Diktaten

1935

1935

www.rcin.org.pl

# POCZĄTKI

# ALGEBRY.

PRZEZ G. A. HRECZYNĘ.

NAUCZYCIELA MATEMATYKI W LYCEUM WOŁYŃSKIÉM,

CZĘŚC PIÉRWSZA.

~~GABINET MATEMATYCZNY
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego~~

W KRZEMIEŃCU,

NAKŁADEM I DRUKIEM N. GLÜCKSBERGA

1830.

www.rcin.org.pl

:47367

*Pozwolono drukować. Wilno d. 5. Września 1827. r.*
*Cenzor Kollegialny Assesor Jgnacy Szydłowski.*

PAŃSTW. INSTYTUT MAT. BIBLIOTEKA
6668

www.rcin.org.pl

# PORZĄDEK MATERYY.

## CZĘŚĆ PIERWSZA.

### ROZDZIAŁ PIERWSZY.

Sposoby odbywania działań zachodzących w ilościach i funkcyach z ich zastosowaniem do rozwiązania zrównań piérwszego stopnia.

*Stronica.*



www.rcin.org.pl

## ROZDZIAŁ DRUGI.

Z odkrytych praw na różne potęgi i sposobów obchodzenia się z niemi w rozmaitych działaniach wydobywa się rozwiązanie zrównań stopnia drugiego.



## ROZDZIAŁ TRZECI.

Teorya ogólna zrównań zastosowana do rozwiązania zrównań liczebnych wszelkiego stopnia.



www.rcin.org.pl

## ROZDZIAŁ CZWARTY.

Dopełnienie nauki o zrównaniach. Rozwiązanie zrównań literalnych stopnia trzeciego i czwartego, oraz nieoznaczonych stopnia pierwszego i drugiego.



# CZĘŚĆ DRUGA.

## ROZDZIAŁ PIERWSZY.

Teorya szeregów zwrotnych.



www.rcin.org.pl

## ROZDZIAŁ DRUGI.

Funkcye wykładnicze prowadzą do poznania logarytmów, których się tłumaczą własności, użycie, sposób rozbierania ich na szeregi i rachowania z nich tablic logarytmicznych.



## ROZDZIAŁ TRZECI.

Rachunek trygonometryczny.



www.rcin.org.pl

## SPOSOB P. BUDAN

na rozwiązanie zrównań liczebnych wszelkiego stopnia za użyciem nayprostszych tylko arytmetycznych działań dodawania i odciągania.



www.rcin.org.pl

www.rcin.org.pl

# ROZDZIAŁ PIERWSZY.

## Sposoby odbywania działań zachodzących w ilościach i funkcyach z ich zastosowaniem do rozwiązania zrównań pierwszego stopnia.

### § 1. *Wykłada się powód użycia do rachunku znaków ogólnych na mieysce liczb.*

W rozwiązaniu każdego zadania arytmetycznego uważać należy dwie osobne części: iednéy iest celem rospoznać, iakie działania i na których liczbach do zadania wchodzących odbyć potrzeba, żeby na wypadek otrzymać wartość liczby szukanéy: część druga ma za cel samo wykonanie takowych działań, podług właściwych im prawideł. Część piérwsza zależy na roztrząśnieniu warunków zadania dla odkrycia w nich związku między liczbą niewiadomą i liczbami znanemi; bo ten związek nam wskaże, iakich mamy użyć działań, ażeby liczbę szukaną ocenić. Lepiéy się to da uczuć w przykładzie. *Dwóch kupców zrobiło składkę: ieden dał* 1000, *czer. złł: drugi* 1500: *piérwszego summa zostawała w składce przez miesięcy* 10, *drugiego przez miesięcy* 6: *zyskali* 570 *czer. złł. Trzeba ten zysk między nich rozdzielić stosownie do summ i czasów*. Z warunków tego zagadnienia łatwo postrzegamy, że tém większą część zysku weźmie którykolwiek kupiec, im iego summa była większa i im przez dłuższy czas zostawała w składce; a następnie, że w teraźnieyszém zadaniu związek między liczbami znanemi i nieznanemi wyrazi się przez proporcye. Do tych proporcyy przyydziemy następuiącym sposobem: część zysku na kupca pierwszego przypadaiąca będzie oczywiście taka sama, iakaby mu się należała, gdyby iego summa była dziesięć razy większa a zostawała w składce przez ieden miesiąc, toiest gdyby on dał na miesiąc ieden summę $1000 \times 10$; podobnie część drugiego będzie taka sama, iakaby przypadała, gdyby dał na ieden miesiąc summę $1500 \times 6$. Zamiast przeto za-

www.rcin.org.pl

gadnienia podanego możemy rozwiązać następuiące. *Jeden kupiec włożył w składkę handlową* $1000\times10$ *czer. złł. drugi* $1500\times6$; *obie summy były w składce przez ten sam czas, w przeciągu którego zyskali kupcy* 570 *czer. złł. Trzeba ten zysk rozdzielić na części stosowne do wielkości kapitałów.* Nazwawszy zyski szczególne kupców przez $x, y$; będzie oczywiście $x$ taką częścią zysku ogólnego 570, iaką częścią iest summa $1000\times10$ względem zbioru obudwóch summ $1000\times10+1500\times6$. Podobnie $y$ będzie taką częścią względem 570, iaką iest $1500\times6$ względem $1000\times10+1500\times6$. Ztąd wypadaią proporcye

$$(1000\times10+1500\times6):1000\times10=570:x,$$
$$(1000\times10+1500\times6):1500\times6=570:y.$$

Te proporcye zamykaią związek między wielkościami znanemi a wielkościami szukanemi. Skorośmy z uwagi warunków zadania przyszli do tego związku, iużeśmy skończyli część piérwszą rozwiązania: bo odkryty związek zaraz nam pokazuie iakie działania i na których liczbach wykonać należy dla ocenienia wielkości nieznanych. J tak w teraźnieyszém zagadnieniu będzie

$$x=\frac{1000\times10\times570}{1000\times10+1500\times6}, \quad y=\frac{1500\times6\times570}{1000\times10+1500\times6}.$$

