

14/81
W. Nadolski, A. Pielorz

WYKORZYSTANIE FAL SPRĘŻYSTYCH
W BADANIACH DYNAMICZNYCH
NAPĘDU DWUMASOWEGO
Z WIELOSTOPNIOWYM WALEM



P. 269

WARSZAWA 1981

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 3 marca 1981 r.

Zarejestrowana pod nr 14/1981



57099



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 150 egz. Ark. wyd. 2 . Ark. druk. 4

Oddano do drukarni w marcu 1981 r.

Nr zamówienia 211/0/81

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

Władysław Nadolski
Amalia Pielorz
Zakład Układów Mechanicznych

WYKORZYSTANIE FAL SPRĘŻYSTYCH W BADANIACH
DYNAMICZNYCH NAPĘDU DWUMASOWEGO
Z WIELOSTOPNIOWYM WAŁEM

Wstęp

Dotychczasowe badania dynamiczne układów napędowych, jak wynika z literatury [1,3,8 i inni], w zasadzie przeprowadza się za pomocą metod wypracowanych w teorii drgań, które w wielu przypadkach są niezadawalające, zwłaszcza gdy celem badań jest wyznaczenie przemieszczeń i odkształceń dowolnych przekrojów poprzecznych wału układu napędowego przy obciążeniach krótkotrwałych.

W pracy tej zaproponowano podejście falowe do wyznaczenia odkształceń i przemieszczeń poprzecznych przekrojów wału napędu dwumasowego dla różnych krótkotrwałych obciążeń brył. Taka droga postępowania pozwala między innymi na wyprowadzenie wzorów rekurencyjnych dla odpowiednich funkcji przy uwzględnieniu odbitych fal. Rozważania analityczne zostaną przeprowadzone dla napędu dwumasowego o odcinkowo stałym przekroju wału, obciążanego momentami zewnętrznymi w bardzo małych przedziałach czasu w porównaniu z okresem pierwszej częstości drgań własnych. Przy tym założeniu można nie uwzględniać oporów wewnętrznych w odkształcalnym skrętnie wale i oporów zewnętrznych występujących w łożyskach, na których podwieszony jest wał napędu dwumasowego, [3].

Model napędu dwumasowego o stałym przekroju przy wykorzystaniu fal sprężystych rozważany był w pracy [2]. Rozpatrzono

w niej tylko przypadek stałego obciążenia brył, stosując metodę zaproponowaną przez Donnella, [6]. Natomiast model złożony z nieodkształcalnej bryły połączonej sztywno z dwustopniowym wałem, do którego przykładana jest nieodkształcalna bryła z zadaną prędkością początkową, rozpatrywany jest w pracy [5].

Należy nadmienić, że obciążane siłami krótkotrwałymi napędy dwumasowe stosowane są szeroko w różnych maszynach i agregatach realizujących złożone procesy technologiczne, [9].

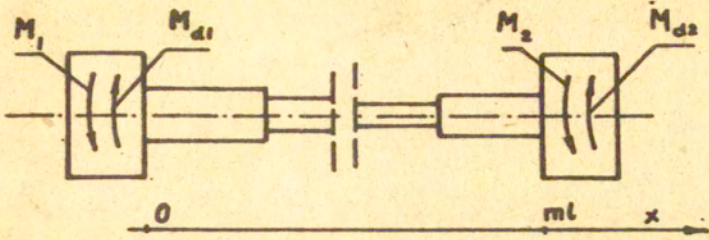
2. Założenia i cel pracy

W pracy rozpatrywany jest model napędu dwumasowego, złożony z dwóch brył nieodkształcalnych połączonych ze sprężystościę odkształcalnym jednorodnym wałem o odcinkowo stałym przekroju, jak pokazano na rys.1. Bryły sztywne o stałych masowych momentach bezwładności J_1 , J_2 , obciążone są momentami zewnętrznymi krótkotrwałymi $M_1(t)$, $M_2(t)$. Przyjmujemy, że wał odkształca się tylko skrętnie, a centralne osie masowych momentów bezwładności brył sztywnych pokrywają się z osią obrotu wału. Wał o dowolnym odcinkowo stałym przekroju dzielimy na m ($m \neq 1$) części o jednakowych długościach i stałym przekroju. Każdy człon wału scharakteryzowany jest modułem sprężystości G , gęstością ρ , długością l oraz J_{oi} -biegunowym momentem bezwładności pola przekroju prostokątnego względem osi obrotu, gdzie $i = 1, 2, \dots, m$. Oś x jest równoległa do osi obrotu wału, jak pokazano na rys.1.

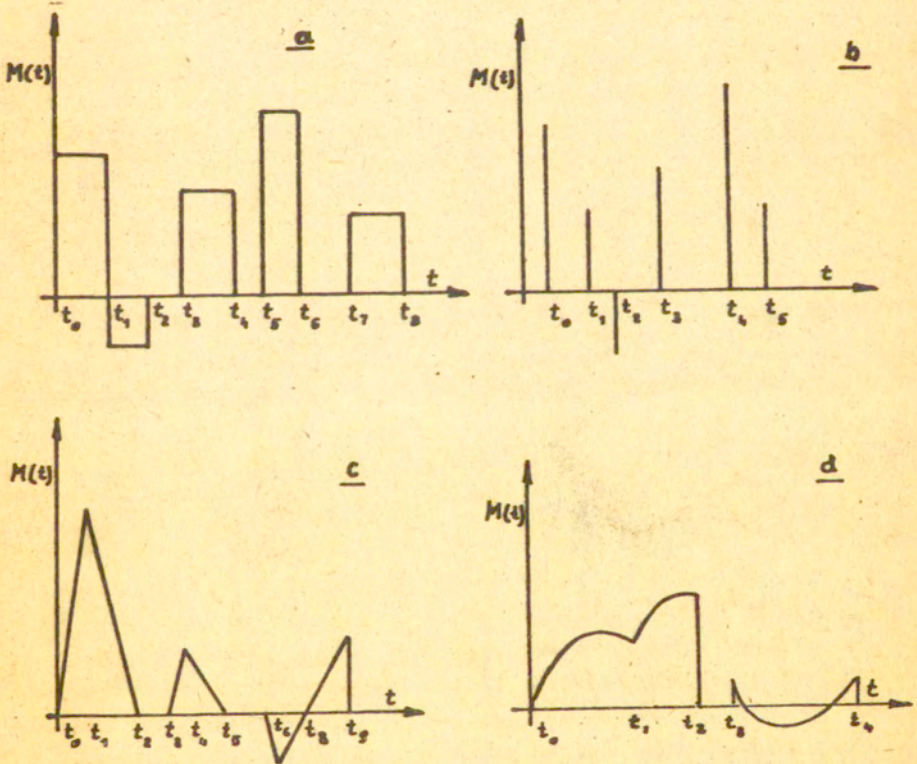
Celem pracy jest wyznaczenie przemieszczeń i odkształceń przekrojów poprzecznych wału napędu dwumasowego przy 4 następujących opisach momentów zewnętrznych $M_1(t)$, $M_2(t)$, a mianowicie za pomocą

- 1/ funkcji Heaviside'a
- 2/ delty Diraca
- 3/ odcinków prostych
- 4/ funkcji trygonometrycznej sinus.

Wykresy tych momentów przykładowo przedstawiono na rys.2. Za pomocą funkcji przedstawiających te momenty można aproksymować dowolne krótkotrwałe obciążenia, występujące w rzeczywistych układach napędowych.



Rys. 1. Model napędu dwumasowego



Rys. 2. Wykresy momentów zewnętrznych

Obliczenia numeryczne zostaną przeprowadzone dla wału dwustopniowego napędu dwumasowego. Zbadany zostanie wpływ momentów zewnętrznych i ilorazu biegunowych momentów bezwładności pól przekrojów członów wału na przemieszczenia wybranych przekrojów wału rozpatrywanego układu napędowego.

3. Równania ruchu, wzory rekurencyjne

Przy przyjętych założeniach, wyznaczanie przemieszczeń, prędkości i odkształceń przekrojów poprzecznych badanego wału napędu dwumasowego w czasie działania obciążeń zewnętrznych $M_1(t)$, $M_2(t)$ sprowadza się do rozwiązania równań

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \theta_i(x,t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \theta_i(x,t)}{\partial x^2} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

z następującymi warunkami początkowymi

$$(2) \quad \theta_i(x,t) = 0, \quad \frac{\partial \theta_i(x,t)}{\partial t} = \omega_0 \quad \text{dla } t=0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

i warunkami brzegowymi

$$M_1(t) - J_1 \frac{\partial^2 \theta_1(x,t)}{\partial t^2} + G J_{01} \frac{\partial \theta_1(x,t)}{\partial x} = 0 \quad \text{dla } x=0$$

$$(3) \quad \frac{\partial \theta_i(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial \theta_{i+1}(x,t)}{\partial t} \quad \text{dla } x=i l, \quad i = 1, 2, \dots, m-1$$

$$G J_{0i} \frac{\partial \theta_i(x,t)}{\partial x} = G J_{0,i+1} \frac{\partial \theta_{i+1}(x,t)}{\partial x} \quad \text{dla } x=i l, \\ i = 1, 2, \dots, m-1$$

$$M_2(t) + J_2 \frac{\partial^2 \theta_m(x,t)}{\partial t^2} + G J_{0m} \frac{\partial \theta_m(x,t)}{\partial x} = 0 \quad \text{dla } x=ml,$$

gdzie $\theta_i(x,t)$ jest przemieszczeniem kątowym przekrojów poprzecznych i -tego członu wału napędu dwumasowego, ω_0 jest stałą prędkością kątową, $c^2 = G/\rho$.

Po wprowadzeniu wielkości bezwymiarowych

$$(4) \quad \bar{x} = \frac{x}{l}, \quad \bar{t} = \frac{ct}{l}, \quad \bar{\theta}_i = \theta_i \frac{1}{\theta_0}, \quad \bar{\omega}_0 = \omega_0 \frac{l}{c \theta_0}, \quad \bar{M}_i = M_i \frac{l}{\theta_0 J_{0i} G},$$

$$\alpha_1 = \frac{J_{01} \varphi l}{J_1}, \quad \alpha_2 = \frac{J_{0m} \varphi l}{J_2}$$

związki (1) - (3) przyjmują postać

$$(5) \quad \frac{\partial^2 \bar{\theta}_i(\bar{x}, \varphi)}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 \bar{\theta}_i(\bar{x}, \varphi)}{\partial \bar{x}^2} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$(6) \quad \bar{\theta}_i(\bar{x}, \varphi) = 0, \quad \frac{\partial \bar{\theta}_i(\bar{x}, \varphi)}{\partial \varphi} = \bar{\omega}_0 \quad \text{dla } \varphi = 0$$

$$\alpha_1 \bar{M}_1(\varphi) - \frac{\partial^2 \bar{\theta}_1(\bar{x}, \varphi)}{\partial \varphi^2} + \alpha_1 \frac{\partial \bar{\theta}_1(\bar{x}, \varphi)}{\partial \bar{x}} = 0 \quad \text{dla } \bar{x} = 0$$

(7)

$$\frac{\partial \bar{\theta}_i(\bar{x}, \varphi)}{\partial \varphi} = \frac{\partial \bar{\theta}_{i+1}(\bar{x}, \varphi)}{\partial \varphi} \quad \text{dla } \bar{x} = i, \quad i = 1, 2, \dots, m-1$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}_i(\bar{x}, \varphi)}{\partial \bar{x}} = \alpha_i \frac{\partial \bar{\theta}_{i+1}(\bar{x}, \varphi)}{\partial \bar{x}} \quad \text{dla } \bar{x} = i, \quad i = 1, 2, \dots, m-1$$

$$\alpha_2 \frac{J_{0m}}{J_{0m}} \bar{M}_2(\varphi) + \frac{\partial^2 \bar{\theta}_m(\bar{x}, \varphi)}{\partial \varphi^2} + \alpha_2 \frac{\partial \bar{\theta}_m(\bar{x}, \varphi)}{\partial \bar{x}} = 0 \quad \text{dla } \bar{x} = m$$

gdzie θ_0 jest stałą wartością przemieszczenia kątownego,

$$\alpha_i = J_{0,i+1} / J_{0,i}, \quad \text{przy czym } \frac{1}{2} < \alpha_i < 2, \quad [4].$$

