Dr. Zajączkowski

Arytmetyka

I.

WE LWOWIE
NAKŁADEM TOWARZYSTWA PEDAGOGICZNEGO.

[illegible]

POCZĄTKI
ARYTMETYKI

DO UŻYTKU SZKÓŁ ŚREDNICH ZASTOSOWANE

PRZEZ

WŁADYSŁAWA ZAJĄCZKOWSKIEGO,
Profesora Szkoły Politechnicznéj.

Część I. — Wydanie II.

Na I. i II. klasę.

WE LWOWIE.
Nakładem Towarzystwa Pedagogicznego.
I. Związkowa Drukarnia we Lwowie.
1889.

PRZEDMOWA.

Niniejsze wydanie II. „Początków Arytmetyki“ na klasę I. i II. niewiele się różni pod względem układu od wydania I. Główne różnice dotyczą obrobienia szczegółów i doboru zadań. Wielu bowiem kolegów zawodowych, którzy uczyli podług téj książki, zauważyło, że zbyt wielka zwięzłość wykładu i abstrakcyjność określeń sprawia młodzieży szkolnéj wielkie trudności, tudzież, że ilość, jakość i uporządkowanie zadań nie ze wszystkiém odpowiada potrzebom szkoły. Przygotowując zatém to wydanie II., starałem się wykład przez kolejne pokonywanie trudności, skoncentrowanych pierwotnie w jednym punkcie, uczynić przystępniejszym, a określenia wypowiadać w formie dla ucznia zrozumialszéj; ilość zaś zadań podwoiłem, bacząc przytém na to, aby obejmowały najważniejsze przypadki, zachodzące w życiu praktyczném i w nauce, tudzież, ażeby ile możności łatwiejsze szły przed trudniejszymi i zawilszymi.

Co do rozkładu materyału naukowego, oddzieliłem część przeznaczoną na klasę I. od części przeznaczonéj na klasę II., a znaczniejsze zmiany wprowadziłem jedynie do części drugiéj. A mianowicie: Rozdział VI. z wydania I., traktujący o działaniach skróconych, przestawiłem z rozdziałem VII., traktującym o liczbach wielorakich; lubo bowiem dla braku czasu o liczbach wielorakich zwykło się uczyć na początku klasy II., to jednak instrukcye ministeryalne przeznaczają tę naukę na klasę I. Wykład o działaniach na liczbach wielorakich poprzedziłem krótkimi wiadomościami o miarach, wagach i monetach w Austro-

Węgrzech używanych, gdyż bez tych wiadomości niepodobna ściśle określić liczby wielorakiéj. Do rozdziału VIII., traktującego o stosunkach i proporcyach, dołączyłem część rozdziału IX. o regule trzech prostéj, przyczém sposób rozwiązywania zadań na regułę trzech prostą przez sprowadzenie do jedności odłączyłem od sposobu rozwiązywania przez proporcye. Resztę rozdziału IX., o regule trzech składanéj, usunąłem jako nie wchodzącą w zakres nauki klasy I. i II. szkół gimnazyalnych, a wyłożoną w części II. méj książki na klasę III. i IV. Rozdział X. wydania I. rozłożyłem na dwa: IX. i X. niniejszego wydania. Rozdział IX. poświęciłem wyłożeniu reguły procentu, a rozdział X. zawiera regułę potrącania procentu czyli dyskontu z rachunkiem terminu średniego.

W przypisku nareszcie podaję obszerniejsze wiadomości o miarach, wagach i monetach krajowych i zagranicznych, a dodane figury mają ułatwić zrozumienie związku między jednostkami miar różnych rzędów.

Oddając tę książkę do użytku szkolnego, upraszam szanownych kolegów zawodowych o dalsze uwagi, jakie im nasunie praktyka szkolna, ażeby je w następném wydaniu można uwzględnić, a oraz poczuwam się do miłego obowiązku złożenia najserdeczniejszéj podzięki przedewszystkiém profesorom Wincentemu Ciśle i Julianowi Fąfarze za dostarczone mi wskazówki tak co do układu, jak i co do zadań, które do ulepszenia tego podręcznika znacznie się przyczyniły.

We Lwowie, w marcu 1889.

TREŚĆ.

Rozdział I.
O liczeniu.

Rozdział II.
O działaniach głównych na liczbach całkowitych.

Rozdział III.
O ważniejszych własnościach liczb całkowitych.

Rozdział IV.
O ułamkach zwyczajnych.

Rozdział V.

O liczbach i ułamkach dziesiętnych.

Rozdział VI.

O liczbach wielorakich.

Rozdział VII.

O działaniach skróconych.

Rozdział VIII.

O regule trzech prostéj.

Rozdział IX.

O regule procentu i potrącania procentu.

Rozdział X.

O regule potrącania procentu czyli o dyskoncie.

Przypisek.

Sprostowanie dostrzeżonych omyłek.

stronica	wiersz	zamiast	powinno być
16	3 z góry	nazywamy	nazywamy odjemną
22	13 „ „	mnożnik	mnożna
32	4 z dołu	dodawania	sumy
75	9 „ „	10090	10000
84	17 z góry	dziesiętnych	dziesiątych
90	5 z dołu	wymiarze	pomiarze
99	14 „ „	5 *m* 6 *cm*	4 *m* 6 *cm*
101	12 z góry	dziesiętne	dziesiąte
105	9 „ „	cyfra znacząca	cyfra znacząca mnożnika
115	12 „ „	n. p.	n. p. w téjsaméj propcrcyi jest
120	12 „ „	wartość B_1	wartości B_1
„	„ „ „	jaka wartości	jaka wartość
132	16 „ „	na p	na p %
135	17 „ „	§. 47.	§. 46.

ROZDZIAŁ I.

O liczeniu.

§. 1.

Określenia.

1. W zbiorze przedmiotów tegosamego gatunku, a stąd jednakowo nazwanych, każdy przedmiot, wzięty oddzielnie, nazwiemy jednostką. Zbiór jednostek może być większy lub mniejszy, stósownie do tego, czy zawiera w sobie więcéj, czy téż mniéj tych jednostek.

Ilość jednostek, zawartych w danym ich zbiorze, przedstawia się zapomocą pewnych wyrazów lub znaków i nazywa się wówczas liczbą *(Zahl)*.

2. Liczba jest mianowaną *(benannt)*, jeżeli przedstawia nietylko ilość, ale i jakość, czyli gatunek jednostek, n. p. trzy konie, pięć złotych, siedm metrów i t. p.

Liczba jest niemianowaną *(unbenannt)*, albo oderwaną *(abstract)*, jeżeli przedstawia tylko ilość jednostek, nie nazywając tychże, n. p. trzy, pięć, siedm i t. p.

Jeżeli od wyrażenia, oznaczającego liczbę mianowaną, odrzucimy albo oderwiemy nazwę jednostki, mieć będziemy liczbę niemianowaną albo oderwaną.

3. Sposoby tworzenia liczb i ich wyrażania zapomocą niewielu słów lub niewielu znaków nazywamy liczeniem *(Numeration)*.

Rozróżniamy dwa rodzaje liczenia: liczenie słowne i liczenie piśmienne. Pierwsze obejmuje sposoby tworzenia liczb i wyrażania ich zapomocą niewielu słów, przedmiotem zaś wtórego jest przedstawienie liczb zapomocą niewielu znaków piśmiennych.

§. 2.

Liczenie słowne.

1. Mówić będziemy tylko o liczeniu dziesiętném *(dekadische Numeration)* i zaczniemy od wyłożenia prawideł liczenia słownego.

Liczbą zasadniczą jest jedność albo jeden *(eins)*.

Do pojęcia téj liczby dochodzimy, uważając jakąkolwiek jednostkę oddzielnie od innych tegosamego gatunku.

Dodając do téj jednostki nową jednostkę tegosamego gatunku i powtarzając to dodawanie po jednéj jednostce, otrzymamy kolejno skupienia dwu, trzech, czterech jednostek i t. d. Wyrazy dwa, trzy, cztery i t. d oznaczają nowe liczby, z których pierwsza powstaje przez dodanie jedności do jedności, a każda następująca przez dodanie jedności do liczby, która ją poprzedza.

W ten sposób otrzymamy szereg liczb: jeden *(eins)*, dwa *(zwei)*, trzy *(drei)*, cztery *(vier)*, pięć *(fünf)*, sześć *(sechs)*, siedm *(sieben)*, ośm *(acht)*, dziewięć *(neun)* i t. d., z których pierwszą jest jedność, a każda następująca jest o jedność większą od téj, która ją w tym szeregu poprzedza; szereg ten zowie się naturalnym szeregiem liczb *(natürliche Zahlenreihe)*, a każdą z tych liczb nazywamy liczbą całkowitą *(ganz)*.

2. Liczb całkowitych jest nieskończenie wiele; albowiem do liczby podług upodobania wielkiéj można dodać jedność i otrzymać liczbę jeszcze większą. Skoro tak rzecz się ma, oczywista, że napróżnoby usiłowano oznaczać wszystkie liczby tyluż odmiennymi nazwiskami, bo wielość tych nazwisk pociągnęłaby za sobą niemożność zatrzymania ich w pamięci. Trzeba zatém użyć innego sposobu, a ten, którego użyto, jest równie prostym, jak dowcipnym.

W tym celu naprzód niewielu pierwszym liczbom w szeregu ich naturalnym dano nazwy, jedne od drugich niezależne; tymi są za porządkiem: jeden, dwa, trzy, cztery, pięć, sześć, siedm, ośm, dziewięć.

Liczbę zaś następującą, która jest podstawą liczenia dziesiętnego, nazwano dziesięć *(zehn)* albo dziesiątką *(Zehner)*.

3. Następnie zgodzono się, ażeby nowe nazwy wprowadzać jedynie na oznaczenie skupień jedności od dziesięciu do dziesięć razy większych. A mianowicie:

skupienie dziesięciu dziesiątek nazwano sto *(hundert)* albo setką *(Hunderter)*;

skupienie dziesięciu setek nazwano tysiąc *(tausend)* albo jednością tysięcy;

skupienie dziesięciu tysięcy nazwano dziesięć tysięcy albo dziesiątką tysięcy;

skupienie dziesięciu dziesiątek tysięcy nazwano sto tysięcy albo setką tysięcy;

skupienie dziesięciu setek tysięcy nazwano milionem *(Million)* albo jednostką milionów.

Następne skupienia nazwano dziesiątką, setką, tysiącem, dziesiątką tysięcy, setką tysięcy z dodaniem słowa milionów, poczém znów dziesięć setek tysięcy milionów nazwano bilionem *(Billion)* albo jednostkę bilionów i t. d.

Uwaga. Narody romańskie bilionem albo miliardem zowią tysiąc milionów, trylionem tysiąc bilionów i t. d.

Te kolejne skupienia jedności od dziesięciu do dziesięć razy większych tworzą szereg jedności rzędów wyższych. I tak dziesięć jest jednością pierwszego rzędu wyższego, sto drugiego, tysiąc trzeciego, dziesięć tysięcy czwartego, sto tysięcy piątego, milion szóstego i t. d.

4. Nareszcie umówiono się, aby każdą z tych jedności liczyć od jeden do dziesięć i ażeby przy wymawianiu jakiéjkolwiek liczby wypowiadać oddzielnie ilość jedności wszystkich rzędów, na jakie liczbę można rozłożyć, zaczynając od jedności rzędu najwyższego, postępując do rzędów coraz niższych, a kończąc jednościami prostymi.

Chcąc więc n. p. wymówić liczbę kul, zawartych w urnie, tak postąpimy:

Tworzymy naprzód skupienia tych kul po dziesięć; ostatnie skupienie może zawierać mniéj kul: przypuśćmy, że zawiera ich tylko pięć.

Z tych skupień 1go rzędu tworzymy następnie skupienia 2go rzędu, łącząc znowu po dziesięć tamtych. Niech znowu ostatnie z nich zawiera n. p. tylko cztery skupienia 1go rzędu, czyli cztery dziesiątki kul.

Z tych skupień 2go rzędu, łącząc je znowu po dziesięć, tworzymy skupienia 3go rzędu; przypuśćmy, że ostatnie z nich zawiera tylko sześć skupień 2go rzędu czyli sześć setek kul. Załóżmy, że skupień 3go rzędu utworzono tylko siedm. Ponieważ każde z nich zawiera dziesięć setek czyli tysiąc kul, a przeto wszystkie siedm zawierają siedm tysięcy kul, liczbę więc kul, zawartych w urnie, można tak wysłowić:

siedm tysięcy | sześć setek | cztery dziesiątki | pięć jedności

albo krócéj:

siedm tysięcy sześćset czterdzieści pięć.

Jeżeli w liczbie brak jedności pewnego rzędu, wyrażamy to, mówiąc, że jedności tego rzędu jest zero. Jeżeli więc w liczbie dopiero wysłowionéj brak n. p. setek, moglibyśmy powiedzieć, że tą liczbą jest:

siedm tysięcy | zero setek | cztery dziesiątki | pięć jedności.

Pospolicie nie wymawia się jedności, których brak w liczbie; powyższą liczbę wysłowilibyśmy zatém krócéj:

siedm tysięcy czterdzieści pięć.

§. 3.

Liczenie piśmienne.

1. Postępując podług zasad, wyłożonych w poprzedzającym paragrafie, łatwo wysłowimy liczbę jakkolwiek wielką. Wszakże z powodu długości w wysłowieniu liczb, które przenoszą tysiąc, uczuwamy potrzebę używania znaków piśmiennych, bardziéj, niż słowa skróconych, dla oznaczenia liczb zwłaszcza większych. W tym celu zgodzono się, aby dziewięć pierwszych liczb szeregu naturalnego przedstawiać znakami czyli cyframi *(Ziffern)*:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

które nazywamy cyframi znaczącymi, dla odróżnieoia ich od znaku 0, który czyta się: zero a oznacza brak jedności jakiegokolwiek rzędu.

2. Zapomocą tych dziesięciu znaków przedstawia się piśmiennie każdą liczbę. Ponieważ, chcąc wysłowić liczbę, trzeba

wypowiedzieć, ile ona w sobie zawiera jedności każdego rzędu, więc i dla piśmiennego przedstawienia liczby dość napisać obok siebie cyfry, oznaczające ilość jedności każdego rzędu, z których się taż liczba składa. Potrzeba tylko ustanowić porządek, w jakim te cyfry obok siebie pisać należy. W tym celu zgodzono się na następującą zasadę, wypływającą bezpośrednio ze sposobu liczenia słownego:

Każda cyfra, położona z prawéj strony innéj cyfry, znaczy dziesięć razy mniéj, niż gdyby była położona na miejscu téj drugiéj cyfry, czyli, innymi słowy, wyraża jedności rzędu bezpośrednio niższego.

Kierując się tą zasadą, celem napisania n. p. liczby siedm tysięcy sześćset czterdzieści pięć, napiszemy naprzód cyfrę 7 na oznaczenie tysięcy, następnie obok 7 z prawéj strony cyfrę 6 na oznaczenie setek, daléj obok 6 z prawéj strony cyfrę 4 na oznaczenie dziesiątek, nareszcie obok 4 z prawéj strony cyfrę 5 na oznaczenie jedności właściwych. Tym sposobem powyższą liczbę przedstawi się przez

7645.

Jeżeliby nie było setek, napisanoby 7045.

Jedności różnych rzędów przedstawia się w tym sposobie pisania za porządkiem przez

1, 10, 100, 1000, 10000, 100000 i t. d.

3. Z tego przedstawienia rzeczy wypływa, że w liczbie oznaczonéj zapomocą cyfr każda cyfra ma dwojakie znaczenie. Jedno odnosi się do ilości jedności, jaką przedstawia, i to znaczenie nazywa się jéj wartością bezwzględną *(Zifferwerth)*; drugie zaś odnosi się do miejsca, jakie zajmuje, czyli do rzędu jedności, jaki przedstawia ze swego położenia w wyrażeniu liczby; to drugie znaczenie cyfry zowie się jéj wartością miejscową *(Stellenwerth)*. Tak n. p. w liczbie 3760062 cyfra druga i piąta „6“ — licząc od ku prawéj lewéj — sama przez się znaczy sześć jedności, a wskutek położenia znaczy ona na drugiém miejscu „sześćdziesiąt“, a na piątém miejscu „sześćdziesiąt tysięcy“.

4. Jeżeli się liczba składa z wielu cyfr, to dla łatwiejszego jéj odczytania i wysłowienia, dobrze będzie, pisząc ją, odstępować cokolwiek co trzy cyfry, od prawéj ku lewéj, dzieląc ją

na działy po trzy cyfry. Cyfry pierwszego działu, idąc zawsze od prawéj ku lewéj, będą przedstawiały za porządkiem jedności, dziesiątki i setki proste. Cyfry drugiego działu będą podobnie przedstawiały jedności, dziesiątki i setki tysięcy. Cyfry trzeciego działu będą przedstawiały znowu jedności, dziesiątki i setki milionów. Cyfry czwartego działu będą przedstawiały jedności, dziesiątki i setki tysięcy milionów i t. d.

Tak utworzone działy zowią się: pierwszy działem prostych (właściwych), drugi działem tysięcy, trzeci działem milionów, czwarty działem tysięcy milionów i t. d.

Tak postępując, liczbę n. p.

$$\overbrace{3}^{\text{biliony}}\ \overbrace{789}^{\text{tysiące milionów}}\ \overbrace{547}^{\text{miliony}}\ \overbrace{205}^{\text{tysiące}}\ \overbrace{369}^{\text{proste}}$$

odczytamy łatwo jako znaczącą: „trzy biliony | siedmset ośmdziesiąt dziewięć tysięcy (milionów) | pięćset czterdzieści siedm milionów | dwieście pięć tysięcy | trzysta sześćdziesiąt dziewięć.

Uwaga. Narody romańskie odczytałyby tę liczbę jako znaczącą: trzy tryliony | siedemset ośmdziesiąt dziewięć bilionów | pięćset czterdzieści siedm milionów | dwieście pięć tysięcy | trzysta sześćdziesiąt dziewięć.

5. Starożytni Rzymianie, lubo liczyli sposobem dziesiętnym, używali odmiennego od naszego sposobu oznaczania liczb.

Jedność przedstawiali oni znakiem I, a liczby dwa i trzy odpowiednio przez dwa i trzy znaki I, obok siebie postawione. Na oznaczenie liczby 5 używali znaku V, a na oznaczenie liczby 10 znaku X. Znak I, położony z lewéj strony tych znaków, zmniejszał odpowiednią liczbę o jedność, a położony z prawéj strony powiększał o jedność liczbę odpowiednią. Liczby więc od 1 do 19 wyrażali Rzymianie odpowiednio przez: I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII, XIII, XIV, XV, XVI, XVII, XVIII, XIX.

Liczbę 20 i 30 oznaczali odpowiednio przez dwa i trzy znaki X, obok siebie położone. Pięćdziesiąt oznaczali przez L, a sto przez C. Znak X położony z lewéj strony poprzednich znaków zmniejszał, a położony z prawéj strony powiększał liczbę odpowiednią o dziesięć; a więc XL znaczyło 40, LX znaczyło 60, XC znaczyło 90, a CX znaczyło 110. Na oznaczenie wreszcie liczby 500 używali znaku D, a na oznaczenie 1000 znaku M.

Sposobem starorzymskim rok n. p. bieżący 1889. oznaczyłoby się przez

MDCCCLXXXIX.

t. j. przez szereg złożony z 11 znaków, gdy tymczasem sposobem, teraz używanym, wyraża się przez liczbę czterocyfrową.

Zadania.

1. Z dwu liczb, złożonych z różnéj ilości cyfr, która jest większą?

2. Jaka jest największa liczba jedno-, dwu-, trzy- i czterocyfrowa?

3. Jakiéj zmianie ulegnie liczba, gdy z prawéj strony dopisze się do niéj jedno, dwa i trzy zera?

4. Wyrazić cyframi następujące liczby:
pięćset czterdzieści dwa, trzysta pięć, sześćset pięćdziesiąt, ośm tysięcy sto dwanaście, piętnaście tysięcy trzydzieści dziewięć, trzysta sześć tysięcy ośmdziesiąt cztery, milion piętnaście tysięcy siedmset ośm, dwadzieścia trzy miliony siedmset pięćdziesiąt tysięcy dziewięćdziesiąt.

5. Wyrazić słowami następujące liczby:
17, 35, 70, 309, 780, 5621, 4027, 90957, 703806, 1356018, 70530050, 9320569200.

6. Jakiéj zmianie ulegnie liczba 867, gdy się do niéj dopisze 9 z prawéj strony? a jakiéj, jeżeli się 9 dopisze z lewéj strony?

7. Jaką otrzymamy liczbę, przestawiwszy w 7568924 jedności z tysiącami, dziesiątki z setką tysięcy i setki z milionami?

8. Przestawić w 2056307 jedności z setkami, dziesiątki z tysiącami, setki tysięcy z milionami i wysłowić tak otrzymaną liczbę.

9. Ile jest wszystkich dziesiątek, ile setek, ile tysięcy, ile dziesiątek tysięcy, tudzież ile setek tysięcy w liczbach:

123, 7052, 12053, 72080, 9083274.

[w 12053 jest 1205 dziesiątek, 120 setek, 12 tysięcy].

10. Wyrazić znakami rzymskimi liczby:

4, 9, 29, 41, 94, 719, 1365, 1799, 1831, 1848, 1863.

ROZDZIAŁ II.

O działaniach głównych na liczbach całkowitych.

§. 4.

Zadania arytmetyki.

Łączenie dwu lub więcéj liczb podług pewnego prawidła, celem otrzymania nowéj liczby, nazywa się działaniem rachunkowém *(Rechnungsoperation)*, a ta nowa liczba stanowi wypadek działania rachunkowego *(Rechnungsresultat)*.

Są cztery działania główne, do których sprowadzają się wszystkie inne działania na liczbach. Tymi działaniami są: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie.

Naukę o liczbach i o działaniach na liczbach nazywamy arytmetyką *(Arithmetik)*.

§. 5.

Dodawanie *(Addition)*.

1. Dodawanie ma na celu wynalezienie liczby, któraby w sobie zawierała tyle jedności, ile ich razem dwie lub więcéj liczb danych w sobie zawiera. Wypadek tego działania zowie się sumą *(Summe)* liczb danych, a te liczby dane zowią się składnikami sumy *(Summanden, Addenden)*.

Liczby mianowane można dodać jedne do drugich tylko wtedy, gdy przedstawiają ilość jednostek tegosamego gatunku.

2. Ażeby do liczby n. p. 5 dodać liczbę 4, potrzeba w szeregu naturalnym liczb, począwszy od liczby 5, postąpić naprzód o cztery jedności; liczba 9, do któréj się tym sposobem dochodzi, jest sumą liczb 5 i 4. Że 9 jest sumą liczby 5 i 4, oznacza się, pisząc

$$5 + 4 = 9,$$

a mówiąc 5 więcéj 4 równe 9.

Znak „+", położony między składnikami 5 i 4, jest znakiem dodawania i czyta się „więcéj"; znak zaś „=", położony między drugim składnikiem 4, a sumą 9, jest znakiem równości i czyta się „równe" lub „jest".

3. Tęsamę liczbę 9 otrzymamy na sumę, gdy zamiast 4 do 5 dodamy 5 do 4, t. j. gdy w szeregu naturalnym liczb, począwszy od liczby 4, postąpimy naprzód o pięć jedności. Mamy zatém także

$$4 + 5 = 9,$$

a przeto $5 + 4 = 4 + 5$, co się czyta „5 więcéj 4 równe 4 więcéj 5".

To dowodzi, że suma dwu składników jest niezależną od porządku, w jakim te składniki dodamy.

4. Sumę więcéj liczb znajdziemy, gdy do sumy dwu liczb dodamy trzecią liczbę, do téj nowéj sumy czwartą i t. d. Porządek, w jakim się te liczby dodaje, jest obojętny (3).

Ażeby więc znaleść sumę liczb 3, 5, 7, 9, potrzeba uskutecznić trzy następujące dodawania po dwie liczby:

$$3 + 5 = 8,\quad 8 + 7 = 15,\quad 15 + 9 = 24.$$

Przy wygłoszeniu tych dodawań, zamiast mówić: „3 więcéj 5 równe 8, 8 więcéj 7 równe 15, 15 więcéj 9 równe 24", wypowiada się głośno tylko pierwszy składnik 3 i kolejne sumy 8, 15, 24, uważając przy wymawianiu każdéj z tych sum na ten składnik, który się dodaje do sumy poprzedzającéj.

5. Przez ćwiczenie dochodzi się prędko do biegłości w dodawaniu dwu liczb jednocyfrowych lub liczby jednocyfrowéj do liczby wielocyfrowéj. Do tych zaś przypadków prostych sprowadza się dodawanie dwu lub więcéj liczb wielocyfrowych, podług prawidła następującego:

Ażeby znaleść sumę dwu lub więcéj liczb, uważa się każdą liczbę za rozłożoną na sumę jedności, dziesiątek, setek i t. d., n. p. 724 na $700+20+4$, czyli 7 setek + 2 dziesiątki + 4 jedności, następnie dodaje się oddzielnie ich jedności, oddzielnie dziesiątki, oddzielnie setki i t. d., a nareszcie zbiera się te wypadki częściowe w jednę liczbę.

Szereg tych dodawań częściowych zaczyna się albo od jedności rzędu najwyższego, przechodząc następnie do jedności coraz niższych rzędów, albo też od jedności prostych, przechodząc następnie do jedności coraz wyższych rzędów. Pierwszego z tych sposobów używa się przy uskutecznianiu dodawania z pamięci, a drugim sposobem postępuje się przy dodawaniu piśmienném.

6. Mając dodać z pamięci n. p. liczby 37 i 54, dodajemy naprzód ich dziesiątki, a następnie ich jedności, poczém otrzymane sumy częściowe zbieramy w jednę liczbę.

Ponieważ 3 dziesiątki + 5 dziesiątek = 8 dziesiątek, a 7 jedności + 4 jedności = 11 jedności, czyli 1 dziesiątka + 1 jedność, żądaną sumą będzie więc: 8 dziesiątek + 1 dziesiątka + 1 jedność, czyli 9 dziesiątek + 1 jedność, t. j. 91. Szereg tych działań można przedstawić wzorem:

$$37+54=\overline{30+7}+\overline{50+4}=\overline{30+50}+\overline{7+4}=80+11=$$
$$\overline{80+10}+1=90+1=91.$$

7. Ażeby dodawanie piśmienne liczb wielocyfrowych uskutecznić najdogodniéj, pisze się liczby, które należy dodać, jedne pod drugiemi, a mianowicie jedności pod jednościami, dziesiątki pod dziesiątkami, setki pod setkami i t. d. Poprowadziwszy następnie pod ostatnią liczbą, dodać się mającą, kreskę poziomą, pod tą kreską pisze się częściowe sumy, a mianowicie: pod jednościami liczbę zawierającą w sobie wszystkie razem jedności liczb danych, pod dziesiątkami liczbę zawierającą w sobie wszystkie razem dziesiątki liczb danych i t. d. Wszelako, jeżeli suma jedności pewnego rzędu liczb danych przechodzi 9, pod jednościami tego rzędu pisze się tylko jedności téj sumy częściowéj, a liczbę dziesiątek w niéj zawartą dodaje się do jedności rzędu bezpośrednio wyższego.

Zagadnienie 1. Dodać liczby 257, 984, 362.

Wzór działania:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2\;1\;} \\ 257 \\ 984 \\ 362 \\ \hline 1603 \end{array}$$

Wykład działania:

1. $7+4+2=13$; pod jednościami podpisuje się 3, a 1 dodaje się do dziesiątek.
2. $1+5+8+6=20$; pod dziesiątkami podpisuje się 0, a 2 dodaje się do setek.
3. $2+2+9+3=16$; pod setkami podpisuje się 6, a na miejscu tysięcy kładzie się 1.

Odpowiedź: Żądana suma jest równą 1603.

Zagadnienie 2. Pewna osoba ma dochodu w pierwszym roku 2064 zł., w drugim 2795 zł., a w trzecim 3584 zł. Ile zł. dochodu miała w ciągu tych trzech lat?

Wzór działania:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\;2\;1\;} \\ 2064 \\ 2795 \\ 3584 \\ \hline 8443 \end{array}$$

Wykład działania:

1. $4+5+4=13$; podpisuję 3 pod jednościami, a 1 dodaję do dziesiątek.
2. $1+6+9+8=24$; podpisuję 4 pod dziesiątkami, a 2 dodaję do setek.
3. $2+0+7+5=14$; podpisuję 4 pod setkami, a 1 dodaję do tysięcy.
4. $1+2+2+3=8$; podpisuję 8 pod tysiącami.

Odpowiedź. Dochód trzyletni téj osoby wynosił 8443 zł.

8. Ażeby się przeświadczyć o dokładności sumy, wykonywa sie próbę. W tym celu powtarza się dodawanie, dodając składniki od dołu do góry, jeżeli się je wprzódy dodawało od góry do dołu, albo też — opuszczając którykolwiek składnik — do sumy pozostałych składników dodaje się składnik opuszczony. Jeżeli każdym razem wypadnie tasama suma, wówczas prawdopodobnie nie popełniliśmy błędu. Inny sposób podamy w paragrafie następującym.

Zadania.

1. Począwszy od 1, postępować naprzód o 2, a więc 1, 3, 5, 7 i t. d. aż 101; podobnie iść naprzód począwszy od 2, a więc 2, 4, 6, 8 i t. d. aż do 100.

2. Podobnie dojść aż poza 100,
postępując o 3 od 1, 2, 3.
„ o 4 „ 1, 2, 3, 4.
„ o 5 „ 1, 2, 3, 4, 5.

3. Podobnie postępować o 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

4. Ciało, wolno spadające, przebiega w pierwszéj sekundzie 5 *m*, a w każdéj następnéj o 10 *m* więcéj, aniżeli w poprzedniéj. *a)* Jaką drogę odbędzie w 2éj, 3éj, 4éj, 5éj, 6éj sekundzie? *b)* Jaką po upływie 6 sekund?

5. Augustus, cesarz rzymski, urodził się w roku 63. przed Chr., a umarł w 14. roku po Chr. Ile lat żył?

6. Uskutecznić następujące dodawania:
a) 37 + 58, 29 + 67, 46 + 87, 304 + 595.
b) 7 + 34 + 23, 28 + 37 + 74, 41 + 7 + 364, 113 + 54 + 793.

7. Kupiec zapłacił za towar 579 zł.; przy sprzedaży zyskał 98 zł. Za ile sprzedał towar?

8. Ktoś urodził się w 1786 roku. W którym roku miał 74 lat?

9. Ze stacyi wychodzą równocześnie dwa pociągi w kierunkach przeciwnych, jeden przebywa drogę 984 *m* w 1 minucie, drugi 896 *m*. Jakie jest oddalenie obu pociągów po upływie 1 minuty?

10. Ktoś ma MCCCXXVII zł.; przez rok oszczędził DLXXIX zł. Jak wielki jego majątek?

11. Pewna osoba wydała w roku na stół 425 zł., na mieszkanie 345 zł., na odzienie 224 zł., drobne wydatki wynosiły 100 zł. Ile ta osoba miała pieniędzy, jeżeli jéj się zostało jeszcze 1548 zł.?

12. Wydatki pewnéj fabryki wynosiły: w poniedziałek 337 zł., we wtorek 417 zł., w środę 129 zł., we czwartek 206 zł., w piątek 97 zł., w sobotę 1347 zł. Ile wydano w tygodniu?

13. Pewien kupiec sprzedał towar za 7793 zł. Na sprzedaży téj stracił 1798 zł. Ile go towar kosztował?

14. Uskutecznić następujące dodawania:
a) 213 + 327 + 146 + 73 + 203 + 985;

b) 261 + 3942 + 28 + 7035 + 409 + 11;
c) 736 + 400 + 7159 + 47 + 7204 + 383;
d) 33486 + 190 + 8624 + 6708 + 75346.

15. Znaleść sumę czterech liczb, z których pierwsza jest 5402, druga o 782 większa od pierwszéj, trzecia o 567 większa od drugiéj, a czwarta o 481 większa od trzeciéj.

16. Cesarz Franciszek Józef I. urodził się roku 1830., w którym roku miał 45 lat?

17. Mickiewicz urodził się roku 1798., umarł, mając lat 57. W którym roku umarł Mickiewicz?

18. W pewnéj wsi jest 798 *ha* ornéj ziemi, 1392 *ha* lasu, 98 *ha* łąk, 278 *ha* nieużytków. Jaki obszar zajmuje ta wieś?

19. Trzy osoby podzieliły się pewną sumą pieniędzy w ten sposób, że pierwsza dostała 4358 zł., druga 540 zł. więcéj, niż pierwsza, a trzecia tyle, ile dwie pierwsze i nadto 54 zł. Ileż dostała osoba druga i trzecia i jaka była cała suma, jeżeli po wspomnianym podziale zostało jeszcze 27 zł.?

20.	*a)*	*b)*	*c)*	*d)*
	158729	408989	1179087	4095987
	67213	600972	987654	6729896
	192478	99809	2009879	3090907
	8928	417568	3780097	892009
	62679	506097	6729789	79876

21. Następujące liczby dodać w kierunku poziomym i pionowym; następnie dodać sumy pionowych i poziomych szeregów:

6473 +	27398 +	4677 +	9861 +	7690 =	. . . . .
892 +	15608 +	974 +	23685 +	9547 =	. . . . .
1607 +	9879 +	1712 +	8979 +	798 =	. . . . .
7493 +	891 +	17682 +	17684 +	2090 =	. . . . .
974 +	17348 +	937 +	1793 +	3798 =	. . . . .
. . . . +	. . . . . +	. . . . . +	. . . . . +	. . . . =	

22. Według spisu ludności z 31. grudnia roku 1880. ma:

Austrya niższa	2329021	mieszkańców
Austrya wyższa	760879	„
Salzburg	163566	„
Styrya	1212367	„
Karyntya	348670	„

Kraina	481176	mieszkańców
Tryest z obwodem	144437	„
Gorycya i Gradyszcze	210241	„
Istrya	295854	„
Tyrol	805326	„
Vorarlberg	107364	„
Czechy	5557134	„
Morawa	2151619	„
Szląsk	565772	„
Galicya	5953170	„
Bukowina	569599	„
Dalmacya	474489	„

Jak wielka jest ludność Przedlitawii?

23. Wydatki pewnéj fabryki wynosiły:

w styczniu	17685	zł.
„ lutym	13792	„
„ marcu	12687	„
„ kwietniu	10988	„
„ maju	15726	„
„ czerwcu	14659	„
„ lipcu	16791	„
„ sierpniu	11986	„
„ wrześniu	13759	„
„ październiku	12888	„
„ listopadzie	15277	„
„ grudniu	14895	„

Jak wielkie były wydatki téj fabryki w całym roku?

24. Powierzchnia Australii wynosi 92000 μm^2, Europy 103500 μm^2, Afryki 310500 μm^2, Ameryki 431250 μm^2, Azyi 460000 μm^2. Morza lodowatego północnego 115092 μm^2, południowego 201411 μm^2, Oceanu indyjskiego 805644 μm^2, atlantyckiego 920736 μm^2, wielkiego 1899018 μm^2. Ile μm^2 wynosi powierzchnia *a)* lądu stałego, *b)* mórz, *c)* całéj ziemi?

§. 6.

Odejmowanie *(Subtraction).*

1. Odejmowanie ma na celu wynalezienie liczby, którąby zawierała w sobie tyle jedności, o ile

większa z dwu danych liczb przewyższa liczbę mniejszą. Wypadek tego działania zowie się różnicą liczb danych *(Differenz)*, a z dwu tych liczb większą nazywamy *(Minuend)*, a mniejszą odjemnikiem *(Subtrahend)*. Różnicę zowią także resztą *(Rest)* odejmowania.

Z tego określenia wypływa bezpośrednio, że liczba mniejsza, powiększona o różnicę, daje liczbę większą na sumę, czyli że: odjemna równa odjemnikowi więcéj różnicy.

Skoro tak rzecz się ma, więc odejmowanie możemy także tak określić: Odejmowanie ma na celu z danéj sumy dwu składników (odjemnéj) i z jednego składnika téj sumy (odjemnika) wyznaczenie drugiego składnika (różnicy). Odejmowanie jest więc działaniem przeciwném dodawaniu dwu składników.

Liczby mianowane można odjąć jednę od drugiéj tylko wtedy, gdy obie przedstawiają ilość jednostek tegosamego gatunku.

2. Ażeby od liczby n. p. 9 odjąć liczbę 4, możemy postąpić dwojakim sposobem: albo w szeregu naturalnym liczb, począwszy od liczby 9, postąpić wstecz o 4 jedności, czyli od dziewięciu odliczyć 4 jedności, albo téż w szeregu liczb naturalnym, począwszy od liczby 4, postąpić naprzód o tyle jedności, ile ich potrzeba, aby dojść do liczby 9, czyli do 4 jedności doliczyć 5 jedności.

Sposobu odejmowania przez doliczenie będziemy używali częściéj, aniżeli sposobu przez odliczenie.

Że n. p. 5 jest różnicą liczb 9 i 4, oznacza się, pisząc:

$$9 - 4 = 5,$$

a mówiąc: „9 mniéj 4 równe 5".

Znak „—", położony między odjemną 9 i odjemnikiem 4, jest znakiem odejmowania i czyta się „mniéj".

3. Z określenia odejmowania wypływają jeszcze następujące wnioski:

a) Jeżeli się odjemną zwiększy lub zmniejszy o pewną liczbę (nie zmnieniając wszakże odjemnika), to i różnica zwiększy się lub odpowiednio zmniejszy o tęsamę liczbę.

Tak n. p. mamy:

$$9 - 4 = 5,$$

gdy tymczasem, zwiększywszy lub zmniejszywszy odjemną o 2, otrzymamy

$$11 - 4 = 7, \text{ lub } 7 - 4 = 3.$$

b) Jeżeli się odjemnik zwiększy lub zmniejszy o pewną liczbę (nie zmieniając wszakże odjemnéj), to różnica — przeciwnie — zmniejszy się lub odpowiednio zwiększy o tęsamę liczbę.

Tak n. p. mamy:

$$17 - 8 = 9,$$

gdy tymczasem, zwiększywszy lub zmniejszywszy odjemnik o 5, otrzymamy

$$17 - 13 = 4, \text{ lub } 17 - 3 = 14.$$

c) Jeżeli się odjemną i odjemnik jednocześnie zwiększy albo jednocześnie zmniejszy o pewną liczbę, to różnica pozostanie niezmieniona.

Tak n. p. mamy:

$$23 - 8 = 15,$$

zwiększywszy zaś lub zmniejszywszy jednocześnie odjemną i odjemnik o 4, otrzymamy taksamo $27 - 12 = 15$, jak również $19 - 4 = 15$.

4. Przez ćwiczenie dochodzi się prędko do biegłości w odejmowaniu liczby jednocyfrowéj od liczby jedno lub dwucyfrowéj. Do tych zaś przypadków szczególnych sprowadza się odejmowanie każdéj innéj liczby całkowitéj, uskuteczniając, podobnie jak przy dodawaniu, odejmowania częściowe: jedności od jedności, dziesiątek od dziesiątek, setek od setek i t. d., a potém zbierając te wypadki częściowe w jednę liczbę.

5. Mając odjąć z pamięci n. p. liczbę 35 od liczby 57, wyobrażamy sobie odjemnik 35 rozłożony na sumę dziesiątek i jedności, $30 + 5$, czyli 3 dziesiątki + 5 jedności, i odejmujemy naprzód dziesiątki, wskutek czego otrzymamy $57 - 30 = 27$, a następnie od téj różnicy odejmujemy jedności, t. j. $27 - 5 = 22$. Jest więc $57 - 35 = 22$.

6. Ażeby zaś odejmowanie piśmienne liczb wielocyfrowych uskutecznić najdogodniéj, pisze się odjemnik pod odjemną, a mianowicie: jedności pod jednościami, dziesiątki pod dziesiątkami i t. d., a potém uskutecznia się odejmowania częściowe,

zaczynając od jedności prostych i postępując do jedności coraz wyższych rzędów. Poprowadziwszy następnie pod odjemnikiem kreskę poziomą, pod tą kreską pisze się częściowe różnice, a mianowicie: pod jednościami różnicę jedności, pod dziesiątkami różnicę dziesiątek i t. d. Jeżeli cyfra jedności jakiegokolwiek rzędu w odjemniku jest większa od cyfry jedności tegosamego rzędu w odjemnéj, to w odjemnéj liczbę tych jedności zwiększymy o 10 i jednocześnie liczbę jedności rzędu bezpośrednio wyższego w odjemniku zwiększamy o 1 (3, *c*).

Zagadnienie 1. Od liczby 5187 odjąć liczbę 2468.

Wzór działania:	Wykład działania przez odliczanie:
5187 odjemna 2468 odjemnik 2719 różnica	1. 8 od 7 nie można odjąć, więc 7 jedności w odjemnéj zwiększam o 10 jedności i jednocześnie w odjemniku 6 dziesiątek zwiększam o 1 dziesiątkę. Wskutek tego będzie: 17—8 = 9; piszę zatém 9 pod jednościami. 2. 8 — 7 = 1; piszę 1 pod dziesiątkami. 3. 4 od 1 nie można odjąć, więc 1 setkę w odjemnéj zwiększam o 10 setek i jednocześnie w odjemniku 2 tysiące zwiększam o 1 tysiąc, a wskutek tego będzie: 11 — 4 = 7; piszę zatém 7 pod setkami. 4. 5 — 3 = 2; piszę 2 pod tysiącami.

Odpowiedź: Żądana różnica wynosi 2719.

Zagadnienie 2. Pewna osoba ma 8320 zł., a winna 4674 zł.; ile będzie miała, spłaciwszy dług?

Wzór działania:	Wykład działania przez doliczanie:
8320 4674 3646	1. 4 + 6 = 10; piszę 6 pod jednościami, jednocześnie zwiększam o 1 dziesiątkę liczbę dziesiątek w odjemniku. 2. 1 + 7 + 4 = 12; piszę 4 pod dziesiątkami, jednocześnie zwiększam o 1 setkę liczbę setek w odjemniku. 3. 1 + 6 + 6 = 13; piszę 6 pod setkami, jednocześnie zwiększam o 1 tysiąc liczbę tysięcy w odjemniku. 4. 1 + 4 + 3 = 8; piszę 3 pod tysiącami.

Odpowiedź: Po spłaceniu długu pozostało téj osobie 3646 zł.

7. Ażeby się przekonać o dokładności różnicy, można postąpić dwojakim sposobem: albo dodając różnicę do odjemnika, wskutek czego powinna wypaść odjemna, albo też odejmując różnicę od odjemnéj, wskutek czego powinien wypaść odjemnik (1).

Zagadnienie 3. W pewném mieście urodziło się w ciągu roku 3423 dzieci, a umarło w tymsamym czasie 2842 mieszkańców. Ilu mieszkańców przybyło w tym czasie?

$$\begin{array}{r} 3423 \\ 2842 \\ \hline 581 \end{array} \text{, próba 1. } \begin{array}{r} 2842 \\ 581 \\ \hline 3423 \end{array} \text{, próba 2. } \begin{array}{r} 3423 \\ 581 \\ \hline 2842 \end{array}$$

Uwaga. Zapomocą odejmowania można sprawdzić także dokładność dodawania. Jakoż, jeżeli mamy znaleść sumę kilku składników, ich suma powinna być taką, aby po odjęciu od niéj jednego składnika, różnica była równą sumie składników pozostałych.

8. Jeżeli mamy ze sobą złączyć kilka liczb, jedne zapomocą dodawania, a inne zapomocą odejmowania, to ten rachunek można najłatwiéj uskutecznić tym sposobem, że się znajdzie naprzód sumę liczb, które się ma dodać, a potém sumę liczb, z których każda ma być odjęta, wreszcie zaś od pierwszéj sumy odejmie się wtórą.

Zagadnienie 4. Pewien kupiec, prowadzący trojaki handel, włożył w pierwszy 12800 zł., w drugi 15400 zł., a w trzeci 26400 zł.; na pierwszym handlu zarobił przez rok 1288 zł., na drugim zarobił 1458 zł., a na trzecim stracił 528 zł.; prócz tego miał różnych wydatków 1854 zł. Ile ten kupiec mieć będzie po skończonym roku?

Suma pieniędzy włożonych:

$$12800 + 15400 + 26400 = 54600 \text{ zł.}$$

po skończonym roku zwiększyła się o sumę zysków:

$$1288 + 1458 = 2746 \text{ zł.},$$

a zmniejszyła się stratą na jednym handlu i poniesionymi wydatkami:

$$528 + 1854 = 2382.$$

Ażeby więc wiedzieć, ile kupiec po skończonym roku mieć będzie, należy od sumy dwu pierwszych sum: $54600 + 2746 = 57346$ odjąć trzecią sumę 2382. Mamy zatém:

$$57346 - 2382 = 54964.$$

*

Odpowiedź: Po skończonym roku kupiec mieć będzie 54964 zł.

Uwaga. Tensam wypadek otrzymamy — dodając do pierwszéj sumy, 54600, różnicę między drugą i trzecią, t. j. 2746 — 2382 = 364. Jakoż 54600 + 364 = 54964.

Zadania.

1. Odliczać od 100 po kolei jedność, aż się dójdzie do 0.

2. Podobnie odliczać naprzód od 100, a potém od 99 po dwie jedności.

3. Podobnie odliczać 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9 jedności, począwszy od 100.

4. Ile dodać trzeba do 7, 9, 12, 14, 17, 24, 37, ażeby otrzymać 40?

5. Wykonać odejmowania: 48 — 30; 87 — 50; 75 — 57; 79 — 56; 65 — 13; 230 — 70; 580 — 90.

6. Wykonać odejmowania: 79 — 45; 83 — 57; 563 — 241; 700 — 635; 1000 — 870; 2500 — 1328; 1093 — 927.

7. Suma dwu liczb jest 340; jak wielką jest druga, jeżeli pierwsza jest 156?

8. Ktoś ma lat 26; za ile lat będzie miał 37, 43, 59, 68, 75 lat?

9. Jeżeli pewną liczbę o 68 zmniejszę, otrzymam 75. Jaka to liczba?

10. W roku 1889. liczono od wynalezienia maszyny parowéj 190 lat, sztuki drukarskiéj 449 lat, papieru 638 lat; w którym roku uczyniono każdy z powyższych wynalazków?

11. W roku 1755. wynalazł Franklin konduktor elektryczny, na 105 lat przedtém Otto Guericke pompę do rozrzedzenia powietrza. W którym roku uczynił Guericke swój wynalazek?

12. W Rzymie panowało 7 królów od roku 753. do 509. przed Chr. Jak długo był Rzym królestwem?

13. Jan Kochanowski urodził się w 1530. roku. W roku 1884. obchodzono 300-letnią rocznicę śmierci jego. Ile miał lat umierając?

14. Płaca urzędnika wynosi rocznie 1350 zł.; jeżeli z niéj 987 zł. wyda, ile oszczędzi?

15. Amerykę odkrył Kolumb 1493. roku. Jak dawno znamy tę część świata?

16. Od 1000 odjąć liczby: 278, 315 i 372. Na ile sposobów można to uczynić? Jakie prawidło można wypowiedzieć na przypadek, że od liczby kilka innych liczb po kolei odjąć należy?