Jeżeli nie wykonamy działań wskazanych w tym wypadku, lecz tylko zostawimy naznaczone, będziemy ztąd mieli dwie korzyści: *naprzód*, iż z niego wyciągniemy odpowiedź na wszelkie inne pytanie ułożone z tychże samych warunków, a różniące się iedynie wartością liczb danych, nie potrzebuiąc powtarzać na nowo rozumowań prowadzących do odkrycia związku a stanowiących część piérwszą rozwiązania. Na ten koniec dosyć iest w otrzymanym wypadku, na mieyscu liczb wiadomych w piérwszém zagadnieniu położyć odpowiedne liczby zagadnienia nowego. Gdyby np: piérwszego kupca summa była 560 *czer. złł.* dana na miesięcy 8, drugiego summa 700 dana na miesięcy 5, zysk całkowity gdyby był 140 *czer. złł*; wtedy nazwawszy iak piérwey zyski szczególne kupców przez $x$, $y$, będzie

$$x=\frac{560\times8\times140}{560\times8+700\times5}, \quad y=\frac{700\times5\times140}{560\times8+700\times5}.$$

www.rcin.org.pl

*Powtóre*: z tegoż samego ieszcze wypadku otrzymamy odpowiedź na wszystkie zagadnienia prościeysze, które są szczególnemi przypadkami piérwszego. W tym celu uważać potrzeba, iaki warunek czyni dane pytanie prostszém od ogólnego, i ten warunek wprowadzić do ostatniego wypadku. Gdyby np. czasy zostawania w składce obudwóch kapitałów były równe; w tym razie szczególne zyski będą proporcyonalne samym kapitałom. Dla znalezienia wartości tych zysków, dosyć iest w wypadku z ogólnego zagadnienia położyć 10 na mieyscu 6; zkąd otrzymamy

$$x=\frac{1000\times10\times570}{1000\times10+1500\times10}=\frac{1000\times570}{1000+1500},$$

$$y=\frac{1500\times10\times570}{1000\times10+1500\times10}=\frac{1500\times570}{1000+1500}.$$

Obie te korzyści nikną, skoro się naznaczone działania wykonaią; bo wtedy wypadek, daiąc żądaną wartość, nie przedstawia nam nic więcéy iak tylko pewny szczególny zbiór iedności, który, mogąc nieskończenie rozmaitym sposobem z liczb danych wynikać, ukrywa przed nami działania przez iakieśmy do niego przyszli. Zeby przeto wymienione korzyści utrzymać, nie będziemy odtąd wykonywali działań na wielkościach do zagadnienia wchodzących, lecz będziemy ie zostawiali wskazane pewnemi znakami. Tym sposobem wypadek z rozwiązania iakiegokolwiek zagadnienia będzie nam przedstawiał odpowiedź na wszystkie tego samego gatunku i na wszystkie prościeysze. Nadto, żeby liczby składaiące wypadek nie przypominały nam, że ten wypadek należy właściwie do iednego tylko pytania nie zaś do wszystkich podobnych; potrzeba zamiast liczb użyć znaków ogólnych do wyrażenia wielkości zawartych w zagadnieniu. Na takie znaki biorą się litery alfabetów łacińskiego i greckiego. Jeżeli w zadaniu, któreśmy roztrząsali, wyrazimy summy kupców przez $a$ i $b$, czasy przez $c$ i $d$, zysk całkowity przez $e$, będzie

$$x=\frac{a\times c\times e}{a\times c+b\times d},\qquad y=\frac{b\times d\times e}{a\times c+b\times d}.$$

Chcąc teraz z tak ogólnych wartości $x$, $y$, wyciągnąć war-

www.rcin.org.pl

tości należące do zagadnienia szczególnego; potrzeba tylko w mieyscu liter $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ podstawić odpowiednie liczby z tego zagadnienia wzięte i na nich wskazane działania wykonać. Litery więc $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, zastępuiąc mieysce liczb, nie maią przywiązaney do siebie żadney wartości szczególney, lecz mogą wyobrażać wielkość iakąkolwiek; bo za nie trzeba podstawiać coraz inne liczby stosownie do szczególnego pytania. Według przyiętego zwyczaiu, przez litery początkowe znaczą się wielkości w zadaniu wiadome, a przez końcowe są cechowane wielkości nieznane. Wielkości literami wyrażone nazywać będziemy *ilościami* (quantité).

### § 2. *Podaią sie znaki na cechowanie działań. Cel Algebry.*

Ponieważ działań wykonywać nie będziemy, zostawuiąc tylko wskazane, trzeba więc do ich cechowania ustanowić pewne znaki. Też same przyięte są w Algebrze iakie się używaią w Arytmetyce. J tak: dodawanie wyraża się kładąc między ilościami znak $+$, który się czyta *więcey:* np. maiąc do $a$ dodać $b$, należy pisać $a+b$; gdybyśmy tę summę chcieli ieszcze powiększyć ilością $c$, trzebaby napisać $a+b+c$. Do oznaczenia odciągania używa się znak $-$, który się także pisze między ilościami i wymawia *mniey*: np. ieżeli od $a$ mamy odciągnąć $b$, działanie to wystawimy przez $a-b$. Ogólnie, maiąc ilekolwiek ilości połączyć przez dodawanie i odciąganie, trzeba te ilości napisać w iedney linii przedzielaiąc ie znakami więcey i mniey, tak aby przed ilością która się dodaie był znak $+$, a przed ilością która sie odeymuie leżał znak $-$. Wyrażenie np. $a-b-c+d-e$ znaczy że od $a$ powinno bydź odciągnione $b$ od tey różnicy odciągnione znowu $c$, do reszty ztąd wypadaiącey dodane $d$, naostatek od summy ztąd otrzymaney odięte $e$, i czyta się $a$ mniey $b$ mniey $c$ więcey $d$ mniey $e$. Na wskazanie mnożenia służą znaki, czasem $\times$, czasem kropka ., które sie kładą między ilościami i wymawiaią *mnożone przez* np. $a\times b$ albo $a.b$ czytaią się $a$ mnożone przez $b$; ale naypowszechniey ilości przez siebie mnożone piszą się iedna przy drugiey np. $abc$, co się tak czyta iak iest napisane. Chcąc naznaczyć że $a$ ma bydź dzielone przez $b$, albo się kładzie dwukropek między temi ilościami, albo sposobem ułamku pod piérwszą podpisuie się druga i oddziela od niéy liniyką, to iest albo się pisze tak $a:b$, albo tak $\frac{a}{b}$; oba te wyrażenia czytaią się $a$ dzielone przez $b$. Łatwo teraz możemy przeczytać następuiące składy ilości $abx+\frac{b}{c}-x$, $\frac{m-nq-bpq}{h}$, i zrozumieć że w piérwszym należy do wieloczynu ze trzech ilości $a$, $b$, $x$ dodadź wieloraz wynikły z podzielenia $b$ przez $c$ i od summy odciągnąć ilość $x$; że w drugim trzeba od $m$ odiąć wieloczyn z ilości $n$, $q$, od reszty odciągnąć ieszcze mnogość z ilości $b$, $p$, $q$, i wypadek ztąd otrzymany rozdzielić przez $h$.

