TRYGONOMETRYA

PROSTOKREŚLNA

WRAZ

Z ZADANIAMI.

Z ROZPORZĄDZENIA MINISTRA WYCHOWANIA PUBLICZNEGO, PRZEZNACZONA DO UŻYTKU SZKÓŁ OKRĘGU NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO.

Cena exemplarza z oprawą tak w Warszawie jak i na prowincyi, kop. sr. 35.

WARSZAWA.

1859.

TRYGONOMETRYA.

TRYGONOMETRYA

PROSTOKREŚLNA

WRAZ

Z ZADANIAMI.

Z ROZPORZĄDZENIA MINISTRA WYCHOWANIA PUBLICZNEGO, PRZEZNACZONA DO UŻYTKU SZKÓŁ OKRĘGU NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO.

(Cena egzemplarza z oprawą kop. sr. 35).

WARSZAWA.

1859.

Wolno drukować, z warunkiem złożenia w Komitecie Cenzury, po wydrukowaniu, prawem przepisanéj liczby egzemplarzy.

W Warszawie, dnia 4 (16) Grudnia 1858 roku.

p. o. Starszego Cenzora,
ASSESSOR KOLLEGIALNY, **A. Broniewski.**

W Drukarni Gazety Codziennéj.

Stosownie do nowego planu rozwinięty wykład nauk matematycznych po Gimnazyach, wywołał potrzebę odpowiednich dzieł elementarnych matematycznych. W skutek tego, wezwany zostałem przez JW. Kuratora Okręgu Naukowego, **Radcę Tajnego Muchanowa**, do ułożenia podręcznego dziełka do Trygonometryi, obejmować mającego w krótkim zarysie i stan nauki, i te jéj zastosowania, które odpowiadają zakresowi gimnazyalnego wykładu. Niniejszą pracą wywiązuję się z tego ważnego dla dobra uczącéj się młodzieży, a dla mnie pochlebnego polecenia.

W traktowaniu przedmiotu trzymałem się dzieł francuzkich, używanych po zakładach, naszym Gimnazyom odpowiadających; wyszedłem jednak z ogólniejszego sposobu uważania wielkości trygonometrycznych, wyraźniéj wskazującego możność zastąpienia wielkości kątowych przez miary podłużne, dodałem krótkie uwagi dotyczące zakładania sieci trygonometrycznych, i w końcu załączyłem zadania z geometryi, trygonometrycznych pomiarów, i t. p. wskazujące różnorodność zastosowań téj nauki.

To dziełko w skutek przychylnego sądu Naczelnéj Władzy Edukacyjnéj Królestwa Polskiego, przeznaczoném zostało przez JW. Ministra Narodowego Oświecenia, za podręczne do wykładu trygonometryi po szkołach Okręgu Naukowego Warszawskiego.

Warszawa, d. 10 lipca 1858 r.

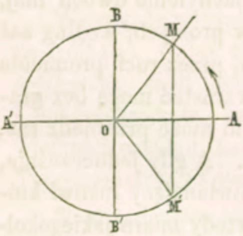
S. Przystański, Nauczyciel matematyki.

TRYGONOMETRYA PROSTOKREŚLNA.

(ТРИГОНОМЕТРІЯ ПРЯМОЛИНЕЙНАЯ).

ROZDZIAŁ I.

§ 1. Przed podaniem określenia téj gałęzi geometryi, jako téż linij w niéj używanych, wypada poprzednio nadmienić, jakim sposobem dojść można do uważania kątów i łuków różnéj wielkości tak dodatnich jak i odjemnych.



W tym celu obierzmy sobie na obwodzie, którego *promień równy jest jedności*, punkt stały czyli początek A, i przypuśćmy, że jakieś ciało ruchome M, posuwa się w kierunku wskazanym przez strzałkę; łuk przebyty w każdéj chwili biegu, wyrażać się będzie przez stosunek x, między tym łukiem a promieniem, tak, że stosownie do tego, czy ciało ruchome znajduje się w B, czy w A′, B′ [1], łuki wyrażą się:

[1] Zwykle uważać będziemy łuki należące do koła zatoczonego promieniem równym jedności; połowę okręgu takiego koła nazywać będziemy przez π, literę, używaną także do oznaczenia stosunku okręgu do średnicy.

$$x=\frac{\pi}{2},\ x=\pi,\quad x=\frac{3}{2}\pi...$$

A ponieważ wolno przyjąć, że ciało powróciwszy do początku ruchu, bieży znów po okręgu koła, możemy więc dla x otrzymywać wszelkie dowolnéj wielkości znaczenia:

$$2\,\pi,\ \frac{5}{2}\pi,\ 3\,\pi,\ \frac{7}{2}\pi....$$

Jeżeli zaś punkt ruchomy, zamiast poprzednio opisanego biegu, posuwać się będzie od A do B′, wtedy ta przeciwność biegu wyrazi się przez zmianę znaku. Tak, że oznaczając przez a długość łuku AM, łuk inny AM′ względem poprzedniego symetryczny i jemu równy, bardzo dogodnie wyrażać będziemy przez $x=-a$.

Można więc będzie nie ograniczać się w nadawaniu łukom znaczeń mniejszych od obwodu koła, lecz zmieniać ich wielkość dowolnie w granicach od $+\infty$ do $-\infty$.

§ 2. Gdy punkt ruchomy M, posuwa się po łuku AM, promień OM nieograniczenie przedłużony obraca się na około środka koła, tworząc kąt MOA.

W geometryi kąt, uważany jako nachylenie dwóch linij, nie może być większym od dwóch kątów prostych; według zaś powyższego sposobu tworzenie się kąta, przez ruch promienia OM naokoło punktu stałego O, kąty wzrastać mogą bez granic, gdyż promień OM ruchem ciągłym może przebiedz raz, dwa, trzy... razy tęż samę płaszczyznę. A gdy jednocześnie, za jednostkę kąta, weźmiemy kąt odpowiadający łukowi którego długość równa się promieniowi, wtedy miara jakiegokolwiek kąta będzie także sama, jak i miara łuku zawartego między jego ramionami. Czyli innemi słowy: *każdy kąt będzie miał za miarę łuk odpowiadający w kole, mającém jedność za promień.*

W ten sposób można będzie kąty podciągnąć pod rachunek; a że kąty wyobrażają się przez odpowiednie im łuki, przeto istnieją i kąty ujemne (отрицательные углы).

§ 3. Nadmieniliśmy wyżéj, że jednostką kątową jest kąt odpowiadający łukowi, którego długość wyrównywa promieniowi; łatwo ten kąt wyrazić w stopniach, minutach i sekundach. W saméj rzeczy, jeżeli przyjmiemy promień koła za jedność, obwód koła wyrazi się przez $2\pi = 2.\ 3{,}141592...$; ten obwód dzieli się na 360 części. Oznaczając przez n liczbę stopni łuku równego promieniowi, wtedy będzie:

$$\frac{n}{360} = \frac{1}{2\pi},\ \text{zkąd}\ n = \frac{180}{\pi} = 180.\ 0{,}31839...$$

a po wykonaniu działania:

$$n = 57{,}29578...,$$

czyli łuk równy promieniowi wynosi:

$$= 57^{0}\ 17'\ 24'',8...$$

Dwa łuki dopełniają się, są dopełniające (дополнителные), gdy ich summa algebraiczna wynosi ćwierć okręgu koła, czyli gdy razem wzięte czynią $\frac{\pi}{2}$.

Jeżeli zaś dwa łuki razem dają summę algebraiczną, równą półokręgowi koła π, wtedy mówimy, że takie łuki się spełniają (взаимно-дополнителныя до двухъ прямыхъ).

Wiemy, że wszystkie figury prostokreślne dają się rozłożyć na trójkąty. Gałąź geometryi mająca na celu *rozwiązywanie trójkątów*, czyli oznaczanie liczebnych wartości dla kątów i boków trójkąta, za pomocą dostatecznéj liczby danych wielkości w skład każdego trójkąta wchodzących, zowie się Trygonometryą (Тригонометрія) (1).

Tém zadaniem zajmuje się także i geometrya początkowa, podaje bowiem sposoby, jak z danych trzech wielkości trójkąta, pomiędzy któremi musi być zawsze choć jeden bok,

---

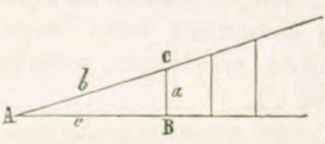
(1) Nieznanym jest dokładnie czas, w którym Trygonometrya wzięła swój początek. Ślady téj nauki spotykamy już u Egipcyan. Grecy byli dobrze z nią obznajmieni, i używali jéj do ocenienia odległości ziemskich, a nawet do wielu zadań astronomicznych.

wykreślić trzy pozostałe wielkości. Lecz sposoby przytaczane w początkowéj planimetryi, opierały się na użyciu przenośnika, cyrkla, narzędzi niedokładnych, i dlatego znalezione rysunkiem wielkości trójkąta, były tylko przybliżone. Trygonometrya toż samo zadanie rozwiązuje rachunkiem, tojest z pomocą wzorów dających wartość dla nieznanych wielkości trójkąta w funkcyi znanych boków i kątów; czyli trygonometrya rozrachowuje trójkąty, a tém samém i wszelkie figury prostokreślne.

§ 4. **Linie trygonometryczne.** Główna trudność, jaką w tego rodzaju zadaniach przedstawia różnorodność miar służących do oceniania wielkości kątów i boków, usuniętą została przez sprowadzenie miary kątów do miary boków.

Wiemy, że w podobnych trójkątach boki leżące naprzeciw równych kątów są proporcyonalne, czyli że równość kątów pociąga za sobą równość ilorazów z boków odpowiednich, i odwrotnie za równością ilorazów z dwóch boków danych trójkątów idzie równość odpowiednich kątów. Można więc będzie wielkość kątów trójkąta oceniać przez ilorazy dwóch boków.

Weźmy pod uwagę trójkąt prostokątny, jako najogólniejszy, każdy bowiem inny trójkąt na dwa prostokątne rozdzielić można. Nakreślimy kilka takich trójkątów, z warunkiem, aby posiadały jeden kąt ostry, np. A wspólny; wszystkie te trójkąty będą między sobą podobne.



Kąt więc A, można będzie wyrazić ilorazem czyli stosunkiem z dwóch boków któregokolwiek trójkąta, czyli tym sposobem wielkość kąta da się oznaczyć miarą długości boków. Takich ilorazów z boków a, b, c, np. trójkąta ABC, może być sześć: $\frac{a}{c}$, $\frac{c}{b}$, $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{b}{a}$, $\frac{b}{c}$, i nazwane zostały *funkcyami kołowemi* albo *trygonometrycznemi (тригонометри-*

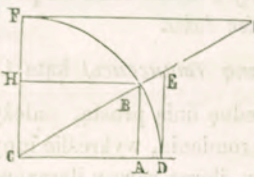
ческія функціи); te ilorazy mogą być wyrażone przez linie proste (jak to niżéj zobaczymy), i takie właśnie linie do których sprowadzono miarę kątów, zowiemy *liniami trygonometrycznemi (тригонометрическія линіи).*

1) Jeżeli w trójkącie prostokątnym ABC, weźmiemy stosunek boków $\frac{AB}{BC}$, i nazwiemy go *wstawą (синусъ)* kąta C, to przedłużając bok AC aż do D, tojest do przecięcia się z kołem zatoczoném z punktu C promieniem BC, i uważając ten *promień za jedność*, stosunek powyższy $\frac{BA}{BC}$ można napisać $\frac{BA}{1} = BA$. Tym więc sposobem, można powiedzieć: że wstawa jest to funkcya trygonometryczna, *powstała z rozdzielenia boku przeciwległego danemu kątowi przez przeciwprostokątnią,* uważana zaś za linię trygonometryczną *wstawa, jestto liczba wyrażająca miarę prostopadłéj, spuszczonéj z końca łuku na promień przechodzący przez drugi koniec łuku.*

2) Nazywając stosunek $\frac{AB}{AC}$ *styczną (тангенсъ)* kąta C, i chcąc ten stosunek wyrazić przez jednę linią prostą, należy do trójkąta ABC, nie zawierającego promienia, wykréślić inny podobny trójkąt ADE, a w którymby iloraz równy ilorazowi $\frac{AB}{AC}$, miał w mianowniku promień wzięty za jedność. Tym sposobem, zamiast stosunku $\frac{AB}{AC}$, wypadnie wziąć $\frac{DE}{CD} = \frac{DE}{1} = DE$. Według tego, *styczna* uważana jako funkcya trygonometryczna *jest stosunkiem boku przeciwległego do boku przyległego danemu kątowi;* uważana zaś za linią trygonometryczną, *styczna jest liczbą oznaczającą część stycznéj geometrycznéj, poprowadzonéj przez początek łuku, i ograniczonéj promieniem przedłużonym, idącym przez drugi koniec łuku.*

3) Podobnie stosunek $\frac{BC}{AC}$ nazwano *sieczną (секансъ);* chcąc zaś ten stosunek sprowadzić do długości tylko jednéj linii prostéj, należy użyć w pomoc trójkąta CDE, podobnego z ABC, i dającego stosunek $\frac{CE}{CD}$ równy $\frac{BC}{AC}$; a że promień $CD=1$, więc zamiast $\frac{BC}{AC}$, można wziąć CE. Tak więc *sieczna*, jako *funkcya trygonometryczna, jest stosunkiem przeciwprostokątni do boku przyległego danemu kątowi*, uważana zaś za linią trygonometryczną, jest liczbą wyrażającą *przedłużony promień zawarty między środkiem koła i końcem stycznéj.*

4) Biorąc pod uwagę czwarty stosunek $\frac{AC}{BC}$, który nazwano *dostawą (косинусъ)* kąta C, i przyjmując, jak poprzednio, promień BC za jedność, wypada, że $\frac{AC}{BC}=\frac{AC}{1}=AC$. Czyli, że dostawa jest funkcyą trygonometryczną, *powstałą z rozdzielenia boku przyległego przez przeciwprostokątnią*, uważana zaś jako *linia trygonometryczna, dostawa jest częścią promienia zawartą między spodkiem wstawy a środkiem.* A że linia AC, równa się linii BH która jest wstawą kąta BCF, dopełniającego dany kąt C, przeto można jeszcze powiedzieć, że *dostawa jest wstawą kąta dopełniającego.* Wyraz *dostawa*, jest oznaczeniem téj własności.



5) Stosunek $\frac{AC}{AB}$ zowie się *dotyczną (котангенсъ)*, a ponieważ w nim nie wchodzi promień, który bierzemy za jedność, przeto należy wykreślić inny trójkąt FCG, podobny do ABC, i dający stosunek $\frac{FG}{CF}$ mający w mianowniku promień, równy

stosunkowi $\frac{AC}{AB}$. Wtedy $\frac{AC}{AB}=\frac{FG}{CF}=FG$, i wypada, że *dotyczna jako funkcya trygonometryczna, jest stosunkiem boku przyległego do boku przeciwległego danemu kątowi*, uważana zaś za linią trygonometryczną, jest długością linii FG, będącéj *styczną kąta* FCG, *dopełniającego kąt dany.*

6) Nakoniec, ostatni stosunek $\frac{CB}{BA}$, który nazwano *dosieczną (косекансъ)*, biorąc w pomoc trójkąt CFG, można zamienić przez równy mu stosunek $\frac{CG}{CF}=\frac{CG}{1}=CG$. Z czego wypada, że dosieczna, jako funkcya trygonometryczna, jest *stosunkiem przeciwprostokątni do boku przeciwległego*, a uważana za linią trygonometryczną, przedstawia liczbę wymierzającą długość linii CG, będącéj *sieczną kąta* FCG, *dopełniającego kąt dany.*

§ 5. W dalszym ciągu wykładu, używać będziemy, powszechnie przyjętego, sposobu poczytywania tych sześciu wielkości trygonometrycznych za linie. Tym więc sposobem pamiętać należy, że:

Wstawa, jest to prostopadła, spuszczona z jednego końca łuku, na promień przechodzący przez drugi koniec łuku.

Styczna, jest częścią stycznéj geometrycznéj, poprowadzonéj w jednym końcu łuku i ograniczonéj promieniem przechodzącym przez drugi koniec łuku.

Sieczna, jest promieniem przedłużonym, zawartym między środkiem koła a końcem stycznéj.

Dostawa zaś, dotyczna i dosieczna danego kąta, są to: wstawa, styczna i sieczna kąta dopełniającego kąt dany.

Te sześć linij trygonometrycznych, dla krótkości, oznaczają się przez: wst (sin), dost (cos), sty (tg), dot (cotg), sie (sec), dosie (cosec).

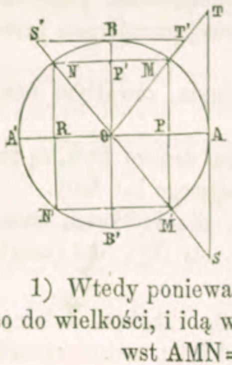
§ 6. **Znaki linij trygonometrycznych.** Wkrótce okażemy, że linie trygonometryczne jakiegokolwiek łuku, można wyrazić za pomocą linij trygonometrycznych, należących do łuku dodatniego i mniejszego od ćwierci okręgu koła. Zowie się to sprowadzaniem łuku do pierwszéj ćwiartki;— dlatego zgodzono się poczytywać za dodatnie wszystkie linie trygonometryczne należące do łuków zawartych między 0 i $\frac{\pi}{2}$; skoro zaś łuk przekroczy te granice, wtedy linie trygonometryczne zmieniają swe kierunki, i przybierają ujemne znaki; wróciwszy zaś do pierwotnych kierunków, stają się znów dodatniemi.

Stosownie do téj zasady, dopóki wstawy znajdują się nad poziomą średnicą, są dodatnie; jeżeli zaś przypadają pod poziomą średnicą, stają się ujemnemi. Dostawy leżące z prawéj strony pionowéj średnicy, są dodatnie; po lewéj zaś stronie téj średnicy, uważane są za ujemne.

Styczne i dotyczne, jeżeli mają kierunki przeciwne względem tych, jakie posiadały w pierwszéj ćwiartce, są uważane za ujemne.

Nakoniec sieczne i dosieczne, jeżeli przypadają na przedłużeniu promienia należącego do łuku danego, są dodatnie; skoro zaś rozciągają się w kierunku przeciwnym względem tego promienia, stają się ujemnemi.

§ 7. Wychodząc z téj zasady, okażemy, w jaki sposób linie trygonometryczne łuków większych od ćwierci koła, sprowadzić można do linij trygonometrycznych łuków zawartych między 0 i $\frac{\pi}{2}$.



Weźmy prostokąt MNN′M′, którego boki są równoległe do średnic prostopadłych AA′, BB′, i przypuśćmy kolejno, że punkt opisujący koło przybył do N, następnie do N′, do M′.

