POCZĄT

ALGEBR

[illegible]

1935

Hyrnica

1935

POCZĄTKI
ALGEBRY.

CZĘŚĆ DRUGA.

PORZĄDEK MATERYY.

CZĘŚĆ PIERWSZA.

ROZDZIAŁ PIERWSZY.

Sposoby odbywania działań zachodzących w ilościach i funkcyach z ich zastosowaniem do rozwiązania zrównań pierwszego stopnia.

Stronica.

ROZDZIAŁ DRUGI.

Z odkrytych praw na różne potęgi i sposobów obchodzenia się z niemi w rozmaitych działaniach wydobywa się rozwiązanie zrównań stopnia drugiego.

ROZDZIAŁ TRZECI.

Teorya ogólna zrównań zastosowana do rozwiązania zrównań liczebnych wszelkiego stopnia.

ROZDZIAŁ CZWARTY.

Dopełnienie nauki o zrównaniach. Rozwiązanie zrównań literalnych stopnia trzeciego i czwartego, oraz nieoznaczonych stopnia pierwszego i drugiego.

CZĘŚĆ DRUGA.

ROZDZIAŁ PIERWSZY.

Teorya szeregów zwrotnych.

ROZDZIAŁ DRUGI.

Funkcye wykładnicze prowadzą do poznania logarytmów, których się tłumaczą własności, użycie, sposób rozbierania ich na szeregi i rachowania z nich tablic logarytmicznych.

ROZDZIAŁ TRZECI.

Rachunek trygonometryczny.

SPOSOB P. BUDAN

na rozwiązanie zrównań liczebnych wszelkiego stopnia za użyciem nayprostszych tylko arytmetycznych działań dodawania i odciągania.

Pozwolono drukować. Wilno d. 5. Wrześniu 1827. r.
Cenzor Kollegialny Assesor Jgnacy Szydłowski.

ROZDZIAŁ PIERWSZY.

Teorya szeregów zwrotnych.

§ 1. *Sposób rozbierania funkcyy ułamkowych na szeregi.*

Poznaliśmy w poprzedzaiącéy nauce dwa działania, które wymagaią pewnych warunków, aby się mogły uskutecznić i dadź na wypadek ograniczoną liczbę terminów: takiemi są dzielenie i wyciąganie pierwiastków. Jeżeli dzieląca nie wchodzi iako mnożnik do składu podzielnéy, albo ieżeli funkcya dana nie iest zupełną potęgą iakiéy pierwiastku szukamy, dzielenie i wyciąganie pierwiastku może bydź prowadzone bez określenia i wydadź wieloraz lub pierwiastek ciągnący się przez nieskończony szereg wyrazów. Z funkcyy przeto niepodzielnych i niewymiernych wynikaią szeregi nieskończone. Znamy iuż prawa składu i własności szeregów pochodzących z rozwinienia funkcyy niewymiernych, bo te są zamknięte we wzorze Newtona. Weźmiemy następnie pod uwagę szeregi wypływaiące z dzielenia.

Dzieląc np. 2 przez $1-4z$ i ciągnąc wieloraz do ilukolwiek terminów, będzie

$$\frac{2}{1-4z}=2+8z+32z^2+128z^3+512z^4+\text{ itd.}$$

W tém zrównaniu między dwiema stronami zachodzi taka tylko różność, że na piérwszéy działanie iest naznaczone, a na drugiéy iest wypadek z iego uskutecznienia. Zrównania tego gatunku zowią się *tosame* (équations identiques). Tu ilości z może bydź nadana wartość iakakolwiek; a zawsze dwa członki w zrównaniu powinny bydź sobie równe. Z téy przyczyny ilość z nazywa się zmienną. J w dalszym ciągu nauki ustanowimy podział ilości na *stałe* (constante) i *zmienne* (variable): piérwsze uważać będziemy iako maiące pewną oznaczoną wartość; drugie nie będą miały przywiązanéy do siebie żadnéy wartości szczególnéy mogąc wszystkie przyymować. Tamte znaczyć będziemy literami początkowémi alfabetu, ostatnie przez litery końcowe.

Wszelkie wyrażenie zamykaiące w sobie ilość zmienną zowie się funkcyą téy ilości; i iest całką lub ułamkową podług tego iak ilość zmienna wchodzi do wyrazów funkcyi za mnożnik lub dzielnik. np. $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}z$ iest funkcyą całką ilości zmiennéy z, $\frac{2}{3z}+\frac{4}{5z^2}$ iest funkcyą téy ilości ułamkową. Będą także funkcyami ułamkowémi wyrażenia, które maią mianownik zamykaiący w swoich terminach ilość zmienną: takiemi są np. $\frac{2}{3+4z}$, $\frac{2+3z}{4+5z+6z^2}$.

Wzór $\frac{a+bz+cz^2+dz^3+\text{itd}+kz^{m-1}}{p+qz+rz^2+sz^3+\text{itd}+tz^m}$ zawieraiący ilość zmienną z może nam wystawiać wszystkie ułamki właściwe, toiest takie, w których wykładnik ilości z w liczniku iest przynaymniéy o iedność mnieyszy niżeli w mianowniku. Każdy ułamek niewłaściwy da się za pomocą dzielenia do tego wzoru przyprowadzić. W ułamku niewłaściwym np. $\frac{2+3z+4z^2+5z^3}{6+7z+z^2}$ dzieląc licznik uszykowany podług ubywaiących potęg ilości z przez podobnież uszykowany mianownik otrzymamy na wieloraz funkcyą ilości z całką $5z-31$ z ułamkiem właściwym $\frac{188+190z}{6+7z+z^2}$. Zacząwszy od ułamku nayprostszego $\frac{a}{p+qz}$, i idąc porządkiem do coraz zawikleyszych

$$\frac{a+bz}{p+qz+rz^2}, \quad \frac{a+bz+cz^2}{p+qz+rz^2+sz^3}, \text{ itd } \ldots\ldots \quad (a),$$

kiedy dzielić będziemy licznik przez mianownik, znaydziemy że

$$\frac{a}{p+qz}=\frac{a}{p}-\frac{aq}{p^2}z+\frac{aq^2}{p^3}z^2-\frac{aq^3}{p^4}z^3+\frac{aq^4}{p^5}z^4-\text{itd.}$$

Odbywszy podobnież dzielenie w ułamkach (a), przyydziemy zawsze do szeregów ciągnących się przez nieskończone pasmo terminów. W tych szeregach pokaże nam się pewna zawisłość między wyrazami, tak, iż każdy z nich można będzie złożyć maiąc poprzedzaiące wiadome. W dopiéro np.

otrzymanym szeregu każdy termin wypada z poprzedzaiącego mnożonego przez $-\frac{qz}{p}$; ten więc szereg iest postępem geometrycznym układaiącym się według potęg coraz wyższych ilości zmiennéy z. Łatwo się przekonać, że szeregi wynikłe z ułamków (a) mogą bydź także ułożone podług rosnących wykładników całkich i dodatnych téy ilości. Lecz gdybyśmy z ułamków zawikleyszych otrzymać chcieli szeregi przez samo dzielenie; oprócz pracowitéy i rozwlekłéy roboty, ieszczebyśmy mieli trudność w dostrzeżeniu związku między terminami szeregu. Podamy następnie sposób inny, który będzie i łatwy w użyciu i razem zawisłość terminów okaże.

Ponieważ szczególne przykłady przekonywaią nas, że każdy szereg z rozwinienia ułamku wynikły postępuie według rosnących potęg ilości zmiennéy; może więc wzór

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+\text{itd} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

wyrażać wszystkie takowe szeregi; tylko ilości stałe A, B, C, D, E, ... będą różne, stosownie do szczególnego ułamku, który się na szereg rozwiia. Tym sposobem rozbieranie na szeregi przywodzi się do ocenienia ilości A, B, C, D, ... stosownie do ułamku danego. Jeżeli szereg (b) ma wyrażać rozwinienie ułamku $\frac{a}{p+qz}$, będzie

$$\frac{a}{p+qz}=A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+\text{itd};$$

zkąd po uwolnieniu od mianownika i sprowadzeniu do zera otrzymamy

$$0=\begin{array}{l|l|l|l|l} Ap+Bp & z+Cp & z^2+Dp & z^3+Ep & z^4+\text{itd.} \\ -a+Aq & +Bq & +Cq & +Dq & \end{array}$$

Ponieważ to zrównanie powinno mieć mieysce na wszelką wartość ilości zmiennéy z; więc spółczynnik każdego wyrazu musi bydź zerem (*). Ztąd wypadaią zrównania

---

(*). Jeżeli zrównanie $A+Bz+Cz^2+Dz^3+\text{itd}=0$ ma mieysce na wszelką wartość ilości z; musi bydź $A=0$, $B=0$, $C=0$, $D=0$, ... Skoro bowiem członek piérw-

$$\left.\begin{array}{rr} & Bp+Aq=0 \\ Ap-a=0, & Cp+Bq=0 \\ & Dp+Cq=0 \\ & \text{itd.} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ (c)$$

Liczba tych zrównań iest równa liczbie ilości A, B, C, D, itd, które mamy ocenić. Z nich wyciągniemy

$$A=\frac{a}{p},\quad B=-\frac{Aq}{p}=-\frac{aq}{p^2},\quad C=-\frac{Bq}{p}=\frac{aq^2}{p^3},$$

$$D=-\frac{Cq}{p}=-\frac{aq^3}{p^4},\ \text{itd};$$

podstawiwszy te wartości w szereg, znaydziemy

$$\frac{a}{p+qz}=\frac{a}{p}-\frac{aqz}{p^2}+\frac{aq^2z^2}{p^3}-\frac{aq^3z^3}{p^4}+\text{ itd},$$

wypadek, iakiśmy piérwéy przez dzielenie otrzymali.

Uczyniwszy $\dfrac{a+bz}{p+qz+rz^2}=A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+\ldots$ przyydziemy do zrównania

$$\begin{array}{r|l|l|l|l} 0=Ap+Bp & z+Cp & z^2+Dp & z^3+Ep & z^4+\text{ itd;} \\ -a+Aq & +Bq & +Cq & +Dq & \\ -b & +Ar & +Br & +Cr & \end{array}$$

równaiąc każdy spółczynnik z zerem, wypada

---

szy zrównania powinien zniknąć, iakąbykolwiek wartość miało z; więc zniknie i wtenczas kiedy $z=0$; a następnie bydź musi $A=0$. Opuściwszy A w zrównaniu, i pozostałe wyrazy rozdzieliwszy przez z, będzie $B+Cz+Dz^2+$ itd $=0$, gdzie musi bydź $B=0$ dla téyże przyczyny iak piérwéy pokazało się $A=0$. itd.

Gdy znowu zrównanie $A+Bz+Cz^2+Dz^3+\text{itd}=a+bz+cz^2+dz^3+$ itd. ma mieysce na wszelką wartość ilości z; będzie koniecznie $A=a$, $B=b$, $C=c$, itd, toiest spółczynniki iednakich potęg ilości zmiennéy po obu stronach bydź muszą równe. Bo przywiodłszy zrównanie do zera, wypada $A-a+(B-b)z+(C-c)z^2+(D-d)z^3+$ itd $=0$, gdzie podług poprzedzaiącego przypadku $A-a=0$, $B-b=0$, $C-c=0$, $D-d=0,\ldots$; zkąd $A=a$, $B=b$, $C=c$, $D=d,\ldots$

naprzód $Ap-a=0$, $Bp+Aq-b=0$,

powtóre
$$\left.\begin{array}{l} Cp+Bq+Ar=0 \\ Dp+Cq+Br=0 \\ Ep+Dq+Cr=0 \\ \text{itd.} \end{array}\right| \quad \ldots\ldots \quad (d).$$

Jeżeli podobnież założymy, że

$$\frac{a+bz+cz^2}{p+qz+rz^2+sz^3} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + \text{itd},$$

trafimy na zrównanie

$$\begin{array}{l|l|l|l|l|l} 0=Ap+Bp & z+Cp & z^2+Dp & z^3+Ep & z^4+Fp & z^5 + \text{itd}; \\ \quad -a+Aq & +Bq & +Cq & +Dq & +Eq & \\ \quad\quad -b & +Ar & +Br & +Cr & +Dr & \\ & -c & +As & +Bs & +Cs & \end{array}$$

zkąd będziemy mieli naprzód na ocenienie terminów początkowych

$$Ap-a=0, \quad Bp+Aq-b=0, \quad Cp+Bq+Ar-c=0,$$

a potém na ocenienie dalszych

$$\left.\begin{array}{l} Dp+Cq+Br+As=0 \\ Ep+Dq+Cr+Bs=0 \\ Fp+Eq+Dr+Cs=0 \\ \text{itd.} \end{array}\right| \quad \ldots\ldots \quad (e).$$

Zastanowiwszy teraz naszę uwagę nad témi funkcyami ułamkowémi i nad zrównaniami im odpowiadaiącémi (c), (d), (e), postrzeżemy: 1*ód.* Ze spółczynniki piérwszych terminów każdego szeregu zawisły co do swoiéy wartości od spółczynników licznika: tak, że ile ma terminów licznik; spółczynniki tych terminów wpływaią do wartości tyluż początkowych spółczynników szeregu. Jeżeli np. licznik ułamku zawiéra trzy terminy; spółczynniki trzech piérwszych terminów szeregu zależeć będą od trzech spółczynników licznika. 2*re.* Przeszedłszy liczbę terminów szeregowych równą liczbie terminów licznika; wszystkie spółczynniki terminów dalszych zawisły od spółczynników terminów poprzedzaiących i od spółczynników mianownika ułamku: tak, że ieżeli mianownik ułamku zawiéra dwa terminy, spółczynnik terminu szeregowego zawisł od iednego spółczynnika poprzedzaiącego, iak nas o tém przekonywaią zrównania (c); ieżeli mianownik zawiéra trzy terminy, spółczynnik każdego terminu szeregowego zawisł od dwóch poprzedzaiących, iak pokazuią zrównania (d). W ogólności gdy mianownik ułamku zawiéra liczbę n terminów; spółczynnik terminu szeregowego zawisł od liczby $n-1$ poprzedzaiących. Ponieważ więc w szeregu powstaiącym z funkcyi ułamkowéy każdy spółczynnik iest funkcyą kilku poprzedzaiących, szeregi takowe nazywaią się *zwrotnemi* (séries ou suites recurrentes); dla tego, że chcąc którykolwiek spółczynnik ocenić, musimy się wracać do poprzedzaiących. 3cie. Wyciągaiąc ze zrównań np. (e) wartości na D, E, F,... mamy

$$D=-\frac{q}{p}C-\frac{r}{p}B-\frac{s}{p}A,$$

$$E=-\frac{q}{p}D-\frac{r}{p}C-\frac{s}{p}B,$$

$$F=-\frac{q}{p}E-\frac{r}{p}D-\frac{s}{p}C,$$

itd.

Spółczynnik D iest, iak widzimy, summą trzech spółczynników poprzedzaiących C, B, A, mnożonych względnie przez $-\frac{q}{p}$, $-\frac{r}{p}$, $-\frac{s}{p}$; spółczynnik E takim samym sposobem powstaie ze spółczynników D, C, B; itd. Jlości, przez które mnożyć potrzeba pewną liczbę spółczynników szeregowych poprzedzaiących dla otrzymania następnego, iak tu $-\frac{q}{p}$, $-\frac{r}{p}$, $-\frac{s}{p}$, zowią się *stopniami stosunku* (échelle de relation). Stopnie stosunku $-\frac{q}{p}$, $-\frac{r}{p}$, $-\frac{s}{p}$ należą do szeregu wypadaiącego z ułamku $\frac{a+bz+cz^2}{p+qz+rz^2+sz^3}$: w szeregu powstaiącym z ułamku $\frac{a+bz}{p+qz+rz^2}$ stopnie stosunku będą $-\frac{q}{p}$, $-\frac{r}{p}$; i każdy spółczynnik szeregowy będzie się składał z dwóch poprzedzaiących mnożonych przez $-\frac{q}{p}$, $-\frac{r}{p}$, toiest będzie np. $P=-\frac{q}{p}O-\frac{r}{p}N$.

Szeregi zwrotne dzielą się na *porządki* podług liczby spółczynników poprzedzaiących potrzebnych do złożenia następnego.

Uwaga I. Daymy że potrzeba otrzymać szereg z ułamku $\frac{1+z}{3z-z^2}$. Założywszy

$$\frac{1+z}{3z-z^2}=A+Bz+Cz^2+Dz^3+\text{itd} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (f),$$

znaydziemy po uwolnieniu od mianownika i sprowadzeniu do zera

$$0=\begin{array}{c|c|c|c|l} -1+3A & z+3B & z^2+3C & z^3+3D & z^4+\text{itd}; \\ -1 & -A & -B & -C & \end{array}$$

tu równaiąc z zerem spółczynniki przy każdéy potędze ilości zmiennéy, wypada

$$-1=0, \quad 3A-1=0, \quad 3B-A=0, \quad 3C-B=0, \quad \text{itd.}$$

Piérwsze zrównanie $-1=0$ iest błędne, i pokazuie iż założenie (f) utrzymać się nie może, a następnie że szereg wynikaiący z teraźnieyszego ułamku różnić się musi swoią postacią od wzoru $A+Bz+Cz^2+Dz^3+$itd. Do podobnéy sprzeczności przyprowadziłby nas każdy ułamek, któregoby mianownik zawiérał ilość zmienną we wszystkich swoich wyrazach. Takie ułamki możemy zamknąć we wzorze $\frac{a+bz+cz^2+\text{itd}}{pz^m+qz^{m+1}+rz^{m+2}+\text{itd}}$. Zeby w rozwiianiu tych ułamków uniknąć natrafionéy dopiéro nieprzyzwoitości, dosyć iest rozłożyć ie na dwa mnożniki tak $\frac{1}{z^m}\times\frac{a+bz+cz^2+\text{itd}}{p+qz+rz^2+\text{itd}}$: drugi mnożnik maiący w mianowniku ieden termin bez ilości zmiennéy rozbierze się na szereg pod kształtem $A+Bz+Cz^2+Dz^3+$ itd, gdzie ilości $A, B, C, \ldots$ ocenią się sposobem powyżéy wyłożonym, i następnie będzie

$$\frac{1}{z^m}\times\frac{a+bz+cz^2+\text{itd}}{p+qz+rz^2+\text{itd}}=\frac{1}{z^m}(A+Bz+Cz^2+Dz^3+\text{itd})$$

czyli

$$\frac{a+bz+cz^2+\text{itd}}{pz^m+qz^{m+1}+rz^{m+2}+\text{itd}}=\frac{A}{z^m}+\frac{B}{z^{m-1}}+\frac{C}{z^{m-2}}+\frac{D}{z^{m-3}}+\text{itd.}$$

W ułamku np. $\frac{1+z}{3z-z^2}$ rozebranym na dwa mnożnik

$\frac{1}{z} \times \frac{1+z}{3-z}$ uczyniwszy

$$\frac{1+z}{3-z} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \text{itd},$$

przyydziemy do

$$\begin{array}{l|l|l|l} 0=3A+3B & z+3C & z^2+3D & z^3+\text{itd}, \\ \quad -1 \; -A & \; -B & \; -C & \\ \quad\quad -1 & & & \end{array}$$

gdzie $3A-1=0$, $3B-A-1=0$, $3C-B=0$, $3D-C=0$, itd, zkąd $A=\frac{1}{3}$, $B=\frac{4}{9}$, $C=\frac{4}{27}$, $D=\frac{4}{81}$, itd: więc

$$\frac{1+z}{3-z} = \tfrac{1}{3} + \tfrac{4}{9}z + \tfrac{4}{27}z^2 + \tfrac{4}{81}z^3 + \text{itd},$$

a następnie

$$\frac{1}{z} \times \frac{1+z}{3-z} = \frac{1}{z}\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{4}{9}z + \tfrac{4}{27}z^2 + \tfrac{4}{81}z^3 + \text{itd}\right)$$

albo

$$\frac{1+z}{3z-z^2} = \frac{1}{3z} + \tfrac{4}{9} + \tfrac{4}{27}z + \tfrac{4}{81}z^2 + \text{itd}$$

Uwaga II. W rozwiianiu funkcyi ułamkowéy na szereg przez dzielenie, po otrzymanym każdym terminie szeregowym zostawać będzie pewna reszta. Funkcya więc dana równa się szeregowi iakkolwiek daleko posunionemu wraz z przyłączonym ułamkiem maiącym resztę za licznik a mianownik spólny z funkcyą daną. np.

$$\frac{2}{1-4z} = 2 + 8z + 32z^2 + \frac{128z^3}{1-4z}$$

$$\frac{2}{1-4z} = 2 + 8z + 32z^2 + 128z^3 + \frac{512z^4}{1-4z}$$

$$\frac{2}{1-4z} = 2 + 8z + 32z^2 + 128z^3 + 512z^4 + \frac{2048z^5}{1-4z}.$$

W tych zrównaniach maiących dwie strony iednoznaczne na wszelką wartość ilości zmiennéy z, ieżeliby za z była użyta liczba któraby czyniła coraz dalsze wyrazy szeregowe coraz mnieyszémi; naówczas byłyby także coraz mnieysze ułamki $\frac{128z^3}{1-4z}$, $\frac{512z^4}{1-4z}$, $\frac{2048z^5}{1-4z}$: następnie ułamek, iakiby wypadło przyłączyć do szeregu daleko przedłużonego, stałby się tak drobnym iżby go można zaniedbać, i wziąć szereg za przybliżoną wartość ułamku danego. Zeby przeto szereg coraz daléy przedłużany przystępował coraz bliżéy do wartości funkcyi z któréy wypływa, potrzeba koniecznie, aby ten szereg był *maleiącym* (convergente). W zrównaniu

$$\frac{2}{1-4z}=2+8z+32z^2+128z^3+512z^4+ \text{itd}$$

założywszy że $z=1$, wypadnie po drugiéy stronie szereg rosnący

$$2+8+32+128+512+ \text{itd},$$

który oczywiście nie może bydź równy ułamkowi $-\frac{2}{3}$ stanowiącemu w tym razie wartość funkcyi danéy $\frac{2}{1-4z}$.

Lecz ieżeli w témże zrównaniu uczynimy $z=\frac{1}{12}$; znaydziemy

$$3=2+\tfrac{2}{3}+\tfrac{2}{9}+\tfrac{2}{27}+ \text{itd},$$

gdzie wyrazy szeregu są coraz mnieysze, i ich summa przybliża się coraz bardziéy do liczby 3, która w teraźnieyszém założeniu iest wartością ułamku $\frac{2}{1-4z}$.

§ 2. *Podaią się wyrazy ogólne szeregów zwrotnych.*

Widzieliśmy że ułamek $\frac{a}{p+qz}$ wydaie z siebie szereg

$$\frac{a}{p}-\frac{aq}{p^2}z+\frac{aq^2}{p^3}z^2-\frac{aq^3}{p^4}z^3+\frac{aq^4}{p^5}z^4- \text{itd};$$

tu w każdym terminie wykładniki nad z i q równaią się liczbie terminów poprzedzaiących, wykładnik nad p iest większy o iedność, ilość a wszędzie iest w potędze piérwszéy. Wszystkie zatém terminy tego szeregu możemy ogarnąć we wzorze $\pm\frac{aq^n z^n}{p^{n+1}}$, gdzie n wskazuie ile terminów poprzedza, znak $+$ należy do n parzystego, $-$ do nieparzystego. Ten wzór nazywa się *wyrazem ogólnym szeregu.* Może się on prościéy wystawić przez $\frac{a}{p}(-\frac{q}{p})^n z^n$. Z niego otrzymamy każdy termin szeregowy przez nadanie stosownéy wartości na n. Czyniąc $n=0$, wypadnie termin piérwszy; wziąwszy 1, 2, 3, . . . za n, będziemy mieli termin drugi, trzeci, czwarty, itd.

Każdy szereg zwrotny ma wyraz ogólny sobie właściwy. Poznamy naprzód wyrazy ogólne szeregów wynikłych z ułamku $\frac{a}{(p+qz)^m}$ maiącego za licznik ilość stałą, a za mianownik funkcyą ilości zmienney stopnia pierwszego podniesioną do iakieykolwiek potęgi. Z takiego ułamku można otrzymać szereg dwoiakim sposobem: albo założywszy że

$$\frac{a}{(p+qz)^m} \text{ czyli } \frac{a}{p^m + mp^{m-1}qz + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}p^{m-2}q^2z^2 + \text{itd}} = A+Bz+Cz^2+\text{ itd},$$

ocenić wartości na A, B, C, ... drogą wskazaną w §fie poprzedzaiącym: albo przywiodłszy ułamek do postaci całkiéy toiest do $a(p+qz)^{-m}$ rozwinąć podług wzoru Newtona potęgę cechowaną wykładnikiem $-m$. Z użycia obu sposobów wypadek będzie iednaki. Zeby ułatwić rozwiianie, nadamy ułamkowi $\frac{a}{(q+qz)^m}$ kształt $\frac{a}{p^m(1+\frac{qz}{p})^m}$ czyli

$$\frac{\frac{a}{p^m}}{(1+\frac{q}{p}z)^m}$$ czyli ieszcze $\frac{A}{(1-rz)^m}$ gdzie A i $-r$ zastępuią dla skrócenia mieysce ilości stałych $\frac{a}{p^m}$ i $\frac{q}{p}$. Będzie podług wzoru Newtona

$$\frac{A}{(1-rz)^m} \text{ czyli } A(1-rz)^{-m} = A[1+m.rz+\frac{m(m+1)}{1.\ 2}.r^2z^2 + \frac{m(m+1)(m+2)}{1.\ 2.\ 3}.r^3z^3 + \text{itd}]:$$

tu łatwo postrzegamy, że wyrazem ogólnym szeregu iest

$$\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (m+n-1)}{1.\ 2.\ 3.\ 4\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ n} A r^n z^n \quad . . (g)$$

gdzie n znaczy liczbę terminów poprzedzaiących; licznik spółczynnika ma mnożników n, i tyleż ma ich mianownik; tak iedne mnożniki iak drugie coraz o iedność wzrastaią.

W ułamku $\frac{A}{(1-rz)^m}$ i w wyrazie ogólnym (g) biorąc za m liczby 1, 2, 3, 4, ..., otrzymamy

ułamki	i wyrazy ogólne ich szeregów
$\frac{A}{1-rz}$	. . . . $Ar^n.z^n$
$\frac{A}{(1-rz)^2}$	. . . . $(n+1)Ar^n.z^n$
$\frac{A}{(1-rz)^3}$	. . . . . $\frac{(n+1)(n+2)}{1.\ 2}Ar^n.z^n$
$\frac{A}{(1-rz)^4}$	. . . . $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.\ 2.\ 3}Ar^n.z^n$
itd.	itd.

Ztąd już wnieść możemy w powszechności, że szereg pochodzący z ułamku $\frac{A}{(1-rz)^m}$ ma za wyraz ogólny

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\ \ldots\ (n+m-1)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5\ \ldots\ldots\ldots\ (m-1)}Ar^n.z^n:$$

iest to wyraz (g) pod inną tylko postacią wystawiony.

Będziemy mogli znaleźć wyraz ogólny szeregu wynikłego z iakiegokolwiek ułamku $\frac{a+bz+cz^2+\text{itd}}{p+qz+rz^2+\text{itd}}$; ieżeli potrafimy rozebrać ten ułamek na kilka innych maiących kształt $\frac{a}{(p+qz)^m}$ lub $\frac{A}{(1-rz)^m}$, gdzie m znaczy iedność albo iakąkolwiek liczbę całką. Bo wtedy wyrazy ogólne szeregów pochodzących z ostatnich ułamków razem dodane złożą wyraz ogólny szeregu równego ułamkowi pierwszemu. Ułamki wzoru $\frac{a}{(p+qz)^m}$ lub $\frac{A}{(1-rz)^m}$ nazywać będziemy prostémi: iakim sposobem na te proste ułamki roskładaią się ułamki zawikleysze następnie wyłożymy.

§ 3. *Roskład ułamków zawikłanych na proste.*

Zeby ułamek iakikolwiek $\frac{M}{N}$ dał się rozłożyć na ułamki proste; potrzeba *naprzód*, aby był właściwym, toiest należał do wzoru $\frac{a+bz+cz^2+\ \ldots\ +kz^{m-1}}{p+qz+rz^2+\ \ldots\ +tz^m}$, gdzie wykładnik naywyższéy potęgi z w liczniku iest mnieyszy niż w mianowniku: *powtóre*, abyśmy mogli rozebrać mianownik na mnożniki stopnia pierwszego. Takowe mnożniki wynayduią się czyniąc mianownik równym zero i rozwiązuiąc zrównanie ztąd wynikłe. Jeżeli pierwiastkami tego zrównania są α, β, γ, δ, . . .; mnożniki mianownika będą $z-\alpha$, $z-\beta$, $z-\gamma$, $z-\delta$, . . .; wystawimy ie dla większéy ogólności przez $a'-b'z$, $c'-d'z$, $f'-g'z$, itd. Te mnożniki mogą bydź rzetelne lub uroione, nierówne lub równe. Gdyby np. ułamek dany miał za mianownik funkcyą $2-5z-3z^2$; porównawszy tę funkcyą z zerem, będzie $-3z^2-5z+2=0$ czyli $z^2+\frac{5}{3}z-\frac{2}{3}=0$, zkąd po rozwiązaniu znaydziemy $z=\frac{1}{3}$ i $z=-2$: przeto $z^2+\frac{5}{3}z-\frac{2}{3}=(z-\frac{1}{3})(z+2)$, następnie $3z^2+5z-2=3(z-\frac{1}{3})(z+2)$ czyli $2-5z-3z^2=3(\frac{1}{3}-z)(z+2)$ $=(1-3z)(z+2)$. W tym więc przykładzie mnożniki pierwszego stopnia wchodzące do składu mianownika byłyby $1-3z$ i $2+z$.

Kiedy dwa poprzedzaiące warunki są spełnione, i kiedy mianownik N składa się z mnożników rzetelnych nierównych; można założyć że

$$\frac{M}{N}=\frac{A}{a'-b'z}+\frac{B}{c'-d'z}+\frac{C}{f'-g'z}+\text{itd},$$

gdzie liczniki A, B, C, . . . są stałe, nieznane, które potrzeba ocenić; mianownikami są mnożniki proste mianownika N w ułamku danym. Liczba tych ułamków prostych będzie m, ieżeli przez m oznaczymy stopień mianownika N. Przywiódłszy ułamki proste do iednostaynego mianownika, ten będzie się równał N; zatém summa liczników będzie równa M. Do summy liczników będzie wchodził termin złożony z samych ilości stałych, i będą wchodziły terminy maiące w sobie z, z^2, z^3, . . . z^{m-1}; wszystkich więc terminów różnego gatunku będzie m. Porównawszy zatém summę liczników z licznikiem M i zrównanie ztąd wypadaiące przywiódłszy do zera; w tém zrównaniu będzie także m terminów różnych; uczyniwszy przeto spółczynniki zerem, wypadnie ztąd zrównań warunkowych m, toiest tyle ile mamy niewiadomych ilości A, B, C, ..., które wszystkie będziemy z nich mogli oznaczyć. Niech będzie np. ułamek $\frac{1+z^2}{z-z^3}$, w którym mnożniki proste mianownika są z, $1-z$, $1+z$. Założymy więc

$$\frac{1+z^2}{z-z^3}=\frac{A}{z}+\frac{B}{1-z}+\frac{C}{1+z};$$

po przywiedzeniu do iednego mianownika będzie $1+z^2=A+(B+C)z+(-A+B-C)z^2$, albo $A-1+(B+C)z+(-A+B-C-1)z^2=0$; ztąd wypadaią zrównania $A-1=0$, $B+C=0$, $-A+B-C-1=0$, które dadzą $A=1$, $B=1$, $C=-1$; zatém

$$\frac{1+z^2}{z-z^3}=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}-\frac{1}{1+z}.$$

W ogólności, iakiegokolwiek byłyby gatunku mnożniki mianownika; roskładaiąc funkcyą ułamkową $\frac{M}{N}$ na ułamki proste uważać potrzeba aby te ułamki były i co do wyrażenia i co do liczby takie, iżby, ich summę porównawszy z funkcyą daną i wypadaiące ztąd zrównanie przywiodłszy do spólnego mianownika a potém do zera, ze spółczynników przy różnych potęgach ilości zmiennéy powstało zupełnie tyle zrównań, ile będziemy mieli do ocenienia ilości nieznanych, które w ten rachunek wprowadzimy. Widzieliśmy dopiéro, iakiego są wzoru ułamki proste, kiedy mianownik N składa się z mnożników rzetelnych nierównych. Daymy teraz że mnożniki mianownika są rzetelne równe; że np. $N=(a'-b'z)^m$: w tym razie nie można, iak w poprzedzaiącym, zakładać że

$$\frac{M}{N}=\frac{A}{a'-b'z}+\frac{B}{a'-b'z}+\frac{C}{a'-b'z}+\text{itd};$$

bo takie ułamki proste dodane złożą ułamek $\frac{A+B+C+\text{itd}}{a'+b'z}$, który maiąc licznik stały a za mianownik funkcyą pierwszego stopnia nie może bydź oczywiście równy $\frac{M}{N}$ czyli $\frac{M}{(a'-b'z)^m}$. W tym więc przypadku postać ułamków prostych musi bydź inna. Zaraz się przekonamy, iż wyrażone powyżéy względy będą zachowane, kiedy założymy

$$\frac{M}{(a'-b'z)^m}=\frac{A}{(a'-b'z)^m}+\frac{B}{(a'-b'z)^{m-1}}+\frac{C}{(a'-b'z)^{m-2}}+\dots$$
$$+\frac{K}{a'-b'z},$$

gdzie liczniki A, B, C, . . . K są stałe. Liczba ułamków prostych iest m: przywodząc ie do spólnego mianownika, otrzymamy

$$\frac{M}{(a'-b'z)^m}=\frac{A}{(a'-b'z)^m}+\frac{B(a'-b'z)}{(a'-b'z)^m}+\frac{C(a'-b'z)^2}{(a'-b'z)^m}+\dots$$
$$+\frac{K(a'-b'z)^{m-1}}{(a'-b'z)^m}.$$

Wykonawszy naznaczone działania w licznikach, summa ich będzie zawierała terminów m; do iednego będą wchodziły same ilości stałe, drugi będzie miał mnożnikiem z, trzeci z^2, itd, ostatni z^{m-1}. Jeżeli więc tę summę porównamy z licznikiem M i przywiedziemy zrównanie do zera; ze spółczynników przy różnych potęgach z wypadnie zrównań warunkowych m, z których ocenimy ilości stałe nieznane A, B, C, . . . K.

Gdybyśmy funkcyą ułamkowa daną chcieli rozłożyć na takie ułamki proste, których mianownik byłby stopnia drugiego np. $a'+b'z+c'z^2$; wtedy każdy licznik powinien mieć dwa terminy wzoru $A+Bz$, ażeby tyle wprowadzić ilości nieznanych ile wyniknie różnych terminów z przywiedzenia takowych ułamków do spólnego mianownika, które potém terminy porównane z odpowiadaiącémi sobie w liczniku funkcyi danéy utworzą tyleż zrównań.

