

8/81
H. Kudrewicz, S. Przeździecki

DYFRAKCJA FALI PŁASKIEJ
NA PÓLPLASZCZYŹNIE
IMPEDACYJNEJ
ANALIZA ROZWIĄZANIA
W ZALEŻNOŚCI OD IMPEDANCJI
PÓLPLASZCZYZNY



P. 269

WARSZAWA 1981

ISSN 0208-5658

Prace Zakładu Teorii Fal Elektromagnetycznych
Praca nr 187

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 31 grudnia 1980r.

Zarejestrowana pod nr 8/1981



57128



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Kazimierz 150 egz. Ark. wyd. 1,75. Ark. druk. 3.
Oddano do drukarni w marcu 1981 r.
Nr zamówienia

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

Halina Kudrewicz, Stanisław Przeździecki

Zakład Teorii Fal Elektromagnetycznych

3.31 - dyfrakcja

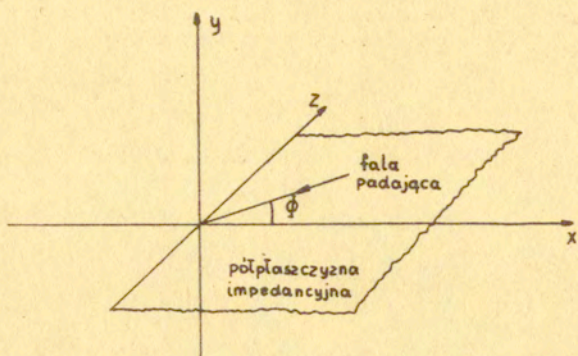
DYFRAKCJA FALI PŁASKIEJ NA PÓŁPŁASZCZYŹNIE
IMPEDANCYJNEJ
ANALIZA ROZWIĄZANIA W ZALEŻNOŚCI OD IMPEDANCJI
PÓŁPŁASZCZYŹNY

Praca dotyczy głównie analizy rozwiązania problemu dyfrakcji fali płaskiej na półpłaszczyźnie impedancyjnej ze względu na parametr η będący impedancją półpłaszczyzny, a w szczególności zbadania fal powierzchniowych mogących propagować się wzdłuż półpłaszczyzny. Zagadnienie dyfrakcji dla takich wartości η , dla których nie występuje fala powierzchniowa zostało rozwiązane w 1952 roku przez T.B.A. Seniora [1].

Poniżej zbadano dla jakich wartości parametru η istnieje fala powierzchniowa, a następnie przedłużono analitycznie rozwiązanie Seniora dla tych wartości η . Dla impedancji pasywnej i podtrzymującej falę powierzchniową przedłużenie otrzymuje się z tego samego wzoru Seniora. Dla impedancji aktywnej i podtrzymującej falę powierzchniową przedłużenie uzyskuje się przez zmianę konturu całkowania w rozwiązaniu Seniora i inne sfaktoryzowanie funkcji występującej w równaniach Wienera-Hopfa, co jest możliwe ze względu na to, że sfaktoryzowana funkcja ma zera. Metodą odwzorowań konforemnych przyporządkowano każdemu η biegun funkcji podcałkowej w rozwiązaniu wyrażonym przez transformację Fouriera i zbadano kiedy ten biegun ujawni się w postaci residuum /dającym falę powierzchniową/ w rozwinięciu asymptotycznym całki.

1. Sformułowanie problemu

Na płaszczyznę impedancyjną umieszczoną jak na rys. 1 pada elektromagnetyczna fala płaska pod kątem ϕ do półpłaszczyzny, prostopadle do jej krawędzi. Na półpłaszczyźnie zadany jest warunek Leontowicza



Rys.1. Układ współrzędnych. Półpłaszczyzna uginająca i fala padająca.

$$/1/ \quad \underline{n} \times \underline{E} = -Z_p [\underline{n} \times (\underline{n} \times \underline{H})]$$

gdzie \underline{n} oznacza wektor jednostkowy prostopadły do półpłaszczyzny skierowany do obszaru, w którym rozpatrujemy pole,

$Z_p = \sqrt{\frac{\mu_p}{\epsilon_p}}$ gdzie μ_p, ϵ_p są parametrami materiału charakteryzującego półpłaszczyznę impedancyjną. Zagadnienie jest harmoniczne w czasie. Zależność od czasu jest dana za pomocą czynnika $e^{-i\omega t}$.

Założenie, że fala pada prostopadłe do krawędzi sprawia, że cały problem jest skalarny i sprowadza się do rozwiązania równania Helmholtza

$$/2/ \quad \nabla^2 u + k^2 u = 0$$

z mieszanym warunkiem brzegowym, dla pola TM, gdzie $\underline{E} = (0, 0, E_z)$
 $E_z = u$, postaci

$$u = i \frac{\eta}{k} \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{dla } y = +0, \quad x > 0$$

/3/

$$u = -i \frac{\eta}{k} \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{dla } y = -0, \quad x > 0$$

dla pola TE, gdzie $\underline{H} = (0, 0, H_z)$, $H_z = u$ postaci

$$u = i \frac{1}{\eta k} \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{dla } y = +0, \quad x > 0$$

/4/

$$u = -i \frac{1}{\eta k} \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{dla } y = -0, \quad x > 0$$

gdzie η jest liczbą na ogół zespoloną $\eta = \frac{Z_p}{Z_0}$, $Z_p = \sqrt{\frac{\mu_p}{\epsilon_p}}$,
 $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$, μ_p , ϵ_p są parametrami materiału charakteryzującego
 półprzyszczyznę, μ , ϵ parametrami ośrodka, $k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$ liczbą
 falową. Zakładamy, że ośrodek jest stratny, $k = k_r + ik_i$ gdzie
 $k_r > 0$, $k_i > 0$, a rysunki wykonane są dla k rzeczywistego.
 Padająca fala ma postać

$$/5/ \quad u_i(x, y) = e^{-ik(x \cos \phi + y \sin \phi)}$$

Warunek brzegowy /3/ powoduje nieciągłość pola elektrycznego
 E_z i w konsekwencji nieciągłość składowej H_x pola magnetycznego na półprzyszczyźnie. Warunek brzegowy /4/ powoduje nieciągłość pola magnetycznego H_z i w konsekwencji nieciągłość składowej E_x pola elektrycznego.

Dla pola TM skok składowej E_z pola elektrycznego nazwiemy prądem magnetycznym i oznaczymy

$$/6/ \quad E_z(x, +0) - E_z(x, -0) = I_1(x)$$

Skok składowej H_x pola magnetycznego nazwiemy prądem elektrycznym i oznaczymy

$$/7/ \quad H_x(x, +0) - H_x(x, -0) = I_2(x)$$

Analogicznie dla pola TE skok składowej E_x pola elektrycznego nazwiemy prądem magnetycznym i oznaczymy

$$/8/ \quad E_x(x, +0) - E_x(x, -0) = -I_1(x)$$

Skok składowej H_z pola magnetycznego nazwiemy prądem elektrycznym i oznaczymy

$$/9/ \quad H_z(x, +0) - H_z(x, -0) = +I_2(x)$$

Regularność rozwiązania:

Rozwiązania problemu /2/, /3/, /5/ lub /2/, /4/, /5/ poszukujemy w klasie funkcji $u(x,y)$ takich, dla których prądy /6/, /7/ lub /8/, /9/ są całkowlalne w przedziale $0 \leq x < \infty$

Zachowanie rozwiązania dla dużych x, y :

Założymy, że całe rozwiązanie da się przedstawić w postaci sumy pola padającego i ugiętego, przy czym w polu ugiętym da się wydzielić część odpowiadającą rozwiązaniu wynikłemu z optyki geometrycznej, czyli polu odbitemu. Zażądamy, aby pozostała część pola ugiętego dążyła do zera jak $e^{ik\xi}$ dla $\xi \rightarrow \infty$, gdzie $\xi = \sqrt{x^2 + y^2}$, dla stratnego ośrodka, $\text{Re } k > 0$, $\text{Im } k > 0$ i stratnej impedancji półpłaszczyzny, $\text{Re } \eta > 0$.

2. Pole TM. Rozwiązanie problemu /2/, /3/, /5/.

Oznaczmy przez $u(x,y)$ pole całkowite

$$/10/ \quad u(x,y) = u_1(x,y) + u_5(x,y)$$

i szukamy pola $u_5(x,y)$, które nazywamy polem rozproszonym/ugiętym/. Z /2/, /3/, /5/ wynika, że pole to spełnia równanie Helmholtza.

$$/11/ \quad \Delta^2 u_s + k^2 u_s = 0$$

z niejednorodnym warunkiem brzegowym

$$\left(u_s - i \frac{\eta}{k} \frac{\partial u_s}{\partial y} \right)_{y=+0} = (-1 + \eta \sin \phi) e^{-ikx \cos \phi}$$

/12/

$$\left(u_s + i \frac{\eta}{k} \frac{\partial u_s}{\partial y} \right)_{y=-0} = (-1 - \eta \sin \phi) e^{-ikx \cos \phi}$$

Jak łatwo sprawdzić, rozwiązanie szczególne równania /11/ ma postać

$$/13/ \quad \bar{u}_s(x, y) = e^{i(\alpha x + \gamma y)}$$

gdzie α jest dowolną liczbą zespoloną, natomiast γ spełnia związek $\alpha^2 + \gamma^2 - k^2 = 0$, skąd mamy

$$/14/ \quad \gamma = \sqrt{k^2 - \alpha^2}$$

Taka fala płaska nie spełnia warunku brzegowego /12/, dlatego rozwiązania problemu /11/, /12/ szukamy /oddzielnie dla $y > 0$ i $y < 0$ / w postaci bardziej ogólnej, jako superpozycję rozwiązań /13/ będącą całką

$$/15a/ \quad u_s(x, y) = \int_Q A(\alpha) e^{i\alpha x} e^{i\gamma y} d\alpha \quad \text{dla } y > 0$$

$$/15b/ \quad u_s(x, y) = \int_Q B(\alpha) e^{i\alpha x} e^{-i\gamma y} d\alpha \quad \text{dla } y < 0$$

Na to, aby móc sprecyzować, co oznaczają całki /15/ potrzebna jest jednoznaczna i ciągła zależność między zmiennymi α i γ związanymi relacją /14/. Zależność taka istnieje wyłącznie wtedy, gdy zmienna α przyjmuje wartości z powierzchni Riemanna składającej się z dwu płatów z punktami rozgałęzienia $\alpha = -k$, $\alpha = +k$. Dla wygody płaty te rozróżnimy w ten sposób, że na płacie I przyjmujemy $\text{Im} \gamma > 0$, na płacie II, $\text{Im} \gamma < 0$. Drogę całkowania Q należy położyć na tej powierzchni tak, że by zapewnić całkom zbieżność. Zbadajmy zbieżność całek dla $|\alpha| \rightarrow \infty$. O ile funkcje $A(\alpha)$, $B(\alpha)$ są rzędu niższego niż wykładniczy, to o zbieżności całek decyduje czynnik wykładniczy. Ponieważ mamy

$$/16/ \quad |e^{i\alpha x} e^{i\gamma y}| = e^{-x \text{Im} \alpha} e^{-y \text{Im} \gamma} \quad \text{dla } y > 0$$

$$/17/ \quad |e^{i\alpha x} e^{-i\gamma y}| = e^{-x \text{Im} \alpha} e^{y \text{Im} \gamma} \quad \text{dla } y < 0$$

to, aby całki były zbieżne dla wszystkich x, y należy przyjąć

$$/18/ \quad \text{Im} \alpha = 0, \quad \text{Im} \gamma > 0 \quad \text{dla } |\alpha| \rightarrow \infty,$$

co oznacza, że linia całkowania Q we wzorach /15 ab/ dla dużych co do modułu α musi pokrywać się z osią $\text{Im} \alpha = 0$ i leżeć na I płacie powierzchni Riemanna. Nie znając funkcji $A(\alpha)$ i $B(\alpha)$ nic nie można powiedzieć o położeniu linii Q dla pozostałych α ponad to, że Q nie może przechodzić przez punkty osobliwe funkcji podcałkowej.