1) Wtedy ponieważ NR i MP, są dwie linie proste, równe co do wielkości, i idą w tym samym kierunku, więc

$$\text{wst } AMN = NR = MP = \text{wst } AM.$$

Ponieważ dwie linie proste AS i AT, są równe lecz przeciwkierunkowe, bo AS leży pod, a AT nad stałą średnicą, przeto

$$\text{sty } AMN = -AS = -AT = -\text{sty } AM.$$

Linie OS i OT, wprawdzie równe, lecz znaków przeciwnych, bo pierwsza ciągnie się w kierunku przeciwnym promieniowi opisującemu, druga zaś w kierunku tegoż promienia, dają: $\text{sie } AMN = -OS = -OT = -\text{sie } AM.$

Dostawę łuku AM, przedstawia linia MP′, albo jéj równa OP; dostawę zaś łuku AMN, przedstawia linia OR; a że te dwie linie OP i OR, posiadają przeciwne kierunki, więc:

$$\text{dos } AMN = -OR = -OP = -\text{dos } AM.$$

W podobny sposób okazać można:

$$\text{dot } AMN = -BS' = -BT' = -\ \text{dot } AM,$$
$$\text{dosie } AMN = +OS' = +OT' = +\ \text{dosie } AM.$$

2) Bezwzględną wartość dla wstawy łuku ABN′, wyobraża linia N′R; lecz ta linia leży pod stałą średnicą, wtedy gdy jéj równa MP przypada nad średnicą, ztąd:

$$\text{wst } ABN' = -N'R = -MP = -\text{wst } AM.$$

Podobnie rozumując, znajdziemy:

$$\text{sty } ABN' = +AT = +\text{sty } AM,$$
$$\text{sie } ABN' = -OT = -\text{sie } AM,$$
$$\text{dos } ABN' = -OR = -\text{dos } AM,$$
$$\text{dot } ABN' = +BT' = +\text{dot } AM,$$
$$\text{dosie } ABN' = -OT' = -\text{dosie } AM.$$

3) Biorąc nakoniec pod uwagę łuk ABB′M′, znajdziemy, że:

$$\text{wst } ABB'M' = -M'P = -MP = -\text{wst } AM.$$
$$\text{sty } ABB'M' = -AS = -AT = -\text{sty } AM.$$
$$\text{sie } ABB'M' = +OS = +OT = +\text{sie } AM.$$
$$\text{dos } ABB'M' = +OP = \qquad +\text{dos } AM.$$
$$\text{dot } ABB'M' = -BS' = -BT' = -\text{dot } AM.$$
$$\text{dosie } ABB'M' = -OS' = -OT' = -\text{dosie } AM.$$

Oznaczając łuk AM przez x, wtedy łuki AN, ABN′, ABB′M′, wyrażą się odpowiednio przez $\pi - x$, $\pi + x$, $2\pi - x$, i będzie można wypadki powyżéj dla tych łuków otrzymane, napisać w ten sposób:

1) $\text{wst}\,(\pi-x) = +\text{wst}\,x,$
$\text{sty}\,(\pi-x) = -\text{sty}\,x,$
$\text{sie}\,(\pi-x) = -\text{sie}\,x,$
$\text{dos}\,(\pi-x) = -\text{dos}\,x,$
$\text{dot}\,(\pi-x) = -\text{dot}\,x,$
$\text{dosie}\,(\pi-x) = +\,\text{dosie}\,x;$

2) $\text{wst}\,(\pi+x) = -\text{wst}\,x,$
$\text{sty}\,(\pi+x) = +\text{sty}\,x,$
$\text{sie}\,(\pi+x) = -\text{sie}\,x,$
$\text{dost}\,(\pi+x) = -\text{dos}\,x,$
$\text{dot}\,(\pi+x) = +\text{dot}\,x,$
$\text{dosie}\,(\pi+x) = -\text{dosie}\,x,$

3) $\text{wst}\,(2\pi-x) = -\text{wst}\,x,$
$\text{sty}\,(2\pi-x) = -\text{sty}\,x,$
$\text{sie}\,(2\pi-x) = +\text{sie}\,x,$
$\text{dos}\,(2\pi-x) = +\text{dos}\,x,$
$\text{dot}\,(2\pi-x) = -\text{doty}\,x,$
$\text{dosie}\,(2\pi-x) = -\text{dosie}\,x.$

§ 8. Biorąc pod uwagę łuki wyrażone przez ilości ujemne, to jest łuki AM′, AM′N′, i t. d., proste wpatrzenie się w figurę przekonywa, że

$\text{wst}\,(-x) = -\text{wst}\,x,$
$\text{sty}\,(-x) = -\text{sty}\,x,$
$\text{sie}\,(-x) = +\text{sie}\,x,$
$\text{dos}\,(-x) = +\text{dos}\,x,$
$\text{dot}\,(-x) = -\text{dot}\,x,$
$\text{dosie}\,(-x) = -\text{dosie}\,x.$

§ 9. Aby okazać, w jaki sposób stosują się powyższe wzory, przypuśćmy, że chcemy wyrazić za pomocą linij trygonometrycznych łuku mniejszego od 45^0, wszystkie linie trygonometryczne należące do łuku —978^0. Odejmując od tego łuku tyle razy po 360^0, aby reszta stała się mniejszą od obwodu koła, wypadnie na mocy powyższych wzorów, że

$$\begin{aligned}
\text{wst}\,(-978^0) &= \text{wst}\,(-258^0) = -\,\text{wst}\,258^0,\\
\text{sty}\,(-978^0) &= \text{sty}\,(-258^0) = -\,\text{sty}\,258^0,\\
\text{sie}\,(-978^0) &= \text{sie}\,(-258^0) = +\,\text{sie}\,258^0,\\
\text{dos}\,(-978^0) &= \text{dos}\,(-258^0) = +\,\text{dos}\,258^0,\\
\text{dot}\,(-978^0) &= \text{dot}\,(-258^0) = -\,\text{dot}\,258^0,\\
\text{dosie}\,(-978^0) &= \text{dosie}\,(-258^0) = -\,\text{dosie}\,258^0,
\end{aligned}$$

Jeżeli teraz od 258 odrzucimy 180^0, wówczas linie trygonometryczne łuku -258^0, a tém samém i łuku -978^0 sprowadzimy do linii luku $+12^0$, gdyż

$$\begin{aligned}
\text{wst}\,(-978^0) &= -\,\text{wst}\,258^0 = +\,\text{wst}\,78^0 = +\,\text{dos}\,12^0,\\
\text{sty}\,(-978^0) &= -\,\text{sty}\,258^0 = -\,\text{sty}\,78^0 = -\,\text{dot}\,12^0,\\
\text{sie}\,(-978^0) &= +\,\text{sie}\,258^0 = +\,\text{sie}\,78^0 = -\,\text{dosie}\,12^0,\\
\text{dos}\,(-978^0) &= +\,\text{dos}\,258^0 = -\,\text{dos}\,78^0 = -\,\text{wst}\,12^0,\\
\text{dot}\,(-978^0) &= -\,\text{dot}\,258^0 = -\,\text{dot}\,78^0 = -\,\text{sty}\,12^0,\\
\text{dosie}\,(-978^0) &= -\,\text{dosie}\,258^0 = +\,\text{dosie}\,78^0 = +\,\text{sie}\,12^0,
\end{aligned}$$

§ 10. **Zmiany wielkości linij trygonometrycznych.** Przypuśćmy, że ciało ruchome M, bieżące po obwodzie koła, wyszedłszy z punktu A, ciągle się od niego oddala, ale w kierunku dodatnim. Wpatrzenie się w ostatni rysunek, wykazuje odrazu, że

$$\begin{aligned}
\text{wst}\,0 &= \text{granicy dla } MP=0,\\
\text{sty}\,0 &= \text{granicy dla } AT=0,\\
\text{sie}\,0 &= \text{granicy dla } OT=1,\\
\text{dos}\,0 &= \text{granicy dla } OP=1.
\end{aligned}$$

Co się tyczy dosiecznéj i dotycznéj, należy uważać, że skoro punkt M zbliża się nieograniczenie do początku biegu, odległości BT' i OT' wzrastając, stają się w końcu większe od wszelkiéj granicy wielkości, możemy więc napisać, że

$$\text{dot}\,0=\infty\,,$$
$$\text{dosie}\,0=\infty\,.$$

Gdy punkt ruchomy zbliża się do B, wówczas wstawa, styczna i sieczna rosną, inne zaś linie trygonometryczne maleją. Ostateczne wartości dla tych sześciu linij trygonometrycznych będą:

$$\text{wst}\,\frac{\pi}{2} = \text{dost}\,0 = 1,$$

$$\text{sty}\,\frac{\pi}{2} = \text{doty}\,0 = \infty,$$

$$\text{sie}\,\frac{\pi}{2} = \text{dosie}\,0 = \infty,$$

$$\text{dos}\,\frac{\pi}{2} = \text{wst}\,0 = 0,$$

$$\text{dot}\,\frac{\pi}{2} = \text{sty}\,0 = 0,$$

$$\text{dosie}\,\frac{\pi}{2} = \text{sie}\,0 = 1.$$

§ 11. A ponieważ poprzednio dowiedliśmy, że wszystkie funkcye kołowe dają się sprowadzić do linij trygonometrycznych łuków zawartych w pierwszéj ćwiartce, możemy więc wyprowadzić wniosek, że

wst.	zmienia się w granicach od		-1 do $+1$.
sty.	„	„	$-\infty$ do $+\infty$,
sie.	„	„	$+1$ do $+\infty$,
			lub od -1 do $-\infty$;
dost.	„	„	-1 do $+1$,
dot.	„	„	$-\infty$ do $+\infty$,
dosie.	„	„	$+1$ do $+\infty$,
			lub od -1 do $-\infty$.

§ 12. **Związki między liniami trygonometrycznemi, należącemi do tegoż samego łuku.** Jeżeli przez x oznaczymy łuk mniejszy od ćwiartki koła, wtedy mamy: (fig. taż sama)

$$MP = \text{wst}\,x,\quad AT = \text{sty}\,x,\quad OT = \text{sie}\,x,$$
$$OP = \text{dos}\,x,\quad BT' = \text{dot}\,x,\quad OT' = \text{dosie}\,x.$$

Aby wyprowadzić związki istniejące między temi sześcioma liniami łuku x, uważmy trójkąty OPM, OAT, OBT'. Z nich wypadają równości:

$$\overline{OP}^2+\overline{PM}^2=\overline{OM}^2,\ \overline{OA}^2+\overline{AT}^2=\overline{OT}^2,\ \overline{OB}^2+\overline{BT'}^2=\overline{OT'}^2;$$

czyli:

$$\text{wst}^2 x+\text{dos}^2 x=1, \qquad (1)$$

$$1+\text{sty}^2 x=\text{sie}^2 x, \qquad (2)$$

$$1+\text{dot}^2 x=\text{dosie}^2 x. \qquad (3)$$

Porównywając zaś po dwa powyższe trójkąty jako między sobą podobne, otrzymujemy:

$$\frac{OP}{OA}=\frac{PM}{AT}=\frac{OM}{OT}\ \text{i}\ \frac{OP}{BT'}=\frac{PM}{OB}=\frac{OM'}{OT'},\ \text{i}\ \frac{OA}{BT'}=\frac{AT}{OB};$$

czyli:

$$\frac{\text{dos}\,x}{1}=\frac{\text{wst}\,x}{\text{sty}\,x}=\frac{1}{\text{sie}\,x},\ \frac{\text{dos}\,x}{\text{dot}\,x}=\frac{\text{wst}\,x}{1}=\frac{1}{\text{dosie}\,x},\ \frac{1}{\text{dot}\,x}=\frac{\text{sty}\,x}{1},$$

Z tych zaś równości wypadają następne związki:

$$\text{sty}\,x=\frac{\text{wst}\,x}{\text{dos}\,x}, \qquad (4)$$

$$\text{sie}\,x=\frac{1}{\text{dos}\,x}, \qquad (5)$$

$$\text{dot}\,x=\frac{\text{dos}\,x}{\text{wst}\,x}, \qquad (6)$$

$$\text{dosie}\,x=\frac{1}{\text{wst}\,x}, \qquad (7)$$

$$\text{sty}\,x\ \text{dot}\,x=1. \qquad (8)$$

Z tych ośmiu związków, najważniejszemi są: (1), (4), (5), (6), (7), należy je więc dobrze w pamięci zatrzymać.

Jakkolwiek powyższe związki wyprowadzone zostały ze szczegółowéj figury, jednakże są one wzorami ogólnemi, stosującemi się do wszelkich wartości łuku x, byle tylko zachowanemi były właściwe znaki przy liniach trygonometrycznych.

W saméj rzeczy, powyższe wzory przedstawiają związki między bezwzględnemi wartościami linij trygonometrycznych jakiegokolwiek łuku, i dla każdéj wielkości łuku AM, możnaby zawsze wykréślić rysunek podobny do tego, jaki nas doprowadził do powyższych wzorów. Zwracając zaś uwagę na znaki, widzimy, że związki (1), (2), (3), jako zawierające kwadraty linij trygonometrycznych, są zupełnie ogólnemi; w innych zaś wzorach, zmiana znaku przy którėjkolwiek linii nie wpłynie na zmianę wyrażenia, gdyż jak z poprzedniego wypada: styczna jest dodatnią lub ujemną, skoro wstawa z dostawą są jednakowych lub przeciwnych znaków; sieczna ma zawsze taki znak jak dostawa i t. d.

§ 13. Z pomocą powyższych sześciu wzorów, można z łatwością wyprowadzić wartości dla pięciu z tych linij wyrażone przez szóstą. Chcąc wszystkie linie wyrazić za pomocą stycznéj, należy w wartościach dla tych linij wyciągniętych z równań (5) i (7), podstawić za sieczne i dosieczne wielkości wzięte z (2) i (3), wtedy będzie:

$$\operatorname{dos} x = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sty}^2 x}}, \quad \operatorname{wst} x = \pm \frac{\operatorname{sty} x}{\sqrt{1+\operatorname{sty}^2 x}},$$

a ztąd:

$$\operatorname{sie} x = \pm \sqrt{1+\operatorname{sty}^2 x}, \quad \operatorname{dosie} x = + \frac{\sqrt{1+\operatorname{sty}^2 x}}{\operatorname{sty} x},$$

nakoniec:

$$\operatorname{dot} x = \frac{1}{\operatorname{sty} x}.$$

Często się trafia, że styczna jest daną w liczbach a zwykle w kształcie ułamku np. $\frac{m}{n}$, w takim razie powyższe wzory zamieniają się:

$$\operatorname{wst} x = \frac{\frac{m}{n}}{\sqrt{1+\frac{m^2}{n^2}}}, \quad \operatorname{dos} x = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{m^2}{n^2}}},$$

czyli:

$$\operatorname{wst} x = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}, \quad \operatorname{dos} x = \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}, \text{ i t. d.}$$

gdy $\operatorname{sty} x = \frac{3}{4}$; znajdziemy, że $\operatorname{wst} x = \frac{3}{5}$, $\operatorname{dost} x = \frac{4}{5}$,

$\operatorname{sty} x = \frac{1}{3}$, $\operatorname{wst} x = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\operatorname{dost} x = \frac{3}{\sqrt{10}}$ et

Gdybyśmy mieli wiadomą tylko np. wstawę kąta a, to inne linie trygonometryczne znajdą się z wzorów następujących, które łatwo z powyższych sześciu głównych związków wyprowadzić można:

$$\text{dos}\, a = \sqrt{1 - \text{wst}^2 a},\ \text{sty}\, a = \frac{\text{wst}\, a}{\sqrt{1-\text{wst}^2 a}},\ \text{dot}\, a = \frac{\sqrt{1-\text{dos}^2 a}}{\text{wst}\, a},$$

$$\text{sie}\, a = \frac{1}{\sqrt{1-\text{wst}^2 a}},\ \text{dosie}\, a = \frac{1}{\text{wst}\, a}.$$

§ 14. O łukach odpowiadających danéj linii trygonometrycznéj. Jakkolwiek jeden łuk ma tylko jednę wstawę, dostawę, styczną...; lecz na odwrót taż sama wstawa, styczna... może należéć do nieskończonéj liczby łuków.

I tak, załóżmy sobie znaleźć wszelkie łuki posiadające jednę wspólną wstawę, któréj długość niech będzie b; oznaczając te łuki przez x, będzie wst $x = b$.

Jeżeli ilość b jest dodatnią, to odetnijmy jéj długość na promieniu OB od O do C, i przez C poprowadźmy linię równoległą od średnicy AA′. Wszystkie łuki tak dodatnie jak i ujemne które się kończą w punktach M i N, posiadać będą wstawę równą b, i nawzajem wszystkie łuki odpowiadające téj wstawie kończyć się muszą w M lub N. Oznaczmy najmniejszy łuk dodatni AM przez a, połowę obwodu koła przez π, wtedy łuki idące od A ku M i kończące się w M, wyrażą się szeregiem:

$$a,\ 2\pi + a,\ 4\pi + a,\ 6\pi + a \ldots\ldots \qquad (1)$$

A że łuk AMN$=\pi - a$, przeto wszystkie dodatnie łuki kończące się w N, wyrażą się przez szereg:

$$\pi - a,\ 3\pi - a,\ 5\pi - a \ldots\ldots \qquad (2)$$

Lecz w punktach M i N kończą się łuki ujemne, a mianowicie; ADA′NM$= -2\pi + a$; ADA′N$= -\pi - a$, do nich dodając jakąkolkwiek liczbę ujemną okręgów koła, otrzymamy dwa następne szeregi łuków mających także wstawę$=b$:

$$-2\pi+\alpha,\quad -4\pi+\alpha,\quad -6\pi+\alpha,\ldots.. \qquad (3)$$
$$-\pi-\alpha,\quad -3\pi-\alpha,\quad -5\pi-\alpha\ldots.. \qquad (4)$$

Łuki objęte szeregami (1) i (3), mogą być przedstawione wzorem:
$$2k\pi+\alpha. \qquad (5)$$

Łuki zaś zawarte we wzorach (2) i (4), zamkną się w wyrażeniu:
$$(2k+1)\pi-\alpha, \qquad (6)$$
gdzie k uważać należy za liczbę całkowitą dodatnią lub ujemną lub nawet za zero.

Gdyby dana wstawa czyli b miała wartość ujemną, wtedy jéj długość odcięlibyśmy od O ku C', i wtedy prowadząc przez C' linię równoległą od AA', wypadłyby dwa punkta N' i M' na których kończą się wszystkie łuki tak dodatnie jak i ujemne, odpowiadające tejże saméj wstawie$=-b$. Oznaczywszy łuk mniejszy ABN' przez α, wypadną szeregi:

$$\alpha,\quad 2\pi+\alpha,\quad 4\pi+\alpha,\ldots..$$
$$3\pi-\alpha,\quad 5\pi-\alpha,\quad 7\pi-\alpha,\ldots..$$
$$-2\pi+\alpha,\quad -4\pi+\alpha,\quad -6\pi+\alpha,\ldots..$$
$$+\pi+\alpha,\quad -\pi-\alpha,\quad -3\pi-\alpha.\ldots..$$

które także zawrzéć można w dwóch wzorach:
$$2k\pi+\alpha,\quad (2k+1)\pi-\alpha.$$

Z tych dwóch przypadków odpowiadających wstawie dodatniéj i wstawie ujemnéj, przekonywamy się na mocy wzorów (5) i (6), że chcąc *aby dwa łuki posiadały tęż samą wstawę,* potrzeba *iżby ich różnica wynosiła pewną liczbę okręgów koła nie wyłączając zera*, albo *iżby summa ich wynosiła nieparzystą liczbę półokręgów.*

§ 15. Rozumując w podobny sposób, przekonamy się, że danéj dostawie odpowiada nieskończona liczba łuków dodatnich i ujemnych, które wszystkie zawrzéć można we wzorze:
$$2k\pi\pm\alpha, \qquad (7)$$
gdzie k jest liczbą dodatnią całkowitą lub ujemną albo nawet zero.