Uważaliśmy dotąd mianownik złożony z mnożników rzetelnych nierównych i równych; przeydźmy teraz do przypadku kiedy mianownik rozbiera się na mnożniki uroione. Wiémy że te mnożniki otrzymuią się rozwiązuiąc zrównanie, które wypada uczyniwszy mianownik równym zero: ieżeli pierwiastki tego zrównania są uroione, liczba ich musi bydź parzysta, i te które do iednéy pary należą muszą bydź zupełnie sobie podobne różniąc się tylko znakiem przed częścią uroioną położonym. Takowe pierwiastki będą miały postać $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, $\alpha-\beta\sqrt{-1}$, $\gamma+\delta\sqrt{-1}$, $\gamma-\delta\sqrt{-1}$, itd; zatém mnożniki mianownika będą $z-\alpha-\beta\sqrt{-1}$, $z-\alpha+\beta\sqrt{-1}$, $z-\gamma-\delta\sqrt{-1}$, $z-\gamma+\delta\sqrt{-1}$, itd. Otrzymawszy te mnożniki, gdybyśmy założyli że

$$\frac{M}{N}=\frac{A}{z-\alpha-\beta\sqrt{-1}}+\frac{B}{z-\alpha+\beta\sqrt{-1}}+\frac{C}{z-\gamma-\delta\sqrt{-1}}$$
$$+\frac{D}{z-\gamma+\delta\sqrt{-1}}+\text{itd},$$

i przywiedli ułamki proste do spólnego mianownika, uroione terminy weszłyby do summy liczników. Tym sposobem wpadlibyśmy na tę nieprzyzwoitość, że funkcya rzetelna M byłaby równa funkcyi uroioney. Zeby tego uniknąć, nie daią się za mianowniki ułamkom prostym mnożniki uroione stopnia pierwszego, ale się formuią wieloczyny stopnia drugiego z mnożników do iedney pary należących, i te używaią się na mianowniki. Takowe wieloczyny są $z^2-2\alpha z+\alpha^2+\beta^2$, $z^2-2\gamma z+\gamma^2+\delta^2$, itd; każdy z liczników w tym razie musi, iakośmy niedawno powiedzieli, mieć wzór $A+Bz$. Będzie przeto

$$\frac{M}{N}=\frac{A+Bz}{z^2-2\alpha z+\alpha^2+\beta^2}+\frac{C+Dz}{z^2-2\gamma z+\gamma^2+\delta^2}+\text{itd.}$$

Liczba tych ułamków prostych iest równa liczbie par mnożników uroionych mianownika N.

Gdyby mnożniki uroione były równe, toiest gdyby było $N=(z^2-2\alpha z+\alpha^2+\beta^2)^m$; wtedy trzeba założyć

$$\frac{M}{N}=\frac{A+Bz}{(z^2-2\alpha z+\alpha^2+\beta^2)^m}+\frac{C+Dz}{(z^2-2\alpha z+\alpha^2+\beta^2)^{m-1}}$$
$$+\text{ itd }+\frac{K+Lz}{z-2\alpha z+\alpha^2+\beta^2}.$$

W każdym przypadku należy ułamki proste przywieść do spólnego mianownika, potém summę liczników porównać z licznikiem M; zrównania ztąd wypadaiącego wszystkie terminy przenieść na iednę stronę; naostatek spółczynniki przy różnych potęgach ilości zmienney uczynić zerem, co wyda liczbę zrównań potrzebną do ocenienia ilości stałych nieznanych A, B, C, itd.

§ 4. *Łatwieyszy sposób wynaydowania liczników ułamkom prostym.*

W sposobie dopiéro wyłożonym, do każdego ze zrównań służących na ocenienie ilości stałych A, B, C, . . . w licznikach ułamków prostych wchodzi razem kilka tych ilości; żeby zatém odkryć ich wartość, musimy odbywać eliminacyą tém dłuższą, im więcey będzie takowych ilości, albo, co na iedno wypada, im wyższego będzie stopnia mianownik N funkcyi daney. Starać się nam przeto należy przyyść do takiego sposobu, w którymby ocenienie licznika dla iakiegokolwiek ułamku prostego było od innych niezawisłe.

A). Wziąwszy funkcyą $\frac{M}{N}$, maiącą mianownik N złożony z rozmaitego gatunku mnożników, szukaymy naprzód reguły na dochodzenie liczników w ułamkach prostych których mianownikami są mnożniki rzetelne nierówne zawarte w N. Niech iednym z takowych mnożników będzie $a'-b'z$; iemu odpowiedni ułamek prosty wyrazi się przez $\frac{A}{a'-b'z}$. Wystawmy przez $\frac{R}{S}$ summę wszystkich pozostałych ułamków prostych przywiedzionych między sobą do spólnego mianownika: zatém

$$\frac{M}{N}=\frac{A}{a'-b'z}+\frac{R}{S} \quad \ldots\ldots \quad (h),$$

gdzie A iest stałe; M, R, S są funkcyami ilości z koniecznie całkiemi, i S wyraża oczywiście wieloczyn ze wszystkich mnożników wchodzących do składu N prócz $a'-b'z$, tak, że $N=(a'-b'z)S$. Dawszy zrównaniu (h) postać

$$\frac{M}{(a'-b'z)S}=\frac{A}{a'-b'z}+\frac{R}{S}=\frac{AS+(a'-b'z)R}{(a'-b'z)S},$$

wyciągniemy

$$R=\frac{M-AS}{a'-b'z}.$$

Ponieważ R iest funkcyą całką ilości zmienney z; musi bydź $M-AS$ zupełnie rozdzielne przez $a'-b'z$, czyli $a'-b'z$ musi wchodzić iako mnożnik do składu $M-AS$: ieżeli zatém uczynimy $a'-b'z=0$, będzie też $M-AS=0$; lecz $a'-b'z$ wtedy iest zerem, kiedy $z=\frac{a'}{b'}$, więc $M-AS$ stanie się naówczas zerem, kiedy w M i S położymy $\frac{a'}{b'}$ na mieyscu z: po takiém podstawieniu zamienią się M i S na ilości stałe; wyraziwszy ie wtedy przez (M) i (S), będzie $(M)-A(S)=0$, zkąd $A=\frac{(M)}{(S)}$. Co nas uczy, że *chcąc oznaczyć licznik ułamku prostego maiącego za mianownik* a'—b'z *którykolwiek z mnożników nierównych mia-*

nownika N; *trzeba uczynić* $a' - b'z = 0$, *wyciągnąć zląd wartość na z, tę podstawić w* M *i* S, *a wieloraz z podzielenia* (M) *przez* (S) *będzie wartością* A. Tym sposobem wynayduie się licznik każdego ułamku prostego, którego mianownikiem iest ieden z mnożników rzetelnych nierównych składaiących N. Obaczmy to na przykładzie: niech będzie dana funkcya $\frac{1+z^2}{z-z^3} = \frac{1+z^2}{z(1+z)(1-z)} = \frac{M}{N} = \frac{A}{z} + \frac{B}{1+z} + \frac{C}{1-z}$. Szukaiąc wartości na licznik A, trzeba iego mianownik uczynić zerem, co daie $z=0$, tę wartość kładąc w M czyli w $1+z^2$ wypada $(M)=1$; potém też wartość podstawiwszy w S czyli w $(1+z)(1-z)$, otrzymamy $(S)=1$: przeto $A = \frac{(M)}{(S)} = \frac{1}{1} = 1$. Dla znalezienia B należy uczynić $1+z=0$, zkąd $z=-1$; ta wartość z odmienia M na 2, a zaś S czyli $z(1-z)$ na -2; więc $B = \frac{2}{-2} = -1$. Naostatek żeby oznaczyć C, zakłada się $1-z=0$, zkąd $z=1$: podług téy wartości wypada $(M)=2$, S czyli $z(1+z)$ zamienia się na $2=(S)$; zatém $C = \frac{2}{2} = 1$. Przeto $\frac{1+z^2}{z-z^3} = \frac{1}{z} - \frac{1}{1+z} + \frac{1}{1-z}$: wypadły takie same ułamki proste na iakieśmy też funkcyą sposobem poprzedzaiącym rozebrali.

B). Postąpmy teraz do rozkładu funkcyi $\frac{M}{N}$ na ułamki proste, kiedy mianownik N zamyka mnożniki rzetelne równe, kiedy np. $N = (a'-b'z)^m S$, gdzie S iest wieloczynem ze wszystkich mnożników pozostałych. Dowiedliśmy wyżéy, że ułamki proste odpowiadaiące mnożnikom $(a'-b'z)^m$ równym są wzoru $\frac{A}{(a'-b'z)^m} + \frac{B}{(a'-b'z)^{m-1}} + \ldots + \frac{K}{a'-b'z}$; będzie zatém $\frac{M}{N}$ czyli

$$\frac{M}{(a'-b'z)^m S} = \frac{A}{(a'-b'z)^m} + \frac{B}{(a'-b'z)^{m-1}} + \ldots + \frac{K}{a'-b'z} + \frac{R}{S} \ldots (i),$$

gdzie A, B, C, . . . K są ilości stałe, które potrzeba ocenić: R iest summą liczników wszystkich ułamków prostych pozostałych przywiedzionych do spólnego mianownika; iest to więc funkcya całka ilości zmiennéy z. Uwolniwszy zrównanie (i) od mianownika wyciągniemy $R =$

$$\frac{M - S[A + B(a' - b'z) + C(a' - b'z)^2 + . + K(a' - b'z)^{m-1}]}{(a' - b'z)^m} \ldots (k);$$

aże R iest funkcyą całką ilości z, musi bydź licznik w drugim członku zupełnie rozdzielny przez mianownik $(a' - b'z)^m$, a tém bardziéy przez $a' - b'z$; uczyniwszy więc $a' - b'z = o$, cały licznik stanie się zerem; ponieważ zaś terminy wszystkie począwszy od B są mnożone przez $a' - b'z$, więc te zaraz stawszy się zerem odpadną zostawuiąc $M - AS = o$, zkąd $A = \frac{M}{S}$: gdzie nam trzeba pamiętać, iż nie wprzód A iest równe $\frac{M}{S}$, póki w M i S nie włożymy wartości wydobytéy ze zrównania $a' - b'z = o$ czyli $z = \frac{a'}{b'}$. Maiąc iuż oznaczone A, szukać teraz należy wartości na B, C, . . . K. Włożywszy odkrytą wartość za A w funkcyą $M - AS$; ta stanie się koniecznie rozdzielną przez $a' - b'z$, bo inaczéy licznik w drugiéy stronie zrównania (k) nie dałby się zupełnie przez $a' - b'z$ podzielić: wykonawszy dzielenie, i wieloraz otrzymany nazwawszy M', będzie $M - AS = M'(a' - b'z)$; co podstawuiąc w zrównaniu (k) znaydziemy $R =$

$$\frac{M'(a' - b'z) - S[B(a' - b'z) + C(a' - b'z)^2 + .. + K(a' - b'z)^{m-1}]}{(a' - b'z)^m}$$

albo $R =$

$$\frac{M' - S[B + C(a' - b'z) + D(a' - b'z)^2 + ... + K(a' - b'z)^{m-2}]}{(a' - b'z)^{m-1}} \ldots (l).$$

Rozumuiąc nad tém zrównaniem podobnie iak nad (k) przekonamy się że gdy $a' - b'z = o$, musi bydź $M' - BS = o$, zkąd $B = \frac{M'}{S}$ gdzie w M' i S powinna bydź włożona wartość $\frac{a'}{b'}$ za z. Dla znalezienia C trzeba otrzymaną wartość B podstawić w funkcyi $M' - BS$, przez co ta funkcya stanie się zupełnie rozdzielną przez $a' - b'z$; uskuteczniwszy dzielenie, wypadnie pewny wieloraz który nazwiymy M''; będzie

$M' - BS = M''(a' - b'z)$, co kładąc w (l) przyydziemy do

$$R = \frac{M'' - S[C + D(a' - b'z) + \text{itd} + K(a' - b'z)^{m-3}]}{(a' - b'z)^{m-2}},$$

zkad na mocy iednakich zawsze rozumowań wypadnie $C = \frac{M''}{S}$, gdzie w M'' i S powinna bydź podstawiona za z wartość $\frac{a'}{b'}$. Tą drogą ciągle iśdź należy, póki wszystkie liczniki A, B, C, . . K nie zostaną ocenione. Cały ten rachunek przystosuymy, dla lepszego obiaśnienia, do przykładu. Niech będzie $\frac{M}{N} = \frac{1+z^2}{(1-2z)^3(1+z)} = \frac{A}{(1-2z)^3} + \frac{B}{(1-2z)^2} + \frac{C}{1-2z} + \frac{D}{1+z}$, gdzie $M = 1+z^2$, $S = 1+z$. Uczyniwszy $1-2z = 0$, mamy $z = \frac{1}{2}$; przeto $A = \frac{(M)}{(S)} = \frac{5}{6}$. Ztąd $\frac{M - AS}{a' - b'z} = \frac{1-5z+6z^2}{6(1-2z)} = \frac{1-3z}{6} = M'$; więc $B = \frac{(M')}{(S)} = -\frac{1}{18}$. Następnie $\frac{M' - BS}{1-2z} = \frac{4}{18} = M''$; zatém $C = \frac{(M'')}{(S)} = \frac{4}{27}$. Nakoniec $D = \frac{(M)}{(S)}$, gdzie $M = 1+z^2$, $S = (1-2z)^3$; trzeba w M i S włożyć za z wartość ze zrównania $1+z=0$: wziąwszy -1 za z wypada $D = \frac{2}{27}$. Funkcya więc dana rozbiera się na ułamki proste następne

$$\frac{5}{6(1-2z)^3} - \frac{1}{18(1-2z)^2} + \frac{4}{27(1-2z)} + \frac{2}{27(1+z)}.$$

C). Trzymaiąc się zawsze iednakich początków i téy saméy drogi, przenieśmy naszę uwagę do funkcyy, których mianowniki zawieraią w swoim składzie mnożniki uroione nierówne lub równe. Niech będzie ułamek $\frac{M}{N}$, w którym N zamyka mnożniki uroione; i niech $z^2 - 2\alpha z + \alpha^2 + \beta^2$ wyraża wieloczyn z dwóch takich mnożników do téy saméy pary należących, które więcéy sobie równych w N nie maią. Jeden więc ułamek prosty będzie miał postać $\frac{A+Bz}{z^2 - 2\alpha z + \alpha^2 + \beta^2}$, gdzie A i B są do ocenienia. Nazywaiąc, iak piérwéy, przez $\frac{R}{S}$ summę ułamków prostych pozostałych, będzie

$$\frac{M}{N}=\frac{M}{(z^2-2\alpha z+\alpha^2+\beta^2)S}=\frac{A+Bz}{z^2-2\alpha z+\alpha^2+\beta^2}+\frac{R}{S}=$$
$$\frac{(A+Bz)S+R(z^2-2\alpha z+\alpha^2+\beta^2)}{(z^2-2\alpha z+\alpha^2+\beta^2)S}$$

zkąd $R=\frac{M-S(A+Bz)}{z^2-2\alpha z+\alpha^2+\beta^2}$. A ponieważ R iest funkcyą całką ilości zmiennéy z, więc w drugim członku ostatniego zrównania powinien bydź licznik zupełnie rozdzielnym przez mianownik $z^2-2\alpha z+\alpha^2+\beta^2$; idzie zatém że gdy ten mianownik iest zerem, będzie też zerem iego licznik; mianownik zaś wtedy będzie zerem, toiest wtedy znikną wszystkie terminy zrównania $z^2-2\alpha z+\alpha^2+\beta^2=0$, kiedy na mieyscu z położymy wartość z tego zrównania wydobytą, która iest $z=\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$: taż sama przeto wartość z podstawiona w liczniku $M-S(A+Bz)$ powinna go przywieść do zera. Kładąc wartość za z w funkcyą M przerobimy ią na funkcyą ilości stałych złożoną z dwóch części, z iednéy rzetelnéy, z drugiéy rozmnożonéy przez $\sqrt{-1}$: niech $m\pm m'\sqrt{-1}$ wyraża to na co się M w tym razie zamienia; podobnie $s\pm s'\sqrt{-1}$ niech będzie tém, w co przechodzi funkcya S, kiedy w niéy wartość z podstawimy. Będziemy zatém mieli zrównanie $m\pm m'\sqrt{-1}-(s\pm s'\sqrt{-1})[A+B(\alpha\pm\beta\sqrt{-1})]=0$ albo po wykonaniu mnożenia $m\pm m'\sqrt{-1}-sA-\alpha sB\mp\beta sB\sqrt{-1}\mp s'A\sqrt{-1}\mp\alpha s'B\sqrt{-1}+\beta s'B=0$. Ponieważ ilości uroione nie mogą niszczyć rzetelnych; więc w ostatniém zrównaniu musi bydź osobno zerem summa terminów rzetelnych, osobno summa uroionych. Ztąd wypadaią dwa zrównania

$$\left.\begin{array}{l} m-\alpha sB+\beta s'B-sA=0 \\ m'-\alpha s'B-\beta sB-s'A=0 \end{array}\right| \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (m),$$

w których wszystkie ilości prócz A i B są wiadome; z nich przeto A i B ocenimy. Tym samym sposobem wynayduie się wartość każdych liczników w ułamkach prostych, które mianownikami maią wieloczyny powstałe z innych par mnożników uroionych do składu N wchodzących. *Przykład.* Niech będzie funkcya $\frac{M}{N}=\frac{7x^2+9x+19}{x^3+x-10}=$

$\frac{7x^2+9x+19}{(x^2+2x+5)(x-2)}=\frac{A+Bx}{x^2+2x+5}+\frac{C}{x-2}$, gdzie $M=7x^2+9x+19$. Dla odkrycia wartości na A i B, trzeba znaleźć czém są w teraźnieyszym przykładzie m, m', s, s', α, β, wchodzące do zrównań (m). Rozwiązawszy zrównanie $x^2+2x+5=0$, otrzymamy $x=-1\pm2\sqrt{-1}$; więc $\alpha=-1$, $\beta=2$. Kładąc wartość za x w M, wypadnie $-11\pm(-10\sqrt{-1})$; ztąd $m=-11$. $m'=-10$. Podstawniąc też wartość za x w S czyli w $x-2$, będzie $-3\pm2\sqrt{-1}$; więc $s=-3$, $s'=2$. Zrównania (m) odmienią się na $-11-3B+4B+3A=0$, $-10+2B+6B-2A=0$, i rozwiązane dadzą $A=3$, $B=2$. Szukaiąc C należy uczynić $x-2=0$, zkąd $x=2$; tę wartość położyć w M, z czego wypadnie 65, potém też wartość podstawić w S czyli w x^2+2x+5, co wyda 13: więc $C=\frac{65}{13}=5$. Ułamek przeto $\frac{7x^2+9x+19}{x^3+x-10}$ roskłada się na proste $\frac{3+2x}{x^2+2x+5}+\frac{5}{x-2}$.

D). Zostaie nam nakoniec do rozbioru przypadek, kiedy w N wchodzi kilka równych par mnożników uroionych. Daymy że $N=(z^2-2\alpha z+\alpha^2+\beta^2)^m S$. Nazwawszy dla krótkości $z^2-2\alpha z+\alpha^2+\beta^2=Q$, będziemy mieli podług §fu poprzedzaiącego

$$\frac{M}{N}=\frac{M}{Q^m S}=\frac{A+Bz}{Q^m}+\frac{C+Dz}{Q^{m-1}}+\frac{E+Fz}{Q^{m-2}}+\ldots+\frac{K+Lz}{Q}+\frac{R}{S}:$$

ztąd $R=$

$$\frac{M-S[A+Bz+(C+Dz)Q+(E+Fz)Q^2+..+(K+Lz)Q^{m-1}]}{Q^m}\ldots(n)$$

Rozumuiąc nad tém zrównaniem podobnie iak w przypadkach poprzedzaiących, wniesiemy, że podstawiwszy w liczniku na drugiéy stronie za z wartość $\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$ niszczącą Q, cały licznik stanie się zerem: terminy idące po $A+Bz$ maiąc mnożnikiem Q zginą natychmiast i odpadną, a zostanie $M-S(A+Bz)=0$, gdzie za z uważać należy podstawioną wartość: nazwawszy, iak niedawno, przez $m\pm m'\sqrt{-1}$, $s\pm s'\sqrt{-1}$ to na co się zamieniaią funkcye M i S, będziemy mieli $m\pm m'\sqrt{-1}-(s\pm s'\sqrt{-1})[A+B(\alpha\pm\beta\sqrt{-1})]=0$; zkąd uczyniwszy oddzielnie zerem summę terminów rzetelnych i uroionych, wpadniemy na dwa zrównania takie same iak (m) z których oznaczymy wartość na A i B. Znalazłszy te wartości, kiedy ie włożymy w funkcyą $M-S(A+Bz)$, ta funkcya stanie się rozdzielną przez Q: wykonawszy dzielenie i znacząc wieloraz przez $M_{,}$, będzie $M-S(A+Bz)=QM_{,}$ co podstawuiąc w (n) otrzymamy

$$R=\frac{M_{,}Q-S[(C+Dz)Q+(E+Fz)Q^2+\ldots+(K+Lz)Q^{m-1}]}{Q^m}$$

czyli

$$R=\frac{M_{,}-S[C+Dz+(E+Fz)Q+\ldots+(K+Lz)Q^{m-2}]}{Q^{m-1}} \ldots\ldots (p).$$

Na mocy iednakich zawsze rozumowań funkcya $M_{,}-S(C+Dz)$ stanie się zerem kiedy za z płożymy w niéy wartość $\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$. Daymy że $M_{,}$ zamienia się po takiém podstawieniu na $m_{,}\pm m'_{,}\sqrt{-1}$, S na $s\pm s'\sqrt{-1}$. Będzie zatém $m_{,}\pm m'_{,}\sqrt{-1}-(s\pm s'\sqrt{-1})[C+D(\alpha\pm\beta\sqrt{-1})]=0$, zkąd przyydziemy do dwóch zrównań zupełnie podobnych (m), tylko na mieyscu A i B będą teraz C i D, na mieyscu m, m' będą $m_{,}$, $m'_{,}$. Z tych zrównań oceniwszy C i D, kiedy znalezione wartości podstawimy w funkcyi $M_{,}-S(C+Dz)$, ta da się zupełnie rozdzielić przez Q; nazwawszy wieloraz ztąd wypadaiący przez $M_{,,}$ będziemy mieli $M_{,}-S(C+Dz)=M_{,,}Q$: to podstawiwszy w (p), przyydziemy do zrównania

$$R=\frac{M_{,,}-S[E+Fz+(G+Hz)Q+\ldots+(K+Lz)Q^{m-3}]}{Q^{m-2}}.$$

Włożywszy w funkcyą $M_{,,}-S(E+Fz)$ za z wartość $\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$, ta funkcya powinna stać się zerem. Znacząc przez $m_{,,}\pm m'_{,,}\sqrt{-1}$ to w co przechodzi $M_{,,}$ po takiém podstawieniu, a przez $s\pm s'\sqrt{-1}$ to w co się zamienia S, otrzymamy $m_{,,}\pm m'_{,,}\sqrt{-1}-(s\pm s'\sqrt{-1})[E+F(\alpha\pm\beta\sqrt{-1})]=0$ zrównanie które prowadzi do dwóch innych podobnych (m); z tych wyciągniemy wartość na E i F. Łatwo iuż widzimy, iaki rachunek odbywać należy dla odkrycia wartości na G, H; . . K, L. *Przykład.*

$$\frac{M}{N}=\frac{x+1}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}=\frac{x+1}{(x^2+1)^2(x-1)}=$$
$$\frac{A+Bx}{(x^2+1)^2}+\frac{C+Dx}{x^2+1}+\frac{E}{x-1}.$$

Żeby wynaleźć A i B, trzeba w zrównaniach (m) podstawić wartości na m, m', s, s', α, β, do teraźnieyszego przykładu stosowne. Otrzymamy α i β rozwiązuiąc zrównanie $x^2+1=0$ z którego $x=\pm\sqrt{-1}$, więc $\alpha=0$, $\beta=1$. Kładąc wartość za x w M czyli w $x+1$ będzie $1\pm\sqrt{-1}$, przeto $m=1$, $m'=1$; podstawuiąc też wartość w S czyli w $x-1$, wypada $-1\pm\sqrt{-1}$, zatém $s=-1$, $s'=1$. Zrównania (m) zamieniaią się na $1+B+A=0$, $1+B-A=0$; zkąd $A=0$, $B=-1$. Dla odkrycia C i D, należy w zrównaniach (m) położyć te ilości na mieyscu A i B; wartości na s, s', α, β zachować też same, a zamiast m, m' wziąć $m_{,}$, $m'_{,}$ które wprzód stosownie do podanego przykładu trzeba wynaleźć. Jlości $m_{,}$, $m'_{,}$ otrzymuią się z $M_{,}$ przez podstawienie wartości za x; funkcya zaś $M_{,}=\frac{M-S(A+Bx)}{Q}=\frac{1+x+(x-1)x}{x^2+1}=1$. Ponieważ $M_{,}$ pokazuie się bydź ilością stałą, więc nie mamy w niém za co podstawiać wartości na x, ale zaraz wniesiemy że $m_{,}=1$ $m'_{,}=0$. Zrównania (m) wezmą kształt $1+D+C=0$, $D-C=0$, i dadzą $C=-\frac{1}{2}$, $D=-\frac{1}{2}$. Naostatek $E=\frac{(M)}{(S)}$, gdzie w M czyli w $x+1$ i w S czyli w $(x^2+1)^2$ powinna się włożyć wartość na x ze zrównania $x-1=0$. Kładąc 1 za x wypada $E=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. A zatém

$$\frac{x+1}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}=-\frac{x}{(x^2+1)^2}-\frac{1+x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2(x-1)}.$$

Zastosowanie roskładu ułamków do wynaydowania wyrazu ogólnego szeregów zwrotnych.

Jeżeli ułamek dany $\frac{M}{N}$ rozbierzemy na proste: wtedy, iak summa ułamków prostych równa się danemu, tak summa szeregów wypadaiących z ułamków prostych będzie szeregiem iakiby wyniknał z rozwinienia ułamku danego; a następnie i wyrazy ogólne szeregów częściowych razem dodane złożą wyraz ogólny szeregu całego równaiącego się ułamkowi danemu.

Widzieliśmy że kiedy w ułamku $\frac{M}{N}$ mianownik N powstaie z mnożników rzetelnych nierównych lub równych, ułamki proste maią kształt $\frac{A}{a'-b'z}$, $\frac{A}{(a'-b'z)^m}$ gdzie m znaczy iakąkolwiek liczbę całką dodatną. Te ułamki proste mogą bydź przywiedzione do wzorów $\frac{A}{1-rz}$, $\frac{A}{(1-rz)^m}$, którym odpowiedne wyrazy ogólne poznaliśmy w §*fie 2gim*. Gdyby więc z rozkładu wypadło

$$\frac{M}{N}=\frac{A}{1-pz}+\frac{B}{1-qz}+\frac{C}{(1-rz)^3}+\frac{D}{(1-rz)^2}+\frac{E}{1-rz};$$

wyraz ogólny szeregu wynikłego z ułamku $\frac{M}{N}$ byłby

$$Ap^n z^n+Bq^n z^n+\frac{(n+1)(n+2)}{1.\ 2}Cr^n z^n+(n+1)Dr^n z^n$$
$$+Er^n z^n$$ czyli

$$[Ap^n+Bq^n+\frac{(n+1)(n+2)}{1.\ 2}Cr^n+(n+1)Dr^n+Er^n]z^n.$$

Przykład I. Znaleźliśmy w połowie teraźnieyszego §*fu* że

$$\frac{1+z^2}{(1-2z)^3(1+z)}=\frac{5}{6(1-2z)^3}-\frac{1}{18(1-2z)^2}+\frac{4}{27(1-2z)}$$
$$+\frac{2}{27(1+z)}:$$

porównywaiąc piérwszy ułamek prosty ze wzorem $\frac{A}{(1-rz)^3}$, mamy $A=\frac{5}{6}$, $r=2$; przeto wyraz ogólny $\frac{(n+1)(n+2)}{1.\ 2}Ar^n z^n$ zastosowany do tego ułamku będzie $\frac{(n+1)(n+2)}{1.\ 2}.\frac{5}{6}.2^n z^n$. Podobnie wyrazy ogólne dwóch następnych ułamków będą $-(n+1)\frac{1}{18}.\ 2^n z^n$, $\frac{4}{27}.2^n z^n$. Ułamek ostatni porównany ze wzorem $\frac{A}{1-rz}$ daie $A=\frac{2}{27}$, $r=-1$; zatém wyraz ogólny odpowiedny temu ułamkowi będzie $\frac{2}{27}(-1)^n z^n$. Zebrawszy razem wszystkie terminy ogólne, otrzymamy

$$[\tfrac{5}{6}.2^n\frac{(n+1)(n+2)}{1.\ 2}-\tfrac{1}{18}.2^n(n+1)+\tfrac{4}{27}2^n+\tfrac{2}{27}(-2)^n]z^n$$

na wyraz ogólny szeregu iakiby wypadł z ułamku $\frac{1+z^2}{(1-2z)^3(1+z)}$.

Przykład II. Rozebrawszy ułamek $\frac{1-39z-16z^2}{(3+4z)^2(2+3z)}$ na proste, wypadnie $\frac{1-39z-16z^2}{(3+4z)^2(2+3z)}=\frac{5}{(3+4z)^2}-\frac{1}{2+3z}$. Piérwszy ułamek prosty znaczy iedno co $\frac{5}{3^2(1+\frac{4}{3}z)^2}$; z porównania iego ze wzorem $\frac{A}{(1-rz)^2}$ mamy $A=\frac{5}{3^2}=\frac{5}{9}$, $r=-\frac{4}{3}$: przeto wyraz ogólny stosowny do tego ułamku będzie $(n+1).\frac{5}{9}.(-\frac{4}{3})^n z^n$. Drugi ułamek może się wystawić w postaci $\frac{-\frac{1}{2}}{1+\frac{3}{2}z}$: porównawszy go z $\frac{A}{1-rz}$, wypada $A=-\frac{1}{2}$, $r=-\frac{3}{2}$; ztąd wyraz ogólny odpowiedny temu ułamkowi będzie $-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})^n z^n$. Zatém wyraz ogólny szeregu iakiby wyniknął z ułamku $\frac{1-39z-16z^2}{(3+4z)^2(2+3z)}$ ma kształt
$[(n+1).\frac{5}{9}.(-\frac{4}{3})^n-\frac{1}{2}(-\frac{2}{3})^n]z^n$.

Gdy mianownik N zawiéra mnożniki uroione nierówne lub równe, naówczas ułamki proste maią kształty $\frac{A+Bz}{z^2-2\alpha z+\alpha^2+\beta^2}$, $\frac{A+Bz}{(z^2-2\alpha z+\alpha^2+\beta^2)^m}$. Zeby przeto w teraźnieyszym przypadku znaleźć wyraz ogólny szeregu pochodzącego z ułamku $\frac{M}{N}$, trzeba nam piérwéy poznać wyrazy ogólne odpowiedne tym ułamkom prostym. Weźmy naprzód ułamek $\frac{A+Bz}{z^2-2\alpha z+\alpha^2+\beta^2}$; rozebrawszy w nim mianownik na dwa uroione mnożniki, będzie $\frac{A+Bz}{(z-\alpha-\beta\sqrt{-1})(z-\alpha+\beta\sqrt{-1})}$: możemy go ieszcze wystawić pod kształtem $\frac{A+Bz}{(z-p)(z-q)}$ położywszy $p=\alpha+\beta\sqrt{-1}$, $q=\alpha-\beta\sqrt{-1}$. Według reguł na przypadek mnożników rzetelnych rozbierzmy ostatni ułamek na dwa prostsze z mianownikami $z-p$, $z-q$; te ułamki wypadną $\frac{A+Bp}{(p-q)(z-p)}+\frac{A+Bq}{(q-p)(z-q)}$ czyli $\frac{A+Bp}{p(p-q)(\frac{1}{p}z-1)}+$

$\frac{A+Bq}{q(q-p)(\frac{1}{q}z-1)}$. Uczyniwszy dla krótkości $\frac{A+Bp}{p(p-q)}=G$, $\frac{A+Bq}{q(q-p)}=H$; będzie $\frac{A+Bz}{z^2-2\alpha z+\alpha^2+\beta^2}$ czyli $\frac{A+Bz}{(z-p)(z-q)}$

$$=\frac{G}{\frac{1}{p}z-1}+\frac{H}{\frac{1}{q}z-1}=-\left(\frac{G}{1-\frac{1}{p}z}+\frac{H}{1-\frac{1}{p}z}\right).$$

Wyraz ogólny odpowiadaiący tym dwóm ułamkom iest $-(\frac{G}{p^n}+\frac{H}{q^n})z^n$; tu podstawiwszy wartości za G i H, otrzymamy $-[\frac{A+Bp}{p^{n+1}(p-q)}+\frac{A+Bq}{q^{n+1}(q-p)}]z^n$ albo

$$\left[-\frac{A+Bp}{p^{n+1}(p-q)}+\frac{A+Bq}{q^{n+1}(p-q)}\right]z^n \quad \text{albo}$$

$[\frac{A(p^{n+1}-q^{n+1})+Bpq(p^n-q^n)}{(pq)^{n+1}(p-q)}]z^n$; włożywszy wartości za p i q, znaydziemy

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{A[(\alpha+\beta\sqrt{-1})^{n+1}-(\alpha-\beta\sqrt{-1})^{n+1}]}{2\beta\sqrt{-1}(\alpha^2+\beta^2)^{n+1}} \\ \frac{+B(\alpha^2+\beta^2)[(\alpha+\beta\sqrt{-1})^n-(\alpha-\beta\sqrt{-1})^n]}{2\beta\sqrt{-1}(\alpha^2+\beta^2)^{n+1}}\end{array}\right\}z^n \ldots (q).$$

Taki iest wyraz ogólny szeregu powstaiącego z rozwinienia ułamku $\frac{A+Bz}{z^2-2\alpha z+\alpha^2+\beta^2}$: uroiona iego postać iest tylko pozorna, o czém się zaraz przekonamy. Rozwińmy potęgi $(\alpha+\beta\sqrt{-1})^n$, $(\alpha-\beta\sqrt{-1})^n$; będzie

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^n=\alpha^n+n\alpha^{n-1}\beta\sqrt{-1}-\frac{n(n-1)}{1.\ 2}\alpha^{n-2}\beta^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}\alpha^{n-3}\beta^3\sqrt{-1}+\text{itd},$$

$$(\alpha-\beta\sqrt{-1})^n=\alpha^n-n\alpha^{n-1}\beta\sqrt{-1}-\frac{n(n-1)}{1.\ 2}\alpha^{n-2}\beta^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}\alpha^{n-3}\beta^3\sqrt{-1}+\text{itd}.$$

Zatém $(\alpha+\beta\sqrt{-1})^n - (\alpha-\beta\sqrt{-1})^n = 2\sqrt{-1}[n\,\alpha^{n-1}\beta - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}\alpha^{n-3}\beta^3 + \text{itd}\,]$. Nazwawszy dla krótkości szereg rzetelny zamknięty nawiasem przez k, będzie $(\alpha+\beta\sqrt{-1})^n - (\alpha-\beta\sqrt{-1})^n = 2k\sqrt{-1}$. Podobnie $(\alpha+\beta\sqrt{-1})^{n+1} - (\alpha-\beta\sqrt{-1})^{n+1}$ moze się wystawić przez $2k'\sqrt{-1}$. Więc termin ogólny (q) przyyymie kształt $\frac{2Ak'\sqrt{-1}+2B(\alpha^2+\beta^2)k\sqrt{-1}}{2\beta\sqrt{-1}.(\alpha^2+\beta^2)^{n+1}}z^n = \frac{Ak'+Bk(\alpha^2+\beta^2)}{\beta(\alpha^2+\beta^2)^{n+1}}.z^n$ od wyrażeń uroionych oswobodzony.

