_n$$

für $\varkappa = 2,..,n$ hervorgehen.

Da man der hier auftretenden Pfaff'schen Form $a^{n-2}(2)\bar{e}_\varkappa e_2..e_n$ für $\varkappa > 2$ die Form $-a^{n-2}(2)e_2\bar{e}_\varkappa e_3..e_n$ geben und daher aus Gliedern zusammensetzen kann, die aus dem Ausdrucke

$$-a^2e_2e_\lambda a^{n-4}(2)\bar{e}_\varkappa\bar{e}_\lambda e_3..e_n$$

für $\lambda = 3,..,\varkappa-1,\varkappa+1,..,n$ entstehen, so folgt weiter, dafs

$$a_n(2)e_1..e_n - a^2e_1e_2a^{n-2}(2)e_3..e_n$$

ein Aggregat von Gliedern ist, die man aus dem Ausdrucke

$$-a^2e_1e_\varkappa\, a^2e_2e_\lambda\, a^{n-4}(2)\bar{e}_\varkappa\bar{e}_\lambda e_3..e_n$$

für $\varkappa = 3,..,n$ und $\lambda = 3,..,\varkappa-1,\varkappa+1,..,n$ oder auch $\lambda = 3,..,n$ erhält.

26. Im 8ten Abschnitte haben wir bemerkt, dafs das Quadrat einer jeden Determinante eine algebraisch-symmetrische Determinante ist. Es ist

$$a_1..a_n \mid e_1..e_n^2 = (a_1^2+..+a_n^2)^n e_1..e_n^2.$$

Ebenso kann nun das Quadrat einer jeden Determinante geraden Grades auch durch eine kombinatorisch-symmetrische Determinante und darnach die Determinante selbst durch eine Pfaff'sche Form und zwar in verschiedenen Weisen dargestellt werden.

Offenbar ist

$$(a_1e_1 . p_1 + .. + a_1e_n . p_n) .. (a_ne_1 . p_1 + .. + a_ne_n . p_n) = a_1 .. a_n \mid e_1 .. e_n . p_1 .. p_n .$$

Ist n gerade und sind $\varkappa_1\varkappa_2, .., \varkappa_{n-1}\varkappa_n$ $\frac{n}{2}$ Kombinationen der Zahlen $1, .., n$ zu je 2 von der Art, dafs die Zahlen $\varkappa_1, .., \varkappa_n$ sämtlich von einander verschieden sind, — diese Kombinationen treten in der Pfaff'schen Form auf — so ist, wenn wir die Gröfsen $p_1, .., p_n$ mit den Einheiten $e_1 .., e_n$ durch die kombinatorischen Gleichungen

$$p_{\varkappa_1} p_{\varkappa_2} = e_{\varkappa_1} e_{\varkappa_2}, .., p_{\varkappa_{n-1}} p_{\varkappa_n} = e_{\varkappa_{n-1}} e_{\varkappa_n}$$

verbinden, stets

$$p_1 .. p_n = e_1 .. e_n$$

und ferner, wenn wir weiter

$$p_{\varkappa_1} = - e_{\varkappa_2}, p_{\varkappa_2} = e_{\varkappa_1}; ..; p_{\varkappa_{n-1}} = - e_{\varkappa_n}, p_{\varkappa_n} = e_{\varkappa_{n-1}}$$

setzen, zunächst

$$ae_{\varkappa_1} . p_{\varkappa_1} + ae_{\varkappa_2} . p_{\varkappa_2} = a \mid e_{\varkappa_1} e_{\varkappa_2}, .., ae_{\varkappa_{n-1}} . p_{\varkappa_{n-1}} + ae_{\varkappa_n} . p_{\varkappa_n} = a \mid e_{\varkappa_{n-1}} e_{\varkappa_n}$$

und somit

$$ae_1 . p_1 + .. + ae_n . p_n = a \mid (e_{\varkappa_1} e_{\varkappa_2} + .. + e_{\varkappa_{n-1}} e_{\varkappa_n}).$$

Folglich ist nach der obigen Gleichung unter den angegebenen Bedingungen

$$a_1 .. a_n \mid e_1 .. e_n . e_1 .. e_n = a_1 \mid (e_{\varkappa_1} e_{\varkappa_2} + .. + e_{\varkappa_{n-1}} e_{\varkappa_n}) .. a_n \mid (e_{\varkappa_1} e_{\varkappa_2} + .. + e_{\varkappa_{n-1}} e_{\varkappa_n})$$

und demnach

$$a_1 . a_n \mid e_1 .. e_n^2 = a_1 .. a_n \mid a_1 \mid (e_{\varkappa_1} e_{\varkappa_2} + .. + e_{\varkappa_{n-1}} e_{\varkappa_n}) .. a_n \mid (e_{\varkappa_1} e_{\varkappa_2} + .. + e_{\varkappa_{n-1}} e_{\varkappa_n}).$$

Die rechts stehende Determinante ist eine kombinatorisch-symmetrische Determinante, denn das $(\varkappa, \lambda)$te Element hat die Form

$$a_\varkappa a_\lambda \mid (e_{\varkappa_1} e_{\varkappa_2} + .. + e_{\varkappa_{n-1}} e_{\varkappa_n}).$$

Es entspricht dem Elemente $a^2 e_\varkappa e_\lambda$ der kombinatorisch-symmetrischen Determinante $ae_1a .. ae_na \mid e_1 .. e_n$. Die zu ihr gehörige Pfaff'sche Form hat daher die Form

$$(e_{\varkappa_1} e_{\varkappa_2} + .. + e_{\varkappa_{n-1}} e_{\varkappa_n})^{\frac{n}{2}}(2) a_1 .. a_n$$

und kann sich nur durch ihr Zeichen von der Determinante $a_1 .. a_n \mid e_1 .. e_n$ unterscheiden. Es ist aber $a_1e_{\varkappa_1} .. a_n e_{\varkappa_n}$ ein Glied der Pfaff-schen Form und zugleich, behaftet mit dem Plus- oder Minuszeichen, je nachdem die Reihe der Indices $\varkappa_1, .., \varkappa_n$ durch eine gerade oder ungerade Anzahl von Vertauschungen zweier Indices in die Reihe $1, .., n$ übergeht, auch ein Glied der Determinante; folglich ist

$$a_1 .. a_n \mid e_1 .. e_n = e_{\varkappa_1} .. e_{\varkappa_n} \mid \varepsilon_1 .. \varepsilon_n . (e_{\varkappa_1} e_{\varkappa_2} + .. + e_{\varkappa_{n-1}} e_{\varkappa_n})^{\frac{n}{2}} (2) a_1 .. a_n .$$

Beispielsweise ist u. a. für $n = 4$

$$a_1 .. a_4 \mid e_1 .. e_4 = a_1 a_2 \mid (e_1 e_2 + e_3 e_4) . a_3 a_4 \mid (e_1 e_2 + e_3 e_4)$$
$$- a_1 a_3 \mid (e_1 e_2 + e_3 e_4) . a_2 a_4 \mid (e_1 e_2 + e_3 e_4) + a_1 a_4 \mid (e_1 e_2 + e_3 e_4)$$
$$. a_2 a_3 \mid (e_1 e_2 + e_3 e_4),$$

und in der That ist die rechts stehende Pfaff'sche Form gleich
$\frac{1}{2} a_1 .. a_4 \mid (e_1 e_2 + e_3 e_4)(e_1 e_2 + e_3 e_4) = a_1 .. a_4 \mid e_1 .. e_4$.

27. Aus der Determinante

$$\overline{a e_\varkappa a}\, \overline{a e\ a} \mid \bar{e}_\varkappa \bar{e}_\lambda$$

ergiebt sich, da bei ungeradem n $a e_1 a .. a e_n a \mid e_1 .. e_n$ und bei geradem n $\overline{a e_\varkappa a}\, a e_1 a .. a e_n a \mid \bar{e}_\varkappa e_1 .. e_n$ den Wert Null hat und ferner

$$\overline{a e_\varkappa a}\, a e_1 a .. a e_n a \mid \bar{e}_\lambda e_1 .. e_n$$

bei Vertauschung von $\varkappa$ und λ im ersten Falle denselben und im zweiten Falle den entgegengesetzten Wert annimmt, dafs das Quadrat dieser Subdeterminante bei ungeradem n dem Produkte

$$\overline{a e_\varkappa a}\, a e_1 a .. a e_n a \mid \bar{e}_\varkappa e_1 .. e_n . \overline{a e_\lambda a}\, a e_1 a .. a e_n a \mid \bar{e}_\lambda e_1 .. e_n$$

und bei geradem n dem Produkte

$$a e_1 a .. a e_n a \mid e_1 .. e_n . \overline{a e_\varkappa a}\, \overline{a e_\lambda a}\, a e_1 a .. a e_n a \mid \bar{e}_\varkappa \bar{e}_\lambda e_1 .. e_n$$

gleich ist und also die Subdeterminante selbst sich bezw. von den Produkten

$$a^{n-1}(2) \bar{e}_\varkappa e_1 .. e_n . a^{n-1}(2) \bar{e}_\lambda e_1 .. e_n , \quad a^n (2) e_1 .. e_n . a^{n-2}(2) \bar{e}_\varkappa \bar{e}_\lambda e_1 .. e_n$$

nur durch ihr Zeichen unterscheiden kann. Es findet aber auch darin eine Übereinstimmung statt, wie bei ungeradem n für $\varkappa = \lambda$ unmittelbar erhellt und bei geradem n für $\varkappa = 1$, $\lambda = 2$ sich durch Vergleichung des Zeichens eines Gliedes in beiden Ausdrücken ergiebt. Für diese Annahme haben die Subdeterminante und das Produkt die Form

$$- a e_2 a .. a e_n a \mid e_1 e_3 .. e_n , \quad a^n (2) e_1 .. e_n . a^{n-2}(2) e_3 .. e_n ,$$

und die Subdeterminante enthält als in der Form

$$(a a e_1)(a e_3 a)(a a e_4) .. (a e_{n-1} a)(a a e_n) \mid e_1 e_4 e_3 .. e_n e_{n-1}$$

darstellbar das Glied

$$a^2 e_1 e_2 \; a^2 e_3 e_4 \,..\, a^2 e_{n-1} e_n \,.\, a^2 e_3 e_4 \,..\, a^2 e_{n-1} e_n \,,$$

welches mit demselben Zeichen offenbar dem Produkte gleichfalls angehört. Es ist daher bei ungeradem n

$$\overline{ae_\varkappa a}\; ae_1 a \,..\, ae_n a \,|\, \bar{e}_\lambda e_1 \,..\, e_n = a^{n-1}(2)\bar{e}_\varkappa e_1 \,..\, e_n \,.\, a^{n-1}(2)\,\bar{e}_\lambda e_1 \,..\, e_n$$

und bei geradem n

$$\overline{ae_\varkappa a}\, ae_1 a \,..\, ae_n a \,|\, \bar{e}_\lambda e_1 \,..\, e_n = a^n(2) e_1 \,..\, e_n \,.\, a^{n-2}(2)\bar{e}_\varkappa \bar{e}_\lambda e_1 \,..\, e_n \,.$$

28. Die Determinante

$$(ap_1 a) ae_1 a \,..\, ae_n a \,|\, p_2 e_1 \,..\, e_n$$

hat nach dem Cauchy'schen Determinantensatze die Eigenschaft, dafs sich die Differenz

$$(ap_1 a) ae_1 a \,..\, ae_n a \,|\, p_2 e_1 \,..\, e_n - a^2 p_1 p_2 \,.\, ae_1 a \,..\, ae_n a \,|\, e_1 \,..\, e_n$$

aus Gliedern zusammensetzt, die aus dem Ausdrucke

$$a^2 p_1 e_\lambda \; a^2 p_2 e_\varkappa \,.\, \overline{ae_\varkappa a}\, ae_1 a \,..\, ae_n a \,|\, \bar{e}_\lambda e_1 \,..\, e_n$$

für $\varkappa = 1, .., n$ und $\lambda = 1, .., n$ hervorgehen.

Bei ungeradem n kann man diesem Ausdrucke die Form

$$a^2 p_1 e_\lambda \; a^{n-1}(2)\bar{e}_\lambda e_1 \,..\, e_n \,.\, a^2 p_2 e_\varkappa \; a^{n-1}(2)\bar{e}_\varkappa e_1 \,..\, e_n$$

geben, und es ist, da $ae_1 a \,..\, ae_n a \,|\, e_1 \,..\, e_n = 0$ ist,

$$(ap_1 a)\, ae_1 a \,..\, ae_n a \,|\, p_2 e_1 \,..\, e_n = a^{n+1}(2) p_1 e_1 \,..\, e_n \cdot a^{n+1}(2) p_2 e_1 \,..\, e_n.$$

Bei geradem n dagegen nimmt der Ausdruck die Form

$$a^n(2) e_1 \,..\, e_n \,.\, a^2 p_1 e_\lambda \; a^2 p_2 e_\varkappa \; a^{n-2}(2)\,\bar{e}_\varkappa \bar{e}_\lambda e_1 \,..\, e_n$$

an, und jene Differenz ist gleich

$$a^n(2) e_1 \,..\, e_n \,.\, (a^{n+2}(2) p_1 p_2 e_1 \,..\, e_n - a^2 p_1 p_2 \; a^n(2) e_1 \,..\, e_n)$$

und folglich

$$(ap_1 a)\, ae_1 a \,..\, ae_n a \,|\, p_2 e_1 \,..\, e_n = a^n(2) e_1 \,..\, e_n \,.\, a^{n+2}(2)\, p_1 p_2 e_1 \,..\, e_n \,.$$

29. Für die m linearen kombinatorischen Gleichungen

$$a^2 e_1 p = v_1 \,, .. ,\, a^2 e_m p = v_m$$

ist

$$ae_1 a \,..\, ae_m a \,|\, e_1 \,..\, e_m \cdot p\varepsilon_\varkappa = (v_1 \overline{ae_1 a} + .. + v_m \overline{ae_m a})\, ae_1 a \,..\, ae_m a \,|\, \bar{e}_\varkappa e_1 \,..\, e_m$$

und also bei ungeradem m

$$0 \,.\, p\varepsilon_\varkappa = a^{m-1}(2)(v_1 \bar{e}_1 + .. + v_m \bar{e}_m) e_1 \,..\, e_m \,.\, a^{m-1}(2)\bar{e}_\varkappa e_1 \,..\, e_m$$

und bei geradem m

$$a^m(2) e_1 \,..\, e_m \,.\, p\varepsilon_\varkappa = a^{m-2}(2)(v_1 \bar{e}_1 + .. + v_m \bar{e}_m)\bar{e}_\varkappa e_1 \,..\, e_m \,.$$

30. Die Determinante

$$(q\varepsilon_1 + ae_1 a) \,..\, (q\varepsilon_m + ae_m a) \mid e_1 \,..\, e_m,$$

die sich von der kombinatorisch-symmetrischen Determinante $ae_1 a \,..\, ae_m a \mid e_1 \,..\, e_m$ nur in den Elementen mit gleichen Indices um die Gröfse q unterscheidet, ist nach dem 20ten Abschnitte, da die Determinante $ae_1 a \,..\, ae_\varkappa a \mid e_1 \,..\, e_\varkappa$ bei ungeradem $\varkappa$ verschwindet und bei geradem $\varkappa$ dem Quadrate der entsprechenden Pfaff'schen Form gleich ist, ein Aggregat von Gliedern, die aus dem Ausdrucke

$$(e;m)\, a^\varkappa (2)\, e_1 \,..\, e_\varkappa^2 \,.\, q^{m-\varkappa}$$

für $\varkappa = 0, 2, 4, ..$ hervorgehen. Der Koefficient von $q^{m-\varkappa}$ ist eine Summe von $\binom{m}{\varkappa}$ Quadraten.

31. Die Determinante

$$(q\varepsilon_1 - ae_1 a) \,..\, (q\varepsilon_m - ae_m a) \mid e_1 \,..\, e_m$$

unterscheidet sich von der Determinante

$$(q\varepsilon_1 + ae_1 a) \,..\, (q\varepsilon_m + ae_m a) \mid e_1 \,..\, e_m$$

nur dadurch, dafs in ihr die Horizontal- und Vertikalreihen dieser Determinante der Reihe nach bezw. als Vertikal- und Horizontalreihen auftreten, und es ist daher

$$\begin{aligned} &(q\varepsilon_1 - ae_1 a) \,..\, (q\varepsilon_m - ae_m a) \mid e_1 \,..\, e_m \\ = &(q\varepsilon_1 + ae_1 a) \,..\, (q\varepsilon_m + ae_m a) \mid e_1 \,..\, e_m. \end{aligned}$$

Wegen dieser Übereinstimmung in den Reihen ergiebt sich ferner durch Entfernung der $\varkappa$ten Horizontal- und λten Vertikalreihe in der ersten und der $\varkappa$ten Vertikal- und λten Horizontalreihe in der zweiten Determinante die Gleichung

$$\begin{aligned} &\overline{q\varepsilon_\varkappa - ae_\varkappa a}\, (q\varepsilon_1 - ae_1 a) \,..\, (q\varepsilon_m - ae_m a) \mid \bar{e}_\lambda e_1 \,..\, e_m \\ = &\overline{q\varepsilon_\lambda + ae_\lambda a}\, (q\varepsilon_1 + ae_1 a) \,..\, (q\varepsilon_m + ae_m a) \mid \bar{e}_\varkappa e_1 \,..\, e_m \end{aligned}$$

und aus ihr unter Berücksichtigung der ersten Gleichung die Gleichung

$$\varepsilon_\lambda\, \overline{q\varepsilon_\varkappa - ae_\varkappa a} = \varepsilon_\varkappa\, \overline{q\varepsilon_\lambda + ae_\lambda a},$$

der zufolge

$$(q\varepsilon_\lambda + ae_\lambda a)\, \overline{q\varepsilon_\varkappa - ae_\varkappa a} = (q\varepsilon_\varkappa - ae_\varkappa a)\, \overline{q\varepsilon_\lambda + ae_\lambda a}$$

ist, weil vermittelst der Substitution $2q\varepsilon_\lambda - (q\varepsilon_\lambda - ae_\lambda a)$ für $q\varepsilon_\lambda + ae_\lambda a$

$$(q\varepsilon_\lambda + ae_\lambda a)\,\overline{q\varepsilon_\varkappa - ae_\varkappa a}$$

für $\lambda \lessgtr \varkappa$ und $\lambda = \varkappa$ die Werte

$$2q\,.\,\varepsilon_\lambda\,\overline{q\varepsilon_\varkappa - ae_\varkappa a},\quad 2q\,.\,\varepsilon_\varkappa\,\overline{q\varepsilon_\varkappa - ae_\varkappa a} - 1$$

und in entsprechender Weise

$$(q\varepsilon_\varkappa - ae_\varkappa a)\,\overline{q\varepsilon_\lambda + ae_\lambda a}$$

für $\lambda \lessgtr \varkappa$ und $\lambda = \varkappa$ die Werte

$$2q\,.\,\varepsilon_\varkappa\,\overline{q\varepsilon_\lambda + ae_\lambda a},\quad 2q\,.\,\varepsilon_\varkappa\,\overline{q\varepsilon_\varkappa + ae_\varkappa a} - 1$$

annimmt.

Sind nun $p_1, \ldots, p_m$ Gröfsen, die mit den Einheiten $e_1, \ldots, e_m$ durch die Gleichung

$$\overline{q\varepsilon_1 - ae_1 a}\,.\,p_1 + \ldots + \overline{q\varepsilon_m - ae_m a}\,.\,p_m$$
$$= \overline{q\varepsilon_1 + ae_1 a}\,.\,e_1 + \ldots + \overline{q\varepsilon_m + ae_m a}\,.\,e_m$$

verbunden und durch sie offenbar bestimmt sind, so ist

$$p_\varkappa \bar{e}_\lambda = (q\varepsilon_\varkappa - ae_\varkappa a)\,\overline{q\varepsilon_\lambda + ae_\lambda a},$$
$$\bar{p}_\varkappa e_\lambda = (q\varepsilon_\lambda + ae_\lambda a)\,\overline{q\varepsilon_\varkappa - ae_\varkappa a}$$

und somit

$$p_\varkappa \bar{e}_\lambda = \bar{p}_\varkappa e_\lambda\,.$$

Infolge dieser Gleichung läfst sich die Gröfse

$$e_\lambda = e_\lambda \bar{p}_1\,.\,p_1 + \ldots + e_\lambda \bar{p}_m\,.\,p_m$$

in der Form

$$e_\lambda = p_1 \bar{e}_\lambda\,.\,p_1 + \ldots + p_m \bar{e}_\lambda\,.\,p_m$$

oder

$$e_\lambda = (p_1^2 + \ldots + p_m^2)\,\bar{e}_\lambda$$

darstellen, und es ist, da offenbar andererseits

$$e_\lambda = (e_1^2 + \ldots + e_m^2)\,\bar{e}_\lambda$$

ist,

$$e_1^2 + \ldots + e_m^2 = p_1^2 + \ldots + p_m^2$$

und ferner, wie sich in derselben Weise aus der Form

$$\bar{e}_\lambda = \bar{e}_\lambda p_1\,.\,\bar{p}_1 + \ldots + \bar{e}_\lambda p_m\,.\,\bar{p}_m$$

ergiebt,

$$\bar{e}_1^2 + \ldots + \bar{e}_m^2 = \bar{p}_1^2 + \ldots + \bar{p}_m^2.$$

Endlich ist infolge des Wertes $p_\varkappa \bar{e}_\lambda = (q\varepsilon_\varkappa - ae_\varkappa a)\,\overline{q\varepsilon_\lambda + ae_\lambda a}$ augenscheinlich

$$p_1 \ldots p_m \mid \bar{e}_1 \ldots \bar{e}_m = (q\varepsilon_1 - ae_1a) \ldots (q\varepsilon_m - ae_m a) \mid \overline{q\varepsilon_1 + ae_1a \ldots q\varepsilon_m + ae_m a}$$

oder also infolge des ersten im 14 ten Abschnitte abgeleiteten Satzes und der Eingangs gegebenen Gleichung

$$p_1 \ldots p_m \mid \bar{e}_1 \ldots \bar{e}_m = 1$$

und natürlich ebenso

$$\bar{p}_1 \ldots \bar{p}_m \mid e_1 \ldots e_m = 1.$$

Führt man in die Gleichung, welche die Gröfsen $p_1, \ldots, p_m$ mit den Einheiten $e_1, \ldots, e_m$ verbindet, eine ungerade Anzahl der Gröfsen p mit dem Minuszeichen ein, so ändern sich die Gleichung $p_\varkappa \bar{e}_\lambda = \bar{p}_\varkappa e_\lambda$ und die aus ihr abgeleiteten Gleichungen nicht, die Determinanten $p_1 \ldots p_m \mid \bar{e}_1 \ldots \bar{e}_m$ und $\bar{p}_1 \ldots \bar{p}_m \mid e_1 \ldots e_m$ dagegen nehmen den Wert -1 an. Eine gerade Anzahl Minuszeichen bewirkt keine Änderung der Gleichungen.

32. Ein Ausdruck, welcher die Gröfse p enthält, ist für

$$p = p\bar{e}_1 \cdot e_1 + \ldots + p\bar{e}_m \cdot e_m$$

eine Funktion der Gröfsen $p\bar{e}_1, \ldots, p\bar{e}_m$ und für

$$p = p\bar{p}_1 \cdot p_1 + \ldots + p\bar{p}_m \cdot p_m$$

eine Funktion der Gröfsen $p\bar{p}_1, \ldots, p\bar{p}_m$ und geht aus der ersteren in die letztere Form über durch die lineare Substitution

$$p\bar{e}_1 = p\bar{p}_1 \cdot p_1\bar{e}_1 + \ldots + p\bar{p}_m \cdot p_m\bar{e}_1, \ldots,$$
$$p\bar{e}_m = p\bar{p}_1 \cdot p_1\bar{e}_m + \ldots + p\bar{p}_m \cdot p_m\bar{e}_m.$$

Die Gröfsen

$$p_1\bar{e}_1, \ldots, p_1\bar{e}_m; \ldots; p_m\bar{e}_1, \ldots, p_m\bar{e}_m$$

nennt man die Substitutionskoefficienten und ihre Determinante

$$p_1 \ldots p_m \mid \bar{e}_1 \ldots \bar{e}_m$$

die Determinante der linearen Substitution.

In dem besonderen Falle, wenn durch die Substitution sich die Summe der Quadrate der Veränderlichen in die Summe der Quadrate der neuen Veränderlichen verwandelt und also

$$p\bar{e}_1^2 + \ldots + p\bar{e}_m^2 = p\bar{p}_1^2 + \ldots + p\bar{p}_m^2$$

wird, heifst die lineare Substitution eine orthogonale Substitution. Sie ist an die Bedingung

$$p_\varkappa \bar{e}_\lambda = \bar{p}_\varkappa e_\lambda$$

gebunden, denn aus ihr ergiebt sich neben der Gleichung

$$e_1^2 + \ldots + e_m^2 = p_1^2 + \ldots + p_m^2$$

die Gleichung

$$\bar{e}_1^2 + \ldots + \bar{e}_m^2 = \bar{p}_1^2 + \ldots + \bar{p}_m^2.$$

Da nach dieser Gleichung

$$p_\varkappa p_\lambda (\bar{e}_1^2 + \ldots + \bar{e}_m^2)$$

für $\lambda \lessgtr \varkappa$ den Wert Null und für $\lambda = \varkappa$ den Wert Eins hat — dasselbe gilt auch für den Ausdruck

$$(p_1^2 + \ldots + p_m^2) \mid \bar{e}_\varkappa \bar{e}_\lambda,$$

— so ist das Quadrat der Determinante der orthogonalen Substitution gleich Eins, weil

$$p_1 \ldots p_m \mid \bar{e}_1 \ldots \bar{e}_m{}^2 = (\bar{e}_1^2 + \ldots + \bar{e}_m^2)^m \, p_1 \ldots p_m{}^2$$

ist. Der Gleichung $p_\varkappa \bar{e}_\lambda = \bar{p}_\varkappa e_\lambda$ kann man übrigens auch infolge der Gleichungen

$$e_\lambda = \bar{\varepsilon}_\lambda, \; \varepsilon_\lambda = \bar{e}_\lambda$$

die Form

$$p_\varkappa \varepsilon_\lambda = \bar{p}_\varkappa \bar{\varepsilon}_\lambda$$

geben; daher ist

$$p_1 \ldots p_m \mid \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m \,.\, p_{\varkappa_1} \ldots p_{\varkappa_n} \mid \varepsilon_{\lambda_1} \ldots \varepsilon_{\lambda_n}$$

$$= \bar{p}_{\varkappa_1} \ldots \bar{p}_{\varkappa_n} p_1 \ldots p_m \mid \bar{\varepsilon}_{\lambda_1} \ldots \bar{\varepsilon}_{\lambda_n} \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m \,.$$

33. Schließlich lenken wir die Aufmerksamkeit auf das kombinatorische Produkt

$$(p_2 - p_1) \ldots (p_n - p_1),$$

welches als offenbar identisch mit dem Ausdrucke

$$(p_2 - p_1) \ldots (p_{n-1} - p_1) p_n + \bar{p}_n p_1 \ldots p_n$$

in der Form

$$(\bar{p}_1 + \ldots + \bar{p}_n) p_1 \ldots p_n$$

darstellbar ist und somit die Eigenschaft hat, dafs es genau so, wie das kombinatorische Produkt $p_1 \ldots p_n$, sein Zeichen ändert, sonst aber denselben Wert behält, wenn man irgend zwei der Gröfsen $p_1, \ldots, p_n$ mit einander vertauscht. Wir bezeichnen es durch $\dot{p}_1 \ldots p_n$ und setzen also

$$\dot{p}_1 \ldots p_n = (p_2 - p_1) \ldots (p_n - p_1)$$

oder

$$\dot{p}_1 \ldots p_n = (\bar{p}_1 + \ldots + \bar{p}_n) p_1 \ldots p_n \,.$$

Offenbar ist auch

$$\dot{p}_1 \ldots p_n = \dot{p}_1 \ldots p_r \dot{p}_1 p_{r+1} \ldots p_n$$

und insbesondere

$$\dot{p}_1 \ldots p_n = \dot{p}_1 p_2 \ldots \dot{p}_1 p_n .$$

Ferner ist, wie sich aus der Gleichung

$$p\dot{p}_1 \ldots p_n = p(\bar{p}_1 + \ldots + \bar{p}_n) p_1 \ldots p_n$$

ergiebt,

$$p_1 \dot{p}_1 \ldots p_n = p_1 \ldots p_n, \ldots, p_n \dot{p}_1 \ldots p_n = p_1 \ldots p_n$$

und demzufolge

$$\dot{p} p_1 \ldots p_n = p_1 \ldots p_n - p\dot{p}_1 \ldots p_n ,$$

und endlich gilt die Gleichung

$$\ddot{p} p_1 \ldots p_n = \dot{p}_1 \ldots p_n$$

oder

$$\dot{p}(\bar{p}_1 + \ldots + \bar{p}_n) p_1 \ldots p_n = \dot{p}_1 \ldots p_n ,$$

weil

$$\ddot{p} p_1 \ldots p_n = \dot{p}(\dot{p}_1 p_2 \ldots \dot{p}_1 p_n) = \ddot{p} p_1 p_2 \ldots \ddot{p} p_1 p_n$$

und $\ddot{p} p_1 p_2 = \dot{p}(p_2 - p_1) = \dot{p}_1 p_2$, u. s. w. ist.

34. Multipliziert man die Form

$$p = p\varepsilon_1 . e_1 + \ldots + p\varepsilon_m . e_m$$

kombinatorisch mit dem kombinatorischen Produkte $\dot{e}_1 \ldots e_m$, so erhält man die Gleichung

$$\dot{p}e_1 \ldots e_m = (p\varepsilon_1 + \ldots + p\varepsilon_m) . e_1 \ldots e_m$$

und darnach unter Berücksichtigung der Gleichung

$$\dot{p}e_1 \ldots e_m = e_1 \ldots e_m - \dot{p}e_1 \ldots e_m$$

in dem besonderen Falle

$$p\varepsilon_1 + \ldots + p\varepsilon_m = 1$$

die Gleichung

$$\dot{p}e_1 \ldots e_m = 0,$$

die der Gleichung

$$pe_1 \ldots e_m = 0,$$

welche aus jener Form durch kombinatorische Multiplikation mit dem kombinatorischen Produkte $e_1 \ldots e_m$ hervorgeht, in ihrer Gestalt genau entspricht.

Die Gesamtheit der durch die Einheiten $e_1, \ldots, e_m$ darstellbaren Gröſsen

$$p = p\varepsilon_1 . e_1 + .. + p\varepsilon_m . e_m$$

nennen wir ein durch sie bestimmtes $m$stufiges Gebiet und bezeichnen es, da für eine jede Gröfse p, die ihm angehört, die Gleichung

$$pe_1 .. e_m = 0$$

besteht, durch das kombinatorische Produkt $e_1 .. e_m$. In dem besonderen Falle

$$p\varepsilon_1 + .. + p\varepsilon_m = 1$$

gilt für eine jede Gröfse p dieses Gebietes auch die Gleichung

$$\dot{p}e_1 .. e_m = 0,$$

und da derselben u. a. die Form

$$\dot{e}_1 \dot{p}e_1 .. e_m = 0$$

gegeben werden kann, so ergiebt sich, dafs die Gröfse $\dot{e}_1 p$ dem durch die Gröfsen $\dot{e}_1 e_2, .., \dot{e}_1 e_m$ bestimmten $(m-1)$stufigen Gebiete $\dot{e}_1 .. e_m$ angehört und daher durch diese Gröfsen dargestellt werden kann. In der That erhält man, wenn man die Gleichung $1 = p\varepsilon_1 + .. + p\varepsilon_m$ mit e_1 multipliziert und dann von der Gleichung $p = p\varepsilon_1 . e_1 + .. + p\varepsilon_m . e_m$ subtrahiert, die Form

$$\dot{e}_1 p = p\varepsilon_2 . \dot{e}_1 e_2 + .. + p\varepsilon_m . \dot{e}_1 e_m .$$

Und ferner sieht man, da

$$p = e_1 + \dot{e}_1 p$$

ist, dafs eine jede Gröfse p des $m$stufigen Gebietes $e_1 .. e_m$ sich durch Eine diesem Gebiete angehörige Gröfse und $m-1$ Gröfsen des $(m-1)$stufigen Gebietes $\dot{e}_1 .. e_m$ darstellen läfst.

35. In derselben Weise, wie sich aus der Form

$$p = p\varepsilon_1 . e_1 + .. + p\varepsilon_m . e_m$$

die Form

$$p_1 .. p_n = (e, \varepsilon; m) p_1 .. p_n \mid \varepsilon_1 .. \varepsilon_n . e_1 .. e_n$$

ergiebt, erhält man, wenn man von der Form

$$p = e_1 + p\varepsilon_2 . \dot{e}_1 e_2 + .. + p\varepsilon_m . \dot{e}_1 e_m$$

oder

$$p = p(\varepsilon_1 + .. + \varepsilon_m) . e_1 + p\varepsilon_2 . \dot{e}_1 e_2 + .. + p\varepsilon_m . \dot{e}_1 e_m$$

ausgeht, die Form

$$p_1 .. p_n = (e, \varepsilon; m-1) (p_1 .. p_n \mid (\varepsilon_1 + .. + \varepsilon_m) \varepsilon_2 .. \varepsilon_n . e_1 \dot{e}_1 e_2 .. e_n$$
$$+ p_1 .. p_n \mid \varepsilon_2 .. \varepsilon_{n+1} . \dot{e}_1 e_2 .. e_{n+1})$$

oder also, wenn man berücksichtigt, dafs

$$p_1 \cdot\cdot p_n = p_1 \dot{p}_1 p_2 \cdot\cdot \dot{p}_1 p_n$$

und

$$p_1(\varepsilon_1 + \cdot\cdot + \varepsilon_m) = 1,$$

$$\dot{p}_1 p_2 \mid (\varepsilon_1 + \cdot\cdot + \varepsilon_m) = 0, \cdot\cdot, \dot{p}_1 p_n \mid (\varepsilon_1 + \cdot\cdot + \varepsilon_m) = 0$$

und folglich

$$p_1 \cdot\cdot p_n \mid (\varepsilon_1 + \cdot\cdot + \varepsilon_m)\, \varepsilon_2 \cdot\cdot \varepsilon_n = \dot{p}_1 \cdot\cdot p_n \mid \varepsilon_2 \cdot\cdot \varepsilon_n$$

ist, die Form

$$p_1 \cdot\cdot p_n = (e, \varepsilon; m-1)(\dot{p}_1 \cdot\cdot p_n \mid \varepsilon_2 \cdot\cdot \varepsilon_n \,.\, e_1 e_2 \cdot\cdot e_n$$
$$+ p_1 \cdot\cdot p_n \mid \varepsilon_2 \cdot\cdot \varepsilon_{n+1} \,.\, \dot{e}_1 e_2 \cdot\cdot e_{n+1}).$$

Ferner ergiebt sich, wenn wir aus den Gleichungen

$$p_1 = p_1 \varepsilon_1 \,.\, e_1 + \cdot\cdot + p_1 \varepsilon_m \,.\, e_m\,, \quad 1 = p_1 \varepsilon_1 + \cdot\cdot + p_1 \varepsilon_m$$

die Form

$$\dot{p} p_1 = p_1 \varepsilon_1 \,.\, \dot{p} e_1 + \cdot\cdot + p_1 \varepsilon_m \,.\, \dot{p} e_m$$

ableiten, in derselben Weise die Form

$$\dot{p} p_1 \cdot\cdot p_n = (e, \varepsilon; m)\, p_1 \cdot\cdot p_n \mid \varepsilon_1 \cdot\cdot \varepsilon_n \,.\, \dot{p} e_1 \cdot\cdot e_n$$

und aus ihr unter Berücksichtigung der Gleichung

$$p \dot{p}_1 \cdot\cdot p_n = p_1 \cdot\cdot p_n \quad \dot{p} p_1 \cdot\cdot p_n$$

und der Form

$$p_1 \cdot\cdot p_n = (e, \varepsilon; m)\, p_1 \cdot\cdot p_n \mid \varepsilon_1 \cdot\cdot \varepsilon_n \,.\, e_1 \cdot\cdot e_n$$

die Form

$$\dot{p}_1 \cdot\cdot p_n = (e, \varepsilon; m)\, p_1 \cdot\cdot p_n \mid \varepsilon_1 \cdot\cdot \varepsilon_n \,.\, \dot{e}_1 \cdot\cdot e_n$$

und endlich, wenn wir aus der Form

$$p = e_1 + p \varepsilon_2 \,.\, \dot{e}_1 e_2 + \cdot\cdot + p \varepsilon_m \,.\, \dot{e}_1 e_m$$

die Form

$$\dot{p}_1 p_2 = \dot{p}_1 p_2 \mid \varepsilon_2 \,.\, \dot{e}_1 e_2 + \cdot\cdot + \dot{p}_1 p_2 \mid \varepsilon_m \,.\, \dot{e}_1 e_m$$

ableiten, die Form

$$\dot{p}_1 \cdot\cdot p_n = (e, \varepsilon; m-1)\, \dot{p}_1 \cdot\cdot p_n \mid \varepsilon_2 \cdot\cdot \varepsilon_n \,.\, \dot{e}_1 e_2 \cdot\cdot e_n\,.$$

Aus diesen Formen, die vorzugsweise für die Geometrie von Interesse sind, bietet sich für $n = m$ insbesondere die Gleichung

$$\dot{p}_1 \cdot\cdot p_m = p_1 \cdot\cdot p_m \mid \varepsilon_1 \cdot\cdot \varepsilon_m \,.\, \dot{e}_1 \cdot\cdot e_m$$

dar, die der Gleichung

$$p_1 \cdot\cdot p_m = p_1 \cdot\cdot p_m \mid \varepsilon_1 \cdot\cdot \varepsilon_m \,.\, e_1 \cdot\cdot e_m$$

entspricht und uns zeigt, dafs nicht blos das Gebiet $p_1 \cdot\cdot p_m$ mit dem Gebiete $e_1 \cdot\cdot e_m$, sondern auch das Gebiet $\dot{p}_1 \cdot\cdot p_m$ mit dem Gebiete $\dot{e}_1 \cdot\cdot e_m$ identisch ist. Durch die Gröfsen $p_1, \cdot\cdot, p_m$, die wir selbstverständlich als von einander unabhängig voraussetzen, stellt sich die Gröfse p in der Form

$$p = p\bar{p}_1 . p_1 + . . + p\bar{p}_m . p_m$$

dar, und es ist, da die Gleichung

$$p\dot{p}_1 . . p_m = p_1 . . p_m - \dot{p}p_1 . . p_m$$

infolge der Relation

$$\dot{p}e_1 . . e_m = 0 \text{ oder } \dot{p}p_1 . . p_m = 0$$

die Form

$$p\dot{p}_1 . . p_m = p_1 . . p_m$$

annimmt, stets

$$p\bar{p}_1 + . . + p\bar{p}_m = 1,$$

wenn $p\varepsilon_1 + . . + p\varepsilon_m = 1$ oder

$$p\bar{e}_1 + . . + pe_m = 1$$

ist.

36. Von den vorstehenden Formeln machen wir eine Anwendung bei der Lösung der Aufgabe, die quadratische Form ap^2 unter der sich als notwendig erweisenden Voraussetzung

$$(a^2)^{m-1} \dot{e}_1 . . e_m^{\,2} \lesseqgtr 0$$

für $p\varepsilon_1 + . . + p\varepsilon_m = 1$ in einer Form darzustellen, in welcher die Veränderlichen nur im Quadrate auftreten.

Wir setzen zu dem Zwecke zunächst

$$p = p_1 + \dot{p}_1 p$$

und damit

$$ap^2 = ap_1^{\,2} + 2a^2 p_1 \dot{p}_1 p + a\dot{p}_1 p^2$$

und bestimmen die Gröfse p_1 so, dafs

$$a^2 p_1 \dot{p}_1 p = 0$$

wird, indem wir mit Rücksicht auf die Form

$$\dot{p}_1 p = \dot{p}_1 e_1 + p\varepsilon_2 . \dot{e}_1 e_2 + . . + p\varepsilon_m . \dot{e}_1 e_m$$

die $m - 1$ Gleichungen

$$a^2 p_1 \dot{e}_1 e_2 = 0, . ., a^2 p_1 \dot{e}_1 e_m = 0$$

aufstellen und aus ihnen vermittelst der Relation $p_1 \varepsilon_1 + . . + p_1 \varepsilon_m = 1$ die Gleichung

$$a^2 p_1 \dot{p}_1 e_1 = 0$$

ableiten.

Infolge dieser $m-1$ Gleichungen erhalten wir, wenn wir auf Grund der Gleichung

$$p_1\dot{e}_1 \ldots e_m = e_1 \ldots e_m$$

die Gleichung

$$(a^2)^m p_1\dot{e}_1 \ldots e_m^{\frac{2}{}} = (a^2)^m e_1 \ldots e_m^{\frac{2}{}}$$

bilden und der linken Seite derselben in ausführlicher Darstellung die Form

$$a^2 p_1 \, a^2\dot{e}_1 e_2 \ldots a^2\dot{e}_1 e_m \mid p_1\dot{e}_1 e_2 \ldots \dot{e}_1 e_m$$

geben, ohne Weiteres zunächst die Gleichung

$$ap_1^2 . (a^2)^{m-1} \dot{e}_1 \ldots e_m^{\frac{2}{}} = (a^2)^m e_1 \ldots e_m^{\frac{2}{}}$$

oder

$$ap_1^2 = \frac{(a^2)^m e_1 \ldots e_m^{\frac{2}{}}}{(a^2)^{m-1} \dot{e}_1 \ldots e_m^{\frac{2}{}}}.$$

Ferner ist offenbar

$$e_1 \ldots e_m \cdot p_1 \varepsilon_\varkappa = p_1 \bar{e}_\varkappa e_1 \ldots e_m,$$

demnach auf Grund derselben Gleichung

$$(a^2)^m e_1 \ldots e_m^{\frac{2}{}} \cdot p_1 \varepsilon_\varkappa = (a^2)^m p_1\dot{e}_1 \ldots e_m \mid p_1 \bar{e}_\varkappa e_1 \ldots e_m$$

und folglich

$$(a^2)^m e_1 \ldots e_m^{\frac{2}{}} \cdot p_1 \varepsilon_\varkappa = ap_1^2 \, . \, (a^2)^{m-1} \dot{e}_1 \ldots e_m \mid \bar{e}_\varkappa e_1 \ldots e_m$$

oder

$$p_1 \varepsilon_\varkappa = \frac{(a^2)^{m-1} \dot{e}_1 \ldots e_m \mid \bar{e}_\varkappa e_1 \ldots e_m}{(a^2)^{m-1} \dot{e}_1 \ldots e_m^{\frac{2}{}}}.$$

Die Gröfse p_1 ist hierdurch bestimmt, es ist

$$p_1 = \frac{(a^2)^{m-1} \dot{e}_1 \ldots e_m \mid e_1 \ldots e_m}{(a^2)^{m-1} \dot{e}_1 \ldots e_m^{\frac{2}{}}},$$

und da auch das von der Gröfse p unabhängige Glied ap_1^2 durch die Koefficienten der Form ap^2 dargestellt ist, so führen wir nun, indem wir

$$p = p_1 + p\bar{p}_2 \cdot \dot{p}_1 p_2 + \ldots + p\bar{p}_m \cdot \dot{p}_1 p_m$$

setzen, die $m-1$ Gröfsen $p_2, \ldots, p_m$ vermittelst der Form

$$\dot{p}_1 p = p\bar{p}_2 \cdot \dot{p}_1 p_2 + \ldots + p\bar{p}_m \cdot \dot{p}_1 p_m$$

in die transformierte Form

$$ap^2 = ap_1^2 + a\dot{p}_1 p^2$$

ein und geben ihr die in Rede stehende Form

$$ap^2 = ap_1^2 + p\bar{p}_2^2 \cdot a\dot{p}_1 p_2^2 + \ldots + p\bar{p}_m^2 \cdot ap_1 p_m^2,$$

indem wir für ungleiche, der Zahlenreihe $2, \ldots, m$ angehörige Werte von $\varkappa$ und λ

$$a^2\dot{p}_1 p_\lambda \dot{p} p_\varkappa = 0$$

annehmen. Nach dieser Annahme gelten für die $m-1$ Gröfsen nur $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ Gleichungen. Wir bemerken nun, dafs sich, wenn die $m-3$ Gröfsen

$$p_{3,0}, \ldots, p_{m-1,0}$$

bezw. den Gebieten

$$p_1 \ldots p_3, \ldots, p_1 \ldots p_{m-1}$$

angehören, die Gröfse $\dot{p}_1 p_{\lambda,0}$ durch die Gröfsen $\dot{p}_1 p_2, \ldots, \dot{p}_1 p_\lambda$ darstellen läfst und demzufolge für $\varkappa > \lambda$

$$a^2\dot{p}_1 p_{\lambda,0}\, \dot{p}_1 p_\varkappa = 0$$

ist. Da λ die Werte $3, \ldots, m-1$ annimmt, so treten damit zu den vorigen Gleichungen $\frac{1}{2}(m-2)(m-3)$ Gleichungen, und wir haben im Ganzen für die in Betracht kommenden $2(m-2)$ Gröfsen $(m-2)^2$ Gleichungen, vermöge deren wir die $m-2$ Gröfsen

$$p_3, \ldots, p_m$$

vermittelst der $m-2$ Gröfsen

$$p_2, p_{3,0}, \ldots, p_{m-1,0}$$

darstellen können. Es verschwinden für $\varkappa = 3, \ldots, m$ die $m-2$ Gröfsen

$$a^2\dot{p}_1 p_2 \dot{p}_1 p_\varkappa,\ a^2\dot{p}_1 p_{3,0}\dot{p}_1 p_\varkappa, \ldots, a^2\dot{p}_1 p_{\varkappa-1,0}\, \dot{p}_1 p_\varkappa,$$
$$a^2\dot{p}_1 p_{\varkappa+1}\, \dot{p}_1 p_\varkappa, \ldots, a^2\dot{p}_1 p_m \dot{p}_1 p_\varkappa,$$

und folglich ist

$$\dot{p}_1 p_\varkappa = (a^2)^{m-2}\dot{p}_1 p_2 p_{3,0} \ldots p_{\varkappa-1,0}\, p_{\varkappa+1} \ldots p_m \mid \dot{e}_1 \ldots e_m,$$

weil in der That

$$a^2\dot{p}_1 p_\lambda \dot{p}_1 p_\varkappa = (a^2)^{m-1}\dot{p}_1 p_\lambda p_2 p_{3,0} \ldots p_{\varkappa-1,0}\, p_{\varkappa+1} \ldots p_m \mid \dot{e}_1 \ldots e_m$$

für $\lambda = 2; 3{,}0; \ldots; \varkappa-1{,}0; \varkappa+1; \ldots; m$ verschwindet. Für $\lambda = \varkappa$ dagegen hat man

$$a\dot{p}_1 p_\varkappa^{\,2} = (-1)^{\varkappa-2}(a^2)^{m-1}\dot{p}_1 p_1 p_{3,0} \ldots p_{\varkappa-1,0}\, p_\varkappa \ldots p_m \mid \dot{e}_1 \ldots e_m$$

und, weil $p_1 \ldots p_m = p_1 \ldots p_m \mid \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m \,.\, \dot{e}_1 \ldots e_m$ ist,

$$(a\dot{p}_1 p_\varkappa^{\,2})^2 = (a^2)^{m-1}\dot{e}_1 \ldots e_m^{\,2} \,.\, (a^2)^{m-1}\dot{p}_1 p_2 p_{3,0} \ldots p_{\varkappa-1,0}\, p_\varkappa \ldots p_m^{\,2},$$

und es ist also, da die zweite Determinante nach dem Laplaceschen Determinantensatze infolge des Umstandes, dafs die Gröfsen $a^2\dot{p}_1 p_2 \dot{p}_1 p_\mu$ und $a^2\dot{p}_1 p_{\lambda,0}\dot{p}_1 p_\mu$ für $\mu = \varkappa, \ldots, m$ und $\lambda < \varkappa$ verschwinden, die Form

$$(a^2)^{\varkappa-2}\,\dot{p}_1 p_2 p_{3,0} \cdots p_{\varkappa-1,0}^{\overset{2}{-}} \cdot (a^2)^{m-\varkappa+1}\,\dot{p}_1 p_\varkappa \cdots p_m^{\overset{2}{-}}$$

annimmt und ferner infolge des Verschwindens der Gröfse $a^2\dot{p}_1 p_\lambda \dot{p}_1 p_\mu$ für $\mu > \lambda$

$$(a^2)^{m-\varkappa+1}\,\dot{p}_1 p_\varkappa \cdots p_m^{\overset{2}{-}} = a\dot{p}_1 p_\varkappa^{\,2} \cdots a\dot{p}_1 p_m^{\,2}$$

ist,

$$a\dot{p}_1 p_\varkappa^{\,2} = (a^2)^{m-1}\,\dot{e}_1 \cdots e_m^{\overset{2}{-}} \cdot (a^2)^{\varkappa-2}\,\dot{p}_1 p_2 p_{3,0} \cdots p_{\varkappa-1,0}^{\overset{2}{-}}$$
$$\cdot\, a\dot{p}_1 p_{\varkappa+1}^{\,2} \cdots a\dot{p}_1 p_m^{\,2}.$$

Für $m = 3$ insbesondere ist

$$\dot{p}_1 p_3 = a^2 \dot{p}_1 p_2 \mid \dot{e}_1 e_2 e_3,$$
$$a\dot{p}_1 p_3^{\,2} = (a^2)^2\,\dot{e}_1 e_2 e_3^{\overset{2}{-}} \cdot a\dot{p}_1 p_2^{\,2}$$

und für $m = 4$

$$\dot{p}_1 p_3 = (a^2)^2 \dot{p}_1 p_2 p_4 \mid \dot{e}_1 \cdots e_4,$$
$$\dot{p}_1 p_4 = (a^2)^2\, \dot{p}_1 p_2 p_{3,0} \mid \dot{e}_1 \cdots e_4,$$
$$a\dot{p}_1 p_3^{\,2} = (a^2)^3 \dot{e}_1 \cdots e_4^{\overset{2}{-}} \cdot a\dot{p}_1 p_2^{\,2}\, a\dot{p}_1 p_4^{\,2},$$
$$a\dot{p}_1 p_4^{\,2} = (a^2)^3 \dot{e}_1 \cdots e_4^{\overset{2}{-}} \cdot (a^2)^2 \dot{p}_1 p_2 p_{3,0}^{\overset{2}{-}}.$$

Die Gröfsen $p_2, p_{3,0}, \cdots, p_{m-1,0}$ sind als beliebige Gröfsen anzusehen, und die Gröfsen $p_3, \ldots, p_m$ sind, da die Gröfsen $p_{3,0}, \ldots, p_{m-1,0}$ als den Gebieten $p_1 \cdots p_3, \ldots, p_1 \cdots p_{m-1}$ angehörig vorausgesetzt wurden, Gröfsen, die den Gebieten $p_1 p_2 p_{3,0}, \cdots, p_1 p_2 p_{3,0} \cdots p_{m-1,0}$ angehören.

Zweites Kapitel.

Alternierende Formen.

37. Die Operation des Entfernens einer Gröfse ist bisher nur an kombinatorischen Produkten in Anwendung gekommen. Faktoren kombinatorischer Produkte wurden entfernt, also Gröfsen, die in den Produkten nur einmal auftraten, und bei denen die Stelle, die sie als Faktoren in denselben einnahmen, berücksichtigt werden mufste. Diese Rücksichtnahme auf die Faktorenstelle ist nun bei algebraischen Produkten, wenn wir aus ihnen eine Gröfse entfernen wollen, nicht nötig, dagegen ist zu beachten, dafs in ihnen eine

Gröfse beliebig viele Male als Faktor auftreten kann. Wir bezeichnen durch das Operationssymbol $\bar{p}$ vor einem die Gröfse p in der $n$ten Potenz enthaltenden Ausdrucke die Summe aller derjenigen Ausdrücke, die sich aus demselben dadurch ergeben, dafs man in dem $n$faktorigen Produkte, das die $n$te Potenz der Gröfse p darstellt, einen jeden Faktor p einmal entfernt. Wir setzen also

$$\bar{p}p^n = np^{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!}p^{n-1}$$

und sehen diese Gleichung als allgemeingültig an, indem wir die Potenz p^n auch in dem Falle, wenn n nicht eine positive ganze Zahl ist, als ein Produkt von n Faktoren betrachten.

Die mehrmalige Anwendung der Operation $\bar{p}$ zeigen wir durch einen Exponenten an und setzen also

$$\bar{p}^{\varkappa} p^n = \frac{n!}{(n-\varkappa)!}p^{n-\varkappa}.$$

Soll ferner an die Stelle der entfernten Gröfse p die Gröfse p_1 treten, so deuten wir das dadurch an, dafs wir neben das Operationssymbol $\bar{p}$ die Gröfse p_1 setzen; darnach ist also

$$\bar{p}p_1 p^n = \frac{n!}{(n-1)!}p^{n-1}p_1$$

und bei mehrmaliger Anwendung der Operation $\bar{p}p_1$

$$\bar{p}p_1^{\varkappa} p^n = \frac{n!}{(n-\varkappa)!}p^{n-\varkappa}p_1^{\varkappa}.$$

Endlich bemerken wir, indem wir uns auf den 2ten und 3ten Abschnitt beziehen, dafs die algebraische multiplikative Verbindung des Produktes

$$p_1^{\varkappa_1} \cdot\cdot p_r^{\varkappa_r}$$

mit einem $n$faktorigen Produkte der Gröfsen a das arithmetische Mittel aller derjenigen Ausdrücke darstellt, die man aus demselben dadurch erhält, dafs man auf alle möglichen Weisen p_1 mit $\varkappa_1, \ldots,$ p_r mit $\varkappa_r$ Faktoren verbindet. Die Anzahl dieser Ausdrücke, durch die ihre Summe zu dividieren ist, ist

$$\binom{n}{\varkappa_1}\binom{n-\varkappa_1}{\varkappa_2}\cdot\cdot\binom{n-\varkappa_1-\cdot\cdot-\varkappa_{r-1}}{\varkappa_r} = \frac{n!}{\varkappa_1!\cdot\cdot\varkappa_r!\,(n-\varkappa_1-\cdot\cdot-\varkappa_r)!}.$$

Die Gröfse p_1 kann man auf $\binom{n}{\varkappa_1}$ verschiedene Weisen mit $\varkappa_1$ Faktoren des $n$faktorigen Produktes verbinden oder, wenn wir dieses

Produkt als einen Lückenausdruck mit n, mit den einzelnen Faktoren verbundenen Lücken, in die die Gröfsen p eintreten sollen, auffassen, in $\varkappa_1$ Lücken setzen, wodurch $\binom{n}{\varkappa_1}$ Lückenausdrücke mit $n-\varkappa_1$ Lücken entstehen; in jedem dieser Ausdrücke 'kann man ferner die Gröfse p_2 auf $\binom{n-\varkappa_1}{\varkappa_2}$ verschiedene Weisen in $\varkappa_2$ Lücken setzen und erhält dadurch aus jedem Ausdrucke $\binom{n-\varkappa_1}{\varkappa_2}$ und also im Ganzen $\binom{n}{\varkappa_1}\binom{n-\varkappa_1}{\varkappa_2}$ Lückenausdrücke mit $n-\varkappa_1-\varkappa_2$ Lücken und folglich, wenn man so fortfährt, schliefslich die angegebene Anzahl von Ausdrücken, die $n-\varkappa_1-..-\varkappa_r$ Lücken enthalten.

Der Ausdruck

$$\bar{p}ap^n = na^n p^{n-1}$$

ist also, wenn $a^n = a_1 .. a_n$ ist, gleich dem Ausdrucke

$$a_1 a_2 p .. a_n p + .. + a_1 p .. a_{n-1} p a_n,$$

der sich natürlich auch direkt durch Entfernung der Gröfse p aus den einzelnen Faktoren der Gröfse

$$ap^n = a_1 p .. a_n p$$

ergiebt. Ebenso erhält man den durch die Operation $\bar{p}$ aus der Form

$$a_1{}^{n_1} a_2{}^{n_2} p^{n_1+n_2} = a_1 p^{n_1} a_2 p^{n_2}$$

entstehenden Ausdruck

$$n_1 a_1{}^{n_1} p^{n_1-1} a_2 p^{n_2} + n_2 a_1 p^{n_1} a_2{}^{n_2} p^{n_2-1}$$

sowohl durch Ausführung der Operation $\bar{p}$ an der Gröfse $p^{n_1+n_2}$ und demgemäfse Bildung des Ausdruckes

$$(n_1+n_2)\, a_1{}^{n_1} a_2{}^{n_2} p^{n_1+n_2-1},$$

als auch durch Vornahme der Operation $\bar{p}$ an den Faktoren $a_1 p^{n_1}$ und $a_2 p^{n_2}$ und dementsprechende Bildung des Ausdruckes

$$\bar{p}a_1 p^{n_1} . a_2 p^{n_2} + a_1 p^{n_1} . \bar{p}a_2 p^{n_2}.$$

Und in derselben Weise ergiebt sich ferner z. B. der Wert des Ausdruckes

$$\bar{p}\,(ap^n)^\varkappa = \bar{p}\,(a^n)^\varkappa p^{n\varkappa},$$

wenn wir durch Anwendung der Operation $\bar{p}$ auf die Gröfse $p^{n\varkappa}$ die Gleichung

$$\bar{p}\,(a^n)^\varkappa p^{n\varkappa} = n\varkappa (a^n)^\varkappa p^{n\varkappa-1}$$

oder durch Anwendung der Operation $\bar{p}$ auf jeden der $\varkappa$ Faktoren ap^n die Gleichung

$$\bar{p}(ap^n)^\varkappa = \varkappa(ap^n)^{\varkappa-1}\,\bar{p}ap^n$$

bilden, in der Form

$$n\varkappa(ap^n)^{\varkappa-1}a^n p^{n-1}.$$

38. Das aus $\frac{1}{2}n(n-1)$ Faktoren bestehende Determinantenprodukt

$$a_1a_2 \mid e_1e_2 \,.\, a_1a_3 \mid e_1e_2 \,.\, a_2a_3 \mid e_1e_2 \,..\, a_1a_n \mid e_1e_2 \,..\, a_{n-1}a_n \mid e_1e_2$$

setzt sich aus den algebraischen multiplikativen Verbindungen der Gröſsen $a_1^{n-1}, .., a_n^{n-1}$ mit den Gröſsen e_1^{n-1}, $e_1^{n-2}e_2, .., e_1e_2^{n-2}$, e_2^{n-1} zusammen und besitzt die Eigenschaft, daſs es sein Zeichen ändert, sonst aber denselben Wert behält, wenn man irgend zwei der Gröſsen a mit einander vertauscht, und also verschwindet, wenn man irgend zwei von ihnen einander gleich setzt, oder, wie wir uns kurz ausdrücken wollen, die Eigenschaft, daſs es für die Gröſsen $a_1, .., a_n$ eine alternierende Form ist. Dasselbe gilt auch von der Determinante

$$a_1^{n-1}\,..\,a_n^{n-1} \mid e_1^{n-1}(e_1^{n-2})e_2\,..\,(e_1e_2^{n-2})e_2^{n-1}.$$

Es kann sich daher von dieser nur durch einen numerischen Faktor unterscheiden. Dieser Faktor erweist sich aber als die positive Einheit, wenn man bemerkt, daſs das der Determinante angehörige Glied

$$a_1^{n-1}e_1^{n-1}a_2^{n-1}e_1^{n-2}e_2\,..\,a_{n-1}^{n-1}e_1e_2^{n-2}a_n^{n-1}e_2^{n-1}$$

auch in dem Determinantenprodukte auftritt, und es ist daher

$$a_1a_2 \mid e_1e_2\,..\,a_{n-1}a_n \mid e_1e_2 = a_1^{n-1}\,..\,a_n^{n-1} \mid e_1^{n-1}\,..\,e_2^{n-1}.$$

Und ebenso ergiebt sich, wenn $a_1\,..\,a_n$ ein algebraisches Produkt ist, unter Berücksichtigung des Umstandes, daſs $\bar{a}_\varkappa a_1\,..\,a_n e_1^{n-\lambda}$ $e_2^{\lambda-1}$ ein arithmetisches Mittel von $\binom{n-1}{\lambda-1}$ Gliedern ist, die Gleichung

$$\binom{n-1}{0}\cdot\cdot\binom{n-1}{n-1}\cdot\bar{a}_1a_1\,..\,a_n\,..\,\bar{a}_na_1\,..\,a_n \mid e_1^{n-1}\,..\,e_2^{n-1}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\, a_1^{n-1}\,..\,a_n^{n-1} \mid e_1^{n-1}\,..\,e_2^{n-1}.$$

Nun besteht offenbar für das algebraische Produkt der kombinatorischen Produkte $e_1^{n-1}.\ e_2^{n-1}$ und $\varepsilon_1^{n-1}\,..\,\varepsilon_2^{n-1}$ die Gleichung

$$\binom{n-1}{0}\cdot\cdot\binom{n-1}{n-1}\cdot e_1^{n-1}\,..\,e_2^{n-1} \mid \varepsilon_1^{n-1}\,..\,\varepsilon_2^{n-1} = 1.$$

Es gelten daher, wenn wir $m=2$ annehmen und also nur binäre Gröfsen in Betracht ziehen, die Gleichungen

$$a_1^{n-1}\,..\,a_n^{n-1} = \binom{n-1}{0}\,..\,\binom{n-1}{n-1}.a_1^{n-1}\,..\,a_n^{n-1}\,|\,e_1^{n-1}\,..\,e_2^{n-1}$$

$$.\varepsilon_1^{n-1}\,..\,\varepsilon_2^{n-1} \text{ und } \bar{a}_1 a_1\,..\,a_n\,..\,\bar{a}_n a_1\,..\,a_n$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\,a_1^{n-1}\,..\,a_n^{n-1}\,|\,e_1^{n-1}\,..\,e_2^{n-1}.\varepsilon_1^{n-1}\,..\,\varepsilon_2^{n-1};$$

folglich ist, wenn wir sie mit dem kombinatorischen Produkte $p_1^{n-1}\,..\,p_n^{n-1}$ multiplizieren,

$$a_1^{n-1}\,..\,a_n^{n-1}\,|\,p_1^{n-1}\,..\,p_n^{n-1} = \binom{n-1}{0}\,..\,\binom{n-1}{n-1}$$

$$.a_1^{n-1}\,..\,a_n^{n-1}\,|\,e_1^{n-1}\,..\,e_2^{n-1}.p_1^{n-1}\,..\,p_n^{n-1}\,|\,\varepsilon_1^{n-1}\,..\,\varepsilon_2^{n-1}$$

und ferner

$$\bar{a}_1 a_1\,..\,a_n\,..\,\bar{a}_n a_1\,..\,a_n\,|\,p_1^{n-1}\,..\,p_n^{n-1}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\,a_1^{n-1}\,..\,a_n^{n-1}\,|\,e_1^{n-1}\,..\,e_2^{n-1}.p_1^{n-1}\,..\,p_n^{n-1}\,|\,\varepsilon_1^{n-1}\,..\,\varepsilon_2^{n-1}$$

oder, da das $(\varkappa, \lambda)$te Element der links stehenden Determinante

$$\bar{a}_\varkappa a_1\,..\,a_n p_\lambda^{\,n-1} = a_1\,..\,a_n p_\lambda^{\,n}\cdot a_\varkappa^{\,-1} p_\lambda^{\,-1}$$

ist,

$$a_1^{-1}\,..\,a_n^{-1}\,|\,p_1^{-1}\,..\,p_n^{-1}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\,\frac{a_1^{n-1}\,..\,a_n^{n-1}\,|\,e_1^{n-1}\,..\,e_2^{n-1}.p_1^{n-1}\,..\,p_n^{n-1}\,|\,\varepsilon_1^{n-1}\,..\,\varepsilon_2^{n-1}}{a_1\,..\,a_n^{\,n}\,p_1^{\,n}\,..\,p_n^{\,n}}.$$

Dem in diesen Gleichungen auftretenden Produkte

$$a_1^{n-1}\,..\,a_n^{n-1}\,|\,e_1^{n-1}\,..\,e_2^{n-1}.p_1^{n-1}\,..\,p_n^{n-1}\,|\,\varepsilon_1^{n-1}\,..\,\varepsilon_2^{n-1}$$

kann auch die Form

$$a_1 a_2\,|\,e_1 e_2\,..\,a_{n-1}\,a_n\,|\,e_1 e_2\,.\,p_1 p_2\,|\,\varepsilon_1\varepsilon_2\,..\,p_{n-1}\,p_n\,|\,\varepsilon_1\varepsilon_2$$

oder, da $p_1 p_2 = p_1 p_2\,|\,\varepsilon_1\varepsilon_2\,.\,e_1 e_2$, u. s. w. ist, die Form

$$a_1 a_2\,|\,p_1 p_2\,..\,a_{n-1}\,a_n\,|\,p_{n-1}\,p_n$$

gegeben werden.

