O pewnym kształcie
układów równań różniczkowych o różniczkach zupełnych.

Przez

A. J. Stodółkiewicza.

(Rzecz przedstawiona na posiedzeniu Wydziału 20 Października 1891 r.; referował członek W. Zajączkowski.)

Niech będzie układ n równań różniczkowych o różniczkach zupełnych z $2n$ zmiennemi

$$\begin{aligned}
&X_{1,1}\, dx_1 + X_{1,2}\, dx_2 + \ldots + X_{1,2n}\, dx_{2n} = 0\,, \\
&X_{2,1}\, dx_1 + X_{2,2}\, dx_2 + \ldots + X_{2,2n}\, dx_{2n} = 0\,, \\
&\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
&X_{i,1}\, dx_1 + X_{i,2}\, dx_2 + \ldots + X_{i,2n}\, dx_{2n} = 0\,, \\
&\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
&X_{n,1}\, dx_1 + X_{n,2}\, dx_2 + \ldots + X_{n,2n}\, dx_{2n} = 0\,,
\end{aligned} \tag{1}$$

którego całki są

$$\begin{aligned}
&f_1\, (x_1, x_2\,, \ldots, x_{2n}) = c_1\,, \\
&f_2\, (x_1, x_2\,, \ldots, x_{2n}) = c_2\,, \\
&\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
&f_i\, (x_1, x_2\,, \ldots, x_{2n}] = c_i\,, \\
&\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
&f_n\, (x_1, x_2\,, \ldots, x_{2n}) = c_n\,.
\end{aligned} \tag{2}$$

Gdyby każde z równań (1), n. p. i - te, otrzymywało się tylko z odpowiedniej całki f_i przez różniczkowanie i następne opuszczenie wspólnego czynnika, natenczas każde równanie posiadałoby niezależnie jednę całkę, którąby było można znaleźć wiadomym sposobem z tego jednego równania.

Spółczynniki zaś każdego z równań powinnyby czynić zadość $\frac{1}{2}(2n-1)(2n-2)$ znanym warunkom całkowalności. Układ taki nie przedstawiałby więc nic godnego uwagi. Może jednak być jeszcze inny przypadek, zasługujący na uwagę. Mianowicie, każde z równań (1) mieć może wszystkie spółczynniki, nieczyniące wcale zadość znanym warunkom. Natenczas, według twierdzenia Pfaffa, każde równanie z $2n$ zmiennemi będzie określać n zmiennych zależnych i układ (1) mieć będzie n całek wspólnych wszystkim równaniom.

Na zasadzie twierdzenia Pfaffa, mamy

$$
(3) \quad \begin{aligned}
&F_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + F_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \ldots + F_n \frac{\partial f_n}{\partial x_1} = X_{1,2}\,, \\
&F_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + F_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \ldots + F_n \frac{\partial f_n}{\partial x_2} = X_{1,2}\,, \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&F_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_{2n}} + F_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_{2n}} + \ldots + F_n \frac{\partial f_n}{\partial x_{2n}} = X_{1,2n}\,,
\end{aligned}
$$

gdzie $F_1, F_2, \ldots, F_n$ są pewne nieznane funkcyje.

Podobne związki (3) można napisać dla wszystkich pozostałych równań układu (1).

W pracy niniejszej zajmiemy się szczególnym przypadkiem, gdy nie tylko wszystkie całki f_i są wspólne układowi (1), lecz i wszystkie funkcyje F_i także są wspólne wszystkim równaniom. Różnica więc zachodzić może tylko w znakach funkcyj F_i. Może być następująca kombinacyja znaków: dla pierwszego równania z układu danego funkcyja F_1 jest dodatna, a wszystkie pozostałe F_k, $(k = 2, 3, \ldots, n)$, są ujemne.