Jdźmy teraz do ułamku $\frac{A+Bz}{(z^2+2\alpha z+\alpha^2+\beta^2)^m}$, który można wystawić podobnie iak w przeszłym razie pod postacią $\frac{A+Bz}{(z-p)^m(z-q)^m}$ uczyniwszy $p=\alpha+\beta\sqrt{-1}$, $q=\alpha-\beta\sqrt{-1}$. Rozbierzmy go na ułamki proste; będzie

$$\frac{A+Bz}{(z-p)^m(z-q)^m} = \frac{G}{(z-p)^m} + \frac{G'}{(z-q)^{m-1}} + \ldots + \frac{G'''}{(z-p)^2} + \frac{G''''}{z-p} + \frac{H}{(z-q)^m} + \frac{H'}{(z-q)^{m-1}} + \ldots + \frac{H'''}{(z-q)^2} + \frac{H''''}{z-q},$$

gdzie ilości G, H, G', H',.,. potrzeba ocenić podług sposobów wyłożonych na przypadek mnożników mianownika rzetelnych. Gdy ich wartość będzie iuż znaleziona, należy potém iak w poprzedzaiącym razie szukać wyrazu ogólnego odpowiednego summie ułamków $\frac{G''''}{z-p}+\frac{H''''}{z-q}$, następnie szukać wyrazów odpowiednych summom $\frac{G'''}{(z-p)^2}+\frac{H'''}{(z-q)^2}, \ldots, \frac{G'}{(z-p)^{m-1}}+\frac{H'}{(z-q)^{m-1}}$, $\frac{G}{(z-p)^m}+\frac{H}{(z-q)^m}$. Odkrywszy te cząstkowe terminy ogólne, kiedy w nich podstawimy wartości za p i q, a potém ie uwolnimy od wyrażeń uroionych i razem z sobą dodamy, wypadnie na summę ogólny wyraz szeregu iakiby się otrzymał z rozwinienia ułamku $\frac{A+Bz}{(z^2+2\alpha z+\alpha^2+\beta^2)^m}$. Cały ten rachunek iest łatwy i prosty; ale że nader długi, rozwiiać go nie będziemy przestaiąc na wskazaniu iego ciągu i porządku.

§ 5. *Maiąc wiadome stopnie stosunku między terminami szeregu zwrotnego danego, znaleźć ułamek z którego ten szereg wyniknął.*

Poznawszy sposób rozbierania ułamków na szeregi i odkrywszy wyrazy ogólne; zaymiemy się następnie wynalezieniem drogi wracaiącey od danego szeregu zwrotnego do funkcyi która go wydała, a którą nazwiemy *ułamkiem rodzącym* (fraction génératrice) Ta część traktatu o szeregach iest nayważnieysza: w niey zamierzamy otrzymać wyrażenie skończone, któreby tyle znaczyło ile wszystkie terminy szeregu nieskończonego, lub też pewna ich liczba. Sposób do tego służący zowie się *zbieraniem* albo *summowaniem* szeregów.

Niech będzie np. szereg zwrotny
$A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+Fz^5+$ itd $+Pz^n+Qz^{n+1}+Rz^{n+2}$
$Sz^{n+3}+Tz^{n+4}+$ itd,
w którym spółczynniki A, B, C,... są ilościami wiadomémi. Daymy ieszcze, iż znane są stopnie stosunku między terminami; że np. $D=a'C-b'B+c'A$,

$$E=a'D-b'C+c'B,$$

itd.

Skoro mamy stopnie stosunku a', $-b'$, c'; mamy tém samém mianownik ułamku rodzącego. Widzieliśmy bowiem w §*fie* I*m* tego rozdziału, że gdy mianownik ułamku iest $p+qz$, stopień stosunku będzie $-\frac{q}{p}$; gdy mianownik iest $p+qz+rz^2$, wtedy stopnie stosunku będą $-\frac{q}{p}$, $-\frac{r}{p}$; itd: toiest stopniami stosunku są spółczynniki ilości zmienney w mianowniku wzięte ze znakiem przeciwnym i podzielone przez wyraz stały mianownika; i ieżeli ten wyraz stały iest iednością, stopnie stosunku będą liczbami całkiemi. Podług téy uwagi, w teraźnieyszym przykładzie ułamek równy szeregowi będzie miał za mianownik $1-a'z+b'z^2-c'z^3$. A następnie licznik będzie wzoru $a+bz+cz^2$. Otrzymanie więc ułamku rodzącego czyli summy szeregu przywodzi się w tym razie do ocenienia spółczynników licznika a, b, c. Tym końcem należy uczynić

$$\frac{a+bz+cz^2}{1-a'z+b'z^2-c'z^3}=A+Bz+Cz^2+\ldots+Pz^n+Qz^{n+1}+\text{itd},$$

i to zrównanie uwolniwszy od mianownika i przywiódłszy do zera, trzeba w wypadku

$$\begin{array}{r|c|c|c|l}
0=A+B & z+C & z^2+D & z^3+E & z^4+\text{itd} \\
-a-Aa' & -Ba' & -Ca' & -Da' & \\
-b & +Ab' & +Bb' & +Cb' & \\
 & -c & -Ac' & -Bc' &
\end{array}$$

porównać z zerem spółczynniki tylu początkowych terminów, ile iest ilości niewiadomych a, b, c; ztąd wypadną zrównania, które dadzą $a=A$, $b=B-Aa'$, $c=C-Ba'+Ab'$. A przeto summa szeregu nazwana s będzie

$$s=\frac{A+(B-Aa')z+(C-Ba'+Ab')z^2}{1-a'z+b'z^2-c'z^3}\ \ldots\ (r).$$

Zadaymy sobie ieszcze wynaleźć summę części szeregu zwrotnego kończącéy się np. wyrazem Pz^n. Nazwawszy summę wszystkich dalszych wyrazów $Qz^{n+1}+Rz^{n+2}+$ itd przez s', a summę szeregu całego przez s; będzie $s-s'$ summą szukaną. Mamy

$$s'=Qz^{n+1}+Rz^{n+2}+Sz^{n+3}+Tz^{n+4}+\text{itd},$$

czyli

$$s'=z^{n+1}\,(Q+Rz+Sz^2+Tz^3+\text{itd}):$$

ponieważ stopnie stosunku między wyrazami szeregu zwrotnego są też same w całym iego ciągu, więc ostatni szereg nawiasami zamknięty iest co do swego składu zupełnie podobny danemu; ilości Q, R, S, T, ... odpowiadaią ilościom A, B, C, D, . . . Zatém summy szeregów muszą się wyrażać przez ułamki podobne; tylko gdzie w summie pierwszéy są ilości A, B . ., tam w drugiéy będą Q, R, . . Przeto

$$s'=\frac{Qz^{n+1}+(R-Qa')z^{n+2}+(S-Ra'+Qb')z^{n+3}}{1-a'z+b'z^2-c'z^3}$$

Od znalezionéy wprzód summy całego szeregu toiest od ułamku (r) odiąwszy wartość dopiéro odkrytą na s', będziemy mieli summę żądaną części szeregu zakończonéy wyrazem Pz^n.

Jakiegobykolwiek był porządku szereg dany z wiadomémi stopniami stosunku; sposób na dochodzenie iego summy będzie zawsze ten sam iakiśmy teraz wyłożyli.

Przykład. Używszy tego sposobu do szeregu

$$1-6x+12x^2-48x^3+120x^4-\text{ itd},$$

w którym stopnie stosunku są -1, $+6$; znaydziemy na summę ułamek $\frac{1-5x}{1+x-6x^2}$.

§ 6. *Dochodzenie summy szeregu którego stopnie stosunku nie są wiadome.*

Maiąc dany szereg $A+Bz+Cz^2+Dz^3+$ itd, w którym spółczynniki A, B, C,... są liczbami; potrzeba doyść czy iest zwrotny; i ieżeli iest zwrotny, wynaleźć iego ułamek rodzący. To zagadnienie rozwiązał *Lagrange*, opieraiąc się na następuiących uwagach.

Gdy szereg iest zwrotny, musi pochodzić z ułamku wymiernego maiącego kształt $\frac{a}{a'+b'z}$, albo $\frac{a+bz}{a'+b'z+c'z^2}$, albo $\frac{a+bz+cz^2}{a'+b'z+c'z^2+d'z^3}$, albo itd, podług tego iak iest szeregiem porządku piérwszego, drugiego, trzeciego, itd. Aby się zatém przekonać, czy szereg dany iest zwrotny; potrzeba doświadczać, czy może bydź rozwinieniem któregokolwiek z tych ułamków.

Oznaczmy szereg dany przez s: ieżeliby ten szereg wynikał z ułamku maiącego kształt $\frac{a}{a'+b'z}$; natenczas zrównanie $\frac{a}{a'+b'z}=s$ a następnie i zrównanie $\frac{a'+b'z}{a}=\frac{1}{s}$ byłoby *tosame*. Ostatnie znaczy iedno co $\frac{a'}{a}+\frac{b'}{a}z=\frac{1}{s}$, albo co $p+qz=\frac{1}{s}$ gdzie p i q zastępuią mieyce liczb $\frac{a'}{a}$ i $\frac{b'}{a}$. Ponieważ zaś $p+qz$ iest funkcyą całką ilości zmiennéy z, więc takąż funkcyą powinno bydź $\frac{1}{s}$. Co nam pokazuie, że gdy szereg iest zwrotnym porządku piérwszego; dzieląc iedność przez ten szereg, powinniśmy otrzymać wieloraz skończony zamykaiący dwa terminy wzoru $p+qz$. Ze zrównania $\frac{1}{s}=p+qz$ wypada $s=\frac{1}{p+qz}$. Zatém iedność dzielona przez otrzymany wieloraz $p+qz$ daie ułamek równy szeregowi czyli ułamek rodzący. Przykład tego przypadku mamy w szeregu

$$s=2+4z+8z^2+16z^3+32z^4+64z^5+\text{itd},$$

przez który podzielona iedność prowadzi do wielorazu skończonego $\frac{1}{s}=\frac{1}{2}-z$. Ztąd $s=\frac{1}{\frac{1}{2}-z}=\frac{2}{1-2z}$. Szereg więc teraźnieyszy iest zwrotny porządku piérwszego i ma za ułamek rodzący $\frac{2}{1-2z}$. Weźmy ieszcze szereg

$$s=1-6z+12z^2-48z^3+120z^4-408z^5+1128z^6-\text{itd}:$$

dzieląc przezeń iedność; po znalezieniu na wieloraz dwóch terminów $1+6z$ zostanie reszta ciągnąca się przez szereg nieskończony $24z^2-24z^3+168z^4-312z^5+1320z^6-\text{itd.}$ Dany więc szereg nie może bydź zwrotnym porządku piérwszego.

Gdy się przekonamy, iż dany szereg nie iest zwrotnym piérwszego porządku, dla tego że z dzielenia iedności przez ten szereg nie wypada wieloraz skończony o dwóch terminach maiący kształt $p+qz$; potrzeba doświadczać czy nie należy do porządku drugiego, toiest czy nie może wyrażać rozwinienia funkcyi ułamkowéy $\frac{a+bz}{a'+b'z+c'z^2}$: W takim razie byłoby $\frac{a+bz}{a'+b'z+c'z^2}=s$, zkąd $\frac{a'+b'z+c'z^2}{a+bz}=\frac{1}{s}$: wykonywaiąc na stronie piérwszéy dzielenie i przyszedłszy do wielorazu pod wzorem $p+qz$, zostanie reszta wzoru $a''z^2$; więc

$$p+qz+\frac{a''z^2}{a+bz}=\frac{1}{s}\quad\ldots\ldots\quad(s).$$

Ponieważ to zrównanie iest tosame, zatém dzieląc iedność przez s powinniśmy otrzymać wieloraz $p+qz$ z pewną resztą którą nazwiymy r: przeto

$$\frac{1}{s}=p+qz+\frac{r}{s} \quad \ldots\ldots \quad (t).$$

Z dwóch zrównań (s) i (t) wypada

$$\frac{a''z^2}{a+bz}=\frac{r}{s} \quad \ldots\ldots \quad (u):$$

tu strona piérwsza daie się zupełnie podzielić przez z^2; powinna się więc zupełnie rozdzielić i druga, toiest do składu r musi wchodzić mnożnik z^2. W saméy rzeczy ta reszta r iest szeregiem nieskończonym wzoru $tz^2+t'z^3+t''z^4+$ itd, iak widzieliśmy dopiéro w drugim przykładzie; można więc ią wyrazić przez $s'z^2$, gdzie s' iest szeregiem wzoru $t+t'z+t''z^2+$ itd. Zrównania (t) i (u) przyymą kształt

$$\frac{1}{s}=p+qz+\frac{s'z^2}{s} \quad \ldots\ldots \quad (t')$$

$$\frac{a''z^2}{a+bz}=\frac{s'z^2}{s} \quad \ldots\ldots \quad (u').$$

Z ostatniego mamy $\frac{a''}{a+bz}=\frac{s'}{s}$; zkąd $\frac{a+bz}{a''}=\frac{s}{s'}$, albo $\frac{a}{a''}+\frac{b}{a''}z=\frac{s}{s'}$, albo ieszcze $p'+q'z=\frac{s}{s'}$ pisząc p' za $\frac{a}{a''}$, q' za $\frac{b}{a''}$. Ztąd się uczymy, że szereg s będzie zwrotnym porządku drugiego, ieżeli rozdzieliwszy przezeń iedność otrzymamy wieloraz wzoru $p+qz$ z resztą $s'z^2$, i ieżeli dzieląc potém s przez s' wypadnie na wieloraz $p'+q'z$ bez żadnéy reszty. Zrównanie (t') daie $s=\cfrac{1}{p+qz+\cfrac{s'z^2}{s}}$, a że zrównania $\frac{s}{s'}=p'+q'z$ mamy $\frac{s'}{s}=\frac{1}{p'+q'z}$; przeto $s=\cfrac{1}{p+qz+\cfrac{z^2}{p'+q'z}}$. Druga strona iest wyrażeniem skończoném równém szeregowi s nieskończonemu.

Gdyby szereg s nie uczynił zadosyć wskazanym dopiéro warunkom, nie byłby zwrotnym porządku drugiego;

wtedy śledzić należy czy nie iest porządku trzeciego, to-iest czy nie wypada z funkcyi $\frac{a+bz+cz^2}{a'+b'z+c'z^2+d'z^3}$. Uczyniwszy $\frac{a+bz+cz^2}{a'+b'z+c'z^2+d'z^3}=s$, będzie $\frac{a'+b'z+c'z^2+d'z^3}{a+bz+cz^2}=\frac{1}{s}$. Uskuteczniaiąc w członku piérwszym dzielenie, kiedy przyydziemy do wielorazu pod wzorem $p+qz$; zostanie reszta, któréy iedne terminy będą mnożone przez z^2, drugie przez z^3: możemy tę resztę wystawić przez $a''z^2+b''z^3$, albo przez $z^2(a''+b''z)$; będzie zatém

$$p+qz+\frac{z^2(a''+b''z)}{a+bz+cz^2}=\frac{1}{s} \quad \ldots\ldots \quad (w).$$

Aże to zrównanie iest tosame, przeto dzieląc iedność przez s powinniśmy znaleźć wieloraz $p+qz$ z resztą rozdzielną przez z^2: tę resztę ciągnącą się przez szereg nieskończony nazwawszy $s'z^2$, będziemy mieli

$$\frac{1}{s}=p+qz+\frac{s'z^2}{s} \quad \ldots\ldots \quad (x).$$

Ze zrównań (w) i (x) wypada $\frac{a''+b''z}{a+bz+cz^2}=\frac{s'}{s}$; zkąd $\frac{a+bz+cz^2}{a''+b''z}=\frac{s}{s'}$: tu strona piérwsza dawszy wieloraz wzoru $p'+q'z$, zostawi resztę pod wzorem $a'''z^2$; zatém

$$p'+q'z+\frac{a'''z^2}{a''+b''z}=\frac{s}{s'} \quad \ldots\ldots \quad (y).$$

To zrównanie pokazuie, że dzieląc s przez s' powinniśmy przyyść do wielorazu $p'+q'z$ z resztą maiącą spólnym mnożnikiem z^2 dla wszystkich swoich wyrazów: wystawiwszy takową resztę przez $s''z^2$, będzie

$$\frac{s}{s'}=p'+q'z+\frac{s''z^2}{s'} \quad \ldots\ldots \quad (z).$$

Dwa zrównania (y) i (z) prowadzą do $\frac{a'''}{a''+b''z}=\frac{s''}{s'}$; ztąd $\frac{a''+b''z}{a'''}=\frac{s'}{s''}$ czyli $\frac{a''}{a'''}+\frac{b''}{a'''}z=\frac{s'}{s''}$ albo ieszcze $p''+q''z=\frac{s'}{s''}$ położywszy p'' za $\frac{a''}{a'''}$, q'' za $\frac{b''}{a'''}$. Z tego rachunku widzimy, że aby szereg s był zwrotnym porządku trzeciego, trzeba żeby dzieląc iedność przez s wypadł wieloraz wzoru $p+qz$ z resztą $s'z^2$; żeby potém dzieląc s przez s' wypadł znowu wieloraz $p'+q'z$ z resztą $s''z^2$; naostatek żeby dzielenie s' przez s'' skończyło się bez żadnéy reszty daiąc na wieloraz $p''+q''z$. Ze zrównań (x) i (z) mamy

$$s=\frac{1}{p+qz+\frac{s'}{s}z^2},\quad \frac{s'}{s}=\frac{1}{p'+q'z+\frac{s''}{s'}z^2};$$ nadto zrównanie $p''+q''z=\frac{s'}{s''}$ daie $\frac{s''}{s'}=\frac{1}{p''+q''z}$: ztąd

$$s=\cfrac{1}{p+qz+\cfrac{z^2}{p'+q'z+\cfrac{z^2}{p''+q''z}}}.$$ Ten ułamek ciągły przerobiwszy na pospolity, otrzymamy summę szeregu danego czyli ułamek rodzący.

Z tych trzech przykładów szczególnych możemy już wnieść powszechny sposób na rozeznanie szeregów zwrotnych i na wynalezienie ułamków rodzących. Takowy sposób z działań poprzedzaiących wyciągniony i rozwiązuiący przedsięwzięte zadanie zamyka się w następném prawidle. „ Maiąc podany szereg s, trzeba przez niego dzielić iedność, „ póki się nie otrzymaią na wieloraz dwa terminy wzoru „ $p+qz$; ieżeli się została reszta $s'z^2$, trzeba dzielić s przez „ s' póki nie wypadną na wieloraz dwa terminy $p'+q'z$; „ ieżeli z drugiego tego dzielenia została się reszta $s''z^2$, „ należy przez s'' dzielić s' póki na wieloraz nie znaydzie- „ my dwóch terminów wzoru $p''+q''z$; ieżeli ieszcze zo- „ stanie się reszta $s'''z^2$, trzeba przez s''' dzielić s'', i tak „ daléy prowadzić działanie póki nie przyydziemy do wie- „ lorazu skończonego bez żadnéy reszty. Gdy iakakolwiek „ reszta pokaże się bydź zerem, to będzie znakiem, że sze- „ reg dany iest zwrotny; a liczba odbytych działań będzie „ skazówką porządku do którego szereg należy. Jeżeli zaś „ dzielenie taką koleią odbywane nie przyprowadzi do wie- „ lorazu skończonego, szereg podany nie iest szeregiem „ zwrotnym. Kiedy podług téy reguły przekonamy się że „ dany szereg iest zwrotny; iego summę s wyciągniemy ze „ zrównań

„ $\frac{1}{s}=p+qz+\frac{s'z^2}{s}$, $\frac{s}{s'}=p'+q'z+\frac{s''z^2}{s'}$, $\frac{s'}{s''}=p''+q''z+\frac{s'''z^2}{s''}$, itd. "

Tak otrzymana summa szeregu zwrotnego będzie wyrażona przez ułamek ciągły, który potrzeba ieszcze zamienić na pospolity. Chociaż w ułamkach ciągłych tu wypadaiących liczniki nie są iednościami, iak w tych któreśmy dawniéy rostrząsali; sposób atoli zamiany ich na pospolite iest zawsze iednaki. Niech będzie ułamek $a+\cfrac{a'}{b+\cfrac{b'}{c+\cfrac{c'}{d+\text{itd}}}}$,

którego części coraz dłuższe są a, $a+\frac{a'}{b}$, $a+\cfrac{a'}{b+\cfrac{b'}{c}}$,

$a+\cfrac{a'}{b+\cfrac{b'}{c+\cfrac{c'}{d}}}$, itd. Z dwóch piérwszych części zrobione

ułamki pospolite są $\frac{a}{1}$, $\frac{ab+a'}{b}$: a iako część druga zamienia się na trzecią biorąc $b+\frac{b'}{c}$ za b; tak i ułamek pospolity równy części drugiéy zamieni się na równy części trzeciéy kiedy w nim podobnież za b położymy $b+\frac{b'}{c}$,

i wypadnie $\frac{abc+a'c+ab'}{bc+b'}$. Tu znowu za c wziąwszy $c+\frac{c'}{d}$ otrzymamy ułamek pospolity równy części następnéy ułamku ciągłego; itd.

Użycie reguły podanéy w teraźnieyszym §fie na wynaydowanie summy szeregów zwrotnych obaczmy w przykładach. Niech będzie szereg

$1+2z+3z^2+3z^3+7z^4+5z^5+15z^6+9z^7+31z^8+17z^9+63z^{10}+33z^{11}+127z^{12}+65z^{13}+$ itd $=s$;

którego prawo iest nam nieznane: potrzeba doyść czy iest szeregiem zwrotnym; i ieżeli iest, wynaleźć iego ułamek rodzący.

Rozdzieliwszy iedność przez ten szereg otrzymamy

$$\frac{1}{s}=1-2z+\frac{z^2(1+3z-z^2+9z^3-5z^4+\text{itd})}{s},$$

gdzie funkcya zamknięta nawiasem iest tém co zwykliśmy wyrażać przez s'. Dzieiąc s przez s', będzie

$$\frac{s}{s'}=1-z+\frac{z^2(7-7z+21z^2-21z^3+\text{itd})}{s'},$$

gdzie szereg zamknięty nawiasem iest to s''. Rozdzieliwszy s' przez s'' znaydziemy wieloraz zupełny bez żadnéy reszty

$$\frac{s'}{s''}=\frac{1+4z}{7}.$$

Co pokazuie, że dany szereg iest zwrotny porządku trzeciego: ułamek iego rodzący będzie $\cfrac{1}{1-2z+\cfrac{z^2}{1-z+\cfrac{7z^2}{1+4z}}}$ czyli

$$\frac{1+3z+3z^2}{1+z-2z^2-2z^3}.$$

Dostrzegliśmy w teraźnieyszém działaniu, że każdy szereg zostaiący na resztę był rozdzielny przez z^2; trafić się atoli może iż szereg takowy będzie zamykał w pierwszym zaraz terminie potęgę wyższą nad z^2, np. z^3, z^4, itd. Wtedy z téy reszty trzeba mnożnik z^3, z^4, itd. odłączyć, a mnożnika drugiego, który będzie szeregiem nieskończonym użyć za dzielnik w dalszym rachunku. To zdarzenie zachodzi w następuiącym szeregu

$$1+z+z^2+2z^3+4z^4+6z^5+7z^6+7z^7+7z^8+8z^9+10z^{10}$$
$$+12z^{11}+\text{itd}=s;$$

dzieląc przezeń iedność otrzymamy

$$\frac{1}{s}=1-z-\frac{z^3(1+2z+2z^2+z^3+z^6+2z^7+\text{itd})}{s};$$

przez szereg zawarty nawiasem, który nazwiymy s', dzieląc s znaydziemy

$$\frac{s}{s'}=1-z+\frac{z^2(1+3z+5z^2+6z^3+\text{itd})}{s};$$

przez szereg obięty w nawiasach czyli przez s'' dzieląc s' wypadnie bez żadnéy reszty

$$\frac{s'}{s''}=1-z.$$

Ztąd widzimy że szereg podany iest zwrotny, którego ułamek rodzący wyraża się przez $\cfrac{1}{1-z-\cfrac{z^3}{1-z+\cfrac{z^2}{1-z}}}$; co przywiódłszy do ułamku pospolitego, będzie $\frac{1-2z+2z^2}{1-3z+4z^2-3z^3+z^4}$.

Przeto szereg podany iest czwartego porządku, lubo trzy tylko zachodziły działania: to ztąd wynika, że piérwsza reszta miała spólnym dzielnikiem dla wszystkich swoich wyrazów z^3 a nie z^2. W ogólności, ieżeli n znaczy liczbę działań, i ieżeli piérwsza reszta iest rozdzielna przez z^p, druga przez z^q, trzecia przez z^r, itd; szereg będzie porządku $n+(p-2)+(q-2)+(r-2)+$ itd: o czém się łatwo ze szczególnych przykładów przekonać.

§ 7. *Rozwiązanie zadań mogących zachodzić w postępach arytmetycznym i geometrycznym.*

Skończymy naukę o szeregach krótką uwagą dwóch ieszcze gatunków maiących częste w zagadnieniach użycie, a które są znane z arytmetyki pod nazwiskiem postępów arytmetycznego i geometrycznego. Piérwszy z nich zależy na iednéy statecznéy różnicy, drugi na iednym stałym wielorazie czyli stosunku dwóch terminów przyległych. Postęp arytmetyczny wzrastaiący wyraża się ogólnie przez

$\div a \,.\, a+b \,.\, a+2b \,.\, a+3b \,.\, a+4b \,.\, a+5b \,.\, a+6b$. itd $\div$

gdzie widzimy że wyraz którykolwiek równa się piérwszemu a powiększonemu różnicą b rozmnożoną przez liczbę wyrazów poprzedzaiących: a zatém nazwawszy liczbę terminów całego szeregu przez x, termin ostatni przez u, będzie

$$u=a+(x-1)b \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (A).$$

Oprócz tego dodawszy wyraz ostatni z piérwszym, wypadnie taka summa do iakiéy prowadzi dodanie dwóch którychkolwiek wyrazów równie oddalonych od skraynych: summa więc całego szeregu równa się summie dwóch skraynych tyle razy powtórzonéy, ile liczba wszystkich terminów rozdzielona przez 2 ma w sobie iedności. Nazwawszy summę przez s, będzie

$$s=(a+u)\frac{x}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (B).$$

Za pomocą dwóch zrównań (A) i (B), maiąc z pięciu ilości a, b, u, x, s trzy którekolwiek znane, wynaydziemy wszystko cokolwiek do postępu arytmetycznego należy.

Postęp znowu geometryczny rosnący tak się wyraża
$$\div\div\; a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 : aq^5 : aq^6 : \text{itd} \div\div$$
Ostatni iego termin równa się, iak widzimy, piérwszemu rozmnożonemu przez stosunek q podniesiony do potęgi, któréy wykładnik oznacza liczbę terminów całego szeregu zmnieyszoną o iedność: nazwawszy więc termin ostatni u, liczbę wszystkich x, będzie

$$u=aq^{x-1} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (C).$$

Wystawiwszy ogólnie postęp geometryczny przez
$$a : b : c : d : e : f : g : \text{itd},$$
i zakładaiąc że stosunek każdych przyległych w nim terminów iest q; będzie $b=aq$, $c=bq$, $d=cq$, $e=dq$, $f=eq$, $g=fq$; itd. Zaczém

$$b+c+d+e+f+g=(a+b+c+d+e+f)q.$$

W tém zrównaniu postrzegamy, że piérwszemu członkowi brakuie terminu piérwszego, a drugiemu ostatniego; przeto
$$s-a=(s-u)q, \quad \text{zkąd} \quad s=\frac{uq-a}{q-1} \quad \text{czyli}$$

$$s=\frac{aq^x-a}{q-1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (D).$$

Dwa zrównania (C) i (D) zamykaią w sobie pięć ilości a, q, u, s, x: maiąc z tych ilości trzy którekolwiek znane, a między niemi x, wynaydziemy wartość na dwie pozostałe. Lecz gdyby pomiędzy ilościami do ocenienia była liczba terminów postępu x; do iéy odkrycia przez wiadome dotąd drogi rozwiązania zrównań przyyśdźbyśmy nie potrafili. Wypadłoby nam bowiem dochodzić wartości na ilość nieznaną ze zrównania, w którém ta ilość iest wykładnikiem ilości wiadoméy. Ponieważ zaś i do takich zrównań mogą zagadnienia warunkami swoiemi prowadzić, iak zaraz w przykładzie obaczymy; należy nam przeto tego rodzaiu zrównania poznać i roztrząsnąć: co otwiéra pole do nowych badań w następuiącym rozdziale.

Przykład. Dana iest na procent pewna summa, z warunkiem iż po każdym skończonym roku procent powinien bydź dołączany do kapitału i powiększać summę od któréy ma się liczyć procent w roku następnym. Potrzeba doyść ile wierzycielowi będzie winien dłużnik na końcu roku piérwszego, drugiego, trzeciego, itd.

Nazwiymy summę pierwiastkową przez a, procent roczny od 100 przez p, a tém samém procent roczny od 1 przez $\frac{p}{100}$: ten ułamek $\frac{p}{100}$ wyrażać będziemy dla krótkości przez r; zatém roczny procent od iakieykolwiek summy będzie wieloczynem z téy summy przez r. Od summy więc a procent roczny iest ar; a cała należytość wierzycielowi w końcu roku piérwszego iest $a+ar$ czyli

$$a(1+r).$$

Przez rok drugi procent liczony iuż nie od a ale od $a(1+r)$ będzie $a(1+r)r$, a całkowita należytość na końcu roku drugiego wynosi $a(1+r)+a(1+r)r$ czyli $a(1+r)(1+r)$ czyli ieszcze

$$a(1+r)^2.$$

Podobnie na końcu lat trzech, cztérech, itd, należytości będą

$$a(1+r)^3, \quad a(1+r)^4, \text{ itd:}$$

i ogólnie po latach n summa maiąca się oddać wierzycielowi iest $a(1+r)^n$. Wyrachowanie téy summy podlega, iak widzimy, nayprostszym znanym iuż regułom.

Lecz gdybyśmy przedsięwzięli doyść, przez ile lat summa wiadoma a powinna zostawać u dłużnika, żeby procentami ustanowionémi r urosła do wielkości zamierzonéy b; należałoby rozwiązać zrównanie

$$a(1+r)^x = b,$$

w którém a, r, b są dane, a ilość x potrzebaby ocenić. To się uskutecznia za użyciem logarytmów sposobem maiącym się wkrótce wyłożyć.

ROZDZIAŁ DRUGI.

Funkcye wykładnicze prowadzą do poznania logarytmów, których się tłumaczą własności, użycie, sposób rozbierania ich na szeregi i rachowania z nich tablic logarytmicznych.

---

§ 1. *Uwagi nad zrównaniem wykładniczém odkrywaią nam własności logarytmów i ich użycie.*

Na końcu rozdziału poprzedzaiącego trafiliśmy na zrównanie, w którém ilość nieznana iest wykładnikiem. To zrównanie może bydź przywiedzione do wzoru $a^x = b$. Chcąc ié rozwiązać trzebaby znaleźć taką liczbę na wartość x, aby podniosłszy liczbę daną a do potęgi wskazanéy przez tę wartość, wypadła druga liczba dana b. Przez żadne z sześciu algebraicznych działań do takowego rozwiązania przyyśdź nie potrafimy; dla tego zrównanie $a^x = b$ i funkcya a^x nazywaią się *przestępne* (transcendentes). Poznamy wkrótce inne gatunki zrównań i funkcyy przestępnych; teraźnieyszego gatunku zowią się *wykładnicze* (exponentielles). Wypada nam teraz na rozwiązanie zrównań wykładniczych szukać sposobu szczególnego, stosownego do ich osobnéy natury. Zebyśmy do odkrycia takowego sposobu przyyść mogli; zatrzymamy się piérwéy nad poznaniem własności zrównania $a^x = b$. Rzecz iasna, że zachowuiąc zawsze tę samę wartość na a, kiedy odmieniać będziemy b, musi też bydź coraz inna wartość odpowiadaiąca na x; i nawzaiem coraz inna wartość x musi wydadź coraz inną wartość na b, tak dalece że przez dobranie stosownych wartości na x, możnaby otrzymać na b wszelkie liczby iakie tylko mieć zechcemy. Zeby widoczniey wskazać, że a iest stałe, a zaś x, b są zmienne, połóżmy y na mieyscu b; będziemy mieli zrównanie $a^x = y$, w którém y zależy od wartości x, i wzaiemnie x zależy od wartości y. Jeżeli x przeydzie przez liczby następuiące po sobie w porządku naturalnym $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$, czyli przez postęp arytmetyczny, y przeydzie przez wszystkie porządkiem idące potęgi a, toiest a^0, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, ... czyli przez postęp geometryczny; będzie więc postępowi arytmetycznemu ułożonemu z wartości na x odpowiadał postęp geometryczny z wartości na y. A że wiemy z arytmetyki, że ułożywszy dwa postępy liczb, ieden arytmetyczny a drugi geometryczny; wyrazy piérwszego zowią się logarytmami wyrazów drugiego: będzie więc x *logarytmem* y czyli $x = \log. y$. Dla téy przyczyny zrównanie wykładnicze $a^x = y$ ma także nazwisko zrównania *logarytmicznego*: lubo to nazwisko właściwieyby służyło zrównaniu takiéy np. postaci $\log. x = a$ z któregoby potrzeba ocenić x.

W nauce logarytmów zachodzą, iak widzimy, trzy rzeczy do uważania: wartości x, toiest logarytmy; wartości y toiest liczby tym logarytmom odpowiadaiące; ilość stała a, która, raz obrana, iest taż sama na wszystkie liczby i ich logarytmy, i dla tego nazywa się *gruntem logarytmów* (base des logarithmes). Wyrachowane logarytmy x odpowiadaiące wszystkim liczbom y stosownie do obranego gruntu a stanowią *układ logarytmów* (système des logarithmes). Różnych układów może bydź mnóstwo nieskończone; podług tego, iak coraz inną liczbę obierzemy na wartość gruntu a.