17. Ktoś miał 14712 zł. wypłacić. Jeżeli zapłacił już 7846 zł., ile jeszcze winien zapłacić?

18. Kupiec sprzedał towar swój za 17134 zł. Na sprzedaży zyskał 1827 zł. Ileż zapłacił za towar?

19. Którą liczbę trzeba odjąć od 7231, ażeby otrzymać resztę 5487?

20. Pewien towar waży brutto ($B^{\underline{tto}}$) 1814 *kg*, tara ($T^{\underline{a}}$) wynosi 179 *kg*; ile wynosi ciężar netto ($N^{\underline{tto}}$) tego towaru? *)

21. Jeżeli pewien towar waży $B^{\underline{tto}}$ 1132 *kg*, a $N^{\underline{tto}}$ 987 *kg*, ile waży $T^{\underline{a}}$?

22. Ktoś ma 97 *a* lasu; ile mu brakuje do 1 *ha*?

23. Która liczba, dodana do 70809, da 117491?

24. W spuściźnie po ojcu zostało dla córki 17345 zł., dla syna o 5657 zł. mniéj; *a)* ile otrzymał syn, *b)* jak wielki był cały spadek?

25. Ktoś ma długu 14292 zł. Dług ten wypłacał w ratach po 3525 zł., 4750 zł. i 5128 zł. Ile jeszcze winien?

26. O ile większą jest suma 27272 + 16251 od sumy 17253 + 18493?

27. O ile jest różnica 92378 — 47589 mniejszą od różnicy 79005 — 29743?

28. Czemu się równa 82900 — 40520 + 14800 — 39650?

29. Monarchia austro-węgierska ma 635982 μa powierzchni, kraje korony węgierskiéj 330851 μa. Ile μa przypada na resztę krajów koronnych?

30. Największa odległość słońca od ziemi w lecie wynosi 21237498 mil geograficznych, najmniejsza zaś w zimie 20638236 mil. O ile słońce w zimie bliżéj jest ziemi, aniżeli w lecie?

---

*) $B^{\underline{tto}}$ jest ciężar towaru wraz z opakowaniem, $T^{\underline{a}}$ ciężar samego opakowania, $N^{\underline{tto}}$ ciężar samego towaru.

§. 7.

Mnożenie *(Multiplication).*

1. Mnożenie ma na celu wzięcie jednéj z liczb danych, zwanéj mnożną *(Multiplicand)*, tyle razy za składnik sumy, ile druga z liczb danych, zwana mnożnikiem *(Multiplicator)*, zawiera w sobie jedności. Wypadek tego działania zowie się iloczynem *(Product)*. Mnożna i mnożnik są czynnikami *(Factoren)* iloczynu.

Mnożenie jest więc dodawaniem, w którém wszystkie liczby, mające być dodane, są równe. Mnożnik wskazuje, ile razy mnożna ma być wzięta za składnik sumy; stąd téż mnożnik jest zawsze liczbą oderwaną, gdy tymczasem mnożna może być albo liczbą oderwaną albo mianowaną. Jeżeli mnożnik jest liczbą mianowaną, wówczas także iloczyn będzie liczbą mianowaną tegosamego gatunku, co mnożna.

2. Ażeby pomnożyć liczbę n. p. 5 przez liczbę 3, potrzeba 5 wziąć trzy razy za składnik sumy: iloczynem żądanym jest więc $5 + 5 + 5$ czyli 15. Oznacza się, że 5, pomnożone przez 3, daje 15 na iloczyn, pisząc:

$$5 \, . \, 3 = 15, \quad \text{albo} \quad 5 \times 3 = 15,$$

a mówiąc: „5 razy 3 równe 15“.

Znak „ . “ albo „×“ jest znakiem mnożenia i czyta się „razy“. Będziemy używali przeważnie pierwszego znaku „ . “.

3. Jeżeli we wzorze

$$5 \, . \, 3 = 5 + 5 + 5$$

po drugiéj stronie znaku równości, każdy składnik 5 przedstawimy jako 5 jedności i tak otrzymane 3 sumy po 5 jedności podpiszemy jednę pod drugą, to wypadnie:

$$\begin{aligned} 5 \, . \, 3 = {} & 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ & + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ & + 1 + 1 + 1 + 1 + 1. \end{aligned}$$

Zebrawszy następnie po trzy jedności każdego szeregu pionowego (kolumny) w jednę liczbę 3, mieć będziemy:

$$5 \, . \, 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3,$$

czyli

$$5 \, . \, 3 = 3 \, . \, 5,$$

co się czyta: „5 razy 3 równe 3 razy 5“.

To dowodzi, że iloczyn dwu czynników nie zmieni się, gdy się te czynniki zamieni jeden na drugi.

4. Zapomocą dodawania znajdziemy iloczyn jakichkolwiek dwu liczb. Atoli uskutecznianie mnożenia zapomocą dodawania byłoby nużące, jeżeliby mnożnik był liczbą wielką. Dlatego podamy inny sposób na wykonanie tego działania.

Przedewszystkiém trzeba znać na pamięć wszelkie iloczyny dwu liczb jednocyfrowych, gdyż mnożenie jakichkolwiek dwu liczb sprowadza się ostatecznie do powtórzonego mnożenia dwu liczb jednocyfrowych. Te iloczyny zawiera następująca tabliczka mnożenia, którą się tworzy sposobem następującym:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Wypisujemy w jednym (pierwszym) wierszu dziewięć pierwszych liczb; dodając każdą z tych liczb do siebie saméj, otrzymujemy drugi wiersz, który zawiera iloczyny dziewięciu pierwszych liczb przez 2; dodając liczby pierwszego wiersza do odpowiednich drugiego wiersza, otrzymujemy trzeci wiersz, który zawiera iloczyny dziewięciu pierwszych liczb przez 3; dodając liczby pierwszego wiersza do odpowiednich trzeciego wiersza, otrzymujemy czwarty wiersz, który zawiera iloczyny dziewięciu pierwszych liczb przez 4; tym sposobem postępujemy aż do dziewiątego wiersza, dodając zawsze liczby pierwszego wiersza do odpowiednich liczb ostatniego utworzonego wiersza, co wychodzi widocznie na powiększenie każdym razem mnożnika o jednę jedność.

Z tego sposobu tworzenia tabliczki mnożenia wypływa, że każdy wiersz zawiera iloczyny dziewięciu pierwszych liczb przez tę liczbę, która się znajduje na początku wiersza, tudzież że każda kolumna zawiera iloczyny liczby, znajdującéj się na początku kolumny (u góry), przez dziewięć pierwszych liczb.

A zatém iloczyn n. p. liczb 7 razy 8 powinien się znajdować jednocześnie w ósmym wierszu i w siódméj kolumnie, ten iloczyn znajduje się więc na przecięciu się ósmego wiersza i siódméj kolumny, a jest tym iloczynem liczba 56.

5. Powiedzieliśmy (4), że mnożenie dwu jakichkolwiek liczb sprowadza się do mnożenia dwu liczb jednocyfrowych.

Niech naprzód tylko mnożna będzie liczbą wielocyfrową n. p. 263, a mnożnik niech będzie liczbą jednocyfrową n. p. 4.

Mamy: $263 \,.\, 4 = 263 + 263 + 263 + 263,$

atoli $263 = 200 + 60 + 3,$

jest więc także:

$$\begin{aligned} 263 \,.\, 4 = {} & 200 + 60 + 3 \\ & + 200 + 60 + 3 \\ & + 200 + 60 + 3 \\ & + 200 + 60 + 3, \end{aligned}$$

czyli $263.4 = 200.4 + 60.4 + 4.3.$

A zatém liczbę wielocyfrową mnoży się przez jednocyfrową, mnożąc osobno jéj jedności, osobno dziesiątki, osobno setki i t. d., a potém dodając tak otrzymane iloczyny częściowe.

Ażeby tę robotę uskutecznić najdogodniéj, prowadzi się pod mnożną kreskę poziomą, a pod tą kreską podpisuje się iloczyny częściowe: iloczyn jedności pod jednościami mnożnéj, iloczyn dziesiątek pod dziesiątkami, iloczyn setek pod setkami i t. d. Wszelako, jeżeliby którykolwiek iloczyn częściowy był większy, niż 9, to na miejscu przynależném pisze się tylko jedności tego iloczynu, a dziesiątki jego zachowuje się, celem dodania ich do iloczynu jedności bezpośrednio wyższego rzędu. Mamy zatém:

Wzór działania:	Wykład działania:
$\begin{array}{r} 263 \,.\, 4 \\ \hline 1052 \end{array}$	1. $3.4 = 12$; 2 jedności podpisuję pod jednościami, a 1 dziesiątkę dodaję do iloczynu dziesiątek. 2. $6.4 + 1 = 25$; 5 dziesiątek podpisuję pod dziesiątkami, a 2 setki dodaję do iloczynu setek. 3. $2.4 + 2 = 10$; 0 setek podpisuję pod setkami, a 1 tysiąc na miejscu tysięcy (t. j. na czwartém, rachując od prawéj).

6. Jeżeli następnie mnożnikiem jest liczba, złożona z jednéj cyfry znaczącéj i z jednego lub kilku zer dopisanych po prawéj stronie téj cyfry, wówczas uskutecznia się mnożenie tym sposobem, że się mnożną tylko przez tę cyfrę znaczącą mnoży, a do iloczynu dopisuje po prawéj tyle zer, ile ich było w mnożniku.

Niech naprzód mnożnikiem będzie n. p. liczba 100, w któréj cyfrą znaczącą jest 1. W tym przypadku każda cyfra mnożnéj ma otrzymać wartość miejscową 100 razy większą, a więc: jedności mają przejść na setki, dziesiątki na tysiące i t. d., nie będzie zaś w iloczynie ani jedności ani dziesiątek. Mamy zatém n. p.

$$263.100 = 26300.$$

Niech powtóre mnożnikiem będzie n. p. liczba 400, w któréj cyfra znacząca jest różną od 1. W tym przypadku dość pomnożyć mnożną przez cyfrę 4, uważając jednak, że ta cyfra oznacza 4 setki. Mnożąc więc jedności mnożnéj przez 4 setki, otrzymamy pewną ilość setek; mnożąc dziesiątki mnożnéj przez 4 setki, otrzymamy pewną ilość tysięcy i t. d., tak, iż znowu w iloczynie nie będzie ani jedności ani dziesiątek. Mamy zatém:

$$\frac{263.400}{105200}$$

7. Niech wreszcie mnożnik będzie jakąkolwiek liczbą wielocyfrową. Dajmy na to, że mamy pomnożyć 6584 przez 273.

Stosując prawidło ustępów 5. i 3., mamy kolejno:

$$\begin{aligned} 6584.273 = 273.6584 &= 200.6584 + 70.6584 + 3.6584 \\ &= 6584.200 + 6584.70 + 6584.3. \end{aligned}$$

A zatém przez liczbę wielocyfrową mnoży się tym sposobem, że się mnożną oddzielnie przez jedności, oddzielnie przez dziesiątki, oddzielnie przez setki mnożnika i t. d. mnoży, a potém dodaje tak otrzymane iloczyny częściowe.

Te mnożenia częściowe można uskutecznić w jakimkolwiek porządku; wszakże najdogodniéj zacząć od mnożenia przez jedności mnożnika, przechodząc do jedności coraz wyższego rzędu, albo też postąpić w kierunku przeciwnym, zaczynając od mnożenia przez jedności najwyższego rzędu w mnożniku, a przechodząc do jedności coraz niższego rzędu.

Następnie, mnożąc przez jedności pewnego rzędu, dość będzie mnożyć przez cyfrę tych jedności, opuszczając w otrzymanym iloczynie krańcowe zera, byleśmy pamiętali, jaka jest wartość miejscowa najniższéj cyfry tego iloczynu, abyśmy kolejno otrzymane iloczyny częściowe, celem ich następnego dodania, mogli należycie podpisać jedne pod drugimi.

I. Wzór działania:

```
mnożna = 6584.273 = mnożnik
          19752  . . . . 6584.3
         46088   . . . . 6584.70
        13168    . . . . 6584.200
        1797432 = iloczyn.
```

II. Wzór działania:

```
mnożna = 6584.273 = mnożnik
        13168    . . . . 6584.200
         46088   . . . . 6584.70
          19752  . . . . 6584.3
        1797432 = iloczyn.
```

Według pierwszego sposobu mnożyliśmy naprzód przez jedności, potém przez dziesiątki, a nakoniec przez setki mnożnika. Podpisując te trzy iloczyny częściowe jeden pod drugim, cyfrę najniższą w każdym następnym posunęliśmy o jedno miejsce ku lewéj względem cyfry najniższéj w bezpośrednio poprzedzającym iloczynie. Albowiem cyfra najniższa w pierwszym iloczynie częściowym oznacza jedności, w drugim dziesiątki, a w trzecim setki.

Według drugiego sposobu mnożyliśmy naprzód przez setki, potém przez dziesiątki, a na koniec przez jedności mnożnika. Podpisując zaś te iloczyny częściowe jeden pod drugim, cyfrę najniższą w każdym następnym wysunęliśmy o jedno miejsce na prawo względem najniższéj cyfry w bezpośrednio poprzedzającym iloczynie. Albowiem cyfra najniższa w pierwszym iloczynie częściowym oznacza setki, w drugim dziesiątki, a w trzecim jedności.

8. Uwaga. Jeżeli oba czynniki mają jedno lub więcéj zer na miejscach najniższych, wówczas uskutecznia się mnożenie, opuszczając te zera, atoli

w otrzymanym iloczynie dopisuje się po prawéj tyle zer, ile ich razem było na najniższych miejscach w mnożnéj i w mnożniku.

Jakoż, mając n. p. mnożyć 9300 przez 720, mnożymy 9300 przez 72, a do iloczynu dopisujemy jedno 0 (6). Mnożenie zaś 9300 przez 72 wychodzi na mnożenie 93 setek przez 72 jedności; ten iloczyn będzie zatém przedstawiał tyle setek, ile iloczyn 93.72 zawiera w sobie jedności. Potrzeba zatém z prawéj strony iloczynu 93.72 t. j. 6696 dopisać naprzód dwa zera, z powodu, że mnożna przedstawia setki, a potém jeszcze jedno zero, z powodu, że mnożnik przedstawia dziesiątki.

9. Ażeby się przekonać, czy mnożenie dobrze uskuteczniono, należy wykonać próbę. Tę wykonamy, powtarzając mnożenie, lecz odwróciwszy porządek czynników, t. j. wziąwszy mnożną za mnożnik, a mnożnik za mnożną. Jeżeli wypadnie tensam iloczyn, wówczas prawdopodobnie nie popełniliśmy żadnego błędu.

Inny sposób sprawdzenia dokładności iloczynu poda się w paragrafie następującym.

Zadania.

1. Jakie iloczyny otrzymuje się, mnożąc 11, 12, 13....19 przez 1, 2....9?

2. Podać iloczyny 50.5; 700.12; 9000.15; 30000.19.

3. Ile otrzymamy, wykonawszy mnożenia: 170.5; 190.8; 1300.7; 21000 $\times$ 5; 4200 $\times$ 4?

4. Ile zapłacić wypadnie za 8 *a* pola, płacąc ar po 19 zł., 26 zł., 40 zł., 47 zł.?

5. Jeżeli 1 *a* ogrodu kosztuje 15 zł., ile zapłacić trzeba za 1 *ha*, 3 *ha*, 7 *ha*?

6. 1 *dkg* towaru kosztuje 7 ct.; ile zapłacić trzeba z 1 *kg*, 4 *kg*, 9 *kg*?

7. 1 *l* wina kosztuje 45 ct., ile kosztuje 1 *hl*, 5 *hl*, 8 *hl*?

8. 1 *kg* kawy kosztuje 79 ct.; ile kosztuje 1 *q*, 3 *q*, 7 *q*, 17 *q*, 28 *q*, 50 *q*?

9. Z funta menniczego (500 *g*) czystego srebra biją w Austryi 45 zł. walutą austryacką. Ileż monet po 1 zł. wybić można z 4, 7, 9, 17, 50, 100, 300, 1000 funtów?

10. 9 robotników ukończy robotę pewną w 27 dniach; ile dni potrzebowałby 1 robotnik na wykonanie téj pracy?

11. W fabryce pewnéj pracuje 237 robotników. Każdy zarabia tygodniowo 9 zł. Ile wypłaci fabrykant swym robotnikom za 6, 24, 36, 42, 48, 84, 72, 108 tygodni? W jaki sposób możnaby w zadaniu tém iloczyny następne z poprzednich otrzymać?

12. Ile razy upaść mogą odmiennie dwie kostki do gry rzucane razem, ile razy 3, 4, 5, 6 kostek?

13. Głos przebiega w 1 sekundzie 332 *m*, jak od nas oddaloną jest burza, jeżeli między błyskawicą a grzmotem upłynie 17, 30, 50 sekund?

14. Kupiec kupił wino po 47 zł. 1 *hl*. Ile zarobił na 35 *hl*, jeżeli je za 1785 zł. sprzedał?

15. Pewien towar waży $\mathrm{B}^{\underline{\mathrm{tto}}}$ 872 *kg*, $\mathrm{T}^{\underline{\mathrm{a}}}$ 83 *kg*. Ile kosztuje towar ten, jeżeli 1 *kg* $\mathrm{N}^{\underline{\mathrm{tto}}}$ płacono po 18 zł.?

16. Kupiono 2243 *m* płótna po 37 ct. za 1 *m*, a 392 *m* innego płótna, które jest dwa razy droższe. Ile zapłacono za płótno każdego gatunku? Ile za oba razem?

17. Odległość księżyca od ziemi wynosi 59 promieni ziemskich. Wyrazić odległość tę w milach geograficznych, jeżeli przyjmiemy promień równy 859 mil.

18. Ktoś kupił 27 *ha* roli po 873 zł., 11 *ha* łąki po 465 zł. i 35 *ha* lasu po 309 zł. Ile zapłacił za wszystko?

19. Umiejąc mnożyć tylko przez 2 lub przez 3, pomnożyć 75268 przez 64 lub przez 27.

20. Umiejąc mnożyć tylko przez 7 i przez 8, pomnożyć 6954 przez 56.

21. Który z dwu iloczynów 207.38 i 187.42 jest większy i o ile?

22. Ktoś kupił 389 *ha* gruntu, płacąc po 105 zł. za 1 *ha*; ile zyskał, sprzedawszy ten grunt po 137 zł. za 1 *ha*? Na ile sposobów można to zadanie rozwiązać?

23. Powierzchnia Galicyi wynosi 1356 kwadrat. mil geogr. Jeżeli na 1 milę kwadrat. przypada 3998 mieszkańców przeciętnie, jak wielką jest ludność Galicyi?

24. Światło przebiega 313000 *km* na sekundę. Jaka jest odległość ziemi od słońca, jeżeli światło słoneczne potrzebuje 498 sekund, by dójść do ziemi?

25. Wykonać mnożenia:

a) 670400.71208,	*d)* 518 × 518,
b) 68290.17960,	*e)* 15692 × 15692,
c) 24579.30961,	*f)* 7917 × 7917.

W powyższych przykładach nie należy tworzyć osobno częściowego iloczynu, powstającego przy mnożeniu przez 1, ale za takowy uważać mnożną, dalsze zaś częściowe iloczyny odpowiednio podpisać.

26. Jak możnaby uprościć mnożenie przez 11. Wykonać mnożenia: 47568.11; 92975.11; 47591.111; 86795.111.

27. W iloraki sposób wykonać można mnożenia: 56791.99; 71618.97; 4581.999, 72596.998?

28. W iloraki sposób wykonać można mnożenia:

a) 342.486,	*c)* 1568.3612,	*e)* 5742.3459,
b) 798.279,	*d)* 2798.7427,	*f)* 6584.9725.

29. Uczeń, tworząc iloczyn 3872.5436, wypisuje częściowy iloczyn 3872.4 o jedno miejsce na prawo daléj, aniżeli uczynić należało. Które cyfry w iloczynie głównym będą błędne? Jak wielki będzie błąd?

§. 8.

Dzielenie *(Division)*.

1. Dzielenie ma na celu wynalezienie, ile razy większa z dwu liczb danych, zwana dzielną *(Dividend)*, zawiera w sobie mniejszą z tych dwu liczb, zwaną dzielnikiem *(Divisor)*. Wypadek tego działania nazywa się ilorazem *(Quotient)*.

Z tego określenia wypływa, iż liczba mniejsza, pomnożona przez iloraz, daje liczbę większą na iloczyn, czyli, że dzielna równa dzielnikowi pomnożonemu przez iloraz.

Skoro tak rzecz się ma, więc dzielenie można jeszcze tak określić: Dzielenie ma na celu, z danego iloczynu dwu czynników (dzielnéj) i z jednego czynnika (dzielnika) wyznaczenie drugiego czynnika.

Dzielenie jest więc działaniem przeciwném mnożeniu.

2. Każde zadanie na mnożenie dwu czynników prowadzi do dwu różnych zadań na dzielenie, które, lubo się je tymsamym sposobem rozwiązuje, wymagają odmiennego rozumowania.

Aby tę rzecz bliżéj wyrozumieć, weźmy pod uwagę następujące zadanie na mnożenie, zawierające liczby mianowane:

„Ile zapłacono za 3 metry sukna, płacąc 1 metr po 5 zł.?“

Skoro 1 metr płacono po 5 zł., to za 3 metry zapłaci się 3 razy więcéj, t. j. 15 zł., gdyż

5 zł. . 3 = 15 zł.

Z tego zadania na mnożenie można utworzyć dwa zadania na dzielenie, biorąc za dzielnik raz mnożną, a drugi raz mnożnik. A mianowicie:

„1. Jeżeli za 1 metr sukna zapłacono 5 zł., ile metrów dostanie za 15 zł.?“ i

„2. Jeżeli za 3 metry sukna zapłacono 15 zł., ile kosztuje 1 metr?“

Aby rozwiązać pierwsze z tych zadań, tak rozumujemy: Skoro 1 metr kosztuje 5 zł., to za 15 zł. otrzymamy tyle razy więcéj metrów, ile razy 15 zł. zawiera w sobie po 5 zł. W tym przypadku uskutecznić można dzielenie zapomocą powtórzonego odejmowania

15 zł. — 5 zł. = 10 zł., 10 zł. — 5 zł. = 5 zł., 5 zł. — 5 zł. = 0;

następnie policzyć wypadnie ilość wykonanych odejmowań. Ten rodzaj dzielenia można nazwać p o m i a r e m *(Messung)*, bo tutaj, dochodząc, ile razy 5 zł. zawiera się w 15 zł., niejako mierzymy pięcioma złotymi piętnaście złotych. Iloraz 3, stąd wypadający, jest liczbą oderwaną, która wskazuje, ile razy 15 zł. jest więcéj, niż 5 zł. Wprawdzie w odpowiedzi powiadamy, że za 15 zł. otrzyma się 3 m e t r y, wszelako to dodanie nazwy jednostki „metry“ jest już skutkiem dalszego rozumowania.

Celem rozwiązania drugiego zadania, należy przeprowadzić następujące rozumowanie: Skoro za 3 metry sukna zapłacono 15 zł., to za 1 metr potrzeba zapłacić tyle razy mniéj, ile razy 3 metry jest mniéj, niż 1 metr, t. j. 3 razy mniéj. W tym przypadku potrzeba 15 zł. podzielić na trzy równe części i wziąć jednę taką część. Ten rodzaj dzielenia jest dzieleniem właściwém albo p o d z i a ł e m *(Theilung)*, można go jednak zawsze sprowadzić do pomiaru. Mając bowiem 15 zł. podzielić na 3 części, dość policzyć, ile razy 3 mieści się w 15, a więc wykonać znowu szereg odejmowań:

$$15 - 3 = 12,\ 12 - 3 = 9,\ 9 - 3 = 6,\ 6 - 3 = 3,$$
$$3 - 3 = 0.$$

Oba więc rodzaje dzielenia, lubo co do natury rozumowawania różne, uskutecznia się jednym sposobem.

3. Zastanawiając się nad tymi dwoma zadaniami na dzielenie, widzimy, iż w pierwszém dzielna i dzielnik są liczbami jednogatunkowymi, a iloraz jest liczbą oderwaną, wskazującą, ile razy dzielnik zawiera się w dzielnéj. W drugiém zaś dzielna i iloraz są liczbami jednogatunkowymi, a mianowicie, iloraz jest tą częścią dzielnéj, jaką wskazuje dzielnik, który w tym razie jest liczbą oderwaną.

Iloraz dwu liczb mianowanych jednogatunkowych zowie się s t o s u n k i e m *(Verhältniss)* tychże liczb; stosunek dwu liczb oznacza zatém, ile razy jedna z tych liczb mieści się w drugiéj albo ile razy jest większą od téj drugiéj.

4. Oznacza się, że z podzielenia n. p. liczby 15 przez 3 wypada iloraz 5, pisząc

$$15 : 3 = 5 \quad \text{albo} \quad \frac{15}{3} = 5,$$

a czytając „15 podzielone przez 3 równe 5" albo krócéj „15 przez 3 równe 5". Znak „ : " zowie się znakiem dzielenia i czyta się „podzielone przez" albo krócéj „przez".

5. Z określenia dzielenia wypływają jeszcze następujące wnioski:

a) Jeżeli, nie zmieniając dzielnika, pomnożymy lub podzielimy dzielną przez jaką liczbę, to i iloraz będzie przez tęsamę liczbę pomnożony lub podzielony.

Jakoż mamy n. p.

$$24 : 3 = 8,$$

gdy tymczasem, pomnożywszy lub podzieliwszy dzielną przez 4, mieć będziemy:

$$96 : 3 = 32, \text{ a } 6 : 3 = 2.$$

b) Jeżeli nie zmieniając dzielnéj, pomnożymy lub podzielimy dzielnik przez jaką liczbę, to iloraz będzie — przeciwnie — podzielony lub pomnożony przez tęsamę liczbę.

Mamy bowiem n. p.

$$24 : 6 = 4,$$

gdy tymczasem, pomnożywszy lub podzieliwszy dzielnik przez 2, mieć będziemy:

$$24 : 12 = 2, \text{ a } 24 : 3 = 8.$$

c) Jeżeli wreszcie i dzielną i dzielnik albo jednocześnie pomnożymy albo jednocześnie podzielimy przez tęsamę liczbę, to iloraz zostanie niezmieniony.

Jakoż mamy n. p.

$$24 : 6 = 4,$$

pomnożywszy zaś lub podzieliwszy jednocześnie dzielną i dzielnik przez 3, mieć będziemy:

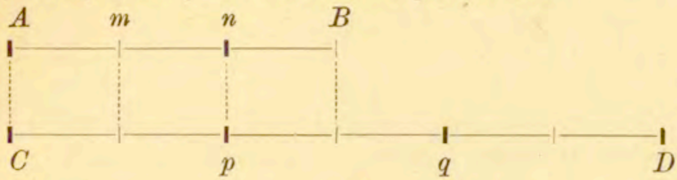
$$72 : 18 = 4 \text{ i } 8 : 2 = 4.$$

6. Niezawsze można uskutecznić dzielenie tak, aby iloraz znajdował się w szeregu liczb naturalnym. Tak mając n. p. podzielić 17 przez 3, nie można znaleść liczby całkowitéj, któraby, pomnożona przez 3, dała na iloczyn 17; liczba 5 jest zamała, a liczba 6 jest zawielka. Liczbę całkowitą 5 (t. j. najwyższą z liczb całkowitych, jakie pomnożone przez dzielnik 3, dają iloczyn jeszcze mniejszy od dzielnéj 17) nazywamy ilorazem niezupełnym *(unvollständiger Quotient)*, wypadającym z podzielenia 17 przez 3; różnicę zaś $17 - 3 . 5 = 2$ (którą się otrzyma, gdy się od dzielnéj 17 odejmie iloczyn z ilorazu niezupełnego i dzielnika) zowiemy resztą dzielenia albo krócéj resztą *(der Rest)*. W tym przypadku mamy $17 : 3 = 5$ z resztą 2, a przeto $17 = 3 . 5 + 2$, t. j. dzielna równa się iloczynowi z dzielnika i z ilorazu niezupełnego, powiększonemu o resztę.

Aby otrzymać iloraz zupełny, należałoby do ilorazu niezupełnego 5 dodać iloraz wypadający z podzielenia reszty 2 przez dzielnik 3, który zamiast $2 : 3$ oznaczamy przez „$^2/_3$“. Wskutek tego mielibyśmy $17 : 3 = 5 + {}^2/_3$ lub $= 5^2/_3$.

7. Wartość takiego ilorazu, jak $^2/_3$, nie znajduje się w szeregu liczb naturalnym, albowiem w tym szeregu nie ma liczby, któraby — wzięta za składnik dodawania 3 razy — dała na sumę liczbę 2. Wartość tego ilorazu przedstawia zatém liczbę zupełnie odmiennego rodzaju, któréj nadamy pewne znaczenie, gdy przyjmiemy możność dzielenia jedności.

Wyobraźmy sobie, że jedność oznacza n. p. jednostkę długości, którą niech przedstawia linia prosta AB.



Tę jednostkę długości można podzielić na trzy równe części, a każda z tych części Am, mn lub nB posiada tę własność, że wzięta za składnik sumy 3 razy, wyda na sumę 1 jednostkę. Każda taka trzecia część jednostki odpowiada zatém pojęciu ilorazu $^1/_3$, który się czyta „jedna trzecia“. Taksamo można linią prostą CD, zawierającą w sobie dwie takie, jak AB, jednostki długości, podzielić na 3 równe części, a każda z tych części Cp, pq lub qD posiada tę własność, że wzięta za składnik sumy 3 razy, wyda na sumę 2 jednostki długości. Każda taka trzecia część 2ch jednostek odpowiada zatém pojęciu ilorazu $^2/_3$. Atoli trzecia część 2ch jednostek, jak n. p. Cp, zawiera w sobie widocznie dwie trzecie części 1 jednostki, a zatém,

$$^2/_3 = {}^1/_3 + {}^1/_3\,,$$

t. j. przyjąwszy możność dzielenia jedności, można taki iloraz jak $^2/_3$, którego wartość nie jest żadną liczbą całkowitą, uważać jako sumę pewnéj ilości części równych, na jakie jedność została podzielona. Tak uważana liczba tego nowego rodzaju, t. j. $^2/_3$, nazywa się liczbą łamaną albo ułamkiem *(Bruch)*. Liczba 3, wskazująca, na ile równych części jedność została podzielona, nazywa się mianownikiem *(Nenner)*, a liczba 2, wskazująca, ile razy ta część ma być wzięta za składnik sumy, nazywa się licznikiem ułamka *(Zähler)*. Ułamek $^2/_3$ czyta się „dwie trzecie“.

8. Łatwo pojąć, że uskutecznianie dzielenia zapomocą powtarzanego odejmowania (2) nie jest praktyczném, zwłaszcza, gdy dzielna jest liczbą wielką, a dzielnik stosunkowo małą. Wyłożymy przeto inny sposób praktyczniejszy. Weźmy pod uwagę naprzód przypadek, kiedy dzielnik jest liczbą jednocyfrową; podzielmy n. p. 1638 przez 7.

Dzielenie to uskutecznia się zapomocą szeregu dzieleń częściowych, t. j. dzieląc jedności każdego rzędu w dzielnéj, zaczynając od najwyższych, a kończąc na najniższych, a więc dzieląc naprzód tysiące, potém setki, następnie dziesiątki, a na końcu jedności proste w dzielnéj.

Jeżeli, jak w tym przypadku, cyfra jedności rzędu najwyższego (1 tysiąc) jest mniejszą od dzielnika, to te jedności zamieniamy wprzód na jedności bezpośrednio niższego rzędu (1 tysiąc na 10 setek) i łączymy je w jednę liczbę z cyfrą jedności tegoż rzędu w dzielnéj (10 setek z 6 setkami w 16 setek), a potém dopiero wykonywamy dzielenie (16 setek przez 7 jedności). Podobnie, jeżeli przy którémkolwiek z dalszych dzieleń częściowych pozostanie jaka reszta, to tę resztę zamienimy także na jedności bezpośrednio niższego rzędu i złączymy je w jednę liczbę z cyfrą jedności tegoż rzędu w dzielnéj, a dopiéro potém wykonamy dzielenie. Mamy zatém następujący

W z ó r d z i a ł a n i a:

```
      16|38 : 7 = 234
2.7 = 14
      ──
       23
3.7 =  21
       ──
        28
4.7 =   28
        ──
         0
```

W y k ł a d d z i a ł a n i a:

1. Nie mogąc 1 tysiąca dzielić przez 7, dzielę 16 setek przez 7, iloraz 2 setki, reszta 2 setki czyli 20 dziesiątek.
2. Dzielę 23 dziesiątek przez 7, iloraz 3 dziesiątki, reszta 2 dziesiątki czyli 20 jedności.
3. Dzielę 28 jedności przez 7, iloraz 4, reszta 0.

Żądanym ilorazem jest więc 234.

U w a g a. Reszty, z dzieleń częściowych wypadające, jeżeli dzielnik jest jednocyfrowy, można łatwo zapamiętać, dlatego też można się obejść bez uwidocznienia kolejnych dzielnych. Tak postępując, znajdziemy:

$$1638 : 7 = 234,$$

mówiąc: „7 w 16 2 razy; w 23 3 razy; w 28 4 razy. Iloraz 234“.

9. Nie innném jest postępowanie, kiedy i dzielnik jest wielocyfrowy. Podzielmy n. p. 61005 przez 83.

Przedewszystkiém potrzeba wyznaczyć wartość miejscową najwyższéj cyfry ilorazu. Uważając w tym celu, że iloczyn $83.100 = 8300$ jest mniejszy, a iloczyn $83.1000 = 83000$ jest większy od dzielnéj 61005, widzimy, że iloraz będzie większy, niż 100, a mniejszy, niż 1000; ten iloraz będzie zatém liczbą trzycyfrową, a więc cyfrą najwyższą będzie w nim cyfra setek.

Ażeby ten iloraz otrzymać, dzielimy naprzód liczbę setek dzielnéj, potém liczbę jéj dziesiątek, a wreszcie liczbę jedności, przyczém reszty, z tych dzieleń częściowych wypadające, zamienia się na jedności rzędu niższego i z cyfrą jedności tego rzędu w dzielnéj łączy w jednę liczbę, celem utworzenia kolejnych dzielnych.

Mamy zatém następujący

Wzór działania:

```
         610|05 : 83 = 735
83.7  =  581
         ----
          290
83.3  =   249
          ----
           415
83.5  =    415
           ----
             0
```

Wykład działania:

1. Dzielę 610 setek przez 83, iloraz 7 setek, reszta 29 setek, czyli 290 dziesiątek.
2. Dzielę 290 dziesiątek przez 83, iloraz 3 dziesiątki, reszta 41 dziesiątek czyli 410 jedności.
3. Dzielę 415 jedności przez 83, iloraz 5 jedności, reszta 0 jedności.

Zatém ilorazem jest 735.

10. W praktycznem wykonywaniu rachunku można się obejść bez podpisywania częściowych iloczynów z dzielnika i kolejno otrzymywanych cyfr ilorazu, celem ich odejmowania od kolejnych dzielnych, lecz odejmuje się odrazu te iloczyny w miarę, jak się je tworzy, przyczém używa się sposobu odejmowania przez doliczanie. Wskutek tego pisze się tylko same kolejne dzielne i końcową resztę. Powyższe dzielenie przedstawiamy zatém, jak następuje:

```
61005 : 83 = 735
 290
  415
    0
```

a odejmując częściowe iloczyny przez doliczanie, mówimy:

1. 83 w 610 7 razy; 21 i **9** jest 30, 3; 56, 59 i **2** jest 61; pierwsza reszta 29.
2. 83 w 290 3 razy; 9 i **1** jest 10, 1; 24, 25 i **4** jest 29; druga reszta 41.
3. 83 w 415 5 razy; 15 i **0** jest 15, 1; 40, 41 i **0** jest 41; trzecia reszta 0.

Żądanym ilorazem jest 735.

11. Jeżeli dzielnik ma jedno lub więcéj zer krańcowych (na miejscu jedności, dziesiątek i t. d.), wtedy opuszcza się te krańcowe zera, opuszczając jednocześnie w dzielnéj tyleż cyfr krańcowych, a potém dzieli się tak skrócone liczby; wszakże do otrzymanéj reszty tego dzielenia należy dopisać cyfry, któreśmy w dzielnéj opuścili.

Podzielmy n. p. 20547 przez 600. Mamy

$205|47 : 6|00 = 34\frac{147}{600}$, t. j. dzielimy 205 setek przez 6, iloraz 34, reszta 1 setka czyli 100 jedności, a więc reszta dzielenia 147 jedności.

25
147

12. O dokładności wypadku dzielenia przeświadczymy się zapomocą próby.

Jeżeli naprzód z podzielenia nie wypada żadna reszta, wówczas mnożymy dzielnik przez iloraz. Jeżeli tak otrzymany iloczyn jest równy dzielnéj, to przy dzieleniu prawdopodobnie nie popełniliśmy błędu. Albo téż uskuteczniamy powtórne dzielenie: dzielnéj przez iloraz; jeżeli na wypadek otrzymamy dzielnik, to pierwotne dzielenie prawdopodobnie nie było błędne. Tak n. p. mamy:

$$28392 : 78 = 364,$$
499
312
0

próba 1sza 364×78, próba 2ga $28392 : 364 = 78$

2548   2912
2912   0
28392

Jeżeli zaś z dzielenia wypadła reszta, wówczas do iloczynu z ilorazu niezupełnego i dzielnika dodajemy resztę; jeżeli tak otrzymana suma równa się dzielnéj, to dzielenie było prawdopodobnie dokładne. Tak n. p. mamy:

$470232 : 37 = 12708\frac{36}{37}$. Próba: $12708 . 37$

100   38124
262   88956
33   470196
332   36
36   470232

Uwaga. Zapomocą dzielenia można również sprawdzić dokładność wypadku mnożenia. Dość bowiem iloczyn dwu czynników podzielić przez jeden z czynników; jeżeli na iloraz wypadnie drugi czynnik, mnożenie było prawdopodobnie dobre.

Zadania.

1. Ile kosztuje 1 *m* sukna, jeżeli za sztukę z 49 *m* zapłacono 147 zł.?

2. Ile zarobił 1 robotnik, jeżeli 9 robotników zarobiło 153 zł.?

3. Ile razy można 11 od 121 odjąć?

4. Sztuka płótna ma 90 *m*; ile razy można od niéj odjąć po 5 *m*, a ile razy po 15 *m*?

5. Ile razy można od 169 odjąć 13?

6. Jeżeli 512 zł. podzielimy na 8 części, jak wielką będzie jedna część?

7. 1 *m* sukna kosztuje 6 zł.; ile metrów sukna kupić można za 150 zł.?

8. Rozłożyć liczbę 94 na sumę dwu liczb, z których jedna jest iloczynem z czynnika 6, druga resztą (n. p. $57 = 4.12 + 9$ albo $4.11 + 13$ i t. p.).

9. Ile otrzyma się równych części, jeżeli 60 rozdzielimy na 4 równe części, a każdą z tych jeszcze na 3 równe części? Jak więc można jakąkolwiek liczbę podzielić na 12 równych części?

10. Ile wynosi 5ta część z części 6éj liczby 300? Ile wynosi 30sta część 300? Jakie ogólne prawidło widoczném jest w zadaniu 9. i 10.?

11. 60 orzechów rozdzielono między 10 uczniów w równych częściach; ile orzechów otrzymał każdy? Ile otrzyma każdy, jeżeli podwójną, potrójną ilość orzechów rozdzielono między 2, 3 razy tylu uczniów? Ile otrzyma każdy, jeżeli 5tą część 60 orzechów rozdzielono między 5tą część 10 uczniów? Jakie tu prawidło widoczne?

12. Wykonać 124 : 4, 497 : 7, 216 : 3, 108 : 9, 143 : 11.

13. Podzielić przez 2, 3, 4....9 następujące liczby:

a) 246, 288, 318, 801, 136, 193, 584, 832, 273.
b) 456, 465, 594, 546, 654, 945, 738, 792, 518.
c) 1043, 1240, 3096, 3418, 4768, 5436, 7489.

14. Znaleść średnią arytmetyczną*) liczb:
a) 174, 236; *b)* 255, 702, 954; *c)* 42, 702, 525;
d) 6, 32, 102, 924, 1201; *e)* 24, 108, 1024, 5060.

15. Wykonać:
a) 60605 : 85; *b)* 86658 : 78; *c)* 29616 : 617; *d)* 65100 : 217;
e) 168000 : 3500: *f)* 2175360 : 7040; *g)* 201934 : 62;
h) 17708004 : 54; *i)* 1379975 : 425; *k)* 7157575 : 6983.

16. Znaleść liczbę 17 razy mniejszą od 731.

17. 10585 zł. rocznego dochodu, ile czyni dziennie?

18. Umiejąc dzielić tylko przez 7, znaleść iloraz 12544 : 49.

19. 148200 jest iloczynem dwu liczb, czynnikiem jednym jest 5700, jaki jest drugi czynnik?

20. Jaką liczbę trzeba przez 572 pomnożyć, ażeby jako iloczyn otrzymać 238524?

21. Umiejąc dzielić tylko przez 100 i przez 1000, wykonać dzielenia:
a) 157175 : 25; *b)* 785875 : 25; *c)* 930450 : 25;
d) 524625 : 125; *e)* 952125 : 125; *f)* 7689500 : 125.

22. Umiejąc mnożyć tylko przez 100 i przez 1000, wykonać mnożenie:
a) 72340.25; *b)* 82617.25; *c)* 40500.25;
d) 8950.125; *e)* 17819.125; *f)* 37951.125.

23. Jakiéj liczby część trzecia jest o 127 większa od 3081?

24. Jedno naczynie zawiera 123 *l*, drugie 1107 *l*; ile razy zawartość drugiego naczynia jest większą od zawartości pierwszego?

25. W sadzie posadzono rzędami 31928 szczepów, w każdym rzędzie 104 szczepów, ileż jest rzędów?

26. Dwiema rurami o równym otworze wpływa w 8 godzidzinach do basenu 23020 *l* wody. Ileż wpływa jedną rurą w godzinie?

27. Kolej przewiozła w roku przestępnym 1215086 osób; ile osób przypada przeciętnie na jeden dzień?

---

*) Suma dwu lub więcéj liczb podzielona przez ich ilość, zowie się średnią arytmetyczną *(arithm. Mittel)* tychże liczb.

28. W 1″ (sekundzie) przebiega kula armatnia 570 *m*, kamień rzucony ręką 19 *m*; ile razy chyżość kuli jest większą od chyżości kamienia?

29. Rolnik ma zorać 180 zagonów, a na zoranie zagonu potrzebuje 3′ (minut); o któréj godzinie skończy tę pracę, jeżeli ją zaczął o 3. godzinie rano?

30. Jeżeli się zmiesza 5 *hl* wina po 29 zł. za 1 *hl* z 3 *hl* wina po 43 zł. za 1 *hl*, jaką mieć będzie wartość 1 *hl* mieszaniny?

31. Długość alei mierzono 4 razy i znaleziono każdym razem długości: 197 *m*, 201 *m*, 198 *m* i 200 *m*; jaka jest średnia długość alei?

32. 78 *ha* pola, którego 1 *ha* płacono po 137 zł., sprzedano za 11622 zł.; ile zyskano lub stracono na każdym hektarze?

33. Koszta pewnéj roboty wynosiły 14790 zł.; ile czasu użyto na jéj wykończenie, jeżeli pracowało 17 robotników płatnych po 5 zł. dziennie?

34. Kupiec kupił 156 *kg* towaru po 6 zł. za 1 *kg*; trzecia część tego towaru uległa zepsuciu; po jakiéj cenie musi sprzedać każdy pozostały kilogram, aby zyskał 208 zł.?

35. W czasie, gdy jedno koło robi jeden obrót, drugie robi 30 obrotów; ile obrotów zrobi koło pierwsze, gdy drugie zrobiło 2100 obrotów?

36. Pisarz, przepisujący rękopis, otrzymuje po 3 zł. za każdych 20 stronic; ile zarobi, gdy przepisze cały rękopis złożony z 260 stronic?

§. 9.

Zadania na wszystkie cztery działania.

1. 278 osób zrobiło składkę na cel dobroczynny. Ile złożyły, jeżeli każda dała tyle złotych, ile było osób?

2. 25 robotników ukończyło pewną pracę w 72 dniach; w ilu dniach wykona tę pracę 1 robotnik? w ilu 3, 6, 9 i 12 robotników?

3. W dwu sztukach płótna było 123 *m*. Ile było w każdéj sztuce, jeżeli w pierwszéj było dwa razy więcéj, aniżeli w drugiéj?

4. Ktoś przepędził w obcém mieście 90 dni. Wyjeżdżając, wziął 684 zł., a powróciwszy do domu, miał jeszcze 234 zł. Ile wydawał dziennie?

5. Kupiono 75 chustek za 825 zł. Jeżeli tuzin sprzedano po 169 zł., jak wielki był zysk na jednéj chustce?

6. Pewna osoba ma 3325 zł. rocznego dochodu. Ile może dziennie wydać, jeżeli chce w roku 1500 zł. oszczędzić?

7. Zegarmistrz sprowadził 380 zegarków: 80 złotych po 127 zł. za sztukę, 120 srebrnych po 32 zł. za sztukę, a resztę ściennych po 47 zł. za sztukę. Ile kosztują wszystkie zegarki?

8. Ktoś spłaca dług 5985 zł. w miesięcznych ratach po 45 zł. Kiedy zapłaci ostatnią ratę, jeżeli pierwszą ratę uiścił 1. stycznia 1889. roku?

9. W fabryce 128 robotnikom wypłacono w miesiącu 8943 zł., 39 robotnikom wypłacono po 65 zł.; ile otrzymał każdy z pozostałych?

10. Najęto 286 robotników, a za ich pracę zapłacono 6894 zł. Każdy męszczyzna otrzymał 27 zł.; ile przypada na każdą kobietę, jeżeli ich było 138?

11. Światło przebiega drogę od słońca do ziemi w 493″ (sekundach); ile mil przebiega światło na sekundę, jeżeli odległość ziemi od słońca wynosi 20683010 mil?

12. Powierzchnia ziemi wynosi 9261238 kw. mil geogr.. Na strefę gorącą przypada 3692978 mil kw., obie zaś strefy zimne mają 384084 mil kw.; jaką powierzchnię zajmuje każda strefa umiarkowana?

13. Kraje koronne Przedlitawii mają 22144244 mieszkańców; ile km^2 mają te kraje, jeżeli na 1 km^2 przypada przeciętnie 74 mieszkańców?

14. Z rury wypływa w 29 minutach 493 *l* wody; w ilu minutach wypłynie 2125 *l*?

15. Przez zmieszanie 60 *l* wina, 1 *l* po 60 ct., 80 *l*, litr po 55 ct., i 100 *l* wina trzeciego gatunku otrzymał kupiec wino, którego 1 *l* kosztował 50 ct. Ile kosztował 1 *l* wina trzeciego gatunku?

16. Kupiec sprzedał 15 sztuk sukna, każda po 24 *m*, za 1170 zł. Po czemu sprzedawał 1 *m*?

17. Znaleść sumę trzech liczb, z których pierwsza jest o 1279 mniejszą od 38145, druga równa się pierwszéj pomnożonéj przez 145, a trzecia jest piątą częścią drugiéj.

18. Ile razy da się odjąć: *a)* 3578621 od 107358863, *b)* 6403857 od 25615428?

19. Znaleść trzy liczby, których suma jest 21240; suma zaś dwu pierwszych jest 15000, a suma drugiéj i trzeciéj 18200.

20. Kupiec ma 354 *hl* wina. Gdyby 1 *hl* sprzedawał po 49 zł., straciłby 1062 zł. Po ile złotych sprzedawać musi 1 *hl*, aby zarobić 2124 zł.?