3. Wyznaczenie funkcji $A(\alpha)$, $B(\alpha)$. Równania Wienera-Hopfa.

Korzystamy z warunku ciągłości rozwiązania $u(x, y)$ i jego pochodnej w sperturze.

$$/19/ \quad (u_i + u_s)_{y=0} = (u_i + u_s)_{y=+0} \quad \text{dla } x < 0$$

$$/20/ \quad \left. \frac{\partial (u_i + u_s)}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial (u_i + u_s)}{\partial y} \right|_{y=+0} \quad \text{dla } x < 0$$

Stąd i z /15/ otrzymujemy następujące równania całkowe dla funkcji $A(\alpha)$, $B(\alpha)$

$$/21/ \quad \int_Q [A(\alpha) - B(\alpha)] e^{i\alpha x} d\alpha = 0$$

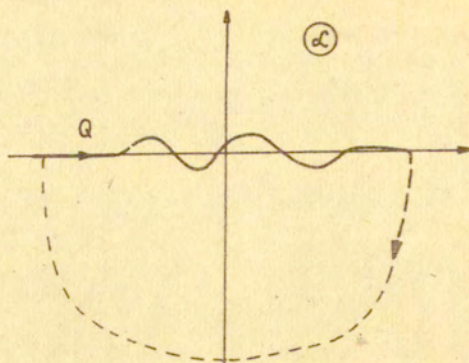
$$/22/ \quad \int_Q i\gamma [A(\alpha) + B(\alpha)] e^{i\alpha x} d\alpha = 0$$

Rozwiązaniem równania /21/ {/22/} jest dowolna funkcja $L_1(\alpha)$ { $L_2(\alpha)$ } analityczna w obszarze położonym poniżej linii całkowania Q i znikająca dla $|\alpha| \rightarrow \infty$ w tym obszarze. Mamy więc

$$/23/ \quad A(\alpha) - B(\alpha) = L_1(\alpha)$$

$$/24/ \quad \gamma [A(\alpha) + B(\alpha)] = L_2(\alpha)$$

Dowód przez sprawdzenie. Wstawiamy /23/ {/24/} do /21/ {/22/} i całkujemy po linii zamkniętej jak na Rys. 2.



Rys. 2. Zamknięty kontur całkowania dla równań całkowych /21/, /22/.

Z warunków /12/ i postaci rozwiązania /15/ wynikają następujące równania całkowe dla funkcji $A(\alpha)$, $B(\alpha)$.

$$/25/ \quad \int_Q (1 + \frac{\eta}{k} \gamma) A(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha = (-1 + \eta \sin \phi) e^{-ikx \cos \phi}$$

$$/26/ \quad \int_Q (1 + \frac{\eta}{k} \gamma) B(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha = -(1 + \eta \sin \phi) e^{-ikx \cos \phi}$$

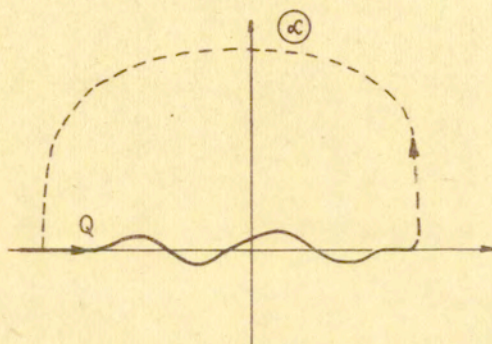
Warunkiem istnienia rozwiązania jest położenie liczby $-k \cos \phi$ powyżej linii całkowania Q . Wówczas rozwiązania równań /25/, {/26/} dane są odpowiednio zależnościami

$$/27/ \quad (1 + \frac{\eta}{k} \gamma) A(\alpha) = \tilde{U}_1(\alpha) - \frac{1}{2\pi i} \frac{1 - \eta \sin \phi}{\alpha + k \cos \phi}$$

$$/28/ \quad (1 + \frac{\eta}{k} \gamma) B(\alpha) = \tilde{U}_2(\alpha) - \frac{1}{2\pi i} \frac{1 + \eta \sin \phi}{\alpha + k \cos \phi}$$

gdzie $\tilde{U}_1(\alpha)$ $\{\tilde{U}_2(\alpha)\}$ jest dowolną funkcją analityczną w obszarze położonym nad linią całkowania Q i znikającą dla $|\alpha| \rightarrow \infty$ w tym obszarze.

Dowód przez sprawdzenie. Wstawiamy /27/, {/28/} do /25/ {/26/} i całkujemy po linii zamkniętej, jak na rys. 3.



Rys.3. Zamknięty kontur całkowania dla równań całkowych /25/, /26/.

Z zależności /23/, /24/ otrzymujemy

$$/29/ \quad A(\alpha) = \frac{1}{2} \left[L_1(\alpha) + \frac{1}{\gamma} L_2(\alpha) \right]$$

$$/30/ \quad B(\alpha) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\gamma} L_2(\alpha) - L_1(\alpha) \right]$$

Wstawiając /29/ do /15a/ i /30/ do /15b/ wyrazimy rozwiązanie za pomocą nieznanych funkcji $L_1(\alpha)$, $L_2(\alpha)$

$$/31/ \quad u_s(x, y) = \frac{1}{2} \int_Q \left[\frac{1}{\gamma} L_2(\alpha) + \frac{y}{|y|} L_1(\alpha) \right] e^{i\alpha x} e^{i\gamma|y|\alpha} d\alpha$$

Dla wyznaczenia funkcji $L_1(\alpha)$, $L_2(\alpha)$ otrzymujemy równania Wienera-Hopfa przez wyrugowanie funkcji $A(\alpha)$, $B(\alpha)$ ze związków /23/, /24/, /27/, /28/. Równania te spełnione na linii Q mają postać

$$/32/ \quad U_1(\alpha) = (k + \eta \sqrt{k^2 - \alpha^2}) L_1(\alpha) - \frac{1}{\pi i} \frac{\eta k \sin \phi}{\alpha + k \cos \phi}$$

$$/33/ \quad U_2(\alpha) = \frac{k + \eta \sqrt{k^2 - \alpha^2}}{\sqrt{k^2 - \alpha^2}} L_2(\alpha) + \frac{1}{\pi i} \frac{k}{\alpha + k \cos \phi}$$

gdzie funkcje $U_1(\alpha)$, $U_2(\alpha)$ są związane z funkcjami $\tilde{U}_1(\alpha)$, $\tilde{U}_2(\alpha)$ w następujący sposób

$$/34/ \quad \tilde{U}_1(\alpha) = \frac{1}{2k} (U_1(\alpha) + U_2(\alpha)) \quad , \quad \tilde{U}_2(\alpha) = \frac{1}{2k} (U_2(\alpha) - U_1(\alpha))$$

Funkcje $U_1(\alpha)$, $U_2(\alpha)$ są analityczne w obszarze leżącym powyżej Q i na tej linii. Obszar ten będziemy oznaczali przez $\Omega + Q$. Funkcje $L_1(\alpha)$, $L_2(\alpha)$ są analityczne w obszarze leżącym poniżej Q i na tej linii. Obszar ten będziemy oznaczali przez $\mathfrak{S} + Q$. Ponadto wszystkie te funkcje dążą do zera dla $|\alpha| \rightarrow \infty$, $L_1(\alpha)$, $L_2(\alpha)$ w obszarze $\mathfrak{S} + Q$, $U_1(\alpha)$, $U_2(\alpha)$ w $\Omega + Q$.

4. Rozwiązanie równań Wienera-Hopfa.

Przepiszemy równania /32/, /33/ w postaci

$$/35/ \quad U_1(\alpha) = N(\alpha) L_1(\alpha) + D_1(\alpha)$$

$$/36/ \quad U_2(\alpha) = K(\alpha) L_2(\alpha) + D_2(\alpha)$$

gdzie

$$/37/ \quad N(\alpha) = k + \eta \sqrt{k^2 - \alpha^2}$$

$$/38/ \quad K(\alpha) = \frac{k + \eta \sqrt{k^2 - \alpha^2}}{\sqrt{k^2 - \alpha^2}}$$

$$/39/ \quad D_1(\alpha) = -\frac{1}{\pi i} \frac{\eta k \sin \phi}{\alpha - \alpha_0}$$

$$/40/ \quad D_2(\alpha) = \frac{1}{\pi i} \frac{k}{\alpha - \alpha_0}$$

$$/41/ \quad \alpha_0 = -k \cos \phi$$

Dla rozwiązania tych równań należy sfaktoryzować funkcje $N(\alpha)$, $K(\alpha)$, co zostanie przedstawione w rozdziale 5. Przyjmijmy, że mamy już reprezentację

$$/42/ \quad K(\alpha) = \frac{K_-(\alpha)}{K_+(\alpha)}$$

gdzie funkcja $K_-(\alpha)$ jest analityczna w obszarze $\bar{\Omega} + Q$, funkcja $K_+(\alpha)$ jest analityczna w obszarze $\Omega + Q$ i spełnione są warunki

$$/43/ \quad K_-(\alpha) = O(1) \quad \text{dla } |\alpha| \rightarrow \infty, \quad K_+(\alpha) = O(1) \quad \text{dla } |\alpha| \rightarrow \infty$$

Przejdźmy do rozwiązania równania /36/. Równanie /35/ rozwiązuje się w identyczny sposób. Korzystając z /42/ przepisujemy /36/ w następujący sposób

$$/44/ \quad U_2(\alpha) K_+(\alpha) = L_2(\alpha) K_-(\alpha) + D_2(\alpha) K_+(\alpha)$$

Następnie składnik $D_2(\alpha) K_+(\alpha)$ rozkładamy na sumę funkcji analitycznych odpowiednio w $\Omega + Q$ i $\mathfrak{U} + Q$

Mamy

$$\begin{aligned} /45/ \quad D_2(\alpha) K_+(\alpha) &= \frac{k}{\pi i} \frac{K_+(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} = \frac{k}{\pi i} \frac{K_+(\alpha) - K_+(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} + \frac{k}{\pi i} \frac{K_+(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} = \\ &= M_{2+}(\alpha) + M_{2-}(\alpha) \end{aligned}$$

gdzie

$$/46/ \quad M_{2+}(\alpha) = \frac{k}{\pi i} \frac{K_+(\alpha) - K_+(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0}$$

$$M_{2-}(\alpha) = \frac{k}{\pi i} \frac{K_+(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0}$$

Równanie /44/ przepisujemy w postaci

$$/47/ \quad U_2(\alpha) K_+(\alpha) - M_{2+}(\alpha) = L_2(\alpha) K_-(\alpha) + M_{2-}(\alpha)$$

Równość /47/ jest spełniona na linii Q . Lewa strona równości jest funkcją analityczną w $\Omega + Q$, a prawa jest analityczną w $\mathfrak{U} + Q$. Z twierdzenia o przedłużaniu analitycznym funkcji wnioskujemy, że istnieje funkcja całkowita $\beta_2(\alpha)$ pokrywająca się z lewą i prawą stroną równości /47/. Zatem mamy

$$/48/ \quad U_2(\alpha) K_+(\alpha) - M_{2+}(\alpha) = L_2(\alpha) K_-(\alpha) + M_{2-}(\alpha) = P_2(\alpha)$$

Skąd

$$/49/ \quad L_2(\alpha) = -\frac{M_{2+}(\alpha)}{K_+(\alpha)} + \frac{P_2(\alpha)}{K_+(\alpha)} = -\frac{k}{\pi i} \frac{K_+(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} \cdot \frac{1}{K_+(\alpha)} + \frac{P_2(\alpha)}{K_+(\alpha)}$$

$$/50/ \quad U_2(\alpha) = \frac{M_{2+}(\alpha)}{K_+(\alpha)} + \frac{P_2(\alpha)}{K_+(\alpha)} = \frac{k}{\pi i} \frac{K_+(\alpha) - K_+(\alpha_0)}{K_+(\alpha)(\alpha - \alpha_0)} + \frac{P_2(\alpha)}{K_+(\alpha)}$$

Wykorzystując faktoryzację funkcji $K_+(\alpha)$, możemy funkcję $N(\alpha)$ wyrażoną wzorem /37/ przedstawić za pomocą tego rozkładu

$N(\alpha) = \frac{K_-(\alpha) \sqrt{k-\alpha}}{K_+(\alpha) \sqrt{k+\alpha}}$. Wtedy rozwiązanie równania /32/ przyjmie postać

$$/51/ \quad L_1(\alpha) = \frac{\eta k \sin \phi}{\pi i} \frac{K_+(\alpha_0)}{\sqrt{k+\alpha_0}(\alpha-\alpha_0)} \cdot \frac{1}{\sqrt{k-\alpha} K_-(\alpha)} + \frac{P_1(\alpha)}{\sqrt{k-\alpha} K_-(\alpha)}$$

$$/52/ \quad U_1(\alpha) = \frac{-\eta k \sin \phi}{\pi i} \cdot \frac{\sqrt{k+\alpha}}{K_+(\alpha)} \left[\frac{K_+(\alpha)}{\sqrt{k+\alpha}(\alpha-\alpha_0)} - \frac{K_+(\alpha_0)}{\sqrt{k+\alpha_0}(\alpha-\alpha_0)} \right] + \frac{P_1(\alpha) \sqrt{k+\alpha}}{K_+(\alpha)}$$

gdzie $P_1(\alpha)$ jest dowolną funkcją całkowitą.