W rozważaniach, jak wspomniano wcześniej, przyjmujemy 4 różne opisy momentów zewnętrznych, a mianowicie:

a/ przy opisie za pomocą funkcji Heaviside'a

$$\bar{M}_i(\varphi) = \sum_{k=0}^{m_i} \alpha_{ik} H(\varphi - \varphi_{ik})$$

b/ przy opisie za pomocą delty Diraca

$$(8) \quad \bar{M}_i(\varphi) = \sum_{k=0}^{m_i} \alpha_{ik} \delta(\varphi - \varphi_{ik})$$

c/ przy opisie za pomocą odcinków prostych

$$\bar{M}_i(\tau) = \sum_{k=0}^{m_i} H(\tau - \tau_{ik}) [a_{ik} + b_{ik}(\tau - \tau_{ik})]$$

d/ przy wykorzystaniu funkcji sinus

$$\bar{M}_i(\tau) = \sum_{k=0}^{m_i} H(\tau - \tau_{ik}) [a_{ik} + b_{ik} \sin(\omega_{ik}(\tau - \tau_{ik}) + \varphi_{ik})],$$

gdzie $i = 1, 2,$

Rozwiązani równań (5) poszukujemy w postaci sumy

$$(9) \quad \bar{\Theta}_i(\bar{x}, \tau) = \bar{\Theta}_{1i}(\bar{x}, \tau) \Big|_{\bar{M}_2(\tau)=0} + \bar{\Theta}_{2i}(\bar{x}, \tau) \Big|_{\bar{M}_1(\tau)=0} + \bar{\omega}_0 \tau,$$

przy czym pierwszy składnik jest rozwiązaniem otrzymanym w przypadku gdy działa tylko moment $\bar{M}_1(\tau)$, natomiast drugi składnik wyznaczący tylko w zależności od momentu $\bar{M}_2(\tau)$. Rozwiązanie (9) podstawimy do (7) i otrzymujemy następujące związki dla $\bar{\Theta}_{1i}, \bar{\Theta}_{2i}$

$$\begin{aligned} \chi_1 \bar{M}_1(\tau) - \frac{\partial \bar{\Theta}_{1i}(\bar{x}, \tau)}{\partial \tau^2} + \chi_1 \frac{\partial \bar{\Theta}_{1i}(\bar{x}, \tau)}{\partial \bar{x}} &= 0 \quad \text{dla } \bar{x}=0 \\ (10) \quad \frac{\partial \bar{\Theta}_{1i}(\bar{x}, \tau)}{\partial \tau} &= \frac{\partial \bar{\Theta}_{1im}(\bar{x}, \tau)}{\partial \tau} \quad \text{dla } \bar{x}=i, \quad i=1, 2, \dots, m-1 \\ \frac{\partial \bar{\Theta}_{1i}(\bar{x}, \tau)}{\partial \bar{x}} &= \alpha_i \frac{\partial \bar{\Theta}_{1i+1}(\bar{x}, \tau)}{\partial \bar{x}} \quad \text{dla } \bar{x}=i, \quad i=1, 2, \dots, m-1 \\ \frac{\partial^2 \bar{\Theta}_{1m}(\bar{x}, \tau)}{\partial \tau^2} + \chi_2 \frac{\partial \bar{\Theta}_{1m}(\bar{x}, \tau)}{\partial \bar{x}} &= 0 \quad \text{dla } \bar{x}=m \\ \frac{\partial^2 \bar{\Theta}_{2i}(\bar{x}, \tau)}{\partial \tau^2} - \chi_1 \frac{\partial \bar{\Theta}_{2i}(\bar{x}, \tau)}{\partial \bar{x}} &= 0 \quad \text{dla } \bar{x}=0 \\ \frac{\partial \bar{\Theta}_{2i}(\bar{x}, \tau)}{\partial \tau} &= \frac{\partial \bar{\Theta}_{2i+1}(\bar{x}, \tau)}{\partial \tau} \quad \text{dla } \bar{x}=i, \quad i=1, 2, \dots, m-1 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}_{2i}(\bar{x}, \tau)}{\partial \bar{x}} = \alpha_i \frac{\partial \bar{\theta}_{2, i+1}(\bar{x}, \tau)}{\partial \tau} \quad \text{dla } \bar{x}=i, \quad i=1, 2, \dots, m-1$$

11

$$\alpha_2 \frac{J_{01}}{J_{0m}} \bar{M}_2(\tau) + \frac{\partial^2 \bar{\theta}_{2m}(\bar{x}, \tau)}{\partial \tau^2} + \alpha_2 \frac{\partial \bar{\theta}_{2m}(\bar{x}, \tau)}{\partial \bar{x}} = 0 \quad \text{dla } \bar{x}=m$$

Pierwszego składnika rozwiązania (9) poszukujemy w postaci

$$(12) \quad \bar{\theta}_{1i}(\bar{x}, \tau) = f_{1i}(\tau - \bar{x}) + g_{1i}(\tau + \bar{x} - 2(i-1)), \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Funkcje f_{1i} , g_{1i} reprezentują fale, powstałe w wyniku obciążenia $\bar{M}_1(\tau)$, biegnące odpowiednio w prawo i w lewo. We wzorze (12) uwzględniono, że zaburzenie dociera do przekroju $\bar{x}=i$ po czasie $\tau=i$, przy czym dla ujemnych argumentów funkcje f_{1i} , g_{1i} są tożsamościowo równe zeru.

Po podstawieniu (12) do związków (10) otrzymujemy następujący układ równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego i drugiego rzędu dla funkcji f_{1i} , g_{1i}

$$g'_{1i}(z) = \frac{1-\alpha_i}{2} f'_{1, i+1}(z-2) + \frac{1+\alpha_i}{2} g'_{1, i+1}(z-2), \quad i = 1, 2, \dots, m-1$$

$$g''_{1m}(z) + \alpha_2 g'_{1m}(z) = -f''_{1m}(z-2) + \alpha_2 f'_{1m}(z-2)$$

$$(13) \quad f''_{1i}(z) + \alpha_1 f'_{1i}(z) = \alpha_1 \bar{M}_1(\tau) - g''_{1i}(z) + \alpha_1 g'_{1i}(z)$$

$$f'_{1i}(z) = \frac{2}{1+\alpha_{i-1}} f'_{1, i-1}(z) - \frac{1-\alpha_{i-1}}{1+\alpha_{i-1}} g'_{1i}(z), \quad i=2, 3, \dots, m.$$

Z prawych stron równań (13) wynika, że równania te należy całkować w przedziałach o długości 2. Rozwiązania analityczne dla funkcji f_{1i} , g_{1i} , oraz dla ich pochodnych otrzymujemy w postaci wzorów rekurencyjnych ze względu na przedział zmienności argumentu z , przy czym są one różne przy różnym opisie momentów zewnętrznych (8).

Równania (13) rozwiązujemy analogicznie jak w pracy [7], gdzie rozpatrzone zamocowany pręt sprężysty uderzony bryłą sztywną oraz w pracy [12], gdzie rozpatrzone układy wielomasmowe z elementami sprężystymi o stałych przekrojach. Zaznaczyć trzeba, że w [7] nie przedstawiono rozwiązania dla rozpatrzonego przykładu w postaci wzorów rekurencyjnych, które mają zwaartą i przejrzystą postać.

Rozwiązania analityczne dla funkcji $f_{1i}(z), g_{1i}(z)$ oraz dla ich pochodnych otrzymano dla wszystkich momentów zewnętrznych (8), przy czym rozważono zarówno przypadek, gdy $\alpha_1 \neq \alpha_2$ jak i przypadek jednakowych współczynników $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. Postać otrzymanych wzorów jest niezmienna w przedziałach argumentu z rozpoczynających się od liczb parzystych:

$$2n \leq z < 2(n+1), \quad n = 0, 1, \dots$$

a/ $\alpha_1 \neq \alpha_2$

$$(14) \quad g'_{1,i,n+1}(z) = g'_{1,i,n}(z) + \sum_{k=0}^{m_1} H(z-2n-1_{1k}) \left[e^{-\alpha_1 z_{1kn}} \sum_{j=0}^{n-1} g_{1j}^{1,i,k,n+1} z_{1kn}^j + e^{-\alpha_2 z_{1kn}} \sum_{j=0}^{n-m+i-1} g_{2j}^{1,i,k,n+1} z_{1kn}^j + g_{1l}^{1,i,k,n+1} + g_{1l}^{1,i,k,n+1} z_{1kn} + g_{1s}^{1,i,k,n+1} \sin(\omega_{1k} z_{1kn} + \varphi_{1k}) + g_{1c}^{1,i,k,n+1} \cos(\omega_{1k} z_{1kn} + \varphi_{1k}) \right]$$

$$(15) \quad f'_{1,i,n+1}(z) = f'_{1,i,n}(z) + \sum_{k=0}^{m_1} H(z_{1kn}) \left[e^{-\alpha_1 z_{1kn}} \sum_{j=0}^n f_{1j}^{1,i,k,n+1} z_{1kn}^j + e^{-\alpha_2 z_{1kn}} \sum_{j=0}^{n-m+i-1} f_{2j}^{1,i,k,n+1} z_{1kn}^j + f_{1l}^{1,i,k,n+1} + f_{1l}^{1,i,k,n+1} z_{1kn} + f_{1s}^{1,i,k,n+1} \sin(\omega_{1k} z_{1kn} + \varphi_{1k}) + g_{1c}^{1,i,k,n+1} \cos(\omega_{1k} z_{1kn} + \varphi_{1k}) \right]$$

$$\begin{aligned}
 (16) \quad g_{1,i,n+1}(z) &= g_{1,i,n}(z) + \sum_{k=0}^{m_1} H(z_{1kn}) \left[e^{-\lambda_1 z_{1kn}} \sum_{j=0}^{n-1} G_{1j}^{1,i,k,n+1} z_{1kn}^j + \right. \\
 &+ e^{-\lambda_2 z_{1kn}} \sum_{j=0}^{n-m+i-1} G_{2j}^{1,i,k,n+1} z_{1kn}^j + z_{1kn} g_{1,i,k,n+1} + \frac{1}{2} g_{1,i,k,n+1} \\
 &\cdot z_{1kn}^2 + \frac{1}{\omega_{1k}} (\sin(\omega_{1k} z_{1kn} + \varphi_{1k}) - \sin \varphi_{1k}) g_c^{1,i,k,n+1} - H(n-1) G_{10}^{1,i,k,n+1} \\
 &\left. - \frac{1}{\omega_{1k}} g_{1,i,k,n+1} (\cos(\omega_{1k} z_{1kn} + \varphi_{1k}) - \cos \varphi_{1k}) - H(n-m+i-1) G_{20}^{1,i,k,n+1} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (17) \quad f_{1,i,n+1}(z) &= f_{1,i,n}(z) + \sum_{k=0}^{m_1} H(z_{1kn}) \left[e^{-\lambda_1 z_{1kn}} \sum_{j=0}^n F_{1j}^{1,i,k,n+1} z_{1kn}^j + \right. \\
 &+ e^{-\lambda_2 z_{1kn}} \sum_{j=0}^{n-m+i-1} F_{2j}^{1,i,k,n+1} z_{1kn}^j + f_{1,i,k,n+1} z_{1kn} + \frac{1}{2} f_{1,i,k,n+1} z_{1kn}^2 \\
 &+ \frac{1}{\omega_{1k}} f_c^{1,i,k,n+1} (\sin(\omega_{1k} z_{1kn} + \varphi_{1k}) - \sin \varphi_{1k}) - F_{10}^{1,i,k,n+1} \\
 &\left. - \frac{1}{\omega_{1k}} f_s^{1,i,k,n+1} (\cos(\omega_{1k} z_{1kn} + \varphi_{1k}) - \cos \varphi_{1k}) - H(n-m+i-1) F_{20}^{1,i,k,n+1} \right]
 \end{aligned}$$

b/ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

$$\begin{aligned}
 (18) \quad g'_{1,i,n+1}(z) &= g'_{1,i,n}(z) + \sum_{k=0}^{m_1} H(z_{1kn}) \left[e^{-\lambda z_{1kn}} \sum_{j=0}^{n-1+H(i-m)} g_{1j}^{1,i,k,n+1} z_{1kn}^j + \right. \\
 &+ g_{1,i,k,n+1} + g_{1,i,k,n+1} z_{1kn} + g_{1,i,k,n+1} \sin(\omega_{1k} z_{1kn} + \varphi_{1k}) + \\
 &\left. + g_{1,i,k,n+1} \cos(\omega_{1k} z_{1kn} + \varphi_{1k}) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (19) \quad f'_{1,i,n+1}(z) &= f'_{1,i,n}(z) + \sum_{k=0}^{m_1} H(z_{1kn}) \left[e^{-\lambda z_{1kn}} \sum_{j=0}^n f_{1j}^{1,i,k,n+1} z_{1kn}^j + \right. \\
 &+ f_{1,i,k,n+1} + f_{1,i,k,n+1} z_{1kn} + f_{1,i,k,n+1} \sin(\omega_{1k} z_{1kn} + \varphi_{1k}) +
 \end{aligned}$$

$$+ \int_c^{\lambda_{1,i,k,n+1}} \cos(\omega_{1k} z_{1kn} + \varphi_{1k}) \Big].$$

$$(20) \quad \begin{aligned} g_{1,i,n+1}(z) &= g_{1,i,n}(z) + \sum_{k=0}^{m_1} H(z_{1kn}) \left[e^{-\alpha z_{1kn}} \sum_{j=0}^{n-1+H(i-m)} G_j^{1,i,k,n+1} z_{1kn}^j + \right. \\ &+ g_{1,i,k,n+1} z_{1kn} + \frac{1}{2} g_{1,i,k,n+1} z_{1kn}^2 - H(n-1+H(i-m)) G_0^{1,i,k,n+1} \\ &+ \frac{1}{\omega_{1k}} g_c^{1,i,k,n+1} (\sin(\omega_{1k} z_{1kn} + \varphi_{1k}) - \sin \varphi_{1k}) - \\ &\left. - \frac{1}{\omega_{1k}} g_s^{1,i,k,n+1} (\cos(\omega_{1k} z_{1kn} + \varphi_{1k}) - \cos \varphi_{1k}) \right] \end{aligned}$$

$$(21) \quad \begin{aligned} f_{1,i,n+1}(z) &= f_{1,i,n}(z) + \sum_{k=0}^{m_1} H(z_{1kn}) \left[e^{-\alpha z_{1kn}} \sum_{j=0}^n F_j^{1,i,k,n+1} z_{1kn}^j + \right. \\ &+ f_{1,i,k,n+1} z_{1kn} + \frac{1}{2} f_{1,i,k,n+1} z_{1kn}^2 - F_0^{1,i,k,n+1} + \\ &+ \frac{1}{\omega_{1k}} f_c^{1,i,k,n+1} (\sin(\omega_{1k} z_{1kn} + \varphi_{1k}) - \sin \varphi_{1k}) - \\ &\left. - \frac{1}{\omega_{1k}} f_s^{1,i,k,n+1} (\cos(\omega_{1k} z_{1kn} + \varphi_{1k}) - \cos \varphi_{1k}) \right] \end{aligned}$$

przy czym $i = 1, 2, \dots, m$, ($m \neq 1$), $z_{1kn} = z - 2n - \varphi_{1k}$, natomiast $g_{1,i,0}(z) = g_{1,i,0}(z) = f_{1,i,0}(z) = f_{1,i,0}(z) = 0$. Stałe $g_{1,i,k,n+1}$, $g_{1,i,k,n+1}$, \dots , $f_{1,i,k,n+1}$, $f_{1,i,k,n+1}$, występujące w powyższych wzorach zamieszczone są w Aneksie.