21. Oddział wojska ma odbyć marsz 120 mil. Jeżeli dziennie przebywa drogę 6 mil, a każdy piąty dzień odpoczywa: *a)* w ilu dniach przybędzie do celu? *b)* kiedy przybędzie do celu, jeżeli marsz rozpoczęto 9. stycznia?

22. Dwaj podróżni wyszli równocześnie, jeden z miasta A, drugi z miasta B. Idąc naprzeciw siebie, spotkali się w 15 dni po wyjściu. Pierwszy uszedł codziennie 43 *km*; ile kilometrów robił dziennie drugi, jeżeli odległość obu miast wynosiła 1020 *km*?

23. Za dwa tuziny łyżek srebrnych zapłacono 171 zł. 36 ct. Ile *dkg* waży jedna łyżka, jeżeli za 1 *dkg* srebra płacono 83 ct., a za robotę łyżki 50 ct.?

24. Ktoś kupił 24 koni po 72 zł. Nim je sprzedał, zginęły dwa konie; ile złotych wziął za konie, jeżeli po sprzedaży wszystkich zyskał 484 zł.?

25. Na pytanie, ile jest uczniów w szkole, odpowiedziano: jeżeli z cyfr 5, 4, 6, 9 utworzy się największą i najmniejszą liczbę, od pierwszéj drugą odejmie, różnicę przez 9 podzieli, otrzyma się liczbę uczniów. Ileż było uczniów?

26. Do kogo należy ta setka gęsi? zapytał ktoś pastucha. Ten odpowiedział: Musiałbym mieć 3 razy tyle gęsi, ile mam, i 19 jeszcze, dopiero byłoby ich 100. Ile miał gęsi?

ROZDZIAŁ III.

O ważniejszych własnościach liczb całkowitych.

§. 10.

Określenia.

1. Jeżeli w liczbie mieści się inna liczba bez reszty, powiadamy, że pierwsza liczba jest p o d z i e l n ą *(theilbar)* przez drugą lub jest téj drugiéj liczby w i e l o k r o t n o ś c i ą *(Vielfaches)*, drugą zaś liczbę zowiemy wówczas p o d z i e l n i k i e m *(Theiler)* albo m i a r ą *(Mass)* liczby pierwszéj. Tak n. p. liczby 2, 4, 7, 14 są podzielnikami liczby 28, liczba zaś 28 jest wielokrotnością każdéj z liczb 2, 4, 7, 14.

2. Liczby, podzielne tylko przez 1 i przez siebie same, zowią się l i c z b a m i p i e r w s z y m i *(Primzahlen)*. Tak n. p. liczby 1, 2, 3, 5, 7, 11 i t. d. są liczbami pierwszymi.

Jeżeli z szeregu naturalnego liczb od 1 do 100 wyrzucimy wszystkie wielokrotności liczb 2, 3, 5, 7 i 11, to pozostałe liczby będą samymi liczbami pierwszymi. Tymi liczbami są: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 i 97.

3. Liczby, które nietylko przez siebie same i przez jedność ale także przez inne liczby są podzielne, nazywają się l i c z b a m i z ł o ż o n y m i *(zusammengesetzte Zahlen)*.

Taką jest n. p. liczba 28, która, oprócz jedności i siebie saméj, jest podzielna przez liczby 2, 4, 7 i 14.

§. 11.
Znamiona podzielności liczb.

1. Reszta, jaka pozostaje z podzielenia jednéj liczby przez drugą, nie zmieni się, gdy się dzielną pomniejszy o wielokrotność dzielnika.

Tak n. p. z podzielenia 59 przez 7 wypada reszta 3. Tęsamę resztę otrzymamy, gdy od 59 odejmiemy wielokrotność liczby 7, n. p. 6.7 czyli 42, i różnicę 59 — 42, t. j. 17, przez 7 podzielimy.

Z tego twierdzenia wypływają w szczególności następujące, dające oraz znamiona podzielności *(Kennzeichen der Theilbarkeit)* liczb przez 2, 5; 4, 25; 8, 125; 3, 9; 11.

2. Liczba podzielona przez 2 lub przez 5, daje takąsamę resztę, jaką jéj cyfra jedności. Albowiem każdą liczbę można rozłożyć na sumę dwu składników, z których jeden jest wielokrotnością liczby 10, a przeto jest podzielny przez 2 i przez 5, a drugi jest jéj cyfrą jedności. N. p.:

$$4574 = 4570 + 4 = 457.10 + 4,$$
$$5265 = 5260 + 5 = 526.10 + 5.$$

Stąd wypływa, że liczba będzie podzielną przez 2 lub przez 5, jeżeli cyfra jedności w téj liczbie jest podzielną przez 2 lub przez 5 podzielną. Liczba n. p. 4574 jest podzielna przez 2, a liczba 5265 przez 5.

Uwaga. Liczby podzielne przez 2 zowią się parzystymi *(gerade)*, a liczby przez 2 niepodzielne zowią się nieparzystymi *(ungerade)*. Oprócz 2, są wszystkie liczby pierwsze nieparzystymi.

3. Liczba podzielona przez 4 lub przez 25 daje takąsamę resztę, jak liczba złożona z dwu cyfr krańcowych liczby danéj. Albowiem każdą liczbę można rozłożyć na sumę dwu składników, z których jeden jest wielokrotnością liczby 100, a przeto jest podzielny przez 4 i przez 25, a drugim jest liczba złożona z dwu krańcowych cyfr liczby danéj. N. p.:

$$2172 = 2100 + 72 = 21.100 + 72,$$
$$4375 = 4300 + 75 = 43.100 + 75.$$

A zatém jeżeli liczba, złożona z dwu krańcowych cyfr liczby danéj, jest podzielna przez 4 lub przez 25, to i sama liczba dana będzie przez 4 lub przez 25 podzielną. Liczba 2172 jest podzielna przez 4, a liczba 4375 przez 25.

4. Podobnie znajdzie się, że liczba będzie podzielna przez 8 lub przez 125, jeżeli przez 8 lub przez 125 jest podzielną liczba, złożona z trzech cyfr krańcowych liczby danéj. Mamy bowiem n. p.

$$3728 = 3000 + 728 = 3.1000 + 728 = 3.8.125 + 728.$$

5. Liczba podzielona przez 3 lub przez 9 daje takąsamę resztę, jak suma jéj cyfr. Albowiem każdą liczbę można rozłożyć na sumę dwu części, z których jedna jest sumą wielokrotności liczby 9, a druga jest sumą jéj cyfr. Jakoż, mamy n. p.

$$4386 = 4000 + 300 + 80 + 6 =$$
$$= 4.1000 + 3.100 + 8.10 + 6,$$

a że

$$10 = 1.9 + 1,\ 100 = 11.9 + 1,\ 1000 = 111.9 + 1 \text{ i t. d.},$$

więc

$$4386 = 4.111.9 + 4 + 3.11.9 + 3 + 8.9 + 8 + 6,$$

czyli

$$4386 = 4.111.9 + 3.11.9 + 8.9$$
$$+ 4 + 3 + 8 + 6.$$

W pierwszym wierszu po prawéj mamy same wielokrotności liczby 9, a przeto i liczby 3, a w drugim wierszu sumę cyfr danéj liczby.

A zatém jeżeli suma cyfr danéj liczby jest przez 3 lub przez 9 podzielną, to i sama liczba będzie przez 3 lub przez 9 podzielną. Liczba 4386 jest przez 3 podzielna, gdyż suma jéj cyfr $4 + 3 + 8 + 6 = 21$ jest podzielna przez 3.

6. Liczba podzielona przez 11 daje takąsamę resztę, jak suma jéj cyfr na miejscach nieparzystych (licząc od prawéj ku lewéj), pomniejszona o sumę jéj cyfr na miejscach parzystych. Albowiem każda

liczba może być rozłożona na sumę dwu części, z których jedna jest sumą wielokrotności liczby 11, a druga jest sumą jéj cyfr na miejscach nieparzystych, pomniejszoną o sumę jéj cyfr na miejscach parzystych.

Jakoż, mamy n. p.

$$567248 = 5.100000 + 6.10000 + 7.1000 + 2.100 + \\ + 4.10 + 8,$$

a że

$$10 = 1.11 - 1,\ 1000 = 91.11 - 1,\ 100000 = 9091.11 - 1 \text{ i t. d.},$$

tudzież

$$100 = 9.11 + 1,\ 10000 = 909.11 + 1 \text{ i t. d.},$$

więc

$$567248 = 5.9091.11 - 5 + 6.909.11 + 6 + 7.91.11 \\ - 7 + 2.9.11 + 2 + 4.11 - 4 + 8,$$

czyli

$$567248 = 5.9091.11 + 6.909.11 + 7.91.11 + 2.9.11 + 4.11 \\ + 6 + 2 + 8 - 5 - 7 - 4.$$

W pierwszym wierszu po prawéj mamy same wielokrotności liczby 11, a w drugim różnicę między sumą cyfr na miejscach nieparzystych i sumą cyfr na miejscach parzystych.

A zatém **jeżeli suma cyfr danéj liczby na miejscach nieparzystych, pomniejszona o sumę jéj cyfr na miejscach parzystych, jest podzielną przez 11** (albo jest $= 0$), **to i sama liczba będzie przez 11 podzielną.** Liczba 567248 jest przez 11 podzielna, gdyż

$$6 + 2 + 8 - 5 - 7 - 4 = 16 - 16 = 0.$$

Wynalezienie reszt i znamion podzielności dla innych liczb pierwszych, n. p. 7, 13, 17 i t. d. sposobem powyższym byłoby trudniejsze a w praktyce jest mniéj ważne.

Zadania.

1. Które z liczb: 14, 26, 57, 1375, 2486, 21458, 87964, 11070, 27891, 281316, 75800 są przez 2 podzielne?

2. Które z liczb: 1824, 2738, 8673, 7262, 9252, 79336, 24360, 1700, 86730 są przez 4 podzielne?

3. Które z liczb: 432, 7352, 8620, 3776, 41026, 79136, 17992, 189724, 56914 są przez 2, 4, a które przez 8 podzielne?

4. Które z liczb: 75, 345, 5670, 8965, 9200, 37000, 45785, 62340, 87200 są przez 5, a które także przez 10, 100, 1000 podzielne?

5. Które z liczb: 873, 684, 2178, 7212, 5612, 6414, 21312, 32527, 233451, 721926 są przez 3, które przez 6, a które przez 9 podzielne?

6. Które z liczb: 4697, 5825, 6812, 32032, 76241, 83864, 72211, 23232, 93819 są przez 11 podzielne?

7. Napisać po cztery sześciocyfrowe liczby podzielne przez 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11.

8. Napisać cztery ośmiocyfrowe liczby podzielne przez 4 i 11.

9. Napisać cztery ośmiocyfrowe liczby podzielne przez 125 i 11.

10. Napisać cztery siedmiocyfrowe liczby podzielne przez 4 i 9.

11. W koszu znajduje się 3960 orzechów; ile zostanie w koszu, jeżeli się wybierać będzie po 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 15 orzechów naraz tyle razy, ile razy się to da uczynić.

12. Podać reszty, jakie pozostaną z podzielenia liczb 613, 819, 2978, 21687, 38254 przez 2, 5, 10, nie wykonywując dzielenia.

13. Wyznaczyć podobnym sposobem reszty, jakie pozostawią liczby 5814, 7823, 1836, 45913, 2475, 4365, 82775, podzielone przez 4, 25 i 100.

14. Jakie reszty pozostaną z podzielenia liczb 31104, 58642, 41972, 558279 przez 11?

15. Napisać cztery sześciocyfrowe liczby, któreby, podzielone przez 3 i 5, pozostawiły resztę 2.

16. Napisać cztery siedmiocyfrowe liczby, któreby, podzielone przez 8, pozostawiły resztę 5, a podzielone przez 9, resztę 7.

17. Napisać cztery ośmiocyfrowe liczby, któreby, podzielone przez 9, pozostawiły resztę 5, podzielone zaś przez 25, resztę 11.

18. W koszu znajduje się 6938 orzechów, w drugim 6795; jeżeli się wyjmować będzie tyle razy po 11 orzechów naraz, ile razy się to da, jaka pozostanie reszta w jednym i drugim koszu?

19. Poprzestawiać w liczbie 72968545 pojedyncze cyfry tak, aby nowa liczba była podzielna przez 8 i 11.

20. Napisać liczbę ośmiocyfrową podzielną przez 2, 3, 4, 8, 9.

§. 12.

Rozkładanie liczb na czynniki pierwsze.

1. Każdą liczbę złożoną można przedstawić jako iloczyn samych **czynników pierwszych** *(Primfactoren)*, t. j. jako iloczyn samych liczb pierwszych.

Jeżeli się liczbę złożoną podzieli przez jeden z jéj czynników pierwszych, to iloraz będzie iloczynem wszystkich pozostałych czynników pierwszych.

Ażeby więc jaką liczbę złożoną **rozłożyć** *(zerlegen)* na czynniki pierwsze, dzieli się ją przez najmniejszą liczbę pierwszą, przez jaką jest podzielna, 1 nie licząc; iloraz dzieli się znowu przez najmniejszą liczbę pierwszą, przez jaką jest podzielny, nie wyłączając poprzedniéj liczby pierwszéj i taksamo postępuje się z każdym następnym ilorazem, dopóki się nie dójdzie do ilorazu, który sam jest liczbą pierwszą. Kolejno użyte dzielniki i ostatni iloraz będą czynnikami pierwszymi liczby danéj.

Niech n. p. będzie liczbą daną 4680. Mamy

$$
\begin{array}{rcl}
4680 : 2 = 2340 & \text{stąd} & 4680 = 2.2340 \\
2340 : 2 = 1170 & & 2340 = 2.1170 \\
1170 : 2 = 585 & & 1170 = 2.\ 585 \\
585 : 3 = 195 & & 585 = 3.\ 195 \\
195 : 3 = 65 & & 195 = 3.\ 65 \\
65 : 5 = 13 & & 65 = 5.\ 13 \\
\hline
& \text{a zatém} & 4680 = 2.2.2.3.3.5.13
\end{array}
$$

Wzór działania:

$$
\begin{array}{r|l}
4680 & 2 \\
2340 & 2 \\
1170 & 2 \\
585 & 3 \\
195 & 3 \\
65 & 5 \\
13 &
\end{array}
$$

A zatém $4680 = 2.2.2.3.3.5.13$.

2. Znając wszystkie czynniki pierwsze liczby, można otrzymać wszystkie jéj podzielniki. Jakoż, tymi podzielnikami będą naprzód wszystkie czynniki pierwsze, wzięte oddzielnie, potém wszystkie iloczyny którychkolwiek dwu, trzech z tych czynników i t. d. A zatém podzielnikami liczby n. p. $462 = 2.3.7.11$ są liczby 1, 2, 3, 7, 11; 6, 14, 22, 21, 33, 77; 42, 66, 154, 231; 462.

Zadania.

Rozłożyć na czynniki pierwsze:

1. 280, 600, 891, 910, 483, 906, 1719, 2520;
2. 5760, 1680, 1001, 3991, 2717, 24948, 50875;
3. 17424, 13689, 28512, 50960, 39375, 124432.

Znaleść wszystkie podzielniki liczb:

4. 42, 60, 126, 370, 759, 1265;
5. 56, 63, 220, 715, 798, 2244;
6. 36, 390, 1785, 2871, 1992.

§. 13.

Największy spólny podzielnik.

1. Liczbę, przez którą dwie lub więcéj liczb są podzielne, nazywamy spólnym podzielnikiem *(gemeinschaftlicher Theiler)* albo spólną miarą *(gemeinschaftliches Mass)* tychże liczb. Największy z pomiędzy spólnych podzielników dwu lub więcéj liczb, zowie się tych liczb największym spólnym podzielnikiem *(grösster g. T.)*.

Liczby, które oprócz jedności nie mają żadnego innego spólnego podzielnika, zowią się liczbami względem siebie pierwszymi *(relative Primzahlen)*. N. p. 9 i 25, 16 i 51 są liczbami względem siebie pierwszymi, gdy tymczasem liczby 9 i 24 mają spólny podzielnik 3, który jest oraz ich największym spólnym podzielnikiem.

2. Aby znaleść największy spólny podzielnik dwu lub więcéj liczb, rozkładamy każdą z tych liczb na iloczyn czynników pierwszych. Wziąwszy następnie iloczyn wszystkich czynników pierwszych, które są spólne danym liczbom, mieć

będziemy oczywiście spólny podzielnik tych liczb; ten spólny podzielnik będzie zarazem największym, gdyż przez dołączenie jeszcze jednego czynnika, któryby danym liczbom nie był spólny, nowy iloczyn nie dzieliłby bez reszty wszystkich liczb danych.

Tak mając n. p. odnaleść największy spólny podzielnik liczb 180 i 378, mamy:

180	2	i	378	2,	skąd 180 = 2.2.3.3.5
90	2		189	3	i 378 = 2.3.3.3.7
45	3		63	3	
15	3		21	3	
5			7		

Największym spólnym podzielnikiem obu liczb jest zatém 2.3.3 = 18, co oznaczamy pisząc:

$$P\ (180,\ 378) = 18.$$

3. Największy spólny podzielnik dwu liczb można znaleść także bez uprzedniego rozkładania tychże liczb na czynniki pierwsze.

Naprzód widoczna, że *największym spólnym podzielnikiem dwu liczb, z których mniejsza mieści się w większéj bez reszty, jest ta liczba mniejsza.* Tak n. p., skoro 76 dzieli bez reszty liczbę 152, więc

$$P\ (152,\ 76) = 76.$$

Jeżeli zaś z dwu danych liczb mniejsza nie mieści się bez reszty w większéj, wówczas każdy podzielnik tych dwu liczb, jest oraz podzielnikiem reszty, jaka pozostaje z podzielenia liczby większéj przez mniejszą. To twierdzenie wypływa bezpośrednio z twierdzenia, podanego na początku §. 11. Tak n. p., dzieląc 264 przez 84, mamy:

$$264 : 84 = 3 \text{ z resztą } 12.$$

Spólnymi podzielnikami liczb 264 i 84 są liczby 2, 3, 4, 6, 12; te podzielniki są widocznie także podzielnikami reszty 12.

Stąd wypływa wniosek, że *także największy spólny podzielnik dwu liczb jest największym spólnym podzielnikiem liczby mniejszéj i reszty, jaka pozostaje z podzielenia liczby większéj przez mniejszą.*

Wiedząc to, można największy spólny podzielnik liczb, n. p. 4290 i 1155, tak wynaleść:

Dzieląc liczbę większą przez mniejszą, otrzymamy

$$4290 : 1155 = 3 \text{ z resztą } 825,$$

jest zatém

$$P\,(4290,\ 1155) = P\,(1155,\ 825).$$

Dzieląc następnie liczbę mniejszą 1155 przez resztę 825, otrzymamy

$$1155 : 825 = 1 \text{ z resztą } 330,$$

jest zatém

$$P\,(1155,\ 825) = P\,(825,\ 330),$$

a przeto także

$$P\,(4290,\ 1155) = P\,(825,\ 330).$$

Dzieląc daléj pierwszą resztę 825 przez drugą 330, otrzymamy

$$825 : 330 = 2 \text{ z resztą } 165,$$

jest zatém

$$P\,(825,\ 330) = P\,(330,\ 165),$$

a przeto także

$$P\,(4290,\ 1155) = P\,(330,\ 165).$$

Dzieląc wreszcie drugą resztę 330 przez trzecią resztę 165, otrzymamy

$$330 : 165 = 2 \text{ bez reszty}.$$

Stąd wypływa naprzód

$$P\,(330,\ 165) = 165,$$

a następnie

$$P\,(4290,\ 1155) = 165.$$

Zebrawszy wszystko razem, mamy następujący

Wzór działania:

4290	1155	3
825	330	1
165	0	2
		2

Wykład działania:

4290 : 1155 = 3 z resztą 825, P(4290, 1155) = P(1155, 825),
1155 : 825 = 1 z resztą 330, P(1155, 825) = P(825, 330),
825 : 330 = 2 z resztą 165, P(825, 330) = P(330, 165),
330 : 165 = 2 bez reszty, P(330, 165) = 165;
a zatém P(4290, 1155) = 165.

Sposób, teraz użyty do wyznaczenia największego spólnego podzielnika dwu liczb, zowie się sposobem dzielenia ciągłego *(Kettendivision)*.

Uwaga. Jeżeliby chodziło o wynalezienie tym sposobem największego spólnego podzielnika trzech lub więcéj liczb, wówczas szukalibyśmy naprzód największego spólnego podzielnika dwu liczb, potém największego spólnego podzielnika dopiero znalezionego największego spólnego podzielnika i trzeciéj liczby i t. d. Ostatni największy spólny podzielnik będzie oraz największym spólnym podzielnikiem liczb danych.

Zadania.

Wyszukać największe spólne podzielniki:

1. P (10584, 11340). P (1617, 8450).
2. P (199584, 23760). P (253088, 84123).
3. P (12698, 16326). P (112882, 241890).
4. P (46872, 34625). P (17679, 4573).
5. P (5632, 528). P (10824, 278784).
6. P (84, 715). P (125160, 103257).
7. P (218020, 104055, 167479).
8. P (83380, 47754, 54197).
9. P (1008, 3456, 6648, 8784).

Okazać, że:

10. P (5742, 12180) = P (23664, 33930).
11. P (6919, 1309) + P (25728, 8241) = P (10476, 1352).
12. P (6630, 9503) — P (27898, 198690) = P (15288, 47481).

§. 14.
Najmniejsza spólna wielokrotność.

1. Liczba, podzielna przez dwie lub więcéj liczb, nazywa się tych liczb spólną wielokrotnością *(gemeinschaftliches*

*

Vielfaches). Tak n. p. liczba 28 jest spólną wielokrotnością liczb 2, 4, 7, 14. Najmniejsza z liczb, które są podzielne przez dwie lub więcéj innych liczb, jest najmniejszą spólną wielokrotnością *(kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches)* tychże liczb. Tak n. p. 28, 56, 84 są wielokrotności spólne liczb 2, 4, 7, 14, atoli 28 jest najmniejszą spólną wielokrotnością tychże liczb. Oznacza się, że 28 jest najmniejszą spólną wielokrotnością liczb 2, 4, 7, 14, pisząc *w* (2, 4, 7, 14) = 28.

2. Aby wyznaczyć najmniejszą spólną wielokrotność dwu lub więcéj liczb, dość rozłożyć każdą z tych liczb na iloczyn czynników pierwszych i każdy z tych czynników wziąć tyle razy, ile razy powtarza się najczęściéj w którejkolwiek z tych liczb. Iloczyn tych czynników będzie żądaną najmniejszą spólną wielokrotnością liczb danych.

Tak, chcąc wyznaczyć najmniejszą spólną wielokrotność n. p. liczb 1188, 1050 i 360, mamy naprzód:

$$1188 = 2.2.3.3.3.11,$$
$$1050 = 2.3.5.5.7,$$
$$360 = 2.2.2.3.3.5.$$

Ponieważ w rozłożeniu tych liczb na czynniki pierwsze, czynniki 2 i 3 powtarzają się najwyżéj trzy razy, czynnik 5 dwa razy, a czynnik 7 i 11 po razu, więc w (1188, 1050, 360) = = 2.2.2.3.3.3.5.5.7.11 = 415800.

3. Celem wyznaczenia najmniejszéj spólnéj wielokrotności więcéj liczb danych, można także tak postąpić: Opuszcza się naprzód te z pomiędzy liczb danych, które dzielą większe z nich bez reszty, a potém z pozostałych wydziela się kolejno spólne czynniki pierwsze, dopóki się nie dojdzie do samych liczb względem siebie pierwszych. Iloczyn z tych liczb pierwszych i z kolejno wydzielonych czynników pierwszych będzie najmniejszą spólną wielokrotnością. Wyznaczmy tym sposobem najmniejszą spólną wielokrotność n. p. liczb 2, 3, 7, 8, 9, 14, 21, 24, 35, 36.

Wzór działania:

2, 3. 7, 8, 9, 14, 21, 24, 35, 36	2
4, 7, 21, 12, 35, 18	2
21, 6, 35, 9	3
7, 2, 35, 3	
2, 35, 3	

a zatém

$$w\ (2, 3, 7, 8, 9, 14, 21, 24, 35, 36) = 2.35.3.2.2.3 = 2520.$$

Uwaga. Najmniejszą spólną wielokrotność dwu liczb otrzymamy także, gdy największym spólnym podzielnikiem tych liczb podzielimy jednę z nich, a otrzymanym ilorazem pomnożymy drugą.

Tak n. p. chcąc wyznaczyć najmniejszą spólną wielokrotność liczb 360, 1050, tak postępujemy:

Mamy naprzód

1050	360	2
330	30	1
0		11,

stąd wypływa

$$P\ (360, 1050) = 30;$$

a że

$$360 : 30 = 12,$$

więc

$$w\ (360, 1050) = 1050.12 = 12600.$$

Zadania.

Znaleść najmniejsze spólne wielokrotności:

1. w (3, 6, 9); w (5, 8, 20); w (3, 4, 5, 6, 8); w (2, 3, 4, 5, 6, 30);

2. w (2, 4, 8, 10); w (6, 8, 10, 12); w (15, 20, 25, 30). w (5, 7, 9, 10).

3. w (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12); w (5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14).

4. w (2, 15, 18, 20, 24, 28); w (9, 12, 14, 15, 16, 21, 27).

5. w (18, 12, 15, 6, 24, 35, 10, 4, 21, 105, 56).

6. w (849, 1132); w (507, 1183, 1521); w (1555, 2177, 3421, 4043).

Sprawdzić, że:

7. w (2730, 4180) = w (780, 2926).

8. Znaleść największy spólny podzielnik dwu najmniejszych spólnych wielokrotności w (165, 260) i w (924, 2730).

ROZDZIAŁ IV.

O ułamkach zwyczajnych.

§. 15.
Wiadomości wstępne.

1. Jeżeli założymy, że jedność została podzieloną na 2, 3, 4, 5 i t. d. równych części, jednę z tych części przedstawimy odpowiednio przez $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ i t. d. Takie wyrażenia liczbowe można nazwać jednościami ułamkowymi, a czytamy je „jedna druga, jedna trzecia, jedna czwarta, jedna piąta" i t. d., albo krócéj „połowa, trzecia, czwarta, piąta" i t. d. Jeżeli jaką jedność ułamkową n. p. $\frac{1}{3}$ weźmiemy pewną ilość, n. p. dwa razy, jako składnik sumy, wówczas mieć będziemy ułamek, który się oznacza przez „$\frac{2}{3}$", a czyta „dwie trzecie". Podobnie, jeżeli n. p. jedność ułamkową $\frac{1}{4}$ weźmiemy n. p. trzy razy za składnik sumy, wypadnie nam ułamek, który się oznacza przez „$\frac{3}{4}$", a czyta „trzy czwarte"

A zatém ogólnie: ułamkiem nazywamy wyrażenie liczbowe, które oznacza pewną ilość równych części jedności. Na przedstawienie ułamka potrzeba dwu liczb: mianownika *(Nenner)*, który wskazuje, na ile równych części jedność została podzielona, i licznika *(Zähler)*, który wskazuje, ile razy taką część wzięliśmy za składnik sumy. Mianownik pisze się pod licznikiem, przedzielając te dwie liczby kreską poziomą.

2. Każdy ułamek uważać można także jako wskazany iloraz, którego dzielną jest licznik, a dzielnikiem jest mianownik. Jakoż wiadomo z nauki o dzieleniu, że n. p. $\frac{2}{3}$ nie tylko oznacza „dwie trzecie części jedności“, $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$, ale także trzecią część dwu jedności, czyli 2 : 3. Mamy zatém $\frac{2}{3} = 2 : 3$, podobnie $\frac{4}{5} = 4 : 5$ i t. d.

3. Ułamek zowiemy się właściwym *(echt)*, jeżeli licznik jest mniejszy od mianownika, a jeżeli licznik jest równy mianownikowi lub od niego większy, wówczas ułamek zowie się niewłaściwym *(unecht)*.

Tak n. p. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{7}{11}$ są ułamkami właściwymi, ułamki zaś $\frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{11}{7}$ są ułamkami niewłaściwymi.

Każdą liczbę całkowitą można przedstawić pod postacią ułamka niewłaściwego, biorąc ją za licznik, a podpisując pod nią 1 jako mianownik. N. p. $2 = \frac{2}{1}$, $3 = \frac{3}{1}$, $7 = \frac{7}{1}$ i t. d.

4. Ułamek niewłaściwy można rozłożyć na sumę z liczby całkowitéj i ułamka właściwego.

Jakoż, mając dany ułamek niewłaściwy n. p. $\frac{17}{5}$, można licznik rozłożyć na sumę dwu składników, z których jeden jest wielokrotnością mianownika 5, a drugi liczbą od 5 mniejszą. Mamy bowiem $17 : 5 = 3$ z resztą 2, skąd $17 = 3.5 + 2$. Skoro tak się rzecz ma, więc $\frac{17}{5} = \frac{3.5+2}{5}$. Następnie tak wnioskujemy:

Pięć piątych jest 1, 3 razy pięć piątych jest 3, 17 czyli $3.5 + 2$ piątych jest więc 3 jedności i 2 piąte, t. j. $\frac{17}{5} = 3 + \frac{2}{5}$.

Wyrażenie liczbowe $3 + \frac{2}{5}$, zamiast czego pisze się $3\frac{2}{5}$, (mówiąc „trzy i dwie piąte“), nazywa się liczbą mieszaną *(gemischte Zahl)*. Możemy więc powyższe twierdzenie tak wysłowić:

Ułamek niewłaściwy można zawsze zamienić na liczbę mieszaną (albo całkowitą). W tym celu dzieli się licznik przez mianownik; otrzymany iloraz będzie liczbą całkowitą, a reszta będzie licznikiem ułamka właściwego w téj liczbie mieszanéj. Mianownikiem tego ułamka jest mianownik danego ułamka niewłaściwego.

5. Na odwrót liczbę mieszaną można zawsze zamienić na ułamek niewłaściwy. Niech będzie dana liczba mieszana $4\frac{5}{7}$. Ażeby ją zamienić na ułamek niewłaściwy, tak wnioskujemy: 1 jest tyle co siedm siódmych, 4 tyle co 4.7 siódmych, a więc $4\frac{5}{7}$ będzie tyle co $4.7+5$ siódmych; mamy zatém

$$4\frac{5}{7} = \frac{4.7+5}{7}, \text{ t. j. } \frac{33}{7}.$$

Ażeby więc liczbę mieszaną zamienić na ułamek niewłaściwy, mnoży się całkowitą przez mianownik ułamka, a do iloczynu dodaje się licznik; suma w ten sposób otrzymana będzie licznikiem ułamka niewłaściwego, mianownikiem zaś tego ułamka będzie mianownik ułamka właściwego.

Taksamo można liczbę całkowitą zamienić na ułamek o mianowniku upodobanym. N. p.:

$$3 = \frac{3}{1} = \frac{3.5}{5} = \frac{3.7}{7} = \frac{3.8}{8} = \text{ i t. d.}$$

Zadania.

Jak się tworzy ułamki:

1. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}$?

2. $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{4}{3}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}, \frac{11}{6}, \frac{11}{12}$?

3. $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{3}{5}, \frac{7}{10}, \frac{6}{5}, \frac{13}{10}$?

4. Ile połówek, czwartych i ósmych części zawierają w sobie liczby całkowite 1, 2, 3, 7, 12?

5. Ile trzecich, szóstych i dwunastych części zawierają w sobie liczby 1, 2, 3, 5, 14?

6. Ile piątych i dziesiątych części zawierają w sobie liczby 1, 2, 3, 6, 10?

7. Ile czwartych części jest w $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{2}$, a ile połówek w $\frac{2}{4}$, $\frac{6}{4}$, $\frac{10}{4}$?

8. Ile szóstych części jest w $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{3}$, a ile trzecich w $\frac{3}{6}$, $\frac{8}{6}$, $\frac{14}{6}$?

9. Ile dziesiątych części jest w $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{5}$, a ile piątych w $\frac{5}{10}$, $\frac{12}{10}$, $\frac{16}{10}$?

10. Ile ósmych części jest w $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$?

11. Ile dwunastych części jest w $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{11}{6}$?

12. Ile centów wynoszą $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{7}{10}$ jednego zł. w. a.?

13. Ile godzin zawierają $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{8}$ doby?

14. Ile minut znajduje się w $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{3}{12}$ godziny?

15. Ile miesięcy jest w $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$ roku?

16. Wyrazić $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ w częściach ósmych; $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$ w częściach dwunastych, a $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ i $\frac{4}{5}$ w częściach dziesiątych.

17. Wyrazić w częściach najmniejszych 2, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ i $\frac{7}{8}$; 3, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}$ i $\frac{5}{12}$; 7, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{10}$.

18. Jaka jest część trzecia liczb $\frac{3}{2}$, $\frac{24}{5}$, $\frac{12}{7}$, $\frac{36}{10}$?

19. Jaka jest część piąta liczb $\frac{5}{3}$, $\frac{15}{6}$, $\frac{75}{8}$, $\frac{55}{9}$?

Zamienić ułamki niewłaściwe na liczby mieszane:

20. $\frac{7}{2}$, $\frac{11}{3}$, $\frac{15}{4}$, $\frac{9}{5}$, $\frac{23}{6}$, $\frac{13}{8}$, $\frac{17}{10}$, $\frac{149}{11}$.

21. $\frac{199}{12}$, $\frac{440}{13}$, $\frac{2417}{18}$, $\frac{3797}{23}$, $\frac{3047}{37}$.

Zamienić liczby mieszane na ułamki niewłaściwe:

22. $2\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{3}$, $1\frac{2}{5}$, $7\frac{5}{6}$, $3\frac{5}{8}$, $8\frac{3}{10}$, $11\frac{7}{12}$.

23. $2\frac{5}{7}$, $5\frac{4}{9}$, $41\frac{7}{13}$, $123\frac{4}{17}$, $275\frac{14}{15}$, $374\frac{51}{100}$.

§. 16.

Przekształcanie ułamków.

1. Z dwu ułamków o spólnym mianowniku ten jest większy, który ma licznik większy; albowiem zawiera on więcéj takichsamych części jedności.

Z dwu ułamków o spólnym liczniku ten jest większy, który ma mianownik mniejszy; albowiem zawiera on tęsamę ilość części większych jedności.

2. Mnożąc lub dzieląc licznik ułamka przez pewną liczbę, mnożymy lub dzielimy wartość ułamka przez tę liczbę. N. p.

Ułamek $\frac{5\,.\,3}{7}$ czyli $\frac{15}{7}$ jest 3 razy większy od ułamka $\frac{5}{7}$, gdyż zawiera w sobie 3 razy więcéj siódmych części jedności. Na odwrót, ułamek $\frac{15:3}{7}$ czyli $\frac{5}{7}$ jest 3 razy mniejszy od ułamka $\frac{15}{7}$, gdyż zawiera w sobie 3 razy mniéj siódmych części jedności.

3. Mnożąc lub dzieląc mianownik ułamka przez pewną liczbę, dzielimy lub mnożymy wartość ułamka przez tę liczbę. N. p.

Ułamek $\frac{5}{7\,.\,3}$ czyli $\frac{5}{21}$ jest 3 razy mniejszy od ułamka $\frac{5}{7}$, gdyż zawiera w sobie tęsamę ilość trzy razy mniejszych części jedności. Na odwrót, ułamek $\frac{5}{21:3}$ czyli $\frac{5}{7}$ jest 3 razy większy od ułamka $\frac{5}{21}$, gdyż zawiera w sobie tęsamę ilość 3 razy większych części jedności.

4. Ułamek nie zmieni swéj wartości, gdy jego licznik i mianownik albo pomnożymy albo podzielimy przez jakąkolwiek, ale tęsamę liczbę. To twierdzenie jest bezpośredniem następstwem twierdzeń 2. i 3. Jakoż, według 2. i 3., ułamki n. p. $\frac{5}{7}$ i $\frac{5\,.\,3}{7\,.\,3}$ czyli $\frac{15}{21}$ są oba 3 razy mniejsze od ułamka $\frac{5\,.\,3}{7}$ czyli $\frac{15}{7}$, a więc są między sobą równe. Podobnież ułamki $\frac{15}{21}$ i $\frac{15:3}{21:3}$ są oba 3 razy większe od ułamka $\frac{15:3}{21}$ czyli $\frac{5}{21}$, a więc są także między sobą równe.

Na téj własności opierają się dwa przekształcenia ułamków, z których jedno nazywa się rozszerzaniem *(Erweitern)*, a drugie upraszczaniem *(Abkürzen)* ułamków.

5. Przez rozszerzanie ułamka rozumie się wyrażanie ułamka przez liczby większe bez zmiany jego wartości. Rozszerzenie ułamka uskutecznia się, mnożąc jego licznik i mianownik przez tęsamę liczbę.

Zapomocą rozszerzenia można każdy ułamek bez zmiany jego wartości zamienić na inny, którego mianownik jest wielokrotnością mianownika pierwotnego. Chcąc ułamek $\frac{3}{7}$ zamienić na ułamek téjsaméj wartości, ale z mianownikiem n. p. 56, mnoży się jego licznik i mianownik przez 8, ponieważ $56 : 7 = 8$. Mamy zatém:

$$\frac{3}{7} = \frac{3 \,.\, 8}{7 \,.\, 8} = \frac{24}{56}.$$

Taksamo dwa lub więcéj ułamków można zamienić na inne téjsaméj wartości o mianowniku jednakim, który jest spólną wielokrotnością mianowników danych.

Pospolicie, dla uproszczenia rachunków, sprowadza się ułamki do najmniejszego spólnego mianownika, t. j. zamienia się na inne téjsaméj wartości, ale mające za mianownik najmniejszą spólną wielokrotność mianowników ułamków danych.

Chcąc n. p. sprowadzić ułamki $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{10}$ do najmniejszego spólnego mianownika, uważmy, że $w\ (4, 6, 10) = 60$, daléj, że $60 : 4 = 15$, $60 : 6 = 10$, $60 : 10 = 6$, a znajdziemy:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \,.\, 15}{4 \,.\, 15} = \frac{45}{60}; \quad \frac{5}{6} = \frac{5 \,.\, 10}{6 \,.\, 10} = \frac{50}{60}; \quad \frac{7}{10} = \frac{7 \,.\, 6}{10 \,.\, 6} = \frac{42}{60}.$$

6. Przez upraszczanie ułamka rozumie się wyrażanie ułamka przez liczby mniejsze bez zmiany jego wartości. Upraszczanie ułamka uskutecznia się, dzieląc jego licznik i mianownik przez tęsamę liczbę. Uproszczenie ułamka jest tylko wtedy możebne, gdy licznik i mianownik mają spólny podzielnik.

Chcąc n. p. ułamek $\frac{24}{36}$ uprościć, dość podzielić jego licznik i mianownik przez jednę z liczb 2, 3, 4, 6, 12. Znajdziemy tym sposobem:

$$\frac{24}{36}=\frac{12}{18}=\frac{8}{12}=\frac{6}{9}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Ułamek, którego licznik i mianownik są liczbami względem siebie pierwszymi, zowie się sprowadzonym do najprostszéj postaci.

Aby ułamek sprowadzić do najprostszéj postaci, dość jego licznik i mianownik podzielić przez największy spólny podzielnik tych dwu liczb. Chcemy n. p. ułamek $\frac{825}{960}$ sprowadzić do najprostszéj postaci. Natenczas, uważając, że

$$P\ (825,\ 960) = 15,\quad 825 : 15 = 55,\quad 960 : 15 = 64,$$

znajdziemy

$$\frac{825}{960}=\frac{825:15}{960:15}=\frac{55}{64}.$$

Niekiedy można się obejść bez szukania największego spólnego podzielnika; można bowiem uprościć ułamek zapomocą kolejnych dzieleń licznika i mianownika przez liczby pierwsze, które samo wejrzenie wskazuje. Tak n. p.:

$$\frac{4968}{5904}=\frac{4968:2}{5904:2}=\frac{2484}{2952}=\frac{2484:2}{2952:2}=\frac{1242}{1476}=\frac{1242:2}{1476:2}=\frac{621}{738}=$$
$$=\frac{621:3}{738:3}=\frac{207}{246}=\frac{207:3}{246:3}=\frac{69}{82}.$$

Zadania.

1. Znaleść ułamki 3 razy większe od ułamków:
$\frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{9}, \frac{14}{15}, \frac{20}{63}, \frac{29}{32}, \frac{70}{216}.$

2. Znaleść ułamki 5 razy mniejsze od ułamków:
$\frac{5}{7}, \frac{15}{16}, \frac{2}{3}, \frac{55}{63}, \frac{125}{136}, \frac{17}{42}.$

3. Zamienić 1, 3, 6, 9, 13, 27 na ułamki o mianownikach: *a)* 10, *b)* 25, *c)* 60, *d)* 100.

4. Sprowadzić:
a) ułamki $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{11}{12}, \frac{14}{15}$ do mianownika 120.
b) ułamki $\frac{5}{7}, \frac{3}{8}, \frac{1}{14}, \frac{6}{35}$ do mianownika 140.

Sprowadzić do najmniejszego spólnego mianownika ułamki:

5. $\frac{3}{10}, \frac{7}{15};\ \frac{3}{4}, \frac{5}{14};\ \frac{13}{25}, \frac{3}{15};\ \frac{16}{21}, \frac{27}{35}.$

6. $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}; \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}; \frac{4}{9}, \frac{11}{18}, \frac{21}{24}, \frac{3}{42}.$

7. $\frac{17}{44}, \frac{35}{72}, \frac{29}{56}; \frac{11}{15}, \frac{18}{35}, \frac{24}{55}, \frac{98}{105}.$

8. $\frac{37}{108}, \frac{113}{132}, \frac{79}{162}; \frac{91}{120}, \frac{147}{264}, \frac{103}{198}, \frac{211}{495}.$

Wyrazić pod postacią ułamków o najmniejszym spólnym mianowniku liczby:

9. $1\frac{1}{3}, 2\frac{4}{5}, 3\frac{1}{7}; 2\frac{3}{14}, 4\frac{1}{21}, \frac{32}{35}.$

10. $\frac{4}{5}, 2\frac{2}{15}, 3\frac{4}{105}; 7, 3\frac{1}{4}, 5\frac{3}{8}, 1\frac{5}{12}.$

Znaleść największy i najmniejszy z ułamków:

11. $\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{9}{11}; \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{9}{8}, \frac{15}{14}; \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}.$

Sprowadzić do najprostszéj postaci ułamki:

12. $\frac{12}{18}, \frac{9}{24}, \frac{44}{66}, \frac{63}{144}, \frac{147}{189}, \frac{555}{999}.$

13. $\frac{75}{200}, \frac{192}{240}, \frac{666}{909}, \frac{3444}{3556}, \frac{7568}{9504}.$

14. $\frac{805}{966}, \frac{2924}{5117}, \frac{803}{1752}, \frac{791}{1243}, \frac{11050}{35581}$ (największy spólny podzielnik).

§. 17.

Dodawanie ułamków.

1. Określenie dodawania, jeżeli ma obejmować nie tylko liczby całkowite, ale także ułamki i liczby mieszane, można tak wysłowić:

D o d a w a n i e m a n a c e l u w y n a l e z i e n i e l i c z b y, k t ó r a b y z a w i e r a ł a w s o b i e w s z y s t k i e j e d n o ś c i i c z ę ś c i j e d n o ś c i, j a k i e s ą z a w a r t e w d w u l u b w w i ę c é j l i c z b a c h d a n y c h.

2. U ł a m k i o m i a n o w n i k u s p ó l n y m d o d a j e s i ę, d o d a j ą c i c h l i c z n i k i. Ponieważ ułamki o spólnym mianowniku przedstawiają jednakie części jedności, suma więc powinna zawierać w sobie tyle tych części, ile ich jest razem we wszystkich składnikach. N. p.:

$$\frac{3}{7} + \frac{8}{7} + \frac{15}{7} = \frac{3 + 8 + 15}{7} = \frac{26}{7} \text{ czyli } 3\frac{5}{7}.$$

3. Ułamki o mianownikach różnych sprowadza się naprzód do najmniejszego spólnego mianownika, a potém dodaje.

Mając n. p. dodać ułamki $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{9}$, sprowadzamy te ułamki naprzód do najmniejszego spólnego mianownika.

Ponieważ

$$w\ (3,\ 6,\ 9) = 18,$$

$$18 : 3 = 6,\quad 18 : 6 = 3,\quad 18 : 9 = 2,$$

mamy zatém

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \,.\, 6}{3 \,.\, 6} = \frac{12}{18},\ \frac{5}{6} = \frac{5 \,.\, 3}{6 \,.\, 3} = \frac{15}{18},\ \frac{4}{9} = \frac{4 \,.\, 2}{9 \,.\, 2} = \frac{8}{18},$$

a przeto

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{6} + \frac{4}{9} = \frac{12}{18} + \frac{15}{18} + \frac{8}{18} = \frac{12+15+8}{18} = \frac{35}{18} \text{ czyli } 1\frac{17}{18}.$$

4. Liczby mieszane dodaje się, dodając oddzielnie ich części ułamkowe i oddzielnie ich części całkowite. Zaczyna się zwykle od dodawania części ułamkowych; albowiem ich suma może w sobie zawierać całkowite, które należy dodać do części całkowitych. N. p.:

$$3\frac{1}{2} + 5\frac{5}{6} + \frac{3}{8} = \overline{\frac{1}{2} + \frac{5}{6} + \frac{3}{8}} + \overline{3+5};$$

a że

$$\frac{1}{2} + \frac{5}{6} + \frac{3}{8} = \frac{12}{24} + \frac{20}{24} + \frac{9}{24} = \frac{41}{24} = 1\frac{17}{24},$$

$$3 + 5 = 8,$$

mamy zatém

$$3\frac{1}{2} + 5\frac{5}{6} + \frac{3}{8} = 1\frac{17}{24} + 8 = \overline{1+8} + \frac{17}{24} = 9 + \frac{17}{24} \text{ czyli } 9\frac{17}{24}.$$

Uwaga. Liczby mieszane można także przed uskutecznianiem dodawania zamienić na ułamki niewłaściwe.

Zadania.

Znaleść sumy ułamków:

1. $\frac{2}{5}, \frac{4}{7};\ \frac{3}{7}, \frac{5}{9};\ \frac{5}{8}, \frac{12}{17};\ \frac{4}{5}, \frac{10}{11}.$

2. $\frac{2}{5}, \frac{9}{10};\ \frac{3}{4}, \frac{7}{12};\ \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12};\ \frac{3}{7}, \frac{9}{14}, \frac{17}{42}.$

3. $\frac{7}{8}, \frac{5}{12}, \frac{11}{20};\ \frac{5}{6}, \frac{4}{9}, \frac{7}{12}, \frac{13}{21};\ \frac{14}{15}, \frac{17}{18}, \frac{16}{27}, \frac{13}{36}.$

4. Dodać liczby:

a) $1\frac{2}{7}$, $\frac{5}{9}$, $3\frac{2}{21}$; *b)* 2, $7\frac{1}{6}$, $3\frac{5}{8}$, $\frac{5}{12}$; *c)* $8\frac{2}{3}$, $7\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{6}$, $3\frac{7}{15}$.

5. Jaka jest wartość sumy:

a) $\frac{1}{3}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\frac{4}{9}+\frac{7}{12}+\frac{11}{18}+\frac{13}{24}$;

b) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{7}{15}+\frac{23}{30}+\frac{11}{40}+\frac{23}{60}+\frac{48}{120}$;

c) $4\frac{5}{6}+8\frac{13}{21}+3\frac{29}{36}+7\frac{37}{54}+5\frac{17}{56}$.