Dla wyznaczenia funkcji $P_1(\alpha)$, $P_2(\alpha)$ korzystamy z założenia całkowalności prądów $I_1(x)$ i $I_2(x)$, których transformacjami są odpowiednio funkcje $L_1(\alpha)$ i $L_2(\alpha)$, i twierdzeń granicznych Abela o związku między zachowaniem się funkcji w zerze i jej transformaty w nieskończoności [4]. Z zachowania asymptotycz-

nego funkcji występujących w prawej stronie równości /49/ i /51/ wobec warunku /43/ widać, że dla zapewnienia całkowalności $I_1(x)$, $I_2(x)$ w zerze, należy przyjąć

$$/53/ \quad P_1(\alpha) \equiv 0, \quad P_2(\alpha) \equiv 0.$$

Ostatecznie mamy

$$/54/ \quad L_1(\alpha) = \frac{\eta k \sin \phi}{\pi i} \frac{K_+(\alpha_0)}{\sqrt{k+\alpha_0} (\alpha-\alpha_0)} \frac{1}{\sqrt{k-\alpha} K_-(\alpha)}$$

$$/55/ \quad L_2(\alpha) = -\frac{k}{\pi i} \frac{K_+(\alpha_0)}{\alpha-\alpha_0} \frac{1}{K_-(\alpha)}$$

Ze wzorów /54 - 55/ i oszacowania /43/ wynika

$$/56/ \quad L_1(\alpha) \sim \alpha^{-3/2} \quad \text{dla } |\alpha| \rightarrow \infty$$

$$/57/ \quad L_2(\alpha) \sim \alpha^{-1} \quad \text{dla } |\alpha| \rightarrow \infty$$

gdzie symbol $F(\alpha) \sim G(\alpha)$ użyty jest tutaj w następującym sensie.

Mówimy, że $F(\alpha) \sim G(\alpha)$ dla $\alpha = \alpha_0$, jeżeli

$$F(\alpha) = CG(\alpha) + H(\alpha) \quad \text{gdzie } \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \frac{H(\alpha)}{G(\alpha)} = 0, \quad C \neq 0$$

Z zachowania transformat /56/, /57/ wynika następujące zachowanie prądu magnetycznego i elektrycznego w zerze

$$/58/ \quad I_1(x) \sim \sqrt{x'} \quad \text{dla } x \rightarrow +0$$

$$/59/ \quad I_2(x) = C \quad \text{dla } x \rightarrow +0$$

gdzie

$$/60/ \quad C = \lim_{k' \rightarrow \infty} \alpha L_2(\alpha) = -\frac{k}{\pi i} \frac{K_+(\infty)}{K_-(\infty)}$$

Wyniki takie znajdują się w pracy [2] Seniora, str. 50.

Wstawiając znalezione funkcje /54/, /55/ do wzoru /31/ otrzymujemy rozwiązanie w postaci

$$/61/ \quad u_s(x, y) = -\frac{1}{2\pi i} \int_Q \frac{k K_+(-k \cos \phi)}{\alpha + k \cos \phi} \frac{1}{K_-(\alpha)} \left[1 - \frac{y}{|y|} \eta \cos \frac{\phi}{2} \sqrt{2\left(1 + \frac{\alpha}{k}\right)} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{k^2 - \alpha^2}} e^{i\alpha x} e^{i\sqrt{k^2 - \alpha^2}|y|} d\alpha$$

gdzie dla k rzeczywistego mamy lokalnie w otoczeniu $\alpha = -k$

$$/62/ \quad \operatorname{Im} \sqrt{2\left(1 + \frac{\alpha}{k}\right)} > 0 \quad \text{dla } \operatorname{Im} \sqrt{k^2 - \alpha^2} > 0$$

$$\operatorname{Im} \sqrt{2\left(1 + \frac{\alpha}{k}\right)} < 0 \quad \text{dla } \operatorname{Im} \sqrt{k^2 - \alpha^2} < 0$$

5. Faktoryzacja.

Oznaczmy pewne otoczenie linii Q przez $\mathcal{E}(Q) = [\operatorname{Im} \alpha_Q - \tau, \operatorname{Im} \alpha_Q + \tau]$, gdzie $\alpha_Q \in Q$, $\tau > 0$ i dokonajmy faktoryzacji funkcji $N(\alpha)$, $K(\alpha)$, danych wzorami /37/, /38/, w tym otoczeniu. Faktoryzacja polega na przedstawieniu tych funkcji w postaci iloczynów

$$/63/ \quad N(\alpha) = N_-(\alpha) N_+(\alpha)$$

$$/64/ \quad K(\alpha) = K_-(\alpha) \tilde{K}_+(\alpha)$$

gdzie funkcje $N_-(\alpha)$, $K_-(\alpha)$ są analityczne w obszarze $\operatorname{Im} \alpha < \operatorname{Im} \alpha_Q + \tau$, natomiast funkcje $N_+(\alpha)$, $\tilde{K}_+(\alpha)$ są analityczne w obszarze $\operatorname{Im} \alpha > \operatorname{Im} \alpha_Q - \tau$. Faktoryzacja taka jest możliwa, ponieważ dla każdego ustalonego $\eta \neq 0$ funkcja $\frac{1}{\eta} K(\alpha)$ spełnia założenia lematu o faktoryzacji. Dla k rzeczywistego wspólna wstęga analityczności funkcji sfaktoryzowanych redukuje się do linii Q .

Przyjmijemy, zgodnie z oznaczeniami Sëniora reprezentację /42/, gdzie

$$K_+(\alpha) = \frac{1}{\tilde{K}_+(\alpha)}$$

wtedy z /37/, /38/, /63/ i /64/ mamy

$$/65/ \quad K_-(\alpha) = \frac{N_-(\alpha)}{\sqrt{k-\alpha}}$$

$$/66/ \quad K_+(\alpha) = \frac{\sqrt{k+\alpha}}{N_+(\alpha)}$$

gdzie gałęzie $\sqrt{k+\alpha}$ i $\sqrt{k-\alpha}$ wybieramy jednocześnie tak, żeby zachodziła równość $\sqrt{k^2-\alpha^2} = \sqrt{k-\alpha} \sqrt{k+\alpha}$. Zajmiemy się faktory-

zacięciem funkcji $N(\alpha)$, postępując metodą podaną przez Nobla [4], str 91. Obliczając pochodną logarytmiczną obu stron równości /67/, /37/, mamy

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} \ln N(\alpha) &= \frac{d}{d\alpha} \ln N_-(\alpha) + \frac{d}{d\alpha} \ln N_+(\alpha) = \frac{-\alpha \eta (k - \eta \sqrt{k^2 - \alpha^2})}{\sqrt{k^2 - \alpha^2} [k^2 - \eta^2 (k^2 - \alpha^2)]} = \\ /67/ & \\ &= \frac{-\alpha \eta (k - \eta \sqrt{k^2 - \alpha^2})}{\eta^2 \sqrt{k^2 - \alpha^2} (\alpha + d)(\alpha - d)} = -\frac{\alpha k}{\eta \sqrt{k^2 - \alpha^2} (\alpha + d)(\alpha - d)} + \frac{\alpha}{(\alpha + d)(\alpha - d)} = \\ &= \frac{1}{2(\alpha + d)} + \frac{1}{2(\alpha - d)} - \frac{k}{2\eta} \left(\frac{1}{\alpha + d} + \frac{1}{\alpha - d} \right) \frac{1}{\sqrt{k^2 - \alpha^2}} \end{aligned}$$

gdzie

$$/68/ \quad d = i \frac{k}{\eta} \sqrt{1 - \eta^2}$$

Pozostaje teraz przedstawić funkcję

$$/69/ \quad \frac{1}{\sqrt{k^2 - \alpha^2}}$$

w postaci sumy

$$/70/ \quad \frac{1}{\sqrt{k^2 - \alpha^2}} = f_+(\alpha) + f_-(\alpha)$$

gdzie dla k rzeczywistego funkcja $f_+(\alpha)$ jest analityczna w obszarze $\Omega + Q$, a funkcja $f_-(\alpha)$ jest analityczna w obszarze $\Omega + Q$.

W tym celu dokonuje się zamiany zmiennych takiej, która punkty rozgałęzienia $\alpha = \pm k$ funkcji /69/ przeprowadza w bieguny I rzędu.

Wprowadzamy

$$/71/ \quad \alpha = k \cos \beta \text{ lub odwrotnie } \beta = \arccos \frac{\alpha}{k}$$

Wstawiając /71/ do /69/ otrzymujemy

$$/72/ \quad \frac{1}{\sqrt{k^2 - \alpha^2}} = \frac{1}{k \sin \beta}$$

Przy pomocy transformacji /71/ powierzchnia Riemanna α odwzorowuje się w całą płaszczyznę β z której, dla wzajemnej jednoznaczności odwzorowania, należy wybrać obszar, stanowiący dla k rzeczywistego pas o szerokości $\text{Re } \beta = 2\pi$. Taki pas przedstawiono na rys. 6 e i 8 e. Punkt rozgałęzienia $\alpha = +k$ przechodzi w punkt $\beta = 0$, punkt $\alpha = -k$ przechodzi w $\beta = \pi$, przy czym $\beta = 0$, $\beta = \pi$ są biegunami I rzędu funkcji $1/k \sin \beta$. Funkcję tą można łatwo przedstawić w postaci sumy dwóch funkcji, z których jedna jest regularna w zerze /likwidujemy biegun $\beta = 0$ /, a druga jest regularna w $\beta = \pi$ /likwidujemy biegun $\beta = \pi$ /.

Mamy

$$/73/ \quad \frac{1}{k \sin \beta} = \frac{\beta}{\pi k \sin \beta} + \frac{\pi - \beta}{\pi k \sin \beta}$$

Wracając do zmiennej α dostajemy reprezentację /70/ gdzie

$$/74/ \quad f_{\pm}(\alpha) = \frac{\arccos(\pm \frac{\alpha}{k})}{\pi \sqrt{k^2 - \alpha^2}}$$

Jak łatwo sprawdzić punkt $\alpha = -k$ jest punktem regularnym /pozornie osobliwym/ funkcji $f_-(\alpha)$, mającej dwa punkty rozgałęzienia $\alpha = +k$, $\alpha = \infty$. Punkt $\alpha = k$ natomiast jest punktem regularnym funkcji $f_+(\alpha)$, mającej dwa punkty rozgałęzienia $\alpha = -k$, $\alpha = \infty$. Tak więc rozkład /70/ jest reprezentacją taką, że $f_+(\alpha)$ jest analityczna w obszarze $\text{Im}\alpha > \text{Im}\alpha_Q - \tilde{\epsilon}$, $f_-(\alpha)$ jest analityczna w obszarze $\text{Im}\alpha < \text{Im}\alpha_Q + \tilde{\epsilon}$ i istnieje wspólna wstęga analityczności tych funkcji w otoczeniu każdej linii Q położonej na powierzchni Riemanna α tak, żeby punkt $-k$ był poniżej, a punkt $+k$ powyżej linii. Dla k rzeczywistego wspólna wstęga analityczności redukuje się do linii Q .

Korzystając z reprezentacji /70/, ostatni składnik sumy /67/ przedstawimy w postaci

$$\begin{aligned} & -\frac{k}{2\eta} \left(\frac{1}{d+d} + \frac{1}{d-d} \right) \frac{1}{\sqrt{k^2-d^2}} = -\frac{k}{2\eta} \left(\frac{1}{d+d} + \frac{1}{d-d} \right) \cdot \\ /75/ & \cdot (f_+(\alpha) + f_-(\alpha)) = -\frac{k}{2\eta} (F_+(\alpha) + F_-(\alpha)) \end{aligned}$$

gdzie /przy założeniu, że d leży w górnej półpłaszczyźnie/

$$/76/ \quad F_+(\alpha) = \frac{f_+(\alpha) + f_+(d)}{d+d} + \frac{f_+(\alpha) - f_+(d)}{d-d}$$

$$/77/ \quad F_-(\alpha) = \frac{f_-(\alpha) + f_-(d)}{d-d} + \frac{f_-(\alpha) - f_-(d)}{d+d}$$

Ostatecznie z /67/ i /75/ mamy

$$/78/ \quad \frac{d}{d\alpha} \ln N_-(\alpha) = \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha-d} - \frac{k}{2\eta} \left[\frac{f_-(\alpha) + f_+(d)}{\alpha-d} + \frac{f_-(\alpha) - f_+(d)}{\alpha+d} \right]$$

$$/79/ \quad \frac{d}{d\alpha} \ln N_+(\alpha) = \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha+d} - \frac{k}{2\eta} \left[\frac{f_+(\alpha) + f_+(d)}{\alpha+d} + \frac{f_+(\alpha) - f_+(d)}{\alpha-d} \right]$$

Całkując obie strony wyrażenia /78/ mamy

$$/80/ \quad \ln N_-(\alpha) = \ln(\alpha-\alpha)^{\frac{1}{2}} + \ln \left(\frac{-\alpha+d}{\alpha+d} \right)^{-\frac{k}{2\eta} f_+(d)} - \frac{k}{\eta} \int_0^{\alpha} \frac{\xi f_-(\xi)}{\xi^2 - d^2} d\xi$$