Nimmt man

$$p_1 = a_1\,|\,e_1 e_2,\,..,\,p_n = a_n\,|\,e_1 e_2$$

oder

$$a_1 = -p_1\,|\,\varepsilon_1\varepsilon_2,\,..,\,a_n = -p_n\,|\,\varepsilon_1\varepsilon_2$$

und damit

$$p_1 p_2\,|\,\varepsilon_1\varepsilon_2 = a_1 a_2\,|\,e_1 e_2,\,..,\,p_{n-1}\,p_n\,|\,\varepsilon_1\varepsilon_2 = a_{n-1}\,a_n\,|\,e_1 e_2$$

an, so ist insbesondere

$$\bar{a}_1 a_1 \,.\,. a_n (a_1 | e_1 e_2)^{n-1} \,.\,. \bar{a}_n a_1 \,.\,. a_n (a_n | e_1 e_2)^{n-1}$$
$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (a_1^{n-1} \,.\,. a_n^{n-1} | e_1^{n-1} \,.\,. e_2^{n-1})^2.$$

Hiernach gilt ferner, da wir für $\varkappa = 1, \,.\,., r$

$$\bar{a}_1 \,.\,. \bar{a}_r a_1 \,.\,. a_n = \frac{\bar{a}_\varkappa a_1 \,.\,. a_n}{\bar{a}_\varkappa a_1 \,.\,. a_r}$$

und also

$$\bar{a}_1 \,.\,. \bar{a}_r a_1 \,.\,. a_n (a_\varkappa | e_1 e_2)^{n-r} = \frac{\bar{a}_\varkappa a_1 \,.\,. a_n (a_\varkappa | e_1 e_2)^{n-1}}{\bar{a}_\varkappa a_1 \,.\,. a_r (a_\varkappa | e_1 e_2)^{r-1}}$$

setzen können, die Gleichung

$$(-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} \bar{a}_1 \,.\,. \bar{a}_r a_1 \,.\,. a_n^{\,r} (a_1 | e_1 e_2)^{n-r} \,.\,. (a_r | e_1 e_2)^{n-r}$$
$$= \frac{\bar{a}_1 a_1 \,.\,. a_n (a_1 | e_1 e_2)^{n-1} \,.\,. \bar{a}_r a_1 \,.\,. a_n (a_r | e_1 e_2)^{n-1}}{(a_1^{r-1} \,.\,. a_r^{r-1} | e_1^{r-1} \,.\,. e_2^{r-1})^2}.$$

39. Die Determinante

$$\bar{a}_1 a_1 \,.\,. a_n^{1+r} \,.\,. \bar{a}_n a_1 \,.\,. a_n^{1+r} | p_1^{(n-1)(1+r)} \,.\,. p_n^{(n-1)(1+r)}$$

ist sowohl für die Gröfsen $a_1, \,.\,., a_n$, als auch für die Gröfsen $p_1, \,.\,., p_n$ eine alternierende Form und kann sich daher von der Determinante

$$\bar{a}_1 a_1 \,.\,. a_n \,.\,. \bar{a}_n a_1 \,.\,. a_n | p_1^{n-1} \,.\,. p_n^{n-1}$$

nur durch eine Form unterscheiden, die, vom Grade r in den Gröfsen $\bar{a}_1 a_1 \,.\,. a_n, \,.\,., \bar{a}_n a_1 \,.\,. a_n$ und $p_1^{n-1}, \,.\,., p_n^{n-1}$, sich aus den algebraischen multiplikativen Verbindungen dieser Gröfsen mit einander zusammensetzt und in Bezug auf die Gröfsen $a_1, \,.\,., a_n$ und $p_1, \,.\,., p_n$ symmetrisch ist, d. h. bei Vertauschung von irgend zwei der einen oder der anderen Gruppe angehörigen Gröfsen unverändert bleibt. Für $r = 1$ ist diese Form

$$\bar{a}_1 a_1 \,.\,. a_n \,.\,. \bar{a}_n a_1 \,.\,. a_n \dot{|} p_1^{n-1} \,.\,. p_n^{n-1}$$

und folglich, da ein etwaiger numerischer Faktor, wie sich für $p_1 = a_1 | e_1 e_2, \,.\,., p_n = a_n | e_1 e_2$ ergiebt, ausgeschlossen ist,

$$\bar{a}_1 a_1 \,.\,. a_n^2 \,.\,. \bar{a}_n a_1 \,.\,. a_n^2 | p_1^{2(n-1)} \,.\,. p_n^{2(n-1)}$$
$$= \bar{a}_1 a_1 \,.\,. a_n \,.\,. \bar{a}_n a_1 \,.\,. a_n | p_1^{n-1} \,.\,. p_n^{n-1}$$
$$\cdot \bar{a}_1 a_1 \,.\,. a_n \,.\,. \bar{a}_n a_1 \,.\,. a_n \dot{|} p_1^{n-1} \,.\,. p_n^{n-1}$$

oder

$$a_1^{-2} .. a_n^{-2} | p_1^{-2} .. p_n^{-2} = a_1^{-1} .. a_n^{-1} | p_1^{-1} .. p_n^{-1}$$
$$. a_1^{-1} .. a_n^{-1} \dot{|} p_1^{-1} .. p_n^{-1}.$$

Die links stehende Determinante erhält man auch durch Anwendung der Operation $\bar{p}_1 p .. \bar{p}_n p$ auf die Determinante

$$a_1^{-1} .. a_n^{-1} | p_1^{-1} .. p_n^{-1},$$

die dadurch die Form

$$(-1)^n a_1^{-1} .. a_n^{-1} | p_1^{-2} p .. p_n^{-2} p$$

erhält. Es ist

$$a_1^{-2} .. a_n^{-2} | p_1^{-2} .. p_n^{-2} = (-1)^n \frac{\bar{p}_1 p .. \bar{p}_n p \; a_1^{-1} .. a_n^{-1} | p_1^{-1} .. p_n^{-1}}{a_1 .. a_n p^n}$$

und folglich

$$a_1^{-1} .. a_n^{-1} \dot{|} p_1^{-1} .. p_n^{-1} = (-1)^n \frac{\bar{p}_1 p .. \bar{p}_n p \; a_1^{-1} .. a_n^{-1} | p_1^{-1} .. p_n^{-1}}{a_1 .. a_n p^n . a_1^{-1} .. a_n^{-1} | p_1^{-1} .. p_n^{-1}}$$

oder, da

$$a_1^{-1} .. a_n^{-1} | p_1^{-1} .. p_n^{-1}$$
$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{a_1^{n-1} .. a_n^{n-1} | e_1^{n-1} .. e_2^{n-1} . p_1^{n-1} .. p_n^{n-1} | \varepsilon_1^{n-1} .. \varepsilon_2^{n-1}}{a_1 .. a_n p_1^n . . a_1 .. a_n p_n^n}$$

ist,

$$a_1^{n-1} .. a_n^{-1} \dot{|} p_1^{-1} .. p_n^{-1}$$
$$= \frac{(-1)^n a_1 .. a_n p_1^n .. a_1 .. a_n p_n^n . \bar{p}_1 p .. \bar{p}_n p \; (a_1 .. a_n p_1^n)^{-1} p_1^{n-1} .. (a_1 .. a_n p_n^n)^{-1} p_n^{n-1} | \varepsilon_1^{n-1} .. \varepsilon_2^{n-1}}{a_1 .. a_n p^n . p_1^{n-1} .. p_n^{n-1} | \varepsilon_1^{n-1} .. \varepsilon_2^{n-1}}$$

oder

$$= \frac{(np_1^{n-1} a_1 .. a_n p_1^{n-1} p - (n-1) p_1^{n-2} p \, a_1 .. a_n p_1^n) .. (np_n^{n-1} a_1 .. a_n p_n^{n-1} p - (n-1) p_n^{n-2} p \, a_1 .. a_n p_n^n) | \varepsilon_1^{n-1} .. \varepsilon_2^{n-1}}{a_1 .. a_n p^n . a_1 .. a_n p_1^n . . a_1 .. a_n p_n^n . p_1^{n-1} .. p_n^{n-1} | \varepsilon_1^{n-1} .. \varepsilon_2^{n-1}}.$$

Dieser Gleichung, in der die Gröſsen $a_1, .., a_n$ links einzeln und rechts in der Verbindung eines algebraischen Produktes auftreten, können wir auch die Form

$$a_1^0 p .. a_n^0 p \dot{|} p_1^{-1} .. p_n^{-1}$$
$$= \frac{(na_1 .. a_n p - (n-1) p \, a_1 .. a_n)^n p_1^{2n-2} .. p_n^{2n-2} | \varepsilon_1^{n-1} .. \varepsilon_2^{n-1}}{a_1 .. a_n^n \; p_1^{2n-1} .. p_n^{2n-1} | \varepsilon_1^{n-1} .. \varepsilon_2^{n-1}}$$

geben. Zerlegen wir die links stehende Form in eine Summe, indem wir auf die einzelnen Faktoren des kombinatorischen Produktes $p_1^{-1} \,.\,.\, p_n^{-1}$ die Gleichung

$$p^{-1} = (e, \varepsilon; 2)(-1)^{\varkappa}\, p^{-1}\, \varepsilon_1^{-1-\varkappa}\, \varepsilon_2^{\varkappa} \,.\, e_1^{-1-\varkappa}\, e_2^{\varkappa}$$

anwenden, so ergiebt sich als Koefficient der Gröfse

$$p_1^{-1}\, \varepsilon_1^{-1-\varkappa_1}\, \varepsilon_2^{\varkappa_1} \,.\,.\, p_n^{-1}\, \varepsilon_1^{-1-\varkappa_n}\, \varepsilon_2^{\varkappa_n}$$

die Form

$$(-1)^{\varkappa_1 + \,.\,.\, + \varkappa_n}\, a_1^0 p \,.\,.\, a_n^0 p \,\dot{|}\, (e_1^{-1-\varkappa_1}\, e_2^{\varkappa_1}) \,.\,.\, (e_1^{-1-\varkappa_n}\, e_2^{\varkappa_n})$$

oder, wenn wir $p = e_1$ annehmen, die aus den Gröfsen

$$-\, a_1^0\, e_1^{-1}\, e_2, \,.\,.\,, -\, a_n^0\, e_1^{-1}\, e_2$$

zusammengesetzte symmetrische Form

$$a_1^0 \,.\,.\, a_n^0 \,\dot{|}\, (-\, e_1^{-1}\, e_2)^{\varkappa_1} \,.\,.\, (-\, e_1^{-1}\, e_2)^{\varkappa_n},$$

während wir durch Bestimmung des Koefficienten jener Gröfse auf der rechten Seite einen dieser Form gleichwertigen Ausdruck erhalten, der die Gröfse $a_1 \,.\,.\, a_n$ in den Verbindungen mit den Gröfsen $e_1^n, \,.\,.\,, e_2^n$ enthält. Für $a_1 \,.\,.\, a_n = a^n$ sind die Gröfsen

$$-\, a_1^0\, e_1^{-1}\, e_2, \,.\,.\,, -\, a_n^0\, e_1^{-1}\, e_2$$

die Wurzeln der Gleichung $a^n\, \varepsilon_2^{-n}\, p^0 = 0$, und es ist somit eine jede ganze symmetrische Funktion der Wurzeln dieser Gleichung durch ihre Koefficienten darstellbar.

40. Das Produkt

$$a_{1,1}^{n-1} \,.\,.\, a_{1,n}^{n-1} \,|\, e_1^{n-1} \,.\,.\, e_2^{n-1} \,.\, a_{2,1}^{n-1} \,.\,.\, a_{2,n}^{n-1} \,|\, e_1^{n-1} \,.\,.\, e_2^{n-1}$$

ist u. a. durch die Determinante

$$((e_1^{n-1})^2 + \,.\,.\, + (e_2^{n-1})^2)^n\, a_{1,1}^{n-1} \,.\,.\, a_{1,n}^{n-1} \,|\, a_{2,1}^{n-1} \,.\,.\, a_{2,n}^{n-1}$$

oder

$$\left(\frac{(e_1^n)^2 - (e_2^n)^2}{(e_1\ )^2 - (e_2\ )^2}\right)^n a_{1,1}^{n-1} \,.\,.\, a_{1,n}^{n-1} \,|\, a_{2,1}^{n-1} \,.\,.\, a_{2,n}^{n-1}$$

darstellbar.

Ferner können wir das Quadrat

$$(a_1^{n-1} \,.\,.\, a_n^{n-1} \,|\, e_1^{n-1} \,.\,.\, e_2^{n-1})^2$$

durch die Determinante

$$(a_1^{2n-2} + \,.\,.\, + a_n^{2n-2})^n\, (e_1^{n-1} \,.\,.\, e_2^{n-1})^2$$

und allgemeiner den Ausdruck

$$(a, v; n)\, v_1 \,.\,.\, v_r\, (a_1^{r-1} \,.\,.\, a_r^{r-1} \,|\, e_1^{r-1} \,.\,.\, e_2^{r-1})^2$$

durch die Determinante

$$(v_1 a_1^{2r-2} + \ldots + v_n a_n^{2r-2})^r (e_1^{r-1} \ldots e_2^{r-1})^2$$

ausdrücken.

Dieser letzteren algebraisch-symmetrischen Determinante kann auch die Form

$$(v_1 a_1 e_1^{2r-2} a_1^0 + \ldots + v_n a_n e_1^{2r-2} a_n^0)^r ((e_1^{-1} e_2)^0 \ldots (e_1^{-1} e_2)^{r-1})^2$$

gegeben werden, in der, weil dadurch der Wert der Determinante nicht geändert wird, die Gröſsen e_1 und e_2 auch mit einander und einzeln bezw. mit den Gröſsen $-e_1$ und $-e_2$ vertauscht werden können, und in der ferner das $(\varkappa, \lambda)$te Element die Form

$$v_1 a_1 e_1^{2r-2} (a_1^0 e_1^{-1} e_2)^{\varkappa+\lambda-2} + \ldots + v_n a_n e_1^{2r-2} (a_n^0 e_1^{-1} e_2)^{\varkappa+\lambda-2}$$

hat. Sie läſst sich also in dem besonderen Falle, wenn man die Gröſsen $v_1, \ldots, v_n$ so annimmt, daſs

$$v_1 a_1 e_1^{2r-2} = 1, \ldots, v_n a_n e_1^{2r-2} = 1$$

ist, durch eine Determinante ausdrücken, in der das $(\varkappa, \lambda)$te Element unter Voraussetzung der Gleichung $a_1 \ldots a_n = a^n$ die Summe der $(\varkappa + \lambda - 2)$ten Potenzen der Wurzeln der Gleichung $a^n \varepsilon_2^{-n} p^0 = 0$ darstellt. Diese Determinante ist

$$(a_1^0 + \ldots + a_n^0)^r ((-e_1^{-1} e_2)^0 \ldots (-e_1^{-1} e_2)^{r-1})^2 .$$

41. Aus der Gleichung

$$a_1 a_2 \mid e_1 e_2 \ldots a_n a_{n+1} \mid e_1 e_2 = a_1^n \ldots a_{n+1}^n \mid e_1^n \ldots e_2^n$$

ergiebt sich, wenn wir

$$p = a_{n+1} \mid e_1 e_2 \quad \text{oder} \quad a_{n+1} = -p \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2$$

und

$$a^n = a_1 \ldots a_n$$

setzen, die Gleichung

$$a_1^{n-1} \ldots a_n^{n-1} \mid e_1^{n-1} \ldots e_2^{n-1} . a p^n = (p \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2)^n a_1^n \ldots a_n^n \mid e_1^n \ldots e_2^n$$

und aus ihr, da

$$(p \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2)^n e_1^{\varkappa} e_2^{n-\varkappa} = (-1)^{n-\varkappa} p\varepsilon_1^{n-\varkappa} p\varepsilon_2^{\varkappa}$$

ist, die Gleichung

$$\binom{n}{\varkappa} . a_1^{n-1} \ldots a_n^{n-1} \mid e_1^{n-1} \ldots e_2^{n-1} . a^n e_1^{n-\varkappa} e_2^{\varkappa}$$

$$= a_1^n \ldots a_n^n \mid e_1^n \ldots (e_1^{\varkappa+1} e_2^{n-1-\varkappa})(e_1^{\varkappa-1} e_2^{n+1-\varkappa}) \ldots e_2^n .$$

Giebt man ihr ferner die Form

$$(-1)^n . a_1{}^{n-1} \ldots a_n{}^{n-1} \,|\, e_1{}^{n-1} \ldots e_2{}^{n-1} . ap^n$$
$$= a_1{}^n \ldots a_n{}^n (p \,|\, \varepsilon_1 \varepsilon_2)^n \varepsilon_3{}^n \,|\, e_1{}^n \ldots e_2{}^n e_3{}^n$$

und multipliziert sie dann mit der Gleichung

$$(-1)^{n+1} . a_1{}^{n-1} \ldots a_n{}^{n-1} \,|\, e_1{}^{n-1} \ldots e_2{}^{n-1} . ap_1{}^n$$
$$= a_1{}^n \ldots a_n{}^n \varepsilon_3{}^n (p_1 \,|\, \varepsilon_1 \varepsilon_2)^n \,|\, e_1{}^n \ldots e_2{}^n e_3{}^n$$

nach der Multiplikationsformel

$$a_1 \ldots a_m \,|\, e_1 \ldots e_m . p_1 \ldots p_m \,|\, \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m$$
$$= (a_1 e_1 . p_1 + \ldots + a_m e_1 . p_m) \ldots (a_1 e_m . p_1 + \ldots + a_m e_m . p_m) \,|\, \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m,$$

so erhält man die Gleichung

$$-(a_1{}^{n-1} \ldots a_n{}^{n-1} \,|\, e_1{}^{n-1} \ldots e_2{}^{n-1})^2 \, ap^n \, ap_1{}^n$$
$$= ((a_1{}^{2n} + \ldots + a_n{}^{2n}) e_1{}^n + (p \,|\, \varepsilon_1 \varepsilon_2)^n e_1{}^n . \varepsilon_3{}^n) \ldots ((a_1{}^{2n} + \ldots + a_n{}^{2n}) e_2{}^n$$
$$+ (p \,|\, \varepsilon_1 \varepsilon_2)^n e_2{}^n . \varepsilon_3{}^n)(p_1 \,|\, \varepsilon_1 \varepsilon_2)^n \,|\, e_1{}^n \ldots e_2{}^n e_3{}^n,$$

in der das $(\varkappa, \lambda)$te Element der rechts stehenden Determinante für $\varkappa = 1, \ldots, n+1$ und $\lambda = 1, \ldots, n+1$ die Form

$$(a_1{}^{2n} + \ldots + a_n{}^{2n}) e_1{}^{2n+2-\varkappa-\lambda} \, e_2{}^{\varkappa+\lambda-2}$$
$$= a_1 e_1{}^{2n} (a_1{}^0 e_1{}^{-1} e_2)^{\varkappa+\lambda-2} + \ldots + a_n e_1{}^{2n} (a_n{}^0 e_1{}^{-1} e_2)^{\varkappa+\lambda-2},$$

ferner für $\varkappa = 1, \ldots, n+1$ und $\lambda = n+2$ die Form

$$(p \,|\, \varepsilon_1 \varepsilon_2)^n e_1{}^{n+1-\varkappa} e_2{}^{\varkappa-1} = (-1)^{\varkappa-1} p\varepsilon_1{}^{\varkappa-1} p\varepsilon_2{}^{n+1-\varkappa}$$

und für $\varkappa = n+2$ und $\lambda = 1, \ldots, n+1$ die Form

$$(p_1 \,|\, \varepsilon_1 \varepsilon_2)^n e_1{}^{n+1-\lambda} e_2{}^{\lambda-1} = (-1)^{\lambda-1} p_1 \varepsilon_1{}^{\lambda-1} \, p_1 \varepsilon_2{}^{n+1-\lambda}$$

und endlich für $\varkappa = n+2$ und $\lambda = n+2$ die Form 0 hat. In der Determinante können die Gröfsen e_1 und e_2 auch mit einander und einzeln bezw. mit den Gröfsen $-e_1$ und e_2 vertauscht werden.

42. Die aus der Form ap^{n-1} durch Multiplikation mit $(\varepsilon_1 \varepsilon_2{}^{-1})^{\varkappa-1} p^0$ hervorgehende Form

$$a^{n-1} (\varepsilon_1 \varepsilon_2{}^{-1})^{\varkappa-1} p^{n-1}$$

ist, wenn p eine Verschwindungsgröfse der Form $(\varepsilon_1{}^n - \varepsilon_2{}^n) p^n$ oder eine Wurzelgröfse der Gleichung $(\varepsilon_1 \varepsilon_2{}^{-1})^n p^0 = 1$ und folglich $p^0 \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^{-1}$ eine $n$te Wurzel der positiven Einheit ist, infolge der dann geltenden Gleichung

$$(\varepsilon_1 \varepsilon_2{}^{-1})^{\varkappa-1} p^0 = (\varepsilon_1 \varepsilon_2{}^{-1})^{\varkappa-n-1} p^0$$

eine Form $(n-1)$ten Grades für p, in der der Koefficient von $p^{n-1} \varepsilon_1{}^{n-\lambda} \varepsilon_2{}^{\lambda-1}$

$$\binom{n-1}{\lambda-1} a^{n-1} (\varepsilon_1 \varepsilon_2^{-1})^{\varkappa-1} e_1^{n-\lambda} e_2^{\lambda-1}$$

für $\lambda + \varkappa - 1 > n$ die Form

$$\binom{n-1}{\lambda-1} a^{n-1} (\varepsilon_1 \varepsilon_2^{-1})^{\varkappa-n-1} e_1^{n-\lambda} e_2^{\lambda-1}$$

annimmt und demgemäſs aus dem entsprechenden Koefficienten in der Form ap^{n-1} dadurch hervorgeht, daſs man in diesem das λ für $\lambda + \varkappa - 1 \leqq n$ um $\varkappa - 1$ und für $\lambda + \varkappa - 1 > n$ um $\varkappa - n - 1$ vergröſsert.

Die n Formen

$$a^{n-1} (\varepsilon_1 \varepsilon_2^{-1})^0 p^{n-1}, \ldots, a^{n-1} (\varepsilon_1 \varepsilon_2^{-1})^{n-1} p^{n-1}$$

haben also, wenn p eine Verschwindungsgröſse der Form $(\varepsilon_1^n - \varepsilon_2^n) p^n$ ist, die Eigenschaft, daſs ihre Koefficienten in der Verbindung mit den zugehörigen Binomialkoefficienten der Reihe nach durch cyklische Vertauschung aus denen der ersten Form ap^{n-1} hervorgehen.

Wendet man auf sie die Formel

$$a_1^{n-1} \ldots a_n^{n-1} \,|\, p_1^{n-1} \ldots p_n^{n-1} = \binom{n-1}{0} \ldots \binom{n-1}{n-1} . a_1^{n-1} \ldots a_n^{n-1} \,|\, e_1^{n-1} \ldots e_2^{n-1} . p_1^{n-1} \ldots p_n^{n-1} \,|\, \varepsilon_1^{n-1} \ldots \varepsilon_2^{n-1}$$

an, indem man die Gröſsen $p_1, \ldots, p_n$ als die Verschwindungsgröſsen der Form $(\varepsilon_1^n - \varepsilon_2^n) p^n$ voraussetzt, so erhält man, da die Determinante

$$a^{n-1} (\varepsilon_1 \varepsilon_2^{-1})^0 \ldots a^{n-1} (\varepsilon_1 \varepsilon_2^{-1})^{n-1} \,|\, p_1^{n-1} \ldots p_n^{n-1}$$

in der Form

$$a^{n-1} \varepsilon_2^{-n+1} p_1^0 \ldots a^{n-1} \varepsilon_2^{-n+1} p_n^0 . \varepsilon_2^{n-1} \ldots \varepsilon_1^{n-1} \,|\, p_1^{n-1} \ldots p_n^{n-1}$$

oder

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a^{n-1} \varepsilon_2^{-n+1} p_1^0 \ldots a^{n-1} \varepsilon_2^{-n+1} p_n^0 . p_1^{n-1} \ldots p_n^{n-1} \,|\, \varepsilon_1^{n-1} \ldots \varepsilon_2^{n-1}$$

darstellbar ist, die Formel

$$a^{n-1} \varepsilon_2^{-n+1} p_1^0 \ldots a^{n-1} \varepsilon_2^{-n+1} p_n^0 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \binom{n-1}{0} \ldots \binom{n-1}{n-1} . a^{n-1} (\varepsilon_1 \varepsilon_2^{-1})^0 \ldots a^{n-1} (\varepsilon_1 \varepsilon_2^{-1})^{n-1} \,|\, e_1^{n-1} \ldots e_2^{n-1}.$$

43. Das Determinantenprodukt

$$a_1 a_2 \,|\, e_1 e_2 \ldots a_{n-1} a_n \,|\, e_1 e_2$$

läſst sich durch das dreiteilige Produkt

$$a_1 a_2 \mid e_1 e_2 \,.\,.\, a_{r-1}\, a_r \mid e_1 e_2 \,.\, a_1 \,.\,.\, a_r^{\,n-r} (a_{r+1} \mid e_1 e_2)^r \,.\,.\, (a_n \mid e_1 e_2)^r$$
$$.\, a_{r+1}\, a_{r+2} \mid e_1 e_2 \,.\,.\, a_{n-1}\, a_n \mid e_1 e_2$$

darstellen, und es ist daher

$$a_1^{n-1} \,.\,.\, a_n^{n-1} \mid e_1^{n-1} \,.\,.\, e_2^{n-1} = a_1^{r-1} \,.\,.\, a_r^{r-1} \mid e_1^{r-1} \,.\,.\, e_2^{r-1} \,.\, a_{r+1}^{n-r-1}$$
$$.\, a_n^{n-r-1} \mid e_1^{n-r-1} \,.\,.\, e_2^{n-r-1} \,.\, a_1 \,.\,.\, a_r^{n-r} (a_{r+1} \mid e_1 e_2)^r \,.\,.\, (a_n \mid e_1 e_2)^r .$$

44. Scheiden wir aus dem Determinantenprodukte

$$a_1 a_2 \mid e_1 e_2 \,.\,.\, a_{n-1}\, a_n \mid e_1 e_2$$

die Faktoren, welche die Gröſse $a_\varkappa$ enthalten, und damit das Produkt

$$a_1 a_\varkappa \mid e_1 e_2 \,.\,.\, a_{\varkappa-1}\, a_\varkappa \mid e_1 e_2 \,.\, a_\varkappa a_{\varkappa+1} \mid e_1 e_2 \,.\,.\, a_\varkappa a_n \mid e_1 e_2$$

aus, so nimmt es den Wert

$$a_1^{n-2} \,.\,.\, a_{\varkappa-1}^{n-2}\, a_{\varkappa+1}^{n-2} \,.\,.\, a_n^{n-2} \mid e_1^{n-2} \,.\,.\, e_2^{n-2}$$

an, und es gilt, da das ausgeschiedene Produkt durch

$$(-1)^{n-\varkappa}\, \bar{a}_\varkappa a_1 \,.\,.\, a_n (a_\varkappa \mid e_1 e_2)^{n-1}$$

darstellbar ist, die Gleichung

$$a_1^{n-1} \,.\,.\, a_n^{n-1} \mid e_1^{n-1} \,.\,.\, e_2^{n-1} = (-1)^{n-1}\, \bar{a}_\varkappa a_1 \,.\,.\, a_n$$
$$(a_\varkappa \mid e_1 e_2)^{n-1} \,.\, \overline{a_\varkappa^{n-2}}\, a_1^{n-2} \,.\,.\, a_n^{n-2} \mid e_1^{n-2} \,.\,.\, e_2^{n-2} .$$

45. Die Determinante

$$a_1^{n-1} \,.\,.\, a_n^{n-1} \mid e_1^{n-1} (e_1^{n-2} e_2) \,.\,.\, (e_1 e_2^{n-2}) (e_1^{n-\lambda} e_2^{\lambda-1}),$$

die mit der Determinante

$$a_1^{n-1} \,.\,.\, a_n^{n-1} \mid e_1^{n-1} \,.\,.\, e_2^{n-1}$$

bis auf eine Vertikalreihe genau übereinstimmt, ist, wie diese, für die Gröſsen $a_1, \ldots, a_n$ eine alternierende Form und unterscheidet sich daher von ihr durch eine für diese Gröſsen symmetrische Form. In der That ist, da man dem Koefficienten des Elementes $a_\varkappa^{n-1} e_1^{n-\lambda} e_2^{\lambda-1}$

$$(-1)^{n-1}\, \overline{a_\varkappa^{n-1}}\, a_1^{n-1} \,.\,.\, a_n^{n-1} \mid e_1^{n-1} (e_1^{n-2} e_2) \,.\,.\, (e_1 e_2^{n-2})$$

die Form

$$\bar{a}_\varkappa a_1 \,.\,.\, a_n e_1^{n-1} \,.\, (-1)^{n-1}\, \overline{a_\varkappa^{n-2}}\, a_1^{n-2} \,.\,.\, a_n^{n-2} \mid e_1^{n-2} \,.\,.\, e_2^{n-2}$$

und demzufolge nach dem vorigen Abschnitte die Form

$$\frac{\bar{a}_\varkappa a_1 \ldots a_n e_1^{n-1} \cdot a_1^{n-1} \ldots a_n^{n-1} \mid e_1^{n-1} \ldots e_2^{n-1}}{\bar{a}_\varkappa a_1 \ldots a_n (a_\varkappa \mid e_1 e_2)^{n-1}}$$

geben kann,

$$a_1^{n-1} \ldots a_n^{n-1} \mid e_1^{n-1} (e_1^{n-2} e_2) \ldots (e_1 e_2^{n-2}) (e_1^{n-\lambda} e_2^{\lambda-1})$$
$$= \left(\frac{\bar{a}_1 a_1 \ldots a_n e_1^{n-1} a_1^{n-1}}{\bar{a}_1 a_1 \ldots a_n (a_1 \mid e_1 e_2)^{n-1}} + \ldots + \frac{\bar{a}_n a_1 \ldots a_n e_1^{n-1} a_n^{n-1}}{\bar{a}_n a_1 \ldots a_n (a_n \mid e_1 e_2)^{n-1}}\right)$$
$$e_1^{n-\lambda} e_2^{\lambda-1} \cdot a_1^{n-1} \ldots a_n^{n-1} \mid e_1^{n-1} \ldots e_2^{n-1}.$$

Die symmetrische Form

$$\left(\frac{\bar{a}_1 a_1 \ldots a_n e_1^{n-1} a_1^{n-1}}{\bar{a}_1 a_1 \ldots a_n (a_1 \mid e_1 e_2)^{n-1}} + \ldots + \frac{\bar{a}_n a_1 \ldots a_n e_1^{n-1} a_n^{n-1}}{\bar{a}_n a_1 \ldots a_n (a_n \mid e_1 e_2)^{n-1}}\right) e_1^{n-\lambda} e_2^{\lambda-1},$$

die nach der letzten Gleichung für $\lambda = 1, \ldots, n-1$ den Wert 0 und für $\lambda = n$ den Wert 1 hat, erscheint, da

$$p^{n-1} = (e, \varepsilon; 2) \binom{n-1}{\lambda-1} p^{n-1} \varepsilon_1^{\lambda-1} \varepsilon_2^{n-\lambda} \cdot e_1^{\lambda-1} e_2^{n-\lambda}$$

und somit für $p = a_\varkappa \mid e_1 e_2$ und also $p\varepsilon_1 = a_\varkappa e_2$, $p\varepsilon_2 = -a_\varkappa e_1$

$$(a_\varkappa \mid e_1 e_2)^{n-1} = (e, \varepsilon; 2)(-1)^{n-\lambda} \binom{n-1}{\lambda-1} a_\varkappa^{n-1} e_1^{n-\lambda} e_2^{\lambda-1}$$
$$\cdot e_1^{\lambda-1} e_2^{n-\lambda}$$

ist, in der Entwickelung des Ausdruckes

$$\frac{\bar{a}_1 a_1 \ldots a_n e_1^{n-1} a_1 e_1^{n-n_1} (a_1 \mid e_1 e_2)^{n_1-1}}{\bar{a}_1 a_1 \ldots a_n (a_1 \mid e_1 e_2)^{n-1}} + \ldots$$
$$+ \frac{\bar{a}_n a_1 \ldots a_n e_1^{n-1} a_n e_1^{n-n_1} (a_n \mid e_1 e_2)^{n_1-1}}{\bar{a}_n a_1 \ldots a_n (a_n \mid e_1 e_2)^{n-1}}$$

als Koefficient von $(-1)^{n_1-\lambda} \binom{n_1-1}{\lambda-1} e_1^{\lambda-1} e_2^{n_1-\lambda}$.

Im Falle $n_1 < n$ verschwindet daher dieser Ausdruck identisch, weil dann λ nur Werte annimmt, die kleiner als n sind. Nehmen wir also insbesondere $n_1 = n-1$ an, so ist, da für diese Annahme

$$\bar{a}_\varkappa a_1 \ldots a_n e_1^{n-1} a_\varkappa e_1^{n-n_1} = a_1 \ldots a_n e_1^n$$

ist,

$$\frac{(a_1 \mid e_1 e_2)^{n-2}}{\bar{a}_1 a_1 \ldots a_n (a_1 \mid e_1 e_2)^{n-1}} + \ldots + \frac{(a_n \mid e_1 e_2)^{n-2}}{\bar{a}_n a_1 \ldots a_n (a_n \mid e_1 e_2)^{n-1}} = 0$$

oder, wenn wir

$$p_1 = a_1 \mid e_1 e_2, \ldots, p_n = a_n \mid e_1 e_2$$

und also $p_1 p_2 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2 = a_1 a_2 \mid e_1 e_2$, u. s. w. setzen,

$$\frac{p_1^{n-2}}{\bar{p}_1 p_1 \cdots p_n (p_1 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2)^{n-1}} + \ldots + \frac{p_n^{n-2}}{\bar{p}_n p_1 \cdots p_n (p_n \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2)^{n-1}} = 0.$$

46. Die Determinante

$$a_1^{n-1} \ldots a_n^{n-1} \mid e_1^{n-1} \ldots e_2^{n-1}$$

setzt sich, da wir sie durch den Ausdruck

$$\bar{a}_\varkappa a_1 \ldots a_n (a_\varkappa \mid e_1 e_2)^{n-1} \cdot \frac{a_1^{n-1} \ldots a_n^{n-1} \mid e_1^{n-1} \ldots e_2^{n-1}}{\bar{a}_\varkappa a_1 \ldots a_n (a_\varkappa \mid e_1 e_2)^{n-1}},$$

in welchem

$$\bar{a}_\varkappa a_1 \ldots a_n (a_\varkappa \mid e_1 e_2)^{n-1}$$

$$= (e, \varepsilon; 2)(-1)^{n-\lambda} \binom{n-1}{\lambda-1} \bar{a}_\varkappa a_1 \ldots a_n e_1^{\lambda-1} e_2^{n-\lambda} \overline{a_\varkappa^{n-1} e_1^{n-\lambda} e_2^{\lambda-1}}$$

ist und ferner der Quotient nach der im 44ten Abschnitte gegebenen Gleichung die Gröſse $a_\varkappa$ nicht enthält, darstellen können, aus Gliedern zusammen, die aus dem Ausdrucke

$$a_\varkappa^{n-1} e_1^{n-\lambda} e_2^{\lambda-1} \cdot (-1)^{n-\lambda} \binom{n-1}{\lambda-1} \bar{a}_\varkappa a_1 \ldots a_n e_1^{\lambda-1} e_2^{n-\lambda}$$

$$\cdot \frac{a_1^{n-1} \ldots a_n^{n-1} \mid e_1^{n-1} \ldots e_2^{n-1}}{\bar{a}_\varkappa a_1 \ldots a_n (a_\varkappa \mid e_1 e_2)^{n-1}}$$

bei gegebenem $\varkappa$ für $\lambda = 1, \ldots, n$ hervorgehen, und es ist daher

$$\overline{a_\varkappa^{n-1} e_1^{n-\lambda} e_2^{\lambda-1}} = (-1)^{n-\lambda} \binom{n-1}{\lambda-1} \frac{\bar{a}_\varkappa a_1 \ldots a_n e_1^{\lambda-1} e_2^{n-\lambda}}{\bar{a}_\varkappa a_1 \ldots a_n (a_\varkappa \mid e_1 e_2)^{n-1}}.$$

47. Sind die Gröſsen $a_1 e_1, a_1 e_2; \ldots; a_n e_1, a_n e_2$ mit den Gröſsen $p^{n-1} \varepsilon_1^{n-1}, \ldots, p^{n-1} \varepsilon_2^{n-1}$ durch die Gleichungen

$$a_1 p^{n-1} = v_1, \ldots, a_n p^{n-1} = v_n$$

verbunden, so ist

$$p^{n-1} = v_1 \overline{a_1^{n-1}} + \ldots + v_n \overline{a_n^{n-1}}$$

und daher der Gleichung

$$\binom{n-1}{\varkappa-1} \varepsilon_1^{n-\varkappa} \varepsilon_2^{\varkappa-1} = \overline{e_1^{n-\varkappa} e_2^{\varkappa-1}}$$

zufolge

$$\binom{n-1}{\varkappa-1} p^{n-1}\, \varepsilon_1^{\,n-\varkappa} \varepsilon_2^{\,\varkappa-1} = (v_1 \overline{a_1^{\,n-1}} + .. + v_n \overline{a_n^{\,n-1}})\, \overline{e_1^{\,n-\varkappa} e_2^{\,\varkappa-1}}$$

oder

$$p^{n-1}\, \varepsilon_1^{\,n-\varkappa} \varepsilon_2^{\,\varkappa-1} = (-1)^{n-\varkappa} \Big(\frac{v_1 \bar{a}_1}{\bar{a}_1 a_1 .. a_n (a_1 \,|\, e_1 e_2)^{n-1}} + ..$$

$$+ \frac{v_n \bar{a}_n}{\bar{a}_n a_1 .. a_n (a_n \,|\, e_1 e_2)^{n-1}} \Big) a_1 .. a_n\, e_1^{\,\varkappa-1} e_2^{\,n-\varkappa}.$$

Sind dagegen die Gleichungen

$$\Big(\binom{n-1}{0} a_1^{\,n-1} e_1^{\,n-1} . \varepsilon_1^{\,n-1} + .. + \binom{n-1}{n-1} a_n^{\,n-1} e_1^{\,n-1} . \varepsilon_2^{\,n-1} \Big) p^{n-1} = v_1, ..,$$

$$\Big(\binom{n-1}{0} a_1^{\,n-1} e_2^{\,n-1} . \varepsilon_1^{\,n-1} + .. + \binom{n-1}{n-1} a_n^{\,n-1} e_2^{\,n-1} . \varepsilon_2^{\,n-1} \Big) p^{n-1} = v_n$$

gegeben, die dieselben Koefficienten, wie die vorigen Gleichungen, nur in einer anderen Anordnung enthalten und aus ihnen, wenn man sie in entwickelter Form darstellt, durch Vertauschung der Gröfsen $a_\varkappa^{\,n-1}$ und $e_1^{\,n-\varkappa} e_2^{\,\varkappa-1}$ hervorgehen, so ist

$$\binom{n-1}{\varkappa-1} p^{n-1}\, \varepsilon_1^{\,n-\varkappa} \varepsilon_2^{\,\varkappa-1} = \overline{a_\varkappa^{\,n-1}}\, (v_1 \overline{e_1^{\,n-1}} + .. + v_n \overline{e_2^{\,n-1}})$$

oder

$$\binom{n-1}{\varkappa-1} p^{n-1}\, \varepsilon_1^{\,n-\varkappa} \varepsilon_2^{\,\varkappa-1}$$

$$= \frac{\bar{a}_\varkappa a_1 .. a_n \Big((-1)^{n-1} v_1 \binom{n-1}{0} e_2^{\,n-1} + .. + (-1)^n v_n \binom{n-1}{n-1} e_1^{\,n-1} \Big).}{\bar{a}_\varkappa a_1 .. a_n (a_\varkappa \,|\, e_1 e_2)^{n-1}}$$

In dem besonderen Falle

$$v_\varkappa = (-1)^{n-\varkappa} p_1^{\,n-1} \varepsilon_1^{\,\varkappa-1} \varepsilon_2^{\,n-\varkappa}$$

ist darnach

$$\binom{n-1}{\varkappa-1} p^{n-1}\, \varepsilon_1^{\,n-\varkappa} \varepsilon_2^{\,\varkappa-1} = \frac{\bar{a}_\varkappa a_1 .. a_n\, p_1^{\,n-1}}{\bar{a}_\varkappa a_1 .. a_n (a_\varkappa | e_1 e_2)^{n-1}}.$$

48. Die Subdeterminante

$$\overline{a_\varkappa^{\,-1}}\, a_1^{\,-1} .. a_n^{\,-1} \,|\, \overline{p_\lambda^{\,-1}}\, p_1^{\,-1} .. p_n^{\,-1},$$

welche den Koefficienten von $a_\varkappa p_\lambda^{\,-1}$ in der Determinante $a_1^{\,-1} .. a_n^{\,-1} \,|\, p_1^{\,-1} .. p_n^{\,-1}$ darstellt, ist, da in ihr die Gröfsen $a_\varkappa$ und p_λ fehlen, unter Berücksichtigung der Gleichung

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{a_1^{-1} \ldots a_n^{-1} \mid p_1^{-1} \ldots p_n^{-1}}{\frac{a_1^{n-1} \ldots a_n^{n-1} \mid e_1^{n-1} \ldots e_2^{n-1} \,.\, p_1^{n-1} \ldots p_n^{n-1} \mid \varepsilon_1^{n-1} \ldots \varepsilon_2^{n-1}}{a_1 \ldots a_n^n \, p_1^n \ldots p_n^n}}$$

durch den Ausdruck

$$(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$$

$$. \frac{\overline{a_\varkappa^{n-2}} \, a_1^{n-2} \ldots a_n^{n-2} \mid e_1^{n-2} \ldots e_2^{n-2} \,.\, \overline{p_\lambda^{n-2}} \, p_1^{n-2} \ldots p_n^{n-2} \mid \varepsilon_1^{n-2} \ldots \varepsilon_2^{n-2}}{\bar{a}_\varkappa a_1 \ldots a_n^{n-1} \, \overline{p_\lambda^{n-1}} \, p_1^{n-1} \ldots p_n^{n-1}}$$

oder also, da dem Zähler die Form

$$\frac{a_1^{n-1} \ldots a_n^{n-1} \mid e_1^{n-1} \ldots e_2^{n-1} \,.\, p_1^{n-1} \ldots p_n^{n-1} \mid \varepsilon_1^{n-1} \ldots \varepsilon_2^{n-1}}{\bar{a}_\varkappa a_1 \ldots a_n (a_\varkappa \mid e_1 e_2)^{n-1} \,.\, \bar{p}_\lambda p_1 \ldots p_n (p_\lambda \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2)^{n-1}}$$

und dem Nenner die Form

$$\frac{a_1 \ldots a_n^n \, p_1^n \ldots p_n^n \,.\, a_\varkappa p_\lambda}{p_1 \ldots p_n \, a_\varkappa^n \,.\, a_1 \ldots a_n \, p_\lambda^n}$$

gegeben werden kann, durch den Ausdruck

$$(-1)^{n-1} \frac{p_1 \ldots p_n \, a_\varkappa^n \,.\, a_1 \ldots a_n p_\lambda^n}{\bar{a}_\varkappa a_1 \ldots a_n (a_\varkappa \mid e_1 e_2)^{n-1} \,.\, \bar{p}_\lambda p_1 \ldots p_n (p_\lambda \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2)^{n-1}} \cdot a_\varkappa p_\lambda^{-1}$$

$$. \, a_1^{-1} \ldots a_n^{-1} \mid p_1^{-1} \ldots p_n^{-1}$$

darstellbar. Folglich ist

$$\overline{a_\varkappa^{-1}} \; \overline{p_\lambda^{-1}}$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{p_1 \ldots p_n \, a_\varkappa^n \,.\, a_1 \ldots a_n p_\lambda^n}{\bar{a}_\varkappa a_1 \ldots a_n (a_\varkappa \mid e_1 e_2)^{n-1} \,.\, \bar{p}_\lambda p_1 \ldots p_n (p_\lambda \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2)^{n-1}} \cdot a_\varkappa p_\lambda^{-1}.$$

49. Sind die Gleichungen

$$(a_1 p_1^{-1} \,.\, \varepsilon_1 + \ldots + a_m p_1^{-1} \,.\, \varepsilon_m) p = v_1, \ldots,$$

$$(a_1 p_m^{-1} \,.\, \varepsilon_1 + \ldots + a_m p_m^{-1} \,.\, \varepsilon_m) p = v_m$$

gegeben, so ist

$$p\varepsilon_\varkappa = \overline{a_\varkappa^{-1}} (v_1 \overline{p_1^{-1}} + \ldots + v_m \overline{p_m^{-1}})$$

oder

$$p\varepsilon_\varkappa = (-1)^{m-1} \frac{p_1 \ldots p_m \, a_\varkappa^m}{\bar{a}_\varkappa a_1 \ldots a_m (a_\varkappa \mid e_1 e_2)^{m-1}} \Big(\frac{a_1 \ldots a_m p_1^m}{\bar{p}_1 p_1 \ldots p_m (p_1 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2)^{m-1}}$$

$$. \, v_1 a_\varkappa p_1^{-1} + \ldots + \frac{a_1 \ldots a_m \, p_m^m}{\bar{p}_m p_1 \ldots p_m (p_m \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2)^{m-1}} \cdot v_m a_\varkappa p_m^{-1} \Big).$$

Und durch Vertauschung von a und p ergiebt sich natürlich die Form, welche $p\varepsilon_\chi$ für die Gleichungen

$$(a_1 p_1^{-1} . \varepsilon_1 + .. + a_1 p_m^{-1} . \varepsilon_m) p = v_1, .., \\ (a_m p_1^{-1} . \varepsilon_1 + .. + a_m p_m^{-1} . \varepsilon_m) p = v_m$$

annimmt.

Drittes Kapitel.

Formen, deren Verhältnis für eine Anzahl gegebener Werte der Veränderlichen gegebene Werte annimmt.

50. Es ist leicht, für die Gröfse p eine Form zu finden, die für $p = a_1 | e_1 e_2$ den Wert $v_1, ..,$ für $p = a_n | e_1 e_2$ den Wert v_n annimmt. Der Ausdruck

$$\frac{a_2 .. a_n p^{n-1}}{a_2 .. a_n (a_1 | e_1 e_2)^{n-1}}$$

hat für $p = a_1 | e_1 e_2$ den Wert 1 und verschwindet für $p = a_2 | e_1 e_2$, $.., p = a_n | e_1 e_2$, und dasselbe gilt von den übrigen $n-1$ Ausdrücken, die wir in entsprechender Weise bilden können, für die entsprechenden Werte von p, folglich ist jene Form

$$a_{0,-1} p^{n-1} = \frac{v_1 \bar{a}_1 a_1 .. a_n p^{n-1}}{\bar{a}_1 a_1 .. a_n (a_1 | e_1 e_2)^{n-1}} + .. + \frac{v_n \bar{a}_n a_1 .. a_n p^{n-1}}{\bar{a}_n a_1 .. a_n (a_n | e_1 e_2)^{n-1}}.$$

Sie geht für $r = 1$ aus der Form

$$a_{0,-r} p^{n-r} = (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} (a, v; n)$$

$$\frac{v_1 .. v_r \bar{a}_1 .. \bar{a}_r a_1 .. a_n p^{n-r}}{\bar{a}_1 .. \bar{a}_r a_1 .. a_n{}^r (a_1 | e_1 e_2)^{n-r} .. (a_r | e_1 e_2)^{n-r}}$$

hervor, die für $r = 0$ in die für

$$p = a_1 | e_1 e_2, .., p = a_n | e_1 e_2$$

verschwindende Form

$$ap^n = a_1 .. a_n p^n$$

übergeht.

Setzt man in dieser Form $p = a_1 | e_1 e_2$, so verschwinden alle Glieder, die v_1 nicht enthalten, weil in ihnen im Zähler a_1 vorkommt, und sie verwandelt sich in das Produkt aus v_1 und dem Ausdrucke

$$(-1)^{\frac{r(r-1)}{2}}(a,v;n-1)\frac{v_2\,..\,v_r}{\bar{a}_2..\bar{a}_r a_2\,..\,a_n{}^{r-1}(a_2\,|\,e_1e_2)^{n-r}\,..\,(a_r\,|\,e_1e_2)^{n-r}}.$$

In diesen Ausdruck verwandelt sich aber, da

$$\frac{(-1)^{r-1}\,\bar{a}_2\,..\,\bar{a}_r\,p^{r-1}}{a_1{}^{r-1}(a_2\,|\,e_1e_2)\,..\,(a_r\,|\,e_1e_2)}$$

für $p=a_1\,|\,e_1e_2$ der positiven Einheit gleich ist, gleichfalls für $p=a_1\,|\,e_1e_2$ die aus ihm durch Multiplikation mit diesem Ausdrucke hervorgehende Form

$$a_{0,r-1}\,p^{r-1}=(-1)^{\frac{(r-1)\,(r-2)}{2}}(a,v;n)\frac{v_2\,..\,v_r\,a_2\,..\,a_r\,p^{r-1}}{\bar{a}_2\,..\,\bar{a}_r\,a_1\,..\,a_n{}^{r-1}(a_2\,|\,e_1e_2)^{n-r+1}\,..(a_r\,|\,e_1e_2)^{n-r+1}}$$

oder in anderer Gestalt die Form

$$a_{0,r-1}\,p^{r-1}=(-1)^{\frac{(r-1)(r-2)}{2}}(a,v;n)\frac{v_1\,..\,v_{r-1}\,a_1\,..\,a_{r-1}\,p^{r-1}}{\bar{a}_1\,..\bar{a}_{r-1}a_1\,..\,a_n{}^{r-1}(a_1\,|\,e_1e_2)^{n-r+1}\,..\,(a_{r-1}\,|\,e_1e_2)^{n-r+1}}.$$

Die Formen

$$a_{0,-r}\,p^{n-r},\ a_{0,r-1}\,p^{r-1}$$

haben also die Eigenschaft, dafs ihr Verhältnis für $p=a_1\,|\,e_1e_2$ den Wert $v_1,..,$ für $p=a_n\,|\,e_1e_2$ den Wert v_n annimmt.

Die Form $a_{0,r-1}\,p^{r-1}$ oder die Gröfse $a_{0,r-1}{}^{r-1}$ ist für $r=1$ der positiven Einheit und für $r=0$ der Null gleichwertig. Vergl. Serret-Wertheim's „Handbuch der höheren Algebra. Leipzig, 1868.“ No. 232 und weiterhin No. 253—261.

51. Der Ausdruck

$$(-1)^{\frac{r(r-1)}{2}}\,\bar{a}_1\,..\,\bar{a}_r\,a_1\,..\,a_n{}^r\,(a_1\,|\,e_1e_2)^{n-r}\,..\,(a_r\,|\,e_1e_2)^{n-r},$$

der in der Form $a_{0,-r}\,p^{n-r}$ und mit einem um 1 kleineren r in der Form $a_{0,r-1}\,p^{r-1}$ auftritt, ist nach der letzten Formel des 38ten Abschnitts in der Form

$$\frac{\bar{a}_1a_1\,..\,a_n(a_1\,|\,e_1e_2)^{n-1}\,..\,\bar{a}_r a_1\,..\,a_n(a_r\,|\,e_1e_2)^{n-1}}{(a_1{}^{r-1}\,..\,a_r{}^{r-1}\,|\,e_1{}^{r-1}\,..\,e_2{}^{r-1})^2}$$

und daher, wenn die Gröfsen

$$a_1p_1\bar{a}_1a_1\,..\,a_n\,(a_1\,|\,e_1e_2)^{n-1},\,..\,,a_np_1\bar{a}_na_1\,..\,a_n\,(a_n\,|\,e_1e_2)^{n-1}$$

oder also die Werte, welche die Form

$$\bar{p}p_1 ap^n = a_1 p_1 \bar{a}_1 a_1 \ldots a_n p^{n-1} + \ldots + a_n p_1 \bar{a}_n a_1 \ldots a_n p^{n-1}$$

für die Verschwindungsgröfsen der Form ap^n annimmt, durch

$$u_1, \ldots, u_n$$

bezeichnet werden, in der Form

$$\frac{u_1 \ldots u_r}{(a_1^{r-1} \ldots a_r^{r-1} \mid e_1^{r-1} \ldots e_2^{r-1})^2 a_1 \ldots a_r p_1^r}$$

darstellbar, und es ist somit

$$a_{0,-r} p^{n-r} = (a, v, u; n) \frac{v_1 \ldots v_r}{u_1 \ldots u_r} (a_1^{r-1} \ldots a_r^{r-1} \mid e_1^{r-1} \ldots e_2^{r-1})^2$$
$$a_1 \ldots a_r\, p_1^r\, \bar{a}_1 \ldots \bar{a}_r\, a_1 \ldots a_n p^{n-r},$$

$$a_{0,r-1} p^{r-1} = (a, v, u; n) \frac{v_1 \ldots v_{r-1}}{u_1 \ldots u_{r-1}} (a_1^{r-2} \ldots a_{r-1}^{r-2} \mid e_1^{r-2} \ldots e_2^{r-2})^2$$
$$a_1 \ldots a_{r-1} p_1^{r-1} a_1 \ldots a_{r-1} p^{r-1}.$$

Wir setzen nun

$$v_1 = \frac{w_1 u_1}{a_1 p_1^{2r-2}}, \ldots, v_n = \frac{w_n u_n}{a_n p_1^{2r-2}}$$

und betrachten also die gegebenen Gröfsen $v_1, \ldots, v_n$ als die mit den Gröfsen $w_1, \ldots, w_n$ multiplizierten Werte, die der Quotient

$$\frac{\bar{p}p_1\, ap^n}{pp_1 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2^{2r-2}}$$

für die Verschwindungsgröfsen der Form ap^n annimmt. Es ist alsdann

$$\frac{v_1 \ldots v_r}{u_1 \ldots u_r} = \frac{w_1 \ldots w_r}{(a_1 \ldots a_r p_1^r)^{2r-2}}, \quad \frac{v_1 \ldots v_{r-1}}{u_1 \ldots u_{r-1}} = \frac{w_1 \ldots w_{r-1}}{(a_1 \ldots a_{r-1} p_1^{r-1})^{2r-2}}$$

und demnach endlich

$$a_{0,-r} p^{n-r} = (a, w; n)\, w_1 a_1^0 p_1 \ldots w_r a_r^0 p_1$$
$$(a_1^0 p_1^{-r+1} \ldots a_r^0 p_1^{-r+1} \mid e_1^{r-1} \ldots e_2^{r-1})^2 p^{-r} . ap^n,$$
$$a_{0,r-1} p^{r-1} = (a, w; n)\, w_1 a_1^0 p_1^{-1} \ldots w_{r-1} a_{r-1}^0 p_1^{-1}$$
$$(a_1^0 p_1^{-r+2} \ldots a_{r-1}^0 p_1^{-r+2} \mid e_1^{r-2} \ldots e_2^{r-2})^2 p^{r-1}$$

oder

$$a_{0,-r} p^{n-r} = (w_1 a_1^0 p_1 (a_1^0 p_1^{-r+1})^2 + \ldots$$
$$+ w_n a_n^0 p_1 (a_n^0 p_1^{-r+1})^2)^r (e_1^{r-1} \ldots e_2^{r-1})^2 p^{-r} . ap^n,$$
$$a_{0,r-1} p^{r-1} = (w_1 a_1^0 p_1^{-1} (a_1^0 p_1^{-r+2})^2 + \ldots$$
$$+ w_n a_n^0 p_1^{-1} (a_n^0 p_1^{-r+2})^2)^{r-1} (e_1^{r-2} \ldots e_2^{r-2})^2 p^{r-1}.$$

Die Determinante

$$(w_1 a_1^0 p_1^{-\alpha} (a_1^0 p_1^{-r+1})^2 + \ldots + w_n a_n^0 p_1^{-\alpha} (a_n^0 p_1^{-r+1})^2)^r$$
$$(e_1^{r-1} \ldots e_2^{r-1})^2 p^{\alpha r},$$

die hiernach für $\alpha = -1$ nach Hinzutritt der Form ap^n als Faktor die Form $a_{0,-r}\,p^{n-r}$ und für $\alpha = +1$ die Form $a_{0,r}\,p^r$ darstellt, ist, da man die Determinante

$$(a^2)^m\, e_1 \,..\, e_m{}^{\frac{2}{}}$$

die (Hefse'sche) Determinante der quadratischen Form ap^2 nennt, die Determinante der quadratischen Form

$$(w_1 a_1{}^0 p_1{}^{-\alpha}(a_1{}^0 p_1{}^{-r+1})^2 + \,..\, + w_n a_n{}^0 p_1{}^{-\alpha}(a_n{}^0 p_1{}^{-r+1})^2)\, p^\alpha\, (p_{1,0}{}^{r-1})^2.$$

Sie ist auch in der Form

$$(w_1 a_1{}^0 p_1{}^{-\alpha}(a_1{}^0 p_1{}^{-r+1}\, e_1{}^{r-1})^2\, a_1{}^0 + \,..\, + w_n a_n{}^0 p_1{}^{-\alpha}$$
$$(a_n{}^0 p_1{}^{-r+1}\, e_1{}^{r-1})^2\, a_n{}^0)^r\, ((-e_1{}^{-1}\, e_2)^0 \,..\, (-e_1{}^{-1}\, e_2)^{r-1})^{\frac{2}{}}\, p^{\alpha r}$$

darstellbar. Für $p = p_1$ nimmt sie die von α unabhängige Form

$$(w_1 (a_1{}^0 p_1{}^{-r+1})^2 + \,..\, + w_n (a_n{}^0 p_1{}^{-r+1})^2)^r\, (e_1{}^{r-1} \,..\, e_2{}^{r-1})^{\frac{2}{}}$$

und in dem besonderen Falle

$$w_1 = 1, \,..\,, w_n = 1 \text{ und } p_1 = e_1$$

die Form

$$(a_1{}^0 + \,..\, + a_n{}^0)^r\, ((-e_1{}^{-1}\, e_2)^0 \,..\, (-e_1{}^{-1}\, e_2)^{r-1})^{\frac{2}{}}$$

an, in welcher das $(\varkappa, \lambda)$te Element die Summe der $(\varkappa + \lambda - 2)$ten Potenzen der Wurzeln der Gleichung $a_n\, \varepsilon_2{}^{-n}\, p^0 = 0$ darstellt.

52. Nach dem 16ten Abschnitte ist die quadratische Form ap^2 in der Form

$$ap^2 = \sum_1^m \frac{(a^2)^{m-\varkappa+1}\, e_\varkappa \,..\, e_m{}^{\frac{2}{}}}{(a^2)^{m-\varkappa}\, e_{\varkappa+1} \,..\, e_m{}^{\frac{2}{}}} \left(\frac{(a^2)^{m-\varkappa+1}\, p e_{\varkappa+1} \,..\, e_m \mid e_\varkappa \,..\, e_m}{(a^2)^{m-\varkappa+1}\, e_\varkappa \,..\, e_m{}^{\frac{2}{}}}\right)^2$$

darstellbar und geht darnach in diese Form über für

$$p = p\bar{p}_1 \cdot p_1 + \,..\, + p\bar{p}_m \cdot p_m,$$

wenn man

$$p_\varkappa = \frac{(a^2)^{m-\varkappa}\, e_{\varkappa+1} \,..\, e_m \mid e_\varkappa \,..\, e_m}{(a^2)^{m-\varkappa}\, e_{\varkappa+1} \,..\, e_m{}^{\frac{2}{}}}, \quad \bar{p}_\varkappa = \frac{(a^2)^{m-\varkappa+1}\, e_{\varkappa+1} \,..\, e_m \mid e_\varkappa \,..\, e_m}{(a^2)^{m-\varkappa+1}\, e_\varkappa \,..\, e_m{}^{\frac{2}{}}}$$

annimmt.

53. In ein Aggregat von m Quadraten linearer Formen für p kann die quadratische Form ap^2 auf unendlich viele verschiedene Weisen verwandelt werden, denn diese Verwandlung erheischt für die Gröfsen $p_1, \,..\,, p_m$, vermittelst deren sich für

$$p = p\bar{p}_1 \cdot p_1 + \,.\,.\, + p\bar{p}_m \cdot p_m$$

die Form

$$ap^2 = p\bar{p}_1{}^2 \,.\, ap_1{}^2 + \ldots + p\bar{p}_m{}^2 \,.\, ap_m{}^2$$

ergiebt, nur die Voraussetzung

$$a^2 p_\varkappa p_\lambda = 0.$$

Diese Voraussetzung, nach der für die m^2 Substitutionskoefficienten $p_1\varepsilon_1, \ldots, p_m\varepsilon_m$ nur $\frac{1}{2}m(m-1)$ Gleichungen bestehen, hat zur Folge, dafs die Determinante der transformierten quadratischen Form

$$(a^2)^m \, p_1 \ldots p_m{}^{\frac{2}{}} = ap_1{}^2 \ldots ap_m{}^2$$

ist und demnach infolge der Gleichung

$$p_1 \ldots p_m = p_1 \ldots p_m \mid \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m \,.\, e_1 \ldots e_m$$

die Gleichung

$$ap_1{}^2 \ldots ap_m{}^2 = (a^2)^m \, e_1 \ldots e_m{}^{\frac{2}{}} \,.\, p_1 \ldots p_m \mid \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m{}^2$$

gilt.

Die Koefficienten der Quadrate sind daher sämtlich von Null verschieden, wenn die Determinante der quadratischen Form und selbstverständlich die Determinante der Substitution nicht verschwinden.

In der Darstellung des vorigen Abschnittes ist die Determinante der Substitution gleich Eins, und die m Koefficienten, die alle aus der Determinante

$$(a^2)^{m-\varkappa+1} \, e_\varkappa \ldots e_m{}^{\frac{2}{}}$$

dadurch hervorgehen, dafs man der Reihe nach eine jede der den Werten $\varkappa = 1, \ldots, m+1$ entsprechenden Determinanten durch die nächstfolgende dividiert, sind von Null verschieden, wenn die Determinante der quadratischen Form nicht verschwindet.

54. Bei allen Darstellungen der quadratischen Form ap^2 durch m Quadrate ist die Anzahl der positiven und der negativen Quadrate unveränderlich dieselbe. Dieses sogenannte Sylvester'sche Trägheitsgesetz der quadratischen Formen, welches nur an die Voraussetzung geknüpft ist, dafs die Koefficienten der quadratischen Form und der Substitution reelle Gröfsen sind und ihre Determinanten nicht verschwinden, ergiebt sich, wenn man die Gröfse a durch die Formen

$$a = ap_1 \,.\, \bar{p}_1 + \ldots + ap_m \,.\, \bar{p}_m,$$

$$a = ap_{0,1} \cdot \bar{p}_{0,1} + \ldots + ap_{0,m} \cdot \bar{p}_{0,m}$$

darstellt und aus ihnen durch algebraische Multiplikation mit der Gröfse

$$\bar{p}_1 \cdot\cdot \bar{p}_{r-1} \,|\, p_{0,1} \cdot\cdot p_{0,r}$$

die Gleichung

$$ap_r \cdot \bar{p}_r \bar{p}_1 \cdot\cdot \bar{p}_{r-1} \,|\, p_{0,1} \cdot\cdot p_{0,r} + \cdot\cdot + ap_m \cdot \bar{p}_m \bar{p}_1 \cdot\cdot \bar{p}_{r-1} \,|\, p_{0,1} \cdot\cdot p_{0,r}$$
$$= ap_{0,1} \cdot \bar{p}_1 \cdot\cdot \bar{p}_{r-1} \,|\, \bar{p}_{0,1} p_{0,1} \cdot\cdot p_{0,r} + \cdot\cdot + ap_{0,r} \cdot \bar{p}_1 \cdot\cdot \bar{p}_{r-1} \,|\, \bar{p}_{0,r} p_{0,1} \cdot\cdot p_{0,r}$$

ableitet. Es ist dann, wenn die Gleichungen

$$a^2 p_\varkappa p_\lambda = 0, \quad a^2 p_{0,\varkappa} p_{0,\lambda} = 0$$

gelten,

$$ap_r^2 \cdot \bar{p}_r \bar{p}_1 \cdot\cdot \bar{p}_{r-1} \,|\, p_{0,1} \cdot\cdot p_{0,r}{}^2 + \cdot\cdot + ap_m{}^2 \cdot \bar{p}_m \bar{p}_1 \cdot\cdot \bar{p}_{r-1} \,|\, p_{0,1} \cdot\cdot p_{0,r}{}^2$$
$$= ap_{0,1}{}^2 \cdot \bar{p}_1 \cdot\cdot \bar{p}_{r-1} \,|\, \bar{p}_{0,1} p_{0,1} \cdot\cdot p_{0,r}{}^2 + \cdot\cdot + ap_{0,r}{}^2 \cdot \bar{p}_1 \cdot\cdot \bar{p}_{r-1} \,|\, \bar{p}_{0,r} p_{0,1} \cdot\cdot p_{0,r}{}^2$$

und ferner, wie sich durch Vertauschung von $p_\varkappa$ und $p_{0,\varkappa}$ und Verminderung des r um 1 ergiebt,

$$ap_1{}^2 \cdot \bar{p}_{0,1} \cdot\cdot \bar{p}_{0,r-2} \,|\, \bar{p}_1 p_1 \cdot\cdot p_{r-1}{}^2 + \cdot\cdot + ap_{r-1}{}^2$$
$$\cdot \bar{p}_{0,1} \cdot\cdot \bar{p}_{0,r-2} \,|\, \bar{p}_{r-1} p_1 \cdot\cdot p_{r-1}{}^2$$
$$= ap_{0,r-1}{}^2 \cdot \bar{p}_{0,r-1} \bar{p}_{0,1} \cdot\cdot \bar{p}_{0,r-2} \,|\, p_1 \cdot\cdot p_{r-1}{}^2 + \cdot\cdot + ap_{0,m}{}^2$$
$$\cdot \bar{p}_{0,m} \bar{p}_{0,1} \cdot\cdot \bar{p}_{0,r-2} \,|\, p_1 \cdot\cdot p_{r-1}{}^2.$$

In diesen beiden Gleichungen sind die Determinanten reelle und also ihre Quadrate positive Gröſsen, wenn die Substitutionskoefficienten $p_\varkappa \varepsilon_\lambda$ und $p_{0,\varkappa} \varepsilon_\lambda$ reell sind, weil es die Gröſsen $p_{0,\varkappa} \bar{p}_\lambda$ und $p_\varkappa \bar{p}_{0,\lambda}$, aus denen sich die Determinanten zusammensetzen, dann auch sind; es ist nämlich z. B.

$$p_{0,\varkappa} \bar{p}_\lambda = \bar{p}_\lambda e_1 \cdot p_{0,\varkappa} \varepsilon_1 + \cdot\cdot + \bar{p}_\lambda e_m \cdot p_{0,\varkappa} \varepsilon_m$$

und darin

$$\bar{p}_\lambda e_\varkappa = \frac{\bar{p}_\lambda p_1 \cdot\cdot p_m \,|\, \bar{\varepsilon}_\varkappa \varepsilon_1 \cdot\cdot \varepsilon_m}{p_1 \cdot\cdot p_m \,|\, \varepsilon_1 \cdot\cdot \varepsilon_m}.$$

Sind also von den Koefficienten $ap_1{}^2, \ldots, ap_m{}^2$ in der Darstellung der quadratischen Form durch m Quadrate $r-1$, sagen wir die Koefficienten $ap_1{}^2, \ldots, ap_{r-1}{}^2$ negativ und somit die Koefficienten $ap_r{}^2$, $\ldots, ap_m{}^2$ positiv, so können von den Koefficienten $ap_{0,1}{}^2, \ldots, ap_{0,m}{}^2$ in einer anderen Darstellung der quadratischen Form nach der ersten jener beiden Gleichungen, da in ihnen die Gröſsen $p_{0,\varkappa}$ auch durch eine jede beliebige andere Kombination ersetzt werden können, nicht mehr als $r-1$ negativ und nach der zweiten nicht mehr als $m-r+1$ positiv und also nicht weniger als $r-1$ negativ sein, und es sind daher von ihnen gleichfalls $r-1$ Koefficienten in der That negativ.

In der Darstellung des 52ten Abschnittes ist die Anzahl der positiven und der negativen Quadrate gleich der Anzahl der Zeichenfolgen und bezw. Zeichenwechsel in der Zeichenreihe der Determinanten, die aus der Determinante

$$(a^2)^{m-\varkappa+1}\, e_\varkappa \,..\, e_m{}^{\frac{2}{1}}$$

für $\varkappa = 1, .., m+1$ hervorgehen.