Wzory (14) - (21) w sposób eksponencjalny zależne są odpowiednio od współczynników $\lambda_1, \lambda_2, \lambda$ przy czym przy funkcjach eksponencjalnych występują szeregi potęgowe względem wyrażenia $z_{1kn} = z - 2n - \varphi_{1k}$. Stałe w powyższych wzorach mają 4 górne wskaźniki. Pierwszy z nich informuje, że stała związana jest z momentem zewnętrznym $\bar{M}_1(\bar{r})$, drugi że dotyczy i-tego członu wału, trzeci wskaźnik informuje o zależności od k-tej składowej momentu zewnętrznego, a wskaźnik ostatni związany jest z prze-

działem, do którego należy aktualny argument z .

W szeregach potęgowych wzorów (14) - (17) występują stałe o dwóch wskaźnikach dolnych. Pierwszy z tych wskaźników informuje o tym, że stała związana jest ze współczynnikiem κ_1 lub κ_2 , natomiast drugi dolny wskaźnik związany jest z potęgą wyrażenia $z_{1kn} = z - 2n - \nu_{1k}$. Stałe w szeregach potęgowych we wzorach (18) - (21), wykorzystywanych gdy $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ mają tylko jeden dolny wskaźnik związany z miejscem tej stałej w szeregu potęgowym. Z pozostałych stałych wzorów (14) - (21), stała bez wskaźnika dolnego, tj. wyraz wolny, nie występuje tylko przy opisie momentu $\bar{M}_1(\bar{\nu})$ za pomocą delty Diraca (8b), stałe ze wskaźnikiem l występują tylko przy opisie (8c), natomiast stałe o wskaźnikach s i c występują tylko przy opisie momentu $\bar{M}_1(\bar{\nu})$ za pomocą wzoru (8d).

Wzory (14) - (21) są wzorami rekurencyjnymi ze względu na n , gdyż do znalezienia rozwiązania dla przedziału, do którego należy aktualny argument z , potrzebna jest znajomość rozwiązania odpowiednich funkcji w przedziale poprzednim, patrz Aneks.

W przypadku, gdy moment zewnętrzny $\bar{M}_1(\bar{\nu}) = 0$, natomiast moment $\bar{M}_2(\bar{\nu})$, przyłożony do bryły układu napędowego, jest różny od zera, rozwiązanie częściowe wchodzące w skład rozwiązania (9) związków (5) - (7) wyraża się poprzez funkcje $\bar{\Theta}_{2i}$, które poszukujemy w postaci

$$(22) \quad \bar{\Theta}_{2i}(\bar{x}, \bar{\nu}) = f_{2i}(\bar{\nu} - \bar{x} + 2i - m) + g_{2i}(\bar{\nu} + \bar{x} - m), \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Związek (22) reprezentuje fale, powstałe w wyniku obciążenia $\bar{M}_2(\bar{\nu})$ i uwzględnia, że w przekroju $\bar{x} = i$ pierwsze zaburzenie występuje w chwili $\bar{\nu} = m - i$, przy czym dla ujemnych argumentów funkcje f_{2i} , g_{2i} są tożsamościowo równe zeru.

Po podstawieniu (22) do związków (11) otrzymujemy następujący układ równań różniczkowych zwyczajnych dla funkcji $f_{2i}(z)$, $g_{2i}(z)$

$$f_{2i}''''(z) + \kappa_1 f_{2i}'(z) = -g_{2i}''(z-2) + \kappa_1 g_{2i}'(z-2)$$

$$(23) \quad f'_{2i}(z) = \frac{2}{1+\alpha_{i-1}} f'_{2,i-1}(z-2) - \frac{1-\alpha_{i-1}}{1+\alpha_{i-1}} g'_{2i}(z-2), \quad i=2,3,\dots,m$$

$$g''_{2m}(z) + \kappa_2 g'_{2m}(z) = -\kappa_2 \frac{J_{01}}{J_{0m}} \bar{M}_2(z) - f''_{2m}(z) + \kappa_2 f'_{2m}(z)$$

$$g'_{2i}(z) = \frac{1-\alpha_i}{1+\alpha_i} f'_{2i}(z) + \frac{2\alpha_i}{1+\alpha_i} g'_{2,i+1}(z),$$

$$i=m-1, m-2, \dots, 1.$$

Rozwiązania analityczne dla funkcji $f_{2i}(z)$, $g_{2i}(z)$ oraz dla ich pochodnych otrzymano również dla wszystkich opisów (8) momentu zewnętrznego $\bar{M}_2(\bar{\gamma})$, przy czym rozpatrzono również przypadek różnych i jednakowych współczynników κ_1, κ_2 . Postać otrzymanych wzorów analitycznych jest niezmienna w przedziałach argumentu z , rozpoczynających się od kolejnych liczb parzystych. Wzory te są następujące:

$$II: \quad 2n \leq z < 2(n+1), \quad n = 0, 1, \dots$$

$$a/ \quad \kappa_1 \neq \kappa_2$$

$$(24) \quad f'_{2,i,n+1}(z) = f'_{2,i,n}(z) + \sum_{k=0}^{m-i} H(z_{2kn}) \left[e^{-\kappa_1 z_{2kn}} \sum_{j=0}^{n-i} \rho_{1j}^{2,i,k,n+1} z_{2kn}^j + e^{-\kappa_2 z_{2kn}} \sum_{j=0}^{n-1} \rho_{2j}^{2,i,k,n+1} z_{2kn}^j + \rho_{1i}^{2,i,k,n+1} + \rho_{1i}^{2,i,k,n+1} z_{2kn} + \rho_{1s}^{2,i,k,n+1} \sin(\omega_{2k} z_{2kn} + \varphi_{2k}) + \rho_{1c}^{2,i,k,n+1} \cos(\omega_{2k} z_{2kn} + \varphi_{2k}) \right]$$

$$(25) \quad g'_{2,i,n+1}(z) = g'_{2,i,n}(z) + \sum_{k=0}^{m-i} H(z_{2kn}) \left[e^{-\kappa_1 z_{2kn}} \sum_{j=0}^{n-i} \rho_{1j}^{2,i,k,n+1} z_{2kn}^j + e^{-\kappa_2 z_{2kn}} \sum_{j=0}^n \rho_{2j}^{2,i,k,n+1} z_{2kn}^j + g^{2,i,k,n+1} + \right]$$

$$+ g_l^{2,i,k,n+1} z_{2kn} + g_s^{2,i,k,n+1} \sin(\omega_{2k} z_{2kn} + \varphi_{2k}) + g_c^{2,i,k,n+1} \cos(\omega_{2k} z_{2kn} + \varphi_{2k})]$$

$$(26) \quad f_{2,i,n+1}(z) = f_{2,i,n}(z) + \sum_{k=0}^{m_2} H(z_{2kn}) \left[e^{-\kappa_1 z_{2kn}} \sum_{j=0}^{n-i} F_{1j}^{2,i,k,n+1} z_{2kn}^j + e^{-\kappa_2 z_{2kn}} \sum_{j=0}^{n-1} F_{2j}^{2,i,k,n+1} z_{2kn}^j + z_{2kn} f^{2,i,k,n+1} + \frac{1}{2} z_{2kn}^2 f_l^{2,i,k,n+1} - H(n-i) F_{40}^{2,i,k,n+1} - H(n-1) F_{20}^{2,i,k,n+1} + \frac{1}{\omega_{2k}} f_c^{2,i,k,n+1} (\sin(\omega_{2k} z_{2kn} + \varphi_{2k}) - \sin \varphi_{2k}) - \frac{1}{\omega_{2k}} f_s^{2,i,k,n+1} (\cos(\omega_{2k} z_{2kn} + \varphi_{2k}) - \cos \varphi_{2k}) \right]$$

$$(27) \quad g_{2,i,n+1}(z) = g_{2,i,n}(z) + \sum_{k=0}^{m_2} H(z_{2kn}) \left[e^{-\kappa_1 z_{2kn}} \sum_{j=0}^{n-i} G_{1j}^{2,i,k,n+1} z_{2kn}^j + e^{-\kappa_2 z_{2kn}} \sum_{j=0}^n G_{2j}^{2,i,k,n+1} z_{2kn}^j + z_{2kn} g^{2,i,k,n+1} + \frac{1}{2} z_{2kn}^2 g_l^{2,i,k,n+1} + \frac{1}{\omega_{2k}} g_c^{2,i,k,n+1} (\sin(\omega_{2k} z_{2kn} + \varphi_{2k}) - \sin \varphi_{2k}) - \frac{1}{\omega_{2k}} g_s^{2,i,k,n+1} (\cos(\omega_{2k} z_{2kn} + \varphi_{2k}) - \cos \varphi_{2k}) - H(n-1) G_{40}^{2,i,k,n+1} - G_{20}^{2,i,k,n+1} \right]$$

b/ $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$

$$(28) \quad \rho'_{2,i,n+1}(z) = \rho'_{2,i,n}(z) + \sum_{k=0}^{m_2} H(z_{2kn}) \left[e^{-\kappa z_{2kn}} \sum_{j=0}^{n-1+H(1-i)} \rho^{2,i,k,n+1}_j z_{2kn}^j + \rho^{2,i,k,n+1}_l + z_{2kn} \rho^{2,i,k,n+1}_l + \rho^{2,i,k,n+1}_s \sin(\omega_{2k} z_{2kn} + \varphi_{2k}) + \rho^{2,i,k,n+1}_c \cos(\omega_{2k} z_{2kn} + \varphi_{2k}) \right]$$

$$(29) \quad g'_{2,i,n+1}(z) = g'_{2,i,n}(z) + \sum_{k=0}^{m_2} H(z_{2kn}) \left[e^{-\kappa z_{2kn}} \sum_{j=0}^n g^{2,i,k,n+1}_j z_{2kn}^j + g^{2,i,k,n+1}_l + z_{2kn} g^{2,i,k,n+1}_l + g^{2,i,k,n+1}_s \sin(\omega_{2k} z_{2kn} + \varphi_{2k}) + g^{2,i,k,n+1}_c \cos(\omega_{2k} z_{2kn} + \varphi_{2k}) \right]$$

$$(30) \quad \rho_{2,i,n+1}(z) = \rho_{2,i,n}(z) + \sum_{k=0}^{m_2} H(z_{2kn}) \left[e^{-\kappa z_{2kn}} \sum_{j=0}^{n-1+H(1-i)} F^{2,i,k,n+1}_j z_{2kn}^j + z_{2kn} \rho^{2,i,k,n+1}_l + \frac{1}{2} z_{2kn}^2 \rho^{2,i,k,n+1}_l + \frac{1}{\omega_{2k}} \rho^{2,i,k,n+1}_c (\sin(\omega_{2k} z_{2kn} + \varphi_{2k}) - \sin \varphi_{2k}) - \frac{1}{\omega_{2k}} \rho^{2,i,k,n+1}_s (\cos(\omega_{2k} z_{2kn} + \varphi_{2k}) - \cos \varphi_{2k}) - H(n-1) F^{2,i,k,n+1}_0 \right]$$

$$\begin{aligned}
 (31) \quad g_{2,i,n+1}(z) = & g_{2,i,n}(z) + \sum_{k=0}^{m_s} H(z_{2kn}) \left[e^{-K z_{2kn}} \sum_{j=0}^n G_j^{2,i,k,n+1} z_{2kn}^j \right. \\
 & + z_{2kn} g_{2,i,k,n+1} + \frac{1}{2} z_{2kn}^2 g_{2,i,k,n+1} + \\
 & + \frac{1}{\omega_{2k}} g_{2,i,k,n+1} (\sin(\omega_{2k} z_{2kn} + \varphi_{2k}) - \sin \varphi_{2k}) - \\
 & - \frac{1}{\omega_{2k}} g_{2,i,k,n+1} (\cos(\omega_{2k} z_{2kn} + \varphi_{2k}) - \cos \varphi_{2k}) - \\
 & \left. - G_0^{2,i,k,n+1} \right]
 \end{aligned}$$

gdzie $f'_{2,i,0}(z) = f_{2,i,0}(z) = g'_{2,i,0}(z) = g_{2,i,0}(z) \equiv 0$,

$i = 1, 2, \dots, m$, natomiast $z_{2kn} = z - 2n - \tau_{2k}$. Stałe występujące w powyższych wzorach zamieszczone są w Aneksie.

Funkcje (24) - (31), podobnie jak funkcje (14) - (21), zależne są w sposób eksponencjalny od współczynników x_1, x_2, \dots . Przy funkcjach eksponencjalnych występują szeregi potęgowe względem wyrażeń $z_{2kn} = z - 2n - \tau_{2k}$. Stałe we wzorach (24) - (31) mają taką samą liczbę wskaźników górnych i dolnych jak odpowiednie stałe we wzorach (14) - (21), przy czym pierwszy górny wskaźnik stałych we wzorach (24) - (31) informuje o zależności od momentu zewnętrznego $\bar{M}_2(\tau)$.

Wzory (14), (15), (18), (19), (24), (25), (28), (29) pozwalają przy uwzględnieniu (9), (12) i (22), wyznaczyć prędkości oraz odkształcenia dowolnego przekroju rozważanego wielostopniowego wału napędu dwumasowego w dowolnej chwili czasu. Do wyznaczania przemieszczeń służą wzory pozostałe.