6. Sprawdzić, że

a) $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{5}{6}+\frac{7}{10}=\frac{2}{3}+\frac{7}{12}+\frac{3}{5}+\frac{14}{15}$;

b) $\frac{13}{44}+\frac{47}{75}+\frac{53}{165}+\frac{217}{275}=\frac{29}{60}+\frac{23}{66}+\frac{39}{100}+\frac{107}{132}$.

7. Jaka jest suma pięciu liczb, z których pierwszą jest $37\frac{1}{2}$, a każda następująca jest o $5\frac{2}{3}$ większa od poprzedzającéj?

8. Kupiono kawy za $2\frac{7}{10}$ zł., cukru za $3\frac{3}{4}$ zł., herbaty za $1\frac{1}{2}$ zł., świec za $1\frac{3}{10}$ zł.; ile zł. wydano?

9. Boki trójkąta wynoszą $225\frac{1}{2}$ *m*, $173\frac{3}{4}$ *m* i $205\frac{2}{5}$ *m*; wynaleść jego obwód.

10. Do zbiornika przypływa woda trzema rurami; w jednéj godzinie wypełniłaby woda, płynąc tylko przez pierwszą rurę, $\frac{1}{3}$ zbiornika; dopływając tylko drugą rurą, $\frac{1}{4}$ zbiornika, a dopływając tylko trzecią rurą, $\frac{2}{5}$ zbiornika. Jaką część zbiornika wypełni woda w jednéj godzinie, gdy dopływa jednocześnie trzema rurami?

11. Z trzech robotników, gdyby każdy sam jeden pracował, wykopałby pierwszy pewien rów w 15 dniach, drugi wykopałby tensam rów w 12 dniach, a trzeci w 9 dniach. Jaką część rowu wykopią w jednym dniu wszyscy trzej razem i ile dni potrzeba, aby wykopali cały rów, wszyscy razem pracując?

12. Z Warszawy do Drezna rachują mil $77\frac{1}{2}$, z Drezna do Lipska $12\frac{3}{6}$, z Lipska do Frankfurtu nad Menem $39\frac{1}{9}$, z Frankfurtu do Moguncyi $4\frac{1}{21}$, z Moguncyi do Paryża $62\frac{3}{7}$; ile jest mil tą drogą z Warszawy do Paryża?

§. 18.

Odejmowanie ułamków.

1. Określenie odejmowania jest takiesamo dla ułamków, jak i dla liczb całkowitych. A mianowicie: odejmowanie ma na celu, z sumy dwu składników i z jednego z tych składników wyznaczenie drugiego składnika.

2. Ułamki o spólnym mianowniku odejmuje się, odejmując ich liczniki. Ułamki o mianownikach różnych sprowadza się wprzódy do najmniejszego spólnego mianownika. N. p.

$$\frac{5}{7} - \frac{2}{7} = \frac{5-2}{7} = \frac{3}{7};$$

$$\frac{5}{6} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6} - \frac{4}{6} = \frac{5-4}{6} = \frac{1}{6}.$$

3. Liczby mieszane odejmuje się jednę od drugiéj, odejmując oddzielnie ich części całkowite i oddzielnie ich części ułamkowe. Pospolicie zaczyna się od odejmowania części ułamkowych; albowiem może się wydarzyć, że ułamek w odjemnéj jest mniejszy, niż ułamek w odjemniku. W tym przypadku zwiększa się licznik ułamka w odjemnéj mianownikiem spólnym obu ułamków, co wychodzi na dodanie jedności do odjemnéj, ale jednocześnie zwiększa się o jedność część całkowitą odjemnika.

Mając n. p. od $7\frac{4}{7}$ odjąć $2\frac{9}{14}$, odejmujemy naprzód ułamki. Te ułamki, sprowadzone do najmniejszéj spólnéj mianownika, przechodzą odpowiednio na $\frac{8}{14}$ i $\frac{9}{14}$. Powiększamy zatém pierwszy ułamek o 1 czyli o $\frac{14}{14}$, co wychodzi na powiększenie jego licznika 8 o 14, ale jednocześnie powiększamy o 1 liczbę całkowitą 2 w odjemniku. Będzie zatém

$$7\frac{4}{7} - 2\frac{9}{14} = 7\frac{8}{14} - 2\frac{9}{14} = 7\frac{22}{14} - 3\frac{9}{14} =$$

$$= \overline{7-3} + \overline{\frac{22}{14} - \frac{9}{14}} = 4 + \frac{13}{14} = 4\frac{13}{14}.$$

Zadania.

Wyznaczyć różnice:

1. $\frac{8}{9} - \frac{5}{9}$; $\frac{11}{12} - \frac{7}{12}$; $\frac{17}{30} - \frac{13}{30}$.

2. $\frac{5}{9} - \frac{4}{18}$; $\frac{5}{6} - \frac{7}{12}$; $\frac{23}{30} - \frac{9}{15}$.

3. $\frac{4}{9} - \frac{5}{12}$; $\frac{7}{8} - \frac{11}{18}$; $\frac{3}{7} - \frac{8}{21}$.

4. $1 - \frac{3}{4}$; $7 - \frac{5}{9}$; $9\frac{5}{7} - 4$.

5. $12\frac{5}{8} - 7\frac{3}{8}$; $8\frac{9}{16} - 5\frac{13}{16}$; $4\frac{2}{10} - 1\frac{2}{5}$.

6. $23\frac{13}{15} - 18\frac{17}{25}$; $129\frac{13}{24} - 105\frac{27}{32}$; $104\frac{17}{200} - 78\frac{23}{150}$.

7. O ile stanie się ułamek $\frac{9}{14}$ większym albo mniejszym, gdy

a) do licznika i mianownika dodamy 7,

b) od licznika i mianownika odejmiemy 7.

8. Urzędnik pobiera $112\frac{1}{2}$ zł. tytułem miesięcznéj płacy, a wydaje miesięcznie $75\frac{2}{5}$ zł.; ile oszczędza miesięcznie?

9. W beczce było $24\frac{13}{50}$ *hl* wina, z tego sprzedano $13\frac{7}{25}$ *hl*; ile pozostało?

10. Ogrodnik sprzedał $\frac{3}{7}$ zebranych owoców, ileż pozostało mu jeszcze?

11. Jeździec przebył $\frac{1}{3}$ drogi kłusem, $\frac{5}{12}$ galopem, a resztę drogi stępo; jaką częścią całéj drogi jest ta reszta?

12. Z czterech liczb pierwsza jest $25\frac{1}{3}$, druga jest o $8\frac{3}{4}$ większą od pierwszéj, trzecia o $12\frac{3}{5}$ mniejszą od drugiéj, czwarta jest równą różnicy między pierwszą i trzecią; czemu się równa suma tych czterech liczb?

13. Okazać, że suma liczb $5\frac{1}{3}$ i $3\frac{1}{5}$ jest 4 razy większą od ich różnicy.

14. Posłaniec był 5 dni w drodze: w każdym z 3 pierwszych dni uszedł po $42\frac{1}{2}$ *km*, w 4 dniu o $2\frac{1}{4}$ *km* mniéj, a w 5. dniu o $1\frac{1}{25}$ *km* mniéj, niż w 4. dniu; ileż *km* uszedł w tych 5 dniach?

15. Trzy worki ryżu ważą $125\frac{3}{5}$, $127\frac{1}{10}$, $128\frac{7}{4}$ *kg*, a same worki bez ryżu ważą $8\frac{1}{2}$, $8\frac{3}{5}$, $8\frac{3}{4}$ *kg*; ile waży sam ryż w tych trzech workach?

§. 19.

Mnożenie i dzielenie ułamka przez liczbę całkowitą.

1. Z własności ułamków, dowiedzionych w §. 16. (ustęp 2. i 3.), wypływają następujące prawidła na mnożenie i dzielenie ułamka przez liczbę całkowitą.

Ułamek mnoży się przez liczbę całkowitą, mnożąc przez tę liczbę jego licznik albo dzieląc przez tę liczbę jego mianownik. Drugiego sposobu używa się tylko wtedy, gdy mianownik jest przez mnożnik podzielny. N. p.

$$\frac{4}{15}.7 = \frac{4.7}{15} = \frac{28}{15} = 1\frac{13}{15},$$

$$\frac{4}{15}.3 = \frac{4}{15:3} = \frac{4}{5}.$$

Uwaga. Przy uskutecznianiu mnożenia pierwszym sposobem można rachunek uprościć, jeżeli mianownik i mnożnik mają spólny podzielnik; wówczas bowiem można przed wykoniem mnożenia te dwie liczby podzielić przez ten spólny podzielnik. N. p.

$$\frac{4}{15}.6 = \frac{4}{5}.2 = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}.$$

2. Podobnie, ułamek dzieli się przez liczbę całkowitą, dzieląc przez tę liczbę jego licznik lub mnożąc przez tę liczbę jego mianownik.

Pierwszego sposobu używa się tylko wtedy, gdy licznik jest przez dzielnik podzielny. Uskuteczniając zaś dzielenie drugim sposobem, można rachunek uprościć, jeżeli licznik i dzielnik mają spólny podzielnik; wówczas bowiem dzieli się uprzednio te dwie liczby przez ten spólny podzielnik. N. p.

$$\frac{15}{4} : 3 = \frac{15:3}{4} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4},$$

$$\frac{15}{4} : 7 = \frac{15}{4.7} = \frac{15}{28},$$

$$\frac{15}{4} : 9 = \frac{5}{4} : 3 = \frac{5}{4\ 3} = \frac{5}{12}.$$

3. Liczbę mieszaną mnoży się albo dzieli przez liczbę całkowitą, albo zamieniając tę liczbę mieszaną uprzednio na ułamek niewłaściwy, albo mnożąc lub dzieląc osobno jéj część całkowitą, a osobno jéj część ułamkową. N. p.

$$7\tfrac{2}{5}.3 = \tfrac{37}{5}.3 = \tfrac{111}{5} = 22\tfrac{1}{5},$$

albo

$$7\tfrac{2}{5}.3 = 7.3 + \tfrac{2}{5}.3 = 21 + \tfrac{6}{5} = 21 + 1\tfrac{1}{5} = 22\tfrac{1}{5}$$

Podobnie

$$7\tfrac{2}{5} : 3 = \tfrac{37}{5} : 3 = \tfrac{37}{15} = 2\tfrac{7}{15},$$

albo

$$7\tfrac{2}{5} : 3 = 7 : 3 + \tfrac{2}{5} : 3 = 2\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{15} = 2\tfrac{7}{15}.$$

Zadania.

Wyznaczyć iloczyny;

1. $\frac{8}{11}.7$; $\frac{4}{9}.9$; $\frac{3}{16}.8$; $\frac{5}{7}.21$; $\frac{7}{12}.18$.

2. $1\frac{2}{7}.5$; $7\frac{1}{4}.6$; $12\frac{4}{9}.3$; $8\frac{4}{15}.10$; $31\frac{12}{27}.18$.

Wyznaczyć ilorazy:

3. $\frac{12}{11} : 6$; $\frac{63}{72} : 9$; $\frac{3}{4} : 18$; $\frac{25}{34} : 15$; $\frac{35}{43} : 25$.

4. $12\frac{6}{7} : 3$; $17\frac{3}{4} : 5$; $59\frac{7}{10} : 8$; $307\frac{17}{28} : 9$; $342\frac{9}{11} : 23$.

5. 1 *kg* kawy kosztuje $1\frac{3}{5}$ zł.; ile kosztuje 10 *kg*, a ile 12 *kg*?

6. Uczeń potrafi w 1 minucie napisać $2\frac{1}{4}$ wiersza; ile wierszy napisze w pół godziny?

7. Na miedzy posadzono 79 drzewek w odległości $3\frac{1}{2}$ *m* jedno od drugiego; jaka jest długość miedzy?

8. Koń obracający kierat robi za każdym obrotem $8\frac{1}{3}$ kroków; ileż kroków zrobił po uskutecznieniu 65. obrotu?

9. Złoty austryacki waży $\frac{1}{81}$ *kg*; ile waży 96 zł.?

10. Jeżeli za rubla papierowego żądają $1\frac{17}{100}$ zł. w. a.; ile trzeba zapłacić za 355 rubli?

11. Jeżeli 9 *m* sukna kosztowało $37\frac{2}{3}$ zł., ile zapłacono za 1 *m*?

*

12. 1 *hl* wina kosztuje 42 zł.; ile *hl* otrzyma się za $327\frac{3}{5}$ zł.?

13. Z fontanny wytryska w 5 minutach $26\frac{2}{7}$ litrów wody; ile w 1 minucie?

14. Robotnik wykonał $\frac{4}{9}$ roboty w 6 dniach; jaką część roboty wykonał w 1 dniu?

15. W klasie, liczącéj 56 uczniów, znajduje się 12 uczniów, mających po $10\frac{1}{2}$ lat, 18 uczniów, mających po $11\frac{1}{3}$ lat, 20 uczniów mających po $11\frac{2}{5}$ lat, a reszta ma po $12\frac{1}{6}$ lat. Jaki jest przeciętny wiek uczniów téj klasy?

16. Zmieszawszy 26 *hl* pszenicy po $6\frac{1}{4}$ zł. i 15 *hl* po $6\frac{1}{5}$ zł., chcemy przy sprzedaży téj mieszaniny osiągnąć zysk równy $\frac{1}{7}$ ceny kupna. Ile chcemy zyskać i ile wziąć musimy za 1 *hl* mieszaniny?

17. 32 robotników zarobiło w pewnym czasie $564\frac{3}{4}$ zł., a 12 robotników zarobiło w tymsamym czasie $357\frac{2}{3}$ zł.; o ile więcéj zarobił każdy z ostatnich robotników, niż każdy z pierwszych?

§. 20.

Mnożenie przez ułamek.

1. Określenie mnożenia, dane w §. 7. dla liczb całkowitych, można także tak wysłowić: **Mnożenie ma na celu utworzenie z jednéj liczby danéj, zwanéj mnożną, innéj liczby w tensam sposób, w jaki druga liczba dana, zwana mnożnikiem, powstała z jedności.** Jakoż przypuśćmy, że mamy pomnożyć n. p. 5 przez 3. Mnożnik 3 powstał z jedności przez wzięcie jedności 3 razy za składnik sumy, t. j. $3 = 1 + 1 + 1$. Według powyższego określenia znajdziemy zatém iloczyn, biorąc mnożną 5 także 3 razy za składnik sumy, t. j.

$$5.3 = 5 + 5 + 5 \quad \text{czyli} \quad 15.$$

2. Tak wysłowione określenie mnożenia zastosujemy do przypadku, kiedy mnożnik jest ułamkiem. Jakoż dajmy na to, że mamy pomnożyć n. p. 5 przez $\frac{3}{4}$. Mnożnik $\frac{3}{4}$ powstał z jedności

przez podzielenie jedności na 4 równe części i wzięcie jednéj takiéj czwartéj części 3 razy za składnik sumy, t. j.

$$\frac{3}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}.$$

Według powyższego określenia znajdziemy zatém iloczyn, dzieląc także mnożną 5 na 4 równe części i biorąc jednę taką czwartą część 3 razy za składnik sumy, t. j.

$$5.\frac{3}{4}=\frac{5}{4}+\frac{5}{4}+\frac{5}{4}=\frac{5\,.\,3}{4}.$$

Stąd wypływa następujące prawidło na mnożenie przez ułamek: Liczbę mnoży się przez ułamek, mnożąc ją przez licznik, a dzieląc przez mianownik tego ułamka.

Mnożenie przez ułamek składa się więc z dwu działań: z mnożenia przez licznik i dzielenia przez mianownik; porządek w jakim się te dwa działania uskutecznia, jest obojętny.

3. Do powyższego prawidła prowadzi także następujące rozumowanie: Mając jakąkolwiek liczbę pomnożyć przez n. p. $\frac{3}{4}$, mnożymy ją przez licznik 3, t. j. przez liczbę 4 razy większą; tym sposobem otrzymamy iloczyn 4 razy za wielki. Ażeby więc otrzymać iloczyn prawdziwy, potrzeba poprzód znaleziony 4 razy zmniejszyć, t. j. przez mianownik 4 podzielić.

4. To prawidło stósuje się, czy mnożna jest całkowitą, czy téż ułamkową. Mamy zatém także n. p.

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7}=\frac{2}{5}.3:7=\frac{2.3}{5}:7=\frac{2\,.\,3}{5\,.\,7}=\frac{6}{35}.$$

Rachunek można uprościć, gdy licznik jednego czynnika i mianownik drugiego czynnika mają spólny podzielnik; wówczas bowiem można poprzód te dwie liczby przez ten spólny podzielnik podzielić. N. p.

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}=\frac{3\,.\,8}{4\,.\,9}=\frac{1\,.\,2}{1\,.\,3}=\frac{2}{3}.$$

Liczby mieszane zamienia się przed uskutecznieniem mnożenia na ułamki niewłaściwe. N. p.

$$1\frac{2}{3}.3\frac{3}{10}=\frac{5}{3}\cdot\frac{33}{10}=\frac{1}{1}\cdot\frac{11}{2}=\frac{11}{2}=5\frac{1}{2}.$$

5. Jeżeli w ułamku licznik i mianownik zamienimy jeden na drugi, otrzymamy nowy ułamek, odwrotny *(reciprok)* względem pierwotnego. Tak n. p.

$\frac{4}{3}$ jest ułamkiem odwrotnym względem $\frac{3}{4}$,

5 lub $\frac{5}{1}$ jest liczbą odwrotną względem ułamka $\frac{1}{5}$.

Iloczyn dwu liczb, odwrotnych jedna względem drugiéj, jest równy 1. Mamy bowiem n. p.

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} = 1, \quad 5 . \frac{1}{5} = 1 \text{ i t. d.}$$

6. Z mnożeniem łączy się pospolicie pojęcie powiększania liczby mnożnéj. Tymczasem mnożenie przez ułamek daje iloczyn większy od mnożnéj tylko wtedy, kiedy mnożnik jest ułamkiem niewłaściwym. Jeżeli zaś mnożnik jest ułamkiem właściwym, wówczas iloczyn jest mniejszym od mnożnéj. W pierwszym bowiem razie mnożną mnoży się przez liczbę większą (licznik), a dzieli przez mniejszą (mianownik); w drugim zaś razie mnoży się przez mniejszą, a dzieli przez większą. N. p. iloczyn

$$5 . \frac{2}{3} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3} \text{ jest mniejszy, niż } 5,$$

gdy tymczasem

$$5 . \frac{3}{2} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2} \text{ jest większy, niż } 5.$$

Zadania.

Wykonać mnożenia:

1. $12 . \frac{1}{6}$; $24 . \frac{3}{8}$; $85 . \frac{11}{34}$; $159 . \frac{7}{12}$.
2. $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}$; $\frac{3}{14} \cdot \frac{7}{18}$; $\frac{35}{48} \cdot \frac{20}{21}$; $\frac{63}{72} \cdot \frac{18}{35}$.
3. $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{12}$; $\frac{3}{8} \cdot \frac{12}{7} \cdot \frac{14}{15}$; $\frac{3}{4} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{11}$.
4. $3\frac{1}{2} . 6\frac{2}{3}$; $7\frac{3}{5} . 3\frac{3}{4}$; $12\frac{2}{3} . 9\frac{3}{8}$; $21\frac{3}{4} . 12\frac{8}{9}$.
5. $3\frac{1}{2} . \frac{7}{10} . 2\frac{4}{5}$; $2 . \frac{12}{25} \cdot \frac{10}{27} \cdot \frac{15}{16}$; $\frac{324}{961} \cdot \frac{1444}{1296} \cdot \frac{441}{529} \cdot \frac{2116}{1764}$.
6. O ile iloczyn ułamków $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ i $\frac{4}{5}$ jest mniejszy od ich sumy?
7. Ile kosztuje $\frac{3}{5}$ *kg*, jeżeli 1 *kg* kosztuje $2\frac{5}{6}$ zł.?
8. Znaleść $\frac{5}{6}$ i $\frac{7}{8}$ liczby $207\frac{3}{5}$.
9. Co więcéj, czy $\frac{3}{11}$ liczby $25\frac{2}{3}$, czy $\frac{5}{12}$ liczby $17\frac{3}{5}$?

10. Obwód koła jest około $3\frac{1}{7}$ razy większy od średnicy; ile metrów wynosi obwód koła, jeżeli długość jego średnicy wynosi $4\frac{7}{10}$ *m*?

11. Kupiono $323\frac{1}{4}$ *hl* pszenicy po $6\frac{1}{5}$ zł., a sprzedano ją po $6\frac{3}{4}$ zł. za 1 *hl*; ile zyskano na tym handlu?

12. Trzy osoby mają się tak podzielić kwotą $385\frac{1}{2}$ zł., ażeby osoba A otrzymała $\frac{3}{10}$, B $\frac{1}{4}$, a C resztę téj kwoty; ile otrzyma każda z tych osób?

13. Zakład ciesielski zatrudnia 72 ludzi, z których $\frac{1}{18}$ zajmuje się rysowaniem, $\frac{5}{8}$ obrabianiem drzewa, a reszta zestawianiem dachu; ile wynosi ta reszta?

14. Osoba B odziedziczyła $2\frac{1}{2}$ razy tyle, co A, C zaś $1\frac{1}{7}$ razy więcéj, niż B. Jeżeli A odziedziczyła $1053\frac{3}{5}$ zł., ile odziedziczyły osoby B i C, tudzież wszystkie razem?

§. 21.

Dzielenie przez ułamek.

1. Określenie dzielenia jest takiesamo dla ułamków, jak i dla liczb całkowitych. A zatém, dzielenie ma na celu z danego iloczynu dwu czynników i jednego czynnika wyznaczenie drugiego czynnika. Liczbę dzieli się przez ułamek, mnożąc ją przez ułamek odwrotny względem dzielnika.

Jakoż, mając n. p. liczbę 7 podzielić przez ułamek $\frac{3}{4}$, musimy odnaleść liczbę, która, pomnożona przez dzielnik $\frac{3}{4}$, daje 7 na iloczyn. Ilorazem żądanym może być zatém tylko liczba 7, pomnożona przez ułamek $\frac{4}{3}$, odwrotny względem dzielnika, gdyż $7 . \frac{4}{3}$, pomnożone przez $\frac{3}{4}$, daje $7 . \frac{4}{3} . \frac{3}{4} = 7 . 1 = 7$. Mamy zatém

$$7 : \frac{3}{4} = 7 . \frac{4}{3} = \frac{7 . 4}{3} = \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3};$$

podobnie będzie

$$\frac{5}{8} : \frac{3}{4} = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{3} = \frac{5 \,.\, 4}{8 \,.\, 3} = \frac{5 \,.\, 1}{2 \,.\, 3} = \frac{5}{6}.$$

2. Powyższe prawidło można także tak wysłowić: **L i c z b ę d z i e l i s i ę p r z e z u ł a m e k, d z i e l ą c j ą p r z e z l i c z n i k, a m n o ż ą c p r z e z m i a n o w n i k u ł a m k a.**

Dzielenie przez ułamek składa się zatém z dwu działań: z dzielenia przez licznik i mnożenia przez mianownik. Porządek tych dwu działań jest zupełnie obojętny.

3. Do tegosamego prawidła prowadzi także następujące rozumowanie: Mając dzielić jaką liczbę przez ułamek n. p. $\frac{3}{4}$, otrzymamy iloraz 4 razy za mały, gdy ją podzielimy przez licznik 3, gdyż ten licznik jest 4 razy większy od ułamka $\frac{3}{4}$; ten iloraz należy zatém 4 razy powiększyć, t. j. pomnożyć przez mianownik 4. A zatém

$$7 : \frac{3}{4} = 7 : 3 \,.\, 4 = \frac{7}{3} \,.\, 4 = \frac{7 \;\, 4}{3} = \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3},$$

podobnie

$$\frac{5}{8} : \frac{3}{4} = \frac{5}{8} : 3 \,.\, 4 = \frac{5}{8 \,.\, 3} \,.\, 4 = \frac{5 \,.\, 4}{8 \,.\, 3} = \frac{5 \;\, 1}{2 \;\, 3} = \frac{5}{6}.$$

4. Przez liczbę mieszaną dzieli się, zamieniając tę liczbę mieszaną uprzednio na ułamek niewłaściwy. N. p.

$$\frac{7}{8} : 2\frac{1}{2} = \frac{7}{8} : \frac{5}{2} = \frac{7}{8} \cdot \frac{2}{5} = \frac{7 \,.\, 1}{4 \;\, 5} = \frac{7}{20}.$$

5. Z dzieleniem łączy się pospolicie pojęcie zmniejszania liczby dzielnéj. Tymczasem iloraz jest większy lub mniejszy od dzielnéj, stosownie do tego, czy dzielnik jest ułamkiem właściwym, czy też niewłaściwym. N. p. iloraz

$$4 : \frac{5}{6} = \frac{4 \,.\, 6}{5} = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5} \text{ jest większy od 4,}$$

gdy tymczasem

$$4 : \frac{6}{5} = \frac{4 \,.\, 5}{6} = \frac{20}{6} = 3\frac{1}{3} \text{ jest mniejszy od 4.}$$

Z a d a n i a.

Wykonać dzielenia:

1. $15 : \frac{3}{4}$; $36 : \frac{4}{5}$; $658 : \frac{7}{9}$; $504 : \frac{5}{8}$.

2. $\frac{2}{7} : \frac{3}{8}$; $\frac{3}{5} : \frac{4}{9}$; $\frac{4}{11} : \frac{6}{13}$; $\frac{26}{51} : \frac{91}{34}$.

3. $5 : 4\frac{2}{3}$; $3\frac{4}{5} : \frac{5}{6}$; $5\frac{1}{4} : \frac{7}{10}$; $10\frac{4}{9}$; $13\frac{3}{7}$.

Uskutecznić następujące działania:

4. $\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{4} : \frac{11}{12}$; $3\frac{1}{2} . 9 : 5\frac{3}{4}$; $3\frac{1}{2} : 2\frac{5}{8} : \frac{10}{11}$.

5. $\dfrac{7\frac{3}{7}}{40\frac{5}{9}} \cdot \dfrac{28}{35}$; $\dfrac{3\frac{4}{7} . 3\frac{1}{125}}{\frac{47}{315} . 9}$; $\dfrac{2\frac{10}{11} . 5\frac{1}{16} . 1331}{3\frac{11}{12} . \frac{44}{3\frac{3}{7}} . 202\frac{1}{2}}$.

6. Ile metrów otrzyma się za $37\frac{1}{2}$ zł., jeżeli 1 *m* kosztuje $2\frac{3}{4}$ zł.?

7. Posłaniec przebiegł w $12\frac{1}{2}$ dniach $402\frac{2}{3}$ *km*; ile *km* przebiegał dziennie?

8. Co korzystniéj, czy $8\frac{1}{2}$ *kg* towaru kupić za $13\frac{13}{50}$ zł., czy $10\frac{3}{4}$ *kg* tegosamego towaru kupić za $17\frac{1}{5}$ zł.?

9. Jakiéj liczby $\frac{3}{4}$ równają się $\frac{5}{6}$ liczby $2\frac{1}{4}$?

10. Jakiéj liczby $\frac{8}{11}$ są o $3\frac{1}{5}$ większe od $\frac{8}{9}$ liczby $3\frac{3}{5}$?

11. Kupiec zyskał na sprzedaży towaru $25\frac{3}{4}$ zł., a mianowicie na każdym *kg* $\frac{1}{10}$ zł.; ileż sprzedał *kg*?

12. Do beczki, której objętość wynosi 56 *l*, płynie woda dwiema rurami; pierwsza sama jedna wypełniłaby beczkę w 16 minutach, a druga w 12 minutach; *a)* ile wody przypływa w 1 minucie przez każdą rurę, *b)* w ilu minutach wypełni się beczka, jeżeli obiema jednocześnie płynie woda?

13. Ogrodnik, mający sadzić 152 drzew, w godzinie wykopuje na ich posadzenie $6\frac{3}{8}$ dołów; jakiego czasu potrzebuje na wykopanie tylu dołów, ilu ich wymaga posadzenie wszystkich drzew?

ROZDZIAŁ V.

O liczbach dziesiętnych.

§. 22.

Wiadomości wstępne.

1. Według zasady liczenia piśmiennego (§. 3.), każda cyfra, położona z prawéj strony drugiéj cyfry, ma wartość miejscową dziesięć razy mniejszą. Jeżeli więc w jakiéjkolwiek liczbie, wyrażonéj cyframi, dopiszemy z prawéj strony cyfry jedności jednę lub więcéj nowych cyfr i zasadę liczenia piśmiennego rozciągniemy także na te nowe cyfry, wówczas pierwsza cyfra z prawéj strona cyfry jedności dopisana, będzie oznaczała dziesiąte, druga setne, trzecia tysiączne i t. d. części jedności. Stąd wypływa, że na wzór liczb całkowitych można pisać także liczby, które, oprócz jedności całkowitych, zawierają w sobie części jedności dziesiąte, setne, tysiączne i t. d. Potrzeba tylko odpowiednio zaznaczyć, która cyfra jest cyfrą jedności, a to się czyni pospolicie tym sposobem, że poza cyfrą jedności ze strony prawéj kładzie się kropkę „·“, cokolwiek ku górze posuniętą, zwaną znakiem dziesiętnym *(Decimalpunkt)*.

Liczba więc n. p. 629·378 będzie znaczyła 6 setek + 2 dziesiątki + 9 jedności + 3 dziesiąte części jedności + 7 setnych części jedności + 8 tysiącznych części jedności.

2. Liczba, która, oprócz całkowitych jedności, przedstawia dziesiąte, setne, tysiączne i t. d. części jedności, nazywa się liczbą dziesiętną *(Decimalzahl)*. Części jedności: dziesiątą, setną, tysiączną i t. d. nazywamy jednościami niższego rzędu, podobnie jak dziesiątkę, setkę, tysiąc i t. d. nazwaliśmy jednościami rzędu wyższego.

Cyfry dziesiątych, setnych, tysiącznych i t. d. części jedności zowią się cyframi dziesiętnymi *(Decimalziffern)*, a ich zbiór stanowi część dziesiętną liczby dziesiętnéj, w przeciwstawieniu do części całkowitéj téj liczby. Przedstawiając liczbę dziesiętną zapomocą cyfr, oddziela się jéj część dziesiętną od części całkowitéj zapomocą znaku dziesiętnego.

Jeżeli więc liczba dziesiętna ma przedstawiać n. p. 5 jedności, 7 dziesiętnych, 9 setnych, 0 tysiącznych, 4 dziesięciotysiączne, wówczas pisze się 5·7904. W téj liczbie jest 5 częścią całkowitą, a zbiór cyfr 7, 9, 0, 4 stanowi jéj część dziesiętną.

Jeżeli liczba dziesiętna nie zawiera w sobie całkowitych jedności, natenczas na miejscu jéj części całkowitéj pisze się zero. Jeżeli więc n. p. liczba dziesiętna ma przedstawiać tylko trzy dziesiąte, siedm tysięcznych, wówczas pisze się 0·307.

Liczbę dziesiętną, nie zawierającą w sobie całkowitych jedności, nazywamy ułamkiem dziesiętnym *(Decimalbruch)*. W szczególności, jedności rzędu niższego: dziesiąte, setne, tysiączne, dziesięćtysiączne i t. d., przedstawia się przez

$$0{\cdot}1,\ 0{\cdot}01,\ 0{\cdot}001,\ 0{\cdot}0001 \text{ i t. d.}$$

3. Każdą liczbę dziesiętną można przedstawić pod postacią ułamka zwyczajnego; licznikiem tego ułamka będzie liczba dziesiętna bez względu na znak dziesiętny, a mianownikiem jedność z tylu zerami z prawéj strony dopisanymi, ile liczba dana zawiera w sobie cyfr dziesiętnych.

Jakoż mamy n. p.

$$5{\cdot}7904 = 5 + \frac{7}{10} + \frac{9}{100} + \frac{4}{10000}$$

czyli

$$5{\cdot}7904 = \frac{50000}{10000} + \frac{7000}{10000} + \frac{900}{10000} + \frac{4}{10090},$$

albo nareszcie

$$5{\cdot}7904 = \frac{57904}{10000}.$$

Podobnie będzie n. p.

$$0{\cdot}307 = \frac{3}{10} + \frac{7}{1000} = \frac{300}{1000} + \frac{7}{1000} = \frac{307}{1000}.$$

Stąd wypływa zarazem sposób odczytywania liczb dziesiętnych. Liczbę dziesiętną odczytuje się, wypowiadając ułamek zwyczajny, téj liczbie równoważny. N. p. liczbę 34·75 odczytuje się mówiąc: 3475 setnych.

Można także taką liczbę odczytać, wypowiadając oddzielnie jéj część całkowitą i oddzielnie jéj część dziesiętną. A zatém, liczbę 34·75 odczytuje się także tak: 34 całkowitych, 75 setnych.

Niekiedy przy odczytywaniu liczby dziesiętnéj wygłasza się naprzód jéj część całkowitą, a następnie każdą za porządkiem cyfrę dziesiętną z podaniem lub bez podania jéj wartości miejscowéj. N. p. 70·2305 odczytuje się niekiedy tak: 70 całkowitych, 2 dziesiąte, 3 setne, 5 dziesięciotysięcznych, albo tak: 70 całkowitych, 2, 3, 0, 5.

4. Liczba dziesiętna nie zmieni swéj wartości, gdy z prawéj strony ostatniéj cyfry dziesiętnéj dopisze się jedno zero lub więcéj zer. Jakoż mamy n. p.

$$3{\cdot}7 = \frac{37}{10},$$

$$3{\cdot}70 = \frac{370}{100} = \frac{37}{10},$$

$$3{\cdot}700 = \frac{3700}{1000} = \frac{37}{10} \text{ i t. d.}$$

5. Liczba dziesiętna stanie się 10, 100, 1000 i t. d. razy większą, gdy się znak dziesiętny posunie na prawo o 1, 2, 3 i t. d. cyfry. Albowiem przez takie posunięcie znaku dziesiętnego wartość miejscowa każdéj cyfry staje się odpowiednio 10, 100, 1000 i t. d. razy większą.

Stąd wypływa, że liczbę dziesiętną mnoży się przez 10, 100, 1000 i t. d., posuwając w niéj znak dziesiętny na prawo o 1, 2, 3 i t. d. cyfry.

W razie, jeżeliby w liczbie dziesiętnéj nie było potrzebnéj ilości cyfr dziesiętnych, to odpowiednią ilość zer dopisuje się do niéj z prawéj strony ostatniéj cyfry dziesiętnéj. Będzie więc n. p.

$$27{\cdot}05 . 10 = 270{\cdot}5$$

$$27{\cdot}05 . 100 = 2705$$

$$27{\cdot}05 . 1000 = 27050$$

$$27{\cdot}05 . 10000 = 270500.$$

6. Liczba dziesiętna stanie się 10, 100, 1000 i t. d. razy mniejszą, gdy się w niéj znak dziesiętny posunie na lewo o 1, 2, 3 i t. d. cyfry. Albowiem przez takie posunięcie znaku dziesiętnego wartość miejscowa każdéj cyfry

zmniejsza się odpowiednio 10, 100, 1000 i t. d. razy. Stąd wypływa, że liczbę dziesiętną dzieli się przez 10, 100, 1000 i t. d., posuwając w niéj znak dziesiętny o 1, 2, 3 i t. d. miejsca na lewo. W razie, jeżeliby w liczbie dziesiętnéj nie było potrzebnéj ilości cyfr w części całkowitéj, to się dopisuje odpowiednią ilość zer z lewéj strony jéj części całkowitéj. Będzie więc n. p.

$$73{\cdot}5 : 10 = 7{\cdot}35$$
$$73{\cdot}5 : 100 = 0{\cdot}735$$
$$73{\cdot}5 : 1000 = 0{\cdot}0735$$
$$73{\cdot}5 : 10000 = 0{\cdot}00735 \text{ i t. d.}$$

7. Liczby dziesiętne wypływają, jak widać z powyższego wykładu, jedynie z rozciągnięcia głównéj zasady liczenia na części jedności co 10 razy mniejsze, czyli na jedności rzędu niższego, którą to zasadę poprzednio stosowaliśmy jedynie do jedności rzędu wyższego. Stąd też działania na liczbach dziesiętnych wykonywa się podług tychsamych prawideł, co działania na liczbach całkowitych; przybywa tylko jedna trudność w oznaczeniu miejsca, jakie w wypadku działania powinien zająć znak dziesiętny.

Zadania.

1. Napisać następujące liczby dziesiętne:

a) pięć całkowitych, trzy dziesiąte;
b) dziewięć całkowitych, piętnaście setnych;
c) trzynaście całkowitych, dwie setne;
d) cztery dziesiąte;
e) dwadzieścia trzy tysięcznych;
f) sześćdziesiąt trzy całkowitych, ośm tysięcznych;
g) sto dziewięć całkowitych, siedmdziesiąt dwie dziesięciotysięczne;
h) trzydzieści sześć tysiącznych, dwadzieścia pięć milionowych;

2. Odczytać następujące liczby dziesiętne:

a) 6·8; *b)* 5·271; *c)* 0·28; *d)* 6·09; *e)* 0·007; *f)* 31·0903; *g)* 14·2095; *h)* 0·04005.

3. Zamienić na ułamki zwyczajne najprostszéj postaci następujące liczby dziesiętne:

a) 0·75; *b)* 0·68; *c)* 0·625; *d)* 0·075; *e)* 3·4625; *f)* 1·075; *g)* 3·01875; *h)* 7·0046875.

4. Następujące liczby dziesiętne pomnożyć przez 10, 100 i 1000:

a) 1·235; *b)* 2·754; *c)* 5·02; *d)* 0·5; *e)* 0·0372; *f)* 0·0057;

5. Następujące liczby dziesiętne podzielić przez 10, 100 i 1000:

a) 6; *b)* 137·04; *c)* 38·605; *d)* 9·024; *e)* 0·7; *f)* 0·02; *g)* 0·0075.

6. Ile dziesiętnych, setnych, tysięcznych, dziesięciotysięcznych zawierają w sobie następujące liczby dziesiętne:

a) 4·0753; *b)* 32·0037; *c)* 0·35; *d)* 2·5; *e)* 1·7; *f)* 307·05; *g)* 29·03; *h)* 0·8.

7. Następujące liczby dziesiętne podzielić przez 0·1, 0·01 i 0·001:

a) 6·5; *b)* 1·3; *c)* 0·25; *d)* 0·0472; *e)* 363·005.

8. Następujące liczby dziesiętne pomnożyć przez 0·1, 0·01 i 0·001:

a) 8703·28; *b)* 1·20; *c)* 14·38; *d)* 0·19; *e)* 0·107.

§. 23.

Dodawanie i odejmowanie.

1. Dodawanie i odejmowanie liczb dziesiętnych uskutecznia się podług tychsamych prawideł, jak dodawanie i odejmowanie liczb całkowitych. Podpisując liczby dane jedne pod drugimi, należy uważać, ażeby jedności tegosamego rzędu, a więc i znaki dziesiętne znajdowały się w jednéj kolumnie. N. p.

$$\begin{array}{r} 25.6 \\ 4·805 \\ 0·009 \\ 653·27 \\ \hline 683·684 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 41·625 \\ 34·917 \\ \hline 6·708 \end{array}$$

2. Jeżeli przy odejmowaniu odjemna zawiera mniéj cyfr dziesiętnych, niż odjemnik, wówczas dopisuje się do niéj z prawéj strony potrzebną ilość zer, aby w obu liczbach ilość cyfr

dziesiętnych była jednakową. Mając n. p. liczbę 13·7093 odjąć od 29·62, przed uskutecznieniem odejmowania dopisujemy do odjemnéj dwa zera ze strony prawéj; będzie więc

$$\begin{array}{r} 29{\cdot}6200 \\ 13{\cdot}7093 \\ \hline 15{\cdot}9107 \end{array}$$

Zadania.

1. Uskutecznić następujące dodawania:
a) 0·3 + 0·7 + 9·05 + 0·56 + 8·073 + 0·126;
b) 0·291 + 0·17 + 12·863 + 9·63 + 5·05 + 6·087;
c) 3·08 + 0·746 + 0·75 + 6·1 + 0·0004 + 56 + + 24·0582;
d) 5·00752 + 0·128 + 615 + 0·31007 + + 4·315 + 0·0901;
e) 0·10046 + 0·08402 + 0·07008 + 0·27479 + + 0·000003.

2. Uskutecznić następujące odejmowania:
a) 23·46 — 18·12; *b)* 7·504 — 3·49; *c)* 17·008 — 14·34;
d) 9·72 — 2·003; *e)* 9 — 0·08; *f)* 0·467 — 0·0517;
g) 12 — 7·009; *h)* 0·36 — 0·0074; *i)* 1 — 0·90873.

3. Obliczyć następujące wyrażenia liczbowe:
a) 5 — 3·22 + 2·333 — 1·4444 — 2·111;
b) 0·862 + 7·01 — 0·905 — 9·24 + 4·0185;
c) 2·057 — 1·0097 + 3·025 — 2·1067 — 0·003025;
d) 75·012 — 7·50123 + 0·7501234 — 0·075012345.

4. Ciało, pionowo na dół rzucone, przebiega w pierwszéj sekundzie 41·05 *m*, a w każdéj następjuącéj sekundzie o 9·908 *m* więcéj, niż w poprzedzającéj; jaką drogę przebiega to ciało w dwu, trzech i czterech pierwszych sekundach?

5. Ciało, pionowo w górę rzucone, przebiega w pierwszéj sekundzie 41·05 *m*, a w każdéj następującéj sekundzie o 9·908 *m* mniéj, niż w poprzedzającéj; jaką drogę przebiega to ciało w drugiéj i trzeciéj sekundzie, jak również w dwu i trzech pierwszych sekundach?

6. Ktoś, będąc dłużnym 1435·5 zł., spłacił jednym razem 635·25 zł., a drugim razem 586·17 zł.; ileż jeszcze winien?

7. Ojciec umierając pozostawia 13736·75 zł. dwu synom i jednéj córce z tém zastrzeżeniem, ażeby syn starszy wziął 4550 zł., a młodszy o 2490·5 zł. więcéj; ile dostanie się córce?

8. Ktoś mając 453·26 *ha* pola, sprzedał z niego 37·374 *ha*, a następnie dokupił 53·05 *ha*; ile *ha* mieć teraz będzie?

9. Długość wahadła, które w każdéj sekundzie wykonywa jedno wahnienie, wynosi na biegunie 996·81 *mm*, a na równiku 990·891 *mm*; jak wielką jest różnica tych dwu długości?

10. Z Krakowa do Lwowa mamy koleją Karola Ludwika 337·56 *km*, gdy tymczasem z Krakowa do Tarnowa jest 75·44 *km*, a z Tarnowa do Rzeszowa 83·64 *km*; ileż więc *km* jest tą koleją z Rzeszowa do Lwowa?

11. Jak wielki jest obwód roli, mającéj kształt nieregularnego pięcioboku, jeżeli jego boki wynoszą: 119 *m*, 203·57 *m*, 167·75 *m*, 218·9 *m* i 99·7 *m*?

12. Jak wielką jest powierzchnia Cyslitawii, jeżeli powierzchnie pojedynczych krajów koronnych wynoszą: Austrya niższa 19824·17, Austrya wyższa 11996·7, Salzburg 7165·68, Styrya 22454·04, Karyntya 10373.32, Kraina 9988·33, Tryest z obwodem, Istrya i Gradyszcze 7988·59, Tyrol z Vorarlbergiem 29326·81, Czechy 51955·78, Morawa 22229·61, Szląsk 5147·53, Galicya 78496·77, Bukowina 10451, Dalmacya 12835·73 km^2?

13. Geograficzna mila ma 7·42041 *km*, mila austryacka 7·58645 *km*, a wiorsta rosyjska = 1·6678 *km*. O ile dawniéj używana mila austryacka jest dłuższą od geograficznéj i od rosyjskiéj wiorsty?

14. Średnica równika wynosi 12754·79 *km*, oś ziemska 12712·16 *km*. O ile dłuższą jest średnica od osi?

15. Miejscowości A, B, C leżą w linii prostéj tak, że odległość A od C wynosi 272·74 *km*, a odległość A od B tylko 184·87 *km*. Jak daleko jest od B do C?

§. 24.
Mnożenie liczb dziesiętnych.

Liczby dziesiętne mnoży się jak liczby całkowite, nie biorąc względu na znaki dziesiętne tak w mnożnéj, jak w mnożniku. Celem zaś wyznaczenia miejsca dla znaku dziesiętnego w iloczynie, wyznacza się wartość miejscową najniższéj cyfry tegoż iloczynu.

Pomnóżmy n. p. 7·543 przez 46·25. Zaczynając mnożenie przez najwyższą cyfrę mnożnika, otrzymamy

$$\begin{array}{r} 7{\cdot}543\,.\,46{\cdot}25 \\ \hline 301{\cdot}72 \\ 45{\cdot}258 \\ 1{\cdot}5086 \\ {\cdot}37715 \\ \hline 348{\cdot}86375 \end{array}$$

Najniższa cyfra iloczynu 5 powstała przez pomnożenie najniższych cyfr w mnożnéj i w mnożniku, t. j. 3 tysięcznych i 5 setnych. Skoro $\frac{3}{1000} \cdot \frac{5}{100} = \frac{15}{100000} = \frac{1}{10000} + \frac{5}{100000}$, więc ta cyfra 5 będzie oznaczała 5 stotysięcznych. W iloczynie zatém będzie 5 cyfr dziesiętnych.

Uwaga. Ilość cyfr dziesiętnych w iloczynie jest zawsze równą sumie ilości tych cyfr w mnożnéj i mnożniku. Można to także tak okazać:

Mamy

$$7{\cdot}543 = \frac{7543}{1000},\quad 46{\cdot}25 = \frac{4625}{100},$$

a zatém

$$7{\cdot}543\,.\,46{\cdot}25 = \frac{7543}{1000} \cdot \frac{4625}{100} = \frac{7543\,.\,4625}{100000} = \frac{34886375}{100000},$$

t. j.

$$7{\cdot}543\,.\,46{\cdot}25 = 348{\cdot}86375.$$

Zadania.

1. Uskutecznić następujące mnożenia:
a) 86·32.3; *b)* 7·546.80; *c)* 4·008.500; *d)* 21·93.0·2; *e)* 65·009.0·07; *f)* 37·8.0·008; *g)* 26.0·61; *h)* 1420.0·23; *i)* 1547.0·073; *k)* 144·137.2·106; *l)* 430·013.4·0317; *m)* 0·00958.0·12745; *n)* 0·54107·0·10103.

2. Jeden metr sukna kosztuje 7·28 zł.; ile kosztuje:
a) 8 *m*; *b)* 30 *m*; *c)* 29·35 *m*?

3. Jeden hektar roli kosztuje 258·75 zł.; ile zapłacono za:
a) 23 *ha*; *b)* 86·5 *ha*; *c)* 324·405 *ha*?

4. Ile zł. w. a. należy zapłacić za 2706·5 franków, jeżeli jeden frank kosztuje 0·485 zł.?

5. Od kapitału wypożyczonego mamy 283·75 zł. rocznego dochodu; ile w 7·3 latach?

6. Głos przebiega w jednéj sekundzie 332·25 *m*: ile światło, które się 92640 razy prędzéj rozchodzi?

7. Lokomotywa przebiega w jednéj godzinie 25·76 *km*; ile w 4·75 godzinach?

8. Kupiono 419·75 *kg* kawy brutto (kawa z opakowaniem) po 1·58 zł. za 1 *kg* netto (czystéj kawy); ile za tę kawę zapłacono, jeżeli tara (opakowanie) ważyła 35·5 *kg*?

9. Ile hektarów obejmuje posiadłość ziemska, zawierająca 2064·8 morgów nowopolskich, jeżeli 1 morg nowopolski równa się 0·521072 *ha*?