Z czego poznaiemy, że przez użycie ogòlnych znaków na cechowanie ilości, i innych na wskazanie działań, *rachunek staie się krótkim i zwięzłym językiem mogącym służyć do wyrażenia myśli i rozumowań nad ilościami.* Taki rachunek iest przedmiotem i narzędziem we wszystkich dociekaniach nauki Algebry. Te zaś dociekania maią cel dwoisty: piérwszy główny iest *rozwiązanie ogólne wszelkich zagadnień zawisłych od rachunku*; drugi do osiągnienia głównego pomocny iest *wyśledzenie wszelkich własności i praw, które służą ilościom poddanym pod rozmaite odmiany, połączenia i stosunki.*

## § 3. *O dodawaniu i odciąganiu.*

Każdy skład ilości połączonych przez iakiekolwiek działania i znaki zowie się *wyrażeniem algebraicznèm.* Takiemi są np. $abx$, $\frac{dcx}{a}$, $a+bx-cd$. Dwa piérwsze kształty zawieraiące w sobie ilości połączone mnożeniem i dzieleniem a nieodosobnione znakami $+$ i $-$ maią nazwisko *wyrazów* (terme), albo też *iednowyrazów* (monome). Postać trzecia i wszelki skład iednowyrazów powiązanych znakami dodawania i odciągania nazywa się *wielowyrazem* (polynome); albo *funkcyą* (fonction).

*Dodawanie iednowyrazów.*

Dodawanie iednowyrazów odbywa się tak, iak ilości poiedynczych, to iest łącząc znakiem $+$, cośmy iuż w poprzedzaiącym §fie widzieli. Ale gdy sobie zakładamy dodać iakie wyrażenia algebraiczne, mamy razem na celu uprościć wypadek, przywodząc go do iak naymnieyszéy liczby wyrazów, przez połączenie ich wielu w ieden. To połączenie wtenczas może nastąpić, kiedy ta sama ilość ma bydź do siebie kilka razy dodana; np. $a+a+a$; bo w takim przypadku summa równa iest ilości $a$ tyle razy wziętéy, ile razy ona znayduie się w téy summie napisana. Można więc w teraźnieyszym przykładzie wyrazić summę przez $3\times a$ albo $3a$. Podobnie $ab+ab+ab+ab$ zastąpione bydź może przez $4ab$. Liczby do takiego skrócenia używane, iak tu 3 i 4, zowią się *spółczynnikami* (coéfficient) i przy ilościach, których powtórzenie wskazuią, piszą się zawsze na początku. Jeżeli ilość nie ma przed sobą położonego spółczynnika, wtedy on iest równy iedności; bo $1a$ znaczy to samo co $a$. Wyrazy, niczém się więcéy od siebie nieróżniące iak tylko wielkością spółczynników, nazywaią się *podobne*: tak. mi np. są $3ab$, $5ab$: ich summa będzie oczywiście $ab$ powtórzone tyle razy, ile zamyka iedności summa spółczynników, toiest będzie $8ab$. Podobnie $7acx+4acx+3acx=14acx$.

*Dodawanie funkcyy.*

Jeżeli na funkcyach dodawanie chcemy tylko oznaczyć, trzeba ie zamknąć w nawiasy i między niemi położyć znak $+$; np. $(a+bc-d)+(c-b+ad)$. Obaczmy iak się to działanie wykona. Gdybyśmy do funkcyi $a+bc-d$ mieli dodać $c$, wypadłoby oczywiście $a+bc-d+c$; ieżeli $c$ zmnieyszymy ilością $b$, wtedy i summa zmnieyszy się o tęż ilość $b$, i będzie summa funkcyy $(a+bc-d)+(c-b)=a+bc-d+c-b$. Gdybyśmy ieszcze drugą funkcyą $c-b$ powiększyli o $ad$, o tyleż się powiększy i summa, toiest będziemy mieli

$$(a+bc-d)+(c-b+ad)=a+bc-d+c-b+ad.$$

Z czego wniesiemy, że *dodawanie funkcyy wykonywa się kładąc ich wyrazy wciąż iedne po drugich ze swoiemi zna-*

www.rcin.org.pl

*kami; z tą uwagą, że gdzie niemasz znaku, tam się domyśla* $+$.

Można wyrazy summy i każdéy funkcyi pisać porządkiem iakim się podoba, a liczebna iey wartość przez to się nie odmieni, byleby przed każdym wyrazem zachowany był znak maiącego się z nim odbyć działania; np. $a+bc-d$ to samo znaczy co $a-d+bc$ lub co $bc-d+a$. Znaki $+$ i $-$, zwane także od działań przez nie cechowanych *dodatnym* (positif) i *odiemnym* (négatif), będąc nierozdzielnie związane z wyrazami przed któremi są położone, daią i samym wyrazom nazwisko dodatnych i odiemnych.

Widzimy tu ieszcze, iż wykonać dodawanie funkcyy znaczy, z wyrażenia algebraicznego w którém to działanie iest oznaczone na funkcyach przyyść do wyrażenia równego pierwszemu, ale któreby było złożone z samych iednowyrazów połączonych znakami $+$ i $-$. Podobnie rozumieć należy o wykonaniu każdego innego działania w Algebrze.

*Uproszczenie* (*reduction*). Jeżeli funkcye dodać się maiące zamykaią w sobie wyrazy podobne, można te wyrazy zebrać w ieden, wykonywaiąc działanie na ich spółczynnikach. Niech dla przykładu będą funkcye

$$4a+9b-2c,\quad 2a-3c+4d,\quad 7b+c-e;$$

ich summa otrzymana według poprzedzaiącego prawidła będzie

$$4a+9b-2c+2a-3c+4d+7b+c-e$$

Lecz wyrazy $4a$ i $2a$, będąc podobne, złączą się w ieden $6a$. Również z $9b$ i $7b$ powstaie $16b$. Wyrazy $-2c$ i $-3c$ oba odiemne sprawuią w summie ten sam skutek iak odięcie iednéy wielkości równéy ich zbiorowi toiest $5c$; aże z przyczyny wyrazu $+c$ trzeba będzie iedno $c$ dodać, pozostanie więc tylko do odciągania $4c$. Zaczem summa funkcyy podanych przywodzi się do $6a+16b-4c+4d-e$. Działanie któreśmy na ostatku odbyli i przez które wszystkie wyrazy podobne, iakiebykolwiek miały znaki, łączą się w ieden, nazywa się *uproszczeniem*. To działanie wykonywa się *robiąc summę wszystkich wyrazów podobnych dodatnych i summę takich samych wyrazów odiemnych, potém odciągaiąc mnieyszą z tych summ od większey i daiąc*

www.rcin.org.pl

*reszcie znak który służy summie większéy. A gdyby summy były równe wtedyby się zniszczyły.*