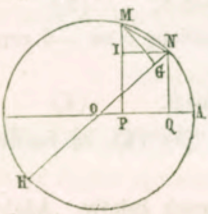
Ten wzór naucza, *że chcąc aby dwa łuki miały tęż samą dostawę,* dosyć jest *aby ich różnica lub summa czyniła pewną liczbę okręgów koła nie wyłączając zera.*

Szukając podobnie łuków odpowiadających danéj stycznéj, dojdziemy do szeregów, w których zawarte łuki dadzą się wyrazić wzorem:

$$\alpha + k\pi.$$

§ 16. **Wstawa i dostawa summy lub różnicy dwóch łuków.** Przypuśćmy naprzód, że mając dane wstawy i dostawy dwóch łuków a i b, zamierzamy oznaczyć dost $(a-b)$.

W tym celu odetnijmy od początku A na obwodzie koła długości $AM=a$, $AN=b$, w kierunku stosownym do znaków poprzedzających wielkości a i b; spuśćmy następnie na OA prostopadłe MP, QN, poprowadźmy cięciwę MN i średnicę NOH, i nakoniec wykreślmy prostopadłą MG do NH, i NI równoległą do OA. Trójkąt prostokątny MIN, we wszelkich przypadkach wykreślenia daje:



$$\overline{MN}^2 = (\text{wst}\, a - \text{wst}\, b)^2 + (\text{dos}\, a - \text{dos}\, b)^2.$$

Na przypadek gdyby punkt P upadł w lewo od środka, a punkt N pod średnicą OA, wtedy byłoby:

$$MI = MP + NQ = \text{wst}\, a + (-\text{wst}\, b) = \text{wst}\, a - \text{wst}\, b,$$
$$IN = OP + OQ = \text{dos}\, a + \text{dos}\, b, \text{ i t. d.}$$

Aby wyrugować linią MN, uważmy, że ta cięciwa jest średnio proporcyonalna między HN i GN; a że ostatnia linia przy jakiemkolwiek położeniu punktu G zawsze jest równą $1-\text{dos}\,(a-b)$, przeto:

$$\overline{MN}^2 = 2[1 - \text{dos}\,(a-b)].$$

Porównywając te dwie wartości dla $\overline{MN}^2$, i pamiętając przytém że $\text{wst}^2 a + \text{dos}^2 a = 1$, $\text{wst}^2 b + \text{dos}^2 b = 1$, otrzymamy ogólny wzór:

$$\text{dos}\,(a-b) = \text{dos}\, a\ \text{dos}\, b + \text{wst}\, a\ \text{wst}\, b. \qquad (1)$$

Równanie to stosuje się do wszelkich wartości dla a i dla b tak dodatnich jak i ujemnych. Chcąc więc otrzymać wzór dla dos $(a+b)$, należy w powyższym wzorze zmienić b na $-b$, i będzie:

$$\text{dos}\,(a+b)=\text{dos}\,a\;\text{dos}\,b-\text{wst}\,a\;\text{wst}\,b. \qquad (2)$$

Podobnie zastępując we wzorze (1), łuk a przez łuk $a+\frac{\pi}{2}$ otrzymamy:

$$\text{dos}\left(a+\frac{\pi}{2}-b\right)=\text{dos}\left(a+\frac{\pi}{2}\right)\text{dos}\,b+\text{wst}\left(a+\frac{\pi}{2}\right)\text{wst}\,b,$$

czyli:

$$\text{wst}\,(a-b)=\text{wst}\,a\;\text{dos}\,b-\text{dos}\,a\;\text{wst}\,b. \qquad (3)$$

Nakoniec ten ostatni wzór przez zamianę b na $-b$ prowadzi do wyrażenia:

$$\text{wst}\,(a+b)=\text{wst}\,a\;\text{dos}\,b+\text{wst}\,a\;\text{dos}\,b. \qquad (4)$$

Wszystkie te cztery wzory (1), (2), (3), (4), są bardzo często używane.

§ 17. Styczna summy lub różnicy dwóch łuków. Ażeby sty $(a\pm b)$ wyrazić w funkcyi sty a, sty b, dostateczną będzie rzeczą rozdzielić przez siebie strony równań (4) i (2) albo równań (3) i (1), pamiętając przytém że styczna jest stosunkiem wstawy do dostawy (§ 12). W saméj rzeczy otrzymujemy:

$$\text{sty}\,(a\pm b)=\frac{\text{wst}\,a\;\text{dos}\,b\pm\text{wst}\,b\;\text{dos}\,a}{\text{dos}\,a\;\text{dos}\,b\mp\text{wst}\,a\;\text{wst}\,b}=\frac{\dfrac{\text{wst}\,a}{\text{dos}\,a}\pm\dfrac{\text{wst}\,b}{\text{dos}\,b}}{1\mp\dfrac{\text{wst}\,a\;\text{dos}\,b}{\text{dos}\,a\;\text{dos}\,b}},$$

czyli:

$$\text{sty}(a\pm b)=\frac{\text{sty}\,a\pm\text{sty}\,b}{1\mp\text{sty}\,a\;\text{sty}\,b}, \qquad (5)$$

Gdybyśmy w tym wzorze przypuścili, że łuk $a=45^0$, wtedy pomnąc na to, że sty 45^0=promieniowi$=1$, wypadnie z powyższego:

$$\text{sty}\,(45^0\pm b)=\frac{1\pm\text{sty}\,b}{1\mp\text{sty}\,b}.$$

W tym podwójnym wzorze należy brać jednocześnie albo górne znaki albo same dolne znaki.

§ 18. **Wzory na wst $2a$, dos $2a$, sty $2a$.** Jeżeli w powyższych wzorach na wstawę, dostawę, styczną summy dwóch łuków, założymy $a=b$, wtedy otrzymamy:

$$\text{dos}\,2a=\text{dos}^2 a-\text{wst}^2 a, \tag{6}$$

$$\text{wst}\,2a=2\,\text{wst}\,a\,\text{dos}\,a, \tag{7}$$

$$\text{sty}\,2a=\frac{2\,\text{sty}\,a}{1-\text{sty}^2 a}. \tag{8}$$

§ 19. **Wzory na wst $\frac{1}{2}a$, dos $\frac{1}{2}a$, sty $\frac{1}{2}a$, wst $\frac{a}{3}$....** W równaniu (6) kładąc $\frac{a}{2}$ zamiast łuku a, wypada:

$$\text{dos}\,a=\text{dos}^2\frac{a}{2}-\text{wst}^2\frac{a}{2},$$

a że ilości nieznane dost $\frac{a}{2}$, wst $\frac{a}{2}$, winny jednocześnie zadosyć czynić ogólnemu związkowi:

$$1=\text{dos}^2\frac{a}{2}+\text{wst}^2\frac{a}{2},$$

do którego raz dodając, drugi raz odejmując poprzednie wyrażenie, otrzymamy:

$$1+\text{dost}\,a=2\,\text{dost}^2\frac{a}{2},\quad 1-\text{dos}\,a=2\,\text{wst}^2\frac{a}{2}.$$

Z nich po rozdzieleniu przez 2 i wyciągnieniu pierwiastku, mamy:

$$\text{dos}\,\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\text{dos}\,a}{2}},\ (9)\qquad \text{wst}\,\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\text{dos}\,a}{2}},\ (10).$$

Dwie wartości dla wst $\frac{a}{2}$, dos $\frac{a}{2}$, rozdzielone przez siebie, prowadzą do wzoru:

$$\text{sty}\,\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\text{dos}\,a}{1+\text{dos}\,a}}, \tag{11}$$

Wzory Moivre. Chcąc obliczyć wst $\frac{a}{3}$ za pomocą wst a, należy ułożyć równanie związek wyrażające, między wstawami tych dwóch łuków. W tym celu naprzód we wzorze na wst $(a+b)$ podstawiając $2a$ za b, tojest $b=2a$, wypadnie:

$$\text{wst } 3a = \text{wst } a \text{ dos } 2a + \text{wst } 2a \text{ dos } a,$$

a że:

$$\text{wst } 2a = 2 \text{ wst } a \text{ dos } a, \text{ dos } 2a = 1 - 2 \text{ wst}^2 a,$$

przeto:

$$\text{wst } 3a = \text{wst } a - 2 \text{ wst}^3 a + 2 \text{ wst } a \text{ dos}^2 a.$$

Zastępując tu $\text{dos}^2 a$ przez $(1 - \text{wst}^2 a)$ i skracając, będzie ostatecznie:

$$\text{wst } 3a = 3 \text{ wst } a - 4 \text{ wst}^3 a.$$

Jeżeli dopiéro w tém równaniu w miejscu a napiszemy $\frac{a}{3}$, wtedy po przeniesieniu i rozdzieleniu wszystkich wyrazów przez 4, wypadnie równanie:

$$\text{wst}^3 \frac{a}{3} - \frac{3}{4} \text{ wst } \frac{a}{3} + \frac{1}{4} \text{ wst } a = 0,$$

które dla wst $\frac{a}{3}$, da żądane rozwiązania.

W podobny postępując sposób, można wyrazić dost $\frac{a}{3}$ za pomocą dos a; równanie oznaczające związek między temi wielkościami, będzie:

$$\text{dos}^3 \frac{a}{3} - \frac{3}{4} \text{ dos } \frac{a}{3} - \frac{1}{4} \text{ dos } a = 0.$$

Łatwoby można tą drogą dojść do wyrażeń na wst $\frac{a}{5}$, dos $\frac{a}{5}$, wst $\frac{a}{7}$, dos $\frac{a}{7}$... w funkcyi wst a, dos a.

Jednakże istnieje ogólniejszy sposób wyrażenia wst $\frac{a}{m}$ lub dos $\frac{a}{m}$, w funkcyi wst a i dost a, wypływający z bardzo ważnego twierdzenia podanego przez francuzkiego geometrę *Moivre*. To twierdzenie wypada więc przytoczyć.

Niech będą dwa wyrażenia:

$$\text{dos } a + \sqrt{-1} \text{ wst } a, \text{ i dos } b + \sqrt{-1} \text{ wst } b.$$

Rozmnożywszy je przez siebie, wypadnie:

$(\text{dos}\, a \text{ dos}\, b - \text{wst}\, a \text{ wst}\, b) + \sqrt{-1}\,(\text{dos}\, a \text{ wst}\, b + \text{dos}\, b \text{ wst}\, a)$, co na mocy znanych wzorów na wstawę i dostawę summy dwóch łuków, można napisać w ten sposób:

$$\text{dos}\,(a+b) + \sqrt{-1}\ \text{wst}\,(a+b);$$

ztąd:

$$(\text{dos}\, a + \sqrt{-1}\ \text{wst}\, a)\,(\text{dos}\, b + \sqrt{-1}\ \text{wst}\, b) = \text{dos}(a+b) + \sqrt{-1}\ \text{wst}\,(a+b).$$

A więc iloczyn dwóch czynników kształtu $(\text{dos}\ a + \sqrt{-1}\ \text{wst}\, a)$, posiada takąż samą postać jak te czynniki, tylko że zamiast jednego łuku należy podstawić summę uważanych łuków.

Wynika ztąd, że iloczyn trzech czynników:

$$\text{dos}\, a + \sqrt{-1}\ \text{wst}\ a,$$
$$\text{dos}\, b + \sqrt{-1}\ \text{wst}\ b,$$
$$\text{dos}\, c + \sqrt{-1}\ \text{wst}\ c,$$

będzie się równał:

$$\text{dos}\,(a+b+c) + \sqrt{1-}\ \text{wst}\,(a+b+c);\ \text{i t. d.}$$

Gdybyśmy więc chcieli dwumian $(\text{dos}\ a + \sqrt{-1}\ \text{wst}\ a)$ podnieść do potęgi m, czyli gdybyśmy wzięli iloczyn z m czynników jednakowych i równych poprzedniemu, to wypadłoby

$$(\text{dos}\ a + \sqrt{-1}\ \text{wst}\ a)^m = \text{dos}\ ma + \sqrt{-1}\ \text{wst}\ ma.$$

I to właśnie stanowi twierdzenie Moivre. Wprawdzie powyższy dowód tego twierdzenia służy tylko na przypadek gdy wykładnik m jest liczbą całą i dodatnią; lecz ponieważ potrzebujemy tego twierdzenia w tych tylko szczególnych przypadkach, możemy więc na nim poprzestać, pomijając inne ogólniejsze dowodzenie.

Rozwijając potęgę m dwumianu we wzorze Moivre, i wyrzucając $\sqrt{-1}$ za nawias w wyrazach posiadających ten pierwiastek, wypadnie równanie kształtu:

$$\text{dos}\ ma + \sqrt{-1}\ \text{wst}\ ma = \text{A} + \text{B}\sqrt{-1},$$

które to równanie pociąga za sobą koniecznie dwie następujące równości:

$$\text{dos}\, m\, a = \text{A};\ \text{wst}\, m a = \text{B};$$

(gdyż inaczéj równanie które z powyższego otrzymujemy, po przeniesieniu odpowiednich wyrazów, mianowicie:

$$(\text{dost}\, m\, a - \text{A}) = -\sqrt{-1}\,(\text{wst}\, m\, a - \text{B}),$$

istniéćby nie mogło).

Jeżeli podstawiemy w te dwie warunkowe równości za A i za B ich znaczenia z rozwinięcia potęgi dwumianu $(\text{dos}\, a + \sqrt{-1}\ \text{wst}\, a)^m$ otrzymane, wypadnie:

$$\text{dos}\, m a = \text{dos}^m a - \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\,\text{dos}\, a^{m-2}\ \text{wst}^2 a +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,\text{dos}\, a^{m-4}\ \text{wst}^4 a + \text{i t. d.},$$

$$\text{wst}\, m a = m\, \text{dos}\, a^{m-1}\ \text{wst}\, a - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,\text{dos}\, a^{m-3}\ \text{wst}^3 +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\,\text{dos}\, a^{m-5}\ \text{wst}^5 a - \text{i t. d.}$$

Z tych wzorów, podstawiwszy $\frac{a}{m}$ zamiast a, wyciągają się równania stopnia m^{tego} z pomocą których obliczyć się dadzą $\text{dos}\,\frac{a}{m}$, $\text{wst}\,\frac{a}{m}$.

§ 20. **Przemiana summy lub różnicy linij trygonometrycznych w iloczyny lub ilorazy.** Równania (1), (2), (3), (4), § 16, przez dodawanie i odejmowanie prowadzą do:

$$\text{wst}\,(a+b) + \text{wst}\,(a-b) = 2\ \text{wst}\, a\ \text{dos}\, b,$$
$$\text{wst}\,(a+b) - \text{wst}\,(a-b) = 2\ \text{wst}\, b\ \text{dos}\, a,$$
$$\text{dos}\,(a+b) + \text{dos}\,(a-b) = 2\ \text{dos}\, a\ \text{dos}\, b,$$
$$\text{dos}\,(a+b) - \text{dos}\,(a-b) = -2\ \text{wst}\, a\ \text{wst}\, b,$$

W tych wyrażeniach założywszy

$$a+b=p,\ a-b=q,$$

zkąd: $a=\frac{1}{2}(p+q),\ b=\frac{1}{2}(p-q);$

wtedy wypadnie:

$$\text{wst}\,p+\text{wst}\,q=2\,\text{wst}\,\tfrac{1}{2}(p+q)\,\text{dos}\,\tfrac{1}{2}(p-q)\ldots\quad(12)$$
$$\text{wst}\,p-\text{wst}\,q=2\,\text{wst}\,\tfrac{1}{2}(p-q)\,\text{dos}\,\tfrac{1}{2}(p+q)\ldots\quad(13)$$
$$\text{dos}\,p+\text{dos}\,q=2\,\text{dos}\,\tfrac{1}{2}(p+q)\,\text{dos}\,\tfrac{1}{2}(p-q)\ldots\quad(14)$$
$$\text{dos}\,p-\text{dos}\,q=-2\,\text{wst}\,\tfrac{1}{2}(p+q)\,\text{wst}\,\tfrac{1}{2}(p-q)\ldots\quad(15)$$

Wzory te ostatnie służą do obrachowania za pomocą logarytmów, summy lub różnicy dwóch wstaw albo dwóch dostaw. Można je tak wysłowić:

Summa dwóch wstaw równa się dwa razy wziętéj wstawie połowy summy łuków przez dostawę połowy ich różnicy.

Różnica dwóch wstaw wyrównywa dwa razy wziętéj wstawie połowy różnicy, przez dostawę połowy summy danych łuków i t. d.

§ 21. Wzory powyższe: (12), (13), (14), (15), prowadzą do wielu innych formuł używanych w rachunkach. I tak łącząc je przez dzielenie, wypadają wyrażenia:

$$\frac{\text{wst}\,p+\text{wst}\,q}{\text{wst}\,p-\text{wst}\,q}=\frac{\text{sty}\,\frac{1}{2}(p+q)}{\text{sty}\,\frac{1}{2}(p-q)},$$

$$\frac{\text{wst}\,p+\text{wst}\,q}{\text{dos}\,p+\text{dos}\,q}=\text{sty}\,\tfrac{1}{2}(p+q),$$

$$\frac{\text{dos}\,p+\text{dos}\,q}{\text{dos}\,q-\text{dos}\,p}=\text{dot}\,\tfrac{1}{2}(p+q)\,\text{dot}\,\tfrac{1}{2}(p-q)=\frac{\text{dot}\,\frac{1}{2}(p-q)}{\text{sty}\,\frac{1}{2}(p+q)}\ \text{i t.d.}$$

Z nich najczęściéj używany pierwszy, wyrazić można w ten sposób: *summa wstaw dwóch łuków ma się do różnicy wstaw tychże łuków, jak styczna połowy summy do stycznéj połowy różnicy tychże łuków.*

§ 22. Chcąc summę lub różnicę dwóch stycznych albo dotycznych wyrazić za pomocą iloczynu pewnych linij trygonometrycznych, należy uważać, że

$$\text{sty}\,a+\text{sty}\,b=\frac{\text{wst}\,a}{\text{dos}\,a}+\frac{\text{wst}\,b}{\text{dos}\,b}=\frac{\text{wst}\,a\ \text{dos}\,b+\text{wst}\,b\ \text{dos}\,a}{\text{dos}\,a\ \text{dos}\,b}$$

$$=\frac{\text{wst}\,(a+b)}{\text{dos}\,a\ \text{dos}\,b},$$

podobnie:

$$\text{sty } a - \text{sty } b = \frac{\text{wst } a}{\text{dos } b} - \frac{\text{wst } b}{\text{dos } b} = \frac{\text{wst } (a-b)}{\text{dos } a \text{ dos } b},$$

$$\text{dot } a + \text{dot } b = \frac{\text{wst } (a+b)}{\text{wst } a \text{ wst } b},$$

$$\text{dot } a - \text{dot } b = \frac{\text{wst } (a-b)}{\text{wst } a \text{ wst } b},$$

Z tychże wzorów wypada:

$$\frac{\text{sty } a + \text{sty } b}{\text{sty } a - \text{sty } b} = \frac{\text{wst } (a+b)}{\text{wst } (a-b)}, \quad \frac{\text{dot } a + \text{dot } b}{\text{dot } a - \text{dot } b} = \frac{\text{wst } (a+b)}{\text{wst } (a-b)},$$

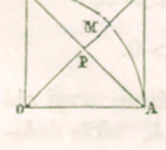
$$\frac{\text{sty } a + \text{sty } b}{\text{dot } a + \text{dot } b} = \text{sty } a \text{ sty } b \text{ i t. d.}$$

ROZDZIAŁ II.