Ze zrównania $a^x = y$ uczymy się *naprzód*, że logarytm iestto wykładnik gruntu, a potęga gruntu przez ten wykładnik wskazana iest liczbą odpowiadaiącą. *Powtóre*, że w każdym układzie logarytmem iedności iest zero; bo iakąbyśmykolwiek wartość obrali na a, skoro $x = 0$, zawsze $y = 1$. *Potrzecie*, że w każdym układzie logarytmem gruntu iest iedność; położywszy bowiem $x = 1$, wypada $y = a$. *Poczwarte*, że na grunt nie może bydź brana iedność, gdyż uczyniwszy $a = 1$, każdéy wartości na x czyli każdemu logarytmowi odpowiadaiąca liczba byłaby równa iedności. *Popiąte*, wziąwszy $a > 1$ i nadaiąc na x wszystkie wartości dodatne, coraz powiększaiące się od 0 aż do ∞, wartości na y będą rosły od 1 aż do ∞, tak, iż $\log. \infty = \infty$. Przeto wszystkich liczb od iedności większych zawartych między 1 i ∞ logarytmy są dodatne i zamykaią się między 0 a ∞. Wziąwszy na x wartości odiemne, np. uczyniwszy $x = -n$, będzie $a^{-n} = y$ czyli $\frac{1}{a^n} = y$. Tu widzimy że im n iest większe, tém ułamek $\frac{1}{a^n}$ czyli wartość y iest mnieysza; tak dalece, że kiedy n iest nieskończone, wtedy y staie się zerem. Ztąd logarytmy ułamków właściwych są odiemne tém większe, im wartość takowych ułamków będzie mnieysza, i naostatek $log. 0 = -\infty$. Trafilibyśmy na wypadki wręcz przeciwne biorąc $a < 1$; nateneczas logarytmy coraz większe dodatne należałyby do ułamków coraz mnieyszych, a logarytmy odiemne służyłyby liczbom tém większym im same byłyby większe.

Jdźmy teraz do użycia logarytmów. Niech będą liczby iakiekolwiek y, u, których logarytmy są x, z, w tym samym układzie maiącym grunt a; będzie $a^x = y$, $a^z = u$. Mnożąc przez siebie te dwa zrównania, wypada $a^{x+z} = yu$; przeto $x + z = \log. yu$, czyli $\log y + \log u = \log yu$: *logarytm więc mnogości równy iest summie logarytmów odpowiadaiących mnożnikom.* Rozdzieliwszy przez siebie strony odpowiadaiące dwóch zrównań $a^x = y$, $a^z = u$, otrzymamy $a^{x-z} = \frac{y}{u}$; zaczém $x - z = \log. \frac{y}{u}$, czyli $\log y - \log u = \log \frac{y}{u}$; toiest *logarytm wielorazu iest równy różnicy miedzy logarytmem podzielnéy a logarytmem dzielącéy.* W zrównaniu $a^x = y$ podnosząc obie strony do potęgi n, będzie $a^{nx} = y^n$, przeto $nx = \log y^n$; lecz że $x = \log. y$, więc $n \log y = \log. y^n$. Kiedy n iest liczbą całą, ostatni wzór służy na wynoszenie do potęg za pomocą logarytmów, i pokazuie że *logarytm iakieykolwiek potęgi równy iest logarytmowi liczby, którą chcemy podnosić, rozmnożonemu przez wykładnik żądanéy potęgi.* Kiedy zaś n iest ułamkiem, ten sam wzór służy na wyciąganie pierwiastków: niech np. $n = \frac{1}{r}$, będzie $\frac{1}{r} \log. y = \log. y^{\frac{1}{r}} = \log \sqrt[r]{y}$, toiest *logarytm iakiegokolwiek pierwiastku iest równy logarytmowi liczby z któréy się ma ten pierwiastek wyciągać rozdzielonemu przez wykładnik znaku pierwiastkowego.* Ztąd widzimy, że gdy zamiast liczb maiących się poddać pod rozmaite działania weźmiemy tych liczb logarytmy; mnożenie zostanie przywiedzione do dodawania, dzielenie do odciągania, wynoszenie do potęg do mnożenia, wyciąganie pierwiastków do dzielenia: co niezmiernie ułatwia naypracowitsze arytmetyczne rachunki.

Po wyłożonych teraz własnościach logarytmów łatwo już nam będzie rozwiązać zrównanie na końcu przeszłego rozdziału zostawione $s = \frac{aq^x - a}{q-1}$ czyli $\frac{s(q-1)+a}{a} = q^x$; bo wziąwszy po obu stronach logarytmy, wypada $x \log. q = \log. \frac{s(q-1)+a}{a} = \log(sq - s + a) - \log a$; ztąd $x = \frac{\log.(sq-s+a) - \log a}{\log. q}$. Obchodząc się podobnie ze zrównaniem $a^x = y$, będzie $x \log a = \log. y$; ztąd $x = \frac{\log. y}{\log a}$. Jeżeli tu logarytmy są brane z układu maiącego za grunt a, wtedy $\log. a = 1$, i zostanie $x = \log. y$ iakośmy zawsze dotąd uważali: ale ieżeli nie a lecz inna iaka liczba iest gruntem branych logarytmów, naówczas wartość x ze zrównania $a^x = y$ będzie $x = \frac{\log. y}{\log. a}$. Na mocy ieszcze ustanowionych tu początków potrafimy rozwiązać zrównanie zwane właściwie logarytmicznem, należące także do klassy przestępnych, które ma wzór $\log. x = b$; na ten koniec wiedzieć potrzeba w iakim gruncie wzięty iest logarytm: ieżeli w gruncie a, będziemy mieli $x = a^b$, gdyż biorąc z obu stron logarytmy wrócilibyśmy się znowu do $\log x = b$.

Odkryte powyżéy własności logarytmów nie są przywiązane do żadnéy szczególnéy wartości gruntu, a zatém służą wszystkim układom, którychby można utormować liczbę nieskończoną, obieraiąc inną coraz wartość na grunt oprócz iedności. Powszechnie używa się na grunt liczba 10; kładąc ią za a w zrównaniu $a^x = y$, będzie $10^x = y$. Ztąd wypada układ następuiący.

Logarytmy:	0,	1,	2,	3,	4,	5,	itd,
Liczby:	1,	10,	100,	1000,	10000,	100000,	itd,

w którym potęgi coraz wyższe liczby 10, albo co to samo znaczy, iedności coraz wyższego porządku w przyiętym układzie liczenia maią za logarytmy 0, 1, 2, 3, 4, . . ., toiest liczby zawieraiące tyle iedności, ile potęga ma zer na końcu, albo ile ma wszystkich znaków mniéy iednym. Liczb środkuiących między 1 i 10 logarytmy będą >0 ale <1; środkuiących między 10 i 100 logarytmy będą >1 ale <2; środkuiących między 100 i 1000 logarytmy będą >2 ale <3; itd. Takowych przeto liczb logarytmy składać się będą z całości i ułamków: całości zowią się *cechami* (caractéristique) i pokazuią ile znaków zawiéra liczba logarytmowi odpowiadaiąca; zawsze albowiem cecha ma w sobie tyle iedności mniéy iedną, ile liczba zamyka znaków, tak, że ieżeli cecha iest n, liczba ma znaków $n+1$. Wszystkich liczb środkuiących logarytmy nie mogą bydź ocenione tylko przez przybliżenie. Sposób do tego służący poznamy w §*fie* następnym.

Uważaliśmy dotąd logarytmy w iednym iakimkolwiek układzie; obaczmy teraz iaki zachodzi stosunek między logarytmami teyże samey liczby w dwóch układach różnych. Niech a i e będą gruntami dwóch układów; i daymy że liczby n logarytm wzięty z piérwszego układu iest p, z drugiego q. Zatém $a^p = n$, $e^q = n$; ztąd $a^p = e^q$. W tém ostatniém zrównaniu biorąc po obu stronach logarytmy z iakiegokolwiek bądź układu mamy $p\log a = q\log e$; przeto $\frac{q}{p} = \frac{\log a}{\log e}$; aże p iest logarytmem liczby n w gruncie a, można za p napisać $\mathrm{l}.n$, podobnież za q które iest logarytmem liczby n w gruncie e można napisać $\mathrm{l}'.n$, gdzie kréska nad l ostrzegać nas będzie że logarytm należy do układu maiącego za grunt e. Tak więc otrzymamy $\frac{\mathrm{l}'.n}{\mathrm{l}.n} = \frac{\log.\,a}{\log.\,e}$; co nam pokazuie, że *stosunek między logarytmami iedney liczby w dwóch różnych układach iest od samey liczby niezawisły, a zatém iest dla każdey liczby iednaki.* Nazwiymy ten stosunek przez k, toiest uczyńmy $\frac{\log a}{\log e} = k$, będzie $\frac{\mathrm{l}'.n}{\mathrm{l}.n} = k$; ztąd

$$\mathrm{l}'.n = k.\mathrm{l}.n$$

zrównanie służące na wszelką liczbę n. Gdybyśmy przeto mieli wyrachowane logarytmy wszystkich liczb w układzie którego gruntem iest a; pomnożywszy ie przez k, wypadłyby logarytmy wszystkich liczb w układzie maiącym za grunt e. Z téy przyczyny ilość k zowie się *zamiennikiem* (module); gdyż za iéy pomocą przerabiamy logarytmy iednego układu na układ drugi. Jlość k iest stosowna do układów, z których ieden chcemy na drugi zamienić: przechodząc np. z układu maiącego grunt e do układu w gruncie b, byłoby $k=\frac{\log. e}{\log. b}$.

§ 2. *Rozwiiaią się na szeregi funkcye wykładnicze i logarytmiczne.*

Związek pomiędzy ilościami x, y zawarty w zrównaniu $a^x = y$ prowadzi nas do dwóch zagadnień; *piérwsze*, iak maiąc dane x znaleźć odpowiadaiącą wartość na y, toiest maiąc dany logarytm, ocenić liczbę do któréy ten logarytm należy; *drugie*, maiąc dane y, znaleźć odpowiadaiącą wartość na x, toiest wyrachować logarytm liczby danéy. Obu tych zagadnień nie można rozwiązać tylko przez przybliżenie. Potrzeba więc nam otrzymać dwa szeregi: ieden ułożony podług potęg x któryby wyrażał wartość y, albo co iedno znaczy, wartość funkcyi a^x; drugi ułożony podług potęg y, któryby wyrażał wartość x, toiest wartość logarytmu y. Zaczniymy od szukania szeregu piérwszego.

Wystawiwszy funkcyą a^x pod postacią $[1+(a-1)]^x$ i rozwiiaiąc podług wzoru Newtona, będzie

$$y=a^x=[1+(a-1)]^x=1+x(a-1)+\frac{x(x-1)}{1.\ 2}(a-1)^2+\frac{x(x-1)(x-2)}{1.\ 2.\ 3}(a-1)^3+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}(a-1)^4+\text{itd.}$$

Spółczynniki tego szeregu są złożone z x. Wykonawszy w nich naznaczone mnożenie, wieloczyn zamknie tyle części, ile iest mnożników: do takowych części będą wchodziły coraz wyższe potęgi x, toiest x, x^2, x^3, ...; i im spółczynnik do dalszego wyrazu należy w szeregu, tém x do wyższéy w nim potęgi dochodzi. Łatwo oznaczyć w każdym spółczynniku skład téy części która ma w sobie piérwszą potęgę x. Weźmy np. pod uwagę licznik spółczynnika w wyrazie $\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}(a-1)^4$; w nim wieloczyn z mnożników dwuwyrazowych $(x-1)(x-2)(x-3)$

po wykonaniu będzie miał ostatni termin $-1\times-2\times-3$ czyli $-1.2.3$ iak wiémy z praw okazanych w dowodzie wzoru Newtona: terminy poprzedzaiące wieloczynu zamkną x, x^2, x^3. Rozmnożywszy ten wieloczyn przez x dla otrzymania zupełnego licznika, przybędzie mnożnik x do każdego terminu w dopiéro uważanym wieloczynie, i termin iego ostatni zamieni się na $-1.2.3.x$. Następnie część spółczynnika zawiéraiąca piérwszą potęgę x iest $\frac{-1.2.3.x}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$ czyli $-\frac{x}{4}$, a część całego wyrazu szeregowego z piérwszą potęgą x iest $-\frac{x}{4}(a-1)^4$. Podobniebyśmy oznaczyli kształt części zamykaiących piérwszą potęgę x w każdym z wyrazów szeregu. Te wszystkie części razem zebrane i rozłożone na mnożnik x obeymuią się w wyrażeniu

$$x\left[(a-1)-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\frac{(a-1)^4}{4}+\text{itd}\right],$$

którego prawo składu iest oczywiste. Trudniéy byłoby dóyść teraźnieyszym sposobem, iaką maią postać części zawieraiące x^2, x^3, x^4,.... Tę postać wkrótce odkryiemy inną drogą rachunku. Ale iuż iesteśmy przekonani, że powyższy szereg daie się uszykować według rosnących potęg ilości zmiennéy x i że ma piérwszym terminem iedność. Możemy więc założyć że

$$a^x=1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+Ex^5+\text{itd} \quad . \ . \ . \quad (E),$$

gdzie

$$A=(a-1)-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\frac{(a-1)^4}{4}+\text{itd} \quad . \ . \quad (F),$$

ilości zaś B, C, D,... są równie iak A stałe, ale nieznane; potrzeba ie ocenić. Ponieważ zrównanie (E) powinno służyć na wszelką wartość ilości zmiennéy x, przeto ilości stałe A, B,... żadnéy odmianie nie podpadną kiedy położymy $2x$ na mieyscu x; tym sposobem będziemy mieli

$$a^{2x}=1+2Ax+4Bx^2+8Cx^3+16Dx^4+\text{itd} \quad . \ . \ . \quad (G).$$

Wynosząc obie strony zrównania (E) do potęgi drugiéy, znaydziemy

$$a^{2x}=1+2Ax+\left.\begin{matrix}2B\\+A^2\end{matrix}\right|x^2+\left.\begin{matrix}2C\\+2AB\end{matrix}\right|x^3+\left.\begin{matrix}2D\\+2AC\\+B^2\end{matrix}\right|x^4+\text{itd}.$$

To zrównanie ma ze zrównaniem (G) stronę piérwszą tę samę, więc muszą bydź tosame i strony drugie, a zatém spółczynniki przy iednakich potęgach ilości x muszą bydź sobie równe. Ztąd wypadaią zrównania

$$\left.\begin{array}{l} 4B=2B+A^2 \\ 8C=2C+2AB \\ 16D=2D+2AC+B^2 \\ \text{itd} \qquad \text{itd} \end{array}\right\} \text{ z których będzie } \left\{\begin{array}{l} B=\frac{A^2}{1.\ 2} \\ C=\frac{A^3}{1.\ 2.\ 3} \\ D=\frac{A^4}{1.\ 2.\ 3.\ 4} \\ \quad \text{itd} \end{array}\right.$$

Podstawuiąc te wartości w (E), otrzymamy

$$a^x=1+Ax+\frac{A^2}{1.\ 2}x^2+\frac{A^3}{1.\ 2.\ 3}x^3+\frac{A^4}{1.\ 2.\ 3.\ 4}x^4+\text{itd} \ldots (H);$$

Spółczynniki tego szeregu są wszystkie znane, bo wartość na A zamknięta w zrównaniu (F) iest wiadoma.

Ale w podanym dopiéro bardzo prostym sposobie na oznaczenie spółczynników $B, C, D, \ldots$ nie łatwo dostrzedz, czy prawo podług którego te spółczynniki formuią się z A będzie zachowane w całéy rościągłości szeregu. Jednostayność prawa okazuie się oczywistą w sposobie następuiącym. Widzieliśmy że można założyć

$$a^x=1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\text{itd},$$

zatém

$$a^z=1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+\text{itd};$$

zkąd $a^x - a^z$ czyli

$$a^z(a^{x-z}-1)=A(x-z)+B(x^2-z^2)+C(x^3-z^3)+D(x^4-z^4) + \text{itd} \quad \ldots\ldots (*).$$

Z piérwszego zrównania mamy

$$a^x-1=Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\text{itd};$$

tu położywszy $x-z$ za x, wypada

$$a^{x-z}-1=A(x-z)+B(x-z)^2+C(x-z)^3+D(x-z)^4+\text{itd}$$

następnie

$$a^z(a^{x-z}-1)=a^z\,[A(x-z)+B(x-z)^2+C(x-z)^3+D(x-z)^4 + \text{itd.}].$$

To zrównanie ma z $(*)$ stronę piérwszą tę samę, będą więc tosame i strony drugie: przeto

$$A(x-z)+B(x^2-z^2)+C(x^3-z^3)+D(x^4-z^4)+\text{itd}= a^z\,[A(x-z)+B(x-z)^2+C(x-z)^3+D(x-z)^4+\text{itd}];$$

tu rozdzieliwszy obie strony przez $x-z$, otrzymamy
$$A+B(x+z)+C(x^2+xz+z^2)+D(x^3+x^2z+xz^2+z^3)+\text{itd}=$$
$$a^z\,[A+B(x-z)+C(x-z)^2+D(x-z)^3+\text{itd.}].$$
Uczyńmy teraz $x=z$; będzie
$$A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3+\text{itd}=Aa^x\ ;$$
lecz $a^x=1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+$ itd, zatém
$$A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3+\text{itd}=A(1+Ax+Bx^2+Cx^3+\text{itd});$$
porównanie spółczynników przy iednakich potęgach ilości x prowadzi do
$$2B=A^2,\quad 3C=AB,\quad 4D=AC,\ \text{itd; zkąd}$$
$$B=\frac{A^2}{1.\,2},\ C=\frac{A^3}{1.\,2.\,3},\ D=\frac{A^4}{1.\,2.\,3.\,4},\ \text{itd.}$$

Zrównanie (F) pokazuie, że wartość ilości stałéy A zawisła od wartości gruntu a; więc za odmianą gruntu odmieniać się będzie A; i wzaiemnie za odmianą A odmieniać się musi grunt a. W tém zrównaniu mamy A wyrażone przez funkcyą gruntu a; możemy także naodwrót wyrazić grunt a przez funkcyą ilości stałéy A. na ten koniec w zrównaniu (H) uczyńmy $x=1$, będzie
$$a=1+A+\frac{A^2}{1.\,2}+\frac{A^3}{1.\,2.\,3}+\frac{A^4}{1.\,2.\,3.\,4}+\text{itd.}$$

Jeżeli $A=1$; odpowiadaiący grunt a, który w tym szczególnym przypadku nazwiemy przez e, wypada
$$e=1+1+\frac{1}{1.\,2}+\frac{1}{1.\,2.\,3}+\frac{1}{1.\,2.\,3.\,4}+\text{itd}\quad .\ .\ .\quad (K):$$
zebrawszy wyrazy na drugiéy stronie, zamieniwszy na ułamek dziesiątny i zatrzymawszy się na siódmym znaku, otrzymamy $e=2{,}7182818\ldots$ Podług tego gruntu wyrachował logarytmy piérwszy ich wynalazca Neper; dla tego układ maiący za grunt e toiest liczbę 2,7182818 .... nazywa się *układem Nepera*. Logarytmy tego układu noszą także nazwisko *naturalnych*, albo też *hyperbolicznych*. Po Neperze rachował Briggs logarytmy w gruncie 10, które teraz powszechnego są użycia i zowią się logarytmami Briggiusza.

Trafimy na szereg (K) położywszy w zrównaniu (H) $x=\frac{1}{A}$, wypadnie bowiem
$$a^{\frac{1}{A}}=1+1+\frac{1}{1.\,2}+\frac{1}{1.\,2.\,3}+\frac{1}{1.\,2.\,3.\,4}+\text{itd};$$

zatém $e=a^{\frac{1}{A}}$, ztąd $e^A=a$, następnie $A\log e=\log a$, $A=\frac{\log a}{\log e}$. Co nam pokazuie, że ilość A iest zamiennikiem przez który mnożyć potrzeba logarytmy iakiegokolwiek układu maiącego za grunt a żeby ie przerobić na logarytmy Nepera, lub nawzaiem przez który dzielić potrzeba logarytmy Nepera żeby ie przerobić na układ w gruncie a. Kładąc przeto w szeregu (H) za A ilość k przez którą wyraziliśmy zamiennik, będzie

$$y=a^x=1+kx+\frac{k^2}{1.\ 2}x^2+\frac{k^3}{1.\ 2.\ 3}x^3+\frac{k^4}{1.\ 2.\ 3.\ 4}x^4+\text{itd}...(L).$$

Jeżeli w wartości k toiest w $\frac{\log a}{\log e}$ logarytmy są brane z układu Nepera; wtedy $\log e=1$, $k=\mathrm{l}'a$ gdzie kréska ostrzega że logarytm iest wzięty w gruncie e: można więc szereg poprzedzaiący tak wyrazić

$$y=a^x=1+x.\mathrm{l}'a+\frac{x^2(\mathrm{l}'a)^2}{1.\ 2}+\frac{x^3(\mathrm{l}'a)^3}{1.\ 2.\ 3}+\frac{x^4(\mathrm{l}'a)^4}{1.\ 2.\ 3.\ 4}+\text{itd}...(M).$$

Jeżeli zaś logarytmy a i e weźmiemy w gruncie a, będzie $k=\frac{1}{\mathrm{l}.e}$, a zatém

$$y=a^x=1+\frac{x}{\mathrm{l}.e}+\frac{x^2}{1.\ 2.\ (\mathrm{l}.e)^2}+\frac{x^3}{1.\ 2.\ 3.\ (\mathrm{l}.e)^3}+\text{itd}\ ...\ (N),$$

gdzie pamiętać należy, że logarytm e iest brany w gruncie a. Każdy z szeregów (L), (M), (N) znaczy to samo, i iest rozwinieniem funkcyi wykładniczéy a^x podług potęg ilości zmiennéy x, czyli rozwinieniem liczby według potęg iey logarytmu.

Do rozwiązania drugiego zagadnienia łatwo przyydziemy za pomocą wypadków iuż otrzymanych. Znaleźliśmy że $A=\frac{\log.a}{\log.e}$, i że to samo $A=(a-1)-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\frac{(a-1)^4}{4}+\text{itd}$; ztąd

$$\log.a=\log e.\left[(a-1)-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\frac{(a-1)^4}{4}+\text{itd.}\right],$$

gdzie logarytmy a i e są w iednym ale iakimkolwiek układzie; ilość e iest stała i znaczy grunt układu Nepera; ilość

a iest iakakolwiek i może wszelką liczbę wyrażać; z téy przyczyny można zamiast a napisać ilość zmienną y; będzie

$$\log.y=\log e.[(y-1)-\frac{(y-1)^2}{2}+\frac{(y-1)^3}{3}-\frac{(y-1)^4}{4}+\text{itd}].$$

To zrównanie służy (*) do rachowania logarytmu iakieykolwiek liczby danéy; bo położywszy tę liczbę za y, będzie drugi członek wartością iéy logarytmu: nie może bydź atoli w praktyce użyte tylko na liczby mało się różniące od iedności; inaczéy szereg w drugim członku nie będzie malejący i nie da wartości przybliżonéy logarytmu. Przyydziemy do szeregu mogącego wygodnie służyć na liczby wszelkiéy wielkości następuiącym sposobem. Połóżmy $1+u$ za y; wypadnie

$$\log(1+u)=\log e.[u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}+\text{itd}].$$

Odmieniwszy teraz u na $-u$, będzie

$$\log(1-u)=\log e.[-u-\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}-\text{itd}].$$

Odciągaiąc to zrównanie od poprzedzaiącego, znaydziemy

$$\log(1+u)-\log(1-u) \text{ czyli } \log(\frac{1+u}{1-u})=2\log e.[\frac{u}{1}+\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}+\text{itd}] \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (P).$$

(*). Szereg wyrażaiący logarytm liczby y nie może bydź ułożony według potęg saméy liczby y; bo założmy że

$$\log.y=A+By+Cy^2+\text{itd},$$

gdzie A, B . . . są ilości stałe, toiest zawsze iednakie iakabykolwiek liczba była wzięta na mieyscu y. Chcąc ilość A ocenić, dosyć iest uczynić $y=0$; wtedy druga strona przywodzi się do A a piérwsza staie się $-\infty$, wiémy bowiem że $\log.0=-\infty$; przeto $A=-\infty$. Ztądby więc wypadło że $\log y=-\infty+By+Cy^2+$ itd;
i iakąkolwiek liczbę wzięlibyśmy za y, zawsze logarytm téy liczby wyrażony przez drugi członek zrównania byłby nieskończenie wielkim, co iest niepodobieństwo. Gdybyśmy założyli że $\log.y=Ay+By^2+$itd; wtedy uczyniwszy $y=0$, trafilibyśmy na sprzeczność że $-\infty=0$. W rzeczy saméy rozwinienie logarytmu liczby y postępuie według coraz wyższych potęg z $y-1$.

W tém zrównaniu iakąbyśmykolwiek liczbę wzięli za $\frac{1+u}{1-u}$, zawsze u będzie ułamkiem właściwym, a tém samém zawsze szereg będzie maleiący. Trafimy na szereg, ubywaiący ieszcze bardziéy, uczyniwszy $\frac{1+u}{1-u}=1+\frac{z}{n}=\frac{n+z}{n}$, zkąd $u=\frac{z}{2n+z}$; tym sposobem wypada

$\log\left(\frac{n+z}{n}\right)$ czyli $\log(n+z)-\log n=2\log e.\left[\frac{z}{2n+z}+\frac{1}{3}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^3\right.$ $\left.+\frac{1}{5}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^5+\text{itd}\right]$, zatém

$$\log(n+z)=\log n+2\log e.\left[\frac{z}{2n+z}+\frac{1}{3}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^5\right.$$
$$\left.+\frac{1}{7}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^7+\ldots\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (Q)$$

Przez to zrównanie można wyrachować logarytm wszelkiéy liczby $n+z$ maiąc wiadomy logarytm n, i szereg po drugiéy stronie tém będzie nagléy maleiący im n będzie większe. Wziąwszy np. $n=1$, $z=1$, znaydziemy logarytm liczby 2, toiest

$$\log.2=2\log e.\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3.\,3^3}+\frac{1}{5.\,3^5}+\frac{1}{7.\,3^7}+\frac{1}{9.\,3^9}+\text{itd}\right],$$

gdzie szereg tak iest maleiący, że ósmy termin nie doydzie iednéy sto millionowéy cząstki. Gdybyśmy chcieli otrzymać logarytm liczby 3, potrzebaby założyć $n=2$, $z=1$; ztąd

$$\log 3=\log 2+2\log e\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{3.\,5^3}+\frac{1}{5.\,5^5}+\text{itd}\right];$$

ten szereg oczywiście bardziéy ubywa niż poprzedzaiący. Podwoiwszy logarytm liczby 2, otrzymamy logarytm liczby 4; bo $4=2^2$. Potém uczyniwszy $n=4$, $z=1$, przyydziemy do logarytmu liczby 5, itd. Do każdego z logarytmów tak rachowanych wchodzi za mnożnik $\log e$, toiest logarytm gruntu Nepera wzięty w układzie, w iakim logarytmy wynayduiemy. Jeżeli mieć chcemy logarytmy w układzie Nepera, wtedy mnożnik $\log e$ staie się $l'e=1$: logarytmy więc tego układu są do wyrachowania łatwieysze od innych; dla tego że natenczas w zrównaniu (Q) mnożnik szeregu $\log e$ odpada. Na każdy zaś inny układ potrzeba piérwéy $\log e$ ocenić. W tym celu przypomniymy sobie, że zamiennik służący do przerabiania logarytmów Nepera na inny układ w gruncie iakimkolwiek a ma wyrażenie $\frac{\log e}{\log a}$, gdzie logarytmy a i e są brane w iednym ale iakimkolwiek układzie: biorąc ie zatém w układzie Nepera, zamiennik wyrazi się przez $\frac{1}{l'a}$, a biorąc w układzie z gruntem a, ten sam zamiennik wyrazi się przez $l.e$. Co nam pokazuie, że logarytm e w iakimkolwiek gruncie a równy iest iedności rozdzielonéy przez logarytm gruntu a wzięty w układzie Nepera. A zatém chcąc za pomocą zrównania (Q) rachować logarytmy w gruncie a, można zamiast $\log.e$ położyć $\frac{1}{l'a}$. Jeżeli chcemy otrzymać logarytmy Bryggiusza; będzie $a=10$. Znalazłszy ze zrównania (Q) $l'10$ który będzie 2,3025851 ..., przyydziemy potém do $\frac{1}{l'10}=0,4342945\ldots$ Taka iest liczba któréy w tym razie użyć należy za $\log.e$, i która iest zamiennikiem służącym do przemiany logarytmów Nepera na logarytmy Bryggiusza czyli na logarytmy zwyczayne.

Uwaga. Weźmy liczbę n, i dwie inne $n+c$, $n+d$ różniące się od piérwszéy o c i d. Niech logarytm liczby n będzie p; logarytmy liczb $n+c$, $n+d$ iako większe od p mogą się wystawić przez $p+\gamma$, $p+\delta$. Daymy że te wszystkie logarytmy są wzięte z układu maiącego za grunt a; zatém

$$a^p=n,\ a^{p+\gamma}=n+c,\ a^{p+\delta}=n+d,\quad \ldots\ldots\ (*).$$

Dzieląc drugie z tych zrównań przez piérwsze, mamy

$$a^\gamma=1+\frac{c}{n}\quad \text{a następnie}\quad \gamma=\log(1+\frac{c}{n}):$$

tu rozwinąwszy drugą stronę podług otrzymanego niedawno zrównania

$$\log(1+u)=\log e.[u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\text{itd}],$$

wypadnie

$$\gamma=\log e.[\frac{c}{n}-\frac{c^2}{2n^2}+\frac{c^3}{3n^3}-\text{itd}].$$

Co pokazuie, że im liczba n iest większa i im różnica między n a $n+c$ toiest c iest mnieysza, a następnie im ułamek $\frac{c}{n}$ będzie drobnieyszy, tém mnieyszą będzie różnica między logarytmami tychże liczb czyli między p i $p+\gamma$. Jeżeli ułamek $\frac{c}{n}$ iest bardzo mały, można w wartości γ potęgę tego ułamku drugą, trzecią, itd, zaniedbać; wtedy będzie z wielkiém przybliżeniem

$$\gamma = \log e . \frac{c}{n} .$$

Rozdzieliwszy trzecie ze zrównań (*) przez piérwsze, otrzymamy

$$a^\delta = 1 + \frac{d}{n} \text{ czyli } \delta = \log(1 + \frac{d}{n}) = \log e . [\frac{d}{n} - \frac{d^2}{2n^2} + \frac{d^3}{3n^3} - \text{itd.}];$$

zkąd podobnież wynika że, na przypadek ułamku $\frac{d}{n}$ bardzo małego, będzie blizko

$$\delta = \log e . \frac{d}{n} .$$

$$\text{Przeto} \quad \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\log e . \frac{c}{n}}{\log e . \frac{d}{n}} = \frac{c}{d} \text{ czyli } \gamma : \delta = c : d;$$

toiest *różnice między wielką liczbą a dwiema bardzo iéy blizkiemi są prawie proporcyonalne różnicom pomiędzy ich logarytmami.* Na tym początku opiera się podany w arytmetyce sposób wynaydowania logarytmu liczb większych niż zawarte w tablicach logarytmowych.

ROZDZIAŁ TRZECI.

Rachunek trygonometryczny.

§ 1. *Cel trygonometryi. Opisanie liniy trygonometrycznych i wyśledzenie między niemi związku.*

Wszystkie figury prostokreślne mogą bydź rozebrane na tróykąty, bądź za pomocą przekątnych, bądź też prowadząc od punktu wewnątrz figury obranego liniie proste do wszystkich wierzchołków. Do wyrachowania zatém iakichkolwiek figur dosyć iest wiedzieć sposób na ocenienie tróykątów. W każdym tróykącie mamy do uważania sześć rzeczy, które wchodzą do iego składu, toiest trzy boki i trzy kąty. Wszystkie te rzeczy tak z sobą się wiążą, że wartość iednych wpływa na wartość drugich; np. od długości iednego boku i różnéy iego pochyłości do dwóch innych zależy długość tych boków i pochyłość ich względem siebie, a zatém i wielkość powierzchni tróykąta. W ogólności, gdy będą dane w tróykącie trzy rzeczy, między któremi ieden przynaymniéy bok; trzy pozostałe będą miały wartość od pierwszych zawisłą i do nich stosowną, którą można zawsze ocenić. Dla tego zaś między rzeczami danémi bydź musi ieden przynaymniey bok; że gdyby tylko trzy kąty były w tróykącie wiadome, nie moglibyśmy sądzić o długości iego boków; bo możnaby nakreślić nieskończoną liczbę tróykątów sobie podobnych a zatém maiących kąty iednakie, w których atoli długość boków i wielkość powierzchni byłaby coraz inna. Nauka podaiąca zposoby na dochodzenie trzech rzeczy nieznanych w tróykącie, gdy trzy pozostałe są wiadome, nazywa się *Trygonometrya.* W trygonometryi wynayduią się rzeczy nieznane za pomocą proporcyy: ale że stosunek między kątami nie iest równy stosunkowi przeciwległych boków (*); z téy przyczyny na mieysce kątów

(*). To się nayoczywiściey wydaie w tróykącie prostokątnym równoramiennym; w którym każdy kąt ostry iest połową prostego, lecz bok iemu przeciwny iest większy od połowy przeciwprostokątnéy.

użyli do tego rachunku Geometrowie pewnych liniy prostych, które są proporcyonalne bokom lub pewnym funkcyom boków, a maią długość ocenioną stosownie do wielkości kątów, iakich mieysce zastępuią. Te liniie zowią się trygonometryczne: poznamy zaraz ich znaczenie i nazwisko każdey właściwe.

Niech będzie kąt *ACM* (*Fig.* 1.); wziąwszy wierzchołek *C* za środek, promieniem iakieykolwiek długości zakreślmy koło *ABab*; przedłużmy promień *AC* do spotkania okręgu w punkcie *a*, i pociągniymy średnicę *Bb* prostopadłą do *Aa*. Łuk *AM*, na którym wspiera się kąt *ACM*, iest samemu kątowi proporcyonalny; tak, iż iaką częścią iest łuk *AM* względem całego okęgu, tą samą częścią iest kąt *ACM* względem czterech kątów prostych: z wielkości więc łuku *AM* sądzić możemy o wielkości kąta *ACM*; i dla téy przyczyny łuki uważaią się za miarę kątów. Cały okrąg dzieli się na 360 części równych zwanych *stopnie*; każdy stopień dzieli się znowu na 60 *minut*; każda minuta na 60 *sekund*; itd. Łuk więc *AB* będzie miał stopni 90, łuk *ABa* stopni 180; aże łuki są miarą kątów, zatém kąt prosty ma 90 stopni, dwa kąty proste będą miały stopni 180: ieżeli łuk *AM* zawiéra np. stopni 30, tyleż będzie miał kąt *ACM*. Dwa łuki *AM* i *MB* daiące na summę cwierć okręgu zowią się ieden drugiego *dopełnieniem* (complément); podobnież dwa kąty *ACM* i *MCB* są dopełnieniem ieden względem drugiego. Łuki także *AM'* i *BM'* których różnicą iest cwierć okręgu są dopełnieniem siebie przez *nadmiar*. Łuki *AM'* i *M'a* daiące na summę pół okręgu zowią się ieden drugiego *spełnieniem* (supplément): łuki *ABaM''* i *aM''* których różnicą iest pół okręgu są także ieden drugiego spełnieniem ale przez nadmiar. To samo się rozumié o kątach: np. dwa kąty przyległe spełniaią się nawzaiem. Odtąd uważać będziemy same tylko łuki; a cokolwiek o nich powiémy, stosować się będzie i do kątów na nich opartych.