*Odciąganie.* W odciąganiu wyrazów niepodobnych przestaiemy tylko na oznaczeniu np. $2ax-3bc$. Jeżeli zaś wyrazy są podobne, odciąganie wykonywa się na ich spółczynnikach: np. gdy od $6abx$ ma bydź odięte $4abx$, pozostanie $2abx$. Kiedy od iednéy funkcyi trzeba odiąć drugą i chcąc to działanie oznaczyć, należy obie albo też same tylko drugą zamknąć w nawiasie, poprzedzić ią znakiem $-$, i napisać po piérwszey, np. $(5ab-cx+d)-(ax-g)$ albo $5ab-cx+d-(ax-g)$. Uważmy iak się to działanie uskuteczni. Gdybyśmy od funkcyi $5ab-cx+d$ mieli odiąć $ax$, wypadłoby $5ab-cx+d-ax$; lecz ieżeli wielkość odciągaiącą się $ax$ zmnieyszymy o ilość $g$, o tyleż się różnica powiększy, i będzie różnica funkcyy $5ab-cx+d-(ax-g)=$ $=5ab-cx+d-ax+g$. Ztąd widzimy, że *odciągaiąc od iednéy funkcyi drugą, trzeba ie wciąż przy sobie napisać, odmieniaiąc w drugiey znaki* $+$ *na* $-$, *a* $-$ *na* $+$. Przyszedłszy podług tego prawidła do wypadku; ieżeli się w nim zdarzą wyrazy podobne, należy wykonać uproszczenie sposobem niedawno wyłożonym. *Przykład.*

*od* $17a+2m-9b-4ac+23bd$
*odiąć* $51a-27b+11ac-4bd$

*Reszta* $17a+2m-9b-4ac+23bd-51a+27b-11ac+4bd$ po uproszczeniu daie $-34a+2m+18b-15ac+27bd$; albo zaczynaiąc od wyrazu dodatnego, co zawsze gdy można iest zwyczaiem, będzie

$$2m-34a+18b-15ac+27bd.$$

Ponieważ $a-(b-c)=a-b+c$: litery zaś $a, b, c$ wyrażać mogą liczby iakiekolwiek, weźmy więc zero na mieyscu $b$; wypadnie $a-(-c)=a+c$. Podobnie $2-(-3)=2+3=5$.

## § 4. *O Mnożeniu.*

W mnożeniu uważać będziemy trzy przypadki: albo wypadnie mnożyć wyraz przez wyraz, albo funkcyą przez wyraz, albo funkcyą przez funkcyą. *Co do piérwszego.* Powiedzieliśmy, że w mnożeniu piszą się ilości przy sobie. Ale

www.rcin.org.pl

gdy iaka ilość ma bydź mnożona przez się ilekolwiek razy; wtedy zamiast pisania iéy kilkakrotnie przy sobie, kładzie się raz, i nad nią wykładnik maiący tyle iedności, ile razy też ilość powinnaby bydź w wieloczynie napisana; np. wieloczyn ze trzech mnożników równych $a$, toiest $aaa$, wyrazi się przez $a^3$; podobnie $a^4$ zastąpi mieysce wieloczynu ze cztérech mnożników $aaaa$, itd. Takie wieloczyny zowią się *potęgami*, i są albo potęgą drugą, albo trzecią, itd, podług tego iak do ich składu wchodzi mnożników równych dwa, trzy, itd. Jeżeli nad ilością nie ma żadnego napisanego wykładnika, wtedy iest domyślny *iedność*: i tak $a$ znaczy to samo co $a^1$. Przeto wyraz $6a^3b^2$ oznaczać będzie sześć razy wzięty wieloczyn z pięciu mnożników, toiest ze trzech mnożników $a$ i ze dwóch mnożników $b$. Ztąd widzimy, że w wyrazach zachodzić będą cztéry rzeczy do uważania: litery, ich wykładniki, spółczynniki i znaki: i chcąc wyrazy mnożyć, potrzeba znać prawidło podług którego z każdą z nich postępować należy. Okażemy naprzód iakie iest prawidło na litery i spółczynniki.

Niech będzie wyraz $abc$ z trzech mnożników złożony do pomnożenia przez wyraz $fg$ złożony z dwóch mnożników. Gdybyśmy pomnożyli $abc$ przez samo $f$, mielibyśmy oczywiście $abc \times f = abcf$; lecz powiększywszy mnożnik $f$ razy $g$, czyli za mnożnik drugi wziąwszy $fg$, mnogość tyleż się razy powiększy i stanie się $abcfg$, toiest będzie $abc \times fg = abcfg$. Co nas uczy, że *mnożąc wyrazy, potrzeba w wieloczynie napisać przy sobie wszystkie litery wchodzące do każdego z wyrazów podanych.*

Gdybyśmy w tym samym przykładzie zamiast piérwszego wyrazu wzięli trzy razy większy toiest $3abc$, mnogość stałaby się trzy razy większą, i byłoby $3abc \times fg = 3abcfg$. A wziąwszy ieszcze na mieysce wyrazu drugiego cztéry razy większy czyli $4fg$, mnogość tyle się razy powiększy; toiest będzie $3abc \times 4fg = 12abcfg$. Co pokazuie, że *w mnożeniu wyrazów maiących spółczynniki, trzeba spółczynniki mnożyć, i mnogość napisać za spółczynnik dla wieloczynu z ilości.*

Prawidło na wykładniki wyciągniemy z następuiącego przykładu. Niech będzie do rozmnożenia $ab^2$ przez $b^3$. Piérwszy mnożnik znaczy to samo co $abb$, drugi to samo



www.rcin.org.pl

co $bbb$. Z nich wieloczyn, podług prawidła na litery, będzie $abbbbb$ czyli $ab^5$. Zkąd wniesiemy, że *gdy wyrazy maiące się mnożyć zamykaią litery spólne, należy każdą z nich napisać w wieloczynie raz, i nad nią położyć wykładnik równy summie iey wykładników we wszystkich mnożnikach.* Przykłady. $5a^2bx \times 4a^3b^2c = 20a^5b^3cx$; $7ab^3c \times 3abd = 21a^2b^4cd$.

*Co do drugiego i trzeciego.* Zostało nam ieszcze do wyprowadzenia prawidło na znaki. Jakie iest to prawidło, iak się mnoży funkcya przez wyraz, i iak funkcya przez funkcyą, poznamy z następuiących przykładów. Niech będzie do mnożenia funkcya $a-b$ przez $c$. Chcąc to działanie oznaczyć, potrzeba funkcyą $a-b$ zamknąć w nawias i przy nim położyć wyraz $c$, toiest napisać tak $(a-b)c$. Obaczmy iaki będzie wieloczyn po wykonaniu. Wiemy, że mnożenie iest skróceniem dodawania; przeto wieloczyn z $a-b$ przez $c$ będzie to summa z tylu części, równych funkcyi $a-b$, ile ma iedności $c$, toiest będzie $(a-b)c = (a-b) + (a-b) + (a-b) +$ itd; a wykonawszy dodawanie, wypada $(a-b)c = a-b+a-b+a-b+$ itd, gdzie $a$ i $b$ powinny bydź napisane tyle razy ile $c$ ma iedności. Czyniąc w téy summie uproszczenie, za wszystkie $a$ położymy tylko iedno ze spółczynnikiem $c$ czyli $ca$; podobnie za wszystkie $-b$ napiszemy iedno ze spółczynnikiem $c$ czyli $-cb$, i będzie $(a-b)c = ca - cb$. Tu postrzegamy 1ód że *mnożąc funkcyą przez wyraz, trzeba tym wyrazem mnożyć każdy wyraz funkcyi; i wieloczyn całkowity będzie złożony z tylu częściowych ile ma wyrazów funkcya.* 2re że *gdy wyraz mnożący iest dodatny, wieloczyny częściowe zgadzaią się co do znaków z wyrazami funkcyi mnożnéy.* Przykłady. $(3a^2b - 4ab^3c - 9pq^2)5ab^2pc = 15a^3b^3pc - 20a^2b^5pc^2 - 45ab^2p^2q^2c$; $(4ax + 2px^2 - 3b - 1)7bpx^2 = 28abpx^3 + 14bp^2x^4 - 21b^2px^2 - 7bpx^2$.