§ 23. **Obrachowanie tablic trygonometrycznych.** Tablice trygonometryczne znajdujące się zwykle za tablicami logarytmów liczb, obejmują wstawy, dostawy, styczne i dotyczne wszystkich łuków co $10''$ zacząwszy od 0^0 do 90^0; albo mówiąc dokładniéj, w tablicach tych zawarte są logarytmy powyższych linij trygonometrycznych. Sposoby obrachowania tych tablic polegają na teoryach wyższéj matematyki: tu poprzestaniemy jedynie na wskazaniu metody, za pomocą któréj można dojść wielkości wstawy łuku $10''$, a następnie innych łuków wielokrotnych względem tego łuku.

Dlatego dowiedziemy naprzód następującéj prawdy:

Wszelki łuk mniejszy od ćwiartki koła, zawarty jest między wstawą i styczną.



Niech AT będzie styczną łuku AM $= x$ mniejszego od ćwiartki koła; odcinając A′M $=$ AM i prowadząc A′T i APA′, wtedy na mocy symetryczności tego wykreślenia względem OT, wypada:

$$AT = A'T = \text{sty}\, x, \quad AA' = 2\ AP = 2 \text{wst}\, x.$$

Lecz wypukła linia AMA′ jako objęta, mniejszą jest od łamanéj ATA′ obejmującéj; nadto linia krzywa AM′A jest dłuższą od prostéj APA′, więc:

$$2 \text{ wst } x < 2\,x < 2 \text{ sty } x,$$

ztąd:

$$\text{wst } x < x < \text{sty } x.$$

Uwaga. — Cięciwa AA′ podtrzymująca łuk AMA′, jest dwa razy większą od AP będącéj wstawą łuku AM; z tego powodu można powiedzieć, że: *wstawa łuku mniejszego od ćwierci koła, jest połową cięciwy podpierającéj łuk podwójny*.

Zdaje się, że ta własność dała powód do nazwy *sinus*, oznaczającéj wstawę w języku łacińskim; jestto bwiem skróceniem dwóch wyrazów *semi inscripta* czyli *s. ins.*

§. 24. Twierdzenie.— *Stosunek zachodzący między łukiem mniejszym od ćwierci koła a jego wstawą, rośnie wraz z łukiem.*

Tojest, nazywając przez x i $x+h$ dwa łuki dodatnie mniejsze od $\frac{\pi}{2}$, twierdzimy, że:

$$\frac{x+h}{\text{wst }(x+h)} > \frac{x}{\text{wst } x}.$$

W saméj rzeczy, z powyższéj nierówności wypada, że:

$$(x+h) \text{ wst } x > x \text{ wst } (x+h),$$

czyli:

$$(x+h) \text{ wst } x - x \,(\text{wst } x \text{ dos } h + \text{wst } h \text{ dos } x) > 0,$$

$$(x+h) \text{ sty } x - x \,(\text{sty } x \text{ dost } h + \text{wst } h) > 0,$$

czyli:

$$x \text{ sty } x \,(1 - \text{dos } h) + h \text{ sty } x - x \text{ wst } h > 0,$$

$$\text{sty } x \left(\frac{1-\text{dos } h}{h}\right) + \left(\frac{\text{sty } x}{x} - \frac{\text{wst } h}{h}\right) > 0.$$

W téj nierowności pierwszy wyraz jest dodatni; drugi zaś wyraz, z przyczyny że sty $x > x$, i że wst $h < h$, także dodatnim być musi; więc założenie na mocy którego doszliśmy do téj ostatniéj nierówności, jest prawdziwém.

Twierdzenie.—*Stosunek między łukiem a wstawą, zmniejszający się wraz z łukiem, ma za granicę jedność.*

Powyżéj znaleźliśmy:

$$\text{wst}\, x < x < \text{sty}\, x.$$

Ta podwójna nierówność, z powodu że $\text{sty}\, x = \frac{\text{wst}\, x}{\text{dos}\, x}$, zamienić można na:

$$1 < \frac{x}{\text{wst}\, x} < \frac{1}{\text{dos}\, x}.$$

Skoro x maleje, dos x zbliża się do jedności, tojest do swéj granicy; stosunek więc łuku do wstawy jest zawarty między jednością a ilością, mającą także jedność za granicę; przeto jedność musi być granicą i dla stosunku który badamy.

Twierdzenie.—*Przewyżka łuku nad jego wstawę, mniejszą jest od czwartéj części sześcianu z tegoż łuku.*

Z nierówności sty $x > x$, po zamienieniu x na $\frac{1}{2}x$ wypada:

$$\frac{\text{wst}\, \frac{1}{2}x}{\text{dos}\, \frac{1}{2}x} > \frac{1}{2}x,$$

czyli:

$$\text{wst}\, \tfrac{1}{2}x > \tfrac{1}{2}x\, \text{dos}\, \tfrac{1}{2}x.$$

Mnożąc obie strony przez 2 dos $\frac{1}{2}x$, będzie:

$$\text{wst}\, x > x\, \text{dos}^2\, \tfrac{1}{2}x,$$

czyli:

$$\text{wst}\, x > x\,(1 - \text{wst}^2\, \tfrac{1}{2}x),$$

gdzie podstawiając łuk $\frac{1}{2}x$ za wst $\frac{1}{2}x$, tém bardziéj powyższa nierówność istnieć nie przestanie, tojest:

$$\text{wst}\, x > x\left(1 - \frac{x^2}{4}\right),$$

ztąd:

$$x - \text{wst}\, x < \tfrac{1}{4}x^3.$$

§ 25. Zadanie.— *Obliczyć w dwunastu cyfrach dziesiętnych wartość wstawy 10″.*

Zacznijmy najprzód od wyrachowania długości tego łuku. Ponieważ pół okręgu zawiera $180 \times 60 \times 6$ dziesiątek sekund, przeto żądany łuk, który nazwijmy przez x, będzie:

$$x = \frac{\pi}{180 \times 60 \times 6} = \frac{\pi}{64800},$$

A że:

$$\pi = 3{,}141\,592\,653\,589\,793....,$$

więc łuk:

$$10'' = 0{,}000\,048\,481\,368\,110....$$

Wstawa jest mniejszą od łuku, więc wypada odrazu, że:

$$\text{wst}\ 10'' < 0{,}000\,048\,481\,368\,110.$$

Z drugiéj strony, na mocy poprzedniego twierdzenia mamy:

$$\text{wst}\ 10'' > 0{,}000\,048\,481\,368\,110 - \tfrac{1}{4}\,(0{,}000\,048...)^3,$$

tém więc bardziéj:

$$\text{wst}\ 10'' > 0{,}000\,048\,481\,368\,110 - \tfrac{1}{4}\,(0{,}000\,05)^3,$$

czyli:

$$\text{wst}\ 10'' > 0{,}000\,048\,481\,368\,110 - 0{,}000\,000\,000\,000\,031...$$

to jest, że:

$$\text{wst}\ 10'' > 0{,}000\,048\,481\,368\,079...$$

Ponieważ więc wartość szukana dla wst $10''$ zawartą jest między dwoma liczbami, mającemi dwanaście wspólnych cyfr dziesiętnych, przeto przyjmując, że:

$$\text{wst}\ 10'' = 0{,}000\,048\,481\,368,$$

popełniamy błąd mniejszy od jednostki dwunastego rzędu.

§ 26. *Wstawy i dostawy łuków wielokrotnych względem 10''.*—Znając wst $10''$, otrzymamy dos $10''$ z pomocą wzoru dos $10'' = \sqrt{1 - \text{wst}^2\ 10''}$; a poznawszy wielkości dla tych dwóch linij, można, opierając się na wzorach powyżéj wyprowadzonych, stopniowo obliczać wstawy i dostawy $20''$, $30''$..., aż do 45^0.

Jednakże podobne rachunki krócéj dają się wykonać według następnego sposobu podanego przez Tomasza Simpson.

I tak, jeżeli w dawniéj dowiedzionych wzorach:

$$\text{wst}\,(a+b)+\text{wst}\,(a-b)=2\ \text{wst}\,a\ \text{dos}\,b,$$
$$\text{dos}\,(a+b)+\text{dos}\,(a-b)=2\ \text{dos}\,a\ \text{dos}\,b,$$

założymy $b=x$, $a=mx$, wypadnie:

$$\text{wst}\,(m+1)\,x+\text{wst}\,(m-1)\,x=2\ \text{wst}\,mx\ \text{dos}\,x,$$
$$\text{dos}\,(m+1)\,x+\text{dos}\,(m-1)\,x=2\ \text{dos}\,mx\ \text{dos}\,x,$$

czyli:

$$\text{wst}\,(m+1)\,x=\text{wst}\,mx.\ 2\ \text{dos}\,x-\text{wst}\,(m-1)\,x,$$
$$\text{dos}\,(m+1)\,x=\text{dos}\,mx.\ 2\ \text{dos}\,x-\text{dos}\,(m-1)\,x,$$

Te dwa wzory wyprowadzone przez Simpsona, wykazują prawo tworzenia się wstaw i dostaw łuków wielokrotnych względem łuku x. I można to prawo wysłowić w ten sposób: *Którykolwiek wyraz wzięty z szeregu po sobie idących wstaw, wyrównywa summie dwóch poprzedzających go wyrazów, z których pierwszy pomnożyć tylko należy przez 2 dos* x, *a drugi przez* —1. Toż samo prawo stosuje się i do dostaw łuków po sobie idących.

Obrachowawszy wstawy i dostawy łuków co 10″, wynajdują się logarytmy tych wielkości i wypisują się w kolumnach obok odpowiadających im łuków 10″, 20″, 30″....

Co się tyczy logarytmów stycznych, siecznych i t. d., te bezpośrednio wyprowadzają się z innych linij trygonometrycznych, gdyż:

$$\log \text{sty}\,x=\log \text{wst}\,x-\log \text{dos}\,x,$$
$$\log \text{sie}\,x=-\log \text{dost}\,x....\ \text{i t. d.}$$

§ 27. **Użycie tablic trygonometrycznych.** Tablice trygonometryczne obrachowywane są zwykle tylko dla czterech linij, na wszelkie wartości kąta ostrego uważanego w trójkącie prostokątnym, którego przeciwprostokątnia jest jednością. Lecz ponieważ funkcye trygonometryczne są po większéj części ułomkami właściwemi (wstawa, dostawa), których logarytmy, jak wiadomo, są liczbami ujemnemi, przeto dla uniknienia rozmaitości znaków podczas działań logarytmami, zgodzono się za promień (tojest: przeciwprostokątnią trójkąta prostokątnego) brać nie jedność lecz 10,000 milionów, tojest jedność z 10ma zerami; przez to log np. wst 90^0 zamiast zera będzie 10.

Tym sposobem, wszystkie jak najmniejsze kąty, dawać zawsze będą dodatnie logarytmy dla linij trygonometrycznych: np. jeżeli wstawa pewnego kąta przy promieniu 1 byłaby ułamkiem $\frac{1}{100000}$, to taż sama wstawa w przypuszczeniu, że promień jest 10000 milionów, będzie równą 100000; zamiast więc log. $\frac{1}{100000} = -5,0000$, będziemy mieli log. $100000 = 5,0000$...

Mając to na uwadze, pamiętać jeszcze należy przy użyciu tablic trygonometrycznych, że:

1) Szukając w tablicach kąta odpowiadającego logarytmowi wypadłemu z rachunku (w którym zawsze przypuszczamy promień równy jedności), potrzeba poprzednio logarytm zwiększyć w charakterystyce o 10 jedności. Jeżeli więc do rachunku weszło takich logarytmów, dwa, trzy, i t. d., to summa z dodania ich wypadła jest za wielką o 20, 30, 40... całych jednostek; a gdy tę summę rozdzielimy np. przez dwa, to wypadek z dzielenia jeszcze o 10, 15, 20... jednostek będzie za wielki.

Powyżéj przywiedziona zasada nie stosuje się jednak do stycznych łuków większych od 45^0, i do dotycznych kątów mniejszych od 45^0; te bowiem linie trygonometryczne, jak o tém łatwo się przekonać, są większe od promienia, ich więc logarytmy muszą być większe od 10.

2) Odwrotnie biorąc z tablic trygonometrycznych, logarytm do użycia rachunkowego należy go zawsze zmniejszyć o 10 jednostek.

3) Zwiększanie się logarytmów wst., dost., sty., dot., jest prawie proporcyonalne do przyrostów łuku, skoro te przyrostki są bardzo małe.

Przy użyciu tablic trygonometrycznych, zwracać należy jeszcze uwagę i na to, że ponieważ wstawy, styczne, rosną w miarę zwiększania się kąta od 0^0 do 90^0, a dostawy, dotyczne, ciągle maleją; przeto, chcąc znaleźć z tablic logarytm wst. kąta większego o parę sekund, to wiadomą różnicę (diff. w tablicach) odpowiadającą każdéj sekundzie łuku po rozmnożeniu przez liczbę sekund, należy dodawać do log. wst. i log. sty., a odejmować do log. dos. i log. dot.

Np. log wst $10^0\,36'\,25''=$log wst $10^0\,36'+20''+5.$ diff.
$=9{,}264\,927\,9+5.112{,}5=$
$=9{,}264\,984\,1.$

log dos $10^0\,36'\,25''=$log dos $10^0\,36'\,20''-5.$ diff.
$=9{,}992\,517\,1.-5.3{,}9=$
$=9{,}992\,515\,1.$

Odwrotnie, jeśli zamierzamy z tablic znaleźć kąt odpowiadający danym log. wst, log. sty, log. dos, log. dot, a nie znajdujemy zupełnie odpowiedniego kąta, wtedy bierze się kąt odpowiadający logarytmowi najbliżéj stojącemu, ale mniejszemu od logarytmu danego, otrzymaną zaś liczbę sekund dodaje się do łuku odpowiadającego najbliższéj wst. lub sty., a odejmuje od łuku należącego do najbliższéj dos. lub dot.

Np. log sty $x=9{,}1765450$
log sty $8^0\,32'\,20''=9{,}1765108$

$342:143{,}2=2'',4.$

$x=8^0\,32'\,22'',4.$—

log dot $=9{,}1759023,$
log dot $81^0\,28'\,30''=9{,}1757933,$

$1096:143{,}2=7'',6,$

$x=81^0\,28'\,30''-7'',6=81^0\,28'\,22'',4.$

4) Nakoniec, ponieważ dla kątów roztwartych wst. jest dodatnią, ale dos., sty., dot. są ujemne, a ujemne ilości nie posiadają rzeczywistych logarytmów, przeto przystępując do rachunku, należy poprzednio wzory, do których wchodzą linie trygonometryczne, przerobić w taki sposób, iżby w nich zawie-

rały się jedynie logarytmy dodatnie. To się otrzymuje za pomocą wyrażeń:

$$\begin{aligned} \text{wst}\,\alpha &= \text{wst}\,(180-\alpha), \\ \text{sty}\,\alpha &= -\,\text{sty}\,(180-\alpha), \\ \text{dos}\,\alpha &= -\text{dos}\,(180-\alpha), \\ \text{dot}\,\alpha &= -\,\text{dot}\,(180-\alpha). \end{aligned}$$

5) Tablice trygonometryczne dają logarytmy wstaw, dostaw, stycznych i t. d. łuków mniejszych od 90^0, lecz nie przedstawiają wielkości tych linij; potrzeba więc wzory trygonometryczne przygotowywać do rachunku w taki sposób, aby można je było obliczać logarytmami, tojest: aby nie być zmuszonym przechodzić często od liczb do logarytmów, i znów cofać się z logarytmów do liczb. Ten cel osiągniemy przekształcając wyrażenia dla nieznanéj ilości, w same iloczyny lub ilorazy jakichkolwiek potęg tych linij, których logarytmy podają nam tablice.

Jako wzór podobnego przerabiania wyrażeń, okażemy, jak za pomocą tablic trygonometrycznych można obliczać summę lub różnicę dwóch ilości, a tém samém i summę ilukolwiek ilości.

1) Niech będzie dany dwumian $(a+b)$, w którym ilości wchodzące są dodatniemi. Biorąc a za nawias, wypada:

$$a+b=a\left(1+\frac{b}{a}\right);$$

lecz jakąkolwiek będzie wartość dodatnia stosunku $\frac{b}{a}$, możemy go zawsze oznaczyć przez pewną styczną, ta bowiem linia przyjmuje wszelkie możebne wielkości od 0 do nieskończoności, gdy jéj łuk rośnie od 0 do 90^0.

Istnieje więc taki łuk φ, którego

$$\text{sty}\,\varphi=\sqrt{\frac{b}{a}},$$

ztąd:

$$a+b=a\,(1+\text{sty}^2\,\varphi)=a\left(1+\frac{\text{wst}^2\,\varphi}{\text{dos}^2\,\varphi}\right)=\left(\frac{a}{\text{dos}^2\varphi}\right).$$

Tym więc sposobem, przy pomocy tablic oznaczywszy naprzód kąt φ, potém jego dostawę, zdołamy obrachować za pomocą logarytmów summę $(a+b)$.

2) Jeżeli mamy dwumian $(a-b)$, w którym wyraz drugi jest odjemny, a nadto gdy $a>b$; wówczas biorąc a za nawias: $(a-b)=a\left(1-\frac{b}{a}\right)$; wypada ilość $\frac{b}{a}$ która jest mniejszą od jedności. Lecz w pierwszéj ćwiartce okręgu koła można zawsze znaleźć taki kąt φ, któregoby wstawa wyrównywała pierwiastkowi kwadratowemu z $\frac{b}{a}$; zakładając więc

$$\text{wst}\,\varphi=\sqrt{\frac{b}{a}},$$

wypada:

$$a-b=a\,(1-\text{wst}^2\,\varphi)=a\,\text{dos}^2\,\varphi.$$

wzór, na mocy którego można będzie różnicę dwóch ilości obliczać z pomocą tablic trygonometrycznych.

Ponieważ promień w tablicach nie jest jednością, ztąd w poprzednich wzorach należy linie trygonometryczne zastąpić przez ich stosunki do tego promienia, który oznaczymy przez R. Wypadnie wtedy, że:

1) $\log\,\text{sty}\,\varphi=\log R+\frac{\log b-\log a}{2}$,

$\log\,(a+b)=\log a+2\log R-2\log\,\text{dos}\,\varphi.$

2) $\log\,\text{wst}\,\varphi=\log R+\frac{\log b-\log a}{2}$,

$\log\,(a-b)=\log a+2\log\,\text{dos}\,\varphi-\log R.$

ROZDZIAŁ III.

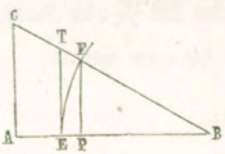
§ 28. Celem trygonometryi jest, jak wiemy z poprzedniego, rozwiązywanie trójkątów, tojest obrachowanie trzech ilości z sześciu wchodzących w skład trójkąta, wtedy gdy pozostałe trzy są nam znane. Lecz pomiędzy temi danemi wielkościami powinien się znajdować przynajmniéj jeden bok trójkąta.

Rozwiązywanie trójkątów polega na pewnéj liczbie związków zachodzących pomiędzy bokami i kątami, albo raczéj między bokami i liniami trygonometrycznemi należącemi do danych kątów trójkąta.

Związki między bokami i kątami trójkąta prostokątnego.