55. Soll die Umwandlung in ein Aggregat von Quadraten durch eine orthogonale Substitution bewirkt werden, so mufs nach dem 32ten Abschnitte die Gleichung

$$p_\varkappa \bar{e}_\lambda = \bar{p}_\varkappa e_\lambda$$

gelten und daher die aus der Form

$$e_\lambda = e_\lambda \bar{p}_1 \cdot p_1 + .. + e_\lambda \bar{p}_m \cdot p_m$$

hervorgehende Gleichung

$$a^2 p_\varkappa e_\lambda = \bar{p}_\varkappa e_\lambda \cdot a p_\varkappa{}^2$$

die Form

$$a^2 p_\varkappa e_\lambda = p_\varkappa \bar{e}_\lambda \cdot a p_\varkappa{}^2$$

annehmen. In dieser Darstellung der quadratischen Form genügen daher die Koefficienten $ap_\varkappa{}^2$ den Gleichungen

$$a^2 e_1 p_\varkappa = a p_\varkappa{}^2 \cdot p_\varkappa \varepsilon_1, .., a^2 e_m p_\varkappa = a p_\varkappa{}^2 \cdot p_\varkappa \varepsilon_m$$

oder

$$(a^2 e_1 - a p_\varkappa{}^2 \cdot \varepsilon_1) p_\varkappa = 0, .., (a^2 e_m - a p_\varkappa{}^2 \cdot \varepsilon_m) p_\varkappa = 0$$

und sind daher die Wurzeln ihrer Resultante

$$(a^2 e_1 - a p_\varkappa{}^2 \cdot \varepsilon_1) .. (a^2 e_m - a p_\varkappa{}^2 \cdot \varepsilon_m) \mid e_1 .. e_m = 0.$$

Sie sind, wie wir weiterhin beweisen, sämtlich reell, wenn die Koefficienten der quadratischen Form reelle Gröfsen sind.

Giebt man übrigens der allgemein gültigen Gleichung

$$a^2 p_\varkappa e_\lambda = \bar{p}_\varkappa e_\lambda \cdot a p_\varkappa{}^2$$

die Form

$$a p_\varkappa{}^2 \cdot \bar{p}_\varkappa \bar{\varepsilon}_\lambda = a^2 p_\varkappa e_\lambda,$$

so erkennt man, dafs

$$a p_{\varkappa_1}{}^2 .. a p_{\varkappa_n}{}^2 \cdot \bar{p}_{\varkappa_1} .. \bar{p}_{\varkappa_n} p_1 .. p_m \mid \bar{\varepsilon}_{\lambda_1} .. \bar{\varepsilon}_{\lambda_n} \varepsilon_1 .. \varepsilon_m$$
$$= p_1 .. p_m \mid \varepsilon_1 .. \varepsilon_m \cdot (a^2)^n p_{\varkappa_1} .. p_{\varkappa_n} \mid e_{\lambda_1} .. e_{\lambda_n}$$

ist.

56. Die quadratische Form

$$(w_1 a_1{}^0 p_1{}^{-\alpha}(a_1{}^0 p_1{}^{-n+1})^2 + \ldots + w_n a_n{}^0 p_1{}^{-\alpha}(a_n{}^0 p_1{}^{-n+1})^2)\, p^\alpha (p_{1,0}{}^{n-1})^2,$$

deren Determinante

$$(w_1 a_1{}^0 p_1{}^{-\alpha}(a_1{}^0 p_1{}^{-n+1})^2 + \ldots + w_n a_n{}^0 p_1{}^{-\alpha}(a_n{}^0 p_1{}^{-n+1})^2)^n$$
$$(e_1{}^{n-1} \ldots e_2{}^{n-1})^{\frac{2}{}}\, p^{\alpha n}$$

nicht verschwindet, wenn wir die linearen Faktoren $a_1, \ldots, a_n$ der Form ap^n als von einander verschieden voraussetzen, läfst sich, wenn ihre Koefficienten reelle Gröfsen sind, vermittelst einer reellen Substitution nach dem 52ten Abschnitte als ein Aggregat von n Quadraten linearer Formen für $p_{1,0}{}^{n-1}$ in einer Form darstellen, in der sich die n Koefficienten aus den den Werten $\varkappa = 1, \ldots, n+1$ entsprechenden Determinanten

$$(w_1 a_1{}^0 p_1{}^{-\alpha}(a_1{}^0 p_1{}^{-n+1} e_1{}^{\varkappa-1})^2 + \ldots + w_n a_n{}^0 p_1{}^{-\alpha}$$
$$(a_n{}^0 p_1{}^{-n+1} e_1{}^{\varkappa-1})^2)^{n-\varkappa+1} (e_1{}^{n-\varkappa} \ldots e_2{}^{n-\varkappa})^{\frac{2}{}}\, p^{\alpha(n-\varkappa+1)}$$

durch Division einer jeden durch die nächstfolgende oder, wenn wir $\varkappa = n - r + 1$ setzen, aus den den Werten $r = 0, \ldots, n$ entsprechenden Determinanten

$$(w_1 a_1{}^0 p_1{}^{-\alpha}(a_1{}^0 p_1{}^{-n+1} e_1{}^{n-r})^2 + \ldots + w_n a_n{}^0 p_1{}^{-\alpha}(a_n{}^0 p_1{}^{-n+1} e_1{}^{n-r})^2)^r$$
$$(e_1{}^{r-1} \ldots e_2{}^{r-1})^{\frac{2}{}}\, p^{\alpha r}$$

durch Division einer jeden durch die nächstvorhergehende Determinante ergeben.

Die Anzahl der positiven und der negativen Quadrate in einer jeden durch eine reelle Substitution bewirkten Darstellung der quadratischen Form durch Quadrate ist daher gleich der Anzahl der Zeichenfolgen und bezw. Zeichenwechsel in der Zeichenreihe dieser Determinanten.

57. Wir nehmen nun

$$w_1 = 1, \ldots, w_n = 1 \text{ und } p_1 = e_1$$

an. Die quadratische Form

$$(a_1{}^0 e_1{}^{-\alpha}(a_1{}^0 e_1{}^{-n+1})^2 + \ldots + a_n{}^0 e_1{}^{-\alpha}(a_n{}^0 e_1{}^{-n+1})^2)\, p^\alpha (p_{1,0}{}^{n-1})^2$$

ist als ein Aggregat von Quadraten in der Form

$$(a_1{}^0 e_1{}^{-1} p)^\alpha (a_1{}^0 e_1{}^{-n+1} p_{1,0}{}^{n-1})^2 + \ldots + (a_n{}^0 e_1{}^{-1} p)^\alpha (a_n{}^0 e_1{}^{-n+1} p_{1,0}{}^{n-1})^2$$

darstellbar und geht in dieselbe über durch die Substitution

$$p_{1,0}{}^{n-1} = a_1{}^0 e_1{}^{-n+1} p_{1,0}{}^{n-1} . \overline{a_1{}^0 e_1{}^{-n+1}} + \ldots + a_n{}^0 e_1{}^{-n+1} p_{1,0}{}^{n-1} . \overline{a_n{}^0 e_1{}^{-n+1}}.$$

Sie hat, da

$$a_\varkappa{}^0 e_1{}^{-\alpha} p^\alpha = (a_\varkappa{}^0 e_1{}^{-1} p)^\alpha = (p\varepsilon_1 + a_\varkappa{}^0 e_1{}^{-1} e_2 \,.\, p\varepsilon_2)^\alpha$$

ist und für $a_\varkappa{}^0 e_1{}^{-n+1} p_{1,0}{}^{n-1}$ die entsprechende Darstellung gilt, unter der Voraussetzung, dafs p eine reelle Gröfse ist, reelle Koefficienten, wenn die Wurzeln der Gleichung $a^n \varepsilon_2{}^{-n} p^0 = 0$

$$-a_1{}^0 e_1{}^{-1} e_2, \ldots, -a_n{}^0 e_1{}^{-1} e_2$$

sämtlich reell sind; dasselbe gilt von der Substitution, und die Anzahl der negativen Quadrate ist infolge der Gleichung

$$a_\varkappa{}^0 e_1{}^{-1} p = p\varepsilon_2 \left(p^0 \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^{-1} - (-a_\varkappa{}^0 e_1{}^{-1} e_2)\right),$$

wenn wir α als eine ungerade ganze Zahl und $p\varepsilon_2$ als positiv voraussetzen, gleich der Anzahl der Wurzeln, die gröfser als $p^0 \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^{-1}$ sind.

Befinden sich unter den Wurzeln zwei konjugierte komplexe Wurzeln

$$-a_1{}^0 e_1{}^{-1} e_2, \quad -a_2{}^0 e_1{}^{-1} e_2,$$

so ist, wenn wir sie durch

$$r(\cos\varphi + i \sin\varphi), \quad r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

darstellen,

$$a_1{}^0 e_1{}^{-1} = \varepsilon_1 - r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,\varepsilon_2,$$
$$a_2{}^0 e_1{}^{-1} = \varepsilon_1 - r(\cos\varphi - i\sin\varphi)\,\varepsilon_2$$

und folglich

$$a_1{}^0 e_1{}^{-\alpha} (a_1{}^0 e_1{}^{-n+1})^2 + a_2{}^0 e_1{}^{-\alpha} (a_2{}^0 e_1{}^{-n+1})^2$$

in der Form

$$(a_{1,1}{}^\alpha + i a_{2,1}{}^\alpha)(a_{1,2}{}^{n-1} + i a_{2,2}{}^{n-1})^2 + (a_{1,1}{}^\alpha - i a_{2,1}{}^\alpha)(a_{1,2}{}^{n-1} - i a_{2,2}{}^{n-1})^2$$

und darnach in der Form

$$2a_{1,1}{}^\alpha (a_{1,2}{}^{n-1} - a_{1,1}{}^{-\alpha} a_{2,1}{}^\alpha a_{2,2}{}^{n-1})^2$$
$$-2a_{1,1}{}^\alpha (1 + (a_{1,1}{}^{-\alpha} a_{2,1}{}^\alpha)^2)\,(a_{2,2}{}^{n-1})^2$$

darstellbar. Die Koefficienten der quadratischen Form sind also auch in diesem Falle reell und dasselbe gilt von der Substitution, wenn man in ihr

$$a_{1,2}{}^{n-1} - a_{1,1}{}^{-\alpha} a_{2,1}{}^\alpha p^0 a_{2,2}{}^{n-1}, \quad a_{2,2}{}^{n-1}$$

an die Stelle von

$$a_1{}^0 e_1{}^{-n+1}, \quad a_2{}^0 e_1{}^{-n+1}$$

setzt; in der Quadratsumme treten an die Stelle der den beiden komplexen Wurzeln entsprechenden Quadrate ein positives und ein negatives reelles Quadrat, und die Anzahl der negativen Quadrate ist gleich der Zahl Eins, welche die Anzahl der Paare komplexer

Wurzeln angiebt, vermehrt um die Anzahl der reellen Wurzeln, die gröfser als $p^0 \varepsilon_1 \varepsilon_2^{-1}$ sind.

Sind zwei Paare komplexer Wurzeln vorhanden, so ist augenscheinlich die Zahl 1 durch 2 zu ersetzen, u. s. w. und es gilt der Hermite'sche Satz:

Hat die Gleichung $a^n \varepsilon_2^{-n} p^0 = 0$ ungleiche Wurzeln, so ist die Anzahl der negativen Quadrate in einer jeden durch eine reelle Substitution bewirkten Darstellung der quadratischen Form

$$(a_1{}^0 e_1{}^{-\alpha} (a_1{}^0 e_1{}^{-n+1})^2 + \ldots + a_n{}^0 e_1{}^{-\alpha} (a_n{}^0 e_1{}^{-n+1})^2) p^\alpha (p_{1,0}{}^{n-1})^2$$

durch n Quadrate unter der Voraussetzung, dafs p eine reelle Gröfse mit positivem $p\varepsilon_2$ und α eine ungerade ganze Zahl ist, gleich der Anzahl der Paare komplexer Wurzeln, vermehrt um die Anzahl der reellen Wurzeln, die gröfser als die gegebene Zahl $p^0 \varepsilon_1 \varepsilon_2^{-1}$ sind.

Die Anzahl der Paare komplexer Wurzeln der Gleichung $a^n \varepsilon_2^{-n} p^0 = 0$, vermehrt um die Anzahl ihrer reellen Wurzeln, die gröfser als die Zahl $p^0 \varepsilon_1 \varepsilon_2^{-1}$ sind, ist daher gleich der Anzahl der Zeichenwechsel in der Zeichenreihe der den Werten $r = 0, \ldots, n$ entsprechenden Determinanten

$$(a_1{}^0 e_1{}^{-\alpha} (a_1{}^0 e_1{}^{-r+1})^2 + \ldots + a_n{}^0 e_1{}^{-\alpha} (a_n{}^0 e_1{}^{-r+1})^2)^r (e_1{}^{r-1} \ldots e_2{}^{r-1})^2 p^{\alpha r}$$

und folglich, wenn wir $\alpha = -1$ oder $\alpha = +1$ setzen, gleich der Anzahl der Zeichenwechsel in der Zeichenreihe der den Werten $r = 0, \ldots, n$ entsprechenden Formen

$$a_{0,-r}\, p^{n-r} \text{ oder } a_{0,r}\, p^r$$

für

$$w_1 = 1, \ldots, w_n = 1 \text{ und } p_1 = e_1.$$

Die Differenz der Zeichenwechsel, welche diese Formen für $p = p_{0,1}$ und $p = p_{0,2}$ aufweisen, ist also gleich der Anzahl der zwischen den Zahlen $p_{0,1}{}^0 \varepsilon_1 \varepsilon_2^{-1}$ und $p_{0,2}{}^0 \varepsilon_1 \varepsilon_2^{-1}$ liegenden reellen Wurzeln der Gleichung $a^n \varepsilon_2^{-n} p^0 = 0$.

Dieser letztere Satz ist, soweit er sich auf die Formen $a_{0,-r}\, p^{n-r}$ bezieht, der Sturm'sche Satz. Die Formen $a_{0,-r}\, p^{n-r}$ sind, wie wir in dem folgenden Abschnitte sehen werden, in der Verbindung mit gewissen quadratischen Faktoren die sogenannten Sturm'schen Reste.

Für $p = e_1$ wird $p^0 \varepsilon_1 \varepsilon_2^{-1}$ positiv unendlich, und es ergiebt sich endlich der Borchardt'sche Satz:

Die Anzahl der Paare komplexer Wurzeln der Gleichung $a^n \varepsilon_2^{-n} p^0 = 0$ ist gleich der Anzahl der Zeichenwechsel in der Zeichenreihe der den Werten $r = 0, \ldots, n$ entsprechenden Determinanten

$$(a_1{}^0 + .. + a_n{}^0)^r\, ((-e_1{}^{-1} e_2)^0 .. (-e_1{}^{-1} e_2)^{r-1})^{\frac{2}{-}},$$
in denen das $(\varkappa, \lambda)$te Element die Summe der $(\varkappa + \lambda - 2)$ten Potenzen der Wurzeln der Gleichung darstellt.

58. In dem Falle
$$w_1 = 1, .., w_n = 1$$
sind die Werte $v_1, .., v_n$, die das Verhältnis der Formen
$$a_{0,-r} p^{n-r},\ a_{0,r-1} p^{r-1}$$
für die Verschwindungsgröfsen der Form ap^n annimmt, gleich den Werten des Verhältnisses der Formen
$$\bar{p}p_1\, ap^n,\ pp_1 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^{2r-2}$$
für dieselben Gröfsen. Es ist daher für die Verschwindungsgröfsen der Form ap^n
$$\bar{p}p_1\, ap^n \,.\, a_{0,r-1} p^{r-1} - a_{0,-r} p^{n-r}\, pp_1 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^{2r-2}$$
gleich Null und folglich, wenn λ_r eine von p unabhängige Gröfse ist,
$$ap^n\ a_{r-2,0} p^{r-2}$$
$$= \lambda_r\, \bar{p}p_1\, ap^n \,.\, a_{0,r-1}\, p^{r-1} - \lambda_r\, a_{0,-r} p^{n-r}\, pp_1 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^{2r-2}$$
und insbesondere für $r = 2$
$$ap^n = \lambda_2\, \bar{p}p_1\, ap^n \,.\, a_{0,1}\, p - \lambda_2\, a_{0,-2} p^{n-2}\, pp_1 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^2$$
oder, wenn wir die Gleichung
$$a_{0,-1} p^{n-1} = (a_1{}^0 p_1 + .. + a_n{}^0 p_1) p^{-1} \,.\, ap^n = \bar{p}p_1\, ap^n$$
berücksichtigen und
$$\lambda_0 = 1,\ \lambda_1 = 1$$
und $\lambda_2\, a_{0,1}\, p = a_{1,1}\, p$ setzen,
$$\lambda_0\, ap^n = \lambda_1\, a_{0,-1} p^{n-1}\, a_{1,1}\, p - \lambda_2\, a_{0,-2} p^{n-2}\, pp_1 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^2.$$
Darnach gilt die folgende Reihe von Gleichungen:
$$\lambda_0\, a_{0,0} p^n = \lambda_1\, a_{0,-1}\, p^{n-1}\, a_{1,1}\, p - \lambda_2\, a_{0,-2}\, p^{n-2}\, pp_1 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^2, ..,$$
$$\lambda_{r-2}\, a_{0,-r+2} p^{n-r+2} = \lambda_{r-1}\, a_{0,-r+1}\, p^{n-r+1}\, a_{1,r-1}\, p - \lambda_r\, a_{0,-r}\, p^{n-r}$$
$$pp_1 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^2.$$
Denn multipliziert man die letzte Gleichung mit $pp_1 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^2$ und eliminiert dann aus derselben $\lambda_{r-1}\, a_{0,-r+1}\, p^{n-r+1}\, pp_1 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_3{}^2$ durch Substitution aus der vorletzten Gleichung, so erhält man eine Gleichung, in der $\lambda_{r-3}\, a_{0,-r+3} p^{n-r+3}$ in Verbindung mit einer Form 1ten Grades, ferner $\lambda_{r-2}\, a_{0,-r+2}\, p^{n-r+2}$ in Verbindung mit einer Form 2ten Grades und endlich $\lambda_r\, a_{0,-r}\, p^{n-r}\, pp_1 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^4$ vorkommen, und

wenn man diese Gleichung wiederum mit $pp_1 \mid \varepsilon_1\varepsilon_2{}^2$ multipliziert und dann durch Substitution aus der drittletzten Gleichung λ_{r-2} $a_{0,-r+2}p^{n-r+2}$ $pp_1 \mid \varepsilon_1\varepsilon_2{}^2$ eliminiert, und so fortfährt, schliefslich nach $r-2$ Multiplikationen und Eliminationen eine Gleichung, die $\lambda_0 a_{0,0} p^n$ in Verbindung mit einer Form $(r-2)$ten Grades, ferner $\lambda_1 a_{0,-1} p^{n-1}$ in Verbindung mit einer Form $(r-1)$ten Grades und endlich $\lambda_r a_{0,-r} p^{n-r}$ $pp_1 \mid \varepsilon_1\varepsilon_2{}^{2r-2}$ enthält und also mit der Gleichung

$$ap^n a_{r-2,0} p^{r-2} = \lambda_r \bar{p}p_1 ap^n \cdot a_{0,r-1} p^{r-1} - \lambda_r a_{0,-r} p^{n-r} \; pp_1 \mid \varepsilon_1\varepsilon_2{}^{2r-2}$$

übereinstimmt.

Multipliziert man die Gleichung

$$\lambda_{r-2} a_{0,-r+2} p^{n-r+2}$$
$$= \lambda_{r-1} a_{0,-r+1} p^{n-r+1} a_{1,r-1} p - \lambda_r a_{0,-r} p^{n-r} \; pp_1 \mid \varepsilon_1\varepsilon_2{}^2$$

mit $pp_1 \mid \varepsilon_1\varepsilon_2{}^{2r-4}$ und eliminiert dann $\lambda_{r-1} a_{0,-r+1} p^{n-r+1}$ $pp_1 \mid$ $\varepsilon_1\varepsilon_2{}^{2r-4}$ und $\lambda_{r-2} a_{0,-r+2} p^{n-r+2}$ $pp_1 \mid \varepsilon_1\varepsilon_2{}^{2r-6}$ durch Substitution aus den Gleichungen, die durch Verminderung des r um 1 und 2 sich aus der vorhergehenden Gleichung ergeben, so erhält man eine Gleichung, die mit dieser übereinstimmen mufs, und demnach durch Vergleichung der Koefficienten von $\bar{p}p_1 ap^n$ in beiden Gleichungen die Relation

$$\lambda_r a_{0,r-1} p^{r-1} = \lambda_{r-1} a_{0,r-2} p^{r-2} a_{1,r-1} p - \lambda_{r-2} a_{0,r-3} p^{r-3} \; pp_1 \mid \varepsilon_1\varepsilon_2{}^2.$$

Man hat daher für $p = p_1$ die Gleichungen

$$\lambda_{r-2} a_{0,-r+2} p_1{}^{n-r+2} = \lambda_{r-1} a_{0,-r+1} p_1{}^{n-r+1} a_{1,r-1} p_1,$$
$$\lambda_r a_{0,r-1} p_1{}^{r-1} = \lambda_{r-1} a_{0,r-2} p_1{}^{r-2} a_{1,r-1} p_1,$$

aus denen durch Elimination von $a_{1,r-1} p_1$ hervorgeht, dafs

$$\lambda_r \lambda_{r-1} a_{0,-r+1} p_1{}^{n-r+1} a_{0,r-1} p_1{}^{r-1}$$

für jedes r einen und denselben Wert hat. Dieser Ausdruck ist aber infolge der Gleichung

$$a_{0,-r} p_1{}^{n-r} = a_{0,r} p_1{}^r \, ap_1{}^n$$

in der Form

$$\lambda_r \lambda_{r-1} (a_{0,r-1} p_1{}^{r-1})^2 \, ap_1{}^n$$

darstellbar und geht für $r = 1$ in die Form $ap_1{}^n$ über; folglich ist

$$\lambda_r \lambda_{r-1} (a_{0,r-1} p_1{}^{r-1})^2 = 1$$

oder

$$\lambda_r = \frac{(a_{0,r-2} p_1{}^{r-2})^2 (a_{0,r-4} p_1{}^{r-4})^2 \ldots}{(a_{0,r-1} p_1{}^{r-1})^2 (a_{0,r-3} p_1{}^{r-3})^2 \ldots}$$

und darin

$$a_{0,r} p_1{}^r = ((a_1{}^0 p_1{}^{-r+1})^2 + \ldots + (a_n{}^0 p_1{}^{-r+1})^2)^r (e_1{}^{r-1} \ldots e_2{}^{r-1})^{\frac{2}{\cdot}}.$$

Aus der obigen Reihe von Gleichungen erhält man der Reihe nach die Formen $a_{0,-r}\, p^{n-r}$ in der Verbindung mit dem quadratischen Faktor λ_r, indem man, mit den Formen

$$\lambda_0\, a_{0,0}\, p^n = ap^n\,,\ \lambda_1 a_{0,-1}\, p^{n-1} = \bar{p}p_1 ap^n$$

beginnend, die Differenz

$$\lambda_1 a_{0,-1}\, p^{n-1}\, a_{1,1}\, p - \lambda_0\, a_{0,0}\, p^n$$

bildet, die Gröfse $a_{1,1}$ so bestimmt, dafs $pp_1 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^2$ ein Faktor dieser Differenz ist, und schliefslich diesen Faktor absondert, sodann die Differenz

$$\lambda_2\, a_{0,-2}\, p^{n-2}\, a_{1,2}\, p - \lambda_1 a_{0,-1}\, p^{n-1}$$

bildet und ebenso verfährt, u. s. f. Besonders einfach wird die Bestimmung der Gröfsen $a_{1,1}$, $a_{1,2}$, .. für $p_1 = e_1$ (und ebenso für $p_1 = e_2$), in welchem Falle $pp_1 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^2 = p\varepsilon_2{}^2$ ist; sie geschieht durch successive Division der Formen $\lambda_0\, a_{0,0}\, p^n$ und $\lambda_1\, a_{0,-1}\, p^{n-1}$, $\lambda_1\, a_{0,-1} p^{n-1}$ und $\lambda_2\, a_{0,-2}\, p^{n-2}$, u. s. w., indem man als das erste Glied des Dividendus und als das erste Glied des Divisors die Glieder ansieht, welche die Gröfse $p\varepsilon_2$ nicht enthalten, und die von dem Faktor $p\varepsilon_2{}^2$ befreiten und mit entgegensetzten Vorzeichen genommenen Reste sind dann die Formen $\lambda_2\, a_{0,-2}\, p^{n-2}$, $\lambda_3\, a_{0,-3}\, p^{n-3}$, u. s. w.

Die Formen $a_{0,-r}\, p^{n-r}$ sind also in dem Falle

$$w_1 = 1\,, .. , w_n = 1 \text{ und } p_1 = e_1$$

für $r = 0, .., n$ in der Verbindung mit dem quadratischen Faktor λ_r die Sturm'schen Reste. Die Darstellung dieser Reste als Funktionen der Wurzeln der Gleichung $a^n\, \varepsilon_2{}^{-n}\, p^0 = 0$ durch die Formen $\lambda_r\, a_{0,-r}\, p^{n-r}$ rührt von Sylvester her.

59. Aus dem Borchardt'schen Satze erkennt man, dafs die Gleichung $a^n\, \varepsilon_2{}^{-n}\, p^n = 0$ nur reelle Wurzeln hat, wenn die aus den Potenzsummen der Wurzeln gebildeten, den Werten $r = 0, .., n$ entsprechenden Determinanten

$$(a_1{}^0 + .. + a_n{}^0)^r\, ((-e_1{}^{-1}\, e_2)^0 .. (-e_1{}^{-1}\, e_2)^{r-1})^2$$

sämtlich positiv sind.

Auf diesem Satze beruht der Borchardt'sche Beweis, dafs die Gleichung

$$(a_1 - q \cdot \varepsilon_1) .. (a_m - q \cdot \varepsilon_m) \mid e_1 .. e_m = 0,$$

durch welche für $a_\varkappa = a^2 e_\varkappa$ die Koefficienten in der durch eine orthogonale Substitution bewirkten Darstellung der quadratischen Form

ap^2 durch m Quadrate bestimmt werden, nur reelle Wurzeln hat, wenn die Gröſsen $a_1, .., a_m$ reelle Gröſsen sind, die der Bedingung

$$a_\varkappa\, e_\lambda = a_\lambda\, e_\varkappa$$

genügen. Er besteht in dem Nachweise, daſs für sie eine jede der aus den Potenzsummen der Wurzeln zusammengesetzten Determinanten eine Summe von Quadraten ist.

Die Gleichung

$$(a_1 - q\,.\,\varepsilon_1)\,.\,.\,(a_m - q\,.\,\varepsilon_m)\mid e_1\,.\,.\,e_m = 0$$

ist die Resultante der Gleichungen

$$a_1 p = q\,.\,p\varepsilon_1, \ldots, a_m p = q\,.\,p\varepsilon_m\,.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich durch Multiplikation mit $e_1, .., e_m$ und nachherige Addition die Gleichung

$$a_1 p\,.\,e_1 + .\,. + a_m p\,.\,e_m = q\,.\,p$$

und daraus für die Zahlengröſse q der Ausdruck

$$q = a_1\,.\,e_1 + .\,. + a_m\,.\,e_m\,.$$

Die Zahlengröſse q stellt sich hiernach als eine Gröſse dar, die, wie die Gröſsen p, aus den Einheiten $e_1, .., e_m$ zusammengesetzt ist, sich aber von ihnen dadurch unterscheidet, daſs die Koefficienten aus den Einheiten $\varepsilon_1, .., \varepsilon_m$ abgeleitete Gröſsen sind. Verbindet man sie durch algebraische Multiplikation mit einer aus den Einheiten $e_1, .., e_m$ oder den Einheiten $\varepsilon_1, .., \varepsilon_m$ abgeleiteten Gröſse, so tritt diese nach der vorhergehenden Gleichung als Faktor im ersten Falle zu den Gröſsen a und im anderen Falle zu den Gröſsen e. Es ist also

$$q^2 = a_1 q\,.\,e_1 + .\,. + a_m q\,.\,e_m$$

und

$$aq = a_1\,.\,ae_1 + .\,. + a_m\,.\,ae_m,$$

folglich

$$q^2 = (a_1\,.\,a_1 e_1 + .\,. + a_m\,.\,a_1 e_m)\,.\,e_1 + .\,. + (a_1\,.\,a_m e_1 + .\,. + a_m\,.\,a_m e_m)\,.\,e_m$$

und somit eine Gröſse von derselben Art, wie q. Dasselbe gilt von der dritten Potenz von q, die in derselben Weise aus q^2 hervorgeht, wie q^2 aus q, und allgemein von einer jeden Potenz von q mit einem ganzzahligen positiven Exponenten. Die Zahlengröſse q^n ist durch einen Ausdruck darstellbar, der sich aus den Einheiten $e_1, .., e_m$ und den Einheiten $\varepsilon_1, .., \varepsilon_m$ zusammensetzt und die Zahlengröſsen $a_1 e_1, .., a_m e_m$ in der $n$ten Dimension enthält; durch Multiplikation mit a verschwinden aus ihm die Einheiten $e_1, .., e_m$ und durch Multiplikation mit p die Einheiten $\varepsilon_1, .., \varepsilon_m$, und er erhält durch

Multiplikation mit a die Form einer Gröfse a, durch Multiplikation mit p die Form einer Gröfse p und durch Multiplikation mit a und p die Form einer Zahlengröfse. Die Zahlengröfse apq^n kann man sich also in zwei Weisen entstanden denken, erstens durch Multiplikation der Zahlengröfse q^n mit der Zahlengröfse ap und zweitens durch Multiplikation der dem q^n gleichwertigen, aus den Einheiten $e_1, .., e_m$ und $\varepsilon_1, .., \varepsilon_m$ zusammengesetzten Gröfse mit den Gröfsen a und p.

Wir multiplizieren nun die gegebene Gleichung mit der $m$ten Potenz von q^{n-1} und denken uns in der dadurch entstehenden Gleichung

$$(a_1 q^{n-1} - q^n . \varepsilon_1) .. (a_m q^{n-1} - q^n . \varepsilon_m) \mid e_1 .. e_m = 0$$

die Gröfsen $a_\varkappa e_\lambda q^{n-1}$ in der zweiten Weise entstanden. Diese Gröfsen sind dann bekannte Gröfsen, und die Gleichung ist für q^n, ebenso wie die gegebene für q, vom $m$ten Grade. Der Koefficient der $m$ten Potenz von q^n ist $(-1)^m$ und der Koefficient der $(m-1)$ten Potenz $(-1)^{m-1}(a_1 e_1 q^{n-1} + .. + a_m e_m q^{n-1})$. Es gilt daher für ihre Wurzeln und somit auch für die Wurzeln der gegebenen Gleichung die Gleichung

$$q_1{}^n + .. + q_m{}^n = a_1 e_1 q^{n-1} + .. + a_m e_m q^{n-1},$$

und wir erhalten also, wenn wir $n = \varkappa + \lambda$ setzen, die Gleichung

$$q_1{}^{\varkappa+\lambda} + .. + q_m{}^{\varkappa+\lambda} = \sum_1^m a_\mu e_\mu q^{-1+\varkappa+\lambda}$$

oder, wenn wir bemerken, dafs

$$a_\mu e_\mu q^{-1+\varkappa+\lambda} = (a_\mu q^{-1+\varkappa})(e_\mu q^{-1+\lambda})\, q$$

ist, unter Berücksichtigung der Gleichung

$$q = \sum_1^m a_\nu . e_\nu$$

die Gleichung

$$q_1{}^{\varkappa+\lambda} + .. + q_m{}^{\varkappa+\lambda} = \sum_1^m \sum_1^m a_\nu e_\mu q^{-1+\lambda} . a_\mu e_\nu q^{-1+\varkappa},$$

die schliefslich unter der Voraussetzung

$$a_\nu e_\mu = a_\mu e_\nu$$

die Form

$$q_1{}^{\varkappa+\lambda} + .. + q_m{}^{\varkappa+\lambda} = \sum_1^m \sum_1^m a_\mu e_\nu{}^2\, q^{-1+\varkappa} q^{-1+\lambda}$$

annimmt und offenbar auch für verschwindende Werte von $\varkappa$ und λ Geltung hat, wenn man die Gröſse

$$a_\mu e_\nu q^{-1}$$

für $\mu = \nu$ der positiven Einheit und für $\mu \lesseqgtr \nu$ der Null gleichsetzt. Die aus den Potenzsummen der Wurzeln zusammengesetzte Determinante $r$ten Grades hat daher die Form

$$(\sum_1^m \sum_1^m a_\mu e_\nu{}^2)^r (q^{-1} \,.\,.\, q^{r-2})^{\frac{2}{}}$$

und ist folglich, da die Doppelsumme die Summe der Quadrate der m^2 Gröſsen $a_1 e_1, \ldots, a_m e_m$ darstellt, als Summe von lauter Quadraten in der Form

$$(ae, m^2)\,(a_1 e_1 \,.\,.\, a_r e_r \mid q^{-1} \,.\,.\, q^{r-2})^2$$

darstellbar.

60. Ein anderer Beweis ist der Sylvester'sche. Multiplizieren wir die Gleichung

$$(a_1 - q\,.\,\varepsilon_1) \,.\,.\, (a_m - q\,.\,\varepsilon_m) \mid e_1 \,.\,.\, e_m = 0$$

mit der Determinante

$$(a_1 + q\,.\,\varepsilon_1) \,.\,.\, (a_m + q\,.\,\varepsilon_m) \mid e_1 \,.\,.\, e_m,$$

so verwandelt sie sich, da

$$(a_1 - q\,.\,\varepsilon_1) e_\varkappa \,.\, (a_1 + q\,.\,\varepsilon_1) + \,.\,.\, + (a_m - q\,.\,\varepsilon_m) e_\varkappa \,.\, (a_m + q\,.\,\varepsilon_m)$$

sich in der Form

$$(a_1{}^2 + \,.\,.\, + a_m{}^2) e_\varkappa - q^2\,.\,\varepsilon_\varkappa + q(a_1 e_\varkappa\,.\,\varepsilon_1 + \,.\,.\, + a_m e_\varkappa\,.\,\varepsilon_m - a_\varkappa)$$

darstellen läſst und also unter der Voraussetzung

$$a_\varkappa e_\lambda = a_\lambda e_\varkappa$$

nach Multiplikation mit e_λ die Form

$$((a_1{}^2 + \,.\,.\, + a_m{}^2) e_\varkappa - q^2\,.\,\varepsilon_\varkappa) e_\lambda$$

annimmt, in die Gleichung

$$((a_1{}^2 + \ldots + a_m{}^2) e_1 - q^2\,.\,\varepsilon_1) \ldots ((a_1{}^2 + \ldots + a_m{}^2) e_m - q^2\,.\,\varepsilon_m) \mid e_1 \ldots e_m = 0$$

und darnach nach dem 20ten Abschnitte in die Gleichung

$$(q\,; m)\,(-1)^\varkappa\,(q^2)^\varkappa\,(a_1{}^2 + \,.\,.\, + a_m{}^2)^{m-\varkappa}\, e_{\varkappa+1} \,.\,.\, e_m{}^{\frac{2}{}} = 0,$$

in der die Determinanten als Quadratsummen positiv sind. Setzen wir also, indem wir q_1 als eine reelle und q_2 als eine reelle oder rein imaginäre Gröſse voraussetzen,

$$q = q_1 + q_2,$$

so können wir die gegebene Gleichung in der Form

$$((a_1 - q_1 \cdot \varepsilon_1) - q_2 \cdot \varepsilon_1) \,.\,.\, ((a_m - q_1 \cdot \varepsilon_m) - q_2 \cdot \varepsilon_m) \mid e_1 \,.\,.\, e_m = 0$$

darstellen und, da unter der Voraussetzung $a_\varkappa e_\lambda = a_\lambda e_\varkappa$ auch

$$(a_\varkappa - q_1 \cdot \varepsilon_\varkappa) e_\lambda = (a_\lambda - q_1 \cdot \varepsilon_\lambda) e_\varkappa$$

ist, in derselben Weise in eine Gleichung für $q_2{}^2$ umformen, in der die Koefficienten abwechselnd positiv und negativ sind. Da nun $q_2{}^2$ eine reelle Gröſse ist, so muſs sie nach der Cartesischen Zeichenregel, der zufolge in einer Gleichung mit reellen Wurzeln die Anzahl der Zeichenwechsel der Anzahl der positiven Wurzeln gleich ist, positiv und folglich q_2 und demnach auch q eine reelle Gröſse sein.

Viertes Kapitel.

Resultanten und Diskriminanten.

61. Die $m-1$ Formen

$$a_1 p^{n_1}, \,.\,.\,, a_{m-1} p^{n_{m-1}}$$

nehmen für $n_1 \,.\,.\, n_{m-1}$ Gröſsen p den Wert Null an, denn setzen wir

$$a_1^{n_1} = a_{1,1} \,.\,.\, a_{1,n_1}, \,.\,.\,, a_{m-1}^{n_{m-1}} = a_{m-1,1} \,.\,.\, a_{m-1,n_{m-1}},$$

so können wir in $n_1 \,.\,.\, n_{m-1}$ facher Weise für

$$\varkappa_1 = 1, \,.\,.\,, n_1; \,.\,.\,; \varkappa_{m-1} = 1, \,.\,.\,, n_{m-1}$$

die Gleichungen

$$a_{1,\varkappa_1} p = 0, \,.\,.\,, a_{m-1,\varkappa_{m-1}} p = 0$$

aufstellen und erhalten aus ihnen in einem jeden

$$p \equiv a_{1,\varkappa_1} \,.\,.\, a_{m-1,\varkappa_{m-1}} \mid e_1 \,.\,.\, e_m$$

eine jener Gröſsen.

Bestimmen wir für $m-1$ von den Formen

$$a_1 p^{n_1}, \,.\,.\,, a_m p^{n_m},$$

sagen wir, für die letzten $m-1$ Formen die Verschwindungsgröſsen

$$p \equiv a_{2,\varkappa_2} \,.\,.\, a_{m,\varkappa_m} \mid e_1 \,.\,.\, e_m$$

und substituieren sie in die erste Form, so erhalten wir $n_2 \,.\,.\, n_m$ Ausdrücke von der Form

$$a_1^{n_1} (a_{2,\varkappa_2} \,.\,.\, a_{m,\varkappa_m} \mid e_1 \,.\,.\, e_m)^{n_1}$$

oder

$$a_{1,1}\, a_{2,\varkappa_2} \ldots a_{m,\varkappa_m} \mid e_1 \ldots e_m \ldots a_{1,n_1}\, a_{2,\varkappa_2} \ldots a_{m,\varkappa_m} \mid e_1 \ldots e_m\,.$$

Das Produkt dieser Ausdrücke, das aus $n_1 \ldots n_m$ Faktoren von der Form

$$a_{1,\varkappa_1} \ldots a_{m,\varkappa_m} \mid e_1 \ldots e_m$$

besteht und mit Rücksicht darauf, dafs diese Faktoren sich aus dieser Determinante für

$$\varkappa_1 = 1, \ldots, n_1; \ldots; \varkappa_m = 1, \ldots, n_m$$

ergeben, durch

$$(n_1, \ldots, n_m)\, a_{1,\varkappa_1} \ldots a_{m,\varkappa_m} \mid e_1 \ldots e_m$$

bezeichnet werden mag, enthält die Koefficienten der Formen

$$a_1 p^{n_1}, \ldots, a_m p^{n_m}$$

bezw. in den Dimensionen

$$n_2 \ldots n_m, \ldots, n_1 \ldots n_{m-1}$$

und heifst die Resultante der m Formen. Das Verschwinden der Resultante zeigt das Vorhandensein einer Gröfse p an, für die die gegebenen Formen sämtlich verschwinden. Die Resultante von m Formen ist also diejenige ganze Funktion ihrer Koefficienten, welche verschwinden mufs, damit unter ihren Verschwindungsgröfsen eine allen gemeinschaftliche vorhanden sei.

Genügt die Gröfse p den Gleichungen

$$a_1 p^{n_1} = 0, \ldots, a_m p^{n_m} = 0,$$

so ist die Gleichung

$$(n_1, \ldots, n_m)\, a_{1,\varkappa_1} \ldots a_{m,\varkappa_m} \mid e_1 \ldots e_m = 0,$$

welche das Resultat der Elimination der Gröfse p aus ihnen darstellt, die Resultante der m Gleichungen.

62. Die Resultante der m linearen Formen

$$a_1 p, \ldots, a_m p$$

ist

$$a_1 \ldots a_m \mid e_1 \ldots e_m\,.$$

Wir bemerken, dafs die Anzahl der Formen der Anzahl der Einheiten, aus denen sich die Gröfse p zusammensetzt, gleich ist. Es ist daher, wenn wir berücksichtigen, dafs sich die Gröfse p^n aus $\binom{n+m-1}{m-1}$ Einheiten zusammensetzt, die Resultante von irgend welchen gegebenen Formen, abgesehen von einem etwaigen von den

Koefficienten unabhängigen Faktor, durch ihre Koefficienten in derselben Weise darstellbar, wenn man $\binom{n+m-1}{m-1}$ von einander unabhängige Formen vom $n$ten Grade anzugeben vermag, welche die Eigenschaft besitzen, daſs sie verschwinden, sobald die gegebenen Formen verschwinden, und daſs in ihrem Produkte die Koefficienten der gegebenen Formen in denjenigen Dimensionen auftreten, in denen sie in der Resultante vertreten sind. Nimmt man von der letzteren Bedingung Abstand, so erhält man die Resultante in Verbindung mit einem von den Koefficienten abhängigen Faktor.

Die allgemeinste Methode, solche Formen herzustellen, ist die Sylvester'sche, welche auf dem Satze beruht, daſs mit der Form $a_1 p^{n_1}$ auch die Form $a_1{}^{n_1} a_{1,0}{}^{n-n_1} p^n$ unabhängig von der Gröſse $a_{1,0}{}^{n-n_1}$ verschwindet. Da jene Form sich aus den $\binom{n-n_1+m-1}{m-1}$ Einheiten $\varepsilon_1{}^{\varkappa_1}\ldots\varepsilon_m{}^{\varkappa_m}$ für $\varkappa_1+\ldots+\varkappa_m=n-n_1$ zusammensetzt, so müssen darnach, wenn die Form $a_1 p^{n_1}$ verschwindet, auch die $\binom{n-n_1+m-1}{m-1}$ Formen $a_1{}^{n_1}\varepsilon_1{}^{\varkappa_1}\ldots\varepsilon_m{}^{\varkappa_m} p^n$ verschwinden.

63. Wenn die Formen

$$a_1 p^{n_1},\quad a_2 p^{n_2}$$

— wir setzen $m=2$ voraus — verschwinden, so verschwinden unabhängig von den Gröſsen $a_{1,0}{}^{n_2-1}$ und $a_{2,0}{}^{n_1-1}$ die Formen

$$a_1{}^{n_1} a_{1,0}{}^{n_2-1} p^{n_1+n_2-1},\quad a_2{}^{n_2} a_{2,0}{}^{n_1-1} p^{n_1+n_2-1}$$

und daher auch die Formen

$$a_1{}^{n_1}\varepsilon_1{}^{n_2-1} p^{n_1+n_2-1},\ldots, a_1{}^{n_1}\varepsilon_2{}^{n_2-1} p^{n_1+n_2-1};$$
$$a_2{}^{n_2}\varepsilon_1{}^{n_1-1} p^{n_1+n_2-1},\ldots, a_2{}^{n_2}\varepsilon_2{}^{n_1-1} p^{n_1+n_2-1}.$$

Die Gröſse $p^{n_1+n_2-1}$ setzt sich aus den n_1+n_2 Einheiten $e_1{}^{n_1+n_2-1}$, $\ldots, e_2{}^{n_1+n_2-1}$ zusammen. Die Anzahl der Formen ist gleichfalls n_1+n_2 und ihr Produkt enthält die Gröſse $a_1{}^{n_1}$ in der $n_2$ten und die Gröſse $a_2{}^{n_2}$ in der $n_1$ten Dimension. Die Resultante ist also, abgesehen von einem etwaigen numerischen Faktor,

$$\frac{a_1{}^{n_1}\varepsilon_1{}^{n_2-1}\ldots a_1{}^{n_1}\varepsilon_2{}^{n_2-1}\, a_2{}^{n_2}\varepsilon_1{}^{n_1-1}\ldots a_2{}^{n_2}\varepsilon_2{}^{n_1-1}}{e_1{}^{n_1+n_2-1}\ldots e_2{}^{n_1+n_2-1}}$$

oder

$$(a_1{}^{n_1})^{n_2}\,\varepsilon_1{}^{n_2-1}\ldots\varepsilon_2{}^{n_2-1}(a_2{}^{n_2})^{n_1}\,\varepsilon_1{}^{n_1-1}\ldots\varepsilon_2{}^{n_1-1} \mid e_1{}^{n_1+n_2-1}\ldots e_2{}^{n_1+n_2-1}.$$

Das $(\varkappa, \lambda)$te Element dieser Determinante hat für $\varkappa = 1, .., n_2$ die Form

$$a_1^{n_1} \varepsilon_1^{n_2-\varkappa} \varepsilon_2^{\varkappa-1} e_1^{n_1+n_2-\lambda} e_2^{\lambda-1}$$

und ist also das arithmetische Mittel der $\binom{n_1+n_2-1}{\lambda-1}$ Ausdrücke, die man erhält, wenn man auf alle möglichen Weisen e_2 mit $\lambda - 1$ Faktoren des (n_1+n_2-1)faktorigen Produktes $a_1^{n_1} \varepsilon_1^{n_2-\varkappa} \varepsilon_2^{\varkappa-1}$ und e_1 mit den übrigen Faktoren verbindet. Von diesen Ausdrücken verschwinden alle diejenigen, in welchen e_2 mit ε_1 und e_1 mit ε_2 verbunden erscheint; es kommen also nur die Ausdrücke in Betracht, die man erhält, wenn man e_2 mit den $\varkappa - 1$ Faktoren der Gröſse $\varepsilon_2^{\varkappa-1}$ und mit $\lambda - \varkappa$ Faktoren der Gröſse $a_1^{n_1}$ verbindet, und da ersteres nur in einer Weise und letzteres in $\binom{n_1}{\lambda-\varkappa}$ Weisen geschehen kann, so ist demnach

$$\binom{n_1+n_2-1}{\lambda-1} a_1^{n_1} \varepsilon_1^{n_2-\varkappa} \varepsilon_2^{\varkappa-1} e_1^{n_1+n_2-\lambda} e_2^{\lambda-1}$$
$$= \binom{n_1}{\lambda-\varkappa} a_1^{n_1} e_1^{n_1-\lambda+\varkappa} e_2^{\lambda-\varkappa}.$$

Das $(n_2+\varkappa, \lambda)$te Element dagegen hat für $\varkappa = 1, .., n_1$ die Form

$$a_2^{n_2} \varepsilon_1^{n_1-\varkappa} \varepsilon_2^{\varkappa-1} e_1^{n_1+n_2-\lambda} e_2^{\lambda-1},$$

und es ist ebenso

$$\binom{n_1+n_2-1}{\lambda-1} a_2^{n_2} \varepsilon_1^{n_1-\varkappa} \varepsilon_2^{\varkappa-1} e_1^{n_1+n_2-\lambda} e_2^{\lambda-1}$$
$$= \binom{n_2}{\lambda-\varkappa} a_2^{n_2} e_1^{n_2-\lambda+\varkappa} e_2^{\lambda-\varkappa}.$$

Folglich ist

$$\binom{n_1+n_2-1}{0} .. \binom{n_1+n_2-1}{n_1+n_2-1}$$
$$. (a_1^{n_1})^{n_2} \varepsilon_1^{n_2-1} .. \varepsilon_2^{n_2-1} (a_2^{n_2})^{n_1} \varepsilon_1^{n_1-1} .. \varepsilon_2^{n_1-1} | e_1^{n_1+n_2-1} .. e_2^{n_1+n_2-1}$$

eine Determinante, in der das $(\varkappa, \lambda)$te Element für $\varkappa = 1, .., n_2$ die Form

$$\binom{n_1}{\lambda-\varkappa} a_1^{n_1} e_1^{n_1-\lambda+\varkappa} e_2^{\lambda-\varkappa}$$

und das $(n_2+\varkappa, \lambda)$te Element für $\varkappa = 1, .., n_1$ die Form

$$\binom{n_2}{\lambda-\varkappa} a_2^{n_2} e_1^{n_2-\lambda+\varkappa} e_2^{\lambda-\varkappa}$$

hat. Die Elemente der ersten Art haben für $\lambda < \varkappa$ und für $\lambda > n_1 + \varkappa$ und die Elemente der zweiten Art für $\lambda < \varkappa$ und für $\lambda > n_2 + \varkappa$ den Wert Null.

64. Da infolge der Gleichung

$$\binom{n-1}{0}\cdot\cdot\binom{n-1}{n-1}\cdot \varepsilon_1{}^{n-1}\cdot\cdot\,\varepsilon_2{}^{n-1} \mid e_1{}^{n-1}\cdot\cdot\,e_2{}^{n-1} = 1$$

die Gleichung

$$p_1{}^{n-1}\cdot\cdot\,p_n{}^{n-1} = \binom{n-1}{0}\cdot\cdot\binom{n-1}{n-1}\cdot p_1{}^{n-1}\cdot\cdot\,p_n{}^{n-1} \mid \varepsilon_1{}^{n-1}\cdot\cdot\,\varepsilon_2{}^{n-1} \cdot e_1{}^{n-1}\cdot\cdot\,e_2{}^{n-1}$$

besteht, so können wir

$$\binom{n_1+n_2-1}{0}\cdot\cdot\binom{n_1+n_2-1}{n_1+n_2-1}$$
$$\cdot(a_1{}^{n_1})^{n_2}\,\varepsilon_1{}^{n_2-1}\cdot\cdot\,\varepsilon_2{}^{n_2-1}(a_2{}^{n_2})^{n_1}\,\varepsilon_1{}^{n_1-1}\cdot\cdot\,\varepsilon_2{}^{n_1-1} \mid e_1{}^{n_1+n_2-1}\cdot\cdot\,e_2{}^{n_1+n_2-1}$$
$$\cdot p_1{}^{n_1+n_2-1}\cdot\cdot\,p_{n_1+n_2}^{\;n_1+n_2-1} \mid \varepsilon_1{}^{n_1+n_2-1}\cdot\cdot\,\varepsilon_2{}^{n_1+n_2-1}$$

durch die Determinante

$$(a_1{}^{n_1})^{n_2}\,\varepsilon_1{}^{n_2-1}\cdot\cdot\,\varepsilon_2{}^{n_2-1}(a_2{}^{n_2})^{n_1}\,\varepsilon_1{}^{n_1-1}\cdot\cdot\,\varepsilon_2{}^{n_1-1} \mid p_1{}^{n_1+n_2-1}\cdot\cdot\,p_{n_1+n_2}^{\;n_1+n_2-1}$$

und somit nach dem Laplace'schen Determinantensatze durch die Summe

$$(p; n_1+n_2)(a_1{}^{n_1})^{n_2}\,\varepsilon_1{}^{n_2-1}\cdot\cdot\,\varepsilon_2{}^{n_2-1} \mid p_1{}^{n_1+n_2-1}\cdot\cdot\,p_{n_2}^{\;n_1+n_2-1}$$
$$\cdot(a_2{}^{n_2})^{n_1}\,\varepsilon_1{}^{n_1-1}\cdot\cdot\,\varepsilon_2{}^{n_1-1} \mid p_{n_2+1}^{\;n_1+n_2-1}\cdot\cdot\,p_{n_2+n_1}^{\;n_1+n_2-1}$$

ausdrücken, wenn wir in jedem Gliede derselben die Gröfsen p so ordnen, dafs die Reihe ihrer Indices durch eine gerade Anzahl von Vertauschungen zweier Indices in die Reihe $1, .., n_1 + n_2$ übergeht. Nun ist aber diese Summe auch in der Form

$$(p; n_1+n_2)\,a_1 p_1{}^{n_1}\cdot\cdot\,a_1 p_{n_2}^{\;n_1}\cdot a_2 p_{n_2+1}^{\;n_2}\cdot\cdot\,a_2 p_{n_2+n_1}^{\;n_2}$$
$$\cdot\varepsilon_1{}^{n_2-1}\cdot\cdot\,\varepsilon_2{}^{n_2-1} \mid p_1{}^{n_2-1}\cdot\cdot\,p_{n_2}^{\;n_2-1}\cdot\varepsilon_1{}^{n_1-1}\cdot\cdot\,\varepsilon_2{}^{n_1-1} \mid p_{n_2+1}^{\;n_1-1}\cdot\cdot\,p_{n_2+n_1}^{\;n_1-1}$$

darstellbar und ferner nach dem 43ten Abschnitte

$$p_1{}^{n_1+n_2-1}\cdot\cdot\,p_{n_1+n_2}^{\;n_1+n_2-1} \mid \varepsilon_1{}^{n_1+n_2-1}\cdot\cdot\,\varepsilon_2{}^{n_1+n_2-1} = p_1{}^{n_2-1}\cdot\cdot\,p_{n_2}^{\;n_2-1}$$
$$\mid \varepsilon_1{}^{n_2-1}\cdot\cdot\,\varepsilon_2{}^{n_2-1}\cdot p_{n_2+1}^{\;n_1-1}\cdot\cdot\,p_{n_2+n_1}^{\;n_1-1} \mid \varepsilon_1{}^{n_1-1}\cdot\cdot\,\varepsilon_2{}^{n_1-1}$$
$$\cdot p_1\cdot\cdot\,p_{n_2}^{\;n_1}\,(p_{n_2+1} \mid \varepsilon_1\varepsilon_2)^{n_2}\cdot\cdot(p_{n_2+n_1} \mid \varepsilon_1\varepsilon_2)^{n_2},$$

folglich ist

$$\binom{n_1+n_2-1}{0}\cdot\cdot\binom{n_1+n_2-1}{n_1+n_2-1}$$
$$\cdot(a_1{}^{n_1})^{n_2}\,\varepsilon_1{}^{n_2-1}\cdot\cdot\,\varepsilon_2{}^{n_2-1}(a_2{}^{n_2})^{n_1}\,\varepsilon_1{}^{n_1-1}\cdot\cdot\,\varepsilon_2{}^{n_1-1} \mid e_1{}^{n_1+n_2-1}\cdot\cdot\,e_2{}^{n_1+n_2-1}$$

$$=(p;n_1+n_2)\frac{a_1p_1^{n_1}\,..\,a_1p_{n_2}^{n_1}\,,\,a_2p_{n_2+1}^{n_2}\,..\,a_2p_{n_2+n_1}^{n_2}}{p_1\,..\,p_{n_2}^{n_1}\,(p_{n_2+1}\,|\,\varepsilon_1\varepsilon_2)^{n_2}\,..\,(p_{n_2+n_1}\,|\,\varepsilon_1\varepsilon_2)^{n_2}}$$

und somit die Resultante der Formen $a_1p^{n_1}$ und $a_2p^{n_2}$ durch die Werte dargestellt, die diese Formen für die Gröfsen $p_1,..,p_{n_1+n_2}$ annehmen. Es ist die Rosenhain'sche interpolatorische Darstellung der Resultante.

65. Nehmen wir

$$p_1=a_{2.1}\,|\,e_1e_2,..,p_{n_2}=a_{2.n_2}\,|\,e_1e_2$$

an und sind also die Gröfsen $p_1,..,p_{n_2}$ die Verschwindungsgröfsen der Form $a_2p^{n_2}$, so verschwinden in der Summe alle Glieder aufser dem neben dem Zeichen $(p;n_1+n_2)$ verzeichneten Gliede. Der Nenner dieses Gliedes ist nun, da den Gleichungen

$$p_1p_{n_2+\varkappa}\,|\,\varepsilon_1\varepsilon_2=a_{2.1}\,p_{n_2+\varkappa},..,p_{n_2}p_{n_2+\varkappa}\,|\,\varepsilon_1\varepsilon_2=a_{2.n_2}\,p_{n_2+\varkappa}$$

zufolge

$$p_1\,..\,p_{n_2}\,(p_{n_2+\varkappa}\,|\,\varepsilon_1\varepsilon_2)^{n_2}=a_2\,p_{n_2+\varkappa}^{n_2}$$

ist, gleich dem im Zähler befindlichen Produkte $a_2p_{n_2+1}^{n_2}\,..\,a_2p_{n_2+n_1}^{n_2}$. Die Summe reduziert sich daher auf das Produkt

$$a_1p_1^{n_1}\,..\,a_1p_{n_2}^{n_1}=a_{1,1}\,..\,a_{1,n_1}^{n_2}\,(a_{2,1}\,|\,e_1e_2)^{n_1}\,..\,(a_{2,n_2}\,|\,e_1e_2)^{n_1},$$

und es ist somit die Resultante

$$(n_1,n_2)a_{1,\varkappa_1}\,a_{2,\varkappa_2}\,|\,e_1e_2=\binom{n_1+n_2-1}{0}..\binom{n_1+n_2-1}{n_1+n_2-1}$$
$$.(a_1^{n_1})^{n_2}\,\varepsilon_1^{n_2-1}..\varepsilon_2^{n_2-1}(a_2^{n_2})^{n_1}\,\varepsilon_1^{n_1-1}..\varepsilon_2^{n_1-1}\,|\,e_1^{n_1-n_2-1}..e_2^{n_1-n_2-1}.$$

66. Wenn die Formen

$$a_1p^{n_1},\ a_2p^{n_2}$$

verschwinden, so verschwindet ferner unabhängig von p_1 auch der unter der Voraussetzung $n_1\geqq n_2$ gebildete Ausdruck

$$a_1p^{n_1}\,a_2p_1^{n_2}-a_1^{n_1}\,p^{n_1-n_2}\,p_1^{n_2}\,a_2p^{n_2}$$

oder, da derselbe offenbar in der Form

$$(a_1^{n_1}p^{n_1-1}p_1^0\,a_2^{n_2}p^0p_1^{n_2-1}+..+a_1^{n_1}p^{n_1-n_2}\,p_1^{n_2-1}$$
$$a_2^{n_2}\,p^{n_2-1}\,p_1^0)\,|\,pp_1$$

darstellbar und $pp_1=pp_1\,|\,\varepsilon_1\varepsilon_2\,.\,e_1e_2$ ist, der Ausdruck

$$\frac{a_1p^{n_1}\,a_2\,p_1^{n_2}-a_1^{n_1}\,p^{n_1-n_2}\,p_1^{n_2}\,a_2p^{n_2}}{pp_1\,|\,\varepsilon_1\varepsilon_2}$$
$$=(a_1^{n_1}\,p^{n_1-1}\,p_1^0\,a_2^{n_2}p^0p_1^{n_2-1}+..+a_1^{n_1}p^{n_1-n_2}\,p_1^{n_2-1}$$
$$a_2^{n_2}\,p^{n_2-1}p_1^0)\,|\,e_1e_2.$$

Dieser Ausdruck, der in der rechts stehenden Form für $\mu = 1, .., n_2$ aus der Determinante

$$a_1^{n_1} p^{n_1-\mu} p_1^{\mu-1} a_2^{n_2} p^{\mu-1} p_1^{n_2-\mu} \mid e_1 e_2$$

hervorgeht und für p_1 eine Form vom Grade $n_2 - 1$ und für p vom Grade $n_1 - 1$ ist, werde durch

$$(a_1^{n_1} a_2^{n_2} \mid e_1 e_2 \rangle\, p^{n_1-1} p_1^{n_2-1}$$

bezeichnet. Da er unabhängig von p_1 verschwindet, so müssen auch die Glieder

$$\binom{n_2-1}{\varkappa-1} (a_1^{n_1} a_2^{n_2} \mid e_1 e_2 \rangle (e_1^{n_2-\varkappa} e_2^{\varkappa-1})\, p^{n_1-1} \,.\, p_1^{n_2-1} \varepsilon_1^{n_2-\varkappa} \varepsilon_2^{\varkappa-1},$$

aus denen er sich zusammensetzt, und somit die n_2 Formen

$$(a_1^{n_1} a_2^{n_2} \mid e_1 e_2 \rangle\, e_1^{n_2-1} p^{n_1-1}, .., (a_1^{n_1} a_2^{n_2} \mid e_1 e_2 \rangle\, e_2^{n_2-1} p^{n_1-1}$$

verschwinden. Dasselbe ist, wenn die Formen $a_1 p^{n_1}$ und $a_2 p^{n_2}$ verschwinden, auch der Fall mit den $n_1 - n_2$ Formen

$$a_2^{n_2} \varepsilon_1^{n_1-n_2-1} p^{n_1-1}, .., a_2^{n_2} \varepsilon_2^{n_1-n_2-1} p^{n_1-1}.$$

Wir haben also n_1 Formen, deren Produkt die Gröfse $a_1^{n_1}$ in der $n_2$ten und die Gröfse $a_2^{n_2}$ in der $n_1$ten Dimension enthält, und in denen die Gröfse p^{n_1-1} sich aus den gleichfalls n_1 Einheiten $e_1^{n_1-1}$, .., $e_2^{n_1-1}$ zusammensetzt. Die Resultante stellt sich daher nach dieser, der Bézout-Cayley'schen Methode, abgesehen von einem etwaigen numerischen Faktor, durch die Determinante

$$(a_1^{n_1} a_2^{n_2} \mid e_1 e_2 \rangle^{n_2} e_1^{n_2-1} .. e_2^{n_2-1} (a_2^{n_2})^{n_1-n_2} \varepsilon_1^{n_1-n_2-1} .. \varepsilon_2^{n_1-n_2-1} \mid e_1^{n_1-1} .. e_2^{n_1-1}$$

dar.

Das $(\varkappa, \lambda)$te Element dieser Determinante hat für $\varkappa = 1, .., n_2$ die Form

$$(a_1^{n_1} a_2^{n_2} \mid e_1 e_2 \rangle (e_1^{n_2-\varkappa} e_2^{\varkappa-1}) (e_1^{n_1-\lambda} e_2^{\lambda-1})$$

und ist also der

$$\binom{n_1-1}{\lambda-1} \binom{n_2-1}{\varkappa-1}$$

-te Teil des Koefficienten der Gröfse

$$p^{n_1-1} \varepsilon_1^{n_1-\lambda} \varepsilon_2^{\lambda-1} p_1^{n_2-1} \varepsilon_1^{n_2-\varkappa} \varepsilon_2^{\varkappa-1}$$

in der Entwickelung des Ausdruckes

$$(a_1^{n_1} a_2^{n_2} \mid e_1 e_2 \rangle\, p^{n_1-1} p_1^{n_2-1}.$$

Dieser Koefficient geht, da jene Gröfse sich in der Form

$$p^{n_1-\mu} \varepsilon_1^{n_1-\lambda-\varrho} \varepsilon_2^{\lambda-\mu+\varrho} p_1^{\mu-1} \varepsilon_1^{\sigma} \varepsilon_2^{\mu-1-\sigma}$$
$$.\, p^{\mu-1} \varepsilon_1^{\varrho} \varepsilon_2^{\mu-1-\varrho} p_1^{n_2-\mu} \varepsilon_1^{n_2-\varkappa-\sigma} \varepsilon_2^{\varkappa-\mu+\sigma};$$

darstellen läfst, durch Addition für $\mu = 1, .., n_2$ und alle möglichen Werte von ϱ und σ aus dem Ausdrucke

$$\binom{n_1 - \mu}{n_1 - \lambda - \varrho}\binom{\mu - 1}{\sigma}\binom{\mu - 1}{\varrho}\binom{n_2 - \mu}{n_2 - \varkappa - \sigma}$$

$$. \, a_1^{n_1} e_1^{n_1 - \lambda - \varrho + \sigma} e_2^{\lambda - 1 + \varrho - \sigma} a_2^{n_2} e_1^{n_2 - \varkappa - \sigma + \varrho} e_2^{\varkappa - 1 + \sigma - \varrho} \mid e_1 e_2$$

hervor, an dessen Stelle im Falle $n_1 = n$, $n_2 = n$ auch der Ausdruck

$$\binom{n - \mu}{n - \lambda - \varrho}\binom{\mu - 1}{\sigma}\binom{\mu - 1}{\varrho}\binom{n - \mu}{n - \varkappa - \sigma}$$

$$. \, a_1^n a_2^n \mid (e_1^{n - \lambda + 1 - \varrho + \sigma} e_2^{\lambda - 1 + \varrho - \sigma})(e_1^{n - \varkappa - \sigma + \varrho} e_2^{\varkappa + \sigma - \varrho})$$

gesetzt werden kann, weil, wie sich durch Betrachtung der vom Anfang und vom Ende gleich weit abstehenden Glieder ergiebt,

$$(a_1^n p^{n-1} p_1^0 a_2^n p^0 p_1^{n-1} + .. + a_1^n p^0 p_1^{n-1} a_2^n p^{n-1} p_1^0) \mid e_1 e_2$$
$$= a_1^n a_2^n \mid ((p^{n-1} p_1^0 e_1)(p^0 p_1^{n-1} e_2) + .. + (p^0 p_1^{n-1} e_1)(p^{n-1} p_1^0 e_2))$$

ist.

Das $(n_2 + \varkappa, \lambda)$te Element hat für $\varkappa = 1, .., n_1 - n_2$ die Form

$$a_2^{n_2} \varepsilon_1^{n_1 - n_2 - \varkappa} \varepsilon_2^{\varkappa - 1} e_1^{n_1 - \lambda} e_2^{\lambda - 1},$$

und es ist

$$\binom{n_1 - 1}{\lambda - 1} a_2^{n_2} \varepsilon_1^{n_1 - n_2 - \varkappa} \varepsilon_2^{\varkappa - 1} e_1^{n_1 - \lambda} e_2^{\lambda - 1} = \binom{n_2}{\lambda - \varkappa} a_2^{n_2} e_1^{n_2 - \lambda + \varkappa} e_2^{\lambda - \varkappa}.$$

67. Im Falle $n_1 = n$, $n_2 = n$ stellt sich die Resultante, abgesehen von einem etwaigen numerischen Faktor, in der Form der algebraisch-symmetrischen Determinante

$$(a_1^n a_2^n \mid e_1 e_2]^n (e_1^{n-1} .. e_2^{n-1})^{\frac{2}{}}$$

und die in diesem Falle offenbar für p und p_1 symmetrische Form

$$(a_1^n a_2^n \mid e_1 e_2] p^{n-1} p_1^{n-1}$$

in der Form

$$\frac{a_1^n a_2^n \mid p^n p_1^n}{p p_1 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2}$$

$$= (a_1^n p^{n-1} p_1^0 a_2^n p^0 p_1^{n-1} + .. + a_1^n p^0 p_1^{n-1} a_2^n p^{n-1} p^0) \mid e_1 e_2$$

dar.

