Dr. Zajączkowski

Arytmetyka

II.

WE LWOWIE
NAKŁADEM TOWARZYSTWA PEDAGOGICZNEGO.

POCZĄTKI
ARYTMETYKI I ALGEBRY

zastósował

do użytku szkół średnich

WŁADYSŁAW ZAJĄCZKOWSKI
Profesor Szkoły Politechniczněj.

CZĘŚĆ DRUGA.

Na III. i IV. klasę.

Selekt 910

WE LWOWIE.
Nakładem Towarzystwa Pedagogicznego.
1888.

Czcionkami I. Związkowej drukarni we Lwowie.

PRZEDMOWA.

Brak podręczników do nauki matematyki, odpowiadających wymaganiom najnowszych instrukcyj ministeryalnych do nauczania tego przedmiotu w naszych szkołach średnich, spowodował Radę Szkolną Krajową do ustanowienia komisyi specyalnéj, któraby wypracowała programy tychże podręczników. W skład téj komisyi weszli, oprócz członków komisyi naukowéj Rady szkolnéj, pp. Dr. Placyd Dziwiński i Dr. Mieczysław Łazarski, profesorowie Szkoły Politechnicznej, tudzież pp. Stanisław Piątkiewicz, profesor Gimnazyum IV., Dr. Ignacy Petelenz, profesor Gimnazyum Frańciszka Józefa i Julian Fąfara, profesor Szkoły Realnéj we Lwowie.

Co do arytmetyki, uznała namieniona komisya książkę wydaną w roku ubiegłym przez Władysława Zajączkowskiego p. t. „Początki arytmetyki, zastósowane do użytku szkół średnich. Na klasę I. i II.“, za odpowiednią, i ograniczyła się tylko do dania autorowi pewnych wskazówek, które już w następném wydaniu téj książki będą uwzględnione. Zarazem wezwała taż komisya autora, ażeby, kierując się tymi samymi wskazówkami, wypracował dalszy ciąg początków arytmetyki, tudzież początki algebry, na klasę III. i IV.

Tym sposobem powstała niniejsza książka, którą jako część drugą poprzód wydanych „Początków arytmetyki“ pod światły sąd kolegów zawodowych oddaję. Lubo w opracowaniu poszczególnych rozdziałów trzymałem się ściśle uwag, zawartych w instrukcyach ministeryalnych, toć w ich uporządkowaniu odstąpiłem nieco od toku nauczania, przepisanego przez plany lekcyjne. Stało się to głównie z tego powodu, aby przez rozrywanie rzeczy, które w ścisłym pozostają związku, nie psuć systematyczności wykładu. Mimo to, każdy dział starałem się tak wyłożyć, ażeby nauczyciel mógł podług téj książki tak nauki udzielać, jak tego wymagają plany lekcyjne, obowiązujące czy to w szkołach gimnazyalnych czy to w szkołach realnych.

Daleki od zarozumienia, jakobym utworzył rzecz doskonałą, z wdzięcznością przyjmę i w następném wydaniu uwzględnię wszelkie słuszne uwagi, jakich mi zawodowi koledzy zapewne udzielić raczą, a już dzisiaj poczuwam się do miłego obowiązku, złożenia najserdeczniejszej podzięki wymienionym powyżej członkom komisyi specyalnéj za cenne wskazówki, przedewszystkiem zaś p. Julianowi Fąfarze, który z ramienia tej komisyi nad poprawném téj książki wydaniem czuwał, i ją licznymi, z własnéj praktyki nauczycielskiéj zaczerpniętymi, przykładami wzbogacił.

Lwów 27. czerwca 1888.

TREŚĆ.

Rozdział I.

O regule spółki, podziału proporcyonalnego i mieszaniny.

Rozdział II.

O regule trzech składanéj i regule łańcuchowéj, tudzież o rachunku procentów składanych.

Rozdział III.

O rachunkach w liczbach niezupełnych.

Rozdział IV.

O potęgowaniu i pierwiastkowaniu.

Rozdział V.

O rachunku w liczbach ogólnych czyli algebrze.

Rozdział VI.

O wielomianach.

Rozdział VII.

O ułamkach algebraicznych.

Rozdział VIII.

O równaniach stopnia pierwszego z jedną niewiadomą.

Rozdział IX.

O równaniach stopnia pierwszego z wielu niewiadomymi.

ROZDZIAŁ I.

O regule spółki, podziału proporcyonalnego i mieszaniny.

§. 1.

Reguła spółki.

1. W życiu codziennem zdarza się często, że się pewna liczba osób łączy ze sobą, celem podjęcia jakiegoś przedsiębiorstwa handlowego lub przemysłowego, i zawiązuje tak zwaną spółkę *(Gesellschaft)*. W tym przypadku każdy członek spółki czyli spólnik *(Gesellschafter)* składa na spólny zarobek pewną kwotę pieniężną, t. z. udział *(Antheil)*; suma wszystkich udziałów jest kapitałem spółki.

W przedsiębiorstwach wielkich, kiedy chodzi n. p. o budowę kolei żelaznéj, o regulacyą rzeki, o założenie domu bankowego, i t. p., kapitał spółki dzieli się pospolicie na udziały po 100, 200, 500 lub 1000 zł.; każdy z tych udziałów zowie się akcyą *(Actie)*, a właściciel jednéj lub więcéj akcyj zowie się akcyonaryuszem *(Actionaer)*. Gdy się okaże, że kapitał spółki nie jest dostateczny, wówczas spółka wypuszcza nową seryą akcyj albo téż zaciąga pożyczkę, która również dzieli się na udziały po 100, 200,... zł.; te ostatnie udziały zowią się obligacyami *(Obligationen)*. Obligacyj nie należy mieszać z akcyami. Dochód od akcyj jest w ogóle zmienny, będąc zależnym od większego lub mniejszego zarobku czyli zysku spółki, gdy tymczasem obligacye dają dochód stały i są ubezpieczone całym majątkiem spółki. Dochód roczny, przypadający na każdą akcyą, zowie się dywidendą *(Dividende)*.

Taki jest początek reguły spółki *(Gesellschaftsregel)*, która ma na celu rozdzielenie między spólników (akcyonaryuszów), proporcyonalnie do ich udziałów (akcyj), wszelkich zysków lub strat na przedsiębiorstwie.

Jak się zadania na regułę spółki rozwiązuje, pokażą następujące przykłady.

2. Zadanie 1. „Trzy osoby złożyły na spólny zarobek: jedna 1000 zł., druga 2000 zł., a trzecia 3000 zł. Całkowity zysk wyniósł 840 zł.; ile z tego zysku przypadnie na każdą osobę?"

Rozwiązanie. Na całkowitą sumę udziałów $1000 + 2000 + 3000$, t. j. 6000 zł. przypada 840 zł. zysku; stąd wypływa, że na udział, wynoszący 1 zł., przypadnie zysk 6000 razy mniejszy, t. j. $\frac{840}{6000}$ zł. A zatém:

1. osoba, włożywszy 1000 zł., otrzyma $\frac{840}{6000} . 1000 = 140$ zł.
2. „ „ 2000 „ „ $\frac{840}{6000} . 2000 = 280$ „
3. „ „ 3000 „ „ $\frac{840}{6000} . 3000 = 420$ „

Całkowity zysk 840 zł.

Mamy więc następujące prawidło: „Należy naprzód wyznaczyć zysk (lub stratę), przypadający na udział 1 zł.; aby następnie otrzymać zysk (lub stratę), przypadający na każdego spólnika, potrzeba zysk (lub stratę), przypadający na udział 1 zł. pomnożyć przez liczbę złotych, tworzącą udział tego spólnika."

Rozwiążmy jeszcze następujące

Zadanie 2. „Spółka przemysłowa z kapitałem 2000000 zł., podzielonym na 4000 akcyj po 500 zł., zyskała w ciągu roku 172600 zł. Jaka dywidenda przypadła na każdą akcyą i ile % przyniósł kapitał spółki?"

Rozwiązanie. Ponieważ na 4000 akcyj przypadło 172600 zł. zysku, więc na 1 akcyą przypadający zysk wyniósł $\frac{172600}{4000} = 43{\cdot}15$ zł. Dywidenda od akcyi na 500 zł. wyniosła zatém 43·15 zł.

Następnie skoro 500 zł. dało procentów 43·15 zł., więc 100 zł. dało 5 razy mniéj, t. j. $\frac{43{\cdot}15}{5} = 8{\cdot}63$ zł. Kapitał spółki przyniósł zatém 8·63%.

3. Załóżmy teraz, że każdy ze spólników dał swój udział do obrotu tylko na pewien czas i że te czasy nie są równe. Rozwiązanie tego rodzaju zadań na regułę spółki opierają pospolicie na téj zasadzie, że podział zysku lub straty powinien być proporcyonalny i do udziału każdego spólnika i do czasu, przez jaki te udziały pozostawały w obrocie spółki, a przeto do iloczynów z tych udziałów i czasów. Polega to na przypuszczeniu, że obracanie kapitałem n. p. 1000 zł. przez 6 miesięcy wychodzi na to samo, co obracanie kapitałem 6 razy większym, t. j. 6000 zł., przez czas 6 razy krótszy, t. j. przez 1 miesiąc. Ta zasada jest słuszną jedynie przy pożyczkach lub lokacyach kapitałów na procencie prostym. Atoli w przemyśle i handlu, gdzie możliwość straty lub zysku jest znaczna, kapitały, włożone w przedsiębiorstwo, mają daleko większą ważność, aniżeli czas; tam więc zasada proporcyonalności do udziału i do czasu, czyli do iloczynu z obu tych czynników, nie powinna mieć zastósowania. Tego rodzaju zadania rozwiązuje się podług poszczególnych umów, a zwykle tak, jak następuje:

a) „W razie osiągniętego zysku, potrzeba przedewszystkiém z tego zysku zapłacić każdemu spólnikowi procenta od jego udziału podług umówionéj stopy i za cały czas, przez jaki jego udział był w obrocie spółki, a dopiero resztę zysku rozdzielić między spólników proporcyonalnie do udziałów tychże."

b) „W razie poniesionéj straty potrzeba naprzód każdy udział zwiększyć procentami, należnymi od niego za cały czas, przez jaki był w obrocie spółki, a potém stratę rozdzielić proporcyonalnie do tak zmienionych udziałów."

Wyjaśnimy na przykładzie oba postępowania.

4. Zadanie 3. „Trzy osoby dały na spólny zarobek: pierwsza 3200 zł. na 15 miesięcy, wtóra 4800 zł. na 8 miesięcy, a trzecia 2600 zł. na 18 miesięcy, zyskały (straciły) zaś 2664 zł.; ile z tego zysku (straty) przypada na każdą osobę w szczególności?"

Pierwszy sposób rozwiązania. Przyjąwszy zasadę proporcyonalności do udziałów i czasu jako słuszną, tak rozumujemy. Obojętną jest rzeczą,

czy 1. osoba dała 3200 zł. na 15 mies., czy 3200 . 15=48000 na 1 mies.,
„ 2. „ „ 4800 „ „ 8 „ „ 4800 . 8=38400 „ 1 „
„ 3. „ „ 2600 „ „ 18 „ „ 2600 . 18=46800 „ 1 „

Otóż według prawidła, wyłuszczonego w ustępie 2., należy całkowity zysk (stratę) 2664 zł. podzielić przez sumę udziałów, zredukowanych na jednaki czas, to jest 48000 + 38400 + 46800 = 133200 zł., i otrzymamy iloraz $\frac{2664}{133200} = 0{\cdot}02$ pomnożyć przez te udziały. A zatém:

1. osoby zysk lub strata 0·02 . 48000 = 960 zł.
2. „ „ „ „ 0·02 . 38400 = 768 „
3. „ „ „ „ 0·02 . 46800 = 936 „

Całkowity zysk (strata) 2664 zł.

Drugi sposób rozwiązania. Postępując drugim sposobem i przyjmując, że stopa procentowa jest 5%, potrzeba:

a) w razie osiągniętego zysku 2664 zł. zapłacić z tego naprzód:

1. osobie % od 3200 zł. za $\frac{5}{4}$ roku po 5%, t. j. $\frac{3200 . 5}{100} . \frac{5}{4} = 200$ zł.
2. „ „ „ 4800 „ „ $\frac{2}{3}$ „ „ „ „ $\frac{4800 . 5}{100} . \frac{2}{3} = 160$ „
3. „ „ „ 2600 „ „ $\frac{3}{2}$ „ „ „ „ $\frac{2600 . 5}{100} . \frac{3}{2} = 195$ „

razem 555 zł.

Resztę zaś zysku 2664 — 555 = 2109 zł. rozdzielić proporcyonalnie do udziałów. A zatém, skoro na udział 1 zł. przypada teraz zysk $\frac{2109}{3200 + 4800 + 2600} = 0{\cdot}19896\,..$ zł.

1. osoba otrzyma tytułem zysku 0·19896 . 3200 = 636·672 zł.
2. „ „ „ „ 0·19896 . 4800 = 955·008 „
3. „ „ „ „ 0·19896 . 2600 = 517·296 „

Zredukowany zysk 2108·98.. zł.

b) W razie zaś poniesionéj straty, potrzeba naprzód udział każdego spólnika zwiększyć procentami, od tego udziału przypadającymi. W skutek tego udział

3200 zł. 1. osoby zamieni się na $3200 + \frac{3200 . 5}{100} . \frac{5}{4} = 3400$ zł.

4800 „ 2. „ „ „ „ $4800 + \frac{4800 . 5}{100} . \frac{2}{3} = 4960$ „

2600 „ 3. „ „ „ „ $2600 + \frac{2600 . 5}{100} . \frac{3}{2} = 2795$ „

Następnie zaś należy stratę 2664 zł. rozdzielić pomiędzy trzech spólników proporcyonalnie do tak zmienionych udziałów tychże. A zatém, skoro na udział 1 zł. przypada teraz strata

$$\frac{2664}{3400+4960+2795} = 0\cdot238816\,..\,\text{zł.}$$

1. osoba straci	0·238816	. 3400	=	811·979 zł.
2. „ „	0·238816	. 4960	=	1184·527 „
3. „ „	0·238816	. 2795	=	667·491 „
		Całkowita strata		2663·99 zł.

5. Podług reguły spółki rozwiązuje się zagadnienia, mające na celu w ogóle podzielenie liczby na części, proporcyonalne do liczb danych. Weźmy n. p. pod uwagę następujące

Zadanie 4. „Podzielić liczbę 1287 na trzy części, tak, aby druga część była dwa razy większa od pierwszéj, a trzecia trzy razy większa od drugiéj."

Rozwiązanie. Jeżeli pierwszą część oznaczymy przez 1, to druga będzie 2, a trzecia $2.3 = 6$. Uważając następnie liczbę daną 1287 jako zysk spółki trzech osób, a liczby 1, 2, 6 jako udziały tych spólników, znajdziemy (ustęp 2), że

pierwsza część będzie równa $\frac{1287}{1+2+6}.1 = 143$

druga „ „ „ $\frac{1287}{1+2+6}.2 = 286$

trzecia „ „ „ $\frac{1287}{1+2+6}.6 = 858$

razem 1287

Stąd widzimy, że „liczbę 1287, daną do podziału, należy podzielić przez sumę liczb stósunkowych, $1+2+6$, a ten iloraz pomnożyć przez każdą z osobna liczbę stósunkową".

Rozwiążmy jeszcze następujące

Zadanie 5. „Rozdzielić 472 zł. pomiędzy trzy osoby proporcyonalnie do liczb $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$, t. j. tak, aby stósunek kwoty dla pierwszéj osoby do kwoty dla drugiéj był równy stósunkowi $\frac{1}{2}:\frac{4}{5}$, a stósunek kwoty dla pierwszéj do kwoty dla trzeciéj stósunkowi $\frac{1}{2}:\frac{2}{3}$. Ileż przypadnie na każdą osobę?"

Rozwiązanie. Naprzód sprowadzamy trzy ułamki $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$, do spólnego mianownika, co daje trzy ułamki tamtym równoważne $\frac{15}{30}$, $\frac{24}{30}$, $\frac{20}{30}$; następnie, skoro stósunki między tymi ułamkami są równe stósunkom między ich licznikami, bierzemy pod uwagę tylko ich liczniki: 15, 24, 20. Uważając te liczniki jako udziały trzech spólników, a 472 zł. jako zysk przez nich osiągnięty, znajdziemy (ustęp 2.), że kwota, przypadająca

dla pierwszéj osoby wyniesie $\frac{472}{15+24+20} . 15 = 120$ zł.

„ drugiéj „ „ $\frac{472}{15+24+20} . 24 = 192$ „

„ trzeciéj „ „ $\frac{472}{15+24+20} . 20 = 160$ „

razem 472 zł.

§. 2.

Zadania na regułę spółki.

1. Dwie osoby zawiązały spółkę: pierwsza włożyła 9500 zł., a wtóra 12800 zł.; na końcu roku zyskały 2420 zł. Ile z tego zysku przypadnie na każdą?

2. Ktoś, zadowolony z pracy, chce dać 12 zł. gratyfikacyi dwu robotnikom przy téj pracy zatrudnionym. Jeżeli jeden pracował 5 dni, a drugi 3 dni, ile się należy każdemu z nich?

3. Trzech spadkobierców odziedziczyło: A. 5800 zł., B. 1000 zł., C. 12600 zł. pod warunkiem zapłacenia 4000 zł. długów za spadkodawcę. Ileż każdy z nich ma dać na spłacenie tego długu?

4. Kwotą 3528 zł. dzielą się trzy osoby w ten sposób, że za każde 7 zł., które bierze A., otrzymuje B. 3 zł. a C. 5 zł. Ile weźmie każda? (Odp. A. 705·6; B. 1646·4; C. 1176).

5. Trzéj kupcy złożyli na spólny zarobek: A. 4500 zł., B. 5600 zł., C. 6400 zł. Zyskali o 25 zł. mniéj, niż 20% sumy wkładek; ileż zyskał każdy z nich?

6. Podzielić 409 zł. na trzy części proporcyonalne do liczb 3, 7, 11.

7. Rozdzielić 9000 zł. między 4 osoby tak, aby osoba A. otrzymała $\frac{1}{3}$ téj kwoty, B. $\frac{1}{4}$, C. $\frac{1}{5}$, a D. resztę. Przed dokonaniem rozdziału umiera osoba B., a pozostałe dzielą się jéj udzia-

łem proporcyonalnie do własnych udziałów. Ileż otrzyma każda z nich?

8. Liczbę 3555 podzielić na 4 części, odwrotnie proporcyonalne względem liczb 3, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{5}$, 1 (a więc wprost propor. względem $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{7}$, 1).

9. Trzéj spólnicy zyskali razem 2300 zł. A. włożył 5400 na 3 mies., B. 7900 na 7 mies. a C. 8500 na 9 mies. Rozdzielić między nich ten zysk.

10. Dwaj furmani mają się podzielić kwotą 312 zł., otrzymaną za przewóz towaru. A. przewiózł 12500 *kg* na odległość 49 *km*, a B. 8000 *kg* na odległość 63 *km*. Ile się należy każdemu z nich? (Rozdzielić 312 zł. proporcyonalnie do iloczynu z ciężaru i odległości).

11. Przy budowie kolei były 3 partye robotników zajęte Pierwsza składała się z 16 robotników, którzy pracowali przez 15 dni; druga liczyła 18 robotników, którzy pracowali przez 20 dni; a trzecia, z 25 robotników złożona, pracowała przez 24 dni. Zarobek całkowity wszystkich trzech partyj wynosił 1560 zł. Ileż złotych otrzymała każda partya i jaki był zarobek dzienny robotnika w każdéj z nich?

12. Trzech gospodarzy wydzierżawiło pastwisko za 22 zł.; ileż powinien każdy z nich zapłacić, jeżeli A. wypasał 12 krów przez 20 dni, B. 15 krów przez 24 dni, a C. 20 krów przez 18 dni?

13. Kapitały: 1200 zł. na 5%, 1800 zł. na 4% i 1200 zł. na 3% dane, przynoszą w pewnym czasie 252 zł. procentów. Ileż przyniósł każdy z tych trzech kapitałów z osobna i w jakim czasie?

14. Kapitały: 1200 zł. w 5 mies., 900 zł. w 4 mies., i 2400 zł. w 2 mies. dały 144 zł. procentów. Ileż procentów dał każdy z tych kapitałów i podług jakiéj stopy był oprocentowany każdy z nich?

15. Dla armii potrzeba w czasie jak najkrótszym 5400 *m* sukna. Jeżeli fabryka A. może dostarczyć 400 *m* w 5 dniach, B. 241 *m* w 4 dniach, C. 320 *m* w 8 dniach, ile metrów należy polecić do zrobienia każdéj fabryce i w jakim czasie wykończą one tę robotę?

16. Ktoś pożyczył od A. 3750 zł. na 5% przed 4 laty, od B. 2700 zł. na 4% przed 6 laty i od C. 1800 zł. na 3% przed 7 laty i winien wszystkim kapitał razem z procentami prostymi. Tymczasem zawiesza wypłaty, posiadając tylko 3375 zł. całego majątku; ileż z tego majątku powinien otrzymać każdy z wierzycieli?

17. Jak długo pracować będzie trzech robotników spólnie, jeżeli, pracując oddzielnie, A. ukończyłby robotę w 12 dniach, B. w 15 dniach, C. w 20 dniach?

18. Do pewnego przedsiębiorstwa daje A. tyleż zł. w. a., co B. marek, a C. franków. Jak się te trzy osoby mają podzielić zyskiem, wynoszącym 2188·8 marek? (1 frank = 0·49 zł., 1 marka = 0·62 zł. w. a.)

19. Zbiornik, mający objętości 375 *hl*, napełnia się wodą trzema rurami. Pierwsza dostarcza w 5 minutach $3\frac{1}{2}$ *hl*, druga w kwadransie 15 *hl*, a trzecia w $1\frac{2}{3}$ godziny 80 *hl*. Ile *hl* wody dostarczyła każda do zupełnego wypełnienia zbiornika i w jakim czasie się to stało?

20. Trzy osoby zawierają spółkę na 2 lata. A. wkłada 4800 zł., B. tyleż, a C. 6000 zł.; tymczasem A. wyjmuje 800 zł. po 4 mies., B. 300 zł. po 8 mies., a C. 1000 po 10 mies.; po upływie 2 lat dzielą się zyskiem wynoszącym 1415 zł. Ileż należy się z tego zysku każdéj osobie w szczególności?

§. 3.

Reguła mieszaniny.

1. **Reguła mieszaniny** *(Mischungsregel)* jest działaniem rachunkowém, które ma na celu:

1°. Wyznaczenie wartości dwu lub więcéj rzeczy, razem zmieszanych, kiedy się zna wartość każdéj z tych rzeczy z osobna;

2°. Wyznaczenie stósunku, w jakim dwie lub więcéj rzeczy wartości znanéj należy zmieszać, aby mieszanina posiadała wartość żądaną.

Drugie zagadnienie należy właściwie do algiebry i jest nieoznaczone, gdy się więcéj niż dwie rzeczy razem miesza.

Dlatego zajmiemy się tylko zagadnieniem pierwszém i przypadkiem szczególnym drugiego, przyjmując mianowicie, że tylko dwie rzeczy mają się razem zmieszać.

2. Weźmy pod uwagę naprzód pierwsze zagadnienie.

Zadanie 1. Kupiec miesza razem 80 *l* wina po 0·50 zł., 60 *l* po 0·70 zł. i 110 *l* po 0·85 zł. Jaka będzie wartość jednego litra mieszaniny?

Rozwiązanie. Skoro

	80 *l*	po 0·50 zł. kosztuje	80.0·50 = 40	zł.
	60 *l*	„ 0·70 „ „	60.0·70 = 42	„
	110 *l*	„ 0·85 „ „	110.0·85 = 93·50	„, więc
	250 *l*	mieszaniny „	175·50	zł.,
przeto	1 *l*	„ „	250 razy mniéj niż 175·50 zł., tj.	

$$\frac{175\cdot50}{250} = 0\cdot702 \text{ zł.}$$

A zatém: „mnożymy naprzód ilość jednostek miary każdéj rzeczy przez wartość jednostki miary téj rzeczy, a następnie sumę tych iloczynów dzielimy przez sumę jednostek miary wszystkich rzeczy, razem zmieszanych“.

Zadanie 2. Mamy 3 sztaby srebra: pierwsza próby 0·950 waży 8 *kg*, druga próby 0·800 waży 15 *kg*, a trzecia próby 0·750 waży 12 *kg*. Jaka będzie próba aliażu, który otrzymamy, stapiając razem te 3 sztaby?

Rozwiązanie. Skoro

8 *kg*	srebra próby 0·950 zawiera	8.0·950 =	7·600 *kg*	czystego srebra
15 „	„ „ 0·800 „	15.0·800 =	12·000 „	„ „
12 „	„ „ 0·750 „	12.0·750 =	9·000 „	„ „
35 „	aliażu „		28·600 *kg*	„ „

przeto 1 *kg* aliażu zawiera 35 razy mniéj niż 28·600 *kg* czystego srebra; próba aliażu jest zatém

$$\frac{28\cdot600}{35} = 0\cdot817\,..$$

Uwaga. Uważając próbę jako cenę 1 *kg*, otrzymamy wprost według powyższego prawidła jako żądaną próbę

$$\frac{8\,.\,0\cdot950 + 15\,.\,0\cdot800 + 12\,.\,0\cdot750}{9 + 15 + 12} = \frac{28\cdot600}{35} = 0\cdot817\,..$$

3. Przejdźmy do drugiego zagadnienia, ograniczając się na dwu rzeczach, razem mieszanych.

Zadanie 3. Mamy dwa gatunki wina: A. po 72 ct. i B. po 40 ct. za litr. W jakim stósunku należy zmieszać te dwa gatunki wina, aby litr mieszaniny C. był wart 60 ct.?

Rozwiązanie. Ten stósunek otrzymamy zapomocą następującego rozumowania: Jeżeli by się litr wina

A. dało za litr wina C., straciłoby się 72—60=12 ct. na litrze;
B. „ „ „ „ C., zyskałoby „ 60—40=20 „ „ „

Stąd wypływa, że w pierwszym razie na 20 *l* wina A. straciłoby się 12.20 ct., a w drugim razie na 12 *l* wina B. zyskałoby się 20.12 ct.; a więc strata i zysk zrównałyby się zupełnie, jeżeliby się na każdych 20 *l* wina A. wzięło 12 *l* wina B. Wino A. z winem B. należy zatém zmieszać w stósunku 20 : 12 czyli 5 : 3.

Możemy ten wypadek tak wysłowić: „Tworzymy różnicę między ceną gatunku droższego i ceną gatunku średniego, tudzież różnicę między ceną gatunku średniego i ceną gatunku tańszego, a wtedy stósunek ilości jednostek miary gatunku droższego do ilości jednostek miary gatunku tańszego będzie równy stósunkowi drugiéj różnicy do pierwszéj różnicy.“

Rozwiążmy jeszcze następujące

Zadanie 4. Mamy dwa gatunki srebra: próby 0·950 i próby 0·800. Ile *kg* potrzeba wziąć z każdego gatunku, ażeby otrzymać 15 *kg* srebra próby 0·900?

Rozwiązanie. Naprzód potrzeba wyznaczyć stósunek, w jakim należy dwa dane gatunki zmieszać. Owóż, ponieważ 0·950 — 0·900 = 0·050, a 0·900 — 0·800 = 0·100, więc te dwa gatunki należy zmieszać w stosunku 0·100 : 0·050 czyli 2 : 1.

Następnie potrzeba wiedzieć, ile z obu gatunków srebra, mieszając je w powyższym stósunku, wziąć należy, aby otrzymać 15 *kg* srebra. Owoż stósując regułę podziału proporcyonalnego (§. 1., 5), znajdziemy, że

z pierwszego gatunku wziąć należy $\frac{15}{1+2}.2 = 10\,kg$

„ drugiego „ „ „ $\frac{15}{1+2}.1 = 5$ „

razem 15 *kg*.

§. 4.

Zadania na regułę mieszaniny.

1. Do 5·6 *l* wody wrzącéj dolewa się 3·4 *l* wody o 46°Cels. Jaką ciepłotę mieć będzie woda po zmieszaniu, jeżeli w czasie mieszania nic ciepła nie ginie ani téż z zewnątrz nie przybywa?

2. Mamy 3 gatunki mąki: A. po 17·40 zł. za cetn. metr., B. po 16·20 zł. za cetn. metr. i C. po 14·50 zł. za cetn. metr. Jeżeli zmieszamy 24 cetn. metr. mąki A., 36 mąki B. i 54 mąki C., jaką wartość mieć będzie 1 *kg* mieszaniny?

3. Do fabrykacyi czcionek drukarskich bierze się 5 części miedzi, 20 części antymonu i 80 części ołowiu. Przyjąwszy, że kilogram miedzi kosztuje 1·25 zł., antymonu 0·75 zł., a ołowiu 0·25 zł., ile wart kilogram tego aliażu?

4. Do fabrykacyi nowego srebra bierze się 53·4 części miedzi, 29·1 części cyny i 17·5 części niklu. Cena jednego kilogramu miedzi wynosi 1·25 zł., cynku 2·55 zł. a niklu 24·25 zł. Jaka będzie cena jednego kilogramu nowego srebra, przypuszczając, że przy stapianiu tych 3 metalów ginie $1\frac{1}{2}\%$?

5. Do 23 *l* wina po 75 ct. za 1 *l* dolewa się 5 *l* wody; jaka będzie wartość 1 *l* mieszaniny? (Cena wody 0).

6. Ile wody o 15° Cels. dolać do 14·4 *l* wody wrzącéj, aby po zmieszaniu miała 60° Cels.?

7. Ile kilogramów herbaty po 3·40 zł. i po 5·80 zł. za kilogram zmieszać trzeba, aby otrzymać 35 *kg* mieszaniny po 4·25 zł. za kilogram?

8. Do 138·24 *kg* kawy po 2·50 zł. dosypuje kupiec kawę po 2 zł. Ile kawy gatunku tańszego ma dodać, aby 1 *kg* mieszaniny kosztował 2·40 zł.?

9. Złotnik ma 0·265 *kg* złota próby 0·900; ileż ma doń domieszać miedzi, aby otrzymać złoto próby 0·840? (próba miedzi 0).

10. Partya ćwierćzłotówek austr. waży $2\frac{1}{2}$ *kg*; ile zawierają one czystego srebra, a ile domieszki, jeżeli ich próba jest 0·520?

11. Ile miedzi potrzeba oddalić z 1000 *g* srebra próby 0·750, ażeby otrzymać takie srebro, z jakiego biją złotówki austr.?

12. Kupiec zmieszał 13 *kg* towaru po 75 ct. za 1 *kg* z $17\frac{1}{2}$ *kg* tegoż towaru w gatunku lepszym. Cała mieszanina kosztuje 31·45 zł. Ile kosztuje 1 *kg* gatunku lepszego?

13. Mamy 8·250 *kg* srebra próby 0·950; ile należy doń domieszać miedzi, aby otrzymać aliaż odpowiedni na złotówki austr.?

14. Ktoś stopił razem 36 *g* miedzi i 14 *g* cyny. Jaki jest ciężar gatunkowy stopu, jeżeli ciężar gatunkowy miedzi wynosi 8·78, a ciężar gatunkowy cyny 7·29?

15. Ile miedzi i cynku jest w 100 *kg* mosiądzu, którego ciężar gatunkowy wynosi 8·39? (Ciężar gatunkowy cynku jest 7).

ROZDZIAŁ II.

O regule trzech składanéj i regule łańcuchowéj, tudzież o rachunku procentów składanych.

§ 5.

Reguła trzech składana.

1. Jeżeli jaka wielkość zależy od dwu lub więcéj innych wielkości, względem których jest (wprost lub odwrotnie) proporcyonalną, i jeżeli jest dany jeden szereg wartości, wzajemnie sobie odpowiadających na te wielkości, a w drugim szeregu takichże wartości, jeżeli jedna jest niewiadomą, to rachunek, mający na celu wyznaczenie téj niewiadoméj, nazywa się regułą trzech składaną *(zusammengesetzte Regeldetri)*. N. p. zadanie: „Trzech robotników wykończyło 144 *m* pewnéj roboty w 14 dniach; iluż robotników potrzeba, aby 576 *m* téj saméj roboty ukończyć w 21 dniach?“ jest zadaniem na regułę trzech składaną, albowiem ilość robotników zależy od dwu wielkości: od wielkości roboty i od czasu trwania téj roboty, względem których jest proporcyonalną (wprost względem pierwszéj, a odwrotnie względem wtóréj).

Zadania na regułę trzech składaną rozwiązuje się zapomocą kilkakrotnego stósowania reguły trzech prostéj, zatrzymując tak w warunku jak i w pytaniu po dwie wielkości, t. j. razem cztéry liczby, z których jedna jest niewiadomą, i opuszczając wszystkie inne. Rachunek zaś można uskutecznić albo zapomocą prostego wnioskowania albo zapomocą proporcyj. — Wyjaśnimy jeden i drugi sposób postępowania na przykładach, dając wszakże pierwszeństwo sposobowi przez wnioskowanie.

2. Zadanie 1. „Trzech robotników wykończyło 144 *m* pewnéj roboty w 14 dniach; ilu robotników wykończy 576 *m* téj saméj roboty w 21 dniach?“

Rozwiązanie przez wnioskowanie. Mamy w tém zadaniu jako

warunek: 144 *m* — 14 dni — 3 rob.
pytanie: 576 *m* — 21 „ — x „

Celem wyznaczenia niewiadoméj liczby robotników, wnioskujemy tak:

Jeżeli 144 *m* w 14 dniach wykończy 3 rob., to

$$
\begin{array}{llll}
144\,m & \text{„}\ 1 & \text{„} & \text{„}\ 3.14\ \text{„} \\
144\,m & \text{„}\ 21 & \text{„} & \text{„}\ \frac{3.14}{21}\ \text{„} \\
1\,m & \text{„}\ 21 & \text{„} & \text{„}\ \frac{3.14}{21.144}\ \text{„} \\
576\,m & \text{„}\ 21 & \text{„} & \text{„}\ \frac{3.14.576}{21.144} = 8 \text{ robotników.}
\end{array}
$$

Uwaga. Szereg tych wnioskowań można skrócić, uważając, iż 576 *m* jest 4 razy więcéj, niż 144 *m*, tudzież, iż największa spólna miara 14 dni i 21 dni jest 7 dni. Można więc krócéj tak postąpić:

Jeżeli 144 *m* w 14 dniach wykończy 3 robotn.

$$
\begin{array}{llll}
\text{to } 576\,m & \text{„}\ 14 & \text{„} & \text{„}\ 3.4 = 12\ \text{„} \\
\text{„}\ 576\,m & \text{„}\ 7 & \text{„} & \text{„}\ 12.2 = 24\ \text{„} \\
\text{„}\ 576\,m & \text{„}\ 21 & \text{„} & \text{„}\ \frac{24}{3} = 8 \text{ robotników.}
\end{array}
$$

Rozwiązanie przez proporcye. Opuszczając naprzód warunek co do czasu, t. j. przyjmując, że w obu razach czas trwania roboty jest 14 dni, oznaczmy przez y ilość robotników, którzyby 576 *m* roboty wykończyli w 14 dniach. Tę ilość y znajdziemy przez proporcyą w sposób następujący:

3 rob. — 144 *m*, a zatém $y : 3 = 576 : 144$, skąd

y „ — 576 „ $\quad y = \frac{3.576}{144} = \frac{3.4}{1} = 12$ rob.

Przywracając następnie warunek co do czasu, a natomiast opuszczając warunek co do wielkości roboty, t. j. przyjmując, że w obu razach ma być wykończonych 576 *m*, oznaczmy przez x ilość robotników, którzy 576 *m* wykończą w 21 dniach.

Celem wyznaczenia x uskuteczniamy następujący rachunek:

12 rob. — 14 dn., a zatém $x : 12 = 14 : 21$, skąd
x „ — 21 „ $x = \frac{12.14}{21} = \frac{12.2}{3} = \frac{4.2}{1} = 8$ rob.

Rozwiążmy jeszcze następujące

Zadanie 2. „Młyn o 3 walcach, robiących po 120 obrotów na minutę, zmiele 15 *hl* zboża w 18 godzinach; ile walców, robiących po 60 obrotów na minutę, potrzeba w młynie, aby 30 *hl* zboża zmielono w 24 godzinach?"

Rozwiązanie przez wnioskowanie. Tutaj jest
warunkiem: 15 *hl* — 18 godź. — 120 obr. — 3 walce,
a pytaniem: 30 *hl* — 24 „ — 60 „ — x „

Niewiadomą x wyznaczymy zapomocą szeregu wnioskowań:
Jeżeli do zmielenia 15 *hl* w 18 g. przy 120 obr. potrzeba 3 walców,
to 30 „ „ 18 „ „ 120 „ „ $3.2 = 6$ „
„ 30 „ „ 6 „ „ 120 „ „ $6.3 = 18$ „
„ 30 „ „ 24 „ „ 120 „ „ $\frac{18}{4}$ „
„ 30 „ „ 24 „ „ 60 „ „ $\frac{18.2}{4} = 9$ walców.

Rozwiązanie przez proporcye. Oznaczmy przez z ilość walców, których potrzeba, aby 30 *hl* zmielono w 18 godzinach przy 120 obrotach jednego walca. Tę niewiadomą ilość z znajdziemy, w sposób następujący:

15 *hl* — 3 walce, a zatém $z : 3 = 30 : 15$, skąd
30 „ — z „ ; $z = \frac{3.30}{15} = \frac{3.2}{1} = 6$ walców.

Wiedząc, że 6 walców, robiących po 120 obrotów, potrzeba aby 30 *hl* zemléć w 18 godzinach, oznaczmy przez y ilość walców, robiących po 120 obrotów, których potrzeba, aby 30 *hl* zemléć w 24 godzinach.

Celem wyznaczenia y wykonywamy następujący rachunek:
6 walców — 18 godz., a zatém $y : 6 = 18 : 24$, skąd
y „ — 24 „ $y = \frac{6.18}{24} = \frac{6.3}{4} = \frac{9}{2}$ walców.

Wiedząc już, że $\frac{9}{2}$ walców, robiących po 120 obrotów, potrzeba, ażeby 30 *hl* zemléć w 24 godzinach, oznaczmy nareszcie przez x ilość walców, któreby przy 60 obrotach tę samą ilość zboża w tym samym czasie zmełły. Mamy więc

$\frac{9}{2}$ wal. — 120 obrot., a zatém $x : \frac{9}{2} = 120 : 60$, skąd

x „ — 60 „ $x = \frac{9.120}{2.60} = \frac{9.2}{2} = 9$ walców.

§. 6.

Zadania na regułę trzech składaną.

1. 8 robotników zarabia w 6 dniach 134·4 zł.; ile zarobi 9 robotników w 5 dniach?

2. 6 robotników zarabia w 5 dniach 32·5 zł.; ilu robotników zarobiłoby 65 zł. w 12 dniach?

3. 18 robotników zarabia 64 zł. w 3 dniach; w ilu dniach 8 robotników zarobiłoby 512 zł.?

4. Za przewiezienie 5 cetnarów na odległość 108 *km* zapłacono 3·75 zł.; ile trzeba zapłacić za przewiezienie 21 cetnarów na odległość 175 *km*?

5. 5 płomieni gazowych zużywa w 12 godzinach $1\frac{1}{2}$ m^3 gazu; ile m^3 gazu zużyje 132 takich samych płomieni w 15 godzinach?

6. Na posadzkę potrzeba 72 tarcic na 10 *m* długich i $2\frac{1}{2}$ *dm* szerokich; ile tarcic, długich na 9 *m*, a szerokich na 2 *dm*, wystarczyłoby na tensam cel?

7. Pewien zapas mąki wystarczy dla 1200 ludzi na 2 miesiące (po 30 dni), licząc po $8\frac{1}{2}$ *kg* tygodniowo na jednego człowieka; ile *kg* tygodniowo potrzeba liczyć na jednego człowieka, ażeby tensam zapas wystarczył dla 2700 ludzi na $1\frac{1}{2}$ miesiąca?

8. Z dwu kół zazębionych, wchodzących jedno w drugie, pierwsze ma 15 zębów i robi 16 obrotów w $7\frac{1}{2}$ sekundach; ile obrotów wykona drugie koło w 21 sekundach, jeżeli ma 28 zębów?

9. Maszyną parową o sile 20 koni można w pewnym czasie 943 m^3 wody na wysokość 18·4 *m* wypompować; *a)* ile wody można maszyną o sile 13 koni w dwa razy tak długim czasie wypompować na wysokość 53·3 *m*? *b)* do jakiéj wysokości w trzy razy tak długim czasie można 471·5 m^3 wody wypompować maszyną o sile 18 koni?

10. Woźnica zgodził się na przewiezienie 30 beczek spirytusu na 20 mil za 100 zł. Innym razem miał przewieść 70 beczek na 30 mil; lecz że się droga pogorszyła, podwyższył cenę przewozową o $\frac{1}{4}$ część. Ile zł. przypadnie mu teraz zapłacić?

11. Do wzniesienia muru potrzeba 32 murarzy, którzyby pracowali przez 17 dni po 12 godzin dziennie; po 2 dniach zażądano, ażeby ten mur był w 9 dniach gotów i w tym celu donajęto 16 murarzy. Ileż godzin dziennie muszą teraz ci murarze pracować?

12. W przędzalni na 22 warsztatach wyrabiają w 9 dniach 6237 *kg* przędziwa, pracując dziennie po 12 godzin,; *a)* ile przędziwa można wyrobić na 25 warsztatach, pracując przez 16 dni po 10 godzin dziennie; *b)* ile dni po 11 godzin dziennie potrzeba pracować, ażeby na 20 warsztatach wyrobić 2541 *kg* przędziwa; *c)* ile godzin dziennie potrzeba pracować, ażeby na 15 warsztatach wyrobić $5197\frac{1}{2}$ *kg* przędzy w 12 dniach?

13. Z łąki, długiéj na 512 *m*, a szerokiéj na 72 *m*, zebrano 10 wozów siana, z których każdy mieścił 9 cetnarów; ile wozów siana, po 10 cetnarów na każdym, zbierze się z łąki téjsaméj dobroci, ale mającéj 320 *m* wzdłuż, a 192 *m* wszerz?

14. Wodozbiór sześcienny, głęboki na 2·5 *m*, wypróżnimy w $2\frac{1}{3}$ godzinach, jeżeli z niego wodę czerpać będziemy naczyniem, zawiérającém 4·22 *l*. W jakim czasie wypróżnionoby drugi wodozbiór, głęboki na 2·8 *m*, jeżeliby zeń czerpano wodę naczyniem, zawierającém 6·36 *l*, i jeżeli na każdych 21 minut tyle razy tém naczyniem będzie się czerpało, ile razy na każdych 14 minut czerpało się wodę pierwszém naczyniem z piérwszego wodozbioru?

15. Kamień młyński z bazaltu, mający 1·25 *m* w średnicy, a na 0·62 *m* gruby, waży 814 *kg*. Ile waży kamień młyński z kwarcu, mający 1·12 *m* w średnicy, a na 0·54 *m* gruby, jeżeli stósunek wag dwu równych kawałków bazaltu i kwarcu jest równy stósunkowi 13 : 15? [Wagi dwu kamieni młyńskich téjsaméj grubości i z tegosamego materyału są proporcyonalne względem kwadratu ich średnic].

§. 7.

Reguła łańcuchowa.

Niekiedy wielkości, wchodzące do zadań na regułę trzech, nie są wyrażone w jednakich jednostkach. Tak n. p. w zadaniu: „Ile zł. w. a. kosztuje 5 *hl* zboża, za którego 6 korcy polskich zapłacono 235 złp.?“ wielość zboża w pytaniu jest wyrażona w hektolitrach, a w warunku w korcach polskich, cena zaś zboża jest w warunku wyrażona w złotych polskich, a w pytaniu żąda się ceny w złotych waluty austryackiéj.

W takich przypadkach należy naprzód obie wartości na każdą wielkość, wchodzącą do zadania, wyrazić w tychsamych jednostkach, zapomocą związków między różnymi gatunkami jednostek, a następnie stósować regułę trzech.

Atoli takie zadania można także rozwiązać wprost zapomocą tak zwanéj reguły łańcuchowéj *(Kettenregel)*.

Istotę téj reguły wyjaśnimy na przykładzie. Zwróćmy uwagę na powyższe zadanie, t. j.

„Ile złotych w. a. kosztuje 5 *hl* zboża, za którego 6 korcy polskich zapłacono 235 złp.?"

Naprzód potrzeba wielość zboża w warunku, t. j. 6 korcy polskich wyrazić w hektolitrach, tak, jak w pytaniu. Owoż 1 korzec polski $= 128\ l = 1{\cdot}28\ hl$, a zatém 6 korcy polskich $= 1{\cdot}28 . 6\ hl$.

Następnie potrzeba cenę zboża w warunku, t. j. 235 złp. wyrazić w złotych w. a., tak, jak w pytaniu. Owoż, przyjąwszy, że według kursu 1 złp. $= 0{\cdot}20$ zł. w. a., będzie 235 złp. $= 0{\cdot}20 . 235$ zł. w. a.

Zrobiwszy to, możemy powyższe zadanie tak wysłowić: „Ile złotych w. a. kosztuje 5 *hl* zboża, jeżeli 1·28.6 *hl* kosztuje 0·20.235 zł. w. a."

Jest to zadanie na regułę trzech prostą. Oznaczając więc przez x niewiadomą cenę 5 *hl* w złotych w. a., otrzymamy:

$$x = \frac{5 . 235 . 0{\cdot}20}{1{\cdot}28 . 6}.$$

Ten sam wypadek otrzymamy krócéj zapomocą reguły łańcuchowéj, która na tém zależy:

„Wypisujemy pytanie i warunek zadania, tudzież związki, jakie zachodzą pomiędzy różnymi jednostkami miary, do zadania wchodzącymi, w dwu kolumnach:

1. kolumna	2. kolumna
x zł. w. a.	5 *hl*
1·28 *hl*	1 korzec polski
6 korcy polskich	235 złp.
1 złp.	0·20 zł. w. a.

tak, aby 1° każda liczba w jednéj kolumnie była równoważną z obok stojącą w drugiéj kolumnie, 2° aby każda liczba w drugiéj kolumnie była równoimienna z bezpośrednio następującą w piérwszéj kolumnie i 3° aby ostatnia liczba w drugiéj kolumnie i pierwsza w pierwszéj kolumnie, t. j. niewiadoma x, były także równoimiennymi.

Zestawiwszy te liczby takim sposobem łańcuchowym, otrzymamy niewiadomą x, dzieląc iloczyn wszystkich liczb drugiéj kolumny przez iloczyn wszystkich liczb pierwszéj kolumny", t. j.

$$x = \frac{5 \cdot 235 \cdot 0{\cdot}20}{1{\cdot}28 \cdot 6}, \text{ jak pierwéj.}$$

§. 8.

Zadania na regułę łańcuchową.

1. Ktoś kupuje 350 *kg* kawy za 560 zł. w. a.; po jakiéj cenie musi sprzedać 40 *dkg*, aby na każdych 100 zł., wydanych na kupno, zyskał 20 zł.?

x	40 *dkg*
100 *dkg*	1 *kg*
350 *kg*	560 zł.
100 zł.	120 zł.

$$x = \frac{40 \cdot 560 \cdot 120}{100 \cdot 350 \cdot 100} = 0{\cdot}77 \text{ zł.}$$

2. Sztaba złota próby 0·750 waży 2·36 *kg*; jaka jest jéj wartość w zł. w. a., jeżeli za 1 *kg* złota czystego trzeba zapłacić 2790 marek pruskich? [Według kursu 1 marka = 62 ct. w. a.]

x zł.	2·36 *kg*
1000 *kg*	750 *kg*
1 *kg*	2790 mar.
1 mar.	0·62 zł. w. a.

$$x = \frac{2{\cdot}36 \cdot 750 \cdot 2790 \cdot 0{\cdot}62}{1000} = 3061{\cdot}75 \text{ zł.}$$

3. Jeżeli czyste złoto jest 15·5 razy droższe od czystego srebra, jaką wartość w srebrnych złotych w. a. ma dwudziestofrankówka? [z 1 *kg* złota, próby 0·9 biją 155 dwudziestofrankówek, z 1 *kg* srebra czystego 90 srebrnych zł. w. a.]