Twierdzenie. — *W każdym trójkącie prostokątnym którekolwiek ramie kąta prostego równa się przeciwprostokątnéj pomnożonéj przez dostawę kąta między niemi zawartego.*

Oznaczmy według zwyczaju przez A, B, C trzy kąty trójkąta, między któremi A niech będzie kąt prosty, i przez a, b, c trzy boki przeciwległe odpowiednim kątom. Jeżeli z wierzchołka B, jako ze środka, promieniem równym jedności zato-



czymy łuk EF, następnie poprowadzimy prostopadłą FP do AB, wtedy dwa trójkąty podobne BPF i BAC dadzą:

$$\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{BP}}=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BF}},$$

czyli:

$$\frac{c}{\mathrm{dos\ B}}=\frac{a}{1},$$

ztąd:

$$c=a \text{ dos B}.$$

Uwaga.—Ponieważ kąt C jest dopełnieniem kąta B, więc wst C=dos B; co podstawiając w powyższy wzór, wypada:

$$c=a \text{ wst C}.$$

Można więc powyższe twierdzenie wysłowić jeszcze tak:

W każdym trójkącie prostokątnym bok którykolwiek przyległy kątowi prostemu, równa się przeciwprostokątni rozmnożonéj przez wstawę kąta przeciwległego.

Twierdzenie.— *W każdym trójkącie prostokątnim, którekolwiek z ramion kąta prostego, równa się drugiemu ramieniowi pomnożonemu przez styczną kąta przeciwległego pierwszemu bokowi.*

W saméj rzeczy wiodąc styczną EF, mamy:

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{ET}}{\mathrm{BE}},$$

czyli:

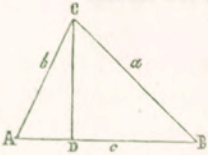
$$\frac{b}{c}=\frac{\mathrm{sty\ B}}{1},$$

ztąd:

$$b=c\,\mathrm{sty\ B}.$$

§ 29. **Związki między bokami i kątami jakiegokolwiek trójkąta.** — Twierdzenie. — *W każdym trójkącie kwadrat z jednego boku wyrównywa summie kwadratów z dwóch innych boków, zmniejszonéj o dwa prostokąty z tychże boków przez dostawę kąta między niemi zawartego.*

Weźmy naprzód pod uwagę bok a przeciwległy kątowi ostremu A. Na mocy twierdzenia z geometryi, mamy:

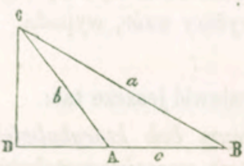


$$a^2=b^2+c^2-2.\ c.\ \mathrm{AD}.$$

Lecz poprzedzające twierdzenie daje równość AD$=b$. dos A; ztąd po podstawieniu wypada:

$$a^2=b^2+c^2-2\ b.\ \mathrm{c}.\ \mathrm{dos}\ \mathrm{A}.$$

Gdybyśmy wzięli bok przeciwległy kątowi rozwartemu, to w tym razie byłoby:



$$a^2=b^2+c^2+2.\ c.\ \mathrm{AD}.$$

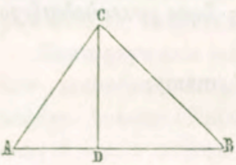
a że

$$\mathrm{AD}=b.\ \mathrm{dos}\ \mathrm{CAD}=b.\ \mathrm{dos}\,(180^0-\mathrm{A})$$
$$=-b\ \mathrm{dos}\ \mathrm{A},$$

przeto: $a^2=b^2+c^2-2\ bc\ \mathrm{dos}\ \mathrm{A}$.

Twierdzenie.— *W każdym trójkącie boki są proporcyonalne do wstaw kątów przeciwległych.*

Rozdzielając trójkąt ABC, za pomocą prostopadłéj CD, na dwa trójkąty prostokątne, otrzymamy:



$$\mathrm{CD}=a\ \mathrm{dos}\ \mathrm{BCD}=a\ \mathrm{wst}\ \mathrm{B},$$
$$\mathrm{CD}=b\ \mathrm{dos}\ \mathrm{ACD}=b\ \mathrm{wst}\ \mathrm{A};$$

ztąd:

$$a\ \mathrm{wst}\ \mathrm{B}=b\ \mathrm{wst}\ \mathrm{A}.$$

Można więc napisać, że:

$$\frac{a}{\mathrm{wst\ A}}=\frac{b}{\mathrm{wst\ B}}=\frac{c}{\mathrm{wst\ C}}.$$

Wniosek. — Dodając do siebie wartości dla odcinków AD i DB, otrzymamy na wypadek:

$$c=\mathrm{AB}=b\ \mathrm{dos}\ \mathrm{A}+a\ \mathrm{dos}\ \mathrm{B}.$$

Gdybyśmy na inny bok spuścili prostopadłą z przeciwległego wierzchołka, to wypadłoby podobnie, że:

$$a=b\ \mathrm{dos}\ \mathrm{C}+c\ \mathrm{dos}\ \mathrm{B},$$
$$b=a\ \mathrm{dos}\ \mathrm{C}+c\ \mathrm{dos}\ \mathrm{A}.$$

§ 30. **Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych.** Oznaczmy jak wyżéj przez A, B, C kąty, i przez a, b, c przeciwległe im boki; głoski zaś A i a zatrzymajmy dla kąta prostego i przeciwprostokątni.

Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych zawarte jest w następnych dogodnych do działań logarytmowych wzorach, a mianowicie:

$$\left.\begin{array}{l} c=a \text{ wst C} \\ c=a \text{ dos B} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} b=c \text{ sty B} \\ b=c \text{ dot C} \end{array}\right\},$$

zawierających po trzy ilości. Przyjmując dwie z nich za wiadome, można oznaczyć trzecią.

Przejdźmy szczegółowo wszystkie przypadki rozwiązywania trójkątów prostokątnych.

§ 31. Przypadek pierwszy. — Rozwiązać trójkąt prostokątny, w którym wiadoma jest przeciwprostokątnia a i kąt ostry B; pozostały trzeci kąt C otrzymamy biorąc dopełnienie kąta danego B: $\quad C=90^0-B.$

Boki przyległe kątowi prostemu, wypadną z wzorów:

$$b=a \text{ wst B},$$
$$c=a \text{ dos B};$$

czyli przechodząc do logarytmów:

$$\log b=\log a+\log \text{wst B},$$
$$\log c=\log a+\log \text{dos B}.$$

Przykład: $a=572',8$; $B=50^0\,36'\,2''$

Nieznany kąt $C=90^0-(50^0\,36'\,2'')=39^0\,23'\,58''$,

$$\begin{array}{lr} \log b= \quad \log 572{,}8= & 2{,}7580030 \\ +\log \text{wst}\, 50^0\, 36'= & 9{,}8880298-10 \\ +17{,}3.2= & 34 \\ \hline & 2{,}6460362 \\ & 310 \\ \hline b=442',625 & 52 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} \log c = \log 572{,}8 = & 2{,}7580030 \\ +\log \operatorname{dos} 50^0\, 36' = & 9{,}8025894-10 \\ -25{,}63.2 = & 51 \\ \hline & 2{,}5605873 \\ & 761 \\ \hline c = 363'{,}569 & 112 \end{array}$$

§ 32. Przypadek drugi.—Rozwiązać trójkąt prostokątny, w którym wiadomy jest bok przyległy kątowi prostemu i kąt ostry przeciwległy temu bokowi.

Dany bok b i kąt B.

Kąt trzeci $C = 90 - B$.

Przeciwprostokątnia $a = \dfrac{b}{\operatorname{wst} B}$,

$\log a = \log b - \log \operatorname{wst} B$.

Nakoniec bok $c = b. \operatorname{dot} B$,

$\log c = \log b + \log \operatorname{dot} B$.

Przykład:

$b = 425{,}8$; $B = 32^0\, 48'\, 32''$,

kąt $C = 90^0 - (32^0\, 48'\, 32'') = 57^0\, 11'\, 28''$

$\log a = \log 425{,}8 - \log \operatorname{wst} 32^0\, 48'\, 32''$,

$$\begin{array}{rr} & =2{,}6292057 \\ & -9{,}7338699+10 \\ \hline & 2{,}8953358 \\ & 41 \\ \hline a = 785'{,}84 & 17 \end{array}$$

$\log c = \log 425{,}8 + \log \operatorname{dot} B$,

$$\begin{array}{r} =2{,}6242057 \\ +0{,}1906588 \\ \hline 2{,}8148645 \\ 600 \\ \hline 45 \end{array}$$

$c = 652'{,}927$

§ 33. Przypadek trzeci.—Rozwiązać trójkąt prostokątni mając daną przeciwprostokątnią a, i jeden z boków przyległych kątowi prostemu np. b.

Ponieważ $b=a$ wst B, więc wst $B=\frac{b}{a}$,

$$\log \text{wst } B=\log b-\log a.$$

Kąt $C=90^0-B$.

Bok $c=\sqrt{a^2-b^2}$;

$$\log c=\tfrac{1}{2}\,[\log (a+b)+\log (a-b)].$$

Przykład:

$$a=498'$$
$$b=349.$$

$$\begin{array}{rr}
\log \text{wst } B= & 12{,}5428254-10 \\
- & 2{,}6972293 \\
\hline
 & 9{,}8455961-10 \\
 & 5762 \\
\hline
B=44^0\ 29'\ 29'' & 200
\end{array}$$

$$C=90^0-(44^0\ 29'\ 29'')=45^0\ 30'\ 30'',$$

$$\begin{array}{rr}
\log c=\tfrac{1}{2}\,[\log 847+\log 149]= & 2{,}9278834 \\
 & 2{,}1731863 \\
\hline
 & 5{,}1010697:2 \\
 & 2{,}5505348 \\
 & 41 \\
\hline
C=355',25. & 7
\end{array}$$

§ 34. Przypadek czwarty. — Rozwiązać trójkąt prostokątni mając wiadome dwa boki przyległe kątowi prostemu. Przyjmując powyższe oznaczenie, wypada:

$$\text{sty } B=\frac{b}{c},$$

$$\log \text{sty } B=\log b-\log c.$$

Przeciwprostokątnia $a=\dfrac{b}{\text{wst } B}$,

$$\log a=\log b-\log \text{wst } B.$$

Przykład:

$b=485'$; $c=346$.

$$\begin{aligned}
\log \text{sty } B = \log 485' &= 2{,}6857417 \\
-\log 346 &= -2{,}5390761 \\
\hline
& 0{,}1466656 \\
& +10 \\
\hline
\log \text{sty } B &= 10{,}1466656 \\
& \phantom{10{,}146}6429 \\
\hline
& \phantom{10{,}1466}227
\end{aligned}$$

$B=54^0\ 29'\ 45''$,

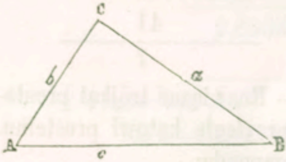
kąt $C=90-(54^0\ 29'\ 45'')=35^0\ 30'\ 15''$.

$\log a = \log 485' - \log \text{wst } 54^0\ 29^0\ 45''$,

$$\begin{aligned}
&=2{,}6857417 \\
&-9{,}9106635-10 \\
\hline
&2{,}7750882
\end{aligned}$$

$a=594{,}399$.

§ 35. **Rozwiązywanie jakichkolwiek trójkątów prostokreślnych.** — PRZYPADEK PIERWSZY. — W trójkącie dane są dwa boki i kąt między niemi zawarty; potrzeba obliczyć pozostałe części trojkąta.



Dane boki są b, c i kąt A.

Wiemy że:

$$b : c = \text{wst} B : \text{wst } C,$$

ztąd: $b+c : b-c =$

$\text{wst } B + \text{wst } C : \text{wst } B - \text{wst } C$;

Lecz dowiedliśmy, że:

$$\frac{\text{wst } B+\text{wst } C}{\text{wst } B-\text{wst } C}=\frac{\text{sty } \frac{1}{2}(B+C)}{\text{sty } \frac{1}{2}(B-C)};$$

porównywając więc dwie ostatnie proporcye, mamy:

$$\frac{b+c}{b-c}=\frac{\text{sty } \frac{1}{2}(B+C)}{\text{sty } \frac{1}{2}(B-C)},$$

Ponieważ kąt A jest znany, przeto odejmując go od 180°, znajdziemy summę kątów pozostałych B+C. Z powyższéj więc proporcyi nieznany wyraz sty $\frac{1}{2}$ (B—C), znajdziemy:

$$\text{sty}\ \tfrac{1}{2}(B-C)=\text{sty}\ \tfrac{1}{2}(B+C).\frac{(b-c)}{b+c},$$

czyli:

$$\log \text{sty}\ \tfrac{1}{2}(B-C)=\log \text{sty}\ \tfrac{1}{2}(B+C)+\log(b-c)-\log(b+c).$$

Mając wiadome połowy summy i różnicy dwóch kątów, łatwo otrzymać wartość dla każdego z tych kątów.

Nakoniec bok trzeci a, wypadnie ze wzoru:

$$a=\frac{b.\ \text{wst A}}{\text{wst B}},$$

$$\log a=\log b+\log \text{wst A}-\log \text{wst B}.$$

Przykład:

$$b=2769^0\ 8'\ 6''=276986''$$
$$c=\ 227^0\ 9'\ 5''=\ 22795''$$
$$A=\ 46^0\ 19''\ 24''.$$

ztąd:

$$b+c=299781''$$
$$b-c=254191''$$
$$B+C=180^0-(46^0\ 19'\ 24'')=133^0\ 40'\ 36''$$
$$\tfrac{1}{2}(B+C)=66^0\ 50'\ 18''.$$

Będzie więc:

$$\log \text{sty}\ \tfrac{1}{2}(B-C)=\log \text{sty}\ 66^0\ 50'\ 18''+\log 254191$$
$$-\log 299781.=$$
$$=\log \text{sty}\ 66^0\ 50'\ 18''=10{,}3687503-10$$
$$+\log 254191=\quad 5{,}4051602$$
$$\overline{\quad 15{,}7739105-10\quad}$$
$$-\log 299781''=\quad -5{,}4768042$$
$$\overline{\quad 10{,}2971063-10\quad}$$
$$\log \text{sty}\ \tfrac{1}{2}(A-B)=\tfrac{1}{2}(B-C)=63^0\ 13'\ 38'',4.$$

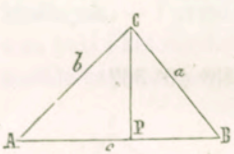
Wiedząc pół summy i pół różnicy kątów B i C, każdy z nich będzie:

$$\tfrac{1}{2}(B+C)= 66^0\ 50'\ 18'',$$
$$\tfrac{1}{2}(B-C)= 63^0\ 13'\ 38'',4$$
$$B=130^0\ \ 3'\ 56'',4$$
$$C=\ \ 3^0\ 36'\ 39'',6.$$

Nakoniec bok a otrzymamy tak:

$$\log a=\log b+\log \text{wst } A-\log \text{wst } B,$$
$$\log a=\quad \log 276986= 5,4424578$$
$$+\log \text{wst } 46^0\ 19'\ 24''= 9,8592876-10$$
$$15,3017454$$
$$-\log \text{wst } B=\begin{Bmatrix}130^0\ \ 3'\ 56'',4\\ 49^0\ 56'\ \ 3'',6\end{Bmatrix}= -9,8838932+10$$
$$5,4178522$$
$$a=261729'',3=2617^0 2'\ 9'',3.$$

§ 36. Przypadek drugi.— Rozwiązać trójkąt znając dwa boki i kąt przeciwległy jednemu z nich.



Dane są boki: a, b i kąt A.

Wiemy że, $a : b=\text{wst } A : \text{wst } B$,

$$\text{ztąd wst } B=\frac{b \text{ wst } A}{a},$$

$$\log \text{wst } B=\log b+\log \text{wst } A-\log a$$

Podobnie, ponieważ:

$$a : c=\text{wst } A : \text{wst } C,$$

czyli: $a : c=\text{wst } A : \text{wst } [180^0-(A+B)]$;

ztąd: $c=a\dfrac{\text{wst}[180^0-(A+B)]}{\text{wst } A}$,

$$\log c=\log a+\log \text{wst } [180^0-(A+B)]-\log \text{wst } A.$$

Uwaga.—Przy rozwiązywaniu tego przypadku, jeżeli we wzorze: $\text{wst } B=\dfrac{b \text{ wst } A}{a}$, mianownik a będzie większy od b wst A, otrzymamy dla B pewną wartość, np. $M < 90^0$. Lecz można także przypuścić, że $B=180^0-M$. Tym sposobem i dla kąta C wypadną dwie wielkości:

$$C=180-A-M,$$
$$C=M-A;$$

a więc i dwa znaczenia dla boku c.

Rozbierzmy bliżéj możliwość tego podwójnego rozwiązania: Jeżeli dany kąt A jest prosty lub rozwarty, dwa pozostałe muszą być ostre; dla kąta więc B można przyjąć jednę tylko wartość równą M. Nadto ponieważ w tym trójkącie kąt A jest największy, przeto powinien być bok $a > b$; przy takich warunkach jest tylko możliwa jedna odpowiedź.

Gdyby dany kąt A był ostry, nadto bok $a > b$, to wtedy kąt A musiałby być większy od B czyli $A > M$; dla kąta B nie należy brać drugiéj wartości 180^0-M. Trójkąt więc dany rozwiązuje się w tym razie z jedną odpowiedzią.

Nakoniec, gdyby kąt dany A był ostry, lecz bok $a < b$, wtedy możnaby dla B brać tak wartość M jakotéż i 180^0-M. Aby podobne dwa rozwiązania istnieć mogły, potrzeba nadto, aby bok dany a był większym od b wst A, tojest od prostopadłéj CP, która, jakto wskazuje trójkąt ACP, wyrównywa b wst A. Jeżeliby bowiem a było mniejsze od prostopadłéj $CP=a$ wst A, wtedy ułomek $\frac{b \text{ wst } A}{a}$ byłby >1. Co naucza, że nie istnieje trójkąt któryby temu warunkowi mógł zadosyć uczynić:

Przykład: $a=347',83$
$b=179',4772$
$A=49^0\ 18'\ 27''$

$$\begin{aligned}\log \text{wst } B = \log b &= 2,2539366\\ +\log \text{wst } A &= 9,8797951-10\\ \hline &\ \ 12,1337317\\ -\log a &= -2,5413670\\ \hline &\ \ 9,5923647-10\end{aligned}$$

$B=23^0\ 1'\ 38'',2$

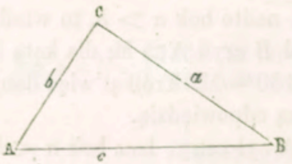
$$\text{wst } C = [180^0 - (A+B)] = \text{wst } 72^0\ 20'\ 5'',2.$$

$$\begin{array}{lr} \log c = & \log 347,83 = 2,5413670 \\ & +\log \text{wst } 72^0\ 20'\ 5'',2 = 9,9790227-10 \\ \hline & 12,5203897-10 \\ & -\log \text{wst } 49^0\ 18'\ 27'' = 9,8797951+10 \\ \hline & 2,6405946 \end{array}$$

$$C = 437,114.$$

PRZYPADEK TRZECI.—Rozwiązać trójkąt, w którym wiadome są dwa kąty i bok jednemu z nich przeciwległy.

Dane są kąty A, B i bok *a*.