10. Galicya ma powierzchnię wynoszącą 78496·8 km^2; jak wielka jest ludność tego kraju, jeżeli na 1 km^2 liczy się w przecięciu 75 mieszkańców?

11. Wykonać mnożenia:

a) 0·0752.4·25.3740.0·01;	*b)* 372·47.28·7.3·4.0·01;
c) 3908.4·1.6·01;	*d)* 45918 × 0·11 × 6·01;
e) 17·572.11.0·011;	*f)* 5891.9·98;
g) 319·28.9·7;	*h)* 0·0978.3·927.

12. Tunel pod Tamizą w Londynie wynosi 1300 stóp angielskich; ilo to czyni w metrach, jeżeli 1 stopa angielska 0·30479 *m*?

13. Za dukata płacą 5·65 zł.; ile zapłacić trzeba na 375 dukatów?

14. W beczce jest 57·5 *l* oliwy; ile waży oliwa, skoro 1 *l* wody waży 1 *kg*, a oliwa jest 0·913 razy lżejszą od wody?

15. Koniec śruby wysuwa się przy każdym obrocie o 0·275 *cm*. O ile się wysunie, skoro śruba zrobi 9·5 obrotu?

§. 25.

Dzielenie liczb dziesiętnych.

1. J e ż e l i d z i e l n i k j e s t l i c z b ą c a ł k o w i t ą, w ó w c z a s z n a j d z i e m y l i c z b ę c a ł k o w i t ą i l o r a z u, d z i e l ą c

liczbę całkowitą dzielnéj; dziesiąte ilorazu, dzieląc dziesiąte dzielnéj z włączeniem reszty jedności; setne ilorazu, dzieląc setne dzielnéj z włączeniem reszty dziesiątych i t. d. N. p.

```
660·25 : 19 = 34·75
57
 90
 76
 142
 133
   95
   95
    0
```

2. Jeżeli z dzielenia pozostaje reszta, wówczas do téj reszty dopisuje się 0 i daléj dzieli; wychodzi to na tosamo, co dopisanie 0 w dzielnéj z prawéj strony ostatniéj cyfry dziesiętnéj. N. p.

```
0·75 : 9 = 0·0833.....,       5 : 7 = 0·7142857.....
   30                         50
    30                         10
     3.....                     30
                                 20
                                  60
                                   40
                                    50
                                     1.....
```

Jak daleko należy prowadzić dzielenie, gdy dzielna przez dzielnik nie jest podzieloną, zależy od natury zadania. Jeżeli wystarczy wyznaczenie n. p. ilorazu 5 : 7 w 4 cyfrach dziesiętnych, t. j. jeżeli stotysięczne w tym ilorazie można opuścić jako zbyt małe, to za iloraz można wziąć 0·7142 lub dokładniéj 0·7143, gdyż 0·7143 mniéj się różni od 0·7142857, niż 0·7142.

3. Dzielenie liczby dziesiętnéj przez dziesiętną można zawsze sprowadzić do dzielenia przez liczbę całkowitą. Wiadomo bowiem (§. 8. 5. *c*), że dzielną i dzielnik można bez zmiany ilorazu pomnożyć przez tęsamę liczbę. Jeżeli więc dzielną i dzielnik pomnożymy przez mianownik dzielnika,

przywiedzionego do postaci ułamka zwyczajnego, wówczas dzielnik zamieni się na liczbę całkowitą, a iloraz pozostanie niezmieniony. Mamy zatém n. p.

$$
\begin{aligned}
17{\cdot}4832 : 3{\cdot}125 &= 17{\cdot}4832 . 1000 : 3125 = 17483{\cdot}2 : 3125,\\
0{\cdot}04381 : 0{\cdot}35 &= 0{\cdot}04381 . 100 : 35 = 4{\cdot}381 : 35,\\
0{\cdot}09 : 0{\cdot}3845 &= 0{\cdot}09 . 10000 : 3845 = 900 : 3845.
\end{aligned}
$$

4. **Liczby dziesiętne można także dzielić tak, jak liczby całkowite, nie mając względu na znak dziesiętny tak w dzielnéj, jakotéż w dzielniku. Celem zaś wyznaczenia miejsca znaku dziesiętnego w ilorazie, dość znaleść wartość miejscową najwyższéj cyfry ilorazu.**

Jakoż mając n. p. podzielić 954·70572 przez 3·468, podzielmy te liczby dziesiętne jak całkowite, nie biorąc względu na znaki dziesiętne, t. j. podzielmy 95470572 przez 3468. Otrzymamy na iloraz liczbę 27529. Atoli skoro pierwsza częściowa dzielna 9547 oznacza tyleż dziesiętnych, a dzielnik 3468 znaczy tyleż tysięcznych, więc najwyższa cyfra ilorazu będzie oznaczała setki, gdyż $\frac{1}{10} : \frac{1}{1000} = \frac{1}{10} . 1000 = 100$. W otrzymanym więc ilorazie trzy pierwsze cyfry (licząc od lewéj) będą stanowiły część całkowitą, t. j.

```
954·70572 : 3·468 = 275·29
261 10
 18 345
  1 0057
    31212
        0
```

Zadania.

1. Wykonać następujące dzielenia:
a) 816·51 : 17; *b)* 1 : 8; *c)* 55·11044 : 2·03;
d) 368 : 14·72; *e)* 601·6 : 9·4; *f)* 358·8 : 3·45;
g) 139 : 27·8; *h)* 17 : 25; *i)* 3·318 : 15·8;
k) 1027·107 : 9·81; *l)* 0·0804 : 13·4; *m)* 5 : 16;
n) 23 : 32; *o)* 2·603 : 19.

2. Wyznaczyć ilorazy:
a) 2·9 : 7·47 na 0·01; *b)* 2 : 19 na 0·001;

c) 2·061 : 0·57 na 0·1; *d)* 0·02 : 0·5 na 0·001;
e) 5·318 : 15·8 na 0·01; *f)* 43·047 : 2·53698 na 0·001.

3. Koło robi na pewnéj drodze 382 obrotów; jak wielki jest obwód koła, jeżeli długość drogi wynosi 1241·5 *m*?

4. Roczne procenta od kapitału wynoszą 252·36 zł.; ile za jeden miesiąc?

5. Za 16·15 *m* zapłacono 69·55 zł.; ile za 1 *m*?

6. Worek, zawierający 500 zł. srebrnych, waży 6·2 *kg*, próżny worek waży 0·027161 *kg*; ile waży jeden złoty srebrny?

7. Ile zł. w. a. wynosi 2127 marek niemieckich, jeżeli za jednę markę liczy się 0·61 zł.?

8. Kupiec nabył 1051 *hl* pszenicy po 6·75 zł.; przy sprzedaży zyskał 172·35 zł.; po jakiéj cenie sprzedawał 1 *hl*?

9. 0·741893 miryametrów idzie na jednę milę geograficzną; ile mil geograficznych wynosi 1 miryameter?

10. Jeżeli się 3·45 *hl* wina po 48 zł. zmiesza z 5·51 *hl* po 60 zł.; ile będzie wart jeden litr mieszaniny?

11. Wysokość schodów ma wynosić 4·5 *m*, a każdego stopnia 0·125 *m*. Ile stopni mieć będą schody?

12. Za 62·16 zł. otrzymać można 1·2 *hl* wina; ile wina kupić można za 19·35 zł.?

13. Ile *kg* kawy dać trzeba za 264 *kg* cukru, jeżeli 1 *kg* kawy kosztuje 1·76 zł., a 1 *kg* cukru 0·48 zł.?

14. Ile kosztuje 1 *kg* czystego srebra, jeżeli za 3·12 *kg* zapłacono 290·16 zł.?

§. 26.

Zamiana ułamków zwyczajnych na dziesiętne.

1. Każdy ułamek zwyczajny można wyrazić przez liczbę dziesiętną albo dokładnie albo sposobem przybliżonym. W tym celu dość licznik dzielić przez mianownik. N. p.

$$\frac{3}{8} = \frac{3000}{8000} = \frac{3000:8}{1000} = \frac{375}{1000} = 0·375,$$

$$4\frac{7}{125} = 4 + \frac{7000}{125000} = 4 + \frac{7000:125}{1000} = 4 + \frac{56}{1000} = $$
$$= 4 + 0·056 = 4·056,$$

$$\frac{7}{40} = \frac{700}{4000} = \frac{700:4}{1000} = \frac{175}{1000} = 0·175.$$

Ułamki zwyczajne tych przykładów dały się wyrazić dokładnie przez liczby dziesiętne, a to dlatego, że ich mianowniki zawierały jako czynniki pierwsze jedynie liczby 2 i 5, a liczby, które zawierają w sobie jako czynniki pierwsze jedynie 2 i 5, dzielą bez reszty jednę z liczb 10, 100, 1000 i t. d.

2. Jeżeli mianownik ułamka zwyczajnego zawiera w sobie także inne czynniki pierwsze, wówczas dzielenie licznika przez mianownik nigdy się nie skończy i taki ułamek można tylko sposobem przybliżonym wyrazić przez ułamek dziesiętny, gdyż liczba, zawierająca w sobie oprócz 2 i 5 inne także czynniki pierwsze, nie dzieli bez reszty żadnéj z liczb 10, 100, 1000, 10000 i t. d.

Weźmy pod uwagę n. p. ułamek $\frac{3}{7}$, którego mianownik nie zawiera w sobie liczb 2, 5 jako czynników pierwszych. Dzieląc licznik 3 przez mianownik 7, otrzymamy nieskończenie wiele cyfr dziesiętnych. Atoli skoro przy tém dzieleniu mogą się pojawiać tylko reszty 1, 2, 3, 4, 5, 6, więc jeżeli aż do szóstego dzielenia otrzymywalibyśmy różne reszty, to już przy siódmém dzieleniu pozostać musi reszta, która się już poprzód pojawiła.

Otrzymamy zatém tensam częściowy iloraz i tęsamę resztę, co poprzód, poczém i pozostałe ilorazy częściowe i reszty wciąż będą się powtarzały.

Ułamek zwyczajny $\frac{3}{7}$ wyrazi się zatém przez ułamek dziesiętny, nieskończony, w którym pewne cyfry będą się **peryodycznie** powtarzały i który dlatego nazwiemy **ułamkiem dziesiętnym peryodycznym** *(periodischer Decimalbruch)*. Mamy zatém:

$\frac{3}{7} = 3 : 7 = 0{\cdot}4285714....$, podobnie $\frac{5}{6} = 5 : 6 = 0{\cdot}833...$

30	50
20	20
60	20
40	2....
50	
10	
30	
2....	

W drugim przykładzie powtarza się jedna cyfra 3, powiadamy więc, że peryod jest jednocyfrowy; w pierwszym przykładzie peryod jest sześciocyfrowy, gdyż wciąż powtarza się szereg sześciu cyfr 428571. W drugim przykładzie peryod zaczyna się dopiero od drugiéj cyfry dziesiętnéj, gdy tymczasem w pierwszym przykładzie zaczyna się peryod zaraz po znaku dziesiętnym.

Ułamek dziesiętny peryodyczny, w którym peryod zaczyna się zaraz po znaku dziesiętnym, zowie się ułamkiem dziesiętnym peryodycznym czystym *(reiner p. Bruch)*, a jeżeli przed peryodem znajduje się jedna lub więcéj cyfr dziesiętnych, ułamek dziesiętny peryodyczny będzie mieszanym *(gemischt)*. Peryod oznacza się kładąc kropkę nad pierwszą i nad ostatnią jego cyfrą. Piszemy zatém:

$$\frac{3}{7} = 0{\cdot}\dot{4}2857\dot{1};\ \frac{5}{6} = 0{\cdot}8\dot{3},$$

i tak znacząc rozumiemy, że się szereg cyfr, objęty kropkami, bez końca powtarza.

Zadania.

Zamienić następujące ułamki zwyczajne na dziesiętne:

1. $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{19}{25}, \frac{7}{8}, \frac{101}{125}, \frac{29}{64}, \frac{103}{625}, \frac{7}{20}, \frac{91}{400}.$
2. $\frac{2}{3}, \frac{5}{9}, \frac{7}{11}, \frac{31}{37}, \frac{11}{13}, \frac{602}{111}.$
3. $\frac{14}{15}, \frac{25}{12}, \frac{217}{330}, \frac{49}{54}, \frac{51}{88}, \frac{197}{295}.$

§. 27.

Zamiana liczb dziesiętnych na ułamki zwyczajne.

1. Już wiadomo, jak się ułamek dziesiętny skończony wyraża przez ułamek zwyczajny, dlatego mówić będziemy tylko o zamianie ułamków dziesiętnych peryodycznych.

Uważmy naprzód, że:

$$\frac{1}{9} = 0{\cdot}\dot{1},\ \frac{1}{99} = 0{\cdot}0\dot{1},\ \frac{1}{999} = 0{\cdot}00\dot{1},\ \frac{1}{9999} = 0{\cdot}000\dot{1},$$

$$\frac{1}{99999} = 0{\cdot}0000\dot{1} \text{ i t. d.}$$

Widząc to, można łatwo ułamek dziesiętny peryodyczny czysty i mieszany zamienić na zwyczajny. Jakoż mamy n. p.

$$0{\cdot}\dot{4} = 0{\cdot}\dot{1}.4 = \frac{1}{9}.4 = \frac{4}{9},$$

$$0{\cdot}\dot{6}\dot{3} = 0{\cdot}\dot{0}\dot{1}.63 = \frac{1}{99}.63 = \frac{63}{99} = \frac{7}{11},$$

$$2{\cdot}\dot{0}5\dot{4} = 2 + 0{\cdot}\dot{0}0\dot{1}.54 = 2\frac{54}{999} = 2\frac{2}{37}.$$

A zatém ułamek peryodyczny czysty zamienia się na zwyczajny, dzieląc liczbę złożonę z cyfr peryodu przez liczbę złożoną z tylu 9, ile jest cyfr w peryodzie.

Ułamek peryodyczny mieszany zamienia się wprzódy na czysty, mnożąc go i dzieląc przez 10, 100, 1000, 10000 i t. d., według tego, czy peryod poprzedza 1 cyfra, 2 cyfry, 3 cyfry i t. d., poczém stosuje się poprzedzające postępowanie. N. p.

$$0{\cdot}5\dot{8} = 5{\cdot}\dot{8} : 10 = 5\frac{8}{9} : 10 = \frac{53}{9} : 10 = \frac{53}{90};$$

$$0{\cdot}08\dot{3} = 8{\cdot}\dot{3} : 100 = 8\frac{3}{9} : 100 = \frac{75}{9} : 100 = \frac{75}{900} = \frac{1}{12};$$

$$0{\cdot}02\dot{3}0\dot{6} = 2{\cdot}\dot{3}0\dot{6} : 100 = 2\frac{306}{999} : 100 = \frac{2304}{999} : 100 = \frac{2304}{99900} = \frac{64}{2775}.$$

Zadania.

Zamienić na ułamki zwyczajne i przywieść do najprostszéj postaci:

1.	*a)* 0·75,	*d)* 0·68,	*g)* 0·075,
	b) 0·125,	*e)* 0·875,	*h)* 0·76,
	c) 0·6084,	*f)* 0·4625,	*k)* 0·12825.
2.	*a)* $0{\cdot}\dot{1}\dot{2}$,	*d)* $0{\cdot}\dot{2}\dot{7}$,	*g)* $0{\cdot}\dot{1}3\dot{4}$,
	b) $0{\cdot}\dot{4}5\dot{9}$,	*e)* $0{\cdot}\dot{3}5\dot{1}$,	*h)* $0{\cdot}\dot{9}5\dot{4}$,
	c) $0{\cdot}\dot{0}6\dot{3}$,	*f)* $0{\cdot}\dot{7}5\dot{7}$,	*k)* $0{\cdot}\dot{4}24\dot{5}$.
3.	*a)* $0{\cdot}1\dot{3}$,	*d)* $0{\cdot}5\dot{2}$,	*g)* $0{\cdot}54\dot{3}\dot{6}$,
	b) $0{\cdot}14\dot{7}\dot{2}$,	*e)* $0{\cdot}11\dot{6}$,	*h)* $2{\cdot}23\dot{7}$,
	c) $0{\cdot}1\dot{6}$,	*f)* $0{\cdot}50\dot{3}\dot{6}$,	*k)* $9{\cdot}1\dot{3}2\dot{7}$.

ROZDZIAŁ VI.

O liczbach wielorakich.

§. 28.

Miary, wagi i monety.

1. Wielkością *(Grösse)* nazywamy wszystko to, co można zwiększyć lub zmniejszyć. Wielkością jest n. p. długość muru, powierzchnia pola, objętość naczynia, ciężar kamienia, przeciąg czasu i t. p.

Aby mieć wyobrażenie jasne o jakiéj wielkości, porównywa się ją z inną wielkością tegosamego gatunku, dobrze nam znaną, i dochodzi się, ile razy ta druga wielkość mieści się w pierwszéj. A zatém długość porównywa się z pewną długością, powierzchnię z pewną powierzchnią, objętość z pewną objętością i t. d. To postępowanie nazywamy pomiarem wielkości, wielkość zaś, z którą porównywamy jakąś inną wielkość tegosamego gatunku, celem zmierzenia téjże, nazywamy jednostką miary *(Masseinheit)*.

Każdy gatunek wielkości ma właściwą sobie jednostkę miary. W przypisku, umieszczonym na końcu książki, wyłożyliśmy obszerniéj naukę o różnych rodzajach miar, tutaj podajemy najważniejsze wiadomości o miarach, w Austryi używanych.

2. Jednostką zasadniczą długości jest obecnie w Austryi metr *(m)*. Metr jest $\frac{1}{40000000}$ południka ziemskiego. Jeżelibyśmy każdą długość chcieli wyrazić w metrach, to długości mniejsze, niż metr, przedstawiłyby się pod postacią ułamków, a długości znaczne, jak n. p. odległość dwu miast, wyraziłyby się przez

liczby bardzo wielkie. Chcąc więc przy oznaczeniu długości uniknąć używania ułamków i liczb bardzo wielkich, które trudno spamiętać, wyprowadzono z metra jednostki długości mniejsze i większe czyli rzędów niższych i wyższych: pierwsze, dzieląc metr na 10, 100 i 1000 części, a wtóre, biorąc razem 10, 100, 1000 i 10000 metrów.

Jednostkami długości rzędu niższego są zatém:

0·1 *m* czyli decymetr *(dm)*,
0·01 *m* czyli centymetr *(cm)* i
0·001 *m* czyli milimetr *(mm)*.

Jednostkami długości rzędu wyższego są:

10 *m* czyli dekametr *(dkm)*,
100 *m* czyli hektometr *(hm)*,
1000 *m* czyli kilometr *(km)* i
10000 *m* czyli miryametr *(μm)*.

Jednostką długości zasadniczą była dawniéj w Austryi stopa *(Fuss)*, stopa dzieliła się na 12 cali *(Zoll)*, cal na 12 linij *(Linii)*, linia na 12 kresek *(Strich)*; dwie stopy nazywano łokciem *(Elle)*, sześć stóp sążniem *(Klafter)*, a 12 stóp prętem *(Ruthe)*. Cztery tysiące sążni stanowiło milę *(Meile)*.

3. Jednostką powierzchni jest metr kwadratowy (m^2), t. j. kwadrat, którego każdy bok ma długość jednego metra. Mniejsze powierzchnie wyraża się w kwadratowych decymetrach (dm^2), centymetrach (cm^2) i milimetrach (mm^2), przez co rozumiemy kwadraty, których bok ma długość 1 *dm*, 1 *cm* i 1 *mm*. Z tych jednostek każda zawiera 100 jednostek rzędu bezpośrednio niższego; a zatém $1\ m^2 = 100\ dm^2 = 10000\ cm^2 = 1000000\ mm^2$. Większe powierzchnie wyraża się w dekametrach kwadratowych czyli w arach *(a)*. Ar jest powierzchnią kwadratu, którego każdy bok ma długość 10 *m*.

$1\ a = 100\ m^2$.

100 arów nazwano hektarem *(ha)*, a 100 hektarów miryarem *(μa)*.

Dawniéj używaną jednostką przy wymiarze pól był morg *(Joch)*, zawierający w sobie 1600 sążni kwadratowych.

4. Jednostką objętości jest metr sześcienny (m^3), t. j. objętość sześcianu *(Cubus)*, którego każda ściana jest metrem kwadratowym, a przeto każda krawędź ma długość jednego metra.

Mniejsze objętości wyraża się w sześciennych decymetrach *(dm³)*, centymetrach *(cm³)* i milimetrach *(mm³)*, t. j. sześcianach, których krawędź ma długość 1 *dm*, 1 *cm* i 1 *mm*. Z tych jednostek każda zawiera w sobie 1000 jednostek rzędu bezpośrednio niższego, a zatém

$$1\ m^3 = 1000\ dm^3,$$
$$= 1000000\ cm^3,$$
$$= 1000000000\ mm^3.$$

Decymetr sześcienny nazwano litrem *(l)*, 0·1 *l* decylitrem *(dl)*, 0·01 *l* centylitrem *(cl)*, 0·001 *l* mililitrem *(ml)*; 100 *l* nazywa się hektolitrem *(hl)*.

5. Jednostką ciężaru czyli wagi jest ciężar decymetra sześciennego wody przy 4° C. Tę jednostkę nazwano gram *(g)*. Mniejsze ciężary wyraża się w decygramach *(dg)*, centygramach *(cg)* i miligramach *(mg)*. 1 *g* = 10 *dg* = 100 *cg* = 1000 *mg*. Większe zaś ciężary wyraża się w dekagramach *(dkg)*, hektogramach *(hg)* i kilogramach *(kg)*.

1 *kg* = 10 *hg* = 100 *dkg* = 1000 *g*.

100 *kg* nazwano cetnarem metrycznem *(q)*, 100 *q* stanowi beczkę *(t)*. Dawniejszą jednostką wagi był funt *(℔)*, funt dzielił się na 32 łuty; 100 ℔ stanowiło cetnar.

6. Jednostką czasu jest doba albo dzień. Dzień dzieli się na 24 godzin $(^h)$, godzina na 60 minut $(')$, minuta na 60 sekund $('')$. $1^h = 60' = 360''$.

365 dni stanowi rok zwyczajny. Lata, których liczba porządkowa od nar. Chr. jest przez 4 podzielna (z wyjątkiem lat podzielnych przez 100, a nie przez 400) zowią się przestępnymi i liczą po 366 dni. Rok dzieli się na 12 miesięcy, z których styczeń, marzec, maj, lipiec, sierpień, październik i grudzień mają po 31 dni, kwiecień, czerwiec, wrzesień i listopad po 30 dni, a luty 28 dni w roku zwyczajnym, 29 zaś w roku przestępnym. W rachunkach procentowych rok uważa się złożonym z 12 miesięcy po 30 dni.

7. Obwód koła dzieli się na 360 stopni $(^\circ)$, stopień na 60 minut $(')$, minuta na 60 sekund $('')$. $1^\circ = 60' = 360''$.

Jeżeli wierzchołek kąta umieści się w środku koła, którego obwód podzielony na stopnie, to ilość stopni, zawarta między ramionami kąta, jest miarą tegoż kąta.

8. **Jednostką miary wartości czyli monet** jest **złoty** (zł.) w. a., który się dzieli na 100 **centów** (ct.). Złotówki austryackie biją się ze srebra 900-dzielnego, t. j. takiego, w którém na 1000 jednostek wagi jest 900 czystego srebra, a 100 miedzi, dodawanéj dla nadania monecie większéj trwałości. Na 45 zł. w. a. wychodzi 500 *g* czystego srebra.

§. 29.

Liczby wielorakie.

1. Liczbę mianowaną, wyrażającą jaką wielkość w jednostkach różnych rzędów, wyprowadzonych z téjsaméj jednostki zasadniczéj, nazywamy liczbą **wieloraką** *(mehrnamig)*. N. p. 3 *m* 8 *dm* 4 *cm*; 7 zł. 38 ct.; 5 dni 8 godzin i t. d.

Liczbę wieloraką można zamienić na mianowaną **prostą** *(einnamig)* albo przez **rozłożenie** jednostek wyższych na niższe albo przez **złożenie** jednostek niższych na wyższe.

2. Ażeby jednostki wyższe rozłożyć na niższe, dość ich liczbę pomnożyć przez liczbę, wyrażającą, ile jednostek niższych idzie na jednę wyższą, czyli przez tak zwany **zamiennik** *(Verwandlungszahl)* tych dwu jednostek.

N. p. rozłożyć 6 dni na godziny.

W jednym dniu jest 24 godzin, a zatém w 6 dniach jest $24 . 6 = 144$ godzin.

Albo n. p. rozłożyć 3 stopnie na sekundy.

1 stopień równa się 60 minutom, a że 1 minuta równa się 60 sekundom, więc 1 stopień równa się $60 . 60 = 3600$ sekundom, a 3 stopnie $3600 . 3 = 10800$ sekundom.

Jeżeli 10, 100, 1000, 10000 i t. d. jednostek niższych idzie na jednę jednostkę wyższą, to wypadek zamiany można odrazu napisać. N. p.

36 zł. = 3600 ct., 7 zł. 25 ct. = 725 ct.

$8\ m\ 5\ dm\ 3\ cm = 853\ cm$, $3\ m^2\ 87\ dm^2 = 387\ dm^2$.

$5\ hl\ 7\ l = 507\ l$.

3. Nawzajem, jednostki niższe można zamienić czyli **złożyć** *(reduciren)* na jednostki wyższe, dzieląc liczbę jednostek niższych przez zamiennik tych dwu jednostek. N. p.

Znaleść, jaką częścią dnia jest 8 godzin.

Skoro na 24 godzin idzie na 1 dzień, więc 1 godzina równa się $\frac{1}{24}$ dnia, a przeto 8 godzin równa się $\frac{8}{24}$ czyli $\frac{1}{3}$ dnia.

Albo zamienić n. p. 306 minut łukowych na stopnie.

Na 1^0 idzie $60'$, więc $1'$ równa się $\frac{1^0}{60}$, a zatém $306' = \frac{306^0}{60} = 5\frac{6^0}{60} = 5{\cdot}1^0$.

Jeżeli zamiennikiem jest liczba 10, 100, 1000, 10000 i t. d., można wypadek zamiany odrazu napisać. N. p.

$4\,mm = 0{\cdot}4\,cm = 0{\cdot}04\,dm = 0{\cdot}004\,m$; 736 ct. $= 7{\cdot}36$ zł.;

$17\,l = 0{\cdot}17\,hl$; $7\,m\ 6\,dm\ 7\,cm\ 4\,mm = 7{\cdot}674\,m$;

$7\,m^3\ 137\,dm^3 = 7{\cdot}137\,m^3$.

Zadania.

1. Ile centów czyni: *a)* 0·37 zł., *b)* 0·085 zł., *c)* 37·05 zł.?

2. Zamienić 3 dni 57 minut 43 sekund na sekundy.

3. Ile dni jest w $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{8}{9}, \frac{11}{15}, \frac{17}{18}$ roku?

4. Rok słoneczny trwa 365·24222 dni; o ile godzin, minut i sekund jest rok słoneczny dłuższym od roku zwyczajnego?

5. Ile ryz, liber, składek i arkuszy jest w 157032 belach? (Bela = 10 ryzom, ryza = 10 librom, libra = 10 składkom, składka = 10 arkuszom).

6. Ile arów i m^2 jest: *a)* w 123·58 *ha*, *b)* w 25·755 *ha*, *c)* w $\frac{11}{25}$ *ha*?

7. Między dwoma po sobie następującymi położeniami księżyca upływa 2551442 sekund; ile to czyni dni, godzin, minut i sekund?

8. Książka o 12 arkuszach druku wyszła w 2500 egzemplarzach; ile na to użyto bel, ryz, liber, składek i arkuszy papieru?

9. Wyrazić przez ułamek zwyczajny jednostki bezpośrednio wyższéj:

16 ct.; $22\frac{1}{2}$ ct.; $35\frac{1}{3}$ *dm*; 504 *dm*; $13\frac{1}{3}$ *a*; $75\frac{1}{4}$ *l*.

10. Wyrazić następujące liczby wielorakie przez ułamek dziesiętny jednostki najwyższéj:

$5\,m\ 7\,dm\ 4\,mm$, $3\,m^2\ 27\,cm^2\ 13\,mm^2$, $5\,m^3\ 321\,mm^3$,

$29\,kg\ 4\,dkg\ 5\,g$, $12\,ha\ 72\,a\ 15\,m^2$, $53^0\ 15'\ 6''$.

§. 30.

Dodawanie liczb wielorakich.

Przy dodawaniu liczb wielorakich podpisuje się te liczby jedne pod drugiemi tak, aby liczby jednostek tegosamego rzędu znajdowały się w tymsamym szeregu pionowym; następnie dodaje się do siebie naprzód liczby jednostek rzędu najniższego i tę sumę, jeżeli w sobie zawiera całkowitą liczbę jednostek rzędu bezpośrednio wyższego, składa się na te jednostki; liczbę całkowitą jednostek wyższych, w téj sumie zawartą, zachowuje się celem dodania jéj do liczb jednostek następnego rzędu, a tylko resztę, jeżeli jaka została, podpisuje się pod liczbami jednostek dodawanych, poczém przechodzi się do jednostek wyższych. Można także wszystkie składniki zamienić na jednostki tegosamego rzędu, najwyższego lub najniższego, a potém dodać.

Wzór działania:

1. 36° 45′ 16″	2. 23 *m* 7 *dm* 9 *cm* 8 *mm*	albo	23·798 *m*
54° 17′ 43″	12 „ 0 „ 7 „ 6 „		12·076 „
65° 28′ 39″	47 „ 5 „ 1 „ 3 „		47·513 „
156° 31′ 38″	83 *m* 3 *dm* 8 *cm* 7 *mm*		83·387 *m*

Zadania.

1. Z trzech folwarków jeden ma 247 *ha* 38 *a* 15 m^2; drugi 199 *ha* 83 *a* 27 m^2; a trzeci 304 *ha* 75 m^2 pola ornego; ile pola ornego mają wszystkie trzy razem?

2. Cesarz Franciszek Józef I. urodził się 18. sierpnia 1830. roku, a Jego Dostojna Małżonka o 7 lat, 4 miesiące i 6 dni późniéj; jakie jest datum urodzin Cesarzowéj Elżbiety?
(Od nar. Chr. do ur. Fr. J. minęło 1829 lat, 7 miesięcy, 17 dni,
dodawszy do tego . . . 7 „ 4 „ 6 „
mieć będziemy . . . . 1836 „ 11 „ 23 dni;
a zatém Cesarzowa Elżbieta urodziła się 24. grudnia 1837. roku).

3. Kopernik urodził się 19. lutego 1473. roku, a umarł, dożywszy 70 lat 3 miesięcy i 2 dni; kiedy umarł Kopernik?

4. Nad wykonaniem pewnéj roboty pracowało trzech robotników z jednakiém natężeniem: jeden pracował 3 miesiące,

17 dni i 8 godzin; drugi dwa miesiące, 23 dni i 9 godzin; a trzeci 3 miesiące i 2 godziny; jakiego czasu potrzebowałby jeden robotnik na wykonanie téj roboty, przyjąwszy, że pracowałby z témsamém wytężeniem i że czas roboty dziennéj wynosi we wszystkich przypadkach 12 godzin?

5. Europa leży między $11^0\ 50'\ 20''$ zachodniéj i $60^0\ 30'$ wschodniéj długości względem Paryża; ile stopni długości obejmuje ta część świata?

6. W Krakowie nastaje południe o 16 minut i 13 sekund późniéj, aniżeli we Lwowie; która jest godzina we Lwowie, jeżeli w Krakowie wskazuje zegar na godzinę 6, minut 20 i sekund 10?

7. Ile wynosi suma kątów w trójkącie, jeżeli kąt $a = 64^0\ 17'\ 28''$; kąt $b = 82^0\ 27'\ 35''$; kąt $c = 33^0\ 14'\ 57''$?

8. Pewien browar dostarczył: w styczniu 24 *hl* 53 *l* piwa, w lutym 151 *hl* 88 *l*, w marcu 276 *hl* 19 *l*, w kwietniu 192 *hl* 7 *l*, w maju 208 *hl* 65 *l*, w czerwcu 163 *hl* 30 *l*; inny browar w tymsamym czasie dostarczył: 56 *hl* 20 *l*; 167 *hl* 36 *l*; 96 *hl* 13 *l*; 194 *hl* 57 *l*; 155 *hl* 75 *l* i 87 *hl* 68 *l*. Ile dostarczył każdy browar osobno, ile oba razem?

9. Ogród w kształcie czworoboku ma być oparkaniony. Boki tego czworoboku wynoszą: 17 *m* 8 *dm* 7 *cm*; 20 *m* 7 *dm*; 19 *m* 5 *cm*; 18 *m* 7 *dm* 8 *cm*. Jak długi będzie parkan?

10. Szerokość geograficzna Wiednia wynosi $48^0\ 13'\ 55''$, szerokość geograficzna Krakowa jest o $1^0\ 49'\ 55''$ większa niż Wiednia, a Berlina o $2^0\ 26'\ 27''$ większa, niż Krakowa; jaka jest szerokość geograficzna Berlina?

§. 31.

Odejmowanie liczb wielorakich.

Przy odejmowaniu liczb wielorakich podpisuje się odjemnik pod odjemną tak, aby liczby jednostek tegosamego rzędu znajdowały się w jednéj kolumnie, i rozpoczyna się działanie od jednostek rzędu najniższego. Jeżeliby liczba jednostek pewnego rzędu w odjemniku była większa, aniżeli liczba jednostek tegosamego rzędu w odjemnéj, to tę ostatnią powiększa się o tyle jednostek, ile jednostek tego rzędu zawiera w sobie jedna jednostka rzędu bezpośrednio wyższego, ale jednocześnie powiększa się o jednę jedność liczbę jednostek bezpośrednio wyższego rzędu w odjemniku. Jeżeli jednostki niższe otrzymują się z jednostek wyższych przez podział tych ostatnich na 10, 100, 1000, 10000 i t. d. równych części, wówczas najprościéj przedstawić odjemną i odjemnik pod postacią liczby dziesiętnéj rzędu najwyższego.

Wzory działania:

1.	135° 53′ 26″	2. 5 *ha* 37 *a*	albo 5·3700 *ha*
	78° 24′ 45″	2 „ 86 „ 38 m^2	2·8638 „
	57° 28′ 41″	2 *ha* 50 *a* 62 m^2	2·5062 *ha*

Zadania.

1. Paka z towarami waży 365 *kg*, a sama paka 27 *kg* 35 *dkg*; ile waży sam towar?

2. W majątku ziemskim jest 568 *ha* 37 *a* 80 m^2 pod lasem, a 359 *ha* 74 *a* 95 m^2 pola ornego; o ile mniéj jest pola ornego, niż lasu?

3. Jan III. oswobodził Wiedeń 12. września 1683. roku; jaki czas upłynął od owego pamiętnego zdarzenia? (Od nar. Chr. do obecnéj chwili upłynęło

	1888 lat,	0 miesięcy,	15 dni,
„ „ „ „ osw. Wiednia	1682 „	8 „	11 „
a zatém czas żądany wynosi	205 lat,	4 miesiące,	4 dni).

4. Dnia 1. lipca 1569. roku stanął akt unii Polski z Litwą; jaki czas upłynął od owego pamiętnego zdarzenia do chwili zgonu ostatniego króla polskiego, t. j. do 12. lutego 1798. roku?

5. Wiedeń leży o 14° 2′ 36″, a Lwów o 21° 42′ 40″ na wschód względem Paryża; o ile stopni długości leży Lwów bardziéj ku wschodowi, aniżeli Wiedeń?

6. Suma trzech kątów trójkąta (wewnętrznych) jest równą 180°: jeżeli dwa kąty wynoszą 63° 15′ 42″ i 76° 45′ 57″, jak wielki jest kąt trzeci?

7. Jaki kąt, dodany do 128° 15′ 36″, da kąt = 143° 8′ 17″?

8. Zegar spieszy o 12 minut i 30 sekund; jaka jest godzina, jeżeli wskazuje 10. godzinę i 7. minutę?

9. Obraz wraz z ramą jest na 1 *m* 7 *dm* długi, a na 9 *dm* 5 *cm* szeroki; jak długi i szeroki jest sam obraz, jeżeli szerokość ramy 82 *mm* wynosi?

10. W naszym kraju trwa wiosna i lato razem 186 dni, 14 minut i 53 sekund, a jesień i zima 178 dni, 15 minut i 56 sekund; o ile dłużéj trwają dwie pierwsze pory roku, niż dwie ostatnie?

§. 32.
Mnożenie liczb wielorakich.

Liczbę wieloraką mnoży się przez inną liczbę (oderwaną), mnożąc oddzielnie liczbę jednostek każdego rzędu, począwszy od jednostek rzędu najniższego, przyczém się z każdego iloczynu częściowego wydziela liczbę jednostek rzędu bezpośrednio wyższego w nim zawartą, celem dodania téj liczby do następnego iloczynu częściowego. Jeżeli zamiennikami jednostek mnożnéj są liczby 10, 100, 1000, 10000 i t. d., najdogodniéj jest zamienić mnożną naprzód na liczbę dziesiętną rzędu najwyższego i dopiero potém mnożyć.

Przykład 1. Pomnożyć 15 dni i 17 godzin przez 6.

Wzór działania:	Wykład działania:
15 dni 17 godzin. 6	17 godz.6 = 102 godz. = 4 dni **6** godz.
94 dni 6 godzin. .	15 dni.6 = 90 dni, 90 dni + 4 dni = **94**.

Przykład 2. Pomnożyć 37 *km* 287 *m* przez 9.

Wzór działania:

37 *km* 287 *m*.9	albo	37·287 *km*.9
335 *km* 583 *m*		335·583 *km*

Zadania.

1. Jeżeli za 1 dukata trzeba zapłacić 5 zł. 84 ct., ile trzeba zapłacić za 45 dukatów?

2. Jeżeli 1 *hl* jęczmienia waży 64 *kg* 72 *dkg* 7 *g*, ile ważyć będzie 59 *hl*?

3. Znaleść długość sznura, dającego się 215 razy obwinąć około walca, którego obwód wynosi 2 *m* 7 *dm* 8 *cm*.

4. Kupiec kupił 138 *m* 26 *dm* po 8 zł. 54 ct. za 1 *m* i 106 *m* 52 *cm* po 6 zł. 12 ct. za 1 *m*; sprzedając wszystek towar po 7 zł. 92 ct. za 1 *m*, ile zyska lub straci?

5. Miesiąc księżycowy trwa 29 dni, 12 godzin, 44 minut i 3 sekundy; o ile rok księżycowy jest krótszy od roku zwyczajnego, liczącego 365 dni?

6. Z tegosamego miejsca wychodzą jednocześnie dwaj posłańcy: *a)* obaj w jednym kierunku, *b)* obaj w kierunkach przeciwnych; jeden przebiega dziennie 56 *km*, 503 *m* a drugi 45 *km* 429 *m*; jaka będzie odległość między nimi po 35 dniach?

7. Jeżeli się na rok słoneczny, trwający 365 dni, 5 godzin, 48 minut, 48 sekund, bierze tylko 365 dni, a natomiast każdy czwarty rok uważa się jako przestępny o 366 dniach, jaki wskutek tego sposobu liczenia narośnie błąd w 400 latach?

8. Wiedząc, że w miejscu, położoném o 1^0 długości daléj na zachód, nastaje południe o 4 minuty późniéj, wyznaczyć z dat zadania 5. w §. 31., jaka godzina będzie w Wiedniu wtedy, kiedy we Lwowie jest południe?

§. 33.

Dzielenie liczb wielorakich.

Liczbę wieloraką można dzielić albo przez liczbę wieloraką tegosamego gatunku, co dzielna (zadanie pomiaru), albo też przez liczbę oderwaną (zadanie podziału).

Jeżeli dzielnik jest liczbą mianowaną, to przed wykonaniem dzielenia przedstawia się dzielną i dzielnik jako liczby jednostek tegosamego rzędu, a dopiero potém dzieli. Jeżeli zaś dzielnik jest liczbą oderwaną, wówczas dzieli się przez tę liczbę oddzielnie liczby jednostek każdego rzędu, zaczynając od jednostek rzędu najwyższego, przyczém każdorazową resztę zamienia się na liczbę jednostek rzędu bezpośrednio niższego i do jednostek tego rzędu w dzielnéj dolicza. Wszakże i w tym przypadku można dzielną przed uskutecznieniem dzielenia zamienić na liczbę jednostek tegosamego rzędu najniższego lub najwyższego.

Przykład 1. Jeżeli 1 *hl* piwa kosztuje 15 zł. 5 ct.; ile *hl* dostanie za 195 zł. 65 ct.?

Za 195 zł. 65 ct. dostanie tyle *hl*, ile razy 195 zł. 65 ct. jest większe od 15 zł. 5 ct.; należy więc pierwszą liczbę podzielić przez wtórą:

195 zł. 65 ct. : 15 zł. 5 ct. = 19565 ct. : 1505 ct. = 13

```
1505
----
4515
4515
----
   0
```

Odpowiedź: za 195 zł. 65 ct. dostanie 13 *hl.*

Przykład 2. Jaka jest 9. część 130 dni 12 godzin?

Wzór działania:

```
130 dni 12 godzin : 9 = 14 dni 12 godzin
 40
  4
-------------------
          108 godzin
           18
            0
```

Wykład działania:

130 dni : 9 = 14 dni z resztą 4 dni = 96 godzin, 96 godz. + 12 godz. = 108 godz.; 108 godz. : 9 = 12 godz.

Zadania.

1. Lokomotywa przebiega w godzinie 30 *km* 720 *m*; ile w jednéj minucie?

2. Wysokość schodów równa 5 *m* 6 *cm*, wysokość stopnia 2 *dm* 3 *cm*; ile stopni mają te schody?

3. Przedstawienie dramatu w pięciu aktach trwało 3^h 20′ 35″; jak długo trwało w przecięciu przedstawienie jednego aktu?

4. Obwód koła ma 360°, jaką częścią obwodu jest łuk mający 2° 48′ 45″?

5. Za 98 *m* 72 *cm* zapłacono 666 zł. 36 ct.; ile zu 1 *m*?

6. Koło lokomotywy ma 4 *m* w obwodzie; ile razy obróci się ono na przestrzeni między Krakowem i Lwowem, t. j. na 337·56 *km*?

7. Urna srebrna waży 7 *kg*; w 1 *kg* téj urny jest 750 *g* czystego srebra; jeżeli za tę urnę jako za same srebro zapłacono 516 zł. 60 ct.: ile policzono za 1 *kg* czystego srebra?

*

8. Kupiono 763 *kg* towaru za 1515 zł. 67 ct., a sprzedano za 1423 zł. 52 ct.; ile stracono na 1 *kg*?

9. Dwa tuziny łyżek srebrnych, ważących 2 *kg* 25 *dkg*, sprzedano za wartość srebra, które było 850-dzielne; nabywca odprzedał je z zyskiem, wyrównywającym dwu piątym ceny kupna; ile wziął przeciętnie za jednę łyżkę. (1 *kg* czystego srebra kosztuje 90 zł.).

10. W Krakowie nastaje południe o 14 minut 29 sekund wcześniéj, aniżeli we Wiedniu, którego długość wschodnia względem Paryża wynosi $14^{0}\ 0'\ 7''$; jaką długość wschodnią posiada Kraków? (W miejscu o 1^{0} bardziéj na wschód położoném nastaje południe o 4 minuty wcześniéj).

ROZDZIAŁ VII.

O działaniach skróconych.

§. 34.

Skracanie liczb dziesiętnych.

W bardzo wielu zastosowaniach arytmetyki, w których ma się do czynienia z liczbami dziesiętnymi, zawierającymi wiele cyfr dziesiętnych, tylko jedna, dwie lub trzy cyfry dziesiętne początkowe są potrzebne do rachunku, gdyż dalsze nie mają żadnéj praktycznéj doniosłości. Tak n. p., jeżeli do zadania wchodzi odległość znaczna, wyrażona przez liczbę dziesiętną w metrach, to niekiedy cały metr, a témbardziéj części jego dziesiętne, setne, tysiączne mogą być opuszczone, gdyż błąd nieuchronny, jakiby się przy pomiarze takiéj odległości popełniło, może przenosić wielkość opuszczoną. Podobnie, jeżeliby wartość jakiego towaru była wyrażona przez liczbę dziesiętną w złotych, to już co najmniéj dziesięciotysiączne złotego są dla zagadnienia obojętne, gdyż nawet nie ma monety, któraby posiadała wartość tak małą i t. p.

Z tego powodu liczbę dziesiętną, zawierającą wiele cyfr dziesiętnych, s k r a c a s i ę, zatrzymując tylko tyle cyfr dziesiętnych początkowych, ile ich potrzeba ze względu na naturę zadania, a opuszczając wszystkie pozostałe.

Przy skracaniu liczby dziesiętnéj pozostawia się zatrzymaną cyfrę dziesiętną najniższą b e z z m i a n y, jeżeli następująca po niéj jest mniejsza, niż 5, a p o w i ę k s z a s i ę j ą o 1, jeżeli następująca po niéj jest albo równa 5 albo większa od 5. Błąd, jaki się w takm razie popełnia, jest mniejszy, niż $\frac{1}{2}$ jedności najniższéj.

Biorąc więc n. p. zamiast liczby dziesiętnéj 1·6343 liczbę mniejszą 1·63 lub zamiast liczby 2·3455 liczbę większą 2·35, pepełniamy błąd mniejszy, niż 5 tysiącznych, czyli $\frac{1}{2}$ setnéj, a to przez niedomiar *(Defect)* w pierwszym, a przez nadmiar *(Überschuss)* w drugim przypadku.

Że liczba dziesiętna doznała skrócenia, zaznacza się kropkami dopisanymi po prawéj najniższéj zatrzymanéj cyfry dziesiętnéj. A więc n. p. 1·63.. onaczać nam będzie liczbę zawartą między 1·625 i 1·635.

Zadania.

1. Skrócić następujące liczby dziesiętne:

a) 0·56245, 9·73581, 35·20553,

b) $2{\cdot}0\dot{5}$, $13{\cdot}\dot{3}5\dot{7}$, $0{\cdot}\dot{7}\dot{3}$

do trzech cyfr dziesiętnych i wyznaczyć błąd, jaki się popełnia każdym razem.

2. Biorąc zamiast liczby 0·37458 raz 0·37, a drugi raz 0·38, jakie popełnia się błędy? który z tych błędów jest mniejszy i o ile?

3. Wyrazić następujące ułamki zwyczajne w 5 cyfrach dziesiętnych:

$$\frac{13}{35}, \frac{11}{119}, \frac{72}{425}, \frac{351}{584}.$$

4. Kwotę 654·40574 zł. przedstawić tak, aby błąd był mniejszy od $\frac{1}{2}$ ct.

5. Liczbę lat 2·58364 przedstawić w przybliżeniu tak, aby błąd był mniejszy: *a)* od 1 dnia, *b)* od 1 godziny.

6. Funt angielski = 0·4535913 *kg*; przedstawić ten zamiennik tak, aby błąd był mniejszy od 5 *dg*.

7. Skrócić 4·7826739 *km*, aby błąd był mniejszy: *a)* niż $\frac{1}{2}$ *dkm*, *b)* niż $\frac{1}{2}$ *m*, *c)* niż $\frac{1}{2}$ *dm*?

8. Skrócić 7·02356 *ha*, aby błąd był mniejszy: *a)* niż $\frac{1}{2}$ *a*, *b)* niż $\frac{1}{2}$ m^2?

§. 35.

Dodawanie skrócone.