Infolge der Gleichung

$$p^n = (e, \varepsilon; 2)\binom{n}{\varrho} p^n \varepsilon_1^{n-\varrho} \varepsilon_2^{\varrho} \, . \, e_1^{n-\varrho} e_2^{\varrho}$$

geht das kombinatorische Produkt $p^n p_1^n$ durch Addition für $\varrho = 0, .., n$ und $\sigma = 0, .., n$ aus dem Ausdrucke

$$\binom{n}{\varrho}\binom{n}{\sigma}(e_1^{\,n-\varrho}\,e_2^{\,\varrho})\,(e_1^{\,n-\sigma}\,e_2^{\,\sigma}).\,p^n\,\varepsilon_1^{\,n-\varrho}\,\varepsilon_2^{\,\varrho}\,p_1^{\,n}\,\varepsilon_1^{\,n-\sigma}\,\varepsilon_2^{\,\sigma}$$

oder, wenn wir die gleichen Werte von ϱ und σ entsprechenden Glieder als verschwindende Gröfsen weglassen und die wechselseitig gleichen Werte von ϱ und σ nur einmal in Rechnung bringen, für $\varrho=0,..,n$ und $\sigma=\varrho+1,..,n$ aus dem Ausdrucke

$$\binom{n}{\varrho}\binom{n}{\sigma}(e_1^{\,n-\varrho}\,e_2^{\,\varrho})\,(e_1^{\,n-\sigma}\,e_2^{\,\sigma}).\,p^n\,p_1^{\,n}\,|\,(\varepsilon_1^{\,n-\varrho}\,\varepsilon_2^{\,\varrho})\,(\varepsilon_1^{\,n-\sigma}\,\varepsilon_2^{\,\sigma})$$

hervor, und die hier auftretende Determinante setzt sich für $\tau=1,..,\sigma-\varrho$ aus Gliedern von der Form

$$p^{n-1}\,\varepsilon_1^{\,n-\varrho-\tau}\,\varepsilon_2^{\,\varrho-1+\tau}\,p_1^{\,n-1}\,\varepsilon_1^{\,n-\sigma-1+\tau}\,\varepsilon_2^{\,\sigma-\tau}\,.\,pp_1\,|\,\varepsilon_1\varepsilon_2$$

zusammen. Folglich ist die Form $(a_1^n\,a_2^n\,|\,e_1e_2)\,p^{n-1}\,p_1^{n-1}$ ein Aggregat von Gliedern, die aus dem Ausdrucke

$$\binom{n}{\varrho}\binom{n}{\sigma}a_1^{\,n}\,a_2^{\,n}\,|\,(e_1^{\,n-\varrho}\,e_2^{\,\varrho})\,(e_1^{\,n-\sigma}\,e_2^{\,\sigma}).\,p^{n-1}\,\varepsilon_1^{\,n-\varrho-\tau}\,\varepsilon_2^{\,\varrho-1+\tau}$$
$$p_1^{\,n-1}\,\varepsilon_1^{\,n-\sigma-1+\tau}\,\varepsilon_2^{\,\sigma-\tau}$$

für $\varrho=0,..,n$; $\sigma=\varrho+1,..,n$; $\tau=1,..,\sigma-\varrho$ entstehen. Und der Koefficient der Gröfse

$$p^{n-1}\,\varepsilon_1^{\,n-\lambda}\,\varepsilon_2^{\,\lambda-1}\,p_1^{\,n-1}\,\varepsilon_1^{\,n-\varkappa}\,\varepsilon_2^{\,\varkappa-1},$$

der das

$$\binom{n-1}{\varkappa-1}\binom{n-1}{\lambda-1}$$

-fache $(\varkappa,\lambda)$te Element der Resultante darstellt, ist also, wenn wir $\varrho+\tau=\lambda$, $\sigma-\tau=\varkappa-1$ setzen, eine Gröfse, die sich durch Addition aus dem Ausdrucke

$$\binom{n}{\varrho}\binom{n}{\varkappa+\lambda-1-\varrho}a_1^{\,n}\,a_2^{\,n}\,|\,(e_1^{\,n-\varrho}\,e_2^{\,\varrho})(e_1^{\,n-\varkappa-\lambda+1+\varrho}\,e_2^{\,\varkappa+\lambda-1-\varrho})$$

der Gleichung $\varrho=\lambda-\tau$ zufolge für $\varrho=0,..,\lambda-1$ ergiebt.

68. Infolge der Gleichung

$$p_1^{\,n_1-1}\,..\,p_{n_1}^{\,n_1-1}=\binom{n_1-1}{0}\,..\binom{n_1-1}{n_1-1}.\,p_1^{\,n_1-1}\,..\,p_{n_1}^{\,n_1-1}\,|$$
$$\varepsilon_1^{\,n_1-1}\,..\,\varepsilon_2^{\,n_1-1}\,.\,e_1^{\,n_1-1}\,..\,e_2^{\,n_1-1}$$

können wir

$$\binom{n_1-1}{0}\,..\binom{n_1-1}{n_1-1}.\,(a_1^{\,n_1}\,a_2^{\,n_2}\,|\,e_1e_2)^{n_2}\,e_1^{\,n_2-1}\,..\,e_2^{\,n_2-1}\,(a_2^{\,n_2})^{n_1-n_2}$$
$$\varepsilon_1^{\,n_1-n_2-1}\,..\,\varepsilon_2^{\,n_1-n_2-1}\,|\,e_1^{\,n_1-1}\,..\,e_2^{\,n_1-1}\,.\,p_1^{\,n_1-1}\,..\,p_{n_1}^{\,n_1-1}\,|\,\varepsilon_1^{\,n_1-1}\,..\,\varepsilon_2^{\,n_1-1}$$

durch die Determinante

$$(a_1^{n_1}\, a_2^{n_2} \mid e_1 e_2)^{n_2}\, e_1^{n_2-1} \,..\, e_2^{n_2-1}\, (a^{n_2})^{n_1-n_2}\, \varepsilon_1^{n_1-n_2-1} \,..\, \varepsilon_2^{n_1-n_2-1} \mid$$
$$p_1^{n_1-1} \,..\, p_{n_1}^{n_1-1}$$

und somit nach dem Laplace'schen Determinantensatze durch die Summe

$$(p; n_1)\,(a_1^{n_1}\, a_2^{n_2} \mid e_1 e_2)^{n_2}\, e_1^{n_2-1} \,..\, e_2^{n_2-1} \mid p_1^{n_1-1} \,..\, p_{n_2}^{n_1-1}$$
$$.\,(a_2^{n_2})^{n_1-n_2}\, \varepsilon_1^{n_1-n_2-1} \,..\, \varepsilon_2^{n_1-n_2-1} \mid p_{n_2+1}^{n_1-1} \,..\, p_{n_1}^{n_1-1}$$

ausdrücken, wenn wir in jedem Gliede derselben die Gröfsen p so ordnen, dafs die Reihe ihrer Indices durch eine gerade Anzahl von Vertauschungen zweier Indices in die Reihe $1, .., n_1$ übergeht. Nun ist diese Summe auch in der Form

$$(p; n_1)(a_1^{n_1}\, a_2^{n_2} \mid e_1 e_2)^{n_2}\, e_1^{n_2-1} \,..\, e_2^{n_2-1} \mid p_1^{n_1-1} \,..\, p_{n_2}^{n_1-1}$$
$$.\, a_2 p_{n_2+1}^{n_2} \,..\, a_2 p_{n_1}^{n_2} \,.\, \varepsilon_1^{n_1-n_2-1} \,..\, \varepsilon_2^{n_1-n_2-1} \mid p_{n_2+1}^{n_1-n_2-1} \,..\, p_{n_1}^{n_1-n_2-1}$$

und darnach, wenn wir sie mit

$$\frac{\binom{n_2-1}{0} .. \binom{n_2-1}{n_2-1}}{p_1^{n_1-1} \,..\, p_{n_1}^{n_1-1} \mid \varepsilon_1^{n_1-1} \,..\, \varepsilon_2^{n_1-1}}$$

multiplizieren, unter Berücksichtigung der Gleichungen

$$p_1^{n_2-1} \,..\, p_{n_2}^{n_2-1} = \binom{n_2-1}{0} .. \binom{n_2-1}{n_2-1} \cdot p_1^{n_2-1} \,..\, p_{n_2}^{n_2-1} \mid$$
$$\varepsilon_1^{n_2-1} \,..\, \varepsilon_2^{n_2-1} \,.\, e_1^{n_2-1} \,..\, e_2^{n_2-1}$$

und

$$p_1^{n_1-1} \,..\, p_{n_1}^{n_1-1} \mid \varepsilon_1^{n_1-1} \,..\, \varepsilon_2^{n_1-1} = p_1^{n_2-1} \,..\, p_{n_2}^{n_2-1} \mid \varepsilon_1^{n_2-1} \,..\, \varepsilon_2^{n_2-1}$$
$$\cdot p_{n_2+1}^{n_1-n_2-1} \,..\, p_{n_1}^{n_1-n_2-1} \mid \varepsilon_1^{n_1-n_2-1} \,..\, \varepsilon_2^{n_1-n_2-1}$$
$$\cdot p_1 \,..\, p_{n_2}^{n_1-n_2}\, (p_{n_2+1} \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2)^{n_2} \,..\, (p_{n_1} \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2)^{n_2}$$

in der Form

$$(p; n_1)\, \frac{(a_1^{n_1}\, a_2^{n_2} \mid e_1 e_2)^{n_2}\, p_1^{n_1-1} \,..\, p_{n_2}^{n_1-1} \mid p_1^{n_2-1} \,..\, p_{n_2}^{n_2-1} \cdot a_2 p_{n_2+1}^{n_2} \,..\, a_2 p_{n_1}^{n_2}}{(p_1^{n_2-1} \,..\, p_{n_2}^{n_2-1} \mid \varepsilon_1^{n_2-1} \,..\, \varepsilon_2^{n_2-1})^2}$$
$$\cdot p_1 \,..\, p_{n_2}^{n_1-n_2}\, (p_{n_2+1} \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2)^{n_2} \,..\, (p_{n_1} \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2)^{n_2}$$

darstellbar und ferner nach dem 38ten Abschnitte

$$(p_1^{n_2-1} \,..\, p_{n_2}^{n_2-1} \mid \varepsilon_1^{n_2-1} \,..\, \varepsilon_2^{n_2-1})^2$$
$$= (-1)^{\frac{n_2(n_2-1)}{2}}\, \bar{p}_1 p_1 \,..\, p_{n_2} (-p_1 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2)^{n_2-1} \,..\, \bar{p}\;\; p_1 \,..\, p_{n_2} (-p_{n_2} \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2)^{n_2-1}$$

und

$$p_1 \,..\, p_{n_2}^{n_1-n_2} \, (p_{n_2+1} \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2)^{n_2} \,..\, (p_{n_1} \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2)^{n_2}$$
$$= p_{n_2+1} \,..\, p_{n_1}^{n_2} \, (-p_1 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2)^{n_1-n_2} \,..\, (-p_{n_2} \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2)^{n_1-n_2} ;$$

folglich ergiebt sich für die Resultante die Gleichung

$$(-1)^{\frac{n_2(n_2-1)}{2}} \binom{n_1-1}{0} .. \binom{n_1-1}{n_1-1} \cdot \binom{n_2-1}{0} .. \binom{n_2-1}{n_2-1}$$
$$\cdot (a_1^{n_1} a_2^{n_2} \mid e_1 e_2 \rceil^{n_2} e_1^{n_2-1} \,..\, e_2^{n_2-1} (a_2^{n_2})^{n_1-n_2} \varepsilon_1^{n_1-n_2-1} \,..\, \varepsilon_2^{n_1-n_2-1} \mid$$
$$e_1^{n_1-1} \,..\, e_2^{n_1-1}$$
$$= (p; n_1) \frac{(a_1^{n_1} a_2^{n_2} \mid e_1 e_2 \rceil^{n_2} p_1^{n_1-1} \,..\, p_{n_2}^{n_1-1} \mid p_1^{n_2-1} \,..\, p_{n_2}^{n_2-1} \cdot a_2 p_{n_2+1}^{n_2} \,..\, a_2 p_{n_1}^{n_2}}{\bar{p}_1 p_1 \,..\, p_{n_1} (-p_1 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2)^{n_1-1} \,..\, \bar{p}_{n_2} p_1 \,..\, p_{n_1} (-p_{n_2} \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2)^{n_1-1}},$$

in der die rechte Seite offenbar auch in der Form

$$(p; n_1) \frac{(a_1^{n_1} a_2^{n_2} \mid p_1 p_0 \rceil p_1^{n_1-1}}{\bar{p}_1 p_0 \,..\, p_{n_1} (-p_1 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2)^{n_1}} \,..\, \frac{(a_1^{n_1} a_2^{n_2} \mid p_{n_2} p_0 \rceil p_{n_2}^{n_1-1}}{\bar{p}_{n_2} p_0 \,..\, p_{n_1} (-p_{n_2} \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2)^{n_1}} \mid$$
$$p_1^{n_2-1} \,..\, p_{n_2}^{n_2-1} \cdot a_2 p_{n_2+1}^{n_2} \,..\, a_2 p_{n_1}^{n_2}$$

dargestellt werden kann.

69. Ferner können wir dieser Gleichung unter Berücksichtigung der Gleichung

$$(p_0^{n_2} \,..\, p_{n_2}^{n_2} \mid \varepsilon_1^{n_2} \,..\, \varepsilon_2^{n_2})^2 = (-1)^{\frac{n_2(n_2-1)}{2}} \, p_1 \,..\, p_{n_2} (p_0 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2)^{n_2}$$
$$\cdot \bar{p}_1 p_0 \,..\, p_{n_2} (-p_1 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2)^{n_2} \,..\, \bar{p}_{n_2} p_0 \,..\, p_{n_2} (-p_{n_2} \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2)^{n_2}$$

auch die Form

$$\binom{n_1-1}{0} .. \binom{n_1-1}{n_1-1} \cdot \binom{n_2-1}{0} .. \binom{n_2-1}{n_2-1}$$
$$\cdot (a_1^{n_1} a_2^{n_2} \mid e_1 e_2 \rceil^{n_2} e_1^{n_2-1} \,..\, e_2^{n_2-1} (a_2^{n_2})^{n_1-n_2} \varepsilon_1^{n_1-n_2-1} \,..\, \varepsilon_2^{n_1-n_2-1} \mid$$
$$e_1^{n_1-1} \,..\, e_2^{n_1-1} = (p; n_1) (p_0^{n_2} \,..\, p_{n_2}^{n_2} \mid \varepsilon_1^{n_2} \,..\, \varepsilon_2^{n_2})^2 . (a_1^{n_1} a_2^{n_2} \mid e_1 e_2 \rceil^{n_2}$$
$$\frac{p_1^{n_1-1}}{\bar{p}_1 p_0 \,..\, p_{n_1} (-p_1 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2)^{n_1}} \,..\, \frac{p_{n_2}^{n_1-1}}{\bar{p}_{n_2} p_0 \,..\, p_{n_1} (-p_{n_2} \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2)^{n_1}} \mid$$
$$\frac{p_1^{n_2-1}}{\bar{p}_1 p_0 \,..\, p_{n_2} (-p_1 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2)^{n_2}} \,..\, \frac{p_{n_2}^{n_2-1}}{\bar{p}_{n_2} p_0 \,..\, p_{n_2} (-p_{n_2} \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2)^{n_2}}$$
$$\cdot a_2 p_{n_2+1}^{n_2} \,..\, a_2 p_{n_1}^{n_2}$$

geben und erhalten in ihr für $n_1 = n$, $n_2 = n$ die Borchardt'sche interpolatorische Darstellung der Resultante.

Die hier auftretende, aus den Gröfsen $p_0, .., p_{n_1}$ zusammengesetzte Determinante steht, da nach dem 45ten Abschnitte

$$\frac{p_0^{n_2-1}}{\bar{p}_0 p_0 \cdot \cdot p_{n_2} (-p_0 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2)^{n_2}} + \cdot \cdot + \frac{p_{n_2}^{n_2-1}}{\bar{p}_{n_2} p_0 \cdot \cdot p_{n_2} (-p_{n_2} \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2)^{n_2}} = 0$$

ist, zu der verschwindenden Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{p_0^{n_1-1}}{\bar{p}_0 p_0 \cdot \cdot p_{n_1} (-p_0 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2)^{n_1}} & \cdot\cdot & \frac{p_{n_2}^{n_1-1}}{\bar{p}_{n_2} p_0 \cdot \cdot p_{n_1} (-p_{n_2} \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2)^{n_1}} \\ \frac{p_0^{n_2-1}}{\bar{p}_0 p_0 \cdot \cdot p_{n_2} (-p_0 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2)^{n_2}} & \cdot\cdot & \frac{p_{n_2}^{n_2-1}}{\bar{p}_{n_2} p_0 \cdot \cdot p_{n_2} (-p_{n_2} \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2)^{n_2}} \end{vmatrix}$$

in der Beziehung, dafs die Summe der Elemente ihrer $\varkappa$ten Horizontalreihe dem ersten Elemente der $(\varkappa+1)$ten Horizontalreihe in dieser Determinante entgegengesetzt gleich ist. In dem Falle $n_1 = n$, $n_2 = n$ ist die verschwindende Determinante eine algebraisch-symmetrische Determinante, in der nach dem 23 ten Abschnitte alle Elemente gleiche Koefficienten haben, und der allen ihren Elementen gemeinschaftliche Koefficient stellt sich durch jene Determinante dar.

70. Nehmen wir

$$p_1 = a_{2,1} \mid e_1 e_2, \cdot \cdot, p_{n_2} = a_{2,n_2} \mid e_1 e_2$$

an und sind also die Gröfsen $p_1, \cdot \cdot, p_{n_2}$ die Verschwindungsgröfsen der Form $a_2 p^{n_2}$, so verschwinden in dem am Ende des 68 ten Abschnittes für die Resultante gegebenen Ausdrucke aufser dem verzeichneten die sämtlichen Summenglieder. Das $(\varkappa, \lambda)$te Element der Determinante in diesem Gliede ist

$$\frac{(a_1^{n_1} a_2^{n_2} \mid p_\varkappa p_0) p_\varkappa^{n_1-1} p_\lambda^{n_2-1}}{\bar{p}_\varkappa p_0 \cdot \cdot p_{n_1} (-p_\varkappa \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2)^{n_1}}$$

Der Zähler ist für $\lambda \lessgtr \varkappa$ gleich

$$p_\varkappa p_0 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdot \frac{a_1 p_\varkappa^{n_1} a_2 p_\lambda^{n_2} - a_1^{n_1} p_\varkappa^{n_1-n_2} p_\lambda^{n_2} a_2 p_\varkappa^{n_2}}{p_\varkappa p_\lambda \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2} = 0$$

und für $\lambda = \varkappa$ gleich

$$n_2 a_1^{n_1} p_\varkappa^{n_1-1} a_2^{n_2} p_\varkappa^{n_2-1} \mid p_\varkappa p_0 = n_2 a_1 p_\varkappa^{n_1} a_2^{n_2} p_\varkappa^{n_2-1} p_0,$$

und der Nenner nimmt, wenn wir der Annahme entsprechend

$$p_\varkappa p_0 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2 = a_{2,\varkappa} p_0;$$

$$p_\varkappa p_1 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2 = -a_{2,1} p_\varkappa, \cdot \cdot, p_\varkappa p_{n_2} \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2 = -a_{2,n_2} p_\varkappa;$$

$$p_\varkappa p_{n_2+1} \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2 = a_{2,\varkappa} p_{n_2+1}, \cdot \cdot, p_\varkappa p_{n_1} \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2 = a_{2,\varkappa} p_{n_1}$$

setzen, die Form

$$(-1)^{n_2-1}\, a_{2,1}\, p_\varkappa \,..\, a_{2,\varkappa}\, p_0 \,..\, a_{2,n_2}\, p_\varkappa \cdot a_{2,\varkappa}\, p_{n_2+1} \,..\, a_{2,\varkappa}\, p_{n_1}$$

oder

$$(-1)^{n_2-1}\, n_2 a_2{}^{n_2}\, p_\varkappa{}^{n_2-1}\, p_0 \cdot a_{2,\varkappa}\, p_{n_2+1} \,..\, a_{2,\varkappa}\, p_{n_1}$$

an. Das $(\varkappa, \lambda)$te Element der Determinante hat daher für $\lambda \lesseqgtr \varkappa$ den Wert Null und für $\lambda = \varkappa$ den Wert

$$\frac{(-1)^{n_2-1}\, a_1 p_\varkappa{}^{n_1}}{a_{2,\varkappa}\, p_{n_2+1} \,..\, a_{2,\varkappa}\, p_{n_1}}$$

und somit die Determinante selbst den Wert

$$\frac{a_1 p_1{}^{n_1} \,..\, a_1 p_{n_2}{}^{n_1}}{a_2 p_{n_2+1}{}^{n_2} \,..\, a_2 p_{n_1}{}^{n_2}}\,.$$

Demnach ist das nicht verschwindende Glied gleich

$$a_1 p_1{}^{n_1} \,..\, a_1 p_{n_2}{}^{n_1} = a_{1,1} \,..\, a_{1,n_1}{}^{n_2}\, (a_{2,1} \mid e_1 e_2)^{n_1} \,..\, (a_{2,n_2} \mid e_1 e_2)^{n_1}$$

und folglich die Resultante

$$(n_1, n_2)\, a_{1,\varkappa_1}\, a_{2,\varkappa_2} \mid e_1 e_2$$

$$= (-1)^{\frac{n_2(n_2-1)}{2}} \binom{n_1-1}{0} \,..\, \binom{n_1-1}{n_1-1} \cdot \binom{n_2-1}{0} \,..\, \binom{n_2-1}{n_2-1}$$

$$\cdot\, (a_1{}^{n_1} a_2{}^{n_2} \mid e_1 e_2)^{n_2}\, e_1{}^{n_2-1} \,..\, e_2{}^{n_2-1}\, (a_2{}^{n_2})^{n_1-n_2}\, \varepsilon_1{}^{n_1-n_2-1} \,..\, \varepsilon_2{}^{n_1-n_2-1} \mid e_1{}^{n_1-1} \,..\, e_2{}^{n_1-1}\,.$$

71. Die Resultante von m Formen ist diejenige ganze Funktion ihrer Koefficienten, welche verschwinden mufs, damit unter ihren Verschwindungsgröfsen eine allen gemeinschaftliche vorhanden sei. Hat man nur Eine Form ap^n, so kann man nach der Bedingung fragen, unter welcher unter ihren Verschwindungsgröfsen zwei gleiche Gruppen vorhanden sind. In diesem Falle müssen, wenn

$$a^n = a_1 \,..\, a_n$$

ist, zwei von den Gröfsen $a_1, .., a_n$ gleich sein. Infolge dessen mufs für die Verschwindungsgröfsen jener beiden gleichen Gruppen die Form

$$\bar{p} p_1\, ap^n = (a_1 p_1 \bar{a}_1 + .. + a_n p_1 \bar{a}_n)\, a^n p^{n-1}$$

für ein jedes p_1 und daher eine jede der Formen

$$\bar{p} e_1\, ap^n, .., \bar{p} e_m\, ap^n$$

verschwinden. Die Diskriminante der Form ap^n, d. h. diejenige ganze Funktion ihrer Koefficienten, welche verschwinden mufs, damit unter ihren Verschwindungsgröfsen zwei gleiche Gruppen vorhanden seien, ist also die Resultante der m Formen

$$a^n e_1 p^{n-1}, \ldots, a^n e_m p^{n-1},$$

mit denen die Form ap^n durch die Gleichung

$$ap^n = a^n e_1 p^{n-1} . p\varepsilon_1 + \ldots + a^n e_m p^{n-1} . p\varepsilon_m$$

verbunden ist. Sie ist, da die Resultante die Koefficienten von einer jeden dieser Formen in der $(n-1)^{m-1}$ten Dimension und jede von ihnen die Koefficienten der Form ap^n in der 1ten Dimension enthält, vom Grade $m(n-1)^{m-1}$ in den Koefficienten der Form ap^n.

Darnach ist z. B. die Diskriminante der Form ap^2 als Resultante der Formen $a^2 e_1 p, \ldots, a^2 e_m p$ von der Form

$$a^2 e_1 \ldots a^2 e_m \mid e_1 \ldots e_m$$

oder

$$(a^2)^m e_1 \ldots e_m^{\underline{2}}$$

und also ihre Hesse'sche Determinante.

72. Im Falle $m = 2$ ist die Diskriminante der Form ap^n oder die Resultante der Formen $a^n e_1 p^{n-1}$, $a^n e_2 p^{n-1}$ von der Form

$$\binom{2n-3}{0} \ldots \binom{2n-3}{2n-3}$$

$$. (a^n e_1)^{n-1} \varepsilon_1^{n-2} \ldots \varepsilon_2^{n-2} (a^n e_2)^{n-1} \varepsilon_1^{n-2} \ldots \varepsilon_2^{n-2} \mid e_1^{2n-3} \ldots e_2^{2n-3}$$

oder von der Form

$$(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \binom{n-2}{0}^2 \ldots \binom{n-2}{n-2}^2 . ((a^n)^2 e_1 e_2^{\underline{2}})^{n-1} (e_1^{n-2} \ldots e_2^{n-2})^{\underline{2}},$$

wenn durch

$$((a^n)^2 e_1 e_2^{\underline{2}}) p^{n-2} p_1^{n-2}$$

die Form

$$\frac{(a^n)^2 e_1 e_2 \mid p^{n-1} p_1^{n-1}}{pp_1 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2} = (a^n p^{n-2} p_1^0 e_1 a^n p^0 p_1^{n-2} e_2 + \ldots$$
$$+ a^n p^0 p_1^{n-2} e_1 a^n p^{n-2} p_1^0 e_2) \mid e_1 e_2$$

dargestellt wird.

Auch ist sie u. a., da

$$p_1^{n-2} \ldots p_{n-1}^{n-2} = \binom{n-2}{0} \ldots \binom{n-2}{n-2} . p_1^{n-2} \ldots p_{n-1}^{n-2} \mid \varepsilon_1^{n-2} \ldots \varepsilon_2^{n-2}$$
$$. e_1^{n-2} \ldots e_2^{n-2}$$

und

$$(p_1^{n-2} \ldots p_{n-1}^{n-2} \mid \varepsilon_1^{n-2} \ldots \varepsilon_2^{n-2})^2 = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$$
$$. \bar{p}_1 p_1 \ldots p_{n-1} (-p_1 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2)^{n-2} \ldots \bar{p}_{n-1} p_1 \ldots p_{n-1} (-p_{n-1} \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2)^{n-2}$$

ist, in der Form

$$\frac{((a^n)^2\, e_1 e_2^{\,2} \rceil^{n-1} (p_1^{\,n-2} \,.\,.\, p_{n-1}^{\,n-2})^2}{\bar{p}_1 p_1 \,.\,.\, p_{n-1} (-p_1 \,|\, \varepsilon_1 \varepsilon_2)^{n-2} \,.\,.\, \bar{p}_{n-1} p_1 \,.\,.\, p_{n-1} (-p_{n-1} \,|\, \varepsilon_1 \varepsilon_2)^{n-2}}$$

und darnach in der Form

$$\frac{((a^n)^2 p_1 p_0 \,|\, p_n p_0 \rceil\, p_1^{\,n-2}}{\bar{p}_1 p_0 \,.\,.\, p_n (-p_1 \,|\, \varepsilon_1 \varepsilon_2)^n} \,.\,.\, \frac{((a^n)^2 p_{n-1} p_0 \,|\, p_{n-1} p_n \rceil\, p_{n-1}^{\,n-2}}{\bar{p}_{n-1} p_0 \,.\,.\, p_n (-p_{n-1} \,|\, \varepsilon_1 \varepsilon_2)^n} \,\Big|\, p_1^{\,n-2} \,.\,.\, p_{n-1}^{\,n-2}$$

darstellbar.

73. Setzen wir

$$a^n e_1 = a_{1,1} \,.\,.\, a_{1,n-1}\,, \quad a^n e_2 = a_{2,1} \,.\,.\, a_{2,n-1}\,,$$

so ergiebt sich aus der Gleichung

$$ap^n = a^n e_1 p^{n-1} \,.\, p\varepsilon_1 + a^n e_2 p^{n-1} \,.\, p\varepsilon_2$$

die Gleichung

$$a^n (a_{2,\varkappa_2} \,|\, e_1 e_2)^n = a^n e_1\, (a_{2,\varkappa_2} \,|\, e_1 e_2)^{n-1} \,.\, a_{2,\varkappa_2} e_2$$

und darnach die Gleichung

$$(n, n-1)\, a_\varkappa a_{2,\varkappa_2} \,|\, e_1 e_2 = (n-1,\; n-1)\, a_{1,\varkappa_1} a_{2,\varkappa_2} \,|\, e_1 e_2 \,.\, ae_2^{\,n},$$

der zufolge die Resultante der Formen ap^n und $a^n e_2 p^{n-1}$ gleich ist der $ae_2^{\,n}$fachen Resultante der Formen $a^n e_1 p^{n-1}$ und $a^n e_2 p^{n-1}$ oder Diskriminante der Form ap^n. Nun ist

$$(n, n-1)\, a_\varkappa a_{2,\varkappa_2} \,|\, e_1 e_2 \text{ oder } (n-1, n)\, a_{2,\varkappa_2} a_\varkappa \,|\, e_1 e_2$$

in der Form

$$a^n e_2 (a_1 \,|\, e_1 e_2)^{n-1} \,.\,.\, a^n e_2\, (a_n \,|\, e_1 e_2)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{n} a_1 e_2 a_2 \,.\,.\, a_n (a_1 \,|\, e_1 e_2)^{n-1} \,.\,.\, \frac{1}{n} a_n e_2 a_1 \,.\,.\, a_{n-1}\, (a_n \,|\, e_1 e_2)^{n-1}$$

darstellbar, folglich ist

$$n^n (n-1,\; n-1)\, a_{1,\varkappa_1} a_{2,\varkappa_2} \,|\, e_1 e_2$$

$$= \bar{a}_1 a_1 \,.\,.\, a_n (a_1 \,|\, e_1 e_2)^{n-1} \,.\,.\, \bar{a}_n a_1 \,.\,.\, a_n\, (a_n \,|\, e_1 e_2)^{n-1}$$

oder

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\; n^n (n-1,\; n-1)\, a_{1,\varkappa_1} a_{2,\varkappa_2} \,|\, e_1 e_2$$

$$= (a_1^{\,n-1} \,.\,.\, a_n^{\,n-1} \,|\, e_1^{\,n-1} \,.\,.\, e_2^{\,n-1})^2$$

und also die Diskriminante der Form ap^n der $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\, n^n$te Teil des Quadrates der Determinante

$$a_1^{\,n-1} \,.\,.\, a_n^{\,n-1} \,|\, e_1^{\,n-1} \,.\,.\, e_2^{\,n-1}$$

oder des Determinantenproduktes

$$a_1 a_2 \,|\, e_1 e_2 \,.\,.\, a_{n-1} a_n \,|\, e_1 e_2.$$

74. Zur Bildung der Resultanten kann man auch die Jacobi'sche Determinante der Formen $a_1 p^{n_1}, \ldots, a_m p^{n_m}$

$$a_1^{n_1} p^{n_1-1} \ldots a_m^{n_m} p^{n_m-1} \mid e_1 \ldots e_m = a_1^{n_1} \ldots a_m^{n_m} \mid e_1 \ldots e_m \; p^{n_1+\ldots+n_m-m}$$

und im Falle $n_1 = n, \ldots, n_m = n$ die aus ihr, die dann die Form

$$a_1^n \ldots a_m^n \mid e_1 \ldots e_m \; p^{(n-1)m}$$

annimmt, abgeleiteten Formen

$$a_1^n \ldots a_m^n \mid e_1 \ldots e_m \; e_1 p^{(n-1)m-1}, \ldots, a_1^n \ldots a_m^n \mid e_1 \ldots e_m \; e_m p^{(n-1)m-1}$$

benutzen.

Die Jacobi'sche Determinante verschwindet nämlich stets, wenn die Formen $a_1 p^{n_1}, \ldots, a_m p^{n_m}$ verschwinden, weil

$$a_1^{n_1} p^{n_1-1} \ldots a_m^{n_m} p^{n_m-1} \mid e_1 \ldots e_m \,.\, p$$

nach der Formel

$$a_1 \ldots a_m \mid e_1 \ldots e_m \,.\, p = (a_1 p \,.\, \bar{a}_1 + \ldots + a_m p \,.\, \bar{a}_m) a_1 \ldots a_m \mid e_1 \ldots e_m$$

durch diese Formen darstellbar ist. Und dasselbe ist in dem Falle $n_1 = n, \ldots, n_m = n$ mit der Form

$$\bar{p} p_1 \, a_1^n \ldots a_m^n \mid e_1 \ldots e_m \, p^{(n-1)m}$$

unabhängig von der Gröfse p_1 der Fall. Denn stellt man sie in der Form

$$(n-1) a_1^n p^{n-2} p_1 \, a_2^n p^{n-1} \ldots a_m^n p^{n-1} \mid e_1 \ldots e_m + \ldots$$
$$+ (n-1) a_1^n p^{n-1} \ldots a_{m-1}^n p^{n-1} \, a_m^n p^{n-2} p_1 \mid e_1 \ldots e_m$$

dar, so nimmt sie, wenn die Formen $a_1 p^n, \ldots, a_m p^n$ verschwinden, nach Multiplikation mit p und Unterdrückung des Faktors $n-1$ nach der angeführten Formel die Form

$$a_1^n p^{n-1} p_1 \,.\, \overline{a_1^n p^{n-2} p_1} \; a_1^n p^{n-2} p_1 \, a_2^n p^{n-1} \ldots a_m^n p^{n-1} \mid e_1 \ldots e_m + \ldots$$
$$+ a_m^n p^{n-1} p_1 \,.\, \overline{a_m^n p^{n-2} p_1} \; a_1^n p^{n-1} \ldots a_{m-1}^n p^{n-1} \, a_m^n p^{n-2} p_1 \mid e_1 \ldots e_m$$

oder also die Form

$$(a_1^n p^{n-1} p_1 \,.\, \overline{a_1^n p^{n-1}} + \ldots + a_m^n p^{n-1} p_1 \,.\, \overline{a_m^n p^{n-1}}) a_1^n p^{n-1} \ldots a_m^n p^{n-1} \mid$$
$$e_1 \ldots e_m$$

an, in welcher sich die mit p_1 multiplizierte Jacobi'sche Determinante darstellt.

Für $m = 2$ sind die aus der Jacobi'schen Determinante der Formen $a_1 p^n$ und $a_2 p^n$

$$a_1^n a_2^n \mid e_1 e_2 \; p^{2n-2}$$

abgeleiteten Formen

$$a_1^n a_2^n \mid e_1 e_2 \; e_1 p^{2n-3}, \; a_1^n a_2^n \mid e_1 e_2 \; e_2 p^{2n-3}.$$

Fügen wir zu ihnen die Formen

$a_1^n\, \varepsilon_1^{n-3} p^{2n-3}, \ldots, a_1^n\, \varepsilon_2^{n-3}\, p^{2n-3};\; a_2^n\, \varepsilon_1^{n-3}\, p^{2n-3}, \ldots, a_2^n\, \varepsilon_2^{n-3}\, p^{2n-3}$

hinzu, so haben wir im Ganzen $2n-2$ Formen, welche verschwinden, sobald die Formen $a_1 p^n$ und $a_2 p^n$ verschwinden. Ihre Anzahl stimmt mit der Anzahl der Einheiten, aus denen sich die Gröfse p^{2n-3} zusammensetzt, überein, und ihr Produkt enthält die Koefficienten einer jeden der gegebenen Formen in der $n$ten Dimension. Die Resultante der Formen $a_1 p^n$ und $a_2 p^n$ ist also, abgesehen von einem etwaigen numerischen Faktor,

$$a_1^n a_2^n \mid e_1 e_2^2\, e_1 e_2\, (a_1^n)^{n-2}\, \varepsilon_1^{n-3} \ldots \varepsilon_2^{n-3}\, (a_2^n)^{n-2}\, \varepsilon_1^{n-3} \ldots \varepsilon_2^{n-3} \mid e_1^{2n-3} \ldots e_2^{2n-3}$$

und darnach die Diskriminante der Form ap^n

$$((a^n)^2 e_1 e_2^{\,2})^2\, e_1 e_2\, (a^n e_1)^{n-3}\, \varepsilon_1^{n-4} \ldots \varepsilon_2^{n-4}\, (a^n e_2)^{n-3}\, \varepsilon_1^{n-4} \ldots \varepsilon_2^{n-4} \mid e_1^{2n-5} \ldots e^{2n-5}.$$

Für $m > 2$ können die Resultanten nur in besonderen Fällen ohne Verbindung mit einem von den Koefficienten abhängigen Faktor durch Determinanten dargestellt werden. Ein Beispiel bietet sich für $m = 4$ in der Resultante der Formen

$$a_1 p^2, \ldots, a_4 p^2$$

dar. Die Jacobi'sche Determinante dieser Formen ist

$$a_1^2 \ldots a_4^2 \mid e_1 \ldots e_4 \quad p^4.$$

Die aus ihr abgeleiteten Formen

$$a_1^2 \ldots a_4^2 \mid e_1 \ldots e_4 \quad e_1 p^3, \ldots, a_1^2 \ldots a_4^2 \mid e_1 \ldots e_4 \quad e_4 p^3$$

bilden mit den Formen

$$a_1^2 \varepsilon_1 p^3, \ldots, a_1^2 \varepsilon_4 p^3; \ldots; a_4^2 \varepsilon_1 p^3, \ldots, a_4^2 \varepsilon_4 p^3$$

eine Gruppe von 20 Formen, welche verschwinden, sobald die gegebenen Formen verschwinden. Ihre Anzahl stimmt mit der Anzahl der Einheiten, aus denen sich die Gröfse p^3 zusammensetzt, überein, und ihr Produkt enthält die Koefficienten einer jeden der gegebenen Formen in der 8ten Dimension. Die Resultante der Formen

$$a_1 p^2, \ldots, a_4 p^2$$

ist also, abgesehen von einem etwaigen numerischen Faktor,

$$a_1^2 \ldots a_4^2 \mid e_1 \ldots e_4^4\, e_1 \ldots e_4\, (a_1^2)^4\, \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_4 \ldots (a_4^2)^4\, \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_4 \mid e_1^3 \ldots e_4^3$$
$$(e_1^2 e_2) \ldots (e_4^2 e_1)(e_1^2 e_3) \ldots (e_4^2 e_2)(e_1^2 e_4) \ldots (e_4^2 e_3)(e_2 e_3 e_4) \ldots (e_1 e_2 e_3).$$

Endlich sei bemerkt, dafs die Resultante von einer Form $n$ten Grades und $m-1$ Formen 1ten Grades stets in Determinantenform darstellbar ist. So ist z. B. die Resultante der Formen

$$a_1 p^2,\ a_2 p, \ldots, a_m p$$

offenbar

$$a_1^2 (a_2 \ldots a_m \mid e_1 \ldots e_m)^2 = (a_1^2 a_2 \ldots a_m \mid e_1 \ldots e_m) a_2 \ldots a_m \mid e_1 \ldots e_m .$$

Fünftes Kapitel.

Hyperdeterminanten und Invarianten.

75. Entfernt man aus einem Ausdrucke, der die Gröſsen $p_1, \ldots, p_r$ in irgend welchen Potenzen enthält, auf alle möglichen Weisen die Gröſsen $p_1, \ldots, p_r$ je einmal, setzt an die Stelle der entfernten Gröſsen der Reihe nach die Elemente aller Permutationen der Gröſsen $e_1, \ldots, e_r$, versieht die einzelnen dadurch entstehenden Ausdrücke, je nachdem die Reihe der Indices der Permutationen durch eine gerade oder ungerade Anzahl von Vertauschungen zweier Indices in die Reihe $1, \ldots, r$ übergeht, mit dem Plus- oder Minuszeichen und bildet schlieſslich die Summe aller Ausdrücke, so werden all' diese Operationen durch die Determinante

$$\bar{p}_1 \ldots \bar{p}_r \mid e_1 \ldots e_r$$

angezeigt.

Wir nennen diese Determinante in Anbetracht des Umstandes, daſs sie an sich keine reale Bedeutung hat, sondern erst durch die Verbindung mit einer Form, auf die wir sie beziehen, eine solche erlangt, eine Hyperdeterminante $r$ten Grades. Sie setzt sich aus den Operationssymbolen

$$\bar{p}_1 e_1, \ldots, \bar{p}_1 e_r; \ldots; \bar{p}_r e_1, \ldots, \bar{p}_r e_r,$$

die als Hyperdeterminanten 1ten Grades zu bezeichnen sind, in derselben Weise zusammen, wie die Determinante

$$p_1 \ldots p_r \mid e_1 \ldots e_r$$

aus den Gröſsen

$$p_1 \varepsilon_1, \ldots, p_1 \varepsilon_r; \ldots; p_r \varepsilon_1, \ldots, p_r \varepsilon_r .$$

Infolge der Gleichung

$$p = p\varepsilon_1 . e_1 + \ldots + p\varepsilon_m . e_m$$

ist auch in entsprechender Weise offenbar

$$\bar{p} = \bar{p}e_1 . \varepsilon_1 + \ldots + \bar{p}e_m . \varepsilon_m ,$$

und jene Operationssymbole sind die Koefficienten der Operationssymbole $\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_r$, ebenso wie diese Gröſsen die Koefficienten der Gröſsen $p_1, \ldots, p_r$ sind. Vergl. die 11te Vorlesung: „Über die Rechnung mit Hyperdeterminanten“ in Salmon-Fiedler's „Algebra der linearen Transformationen. Leipzig, 1863.“

Die mehrmalige Anwendung der Operation

$$\bar{p}_1 \ldots \bar{p}_r \mid e_1 \ldots e_r,$$

die offenbar eine jedesmalige Erniedrigung des Grades einer Form für die Gröſsen p bewirkt, wird durch einen Exponenten angezeigt. Die $\varkappa$malige Anwendung der Operation

$$\bar{p}_1 \bar{p}_2 \mid e_1 e_2 = \bar{p}_1 e_1 \bar{p}_2 e_2 - \bar{p}_1 e_2 \bar{p}_2 e_1$$

z. B. besteht in der Ausführung der durch die Gleichung

$$\bar{p}_1 \bar{p}_2 \mid e_1 e_2{}^{\varkappa} = \sum_0^{\varkappa} (-1)^{\mu} \binom{\varkappa}{\mu} \bar{p}_1 e_1{}^{\varkappa-\mu}\, \bar{p}_1 e_2{}^{\mu}\, \bar{p}_2 e_1{}^{\mu}\, \bar{p}_2 e_2{}^{\varkappa-\mu}$$

angedeuteten Operationen.

76. Die Hyperdeterminante $\bar{p}_1 \ldots \bar{p}_r \mid e_1 \ldots e_r$ erzeugt, auf die Form $a_1 p_1{}^{n_1} \ldots a_r p_r{}^{n_r}$ angewandt, die Form

$$\bar{p}_1 a_1 p_1{}^{n_1} \ldots \bar{p}_r a_r p_r{}^{n_r} \mid e_1 \ldots e_r = \frac{n_1! \ldots n_r!}{(n_1-1)! \ldots (n_r-1)!}$$
$$\cdot a_1{}^{n_1} p_1{}^{n_1-1} \ldots a_r{}^{n_r} p_r{}^{n_r-1} \mid e_1 \ldots e_r,$$

und wir erhalten somit bei wiederholter Anwendung der Hyperdeterminante die Gleichung

$$\bar{p}_1 \ldots \bar{p}_r \mid e_1 \ldots e_r{}^{\varkappa}\, a_1 p_1{}^{n_1} \ldots a_r p_r{}^{n_r} = \frac{n_1! \ldots n_r!}{(n_1-\varkappa)! \ldots (n_r-\varkappa)!}$$
$$\cdot a_1{}^{n_1} p_1{}^{n_1-\varkappa} \ldots a_r{}^{n_r} p_r{}^{n_r-\varkappa} \mid e_1 \ldots e_r{}^{\underline{\varkappa}},$$

wenn wir durch

$$a_1{}^{n_1} p_1{}^{n_1-\varkappa} \ldots a_r{}^{n_r} p_r{}^{n_r-\varkappa} \mid e_1 \ldots e_r{}^{\underline{\varkappa}}$$

eine Form bezeichnen, die sich dadurch ergiebt, daſs man das kombinatorische Produkt $a_1{}^{n_1} p_1{}^{n_1-\varkappa} \ldots a_r{}^{n_r} p_r{}^{n_r-\varkappa}$ unter steter Beibehaltung der Reihenfolge seiner Faktoren nach einander $\varkappa$mal mit dem kombinatorischen Produkt $e_1 \ldots e_r$ algebraisch verbindet. Diese Form nimmt demzufolge bei einer Vertauschung zweier $ap^{n-\varkappa}$ den Faktor $(-1)^{\varkappa}$ an, entsprechend dem Umstande, daſs dies auch von der $\varkappa$ten Potenz der Hyperdeterminante $\bar{p}_1 \ldots \bar{p}_r \mid e_1 \ldots e_r$ bei einer Vertauschung zweier p gilt; sie behält unverändert ihren Wert bei geradem $\varkappa$ und nimmt das entgegengesetzte Zeichen bei ungeradem $\varkappa$ an und hat also, wenn von den Formen $a_1 p_1^{n_1}, \ldots, a_r p_r^{n_r}$ zwei identisch sind und somit z. B. $a_1 = a$, $a_2 = a$; $p_1 = p$, $p_2 = p$; $n_1 = n$, $n_2 = n$ ist, bei ungeradem $\varkappa$ den Wert Null.

Im Falle $r = 2$ ist infolge der letzten Gleichung des vorigen Abschnittes

$$a_1^{n_1} p_1^{n_1-\varkappa} a_2^{n_2} p_2^{n_2-\varkappa} \mid e_1 e_2^{\frac{\varkappa}{}}$$
$$= \sum_0^{\varkappa} (-1)^{\mu} \binom{\varkappa}{\mu} a_1^{n_1} p_1^{n_1-\varkappa} e_1^{\varkappa-\mu} e_2^{\mu} a_2^{n_2} p_2^{n_2-\varkappa} e_1^{\mu} e_2^{\varkappa-\mu}$$

und darnach

$$a_1^{n_1} p_1^{n_1-\varkappa} a_2^{n_2} p_2^{n_2-\varkappa} \mid p_1 p_2^{\frac{\varkappa}{}}$$
$$= \sum_0^{\varkappa} (-1)^{\mu} \binom{\varkappa}{\mu} a_1^{n_1} p_1^{n_1-\mu} p_2^{\mu} a_2^{n_2} p_1^{\mu} p_2^{n_2-\mu}.$$

77. Für $p_1 = p, \ldots, p_r = p$ und $r = m$ geht die Form

$$a_1^{n_1} p_1^{n_1-\varkappa} \ldots a_r^{n_r} p_r^{n_r-\varkappa} \mid e_1 \ldots e_r^{\frac{\varkappa}{}}$$

in die Form

$$a_1^{n_1} \ldots a_m^{n_m} \mid e_1 \ldots e_m^{\frac{\varkappa}{}} \; p^{n_1 + \cdots + n_m - m\varkappa}$$

über und heifst die $\varkappa$te Überschiebung der Form $a_1 p^{n_1}$ über das Produkt der Formen $a_2 p^{n_2}, \ldots, a_m p^{n_m}$. Die 1te Überschiebung ist die Jacobi'sche Determinante der Formen $a_1 p^{n_1}, \ldots, a_m p^{n_m}$.

Ist insbesondere $a_1 = a, \ldots, a_m = a$; $n_1 = n, \ldots, n_m = n$, so ist die Form die $\varkappa$te Überschiebung der Form ap^n über ihre $(m-1)$te Potenz. In diesem Falle verschwindet sie stets bei ungeradem $\varkappa$ und ist ferner bei geradem $\varkappa$ in der Form

$$m!\,(a^n)^m e_1 \ldots e_m^{\frac{\varkappa}{}} \; p^{m(n-\varkappa)}$$

darstellbar, denn entwickelt man von der Gröfse

$$a_1^{n_1} \ldots a_m^{n_m} \mid e_1 \ldots e_m^{\frac{\varkappa}{}} = (a_1^{n_1} \ldots a_m^{n_m} \mid e_1 \ldots e_m) \mid e_1 \ldots e_m^{\frac{\varkappa-1}{}}$$

die Determinante $a_1^{n_1} \ldots a_m^{n_m} \mid e_1 \ldots e_m$, indem man die einzelnen Faktoren des kombinatorischen Produktes $a_1^{n_1} \ldots a_m^{n_m}$ mit den Elementen aller Permutationen der Einheiten $e_1, \ldots, e_m$ der Reihe nach verbindet und die entstehenden $m!$ kombinatorischen Produkte mit den entsprechenden Zeichen versieht, so tritt, wenn in diesen Produkten die Faktoren nach den Einheiten $e_1, .., e_m$ geordnet werden, zu den negativen Produkten $(-1)^{\varkappa-1}$ als Faktor hinzu, während die positiven Produkte unverändert bleiben, und die Gröfse nimmt infolge dessen nach Unterdrückung der Indices der Gröfsen $a_1^{n_1}, .., a_m^{n_m}$ bei geradem $\varkappa$ die Form

$$m!\, a^n e_1 .. a^n e_m \mid e_1 .. e_m^{\frac{\varkappa-1}{}}$$

an. Die 2te Überschiebung der Form ap^n über ihre $(m-1)$te Potenz ist bis auf den Faktor $m!$ ihre Hefse'sche Determinante.

Die $\varkappa$te Überschiebung der Form $a_1 p^{n_1}$ über das Produkt der Formen $a_2 p^{n_2}, .., a_m p^{n_m}$ ist, wenn man bemerkt, dafs

$$\bar{p}_1 p^\varkappa\, a p_1{}^n = \frac{n!}{(n-\varkappa)!} a^n p_1{}^{n-\varkappa} p^\varkappa$$

ist und also $ap_1{}^n$ durch die Operation $\bar{p}_1 p^n$ in $n!\, ap^n$ verwandelt wird, abgesehen von dem Divisor $(n_1-\varkappa)! .. (n_m-\varkappa)!$ oder bezw. $n_1! .. n_m!$ auch in der Form

$$\bar{p}_1 p^{n_1-\varkappa} .. \bar{p}_m p^{n_m-\varkappa} a_1{}^{n_1} p_1{}^{n_1-\varkappa} .. a_m{}^{n_m} p^{n_m-\varkappa} \mid e_1 .. e_m^{\frac{\varkappa}{}}$$

oder

$$\bar{p}_1 p^{n_1-\varkappa} .. \bar{p}_m p^{n_m-\varkappa}\, \bar{p}_1 .. \bar{p}_m \mid e_1 .. e_m^{\frac{\varkappa}{}}\, a_1 p_1{}^{n_1} .. a_m p_m{}^{n_m}$$

darstellbar.

Die aus der Form ap^n durch $\varkappa$malige Anwendung der Hyperdeterminante $\bar{p}p_1$ hervorgehende Form

$$\bar{p}p_1{}^\varkappa\, ap^n = \frac{n!}{(n-\varkappa)!} a^n p^{n-\varkappa} p_1{}^\varkappa$$

nennen wir die $\varkappa$te Polare der Form ap^n von p für p_1.

Die Form $a^n p_1{}^{\varkappa_1} .. p_r{}^{\varkappa_r}$ geht für $\varkappa_1 + .. + \varkappa_r = n$ aus der Form ap^n durch Polarenbildung für $p_1, .., p_r$ hervor; es ist

$$\bar{p}p_1{}^{\varkappa_1} .. \bar{p}p_r{}^{\varkappa_r} ap^n = n!\, a_n p_1{}^{\varkappa_1} .. p_r{}^{\varkappa_r}.$$

Die Anzahl der, wir sagen, $n$ten Polaren der Form ap^n von p für $p_1, .., p_r$ ist $\binom{n+r-1}{r-1}$.

Die Hyperdeterminante $\bar{p}p$ ändert die Form ap^n nur um den Faktor n.

78. Die Hyperdeterminanten $\bar{p}_1 p_2$ und $\bar{p}_2 p_1$ ändern, beide auf die Form $a_1 p_1^{n_1} a_2 p_2^{n_2}$ angewandt, den Grad derselben für p_1 sowohl, als auch für p_2 nicht. Durch die Hyperdeterminante $\bar{p}_1 p_2$ tritt für p_1 eine Erniedrigung und für p_2 eine Erhöhung, durch die Hyperdeterminante $\bar{p}_2 p_1$ dagegen für p_1 eine Erhöhung und für p_2 eine Erniedrigung des Grades um Eins ein. Dasselbe gilt von der Hyperdeterminante $\bar{p}_1 \bar{p}_2 \mid e_1 e_2$ und der Determinante $p_1 p_2 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2$, von denen die letztere, wenn die Form mit ihr multipliziert wird, eine Erhöhung und die erstere eine Erniedrigung des Grades für p_1 sowohl, als auch für p_2 bewirkt. So ist also z. B. die Form

$$p_1 p_2 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2^{\varkappa}\, \bar{p}_1 p_2^{\lambda-\varkappa}\, \bar{p}_2 p_1^{\lambda-\varkappa}\, \bar{p}_1 \bar{p}_2 \mid e_1 e_2^{\varkappa}\, a_1 p_1^{n_1}\, a_2 p_2^{n_2}$$

vom Grade n_1 für p_1 und vom Grade n_2 für p_2, ebenso wie die Form $a_1 p_1^{n_1} a_2 p_2^{n_2}$.

Im Falle $m = 2$ sind infolge der dann geltenden Gleichung

$$p_1 p_2 = p_1 p_2 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdot e_1 e_2$$

die Operationen

$$\bar{p}_1 p_2\,,\quad \bar{p}_2 p_1\,,\quad \bar{p}_1 \bar{p}_2 \mid e_1 e_2\,,\quad p_1 p_2 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2$$

— unter der letzteren verstehen wir die Multiplikation mit der Determinante — mit einander durch die Gleichung

$$p_1 p_2 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdot \bar{p}_1 \bar{p}_2 \mid e_1 e_2 = \bar{p}_1 \bar{p}_2 \mid p_1 p_2$$

verbunden.

79. Unterwirft man die Form $a_1 p_1^{n_1} a_2 p_2^{n_2}$ der Operation $\bar{p}_2 p_1^{\varkappa}$, so erhält man, abgesehen von dem Faktor $\frac{n_2!}{(n_2-\varkappa)!}$, die Form

$$a_1 p_1^{n_1} a_2^{n_2} p_2^{n_2-\varkappa} p_1^{\varkappa} = (a_1^{n_1} a_2^{n_2} p_2^{n_2-\varkappa})\, p_1^{n_1+\varkappa},$$

und es ist daher

$$\bar{p}_1 p_2^{\lambda}\, \bar{p}_2 p_1^{\varkappa}\, a_1 p_1^{n_1}\, a_2 p_2^{n_2}$$
$$= \frac{(n_1+\varkappa)!\, n_2!}{(n_1+\varkappa-\lambda)!\,(n_2-\varkappa)!} (a_1^{n_1} a_2^{n_2} p_2^{n_2-\varkappa})\, p_1^{n_1+\varkappa-\lambda}\, p_2^{\lambda}.$$

In entwickelter Form erhält man die Form

$$(a_1^{n_1} a_2^{n_2} p_2^{n_2-\varkappa})\, p_1^{n_1+\varkappa-\lambda}\, p_2^{\lambda},$$

wenn man auf alle möglichen Weisen p_1 in $n_1+\varkappa-\lambda$ und p_2 in λ Lücken des $(n_1+\varkappa)$lückigen Ausdrucks $a_1^{n_1} a_2^{n_2} p_2^{n_2-\varkappa}$ setzt und das arithmetische Mittel der so entstehenden Ausdrücke bildet. Die Anzahl dieser Ausdrücke ist

$$\frac{(n_1+\varkappa)!}{(n_1+\varkappa-\lambda)!\,\lambda!},$$

und da $p_2^{\lambda-\mu}$ für $\mu=0,\ldots,\lambda$ auf $\binom{n_1}{\lambda-\mu}$ verschiedene Weisen in $\lambda-\mu$ Lücken des $n_1$lückigen Ausdrucks $a_1^{n_1}$ und p_2^{μ} auf $\binom{\varkappa}{\mu}$ verschiedene Weisen in μ Lücken des $\varkappa$lückigen Ausdrucks $a_2^{n_2}\,p_2^{n_2-\varkappa}$ eintreten kann und die übrigen $n_1-\lambda+\mu$ Lücken des ersten und $\varkappa-\mu$ Lücken des zweiten Ausdrucks von $p_1^{n_1-\lambda+\mu}$ und $p_1^{\varkappa-\mu}$ eingenommen werden, so ist

$$(a_1^{n_1}\,a_2^{n_2}\,p_2^{n_2-\varkappa})\,p_1^{n_1+\varkappa-\lambda}\,p_2^{\lambda}$$
$$=\frac{(n_1+\varkappa-\lambda)!\,\lambda!}{(n_1+\varkappa)!}\sum_0^{\lambda}\binom{n_1}{\lambda-\mu}\binom{\varkappa}{\mu}a_1^{n_1}\,p_1^{n_1-\lambda+\mu}\,p_2^{\lambda-\mu}$$
$$a_2^{n_2}\,p_1^{\varkappa-\mu}\,p_2^{n_2-\varkappa+\mu}$$

und insbesondere, wenn wir $\varkappa=\lambda$ annehmen und $\lambda-\mu$ durch μ ersetzen,

$$(a_1^{n_1}\,a_2^{n_2}\,p_2^{n_2-\lambda})\,p_1^{n_1}\,p_2^{\lambda}$$
$$=\frac{n_1!\,\lambda!}{(n_1+\lambda)!}\sum_0^{\lambda}\binom{n_1}{\mu}\binom{\lambda}{\mu}a_1^{n_1}\,p_1^{n_1-\mu}\,p_2^{\mu}\,a_2^{n_2}\,p_1^{\mu}\,p_2^{n_2-\mu}.$$

80. Wendet man ferner die Hyperdeterminante $\bar{p}_1\bar{p}_2\,|\,e_1e_2$ auf den Ausdruck

$$p_1p_2\,|\,\varepsilon_1\varepsilon_2^{\varkappa}\,a_1p_1^{n_1}\,a_2p_2^{n_2}$$

an, so erhält man im Falle $m=2$, da

$$\bar{p}_1\bar{p}_2\,|\,e_1e_2\;\;p_1p_2\,|\,\varepsilon_1\varepsilon_2=e_1e_2\,|\,\varepsilon_1\varepsilon_2-e_2e_1\,|\,\varepsilon_1\varepsilon_2=2,$$
$$\bar{p}_1p_1p_2\,|\,\varepsilon_1\varepsilon_2\;\;\bar{p}_2p_1p_2\,|\,\varepsilon_1\varepsilon_2\,\|\,e_1e_2=e_1p_2\,|\,\varepsilon_1\varepsilon_2$$
$$\cdot\,p_1e_2\,|\,\varepsilon_1\varepsilon_2-e_2p_2\,|\,\varepsilon_1\varepsilon_2\cdot p_1e_1\,|\,\varepsilon_1\varepsilon_2=p_1p_2\,|\,\varepsilon_1\varepsilon_2$$

und daher

$$\bar{p}_1\bar{p}_2\,|\,e_1e_2\;\;p_1p_2\,|\,\varepsilon_1\varepsilon_2^{\varkappa}=(2\varkappa+\varkappa(\varkappa-1))\,p_1p_2\,|\,\varepsilon_1\varepsilon_2^{\varkappa-1}$$

ist und ferner infolge der für $m=2$ bestehenden Gleichung

$$e_1p_2\,|\,\varepsilon_1\varepsilon_2\,.\,e_2-e_2p_2\,|\,\varepsilon_1\varepsilon_2\cdot e_1=p_2$$

die Gleichung

$$\bar{p}_1p_1p_2\,|\,\varepsilon_1\varepsilon_2^{\varkappa}\;\bar{p}_2a_2p_2^{n_2}\,\|\,e_1e_2=\varkappa n_2\,p_1p_2\,|\,\varepsilon_1\varepsilon_2^{\varkappa-1}\,a_2p_2^{n_2}$$

und ebenso die Gleichung

$$\bar{p}_1\,a_1p_1^{n_1}\,\bar{p}_2\,p_1p_2\,|\,\varepsilon_1\varepsilon_2^{\varkappa}\,\|\,e_1e_2=\varkappa n_1\,p_1p_2\,|\,\varepsilon_1\varepsilon_2^{\varkappa-1}\,a_1p_1^{n_1}$$

gilt, die Gleichung

$$\bar{p}_1\bar{p}_2 \mid e_1e_2 \;\; p_1p_2 \mid \varepsilon_1\varepsilon_2{}^{\varkappa} \; a_1p_1{}^{n_1} \; a_2p_2{}^{n_2} = p_1p_2 \mid \varepsilon_1\varepsilon_2{}^{\varkappa} \; \bar{p}_1\bar{p}_2 \mid e_1e_2$$
$$a_1p_1{}^{n_1} \; a_2p_2{}^{n_2} + \varkappa(n_1+n_2+\varkappa+1)\, p_1p_2 \mid \varepsilon_1\varepsilon_2{}^{\varkappa-1} \; a_1p_1{}^{n_1} \; a_2p_2{}^{n_2}$$

oder, wenn man

$$\begin{pmatrix} n_1+n_2, \varkappa \\ \lambda, \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1+n_2+\varkappa+1-\lambda+\mu \\ \mu \end{pmatrix} \frac{\varkappa!\,\lambda!}{(\varkappa-\mu)!\,(\lambda-\mu)!}$$

setzt, die Gleichung

$$\bar{p}_1\bar{p}_2 \mid e_1e_2 \;\; p_1p_2 \mid \varepsilon_1\varepsilon_2{}^{\varkappa} \; a_1p_1{}^{n_1} \; a_2p_2{}^{n_2}$$
$$= \begin{pmatrix} n_1+n_2, \varkappa \\ 1,0 \end{pmatrix} p_1p_2 \mid \varepsilon_1\varepsilon_2{}^{\varkappa} \; \bar{p}_1\bar{p}_2 \mid e_1e_2 \;\; a_1p_1{}^{n_1} \; a_2p_2{}^{n_2}$$
$$+ \begin{pmatrix} n_1+n_2, \varkappa \\ 1,1 \end{pmatrix} p_1p_2 \mid \varepsilon_1\varepsilon_2{}^{\varkappa-1} \; a_1p_1{}^{n_1} \; a_2p_2{}^{n_2}$$

und darnach durch wiederholte Anwendung der Operation $\bar{p}_1\bar{p}_2 \mid e_1e_2$ und Berücksichtigung der Gleichung

$$\begin{pmatrix} n_1+n_2, \varkappa \\ \lambda+1, \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1+n_2, \varkappa \\ \lambda, \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1+n_2-2(\lambda-\mu), \varkappa-\mu \\ 1,0 \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} n_1+n_2, \varkappa \\ \lambda, \mu-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1+n_2-2(\lambda-\mu+1), \varkappa-\mu+1 \\ 1,1 \end{pmatrix}$$

die Gleichung

$$\bar{p}_1\bar{p}_2 \mid e_1e_2{}^{\lambda} \; p_1p_2 \mid \varepsilon_1\varepsilon_2{}^{\varkappa} \; a_1p_1{}^{n_1} \; a_2p_2{}^{n_2}$$
$$= \sum_0^{\lambda} \begin{pmatrix} n_1+n_2, \varkappa \\ \lambda, \mu \end{pmatrix} p_1p_2 \mid \varepsilon_1\varepsilon_2{}^{\varkappa-\mu} \; \bar{p}_1\bar{p}_2 \mid e_1e_2{}^{\lambda-\mu} \; a_1p_1{}^{n_1} \; a_2p_2{}^{n_2}.$$

Der Ausdruck

$$\bar{p}_1\bar{p}_2 \mid e_1e_2{}^{\lambda} \; p_1p_2 \mid \varepsilon_1\varepsilon_2{}^{\varkappa} \; a_1p_1{}^{n_1} \; a_2p_2{}^{n_2}$$

nimmt nach dieser Gleichung, wie sich aus der Betrachtung der Gröfse $p_1p_2 \mid \varepsilon_1\varepsilon_2{}^{\varkappa-\mu}$ und des Koefficienten ergiebt, für $p_2 = p_1$ im Falle $\varkappa > \lambda$ den Wert Null und im Falle $\varkappa \overline{\overline{<}} \lambda$ den Wert

$$\begin{pmatrix} n_1+n_2, \varkappa \\ \lambda, \varkappa \end{pmatrix} \bar{p}_1\bar{p}_2 \mid e_1e_2{}^{\lambda-\varkappa} \; a_1p_1{}^{n_1} \; a_2p_2{}^{n_2}$$

an.

81. Die Operationen $\bar{p}_1p_2$ und $\bar{p}_2p_1$ und die Operationen $\bar{p}_1\bar{p}_2 \mid e_1e_2$ und $p_1p_2 \mid \varepsilon_1\varepsilon_2$ sind hinsichtlich der Reihenfolge ihrer Anwendung unter sich nicht vertauschbar. Dagegen ist eine wechselseitige Vertauschung gestattet. Denn bilden wir die Gleichungen

$$\bar p_1 p_2 \;\; \bar p_1 \bar p_2 \,|\, e_1 e_2 \;\; a_1 p_1^{n_1} \, a_2 p_2^{n_2} = n_1 n_2 \, \bar p_1 p_2 \;\; a_1^{n_1} p_1^{n_1-1} a_2^{n_2} p_2^{n_2-1} \,|\, e_1 e_2$$
$$= n_1 (n_1 - 1) n_2 \;\; a_1^{n_1} \, p_1^{n_1-2} p_2 \, a_2^{n_2} \, p_2^{n_2-1} \,|\, e_1 e_2,$$

$$\bar p_1 \bar p_2 \,|\, e_1 e_2 \;\; \bar p_1 p_2 \;\; a_1 p_1^{n_1} \, a_2 p_2^{n_2} = n_1 \;\; \bar p_1 \bar p_2 \,|\, e_1 e_2 \;\; a_1^{n_1} \, p_1^{n_1-1} \, p_2 \, a_2 p_2^{n_2}$$
$$= n_1 (n_1 - 1) \;\; (a_1^{n_1} \, p_1^{n_1-2} \, e_1 e_2 - a_1^{n_1} \, p^{n_1-2} \, e_2 e_1) \, a_2 p_2^{n_2}$$
$$+ \, n_1 (n_1 - 1) n_2 \;\; a_1^{n_1} \, p_1^{n_1-2} \, p_2 \, a_2^{n_2} \, p_2^{n_2-1} \,|\, e_1 e_2$$

und

$$\bar p_1 p_2 \;\; p_1 p_2 \,|\, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \;\; a_1 p_1^{n_1} \, a_2 p_2^{n_2} = p_2 p_2 \,|\, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \;\; a_1 p_1^{n_1} \;\; a_2 p_2^{n_2}$$
$$+ \, n_1 \;\; p_1 p_2 \,|\, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \;\; a_1^{n_1} \, p_1^{n_1-1} \;\; p_2 \, a_2 p_2^{n_2},$$

$$p_1 p_2 \,|\, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \;\; \bar p_1 p_2 \;\; a_1 p_1^{n_1} \, a_2 p_2^{n_2} = n_1 \;\; p_1 p_2 \,|\, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \;\; a_1^{n_1} \, p_1^{n_1-1} \, p_2 \, a_2 p_2^{n_2},$$

so ergiebt sich

$$\bar p_1 p_2 \;\; \bar p_1 \bar p_2 \,|\, e_1 e_2 = \bar p_1 \bar p_2 \,|\, e_1 e_2 \;\; \bar p_1 p_2,$$
$$\bar p_1 p_2 \;\; p_1 p_2 \,|\, \varepsilon_1 \varepsilon_2 = p_1 p_2 \,|\, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \;\; \bar p_1 p_2$$

und durch wiederholte Anwendung der betreffenden Operationen

$$\bar p_1 p_2^{\lambda} \; \bar p_1 \bar p_2 \,|\, e_1 e_2^{\varkappa} = \bar p_1 \bar p_2 \,|\, e_1 e_2^{\varkappa} \; \bar p_1 p_2^{\lambda},$$
$$\bar p_1 p_2^{\lambda} \, p_1 p_2 \,|\, \varepsilon_1 \varepsilon_2^{\varkappa} = p_1 p_2 \,|\, \varepsilon_1 \varepsilon_2^{\varkappa} \; \bar p_1 p_2^{\lambda}.$$

Und entsprechende Gleichungen gelten für die Operation $\bar p_2 p_1$. Vergl. Clebsch's „Theorie der binären algebraischen Formen. Leipzig, 1872.“ S. 12—22.