Skąd

$$/81/ \quad N_-(\alpha) = (\alpha-\alpha)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{-\alpha+d}{\alpha+d} \right)^{-\frac{k}{2\eta} f_+(d)} \exp \left[-\frac{k}{\eta} \int_0^{\alpha} \frac{\xi f_-(\xi)}{\xi^2 - d^2} d\xi \right]$$

Uwzględniając oznaczenia /68/ i /74/ oraz związek /65/ między funkcjami $N_-(\alpha)$ i $K_-(\alpha)$ otrzymamy funkcję $K_-(\alpha)$ w postaci

$$K_-(\alpha) = \left(\frac{\alpha\eta - ik\sqrt{1-\eta^2}}{\eta(\alpha-k)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{-\alpha\eta + ik\sqrt{1-\eta^2}}{\alpha\eta + ik\sqrt{1-\eta^2}} \right)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2\pi} \arccos \frac{i\sqrt{1-\eta^2}}{\eta}$$

/82/

$$\cdot \exp \left[-\frac{k}{\eta\pi} \int_0^{\alpha} \frac{\xi \arccos(-\frac{\xi}{k}) d\xi}{\sqrt{k^2 - \xi^2} (\xi^2 - d^2)} \right]$$

Podobnie z zależności /79/ i /66/ otrzymamy funkcję $K_+(\alpha)$ w postaci

$$K_+(\alpha) = \left(\frac{\eta(k+\alpha)}{\alpha\eta + ik\sqrt{1-\eta^2}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{-\alpha\eta + ik\sqrt{1-\eta^2}}{\alpha\eta + ik\sqrt{1-\eta^2}} \right)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2\pi} \arccos \frac{i\sqrt{1-\eta^2}}{\eta}$$

/83/

$$\cdot \exp \left[\frac{k}{\eta\pi} \int_0^{\alpha} \frac{\xi \arccos(\frac{\xi}{k}) d\xi}{\sqrt{k^2 - \xi^2} (\xi^2 - d^2)} \right]$$

gdzie znak "+" we wzorach /82/ i /83/ dotyczy płata, na którym leżą zera funkcji $N(\alpha)$, znak "-" dotyczy płata przeciwnego.

Funkcje te spełniają relacje

$$/84/ \quad K_-(\alpha) K_+(-\alpha) = 1$$

oraz są ograniczone w nieskończoności /42/.

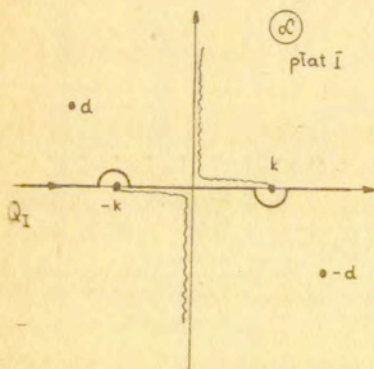
Można pokazać, że wzory /82/, /83/ sprowadzają się, z dokładnością do stałego mnożnika, do wzorów /20/, /21/ podanych przez Seniora w [1].

W szczególności całkę występującą we wzorach /82/, /83/ można sprowadzić do całki występującej we wzorach Seniora /patrz Nobel [4], str. 92/.

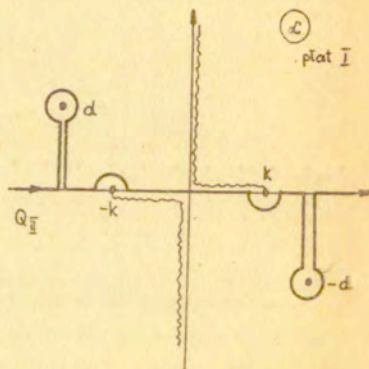
6. Zera funkcji faktoryzowanej. Dwa sposoby faktoryzacji.

Zera funkcji $N(\alpha)$ lub $K(\alpha)$ znajdujemy rozwiązując równanie $k + \eta \sqrt{k^2 - \alpha^2} = 0$. Otrzymujemy $\alpha = \frac{ik}{\eta} \sqrt{1 - \eta^2}$

Ponieważ $\sqrt{1 - \eta^2}$ jest funkcją dwuwartościową, więc faktoryzowana funkcja $\Lambda(\alpha) = k + \eta \sqrt{k^2 - \alpha^2}$ określona na dwupłatewej powierzchni Riemanna α ma dla każdej wartości η dwa zera określone wzorem /68/. Jedno z tych zer leży w górnej półpłaszczyźnie, $\text{Im } \alpha > 0$, drugie w dolnej półpłaszczyźnie, $\text{Im } \alpha < 0$, na tym samym płacie. Po sfaktoryzowaniu jedno zero jest zerem funkcji $N_-(\alpha)$, drugie jest zerem funkcji $N_+(\alpha)$. Fakt, które zero funkcji $N(\alpha)$ jest zerem funkcji $N_-(\alpha)$, a które zerem funkcji $N_+(\alpha)$ zależy od położenia linii Q /w otoczeniu której dokonujemy faktoryzacji/ względem obu zer, gdyż zero leżące nad linią Q jest zerem funkcji $N_-(\alpha)$, a zero leżące pod linią Q jest zerem funkcji $N_+(\alpha)$. Dla każdego η można na dwa zasadniczo różne sposoby przeprowadzić linię Q pomiędzy punktami /68/ oznaczonymi $+d$, $-d$, co zostało zilustrowane na Rys. Rys. 4. 5. Rysunki wykonano dla k rzeczywistego. Płaszczyzna przedstawia płat I Riemanna. Cięcia przebiegają wzdłuż krzywej o równaniu $\text{Im} \sqrt{k^2 - \alpha^2} = 0$.



Rys. 4. Położenie linii Q_I w otoczeniu której dokonujemy faktoryzacji, względem zer i punktów rozgałęzienia funkcji faktoryzowanej.



Rys. 5. Położenie linii Q_{II} w otoczeniu której dokonujemy faktoryzacji, względem zer i punktów rozgałęzienia funkcji faktoryzowanej.

Wobec tego można dokonać faktoryzacji funkcji $N(\alpha)$ na dwa sposoby.

Przy faktoryzacji w otoczeniu linii Q_I funkcja $N^{\bar{I}}(\alpha)$ jest analityczna w obszarze $\mathcal{U}_I + Q_I$ i ma zero leżące w górnej półpłaszczyźnie, $\text{Im } \alpha > 0$ lub na dodatniej półosi rzeczywistej, funkcja $N^{\underline{I}}(\alpha)$ jest analityczna w obszarze $\mathcal{U}_I + Q_I$ i ma zero w dolnej półpłaszczyźnie, $\text{Im } \alpha < 0$ lub na ujemnej półosi rzeczywistej.

Przy faktoryzacji w otoczeniu linii Q_{II} funkcja $N^{\bar{II}}(\alpha)$ jest analityczna w obszarze $\mathcal{U}_{II} + Q_{II}$ i ma zero w dolnej półpłaszczyźnie, $\text{Im } \alpha < 0$ lub na ujemnej półosi rzeczywistej, funkcja $N^{\underline{II}}(\alpha)$ jest analityczna w obszarze $\mathcal{U}_{II} + Q_{II}$ i ma zero w górnej półpłaszczyźnie, $\text{Im } \alpha > 0$ lub na dodatniej półosi rzeczywistej. Włączenie zer leżących na półosi rzeczywistej dodatniej do funkcji $N^{\bar{I}}(\alpha)$, a zer leżących na półosi ujemnej do funkcji $N^{\underline{I}}(\alpha)$ /a nie odwrotnie/ jest kwestią umowną.

Faktoryzacja w rozdziale 5 została przeprowadzona w otoczeniu linii Q_I . W pochodnej logarytmicznej funkcji $N_-(\alpha)$ zlikwidowano bowiem biegun w punkcie $\alpha = -d$, a zestawiono w punkcie $\alpha = d$ /i na odwrót w pochodnej logarytmicznej funkcji $N_+(\alpha)$ /. Mamy zatem ze wzoru /78/

$$/85a/ \operatorname{res}_{\alpha=d} \frac{d}{d\alpha} \ln N_-(\alpha) = \frac{1}{2} - \frac{k}{2\eta} \left[f_-(d) + f_+(d) \right] = \begin{cases} 1 & \text{dla } \sqrt{\frac{k^2}{\eta^2}} = -\frac{k}{\eta} \\ 0 & \text{dla } \sqrt{\frac{k^2}{\eta^2}} = \frac{k}{\eta} \end{cases}$$

$$/85b/ \operatorname{res}_{\alpha=-d} \frac{d}{d\alpha} \ln N_-(\alpha) = -\frac{k}{2\eta} \left[f_-(-d) - f_+(d) \right] = 0 \quad \text{na obu płatach}$$

Z czego wynika, że $N_-(\alpha)$ ma zero w punkcie $\alpha = d$ na jednym z płatów Riemanna i nie ma zera /ani bieguna/ w punkcie $\alpha = -d$. Podobne rachunki pokazują, że funkcja $N_+(\alpha)$ ma zero w punkcie $\alpha = -d$ na jednym z płatów i nie ma zera /ani bieguna/ w punkcie $\alpha = d$.

W rachunkach /67/ - /80/ można postąpić odwrotnie, zlikwidować biegun $\frac{d}{d\alpha} \ln N_-(\alpha)$ w punkcie $\alpha = d$, a zostawić biegun w punkcie $\alpha = -d$ i na odwrót w funkcji $\frac{d}{d\alpha} \ln N_+(\alpha)$. Otrzyma się wtedy wzory dla $N_-^{\bar{I}}(\alpha)$ i $N_+^{\bar{II}}(\alpha)$.

Okazuje się, że można je otrzymać po prostu przez zastąpienie d przez $-d$ odpowiednio w wyrażeniach dla funkcji $N_-^{\bar{I}}(\alpha)$ /wzór /81// i dla funkcji $N_+^{\bar{II}}(\alpha)$.

Związek między funkcjami $N_-^{\bar{I}}$ i $N_-^{\bar{II}}$ ma postać

$$\begin{aligned} /86a/ \quad \frac{N_-^{\bar{II}}(\alpha)}{N_-^{\bar{I}}(\alpha)} &= \left(\frac{\alpha+d}{\alpha-d} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\alpha+d}{\alpha-d} \right)^{-\frac{k}{2\eta} [f_+(d)+f_-(d)]} = \\ &= \begin{cases} 1 & \text{dla } \sqrt{\frac{k^2}{\eta^2}} = \frac{k}{\eta} \\ \frac{\alpha+d}{\alpha-d} & \text{dla } \sqrt{\frac{k^2}{\eta^2}} = -\frac{k}{\eta} \end{cases} \end{aligned}$$

i odpowiednio

$$/86b/ \quad \frac{N_+^{\bar{II}}(\alpha)}{N_+^{\bar{I}}(\alpha)} = \begin{cases} 1 & \text{dla } \sqrt{\frac{k^2}{\eta^2}} = \frac{k}{\eta} \\ \frac{\alpha-d}{\alpha+d} & \text{dla } \sqrt{\frac{k^2}{\eta^2}} = -\frac{k}{\eta} \end{cases}$$

Stąd i z /85/ widać, że faktoryzacja I różni się od faktoryzacji II tylko na tym płacie, na którym leżą zera funkcji faktoryzowanej. Dyskusja położenia tych zer w zależności od parametru η zostanie przeprowadzona w rozdziale 9.

Z uwagi na to, że d wyraża się wzorem /68/ zmiana znaku liczby d we wzorach wyrażających funkcje $N_-(\alpha)$, $N_+(\alpha)$ polega na zmianie znaku $\sqrt{1-\eta^2}$.

Również funkcje $K_-^{\bar{I},\bar{II}}(\alpha)$ i $K_+^{\bar{I},\bar{II}}(\alpha)$ wyrażają się odpowiednio tymi samymi wzorami /82/ i /83/, z tym, że inny jest wybór gałęzi $\sqrt{1-\eta^2}$ dla funkcji oznaczonych cyfrą I i II.

7. Wybór gałęzi $\sqrt{1-\eta^2}$. Dwa rozwiązania.

Zero funkcji $N_-(\alpha)$ i $K_-(\alpha)$ jest liczbą $\alpha_d = \frac{ik}{\eta} \sqrt{1-\eta^2}$.