4. Obliczenia numeryczne

Obliczenia numeryczne wykonano dla dwustopniowego wału, tj. dla $m=2$, napędu dwumasowego przy różnych momentach zewnętrznych opisanych związkami (8).

Celem obliczeń numerycznych jest porównanie przemieszczeń wybranych przekrojów rozpatrywanego wału otrzymanych przy po-

danych opisach momentów zewnętrznych oraz zbadanie wpływu

$\alpha_1 = \frac{J_{02}}{J_{04}}$ czyli wpływu odcinkowo stałego przekroju wału.

W celu porównania wyników numerycznych dla różnych momentów zewnętrznych (8) wpisujemy w prostokąt 0.5×20 połowę sinusoidy. Wtedy $\varphi_{40} = 0$, $\omega_{40} = \pi/20$, natomiast

$$\frac{1}{2} \int_0^{20} \sin \frac{\pi}{20} \xi \, d\xi = \frac{20}{\pi}.$$

Z kolei aproksymujemy moment $\bar{M}_1(\xi) = 1/2 \sin \frac{\pi}{20} \xi$ za pomocą trapezu, trójkąta, prostokąta i delty Diraca umieszczonej w ξ_{1k} , w których moment $\bar{M}_1(\xi)$ przyjmuje ekstremalne wartości. Żądamy przy tym równości całek tych momentów, tzn.

a/ dla trapezu równoramiennego o długościach podstaw 20 i 6

$$2 \int_0^7 k_{10} \xi \, d\xi + 6 \cdot 7 \cdot b_{10} = \frac{20}{\pi}.$$

b/ dla trójkąta równoramiennego o długości podstawy 20

$$2 \int_0^{10} k_{10} \xi \, d\xi = \frac{20}{\pi}$$

c/ dla prostokąta $a_{10} \times 20$

$$\int_0^{20} a_{10} H(\xi) \, d\xi = \frac{20}{\pi}$$

d/ przy opisie momentu zewnętrznego za pomocą delty Diraca

$$\int_0^{20} a_{10} \delta(\xi - 10) \, d\xi = \frac{20}{\pi}.$$

Obliczenia numeryczne wykonano przy $\bar{M}_2(\xi) = 0$, $\bar{\omega}_0 = 0$ w przedziale $\xi \in \langle 0, 80 \rangle$ dla $\kappa_1 = -0.05$, $\kappa_2 = 0.005$, $\kappa = 0.05$ i $\alpha_1 = 1$. Przyjęte do obliczeń wartości stałych a_{1k} , b_{1k} , ξ_{1k} dla powyższych pięciu opisów momentu zewnętrznego zamieszczono w Tabeli 1.

Na rys.3 naniesiono wykres przemieszczeń przekrojów $\bar{x} = 0,2$

Tabela 1

| Moment $\bar{M}_1(\zeta)$ | m_1 | $a_{1k}, k=0, \dots, m_1$ | $b_{1k}, k=0, 1, \dots, m_1$ | $\zeta_{1k}, k=0, 1, \dots, m_1$ |
|---------------------------|-------|--|--|--|
| sinusoida | 0 | 0 | 0.5 | 0 |
| trapezy | 8 | 0 | $\frac{20}{94\sqrt{3}}, \frac{20}{94\sqrt{3}}, -\frac{20}{94\sqrt{3}},$ $\frac{20}{94\sqrt{3}}, \frac{20}{94\sqrt{3}}, -\frac{20}{94\sqrt{3}},$ $-\frac{20}{94\sqrt{3}}, \frac{20}{94\sqrt{3}}, \frac{20}{94\sqrt{3}}$ | 0, 7, 13, 27, 33, 47, 53, 67, 73 |
| trójkąty | 4 | 0 | $\frac{4}{5\sqrt{3}}, -\frac{2}{5\sqrt{3}}, \frac{2}{5\sqrt{3}},$ $-\frac{2}{5\sqrt{3}}, \frac{2}{5\sqrt{3}}$ | 0, 10, 30, 50, 70 |
| funkcja $H(\zeta)$ | 3 | $\frac{4}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}$ | 0 | 0, 20, 40, 60 |
| delta Diraca | 3 | $\frac{20}{\sqrt{3}}, -\frac{20}{\sqrt{3}}, \frac{20}{\sqrt{3}}, -\frac{20}{\sqrt{3}}$ | 0 | 10, 30, 50, 70 |

dla obciążenia sinusoidalnego przyłożonego do bryły o masowym momencie bezwładności J_1 przy $\kappa_1 = 0.05$, $\kappa_2 = 0.005$. Przeszyczenia badanych przekrojów oscylują w ten sposób, że ze wzrostem ζ zwiększa się ich amplituda, przy czym dla przekroju $\bar{x}=0$ amplituda jest większa.

Na rys. 4 przedstawiono wykresy przeszczenia dla tych samych przekrojów przy trapezowym obciążeniu lewej bryły rozpatrywanego układu napędowego przy założeniu, że całki obciążenia są równe. Z porównania rys. 3 i 4 wynika, że w badanym przedziale czasu różnice pomiędzy przeszczeniami dla obciążenia sinusoidalnego i trapezowego są bardzo małe.

Na rys. 5 naniesiono wykresy przeszczenia również dla tych samych przekrojów wału i tych samych parametrów badanego modelu układu napędu dwumasowego lecz dla obciążenia $\bar{M}_1(\zeta)$ opisanego odpowiednio za pomocą funkcji schodkowej (8a). Charakter przeszczenia jest zbliżony do przeszczenia z rys. 3 i 4 z tym, że amplitudy są mniejsze przy wymuszeniu typu Heaviside'a (8a). Różnice amplitud, na przykład przekroju $\bar{x}=0$, na rys. 3 i 5 wy-

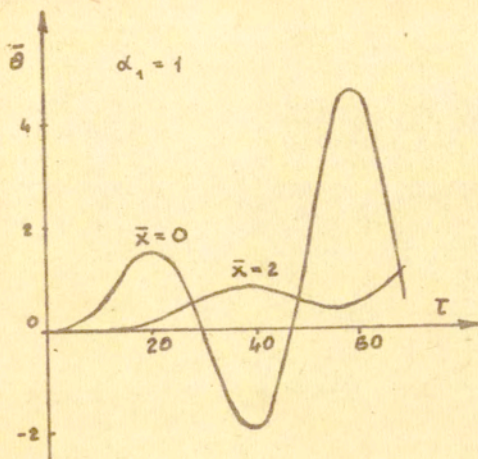
noszą od 17% do 28,5%.

Przemieszczenia przekrojów $\bar{x}=0,2$ przy obciążeniu zewnętrznym $\bar{M}_1(\tau)$ opisanym za pomocą delty Diraca przedstawiono na rysunku 6. W tym przypadku przemieszczenia również oscylują jak na poprzednich rysunkach, jednakże amplitudy są kilkanaście razy większe niż dla obciążenia sinusoidalnego w badanym przedziale czasu τ .

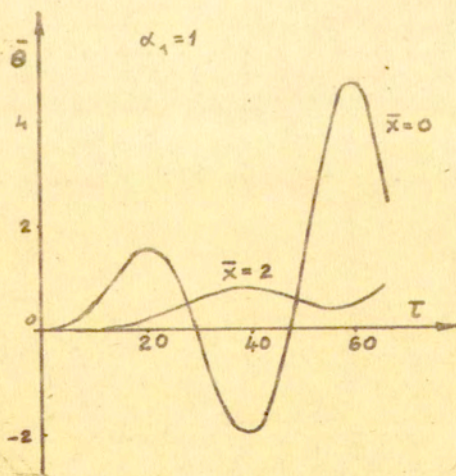
Przy wykorzystaniu wzorów rekurencyjnych dla jednakowych współczynników κ_1, κ_2 otrzymano wyniki numeryczne, a następnie na rysunkach (7)-(11) naniesiono przemieszczenia przekrojów $\bar{x}=0,2$ dla $\kappa=0,05$ i przy obciążeniu lewej bryły rozważanego modelu wymuszeniem sinusoidalnym, trapezowym, trójkątnym, typu Heaviside'a i typu Diraca zgodnie z danymi zamieszczonymi w Tabeli 1.

Przemieszczenia przekrojów $\bar{x}=0,2$ przy wymuszeniu sinusoidalnym, rys.7, są dodatnie i rosną oscylując ze wzrostem τ . Przemieszczenia tych przekrojów dla wymuszenia trapezowego, rys.8, i trójkątnego, rys.9, praktycznie nie różnią się od przemieszczeń zamieszczonych na rys.7. Przy wymuszeniu typu Heaviside'a, rys.10, i typu Diraca, rys.11, przemieszczenia również rosną i oscylują. Jednakże w porównaniu z wynikami dla obciążenia sinusoidalnego, przy obciążeniu typu Heaviside'a ekstremalne wartości przemieszczeń są mniejsze, natomiast przy wymuszeniu typu Diraca są kilkanaście razy większe.

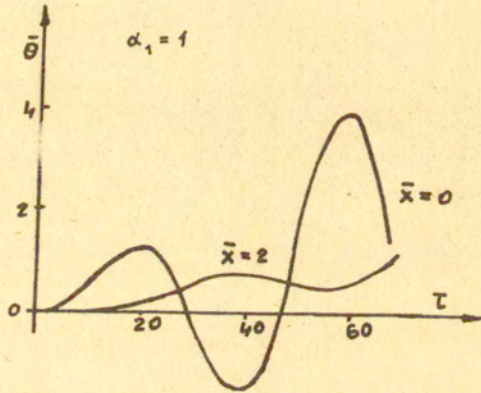
Powyższe wykresy przemieszczeń zostały naniesione przy ilorazie biegunowych momentów bezwładności pola przekrojów czołnów wału, $Q_1 = J_{O2}/J_{O1}$, równym jedności. Na rys.12,13,14 przedstawione są wykresy przemieszczeń odpowiednie w przekrojach $\bar{x}=0,1,2$ dla różnych wartości Q_1 , a mianowicie przyjęto $Q_1 = 0.6, 0.8, 1, 1.2, 1.4$ przy $\kappa_1 = 0.05, \kappa_2 = 0.005, \bar{M}_1(\tau) = \bar{M}_2(\tau) = H(\tau)$. Z rys.12 wynika, że w przedziale od 0 do 40 największe przemieszczenia występują dla najmniejszej wartości Q_1 i odwrotnie. Ta sama uwaga dotyczy wykresów przemieszczeń podanych na rys.13. W przekroju $\bar{x}=2$, rys.14, przemieszczenia są ujemne dla wszystkich wartości Q_1 , przy czym dla Q_1 najmniejszego przyjmują wartości najmniejsze.



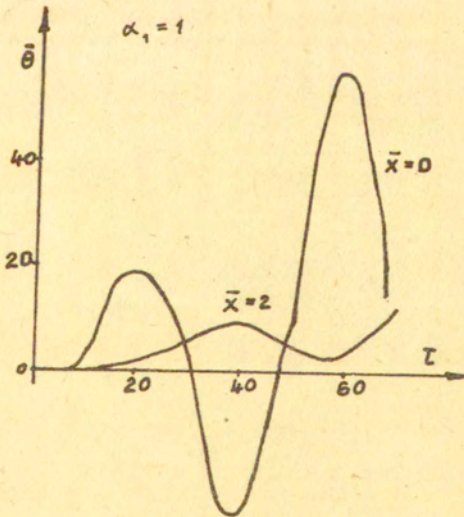
Rys.3. Przemieszczenia dla $\kappa_1=0.05$, $\kappa_2=0.005$ przy obciążeniu sinusoidalnym i $\bar{H}_2(\tau) = 0$



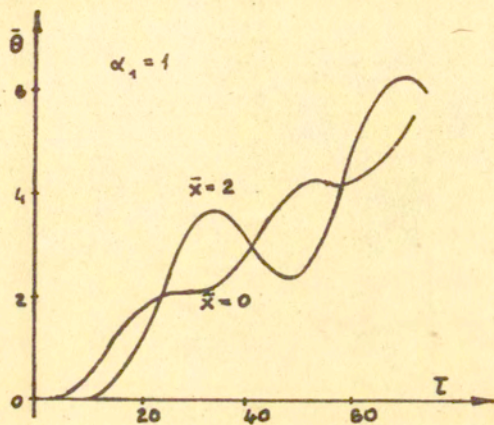
Rys.4. Przemieszczenia dla $\kappa_1=0.05$, $\kappa_2=0.005$ przy obciążeniu trapezowym i $\bar{H}_2(\tau) = 0$



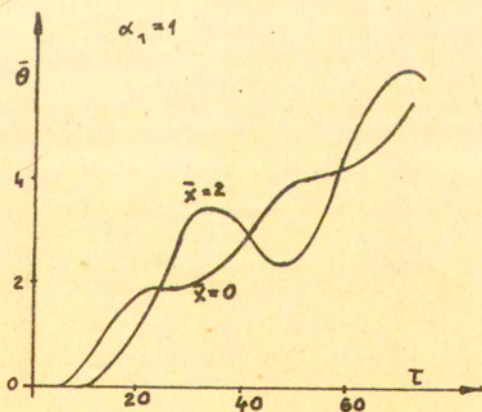
Rys.5. Przemieszczenia dla $\kappa_1=0,05$, $\kappa_2=0,005$, przy obciążeniu typu Heaviside'a i $\bar{M}_2(\bar{x})=0$