82. Die Form

$$p_1 p_2 \,|\, \varepsilon_1 \varepsilon_2^{\varkappa} \; \bar p_1 p_2^{\lambda-\varkappa} \; \bar p_2 p_1^{\lambda-\varkappa} \; \bar p_1 \bar p_2 \,|\, e_1 e_2^{\varkappa} \; a_1 p_1^{n_1} \; a_2 p_2^{n_2},$$

welche, ebenso wie die Form $a_1 p_1^{n_1} \, a_2 p_2^{n_2}$, vom Grade n_1 für p_1 und n_2 für p_2 ist, geht, da die Operationen $\bar p_1 \bar p_2 \,|\, e_1 e_2^{\varkappa}$ und $\bar p_2 p_1^{\lambda-\varkappa}$ die Form

$$a_1^{n_1} \, p_1^{n_1-\varkappa} a_2^{n_2} p_1^{\lambda-\varkappa} \, p_2^{n_2-\lambda} \,|\, e_1 e_2^{\varkappa} = a_1^{n_1} \, a_2^{n_2} \, p_2^{n_2-\lambda} \,|\, e_1 e_2^{\varkappa} \;\; p_1^{n_1+\lambda-2\varkappa}$$

erzeugen, durch Ausführung der Operationen, abgesehen von dem Faktor

$$\frac{n_1! \, n_2! \, (n_1 + \lambda - 2\varkappa)!}{(n_1 - \varkappa)!^2 \, (n_2 - \lambda)!},$$

in die Form

$$p_1 p_2 \,|\, \varepsilon_1 \varepsilon_2^{\varkappa} \, a_1^{n_1} \, a_2^{n_2} \, p_2^{n_2-\lambda} \,|\, e_1 e_2^{\varkappa} \;\; p_1^{n_1-\varkappa} \, p_2^{\lambda-\varkappa}$$

und für $m = 2$ in die Form

$$a_1^{n_1} \, a_2^{n_2} \, p_2^{n_2-\lambda} \,|\, p_1 p_2^{\varkappa} \;\; p_1^{n_1-\varkappa} \, p_2^{\lambda-\varkappa}$$

über.

Diese Form besteht nach der letzten Gleichung des 79ten Abschnittes aus einem Aggregat von $\lambda - \varkappa + 1$ Formen von der Form

$$a_1^{n_1} p_1^{n_1-\varkappa-\mu} p_2^{\mu} a_2^{n_2} p_1^{\mu} p_2^{n_2-\varkappa-\mu} \mid p_1 p_2^{\varkappa}$$

für $\mu = 0, .., \lambda - \varkappa$, in dem die Koefficienten von n_2 unabhängig sind und n_1 und λ in symmetrischer Weise enthalten. Eine jede dieser Formen setzt sich aber nach der Formel

$$a_1^{n_1} p_1^{n_1-\varkappa} a_2^{n_2} p_2^{n_2-\varkappa} \mid p_1 p_2^{\varkappa}$$

$$= \sum_0^{\varkappa} (-1)^{\nu} \binom{\varkappa}{\nu} a_1^{n_1} p_1^{n_1-\nu} p_2^{\nu} a_2^{n_2} p_1^{\nu} p_2^{n_2-\nu}$$

aus $\varkappa + 1$ Gliedern zusammen, die aus der mit einem nur von $\varkappa$ abhängigen numerischen Faktor zu versehenen Form

$$a_1^{n_1} p_1^{n_1-(\mu+\nu)} p_2^{\mu+\nu} a_2^{n_2} p_1^{\mu+\nu} p_2^{n_2-(\mu+\nu)}$$

für $\nu = 0, .., \varkappa$ hervorgehen. Folglich ist die Form

$$a_1^{n_1} a_2^{n_2} p_2^{n_2-\lambda} \mid p_1 p_2^{\varkappa} \; p_1^{n_1-\varkappa} p_2^{\lambda-\varkappa}$$

ein Aggregat von $\lambda + 1$ Formen von der Form

$$a_1^{n_1} p_1^{n_1-\varrho} p_2^{\varrho} a_2^{n_2} p_1^{\varrho} p_2^{n_2-\varrho}$$

für $\varrho = 0, .., \lambda$, in dem die Koefficienten von n_2 unabhängig sind und n_1 und λ in symmetrischer Weise enthalten, und es ist daher auch umgekehrt die Form

$$a_1^{n_1} p_1^{n_1-\varrho} p_2^{\varrho} a_2^{n_2} p_1^{\varrho} p_2^{n_2-\varrho}$$

darstellbar durch ein Aggregat von $\lambda + 1$ Formen von der Form

$$a_1^{n_1} a_2^{n_2} p_2^{n_2-\lambda} \mid p_1 p_2^{\varkappa} \; p_1^{n_1-\varkappa} p_2^{\lambda-\varkappa}$$

für $\varkappa = 0, .., \lambda$, für dessen Koefficienten dasselbe gilt, und somit insbesondere

$$a_1 p_1^{n_1} a_2 p_2^{n_2} = \sum_0^{\lambda} \alpha_{\varkappa}^{n_1,\lambda} a_1^{n_1} a_2^{n_2} p_2^{n_2-\lambda} \mid p_1 p_2^{\varkappa} \; p_1^{n_1-\varkappa} p_2^{\lambda-\varkappa}$$

oder

$$a_1 p_1^{n_1} a_2 p_2^{n_2}$$

$$= \sum_0^{\lambda} \alpha_{\varkappa}^{n_1,\lambda} p_1 p_2 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2^{\varkappa} \; a_1^{n_1} a_2^{n_2} p_2^{n_2-\lambda} \mid e_1 e_2^{\varkappa} \; p_1^{n_1-\varkappa} p_2^{\lambda-\varkappa}.$$

83. Um die Koefficienten dieser Gleichung zu bestimmen, unterwerfen wir sie der Operation $\bar{p}_1 \bar{p}_2 \mid e_1 e_2^{\mu}$ und setzen dann $p_2 = p_1$. Der Ausdruck

$$\bar{p}_1 \bar{p}_2 \,|\, e_1 e_2{}^{\mu}\; p_1 p_2 \,|\, \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^{\varkappa}\; a_1{}^{n_1}\; a_2{}^{n_2}\; p_2{}^{n_2-\lambda} \,|\, e_1 e_2{}^{\varkappa}\;\; p_1{}^{n_1-\varkappa}\; p_2{}^{\lambda-\varkappa}$$

hat nach dem 80ten Abschnitte für $p_2 = p_1$ im Falle $\varkappa > \mu$ den Wert Null und im Falle $\varkappa \leqq \mu$ den Wert

$$\binom{n_1 + n_2 - 2\varkappa, \varkappa}{\mu, \varkappa} \bar{p}_1 \bar{p}_2 \,|\, e_1 e_2{}^{\mu-\varkappa}\; a_1{}^{n_1}\; a_2{}^{n_2}\; p_2{}^{n_2-\lambda} \,|\, e_1 e_2{}^{\varkappa}\;\; p_1{}^{n_1-\varkappa}\; p_2{}^{\lambda-\varkappa},$$

also im Falle $\varkappa = \mu$ den Wert

$$\binom{n_1 + n_2 - 2\varkappa, \varkappa}{\varkappa, \varkappa}\; a_1{}^{n_1}\; a_2{}^{n_2}\; p_1{}^{n_2-\lambda} \,|\, e_1 e_2{}^{\varkappa}\;\; p_1{}^{n_1-\lambda-2\varkappa}$$

und im Falle $\varkappa < \mu$ für $\lambda = n_2$ gleichfalls den Wert Null, da

$$\bar{p}_1 \bar{p}_2 \,|\, e_1 e_2{}^{\mu-\varkappa}\; a_1{}^{n_1}\; a_2{}^{n_2}\; p_2{}^{n_2-\lambda} \,|\, e_1 e_2{}^{\varkappa}\;\; p_1{}^{n_1-\varkappa}\; p_2{}^{\lambda-\varkappa},$$

abgesehen von einem numerischen Faktor, gleich

$$\bar{p}_1 \bar{p}_2 \,|\, e_1 e_2{}^{\mu-\varkappa}\; \bar{p}_1 p_2{}^{\lambda-\varkappa}\; a_1{}^{n_1}\; a_2{}^{n_2}\; p_2{}^{n_2-\lambda} \,|\, e_1 e_2{}^{\varkappa}\;\; p_1{}^{n_1+\lambda-2\varkappa}$$

oder

$$\bar{p}_1 p_2{}^{\lambda-\varkappa}\; \bar{p}_1 \bar{p}_2 \,|\, e_1 e_2{}^{\mu-\varkappa}\; a_1{}^{n_1}\; a_2{}^{n_2}\; p_2{}^{n_2-\lambda} \,|\, e_1 e_2{}^{\varkappa}\;\; p_1{}^{n_1+\lambda-2\varkappa}$$

ist und die Anwendung der Hyperdeterminante $\bar{p}_1 \bar{p}_2 \,|\, e_1 e_2$ auf eine p_2 in der 0ten Potenz enthaltende Form das Resultat Null giebt. Folglich ist für $p_2 = p_1$

$$\bar{p}_1 \bar{p}_2 \,|\, e_1 e_2{}^{\varkappa}\; a_1 p_1{}^{n_1}\; a_2 p_2{}^{n_2}$$

$$= \alpha_{\varkappa}{}^{n_1, n_2} \binom{n_1 + n_2 - 2\varkappa, \varkappa}{\varkappa, \varkappa}\; a_1{}^{n_1}\; a_2{}^{n_2} \,|\, e_1 e_2{}^{\varkappa}\;\; p_1{}^{n_1+n_2-2\varkappa}$$

und somit

$$\frac{n_1\,!\; n_2!}{(n_1-\varkappa)!\,(n_2-\varkappa)!} = \alpha_{\varkappa}{}^{n_1, n_2} \binom{n_1 + n_2 - 2\varkappa, \varkappa}{\varkappa, \varkappa}$$

oder

$$\alpha_{\varkappa}{}^{n_1, n_2} = \frac{\binom{n_1}{\varkappa}\binom{n_2}{\varkappa}}{\binom{n_1 + n_2 - \varkappa + 1}{\varkappa}}$$

und, da $\alpha_{\varkappa}{}^{n_1, \lambda}$ als eine von n_2 unabhängige Gröſse aus $\alpha_{\varkappa}{}^{n_1, n_2}$ durch Vertauschung von n_2 mit λ hervorgeht,

$$\alpha_{\varkappa}{}^{n_1, \lambda} = \frac{\binom{n_1}{\varkappa}\binom{\lambda}{\varkappa}}{\binom{n_1 + \lambda - \varkappa + 1}{\varkappa}}.$$

Der nunmehr völlig bestimmten Gleichung kann man auch die Form

7*

$$a_1 p_1^{n_1} a_2 p_2^{n_2} = \sum_0^{\lambda} \frac{(n_1 - \varkappa)!}{(n_1 + \lambda - 2\varkappa)!} \alpha_\varkappa^{n_1, \lambda}$$

$$\cdot p_1 p_2 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2^{\varkappa} \bar{p}_1 p_2^{\lambda - \varkappa} a_1^{n_1} a_2^{n_2} p_2^{n_2 - \lambda} \mid e_1 e_2^{\varkappa} \; p^{n_1 + \lambda - 2\varkappa}$$

geben. In dem Falle $\lambda = n_2$ sind die Formen

$$a_1^{n_1} a_2^{n_2} p_2^{n_2 - \lambda} \mid e_1 e_2^{\varkappa} \; p_1^{n_1 + \lambda - 2\varkappa},$$

die aus der Form $a_1 p_1^{n_1} a_2 p_2^{n_2}$ durch die Operation $\bar{p}_2 p_1^{\lambda - \varkappa} \bar{p}_1 \bar{p}_2 \mid e_1 e_2^{\varkappa}$ hervorgehen, von p_2 unabhängig, und man kann darnach die Form $a_1 p_1^{n_1} a_2 p_2^{n_2}$, welche zwei Reihen von Veränderlichen enthält, aus den Polaren dieser nur Eine Reihe von Veränderlichen enthaltenden Formen von p_1 für p_2 und den Potenzen von $p_1 p_2 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2$ zusammensetzen. Die Formen sind die Überschiebungen der Form $a_1 p_1^{n_1}$ über die Form $a_2 p_1^{n_2}$.

84. Führt man statt der Einheiten $e_1, .., e_m$ und $\varepsilon_1, .., \varepsilon_m$, aus denen sich die Gröfsen p und a zusammensetzen, irgend welche andere Gröfsen von derselben Beschaffenheit als Einheiten ein, so sind diese, die wir durch $e_{1,0}, .., e_{m,0}$ und $\varepsilon_{1,0}, .., \varepsilon_{m,0}$ bezeichnen wollen, mit jenen durch eine Reihe von Gleichungen verbunden. Die einfachsten, die sich aus den Darstellungen der neu eingeführten durch die ursprünglichen und umgekehrt der alten durch die neuen Einheiten ergeben, sind die Gleichungen

$$e_{1,0} \cdot\cdot e_{m,0} = e_{1,0} \cdot\cdot e_{m,0} \mid \varepsilon_1 \cdot\cdot \varepsilon_m \cdot e_1 \cdot\cdot e_m,$$
$$\varepsilon_{1,0} \cdot\cdot \varepsilon_{m,0} = \varepsilon_{1,0} \cdot\cdot \varepsilon_{m,0} \mid e_1 \cdot\cdot e_m \cdot \varepsilon_1 \cdot\cdot \varepsilon_m$$

und

$$e_1 \cdot\cdot e_m = e_1 \cdot\cdot e_m \mid \varepsilon_{1,0} \cdot\cdot \varepsilon_{m,0} \cdot e_{1,0} \cdot\cdot e_{m,0},$$
$$\varepsilon_1 \cdot\cdot \varepsilon_m = \varepsilon_1 \cdot\cdot \varepsilon_m \mid e_{1,0} \cdot\cdot e_{m,0} \cdot \varepsilon_{1,0} \cdot\cdot \varepsilon_{m,0},$$

in denen offenbar die Determinanten mit einander durch die Gleichung

$$e_{1,0} \cdot\cdot e_{m,0} \mid \varepsilon_1 \cdot\cdot \varepsilon_m \cdot \varepsilon_{1,0} \cdot\cdot \varepsilon_{m,0} \mid e_1 \cdot\cdot e_m = 1$$

verbunden sind. Sie sind als die einfachsten aber nur specielle Fälle allgemeinerer Gleichungen, die zwischen den Potenzen der Einheiten bestehen. Im Falle $m = 2$ z. B. gelten neben den entsprechenden die Gleichungen

$$e_{1,0}^{n-1} \cdot\cdot e_{2,0}^{n-1} = \binom{n-1}{0} \cdot\cdot \binom{n-1}{n-1}$$

$$\cdot e_{1,0}^{n-1} \cdot\cdot e_{2,0}^{n-1} \mid \varepsilon_1^{n-1} \cdot\cdot \varepsilon_2^{n-1} \cdot e_1^{n-1} \cdot\cdot e_2^{n-1},$$

$$\varepsilon_{1,0}{}^{n-1} \ldots \varepsilon_{2,0}{}^{n-1} = \binom{n-1}{0} \ldots \binom{n-1}{n-1}$$
$$\cdot\, \varepsilon_{1,0}{}^{n-1} \ldots \varepsilon_{2,0}{}^{n-1} \mid e_1{}^{n-1} \ldots e_2{}^{n-1} \cdot \varepsilon_1{}^{n-1} \ldots \varepsilon_2{}^{n-1},$$

die für $n = 2$ in die angegebenen, der Annahme $m = 2$ entsprechenden Gleichungen übergehen.

85. Ein jeder Ausdruck, der sich aus den Verbindungen von irgend welchen Gröſsen aus der Reihe der Gröſsen p und a mit den Einheiten $e_1, \ldots, e_m$ und $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ zusammensetzt, läſst sich, da man die alten Einheiten durch die neuen darstellen kann, in einen Ausdruck umwandeln, der sich aus den Verbindungen jener Gröſsen mit den Einheiten $e_{1,0}, \ldots, e_{m,0}$ und $\varepsilon_{1,0}, \ldots, \varepsilon_{m,0}$ zusammensetzt und im allgemeinen auſserdem die Verbindungen der alten mit den neuen Einheiten enthält.

Alle Ausdrücke, die eine solche Form haben oder in eine solche Form gebracht werden können, daſs in ihnen die Einheiten als kombinatorische Produkte in der Form $e_1 \ldots e_m$ und $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m$ oder in einer allgemeineren Form, wie $e_1{}^{n-1} \ldots e_2{}^{n-1}$ und $\varepsilon_1{}^{n-1} \ldots \varepsilon_2{}^{n-1}$ in dem Falle $m = 2$, auftreten, nehmen, wie aus den Gleichungen des vorigen Abschnittes hervorgeht, bei einer solchen Umwandlung nach Multiplikation mit, durch jene kombinatorischen Produkte bestimmten, aus den alten und den neuen Einheiten zusammengesetzten Determinanten eine Form an, die sich von der ursprünglichen nur dadurch unterscheidet, daſs an die Stelle der alten Einheiten die neuen Einheiten getreten sind. Sie nehmen also bis auf jene in irgend welchen Potenzen als Faktoren hinzutretenden Determinanten denselben Wert an, wenn man die Einheiten durch andere Einheiten ersetzt, und werden deshalb Invarianten genannt.

Selbstverständlich besitzen auch die Gröſsen a und p, da sie sich durch die neuen Einheiten in derselben Weise, wie durch die alten darstellen, für sich allein und somit auch in der Verbindung ap die Invarianteneigenschaft. Die Form ap^n ist also eine Invariante.

Eine Invariante ist ferner die Determinante $p_1 \ldots p_m \mid \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m$, weil sie nach Multiplikation mit der Determinante $\varepsilon_{1,0} \ldots \varepsilon_{m,0} \mid e_1 \ldots e_m$ die Form $p_1 \ldots p_m \mid \varepsilon_{1,0} \ldots \varepsilon_{m,0}$ annimmt. Dasselbe gilt von der Hyperdeterminante $\bar{p}_1 \ldots \bar{p}_m \mid e_1 \ldots e_m$; denn multipliziert man sie mit der Determinante $e_{1,0} \ldots e_{m,0} \mid \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m$, so erhält man sie in der Form $\bar{p}_1 \ldots \bar{p}_m \mid$

$e_{1,0} \ldots e_{m,0}$. Es folgt daraus, daſs alle Formen, die aus der Form $a_1 p_1^{n_1} \ldots a_m p_m^{n_m}$ durch die Hyperdeterminante $\bar{p}_1 \ldots \bar{p}_m | e_1 \ldots e_m$ erzeugt werden können, die Invarianteneigenschaft besitzen; es ist nämlich

$$e_{1,0} \ldots e_{m,0} \,|\, \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m{}^{\varkappa}\, \bar{p}_1 \ldots \bar{p}_m \,|\, e_1 \ldots e_m{}^{\varkappa}\, a_1 p_1^{n_1} \ldots a_m p_m^{n_m}$$
$$= \bar{p}_1 \ldots \bar{p}_m \,|\, e_{1,0} \ldots e_{m,0}{}^{\varkappa}\, a_1 p_1^{n_1} \ldots a_m p_m^{n_m}.$$

Invarianten sind nach ihrer Definition auch die Resultanten und Diskriminanten. Im Falle $m = 2$ erkennt man das für die Resultante der binären Formen $a_1 p^{n_1}$ und $a_2 p^{n_2}$ auch unmittelbar aus der Form der Determinanten

$$(a_1^{n_1})^{n_2} \varepsilon_1^{n_2-1} \ldots \varepsilon_2^{n_2-1} (a_2^{n_2})^{n_1} \varepsilon_1^{n_1-1} \ldots \varepsilon_2^{n_1-1} \,|\, e_1^{n_1+n_2-1} \ldots e_2^{n_1+n_2-1}$$

und

$$(a_1^{n_1} a_2^{n_2} \,|\, e_1 e_2{}^{\varkappa})^{n_2} e_1^{n_2-1} \ldots e_2^{n_2-1} (a_2^{n_2})^{n_1-n_2} \varepsilon_1^{n_1-n_2-1} \ldots \varepsilon_2^{n_1-n_2-1} \,|\, e_1^{n_1-1} \ldots e_2^{n_1-1},$$

durch die sie sich, abgesehen von numerischen Faktoren, darstellt, und für die Diskriminante der binären Form ap^n aus der Form der sie bis auf einen numerischen Faktor darstellenden Determinante

$$((a^n)^2\, e_1 e_2{}^{2\varkappa})^{n-1} (e_1^{n-2} \ldots e_2^{n-2})^2.$$

Die Form

$$((a^n)^2\, e_1 e_2{}^{2\varkappa})\, p^{n-2} p_1^{n-2} = \frac{(a^n)^2\, e_1 e_2 \,|\, p^{n-1} p_1^{n-1}}{pp_1 \,|\, \varepsilon_1 \varepsilon_2}$$

verwandelt sich in die entsprechende Form nach Multiplikation mit dem Ausdrucke

$$e_{1,0}\, e_{2,0} \,|\, \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^2 = \frac{e_{1,0}\, e_{2,0} \,|\, \varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_{1,0}\, \varepsilon_{2,0} \,|\, e_1 e_2}.$$

Endlich sei bemerkt, daſs die zu den Sturm'schen Resten in Beziehung stehenden Formen

$$a_{0,-r}\, p^{n-r}, \; a_{0,r-1}\, p^{r-1}$$

gleichfalls die Invarianteneigenschaft besitzen.

86. Die Anwendung der für $r \geqq m$ durch alle möglichen Kombinationen der Gröſsen $p_1, \ldots, p_r$ zu m entstehenden Hyperdeterminanten $m$ten Grades auf das Produkt

$$a_1 p_1^{n_1} \ldots a_r p_r^{n_r}$$

giebt nach Unterdrückung der Indices der Gröſsen p eine Reihe von invarianten Formen für p, die man als die simultanen Invarianten und Kovarianten der Formen $a_1 p^{n_1}, \ldots, a_r p^{n_r}$ bezeichnet, indem man die Formen, welche nur die Koefficienten dieser Formen enthalten, von denen, in welchen neben diesen auch die Gröfse p auftritt, unterscheidet und die ersteren insbesondere die Invarianten und die letzteren die Kovarianten der Formen nennt. Die Invarianten sind also Kovarianten 0ten Grades für p. Die sämtlichen Invarianten und Kovarianten, die man so erhält, sind z. B. in dem Falle $m = 2$ durch die Form

$$\bar{p}_1 \bar{p}_2 \,|\, e_1 e_2^{\varkappa_{1,2}} \; \bar{p}_1 \bar{p}_3 \,|\, e_1 e_2^{\varkappa_{1,3}} \; \bar{p}_2 \bar{p}_3 \,|\, e_1 e_2^{\varkappa_{2,3}} \, .. \, \bar{p}_1 \bar{p}_r \,|\, e_1 e_2^{\varkappa_{1,r}}$$
$$.. \, \bar{p}_{r-1} \bar{p}_r \,|\, e_1 e_2^{\varkappa_{r-1,r}} \; a_1 p_1^{n_1} \, .. \, a_r p_r^{n_r}$$

oder, wenn wir eine Hyperdeterminante nur durch die unter einen horizontalen Strich gesetzten Indices der in ihr auftretenden Gröfsen p andeuten, durch die Form

$$\overline{12}^{\varkappa_{1,2}} \, \overline{13}^{\varkappa_{1,3}} \, \overline{23}^{\varkappa_{2,3}} \, .. \, \overline{1r}^{\varkappa_{1,r}} \, .. \, \overline{(r-1)r}^{\varkappa_{r-1,r}} \; a_1 p_1^{n_1} \, .. \, a_r p_r^{n_r}$$

gegeben. Sie sind vom Grade 1 in den Koefficienten der Formen $a_1 p^{n_1}, .., a_1 p^{n_r}$ und, wenn in dem Hyperdeterminantenkomplexe p_1 $\lambda_1$mal, .., p_r $\lambda_r$mal vorkommt und die Summe seiner Exponenten λ ist, vom Grade

$$(n_1 - \lambda_1) + .. + (n_r - \lambda_r)$$

oder, da offenbar

$$\lambda_1 + .. + \lambda_r = m\lambda$$

ist, vom Grade

$$n_1 + .. + n_r - m\lambda$$

für p. Für die Invarianten ist $\lambda_1 = n_1, .., \lambda_r = n_r$.

87. Von den Formen $a_1 p^{n_1}, .., a_r p^{n_r}$ können beliebig viele oder auch alle als identisch vorausgesetzt werden. In diesem letzteren Falle unterdrücken wir nach Ausführung der Operationen die Indices der Gröfsen a und n und sehen somit die Formen als Repräsentanten der Einen Form ap^n an. Die Invarianten und Kovarianten sind dann Invarianten und Kovarianten der Form ap^n und vom Grade r in den Koefficienten derselben und vom Grade

$$rn - (\lambda_1 + .. + \lambda_r) = rn - m\lambda$$

für p.

Der allgemeine Typus der Invarianten und Kovarianten der Form ap^n vom Grade r in den Koefficienten ist in dem Falle $m = 2$

$$\overline{12}^{\varkappa_{1,2}} \, \overline{13}^{\varkappa_{1,3}} \, \overline{23}^{\varkappa_{2,3}} \, .. \, \overline{1r}^{\varkappa_{1,r}} \, .. \, \overline{(r-1)r}^{\varkappa_{r-1,r}} \; (ap^n)^r,$$

wenn durch $(ap^n)^r$ das Produkt $a_1 p_1^{n_1} \, .. \, a_r p_r^{n_r}$ bezeichnet wird.

Nimmt der Hyperdeterminantenkomplex für gewisse Werte der Exponenten bei Vertauschung zweier Indices das entgegengesetzte Zeichen an, so verschwindet die entsprechende Invariante oder Kovariante identisch, da infolge der Unterdrückung der Indices die Bezeichnung derselben von keinem Einfluſs auf das Resultat ist.

Die Invarianten erhält man für $\lambda_1 = n, \ldots, \lambda_r = n$. Da für diese Annahme für die Summe der Exponenten der Hyperdeterminanten die Gleichung $rn - m\lambda = 0$ gilt, so haben insbesondere binäre Formen ungeraden Grades keine Invarianten ungeraden Grades.

88. Auf die Determinantennatur der Hyperdeterminanten gründet sich eine einfache Rechnung mit Hyperdeterminanten, durch welche sich die Beziehungen, die zwischen den verschiedenen, durch Hyperdeterminanten erzeugten Formen bestehen, ergründen lassen. Die Grundlage derselben bilden z. B. in dem Falle $m = 2$ oder also für binäre Formen die Gleichungen

$$\bar{p}_1\bar{p}_2\bar{p}_3 \mid p e_1 e_2 = 0, \quad \bar{p}_1\bar{p}_2\bar{p}_3\bar{p}_4 \mid e_1 e_2 e_1 e_2 = 0,$$

aus denen sich, wenn wir die Hyperdeterminante $\bar{p}_1 p$ durch $\dot{1}$ bezeichnen, die Gleichungen

$$\dot{1}\;\overline{23} - \dot{2}\;\overline{13} + \dot{3}\;\overline{12} = 0,$$

$$\overline{12}\;\overline{34} - \overline{13}\;\overline{24} + \overline{14}\;\overline{23} = 0$$

oder

$$\dot{1}\;\overline{23} = \dot{2}\;\overline{13} + \dot{3}\;\overline{21},$$

$$\overline{12}\;\overline{34} = \overline{13}\;\overline{24} - \overline{14}\;\overline{23}$$

ergeben. Wesentlich für die Hyperdeterminantenrechnung sind die folgenden Punkte: Bei Einer Form ist infolge der Unterdrückung der Indices die Bezeichnung derselben von keinem Einfluſs auf das Resultat. Eine Form vom $n$ten Grade für p_1 wird durch $\varkappa$ malige Anwendung der Operation $\dot{1}$ bei Unterdrückung des Index nur um den Faktor $n(n-1)\ldots(n+1-\varkappa)$ geändert. Die Anwendung einer Hyperdeterminante auf eine Form, die eine der in der Hyperdeterminante vorkommenden Gröſsen p nicht enthält, führt auf das Resultat Null.

89. Die folgenden Beispiele entlehnen wir dem Gebiete der binären Formen und beziehen in ihnen die Hyperdeterminante auf die Eine Form ap^n.

1. Aus der Gleichung

$$\dot{1}\,\overline{23} = \dot{2}\,\overline{13} + \dot{3}\,\overline{21}$$

ergiebt sich durch Erheben ins Quadrat die Gleichung

$$2\,\dot{2}\,\dot{3}\,\overline{12}\,\overline{13} = \dot{3}^2\,\overline{12}^2 + \dot{2}^2\,\overline{13}^2 - \dot{1}^2\,\overline{32}^2.$$

Aus Einer Form erzeugen die Operationen

$$\dot{3}^2\,\overline{12}^2,\quad \dot{2}^2\,\overline{13}^2,\quad \dot{1}^2\,\overline{32}^2$$

eine und dieselbe Form, und es ist daher

$$2\,\dot{2}\,\dot{3}\,\overline{12}\,\overline{13}\,(ap^n)^3 = \dot{3}^2\,\overline{12}^2\,(ap^n)^3$$

oder, da die Formen $\dot{2}\,\overline{12}\,\overline{13}\,(ap^n)^3$ und $\dot{3}\,\overline{12}^2\,(ap^n)^3$ für p_3 vom Grade $n-1$ sind und daher die Operation $\dot{3}$ bei beiden nur das Hinzutreten des Faktors $n-1$ bewirkt,

$$2\,\dot{2}\,\overline{12}\,\overline{13}(ap^n)^3 = \dot{3}\,\overline{12}^2(ap^n)^3$$

und folglich

$$2(n-1)\,\overline{12}\,\overline{13}\,(ap^n)^3 = n\,ap^n\,\overline{12}^2\,(ap^n)^2.$$

2. Erhebt man die erhaltene Hyperdeterminantengleichung wieder ins Quadrat, so erhält man die Gleichung

$$2\,\dot{2}^2\,\dot{3}^2\,\overline{12}^2\,\overline{13}^2 + 2\,\dot{1}^2\,\dot{3}^2\,\overline{21}^2\,\overline{23}^2 + 2\,\dot{2}^2\,\dot{1}^2\,\overline{32}^2\,\overline{31}^2$$
$$= \dot{3}^4\,\overline{12}^4 + \dot{2}^4\,\overline{13}^4 + \dot{1}^4\,\overline{32}$$

und damit die Gleichung

$$2\,\dot{2}^2\,\overline{12}^2\,\overline{13}^2\,(ap^n)^3 = \dot{3}^2\,\overline{12}^4\,(ap^n)^3$$

oder

$$2(n-2)(n-3)\,\overline{12}^2\,\overline{13}^2\,(ap^n)^3 = n(n-1)\,ap^n\,\overline{12}^4\,(ap^n)^2.$$

3. Multipliziert man die aus den Gleichungen

$$\dot{1}\,\overline{23} = \dot{2}\,\overline{13} + \dot{3}\,\overline{21},$$
$$\dot{2}\,\overline{14} = \dot{1}\,\overline{24} + \dot{4}\,\overline{12}$$

hervorgehenden Gleichungen

$$2\,\dot{2}\,\dot{3}\,\overline{12}\,\overline{13} = \dot{2}^2\,\overline{13}^2 + \dot{3}^2\,\overline{21}^2 - \dot{1}^2\,\overline{23}^2,$$
$$2\,\dot{1}\,\dot{4}\,\overline{12}\,\overline{24} = \dot{2}^2\,\overline{14}^2 - \dot{4}^2\,\overline{12}^2 - \dot{1}^2\,\overline{24}^2,$$

so erhält man die Gleichung

$$4\,\dot{1}\,\dot{2}\,\dot{3}\,\dot{4}\,\overline{12}^2\,\overline{13}\,\overline{24} = (\dot{2}^4\,\overline{13}^2\,\overline{14}^2 + \dot{1}^4\,\overline{23}^2\,\overline{24}^2) - \dot{3}^2\,\dot{4}^2\,\overline{12}^4$$
$$+ (-\dot{2}^2\,\dot{4}^2\,\overline{12}^2\,\overline{13}^2 + \dot{2}^2\,\dot{3}^2\,\overline{12}^2\,\overline{14}^2) - (\dot{1}^2\,\dot{2}^2\,\overline{13}^2\,\overline{24}^2 + \dot{1}^2\,\dot{2}^2\,\overline{14}^2\,\overline{23}^2)$$
$$+ (-\dot{1}^2\,\dot{3}^2\,\overline{12}^2\,\overline{24}^2 + \dot{1}^2\,\dot{4}^2\,\overline{12}^2\,\overline{23}^2).$$

Es ist daher

$$4\,\dot{1}\,\dot{2}\,\dot{3}\,\dot{4}\,\overline{12}^2\,\overline{13}\,\overline{24}\,(ap^n)^4$$
$$= (2\,\dot{2}^4\,\overline{13}^2\,\overline{14}^2 - \dot{3}^2\,\dot{4}^2\,\overline{12}^4 - 2\,\dot{1}^2\,\dot{2}^2\,\overline{13}^2\,\overline{24}^2)\,(ap^n)^4$$

und somit, da unter Berücksichtigung des 2ten Beispiels

$$\dot{3}^2\,\dot{4}^2\,\overline{12}^4\,(ap^n)^4 = 2\,\dot{4}^2\,\dot{2}^2\,\overline{13}^2\,\overline{12}^2\,(ap^n)^4 = 2\,\dot{4}^4\,\overline{13}^2\,\overline{12}^2\,(ap^n)^4$$

ist,

$$2\,\dot{3}\,\dot{4}\,\overline{12}^2\,\overline{13}\,\overline{24}\,(ap^n)^4 = -\dot{1}\,\overline{13}^2\,\dot{2}\,\overline{24}^2\,(ap^n)^4$$

oder

$$2(n-1)^2\,\overline{12}^2\,\overline{13}\,\overline{24}\,(ap^n)^4 = -(n-2)^2\,(\overline{12}^2\,(ap^n)^2)^2.$$

4. Durch Multiplikation des Produktes der Gleichungen

$$\dot{5}\,\overline{13} = \dot{1}\,\overline{53} + \dot{3}\,\overline{15},$$
$$\dot{6}\,\overline{24} = \dot{2}\,\overline{64} + \dot{4}\,\overline{26}$$

mit $\overline{12}^2\,\overline{34}^2$ ergiebt sich die Gleichung

$$\dot{5}\,\dot{6}\,\overline{12}^2\,\overline{34}^2\,\overline{13}\,\overline{24} = -(\dot{2}\,\overline{12}^2\,\overline{15}\,\dot{3}\,\overline{43}^2\,\overline{46} + \dot{1}\,\overline{21}^2\,\overline{26}\,\dot{4}\,\overline{34}^2\,\overline{35})$$
$$+ (\dot{3}\,\dot{4}\,\overline{34}^2\,\overline{12}^2\,\overline{15}\,\overline{26} + \dot{1}\,\dot{2}\,\overline{12}^2\,\overline{34}^2\,\overline{35}\,\overline{46})$$

und damit die Gleichung

$$\dot{5}\,\dot{6}\,\overline{12}^2\,\overline{34}^2\,\overline{13}\,\overline{24}\,(ap^n)^6 = (-2\,\dot{2}\,\overline{12}^2\,\overline{15}\,\dot{3}\,\overline{43}^2\,\overline{46}$$
$$+ 2\,\dot{3}\,\dot{4}\,\overline{34}^2\,\overline{12}^2\,\overline{15}\,\overline{26})\,(ap^n)^6$$

und nach Multiplikation mit $\dot{5}\,\dot{6}$ und Berücksichtigung des 3ten Beispiels die Gleichung

$$\dot{5}^2\,\dot{6}^2\,\overline{12}^2\,\overline{34}^2\,\overline{13}\,\overline{24}\,(ap^n)^6 = -(2\,\dot{2}\,\dot{5}\,\overline{12}^2\,\overline{15}\,\dot{3}\,\dot{6}\,\overline{43}^2\,\overline{46}$$
$$+ \dot{3}\,\dot{4}\,\overline{34}^2\,\dot{1}\,\overline{15}^2\,\dot{2}\,\overline{26}^2)\,(ap^n)^6$$

oder

$$n^2(n-1)^2(ap^n)^2\,\overline{12}^2\,\overline{34}^2\,\overline{13}\,\overline{24}\,(ap^n)^4$$
$$= -2(n-1)^2(n-2)^2(\overline{12}^2\,\overline{13}\,(ap^n)^3)^2 - (n-2)^4(\overline{12}^2\,(ap^n)^2)^3.$$

5. Multipliziert man das Produkt der aus den Gleichungen

$$\dot{1}\,\overline{24} = \dot{2}\,\overline{14} + \dot{4}\,\overline{21},$$
$$\dot{3}\,\overline{24} = \dot{2}\,\overline{34} + \dot{4}\,\overline{23}$$

hervorgehenden Gleichungen

$$2\,\dot{2}\,\dot{4}\,\overline{12}\,\overline{14} = \dot{2}^2\,\overline{14}^2 + \dot{4}^2\,\overline{12}^2 - \dot{1}^2\,\overline{24}^2,$$
$$2\,\dot{2}\,\dot{4}\,\overline{32}\,\overline{34} = \dot{2}^2\,\overline{34}^2 + \dot{4}^2\,\overline{32}^2 - \dot{3}^2\,\overline{24}^2$$

mit $\overline{13}^2$, so erhält man die Gleichung

$$4\,\dot{2}^2\,\dot{4}^2\,\overline{13}^2\,\overline{12}\,\overline{14}\,\overline{32}\,\overline{34} = (\dot{2}^4\,\overline{14}^2\,\overline{13}^2\,\overline{43}^2 + \dot{4}^4\,\overline{12}^2\,\overline{13}^2\,\overline{23}^2)$$
$$+ \dot{1}^2\,\dot{3}^2\,\overline{13}^2\,\overline{24}^4 + (\dot{2}^2\,\dot{4}^2\,\overline{14}^2\,\overline{13}^2\,\overline{32}^2 - \dot{2}^2\,\dot{3}^2\,\overline{13}^2\,\overline{14}^2\,\overline{42}^2)$$
$$+ (\dot{2}^2\,\dot{4}^2\,\overline{12}^2\,\overline{13}^2\,\overline{34}^2 - \dot{3}^2\,\dot{4}^2\,\overline{13}^2\,\overline{12}^2\,\overline{24}^2)$$
$$- (\dot{1}^2\,\dot{2}^2\,\overline{42}^2\,\overline{43}^2\,\overline{31}^2 + \dot{1}^2\,\dot{4}^2\,\overline{24}^2\,\overline{23}^2\,\overline{31}^2)$$

und damit die Gleichung

$$4\,\dot{2}^2\,\overline{13}^2\,\overline{12}\,\overline{14}\,\overline{32}\,\overline{34}\,(ap^n)^4$$
$$=(2\,\dot{4}^2\,\overline{12}^2\,\overline{13}^2\,\overline{23}^2+\dot{2}^2\,\overline{24}^2\,\overline{13}^4-2\,\dot{2}^2\,\overline{12}^2\,\overline{13}^2\,\overline{34}^2)\,(ap^n)^4.$$

Andererseits geht aber aus der Gleichung

$$\overline{13}\,\overline{24}=\overline{12}\,\overline{34}-\overline{14}\,\overline{32}$$

durch Erheben ins Quadrat und Multiplikation mit $\overline{13}^2$ die Gleichung

$$2\,\overline{13}^2\,\overline{12}\,\overline{14}\,\overline{32}\,\overline{34}=-\overline{24}^2\,\overline{13}^4+(\overline{12}^2\,\overline{13}^2\,\overline{34}^2+\overline{14}^2\,\overline{13}^2\,\overline{32}^2)$$

und darnach die Gleichung

$$2\,\overline{13}^2\,\overline{12}\,\overline{14}\,\overline{32}\,\overline{34}\,(ap^n)^4=(-\overline{24}^2\,\overline{13}^4+2\,\overline{12}^2\,\overline{13}^2\,\overline{34}^2)\,(ap^n)^4$$

hervor. Folglich ist

$$6\,\dot{2}^2\,\overline{12}^2\,\overline{13}^2\,\overline{34}^2\,(ap^n)^4=(2\,\dot{4}^2\,\overline{12}^2\,\overline{13}^2\,\overline{23}^2+3\,\dot{2}^2\,\overline{24}^2\,\overline{13}^4)\,(ap^n)^4$$

oder

$$6(n-2)(n-3)\,\overline{12}^2\,\overline{13}^2\,\overline{34}^2\,(ap^n)^4=2n(n-1)\,ap^n\,\overline{12}^2\,\overline{13}^2\,\overline{23}^2\,(ap^n)^3$$
$$+3(n-2)(n-3)\,\overline{12}^2\,(ap^n)^2\,\overline{12}^4\,(ap^n)^2.$$

6. Durch Multiplikation der aus der Gleichung

$$\dot{1}\,\overline{43}=\dot{4}\,\overline{13}+\dot{3}\,\overline{41}$$

hervorgehenden Gleichung

$$2\,\dot{3}\,\dot{4}\,\overline{13}\,\overline{14}=\dot{4}^2\,\overline{13}^2+\dot{3}^2\,\overline{14}^2-\dot{1}^2\,\overline{43}^2$$

mit $\overline{12}^2\,\overline{34}^2$ erhält man die Gleichung

$$2\,\dot{3}\,\dot{4}\,\overline{12}^2\,\overline{34}^2\,\overline{13}\,\overline{14}=(\dot{4}^2\,\overline{12}^2\,\overline{13}^2\,\overline{34}^2+\dot{3}^2\,\overline{12}^2\,\overline{14}^2\,\overline{43}^2)-\dot{1}^2\,\overline{12}^2\,\overline{43}^4$$

und damit die Gleichung

$$2\,\dot{3}\,\dot{4}\,\overline{12}^2\,\overline{34}^2\,\overline{13}\,\overline{14}\,(ap^n)^4=(2\,\dot{2}^2\,\overline{12}^2\,\overline{13}^2\,\overline{34}^2-\dot{2}^2\,\overline{24}^2\,\overline{13}^4)\,(ap^n)^4.$$

Es ist also unter Berücksichtigung des vorigen Beispiels

$$3\,\dot{3}\,\dot{4}\,\overline{12}^2\,\overline{34}^2\,\overline{13}\,\overline{14}\,(ap^n)^4=\dot{4}^2\,\overline{12}^2\,\overline{13}^2\,\overline{23}^2\,(ap^n)^4$$

oder

$$3(n-3)^2\,\overline{12}^2\,\overline{34}^2\,\overline{13}\,\overline{14}\,(ap^n)^4=n(n-1)\,ap^n\,\overline{12}^2\,\overline{13}^2\,\overline{23}^2\,(ap^n)^3.$$

7. Multipliziert man die aus den Gleichungen

$$\dot{3}\,\overline{14}=\dot{1}\,\overline{34}+\dot{4}\,\overline{13},$$
$$\dot{4}\,\overline{23}=\dot{2}\,\overline{43}+\dot{3}\,\overline{24}$$

hervorgehenden Gleichungen

$$2\,\dot{1}\,\dot{4}\,\overline{34}\,\overline{13}=\dot{3}^2\,\overline{14}^2-\dot{1}^2\,\overline{34}^2-\dot{4}^2\,\overline{13}^2,$$
$$2\,\dot{2}\,\dot{3}\,\overline{34}\,\overline{24}=\dot{2}^2\,\overline{34}^2+\dot{3}^2\,\overline{24}^2-\dot{4}^2\,\overline{32}^2,$$

so ergiebt sich nach Multiplikation mit $\overline{12}^2$ die Gleichung

$$4\,\dot{1}\,\dot{2}\,\dot{3}\,\dot{4}\;\overline{12}^2\,\overline{34}^2\,\overline{13}\;\overline{24} = (\dot{2}^2\,\dot{3}^2\,\overline{12}^2\,\overline{14}^2\,\overline{43}^2 - \dot{1}^2\,\dot{3}^2\,\overline{21}^2\,\overline{24}^2\,\overline{43}^2)$$
$$+ (\dot{4}^4\,\overline{12}^2\,\overline{13}^2\,\overline{23}^2 + \dot{3}^4\,\overline{12}^2\,\overline{14}^2\,\overline{24}^2) + (-\dot{3}^2\,\dot{4}^2\,\overline{14}^2\,\overline{12}^2\,\overline{23}^2$$
$$+ \dot{1}^2\,\dot{4}^2\,\overline{34}^2\,\overline{32}^2\,\overline{21}^2) - \dot{1}^2\,\dot{2}^2\,\overline{12}^2\,\overline{34}^4$$
$$-(\dot{2}^2\,\dot{4}^2\,\overline{12}^2\,\overline{13}^2\,\overline{34}^2 + \dot{3}^2\,\dot{4}^2\,\overline{13}^2\,\overline{12}^2\,\overline{24}^2)$$

und darnach die Gleichung

$$4\,\dot{1}\,\dot{2}\,\dot{3}\;\overline{12}^2\,\overline{34}^2\,\overline{13}\;\overline{24}\,(ap^n)^4$$
$$= (2\,\dot{4}^3\,\overline{12}^2\,\overline{13}^2\,\overline{23}^2 - 4\,\dot{2}^2\,\overline{24}^2\,\overline{13}^4 - 2\,\dot{2}^2\,\dot{4}\;\overline{12}^2\,\overline{13}^2\,\overline{34}^2)\,(ap^n)^4.$$

Unter Berücksichtigung des 5ten Beispiels ist also

$$6\,\dot{1}\,\dot{2}\,\dot{3}\;\overline{12}^2\,34^2\,\overline{13}\;\overline{24}\,(ap^n)^4$$
$$= (2\,\dot{4}^3\,\overline{12}^2\,\overline{13}^2\,\overline{23}^2 - 3\,\dot{4}\,\dot{2}^2\,\overline{24}^2\,\overline{13}^4)\,(ap^n)^4$$

oder

$$6(n-3)^3\,\overline{12}^2\,\overline{34}^2\,\overline{13}\,\overline{24}\,(ap^n)^4 = 2n(n-1)(n-2)\,ap^n\,\overline{12}^2\,\overline{13}^2\,\overline{23}^2\,(ap^n)^3$$
$$-3(n-2)^2\,(n-3)\;\overline{12}^2\,(ap^n)^2\;\overline{12}^4\,(ap^n)^2.$$

90. Will man die durch eine Hyperdeterminante oder einen Komplex von Hyperdeterminanten angedeuteten Operationen statt an Formen, wie $a_1 p_1^{n_1}, \ldots, a_r p_r^{n_r}$, an Formen ausführen, die sich sämtlich oder zum Teil aus Formen verschiedener p multiplikativ zusammensetzen, so hat man zu bedenken, daſs die Anwendung z. B. der Hyperdeterminante $\overline{12}$ auf die Formen $a_1 p_1^{n_1}$ und $a_2 p_2^{n_2}$ die Bildung der Summe aller derjenigen Ausdrücke erheischt, die man aus dem Produkte der beiden Formen dadurch erhält, daſs man aus ihnen auf alle möglichen Weisen p je einmal entfernt. Die durch die Hyperdeterminante $\overline{12}$ bezeichnete Operation ist daher, wenn sie an den Formen $a_1 p_1^{n_1} a_2 p_2^{n_2}$ und $a_3 p_3^{n_3}$ ausgeführt werden soll, durch das auf die Formen $a_1 p_1^{n_1}$, $a_2 p_2^{n_2}$, $a_3 p_3^{n_3}$ sich beziehende Operationssymbol $\overline{(1+2)3} = \overline{13} + \overline{23}$ angedeutet.

Darnach erhält man z. B. durch Anwendung der Operation $\overline{12}^2$ auf die durch diese Operation aus der Form ap^n hervorgehende Form, da an dem Produkte der Formen $\overline{12}^2\,a_1 p_1^{n_1}\,a_2 p_2^{n_2}$ und $\overline{34}^2\,a_3 p_3^{n_3}\,a_4 p_4^{n_4}$ zu operieren ist, die Form

$$\overline{(1+2)(3+4)}^2\;\overline{12}^2\;\overline{34}^2\,(ap^n)^4$$

und durch Anwendung der Operation $\overline{12}^2\;\overline{13}^2\;\overline{23}^2$ auf die Formen $\overline{12}^2\,(ap^n)^2$, $\overline{12}^2\;\overline{13}^2\;\overline{23}^2\,(ap^n)^3$, ap^n die Form

$$\overline{(1+2)(3+4+5)}^2\;\overline{(1+2)6}^2\;\overline{(3+4+5)6}^2\;\overline{12}^2\;\overline{34}^2\;\overline{35}^2\;\overline{45}^2\;(ap^n)^6.$$

Die erstere Form, welche, abgesehen von einem numerischen Faktor, die Hefse'sche Determinante oder Kovariante der Hefse'schen Kovariante der Form ap^n ist, stellt sich entwickelt in der Form

$$(\overline{13}+\overline{14}+\overline{23}+\overline{24})^2\;\overline{12}^2\;\overline{34}^2\;(ap^n)^4$$

oder

$$(4\,\overline{12}^2\,\overline{13}^2\,\overline{34}^2+8\,\overline{12}^2\,\overline{34}^2\,\overline{13}\,\overline{14}+4\,\overline{12}^2\,\overline{34}^2\,\overline{13}\,\overline{24})\,(ap^n)^4$$

dar und setzt sich darnach, wie aus den drei letzten Beispielen des vorigen Abschnittes zu ersehen ist, für $n>3$ aus den Formen $ap^n\;\overline{12}^2\,\overline{13}^2\,\overline{23}^2\,(ap^n)^3$ und $\overline{12}^2\,(ap^n)^2\;\overline{12}^4\,(ap^n)^2$ zusammen, während sie sich für $n=3$ auf die Form $4\,\overline{12}^2\,\overline{34}^2\,\overline{13}\,\overline{24}\,(ap^n)^4$ reduziert, da die Operationssymbole $\overline{12}^2\,\overline{13}^2\,\overline{34}^2$ und $\overline{12}^2\,\overline{34}^2\,\overline{13}\,\overline{14}$ den Index 1 viermal enthalten und deshalb, auf das Produkt $a_1p_1{}^3\,.\,.\,a_4p_4{}^3$ angewandt, das Resultat Null geben. Insbesondere hat man für $n=4$

$$\begin{aligned}\overline{(1+2)(3+4)}^2\,\overline{12}^2\,\overline{34}^2\,(ap^4)^4 &= 72\,ap^4\,\overline{12}^2\,\overline{13}^2\,\overline{23}^2\,(ap^4)^3\\ &\quad -6\,\overline{12}^2\,(ap^4)^2\,\overline{12}^4\,(ap^4)^2\end{aligned}$$

und folglich, da nach der Entwickelung der 4ten Potenz der Hyperdeterminante $\overline{1(2+3)}=\overline{12}+\overline{13}$

$$\overline{1(2+3)}^4\,\overline{23}^2\,(ap^4)^3=6\,\overline{12}^2\,\overline{13}^2\,\overline{23}^2\,(ap^4)^3$$

ist,

$$\begin{aligned}\overline{(1+2)(3+4)}^2\,\overline{12}^2\,\overline{34}^2\,(ap^4)^4 &= 12\,ap^4\,\overline{1(2+3)}^4\,\overline{23}^2\,(ap^4)^3\\ &\quad -6\,\overline{12}^2\,(ap^4)^2\,\overline{12}^4\,(ap^4)^2.\end{aligned}$$

91. Den Hyperdeterminantenkomplex

$$\bar p_1\bar p_2\,|\,e_1e_2\;\;\bar p_1\bar p_3\,|\,e_1e_2\;\;\bar p_2\bar p_3\,|\,e_1e_2\,.\,.\,\bar p_1\bar p_r\,|\,e_1e_2\,.\,.\,\bar p_{r-1}\,\bar p_r\,|\,e_1e_2$$

kann man im Falle $m=2$ durch die Determinante

$$\bar p_1{}^{r-1}\,.\,.\,\bar p_r{}^{r-1}\,|\,e_1{}^{r-1}\,.\,.\,e_2{}^{r-1}$$

darstellen und somit die durch ihn bezeichneten Operationen durch die Operationen ersetzen, die durch diese als eine Hyperdeterminante höherer Art zu bezeichnende Determinante angezeigt werden. Diese Operationen bestehen, abgesehen von einer Summenbildung, in einem auf alle möglichen Weisen nicht je einmal, sondern wiederholt vorzunehmenden Entfernen der Gröfsen $p_1,\,.\,.\,,p_r$ und einem an ihre Stelle Setzen der Gröfsen $e_1{}^{r-1},\,.\,.\,,e_2{}^{r-1}$.

Wendet man diese Hyperdeterminante auf die Form $a_1 p_1^{n_1} \,.\,.\, a_r p_r^{n_r}$ an, so erhält man die Form

$$\frac{n_1!\,.\,.\,n_r!}{(n_1-(r-1))!\,.\,.\,(n_r-(r-1))!}$$

$$a_1^{n_1} p_1^{n_1-(r-1)} \,.\,.\, a_r^{n_r} p_r^{n_r-(r-1)} \mid e_1^{r-1} \,.\,.\, e_2^{r-1}$$

und somit bei wiederholter Anwendung derselben die Gleichung

$$(\bar{p}_1^{r-1} \,.\,.\, \bar{p}_r^{r-1} \mid e_1^{r-1} \,.\,.\, e_2^{r-1})^{\varkappa} a_1 p_1^{n_1} \,.\,.\, a_r p_r^{n_r}$$

$$= \frac{n_1!\,.\,.\,n_r!}{(n_1-\varkappa(r-1))!\,.\,.\,(n_r-\varkappa(r-1))!}$$

$$a_1^{n_1} p_1^{n_1-\varkappa(r-1)} \,.\,.\, a_r^{n_r} p_r^{n_r-\varkappa(r-1)} \mid (e_1^{r-1} \,.\,.\, e_2^{r-1})^{\underline{\varkappa}}.$$

Beispielsweise ist die Form, die durch die der Operation $\overline{12}^2\ \overline{13}^2\ \overline{23}^2$ gleichwertige Operation

$$(\bar{p}_1^2 \,.\,.\, \bar{p}_3^2 \mid e_1^2 \,.\,.\, e_2^2)^2$$

aus der Form $a_1 p_1^4 \,.\,.\, a_3 p_3^4$ erzeugt wird,

$$4!^3\, a_1^4 \,.\,.\, a_3^4 \mid (e_1^2 \,.\,.\, e_2^2)^{\underline{2}}$$

und darnach im Falle $a_1 = a, \,.\,.\,, a_3 = a$

$$4!^3\, 3!\, (a^4)^3\, (e_1^2 \,.\,.\, e_2^2)^{\underline{2}}.$$

92. Durch Hyperdeterminanten dieser Art lassen sich die Resultanten und Diskriminanten der binären Formen ableiten.

Die Determinante

$$(a_1^{n_1})^{n_2}\, \varepsilon_1^{n_2-1} \,.\,.\, \varepsilon_2^{n_2-1}\, (a_2^{n_2})^{n_1}\, \varepsilon_1^{n_1-1} \,.\,.\, \varepsilon_2^{n_1-1} \mid e_1^{n_1+n_2-1} \,.\,.\, e_2^{n+n_2-1},$$

die sich nach der Sylvester'schen Methode für die Resultante der Formen $a_1 p^{n_1}$ und $a_2 p^{n_2}$ ergab, erhält man mit dem Faktor $(n_1 + n_2 - 1)!^{n_1+n_2}$ durch die Hyperdeterminante

$$\bar{p}_1^{n_1+n_2-1} \,.\,.\, \bar{p}_{n_1+n_2}^{n_1+n_2-1} \mid e_1^{n_1+n_2-1} \,.\,.\, e_2^{n_1+n_2-1}$$

aus der Form

$$a_1^{n_1}\, \varepsilon_1^{n_2-1}\, p_1^{n_1+n_2-1} \,.\,.\, a_1^{n_1}\, \varepsilon_2^{n_2-1}\, p_{n_2}^{n_1+n_2-1}$$
$$.\, a_2^{n_2}\, \varepsilon_1^{n_1-1}\, p_{n_2+1}^{n_1+n_2-1} \,.\,.\, a_2^{n_2}\, \varepsilon_2^{n_1-1}\, p_{n_2+n_1}^{n_1+n_2-1}$$

oder

$$a_1 p_1^{n_1} \,.\,.\, a_1 p_{n_2}^{n_1} \,.\, a_2 p_{n_2+1}^{n_2} \,.\,.\, a_2 p_{n_2+n_1}^{n_2}$$
$$.\, p_1^{n_2-1}\, \varepsilon_1^{n_2-1} \,.\,.\, p_{n_2}^{n_2-1}\, \varepsilon_2^{n_2-1} \,.\, p_{n_2+1}^{n_1-1}\, \varepsilon_1^{n_1-1} \,.\,.\, p_{n_2+n_1}^{n_1-1}\, \varepsilon_2^{n_1-1}.$$

Dasselbe ist der Fall, wenn man in dieser Form die Gröſsen $\varepsilon_1^{n_2-1}, \,.\,.\,, \varepsilon_2^{n_2-1}$ und $\varepsilon_1^{n_1-1}, \,.\,.\,, \varepsilon_2^{n_1-1}$ in einer anderen Anordnung annimmt, sobald man sie mit dem Minuszeichen versieht, wenn die Reihe der

Elemente der betreffenden Permutation durch eine ungerade Anzahl von Vertauschungen zweier Elemente in die ursprüngliche Reihe übergeht. Die Anzahl der Permutationen von n Elementen ist nun $n!$. Folglich geht die Sylvester'sche Determinante

$$(a_1^{n_1})^{n_2}\,\varepsilon_1^{n_2-1}\ldots\varepsilon_2^{n_2-1}\,(a_2^{n_2})^{n_1}\,\varepsilon_1^{n_1-1}\ldots\varepsilon_2^{n_1-1}\mid e_1^{n_1+n_2-1}\ldots e_2^{n_1+n_2-1}$$

in der Verbindung mit dem Faktor

$$n_1!\,n_2!\,(n_1+n_2-1)!^{n_1+n_2}$$

durch die Hyperdeterminante

$$\bar{p}_1^{n_1+n_2-1}\ldots\bar{p}_{n_1+n_2}^{n_1+n_2-1}\mid e_1^{n_1+n_2-1}\ldots e_2^{n_1+n_2-1}$$

aus der Form

$$a_1p_1^{n_1}\ldots a_1p_{n_2}^{n_1}\cdot a_2p_{n_2+1}^{n_2}\ldots a_2p_{n_2+n_1}^{n_2}$$
$$\cdot p_1^{n_2-1}\ldots p_{n_2}^{n_2-1}\mid\varepsilon_1^{n_2-1}\ldots\varepsilon_2^{n_2-1}\cdot p_{n_2+1}^{n_1-1}\ldots p_{n_2+n_1}^{n_1-1}\mid\varepsilon_1^{n_1-1}\ldots\varepsilon_2^{n_1-1}$$

hervor.

In gleicher Weise wird die Bézout-Cayley'sche Determinante

$$(a_1^{n_1}\,a_2^{n_2}\mid e_1e_2\urcorner)^{n_2}\,e_1^{n_2-1}\ldots e_2^{n_2-1}\,(a_2^{n_2})^{n_1-n_2}\,\varepsilon_1^{n_1-n_2-1}\ldots\varepsilon_2^{n_1-n_2-1}\mid e_1^{n_1-1}\ldots e_2^{n_1-1}$$

in der Verbindung mit dem Faktor

$$(n_1-n_2)!\;n_2!\,(n_1-1)!^{n_1}\,(n_2-1)!^{n_2}$$

durch das Hyperdeterminantenprodukt

$$\bar{p}_1^{n_1-1}\ldots\bar{p}_{n_1}^{n_1-1}\mid e_1^{n_1-1}\ldots e_2^{n_1-1}\cdot\bar{p}_{n_1+1}^{n_2-1}\ldots p_{n_1+n_2}^{n_2-1}\mid e_1^{n_2-1}\ldots e_2^{n_2-1}$$

aus der Form

$$(a_1^{n_1}\,a_2^{n_2}\mid e_1e_2\urcorner)\,p_1^{n_1-1}\,p_{n_1+1}^{n_2-1}\ldots(a_1^{n_1}\,a_2^{n_2}\mid e_1e_2\urcorner)\,p_{n_2}^{n_1-1}\,p_{n_1+n_2}^{n_2-1}$$
$$\cdot a_2\,p_{n_2+1}^{n_2}\ldots a_2\,p_{n_1}^{n_2}\cdot p_{n_2+1}^{n_1-n_2-1}\ldots p_{n_1}^{n_1-n_2-1}\mid\varepsilon_1^{n_1-n_2-1}\ldots\varepsilon_2^{n_1-n_2-1}$$

erzeugt.

Und ebenso ergiebt sich die Determinante

$$((a^n)^2\,e_1e_2^{\bar{2}}\urcorner)^{n-1}\,(e_1^{n-2}\ldots e_2^{n-2})^{\bar{2}},$$

welche bis auf einen numerischen Faktor die Diskriminante der Form ap^n darstellt, in der Verbindung mit dem Faktor

$$(n-1)!\,(n-2)!^{2n-2}$$

durch das Hyperdeterminantenprodukt

$$\bar{p}_1^{n-2}\ldots\bar{p}_{n-1}^{n-2}\mid e_1^{n-2}\ldots e_2^{n-2}\cdot\bar{p}_n^{n-2}\ldots\bar{p}_{2n-2}^{n-2}\mid e_1^{n-2}\ldots e_2^{n-2}$$

aus der Form

$$((a^n)^2\,e_1e_2^{\bar{2}}\urcorner)\,p_1^{n-2}\,p_n^{n-2}\ldots((a^n)^2\,e_1e_2^{\bar{2}}\urcorner)\,p_{n-1}^{n-2}\,p_{2n-2}^{n-2}.$$

Im Falle $n_1=n$, $n_2=n$ nimmt die Sylvester'sche Determinante bei Vertauschung von a_1^n und a_2^n in den Faktoren

$a_1^n \varepsilon_1^{n-\varkappa} \varepsilon_2^{\varkappa-1}$ und $a_2^n \varepsilon_1^{n-\varkappa} \varepsilon_2^{\varkappa-1}$ das entgegengesetzte Zeichen an, und dasselbe gilt daher auch von der Form, aus der sie durch eine Hyperdeterminante erzeugt wird, bei Vertauschung von a_1^n und a_2^n in den Faktoren $a_1 p_\varkappa^n$ und $a_2 p_{n+\varkappa}^n$. Ersetzt man also in ihr das Produkt $a_1 p_\varkappa^n a_2 p_{n+\varkappa}^n$ durch die Determinante $a_1^n a_2^n \mid p_\varkappa^n p_{n+\varkappa}^n$, so erhält die durch die Hyperdeterminante aus ihr entstehende Form den Faktor 2. Folglich geht die Sylvester'sche Determinante

$$(a_1^n)^n \varepsilon_1^{n-1} \ldots \varepsilon_2^{n-1} (a_2^n)^n \varepsilon_1^{n-1} \ldots \varepsilon_2^{n-1} \mid e_1^{2n-1} \ldots e_2^{2n-1}$$

in der Verbindung mit dem Faktor

$$2^n n!^2 (2n-1)!^{2n}$$

durch die Hyperdeterminante

$$\bar{p}_1^{2n-1} \ldots \bar{p}_{2n}^{2n-1} \mid e_1^{2n-1} \ldots e_2^{2n-1}$$

auch aus der Form

$$a_1^n a_2^n \mid p_1^n p_{n+1}^n \ldots a_1^n a_2^n \mid p_n^n p_{2n}^n$$
$$\cdot p_1^{n-1} \ldots p_n^{n-1} \mid \varepsilon_1^{n-1} \ldots \varepsilon_2^{n-1} \cdot p_{n+1}^{n-1} \ldots p_{2n}^{n-1} \mid \varepsilon_1^{n-1} \ldots \varepsilon_2^{n-1}$$

hervor.

Die Determinante

$$(a^n e_1)^{n-1} \varepsilon_1^{n-2} \ldots \varepsilon_2^{n-2} (a^n e_2)^{n-1} \varepsilon_1^{n-2} \ldots \varepsilon_2^{n-2} \mid e_1^{2n-3} \ldots e_2^{2n-3},$$

welche bis auf einen numerischen Faktor die Diskriminante der Form ap^n darstellt, wird darnach in der Verbindung mit dem Faktor

$$2^{n-1} (n-1)!^2 (2n-3)!^{2n-2}$$

durch die Hyperdeterminante

$$\bar{p}_1^{2n-3} \ldots \bar{p}_{2n-2}^{2n-3} \mid e_1^{2-n3} \ldots e_2^{2n-3}$$

aus der Form

$$(a^n)^2 e_1 e_2 \mid p_1^{n-1} p_n^{n-1} \ldots (a^n)^2 e_1 e_2 \mid p_{n-1}^{n-1} p_{2n-2}^{n-1}$$
$$\cdot p_1^{n-2} \ldots p_{n-1}^{n-2} \mid \varepsilon_1^{n-2} \ldots \varepsilon_2^{n-2} \cdot p_n^{n-2} \ldots p_{2n-2}^{n-2} \mid \varepsilon_1^{n-2} \ldots \varepsilon_2^{n-2}$$

erzeugt.

Die für die Darstellung der Resultanten und Diskriminanten durch Hyperdeterminanten gegebenen Formen sind augenscheinlich sämtlich invariante Formen.

93. Die Hyperdeterminante $\bar{p}_1 \ldots \bar{p}_m \mid e_1 \ldots e_m$ behält ihre Invarianteneigenschaft, wenn in ihr irgend welche Operationssymbole $\bar{p}$ durch Gröfsen ersetzt werden, die der Reihe der Gröfsen a angehören. Sie setzt sich dann nach dem Laplace'schen Determinantensatze aus Determinanten und Hyperdeterminanten zusammen und kann deshalb als eine gemischte Hyperdeterminante $m$ten Grades bezeichnet werden.

Eine gemischte Hyperdeterminante hat die Form

$$\bar{p}_1 \cdot\cdot \bar{p}_n \, a_{n+1,0} \cdot\cdot a_{m,0} \,|\, e_1 \cdot\cdot e_m$$

und geht offenbar, wenn wir

$$p_{1,0} \cdot\cdot p_{n,0} = a_{n+1,0} \cdot\cdot a_{m,0} \,|\, e_1 \cdot\cdot e_m$$

oder

$$a_{n+1,0} \cdot\cdot a_{m,0} = (-1)^{(m-n)n} \, p_{1,0} \cdot\cdot p_{n,0} \,|\, \varepsilon_1 \cdot\cdot \varepsilon_m$$

setzen, in die Hyperdeterminante

$$\bar{p}_1 \cdot\cdot \bar{p}_n \,|\, p_{1,0} \cdot\cdot p_{n,0}$$

über.