Z punktu *M* poprowadźmy prostopadłą *Mp* do średnicy *Aa*; do teyże średnicy pociągniymy drugą prostopadłą *AT* z punktu *A* aż do spotkania się z przedłużeniem średnicy *M''M*. Liniia *Mp* nazywa się *wstawą* (sinus), łuku *AM*; liniia *AT* zowie się *styczną* (tangente) tego łuku; liniia CT zowie się iego *sieczną* (sécante); naostatek liniia Ap nazywa się *wstawą odwrotną* tegoż łuku (sinus verse). Opisanie każdéy z takowych liniy trygonometrycznych możemy dadź następuiące: *wstawa iakiegokolwiek łuku iest to prostopadła poprowadzona z końca tego łuku do średnicy idącéy przez iego początek. Styczna iest to prostopadła z początku łuku poprowadzona do średnicy przechodzącéy przez ten początek a ograniczona przedłużeniem średnicy przechodzącéy przez koniec łuku. Sieczna iest liniia prosta zawarta między środkiem koła i końcem stycznéy. Wstawa odwrotna iest liniia prosta zamknięta między początkiem łuku i końcem wstawy.* Łuku więc BM wstawą będzie Mq, styczną BS, sieczną CS, wstawą odwrotną Bq; aże łuk BM iest dopełnieniem łuku AM, więc Mq iest wstawą dopełnienia łuku AM; nazywa się ona krócéy *dostawą* łuku AM (cosinus). Podobnie BS zowie się *dostyczną* łuku AM (cotangente); CS *dosieczną* (cosécante); Bq *dostawą odwrotną* (cosinus verse). Dostawa Mq łuku AM równa się pC; można zatém pC brać za dostawę łuku AM; ztąd *dostawa będzie to liniia prosta zawarta między środkiem koła a końcem wstawy.*

Jeżeli z wierzchołka C (*Fig.* 2.) kąta ACM zakreślimy dwa łuki AM i am ograniczone ramionami AC i CM; te łuki będą miały równą liczbę stopni, bo każdy z nich będzie oczywiście tąż samą częścią okręgu do którego należy. Takie łuki nazywaią się *podobne*. Jch wstawy MP i mp maią się iak promienie MC i mC; co wypada z podobieństwa tróykątów PCM i pCm. Można się łatwo przekonać, że ten sam stosunek zachowuie między sobą dostawy i wszystkie liniie trygonometryczne. Jeżelibyśmy przeto mieli ocenione liniie trygonometryczne wszystkich łuków kreślonych promieniem MC; moglibyśmy za pomocą wskazanéy dopiéro proporcyi wyrachować liniie odpowiednych łuków kreślonych innym iakimkolwiek promieniem mC. Gdyby promień MC był iednością; wtedy chcąc od liniy trygonometrycznych należących do łuków koła tym promieniem opisanego przeyść do liniy w kole maiącém inny iakikolwiek promień, potrzebaby tylko pierwsze przez nowy promień rozmnożyć: o czém taż sama proporcya przekonywa. Dla téy przyczyny odtąd zawsze w rachunkach promień będzie iednością.

Między ośmią liniiami trygonometrycznémi należącémi

do iednego łuku zachodzi taki związek, że maiąc którąkolwiek z nich np. wstawę wiadomą, można ocenić wszystkie pozostałe. J tak daymy że wtawa Mp (*Fig.* 1) łuku AM, który nazwiymy a, iest znana. Wynaydziemy zaraz dostawę pC z trókąta prostokątnego MCp, w którym $Mp^2 + Cp^2 = MC^2$ czyli $\text{wst}^2 a + \text{dost}^2 a = 1$, toiest *summa kwadratów ze wstawy i dostawy iakiegokolwiek łuku równa się kwadratowi z promienia czyli iedności*: ztąd $\text{dost}^2 a = 1 - \text{wst}^2 a$, a następnie $\text{dost}.a = \sqrt{1 - \text{wst}^2 a}$.
Maiąc iuż wstawę i dostawę wiadomą przyydziemy do wartości na styczną z podobieństwa tróykątów CpM i CAT w których między bokami zachodzi proporcya $Cp : pM = CA : AT$; ztąd $AT = \frac{pM.CA}{Cp}$, toiest $\text{sty}.a = \frac{\text{wst}\, a}{\text{dost}\, a}$.
Tróykąty podobne CAT i CBS daią $AT : AC = CB : BS$; zatém $BS = \frac{AC.CB}{AT}$ czyli $\text{dosty}.a = \frac{1}{\text{sty}.a}$.
Drugie wyrażenie dostycznéy wypada z tróykątów podobnych CqM i CBS, w których $Cq : qM = CB : BS$; zkąd $BS = \frac{qM.CB}{Cq}$, albo $\text{dosty}.a = \frac{\text{dost}.a}{\text{wst}.\, a}$.
Proporcya $pC : CM = AC : CT$ daie $CT = \frac{CM.AC}{pC}$, więc

$$\text{sie}.a = \frac{1}{\text{dost}.\, a}.$$

Z proporcyi $qC : CM = BC : CS$ wypada $CS = \frac{CM.BC}{qC}$, toiest

$$\text{dosie}.a = \frac{1}{\text{wst}.\, a}.$$

Liniia Ap iest różnicą między AC i pC, a liniia Bq iest różnicą między CB i Cq; przeto

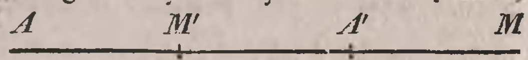
$$\text{wst. od. } a = 1 - \text{dost}.\, a \qquad \text{dost. od. } a = 1 - \text{wst}.a.$$

§ 2. *Jakim odmianom podpadaią liniie trygonometryczne należące do łuku, który, począwszy od zera, przechodzi przez różne stopnie wielkości; i kiedy te liniie są dodatne a kiedy odiemne.*

Wystawmy sobie, że punkt M (*Fig.* 1.) znayduie się naprzód na punkcie A, potém się od niego oddala idąc po okręgu; tym sposobem łuk AM począwszy od zera przechodzić będzie przez rozmaite stopnie wielkości. Uważmy iakim odmianom podpadną iego liniie trygonometryczne; a wszczególności wstawa, dostawa, styczna i sieczna. Gdy punkt M znayduie się na punkcie A, łuk iest zerem; iego wstawa i styczna są zerem, dostawa i sieczna są równe promieniowi AC. Im punkt M odchodząc od A przybliży się bardziey do punktu B, tém iego wstawa, styczna i sieczna będą większe, dostawa zaś tém będzie mnieysza. Kiedy M stanie na B, łuk będzie ćwiercią okręgu; wstawa która ciągle rosła zrówna się z promieniem CB, dostawa która ciągle ubywała zniknie czyli będzie zerem, styczna i sieczna wezmą położenie od siebie równoległe, nie przetną się więc nigdy chociażbyśmy ie naydaléy przedłużyli, toiest będą obie nieskończenie wielkie. Minąwszy B, kiedy punkt ruchomy znaydować się będzie między B i a np. w punkcie M', naówczas łuk ABM' iest większy od ćwierci okręgu; wstawa iego $M'p'$, styczna AT' i sieczna CT' tém będą mnieysze, a dostawa Cp' tém będzie większa, im punkt M' przystąpi bliżéy do a: tak dalece, że gdy punkt ruchomy padnie na a, a tém samém kiedy łuk będzie równy połowie okręgu; wstawa i styczna staną się zerem, sieczna będzie równa promieniowi AC, a dostawa promieniowi Ca. Łuku przewyższaiącego pół okręgu, np. łuku $ABaM''$ wstawa $M''p''$ styczna AT i sieczna CT tém są większe, dostawa zaś Cp'' tém mnieysza, im punkt M'' bliższy iest punktu b; nareszcie łuku $ABab$ równego trzem ćwierciom okręgu wstawa równa się promieniowi Cb, dostawa iest zerem, styczna i sieczna są nieskończone. Łuków przewyższaiących trzy ćwierci okręgu wstawy styczne i sieczne ubywaią a dostawy rosną; np. łuku $ABabM'''$ wstawa $M'''p'''$, styczna AT', sieczna CT' tém są mnieysze, dostawa zaś Cp''' tém iest większa, im punkt M''' bliższy będzie punktu A. Całego okręgu wstawa i styczna będą zerem, dostawa i sieczna będą równe promieniowi AC.

Punkt ruchomy przeszedłszy cały okrąg, może bez przerwy ciągnąć daléy swóy bieg po téy saméy drodze; ztąd formować się będą łuki większe od okręgu: ale ich liniie trygonometryczne będą też same iakie łuków od okręgu mnieyszych. Łuk np. $ABabAM$ ma iednakie liniie trygonometryczne z łukiem AM. Ta uwaga stosuie się zarówno do łuków złożonych z okręgu całego ilekolwiek razy powtórzonego i z iakieykolwiek części; tak, iż nazwawszy okrąg przez O, część iego iakakolwiek przez a, będą wszystkie liniie trygonometryczne łuku $nO+a$ też same co i łuku a, kiedy n iest liczbą całką. Łącząc teraźnieyszą uwagę z dostrzeżonémi odmianami liniy trygonometrycznych należących do łuku coraz rosnącego, wniesiemy: że wszystkich łuków maiących początek w punkcie A, a kończących się w pierwszéy albo trzeciéy ćwierci okręgu wstawy, styczne i sieczne wzrastaią a dostawy maleią; przeciwnie kończących się w ćwierci drugiéy i czwartéy wstawy, styczne i sieczne ubywaią a dostawy rosną.

Idźmy teraz do oznaczenia, iakich łuków liniie trygonometryczne są dodatne a iakich odiemne. Do tego nas przywiedzie następuiąca uwaga. Wystawmy sobie liniią AM, na którey odległość AA' iest dana, i tę



nazwiymy a; odległość każdego punktu linii AM od A wyraźmy przez x; odległość znowu każdego iéy punktu od A' wyraźmy przez x': tu ilości x, x' są oczywiście ilościami zmiennémi. Będziemy mieli

$$AM = AA' + A'M \quad \text{czyli} \quad x = a + x',$$
$$AM' = AA' - A'M' \quad \text{czyli} \quad x = a - x'.$$

Ztąd widzimy że chcąc ieden wzór

$$x = a + x'$$

zastosować do punktów leżących tak po prawéy iak i po lewéy stronie względem punktu A', trzeba dla ostatnich brać x' za odiemne: tak dalece, że skoro punkta linii AM leżą po stronach przeciwnych względem A'; ich odległości od A' powinny bydź poprzedzane znakami przeciwnémi. Znaki przeto $+$ i $-$, które dotąd służyły za cechy dodawania i odciągania, rozróżniały dwa stany przeciwne téy saméy wielkości, wskazywać nam ieszcze będą dwa położenia lub dwa kierunki sobie przeciwne.

Maiąc ten początek obecny w pamięci, uważmy że wstawa Mp przeniesiona na promień BC wyrazi odległość punktu q od środka C; wstawa $M'p'$ wyrazi odległość punktu q' od środka C: słowem wstawy wszystkich łuków kończących się w piérwszéy i drugiéy ćwierci okręgu mogą bydź wzięte za odległości rozmaitych punktów promienia BC od środka. Podobnie wstawy wszystkich łuków kończących się w trzeciéy i czwartéy ćwierci okręgu będą odległościami rozmaitych punktów promienia Cb od środka C. Mamy przeto dwoiakie odległości rachowane od tego samego punktu w strony przeciwne, iedne w górę, drugie na dół; wziąwszy zatém wstawy w piérwszéy i drugiéy ćwierci za dodatne, w trzeciéy i czwartéy będą odiemne. Dla teyże przyczyny, kiedy dostawy łuków kończących się w piérwszéy i czwartéy ćwierci, które można uważać za odległości różnych punktów promienia AC od środka C, weźmiemy za dodatne; dostawy wszystkich łuków zakończonych w drugiéy i trzeciéy ćwierci, które znowu mogą się uważać za odległości różnych punktów promienia Ca od środka C, będą koniecznie odiemne. Wiedząc znaki służące wstawom i dostawom, łatwo poznać iakie należéć powinny do pozostałych liniy trygonometrycznych. J tak pokazaliśmy nie dawno że sty$a = \frac{\text{wst}\,a}{\text{dost}\,a}$; ieżeli a kończy się w piérwszéy ćwierci, iego wstawa i dostawa są dodatne, a zatém i styczna iest dodatna; ieżeli w drugiéy, wtedy wstawa iest dodatna, dostawa odiemna, więc będzie styczna odiemna; w trzeciéy ćwierci wstawa i dostawa iest odiemna, przeto styczna dodatna; w czwartéy wstawa iest odiemna, dostawa dodatna, następnie styczna odiemna. Takim sposobem dochodzić należy znaku wszystkich innych liniy. Na mocy tego samego zawsze początku; ieżeli łuki rachowane od A w górę weźmiemy za dodatne, łuki rachowane w dół będą odiemne. Dwa łuki równe, ale różniące się znakiem, iakiemi są np. AM i AN maią wstawy równe z przeciwnémi także znakami; lecz ich dostawa iest dla obu taż sama co do wielkości i znaku: ieżeli np. wst$a=p$, wtedy wst$(-a)=-p$, a zatém wst$(-a)=-$wst$a$; podobnie ieżeli dost$a=q$, wtedy dost$(-a)=q$, więc dost$(-a)=$dost$a$.

Można ieszcze przyyść do rozróżnienia znaków służących liniiom trygonometrycznym z następuiącego początku: *ile razy iakakolwiek wielkość w swoich ciągłych odmianach przechodzi przez zero lub nieskończoność, iey znak zamie-*

nia się na przeciwny. Weźmy np. funkcyą $a-x$ z ilością zmienną x; odmiany téy funkcyi zawisły od odmian ilości x. Wystawmy sobie, że x począwszy od zera ciągle wzrasta: rzecz iasna, że póki x nie doydzie do zrównania się z ilością a, póty funkcya $a-x$ będzie dodatna; gdy x stanie się równe a, funkcya $a-x$ będzie zerem; kiedy x przewyższy a, różnica zostanie przy x i funkcya $a-x$ będzie odiemna. Mamy więc dowód piérwszéy części założonego początku; toiest wielkość iakakolwiek przechodząc przez zero odmienia swóy znak na przeciwny. Weźmy teraz funkcyą ułamkową $\frac{a}{b-x}$, i daymy że x zacząwszy od zera ciągle rośnie: póki x będzie mnieysze od b, póty wartość ułamku iest dodatna; gdy x zrówna się z b, ułamek stanie się nieskończony; skoro x przewyższy b, ułamek będzie skończony ale odiemny, bo wtedy mianownik staie się odiemny. Widzimy przeto, że zero i nieskończoność są granicami oddzielaiącémi wielkości dodatne od odiemnych. Idąc od tego początku, uważmy że gdy łuk zacząwszy od A rośnie, iego wstawa w swoich odmianach przechodzi przez zero naówczas, kiedy ten łuk kończy się w punkcie a albo w punkcie A, toiest kiedy się równa połowie okręgu lub dwóm połowom, trzem, czterem, itd. Zatém nazwawszy półokrąg przez π, ieżeli wstawy łuków mnieyszych od π weźmiemy za dodatne, będą wstawy łuków środkuiących między π i 2π odiemne: łuków środkuiących między 2π i 3π będą znowu dodatne; środkuiących między 3π i 4π będą znowu odiemne, itd. Zgoła wstawy położone nad średnicą Aa są dodatne, a wstawy które padaią pod tę średnicę są odiemne. Dostawa łuku rosnącego raz przechodzi przez zero, kiedy łuk kończy się w punkcie B, drugi raz kiedy się kończy w punkcie b. Gdy przeto łuków środkuiących między zerem i $\frac{1}{2}\pi$ dostawy są dodatne; łuków środkuiących między $\frac{1}{2}\pi$ i $\frac{3}{2}\pi$ będą odiemne; środkuiących między $\frac{3}{2}\pi$ i $\frac{5}{2}\pi$ będą znowu dodatne, a środkuiących między $\frac{5}{2}\pi$ i $\frac{7}{2}\pi$ będą znowu odiemne, itd. Tak dalece, że dostawy z lewéy strony średnicy Bb są dodatne, a położone ze strony prawéy są odiemne. Styczna w swoich odmianach przechodzi przez nieskończoność, gdy rosnący łuk iest ćwiercią okręgu; przechodzi przez zero gdy łuk równa się połowie okręgu; przechodzi znowu przez nieskończoność, kiedy łuk będzie trzema ćwierciami okręgu; przechodzi znowu przez zero, gdy łuk stanie się równy okręgowi, itd. Znak styczney odmieni się na przeyściu przez każdą z tych granic: więc łuku zakończonego w pierwszey ćwierci będzie styczna dodatna, w drugiey odiemna, w trzeciey dodatna, w czwartey odiemna, w piętey dodatna, itd. Przez podobne uwagi łatwo doyść znaku służącego któreykolwiek z pozostałych liniy trygonometrycznych. Lecz dosyć iest wiedzieć znaki wstawy i dostawy każdego łuku, a z nich wypadną znaki innych liniy: bo te wszystkie liniie daią się wyrazić przez funkcyą wstawy i dostawy.

Z wyłożoney w teraźnieyszym §fie nauki wynikaią zrównania

$$\left.\begin{array}{lll} \text{wst.}0=0, & \text{wst}\tfrac{1}{2}\pi=1, & \text{wst}\,\pi=0, \\ \text{dost.}0=1, & \text{dost}\tfrac{1}{2}\pi=0, & \text{dost}\,\pi=-1, \\ \text{wst}\tfrac{3}{2}\pi=-1, & \text{wst}2\pi=0, \ldots\ldots & \\ \text{dost}\tfrac{3}{2}\pi=0, & \text{dost}2\pi=1, \ldots\ldots & \end{array}\right\} \ldots\ldots (R).$$

Do tych zrównań przydamy ieszcze dwa następuiące

$$\left.\begin{array}{l} \text{wst}\tfrac{1}{6}\pi=\tfrac{1}{2} \\ \text{sty}\,\tfrac{1}{4}\pi=1 \end{array}\right| \ldots\ldots (S),$$

o których Fig. 1. nas przekonywa. Jakoż daymy że łuk AM znaczy $\frac{1}{6}\pi$; ieżeli przedłużymy Mp do spotkania okręgu w punkcie N, będzie łuk MAN dwa razy większy od AM; MN będzie dwa razy większe od Mp: zatém łuk $MAN = 2.\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{6}2\pi$, czyli równy szóstey części okręgu. Aże cięciwa szóstey części okręgu równa się promieniowi; przeto $MN=1$, zkąd $Mp=\frac{1}{2}$, toiest $\text{wst}\frac{1}{6}\pi=\frac{1}{2}$. Daymy teraz że łuk AM znaczy $\frac{1}{4}\pi$; będzie kat ACM połową prostego: w tym razie dwa kąty ACT i ATC są sobie równe, a następnie $AT=AC$ czyli $\text{sty}\frac{1}{4}\pi=1$. Dwa zrównania dopiéro dowiedzione wyrażaią się często pod postacią $\text{wst}\,30°=\frac{1}{2}$, $\text{sty}\,45°=1$.

§ 3. *Rozwiązuią się zagadnienia potrzebne do rachunku tablic na liniie trygonometryczne.*

Widzieliśmy iaki zachodzi związek między liniiami trygonometrycznemi tego samego łuku. Takowy związek uczy nas, że gdybyśmy mieli wyrachowane wstawy wszystkich łuków, albo też wstawy i dostawy, moglibyśmy już łatwo otrzymać wartość innych liniy, a tém samém ułożyć tablicę zawieraiącą wartości liniy trygonometrycznych umieszczone obok wartości łuków do których należą. Cały przeto rachunek tych liniy przywodzi się do ocenienia samych wstaw albo téż wstaw i dostaw. Mamy wiadomą wstawę i dostawę stopni 90, bo wst.$90°=1$, dost$90°=0$; wiémy także iż wst$30°=\frac{1}{2}$, a tém samém dost$30°=\sqrt{(1-\frac{1}{4})}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Z tych wstaw i dostaw zostały ocenione wstawy i dostawy wszystkich innych łuków: a reguły prowadzenia takowego rachunku wypadły szczególniéy z rozwiązania następuiących zagadnień. 1*ód*, *Maiąc wiadome wstawy i dostawy dwóch łuków, znaleźć wstawy i dostawy ich summy i różnicy.* 2*re*, *Ze znanéy wstawy i dostawy iakiegokolwiek łuku znaleźć wstawę i dostawę iego połowy, oraz wstawę i dostawę łuku podwóynego.*

Co do piérwszego. Niech będą dwa łuki (*Fig.* 3.) $AB=x$, $BC=y$: na łuku AB odetniymy łuk $BD=BC$; poprowadźmy cięciwę CD i promień SB, który przetnie cięciwę CD na połowę i pod kątami prostémi: pociągniymy ieszcze promień SA i do niego prostopadłe DH, BE, CG wychodzące z punktów D, B, C. Będą liniie BE i CF wstawami łuków x, y; a zaś SE i SF ich dostawami. Daymy że te cztéry liniie są wiadome; potrzeba za ich pomocą wynaleźć wartość liniy DH czyli wst$(x-y)$, CG czyli wst$(x+y)$, HS czyli dost$(x-y)$, GS czyli dost$(x+y)$. Poprowadźmy FJ prostopadłą do promienia SA, i liniie DL, FK do tego promienia równoległe. Dwa tróykąty CKF i FLD maiące boki CF i FD równe i kąty tym bokom przyległe równe mogą do siebie przystać; ztąd $CK=FL$, $KF=LD$: następnie $CG=FJ+CK$, $DH=FJ-CK$. Ocenienie przeto szukanych wstaw zawisło na odkryciu wartości liniy FJ i CK. Liniią FJ wynaydziemy z tróykątów podobnych SBE, SFJ, które daią proporcyą $SB:BE=SF:FJ$ czyli $1:$wst$x=$dost$y:FJ$; więc $FJ=$wst$x$.dost$y$. Liniią CK otrzymamy z tróykątów podobnych CBE i CKF, które maią po kącie prostym, i kąt SBE równy kątowi KFC, każdy z nich bowiem równa się kątowi SFJ: ztąd wypada proporcya $SB:SE$

$=FC:CK$ czyli $1:\text{dost}x=\text{wst}y:CK$ przeto $CK=\text{dost}\,x\,\text{wst}\,y$. Ze znalezionych wartości na FJ i CK pokazuie się że CG czyli $\text{wst}(x+y)=\text{wst}x.\text{dost}y+\text{dost}x.\text{wst}y$, a zaś DH czyli $\text{wst}(x-y)=\text{wst}x.\text{dost}y-\text{dost}x.\text{wst}y$. Zostaią nam ieszcze do ocenienia liniie SG i SH: piérwsza iest różnicą między SJ i KF, druga iest summą. Potrzeba więc nam tylko otrzymać wartość na SJ i KF. Liniią SJ otrzymamy z proporcyi $BS:SE=FS:SJ$ czyli $1:\text{dost}x=\text{dost}y:SJ$, ztąd $SJ=\text{dost}x.\text{dost}y$. Wartość KF wypadnie z proporcyi $SB:BE=CF:KF$ czyli $1:\text{wst}x=\text{wst}y:KF$, która daie $KF=\text{wst}x.\text{wst}y$. Będzie przeto SG czyli $\text{dost}(x+y)=\text{dost}x.\text{dost}y-\text{wst}x.\text{wst}y$; SH czyli $\text{dost}(x-y)=\text{dost}x.\text{dost}y+\text{wst}x.\text{wst}y$. Przyszliśmy zatém do cztérech zrównań rozwiązuiących zagadnienie

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ldots\text{wst}(x+y)=\text{wst}x.\text{dost}y+\text{dost}x.\text{wst}y\\ (2)\ldots\text{dost}(x+y)=\text{dost}x.\text{dost}y-\text{wst}x.\text{wst}y\\ (3)\ldots\text{wst}(x-y)=\text{wst}x.\text{dost}y-\text{dost}x.\text{wst}y\\ (4)\ldots\text{dost}(x-y)=\text{dost}x.\text{dost}y+\text{wst}x.\text{wst}y\end{array}\right\}\ldots\ldots(T).$$

Co do drugiego. Dodawszy zrównania (1) z (3) a (2) z (4), i znowu odciągnąwszy te same od siebie, otrzymamy inne cztéry

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ldots2\text{wst}x.\text{dost}y=\text{wst}(x+y)+\text{wst}(x-y)\\ (2)\ldots2\text{dost}x.\text{dost}y=\text{dost}(x+y)+\text{dost}(x-y)\\ (3)\ldots2\text{dost}x.\text{wst}y=\text{wst}(x+y)-\text{wst}(x-y)\\ (4)\ldots2\text{wst}x.\text{wst}y=\text{dost}(x-y)-\text{dost}(x+y)\end{array}\right\}\ldots\ldots(U).$$

W dwóch piérwszych ze zrównań (T) uczyniwszy $x=y$, wypada

$$\left.\begin{array}{l}\text{wst}2x=2\text{wst}x.\text{dost}x\\ \text{dost}2x=\text{dost}^2y-\text{wst}^2y\end{array}\right|\ldots\ldots\ldots(W).$$

Jeżeli znowu w (2) i (4) ze zrównań (U) założymy że $x=y=\frac{z}{2}$, pamiętaiąc iż $\text{wst}.0=0$, $\text{dost}.0=1$, będziemy mieli

$$\left.\begin{array}{l}\text{wst}\,\frac{z}{2}=\sqrt{\left(\frac{1-\text{dost}\,z}{2}\right)}\\ \text{dost}\,\frac{z}{2}=\sqrt{\left(\frac{1+\text{dost}\,z}{2}\right)}\end{array}\right|\ldots\ldots(X).$$

Zrównania (W) daią nam wstawę i dostawę łuku dwa razy większego wyrażoną przez wstawę i dostawę łuku poiedynczego: zrównania zaś (X) daią wstawę i dostawę połowy łuku wyrażoną przez dostawę łuku całego. W tych przeto zrównaniach mamy rozwiązane obie części zagadnienia drugiego.

Wniosek I. Dzieląc (1) ze zrównań (T) przez (2) a (3) przez (4), wypada

$$\frac{\text{wst}(x+y)}{\text{dost}(x+y)} \text{ czyli } \text{sty}(x+y) = \frac{\text{wst}x \,.\, \text{dost}y + \text{dost}x \,.\, \text{wst}y}{\text{dost}x \,.\, \text{dost}y - \text{wst}x \,.\, \text{wst}y},$$

$$\frac{\text{wst}(x-y)}{\text{dost}(x-y)} \text{ czyli } \text{sty}(x-y) = \frac{\text{wst}x \,.\, \text{dost}y - \text{dost}x \,.\, \text{wst}y}{\text{dost}x \,.\, \text{dost}y + \text{wst}x \,.\, \text{wst}y};$$

w obu zrównaniach na drugiéy stronie podzieliwszy licznik i mianownik przez dost$x$.dost$y$, i potém za $\frac{\text{wst}x}{\text{dost}x}$ kładąc sty$x$, a za $\frac{\text{wst}y}{\text{dost}y}$ kładąc sty$y$, otrzymamy

$$\left.\begin{aligned} \text{sty}(x+y) &= \frac{\text{sty}\,x + \text{sty}\,y}{1 - \text{sty}x \,.\, \text{sty}y} \\ \text{sty}(x-y) &= \frac{\text{sty}\,x - \text{sty}\,y}{1 + \text{sty}x \,.\, \text{sty}y} \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots (Y).$$

W piérwszém ze zrównań (Y) uczyniwszy $x=y$, znaydziemy

$$\left.\begin{aligned} \text{sty}\,2x &= \frac{2\text{sty}x}{1 - \text{sty}^2 x} \\ \text{dosty}2x &= \frac{\text{dosty}x - \text{sty}x}{2} \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots (Z).$$

Położywszy w zrównaniach (U) $x+y=a$, $x-y=b$, z czego $x=\frac{a+b}{2}$, $y=\frac{a-b}{2}$, wypadną nam naprzód zrównania

$$\text{wst}a + \text{wst}\,b = 2 \,.\, \text{wst}\frac{a+b}{2} \,.\, \text{dost}\frac{a-b}{2},$$

$$\text{dost}a + \text{dost}b = 2 \,.\, \text{dost}\,\frac{a+b}{2} \,.\, \text{dost}\frac{a-b}{2},$$

$$\text{wst}a - \text{wst}b = 2 \,.\, \text{dost}\frac{a+b}{2} \,.\, \text{wst}\frac{a-b}{2},$$

$$\text{dost}b - \text{dost}a = 2 \,.\, \text{wst}\frac{a+b}{2} \,.\, \text{wst}\frac{a-b}{2},$$

które dzieląc przez się otrzymamy

$$\left.\begin{aligned} \frac{\text{wst}a + \text{wst}b}{\text{dost}a + \text{dost}b} &= \text{sty}\,\frac{a+b}{2}, \quad \frac{\text{wst}a - \text{wst}\,b}{\text{dost}b - \text{dost}a} = \text{dosty}\frac{a+b}{2} \\ \frac{\text{wst}a - \text{wst}b}{\text{dost}a + \text{dost}b} &= \text{sty}\frac{a-b}{2}, \quad \frac{\text{wst}a + \text{wst}b}{\text{dost}b - \text{dost}a} = \text{dosty}\frac{a-b}{2} \end{aligned}\right| \ldots (A');$$

ztąd ieszcze wynika, że

$$(\text{wst}a + \text{wst}b) : (\text{wst}a - \text{wst}b) = \text{sty}\,\frac{a+b}{2} : \text{sty}\,\frac{a-b}{2}.$$

Wniosek II. Wiémy że $\mathrm{wst}\frac{\pi}{2}=1$, $\mathrm{wst}3\frac{\pi}{2}=-1$, $\mathrm{wst}5\frac{\pi}{2}=1$, $\mathrm{wst}7\frac{\pi}{2}=-1$, itd; i ogólnie $\mathrm{wst}(4n+1)\frac{\pi}{2}=1$, $\mathrm{wst}(4n+3)\frac{\pi}{2}=-1$, gdzie n iest iakąkolwiek liczbą całką i dodatną. Dostawy zaś tych wszystkich łuków są zerem. Kładąc przeto we czterech zrównaniach (T) za x naprzód $\frac{(4n+1)\pi}{2}$, a potém $\frac{(4n+3)\pi}{2}$, będzie

$$\left.\begin{array}{ll}
\mathrm{wst}\left[\frac{(4n+1)\pi}{2}+y\right]=\mathrm{dost}y, & \mathrm{wst}\left[\frac{(4n+3)\pi}{2}+y\right]=-\mathrm{dost}y \\
\mathrm{dost}\left[\frac{(4n+1)\pi}{2}+y\right]=-\mathrm{wst}y, & \mathrm{dost}\left[\frac{(4n+3)\pi}{2}+y\right]=\mathrm{wst}y \\
\mathrm{wst}\left[\frac{(4n+1)\pi}{2}-y\right]=\mathrm{dost}y, & \mathrm{wst}\left[\frac{(4n+3)\pi}{2}-y\right]=-\mathrm{dost}y \\
\mathrm{dost}\left[\frac{(4n+1)\pi}{2}-y\right]=\mathrm{wst}y, & \mathrm{dost}\left[\frac{(4n+3)\pi}{2}-y\right]=-\mathrm{wst}y
\end{array}\right| \ldots(B')$$

Wiémy znowu że $\mathrm{dost}\pi=-1$, $\mathrm{dost}2\pi=1$, $\mathrm{dost}3\pi=-1$, $\mathrm{dost}4\pi=1$, itd; i ogólnie $\mathrm{dost}(2n+1)\pi=-1$, $\mathrm{dost}2n\pi=1$. Wstawy zaś tych wszystkich łuków są zerem. W zrównaniach (T) wziąwszy za x naprzód $(2n+1)\pi$ a potém $2n\pi$, otrzymamy

$$\left.\begin{array}{ll}
\mathrm{wst}[(2n+1)\pi+y]=-\mathrm{wst}y, & \mathrm{wst}(2n\pi+y)=\mathrm{wst}y \\
\mathrm{dost}[(2n+1)\pi+y]=-\mathrm{dost}y, & \mathrm{dost}(2n\pi+y)=\mathrm{dost}y \\
\mathrm{wst}[(2n+1)\pi-y]=\mathrm{wst}y, & \mathrm{wst}(2n\pi-y)=-\mathrm{wst}y \\
\mathrm{dost}[(2n+1)\pi-y]=-\mathrm{dost}y, & \mathrm{dost}(2n\pi-y)=\mathrm{dost}y
\end{array}\right| \ldots(C).$$

Te zrównania nam pokazuią, że iest nieskończona liczba łuków, których wstawy i dostawy są też same iuż co do wielkości i znaku, iuż tylko co do wielkości a ze znakami przeciwnémi. Idzie zatém, że i każda inna liniia trygonometryczna, mogąc się wyrazić przez funkcyą wstawy i dostawy, ma także nieskończoną liczbę łuków sobie odpowiadaiących.

Uwaga. Wziąwszy zrównanie $\mathrm{wst}z=a$, kiedy ie rozwiążemy co do z; będzie z równe łukowi którego wstawa iest a, toiest $z=\text{Łuk}(\mathrm{wst}=a)$. Widzimy tu 1*ód*, że sposób rozwiązania teraz użyty zupełnie się różni od tych, iakie nam w części pierwszéy na zrównania algebraiczne służyły: 2*re*, ponieważ nieskończona iest liczba łuków, które maią a za swóię wstawę; przeto liczba pierwiastków w obecnym razie iest nieskończona. Zrównanie więc teraźnieysze iest natury cale odmiennéy od zrównań algebraicznych: dla tego zrównania, do których wchodzą liniie trygonometryczne łuków nieznanych, należą do klassy przestępnych; a same liniie trygonometryczne łuków nieznanych lub zmiennych są funkcyami przestępnémi i noszą nazwisko *funkcyy kołowych* (fonctions circulaires).