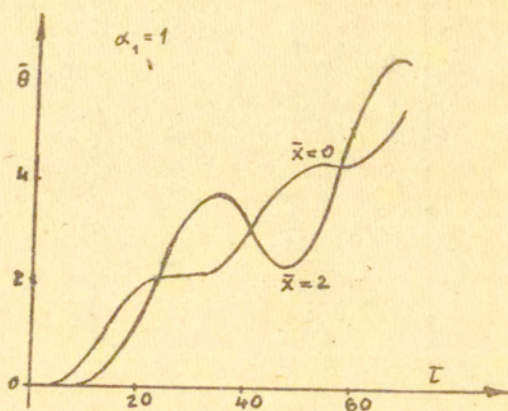
Rys.6. Przemieszczenia dla $\kappa_1=0,05$, $\kappa_2=0,005$ przy obciążeniu typu Dirac'a i $\bar{M}_2(\bar{x})=0$



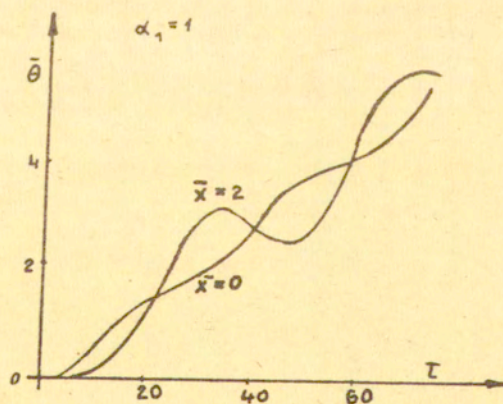
Rys.7. Przemieszczenia dla $\nu = 0.05$ przy obciążeniu sinusoidalnym i $M_2 = 0$



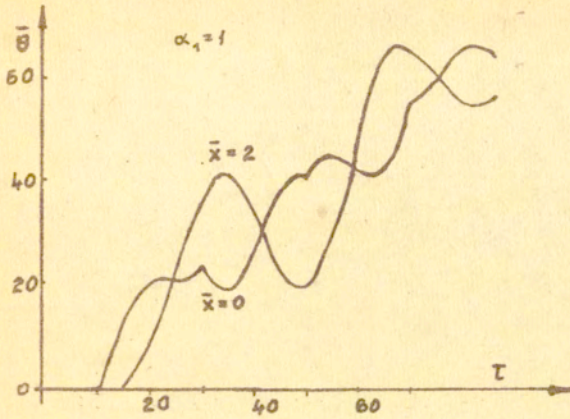
Rys.8. Przemieszczenia dla $\nu = 0.05$ przy obciążeniu trapezowym i $M_2(\tau) = 0$



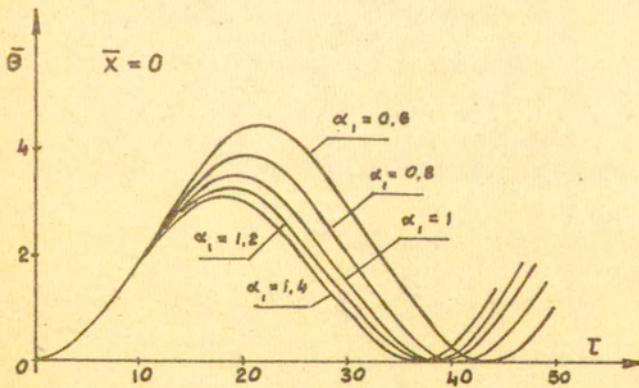
Rys. 9. Przemieszczenia dla $\kappa = 0.05$ przy obciążeniu trójkątnym i $\bar{M}_2(\tau) = 0$



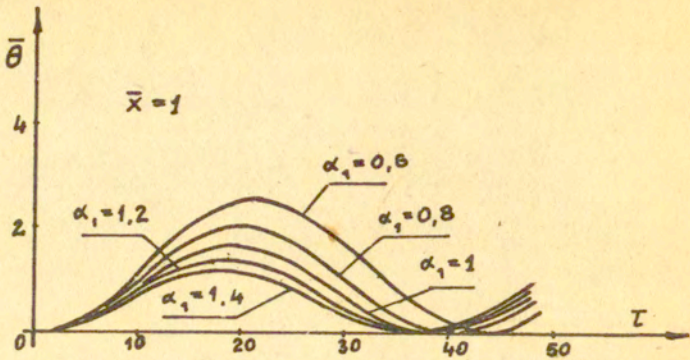
Rys. 10. Przemieszczenia dla $\kappa = 0.05$ przy obciążeniu typu Heaviside'a i $\bar{M}_2(\tau) = 0$



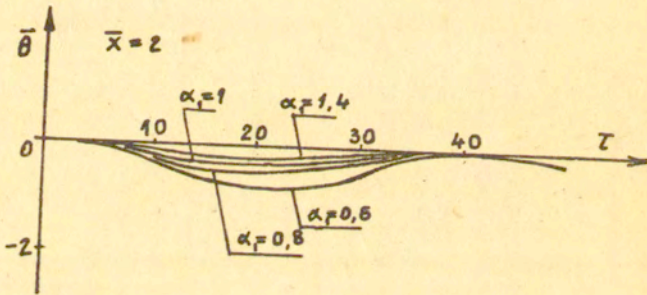
Rys. 11. Przemieszczenia dla $\kappa = 0.05$ przy obciążeniu typu Diraca i $\bar{M}_2(\tau) = 0$



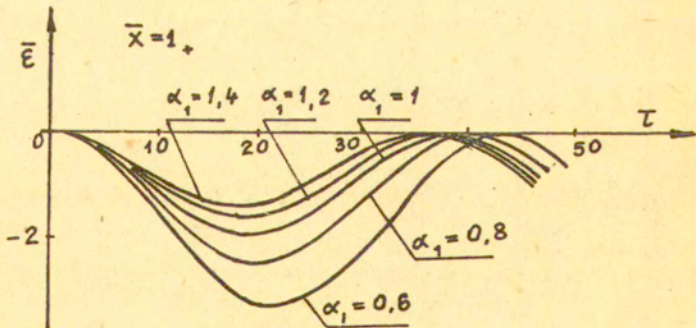
Rys. 12. Przemieszczenia przekroju $\bar{x} = 0$ dla $\kappa_1 = 0.05$, $\kappa_2 = 0.005$, $\bar{M}_1(\tau) = \bar{M}_2(\tau) = \Pi(\tau)$ i różnych wartości α_1



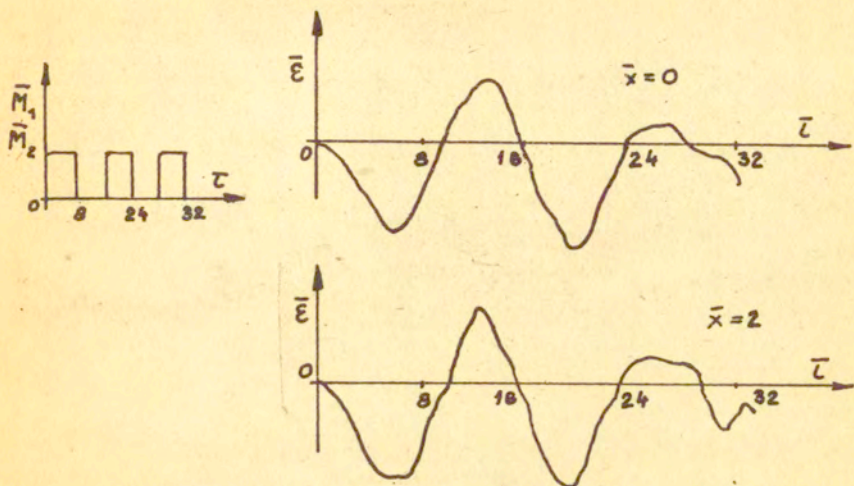
Rys. 13. Przemieszczenia przekroju $\bar{x}=1$ dla $\kappa_1=0.05$, $\kappa_2=0.005$, $\bar{M}_1(\tau) = \bar{M}_2(\tau) = H(\tau)$ i różnych wartości α_1



Rys. 14. Przemieszczenia przekroju $\bar{x}=2$ dla $\kappa_1=0.05$, $\kappa_2=0.005$, $\bar{M}_1(\tau) = \bar{M}_2(\tau) = H(\tau)$ i różnych α_1



Rys. 15. Odkształcenia przekroju $\bar{x}=1$ dla $\kappa_1=0.05$, $\kappa_2=0.005$, $\bar{M}_1(\tau) = \bar{M}_2(\tau) = H(\tau)$ i różnych α_1



Rys.16. Odształcenia dla $\kappa_1=0.5$, $\kappa_2=0.25$ przy
 $\bar{M}_1(\tau) = \bar{M}_2(\tau) = 0.5 \sum_{k=0}^3 (-1)^k H(\tau-8k)$

Na rys.15 naniesiono wykresy odształceń dla lewego końca drugiego członu wału rozpatrywanego układu napędu dwumasowego, tj. dla $\bar{x}=1$. Z rysunku tego wynika, że odształcenia są ujemne i najmniejsze występują przy najmniejszej wartości współczynnika α_1 .

Dodatkowo na rys.16 naniesiono wykresy odształceń dla $\alpha_1=1$, $\kappa_1=0.5$, $\kappa_2=0.25$, $\bar{M}_1(\tau) = \bar{M}_2(\tau) = 1/2 \sum_{k=0}^3 (-1)^k H(\tau-8k)$ w przekrojach $\bar{x}=0, 2$. Z rysunku tego wynika, że odształcenia tych przekrojów oscylują ze wzrostem τ .

5. Uwagi końcowe

W pracy wyprowadzono wzory rekurencyjne, na podstawie których wyznaczono przemieszczenia i odształcenia przekrojów dwustopniowego wału napędu dwumasowego obciążanego siłami krótkotrwałymi opisanymi odpowiednio za pomocą funkcji Heavisida, delty Diraca, odcinkami prostych i funkcją trygonometryczną sinus. Wykresy przemieszczeń naniesiono na rys.3-11 dla obciążenia sinusoidalnego, trapezowego, trójkątnego, prostokąt-

nego i obciążenia wg delty Diraca. Z porównania wykresów wynika, że przy przyjętym założeniu o równości całek obciążeń, przemieszczenia dla obciążenia sinusoidalnego, trapezowego i trójkątnego praktycznie nie różnią się w rozważanych przekrojach wału. Różnice natomiast występują przy porównaniu przemieszczeń otrzymanych dla obciążenia sinusoidalnego z przemieszczeniami dla obciążenia typu Heaviside'a i delty Diraca. Zauważyć przy tym można, że dla wymuszenia typu Heaviside'a występuje obniżenie, a dla typu Diraca ^{znaczne} podwyższenie ekstremalnych wartości przemieszczeń w odniesieniu do ekstremalnych przemieszczeń przy wymuszeniu sinusoidalnym. Efekt ten związany jest z faktem, że przy obciążeniu typu Diraca i Heaviside'a w rozpatrywanym wale, dla $\Omega_1 = 1$, występują fale odpowiednio silnej i słabej nieciągłości, natomiast przy pozostałych obciążeniach przemieszczenia, prędkości, odkształcenia i przyspieszenia przekrojów wału są funkcjami ciągłymi względem czasu.

Z rysunków 12, 13, 14, 15 wynika, że istotny wpływ na wartość przemieszczeń i odkształceń ma współczynnik $\Omega_1 = J_{02}/J_{01}$. Bez względu na wartości przemieszczeń i odkształceń w przedziale $\langle 0, 40 \rangle$ są największe dla najmniejszej badanej wartości Ω_1 przy ustalonych pozostałych parametrach rozważanego dwustopniowego układu napędowego.

Rozważania powyższe dotyczyły napędu dwumasowego, złożonego z dwóch brył sztywnych, połączonych sztywno z wałem o odcinkowo stałym przekroju. W wielu jednak przypadkach bryły układów dwumasowych mogą być połączone wałami o odcinkowo zmiennym przekroju.

W przypadku wału napędu dwumasowego o odcinkowo zmiennym przekroju, warunki początkowe i brzegowe są takie same jak w przypadku wału o przekroju odcinkowo stałym. Zmianie ulegają natomiast równania przemieszczeń przekrojów poprzecznych odcinków wału. Przy monotonicznie malejących przekrojach mają one na przykład postać, [10, 13],

$$(32) \quad \frac{\partial^2 \theta_i(x,t)}{\partial t^2} - c^2 \left[\frac{\partial^2 \theta_i(x,t)}{\partial x^2} - \frac{2}{x-b_i} \frac{\partial \theta_i(x,t)}{\partial x} \right] = 0, \\ i = 1, 2, \dots, n.$$

Rozważania analityczne napędów dwumasowych o odcinkowo zmiennych przekrojach w swej istocie niczym się nie różnią się od przeprowadzonych rozważań analitycznych dla napędu dwumasowego o odcinkowo stałym przekroju. Są one jedynie bardziej złożone pod względem rachunkowym, a z porównania wykresów przemieszczeń prętów o zmiennym przekroju [11] i stałym przekroju [7] wynika, że różnice między tymi przemieszczeniami są nieznaczne.