Mamy dodać liczby następujące:
48·17368, 19·3427, 7·90215, 37·37844, 13·20175, 63·4822, tak, aby błąd sumy był mniejszy od 0·001.

W tym przypadku zatrzymujemy w każdym z danych składników o jednę cyfrę dziesiętną więcéj, niż wskazuje żądane przybliżenie. Będzie zatém:

$$\begin{array}{r} 48{\cdot}1736 \\ 19{\cdot}3427 \\ 7{\cdot}9021 \\ 37{\cdot}3784 \\ 13{\cdot}2017 \\ 63{\cdot}4822 \\ \hline 189{\cdot}4807 \end{array}$$

W wypadku otrzymanym opuszczamy ostatnią cyfrę dziesiętną.

Ponieważ błąd każdego składnika jest mniejszy od 0·0001, więc błąd sumy będzie mniejszy, niż 0·0001.6, t. j. 0·0006; a więc témbardziéj mniejszy, niż 0·001. Suma będzie dokładniejszą, gdy ostatnią cyfrę o 1 powiększymy z powodu, że opuszczona 7 jest od 5 większa, t. j. gdy weźmiemy 189·481.

Jeżeliby ilość składników była, większa niż 10, a mniejsza niż 100, to w każdym składniku zatrzymalibyśmy o 2 cyfry dziesiętne więcéj, niż wskazuje dane przybliżenie i t. d.

Zadania.

1. Podać sumę ułamków następujących w 3 miejscach dziesiętnych:

a) $\frac{11}{20} + \frac{3}{7} + \frac{5}{6} + \frac{3}{4} + \frac{7}{8}$;

b) $\frac{5}{12} + \frac{13}{47} + \frac{15}{51} + \frac{41}{129} + \frac{387}{207}$;

c) $\frac{4}{7} + \frac{9}{4} + \frac{17}{19} + \frac{20}{23} + \frac{49}{72}$;

d) $3\frac{1}{2} + 7\frac{1}{5} + \frac{14}{13} + 17\frac{2}{15} + \frac{729}{516}$.

2. Podać sumę następujących liczb dziesiętnych:

a) 27·516 + 79·473 + 589·75 + 478·2792 (w 2 dziesięt.);
b) 0·396287 + 3·14159 + 7·478291 + 0·63 (w 4 dziesięt.);
c) 0·702956 + 17·215891 + 9·0070289 + 0·8915912 (w 5 dziesięt.);
d) $27{\cdot}7259 + \frac{17}{19} + 0{\cdot}7291 + 175{\cdot}4689 + 5\frac{21}{23}$ (w 3 dziesięt.).

§. 36.

Odejmowanie skrócone.

Mamy od liczby 47·5076 odjąć liczbę 19·862913 i znaleść różnicę z błędem mniejszym od 0·001.

W tym przypadku skracamy obie liczby do tylu cyfr dziesiętnych, ile ich wymaga żądane przybliżenie, t. j. do 3 cyfr dziesiętnych, wszelako tak, ażeby obie były przybliżone przez nadmiar lub przez niedomiar. Będzie zatém:

47·508	albo	47·507
19·863		19·862
27·645		27·645

Błąd odjemnéj i odjemnika jest mniejszy, niż 0·001; a że oba błędy są popełnione przez nadmiar lub niedomiar, więc błąd różnicy będzie mniejszy od różnicy tych dwu błędów, t. j. od różnicy dwu liczb, z których każda jest mniejszą od 0·001. A zatém błąd otrzymanéj różnicy liczb jest w każdym razie mniejszy od 0·001.

Zadania.

1. Podać różnicę następujących ułamków w 3 miejscach dziesiętnych:

a) $4\frac{1}{3} - 2\frac{7}{19}$; *b)* $6729\frac{13}{17} - 927\frac{29}{53}$;
c) $17\frac{11}{21} - 5\frac{29}{33}$; *d)* $450\frac{13}{21} - 2\frac{57}{63}$;
e) $9\frac{5}{12} - 4\frac{63}{77}$; *f)* $\frac{49}{13} - 1\frac{2}{71}$.

2. Podać różnicę następujących liczb dziesiętnych:

a) 1027·487 — 902·7899 (w 2 dziesiętnych);
b) 28·4756 — 17·9872 (w 3 dziesiętnych);
c) 457·75 — 3·14159 (w 4 dziesiętnych);
d) 1234·56789 — 987·654321 (w 5 dziesiętnych);
e) $472\frac{2}{3}$ — 399·78215 (w 4 dziesiętnych);
f) 10·78924 — $7\frac{23}{27}$ (w 4 dziesiętnych).

§. 37.

Mnożenie skrócone.

1. Weźmy pod uwagę naprzód przypadek, kiedy mnożnik zawiera w sobie tylko jednę cyfrę znaczącą; pomnóżmy n. p. 36·7245 przez 0·08 i wyznaczmy ten iloczyn z błędem mniejszym, niż 0·001.

W tym celu potrzeba obliczyć iloczyn tylko w trzech cyfrach dziesiętnych.

Owoż, ponieważ cyfra znacząca przedstawia setne, a najniższa cyfra iloczynu ma przedstawiać tysiączne, więc mnożenie trzeba zacząć od cyfry dziesiątych w mnożnéj, t. j. od cyfry 7, przechodząc następnie do cyfr wyższéj wartości miejscowéj, t. j. do cyfr 6 i 3.

Wszelako, ponieważ dziesiątki iloczynu cyfry setnych w mnożnéj przez cyfrę setnych w mnożniku przedstawiają także tysiączne, gdyż $\frac{2}{100} \cdot \frac{8}{100} = \frac{16}{10000} = \frac{1}{1000} + \frac{6}{10000}$, to te dziesiątki (w obecnym przypadku 2 dziesiątki, bo 16 jest bliższe 20, niż 10) należy dodać jako poprawkę do pierwszego iloczynu częściowego, t. j. do iloczynu dziesiątych mnożnéj przez setne mnożnika. Będzie zatém

$$\begin{array}{l} 36{\cdot}7|245 \,.\, 0{\cdot}08. \\ \hline 2{\cdot}938 \end{array}$$

Wyznaczając podobnie iloczyn w trzech cyfrach dziesiętnych, znajdziemy:

$$\begin{array}{l} 5{\cdot}278|34 \,.\, 5, \\ \hline 26{\cdot}392 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 0{\cdot}2374|21 \,.\, 70. \\ \hline 16{\cdot}619 \end{array}$$

2. Pomnóżmy następnie 53·602781 przez 42·0815 i wyznaczmy iloczyn z błędem mniejszym, niż 0·01. W tym przypadku potrzeba obliczyć iloczyn w trzech cyfrach dziesiętnych, a następnie skrócić go do dwu cyfr dziesiętnych.

Aby ten rachunek wykonać, najdogodniéj cyfrę jedności mnożnika podpisać pod cyfrą tysiącznych w mnożnéj, a inne cyfry mnożnika podpisać pod mnożną w porządku odwróconym, tak, ażeby jego cyfry jedności rzędu niższego znajdowały się po lewéj, a cyfry jedności rzędu wyższego znajdowały się po prawéj stronie cyfry jedności, t. j. tak:

53·602781
51 8024

Wskutek tego iloczyn któréjkolwiek cyfry mnożnéj przez cyfrę mnożnika, podpisaną pod nią, będzie przedstawiał tysiączne; gdyż w tym kierunku, w którym się wartość miejscowa cyfr mnożnéj 10 razy zwiększa, zmniejsza się 10 razy wartość miejscowa cyfr mnożnika i na odwrót.

Przystępując teraz do mnożenia przez każdą cyfrę mnożnika, zaczynamy to mnożenie od téj cyfry mnożnéj, ktora się znajduje ponad cyfrą mnożącą, przechodząc następnie do cyfr wyższéj wartości miejscowéj. Tym sposobem wszystkie iloczyny częściowe będą przedstawiały tysiączne.

Dla większéj dokładności mnoży się przez każdą cyfrę mnożnika i tę cyfrę mnożnéj, która jest o jedno miejsce na prawo posunięta, atoli z tego iloczynu zatrzymuje się tylko najbliższe dziesiątki, które przedstawiają tysiączne, celem ich dodania jako poprawki do odpowiedniego iloczynu częściowego. Mamy zatém następujący wzór działania:

	53·602781
	51 8024
53·6027.40 + 0·003 . .	2144·111
53·602 . 2 + 0·001 . .	107·205
53·6 .0·08	4·288
53.0·001 + 0·001 . . .	54
50.0·0005 + 0·002 . .	27
	2255·685

Błąd każdego iloczynu częściowego przy tym sposobie rachowania jest mniejszy od 0·0005, a przeto błąd całego iloczynu jest mniejszy od 0·0005.5 = 0·0025. W każdym więc razie, gdy weźmiemy 2255·68 za iloczyn, to błąd z pewnością będzie mniejszy, niż 0·01.

Uwaga. Jeżeli mnożnik, podpisany pod mnożną, występuje z prawéj strony jedną cyfrą lub więcéj cyframi poza ostatnią cyfrę mnożnéj, wówczas należy do mnożnéj dopisać z prawéj strony odpowiednią ilość zer.

Zadania.

1. Wyznaczyć iloczyny:

a) 756·289 . 0·7 (3 dzies.); *b)* 9·09268 . 0·09 (3 dzies.);
c) 0·4729 · 9 (2 dzies.); *d)* 0·978 . 70 (2 dzies.);
e) 9·0356 . 8·75 (3 dzies.); *f)* 231·4729 . 0·673 (3 dzies.);
g) 9·0392 . 4·679 . 0·178; *h)* 4·782 . 19·75 . 0·9145 (4 dzies.).

2. Wyznaczyć iloczyn 9275864 . 89057 naprzód w tysiącach, a potém w milionach.

3. Ile zapłacić trzeba za 12·7895 *q* pewnego towaru, jeżeli za 1 *q* płacono 52·65 zł.? (2 dziesięt.).

4. Za 1 *ha* lasu zapłacono 1247·75 zł.; ile zapłacić trzeba za *a)* 127·972 *ha*, *b)* 97·28 *ha*, *c)* 8·978 *ha*? (2 dziesięt.).

5. 1 *m* = 3·1637496 stóp; ile stóp uczyni *a)* 29·578 *m*, *b)* 278 *m*, *c)* 471·2 *m*? (3 dziesięt.).

6. Czetwert, miara rosyjska dla zboża, czyni 2·099 *hl*; ile *hl* czyni *a)* 27·5 czetw., *b)* 125·75 czetw., *c)* 291 czetw.? (2 dziesięt.).

7. 1 rubel rosyjski = 1·6192 zł. w. a.; ile zł. w. a. czyni *a)* 2796·5 rubl., *b)* 27956 rubl., *c)* 79·275 rubl.? (2 dziesięt.).

8. 1 wiorsta = 1·06675 *km*; ile *km* uczyni *a)* 279 wiorst, *b)* 492·5 wiorst, *c)* 79·25 wiorst (3 dziesięt.).

9. Średnia odległość księżyca od ziemi wynosi 60·2778 promieni ziemskich; ile to czyni *μm*, jeżeli promień ziemski = 637·7399 *μm*? (2 dziesięt.).

10. Średnica ziemi wynosi 1275·4798 *μm*; ile wynosi w *μm* średnica słońca, jeżeli jest większą 108·72 razy od średnicy ziemi? (2 dziesięt.).

11. 1 *ha* = 1·73773 morgów austr., a 1 morg = 0·575464 *ha*; *a)* ile morgów czyni 52·729 *ha*, *b)* ile *ha* uczyni 217·75 morgów? (3 dziesięt.).

12. Kapitał pewien przynosi w roku 272·75 zł. dochodu; ile dochodu przyniesie w 2·625 latach? (2 dziesięt.).

13. Głos przebiega w 1 sekundzie 1038·06 stóp paryskich; ile to uczyni metrów, jeżeli 1′ paryska = 0·32484 *m*? (2 dziesięt.).

14. Stopień na równiku ma 15 mil geograficznych, a 1 mila = 7420·41 *m*; obliczyć w metrach długość równika.

§. 38.

Dzielenie skrócone.

1. Dzielenie skrócone jest odwróceniem mnożenia skróconego, a służy do tego, aby w ilorazie otrzymać tylko pewną ilość początkowych cyfr dziesiętnych. Sposób postępowania przy dzieleniu skróconém jest następujący:

Naprzód z wartości miejscowéj pierwszéj cyfry ilorazu i z ilości cyfr dziesiętnych, jaką iloraz ma zawierać, wynajdziemy, ile w ogóle cyfr ilorazu mamy wyznaczyć.

Wyznaczmy n. p. iloraz 23·5432 : 9·2567 w trzech cyfrach dziesiętnych. Pierwsza cyfra tego ilorazu jest cyfrą jedności, ten iloraz musi się składać z 4 cyfr: jedności, dziesiątych, setnych i tysiącznych. Wiedząc to, bierzemy tylko tyle początkowych cyfr dzielnika, ile ich iloraz ma zawierać, jako *dzielnik skrócony*, a w dzielnéj zatrzymujemy tylko tyle początkowych cyfr, ile ich potrzeba na utworzenie pierwszéj dzielnéj częściowéj. (W powyższym więc przykładzie bierzemy 9·256 za dzielnik skrócony, a 23·543 za pierwszą dzielną częściową).

Znalazszy przez pierwsze dzielenie częściowe pierwszą cyfrę ilorazu, tą cyfrą mnożymy skrócony dzielnik, dodając doń jako poprawkę dziesiątki iloczynu, otrzymanego z pomnożenia najwyższéj z opuszczonych cyfr dzielnika (t. j. cyfry 7), i tak poprawiwszy ten iloczyn, odejmujemy go od pierwszéj dzielnéj częściowéj. *Do pozostałéj reszty już nie dopisujemy dalszéj cyfry dzielnéj* (albo 0), *lecz w dzielniku skróconym opuszczamy ostatnią cyfrę po prawéj* i resztę dzielimy przez ten powtórnie skrócony dzielnik, poczém powtarzamy tosamo postępowanie, dopóki nie wyczerpiemy wszystkich cyfr dzielnika.

2. Aby to postępowanie bliżéj wyjaśnić, weźmy pod uwagę naprzód przypadek, kiedy dzielnik zawiera tyle cyfr, ile ich ma zawierać iloraz, potém przypadek, kiedy w dzielniku jest ich więcéj i nareszcie przypadek, kiedy w dzielniku jest ich mniéj.

Przykład 1. Wyznaczyć iloraz 23·5432 : 9·256 w trzech cyfrach dziesiętnych. Mamy

Wzór działania:

$$
\begin{array}{l}
23{\cdot}543|2 : 9{\cdot}2\cancel{5}\cancel{6} = 2{\cdot}543 \\
\;5\,031 \\
\;\;403 \\
\;\;\;33 \\
\;\;\;\;5
\end{array}
$$

Wykład działania:

1. 23·543 : 9·256 = 2, 23·543 — 9·256.2 = 5·031;
2. 5·031 : 9·25 = 0·5, 5·031 — 9·25.0·5 — 0·003 = 0·403;
3. 0·403 : 9·2 = 0·04, 0·403 — 9·2.0·04 — 0·002 = 0·033;
4. 0·033 : 9 = 0·003, 0·033 — 9.0·003 — 0·001 = 0·005.

Przykład 2. Wyznaczyć iloraz 3.72451 : 0·68243 w dwu cyfrach dziesiętnych.

Pierwsza cyfra ilorazu jest również cyfrą jedności, mamy więc znaleść trzy cyfry ilorazu; a zatém za skrócony dzielnik trzeba wziąć 0·682, a za skróconą dzielną 3·724. Mamy zatém:

Wzór działania:

$$
\begin{array}{l}
3{\cdot}724|51 : 0{\cdot}6\cancel{8}\cancel{2}|43 = 5{\cdot}45 \\
\;\;312 \\
\;\;\;39 \\
\;\;\;\;5
\end{array}
$$

Przykład 3. Wyznaczzyć iloraz 257·38 : 2·49 w trzech cyfrach dziesiętnych.

Tutaj pierwsza cyfra ilorazu będzie oznaczała setki, mamy więc znaleść razem 6 cyfr ilorazu; dlatego za dzielnik należałoby wziąć 2·49000, a za pierwszą dzielną 257·380. Tensam cel osiągnie się, gdy skrócenie dzielnika 2·49 rozpoczniemy po wynalezieniu sposobem zwyczajnym czterech pierwszych cyfr ilorazu. Mamy zatém:

Wzór działania:

$$
\begin{array}{l}
257{\cdot}38 : 2{\cdot}49 = 103{\cdot}366 \\
\;\;8\,3 \\
\;\;8\,38 \\
\;\;\;\;910 \\
\;\;\;\;163 \\
\;\;\;\;\;\;14 \\
\;\;\;\;\;\;\;0
\end{array}
$$

Zadania.

1. Wykonać skróconym sposobem dzielenia:

a) 24·978 : 9·2075;	*b)* 29 573 : 7·2067	(3 dziesięt.)
c) 769 : 9·237;	*d)* 3·76205 : 654·8	(5 „)
e) 4 : 15·468;	*f)* 854·3987 : 5·073	(4 „)
g) 207·9078 : 0·054;	*h)* 0·09873 : 0·0059	(2 „)
i) 0·0592 : 0·23418;	*k)* 0·625 : 3·8	(4 „)

2. Podać ilorazy 46278314 : 7928 i 568291417 : 17029 (tylko w setkach).

3. Światło przebiega na sekundę 308282 *km*. W jakim czasie dojdzie światło słoneczne *a)* na ziemię, odległą od słońca na 148616551 *km*, *b)* na planetę Neptun, odległą od słońca na 4609391196 *km*? Podać czas w sekundach.

4. Jak wielką jest chyżość pociągu kolejowego, (to znaczy ile metrów przebiega na sekundę), jeżeli w 1^h $10'$ przebiega 63 *km*? (2 dziesięt.).

5. Europa (bez Islandyi) ma 9710340 km^2 powierzchni i 315929000 mieszkańców; Azya 44572250 km^2 a 205679000 mieszkańców; Ameryka 38389210 km^2 powierzchni a 95496000 mieszkańców. Ile mieszkańców przypada przeciętnie w każdéj z powyżéj wymienionych części świata na 1 km^2? (1 dziesięt.).

6. Jeżeli 1 funt rosyjski = 0·4095 *kg*; ile funtów rosyjskich idzie na 1 *kg*? (3 dziesięt.).

7. 1 yard = 0·91439179 *m*; *a)* ile yardów idzie na 1 *m*, *b)* ile na 67.48 *m*? (5 dziesięt.).

8. Wystrzelona kula armatnia przebiega w sekundzie 1·32 *km*, ziemia w obiegu około słońca 4·113 mil. Ile razy chyżość ziemi jest większa od chyżości téj kuli? (1 mila geogr. = 7·4195 *km*) (w całkowitych).

ROZDZIAŁ VIII.

O regule trzech prostéj.

§. 39.

Stosunki.

1. Porównywanie dwu liczb lub dwu wielkości tegosamego gatunku celem zbadania ile razy jedna z nich jest większą od drugiéj, prowadzi do pojęcia stosunku. Stosunkiem *(Verhältnis)* dwu liczb, n. p. 15 i 5, jest więc iloraz tych dwu liczb 15 : 5 lub $\frac{15}{5}$, który się czyta „15 do 5". Wartość tego ilorazu, t. j. liczba 3, zowie się wykładnikiem *(Exponent)* stosunku.

Liczby 15 i 5, składające stosunek 15 : 5, zowią się wyrazami *(Glieder)* tegoż stosunku, a mianowicie: pierwsza, t. j. 15, poprzednikiem *(Vorderglied)*, a wtóra, t. j. 5, następnikiem *(Hinterglied)*.

Poprzednik stosunku równa się zatém następnikowi, pomnożonemu przez wykładnik, gdy tymczasem następnik jest równy poprzednikowi, podzielonemu przez wykładnik.

2. Ażeby znaleść stosunek dwu wielkości tegosamego gatunku, n. p. dwu długości A i B, potrzeba naprzód te dwie długości wyrazić w tychsamych jednostkach, a potém wziąć stosunek tak otrzymanych dwu liczb mianowanych. Jeżeli n. p. A zawiera w sobie 15 *m*, a B 5 *m*, to stosunek długości A do długości B wyrazi się przez 15 *m* : 5 *m*.

Są więc dwa rodzaje stosunków: stosunki liczbowe *(Zahlenverhältnisse)* i stosunki wielkości *(Grössenverhältnisse)*, stósownie do tego, czy ich wyrazy są liczbami oderwanymi, czy też mianowanymi. Stosunek wielkości, n. p. $4\,hl : 12\,hl$ zamieni się na stosunek liczbowy $4 : 12$, gdy się opuści nazwa jednostki *hl.*

3. Wykładnik stosunku jest zawsze liczbą oderwaną i wyraża, ile razy poprzednik jest większy od następnika. Można więc stosunek także tak określić: Stosunek jest wyrażeniem liczby oderwanéj zapomocą ilorazu dwu liczb oderwanych albo mianowanych tegosamego gatunku. Stąd zaś wypływa, że stosunki, mające wykładniki równe, są równe. Stosunki więc takie, jak n. p. $15\,m : 5\,m$, $18\,hl : 6\,hl$, $24 : 8$, są wszystkie równe; albowiem wszystkie mają wykładnik 3, a przeto są wyrażeniami téjsaméj liczby oderwanéj 3, wskazującéj, ile razy poprzednik w każdym z nich jest większy od następnika.

4. Stosunek nie zmieni się, gdy się poprzednik i następnik przez tęsamę liczbę pomnoży albo podzieli, albowiem wskutek tego nie zmieni się wykładnik stosunku.

Zapomocą mnożenia obu wyrazów stosunku przez tęsamę liczbę można stosunek, którego wyrazy są ułamkami, przedstawić przez liczbę całkowitą. Podobnie zapomocą dzielenia obu wyrazów stosunku przez tęsamę liczbę można stosunek, którego wyrazy nie są liczbami względem siebie pierwszymi, przedstawić przez liczby prostsze czyli uprościć.

Zadania.

1. Znaleść wykładniki stsunków:

$$18 : 9;\quad 9 : 18;\quad 45 : 105;\quad 105 : 45;\quad 3 : 1\tfrac{1}{2};\quad 5\tfrac{1}{3} : 2\tfrac{5}{6}.$$

2. Wyznaczyć poprzedniki stosunków o wykładniku 15, których następnikami są liczby:

$$a)\ 2;\quad b)\ \tfrac{2}{3};\quad c)\ \tfrac{1}{5}.$$

3. Jakie są następniki stosunków, których wykładnikiem jest 3, a poprzednikami są liczby:

$$a)\ 21;\quad b)\ \tfrac{3}{5};\quad c)\ 2\tfrac{1}{4}.$$

4. Wyrazić w liczbach całkowitych następujące stosunki:

$$2 : \frac{3}{5}; \quad \frac{2}{3} : \frac{1}{2}; \quad 5\frac{2}{3} : 3\frac{2}{5}; \quad 7\frac{1}{8} : 2\frac{3}{10}.$$

5. Uprościć następujące stosunki:

24 : 42; 87 : 58; 372 : 164; 189 : 693.

6. Kwotę 350 zł. podzielono między dwie osoby A i B tak, że osoba A wzięła 210 zł., a osoba B resztę pozostałą; w jakim stosunku podzielono tę kwotę?

7. 1 *hl* pszenicy kosztował 5·60 zł., a 1 *hl* jęczmienia 4·80 zł.; jaki był stosunek cen tych dwu gatunków zboża?

8. Kula armatnia przebiega w sekundzie 228 *m*, a głos 332 *m*; jaki jest stosunek tych dwu chyżości?

9. Jaki jest stosunek chyżości skazówki godzinnéj na zegarze do chyżości skazówki minutowéj i na odwrót?

10. Koło ma w obwodzie $4\frac{5}{7}$ *m*, a jego średnica wynosi $1\frac{1}{2}$ *m*; jaki jest wykładnik stosunku obwodu do średnicy?

11. 1 cm^3 żelaza waży 7·8 *g*, a 1 cm^3 rtęci waży 13·584 *g*. Jaki jest stosunek tych dwu ciężarów?

12. Za 1 *kg* złota płaci się srebrem 1395 zł., a za 1 *kg* srebra 90 zł.; jaki jest stosunek wartości złota do wartości srebra?

13. Wyrazić w liczbach najprostszych stosunki: 5 *m* : 75 *dm*; 3 *a* : 15 m^2; 2 *kg* : 64 *dkg*; $2^0\ 32' : 1^0\ 48'$.

14. Z dwu kół, których zęby wchodzą jedne w drugie, pierwsze ma 28, a drugie 35 zębów; jaki jest stosunek chyżości obrotowych tych dwu kół?

15. Zbiornik można wypełnić dwiema rurami: pierwszą w 2 godziny i 36 minut, a drugą w 3 godziny i 12 minut. Jaki jest stosunek objętości wody, które spływają w jednym czasie jedną i drugą rurą?

16. Ojciec ma 32, a syn 8 lat; jaki jest stosunek wieku ojca do wieku syna; jakim był ten stosunek przed 4 laty, a jakim będzie po 4 latach?

§. 40.

Proporcye.

1. Połączenie dwu stosunków równych znakiem równości zowie się proporcyą *(Proportion)*. N. p. $2 : 3 = 6 : 9$ jest proporcyą, gdyż stosunki $2 : 3$ i $6 : 9$, mające jednakie wykładniki $\frac{2}{3}$ i $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, są równe. Tę proporcyą czyta się tak: „2 do 3 równe 6 do 9".

Liczby 2, 3, 6, 9, składające proporcyą, zowią się jéj wyrazami *(Glieder)*, a w szczególności: pierwsza 2 i czwarta 9 są wyrazami skrajnymi *(äussere)*, a druga 3 i trzecia 6 są wyrazami średnimi *(innere)*.

Proporcya zowie się ciągłą *(stetig)*, jeżeli jéj wyrazy średnie są równe. N. p. $3 : 6 = 6 : 12$ jest proporcyą ciągłą. Każdy z wyrazów średnich proporcyi ciągłéj zowie się średnią geometrycznie proporcyonalną *(mittlere geometrische Proportionale)* albo średnią geometryczną *(geometrisches Mittel)* wyrazów skrajnych.

Jeżeli wyrazy proporcyi są liczbami mianowanymi, wówczas proporcya zowie się proporcyą wielkości w przeciwstawieniu do proporcyi liczbowéj, któréj wyrazy są liczbami oderwanymi. W proporcyi wielkości powinny być wyrazy każdego z obu stosunków liczbami równogatunkowymi. N. p. $12\,m : 3\,m = 48$ zł. : 12 zł. jest proporcyą wielkości, gdy tymczasem $12 : 3 = 48 : 12$ jest proporcyą liczbową. Każda proporcya wielkości zamienia się na liczbową przez opuszczenie nazw poszczególnych jednostek. W dalszym ciągu będzie zatém mowa tylko o proporcyach liczbowych.

2. W każdéj proporcyi jest iloczyn wyrazów skrajnych równy iloczynowi wyrazów średnich. Jakoż, pisząc n. p. proporcyą $2 : 3 = 6 : 9$ pod postacią $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ i mnożąc obie strony téj równości przez iloczyn mianowników 3.9, mieć będziemy:

$$\frac{2}{3}.3.9 = \frac{6}{9}.9.3, \text{ czyli } 2.9 = 6.3,$$

t. j. iloczyn 2.9 wyrazów skrajnych równy iloczynowi $6 . 3$ wyrazów średnich.

Nawzajem: z dwu iloczynów równych, z których każdy składa się z dwu czynników, można utworzyć proporcyą, biorąc czynniki jednego iloczynu za wyrazy skrajne, a czynniki drugiego iloczynu za wyrazy średnie. Jakoż, skoro n. p. $5.6 = 3.10$, jest więc też $\frac{5}{3}.6 = 10$, $\frac{5}{3} = \frac{10}{6}$ czyli $5 : 3 = 10 : 6$; albo $\frac{5}{10}.6 = 3$, $\frac{5}{10} = \frac{3}{6}$ czyli $5 : 10 = 3 : 6$.

Stąd wypływa: *a)* że kórykolwiek z wyrazów skrajnych jest równy iloczynowi wyrazów średnich, podzielonemu przez drugi wyraz skrajny, n. p. w proporcyi $2 : 3 = 6 : 9$ jest $2 = \frac{6 \cdot 3}{9}$ a $9 = \frac{6 \cdot 3}{2}$; i *b)* że którykolwiek z wyrazów średnich jest równy iloczynowi wyrazów skrajnych, podzielonemu przez drugi wyraz średni, n. p. $3 = \frac{2 \cdot 9}{6}$, a $6 = \frac{2 \cdot 9}{3}$.

Jeżeliby więc w proporcyi jeden wyraz był niewiadomy, to ten wyraz możnaby wyznaczyć zapomocą téj własności, czyli proporcyą możnaby rozwiązać *(auflösen)*. Tak n. p. jeżeli: $5 : x = 3 : 12$, to niewiadomy wyraz $x = \frac{5 \cdot 12}{3} = 20$.

3. Znamieniem prawdziwości proporcyi jest więc nie tylko równość wykładników obu stosunków, które je składają, ale także równość zachodząca między iloczynem jéj wyrazów skrajnych i iloczynem jéj wyrazów średnich. Skoro tak rzecz się ma, więc proporcya nie przestanie być prawdziwą, gdy w niéj zamienimy jedne na drugie, albo *a)* oba wyrazy skrajne, albo *b)* oba wyrazy średnie, albo też *c)* jednocześnie wyrazy skrajne i wyrazy średnie. Albowiem w tak otrzymanych nowych proporcyach iloczyn wyrazów skrajnych będzie zawsze równy iloczynowi wyrazów średnich i takisam, jak w proporcyi założonéj. N. p. z proporcyi $3 : 8 = 15 : 40$ otrzymamy tym sposobem $40 : 8 = 15 : 3$, $3 : 15 = 8 : 40$ i $40 : 15 = 8 : 3$.

4. Podobnie wyrazy proporcyi nie przestaną tworzyć proporcyi, jeżeli jeden wyraz skrajny i jeden wyraz średni pomnożymy albo podzielimy przez tęsamę liczbę. Albowiem iloczyn wyrazów skrajnych nowéj proporcyi będzie znowu równy iloczynowi jéj wyrazów średnich. N. p. z proporcyi $5 : 3 = 15 : 9$ wypływa $5.2 : 3.2 = 15 : 9$, gdyż $5.2.9 = 3.2.15 = 90$. Podobnie

z proporcyi $10 : 6 = 15 : 9$ wypływa $\frac{10}{5} : 6 = \frac{15}{5} : 9$ czyli $2 : 6 = 3 : 9$, gdyż $2.9 = 6.3 = 18$.

5. Zapomocą mnożenia jednego wyrazu skrajnego i jednego średniego przez tęsamę liczbę można proporcyą, któréj wyrazy są ułamkami, wyrazić przez liczby całkowite, n. p. proporcyą $1 : \frac{2}{3} = 15 : 10$ przez $3 : 2 = 15 : 10$.

Zapomocą zaś dzielenia jednego wyrazu skrajnego i jednego średniego przez tęsamę liczbę można proporcyą wyrazić przez liczby prostsze czyli uprościć. N. p. z proporcyi $3 : 10 = 18 : 60$ wypływa $3 : 1 = 18 : 6$, a następnie $3 : 1 = 3 : 1$, w końcu zaś $1 : 1 = 1 : 1$.

Zadania.

1. Ułożyć kilka proporcyj, w których poprzedniki są większe od następników, a wykładnik stosunków równy 8.

2. Ułożyć kilka proporcyj, w których następniki są większe od poprzedników, a wykładnik stosunków równy $\frac{1}{5}$.

3. Z następujących iloczynów ułożyć proporcye i z tych proporcyj przez przestawienie wyrazów wyprowadzić nowe proporcye:
a) $12.4 = 6.8$, *b)* $4\frac{1}{2}.1\frac{1}{3} = 3.2$, *c)* $3\frac{1}{2}.\frac{3}{5} = 4\frac{1}{5}.\frac{1}{2}$,
d) $0{\cdot}24 = 0{\cdot}3.0{\cdot}8$.

4. Ułożyć proporcye *a)* z liczb 2, 27, 9, 6; *b)* z liczb 7, $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{6}$, 3; *c)* z liczb $\frac{1}{5}$, $2\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$, $16\frac{2}{3}$; *d)* 0·5, 1·75, 7, 24·5.

5. Z proporcyi $a : b = c : d$ wyprowadzić wszystkie inne przez przestawienie wyrazów.

6. Następujące proporcye uprościć i wyznaczyć wyrazy niewiadome (oznaczone literą x):
a) $x : 4 = 3 : 6$, *b)* $2 : x = \frac{1}{5} : \frac{3}{10}$,
c) $2\frac{1}{2} : 3 = x : \frac{1}{5}$, *d)* $2\frac{1}{7} : 3 = 5 : x$,
e) $x : \frac{7}{9} = 3\frac{1}{3} : 5$, *f)* $10\frac{11}{12} : x = 14\frac{1}{3} : 8\frac{1}{2}$,
g) $5\frac{1}{3} : 6\frac{2}{5} = x : \frac{1}{2}$, *h)* $6\frac{2}{5} : 5\frac{1}{3} = \frac{1}{6} : x$.

7. Następujące proporcye wyrazić przez liczby najprostsze i wyznaczyć z nich wyrazy niewiadome (oznaczone literą x):

a) $22{\cdot}08 : 0{\cdot}96 = x : 0{\cdot}1$, *b)* $0{\cdot}4 : 0{\cdot}03 = 0{\cdot}2 : x$,
c) $\frac{7}{11} : x = 1{\cdot}26 : 5{\cdot}94$, *d)* $x : 0{\cdot}95 = 1{\cdot}61 : 1{\cdot}15$,
e) $2{\cdot}5 : 0{\cdot}5 = x : 0{\cdot}4$, *f)* $4{\cdot}35 : x = 3{\cdot}18 : 2{\cdot}31$,
g) $1{\cdot}8 : 4{\cdot}2 = 0{\cdot}99 : x$, *h)* $x : 0{\cdot}45 = 16{\cdot}625 : 9{\cdot}8$.

8. Znaleść wyraz średni proporcyi ciągłéj:
a) $9 : x = x : 4$, *b)* $3\frac{1}{2} : x = x : 2\frac{4}{7}$,
c) $3 : x = x : 0{\cdot}12$, *d)* $0{\cdot}016 : x = x : 0{\cdot}4$.

§. 41.
Wielkości proporcyonalne.

1. Powiadamy, że jakaś wielkość A zależy od innéj wielkości B, jeżeli zmiana wielkości B pociąga za sobą jednoczesną zmianę wielkości A. N. p. cena towaru zależy od jego wielości, dobroci, rzadkości i od popytu. Długość sztaby metalowéj zależy od temperatury, bo zmiana temperatury pociąga za sobą wydłużenie lub kurczenie sztaby i t. d. Szczególnym przypadkiem zależności dwu wielkości jest ich proporcyonalność *(Proportionalität)*.

2. O wielkości A mówimy, że jest względem wielkości B wprost proporcyonalną *(gerade proportioniert)*, jeżeli 2, 3, 4 razy większéj wartości na B, odpowiada 2, 3, 4 razy większa wartość na A. Cena n. p. towaru jest w wielu razach wprost proporcyonalną względem jego ciężaru, t. j. 5 *kg* towaru kosztuje 5 razy więcéj, niż 1 *kg*, a 1 *kg* 6 razy mniéj, niż 6 *kg*, czyli $\frac{1}{6}$ tego, co kosztuje 6 *kg*. Wyjątek w téj mierze stanowi cena kamieni drogich, szyb szklanych, drzewa materyałowego i t. p.

Praca jest wprost proporcyonalną względem, siły użytéj na jéj wykonanie, t. j. 8 robotników wykona 8 razy większą pracę, niż 1 robotnik (w tychsamych warunkach), a 1 robotnik $\frac{1}{5}$ téj pracy, jaką wykona 5 robotników.

Dochód (procenta) od wypożyczonego kapitału jest wprost proporcyonalny względem kapitału, t. j. 35 zł. kapitału dadzą 35 razy większy dochód, niż 1 zł., a 1 zł. da $\frac{1}{15}$ tego dochodu, jakiby się miało od 15 zł. kapitału i t. d.

3. O wielkości A mówimy, że jest względem wielkości B odwrotnie proporcyonalną *(umgekehrt proportioniert)*, jeżeli 2, 3, 4 razy większéj wartości na B odpowiada 2, 3, 4 razy mniejsza wartość na A.

Przy wykonaniu jakiéj pracy jest czas odwrotnie proporcyonalny względem siły, t. j. 4 robotników potrzebuje do wykonania pewnéj pracy $\frac{1}{4}$ tego czasu, co 1 robotnik, a 1 robotnik 5 razy dłuższego czasu, niż 5 robotników.

Pewien zapas wystarczy dla 9 ludzi na $\frac{1}{9}$ tego czasu, co dla jednego człowieka, a dla 1 człowieka na 10 razy dłuższy czas, niż dla 10 ludzi.

Za pewną cenę można pewien ładunek 5 razy daléj zawieść, niż ładunek 5 razy większy, a tylko na $\frac{1}{8}$ téj odległości, na jakąby się zawiozło ładunek 8 razy mniejszy.

Przy danéj powierzchni jest szerokość prostokąta odwrotnie proporcyonalną względem długości i t. d.

4. Wielkość A jest względem kwadratu lub sześcianu*) wielkości B wprost (odwrotnie) proporcyonalną, jeżeli 2, 3, 4 razy większéj wartości na B odpowiada 2.2, 3.3, 4.4... lub 2.2.2, 3.3.3, 4.4.4 razy większa (mniejsza) wartość na A.

Cena dyamentu jest wprost proporcyonalna względem kwadratu jego ciężaru. Powierzchnia kwadratu jest względem kwadratu boku, a powierzchnia koła względem kwadratu promienia wprost proporcyonalną.

Droga, przebieżona przez ciało wolno spadające, jest wprost proporcyonalną względem kwadratu czasu, t. j. droga przebieżona w 2 sekundach jest 4 razy większa, niż droga przebieżona w 1 sekundzie.

Oświetlenie małéj powierzchni jest względem kwadratu odległości światła, a długość wahadła względem kwadratu liczby wahań, uskutecznionych w danym czasie, odwrotnie proporcyonalną.

Powierzchnia kuli jest względem kwadratu, a objętość kuli względem sześcianu promienia wprost proporcyonalną i t. d.

---

*) Kwadratem liczby, n. p. 5, zowie się iloczyn 2 czynników 5 . 5 czyli 25; sześcianem zaś liczby 5 zowie się iloczyn 3 czynników 5 . 5 . 5 czyli 125.

5. Dajmy na to, że A_1 i A_2 są dwie wartości na wielkość A, a B_1 i B_2 są dwie wartości na wielkość B tamtym odpowiadające.

Jeżeli wielkość A i B są względem siebie wprost proporcyonalne, widoczna wtedy, że stosunek $A_1 : A_2$ będzie równy stosunkowi $B_1 : B_2$, t. j.

$$A_1 : A_2 = B_1 : B_2.$$

Jeżeli zaś wielkości A i B są względem siebie odwrotnie proporcyonalne, wówczas, naodwrót, stosunek $A_1 : A_2$ będzie równy stosunkowi $B_2 : B_1$, t. j.

$$A_1 : A_2 = B_2 : B_1.$$

W pierwszym bowiem razie, jeżeli A_1 jest większe od A_2 pewną ilość razy, musi być także B_1 większe od B_2 tęsamę ilość razy; w drugim zaś przypadku rzecz się ma przeciwnie: jeżeli A_1 jest większe od A_2 pewną ilość razy, to B_1 musi być od B_2 tyleż razy mniejsze, a przeto B_2 od B_1 tyle razy większe.

Jeżeli więc dwie wielkości są względem siebie wprost proporcyonalne, to stosunek jakichkolwiek dwu wartości na jednę z nich jest równy stosunkowi prostemu dwu wartości na drugą, które tamtym odpowiadają. A jeżeli dwie wielkości są odwrotnie proporcyonalne, to stosunek jakichkolwiek dwu wartości na jednę z nich jest równy stosunkowi odwrotnemu dwu wartości na drugą, które tamtym odpowiadają.

Jeżeli wreszcie wielkość A jest n. p. względem kwadratu wielkości B wprost lub odwrotnie proporcyonalną, będziemy mieli odpowiednio:

$$A_1 : A_2 = B_1 . B_1 : B_2 . B_2$$

lub

$$A_1 : A_2 = B_2 . B_2 : B_1 . B_1.$$

6. Uwaga. Częstokroć zależy jedna wielkość od dwu lub więcéj innych wielkości; n. p. ciężar sztaby metalowéj od jéj rozmiarów i gęstości. Jeżeli się więc mówi, że jakaś wielkość, zależąca od wielu innych, jest względem jednéj z nich proporcyonalną, należy się dorozumiewać, że pozostałe są niezmienne. Jeżeli się n. p. mówi: ciężar sztaby metalowéj jest proporcyonalny względem gęstości, to się przypuszcza, że jéj rozmiary pozostają tesame.

§. 42.

Reguła trzech prosta.

Jeżeli z dwu gatunków wielkości proporcyonalnych, A i B, znaną jest jedna para przynależnych do siebie wartości, n. p. A_1 i B_1, to można zawsze dla jakiéjkolwiek innéj wartości B_2 gatunku drugiego wynaleść przynależną gatunku pierwszego A_2. Rachunek, który do tego celu prowadzi, nazywamy regułą trzech prostą *(einfache Regeldetrie)*.

Ogólny obraz zadania na regułę trzech prostą jest następujący:

„Jeżeli dwie wielkości A i B są proporcyonalne i jeżeli wartość A_1 na A odpowiada wartość B_1 na B, jaka wartości na A odpowiada wartości B_2 na B?"

W każdém więc zadaniu na regułę trzech prostą należy rozróżnić dwie części: warunek i pytanie.

W powyższém zadaniu ogólném jest:

warunkiem: Jeżeli wartość A_1 na A odpowiada wartości B_1 na B,

a pytaniem: Jaka wartość na A odpowiada wartości B_2 na B?

Niewiadomą wartość na A (która odpowiada wartości B_2 na B) oznacza się pospolicie literą x.

Zadania na regułę trzech można rozwiązać albo zapomocą prostego wnioskowania albo za pomocą proporcyj.

Wyłożymy oba sposoby, zaczynając od pierwszego.

§. 43.

Rozwiązywanie zadań na regułę trzech zapomocą wnioskowania.

1. Sposób rozwiązywania zadań na regułę trzech zapomocą wnioskowania, zwany także sposobem sprowadzenia do jedności, zależy na tém, że z warunku zadania oblicza się naprzód wartość jednostki tego gatunku, który jest dany przez dwie wartości, a potém wartość tylu tych jednostek, ile ich zawiera pytanie.

Zagadnienie 1. Jeżeli 7 *m* sukna kosztuje 35 zł., ile zł. kosztuje 21 *m* tegosamego sukna?

Rozwiązanie. Ilość sukna i cena sukna są wielkościami wprost proporcyonalnymi (rozumie się, że przy téjsaméj jakości); wnioskujemy zatém, jak następuje: Skoro 7 *m* kosztuje 35 zł., to 1 *m* kosztuje 7 razy mniéj, a więc $\frac{35}{7}$ czyli 5 zł. Skoro następnie 1 *m* kosztuje 5 zł., to 21 *m* będzie kosztowało 21 razy więcéj, a więc 5.21 czyli 105 zł. Szereg tych wnioskowań, dla łatwiejszego przeglądu, tak się ustawia:

7 *m* kosztuje 35 zł.,
1 *m* „ $\frac{35}{7} = 5$ zł.,
21 *m* „ $5.21 = 105$ zł.

Uwaga. To zadanie można sposobem krótszym rozwiązać, gdyż liczba dana w pytaniu, t. j. 21 *m*, jest wielokrotnością liczby tegosamego gatunku w warunku, t. j. 7 *m*.

Jakoż, skoro 7 *m* kosztuje 35 zł., to 21 czyli 7.3 *m* kosztować będzie 3 razy więcéj, t. j. 35.3 czyli 105 zł.

Zagadnienie 2. Jeżeli 48 robotników potrzebuje na wykończenie pewnéj roboty 9 dni pracować, w ilu dniach wykończy tęsamę robotę 72 robotników?

Rozwiązanie. Ilość robotników jest odwrotnie proporcyonalną względem czasu trwania pewnéj roboty, dlatego należy teraz tak wnioskować: Skoro 48 robotników potrzebuje do wykonania pewnéj roboty 9 dni, to 1 robotnik potrzebowałby 48 razy dłuższego czasu, a więc 48.9 czyli 432 dni. Skoro 1 robotnik potrzebowałby 432 dni, to 72 robotników będzie potrzebowało 72 razy krótszego czasu, a więc $\frac{432}{72}$ czyli 6 dni. Zestawiwszy te wnioskowania, będziemy mieli:

48 robotników potrzebuje 9 dni,
1 „ „ $9.48 = 432$ dni,
72 „ „ $\frac{432}{72} = 6$ dni.

Uwaga. To zadanie można rozwiązać w liczbach mniejszych, uważając, że liczba dana w pytaniu, t. j. 72 robotników, i liczba tegosamego gatunku w warunku, t. j. 48 robotników, mają 12 jako największy spólny podzielnik. Zamiast więc sprowadzać do jedności, wystarczy sprowadzenie do tego największego spólnego podzielnika. Należy więc tak wnioskować:

48 robotników potrzebuje 9 dni,

12 „ „ $9.4 = 36$ dni, gdyż $12 = \frac{48}{4}$,

72 „ „ $\frac{36}{6} = 6$ dni, gdyż $72 = 12.6$.

Zagadnienie 3. Z łąki kolistéj o promieniu 40 *m* zebrano 55 *q* siana; ile siana zebranoby z téj łąki, gdyby jéj promień wynosił 72 *m*?

Rozwiązanie. Zważywszy, że powierzchnia koła jest wprost proporcyonalną względem kwadratu promienia i ponieważ liczby 40 *m* i 72 *m* mają jako największy spólny podzielnik 8 *m*, gdyż $40 = 8.5$, $72 = 8.9$, tak wnioskować będziemy: Skoro z łąki o promieniu 40 *m* zebrano 55 *q* siana, więc z łąki o promieniu 8 *m*, czyli 5 razy mniejszym, zebranoby 5.5, czyli 25 razy mniéj, a więc $\frac{55}{25}$ czyli $\frac{11}{5}$ *q*. Skoro z łąki o promieniu 8 *m* zebrano $\frac{11}{5}$ *q*, to z łąki o promieniu 72 *m*, czyli 9 razy większym, zebranoby 9.9, czyli 81 razy więcéj, a więc $\frac{11}{5} . 81$, czyli $\frac{891}{5}$ t. j. 178·2 *q*. Mamy zatém następujący rachunek:

promieniowi 40 *m* odpowiada 55 *q* siana,

„ 8 *m* „ $\frac{55}{25}$ czyli $\frac{11}{5}$ *q*,

„ 72 *m* „ $\frac{11}{5}.81$ czyli $\frac{891}{5}$ t. j. 178·2 *q*.

Zagadnienie 4. Jasność światła lampy błyskawicznéj jest w odległości 5 *m* równą jasności światła 12 świec; jaką jest ta jasność w odległości 10 *m*?

Rozwiązanie. Jasność światła jest odwrotnie proporcyonalną względem kwadratu odległości; należy więc tak rozumować: Skoro 10 *m* jest 2 razy więcéj, niż 5 *m*, więc jasność światła w odległości 10 *m* będzie 2.2 czyli 4 razy mniejszą, niż w odległości 5 *m*; a zatém jasność lampy błyskawicznéj w odległości 10 *m* będzie się równała jasności światła $\frac{12}{4}$ czyli 3 świec.