Insbesondere ist

$$\bar{p}_1 \cdot\cdot \bar{p}_{m-1} \, a_{m,0} \,|\, e_1 \cdot\cdot e_m = \bar{p}_1 \cdot\cdot \bar{p}_{m-1} \,|\, p_{1,0} \cdot\cdot p_{m-1,0}$$

für

$$p_{1,0} \cdot\cdot p_{m-1,0} = a_{m,0} \,|\, e_1 \cdot\cdot e_m$$

oder

$$a_{m,0} = (-1)^{m-1} \, p_{1,0} \cdot\cdot p_{m-1,0} \,|\, \varepsilon_1 \cdot\cdot \varepsilon_m \, .$$

94. Ein Komplex von Hyperdeterminanten $m$ten Grades, der die Operationssymbole $\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_r$ und die Gröſse $a_{m,0}$ enthält, giebt, auf das Produkt

$$a_1 p_1^{n_1} \cdot\cdot a_r p_r^{n_r}$$

angewandt, nach Unterdrückung der Indices der Gröſsen p eine invariante Form für p, die man als eine simultane Kontravariante oder Konkomitante der Formen $a_1 p^{n_1}, \ldots, a_r p^{n_r}$ bezeichnet, je nachdem sie auſser den Koefficienten der Formen nur die Gröſse $a_{m,0}$ oder neben dieser noch die Gröſse p enthält.

Die Form ap^n, welche für $p = p\varepsilon_1 . e_1 + \cdot\cdot + p\varepsilon_m . e_m$ eine Form $m$ter Ordnung ist, wird bei Zugrundelegung der Einheiten $p_{1,0}, \ldots, p_{m-1,0}$ für alle Gröſsen p, die sich durch sie darstellen lassen, zu einer Form $(m-1)$ter Ordnung. Aus einer Invariante oder Kovariante von Formen $(m-1)$ter Ordnung geht daher bezw. eine Kontravariante oder Konkomitante von Formen $m$ter Ordnung hervor, wenn man in ihr unter Einführung der Einheiten $p_{1,0}, \ldots, p_{m-1,0}$ das kombinatorische Produkt dieser $m-1$ Einheiten durch die Gröſse

$a_{m,0} | e_1 \ldots e_m$ ersetzt. Beispielsweise ist für die binären quadratischen Formen $a_1 p^2$ und $a_2 p^2$ die Form $\bar{p}_1 \bar{p}_2 | e_1 e_2{}^2 \; a_1 p_1{}^2 \; a_2 p_2{}^2$ eine Invariante; folglich ist die Form $\bar{p}_1 \bar{p}_2 | p_{1,0} \, p_{2,0}{}^2 \, a_1 p_1{}^2 \, a_2 p_2{}^2$ bei Zugrundelegung der Einheiten $p_{1,0}$, $p_{2,0}$ eine Invariante und somit die Form $\bar{p}_1 \bar{p}_2 \, a_{3,0} | e_1 e_2 e_3{}^2 \;\; a_1 p_2{}^2 \;\; a_2 p_2{}^2$, wie es in der That der Fall ist, eine Kontravariante der ternären quadratischen Formen $a_1 p^2$ und $a_2 p^2$.

95. Die gemischte Hyperdeterminante $\bar{p}_1 \ldots \bar{p}_{m-1} \, a_{m,0} | e_1 \ldots e_m$ bezeichnet man in abgekürzter Weise durch $\overline{1 \ldots (m-1) a}$, und es gelten für sie in der Hyperdeterminantenrechnung Gleichungen von derselben Art, wie für die Hyperdeterminante $\overline{1 \ldots m}$. So ist z. B. für $m = 3$

$$\bar{p}_1 \bar{p}_2 \bar{p}_3 \, a_{4,0} \, | \, p e_1 e_2 e_3 = 0$$

und daher

$$a_{4,0} \, p \, . \, \overline{123} = \dot{1} \, \overline{23a} - \dot{2} \, \overline{13a} + \dot{3} \, \overline{12a}.$$

Sechstes Kapitel.

Typische Darstellung der Formen.

96. Nimmt man statt der Einheiten $e_1, \ldots, e_m$ die Gröſsen $p_1, \ldots, p_m$ als Einheiten an, so stellt sich die Gröſse p in der Form

$$p = p\bar{p}_1 \cdot p_1 + \ldots + p\bar{p}_m \cdot p_m$$

und darnach durch die Gleichung

$$p_1 \ldots p_m \,|\, \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m \, . \, p$$

$$= p\bar{p}_1 \, p_1 \ldots p_m \,|\, \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m \cdot p_1 + \ldots + p\bar{p}_m \, p_1 \ldots p_m \,|\, \varepsilon_1 \ldots e_m \cdot p_m$$

dar. Da nun ferner

$$p_1 \ldots p_m = p_1 \ldots p_m \,|\, \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m \, . \, e_1 \ldots e_m$$

ist, so läſst sich also eine jede durch Hyperdeterminanten entstehende Invariante und Kovariante der Form ap^n durch die $m+1$ Determinanten

$$p_1 \ldots p_m \,|\, \varepsilon_1 \ldots e_m, \;\; p\bar{p}_1 \, p_1 \ldots p_m \,|\, \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m, \ldots, p\bar{p}_m \, p_1 \ldots p_m \,|\, \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m$$

und die $\binom{n+m-1}{m-1}$ $n$ten Polaren der Form ap^n von p für $p_1, \ldots,$

p_m, die sämtlich die Invarianteneigenschaft besitzen, rational so ausdrücken, dafs nur eine Potenz der ersten Gröfse im Nenner auftritt.

In dem weiterhin allein in Betracht kommenden Falle $m=2$ sind also in dieser sogenannten typischen Weise vermittelst der Gleichungen

$$p = p\bar{p}_1 \cdot p_1 + p\bar{p}_2 \cdot p_2\,, \quad p_1 p_2 = p_1 p_2 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2 \,.\, e_1 e_2$$

alle Invarianten und Kovarianten der Form ap^n durch die $n+4$ Gröfsen

$$p_1 p_2 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2\,, \quad pp_2 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2\,, \quad p_1 p \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2\,; \quad a^n\, p_1{}^{n-\varkappa}\, p_2{}^{\varkappa}$$

für $\varkappa = 0, \ldots, n$ darstellbar, und insbesondere ist

$$p_1 p_2 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^n \,.\, ap^n = \sum_0^n \binom{n}{\varkappa} a^n\, p_1{}^{n-\varkappa}\, p_2{}^{\varkappa} \,.\, pp_2 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^{n-\varkappa}\, p_1 p \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^{\varkappa}\,.$$

Vergl. den 7ten Abschnitt: „Typische Darstellungen“ in Clebsch's „Theorie der binären algebraischen Formen. Leipzig, 1872.“

97. Wir bemerken, dafs sich nach der Gleichung

$$a_1{}^{n_1}\, p_1{}^{n_1-\lambda}\, a_2{}^{n_2}\, p_2{}^{n_2-\lambda} \mid \overline{p_1 p_2}^{\lambda}$$

$$= \sum_0^\lambda (-1)^\mu \binom{\lambda}{\mu} a_1{}^{n_1}\, p_1{}^{n_1-\mu}\, p_2{}^{\mu}\, a_2{}^{n_2}\, p_1{}^{\mu}\, p_2{}^{n_2-\mu}$$

auch der Ausdruck

$$a^n\, p_1{}^{n-\lambda}\, a^n\, p_1{}^{n-\varkappa}\, p_2{}^{\varkappa-\lambda} \mid \overline{p_1 p_2}^{\lambda}$$

durch die Polaren der Form ap^n ausdrücken läfst; es ist nämlich

$$a^n\, p_1{}^{n-\lambda}\, a^n\, p_1{}^{n-\varkappa}\, p_2{}^{\varkappa-\lambda} \mid \overline{p_1 p_2}^{\lambda}$$

$$= \sum_0^\lambda (-1)^\mu \binom{\lambda}{\mu} a^n\, p_1{}^{n-\mu}\, p_2{}^{\mu}\, a^n\, p_1{}^{n-\varkappa+\mu}\, p_2{}^{\varkappa-\mu}\,.$$

Dieser Ausdruck nimmt bei Vertauschung der Gröfsen $a^n\, p_1{}^{n-\lambda}$ und $a^n\, p_1{}^{n-\varkappa}\, p_2{}^{\varkappa-\lambda}$ den Faktor $(-1)^\lambda$ und somit bei ungeradem λ das entgegengesetzte Zeichen an, während er bei geradem λ unverändert seinen Wert beibehält. Es hat daher der Ausdruck

$$(a^n\, p_1{}^{n-\lambda}\, a^n\, p_1{}^{n-\varkappa}\, p_2{}^{\varkappa-\lambda} - a^n\, p_1{}^{n-\varkappa}\, p_2{}^{\varkappa-\lambda}\, a^n\, p_1{}^{n-\lambda}) \mid \overline{p_1 p_2}^{\lambda}$$

oder der ihm gleichwertige Ausdruck

$$(a^n\, p_1{}^{n-\lambda-1}\, p_2{}^0\, a^n\, p_1{}^{n-\varkappa}\, p_2{}^{\varkappa-\lambda-1} + \ldots$$
$$+ a^n\, p_1{}^{n-\varkappa}\, p_2{}^{\varkappa-\lambda-1}\, a^n\, p_1{}^{n-\lambda-1}\, p_2{}^0) \mid \overline{p_1 p_2}^{\lambda+1}$$

bei ungeradem λ den Wert

$$2a^n p_1^{n-\lambda}\, a^n p_1^{n-\varkappa} p_2^{\varkappa-\lambda} \mid p_1p_2^{\overline{\lambda}}$$

und bei geradem λ den Wert Null. Bezeichnen wir also den Ausdruck

$$\frac{(a^n p_1^{n-\lambda}\, a^n p_1^{n-\varkappa} p_2^{\varkappa-\lambda} - a^n p_1^{n-\varkappa} p_2^{\varkappa-\lambda}\, a^n p_1^{n-\lambda}) \mid e_1e_2^{\overline{\lambda}}}{p_1p_2 \mid \varepsilon_1\varepsilon_2}$$

$$= (a^n p_1^{n-\lambda-1} p_2^0\, a^n p_1^{n-\varkappa} p_2^{\varkappa-\lambda-1} + \ldots$$

$$+ a^n p_1^{n-\varkappa} p_2^{\varkappa-\lambda-1}\, a^n p_1^{n-\lambda-1} p_2^0) \mid e_1e_2^{\overline{\lambda+1}}$$

in gleicher Weise, wie den bei der Bézout-Cayley'schen Resultantenbildung benutzten Ausdruck, durch

$$(a^n p_1^{n-\varkappa} a^n p_1^{n-\varkappa} \mid e_1e_2^{\overline{\lambda+1}} \rceil\, p_1^{\varkappa-\lambda-1}\, p_2^{\varkappa-\lambda-1}$$

oder, indem wir λ als ungerade voraussetzen, durch

$$2((a^n p_1^{n-\varkappa})^2\, e_1e_2^{\overline{\lambda+1}} \rceil\, p_1^{\varkappa-\lambda-1}\, p_2^{\varkappa-\lambda-1},$$

so ist

$$a^n p_1^{n-\lambda}\, a^n p_1^{n-\varkappa} p_2^{\varkappa-\lambda} \mid p_1p_2^{\overline{\lambda}}$$

$$= p_1p_2 \mid \varepsilon_1\varepsilon_2^{\overline{\lambda+1}}\, ((a^n\, p_1^{n-\varkappa})^2\, e_1e_2^{\overline{\lambda+1}} \rceil\, p_1^{\varkappa-\lambda-1}\, p_2^{\varkappa-\lambda-1}$$

und folglich

$$p_1p_2 \mid \varepsilon_1\varepsilon_2^{\overline{\lambda+1}}\, ((a^n\, p_1^{n-\varkappa})^2\, e_1e_2^{\overline{\lambda+1}} \rceil\, p_1^{\varkappa-\lambda-1}\, p_2^{\varkappa-\lambda-1}$$

$$= \sum_0^{\lambda} (-1)^{\mu} \binom{\lambda}{\mu}\, a^n\, p_1^{n-\mu} p_2^{\mu}\, a^n\, p_1^{n-\varkappa+\mu}\, p_2^{\varkappa-\mu}.$$

Die Form

$$((a^n p_1^{n-\varkappa})^2\, e_1e_2^{\overline{\lambda+1}} \rceil\, p_1^{\varkappa-\lambda-1}\, p_2^{\varkappa-\lambda-1}$$

nimmt nun für $\varkappa = \lambda + 1$ die Form

$$\tfrac{1}{2}\, a^n\, p_1^{n-\lambda-1}\, a^n\, p_1^{n-\lambda-1} \mid e_1e_2^{\overline{\lambda+1}}$$

und für $\varkappa = \lambda + 2$ die Form

$$\tfrac{1}{2}(a^n p_1^{n-\lambda-1}\, a^n\, p_1^{n-\lambda-2} p_2 + a^n p_1^{n-\lambda-2} p_2\, a^n p_1^{n-\lambda-1}) \mid e_1e_2^{\overline{\lambda+1}}$$

an. Es ist daher

$$((a^n p_1^{n-\lambda-1})^2\, e_1e_2^{\overline{\lambda+1}} \rceil\, p_1^0\, p_2^0 = (a^n)^2\, e_1e_2^{\overline{\lambda+1}}\, p_1^{2n-2\lambda-2},$$

$$((a^n p_1^{n-\lambda-2})^2\, e_1e_2^{\overline{\lambda+1}} \rceil\, p_1\, p_2 = 2(a^n)^2\, e_1e_2^{\overline{\lambda+1}}\, p_1^{2n-2\lambda-3}\, p_2,$$

und man erhält somit aus der letzten Formel für $\lambda = 1$, $\varkappa = 2,3$; $\lambda = 3$, $\varkappa = 4,5$; $\lambda = 5$, $\varkappa = 6,7$; u. s. w. die folgende Reihe von Gleichungen

$$ap_1^n\, a^n\, p_1^{n-2} p_2^2 = p_1p_2 \mid \varepsilon_1\varepsilon_2^{\overline{2}}\, (a^n)^2\, e_1e_2^{\overline{2}}\, p_1^{2n-4} + (a^n p_1^{n-1} p_2)^2,$$

$$ap_1{}^n\, a^n\, p_1{}^{n-3} p_2{}^3 = 2\, p_1 p_2 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^2\; (a^n)^2\, e_1 e_2^{\underline{2}}\, p_1{}^{2n-5} p_2 + a^n\, p_1{}^{n-1}\, p_2$$
$$a^n\, p_1{}^{n-2}\, p_2{}^2,$$

$$ap_1{}^n\, a^n\, p_1{}^{n-4} p_2{}^4 = p_1 p_2 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^4\, (a^n)^2\, e_1 e_2^{\underline{4}}\; p_1{}^{2n-8} + 4\, a^n\, p_1{}^{n-1}\, p_2$$
$$a^n\, p_1{}^{n-3}\, p_2{}^3 - 3\,(a^n\, p_1{}^{n-2}\, p_2{}^2)^2,$$

$$ap_1{}^n\, a^n\, p_1{}^{n-5}\, p_2{}^5 = 2\, p_1 p_2 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^4\; (a^n)^2\, e_1 e_2^{\underline{4}}\; p_1{}^{2n-9}\, p_2 + 3\, a^n\, p_1{}^{n-1}\, p_2$$
$$a^n\, p_1{}^{n-4}\, p_2{}^4 - 2\, a^n\, p_1{}^{n-2}\, p_2{}^2\, a^n\, p_1{}^{n-3}\, p_2{}^3,$$

$$ap_1{}^n\, a^n\, p_1{}^{n-6}\, p_2{}^6 = p_1 p_2 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^6\, (a^n)^2\, e_1 e_2^{\underline{6}}\, p_1{}^{2n-12} + 6\, a^n\, p_1{}^{n-1}\, p_2$$
$$a^n\, p_1{}^{n-5}\, p_2{}^5 - 15\, a^n\, p_1{}^{n-2}\, p_2{}^2\, a^n\, p_1{}^{n-4}\, p_2{}^4 + 10\,(a^n\, p_1{}^{n-3}\, p_2{}^3)^2,$$

$$ap_1{}^n\, a^n\, p_1{}^{n-7}\, p_2{}^7 = 2\, p_1 p_2 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^6\; (a^n)^2\, e_1 e_2^{\underline{6}}\; p_1{}^{2n-13}\, p_2 + 5\, a^n\, p_1{}^{n-1}\, p_2$$
$$a^n\, p_1{}^{n-6} p_2{}^6 - 9\, a^n\, p_1{}^{n-2} p_2{}^2\, a^n\, p_1{}^{n-5} p_2{}^5 + 5\, a^n\, p_1{}^{n-3} p_2{}^3\, a^n\, p_1{}^{n-4} p_2{}^4,$$

u. s. w.

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich, daſs sich die Polare

$$a^n\, p_1{}^{n-\varkappa}\, p_2{}^{\varkappa}$$

durch das Produkt der Form $ap_1{}^n$ und einer ganzen rationalen Funktion der 2 Quotienten

$$p_1 p_2 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2 : ap_1{}^n, \quad a^n\, p_1{}^{n-1}\, p_2 : ap_1{}^n$$

und der $\varkappa$ ersten der n Formen

$$ap_1{}^n,\; (a^n)^2\, e_1 e_2^{\underline{2}}\; p_1{}^{2n-4},\; (a^n)^2\, e_1 e_2^{\underline{2}}\; p_1{}^{2n-5}\, p_2,$$
$$(a^n)^2\, e_1 e_2^{\underline{4}}\; p_1{}^{2n-8},\; (a^n)^2\, e_1 e_2^{\underline{4}}\; p_1{}^{2n-9}\, p_2, \ldots$$

darstellen läſst.

98. Die Gröſsen

$$p_1 p_2 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2,\; ap_1{}^n,\; a^n\, p_1{}^{n-1}\, p_2$$

sind mit einander durch die Gleichung

$$p_1 p_2 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2 \,.\, a^n\, p_1{}^{n-1} \mid e_1 e_2 = a^n\, p_1{}^{n-1}\, p_2 \,.\, p_1 - ap_1{}^n \,.\, p_2$$

verbunden, da die links stehende Gröſse in der Form $a^n\, p_1{}^{n-1} \mid p_1 p_2$ darstellbar ist.

Wir setzen daher

$$p_2 = - a^n\, p_1{}^{n-1} \mid e_1 e_2 \quad \text{oder} \quad a^n\, p_1{}^{n-1} = p_2 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2.$$

Es ist dann

$$p_1 p_2 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2 = ap_1{}^n,\; p p_2 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2 = a^n\, p_1{}^{n-1}\, p,\; a^n\, p_1{}^{n-1}\, p_2 = 0,$$

ferner, wie die Gleichung

$$a^n\, p_1{}^{n-\lambda}\, a^n\, p_2{}^{n-\varkappa}\, p_2{}^{\varkappa-\lambda} \mid p_1 p_2^{\underline{\lambda}}$$
$$= p_1 p_2 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^{\lambda+1}\, ((a^n\, p_1{}^{n-\varkappa})^2\, e_1 e_2^{\underline{\lambda+1}})\, p_1{}^{\varkappa-\lambda-1}\, p_2{}^{\varkappa-\lambda-1}$$

für $\lambda = 1$ ergiebt,

$$a^n p_1{}^{n-\varkappa} p_2{}^{\varkappa} = ap_1{}^n \left((a^n p_1{}^{n-\varkappa})^2 e_1e_2\overset{2}{-}\rceil\right) p_1{}^{\varkappa-2} p_2{}^{\varkappa-2}$$

und endlich, da die Quotienten

$$p_1p_2 \mid \varepsilon_1\varepsilon_2 : ap_1{}^n, \quad a^n p_1{}^{n-1} p_2 : ap_1{}^n$$

bezw. der Eins und der Null gleich sind und

$$(a^n)^2\, e_1e_2\overset{\lambda+1}{-}\, p_1{}^{2n-2\lambda-3}\, p_2 = a^n\,(a^n)^2\, e_1e_2\overset{\lambda+1}{-} \mid e_1e_2\; p_1{}^{3n-2\lambda-4}$$

ist, die Form

$$((a^n p_1{}^{n-\varkappa})^2\, e_1e_2\overset{2}{-}\rceil\, p_1{}^{\varkappa-2}\, p_2{}^{\varkappa-2}$$

eine ganze rationale Funktion der $\varkappa$ ersten der n Formen

$$ap_1{}^n,\; (a^n)^2\, e_1e_2\overset{2}{-}\, p_1{}^{2n-4},\; a^n\,(a^n)^2\, e_1e_2\overset{2}{-} \mid e_1e_2\; p_1{}^{3n-6};$$
$$(a^n)^2\, e_1e_2\overset{4}{-}\, p_1{}^{2n-8},\; a^n\,(a^n)^2\, e_1\varepsilon_2\overset{4}{-} \mid e_1e_2\; p_1{}^{3n-10}, \ldots$$

Aus der im vorigen Abschnitte gegebenen Reihe von Gleichungen erhält man für diese Form, die für $\varkappa = 0$ der Eins und für $\varkappa = 1$ der Null gleichzusetzen ist, die folgenden Ausdrücke:

$$((a^n p_1{}^{n-2})^2 e_1e_2\overset{2}{-}\rceil\, p_1{}^0 p_2{}^0 = (a^n)^2 e_1e_2\overset{2}{-}\, p_1{}^{2n-4},$$
$$((a^n p_1{}^{n-3})^2 e_1e_2\overset{2}{-}\rceil\, p_1\; p_2 = 2\; a^n\,(a^n)^2\, e_1e_2\overset{2}{-} \mid e_1e_2\; p_1{}^{3n-6},$$
$$((a^n p_1{}^{n-4})^2 e_1e_2\overset{2}{-}\rceil\, p_1{}^2 p_2{}^2 = \left((a^n)^2 . (a^n)^2 e_1e_2\overset{4}{-} - 3\,((a^n)^2 e_1e_2\overset{2}{-})^2\right) p_1{}^{4n-8},$$
$$((a^n p_1{}^{n-5})^2\, e_1e_2\overset{2}{-}\rceil\, p_1{}^3 p_2{}^3 = 2\left((a^n)^2 . a^n (a^n)^2 e_1e_2\overset{4}{-} \mid e_1e_2 - 2\,(a^n)^2\, e_1e_2\overset{2}{-}\right.$$
$$\left. . a^n (a^n)^2 e_1e_2\overset{2}{-} \mid e_1e_2\right)\; p_1{}^{5n-10},$$
$$((a^n p_1{}^{n-6})^2\, e_1e_2\overset{2}{-}\rceil\, p_1{}^4 p_2{}^4 = \left((a^n)^4 . (a^n)^2 e_1e_2\overset{6}{-} - 15 (a^n)^2 . (a^n)^2\; e_1e_2\overset{4}{-}\right.$$
$$\left. . (a^n)^2\; e_1e_2\overset{2}{-} + 45\,((a^n)^2\; e_1e_2\overset{2}{-})^3 + 40\; a^n\;(a^n)^2\; e_1e_2\overset{2}{-} \mid e_1e_2{}^2\right)\; p_1{}^{6n-12},$$
$$((a^n p_1{}^{n-7})^2\, e_1e_2\overset{2}{-}\rceil\; p_1{}^5 p_2{}^5 = 2\left((a^n)^4 \cdot a^n (a^n)^2 e_1e_2\overset{6}{-} \mid e_1e_2 - (a^n)^2\right.$$
$$. (9\,(a^n)^2\, e_1e_2\overset{2}{-} . a^n (a^n)^2\, e_1e_2\overset{4}{-} \mid e_1e_2 - 5\; a^n\,(a^n)^2\; e_1e_2\overset{2}{-} \mid e_1e_2 . (a^n)^2 e_1e_2\overset{4}{-})$$
$$\left. + 3\,((a^n)^2 e_1e_2\overset{2}{-})^2 . a^n (a^n)^2\, e_1e_2\overset{2}{-} \mid e_1e_2\right)\; p_1{}^{7n-14},$$

u. s. w.

99. Nimmt man also

$$p_2 = -\, a^n\, p_1{}^{n-1} \mid e_1e_2$$

an, so lassen sich alle Invarianten und Kovarianten der binären Form ap^n durch die 3 Formen

$$ap_1{}^n,\quad a^n\, p_1{}^{n-1}\, p,\quad p_1p \mid \varepsilon_1\varepsilon_2$$

und die $n-1$ Formen

$$(a^n)^2\, e_1e_2\overset{2}{-}\, p_1{}^{2n-4},\; a^n\,(a^n)^2\, e_1e_2\overset{2}{-} \mid e_1e_2\;\; p_1{}^{3n-6},$$
$$(a^n)^2\, e_1e_2\overset{4}{-}\, p_1{}^{2n-8},\; a^n\,(a^n)^2\, e_1e_2\overset{4}{-} \mid e_1e_2\;\; p_1{}^{3n-10}, \ldots,$$

im Ganzen durch $n+2$ invariante Formen rational so ausdrücken, dafs nur eine Potenz der Form $ap_1{}^n$ im Nenner auftritt.

Die Formen

$$(a^n)^2\, \overline{e_1 e_2}^{\lambda+1}\, p^{2n-2\lambda-2},\quad a^n\, (a^n)^2\, \overline{e_1 e_2}^{\lambda+1}\, |\, e_1 e_2\ \ p^{3n-2\lambda-4},$$

die für $\lambda = 1, 3, ..$ die sogenannten $n-1$ Stammformen der Form ap^n darstellen, gehen aus der Form ap^n durch die Hyperdeterminantenkomplexe

$$\overline{12}^{\lambda+1},\quad \overline{1\,(2+3)}\ \ \overline{23}^{\lambda+1}$$

hervor und sind in der Verbindung mit den Faktoren

$$\frac{2\,.\,n!^2}{(n-\lambda-1)!^2},\quad \frac{4\,.\,n!^2\, n}{(n-\lambda-1)!\,(n-\lambda-2)!}$$

bei ungeradem λ den Formen

$$\overline{12}^{\lambda+1}\,(ap^n)^2,\quad \overline{12}\ \ \overline{23}^{\lambda+1}\,(ap^n)^3$$

identisch gleich.

Für die Form ap^n selbst gilt die Gleichung

$$(ap_1{}^n)^{n-1}\, ap^n$$

$$= \sum_0^n \binom{n}{\varkappa} \big((a^n\, p_1{}^{n-\varkappa})^2\, \overline{e_1 e_2}^2 \big)\, p_1{}^{\varkappa-2}\, p_2{}^{\varkappa-2}\ \ (a^n\, p_1{}^{n-1}\, p)^{n-\varkappa}\, p_1 p\, |\, \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^{\varkappa}$$

und darnach für die Gröfse a^n die Gleichung

$$(ap_1{}^n)^{n-1}\, a^n$$

$$= \sum_0^n (-1)^{\varkappa} \binom{n}{\varkappa} \big((a^n\, p_1{}^{n-\varkappa})^2\, \overline{e_1 e_2}^2 \big)\, p_1{}^{\varkappa-2}\, p_2{}^{\varkappa-2}\ \ (a^n\, p_1{}^{n-1})^{n-\varkappa}\, p_1\, |\, \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^{\varkappa}.$$

100. In dem Falle $n = 2$ hat man, da

$$\big((a^2\, p_1{}^0)^2\, \overline{e_1 e_2}^2 \big)\ p_1{}^0 p_2{}^0 = (a^2)^2\, \overline{e_1 e_2}^2$$

ist, die Gleichung

$$ap_1{}^2\, a^2 = (a^2\, p_1)^2 + (a^2)^2\, \overline{e_1 e_2}^2\ p_1\, |\, \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^2$$

und kann darnach die Gröfse $ap_1{}^2\, a^2$ in zwei lineare Faktoren zerlegen, die sich in der Form

$$a^2\, p_1 - \sqrt[2]{-(a^2)^2\, \overline{e_1 e_2}^2\ \ p_1\, |\, \varepsilon_1 \varepsilon_2}$$

darstellen, wenn man der Quadratwurzel nach einander die Faktoren $+1$ und -1 beifügt.

Die Verschwindungsgröfsen der quadratischen Form ap^2 sind daher durch die Gleichung

$$(a^2\, p_1 - \sqrt[2]{-(a^2)^2\, \overline{e_1 e_2}^2\ \ p_1\, |\, \varepsilon_1 \varepsilon_2})\, p = 0$$

bestimmt und haben somit, da

$$(p_1 \mid \varepsilon_1\varepsilon_2) \mid e_1 e_2 = - p_1$$

ist, die Form

$$p \equiv a^2 p_1 \mid e_1 e_2 + \sqrt[2]{-(a^2)^2\, e_1 e_2{}^{\bar{2}}}\; p_1$$

oder

$$p \equiv (a^2 \mid e_1 e_2 + \sqrt[2]{-(a^2)^2\, e_1 e_2{}^{\bar{2}}})\; p_1.$$

Die Invariante

$$(a^2)^2\, e_1 e_2{}^{\bar{2}}$$

ist die Diskriminante der quadratischen Form ap^2.

Der Eintritt der beliebigen Gröſse p_1 in die Form der Verschwindungsgröſsen der Form ap^2 dient nur dazu, sie in einer Form darzustellen, die alle möglichen Darstellungen in sich enthält, und findet darin seine Erklärung, daſs die Gröſsen

$$a^2 e_1 \mid e_1 e_2 + \sqrt[2]{-(a^2)^2\, e_1 e_2{}^{\bar{2}}}\; e_1,\; a^2 e_2 \mid e_1 e_2 + \sqrt[2]{-(a^2)^2\, e_1 e_2{}^{\bar{2}}}\; e_2$$

sich von einander nur um einen aus den Koefficienten der Form ap^2 zusammengesetzten Faktor unterscheiden.

Die Wurzeln der quadratischen Gleichung $a^2\, \varepsilon_2{}^{-2}\, p^0 = 0$ sind durch die Gleichung

$$p^0\, \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^{-1} = \frac{+a^2 p_1\, e_2 + \sqrt[2]{-(a^2)^2\, e_1 e_2{}^{\bar{2}}}\; p_1 \varepsilon_1}{-a^2 p_1\, e_1 + \sqrt[2]{-(a^2)^2\, e_1 e_2{}^{\bar{2}}}\; p_1 \varepsilon_2}$$

gegeben. Insbesondere ist für $p_1 = e_1$

$$p^0\, \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^{-1} = \frac{+a^2 e_1 e_2 + \sqrt[2]{-(a^2)^2\, e_1 \varepsilon_2{}^{\bar{2}}}}{-a e_1{}^2}.$$

Übrigens gelangt man zur Bestimmung der Verschwindungsgröſsen der binären quadratischen Form auch durch eine eigentümliche Darstellung der allgemeinen quadratischen Form, die sich aus der Determinantengleichung

$$a_1 \ldots a_n \mid e_1 \ldots e_n$$
$$= a_\varkappa\, e_\varkappa \,.\, \bar{a}_\varkappa\, a_1 \ldots a_n \mid \bar{e}_\varkappa\, e_1 \ldots e_n - a_\varkappa \mid \bar{e}_\varkappa\, e_1 \ldots e_n \,.\, e_\varkappa \mid \bar{a}_\varkappa\, a_1 \ldots a_n$$

oder $1 = a_\varkappa\, \bar{a}_\varkappa \mid e_\varkappa\, \bar{e}_\varkappa$ ergiebt, deren nach der letzteren Form augenscheinliche Richtigkeit überdies durch den Cauchy'schen Determinantensatz offenbar wird, wenn man bemerkt, daſs die Gröſsen $a_\varkappa \mid \bar{e}_\varkappa e_1 \ldots e_n$ und $e_\varkappa \mid \bar{a}_\varkappa a_1 \ldots a_n$ Aggregate von Gliedern sind, die man bezw. aus dem Ausdrucke $(-1)^{n-2}\, a_\varkappa\, e_\lambda \,.\, \bar{e}_\varkappa\, \bar{e}_\lambda\, e_1 \ldots e_n$ für

$\lambda = 1, \ldots, n$ und dem Ausdrucke $(-1)^{n-2}\, a_\mu\, e_\varkappa \,.\, \bar{a}_\varkappa\, \bar{a}_\mu\, a_1 \ldots a_n$ für $\mu = 1, \ldots, n$ erhält. Das Produkt

$$a_\varkappa \,|\, \bar{e}_\varkappa\, e_1 \ldots e_n \,.\, e_\varkappa \,|\, \bar{a}_\varkappa\, a_1 \ldots a_n$$

stellt das mit entgegengesetztem Zeichen genommene Aggregat von Gliedern dar, in welches sich nach dem Cauchy'schen Determinantensatze die Differenz

$$a_1 \ldots a_n \,|\, e_1 \ldots e_n - a_\varkappa\, e_\varkappa \,.\, \bar{a}_\varkappa\, a_1 \ldots a_n \,|\, \bar{e}_\varkappa\, e_1 \ldots e_n$$

zerlegen läſst.

Es ist $(a^2)^{n+1} = (a^2)^{n+1}\, p_\varkappa\, \bar{p}_\varkappa^{\,\bar{2}}$ oder

$$(a^2)^{n+1} = a p_\varkappa^{\,2} \,.\, (a^2)^n\, \bar{p}_\varkappa^{\,\bar{2}} - (a^2)^{n-1} (a^2\, p_\varkappa \,|\, \bar{p}_\varkappa)^2$$

und folglich

$$a p^2 \,.\, (a^2)^n\, p_1 \ldots p_n^{\,\bar{2}} = (a^2)^{n-1} (a^2\, p \,|\, p_1 \ldots p_n)^2 + (a^2)^{n+1}\, p p_1 \ldots p_n^{\,\bar{2}}.$$

Für $n = 1$ und $m = 2$ giebt diese Gleichung die hier zur Anwendung gekommene Gleichung

$$a p^2\, a p_1^{\,2} = (a^2\, p p_1)^2 + (a^2)^2\, e_1 e_2^{\,\bar{2}}\, p p_1 \,|\, \varepsilon_1 \varepsilon_2^{\,2}.$$

101. Für $n = 3$ gelten die Gleichungen

$$((a^3\, p_1\ )^2\, e_1 e_2^{\,\bar{2}} \,\mathfrak{I}\, p_1^{\,0} p_2^{\,0} = (a^3)^2\, e_1 e_2^{\,\bar{2}}\, p_1^{\,2},$$

$$((a^3\, p_1^{\,0})^2\, e_1 e_2^{\,\bar{2}} \,\mathfrak{I}\, p_1\ p_2\ = 2\, a^3\, (a^3)^2 e_1 e_2^{\,\bar{2}} \,|\, e_1 e_2\, p_1^{\,3},$$

und es ist

$$(a p_1^{\,3})^2\, a^3 = (a^3 p_1^{\,2})^3 + 3\, (a^3)^2 e_1 e_2^{\,\bar{2}}\, p_1^{\,2} \,.\, a^3 p_1^{\,2} \,.\, p_1 \,|\, \varepsilon_1 \varepsilon_2^{\,2}$$
$$- 2\, a^3\, (a^3)^2\, e_1 e_2^{\,\bar{2}} \,|\, e_1 e_2\, p_1^{\,3} \cdot p_1 \,|\, \varepsilon_1 \varepsilon_2^{\,3}.$$

Bezeichnet nun σ eine komplexe dritte Wurzel der positiven Einheit, so haben die Gröſsen

$$v_1 + v_2\,,\ \sigma v_1 + \sigma^2 v_2\,,\ \sigma^2 v_1 + \sigma v_2$$

infolge der Gleichungen

$$\sigma^3 = 1,\ 1 + \sigma + \sigma^2 = 0$$

die Eigenschaft, daſs die Summen ihrer Kombinationen zu je 1, 2, 3 Elementen die Werte

$$0,\ -3\, v_1 v_2\,,\ v_1^{\,3} + v_2^{\,3}$$

haben. Folglich läſst sich die Gröſse $(a p_1^{\,3})^2\, a^3$ in drei lineare Faktoren von der Form

$$a^3\, p_1^{\,2} - \left(\sqrt[3]{p_{1,0}^{\ \ 0}\ \varepsilon_1 \varepsilon_2^{\,-1}} + \sqrt[3]{p_{2,0}^{\ \ 0}\ \varepsilon_1 \varepsilon_2^{\,-1}}\right)\, p_1 \,|\, \varepsilon_1 \varepsilon_2$$

zerlegen, wenn man den Kubikwurzeln nach einander die Faktoren 1, 1; σ, σ^2; σ^2, σ beifügt und

$$\sqrt[3]{p_{1,0}{}^0\,\varepsilon_1\varepsilon_2{}^{-1}}\;\sqrt[3]{p_{2,0}{}^0\,\varepsilon_1\varepsilon_2{}^{-1}} = -(a^3)^2\,e_1e_2^{\overset{2}{-}}\;p_1{}^2,$$

$$p_{1,0}{}^0\,\varepsilon_1\varepsilon_2{}^{-1} + p_{2,0}{}^0\,\varepsilon_1\varepsilon_2{}^{-1} = 2\,a^3\,(a^3)^2\,e_1e_2^{\overset{2}{-}}\,|\,e_1e_2\;p_1{}^3$$

setzt oder also die Gröfsen $p_{1,0}$ und $p_{2,0}$ als die Verschwindungsgröfsen der quadratischen Form

$$(\varepsilon_1{}^2 - 2\,a^3\,(a^3)^2\,e_1e_2^{\overset{2}{-}}\,|\,e_1e_2\;p_1{}^3\,.\,\varepsilon_1\varepsilon_2 - ((a^3)^2 e_1e_2^{\overset{2}{-}}\;p_1{}^2)^1\,\varepsilon_2{}^2)\,p^2$$

ansieht.

Nun ist

$$a^3\,p_1p_2{}^2 = ap_1{}^3\,.\,(a^3)^2\,e_1e_2^{\overset{2}{-}}\;p_1{}^2,$$

also infolge der Gleichung $a^3\,p_1{}^2\,p_2 = 0$

$$(ap_1{}^3)^2\,((a^3)^2\,e_1e_2^{\overset{2}{-}}\;p_1{}^2)^2 = a^3\,p_2{}^2\,a^3\,p_1p_2\,|\,p_1p_2 = -(a^3\,p_2)^2\,p_1\,p_2^{\overset{2}{-}}$$

und somit unter Berücksichtigung der Gleichung $p_1\,p_2\,|\,\varepsilon_1\varepsilon_2 = ap_1{}^3$

$$((a^3)^2\,e_1e_2^{\overset{2}{-}}\;p_1{}^2)^2 = -(a^3)^2\,e_1e_2^{\overset{2}{-}}\;p_2{}^2$$

und ferner

$$a^3\,(a^3)^2\,e_1e_2^{\overset{2}{-}}\,|\,e_1e_2\;p_1{}^3 = (a^3)^2\,e_1e_2^{\overset{2}{-}}\;p_1p_2\,.$$

Demnach ist

$$((a^3)^2\,e_1e_2^{\overset{2}{-}}\;p_1{}^2)^3 + (a^3\,(a^3)^2\,e_1e_2^{\overset{2}{-}}\,|\,e_1e_2\;p_1{}^3)^2$$

in der Form

$$-(a^3)^2\;e_1e_2^{\overset{2}{-}}\;p_1\,(a^3)^2 e_1e_2^{\overset{2}{-}}\;p_2\,|\,p_1\,p_2$$

oder

$$-((a^3)^2\,e_1e_2^{\overset{2}{-}})^2\;p_1\,p_2^{\overset{2}{-}}$$

darstellbar, und es gilt die Formel

$$((a^3)^2\,e_1e_2^{\overset{2}{-}}\;p_1{}^2)^3 + (a^3\,(a^3)^2 e_1e_2^{\overset{2}{-}}\,|\,e_1e_2\;p_1{}^3)^2$$
$$+ (ap_1{}^3)^2\,.\,((a^3)^2\;e_1e_2^{\overset{2}{-}})^2\;e_1e_2^{\overset{2}{-}} = 0.$$

Infolge dieser Formel ist die quadratische Form identisch mit der Form

$$((\varepsilon_1 - a^3\,(a^3)^2\;e_1e_2^{\overset{2}{-}}\,|\,e_1e_2\;p_1{}^3\,.\,\varepsilon_2)^2 + (ap_1{}^3)^2\,.\,((a^3)^2\;e_1e_2^{\overset{2}{-}})^2\;e_1e_2^{\overset{2}{-}}\,.\,\varepsilon_2{}^2)\;p^2$$

und daher in zwei lineare Faktoren von der Form

$$(\varepsilon_1 - (a^3\;(a^3)^2\,e_1e_2^{\overset{2}{-}}\,|\,e_1e_2\;p_1{}^3 + ap_1{}^3\;\sqrt[2]{-((a^3)^2\;e_1e_2^{\overset{2}{-}})^2 e_1e_2^{\overset{2}{-}}})\;\varepsilon_2)\;p$$

zerlegbar, und es sind ihre Verschwindungsgröfsen

$$p \equiv (\varepsilon_1 - (a^3\,(a^3)^2\,e_1e_2^{\overset{2}{-}}\,|\,e_1e_2\;\;p_1{}^3 + ap_1{}^3\,\sqrt[2]{-((a^3)^2\;e_1e_2^{\overset{2}{-}})^2\;e_1e_2^{\overset{2}{-}}})\;\varepsilon_2)\,|\,e_1e_2$$

und somit

$$p^0\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2{}^{-1} = a^3\,(a^3)^2\;e_1e_2^{\overset{2}{-}}\,|\,e_1e_2\;\;p_1{}^3 + ap_1{}^3\;\sqrt[2]{-((a^3)^2\;e_1e_2^{\overset{2}{-}})^2\;e_1e_2^{\overset{2}{-}}}.$$

Die drei linearen Faktoren der Gröfse $(ap_1{}^3)^2\,a^3$ haben also die Form

$$a^3 p_1{}^2 - \Big(\sqrt[3]{a^3 (a^3)^2 e_1 e_2{}^{\bar 2} \mid e_1 e_2 \; p_1{}^3 + a p_1{}^3 \sqrt{-((a^3)^2 e_1 e_2{}^{\bar 2})^2 e_1 e_2{}^{\bar 2}}}$$
$$+ \sqrt[3]{a^3 (a^3)^2 e_1 e_2{}^{\bar 2} \mid e_1 e_2 \; p_1{}^3 - a p_1{}^3 \sqrt{-((a^3)^2 e_1 e_2{}^{\bar 2})^2 e_1 e_2{}^{\bar 2}}}\Big) p_1 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2$$

und demnach die Verschwindungsgröſsen der kubischen Form ap^3 die Form

$$p \equiv \Big(a^3 \mid e_1 e_2 + \sqrt[3]{a^3 (a^3)^2 e_1 e_2{}^{\bar 2} \mid e_1 e_2 + a^2 \sqrt{-((a^3)^2 e_1 e_2{}^{\bar 2})^2 e_1 e_2{}^{\bar 2}}}$$
$$+ \sqrt[3]{a^3 (a^3)^2 e_1 e_2{}^{\bar 2} \mid e_1 e_2 - a^3 \sqrt{-((a^3)^2 e_1 e_2{}^{\bar 2})^2 e_1 e_2{}^{\bar 2}}}\Big) p_1{}^2.$$

Die Invariante

$$((a^3)^2 e_1 e_2{}^{\bar 2})^2 e_1 e_2{}^{\bar 2}$$

ist der (-4)te Teil der Diskriminante der kubischen Form ap^3, und die unter den Kubikwurzelzeichen stehenden Gröſsen sind die kubischen Faktoren der Gröſse $-((a^3)^2 e_1 e_2{}^{\bar 2})^3$.

102. Dem Falle $n = 4$, den wir schlieſslich in Betracht ziehen, entsprechen die Gleichungen

$$((a^4 p_1{}^2)^2 e_1 e_2{}^{\bar 2}\text{)} p_1{}^0 p_2{}^0 = (a^4)^2 e_1 e_2{}^{\bar 2} \; p_1{}^4,$$
$$((a^4 p_1)^2 \; e_1 e_2{}^{\bar 2}\text{)} p_1 \; p_2 = 2\, a^4 (a^4)^2 e_1 e_2{}^{\bar 2} \mid e_2 e_2 \; p_1{}^6,$$
$$((a^4 p_1{}^0)^2 \; e_1 e_2{}^{\bar 2}\text{)} p_1{}^2 p_2{}^2 = (a p_1{}^4)^2 . (a^4)^2 e_1 e_2{}^{\bar 4} - 3\,((a^4)^2 e_1 e_2{}^{\bar 2} \; p_1{}^4)^2,$$

und es ist daher

$$(a p_1{}^4)^3 a^4 = (a^4 p_1{}^3)^4 + 6 (a^4)^2 e_1 e_2{}^{\bar 2} \; p_1{}^4 \cdot (a^4 p_1{}^3)^2 \cdot p_1 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^2$$
$$- 8\, a^4 (a^4)^2 e_1 e_2{}^{\bar 2} \mid e_1 e_2 \; p_1{}^6 . a^4 p_1{}^3 \cdot p_1 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^3$$
$$+ ((a p_1{}^4)^2 . (a^4)^2 e_1 e_2{}^{\bar 4} - 3\, ((a^4)^2 e_1 e_2{}^{\bar 2} \; p_1{}^4)^2) . p_1 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^4.$$

Nun haben die Gröſsen

$$+ v_1 + v_2 + v_3, \;\; + v_1 - v_2 - v_3, \;\; - v_1 + v_2 - v_3, \;\; - v_1 - v_2 + v_3$$

die Eigenschaft, daſs die Summen ihrer Kombinationen zu je 1, 2, 3, 4 Elementen die Werte

$$0, \; -2\,(v_1{}^2 + v_2{}^2 + v_3{}^2), \; 8\, v_1 v_2 v_3, \; (v_1{}^2 + v_2{}^2 + v_3{}^2)^2$$
$$- 4\,(v_1{}^2 \, v_2{}^2 + v_1{}^2 \, v_3{}^2 + v_2{}^2 \, v_3{}^2)$$

haben. Folglich läſst sich die Gröſse $(a p_1{}^4)^3 a^4$ in vier lineare Faktoren von der Form

$$a^4 p_1{}^3 - \left(\sqrt[2]{p_{1,0}{}^0 \, \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^{-1}} + \sqrt[2]{p_{2,0}{}^0 \, \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^{-1}} + \sqrt[2]{p_{3,0}{}^0 \, \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^{-1}}\right) p_1 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2$$

zerlegen, wenn man den Quadratwurzeln nach einander die Faktoren 1, 1, 1; 1, —1, —1; —1, 1, —1; —1, —1, 1 beifügt und

$$p_{1,0}{}^0 \, \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^{-1} + \ldots + p_{3,0}{}^0 \, \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^{-1} = -3\,(a^4)^2 e_1 e_2{}^{\bar 2} \; p_1{}^4,$$

$$\sqrt[3]{p_{1,0}{}^0\,\varepsilon_1\varepsilon_2{}^{-1}\,..\,p_{3,0}{}^0\,\varepsilon_1\varepsilon_2{}^{-1}} = a^4\,(a^4)^2\,e_1e_2^{\overset{2}{-}}\,|\,e_1e_2\,p_1{}^6,$$
$$p_{1,0}{}^0\,\varepsilon_1\varepsilon_2{}^{-1}\cdot p_{2,0}{}^0\,\varepsilon_1\varepsilon_2{}^{-1} + \,..\, + p_{2,0}{}^0\,\varepsilon_1\varepsilon_2{}^{-1}\cdot p_{3,0}{}^0\,\varepsilon_1\varepsilon_2{}^{-1}$$
$$= -\tfrac{1}{4}\,(ap_1{}^4)^2\,.\,(a^4)^2\,e_1e_2^{\overset{4}{-}} + 3\,((a^4)^2\,e_1e_2^{\overset{2}{-}}\,p_1{}^4)^2$$

setzt oder also die Gröfsen $p_{1,0}$, $p_{2,0}$, $p_{3,0}$ als die Verschwindungsgröfsen der kubischen Form

$$(\varepsilon_1{}^3 + 3\,(a^4)^2\,e_1e_2^{\overset{2}{-}}\,p_1{}^4\,.\,\varepsilon_1{}^2\,\varepsilon_2 + (-\tfrac{1}{4}\,(ap_1{}^4)^2\,.\,(a^4)^2\,e_1e_2^{\overset{4}{-}}$$
$$+ 3((a^4)^2\,e_1e_2^{\overset{2}{-}}\,p_1{}^4)^2)\,.\,\varepsilon_1\varepsilon_2{}^2 - (a^4\,(a^4)^2\,e_1e_2^{\overset{2}{-}}\,|\,e_1e_2\,p_1{}^6)^2\,.\,\varepsilon_2{}^3)\;p^3$$

oder

$$((\varepsilon_1 + (a^4)^2\,e_1e_2^{\overset{2}{-}}\,p_1{}^4\,.\,\varepsilon_2)^3$$
$$-\tfrac{1}{4}\,(ap_1{}^4)^2\,.\,(a^4)^2\,e_1e_2^{\overset{4}{-}}\,.\,(\varepsilon_1 + (a^4)^2\,e_1e_2^{\overset{2}{-}}\,p_1{}^4\,.\,\varepsilon_2)\,.\,\varepsilon_2{}^2$$
$$-(((a^4)^2\,e_1e_2^{\overset{2}{-}}\,p_1{}^4)^3 + (a^4\,(a^4)^2\,e_1e_2^{\overset{2}{-}}\,|\,e_1e_2\,p_1{}^6)^2$$
$$-\tfrac{1}{4}\,(ap_1{}^4)^2\,.\,(a^4)^2\,e_1e_2^{\overset{4}{-}}\,.\,(a^4)^2\,e_1e_2^{\overset{2}{-}}\,p_1{}^4)\,.\,\varepsilon_2{}^3)\;p^3$$

ansieht. Das Zeichen der Quadratwurzeln ist nach der vorletzten Gleichung das der Form $a^4\,(a^4)^2\,e_1e_2^{\overset{2}{-}}\,|\,e_1e_2\,p_1{}^6$.

Es ist nun

$$a^4\,p_1{}^2\,p_2{}^2 = ap_1{}^4\,.\,(a^4)^2\,e_1e_2^{\overset{2}{-}}\,p_1{}^4,$$

also infolge der Gleichung $a^4\,p_1{}^3\,p_2 = 0$

$$(ap_1{}^4)^2\,.\,((a^4)^2\,e_1e_2^{\overset{2}{-}}\,p_1{}^4)^2 = a^4\,p_1\,p_2{}^2\,a^4\,p_1{}^2\,p_2\,|\,p_1\,p_2$$

und somit, wenn wir die Gleichung

$$(a^4\,p_1\,a^4\,p_2\,|\,p_1p_2)\,p_1{}^2\,p_2{}^2 = \tfrac{1}{6}\,(a^4\,p_1{}^3\,a^4\,p_2{}^3 + a^4\,p_1\,p_2{}^2\,a^4\,p_1{}^2\,p_2$$
$$+ 4\,a^4\,p_1{}^2\,p_2\,a^4\,p_1\,p_2{}^2)\,|\,p_1\,p_2$$

oder

$$(a^4)^2\,p_1p_2^{\overset{2}{-}}\,p_1{}^2\,p_2{}^2 = \tfrac{1}{6}\,ap_1{}^4\,ap_2{}^4 - \tfrac{1}{2}\,a^4\,p_1p_2{}^2\,a^4\,p_1{}^2p_2\,|\,p_1\,p_2$$

berücksichtigen,

$$\tfrac{1}{2}\,(ap_1{}^4)^2\,.\,((a^4)^2\,e_1e_2^{\overset{2}{-}}\,p_1{}^4)^2 - \tfrac{1}{6}\,ap_1{}^4\,ap_2{}^4 = -\,(a^4)^2\,p_1\,p_2^{\overset{2}{-}}\,p_1{}^2p_2{}^2$$

oder, da

$$ap_2{}^4 = ap_1{}^4\,.\,((a^4\,p_1{}^0)^2\,e_1e_2^{\overset{2}{-}})\,p_1{}^2p_2{}^2$$
$$= ap_1{}^4\,.\,((ap_1{}^4)^2\,.\,(a^4)^2\,e_1e_2^{\overset{4}{-}} - 3\,((a^4)^2\,e_1e_2^{\overset{2}{-}}\,p_1{}^4)^2)$$

ist,

$$((a^4)^2\,e_1e_2^{\overset{2}{-}}\,p_1{}^4)^2 - \tfrac{1}{6}\,(ap_1{}^4)^2\,.\,(a^4)^2\,e_1e_2^{\overset{4}{-}} = -\,(a^4)^2\,e_1e_2^{\overset{2}{-}}\,p_1{}^2p_2{}^2$$

und ferner

$$a^4\,(a^4)^2\,e_1e_2^{\overset{2}{-}}\,|\,e_1e_2\,p_1{}^6 = (a^4)^2\,e_1e_2^{\overset{2}{-}}\,p_1{}^3\,p_2.$$

Demnach ist

$$((a^4)^2\,e_1e_2^{\overset{2}{-}}\,p_1{}^4)^3 - \tfrac{1}{6}\,(ap_1{}^4)^2\,.\,(a^4)^2\,e_1e_2^{\overset{4}{-}}\,.\,(a^4)^2\,e_1e_2^{\overset{2}{-}}\,p_1{}^4$$
$$+ (a^4\,(a^4)^2\,e_1e_2^{\overset{2}{-}}\,|\,e_1e_2\,p_1{}^6)^2$$

in der Form

$$-(a^4)^2\, e_1e_2^{\frac{2}{-}}\, p_1^{\,3}\, (a^4)^2 e_1e_2^{\frac{2}{-}}\, p_1^{\,2}p_2 \,|\, p_1p_2$$

oder

$$-((a^4)^2\, e_1e_2^{\frac{2}{-}}\, p_1^{\,2})^2\, p_1p_2^{\frac{2}{-}}$$

darstellbar und hat daher den Wert

$$-(ap_1^{\,4})^2 \,.\, ((a^4)^2\, e_1e_2^{\frac{2}{-}}\, p_1^{\,2})^2 e_1e_2^{\frac{2}{-}}$$

oder infolge der im 90ten Abschnitte gegebenen Gleichung

$$\overline{(1+2)(3+4)}^2\ \overline{12}^2\ \overline{34}^2\ (ap^4)^4$$
$$= 12\, ap^4\ \overline{1(2+3)}^4\ \overline{23}^2\, (ap^4)^3 - 6\ \overline{12}^2 (ap^4)^2\ \overline{12}^4\, (ap^4)^2,$$

die entwickelt die Form

$$12\,((a^4)^2 e_1e_2^{\frac{2}{-}}\, p^2)^2\, e_1e_2^{\frac{2}{-}}$$
$$= ap^4 \,.\, a^4\, (a^4)^2\, e_1e_2^{\frac{2}{-}} \,|\, e_1e_2^{\frac{4}{-}} - (a^4)^2\, e_1e_2^{\frac{2}{-}}\, p^4 \,.\, (a^4)^2 e_1e_2^{\frac{4}{-}}$$

annimmt, den Wert

$$-\tfrac{1}{12}\, (ap_1^{\,4})^3 \,.\, a^4\, (a^4)^2 e_1e_2^{\frac{2}{-}} \,|\, e_1e_2^{\frac{4}{-}} + \tfrac{1}{12} (ap_1^{\,4})^2 \,.\, (a^4)^2 e_1e_2^{\frac{4}{-}} \,.\, (a^4)^2 e_1e_2^{\frac{2}{-}}\, p_1^{\,4}$$

oder endlich, da der Gleichung

$$\overline{1(2+3)}^4\ \overline{23}^2\, (ap^4)^3 = 6\ \overline{12}^2\ \overline{13}^2\ \overline{23}^2\, (ap^4)^3$$

zufolge

$$a^4\, (a^4)^2\, e_1e_2^{\frac{2}{-}} \,|\, e_1e_2^{\frac{4}{-}} = 3\, (a^4)^3\, (e_1^{\,2} \,..\, e_2^{\,2})^{\frac{2}{-}}$$

ist, den Wert

$$-\tfrac{1}{4}\, (ap_1^{\,4})^3 \,.\, (a^4)^3\, (e_1^{\,2} \,..\, e_2^{\,2})^{\frac{2}{-}} + \tfrac{1}{12} (ap_1^{\,4})^2 \,.\, (a^4)^2\, e_1e_2^{\frac{4}{-}} \,.\, (a^4)^2\, e_1e_2^{\frac{2}{-}}\, p_1^{\,4}.$$

Und es besteht also die Formel

$$((a^4)^2\, e_1e_2^{\frac{2}{-}}\, p_1^{\,4})^3 + (a^4\, (a^4)^2\, e_1e_2^{\frac{2}{-}} \,|\, e_1e_2\, p_1^{\,6})^2$$
$$-\tfrac{1}{4}\, (ap_1^{\,4})^2 \,.\, (a^4)^2\, e_1e_2^{\frac{4}{-}} \,.\, (a^4)^2\, e_1e_2^{\frac{2}{-}}\, p_1^{\,4}$$
$$+\tfrac{1}{4}\, (ap_1^{\,4})^3 \,.\, (a^4)^3\, (e_1^{\,2} \,..\, e_2)^{\frac{2}{-}} = 0.$$

Demzufolge läſst sich die kubische Form in der Form

$$((\varepsilon_1 + (a^4)^2\, e_1e_2^{\frac{2}{-}}\, p_1^{\,4} \cdot \varepsilon_2)^3$$
$$-\tfrac{1}{4} (ap_1^{\,4})^2 \,.\, (a^4)^2\, e_1e_2^{\frac{4}{-}} \,.\, (\varepsilon_1 + (a^4)^2\, e_1e_2^{\frac{2}{-}}\, p_1^{\,4} \cdot \varepsilon_2) \,.\, \varepsilon_2^{\,2}$$
$$+\tfrac{1}{4}\, (ap_1^{\,4})^3 \,.\, (a^4)^3\, (e_1^{\,2} \,..\, e_2^{\,2})^{\frac{2}{-}} \,.\, \varepsilon_2^{\,3})\, p^3$$

darstellen und darnach in drei lineare Faktoren von der Form

$$(\varepsilon_1 - (-(a^4)^2\ e_1e_2^{\frac{2}{-}}\ p_1^{\,4} + \tfrac{1}{2}\, ap_1^{\,4} \cdot p_0^{\,0}\, \varepsilon_1\varepsilon_2^{\,-1}) \,.\, \varepsilon_2)\, p$$

zerlegen, wenn durch p_0 die Verschwindungsgröſsen der kubischen Form

$$(\varepsilon_1^{\,3} - (a^4)^2 e_1e_2^{\frac{4}{-}} \cdot \varepsilon_1\varepsilon_2^{\,2} + 2\, (a^4)^3\, (e_1^{\,2} \,..\, e_2^{\,2})^{\frac{2}{-}} \,.\, \varepsilon_2^{\,3})\, p^3$$

bezeichnet werden, und es sind ihre Verschwindungsgröſsen

$$p \equiv (\varepsilon_1 - (-(a^4)^2\, e_1 e_2^{\,2}\; p_1{}^4 + \tfrac{1}{2}\, ap_1{}^4 \,.\, p_0{}^0\, \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^{-1})\,.\,\varepsilon_2) \mid e_1 e_2$$

und somit

$$p^0\, \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^{-1} = -(a^4)^2\, e_1 e_2^{\,2}\; p_1{}^4 + \tfrac{1}{2}\, ap_1{}^4 \,.\, p_0{}^0\, \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^{-1}.$$

Die vier linearen Faktoren der Gröfse $(ap_1{}^4)^3\, a^4$ haben also die Form

$$\begin{aligned} a^4\, p_1{}^3 - (&\sqrt[2]{-(a^4)^2\, e_1 e_2^{\,2}\; p_1{}^4 + \tfrac{1}{2}\, ap_1{}^4 \,.\, p_{0,1}{}^0\, \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^{-1}} \\ &+ \sqrt[2]{-(a^4)^2\, e_1 e_2^{\,2}\; p_1{}^4 + \tfrac{1}{2}\, ap_1{}^4 \cdot p_{0,2}{}^0\, \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^{-1}} \\ &+ \sqrt[2]{-(a^4)^2\, e_1 e_2^{\,2}\; p_1{}^4 + \tfrac{1}{2}\, ap_1{}^4 \cdot p_{0,3}{}^0\, \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^{-1}})\; p_1 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2 \end{aligned}$$

und demnach die Verschwindungsgröfsen der biquadratischen Form ap^4 die Form

$$\begin{aligned} p \equiv (a^4 \mid e_1 e_2 + &\sqrt[2]{-(a^4)^2\, e_1 e_2^{\,2} + \tfrac{1}{2}\, a^4 \,.\, p_{0,1}{}^0\, \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^{-1}} \\ &+ \sqrt[2]{-(a^4)^2\, e_1 e_2^{\,2} + \tfrac{1}{2}\, a^4 \,.\, p_{0,2}{}^0\, \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^{-1}} \\ &+ \sqrt[2]{-(a^4)^2\, e_1 e_2^{\,2} + \tfrac{1}{2}\, a^4 \,.\, p_{0,3}{}^0\, \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^{-1}})\; p_1{}^3. \end{aligned}$$

Die unter den Wurzelzeichen stehenden Gröfsen sind die quadratischen Faktoren der Gröfse $(a^4\, (a^4)^2\, e_1 e_2^{\,2} \mid e_1 e_2)^2$. Die linearen Faktoren der kubischen Form

$$(\varepsilon_1{}^3 - (a^4)^2\; e_1 e_2^{\,4} \,.\, \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^2 + 2\, (a^4)^3\, (e_1{}^2 \,.\,.\, e_2{}^2)^2 \,.\, \varepsilon_2{}^3)\; p^3,$$

deren Verschwindungsgröfsen $p_{0,1}$, $p_{0,2}$, $p_{0,3}$ sind, haben die Form

$$(\varepsilon_1 - (\sqrt[3]{p_{1,1}{}^0\, \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^{-1}} + \sqrt[3]{p_{2,1}{}^0\, \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^{-1}})\, \varepsilon_2)\; p,$$

wenn $p_{1,1}$ und $p_{2,1}$ die Verschwindungsgröfsen der quadratischen Form

$$(\varepsilon_1{}^2 + 2\, (a^4)^3\, (e_1{}^2 \,.\,.\, e_2{}^2)^2 \,.\, \varepsilon_1 \varepsilon_2 + (\tfrac{1}{3}\, (a^4)^2\, e_1 e_2^{\,4})^3 \,.\, \varepsilon_2{}^2)\; p^2$$

darstellen, und es ist daher

$$p_0{}^0\, \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^{-1} = \sqrt[3]{-(a^4)^3\, (e_1{}^2 \,.\,.\, e_2)^2 + w} + \sqrt[3]{-(a^4)^3\, (e_1{}^2 \,.\,.\, e_2{}^2)^2 - w},$$

wenn wir durch w die Quadratwurzel aus der Invariante

$$((a^4)^3\, (e_1{}^2 \,.\,.\, e_2{}^2)^2)^2 - (\tfrac{1}{3}\, (a^4)^2\, e_1 e_2^{\,4})^3$$

bezeichnen. Diese Invariante ist der (-27)te Teil der Diskriminante der biquadratischen Form ap^4.

Siebentes Kapitel.

Anwendung der Algebra auf die Geometrie.

103. An die Bezeichnung der Gesamtheit der durch die Einheiten $e_1, \ldots, e_m$ darstellbaren Gröſsen

$$p = p\varepsilon_1 \cdot e_1 + \ldots + p\varepsilon_m \cdot e_m$$

als eines durch sie bestimmten $m$stufigen Gebietes knüpft sich die Bemerkung, daſs zwei Punkte eine Gerade, d. h. die Gesamtheit der Punkte, in welche ein jeder von ihnen durch eine Änderung seiner Lage in Bezug auf den anderen Punkt und in der durch diesen bestimmten Richtung übergeht, drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, eine Ebene, d. h. die Gesamtheit der Punkte, in welche ein jeder von ihnen durch eine Änderung seiner Lage in Bezug auf die einzelnen durch die beiden anderen Punkte gegebenen Punkte und in den durch diese bestimmten Richtungen übergeht, allgemein m von einander unabhängige Punkte einen $(m-1)$dimensionalen Raum bestimmen. Denken wir uns daher diese m Punkte durch die Einheiten $e_1, \ldots, e_m$ bezeichnet oder dargestellt, so können wir, wenn wir der Änderung der Lage eines Punktes in Bezug auf einen anderen Punkt die Änderung des Gröſsenverhältnisses des Koefficienten einer Gröſse zum Koefficienten einer anderen Gröſse und der Änderung der Lage in einer bestimmten Richtung die Änderung durch additive Verbindung entsprechend annehmen, die Gröſsen des durch die Einheiten bestimmten $m$stufigen Gebietes als Repräsentanten der Punkte des durch jene Punkte bestimmten $(m-1)$dimensionalen Raumes ansehen. Da nun dem $(m-1)$dimensionalen Raume für $m > 1$ infolge seiner ins Unendliche gehenden Ausdehnung ein unendlich ferner $(m-2)$dimensionaler Raum als Grenzgebiet zugehört und andererseits unter der Voraussetzung

$$p\varepsilon_1 + \ldots + p\varepsilon_m = 1$$

mit dem $m$stufigen Gebiete $e_1 \ldots e_m$ das $(m-1)$stufige Gebiet $\dot{e}_1 \ldots e_m$ in Verbindung steht, so verbinden wir mit dem Raume dieselbe Voraussetzung und stellen die ihm angehörigen Punkte durch die Formen

$$p = p\varepsilon_1 \cdot e_1 + \ldots + p\varepsilon_m \cdot e_m$$

und

$$p = e_1 + p\varepsilon_2 \cdot \dot{e}_1 e_2 + \ldots + p\varepsilon_m \cdot \dot{e}_1 e_m$$

dar.

Der Repräsentant des $(m-1)$dimensionalen Raumes ist die Gröfse $e_1 \ldots e_m$ und der des zu ihm gehörigen unendlich fernen $(m-2)$dimensionalen Raumes die Gröfse $\dot{e}_1 \ldots e_m$. Wir bezeichnen demzufolge für jedes m und jede Lage den $(m-1)$dimensionalen Raum auch als ein $m$stufiges Gebiet und die ihn darstellende kombinatorische Gröfse als eine $m$stufige Punktgröfse.

Für jeden Punkt p, der dem Raume $e_1 \ldots e_m$ angehört, gelten die Gleichungen

$$pe_1 \ldots e_m = 0, \quad \dot{p}e_1 \ldots e_m = 0$$

und aufserdem die Gleichung

$$e_1 \ldots e_m = p\dot{e}_1 \ldots e_m .$$

Nach dieser letzten Gleichung ist die Lage des Raumes $e_1 \ldots e_m$ bestimmt durch einen in ihm gelegenen Punkt p und das ihm zugehörige Grenzgebiet $\dot{e}_1 \ldots e_m$ oder die Richtung, in welcher sich dieses befindet.