Weźmy teraz do mnożenia funkcyą $a-b$ przez funkcyą $c-d$. To działanie oznaczy się pisząc przy sobie funkcye zamknięte nawiasami, toiest tak $(a-b)(c-d)$. Połóżmy na chwilę $r$ za $a-b$; więc będzie $(a-b)(c-d) = r(c-d)$. Lecz podług przypadku poprzedzaiącego mamy $r(c-d) = rc - rd$; przeto $(a-b)(c-d) = rc - rd$. Wracaiąc za $r$ funkcyą $a-b$, otrzymuiemy $(a-b)(c-d) = (a-b)c - (a-b)d$.

www.rcin.org.pl

Tu widzimy na drugiéy stronie, że od wieloczynu $(a-b)c$ ma bydź odięty wieloczyn $(a-b)d$. Piérwszy z tych wieloczynów po wykonaniu działania bierze postać $ac-bc$, drugi $ad-bd$. Odciągnąwszy drugi od piérwszego podług prawideł w poprzedzaiącym §fie odkrytych, otrzymamy na resztę $ac-bc-ad+bd$; będzie przeto $(a-b)(c-d)=ac-bc-ad+bd$. Zkąd się uczymy 1ód że *chcąc pomnożyć dwie funkcye, trzeba każdy wyraz funkcyi mnożnéy rozmnożyć przez każdy wyraz funkcyi mnożącéy: a wszystkie ztąd wynikłe wieloczyny częściowe złożą wieloczyn całkowity.* 2re *że ieżeli przy obu wyrazach mnożących się iest znak* $+$, *wtedy i przed ich wieloczynem znayduie się znak* $+$; *ieżeli przy obu iest znak* $-$, *przed wieloczynem wypada* $+$; *ieżeli przy iednym* $+$ *a przy drugim* $-$, *przed wieloczynem iest* $-$. Łącząc postrzeżenia co do znaków uczynione w przykładach teraźnieyszym i poprzedzaiącym wniesiemy ogólne prawidło, że *gdy dwa wyrazy, mnożny i mnożący, są znaku iednego, wieloczyn będzie dodatny; a ieżeli znaku różnego, wieloczyn będzie odiemny.* Przykład.

| | |
|---|---|
| mnożna | $5a^4-2a^3b+4a^2b^2$ |
| mnożąca | $a^3-4a^2b+2b^3$ |
| wieloczyny częściowe | $5a^7-2a^6b+4a^5b^2$ <br> $-20a^6b+8a^5b^2-16a^4b^3$ <br> $10a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5$. |

Wieloczyn całkowity, ze zbioru tych częściowych powstaiący, może bydź uproszczony przez połączenie wyrazów podobnych. Uważać tylko potrzeba, że aby wyrazy były podobne, powinny mieć i te same litery, i nadto ieszcze nacechowane iednakowemi wykładnikami. W teraźnieyszym przykładzie zachodzą trzy uproszczenia, toiest

| | | | |
|---|---|---|---|
| wyrazy | $-2a^6b$ i $-20a^6b$ | daią | $-22a^6b$ |
| | $+4a^5b^2$ i $+8a^5b^2$ | | $+12a^5b^2$ |
| | $-16a^4b^3$ i $+10a^4b^3$ | | $-6a^4b^3$ |

Po odbytém uproszczeniu wieloczyn będzie taki

$$5a^7-22a^6b+12a^5b^2-6a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5.$$

www.rcin.org.pl

## § 5. *O dzieleniu.*

Przez dzielenie rozumieć należy w Algebrze, równie iak w Arytmetyce, działanie służące do odkrycia iednego z mnożników wieloczynu danego, kiedy mnożnik drugi iest wiadomy. Dana mnogość nazywa się *podzielną*, wiadomy mnożnik *dzielącą*, a mnożnik szukany *wielorazem*. Podług tego opisu, wieloraz pomnożony przez dzielącą powinien wydać podzielną. Z czego widzimy, że prawidła dzielenia muszą wypadać z prawideł mnożenia. Uważać tu będziemy, równie iak w działaniu poprzedzaiącém, trzy przypadki: albo będzie do podzielenia wyraz przez wyraz, albo funkcya przez wyraz, albo funkcya przez funkcyą.

*Co do pierwszego.* Żeby rozdzielić wyraz przez wyraz, trzeba znać prawidła, podług których się postępuie w tém działaniu z literami, ich wykładnikami, spółczynnikami i znakami. Ponieważ termin podzielny iest mnogością z dzielącego przez wieloraz; zatém *na wieloraz potrzeba pisać takie wyrażenie któreby rozmnożone przez termin dzielący wydało podzielny.* Ztąd 1*ód*: ieżeli litery terminu dzielącego znayduią się wszystkie w podzielnym; pozostałe iakie ieszcze w nim będą, należy pisać w wielorazie z ich wykładnikami. np. $abcx^2 : ac = bx^2$. Jeżeli zaś termin dzielący zamyka i takie litery, których niémasz w podzielnym; wtedy dzielenie wykonać się nie może, lecz zostaie tylko wskazane pisząc na wieloraz ułamek maiący licznikiem termin podzielny, mianownikiem dzielący. np. $abc^3 : abm^2 = \frac{abc^3}{abm^2}$; ten wypadek co do wyrażenia swego może bydź uproszczony dzieląc licznik i mianownik przez $ab$, i przywiedzie się do $\frac{c^3}{m^2}$. Podobnie $abcpq : acqdf = \frac{abcpq}{acqdf} = \frac{bp}{df}$.