Zadania.

(Rozwiązać przeważnie z pamięci).

1. 9 *m* sukna kosztuje 63 zł.; ile kosztuje 8 *m*?
2. Za 1 *hl* wina zapłacono 50 zł.; ile kosztuje 8 *l*?

3. Za 24 zł. kupiono 18 *kg* kawy; ile dostanie za 16 zł.?

4. Za 3 *ha* pola zapłacono 630 zł.; ile za 5 *ha* potrzeba zapłacić?

5. Za przewiezienie towaru na odległość 1 *μa* zapłacono 1 zł. 50 ct.; ile potrzeba zapłacić za przewiezienie tego towaru na odległość 48 *km*?

6. Koło robi w 20 minutach 540 obrotów; ile w 6 minutach?

7. Jednostajnie wznosząca się droga wznosi się na 4 *km* o 48 *m*; o ile *m* wzniesie się ona na 10 *km*?

8. Robotnik zarobił 25 zł. 50 ct. w 17 dniach; *a)* ile zarobi w 5 dniach, *b)* w ilu dniach zarobi 37 zł. 75 ct.?

9. Potrzeba 35 *l* nasienia, ażeby zasiać 24 *a* pola; ile potrzeba nasienia, ażeby zasiać 3 *ha*?

10. Kiedy pewną kwotę pieniężną rozdzieli się pomiędzy 36 osób, to każda dostanie po 5 zł.; między ile osób potrzebaby tę kwotę rozdzielić, ażeby każda dostała 4 zł.?

11. Wodotrysk daje 18 *l* wody w 3 minutach; ile da w 1 godzinie?

12. Na chodnik potrzeba 20 płyt na 1·2 *m* długich; ile płyt potrzeba na tensam chodnik, jeżeli długość każdéj płyty wynosi tylko 0·8 *m*?

13. 15 robotników dokonało pewnéj pracy w 13 dniach; ilu potrzeba robotników, ażeby téjsaméj pracy dokonać w 5 dniach?

14. Jeżeli pewien zapas żywności wystarczy dla 600 żołnierzy na 52 dni; na ile dni wystarczy tensam zapas dla 400 żołnierzy?

15. Sprzedano za 600 zł. 2 *ha* i 70 *a*; ileż otrzyma się za 8 *ha* 40 *a* takiéjsaméj ziemi?

16. Kapitał daje na rok 2310 zł. dochodu; ile w 8 miesiącach?

17. Do skoszenia łąki w 6 dniach potrzeba 12 kosiarzy; ilu potrzeba nająć kosiarzy, aby tę łąkę skosić w 4 dniach?

18. 100 zł. kapitału daje 6 zł. dochodu; ile dochodu da 300, 800, 1500 zł. kapitału?

19. Z 40 *kg* przędzy wyrabia się 265 *m* płótna; ile z 56 *kg*?

20. Dostawa $4\,m^3$ kamieni kosztuje $13\frac{3}{4}$ zł.; ile pod tymisamymi warunkami dostawa $17\frac{7}{10}m^3$?

21. Kapitał 4500 zł. dał w pewnym czasie dochodu 500 zł.; ile dochodu da kapitał 7600 zł. w tymsamym czasie i pod tymisamymi warunkami?

22. Jeżeli 16 murarzy 12 godzin dziennie pracuje, aby mur pewien wystawić w 15 dniach; w ilu dniach tensam mur będzie gotów, jeżeli tasama ilość robotników będzie pracowała tylko po 10 godzin dziennie?

23. Kamień młyński robi $\frac{3}{4}$ obrotu w $\frac{2}{3}$ sekundy; ile obrotów zrobi w 15 sekundach?

24. Potrzeba $5\,m$ materyi, na $\frac{3}{4}$ *m* szerokiéj, na pokrycie kanapy; ile *m* potrzeba materyi, szerokiéj na $\frac{2}{3}$ *m*?

25. Ciało, wolno spadające, przebiegło w 5 sekundach $123{\cdot}85\,m$; ile metrów przebiegnie w 15 sekundach?

26. Na polu kształtu kwadratu, którego bok ma $12\,m$ długości, posiano $45\,l$ zboża; ile zboża posiać można na polu kwadratowém, którego bok ma $28\,m$ długości?

27. Światło, umieszczone w środku kuli wydrążonéj o promieniu wewnętrznym na $6\,m$ długim, oświetla wewnętrzną powierzchnię kuli z siłą 18 świec; z jaką siłą oświetli tosamo światło wewnętrzną powierzchnię kuli, gdy jéj promień jest na $9\,m$ długi?

28. Litr żywego srebra waży $13{\cdot}5\,kg$; ile waży $20\,cm^3$?

29. Robotnik, mający do szpichlerza zanieść 134 worków zboża, zanosi po 4 worki co 5 minut; jakiego czasu potrzebuje na zaniesienie wszystkich worków?

30. Na wysadzenie pewnéj drogi topolami potrzeba 243 topoli, jeżeli odległość jednéj od drugiéj ma wynosić $1{\cdot}64\,m$; ile potrzeba topoli, jeżeli ta odległość ma wynosić $1{\cdot}37\,m$?

§. 44.
Rozwiązywanie zadań na regułę trzech prostą zapomocą proporcyj.

Każde zadanie na regułę trzech prostą można rozwiązać zapomocą jednéj proporcyi. W tym celu potrzeba stosunek dwu liczb jednego gatunku zrównać ze stosunkiem prostym albo odwrotnym dwu liczb drugiego gatunku, które tamtym odpowiadają, stosownie do tego, czy dwie wielkości, które do zadania wchodzą, są wprost, czy też odwrotnie proporcyonalne. Jeżeliby jedna wielkość była względem kwadratu albo sześcianu drugiéj wprost lub odwrotnie proporcyonalną, wówczas zamiast stosunku wartości na tę drugą wielkość wziąć należy stosunek kwadratów lub sześcianów tych wartości.

Zagadnienie 1. Jeżeli 8 robotników zarabia 136 zł., ile zarabia 20 robotników w tymsamym czasie?

Rozwiązanie. Mamy jako
warunek: 8 robotników 136 zł., a zatém $x : 136 = 20 : 8$, skąd
pytanie: 20 „ x; $x = \frac{136 \,.\, 20}{8} = 340$ zł.

Zagadnienie 2. Na obicie pokoju potrzeba 152 m materyi na 0·9 m szerokiéj; ile m potrzeba innéj materyi na 1·2 m szerokiéj?

Rozwiązanie. Mamy jako
warunek: 152 m dług. 0·9 m szer., a zatém $x : 152 = 0{\cdot}9 : 1{\cdot}2$, skąd
pytanie: x „ „ 1·2 „ „ $x = \frac{152 \,.\, 0{\cdot}9}{1{\cdot}2} = 114\,m$.

Zagadnienie 3. Kamień młyński z bazaltu, mający w średnicy 1·25 m, waży 814 kg; ile waży inny kamień młyński z tegosamego materyału i téjsaméj grubości, którego średnica zawiera 1·05 m? (Wagi dwu krążków téjsaméj grubości i z tegosamego materyału są wprost proporcyonalne względem kwadratów średnic).

Rozwiązanie. Mamy jako
warunek: 1·25 m 814 kg, a zatém $x : 814 = 1{\cdot}05 \,.\, 1{\cdot}05 : 1{\cdot}25 \,.\, 1{\cdot}25$,
pytanie: 1·05 m x; skąd $x = \frac{814 \,.\, 1{\cdot}05 \,.\, 1{\cdot}05}{1{\cdot}25 \,.\, 1{\cdot}25} = 574{\cdot}358\,kg$.

Zagadnienie 4. Sześcian z piaskowca, którego krawędź wynosi 1·2 *m*, waży 2436 *kg*; ile ważyłby sześcian z piaskowca, mający w krawędzi 3·6 *m*? (Wagi wprost proporcyonalne względem sześcianów krawędzi).

Rozwiązanie. Mamy jako

warunek: 1·2 *m* 2436 *kg*, a zatém, $x : 2436 = 3{\cdot}6 . 3{\cdot}6 . 3{\cdot}6 : 1{\cdot}2 . 1{\cdot}2 . 1{\cdot}2$,

pytanie: 3·6 „ x; skąd $x = \frac{2436 . 3{\cdot}6 . 3{\cdot}6 . 3{\cdot}6}{1{\cdot}2 . 1{\cdot}2 . 1{\cdot}2} = 65772$ *kg*.

Zadania.

1. 14 *m* sukna kosztuje 63 zł.; ile kosztuje 8 *m*; ile *m* otrzyma się za 76·5 zł.?

2. Na utrzymanie 16 ludzi potrzeba na pewien czas 150 zł.; ile złotych potrzeba w tymsamym czasie na utrzymanie 84 ludzi; ilu ludzi utrzyma się w tymsamym czasie za 234·375 zł.?

3. Parostatek w przeciągu $3\frac{3}{4}$ dnia przepłynął $920\frac{1}{4}$ *km*; w ilu dniach przepłynie 7364 *km*; ile *km* przepłynie w przeciągu tygodnia?

4. 45 robotników ukończyło pewną robotę w 9 tygodniach; ilu robotników wykończy ją w 7 tygodniach; w ilu tygodniach ukończy ją 54 robotników?

5. Ktoś, pracując przez 45 dni, za każde 6 dni otrzymał $15\frac{3}{5}$ zł.; ile złotych otrzymał za cały czas?

6. Ktoś, pracując przez pewien czas, otrzymał zapłaty $92\frac{1}{2}$ zł.; jeżeli za każde 16 dni liczyło się 25 zł., ile dni pracował?

7. Laska, pionowo ustawiona, na 1·3 *m* wysoka, rzuca cień na 1·7 *m* długi; w tymsamym czasie rzuca wieża cień 21·3 *m* długi: jaka jest wysokość wieży?

8. Na podłogę potrzeba 18 tarcic, długich na 3·5 *m*; ile tarcic téjsaméj szerokości potrzeba, jeżeli długość każdéj wynosi 3 *m*?

9. Wół na pastwisku, uwiązany na postronku $3\frac{1}{2}$ *m* długim, spożył w 3 dniach trawę, jakiéj mógł dosięgnąć; na ile dni wystarczyłaby mu trawa, jeżeliby postronek był na 7 *m* długi?

10. Na $1\frac{1}{2}$ dm^2 wywiera powietrze atmosferyczne (przy pewnéj wysokości barometru) ciśnienie równe ciężarowi $150\frac{1}{5}$ *kg*; na ile dm^2 wywiera ono ciśnienie $375\frac{2}{5}$ *kg*?

11. Dwa koła zazębione, których zęby wchodzą jedne w drugie, posiadają: pierwsze 64 zębów, a drugie 36 zębów; ile obrotów zrobi drugie, jeżeli pierwsze zrobiło 90 obrotów?

12. Chyżość lokomotywy jest $1\frac{3}{4}$ razy większa od chyżości parostatku; jeżeli lokomotywa w 2 godzinach przebiegła 45 *km*, ile *km* przebiegnie w tymsamym czasie parostatek?

13. Stosunek siły opałowéj drzewa sosnowego do siły opałowéj drzewa bukowego, równa się stosunkowi 27 : 37; *a)* ile warte 4 m^3 drzewa sosnowego, jeżeli za 4 m^3 drzewa bukowego płaci się 12·5 zł., *b)* ilu m^3 drzewa bukowego równa się pod względem opałowym 100 m^3 drzewa sosnowego?

14. Potrzeba spalić 17000 *kg* węgla, ażeby z rudy wytopić 6285 *kg* żelaza; ile potrzeba spalić węgla, ażeby wytopić 11812 *kg*?

15. 1 *kg* czystego srebra kosztuje 90 zł. w. a.; ile wart 1 *kg* srebra 900-, a ile 1 *kg* srebra 750-dzielnego?

16. Promień ziemi pozostaje względem promienia księżyca w stosunku 11 : 3; *a)* jak wielki jest promień księżyca, jeżeli promień ziemi wynosi $854\frac{3}{5}$ mil geograficznych, *b)* jaki jest stosunek objętości księżyca do objętości ziemi?

17. 1 *kg* złota czystego kosztuje 1395 zł. w. a.; ile kosztuje 1 *kg* złota 900- i 850-dzielnego?

18. Stosunek chyżości dwu pociągów kolejowych A i B jest równy 5 : 6; w ilu godzinach przebiegnie A tę drogę, jaką B przebiega w 13 godzinach?

19. 100 stóp angielskich równa się $30\frac{1}{2}$ *m*; ile metrów wynosi 23 stóp angielskich; ile stóp angielskich wynosi 57 *m*?

20. 100 krużków rosyjskich równa się 123 litrom; ile krużków zawiera w sobie 1 *hl*?

21. 15 funtów angielskich równa się $6\frac{4}{5}$ *kg*; ilu *kg* równa się $24\frac{1}{2}$ funt. ang.; ilu funtom ang. równa się $18\frac{3}{10}$ *kg*?

22. 100 franków równa się 40·5 zł. w. a.; ile złotych trzeba zapłacić za 518 franków?

23. Kupiec warszawski ma zapłacić w Wiedniu 5460 zł.; ile ma na to wydać rubli, jeżeli kurs rubli w Wiedniu jest 84·8 (100 zł. w. a. = 84·8 r. s.)?

24. Kupiec krakowski ma zapłacić w Hamburgu 1245 marek; ile zł. w. a. musi zapłacić, jeżeli kurs złotych w Hamburgu był 62·5 (100 marek = 62·5 zł. w. a.)?

25. Dom handlowy w Bordeaux ma do żądania 3274 franków od kupca w Poznaniu; ile kupiec z Poznania zapłaci marek, jeżeli kurs marek w Bordeaux jest 84 (100 franków = 84 marek)?

26. Jaki był kurs złotych w Londynie, jeżeli za 525 funt. sterling. zapłacono 6552 zł. w. a.? (t. j. ile zł. w. a. trzeba było dać za 10 funt. sterling.?).

27. Dwu kupców kupuje 2456 *hl* zboża: A bierze 1132 *hl* za 7358 zł., ile wziął B i ile za to zapłacił?

28. Za beczkę cukru, ważącą brutto 1937·5 *kg* zapłacono 517 zł.; ile zapłacono za 25 *kg* netto cukru, jeżeli tara wynosiła 37·5 *kg*?

29. Ktoś za pewien grunt zapłacił 2460 zł., za ile zł. ma sprzedać ten grunt, jeżeli chce mieć $7\frac{1}{2}$ zł. zysku na każdych 100 zł. wydanych na kupno? (Za każde 100 zł. chce wziąć $107\frac{1}{2}$).

30. Długość osi naszéj ziemi wynosi 6356 *km*, a średnicy równika 6377 *km*; ileż będzie wynosiła średnica równika w globie ziemskim, którego oś wynosi 395 *mm*?

31. Kraj o 15806 km^2 powierzchni liczy 688564 mieszkańców; ile mieszkańców przypada przy równéj gęstości zaludnienia na 3750 km^2?

32. 28 robotników ukończyłoby pewną robotę w 15 dniach; po 3 dniach donajęto 6 robotników: po ilu dniach reszta roboty zostanie wykończona? (Po ilu dniach 34 robotników ukończy tęsamę robotę, jaką 28 robotników ukończyłoby w 12 dniach).

33. 48 robotników ukończyłoby pewną robotę w 12 dniach, ale po 2 dniach zażądano, aby reszta roboty została wykończona w 6 dniach; ilu robotników musiano donająć?

34. Stosunek długości dwu linij jest równy $1\frac{3}{8} : 4\frac{3}{4}$; jak długą jest druga linia, jeżeli pierwsza zawiera 187 *m*?

35. Drogę może 30 ludzi naprawić w 12 tygodniach; początkowo pracowało nad nią 45 ludzi przez 6 tygodni; ilu ludzi potrzeba potém donająć, ażeby naprawę reszty ukończono w $4\frac{1}{2}$ tygodniach?

36. Dyament, ważący 1·18 granów kosztuje 120 zł. Ile zł. kosztuje dyament równéj dobroci i postaci, wszakże ważący 2·36 granów? (Cena dyamentu jest proporcyonalną względem kwadratu jego wagi).

37. Jeżeli ciało, spadając pionowo, przebiega 176·5 *m* w 6 sekundach, jak głęboką jest studnia, jeżeli kamień w niéj spadający dosięga dna w $3\frac{1}{4}$ sekundach? (Przy ciałach spadających jest droga proporcyonalną względem kwadratu czasu).

38. Jasność światła słonecznego na naszéj ziemi jest równa jasności 50000 świec woskowych w odległości 1 *m*. Jaka jest jasność światła słonecznego *a)* na Uranie, *b)* na Neptunie, jeżeli średnie odległości tych dwu planet od słońca są odpowiednio 19·182639 i 30·03386 razy większe, niż średnia odległość ziemi od słońca? (Przy odległości 2, 3 i t. d. razy większéj jest jasność światła 4, 9 i t. d. razy słabsza).

39. Kula armatnia, ważąca $12\frac{3}{4}$ *kg*, ma 15 *cm* średnicy. Jaka jest waga kuli armatniéj, któréj średnica wynosi 9 *cm*? (Objętość, a więc i waga kuli z tegosamego materyału jest proporcyonalną względem sześcianu średnicy).

ROZDZIAŁ IX.

O regule procentu.

§. 45.

Zadanie reguły procentu.

Przy wypożyczaniu pieniędzy jest dłużnik, t. j. biorący pożyczkę, obowiązany nie tylko do zwrócenia wierzycielowi, t. j. dającemu pożyczkę, kwoty wypożyczonéj, ale także do zapłacenia wierzycielowi pewnego wynagrodzenia za utratę zysków, jakieby tenże miał, gdyby sam swymi pieniądzmi obracał.

Taki jest początek reguły procentu, dlatego tak nazwanéj, że obliczenie wynagrodzenia, jakie się ma płacić wierzycielowi, stosuje się do kwoty, jaką za każdy rok trwania pożyczki należy płacić od każdych 100 zł. wypożyczonych pieniędzy (*pro centum* = za sto).

Każde zadanie na regułę procentu zawiera cztery wielkości: kapitał, stopę procentową, czas i procenta.

Kapitałem *(Capital)* jest kwota pieniężna wypożyczona.

Stopą procentową *(Procentsatz, Zinsfuss)* jest wynagrodzenie roczne za wypożyczenie 100 zł. Jeżeli się więc powiada, że pewną kwotę wypożyczono na 5 od sta, należy rozumieć, że za każde 100 zł. téj kwoty należy płacić 5 zł. rocznie. W tym przypadku 5 jest stopą procentową; oznaczamy ją, pisząc 5%, co znaczy: 5 od sta.

Czas wskazuje liczbę lat, miesięcy lub dni trwania pożyczki.

Procentami *(Zins, Interesse)*, zowiemy wreszcie wynagrodzenie, należne od całego kapitału wypożyczonego, obliczone stosownie do umówionéj stopy procentowéj i za cały czas trwania pożyczki.

Procenta mogą być proste albo składane. Procenta zowiemy prostymi, jeżeli przez cały czas trwania pożyczki kapitał pozostaje niezmieniony. Procenta są zaś składanymi, jeżeli na końcu każdego roku lub półrocza procenta, należne za ten czas, do kapitału się dokłada z tém zastrzeżeniem, ażeby nadal płacono procenta nie tylko od kapitału pierwotnego, ale i od procentów, już do kapitału dodanych. W tym rozdziale mówić będziemy tylko o procentach prostych.

Jeżeli z tych czterech wielkości którekolwiek trzy są dane, to czwartą można obliczyć albo zapomocą proporcyj albo przez sprowadzenie do jedności. Użyjemy tylko drugiego sposobu jako najwłaściwszego w tego rodzaju zagadnieniach.

§. 46.

Rachunek procentów prostych.

1. Zagadnienie 1. Ile wynoszą procenta od kapitału 1245 zł., umieszczonego na 5% przez jeden rok?

Rozwiązanie. Ażeby to zagadnienie rozwiązać, tak wnioskujemy: Skoro 100 zł. daje rocznie 5 zł., więc 1 zł. da rocznie 100 razy mniéj, niż 100 zł., t. j. $\frac{5}{100}$ zł., a przeto 1245 zł. dadzą 1245 razy więcéj, niż 1 zł., t. j. $\frac{1245 \cdot 5}{100}$ czyli 62·25 zł.

Uwaga. Wnioskowanie powyższe jest niezależne od wartości szczególnych kapitału i stopy procentowéj. Jakiekolwiek byłyby te wartości, zawsze znajdziemy ostatecznie, że procenta roczne otrzymamy, gdy kapitał pomnożymy przez stopę procentową, a ten iloczyn podzielimy przez 100. Oznaczając zatém ogólnie przez literę początkową K kapitał, przez p stopę procentową, a przez P roczne procenta, mamy wzór

$$P = \frac{K \cdot p}{100},$$

wyrażający wypowiedziane dopiero prawidło.

Chcąc więc obliczyć procenta roczne od kapitału n. p. 2800 zł., umieszczonego na 4%, dość w tym wzorze **podstawić** 2800 za K i 4 za p, a potém wykonać wskazane działania; będzie zatém w tym przypadku szczególnym:

$$P = \frac{2800.4}{100} = 112 \text{ zł.}$$

2. **Zagadnienie** 2. Kapitał 780 zł. umieszczono na 6%; ile wynoszą procenta za 3 lata?

Rozwiązanie. Procenta za 3 lata wynoszą 3 razy więcéj, niż procenta za 1 rok. A zatém, skoro procenta roczne wynoszą w tym przypadku, według powyższego prawidła, $\frac{780 \,.\, 6}{100}$ zł., więc procenta za 3 lata wyniosą $\frac{780 \,.\, 6 \,.\, 3}{100}$ czyli 140·40 zł.

Uwaga. Jakakolwiek byłaby liczba lat, za jakie się procenta oblicza, zawsze procenta roczne trzeba pomnożyć przez tę liczbę lat. A zatém, jeżeli ogólnie przez l oznaczymy liczbę lat, a przez P procenta, za l lat należne od kapitału K umieszczonego na p, mieć będziemy wzór

$$P = \frac{K.p.l}{100},$$

wyrażający prawidło następujące: **Chcąc obliczyć procenta, potrzeba kapitał pomnożyć przez stopę procentową i przez liczbę lat, a ten iloczyn podzielić przez 100.**

Z tego wzoru ogólnego otrzymamy rozwiązanie wszelkich zagadnień tegosamego rodzaju. Tak n. p. jeżeli kapitał 254 zł. umieszczono na 5%, to procenta od tego kapitału za $3\frac{1}{2}$ lat znajdziemy, gdy w tym wzore podstawimy 254 za K, 5 za p, $3\frac{1}{2}$ za l, a potém wskazane działania wykonamy; będzie zatém

$$P = \frac{254.5.3\frac{1}{2}}{100} = 44{\cdot}45 \text{ zł.}$$

Dla $l = 1$ przechodzi wzór tego ustępu na wzór ustępu poprzedzającego.

3. **Zagadnienie** 3. Przemysłowiec pożyczył 2340 zł. na 6% rocznie, chce jednak spłacić tę pożyczkę po upływie 3 miesięcy 7 dni; ile ma zapłacić tytułem procentów?

Rozwiązanie. Naprzód należy zauważyć, że według zwyczaju, przyjętego w świecie handlowym, miesiąc składa się z 30 dni, a przeto rok z 360 dni. A zatém, 3 miesiące 7 dni, rozłożone na dni, znaczą 97 dni czyli $\frac{97}{360}$ roku. Ażeby więc znaleść procenta w przypadku uważanym, potrzeba procenta należne za rok pomnożyć przez $\frac{97}{360}$, t. j. podzielić przez 360, a pomonżyć przez liczbę dni 97. Mieć więc będziemy $\frac{2340\,.\,6\,.\,97}{36000}$ czyli 37·83 zł.

Uwaga. Procenta roczne, podzielone przez 360, dają procenta należne za 1 dzień. Możemy więc powiedzieć, że chcąc otrzymać procenta, należne za pewną ilość dni, potrzeba procenta, należne za 1 dzień, przez tęż liczbę dni pomnożyć. Oznaczając ogólnie przez K kapitał, przez p stopę procentową, przez d liczbę dni, a przez P procenta za d dni należne, mieć będziemy wzór ogólny

$$P = \frac{K.p.d}{36000},$$

dający rozwiązanie wszelkich zagadnień tegosamego rodzaju.

Tak n. p. jeżeli kapitał 270 zł. umieszczono na 5%, to procenta, należne od tego kapitału za 5 miesięcy 12 dni czyli za 162 dni, wyniosą

$$P = \frac{270.5.162}{36000} = 6{\cdot}075 \text{ zł.}$$

Zadania.

1. Ile wynoszą procenta roczne po 1%, 2%, 3%, 4%, 5% od 200 zł., 300 zł., 450 zł., 760 zł., 1340 zł., 2564 zł.?

2. Obliczyć procenta roczne:

a) od 296 zł. po 4%; *b)* od 1750·50 zł. po 5%;

c) od 2540 zł. po $4\frac{1}{2}\%$; *d)* od 1834·50 zł. po $5\frac{1}{2}\%$;

e) od 3307 zł. po 6%; *f)* od 9036·25 zł. po $3\frac{3}{4}\%$.

3. Obliczyć procenta:

a) od 2183 zł. po 4% za 3 lata;

b) od 14788 zł. po $5\frac{1}{4}\%$ za 2 lata;

c) od 1948 zł. po $6\frac{1}{2}\%$ za $2\frac{1}{2}$ lat;

d) od 7350 zł. po $5\frac{3}{4}\%$ za 4 lata;

e) od 3800 zł. po 6% za 2 lata 4 miesiące;

f) od 6785 zł. po $4\frac{1}{2}\%$ za 3 lata 8 miesięcy.

4. Obliczyć procenta:

a) od 845 zł. po 5% za 3 miesiące;

b) od 2580 zł. po 4% za 5 miesięcy 10 dni;

c) od 324 zł. po 6% za 21 dni;

d) od 986 zł. po $3\frac{1}{2}\%$ za 2 miesiące 16 dni;

e) od 1245 zł. po $4\frac{1}{2}\%$ za 9 miesięcy 25 dni;

f) od 1230 zł. po $5\frac{1}{2}\%$ za 7 miesięcy 4 dni.

5. Obliczyć procenta:

a) od 1050·75 zł. po 5% za 2 lata 5 miesięcy 25 dni;

b) od 4926·50 zł. po $4\frac{1}{2}\%$ za rok 4 miesiące 10 dni;

c) od 5384·25 zł. po $5\frac{1}{4}\%$ za 3 lata 15 dni;

d) od 6350 zł. po 6% za 4 lata 7 miesięcy 12 dni.

6. Ile procentów dają 10540 zł. po $4\frac{1}{2}\%$ od 3. maja do 29. listopada tegosamego roku? (Czas kalendarzowy, przyczém nie rachuje się jednego z dwu dni terminowych).

7. Ktoś, ma pobrać procenta od 740 zł. po $4\frac{1}{2}\%$ za $1\frac{1}{2}$ roku, od 1453 zł. po 5% za 11 miesięcy i od 2585 zł. po $5\frac{1}{2}\%$ za czas od 1. maja do 13. sierpnia tegosamego roku; ile razem weźmie?

8. Ktoś, chcąc zapewnić sobie stały dochód półroczny, wkłada do kasy oszczędności 12400 zł.; ileż pobierać będzie półrocznie, jeżeli kasa oszczędności płaci 4% rocznie?

9. Ktoś wziął pożyczkę w kwocie 2500 zł. na 5%, lecz po upływie 3 lat 10 miesięcy zniżono mu stopę procentową na $4\frac{1}{2}\%$; ile winien zapłacić tytułem procentów za 5 lat 2 miesiące?

10. Ktoś, mając po upływie 3 lat spłacić pożyczkę 3648 zł. z procentami po $4\frac{1}{2}\%$, spłaca ją dopiero po upływie 4 lat 3 miesięcy; ileż ma spłacić tytułem procentów, jeżeli za czas zaległy jest obowiązany zapłacić nadto 2% procentów zwłoki?

§. 47.
Rachunek kapitału.

1. Zagadnienie 1. Jaki kapitał umieszczono na 5%, jeżeli procenta roczne wynoszą 945 zł.?

Rozwiązanie. Skoro 5 zł. procentów mamy od 100 zł. kapitału, więc 1 zł. procentów mieć będziemy od kapitału 5 razy mniejszego, t. j. od $\frac{100}{5}$ zł., a przeto 945 zł. procentów wypadnie od kapitału 945 razy większego, niż $\frac{100}{5}$ zł., t. j. od $\frac{945 \cdot 100}{5}$ czyli od 18900 zł.

Uwaga. Wnioskowanie powyższe nie zależy wcale od wartości danych na procenta i na stopę procentową; dlatego można wypowiedzieć, że ogólnie kapitał równa się iloczynowi z procentów rocznych i liczby 100, podzielonemu przez stopę procentową. W znakach ogólnych, w paragrafie poprzedzającym użytych, będzie

$$K = \frac{P.100}{p}.$$

Ten wzór można bezpośrednio otrzymać z wzoru §. 47. 1., mnożąc w tamtym obie strony równości przez 100, a dzieląc przez p.

2. Zagadnienie 2. Jaki kapitał, umieszczony na 6%, daje w 2 latach 204 zł. procentów?

Rozwiązanie. Celem rozwiązania tego zagadnienia tak wnioskujemy:

6 zł. procentów jest w 1 roku od 100 zł. kapitału,
1 " " " " " $\frac{100}{6}$ " "
204 " " " " " $\frac{204 \cdot 100}{6}$ " "
204 " " " w 2 latach " $\frac{204 \cdot 100}{6 \cdot 2} = 1700$ zł. kapitału.

Uwaga. Powtórzenie tego wnioskowania w każdym innym przypadku szczególnym prowadzi zawsze do tegosamego prawidła, a mianowicie, że chcąc otrzymać kapitał, potrzeba procenta pomnożyć przez 100 i ten iloczyn podzielić przez stopę procentową i liczbę lat, co w znakach ogólnych, poprzód użytych, wyraża się przez wzór

$$K = \frac{P.100}{p.l}.$$

Ten wzór otrzymamy bezpośrednio z wzoru w §. 46. 2., mnożąc obie strony równości w tamtym przez 100, a dzieląc przez iloczyn $p.l.$

3. Zagadnienie 3. Jaki kapitał umieszczono na 6%, jeżeli się za 4 miesiące 5 dni pobrało procentów 65 zł.?

Rozwiązanie. Wnioskujemy, jak poprzednio:

6 zł. procentów jest w 1 roku od	100 zł. kapitału,	
1 „ „ „ „ „	$\frac{100}{6}$ „ „	
65 „ „ „ „ „	$\frac{65 . 100}{6}$ „ „	
65 „ „ „ w 1 dniu „	$\frac{65 . 100 . 360}{6}$ „ „	
65 „ „ „ w 125 dniach	$\frac{65 . 36000}{6 . 125} = 3120$ zł. kapit.	

Uwaga. To i temu podobne zagadnienia prowadzą do prawidła ogólnego, wyrażonego wzorem

$$K = \frac{P.36000}{p.d},$$

który wprost otrzymamy z wzoru w §. 46. 3., gdy tamten pomnożymy przez 36000, a podzielimy przez iloczyn $p.d.$

Zadania.

1. Obliczyć kapitał, od którego procenta roczne
a) po 4% wynoszą 78 zł.; *b)* po 5% wynoszą 95 zł.;
c) po $5\frac{1}{2}$% „ 105 zł.; *d)* po 6% „ 169·2 zł.

2. Jaki kapitał, umieszczony
a) na 4%, daje w 3 latach 740 zł. procentów;
b) na $4\frac{3}{4}$% daje, w $2\frac{1}{2}$ latach 950 zł. procentów;
c) na $5\frac{2}{5}$% daje, w $3\frac{1}{2}$ latach 1512 zł. procentów.

3. Od jakiego kapitału otrzyma się
a) po 4% w 108 dniach 108 zł. procentów;
b) po $5\frac{1}{4}$% w 2 latach 2 miesiącach 2545 zł. procentów;
c) po 6% w 1 roku 3 miesiącach 15 dniach 960 zł. procentów.

4. Jaki kapitał, pożyczony 9. grudnia 1887. na 5%, przyniósł 540 zł. procentów 3. marca 1888.? (Czas kalendarzowy).

5. Jaki kapitał, dany na $4\frac{1}{2}\%$, przyniesie w 5 latach tyle procentów, ile kapitał 2560 zł. dany na 6% przyniósł w 3 latach 3 miesiącach?

6. Pewien kapitał, dany na $4\frac{1}{2}\%$, przynosi rocznie 18 zł. procentów; ile procentów przyniesie w $3\frac{1}{2}$ latach kapitał o 250 zł. większy, dany na 5%?

7. Jaką kwotę należy umieścić w kasie oszczędności, płacącéj 4% rocznie, ażeby sobie zapewnić dochód półroczny po 650 zł.

8. Od pewnego kapitału pobrano za 4 lata 1840 zł. procentów; jakito był kapitał, jeżeli płacono od niego przez dwa pierwsze lata po 4%, a przez dwa ostatnie lata po 5% rocznie?

§. 48.

Rachunek stopy procentowéj.

1. Zagadnienie 1. Kapitał 28450 zł. przyniósł w 1 roku 1707 zł. procentów; na ile % wypożyczono ten kapitał?

Rozwiązanie. Skoro 28450 zł. kapitału dały 1707 zł. rocznych procentów, to 1 zł. kapitału da 28450 razy mniéj, t. j. $\frac{1707}{28450}$ zł., a 100 zł. kapitału da znowu 100 razy więcéj, niż 1 zł., t. j. $\frac{1707 \, . \, 100}{28450}$ czyli 6 zł. Kapitał wypożyczono zatém na 6%.

Uwaga. Rozwiązując taksamo inne zagadnienia tegosamego rodzaju, zawsze dojdziemy do tego wypadku, że stopa procentowa równa procentom rocznym, pomnożonym przez 100, a podzielonym przez kapitał, co wyraża wzór ogólny

$$p = \frac{P.100}{K}.$$

2. Zagadnienie 2. Na ile % wypożyczono kapitał 3854 zł., jeżeli za $2\frac{1}{2}$ roku otrzymano 385·4 zł. procentów prostych.

Rozwiązanie. Teraz należy tak wnioskować:

Od 3854 zł. jest za $2\frac{1}{2}$ roku	385·4 zł.	procentów
„ 1 „ „ „ „ „	$\frac{385{\cdot}4}{3854}$ „	„
„ 100 „ „ „ „ „	$\frac{385{\cdot}4\,.\,100}{3854}$ „	„
„ 100 „ „ „ 1 rok	$\frac{385{\cdot}4\,.\,100}{3854\,.\,2\frac{1}{2}} = 4.$ zł.	procentów,

a zatém kapitał wypożyczono na 4%.

U w a g a. To i temu podobne zagadnienia rozwiązują się więc zapomocą prawidła: s t o p a p r o c e n t o w a j e s t r ó w n a p r o c e n t o m, p o m n o ż o n y m p r z e z 100, a p o d z i e l o n y m p r z e z k a p i t a ł i l i c z b ę l a t, które wyraża wzór ogólny

$$p = \frac{P.100}{K.l}.$$

3. Z a g a d n i e n i e 3. 2. maja wypożyczono 9110 zł., a 15. października zwrócono razem z procentami 9316 zł. 23 ct.; na ile % wypożyczono ten kapitał?

R o z w i ą z a n i e. Czas trwania pożyczki wynosił 166 dni, a procenta za ten czas wynosiły 206·23 zł. Wnioskujemy więc, jak następuje:

Od 9110 zł. jest za 166 dni	206·23 zł.	procentów,
„ 1 „ „ „ „ „	$\frac{206{\cdot}23}{9110}$ „	„
„ 100 „ „ „ „ „	$\frac{206{\cdot}23\,.\,100}{9110}$ „	„
„ 100 „ „ „ 1 „	$\frac{206{\cdot}23\,.\,100}{9110\,.\,166}$ „	„
„ 100 „ „ „ 360 „	$\frac{206{\cdot}23\ \ 100\,.\,360}{9110\,.\,166} = \frac{206{\cdot}23\,.\,36000}{9110\,.\,166} = 4{\cdot}91$ zł.	

Kapitał wypożyczono zatém na 4·91%.

U w a g a. W znakach ogólnych mamy następujący wzór

$$p = \frac{P.36000}{K.d},$$

dający rozwiązanie wszelkich zagadnień tego rodzaju.

Z a d a n i a.

1. Na ile % wypożyczono:

a) kapitał 800 zł., jeżeli procenta roczne wynoszą 32 zł.;
b) „ 5500 „ „ „ „ „ 330 „
c) „ 16000 „ „ „ „ „ 900 „
d) „ 18356 „ „ „ „ „ 1376 „ ?

2. Na ile $^0/_0$ wypożyczono:

a) kapitał 420 zł., jeżeli procenta za 4 lata wynoszą 90·80 zł.;
b) „ 1648 „ „ „ „ $2\frac{1}{2}$ „ „ 185·4 „
c) „ 1080 „ „ „ „ 3 lata 4 miesięcy 144 „
d) „ 3150 „ „ „ „ 8 mies. wynoszą 73·50 zł.?

3. Ktoś pożyczył 500 zł. na 7$^0/_0$ na jeden rok; ile $^0/_0$ mu rachowano, jeżeli procenta strącono z góry przy wypłacie kapitału?

4. Pewien kapitał, dany na 5$^0/_0$, przyniósł w trzch latach 1500 zł. procentów, a kapitał większy w stosunku 7 : 6 dał w tymsamym czasie 1800 zł. procentów; na ile $^0/_0$ wypożyczono wtóry kapitał?

5. Kupiec włożył w handel 12400 zł. Z zarobków wydawał corocznie na swoje utrzymanie 900 zł. i pokrywał wszelkie koszta handlowe, a po upływie 5 lat — zrobiwszy inwentarz zapasów — zobaczył, że te zapasy przewyższają włożony kapitał o kwotę 3250 zł.; ile $^0/_0$ zyskał na czysto na tym handlu?

6. Dom kupiono za 34500 zł., roczny czynsz wynosi 3650 zł., a podatki z dodatkami i kosztami utrzymania 42$^0/_0$ od czynszu; ile $^0/_0$ daje kapitał, włożony w kupno tego domu?

7. Pożyczono 2500 zł. na 5$^0/_0$; atoli po 4 latach 10 miesiącach dłużnik wypłaca wierzycielowi tylko 2680 zł. kapitału razem z procentami za cały czas; na ile $^0/_0$ umieszczono kapitał?

8. Na ile $^0/_0$ należałoby umieścić kapitał, ażeby mieć w 5 latach 1022 zł. procentów, jeżeli tensam kapitał na 5$^0/_0$ daje w 4 latach 876 zł. procentów?

§. 49.

Rachunek czasu.

Zagadnienie. W ilu latach przynosi kapitał 7560 zł., dany na $4\frac{1}{5}$$^0/_0$, 899 zł. 64 ct. procentów?

Rozwiązanie. Szereg wnioskowań, zapomocą jakich rozwiązuje się to zagadnienie, jest następujący:

100 zł. daje $4\frac{1}{5}$ zł. procentów w			1 roku,
1 „ „ $4\frac{1}{5}$ „	„	„	100 latach,
7560 „ „ $4\frac{1}{5}$ „	„	„	$\frac{100}{7560}$ „
7560 „ „ 1 „	„	„	$\frac{100}{7560 \,.\, 4\frac{1}{5}}$ „
7560 „ „ 899·64 „	„	„	$\frac{899{\cdot}64 \,.\, 100}{7560 \,.\, 4\frac{1}{5}} = 2\frac{5}{6}$ latach.

Uwaga. Rozważywszy dobrze to postępowanie, spostrzeżemy, że jest ono niezależne od wartości szczególnych na kapitał, stopę procentową i procenta; a przeto jakimikolwiek byłyby te wartości, zawsze dojdziemy do tego wypadku, że liczba lat jest równa procentom, pomnożonym przez 100, a podzielonym przez kapitał i przez stopę procentową.

W znakach ogólnych, poprzód użytych, mamy zatém wzór

$$l = \frac{P.100}{K.p},$$

dające rozwiązanie wszelkich zagadnień tegosamego rodzaju.

Ten wzór wypływa bezpośrednio z wzoru, danego w §. 46. 2.; dość tylko tamten pomnożyć przez 100, a podzielić przez iloczyn $K.p$, ażeby otrzymać teraźniejszy.

Zadania.

1. W jakim czasie daje kapitał:

a) 900 zł. na 5% 112·50 zł. procentów;

b) 9420 „ „ $4\frac{1}{2}$% 1413 „ „

c) 5212 „ „ $5\frac{1}{2}$% 916·65 „ „

d) 9822·75 „ „ $5\frac{3}{4}$% 1125·16 „ „

2. Po jakim czasie wyniesie kapitał 7240 zł., dany na $5\frac{1}{2}$%, razem z procentami 9231 zł.?

3. Po upływie jakiego czasu podwoi się kapitał, dany *a)* na 4%, *b)* na $4\frac{1}{2}$%, *c)* na 5% i *d)* na $5\frac{1}{2}$%?

4. Kapitał 1745 zł., dany na 4%, przyniósł o 134·35 zł. więcéj procentów, aniżeli wynoszą $2\frac{1}{2}$ letnie procenta od kapitału 2670 zł., danego na 5%; na jaki czas wypożyczono pierwszy kapitał?

5. Jak długo musi się kapitał 3180 zł. po $5\frac{2}{5}\%$ oprocentowywać, ażeby procenta od niego równały się 5-letnim procentom od kapitału 1908 zł., po 6% liczonym?

6. Dnia 3. stycznia pożyczono 1854 zł. na 5%, a w dniu spłaty zwrócono razem z procentami 1866 zł. 36 ct.; kiedy nastąpiła spłata?

7. Kapitał 3760 zł. przyniósł w 3 latach 3 miesiącach 682 zł. 10 ct. procentów; w jakim czasie przyniesie tyleż procentów kapitał 4888 zł.?

8. Pewien kapitał przyniósł w 8 miesiącach 139 zł. 50 ct. procentów; w jakim czasie przyniesie ten sam kapitał i taksamo oprocentowany 279 zł. procentów?

§. 50.

Rachunek wartości kapitału nabytéj i obecnéj.

Wartość, do jakiéj kapitał w pewnym czasie wzrasta wskutek doliczania do niego procentów, za ten czas należnych, nazwiemy wartością kapitału końcową albo nabytą; gdy tymczasem wartość kapitału na początku owego czasu zowie się jego wartością początkową albo obecną.

Jeżeli jedna z tych wartości jest dana i jeżeli znana jest stopa procentowa, tudzież dany czas oprocentowania, to drugą można odnaleść zapomocą prostego rachunku.

Zagadnienie 1. Jaka jest wartość nabyta kapitału 5480 zł., danego na 5%, po $2\frac{1}{2}$ latach?

Rozwiązanie 1. Wartość obecna $= 5480$ zł.,
procenta od niéj po 5% za $2\frac{1}{2}$ lat $= \frac{5480\,.\,5\,.\,2\frac{1}{2}}{100} = 685$ „
Wartość nabyta 6165 zł.

Rozwiązanie 2. Wartość 100 zł., danych na 5%, nabyta po $2\frac{1}{2}$ latach, jest $100 + 12{\cdot}5 = 112{\cdot}5$ zł. Stąd wypływa, że

wartość nabyta 1 zł. jest $1{\cdot}125$ zł.,
„ „ 5480 „ „ $5480\,.\,1{\cdot}125 = 6165$ zł.

Według tego drugiego sposobu znajdziemy wartość nabytą kapitału, gdy jego wartość obecną pomnożymy przez wartość nabytą jednostki kapitału.

Zagadnienie 2. Wartość kapitału, danego na 5%, nabyta po $2\frac{1}{2}$ latach, wynosi 6165 zł.; jaka jest jego wartość obecna?

Rozwiązanie. Wartość nabyta 1 zł., danego na 5%, po $2\frac{1}{2}$ latach jest 1·125; stąd wypływa, że nawzajem

wartość obecna 1·125 zł. jest 1 zł.

" " 1 " " $\frac{1}{1 \cdot 125}$ "

" " 6165 " " $\frac{6165}{1 \cdot 125} = 5480$ zł.

A zatém: Wartość obecną kapitału wyznaczy się, gdy się daną wartość kapitału nabytą podzieli przez wartość nabytą jednostki kapitału.

Zadania.

1. Jaka jest wartość nabyta kapitału:

a) 2054 zł. po 3 latach, gdy się liczy $4\frac{1}{2}$%;

b) 4026 zł. po 2 latach 3 miesiącach, gdy się liczy 5%;

c) 5785 zł. po 1 roku 5 miesięcy 12 dniach, gdy się liczy 6%.

2. Jaka jest wartość obecna kapitału:

a) który, dany na 4%, po $3\frac{1}{3}$ latach wzrósł do 4131 zł. 95 ct.;

b) który, dany na 6%, po 9 miesiącach wzrósł do 7748 zł. 82 ct.;

c) który, dany na $5\frac{1}{4}$%, po 2 latach wzrósł do 712·74 zł.

3. Ktoś pożyczył 8. marca 3094 zł. na 5%; ile winien 2. lipca? (Czas kalendarzowy).

4. Dług, płatny po 3 latach, spłaca się zaraz kwotą 2450 zł., potrącając sobie procenta po 5%; ile wynosił ten dług?

5. Jaki kapitał trzeba komuś wypożyczyć na 5%, aby po 3 latach otrzymać 3345 zł. 88 ct. kapitału z procentami?

6. Jaka jest wartość obecna kapitału, oprocentowanego po $6\frac{1}{4}$%, który w 3 latach wzrósł do 1026·19 zł.?

7. Za dom ofiaruje A 18500 zł. gotówką, B 19540 zł. po 9 miesiącach; które zaofiarowanie jest dla sprzedającego korzystniejsze, jeżeli tenże ma 6% z obrotu swymi pieniądzmi?

8. Kupiec, mający zapłacić 3550 zł. 18. września, a 1749 zł. 5. listopada, płaci obie kwoty z procentami po 5% dnia 31. grudnia; ile razem zapłacił?

§. 51.

Rozmaite zagadnienia z reguły procentu.

1. Nader liczne i różnorodne są zagadnienia, wzięte tak z życia praktycznego, jak i z zakresu nauk, które się rozwiązuje zapomocą reguły procentu. Niepodobna wszystkich wyliczyć. Dlatego pomówimy obszerniéj tylko o dwóch, a mianowicie o rachunku papierów publicznych i o ubezpieczeniach, a wiele innych uwzględnimy w zadaniach, gdzie się téż pomieści potrzebne wyjaśnienia.

2. Rząd, potrzebując naraz większych funduszów, aniżeli mogą dostarczyć dochody bieżące (podatki, cła, dochód z dóbr koronnych i t. p.), zaciąga pożyczkę. W tym celu wypuszcza t. zw. obligacye, pospolicie opiewające na 100, 500 i 1000 zł., które wydaje każdemu z wierzycieli za dostarczoną gotówkę, dając obligacyą na 100 zł. za 100 zł. dostarczonéj gotówki. Posiadanie obligacyi zapewnia posiadaczowi zwrot całéj kwoty, na jaką obligacya opiewa i stały dochód podług pewnéj stopy procentowéj aż do chwili spłaty téj kwoty.