Als die Richtung der Geraden $e_1 e_2$ (nach ihrem Grenzpunkte $\dot{e}_1 e_2$) bezeichnen wir die Richtung, in welcher der Punkt e_1 durch Verschiebung in die Lage des Punktes e_2 gelangt; wir nennen sie, sobald auch die entgegengesetzte Richtung in Betracht kommt, ihre positive und diese ihre negative Richtung. Die Richtung der Ebene $e_1 e_2 e_3$ (nach ihrer Grenzlinie $\dot{e}_1 e_2 e_3$) ist gegeben, wenn wir aufser der Richtung $(\longrightarrow)$ der Geraden $e_1 e_2$ die Richtung angeben, in welcher diese Gerade durch eine einen rechten Winkel nicht überschreitende Drehung um den Punkt e_1 den Punkt e_3 in sich aufnimmt: versehen wir die Gerade $e_1 e_2$ mit einer ihre Richtung andeutenden Pfeilspitze und drehen sie um den Punkt e_1, so zeigt diese Pfeilspitze in einer jeden Geraden, in welche sie durch eine einen rechten Winkel nicht überschreitende positive oder einen rechten Winkel nicht erreichende negative Drehung gelangt, die Richtung an, und auch die Richtung einer jeden anderen Geraden der Ebene ist bestimmt, wenn wir parallele Gerade selbstverständlich als gleichgerichtet ansehen. Ebenso ist die Richtung des Raumes $e_1 e_2 e_3 e_4$ (nach seiner Grenzebene $\dot{e}_1 e_2 e_3 e_4$) gegeben, wenn wir aufser der Richtung ($\vdash\!\rightarrow$ mit $\uparrow$) der Ebene $e_1 e_2 e_3$ die Richtung festsetzen, in welcher diese Ebene durch eine einen rechten Winkel nicht überschreitende Drehung um die Gerade $e_1 e_2$ den Punkt e_4 in sich aufnimmt; bei entsprechenden Bestimmungen ist dann die Richtung einer jeden Ebene und einer jeden Geraden des Raumes bestimmt. U. s. w.

Die Lage des Punktes $p = p\varepsilon_1 . e_1 + .. + p\varepsilon_m . e_m$ oder

$$p = e_1 + p\varepsilon_2 \cdot \dot{e}_1 e_2 + .. + p\varepsilon_m \cdot \dot{e}_1 e_m$$

in dem Raume $e_1 .. e_m$ ist nunmehr vollständig bestimmt, wenn wir die Entfernung zweier Punkte einer Geraden, in ihrer positiven Richtung gemessen, als positiv mit dem Pluszeichen und, in ihrer negativen Richtung gemessen, als negativ mit dem Minuszeichen in Rechnung bringen und die Gröfsen $p\varepsilon_2, .., p\varepsilon_m$ nach einander dem Verhältnis der Entfernungen der Punkte e_1, $e_1 + p\varepsilon_2 . \dot{e}_1 e_2$ und e_1, e_2; .. ; $e_1 + p\varepsilon_2 . \dot{e}_1 e_2 + .. + p\varepsilon_{m-1} . \dot{e}_1 e_{m-1}$, p und e_1, e_m gleichsetzen. Man gelangt von dem Punkte e_1 zu den Punkten $e_1 + p\varepsilon_2 . \dot{e}_1 e_2$, $e_1 + p\varepsilon_2 . \dot{e}_1 e_2 + p\varepsilon_3 . \dot{e}_1 e_3$, u. s. w. und also schliefslich zu dem Punkte p dadurch, dafs man den Punkt e_1 seine Lage in Bezug auf den Grenzpunkt $\dot{e}_1 e_2$ in der Richtung der Geraden $e_1 e_2$ nach Mafsgabe der Gröfse $p\varepsilon_2$ ändern läfst, dann mit dem Punkte $e_1 + p\varepsilon_2 . \dot{e}_1 e_2$, den man dadurch erhält, nach Mafsgabe der Gröfse $p\varepsilon_3$ eine Änderung seiner Lage in Bezug auf den Grenzpunkt $\dot{e}_1 e_3$ in der Richtung der Geraden $e_1 e_3$ vornimmt und so fortfährt.

Die m Gröfsen $p\varepsilon_1, .., p\varepsilon_m$, vermittelst deren sich der Punkt p durch die Punkte $e_1, .., e_m$ darstellt, nennen wir seine homogenen und die $m-1$ Gröfsen $p\varepsilon_2, .., p\varepsilon_m$, vermittelst deren er sich durch die Punkte e_1, $\dot{e}_1 e_2, .., \dot{e}_1 e_m$ darstellt, seine Cartesischen Koordinaten. Die letzteren sind, wenn man sie bezw. mit den Entfernungen des Punktes e_1 von den Punkten $e_2, .., e_m$ multipliziert oder die Punkte $e_2, .., e_m$ in der Entfernung Eins von dem Punkte e_1 annimmt, die Cartesischen Parallelkoordinaten des Punktes für die Koordinatenaxen $e_1 e_2, .., e_1 e_m$

Die Punkte p des Gebietes $e_1 .. e_m$ unterscheiden sich von den Punkten $\dot{p}_1 p$ des Grenzgebietes $\dot{e}_1 .. e_m$ dadurch, dafs die Summe der homogenen Koordinaten für die ersteren Eins, für die letzteren dagegen offenbar Null ist. Man kann daher die Gröfse p auch als den Repräsentanten eines Grenzpunktes ansehen, sobald man für sie die Bedingung

$$p\varepsilon_1 + .. + p\varepsilon_m = 0$$

voraussetzt. In der That geht vermittelst dieser Gleichung die Form

$$p = p\varepsilon_1 \,.\, e_1 + \,.\,.\, + p\varepsilon_m \,.\, e_m$$

in die Form

$$p = p\varepsilon_2 \,.\, \dot{e}_1 e_2 + \,.\,.\, + p\varepsilon_m \,.\, \dot{e}_1 e_m$$

über.

Ein $m$stufiges Gebiet wird durch eine jede Gruppe von m von einander unabhängigen Punkten p, d. h. von Punkten, von denen nicht mehr als n einem $n$stufigen Gebiete angehören, bestimmt. Das Gebiet $e_1 \,.\,.\, e_m$ ist, wenn $p_1, \,.\,.\,, p_m$ solche unabhängigen Punkte dieses Gebietes sind, auch durch die Gröfse $p_1 \,.\,.\, p_m$ darstellbar.

104. Die Bedingung, unter welcher ein Punkt p in dem Gebiete $p_1 \,.\,.\, p_{m-1}$ liegt, ist

$$pp_1 \,.\,.\, p_{m-1} = 0 \text{ oder } \dot{p}p_1 \,.\,.\, p_{m-1} = 0,$$

und es mufs daher in dem Gebiete $e_1 \,.\,.\, e_m$; ein jeder Punkt p, der in dem diesem Gebiete angehörigen Gebiete $p_1 \,.\,.\, p_{m-1}$ liegt, durch seine Koordinaten die Gleichung

$$pp_1 \,.\,.\, p_{m-1} \mid \varepsilon_1 \,.\,.\, \varepsilon_m = 0 \text{ oder } \dot{p}p_1 \,.\,.\, p_{m-1} \mid \varepsilon_2 \,.\,.\, \varepsilon_m = 0$$

befriedigen. Die erste Gleichung, die entwickelt die Form

$$p\varepsilon_1 \,.\, p_1 \,.\,.\, p_{m-1} \mid \bar{\varepsilon}_1 \varepsilon_1 \,.\,.\, \varepsilon_m + \,.\,.\, + p\varepsilon_m \,.\, p_1 \,.\,.\, p_{m-1} \mid \bar{\varepsilon}_m \varepsilon_1 \,.\,.\, \varepsilon_m = 0$$

hat, heifst die Gleichung des Gebietes $p_1 \,.\,.\, p_{m-1}$ in homogenen und die zweite, die unter Berücksichtigung der Gleichung

$$\dot{p}_1 \,.\,.\, p_n \mid \varepsilon_2 \,.\,.\, \varepsilon_n = p_1 \,.\,.\, p_n \mid (\varepsilon_1 + \,.\,.\, + \varepsilon_m)\, \varepsilon_2 \,.\,.\, \varepsilon_n$$

die Form

$$p_1 \,.\,.\, p_{m-1} \mid \varepsilon_2 \,.\,.\, \varepsilon_m - p\varepsilon_2 \,.\, \dot{p}_1 \,.\,.\, p_{m-1} \mid \bar{\varepsilon}_2 \varepsilon_2 \,.\,.\, \varepsilon_m - \,.\,.$$
$$- p\varepsilon_m \,.\, \dot{p}_1 \,.\,.\, p_{m-1} \mid \bar{\varepsilon}_m \varepsilon_2 \,.\,.\, \varepsilon_m = 0$$

annimmt, seine Gleichung in Cartesischen Koordinaten.

Nach der Gleichung $pp_1 \,.\,.\, p_{m-1} \mid \varepsilon_1 \,.\,.\, \varepsilon_m = 0$ kann man das Gebiet $p_1 \,.\,.\, p_{m-1}$ auch durch die Gröfse $p_1 \,.\,.\, p_{m-1} \mid \varepsilon_1 \,.\,.\, \varepsilon_m$ und folglich, wenn wir

$$a \equiv p_1 \,.\,.\, p_{m-1} \mid \varepsilon_1 \,.\,.\, \varepsilon_m$$

setzen, durch die Gröfse a darstellen. Die Gleichung des Gebietes nimmt dann die Form $ap = 0$ an und stellt sich in homogenen oder Cartesischen Koordinaten dar, je nachdem man $p = p\varepsilon_1 \,.\, e_1 + \,.\,.\, + p\varepsilon_m \,.\, e_m$ oder $p = e_1 + p\varepsilon_2 \,.\, \dot{e}_1 e_2 + \,.\,.\, + p\varepsilon_m \,.\, \dot{e}_1 e_m$ setzt.

Insbesondere wird das Grenzgebiet $\dot{e}_1 \,.\,.\, e_m$ auch durch die Gröfse $\varepsilon_1 + \,.\,.\, + \varepsilon_m$ dargestellt, da der Gleichung

$$\dot{e}_1 \,..\, e_m = (\bar{e}_1 + .. + \bar{e}_m)\, e_1 \,..\, e_m$$

zufolge

$$\dot{e}_1 \,..\, e_m \mid \varepsilon_1 \,..\, \varepsilon_m = \varepsilon_1 + .. + \varepsilon_m$$

ist, und in der That ist das Grenzgebiet das Gebiet der Punkte p, für welche die Gleichung $p(\varepsilon_1 + .. + \varepsilon_m) = 0$ gilt.

Übrigens können die Gleichungen

$$p p_1 \,..\, p_{m-1} \mid \varepsilon_1 \,..\, \varepsilon_m = 0, \quad \dot{p} p_1 \,..\, p_{m-1} \mid \varepsilon_2 \,..\, \varepsilon_m = 0$$

in gleicher Weise auch als die Gleichungen des Punktes p in Koordinaten $(m-1)$stufiger Gebiete angesehen werden, wenn man unter den Koordinaten des Gebietes $p_1 \,..\, p_{m-1}$ selbstverständlich die in den Formen

$$p_1 \,..\, p_{m-1} = (e, \varepsilon; m)\; p_1 \,..\, p_{m-1} \mid \bar{\varepsilon}_1 \varepsilon_1 \,..\, \varepsilon_m \cdot \bar{e}_1 e_1 \,..\, e_m$$

und

$$p_1 \,..\, p_{m-1} = (e, \varepsilon; m-1)\; \dot{p}_1 \,..\, p_{m-1} \mid \bar{\varepsilon}_2 \varepsilon_2 \,..\, \varepsilon_m \cdot e_1 \dot{e}_1 \bar{e}_2 e_2 \,..\, e_m$$
$$+ p_1 \,..\, p_{m-1} \mid \varepsilon_2 \,..\, \varepsilon_m \cdot \dot{e}_1 e_2 \,..\, e_m$$

auftretenden Koefficienten versteht.

105. Eine $m$stufige Punktgröfse setzt sich durch kombinatorische multiplikative Verbindung aus m 1stufigen Punktgröfsen zusammen und repräsentiert das durch die in ihr vertretenen Punkte bestimmte $m$stufige Gebiet. Welche Bedeutung haben nun die durch kombinatorische multiplikative Verbindung zweier oder mehrerer mehrstufigen Punktgröfsen entstehenden Gröfsen? Sind die durch die Punktgröfsen dargestellten Gebiete der Art, dafs ein jedes von ihnen ganz aufserhalb der übrigen Gebiete liegt, oder sind die in ihnen vertretenen Punkte von einander unabhängig, so stellt ihr kombinatorisches Produkt offenbar das durch diese Punkte bestimmte Gebiet dar, im anderen Falle dagegen giebt darüber Aufschlufs die Gleichung

$$\bar{p}_{\varkappa_1} p_1 \,..\, p_m \,..\, \bar{p}_{\varkappa_n} p_1 \,..\, p_m = {p_1 \,..\, p_m}^{n-1} \cdot \bar{p}_{\varkappa_1} \,..\, \bar{p}_{\varkappa_n} p_1 \,..\, p_m$$

oder die aus ihr hervorgehende allgemeinere Gleichung

$$\bar{p}_{\varkappa_1} \,..\, \bar{p}_{\varkappa_{r_1}} p_1 \,..\, p_m \,..\, \bar{p}_{\varkappa_{r_{n-1}+1}} \,..\, \bar{p}_{\varkappa_{r_n}} p_1 \,..\, p_m$$
$$= {p_1 \,..\, p_m}^{n-1} \cdot \bar{p}_{\varkappa_1} \,..\, \bar{p}_{\varkappa_{r_n}} p_1 \,..\, p_m \,.$$

So stellt das kombinatorische Produkt der 2stufigen Punktgröfsen $p_1 p_2$ und $p_3 p_4$, wenn die durch sie repräsentierten Geraden in keiner Beziehung zu einander stehen, auf Grund der dann geltenden Gleichung $(p_1 p_2)(p_3 p_4) = p_1 p_2 p_3 p_4$ ein 4stufiges Gebiet, den die Geraden enthaltenden 3dimensionalen Raum, dar; haben dagegen die Geraden einen Punkt, sagen wir den Punkt p_1 gemeinschaftlich, so stellt es, weil dann, abgesehen von einem numerischen Faktor, die Punktgröfse $p_3 p_4$ durch die Punktgröfse $p_1 p_3$ darstellbar ist, auf Grund der Gleichung $(p_1 p_2)(p_1 p_3) = p_1 p_2 p_3 \cdot p_1$ in algebraischer Verbindung die Ebene, in welcher die Geraden liegen, und den Punkt, in welchem sie sich schneiden, oder also das die Geraden verbindende 3stufige und das ihnen gemeinschaftliche 1stufige Gebiet dar und kann demzufolge in dem 3stufigen Gebiete als Repräsentant des letzteren angesehen werden. Im Falle $p_1 p_2 p_3 = 0$ fallen die Geraden $p_1 p_2$ und $p_1 p_3$ in eine Gerade zusammen und der Punkt p_1 liegt auf der Verbindungslinie der Punkte p_2 und p_3.

Allgemein repräsentiert in einem $m$stufigen Gebiete das kombinatorische Produkt von n $(m-1)$stufigen Gebieten $p_{1,1} \cdot\cdot p_{m-1,1}, \ldots, p_{1,n} \cdot\cdot p_{m-1,n}$ nach der Gleichung

$$\bar{p}_m p_1 \cdot\cdot p_m \cdot\cdot \bar{p}_{m-n+1}\, p_1 \cdot\cdot p_m = p_1 \cdot\cdot p_m{}^{n-1} \cdot \bar{p}_m \cdot\cdot \bar{p}_{m-n+1}\, p_1 \cdot\cdot p_m$$

in algebraischer Verbindung mit dem sie verbindenden $m$stufigen Gebiete ein, nur in dem besonderen Falle $n = m$ durch kein geometrisches Gebilde, sondern durch eine Zahl dargestelltes, $(m-n)$stufiges Gebiet, ebenso wie das kombinatorische Produkt von n 1stufigen Gebieten $p_1, \ldots, p_n$ ein $n$stufiges Gebiet, und in derselben Weise, wie ein jedes diesem Gebiete angehörige 1stufige Gebiet sich in der Form

$$p = p\bar{p}_1 \cdot p_1 + \cdot\cdot + p\bar{p}_n \cdot p_n$$

darstellt, ist auch ein jedes, in dem $m$stufigen Gebiete gelegene, jenem $(m-n)$stufigen Gebiete angehörige $(m-1)$stufige Gebiet in der Form

$$p_1 \cdot\cdot p_{m-1} = p_1 \cdot\cdot p_{m-1}\, \overline{p_{1,1} \cdot\cdot p_{m-1,1}} \cdot p_{1,1} \cdot\cdot p_{m-1,1} + \cdot\cdot$$
$$+ p_1 \cdot\cdot p_{m-1}\, \overline{p_{1,n} \cdot\cdot p_{m-1,n}} \cdot p_{1,n} \cdot\cdot p_{m-1,n}$$

darstellbar. Es besteht also hiernach in einem $m$stufigen Gebiete eine vollständige Reciprocität zwischen den 1stufigen und den $(m-1)$stufigen Gebieten, bei der die $n$stufigen und die $(m-n)$stufigen Gebiete einander entsprechen.

So gilt, wenn das 1stufige Gebiet oder der Punkt p in dem $n$stufigen Gebiete $p_1 \ldots p_n$ liegt, die Gleichung

$$p_1 \cdot\cdot p_n p = 0$$

und in derselben Weise, wenn das $(m-1)$stufige Gebiet $p_1 \cdot\cdot p_{m-1}$ durch das $(m-n)$stufige Gebiet $p_{1,1} \cdot\cdot p_{m-1,1} \cdot\cdot p_{1,n} \cdot\cdot p_{m-1,n}$ hindurchgeht, die Gleichung

$$p_{1,1}\cdot\cdot p_{m-1,1}\cdot\cdot p_{1,n}\cdot\cdot p_{m-1,n}\,p_1\cdot\cdot p_{m-1}=0.$$

Die Bedingung, unter welcher das $n$stufige Gebiet $p_1\,.\,.p_n$ in dem $(m-1)$stufigen Gebiete $p_{1,0}\cdot\cdot p_{m-1,0}$ liegt, ist daher

$$\bar{p}_{n+1}\,p_1\cdot\cdot p_m\cdot\cdot\bar{p}_m\,p_1\cdot\cdot p_m\,p_{1,0}\cdot\cdot p_{m-1,0}=0$$

oder

$$\bar{p}_{n+1}\,p_1\cdot\cdot p_m\cdot\cdot\bar{p}_m\,p_1\cdot\cdot p_m\,p_{1,0}\cdot\cdot p_{m-1,0}\,|\,\bar{\varepsilon}_1\varepsilon_1\,.\,.\,\varepsilon_m\,.\,.\,\bar{\varepsilon}_m\,\varepsilon_1\,.\,.\,\varepsilon_m=0.$$

Die linke Seite dieser letzten Gleichung können wir aber, da nach dem 12ten Abschnitte bei der algebraischen multiplikativen Verbindung der Gröfse $a_{n+1}\,.\,.\,a_m\,|\,e_1\,.\,.\,e_m$ mit dem kombinatorischen Produkte $a_1\,.\,.\,a_n$ dieses als kombinatorischer Faktor vor das kombinatorische Produkt $a_{n+1}\,.\,.\,a_m$ tritt und dasselbe demnach offenbar auch für die algebraische multiplikative Verbindung mit einem kombinatorischen Produkte von weniger als n Faktoren gilt, als das algebraische Produkt der Gröfsen $\bar{p}_{n+1}\,p_1\cdot\cdot p_m\cdot\cdot\bar{p}_m\,p_1\cdot\cdot p_m$ und $p_{1,0}\cdot\cdot p_{m-1,0}\,|\,\bar{\varepsilon}_1\varepsilon_1\,.\,.\,\varepsilon_m\,.\,.\,\bar{\varepsilon}_m\,\varepsilon_1\,.\,.\,\varepsilon_m$ ansehen und demnach, wenn das $(m-1)$stufige Gebiet durch die Gröfse

$$a\equiv p_{1,0}\cdot\cdot p_{m-1,0}\,|\,\varepsilon_1\,.\,.\,\varepsilon_m$$

bezeichnet wird, in der Form

$$p_1\cdot\cdot p_m{}^{m-n-1}\,.\,\varepsilon_1\,.\,.\,\varepsilon_m{}^{m-2}\,.\,a p_1\,.\,.\,p_n$$

darstellen. Das $n$stufige Gebiet $p_1\,.\,.\,p_n$ liegt also in dem $(m-1)$-stufigen Gebiete a, wenn $ap_1\,.\,.\,p_n=0$ ist.

Das algebraische Produkt der Gröfsen $a_1\,.\,.\,a_n$ und $p_1\,.\,.\,p_{n+r}$, von denen die erstere das den $(m-1)$stufigen Gebieten $a_1,\,.\,.\,,a_n$ gemeinschaftliche Gebiet darstellt, oder also die Gröfse $a_1\,.\,.\,a_n\,|$ $p_1\,.\,.\,p_{n+r}$ repräsentiert ein dem $(n+r)$stufigen Gebiete $p_1\,.\,.\,p_{n+r}$ angehöriges $r$stufiges Gebiet in dem $(m-n)$stufigen Gebiete $a_1\,.\,.\,a_n$. Denn sie ist durch die Kombinationen der Gröfsen $p_1,\,.\,.\,,p_{n+r}$ zu je r darstellbar und nimmt bei der algebraischen multiplikativen Verbindung mit einer jeden der Gröfsen $a_1,\,.\,.\,,a_n$ den Wert Null an.

Darnach bezeichnet die Gröfse $a_1\,|\,e_1\,.\,.\,e_m$ ein $(m-1)$stufiges Gebiet in dem $(m-1)$stufigen Gebiete a oder also das Gebiet a, in Übereinstimmung mit der Bezeichnung $a\equiv p_1\cdot\cdot p_{m-1}\,|\,\varepsilon_1\,.\,.\,\varepsilon_m$, der zufolge $p_1\,.\,.\,p_{m-1}\equiv a\,|\,e_1\,.\,.\,e_m$ ist.

So stellt ferner in Übereinstimmung mit der Gleichung

$$(-1)^{n-1}(\varepsilon_1+\,.\,.+\varepsilon_m)\,|\,p_1\,.\,.\,p_n=(\bar{p}_1+\,.\,.+\bar{p}_n)\,p_1\,.\,.\,p_n=\dot{p}_1\,.\,.\,p_n$$

die Gröfse $(\varepsilon_1+\,.\,.+\varepsilon_m)\,|\,p_1\,.\,.\,p_n$ das $(m-1)$stufige Grenzgebiet des $n$stufigen Gebietes $p_1\,.\,.\,p_n$ dar.

Insbesondere ist endlich die Gröfse $a_1 \,.\,. a_n \mid p_1 \,.\,. p_{n+1}$ der Repräsentant eines Punktes in dem den $(m-1)$stufigen Gebieten a_1, .., a_n gemeinschaftlichen Gebiete $a_1 \,.\,. a_n$. In der That ist, wenn die Gröfse p den n Gleichungen

$$a_1 p = 0 \,, \,.\,.\,, a_n p = 0$$

genügt,

$$p \equiv a_1 \,.\,. a_n \mid p_1 \,.\,. p_{n+1} \,.$$

Für $n = m - 1$ ist

$$p \equiv a_1 \,.\,. a_{m-1} \mid e_1 \,.\,. e_m$$

und folglich $a_1 \,.\,. a_{m-1} \equiv p \mid \varepsilon_1 \,.\,. \varepsilon_m$ der Repräsentant und $a_1 \,.\,. a_{m-1} \mid p_1 \,.\,. p_{m-1} = 0$ die Gleichung eines Punktes, ebenso wie $a \equiv p_1 \,.\,. p_{m-1} \mid \varepsilon_1 \,.\,. \varepsilon_m$ der Repräsentant und $ap = 0$ die Gleichung eines $(m-1)$-stufigen Gebietes ist.

Überhaupt stellt sich so allgemein der zwischen den 1 stufigen und den $(m-1)$stufigen Gebieten eines $m$stufigen Gebietes bestehenden Reciprocität zufolge einem jeden Ausdrucke und demnach einem jeden Satze ein anderer in entsprechender Form zur Seite. Diese Reciprocität in den geometrischen Sätzen hört nur da auf, wo Beziehungen zu dem im Unendlichen gelegenen $(m-1)$stufigen Grenzgebiete in Betracht kommen, da im Raume ein entsprechend ausgezeichneter Punkt nicht existiert. Der dem Grenzgebiete $\dot{e}_1 \,.\,. e_m$ oder $\varepsilon_1 + \,.\,. + \varepsilon_m$ entsprechende Punkt $\dot{\varepsilon}_1 \,.\,. \varepsilon_m$ oder $e_1 + \,.\,. + e_m$ unterscheidet sich von den übrigen Punkten des Raumes in keiner Weise.

106. Einer jeden Gröfse kommt ein metrischer Wert zu. Der metrische Wert der Punktgröfse $p_1 \,.\,. p_n$ ist nach der Gleichung

$$p_1 \,.\,. p_n = p\dot{p}_1 \,.\,. p_n \,,$$

in der p ein beliebiger Punkt des Gebietes $p_1 \,.\,. p_n$ ist, gleich dem metrischen Werte der Punktgröfse $\dot{p}_1 \,.\,. p_n$. Wir bezeichnen ihn daher durch $(\dot{p}_1 \,.\,. p_n)$ und nennen ihn die Entfernung der Punkte $p_1, \,.\,., p_n$. Insbesondere ist $(\dot{p}_1 p_2)$ die in der Richtung von p_1 nach p_2 gemessene und, je nachdem diese Richtung mit der Richtung der Geraden $p_1 p_2$ zusammenfällt oder nicht, mit dem Plus- oder Minuszeichen versehene Entfernung der Punkte p_1, p_2.

In Ansehung des Umstandes, dafs die Gröfse $\dot{p}_1 \,.\,. p_n$ bei Vertauschung zweier Punkte nur im Zeichen eine Änderung erleidet, erkennen wir ihren metrischen Wert als gleich der positiven oder negativen Quadratwurzel aus dem metrischen Werte ihres algebraischen Quadrates.

Und ferner erhellt, wenn durch $\dot{p}_1 p_2 \triangle \dot{p}_3 p_4$ die Neigung der Geraden $p_1 p_2$ gegen die Gerade $p_3 p_4$, gemessen durch den die Gröfse eines rechten Winkels nicht überschreitenden positiv oder sie nicht erreichenden negativ genommenen Winkel, den die Gerade $p_1 p_2$ bei der zu ihrer Überführung in die Gerade $p_3 p_4$ oder eine ihr parallele Gerade erforderlichen positiven oder bezw. negativen Drehung überstreicht, und allgemein durch $\dot{p}_1 \cdot\cdot p_r \triangle \dot{p}_{\varkappa+1} \cdot\cdot p_{\varkappa+n}$ die in entsprechender Weise gemessene Neigung des Gebietes $p_1 \cdot\cdot p_r$ gegen das Gebiet $p_{\varkappa+1} \cdot\cdot p_{\varkappa+n}$ bezeichnet wird, dafs der metrische Wert des kombinatorischen Produktes der Gröfsen $\dot{p}_1 p_2$ und $\dot{p}_3 p_4$ durch die Gleichung

$$(\dot{p}_1 p_2 \dot{p}_3 p_4) = (\dot{p}_1 p_2)(\dot{p}_3 p_4) \sin(\dot{p}_1 p_2 \triangle \dot{p}_3 p_4)$$

und darnach allgemein der metrische Wert des kombinatorischen Produktes der Gröfsen $\dot{p}_1 \cdot\cdot p_r$ und $\dot{p}_{\varkappa+1} \cdot\cdot p_{\varkappa+n}$ durch die Gleichung

$$(\dot{p}_1 \cdot\cdot p_r \dot{p}_{\varkappa+1} \cdot\cdot p_{\varkappa+n})$$
$$= \pm (\dot{p}_1 \cdot\cdot p_r)(\dot{p}_{\varkappa+1} \cdot\cdot p_{\varkappa+n}) \sin(\dot{p}_1 \cdot\cdot p_r \triangle \dot{p}_{\varkappa+1} \cdot\cdot p_{\varkappa+n})$$

gegeben ist, in der hinsichtlich des Zeichens die Bestimmung gilt, dafs das Pluszeichen zu nehmen ist, wenn das kombinatorische Produkt $\dot{p}_1 \cdot\cdot p_r \dot{p}_{\varkappa+1} \cdot\cdot p_{\varkappa+n}$ bei Vertauschung der Faktoren $\dot{p}_1 \cdot\cdot p_r$ und $\dot{p}_{\varkappa+1} \cdot\cdot p_{\varkappa+n}$ sein Zeichen ändert.

Insbesondere ist also

$$(\dot{p}_1 \cdot\cdot p_n) = \pm (\dot{p}_1 p_2 \cdot\cdot p_r)(\dot{p}_1 p_{r+1} \cdot\cdot p_n) \sin(\dot{p}_1 p_2 \cdot\cdot p_r \triangle \dot{p}_1 p_{r+1} \cdot\cdot p_n)$$

und darin das Zeichen bestimmt, wenn wir

$$(\dot{p}_1 \cdot\cdot p_n) = (\dot{p}_1 \cdot\cdot p_{n-1})(\dot{p}_1 p_n) \sin(\dot{p}_1 \cdot\cdot p_{n-1} \triangle \dot{p}_1 p_n)$$

setzen. Hiernach ist, wie die Annahme $n = 3$ und $n = 4$ erkennen läfst, die Entfernung der Punkte $p_1, \ldots, p_n$ gleich dem $(n-1)!$ fachen, mit einem bestimmten Zeichen versehenen, zwischen ihnen gelegenen Raume.

Und ferner ergiebt sich vermittelst der Gleichung

$$\dot{p}_1 \cdot\cdot p_n \dot{p}_{\varkappa+1} \cdot\cdot p_{\varkappa+n}{}^2 = \dot{p}_1 \cdot\cdot p_n{}^2 \cdot \dot{p}_{\varkappa+1} \cdot\cdot p_{\varkappa+n}{}^2 - \dot{p}_1 \cdot\cdot p_n \,|\, \dot{p}_{\varkappa+1} \cdot\cdot p_{\varkappa+n}{}^2$$

für den metrischen Wert des algebraischen Produktes der Gröfsen $\dot{p}_1 \cdot\cdot p_n$ und $\dot{p}_{\varkappa+1} \cdot\cdot p_{\varkappa+n}$ mit Rücksicht darauf, dafs sie für $\varkappa = 0$ die Form

$$(\dot{p}_1 \cdot\cdot p_n{}^2) = (\dot{p}_1 \cdot\cdot p_n)^2$$

annehmen mufs, die Gleichung

$$\dot{(}p_1 \cdot\cdot p_n | \dot{p}_{\varkappa+1} \cdot\cdot p_{\varkappa+n})$$

$$= (\dot{p}_1 \cdot\cdot p_n)(\dot{p}_{\varkappa+1} \cdot\cdot p_{\varkappa+n}) \cos(\dot{p}_1 \cdot\cdot p_n \triangle \dot{p}_{\varkappa+1} \cdot\cdot p_{\varkappa+n}).$$

In einem $m$stufigen Gebiete unterscheiden sich infolge der Gleichung $\dot{p}_1 .. p_m = p_1 \cdot\cdot p_m | \varepsilon_1 .. \varepsilon_m . \dot{e}_1 \cdot\cdot e_m$ alle $(m-1)$stufigen Gröfsen von der Form $\dot{p}_1 .. p_m$ und ebenso alle $m$stufigen Gröfsen von der Form $p_1 .. p_m$ nur durch ihre metrischen Werte von einander. Nach der Gleichung $\dot{p}_1 .. p_n = \dot{p}\dot{p}_1 .. p_n$ oder

$$\dot{p}_1 \cdot\cdot p_n = \dot{p}(\bar{p}_1 + \cdot\cdot + \bar{p}_n) p_1 \cdot\cdot p_n$$

oder auch nach der Gleichung $p\bar{p}_1 + .. + p\bar{p}_m = 1$ ist daher

$$(\dot{p}_1 \cdot\cdot p_m) = (\dot{p}\bar{p}_1 p_1 \cdot\cdot p_m) + \cdot\cdot + (\dot{p}\bar{p}_m p_1 \cdot\cdot p_m).$$

Infolge der Gleichungen

$$p\varepsilon_\varkappa = p\bar{e}_\varkappa e_1 \cdot\cdot e_m | \varepsilon_1 \cdot\cdot \varepsilon_m,\ p_1 \cdot\cdot p_{m-1} | \bar{\varepsilon}_\varkappa \varepsilon_1 \cdot\cdot \varepsilon_m = e_\varkappa p_1 \cdot\cdot p_{m-1} | \varepsilon_1 \cdot\cdot \varepsilon_m$$

gelten ferner für die Koordinaten des Punktes p und des $(m-1)$-stufigen Gebietes $p_1 .. p_{m-1}$ die Gleichungen

$$p\varepsilon_\varkappa = \frac{(\dot{p}\bar{e}_\varkappa e_1 .. e_m)}{(\dot{e}_1 . e_m)},\quad p_1 \cdot\cdot p_{m-1} | \bar{\varepsilon}_\varkappa \varepsilon_1 \cdot\cdot \varepsilon_m = \frac{(\dot{e}_\varkappa p_1 \cdot\cdot p_{m-1})}{(\dot{e}_1 \cdot\cdot e_m)}.$$

107. Aus den Formeln des vorhergehenden Abschnittes erhält man die bekannten metrischen Hauptformeln der analytischen Geometrie vermittelst der Formen

$$\dot{p}_1 \cdot\cdot p_n = (e, \varepsilon; m) p_1 \cdot\cdot p_n | \varepsilon_1 \cdot\cdot \varepsilon_n . \dot{e}_1 \cdot\cdot e_n,$$

$$\dot{p}_1 \cdot\cdot p_n = (e, \varepsilon; m-1) \dot{p}_1 \cdot\cdot p_n | \varepsilon_2 \cdot\cdot \varepsilon_n . \dot{e}_1 e_2 \cdot\cdot e_n.$$

So ist z. B. in der Ebene $e_1 e_2 e_3$ die Entfernung der Punkte p_1, p_2 in homogenen Koordinaten durch die Formel

$$(\dot{p}_1 p_2)^2 = p_1 p_2 | \varepsilon_1 \varepsilon_2{}^2\ (\dot{e}_1 e_2)^2 + p_1 p_2 | \varepsilon_1 \varepsilon_3{}^2\ (\dot{e}_1 e_3)^2 + p_1 p_2 | \varepsilon_2 \varepsilon_3{}^2\ (\dot{e}_2 e_3)^2$$

$$+ 2\, p_1 p_2 | \varepsilon_1 \varepsilon_2\ \ p_1 p_2 | \varepsilon_1 \varepsilon_3\ \ (\dot{e}_1 e_2)(\dot{e}_1 e_3) \cos(\dot{e}_1 e_2 \triangle \dot{e}_1 e_3)$$

$$+ 2\, p_1 p_2 | \varepsilon_1 \varepsilon_2\ \ p_1 p_2 | \varepsilon_2 \varepsilon_3\ \ (\dot{e}_1 e_2)(\dot{e}_2 e_3) \cos(\dot{e}_1 e_2 \triangle \dot{e}_2 e_3)$$

$$+ 2\, p_1 p_2 | \varepsilon_1 \varepsilon_3\ \ p_1 p_2 | \varepsilon_2 \varepsilon_3\ \ (\dot{e}_1 e_3)(\dot{e}_2 e_3) \cos(\dot{e}_1 e_3 \triangle \dot{e}_2 e_3)$$

und in Cartesischen Koordinaten durch die Formel

$$(\dot{p}_1 p_2)^2 = \dot{p}_1 p_2 | \varepsilon_2{}^2\ (\dot{e}_1 e_2)^2 + \dot{p}_1 p_2 | \varepsilon_3{}^2\ (\dot{e}_1 e_3)^2$$

$$+ 2\, \dot{p}_1 p_2 | \varepsilon_2\ \ \dot{p}_1 p_2 | \varepsilon_3\ (\dot{e}_1 e_2)(\dot{e}_1 e_3) \cos(\dot{e}_1 e_2 \triangle \dot{e}_1 e_3)$$

gegeben. Allgemein stellt sich bei Anwendung Cartesischer Koordinaten und unter der die Formeln vereinfachenden Voraussetzung, dafs die Geraden $e_1 e_2, \ldots, e_1 e_m$ normal zu einander sind, oder also in normalen Cartesischen Koordinaten das Quadrat der Entfernung der Punkte $p_1, \ldots, p_n$ in der Form

$$(\dot p_1 \cdot\cdot p_n)^2 = (e, \varepsilon; m-1)\, \dot p_1 \cdot\cdot p_n | \varepsilon_2 \cdot\cdot \varepsilon_n{}^2 \;\; (\dot e_1 e_2 \cdot\cdot e_n)^2$$

dar.

Ferner hat man für den durch die Geraden $p_1 p_2$ und $p_3 p_4$ bestimmten Winkel die Formeln

$$(\dot p_1 p_2)(\dot p_3 p_4) \sin (\dot p_1 p_2 \wedge \dot p_3 p_4) = (\dot p_1 p_2 \;\; \dot p_3 p_4),$$

$$(\dot p_1 p_2)(\dot p_3 p_4) \cos (\dot p_1 p_2 \wedge \dot p_3 p_4) = (\dot p_1 p_2 | \dot p_3 p_4),$$

und es ist darin in normalen Cartesischen Koordinaten für $m = 3$, oder wenn die Geraden in der Ebene $e_1 e_2 e_3$ liegen,

$$(\dot p_1 p_2 \;\; \dot p_3 p_4) = \dot p_1 p_2 \;\; \dot p_3 p_4 | \varepsilon_2 \varepsilon_3 \;\; (\dot e_1 e_2 e_3),$$

$$(\dot p_1 p_2 | \dot p_3 p_4) = \dot p_1 p_2 | \varepsilon_2 \;\; \dot p_3 p_4 | \varepsilon_2 \;\; (\dot e_1 e_2)^2 + \dot p_1 p_2 | \varepsilon_3 \;\; \dot p_3 p_4 | \varepsilon_3 \;\; (\dot e_1 e_3)^2$$

und für $m = 4$, oder wenn die Geraden im Raume $e_1 e_2 e_3 e_4$ liegen,

$$(\dot p_1 p_2 \;\; \dot p_3 p_4)^2 = \dot p_1 p_2 \dot p_3 p_4 | \varepsilon_2 \varepsilon_3{}^2 \;\; (\dot e_1 e_2 e_3)^2 + \dot p_1 p_2 \dot p_3 p_4 | \varepsilon_2 \varepsilon_4{}^2 \;\; (\dot e_1 e_2 e_4)^2$$
$$+ \dot p_1 p_2 \dot p_3 p_4 | \varepsilon_3 \varepsilon_4{}^2 \;\; (\dot e_1 e_3 e_4)^2,$$

$$(\dot p_1 p_2 | \dot p_3 p_4)^2 = \dot p_1 p_2 | \varepsilon_2 \;\; \dot p_3 p_4 | \varepsilon_2 \;\; (\dot e_1 e_2)^2 + \dot p_1 p_2 | \varepsilon_3 \;\; \dot p_3 p_4 | \varepsilon_3 \;\; (\dot e_1 e_3)^2$$
$$+ \dot p_1 p_2 | \varepsilon_4 \;\; \dot p_3 p_4 | \varepsilon_4 \;\; (\dot e_1 e_4)^2.$$

Endlich gelten für den durch die Ebenen $p_1 p_2 p_3$ und $p_4 p_5 p_6$ bestimmten Winkel die Formeln

$$(\dot p_1 p_2 p_3)\,(\dot p_4 p_5 p_6) \sin (\dot p_1 p_2 p_3 \wedge \dot p_4 p_5 p_6) = \pm (\dot p_1 p_2 p_3 \;\; \dot p_4 p_5 p_6),$$

$$(\dot p_1 p_2 p_3)\,(\dot p_4 p_5 p_6) \cos (\dot p_1 p_2 p_3 \wedge \dot p_4 p_5 p_6) = (\dot p_1 p_2 p_3 | \dot p_4 p_5 p_6)$$

und für den durch die Ebene $p_1 p_2 p_3$ und die Gerade $p_4 p_5$ bestimmten Winkel die Formel

$$(\dot p_1 p_2 p_3)\,(\dot p_4 p_5) \sin (\dot p_1 p_2 p_3 \wedge \dot p_4 p_5) = \pm (\dot p_1 p_2 p_3 \dot p_4 p_5),$$

und in normalen Cartesischen Koordinaten ist darin für $m = 4$, oder wenn die Ebenen und die Gerade im Raume $e_1 e_2 e_3 e_4$ liegen,

$$(\dot p_1 p_2 p_3 \dot p_4 p_5 p_6)^2 = (\dot e_1 e_2 e_3 e_4)^2 \,(\dot p_1 p_2 p_3 \dot p_4 p_5 p_6 | (\varepsilon_2 \varepsilon_3)(\varepsilon_2 \varepsilon_4)^2 \;\; (\dot e_1 e_2)^2$$
$$+ \dot p_1 p_2 p_3 \dot p_4 p_5 p_6 | (\varepsilon_2 \varepsilon_3)(\varepsilon_3 \varepsilon_4)^2 \;\; (\dot e_1 e_3)^2$$
$$+ \dot p_1 p_2 p_3 \dot p_4 p_5 p_6 | (\varepsilon_2 \varepsilon_4)(\varepsilon_3 \varepsilon_4)^2 \;\; (\dot e_1 e_4)^2),$$

$$(\dot p_1 p_2 p_3 | \dot p_4 p_5 p_6) = \dot p_1 p_2 p_3 | \varepsilon_2 \varepsilon_3 \;\; \dot p_4 p_5 p_6 | \varepsilon_2 \varepsilon_3 \;\; (\dot e_1 e_2 e_3)^2$$
$$+ \dot p_1 p_2 p_3 | \varepsilon_2 \varepsilon_4 \;\; \dot p_4 p_5 p_6 | \varepsilon_2 \varepsilon_4 \;\; (\dot e_1 e_2 e_4)^2$$
$$+ \dot p_1 p_2 p_3 | \varepsilon_3 \varepsilon_4 \;\; \dot p_4 p_5 p_6 | \varepsilon_3 \varepsilon_4 \;\; (\dot e_1 e_3 e_4)^2$$

und

$$\zeta(\dot{p}_1 p_2 p_3 \dot{p}_4 p_5) = (\dot{p}_1 p_2 p_3 | \varepsilon_2 \varepsilon_3 \ \dot{p}_4 p_5 | \varepsilon_1 - \dot{p}_1 p_2 p_3 | \varepsilon_2 \varepsilon_4 \ \dot{p}_4 p_5 | \varepsilon_3$$
$$+ \dot{p}_1 p_2 p_3 | \varepsilon_3 \varepsilon_4 \ \dot{p}_4 p_5 | \varepsilon_2) \ \zeta(\dot{e}_1 e_2 e_3 e_4).$$

Weniger bekannte Formeln erhält man vermittelst der Form

$$\dot{p} p_1 \ldots p_n = (e, \varepsilon; m) p_1 \ldots p_n | \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n \, . \, \dot{p} e_1 \ldots e_n.$$

108. Die Formeln des 106ten Abschnittes geben ferner in einfacher Weise die Hauptformeln der ebenen und der sphärischen Trigonometrie.

Aus der Gleichung

$$\dot{p}_1 p_2 = \dot{p}_3 p_2 - \dot{p}_3 p_1$$

geht für die ebene Trigonometrie durch kombinatorische Multiplikation mit $\dot{p}_1 p_2$ der Sinussatz

$$\zeta(\dot{p}_3 p_1) \sin(\dot{p}_1 p_2 \triangle \dot{p}_3 p_1) = \zeta(\dot{p}_3 p_2) \sin(\dot{p}_1 p_2 \triangle \dot{p}_3 p_2)$$

und durch Erheben ihrer beiden Seiten ins Quadrat der Cosinussatz

$$\zeta(\dot{p}_1 p_2)^2 = \zeta(\dot{p}_3 p_1)^2 + \zeta(\dot{p}_3 p_2)^2 - 2\, \zeta(\dot{p}_3 p_1)\, \zeta(\dot{p}_3 p_2) \cos(\dot{p}_3 p_1 \triangle \dot{p}_3 p_2)$$

hervor.

Und ferner erhält man für die sphärische Trigonometrie aus der Gleichung $\dot{p}_1 \bar{p}_4 \dot{p}_1 \bar{p}_3 = \dot{p}_1 \, \bar{p}_4 \bar{p}_3$ oder

$$\dot{p}_1 p_2 p_3 \dot{p}_1 p_2 p_4 = \dot{p}_1 p_2 p_3 p_4 \cdot \dot{p}_1 p_2$$

dadurch, dafs man die metrischen Werte der in ihr gleichgesetzten Gröfsen bestimmt, die Gleichung

$$\sin(\dot{p}_1 p_2 \triangle \dot{p}_1 p_4) \sin(\dot{p}_1 p_2 p_3 \triangle \dot{p}_1 p_2 p_4) = \sin(\dot{p}_1 p_2 p_3 \triangle \dot{p}_1 p_4)$$

und mit ihr, da der rechts stehende Sinus durch Vertauschung von p_2 und p_3 keine Änderung erleidet, den Sinussatz

$$\sin(\dot{p}_1 p_2 \triangle \dot{p}_1 p_4) \sin(\dot{p}_1 p_2 p_3 \triangle \dot{p}_1 p_2 p_4)$$
$$= \sin(\dot{p}_1 p_3 \triangle \dot{p}_1 p_4) \sin(\dot{p}_1 p_2 p_3 \triangle \dot{p}_1 p_3 p_4)$$

und in derselben Weise aus der Gleichung

$$\dot{p}_1 p_2 p_4 | \dot{p}_1 p_3 p_4 = \dot{p}_1 p_2 | \dot{p}_1 p_3 \cdot \dot{p}_1 p_4^2 - \dot{p}_1 p_2 | \dot{p}_1 p_4 \cdot \dot{p}_1 p_4 | \dot{p}_1 p_3$$

den Cosinussatz

$$\sin(\dot{p}_1 p_2 \triangle \dot{p}_1 p_4) \sin(\dot{p}_1 p_3 \triangle \dot{p}_1 p_4) \cos(\dot{p}_1 p_2 p_4 \triangle \dot{p}_1 p_3 p_4)$$
$$= \cos(\dot{p}_1 p_2 \triangle \dot{p}_1 p_3) - \cos(\dot{p}_1 p_2 \triangle \dot{p}_1 p_4) \cos(\dot{p}_1 p_3 \triangle \dot{p}_1 p_4).$$

109. Sind p_1, p_2, p_3, p_4 vier Punkte einer Geraden, so stellen sich z. B. die Punkte p_3, p_4 durch die Punkte p_1, p_2 in der Form

$$p_3 = p_3\bar{p}_1 \cdot p_1 + p_3\bar{p}_2 \cdot p_2, \quad p_4 = p_4\bar{p}_1 \cdot p_1 + p_4\bar{p}_2 \cdot p_2$$

dar und ihre gegenseitige Lage ist von dem Werte des Ausdruckes

$$\frac{p_4\bar{p}_1}{p_4\bar{p}_2} : \frac{p_3\bar{p}_1}{p_3\bar{p}_2} = \frac{p_1 p_3 \cdot p_2 p_4}{p_1 p_4 \cdot p_2 p_3}$$

abhängig, der sich auch in der Form

$$\frac{\zeta(\dot{p}_1 p_3)}{\zeta(\dot{p}_3 p_2)} : \frac{\zeta(\dot{p}_1 p_4)}{\zeta(\dot{p}_4 p_2)}$$

darstellen läfst und das Doppelverhältnis der vier Punkte

$$p_1, p_2; \; p_3, p_4$$

genannt wird, wenn die letzteren zwei in Bezug auf die beiden ersteren und diese in Bezug auf jene konjugiert sind.

Da vier Punkte auf 24 verschiedene Weisen geordnet werden können, so entsprechen diesen verschiedenen Anordnungen 24 Doppelverhältnisse.

Aus dem Ausdrucke

$$\frac{p_1 p_3 \cdot p_2 p_4}{p_1 p_4 \cdot p_2 p_3},$$

der das Doppelverhältnis der vier Punkte

$$p_1, p_2; \; p_3, p_4$$

darstellt, ist nun ersichtlich, dafs sich das Doppelverhältnis nicht ändert, wenn man die Punkte des ersten und zugleich die des zweiten Paares vertauscht, und wenn man die beiden Paare vertauscht. Die Doppelverhältnisse können also nur höchstens 6 verschiedene Werte haben. Derselbe Ausdruck zeigt aber, dafs das Doppelverhältnis bei Vertauschung der Punkte eines Paares den reciproken Wert annimmt, und es kommen somit nur drei Werte in Frage. Diese entsprechen den Anordnungen

$$p_1, p_2; p_3, p_4, \qquad p_1, p_3; p_4, p_2, \qquad p_1, p_4; p_2, p_3,$$

die durch cyklische Vertauschung der drei letzten Punkte aus einander hervorgehen. Setzen wir

$$\frac{p_1 p_3 \cdot p_2 p_4}{p_1 p_4 \cdot p_2 p_3} = v,$$

so erhalten wir, wenn wir hierin vermittelst der Form $p_3 = p_3\bar{p}_2 \cdot p_2 + p_3\bar{p}_4 \cdot p_4$ dem Zähler die Form

$$p_1 p_2 \cdot p_3 p_4 - p_1 p_4 \cdot p_3 p_2$$

und ferner vermittelst der Form $p_4 = p_4\bar{p}_2 \cdot p_2 + p_4\bar{p}_3 \cdot p_3$ dem Nenner die Form

$$p_1p_2 \cdot p_4p_3 - p_1p_3 \cdot p_4p_2$$

geben,

$$\frac{p_1p_4 \cdot p_3p_2}{p_1p_2 \cdot p_3p_4} = \frac{1}{1-v}, \quad \frac{p_1p_2 \cdot p_4p_3}{p_1p_3 \cdot p_4p_2} = \frac{v-1}{v}.$$

Die 6 Werte des Doppelverhältnisses der vier Punkte p_1, p_2, p_3, p_4 sind also, wenn einer derselben durch v bezeichnet wird,

$$v, \frac{1}{1-v}, \frac{v-1}{v}; \frac{1}{v}, 1-v, \frac{v}{v-1}.$$

Von diesen im allgemeinen von einander verschiedenen Werten können bei besonderen Lagen der vier Punkte mehrere gleich werden. Zu den diesen Lagen entsprechenden ausgezeichneten Werten des Doppelverhältnisses gelangt man, wenn man einen von den drei ersten Werten einem von den drei letzten und ferner zwei von den drei ersten oder letzten Werten einander gleichsetzt. In dem ersten Falle sind dann auch die beiden übrigen der drei ersten Werte den beiden übrigen der drei letzten, also dreimal zwei Werte des Doppelverhältnisses, in dem zweiten Falle dagegen die drei ersten und die drei letzten, also zweimal drei Werte des Doppelverhältnisses gleich. Darnach sind die ausgezeichneten Werte des Doppelverhältnisses durch die Gleichungen

$$v^2 = 1, \; v^2 - v + 1 = 0$$

gekennzeichnet.

Die erste dem ersten Falle entsprechende Gleichung giebt $v = \pm 1$. Die ihm entsprechenden drei Werte des Doppelverhältnisses sind

$$+1, \infty, 0 \text{ und } -1, \tfrac{1}{2}, 2,$$

und von den vier Punkten haben zwei den beiden anderen gegenüber, den Werten $v = +1$ und $v = -1$ entsprechend, gleiche oder bezw. entgegengesetzt gleiche Abstandsverhältnisse, sie fallen zusammen oder befinden sich mit den beiden anderen in harmonischer Lage. Für $v = +1$ sind also die zusammenfallenden zwei Punkte konjugierte, für $v = \infty$ und $v = 0$ dagegen nicht konjugierte Punkte. Und ferner sind die Punkte $p_1, p_2; p_3, p_4$ vier harmonische Punkte, wenn

$$\frac{\overline{p_4p_1}}{\overline{p_4p_2}} = -\frac{\overline{p_3p_1}}{\overline{p_3p_2}}$$

ist; die Punkte p_1, p_2 sind in Bezug auf die Punkte p_3, p_4 und umgekehrt harmonisch konjugiert und der Punkt p_4 ist der zu den Punkten p_1, p_2 und dem Punkte p_3 gehörige vierte harmonische Punkt.

Die zweite dem zweiten Falle entsprechende Gleichung bezeichnet hingegen, da ihr zufolge $v^3 = -1$ ist, die ihm entsprechenden zwei Werte des Doppelverhältnisses als die imaginären dritten Wurzeln der negativen Einheit, und die vier Punkte heifsen aequianharmonisch.

Dem Doppelverhältnis von vier Punkten einer Geraden entspricht das Doppelverhältnis von vier $(m-1)$stufigen Gebieten eines $(m-2)$stufigen Gebietes. Diese Doppelverhältnisse sind gleich, wenn die vier $(m-1)$stufigen Gebiete durch die vier Punkte gehen oder die vier Punkte in den vier $(m-1)$stufigen Gebieten liegen. Denn sind $p_1, .., p_4$ vier Punkte einer Geraden, welche bezw. in den vier Gebieten $p_{1,1} \cdot\cdot p_{m-1,1}, .., p_{1,4} \cdot\cdot p_{m-1,4}$ eines $(m-2)$stufigen Gebietes liegen, so ergiebt sich aus den Gleichungen $p_1 p_{1,1} \cdot\cdot p_{m-1,1} = 0, .., p_4 p_{1,4} \cdot\cdot p_{m-1,4} = 0$ der Eingangs gegebene Ausdruck als gleich dem für jene Gebiete entsprechend gebildeten Ausdrucke. Insbesondere sind die vier $(m-1)$stufigen Gebiete harmonisch, wenn die vier Punkte harmonisch sind, und umgekehrt.

110. Ein $(m-1)$stufiges Gebiet bezeichnen wir nach der es bestimmenden Gleichung $ap = 0$ als ein $(m-1)$stufiges oder $(m-2)$-dimensionales Raumgebilde 1ten Grades und dementsprechend die Gesamtheit der in einem $m$stufigen oder $(m-1)$dimensionalen Gebiete liegenden Punkte p, welche der Gleichung $ap^2 = 0$ genügen, als ein $(m-1)$stufiges oder $(m-2)$dimensionales Raumgebilde 2ten Grades, dessen Repräsentant die Gröfse a^2 oder auch die quadratische Form ap^2 ist. Es besteht im allgemeinen im Falle $m = 2$ aus zwei Punkten, im Falle $m = 3$ aus einem Kegelschnitt und im Falle $m = 4$ aus einer Fläche 2ten Grades. Die Gleichung $ap^2 = 0$ heifst selbstverständlich die Gleichung des Raumgebildes.

In einer ausgezeichneten Beziehung zum Raumgebilde a^2 steht offenbar der Punkt, welcher die Eigenschaft besitzt, dafs für ihn die Formen

$$a^2 e_1 p, .., a^2 e_m p$$

einen und denselben Wert annehmen. Dieser Punkt ist, da für $\varkappa = 1, .., m$

$$(a^2)^m\, e_\varkappa \dot{e}_1 \,..\, e_m \mid e_1 \,..\, e_m = (a^2)^m\, e_1 \,..\, e_m \overset{2}{-}$$

ist, der Punkt

$$p \equiv (a^2)^{m-1}\, \dot{e}_1 \,..\, e_m \mid e_1 \,..\, e_m \text{ oder } (a^2)^{m-1}\, \dot{e}_1 \,..\, e_m$$

und heifst aus einem weiterhin ersichtlichen Grunde das Centrum des Raumgebildes a^2.

Die Determinante $(a^2)^m\, e_1 \,..\, e_m \overset{2}{-}$ ist die Resultante der Formen $a^2 e_1 p, .., a^2 e_m p$ oder die Diskriminante der quadratischen Form ap^2. Sie ist in der Form $(a^2)^m\, e_\varkappa \dot{e}_1 \,..\, e_m \mid e_1 \,..\, e_m$ darstellbar, in welcher die in der Form des Centrums als Koefficienten auftretenden Gröfsen

$$(a^2)^{m-1}\, \dot{e}_1 \,..\, e_m \mid \bar{e}_1 e_1 \,..\, e_m \,, \,..\, , (a^2)^{m-1}\, \dot{e}_1 \,..\, e_m \mid \bar{e}_m\, e_1 \,..\, e_m$$

als Koefficienten der Elemente $a^2 e_\varkappa\, e_1, .., a^2 e_\varkappa e_m$ erscheinen. Diese Koefficienten, deren Summe die Gröfse $(a^2)^{m-1}\, \dot{e}_1 \,..\, e_m \overset{2}{-}$ ist, können also nur verschwinden, wenn die Diskriminante verschwindet.

Das Centrum liegt daher im allgemeinen im Falle $(a^2)^{m-1}\, \dot{e}_1 \,..\, e_m \overset{2}{-} = 0$ im Grenzgebiete und ist, weil sich aus der Form $p \equiv (a^2)^{m-1}\, \dot{e}_1 \,..\, e_m \mid e \,..\, e_m$ infolge der Gleichung $p\varepsilon_1 + .. + p\varepsilon_m = 0$ durch Multiplikation mit $a^2 p$ die Gleichung $ap^2 = 0$ ergiebt, ein Punkt des Raumgebildes. In dem besonderen Falle aber, wenn die letztgenannten Gröfsen verschwinden, ist es, weil dann die Gröfse $p\varepsilon_1, .., p\varepsilon_m$ die Form $\frac{0}{0}$ annehmen, unbestimmt.

Da die Koordinatensumme eines jeden Punktes des Grenzgebietes den Wert Null und die eines jeden ihm nicht angehörigen Punktes den Wert Eins hat, so ist allgemein

$$a^2\, \dot{p} p_1 p_2 = 0, \quad a^2\, p p_1 \equiv (a^2)^m\, e_1 \,..\, e_m \overset{2}{-}.$$

Im Falle $(a^2)^{m-1}\, \dot{e}_1 \,..\, e_m \overset{2}{-} \lesseqgtr 0$ ist

$$p = \frac{(a^2)^{m-1}\, \dot{e}_1 \,..\, e_m \mid e_1 \,..\, e_m}{(a^2)^{m-1}\, \dot{e}_1 \,..\, e_m \overset{2}{-}}$$

und

$$a^2\, p p_1 = \frac{(a^2)^m\, e_1 \,..\, e_m \overset{2}{-}}{(a^2)^{m-1}\, \dot{e}_1 \,..\, e_m \overset{2}{-}}.$$

Verschwindet die Diskriminante, so ist, aufser wenn die Gröfsen

$$(a^2)^{m-1}\, \dot{e}_1 \,..\, e_m \mid \bar{e}_1 e_1 \,..\, e_m \,, \,..\, , (a^2)^{m-1}\, \dot{e}_1 \,..\, e_m \mid \bar{e}_m\, e_1 \,..\, e_m$$

verschwinden oder das Centrum unbestimmt ist,

$$a^2\, e_1 p = 0, \,..\, , a^2\, e_m\, p = 0,$$

und wir können das Centrum auch für $\varkappa = 1, .., m$ in der Form

$$p \equiv (a^2)^{m-1}\,\bar{e}_\varkappa\, e_1 \ldots e_m \mid e_1 \ldots e_m \text{ oder } (a^2)^{m-1}\,\bar{e}_\varkappa\, e_1 \ldots e_m$$

darstellen und, falls es unbestimmt ist, durch diese Form bestimmen. Es ist, da $ap^2 = 0$ ist, ein Punkt des Raumgebildes und bleibt dann nur in dem besonderen Falle, wenn die Koefficienten aller Elemente der Diskriminante verschwinden, unbestimmt. In diesem Falle kann aber ein jeder Punkt des Raumgebildes als Repräsentant des Centrums angesehen werden; die Koefficienten der Gleichungen $a^2\, e_1\, p = 0, \ldots,$ $a^2\, e_m\, p = 0$ sind der Reihe nach einander proportional und ein jeder Punkt p, welcher der Gleichung $ap^2 = 0$ genügt, genügt auch diesen Gleichungen und umgekehrt.

Übrigens verschwinden die Koefficienten aller Elemente der Diskriminante nach der Gleichung

$$(a^2)^{(m-1)2}\, \bar{e}_\varkappa\, e_1 \ldots e_m\, \bar{e}_\lambda\, e_1 \ldots e_m^{\bar{2}} = 0,$$

wenn die Gröſsen

$$(a^2)^{m-1}\, \bar{e}_1 e_1 \ldots e_m^{\bar{2}}, \ldots, (a^2)^{m-1}\, \bar{e}_m\, e_1 \ldots e_m^{\bar{2}}$$

verschwinden. Diese Gröſsen haben, da nach jener Gleichung

$$(a^2)^{m-1}\, \bar{e}_\varkappa e_1 \ldots e_m \mid \bar{e}_\lambda\, e_1 \ldots e_m = \sqrt[2]{(a^2)^{m-1}\, \bar{e}_\varkappa e_1 \ldots e_m^{\bar{2}} \,.\, (a^2)^{m-1}\, \bar{e}_\lambda\, e_1 \ldots e_m^{\bar{2}}}$$

ist, bei verschwindender Diskriminante durchweg dasselbe Zeichen.

111. Nach der Gleichung $(a^2)^{m+1} = (a^2)^{m+1}\, p_\varkappa\, \bar{p}_\varkappa^{\bar{2}}$ ist, weil $(a^2)^{m+1}\, pe_1 \ldots e_m^{\bar{2}} = 0$ ist,

$$ap^2 \,.\, (a^2)^m\;\; e_1 \ldots e_m^{\bar{2}} = (a^2)^{m-1}\, (a^2\, p \mid e_1 \ldots e_m)^2$$

oder, wenn wir mit Rücksicht darauf, daſs die Gröſse $a^2\, p \mid e_1 \ldots e_m$ ein $(m-1)$stufiges Gebiet darstellt,

$$v \,.\, p_1 \ldots p_{m-1} = a^2 p \mid e_1 \ldots e_m$$

setzen,

$$ap^2 \,.\, (a^2)^m\, e_1 \ldots e_m^{\bar{2}} = v^2 \,.\, (a^2)^{m-1}\, p_1 \ldots p_{m-1}^{\bar{2}} \,.$$

Bei nicht verschwindender Diskriminante ist also, wenn $ap^2 = 0$ ist, auch $(a^2)^{m-1}\, p_1 \ldots p_{m-1}^{\bar{2}} = 0$, und wir erkennen in Anbetracht des Umstandes, daſs ein jedes Gebiet $p_1 \ldots p_{m-1}$, welches dieser Gleichung genügt, nach der Gleichung

$$a^2 p = (-1)^{m-1}\, v \,.\, p_1 \ldots p_{m-1} \mid \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m$$

durch einen Punkt des Raumgebildes hindurchgeht, daſs die $(m-1)$-stufigen Gebiete, welche der Gleichung $(a^2)^{m-1}\, p_1 \ldots p_{m-1}^{\bar{2}} = 0$ genügen, das Raumgebilde a^2 umhüllen und die Form $(a^2)^{m-1}\, p_1 \ldots p_{m-1}^{\bar{2}}$

in gleicher Weise, wie die Form ap^2, als Repräsentant des Raumgebildes a^2 angesehen werden kann.

Bei verschwindender Diskriminante dagegen ist unabhängig von der Lage des Punktes p stets $(a^2)^{m-1}\, p_1 \ldots p_{m-1}^{\overset{2}{-}} = 0$, und die Form $(a^2)^{m-1}\, p_1 \ldots p_{m-1}^{\overset{2}{-}}$ kann deshalb das Raumgebilde a^2 nicht repräsentieren. In der That stellt sie nur einen Punkt des Raumgebildes und zwar sein Centrum dar, weil auf Grund der Gleichung

$$p_1 \ldots p_{m-1} = (e, \varepsilon; m)\, p_1 \ldots p_{m-1} \mid \bar{\varepsilon}_1 \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m \,.\, \bar{e}_1 e_1 \ldots e_m$$

infolge des Verschwindens der Diskriminante

$$(a^2)^{(m-1)2}\, \bar{e}_\varkappa e_1 \ldots e_m\, p_1 \ldots p_{m-1}^{\overset{2}{-}} = 0$$

und folglich

$$(a^2)^{m-1}\, \bar{e}_\varkappa e_1 \ldots e_m^{\overset{2}{-}} \,.\, (a^2)^{m-1}\, p_1 \ldots p_{m-1}^{\overset{2}{-}} = (a^2)^{m-1}\, \bar{e}_\varkappa e_1 \ldots e_m \mid p_1 \ldots p_{m-1}^{\overset{2}{-}}$$

ist.

Dieser Gleichung kann man übrigens auf Grund der am Ende des vorigen Abschnittes gegebenen Gleichung

$$(a^2)^{m-1}\, \bar{e}_\varkappa e_1 \ldots e_m \mid \bar{e}_\lambda e_1 \ldots e_m = \sqrt[2]{(a^2)^{m-1}\, \bar{e}_\varkappa e_1 \ldots e_m^{\overset{2}{-}} \,.\, (a^2)^{m-1}\, \bar{e}_\lambda e_1 \ldots e_m^{\overset{2}{-}}}$$

die Form

$$(a^2)^{m-1}\, p_1 \ldots p_{m-1}^{\overset{2}{-}}$$

$$= \left((e, \varepsilon; m)\, p_1 \ldots p_{m-1} \mid \bar{\varepsilon}_1 \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m \,.\, \sqrt[2]{(a^2)^{m-1}\, \bar{e}_1 e_1 \ldots e_m^{\overset{2}{-}}}\,\right)^2$$

oder

$$(a^2)^{m-1}\, p_1 \ldots p_{m-1}^{\overset{2}{-}} = \left(\sqrt[2]{(a^2)^{m-1}}\, p_1 \ldots p_{m-1}\right)^2$$

geben, in der die Zeichen der zweideutigen Quadratwurzeln vermittelst derselben Gleichung durch die Zeichen der Gröfsen $(a^2)^{m-1}\, \bar{e}_\varkappa e_1 \ldots e_m \mid \bar{e}_\lambda e_1 \ldots e_m$ bestimmt sind.

Nach der Gleichung $(a^2)^{m-1} = (a^2)^{m-1}\, p_\varkappa \bar{p}_\varkappa^{\overset{2}{-}}$ ist daher

$$ap^2 \,.\, (a^2)^{m-2}\, p_1 \ldots p_{m-2}^{\overset{2}{-}}$$

$$= (a^2)^{m-3}\, (a^2 p \mid p_1 \ldots p_{m-2})^2 + \left(\sqrt[2]{(a^2)^{m-1}}\, pp_1 \ldots p_{m-2}\right)^2,$$

und es genügen somit die Punkte des Raumgebildes a^2 der Gleichung

$$(a^2)^{m-3}\, (a^2 p \mid p_1 \ldots p_{m-2})^2 + \left(\sqrt[2]{(a^2)^{m-1}}\, pp_1 \ldots p_{m-2}\right)^2 = 0$$

und folglich insbesondere für $m = 3$ zum einen Teil der Gleichung $a^2 p_1 p + \sqrt[2]{-(a^2)^2}\, pp_1 = 0$ und zum anderen Teil der Gleichung $a^2 p_1 p - \sqrt[2]{-(a^2)^2}\, pp_1 = 0$. Bei verschwindender Diskriminante zerfällt also das Raumgebilde a^2 für $m = 3$ in Gerade, und zwar in zwei imaginäre oder zwei reelle oder eine doppelt zählende reelle Gerade, je nachdem die Gröfsen

$$(a^2)^2\, \bar{e}_1 e_1 e_2 e_3^{\underline{2}},\ (a^2)^2\, \bar{e}_2 e_1 e_2 e_3^{\underline{2}},\ (a^2)^2\, \bar{e}_3 e_1 e_2 e_3^{\underline{2}}$$

positiv oder negativ oder Null sind. Eine solche Degeneration des Raumgebildes besteht auch für $m > 3$; es wird, wie in dem Falle $m = 3$ von Geraden gebildet, die sämtlich durch das Centrum gehen. Denn ist p_1 das Centrum und p_2 irgend ein beliebiger Punkt des Raumgebildes, so ist auch der Punkt $p = p\bar{p}_1 \cdot p_1 + p\bar{p}_2 \cdot p_2$ ein solcher, weil $ap^2 = 2\, p\bar{p}_1 \cdot p\bar{p}_2\ a^2 p_1 p_2$ und $a^2 p_1 p_2 \equiv (a^2)^m\, e_1 \ldots e_m^{\underline{2}} = 0$ ist. In dem besonderen Falle, wenn die Koefficienten aller Elemente der Diskriminante oder die sämtlichen Koefficienten der Form $(a^2)^{m-1}\, p_1 \ldots p_{m-1}^{\underline{2}}$ verschwinden, ist der Ort der Geraden das durch jede der Formen $a^2 e_1, \ldots, a^2 e_m$ darstellbare $(m-1)$stufige Gebiet $a^2 p_1$, mit dem das Raumgebilde zusammenfällt. Nur für $m = 2$ findet eine Degeneration in Gerade naturgemäfs nicht statt; durch das Verschwinden der Diskriminante reduziert sich das Raumgebilde in diesem Falle auf das doppelt zählende Centrum.