Literatura

- 1 И.В.Ананьев, П.Г.Тимофеев, Колебания упругих систем в авиационных конструкциях и их демпфирование, Москва 1965
- 2 A.H.BURR, Longitudinal and torsional impact in a uniform bar with a rigid body at one end, Journal of Applied Mechanics, Transactions of ASME, vol.17, No 2, 1950.
- 3 R.H.CANNON jr., Dynamika układów fizycznych, Warszawa 1973.
- 4 R.W.CLOUGH, J.PENZIEN, Dynamics of structures, str.371-377, Tokyo 1975.
- 5 J.A.DALESSANDRO, Torsional impact of a stepped shaft with a rigid body at one end, Journal of Applied Mechanics, Transactions of ASME, December 1973.
- 6 L.H.DONNELL, Longitudinal wave transmission and impact, Journal of Applied Mechanics, Trans. of ASME, vol.52, 1930.
- 7 W.GOLDSMITH, Impact, str. 70-81, London 1960.
- 8 S,KALISKI i inni, Drgania i fale, Warszawa 1966.
- 9 Машиностроение, Т.8, Конструирование Машин, Москва 1948
- 10 W.NADOLSKI, A.PIELORZ, Fale sprężyste w prętach o zmiennych przekrojach i skończonych długościach, Prace IPPT 14/1978.
- 11 W.NADOLSKI, A.PIELORZ, Sprowadzenie układu ciągłego do układów dyskretnych w przypadku uderzenia masy w pręt o zmiennym przekroju, Rozprawy Inżynierskie 24, 2, 1976.
- 12 A.PIELORZ, Wykorzystanie jednowymiarowych fal w badaniach dynamicznych wybranych wielomasowych układów mechanicznych i obiektów budowlanych, Rozprawy Inżynierskie nr 3, 1980 /w druku/.
- 13 E.WŁODARCZYK, Rozprzestrzenianie się i odbicie jedno- i dwuwymiarowych fal naprężenia w ośrodkach plastycznych, Dodatek do Biuletynu WAT, nr 2 (198) , 1969.

ANEKS

1/ Stałe we wzorze (14) są następujące:

$$g_{1,i,k,n+1} = \frac{1-\alpha_i}{2} H(n-1) f_{1,i+1,k,n} + \frac{1+\alpha_i}{2} H(n-2) g_{1,i+1,k,n},$$

$i = 1, 2, \dots, m-1$

$$g_{2,i,k,n+1} = \frac{1-\alpha_i}{2} H(n-1) f_{2,i+1,k,n} + \frac{1+\alpha_i}{2} H(n-2) g_{2,i+1,k,n},$$

$i = 1, 2, \dots, m-1$

$$g_{3,i,k,n+1} = \frac{1-\alpha_i}{2} H(n-1) f_{3,i+1,k,n} + \frac{1+\alpha_i}{2} H(n-2) g_{3,i+1,k,n},$$

$i = 1, 2, \dots, m-1$

$$g_{c,i,k,n+1} = \frac{1-\alpha_i}{2} H(n-1) f_{c,i+1,k,n} + \frac{1+\alpha_i}{2} H(n-2) g_{c,i+1,k,n},$$

$i = 1, 2, \dots, m-1$

$$g_{1,j}^{1,i,k,n+1} = \frac{1-\alpha_i}{2} f_{1,j}^{1,i+1,k,n} + \frac{1+\alpha_i}{2} H(n-2-j) g_{1,j}^{1,i+1,k,n},$$

$i = 1, 2, \dots, m-1; \quad j = 0, 1, \dots, n-1$

$$g_{2,j}^{1,i,k,n+1} = \frac{1-\alpha_i}{2} f_{2,j}^{1,i+1,k,n} + \frac{1+\alpha_i}{2} g_{2,j}^{1,i+1,k,n},$$

$i = 1, 2, \dots, m-1; \quad j = 0, 1, \dots, n-m+i-1$

$$g_l^{1,m,k,n+1} = H(n-1) f_l^{1,m,k,n}$$

$$g_l^{1,m,k,n+1} = \frac{1}{\alpha_2} H(n-1) (\alpha_2 f_l^{1,m,k,n} - f_l^{1,m,k,n} - g_l^{1,m,k,n+1})$$

$$b_s^{k,n+1} = H(n-1) (\alpha_2 f_s^{1,m,k,n} + \omega_{1k} f_c^{1,m,k,n})$$

$$b_c^{k,n+1} = H(n-1) (\alpha_2 f_c^{1,m,k,n} - \omega_{1k} f_s^{1,m,k,n})$$

$$g_s^{1,m,k,n+1} = (b_s^{k,n+1} \alpha_2 + \omega_{1k} b_c^{k,n+1}) / (\alpha_2^2 + \omega_{1k}^2)$$

$$g_c^{1,m,k,n+1} = (b_c^{k,n+1} \alpha_2 - \omega_{1k} b_s^{k,n+1}) / (\alpha_2^2 + \omega_{1k}^2)$$

$$g_{1j}^{1,m,k,n+1} = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} [(j+1) H(n-2-j) (g_{1,j+1}^{1,m,k,n+1} + f_{1,j+1}^{1,m,k,n}) - (\alpha_1 + \alpha_2) f_{1j}^{1,m,k,n}] , j = n-1, n-2, \dots, 0$$

$$g_{2j}^{1,m,k,n+1} = -H(n-2-j) f_{2j}^{1,m,k,n} + \frac{2\alpha_2}{j} f_{2,j-1}^{1,m,k,n} , j = n-1, n-2, \dots, 1$$

$$g_{20}^{1,m,k,n+1} = -g_l^{1,m,k,n+1} - g_s^{1,m,k,n+1} \sin \varphi_{1k} - g_c^{1,m,k,n+1} \cos \varphi_{1k} - H(n-1) g_{10}^{1,m,k,n+1} - \begin{cases} H(n-1) f_{10}^{1,m,k,n} + H(n-2) f_{20}^{1,m,k,n+1} & \text{dla (8)}_b \\ 0 & \text{dla (8)}_{a,c,d} \end{cases}$$

2/ Stałe we wzorze (15) są następujące:

$$f_l^{1,1,k,1} = \begin{cases} b_{1k} & \text{dla (8)}_c \\ 0 & \text{dla (8)}_{a,b,d} \end{cases}$$

$$f_{1,1,k,1} = \begin{cases} 0 & \text{dla } (8)_b \\ a_{1k} & \text{dla } (8)_{a,d} \\ a_{1k} - \frac{1}{x_1} g_{11}^{1,1,k,1} & \text{dla } (8)_c \end{cases}$$

$$f_{1,1,k,n+1} = g_{11}^{1,1,k,n+1}, \quad n \geq 1$$

$$f_{1,1,k,n+1} = \frac{1}{x_1} (x_1 g_{11}^{1,1,k,n+1} - g_{11}^{1,1,k,n+1} - f_c^{1,1,k,n+1}), \quad n \geq 1$$

$$f_a^{1,1,k,1} = \begin{cases} 0 & \text{dla } (8)_{a,b,c} \\ b_{1k} x_1^2 / (x_1^2 + \omega_{1k}^2) & \text{dla } (8)_d \end{cases}$$

$$f_c^{1,1,k,1} = \begin{cases} 0 & \text{dla } (8)_{a,b,c} \\ -\omega_{1k} x_1 b_{1k} / (x_1^2 + \omega_{1k}^2) & \text{dla } (8)_d \end{cases}$$

$$v_c^{k,n+1} = H(n-1) (x_1 g_a^{1,1,k,n+1} + \omega_{1k} g_c^{1,1,k,n+1})$$

$$v_c^{k,n+1} = H(n-1) (x_1 g_c^{1,1,k,n+1} - \omega_{1k} g_a^{1,1,k,n+1})$$

$$f_a^{1,1,k,n+1} = (x_1 v_a^{k,n+1} + \omega_{1k} v_c^{k,n+1}) / (x_1^2 + \omega_{1k}^2), \quad n \geq 1$$

$$f_c^{1,1,k,n+1} = (x_1 v_c^{k,n+1} - \omega_{1k} v_a^{k,n+1}) / (x_1^2 + \omega_{1k}^2), \quad n \geq 1$$

$$f_{1j}^{1,1,k,n+1} = -H(n-1-j) g_{1j}^{1,1,k,n+1} + \frac{2x_1}{j} g_{1,j-1}^{1,1,k,n+1}, \quad j = n, n-1, \dots, 1$$

$$f_{2j}^{1,1,k,n+1} = \frac{1}{x_1 - x_2} [-(j+1)H(n-m-1-j) (g_{2,j+1}^{1,1,k,n+1} + g_{2,j+1}^{1,1,k,n+1}) + (x_1 + x_2) g_{2j}^{1,1,k,n+1}], \quad j = n-m, n-m-1, \dots, 0$$

$$f_{10}^{1,1,k,n+1} = -f_{1,1,k,n+1} - f_{\lambda}^{1,1,k,n+1} \sin \varphi_{1k} - f_c^{1,1,k,n+1} \cos \varphi_{1k} - H(n-m) f_{20}^{1,1,k,n+1} - \begin{cases} 0 \text{ dla (8) } a,c,d \\ H(n-1) g_{10}^{1,1,k,n+1} + H(n-m) g_{20}^{1,1,k,n+1} \text{ dla (8) } b \end{cases}$$

$$f_{1,i,k,n+1} = \frac{2}{1+\alpha_{i-1}} f_{1,i-1,k,n+1} - \frac{1-\alpha_{i-1}}{1+\alpha_{i-1}} H(n-1) g_{1,i,k,n+1}, \quad i=2,3,\dots,m$$

$$f_{1,l,k,n+1} = \frac{2}{1+\alpha_{i-1}} f_{1,i-1,k,n+1} - \frac{1-\alpha_{i-1}}{1+\alpha_{i-1}} H(n-1) g_{1,i,k,n+1}, \quad i=2,3,\dots,m$$

$$f_{\lambda}^{1,i,k,n+1} = \frac{2}{1+\alpha_{i-1}} f_{\lambda}^{1,i-1,k,n+1} - \frac{1-\alpha_{i-1}}{1+\alpha_{i-1}} H(n-1) g_{\lambda}^{1,i,k,n+1}, \quad i=2,3,\dots,m$$

$$f_c^{1,i,k,n+1} = \frac{2}{1+\alpha_{i-1}} f_c^{1,i-1,k,n+1} - \frac{1-\alpha_{i-1}}{1+\alpha_{i-1}} H(n-1) g_c^{1,i,k,n+1}, \quad i=2,3,\dots,m$$

$$f_{1j}^{1,i,k,n+1} = \frac{2}{1+\alpha_{i-1}} f_{1j}^{1,i-1,k,n+1} - \frac{1-\alpha_{i-1}}{1+\alpha_{i-1}} H(n-1) g_{1j}^{1,i,k,n+1}, \quad i=2,3,\dots,m; \quad j=0,1,\dots,n$$

$$f_{2j}^{1,i,k,n+1} = \frac{2}{1+\alpha_{i-1}} H(n-m+i-2-j) f_{2j}^{1,i-1,k,n+1} - \frac{1-\alpha_{i-1}}{1+\alpha_{i-1}} g_{2j}^{1,i,k,n+1}, \quad i=2,3,\dots,m; \quad j=0,1,\dots,n-m+i-1$$

3/ Stałe we wzorach (16), (17) dla $i=1,2,\dots,m$ są następujące:

$$G_{1j}^{1,i,k,n+1} = \frac{1}{\alpha_1} [(j+1) H(n-2-j) G_{1,j+1}^{1,i,k,n+1} - g_{1j}^{1,i,k,n+1}],$$

$$j = n-1, n-2, \dots, 0$$

$$G_{2j}^{1,i,k,n+1} = \frac{1}{x_2} [(j+1)H(n-m+i-2-j)G_{1,j+1}^{1,i,k,n+1} - g_{1j}^{1,i,k,n+1}],$$

$$j = n-m+i-1, n-m+i-2, \dots, 0$$

$$F_{1j}^{1,i,k,n+1} = \frac{1}{x_1} [(j+1)H(n-1-j)F_{1,j+1}^{1,i,k,n+1} - f_{1j}^{1,i,k,n+1}], \quad j = n, n-1, \dots, 0$$

$$F_{2j}^{1,i,k,n+1} = \frac{1}{x_2} [(j+1)H(n-m+i-2-j)F_{2,j+1}^{1,i,k,n+1} - f_{2j}^{1,i,k,n+1}],$$

$$j = n-m+i-1, n-m+i-2, \dots, 0$$

4/ Stałe we wzorze (18) są następujące:

$$g_i^{1,i,k,n+1} = \frac{1-\alpha_i}{2} H(n-1) f_i^{1,i+1,k,n} + \frac{1+\alpha_i}{2} H(n-2) g_i^{1,i+1,k,n},$$

$$i = 1, 2, \dots, m-1$$

$$g_{1i}^{1,i,k,n+1} = \frac{1-\alpha_i}{2} H(n-1) f_{1i}^{1,i+1,k,n} + \frac{1+\alpha_i}{2} H(n-2) g_{1i}^{1,i+1,k,n},$$

$$i = 1, 2, \dots, m-1$$

$$g_{2i}^{1,i,k,n+1} = \frac{1-\alpha_i}{2} H(n-1) f_{2i}^{1,i+1,k,n} + \frac{1+\alpha_i}{2} H(n-2) g_{2i}^{1,i+1,k,n},$$

$$i = 1, 2, \dots, m-1$$

$$g_c^{1,i,k,n+1} = \frac{1-\alpha_i}{2} H(n-1) f_c^{1,i+1,k,n} + \frac{1+\alpha_i}{2} H(n-2) g_c^{1,i+1,k,n},$$

$$i = 1, 2, \dots, m-1$$

$$g_j^{1,i,k,n+1} = \frac{1-\alpha_i}{2} f_j^{1,i+1,k,n} + \frac{1+\alpha_i}{2} g_j^{1,i+1,k,n} H(n-2-j), \quad i=1,2,\dots,m-2, \\ j=0,1,\dots,n-1$$

$$g_j^{1,m-1,k,n+1} = \frac{1-\alpha_i}{2} f_j^{1,m,k,n} + \frac{1+\alpha_i}{2} H(n-2) g_j^{1,m,k,n}, \quad j=0,1,\dots,n-1$$

$$g_l^{1,m,k,n+1} = H(n-1) f_l^{1,m,k,n}$$

$$g^{1,m,k,n+1} = \frac{1}{x} H(n-1) (x f^{1,m,k,n} - f_l^{1,m,k,n} - g_l^{1,m,k,n+1})$$

$$w_s^{k,n+1} = H(n-1) (x f_s^{1,m,k,n} + \omega_{1k} f_c^{1,m,k,n})$$

$$w_c^{k,n+1} = H(n-1) (x f_c^{1,m,k,n} - \omega_{1k} f_s^{1,m,k,n})$$

$$g_s^{1,m,k,n+1} = (x w_s^{k,n+1} + \omega_{1k} w_c^{k,n+1}) / (x^2 + \omega_{1k}^2)$$

$$g_c^{1,m,k,n+1} = (x w_c^{k,n+1} - \omega_{1k} w_s^{k,n+1}) / (x^2 + \omega_{1k}^2)$$

$$g_j^{1,m,k,n+1} = H(n-1) [-H(n-1-j) f_j^{1,m,k,n} + \frac{2x}{j} f_{j-1}^{1,m,k,n}], \quad j=n,n-1,\dots,1$$

$$g_0^{1,m,k,n+1} = -H(n-1) (g_s^{1,m,k,n+1} + g_s^{1,m,k,n+1} \sin \varphi_{1k} + g_c^{1,m,k,n+1} \cos \varphi_{1k}) -$$

$$- \begin{cases} 0 & \text{dla (8) a,c,d} \\ H(n-1) f_0^{1,m,k,n} & \text{dla (8) b.} \end{cases}$$