Dla drugiego równania tylko F_2 dodatne, wszystkie zaś inne F_l, $(l = 1, 3, \ldots, n)$ będą ujemne, i t. d., nakoniec dla n-tego równania będzie F_n dodatne, a reszta F_r, $(r = 1, 2, \ldots, n-1)$ ujemne. Tym sposobem będziemy mieli dla każdego skaźnika i:

$$
\begin{gathered}
-F_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1}-F_2\frac{\partial f_2}{\partial x_1}-\dots-F_{i-1}\frac{\partial f_{i-1}}{\partial x_1}+F_i\frac{\partial f_i}{\partial x_1}-F_{i+1}\frac{\partial f_{i+1}}{\partial x_1}-\dots-\\
-\dots-F_n\frac{\partial f_n}{\partial x_1}=X_{i,1},\\
-F_1\frac{\partial f_1}{\partial x_2}-F_2\frac{\partial f_2}{\partial x_2}+\dots-F_{i-1}\frac{\partial f_{i-1}}{\partial x_2}+F_i\frac{\partial f_i}{\partial x_2}-F_{i+1}\frac{\partial f_{i+1}}{\partial x_2}-\dots- \qquad (4)\\
-\dots-F_n\frac{\partial f_n}{\partial x_2}=X_{i,2},\\
-F_1\frac{\partial f_1}{\partial x_{2n}}-F_2\frac{\partial f_2}{\partial x_{2n}}-\dots-F_{i-1}\frac{\partial f_{i-1}}{\partial x_{2n}}+F_i\frac{\partial f_i}{\partial x_{2n}}-F_{i+1}\frac{\partial f_{i+1}}{\partial x_{2n}}-\dots-\\
-\dots-F_n\frac{\partial f_n}{\partial x_{2n}}=X_{i,2n}.
\end{gathered}
$$

Przy powyższej kombinacyi znaków, wszystkie spółczynniki układu (1) będą w każdem z osobna równaniu niezależne i nie uczynią zadość wzmiankowanym warunkom całkowalności; układ określać będzie n całek, wspólnych wszystkim równaniom. Jeżeli układ dany rozwiążemy, czyli wyznaczymy różniczki $dx_{n+1}, dx_{n+2}, \dots dx_{2n}$ w funkcyjach różniczek zmiennych niezależnych $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$, to będziemy mieli zwykłą, dobrze znaną postać układów równań różniczkowych o różniczkach zupełnych, określającą n zmiennych zależnych, jako funkcyje pozostałych n zmiennych niezależnych.

Utwórzmy następujące sumy algebraiczne z równań danego układu:

$$
\begin{gathered}
(X_{1,1}-X_{2,1}-\dots-X_{i,1}-\dots-X_{n,1})\,dx_1+(X_{1,2}-X_{2,2}-\dots-X_{i,2}-\dots-X_{n,2})\,dx_2+\\
\dots+(X_{1,2n}-X_{2,2n}-\dots-X_{i,2n}-\dots-X_{n,2n})\,dx_{2n}=0,\\
(-X_{1,1}+X_{2,1}-\dots-X_{i,1}-\dots-X_{n,1})\,dx_1+(-X_{1,2}+X_{2,2}-\dots-X_{i,2}-\dots-X_{n,2})\,dx_2+\\
\dots+(-X_{1,2n}+X_{2,2n}-\dots-X_{i,2n}-\dots-X_{n,2n})\,dx_{2n}=0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (5)\\
(-X_{1,1}-X_{2,1}-\dots-X_{i,1}-\dots+X_{n,1})\,dx_1+(-X_{1,2}-X_{2,2}-\dots-X_{i,2}-\dots-X_{n,2})\,dx_2+\\
\dots+(-X_{1,2n}-X_{2,2n}-\dots-X_{i,2n}-\dots+X_{n,2n})\,dx_{2n}=0.
\end{gathered}
$$