Endlich sei bemerkt, dafs sich selbstverständlich die Gleichung $ap^2 = 0$ für

$$p = p\varepsilon_1 \,.\, e_1 + \ldots + p\varepsilon_m \,.\, e_m$$

in homogenen Koordinaten und für

$$p = e_1 + p\varepsilon_2 \,.\, \dot{e}_1 e_2 + \ldots + p\varepsilon_m \cdot \dot{e}_1 e_m$$

in Cartesischen Koordinaten darstellt, und dafs man die entsprechenden Formen der zugehörigen Gleichung $(a^2)^{m-1}\, p_1 \ldots p_{m-1}^{\underline{2}} = 0$ für

$$p_1 \ldots p_{m-1} = (e, \varepsilon; m)\ p_1 \ldots p_{m-1} \mid \bar{\varepsilon}_1 \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m \,.\, \bar{e}_1 e_1 \ldots e_m$$

und

$$p_1 \ldots p_{m-1} = (e, \varepsilon; m-1)\ \dot{p}_1 \ldots p_{m-1} \mid \bar{\varepsilon}_2 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_m \,.\, e_1 \dot{e}_1 \bar{e}_2 e_2 \ldots e_m$$
$$+ p_1 \ldots p_{m-1} \mid \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_m \,.\, \dot{e}_1 e_2 \ldots e_m$$

erhält. Entsprechend diesen Darstellungen ist

$$(a^2)^m\, e_1 \ldots e_m^{\underline{2}} = (a^2)^m\, e_1 \dot{e}_1 \ldots e_m^{\underline{2}}$$

und, wie sich vermittelst der Gleichungen

$$e_1 \dot{e}_1 \bar{e}_\varkappa e_2 \ldots e_m = e_1 \bar{e}_\varkappa e_2 \ldots e_m,\quad \dot{e}_1 \ldots e_m = (\bar{e}_1 + \ldots + \bar{e}_m)\, e_1 \ldots e_m$$

ergiebt,

$$(a^2)^{(m-1)m}\, \bar{e}_1 e_1 \ldots e_m \ldots \bar{e}_m e_1 \ldots e_m^{\underline{2}}$$
$$= (a^2)^{(m-1)m}\, e_1 \dot{e}_1 \bar{e}_2 e_2 \ldots e_m \ldots e_1 \dot{e}_1 \bar{e}_m e_2 \ldots e_m\, \dot{e}_1 e_2 \ldots e_m^{\underline{2}};$$

überdies ist augenscheinlich

$$(a^2)^{(m-1)m}\, \bar{e}_1 e_1 \ldots e_m \ldots \bar{e}_m e_1 \ldots e_m^{\underline{2}} = \left((a^2)^m\, e_1 \ldots e_m^{\underline{2}}\right)^{m-1}.$$

112. Nach der allgemeineren Gleichung $(a^2)^{n+1} = (a^2)^{n+1}\, p_\varkappa \bar{p}_\varkappa{}^2$ gilt ferner, wenn p ein Punkt des $n$stufigen Gebietes $p_1 \ldots p_n$ ist, die Gleichung

$$ap^2 \,.\, (a^2)^n\, p_1 \ldots p_n{}^2 = (a^2)^{n-1}\, (a^2 p \,|\, p_1 \ldots p_n)^2,$$

aus der mit Rücksicht auf die Form

$$p_1 \ldots p_n = (e, \varepsilon; m)\; p_1 \ldots p_n \,|\, \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n \,.\, e_1 \ldots e_n$$

hervorgeht, dafs, wenn nicht die Gröfsen

$$(a^2)^n\, e_{\varkappa_1} \ldots e_{\varkappa_n} \,|\, e_{\lambda_1} \ldots e_{\lambda_n}$$

durchweg verschwinden, die Gleichung $ap^2 = 0$ die Gleichung $(a^2)^{n-1}\, (a^2 p \,|\, p_1 \ldots p_n)^2 = 0$ nach sich zieht und also, da die Gröfse $a^2 p \,|\, p_1 \ldots p_n$ ein $(n-1)$stufiges Gebiet des $(m-1)$stufigen Gebietes $a^2 p$ darstellt, die Form $(a^2)^{n-1}\, p_1 \ldots p_{n-1}{}^2$ als Repräsentant des Raumgebildes a^2 angesehen werden kann. Die $(n-1)$stufigen Gebiete $p_1 \ldots p_{n-1}$, welche der Gleichung $(a^2)^{n-1}\, p_1 \ldots p_{n-1}{}^2 = 0$ genügen, umhüllen das Raumgebilde; sie liegen bei nicht verschwindender Diskriminante in den $(m-1)$stufigen Gebieten des Raumgebildes und bei verschwindender Diskriminante nach der dann geltenden Gleichung $a^2 p\, (a^2)^{m-1}\, \dot{e}_1 \ldots e_m \,|\, e_1 \ldots e_m = 0$ in $(m-1)$stufigen Gebieten, die dem Centrum des Raumgebildes angehören. Ein gleichzeitiges Verschwinden der Gröfsen $(a^2)^n\, e_{\varkappa_1} \ldots e_{\varkappa_n} \,|\, e_{\lambda_1} \ldots e_{\lambda_n}$ für $n < m$ kann aber, wie sich vermittelst des Laplace'schen Determinantensatzes ergiebt, nur dann eintreten, wenn die Koefficienten aller Elemente der Diskriminante verschwinden oder also das Raumgebilde mit einem $(m-1)$-stufigen Gebiete zusammenfällt.

Die Form $(a^2)^{n-1}\, p_1 \ldots p_{n-1}{}^2$ ist also für $n = 2, \ldots, m-1$ der Repräsentant des Raumgebildes a^2, wenn dieses nicht ein doppelt zählendes $(m-1)$stufiges Raumgebilde 1ten Grades ist oder die Koefficienten aller Elemente der Diskriminante nicht verschwinden; für $n = m$ ist sie nur bei nicht verschwindender Diskriminante der Repräsentant des Raumgebildes, dagegen bei verschwindender Diskriminante der Repräsentant eines Punktes des Raumgebildes, nämlich seines Centrums, für $n = m + 1$ unterscheidet sie sich nur durch einen numerischen Faktor von der Diskriminante und für $n > m + 1$ nimmt sie den Wert Null an.

Die Form ap^2 repräsentiert, wenn wir von den Punkten p des $m$stufigen Gebietes $e_1 \ldots e_m$ nur die in irgend einem $n$stufigen Gebiete liegenden Punkte in Betracht ziehen, die Gesamtheit der in diesem Gebiete liegenden Punkte des Raumgebildes a^2, und es bilden somit die in einem $n$stufigen Gebiete liegenden Punkte des Raumgebildes a^2 ein $(n-1)$stufiges Raumgebilde 2ten Grades. Eine Gerade insbesondere hat also mit dem Raumgebilde a^2 im allgemeinen zwei Punkte und eine Ebene einen Kegelschnitt gemein. Die Form $a\dot{p}_1 p_2{}^2$ stellt die Gesamtheit der Grenzpunkte des Raumgebildes a^2 dar.

113. Setzen wir das Centrum des Raumgebildes a^2, das wir durch p_1 bezeichnen wollen, als nicht im Grenzgebiete gelegen und damit im allgemeinen die Gröfse $(a^2)^{m-1}\dot{e}_1 \ldots e_m{}^{\overset{2}{-}}$ als von Null verschieden voraus und ist p ein auf irgend einer beliebigen durch das Centrum gehenden Geraden $p_1 p_2$ gelegener Punkt des Raumgebildes, so gilt nach der Gleichung $p = p_1 + \dot{p}_1 p$ infolge der Gleichungen $ap^2 = 0$ und $a^2 p_1 \dot{p}_1 p = 0$ die Gleichung

$$a\dot{p}_1 p^2 = -ap_1{}^2$$

und darnach in Anbetracht des Umstandes, dafs die Gröfsen $\dot{p}_1 p$ und $\dot{p}_1 p_2$ sich nur durch ihre metrischen Werte von einander unterscheiden, für die Entfernung des Punktes p vom Centrum die Gleichung

$$\zeta(\dot{p}_1 p)^2 = -\frac{ap_1{}^2 \cdot \zeta(\dot{p}_1 p_2)^2}{a\dot{p}_1 p_2{}^2}.$$

Es liegen also, da

$$ap_1{}^2 = \frac{(a^2)^m\, e_1 \ldots e_m{}^{\overset{2}{-}}}{(a^2)^{m-1}\, \dot{e}_1 \ldots e_m{}^{\overset{2}{-}}}$$

ist, bei nicht verschwindender Diskriminante auf einer jeden beliebigen Geraden des Centrums $p_1 p_2$ in gleicher Entfernung von ihm zwei Punkte des Raumgebildes, die, wenn wir nur reelle Gerade in Betracht ziehen, reell oder imaginär sind, je nachdem die rechts stehende Gröfse positiv oder negativ ist. Auf den reellen Geraden des Centrums liegen somit entweder nur reelle oder nur imaginäre Punkte des Raumgebildes, wenn die quadratische Form $a\dot{p}_1 p_2{}^2$ für eine jede Lage des reellen Punktes p_2 nur positive oder nur negative Werte annimmt, während, wenn das nicht der Fall ist, die auf den reellen Geraden des Centrums gelegenen Punkte des Raumgebildes zum einen Teil reell und zum anderen Teil imaginär sind. Im ersten Falle heifst das Raumgebilde ein elliptisches und im anderen Falle ein hyperbolisches Raumgebilde.

Aus der im 16ten Abschnitte gegebenen Darstellung der quadratischen Form ap^2 durch die Quadrate von m von einander unabhängigen linearen Formen für p ist nun ersichtlich, dafs sie für reelle p nur positive oder nur negative Werte annimmt oder also eine wesentlich positive oder eine wesentlich negative Form ist, je nachdem

$$(a^2)^{m-\varkappa+1}\, e_\varkappa \ldots e_m{}^{\frac{2}{-}} \quad \text{oder} \quad (-1)^{m-\varkappa+1}\, (a^2)^{m-\varkappa+1}\, e_\varkappa \ldots e_m{}^{\frac{2}{-}}$$

für $\varkappa = 1, \ldots, m-1$ positiv ist.

Die Form $a\dot{p}_1 p_2{}^2$ ist daher eine wesentlich positive oder eine wesentlich negative Form, je nachdem

$$(a^2)^{m-\varkappa}\, \dot{e}_1\, e_{\varkappa+1} \ldots e_m{}^{\frac{2}{-}} \quad \text{oder} \quad (-1)^{m-\varkappa}\, (a^2)^{m-\varkappa}\, \dot{e}_1 e_{\varkappa+1} \ldots e_m{}^{\frac{2}{-}}$$

für $\varkappa = 1, \ldots, m-1$ positiv ist.

Im ersten Falle ist $(a^2)^{m-1}\, \dot{e}_1 \ldots e_m{}^{\frac{2}{-}}$ und im anderen Falle $(-1)^{m-1} (a^2)^{m-1}\, \dot{e}_1 \ldots e_m{}^{\frac{2}{-}}$ positiv, und es ist die in Rede stehende Gröfse positiv oder negativ, je nachdem bezw.

$$(a^2)^m\, e_1 \ldots e_m{}^{\frac{2}{-}} \quad \text{oder} \quad (-1)^m\, (a^2)^m\, e_1 \ldots e_m{}^{\frac{2}{-}}$$

negativ oder positiv ist.

Wenn also

$$(a^2)^{m-\varkappa}\, \dot{e}_1 e_{\varkappa+1} \ldots e_m{}^{\frac{2}{-}} \quad \text{oder} \quad (-1)^{m-\varkappa}\, (a^2)^{m-\varkappa}\, \dot{e}_1 e_{\varkappa+1} \ldots e_m{}^{\frac{2}{-}}$$

für $\varkappa = 1, \ldots, m-1$ positiv ist, so ist das Raumgebilde a^2, je nachdem bezw.

$$(a^2)^m\, e_1 \ldots e_m{}^{\frac{2}{-}} \quad \text{oder} \quad (-1)^m\, (a^2)^m\, e_1 \ldots e_m{}^{\frac{2}{-}}$$

negativ oder positiv ist, ein reelles oder imaginäres elliptisches Raumgebilde und ferner im Falle $(a^2)^m\, e_1 \ldots e_m{}^{\frac{2}{-}} = 0$ ein imaginäres konisches Raumgebilde mit einem reellen Centrum, da die Form $a\dot{p}_1 p_2{}^2$ als eine wesentlich positive oder wesentlich negative Form die sämtlichen Grenzpunkte des Raumgebildes als imaginär kennzeichnet.

Wenn dagegen

$$\text{weder } (a^2)^{m-\varkappa}\, \dot{e}_1 e_{\varkappa+1} \ldots e_m{}^{\frac{2}{-}} \text{ noch } (-1)^{m-\varkappa}\, (a^2)^{m-\varkappa}\, \dot{e}_1 e_{\varkappa+1} \ldots e_m{}^{\frac{2}{-}}$$

für $\varkappa = 1, \ldots, m-1$ durchweg positiv ist, so ist das Raumgebilde a^2 im Falle $(a^2)^m\, e_1 \ldots e_m{}^{\frac{2}{-}} \lesssim 0$ ein hyperbolisches und im Falle $(a^2)^m\, e_1 \ldots e_m{}^{\frac{2}{-}} = 0$ ein reelles konisches Raumgebilde, da die Form $a\dot{p}_1 p_2{}^2$ weder eine wesentlich positive noch eine wesentlich negative Form ist und daher das Raumgebilde auch reelle Grenzpunkte hat.

Die dem Falle $(a^2)^{m-1}\, \dot{e}_1 \ldots e_m{}^{\frac{2}{-}} = 0$, in welchem das Centrum ein Grenzpunkt oder unbestimmt ist, entsprechenden Raumgebilde heifsen parabolische und cylindrische Raumgebilde; die letzteren umfassen als Ausartungen auch $(m-1)$stufige Gebiete.

Für $m = 3$ insbesondere ist also das Raumgebilde a^2, je nachdem $(a^2)^2\, \dot{e}_1 e_2 e_3{}^{\underline{2}}$ positiv oder Null oder negativ ist, im Falle $(a^2)^3\, e_1 e_2 e_3{}^{\underline{2}} \lesseqgtr 0$ eine Ellipse, und zwar eine reelle Ellipse, wenn $a^2\, \dot{e}_1 e_3{}^2$ bezw. positiv oder negativ ist, und eine imaginäre Ellipse, wenn das Umgekehrte der Fall ist, oder eine Parabel oder endlich eine Hyperbel und zerfällt im Falle $(a^2)^3\, e_1 e_2 e_3{}^{\underline{2}} = 0$ in zwei in einem reellen Punkte sich schneidende imaginäre Gerade oder in zwei parallele oder eine doppelt zählende Gerade oder endlich in zwei sich schneidende reelle Gerade.

Zu den elliptischen Raumgebilden gehören auch die sphärischen Raumgebilde, deren sämtliche dem Grenzgebiete nicht angehörige Punkte vom Centrum eine und dieselbe Entfernung haben. Das Raumgebilde a^2 ist nach dieser Eigenschaft ein sphärisches Raumgebilde, wenn

$$a\dot{p}_1 p_2{}^2 = \omega\, (\dot{p}_1 p_2)^2$$

ist oder die Koefficienten der Form ap^2 mit einander durch die Gleichung

$$a^2\, \dot{e}_1 e_\varkappa\, \dot{e}_1 e_\lambda = \omega\, (\dot{e}_1 e_\varkappa \mid \dot{e}_1 e_\lambda)$$

verbunden sind. Dafs es in der That unter dieser Voraussetzung ein elliptisches Raumgebilde ist, erkennt man auch aus dem oben gegebenen Kriterium, wenn man aus der für einen jeden dem Grenzgebiete nicht angehörigen Punkt des Raumgebildes a^2 geltenden Gleichung

$$(a^2)^m\, e_1 \ldots e_m{}^{\underline{2}} = -(a^2)^{m-2}\, (a^2\, p \mid \dot{e}_1 \ldots e_m)^2,$$

die sich für $ap^2 = 0$ unter Berücksichtigung der für einen jeden nicht im Grenzgebiete liegenden Punkt p gültigen Gleichung

$$(a^2)^m\, p\dot{e}_1 \ldots e_m{}^{\underline{2}} = (a^2)^m\, e_1 \ldots e_m{}^{\underline{2}}$$

aus der Gleichung $(a^2)^m = (a^2)^m\, p_\varkappa \bar{p}_\varkappa{}^{\underline{2}}$ ergiebt, die Gleichung

$$(a^2)^m\, e \ldots e_m{}^{\underline{2}} = -\omega^{m-2}\, (a^2\, p \mid \dot{e}_1 \ldots e_m)^2$$

entnimmt und ferner bemerkt, dafs

$$(a^2)^{m-\varkappa}\, \dot{e}_1 e_{\varkappa+1} \ldots e_m{}^{\underline{2}} = \omega^{m-\varkappa}\, (\dot{e}_1 e_{\varkappa+1} \ldots e_m)^2$$

ist. Für die Entfernung der Punkte des sphärischen Raumgebildes vom Centrum gilt die Gleichung

$$[\dot{p}_1 p]^2 = \frac{[a^2 p_2 \,|\, \dot{e}_1 \,..\, e_m]^2}{\omega^2 \, [\dot{e}_1 \,..\, e_m]^2},$$

in der p_2 ein beliebiger, dem Grenzgebiete nicht angehöriger Punkt des Raumgebildes ist.

114. Wir haben im 105 ten Abschnitte die vollständige Reciprocität, die in einem $m$stufigen Gebiete zwischen den 1 stufigen und den $(m-1)$stufigen Gebieten besteht und bei der die $n$stufigen und die $(m-n)$stufigen Gebiete einander entsprechen, erkannt und zum Ausdruck gebracht und sehen aus dem 111 ten Abschnitte, dafs sich diese Reciprocität insbesondere auch auf das Raumgebilde 2 ten Grades erstreckt, welches sich bei nicht verschwindender Diskriminante sowohl durch die Form ap^2, als auch durch die Form $a_1 \,..\, a_{m-1} \,|\, p_1 \,..\, p_{m-1}{}^2$ darstellt.

Es gilt in gleicher Weise die Gleichung

$$a_1 \,..\, a_{m-1} \,|\, p_1 \,..\, p_{m-1}{}^2 \,.\, (a_1 \,..\, a_{m-1}{}^2)^m \, \bar{e}_1 e_1 \,..\, e_m \,..\, \bar{e}_m \, e_1 \,..\, e_m{}^2$$
$$= (a_1 \,..\, a_{m-1}{}^2)^{m-1} \, (a_1 \,..\, a_{m-1}{}^2 \; p_1 \,..\, p_{m-1} \,|\, \bar{e}_1 e_1 \,..\, e_m \,..\, \bar{e}_m \, e_1 \,..\, e_m)^2$$

oder, wenn wir

$$w \cdot p_{1,1} \,..\, p_{m-1,1} \,..\, p_{1,m-1} \,..\, p_{m-1,m-1}$$
$$= a_1 \,..\, a_{m-1}{}^2 \; p_1 \,..\, p_{m-1} \,|\, \bar{e}_1 e_1 \,..\, e_m \,..\, \bar{e}_m \, e_1 \,..\, e_m$$

setzen, die Gleichung

$$a_1 \,..\, a_{m-1} \,|\, p_1 \,..\, p_{m-1}{}^2 \,.\, (a_1 \,..\, a_{m-1}{}^2)^m \, \bar{e}_1 e_1 \,..\, e_m \,..\, \bar{e}_m \, e_1 \,..\, e_m{}^2$$
$$= w^2 \,.\, (a_1 \,..\, a_{m-1}{}^2)^{m-1} \; p_{1,1} \,..\, p_{m-1,1} \,..\, p_{1,m-1} \,..\, p_{m-1,m-1}{}^2$$

und in gleicher Weise knüpfen sich an sie entsprechende Betrachtungen.

In der That unterscheidet sich diese Gleichung im Falle des Nichtverschwindens der Diskriminante $(a_1 \,..\, a_{m-1}{}^2)^m \, \bar{e}_1 e_1 \,..\, e_m \,..\, \bar{e}_m e_1 \,..\, e_m{}^2$, wenn wir die Gröfsen $a_1 \,..\, a_{m-1}{}^2$ und $p_{1,1} \,..\, p_{m-1,1} \,..\, p_{1,m-1} \,.\, p_{m-1,m-1}$ durch die Gröfsen $(a^2)^{m-1}$ und $\bar{p}_1 p p_1 \,..\, p_{m-1} \,..\, \bar{p}_{m-1} \, p p_1 \,..\, p_{m-1}$ ersetzen, nicht wesentlich von der Gleichung

$$ap^2 \,.\, (a^2)^m \, e_1 \,..\, e_m{}^2 = v^2 \,.\, (a^2)^{m-1} \; p_1 \,..\, p_{m-1}{}^2,$$

in der die Gebiete p und $p_1 \,..\, p_{m-1}$ durch die Gleichung

$$v \,.\, p_1 \,..\, p_{m-1} = a^2 p \,|\, e_1 \,..\, e_m$$

oder auch, da

$$v \,.\, (a^2)^{m-1} \; p_1 \,..\, p_{m-1} = (a^2)^m \, p \,|\, e_1 \,..\, e_m$$

und somit

$$v\,.\,(a^2)^{m-1}\,p_1\,..\,p_{m-1}\,|\,\bar{e}_\varkappa e_1\,..\,e_m = (-1)^{m-1}\,(a^2)^m\,e_1\,..\,e_m^{\;2}\,.\,p\varepsilon_\varkappa$$

ist, durch die Gleichung

$$p\,.\,(a^2)^m\,e_1\,..\,e_m^{\;2} = (-1)^{m-1}\,v\,.\,(a^2)^{m-1}\,p_1\,..\,p_{m-1}\,|\,e_1\,..\,e_m$$

mit einander verbunden sind. Eine vollständige Übereinstimmung zeigt sich, wenn wir

$$vw = \frac{(a^2)^m\,e_1\,..\,e_m^{\;2}}{pp_1\,..\,p_{m-1}\,|\,\varepsilon_1\,..\,\varepsilon_m^{\;m-2}}$$

setzen.

Bei verschwindender Diskriminante wird das Raumgebilde $a_1\,..\,a_{m-1}^{\;2}$ von $(m-2)$stufigen Gebieten gebildet, die sämtlich in dem $(m-1)$stufigen Gebiete

$$(a_1\,..\,a_{m-1}^{\;2})^{m-1}\,\dot{\bar{e}}_1 e_1\,..\,e_m\,..\,\bar{e}_m e_1\,..\,e_m\,|\,\bar{e}_1 e_1\,..\,e_m\,..\,\bar{e}_m\,e_1\,..\,e_m$$

liegen, und fällt in dem besonderen Falle, wenn die Koefficienten aller Elemente der Diskriminante verschwinden, mit dem Punkte $a_1\,..\,a_{m-1}^{\;2}\,p_{1\,1}\,..\,p_{m-1,1}$ zusammen.

115. Auf Grund der Gleichungen

$$v\,.\,p_1\,..\,p_{m-1} \equiv a^2 p\,|\,e_1\,..\,e_m$$

und

$$p\,.\,(a^2)^m\,e_1\,..\,e_m^{\;2} = (-1)^{m-1}\,v\,.\,(a^2)^{m-1}\,p_1\,..\,p_{m-1}\,|\,e_1\,..\,e_m,$$

durch welche einem Punkte ein $(m-1)$stufiges Gebiet und umgekehrt einem $(m-1)$stufigen Gebiete ein Punkt zugeordnet wird, bezeichnen wir das $(m-1)$stufige Gebiet a^2p als die Polare des Punktes p und den Punkt $(a^2)^{m-1}\,p_1\,..\,p_{m-1}$ als den Pol des $(m-1)$-stufigen Gebietes $p_1\,..\,p_{m-1}$ in Bezug auf das Raumgebilde a^2.

Bei nicht verschwindender Diskriminante ist ein Punkt der Pol eines $(m-1)$stufigen Gebietes, wenn dieses seine Polare, und ein $(m-1)$stufiges Gebiet die Polare eines Punktes, wenn dieser sein Pol ist. Das Raumgebilde a^2 ist nach den Gleichungen

$$ap^2 = 0,\quad (a^2)^{m-1}\,p_1\,..\,p_{m-1}^{\;2} = 0$$

der Ort der Punkte, die auf ihren Polaren liegen, und zugleich der Ort der $(m-1)$stufigen Gebiete, die durch ihre Pole gehen, und es gelten infolge der auf dieses Raumgebilde sich erstreckenden Reciprocität, die in einem $m$stufigen Gebiete zwischen den 1stufigen und den $(m-1)$stufigen Gebieten besteht, für Pol und Polare entsprechende Sätze, soweit wenigstens, als es sich nicht um Beziehungen zu dem $(m-1)$stufigen Grenzgebiete handelt.

Aus der Gleichung $a^2 p_1 p_2 = 0$ ergiebt sich, dafs ein Punkt auf der Polare eines anderen Punktes liegt, wenn dieser auf seiner Polare liegt, und ein $(m-1)$stufiges Gebiet durch den Pol eines anderen $(m-1)$stufigen Gebietes geht, wenn dieses durch seinen Pol geht. Die Pole aller durch einen Punkt gehenden $(m-1)$stufigen Gebiete liegen daher auf seiner Polare und die Polaren aller in einem $(m-1)$stufigen Gebiete liegenden Punkte gehen durch seinen Pol. In der That ist nach der Gleichung $(a^2)^{m-1} p_1 \ldots p_{m-1} = a^2 p_1 \ldots a^2 p_{m-1}$ der Pol eines $(m-1)$stufigen Gebietes der Durchschnittspunkt der Polaren der in ihm gelegenen Punkte.

Ist

$$a^2 p_1 p_2 = 0, \ldots, a^2 p_1 p_n = 0; \ldots; a^2 p_{n-1} p_n = 0,$$

so liegen von den n Punkten $p_1, \ldots, p_n$ je $n-1$ Punkte in der Polare des $n$ten Punktes und gehen von den n $(m-1)$stufigen Gebieten $a^2 p_1, \ldots, a^2 p_n$ je $n-1$ Gebiete durch den Pol des $n$ten Gebietes, und die n Punkte und ebenso die n $(m-1)$stufigen Gebiete heifsen polar konjugiert.

Sind ferner p_1 und p_2 zwei Punkte des Raumgebildes und also $ap_1{}^2 = 0$ und $ap_2{}^2 = 0$, so ist auch

$$a^2 (p\bar{p}_1 \cdot p_1 + p\bar{p}_2 \cdot p_2)(p\bar{p}_1 \cdot p_1 - p\bar{p}_2 \cdot p_2) = 0.$$

Folglich ist die Polare eines Punktes der Ort der zu den auf einer jeden seiner Geraden liegenden Punkten des Raumgebildes und ihm selbst gehörigen vierten harmonischen Punktes, und auf einer jeden Geraden sind je zwei polar konjugierte Punkte in Bezug auf die in ihr gelegenen Punkte des Raumgebildes harmonisch konjugiert.

Zu den Polaren gehört als $(m-1)$stufiges Gebiet auch das Grenzgebiet $\dot{e}_1 \ldots e_m$. Der Pol des Grenzgebietes ist das Centrum $(a^2)^{m-1} \dot{e}_1 \ldots e_m$; es ist, da der zu zwei Punkten einer Geraden und ihrem Mittelpunkte gehörige vierte harmonische Punkt der Grenzpunkt der Geraden ist, der Mittelpunkt einer jeden seiner Geraden in Bezug auf die in ihr gelegenen Punkte des Raumgebildes.

Bei verschwindender Diskriminante tritt in der Polarenbeziehung eine Unbestimmtheit ein. Es entspricht einem jeden Punkte mit Ausnahme des Centrums eine bestimmte Polare, aber dieser Polare nicht umgekehrt ein bestimmter Pol, und einem jeden $(m-1)$stufigen

Gebiete mit Ausnahme der durch das Centrum gehenden Gebiete ein bestimmter Pol, aber diesem Pol nicht umgekehrt eine bestimmte Polare. Da, wenn p das Centrum ist, die Koefficienten der Form

$$a^2 p = a^2 e_1 p \cdot \varepsilon_1 + \ldots + a^2 e_m p \cdot \varepsilon_m$$

verschwinden und dasselbe unter der Voraussetzung $(a^2)^{m-1}\, \bar{e_\chi} e_1 \ldots e_m | p_1 \ldots p_{m-1} = 0$ von den Koefficienten der Form

$$(a^2)^{m-1}\, p_1 \ldots p_{m-1} \,|\, e_1 \ldots e_m = (e;\, m)\,(a^2)^{m-1}\, p_1 \ldots p_{m-1} \,|\, \bar{e_1} e_1 \ldots e_m \cdot e_1$$

gilt, so kann als Polare des Centrums jedes $(m-1)$stufige Gebiet und als Pol eines durch das Centrum gehenden $(m-1)$stufigen Gebietes jeder Punkt gelten. Die Polare eines jeden anderen Punktes aber ist nach der Gleichung $a^2 p\, (a^2)^{m-1}\, \dot{e}_1 \ldots e_m \,|\, e_1 \ldots e_m = 0$ ein durch das Centrum gehendes $(m-1)$stufiges Gebiet und der Pol eines jeden anderen $(m-1)$stufigen Gebietes das Centrum, weil er nach der Gleichung $a^2 p\, (a^2)^{m-1} p_1 \ldots p_{m-1} \,|\, e_1 \ldots e_m = (a^2)^m\, p p_1 \ldots p_{m-1} \,|\, e_1 \ldots e_m = 0$ in einem jeden durch das Centrum gehenden $(m-1)$stufigen Gebiete liegt.

In dem besonderen Falle, wenn die Koefficienten aller Elemente der Diskriminante verschwinden, ist das $(m-1)$stufige Gebiet, mit welchem das Raumgebilde zusammenfällt, die Polare eines jeden nicht in ihm gelegenen Punktes, sonst können als Polare eines Punktes und als Pol eines $(m-1)$stufigen Gebietes jedes $(m-1)$stufige Gebiet und jeder Punkt gelten.

Das Verschwinden der Diskriminante ist nach der Gleichung

$$(a^2)^m\, e_1 \ldots e_m{}^2 = a^2 p\, (a^2)^{m-1}\, \dot{e}_1 \ldots e_m \,|\, e_1 \ldots e_m$$

die Bedingung, unter welcher durch das Centrum die Polaren der übrigen Punkte hindurchgehen.

116. Auf einer jeden Geraden $p_1 p_2$ liegen zwei Punkte p des Raumgebildes a^2, für welche nach der Gleichung $ap^2 = 0$ offenbar die Gleichung

$$\frac{p\bar{p}_1}{p\bar{p}_2} = \frac{-a^2 p_1 p_2 + \sqrt[2]{-(a^2)^2\, p_1 p_2{}^2}}{ap_1{}^2}$$

gilt. Betrachten wir sie und ebenso die auf der Geraden gelegenen Punkte p_1 und p_2 als konjugierte Punkte, so erhalten wir daher für das Doppelverhältnis dieser vier Punkte zwei Werte, von denen der eine

$$v = \frac{-a^2 p_1 p_2 + \sqrt{-(a^2)^2\, p_1 p_2{}^2}}{-a^2 p_1 p_2 - \sqrt{-(a^2)^2\, p_1 p_2{}^2}}$$

und der andere diesem umgekehrt gleich ist, und die also die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(v+1)^2 (a^2)^2 \; p_1 p_2^{\,\overset{2}{-}} + (v-1)^2 (a^2 p_1 p_2)^2 = 0$$

sind.

Für $v = -1$ sind die Punkte vier harmonische Punkte, und in der That ist dann $a^2 p_1 p_2 = 0$; der Punkt p_1 liegt auf der Polare des Punktes p_2 und umgekehrt. Für $v = +1$ dagegen ist $(a^2)^2 \; p_1 p_2^{\,\overset{2}{-}} = 0$, die auf der Geraden liegenden Punkte des Raumgebildes fallen in einen Punkt zusammen und die Gerade ist eine Gerade des Raumgebildes, und für $v = 0$ ist $a p_1{}^2 \; a p_2{}^2 = 0$ und demnach wenigstens einer der beiden Punkte p_1 und p_2 ein Punkt des Raumgebildes.

Die Gleichung

$$(v+1)^2 (a_2{}^2)^2 \; p_1 p_2^{\,\overset{2}{-}} + (v-1)^2 (a_2{}^2 \, p_1 p_2)^2 = 0,$$

welche das Doppelverhältnis der Punkte p_1, p_2 einer Geraden und der in ihr gelegenen Punkte des Raumgebildes $a_2{}^2$ bestimmt, nimmt, wenn wir die ersteren zwei Punkte im Raumgebilde $a_1{}^2$ gelegen und somit $a_1 p_1{}^2 = 0$ und $a_1 p_2{}^2 = 0$ annehmen, infolge der dann geltenden Gleichungen

$$(a_1{}^2)^2 \; p_1 p_2^{\,\overset{2}{-}} = -(a_1{}^2 p_1 p_2)^2, \quad a_1{}^2 a_2{}^2 \; p_1 p_2^{\,\overset{2}{-}} = -\, a_1{}^2 p_1 \, p_2 \, a_2{}^2 \, p_1 p_2$$

nach Multiplikation mit $-(a_1{}^2 p_1 p_2)^2$ die Form

$$(v+1)^2 (a_1{}^2)^2 p_1 p_2^{\,\overset{2}{-}} . (a_2{}^2)^2 \; p_1 p_2^{\,\overset{2}{-}} - (v-1)^2 (a_1{}^2 a_2{}^2 \, p_1 p_2^{\,\overset{2}{-}})^2 = 0$$

an. Da nun diese Gleichung die im Raumgebilde $a_1{}^2$ gelegenen Punkte in der Verbindung eines kombinatorischen Produktes enthält und auf einer Geraden das kombinatorische Produkt zweier Punkte sich von dem zweier anderer nur durch einen numerischen Faktor unterscheidet, so können wir in ihr jene beiden Punkte durch irgend zwei beliebige Punkte ihrer Verbindungslinie ersetzen oder die Punkte p_1 und p_2 als zwei beliebig gelegene Punkte ansehen, und die Gleichung stellt dann ein Raumgebilde 4ten Grades dar, dessen Gerade in den Raumgebilden $a_1{}^2$ und $a_2{}^2$ vier Punkte von einem gegebenen Doppelverhältnis v bestimmen.

Für $v = -1$ geht das Raumgebilde 4ten Grades in das durch die Gleichung

$$a_1{}^2 \, a_2{}^2 \; p_1 p_2^{\,\overset{2}{-}} = 0$$

dargestellte Raumgebilde 2ten Grades über, dessen Gerade demnach in den Raumgebilden a_1^2 und a_2^2 vier harmonische Punkte bestimmen. Für $v = +1$ zerfällt es, da diesem Werte die Gleichung

$$(a_1^2)^2\ p_1 p_2^{\overset{2}{-}} . (a^2)^2\ p_1 p_2^{\overset{2}{-}} = 0$$

entspricht, im allgemeinen in die Raumgebilde a_1^2 und a_2^2, und für $v = 0$ nimmt die Gleichung die Form

$$(a_1^2)^2\ p_1 p_2^{\overset{2}{-}} . (a_2^2)^2\ p_1 p_2^{\overset{2}{-}} - (a_1^2 a_2^2\ \ p_1 p_2^{\overset{2}{-}})^2 = 0$$

oder

$$(a_1^2 a_2^2)^{\overset{2}{-}}\ (p_1 p_2^{\overset{2}{-}})^2 = 0$$

an und stellt, weil in diesem Falle zwei nicht konjugierte Punkte zusammenfallen, das den Raumgebilden a_1^2 und a_2^2 gemeinschaftliche Raumgebilde dar.

In dem besonderen Falle, wenn das Raumgebilde a_2^2 mit einem $(m-1)$stufigen Gebiete zusammenfällt, repräsentiert die Form $a_1^2 a_2^2\ p_1 p_2^{\overset{2}{-}}$ das $(m-2)$stufige Raumgebilde 2ten Grades, welches das $(m-1)$stufige Gebiet mit dem Raumgebilde a_1^2 gemein hat. Für $m = 3$ werden also, wenn das Raumgebilde a_2^2 eine doppelt zählende Gerade ist, die auf dieser Geraden liegenden Punkte des Raumgebildes a_1^2 durch die Form $a_1^2 a_2^2\ p_1 p_2^{\overset{2}{-}}$ dargestellt. Diese Punkte sind, da die zugehörige Form in Punktkoordinaten

$$(a_1^2 a_2^2)^2\ \bar{p}_1 p p_1 p_2\ \ \bar{p}_2 p p_1 p_2^{\overset{2}{-}}$$

ist, nach dem 110ten Abschnitte zwei imaginäre oder zwei reelle oder zwei zusammenfallende reelle Punkte, je nachdem die Gröſsen

$$(a_1^2 a_2^2)^2\ \bar{p}_1 e_1 p_1 p_2\ \ \bar{p}_2 e_1 p_1 p_2^{\overset{2}{-}}, \ldots, (a_1^2 a_2^2)^2\ \bar{p}_1 e_3 p_1 p_2\ \ \bar{p}_2 e_3 p_1 p_2^{\overset{2}{-}}$$

oder, da

$$4\,(a_1^2 a_2^2)^2\ \bar{p}_1 p p_1 p_2\ \ \bar{p}_2 p p_1 p_2^{\overset{2}{-}} = -\ 2\,(a_1^2)^2\,(a_2^2)^2\ \bar{p}_1 p p_1 p_2\ \ \bar{p}_2 p p_1 p_2^{\overset{2}{-}}$$
$$+ 3\,a_1^2\,(a_2^2)^2\ p p_1 p_2^{\overset{2}{-}} . a_1 p^2 + 3\,(a_1^2)^2\,a_2^2\ p p_1 p_2^{\overset{2}{-}} . a_2 p^2$$

und $p p_1 p_2 = p p_1 p_2 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \,.\, e_1 e_2 e_3$ ist und ferner die sämtlichen Koefficienten der Form $(a_2^2)^2\, p_1 p_2^{\overset{2}{-}}$ verschwinden, je nachdem die Gröſse $(a_1^2)^2\, a_2^2\ e_1 e_2 e_3^{\overset{2}{-}}$ positiv oder negativ oder Null ist. Ist die Gerade die Grenzlinie der Ebene, so ist $a_2^2 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2$ und

$$3\,(a_1^2)^2\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2\, e_1 e_2 e_3^{\overset{2}{-}}$$
$$= (a_1^2)^2\,((\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \mid e_1 e_2 e_3)^2 = (a_1^2)^2\ \dot{e}_1 e_2 e_3^{\overset{2}{-}}.$$

117. In der aus der Gleichung $(a^2)^{n+1} = (a^2)^{n+1}\ p_\varkappa \bar{p}_\varkappa^{\overset{2}{-}}$ hervorgehenden allgemeinen Gleichung

$$ap^2 \,.\, (a^2)^n \; p_1 \,..\, p_n{}^{\overset{2}{-}} = (a^2)^{n-1} \, (a^2 p \mid p_1 \,..\, p_n)^2 + (a^2)^{n+1} \; pp_1 \,..\, p_n{}^{\overset{2}{-}}$$

ist, da die Gröſse $a^2 p \mid p_1 \,..\, p_n$ ein dem $n$stufigen Gebiete $p_1 \,..\, p_n$ angehöriges $(n-1)$stufiges Gebiet des $(m-1)$stufigen Gebietes $a^2 p$ darstellt,

$$(a^2)^{n-1} \, (a^2 p \mid p_1 \,..\, p_n)^2$$

die Form eines $(m-2)$stufigen Raumgebildes 2ten Grades, welches von den dem Raumgebilde a^2 angehörigen $(n-1)$stufigen Gebieten der Polare des Punktes p gebildet wird, oder die Form eines $(m-1)$-stufigen Raumgebildes 2ten Grades, welches von denjenigen Punkten gebildet wird, welche die Eigenschaft haben, daſs die dem Raumgebilde a^2 angehörigen Gebiete des $n$stufigen Gebietes $p_1 \,..\, p_n$ in ihren Polaren liegen.

Insbesondere ist also, wenn wir das $(m-1)$stufige Gebiet $p_1 \,..\, p_{m-1}$ als gegeben ansehen,

$$(a^2)^{m-2} \, (a^2 p \mid p_1 \,..\, p_{m-1})^2$$
$$= ap^2 \,.\, (a^2)^{m-1} \, p_1 \,..\, p_{m-1}{}^{\overset{2}{-}} - (a^2)^m \, e_1 \,..\, e_m{}^{\overset{2}{-}} \,.\, pp_1 \,..\, p_{m-1} \mid \varepsilon_1 \,..\, \varepsilon_m{}^2$$

die Form des $(m-1)$stufigen konischen Raumgebildes 2ten Grades, welches durch den Pol des $(m-1)$stufigen Gebietes und die in diesem Gebiete liegenden Punkte des Raumgebildes a^2 bestimmt wird. Das durch das Centrum und die Grenzpunkte des Raumgebildes a^2 bestimmte asymptotische konische Raumgebilde stellt sich darnach durch die Form

$$(a^2)^{m-2} \, (a^2 p \mid \dot{e}_1 \,..\, e_m)^2$$
$$= ap^2 \,.\, (a^2)^{m-1} \, \dot{e}_1 \,..\, e_m{}^{\overset{2}{-}} - (a^2)^m \, e_1 \,..\, e_m{}^{\overset{2}{-}} \,.\, (\varepsilon_1 + \,..\, + \varepsilon_m) \; p^2$$

dar.

Führt man in dieselbe für den Punkt p vermittelst der Gleichung

$$p \,.\, (a^2)^m \, e_1 \,..\, e_m{}^{\overset{2}{-}} = (-1)^{m-1} \, v \,.\, (a^2)^{m-1} \, p_1 \,..\, p_{m-1} \mid e_1 \,..\, e_m$$

seine Polare ein, so erhält man unter Berücksichtigung der Gleichung

$$v \,.\, p_1 \,..\, p_{m-1} = a^2 p \mid e_1 \,..\, e_m$$

die Form

$$(a^2)^{m-2} \, ((\varepsilon_1 + \,..\, + \varepsilon_m) \mid p_1 \,..\, p_{m-1})^2 \,.\, (a^2)^m \; e_1 \,..\, e_m{}^{\overset{2}{-}}$$
$$= (a^2)^{m-1} \; p_1 \,..\, p_{m-1}{}^{\overset{2}{-}} \,.\, (a^2)^{m-1} \; \dot{e}_1 \,..\, e_m{}^{\overset{2}{-}}$$
$$- (a^2)^{m-1} \; \dot{e}_1 \,..\, e_m \mid p_1 \,..\, p_{m-1}{}^2,$$

die das $(m-2)$stufige Raumgebilde 2ten Grades darstellt, welches das Grenzgebiet mit dem Raumgebilde a^2 gemein hat.

118. Schliesslich bemerken wir, dass die im 36ten Abschnitte unter der Voraussetzung $(a^2)^{m-1}\dot{e}_1..e_m{}^{\underline{2}} \lesseqgtr 0$ behandelte Aufgabe, die quadratische Form ap^2 in einer Form darzustellen, in welcher die Veränderlichen nur im Quadrate auftreten, zusammenfällt mit der Aufgabe von der Transformation eines $(m-1)$stufigen Raumgebildes 2ten Grades zu $m-1$ polar konjugierten $(m-1)$stufigen Gebieten des Centrums.

Die Form ap^2 nimmt, wenn wir durch die Gleichung

$$p_1 = \frac{(a^2)^{m-1}\dot{e}_1..e_m \mid e_1..e_m}{(a^2)^{m-1}\dot{e}_1..e_m{}^{\underline{2}}}$$

das Centrum und ferner, indem wir den Punkt p_2 und ausserdem die Punkte $p_{3,0},..,p_{m-1,0}$ beliebig gelegen annehmen, durch die Gleichung

$$\dot{p}_1 p_\varkappa = (a^2)^{m-2}\dot{p}_1 p_2 p_{3,0}..p_{\varkappa-1,0}\,p_{\varkappa+1}..p_m \mid \dot{e}_1..e_m$$

die Punkte $p_3,..,p_m$ vermittelst der Form

$$p = p_1 + p\bar{p}_2 \,.\, \dot{p}_1 p_2 + .. + p\bar{p}_m \,.\, \dot{p}_1 p_m$$

in sie einführen, die Form

$$ap^2 = ap_1{}^2 + p\bar{p}_2{}^2 \,.\, a\dot{p}_1 p_2{}^2 + .. + p\bar{p}_m \,.\, a\dot{p}_1 p_m{}^2$$

an, in der für die Grössen $ap_1{}^2$, $a\dot{p}_1 p_3{}^2$, .. ; $a\dot{p}_1 p_m{}^2$ die Gleichungen

$$ap_1{}^2 = \frac{(a^2)^m e_1..e_m{}^{\underline{2}}}{(a^2)^{m-1}\dot{e}_1..e_m{}^{\underline{2}}}$$

und

$$a\dot{p}_1 p_\varkappa{}^2 = (a^2)^{m-1}\dot{e}_1..e_m{}^{\underline{2}} \,.\, (a^2)^{\varkappa-2}\dot{p}_1 p_2 p_{3,0}..p_{\varkappa-1,0}{}^{\underline{2}}$$
$$.\, a\dot{p}_1 p_{\varkappa+1}{}^2 .. a\dot{p}_1 p_m{}^2$$

gelten.

Die Punkte $p_1,..,p_m$, von denen die Punkte $p_3,..,p_{m-1}$ bezw. in den Gebieten $p_1 p_2 p_{3,0},..,p_1 p_2 p_{3,0}..p_{m-1,0}$ liegen, genügen, wenn die Zahlen $\varkappa$ und λ als ungleich vorausgesetzt werden, den Gleichungen

$$a^2 p_1 \dot{p}_1 p = 0,\ a^2\dot{p}_1 p_\lambda \dot{p}_1 p_\varkappa = 0$$

und ferner der aus ihnen hervorgehenden Gleichung

$$a^2 p_\lambda \dot{p}_1 p_\varkappa = 0$$

und liegen demnach in den $m-1$ polar konjugierten $(m-1)$stufigen Gebieten des Centrums

$$a^2\dot{p}_1 p_2,..,a^2\dot{p}_1 p_m,$$

und zwar so, daſs ein jedes Gebiet $a^2\dot{p}_1 p_\varkappa$ sie mit Ausnahme des Punktes $p_\varkappa$ sämtlich enthält.

Ist $p_{1,\varkappa}$ ein auf der Verbindungslinie der Punkte p_1 und $p_\varkappa$ gelegener Punkt des Raumgebildes, so gilt nach dem 113ten Abschnitte für seine Entfernung vom Centrum die Gleichung

$$\zeta(\dot{p}_1 p_{1,\varkappa}) = -\frac{ap_1{}^2 \cdot \zeta(\dot{p}_1 p_\varkappa)^2}{a\dot{p}_1 p_\varkappa{}^2}.$$

Man kann daher in der obigen Darstellung der Form ap^2 die Gröſsen

$$a\dot{p}_1 p_\varkappa{}^2 = -\frac{ap_1{}^2}{\zeta(\dot{p}_1 p_{1,\varkappa})^2}\cdot\zeta(\dot{p}_1 p_\varkappa)^2$$

setzen, und die dann in ihr im Quadrate auftretenden Gröſsen $\bar{p}p_\varkappa \cdot \zeta(\dot{p}_1 p_\varkappa)$ für $\varkappa = 2,\ldots,m$ sind die Cartesischen Parallelkoordinaten des Punktes p für die Koordinatenaxen $p_1p_2,\ldots,p_1p_m$.

Zu einem Ausdrucke, der das Verhältnis der Gröſsen $a\dot{p}_1p_\varkappa{}^2$ und $\dot{p}_1 p_\varkappa{}^2$ durch die Punkte p_1, p_2, $p_{\varkappa,0}$ darstellt, und damit zugleich zu einer Darstellung der Gröſse $\zeta(\dot{p}_1 p_{1,\varkappa})$ durch diese Punkte gelangt man, wenn man auf Grund der Gleichung $\dot{p}_1\cdots p_m = p_1\cdots p_m \mid \varepsilon_1\cdots\varepsilon_m \,.\, \dot{e}_1\cdots e_m$ der Gleichung

$$\dot{p}_1 p_\varkappa = (a^2)^{m-2}\dot{p}_1 p_2 p_{3,0}\cdots p_{\varkappa-1,0}\, p_{\varkappa+1}\cdots p_m \mid \dot{e}_1\cdots e_m$$

die Form

$$p_1p_2p_{3,0}\cdots p_{\varkappa,0}\,p_{\varkappa+1}\cdots p_m \mid \varepsilon_1\cdots\varepsilon_m\cdot\dot{p}_1 p_\varkappa$$

$$= (a)^{2m-2}\dot{p}_1 p_2 p_{3,0}\cdots p_{\varkappa-1,0}\,p_{\varkappa+1}\cdots p_m \mid \dot{p}_1 p_2 p_{3,0}\cdots p_{\varkappa,0}\,p_{\varkappa+1}\cdots p_m$$

giebt. Die rechts stehende Determinante nimmt nämlich nach dem Laplace'schen Determinantensatze, da die Gröſsen $a^2\dot{p}_1 p_2 \dot{p}_1 p_\mu$ und $a^2\dot{p}_1 p_{\lambda,0}\dot{p}_1 p_\mu$ für $\mu = \varkappa+1,\ldots,m$ und $\lambda < \varkappa+1$ verschwinden, die Form

$$(a^2)^{\varkappa-2}\dot{p}_1p_2p_{3,0}\cdots p_{\varkappa-1,0} \mid \dot{p}_1p_2p_{3,0}\cdots p_{\varkappa,0}\cdot (a^2)^{m-\varkappa}\dot{p}_1 p_{\varkappa+1}\cdots p_m{}^2$$

und darnach infolge des Verschwindens der Gröſse $a^2\dot{p}_1 p_\lambda \dot{p}_1 p_\mu$ für $\mu > \lambda$ die Form

$$(a^2)^{\varkappa-2}\dot{p}_1p_2p_{3,0}\cdots p_{\varkappa-1,0}\mid\dot{p}_1p_2p_{3,0}\cdots p_{\varkappa,0}\cdot a\dot{p}_1p_{\varkappa+1}{}^2\cdots a\dot{p}_1p_m{}^2$$

an, während andererseits aus den Gleichungen

$$a\dot{p}_1p_\varkappa{}^2 = (-1)^{\varkappa-2}(a^2)^{m-1}\dot{p}_1p_2p_{3,0}\cdots p_{\varkappa-1,0}\,p_\varkappa\cdots p_m \mid \dot{e}_1\cdots e_m$$

und

$$\dot{a p_1} p_\varkappa^2 = (a^2)^{m-1} \dot{e}_1 \cdot\cdot e_m^2 . (a^2)^{\varkappa-2} \dot{p}_1 p_2 p_{3,0} \cdot\cdot p_{\varkappa-1,0}^2 . \dot{a p_1} p_{\varkappa+1}^2 \cdot\cdot \dot{a p_1} p_m^2 \}$$

die Gleichung

$$p_1 p_2 p_{3,0} \cdot\cdot p_{\varkappa-1,0} p_\varkappa \cdot\cdot p_m \,|\, \varepsilon_1 \cdot\cdot \varepsilon_m$$
$$= (-1)^{\varkappa-2} (a^2)^{\varkappa-2} \dot{p}_1 p_2 p_{3,0} \cdot\cdot p_{\varkappa-1,0}^2 . \dot{a p_1} p_{\varkappa+1}^2 \cdot\cdot \dot{a p_1} p_m^2$$

hervorgeht. Und es ist demnach

$$\dot{p}_1 p_\varkappa = (-1)^{\varkappa-1} . \frac{(a^2)^{\varkappa-2} \dot{p}_1 p_2 p_{3,0} \cdot\cdot p_{\varkappa-1,0} \,|\, \dot{p}_1 p_2 p_{3,0} \cdot\cdot p_{\varkappa,0}}{(a^2)^{\varkappa-1} \dot{p}_1 p_2 p_{3,0} \cdot\cdot p_{\varkappa,0}^2} . \dot{a p_1} p_{\varkappa+1}^2$$

oder

$$\dot{p}_1 p_\varkappa = (-1)^{\varkappa-1} (a^2)^{m-1} \dot{e}_1 \cdot\cdot e_m^2 . (a^2)^{\varkappa-2} \dot{p}_1 p_2 p_{3,0} \cdot\cdot p_{\varkappa-1,0} \,|$$
$$\dot{p}_1 p_2 p_{3,0} \cdot\cdot p_{\varkappa,0} . \dot{a p_1} p_{\varkappa+2}^2 \cdot\cdot \dot{a p_1} p_m^2$$

und folglich, wie sich durch Multiplikation dieser beiden Gleichungen ergiebt,

$$\dot{a p_1} p_\varkappa^2 = \frac{(a^2)^{\varkappa-2} \dot{p}_1 p_2 p_{3,0} \cdot\cdot p_{\varkappa-1,0}^2 . (a^2)^{\varkappa-1} \dot{p}_1 p_2 p_{3,0} \cdot\cdot p_{\varkappa,0}^2}{(a^2)^{\varkappa-2} \dot{p}_1 p_2 p_{3,0} \cdot\cdot p_{\varkappa-1,0} \,|\, \dot{p}_1 p_2 p_{3,0} \cdot\cdot p_{\varkappa,0}^2} . \dot{p}_1 p_\varkappa^2$$

Für $\varkappa = m$ insbesondere ist

$$\dot{a p_1} p_m^2 = \frac{(a^2)^{m-2} \dot{p}_1 p_2 p_{3,0} \cdot\cdot p_{m-1,0}^2 . (a^2)^{m-1} \dot{e}_1 \cdot\cdot e_m^2}{(a^2)^{m-2} \dot{p}_1 p_2 p_{3,0} \cdot\cdot p_{m-1,0} \,|\, \dot{e}_1 \cdot\cdot e_m^2} . \dot{p}_1 p_m^2,$$

und in der That ist das der Fall, da hierin Zähler und Nenner bezw. den Gröfsen $\dot{a p_1} p_m^2$ und $\dot{p}_1 p_m^2$ gleich sind.

119. Da das Verhältnis der Gröfsen $\dot{a p_1} p_\varkappa^2$ und $\dot{p}_1 p_\varkappa^2$ für $\varkappa = 2, \ldots, m-1$ von der Gröfse $(a^2)^{m-1} \dot{e}_1 \cdot\cdot e_m^2$ unabhängig ist und für $\varkappa = m$ durch Multiplikation mit $a p_1^2$ von dieser Gröfse unabhängig wird und ferner nach der Gleichung

$$(\dot{p}_1 p_{1,\varkappa})^2 = -\frac{a p_1^2 . (\dot{p}_1 p_\varkappa)^2}{\dot{a p_1} p_\varkappa^2}$$

für den auf der Verbindungslinie der Punkte p_1 und p_m gelegenen Punkt des Raumgebildes

$$p_{1,m} = p_1 + p_{1,m} \bar{p}_m . \dot{p}_1 p_m$$

die Gleichung

$$p_{1,m} \bar{p}_m^2 = -\frac{a p_1^2}{\dot{a p_1} p_m^2}$$

gilt, so läfst sich aus der durch die Gleichung

$$ap^2 = ap_1{}^2 + p\bar{p}_2{}^2 \cdot a\dot{p}_1 p_2{}^2 + \ldots + p\bar{p}_m{}^2 \cdot a\dot{p}_1 p_m{}^2$$

gegebenen Darstellung der Form ap^2 eine andere Darstellung herleiten, die auch in dem Falle Geltung hat, wenn $(a^2)^{m-1}\, \dot{e}_1 \ldots e_m{}^2 = 0$ oder das Centrum ein Punkt des Grenzgebietes ist.

Wir stellen den Punkt p durch die Form

$$p = p_{1,m} + p\bar{p}_{2,m} \cdot \dot{p}_{1,m}\, p_{2,m} + \ldots + p\bar{p}_{m,m} \cdot \dot{p}_{1,m}\, p_{m,m}$$

dar und bestimmen in ihr den Punkt $p_{2,m}$ durch die Gleichung $\dot{p}_1 p_2 = \dot{p}_{1,m}\, p_{2,m}$ und, indem wir die Punkte $p_{3,0,m}, \ldots, p_{m-1,0,m}$ durch die Gleichungen

$$\dot{p}_1 p_{\varkappa,0} = \dot{p}_{1,m}\, p_{\varkappa,0,m}$$

einführen, die Punkte $p_{3,m}, \ldots, p_{m,m}$ durch die Gleichungen, welche durch Hinzufügung des Index m aus den die Punkte $p_3, \ldots, p_m$ bestimmenden Gleichungen hervorgehen. Es ist dann

$$\dot{p}_1 p_\varkappa = \dot{p}_{1,m}\, p_{\varkappa,m}$$

auch für $\varkappa = 3, \ldots, m$, folglich

$$p = p_1 + p\bar{p}_{2,m} \cdot \dot{p}_1 p_2 + \ldots + p\bar{p}_{m-1,m} \cdot \dot{p}_1 p_{m-1}$$
$$+ (p\bar{p}_{m,m} + p_{1,m}\bar{p}_m) \cdot \dot{p}_1 p_m$$

und somit

$$p\bar{p}_2 = p\bar{p}_{2,m}, \ldots, p\bar{p}_{m-1} = p\bar{p}_{m-1,m}$$

und

$$p\bar{p}_m = p\bar{p}_{m,m} + p_{1,m}\bar{p}_m.$$

Infolge dieser letzten Gleichung ist aber, da

$$p_{1,m}\bar{p}_m = \frac{\sqrt[2]{-ap_1{}^2\, a\dot{p}_1\, p_m{}^2}}{a\dot{p}_1\, p_m{}^2}$$

ist,

$$p\bar{p}_m{}^2 \cdot a\dot{p}_1 p_m{}^2 = p\bar{p}_{m,m}{}^2 \cdot a\dot{p}_1 p_m{}^2$$
$$+ 2\, p\bar{p}_{m,m} \cdot \sqrt[2]{-ap_1{}^2\, a\dot{p}_1\, p_m{}^2} - ap_1{}^2,$$

und es ist demnach

$$ap^2 = p\bar{p}_{2,m}{}^2 \cdot a\dot{p}_{1,m}\, p_{2,m}{}^2 + \ldots + p\bar{p}_{m,m}{}^2 \cdot a\dot{p}_{1,m}\, p_{m,m}{}^2$$
$$+ 2\, p\bar{p}_{m,m} \cdot \sqrt[2]{-ap_1{}^2\, a\dot{p}_1\, p_{m,m}{}^2}.$$

Da ferner für den Punkt

$$p_{1,m} = p_1 + p_{1,m}\bar{p}_m \cdot \dot{p}_1 p_m$$

infolge der Gleichungen

$$a^2\dot{p}_1 p_2 \dot{p}_1 p_m = 0,\quad a^2\dot{p}_1 p_{\lambda,0} \dot{p}_1 p_m = 0$$

die Gleichungen

$$a^2\dot{p}_1 p_2 \dot{p}_1 p_{1,m} = 0,\quad a^2\dot{p}_1 p_{\lambda,0} \dot{p}_1 p_{1,m} = 0$$

gelten, so ergiebt sich für die Gröſse

$$\dot{p}_1 p_m = (a^2)^{m-2}\, \dot{p}_1 p_2 p_{3,0} \cdot\cdot p_{m-1,0} \mid \dot{e}_1 \cdot\cdot e_m$$

aus der Gleichung

$$p_1 p_{1,m}\, p_2 p_{3,0} \cdot\cdot p_{m-1,0} \mid \varepsilon_1 \cdot\cdot \varepsilon_m \cdot \dot{p}_1 p_m$$
$$= (a^2)^{m-2}\, \dot{p}_1 p_2 p_{3,0} \cdot\cdot p_{m-1,0} \mid \dot{p}_1 p_{1,m}\, p_2 p_{3,0} \cdot\cdot p_{m-1,0}$$

die Gleichung

$$p_1 p_{1,m}\, p_2 p_{3,0} \cdot\cdot p_{m-1,0} \mid \varepsilon_1 \cdot\cdot \varepsilon_m \cdot \dot{p}_1 p_m$$
$$= \dot{p}_1 p_{1,m} \cdot (a^2)^{m-2}\, \dot{p}_1 p_2 p_{3,0} \cdot\cdot p_{m-1,0}{}^{\frac{2}{}}.$$

Unter Berücksichtigung der Gleichung

$$a\dot{p}_1 p_m{}^2 = (a^2)^{m-1}\, \dot{e}_1 \cdot\cdot e_m{}^{\frac{2}{}} . (a^2)^{m-2}\, \dot{p}_1 p_2 p_{3,0} \cdot\cdot p_{m-1,0}{}^{\frac{2}{}}$$

ist daher

$$(a^2)^{m-1}\, \dot{e}_1 \cdot\cdot e_m{}^{\frac{2}{}} . p_1 p_{1,m}\, p_2 p_{3,0} \cdot\cdot p_{m-1,0} \mid \varepsilon_1 \cdot\cdot \varepsilon_m = p_{1,m}\, \bar{p}_m . a\dot{p}_1\, p_m{}^2$$

oder

$$\sqrt[2]{-ap_1{}^2\, a\dot{p}_1\, p_m{}^2} = (a^2)^{m-1}\, \dot{e}_1 \cdot\cdot e_m{}^{\frac{2}{}} . p_1 p_{1,m}\, \dot{p}_1 p_2 p_{3,0} \cdot\cdot p_{m-1,0} \mid \varepsilon_1 \cdot\cdot \varepsilon_m$$

und folglich in der obigen Darstellung

$$\sqrt[2]{-ap_1{}^2\, a\dot{p}_{1,m}\, p_{m,m}{}^2}$$
$$= (a^2)^{m-1}\, \dot{e}_1 \cdot\cdot e_m{}^{\frac{2}{}} . p_1 p_{1,m}\, \dot{p}_{1,m}\, p_{2,m}\, p_{3,0,m} \cdot\cdot p_{m-1,0,m} \mid \varepsilon_1 \cdot\cdot \varepsilon_m .$$

Überdies ist offenbar

$$ap_1{}^2\, a\dot{p}_{1,m} p_{m,m}{}^2 = (a^2)^m\, e_1 \cdot\cdot e_m{}^{\frac{2}{}} . (a^2)^{m-2}\, \dot{p}_{1,m}\, p_{2,m}\, p_{3,0,m} \cdot\cdot p_{m-1,0,m}{}^{\frac{2}{}}.$$

Nach den Gleichungen

$$\dot{p}_1 p_\varkappa = \dot{p}_{1,m}\, p_{\varkappa,m},\quad \dot{p}_1 p_{\varkappa,0} = \dot{p}_{1,m}\, p_{\varkappa,0,m}$$

sind die Punkte $p_{\varkappa,m}$ und $p_{\varkappa,0,m}$ die Punkte, in welche bei einer parallelen Verschiebung der Geraden $p_1 p_\varkappa$ und $p_1 p_{\varkappa,0}$ nach dem Punkte $p_{1,m}$ die Punkte $p_\varkappa$ und $p_{\varkappa,0}$ übergehen.

Berichtigungen.

S. 5 Z. 9 lies willkürlich, S. 7 Z. 11 Permutation, S. 21 Z. 17 aus ihr, S. 24 Z. 24 ff. $(e_2 + .. + e_n) . \varepsilon_2$, u. s. w., S. 27 Z. 17 und sie, S. 29 Z. 12 $\overline{a e_\lambda a}$, S. 34 Z. 9 $(p_1{}^2 + .. + p_m{}^2)\, \bar{e}_\varkappa \bar{e}_\lambda$, S. 37 Z. 17 $-\dot{p} p_1 .. p_n$, S. 38 Z. 4 v. u. vermittelst der Form $\dot{e}_1 p_1 = p_1 \varepsilon_2 . \dot{e}_1 e_2 + .. + p_1 \varepsilon_m . \dot{e}_1 e_m$, S. 39 Z. 3 v. u. $\dot{a} p_1 p_m{}^2$, S. 40 Z. 1 $a^2 \dot{p}_1 p_\lambda \dot{p}_1 p_\varkappa$, S. 41 Z. 17 p_{m-1}, S. 47 Z. 16 $a_1{}^{-1}$, S. 52 Z. 17 $(-1)^{n-1}$, S. 60 Z. 18 a^n, S. 75 Z. 13 Da diese Gröſse, S. 80 Z. 6 v. u. $a_2{}^n p^{n-1} p_1{}^0$, S. 82 Z. 2 v. u. $\bar{p}_{n_2}$, S. 87 Z. 3 $p_1 p_0 \mid p_1 p_n$, S. 96 Z. 7 v. u. $\varkappa \leqq \lambda$, S. 99 Z. 6 $n_1 + \lambda - 2\varkappa$, S. 100 Z. 2 $p_1{}^{n_1 + \lambda - 2\varkappa}$, S. 103 Z. 15 $a_r p^{n_r}$, S. 104 Z. 2. v. u. Hyperdeterminanten, S. 105 Z. 18 $\overline{32}^4$, S. 116 Z. 1 $p_1 p_2{}^{\frac{\lambda}{-}}$, S. 117 Z. 3 v. u. $p_1{}^{n-\varkappa}\, p_2{}^{\varkappa-\lambda}$, S. 119 Z. 4 gehen bei ungeradem λ, S. 119 Z. 8 2 statt 4; S. 119 Z. 9 streiche: bei ungeradem λ; S. 133 Z. 8. v. u. lies a, S. 133 Z. 2 v. u. $(n-1)$stufige, S. 143 Z. 9 v. u. $p_1 .. p_{m-1}{}^{\frac{2}{-}}$, S. 158 Z. 12 v. u. $(a^2)^{m-2}$, S. 160 Z. 4 v. u. $a\dot{p}_{1,m}\, p_{m,m}{}^2$.