5/ Staże we wzorze (19) są następujące:

$$f_l^{1,1,k,1} = \begin{cases} b_{1k} & \text{dla } (8)_c \\ 0 & \text{dla } (8)_{a,b,d} \end{cases}$$

$$f_s^{1,1,k,1} = \begin{cases} a_{1k} & \text{dla } (8)_{a,d} \\ 0 & \text{dla } (8)_b \\ a_{1k} - \frac{1}{k} b_{1k} & \text{dla } (8)_c \end{cases}$$

$$f_s^{1,1,k,1} = \begin{cases} 0 & \text{dla } (8)_{a,b,c} \\ \frac{x^2 b_{1k}}{x^2 + \omega_{1k}^2} & \text{dla } (8)_d \end{cases}$$

$$f_c^{1,1,k,1} = \begin{cases} 0 & \text{dla } (8)_{a,b,c} \\ -\frac{x \omega_{1k} b_{1k}}{x^2 + \omega_{1k}^2} & \text{dla } (8)_d \end{cases}$$

$$f_l^{1,1,k,n+1} = g_l^{1,1,k,n+1}, \quad n \geq 1$$

$$f_l^{1,1,k,n+1} = \frac{1}{k} H(n-1) (x g_s^{1,1,k,n+1} - g_l^{1,1,k,n+1} - f_l^{1,1,k,n+1}), \quad n \geq 1$$

$$v_s^{k,n+1} = H(n-1) (x g_s^{1,1,k,n+1} + \omega_{1k} g_c^{1,1,k,n+1}),$$

$$v_c^{k,n+1} = H(n-1) (x g_c^{1,1,k,n+1} - \omega_{1k} g_s^{1,1,k,n+1})$$

$$f_s^{1,1,k,n+1} = (x v_s^{k,n+1} + \omega_{1k} v_c^{k,n+1}) / (x^2 + \omega_{1k}^2), \quad n \geq 1$$

$$f_c^{1,1,k,n+1} = (x v_c^{k,n+1} - \omega_{1k} v_s^{k,n+1}) / (x^2 + \omega_{1k}^2), \quad n \geq 1$$

$$f_j^{1,1,k,n+1} = -H(n-1-j) g_j^{1,1,k,n+1} + \frac{2x}{j} g_{j-1}^{1,1,k,n+1}, \quad j = n, n-1, \dots, 1$$

$$f_0^{1,1,k,n+1} = -f_s^{1,1,k,n+1} \sin \varphi_{1k} - f_c^{1,1,k,n+1} \cos \varphi_{1k} - \begin{cases} 0 & \text{dla (8) a, c, d} \\ H(n-1) g_0^{1,1,k,n+1} & \text{dla (8) b} \end{cases}$$

$$f_i^{1,i,k,n+1} = \frac{2}{1+\alpha_{i-1}} f_i^{1,i-1,k,n+1} - \frac{1-\alpha_{i-1}}{1+\alpha_{i-1}} H(n-1) g_i^{1,i,k,n+1}, \quad i = 2, 3, \dots, m$$

$$f_l^{1,i,k,n+1} = \frac{2}{1+\alpha_{i-1}} f_l^{1,i-1,k,n+1} - \frac{1-\alpha_{i-1}}{1+\alpha_{i-1}} H(n-1) g_l^{1,i,k,n+1}, \quad i = 2, 3, \dots, m$$

$$f_s^{1,i,k,n+1} = \frac{2}{1+\alpha_{i-1}} f_s^{1,i-1,k,n+1} - \frac{1-\alpha_{i-1}}{1+\alpha_{i-1}} H(n-1) g_s^{1,i,k,n+1}, \quad i = 2, 3, \dots, m$$

$$f_c^{1,i,k,n+1} = \frac{2}{1+\alpha_{i-1}} f_c^{1,i-1,k,n+1} - \frac{1-\alpha_{i-1}}{1+\alpha_{i-1}} H(n-1) g_c^{1,i,k,n+1}, \quad i = 2, 3, \dots, m$$

$$f_j^{1,i,k,n+1} = \frac{2}{1+\alpha_{i-1}} f_j^{1,i-1,k,n+1} - \frac{1-\alpha_{i-1}}{1+\alpha_{i-1}} H(n-1-j) g_j^{1,i,k,n+1},$$

$$i = 2, 3, \dots, m-1; \quad j = 0, 1, \dots, n$$

$$f_j^{1,m,k,n+1} = \frac{2}{1+\alpha_{m-1}} f_j^{1,m-1,k,n+1} - \frac{1-\alpha_{m-1}}{1+\alpha_{m-1}} H(n-1) g_j^{1,m,k,n+1},$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, n$$

6/ Stałe we wzorach (20), (21) dla $i=1,2,\dots,m$ są następujące:

$$G_j^{1,i,k,n+1} = \frac{1}{\alpha} [(j+1)H(n-2+H(i-m)-j)G_{j+1}^{1,i,k,n+1} - g_j^{1,i,k,n+1}], \quad n \geq 1,$$

$$j = n-1+H(i-m), n-2+H(i-m), \dots, 0$$

$$F_j^{1,i,k,n+1} = \frac{1}{\alpha} [(j+1)H(n-1-j)F_{j+1}^{1,i,k,n+1} - f_j^{1,i,k,n+1}], \quad j = n, n-1, \dots, 0$$

7/ Stałe we wzorze (24) są następujące:

$$p_l^{2,1,k,n+1} = H(n-1)g_l^{2,1,k,n}$$

$$f_l^{2,1,k,n+1} = \frac{1}{\alpha_1} H(n-1)(\alpha_1 g_l^{2,1,k,n} - g_l^{2,1,k,n} - f_l^{2,1,k,n})$$

$$w_s^{k,n+1} = H(n-1)(\alpha_1 g_s^{2,1,k,n} + \omega_{2k} g_c^{2,1,k,n})$$

$$w_c^{k,n+1} = H(n-1)(\alpha_1 g_c^{2,1,k,n} - \omega_{2k} g_s^{2,1,k,n})$$

$$f_s^{2,1,k,n+1} = (\alpha_1 w_s^{k,n+1} + \omega_{2k} w_c^{k,n+1}) / (\alpha_1^2 + \omega_{2k}^2)$$

$$f_c^{2,1,k,n+1} = (\alpha_1 w_c^{k,n+1} - \omega_{2k} w_s^{k,n+1}) / (\alpha_1^2 + \omega_{2k}^2)$$

$$p_{1j}^{2,1,k,n+1} = -H(n-2-j)g_{1j}^{2,1,k,n} + \frac{2\alpha_1}{j} g_{1,j-1}^{2,1,k,n},$$

$$j = n-1, n-2, \dots, 1$$

$$f_{2j}^{2,1,k,n+1} = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \left[-(j+1) H(n-2-j) \left(f_{2,j+1}^{2,1,k,n+1} + g_{2,j+1}^{2,1,k,n} \right) + (\alpha_1 + \alpha_2) g_{2j}^{2,1,k,n} \right],$$

$$j = n-1, n-2, \dots, 0$$

$$f_{10}^{2,1,k,n+1} = -f_{10}^{2,1,k,n+1} - f_{10}^{2,1,k,n+1} \sin \varphi_{2k} - f_c^{2,1,k,n+1} \cos \varphi_{2k} - H(n-1) f_{120}^{2,1,k,n+1} -$$

$$\begin{cases} 0 \text{ dla (8) a, c, d} \\ H(n-2) g_{10}^{2,1,k,n} + H(n-1) g_{20}^{2,1,k,n} \text{ dla (8) b} \end{cases}$$

$$f_i^{2,i,k,n+1} = \frac{2}{1 + \alpha_{i-1}} H(n-2) f_i^{2,i-1,k,n} - \frac{1 - \alpha_{i-1}}{1 + \alpha_{i-1}} H(n-1) g_i^{2,i,k,n}, \quad i = 2, 3, \dots, m$$

$$f_l^{2,i,k,n+1} = \frac{2}{1 + \alpha_{i-1}} H(n-2) f_l^{2,i-1,k,n} - \frac{1 - \alpha_{i-1}}{1 + \alpha_{i-1}} H(n-1) g_l^{2,i,k,n}, \quad i = 2, 3, \dots, m$$

$$f_s^{2,i,k,n+1} = \frac{2}{1 + \alpha_{i-1}} H(n-2) f_s^{2,i-1,k,n} - \frac{1 - \alpha_{i-1}}{1 + \alpha_{i-1}} H(n-1) g_s^{2,i,k,n}, \quad i = 2, 3, \dots, m$$

$$f_c^{2,i,k,n+1} = \frac{2}{1 + \alpha_{i-1}} H(n-2) f_c^{2,i-1,k,n} - \frac{1 - \alpha_{i-1}}{1 + \alpha_{i-1}} H(n-1) g_c^{2,i,k,n}, \quad i = 2, 3, \dots, m$$

$$f_{1j}^{2,i,k,n+1} = \frac{2}{1 + \alpha_{i-1}} H(n-1-j) f_{1j}^{2,i-1,k,n} - \frac{1 - \alpha_{i-1}}{1 + \alpha_{i-1}} H(n-1-i-j) g_{1j}^{2,i,k,n},$$

$$i = 2, 3, \dots, m; \quad j = 0, 1, \dots, n-i$$

$$f_{2j}^{2,i,k,n+1} = \frac{2}{1 + \alpha_{i-1}} H(n-2-j) f_{2j}^{2,i-1,k,n} - \frac{1 - \alpha_{i-1}}{1 + \alpha_{i-1}} H(n-1-j) g_{2j}^{2,i,k,n+1},$$

$$i = 2, 3, \dots, m; \quad j = 0, 1, \dots, n-1$$

8/ Stałe we wzorze (25) są następujące:

$$g_l^{2,m,k,1} = \begin{cases} 0 & \text{dla (8) a,b,d} \\ -\frac{J_{01}}{J_{0m}} b_{2k} & \text{dla (8)c} \end{cases}$$

$$g_l^{2,m,k,n+1} = f_l^{2,m,k,n+1}, \quad n \geq 1$$

$$g_l^{2,m,k,1} = \begin{cases} 0 & \text{dla (8)b} \\ -\frac{J_{01}}{J_{0m}} a_{2k} & \text{dla (8)a,d} \\ -\frac{J_{01}}{J_{0m}} a_{2k} - \frac{1}{x_2} g_l^{2,m,k,1} & \text{dla (8)c} \end{cases}$$

$$g_l^{2,m,k,n+1} = \frac{1}{x_2} (x_2 f_l^{2,m,k,n+1} - f_l^{2,m,k,n+1} - g_l^{2,m,k,n+1}), \quad n \geq 1$$

$$g_A^{2,m,k,1} = \begin{cases} 0 & \text{dla (8)a,b,c} \\ -\frac{J_{01}}{J_{0m}} \frac{x_2^2 b_{2k}}{x_2^2 + \omega_{2k}^2} & \text{dla (8)d} \end{cases}$$

$$g_c^{2,m,k,1} = \begin{cases} 0 & \text{dla (8)a,b,c} \\ \frac{J_{01}}{J_{02}} \frac{x_2 \omega_{2k} b_{2k}}{x_2^2 + \omega_{2k}^2} & \text{dla (8)d} \end{cases}$$

$$v_A^{k,n+1} = x_2 f_A^{2,m,k,n+1} + \omega_{2k} f_c^{2,m,k,n+1}, \quad n \geq 1$$

$$v_c^{k,n+1} = x_2 f_c^{2,m,k,n+1} - \omega_{2k} f_A^{2,m,k,n+1}, \quad n \geq 1$$

$$g_{\lambda}^{2,m,k,n+1} = (\omega_2 v_{\lambda}^{k,n+1} + \omega_{2k} v_c^{k,n+1}) / (\omega_2^2 + \omega_{2k}^2) ; n \geq 1$$

$$g_c^{2,m,k,n+1} = (\omega_2 v_c^{k,n+1} - \omega_{2k} v_{\lambda}^{k,n+1}) / (\omega_2^2 + \omega_{2k}^2) ; n \geq 1$$

$$g_{\lambda_j}^{2,m,k,n+1} = \frac{1}{x_1 - x_2} [(j+1)H(n-m-1-j)(g_{\lambda, j+1}^{2,m,k,n+1} + f_{\lambda, j+1}^{2,m,k,n+1}) - (\omega_1 + \omega_2) f_{\lambda_j}^{2,m,k,n+1}] ; j = n-m, n-m-1, \dots, 0$$