§ 4. *Rozwiązuią się zrównania dwuwyrazowe za pomocą liniy trygonometrycznych.*

Ze wzorów trygonometrycznych możemy wydobyć sposób na rozwiązanie ogólne wszystkich zrównań dwuwyrazowych. Takowe zrównania obięte we wzorze $x^m \mp a = 0$ przyymuią kształt $x^m \mp b^m = 0$ uczyniwszy $a = b^m$, i daią się przywieść do $y^m \mp 1 = 0$ przez założenie $x = by$. Dosyć nam przeto podać prawidło dochodzenia pierwiastków w zrównaniu $y^m \mp 1 = 0$: bo skoro znaydziemy wartości na y; te rozmnożone przez b czyli przez $\sqrt[m]{a}$ zamienią się w wartości na x. Na ten koniec potrzeba naypiérwéy dowieść prawdy zamkniętéy we wzorze

$(\mathrm{dost}x \pm \sqrt{-1}.\mathrm{wst}x)^m = \mathrm{dost}mx \pm \sqrt{-1}.\mathrm{wst}mx$. : . . (D'),

o któréy się przekonamy z następuiącego rachunku. Zróbmy wieloczyn z dwóch mnożników $\mathrm{dost}x \pm \sqrt{-1}.\mathrm{wst}x$, $\mathrm{dost}y \pm \sqrt{-1}.\mathrm{wst}y$; otrzymamy

$$(\mathrm{dost}x \pm \sqrt{-1}.\mathrm{wst}x)(\mathrm{dost}y \pm \sqrt{-1}.\mathrm{wst}y) = \mathrm{dost}(x+y) \pm \sqrt{-1}.\mathrm{wst}(x+y),$$

następnie

$$(\mathrm{dost}x \pm \sqrt{-1}.\mathrm{wst}x)(\mathrm{dost}y \pm \sqrt{-1}.\mathrm{wst}y)(\mathrm{dost}z \pm \sqrt{-1}\mathrm{wst}z)$$
$$= [\mathrm{dost}(x+y) \pm \sqrt{-1}.\mathrm{wst}(x+y)](\mathrm{dost}z \pm \sqrt{-1}.\mathrm{wst}z)$$
$$= \mathrm{dost}(x+y+z) \pm \sqrt{-1}.\mathrm{wst}(x+y+z),$$

i tak daléy. Założywszy $x = y = z$, wypada

$$(\mathrm{dost}x \pm \sqrt{-1}.\mathrm{wst}x)^2 = \mathrm{dost}2x \pm \sqrt{-1}.\mathrm{wst}2x,$$
$$(\mathrm{dost}x \pm \sqrt{-1}.\mathrm{wst}x)^3 = \mathrm{dost}3x \pm \sqrt{-1}\ \mathrm{wst}3x,$$

itd. itd.

Zatém podnosząc funkcyą $\mathrm{dost}x \pm \sqrt{-1}.\mathrm{wst}x$ do potęgi drugiéy, trzeciéy, itd, należy tylko pomnożyć łuk x przez 2, 3, itd; i ogólnie, podnosząc do potęgi m, trzeba x rozmnożyć przez m; ta iest właśnie prawda, którą wzór (D')

w sobie ogarnia. Możemy ztąd wnieść nawzaiem, że wyciągaiąc pierwiastek potęgi m z funkcyi $\operatorname{dost} x \pm \sqrt{-1}.\operatorname{wst} x$, powinniśmy x rozdzielić przez m; toiest że

$$\sqrt[m]{(\operatorname{dost} x \pm \sqrt{-1}.\operatorname{wst} x)} = \operatorname{dost} \frac{x}{m} \pm \sqrt{-1}.\operatorname{wst} \frac{x}{m} \quad \ldots \ (E').$$

Ustanowiwszy ten początek, uważmy że wstawa półokręgu π, bądź wziętego poiedynczo, bądź ilekolwiek razy powtórzonego, iest zerem; toiest $\operatorname{wst} n\pi = 0$, a tém samém $\pm\sqrt{-1}.\operatorname{wst} n\pi = 0$: a zaś $\operatorname{dost} n\pi = \pm 1$, gdzie $+$ należy do n parzystego, $-$ do nieparzystego. Zatém $\operatorname{dost} n\pi \pm \sqrt{-1}.\operatorname{wst} n\pi = \pm 1$. Żeby rozróżnić dwa przypadki, raz gdy n iest parzyste, drugi raz kiedy nieparzyste, połóżmy w piérwszym $2k$ na mieyscu n, w drugim $2k+1$; będzie

$$\operatorname{dost} 2k\pi \pm \sqrt{-1}.\operatorname{wst} 2k\pi = +1,$$
$$\operatorname{dost}(2k+1)\pi \pm \sqrt{-1}.\operatorname{wst}(2k+1)\pi = -1,$$

gdzie k ma iakąkolwiek wartość całką dodatną.

Zrównanie $y^m \mp 1 = 0$ ogarnia dwa przypadki, toiest $y^m - 1 = 0$, $y^m + 1 = 0$; piérwszy daie $y^m = 1$, drugi $y^m = -1$. W piérwszym razie możemy napisać

$$y^m = \operatorname{dost} 2k\pi \pm \sqrt{-1}.\operatorname{wst} 2k\pi,$$

w drugim

$$y^m = \operatorname{dost}(2k+1)\pi \pm \sqrt{-1}.\operatorname{wst}(2k+1)\pi.$$

Zatrudniymy się naprzód piérwszym przypadkiem, który odpowiada zrównaniu $y^m - 1 = 0$. Będziemy mieli na mocy wzoru (E')

$$y = \operatorname{dost} \frac{2k\pi}{m} \pm \sqrt{-1}.\operatorname{wst} \frac{2k\pi}{m}.$$

Ponieważ k może bydź liczbą iakąkolwiek, byleby całką i dodatną; zakładaymy więc koleią $k=0$, $k=1$, $k=2$, itd; otrzymamy

$$\left.\begin{aligned}
&y = 1 \\
&y = \operatorname{dost} \frac{2\pi}{m} \pm \sqrt{-1}.\operatorname{wst} \frac{2\pi}{m}, \\
&y = \operatorname{dost} \frac{4\pi}{m} \pm \sqrt{-1}.\operatorname{wst} \frac{4\pi}{m}, \\
&y = \operatorname{dost} \frac{6\pi}{m} \pm \sqrt{-1}.\operatorname{wst} \frac{6\pi}{m},
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \ (F')$$

itd.

Te wszystkie wartości są pierwiastkami zrównania $y^m = 1$.

Trzeba nam się ieszcze przekonać, że ich liczba nie może przewyższać m; co bydź powinno według ogólnych własności zrównań. Tym końcem rozróżniymy dwa przypadki zrównania $y^m = 1$; toiest albo m będzie parzyste, albo nieparzyste. W piérwszym razie nie mamy potrzeby brać za k liczby większéy od $\frac{m}{2}$, któréy odpowiada wartość

$$y = -1;$$

gdyż uczyniwszy $k = \frac{m}{2} + 1$, znaydziemy po uproszczeniu

$$y = \text{dost}(\pi + \frac{2\pi}{m}) \pm \sqrt{-1}.\text{wst}(\pi + \frac{2\pi}{m})$$

dwie takie same wartości, iakie wypadaią z założenia $k = \frac{m}{2} - 1$: bo w ostatnim razie

$$y = \text{dost}(\pi - \frac{2\pi}{m}) \pm \sqrt{-1}.\text{wst}(\pi - \frac{2\pi}{m});$$

a drugie i czwarte z ośmiu zrównań (C') pokazuią że $\text{dost}(\pi + \frac{2\pi}{m}) = \text{dost}(\pi - \frac{2\pi}{m})$, piérwsze i trzecie że $\text{wst}(\pi + \frac{2\pi}{m}) = -\text{wst}(\pi - \frac{2\pi}{m})$; przeto wartości na y odpowiedne założeniu $k = \frac{m}{2} + 1$ mogą się wystawić tak

$$y = \text{dost}(\pi - \frac{2\pi}{m}) \mp \sqrt{-1}.\text{wst}(\pi - \frac{2\pi}{m});$$

niczém się więc nie różnią od wartości na y wynikłych z założenia $k = \frac{m}{2} - 1$. Ztąd poznaiemy, że biorąc za k liczby większe od $\frac{m}{2}$ trafiamy na te same wartości y, iakie się otrzymuią kiedy k iest mnieysze od $\frac{m}{2}$. Dla odkrycia zatém wszystkich wartości na y trzeba następnie za k brać $0, 1, 2, 3 \ldots \frac{m}{2}$. Gdyby każda liczba wzięta za k prowadziła do dwóch wartości na y, liczba tych wartości byłaby $m+2$; ale że $k=0$ i $k = \frac{m}{2}$ daią po iednéy tylko wartości na y, więc y będzie miało różnych wartości liczbę m. Przez podobne uwagi można się upewnić, że gdy w zrównaniu $y^m = 1$ będzie m nieparzyste, zawsze liczba wszystkich pierwiastków od siebie różnych, otrzymuiących się z założeń $k=0$, $k=1$, $k=2$, itd, iest koniecznie m.

Chcąc wynaleźć pierwiastki zrównania $y^m + 1 = 0$ czyli $y^m = -1$, trzeba w wyrażeniu

$$y^m = \text{dost}(2k+1)\pi \pm \sqrt{-1}.\text{wst}(2k+1)\pi$$

wyciągnąć pierwiastek potęgi m po obu stronach; przez co otrzymawszy

$$y = \text{dost}\frac{(2k+1)\pi}{m} \pm \sqrt{-1}.\text{wst}\frac{(2k+1)\pi}{m},$$

zakładać koleią $k=0$, $k=1$, $k=2$, itd, póki liczba wypadaiących ztąd wartości nie będzie równa m.

Ponieważ wszystkie wartości na y oznaczone przez (F'') sprawdzaią zrównanie $y^m = 1$; każda z nich przeto podniesiona do potęgi m wydaie iedność, a następnie każda iest pierwiastkiem potęgi m z iedności. Co nas uczy, że liczba pierwiastków iakieykolwiek potęgi z iedności równa iest wykładnikowi téy potęgi. Ztąd się ieszcze odkrywa, że każda ilość lub funkcya niewymierna tyle ma różnych wartości, ile iedności zamyka się w wykładniku znaku pierwiastkowego: bo $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{a.1} = \sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{1}$, gdzie na mieyscu $\sqrt[m]{1}$ można wziąć albo 1, albo

$$\text{dost}\frac{2\pi}{m} \pm \sqrt{-1}.\text{wst}\frac{2\pi}{m}, \text{ albo dost}\frac{4\pi}{m} \pm \sqrt{-1}.\text{wst}\frac{4\pi}{m}, \text{ albo itd.}$$

§ 5. *Otrzymuią się szeregi wyrażaiące wstawę i dostawę przez funkcyą łuku.*

Wiémy że gdy łuk $x=0$, wtedy wst$x=0$, dost$x=1$; ztąd wypada, że szereg postępuiący według potęg x wyrażaiący wstawę x powinien we wszystkich swoich terminach zawierać x; albowiem na założenie $x=0$, powinién cały szereg zginąć, tak iak ginie wst$x$, któréy ten szereg iest wartością: szereg zaś wyrażaiący dostawę powinien mieć piérwszym terminem iedność, a dalsze z mnożnikiem x. Nadto w takowych szeregach potęgi łuku x nie mogą zachodzić tylko z wykładnikami całkiemi i dodatnémi: bo przypuściwszy np. że wst$x=Ax^{-m}+$itd; wtedy czyniąc $x=0$, wypadłaby wst.$0=\infty$, co bydź nie może; do podobneyby-śmy przyszli sprzeczności, gdybyśmy w szeregu dostawy x umieścili którykolwiek termin maiący łuk x z wykładnikiem odiemnym. Łatwo się także przekonać, że w tych szeregach nie może bydź żaden wyraz, w którymby łuk x miał wykładnik ułamkowy; bo gdyby się np. znaydował termin $Gx^{\frac{m}{n}}$ czyli $G\sqrt[n]{x^m}$, wtedy iako sam takowy termin ma różnych wartości liczbę n, tak z iego przyczyny cały szereg miałby różnych wartości n, a następnie wstawa i dostawa łuku x miałaby tyleż odmiennych wartości; figura zaś pierwsza pokazuie oczywiście, że każdego łuku wstawa, dostawa, i wszelka inna liniia trygonometryczna nie może bydź iak tylko iedna. Z teraźnieyszych uwag pokazuie się, że szeregi ułożone według potęg łuku x wyrażaiące wstawę i dostawę tego łuku muszą mieć postać następuiącą

$$\text{wst}x = ax+bx^2+cx^3+dx^4+ex^5+\text{itd} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (G'),$$

$$\text{dost}x = 1+a'x+b'x^2+c'x^3+d'x^4+\text{itd} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (H').$$

Obaczymy zaraz że ieszcze nawet szereg (G') nie powinien zawierać potęg łuku x z wykładnikami parzystémi, a szereg (H') z wykładnikami nieparzystémi. Na ten koniec przypomniymy sobie że łuków równych różniących się znakiem wstawy są równe z odmiennym także znakiem, dostawy zaś są równe i zgodne w znaku; toiest wst$(-x)=-$wst$x$, dost$(-x)=$dost$x$. Gdy więc w szeregach (G') i (H') położymy $-x$ za x, będzie

$$-\text{wst}x=-ax+bx^2-cx^3+dx^4-ex^5+\text{itd} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (K'),$$

$$\text{dost}x=1-a'x+b'x^2-c'x^3+d'x^4-\text{itd} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (L').$$

Odciągnąwszy (K') od (G'), a dodawszy (L') do (H'), znaydziemy po rozdzieleniu wypadków przez 2

$$\text{wst}x=ax+cx^3+ex^5+\text{itd}, \qquad \text{dost}x=1+b'x^2+d'x^4+\text{itd}.$$

Z tego wszystkiego wnosimy, że rozwinienia wstawy i dostawy łuku x maią kształt

$$\text{wst}x=Ax+Bx^3+Cx^5+Dx^7+\text{itd} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (M'),$$

$$\text{dost}x=1+\alpha x^2+\beta x^4+\gamma x^6+\text{itd} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (N'),$$

gdzie A, B, C, D, . . ., α, β, γ, . . . są ilości stałe które potrzeba ocenić. Przyydziemy do ich wartości następniącym rachunkiem. Ponieważ szeregi (M') i (N') powinny służyć na wszelką wartość x, możemy w nich przeło za x

położyć ilość iakąkolwiek. Biorąc na mieyscu x naprzód y a potém $y+x$, otrzymamy

$$\text{wst}y=Ay+By^3+Cy^5+Dy^7+\text{itd},$$
$$\text{dost}y=1+\alpha\, y^2+\beta\, y^4+\gamma\, y^6+\text{itd},$$
$$\text{wst}(y+x)=A(y+x)+B(y+x)^3+C(y+x)^5+D(y+x)^7+\text{itd},$$
$$\text{dost}(y+x)=1+\alpha\,(y+x)^2+\beta\,(y+x)^4+\gamma\,(y+x)^6+\text{itd}.$$

Za wszystkie wstawy i dostawy połóżmy ich szeregi w (1) i (2) ze zrównań (T), toiest w zrównania

$$\text{wst}(y+x)=\text{wst}y.\text{dost}x+\text{dost}y.\text{wst}x,$$
$$\text{dost}(y+x)=\text{dost}y.\text{dost}x-\text{wst}y.\text{wst}x; \quad \text{będzie}$$

$$A(y+x)+B(y+x)^3+C(y+x)^5+D(y+x)^7+\text{itd} =$$
$$(Ay+By^3+Cy^5+Dy^7+\text{itd})(1+\alpha\, x^2+\beta\, x^4+\gamma\, x^6+\text{itd}) +$$
$$(1+\alpha\, y^2+\beta\, y^4+\gamma\, y^6+\text{itd})(Ax+Bx^3+Cx^5+Dx^7+\text{itd}),$$
$$1+\alpha\,(y+x)^2+\beta\,(y+x)^4+\gamma\,(y+x)^6+\text{itd} =$$
$$(1+\alpha\, y^2+\beta\, y^4+\gamma\, y^6+\text{itd})(1+\alpha\, x^2+\beta\, x^4+\gamma\, x^6+\text{itd})$$
$$-(Ay+By^3+Cy^5+Dy^7+\text{itd})(Ax+Bx^3+Cx^5+Dx^7+\text{itd}).$$

Ponieważ te zrównania powinny bydź sprawdzone przez wszelkie wartości x, y, zatém po wykonaniu naznaczonych działań spółczynniki przy tych samych potęgach ilości zmiennych z obu stron muszą bydź równe. Dosyć będzie dla naszego zamiaru porównać z sobą spółczynniki piérwszéy potęgi x, co nam da następuiące zrównania

$$A+3By^2+5Cy^4+7Dy^6+\text{itd}=A+A\alpha y^2+A\beta y^4+A\gamma y^6+\text{itd},$$
$$2\alpha\, y+4\beta\, y^3+6\gamma\, y^5+\text{itd}=-A^2y-ABy^3-ACy^5-\text{itd}.$$

J te zrównania powinny mieć także mieysce na każdą wartość ilości zmiennéy y, przeto znowu spółczynniki iednakich potęg y muszą bydź po obu stronach równe; ztąd

$$A=A,\quad 2\alpha=-A^2,\quad 3B=A\alpha,\quad 4\beta=-AB,\quad 5C=A\beta,$$
$$6\gamma=-AC,\quad 7D=A\gamma, \text{ itd:}$$

zatém

$$\alpha=-\frac{A^2}{1.2},\quad B=-\frac{A^3}{1.2.3},\quad \beta=\frac{A^4}{1.2.3.4},\quad C=\frac{A^5}{1.2.3.4.5},$$
$$\gamma=-\frac{A^6}{1.2.3.4.5.6},\quad D=-\frac{A^7}{1.2.3.4.5.6.7}, \text{ itd.}$$

Podstawuiąc te wartości w szeregi (M') i (N'), będzie

$$\text{wst}x=Ax-\frac{A^3}{1.2.3}x^3+\frac{A^5}{1.2.3.4.5}x^5-\frac{A^7}{1.2.3.4.5.6.7}x^7+\text{itd},$$
$$\text{dost}x=1-\frac{A^2}{1.2}x^2+\frac{A^4}{1.2.3.4}x^4-\frac{A^6}{1.2.3.4.5.6}x^6-\text{itd}.$$

Zostaie nam tylko do ocenienia ilość A. Tym końcem podzielmy piérwsze zrównanie przez x; będzie

$$\frac{\text{wst}x}{x}=A-\frac{A^3}{1.2.3}x^2+\frac{A^5}{1.2.3.4.5}x^4-\text{itd};$$

tu założywszy $x=0$, wypada $A=$ stosunkowi między wstawą łuku niknącego a samym łukiem. Ten stosunek równy iest iedności, o czém się przekonamy z następnych uwag: wiémy że $\text{sty}x=\frac{\text{wst}\,x}{\text{dost}x}$, ztąd $\text{dost}x=\frac{\text{wst}x}{\text{sty}\,x}$; kiedy x coraz się zmnieysza dążąc ku zero, wtenczas $\text{dost}x$ dąży ku iedności, więc i stosunek $\frac{\text{wst}x}{\text{sty}x}$ przystępuie także do iedności, a przeto styczna zbliża się do równości ze wstawą, tak dalece że uczyniwszy $x=0$, będzie wstawa równa stycznéy, bo wtedy $\text{dost}x=1$; a zatém $\frac{\text{wst}.0}{\text{sty}.0}=1$. Aże łuk środkuie co do swoiéy wielkości między wstawą i styczną; kiedy więc wstawa łuku niknącego przychodzi do równości z iego styczną, tém bardziéy wstawa takiego łuku równa się samemu łukowi; a przeto stosunek $\frac{\text{wst}.0}{0}=1$: więc $A=1$, i powyższe szeregi będą ostatecznie

$$\text{wst}x=x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\text{itd}\;.\;.\;.\;:\;(O')$$

$$\text{dost}x=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}+\text{itd}\;.\;.\;.\;.\;(P').$$

§ 6. *Funkcye wykładnicze łuku wyrażaią się przez iego wstawę i dostawę; ztąd się wyciąga rozwinienie łuku podług potęg stycznéy, i to się stosuie do wynaydowania przybliżonéy wartości okręgu.*

Jeżeli zrównanie (O') pomnożymy przez $\sqrt{-1}$ i dodamy do zrównania (P'), otrzymamy

$$\text{dost}x+\sqrt{-1}.\text{wst}x=1+x\sqrt{-1}-\frac{x^2}{1.2}-\frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\frac{x^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5}-\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}-\text{itd}\;.\;.\;.\;.\;.\;(Q').$$

Położywszy w zrównaniu (M) § 2. Roz. II. e za a, $x\sqrt{-1}$ za x, wypada

$$e^{x\sqrt{-1}}=1+x\sqrt{-1}-\frac{x^2}{1.2}-\frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\frac{x^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5}-\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}-\text{itd.}$$

Ostatnie zrównanie ma ze zrównaniem (Q') stronę drugą iednaką; więc i strony piérwsze muszą bydź równe: zatém

$$e^{x\sqrt{-1}}=\text{dost}x+\sqrt{-1}.\text{wst}x \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (R').$$

Odmieniwszy x na $-x$, i pamiętaiąc że $\text{dost}(-x)=\text{dost}x$, $\text{wst}(-x)=-\text{wst}x$, znaydziemy

$$e^{-x\sqrt{-1}}=\text{dost}x-\sqrt{-1}.\text{wst}x \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (S').$$

Zrównania (R') i (S') daią wyrażenie funkcyi wykładniczéy łuku przez iego wstawę i dostawę: można ie zamknąć w iedném

$$e^{\pm x\sqrt{-1}}=\text{dost}x\pm\sqrt{-1}.\text{wst}x.$$

Dodaiąc i odciągaiąc zrównania (R') i (S') otrzymamy

$$\text{dost}x=\frac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2}, \quad \text{wst}x=\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

gdzie wstawy i dostawy są wyrażone przez funkcye wykładnicze łuku.

Rozwinienie łuku podług potęg styczněy.

Ze zrównań (R') i (S') mamy

$$x\sqrt{-1}=l'(\text{dost}x+\sqrt{-1}.\text{wst}x),$$
$$-x\sqrt{-1}=l'(\text{dost}x-\sqrt{-1}.\text{wst}x);$$

odciągnąwszy drugi wypadek od piérwszego, będzie

$$2x\sqrt{-1}=l'(\text{dost}x+\sqrt{-1}.\text{wst}x)-l'(\text{dost}x-\sqrt{-1}.\text{wst}x)=l'\left(\frac{\text{dost}x+\sqrt{-1}.\text{wst}x}{\text{dost}x-\sqrt{-1}.\text{wst}x}\right)$$

czyli

$$2x\sqrt{-1}=l'\left(\frac{1+\sqrt{-1}.\text{sty}x}{1-\sqrt{-1}.\text{sty}x}\right) \quad . \ . \ . \ . \quad (T').$$

W zrównaniu (P) § 2. Roz. II. biorąc logarytmy Nepera i kładąc $u=\sqrt{-1}.\text{sty}x$, wypada

$$l'\left(\frac{1+\sqrt{-1}.\text{sty}x}{1-\sqrt{-1}.\text{sty}x}\right)=2\left(\text{sty}x-\frac{\text{sty}^3x}{3}+\frac{\text{sty}^5x}{5}-\frac{\text{sty}^7x}{7}+\text{itd}\right)\sqrt{-1};$$

stroną piérwszą tego zrównania iest to samo co stroną drugą w zrównaniu (T'), zatém

$$x = \text{sty}\,x - \frac{\text{sty}^3 x}{3} + \frac{\text{sty}^5 x}{5} - \frac{\text{sty}^7 x}{7} + \text{itd} \quad . \; . \; . \; . \quad (U');$$

takie iest rozwinienie łuku podług potęg styczney.

Wynalezienie wartości okręgu. Ostatniego szeregu użyli Geometrowie do wyrachowania przybliżoney wartości okręgu w funkcyi promienia. Wiemy że gdy łuk iest ósmą częścią okręgu, iego styczna równa się promieniowi; toiest kiedy $x=\frac{\pi}{4}$, naówczas $\text{sty}\,x=1$: zatém

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{itd.}$$

Lecz ubywanie terminów tego szeregu tak iest powolne, iżby potrzeba wziąć bardzo wielką ich liczbę dla otrzymania wartości przybliżoney. Chcąc ze wzoru (U') wydobyć szereg nagléy maleiący na rachowanie okręgu, potrzeba aby łuk x miał styczną mnieyszą od iedności i żeby był w stosunku wiadomym do całego okręgu. Albo też potrzeba dobrać takich dwóch łuków maiących styczne mnieysze od iedności, aby pewna funkcya tych łuków znana co do swego składu była równa $\frac{\pi}{4}$: bo wtedy oceniwszy każdy z takowych łuków, moglibyśmy przyyść do wartości $\frac{\pi}{4}$, a z niéy do wartości całego okręgu. *Machin* Geometra angielski znalazł że od cztéry razy wziętego łuku maiącego styczną $\frac{1}{5}$ odciągnąwszy łuk maiący styczną $\frac{1}{239}$ wypada na różnicę $\frac{\pi}{4}$. Żeby się o tém przekonać, nazwiymy piérwszy łuk przez a, drugi przez b; będzie $\text{sty}\,a=\frac{1}{5}$, $\text{sty}\,b=\frac{1}{239}$: ztąd, na mocy wzoru (Z) § 3. tego rozdziału, $\text{sty}\,2a=\frac{2\,\text{sty}\,a}{1-\text{sty}^2 a}=\frac{5}{12}$, $\text{sty}\,4a=\frac{2\,\text{sty}\,2a}{1-\text{sty}^2 2a}=\frac{120}{119}$; na mocy znowu wzoru (Y) § 3. tego Roz. $\text{sty}(4a-b)=\frac{\text{sty}\,4a-\text{sty}\,b}{1+\text{sty}\,4a.\text{sty}\,b}=\frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119}\times\frac{1}{239}}=1=\text{sty}\,\frac{\pi}{4}$; zatém $4a-b=\frac{\pi}{4}$. Aże podług szeregu (U')

$$a = \frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \frac{1}{9.5^9} - \text{itd},$$

$$b = \frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \frac{1}{5.239^5} - \frac{1}{7.239^7} + \text{itd};$$

przeto

$$\frac{\pi}{4}=\left\{\begin{array}{l} 4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3.5^3}+\frac{1}{5.5^5}-\frac{1}{7.5^7}+\frac{1}{9.5^9}-\text{itd}\right) \\ -\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{3.239^3}+\frac{1}{5.239^5}-\frac{1}{7.239^7}+\text{itd}\right) \end{array}\right\};$$

ztąd łatwo wyciągnąć wartość półokręgu π a następnie i okręgu całego.

§ 7. *Wszelka liczba dodatna ma w każdym układzie nieskończoną liczbę logarytmów, między któremi ieden tylko iest rzetelny; liczb zaś odiemnych wszystkie logarytmy są uroione.*

Ze zrównania $e^{x\sqrt{-1}}=\text{dost}x+\sqrt{-1}.\text{wst}x$ mamy $x\sqrt{-1}=l'(\text{dost}x+\sqrt{-1}.\text{wst}x)$. Czyniąc koleią $x=0$, $x=2\pi$, $x=4\pi$, ... $x=2k\pi$; wstawy tych wszystkich łuków będą zerem, dostawy równe $+1$: zatém
$0=l'.1$, $2\pi\sqrt{-1}=l'.1$, $4\pi\sqrt{-1}=l'.1$, $6\pi\sqrt{-1}=l'.1$ . . . , $2k\pi\sqrt{-1}=l'.1$.
Co nam pokazuie, że iedność dodatna ma nieskończoną liczbę logarytmów, między któremi ieden tylko iest rzetelny, i ten równa się zero. Ta prawda rościąga się do każdéy liczby dodatnéy; bo $a=a.1$, więc $l'.a=l'a+l'.1$.

Załóżmy znowu że $x=\pi$, $x=3\pi$, $x=5\pi$, ... $x=(2k+1)\pi$: ponieważ wstawy tych wszystkich łuków są zerem, a dostawy równe -1; więc
$\pi\sqrt{-1}=l'(-1)$, $3\pi\sqrt{-1}=l'(-1)$, $5\pi\sqrt{-1}=l'(-1)$. . ., $(2k+1)\pi\sqrt{-1}=l'(-1)$.
Tu widzimy, że iedność odiemna ma także nieskończoną liczbę logarytmów, ale wszystkie uroione; co się stosuie do każdéy liczby odiemnéy, gdyż $l'(-a)=l'(-1.a)=l'.a+l'(-1)$. Skoro więc rozwiązanie iakiegokolwiek zagadnienia przywiedzie nas do logarytmu ilości odiemnéy, będzie to znakiem żeśmy szukali rzeczy do znalezienia niepodobnéy.

§ 8. *Wstawy i dostawy łuków wielokrotnych wyrażaią się przez potęgi wstaw i dostaw łuków poiedynczych, i nawzaiem.*

W §fie 4tym przyszliśmy do zrównań

$$(\mathrm{dost}x+\sqrt{-1}.\mathrm{wst}x)^m = \mathrm{dost}mx+\sqrt{-1}.\mathrm{wst}mx,$$
$$(\mathrm{dost}x-\sqrt{-1}.\mathrm{wst}x)^m = \mathrm{dost}mx-\sqrt{-1}.\mathrm{wst}mx.$$

Jeżeli ie naprzód z sobą dodamy, a potém odciągniemy, wypadnie $\mathrm{dost}mx =$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{(\mathrm{dost}x+\sqrt{-1}.\mathrm{wst}x)^m+(\mathrm{dost}x-\sqrt{-1}.\mathrm{wst}x)^m}{2}, \\ \mathrm{wst}mx = \\ \dfrac{(\mathrm{dost}x+\sqrt{-1}.\mathrm{wst}x)^m-(\mathrm{dost}x-\sqrt{-1}.\mathrm{wst}x)^m}{2\sqrt{-1}}. \end{array}\right| \ldots (W').$$

Te wyrażenia lubo zawiéraią w sobie ilości uroione, po rozwinieniu iednak wskazanych potęg okażą się rzetelne. Mamy bowiem

$$(\mathrm{dost}x+\sqrt{-1}.\mathrm{wst}x)^m = \mathrm{dost}^m x + m\sqrt{-1}.\mathrm{dost}^{m-1}x.\mathrm{wst}x - \frac{m(m-1)}{1.\ 2}\mathrm{dost}^{m-2}x.\mathrm{wst}^2x - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}\sqrt{-1}.\mathrm{dost}^{m-3}x.\mathrm{wst}^3x + \ldots,$$

$$(\mathrm{dost}x-\sqrt{-1}.\mathrm{wst}x)^m = \mathrm{dost}^m x - m\sqrt{-1}.\mathrm{dost}^{m-1}x.\mathrm{wst}x - \frac{m(m-1)}{1.\ 2}\mathrm{dost}^{m-2}x.\mathrm{wst}^2x + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}\sqrt{-1}.\mathrm{dost}^{m-3}x.\mathrm{wst}^3x + \ldots$$

Podstawiwszy te szeregi w zrównaniach (W'), znaydziemy

$$\mathrm{dost}mx = \mathrm{dost}^m x - \frac{m(m-1)}{1.\ 2}\mathrm{dost}^{m-2}x.\mathrm{wst}^2x + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\mathrm{dost}^{m-4}x.\mathrm{wst}^4x - \text{itd},$$

$$\mathrm{wst}mx = m\,\mathrm{dost}^{m-1}x.\mathrm{wst}x - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}\mathrm{dost}^{m-3}x\,\mathrm{wst}^3x + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}\mathrm{dost}^{m-5}x.\mathrm{wst}^5x - \text{itd}.$$

Takie są wzory służące do wyrażenia wstaw i dostaw łuków wielokrotnych przez potęgi wstaw i dostaw łuków poiedynczych.

Jdźmy teraz do zagadnienia odwrotnego. Nazwiymy

$$\mathrm{dost}x+\sqrt{-1}.\mathrm{wst}x = u, \qquad \mathrm{dost}x-\sqrt{-1}.\mathrm{wst}x = v,$$

będzie

$$\mathrm{dost}x = \tfrac{1}{2}(u+v), \quad \mathrm{wst}x = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(u-v).$$

Ztąd naprzód wyciągniemy

$$\text{dost}^m\, x = \frac{1}{2^m}(u+v)^m\,;$$

rozwinąwszy naznaczoną potęgę w drugim członku, wypadnie

$$\text{dost}^m\, x = \frac{1}{2^m}\Big[u^m + mu^{m-1}v + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}u^{m-2}v^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}u^{m-3}v^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}u^{m-4}v^4 + \text{itd}\Big];$$

lecz wyrażenie $(u+v)^m$ nie odmieni wartości kiedy za u położymy v i nawzaiem; przeto

$$\text{dost}^m\, x = \frac{1}{2^m}\Big[v^m + mv^{m-1}u + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}v^{m-2}u^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}v^{m-3}u^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}v^{m-4}u^4 + \text{itd}\Big].$$

Z dodania tych dwóch wypadków otrzymamy

$$2\text{dost}^m\, x = \frac{1}{2^m}\Big[u^m + v^m + m(u^{m-1}v + v^{m-1}u) + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}(u^{m-2}v^2 + v^{m-2}u^2) + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}(u^{m-3}v^3 + v^{m-3}u^3) + \text{itd}\Big],$$

co się ieszcze może wystawić pod kształtem następuiącym

$$2^{m+1}\text{dost}^m\, x = u^m + v^m + muv(u^{m-2} + v^{m-2}) + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}u^2v^2(u^{m-4} + v^{m-4}) + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}u^3v^3(u^{m-6} + v^{m-6}) + \text{itd}.$$

Ponieważ pierwsze ze zrównań (W^7), znaczące iedno co $\text{dost}mx = \frac{u^m + v^m}{2}$ czyli $u^m + v^m = 2\text{dost}mx$, ma mieysce na wszelką wartość m, przeto $u^{m-2} + v^{m-2} = \text{dost}(m-2)x$, $u^{m-4} + v^{m-4} = 2\text{dost}(m-4)x$, $u^{m-6} + v^{m-6} = 2\text{dost}(m-6)x$, itd. Nadto $uv = (\text{dost}x + \sqrt{-1}\,\text{wst}x)(\text{dost}x - \sqrt{-1}\,\text{wst}x) = \text{dost}^2x + \text{wst}^2x = 1$, a następnie $u^2v^2 = 1$, $u^3v^3 = 1$, itd. Ostatni zatém szereg po włożeniu tych wartości i rozdzieleniu obu stron przez 2 zamieni się na

$$2^m \operatorname{dost}^m x = \operatorname{dost} mx + m \operatorname{dost}(m-2)x +$$
$$\frac{m(m-1)}{1.\ 2}\operatorname{dost}(m-4)x + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}\operatorname{dost}(m-6)x + \text{itd.}$$

Taki iest szereg służący do wyrażenia potęgi z dostawy łuku poiedynczego przez dostawy łuków wielokrotnych. Czyniąc koleią $m=1$, $m=2$, $m=3, \ldots$, i pamiętaiąc że dostawa łuku odiemnego równa się dostawie takiegoż samego łuku dodatnego, znaydziemy

$2\operatorname{dost} x = \operatorname{dost} x + \operatorname{dost}(-x) = 2\operatorname{dost} x$,

$4\operatorname{dost}^2 x = \operatorname{dost} 2x + 2\operatorname{dost}.0 + \operatorname{dost}(-2x) = 2\operatorname{dost} 2x + 2$,

$8\operatorname{dost}^3 x = \operatorname{dost} 3x + 3\operatorname{dost} x + 3\operatorname{dost}(-x) + \operatorname{dost}(-3x) = 2\operatorname{dost} 3x + 6\operatorname{dost} x$,

itd. itd. itd.