Wypuszcza rząd także tytuły do pobierania stałego rocznego dochodu czyli t. zw. renty, nie wymieniając kapitału lub zastępując go fikcyjnym, i daje je wierzycielom w zamian za dostarczoną gotówkę. Posiadanie tytułu do pobierania renty zapewnia posiadaczowi jedynie stały dochód, lecz nie zapewnia mu zwrotu kapitału, wyłożonego na kupno tego tytułu.

Te obligacye różnych nazw i tytuły renty zowią się publicznymi papierami wartościowymi, a stanowią one przedmiot spekulacyi i gry na giełdzie. Zależnie bowiem od większéj lub mniejszéj ilości gotówki jest popyt na te papiery większy lub mniejszy. Stąd téż i wartość ich zmienna. Wartość obligacyi lub renty w danéj chwili zowie się jéj wartością obiegową albo kursem; ta wartość niezawsze zgadza się z jéj wartością imienną albo nominalną, t. j. tą, na jaką opiewa. Mówi się, że obligacye lub renty stoją al pari, jeżeli za obligacye na 100 zł. albo za rentę, n. p. pięcioprocentową, otrzymuje się 100 zł. gotówką.

Te różnice w kursie papierów publicznych dają powód do różnych zagadnień, które się rozwiązuje zapomocą reguły trzech prostéj lub zapomocą reguły procentu bez uwzględnienia czasu.

3. **Ubezpieczeniem** nazywamy umowę, przez którą się przedmiot oznaczony na czas ograniczony zabezpiecza przeciw przypadkom zewnętrznym. Tak n. p. zabezpiecza się dom przeciw pożarowi, zasiewy przeciw gradowi, okręty przeciw zatonięciu, kapitały na przypadek śmierci, posagi i t. d.

W tym celu zabezpieczający (n. p. towarzystwo ubezpieczeń) wydaje zabezpieczającemu się potwierdzenie zawartéj umowy, t. zw. **policę**, w któréj przedmiot zabezpieczony jest szczegółowo opisany i jego wartość podana, tudzież wymienione wynagrodzenie czyli t. zw. **premia**, jaką zabezpieczający się ma zabezpieczającemu płacić, aby mu tenże w razie poniesionéj straty, wartość téj straty zwrócił.

Wysokość **premii** jest proporcyonalną do wartości przedmiotu zabezpieczonego, a oblicza się ją podług pewnéj stopy procentowéj, która zależy od większego lub mniejszego prawdopodobieństwa straty czyli od t. zw. **ryzyka**.

Zagadnienia, dotyczące ubezpieczeń posagów, kapitałów pośmiertnych, wogóle ubezpieczeń na życie, wymagają do rozwiązania znajomości algebry; inne rozwiązuje się zapomocą reguły procentu.

Zadania.

1. Dostawca przedkłada kupcowi **fakturę** (t. j. rachunek za dostawione towary) na 1240 zł., zezwalając na 7% **rabatu** (opustu) w razie natychmiastowéj zapłaty należytości; ile kupiec, płacąc gotówką, ma zapłacić? (za 100 zł. 93 zł.)

2. Kupiec daje 4% rabatu ponad cenę towarów, która wynosi 835·45 zł.; ile kupujący winien zapłacić? (za 104 zł. 100 zł.)

3. Faktor pobiera od kupca $\frac{1}{2}$% **prowizyi** ponad cenę sprzedaży, w któréj pośredniczył; ile otrzyma, jeżeli cena sprzedanego towaru wynosi 2480 zł.? (za $100\frac{1}{2}$ zł. $\frac{1}{2}$ zł.).

4. Kupiec, sprowadziwszy towar za 2450 zł., zapłacił $\frac{3}{4}$% téj ceny ajentowi handlowemu tytułem prowizyi; ile ma wziąć za ten towar, jeżeli chce zyskać 12%?

5. Na towarze, kupionym za 948 zł., poniósł kupiec $9\frac{1}{2}$% straty; ileż stracił?

6. Przy sprzedaży towaru osiągnął kupiec $17\frac{1}{2}$% zysku, co uczyniło 2532 zł.; ile za towar zapłacił?

7. Przy upadłości domu handlowego okazało się, że stan czynny (majątek) wynosił 24560 zł., a stan bierny (długi) 32475 zł.; ile % otrzymali wierzyciele?

8. Za towar z odliczeniem $1\frac{1}{2}$% prowizyi zapłacono 282 zł.; ile wynosiła sama prowizya? (Na $98\frac{1}{2}$ zł. było $1\frac{1}{2}$ zł. prowizyi).

9. Za towar z doliczeniem 2% kosztów handlowych zapłacono 1326 zł.; ile wynosiły koszta handlowe? (Na 102 zł. było 2 zł. kosztów handlowych).

10. Na towarze, sprzedanym za 1581 zł., stracono 7%; ile wynosiła strata, ile cena zakupna?

11. Towar, sprzedany za 540 zł., przyniósł 12% zysku; ile było zysku, jaka była cena zakupna?

12. Podatek gruntowy gminy, obniżony o 33% wskutek wylewu wód, wynosi 273 zł.; ile wynosił pierwotnie?

13. Urzędnik pobiera miesięcznie 240 zł. razem z 15% dodatku drożyźnianego; jaka była pierwotna jego płaca?

14. Ażio (nadpłata) na złocie wynosi 18% (t. j. za 100 zł. w złocie trzeba srebrem zapłacić 118 zł.); ileż trzeba srebrem zapłacić za 398 zł., za 2545 zł. i za 3682 zł. w złocie?

15. Po ile % liczono ażio na złocie, jeżeli za 1475 zł. w złocie zapłacono 1829 zł. srebrem?

16. Kurs pewnych papierów publicznych wynosi 97·3 zł.; ile zł. zapłacono gotówką za 3600 zł. w tych papierach?

17. Za 33310 zł. gotówką kupiono 36000 zł. w papierach publicznych; jaki był wtedy kurs tych papierów?

18. Kupiono 200 obligacyj 5-procentowych po kursie 92 zł.; ile % przynosi kapitał włożony w to kupno? (92 zł. daje 5 zł.).

19. Chcemy umieścić 60000 zł. w rencie 3-procentowéj, któréj kurs wynosi 71·25 zł.; ile renty powinniśmy otrzymać? (Za każde 71·25 zł. otrzymamy 3 zł.).

20. Jakiego kapitału potrzeba na kupno 3000 zł. renty 5-procentowéj po kursie 98·75 zł.?

21. Na ile % umieściło się kapitał, kupiwszy rentę $4\frac{1}{2}$-procentową po kursie 88·70 zł?

22. Kurs renty 4-procentowéj jest 84·25 zł., a 3-procentowéj 69·15 zł.; w jakiéj rencie korzystniéj umieścić kapitał?

23. Tytuł do pobierania 600 zł. renty 3-procentowéj sprzedano po kursie 59 zł. 65 ct. i kupiono w zamian tytuł téjsaméj wartości renty 5-procentowéj po kursie 95 zł. 20 ct. Zapłacono $\frac{1}{4}$% kurtażu (honoraryum pośrednikowi) za te dwie operacye; jaki zysk osiągnięto przez tę zamianę, która się zowie arbitrażem?

24. Ubezpieczono dom, szacowany na 8500 zł., według stopy $\frac{2}{5}$%; ile wynosi premia?

25. Za ubezpieczenie płodów rolnych od gradobicia zapłacono 45 zł. 50 ct. tytułem premii, liczonéj podług stopy $\frac{1}{2}$%; jak wysoko oszacowano te płody?

26. Okręt z ładunkiem w wartości 275600 zł. ubezpieczono za premią 7268 zł.; według jakiéj stopy procentowéj liczono tę premią?

27. Jaka liczba jest o 15% większą (lub mniejszą) od liczby 360? (Na każde 100 danéj liczby ma iść 115 (lub 85) liczby szukanéj).

28. Dwaj bracia A i B otrzymali po śmierci ojca majątki równéj wartości 56500 zł.; po upływie 15 lat majątek A zwiększył się wskutek dobrego gospodarstwa o 23%, a majątek B zmniejszył się wskutek zaniedbania o 31%; ile wartały wówczas te majątki?

29. Ruda żelazna zawiera na wagę 17% czystego żelaza; ile *kg* żelaza można wydobyć z 16200 *kg* téj rudy?

30. Z buraków cukrowych można otrzymać na wagę 5% cukru; z ilu *kg* buraków wydobędzie się 2045 *kg* cukru?

31. W powietrzu atmosferyczném znajduje się na objętość 79% azotu, a 21% tlenu; ile każdego z tych składników jest w pokoju, którego objętość wynosi 210 m^3?

32. Ze 169 *kg* kamienia wapiennego wypalono $83\frac{1}{5}$ *kg* wapna; ile % utracił ten kamień przy wypalaniu?

33. Jeżeli 4 *hl* pszenicy zawierają tyle treści pożywnéj, co 5 *hl* żyta, o ile % pszenica jest pożywniejszą od żyta?

34. W majątku ziemskim, którego obszar wynosi 2045 *ha*, jest 28·5% lasu; ile *ha* lasu jest w tym majątku?

35. Drzewostan lasu zwiększa się corocznie o $1\frac{1}{5}$%. Wyrębując corocznie cały przyrost, ile m^3 drzewa otrzymało się w 8 latach, jeżeli las zawierał początkowo 20567 m^3 drzewa?

36. Powierzchnia Galicyi zawiera 88504·36 km^2, a powierzchnia całéj monarchii austro-węgierskiéj 624041 km^2; ile % powierzchni całéj monarchii wynosi powierzchnia Galicyi?

37. Według obliczenia z 31. grudnia 1880. ludność Galicyi wynosiła wówczas 5958907 mieszkańców, z których 2714977 wyznawało religią rz. kat., a 2510408 religią gr. kat.; ile % było wówczas rzymskich katolików, ile % greckich katolików, a ile % przypadało na inne obrządki lub wyznania?

38. Powierzchnia Moraw wynosi 22223·85 km^2; o ile % Galicya jest większą od Moraw, a Morawy są mniejszymi od Galicyi?

39. Jaka jest ludność miasta, jeżeli 20% téj ludności równa się liczbie procentów po 5% od 25940?

40. We Lwowie było 1887 r. 16504 dzieci, obowiązanych do uczęszczania do szkół ludowych, a nie uczęszczało do szkoły 8242 dzieci; ile % nie uczęszczało do żadnéj szkoły?

ROZDZIAŁ X.

O regule potrącania procentu czyli o dyskoncie.

§. 52.

Rachunek dyskontu prawidłowego.

1. W stosunkach handlowych rzadko płaci się gotówką za dostarczone przedmioty, lecz kupno pokrywa się t. zw. efektami, przez co się rozumie rozmaitego rodzaju zobowiązania piśmienne (promesy, traty, weksle) do zapłacenia kwoty dłużnéj w terminie oznaczonym.

Jeżeli wierzyciel potrzebuje pieniędzy przed upływem terminu, w efekcie wyrażonego, wówczas przekazuje ten efekt bankierowi, który mu w zamian daje gotówkę, zatrzymując dla siebie pewną kwotę tytułem wynagrodzenia. Ta kwota, przez bankiera potrącona z sumy w efekcie wymienionéj, a obliczona podług pewnéj stopy procentowéj, zowie się dyskontem.

Rachunek zaś, zapomocą którego oblicza się dyskont od efektów, nazywa się regułą potrącania procentu.

2. Ażeby przez wcześniejszą spłatę ani podający ani przyjmujący efekt do dyskontowania nie poniósł żadnéj straty, to wysokość dyskontu powinna się równać różnicy między kapitałem, wymienionym w efekcie, a wartością obecną tego kapitału, obliczoną podług umówionéj stopy procentowéj przy uwzględnieniu czasu, jaki ma upłynąć między chwilą dyskontowania, a chwilą płatności; albo, co wychodzi na jedno, wysokość dyskontu powinna się równać procentom, jakieby wartość obecna kapitału, w efekcie wymienionego, przyniosła w czasie między

chwilą dyskontowania a chwilą płatności efektu. Dyskont można zatém obliczyć dwojakim sposobem: albo przez uprzednie wyznaczenie wartości obecnéj kapitału albo téż bezpośrednio.

Zagadnienie 1. Ile wynosi dyskont po 6% (rocznie) od kapitału 6540 zł., płatnego po upływie $1\frac{1}{2}$ roku?

Rozwiązanie 1. 100 zł. wzrasta po upływie $1\frac{1}{2}$ roku do wysokości 109 zł. wartość więc obecna 109 zł. jest 100 zł., a przeto wartość obecna 1 zł. jest $\frac{100}{109}$ zł. Skoro tak rzecz się ma, więc obecna wartość kapitału 6540 zł. jest $\frac{6540 \cdot 100}{109} = 6000$ zł. Dyskont żądany jest więc 6540 — 6000 = 540 zł.

Rozwiązanie 2. Wartość nabyta 100 zł. jest w uważanym przypadku równa 109 zł.; stąd wypływa, że na odwrót wartość obecna 109 zł. jest 100 zł., a przeto, że od 109 zł. kapitału należy się 9 zł. dyskontu. Skoro tak rzecz się ma, więc wnioskujemy daléj, jak następuje:

od 109 zł. kapitału należy się 9 zł. dyskontu,
" 1 " " " " $\frac{9}{109}$ " "
" 6540 " " " " $\frac{6540 \cdot 9}{109} = 540$ zł. dyskontu.

3. Rozwiążmy jeszcze dwa następujące zagadnienia, w których występuje stopa procentowa lub czas jako niewiadoma.

Zagadnienie 1. Od kapitału 6540 zł., płatnego po $1\frac{1}{2}$ roku, policzono 540 zł. dyskontu; podług jakiéj stopy procentowéj liczono ten dyskont?

Rozwiązanie. Wartością kapitału 6540 zł. obecną (t. j. w chwili dyskontowania) było 6000 zł.; celem znalezienia stopy procentowéj, należy zatém tak wnioskować:

od 6000 zł. wynoszą za $1\frac{1}{2}$ roku procenta 540 zł.,
" 6000 " " " 1 " " $\frac{540 \cdot 2}{3} = 360$ zł.,
" 100 " " " 1 " " $\frac{360}{60} = 6$ zł.,

a zatém stopą procentową przyjętą było 6%.

Zagadnienie 2. Od kapitału 6540 zł. policzono 540 zł. dyskontu podług stopy 6%; jaki czas upłynął między chwilą dyskontowania a chwilą płatności tego kapitału?

Rozwiązanie. Mamy rozwiązać następujące zagadnienie: Za jaki czas policzono 540 zł. procentów po 6% (rocznie) od kapitału 6000 zł.?

Skoro, według warunków zagadnienia, od 100 zł. kapitału liczono rocznie 6 zł. procentów, więc od 6000 zł. kapitału wypada rocznie 360 zł. procentów. Skoro następnie 360 zł. procentów wypada za 1 rok, to 1 zł. procentów wypada za $\frac{1}{360}$ roku; a zatém, 540 zł. procentów wypadnie za $\frac{540}{360} = 1\frac{1}{2}$ roku.

Zadania.

1. Obliczyć dyskont:

a) po 4% od kapitału 680 zł., płatnego po roku;

b) „ $4\frac{1}{2}$% „ „ 1245 „ „ „ 9 miesiącach;

c) „ 5% „ „ 2540 „ „ „ 8 miesiącach.

2. Jaką jest kwota płatna po roku, która, zdyskontowana po 5%, zredukowała się do 960 zł. 40 ct.?

3. Ktoś chce natychmiast zrealizować weksel na 718 zł., płatny po $1\frac{1}{2}$ roku; ile powinien otrzymać, jeżeli stopa dyskontu wynosi 6%?

4. Jaka jest wartość obecna kwoty 787 zł., płatnéj po 15 miesiącach, jeżeli stopa dyskontu wynosi 5%?

5. Ile % dyskontu liczono, gdy za kwotę 1000 zł., płatną po roku, zapłacono 965 zł.?

6. Kwota wekslowa na 1283 zł., zdyskontowana po 6%, zmniejszyła się wskutek dyskontu o 98 zł.; po upływie jakiego terminu miała być płatną?

7. Ktoś, mając spłacić po upływie pewnego terminu 5323 zł. 50 ct., płaci zaraz 5040 zł., licząc sobie dyskont po $4\frac{1}{2}$%; po upływie jakiego czasu miał pierwszą kwotę zapłacić?

8. Za dom ofiaruje A 25200 zł., płatnych po roku, a B 26350 zł., płatnych po dwu latach; które z tych dwu zaofiarowań jest dla sprzedającego korzystniejsze, jeżeli stopa dyskontu wynosi 5%?

9. Bankier zapłacił 3397 zł. za weksel na 3500 zł., płatny po 13 miesiącach; ile % dyskontu liczył sobie?

10. Ktoś kupuje grunt za 4500 zł. pod warunkiem, że zapłaci zaraz 1000 zł., po roku 1500 zł., a resztę po dwu latach. Tymczasem postanawia dwie ostatnie raty także zaraz zapłacić z potrąceniem dyskontu po 6%; ile więc ma zapłacić?

§. 53.

Rachunek dyskontu handlowego.

1. Sposobu obliczania dyskontu, wyłożonego w poprzedzającym paragrafie, używa się wtedy, kiedy czas między chwilą dyskontowania a chwilą płatności efektu jest dłuższy. W razie, kiedy ten czas wynosi mniéj, niż $\frac{1}{2}$ roku, używa się sposobu krótszego, a mianowicie: oblicza się procenta od całego kapitału, w efekcie wymienionego, podług stopy umówionéj, a nie od wartości obecnéj tego kapitału. Tak obliczone procenta zowią się *dyskontem handlowym*.

2. *Dyskont handlowy jest zawsze większy od dyskontu prawidłowego, a mianowicie równa się dyskontowi prawidłowemu, powiększonemu procentami od tegoż dyskontu.*

Jakoż dajmy, że kapitał 1000 zł., płatny po 4 miesiącach, ma być dyskontowany podług stopy 6%.

Dyskont prawidłowy $= 1000 . \frac{2}{102} = 19·608..$ zł.

Dyskont handlowy $= 1000 . \frac{2}{100} = 20$ zł.

Różnica $20 - 19·608.. = 0·392..$ zł. przedstawia procenta od 19·608..zł. po 6% za 4 miesiące; gdyż istotnie te procenta wynoszą $19·608 . \frac{2}{100} = 0·392..$ zł.

3. Jak błędny jest zwyczaj handlowy obliczania dyskontu przy terminach dłuższych, pokazuje się z następujących uwag. Dyskont handlowy po 5% od 100 zł., płatnych po 20 latach, wynosiłby $\frac{100 \quad 5 . 20}{100} = 100$ zł., a więc dyskontujący bankier nie potrzebowałby nic płacić za weksel na 100 zł., płatnych po 20 latach. Dyskont handlowy po 5% od 100 zł., płatny po 40 latach, wynosiłby 200 zł., a więc podający do dyskontu musiałby do wekslu na 100 zł. jeszcze dopłacić bankierowi 100 zł., aby tenże wziął zań po 40 latach kwotę wekslową. Jedynie kiedy terminy są krótkie, różnica między dyskontem handlowym a prawidłowym jest nieznaczną.

Zadania.

1. Obliczyć dyskont:

a) po 5% od kapitału 1760 zł., płatnego po 3 miesiącach;

b) po $5\frac{3}{4}\%$ od kapitału 2050 zł., płatnego po $5\frac{1}{2}$ miesiącach;

c) „ $6\frac{1}{2}\%$ „ „ 1832 „ „ „ 7 mies. 11 dni.

2. Na co zamieni się kwota 650 zł., dyskontowana po 6%, za 3 miesiące 10 dni?

3. Weksel na 2800 zł., płatny 15. listopada, sprzedaje ktoś 3. października z dyskontem 6%; ile otrzyma?

4. Za weksel na 3067 zł. 65 ct., płatny 1. maja, zapłacono 16. kwietnia 3060 zł.; ile % dyskontu liczono?

5. Kupiec, mając płacić kwotę 728 zł. po 5 miesiącach 10 dniach, zapłacił ją dwa miesiące wcześniéj z potrąceniem 4%; ile wyniósł dyskont?

6. Jaka jest wartość obecna weksla na 855 zł., płatnego po 45 dniach, gdy dyskont wynosi $\frac{3}{4}\%$ miesięcznie?

§. 54.

Rachunek terminu średniego.

Niekiedy kilka weksli z różnymi terminami zastępuje się jednym wekslem na kwotę, równą sumie kwot, wyrażonych w tamtych wekslach. W tym przypadku chodzi o obliczenie terminu średniego, t. j. czasu, po upływie którego ten jeden weksel ma być zapłacony.

Termin średni oblicza się zapomocą warunku, że dyskont od tego jednego weksla powinien być równy sumie dyskontów od weksli pierwotnych, przyczem dyskont rachuje się sposobem handlowym, gdyż w tego rodzaju zagadnieniach zachodzą pospolicie terminy krótkie.

Zagadnienie. Znaleść termin średni dwu weksli: jednego na 1000 zł., płatnego po 6 miesiącach, a drugiego na 3000 zł., płatnego po 8 miesiącach.

Rozwiązanie. Ponieważ dyskont handlowy jest proporcyonalny do kapitału i do terminu płatności tego kapitału, więc dyskont od 1000 zł., płatnych po 6 miesiącach, jest równy dyskontowi od $1000 . 6 = 6000$ zł., płatnych po 1 miesiącu, dyskont zaś od 3000 zł., płatnych po 8 miesiącach, jest równy dyskontowi od $3000 . 8 = 24000$ zł., płatnych po 1 miesiącu. Skoro rzecz tak się ma, więc mamy rozwiązać zagadnienie: za jaki czas, wyrażony w miesiącach, dyskont od 1000 + 3000 = 4000 zł. będzie równy dyskontowi od 1000.6 + 3000.8 = 30000 zł., obliczonemu za 1 miesiąc. Widocznie ten czas będzie tyle razy dłuższy, niż 1 miesiąc, ile razy 30000 jest więcéj, niż 4000. Oznaczając zatém przez x liczbę miesięcy terminu średniego, mieć będziemy

$$x = \frac{30000}{4000},\ \text{t. j.}\ \frac{1000 . 6 + 3000 . 8}{1000 + 3000} = 7\frac{1}{2}\ \text{miesiąca.}$$

Stąd wypływa następujące prawidło: Ażeby znaleść termin średni kilku efektów, potrzeba naprzód kwotę każdego pomnożyć przez czas, jaki ma upłynąć do chwili jego płatności, a następnie sumę tak otrzymanych iloczynów podzielić przez sumę kwot, wyrażonych w tych efektach. Rozumie się, że poszczególne czasy powinny być wyrażone w tychsamych jednostkach.

Zadania.

1. Dłużnik chce trzy weksle: na 2600 zł., płatny po 3 miesiącach, na 3000 zł., płatny po 7 miesiącach, i na 4000 zł., płatny po 5 miesiącach, zastąpić jednym wekslem na całą kwotę dłużną; jaki będzie termin średni tego jednego wekslu?

2. Znaleść termin średni dwu kwot wekslowych: 350 zł., płatnéj po 45 dniach, i 780 zł., płatnéj po $5\frac{1}{2}$ miesiąca.

3. Handlujący przekazuje bankierowi 5. czerwca następujące efekta: na 540 zł., płatny 16. czerwca, na 960 zł., płatny 28. czerwca, na 1225 zł., płatny 3. lipca, na 730 zł., płatny 11. sierpnia i na 1410 zł., płatny 2. września. Bankier daje w zamian bon (zlecenie) do swéj kasy do wypłacenia tych wszystkich kwot po upływie terminu średniego, potrącając sobie $\frac{1}{2}$% tytułem komisowego. Jaka jest data i jaka wartość tego bonu?

Przypisek.

O miarach, wagach i monetach.

I. Miary i wagi metryczne.

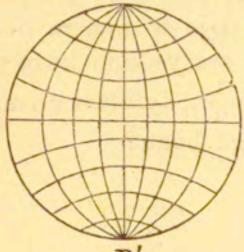
§. 1.

Początek układu metrycznego miar i wag.

W roku 1790. postanowiło Zgromadzenie narodowe francuskie zaprowadzić w całéj Francyi jednakie miary i wagi, chcąc tym sposobem położyć kres zamieszaniu i nadużyciom, jakie wypływały z używania rozmaitych miar i wag w różnych okolicach kraju.

Ażeby téj reformie nadać cechę powszechności, uchwalono: 1. zaprosić uczonych zagranicznych do spółudziału w pracach nad wytworzeniem nowego układu miar i wag, 2. wziąć jednostkę zasadniczą nowego układu z wymiarów kuli ziemskiéj, i 3. tworzyć jednostki pochodne, większe i mniejsze, z jednostki zasadniczéj podług zasady liczenia dziesiętnego.

Fig. 1.



Celem uczynienia zadość drugiemu warunkowi, astronomowie francuscy Delambre i Mechain wymierzyli dawną miarą łuk południka paryskiego między Dunkierką i Barceloną, skąd wywnioskowali długość ćwiartki tegoż południka, t. j. (fig. 1.) odległość *PE*, bieguna ziemskiego *P* od równika *E*. Owoż, biorąc dziesięciomilionową część téj długości, otrzymano jednostkę zasadniczą, którą nazwano metr, od słowa greckiego metron, oznaczającego miarę. Według późniejszych dokładniejszych pomiarów metr jest $\frac{1}{10000855}$ częścią długości ćwiartki południka ziemskiego.

Metr jest w nowym układzie podstawą wszelkich miar, nie tylko długości, ale także powierzchni, objętości i ciężaru; dlatego ten układ miar i wag nazywamy układem miar i wag metrycznym.

§. 2.
Miary metryczne długości albo liniowe.

Jednostką zasadniczą miar długości jest metr (oznacza się przez *m*). Długości mniejsze od metra wyraża się jednostkami rzędu niższego, wynoszącymi dziesiątą, setną i tysiączną część metra; długości zaś większe od metra wyraża się jednostkami rzędu wyższego, utworzonymi ze skupienia dziesięciu, stu, tysiąca i dziesięciu tysięcy metrów. Nazwy jednostek rzędu niższego i wyższego, wyprowadzonych z metra, tworzy się, poprzedzając nazwę „metr“ *a*) liczebnikami łacińskimi: decy za część dziesiątą, centy na część setną i mili za część tysiączną przy jednostkach rzędu niższego, i *b*) liczebnikami greckimi: deka za 10-krotność, hekto za 100-krotność, kilo za 1000-krotność i mirya za 10000-krotność przy jednostkach rzędu wyższego.

Mamy zatém następujące jednostki długości:

metr (*m*),		dekametr (*dkm*)	= 10 *m*,
decymetr (*dm*)	= 0·1 *m*,	hektometr (*hm*)	= 100 *m*,
centymetr (*cm*)	= 0·01 *m*,	kilometr (*km*)	= 1000 *m*,
milimetr (*mm*)	= 0·001 *m*,	miryametr (*μm*)	= 10000 *m*.

Z tych jednostek dekametr i hektometr mają tylko teoretyczne znaczenie, gdyż prawie nie są używane. Jedyne zastósowanie dekametra zachodzi w miernictwie, gdzie do pomiarów używa się łańcucha mierniczego, mającego długość 10 *m*. Także miryametr wychodzi z użycia.

Fig. 2.

Fig. 2. przedstawia rzeczywistą długość decymetra, podzielonego na centymetry i milimetry. Łatwo spostrzéc, że szerokość dłoni męskiéj wynosi oko o 1 *dm*, a szerokość paznokcia u palca małego około 1 *cm*.

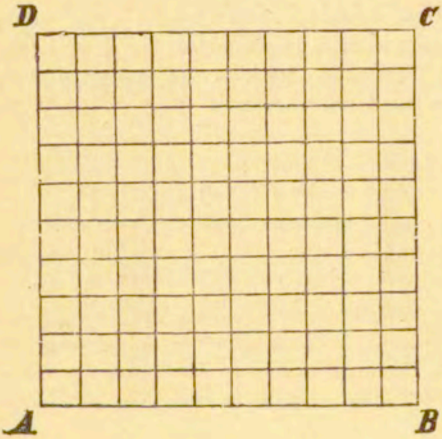
Uwaga. Odległości bardzo wielkie, jak n. p. odległość ziemi od słońca lub od jakiéj gwiazdy stałéj, wyraża się w promieniach ziemskich. Długość średnia promienia ziemi wynosi 6366 *km*.

§. 3.
Miary metryczne powierzchni albo kwadratowe.

Jednostką zasadniczą miar powierzchni jest metr kwadratowy (oznacza się przez m^2). Kwadratem zowie się część płaszczyzny, ograniczona czterema prostymi, przecinającymi się pod kątem prostym, jak *ABCD* na fig. 3. Owoż, powierzchnia kwadratu, którego każdy bok ma długość 1 *m*, zowie się metrem kwadratowym.

Jednostkami powierzchni rzędu niższego są powierzchnie kwadratów, których bok jest długi na 1 *dm*, 1 *cm* i 1 *mm*, a które zowią się kwadratowymi decymetrami (dm^2), kw. centymetrami (cm^2) i kw. milimetrami (mm^2). Jednostkami zaś powierzchni rzędu wyższego są powierzchnie kwadratów, których bok jest długi na 1 *dkm*, 1 *hm*, 1 *km*, 1 *μm*, a które zowią się kwadratowymi dekametrami (dkm^2), kw. hektometrami (hm^2), kw. kilometrami (km^2) i kw. miryametrami (μm^2).

Fig. 3.



Łatwo spostrzec, że każda z tych jednostek zawiera w sobie 10 . 10 czyli 100 jednostek rzędu bezpośrednio niższego. Jakoż dajmy na to, że fig. 3. przedstawia metr kwadratowy. Podzielmy każdy z jego boków na 10 równych części (*dm*) i połączmy odpowiednie punkty podziału liniami prostymi. Wskutek tego kwadrat *ABCD* rozłoży się na 10 . 10 czyli 100 kwadratów mniejszych, z których każdy, mając bok długi na 1 *dm*, będzie decymetrem kwadratowym.

Skoro tak rzecz się ma, więc wyraziwszy wszystkie jedności przez m^2, mieć będziemy:

$1\ dkm^2 = 100\ m^2$, $\quad 1\ dm^2 = 0.01\ m^2$,

$1\ hm^2 = 10000\ m^2$, $\quad 1\ cm^2 = 0{\cdot}0001\ m^2$,

$1\ km^2 = 1000000\ m^2$, $\quad 1\ mm^2 = 0{\cdot}000001\ m^2$,

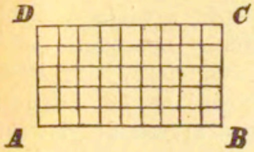
$$1\ \mu m^2 = 100000000\ m^2.$$

Uwaga 1. 1 dkm^2 zowie się arem (*a*), 100 *a* czyli 1 hm^2 hektarem (*ha*) 100 *ha*, czyli 1 km^2 miryarem (*μa*). Obszary pól wyraża się pospolicie w hektarach, a obszary krajów w miryarach czyli kilometrach kwadratowych.

Uwaga 2. Do mierzenia powierzchni nie ma miar rzeczywistych, zapomocą których przykładania możnaby jéj wielkość wyznaczyć. Ilość jednostek kwadratowych, zawartych w danéj powierzchni, wynajduje się przez pomiar samych długości zapomocą sposobów, których uczy geometrya.

Chcąc n. p. znaleść powierzchnią kwadratu, dość zmierzyć jego bok i liczbę jednostek długości, w tym boku zawartych, przez siebie samę pomnożyć. Ten iloczyn da nam liczbę takichsamych jednostek, ale kwadratowych, zawartych w powierzchni kwadratu. Jeżeli n. p. $AB = 5\,cm$ (fig. 3.), to powierzchnia kwadratu *ABCD* będzie

Fig. 4.



równa 5 . 5 czyli 25 cm^2. Podobnie chcąc znaleść powierzchnię prostokąta $ABCD$ (fig. 4.), potrzeba zmierzyć długość dwu jego boków przyległych, n. p. AB i AD (długość i szerokość) i liczby jednostek długości, zawartych w tych bokach, pomnożyć. Jeżeli n. p. $AB = 9\,cm$, $AD = 5\,cm$, to pow. $ABCD$ jest $= 45\,cm^2$.

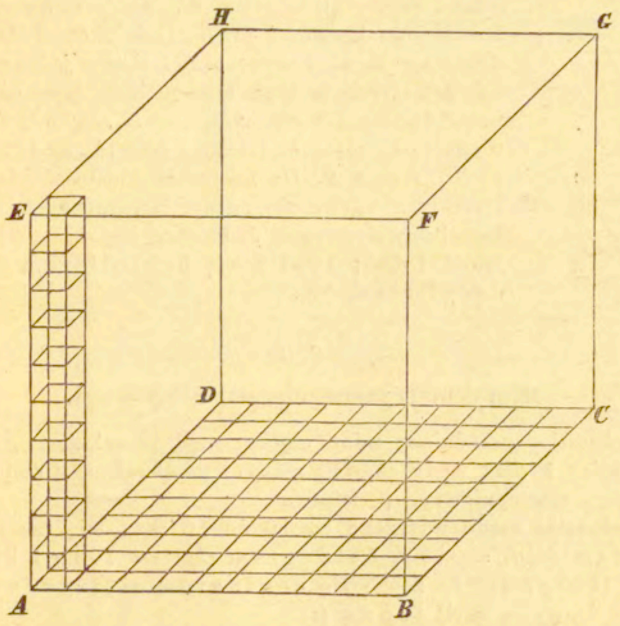
§. 4.

Miary metryczne objętości albo sześcienne.

Jednostką zasadniczą miar objętości jest m e t r s z e ś c i e n n y (oznacza się przez m^3). Sześcianem zowie się część przestrzeni, ograniczona sześciu ścianami kwadratowymi równymi, jak $ABCDEFGH$ na fig. 5. Owoż sześcian, którego każda ściana ma powierzchnię 1 m^2, a przeto każda krawędź (prosta przecięcia się dwu przyległych ścian) ma długość 1 m, zowie się metrem sześciennym.

Objętości mniejsze można wyrazić w s z e ś c i e n n y c h d e c y m e t r a c h (dm^3), s z. c e n t y m e t r a c h (cm^3) i s z. m i l i m e t r a c h (mm^3), t. j. w sześcianach, których krawędź ma długość 1 dm, 1 cm i 1 mm. Podobnie jako jednostki rzędu wyższego mogą służyć s z e ś c i e n n y

Fig. 5.



dekametr (dkm^3), sz. hektometr (hm^3) i sz. kilometr (km^3), t. j. sześciany, których krawędź jest długa na 10, 100 i 1000 m.

Łatwo spostrzéc, że każda z tych jednostek zawiera w sobie 10 . 10 . 10 czyli 1000 jednostek rzędu bezpośrednio niższego. Jakoż niech fig. 5. przedstawia nam metr sześcienny. Każda ściana, jak $ABCD$, jest metrem kwadratowym, a przeto daje się rozłożyć na 10 . 10 czyli 100 decymetrów kwadratowych. A że na każdym z tych decymetrów kwadratowych można wznieść słupek, zawierający w sobie 10 decymetrów sześciennych, uważany więc sześcian, t. j. 1 m^3, zawierać będzie w sobie istotnie 100 . 10 czyli 1000 decymetrów sześciennych.

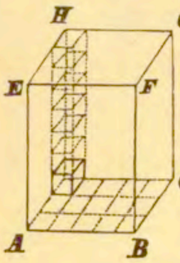
Wyrażając zatém wszystkie jednostki przez metr sześcienny, miéć będziemy:

1 dkm^3 = 1000 m^3,	1 dm^3 = 0·001 m^3,
1 hm^3 = 1000000 m^3,	1 cm^3 = 0·000001 m^3,
1 km^3 = 1000000000 m^3,	1 mm^3 = 0·000000001 m^3.

Uwaga 1. Objętość brył wyznacza się przez pomiar samych długości zapomocą sposobów, których uczy geometrya.

Chcąc n. p. wyznaczyć objętość jakiegokolwiek sześcianu, dość zmierzyć długość jednéj krawędzi i liczbę jednostek długości, w téj krawędzi zawartych, wziąć trzy razy za czynnik iloczynu. Jeżeli n. p. w sześcianie fig. 5. AB = 5 cm, to objętość tego sześcianu jest równa 5 . 5 . 5 czyli 125 em^2.

Fig. 6.



Podobnie, chcąc wyznaczyć objętość równoległościanu prostokątnego fig. 6., dość zmierzyć długość trzech jego krawędzi przyległych AB, AD, AE (długość, szerokość i wysokość) i liczby jednostek długości, zawartych w tych krawędziach, pomnożyć. Jeżeli n. p. AB = 5 cm, AD = 3 cm, AE = 7 cm, to objętość równoległościanu jest równa 105 cm^3.

Uwaga 2. Do mierzenia objętości ciał sypkich i ciekłych używa się naczyń wydrążonych, pospolicie kształtu walcowego. Jednostką jest litr (l) czyli objętość 1 dm^3; 100 l zowią hektolitrem (hl), a 0·1 l decylitrem (dl).

§. 5.

Miary metryczne ciężaru albo wagi.

Jednostką zasadniczą miar ciężaru czyli wagi jest gram (g). Jestto ciężar 1 dm^3 wody czystéj, mającéj temperaturę 4 stopni według termometru stustopniowego (Celsiusa).

Jednostki rzędu wyższego od 10 do 10 razy większe są: dekagram (dkg) = 10 g, hektogram (hg) = 100 g i kilogram (kg) = 1000 g; 100 kg zowie się centnarem metrycznym (q), a 10 q jest beczką czyli tonną (t).

Jednostki rzędu niższego od 10 do 10 razy mniejsze są: decygram (*dg*) = 0·1 *g*, centygram (*cg*) = 0·01 *g* i miligram (*mg*) = 0·001 *g*.

Ustawą są dozwolone ciężarki na 20 *kg*, 10 *kg*, 5 *kg*, 2 *kg*, 50, 20, 10, 5, 2 *dkg* i 5, 2, 1 *g*.

II. Najważniejsze miary i wagi krajowe i zagraniczne.

§. 6.
Austro-Węgry.

Ustawą z dnia 25. lipca roku 1871. zaprowadzono układ metryczny miar i wag. Przedtém używano następujących miar i wag:

Miary długości: Sążeń wiedeński = 6 stopom, 1 stopa = 12 calom, 1 cal = 12 liniom. 1 stopa wiedeńska = 0·3161 *m*. Mila austryacka (4000 sążni) = 7·5864 *km*.

Miara pól: Morg wiedeński (40 . 40 = 1600 sążni kw.) = 57·55 *a*.

Miary objętości: *a*) do zboża: mierzyca = 61·5 *l*; *b*) do cieczy: wiadro = 56·6 *l*.

Wagi: Funt wiedeński = 32 łutom = 128 kwintlom = 0·560 *kg*.

§. 7.
Wielka Brytania.

Miary długości: Yard = 3 stopom = 36 calom = 0·91438348 *m*. Mila angielska (1760 yardów) = 1·6093149 *km*; mila morska = 1·85785 *km*.

Miara pól: Acre (4840 yardów kw.) = 40·4671 *a*.

Miara objętości: *a*) do zboża: quarter = 8 bushelom = 64 galonom, 1 quarter = 2·907813 *hl*; *b*) do cieczy: beczka wina = 252 galonom, beczka piwa = 192 galonom, 1 galon = 4·54345797 *l*.

Wagi: Funt avoir-du-poids (7000 ziarn) = 16 uncyj po 16 dram, 1 funt adp = 0.4535923 *kg*. Do materyj droższych używa się funta troy = 0·3734195 *kg*.

§. 8.
Niemce.

Układ metryczny obowiązujący od roku 1872.; dawniejsze:

Miary długości: Pręt = 2 sążniom = 12 stopom = 144 calom = 3·7662432 *m*.

Miara pól: Morg magdeburski (180 prętów kw.) = 25·5322 *a*.

Miara objętości: *a*) do zboża: szefel = 48 kwartom = 54·960 *l*; *b*) do cieczy: oxeft = 3 wiadrom = 180 masom = 2·061 *hl*.

Wagi: Funt koloński = 2 grzywnom = 0·46765984 *kg*. Łaszt morski = 1870·63936 *kg*.

§. 9.

Rosya z Polską.

Miary długości: Sażeń = 3 arszynom = 7 stopom = 2·13356 *m*; wiorsta (500 sażeni) = 1·06678 *km*; stopa polska (15 stóp = 2 pręty) = 0·2880 *m*.

Miary pól: Djesiatyna = 1·0925 *ha*; morg nowopolski (300 prętów kw.) = 0·559872 *ha*.

Miary objętości: *a*) do zboża: Czetwiert' = 2 ośminom = 8 czetwierykom = 64 garncom = 2·098216 *hl*. Korzec polski = 32 garncom = 128 kwartom = 1·28 *hl*. *b*) do cieczy: Wiadro = 8 sztofom = 10 krużkom = 100 czarkom = 12·2989 *l*; kwarta polska=1 *l*.

Wagi: Berkowiec = 10 pudom = 400 funtom = 163·80464 *kg*. Centnar polski = 4 kamieniom = 100 funtom = 40·5504 *kg*.

§. 10.

Turcya.

Miary długości: Arszyn = 24 calom = 0·75774 *m*; berri = 1·476 *km*.

Miara objętości: Metro = 13·33 *l*.

Wagi: Oka = 400 drachmom = 1·27848 *kg*.

Uwaga. We Francyi, Belgii, Hiszpanii, Holandyi, Norwegii, Portugalii, Szwajcaryi, Szwecyi i we Włoszech obowiązuje układ metryczny, a w Stanach zjednoczonych Ameryki układ miar angielsklch.

III. Monety austro-węgierskie i ważniejsze zagraniczne.

§. 11.

Monety w ogólności.

Monetą (*Münze*) zowiemy kawałek metalu, pospolicie kształtu krążka, który się daje w zamian za jaki przedmiot dostarczony lub jaką usługę oddaną, którym się zatém poniekąd mierzy wartość tego przedmiotu lub téj usługi.

Monety różnią się między sobą gatunkiem i próbą metalu, z jakiego się je wybija, tudzież wagą, jaką posiadają.

Pospolicie wybija się monety ze złota lub srebra, gdyż te metale już w maléj objętości posiadają znaczną wartość. Wszelako, celem nadania monetom większéj trwałości, do czystego złota lub srebra dodaje się, jako domieszkę, innego metalu pośledniejszego (n. p. miedzi). Taka mieszanina zowie się stopem (aliażem).

Próbą stopu, użytego do wybijania monet, zowiemy liczbę, która wyraża, jaką częścią całéj wagi stopu jest waga czystego złota lub srebra, zawartego w tym stopie. Zazwyczaj wyraża się próba złota lub srebra w częściach tysiącznych wagi stopu. Jeżeli się więc powiada, że ta próba jest 0·900, to należy rozumieć, że w 1000 jednostkach wagi stopu jest 900 jednostek wagi czystego złota lub srebra. Złoto lub srebro próby n. p. 0·900 zowiemy także 900-dzielném (900-*theilig)*.

Przez wartość monety al pari rozumiemy wartość czystego złota lub srebra, zawartego w téj monecie. Ilość złota lub srebra czystego, zawartego w monecie, znajdziemy, mnożąc jego wagę przez próbę.

Jednostką monetarną zasadniczą w Austro-Węgrzech jest sztuka srebra, kształtu krążka, próby 0·900, a ważąca 12·345 *g*, którą się zowie złotym waluty austryackiéj *(Gulden Österreichischer Währung)*. Wartość obiegowa monet złotych, zredukowana na srebro, nie jest zawsze równą wartości imiennéj tych monet. W Austro-Węgrzech jest ona zazwyczaj większą od imiennéj (wyżéj pari). Różnica między tymi dwiema wartościami zowie się ażyo (agio).

§. 12.

Przegląd monet krajowych i ważniejszych zagranicznych.

Następująca tablica zawiera przegląd ważniejszych monet krajowych i zagranicznych z podaniem ich wagi, próby i wartości w zł. w. a.

Nazwa kraju i monety	Waga w gramach	Próba metalu	Wartość al pari w zł. w.a.
Austro-Węgry.			
Złoto:			
8-złotówka	6·452	900	8·00
4-złotówka	3·226	„	4·00
Dukat	3·490	986	4·74
Dukat poczwórny	13·960	„	18·96
Srebro:			
2-złotówka	24·691	900	2·00
1-złotówka = 100 centom	12·345	„	1·00
¼ złotówki	5·341	520	0·25
20-centówka	2·666	500	0·20
10-centówka	1·666	400	0·10

Nazwa kraju i monety	Waga w gramach	Próba metalu	Wartość al pari w zł. w.a.
Talary Maryi Teresy z r. 1780. . .	28·075	833	5·20
(Oprócz tego istnieją monety zdawkowe na 4 ct. i na 1 ct., tudzież bilety bankowe na 10 zł., 100 zł. i 1000 zł., i bilety państwowe na 1 zł., 5 zł. i 50 zł.).			
Wielka Brytania.			
Jednostka zasadnicza: Funt sterlingów na 20 szylingów = 10·09 zł. w. a.			
Złoto:			
Suweren albo funt sterling. na 20 szyling.	7·988	916·66	10·09
Pół suwerena	3·994	"	5·045
Srebro:			
Korona, 5 szylingów	28·276	925	2·52
Szyling, 12 pensów	5·655	"	0·504
Pens	0·471	"	0·042
Francya.			
Jednostką zasadniczą frank = 0·40 zł. w. a.			
Złoto:			
20-frankówka	6·452	900	8·00
(Bije się także sztuki po 100, 50, 10 i 5 fr.).			
Srebro:			
Frank, 100 centymów	2·500	835	0·40
(Biją także 5- i 2-frankówki, tudzież sztuki po 50 i 20 centymów).			
Uwaga. Francya, Belgia, Szwajcarya, Włochy i Grecya, tudzież Rumunia, Serbia i większa część rzeczypospolitych południowo-amerykańskich mają tensam układ monetarny.			
Niemce.			
Jednostką zasadniczą jest marka na 100 feników = 0·50 zł. w. a.			

Nazwa kraju i monety	Waga w gramach	Próba metalu	Wartość al pari w zł. w. a.
Złoto:			
20-markówka, korona podwójna . . .	7·965	900	10·00
(Oprócz tego biją sztuki po 10 i 5 marek).			
Srebro:			
1 marka, 100 feników	5·555	„	0·50
(Oprócz tego biją sztuki po 5 i 2 marki, tudzież po 50 i 20 feników).			
Rosya z Polską.			
Jednostką zasadniczą rubel = 1·64 zł. w. a.			
Złoto:			
Półimperyał, 5 rubli	6·545	916·66	8·23
3-rublówka	3·927	„	4·02
Srebro:			
Rubel (rs), 100 kopijek	20·735	868	1·64
25 kopiejek	5·183	„	0·41
złoty polski, 15 kopiejek.	3·059	500	0·25
Turcya.			
Jednostką zasadniczą piastr = 0·09 zł. w. a.			
Złoto: 100 piastrów, funt turecki. .	7·216	916·66	2·07
(Oprócz tego biją sztuki po 500, 150, 50 i 25 piastrów).			
Srebro: 1 piastr, 40 par	1·203	830	0·09
(Oprócz tego biją sztuki po 20, 10, 5, 2 i $\frac{1}{2}$ piastra).			
Stany zjednoczone.			
Jednostką zasadniczą dolar = 2·07 zł. w. a.			
Złoto: Orzeł, 10 dolarów	16·718	900	20·73
(Oprócz tego biją sztuki po 20, 5, 3, $2\frac{1}{2}$ i 1 dol.).			
Srebro: Dolar, 100 centów . . .	26·729	„	2·07
(Oprócz tego biją sztuki po $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ i $\frac{1}{10}$ dolara).			

ARYTMETYKA