4. Ile wahań zrobi wahadło na godzinę, robiąc po 5 wahań co 4 sekundy?

5. Ile zł. w. a. kosztuje 72 *m* płótna, jeżeli za 40 *m* materyi jedwabnéj zapłacono 480 franków (według kursu 1 frank = 0·51 zł. w. a.), a stósunek wartości płótna do wartości materyi jedwabnéj był równy stosunkowi 2 : 15?

6. Jaką wartość w zł. w. a. posiada dolar północno amerykański, wybity ze srebra próby 0·9, a ważący 26·729 *g*?

7. Ile rubli srebrnych zawiera 500 *g* srebra czystego, jeżeli 1 rs. waży 20·7315 *g*, a próba jego jest $\frac{125}{144}$?

8. Ktoś kupuje 504 *kg* kawy i płaci za cetnar wiedeński 85·36 zł., koszta zaś przewozu wynoszą 3%; ile kosztuje go 1 *kg* kawy?

9. Kupiec wiedeński otrzymuje z Londynu 27 yardów pewnego towaru w cenie 10 funtów 5 szylingów; ileż zł. w. a. kosztuje 1 *m* w Wiedniu, jeżeli 1 funt szterl. = 11·72 zł. w. a.?

10. Ile wziąć musi kupiec za metr materyi, jeżeli za 5 sztuk, każda po 45 metrów, zapłacił 300 zł. w. a., a zysk liczy na 17%?

11. Ile metrów uczyni 1435 stóp rosyjskich, jeżeli 55 *m* = 175 stóp wied., a 82 stóp ros. = 79 stóp wied.?

12. Jaką wartość mają naczynia srebrne, ważące $14\frac{1}{2}$ *kg*, próby 0·8?

13. Ile zł. w. a. warta sztaba złota, ważąca 1·45 *kg*, próby *a)* 0·92, *b)* 0·84, *c)* 0·75, *d)* 0·58, jeżeli 1 *kg* złota czystego wart 1395 zł. w. a.?

14. Ile ośmiozłotówek austr. otrzyma się za 230 dziesięciomarkówek niemieckich, jeżeli $139\frac{1}{2}$ dziesięciomarkówek zawierają 500 *g* złota czystego, a 155 ośmiozłotówek wybija się z 1 *kg* złota próby 0·9?

§. 9.

Rachunek procentów składanych.

1. Jeżeli procenta proste od kapitału na końcu każdego roku lub półrocza albo też innego okresu kapitalizowania dodaje się do kapitału, z tém zastrzeżeniem, ażeby się nadal procenta liczyło nietylko od kapitału pierwotnego, ale i od procentów, do kapitału już dodanych, powiadamy, że kapitał umieszczono na procencie składanym.

Na zasadzie tego określenia można procenta składane obliczyć podług następującego prawidła:

„Obliczamy naprzód procenta proste od kapitału pierwotnego za pierwszy okres i te procenta dokładamy do tegoż kapitału; tym sposobem otrzymamy drugi kapitał. Obliczamy następnie procenta proste od drugiego kapitału za drugi okres i dokładamy je do tegoż kapitału; tym sposobem otrzymamy trzeci kapitał, do którego znowu dokładamy procenta proste, które się od niego należą za trzeci okres. Postępując tak daléj, dopóki się nie wyczerpie liczby okresów, dojdziemy do kapitału końcowego, czyli do wartości nabytéj kapitału pierwotnego. Odjąwszy od téj wartości kapitał pierwotny, mieć będziemy żądane procenta składane".

Zadanie 1. „Ile wyniosą procenta składane po 5% za 3 lata od kapitału 1200 zł. jeżeli przyjmiemy roczne okresy kapitalizowania?"

Rozwiązanie. Postępując podług powyższego prawidła, mamy:

kapitał pierwotny	1200	zł.
procenta po 5% za 1. rok .	60	„
kapitał na początku 2. roku .	1260	zł.
procenta po 5% za 2. rok .	63	„
kapitał na początku 3. roku .	1323	zł.
procenta po 5% za 3. rok .	66·15	„
kapitał końcowy	1389·15	zł.
kapitał pierwotny	1200	„
procenta składane	189·15	zł.

2. Ten sposób obliczenia procentów składanych jest nużący, gdy liczba okresów kapitalizowania jest znaczniejszą. Dlatego podamy inny, daleko prostszy, dający się wyprowadzić z reguły łańcuchowéj. Ponieważ tu chodzi głównie o wartość nabytą kapitału, która się równa wartości kapitału pierwotnego, pomnożonéj przez wartość nabytą jednostki kapitału, dość więc okazać, jak się oblicza wartość nabytą jednostki kapitału.

Zadanie 2. „Znaleść wartość nabytą 1 zł., umieszczonego przez 4 lata na procencie składanym po 5% rocznie.

Rozwiązanie. Jeżeli przyjmiemy roczne okresy kapitalizowania, 100 zł. na początku roku dają 105 zł. na końcu roku, więc 1 zł. na początku roku daje na końcu roku 1·05. Stósując więc regułę łańcuchową, mamy:

na końcu 4. roku . . x zł.	1 zł. na początku 1. roku,
na początku 1. roku . 1 „	1·05 na końcu 1. roku,
na początku 2. roku . 1 „	1·05 na końcu 2. roku,
na początku 3. roku . 1 „	1·05 na końcu 3. roku,
na początku 4. roku . 1 „	1·05 na końcu 4. roku;

a zatém $x = 1{\cdot}05 . 1{\cdot}05 . 1{\cdot}05 . 1{\cdot}05 = (1{\cdot}05)^4$ zł.*)

t. j. Wartość nabyta jednostki kapitału, umieszczonéj przez pewną liczbę lat na procencie składanym, jest równa sumie z téj jednostki i z setnéj części stopy procentowéj podniesionéj do potęgi, któréj wykładnikiem jest liczba lat.

Jeżeliby okresy kapitalizowania były półroczne, wówczas należałoby wziąć dwa razy tyle okresów, ile było lat, ale jednocześnie stopę procentową, która wyraża procent od 100 zł. za rok, zniżyć do połowy. W powyższym więc przykładzie wartość nabyta 1 zł. przyjąwszy okresy półroczne wynosiłaby $(1{\cdot}025)^8$.

3. Na stronie 24 zamieszczona tablica *A.* zawiera już obliczone wartości nabyte jednostki kapitału w ciągu 1—30 okresów dla stopy procentowéj 2, $2\frac{1}{2}$, 3, 4, 5 i 6% za jeden okres.

Mając taką tablicę, obliczymy procenta składane, jak następuje:

Zadanie 3. „Ile wynoszą procenta składane od kapitału 32.500 zł., umieszczonego przez 5 lat na procencie składanym po 4%?"

Rozwiązanie. *a)* Przyjąwszy okresy roczne daje powyższa tablica 1·21665 jako wartość nabytą 1 zł. w ciągu 5 lat. A więc wartość nabyta kapitału założonego jest 32500 . 1·21665 = 39541·125 zł. Różnica 39541·125 — 32500 = 7041·125 zł. przedstawia więc wysokość procentów składanych. *b)* Przyjąwszy

*) Wyrażenie takie, jak $(1{\cdot}05)^4$ nazywa się potęgą czwartą liczby 1·05. Liczba 4, wskazująca, że 1·05 trzeba wziąć 4 razy za czynnik iloczynu, zowie się wykładnikiem potęgi.

okresy półroczne daje powyższa tablica 1·21899 jako wartość nabytą 1 zł. w ciągu 10 półroczy. Wartość nabyta kapitału założonego jest więc 32500.1·21899 = 39617·175 zł., a różnica 39617·175 — 32500 = 7117·175 zł. przedstawia procenta składane.

4. Niekiedy dana jest z góry wartość nabyta kapitału, umieszczonego przez pewien przeciąg czasu na procencie składanym, a poszukuje się wartości pierwotnéj czyli obecnéj tego kapitału. Tę wartość obecną znajdziemy zapomocą następującego rozważania.

Wartość nabyta kapitału jest iloczynem wartości obecnéj tego kapitału i wartości nabytéj jednostki kapitału. Stąd wypływa, że nawzajem wartość obecną jakiegoś kapitału znajdziemy, gdy wartość jego nabytą podzielimy przez wartość nabytą jednostki kapitału, albo, co wychodzi na jedno, gdy wartość jego nabytą pomnożymy przez liczbę odwrotną względem wartości nabytéj jednostki kapitału.

Dla ułatwienia rachunku podajemy w tablicy *B*. str. 25 liczby odwrotne względem wartości, jakich nabywa jednostka kapitału w ciągu 1—30 okresów dla stopy procentowéj 2, $2\frac{1}{2}$, 3, 4, 5 i 6% za jeden okres.

Mając taką tablicę, obliczymy wartość obecną kapitału, umieszczonego na procencie składanym, jak pokazuje następujące

Zadanie 4. „Znaleść wartość obecną kapitału, który umieszczony przez 12 lat na procencie składanym po 6%, wzrósł do wysokości 12500 zł."

Rozwiązanie. *a)* Przyjąwszy okresy roczne daje tablica *B* liczbę 0·49697 jako odwrotną względem wartości nabytéj jednostki kapitału. Żądana więc wartość obecna jest 12.500.0·49697 = 6212·125 zł.; różnica zaś 12500 — 6212·125 = 6287·875 zł. przedstawia procenta składane. *b)* Przyjąwszy okresy półroczne daje tablica *B* liczbę 0·49193 jako odwrotną względem wartości nabytéj jednostki kapitału. Żądana więc wartość obecna jest 125000.0·49193 = 6149·125 zł., różnica zaś 12500 — 6149·125 = 6350·875 zł. przedstawia procenta składane.

Tablica A.

Liczba okresów	2%	2½%	3%	4%	5%	6%
1	1·02	1·025	1·03	1·04	1·05	1·06
2	1·0404	1·05063	1·0609	1·0816	1·1025	1·12360
3	1·06121	1·07689	1·09273	1·12486	1·15763	1·19102
4	1·08243	1·10381	1·12551	1·16986	1·21551	1·26247
5	1·10408	1·13141	1·15927	1·21665	1·27628	1·33822
6	1·12616	1·15969	1·19405	1·26532	1·34010	1·41852
7	1·14869	1·18868	1·22987	1·31593	1·40710	1·50363
8	1·17166	1·21840	1·26677	1·36857	1·47746	1·59385
9	1·19509	1·24886	1·30477	1·42331	1·55133	1·68948
10	1·21899	1·28008	1·34392	1·48024	1·62890	1·79084
11	1·24337	1·31209	1·38423	1·53945	1·71034	1·89830
12	1·26824	1·34489	1·42576	1·60103	1·79586	2·01220
13	1·29361	1·37851	1·46853	1·66507	1·88565	2·13293
14	1·31948	1·41297	1·51256	1·73168	1·97993	2·26090
15	1·34587	1·44820	1·55797	1·80094	2·07893	2·39656
16	1·37279	1·48451	1·60471	1·87298	2·18288	2·54035
17	1·40024	1·52162	1·65285	1·94790	2·29202	2·69277
18	1·42825	1·55966	1·70243	2·02582	2·40662	2·85434
19	1·45681	1·59865	1·75351	2·10685	2·52695	3·02560
20	1·48595	1·63862	1·80611	2·19112	2·65330	3·20714
21	1·51567	1·67958	1·86030	2·27877	2·78596	3·39957
22	1·54598	1·72157	1·91610	2·36992	2·92526	3·60354
23	1·57690	1·76461	1·97359	2·46472	3·07152	3·81975
24	1·60844	1·80873	2·03279	2·56330	3·22510	4·04894
25	1·64061	1·85394	2·09378	2·66584	3·38636	4·29188
26	1·67342	1·90029	2·15659	2·77247	3·55567	4·54940
27	1·70689	1·94780	2·22129	2·88340	3·73346	4·82235
28	1·74102	1·99650	2·28793	2·99870	3·92013	5·11170
29	1·77585	2·04641	2·35657	3·11865	4·11614	5·41840
30	1·81136	2·09757	2·42726	3·24340	4·32194	5·74350

Tablica B.

Liczba okresów	2%	2½%	3%	4%	5%	6%
1	0·98039	0·97561	0·97087	0·96154	0·95238	0·94340
2	0·96117	0·95181	0·94260	0·92456	0·90703	0·89000
3	0·94232	0·92860	0·91514	0·88900	0·86384	0·83962
4	0·92385	0·90595	0·88849	0·85480	0·82270	0·79209
5	0·90573	0·88385	0·86261	0·82193	0·78353	0·74726
6	0·88797	0·86229	0·83748	0·79032	0·74622	0·70496
7	0·87056	0·84122	0·81309	0·75992	0·71068	0·66505
8	0·85349	0·82074	0·78941	0·73070	0·67684	0·62741
9	0·83675	0·80073	0·76642	0·70259	0·64461	0·59189
10	0·82035	0·78120	0·74409	0·67556	0·61391	0·55840
11	0·80426	0·76214	0·72242	0·64958	0·58468	0·52679
12	0·78849	0·74356	0·70138	0·62460	0·55684	0·49697
13	0·77303	0·72542	0·68095	0·60057	0·53032	0·46884
14	0·75788	0·70773	0·66112	0·57748	0·50507	0·44230
15	0·74302	0·69047	0·64186	0·55527	0·48102	0·41727
16	0·72845	0·67362	0·62317	0·53391	0·45811	0·39365
17	0·71416	0·65719	0·60502	0·51337	0·43630	0·37136
18	0·70016	0·64116	0·58740	0·49363	0·41552	0·35034
19	0·68643	0·62553	0·57029	0·47464	0·39573	0·33051
20	0·67297	0·61027	0·55368	0·45639	0·37689	0·31180
21	0·65978	0·59538	0·53754	0·43883	0·35894	0·29415
22	0·64684	0·58086	0·52190	0·42196	0·34185	0·27789
23	0·63416	0·56670	0·50670	0·40573	0·32557	0·26180
24	0·62172	0·55287	0·49193	0·39012	0·31007	0·24698
25	0·60953	0·53939	0·47761	0·37512	0·29530	0·23300
26	0·59758	0·52623	0·46370	0·36069	0·28124	0·21981
27	0·58586	0·51340	0·45019	0·34682	0·26785	0·20737
28	0·57438	0·50088	0·43708	0·33348	0·25509	0·19563
29	0·56311	0·48866	0·42435	0·32065	0·24295	0·18455
30	0·55207	0·47674	0·41199	0·30832	0·23138	0·17411

§. 10.

Zadania z rachunku procentów składanych.

1. Do jakiéj wysokości wzrosną kapitały: 4592·5 zł. na 3% po 15 latach i 6709·25 zł. na 4% po 13 latach przy rocznéj i przy półrocznéj kapitalizacyi?

2. Obliczyć wartość nabytą kapitałów: 2672·8 zł., danego na 4%, po $12\frac{1}{2}$ latach i 3000 zł., danego na 6%, po $10\frac{3}{4}$ latach przy rocznéj i półrocznéj kapitalizacyi. [Do wartości nabytéj po 12, względnie po 10 latach, doliczyć procenta proste za $\frac{1}{2}$, względnie za $\frac{3}{4}$ roku, gdy okresy roczne].

3. Ojciec wkłada na rzecz swego syna 15-letniego do kasy oszczędności 1500 zł. Ile otrzyma syn, doszedszy do pełnoletności, jeżeli kasa liczy procent po 4% i co pół roku procent kapitalizuje?

4. Komitet kościelny włożył do kasy oszczędności na cele budowy kościoła 12450 zł. Do jakiéj wysokości wzrośnie ten kapitał po 12 latach i 3 miesiącach. (Procent po 5%, okresy półroczne).

5. Ludność kraju wynosi obecnie 4500640 dusz; jak wielka będzie ludność tego kraju po upływie 25 lat, jeżeli przyrost roczny wynosi w przecięciu $2\frac{1}{2}$%?

6. W lesie jest obecnie 100500 m^3 drzewa; jaki będzie drzewostan tego lasu po upływie 10 lat, jeżeli przyrost roczny wynosi 3%?

7. Kupiec rozpoczął handel mając 12000 zł. kapitału obrotowego, a zyskiwał rocznie 5%. Jeżeli cały zysk z końcem każdego roku będzie dokładał do kapitału obrotowego, ile mieć będzie w obrocie po 17 latach?

8. Urzędnik, pobierający 2400 zł. płacy rocznéj, oszczędza rocznie 12% i te oszczędności składa z końcem każdego roku w kasie oszczędności. Ileż tym sposobem zaoszczędzi w ciągu 6 lat? (Procent 4%, okresy półroczne).

9. Przy kupnie domu zostawia się kupującemu do woli albo zaraz zapłacić 6000 zł i takież dwie raty po upływie 1. i 2. roku, albo też zapłacić jednorazowo 19000 zł. po upływie 2 lat. Który z tych dwu warunków jest dla kupującego dogodniejszy, przyjąwszy, że obracając kapitałem, zyskuje 5%?

10. Ktoś, włożywszy 1000 zł. do kasy oszczędności, która płaci 5$^0/_0$ i kapitalizuje procenta półrocznie, po 3 latach wyjmuje 500 zł., a zaraz po upływie następnego roku wkłada napowrót 600 zł.; ile otrzyma po ośmiu latach, licząc od chwili włożenia pierwszych 1000 zł.?

11. Ojciec chce swéj 3-letniéj córce zapewnić 2500 zł. posagu, gdy ta dojdzie do 18 lat; ileż zł. musi na ten cel włożyć do kasy oszczędności, która płaci rocznie 4$^0/_0$, a kapitalizuje półrocznie?

12. Ludność pewnego miasta wynosi dziś 66066 mieszkańców. Ile mieszkańców liczyło to miasto przed 24 laty, jeżeli przyrost roczny wynosił w przecięciu 3$^0/_0$?

13. Jaki kapitał trzeba umieścić na procencie składanym, ażeby wzrósł do:

a) 2500 zł. po $5\frac{1}{2}$ latach, licząc 5$^0/_0$ (okresy roczne),

b) 7000 zł. po $6\frac{3}{4}$ latach, licząc 6$^0/_0$ (okresy półroczne),

c) 12098·5 po 10 latach i 2 miesiącach, licząc 4$^0/_0$ (okresy półroczne).

14. Ojciec czworga dzieci chce, aby każde otrzymało 5000 zł. po skończeniu 24 lat. Ileż włożyć ma dzisiaj dla każdego dziecka do kasy oszczędności, jeżeli najstarsze ma lat 17, a każde następne jest o 2 lata młodsze? (Liczyć po 4$^0/_0$ z półroczną kapitalizacyą).

15. Co korzystniejsza, czy wziąć 24000 zaraz, mogąc tę kwotę procentować po 5$^0/_0$ z półroczną kapitalizacyą, czy dopiero po 5 latach wziąć 32000 zł.?

16. Za majątek ziemski ofiarowuje *A* 20000 zł. gotówką, *B* 24000 zł., płacąc połowę zaraz, a drugą połowę po 4 latach, *C* 8000 daje zaraz, 8000 zł. po 2 latach, a 8000 zł. po 3 latach; który z tych trzech kupców podaje warunki najkorzystniejsze? [liczyć 5$^0/_0$ i kapitalizacya roczna].

17. Ktoś zobowiązał się przez pięć lat z końcem każdego roku składać kwotę 800 zł.; ileż musiałby zapłacić, licząc po 5$^0/_0$ z roczną kapitalizacyą, jeżeliby chciał zaraz zobowiązaniu zadość uczynić?

18. Ktoś chce pobierać dochód roczny (rentę) po 100 zł. przez 8 lat z końcem każdego roku; jaki kapitał musi w tym

celu zaraz umieścić na procencie składanym po 4% przy kapitalizacyi półrocznéj?

19. Ileż warta obecnie renta roczna 1200 zł., płatna przez 10 lat na początku każdego roku, jeżeli się liczy 6% przy kapitalizacyi rocznéj?

20. Ktoś obejmuje w posiadanie majątek ziemski z obowiązkiem płacenia dotychczasowemu posiadaczowi po 2500 zł. rocznie przez 14 lat na początku każdego roku; jak wysoko oceniono ten majątek, przyjąwszy stopę procentową na 5% i kapitalizacyą półroczną?

ROZDZIAŁ III.

O rachunkach w liczbach niezupełnych.

§. 11.

Określenie.

1. Liczbą niezupełną *(unvollständige Zahl)* nazywamy liczbę, która przedstawia jakąś wielkość niezupełnie dokładnie, lecz tylko w mniejszém lub większém przybliżeniu. Różnica między wartością dokładną jakiéjś wielkości, a wartością téj wielkości niezupełną, zowie się błędem *(Fehler)*. Stósownie do tego, czy wartość dokładna jest większą, czy téż mniejszą od wartości niezupełnéj, powiadamy, że biorąc wartość niezupełną zamiast wartości dokładnéj, błąd popełnia się przez niedomiar *(Defect)* lub przez nadmiar *(Excess)*.

2. Mając daną jakąś liczbę niezupełną, zawsze się przyjmuje, że błąd nie jest większy od połowy jedności na miejscu najniższém.

Będziemy zatém rozumieli n. p. przez

63	liczbę zawartą między	62·5 i 63.5,
7600	„ „ „	7550 i 7650,
2·7	„ „ „	2·65 i 2·75,
1·832	„ „ „	1·8315 i 1·8325, i t. d.

Stąd wypływa, że gdy w liczbie dziesiętnéj dokładnéj wolno po prawéj stronie najniższego miejsca dziesiętnego dopisać upodobaną ilość zer, to w liczbie dziesiętnéj niezupełnéj tego uczynić nie można.

Przyjąwszy więc, że liczby są dokładne, jest n. p. $2{\cdot}5 = 2{\cdot}50 = 2{\cdot}500 = \ldots$, gdy tymczasem przypuściwszy niezupełność liczb, oznacza 2·50 liczbę, zawartą między 2·495 i 2·505, 2·500 oznacza liczbę, zawartą między 2·4995 i 1·5005 i t. d. Że liczba dana n. p. 2·37 jest niezupełną, zaznacza się zwykle, dopisując do niéj po prawéj dwie kropki, t. j. pisząc 2·37..

3. Miarą dokładności *(Genauigkeitsmass)* liczby dziesiętnéj niezupełnéj jest wykładnik stósunku téj liczby, uważanéj za dokładną, do jedności na najniższém miejscu znaczącém. Tak n. p. miarą dokładności liczby niezupełnéj 74·32.. jest iloraz $74·32 : 0·01 = 7432$, przez co należy rozumieć, że na 7432 setnych jedna setna jest niepewną. Podobnie miarą dokładności liczby niezupełnéj 74000 jest $74000 : 1000 = 74$, co znaczy, że na 74 tysięcy jeden tysiąc jest niepewny, i t. d.

Miary dokładności liczb niezupełnych takich, jak n. p. 2·57.., 0·257.., 0·0257.. i t. d. są równe, gdyż $2·57 : 0·01 = 0·257 : 0·001 = 0·0257 : 0·0001 = \ldots = 257$. Długość, o któréj wiemy, że wynosi w przybliżeniu 543 *m* jest dokładniéj znana, niż ta, o któréj wiemy, że wynosi w przybliżeniu n. p. 0·329 *m*; albowiem w pierwszym razie jest miara dokładności 543, a przeto większą, niż w drugim razie, gdzie ona wynosi 329. Jestto zupełnie naturalna, bo przy 543 *m* jeden metr stanowi mniejszą różnicę, niż jeden milimetr przy 329 *mm*.

4. W rachunkach praktycznych występują daleko częściéj liczby niezupełne, aniżeli liczby dokładne. Wypływa to naprzód z niedokładności przyrządów mierniczych i niedoskonałości naszych zmysłów, w skutek czego liczby, wypadające z pomiarów, rzeczywiście dokonanych, są mniéj lub więcéj błędne. Powtóre istnieją wielkości, których żadną miarą nie można wyrazić przez liczby dokładne, lecz które wyrażają się przez t. z. liczby niewymierne, złożone z nieskończenie wielu cyfr dziesiętnych. Takie więc liczby robi się niezupełnymi, skracając je (I. §. 27.) Wreszcie liczby dziesiętne dokładne, lecz wyrażone przez większą ilość cyfr dziesiętnych, aniżeli tego potrzeba do dokładności rachunku, czyni się również niezupełnymi przez ich skrócenie.

Skoro tak rzecz się ma, więc i wypadki działań na liczbach niezupełnych, nie mogą być zupełnie dokładne, lecz muszą na jedném lub na więcéj miejscach najniższych zawierać cyfry błędne. Stąd też konieczną jest rzeczą dla działań arytmetycznych na liczbach niezupełnych podać prawidła proste, któreby ochroniły nas od rachowania w wielu cyfrach dziesiętnych, których większość może być wątpliwą albo błędną.

§. 12.
Zadania.

1. Kiedy liczbę nazywamy dokładną, kiedy niezupełną?

2. Jeżeli 1 cetnar angielski = 50·802377... *kg*, jedność trzeciego miejsca dziesiętnego (0·001) większą jest od wartości następnych miejsc dziesiętnych (0·000377). Dla czego?

3. Zamiast 42·58719 *m* położył ktoś w rachunek 42·587 *m*; jak wielki popełniono błąd ze względu na ostatnią zatrzymaną cyfrę?

4. Jeżeli za 15·7238945 *kg* położymy *a)* 15·723, *b)* 15·724, jaki błąd popełnimy w obu przypadkach?

5. Liczby dziesiętne 7·2456927, 17·14581245, 29·94567, 104·72909, 0·750998 należy przedstawić w przybliżeniu tak, aby błąd był mniejszy od połowy jedności na miejscu czwartém.

6. Liczbę $\pi = 3·141592653$ przedstaw z możliwą dokładnością w sześciu, pięciu i trzech miejscach dziesiętnych.

7. Odległość dwóch przedmiotów podano na 17·9825849 *m*; podać ją mniéj dokładnie, ale tak, aby *a)* błąd był mniejszy od $\frac{1}{2}$ *m*, *b)* błąd był mniejszy od 5 *cm*.

8. Sumę 789·49728 zł. przedstawić tak, aby błąd mniejszy był od $\frac{1}{2}$ ct.

9. Funt angielski = 0·4535913 *kg*. Przedstawić ten zamiennik tak, aby błąd był mniejszy od 5 *dg*.

10. Liczbę lat 2·58364 przedstawić w przybliżeniu tak, aby *a)* błąd mniejszy był od 1 dnia, *b)* od 1 godziny.

§. 13.
Dodawanie liczb niezupełnych.

1. Liczby dziesiętne niezupełne, zawierające jednaką ilość miejsc dziesiętnych, dodaje się jak liczby dziesiętne dokładne. Ponieważ błąd każdego składnika nie jest większy od połowy jedności na najniższém miejscu dziesiętnym, więc błąd sumy nie będzie większy od połowy téj jedności, pomnożonéj przez ilość składników sumy.

Mamy zatém n. p.

$$7·324 + 2·057 + 0·305 + 15·238 = 24·924$$

z błędem nie większym od $0·0005 . 4 = 0·002$; ostatnia cyfra sumy, 4, jest więc niepewną.

2. Liczby niezupełne, jeżeli nie zawierają jednakiéj ilości miejsc dziesiętnych, wprzódy się skraca, zatrzymując w każdym składniku tyle miejsc dziesiętnych, ile ich jest najmniéj w jednym ze składników.

Mając n. p. dodać liczby

$$2{\cdot}583\,..,\ 0{\cdot}70982\,..,\ 4{\cdot}\dot{6}\dot{3},\ 2{\cdot}5,$$

z których dwie pierwsze są niezupełne, trzecia zawiera ułamek peryodyczny, a czwarta jest dokładną, w każdéj z tych liczb bierzemy trzy miejsca dziesiętne. Żądana suma jest więc

$$2{\cdot}583 + 0{\cdot}710 + 4{\cdot}636 + 2{\cdot}500 = 8{\cdot}429$$

z błędem nie większym od $0{\cdot}0005 \,.\, 3 = 0{\cdot}0015$ (gdyż jeden z 4 składników był dokładnym). A zatém i tu cyfra tysiącznych, 9, jest niepewna.

§. 14.
Zadania.

1. Suma $7{\cdot}4928\,m + 9{\cdot}72\,m + 19{\cdot}56894\,m + 9{\cdot}46\,m + 13{\cdot}3\,m$ ma być podaną z wszelką dokładnością w *cm*. Wyznaczyć ją i podać błąd.

2. Podać sumę $1{\cdot}12\dot{7}\,kg + 3{\cdot}849245\,kg + 2{\cdot}8\dot{6} + 17{\cdot}0\dot{3}$ tak, aby błąd nie przeszedł 2 *dg*.

3. Dodać następujące liczby dziesiętne z możliwą dokładnością:

a)	*b)*
19·456892..	0·72492..
$17{\cdot}\dot{5}\dot{4}$	3·142..
0·35892..	6·1378..
2·450935..	5·24183..
0·75	

4. Szwecki funt $= 0{\cdot}425076\,..\,kg$, turecka oka $= 1{\cdot}27848\,..\,kg$, angiel. funt $= 0{\cdot}45359\,..\,kg$, a rosyjski funt $= 0{\cdot}40955\,..\,kg$. Podać sumę tych jednostek wagi z dokładnością: *a)* w gramach, *b)* w dekagramach.

5. Podać sumę ułamków $12\frac{7}{12} + 9\frac{9}{16} + 7\frac{2}{3} + 5\frac{5}{6}$ tak, aby błąd w sumie mniejszy był od połowy jedności na 5. miejscu dziesiętném.

(Należy składniki przedstawić w dziesiętnych; jako próbę wykonać dodawanie na ułamkach zwyczajnych, a sumę zamienić na ułamek dziesiętny).

6. Podobnie $3\frac{7}{9} + 2\frac{1}{3} + 4\frac{1}{2} + 4\frac{5}{6}$.

7. Podać sumę liczb dokładną w gramach:

$4{\cdot}75289..kg + 3{\cdot}706926..kg + 4{\cdot}788..kg$
$+ 3{\cdot}72492..kg + 4{\cdot}75..kg + 8{\cdot}125..kg.$

8. Dodać z możliwą dokładnością:

a) $47{\cdot}56..m + 8{\cdot}9285..m + 7{\cdot}289..m$
b) $0{\cdot}987..m + 15{\cdot}49..m + 8{\cdot}7298..m.$

§. 15.

Odejmowanie liczb niezupełnych.

1. Liczby dziesiętne niezupełne z jednaką ilością miejsc dziesiętnych odejmuje się jak liczby dokładne; jeżeli zaś odjemna i odjemnik nie zawierają jednakiéj ilości miejsc dziesiętnych, wówczas skraca się tę z dwu liczb, która ma więcéj miejsc dziesiętnych, zatrzymując w niéj tylko tyle miejsc dziesiętych, ile ich jest w drugiéj liczbie.

A więc

zamiast n. p. $9{\cdot}24 - 0{\cdot}356$, bierzmy $9{\cdot}24 - 0{\cdot}36 = 8{\cdot}88$,
" " $3{\cdot}4\dot{6} - 0{\cdot}529$, " $3{\cdot}467 - 0{\cdot}529 = 2{\cdot}938$.

Podobnież mając n. p. od liczby dokładnéj $2{\cdot}1$ odjąć niezupełną $0{\cdot}527$, bierze się $2{\cdot}100 - 0{\cdot}527 = 1{\cdot}573$, i t. d.

2. Co do błędu, zachodzącego w różnicy dwu liczb niezupełnych, należy rozróżnić następujące przypadki:

a) Jeżeli odjemna i odjemnik są dane z nadmiarem, wówczas błąd różnicy będzie równy różnicy błędów obu liczb, a więc mniejszy od połowy jedności na najniższém miejscu dziesiętném. Albowiem, skoro podług założenia wartość odjemnika niezupełnego jest większą od wartości dokładnéj, więc różnica wypadnie mniejszą co najwyżéj o $\frac{1}{2}$ jedności na miejscu najniższém; a że i wartość odjemnéj niezupełnéj jest także większą od wartości dokładnéj, więc przez to ta różnica stanie się znowu większą, co najwyżéj o $\frac{1}{2}$ jedności na miejscu najniższém.

b) Jeżeli odjemna i odjemnik są dane z niedomiarem, wówczas zapomocą podobnego rozumowania znajdziemy, że i tu błąd różnicy będzie równy różnicy błędów obu liczb, a przeto mniejszy, niż $\frac{1}{2}$ jedności na miejscu najniższém.

c) Jeżeli odjemna jest dana z nadmiarem, a odjemnik dany z niedomiarem, wówczas błąd różnicy będzie równy sumie błędów obu liczb, a więc nie większy od jedności na miejscu najniższém. Albowiem przez odjęcie liczby mniejszéj różnica się zwiększa, a że i odjemna także jest większa od wartości dokładnéj, oba więc błędy dodają się.

d) Jeżeli przeciwnie odjemna jest dana z niedomiarem a odjemnik dany z nadmiarem, to i wówczas błąd różnicy będzie także równy sumie błędów obu liczb. Albowiem przez odjęcie liczby większéj od wartości dokładnéj, zmniejsza się różnica, a że i odjemna także jest mniejsza od wartości dokładnéj, oba więc błędy dodają się.

W każdym więc przypadku niepewną jest w różnicy cyfra na miejscu dziesiętném najniższém.

§. 16.

Zadanie.

1. Wyznaczyć błąd różnic

a)	56·9328..	*b)*	7·87928..
	— 49·8739..		— 5·9865.

2. Jeżeli yard = 0·91438..*m*, a arszyna = 0·7112..*m*, jaka jest różnica tych miar dokładna na *mm*?

3. Szwedzka mila = 10·6886..*km*, wiorsta = 1·06679..*km*, o ile większą jest szwedzka mila od wiorsty? Podać na *m* dokładnie.

4. Angielski quarter = 2·907892..*hl*, rosyjska czetwert' = 2·09907..*hl*; o ile większa jest miara angielska od rosyjskiéj? Różnicę podać na *cl* dokładnie.

5. Jaka jest różnica między yardem a łokciem wied.? 1 łok. wied. = 0·63216..*m*.

6. Wyznaczyć z możliwą dokładnością różnice:

a) 8·105..	— 4·728..	*b)* 6·49..	— $5{\cdot}\dot{3}$
c) 3·7256..	— $2\frac{2}{9}$	*d)* $\frac{7}{9}$	— 0·729
e) $\dot{7}{\cdot}6$	— 5·45..	*f)* 8·9207	— $2\frac{7}{11}$.

§. 17.

Mnożenie liczb niezupełnych.

1. Iloczynu dwu liczb dziesiętnych niezupełnych nie można otrzymać z dokładnością większą, aniżeli jest dokładność ilo-

czynu czynnika mniéj dokładnego i cyfry na miejscu najwyższém w czynniku dokładniejszym. Z tego powodu bierze się zawsze czynnik mniéj dokładny za mnożną, a czynnik dokładniejszy za mnożnik; następnie zapomocą mnożenia skróconego wyznacza się iloczyn w tylu cyfrach dziesiętnych, ile ich jest w mnożnéj.

Tak n. p. mając pomnożyć liczby 7·245 i 0·3689, bierzemy wtórą za mnożną, a pierwszą za mnożnik. Będzie zatém

$$\begin{array}{r l}
0{\cdot}3689 & .\ 7{\cdot}245 \\
\hline
2{\cdot}5823 & = 0{\cdot}3689\,.\,7 \\
738 & = 0{\cdot}3689\,.\,2 \\
147 & = 0{\cdot}3689\,.\,4 \\
18 & = 0{\cdot}3689\,.\,5 \\
\hline
2{\cdot}6726 &
\end{array}$$

Błąd pierwszego iloczynu częściowego nie jest większy od 0·00005.7, gdy tymczasem błąd każdego z trzech pozostałych nie przewyższa 0·00005.

Całkowity więc błąd iloczynu nie jest większy od

$$0{\cdot}00005\,.\,7 + 0{\cdot}00005\,.\,3 = 0{\cdot}0005.$$

Stąd czytamy, że w otrzymanym wypadku czwarta cyfra dziesiętna nie jest pewna.

2. Ażeby w iloczynie otrzymać same cyfry dokładne, potrzeba przedewszystkiém wyznaczyć granicę wyższą błędu tegoż iloczynu, t. j. liczbę, od któréj błąd nie jest większy; a wtedy znajdziemy, które miejsce dziesiętne iloczynu jeszcze będzie dokładném, i do tego wyniku zastósujemy mnożenie skrócone.

Tak mając pomnożyć n. p. liczby 45·6235 i 6·475, bierzemy liczbę mniéj dokładną 6·475 za mnożną. Błąd iloczynu nie będzie większy od 0·0005.45 + 0·0005.4 = 0·0245; a zatém jedynie cyfra dziesiętnych będzie pewną. Należy więc mnożenie tak wykonać, aby otrzymać tylko dwie cyfry dziesiętne: dziesiętnych i setnych, a potém opuścić drugą. Mamy więc

$$\begin{array}{r l}
 & 6{\cdot}475\,.\,45{\cdot}6235 \\
532654 & \\
\hline
25900 & = 6{\cdot}475\,.\,4 \\
3238 & = 6{\cdot}475\,.\,5 \\
388 & = 6{\cdot}475\,.\,6 \\
13 & = 6{\cdot}475\,.\,2 \\
2 & = 6{\cdot}475\,.\,3 \\
\hline
295{\cdot}41 &
\end{array}$$

*

§. 18.

Zadania.

W następujących zadaniach rozwinąć należy tylko pewne miejsca iloczynu.

1. Rubel srebrny = 1·6192 zł. w. a.; ile zł. w. a. czyni 385·75 rubli?

2. Mila ang. morska = 1854·965 *m*; obliczyć z możliwą dokładnością, ile *km* uczyni 570 mil ang.?

3. Średnie oddalenie księżyca od ziemi = 60·2778 promieniom ziemskim. Promień kuli ziemskiéj = 6377·399 *km*. Jak wielka jest odległość księżyca od ziemi w *km.*? Iloczyn obliczyć z możliwą dokładnością.

4. 1 yard = 0·9143835 *m*; ile *m* uczyni 1238·5 yardów?

5. Według dokonanych spostrzeżeń głos przebiega w 1 sekundzie 1038·06 stóp paryskich. Podać z możliwą dokładnością wymiar ten w *m*, wiedząc, że 1′ parys. = 0·32484 *m*.

6. Długość wahadła sekundowego we Wiedniu wynosi 3·144...′ wied. Podać długość wahadła w mierze metrycznéj z możliwą dokładnością, wiedząc, że 1′ wied. = 0·316081..*m*.

7. Geometrya uczy, że obwód koła oblicza się, mnożąc liczbę, wyrażającą długość średnicy, przez liczbę Ludolfa 3·14159.. Ile kilometrów ma obwód ziemski, jeżeli średnica ziemi wynosi 12754·798 *km*?

8. Odległość z Krakowa do Lwowa wynosi 45·06.. mil austr. Wyrazić tę odległość w kilometrach, wiedząc, że 1 mila austr. = 7·585936 *km*.

9. Ile hektolitrów czyni 49·75 czetwerti (rosyjska miara do zboża), wiedząc, że 1 czetwert = 2·09907..*hl*?

10. 1^0 na równiku ma 15 mil geogr., 1 mila geogr. = 7·40741 *km*. Jak długi jest równik w kilometrach?

11. Utworzyć iloczyny z możliwą dokładnością z następujących niezupełnych czynników:

a) 45·67296 . 5·296	*b)* 4·73285 . 0·7569
c) 346·7 . 728·745	*d)* 673·6 . 3·0892
e) 7·875 . 0·43569	*f)* 0·8278 . 0·76
g) 0·08698 . 0·0724	*h)* 0·000753 . 0·854
i) 7·0082 . 6·7	*k)* 0·089 . 4·057.

12. Ile μm^2 czynią 100, 400, 725, 2000 mil kwadr.?

13. Ile *kg* czyni $56\frac{1}{2}$ funt. wied. i $117\frac{3}{4}$ funt. wied.?

14. Wyznaczyć następujące iloczyny z możliwą dokładnością:

a) $0{\cdot}\dot{7}\dot{2}\,.\,6{\cdot}752..$ *b)* $\frac{3}{7}\,.\,3{\cdot}14159..$
c) $17\frac{2}{3}\,.\,12{\cdot}56..$ *d)* $4\frac{3}{4}\,.\,1{\cdot}7320508..$
e) $2{\cdot}4494897...\,0{\cdot}007245$ *f)* $27\frac{2}{3}\,.\,0{\cdot}5\dot{6}$
g) $0{\cdot}7086\,.\,0{\cdot}7086$ *h)* $5{\cdot}729\,.\,5{\cdot}729.$

§. 19.

Dzielenie liczb niezupełnych.

1. Przy dzieleniu liczb dziesiętnych niezupełnych należy rozróżnić dwa przypadki ze względu na to, czy dzielnik, czy też dzielna posiada większą dokładność.

Jeżeli naprzód dzielnik jest dokładniejszy od dzielnéj, wówczas dzielnik skraca się do tylu cyfr, aby iloczyn dzielnika tak skróconego i pierwszéj cyfry ilorazu można było odjąć od dzielnéj; poczém dzielenie uskutecznia się sposobem skróconym, t. j. do reszt nie dopisuje się zer, lecz natomiast dzielnik daléj się skraca.

Podzielmy n. p. liczbę 0·02057 przez 87·34.

Tutaj dzielnik 87·34 jest dokładniejszy od dzielnéj 0·02057; albowiem 8734 jest więcéj, niż 2057. Pierwszą cyfrą ilorazu jest cyfra dziesięciotysięcznych, gdyż dzielna 0·02057 jest zawarta między 87·34.0·001 = 0·08734 i 87·34.0·0001 = 0·008734. Najniższa cyfra dzielnika jest cyfrą setnych. Ponieważ iloczyn setnych i dziesięciotysięcznych daje milionowe, a cyfry milionowych nie ma w dzielnéj, zerem zaś zastąpić jéj nie można, więc dzielnik należy skrócić przez opuszczenie ostatniéj cyfry, 4. Mamy zatém

$$
\begin{array}{r l}
0{\cdot}02057 : 87{\cdot}3\llcorner 4 & = 0.0002354 \\
\underline{1747} & = 87{\cdot}3\llcorner 4\,.\,2 \\
310 & \\
\underline{262} & = 87{\cdot}\llcorner 34\,.\,3 \\
48 & \\
\underline{44} & = 8\llcorner 7{\cdot}34\,.\,5 \\
4 & \\
\underline{3} & = \llcorner 87\,34\,.\,4 \\
1 &
\end{array}
$$

Z powodu niepewności ostatniéj cyfry 7 w dzielnéj i w skutek dalszego skracania dzielnika są ostatnie cyfry w kolejnych iloczynach częściowych i kolejnych resztach niepewne, dlatego téż w ilorazie trzeba szukać tylko tylu cyfr, ile ich było w dzielniku po uprzedniém skróceniu tegoż, t. j. 3 cyfr.

Można znaleść ściśle dwie granice, między którymi błąd ilorazu jest zawarty. Jakoż skoro 0·02057 jest zawarte między 0·020575 i 0·020565, a 87·34 między 87·345 i 87·335, więc iloraz żądany będzie mniejszy od

$$0{\cdot}020575 : 87{\cdot}335 = 0{\cdot}0002355,$$

a większy od

$$0{\cdot}020565 : 87{\cdot}345 = 0{\cdot}0002354.$$

Pierwsze trzy cyfry dziesiętne znaczące w ilorazie są dokładne.

2. Założmy teraz, że dzielna jest dokładniejszą od dzielnika. Jeżeli dzielnik pomnożymy przez pierwszą cyfrę ilorazu, to ostatnia cyfra tego iloczynu będzie niepewną; stąd téż w dzielnéj nie możemy uwzględnić cyfr niższéj wartości miejscowéj. Dlatego dzielną skraca się, pozostawiając tylko tyle cyfr najwyższych, ile potrzeba do odjęcia od niéj iloczynu z dzielnika i pierwszéj cyfry ilorazu; poczém uskutecznia się dzielenie sposobem skróconym.

Podzielmy n. p. 659·457 przez 7·826.

Pierwszą cyfrą ilorazu jest cyfra dziesiątek, gdyż 659·457 jest zawarte między $7{\cdot}826 . 10 = 78{\cdot}26$ i $7{\cdot}826 . 100 = 782{\cdot}6$. Ponieważ cyfra dziesiątek, pomnożona przez cyfrę tysiącznych, daje setne, więc dzielną należy skrócić przez zatrzymanie w niéj tylko cyfry setnych. Mamy zatém

$$\begin{array}{l} 659{\cdot}457 : 7{\cdot}826 \text{ czyli } 659{\cdot}46 : 7{\cdot}826 = 84{\cdot}26, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 33\,38 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; 2\,08 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\; 52 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; 5 \end{array}$$

ostatnia wszakże cyfra, 6, w ilorazie nie jest pewna z powodu, że ostatnia cyfra w dzielnéj skróconéj i ostatnie cyfry kolejnych reszt nie są dokładne. W saméj rzeczy błąd ilorazu jest zawarty między

$$659{\cdot}4575 : 7{\cdot}8255 = 84{\cdot}27 \text{ i } 659{\cdot}4565 : 7{\cdot}8265 = 84{\cdot}25.$$

§. 20.

Zadania.

1. Wyznaczyć wartość miejscową pierwszéj cyfry ilorazów:

a) 4728 : 72·52	*b)* 729·438 : 64·37
c) 0·7298 : 0·216	*d)* 67·657 : 482·43
e) 0·5684 : 7·8926	*f)* 0·0598 : 0·343
g) 0·9568 : 0·0368	*h)* 7069 : 0·968.

2. Jeżeli powyższe liczby dziesiętne są niezupełne, ile pownych miejsc otrzymamy w ilorazach. Wyznaczyć według tego powyższe ilorazy.

3. 2·0185 : 3·14159265..; obliczyć powyższy iloraz w ten sposób, ażeby się w ilorazie tylko pewne miejsca znajdowały.

4. 1 funt angielski = 0·453593...*kg*; ile angielskich funtów czyni 1240 *kg*?

5. Najwyższa góra na ziemi (Ewerest w Azyi) jest na 8800 *m* wysoka. Ile to czyni stóp wied.?

6. 1 dolar = 2·0989... zł. w złocie, a 1 lira turecka = 9·2206...zł. Jaką wartość ma lira, wyrażona w dolarach?

7. Obliczono, że 27·782...rubli srebrnych tyleż mają czystego srebra, co 45 zł. w. a. Obliczyć wartość 350 srebrnych rubli walutą austryacką według wartości srebra.

8. Obliczyć ilorazy z możliwą dokładnością:

a) 453·62.. : 6·83..	*b)* 739·584.. : 6·85..
c) 487·5 : 6·847..	*d)* 0·307.. : 0·07654..
e) 0·003697.. : 0·684..	*f)* 0·03765 : 0·377..
g) 3·8662.. : $5\frac{3}{7}$	*h)* 48·3013.. : $8{\cdot}\dot{2}7$
k) 387·5648 : $5692{\cdot}\dot{3}$	*i)* 0·0973.. : 48.

9. Ktoś ma 3824 marek; ktoś inny posiada 4217 franków: Kto z nich bogatszy?

10. Za 345 austr. dukatów zapłacono 1735·75 zł. w. a.; ile kosztował 1 dukat?

11. Obliczyć następujące wyrażenia:

$$a)\ \frac{4{\cdot}238.. \times 8{\cdot}2}{3{\cdot}14159..} \qquad b)\ \frac{3{\cdot}14159.. \times 6{\cdot}5 \times 4{\cdot}5068..}{7{\cdot}283.. \times 0{\cdot}07926..}$$

12. Ciśnienie atmosfery wynosi na 1 cal kwadr. $21\frac{1}{2}$ funt. wied. Wyrazić ciśnienie atmosfery w *kg* na 1 cm^2.

13. Angielski quarter $= 2{\cdot}90789..hl$, rosyjska czetwert $= 2{\cdot}099...hl$; Ile quarterów uczyni $478\frac{1}{2}$ czetwerti?