$$g_{2j}^{2,m,k,n+1} = -H(n-1-j) f_{2j}^{2,m,k,n+1} + \frac{2\omega_2}{j} f_{2, j-1}^{2,m,k,n+1} ; j = n, n-1, \dots, 1$$

$$g_{20}^{2,m,k,n+1} = -g_{\lambda}^{2,m,k,n+1} - g_{\lambda}^{2,m,k,n+1} \sin \varphi_{2k} - g_c^{2,m,k,n+1} \cos \varphi_{2k} - H(n-m) g_{10}^{2,m,k,n+1} - \begin{cases} 0 \text{ dla } (8)_{a,c,d} \\ H(n-m) f_{\lambda_0}^{2,m,k,n+1} + H(n-1) f_{20}^{2,m,k,n+1} \text{ dla } (8)_b \end{cases}$$

$$g^{2,i,k,n+1} = \frac{1-\alpha_i}{1+\alpha_i} H(n-1) f^{2,i,k,n+1} + \frac{2\alpha_i}{1+\alpha_i} g^{2,i+1,k,n+1} ; i = m-1, m-2, \dots, 1$$

$$g_c^{2,i,k,n+1} = \frac{1-\alpha_i}{1+\alpha_i} H(n-1) f_c^{2,i,k,n+1} + \frac{2\alpha_i}{1+\alpha_i} g_c^{2,i+1,k,n+1} ; i = m-1, m-2, \dots, 1$$

$$g_{\lambda}^{2,i,k,n+1} = \frac{1-\alpha_i}{1+\alpha_i} H(n-1) f_{\lambda}^{2,i,k,n+1} + \frac{2\alpha_i}{1+\alpha_i} g_{\lambda}^{2,i+1,k,n+1} ; i = m-1, m-2, \dots, 1$$

$$g_c^{2,i,k,n+1} = \frac{1-\alpha_i}{1+\alpha_i} H(n-1) f_c^{2,i,k,n+1} + \frac{2\alpha_i}{1+\alpha_i} g_c^{2,i+1,k,n+1} ; i = m-1, m-2, \dots, 1$$

$$g_{1j}^{2,i,k,n+1} = \frac{1-\alpha_i}{1+\alpha_i} f_{1j}^{2,i,k,n+1} + \frac{2\alpha_i}{1+\alpha_i} H(n-i-1-j) g_{1j}^{2,i+1,k,n+1},$$

$i = m-1, m-2, \dots, 1; \quad j = 0, 1, \dots, n-i$

$$g_{2j}^{2,i,k,n+1} = \frac{1-\alpha_i}{1+\alpha_i} H(n-1-j) f_{2j}^{2,i,k,n+1} + \frac{2\alpha_i}{1+\alpha_i} g_{2j}^{2,i+1,k,n+1},$$

$i = m-1, m-2, \dots, 1; \quad j = 0, 1, \dots, n$

9/ Stałe we wzorach (26), (27) dla $i=1, 2, \dots, m$ są następujące:

$$F_{1j}^{2,i,k,n+1} = \frac{1}{\alpha_1} [(j+1)H(n-i-1-j) F_{1,j+1}^{2,i,k,n+1} - f_{1j}^{2,i,k,n+1}], \quad j = n-i, n-1-i, \dots, 0$$

$$F_{2j}^{2,i,k,n+1} = \frac{1}{\alpha_2} [(j+1)H(n-2-j) F_{2,j+1}^{2,i,k,n+1} - f_{2j}^{2,i,k,n+1}], \quad j = n-1, n-2, \dots, 0$$

$$G_{1j}^{2,i,k,n+1} = \frac{1}{\alpha_1} [(j+1)H(n-i-1-j) G_{1,j+1}^{2,i,k,n+1} - g_{1j}^{2,i,k,n+1}], \quad j = n-i, n-i-1, \dots, 0$$

$$G_{2j}^{2,i,k,n+1} = \frac{1}{\alpha_2} [(j+1)H(n-1-j) G_{2,j+1}^{2,i,k,n+1} - g_{2j}^{2,i,k,n+1}], \quad j = n, n-1, \dots, 0$$

10/ Stałe we wzorze (28) są następujące:

$$f_i^{2,1,k,n+1} = H(n-1) g_l^{2,1,k,n}$$

$$f^{2,1,k,n+1} = \frac{1}{\alpha} (\alpha g^{2,1,k,n} - g_l^{2,1,k,n} - f_l^{2,1,k,n+1}) H(n-1)$$

$$w_s^{k,n+1} = H(n-1) (\alpha g_s^{2,1,k,n} + \omega_{2k} g_c^{2,1,k,n})$$

$$w_c^{k,n+1} = H(n-1) (\alpha g_c^{2,1,k,n} - \omega_{2k} g_s^{2,1,k,n})$$

$$f_s^{2,1,k,n+1} = (\alpha w_s^{k,n+1} + \omega_{2k} w_c^{k,n+1}) / (\alpha^2 + \omega_{2k}^2)$$

$$f_c^{2,1,k,n+1} = (\alpha w_c^{k,n+1} - \omega_{2k} w_s^{k,n+1}) / (\alpha^2 + \omega_{2k}^2)$$

$$f_j^{2,1,k,n+1} = H(n-1) [-H(n-1-j) g_j^{2,1,k,n} + \frac{2\alpha}{j} g_{j-1}^{2,1,k,n}], \quad j = n, n-1, \dots, 1$$

$$f_0^{2,1,k,n+1} = -H(n-1) (f_s^{2,1,k,n+1} + f_s^{2,1,k,n+1} \sin \varphi_{2k} + f_c^{2,1,k,n+1} \cos \varphi_{2k}) -$$

$$- \begin{cases} 0 & \text{dla } (8)_{a,c,d} \\ H(n-1) g_0^{2,1,k,n} \end{cases}$$

$$f_i^{2,i,k,n+1} = \frac{2}{1+\alpha_{i-1}} H(n-2) f_i^{2,i-1,k,n} - \frac{1-\alpha_{i-1}}{1+\alpha_{i-1}} H(n-1) g_i^{2,i,k,n}, \quad i = 2, 3, \dots, m$$

$$f_l^{2,i,k,n+1} = \frac{2}{1+\alpha_{i-1}} H(n-2) f_l^{2,i-1,k,n} - \frac{1-\alpha_{i-1}}{1+\alpha_{i-1}} H(n-1) g_l^{2,i,k,n}, \quad i = 2, 3, \dots, m$$

$$f_s^{2,i,k,n+1} = \frac{2}{1+\alpha_{i-1}} H(n-2) f_s^{2,i-1,k,n} - \frac{1-\alpha_{i-1}}{1+\alpha_{i-1}} H(n-1) g_s^{2,i,k,n}, \quad i = 2, 3, \dots, m$$

$$f_c^{2,i,k,n+1} = \frac{2}{1+\alpha_{i-1}} H(n-2) f_c^{2,i-1,k,n} - \frac{1-\alpha_{i-1}}{1+\alpha_{i-1}} H(n-1) g_c^{2,i,k,n}, \quad i = 2, 3, \dots, m$$

$$f_j^{2,2,k,n+1} = \frac{2}{1+\alpha_{i-1}} H(n-2) f_j^{2,1,k,n} - \frac{1-\alpha_{i-1}}{1+\alpha_{i-1}} g_j^{2,2,k,n}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1$$

$$f_j^{2,i,k,n+1} = \frac{2}{1+\alpha_{i-1}} H(n-2-j) f_j^{2,i-1,k,n} - \frac{1-\alpha_{i-1}}{1+\alpha_{i-1}} g_j^{2,i,k,n},$$

$$i = 3, 4, \dots, m; \quad j = 0, 1, \dots, n-1$$

11/ Staże we wzorze (29) są następujące:

$$g_l^{2,m,k,1} = \begin{cases} 0 & \text{dla (8) a, b, d} \\ -\frac{J_{0c}}{J_{0m}} b_{2k} & \text{dla (8) c} \end{cases}$$

$$g_j^{2,m,k,1} = \begin{cases} 0 & \text{dla (8) b} \\ -\frac{J_{0a}}{J_{0m}} a_{2k} & \text{dla (8) a, d} \\ \frac{1}{\kappa} \left(-\kappa \frac{J_{0c}}{J_{0m}} a_{2k} - g_l^{2,m,k,1} \right) & \text{dla (8) c} \end{cases}$$

$$g_{\lambda}^{2,m,k,1} = \begin{cases} 0 & \text{dla (8) a, b, c} \\ -\frac{J_{0c}}{J_{0m}} \frac{\kappa^2 b_{2k}}{\kappa^2 + \omega_{2k}^2} & \text{dla (8) d} \end{cases}$$

$$g_c^{2,m,k,1} = \begin{cases} 0 & \text{dla (8) a, b, c} \\ \frac{J_{0c}}{J_{0m}} \frac{\kappa \omega_{2k} b_{2k}}{\kappa^2 + \omega_{2k}^2} & \text{dla (8) d} \end{cases}$$

$$g_l^{2,m,k,n+1} = f_l^{2,m,k,n+1}, \quad n \geq 1$$

$$g_j^{2,m,k,n+1} = \frac{1}{\kappa} \left(\kappa f_j^{2,m,k,n+1} - f_l^{2,m,k,n+1} - g_l^{2,m,k,n+1} \right), \quad n \geq 1$$

$$v_s^{k,n+1} = \alpha \rho_s^{2,m,k,n+1} + \omega_{2k} \rho_c^{2,m,k,n+1}, \quad n \geq 1$$

$$v_c^{k,n+1} = \alpha \rho_c^{2,m,k,n+1} - \omega_{2k} \rho_s^{2,m,k,n+1}, \quad n \geq 1$$

$$g_s^{2,m,k,n+1} = (\alpha v_s^{k,n+1} + \omega_{2k} v_c^{k,n+1}) / (\alpha^2 + \omega_{2k}^2), \quad n \geq 1$$

$$g_c^{2,m,k,n+1} = (\alpha v_c^{k,n+1} - \omega_{2k} v_s^{k,n+1}) / (\alpha^2 + \omega_{2k}^2), \quad n \geq 1$$

$$g_j^{2,m,k,n+1} = -H(n-1-j) \rho_j^{2,m,k,n+1} + \frac{2\alpha}{j} \rho_{j-1}^{2,m,k,n+1}, \quad j = n, n-1, \dots, 1$$

$$g_0^{2,m,k,n+1} = -g_0^{2,m,k,n+1} - g_s^{2,m,k,n+1} \sin \varphi_{2k} - g_c^{2,m,k,n+1} \cos \varphi_{2k}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{dla (8) a, c, d} \\ H(n-1) \rho_0^{2,m,k,n+1} & \text{dla (8) b} \end{cases}$$

$$g_i^{2,i,k,n+1} = \frac{1-\alpha_i}{1+\alpha_i} H(n-1) \rho_i^{2,i,k,n+1} + \frac{2\alpha_i}{1+\alpha_i} g_{i+1}^{2,i+1,k,n+1}, \quad i = m-1, m-2, \dots, 1$$

$$g_l^{2,i,k,n+1} = \frac{1-\alpha_i}{1+\alpha_i} H(n-1) \rho_l^{2,i,k,n+1} + \frac{2\alpha_i}{1+\alpha_i} g_l^{2,i+1,k,n+1}, \quad i = m-1, m-2, \dots, 1$$

$$g_s^{2,i,k,n+1} = \frac{1-\alpha_i}{1+\alpha_i} H(n-1) \rho_s^{2,i,k,n+1} + \frac{2\alpha_i}{1+\alpha_i} g_s^{2,i+1,k,n+1}, \quad i = m-1, m-2, \dots, 1$$

$$g_c^{2,i,k,n+1} = \frac{1-\alpha_i}{1+\alpha_i} H(n-1) \rho_c^{2,i,k,n+1} + \frac{2\alpha_i}{1+\alpha_i} g_c^{2,i+1,k,n+1}, \quad i = m-1, m-2, \dots, 1$$

$$g_j^{2,i,k,n+1} = \frac{1-\alpha_i}{1+\alpha_i} H(n-1-j) \rho_j^{2,i,k,n+1} + \frac{2\alpha_i}{1+\alpha_i} g_j^{2,i+1,k,n+1}, \quad i = m-1, m-2, \dots, 2$$

$j = 0, 1, \dots, n$

$$q_j^{2,1,k,n+1} = \frac{1-\alpha_i}{1+\alpha_i} H(n-1) f_j^{2,1,k,n+1} + \frac{2\alpha_i}{1+\alpha_i} q_j^{2,2,k,n+1},$$

$$j = 0, 1, \dots, n$$

12/ Stałe we wzorach (30), (31) dla $i=1, 2, \dots, m$ są następujące:

$$F_j^{2,i,k,n+1} = \frac{1}{X} [(j+1)H(n-2+H(1-i)-j) F_{j+1}^{2,i,k,n+1} - f_j^{2,i,k,n+1}],$$

$$n \geq 1; j = n-1+H(1-i), n-2+H(1-i), \dots, 0$$

$$G_j^{2,i,k,n+1} = \frac{1}{X} [(j+1)H(n-1-j) G_{j+1}^{2,i,k,n+1} - q_j^{2,i,k,n+1}],$$

$$j = n, n-1, \dots, 0.$$

Spis treści

| | |
|--|----|
| Wstęp | 3 |
| Założenia i cel pracy | 4 |
| Równania ruchu, wzory rekurencyjne | 6 |
| Obliczenia numeryczne | 17 |
| Uwagi końcowe | 27 |
| Literatura | 29 |
| Aneks | 30 |