Następnie, podstawmy w powyższych równaniach na miejsce funkcyj $X_{i,1}, X_{i,2}, \dots, X_{i,2n}$ ich wartości (4), $(i=1, 2, \dots, n)$, to po uproszczeniu otrzymamy:

$$nF_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + nF_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + nF_1 \frac{\partial f_1}{dx_{2n}} dx_{2n} = 0,$$

$$nF_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + nF_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} nx_2 + \ldots + nF_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_{2n}} dx_{2n} \doteq 0,$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$nF_n \frac{\partial f_n}{\partial x_1} dx_1 + n F_n \frac{\partial f_n}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + nF_n \frac{\partial f_n}{\partial x_{2n}} dx_{2n} = 0.$$

Widzimy więc, że w tak zmienionej postaci każde równanie (5) powinno czynić zadość znanym $\frac{(2n-1)(2n-2)}{2}$ warunkom całkowalności, które po wprowadzeniu oznaczeń

$$-X_{1,i} - X_{2,i} - \ldots + X_{k,i} - \ldots - X_{n,i} = U_{k,i}$$

$(i = 1, 2, \ldots, 2n;\ k = 1, 2, \ldots n)$ można napisać tak:

$$U_{\nu,2n}\left(\frac{\partial U_{\nu,i}}{\partial x_k} - \frac{\partial U_{\nu,k}}{\partial x_i}\right) + U_{\nu,i}\left(\frac{\partial U_{\nu,k}}{\partial x_{2n}} - \frac{\partial U_{\nu,2n}}{\partial x_k}\right) + \tag{6}$$

$$+ U_{\nu,k}\left(\frac{\partial U_{\nu,2n}}{\partial x_i} - \frac{\partial U_{\nu,i}}{\partial x_{2n}}\right) = 0,$$

gdzie i i k tworzą kombinacyje liczb $1, 2, \ldots, 2n-1$ po dwie, zaś $\nu = 1, 2, 3, \ldots n$. Będą to warunki dla układu (1) a liczba ich będzie $\frac{1}{2} n (2n-1)(2n-2)$.

Ztąd wnosimy, że po utworzeniu równań (5) można, za pomocą jednego z wiadomych sposobów, scałkować każde równanie niezależnie od innych, a tak odnaleźć wszystkie całki układu (1).

Zauważyć tutaj wypada, że, jeżeli każde z równań (1) określa mniej niż połowę zmiennych zależnych, czyli jeżeli posiada $k < n$ całek wspólnych całemu układowi, natenczas warunków całkowalności będzie znacznie więcej, aniżeli (6), i będą one miały postać wyznaczników złożonego kształtu.

Z własności powyżej opisanych układów możnaby było także skorzystać w tym szczególnym przypadku, gdy dane jest jedno tylko równanie, określające n zmiennych zależnych. Należałoby jednak wtedy szukać równań dołączonych do równania danego i tworzących z niem układ. Odnajdywanie jednak spółczynników takich równań z warunków (6), jakkolwiek, z teoretycznego punktu widzenia, możliwe, prowadzi w ogóle do równań różniczkowych cząstkowych, które się trudno całkują.

Dla potwierdzenia teoryi wyłożonej przytoczyć można przykład dwu równań z czterema zmiennemi, tworzących układ o dwóch całkach wspólnych

$$(u+y+1)\,dx+(1-x-z)\,dy+(x+2y+u)\,dz+(y-z)\,du=0\,,$$

$$(1-y-u)\,dx+(1+x+z)\,dy+(x-u)\,dz+(2x+y+z)\,du=0.$$

Przez dodawanie, a następnie odejmowanie otrzymamy z łatwością z powyższych równań dwa nowe, całkujące się niezależnie:

$$dx+dy+(x+y)\,dz+(x+y)\,du=0\,,$$

$$(u+y)\,dx+(-x-z)\,dy+(y+u)\,dz+(-x-z)\,du=0.$$

Po scałkowaniu mieć będziemy:

$$(x+y)\,e^{z+u}=c_1\,,$$

$$\frac{x+z}{y+u}=c_2\,.$$