14. Ile g czystego złota ma ośmiozłotówka austr., jeżeli z $500\,g$ czystego złota 86·111..sztuk téj monety biją?

15. Ile km jest ze Lwowa do Krakowa, jeżeli odległość ta wynosi 45·6..mil, a $1\,km = 0{\cdot}131823..$mil.

§. 21.

Zadania na wszystkie cztery działania.

1. Rok średni ma 365·24222.. dni; ile w tym roku jest dni, godzin, minut i sekund?

$$
\begin{array}{rl}
0{\cdot}24222 \text{ dni} = & 0{\cdot}24222\,.\,24 \\ \hline
 & 48444 \\
 & 9689 \\ \hline
 & 5{\cdot}8133 \text{ godzin z błędem nie większym od } 0{\cdot}0001; \\
0{\cdot}8133 \text{ godzin} = & 0{\cdot}8133\,.\,60 \\ \hline
 & 48{\cdot}798 \text{ minut z błędem nie większym od } 0{\cdot}001; \\
0{\cdot}798 \text{ minut} = & 0{\cdot}798\,.\,60 \\ \hline
 & 47{\cdot}88 \text{ sekund z błędem nie większym od } 0{\cdot}01.
\end{array}
$$

A zatém:

1 rok średni = 365 dni 5 godzin 48 minut 47·9 sekund.

2. $35^0\ 56'\ 37''$ wyrazić przez liczbę dziesiętną stopni na 0·001 dokładnie:

$$37'' = 37:60 = 3{\cdot}7:6 = 0{\cdot}61\dot{6}'$$

$$56{\cdot}61\dot{6}' = 56{\cdot}61\dot{6}:60 = 5{\cdot}6616:6 = 0{\cdot}9436;$$

a zatém: $$35^0\ 56'\ 37'' = 35{\cdot}9436^0.$$

3. 9·548 pomnożyć przez $\frac{7}{12}$.

Albo mnoży się przez 7, a dzieli następnie przez 12, albo też zamienia się $\frac{7}{12}$ na ułamek dziesiętny i przez ten ułamek mnoży. W drugim przypadku ułamek dziesiętny, którym $\frac{7}{12}$ zastępujemy, nie może być mniéj dokładny od 9·548. Mamy zatém:

$$\begin{array}{l} 9{\cdot}548\,.\,7 \\ \hline 66{\cdot}836 : 12 = 5{\cdot}5696, \\ 68 \\ 83 \\ 116 \\ 8 \end{array}$$

albo, skoro $\frac{7}{12} = 0{\cdot}58\dot{3}$,

$$\begin{array}{r} 9{\cdot}548\,.\,0{\cdot}58333 \\ \hline 47740 \\ 7638 \\ 286 \\ 29 \\ 3 \\ \hline 5{\cdot}5696. \end{array}$$

t. j. $9{\cdot}548\,.\,\frac{7}{12} = 5{\cdot}5696$ z dokładnością w 4 pierwszych cyfrach dziesiętnych.

4. $7{\cdot}4936$ podzielić przez $\frac{5}{14}$.

Albo mnoży się przez 14, a dzieli przez 5, albo téż dzieli się przez ułamek dziesiętny, równoważny ułamkowi zwyczajnemu $\frac{5}{14}$ nie mniejszéj dokładności od $7{\cdot}4936$. Mamy zatém

$$\begin{array}{l} 7{\cdot}4936\,.\,14 \\ 29974 \\ \hline 104.910 : 5 = 20{\cdot}98\lfloor 2; \end{array}$$

albo skoro $\frac{5}{14} = 0{\cdot}3\dot{5}7142\dot{8}$,

$$7{\cdot}4936 : 0{\cdot}35714\lfloor 3 = 20{\cdot}98\lfloor 2.$$

5. Ktoś, mając zapłacić 745 zł. po 3 latach i 645 po 5 latach, ile ma zapłacić zaraz, licząc procenta składane po 6% i przyjmując okresy roczne.

Wartość obecna 745 zł. jest $= 745\,.\,0{\cdot}83962 =$

$$\begin{array}{r} 0{\cdot}83962 \\ 547 \\ \hline 587734 \\ 33585 \\ 4198 \\ \hline 625{\cdot}517 \text{ zł.} \end{array}$$

Wartość obecna 645 zł. jest $= 645\,.\,0{\cdot}74726 =$

$$\begin{array}{r} 0{\cdot}74726 \\ 546 \\ \hline 448356 \\ 29890 \\ 3736 \\ \hline 481{\cdot}982 \text{ zł.} \end{array}$$

A zatém ma zapłacić zaraz

$$625{\cdot}517 + 481{\cdot}982 = 1107{\cdot}49\lfloor 9,$$

gdzie tylko cyfra dziesiętnych i setnych jest pewna.

6. Stósunek obwodu koła do średnicy jest równy 3·14159...
Jeżeli obwód wynosi 13·568...m, jaka jest długość średnicy?

Średnica $= 13·568 : 3·141\underline{59} = 4·319\ m.$
1002
60
29
1

7. Podstawa trójkąta wynosi 5·372..m, a jego wysokość 7·435..m; jak wielkie jest pole trójkąta?

Pole trójkąta $= \frac{5·372 . 7·435}{2}$, 5·372 . 7·435

37604
2149
161
27

39·941 : 2 = 19·97$\underline{0}$ m^2.

8. Nowe srebro zawiera 53·4% miedzi, 29.1% cynku i 17·5% niklu. Ile każdego z tych trzech metalów trzeba wziąć na 1200 kg nowego srebra, wiedząc, że przy topieniu ginie $1\frac{1}{2}$%?

Według warunków zadania należy na każde 98·5 kg wziąć każdego metalu 100 kg. Mamy zatém wziąć:

miedzi $12 . 53·4\ \frac{100}{98·5} = 650·5\ kg$

cynku $12 . 29·1 . \frac{100}{98·5} = 354·5$ „

niklu $12 . 17·5 . \frac{100}{98·5} = 213·2$ „

razem . . 1218·2 kg.

9. Dwa łuki tego samego okręgu zawierają: pierwszy 38° 41′ 3·4″, a drugi 52° 15′ 12·8″; wyznaczyć stósunek tych dwu łuków.

10. Ciało ruchome przebiega okręg ruchem jednostajnym w 7 godzinach 23 minutach 35 sekundach; w jakim czasie przebiegłoby to samo ciało łuk tegoż okręgu zawierający 57° 17′ 44·75″?

11. Borda, fizyk francuski, znalazł, że długość wahadła, bijącego sekundy w Paryżu wynosi 440·5593.. linij paryskich; wyrazić tę długość w milimetrach (1 linia paryska = 2·256 *mm*)?

12. Głębokość trzech studni artezyjskich wynosi 220 *m*, 395 *m* i 543 *m*; ciepłota wody w tych studniach wynosi w pierwszéj 19·75°, w drugiéj 25·33° a w trzeciéj 30·50°. Sprawdzić, czy stósunek przyrostów ciepłoty jest równy stosunkowi przyrostów głębokości; a jeżeli ta równość nie zachodzi, wyznaczyć ciepłotę, jakąby woda w trzeciéj studni mieć powinna, ażeby równość tych stósunków zachodziła?

13. Dwie liczby 4897·85 i 235·786 posiadają błąd, mogący dochodzić do 2 jedności rzędu najniższego. Wyznaczyć iloczyn tych liczb, ograniczając się do cyfr, na których dokładność można liczyć?

14. Dwie liczby 5784·29 i 732·268 posiadają błąd, mogący dochodzić do 3 jedności rzędu najniższego. Znaleść iloraz tych liczb, ograniczając się do cyfr, na których dokładność można liczyć.

15. Według zasady Archimedesa ciało, zanurzone w płynie, doznaje ciśnienia z dołu w górę, w skutek czego traci część ciężaru równą ciężarowi płynu wypartego. Wiedząc, że kawał żelaza waży w próżni 12·475 *kg*, znaleść, ile ten kawał żelaza będzie ważył w oliwie, a ile w powietrzu. (Ciężar gatunkowy żelaza, oliwy i powietrza ze względu na wodę, któréj ciężar gatunkowy przyjmuje się za 1, jest 7·788, 0·915 i 0·0012932)?

16. Sala ma 2463 m^3 objętości; znaleść ciężar tlenu zawartego w powietrzu téj sali. [Wiadomo, że 100 części powietrza na wagę biorąc, zawierają 23 części tlenu]?

17. Woda marznąc zwiększa swą objętość o $\frac{1}{15}$; znaleść ciężar gatunkowy lodu ze względu na wodę?

18. Wyznaczyć na 0·0000001 dokładnie sumę nieskończenie wielu składników $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5} +$ i t. d.

ROZDZIAŁ IV.

O potęgowaniu i pierwiastkowaniu.

§. 22.

Określenia.

1. Potęgą *(Potenz)* liczby zowie się iloczyn dwu lub więcéj czynników równych téj liczbie. Ilość tych czynników jest stopniem potęgi *(Potenzgrad)*, a działanie, mające na celu wyznaczenie potęgi jakiéj liczby, zowie się podnoszeniem do potęgi albo potęgowaniem téj liczby *(Potenzieren)*.

Oznacza się, że liczba n. p. 5 ma być podniesiona do potęgi stopnia trzeciego albo trzeciéj, pisząc „5^3“, a mówiąc „pięć do trzeciéj“. Liczba 3, wskazująca stopień potęgi, nazywa się wykładnikiem potęgowym *(Potenzexponent)*.

Potęga druga zowie się także kwadratem, a trzecia sześcianem. (Porównaj naukę o miarach).

Kwadraty i sześciany dziewięciu pierwszych liczb są następujące:

$$1^2 = 1,\quad 2^2 = 4,\quad 3^2 = 9,\quad 4^2 = 16,\quad 5^2 = 25,\quad 6^2 = 36,$$
$$7^2 = 49,\quad 8^2 = 64,\quad 9^2 = 81;$$

$$1^3 = 1,\quad 2^3 = 8,\quad 3^3 = 27,\quad 4^3 = 64,\quad 5^3 = 125,\quad 6^3 = 216,$$
$$7^3 = 343,\quad 8^3 = 512,\quad 9^3 = 729.$$

Potęga ułamka równa się potędze licznika, podzielonéj przez potęgę mianownika. N. p.

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{4\,.\,4}{5\,.\,5} = \frac{4^2}{5^2},$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{4\,.\,4\,.\,4}{5\,.\,5\,.\,5} = \frac{4^3}{5^3}, \text{ i t. d.}$$

2. **Pierwiastkiem** *(Wurzel)* liczby zowie się nowa liczba, która pomnożona przez siebie raz lub więcéj razy, daje na iloczyn liczbę założoną. Stósownie do tego, czy pierwiastek ma być wzięty za czynnik dwa, trzy,... razy, aby na iloczyn otrzymać liczbę założoną, **stopień tego pierwiastka** *(Wurzelgrad)* będzie drugim, trzecim... Działanie, mające na celu wyznaczenie pierwiastka jakiéj liczby, zowie się **wyciąganiem pierwiastka** z téj liczby albo jéj **pierwiastkowaniem** *(Radicieren)*.

Oznacza się, że z liczby n. p. 8 ma być wyciągnięty pierwiastek stopnia trzeciego albo trzeci, pisząc „$\sqrt[3]{8}$“, a mówiąc **trzeci pierwiastek** z 8. Znak $\sqrt{}$ jest rozwartą literą początkową wyrazu łacińskiego *radix* (pierwiastek, korzeń), a liczba 3 w rozwartości tego znaku napisana, wskazująca stopień pierwiastka, zowie się **wykładnikiem pierwiastkowym** *(Wurzelexponent)*. Wykładnika pierwiastkowego 2 nie pisze się; $\sqrt{5}$ znaczyć więc będzie tyle, co $\sqrt[2]{5}$.

Pierwiastki stopnia drugiego zowią się także **kwadratowymi**, a pierwiastki stopnia trzeciego **sześciennymi**.

Ponieważ n. p. $8 = 2^3$, więc nawzajem $\sqrt[3]{8} = 2$; podobnie, ponieważ n. p. $(\frac{4}{5})^2 = \frac{16}{25}$, więc nawzajem $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$, i t. d.

Stąd czytamy: 1. że pierwiastkowanie jest działaniem poniekąd przeciwném potęgowaniu, 2. że pierwiastek ułamka jest równy pierwiastkowi licznika podzielonemu przez pierwiastek mianownika.

3. **Potęga liczby całkowitéj jest liczbą całkowitą, a potęga ułamka jest ułamkiem.** Atoli na odwrót pierwiastek liczby całkowitéj nie zawsze jest liczbą całkowitą. Aby pierwiastek liczby całkowitéj był liczbą całkowitą, konieczna, żeby liczba pierwiastkowana była potęgą innéj liczby całkowitéj tegosamego co pierwiastek stopnia. N. p. $\sqrt{4}$ jest liczbą całkowitą 2, gdyż $4 = 2^2$; podobnie $\sqrt{9}$ jest liczbą całkowitą 3, gdyż $9 = 3^2$. Atoli $\sqrt{5}$ nie jest liczbą całkowitą, bo 5 nie jest kwadratem liczby całkowitéj.

Jeżeli pierwiastek liczby całkowitéj nie jest liczbą całkokowitą, wówczas nie może on być także ułamkiem. Tak n. p. $\sqrt{8}$ nie jest liczbą całkowitą, a nie może być także ułamkiem; gdyż kwadrat tego ułamka musiałby być równy liczbie całkowitéj 8, a to niemożebne.

Pierwiastki liczb całkowitych, które nie są całkowitymi liczbami, tworzą zatém nowy rodzaj liczb, które zowiemy liczbami niewymiernymi (*irrationelle Zahlen*). Wartość takich liczb może być wyznaczona jedynie w mniejszém lub większém przybliżeniu.

§. 23.

Podnoszenie liczb do kwadratu.

1. Aby otrzymać kwadrat liczby, dość tę liczbę przez siebie samę pomnożyć. Rozpatrzmy się bliżéj w tém postępowaniu.

Niech naprzód będzie dana liczba całkowita dwucyfrowa, n. p. 87, złożona z 8 dziesiątek i 7 jedności,

$$87 = 80 + 7.$$

Mamy

$$87^2 = 87 . 87 = \overline{80+7} . \overline{80+7}.$$

Według znanych prawideł na mnożenie, liczbę wielocyfrową mnoży się przez wielocyfrową, mnożąc cyfrę jedności każdego rzędu w mnożnéj przez cyfrę jedności każdego rzędu w mnożniku i dodając te iloczyny częściowo. A zatém

$$\begin{array}{l} 87^2 = 80 . 80 + 7 . 80 \\ \qquad\qquad + 80 . 7 + 7 . 7 \\ \hline \qquad 80^2 + 2 . 80 . 7 + 7^2 \end{array}$$

Stąd czytamy, że kwadrat liczby całkowitéj dwucyfrowéj jest sumą trzech składników: pierwszym jest kwadrat jéj dziesiątek, drugim jest podwójny iloczyn jéj dziesiątek i jedności, a trzecim jest kwadrat jéj jedności.

Ponieważ kwadrat dziesiątek wyraża pewną ilość setek, a podwójny iloczyn dziesiątek i jedności pewną ilość dziesiątek, to gdy składniki kwadratu — celem ich dodania — podpiszemy jedne pod drugimi, można opuścić w pierwszym składniku dwa końcowe zera, a w drugim jedno końcowe zero, byleśmy — podpisując te składniki jedne pod drugimi — każdy następny składnik wysunęli jedną cyfrę ku prawéj względem składnika poprzedzającego. Mamy zatém następujący

W z ó r d z i a ł a n i a:

$$\begin{array}{rr} 87^2 = & \\ \hline 8^2 \ldots\ldots & 64 \\ +2.8.7 \ldots\ldots & 112 \\ +\quad 7^2 \ldots\ldots & 49 \\ \hline & 7569, \end{array} \qquad \text{zamiast: } \begin{array}{rr} 87^2 = & \\ \hline 80^2 \ldots & 6400 \\ +2.80.7 \ldots & 1120 \\ +\quad 72 \ldots & 49 \\ \hline & 7569. \end{array}$$

Dwa ostatnie składniki można zebrać w jeden, t. j. zamiast tworzyć oddzielnie podwójny iloczyn dziesiątek i jedności i oddzielnie kwadrat jedności, można odrazu utworzyć sumę tych dwu składników, mnożąc sumę podwójnych dziesiątek i jedności przez jedności. Jakoż w powyższym przykładzie $2.80.7 + 7^2 = 160.7 + 7.7 = 167.7$. Wszakże podpisując sumę dwu ostatnich składników, tak utworzoną, pod pierwszym składnikiem, potrzeba ją wysunąć dwiema cyframi ku prawéj. A zatém,

$$\begin{array}{rr} 87^2 = & \\ \hline 8^2 = \ldots\ldots & 64 \\ +\ 167.7 = \ldots\ldots & 1169 \\ \hline & 7569. \end{array}$$

2. Podnoszenie do kwadratu liczb wielocyfrowych sprowadza się do podnoszenia do kwadratu liczby dwucyfrowéj. Mając podnieść do kwadratu n. p. liczbę całkowitą trzycyfrową 873, tak rozumujemy. Ta liczba zawiera 87 dziesiątek i 3 jedności; jéj kwadrat jest zatém sumą trzech składników: 87^2, $2.87.3$ i 3^2, z których dwa ostatnie można zastąpić jednym 1743.3, wyrażającym iloczyn sumy podwójnych dziesiątek i jedności przez jedności. A że liczba 87 zawiera znowu 8 dziesiątek i 7 jedności, więc 87^2 będzie znowu sumą 3 składników: 8^2, $2.8.7$ i 7^2, z których dwa ostatnie można zastąpić jednym 167.7. Mamy zatém następujący

W z ó r d z i a ł a n i a:

$$\begin{array}{rr} 873^2 = & \\ \hline 8^2 \ldots\ldots & 64 \\ +2.\ 8.7 \ldots\ldots & 112 \\ +\quad 7^2 \ldots\ldots & 49 \\ +2.87.3 \ldots\ldots & 522 \\ +\quad 3^2 \ldots\ldots & 9 \\ \hline & 762129 \end{array} , \quad \text{albo krócéj: } \begin{array}{rr} 873^2 = & \\ \hline 8^2 = \ldots\ldots & 64 \\ +\ 167.7 = \ldots\ldots & 1169 \\ +1743.3 = \ldots\ldots & 5229 \\ \hline & 762129 \end{array}$$

Taksamo będzie:

$$\begin{array}{rr} \multicolumn{2}{l}{3461^2 =} \\ \hline 3^2 \ldots\ldots & 9 \\ 2.3.4 \ldots\ldots & 24 \\ 4^2 \ldots\ldots & 16 \\ 2.34.6 \ldots\ldots & 408 \\ 6^2 \ldots\ldots & 36 \\ 2.346.1 \ldots\ldots & 692 \\ 1^2 \ldots\ldots & \ldots\ldots 1 \\ \hline & 11978521 \end{array}$$

, albo krócéj:

$$\begin{array}{rr} \multicolumn{2}{l}{3461^2 =} \\ \hline 3^2 \ldots\ldots & 9 \\ +\ 64.4 \ldots\ldots & 256 \\ +\ 686.6 \ldots\ldots & 4116 \\ +6921.1 \ldots\ldots & 6921 \\ \hline & 11978521 \end{array}$$

3. Rozważając sposób krótszy tworzenia kwadratu liczby całkowitéj, widzimy: 1. że każda cyfra téj liczby dostarcza jednéj części składowéj do kwadratu, a mianowicie pierwsza, idąc od lewéj ku prawéj, swego kwadratu; część zaś składową, pochodzącą od każdéj następnéj cyfry, otrzymamy, gdy do podwójnéj liczby, złożonéj z cyfr poprzedzających, dopiszemy po prawéj tęż cyfrę i tak utworzoną liczbę przez cyfrę dopisaną pomnożymy; 2. że podpisując te części składowe za porządkiem, jednę pod drugą, celem ich dodania, potrzeba każdą następną wysunąć dwiema cyframi ku prawéj względem części składowéj bezpośrednio poprzedzającéj i 3. że w skutek tego podzieliwszy kwadrat na działy dwucyfrowe, idąc od prawéj ku lewéj, otrzyma się ilość działów równą ilość cyfr danéj liczby, przyczém dział pierwszy, licząc od lewéj, może być jedno- lub dwucyfrowym.

4. Liczbę dziesiętną podnosi się do kwadratu, jak liczbę całkowitą, tylko w kwadracie potrzeba dwa razy tyle miejsc końcowych odciąć na dziesiętne, ile było miejsc dziesiętnych w liczbie danéj. Jakoż mamy n. p.

$$2{\cdot}5^2 = \left(\frac{25}{10}\right)^2 = \frac{25^2}{10^2} = \frac{625}{100} = 6{\cdot}25,$$

$$3{\cdot}06^2 = \left(\frac{306}{100}\right)^2 = \frac{306^2}{100^2} = \frac{93636}{10000} = 9{\cdot}3636, \text{ i t. d.}$$

A zatém, jeżeli kwadrat liczby dziesiętnéj podzielimy na działy dwucyfrowe: w części całkowitéj idąc od znaku dziesiętnego ku lewéj, a w części dziesiętnéj idąc od znaku dziesiętnego ku prawéj, to ilość działów będzie równa ilości cyfr w danéj liczbie.

§. 24.

Wyciąganie pierwiastka kwadratowego.

1. Postępowanie przy wyciąganiu pierwiastka kwadratowego jest odwróceniem postępowania, użytego przy podnoszeniu do kwadratu. Weźmy pod uwagę naprzód liczbę całkowitą dwucyfrową, 47, i podnieśmy ją do kwadratu sposobem skróconym. Mamy

$$\begin{array}{lr}
\underline{47^2 =} & \\
4^2 \quad \ldots & 16 \\
87.7 \quad \ldots & \underline{609} \\
 & 2209
\end{array}$$

Chcąc odwrotnie wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z liczby 2209, dzielimy tę liczbę na działy po 2 cyfry, idąc od prawéj ku lewéj, 22|09. Ponieważ mamy dwa działy, więc pierwiastek będzie się składał z dwu cyfr: z pewnéj cyfry dziesiątek, n. p. D, i z pewnéj cyfry jedności, n. p. J. Te cyfry należy kolejno, naprzód cyfrę D, a potém cyfrę J tak wyznaczyć, aby części składowe kwadratu, od nich pochodzące, a od liczby pierwiastkowanéj odjęte, pozostawiały najmniejsze różnice dodatne.

A więc naprzód cyfra dziesiątek D powinna być taką, ażeby jéj kwadrat D^2 nie przewyższał liczby setek 22 w liczbie pierwiastkowanéj, i zarazem, ażeby różnica $22 - D^2$ była najmniejszą dodatną. Taką cyfrą D jest 4, albowiem $4^2 = 16$ jest jeszcze mniéj, niż 22, a $5^2 = 25$ jest już więcéj, niż 22. Mamy zatém $D = 4$. Od 22 odejmujemy $D^2 = 16$ i do różnicy 6 dopisujemy po prawéj stronie cyfry następnego działu. Tak otrzymana liczba 609 przedstawia część składową kwadratu, pochodzącą od cyfry jedności J, t. j. sumę podwojonych dziesiątek i jedności żądanego pierwiastku, pomnożoną przez jednostki. Jeżeli więc w téj liczbie opuścimy ostatnią cyfrę, 9, to liczba 60, oprócz pewnéj reszty, będzie przedstawiała iloczyn podwójnéj cyfry dziesiątek i cyfry jedności. Cyfra jedności J powinna być zatém taką, aby iloczyn $8.J$ nie przewyższał liczby 60. Cyfra jedności J nie może zatém przewyższać części całkowitéj ilorazu $\frac{60}{8}$, t. j. 7. Skoro $87.7 = 609$, więc $J = 7$.

Zebrawszy to razem, mamy następujący wzór działania:

$$
\begin{array}{rl}
 & \sqrt{22|09} = 47, \\
4^2 \ldots & 16 \\
 & \overline{60|9} : 8, \\
87.9 \ldots\ldots & 609 \\
 & \overline{\quad 0 \quad}
\end{array}
$$

Podobnie będzie

$$
\begin{array}{rl}
 & \sqrt{7|29} = 27, \\
2^2 \ldots & 4 \\
 & \overline{32|9} : 4, \\
47.7 \ldots & 329 \\
 & \overline{\quad 0 \quad}
\end{array}
$$

2. Niech następnie będzie dana liczba całkowita trzycyfrowa, n. p. 317. Podnosząc ją do kwadratu sposobem skróconym, mamy

$$
\begin{array}{rr}
247^2 = & \\
\hline
2^2 \ldots & 4 \\
44.4 \ldots & 176 \\
487.7 \ldots & 3409 \\
\hline
 & 61009
\end{array}
$$

Aby odwrotnie wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z liczby 61009, dzielimy tę liczbę na działy dwucyfrowe, idąc od prawéj ku lewéj, 6|10|09. Ponieważ mamy trzy działy, więc pierwiastek będzie trzycyfrowy. Oznaczmy przez S cyfrę jego setek, przez D cyfrę jego dziesiątek, a przez J cyfrę jego jedności.

Naprzód cyfra setek S powinna być taką, aby $6 - S^2$ była najmniejszą dodatną; jest więc $S = 2$. Odjąwszy $S^2 = 4$ od 6 i do różnicy 2 dopisując po prawéj stronie cyfry następnego działu, otrzymamy liczbę 210, która przedstawia część składową kwadratu, pochodzącą od cyfry dziesiątek D.

Cyfra D powinna być następnie taką, aby iloczyn z podwójnej cyfry setek i D, t. j. $4D$ nie przewyższał liczby 21, a zatém D nie może być wyższe od części całkowitéj iloczynu $\frac{21}{4}$ t. j. od liczby 5; atoli, skoro $45.5 = 225$ jest już więcéj niż 210, przeto trzeba wziąć na D liczbę mniejszą, niż 5; próbujmy przeto wziąć 4. Skoro $44.4 = 176$ jest jeszcze mniéj, niż 210, więc $D = 4$. Odjąwszy od 210 liczbę 176, t. j. sumę podwójnych setek i dziesiątek, pomnożoną przez cyfrę dziesiątek, i do różnicy 34 dopisując po prawéj stronie cyfry ostatniego działu, otrzymamy liczbę 3409, która przedstawia część składową kwadratu, pochodzącą od cyfry jedności J.

Cyfra jedności J powinna być zatém taką, ażeby iloczyn podwójnéj liczby, złożonéj z dwu znalezionych już cyfr pierwiastka, i cyfry D, t. j. $48 . J$ nie przewyższał liczby 340. Tą cyfrą jedności J może więc być liczba nie większa od części całkowitéj ilorazu $\frac{340}{48}$, t. j. od liczby 7.

Skoro $487 . 7 = 3409$, przeto $J = 7$. Wzór działania jest przeto następujący:

$$
\begin{array}{lr}
 & \sqrt{6|10|09} = 247 \\
2^2 \;.\;.\;. & 4 \\
 & \overline{21|0} : 4 \\
44.4 \;.\;.\;. & 176 \\
 & \overline{340|9} : 48 \\
487.7 \;.\;.\;. & 3409 \\
 & \overline{0}
\end{array}
$$

3. Z liczby dziesiętnéj wyciąga się pierwiastek kwadratowy, jak z liczby całkowitéj. Wszelako dzieląc liczbę dziesiętną na działy dwucyfrowe, należy ten podział rozpoczynać od znaku dziesiętnego, idąc ku lewéj w części całkowitéj, a ku prawéj w części dziesiętnéj. Jeżeliby ostatni dział w części dziesiętnéj zawierał tylko jednę cyfrę, wówczas uzupełniamy go 0 dopisanym po prawéj. Działy części całkowitéj dają część całkowitą, a działy części dziesiętnéj dają część dziesiętną pierwiastka.

Wzór działania:

$$
\begin{array}{llllr}
\underline{2{\cdot}51^2 =} & & & & \sqrt{6{\cdot}30|01} = 2{\cdot}51 \\
2^2 \;.\;.\;. & 4 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. & 2^2 \;.\;.\;. & 4 & \\
 & & & \overline{23|0} : 4 & \\
45.5 \;.\;.\;. & 225 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. & 45.5 \;.\;.\;. & 225 & \\
 & & & \overline{50|1} : 50 & \\
501.1 \;.\;.\;.\;. & 501 \;.\;.\;.\;.\;. & 501.1 \;.\;.\;. & 501 & \\
 & \overline{6{\cdot}3001} & & \overline{0} &
\end{array}
$$

Uwaga. Jeżeliby liczba, dana do pierwiastkowania, była ułamkiem dziesiętnym, wówczas część całkowita pierwiastka byłaby 0, cyfra dziesiętnych pierwiastka byłaby pierwiastkiem setnych, cyfra setnych byłaby pierwiastkiem dziesięciotysięcznych, i t. d. N. p.

$\sqrt{0{\cdot}12|25} = 0{\cdot}35$, $\sqrt{0{\cdot}00|32|49} = 0{\cdot}057$, i t. d.

3^2 . .	9	5^2 . . .	25
	325 : 6		749 : 10
65.5 . .	325	107.7 . . .	749
	0		0

4. Jeżeli przy wyciąganiu pierwiastka pozostaje jaka reszta, wówczas dana do pierwiastkowania liczba nie jest kwadratem doskonałym. W tym przypadku można obliczyć pierwiastek jedynie w przybliżeniu upodobaném. Jakoż, dopisując do danéj liczby po prawéj tyle działów dziesiętnych, złożonych z dwu zer, ile się podoba, można wyznaczyć pierwiastek w tylu cyfrach dziesiętnych, ile ich do osiągnięcia przybliżenia pożądanego potrzeba.

Wyznaczmy n. p. $\sqrt{3}$ w 4 cyfrach dziesiętnych. Dopisując kolejno 5 działów dziesiętnych po dwa zera, mamy

$\sqrt{3} = 1{\cdot}73205$

1^2 . . .	1
	200 : 2
27.7 . . .	189
	1100 : 34
343.3 . . .	1029
	7100 : 346
3462.2 . . .	6924
	17600 : 3464
34640.0 . . .	0
	1760000 : 34640.

A zatém $1{\cdot}7321$ jest wartością przybliżoną pierwiastka $\sqrt{3}$ z błędem mniejszym niż $0{\cdot}00005$.

Uwaga. Jeżeli pierwiastek kwadratowy potrzeba wyznaczyć w bardzo wielu cyfrach dziesiętnych, to sposób postępowania można skrócić w ten sposób, że, wynalazłszy połowę żądanych cyfr dziesiętnych lub o jednę więcéj, sposobem zwyczajnym do końcowéj reszty już nie dopisujemy następnego działu lub dwu zer, lecz tę resztę dzielimy sposobem skróconym przez następny dzielnik, skrócony o cyfrę końcową.

Wyznaczmy tym sposobem $\sqrt{37}$ w 6 cyfrach dziesiętnych. Mamy:

$$\sqrt{37} = 6{\cdot}082762$$

```
√37 = 6·082762
 36
 ----
  100 : 12
 ------
  10000 : 120
   9664
  ------
    33600 : 1216
    24324
   ------
     9276 : 12164
      161
       31
        9
```

Zamiast dzielić 927600 przez 12164, dzielimy 9276 sposobem skróconym przez 12164.

§. 25.

Podnoszenie liczb do sześcianu.

1. Aby otrzymać sześcian jakiéj liczby, potrzeba naprzód znaleść kwadrat téj liczby, a potém kwadrat przez tęż liczbę pomnożyć. Niech naprzód będzie dana liczba całkowita dwucyfrowa n. p. 54.

Mamy

$$54^2 = 50^2 + 2.50.4 + 4^2.$$

Ażeby więc otrzymać 54^3, potrzeba każdy z trzech składników w 54^2 pomnożyć przez 54, t. j. przez 50 i przez 4, i te iloczyny dodać. Tym sposobem postępując, znajdziemy

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 54^3 & = & 50^2.50 & + & 2.50.4.50 & + & 4^2.50 & & \\ & & & + & 50^2.4 & + & 2.50.4.4 & + & 4^2.4 \\ \hline & & 50^3 & + & 3.50^2.4 & + & 3.50.4^2 & + & 4^3 \end{array}$$

t. j. *sześcian liczby całkowitéj dwucyfrowéj jest sumą czterech składników: sześcianu dziesiątek, potrójnego iloczynu kwadratu dziesiątek i jedności, potrójnego iloczynu dziesiątek i kwadratu jedności i wreszcie sześcianu jedności.*

Sześcian dziesiątek oznacza pewną ilość tysięcy, potrójny kwadrat dziesiątek pomnożony przez jedności oznacza pewną ilość setek, potrójny iloczyn dziesiątek i kwadratu jedności oznacza pewną ilość dziesiątek, a sześcian jedności oznacza pewną ilość jedności. Skoro tak rzecz się ma, więc gdy te składniki sześcianu podpiszemy za porządkiem jedne pod drugimi celem ich dodania, możemy opuścić w pierwszym trzy zera końcowe, w drugim dwa zera końcowe, a w trzecim jedno zero końcowe, byleśmy — podpisując tak skrócone składniki — każdy następny składnik wysunęli jedną cyfrą ku prawéj względem składnika, bezpośrednio poprzedzającego. Mamy zatém następujący wzór działania:

$$\begin{array}{lr} \underline{54^3 =} & \\ \quad 5^3 \;.\;.\;.\;.\;. & 125 \\ + 3.5^2.4 \;.\;.\;.\;.\;. & 300 \\ + 3.5\,.\,4^2 \;.\;.\;.\;.\;. & 240 \\ + \quad\quad 4^3 \;.\;.\;.\;.\;. & \underline{64} \\ & 157464 \end{array} \quad , \text{ zamiast: } \quad \begin{array}{lr} \underline{54^3 =} & \\ \quad 50^3 \;.\;.\;.\;.\;. & 125000 \\ + 3.50^2.4 \;.\;.\;.\;.\;. & 30000 \\ + 3.50\,.\,4^2 \;.\;.\;.\;. & 2400 \\ + \quad\quad 4^3 \;.\;.\;.\;. & \underline{64} \\ & 157464 \end{array}$$

2. Każdą liczbę całkowitą wielocyfrową można wyrazić jako sumę pewnéj ilości dziesiątek i jedności. N. p. $542 = 540 + 2$ jest sumą 54 dziesiątek i 2 jedności. Stósując zatém powyższe prawidło, otrzymamy

$$\begin{array}{lr} \underline{542^3 =} & \\ \quad 54^3 \;.\;.\;.\;.\;. & 157464 \\ + 3.54^2.2 \;.\;.\;.\;.\;. & 17496 \\ + 3.54\,.\,2^2 \;.\;.\;.\;.\;. & 648 \\ + \quad\quad 2^3 \;.\;.\;.\;.\;. & \underline{8} \\ & 159220088 \end{array} \quad ; \text{ a że } \quad \begin{array}{lr} \underline{54^3 =} & \\ \quad 5^3 \;.\;.\;.\;.\;. & 125 \\ 3.5^3.4 \;.\;.\;.\;.\;. & 300 \\ 3.5\,.\,4^2 \;.\;.\;.\;.\;. & 240 \\ \quad\quad 4^3 \;.\;.\;.\;.\;. & \underline{64} \\ & 157464, \end{array}$$

więc rozłożywszy 54^3 według tego samego prawidła na sumę 4 składników, mieć będziemy

$$\begin{array}{lr} \underline{542^3 =} & \\ \quad 5^3 \;.\;.\;.\;.\;. & 125 \\ + 3\,.\,5^2.4 \;.\;.\;.\;.\;. & 300 \\ + 3\,.\,5\,.\,4^2 \;.\;.\;.\;.\;. & 240 \\ + \quad\quad 4^3 \;.\;.\;.\;.\;. & 64 \\ + 3.54^2.2 \;.\;.\;.\;.\;. & 17496 \\ + 3.54\,.\,2^2 \;.\;.\;.\;.\;. & 648 \\ + \quad\quad 2^3 \;.\;.\;.\;.\;. & \underline{8} \\ & 159220088. \end{array}$$

Stąd już widoczna, jak się podnosi do sześcianu liczbę całkowitą złożoną z ilukolwiek cyfr.

3. Rozważając ten sposób tworzenia sześcianu liczby, całkowitéj, widzimy 1. że pierwsza cyfra téj liczby, licząc od lewéj, dostarcza do sześcianu tylko jednego składnika, mianowicie własnego sześcianu, gdy tymczasem każda następna dostarcza trzech składników, a mianowicie: mnoży potrójny kwadrat liczby, złożonéj z cyfr, które ją poprzedzają; jéj kwadrat mnoży potrójną liczbę, złożoną z cyfr, które ją poprzedzają; a nareszcie daje własny sześcian; 2. że podpisując te składniki za porządkiem, jedne pod drugimi, celem ich dodania, potrzeba każdy następny składnik wysunąć jedną cyfrą ku prawéj względem składnika bezpośrednio poprzedzającego i 3. że w skutek tego, podzieliwszy sześcian na działy trzycyfrowe, idąc od prawéj ku lewéj, ilość tych działów będzie równa ilości cyfr danéj liczby, przyczém dział pierwszy, licząc od lewéj, może być jedno-, dwu- lub trzycyfrowym.

4. Liczbę dziesiętną podnosi się do sześcianu, jak liczbę całkowitą, tylko w sześcianie potrzeba trzy razy tyle miejsc końcowych odciąć na dziesiętne, ile miejsc dziesiętnych dana liczba zawiera. Jakoż n. p.

$$9{\cdot}5^3 = \frac{95^3}{10^3} = \frac{857375}{1000} = 857{\cdot}375.$$

§. 26.

Wyciąganie pierwiastka sześciennego.

1. Odwrócenie sposobu postępowania przy tworzeniu sześcianu prowadzi do prawidła na wyciąganie pierwiastka sześciennego.

Weźmy pod uwagę naprzód liczbę dwucyfrową n. p. 24 i podnieśmy ją do sześcianu. Mamy:

$$\begin{array}{lr}
24^3 = & \\
\quad 2^3 \;.\;.\;.\;. & 8 \\
+\; 3.2^2.4 \;.\;.\;. & 48 \\
+\; 3.2.4^2 \;.\;.\;. & 96 \\
+\; \quad 4^3 \;.\;.\;. & 64 \\
\hline
 & 13824.
\end{array}$$

Aby odwrotnie z liczby 13824 wyciągnąć pierwiastek sześcienny, dzielimy ją na działy trzy cyfrowe, idąc od prawéj ku lewéj, 13|824. Ponieważ są dwa działy, więc żądany pierwiastek będzie dwucyfrowym. Oznaczmy przez D cyfrę jego dziesiątek, a przez J cyfrę jego jedności.

Sześcian dziesiątków jest pewną ilością tysięcy, więc cyfra D powinna być taką, ażeby jéj sześcian D^3 nie przywyższał 13 tysięcy i ażeby różnica $13 - D^3$ była najmniejszą dodatną. Stąd wypływa, że $D = 2$, gdyż $2^3 = 8$ jest jeszcze mniéj, niż 13, gdy tymczasem $3^3 = 27$ jest już więcéj, niż 13.

Znalazłszy $D = 2$, odejmujemy $D^3 = 8$ od 13 i do różnicy 5 dopisujemy cyfry następnego działu, wskutek czego otrzymamy liczbę 5824, tyleż jedności wyrażającą. Nadto potrajamy kwadrat 2 dziesiątek, wskutek czego otrzymamy $3.2^2 = 12$ setek.

Cyfra jedności J powinna być następnie taką, ażeby 12 setek, pomnożonych przez cyfrę jedności J, nie przewyższało 58 setek, zawartych w liczbie 5824, a zatém J nie może przewyższać części całkowitéj ilorazu $\frac{58}{12}$ t. j. liczby 4. Przyjąwszy, że $J = 4$, formujemy te trzy składniki, których cyfra jedności 4 dostarcza do sześcianu, i sumę tych składników od liczby 5824 odejmujemy. Skoro suma tych składników

$$\begin{array}{rr} 3.2^2.4 = & 48 \\ 3.2.4^2 = & 96 \\ 4^3 = & 64 \\ \hline & 5824 \end{array}$$

jest równa odjemnéj 5824, więc rzeczywiście $J = 4$.

Zebrawszy wszystko razem, mamy następujący

Wzór działania.

$$\begin{array}{rll} & \sqrt[3]{13|824} = 24 & \\ 2^3 \ldots & \underline{\;8\;} & \\ & 58|24:12 & \ldots\ 3.2^2 \\ 3.2^2.4 \ldots & \left\{\begin{array}{r} 48 \\ 96 \\ 64 \end{array}\right. & \\ 3.2.4^2 \ldots & & \\ 4^3 \ldots & & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

2. Przechodząc następnie do liczby trzycyfrowéj, n. p. 245, znajdziemy taksamo

$245^3 =$	nawzajem: $\sqrt[3]{14\vert 706\vert 125} = 24$
2^3 . . . . . 8	8
	67|06 : 12 . . . . 3.2^2
$3.2^2.4$ 48	48
$3.2.4^2$ 96	96
4^3 . . . . 64	64
	8821|25 : 1728 . . 3.24^2
$3.24^2.5$ 8640	8640
$3.24.5^2$ . . . 1800	1800
5^3 . . . 125	125
14706125;	0

Już stąd widoczna, jak się wyciąga pierwiastek sześcienny z liczby całkowitéj, złożonéj z ilukolwiek cyfr.

3. Jeżeli się ma wyciągnąć pierwiastek dziesiętny z liczby dziesiętnéj, wówczas dzielimy tę liczbę na działy trzycyfrowe, poczynając od znaku dziesiętnego i idąc ku lewéj w części całkowitéj, a ku prawéj w części dziesiętnéj. Jeżeli ostatni dział części dziesiętnéj zawiera mniéj, niż 3 cyfry, to dopisuje się po prawéj potrzebną ilość zer. Działy części całkowitéj dadzą część całkowitą, a działy części dziesiętnéj dadzą część dziesiętną pierwiastka. N. p.:

$12{\cdot}4^3 =$	nawzajem: $\sqrt[3]{1\vert 906{\cdot}624} = 12{\cdot}4$
1^3 . . . . . 1	1
	9|06 : 3 . . . . 3.1^2
$3.1^2.2$ 6	6
$3.1.2^2$ 12	12
2^3 . . . . 8	8
	1786|24 : 432 . . 3.12^2
$3.12^2.4$ . . . 1728	1728
$3.12.4^2$ . . . 576	576
4^3 . . . 64	64
1906·624;	0

Podobnie znajdziemy:

$$
\begin{array}{lll}
 & \sqrt[3]{0{\cdot}042|875} & = 0{\cdot}35 \\
3^3 \; . \; . \; . & 27 & \\
 & 158|75 : 27 & . \; . \; . \; . \; 3.3^2 \\
3.3^2.5 \; . \; . \; . \; . & 135 & \\
3.3\,.\,5^2 . \; . \; . \; . & \;\;225 & \\
5^3 . \; . \; . \; . & \;\;\;125 & \\
 & \;\;\;\;0 &
\end{array}
$$

4. Jeżeli przy wyciąganiu pierwiastka sześciennego pozostanie jaka reszta, wówczas można jego wartość wyznaczyć jedynie w przybliżeniu upodobaném, dopisując do liczby pierwiastkowanéj po prawéj tyle działów dziesiętnych po trzy 0, ile się podoba. Kiedy się otrzymało już więcéj, niż połowę wymaganych cyfr dziesiętnych pierwiastka, to dalsze cyfry dziesiętne można otrzymać zapomocą skróconego dzielenia, biorąc ostatnią resztę (bez dopisanych zer) za dzielną, a potrójny kwadrat już znalezionego pierwiastka, skrócony przez opuszczenie ostatniéj cyfry, za dzielnik.

Wyznaczmy tym sposobem $\sqrt[3]{2{\cdot}3156}$ w 6 cyfrach dziesiętnych, rachując trzy pierwsze dokładnie, a 3 następne sposobem skróconym. Mamy:

$$
\begin{array}{lll}
\sqrt[3]{2{\cdot}315|600|000} & = \; 1{\cdot}322984.. & \\
1 & & \\
13|15 \;\; : 3 \; . \; . \; . \; . \; . & 3.1^2 & \\
1197 & & \\
1186|00 : 507 \; . \; . \; . & 3.13^2 & \\
102968 & & \\
156320|00 : 52272 \; . \; . & 3.132^2 & \\
10470248 & & \\
5161752 : 524305|2 . \; . & 3.1322^2 & \\
443005 & & \\
23561 & & \\
2589.. & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcr}
3.1^2.3 & = & 9 \\
3.1\,.\,3^2 & = & 27 \\
3^3 & = & 27 \\
 & & 1197 \\
3.13^2.2 & = & 1014 \\
3.13\;.2^2 & = & 156 \\
2^3 & = & 8 \\
 & & 102968 \\
3.132^2.2 & = & 104544 \\
3.132\;.2^2 & = & 1584 \\
2^3 & = & 8 \\
 & & 10470248.
\end{array}
$$

§. 27.

Zadania na potęgowanie i pierwiastkowanie.

1. Podnieść do kwadratu liczby:

a) 79, 457, 704, 3182, 7049, 60035, 8020507, 9079802;

b) 5·7, 19·8, 26·73, 0·729, 64·038, 17·004, 0·10072, 0·0724.

2. Wyrazić przez ułamki dziesiętne z błędem mniejszym od 0·0005 kwadraty liczb:

$$2\frac{1}{3},\ \frac{53}{87},\ \frac{635}{677},\ 5\frac{19}{63},\ \frac{11}{21},\ \frac{111}{203}.$$

3. Ile jest 2^3, 2^4, 2^5, 2^6 i 2^7?

4. Obliczyć 47^4, 152^4, 930^4, 69^4.

5. Wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z liczb:

a) 169, 441, 784, 1521, 1849, 6084, 15129, 207936, 622521;

b) 13·69, 5760·81, 33706·96, 227·7082, 0·2209, 0·013689, 0·00056644.

6. Wyznaczyć pierwiastki kwadratowe:

a) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ w 5 cyfrach dziesiętnych;

b) $\sqrt{5{\cdot}5}$, $\sqrt{4{\cdot}52}$, $\sqrt{0{\cdot}358}$, $\sqrt{0{\cdot}00025}$ w 4 cyfrach dziesiętnych;

c) $\sqrt{\frac{7}{16}}$, $\sqrt{\frac{224}{225}}$, $\sqrt{\frac{19}{24}}$, $\sqrt{4\frac{2}{3}}$, $\sqrt{57\frac{5}{38}}$ w 3 cyfrach dziesiętnych.