2*re*. Gdy litery spólne obu wyrazom do dzielenia podanym maią wykładniki, potrzeba każdą z nich napisać w wielorazie, i nad nią za wykładnik położyć resztę zostaiącą z odciągnienia iéy wykładnika w terminie dzielącym od wykładnika iaki ma w terminie podzielnym. np. $a^5b^3 : a^2b = a^3b^2$. W takowém odciąganiu wykładników zachodzą trzy przypadki: albo wykładnik litery w terminie dzielącym bę-

www.rcin.org.pl

dzie mnieyszy od iéy wykładnika w terminie podzielnym, albo równy, albo mnieyszy. W piérwszym przypadku wykładnik nad tą literą w wielorazie iest dodatny, cośmy w ostatnim przykładzie widzieli. W drugim przypadku będzie zerem. np. $a^3 : a^3 = a^0$. A ponieważ każda wielkość przez siebie dzielona daie na wieloraz iedność; przeto $a^0 = 1$. Ztąd się pokazuie iż *wszelka ilość z wykładnikiem zero iest równa iedności*: a następnie ieżeli wchodzi za mnożnik do iakiegokolwiek wyrażenia, wtedy się może opuścić; bo np. $a^0 b = 1\,b = b$. W przypadku trzecim wykładnik nad literą w wielorazie będzie odiemny. np. $a^3 : a^5 = a^{3-5} = a^{-2}$. Ten sam wieloraz może się ieszcze wyrazić przez ułamek $\frac{a^3}{a^5}$, który uproszczony dzieleniem licznika i mianownika przez $a^3$ staie się $\frac{1}{a^2}$; zaczém $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$. Co nas uczy, że *każda ilość z wykładnikiem odiemnym równa się ułamkowi maiącemu iedność za licznik, a za mianownik tę tamę ilość i z tym samym wykładnikiem ale dodatnym.* 3cie Spółczynnikiem wielorazu będzie wieloraz wynikaiący z rozdzielenia spółczynnika terminu podzielnego przez spółczynnik dzielącego, i czasem wypaśdź może liczbą całą, czasem ułamkową. np. $6ab : 3a = 2b$, $5a^3b^2c : 2ab^5 = \frac{5}{2}a^2b^{-3}c$. 4te Jeżeli znak terminu podzielnego iest $+$, znak wielorazu będzie ta..i sam iaki terminu dzielącego; ieżeli zaś $-$, wtedy znak wielorazu będzie różny od znaku położonego przed terminem dzielącym. Cztery przypadki, iakie w téy mierze zachodzić mogą, są zawarte w następuiącey tablicy:

| znak terminu dzielącego, | znak terminu podzielnego, | znak wielorazu. |
|---|---|---|
| $+$ . . . | $+$ . . . | $+$ |
| $-$ . . . | $+$ . . . | $-$ |
| $+$ . . . | $-$ . . . | $-$ |
| $-$ . . . | $-$ . . . | $+$ |

Tu widzimy, że gdy znaki terminów dzielącego i podzielnego są te same, wieloraz będzie dodatny; ieżeli różne, wieloraz będzie odiemny. Prawidło więc na znaki w mnożeniu i dzieleniu iest iednakie. Przykłady. $72a^8c^5b^4d : 9a^5c^4b^4 =$

www.rcin.org.pl

$8a^3cd$; $-15a^4b^3cd:7ab^4c=-\frac{15}{7}a^3b^{-1}d$; $5a^2b:-3a^2c=-\frac{5}{3}\frac{b}{c}$; $27a^5b^3x:-9a^2b^7c=3\frac{a^5b^3x}{a^2b^7c}=3\frac{a^3x}{b^4c}$.

*Co do drugiego.* Widzieliśmy w mnożeniu, że chcąc otrzymać wieloczyn z iakieykolwiek funkcyi przez wyraz, należy tym wyrazem mnożyć każdy termin funkcyi; przeto na odwrót w dzieleniu, trzeba przez wyraz dzielący dzielić każdy termin funkcyi podzielnéy; a wielorazy częściowe ztąd wynikłe złożą wieloraz całkowity: np. $(ac-bc):c=\frac{ac}{c}-\frac{bc}{c}=a-b$; wieloraz $a-b$ rozmnożony przez termin dzielący $c$ wydaie funkcyą podzielną $ac-bc$, iak bydź powinno. Przykłady. $(6a^3b^2-9ab^3):3ab^2=2a^2-3b$; $(7ab^3c^2-4p+8a^4bp):2a^2c=\frac{7}{2}\frac{b^3c}{a}-\frac{2p}{a^2c}+\frac{4a^2bp}{c}$.

*Co do trzeciego.* Na dzielenie funkcyi przez funkcyą służy następuiące prawidło. Potrzeba 1*ód* terminy obu funkcyy uszykować podług wykładników iednéy litery, poczynaiąc od terminów zamykaiących tę literę z wykładnikami naywiększemi, kładąc potém z wykładnikami coraz mnieyszemi, a kończąc na takich w których albo niemasz téy litery, albo iest z wykładnikiem naymnieyszym. Takim sposobem są ułożone funkcye $(5a^7-22a^6b+12a^5b^2-6a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5):(5a^4-2a^3b+4a^2b^2)$ gdzie za literę *porządkową* iest wzięte *a.* 2*re* dzieli się piérwszy termin podzielnéy przez piérwszy dzielącéy i wypadek zapisuie się na mieyscu przeznaczoném dla wielorazu. 3*cie* mnoży się cała dzieląca przez znaleziony wieloraz częściowy; otrzymany wieloczyn odciąga się od podzielnéy i wykonywa uproszczenie na wyrazach podobnych. 4*te* uważa się reszta iako nowa podzielna; iéy piérwszy termin z naywiększym wykładnikiem litery porządkowéy dzieli się przez piérwszy termin dzielącéy, i wypadek pisze się na drugi termin wielorazu; z tym terminem postępuie się iak z poprzedzaiącym, i ciągnie się daléy robota póty, aż wszystkie terminy podzielnéy zostaną przez odeymowanie wyczerpane.

Kiedy postępuiąc dopiéro wskazaną drogą, nie można wyczerpać terminów podzielnéy; dowodem to będzie, że

www.rcin.org.pl

do iéy składu dzieląca iako mnożnik nie wchodzi. W tym przypadku działanie pociągnęłoby się bez końca.