Ztąd

$$\operatorname{dost} x = \operatorname{dost} x,\quad \operatorname{dost}^2 x = \tfrac{1}{2}(\operatorname{dost} 2x + 1),$$
$$\operatorname{dost}^3 x = \tfrac{1}{4}(\operatorname{dost} 3x + 3\operatorname{dost} x),\ \text{itd.}$$

Dla wyrażenia $\operatorname{wst}^m x$ przez liniie trygonometryczne łuków wielokrotnych, weźmy zrównanie $\operatorname{wst} x = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(u-v)$ z którego

$$\operatorname{wst}^m x = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^m}(u-v)^m;$$

rozwinąwszy wskazaną potęgę w drugim członku zrównania, będzie

$$\operatorname{wst}^m x = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^m}\Big[u^m - mu^{m-1}v + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}u^{m-2}v^2$$
$$- \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}u^{m-3}v^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}u^{m-4}v^4$$
$$- \text{itd}\Big] \quad \ldots\ldots (^*).$$

Ponieważ $u-v = -(v-u)$, więc $(u-v)^m = [-(v-u)]^m = \pm(v-u)^m$, gdzie znak $+$ należy do m parzystego, $-$ do nieparzystego. Weźmy naprzód przypadek kiedy m iest parzyste: w tym razie można za $(u-v)^m$ położyć $(v-u)^m$; ztąd

$$\operatorname{wst}^m x = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^m}\Big[v^m - mv^{m-1}u + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}v^{m-2}u^2 -$$
$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}v^{m-3}u^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}v^{m-4}u^4$$
$$- \text{itd}\Big].$$

Dodawszy z sobą otrzymane dwa zrównania, znaydziemy

$$2\text{wst}^m x = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^m}\Big[u^m + v^m - m(u^{m-1}v + v^{m-1}u) + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}(u^{m-2}v^2 + v^{m-2}u^2) - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}(u^{m-3}v^3 + v^{m-3}u^3) + \text{itd}\Big]$$

albo

$$2\text{wst}^m x = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^m}\Big[2\text{dost}\,mx - 2m\text{dost}(m-2)x + \frac{2m(m-1)}{1.\ 2}\text{dost}(m-4)x - \frac{2m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}\text{dost}(m-6)x + \text{itd}\Big];$$

dzieląc obie strony przez 2 i uważaiąc że $(2\sqrt{-1})^m = \pm 2^m$ gdzie znak $+$ służy kiedy m iest rozdzielne przez 4, $-$ kiedy m iest tylko rozdzielne przez 2, otrzymamy

$$\pm 2^m \text{wst}^m x = \text{dost}\,mx - m\text{dost}(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}\text{dost}(m-4)x - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}\text{dost}(m-6)x + \text{itd}.$$

Czyniąc $m=2$, $m=4$, itd, będzie

$$-4\text{wst}^2 x = \text{dost}\,2x - 2\text{dost}.0 + \text{dost}(-2x) = 2\text{dost}\,2x - 2,$$

$$+16\text{wst}^4 x = \text{dost}\,4x - 4\text{dost}\,2x + 6\text{dost}\,0 - 4\text{dost}(-2x) + \text{dost}(-4x) = 2\text{dost}\,4x - 8\text{dost}\,2x + 6,$$

itd. itd. itd.

Ztąd

$$\text{wst}^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \text{dost}\,2x), \text{wst}^4 x = \tfrac{1}{8}(\text{dost}\,4x - 4\text{dost}\,2x + 3), \text{ itd.}$$

Jeżeli m iest nieparzyste; wtedy biorąc $-(v-u)^m$ za $(u-v)^m$ wypada

$$\text{wst}^m x = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^m}\Big[-v^m + mv^{m-1}u - \frac{m(m-1)}{1.\ 2}v^{m-2}u^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}v^{m-3}u^3 - \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}v^{m-4}u^4 + \text{itd}\Big];$$

dodawszy to do zrównania (*), będzie

$$2\text{wst}^m x = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^m}\Big[u^m - v^m - m(u^{m-1}v - v^{m-1}u) + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}(u^{m-2}v^2 - v^{m-2}u^2) - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}(u^{m-3}v^3 - v^{m-3}u^3) + \text{itd}\Big]$$

$$=\frac{1}{(2\sqrt{-1})^m}\Big[u^m - v^m - muv(u^{m-2} - v^{m-2}) + \frac{m(m-1)}{1.\,2}u^2v^2(u^{m-4} - v^{m-4}) - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\,2.\,3}u^3v^3(u^{m-6} - v^{m-6}) + \text{itd}\Big].$$

Drugie ze zrównań (W'), które się może wystawić pod kształtem

$u^m - v^m = 2\sqrt{-1}.\,\text{wst}\,mx$, daie $u^{m-2} - v^{m-2} = 2\sqrt{-1}.\text{wst}(m-2)x$, $u^{m-4} - v^{m-4} = 2\sqrt{-1}.\text{wst}(m-4)x$, itd; wiémy przy tém że $uv=1$, $u^2v^2=1$, itd. Podstawiwszy te wartości w ostatnim szeregu, znaydziemy po rozdzieleniu obu stron przez 2

$$\text{wst}^m\,x = \frac{1}{2^m(\sqrt{-1})^{m-1}}\Big[\text{wst}\,mx - m\,\text{wst}(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.\,2}\text{wst}(m-4)x - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\,2.\,3}\text{wst}(m-6)x + \text{itd}\Big].$$

Ponieważ m iest nieparzyste, będzie $m-1$ parzyste; przeto $(\sqrt{-1})^{m-1} = \pm 1$, gdzie znak $+$ służy kiedy $m-1$ iest rozdzielne przez 4, — kiedy tylko przez 2. Będzie przeto

$$\pm 2^m\,\text{wst}^m\,x = \text{wst}\,mx - m\,\text{wst}(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.\,2}\text{wst}(m-4)x - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\,2.\,3}\text{wst}(m-6)x + \text{itd}.$$

Kładąc $m=1$, $m=3$, itd, i pamiętaiąc że wstawa łuku odiemnego wzięta ze znakiem przeciwnym równa się wstawie takiegoż samego łuku dodatnego; wypadnie

$$2\,\text{wst}x = \text{wst}x - \text{wst}(-x) = \text{wst}x + \text{wst}x = 2\,\text{wst}x$$

$$-8\,\text{wst}^3x = \text{wst}3x - 3\text{wst}x + 3\text{wst}(-x) - \text{wst}(-3x) = \text{wst}3x - 3\text{wst}x - 3\text{wst}x + \text{wst}3x = 2\,\text{wst}3x - 6\,\text{wst}x$$

itd. itd. itd.

Ztąd

$$\text{wst}x = \text{wst}x, \quad \text{wst}^3x = -\tfrac{1}{4}(\text{wst}3x - 3\text{wst}x), \text{ itd},$$

WYKŁAD

Sposobu P. BUDAN

na rozwiązanie zrównań liczebnych.

Wolno drukować. Wilno d. 10. Marca 1828 r.

Cenzor N. Jurgiewicz.

SPOSOB P. BUDAN

NA ROZWIĄZANIE ZRÓWNAŃ LICZEBNYCH WSZELKIEGO STOPNIA ZA UŻYCIEM NAYPROSTSZYCH TYLKO ARYTMETYCZNYCH DZIAŁAŃ DODAWANIA I ODCIĄGANIA.

§ I.

Ze spółczynników zrównania danego oceniaią się spółczynniki dla zrównań maiących pierwiastki mnieysze o 1, 2, 3, ... n.

1). Gdy przez dodawanie wyrazów w iakimkolwiek szeregu utworzymy szereg drugi podług takiego prawa, aby każdy termin szeregu nowego był zbiorem z odpowiednego co do mieysca terminu w szeregu danym i ze wszystkich go poprzedzaiących; ten nowy szereg zwać będziemy *szeregiem zbiorowym porządku pierwszego*, a iego wyrazy *summami pierwszémi*. Szereg zbiorowy pierwszego porządku prowadzi tą samą drogą do zbiorowego szeregu *porządku drugiego* złożonego z *summ drugich*; itd. Tu summy uważaią sią w rozumieniu algebraiczném, toiest iako przewyżka zbioru wyrazów poprzedzonych iednym ze znaków + lub — nad zbiór wyrazów poprzedzonych znakiem przeciwnym.

Przykład.

szereg dany	1 ..	1 ..	1 ..	1 ..	1 ..	1 ..	
summy pierwsze ...	1 ..	2 ..	3 ..	4 ..	5 ..	6 ..	
summy drugie	1 ..	3 ..	6 ..	10 ..	15 ..	21 ..	....(*a*).
summy trzecie	1 ..	4 ..	10 ..	20 ..	35 ..	56 ..	
. . . .							

Szeregi teraźnieyszego przykładu obeymuią liczby zwane przez Geometrów *liczbami figurnémi*. A w szczególności summy drugie są liczbami *tróykątnémi*, trzecie są *ostrosłupowémi*; itd. (*). Tu każdy szereg ma za wyraz pierwszy

(*). Takowe nazwiska pochodzą ztąd, że wziąwszy tyle kul równych ile ma iedności którakolwiek liczba tróykątna, można ie tak uporządkować, iż będą styczne, i ich układ będzie miał postać tróykąta równobocznego. Z kul podobież stycznych wziętych w iakieykolwiek liczbie ostrosłupowéy może bydź ułożony ostrosłup tróykątny foremny, toiest maiący wszystkie krawędzie równe.

iedność, za drugi iakąkolwiek liczbę całką. J podług tego, iak drugim terminem szeregu iest 1, 2, 3, ..., liczby figurne w szeregu zawarte są porządku pierwszego, drugiego, trzeciego, itd: summy np. trzecie są liczbami figurnémi porządku czwartego. Ze sposobu tworzenia się tych szeregów wypada, że każdy w którymkolwiek z nich wyraz równa się summie z wyrazu przyległego poprzedzaiącego i z wyrazu odpowiednego co do mieyśca w szeregu bezśrednie wyższym: tak, iż nazwawszy dwa przyległe terminy w iednym z szeregów przez p, q; im odpowiedne w szeregu następnym przez P, Q, będzie

$$Q=P+q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b).$$

Ta uwaga pomoże nam do wynalezienia *ogólnych terminów* na wszystkie porządki liczb figurnych. Do czego przyprowadzą następuiące postrzeżenia. Rozwinąwszy ułamki

$$\frac{1}{1-z}, \frac{1}{(1-z)^2}, \frac{1}{(1-z)^3}, \frac{1}{(1-z)^4}, \text{ itd.} \quad . \quad . \quad . \quad (c),$$

w których licznikiem iest iedność, a mianownikiem coraz wyższe potęgi dwuwyrazu $1-z$, otrzymamy

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{1-z} &= 1+z+z^2+z^3+z^4+ \ldots \\
\frac{1}{(1-z)^2} &= 1+2z+3z^2+4z^3+5z^4+ \ldots \\
\frac{1}{(1-z)^3} &= 1+3z+6z^2+10z^3+15z^4+ \ldots \\
\frac{1}{(1-z)^4} &= 1+4z+10z^2+20z^3+35z^4+ \ldots
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d);$$

. . . .

gdzie widzimy, że spółczynnikami w szeregach są liczby figurne co do porządku odpowiedne. Będziemy pewni, że upatrzona tu zgodność spółczynników z liczbami figurnémi zachodzi we wszystkich terminach szeregowych ciągnących się bez końca i we wszystkich teraźnieyszych szeregach, ieżeli okażemy 1*ód*, że każdy spółczynnik w pierwszym szeregu iest koniecznie iednością, toiest liczbą figurną pierwszego porządku; 2*re*, że ze spółczynników każdego szeregu tak powstaią spółczynniki szeregu następnego, iak się tworzą iedne z drugich przyległe sobie porządki liczb figurnych.

Co do pierwszego. Mianownik ułamku $\frac{1}{1-z}$ ustanawia między spółczynnikami szeregowemi związek zawarty w zrównaniu $Q-P=0$ (Alg. Część II. Roz I. §1.) gdzie P i Q są dwa którekolwiek spółczynniki bezśrednie po sobie idące. Takie więc spółczynniki są równe: aże naypiérwszy iest iednością; będą téż wszystkie równe iedności. *Co do drugiego.* Oczywista iest naprzód, że we wszystkich szeregach (d) wyrazem piérwszym musi bydź iedność; bo do niéy przywodzi się każdy z ułamków (c) przez założenie $z=0$. Powtóre, że każdy z tych szeregów rozdzielony przez $1-z$ powinien wydać szereg następny. Wyraziwszy zatém ieden z szeregów przez

$$1+az+bz^2+cz^3+dz^4+\ldots\ldots,$$

idący po nim przez

$$1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+\ldots\ldots,$$

będzie

$$\frac{1+az+bz^2+cz^3+dz^4+\ldots}{1-z}=1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+\ldots,$$

ztąd po uwolnieniu od mianownika i sprowadzeniu do zerą wypada

$$\begin{array}{r|r|r|r|l} A & z+B & z^2+C & z^3+D & z^4+\ldots\ldots=0; \\ -1 & -A & -B & -C & \\ -a & -b & -c & -d & \end{array}$$

równaiąc z zerem spółczynniki przy różnych potęgach ilości z mamy

$$A-1-a=0,\ B-A-b=0,\ C-B-c=0,\ D-C-d=0,\ldots$$

następnie

$$A=1+a,\ B=A+b,\ C=B+c,\ D=C+d,\ \ldots\ldots$$

Te zrównania nas uczą, że spółczynniki przyległych sobie szeregów formuią się iedne z drugich podług tego samego prawa, iakieśmy upatrzyli w liczbach figurnych i zamknęli we wzorze (b). Tak więc mamy przekonanie o tosamości liczb figurnych ze spółczynnikami szeregów (d). Przeto ogólne terminy podane (Część II. Roz. I. § 2.) na spółczynniki tych szeregów są oraz terminami ogólnémi dla liczb figurnych. Następnie liczba figurna położona na mieyscu n będzie

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{w porządku piérwszym} \ldots\ldots\ldots & 1 \\
\quad\text{w drugim} \ldots\ldots\ldots & n \\
\quad\text{w trzecim} \ldots\ldots & \dfrac{n(n+1)}{1.\ 2} \\
\quad\text{w czwartym} \ldots\ldots & \dfrac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\quad\text{w porządku } m \ldots & \dfrac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-2)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ (m-1)}
\end{array}\right\}\ldots(e).$$

2). Niech będzie iakikolwiek szereg liczb

$$a_0 \ldots a_1 \ldots a_2 \ldots a_3 \ldots \text{itd.}$$

Dodaiąc w nim wyrazy dla uformowania szeregów zbiorowych otrzymamy

$$\text{szereg zbiorowy 1szy} \ldots a_0 \left|\begin{array}{l} a_0 \\ +a_1 \end{array}\right| \begin{array}{l} a_0 \\ +a_1 \\ +a_2 \end{array} \left|\begin{array}{l} a_0 \\ +a_1 \\ +a_2 \\ +a_3 \end{array}\right| \text{itd.}$$

$$\text{szereg zbiorowy 2gi} \ldots a_0 \left|\begin{array}{l} 2a_0 \\ +a_1 \end{array}\right| \begin{array}{l} 3a_0 \\ +2a_1 \\ +a_2 \end{array} \left|\begin{array}{l} 4a_0 \\ +3a_1 \\ +2a_2 \\ +a_3 \end{array}\right| \text{itd.}$$

$$\text{szereg zbiorowy 3ci} \ldots a_0 \left|\begin{array}{l} 3a_0 \\ +a_1 \end{array}\right| \begin{array}{l} 6a_0 \\ +3a_1 \\ +a_2 \end{array} \left|\begin{array}{l} 10a_0 \\ +6a_1 \\ +3a_2 \\ +a_3 \end{array}\right| \text{itd.}$$

. . . .

Łatwo tu postrzegamy, że wyraz położony na mieyscu n w szeregu zbiorowym każdego porządku iest summą liczb figurnych n tegoż porządku rozmnożonych względnie przez wyrazy w liczbie n szeregu danego wstecznie wzięte. Wyraz np. czwarty w trzecim szeregu zbiorowym iest summą ze cztérech liczb figurnych trzeciego porządku 1, 3, 6, 10 rozmnożonych przez odwrotnie idące cztéry wyrazy szeregu danego a_3, a_2, a_1, a_0.

Przykład. Z szeregu

$$2+5-3+4-3+0-1$$

powstaie

$$\begin{array}{ll}
\text{szereg zbiorowy 1szy} & 2+7+4+8+5+5+4 \\
\ldots\ldots\ \text{2gi} & 2+9+13+21+26+31+35 \\
\ldots\ldots\ \text{3ci} & 2+11+24+45+71+102+137.
\end{array}$$

. . . .

W trzecim szeregu zbiorowym czwarty wyraz 45 iest równy $4.1-3.3+5.6+2.10$.

3). W zrównaniu iakiémkolwiek

$$px^4+qx^3+rx^2+sx+t=0 \quad \ldots\ldots \quad (f)$$

uczyniwszy $x=1+y$ wypadnie

$$\left.\begin{array}{l}p\\+q\\+r\\+s\\+t\end{array}\right| \left.\begin{array}{l}+4p\\+3q\\+2r\\+s\end{array}\right| y \left.\begin{array}{l}+6p\\+3q\\+r\end{array}\right| y^2 \left.\begin{array}{l}+4p\\+q\end{array}\right| y^3+py^4=0;$$

aże założenie $x=1+y$ daie $y=x-1$, przeto

$$\left.\begin{array}{l}p\\+q\\+r\\+s\\+t\end{array}\right|(x-1)^0 \left.\begin{array}{l}+4p\\+3q\\+2r\\+s\end{array}\right|(x-1)^1 \left.\begin{array}{l}+6p\\+3q\\+r\end{array}\right|(x-1)^2 \left.\begin{array}{l}+4p\\+q\end{array}\right|(x-1)^3+p(x-1)^4=0 \ldots\ldots (g)$$

Spółczynniki ostatniego zrównania formuią się ze spółczynników zrównania danego (f) podług pewnego prawa, które łatwo upatrzymy pamiętaiąc na prawdy okazane w liczbie poprzedzaiącéy. Albowiem podług téy liczby, spółczynnik $p+q+r+s+t$ przy $(x-1)^0$ w zrównaniu (g) iest wyrazem ostatnim piérwszego szeregu zbiorowego powstaiącego z szeregu spółczynników w danem zrównaniu p, q, r, s, t. Spółczynnik $4p+3q+2r+s$ przy $(x-1)^1$, będąc summą liczb figurnych drugiego porządku 1, 2, 3, 4 rozmnożonych przez ilości s, r, q, p iest wyrazem przedostatnim drugiego szeregu zbiorowego. Spółczynnik $6p+3q+r$ przy $(x-1)^2$, będąc summą liczb figurnych trzeciego porządku 1, 3, 6 mnożonych przez ilości r, q, p, iest wyrazem poprzedzaiącym przedostatni w trzecim szeregu zbiorowym. Zgoła, coraz dalsze spółczynniki zrównania (g) są wyrazami coraz bliższémi początku w szeregach zbiorowych bezśrednie po sobie następuiących: naostatek spółczynnik przy $x-1$ w naywyższéy potędze iest tenże sam iaki ma naywyższa potęga x w zrównaniu danem.

Na mocy uczynionych dopiéro postrzeżeń, chcąc ze zrównania np.

$$2x^4-10x^3+5x^2-5x+12=0$$

otrzymać takie, w którémby pierwiastki były o iedność mnieysze, czyli w którémby ilością nieznaną było $x-1$, potrzeba w szeregu spółczynników

$$2-10+5-5+12$$

uformować szeregi zbiorowe coraz o ieden wyraz krótsze, toiest

$$2-8-3-8+4,$$
$$2-6-9-17,$$
$$2-4-13,$$
$$2-2,$$
$$2;$$

a końcowe terminy tych szeregów będą spółczynnikami przy coraz wyższych potęgach dwuwyrazu $x-1$ w zrównaniu żądaném, które następnie ma postać

$$4-17(x-1)-13(x-1)^2-2(x-1)^3+2(x-1)^4=0$$

czyli

$$2(x-1)^4-2(x-1)^3-13(x-1)^2-17(x-1)+4=0.$$

Prawo na formowanie spółczynników dla zrównania z piérwiastkami pomnieyszonemi o iedność iest ogólne na wszystkie stopnie: o czém się zaraz przekonamy. W zrównaniu

$$px^m+qx^{m-1}+\;.\;.\;.\;.\;+rx^3+sx^2+tx+u=0$$

obeymuiącém każdy stopień, podstawiwszy $1+y$ za x, kiedy w wypadku położymy $x-1$ na mieyscu y, otrzymamy

$$\left.\begin{array}{l} p \\ +q \\ \ldots \\ +r \\ +s \\ +t \\ +u \end{array}\right|(x-1)^0+\left.\begin{array}{r} mp \\ +(m-1)q \\ \ldots\ldots \\ +3r \\ +2s \\ +t \end{array}\right|(x-1)^1+\left.\begin{array}{l} \frac{m(m-1)}{1.\,2}p \\ +\frac{(m-1)(m-2)}{1.\,2}q \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ +3r \\ +s \end{array}\right|(x-1)^2+$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\,2.\,3}p \\ +\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\,2.\,3}q \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ +r \end{array}\right|(x-1)^3+\;.\;.\;.\;+\begin{array}{l} p(x-1)^m=0 \\ +\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ .\;.\;.\;.\;.\;. \\ \end{array}$$

Tu oczywiście zachowane są w składzie spółczynników te wszystkie prawa, iakieśmy w zrównaniu (g) postrzegli. Spółczynnik bowiem przy $(x-1)^0$ iest summą wszystkich spółczynników zrównania danego, których liczba iest $m+1$. Spółczynnik przy $(x-1)^1$ iest summą wieloczynów ze wszystkich prócz ostatniego spółczynników wstecznie branych przez tyleż liczb figurnych drugiego porządku 1, 2, 3, ..m. Do spółczynnika przy $(x-1)^2$ wchodzą dodane wszystkie prócz dwóch ostatnich spółczynniki rozmnożone przez liczby figurne trzeciego porządku 1, 3, . . . $\frac{m(m-1)}{1.\ 2}$. Że $\frac{m(m-1)}{1.\ 2}$ iest w saméy rzeczy wyrażeniem ostatniéy liczby figurnéy tego porządku położonéy na mieyscu $m-1$, łatwo się można upewnić podstawiwszy $m-1$ za n w terminie ogólnym na ten porządek, toiest w $\frac{n(n+1)}{1.\ 2}$. J tak daléy.

4). Jakim sposobem ze zrównania danego formuie się zrównanie z pierwiastkami zmnieyszonémi o iedność, tak znowu z tego ostatniego wypada zrównanie, którego pierwiastki będą ieszcze o iedność pomnieyszone, a przeto dwiema iednościami mnieysze niż w zrównaniu danem. J powtarzaiąc następnie ten sam rachunek możemy przyyść do zrównania maiącego pierwiastki mnieysze o liczbę całką iakąkolwiek n. *Przykład.*

$$x^3-7x+7=0;$$
$$1+0-7+7,$$
$$1+1-6+1,$$
$$1+2-4,$$
$$1+3,$$
$$1;$$
$$(x-1)^3+3(x-1)^2-4(x-1)+1=0;$$
$$1+3-4+1,$$
$$1+4+0+1,$$
$$1+5+5,$$
$$1+6,$$
$$1;$$
$$(x-2)^3+6(x-2)^2+5(x-2)+1=0.$$
itd.

Zrównanie dane, służące na ocenienie wartości x, zwać będziemy dla skrócenia zrównaniem na x; a wypływaiące z niego, które za ilość nieznaną maią $x-1$, $x-2$, . . ., zrównaniami na $x-1$, na $x-2$, itd.

Lubo sposób wynalezienia spółczynników dla zrównania na $x-n$ iest bardzo prosty; staie się atoli zbyt długim, gdy liczba n będzie znacznie wielka, np. kilką znakami wyrażona. Okażemy zaraz, iak działanie w tym razie może bydź skrócone. W iakiémkolwiek zrównaniu

$$x^3-4x^2+3x-6=0$$

założywszy $x=10x'$, znaydziemy

$$1000x'^3-400x'^2+30x'-6=0,$$

czyli po rozdzieleniu wszystkich wyrazów przez 1000

$$x'^3-0,4x'^2+0,03x'-0,006=0:$$

To zrównanie ma pierwiastki dziesięć razy mnieysze niżeli dane, a formuie się z danego dzieląc spółczynnik wyrazu drugiego przez 10, spółczynnik wyrazu trzeciego przez potęgę drugą z 10, spółczynnik następny przez potęgę trzecią z 10, itd. Gdybyśmy byli założyli $x=100x'$, wypadłoby ztąd zrównanie z pierwiastkami sto razy mnieyszemi; i mogłoby się także uformować z danego dzieląc spółczynniki wyrazów drugiego, trzeciego, itd, przez potęgę piérwszą ze 100, drugą, itd. Nawzaiem, chcąc otrzymać zrównanie z pierwiastkami 10, 100, itd. razy większémi, potrzeba w spółczynniki zrównania danego wprowadzić odmianę taką samę przez mnożenie, iakąśmy zmnieyszaiąc pierwiastki wprowadzili przez dzielenie. Pierwiastki np. zrównania

$$x'^3-400x'^2+30000x'-6000000=0$$

będą sto razy większe od pierwiastków zrównania

$$x^3-4x^2+3x-6=0.$$

Kiedy zrównanie dane na x przerobimy wskazanym dopiéro sposobem na zrównanie z pierwiastkami dziesięć razy mnieyszémi, toiest na maiące za ilość nieznaną $\frac{x}{10}$; kiedy z tego ostatniego wyciągniemy zrównania na $\frac{x}{10}-1$, $\frac{x}{10}-2$, $\frac{x}{10}-3$, . . . czyli na $\frac{x-10}{10}$, $\frac{x-20}{10}$, $\frac{x-30}{10}$, ...; i kiedy nareszcie do tak otrzymanych wprowadzimy odmianę powiększaiącą ich pierwiastki razy 10; wypadną ztąd zrównania na $x-10$, $x-20$, $x-30$, ... Podobnie się postępuie w formowaniu zrównań na $x-100$, $x-200$, ...: toiest zrównanie dane potrzeba przekształcić naprzód na zrównanie na

$\frac{x}{100}$: z tego wyciągnąć zrównania na $\frac{x}{100}-1$, $\frac{x}{100}-2$, . . . ; czyli na $\frac{x-100}{100}$, $\frac{x-200}{100}$, . . . i w wypadkowych powiększyć pierwiastki sto razy. *Przykład.* Ze zrównania

$$x^3-4x^2+3x-6=0$$

wyprowadzić zrównanie na $x-312$. Do tego celu przywiedzie rachunek odbyty następuiącym porządkiem:

spółczynniki zrównania na x . . $1-4+3-6$

zrównania na $\frac{x}{100}$ . . $1-0{,}04+0{,}0003-0{,}000006$

na $\frac{x}{100}-1$ . . . $1+2{,}96+2{,}9203+0{,}960294$

na $\frac{x}{100}-2$ . . $1+5{,}96+11{,}8403+7{,}840594$

na $\frac{x}{100}-3$ czyli na $\frac{x-300}{100}$ . . $1+8{,}96+26{,}7603+26{,}640894$

na $x-300$ . . $1+896+267603+26640894$

na $\frac{x-300}{10}$ . . $1+89{,}6+2676{,}03+26640{,}894$

na $\frac{x-300}{10}-1$ czyli na $\frac{x-300-10}{10}$ czyli

na $\frac{x-310}{10}$ . . $1+92{,}6+2858{,}23+29407{,}524$

na $x-310$ . . $1+926+285823+29407524$

na $x-311$ . . $1+929+287678+29694274$

na $x-312$ . . $1+932+289539+29982882$,

Żądane przeto zrównanie będzie

$$(x-312)^3+932(x-312)^2+289539(x-312)+29982882=0.$$

Z teraźnieyszego rachunku pokazuie się, że w formowaniu zrównania na $x-n$, potrzeba oceniać spółczynniki dla tylu tylko zrównań iaka iest summa wszystkich znaków liczby n uważanych za zbiory iedności prostych.

Uwaga I. Jakiebykolwiek były znaki terminów w zrównaniu na x; gdy zmnieyszać będziemy iego pierwiastki o 1, 2, 3, . . ., przyydziemy koniecznie do pewnego zrównania na $x-n$ w którém wszystkie znaki wypadną dodatne. Daymy bowiem że spółczynniki na x składaią szereg

$$3-7-10-12$$

maiący wszystkie wyrazy odiemne oprócz piérwszego który zawsze bydź może dodatnym. Formuymy z nich spółczynniki dla zrównania na $x-1$:

spółczynniki dane . . . $3-7-10-12$
szereg zbiorowy 1*szy* . . . $3-4-14-26$
2*gi* . . . $3-1-15$ . .
3*ci* . . . $3+2$ . . . .
4*ty* . . . 3 . . . . .

Widzimy w tych szeregach, że wyraz drugi coraz się umnieysza wyrazem pierwszym; i w szeregu przedostatnim iuż się staie dodatnym, tak, iż szereg spółczynników dla zrównania na $x-1$

$$3+2-15-26$$

będzie miał dwa początkowe terminy ze znakiem $+$. W formowaniu spółczynników dla zrównania na $x-2$ oba pierwsze spółczynniki dodatne zrównania na $x-1$ przykładać się będą do umnieyszenia idącego po nich spółczynnika odiemnego iak pokazuie następny rachunek;

spółczyn. zrów. na $x-1$ . . $3+2-15-26$
szereg zbiorowy 1*szy* . . $3+5-10-36$
2*gi* . . $3+8-2$ . . .
3*ci* . . $3+11$ . . . .
4*ty* . . 3 . . . .

Chociaż w szeregu spółczynników zrównania na $x-2$

$$3+11-2-36$$

wyraz trzeci iest ieszcze odiemny, ale iest mnieyszy niż w zrównaniu na $x-1$. Posunąwszy daléy zmnieyszenie pierwiastków, znaydziemy, że spółczynnikami zrównania na $x-3$ będą

$$3+20+29-24$$

z których tylko ostatni iest odiemny; a spółczynniki zrównania na $x-4$ będą

$$3+29+78+28$$

wszystkie dodatne.

Uwaga II. Wyłożony sposób na ocenienie spółczynników zrównaniom na $x-1$, $x-2$,... może nas także przyprowadzić do odkrycia spółczynników dla zrównań na $x+1$, $x+2$, . . . W tym celu potrzeba

1*ód*, W zrównaniu danéḿ np.

$$2x^3-3x^2-4x+5=0$$

położyć $-x$ za x, albo, co na iedno wychodzi, odmienić znaki przed wyrazami zawierającemi potęgi x cechowane wykładnikiem nieparzystym; zrównanie na x weźmie postać

$$-2x^3-3x^2+4x+5=0$$

czyli

$$2x^3+3x^2-4x-5=0.$$

2re, ztąd wyciągnąć spółczynniki dla zrównań

na $x-1$	które będą	$2+9+8-4$
na $x-2$		$2+15+22+15$
. . . . .		. . . .

3cie, podług otrzymanych dopiero spółczynników napisać zrównania

$$\text{na } x-1 \;..\; 2(x-1)^3+9(x-1)^2+8(x-1)-4=0$$
$$\text{na } x-2 \;..\; 2(x-2)^3+15(x-2)^2+22(x-1)+15=0$$

. . . . ;

a ponieważ x znaczy to samo co x wzięte z przeciwnym znakiem, przeto ostatnie zrównania przyymą wyrażenie

$$2(-x-1)^3+9(-x-1)^2+8(-x-1)-4=0$$
$$2(-x-2)^3+15(-x-2)^2+22(-x-2)+15=0$$

. . . .

czyli

$$-2(x+1)^3+9(x+1)^2-8(x+1)-4=0$$
$$-2(x+2)^3+15(x+2)^2-22(x+2)+15=0$$

. . . .

czyli

$$2(x+1)^3-9(x+1)^2+8(x+1)+4=0$$
$$2(x+2)^3-15(x+2)^2+22(x+2)-15=0$$

. . . .

i będą zrównaniami na $x+1$, $x+2$, . . .

Na mocy poprzedzaiącéy uwagi przechodząc od zrównania na x do zrównań na $x-1$, $x-2$, . . . trafimy na zrównanie na $x-n$ ze wszystkiemi spółczynnikami dodatnémi: lecz że potęgi nieparzyste dwuwyrazu $x-n$ czyli $-(x+n)$ są odiemne; przeto w zrównaniu na $x+n$ nie będzie żadnego następstwa znaków, ale tylko same przemiany.

Uwaga III. W zrównaniu

$$px^m+qx^{m-1}+\ldots+u=0 \quad \ldots\ldots \quad (h)$$

podstawiwszy $1+y$ za x, znaydziemy

$$py^m+q'y^{m-1}+\ldots+u'=0$$

gdzie p, q', . . . u' powstaią z p, q, . . u podług wiadomego prawa. Kiedy potém wrócimy $x-1$ za y, otrzymamy zrównanie

$$p(x-1)^m + q'(x-1)^{m-1} + \ldots + u' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (k)$$

maiące stronę piérwszą iednaką ze zrównaniem (h) na na wszelką wartość x; zatém

$$px^m + qx^{m-1} + \ldots + u = p(x-1)^m + q'(x-1)^{m-1} + \ldots + u'.$$

Postąpiwszy ze zrównaniem (k) podobnie iak z (h) przyydziemy do

$$p(x-1)^m + q'(x-1)^{m-1} + \ldots + u' = p(x-2)^m + q''(x-2)^{m-1} + \ldots + u''.$$

Ztąd

$$px^m + qx^{m-1} + \ldots + u = p(x-1)^m + q'(x-1)^{m-1} + \ldots + u' = p(x-2)^m + q''(x-2)^{m-1} + \ldots + u''.$$

Zgoła, strony piérwsze zrównań na x, $x-1$, $x-2$, ... są równe na wszelką wartość x. Następnie wypadki z podstawienia w nich iakieykolwiek liczby na mieyscu x muszą bydź iednakie. Z czego wnosimy, że ostatnie terminy tych zrównań u, u', u'', ... są liczbami do których się przywodzi zrównanie dane (h), kiedy w niém za x położymy 0, 1, 2, ...

§ II.

Dochodzenie pierwiastków rzetelnych w zrównaniu liczebném iakiegokolwiek stopnia.

5). Rozwiązanie zrównań liczebnych zaczyna się od wynalezienia pierwiastków równych podług sposobu podanego w części I Algebry (Roz. 3. § 4.). Gdy przez wieloczyn z mnożników piérwszego stopnia odpowiednych tym pierwiastkom rozdzielimy zrównanie dane; w zrównaniu na wieloraz wypadaiącém znaydować się będą same tylko pierwiastki nierówne rzetelne lub uroione. Pierwiastki rzetelne mogą bydź wymierne lub niewymierne. Wymierne przywiodą się do całkich przez nadanie zrównaniu stosownéy postaci.