7. Obliczyć z największą możebną dokładnością:

a) $\sqrt{2gh}$, gdzie $g = 9{\cdot}80896..$ $h = 73{\cdot}54..$

b) $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, gdzie $\pi = 3{\cdot}14159..$, $g = 9{\cdot}80896..$, $l = 2{\cdot}543..$

8. Obliczyć pierwiastek drugi do 5 miejsc dziesiętnych:

$\sqrt{96}$	$= 9{\cdot}79795...$	$\sqrt{0{\cdot}056}$	$= 0{\cdot}23664...$
$\sqrt{153}$	$= 12{\cdot}36931...$	$\sqrt{0{\cdot}00789}$	$= 0{\cdot}08882...$
$\sqrt{101}$	$= 10{\cdot}04987...$	$\sqrt{0{\cdot}003}$	$= 0{\cdot}05477...$
$\sqrt{7{\cdot}65}$	$= 2{\cdot}76586...$	$\sqrt{0{\cdot}014}$	$= 0{\cdot}11832...$
$\sqrt{15{\cdot}2379}$	$= 3{\cdot}90357...$	$\sqrt{9{\cdot}6}$	$= 3{\cdot}09838...$

9. $\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \sqrt{6}:3 = 0{\cdot}8164966..$

10. Obliczyć

$\sqrt{\frac{1}{4}}$, $\sqrt{\frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{81}{64}}$, $\sqrt{\frac{256}{361}}$, $\sqrt{\frac{7}{4}} = 1{\cdot}32287$,

$\sqrt{\frac{19}{9}} = 1{\cdot}24721$, $\sqrt{11\frac{11}{16}} = 3{\cdot}41869$, $\sqrt{7\frac{13}{36}} = 2{\cdot}71313$,

$\sqrt{8\frac{15}{49}} = 2{\cdot}88203$, $\sqrt{\frac{5}{3}} = 1{\cdot}29099$, $\sqrt{\frac{7}{8}} = 0{\cdot}93541$,

$\sqrt{10\frac{3}{10}} = 3{\cdot}20936$.

11. Podnieść do sześcianu liczby:

a) 93, 425, 678, 409, 1234, 2045, 7209, 5008, 10506;

b) 4·7, 0·47, 0·089, 67·3, 4·32, 5·092, 0·0109, 36·07, 0·20803.

12. Obliczyć: 45^6, 59^6, 73^6, 9^6. ($2^6 = 2^3 . 2^3$).

13. Wyrazić przez ułamki dziesiętne z błędem mniejszym od 0·0005 sześciany liczb:

$$\frac{13}{15},\quad \frac{35}{53},\quad \frac{641}{807},\quad \frac{35109}{315}.$$

14. Obliczyć z największą możebną dokładnością:

$$\frac{4}{3}\,\pi\, r^3, \text{ gdzie } \pi = 3{\cdot}14159.., \; r = 3{\cdot}072..$$

15. Wyciągnąć pierwiastek sześcienny z liczb:

a) 6859, 12167, 884736, 2460375, 11089567, 40353607, 7256313856.

b) 5·832, 0·046656, 0·000097336, 22164·361129, 58230·605376.

16. Obliczyć pierwiastek trzeci z liczb:

a) $\frac{1}{8}$, $\frac{27}{64}$, $\frac{343}{512}$, $\frac{729}{125}$, $3\frac{4}{5}$, $7\frac{8}{9}$, $52034\frac{10}{27}$;

b) $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $3\frac{4}{5}$, $7\frac{8}{9}$, $1\frac{9}{25}$ w 3 cyfrach dziesiętnych.

17. Wyznaczyć:

a) $\sqrt[4]{47458321}$, $\sqrt[4]{9223{\cdot}6816}$, $\sqrt[8]{28179280429056}$,

$\sqrt[8]{4294967296} = 16$.

$$\left(\sqrt[4]{} = \sqrt{\sqrt{}},\; \sqrt[8]{} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{}}}\right);$$

b) $\sqrt[6]{1544804416}$, $\sqrt[6]{24\cdot137569}$, $\left(\sqrt[6]{} = \sqrt[3]{\sqrt{}}\right)$;

c) $\sqrt[9]{794\cdot280046581}$, $\sqrt[12]{13841287201}$,

$\left(\sqrt[9]{} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{}},\ \sqrt[12]{} = \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{}}}\right)$.

18. Okazać na przykładach, że pierwiastek kwadratowy z liczby mieszanéj, złożonéj z jedności i ułamka zwyczajnego, równa się jedności, powiększonéj połową tego ułamka, z błędem mniejszym, niż ósma część kwadratu tego ułamka.

19. Okazać na przykładach, że różnica między sześcianem liczby a tą liczbą jest zawsze podzielna przez 6.

20. Okazać na przykładach, że sześcian jakiéjkolwiek liczby jest wielokrotnością liczby 7, powiększoną albo pomniejszoną o 1.

21. Jakie jest największe przybliżenie, z jakiém można obliczyć kwadrat i sześcian liczby $g = 9\cdot80896\ldots$?

22. Obliczyć z dokładnością na 0·00001 iloraz

$$\frac{4\pi^3 - 24\pi}{\pi^4 - 12\pi^2 + 24}, \quad \pi = 3\cdot14159\ldots$$

23. Obliczyć z dokładnością na 0·001

$$\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{5}}}.$$

24. Cena dyamentu jest proporcyonalną do kwadratu jego wagi; jeżeli więc dyament roztłucze się na dwa kawałki, to jego wartość zmniejszy się. Okazać, że to zmniejszenie wartości będzie największe, gdy oba kawałki posiadają równą wagę.

25. Jeżeli napiszemy jednę za drugą cyfry dziesiątek w sześcianach kolejnych, kończących się jedną z cyfr parzystych 2, 4, 6 lub 8, to szereg otrzymany będzie peryodyczny, a peryod będzie się składał z 5 cyfr.

§. 28.

Zadania rozmaite.

1. Z 10 *kg* przędzy otrzymano 45 *m* sukna na $1\frac{1}{2}$ *m* szerokiego; ile metrów sukna na $\frac{5}{4}$ *m* szerokiego otrzymać można z 85 *kg* przędzy?

2. W ilu dniach zrobi 24 robotników, pracując dziennie 10 godzin, 200 *m* materyi szerokiéj na 2 *m*, jeżeli 18 robotników w 6 dniach, pracując dziennie 8 godzin, wyrobią 180 *m* takiéj-saméj materyi?

3. 5 zecerów złoży, pracując 12 godzin dziennie, w 6 dniach 24 arkuszy druku, jeżeli każdy arkusz ma 16 stron, strona 42 wierszy, wiersz 60 liter. Ile arkuszy złoży 6 zecerów, którzy pracują 9 godzin dziennie w 10 dniach, jeżeli arkusz mieć będzie tylko 12 stron, każda strona 35 wierszy, a wiersz 44 liter?

4. Zbiornik na 3·5 *m* długi, 2 *m* szeroki i 1·8 *m* głęboki napełnia rura wodociągowa w 3 godzinach 45 minutach. W jakim czasie tasama rura napełni zbiornik na 2 *m* długi, 1·5 *m* szeroki i na 1 *m* głęboki?

5. W jakim czasie 24 robotników wykopie rów na 48 *m* długi, 1·5 *m* szeroki i 1·4 *m* głęboki; jeżeli 20 robotników w 30 dniach wykończą rów na 80·5 *m* długi, 1·2 *m* szeroki, a 1·25 *m* głęboki?

6. Kupiec kupił 36 cetnarów metrycznych towaru po 46·875 zł. za cetnar. Sprzedał po 56·25 zł. tyle cetnarów, że odzyskał kwotę, na zakupno towaru wyłożoną. Ile mu jeszcze cetnarów zostało?

7. W pewnéj fabryce zajętych było 33 robotników, którzy za 6 dni pracy $415\frac{4}{5}$ zł. otrzymać mieli, jeżeli dziennie 10 godzin pracować będą. Po 2 dniach opuszcza fabrykę 3 robotników, reszta pracować musi z tego powodu 12 godzin. Szóstego dnia przybywa 2 robotników, w tym dniu pracują wszyscy tylko 10 godzin. Ile zł. zapłacić ma za tych 6 dni fabrykant?

8. Kupcowi we Lwowie nadsyłają rachunek, według którego za 112 ang. funtów zapłacić ma 2 funty szterlingów 12 szylingów. Ile to wynosi zł. w. a., jeżeli 1 funt szterlingów = 12·4 zł. w. a. a 100 ang. funtów = 39 *kg*?

9. Kupiec zapłacić ma w Paryżu 1710 franków; ile rubli wynosi jego dług, jeżeli 100 franków = $81\frac{1}{4}$ marek, 19 marek = 10 zł. w. a., a 18 zł. w. a. = 10 rublom srebrem?

10. Po ile za 1 *kg* sprzedawać będzie kupiec we Lwowie towar, sprowadzony z Rosyi, którego pud (= 16·38 *kg*) płacił 10 rubli srebrem (100 rubli = 165 zł.), jeżeli cena zakupna wskutek kosztów transportu podnosi się w ten sposób, że

każde 100 zł. wzrastają na 108 zł. i jeżeli kupiec 15% chce zarobić?

11. Kupcowi nadsyłają z Londynu 320 yardów materyi, po $5\frac{1}{2}$ szylingów za yard. W jakiéj cenie wypadnie 1 *m*, jeżeli według kursu 10 funtów szterling. = 112 zł. w. a. i 10 yard = $9\frac{1}{7}$ *m* i jeżeli kupiec koszta przewozu 10% liczy.

12. 700 *kg*, wliczywszy wszelkie poboczne wydatki, kosztowały 910 franków. W jakiéj cenie będzie 1 *kg*, skoro 100 franków = 47·45 zł. według kursu, a kupiec za każde 100 zł. w. a., które wydał, odebrać chce przy sprzedaży 115 zł. w. a.

13. Jaka jest wartość obecna kapitału 6500 zł. po $6\frac{1}{2}$% płatnego po 3 latach?

14. Jaka jest obecna wartość kapitału 8640 zł., który dopiero po 5 latach ma być wypłaconym, licząc po 7%?

15. Do jakiéj sumy wzrośnie kapitał 10500 zł. po 25 latach po 5% przy całorocznéj kapitalizacyi?

16. Do jakiéj sumy wzrośnie kapitał 9000 zł. po 4% przy półrocznéj kapitalizacyi?

17. Ktoś wkłada do kasy oszczędności przez 5 lat na początku każdego roku 250 zł. Jaką sumę otrzyma na końcu ostatniego roku, jeżeli kasa płaci 4% i półrocznie kapitalizuje.

18. Za jaki kapitał wypłaciła kasa oszczędności 5000 zł. po 9 latach pod warunkami wymienionymi w poprzedniém zadaniu?

19. Za dom zapłacono 24500 zł., sumę tę wypłacono jednak dopiero po 3 latach. Jaka jest wartość obecna téj kwoty, licząc po 5% przy całorocznéj kapitalizacyi?

20. Jaka jest wartość obecna sumy 12800 zł., płatnéj po 8 latach, licząc 4% przy całorocznéj kapitalizacyi. Jaka będzie różnica w wartości, gdybyśmy przyjęli półroczną kapitalizacyą.

21. Za jaką sumę, przed 25 laty złożoną, oddano w bieżącym roku kwotę 31990 zł., licząc 4% przy całorocznéj kapitalizacyi?

22. Jak wielką była liczba mieszkańców pewnego miasta przed 15 laty, licząc roczny przyrost 2%, jeżeli ludność dzisiaj wynosi 21650 mieszkańców?

23. Podzielić liczbę 840 na 4 części w stósunku $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{2}$ i $\frac{2}{5}$ i $\frac{5}{8}$. Jak wielkie są to części?

24. 2000 zł. należy tak między cztéry osoby podzielić, aby pierwsza tyle razy $\frac{1}{3}$ otrzymała ile razy druga $\frac{1}{4}$, trzecia $\frac{1}{5}$, a czwarta $\frac{1}{6}$ zł. otrzyma. Ile otrzyma każda osoba?

25. Za budowę drogi wypłacono trzem gminom 2400 zł. Gmina *A* dawała 30 robotników przez 24 dni, *B* 24 robotników przez 36 dni, *C* 26 robotników przez 30 dni. Ile otrzyma każda gmina z powyższej kwoty?

26. Trzech gospodarzy wynajęło łąkę za 140 zł.:
A wypasał 20 szt. bydła przez $3\frac{1}{2}$ miesiąca,
B „ 30 „ „ „ 3 miesiące,
C „ 24 „ „ „ 4 „
Ile ma każdy zapłacić?

27. Z 15 *kg* przędzy można wyrobić 90 *m* płótna, szerokiego na 1·15 *m*; ile metrów płótna, szerokiego na 1·05 *m*, wyrobi się z 7 *kg* przędzy?

28. Na ile % umieszczono kapitał 5400 zł., jeżeli w $2\frac{1}{2}$ latach dał 742·5 zł. procentów prostych?

29. Jaki kapitał, umieszczony na 5%, dał w 3 latach 9 miesiącach procentów prostych 1153·20 zł.?

30. Weksel, płatny po upływie 58 dni, zdyskontowano z potrąceniem 5% od kwoty, na jaką weksel opiewał, i otrzymano gotówką 1481·85 zł.; na jaką kwotę opiewał weksel?

31. Winiarz sprowadził 450 butelek wina reńskiego, za co zapłacił 1060 marek po kursie 100 zł. = 62 marek. Za ile zł. w. a. musi sprzedawać butelkę, aby miał 25% zysku?

32. Pewna osoba podpisała 3 weksle: jeden na 600 zł., płatny po 6 miesiącach, drugi na 700 zł., płatny po 10 miesiącach, a trzeci na 1500 zł., płatny po 8 miesiącach. Chcąc zastąpić te trzy weksle jednym wekslem, płatnym po roku, na jaką kwotę musi ten jeden weksel wystawić, jeżeli stopa procentowa wynosi 6%?

33. Cztéréj kupcy zyskali spólnie 1236 zł.; ile otrzyma każdy z nich z tego zysku, jeżeli stósunek udziału kupca *A* do udziału kupca *B* był równy stósunkowi 2:3, stósunek udziału kupca *B* do udziału kupca *C* był równy 4:5, a stósunek udziału kupca *C* do udziału kupca *D* był równy 10:11?

34. Ktoś mienia 342 sztuk napoleondorów na dukaty austryackie; ileż otrzyma w zamian dukatów, jeżeli napoleondor liczy się po $9\frac{3}{5}$ zł. w. a., a dukat po $5\frac{7}{10}$ zł. w. a.?

35. Zamówiono u złotnika krzyż złoty próby 0·820, mający ważyć 1·25 *kg*. Złotnik ma dwa gatunki złota, jedno próby 0·900, a drugie próby 0·700; ileż z każdego gatunku wziąć mu wypadnie?

36. Sprzedano realność za 40000 zł., z których zapłacono zaraz 10000 zł., gdy tymczasem reszta miała być spłacona w trzech równych ratach kwartalnych. Jeżeli jednak nabywca i dwie z tych trzech rat zaraz zapłacił, kiedyż ma zapłacić ostatnią ratę?

37. Osoba *A* ma osobie *B* płacić roczną rentę w kwocie 320 zł., jak długo osoba *B* będzie żyła. Osoba *B* chciałaby jednak otrzymać zaraz kapitał, równoważny tym rentom. Ileż więc *A* ma zaraz zapłacić, przypuściwszy, że osoba *B* będzie żyła tylko 6 lat, i przyjąwszy, że osoba *A*, obracając swym kapitałem, uzyska 6% rocznego dochodu?

38. Aliaż przydatny na czcionki zawiera na wagę 80% ołowiu a 20% antymonu; ileż ołowiu i antymonu wchodzi do 16·375 *kg* tego aliażu?

39. Ile rubli srebrnych idzie na 500 *g* srebra czystego, jeżeli 1 rs. waży 20·7315 *g*, a jego próba wyraża się przez $\frac{125}{144}$?

40. Jeżeli 1450 zł. kapitału dało w 2 latach 116 zł. procentów prostych, jak wielkim musi być kapitał, któryby przy téj saméj stopie procentowéj dał w $1\frac{1}{2}$ roku $24\frac{4}{5}$ zł. procentów prostych?

41. 5240 zł. kapitału na 5% daje 786 procentów prostych; na ile % musi być umieszczony kapitał 2600 zł., ażeby w tym samym czasie dał 351 zł. procentów prostych?

42. Do wyrobu porcelany bierze się na wagę 25 części glinki, 2 części krzemionki i 1 część gipsu; ile każdéj z tych trzech rzeczy wziąć należy, ażeby otrzymać 315 *kg* porcelany?

43. Ile *km* wynosi 238 wiorst rosyjskich, jeżeli 100 wiorst = 14·3762 mil geogr., 1 mila geogr. = 0·9782.. mil austryackich, 1 mila austr. = 24000 stóp wiedeńskich, a 55 *m* = 174 stóp wiedeńskich?

44. Angielska korona ma 5 szylingów i waży $\frac{10}{11}$ uncyj wagi troy, a jéj próba (srebra) jest $\frac{37}{40}$; ile warta ona w zł. w. a., jeżeli funt troy = 12 uncyj = $373\frac{1}{4}$ *g*?

45. Osoba 34-letnia, chcąc w towarzystwie ubezpieczeń zapewnić rodzinie 1000 zł., płatnych po 21 latach lub po śmierci, musi płacić rocznie 44·60 zł. Jeżeli więc ktoś, zabezpieczywszy w tym zakładzie 5000 zł. w 34. roku życia, umiera po 11 latach, ileż wynoszą jego wkładki razem z procentami składanymi po 5%?

46. Jaki kapitał, umieszczony na procencie składanym po 5%, równoważy rentę roczną po 620 zł. płatną przez 8 lat z końcem każdego roku?

47. W jakim czasie dadzą 720 zł. kapitału na 5% tyleż procentów prostych, co 2400 zł. kapitału na 6% w 6 miesiącach?

48. Zawiązano spółkę handlową z kapitałem 20000000, podzielonym na 10000 akcyj po 200 zł. Nadto puściła ta spółka w obieg 50000 obligacyj po 100 zł., oprocentowanych podług stopy $4\frac{1}{2}$%. Jeżeli zysk roczny téj spółki wynosił 1970000 zł., jakaż dywidenda przypadła na każdą akcyą i ile % przyniósł kapitał akcyjny?

49. Właściciel chce ogród kwadratowy, mający 3·24 arów powierzchni, otoczyć murem. Wyznaczyć długość muru z dokładnością na 1 decymetr.

50. Znaleść średnią proporcyonalną między 3 i 47 z dokładnością na 0·001.

51. Cysterna kształtu sześciennego zawiera 64587 litrów wody; jaka jest długość jednéj krawędzi tego sześcianu?

52. Sześcian ma 9·87 m^3 objętości; jaka jest długość krawędzi sześcianu dwa razy większego?

53. Oś wielka drogi, po jakiéj planeta Mars krąży około słońca, jest równa 1·52369. . osiom wielkim drogi ziemskiéj. Wiedząc, że — według prawa Keplera — kwadraty czasów, w jakich dwie planety uskuteczniają obieg całkowity około słońca, jest równy stósunkowi sześcianów osi wielkich dróg tychże planet, znaleść trwanie obiegu Marsa, skoro ziemia uskutecznia ten obieg w 265·25628. . dniach.

ROZDZIAŁ V.

O rachunku w liczbach ogólnych czyli o algebrze.

§. 29.

Liczby ogólne. Zadanie algebry.

1. We wszystkich zagadnieniach arytmetycznych występują dwojakie wielkości: wielkości wiadome czyli dane i wielkości niewiadome, a rozwiązanie tych zagadnień zależy na tém, ażeby z wartości na wielkości dane wyprowadzić wartość na wielkości niewiadome.

W tém rozwiązaniu zagadnień arytmetycznych należy uważać dwie osobne części: jednéj jest celem rozpoznać, jakie działania na danych wielkościach zagadnienia uskutecznić potrzeba, żeby otrzymać wartość wielkości niewiadoméj; a część druga ma na celu samo wykonanie tych działań, podług prawideł im właściwych. Lepiéj poznamy to na przykładzie.

„Ile wynoszą procenta trzyletnie od kapitału 3600 zł., wypożyczonego na 5%?“

Z warunków tego zagadnienia łatwo postrzegamy, że procenta będą tém większe, im większym jest kapitał, im większą jest stopa procentowa i im dłuższy przeciąg czasu, za jaki procenta ma się liczyć; a zatém, że procenta są wprost proporcyonalne względem kapitału, stopy procentowéj i czasu. Wiedząc to, tak daléj rozumujemy. Skoro 100 zł. kapitału dają w roku 5 zł. procentu, więc 1 zł. kapitału da w roku $\frac{5}{100}$ zł., a przeto 3600 zł. da w jednym roku $\frac{3601.5}{100}$ zł., a za trzy lata procenta będą trzy razy większe, będą więc równe $\frac{3600 \cdot 5 \cdot 3}{100}$ zł. Oznaczając przez x szukaną kwotę procentów, mieć będziemy:

$$x = \frac{3600.5.3}{100} \text{ zł.}$$

Rozpoznawszy tym sposobem, jakie działania na danych zagadnienia wykonać potrzeba, ażeby jako wypadek rachunku otrzymać wartość niewiadoméj, należałoby tylko wykonać te działania. Jeżeli wszakże tych działań nie wykonamy, będziemy stąd mieli tę korzyść, że na podstawie otrzymanego wypadku rachunku, będziemy mogli dać odpowiedzi na wszelkie inne pytania, postawione z uwzględnieniem tych samych warunków, a różniące się tylko wartością liczb danych; przyczém nie będziemy potrzebowali powtarzać na nowo rozumowań, prowadzących do odkrycia związku, jaki zachodzi między danymi zagadnienia, a wielkością niewiadomą. W tym celu wystarczy w wypadku otrzymanym na miejscu liczb wiadomych pierwszego zagadnienia położyć odpowiednie liczby nowego zagadnienia. Gdyby n. p. kapitał wynosił 4800 zł., a stopa procentowa była $4\frac{1}{2}\%$, procenta zaś miało się liczyć za 56 dni, czyli za $\frac{56}{360}$ roku, wówczas oznaczywszy, jak pierwéj, przez x kwotę procentów, mielibyśmy:

$$x = \frac{4800 . 4\frac{1}{2} . \frac{56}{360}}{100}.$$

Ta korzyść niknie, skoro się działania naznaczone wykona, gdyż wtedy wypadek, dający wartość żądaną, nie przedstawia nam nic więcéj, jak tylko pewien zbiór jedności, który, mogąc z liczb danych wyniknąć nieskończenie rozmaitym sposobem, ukrywa przed nami działania, przez jakie do niego doszliśmy.

2. Ażeby utrzymać wymienioną korzyść, nie uskutecznia się działań na danych zagadnienia, lecz pozostawia się je wskazane. Tym sposobem wypadek rozwiązania jakiegokolwiek zagadnienia, będzie nam przedstawiał odpowiedź na wszystkie zagadnienia tego samego gatunku i będzie **wzorem** *(Formel)*, wyrażającym prawidło, podług jakiego we wszystkich zagadnieniach tegosamego gatunku postąpić należy, ażeby z danych zagadnienia wyprowadzić wartości na niewiadome, do zagadnienia wchodzące.

Nadto, ażeby liczby, składające wypadek, nie przypominały nam, że ten wypadek należy właściwie do jednego tylko zagadnienia, nie zaś do wszystkich podobnych, używa się do wyrażenia danych zagadnienia zamiast liczb znaków ogólnych. Znakami takimi są litery alfabetu.

Jeżeli więc w zagadnieniu, któreśmy powyżéj rozwiązali, wyrazimy kapitał przez K, stopę procentową przez p, czas, w latach wyrażony, przez t, a procenta przez P, otrzymamy wówczas wzór:

$$P = \frac{K.p.t}{100},$$

który przedstawia wartość procentów, jakakolwiek byłaby wartość kapitału K, stopy procentowéj p i czasu t. Chcąc według wzoru tego obliczyć procenta, należy w nim za litery K, p i t podstawić odpowiedne liczby, należące do zagadnienia, i na tych liczbach działania wskazane wykonać.

3. Z powyższego przedstawienia rzeczy widzimy, że możemy literami i to dowolnymi oznaczać liczby; daléj, że w ten sposób oznaczona liczba może mieć dowolną wartość, bo można za nią wszelką możliwą liczbę położyć. Z tego powodu nazywamy wielkości, literami wyrażone, liczbami ogólnymi *(allgemeine Zahlen)*, dla odróżnienia od liczb szczególnych *(besondere Zahlen)*, t. j. takich, które wyrażają ściśle oznaczony zbiór jedności.

Podstawić *(substituiren)* znaczy na miejsce liczb ogólnych wprowadzić we wzór wartości szczególne i wykonać na nich wskazane działania.

Jakkolwiek litera w znaczeniu liczby ogólnéj nie przedstawia ściśle oznaczonéj wartości, może bowiem przyjąć wszelką wartość upodobaną, to przecież każda litera w ciągu rachunku powinna zatrzymać tęsamę wartość, chociaż zupełnie dowolną.

4. Nauka o rachunkach w liczbach ogólnych nazywa się arytmetyką ogólną albo algebrą. Zadanie téj nauki zależy na tém, ażeby z danego związku, jaki zachodzi między wielkościami, do zagadnienia wchodzącymi, wyprowadzić wzór, któryby wskazywał, jakie działania na danych zagadnienia wykonać należy, ażeby otrzymać wartości na niewiadome, i wyrażał témsamém prawidło, według którego rozwiązuje się wszelkie zagadnienia tegosamego gatunku. Samo wykonanie działań w przypadkach szczególnych jest rzeczą arytmetyki szczególnéj.

Ponieważ algebra zajmuje się liczbami ogólnymi, będą przeto wypadki rachunku w liczbach ogólnych (wzory) liczbami ogólnymi, działania będą tu tylko wskazane; trzeba więc ustanowić na oznaczenie tych działań pewne znaki, które przedewszystkiém objaśnić należy.

§. 30.
Suma i różnica liczb ogólnych.

1. Do liczby jednéj dodać drugą znaczy w szeregu naturalnym liczb, od pierwszéj począwszy, postąpić w p r z ó d o tyle jedności, ile ich druga liczba wyraża. Obie te liczby zowiemy s k ł a d n i k a m i *(Summanden, Addenden)*, a wypadek działania s u m ą *(Summe)*.

Dodawanie liczb ogólnych oznacza się zapomocą znaku $+$, który się kładzie między składnikami. A zatém sumę dwu liczb ogólnych a i b wyraża się, pisząc $a+b$, a mówiąc „a więcéj b". Sumę liczb ogólnych m, n i p oznaczylibyśmy przez $m+n+p$.

Suma się nie zmieni, skoro porządek składników zmienimy, albowiem tak suma $a+b$ jak i suma $b+a$ zawiera tyle jedności, ile ich zawierają oba składniki. Prawo to dotyczy także sumy więcéj składników, a zatém:

$$a+b = b+a$$
$$a+b+c = b+a+c = c+a+b \text{ i t. d.}$$

2. Zamiast pisać $a+a$ piszemy $2a$, zamiast $a+a+a$ piszemy $3a$, podobnie i $3b$ znaczy $b+b+b$. Liczba szczególna w wyrażeniach $2a$, $3a$, $3b$ wskazująca, ile razy liczbę ogólną dodać należy, zowie się s p ó ł c z y n n i k i e m *(Coefficient)*, wyrażenie zaś $2a$, $3a$, $7a$, odznaczające się spólną liczbą ogólną, nazywamy p o d o b n y m i.

Ponieważ $2a+3a = a+a + a+a+a = 5a$, można sumę wyrażeń podobnych przedstawić jedném wyrażeniem. Czyni się to, dodając spółczynniki, a liczbę ogólną pisząc obok téj sumy. Czynność tę nazywamy r e d u k c y ą wyrażeń podobnych.

3. Odejmować od jednéj liczby drugą, znaczy, od pierwszéj, począwszy w szeregu naturalnym liczb o tyle jedności w s t e c z się posunąć, ile ich liczba druga wyraża. Otrzymana w ten sposób liczba zowie się r ó ż n i c ą *(Differenz)*, owa pierwsza

liczba odjemną *(Minuend)*, druga zaś odjemnikiem *(Subtrahend)*.

Odejmowanie dwu liczb oznacza się zapomocą znaku —, który się kładzie między odjemną a odjemnikiem. A zatém różnicę dwu liczb a i b, z których pierwsza jest odjemną, a druga odjemnikiem, wyraża się, pisząc $a - b$, a mówiąc „a mniéj b".

Ponieważ

$$\underbrace{a+a+a+a+a}_{5a} - \underbrace{a+a+a}_{3a} = 2a,$$

możemy i różnicę wyrażeń podobnych zredukować, t. j. przedstawić jedném wyrażeniem. Czyni się to, odejmując spółczynniki, a liczbę ogólną pisząc obok téj różnicy.

Spółczynnika 1 nie pisze się, a znaczy tyle, co $1a$, jest więc $7m - 6m = m$.

3. Wprowadzając do rachunku sumę lub różnicę liczb jako nową liczbę, ujmuje się ją w nawiasy *(Klammer)*. Chcąc więc wyrazić, że do liczby a ma być dodana suma $b + c$ lub różnica $b - c$, piszemy:

$$a + (b + c) \quad \text{i} \quad a + (b - c).$$

Podobnie chcąc wyrazić, że od liczby a ma być odjęta suma $b + c$ lub różnica $b - c$, piszemy:

$$a - (b + c) \quad \text{i} \quad a - (b - c).$$

Niekiedy używa się kilku par nawiasów, różniących się kształtem, dla wyrażenia kilku kolejnych dodawań i odejmowań. Tak n. p.

$$a + [b - (c + d)]$$

znaczy, że naprzód od b należy odjąć sumę $c + d$, a potém tę różnicę dodać do a. Podobnie

$$a - \{b + [c - (d + e)]\}$$

znaczy, że naprzód trzeba od c odjąć sumę $d + e$, potém tę różnicę dodać do b, a wreszcie znalezioną sumę odjąć od a.

4. Z określenia dodawania i odejmowania łatwo wywnioskować znaczenie następujących wzorów:

$$a + (b + c) = a + b + c, \quad a - (a - b) = b,$$
$$(a - b) + b = a, \quad (a + b) - b = a.$$

§. 31.

Z a d a n i a.

1. Jaka liczba następuje w szeregu naturalnym po liczbie m? jaka będzie druga, trzecia, piętnasta po m?

2. Jeżeli p oznacza liczbę ogólną, która liczba będzie o 10, 15, 19, 20 większa od p?

3. Jaką wartość mieć będzie suma $m+n+p+q$, jeżeli $m=17$, n o 5 większe od m, $p=m+n$, a $q=n+p$?

4. Obliczyć sumę w poprzedniém zadaniu podaną, jeżeli $m=24$, $n=30$, $p=m+n$, $q=p-m$.

5. Obliczyć wzory podane w §. 30.4., kładąc $a=12$, $b=9$, $c=5$.

6. Jeżeli $a=9{\cdot}4$, $b=4{\cdot}3$, $c=2{\cdot}7$, znaleść wartość wzorów: $a+(b+c)$, $a-(b+c)$, $a+(b-c)$, $a-(b-c)$.

7. Jaka jest wartość wzorów:

$$a+[b+(c+d)],\quad a+[b-(c+d)],$$
$$a-[b+(c-d)],\quad a-[b-(c-d)],$$

jeżeli $a=11$, $b=8$, $c=4$, $d=3$?

8. Wyznaczyć wartość wzoru:

$$a+\{b-[c+(d-e)-(f+g)]-h\}$$

dla $a=3\frac{1}{2}$, $b=10\frac{1}{3}$, $c=2$, $d=7\frac{1}{6}$, $e=4\frac{2}{3}$, $f=2\frac{1}{4}$, $g=\frac{5}{6}$, $h=3$.

9. $2n$ oznacza liczbę parzystą; jak oznaczymy cztery następne liczby parzyste?

10. Zredukować następujące wyrazy podobne:

a) $x+x+x+x=$	*b)* $7a+13a=$
c) $7m+5m+3m=$	*d)* $19c-9c=$
e) $\frac{1}{2}q+\frac{2}{3}q+\frac{3}{4}q+\frac{5}{6}q=$	*f)* $17\frac{3}{4}a-9\frac{5}{6}a=$
g) $1\frac{1}{2}y+4\frac{1}{3}y+5\frac{1}{2}y=$	*h)* $75m-45{\cdot}97m=$

i) $72{\cdot}9a+6{\cdot}27a+0{\cdot}725a+20{\cdot}105a+14a=$

k) $72\frac{1}{2}x-27\frac{3}{4}x=$	*l)* $0{\cdot}7298b-0{\cdot}09793b$

11. W naczyniu, mającém a litrów, znajduje się woda. Ażeby naczynie to całkowicie napełnić, trzeba b litr. wody dolać; ile wody znajdowało się pierwotnie w naczyniu?

12. $(9m-5p)+5p$.

13. $7x+2x-7x$.

14. $25a-a$.

15. $9b+11b+10b$.

16. $16y+(18y-14y)$.

17. $15a - (8a + 2a)$.
18. $3\frac{1}{2}a + 2\frac{3}{4}b + 4\frac{1}{2}a + 5\frac{1}{4}b - 7\frac{1}{5}a - 4\frac{3}{4}b$.
19. $11a - (7a - 3a)$.
20. $24\frac{1}{4}b - (13\frac{1}{2}b - 7\frac{3}{4}b)$.

§. 32.

Liczby ujemne, liczby względne.

1. Jeżeli w różnicy $a - b$ odjemna a ma wartość liczebną większą, niż odjemnik b, co się wyraża, pisząc $a > b$, a mówiąc „a większe od b“, n. p. $a = 8$, $b = 6$; wówczas wartość różnicy $a - b$ równą będzie liczbie 2. Jeżeli odjemna i odjemnik mają wartości równe, n. p. $a = b = 8$, wówczas różnica nie będzie mieć oczywiście żadnéj wartości, czyli jéj wartość będzie 0, t. j. $8 - 8 = 0$ i ogólnie $a - a = 0$. Jeżeli wreszcie odjemna a ma wartość liczebną mniejszą od odjemnika b, co się wyraża w piśmie $a < b$, a w mowie „a mniejsze od b“, n. p. $a = 6$, $b = 8$; różnicy wówczas wyrazić nie można.

Chcąc bowiem odjąć 8 od 6, potrzebaby w szeregu naturalnym, liczb począwszy od liczby 6, postąpić wstecz o 8 jedności. Tymczasem możemy w przypadku powyższym postąpić tylko o 6 jedności i dochodzimy już do 0. Odjęliśmy więc od odjemnéj 6 tyleż jedności odjemnika, a że on miał jedności ośm, pozostaje do odjęcia jeszcze dwie, co oznaczamy przez -2. Podobnie n. p. mając od 7 jedności odjąć 13, można w rzeczywistości tylko 7 jedności odjąć, pozostaje do odjęcia jeszcze jedności 6 co się wskazuje -6. Wyniki odejmowania w tym wypadku, gdy odjemna jest mniejszą od odjemnika, a więc w powyższych przykładach -2 i -6, nazywamy liczbami ujemnymi.

Liczba -2 wskazuje, że od zera należy odjąć dwie jedności, -7 wskazuje, że od zera należy odjąć siedm jedności; są więc te liczby właściwie różnicami $0 - 2$, $0 - 7$, a powstają one przez odliczanie jedności od zera w tensam sposób, jak powstały liczby szeregu naturalnego przez doliczanie jedności do zera.

2. Dla odróżnienia liczb, powstających przez doliczanie jedności do zera, od liczb, powstających przez odliczanie tychże od zera, dla wyrażenia więc tego przeciwieństwa, jakie zachodzi

n. p. między 0+5 a 0—5, potrzeba odpowiednich znaków. Liczbę, powstającą przez odliczanie jedności od zera, nazwaliśmy ujemną *(negative Zahl)* i oznaczyli znakiem —, liczbę, powstającą przez doliczanie jedności do zera, nazwiemy przez analogią dodatną *(positive Zahl)*, a oznaczymy znakiem +.

3. Tym sposobem otrzymamy rozszerzony szereg liczb w obu kierunkach nieskończony:

$$\ldots\ldots -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ +1,\ +2,\ +3,\ +4,\ +5 \ldots\ldots$$

W szeregu tym każda liczba następna jest o jedność większa od poprzedniéj, jest więc 0 większe od —1, od —2, w ogóle od każdéj liczby ujemnéj.

Liczby, opatrzone znakami + i —, zowiemy liczbami względnymi *(relative Zahlen)*, dla odróżnienia od liczb bezwzględnych *(absolute Zahlen)*, t. j. takich, które nie mają przed sobą żadnego z tych znaków i wyrażają tylko zbiór jedności bez względu na to, czy powstały przez doliczanie do 0, czy téż przez odliczanie od 0. Szereg powyższy nazywa się szeregiem liczb względnych.

4. Dwie liczby, w powyższym szeregu równo oddalone od zera, są bezwzględnie biorąc równe, ze względu jednak na zero są sobie wprost przeciwne *(entgegengesetzt)*, bo jedna z nich jest o tyle jedności od zera większą, o ile druga jest mniejszą od zera. Takimi są n. p. +6 i —6, $+a$ i $-a$. Każda więc liczba względna składa się ze znaku *(Vorzeichen)* i z wartości bezwzględnéj *(absoluter Werth)*. Wartość bezwzględna wyraża, w jakiém oddaleniu od 0 w szeregu liczb znajduje się liczba, ale dopiero znak położony przed liczbą ściśle określa to miejsce. Znak + przed liczbą można opuścić, skoro opuszczenie tego znaku nie stanie się powodem nieporozumień, dzieje się to zwykle na początku wzoru albo po znaku równości.

5. Przeciwieństwo, jakie zachodzi między liczbami dodatnymi i ujemnymi, napotyka się i między wielkościami, wchodzącymi do rachunków praktycznych. Tak n. p. przeciwnymi są: majątek i dług, dochód i rozchód, zysk i strata, czas przed i czas po pewnéj epoce (n. p. nar. Chr.), kierunek na prawo i kierunek na lewo i t. p.

Przeciwieństwo zaś zależy na tém, że dwie wielkości przeciwne, gdy się je razem łączy, znoszą się w całości lub w części. Jeżeli bowiem zrobi ktoś n. p. w kierunku na prawo 20 kroków, a następnie 20 kroków w kierunku na lewo, to wprawdzie uszedł 40 kroków, ale ani na krok nie oddalił się od miejsca, z którego wyszedł, tak, że ze względu na cel osiągnięty zupełnie obojętną jest rzeczą, czy zmienił swe położenie, czy też wcale z miejsca się nie ruszał. Podobnie, jeżeli ktoś zyskał na jednym interesie 45 zł., a stracił na drugim 20 zł., to właściwy jego zysk wynosi 25 zł., bo wyrównawszy zyskiem, jaki mu przyniósł interes pierwszy, stratę, poniesioną w interesie drugim, tyle tylko mieć będzie w zysku.

Jeżeli więc w jakiém zagadnieniu z życia praktycznego na niewiadomą wypadnie wartość ujemna, wówczas wielkości niewiadoméj potrzeba nadać znaczenie przeciwne temu, w jakiém ona była wzięta w wysłowieniu zagadnienia. A zatém wartość ujemną n. p. zysku uważać należy za stratę i na odwrót wartość ujemną straty uważać za zysk.

§. 33.
Suma i różnica liczb względnych.

1. Ponieważ przez wprowadzenie liczb ujemnych szereg liczb został rozszerzony, oczywistą więc jest rzeczą, że i określenie dodawania należy odpowiednio rozszerzyć. To rozszerzone określenie musi zamykać w sobie określenie pierwotne, odnoszące się do liczb bezwzględnych, jako przypadek szczególny. Powiemy zatém: do liczby dodać inną liczbę znaczy postąpić w szeregu liczb, począwszy od pierwszego składnika, w takim kierunku, jaki wskazuje znak drugiego składnika i o tyle jedności, ile ich wartość bezwzględna drugiego składnika zawiera.

Według tego określenia, biorąc pod uwagę naprzód liczby szczególne, mamy:

$$(+7) + (+3) = +10,$$
$$(-7) + (-3) = -10,$$
$$(+7) + (-3) = +4,$$
$$(-7) + (+3) = -4.$$

Stąd widzimy, że liczby względne, mające tesame znaki, dodaje się, dodając ich wartości bezwzględne i kładąc przed tą sumą znak spólny. Liczby zaś względne, mające znaki nie jednakie, dodaje się, odejmując ich wartości bezwzględne, mniejszą od większéj, i kładąc przed tą różnicą znak liczby, któréj wartość bezwzględna jest większa.

Rozumiejąc ogólnie przez a i b wartości bezwzględne dwu liczb względnych, należy sumę tychże liczb, w każdym z czterech przypadków wyrażać w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
(+a) + (+b) &= a+b, \\
(-a) + (-b) &= -a-b, \\
(+a) + (-b) &= a-b, \\
(-a) + (+b) &= -a+b,
\end{aligned}$$

t. j. sumę dwu liczb względnych naznacza się, pisząc te liczby obok siebie z tymisamymi znakami, jakie je poprzedzają.

2. Prawidło na odejmowanie wypływa bezpośrednio z określenia odejmowania jako działania przeciwnego dodawaniu, według którego różnica dwu liczb powiększona odjemnikiem równa się odjemnéj. Mamy zatém:

$$\begin{aligned}
(+7) - (+3) &= +4, \text{ gdyż } \quad 4+(+3) = 4+3 = 7, \\
(-7) - (-3) &= -4, \text{ gdyż } (-4)+(-3) = -4-3 = -7, \\
(+7) - (-3) &= +10, \text{ gdyż } \quad 10+(-3) = 10-3 = 7, \\
(-7) - (+3) &= -10, \text{ gdyż } (-10)+(+3) = -10+3 = -7,
\end{aligned}$$

t. j. liczby względne, mające znaki tesame, odejmuje się, odejmując ich wartości bezwzględne i kładąc przed tą różnicą znak spólny; liczby zaś względne, mające znaki nie jednakie, odejmuje się, dodając ich wartości bezwzględne i kładąc przed tą sumą znak liczby, mającéj wartość bezwzględną większą.

Krócéj możemy to prawidło tak wysłowić: Liczby względne odejmuje się, dodając do odjemnéj odjemnik ze znakiem przeciwnym wzięty. Jakoż

$$\begin{aligned}
(+7) - (+3) &= (+7) + (-3) = 7-3 = 4, \\
(-7) - (-3) &= (-7) + (+3) = -7+3 = -4, \\
(+7) - (-3) &= (+7) + (+3) = 7+3 = 10, \\
(-7) - (+3) &= (-7) + (-3) = -7-3 = -10.
\end{aligned}$$

Ogólnie, jeżeli a i b oznaczają wartości bezwzględne dwu liczb względnych, będzie:

$$(+a) - (+b) = (+a) + (-b) = \quad a - b,$$
$$(-a) - (-b) = (-a) + (+b) = -a + b,$$
$$(+a) - (-b) = (+a) + (+b) = \quad a + b,$$
$$(-a) - (+b) = (-a) + (-b) = -a - b.$$

t. j. różnicę dwu liczb względnych naznacza się, dopisując do odjemnéj odjemnik, wzięty ze znakiem przeciwnym temu, jaki go poprzedza.

3. Z powyższych rozważań wypływa, że i różnicę dwu liczb uważać można za sumę. Odjemnik jest wtedy składnikiem ujemnym, n. p.:

$$7 - 3 = 7 + (-3).$$

Ogólniéj mieć będziemy:

$$a - b - c + d = (+a) + (-b) + (-c) + (+d).$$

Wszelki przeto skład liczb, połączonych znakami $+$ i $-$, możemy uważać za sumę liczb względnych. Taki skład zowiemy dlatego sumą algebraiczną *(algebraische Summe)*.

§. 34.

Zadania.

1. $(+6) + (+6)$.
2. $(+6) + (-6)$.
3. $(+9) + (-3)$.
4. $(-9) + (-3)$.
5. $(+17) - (+12)$.
6. $(-23) - (+17)$.
7. $(+365) - (-207)$.
8. $(-287) - (-126)$.
9. $(-3{\cdot}502) + (+5{\cdot}038)$.
10. $(+56{\cdot}74) - (-32{\cdot}06)$.
11. $(+21\frac{3}{4}) - (-12\frac{5}{8})$.
12. $(-30\frac{1}{3}) - (-41\frac{2}{5})$.

13. Ile oszczędza ktoś z dochodu rocznego 4350 zł., jeżeli wydaje 3824 zł.?

14. Ktoś, idąc z miasta A. do B., uszedł już 13·4 *km*, poczém spostrzegłszy, że w drodze zgubił torbę podróżną, wrócił się celem jéj odnalezienia. Jeżeli odszukał torbę w odległości 3·7 *km* od miejsca, do jakiego był już doszedł, ile kilometrów zrobił i na ile kilometrów oddalił się od miasta A.?

15. Pierwsza wojna punicka rozpoczęła się w r. 264 przed nar. Chr., a trwała 23 lat; kiedy się skończyła?

16. W państwie-zachodnio rzymskiém rządzili cesarze od r. 30. przed nar. Chr. do r. 476. po nar. Chr.; jak długo istniało cesarstwo rzymskie zachodnie?

17. Kupiec zyskał na jednym handlu 353·6 zł., stracił zaś na drugim 137·62 zł., a na trzecim 267·43 zł. Ileż na tych trzech handlach zyskał lub stracił?

18. Balon wzniósł się do wysokości 350 *m*, potém podniósł się jeszcze o 170 *m* wyżéj. Następnie opada o 170 *m*., wznosi się o 45 *m* i spada znowu o 115 *m*. W jakiéj się znajduje wysokości?

19. Chłopiec stoi na środkowym szczeblu drabiny, która ma 37 szczebli. Idzie w górę o 7 szczebli, schodzi na dół o 17 szczebli. Potém idzie w górę o 15 szczebli i schodzi znowu o 12. Na którym szczeblu stoi?

20. $20a + (-30a)$.
21. $-9b + 19b$.
22. $8m - (-4m)$.
23. $15y - (-7y)$.
24. $-7x - (-14x)$.
25. $-17\frac{1}{2}b - (-18\frac{3}{4}b)$.
26. $30 - (-9) - (-1)$.
27. $10a - (-3a) - (-4a)$.
28. $-20m - (-12m) - (-8m)$.
29. $-19a - 6a - (-4a)$.

W następujących zadaniach (30—34) dodać należy składniki podobne sum algebraicznych, podpisanych jedna pod drugą.

30.
$$\begin{array}{l} 4a + 5b + 6c \\ \underline{2a - 10b - 3c.} \end{array}$$

31.
$$\begin{array}{l} 6a - 17b + 15c - 8d \\ \underline{-7a + 15b - 12c + 12d.} \end{array}$$

32.
$$\begin{array}{l} 14x + 17y + 32z - 18u + 25v - 18 \\ \underline{-7x - 10y - 25z + 11u - 18v + 11.} \end{array}$$

33.
$$\begin{array}{l} 14a - 11b + 12c \\ -3a - 7b + 14c \\ \underline{-11a + 20b - 34c.} \end{array}$$

34.
$$\begin{array}{l} 27x + 4y - 0{\cdot}5z \\ -25{\cdot}5x + y - 7{\cdot}25z \\ \underline{0{\cdot}5x - 5y + 7{\cdot}75z.} \end{array}$$

W następujących zadaniach (35—39) odjąć należy składniki podobne sum algebraicznych, podpisanych jedna pod drugą.

35.
$$\begin{array}{l} 16a - 25y \\ 13a + 2y \\ \underline{(-)\quad(-)} \\ 3a - 27y. \end{array}$$

36.
$$\begin{array}{l} 5m - 6n + 7p \\ \underline{3m - n + 15p.} \end{array}$$

37. $\begin{array}{r} 7\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{3}y \\ -2\frac{3}{4}x + 8\frac{5}{6}y \\ \hline \end{array}$ 38. $\begin{array}{r} 16{\cdot}2a - 2{\cdot}5b - 11{\cdot}4c \\ -17{\cdot}3a - 3\,b - 3{\cdot}9c. \\ \hline \end{array}$

39. $\begin{array}{r} -25m + 41n + 56p - 16q \\ -40m + 16n + 41p - q. \\ \hline \end{array}$

40. W zadaniach: 34 i 37 wyznaczyć wartości składników i sumy (różnicy), jeżeli $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

§. 35.

Iloczyn liczb ogólnych i względnych.

1. Mnożyć jednę liczbę przez drugą znaczy z pierwszéj utworzyć nową liczbę w taki sposób, w jaki druga z jedności powstała.

Liczbę pierwszą zowiemy mnożną *(Multiplicand)*, drugą mnożnikiem *(Multiplicator)*, wypadek zaś rachunku iloczynem *(das Product)*.