*Wzór działania*

I. Podzielna

$$
\begin{array}{l|l}
5a^7-22a^6b+12a^5b^2-6a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5 & 5a^4-2a^3b+4a^2b^2 \quad \text{Dzieląca} \\
\cline{2-2}
5a^7-2a^6b+4a^5b^2 & a^3-4a^2b+2b^3. \quad \text{Wieloraz} \\
- \quad + \quad - & \\
\cline{1-1}
-20a^6b+8a^5b^2-6a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5 & \\
-20a^6b+8a^5b^2-16a^4b^3 & \\
+ \quad - \quad + & \\
\cline{1-1}
10a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5 & \\
10a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5 & \\
- \quad + \quad - & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

II. Podzielna

$$
\begin{array}{l|l}
27a^6-54a^4b+36a^2b^2-8b^3 & 3a^2-2b \quad \text{Dzieląca} \\
\cline{2-2}
27a^6-18a^4b & 9a^4-12a^2b+4b^2 \quad \text{Wieloraz} \\
- \quad + & \\
\cline{1-1}
-36a^4b+36a^2b^2-8b^3 & \\
-36a^4b+24a^2b^2 & \\
+ \quad - & \\
\cline{1-1}
12a^2b^2-8b^3 & \\
12a^2b^2-8b^3 & \\
- \quad + & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

III. Podzielna $a^8 - ab^5 \mid a^3 - b^2$ Dzieląca

$$\begin{array}{l|l}
a^8 - ab^5 & a^3 - b^2 \\ \hline
a^8 - a^5b^2 & a^5 + a^2b^2 + \text{itd.} \\
- \quad + & \\ \hline
a^5b^2 - ab^5 & \\
a^5b^2 - a^2b^4 & \\
- \quad + & \\ \hline
a^2b^4 - ab^5\,. &
\end{array}$$

Wieloraz

W téy reszcie wykładnik naywiększy litery porządkowéy $a$ iest mnieyszy niż w piérwszym terminie funkcyi dzielącéy. To iest znakiem, że dzielenie nigdy się nie skończy.

Pozostaie nam ieszcze obiaśnić rozumowaniem, zkąd wypływa prawidło któreśmy dopiéro na dzielenie funkcyy podali. Wiemy, że podzielna iest mnogością z funkcyi dzielącéy przez funkcyą wielorazową: iéy skład można dwoiako uważać; albo to iest zbiór wieloczynów częściowych z wielorazu przez piérwszy termin dzielącéy, przez drugi, przez trzeci, itd; albo też wieloczynów z dzielącéy przez termin piérwszy wielorazu, przez drugi, itd. Biorąc pod względem piérwszym, rzecz iasna, że gdybyśmy w podzielnéy mogli poznaydować wszystkie terminy wynikłe z pomnożenia wielorazu przez sam tylko piérwszy termin dzielącéy, wtedy rozdzieliwszy ie przez tenże termin, otzymalibyśmy wszystkie terminy wielorazu. Rozeznamy łatwo takowe żądane terminy podzielnéy, gdy obie funkcye uszykuiemy podług ubywaiących wykładników iednéy litery obranéy za porządkową: natenczas piérwszy termin podzielnéy będzie iednym z żądanych. Ten bowiem termin zamykaiąc ilość porządkową z wykładnikiem naywiększym nie mógł przez mnożenie powstać tylko z piérwszego terminu dzielącéy w którym wykładnik téyże litery iest naywiększy przez termin wielorazu podobnież z naywiększym iéy wykładnikiem. Gdy przeto rozdzielimy piérwszy termin podzielnéy przez piérwszy dzielącéy, wypadnie ieden termin wielorazu. Przez ten termin rozmnożywszy dzielącą, wieloczyn będzie iedną częścią podzielnéy, uważaiąc iéy skład pod względem drugim. Gdy więc tę część od podzielnéy odeymiemy; reszta będzie zbiorem wieloczynów z dzielącéy przez drugi termin wielorazu, przez trzeci, itd. Z téy zatém reszty tak należy szukać drugiego terminu wielorazu, iak z całéy po-

www.rcin.org.pl

dzielnéy szukaliśmy piérwszego. Toiest piérwszy termin reszty przyzwoicie uszykowanéy trzeba rozdzielić przez piérwszy termin dzielącéy, i wypadnie drugi termin wielorazu; i tak następnie.

*Uwaga.* Wiemy z §fu poprzedzaiącego że wieloczyn $(a-b)x$ zamienia się po uskutecznieniu działania na $ax-bx$. Lecz w rachunku często zachodzi potrzeba od wieloczynu pod tą ostatnią postacią wrócić się do piérwszéy, gdzie mnożenie iest tylko wskazane. Tym końcem należy, iak widzimy, mnożnik $x$ wchodzący do składu każdego wyrazu funkcyi $ax-bx$ odłączyć, funkcyą pozostałą $a-b$ zamknąć nawiasem i przy nim położyć mnożnik odłączony. To działanie zowie się *rozebraniem na spólny mnożnik.* W ogólności do składu spólnego mnożnika wchodzi, naprzód liczba dzieląca bez reszty każdy ze spółczynników przy wyrazach funkcyi podanéy, potém każda znayduiąca się we wszystkich wyrazach litera ze swoim wykładnikiem naymnieyszym. Przez ten spólny mnożnik rozdzieliwszy funkcyą daną, na wieloraz wypadnie funkcya, która zamknięta w nawias pisze się przy spólnym mnożniku. Przykłady. $14a^5b^3c^2-21a^6b^2d=7a^5b^2(2bc^2-3ad)$; $4a^7b^5c-8a^5b^3d+4a^4b^2=4a^4b^2(a^3b^3c-2a^2bd+1)$.

## § 6. *O ułamkach.*

Gdy prowadząc, podług wyłożonych prawideł, dzielenie funkcyy przekonamy się o niepodobieństwie iego uskutecznienia, dla tego że iuż przyydziemy do reszty w któréy naywyższa potęga litery porządkowéy iest mnieysza niżeli w funkcyi dzielącéy; wtedy się działanie wstrzymuie i do znalezionego wielorazu przyłącza ułamek maiący resztę licznikiem a dzielącą mianownikiem. Nawet przed rospoczęciem dzielenia, skoro to iest do wykonania niepodobne, wieloraz może się wystawić pod postacią ułamkową, kładąc podzielną za licznik a dzielącą za mianownik. W każdym razie *wartość ułamku iest to wieloraz maiący się otrzymać z dzielenia licznika mianownikiem.*

Ztąd wypada 1*ód*; że wartość ułamku tyle się razy powiększy, ile razy powiększymy licznik lub ile razy zmnieyszymy mianownik; a znowu tyle się razy zmnieyszy, ile razy licznik będzie zmnieyszony lub mianownik powiększony. np. ułamek $\frac{ab}{cd}$ iest większy razy $b$ od ułamku $\frac{a}{cd}$; ułamek $\frac{a}{c}$ iest większy razy $d$ od tegoż ułamku: zmnieyszywszy ułamek $\frac{fg}{h}$ razy $g$, będziemy mieli $\frac{f}{h}$; ieżeli zechcemy zmnieyszyć ten ostatni razy $k$, trzeba będzie napisać $\frac{f}{hk}$. 2*re.* Że ułamek nie odmienia swoiéy wartości, gdy oba iego wyrazy pomnożymy lub podzielimy przez tę samę wielkość. np. $\frac{ab}{cb}=\frac{a}{c}$, $\frac{a^2b^3c^4}{a^5bc^3d}=\frac{b^2c}{a^3d}$. 3*cie.* Każda ilość może bydź zamieniona na ułamek podpisuiąc iéy iedność za mianownik, np. $a=\frac{a}{1}$: mnożąc oba wyrazy tego ułamku przez $b$, mamy $a=\frac{ab}{b}$; z czego widzimy, że chcąc ilość iaką przerobić na ułamek z mianownikiem danym, trzeba w liczniku napisać mnogość z téy ilości przez mianownik; np. odmieniwszy funkcyą $a-b$ na ułamek z mianownikiem $c$, będziemy mieli $\frac{ac-bc}{c}$. 4*te.* W ułamku $\frac{p}{1}$, znaczącym całość $p$, rozmnożywszy mianownik przez $q$, wypada ułamek $\frac{p}{q}$ mnieyszy razy $q$ od $\frac{p}{1}$ a tém samém od $p$. Pod ilością więc iakąkolwiek podpisawszy mianownik, zmnieyszymy ią tyle razy ile się w mianowniku zawiera iedności. np. $\frac{6}{2}$ iest dwa razy mnieysze od 6, $\frac{a-b}{c}$ iest mnieysze od $a-b$ razy $c$.