Dla faktoryzacji I, zero to leży w górnej półpłaszczyźnie lub na dodatniej półosi rzeczywistej, więc spełniona jest nierówność

$$/87/ \quad 0 \leq \arg \frac{ik}{\eta} \sqrt{1-\eta^2} < \pi$$

Dla faktoryzacji II zero leży w dolnej półpłaszczyźnie lub na ujemnej półosi rzeczywistej, więc spełniona jest nierówność

$$/88/ \quad 0 < \arg \frac{ik}{\eta} \sqrt{1-\eta^2} \leq 2\pi$$

Stąd wynika następujący wybór gałęzi pierwiastka

$$/89/ \quad \arg \eta - \arg k - \frac{\pi}{2} \leq \arg \sqrt{1-\eta^2} < \arg \eta - \arg k + \frac{\pi}{2} \text{ dla faktoryzacji I}$$

$$/90/ \quad \arg \eta - \arg k + \frac{\pi}{2} < \arg \sqrt{1-\eta^2} \leq \arg \eta - \arg k + \frac{3}{2}\pi \text{ dla faktoryzacji II}$$

Dla k rzeczywistego

$$/91/ \quad \arg \eta - \frac{\pi}{2} \leq \arg \sqrt{1-\eta^2} < \arg \eta + \frac{\pi}{2} \quad \text{dla faktoryzacji I}$$

$$/92/ \quad \arg \eta + \frac{\pi}{2} < \arg \sqrt{1-\eta^2} \leq \arg \eta + \frac{3}{2}\pi \quad \text{dla faktoryzacji II}$$

W konkluzji, dla pewnych wartości η mamy różne rozwiązania spełniające równanie, warunek brzegowy i warunek odpowiedniej regularności:

$$u_5^I(x, y) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{Q_I} \frac{k K_+^I(-k \cos \phi)}{\alpha + k \cos \phi} \frac{1}{K_-^I(\alpha)} \left[1 - \frac{y}{|y|} \eta \cos \frac{\phi}{2} \sqrt{2 \left(1 + \frac{\alpha}{k}\right)} \right] d\alpha$$

/93/

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{k^2 - \alpha^2}} e^{i\alpha x} e^{i\sqrt{k^2 - \alpha^2}|y|} d\alpha$$

$$u_5^{II}(x, y) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{Q_{II}} \frac{k K_+^{II}(-k \cos \phi)}{\alpha + k \cos \phi} \frac{1}{K_-^{II}(\alpha)} \left[1 - \frac{y}{|y|} \eta \cos \frac{\phi}{2} \sqrt{2 \left(1 + \frac{\alpha}{k}\right)} \right] d\alpha$$

/94/

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{k^2 - \alpha^2}} e^{i\alpha x} e^{i\sqrt{k^2 - \alpha^2}|y|} d\alpha$$

gdzie: $\text{Im} \sqrt{2 \left(1 + \frac{\alpha}{k}\right)} > 0$ dla $\text{Im} \sqrt{k^2 - \alpha^2} > 0$,

$\text{Im} \sqrt{2 \left(1 + \frac{\alpha}{k}\right)} < 0$ dla $\text{Im} \sqrt{k^2 - \alpha^2} < 0$ w otoczeniu $\alpha = -k$,

funkcje $K_-^{\pm, \bar{u}}(\alpha)$, $K_+^{\pm, \bar{u}}(\alpha)$

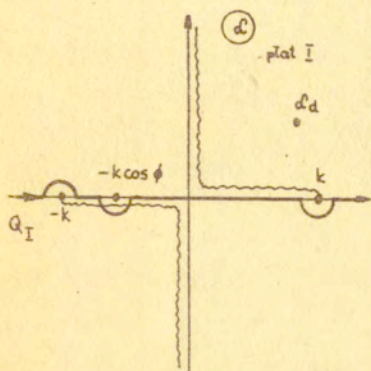
dane są odpowiednio wzorami /82/, /83/, w których dla $K_-^I(\alpha), K_+^I(\alpha)$ pierwiastek $\sqrt{1 - \eta^2}$ jest wybierany według reguły /89/, /91/, natomiast dla $K_-^{II}(\alpha), K_+^{II}(\alpha)$ według reguły /90/, /92/.

W formułach /93/, /94/ zera mianownika są biegunami funkcji podcałkowej. Wyrażenie w nawiasie kwadratowym przyjmuje wartość zero w punkcie α_d tylko dla tych wartości parametrów η i ϕ , dla których jest spełniona zależność

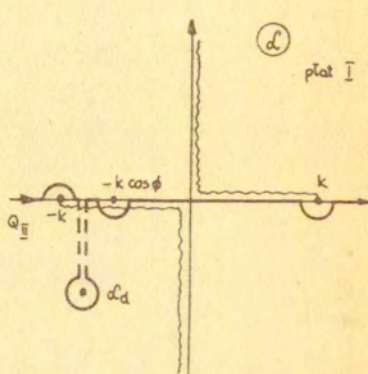
$$/95/ \quad \sin \phi = \pm \frac{1}{\eta}$$

Wobec tego biegun α_d funkcji podcałkowej, którego położenie zależy od η , w formule /93/ może leżeć w górnej półpłaszczyźnie lub na dodatniej półosi rzeczywistej, a w formule /94/ może leżeć w dolnej półpłaszczyźnie lub na ujemnej półosi rzeczywistej na I lub II płacie.

Kontur całkowania Q_I^- leży na płacie I wzdłuż osi $\text{Im } z = 0$ omijając punkty osobliwe, o ile leżą na osi, w sposób następujący: punkt rozgałęzienia $z = -k$ od góry, a pozostałe punkty, w tym punkt rozgałęzienia $z = k$, biegun $z = -k \cos \phi$ i biegun $z = z_d$ od dołu, Rys. 4a.



Rys.4a. Położenie konturu całkowania Q_I^- względem punktów osobliwych funkcji podcałkowej.



Rys.5a. Położenie konturu całkowania Q_{II}^- względem punktów osobliwych funkcji podcałkowej. Punkt z_d leży tu na płacie II.

Kontur całkowania Q_{II}^- też przebiega wzdłuż osi rzeczywistej i może w istotny sposób różnić się od Q_I^- tylko w otoczeniu punktu $z = z_d$. Ideę jego położenia w otoczeniu zer funkcji sfaktoryzowanej ilustruje Rys.5., ale ponieważ po sfaktoryzowaniu funkcja podcałkowa nie ma bieguna w górnej półpłaszczyźnie, to równoważny mu kontur ma wypustkę tylko w dół obejmującą biegun $z_d = -d$. Rozróżniamy następujące przypadki położenia konturu Q_{II}^- w zależności od położenia z_d . Zmiany w stosunku do konturu Q_I^- pokazanego na Rys.5 wynikają z ustalenia położenia końców Q_{II}^- , analizy położenia z_d w zależności od η /Rozdz.9, Rys. Rys.6 i 8/1 twierdzenia Cauchy'ego o zamianie konturu całkowania.

1. Jeżeli α_d leży na płacie I, to kontur Q_{II} leży też na płacie I omijając α_d od dołu, o ile α_d należy do jednego z dwóch obszarów: a/ $Re \alpha_d < -k$, $Im \alpha_d < 0$, b/ $Re \alpha_d > 0$, $Im \alpha_d < 0$. Wtedy $u_S^{\bar{II}} \neq u_S^I$. Jeżeli α_d leży w obszarze $-k < Re \alpha_d < 0$, $Im \alpha_d < 0$, to kontur Q_{II} pokrywa się z konturem Q_I . Wtedy zachodzi równość $u_S^{\bar{II}} = u_S^I$.

2. Jeżeli α_d leży na płacie II, w jednym z dwóch obszarów: a/ $Re \alpha_d < -k$, $Im \alpha_d < 0$ b/ $Re \alpha_d > 0$, $Im \alpha_d < 0$, to kontur Q_{II} leży na płacie I i pokrywa się z konturem Q_I . Wtedy zachodzi równość $u_S^{\bar{II}} = u_S^I$. Jeżeli α_d leży na płacie II w obszarze $-k < Re \alpha_d < 0$, $Im \alpha_d < 0$, to kontur Q_{II} leżąc końcami na płacie I wchodzi przez cięcie na płat II, omijając α_d od dołu, jak pokazano na Rys. 5a. Wtedy $u_S^{\bar{II}} \neq u_S^I$.

Na skutek tego, że bieguny funkcji podcałkowych /93/ i /94/ różnią się znakiem dla ustalonego η , rozwiązania $u_S^{\bar{I}}(x,y), u_S^{\bar{II}}(x,y)$ inaczej zachowują się dla $\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \infty$, co pozwala wybrać jedno z nich przy dodatkowym warunku narzuconym na rozwiązanie w nieskończoności /rozdział 1/.

Dla skorzystania z tego warunku zbadamy asymptotyczną postać całek /93/, /94/ metodą punktu siodłowego.

8. Asymptotyczne zachowanie rozwiązania.

Zamieniamy zmienne przestrzenne, kładąc

$$x = r \cos \theta$$

/96/

$$y = r \sin \theta$$

i zmienną całkowania

$$/97/ \quad \alpha = k \cos \beta$$

Otrzymamy

$$/98/ \quad u_{\pm}^{\text{I}}(r, \Theta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\text{I}}} \frac{K_{\pm}^{\text{I}}(-k \cos \phi)}{(\cos \phi + \cos \beta) K_{\pm}^{\text{I}}(k \cos \beta)} \left(1 - 2\eta \frac{\sin \Theta}{|\sin \Theta|} \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\beta}{2}\right) \cdot e^{ikr(\cos \beta \cos \Theta + \sin \beta |\sin \Theta|)} d\beta$$

$$/99/ \quad u_{\pm}^{\text{II}}(r, \Theta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\text{II}}} \frac{K_{\pm}^{\text{II}}(-k \cos \phi)}{(\cos \phi + \cos \beta) K_{\pm}^{\text{II}}(k \cos \beta)} \left(1 - 2\eta \frac{\sin \Theta}{|\sin \Theta|} \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\beta}{2}\right) \cdot e^{ikr(\cos \beta \cos \Theta + \sin \beta |\sin \Theta|)} d\beta$$

gdzie C_{I} , C_{II} są to odpowiednio obrazy krzywych Q_{I} , Q_{II} przy odwzorowaniu /97/.

Odwzorowanie dwupłatowej powierzchni Riemanna \mathcal{L} na płaszczyznę β za pomocą funkcji /97/ jest przedstawione, dla k rzeczywistego na rys. 6 e. Konturem C_{I} jest krzywa łamana ABCD, nie pokazano krzywej C_{II} , która zależy od parametru η . Na rysunku 6 e wysłowno krzywą najszybszego spadku $S(\Theta)$ o równaniu

$$/100/ \quad \beta_r - \Theta = \arccos \frac{1}{ch \beta_i}$$

gdzie $\beta_r + i\beta_i = \beta$

dla dwóch wartości kąta $\Theta = 0$ i $\Theta = \pi$. Jest ona taka sama dla obu całek /98/ i /99/.

Zastąpienie drogi całkowania wzdłuż krzywej C przez krzywą najszybszego spadku $S(\Theta)$ pozwala obliczyć dla każdego Θ asymptotyczną wartość rozwiązania dla $kr \gg 1$.

Mamy dla $0 < \Theta < \pi$,

$$/101/ \quad \int_C \Psi(\beta) e^{ikr \cos(\beta - \Theta)} d\beta = \int_{S(\Theta)} \Psi(\beta) e^{ikr \cos(\beta - \Theta)} d\beta + 2\pi i \left[\operatorname{res}_{\beta = \pi - \phi} \Psi(\beta) e^{ikr \cos(\beta - \Theta)} + \operatorname{res}_{\beta = \beta_d} \Psi(\beta) e^{ikr \cos(\beta - \Theta)} \right]$$

gdzie $\beta = \beta_d$ jest biegunem funkcji podcałkowej /98/ lub /99/
 - obraz bieguna $\alpha = \alpha_d$ funkcji podcałkowej /93/ lub /94/.
 Daleko od linii cienia, całka po krzywej najszybszego spadku
 ma przybliżoną wartość dla $kr \gg 1$, równą

$$/102/ \int_{S(\theta)} \psi(\beta) e^{ikr \cos(\beta - \theta)} d\beta \sim \sqrt{\frac{2\pi}{kr}} \psi(k \cos \theta) e^{i(kr - \frac{\pi}{4})}$$

W interpretacji fizycznej całka ta przedstawia pole dyfrakcyjne, gdyż jej asymptotyka jest taka, jak asymptotyka pola pochodzącego od prądu liniowego /wzbudzonego na krawędzi przez falę padającą/.

Residuum funkcji podcałkowej obliczone w punkcie $\beta = \pi - \phi$ odpowiada fali odbitej danej przez optykę geometryczną, gdyż mamy

$$/103/ \operatorname{res}_{\beta = \pi - \phi} \psi(\beta) e^{ikr \cos(\beta - \theta)} = - \frac{1 - \eta \sin \phi}{1 + \eta \sin \phi} e^{-ikr \cos(\phi + \theta)}$$

dla $0 < \theta < \pi$

Residuum funkcji podcałkowej obliczone w punkcie $\beta = \beta_d$ odpowiada uogólnionej /niejednorodnej/ fali powierzchniowej, gdyż mamy

$$/104/ \operatorname{res}_{\beta = \beta_d} \psi(\beta) e^{ikr \cos(\beta - \theta)} = \operatorname{res}_{\alpha = \alpha_d} F(\alpha) e^{i\alpha x} e^{i\gamma y}$$

gdzie $F(\alpha)$ oznacza funkcję podcałkową bez czynnika wykładniczego we wzorze /93/ lub /94/.