Iloczyn dwu liczb ogólnych a i b jest także ogólną liczbą, którą się oznacza, kładąc między czynnikami znak $\times$ lub kropkę ., albo pisząc te liczby obok siebie bez wszelkiego znaku. Jest więc $a \times b$ albo $a\,.\,b$ albo ab iloczynem z mnożnéj a i mnożnika b, a czyta się „a mnożone przez b“ albo „a razy b“.

2. Znaku mnożenia opuścić nie można, jeżeli mnożnik jest liczbą szczególną. Jest więc

$$\begin{array}{ll} a\,.\,2 = a + a, & \text{bo } 2 = 1 + 1 \\ a\,.\,3 = a + a + a, & \text{bo } 3 = 1 + 1 + 1 \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ ab = a + a + a \;\dots\dots\dots\dots + a, & \text{jeżeli} \\ b = 1 + 1 + 1 \;\dots\dots\;\dots\dots + 1. & \end{array}$$

Ponieważ iloczyn ab tyle zawierać musi jedności, co i iloczyn ba, możemy przeto mnożną z mnożnikiem zamienić. Z tego powodu nazywamy mnożną i mnożnik czynnikami *(Factoren)* iloczynu. Przedewszystkiém zmieniamy porządek czynników w ten sposób, że liczbę szczególną, jeżeli ona jest czynnikiem, piszemy na czele iloczynu. Zamiast $a\,.\,2$ piszemy $2a$, wymawiamy dwa a, podobnie $3a$, $4b$, $\frac{3}{4}ab$. Ta liczba szczególna jest to znany nam już spółczynnik, który uważać można zawsze jako jeden z czynników iloczynu. W trzech ostatnich wyrażeniach jest 3 współczynnikiem liczby ogólnéj a, 4 liczby b, a $\frac{3}{4}$ spółczynnikiem liczby ogólnéj ab. Taksamo oznaczamy iloczyn więcéj, aniżeli dwu czynników, n. p. iloczyn liczb a, b i c oznacza się przez abc, $4mnp$ jest iloczynem z 4, m, n i p.

3. Iloczyn, powstający z czynników równych, nazywamy **potęgą** *(Potenz)*.

Iloczyn taki wyznaczony jest dokładnie przez jeden czynnik i liczbę tychże czynników, dlatego iloczyny takie przedstawiamy krócéj, pisząc czynnik, powtarzający się, raz i znacząc, ile razy on się w iloczynie ma powtórzyć. Tę liczbę, która wskazuje, ile razy przerzeczony czynnik się powtarza, zowiemy **wykładnikiem** *(Exponent)*.

Zamiast $a \,.\, a$ piszemy a^2, podobnie

$$a \,.\, a \,.\, a = a^3$$
$$a \,.\, a \,.\, a \,.\, a = a^4 \text{ i t. d.}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

W ogóle: $a \,.\, a \,.\, a \,.\,.\,.\,.\,.\,$ (m czynników) $= a^m$.

a^2 czytamy „a do drugiéj“ (potęgi), a^3 czytamy „a do trzeciéj“, i t. d.

Potęgę drugą nazywamy ze względu na geometryą **kwadratem** *(Quadrat)*, trzecią **sześcianem** *(Cubus)*.

Pierwszą potęgą liczby jest liczba sama $a^1 = a$, z tego powodu wykładnika 1 nie pisze się.

Pojęć, „spółczynnik“ i „wykładnik“ nie należy ze sobą mieszać. Tak n. p. znaczy:

$$4b = b \times 4 = b + b + b + b,$$

gdy tymczasem

$$b^4 = b \times b \times b \times b.$$

Jeżeli w powyższych wzorach podstawimy $b = 5$, otrzymamy:

$$b \times 4 = 5 \times 4 = 5 + 5 + 5 + 5 = 20$$
$$b^4 = 5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625.$$

Możemy więc wypowiedzieć:

a) **Spółczynnik wskazuje, ile razy należy wziąć liczbę, po spółczynniku stojącą, jako składnik sumy.**

b) **Wykładnik wskazuje, ile razy liczbę nim opatrzoną wziąć trzeba jako czynnik iloczynu.**

4. Prawidło spółczynników. Mając pomnożyć $4a.3b$, można na podstawie §. 35.2. uważać spółczynniki za czynniki liczb ogólnych. Wtedy:

$$4a.3b = 4.3.a.b = 12ab.$$

Stąd wypływa: Liczby ogólne mnoży się, kładąc iloczyn spółczynników przed iloczynem liczb ogólnych.

5. Prawidło wykładników. Iloczyn potęg, mających tęsamę podstawę, przedstawić można w prosty bardzo sposób:

$$a^2.a = aa.a = aaa = a^3 = a^{2+1}$$
$$a^3.a^2 = aaa.aa = aaaaa = a^5 = a^{3+2}$$
$$x.x.x^4 = x.x.xxxx = x^{1+1+4} = x^6$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

W ogóle: $a^m.a^n = a^{m+n}$.

Opierając się na powyższych przykładach możemy wypowiedzieć prawidło:

Potęgi téjsaméj liczby mnoży się, pisząc tę liczbę raz i dając jéj za wykładnik sumę wykładników, jakimi opatrzone są poszczególne czynniki.

6. Mając iloczyn ab do potęgi drugiéj podnieść, widzimy, że

$$(ab)^2 = ab.ab = a.b.a.b = a.a.b.b = a^2b^2,$$

podobnie:

$$(ab)^3 = ab.ab.ab = aaabbb = a^3b^3$$
$$(3abc)^4 = 3abc.3abc.3abc.3abc = 3.3.3.3\ aaaa\ bbbb\ cccc =$$
$$= 81a^4b^4c^4.$$

Stąd prawidło: Iloczyn podnosi się do potęgi, podnosząc każdy czynnik do potęgi wskazanéj wykładnikiem iloczynu.

7. Ponieważ:

$$(a^3)^2 = a^3.a^3 = a^6 \text{ czyli } a^{3\cdot 2}$$
$$(a^4)^3 = a^4.a^4.a^4 = a^{12} \text{ czyli } a^{4\cdot 3}$$
$$(3a^2b^3)^2 = 3a^2b^3.3a^2b^3 = 9a^4b^6,$$

możemy wypowiedzieć prawidło: potęgę liczby podnosi się do potęgi, dając téj liczbie za wykładnik iloczyn wykładników.

8. Lubo przez wprowadzenie liczb ujemnych szereg liczb został rozszerzony, mimo to określenie mnożenia, dane na czele tego paragrafu w brzmieniu ogólném, stósuje się do liczb względnych.

Stósując to określenie do mnożenia liczb względnych, należy rozróżnić dwa przypadki, stósownie do tego, czy mnożnik jest liczbą dodatną, czy téż ujemną.

Jeżeli bowiem mnożnik jest liczbą dodatną, to mnożną potrzeba pewną ilość razy do 0 dodać. Jeżeli zaś mnożnik jest liczbą ujemną, wówczas mnożną trzeba pewną ilość razy od 0 odjąć. Mamy zatém:

$$a.(+3) = 0 + a + a + a = 3a,$$

gdy tymczasem:

$$a.(-3) = 0 - a - a - a = -3a.$$

9. Prawidło znaków. Stósownie do tego, czy także mnożna jest dodatną czy ujemną, mogą zachodzić cztery przypadki, a mianowicie:

$$\begin{aligned}(+4).(+3) &= 0+4+4+4 = +12\\(-4).(+3) &= 0-4-4-4 = -12\\(+4).(-3) &= 0-4-4-4 = -12\\(-4).(-3) &= 0+4+4+4 = +12.\end{aligned}$$

Stąd widzimy, że wartość bezwzględna iloczynu dwu liczb względnych jest równa iloczynowi wartości bezwzględnych obu czynników, a znak iloczynu jest dodatny, gdy oba czynniki mają znaki tesame, ujemnym zaś, gdy znaki są przeciwne.

Ogólnie, rozumiejąc przez a i b wartości bezwzględne dwu liczb, mieć będziemy:

$$(+a).(+b) = +ab \quad \text{i} \quad (-a).(-b) = +ab,$$

gdy tymczasem

$$(+a).(-b) = -ab \quad \text{i} \quad (-a).(+b) = -ab.$$

Wiedząc to, znajdziemy następnie:

$$\begin{aligned}(+a).(-b).(-c) &= (-ab).(-c) = +abc,\\(-a).(-b).(-c) &= (+ab).(-c) = -abc,\end{aligned}$$

t. j. iloczyn kilku czynników będzie dodatny lub ujemny, stósownie do tego, czy ilość czynników ujemnych jest parzystą, czy też nieparzystą; jeżeli ilość ujemnych czynników jest parzystą, iloczyn jest dodatny, w przeciwnym razie jest ujemny. N. p.

1. $3abm.(-7xy) = -21abmxy$.
2. $(-5am).4bc.(-5x) = 100abcmx$.
3. $(-6x^2y^3).5x^3y^2 = -30x^5y^5$.
4. $7ay^2.3a^4y^2c.ay = 21a^6cy^5$.

§. 36.

Zadania.

1. $(+5).(+4)$.
2. $(-5).(+4)$.
3. $(+5).(-4)$.
4. $(-5).(-4)$.
5. $(+7).(+3)$.
6. $(-12).(+5)$.
7. $(+3{\cdot}5).(-4{\cdot}2)$.
8. $(-5{\cdot}6).(-1{\cdot}4)$.
9. $(-9).(+3).(-2)$.
10. $(-\frac{2}{3}).(-\frac{3}{5}).(-\frac{1}{2})$.
11. $12+2.(-7)$.
12. $12-(-2).7$.
13. $12+(-2).7$.
14. $12-(-2).(-7)$.
15. $3.(-7).(-5)+(-3).(-7).25$.
16. $(-8).3.125+2.(-5).(-10)$.
17. $(-4).7-3.(-6)+2.(+5)$.
18. $(-25).(-8)-(-3).(-7)+(-8).(-4)$.
19. $abm.cdx$; $3a.5$; $(-5).(-7b)$.
20. $15a.3b$; $8a.(-7b)$; $2a.3a^2b$.
21. $5a^2b.7ab^2$; $mx^3.3a^2m^4$; $3a^3m.2am^3$.
22. $(-4ac).(-7a^2bc)$; $(-3a^nb).(-5ab^my)$.
23. $\frac{3}{4}a^3x^2.\frac{5}{6}a^2x^2y$; $5m^2n.(-\frac{3}{5}mn^2)$.
24. $a^3x.2b^2y^2.3x^2y$; $5m^4.(-\frac{2}{5}m^2p^2).\frac{1}{2}p^4$.
25. $(-4ab^2).(-7a^2x).\frac{1}{2}abx$.
26. $3x^2y^2z^2.5x^3z.(-2y^2z^3).(-\frac{1}{2}x^2y^3z)$.
27. $(-a).(+m^3).(-m^2).(+3a^2).(-my)$.
28. $(-3d).(-7a^2).(-2am).(-3y)$.
29. Jaka będzie wartość liczebna iloczynu $\frac{3}{5}x^3y^2$, jeżeli $x = -5$, $y = 2$.
30. Znaleść wartość liczebną iloczynu $(3a-5b)\ (3b-5a)$, jeżeli $a = 4{\cdot}1$, $b = 2{\cdot}3$.

*

§. 37.

Iloraz liczb ogólnych i względnych.

1. Liczbę podzielić przez inną znaczy, wynaleść liczbę, przez którą pomnożona druga, dałaby pierwszą na iloczyn. Owa pierwsza liczba zowie się dzielną *(Dividend)*, drugą nazywamy dzielnikiem *(Divisor)*, a wypadek z podzielenia nazywa się ilorazem *(Quotient)*.

Iloraz z dzielnéj a i dzielnika b przedstawia się przez $a : b$ albo $\frac{a}{b}$, czyta zaś „a dzielone przez b“, krócéj „a przez b“.

A zatém dzielna równą jest iloczynowi z dzielnika i ilorazu. Na tém się opierając możemy powyższe określenie dzielenia inaczéj wypowiedzieć, mianowicie: dzielić znaczy, uważać dzielną za iloczyn dwu czynników a dzielnik za jeden z tych dwu czynników i z tych danych wynaleść czynnik drugi.

Otrzymamy więc, ponieważ $a \,.\, b = ab$, z podzielenia $ab : b = a$ i $ab : a = b$.

2. Ponieważ $a \,.\, b \,.\, c = ab.c = ac.b = bc.a = abc$, to $abc : ab = c$; $abc : ac = b$ i $abc : bc = a$.

Podobnie $abc : a = bc$; $abc : b = ac$ i $abc : c = ab$.

Z czego wypływa: iloczyn kilku czynników, podzielony przez jeden z tych czynników, daje iloczyn pozostałych czynników na iloraz.

3. Prawidło spółczynników. Ponieważ $35xy : 7y = 5.7.x.y : 7.y$ w ilorazie mieć będziemy $5.x = 5x$, bo spólne czynniki, w tym przypadku 7 i y, na podstawie powyższego prawidła opuścić należy.

Stąd prawidło: Iloraz liczb ogólnych otrzymamy, opuszczając w dzielnéj te liczby ogólne, które i w dzielniku się znajdują, nadto, jeżeli są i spółczynniki, to te należy podzielić.

Będzie więc także:

$$18abm : 6m = 3a$$

$$12abc : 3cm = 4\frac{ab}{m} = \frac{4ab}{m}.$$

4. Prawidło wykładników. Jeżeli dzielną i dzielnikiem są potęgi téjsaméj liczby, to i w tym przypadku zastósować możemy powyższe prawidło. Jest bowiem:

$$a^2 : a = aa : a = a$$
$$a^3 : a^2 = aaa : aa = a$$
$$a^5 : a^2 = aaaaa : aa = aaa = a^3 = a^{5-2},$$
w ogóle $a^m : a^n = a^{m-n}$.

Stąd wypływa prawidło: Iloraz dwu potęg téjsaméj liczby jest nową téj liczby potęgą, któréj wykładnik równa się wykładnikowi dzielnéj mniéj wykładnikiem dzielnika.

W szczególności mamy:

$$a^3 : a^3 = \frac{a^3}{a^3} = 1,$$

a że według powyższego prawidła wykładników jest także $a^3 : a^3 = a^{3-3} = a^0$, więc potęga stopnia 0 jakiéjkolwiek liczby jest równa jedności; stąd

$$a^0 = x^0 = m^0 = 1.$$

Następnie mamy:

$$a^3 : a^5 = \frac{a^3}{a^5} = \frac{aaa}{aaaaa} = \frac{1}{aa} = \frac{1}{a^2}$$

Według prawidła wykładników iloraz ten przedstawi nam się także w innym kształcie, mianowicie:

$$a^3 : a^5 = a^{3-5} = a^{-2},$$

jest więc $$a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

Należy zatém liczbę z wykładnikiem ujemnym uważać jako odwrotność téjże liczby z wykładnikiem dodatnym, według tego

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} \text{ i } \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}.$$

5. Prawidło znaków. Prawidło na dzielenie liczb względnych wypływa z określenia dzielenia jako działania przeciwnego mnożeniu, według którego iloraz, pomnożony przez dzielnik, równa się dzielnéj. Stósując to prawidło, znajdziemy:

$$(+15) : (+3) = +5, \text{ gdyż } (+5).(+3) = +15$$
$$(+15) : (-3) = -5, \quad „ \quad (-5).(-3) = +15$$
$$(-15) : (+3) = -5, \quad „ \quad (-5).(+3) = -15$$
$$(-15) : (-3) = +5, \quad „ \quad (+5).(-3) = -15.$$

A zatém: wartość bezwzględna ilorazu dwu liczb względnych jest równą ilorazowi wartości bezwzględnych dzielnéj i dzielnika, a znak ilorazu jest dodatny lub ujemny, stósownie do tego, czy dzielna i dzielnik miały znaki jednakie, czy przeciwne. Jeżeli bowiem dzielna i dzielnik mają znaki jednakie, wtedy iloraz jest dodatny, w przeciwnym zaś razie jest ten iloraz ujemny. N. p.

1. $35ax^3y : 5ax = 7x^2y$
2. $-15ab^5cd : -5ab^2d = 3b^3c$
3. $63mn^3p^2 : -9mn^2p = -7np$
4. $-48x^3y^2z^4 : 6x^2yz^3 = -8xyz$
5. $-2ab^5xy : 7a^4bx^2 = -\frac{2ab^5xy}{7a^4bx^2} = \frac{2b^4y}{7a^3x}.$

§. 38.

Zadania.

1. $(+42) : (+7)$.
2. $(-42) : (-7)$.
3. $(+42) : (-7)$.
4. $(-47) : (+7)$.
5. $(-3{\cdot}6) : (+1{\cdot}2)$.
6. $(+7\frac{1}{3}) : (-5\frac{1}{2})$.
7. $4a : a$.
8. $7x : 7$.
9. $27a : 9a$.
10. $42ab : 7b$.
11. $3a^2b : ab$.
12. $14a^3b^2 : 7a^2b$.
13. $21a^4 : (-3a^2)$.
14. $(-45a^3x^4) : 9a^2x$.
15. $(-54m^2n^2p^2) : (-18mp)$.
16. $12a^2b^3 : 4a^2b^2$.
17. $63x^2y : 9xy^2$.
18. $(-18a^2xy) : 6x^2y^2$.
19. $18\frac{1}{3}ax^2y^3 : (-2\frac{1}{5}a^2x^2y)$.
20. $7{\cdot}29x^3y^4z^5 : 0{\cdot}27x^2y^3z^4$.
21. $(4a^2bx^3.5by^3) : (-10ab^3xy^4)$.
22. $[(-3a^2b).4a^3b^4] : (-6a^4b^4)$.
23. $(15m^6n^3p^2q^2.7m^2n^3p^2) : (-7m^4n^3p^2q)$.
24. $(12a^2bx^2y^4 : 4a^3b^2) : 2aby$.
25. $[(-2m^4n^3x^2y^3) : 4mxy^2] : 1\frac{1}{2}mn^2y$.
26. $[(-3\frac{3}{4}a^2p^3).(-2\frac{1}{5}b^2q^4)] : 11abp^2q^3$.
27. $[(-143\frac{1}{2}a^2b) : 24\frac{1}{2}ab] : (-5\frac{6}{7}a)$.
28. $[73a^3b^4c^5 + (-7a^3b^4c^5)] : 10a^2b^3c^4$.
29. $[81m^2np^3 - (+16m^2np^3)] : 13m^2np^2$.
30. $(5\frac{1}{3}a^3b^2 + 4\frac{1}{2}a^3b^2) : a^2b^2$.
31. $(17\frac{1}{2}m^3p^2q - 12\frac{1}{2}m^3p^2q) : 2\frac{1}{2}mpq$.
32. $[9a^2bc + (-6a^2bc)] : 3bc$.

ROZDZIAŁ VI.

O wielomianach.

§. 39.

Określenia.

1. Każdy skład liczb ogólnych, połączonych przez jakiekolwiek działania, zowie się **wyrażeniem algebraiczném** *(algebraischer Ausdruck)*. Poznane w poprzednim paragrafie sumy, różnice, iloczyny i ilorazy są więc wyrażeniami algebraicznymi, n. p. a, $a + b$, $a - b$, $5a^2b$, $\frac{ax}{c}$.

Jednomianem *(Monom)* zowie się wyrażenie algebraiczne, do którego nie wchodzi żaden ze znaków $+$ lub $-$, jak n. p. a, $5a^2b$, $\frac{ax}{c}$.

Wyrażenie zaś algebraiczne, złożone z dwu lub więcéj jednomianów, połączonych znakami $+$ lub $-$, zowie się **wielomianem** *(Polynom)*.

Ponieważ według §. 33.3. możemy różnicę uważać za sumę, w któréj składnik drugi jest ujemny jest więc także wielomian $a - b - c + d = a + (-b) + (-c) + (+d)$ sumą, złożoną w części z dodatnych, w części z ujemnych składników, czyli sumą algebraiczną.

2. Każdy jednomian, wchodzący w skład wielomianu, nazywa się jego **wyrazem** *(Glied)*. Wielomian złożony z dwu wyrazów, nazywać będziemy **dwumianem** *(Binom)*, z trzech wyrazów **trójmianem** *(Trinom)*, wszystkie inne zowią się w ogóle wielomianami.

$(a + 6)$, $(m - 3x)$, $(c - 1)$, $(2a^2b + x^2y)$ są dwumiany,
$(a + b + c)$, $(2a - 3b + 4c)$, $(5m^2 - 2mn + n^2)$ są trójmiany,
$(a - b + 3c - 4d + 2x^2y)$ jest wielomianem.

Wyrazy wielomianu, przed którymi stoi znak $+$, zowią się dodatnymi *(positiv)*, a te wyrazy, które poprzedza znak $-$, ujemnymi *(negativ)*. Przed pierwszym wyrazem, jeżeli jest dodatny, opuszcza się znak $+$. Tak n. p. w wielomianie $a^4 - 3a^2x^2 - \frac{5a^3x^3}{y^2} + \frac{7}{3}ay^3 - y^4$ pierwszy i czwarty wyraz są dodatnymi, a inne wyrazy są ujemnymi.

3. Jeżeli w wielomianie znajdują się wyrazy podobne, t. j. wyrazy, zawierające w sobie te same liczby ogólne z tymi samymi wykładnikami, należy je na podstawie prawidła §. 30.2. zredukować.

W wielomianie n. p. $a^5 - 2a^3x^3 + 3a^3x^3 - x^5$, wyrazy drugi i trzeci są podobnymi; po zredukowaniu otrzymamy

$$a^5 + a^3x^3 - x^5.$$

Do wielomianu wchodzić może kilka wyrazów podobnych ze znakami przeciwnymi, wówczas redukuje się wyrazy dodatne osobno, a ujemne osobno i otrzymuje dwa wyrazy podobne z przeciwnymi znakami, które, zredukowane znowu, dadzą jeden wyraz. Mamy zatém n. p.

$$5a^2b - 3a^2b - 7a^2b + 4a^2b = 9a^2b - 10a^2b = -a^2b;$$

podobnie

$$6x^2y + 4mn - 3x^2y + 2mn - 2x^2y - 4mn =$$
$$6x^2y - 5x^2y + 6mn - 4mn = x^2y + 2mn.$$

4. Ponieważ suma nie zmienia się ze zmianą porządku składników, jest więc w wielomianie (sumie algebraicznéj) porządek wyrazów obojętny. Wszelako, jeżeli w wyrazach wielomianu występuje tasama liczba ogólna z różnymi wykładnikami, wówczas ten wielomian porządkuje się tak, aby idąc od lewéj ku prawéj, wykładnik téj liczby ogólnéj w każdym następnym wyrazie był od wykładnika wyrazu poprzedzającego albo większym albo mniejszym. W pierwszym przypadku jest wielomian uporządkowany podług rosnących *(steigend)* potęg liczby ogólnéj, spólnéj wszystkim wyrazom wielomianu, w drugim podług malejących *(fallend)* potęg tejże liczby. Tak n. p. jeżeli w wielomianie:

$$3ax^2 - 5a^2x + x^3 - 2a^3$$

zmienimy porządek na

$$x^3 + 3ax^2 - 5a^2x - 2a^3,$$

uporządkowaliśmy go podług malejących potęg liczby x, a podług rosnących potęg liczby a.

Wielomiany należy przed wykonaniem na nich działań uporządkować, otrzymujemy bowiem wtedy i wypadki rachunku uporządkowane, co w wysokim stopniu ułatwia ich redukcyą.

§. 40.

Dodawanie i odejmowanie wielomianów.

1. Do liczby dodaje się sumę, dodając po kolei wszystkie składniki sumy.

Mając bowiem do 8 dodać sumę $4+3$, obojętną jest rzeczą, czy w szeregu naturalnym liczb, od 8 począwszy, posunę się wprzód od $4+3$, czyli o 7 jedności, czy też najpierw o 4, a potém o 3 jedności. W obu bowiem wypadkach dojdę do téj saméj liczby 15. Jest więc

$$8+(4+3)=8+4+3.$$

Ogólnie
$$a+(b+c)=a+b+c;$$

podobnie
$$a+(b+c+d)=a+b+c+d$$
$$(a+b)+(c+d)=a+b+c+d.$$

Ponieważ różnicę $7-3$ uważać można za sumę algebraiczną $7+(-3)$, otrzymamy podobnie

$$8+(7-3)=8+[7+(-3)]=8+7-3.$$

Ogólnie
$$a+(b-c)=a+b-c; \text{ podobnie}$$
$$a+(b-c-d)=a+b-c-d$$
$$(a-b)+(c-d)=a-b+c-d$$
$$(a-b+c)+(d+e-f)=a-b+c+d+e-f.$$

Powyższe rozpatrywania prowadzą do następującego prawidła: Wielomiany dodaje się, pisząc ich wyrazy obok siebie z tymisamymi znakami, jakie je poprzedzają.

2. Od liczby odejmuje się sumę, odejmując po kolei wszystkie składniki sumy.

Mając bowiem od 15 odjąć sumę $3+4$, obojętną jest rzeczą, czy w szeregu naturalnym liczb, począwszy od 15, postąpimy wstecz o $3+4$, czyli 7 jedności, czy też naprzód o 3, a następnie o 4 jedności. W każdym razie dojdziemy do téjsaméj liczby 8. Mamy więc:

$$15 - (3 + 4) = 15 - 3 - 4.$$

Ogólnie $a - (b + c) = a - b - c;$

podobnie $a - (b + c + d) = a - b - c - d.$

$$(a + b) - (c + d) = a + b - c - d.$$

Ponieważ różnicę 5 — 3 uważać można za sumę algebraiczną $5 + (-3)$, otrzymamy:

$$9 - (5 - 3) = 9 - [5 + (-3)] = 9 - 5 - (-3) = 9 - 5 + 3 = 7.$$

Ogólnie $a - (b - c) = a - [b + (-c)] = a - b - (-c) = a - b + c,$

podobnie $a - (b + c - d) = a - b - c + d,$

$$(a + b) - (c - d + e) = a + b - c + d - e.$$

Powyższe rozpatrywania prowadzą do następującego prawidła: W i e l o m i a n y o d e j m u j e s i ę, d o d a j ą c d o o d j e m n é j w y r a z y o d j e m n i k a z e z m i e n i o n y m i n a p r z e c i w n e z n a k a m i.

Jeżeli w składnikach albo w odjemnéj i odjemniku znajdują się wyrazy podobne, można, chcąc ułatwić redukcyą podobnych wyrazów, podpisywać pojedyncze składniki, względnie odjemną i odjemnik, jedne pod drugimi tak, aby wyrazy podobne znajdowały się w jednéj kolumnie, n. p.

$$\begin{array}{rl} & a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ + & \quad (a^2b + 2ab^2 + b^3) \\ \hline & a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{array}$$

tudzież

$$\begin{array}{rllllll} & 7a & & + 8ax & - 9by & \\ - & (-5a & + 4b & + 7ax & - 7by & + 3z) \\ & + & - & - & + & - \\ \hline & 12a & - 4b & + ax & - 2by & - 3z. \end{array}$$

3. Oba powyższe prawidła na dodawanie i odejmowanie wielomianów możemy inaczéj jeszcze wypowiedzieć, mianowicie: z w y r a ż e ń a l g e b r a i c z n y c h m o ż e m y u s u n ą ć z a w s z e n a w i a s y. Jeżeli przed nawiasem stoi znak +, to opuszcza się nawiasy bez wszelkich zmian; jeżeli zaś przed nawiasem stoi znak —, należy przy opuszczeniu nawiasów znaki, które stoją przed wyrazami objętymi nawiasami, zmienić na przeciwne, a więc każde + na — i każde — na +. N. p.

$$a - b + (c - d + e - f) = a - b + c - d + e - f,$$

gdy tymczasem

$$a - b - (c - d + e - f) = a - b - c + d - e + f.$$

Jeżeli wyrażenie algebraiczne zamyka w sobie kilka par nawiasów, wówczas usuwa się je kolejno, stósując powyższe prawidło, przyczem zaczyna się od pary nawiasów wewnętrznych. Mamy zatém:

$$a+[b+(c-d)] = a+[b+c-d] = a+b+c-d,$$
$$a+[b-(c-d)] = a+[b-c+d] = a+b-c+d,$$
$$a-[b+(c-d)] = a-[b+c-d] = a-b-c+d,$$
$$a-[b-(c-d)] = a-[b-c+d] = a-b+c-d,$$
$$a-[-b-(c-d)] = a-[-b-c+d] = a+b+c-d,$$
$$a+[-b-(c-d)] = a+[-b-c+d] = a-b-c+d.$$

Podobnie:

$$a-\{b-[c-(d+e)]\} = a-\{b-[c-d-e]\} =$$
$$= a-\{b-c+d+e\} = a-b+c-d-e.$$

4. Nawzajem można także ilekolwiek wyrazów wielomianu objąć nawiasami. Jeżeli nawias kładzie się bezpośrednio po znaku $+$, pisze się wyrazy, nawiasami objęte, z niezmienionymi znakami; jeżeli zaś nawias kładzie się bezpośrednio po znaku $-$, należy znaki wyrazów, nawiasami objętych, zamienić na przeciwne.

N. p. wielomian $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ można przedstawić pod postaciami:

$$a^3 - 3a^2b + (3ab^2 - b^3)$$
$$a^3 - (3a^2b - 3ab^2 + b^3)$$
$$a^3 - [3a^2b - (3ab^2 - b^3)]$$
$$-(-a^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^3) \text{ i t. d.}$$

§. 41.

Zadania.

1. *a)* $(12a + 3b) + (7a + 16b)$;
   b) $5m + (7a + 4m)$.
2. $15m + [5a + 4b + (3m + 7b)]$.
3. $5a + [6b + 3c + (5a + 5b) + 5a] + 4c$.
4. $3\frac{1}{8}a + (4a + 5b) + 5\frac{1}{3}b + (12a + \frac{2}{5}b) + 17\frac{1}{2}b$.
5. $4a + \{\frac{2}{3}b + [\frac{1}{4}c + (\frac{3}{5}a + 11b) + 3\frac{3}{4}c] + 2\frac{2}{5}a + 3\frac{1}{3}b\}$.
6. $\frac{1}{2}a + \{\frac{2}{3}b + \frac{3}{4}b + [\frac{1}{8}a + 9c + (\frac{4}{5}c + \frac{5}{6}d) + \frac{3}{5}b]\}$.

7. *a)* $15x - (4x - 2y) + 3y$;
b) $3a + 8b - [(2a - 3b) - (5a + 2b)]$.

8. $(3\frac{1}{4}a + 4\frac{1}{2}b - 5\frac{1}{3}c + 6x) \pm (4\frac{1}{2}b + 7c - 8x + 5\frac{3}{4}y)$.

9. $(6\frac{1}{8}m - 5\frac{1}{4}n + 3\frac{1}{5}p) \pm (4\frac{1}{2}m - 3\frac{1}{6}n - 5\frac{1}{2}p)$.

10. $\begin{Bmatrix} 13m - 15n + 3p \\ 4n - 6p \end{Bmatrix} \pm \begin{Bmatrix} 2m - 8n - 7p \\ 5m - 9n \end{Bmatrix}$.

11. $\begin{Bmatrix} 15x + 3a - 2b \\ 18a - 3b \\ 19x - 2a + 6b \end{Bmatrix} \pm \begin{Bmatrix} 8x + 3a + 4b \\ 3x - 2a + 2b \\ 4a - 5b \end{Bmatrix}$.

12. $\begin{Bmatrix} 14\frac{1}{2}x - 16\frac{1}{4}y + 25z \\ 17\frac{1}{4}x - 13\frac{1}{8}y \\ 24\frac{1}{3}y - 12\frac{1}{5}z \end{Bmatrix} \pm \begin{Bmatrix} 3x - 2y + 4z \\ -5\frac{1}{2}y - 8\frac{3}{4}z \\ 7y - 2z \end{Bmatrix}$.

13. $[(4a + 2b) - 2a] - [5a - (3a + b)]$.

14. $8x - 6y + (2x - 4y) - [4x + 3y - (8x - 5y) - - (x - 2y)]$.

15. $1 - [3m + 4n + 1 - (5m + 2n + 4)]$.

16. $a - [b - \{a - [(a - b) - a] + b\} - b]$.

17. $2x - y - [2x - \{2x - 3y - (2x + 3y)\}]$.

18. $4a^2 - (2a^2 - 9b) - [6a^2 + 3b - (4a^2 - 5b)]$.

19. $(x - y^2) - [2x^2 + (2x^2y^2 - 10) - 2xy]$.

20. $(a^2b - 1) - [3ay - (3a^2b + 2ay - xy + 1)]$.

21. $25x - \{13y - [27x - 15z - (12x + 10y - 10z)]\}$.

22. $[(a + b) - (3a + b)] - \{(5a - 2b) - [6a - (4b + a)]\}$.

23. Jeżeli się położy $A = 3x - 2y + z$, $B = 2x - (3y - z)$, $C = x - (2y + z)$, czemu będą równe wyrażenia:

1. $A - (B + C)$,
2. $A + (B - C)$,
3. $A - (B - C)$.

24. $15a - [2x - 3a + (3y - a)] - [20x - (3a - 4y) + + (5a - 6x)]$.

25. $(a - b) - \{ab - [-a - (ab - b)] + (a + 3ab)\}$.

26. $[(3x - y) - (6 - 2y)] - \{2xy - [4x - (6y + 3b) - 10]\}$.

27. Wielomian $-a^2 + 2ab - b^2$ objąć nawiasami i położyć przed nawiasem znak —.

28. Obliczyć wartość liczebną wielomianu w zadaniu 16. przed usunięciem nawiasów, tudzież po usunięciu tychże i zredukowaniu, jeżeli $a = 8$, $b = 5$.

29. Uczynić podobnie w zadaniu 23. 1, 2, 3 kładąc $x = 7$, $y = 5$, $z = 3$.

30. Co trzeba dodać do $5p - (7r + 3p - [2p + 3r])$, aby otrzymać $4p - (14r + [2p - 7r] - 3p)$?

31. Jakie wyrażenie odjąć trzeba od $6a - (3b + 5c)$, aby otrzymać $2a + 3b + 4c$?

32. Jakie wyrażenie odjąć trzeba od $3a - 6b + [(5a - 3a - (7b - 2a)]$, aby otrzymać $8a + 7b - 6c$?

§. 42.

Mnożenie wielomianów.

1. Jeżeli mamy $(a - b + c)$ pomnożyć przez 3, będzie:

$$\begin{aligned}(a - b + c).3 &= (a - b + c) + (a - b + c) + (a - b + c) \\ &= a - b + c + a - b + c + a - b + c \\ &= (a + a + a) - (b + b + b) + (c + c + c) \\ &= 3a - 3b + 3c.\end{aligned}$$

Podobnie:

$$\begin{aligned}(a - b + c).(-3) &= -(a - b + c) - (a - b + c) - (a - b + c) \\ &= -a + b - c - a + b - c - a + b - c \\ &= -(a + a + a) + (b + b + b) - (c + c + c) \\ &= -3a + 3b - 3c.\end{aligned}$$

Ogólnie jest $(a - b + c).m = am - bm + cm$.

Stąd prawidło: Wielomian mnoży się przez jednomian, mnożąc każdy wyraz wielomianu przez ten jednomian, i dodając otrzymane w ten sposób iloczyny częściowe.

2. Mamy do pomnożenia wielomian $(a - b + c)$ przez wielomian $m + n - p$. Ułatwimy rzecz, kładąc $m + n - p = A$. Otrzymamy wtedy:

$$(a - b + c)\,A = aA - bA + cA.$$

a że:

$$aA = Aa = (m + n - p)\,a = am + an - ap,$$
$$bA = Ab = (m + n - p)\,b = bm + bn - bp$$
$$cA = Ac = (m + n - p)\,c = cm + cn - cp.$$

więc ostatecznie:

$$(a - b + c)\,(m + n - p) =$$
$$= am + an - ap - (bm + bn - bp) + (cm + cn - cp) =$$
$$= am + an - ap - bm - bn - bp + cm + cn - cp.$$

Stąd prawidło: Wielomian mnoży się przez wielomian, mnożąc każdy wyraz pierwszego wielomianu przez każdy wyraz drugiego wielomianu i dodając iloczyny częściowe.

3. Jeżeli w obu czynnikach zachodzi tasama liczba ogólna z różnymi wykładnikami, należy oba czynniki podług potęg téjże liczby głównéj uporządkować. W takim razie i iloczyn okaże się w tensam sposób uporządkowany. Dla ułatwienia redukcyi należy częściowe iloczyny, wypadające z pomnożenia jednego wielomianu przez każdy wyraz drugiego, podpisać jedne pod drugimi tak, ażeby wyrazy podobne znajdowały się w jednéj kolumnie.

$$\begin{array}{rrrrrrr}
(5x^4 & -4x^3 & +5x^2 & -x & +1)\;(2x^2+x-2)= & & \\
\hline
10x^6 & -8x^5 & +10x^4 & -2x^3 & +2x^2 & & \\
 & +5x^5 & -4x^4 & +5x^3 & -x^2 & +x & \\
 & & -10x^4 & +8x^3 & -10x^2 & +2x & -2 \\
\hline
10x^6 & -3x^5 & -4x^4 & +11x^3 & -9x^2 & +3x & -2.
\end{array}$$

4. Mnożąc sumę dwu liczb $(a + b)$ przez różnicę tychsamych liczb $a - b$, otrzymamy:

$$\begin{array}{rrr}
(a+b)\,(a-b) = a^2 & +\,ab & \\
 & -\,ab & -\,b^2 \\
\hline
a^2 & & -\,b^2
\end{array}.$$

Jeżeli wypadek powyższego mnożenia wyrazimy słowami, otrzymamy prawidło: Suma dwu liczb, pomnożona przez ich różnicę, daje na iloczyn różnicę kwadratów tychże liczb.

Stósując powyższe prawidło, możemy w podobnych przypadkach odrazu otrzymać iloczyn, oszczędzając sobie redukcyi. N. p.

$$(4a+5b)(4a-5b)=16a^2-25b^2$$
$$(5a^2b-3ab^2)(5a^2b+3ab^2)=25a^4b^2-9a^2b^4.$$

5. $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2$
$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-2ab+b^2.$$

Wzory powyższe zawierają w sobie twierdzenie: Kwadrat dwumianu składa się 1. z kwadratu pierwszego wyrazu; 2. z podwójnego iloczynu obu wyrazów i 3. z kwadratu wyrazu drugiego. N. p.

$$(3a+4b)^2=9a^2+24ab+16b^2,$$
$$(2a^2b-3ab^2)^2=4a^4b^2-12a^3b^3+9a^2b^4.$$

6. $(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)$

$$\begin{array}{rl} & =(a^2+2ab+b^2)(a+b)= \\ & a^3+3a^2b+ab^2 \\ & \quad\;\; +a^2b+2ab^2+b^3 \\ \hline & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3. \end{array}$$

Podobnie $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

Według powyższych wzorów składa się sześcian dwumianu:

1. Z sześcianu wyrazu pierwszego;

2 z potrójnego iloczynu kwadratu wyrazu pierwszego przez wyraz drugi;

3. z potrójnego iloczynu wyrazu pierwszego przez kwadrat wyrazu drugiego;

4. z sześcianu wyrazu drugiego.

Zapamiętać trzeba, że wszystkie wyrazy sześcianu sumy są dodatne, sześcian zaś różnicy ma wyraz drugi i czwarty ujemny.

N. p. $(2a^2b+x)^3=8a^6b^3+12a^4b^2x+6a^2bx^2+x^3,$
$$(1-5xy^2)^3=1-15xy^2+75x^2y^4-125x^3y^6.$$

§. 43.

Zadania.

1. $5(a-b)$.
2. $(a+b-c).15$.
3. $7(2m-4n)$.
4. $(3x+7y).4z$.
5. $(7a-9y)\,5ay$.
6. $(2ab-3bc+5ac).abc$.
7. $(3+2x+y)\,xy$.
8. $(3a\pm 4b).5ab$.

W zadaniu 6. i 8. należy za $a=4$, $b=5$, $c=6$ położyć i wyznaczyć iloczyn.

9. $-5abc\ (a-b+c)$.
10. $(9a^3-7a^2+5a-3).(-5a^4)$.
11. $a+3\ (b+c)$.
12. $x+5\ (y-z)$.
13. $m-7\ (n+p)$.
14. $a-9\ (b-c)$.
15. $a^2-bx-(a-b)x$.
16. $3ac\ (4ab+5ay+9a^2b^2z)$.
17. $7a^n cy^2\ (4a^3bc-6a^2bm+5)$.
18. $(4a^n x-2a^3b^2x^3+3ab).5a^nb^3x$.
19. $(5a^4b-3a^3b^2+7a^2b^3-2ab^4+9b^5)\ 4a^3b^2$.
20. $(-4x^4+5x^3-5x^2y+2xy^2-6y^3).(-2ax^3y^n)$.
21. $14a+2b-2(3a-4b)+(a+b)$.
22. $5m\ (6m-7p)-8p\ (9m-10p)$.
23. $[(2m-3n)\ m^2+(4m-5n)\ n^2].(-7mn^2)$.
24. $(4a+b)\ (2a-b)\ (5a+3b)$.
25. $4a^2\ (a-1)\ (2a+1)\ (1-a)$.
26. $(x^2+2xy+y^2)\ (x^2+xy+y^2)$.
27. $(m^3+m^2+m+1)\ (m+1)$.
28. $(9a^3-7a^2b+5ab^2-3b^3)\ (4a+5b)$.
29. $(2a^3+a^2-2a-1)\ (3a^2+a-4)$.
30. $(3x^3+10x^2y+11xy^2+4y^3)\ (2x-3y)$.
31. $(3x^3-5x^4+4-x^2+2x)\ (3-2x+x^2)$.
32. $4m\ (3m^2+m-1)\ (1-4m+3m^2)\ (1-m)$.
33. $(2a^3b+5b^4+a^4+3a^2b^2+4ab^3)\ (7a+5b)$.
34. $(a^3-3a^2b+5ab^2-7b^3)\ (a^2-7b^3+5ab^2-3a^2b)$.
35. $(x^3-x^4-1-x^2+x^5+x)\ (x+1)$.

W zadaniach 31—35 należy przed wykonaniem mnożenia wielomiany jednakowo uporządkować.

36. $(4a^2y^4-2a^3y^5-3a^4y^6)\ (4a^6y^3-2a^2y^4)$.
37. $(ab)^3$; $(5xyz)^4$; $(-2mx)^3$; $(-4ab)^2$; $(-2yz)^3$.

38. $(a^2b)^3$; $(-a^2b^3c)^2$; $(-3np^3q^2)^3$; $(a^2b^2x^2)^4$.

39. $(n+p)(n-p)$; $(a+1)(a-1)$; $(1+x)(1-x)$.

40. $(x+7)(x-7)$; $(4ab+3y)(4ab-3y)$;
$(8a+7b)(8a-7b)$.

41. $(\frac{1}{4}ax+\frac{1}{3}by)(\frac{1}{4}ax-\frac{1}{3}by)$; $(2\frac{1}{2}xy+3\frac{1}{3}pq)(2\frac{1}{2}xy-3\frac{1}{3}pq)$.

42. $(3a+2b)(3a-2b)$; $(3a+2b)^2$.

W zadaniach 28., 33., 34. i 42. podstawić $a=5$, $b=7$ przed wykonaniem działania, a późniéj w otrzymanym iloczynie.

43. $(3x+y)^2$; $(ab+5cd)^2$; $(3my-4z)^2$.

44. $(ab+5)^2$; $(40+9)^2$; $(\frac{1}{2}m-\frac{3}{4}p)^2$.

45. $(a+4b)^2(a+5b)$; $(5y+x)^2(2y+x)$.

46. $(c+d)^3$; $(m-1)^3$; $(m+1)^3$; $(2a+3)^3$.

47. $(2ab-3c)^3$; $(8mp+7q)^3$; $(50+6)^3$.

48. $(7a+b)^2(a^2-4b)^2$; $(3c+1)^3(c-1)m$.

49. $(4a^2-b)^3$; $(7a^2b+5ab^2)^3(2a-b)^2$.

§. 44.

D z i e l e n i e.

1. D z i e l e n i e w i e l o m i a n u p r z e z j e d n o m i a n. Podług wzoru na mnożenie jest:

$$(a+b-c)m = am+bm-cm.$$

Jeżeli iloczyn $(am+bm-cm)$ przez czynnik m p o d z i e l i m y, to na iloraz otrzymamy według §. 37. 1. czynnik drugi $(a+b-c)$. Jest więc:

$$(am+bm-cm) : m = a+b-c.$$

Widoczna, że wyrazy ilorazu a, $+b$, $-c$ są ilorazami $\frac{am}{m}=a$, $\frac{+bm}{m}=+b$, $\frac{-cm}{m}=-c$.

Stąd prawidło: W i e l o m i a n d z i e l i s i ę p r z e z j e d n o m i a n, d z i e l ą c k a ż d y w y r a z w i e l o m i a n u p r z e z j e d n o m i a n. N. p.

$$(8ab - 12ac) : 4a = 2b - 3c\ ;$$

$$(35ax^2 - 21a^2x - 7a^3) : (-7a^2x^2) = -\frac{5}{a} + \frac{3}{x} + \frac{a}{x^2}.$$

Jeżeli dzielna jest jednomianem, a dzielnik wielomianem, iloraz przedstawia się w formie ułamka. N. p.

$$x : (a - b) = \frac{x}{a - b}\ ;$$

$$-3ab : (4x - y) = \frac{-3ab}{(4x - y)} = -\frac{3ab}{4x - y}.$$

2. Dzielenie wielomianu przez wielomian. Ze wzoru na mnożenie:

$$\begin{aligned}(a + b + c)\ (m + n + p) = {} & am + bm + cm \\ & + an + bn + cn \\ & + ap + bp + cp\end{aligned}$$

wypływa na odwrót wzór na dzielenie:

$$[\ \overline{am + an + ap} + \overline{bm + bn + bp} + \overline{cm + cn + cp}\ ] :$$
$$(m + n + p) = a + b + c.$$

Rozpatrując się dokładnie w tym wzorze, widzimy: 1. że trzy pierwsze wyrazy dzielnéj powstają przez pomnożenie dzielnika przez pierwszy wyraz ilorazu; 2. że trzy następne wyrazy téjże powstają przez pomnożenie dzielnika przez drugi wyraz ilorazu; 3. że trzy ostatnie wyrazy téjże dzielnéj powstają przez pomnożenie dzielnika przez trzeci wyraz ilorazu; 4. że pierwszy wyraz w każdéj z tych trzech grup dzielnéj jest iloczynem pierwszego wyrazu dzielnika i odpowiednio 1., 2. i 3. wyrazu ilorazu. Chcąc więc otrzymać iloraz, postępujemy w następujący sposób: 1. pierwszy wyraz dzielnéj dzielimy przez pierwszy wyraz dzielnika, a otrzymanym ilorazem mnożymy cały dzielnik i ten iloczyn od dzielnéj odejmujemy; 2. pierwszy wyraz reszty dzielimy znowu przez pierwszy wyraz dzielnika, a otrzymanym ilorazem mnożymy cały dzielnik i ten iloczyn odejmujemy od poprzedzającéj reszty i 3. pierwszy wyraz drugiéj reszty dzielimy przez pierwszy wyraz dzielnika, a tym ilorazem mnożymy cały dzielnik i iloczyn odejmujemy od ostatniéj reszty. Trzy otrzymane w ten sposób częściowe ilorazy będą wyrazami ilorazu żądanego.

Stąd widzimy, że wszystko zależy na stósowném uporządkowaniu dzielnéj i dzielnika. Jeżeli dzielna i dzielnik zawierają w sobie różne potęgi téjsaméj liczby ogólnéj, wtedy porządkuje się je albo podług rosnących albo podług malejących potęg téj liczby, a potém uskutecznia się dzielenie według powyższego prawidła. Objaśnijmy to na przykładach.