Na mocy twierdzenia, że boki są proporcyonalne do wstaw kątów przeciwległych, będzie:

$$a : b = \text{wst } A : \text{wst } B,$$

$$b = \frac{a \text{ wst } B}{\text{wst } A},$$

$$\log b = \log a + \log \text{wst } B - \log \text{wst } A.$$

Podobnie:

$$a : c = \text{wst } A : \text{wst } [180^0 - (A+B)]$$

$$c = \frac{a \text{ wst } [180^0 - (A+B)]}{\text{wst } A}$$

$$\log c = \log a + \log \text{wst } [180^0 - (A+B)] - \log \text{wst } A.$$

Przykład: $a = 347,83$

$A = 100^0\ 10'\ 10''$

$B = 49^0\ 18'\ 27'$.

$$C = 180^0 - 149^0\ 28'\ 37'' = 30^0\ 31'\ 23'',$$

$$\begin{array}{lr} \log b = & \log a = 2,5413670 \\ & +\log \text{wst } 49^0\ 18'\ 27'' = 9,8797951-10 \\ \hline & 12,4211621-10 \\ & -\log \left\{ \begin{matrix} 100^0\ 10'\ 10'' \\ 79^0\ 49'\ 50'' \end{matrix} \right\} = 9,9931230+10 \\ \hline & 2,4280391 \end{array}$$

$$b = 267',941$$

$$\begin{array}{rl}
\log c = & \log 347{,}83 = 2{,}5413670 \\
+\log \text{wst } 30^0\ 31'\ 23'' = & 9{,}7057654-10 \\
\hline
& 12{,}2471324-10 \\
-\log \text{wst } 79^0\ 49'\ 50'' = & 9{,}9931230+10 \\
\hline
& 2{,}2540064
\end{array}$$

$$C = 179{,}477.$$

§ 38. Ppzypadek czwarty.—Z wiadomych trzech boków trójkąta, obliczyć wielkość pozostałych części. (Fig. taż sama).

Jeżeli z danych boków a, b, c szukamy np. kąta A, to należy wziąć wzór:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\, bc \operatorname{dos} A,$$

$$\operatorname{dos} A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\, bc}.$$

Aby ten wzór przekształcić na inny właściwszy do rachunku z logarytmami, przypomnijmy sobie, że

$$\operatorname{dos} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{dos} A}{2}},$$

z którego to wyrażenia wypada:

$$2 \operatorname{dos}^2 \tfrac{1}{2} A = 1 + \operatorname{dos} A;$$

gdzie podstawiając za dos A wyżéj znalezioną wartość będzie:

$$2 \operatorname{dos}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{b^2 + 2\, bc + c^2 - a^2}{2\, bc},$$

czyli:

$$2 \operatorname{dos}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{(b^2 + c)^2 - a}{2\, bc},$$

czyli:

$$2 \operatorname{dos}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{(b + c - a)\ (b + c + a)}{2\, bc}.$$

W celu uproszczenia tego wzoru, nazwijmy obwód trójkąta, tojest $a+b+c$ przez $2p$, wtedy:

$$2 \operatorname{dos}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{(2p \,.\, 2p - a)}{2\, bc},$$

ztąd:

$$\text{dos}\,\tfrac{1}{2}\,A = \sqrt{\frac{p\,(p-a)}{bc}},$$

W tém wyrażeniu wolno brać przed pierwiastkiem tylko znak dodatni, gdyż łuk $\frac{1}{2}$ A może być tylko mniejszy od 90°.

Gdybyśmy zamiast dodawać dos A do 1, odjęli ją od 1, wtedy z pomocą przekształcenia zupełnie podobnego do poprzedniego, znaleźlibyśmy że:

$$\text{wst}\,\tfrac{1}{2}\,A = \sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{bc}}.$$

Dzieląc zaś przez siebie otrzymane wzory dla wst $\frac{1}{2}$ A i dos $\frac{1}{2}$ A, będzie:

$$\text{sty}\,\tfrac{1}{2}\,A = \sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{p\,(p-a)}}.$$

Przykład:

$$a = 567',37;\ b = 419',85;\ c = 354',63.$$

$$\begin{aligned}
a &= 567{,}37\\
b &= 419{,}85\\
c &= 354{,}63\\
\hline
2\,p &= 1341{,}85\\
p &= 670{,}925\\
p-a &= 103{,}555\\
p-b &= 251{,}075\\
p-c &= 316{,}295
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log\,(p-b) &= 2{,}399\,805\,5\\
+\log\,(p-c) &= 2{,}500\,092\,4\\
-\log\,(p-a) &= 2{,}015\,171\,1\\
-\log p \quad &= 2{,}826\,674\,0\\
\hline
&0{,}058\,050\,8\\
\tfrac{1}{2} &= 0{,}029\,025\,4 = \log \text{sty}\,\tfrac{1}{2}\,A.\\
\frac{A}{2} &= 46^0\,54'\,47'',6.
\end{aligned}$$

Szukając drugiego kąta np. B, użyjemy wzoru:

$$\text{sty}\,\tfrac{1}{2}\,B = \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-c)}{(p-b)\,p}},$$

$$\begin{aligned} \log(p-a) &= 2{,}015\,171\,1 \\ +\log(p-c) &= 2{,}500\,092\,4 \\ -\log(p-b) &= 2{,}399\,803\,5 \\ -\log p\quad &= 2{,}826\,674\,0 \\ \hline &\quad 9{,}288\,786\,0-10 \end{aligned}$$

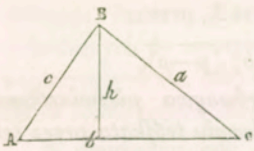
$$\tfrac{1}{2} = 9{,}644\,393\,0-10 = \log \text{sty}\ \tfrac{1}{2}\,\mathrm{B},$$

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{B} = 23^0\,47'\,42'',9.$$

Kąt $\mathrm{C} = 180^0 - (93^0\,49'\,35'',2 + 47^0\,35'\,25{,}8) = 38^0\,34'\,59''$.

§ 39. **Różne wyrażenia dla powierzchni trójkąta.**

1) Jeżeli w trójkącie dane są dwa boki i kąt między niemi zawarty, to powierzchnia trójkąta T równać się będzie:



$$\mathrm{T} = \tfrac{1}{2}\,bh = \tfrac{1}{2}\,bc \text{ wst A},$$

tojest powierzchnia równa się: *połowie iloczynu z przyległych boków trójkąta przez wstawę kąta między niemi zawartego.*

2) Jeżeli w trójkącie danym jest jeden tylko bok i dwa przyległe kąty, wówczas w powyższym wzorze podstawiając za b i c wartości:

$$b = a\frac{\text{wst B}}{\text{wst A}};\quad c = a\frac{\text{wst C}}{\text{wst A}},$$

otrzymujemy:

$$\mathrm{T} = \tfrac{1}{2}.\ a^2.\frac{\text{wst B wst C}}{\text{wst A}};$$

a że:

$$\mathrm{A} = 180^0 - (\mathrm{B} + \mathrm{C}),$$

przeto będzie:

$$\mathrm{T} = \tfrac{1}{2}\,a^2\frac{\text{wst B wst C}}{\text{wst }(\mathrm{B}+\mathrm{C})}.$$

Powierzchnia więc trójkąta w tym razie, *równa się połowie kwadratu wiadomego boku rozmnożonego przez wstawy kątów przyległych i podzielonego przez wstawę summy tychże kątów.*

3) Jeżeli w trójkącie wiadome są wszystkie trzy boki, a zamierzamy bezpośrednio otrzymać powierzchnię trójkąta, wówczas pamiętając, że

$$\text{wst } A = 2 \text{ wst } \tfrac{1}{2} A \text{ dos } \tfrac{1}{2} A,$$

po podstawieniu wzorów:

$$\text{wst } \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$

$$\text{dos } \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

wypadnie:

$$\text{wst } A = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

a że wiemy, że $T = \frac{1}{2} bc \text{ wst } A$, przeto:

$$T = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

tojest: *powierzchnia trójkąta wyrównywa pierwiastkowi kwadratowemu z iloczynu połowy obwodu trójkąta przez tęż połowę zmniejszoną o każdy z boków.*

4) Powyżéj otrzymaliśmy wzór:

$$\text{sty } \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},$$

z którego przez stosowną zmianę wypadają:

$$\text{sty } \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},$$

$$\text{sty } \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

Mnożąc przez siebie te trzy wyrażenia, będzie:

$$\text{sty } \tfrac{1}{2} A \text{ sty } \tfrac{1}{2} B \text{ sty } \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p^3}},$$

$$= \frac{1}{p^2}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

A ponieważ wyżéj otrzymaliśmy:

$$T = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

przeto można napisać:

$$T = p^2 \operatorname{sty} \tfrac{1}{2} A \operatorname{sty} \tfrac{1}{2} B \operatorname{sty} \tfrac{1}{2} C,$$

tojest, *powierzchnia trójkąta wyrównywa kwadratowi obwodu pomnożonemu przez styczne połowy kątów trójkąta.*

---

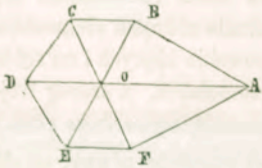
§ 40. **Trójkątowanie.** Jeżeli zamierzamy zdjąć plan znacznéj przestrzeni gruntu z pewną dokładnością, wówczas należy zwykłe roboty z stolikiem mierniczym wykonywane, oprzéć na trójkątach, do których wchodzące ilości rachunkiem się obliczają. Prace mające na celu ocenienie różnych elementów wchodzących do szeregu trójkątów po sobie idących i na sobie wspierających się, nazywamy *trójkątowaniem*, a szereg trójkątów *siecią trygonometryczną (тригонометрическая сѣть).*

W przypadku, gdy grunt nie jest zupełnie równy, co się zwykle zdarza, należy przypuścić, że sieć jest jakby rzucona na płaszczyzny poziome przez dane miejsca przechodzące, i mówimy wtedy, że sieć jest *sprowadzona do poziomu (приведенie къ горизонту).*

Kąty przy trójkątowaniu mierzą się za pomocą kątomiarów a głównie za pomocą teodolitu, narzędzia, które odrazu daje wielkość kątów sprowadzoną do poziomu. Jeden zaś bok, niezbędnie potrzebny do obrachowywania sieci, wymierza się dokładnie za pomocą łańcucha mierniczego lub łat, które przykładają się obok siebie, na gruncie zupełnie równym, lub na pomoście w tym celu układanym. Taki bok zmierzony, na którym opiera się obrachowanie długości wszystkich innych linij, zowie się *podstawą (основанie).*

Przy trójkątowaniu ważną jest rzeczą wybór punktów mających służyć za wierzchołki sieci; starać się bowiem należy o takie punkta, iżby utworzone trójkąty nie posiadały kątów ani zbyt ostrych ani rozwartych. Łatwo bowiem pojąć, że punkt oznacza się z wielką niedokładnością przez przecięcie dwóch linij tworzących między sobą kąt zbyt ostry. Błąd zaś popełniony w oznaczeniu jednego punktu wierzchołkowego wpłynie na długość boków przyległych, a tém samém pociągnie za sobą błędy w dalszym ciągu trójkątów.

Dlatego, przed rozpoczęciem trójkątowania należy dobrze rozpoznać grunt dany do pomiaru; wybrać za punkt środkowy taki punkt, któryby był widzialnym z daleka, np. wieżę, dzwonnicę, znak umyślnie zbudowany na wzniesieniu; następnie naokoło niego obrać i oznaczyć pięć lub sześć punktów A, B, C,... z których możnaby widzieć punkt środkowy O, a przytém takich, iżby trójkąty ABO, BCO, nie zawierały kątów zbyt ostrych ani rozwartych, słowem, iżby te trójkąty o ile możności, zbliżały się do równobocznych.



Potém wymierza się długość podstawy np. AB, która powinna znajdować się na gruncie nie posiadającym wielkich nierówności. Jeżeli dana do pomiaru okolica nie jest zbyt wielka, to najlepiéj za podstawę wybrać linią leżącą w środku okolicy; tym bowiem sposobem błąd popełniony w trójkątach znajdujących się z jednéj strony podstawy, nie wpłynie na szereg trójkątów przypadających po drugiéj stronie podstawy. Po zmierzeniu podstawy, przenosi się instrument służący do mierzenia kątów, kolejno do każdego z obranych wierzchołków A, B, C, i z każdego z nich wymierza się kąty między punktem O, a punktami przed i za stanowiskami leżącemi. np. OBA, OAB, OAF....

Z pomocą tych kątów, łatwo ocenić wielkość kątów przy O, należących do każdego trójkąta; i byle tylko kąty przy A, B... były dokładnie wymierzone, nie potrzeba mierzyć kątów przy O. Dla próby, dosyć dodać kąty zmierzone przy wierzchołkach

A, B, C, a mianowicie: ABC, BCD, i przekonać się, czy summa ich równa się dwom prostym powtórzonym tyle razy, ile wielokąt ma boków bez dwóch boków. Jeżeli jest różnica między wymierzonemi kątami a summą, jaka być powinna według tego twierdzenia, wtedy rozdzieliwszy tę różnicę przez dwa razy wziętą liczbę boków wielokąta, otrzymamy na wypadek *średni błąd (средняя ошибка)* mierzonych kątów.

Skoro ten błąd przewyższa błąd przypuszczalny, z niedokładności instrumentu pochodzący, wtedy należy powtórnie wymierzyć wszystkie kąty; w przeciwnym razie, nie potrzeba mierzyć kątów przy O, a tylko wymierzone kąty przy A, B, poprawić przez dodanie lub odjęcie od każdego z nich, tego błędu średniego z rachunku wypadłego.

Mając w ten sposób poprawione kąty, wymierzony dokładnie jeden bok, łatwo z pomocą twierdzeń trygonometrycznych, kolejno obrachować boki wchodzące do trójkątów. Za próbę posłużyć może to, iż podstawa obrachowana z ostatniego trójkąta, zgadzać się winna z jéj wielkością znalezioną przez bezpośredni wymiar na gruncie.

Obrachowawszy tę pierwszą sieć trójkątów, zwaną *siecią główną (главная сѣть)*, można użyć boków wchodzących do szczegółowych trójkątów za podstawy do mierzenia odległości i położeń innych punktów znajdujących się w dogodném położeniu względem tychże podstaw.

Czasem się zdarza, że natura gruntu nie dozwala wymierzyć żadnego z boków głównego wielokąta, w takim razie, należy za podstawę obrać i dokładnie zmierzyć inną linię zewnątrz sieci leżącą, i dopiéro za pomocą trójkąta związać ją z jednym z boków głównego wielokąta.

ROZDZIAŁ IV.

Zadania z planimetryi, solidometryi, geometryi praktycznéj i innych nauk.

Zadanie 1. — Za pomocą tablic trygonometrycznych rozdzielić obwód koła na dowolną liczbę części.

Zadanie to sprowadza się do wynalezienia boku danego wielokąta foremnego, wpisanego lub opisanego na kole.

Jeżeli przez b oznaczymy długość szukanego boku wielokąta foremnego wpisanego o n bokach, to $\frac{360}{n}$ będzie się równać kątowi a przy środku, odpowiadającemu każdemu z boków; ztąd:

$$\tfrac{1}{2}\, b = r \operatorname{wst} \frac{a}{2},$$

czyli:

$$b = 2\, r \operatorname{wst} \frac{a}{2}. \qquad (1)$$

Przyjmując $r = 1$, bok wpisanego wielokąta foremnego będzie:

$$b = 2 \operatorname{wst} \frac{a}{2}.$$

Bok zaś wielokąta foremnego o tyluż bokach, lecz opisanego na kole znajdzie się tak:

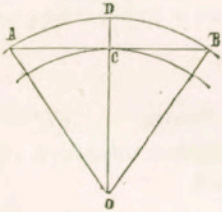
$$b' = 2\, r \text{ sty } \frac{a}{2}, \text{ czyli gdy } r=1;\ b' = 2 \text{ sty } \frac{a}{2}. \qquad (2)$$

Np. W kole mającém promień $5' \, 4''$ boki dziesięciokąta opisanego i wpisanego, będą:

$$\log b = \log 2 + \log 5'\,4'' + \log \text{wst } 18^0 = 3{,}337384.$$
$$\log b' = \log 2 + \log 5'\,4'' + \log \text{sty } 18^0 = 3{,}509133.$$

Zadanie 2. — Obrachować powierzchnię wielokąta foremnego, wiedząc, oprócz liczby jego boków, albo promień koła wpisanego, albo promień koła opisanego, albo długość jednego z boków.

1) Skoro wiadomą jest liczba n boków, dany jest a, odpowiedni kąt przy środku; znając przytém R promień koła opisanego, powierzchnia P będzie:



$$P = n.\ AB.\ \frac{CO}{2} = \frac{n}{2}.\ 2.\ R.\text{ wst}\frac{a}{2}\, R.\text{ dos}\frac{a}{2}$$
$$= \frac{n}{2}.\ R^2.\ \text{wst } a.$$

Np. Wielokąt ma mieć boków 40, promień koła opisanego $10'$, to $a = \frac{360}{40} = 9^0$,

$$\log P = \log 20 + 2 \log 10 + \log \text{ wst } 9^0, = 2{,}495\ 362\ 4,$$
$$P = 312'869\ \square.$$

2) Gdy znanym jest r promień koła wpisanego w wielokąt foremny o n bokach, to powierzchnia wielokąta będzie:

$$P = \tfrac{1}{2}\ r.\ n.\ AB = r.\ n. \frac{AB}{2} = n.\ r.\ r \text{ sty } \frac{a}{2} = n.\ r.^2 \text{ sty } \frac{a}{2}.$$

Np. Promień koła wpisanego $r = 9',96917$, a inne wielkości jak wyżéj, to:

$$\log P = \log 40 + 2 \log 9',96917 + \log \text{sty } 4^0,30' = 2{,}4953624,$$
$$P = 312',869\ \square.$$

3) Nakoniec, gdy znaną jest tylko b długość boku wielokąta foremnego, wtedy:

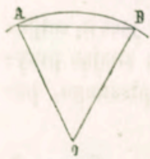
$$P=n.\,b.\,\tfrac{1}{2}\,CO=\frac{n}{2}.\,b.\,\frac{\frac{1}{2}\,b}{\operatorname{sty}\frac{a}{2}}=\frac{nb^2}{4.\operatorname{sty}\frac{a}{2}},$$

Np. Gdy $b=1',570266$, a inne wielkości, jak wyżéj, wypadnie:

$$\log P=\log 10+2\log 1{,}570266-\log 4^0\,30'=2{,}4959624,$$

Zadanie 3.—Obliczyć powierzchnię wycinka koła, wiedząc długość odpowiedniéj cięciwy i promień koła.

Oznaczywszy kąt przy środku przez x, szukaną powierzchnią wycinka przez P, daną cięciwę przez S, a promień przez r; to wiadomą jest rzeczą, że:



$$P:\text{powierzchni koła}=\text{łuk AB}:360^0$$

czyli:

$$P:\pi r^2=x:360^0$$

$$P=\frac{\pi.\,r^2.\,x}{360}.$$

A że $\operatorname{wst}\tfrac{1}{2}x=\dfrac{s}{2r}$,

przeto:

$$P=\frac{2.\,\text{łuk}\left(\operatorname{wst}=\frac{s}{2r}\right)\pi\,r^2}{360}.$$

Np. Jeżeli cięciwa wynosi $s=28'$, $r=15$, to $\dfrac{s}{2r}=\dfrac{14}{15}$,

$$\log\frac{14}{15}=9{,}9700377-10=\log\operatorname{wst}68^0 57'\,39''=\log\operatorname{wst}\frac{82753^0}{1200},$$

będzie więc:

$$\log\frac{\pi}{180}=0{,}241\,870\,1-2$$

$$\log 15^2=2{,}352\,182\,6$$

$$\log\frac{82753}{1200}=1{,}838\,602\,5$$

$$\log P=2{,}432\,655\,2$$

$$P=270',7712\ \square.$$

Zadanie 4.—Mając wiadomy kąt przy środku, odpowiadający cięciwie danego wycinka kołowego, obliczyć powierzchnią tegoż wycinka.