Ocenimy pierwiastki całkie formuiąc następnie zrównania na $x-1$, $x-2$, $x-3$,..., dopóki nie przyydziemy do zrównania na $x-n$ ze wszystkiemi znakami dodatnémi. Liczba n będzie granicą wyższą pierwiastków dodatnych; ta bowiem liczba i każda od niéy większa podstawiona za x przyprowadzi do wypadku dodatnego zrównanie na $x-n$, a tém samém zrównanie dane. Jeżeli w którémkolwiek ze zrównań na $x-1$, $x-2$, $x-3$, ... np. w zrównaniu na $x-3$ wyraz ostatni iest zerem; wtedy iedna wartość na $x-3$ będzie zero, toiest $x-3=0$, a następnie $x=3$. J w ilu zrównaniach nikną terminy ostatnie, tyle otrzymamy pierwiastków całkich dodatnych zrównania danego. Dla odkrycia pierwiastków odiemnych trzeba założyć $x=-\text{x}$, i ze zrównaniem na x postąpić sposobem dopiéro wskazanym. Znalezione wartości całkie dodatne ilości x będą wartościami odiemnémi na x.

Przykład

$$x^4-5x^3-4x^2+50x-60=0.$$

Spółczynniki zrównania na $x-1$ .. $1-1-13+31-18$
na $x-2$ .. $1+3-10+6+0$
na $x-3$ .. $1+7+5-1+0$
na $x-4$ .. $1+11+32+34+12$.

Za x wziąwszy $-\text{x}$, będzie

$$\text{x}^4+5\text{x}^3-4\text{x}^2-50\text{x}-60=0.$$

Spółczynniki zrównania na x—1 .. $1+9+17-39-108$
na x—2 .. $1+13+50-26-120$
na x—3 .. $1+17+95+169-30$
na x—4 .. $1+21+152+411+252$.

Tu widzimy, że granicą wyższą pierwiastków tak dodatnych iak odiemnych w zrównaniu danem iest liczba 4; że to zrównanie nie ma żadnego pierwiastku całkiego odiemnego, a dodatnych ma dwa $x=2$, $x=3$.

Teraźnieyszą drogą można przyyść do pierwiastków całkich, nawet równych. *Przykład.*

$$x^4-10x^3+36x^2-54x+27=0.$$

Spółczynniki zrównania na $x-1$ .. $1-6+12-8+0$. Jedną przeto wartością na x iest iedność. Zrównanie na $x-1$, z przyczyny niknącego wyrazu ostatniego, zniża się o ieden stopień. Po zniżeniu, z iego spółczynników otrzymamy spółczynniki zrównań

na $x-2$ . . $1-3+3-1$
na $x-3$ . . $1+0+0+0$.

Ponieważ w ostatniém zrównaniu trzy końcowe terminy nikną, więc trzy iego pierwiastki muszą bydź zerem, a następnie trzy wartości na x równaią się liczbie 3. Łatwo sprawdzić, że zrównanie dane iest w saméy rzeczy wieloczynem z dwóch mnożników $x-1$ i $(x-3)^3$.

6). Pierwiastki niewymierne wyrażaią się przez liczbę całą, która bydź może niekiedy zerem, połączoną z ułamkiem dziesiątnym ciągnącym się bez końca. Kiedy tę liczbę całą nazwiemy przez p, ułamek dziesiątny przez α; każdy pierwiastek niewymierny wystawi się przez $p+\alpha$. Oczywista iest że, podług tego iak p znaczy 0, 1, 2, 3,..., wartości na α będą pierwiastkami mnieyszémi od iedności w zrównaniach na x, $x-1$, $x-2$, $x-3$,... Wynaydowanie przeto wszystkich pierwiastków niewymiernych przywodzi się do ocenienia pierwiastków mnieyszych od iedności w zrównaniach na x, $x-1$, $x-2$,... aż do ostatniego które zachowuie w znakach iakąkolwiek ieszcze przemianę, czyli które ma ieszcze iakikolwiek wyraz odiemny. Następnie pokażemy: 1*ód*, iak poznać czy w zrównaniach na x, $x-1$, $x-2$,... mogą zachodzić pierwiastki mnieysze od iedności; 2*re*, ieżeli mogą, iak się upewnić iż rzeczywiście zachodzą i razem iak ie ocenić z zamierzonym stopniem przybliżenia. Mówić tu tylko będziemy o samych pierwiastkach dodatnych; gdyż odiemne zamienimy zawsze w dodatne przez założenie $x=-\mathrm{x}$.

7). *Co do piérwszego.* W zrównaniu daném np.

$$x^3-4x^2+3x-6=0$$

założywszy $x=\frac{1}{z}$, będzie

$$6z^3-3z^2+4z-1=0:$$

to zrównanie nazywa się odwrotném względem danego, ztąd iż ma też same spółczynniki wstecznym porządkiem idące. Zrównanie na $z-1$ wypadnie

$$6(z-1)^3+15(z-1)^2+16(z-1)+6=0.$$

Ponieważ tu wszystkie wyrazy są dodatne; więc $z-1$ nie ma żadnéy wartości dodatnéy, tém samém z żadnéy wartości większéy niż iedność, a następnie x żadnéy mnieyszéy niż iedność. Zatém, *żeby zrównanie na* x *mogło mieć pierwiastki środkuiące między* 0 *i* 1, *potrzeba aby w zrównaniu na* $z-1$ (*które zwać będziemy* posiłkowém) *znaydował się przynaymniey ieden wyraz odiemny.* Co mówimy o zrównaniu na x, ściąga się do zrównań na $x-1$, $x-2$, $x-3$, itd. Zastosuymy teraźnieyszy początek do przykładu. Weźmy zrównanie

$$x^3-2x-5=0$$

i uczyńmy $x=\frac{1}{z}$, $x-1=\frac{1}{z_1}$, $x-2=\frac{1}{z_2}$, $x-3=\frac{1}{z_3}$, itd. Ze spółczynników zrównań

na x . . .	$1+0-2-5$	na $z-1$ . .	$5+17+19+6$
$x-1$ . .	$1+3+1-6$	z_1-1 . .	$6+17+13+1$
$x-2$ . .	$1+6+10-1$	z_2-1 . .	$1-7-23-16$
$x-3$ . .	$1+9+25+16$		

widzimy że tylko zrównanie na $x-2$ może mieć pierwiastki mnieysze od iedności, a zatém że wartości dodatne niewymierne na x te tylko bydź mogą, których częścią całką iest liczba 2. W teraźnieyszym przykładzie zachodzi niewątpliwie przynaymniéy ieden pierwiastek środkuiący między 2 i 3; o czém upewniaią nas dwie przyczyny: 1*ód*, iż terminy ostatnie zrównań na $x-2$ i $x-3$, które są wypadkami z podstawienia 2 i 3 za x w zrównaniu daném, różnią się co do znaku; 2*re*, że wyraz ostatni zrównania na z_2-1 iest odiemny. Obie te okoliczności zawsze się razem zbiegaia. Dla wyśledzenia pierwiastków odiemnych połóżmy $x=-\mathrm{x}$; będzie

$$\mathrm{x}^3-2\mathrm{x}+5=0.$$

Uczyńmy $\mathrm{x}=\frac{1}{\mathrm{z}}$; Spółczynniki zrównań

na x	$1-0-2+5$	na z-1 . .	$5+13+11+4$
x-1 . .	$1+3+1+4$		

pokazuią że x nie ma żadnéy wartości odiemnéy.

Postąpiwszy podobnie ze zrównaniem

$$x^3-7x+7=0,$$

przekonamy się ze spółczynników zrównań

na x	$1+0-7+7$	na $z-1$ . .	$7+14+7+1$
$x-1$ . .	$1+3-4+1$	z_1-1 . .	$1-1-2+1$
$x-2$ . .	$1+6+5+1$		

na x	$1-0-7-7$	na z-1 . .	$7+28+35+13$
x-1 . .	$1+3-4-13$	z_1-1 . .	$13+43+44+13$
x-2 . .	$1+6+5-13$	z_2-1 . .	$13+34+23+1$
x-3 . .	$1+9+20-1$	z_3-1 . .	$1-21-48-29$
x-4 . .	$1+12+41+29$		

że iest koniecznie przynaymniéy iedna wartość odiemna na x zawarta między liczbami -3 i -4; że oraz mogą bydź wartości dodatne obięte między 1 i 2. Te ostatnie, ieżeli są rzeczywiście, muszą bydź w liczbie parzystéy; gdyż termi-ny ostatnie zrównań na $x - 1$ i na $x - 2$ zgadzaią się w znaku.

Jeżeli ostatnie wyrazy w zrównaniach sobie przyległych np. na $x-p$ i na $x-(p+1)$ różnią się znakiem; iuż to samo upewnia, że są wartości rzetelne na x w liczbie nieparzy-stéy środkuiące między p i $p+1$: wtedy formowanie zrów-nania na $z_p - 1$ iest zbyteczne a zatém nie potrzebne. Jeże-li zaś te ostatnie wyrazy są w znaku zgodne; natenczas zró-wnanie na $z_p - 1$ pokaże iż albo nie środkuią żadne war-tości na x między p i $p+1$ skoro ma wszystkie terminy do-datne, albo że może środkować liczba ich parzysta kiedy ma w znakach iakąkolwiek przemianę. W drugim atoli razie nie możemy bydź pewni o bytności pierwiastków zrównania zawartych między p i $p+1$; iest bowiem przypadek w któ-rym żadnego niemasz pierwiastku między p i $p+1$, a iednak zachodzą przemiany znaków w zrównaniu na $z_p - 1$. Jakoż, daymy iż żadna wartość na x nie środkuie między p i $p+1$; więc zrównanie na $x-p$ nie ma żadnego pierwiastku mniey-szego od iedności, następnie zrównanie na $\frac{1}{x-p}$ czyli na z_p żadnego od iedności większego, a zrównanie na $z_p - 1$ żadnego dodatnego lecz tylko same odiemne. Przeto wszyst-kie mnożniki pierwszego stopnia wchodzące w skład osta-tniego zrównania, odpowiedne pierwiastkom rzetelnym, ma-ią postać $(z_p - 1)+A$ gdzie A iest dodatne. Gdyby ieszcze mnożniki stopnia drugiego odpowiadaiące każdéy parze pierwiastków uroionych były kształtu $(z_p - 1)^2 + P(z_p - 1) + Q$ ze spółczynnikami P i Q dodatnémi; natenczas w zrównaniu na $z_p - 1$ nie zaszłaby żadna w znakach przemiana. Żeby mnożniki drugiego stopnia miały wyrażoną tu postać, po-trzeba oczywiście aby każda para uroionych wartości na $z_p - 1$ była wzoru $-a \pm \sqrt{-b}$ gdzie rzetelna część iest od-iemna. Rozważmy teraz kiedy ta część iest odiemną a kiedy nie iest. Na ten koniec wystawmy pierwiastki uroione zrów-nania na $x-p$ przez $f \pm \sqrt{-\varphi}$; będzie

$$z_p = \frac{1}{f \pm \sqrt{-\varphi}} = \frac{f \mp \sqrt{-\varphi}}{f^2 + \varphi}, \quad z_p - 1 = \frac{f}{f^2+\varphi} - 1 \mp \frac{\sqrt{-\varphi}}{f^2+\varphi}.$$

Tu widzimy że część rzetelna uroioney wartości na $z_p - 1$ zawsze będzie odiemna; wyiąwszy iedno zdarzenie, kiedy f

iest dodatne, f i φ są ułamkami właściwémi i czynią zadosyć warunkowi $f^2+\varphi<f$ czyli $\varphi<f(1-f)$. W takim więc iedynym przypadku, mnożniki drugiego stopnia wchodzace do zrównania na z_p-1, będąc wzoru $(z_p-1)^2-P(z_p-1)+Q$, mogą sprawić przemiany w znakach tego zrównania i wprowadzić nas w domysł iż są wartości na x obięte między p i $p+1$, chociaż się one nie znayduią. Daie się zawsze, iak w krótce obaczymy, usunąć ten przypadek przez powiększenie pierwiastków zrównania na $x-p$ a następnie i ilości φ tyle razy, iżby ta ilość przewyższała funkcyą $f(1-f)$; przewyższy zaś pewnie, ieżeli się stanie większą od ułamku $\frac{1}{4}$. Ten bowiem ułamek stanowi naywiększą wartość iaką mieć może funkcya $f(1-f)$; o czém tak się przekonamy. Oczywista iest że $f=\frac{1}{2}+(f-\frac{1}{2})$, $1-f=\frac{1}{2}-(f-\frac{1}{2})$; przeto $f(1-f)=[\frac{1}{2}+(f-\frac{1}{2})][\frac{1}{2}-(f-\frac{1}{2})]=\frac{1}{4}-(f-\frac{1}{2})^2$. Tu się widocznie pokazuie, że wziawszy $\frac{1}{2}$ za f, wartość funkcyi $f(1-f)$ iest $\frac{1}{4}$; a biorąc za f inną iakąkolwiek liczbę ułamkową dodatną, zawsze funkcya będzie mnieyszą od $\frac{1}{4}$; zatém $\frac{1}{4}$ iest iéy wartością naywiększą.

8). *Co do drugiego.* Pozostaie nam ieszcze osiągnąć dwa zamiary: 1*ód*, gdy iuż wiémy z pewnością iż między p i $p+1$ środkuią pierwiastki danego zrównania, dla tego iż terminy ostatnie zrównań na $x-p$ i $x-(p+1)$ różnią się w znaku; potrzeba ocenić przez przybliżenie ułamki dopełniaiace tych pierwiastków i posunąć ie do iakieykolwiek żądanéy liczby znaków dziesiątnych n; 2*re*, ieżeli, przy tosamości znaków przed wyrazami ostatniemi zrównań na $x-p$ i $x-(p+1)$, zachodzące przemiany w znakach zrównania na z_p-1 daią powód domysłowi, iż się znayduią pierwiastki zrównania na x obięte między p i $p+1$, należy sprawdzić bytność tych wątpliwych pierwiastków. Jedna droga doprowadzi do obudwóch celów: toiest sposób na przybliżenie pierwiastków pewnych, albo sprawdzi oraz i do ścisłéy wartości przybliży pierwiastki wątpliwe, albo też usunie domysł ich bytu.

Daymy, iż albo mamy pewność, albo się domyślamy że są niektóre pierwiastki zrównania danego obięte między p i $p+1$. Wtedy liczba p iest częścią całką spólną tym wszystkim pierwiastkom: a dopełniaiące ich ułamki dziesiątne będą pierwiastkami mnieyszémi od iedności w zrównaniu na $x-p$; powiększone zaś dziesięć razy będą pierwiastkami mnieyszémi od 10 w zrównaniu na $10(x-p)$ czyli na x' kiedy założymy $10(x-p)=x'$. W każdym z ułamków, przez ich powiększenie razy dziesięć, piérwszy znak dziesiątny zamieni się na liczbę wyrażaiącą iedności całe. Te więc piérwsze znaki odkryiemy szukaiąc za pomocą zrównań na $x'-1$, $x'-2$,... aż naydaléy do $x'-10$ między iakiemi dwiema liczbami całémi środkuią pierwiastki zrównania na x'. Jeżeli się pokaże np. iż iedne są zawarte między p' i $p'+1$; inne między q' i $q'+1$; będą liczby p', q' piérwszémi znakami dziesiątnémi, które potrzeba przyłączyć do p dla złożenia przybliżonych pierwiastków $p+\frac{p'}{10}$, $p+\frac{q'}{10}$ zrównania na x różniących się od ich ścisłéy wartości o mniéy niż $\frac{1}{10}$. Należy potém każdemu z tych pierwiastków wynaleźć drugie znaki dziesiątne, toiest posunąć przybliżenie do części setnych. Zaczynaiąc od pierwiastku $p+\frac{p'}{10}$ założymy na ten koniec $10(x'-p')=x''$, i ze zrównania na x'' uformowawszy zrównania na $x''-1$, $x''-2$,...$x''-10$, wyśledzimy za ich pomocą części całkie wartości na x''. Te części będą drugiemi znakami dziesiątnémi maiącémi się przydać do pierwiastku $p+\frac{p'}{10}$. Jakoż niech p'' wyraża iednę z takowych części, a tém samém niech $x''=p''+m$ gdzie m iest mnieysze od iedności. Ponieważ

$$10(x-p)=x' \text{ czyli } x=p+\frac{x'}{10},$$

$$10(x'-p')=x'' \text{ czyli } x'=p'+\frac{x''}{10}, \quad x''=p''+m,$$

przeto

$$x=p+\frac{p'}{10}+\frac{p''}{100}+\frac{m}{100},$$

następnie $p+\frac{p'}{10}+\frac{p''}{100}$ iest przybliżoną wartością na x złożoną z całości, części dziesiątych i setnych, odstępuiącą od ściełéy na mniéy niż $\frac{1}{100}$ dla tego że $m<1$. Ztąd iuż łatwo poznaiemy iak się wynayduią dalsze znaki dziesiątne w iakieykolwiek zamierzonéy liczbie, należące do pierwiastku

$p+\frac{p'}{10}+\frac{p''}{100}$. Tym samym sposobem postępować należy w przybliżaniu pierwiastku $p+\frac{q'}{10}$ i wszystkich maiących za część całką liczbę p, oraz wszystkich innych którychbyśmy części całkie przez zrównania na $x-1$, $x-2$,... odkryli.

Przykład. Widzieliśmy w liczbie poprzedzaiącéy, że zrównanie

$$x^3-2x-5=0$$

ma pierwiastki zawarte między 2 i 3, których zatém częścią całką iest liczba 2. Ocenimy następnie, podług wyłożonego dopiéro prawidła, ułamki dziesiątne wchodzące w skład tych pierwiastków. Znaleźliśmy spółczynniki zrównania

$$\text{na } x-2 \;.\;.\;.\; 1+6+10-1;$$

ztąd wyciągniemy spółczynniki dla zrównań

$$\text{na } 10(x-2) \text{ czyli } x' \;.\;.\;.\;.\;.\; 1+60+1000-1000$$
$$x'-1 \;.\;.\;.\; 1+63+1123+61.$$

Tu się pokazuie, że wartości na x' środkuią między 0 i 1 czyli maią za część całką zero; przeto zero będzie piérwszym znakiem dziesiątnym w wartościach na x. Dla odkrycia znaków wyrażaiących części setne założymy $10(x'-0)$ czyli $10x'=x''$ i ułormuiemy spółczynniki zrównań

na x'' .... $1+600+100000-1000000$
$x''-1$ .. $1+603+101203-899399$
$x''-2$ .. $1+606+102412-797592$
$x''-3$ .. $1+609+103627-694573$
$x''-4$ .. $1+612+104848-590336$
$x''-5$ .. $1+615+106075-484875$
$x''-6$ .. $1+618+107308-378184$
$x''-7$ .. $1+621+108547-270257$
$x''-8$ .. $1+624+109792-161088$
$x''-9$ .. $1+627+111043-50671$
$x''-10$ .. $1+630+112300+61000.$

na $z''-1$ .. $1000000+2900000+2799400+899399$
z''_1-1 .. $899399+2596994+2495188+797592$
z''_2-1 .. $797592+2290364+2187346+694573$
z''_3-1 .. $694573+1979092+1875856+590336$
z''_4-1 .. $590336+1666160+11560700+484875$
z''_5-1 .. $484875+1348550+1241860+378184$
z''_6-1 .. $378184+1027244+919318+270257$
z''_7-1 .. $270257+702224+593056+161088$
z''_8-1 .. $161088+373472+263056+50671$
z''_9-1 .. $50671+40970-70700-61000.$

Zkąd widzimy że część całka wartości na x'' iest 9, a następnie wartość na x różniąca się od ścisłéy o mniey niż $\frac{1}{100}$ będzie 2,09. Uczyniwszy $10(x''-9)=x'''$ znaleźlibyśmy za pomocą zrównań na x''', $x'''-1$,... że dalszy znak dziesiątny wartości na x zawiéraiący części tysiączne iest 5. Ponieważ, podług reguły Dekarta, liczba pierwiastków rzetelnych dodatnych nie może przewyższać liczby przemian w znakach zrównania; a w teraźnieyszym przykładzie iest tylko iedna przemiana, więc też iedna tylko bydź może wartość na x; a tém samém iedna na x', x'', ... Ztąd, możnaby się było obeyść bez formowania zrównań posiłkowych na $z-1$, z_1-1, ..., na $z'-1$, z'_1-1, ... itd: te bowiem zrównania wtedy są iedynie potrzebne, kiedy iest podobieństwo iż między dwiema liczbami całkiemi sobie przyległémi środkuie parzysta liczba pierwiastków.

Weźmy ieszcze zrównanie

$$x^3-7x+7=0$$

które, iak widzieliśmy w liczbie poprzedzaiącéy, ma ieden pierwiastek rzetelny odiemny zawarty między -3 i -4, oraz dwa pozostałe może mieć także rzetelne dodatne objęte między 1 i 2. Szukać będziemy przybliżenia ostatnich. Otrzymaliśmy spółczynniki zrównania

na $x-1$ . . . $1+3-4+1$.

Uczyniwszy $10(x-1)=x'$, znaydziemy spółczynniki zrównań

na	x'	$1+30-400+1000$
	$x'-1$ . .	$1+33-337+631$
	$x'-2$ . .	$1+36-268+328$
	$x'-3$ . .	$1+39-193+97$
	$x'-4$ . .	$1+42-112-56$
	$x'-5$ . .	$1+45-25-125$
	$x'-6$ . .	$1+48+68-104$
	$x'-7$ . .	$1+51+167+13$,

z których wniesiemy że x' ma dwie wartości, iednę z częścią całką 3, drugą z częścią całką 6. Więc dwie wartości na x różniące się od ścisłych o mniéy niż $\frac{1}{10}$ będą 1,3 i 1,6. Dla dalszego przybliżenia pierwszéy założymy $10(x'-3)=x''$, i ze spółczynników zrównań

na	x''	$1+390-19300+97000$
	$x''-1$ . .	$1+393-18517+78091$
	$x''-2$ . .	$1+396-17728+59968$
	$x''-3$ . .	$1+399-16935+42637$
	$x''-4$ . .	$1+402-16132+26104$
	$x''-5$ . .	$1+405-15325+10375$
	$x''-6$ . .	$1+408-14512-4544$

odkryiemy liczbę 5 na część całką wartości x'' a tém samém na części setne wartości x. Uczyniwszy $10(x'-6)=x''$, znaleźlibyśmy za pomocą uformowanych spółczynników zrównań na x'', $x''-1$, $x''-2$, ..., że w drugiéy wartości na x drugi znak dziesiątny iest 9. Zatém dwie wartości przybliżone na x odstępuiące od dokładnych na mniéy niż $\frac{1}{100}$ są 1,35 i 1,69.

Powiedzieliśmy że gdy w dwóch zrównaniach na $x-p$ i $x-(p+1)$ wyrazy ostatnie są co do znaku zgodne, a zrównanie posiłkowe na z_p-1 ma w znakach przemiany; możemy się zawsze domyślać iż parzysta liczba wartości na x środkuie między p i $p+1$; że ten domysł wtedy tylko bywa błędny, kiedy w zrównaniu na $x-p$ zachodzi iedna lub więcéy par pierwiastków uroionych maiących kształt $f\pm\sqrt{-\varphi}$ gdzie f i φ są ułamkami właściwémi, oraz $\varphi<f(1-f)$; że następnie powiększywszy pierwiastki zrównania na $x-p$ a tém samém i ilość φ tak aby przewyższyła ułamek $\frac{1}{4}$ a tém bardziéy funkcyą $f(1-f)$, natenczas zrównanie posiłkowe nie będzie miało żadnéy przemiany znaków i zniszczy domysł o bytności pierwiastków między p i $p+1$. Okażemy zaraz, iż ten sam rachunek, iaki się odbywa dla przybliżenia pierwiastków któreby środkowały między p i $p+1$ powiększa oraz φ razy 100, 10000, ... toiest liczbę razy wskazaną przez kwadraty z 10, 100, ... czyli przez idące po sobie potęgi parzyste z 10; a zatém albo znayduiące się rzeczywiście pierwiastki przybliży, albo przez powiększenie φ przyprowadzi do zrównań posiłkowych ze wszystkiemi znakami dodatnémi i przekona że pierwiastki których przybliżenia szukamy nie maią bytu. Jakoż przybliżaiąc pierwiastki obięte między p i $p+1$ zakładamy $10(x-p)=x'$ i formuiemy spółczynniki zrównań na x', $x'-1$, $x'-2$, itd. Pierwiastki uroione, które w zrównaniu na $x-p$ były $f\pm\sqrt{-\varphi}$, w zrównaniach na x', $x'-1$, ... $x'-p'$ będą

$$10f\pm\sqrt{-100\varphi}$$
$$(10f-1)\pm\sqrt{-100\varphi}$$
$$\cdots\cdots$$
$$(10f-p')\pm\sqrt{-100\varphi}$$

czyli $$f'\pm\sqrt{-10^2\varphi}$$

położywszy f' za $10f-p'$. Tu ilość φ iest iuż powiększona razy 100. Daymy że ieszcze w zrównaniach na $x'-p'$ i $x'-(p'+1)$ wyrazy ostatnie są iednego znaku i w zrównaniu posiłkowém na $z'_{p'}-1$ zachodzą w znakach przemiany. Więc potrzeba uczynić $10(x'-p')=x''$ i wynaleźć spółczynniki zrównań na x'', $x''-1$, itd. Pierwiastki uroione w tych zrównaniach będą

$$10f'\pm10\sqrt{-10^2\varphi} \quad \text{czyli} \quad 10f'\pm\sqrt{-10^4\varphi}$$
$$(10f'-1)\pm10\sqrt{-10^2\varphi} \quad \text{czyli} \quad (10f'-1)\pm\sqrt{-10^4\varphi}$$

. . . .

z iłością φ powiększoną 10000 razy. Jakkolwiek byłaby mała ta ilość; oczywista iest że ciągnąc daléy teraźnieyszy rachunek, przyydziemy koniecznie do takiego iéy powiększenia iż przewyższy ułamek $\frac{1}{4}$.

Przykład I. $1000000x^2-222000x+12421=0$

spółczynniki zrównań

na x..$1000000-222000+12421$	$z-1$..$12421-197158+790421$.
$x-1$..$1000000+1778000+790421$	

Pierwiastki zatém rzetelne dodatne teraźnieyszego zrównania, ieżeli się znayduią, środkować będą między 0 i 1. Dla ich wyśledzenia założymy $10x=x'$ i uformuiemy spółczynniki zrównań na

x' . . . $1000000-2220000+12421$	$z'-1$ . . $1242100+264200+22100$
$x'-1$ . . $1000000-220000+22100$	z'_1-1 . . $22100-175800+802100$.
$x'-2$ . . $1000000+1780000+802100$	

Ztąd widzimy, że gdy x' ma wartości rzetelne dodatne; te będą obięte między 1 i 2. Należy przeto następnie uczynić $10(x'-1)=x''$ i uformować spółczynniki zrównań na

x'' . . . $1000000-2200000+2210000$	$z''-1$ . . $2210000+2220000+1010000$
$x''-1$ . . $1000000-200000+1010000$	z''_1-1 . . $1010000+1820000+1810000$.
$x''-2$ . . $1000000+800000+1810000$	

Tu się pokazuie że x'' nie może mieć żadnéy wartości rzetelnéy dodatnéy. Więc też w zrównaniu danéin żadne się pierwiastki rzetelne dodatne nie znayduią. Nie mogą w niém także zachodzić pierwiastki rzetelne odiemne; te bowiem byłyby pierwiastkami dodatnémi zrównania

$$1000000x^2+222000x+12421=0,$$

które takich pierwiastków mieć nie może, gdyż nie ma żadnéy przemiany w znakach. Następnie pierwiastki teraźnieyszego zrównania są uroione.

Przykład II.

$$x^4+40x^3-x^2-8020x+40200.$$

Spółczynniki zrównań na

x . . . $1+40-1-8020+40200$	$z-1$ . . $40200+152780+217139+136778+32220$
$x-1$ . . $1+44+125-7898+32220$	z_1-1 . . $32220+120982+169751+105480+24492$
$x-2$ . . $1+48+263-7512+24492$	z_2-1 . . $24492+90456+124679+76006+17292$
$x-3$ . . $1+52+413-6838+17292$	z_3-1 . . $17292+62330+83651+49532+10920$
$x-4$ . . $1+56+575-5852+10920$	z_4-1 . . $10920+37828+48539+27330+5700$
$x-5$ . . $1+60+749-4530+5700$	z_5-1 . . $5700+18270+21359+10768+1980$
$x-6$ . . $1+64+935-2848+1980$	z_6-1 . . $1980+5072+4271+1310+132$
$x-7$ . . $1+68+1133-782+132$	z_7-1 . . $132-254-421+516+552$
$x-8$ . . $1+72+1343+1692+552$	

$10(x-7)=x'$. Spółczynniki zrównań na

x' . .	$1+680+113300-782000+1320000$	$z'-1$..$1320000+44980000+5687300+3161280+651981$
$x'-1$..	$1+684+115346-553356+651981$	z'_1-1..$651981+2054568+2367164+1179232+214656$
$x'-2$..	$1+688+117404-320608+214656$	z'_2-1..$214656+538016+443516+132296+12141$
$x'-3$..	$1+692+119474-83732+12141$	z'_3-1..$12141-35168-58876+37008+48576$.
$x'-4$..	$1+696+121556+157296+48576$	

$10(x'-3)=x''$. Spółczynniki zrównań na

x''	$1+6920+11947400-83732000+121410000$
$x''-1$ . .	$1+6924+11968166-59816436+49632321$
$x''-2$ . .	$1+6928+11988944-35859328+1790976$
$x''-3$ . .	$1+6932+12009734-11860652-22072479$
$x''-4$ . .	$1+6936+12030536+12179616-21916464$
$x''-5$ . .	$1+6940+12051350+36261500+2300625$.

Pierwiastki przeto danego zrównania dodatne przybliżone do części setnych będą 7,32 i 7,34 Nie formowaliśmy spółczynników dla zrównań na $z''-1$, z''_1-1, itd; gdyż dane zrównanie maiąc dwie tylko przemiany znaków nie może mieć więcéy nad dwa pierwiastki dodatne, które już są wyśledzone ze spółczynników na x'', $x''-1$, itd.

Gdy w zrównaniach na $x-p$ i $x-(p+1)$ wyrazy ostatnie są co do znaku zgodne, i zrównanie posiłkowe na z_p-1 ma w znakach przemiany; wtedy szukaiąc wskazaną tu drogą przybliżenia pierwiastków obiętych między p i $p+1$ trafimy koniecznie na ieden z dwóch przypadków zdarzonych w dwóch dopiero podanych przykładach: toiest albo przyydziemy do zrównań posiłkowych ze wszystkiemi znakami dodatnémi iak w przykładzie pierwszym, i przekonamy się że nie masz pierwiastków środkuiących między p i $p+1$; albo też w ciągu rachunku wypadną zrównania takie, iż dwa z nich którekolwiek sobie przyległe mieć będą ostatnie wyrazy różniące się w znaku, iak się pokazało w przykładzie drugim. Ponieważ bowiem zrównanie dane powinno bydź naprzód oswobodzone od pierwiastków równych; więc te któreby środkowały między p i $p+1$ nie mogą mieć wszystkich znaków liczebnych iednakich, ale się muszą iakimkolwiek z nich różnić. Gdyby zatém dane zrównanie miało np. dwa pierwiastki

$$2{,}845\ldots,$$
$$2{,}847\ldots;$$

natenczas znaleźlibyśmy w rachunku że ostatnie wyrazy zrównań na $x-2$ i $x-3$ są co do znaku zgodne, i że w zrównaniu posiłkowém na z_2-1 zachodzą przemiany. To samobyśmy postrzegli w zrównaniach na $x'-8$, $x'-9$, z'_8-1, i w zrównaniach na $x''-4$, $x''-5$, z''_4-1. Lecz zrównanie na $x'''-5$ miałoby ostatni termin z innym znakiem niż zrównanie na $x'''-6$; podobnież ostatnie terminy zrównań na $x'''-7$, $x'''-8$ byłyby znaku przeciwnego. Zawsze więc prawidło teraz podane albo wyśledzi pierwiastki rzetelne i oceni ie z żądanym stopniem przybliżenia, albo okaże iż nie mogą mieć bytu.

KONIEC.

OMYŁKI.

Stronica.	*Wiersz.*	*Jest.*	*Bydź powinno.*
2	9 od dołu	po odkrycia	do odkrycia
13	2	mnieyszy	większy
14	2	$27a^5b^3x$	$-27a^5b^3x$
17	21	$-8a^5b^3d$	$-8a^6b^3d$
27	12	$+\frac{9b^3}{a}$	$-\frac{9b^3}{a}$
		$-$	$+$
28	4 od dołu	ilości	ilościami
56	7 od dołu	$+q$	$-q$
63	2 od dołu	$[(x+a+b+c]^2$	$[(x+a+b)+c]^2$
65	7 od dołu	$B^2a^{m-2}x$	Ba^2x^{m-2}
67	17	$150a^3b^3c^4$	$150a^5b^3c^4$
69	7	$x^2(a+b)x$	$x^2+(a+b)x$
70	21	$a, b, c, .:$	$a, b, c, ..$
72	3 od dołu	4:..	4...
76	8	$\sqrt{}$	$\sqrt[3]{}$
78	17	w znakach	i w znakach
92	2	10, 100,	10^m, 100^m,
104	6	*stopień* albo *wymiar*	*stopień*
104	6 od dołu	$\frac{11}{5}$	$\frac{11}{4}$
107	5	2. 12 57	2. 12. 57
107	5 od dołu	*łokci*	*łokci sukna*
114	2 od dołu	$-\sqrt{}$	$+\sqrt{}$
136	10 od dołu	*parzystą ze*	*parzystą, ze*
144	11 od dołu	Jeżeli	Jeden
153	14 od dołu	y	y^m
158	8	$+y$	$+y^{m-1}$
206	11	$p+\sqrt{q}$	$p+\sqrt{q}$,
206	12	$q\sqrt{q}$,	$q\sqrt{q}$
209	9	$q=p+2$	$q=p^2+2$
230	2 od dołu	daie	daią
301	20	$(\text{dost}x \pm \sqrt{-1}.\text{wst}x)$	$(\text{dost}x \pm \sqrt{-1}.\text{wst}x)^m$
324	1	w szeregu	z szeregu

(Dalszy ciąg omyłek na stronicy następnéy.)

Stronica.	*Wiersz.*	*Jest.*	*Bydź powinno.*
69	7	$+a^2$	$+ab$
71	1	$x=a=c=d$	$a=b=c=d$
76	20	$(a+2b)^9$	$(a+b)^9$
76	22	c^8	c^3
79	15	$8a^5b^4b^2$	$8a^5b^4c^2$
85	11	$+108ab^5$	$-108ab^5$
121	3	cz^3	cz^2
121	4 od dołu	$+7x$	$-7x$
122	22	$-a$	$+a$
143	7 od dołu	$\left.\begin{matrix}+T\\+Sa\end{matrix}\right\vert x$	$\left.\begin{matrix}+V\\+Ta\end{matrix}\right\vert x$
149	16 od dołu	$+y^2=0$	$+y^2-7=0$
183	10 od dołu	$(m-1)A$	$(m-1)\frac{A}{V}$
192	5	$S_4,\ S_6,\ S_6$	$S_4,\ S_5,\ S_6$
337	27	$+11560700$	$+1560700$