Przykład. 1. Wykonajmy naprzód mnożenie:

$$(5a^2 - 4ab + 3b^2)\,(6a - 2b) =$$
$$\begin{array}{l} 30a^3 - 24a^2b + 18ab^2 \ldots\ldots\ldots 1.\ \text{częściowy iloczyn} \\ \qquad\quad - 10a^2b + 8ab^2 - 6b^3 \ldots 2.\ \text{częściowy iloczyn} \\ \hline 30a^3 - 34a^2b + 26ab^2 - 6b^3\ \text{iloczyn końcowy.} \end{array}$$

Częściowe iloczyny i iloczyn końcowy są tu uporządkowane podług potęg malejących liczby ogólnéj a.

Naodwrót mamy:

$$\begin{array}{ll} & (30a^3 - 24a^2b + 26ab^2 - 6b^3) : (5a^2 - 4ab + 3b^2) \\ & \ \ 30a^3 - 24a^2b + 18ab^2 \qquad\qquad = 6a - 2b \\ & \ \ \ - \qquad + \qquad - \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{iloraz} \\ \hline \text{reszta 1} \ldots\ldots\ldots & - 10a^2b + 8ab^2 - 6b^3 \\ & - 10a^2b + 8ab^2 - 6b^3 \\ & \ \ + \qquad - \qquad + \\ \hline \text{reszta 2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0. \end{array}$$

Uwaga. Z podzielenia $30a^3$ przez $5a^2$ otrzymamy pierwszy wyraz ilorazu, a przez jego pomnożenie dzielnikiem otrzymamy pierwszy częściowy iloczyn poprzedniego mnożenia. Iloczyn ten, odjęty od dzielnéj, daje pierwszą resztę, która się równa drugiemu częściowemu iloczynowi. Ten iloczyn częściowy powstał z $-2b\,(5a^2 - 4ab + 3b^2)$.

Dzieląc więc $-10a^2b$ przez $5a^2$, otrzymamy $-2b$ jako drugi wyraz ilorazu. Pomnożywszy drugi wyraz ilorazu $-2b$ przez dzielnik, otrzymujemy drugi częściowy iloczyn, a ten, od pierwszéj reszty odjęty, daje drugą resztę 0.

Przykład ten poucza nas, że dzielenie wielomianu przez wielomian, zupełnie zgodne jest z dzieleniem liczb szczególnych. Stąd prawidło na dzielenie wielomianów nie różni się od prawidła, jakie poznaliśmy na dzielenie liczb wielocyfrowych w arytmetyce.

*

Przykład 2.

$$(x^6 - 4a^2x^4 + 4a^4x^2 - a^6) : (x^2 - a^2) = x^4 - 3a^2x^2 + a^4$$

$$x^6 - a^2x^4$$

$$- \quad +$$

1 reszta... $-3a^2x^4 + 4a^4x^2 - a^6$

$$-3a^2x^4 + 3a^4x^2$$

$$+ \quad -$$

2 reszta.......... $+a^4x^2 - a^6$

$$+a^4x^2 - a^6$$

$$- \quad +$$

3 reszta................0.

Przykład 3.

$$(x^3 + 3xy + y^3 - 1) : (x + y - 1) = x^2 - xy + x + y^2 + y + 1$$

$$x^3 + x^2y - x^2$$

$$- \quad - \quad +$$

$$-x^2y + x^2 + 3xy + y^3 - 1$$

$$-x^2y - xy^2 + xy$$

$$+ \quad + \quad -$$

$$x^2 + xy^2 + 2xy + y^3 - 1$$

$$x^2 + xy - x$$

$$- \quad - \quad +$$

$$xy^2 + xy + x + y^3 - 1$$

$$xy^2 + y^3 - y^2$$

$$- \quad - \quad +$$

$$xy + x + y^2 - 1$$

$$xy + y^2 - y$$

$$- \quad - \quad +$$

$$x + y - 1$$

$$x + y - 1$$

$$- \quad - \quad +$$

0.

Przykład 4. $(1 - x^4) : (1 + x + x^2 + x^3) = 1 - x$

$$1 + x + x^2 + x^3$$

$$- \quad - \quad - \quad -$$

$$-x - x^2 - x^3 - x^4$$

$$-x - x^2 - x^3 - x^4$$

$$+ \quad + \quad + \quad +$$

0.

§. 45.

Zadania.

1. $(x+y):a$; $(m-n):b$; $(y+z):-m$; $(a-b):-c$.
2. $(ab+bc):ac$; $(ab-cd):ac$.
3. $(x^2+ax):x$; $(a^2-a):a$.
4. $(8a^2+14ab):2a$; $(24x^2y-16xy^2):4xy$.
5. $(5\frac{1}{3}a^3b^2+4\frac{1}{2}a^2b^3):a^2b^2$; $(18m^2np-6n^2p^2):3np$.
6. $(3\frac{4}{5}x^2y-2\frac{1}{2}xy^2):(-7\frac{1}{2}x^2y^2)$.
7. $[(30a^2bc^2d-20ab^2cd^2):(-5ab)]:(-2cd)$.
8. $(12abx-16a^3by+36a^2b^2):4ab$.
9. $(-48abm+36ax-60a^3x-12ay):12a$.
10. $(25a^2bm-45a^3b^2m+35ab^3-10a^2b):(-5ab)$.
11. $(49a^2bx+14a^3b^2cx-42a^2b^2c^2-21a^5bc):7a^2b$.
12. $(9a-7ab-a^3c-10acx):2ac$.
13. $(ab-bcn+3y-2aby):ab$.
14. $(-20a^3bm+12a^2by-a^2b^3x+zy):(-4a^2bx)$.
15. $(21a^5bm+28a^3b^2m):7a^2bm$.
16. $(5\frac{1}{3}a^3b^2+4\frac{1}{2}a^2b^3):a^2b^2$.
17. $(3\frac{4}{5}x^2y-2\frac{1}{2}xy^2):(-7\frac{1}{2}x^2y^2)$.
18. $[(30p^2qx^2y-20pq^2xy^2):(-5pq)]:(-2xy)$.
19. $\{2abc\ [6a^2b-(5ab^2-4bc^2)]\}:2a^3b^2c$.
20. $[5a^3b\ (5a-4b)+5ab^3\ (3a-2b)]:5ab$.

W następujących wyrażeniach spólne czynniki wyjąć przed nawias.

21. $4ab+2ac=2a(2b+c)$.
22. $5a^2b-6bc$; $4\frac{1}{2}x^2y+1\frac{1}{2}xy^2$.
23. $30m^3b^2-6m^2b^3$; $15a^3b^5+9a^4b^4$.
24. $16x^5y^2+12x^4y^3+8x^3y^4$.
25. $49a^5b^5c^5d^5-35a^6b^4c^5d^2-21a^8b^5c^5d^3$.
26. $(a+b)c+(a+b)d=(a+b)(c+d)$.
27. $3m(2m-3p)-2p(2m-3p)$.
28. $(5ab-7xy)2a+(5ab-7xy)3x$.
29. $7a^4b^3-5a^3b^2+21ab^2xy-15bxy$.

30. $3a^2m^2n - 3b^2m^2n + 5a^2p^2q - 5b^2p^2q$.

31. $6a^3xy + 5a^3mn - 6b^3xy - 5b^3mn$.

32. $(15a + 5b):(3a + b)$; $(63x - 27y):(7x - 3y)$.

33. $(a^2 + 2ab):(a + 2b)$; $(\frac{3}{10}m^2p - \frac{1}{3}mp^2):(\frac{3}{5}m - \frac{2}{3}p)$.

34. $(15a + 12b + 9c):(5a + 4b + 3c)$.

35. $(ac + bc + ad + bd):(a + b)$.

36. $(6mx - 9px + 4my - 6p):(2m - 3p)$.

37. $(14abm + 6bcm - 8cdm - 21abn - 9bcn + 12cdn):(7ab + 3bc - 4cd)$.

38. $(x^2 + 15x + 50):(x + 10)$.

39. $(x^2 + x - 12):(x - 3)$.

40. $(x^3 + 13x^2 + 54x + 72):(x + 6)$.

41. $(10a^2x^2 - 23abxy + 12b^2y^2):(5ax - 4by)$.

42. $(a^2 - b^2):(a + b)$; $(a^2 - b^2):(a - b)$.

43. $(x^2 - 1):(x + 1)$; $(x^3 + y^3):(x + y)$.

44. $(125a^3 - 150a^2b + 60ab^2 - 8b^3):(5a - 2b)$.

45. $(4x^2 - 4x^3 + 1 - 4x + 3x^4):(3x - 1)$.

46. $(6x^2y^2 + 3xy^3 + 5x^3y + y^4 + 3x^4):(2xy + 3x + y^2)$.

47. $(19ax^3 - 2x^4 - 41a^2x^2 + 56a^4 - 21a^3x):(x^2 + 7a - 7ax)$.

Dzielną i dzielnik należy w zadaniach 45., 46. i 47. przed wykonaniem dzielenia uporządkować.

48. $(x^6 - y^6):(x + y)$, $(x^6 - y^6):(x - y)$.

49. $(81a^4 - 16b^4):(3a - 2b)$; $(625m^4x^4 - n^4y^4):(5mx - ny)$.

50. $(81x^8 - 16):(3x^2 + 2)$; $(125x^9 - 8y^3):(5x^3 + 2y)$.

51. $[(a^2x^2 + b^2y^2) - (a^2b^2 + x^2y^2)]:(ax + by + ab + xy)$.

52. $[ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2)]:(ax + by)$.

Następujące wyrażenia należy rozłożyć na czynniki:

53. $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = (a + b)(a + b)$
$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 = (a - b)(a - b)$.

54. $x^2 + 2x + 1$; $m^2 - 2m + 1$.

55. $4a^2 + 12a + 9$; $9a^2 - 12b + 4$.

56. $y^2 + 10y + 25$; $x^2 - 6xy + 9y^2$.

57. $(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$.

58. $4x^2 - 1$; $9a^2 - 25b^2$; $1 - 4a^2$.

59. $6x^2 - 54a^2 = 6(x^2 - 9a^2) = 6(x + 3a)(x - 3a)$.

60. $36a^2 + 48ab + 16b^2$; $3m^2 - 12m + 12$.

61. $5 - 10x + 5x^2$; $28y^2 - 70xy + 175x^2$.

62. $12m^2 - 27p^2$; $75a^2b^2 - 48x^2y^2$.

63. $5 - 5m^2$; $5a^4 - 80$.

64.*) $x^3 + y^3$; $x^3 - y^3$.

65. $x^3 - 1$; $1 - 4x^2$.

66. $a^4 - x^4$; $1 - a^4$.

---

*) Jednym z żądanych czynników będzie w pierwszém zadaniu $x + y$; w drugiém $x - y$. Drugim czynnikiem będzie więc w pierwszém $(x^3 + y^3) : (x + y)$, w drugiém zadaniu $(x^3 - y^3) : (x - y)$.

ROZDZIAŁ VII.

O ułamkach algebraicznych.

§. 46.

Określenia.

Jeżeli dzielna a nie jest wielokrotnością dzielnika b, przedstawimy podług §. 37. 1. iloraz w kształcie $\frac{a}{b}$.

Jeżeli $a = 4$, a $b = 7$, jest $4:7 = \frac{4}{7}$.

Iloraz $\frac{4}{7}$ otrzymamy, dzieląc każdą jedność dzielnéj na 7 części i biorąc taką część cztery razy jako składnik sumy. Mamy więc:

$$4:7 = (1+1+1+1):7 = \tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{7} = \tfrac{4}{7}.$$

Część jedności, jak w poprzedzającym przykładzie $\frac{1}{7}$, nazywamy jednością łamaną, a jéj wielokrotność, tu $\frac{4}{7}$, liczbą łamaną albo ułamkiem *(Bruch)*.

Każdy ułamek uważać można za iloraz.

$\frac{a}{b}$, uważane za iloraz, znaczy b-tą tą część liczby a, uważane zaś jako ułamek, znaczy, że jedność podzielono na b równych części, a części takich wzięto a.

Mianownik *(Nenner)* jest właściwie mianem ułamka; wskazuje on, na ile równych części podzielono jedność.

Licznik *(Zähler)* podaje liczbę części zawartych w ułamku.

Jeżeli licznik równy jest mianownikowi, wtedy wartość ułamka równa się 1. Jeżeli $a = b$, to $\frac{a}{b} = 1$.

Jeżeli $a < b$, to wartość ułamka jest mniejszą od 1, $\frac{a}{b} < 1$, a ułamek nazywa się właściwym *(echt)*.

Jeżeli w końcu $a > b$, wartość ułamka jest większą od 1, $\frac{a}{b} > 1$, ułamek taki zowie się niewłaściwym *(unecht)*.

Suma, jaką otrzymamy z liczby całkowitéj i ułamka, nazywa się liczbą mieszaną *(gemischte Zahl)*. N. p.: $a + \frac{m}{n}$; $a - \frac{m}{n}$, $-a + \frac{m}{n}$ i $-a - \frac{m}{n}$ są liczby mieszane.

Uwaga. W arytmetyce piszemy liczby mieszane, stawiając ułamek bezpośrednio po liczbie całkowitéj, n. p. $3\frac{2}{5}$, $7\frac{1}{3}$; w algebrze nie można tak uczynić; $a + \frac{m}{n}$ jest liczbą mieszaną, gdy tymczasem $a\frac{m}{n}$ znaczyłoby tutaj iloczyn czynników a i $\frac{m}{n}$.

Odliczając n. p. od $^4/_5$ kilkakrotnie $^1/_5$, otrzymuje się kolejno $^3/_5$, $^2/_5$, $^1/_5$, 0, $-\frac{1}{5}$, $-\frac{2}{5}$, $-\frac{3}{5}$ i t. d., w ten sposób otrzymujemy szereg ułamków:

$$\ldots\ldots -{}^4/_5, -{}^3/_5, -{}^2/_5, -{}^1/_5, 0, +{}^1/_5, +{}^2/_5, +{}^3/_5, +{}^4/_5 \ldots\ldots$$

W szeregu tym każdy ułamek dodatny jest większy od zera, każdy ujemny jest mniejszy od zera.

Dwa ułamki w szeregu takim, równo oddalone od zera, a dodane do siebie, dają 0, n. p. $+\frac{3}{5} - \frac{3}{5} = 0$.

Działania na ułamkach opierają się na tychsamych prawidłach, jakie wyłożono w arytmetyce, nadto uwzględnić potrzeba i te prawidła, jakieśmy poznali dotąd przy nauce algebry.

§. 47.

Sprowadzanie ułamków do spólnego mianownika i ich upraszczanie.

$$\frac{a}{b} = \frac{a.m}{b.m} = \frac{a:m}{b:m}.$$

Jeżeli sprowadzimy do spólnego mianownika ułamki:

1. $\frac{x}{2}$, $\frac{x}{3}$, $\frac{x}{4}$, otrzymamy $\frac{6x}{12}$, $\frac{4x}{12}$, $\frac{3x}{12}$.
2. $\frac{a}{n}$, $\frac{b}{n^2}$, $\frac{c}{nx}$.

Tutaj jest widocznie n^2x spólną wielokrotnością mianowników n, n^2 i nx ułamków danych. A nadto ta wielokrotność spólna jest najmniejszą. Należy przeto wziąć ją za spólny mianownik, a potém postąpić podług prawideł arytmetyki.

Ponieważ $n^2x : n = nx$, mamy więc $\frac{a}{n} = \frac{a.nx}{n^2x} = \frac{anx}{n^2x}$

" $n^2x : n^2 = x$, " " $\frac{b}{n^2} = \frac{b.x}{n^2.x} = \frac{bx}{n^2x}$

" $n^2x : nx = n$, " " $\frac{c}{nx} = \frac{c.n}{nx.n} = \frac{cn}{n^2x}$.

3. $\frac{7c}{12a^2b^3(a+b)}$, $\frac{3b}{40a^3c^2(a-b)}$, $\frac{5a}{27b^3c^3(a^2-b^2)}$

Mianowniki, na czynniki rozłożone, są:

$$12a^2b^3(a+b) = 2^2.3a^2b^3(a+b)$$

$$40a^3c^2(a-b) = 2^3.5a^3c^2(a-b)$$

$$27b^3c^3(a^2-b^2) = 3^3.b^3c^3.(a+b)(a-b).$$

Ich najmniejsza spólna wielokrotność jest więc:

$$2^3.3^3.5\,a^3b^3c^3(a+b)(a-b) = 1080\,a^3b^3c^3(a^2-b^2).$$

Dzieląc ten spólny mianownik przez każdy z danych, znajdujemy:

$$1080\,a^3b^3c^3(a^2-b^2) : 12a^2b^3(a+b) = 90\,ac^3(a-b)$$

$$1080\,a^3b^3c^3(a^2-b^2) : 40a^3c^2(a-b) = 27b^3c(a+b)$$

$$1080\,a^3b^3c^3(a^2-b^2) : 27b^3c^3(a^2-b^2) = 40a^3.$$

Mnożąc w danych ułamkach licznik i mianownik przez odpowiedni iloraz, otrzymamy ułamki równoznaczne z danymi:

$$\frac{630\,ac^4(a-b)}{1080\,a^3b^3c^3(a^2-b^2)},\ \frac{81\,b^4c(a+b)}{1080\,a^3b^3c^3(a^2-b^2)},\ \frac{200\,a^4}{1080\,a^3b^3c^3(a^2-b^2)}.$$

4. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{12}$.

5. $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{19}{35}$, $\frac{21}{40}$, $\frac{25}{56}$.

6. $\frac{a}{b}$, $\frac{m}{n}$, $\frac{x}{p}$; $\frac{m}{9a^2b}$, $\frac{n}{6ab^2}$, $\frac{p}{3ac^2}$.

7. $\frac{1}{m}, \frac{4a}{3m^2}, \frac{2bc}{6m^3}, \frac{4d}{12m^4}$.

8. $\frac{a}{b-c}, \frac{x}{b+c}, \frac{ax}{b^2-c^2}$.

9. $a, \frac{b^2}{x+a}, \frac{a^2b}{x^2+2ax+a^2}$.

10. $\frac{3}{1-2x}, \frac{1}{1+2x}, \frac{4-20x}{4x^2-1}$.

11. $\frac{a-1}{a+1}, \frac{a-2}{a+2}, \frac{a-3}{a+3}$.

12. $\frac{a}{1+a}, \frac{a}{1-a}, \frac{a^2}{1-a^2}, \frac{a^2}{1+2a+a^2}$.

Sprowadzić do najprostszéj postaci ułamki:

1. $\frac{12a^3b^4-12a^2b^5}{28a^5b^2-56a^4b^3+28a^3b^4}$.

Rozkładając licznik i mianownik na czynniki, mamy:

$$12a^3b^4-12a^2b^5=12a^2b^4(a-b)=2^2.3.a^2b^4(a-b)$$

$$28a^5b^2-56a^4b^3+28a^3b^4=28a^3b^2(a^2-2ab+b^2)=$$
$$=2^2.7.a^3.b^2.(a-b)^2.$$

Największą spólną miarą jest więc:

$$2^2.a^2b^2(a-b)=4a^2b^2(a-b)=4a^3a^2-4a^2b^3.$$

Dzieląc licznik i mianownik danego ułamka przez tę największą spólną miarę, otrzymamy:

$$\frac{12a^3b^4-12a^2b^5}{28a^5b^2-56a^4b^3+28a^3b^4}=\frac{2^2.3.a^2b^4(a-b)}{2^2.7.a^3b^2(a-b)^2}=\frac{3b^2}{7a(a-b)}.$$

2. $\frac{45}{54}, \frac{840}{1020}, \frac{1824}{7008}, \frac{4096}{7424}$.

3. $\frac{ab^2}{a^3bx}, \frac{3ax^2}{6a^2x}, \frac{15amx^3}{40bmx}, \frac{72mx^2y^3}{96nx^3y^2}$.

4. $\frac{a^2b-2ab^2}{a^4-4a^2b^2}, \frac{1-x^2}{1-x^4}, \frac{3x+y}{9x^2+6xy+y^2}$.

5. $\frac{x^2-6x+9}{x^2-9}, \frac{7xy^2-2x^2y}{12x^2y^2-92xy^3+147y^4}$.

§. 48.

Dodawanie i odejmowanie ułamków.

1. $\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}$. 2. $\frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a-b}{m}$

3. $\frac{a}{m} + \frac{b}{n} = \frac{an+bm}{mn}$. 4. $\frac{a}{m} - \frac{b}{n} = \frac{an-bm}{mn}$.

5. $a + \frac{b^2}{m} = \frac{am+b^2}{m}$. 6. $a - \frac{b^2}{m} = \frac{am-b^2}{m}$.

7. $1 + \frac{1-x}{1+x} = \frac{1+x+(1-x)}{1+x} = \frac{2}{1+x}$.

8. $1 - \frac{1-x}{1+x} = \frac{1+x-(1-x)}{1+x} = \frac{2x}{1+x}$.

9. $a-b+\frac{b^2}{a+b} = \frac{(a-b)\,(a+b)+b^2}{a+b} = \frac{a^2}{a+b}$.

10. $\frac{a^2}{a-b} - a = \frac{a^2-a\,(a-b)}{a-b} = \frac{ab}{a-b}$.

11. $\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} = \frac{2\,(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$.

12. $\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} = \frac{4ab}{a^2-b^2}$.

13. $\frac{x-a}{2} + \frac{2x-a}{4}$. 14. $\frac{x-a}{2} - \frac{2x-a}{4}$.

15. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$; $\frac{x}{a} - \frac{y}{b}$; $\frac{a}{cx} + \frac{b}{cy}$.

16. $\frac{x^2}{12ab} - \frac{z}{6b}$; $\frac{x}{y} - a$; $5a + \frac{2a}{3}$.

17. $11x - \frac{7x}{3}$; $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab}$.

18. $\frac{x}{y^2z} - \frac{y}{xz^2} + \frac{z}{x^2y}$; $\frac{a+b}{a} - \frac{a}{a-b}$.

19. $\left(\frac{a}{2} + \frac{3b}{c} - \frac{5c}{d}\right) - \left(\frac{a}{3} - \frac{2b}{c} + \frac{3c}{d}\right)$.

20. $\frac{1}{a^2-b^2} + \frac{1}{(a+b)^2}$; $\frac{1}{x-1} + \frac{x+1}{x^2-2x+1}$.

21. $\frac{3m-2n}{m+2n} + \frac{3m+2n}{m-2n}$; $\frac{3m-2n}{m+2n} - \frac{3m+2n}{m-2n}$.

22. $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}-\frac{1}{(x+2)^2}$; $\frac{3+2x}{2-x}-\frac{2-3x}{2+x}+\frac{16x-x^2}{x^2-4}$.

23. $\frac{3}{1+2x}-\frac{1}{1-2x}-\frac{4-20x}{4x^2-1}$.

24. $\frac{1}{x^2-y^2}+\frac{1}{(x+y)^2}-\frac{1}{(x-y)^2}$.

25. $\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{a+b}\right)+\left(1+\frac{b}{2(2a-b)}\right)$.

26. $(\frac{3}{4}x+\frac{7}{6}y)+(\frac{5}{3}x+\frac{4}{5}y)+(\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}y)$.

27. $\frac{2ab}{4}-\frac{(a+b)^2}{3a+2b}+\frac{(a-b)^2}{9a^2+12ab+4b^2}$.

28. $\frac{(m+2)^2}{3m^2-12m+12}-\frac{1}{3}+\frac{4m}{m+2}-\frac{m+2}{3m-6}$.

29. $\frac{1}{5-5m^2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{1-m}+\frac{1}{1+m}$.

30. $\frac{a}{a-x}+\frac{3a}{a+x}-\frac{2ax}{a^2-x^2}$.

31. $\frac{3a-4b}{7}-\frac{2a-b-c}{3}+\frac{15a-4c}{12}-\frac{a-4b}{21}$.

32. $\frac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\frac{b+c}{(b-a)(a-b)}+\frac{c+a}{(a-b)(b-c)}$.

33. $\frac{bc}{(c-a)(a-b)}+\frac{ca}{(a-b)(b-c)}+\frac{ab}{(b-c)(c-a)}$.

34. $\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-c)(b-a)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}$.

35. $\frac{3}{4(1-x)^2}+\frac{3}{8(1-x)}+\frac{1}{8(1+x)}-\frac{1-x}{4(1+x^2)}$.

§. 49.

Mnożenie ułamków.

1. $\frac{a}{b}\cdot m=\frac{am}{b}=\frac{a}{b:m}$.

2. $a\cdot\frac{b}{m}=\frac{ab}{m}$.

3. $\frac{a}{b}\cdot b=a$.

4. $\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}=\frac{am}{bn}$.

5. $\frac{3a^2b}{x^3}\cdot 5x^4=\frac{15a^2bx^4}{x^3}=15a^2bx$.

6. $2b \cdot \frac{3}{4ab} = \frac{3}{2a}$.

7. $5x^2y^2 . \left(-\frac{a^5}{x^3y^3}\right) = -\frac{5a^5}{xy}$.

8. $\frac{14a^3b^3}{7x^5y^5} . 7x^5y^5 = 14a^3b^3$. 9. $\frac{5}{3} . 6$; $2 . 7\frac{4}{9}$.

10. $\frac{6}{7} . 5$; $\frac{35}{49} . 7$; $7\frac{1}{4} . 6$; $2\frac{3}{8} . 13$; $7\frac{1}{2} . 4\frac{3}{4}$.

11. $(2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{4} + 4\frac{1}{5})(3\frac{2}{3} - 2\frac{1}{2})$.

12. $\frac{2ab}{5m} . 3c$; $\frac{2m}{3n} . m$; $3b . \frac{5a}{6b}$; $\left(-\frac{abc}{m^2n}\right) . m^2n$.

13. $\left(-\frac{3a}{b}\right) . 4ab$; $4a^2bm . \frac{3xy}{8am^2}$; $\left(-\frac{9a^4}{20b^2c^2}\right) . (-16b^3c)$.

14. $\frac{3ab}{4bc - 6c^2} . 6ac$. 15. $\frac{8a^2}{4b^2 - 3bc} . (-12ab^2c)$.

16. $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}$; $\frac{3m}{2n} \cdot \frac{2x}{3y}$; $\frac{8abx}{9mny} \cdot \frac{5mx}{4ay}$.

17. $\frac{3a^2b}{5mp^2} \cdot \frac{4mp}{9ab}$; $\left(-\frac{3pq}{5rs}\right) \cdot \left(-\frac{2ps}{3qr}\right)$; $\left(-\frac{5c^3}{6d^3}\right) \cdot \frac{2d}{3c^2}$.

18. $\frac{a}{a+b} \cdot \frac{n+p}{n}$; $\frac{x-a}{y-b} \cdot \frac{x+a}{y+b}$; $\frac{a-1}{a+1} \cdot \frac{a^2-1}{a}$.

19. $\frac{24a^3b^2}{25m^2n^3} \cdot \frac{15mn^2}{8a^2b}$; $\left(-7\frac{2}{3}\ \frac{m^3x}{n^3y}\right)\left(-5\ \frac{m^2x^2y^2}{n^2z^2}\right)$.

20. $\left(\frac{3a}{5b} - \frac{5a^2}{6c}\right) . 30bc$; $\left(\frac{16x^2}{7uv} + \frac{3x}{5uv} - \frac{2}{w}\right) . 35uvw^2$.

21. $\frac{3a+4b}{2a-b} \cdot \frac{a-b}{3a-2b}$; $\frac{(a-b)^2}{a+b} \cdot \frac{6}{x(a-b)}$.

22. $\frac{x^2+xy}{x^2+y^2} \cdot \frac{x^3-y^3}{xy(x+y)}$; $\frac{3ax}{4by} \cdot \frac{a^2-x^2}{c^2-x^2} \cdot \frac{c+x}{a-x}$.

23. $\frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{x^2-1}{x^2+2x+1} \cdot \frac{1}{x-1}$.

24. $\left(\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d}\right)m$; $\left(3 - \frac{2x}{5y}\right)15\frac{x}{y}$.

25. $\left(\frac{3a}{6} \cdot \frac{n}{5m} - \frac{3n}{2m}\right)\ \frac{8mx}{3ny}$.

26. $\left(\frac{5ax}{8by} \cdot \frac{25y^2}{12abx^2} - \frac{3}{4} . \frac{ax}{b^2} \cdot \frac{a^2}{by}\right)\ \frac{48b^3x}{y^2}$.

27. $\left(\frac{1}{ax} + \frac{1}{by} + \frac{1}{cz}\right) . x^2y^2z^2.$

28. $\left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q}\right)\left(\frac{m}{n} - \frac{p}{q}\right); \quad \left(\frac{3x}{4y} - \frac{4r}{5s}\right)\left(\frac{3x}{4y} + \frac{4r}{5s}\right).$

29. $\left(1 + \frac{x}{y}\right)\left(1 - \frac{x}{y}\right) : \frac{x(a-x)}{a^2 + 2ax + x^2} \cdot \frac{a(a+x)}{a^2 - 2ax + x^2}.$

30. $\left(\frac{a+b}{a-b} + 1\right)\left(1 - \frac{a-b}{a+b}\right).$

31. $\left(\frac{3x^2}{y^2} - \frac{4x}{5y} + 2\right)\left(\frac{y}{x} + 3\right).$

32. $\left(\frac{1}{a^2} + \frac{ax}{a} + 3x^2\right)\left(\frac{1}{x} + a\right).$

33. $\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x}{a} + 1\right)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{x}{a} + 1\right).$

34. $\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5}{x-1} - \frac{7}{x^2-1}\right) . \frac{x^2-1}{x^2+1}.$

35. $\left(\frac{a^2b}{cm} - 10\right)\left(\frac{a^2b}{cm} + 10\right).$

36. $\left(1 + \frac{2b}{m^3}\right)^2.$

37. $\left(1 - \frac{3ab}{4xy}\right)^2.$

38. $\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right)^2.$

39. $\left(\frac{2a}{4m} - 3ay\right)^2.$

40. $\left(\frac{4y}{5} + \frac{b}{yz}\right)^2.$

41. $\left(\frac{ab}{y} + \frac{m}{x}\right)^3.$

42. $\left(\frac{1}{y} - \frac{2a}{m}\right)^3.$

43. $\left(\frac{2m}{xy} - \frac{p^2}{z^2}\right)^3.$

44. $\left(4 - \frac{x^2y}{mz^2}\right)^3.$

§. 50.

Dzielenie ułamków.

1. $\frac{a}{b} : c = \frac{a : c}{b} = \frac{a}{bc}.$

2. $m : \frac{a}{b} = (m : a) . b = \frac{mb}{a}.$

3. $\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{a : m}{b : n} = \frac{an}{bm}.$

4. $\frac{16}{25} : 8$; $\frac{5}{6} : 4$; $35\frac{3}{8} : 12$; $25 : 4\frac{1}{6}$; $15\frac{1}{2} : 16\frac{1}{3}$.

5. $(31\frac{1}{4} + 20\frac{5}{8} - 16\frac{1}{3}) : 7\frac{3}{5}$.

6. $[(16\frac{1}{4} + 20\frac{5}{9})3\frac{1}{4}] : (12\frac{1}{3} - 3\frac{2}{9})$.

7. $\frac{ab}{c} : a = \frac{b}{c}$; $\frac{15bc}{14ad} : (-3c) = -\frac{5b}{14ad}$.

8. $\left(-\frac{3ab}{c}\right) : 4d = \frac{3ab}{4cd}$. 9. $\left(-\frac{5ax^2}{6y}\right) : (-6y) = \frac{5ax^2}{36y^2}$.

10. $6b^2c : \frac{bc}{a} = \frac{6ab^2c}{bc} = 6ab$.

11. $\frac{a^2}{b} : a$; $\frac{4a}{3b} : 2a$; $\frac{6a}{5b} : 3a$; $\frac{35a^2b}{3c} : 7ab$.

12. $\frac{3ax}{4by} : \left(-\frac{9a^2x^2}{2b^2y^2}\right) = \frac{3ax}{4by} \cdot \left(-\frac{2b^2y^2}{9a^2x^2}\right) = -\frac{by}{6ax}$.

13. $\frac{m^2}{n^2} : mn$; $\frac{7a^3}{2b^2} : 3ab$; $\frac{18x^2y}{25m} : \frac{3}{5}mxy$.

14. $8x : \frac{2a}{3b}$; $25m^2n : \frac{5m}{6n}$; $16x^2y^2 : \frac{4ax^5}{3by}$.

15. $\frac{m}{n} : \frac{p}{q}$; $\frac{3a}{3b} : \frac{2b}{3}$; $\left(-\frac{25a^2}{18b^2}\right) : \frac{5b}{6a}$.

16. $\frac{3}{8x^2y^2} : \frac{5}{4xy}$; $\frac{23ab^2}{18xy^2} : \frac{4ab}{9xy}$; $\frac{16m^2p}{13nq^2} : \frac{5\frac{1}{3}np}{6\frac{1}{2}mq}$.

17. $\left(a - \frac{a^2}{a-1}\right) : (a+1)$. 18. $\left(1 + \frac{m}{x}\right) : \left(1 - \frac{m}{x}\right)$.

19. $\left(\frac{1}{a^2x^2} + \frac{1}{ax} + 1\right) : 2ax$. 20. $\frac{a^2 - b^2}{2ab} : \left(1 + \frac{b}{a}\right)$.

21. $\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) : \frac{a^2 - b^2}{ab}$. 22. $\left(\frac{3a^2}{8b} \pm \frac{7b^2}{9a}\right) : \frac{2a}{5b}$.

23. $\left(\frac{12a^2}{25b^2} \pm \frac{8a}{15b}\right) : \frac{4a}{5b}$. 24. $\frac{2ay - y^2}{2ay + a^2} : \frac{ay - 2a^2}{ay + 2y^2}$.

25. $\left(\frac{8m}{5p^3} + \frac{12m^2}{5p^2} - \frac{5m^3}{3p} + \frac{14m^4}{5} - \frac{72m^5b}{5} : \frac{8b^2}{5a^2}\right)$.

26. $\left(\frac{16a^4}{x^4} - \frac{b^4}{y^4}\right) : \left(\frac{2a}{x} + \frac{b}{y}\right) =$

27. $\left(\frac{8a^6}{27b^3} - \frac{63x^3}{y^3}\right) : \left(\frac{2a^2}{x} - \frac{4x}{y}\right) =$

28. $\left[\frac{8m^3}{y^3} + \frac{12m^2p}{y^2z} + \frac{6mp^2}{yz^2} - \frac{p^3}{y^3}\right] : \left[\frac{4m^2}{y^2} - \frac{4mp}{yz} + \frac{p^2}{z^2}\right].$

29. $\left[\frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^3y^2} - \frac{1}{x^2y^3} - \frac{1}{y^5}\right] : \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2}\right].$

30. $\left[\frac{1}{ab^4} + \frac{3}{b^3} + \frac{6a}{b^2} + \frac{5a^2}{b} + 3a^3\right] : \left[\frac{1}{a^2} + \frac{2b}{a} + 3b^2\right].$

Uprościć:

31. $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{m}{n}} = \dfrac{an}{bm}.$

32. a) $\dfrac{\frac{3}{8}}{\frac{2}{3}}$; b) $\dfrac{4\frac{1}{2}}{5\frac{1}{3}}$; c) $\dfrac{\frac{5}{6} - \frac{2}{3}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{8}}.$

33. a) $\dfrac{\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6}}$; b) $\dfrac{3 - \frac{2}{3}}{2 + \frac{4}{5}} : \dfrac{1 - \frac{2}{3}}{5 - \frac{3}{4}}.$

34. a) $\dfrac{x - y}{\frac{x}{y}}$; b) $\dfrac{\frac{3a}{7b}}{m + n}.$

35. a) $\dfrac{\frac{m+p}{a}}{\frac{p+q}{b}}$; b) $\dfrac{\frac{a+b}{ab}}{\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}}.$

36. a) $\dfrac{\frac{m^2-n^2}{x^2-y^2}}{\frac{m+n}{x-y}}$; b) $\dfrac{\frac{a+x}{a-x} + \frac{a-x}{a+x}}{\frac{a+x}{a-x} - \frac{a-x}{a+x}}.$

37. $\left[\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b}\right] : \left[\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} - \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right].$

38. $\dfrac{\frac{m^2+n^2}{n} - m}{\frac{1}{n} - \frac{1}{m}} \cdot \dfrac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}.$

39. a) $\dfrac{a}{b + \frac{c}{d}}$; b) $\dfrac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c}} \cdot \left[1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right].$

40. $\dfrac{\frac{x-1}{x+1} - 1}{\frac{x+1}{x-1} + 1} : \dfrac{2}{x^2 + 3x + 2}.$

ROZDZIAŁ VIII.

O równaniach stopnia pierwszego z jedną niewiadomą.

§. 51.

Określenia.

1. Wszelką równość dwu wyrażeń algebraicznych, zawierających w sobie liczby niewiadome, nazywamy równaniem *(Gleichung)*. Wyrażenie, znajdujące się po lewéj stronie znaku równości, zowie się pierwszą stroną *(Seite)*, a wyrażenie, znajdujące się po prawéj stronie znaku równości, zowie się drugą stroną równania.

Równanie zowie się tożsamościowém *(identisch)*, jeżeli obie strony jego będą równe, jakiekolwiek wartości szczególne podstawi się w nich za liczby niewiadome. Takiém jest n. p. równanie

$$x^2-4=(x-2)(x+2) \text{ lub } (x-1)^2=x^2-2x+1,$$

albowiem każda upodobana wartość na x sprawdza jedno i drugie równanie.

Równanie tożsamościowe, zowie się krócéj tożsamością *(Identität)*.

Równanie zowie się warunkowém *(Bestimmungsgleichung)*, jeżeli równość dwu jego stron ma miejsce tylko przy pewnéj wartości lub tylko przy pewnych wartościach na niewiadome. Takiém jest n. p. równanie

$$x+2=7,$$

gdyż to równanie sprawdza tylko $x=5$.

Mówić będziemy tylko o równaniach warunkowych, które będziemy w krótkości nazywali równaniami.

Wartości na niewiadome, przy których zachodzi równość obu stron równania, czyli wartości na niewiadome, które równanie sprawdzają, zowią się pierwiastkami równania *(Wurzeln)*. Równanie rozwiązać znaczy znaleść jego pierwiastki.

2. Równanie może zawierać jednę niewiadomą albo więcéj niewiadomych, a te niewiadome mogą wchodzić w równanie z różnymi wykładnikami potęgowymi. Stąd téż — stósownie do ilości niewiadomych — dzielimy równania: na równania z jedną i z więcéj niewiadomymi. Niewiadome w równaniu oznaczamy zwykle ostatnimi literami alfabetu x, y, z. Przy téjsaméj ilości niewiadomych dzielimy równania następnie na równania 1., 2., 3.,... stopnia.

Stopień *(Grad)* równania z jedną niewiadomą wskazuje wykładnik potęgowy najwyższy, z jakim ta niewiadoma wchodzi do równania. W równaniach zaś z więcéj niewiadomymi, stopień wskazuje suma wykładników liczb niewiadomych, wzięta w tym wyrazie, w którym ta suma jest największą.

N. p. równania

$$ax + b = c, \quad x^2 + 2bx + c = x + d,$$
$$x^3 + ax^2 + bx = cx^2 + dx + f$$

są równaniami z jedną niewiadomą, i to pierwsze 1., następne 2., ostatnie 3. stopnia.

Równania

$$ax + by + c = a'x + b'y + c', \quad ax^2 + 2bxy + cy^2 = 2dx + 2ey + f,$$
$$ax + bx^2y = cy^2 + d$$

są równaniami z dwiema niewiadomymi, i to 1., 2. i 3. stopnia.

Równania

$$ax + by = cz + dx + e, \quad x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1$$

są równaniami z trzema niewiadomymi, pierwsze 1., wtóre 3. stopnia.

3. Algebra sprowadza rozwiązanie wszelkich zagadnień rachunkowych do rozwiązania równań. Jakoż w każdém zagadnieniu rachunkowém zachodzą wielkości wiadome, czyli dane zagadnienia, i wielkości niewiadome, których wartość trzeba wyznaczyć zapomocą pewnych związków między tymi

dwojakimi wielkościami, które samo wysłowienie zagadnienia wskazuje.

Owoż, chcąc zagadnienie rozwiązać algebraicznie, naprzód potrzeba oznaczyć odpowiednio wielkości wiadome i niewiadome, a następnie zapomocą znanych znaków i działań przedstawić związki, jakie między tymi wielkościami zachodzą, i te związki tak ułożyć, aby — stósownie do jakości zagadnienia — otrzymać jedno lub więcéj równań.

Ułożywszy tym sposobem zagadnienie w równania, przystępuje się wreszcie do rozwiązania tychże równań, t. j. do pewnych ich przekształceń, zmierzających do tego, aby wielkości niewiadome wyrazić przez wiadome.

Rozwiązanie więc algebraiczne zagadnień rachunkowych składa się z dwu części różnych: 1. z układania zagadnienia w równania i 2. z rozwiązania tychże równań. Układanie w równania jest działaniem trudniejszém, gdyż zmienia się razem z gatunkiem zagadnienia, gdy tymczasem samo rozwiązanie równań opiera się na stósowaniu niewielu prostych i stałych prawideł. Dlatego zajmiemy się naprzód rozwiązaniem równań, przyczém poprzestaniemy tutaj tylko na równaniach stopnia 1-go z jedną niewiadomą, których kształt ogólny jest:

$$ax + b = cx + d.$$

gdzie a, b, c, d są liczby wiadome, a x oznacza liczbę niewiadomą.

§. 52.

Rozwiązanie równań stopnia 1-go z jedną niewiadomą.

Rozwiązanie równań stopnia 1-go z jedną niewiadomą opiera się na dwu przekształceniach tychże równań, jakimi są: 1. przenoszenie wyrazów i 2. uwolnienie od mianowników. Te zaś przekształcenia opierają się na następującéj prawdzie oczywistéj:

„Jeżeli dwa wyrażenia są równe i jeżeli na obu uskutecznimy tesame działania, to i wypadki tych działań będą równe“, z którego wypływają dwie zasady:

1. W każdém równaniu można dodać do obu stron lub odjąć od obu stron tęsamę wielkość, nie

znosząc równania, t. j. jeżeli n. p. $x = a - b$, wówczas także

$$x + m = a - b + m \quad \text{i} \quad x - m = a - b - m.$$

2. W każdém równaniu można pomnożyć obie strony albo téż podzielić je przez tęsamę wielkość, nie znosząc równania, t. j. jeżeli n. p. $x = a - b$, wówczas także

$$mx = ma - mb \quad \text{i} \quad \frac{x}{m} = \frac{a}{m} - \frac{b}{m}.$$

3. Przenoszenie wyrazów zależy na tém, aby pewne wyrazy, znajdujące się z jednéj strony znaku równości, umieścić na drugiéj stronie tegoż znaku. To przekształcenie uskutecznia się zapomocą stósowania pierwszéj z powyższych zasad.

Niech n. p. dane będzie równanie

$$ax - b = cx - d.$$

Chcąc wyraz b strony pierwszéj przenieść na drugą stronę, dość do obu stron dodać b; otrzymamy wtedy

$$ax - b + b = cx - d + b, \quad \text{czyli} \quad ax = cx + b - d.$$

Chcąc następnie wyraz cx drugiéj strony przenieść na pierwszą, dość od obu stron odjąć cx; mamy zatém

$$ax - cx = cx + b - d - cx, \quad \text{czyli} \quad ax - cx = b - d.$$

Chcąc więc jaki wyraz przenieść z jednéj strony równania na drugą, dość opuścić go na stronie, gdzie się pierwotnie znajdował, a natomiast dopisać go do drugiéj strony ze znakiem przeciwnym.

4. Uwolnienie od mianowników ma na oku uwolnienie równania od wyrazów ułamkowych. To przekształcenie uskutecznia się przez stósowanie drugiéj z powyższych zasad.

Niech n. p. dane będzie równanie

$$\frac{x}{m} - a = \frac{bx}{n} + \frac{c}{p},$$

zawierające trzy wyrazy ułamkowe. Aby je uwolnić od tych wyrazów, dość obie strony pomnożyć przez spólną wielokrotność mianowników (pospolicie najmniejszą), t. j. przez mnp. Otrzymamy wtedy

$$\left(\frac{x}{m} - a\right) mnp = \left(\frac{bx}{n} + \frac{c}{p}\right) mnp, \quad \text{czyli}$$

$$npx - amnp = bmpx + cmn.$$

5. Mając rozwiązać jakie równanie stopnia 1-go z jedną niewiadomą, wykonywamy 5 następujących działań w porządku następującym:

a) Znosimy mianowniki, jeżeli w równaniu zachodzą wyrazy ułamkowe;

b) Przenosimy wszystkie wyrazy, zawierające niewiadomą, na pierwszą stronę, a wszystkie wyrazy wiadome na drugą stronę;

c) Upraszczamy obie strony przez redukcyą wyrazów podobnych;

d) Na pierwszéj stronie wyłączamy niewiadomą jako czynnik spólny za nawias;

e) Obie strony dzielimy przez spółczynnik niewiadoméj.

Wykonawszy te działania, dojdziemy do tego, że po jednéj stronie będzie tylko niewiadoma, a po drugiéj będą same wiadome.

6. Zastósujemy te prawidła do kilku przykładów.

Przykład 1. Niech będzie naprzód dane równanie

$$x + 5 = 12.$$

Przenieśmy wyraz 5 na drugą stronę i uprośćmy, a mieć będziemy kolejno

$$x = 12 - 5 \quad \text{i} \quad x = 7.$$

Sprawdzenie. Liczba 7 jest rzeczywiście wartością niewiadoméj x; bo gdy w równaniu za x podstawimy 7, pierwsza strona stanie się równą drugiéj; albowiem $7 + 5 = 12$.

Przykład 2. Niech będzie dane równanie

$$5x - 7 = 3x + 9.$$

Jeżeli wyrazy -7 i $3x$ przeniesiemy, otrzymamy naprzód

$$5x - 3x = 9 + 7.$$

Uprośćmy obie strony, a otrzymamy następnie

$$2x = 16.$$

Podzielmy nareszcie obie strony przez 2, a znajdziemy

$$x = \frac{16}{2} = 8.$$

Sprawdzenie. $5.8-7=3.8+9$, czyli $40-7=24+9$, t. j. $33=33$.

Przykład 3. Niech będzie dane równanie ogólne

$$ax + b = cx + d.$$

Jeżeli $+b$ i $-cx$ przeniesiemy, wyłączymy x za nawias i przez spółczynnik niewiadoméj x podzielimy, otrzymamy kolejno

$$ax - cx = d - b, \quad (a-c)x = d - b, \quad x = \frac{d-b}{a-c}.$$

Sprawdzenie.

$$a \cdot \frac{d-b}{a-c} + b = c \cdot \frac{d-b}{a-c} + d;$$

sprowadźmy do spólnego mianownika, a otrzymamy

$$\frac{a(d-b) + b(a-c)}{a-c} = \frac{c(d-b) + d(a-c)}{a-c},$$

jeżeli opuścimy spólny mianownik i wykonamy działanie,

$$ad - ab + ab - bc = cd - bc + ad - cd,$$

jeżeli znów uprościmy, znajdziemy ostatecznie

$$ad - bc = ad - bc.$$

Przykład 4. Weźmy następnie pod uwagę równanie

$$\frac{2x}{3} - 8 = \frac{x}{4} + \frac{2}{5}.$$

Znieśmy mianowniki, a otrzymamy

$$40x - 480 = 15x + 24,$$

a następnie będzie kolejno:

$$40x - 15x = 24 + 480, \quad 25x = 504, \quad x = \frac{504}{25} = 20\frac{4}{25} = 20 \cdot 16.$$

Sprawdzenie.

$$\frac{2 \,.\, 20 \cdot 16}{3} - 8 = \frac{20 \cdot 16}{4} + \frac{2}{5};$$

znieśmy mianowniki, a otrzymamy

$$20 \,.\, 2 \,.\, 20 \cdot 16 - 8 \,.\, 60 = 15 \,.\, 20 \cdot 16 + 2 \,.\, 12,$$

wykonawszy wreszcie działanie, mamy

$$326 \cdot 40 = 326 \cdot 40.$$

Przykład 5. Niech nareszcie dane będzie równanie ogólne:

$$\frac{ax}{m} + b = c - \frac{dx}{n}.$$

Stósując powyższe prawidła, znajdziemy kolejno:

$$anx + bmn = cmn - dmx, \quad anx + dmx = cmn - bmn,$$

$$(an + dm)x = cmn - bmn, \quad x = \frac{cmn - bmn}{an + dm} = \frac{mn(c-b)}{an + dm}.$$

Sprawdzenie.

$$\frac{a}{m}\cdot\frac{mn(c-b)}{an+dm}+b=c-\frac{d}{n}\cdot\frac{mn\,(c-b)}{an+dm},$$

$$\frac{an(c-b)}{an+dm}+b=c-\frac{dm(c-b)}{an+dm},$$

$$\frac{an(c-b)+b(an+dm)}{an+dm}=\frac{c(an+dm)-dm(c-b)}{an+dm},$$

$$an(c-b)+b(an+dm)=c(an+dm)-dm(c-b),$$

$$acn-abn+abn+bdm=acn+cdm-cdm+bdm,$$

$$acn+bdm=acn+bdm.$$

§. 53.