Nazwijmy kąt przy środku przez a, cięciwę przez s, powierzchnią szukaną wycinka przez P, będzie proporcya:

$$P : \pi r^2 = a : 360^0,$$

zkąd:

$$P = \frac{r.^2 \pi. a.}{360^0}.$$

A ponieważ:

$$\text{wst} \tfrac{1}{2} a = \frac{s}{2r},$$

przeto:

$$r = \frac{s}{2 \,\text{wst} \tfrac{1}{2} a},$$

co podstawiając w poprzednie wyrażenie, mamy:

$$P = \frac{s^2 \pi. a}{1440 \,\text{wst}^2 \tfrac{1}{2} a}.$$

Np. $s = 36'$; $a = 48^0\ 54'\ 20''$,

po wykonanu rachunku:

$$P = 80',6978 \square.$$

Zadanie 5.—Jak długi jest łuk, którego znaną jest cięciwa i odpowiedni kąt przy środku.

Niech x oznacza długość łuku, s cięciwę, a kąt przy środku, to:

$$x = \frac{2\pi r. a}{360^0}; \; r = \frac{s}{2 \,\text{wst} \tfrac{1}{2} a},$$

ztąd:

$$x = \frac{s a \pi}{180^0 \; 2 \,\text{wst} \tfrac{1}{2} a.} = \frac{s}{2 \,\text{wst} \tfrac{1}{2} a}. a. \frac{\pi}{180^0}.$$

Np. kąt $a = 60^0\ 40'\ 20''$; $s = 15'$,

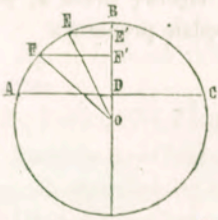
$$\log x = \log 15 + \log 60 \frac{121^0}{180} + \log 0{,}017453$$

$$- \log 2 - \log \text{wst}\ 30^0\ 20'\ 10''$$

$$x = 15',7242.$$

Zadanie 6.—Znaleźć powierzchnią pasa kulistego, wiedząc kąty FOE i EOB, równie jak promień R danéj kuli.

Oznaczmy dla krótkości kąt FOE$=\alpha$, kąt EOB$=\beta$. Wiadomo z solidometryi, że powierzchnia pasa utworzonego obrotem łuku EF zawartego między cięciwami EE′ i FF′, wyrównywa;



$$=2\pi.\ R.\ E'F'.$$

Lecz: $E'F'=E'O-F'O$

$$=R \text{ dos } \beta - R \text{ dos } (\beta+\alpha).$$

ztąd:

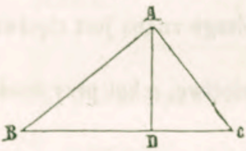
$$\text{powierzch. pasa}=2\pi\ R^2\ [\text{dos } \beta - \text{dos } (\beta+\alpha)],$$

a zmieniając różnicę tych dostaw na iloczyn linij trygonometrycznych, wypadnie:

$$\text{powierzch. pasa}=2\pi\ R^2.\ 2 \text{ wst}\left(\frac{2\beta+\alpha}{2}\right) \text{wst}\,\frac{\alpha}{2}.$$

Zadanie 7.— Znaleźć objętość ciała utworzonego z obrotu trójkąta ABC naokoło boku BC, jeżeli wiadome są dwa boki tego trójkąta i kąt między niemi zawarty.

Niech będą dwa boki AB, BC i kąt B.



Na mocy wiadomości z solidometryi mamy:

$$\text{Objętość ABC}=\tfrac{2}{3}\pi.\ AD.\ ABC.$$

A że z trójkąta A B C wypada AD$=$AB wst B; nadto powierzchnia trójkąta ABC$=\frac{1}{2}$. AB. BC. wst B, przeto po podstawieniu będzie: $\text{objętość ABC}=\frac{2}{3}\pi.\ AB. \text{ wst B}. \frac{AB.\ BC}{2} \text{ wst B}=$

$$=\tfrac{1}{3}\pi.\ AB.^2\ BC.\ \text{wst}^2\ B.$$

Zadanie 8.—Jeżeli wiadomy jest tylko jeden bok, naokoło którego trójkąt się obraca, i obadwa przyległe mu kąty, obliczyć bryłowatość ciała utworzonego przez obrot takiego trójkąta (fig. taż sama).

Dany bok BC i kąty B i C.

Wiemy, że bryłowatość ciała z obrotu trójkąta powstałego, równa się:

$$\text{objętość } ABC = \tfrac{2}{3}\,\pi.\ AD.\ ABC.$$

Z wyrażenia dla powierzchni trójkąta:

$$ABC = \frac{AD.\,BC}{2},$$

wypada, że:

$$AD = \frac{2.\ ABC}{BC};$$

ponieważ zaś powierzchnię trójkąta ze znanego jednego boku i dwóch przyległych kątów obrachować można na mocy wzoru:

$$\text{powierzch. } ABC = BC^2 \frac{\text{wst}\,B\ \text{wst}\,C}{2\ \text{wst}\,A},$$

przeto objętość ciała z obrotu ABC, będzie się równała:

$$= \tfrac{2}{3}\,\pi.\frac{BC.^2\ \text{wst}\,B.\ \text{wst}\,C}{2.\ \text{wst}\,A} \cdot \frac{BC.\ \text{wst}\,B.\ \text{wst}\,C}{\text{wst}\,A}.$$

$$= \tfrac{1}{3}\,\pi.\frac{BC.^3\ \text{wst}^2 B.\ \text{wst}^2 C}{\text{wst}^2 A}.$$

Zadanie 9. — Zmierzyć wysokość wieży, któréj podstawa przystępna znajduje się na gruncie zupełnie poziomym.

Do tego użyć należy kątomiaru, który się ustawia w pewnéj nie wielkiéj odległości od wieży, lecz nie zbyt blizko; następnie wymierza się kąt ScD utworzony przez dwa promienie: jeden idący do wierzchołka wieży, drugi poziomo poprowadzony; wymierza się odległość AB między kątomiarem a podstawą

wieży, i ocenia się wysokość samego kątomiaru nad poziom gruntu.

Gdy kąt $ScD=34^0 35'$

$AB=74^m,27$

$Bc=1^m,10$,

będzie:

$$SD=AB.\ \mathrm{sty}\ ScD,$$

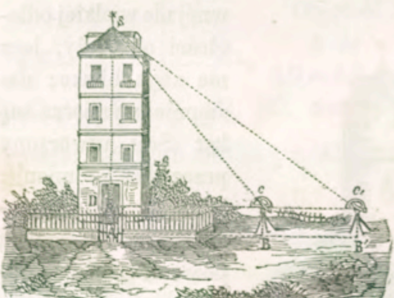
czyli:

log SD=	log AB=	1,870 813 4
	log sty ScD=	9,838 486 7
		1,709 300 1
	SD=	51,205
a że:	Bc=	$1^m,10$
	więc:	$52^m,305$

będzie wysokością wieży.

Zadanie 10. — Zmierzyć wysokość wieży nieprzystępnéj, lecz stojącéj na gruncie poziomym.

Jeżeli SD jest wysokością żądaną, to ustawia się naprzód kątomiar w pewnéj odległości od wieży i celując do wierzchołka, ocenia się kąt ScD; następnie wytyka się na gruncie linia w kierunku cD, tojest w kierunku płaszczyzny, na któréj znajduje się luneta kątomiaru, i na przedłużeniu tego kierunku obiera się punkt B′, do którego przeniosłszy kątomiar, wymierza się kąt Sc′D, równie jak i odległość BB′ między dwoma stanowiskami kątomiaru.



Wówczas mając wiadomą podstawę BB' i kąty ScD, Sc'D, otrzymamy z trójkąta Scc' wartość dla Sc':

$$\frac{Sc'}{cc'}=\frac{\text{wst ScD}}{\text{wst }(ScD-Sc'D)},$$

$$Sc'=\frac{cc'.\text{ wst ScD}}{\text{wst }(ScD-Sc'D)}.$$

Następnie z trójkąta prostokątnego SDc', wysokość SD= =Sc'. wst Sc'D; gdzie podstawiając powyżéj znalezioną wartość, za Sc' będzie:

$$SD=\frac{cc'.\text{ wst ScD wst }Sc'D}{\text{wst}(ScD-Sc'D)},$$

$$\log SD=\log cc'+\log\text{wst ScD}+\log Sc'D$$
$$+\text{dop log wst }(ScD-Sc'D)-10.$$

Np. $cc'=23^m,35$; $Sc'D=30^0\,29'\,30''$,
$ScD=36^0\,45'\,40''$,

zkąd:

$$ScD-Sc'D=6^0\,16'\,10'',$$

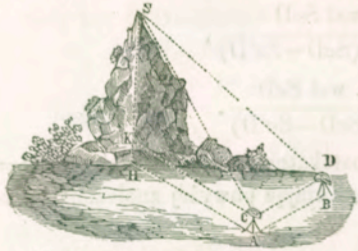
wysokość SD będzie:

log 23^m, 35=	1,366 423 0
log wst $30^0\,29'\,30''$=	9,705 361 6
log wst $36^0\,45'\,40''$=	9,777 049 6
dop log wst $6^0\,16'\,10''$=	0,916 760 6
log SD=	1,810 594 8
	SD=$64,655^{\underline{m}}$
wysokość kątomiaru	1,10
	$cB=65^m,754$

Zadanie 11.—Znaleźć wysokość góry.

W blizkości góry obiera się dwa stanowiska A i B, leżące prawie na jednéj poziomej płaszczyznie z podstawą góry, i takie, aby z nich można było widzieć wierzchołek góry i zmierzyć odległość rozdzielającą te stanowiska.

Utkwiwszy np. w B pręt, mierzy się na stanowisku A kąt jaki czyni linia CD z linią CS, i kąt jaki czyni promień oczny



CS z poziomem, czyli kąt SCK. Następnie przenosi się instrument na stanowisko B i z niego ocenia kąty SDC i SDK. Zmierzywszy w końcu podstawę całego pomiaru, tojest linię AB, obrachujemy z trójkąta SCD, w którym znany jest bok i trzy kąty linią

$$SC = \frac{CD.\ \text{wst } SDC}{\text{wst } CSD}.$$

Trójkąt SCK prostokątny przy K, daje wielkość na bok:

$$SK = SC.\ \text{wst } SCK;$$

podstawiwszy za SC poprzednio otrzymaną wartość, wypadnie:

$$SK = CD.\frac{\text{wst } SDC.\ \text{wst } SCK}{\text{wst } CSD},$$

$$\log SK = \log CD + \log \text{wst } SDC + \log \text{wst } SCK + \text{dop. } \log \text{wst } CSD - 20.$$

Przykład:

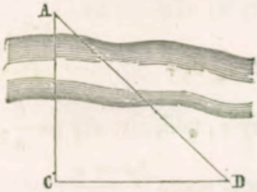
$$SCK = 30^0\,30'; \; SCD = 83^0\,25',$$

$$SDC = 83^0\,50'; \; CD = 50^m; \; AC = 1^m,1.$$

$$\begin{array}{rl}
\log 50 = & 1{,}698\,970\,0 \\
\log \text{wst } 83^0\,50' = & 9{,}997\,479\,7 \\
\log \text{wst } 30^0\,30' = & 9{,}705\,468\,9 \\
\text{dop } \log \text{wst } 10^0\,45' = & 0{,}729\,265\,2 \\
\hline
\log SK = & 2{,}131\,183\,8 \\
SK = & 135{,}26 \\
\text{a że:} \quad KS = & 1^m{,}1 \\
\hline
\text{więc:} \quad SK = & 136^m{,}36.
\end{array}$$

Zadanie 12.— Zmierzyć odległość jednego punktu od drugiego lecz nieprzystępnego.

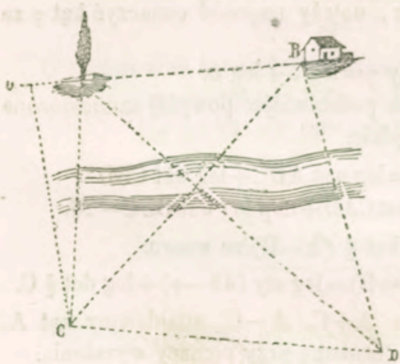
Niech C będzie stanowisko mierzącego, a A punktem niedostępnym. Aby odległość AC obrachować, obiera się podstawa CD, którą się dokładnie wymierza; następnie kątomiarem oceniają się kąty ACD, ADC. Z pomocą tych danych dozwalających obliczyć kąt trzeci CAD, znajdziemy:



$$AC = \frac{CD.\ \mathrm{wst}\,ADC}{\mathrm{wst}\,CAD}.$$

Zadanie 13. — Zmierzyć odległość rodzielającą dwa nieprzystępne punkta.

Obrawszy na równym gruncie taką podstawę CD, aby ją można wymierzyć i na jéj końcach ustawić kątomiar, oceniają się kąty BDC, ADC, ACD, BCD, ACB. Wtedy w trójkątach ACD i BCD, znając bok CD i kąty, można obliczyć boki AC i CB. Z pomocą otrzymanych w ten sposób boków i kąta C, trójkąta ACB otrzymamy wartość dla szukanéj odległości AB.



Rachunek powyższy najprościéj w taki wykonać można sposób. Oznaczmy przez A, B, C kąty trójkąta ABC, a przez a, b, c boki przeciwległe odpowiednim kątom, a nadto podstawę CD przez δ. Z trójkątów BCD i ACD oddzielnie uważanych, mamy:

$$a = \frac{\delta.\ \mathrm{wst}\,BDC}{\mathrm{wst}\,CBD},\ b = \frac{\delta\ \mathrm{wst}\,ADC}{\mathrm{wst}\,CAD},$$

czyli:

$\log a = \log \delta + \log \text{wst BDC} + \text{dop} \log \text{wst CBD} - 10,$

$\log b = \log \delta + \log \text{wst ADC} + \text{dop} \log \text{wst CAD} - 10.$

Z trójkąta ABC wypada:

$$\text{sty} \tfrac{1}{2}(\text{A}-\text{B}) = \frac{a-b}{a+b} \text{dot} \tfrac{1}{2} \text{C}.$$

Wprowadźmy tu kąt pomocniczy φ, taki, aby $\text{sty}\, \varphi = \frac{b}{a}$,

wówczas ułamek $\frac{a-b}{a+b}$, da się zastąpić przez $\frac{1-\text{sty}\,\varphi}{1+\text{sty}\,\varphi}$; będzie więc:

$$\text{sty} \tfrac{1}{2}(\text{A}-\text{B}) = \frac{1-\text{sty}\,\varphi}{1+\text{sty}\,\varphi} \text{dot} \tfrac{1}{2} \text{C}.$$

A ponieważ $\text{sty}\, 45^0 = 1$, przeto:

$$\text{sty} \tfrac{1}{2}(\text{A}-\text{B}) = \frac{\text{sty}\, 45^0 - \text{sty}\,\varphi}{1+\text{sty}\, 45^0 .\, \text{sty}\,\varphi} \text{dot} \tfrac{1}{2} \text{C} = \text{sty}\,(45^0-\varphi) \text{dot} \tfrac{1}{2} \text{C}.$$

Prowadząc rachunek, należy naprzód oznaczyć kąt φ ze wzoru:

$$\log \text{sty}\, \varphi = \log b - \log a,$$

w którym za $\log b$, $\log a$ podstawiając powyżéj zamieszczone wzory logarytmiczne, będzie:

1) $\log \text{sty}\, \varphi = \log \text{wst ADC} + \log \text{wst CBD}$
$+ \text{dop} \log \text{wst CAD} + \text{dop} \log \text{wst BDC} - 20.$

Następnie oznaczyć kąt $\frac{1}{2}(\text{A}-\text{B})$ ze wzoru:

2) $\log \text{sty} \tfrac{1}{2}(\text{A}-\text{B}) = \log \text{sty}\,(45-\varphi) + \log \text{dot} \tfrac{1}{2} \text{C}.$

Mając zaś wiadome A+C, A—C, znajdziemy kąt A, a tém samém i odległość szukaną przy pomocy wyrażenia:

$$c = \frac{a \text{ wst C}}{\text{wst A}},$$

z którego wypada:

3) $\log c = \log \delta + \log \text{wst BDC} + \text{dop} \log \text{wst CBD}$
$+ \log \text{wst C} + \text{dop} \log \text{wst A} - 20.$

Uwaga. — Wprowadzenie kąta posiłkowego φ uwalnia od obrachowywania wielkości boków a, b.

Przykład:

$CD=60^m$; $BDC=121^0,35'$

$ADC=49^0\,20'$; $ACD=89^0\,36'\,35''$

$BCD=31^0\,22'\,30''$; $ACB=67^0\,15'\,40''$;

ztąd wypada, że:

$$CBD=27^0\,2'\,30'',\ CAD=41^0\,3'\,25'',$$

$$180^0-BDC=58^0\,25',\ \tfrac{1}{2}\,C=33^0\,37'\,50'',$$

$$\tfrac{1}{2}\,(A+B)=56^0\,22'\,10''.$$

Obliczenie kąta φ według wzoru (1):

$$\begin{aligned}\log \text{wst}\ 49^0\,20' &= 9{,}879\,963\,4\\ \log \text{wst}\ 27^0\,2'\,30'' &= 9{,}657\,666\,1\\ \text{dop}\log \text{wst}\ 41^0\,3'\,25'' &= 0{,}182\,549\,0\\ \text{dop}\log \text{wst}\ 58^0\,25' &= 0{,}069\,621\,9\\ \hline \log \text{sty}\ \varphi &= 9{,}789\,800\,4\\ \varphi &= 31^0\,38'\,45''\\ 45^0-\varphi &= 13^0\,21'\,15''.\end{aligned}$$

Obrachowanie kątów $\frac{1}{2}$ (A—B) i A, według wzoru (2):

$$\begin{aligned}\log \text{sty}\ 13'\,21^0\,15'' &= 9{,}375\,459\,5\\ \log \text{dot}\ 33^0\,37'\,50'' &= 0{,}177\,069\,1\\ \hline \log \text{sty}\ \tfrac{1}{2}\,(A-B) &= 9{,}552\,528\,6\\ \tfrac{1}{2}\,(A-B) &= 19^0\,38'\,26'',5\\ \tfrac{1}{2}\,(A+B) &= 56^0\,22'\,10''\\ \hline A &= 76^0\,0'\,36'',5.\end{aligned}$$

Obliczenie szukanéj odległości c z wzoru (3):

$$\begin{aligned}\log 60 &= 1{,}778\,151\,3\\ \log \text{wst}\ 58^0\,25' &= 9{,}930\,378\,1\\ \text{dop}\log \text{wst}\ 27^0\,2'\,30'' &= 0{,}342\,333\,9\\ \log \text{wst}\ 67^0\,15'\,40'' &= 9{,}964\,860\,9\\ \text{dop}\log \text{wst}\ 76^0\,0'\,36'',5 &= 0{,}013\,076\,7\\ \hline &\ 2{,}028\,800\,9\\ C &= 106^m,856.\end{aligned}$$

Zadanie 14. — Znaleźć odległość danego punktu od linii prostéj, przechodzącéj przez dwa punkta nieprzystępne. (Fig. taż sama).