9. Badanie fal powierzchniowych w zależności od parametru η .

Aby znaleźć zbiór wartości η , dla których istnieje fala powierzchniowa naniesiemy bieguny $\alpha_d(\eta)$ funkcji podcałkowych /93/ i /94/ na płaszczyznę β . Te, które znajdują się w obszarze ograniczonym krzywymi $S(0)$ i $S(\Pi)$ ujawnią się w postaci residuum /104/ przy zamianie pierwotnego konturu całkowania Q_I lub Q_{II} na krzywą najszybszego spadku. Badanie przeprowadzimy metodą odwzorowań konforemnych.

Rozpatrzmy płaszczyznę zmiennej zespolonej η , powierzchnię Riemanna zer α_d faktoryzowanej funkcji $N(\alpha)$, wzór /36/, płaszczyznę zmiennej zespolonej γ_d i płaszczyznę zmiennej zespolonej β_d powiązane ze sobą następującymi relacjami

$$/105/ \quad \alpha_d = \frac{ik}{\eta} \sqrt{1 - \eta^2}$$

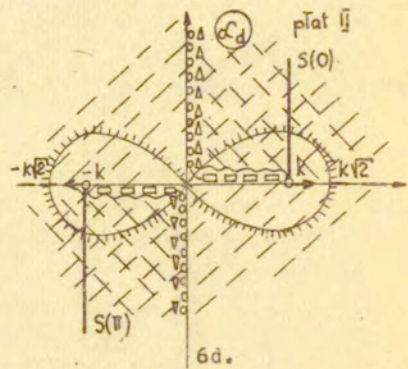
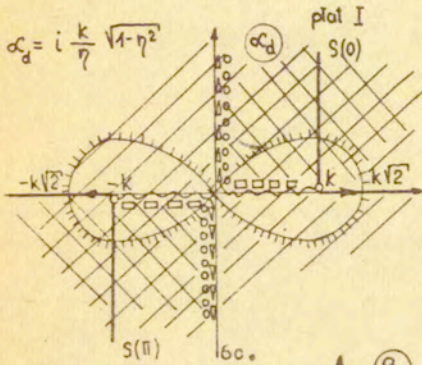
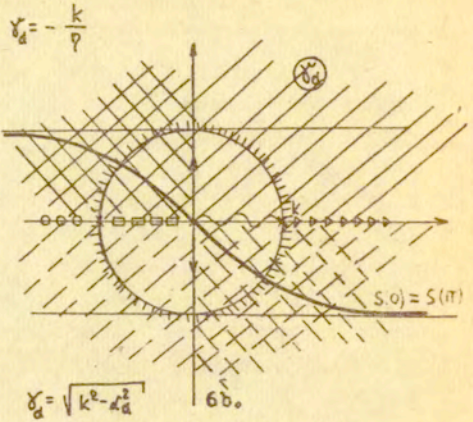
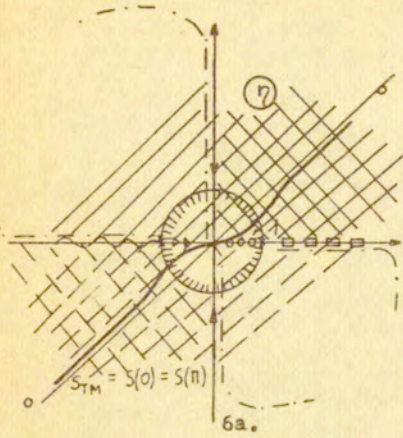
$$/106/ \quad \gamma_d = \sqrt{k^2 - \alpha_d^2}$$

$$/107/ \quad \beta_d = \arccos \frac{\alpha_d}{k}$$

i wykonamy odwzorowania dla k rzeczywistego.

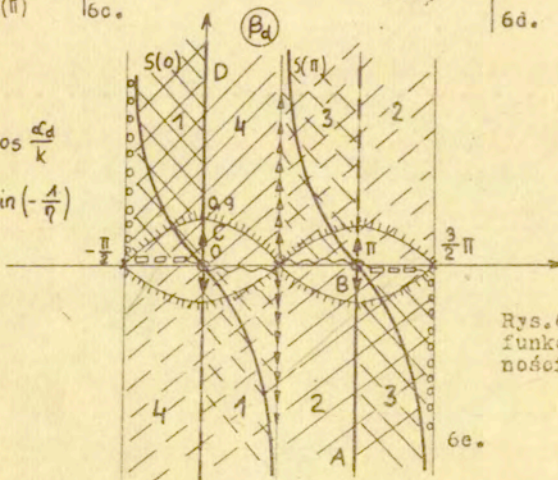
9.1. Odwzorowanie $\alpha_d \rightleftharpoons \gamma_d$

Powierzchnia Riemanna α_d jest dwupłatowa. Na płacie I mamy $\text{Im} \gamma_d > 0$, na płacie II $\text{Im} \gamma_d < 0$. Dla czytelności rysunków płaty te przedstawimy rozdzielnie, w postaci dwóch płaszczyzn z cięciami, będącymi odwzorowaniem prostej $\text{Im} \gamma_d = 0$ za pomocą funkcji /106/. Funkcja /106/ przyporządkowuje każdemu punktowi α_d z płaty I jeden punkt w górnej półpłaszczyźnie, $\text{Im} \gamma_d > 0$ /odpowiadające sobie obszary zakreskowano lub zakreślono linią ciągłą na Rys. Rys. 6 b, c, d i każdemu pun-



$$\beta_d = \arccos \frac{\beta_d}{k}$$

$$\beta_d = \arcsin \left(-\frac{1}{\eta}\right)$$



Rys.6. Położenie zer funkcji $N(\alpha)$ w zależności od impedancji η .

ktowi \mathcal{L}_d z płata II jeden punkt w dolnej półpłaszczyźnie, $\text{Im } \gamma_d < 0$ /odpowiadające sobie obszary zakreskowano lub zakratkowano linią przerywaną na Rys. Rys. 6 b, c, d/. W punktach rozgałęzienia $\mathcal{L}_d = \pm k \rightarrow \gamma_d = 0$ odwzorowanie jest niekonformne. Odwzorowanie to nie jest wzajemnie jednoznaczne, jednemu punktowi z płaszczyzny γ_d , $\gamma_d \neq \pm k$ odpowiadają dwa punkty \mathcal{L}_d na I lub II płacie różniące się znakiem. Odwzorowanie /106/ wygodnie jest traktować jako złożenie następujących odwzorowań

$$/108/ \quad z_1 = \mathcal{L}_d^2, \quad z_2 = -z_1, \quad z_3 = k^2 + z_2, \quad z_4 = \sqrt{z_3}$$

9.2. Odwzorowanie $\mathcal{L}_d \leftrightarrow \beta_d$

Odwzorowanie to wygodnie jest wykonać w kierunku $\beta_d \rightarrow \mathcal{L}_d$ wg zależności

$$\frac{\mathcal{L}_d}{k} = \cos \beta_d$$

Traktujemy je jako złożenie trzech odwzorowań /patrz np. [5], str. 113/.

$$z_1 = i\beta, \quad z_2 = e^{z_1}, \quad z_3 = \frac{\mathcal{L}_d}{k} = \frac{1}{2} \left(z_2 + \frac{1}{z_2} \right)$$

Z płaszczyzny β_d wybieramy pas $-\frac{\pi}{2} < \text{Re } \beta_d < \frac{3}{2}\pi$. Płatek I powierzchni Riemanna \mathcal{L}_d odwzorowuje się w obszar $-\frac{\pi}{2} < \text{Re } \beta_d < \frac{\pi}{2}$, $\text{Im } \beta_d > 0$ i $\frac{\pi}{2} < \text{Re } \beta_d < \frac{3}{2}\pi$, $\text{Im } \beta_d < 0$. Odpowiadające sobie obszary z rys. 6 c i 6 e zakreskowano lub zakratkowano linią ciągłą i przyporządkowano im odpowiednią cyfrę 1, 2, 3, 4, która oznacza numer ćwiartki układu współrzędnych na płaszczyźnie \mathcal{L}_d . Podobnie przyporządkowano sobie płat II powierzchni \mathcal{L}_d i pozostałą część z wybranego pasa na płaszczyźnie β_d .

9.3. Odwzorowanie $\eta \leftrightarrow \mathcal{L}_d$

Ponieważ /105/ jest rozwiązaniem równania $k + \eta \sqrt{k^2 - \mathcal{L}^2} = 0$ czyli

$$/109/ \quad \sqrt{k^2 - \varepsilon^2} = -\frac{k}{\eta}$$

to zbiór wartości η , dla których ε_d leżą na płacie I spełnia nierówność

$$/110/ \quad 0 < \arg\left(-\frac{k}{\eta}\right) < \pi$$

natomiast zbiór wartości η , dla których ε_d leżą na płacie II spełnia nierówność

$$/111/ \quad \pi < \arg\left(-\frac{k}{\eta}\right) < 2\pi$$

Prosta $\arg \eta = \arg k$ dzieli zatem płaszczyznę η na dwie półpłaszczyzny, takie, że dla wartości η z półpłaszczyzny

$$/112/ \quad \arg k < \arg \eta < \pi - \arg k$$

ε_d leżą na płacie I, zaś dla wartości η z półpłaszczyzny

$$/113/ \quad \pi + \arg k < \arg \eta < 2\pi + \arg k$$

ε_d leżą na płacie II.

Przy k rzeczywistym jak na Rys. Rys. 6 a, c, d dla wartości η z górnej półpłaszczyzny, $\operatorname{Im} \eta > 0$, wartości ε_d leżą na płacie I, zaś dla wartości η z dolnej półpłaszczyzny, $\operatorname{Im} \eta < 0$, wartości ε_d leżą na płacie II. Prosta $\operatorname{Im} \eta = 0$ odwzorowuje się w cięciu na płaszczyźnie ε_d .

Odwzorowanie /105/ nie jest jednoznaczne. Jednej wartości η ($\eta \neq \pm 1$) odpowiadają dwie wartości ε_d leżące na tym samym płacie i różniące się znakiem. Jest niekonforemne w punktach $\eta = 1$, $\eta = -1$. Aby uzyskać wzajemnie ciągłe

odwzorowanie $\eta \rightleftharpoons \varepsilon_d$, gdzie wartości ε_d są brane z dwupłatowej powierzchni Riemanna z punktami rozgałęzienia $\varepsilon = -k$, $\varepsilon = +k$, należy wartości η brać z dwupłatowej

powierzchni Riemanna z punktami rozgałęzienia $\eta = -1, \eta = +1$
 W tym przypadku płaty na powierzchni Riemanna η należy roz-
 różniać tak, że na jednym z nich $\text{Im } \mathcal{L}_d > 0$, na drugim

$\text{Im } \mathcal{L}_d < 0$. Na płaszczyźnie η dałoby to cięcie wzdłuż
 krzywej $\text{Im } \mathcal{L}_d = 0$ zaznaczonej na rys. 6 a linią osiową.

Na Rys. Rys. 6 a, b, c nie rozwarstwiono płaszczyzny η ,
 i potraktowano odwzorowanie /105/ jako dwuznaczne. Najwygodniej
 wykonać traktując je jako odwzorowanie złożone. Z postaci /109/
 mamy

$$/114a/ \quad \sqrt{1 - \frac{\mathcal{L}^2}{k^2}} = -\frac{1}{\eta}$$

lub

$$/114b/ \quad \frac{\mathcal{L}}{k} = \sqrt{1 - \frac{1}{\eta^2}}$$

Odwzorowując obszar z płaszczyzny \mathcal{L}_d w obszar na płaszczyź-
 nie η wygodnie jest traktować odwzorowanie /114a/ jako złożenie
 następujących odwzorowań

$$/115a/ \quad z_1 = \frac{\mathcal{L}}{k}, \quad z_2 = z_1^2, \quad z_3 = -z_2, \quad z_4 = 1 + z_3, \quad z_5 = \sqrt{z_4} = -\frac{1}{\eta}$$

$$\text{stąd: } \eta = -\frac{1}{z_5}$$

Przy odwzorowaniu w kierunku przeciwnym $\eta \rightarrow \mathcal{L}_d$ wygodnie
 jest traktować odwzorowanie /114b/ jako złożenie odwzorowań

$$/115b/ \quad z_1 = \frac{1}{\eta}, \quad z_2 = z_1^2, \quad z_3 = -z_2, \quad z_4 = 1 + z_3, \quad z_5 = \sqrt{z_4} = \frac{\mathcal{L}}{k}$$

$$\text{stąd: } \mathcal{L} = k z_5$$

Tą metodą znaleziono odwzorowanie płaszczyzny η z okręgiem
 jednostkowym $|z|=1$ na powierzchnię Riemanna \mathcal{L}_d jak przedstawi-
 on na Rys. Rys. 6 a, b, c.