Zadania.

Rozwiązać następujące równania:

1. $7x+5=5x+11$.
2. $5x-7=3x+7$.
3. $12x-9=8x-1$.
4. $26-8x=80-14x$.
5. $127+9x=12x+100$.
6. $15-5x=6-4x$.
7. $3x-22=7x+6$.
8. $8+4x=12x-16$.
9. $125-7x=145+12x$.
10. $5x-(3x-7)=4x$.
11. $9x-2(5x-6)+30=0$.
12. $x-7(4x-11)=14(x-5)-19(8-x)-61$.
13. $a^2(a-x)+b^2(b+x)=abx$.
14. $a^2(x-a)+b^2(x-b)=abx$.
15. $a(x-a)+b(x-b)-c(x-c)=2ab$.
16. $7\frac{1}{2}x+5\frac{1}{3}=3\frac{1}{4}x-3\frac{1}{6}$.
17. $2(x-0{\cdot}1)+3(2x-0{\cdot}01)+4(3x-0{\cdot}001)=24{\cdot}446$.
18. $7(3x+\frac{1}{2})-6(4x-\frac{1}{3})-5(5x+\frac{1}{4})+2\frac{3}{4}=0$.
19. $\frac{2x+1}{2}=\frac{7x+5}{8}$.
20. $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}-\frac{x}{4}=\frac{1}{2}$.
21. $\frac{5x-11}{4}-\frac{x-1}{10}=\frac{11x-1}{12}$.
22. $\frac{5x}{3}+1-\frac{3x-7}{2}=5x-10$.

23. $\frac{5x-1}{7}+\frac{9x-5}{14}=\frac{9x-7}{2}.$

24. $\frac{5x-7}{2}-\frac{2x+7}{3}=3x-14.$

25. $\frac{2x-1}{3}-\frac{3x-2}{4}=\frac{5x-4}{6}-\frac{7x+6}{12}.$

26. $x=3x-\frac{1}{2}(4-x)+\frac{1}{3}.$

27. $\frac{0{\cdot}1x-0{\cdot}2}{3}-\frac{0{\cdot}3x+0{\cdot}4}{5}=24-x-\frac{0{\cdot}5x+0{\cdot}6}{7}.$

28. $\frac{1-0{\cdot}1x}{2}=\frac{2-0{\cdot}2x}{5}+\frac{1-0{\cdot}3x}{8}.$

29. $\frac{6x+7}{5}+\frac{13-3(7-6x)}{23}+2=\frac{11x+3}{4}.$

30. $\frac{15}{x}-\frac{13}{4x}+\frac{16}{3x}=\frac{205}{36}.$

31. $(x+7)\,(x-3)=(x-5)\,(x-15).$

32. $(7-6x)\,(3-2x)=(4x-3)\,(3x-2).$

33. $(x+5)^2-(4-x)^2=21x.$

34. $5(x-2)^2+7(x-3)^2=(3x-7)\,(4x-19)+42.$

35. $\frac{x-1}{x+1}=\frac{2}{3}.$

36. $\frac{2-x}{x-1}=2.$

37. $\frac{3x-7}{3x-12}=\frac{4}{3}.$

38. $\frac{36}{3x-36}=-6.$

39. $\frac{42-(4x-14)}{2x-7}=\frac{20}{11}.$

40. $\frac{17x-5}{60-(51-15x)}=\frac{1}{2}.$

41. $\frac{x-1}{x-2}-\frac{x-2}{x-3}=\frac{x-5}{x-6}-\frac{x-6}{x-7}.$

42. $\frac{2}{2x-5}+\frac{1}{x-3}=\frac{6}{3x-1}.$

43. $\frac{1}{2}\left(x-\frac{a}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(x-\frac{a}{4}\right)+\frac{1}{4}\left(x-\frac{a}{5}\right)=0.$

44. $ax+b=\frac{x}{a}+\frac{1}{b}.$

45. $\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{c}+\frac{x-c}{a}=\frac{x-(a+b+c)}{abc}.$

46. $\frac{a+b}{x-c}=\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}$. 47. $\frac{0{\cdot}1-x}{0{\cdot}3+x}=\frac{0{\cdot}4-3x}{0{\cdot}6+3x}$.

48. $\frac{a-x}{x-b}=\frac{a}{b}$. 49. $\frac{x+b}{b}-\frac{2x}{a}=\frac{a-bx}{ab}+\frac{1+a}{a}$.

50. $\frac{9-2x}{7x-12}=\frac{4x+1}{81-14x}$. 51. $\frac{15x-37}{9x-26}=\frac{15x-29}{9x-25}$.

52. $\frac{\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}x-\frac{4}{5}}=\frac{\frac{5}{6}x-\frac{6}{7}}{1\frac{1}{4}x+1\frac{4}{5}}$. 53. $\frac{1{\cdot}1-0{\cdot}1x}{1{\cdot}2x-0{\cdot}2}=\frac{1{\cdot}01-0.01x}{0{\cdot}12x-1{\cdot}82}$.

54. $\frac{(8-3x)^2}{1-x}+16(1-x)=\frac{(9-5x)^2}{1-x}$.

55. $\frac{x+1}{x}+\frac{1}{x(x-1)}=\frac{1+a}{2}$.

56. $(a+x)\,(b+x)-a(b+c)=\frac{a^2c}{b}+x^2$.

57. $\left[\frac{x-a}{x+b}\right]^3=\frac{x-2a-b}{x+a+2b}$.

58. $0{\cdot}15x+1{\cdot}575-0{\cdot}875x=0{\cdot}0625x$.

59. $1{\cdot}2x-\frac{0{\cdot}18x-0{\cdot}05}{0{\cdot}5}=0{\cdot}4x+8{\cdot}9$.

60. $(10y-5):(3y-2)=1:\frac{2}{7}$.

61. $5[4-3(2-x)]=8[7-(6-2x)]$.

62. $\left(\frac{x}{5}+1\right):\frac{2x-1}{7}=6:7$.

63. $2\frac{5}{12}+[5\frac{2}{3}-(6\frac{3}{4}-11x)]=6\frac{1}{3}-x$.

64. $\left(\frac{3}{x}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{5}{x}-\frac{1}{2x}\right)+\frac{4}{x}=0$.

65. $\sqrt{x}-4=6$. 66. $3\sqrt{x-1}=4$.

67. $\sqrt[3]{2x+7}=3$. 68. $\sqrt{x^2+2ax}=x-\frac{a}{2}$.

69. $3x^3=375$.

70. $4x^3\pi=3v$, gdzie $v=25$, $\pi=3{\cdot}1416$.

§. 54.

Układanie zagadnień w równania.

1. Nie ma żadnego prawidła stałego na układanie zagadnień w równania. Wszelako następujące prawidło, gruntownie

rozważone, będzie w téj mierze użyteczne jako cenna wskazówka. Należy uważać zagadnienie za rozwiązane i wskazać zapomocą znaków algebraicznych na wielkościach wiadomych, oznaczonych czy to liczbami czy to literami, i na wielkościach niewiadomych, które się zawsze oznacza literami, te rozumowania i działania, któreby potrzeba uskutecznić, chcąc sprawdzić wartości wielkości niewiadomych, gdyby te wartości były dane.

Chcąc tego prawidła użyć, trzeba pierwéj pilnie wyznaczyć, jakie są działania, które wysłowienie danego zagadnienia wyraźnie lub niewyraźnie w sobie zamyka; lecz na tém właśnie zależy cała trudność w ułożeniu zagadnienia w równanie. Dlatego wyjaśnimy stósowanie tego prawidła na szeregu przykładów.

2. Zagadnienie 1. Znaleść liczbę, któréj pięciokrotność, pomniejszona o 17, jest równa trzykrotności téjże liczby, powiększonéj o 41.

Tu już proste odczytanie samego wysłowienia prowadzi bezpośrednio do równania. Jakoż, jeżeli liczbę szukaną oznaczymy przez x i warunki zagadnienia wyrazimy zapomocą znaków algebraicznych, otrzymamy odrazu

$$5x - 17 = 3x + 41;$$

stąd $5x - 2x = 41 + 17$, czyli $2x = 58$, a nareszcie $x = 29$.

Sprawdzenie:

$5.29 - 17 = 3.29 + 41$, $145 - 17 = 87 + 41$, t. j. $128 = 128$.

Zagadnienie 2. Pewien człowiek umierając pozostawia $\frac{1}{3}$ majątku synowi, $\frac{1}{5}$ córce, a resztę wynoszącą 1500 zł. ubogim gminy: znaleść całkowity majątek téj osoby, tudzież działy syna i córki.

Oznaczmy przez x majątek zmarłego i — zgodnie z powyższém prawidłem — wskażmy działania, jakieby na wartości liczby x należało uskutecznić, w celu sprawdzenia téjże wartości, a otrzymamy $\frac{x}{3}$ jako dział syna i $\frac{x}{5}$ jako dział córki, te zaś dwa działy, dodane do 1500 zł. pozostałych, powinny dorównać całemu majątkowi zmarłego, t. j. liczbie x. A zatém

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{5} + 1500 = x.$$

Rozwiążmy to równanie, a otrzymamy kolejno:

$$5x + 3x + 22500 = 15x, \quad 22500 = 15x - 8x, \quad 7x = 22500,$$

$$x = \frac{22500}{7} = 3214{\cdot}285\,..\text{zł.}$$

A więc syn otrzyma $\frac{3214{\cdot}285}{3} = 1071{\cdot}428\,..$zł.

córka „ $\frac{3214{\cdot}285}{5} = 642{\cdot}857$ „

ubodzy „ $1500{\cdot}000$ „

razem $3214{\cdot}285\,..$zł.

Zagadnienie 3. Pewna osoba, zapytana o wiek, odpowiedziała: mój wiek będzie po 10 latach dwa razy większym, aniżeli był przed 4 laty. Ile lat ma ta osoba?

Oznaczmy przez x ilość lat téj osoby; wiek téj osoby po 10 latach będzie $x + 10$, a jéj wiek przed 4 laty był $x - 4$; a że pierwszy jest dwa razy większy, niż drugi, więc

$$x + 10 = 2(x - 4).$$

Rozwiązanie tego równania daje $x = 18$. Wstawmy tę wartość za x w powyższe równanie, a otrzymamy

$$18 + 10 = 2(18 - 4), \text{ czyli } 28 = 2 . 14 \text{ t. j. } 28 = 28.$$

Zagadnienie 4. Handlujący kupuje towar, który następnie sprzedaje za cenę o 753 zł. większą, aniżeli była cena kupna. Wiedząc, że miał zysku 15% na cenie sprzedaży, pytamy się, jaka była cena kupna?

Jeżeli x oznacza cenę kupna, to $x + 753$ będzie ceną sprzedaży. Procenta po 15% od téj ceny sprzedaży wynoszą $\frac{(x + 753) . 15}{100}$; a że te procenta przedstawia liczba 753 zł., mamy

zatém $$\frac{(x + 753) . 15}{100} = 753,$$

czyli $15x + 753 . 15 = 75300$, $15x = 64005$, skąd $x = 4267$ zł.

Sprawdzenie: Cena sprzedaży $4267 + 753 = 5020$ zł., a 15% od téj ceny sprzedaży $\frac{5020 . 15}{100} = 753$, jak być powinno.

Zagadnienie 5. Woda, jedném korytem płynąca, napełnia sadzawkę w przeciągu 2 godzin, inném zaś korytem puszczona do téj sadzawki, napełniłaby ją w przeciągu 3 godzin;

za ileż godzin sadzawka może być napełniona, gdy się wodę puści do niéj oboma korytami?

Oznaczmy przez x ilość godzin szukaną i zdajmy sobie sprawę, jaką część sadzawki wypełniłaby woda w jednéj godzinie, gdybyśmy ją puścili tylko pierwszém i tylko drugiém korytem. Nadto oznaczmy przez 1 objętość całkowitą sadzawki, gdyż ta objętość nie jest dana.

Owoż powiadamy: Skoro woda, puszczona pierwszém korytem, napełniłaby sadzawkę w 2 godzinach, więc w 1 godzinie wypełniłaby ona tylko połowę objętości sadzawki, czyli $\frac{1}{2}$, a w x godzinach x razy więcéj, niż $\frac{1}{2}$, t. j. $\frac{x}{2}$. Podobnie, skoro woda, puszczona drugiém korytem, wypełniłaby sadzawkę w 3 godzinach, więc w 1 godzinie wypełniłaby tylko trzecią część objętości sadzawki, czyli $\frac{1}{3}$, a w x godzinach x razy więcéj, t. j. $\frac{x}{3}$.

Atoli, skoro w x godzinach woda, płynąca oboma korytami naraz, powinna wypełnić całą objętość sadzawki, potrzeba zatém, aby suma objętości $\frac{x}{2}$ i $\frac{x}{3}$ równała się całkowitéj objętości sadzawki, czyli 1. Mamy więc równanie

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=1,$$

stąd wypływa kolejno: $3x+2x=6$, $5x=6$, $x=\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}$ godz. $=1$ godzina 12 minut.

Rozwiążmy tosamo zagadnienie ogólnie.

Zagadnienie 6. Woda, jedném korytem płynąca, napełnia sadzawkę, mającą c metrów sześciennych w objętości, w a godzinach; inném zaś korytem puszczona do téjże sadzawki, napełniłaby ją w przeciągu b godzin; w iluż godzinach sadzawka może być napełniona, gdy się wodę puści do niéj naraz obydwoma korytami?

Rozumując tak, jak poprzednio, znajdziemy: 1. że woda, puszczona pierwszém korytem, napełniłaby w ciągu 1 godziny $\frac{1}{a}$ objętości sadzawki, t. j. $\frac{c}{a}$, a przeto w x godzinach $\frac{cx}{a}$; 2. że woda, wpuszczona drugiém korytem, napełniłaby w ciągu 1 godziny $\frac{1}{b}$ objętości sadzawki, t. j. $\frac{c}{b}$, a przeto w x godzinach $\frac{cx}{b}$.

A że suma tych dwu objętości powinna być równa objętości całkowitéj, mamy zatém równanie

$$\frac{cx}{a} + \frac{cx}{b} = c,$$

lub podzieliwszy obie strony przez c,

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1.$$

Stąd wypływa kolejno:

$$bx + ax = ab, \quad (a + b)x = ab, \quad x = \frac{ab}{a+b}.$$

Ten wzór wskazuje prawidło ogólne na wynalezienie czasu, potrzebnego do napełnienia sadzawki dwoma korytami, gdy się zna czasy potrzebne do napełnienia sadzawki każdém z obu koryt z osobna, a mianowicie: iloczyn tych dwu czasów potrzeba podzielić przez ich sumę.

A więc, jeżeli n. p. $a = 2$, $b = 3$, to $x = \frac{2.3}{2+3} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$, jak w zagadnieniu 5.

Uwaga. Tensam wzór służy do rozwiązania wszelkich zagadnień tegosamego gatunku, w jakimkolwiek sposobie wysłowionych. Zagadnienie n. p. następujące:

Do wykorczowania pewnéj zarośli potrzebuje jeden robotnik 25 tygodni i 4 dni, a drugi ukończyłby tęsamę robotę za 13 tygodni i 5 dni: w jakimże czasie obaj razem tę zarośl wykorczują?

Tutaj $a = 25$ tygodni 4 dni $= 154$ dni, $b = 13$ tygodni i 5 dni $= 83$ dni, a więc szukana ilość dni $x = \frac{ab}{a+b} = \frac{154.83}{154+83} =$ $= 53\frac{221}{237}$ dni. [Przyjęto, że tydzień roboczy zawiera sześć dni roboczych].

Zagadnienie 7. Pan, przyjmując sługę, umawia się z nim, że mu za każdy dzień dopełnionych należycie obowiązków służby zapłaci a zł., za każdy zaś dzień zaniedbania tychże obowiązków wytrąci z zasług b zł. Po upływie c dni sługa dostał podług umowy d zł.: przez ileż dni należycie dopełniał obowiązków służby?

Gdybym znalazł szukaną liczbę dni dopełnionych obowiązków, a chciałbym się przekonać, czy ta liczba jest prawdziwą, takbym tego doszedł: naprzód tę liczbę x odjąłbym od c, różnica $c - x$ przedstawiałaby liczbę dni zaniedbanych obowiązków. Potém liczbę a pomnożyłbym przez x, tudzież b przez $c - x$ i miałbym dwa iloczyny ax i $b(c - x)$, z których pierwszy oznacza, ileby się zł. należało słudze za dni dopełnionych obowiązków, a drugi, ile mu zł. z tych zasług trzeba wytrącić za dni zaniedbanych obowiązków. Nakoniec drugi iloczyn odjąłbym od pierwszego, a wtedy różnica $ax - b(c - x)$ przedstawiałaby liczbę zł., jaką sługa podług umowy za cały czas służby dostał; a że tą liczbą zł. jest d, więc powinno być

$$ax - b(c - x) = d.$$

Jeżeli to równanie rozwiążemy, znajdziemy kolejno:

$$ax - bc + bx = d, \quad ax + bx = bc + d, \quad (a + b)x = bc + d,$$

skąd
$$x = \frac{bc + d}{a + b}.$$

W szczególności, jeżeli $a = 1$ zł., $b = 0{\cdot}5$ zł., $c = 30$ dni, $d = 21$ zł., to $x = \frac{0{\cdot}5 . 30 + 21}{1 + 0{\cdot}5} = \frac{15 + 21}{1{\cdot}5} = \frac{36}{1{\cdot}5} = 24$ dni.

Uwaga. Wzór znaleziony daje rozwiązanie wszelkich zagadnień tegosamego gatunku, chociażby inaczéj wysłowionych. Zagadnienie n. p. następujące:

Rybak dla zachęcenia swego syna obiecuje mu płacić po 5 ct. za każde wyciągnienie sieci z połowem, lecz za każdym razem, kiedy sieć napróżno będzie zapuszczona, syn zwróci ojcu 3 ct. Za 12-tém wyciągnieniem sieci rachują się i ojciec płaci synowi 28 ct. Ileż razy sieć była zapuszczona korzystnie?

Tutaj $a = 5$ ct., $b = 3$, $c = 12$ ct., $d = 28$ ct. A zatém

$$x = \frac{3 . 12 + 28}{5 + 3} = \frac{64}{8} = 8.$$

Zagadnienie 8. Dwaj gońcy wychodzą jednocześnie do Krakowa, pierwszy ze Lwowa, a drugi z Gródka: pierwszy robi 11 *km* na godzinę, a drugi 9 *km*. Wiedząc, że Gródek jest od Lwowa oddalony na 49 *km*, pytamy się, w jakiéj odległości od Gródka zejdą się ci dwaj gońcy?

W tego rodzaju zagadnieniach, w których się przestrzenie przebieżone porównywa z chyżościami, nieodzowna przedewszystkiém wyrobić sobie ścisłe pojęcie o znaczeniu tych wyrażeń.

Kiedy podróżny idzie krokiem miarowym i kiedy przebiega równe drogi w równych czasach, powiadamy, że się ów podróżny porusza *ruchem jednostajnym*. Skazówka na zegarze n. p. porusza się takim ruchem. Owoż w ruchu jednostajnym *chyżością* nazywamy drogę, przebieżoną w jednostce czasu, n. p. w jednéj sekundzie, minucie, godzinie lub jakiéj innéj jednostce czasu. Z tego określenia wypływa, że jeżeli chyżość ruchu jednostajnego jest 2, 3, 4... razy większa, to i droga przebieżona w tymsamym czasie będzie dwa, trzy, cztery... razy większą, czyli że w ruchu jednostajnym, drogi *przebieżone w czasach równych są proporcyonalne względem chyżości*.

Wiedząc to, dane zagadnienie tak rozwiążemy:

Niech L oznacza Lwów, G Gródek, a Z punkt spotkania; oznaczmyż

$$L \quad 49\,km \quad G \qquad\qquad x\,km \qquad\qquad Z$$

przez x liczbę kilometrów między Gródkiem a punktem zejścia się Z.

Podług danych zagadnienia pierwszy goniec przebiegnie LZ czyli $49+x$ kilometrów, gdy tymczasem drugi goniec przebiegnie tylko GZ, czyli x kilometrów; a te dwie drogi przebiegają gońcy w tymsamym czasie odpowiednio z chyżościami 11 i 8. Skoro drogi, przebieżone w tymsamym czasie, są proporcyonalne względem chyżości, mamy zatém

$$\frac{49+x}{x} = \frac{11}{8},$$

czyli $(49+x)8 = 11x$, $11x - 8x = 8.49$, $3x = 392$, $x = 130\frac{2}{3}\,km$, t. j. odległość punktu zejścia się od Gródka będzie wynosiła $130\frac{2}{3}\,km$.

Rozwiążemy tosamo zagadnienie ogólnie.

Zagadnienie 9. Dwaj gońcy wychodzą jednocześnie, jeden z punktu L, drugi z punktu G, i dążą w tymsamym kierunku LZ; oddalenie pierwotne między gońcami jest d, chyżość ruchu pierwszego gońca jest V, a chyżość ruchu drugiego gońca jest v. Pytamy się, w jakiéj odległości od G zejdą się ciż gońcy.

Oznaczmy znowu przez x drogę GZ, przebieżoną przez drugiego gońca, to droga LZ, przebieżona w tymsanym czasie przez pierwszego gońca, będzie $x+d$; i mieć będziemy

$$\frac{d+x}{x}=\frac{V}{v},$$

czyli $Vx=dv+vx$, $(V-v)x=dv$, skąd $x=\frac{dv}{V-v}$.

Mamy więc wzór ogólny, dający rozwiązanie wszelkich zagadnień tegosamego gatunku, jakiekolwiek byłyby dane wartości na d, v i V i jakiekolwiek byłoby wysłowienie tych zagadnień.

Zagadnienie 10. Zegar wskazuje południe, t. j. obie skazówki przykrywają się. Pytamy się, o któréj godzinie przykryją się te skazówki po raz drugi.

Oznaczmy przez x drogę, przebieżoną przez skazówkę minutową od południa do chwili powtórnego spotkania się skazówek; droga ta wyrażoną jest w podziałkach tarczy zegarowéj, z których każda przedstawia minutę. Podczas gdy skazówka godzinowa przebiega 5 podziałek, skazówka minutowa przebiega 60 podziałek; skazówka godzinowa porusza się zatém 12 razy powolniéj, niż skazówka minutowa. A zatém, jeżeli skazówka minutowa opisze łuk x, to skazówka godzinowa opisze łuk 12 razy mniejszy, t. j. $\frac{x}{12}$. A że nadto skazówka minutowa, jeżeli ma powtórnie przykryć skazówkę godzinową, opisać musi o 60 podziałek więcéj, niż skazówka godzinowa, przeto

$$x-\frac{x}{12}=60, \quad \text{czyli } \frac{11x}{12}=60,$$

skąd $x=\frac{60.12}{11}=65\frac{5}{11}$, t. j. $=1$ godzina $5\frac{5}{11}$ minut.

Tensam okres czasu przedziela każde dwa po sobie następujące zejścia się obu skazówek.

3. Kiedy wysłowienie zagadnienia rachunkowego jest poprawne, i jeżeli w ułożeniu tego zagadnienia w równanie uczyniono zadość wszystkim warunkom, jakie to wysłowienie w sobie zamyka, wówczas rozwiązanie równań prowadzi, mówiąc w ogólności, do wartości na niewiadome dodatnych. Takie też war-

tości znajdowaliśmy we wszystkich zagadnieniach, jakieśmy dotychczas rozwiązywali.

Atoli może się wydarzyć, że zagadnienie wysłowiono niepoprawnie, że to wysłowienie zawiera założenie fałszywe, warunki niezgodne lub niekiedy nawet niepodobne i niedorzeczne. Rozwiązanie takich zagadnień powinno doprowadzić do wypadków, które już swoim kształtem powinny nas ostrzéc, że zachodzi jeden z wymienionych przypadków osobliwych.

Poprzestaniemy na jednym takim przypadku osobliwym, gdyż gruntowniejsze roztrząsanie zagadnień wychodzi po za granice tego wstępu do algebry.

Rozwiążmy następujące

Zagadnienie 11. Ojciec ma lat 40, a syn 16; po ilu latach wiek ojca będzie dwa razy większy od wieku syna?

Jeżeli przez x oznaczymy szukaną liczbę lat, to po upływie tego czasu wiek ojca będzie $40+x$, a wiek syna $16+x$. Stósownie więc do warunku zagadnienia mieć będziemy równanie

$$40+x=2(16+x), \quad \text{czyli} \quad 40+x=32+2x, \quad \text{skąd} \quad x=8.$$

Ten wypadek dodatny czyni zadość równaniu i odpowiada w zupełności wysłowieniu zagadnienia, gdyż po 8 latach syn będzie miał $8+16$, czyli 24 lat, a ojciec $8+40$, czyli 48 lat, t. j. 2 razy tyle. Atoli zmieńmy cokolwiek wysłowienie tego zagadnienia, tak je wypowiadając:

Ojciec ma 40 lat, a syn 16 lat; po ilu latach wiek ojca będzie trzy razy większy od wieku syna?

Oznaczywszy przez x szukaną liczbę lat i uczyniwszy zadość warunkom zagadnienia, znajdziemy następujące równanie:

$$40+x=3(16+x), \quad \text{czyli} \quad 40+x=48+3x, \quad \text{skąd} \quad x=-4.$$

Ta wartość ujemna, $x=-4$, czyni wprawdzie zadość równaniu, gdyż $3(16-4)=40-4$, czyli $36=36$; wszelako zachodzi pytanie, jak ją wytłómaczyć wobec warunków zagadnienia?

Aby na to pytanie odpowiedzieć, należy sobie przypomnieć, że do znaku $-$ przywiązać należy pojęcie czynności lub stanu przeciwnego temu, jakie się przywiązywało do znaku $+$. Wiedząc to, tak wyjaśnimy znaczenie owego przypadku ujemnego. W jedném i drugiém wysłowieniu zagadnienia do wartości na

x przywiązywaliśmy znaczenie przyszłości, a jeżeli w pierwszém wypadek dodatny odpowiadał bezpośrednio naszemu przewidywaniu, to do wypadku ujemnego w drugiém należy przywiązać znaczenie przeciwne, t. j. znaczenie przeszłości.

Wypadek więc $x = -4$ wskazuje, że warunek zagadnienia był dopełniony już przed 4 laty; istotnie, ojciec miał wówczas 40 — 4, czyli 36 lat, a syn 16 — 4, czyli 12 lat, t. j. 3 razy mniéj.

To tłómaczenie racyonalne wypadku ujemnego dowodzi, że liczby ujemne, ile razy się pojawiają jako wypadki rozwiązania zagadnień, mogą mieć takiesame uprawnienie, jak liczby dodatne, tylko trzeba dać im znaczenie wprost przeciwne temu, jakie się dało liczbom dodatnym.

§. 55.

Zadania na układanie równań.

1. Jaka to liczba, pomniejszona o 18, daje 56 mniéj o tę liczbę? (Odp. 37).

2. Znaleść liczbę, któréj trzykrotność przewyższa jéj pięciokrotność o liczbę 27. (Odp. 13·5).

3. Znaleść liczbę, któréj część trzecia, zwiększona o 7, daje 62. (Odp. 165).

4. Znaleść liczbę, któréj połowa, jedna trzecia i jedna czwarta, powiększona o 45, daje na sumę 448. (Odp. 372).

5. Chcemy podzielić 153 na dwie części tak, aby jedna część była o jednę czwartą większa od drugiéj; znaleść te części. (Odp. 68 i 85).

6. Podzielić 77 na dwie części tak, aby część ósma i część piąta drugiéj dały 13 na sumę. (Odp. 32 i 45).

7. Załoga miasta składa się z 2600 żołnierzy, pomiędzy którymi jest 9 razy tyle piechoty, a 3 razy tyle artyleryi, co konnicy. Ile ludzi jest z każdego z trzech gatunków broni? (Odp. 200 kon., 600 art., 1800 piech.).

8. Służbodawca przyrzeka służącemu 100 zł. rocznie zasług i ubranie; tymczasem oddala go po 10 miesiącach, dając 80 zł.

i ubranie tytułem odprawy; jaka była wartość ubrania? (Odp. 20 zł.).

9. Ojciec ma 49 lat, a syn 11; w ilu latach będzie ojciec 3 razy starszy od syna? (Odp. 8 lat).

10. Ojciec i syn mają razem 60 lat, ale syn jest 4 razy młodszy od ojca; ile lat ma ojciec, a ile syn? (Odp. 48 i 12).

11. Łąka, zawierająca 2850 *a*, ma być podzielona między trzy osoby A., B. i C.: dział osoby A. tak mieć się powinien do działu osoby B., jak 6 : 11, a osoba C. powinna dostać o 300 *a* mniéj, niż osoba A. i osoba B. razem. Ile dostanie każda z tych osób? (Odp. 450, 825, 1575).

12. 32 *kg* wody morskiéj zawierają 1·6 *kg* soli; ileż potrzeba dodać wody czystéj, aby 32 *kg* nowéj mieszaniny zawierało tylko 0·2 *kg* soli? (Odp. 224 *kg*).

[Należy zauważyć, że gdy ilość soli pozostanie niezmienną, to wagi mieszanin będą odwrotnie proporcyonalne względem wag soli, zawartéj w równych wagach tych mieszanin. A zatém, jeżeli x oznacza *kg* wody czystéj, mającéj się dolać, to $\frac{32+x}{32} = \frac{1{\cdot}6}{0{\cdot}2}$].

13. Pewna osoba umierając, pozostawia połowę swego majątku żonie, jednę szóstą każdemu z dwojga dzieci, jednę trzynastą słudze, a 600 zł. ubogim; ile wynosił całkowity majątek téj osoby? (Odp. 6685·70 zł.).

14. Kupiec kupił 256 *l* wina po 65 ct. za jeden litr, a sprzedał to wino bez straty po 50 ct. za litr; ile litrów wody dolał do tego wina?

[256 + x po 50 ct. powinno się równać 256 *l* po 65 ct.].

15. Kupiec ma dwa gatunki pszenicy, jednę po 11 zł., a drugą po 9·5 zł. za hektolitr; ile zboża drugiego gatunku ma dodać do 60 hektolitrów pierwszego, aby sprzedać hektolitr mieszaniny po 10 zł.? (Odp. 120 *hl*).

16. Złotnik ma sztabę srebra próby 0·930, ważącą 2·5 *kg*, atoli chce zniżyć próbę do 0·800; ile miedzi musi dodać do tego srebra?

[Niech x oznacza ilość *kg* miedzi, którą ma dodać. Ma być $2{\cdot}5 . 0{\cdot}930 = (2{\cdot}5 + x)0{\cdot}800$, stąd $x = 0{\cdot}406$ *kg*].

17. Złotnik ma dwie sztaby srebra, jednę próby 0·950, a drugą próby 0·715; ile ma wziąć srebra z każdéj sztaby, aby otrzymać 300 g srebra próby 0·800?

[Niech x oznacza ilość g srebra pierwszego, a przeto $300 - x$ ilość g srebra drugiego, to $0·950x + 0·715(300 - x) = 300 . 0·800$, skąd $x = 108·51\ g$].

18. Mamy sztabę złota, ważącą 320 g, próby 0·640, a chcemy podnieść próbę do 0·720, biorąc do tego złoto próby 0·780; ile tego ostatniego należy dodać do pierwszego, aby otrzymać sztabę próby żądanéj?

[Niech x oznacza szukaną ilość g złota próby 0·780, będzie wówczas $0·780x + 320 . 0·640 = (320 + x)0·780$, skąd $x = 426·66\ g$].

19. Ktoś chce dać każdemu z ubogich, których spotkał, po 5 ct., lecz mu nie dostaje 2 ct., daje więc po 4 ct. i zostało mu 3 ct.; iluż było ubogich? (Odp. 5).

20. W towarzystwie było trzy razy więcéj męszczyzn, niż kobiet; kiedy następnie przybyło 3 męszczyzn i 4 kobiety, było męszczyzn 2 razy tyle, co kobiet; ileż było początkowo męszczyzn i kobiet? (Odp. 15, 5).

21. Z dwu graczów A. miał 4 razy tyle pieniędzy, co B.; kiedy A. przegrał 5 zł. do B., miał A. już tylko 3 razy tyle, co B., Ileż zł. miał każdy na początku gry? (Odp. 28, 7).

22. Licznik i mianownik ułamka wynoszą razem 16; gdy się licznik zwiększy o 2, a mianownik zmniejszy o 2, to wypadnie ułamek odwrotny względem pierwotnego; jaki jest ułamek pierwotny? (Odp. $\frac{7}{9}$).

23. Sadzawkę można napełnić wodą zapomocą trzech rur: gdyby woda płynęła tylko pierwszą rurą lub tylko drugą lub też tylko trzecią, to sadzawka napełniłaby się odpowiednio w $2\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{5}$ i 2 dniach. W iluż dniach napełni się sadzawka, jeżeli woda płynąć będzie do niéj jednocześnie wszystkimi trzema rurami? (Odp. $\frac{110}{149}$ dnia).

24. Sadzawkę, zawartości 755·2.5 m^3 można wypróżnić zapomocą trzech upustów: pierwszym wypływa 12 m^3 w $3\frac{1}{4}$ godziny, drugim 15 m^3 w $2\frac{1}{2}$ godziny, trzecim 17 m^3 w 3 godzinach. W jakim czasie wypróżni się sadzawka, gdy się wodę spuści naraz wszystkimi trzema upustami? (Odp. 49 godzin 10 minut).

25. Trzej bracia kupili majątek ziemski za 50000 zł. Najstarszy mógłby sam zapłacić tę kwotę, gdyby miał jeszcze połowę tych pieniędzy, które ma średni; ten zaś samby wszystko zapłacił, gdyby mu najstarszy pożyczył trzeciéj części swego majątku; najmłodszy zaś, chcąc dla siebie samego nabyć ten majątek, potrzebowałby jeszcze czwartéj części majątku najstarszego brata. Ileż każdy z nich ma pieniędzy?

[x majątek najstarszego, $50000 - \frac{x}{3}$ majątek średniego, $50000 - \frac{x}{4}$ majątek najmłodszego brata, a zatém

$$x + \tfrac{1}{2}(50000 - \tfrac{x}{3}) = 50000, \text{ stąd } x = 30000].$$

26. Dyofantes, autor najdawniejszego dzieła algebry, które naszych czasów doszło, przepędził 6-tą część wieku swego w dzieciństwie, 12-tą w młodości, a potém się ożenił i przepędziwszy w związku małżeńskim 7-mą część swojego życia, żył nadto jeszcze 5 lat, doczekał się syna, którego przeżył 4-ma laty i który dożył tylko połowy wieku swego ojca. Ileż lat żył Dyofantes?

[Niech x oznacza wiek Dyofantesa, to

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x, \quad \text{skąd } x = 84].$$

27. Jeżeli pewien ułamek powiększę o 8, otrzymam liczbę mieszaną $11\frac{2}{3}$ razy większą od ułamka. Jaki to ułamek? (Odp. $\frac{3}{4}$).

28. Służącéj powierzono pewien zapas jabłek do sprzedaży z poleceniem, aby 7 jabłek za 10 ct. sprzedawała. Udało jéj się jednak sprzedawać każde 13 jabłek za 20 ct. W skutek tego uzyskała o 30 ct. więcéj i z całego zapasu zostało jéj się 8 jabłek. Z ilu jabłek składał się cały zapas? (Odp. 385 jabłek).

29. Handlarz zakupił za $\frac{2}{5}$ swojéj gotówki jabłek, a za $\frac{3}{5}$ ziemniaków. Jabłka sprzedał ze stratą $12\frac{1}{2}\%$, poczęły się bowiem psuć, ziemniaki zaś sprzedał z zyskiem 20%. W ogóle zarobił 175 zł. Ile wydał na zakupno jabłek i ziemniaków? (Odp. 2500 zł.).

30. Ze szczytu rusztowania zwisa lina, dłuższa o $1\frac{1}{4}$ m od wysokości rusztowania. Skoro ją naprężymy tak, aby końcem swym ziemi dotykała, to koniec ten jest na $8\frac{1}{2}$ m od podstawy rusztowania odległy. Jak wysokie jest rusztowanie? (Odp. $27\frac{1}{7}\frac{1}{2}$ m).

31. Trzech pisarzy otrzymuje od swego naczelnika 360 zł. z poleceniem, by sumę tę między siebie rozdzielili w stósunku

odwrotnym do miesięcznych swych płac. Jak podzielą się tą sumą, jeżeli ich płace miesięczne wynoszą 120, 90 i 75 zł.? (Odp. 91·53.., 112·03.., 146·44.. zł.).

32. Gdyby 1 *m* materyi sprzedawano po 72 ct., straconoby na sztuce 1·44 zł.; jeżeli zaś za 1 *m* weźmie się 80 ct., to zyska się $6\frac{2}{3}\%$. Ile metrów miała sztuka?

[Sztuka kosztowała $72x + 144$. Cenę tę przedstawić możemy także: $\frac{15}{16}.80x = 75x$, bo przy zysku $6\frac{2}{3}\%$ ma się cena, za jaką zakupiono, do ceny, za jaką sprzedano, jak 15 : 16. A zatém $72x + 144 = 75x$. Stąd $x = 48$].

33. Trzech chłopców rozdzieliło 117 jabłek między siebie w ten sposób, że pierwszy wziął $3\frac{1}{3}$ razy tyle jabłek, ile drugi, a trzeci dostał połowę tyle jabłek, ile pierwszy i drugi. Ile jabłek przypada na każdego?

34. Kupiec kupuje sztukę sukna i płaci za każde 5 *m* 36 zł., przy sprzedaży uzyskuje za każde 7 *m* 56 zł., a na całéj sztuce zyskuje 100 zł. Ile metrów miała sztuka? (Odp. 125 *m*).

35. Syn zapytał ojca, ile ma lat. Przed 3 laty, odrzekł ojciec, miałem 4 razy tyle lat, co ty, a za 3 lata mieć będę 3 razy tyle lat, co ty. Ile lat ma ojciec, a ile syn? (Odp. 51, 15).

36. Pewien ojciec ma 54 lat, najmłodszy z jego czterech synów liczy 18 lat, a każdy następny jest o 2 lata starszy od poprzedniego. Przed ilu laty miał ojciec tyle lat, ile wszyscy synowie razem? (Odp. 10 lat).

37. Znaleść liczbę, aby suma z jéj połowy, części trzeciéj i czwartéj cztery razy większą była od jéj części czwartéj, o 1 powiększonéj. (Odp. 98).

38. Któréj liczby część trzecia i piąta razem jest o 2 mniejszą od sumy z jéj połowy i części czwartéj? (Odp. $9\frac{3}{13}$).

39. Po obu stronach drogi stoją drzewa w odległości 8 *m* jedno od drugiego. Gdyby je zasadzono w odległości 7 *m*, brakłoby do zasadzenia całéj drogi 200 sztuk. Ile drzew zasadzono i jak długą jest droga? (Odp. 1400 drzew, 5600 *m*).

40. W dwu naczyniach mieści się razem $8\frac{3}{4}$ *l*. Jeżeli naczynie mniejsze napełniłbym z większego, to we większém pozostanie część czwarta całéj zawartości. Ile mieści w sobie każde naczynie? (Odp. 5 *l* i $3\frac{3}{4}$ *l*).

41. Ktoś ma pewną ilość dukatów, układa je wzdłuż obwodu koła o pewnym promieniu i zostaje mu jeszcze 35 duka-

tów. Powiększa więc promień koła o jedną trzecią promienia pierwszego, a wtedy brakuje mu 9 dukatów, aby wypełnić cały obwód. Ile dukatów posiadał? ($\pi = \frac{22}{7}$). (Odp. 167 dukatów).

42. Przy obliczeniu ludności okazało się, że $\frac{2}{5}$ ludności oddaje się uprawie roli, $\frac{1}{3}$ znajduje zatrudnienie w przemyśle, $\frac{1}{30}$ część tworzą urzędnicy, nauczyciele i lekarze, $\frac{2}{15}$ żyją z dziennego zarobku, $\frac{1}{30}$ służy wojskowo, 31000 nie miało stałego zajęcia. Jak wielką była ludność? (Odp. 3 840 000).

43. Dwa gatunki wina, jeden po 48 ct. za litr, drugi po 64 ct., należy zmieszać tak, aby otrzymać 160 litrów mieszaniny, litr po 54 ct. Ile wziąć trzeba z każdego gatunku? (Odp. 100, 60 *l*).

44. Dwaj gońcy wychodzą jednocześnie, jeden ze Lwowa do Przemyśla, a drugi z Przemyśla do Lwowa; pierwszy robi 12 *km* na godzinę, a drugi 9 *km* na godzinę. Pytanie w jakiéj odległości od Lwowa spotkają się i po upływie jakiego czasu, jeżeli odległość Przemyśla od Lwowa wynosi 97·5 *km*?

45. Goniec, wysłany ze Lwowa do Przemyśla, robi 8 *km* na godzinę; w $1\frac{1}{2}$ godziny posłano za nim drugiego gońca, robiącego 11 *km* na godzinę, aby go zwrócić z drogi. Po ilu godzinach drugi goniec dogoni pierwszego i w jakiéj odległości od Lwowa?

46. Z dworca kolejowego odchodzą równocześnie dwa pociągi w przeciwnych kierunkach, osobowy i towarowy. Pierwszy w godzinie przebiega drogę 56 *km*, drugi 16 *km*. *a)* Jak wielkie jest oddalenie obu pociągów po 25 minutach? *b)* Po ilu minutach będą o 12 *km* oddalone od siebie oba pociągi? (Odp. *a)* 30 *km*; *b)* 10 minut).

47. Z dwu miast A. i B., leżących w odległości 6 mil jedno od drugiego, wychodzi o tymsamym czasie dwu posłańców. Obaj spieszą w tymsamym kierunku. Posłaniec pierwszy, z miasta bliżéj położonego, przebiega w 1 godzinie drogę 2000 *m*, drugi zaś posłaniec 4500 *m*. Po jakim czasie i w jakiéj odległości od miasta, z którego pierwszy posłaniec wyszedł, spotkają się obaj? (Odp. 18 godz., 36 *km*).

48. Zegar wskazuje 3 godzinę 20 minut; o któréj godzinie przykryją się obie skazówki? (Odp. 4 godz. $21\frac{9}{11}$ min.).

49. Sprzedano konia za cenę o 100 zł. większą od ceny kupna i zarobiono na tym interesie 12% od ceny sprzedaży; jaka była cena zakupna? (Odp. 733·33 zł.)

50. Lis, goniony przez psa, ma 60 skoków na swoję korzyść. Lis robi 9 skoków, podczas gdy pies robi 6 skoków; ale 3 skoki psa równoważą 7 skokom lisa. Pytanie, ile skoków musi zrobić pies, aby dogonił lisa?

[Gdy pies zrobi x skoków, to lis zrobi $\frac{9}{6}$ x, czyli $\frac{3x}{2}$ skoków; tę odległość, którą pies w x skokach przebiegnie, przebiega lis w $60+\frac{3x}{2}$ skokach. A że długość skoku psa $=\frac{7}{3}$ skoku lisa, więc $x=\frac{3}{7}(60+\frac{3x}{2})$, skąd $x=72$].

51. Ojciec pozostawia swój majątek do podziału między swe dzieci w sposób następujący: Najstarszy ma dostać 100 zł. i $\frac{1}{10}$ reszty, drugi 200 zł. i $\frac{1}{10}$ reszty, trzeci 300 zł. i $\frac{1}{10}$ reszty i t. d. Okazało się, że każde dziecko otrzymało tęsamą kwotę; jaki był majątek do podziału i ile było dzieci? (Odp. 8100 zł. i 9 dzieci).

52. Z dwu kapitałów, których suma wynosi 2000 zł., jeden umieszczono na $4\frac{1}{2}\%$, a drugi na $5\frac{1}{2}\%$; oba dają równe procenta roczne. Ile wynosi każdy z tych kapitałów? (Odp. 1100 i 900 zł.).

53. Roczne procenta od sumy 32000 zł., którą częścią na 5%, częścią na 4% umieszczono, wynoszą 1405 zł. Jaka część tego kapitału procentuje się po 5%? (Odp. 12 500 zł.).

54. Roczne procenta od kapitału 4200 zł. mają się do procentów od kapitału 3850 zł., jeżeli w tym drugim wypadku stopa procentowa jest o $\frac{5}{6}$ wyższą, jak 8 : 9. Obliczyć te procenta. (Odp. $3\frac{2}{3}$, $4\frac{1}{2}\%$).

55. Ktoś ma zapłacić 2915 zł. po upływie pewnego czasu, wszelako płaci zaraz gotówką 2650 zł. z 6% rocznego dyskontu; po upływie jakiego czasu miał spłacić kapitał dłużny? (Odp. 1 rok 229 dni, lub 1 rok 186 dni, zależnie od tego, czy się dyskont liczy sposobom prawidłowym, czy też sposobem handlowym).

56. Ktoś zapłacił za kapitał, płatny po upływie 4 lat, 1600 gotówką; dyskont wynosił 288 zł. Ile procentu dyskontu liczono rocznie? (Odp. $4\frac{1}{2}\%$ przy dyskoncie prawidłowym).

57. Kwota 10000 zł. ma być spłacona 4-ma ratami: 3000 zł. po 4 miesiącach, 2500 zł. po 6 miesiącach, 2000 zł. po 8 miesiącach, a reszta po upływie 1 roku; kiedyż należy spłacić całą kwotę naraz? (Odp. 7·2 miesięcy).

58. Ktoś ma zapłacić zaraz 600 zł., a 400 zł. po 4 miesiącach; tymczasem nie płaci zaraz tych 600 zł., lecz dopiero po 2 miesiącach chce zapłacić 800 zł. Kiedyż ma zapłacić resztę? (Odp. zaraz).

59. Ktoś, mając zapłacić 500 zł. po 2 miesiącach, a 600 zł. po 3 miesiącach, płaci zaraz 500 zł.; kiedyż ma zapłacić resztę? (Odp. po $4\frac{2}{3}$ miesiącach).

60. Ktoś ma po upływie $1\frac{1}{2}$ roku zapłacić 15000 zł., płaci jednak po 4 miesiącach 5000 zł., a resztę w dwu równych ratach po 5000 zł. Kiedy wypadną terminy do spłacenia tych rat? (Odp. po $16\frac{2}{3}$ i $33\frac{1}{3}$ miesiącach).

ROZDZIAŁ IX.

O równaniach stopnia pierwszego z wielu niewiadomymi.

§. 56.

Zagadnienia nieoznaczone i oznaczone.