W tym celu obrawszy podstawę CD od punktu danego C, oznacza się dokładnie jéj długość, równie jak wielkość pięciu kątów BDC, ADC, ACD, BCD, ACB, następnie sposobem podanym w poprzedniém zadaniu wynajduje się kąty A i B, wchodzące do trójkąta ACB. Wówczas szukaną odległość punktu C od linii AB czyli prostopadłą CO, otrzymamy z wzoru:

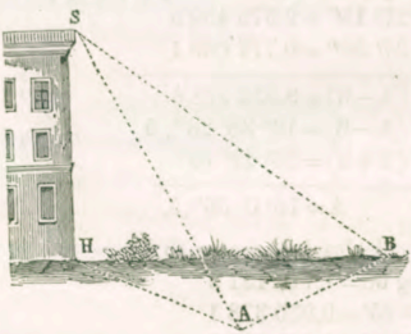
$$OC = b \text{ wst } A,$$

z którego po podstawieniu za b wartości otrzymanéj z poprzedniego, wypadnie:

$$OC = \log \delta + \log \text{wst} ADC + \text{dop} \log \text{wst} CAD + \log \text{wst} A - 10.$$

Zadanie 15. — Z wierzchołka wieży, któréj wysokość jest znaną, oznaczyć odległość między dwoma punktami leżącemi na jednéj pozioméj płaszczyznie z podstawą wieży.

Osoba stojąca na wieży zmierzyć winna kąty ASH, BSH, jakotéż ASB; wówczas z trójkątów SAH i SBH, wypadnie:



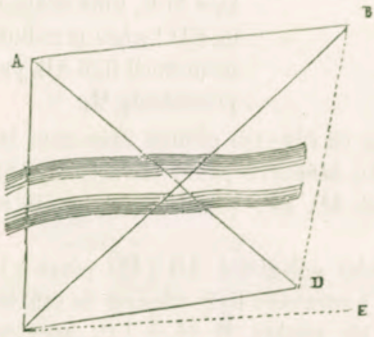
$$AH = SH. \text{ sty } ASH,$$
$$BH = SH. \text{ sty } BSH.$$

Następnie, kąt obserwowany ASB sprowadza się do poziomu, tojest oblicza się wielkość kąta AHB na płaszczyznie pozioméj, odpowiadającego kątowi ukośnie stojącemu ASB. Wtedy znając na poziomie kąt AHB i dwa boki AH, BH, łatwo obliczyć wiadomym sposobem długość AB.

Liczne natrafiamy zastosowania tego zadania; np. obserwator stojący na miejscu wzniesioném, którego wysokość nad poziom za pomocą barometru obliczył, może przy pomocy powyższego zadania wymierzać z wierzchołka góry, odległości różnych miejsc leżących na jednym poziomie z podstawą tejże góry.

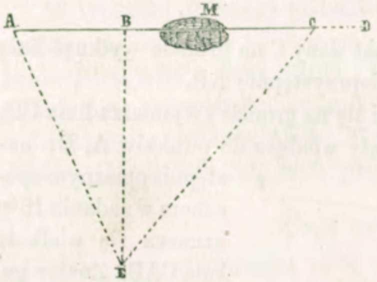
Zadanie 16.—Przez punkt dany C na gruncie wytknąć linią równoległą od innéj linii nieprzystępnéj AB.

Przez punkt C prowadzi się na gruncie i wymierza linia CD, z jéj końców oznaczają kąty wiodące do punktów A, B; następnie opisanym sposobem w zadaniu 13ém oznacza się wielkość kąta CAB. Znając go, stawia się w punkcie C kątomiar, kieruje się stałe ramie według linii CA, a drugie ruchome ramie obraca się póty, aż kąt utworzony między niemi, tojest kąt ACE, nie stanie się równym spełnieniu kąta BAC; wtedy na kierunku ramienia ruchomego wytyka się linią CE, która będzie żądaną linią równoległą od AB.



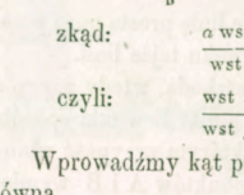
Zadanie 17.—Przedłużyć na gruncie linię prostą poza przeszkodę, która nie dozwala widziéć kierunku tejże linii.

Jeżeli linia AB jest daną, a M przeszkodą, wtedy naprzód wymierza się długość AB, i obiera się punkt E w taki sposób, aby zeń można było widziéć grunt, na którym przypaść winno przedłużenie linii AB. Następnie z punktów A i B wymierzają się kąty A i B, należące do trójkąta AEB, i obrachowywa się długość boku AE. Znając bok AE, wytyka się na gruncie linią EF w kierunku wiodącym do miejsca gdzie przypada przedłużenie linii AB i wymierza się kąt AEF. Nazywając przez C punkt spotkania się linii AB z linią EF, otrzymamy trójkąt ACE, w którym wiadomy jest bok AE, i dwa przyległe kąty; łatwo więc obliczyć bok EC i długość znalezioną odciąć na kierunku EF aż do punktu C. Nakoniec wytykając z C, linię prostą, któraby z kierunkiem EC tworzyła kąt DCE, równy spełnieniu kąta ACE, linia znaleziona CD będzie przedłużeniem danéj linii AB, poza przeszkodą M.



Zadanie 18. — Mając na równym gruncie oznaczone trzy punkta A, B, C, potrzeba oznaczyć punkt czwarty M, z którego widziane odległości AB, BC, przedstawiałyby się pod kątami danemi α i β.

Nazwijmy dla krótkości odległości AB i BC przez a i b, a nieznane kąty wiodące do szukanego punktu M od A i C, oznaczmy przez M AB$=x$, M CB$=y$.



Z trójkątów AMB i CMB wypada:

$$BM=\frac{a.\ \text{wst}\, x}{\text{wst}\, \alpha};\ BM=\frac{b\ \text{wst}\, y}{\text{wst}\, \beta},$$

zkąd:
$$\frac{a\ \text{wst}\, x}{\text{wst}\, \alpha}=\frac{b\ \text{wst}\, y}{\text{wst}\, \beta},$$

czyli:
$$\frac{\text{wst}\ x}{\text{wst}\ y}=\frac{b\ \text{wst}\, \alpha}{a\ \text{wst}\, \beta}.$$

Wprowadźmy kąt posiłkowy φ taki, aby jego styczna była równą

$$\text{sty}\ \varphi=\frac{b\ \text{wst}\, \alpha}{a\ \text{wst}\, \beta},$$

wtedy będzie:

$$\frac{\text{wst}\ x}{\text{wst}\ y}=\text{sty}\ \varphi,$$

Poczytując to za proporcyą, której czwarty wyraz równy jedności, i biorąc w obu stosunkach różnicę dwóch wyrazów do ich summy, wypadnie:

$$\frac{\text{wst } x - \text{wst } y}{\text{wst } x + \text{wst } y} = \frac{\text{sty } \varphi - 1}{\text{sty } \varphi + 1}.$$

Lecz:

$$\frac{\text{wst } x - \text{wst } y}{\text{wst } x + \text{wst } y} = \frac{\text{sty } \frac{1}{2}(x-y)}{\text{sty } \frac{1}{2}(x+y)},$$

przeto:

$$\frac{\text{sty } \frac{1}{2}(x-y)}{\text{sty } \frac{1}{2}(x+y)} = \frac{\text{sty } \varphi - 1}{\text{sty } \varphi + 1}.$$

A że sty $45^0 = 1$, możemy więc napisać:

$$\frac{\text{sty } \frac{1}{2}(x-y)}{\text{sty } \frac{1}{2}(x+y)} = \frac{\text{sty } \varphi - \text{sty } 45^0}{1 + \text{sty } \varphi \text{ sty } 45^0},$$

co jak wiemy, równa się stycznéj różnicy dwóch łuków $(\varphi - 45^0)$, przeto ostatecznie:

$$\frac{\text{sty } \frac{1}{2}(x-y)}{\text{sty } \frac{1}{2}(x+y)} = \text{sty } (\varphi - 45^0).$$

Z tego równania wypada:

$$\text{sty } \tfrac{1}{2}(x-y) = \text{sty } (\varphi - 45^0) \text{ sty } \tfrac{1}{2}(x+y);$$

a ponieważ summa kątów x i y równa się:

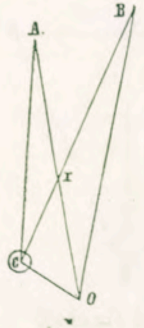
$$(360^0 - \alpha - \beta - ABC),$$

przeto:

$$\text{sty } \tfrac{1}{2}(x-y) = \text{sty } (\varphi - 45^0) \text{ sty}\left(180^0 - \frac{\alpha + \beta + ABC}{2}\right).$$

Wzór dogodny do działań z logarytmami, i za pomocą którego obrachujemy $\frac{1}{2}(x-y)$. Znając przytém summę $x+y$, łatwo dojdziemy wielkości każdego z kątów x i y, które posłużą do oznaczenia położenia punktu m.

Zadanie 19. — Przy mierzeniu kątów w trójkątach, przypuszczaliśmy zawsze, że można stanąć w samym wierzchołku kąta. Często się jednak zdarza, że wierzchołek kąta jest nieprzystępny, np. środek wieży lub dzwonnicy kościelnéj; w takim razie, instrument użyty do mierzenia kątów, ustawia się w inném miejscu, np. O, przyległém wierzchołkowi C kąta, i wymierza się z punktu O kąt między dwoma przedmiotami AOB, zamiast kąta ACB; a rachunkiem dopiero wymierzony kąt sprowadza się do środka C stacyi.



Dlatego przy pomiarach trygonometrycznych częstego jest zastosowania, następne zadanie:

Sprowadzić kąt wymierzony do środka stacyi.

Oznaczmy kąt ACB=C; AOB=O, CBO=B; OC=r, AC=g, CB=d; a nakoniec kąt AOC, zwany kątem kierunkowym, przez y.

Ponieważ punkt I jest przecięciem linii CB i AO, przeto dwa trójkąty AIC, BIO, dają:

$$A+C=B+O,$$
$$C=O+B-A;$$

tak więc zadanie będzie rozwiązane, skoro ocenić zdołamy kąty B i A.

Z trójkąta CBO mamy proporcyę:

$$\frac{r}{d}=\frac{\text{wst B}}{\text{wst }(O+y)},$$

ztąd:

$$\text{wst B}=\frac{r}{d}\text{ wst }(O+y).$$

Podobnie z trójkąta CAO wypada:

$$\text{wst A}=\frac{r}{g}\text{ wst }y.$$

Dzieląc te dwa wzory przez wst 1″, będzie:

$$\frac{\text{wst B}}{\text{wst }1''}=\frac{r\text{ wst }(O+y)}{d\text{ wst }1''};\quad\frac{\text{wst A}}{\text{wst }1''}=\frac{r\text{ wst }y}{g\text{ wst }1''}.$$

Zwykle kąty B i A są tak małe, że można zastąpić:

$$\frac{\text{wst B}}{\text{wst }1''}\text{ i }\frac{\text{wst A}}{\text{wst }1''},$$

przez stosunki kątów; tym sposobem wartości kątów B i A wyrażone w sekundach, oznaczyć będzie można z wzorów:

$$B=\frac{r \text{ wst } (O+y)}{d \text{ wst } 1''};\ A=\frac{r \text{ wst } y}{g \text{ wst } 1''};$$

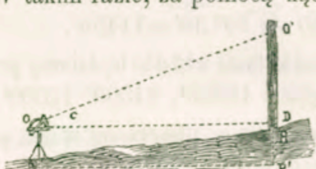
a wtedy wartość dla kąta O wyrazi się wzorem:

$$\left(C=O+r\frac{\text{wst } (O+y)}{d \text{ wst } 1''}-\frac{\text{wst } y}{g \text{ wst } 1''}\right).$$

Powyższe wyrażenie dla kąta C jest ogólne; stosuje się do każdego miejsca obranego zewnątrz wierzchołka C; należy tylko zwracać na to uwagę, że wchodzące wielkości g, d, są odległościami między środkiem stacyi a punktami A i B; nadto że kąt y utworzony przez dwie linie: jednę idącą od środka stacyi do wierzchołka przybranego, a drugą od tegoż samego wierzchołka do sygnału lewego A, liczy się zawsze od pierwszéj z tych linij w kierunku od lewéj ręki ku prawéj.

Zadanie 20. — Gdy grunt na którym odbywamy pomiar jest pochylony lub nierówny, wtedy mierząc odległość między dwoma punktami, np. A i B, należy poznać nie długość rzeczywistą AB, lecz jéj rzut poziomy czyli odległość AB′ środkującą między temi punktami A i B, jakby zrzuconemi na płaszczyznę poziomą przez punkt A przechodzącą.

W takim razie, za pomocą kątomiaru oceni się kąt c między linią poziomą a kierunkiem OO′ linii, łączącéj środek instrumentu z punktem oznaczonym na tyce w wysokości O′, równéj wysokości instrumentu AO; wtedy z trójkąta prostokątnego ABB′, długość AB sprowadzona do poziomu, będzie:



$$AB'=AB \text{ dos } c.$$

Zwykle w praktyce kąty pochyleń są małe, ich więc dostawy zmieniają się bardzo powolnie, tak, że różnice logarytmów dają liczby znaczące dopiero w siódmych dziesiętnych cyfrach. Dlatego w podobnych działaniach sprowadzania podstaw do poziomu, oblicza się odrazu różnica między zmierzoną długością podstawy a długością sprowadzoną do poziomu, tojest:

$$\text{AB}-\text{AB dos } c=\text{AB }(1-\text{dos } c)=2\text{ AB. wst}^2\ \tfrac{1}{2}\ c.$$

Przez takie podstawienie wstawy, to zyskujemy, że chociaż kąty nachyleń są małe, jednak zmiany ich wstaw są szybkie, a przez to możemy z większą dokładnością oceniać nierówności grutu.

Zadanie 21.— Znaleźć odległość pewnego przedmiotu PQ, który oko O widzi pod kątem w.

Jeżeli przedmiot PS stoi pionowo, i oko O leży na płaszczyznie pozioméj przechodzącéj przez spód tego przedmiotu, wtedy odległość OS = D = PS dot w.

Np. Przedmiot wysoki stóp 160⁰ widziany pod kątem 48′, odległy jest na: 160. dot 48′ = 11454′

Jeżeli zaś oko tak leży, że prostopadła spuszczona z O, na przedmiot PQ, dzieli jego długość na dwie równe części, wtedy szukana odległość:

$$\text{D}=\text{PS dot } \tfrac{1}{2}\ w=80 \text{ sty } 89^0\ 36'=11459'.$$

Zadanie 22.—Pod jakiemi kątami widzieć będziemy przedmiot wysoki na 160′ z odległości 48000′, 24000′ 12000′.

W tym razie nie znane są kąty w, utworzone w oku przez promienie idące od skrajnych punktów danego przedmiotu. Kąty te znajdziemy tak:

$$\text{sty } \tfrac{1}{2}\, w=\tfrac{80}{48000}=\tfrac{1}{600};\ \tfrac{1}{2}\, w=0^0\ 5'\ 43'',88,$$

$$w=0^0\ 11'\ 27'',76,$$

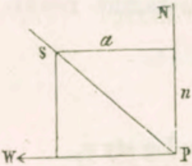
$$\text{sty } \tfrac{1}{2}\, w=\tfrac{80}{24000}=\tfrac{1}{300};\quad w=0^0\ 22'\ 55''$$

$$\text{sty } \tfrac{1}{2}\, w=\tfrac{80}{12000}=\tfrac{1}{150};\quad w=0^0\ 45'\ 50'',16.$$

Zadanie 23. — Znaleźć wielkość przedmiotu, który z odległości 450′ przedstawia się w oku pod kątem 1° 1′ 10″.

Wielkość przedmiotu $=450'.\ \mathrm{sty}\ 1^{0}\ 1'\ 10''=8',0075$.

Zadanie 24. — Okręt z pewnego miejsca P, płynie w kierunku NW (północno-zachodnim), i bussola wskazuje, że kąt tego kierunku PS z południkiem PN wynosi 28° 52′. Jeżeli okręt przebył 150 mil, pytanie zachodzi, o ile mil statek oddalił się od północnego, a ile mil od zachodniego kierunku miejsca P.



Oznaczając szukane odległości przez a i n, wypada:

$$n=150.\ \mathrm{dos}\ 28^{0}\ 52'=131,362\ \text{mil},$$
$$a=150.\ \mathrm{wst}\ 28^{0}\ 52'=\ 72,416\ \text{mil}.$$

Zadanie 25.—Podczas kwadry, środki słońca, ziemi, księżyca, połączone liniami prostemi, przedstawiają trójkąt SXZ prostokątny przy X. Ponieważ wiadomo, że odległość SZ wyrównywa czterysta razy wziętéj odległości ZX, zachodzi pytanie, jak wielki w tém położeniu księżyca, jest kąt S.

$$ZX=ZS\ \mathrm{wst}\ S,$$

ztąd:
$$\mathrm{wst}\ S=\frac{ZX}{ZS}=\frac{SX}{400\,SX}=\frac{1}{400}\,.$$
$$\log \mathrm{wst}\ S=7,3979400,$$
$$S=8'\ 35''.$$

Zadanie 26.—Rozwiązać równanie:

$$\mathrm{wst}\ x+\frac{17}{8}\ \mathrm{dos}\ x=-\frac{2}{3}\,.$$

Ponieważ styczna może przyjmować wszelkie wartości, przeto wolno wprowadzić pewien kąt pomocniczy φ, któregoby styczna była:

$$\mathrm{sty}\ \varphi=\frac{17}{8}. \qquad (1)$$

Po podstawieniu téj stycznéj, powyższe równanie zmienia się na:

$$\text{wst}\, x + \text{sty}\, \varphi\, \text{dos}\, x = -\tfrac{2}{3},$$

czyli:

$$-\text{wst}\,(x+\varphi) = \tfrac{2}{3}\, \text{dos}\, \varphi. \qquad (2)$$

Wykonywając logarytmami działania wskazane równaniami (1) i (2), będzie:

$$\begin{array}{rl} \log \text{sty}\, \varphi = \log 17 = & 1{,}230\,448\,9 \\ -\log\ 8 = & 0{,}903\,090\,0 \\ \hline & 0{,}327\,358\,9 = \log \text{sty}\, \varphi, \end{array}$$

$$\varphi = 64^0\, 47'\, 56''.$$

$$\begin{array}{rl} \log[-\text{wst}\,(x+\varphi)] = \log \text{dos}\, \varphi & = 9{,}629\,222\,5 - 10 \\ +\log 2 & = 0{,}301\,030\,0 \\ -\log 3 & = 0{,}477\,121\,2 \\ \hline & 9{,}453\,131\,3 - 10 \end{array}$$

łuk odpowiadający, jest $= 16^0\, 29'\, 30''$.

Porównywając wielkość tego łuku z wyrażeniem równania (2), można przyjąć, że:

$$x + \varphi = 196^0\, 29'\, 30'',$$

zkąd: $x = 131^0\, 41'\, 34''$,

albo też wolno założyć, że:

$$x = -\varphi - 16^0\, 29'\, 20'' = -81^0\, 17'\, 26''.$$

W ogóle, dane równania sprawdzić można za pomocą nieskończonéj liczby odpowiedzi dla łuku x.

KONIEC.

SPIS PRZEDMIOTÓW.

Rozdział I.

Rozdział II.

Rozdział III.

Rozdział IV.