Ponieważ w złożeniu /115/ występuje inwersja, wewnątrz okrę-
 gu przechodzi na zewnątrz jego obrazu, będącego tu lemniska-
 tą Bernoulliego jak na Rys. Rys. 6 c, d. Punkt $\eta = 0$ przechod-
 dzi w $\mathcal{L}_d = \infty$ na I i II płacie, punkty $\eta = \pm 1$ w punkt

$\alpha_d = 0$ na I i II płacie. Oś $\text{Im} \eta = 0$ przechodzi w cięcie na płaszczyźnie α_d . Półoś $\text{Im} \eta > 0$.. $\text{Re} \eta = 0$ w dwie półproste $\text{Im} \alpha_d = 0$, $\text{Re} \alpha_d > k$ i $\text{Im} \alpha_d = 0$, $\text{Re} \alpha_d < -k$ na płacie I. Półoś $\text{Im} \eta < 0$, $\text{Re} \eta = 0$ w takie same półproste na płacie II i.t.d.

9.4 Odwzorowanie $\eta \Leftrightarrow \gamma_d$

Odwzorowanie płaszczyzny η w γ_d i odwrotne można wykonać za pomocą funkcji /105/, /106/ lub bezpośrednio z relacji /109/, gdzie mamy

$$/116/ \quad \gamma_d = -\frac{k}{\eta}$$

Jest to złożenie inwersji, obrotu o Π i rozciągnięcie skali o k . Odwzorowanie jest przedstawione na Rys. Rys. 6 a, b. W szczególności wewnątrz okręgu $|\eta| < 1$ przechodzi na zewnątrz okręgu $|\gamma_d| > k$.

9.5. Odwzorowanie $\eta \Leftrightarrow \beta_d$

Odwzorowanie płaszczyzny η w β_d i odwrotne można wykonać za pomocą funkcji /105/, /107/ lub bezpośrednio, podstawiając zależność /107/ do wzoru /109/, skąd otrzymujemy

$$/117/ \quad \beta = \arcsin\left(-\frac{A}{\eta}\right)$$

Aby te odwzorowania były konsyistentne, należy funkcją /117/ odwzorować płaszczyznę η z cięciem wg linii $\text{Im} \eta = 0$.

Odwzorowanie /117/ jest przedstawione na Rys. Rys. 6 a, e. Krzywe najszybszego spadku $S(0)$ i $S(\Pi)$ wygodnie jest odwzorować w kolejności $\beta_d \rightarrow \alpha_d \rightarrow \gamma_d \rightarrow \eta$. Krzywa $S(0)$ o równaniu $\cos \beta_{dr} \text{ch} \beta_{di} = 1$ /gdzie $\beta_{dr} + i \beta_{di} = \beta_d$ / przechodzi za pomocą /107/ w półprostą $\alpha_{dr} = k$, $\alpha_{di} > 0$ przechodzącą przez punkt rozgałęzienia k i leżącą na I i II płacie, a krzywa $S(\Pi)$ w półprostą $\alpha_{dr} = -k$, $\alpha_{di} < 0$ przechodzącą przez punkt rozgałęzienia $-k$ i leżącą na I i II płacie, Rys. Rys. 6 c, d, e. Za pomocą /106/ obie te krzywe przechodzą w krzywą S_{TM} , rys. 6 b, o równaniu uwikłanym

$$\gamma_{di}^2 = k^2 \gamma_{dr}^2 / (k^2 + \gamma_{dr}^2) \quad , \text{ następnie poprzez /116/ w krzywą } S_{TM} \text{ na płaszczyźnie } \eta \text{ , rys. 6 a. Jest to krzywa nie-}$$

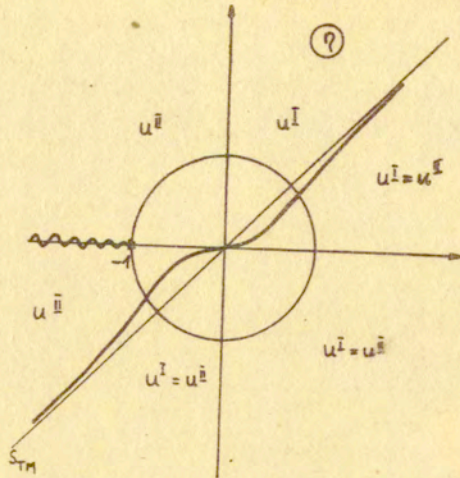
symetryczna względem początku układu, styczna w zerze do osi $\text{Im} \eta = 0$ i ma asymptotę o równaniu $\eta = \eta_r$, Rys. 6a.

Fale powierzchniowe w I lub II rozwiązaniu istnieją dla tych wartości η , które leżą nad krzywą S_{TM} . Przy tym, jak można odczytać z Rys. Rys. 6 a, b dla η zawartego w wycinku 1 ćwiartki /jest to η pasywne/ bieguny \mathcal{L}_d leżą w części 1 i 3 ćwiartki na płaszczyźnie I: $\text{Re} \mathcal{L}_d > k, \text{Im} \mathcal{L}_d > 0$ i $\text{Re} \mathcal{L}_d < -k, \text{Im} \mathcal{L}_d < 0$. Dla η należącego do 2 ćwiartki /jest to η aktywne/ bieguny \mathcal{L}_d leżą w 2 i 4 ćwiartce na płaszczyźnie I. Dla η zawartego w wycinku 3 ćwiartki nad krzywą S_{TM} /jest to również η aktywne/ bieguny \mathcal{L}_d leżą w części 1 i 3 ćwiartki na płaszczyźnie II:

$$0 < \text{Re} \mathcal{L}_d < k, \text{Im} \mathcal{L}_d > 0 \quad \text{i} \quad -k < \text{Re} \mathcal{L}_d < 0, \text{Im} \mathcal{L}_d < 0.$$

Zgodnie z wynikami rozdziału 7 dla wartości η leżących nad krzywą S_{TM} , dla których istnieje fala powierzchniowa rozwiązanie $u_S^{\text{II}} \mp u^{\text{I}}$. Dla wartości η leżących poniżej krzywej S_{TM} nie ma fali powierzchniowej i mamy $u^{\text{II}} = u^{\text{I}}$. To rozwiązanie spełnia warunek w nieskończoności sformułowany dla pasywnej impedancji η . Dla wartości η z 1 ćwiartki warunek w nieskończoności wyklucza rozwiązanie u^{II} z rosnącą falą powierzchniową. Przedłużeniem ciągłym rozwiązania u^{I} dla wartości η należących do 2 ćwiartki jest rozwiązanie u^{II} z rosnącą falą powierzchniową i dalej przedłużeniem ciągłym, przynajmniej na odcinku $0 < \eta < -1$, dla wartości η należących do części 3 ćwiartki nad krzywą S_{TM} jest rozwiązanie u^{II} .

Jednakże rozwiązanie u^{II} jest nieciągłe na odcinku $-1 < \eta < -\infty$, wobec czego taki wybór rozwiązania w tym ostatnim obszarze jest sprawą dyskusyjną. Propozycję sposobu konstrukcji rozwiązania dla każdego η z wyjątkiem $-1 < \eta < -\infty$ przedstawiono na rys. 7.



Rys.7. Sposób konstrukcji rozwiązania typu TM w zagadnieniu dyfrakcji fali płaskiej na półpłaszczyźnie o impedancji η .

10. Pole TE. Rozwiązanie problemu /2/, /4/, /5/.

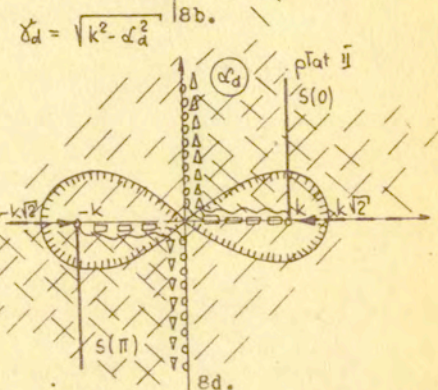
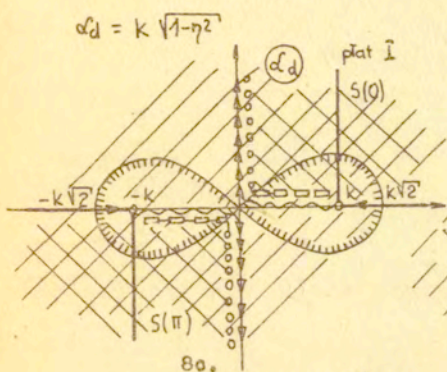
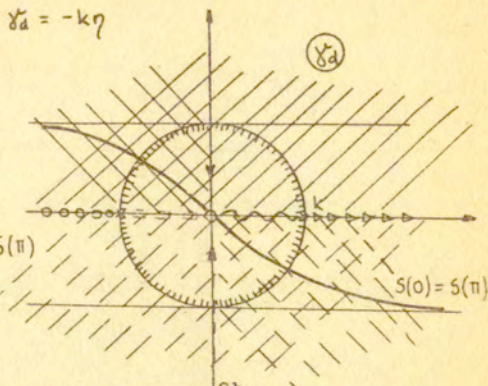
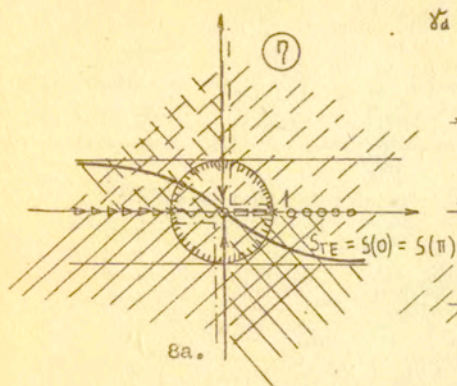
Tak, jak dla pola TM, rozwiązania problemu /2/, /4/, /5/ poszukujemy w postaci sumy /10/, następnie pola rozproszonego $u_s(x, y)$ poszukujemy w postaci całkowej /15/.

Równania Wienera-Hopfa dla amplitud $A(\alpha), B(\alpha)$ otrzymamy podstawiając we wzorach /32/, /33/ $1/\eta$ zamiast η .

Wtedy otrzymamy do faktoryzowania funkcję

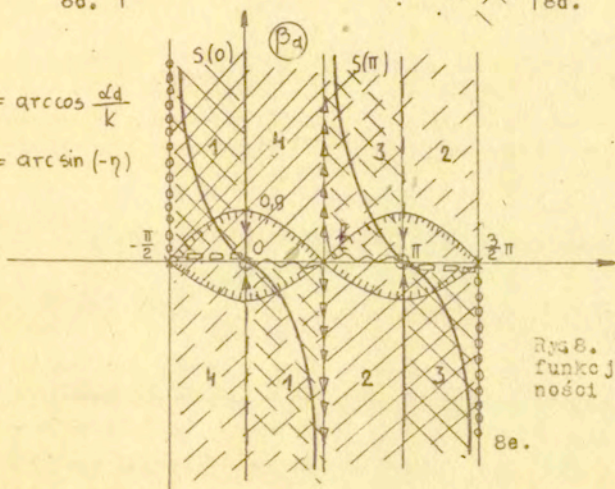
$$/118/ \quad M(\alpha) = \frac{1}{\eta} + \frac{k}{\sqrt{k^2 - \alpha^2}} = \frac{k\eta + \sqrt{k^2 - \alpha^2}}{\eta\sqrt{k^2 - \alpha^2}} = \frac{M_-(\alpha)}{M_+(\alpha)}$$

Jak dla pola TM, otrzymujemy dwa rozwiązania wyrażające się wzorami /93/, /94/, gdzie w miejsce η należy podstawić $1/\eta$. Biegunki funkcji podcałkowych są zerami funkcji $M(\alpha)$ i wyrażają się wzorem



$$\beta_d = \arccos \frac{\alpha_d}{k}$$

$$\beta_d = \arcsin (-\eta)$$



Rys. 8. Położenie zer funkcji $M(\infty)$ w zależności od impedancji η .

$$/119/ \quad \alpha_d = k \sqrt{1 - \eta^2}$$

W rozwiązaniu /93/ gałąź pierwiastka określa nierówność

$$/120/ \quad -\arg k \leq \arg \sqrt{1 - \eta^2} < \pi - \arg k$$

W rozwiązaniu /94/ natomiast

$$/121/ \quad \pi - \arg k < \arg \sqrt{1 - \eta^2} \leq 2\pi - \arg k$$

Położenie tych biegunów na płaszczyźnie $\alpha_d, \beta_d, \chi_d$ w zależności od η przedstawiają Rys. Rys. 8 a, b, c, d gdzie pokazane są odwzorowania za pomocą funkcji

$$/122/ \quad \alpha_d = k \sqrt{1 - \eta^2}$$

$$/123/ \quad \chi_d = \sqrt{k^2 - \alpha_d^2} = -k\eta$$

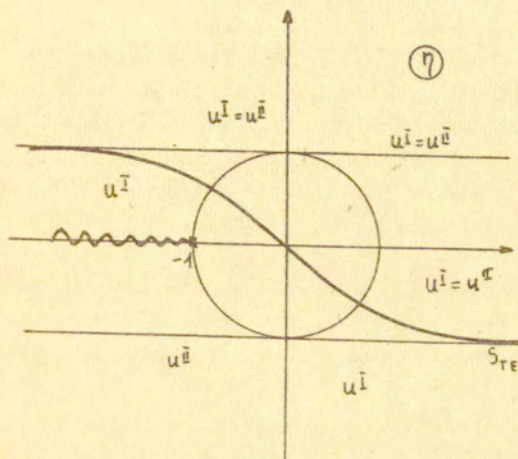
$$/124/ \quad \beta_d = \arccos \frac{\alpha_d}{k} = \arcsin(-\eta)$$

Dla odwzorowania /124/ cięcie na płaszczyźnie η przebiega wzdłuż prostej $\text{Im} \eta = 0$.