1. We wszystkich zagadnieniach, któreśmy brali dotychczas pod uwagę, mieliśmy do rozwiązania tylko jedno równanie z jedną niewiadomą, a to dlatego, że te zagadnienia albo zawierały tylko jednę niewiadomą, albo téż, jeżeli ich wysłowienie zamykało więcéj niewiadomych, te niewiadome tak były związane, że poznawszy wartość jednéj, mogliśmy bezpośrednio poznać wartość wszystkich innych.

Istnieją jednak zagadnienia, zawierające więcéj niewiadomych, które, lubo zależne jedne od drugich, nie są wszakże takimi, aby wystarczyło wyznaczenie tylko jednéj z nich, celem odnalezienia wartości wszystkich. Owóż zajmiemy się tego rodzaju zagadnieniami.

2. Załóżmy, że zagadnienie prowadzi do równania z dwiema liczbami niewiadomymi x i y, n. p. $5x - 2y = 4$. Dla każdéj wartości upodobanéj na jednę z tych niewiadomych można z tego równania wyznaczyć wartość odpowiedną na drugą niewiadomą. Jakoż, jeżeli n. p. $y = 1$, to $x = \frac{6}{5}$; jeżeli $y = 2$, to $x = \frac{8}{5}$ i t. d. Możemy zatém, mając tylko jedno równanie z dwiema niewiadomymi dane, wyznaczyć upodobaną ilość par wartości na te niewiadome, które to równanie sprawdzają.

Atoli, jeżeli jakie zagadnienie prowadzi do dwu równań stopnia 1-go z dwiema niewiadomymi x i y, n. p. $5x - 2y = 4$ i $4x + 3y = 17$, można znaleść tylko jednę taką parę wartości na te niewiadome, które sprawdzą jednocześnie oba równania. Jakoż, mnożąc pierwsze z tych równań przez 3, a drugie przez 2, otrzymujemy dwa równania tamtym równoważne

$$15x - 6y = 12,$$
$$8x + 6y = 34.$$

Jeżeli te dwa równania stronami odpowiednimi dodamy, otrzymamy $15x - 6y + 8x + 6y = 12 + 34$,

czyli $23x = 46$,

skąd $x = 2$.

A zatém, jeżeli oba równania mają być sprawdzone, x musi być równe 2. Podstawmy tę wartość za x w którémkolwiek z danych równań, n. p. w pierwszém, a znajdziemy

$$10 - 2y = 4, \text{ skąd } 2y = 10 - 4 = 6, \ y = 3.$$

t. j. y musi być równe 3. Że $x = 2$ i $y = 3$ sprawdzają także drugie równanie, łatwo się przekonać.

Jakoż, podstawiwszy te wartości w równaniu drugiém, mieć będziemy

$$4.2 + 3.3 = 17, \text{ t. j. } 8 + 9 = 17 \text{ czyli } 17 = 17.$$

3. Istnieją zatém dwojakiego rodzaju zagadnienia, prowadzące do równań z więcéj niewiadomymi: zagadnienia nieoznaczone i zagadnienia oznaczone.

Zagadnienie jest nieoznaczoném, jeżeli jego wysłowienie daje mniéj równań, aniżeli jest liczb niewiadomych, które należy wyznaczyć; albowiem wtedy pewnym niewiadomym potrzeba dać wartości upodobane, aby znaleść wartość reszty niewiadomych, co prowadzi do nieskończenie wielu wypadków.

Zagadnienie jest oznaczoném, kiedy jego wysłowienie zamyka dostateczną liczbę warunków różnych, aby z nich otrzymać tyle równań, ile jest liczb niewiadomych: te zagadnienia zowiemy dla tego oznaczonymi, że wtedy znajdujemy zawsze skończoną ilość wartości na każdą niewiadomą, a mianowicie po jednéj, gdy równania są stopnia 1-go.

Zajmiemy się jedynie zagadnieniami oznaczonymi i takimi, które prowadzą do równań stopnia 1-go.

§. 57.

Rozwiązanie równań stopnia 1-go z dwiema i więcéj niewiadomymi.

1. Chcąc rozwiązać dwa równania z dwiema niewiadomymi, potrzeba te dwa równania tak przekształcić, ażeby otrzymać dwa nowe równania, tamtym równoważne, z którychby przynajmniéj jedno zawierało tylko jednę niewiadomą. Pospolicie używa się w tym celu jednego z trzech następujących sposobów.

2. Pierwszy sposób. Niech będą dane n. p. dwa równania

$$4x + 3y = 22,$$
$$5x - 7y = 6.$$

Oba równania ma sprawdzić tasama wartość na x, jak również tasama wartość na y. Wyznaczmy zatém z obu x, otrzymamy wtedy z pierwszego równania

$$x = \frac{22 - 3y}{4},$$

a z drugiego:

$$x = \frac{6 + 7y}{5}.$$

Skoro obie wartości na x mają być równe, mamy przeto

$$\frac{22 - 3y}{4} = \frac{6 + 7y}{5},$$

równanie z jedną niewiadomą y, z którego wypływa $y = 2$.

To równanie jest równoważne któremukolwiek z dwu danych. Jeżeli więc za y podstawimy 2 w którémkolwiek z nich, powinna na x wypaść tasama wartość. Podstawmy tę wartość n. p. w pierwszém, to otrzymamy

$$4x + 6 = 22, \text{ skąd } x = 4.$$

Podstawmy $y = 2$ w drugiém, otrzymamy

$$5x - 14 = 6, \text{ skąd także } x = 4.$$

A zatém $x=4$, $y=2$ są wypadki rozwiązania danych dwu równań.

Sposób niniejszy zowie się sposobem przez porównanie *(Comparationsmethode)*, albowiem, celem otrzymania jednego równania z jedną niewiadomą, porównywamy wartości na jednę niewiadomą, z obu równań wyprowadzone.

Uwaga. Porównywując tak wartości na x, jak i wartości na y, z obu danych równań wyprowadzone, otrzymamy dwa równania

$$\frac{22-4x}{3}=\frac{5x-6}{7} \text{ i } \frac{22-3y}{4}=\frac{6+7y}{5},$$

z których pierwsze zawiera tylko x, a drugie tylko y, równoważne równaniom danym. Z tych równań wypływa $y=2$, $x=4$.

3. Drugi sposób. Weźmy pod uwagę tesame dwa równania, co poprzód

$$4x+3y=22,$$
$$5x-7y=\ 6.$$

Z pierwszego wypływa

$$x=\frac{22-3y}{4}.$$

Ponieważ oba równania ma sprawdzić tasama wartość x, więc wartość na x, otrzymana z pierwszego, powinna uczynić zadość drugiemu. Podstawmy zatém tę wartość na x w równaniu drugiém, będzie wtedy

$$\frac{5(22-3y)}{4}-7y=6.$$

Mamy więc znowu jedno równanie z jedną niewiadomą, równoważne któremukolwiek z obu danych. Z tego równania wypływa znowu $y=2$.

Aby otrzymać wartość na x, dość podstawić $y=2$ w którémkolwiek z dwu danych równań albo téż przez podstawienie n. p. w drugiém równaniu wartości na y, wyprowadzonéj z pierwszego, utworzyć równanie z jedną niewiadomą x. Postępując tym drugim sposobem, znajdziemy kolejno

$$y=\frac{22-4x}{3},\ 5x-\frac{7(22-4x)}{3}=6, \text{ skąd } x=4.$$

Sposób, tu wyłożony, zowie się sposobem przez podstawienie *(Substitutionsmethode)*, albowiem wartość na jednę niewiadomą, wyprowadzoną z jednego równania, podstawia się w drugiém równaniu, celem otrzymania równania z jedną niewiadomą.

4. Trzeci sposób. Niech znowu będą tesame dwa równania dane, co poprzód

$$5x - 7y = 6,$$
$$4x + 3y = 22.$$

Chcąc otrzymać jedno równanie, zawierające tylko x, naprzód mnożymy oba równania przez takie liczby, aby spółczynniki przy y w obu były równe, a potém tak zmienione równania dodajemy stronami odpowiednimi. Jeżeli pomnożymy pierwsze przez 3, a drugie przez 7, otrzymamy

$$15x - 21y = 18,$$
$$28x + 21y = 154.$$

Dodajmy te równania stronami odpowiednimi, a mieć będziemy

$$43x = 172, \quad \text{skąd } x = 4.$$

Chcąc zaś otrzymać równanie z jedną niewiadomą y, naprzód mnożymy oba równania przez takie liczby, aby spółczynniki przy x w obu były równe, a potém tak zmienione równania odejmujemy stronami odpowiednimi. Jeżeli pomnożymy pierwsze przez 4, a drugie przez 5, otrzymamy

$$20x - 28y = 24,$$
$$20x + 15y = 110,$$

jeżeli zaś wtóre od pierwszego odejmiemy, znajdziemy

$$43y = 86, \quad \text{skąd } y = 2.$$

Ten sposób zowie się sposobem spółczynników równych.

5. Którymkolwiek z tych trzech sposobów można rozwiązać równania z trzema lub więcéj niewiadomymi. Weźmy pod uwagę tylko trzy równania, n. p.

$$(a) \qquad 2x + 3y + 4z = 16,$$
$$(b) \qquad 3x + 2y - 5z = 8,$$
$$(c) \qquad 5x - 6y + 3z = 6.$$

Z tych równań wyprowadzimy naprzód dwa z niewiadomymi x i y. W tym celu, stósując n. p. trzeci sposób, mnożymy *(a)* przez 5, a *(b)* przez 4, otrzymamy

$$10x + 15y + 20z = 80,$$
$$12x + 8y - 20z = 32,$$

a po dodaniu tych dwu równań

$$(d) \quad 22x + 23y = 112.$$

Pomnóżmy następnie *(a)* przez 3, a *(c)* przez 4, a otrzymamy

$$6x + 9y + 12z = 48,$$
$$20x - 24y + 12z = 24,$$

a po odjęciu pierwszego z tak otrzymanych dwu równań od drugiego

$$(e) \quad 14x - 33y = -24.$$

Podobnie z równań *(d)* i *(e)* wyprowadzimy jedno równanie z niewiadomą x. Jeżeli w tym celu *(d)* przez 33, a *(e)* przez 23 pomnożymy, otrzymamy naprzód

$$726x + 759y = 3696,$$
$$322x - 759y = -552,$$

a następnie przez dodanie tych dwu równań

$$1048x = 3144, \text{ skąd } x = 3.$$

Podstawiwszy tę wartość na x, n. p. w *(d)*, znajdziemy

$$66 + 23y = 112, \quad \text{skąd } y = 2;$$

a podstawiwszy nareszcie te dwie wartości na x i y, n. p. w *(a)*, otrzymamy

$$6 + 6 + 4z = 16, \quad \text{skąd } z = 1.$$

A zatém $\qquad x = 3, \quad y = 2, \quad z = 1.$

Tegosamego sposobu można użyć, jakakolwiek byłaby liczba równań danych.

§. 58.

Z a d a n i a.

I. Rozwiązać następujące równania z dwiema niewiadomymi:

1. $x + y = 11$
   $x - y = 5.$

2. $x + y = a$
   $x - y = b.$

3. $3x - 5y = 13$
   $2x + 8y = 81.$

4. $11x - 10y = 14$
   $5x + 7y = 41.$

5. $8x - 5y = 25$
   $3x + 7y = 36.$

6. $3x + 4y = 4$
   $12x - 6y = 5.$

7. $x + 2y = 30$
$\frac{3x}{5} + \frac{y}{2} = 11.$

8. $x + 4y = 43$
$2x - y = 5.$

9. $x + y = p + q$
$x - y = p - q.$

10. $x + y = 2p$
$x - y = 2q.$

11. $23x - 5y = 336$
$11x + 21y = 418.$

12. $15x = 7y$
$21x + 5y = 222.$

13. $\frac{3}{4}x - \frac{1}{3}y = 2$
$\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 4.$

14. $\frac{x+7}{y} = \frac{4}{5}$
$\frac{x}{y+4} = \frac{1}{2}.$

15. $\frac{x}{5} + \frac{y}{6} = 18$
$\frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 21.$

16. $\frac{11x - 5y}{22} = \frac{3x + y}{32}$
$8x - 5y = 1.$

17.*) $\frac{m}{x} + \frac{n}{y} = 1$
$\frac{n}{x} + \frac{m}{y} = 1.$

18. $\frac{28}{x} + \frac{6}{y} = 9$
$\frac{9}{y} - \frac{4}{x} = 2.$

19.**) $\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{3} = 8$
$\frac{x+y}{3} + \frac{x-y}{4} = 11.$

20. $x = 4y$
$\frac{1}{5}(2x + 7y) - 1 = \frac{2}{3}(2x - 6y + 1).$

21. $ax - by = a^2 + b^2$
$bx + ay = a^2 + b^2.$

22. $\frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b}$
$\frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a-b}.$

23. $5(3x - 2y) = 10 - 3x$
$\frac{1+2y}{3} - \frac{1-2y}{3} = \frac{7x}{3} - 1$

24. $41x - 32{\cdot}75y = 10{\cdot}42$
$5{\cdot}2x - 36y + 2{\cdot}5 = 0.$

---

*) W zadaniu 17. i 18. naprzód wyznaczyć $\frac{1}{x}$ i $\frac{1}{y}$, a z tego x i y.

**) Wyznaczyć naprzód $x + y$ i $x - y$, a z tego x i y.

25. $\dfrac{3x - 2y}{5} + \dfrac{5x - 3y}{3} = x + 1$

$\dfrac{2x - 3y}{3} + \dfrac{4x - 3y}{2} = y + 1.$

26. $\frac{11}{12}x + \frac{9}{14}y = 49$

$\frac{5}{6}x + \frac{4}{7}y = 44.$

27. $\dfrac{8}{x} + \dfrac{9}{y} = 5$

$\dfrac{40}{x} - \dfrac{21}{y} = 3.$

28. $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 24$

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 10.$

29. $\dfrac{3x - 5y}{2} + 3 = \dfrac{2x + y}{5}$

$8 - \dfrac{x - 2y}{4} = \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3}.$

30. $\dfrac{a}{b + y} = \dfrac{b}{3a + x}$

$ax + 2by = d.$

31. $\dfrac{2x}{3} - 4 + \dfrac{y}{2} + x = 8 - \dfrac{3y}{4} + \frac{1}{12}$

$\dfrac{y}{6} - \dfrac{x}{2} + 2 = \frac{1}{6} - (2x - 6).$

32. $5x : 8 = (y + 5) : 2$

$3x : 8 = (y - 2) : 1.$

33. $(x + 7) : (y + 8) = 10 : 9$

$(x - 7) : (y - 8) = 16 : 11.$

34. $14{\cdot}21x + 4{\cdot}3y = 89{\cdot}93$

$0{\cdot}1x + 16{\cdot}7y = 184.$

35. $17x + 5{\cdot}11y = 24{\cdot}3721$

$0{\cdot}1x - 0{\cdot}5y = 0{\cdot}665.$

36. $24x + 25y = 11xy$

$20x + 30y = 11xy.$

37. $35y - 24x = -xy$

$52x + 56y = 21xy$

38. $16{\cdot}5x + \frac{7}{4}y = 2$

$\dfrac{x}{7} + \frac{69}{14}y = 1.$

39. $\dfrac{1{\cdot}8x - 1{\cdot}4y + 14{\cdot}6}{13x - 15y + 17} = 0{\cdot}4$

$\dfrac{1{\cdot}2x - 0{\cdot}2y + 8{\cdot}9}{13x - 15y + 17} = 0{\cdot}3.$

40. $\dfrac{7x - 8}{2y + 6} + \dfrac{6x + 1}{8y - 10} = 10$

$\dfrac{11y + 13}{3x - 20} - \dfrac{8y + 1}{x - 3} = -2.$

II. Rozwiązać następujące równania z trzema i czterema niewiadomymi:

41. $x + y = 10$
$x + z = 9$
$y + z = 23.$

42. $x - y = 1$
$x + z = 4$
$z - y = 1.$

43. $3x = 8y - 13$
$6x = 7z - 29$
$14z - 23y = 24.$

44. $x + y + z = 29\frac{1}{4}$
$x + y - z = 18\frac{1}{4}$
$x - y + z = 13\frac{3}{4}.$

45. $x + y - z = 1$
$8x + 3y - 6z = 1$
$3z - 4x - y = 1.$

46. $3x + 2y - 4z = 15$
$5x - 3y + 2z = 28$
$3y + 4z - x = 24.$

47. $x + y + z = a$
$my = nx$
$pz = qx.$

48. $x - 2y + 3z = 6$
$2x + 3y - 4z = 20$
$3x - 2y + 5z = 26.$

49. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$
$\frac{1}{z} + \frac{1}{x} = 2$
$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{2}.$

50. $ax = y$
$\frac{y}{a} = z + x - b$
$\frac{y}{a} - z = a - b.$

51. $\frac{x}{6} + \frac{y}{4} + \frac{z}{9} = 6$
$\frac{2x}{3} + \frac{5y}{2} - \frac{3z}{9} = 28$
$\frac{5x}{2} + \frac{7y}{2} + \frac{7z}{3} = 99.$

52. $\frac{x+y}{y-z} = 4$
$\frac{x+z}{x-y} = 3$
$\frac{y+z}{x-z} = 1.$

53. $2{\cdot}1x + 4{\cdot}4y - 0{\cdot}3z = 1$
$10x + 5y - 6z = 0{\cdot}2$
$7{\cdot}2x + 0{\cdot}8y + 0{\cdot}4z = 1.$

54. $6x + \frac{15y - 21}{9} + 18z = 43$
$\frac{3x - 1}{2} + \frac{5y - 7}{3} + 6z = 14$
$9x + 20y - 12z = 33.$

55. $2x + 3y + 4z = 3$
$7x - 6y - 2z = 1$
$8x + 9y = 7.$

56. $6xy + 4xz + 3yz = 7xyz$
$9xy + 6xz + 5yz = 11xyz$
$12xy + 8xz + 7yz = 15xyz.$

57. $\frac{x}{4} + \frac{y}{7} + \frac{z}{5} = 8$
$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 16$
$\frac{x}{6} + \frac{3y}{14} - \frac{z}{3} = 0.$

58. $\frac{18}{x} + \frac{15}{y} - \frac{16}{z} = 10$
$\frac{4}{x} + \frac{12}{y} + \frac{24}{z} = 12$
$\frac{6}{x} + \frac{18}{y} + \frac{20}{z} = 14.$

59. $ax + by + cz = A$
$a^2x + b^2y + c^2z = A^2$
$a^3x + b^3y + c^3z = A^3.$

60. $7x - 3y = 1$
$4z - 7y = 1$
$11z - 7u = 1$
$19x - 3u = 1.$

61. $2x - 3y + 2z = 13$
$4y + 2z = 14$
$4u - 2x = 30$
$5y + 3u = 32$

62. $3x : 4y = 12 : 10$
$3x : 6z = 12 : 9$
$3x : 8u = 12 : 4$
$7x - 6y + 8z - 10u = 40.$

63. $7u - 13z = 87$
$10y - 3x = 11$
$3u + 14x = 57$
$2x - 11z = 50.$

64. $x + y + 2z + u = 1180$
$y + 2z + 80 = u + 2x$
$2z + u + 200 = x + 2y$
$y + z + 12u = 2x + 2040$

65. $(7x + 6y) : (5z + 4u) = 45 : 49$
$(3x - z) : (4y - u) = 2 : 5$
$(2z + 3u) : (2z + y) = 2 : 1$
$(u + z - y - x) = 4.$

§. 59.

Zastósowanie do rozwiązania zagadnień.

1. Z następujących przykładów poznamy, jak zagadnienia, zawierające więcéj niewiadomych, układa się w równania.

Zagadnienie 1. Kwotę 159 zł. zapłacono 51 banknotami, z których jedne opiewały na 5 zł., a drugie na 1 zł.; ileż było sztuk każdego gatunku?

Oznaczmy przez x liczbę sztuk po 50 zł., a przez y liczbę sztuk po 1 zł. Wysłowienie zagadnienia daje widocznie dwa następujące równania:

$$x + y = 51, \quad 5x + y = 159,$$

skąd
$$x = 27, \quad y = 24.$$

I istotnie $27 + 24 = 51$, a $27.5 + 24 = 135 + 24 = 159$.

Rozwiązać to zagadnienie zapomocą równania z jedną niewiadomą.

Zagadnienie 2. Zakupiono u gospodarza dwie fury zboża: na jednéj znajdowało się 3·5 *hl* żyta i 3·25 *hl* pszenicy, za co zapłacono 42·25 zł.; na drugiéj znajdowało się 2 *hl* żyta i 5 *hl* pszenicy, za co dano 45 zł. Jaka jest cena jednego hektolitra żyta i jednego hektolitra pszenicy?

Oznaczmy przez x cenę 1 *hl* żyta, a przez y cenę 1 *hl* pszenicy i uczyńmy zadość warunkom zagadnienia, a otrzymamy dwa równania:

$$4{\cdot}5x + 3{\cdot}25y = 42{\cdot}25, \quad 2x + 5y = 45,$$

skąd
$$x = 4{\cdot}06.. \quad y = 7{\cdot}38..$$

Zagadnienie 3. Hieron, król syrakuzański, kazał zrobić koronę złotą, któraby ważyła 20 funtów; Archimedes znalazł, że ta korona zanurzona w wodzie, straciła $1\frac{1}{4}$ funta na wadze: przyjąwszy, że złotnik pewną część złota zastąpił srebrem, pytamy się, ile do korony weszło złota, a ile srebra, jeżeli wiemy, że ciężary gatunkowe złota i srebra są odpowiednio 19·64 i 10·5?

Oznaczmy przez x liczbę funtów złota, przez y liczbę funtów srebra, a mieć będziemy naprzód pierwsze równanie

$$x + y = 20.$$

Aby znaleść drugie, trzeba sobie przypomnieć, że podług zasady Archimedesa, powiedzenie, iż ciężar gatunkowy złota jest

19·64, znaczy, że złoto waży 19·64 razy więcéj, niż woda przy téjsaméj objętości czyli, że złoto, w wodzie zanurzone, traci $\frac{1}{19{\cdot}64}$ części swéj wagi. A zatém x funtów złota stracą $\frac{x}{19{\cdot}64}$ czyli $\frac{100x}{1964}$ funtów, a y funtów srebra stracą $\frac{y}{10{\cdot}5}$ czyli $\frac{10y}{105}$ funtów. A że te straty razem mają wynosić $1\frac{1}{4}$ czyli 1·25 funta, mamy zatém drugie równanie:

$$\frac{100x}{1960} + \frac{10y}{105} = 1{\cdot}25 \quad \text{czyli } 525x + 982y = 12888{\cdot}75.$$

Rozwiążmy te dwa równania a znajdziemy:

$$x = 14{\cdot}773, \quad y = 5{\cdot}227.$$

Zagadnienie 4. Trzéj gracze A., B., C. po pierwszéj partyi rachują pieniądze: gracz A. przegrał, drudzy dwaj wygrali, każdy tyle, ile miał siadając do gry. W drugiéj partyi gracz B. przegrał do dwóch innych, z których każdy wygrał tyle, ile miał zaczynając drugą partyą. W trzeciéj partyi przegrał gracz C., dwaj drudzy wygrali, każdy tyle, ile miał, zaczynając trzecią partyą. Po skończeniu trzeciéj partyi każdy odszedł ze 120 zł.; po ileż mieli zaczynając grę?

Oznaczmy ilość pieniędzy gracza A. przez x, gracza B. przez y, a gracza C. przez z, a znajdziemy, że po pierwszéj partyi

A. ma $x - y - z$, B. ma $2y$, C. ma $2z$;

po drugiéj partyi

A. ma $2x - 2y - 22$, B. ma $3y - x - z$, C. ma $4z$;

po trzeciéj partyi

A. ma $4x - 4y - 4z$, B. ma $6y - 2x - 2z$, C. ma $7z - x - y$.

A że po skończeniu trzeciéj partyi mają po 120 zł., więc

$$4x - 4y - 4z = 120,$$
$$6y - 2x - 2z = 120,$$
$$7z - x - y = 120.$$

Jeżeli rozwiążemy te równania którymkolwiek ze sposobów podanych, znajdziemy:

$$x = 195, \quad y = 105, \quad z = 60.$$

2. W poprzedzających zagadnieniach otrzymywaliśmy na niewiadome wartości dodatne. Niekiedy jednak wypadają te

wartości ujemnymi, co stąd pochodzić może, że wysłowienie zagadnienia jest błędne, zawierając warunki, którym przez wartości dodatne na niewiadome zadość uczynić niepodobna. Jak w takich razach należy zmienić wysłowienie zagadnienia, aby wypadki były dodatne, pokażemy na dwu przykładach.

Zagadnienie 5. Rzemieślnik, zgodzony do pewnéj roboty, ukończył ją za dwoma nawrotami: pierwszym razem pracował przez 12 dni, w ciągu których żona wraz z synem, osobno zgodzona, pomagała mu przez 7 dni; za co im zapłacono 74 zł. Drugim razem pracował przez 8 dni, w ciągu których żona wraz z synem pomagała mu przez 5 dni; za co dostali 50 zł. Po ileż zł. na dzień płacono rzemieślnikowi, a po ile zł. jego żonie wraz z synem?

Jeżeli oznaczymy zapłatę dzienną męża przez x, a żony wraz z synem przez y i uczynimy zadość warunkom zagadnienia, otrzymamy dwa równania:

$$12x + 7y = 74, \quad 8x + 5y = 50,$$

które daje

$$x = 5, \quad y = 2.$$

Otrzymaliśmy wypadek dodatny. Atoli gdyby kwota, pierwszym razem im zapłacona, wynosiła 46 zł., a drugim razem 30 zł., a wszystkie inne okoliczności pozostały tesame, wypadłyby następujące równania

$$12x + 7y = 46, \quad 8x + 5y = 30,$$

skąd otrzymalibyśmy

$$x = 5, \quad y = -2.$$

Teraz wypadła wartość ujemna na y, bo zagadnienie zawiera warunek, któremu wartość dodatna na y nie może uczynić zadość. Jakoż, wstawiając za x znalezioną wartość w oba równania, znajdziemy

$$60 + 7y = 47 \text{ i}$$

$$40 + 5y = 20,$$

skąd widoczna, że y nie może być dodatne.

Tę wartość ujemną na y należy tak rozumieć, że wartość bezwzględna téj liczby ujemnéj nie przedstawia zarobku dziennego, przyznanego żonie wraz z synem, lecz przedstawia wydatek dzienny, poniesiony przez samego rzemieślnika z jego zarobku, n. p. na utrzymanie żony wraz z synem.

Istotnie otrzymamy także na y wartość dodatną, jeżeli zagadnienie wysłowimy, jak następuje:

Rzemieślnik zgodzony do pewnéj roboty, ukończył ją za dwoma nawrotami. Pierwszym razem pracował przez 12 dni, w ciągu których przez 7 dni ponosił wydatek na utrzymanie żony i syna a zostało mu jeszcze z jego zarobku 46 zł. Drugim razem przez 8 dni, w ciągu których przez 5 dni ponosił wydatek na utrzymanie żony i syna a zostało mu jeszcze z jego zarobku 30 zł. Ileż co dzień zarabiał, a ile wydawał co dzień na utrzymanie żony i syna?

Jeżeli oznaczymy przez x zarobek dzienny, a przez y wydatek dzienny na utrzymanie żony i syna i uczynimy zadość warunkom zagadnienia, będziemy mieli

$$12x - 7y = 46, \quad 8x - 5y - 30,$$

skąd
$$x = 5, \quad y = 2.$$

Weźmy jeszcze następujące

Zagadnienie 6. Kupiec, prowadzący trojaki handel, zyskał na wszystkich trzech. Zysk pierwszego, powiększony zyskiem z drugiego, wynosi 1200 zł.; zysk z pierwszego, powiększony zyskiem z trzeciego, wynosi 600 zł.; zysk drugiego, powiększony zyskiem z trzeciego, wynosi 400 zł. Jakiż miał zysk z każdego handlu?

Jeżeli oznaczymy zysk z pierwszego handlu przez x, z drugiego przez y, z trzeciego przez z, wypadną podług zagadnienia trzy następujące równania

$$x + y = 1200, \quad x + z = 600, \quad y + z = 400,$$

skąd
$$x = 700, \quad y = 500, \quad z = -100.$$

Wartość ujemną na zysk z trzeciego handlu należy tak rozumieć, że wartość bezwzględna téj liczby ujemnéj przedstawia nie zysk, ale stratę poniesioną na tym handlu.

Istotnie otrzymamy na z wartość dodatną, jeżeli zagadnienie wysłowimy, jak następuje:

Kupiec, prowadzący trojaki handel, zyskał na dwu, a stracił na trzecim. Zysk z pierwszego, powiększony zyskiem z drugiego, wynosi 1200 zł.; zysk z pierwszego, zmniejszony stratą z trzeciego, wynosi 600 zł., a zysk z drugiego, zmniejszony stratą z trzeciego, wynosi 400 zł. Jakiż miał zysk w pierwszym i drugim, a jaką stratę w trzecim handlu?

Oznaczmy bowiem zysk z pierwszego handlu przez x, a z drugiego przez y, stratę zaś poniesioną w trzecim handlu przez z, a mieć będziemy

$$x + y = 1200, \quad x - z = 600, \quad y - z = 400,$$

skąd
$$x = 700, \quad y = 500, \quad z = 100.$$

Te dwa przykłady wskazją dostatecznie, jak należy rozumieć wypadek ujemny i jak należy wysłowić zagadnienie, aby otrzymać wypadek dodatny.

Inne jeszcze wypadki osobliwe mogą się zdarzyć, ale tych tutaj nie możemy rozbierać.

§. 60.

Zadania.

1. Sumą dwu liczb jest 28, a ich różnicą 4. Któreż to są liczby? (Odp. 16, 12).

2. Znaleść dwie liczby, których suma jest równa 13·5, a różnica równa 1. (Odp. 7·25, 6·25).

3. Przed 7 laty był ojciec 4 razy starszy od syna, a po 7 latach będzie tylko 2 razy starszym; jakiż jest obecnie wiek ojca i syna? (Odp. 35 i 14 lat).

4. A. i B. kupują konia za 120 zł. A. może zań zapłacić, jeśli B. da mu połowę swych pieniędzy, gdy tymczasem B. mógłby zań zapłacić, gdyby mu A dał dwie trzecie swych pieniędzy. Ileż mają pieniędzy A. i B.? (Odp. B. 90 zł., B. 60 zł.).

5. Znaleść takie dwie liczby, że jeżeli większą podzieli się przez mniejszą, wypadnie 4 na iloraz, a 3 na resztę, a jeżeli się sumę obu liczb powiększy o 38 i wypadek podzieli przez większą, to iloraz i reszta będzie równa 2. (Odp. 47, 11).

6. Podzielić 144 na takie trzy części, ażeby pierwsza część, podzielona przez drugą, dała 3 na iloraz, a 2 na resztę, z trzeciéj, podzielonéj przez sumę dwu pierwszych, wypadł iloraz 2, a reszta 6. (Odp. 35, 11, 98).

7. Koszt 7 *kg* herbaty i 6 *kg* kawy wynosił 46·30 zł.; drugim razem kupiono 4 *kg* herbaty i 5 *kg* kawy tegosamego

gatunku za 29·05 zł. Jaka była cena 1 *kg* herbaty i kawy? (Odp. 5·20 zł. 1 *kg* herbaty, 1·65 zł. 1 *kg* kawy).

8. 10 męszczyzn i 10 kobiet zarobiło w 6 dniach 102 zł.; innym razem 4 męszczyzn i 8 kobiet zarobiło w 5 dniach 46 zł. Jaki był zarobek dzienny męszczyzny i kobiety? (Odp. 1·10 zł. i 0·60 zł.).

9. Suma cyfr liczby dwucyfrowéj jest równa 8, a jeżeli do téj liczby 36 dodamy, to jéj cyfry zamienią się jedna na drugą. Znaleść tę liczbę. (Odp. 26).

10. Suma cyfr liczby całkowitéj, od 100 mniejszéj, jest 9, a jeżeli tę liczbę podzielimy przez sumę jéj cyfr, to na iloraz wypadnie 5. Jaka to liczba? (Odp. 45).

11. Jeżeli się podzieli pewną liczbę dwucyfrową przez sumę obu cyfr, zmniejszoną o 2, wypadnie 5 na iloraz, a 1 na resztę. Jeżeli się cyfry téj liczby zamieni jednę na drugą i stąd wypadającą liczbę podzieli przez sumę cyfr, powiększoną o 2, to iloraz będzie 5, a reszta 8. Znaleść tę liczbę. (Odp. 36).

12. Liczba, składająca się z trzech cyfr jednakowéj wartości bezwzględnéj, jest 37 razy większa od kwadratu jednéj cyfry. Jaka to liczba? (Odp. 333).

13. Liczba składa się z trzech cyfr. Suma cyfr jest 21; suma pierwszéj i drugiéj jest o 3 większa od trzeciéj; a jeżeli się 198 doda do téj liczby, to się następstwo cyfr odwróci. Jaka to liczba? (Odp. 759).

14. Suma cyfry liczby trzycyfrowéj jest 14. Pierwsza cyfra jest połową drugiéj, druga o 1 większą od trzeciéj; która to liczba? (Odp. 365).

15. Jeżeli do 36-krotności pewnéj liczby dodamy 32-krotność innéj liczby, to otrzyma się pięciokrotny iloczyn obu liczb; jakie to są liczby, jeżeli różnica ich wartości odwrotnych wynosi $\frac{1}{48}$. (Odp. 12, 16).

16. W pewnym ogrodzie znajdowało się o 46 grusz więcéj, aniżeli jabłoni. Ciężka zima niszczy czwartą część jabłoni i 7 grusz. Jeżeli razem 80 drzew ocalało, ile było w jesieni grusz, a ile jabłoni? (Odp. 76, 40).

17. W dwóch pokojach znajduje się razem 18 osób. Z jednego pokoju do drugiego wchodzą 3 osoby i teraz w obu pokojach jest tasama liczba osób. Ile osób było naprzód w każdym pokoju? (Odp. 12, 6 osób).

18. Ułamek przyjmie wartość $\frac{1}{3}$, jeżeli 1 doda się do jego licznika, a wartość $\frac{1}{4}$, jeżeli się 1 doda do jego mianownika. Jaki to ułamek? (Odp. $\frac{4}{15}$).

19. Piąta część pewnéj liczby jest o 1 mniejszą od szóstéj części innéj liczby; $\frac{1}{6}$ pierwszéj i $\frac{1}{8}$ drugiéj razem dają sumę 50. Które to sę liczby? (Odp. 120, 150).

20. Mamy dwie liczby. Jeżeli pierwszą pomnożymy przez 2, a drugą przez 5 i oba iloczyny dodamy, to wypadnie suma 31. Jeżeli zaś pierwszą pomnożymy przez 7, a drugą przez 4, to suma iloczynów będzie 68. Znaleść te dwie liczby. (Odp. 8, 3).

21. Pewien ułamek staje się równym 1, gdy się 3 doda do jego licznika, a równym $\frac{1}{2}$, gdy się 2 doda do jego mianownika. Jaki to ułamek? (Odp. $\frac{5}{8}$).

22. Ułamek stanie się równy $\frac{1}{4}$, jeżeli się 3 odejmie od licznika i mianownika, a przyjmie wartość $\frac{1}{2}$, jeżeli się 5 doda do licznika i mianownika. Jaki to ułamek? (Odp. $\frac{7}{19}$).

23. Pewna osoba wkłada 2000 zł. w dwa przedsiębiorstwa; na jeděm zarabia 5%, a na drugiém 4%, a zysk z pierwszego przewyższa o 10 zł. zysk z drugiego. Ileż włożyła ta osoba w każde z osobna przedsiębiorstwo? (Odp. w oba po 1000 zł.).

24. Kwota, umieszczona na procencie prostym, wzrosła w 6 latach do 5200 zł., a w 10 latach do 6000 zł. Jaka to była kwota i jaka stopa procentowa? (Odp. 4500 zł. na 5%).

25. Winiarz ma dwa gatunki wina, po 72 ct. i po 40 ct. za litr. Ile musi wziąć z każdego gatunku na 52 *l* po 60 ct. za litr? (Odp. 31·25, 18·75).

26. Kupiec zmieszał dwa gatunki herbaty, 40 *kg* jednego z 10 *kg* drugiego, i 1 *kg* mieszaniny sprzedawał bez zysku i straty po 2·4 zł. Ile kosztował go 1 *kg* pierwszego i drugiego gatunku? (Odp. 2·5 zł. i 2 zł.).

27. Z ilu *kg* oliwy po 1·8 zł. za *kg* należy zmieszać, 10 *kg* oliwy po 1·5 zł. za *kg*, aby cena 1 *kg* mieszaniny, doliczywszy 10% zysku, wynosiła 2 2 zł.? (Odp. 25 *kg*).

28. Jeżeli się 4 *kg* kawy jednego gatunku zmiesza z 12 *kg* drugiego gatunku, to *kg* mieszaniny wart 1·76 zł.; jeżeli się zaś zmiesza 6 *kg* pierwszego gatunku z 10 *kg* drugiego, to *kg* mieszaniny wart 1·74 zł.; ile wart *kg* każdego gatunku z osobna? (Odp. 1·64, 1·80).

29. Stósunek dwu liczb jest równy stósunkowi 4·5. Jeżeli się mniejszą z tych liczb zwiększy o 12, a większą zmniejszy o 12, to ich stósunek będzie równy stósunkowi 5 i 4. Jakie to liczby? (Odp. 48, 60).

30. Liczbę 32 podzielić na 3 części tak, aby pierwsza była o 5, a druga o 3 większa od trzeciéj; jakie są to części? (Odp. 13, 11, 8).

31. Znaleść trzy takie liczby, ażeby suma pierwszéj i drugiéj była 38, suma pierwszéj i trzeciéj 43, a suma drugiéj i trzeciéj 31. (Odp. 25, 13, 18).

32. 140 zł. rozdzielić między 5 osób tak, ażeby każda następna otrzymała o 4 zł. mniéj; ile otrzyma każda? (Odp. 36, 32, 28, 24, 20).

33. Z 3700 zł. otrzymał A. 2 razy więcéj, niż B., B. 3 razy więcéj, niż C., a C. o 400 zł. mniéj, niż D. Ile otrzyma każda osoba? (Odp. A. 1800 zł., B. 900 zł., C. 300 zł., D. 700 zł.).

34. W towarzystwie było 3 razy tyle męszczyzn, co kobiet; gdy następnie przybyło 3 męszczyzn z 4 kobietami, było 2 razy tyle męszczyzn, co kobiet; ile było pierwotnie męszczyzn i kobiet? (Odp. męszczyzn 15, kobiet 5).

35. Ktoś ma 3 beczki, z których pierwsza ma objętość o 98 *l* mniejszą od podwójnéj objętości trzeciéj beczki. Owoż, jeżeli się drugą próżną napełni z pierwszéj pełnéj, to pozostanie w pierwszéj jeszcze $\frac{1}{8}$ jéj zawartości; jeżeli się zaś trzecią próżną napełni z drugiéj pełnéj, to pozostanie z drugiéj także $\frac{1}{5}$ jéj zawartości. Ile litrów zawiera każda beczka? (Odp. 350, 280, 224 litrów).

36. Przednie koło u wozu robi o 6 obrotów więcéj, niż tylne na 120 *m*, a zrobiłoby tylko o 4 obroty więcéj, jeżeliby obwód przedniego koła wzrósł o $\frac{1}{4}$, a tylnego o $\frac{1}{5}$. Znaleść obwody obu kół. (Odp. obwód przedniego 4 *m*, tylnego 5 *m*).

37. Liczba składa się z 6 cyfr, z których pierwsza po lewéj jest 1. Jeżeli tę liczbę zmienimy, przenosząc 1 z pierwszego miejsca po lewéj na pierwsze po prawéj, to nowa liczba będzie 3 razy większą od pierwotnéj. Znaleść tę liczbę. (Odp. 142857).

38. Dwa pociągi biegną po dwu torach równoległych z chyżościami stałymi, jeden z większą, drugi z mniejszą chyżością,

raz w tymsamym, drugi raz w przeciwnym kierunku. Patrząc z okna wagonu w pociągu powolniéj się posuwającym, widzi się pociąg, gdy biegnie w tymsamym kierunku przez 22·6″, a gdy biegnie w kierunku przeciwnym, przez 4·32″. Wiedząc, że długość pociągu szybszego wynosi 90 *m*, pytanie: ile *km* robią na godzinę te dwa pociągi? (Odp. 45 *km* i 30 *km*).

39. Dwaj robotnicy otrzymują za 8 dni pracy 44 zł. Zręczniejszy z nich zarabia w 5 dniach tyle, ile drugi w 6. Ile wynosił dzienny zarobek każdego z nich? (Odp. 3 zł. i 2·5 zł.).

40. Ktoś otrzymuje 847 zł. jako kapitał wraz z pięcioletnimi procentami. Wypożycza tę sumę na lat 8 według téjsaméj stopy procentowéj i oblicza, że po upływie tego czasu kapitał wzrośnie do 935·2 zł. Jak wielki był kapitał i ile wynosiły roczne procenta? (Odp. 700 zł., 29·4 albo $4\frac{1}{5}\%$).

41. Kapitał, który na 4% wypożyczono, wynosił po upływie pewnéj liczby lat wraz z procentami 1188 zł. Następnie wypożyczono go na 5% i w tymsamym czasie dorósł do sumy 1260 zł. Jak wielki był kapiłał i przez ile lat się procentował? (Odp. 900 zł., 8 lat).

42. Dwa kapitały ulokowane, jeden na 4%, drugi na 5%, w roku przynoszą 288 zł. procentów. Gdyby oba kapitały umieszczono na $4\frac{2}{3}\%$, przyniosłyby rocznie o 6 zł. więcéj procentu. Jak wielkie są te kapitały? (Odp. 2700, 3600 zł.).

43. 37 *kg* cyny tracą w wodzie 5 *kg*, a 23 *kg* ołowiu tracą w wodzie 2 *kg*. Jeżeli aliaż tych dwu metalów, ważący 120 *kg*, traci w wodzie 14 *kg*, ile jest w nim cyny, a ile ołowiu? (Odp. 74 *kg* cyny i 46 *kg* ołowiu).

44. Ołów jest 11·324 razy cięższy, niż woda, a drzewo korkowe waży tylko 0·24 razy tyle, co woda téjsaméj objętości, drzewo zaś sosnowe waży 0·45 razy tyle, co woda. Chcemy kawał ołowiu z kawałem drzewa korkowego tak połączyć, aby ciało tym sposobem otrzymane ważyło 80 *kg* i było tak ciężkie, jak drzewo sosnowe równéj objętości (a więc mogło pływać po wodzie). Ile ołowiu i drzewa korkowego należy połączyć? (Odp. 38·14 *kg* ołowiu z 41·85 *kg* drzewa korkowego).

45. W trzy-klasowéj szkole zapłaciło w 1885. roku 25 uczniów pierwszéj, 33 uczniów drugiéj i 41 uczniów trzeciéj klasy 1437 zł. opłaty szkolnéj; w 1886. roku 24 uczniów pierwszéj, 34 drugiéj i 39 trzeciéj klasy 1410 zł.; zaś w 1887. roku

27 uczniów pierwszéj, 32 drugiéj i 45 trzeciéj klasy 1506 zł. Ile wynosiła opłata szkolna w każdej klasie od jednego ucznia?

46. A., B. i C. mają razem 1820 zł. Jeżeli B. da A. 200 zł. ze swych pieniędzy, to A. mieć będzie o 160 zł. więcéj od B.; a jeżeli B. od C. otrzyma 70 zł., to B. i C. mieć będą równe kwoty. Ileż ma każda z tych osób? (Odp. A. 400, B. 640, C. 780 zł.).

47. Pewna osoba posiada kapitał, który daje na procent podług pewnéj stopy. Druga osoba ma o 1000 zł. większy kapitał, niż pierwsza osoba i daje go na procent podług stopy o 1% większy, w skutek czego ma o 80 zł. większy dochód roczny, niż pierwsza osoba. Trzecia osoba ma o 1500 zł. większy kapitał, niż pierwsza osoba i daje go na procent podług stopy 2% większéj, w skutek czego jéj dochód przewyższa dochód pierwszéj osoby o 150 zł. Znaleść kapitał każdéj osoby i stopy, podług jakich te kapitały są oprocentowane. (Odp. A. 3000 zł. po 4%, B. 4000 zł. po 5%, C. 4500 zł. po 6%).

48. Liczbę a podzielić w stósunku $m : n : p$.

(Jeżeli x, y, z są tymi częściami, mamy

$$x + y + z = a, \quad \frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p} = b.$$

Stąd $x = mb$, $y = nb$, $z = pb$, a przeto $(m + n + p)b = a$, $b = \frac{a}{m+n+p}$, a przeto $x = \frac{ma}{m+n+p}$, $y = \frac{na}{m+n+p}$, $z = \frac{pa}{m+n+p}$).

49. Trzech murarzy A., B. i C. ma wznieść pewien mur. A. i B., pracując razem, wznieśli go w 12 dniach, B. i C. dopiero w 20 dniach, gdy tymczasem A. i C. w 15 dniach. Jakiego czasu potrzebowałby do tego każdy murarz z osobna, a jakiego wszyscy trzéj, gdyby pracowali razem? (Odp. A. 20, B. 30, C. 60 dni, wszyscy trzéj 10 dni).

50. Kwota 495 zł. ma być rozdzielona między trzy partye robotników A., B. i C., z których pierwsza pracowała przez 7 dni po 10 godzin dziennie, druga również przez 7 dni, ale po 8 godzin dziennie, trzecia przez 6 dni po 12 godzin dziennie; ileż otrzyma każda partya? (Odp. A. 175, B. 140, C. 180 zł.).

51. Znaleść trzy liczby, któreby posiadały następujące własności: Jeżeli się doda 6 do pierwszéj i do drugiéj, to stósunek tych sum jest równy stósunkowi 2 : 3; jeżeli 5 doda się do pierwszéj i do trzeciéj, to stósunek tych sum jest równy 7 : 11; jeżeli się zaś 36 odejmie od drugiéj i od trzeciéj, to stósunek tych różnic jest równy stósunkowi 6 : 7. Jakie to są liczby? (Odp. 30, 48, 50).

52. Liczbę 80 podzielić w stosunku 2 : 3 : 4. (Odp. $17\frac{7}{9}$, $26\frac{6}{9}$, $35\frac{5}{9}$).

53. Ile wynosi każdy kąt w trójkącie, jeżeli suma pierwszego i trzeciego jest dwa razy większą od kąta drugiego, a połowa różnicy pierwszego i trzeciego kąta równą jest trzeciej części kąta drugiego. (Odp. 80^0, 60^0, 40^0).

54. Kurier na przebycie drogi z A do B potrzebuje pewnego czasu. Jeżeli na minutę robi o 8 kroków więcéj, przybędzie w 6 godzinach; jeżeli na minutę zrobi 12 kroków mniéj, przybędzie w 7 godzinach do B. Ileż kroków robi właściwie kuryer na minutę i w jakim oddaleniu leży miejscowość B od A, jeżeli 3 kroki = 2 *m*. (Odp. 132 kroków, 33600 *m*).

55. Ile wynosi każdy kąt czworoboka, jeżeli suma pierwszego i czwartego kąta równą jest w sumie drugiego i trzeciego, suma pierwszego i drugiego wynosi $\frac{4}{5}$ sumy trzeciego, a czwarty zmniejszony pierwszym równa się potrójnéj różnicy, jaką się otrzyma, odjąwszy od trzeciego kąt drugi? (Odp. 75^0, 85^0, 95^0, 105^0).

56. Ile wynoszą kąty w czworoboku, jeżeli sumą drugiego, trzeciego i czwartego równą jest potrójnemu pierwszemu, suma zaś pierwszego i trzeciego, podzielona przez czwarty, daje na iloraz $2\frac{2}{3}$, a w końcu suma drugiego i czwartego przez pierwszy podzielona daje na iloraz $1\frac{7}{9}$? (Odp. 90^0, 85^0, 110^0, 75^0).

II ARYTMETYKA II