Przeciwnie niż dla przypadku TM, dla η z dolnej półpłaszczyzny, $\text{Im} \eta < 0$, bieguny α_d leżą na płacie I, natomiast dla η z górnej półpłaszczyzny, $\text{Im} \eta > 0$, bieguny α_d leżą na płacie II. Odwzorowaniem krzywych najszybszego spadku $S(0)$ i $S(\pi)$ na płaszczyźnie η jest krzywa S_{TE} . Fale powierzchniowe TE istnieją dla η leżącego w obszarze poniżej krzywej S_{TE} . Krzywa S_{TE} z Rys. 8 a i krzywa S_{TM} z Rys. 6 a odwzorowują się

wzajemnie w siebie przez inwersję.

Propozycję konstrukcji rozwiązania typu TE pokazano na Rys. 9. Rozwiązanie to jest nieciągłe na odcinku $-1 < \eta < -\infty$.



Rys.9. Sposób konstrukcji rozwiązania typu TE w zagadnieniu dyfrakcji fali płaskiej na półpłaszczyźnie o impedancji η .

Porównując Rys. Rys. 6 i 8 można wydobyć najbardziej istotną różnicę w zależności położenia biegunów funkcji podcałkowej od parametru η dla obu typów rozwiązań, która ilustruje różnicę we własnościach propagacji fali powierzchniowej TM i TE w zależności od parametru η . Na przykład dobrze jest znany przypadek nietłumionej wzdłuż półpłaszczyzny fali powierzchniowej, która istnieje dla η urojonych / $\text{Im} \eta > 0$ w fali TM, $\text{Im} \eta < 0$ w fali TE/. Mamy wtedy $\text{Re} \chi_a = 0$, $\text{Im} \chi_a = 0$ por. Rys. Rys. 6 a, b, c i 8 a, b, c. Tłumienie w kierunku prostopadłym do półpłaszczyzny jest dla fal TM odwrotnie proporcjonalne do η , wzór /116/ natomiast dla fal TE wprost proporcjonalne, wzór /123/.

I ogólnie. W rozwiązaniu TM wewnątrz okręgu jednostkowego $|\eta|=1$ odwzorowuje się na zewnątrz obszaru ograniczonego krzywą będącą jego obrazem na płaszczyznach $\mathcal{L}_d, \mathcal{Y}_d, \beta_d$, natomiast w rozwiązaniu typu TE wewnątrz okręgu jednostkowego $|\eta|=1$ odwzorowuje się na wewnątrz obszaru ograniczonego obrazem tego okręgu. Należy zauważyć, że okrąg $|\eta|=1$ odwzorowuje się w obu przypadkach w tę samą krzywą: lemniskatę Bernoulli'ego na płaszczyźnie \mathcal{L}_d , okrąg $|\mathcal{Y}_d|=k$ na płaszczyźnie \mathcal{Y}_d i krzywą na płaszczyźnie β_d , której równania nie znaleziono, ale przebieg naszkicowano odwzorowując kilka punktów z okręgu $|\eta|=1$.

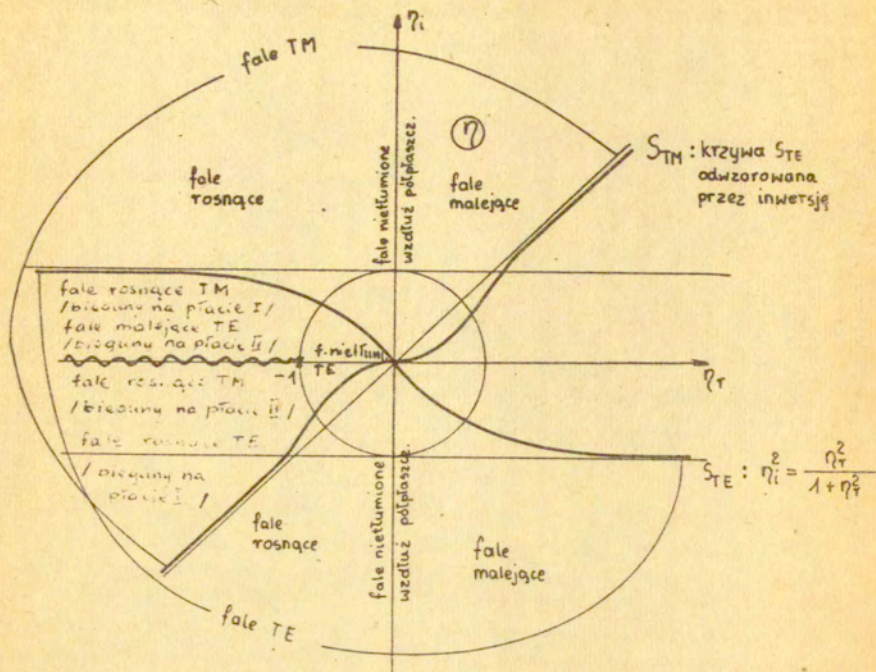
W Tabeli 1 zestawiono odczyty z Rys. Rys. 6 i 8 charakteryzujące falę powierzchniową.

Dla η znajdującego się w 1, 2 i 3 ćwiartce dla fali TM i odpowiednio w 4, 3. i 2 ćwiartce dla fali TE narysowano kierunek propagacji fali $\underline{u}_F = (\operatorname{Re} \mathcal{L}_d, \operatorname{Re} \mathcal{Y}_d)$ i kierunek malenia amplitudy $\underline{u}_A = (\operatorname{Im} \mathcal{L}_d, \operatorname{Im} \mathcal{Y}_d)$. Kierunki te są wzajemnie do siebie prostopadłe.

W podsumowaniu, przedstawiono na Rys. 10 podział płaszczyzny η przez krzywe S_{TM} i S_{TE} na zbiory takich wartości η , dla których istnieje fala powierzchniowa typu TM, bądź typu TE, bądź typu TM i TE /część wspólna zbiorów/. Badanie rozwiązania nie jest jeszcze zakończone i w związku z tym wybór rozwiązania w tym ostatnim obszarze pozostaje sprawą otwartą.

Tabela 1. Rodzaje fal powierzchniowych mogących propagować się nad płaszczyzną impedancyjną.

TM	TE	α_d	γ_d	β_d	$e^{i(\text{Re } \alpha_d x + \text{Re } \gamma_d y) - (i \text{Im } \alpha_d x + i \text{Im } \gamma_d y)}$
1) $\text{Re } \eta > 0$ 4) $\text{Im } \eta > 0$	4) $\text{Re } \eta > 0$ $\text{Im } \eta < 0$	1) $\text{Re } \alpha_d > 0$ $\text{Im } \alpha_d > 0$ 3) $\text{Re } \alpha_d < 0$ $\text{Im } \alpha_d < 0$	$\text{Re } \gamma_d < 0$ $\text{Im } \gamma_d > 0$	β_d $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < \text{Re } \beta_d < 0 \\ \text{Im } \beta_d > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \pi < \text{Re } \beta_d < \frac{3}{2}\pi \\ \text{Im } \beta_d < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} u^i \\ u^r \end{cases}$ $\begin{cases} u^i \\ u^r \end{cases}$ dla $\begin{cases} \Phi \rightarrow 0 \\ \eta \rightarrow \frac{1}{2} \pi \\ \gamma \rightarrow \frac{1}{2} \pi \end{cases}$
$\text{Re } \eta = 0$ $\text{Im } \eta > 0$	$\text{Re } \eta = 0$ $\text{Im } \eta < 0$	$\text{Re } \alpha_d > k$ $\text{Im } \alpha_d = 0$ $\text{Re } \alpha_d < -k$ $\text{Im } \alpha_d = 0$	$\text{Re } \gamma_d = 0$ $\text{Im } \gamma_d > 0$	$\begin{cases} \text{Re } \beta_d = 0 \\ \text{Im } \beta_d > 0 \end{cases}$ $\text{Re } \beta_d = \pi$ $\text{Im } \beta_d < 0$	$\begin{cases} u^i \\ u^r \end{cases}$ $\begin{cases} u^i \\ u^r \end{cases}$
2) $\text{Re } \eta < 0$ 3) $\text{Im } \eta < 0$	3) $\text{Re } \eta < 0$ $\text{Im } \eta < 0$	2) $\text{Re } \alpha_d < 0$ $\text{Im } \alpha_d > 0$ 4) $\text{Re } \alpha_d > 0$ $\text{Im } \alpha_d < 0$	$\text{Re } \gamma_d > 0$ $\text{Im } \gamma_d > 0$	$\begin{cases} \frac{\pi}{2} < \text{Re } \beta_d < \pi \\ \text{Im } \beta_d < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 0 < \text{Re } \beta_d < \frac{\pi}{2} \\ \text{Im } \beta_d > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} u^i \\ u^r \end{cases}$ $\begin{cases} u^i \\ u^r \end{cases}$
$\text{Re } \eta < -1$ $\text{Im } \eta = 0$	$-1 < \text{Re } \eta < 0$ $\text{Im } \eta = 0$	$0 < \text{Re } \alpha_d < k$ $\text{Im } \alpha_d = 0$ $k < \text{Re } \alpha_d < 0$ $\text{Im } \alpha_d = 0$	$0 < \text{Re } \gamma_d < k$ $\text{Im } \gamma_d = 0$	$\begin{cases} 0 < \text{Re } \beta_d < \frac{\pi}{2} \\ \text{Im } \beta_d = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{\pi}{2} < \text{Re } \beta_d < \pi \\ \text{Im } \beta_d = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} u^i \\ u^r \end{cases}$ $\begin{cases} u^i \\ u^r \end{cases}$ $\begin{cases} \Omega_A = 0 \\ \Omega_A = 0 \end{cases}$
$-1 < \text{Re } \eta < 0$ $\text{Im } \eta = 0$	$\text{Re } \eta < -1$ $\text{Im } \eta = 0$	$\text{Re } \alpha_d = 0$ $\text{Im } \alpha_d > 0$ $\text{Re } \alpha_d = 0$ $\text{Im } \alpha_d < 0$	$\text{Re } \gamma_d > k$ $\text{Im } \gamma_d = 0$	$\begin{cases} \text{Re } \beta_d = \frac{\pi}{2} \\ \text{Im } \beta_d < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \text{Re } \beta_d = \frac{\pi}{2} \\ \text{Im } \beta_d > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} u^i \\ u^r \end{cases}$ $\begin{cases} u^i \\ u^r \end{cases}$
3) $\text{Re } \eta < 0$ 2) $\text{Im } \eta < 0$	2) $\text{Re } \eta < 0$ $\text{Im } \eta > 0$	1) $\text{Re } \alpha_d > 0$ $\text{Im } \alpha_d > 0$ 3) $\text{Re } \alpha_d < 0$ $\text{Im } \alpha_d < 0$	$\text{Re } \gamma_d > 0$ $\text{Im } \gamma_d < 0$	$\begin{cases} 0 < \text{Re } \beta_d < \frac{\pi}{2} \\ \text{Im } \beta_d < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{\pi}{2} < \text{Re } \beta_d < \pi \\ \text{Im } \beta_d < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} u^i \\ u^r \end{cases}$ $\begin{cases} u^i \\ u^r \end{cases}$ dla $\begin{cases} \Phi \rightarrow 0 \\ \eta \rightarrow \frac{1}{2} \pi \end{cases}$



Rys. 10. Zbiór wartości impedancji podtrzymujących falę powierzchniową.

LITERATURA

- [1] T.B.A. SENIOR - Diffraction by a semi - infinite metallic sheet. Proc. Roy. Soc. A 213, str 436 /1952/.
- [2] T.B.A. SENIOR - Diffraction by an imperfectly conducting half - plane at oblique incidence. Appl. Sci. Res. Sec. B 8, str 35 /1960/.
- [3] D.S. JONES - The eigenvalues of $\nabla^2 u + \lambda u = 0$ when the boundary conditions are given on semi - infinite domains. Proc. Camb. Phil. Soc., 49, 668 /1953/.
- [4] B. NOBLE - Methods based on the Wiener - Hopf technique Pergamon Press, London 1958.
- [5] B.A. FUKS, B.W. SZABAT - Funkcii kompleksnogo permennoho i nekotorye ich priloženija. Wydawnictwo Nauka Moskwa, 1964 /wydanie trzecie/.