Ponieważ wartość ułamku nie ponosi odmiany dzieląc licznik i mianownik przez tę samę wielkość; możemy przeto uprościć wyrażenie ułamku opuszczaiąc mnożniki spólne obu iego wyrazom. W ułamku iednowyrazowym mnożniki spólne są łatwe do postrzeżenia, cośmy iuż nieraz na przykładach widzieli. Gdy licznik i mianownik są funkcyami, a spólny mnożnik iest iednowyrazem; ieszcze i wtedy iego odkrycie nie ma trudności: bo takowy mnożnik musi wchodzić do składu każdego wyrazu obu funkcyy. np.

$$\frac{6a^4-3a^2bc+12a^2c^2}{9a^2b-15a^2c+24a^3}=\frac{3a^2(2a^2-bc+4c^2)}{3a^2(3b-5c+8a)}=\frac{2a^2-bc+4c^2}{3b-5c+8a}.$$

Licznik i mianownik mogą mieć kilka mnożników spólnych; w teraźnieyszym przykładzie iest ich dwa: ieden liczebny 3, drugi literalny $a^2$. Wieloczyn ze wszystkich, iak tu $3a^2$, zowie się mnożnikiem spólnym naywiększym. Pospolicie go nazywaią *naywiększym spólnym dzielnikiem*, dla tego że dzieli bez reszty oba wyrazy ułamku.

*Dochodzenie naywiększego spólnego dzielnika.*

Jeżeli naywiększy dzielnik spólny licznikowi i mianownikowi ma bydź funkcyą; naówczas nie możemy go wprost rozpoznać w wyrażeniu ułamku, lecz zazwyczay dochodzimy sposobem podobnym do podanego w Arytmetyce na ułamki liczebne. Takowy sposòb polega na następuiącym początku. *Maiąc dwie wielkości nierówne; ieżeli po rozdzieleniu większéy przez mnieyszą zostanie reszta: naywiększy dzielnik spólny wielkościom danym będzie ten sam iaki maią wielkość mnieysza i reszta. A przeto zamiast śledzenia tego dzielnika w wielkościach danych, można go szukać w mnieyszéy i reszcie.* Dla przekonania o gruntowności tego początku, potrzeba dowieśdź, że wszelki dzielnik spólny wielkościom większéy i mnieyszéy musi zupełnie rozdzielić resztę, i że każdy dzielnik spólny wielkości mnieyszéy i reszcie musi rozdzielić zupełnie wielkość większą. Niech wielkość większa będzie $w$, mnieysza $m$, z nich wieloraz $q$, reszta $r$. Wiemy z Arytmetyki, że rozmnożywszy dzielącą przez wieloraz i do mnogości przydawszy resztę, wypadnie podzielna; zatém

$$w=mq+r.$$

Mamy tu dwie wielkości równe; ieżeli ie rozdzielimy przez tę samę wielkość np. $p$, wielorazy będą równe, toiest

$$\frac{w}{p}=\frac{mq}{p}+\frac{r}{p}.$$

Ztąd oczywiście poznaiemy, że gdyby $p$ dzieliło zupełnie $w$ i $m$, a następnie gdyby $\frac{w}{p}$ i $\frac{mq}{p}$ były całościami, musiałoby $r$ bydź zupełnie rozdzielném przez $p$ aby $\frac{r}{p}$ było także całością; inaczéy całość $\frac{w}{p}$ byłaby równa całości $\frac{mq}{p}$ wraz z ułamkiem, co iest niepodobieństwo. Gdyby znowu $p$ dzieliło zupełnie $m$ i $r$ musiałoby rozdzielić i $w$, bo inaczéy summa dwóch całości równałaby się ułamkowi.

Dowiódłszy tym sposobem założonego początku, staraymy się teraz wyciągnać z niego prawidło na śledzenie naywiększego spólnego dzielnika. Niech będą dane *naprzód* dwie liczby 180 i 96, które po rozdzieleniu zostawuia resztę 84. Na mocy poprzedzaiących rozumowań, dzielnik naywiększy spólny dwóm liczbom 180 i 96 będzie ten sam, iaki ma mieysce w liczbach 96 i 84. Lecz zamiast szukania go z liczb 96 i 84 możemy dochodzić z liczby 84 i z liczby 12 która się otrzymuie na resztę w dzieleniu 96 przez 84. Zgoła, ieżeli rozdzielimy liczbę większą przez mnieyszą, potém mnieyszą przez resztę, daléy tę resztę przez resztę nową, i tak następnie: naywiększy dzielnik spólny dwóm którymkolwiek resztom bezśrednie po sobie idącym będzie ten sam iaki zachodzi w liczbach danych. Ztąd wypada, 1*ód* że szukany dzielnik nie może bydź większy od żadnéy z reszt tym sposobem otrzymanych. 2*re* że gdy w ciągu działania którakolwiek reszta zupełnie rozdzieli poprzedzaiacą: ta, ponieważ rozdzieli także i siebie, będzie dzielnikiem spólnym dwóch reszt przyległych, a następnie i dwóch liczb podanych: będzie zaś naywiększym, bośmy dopiero powiedzieli, że takowy dzielnik od żadnéy reszty większym bydź nie może. W obranym przykładzie reszta 12 dzielac zupełnie resztę poprzedzaiącą 84. iest naywiększym spólnym dzielnikiem dwóch liczb danych 180 i 96.

www.rcin.org.pl

Weźmy *powtóre* dwie iakiekolwiek funkcye

$3a^3-3a^2b+ab^2-b^3$ i $4a^2b-5ab^2+b^3$,

które iuż są uszykowane podług wykładników litery $a$. Na znalezienie naywiększego spólnego im dzielnika służy ten sam zupełnie sposób, iakiśmy dopiéro poznali w liczbach i wypada z tychże samych zasad. Tam zaczynaliśmy rachunek od dzielenia liczby większéy przez mnieyszą; tu potrzeba funkcyą zawieraiącą wyższą potęgę ilości porządkowéy dzielić przez funkcyą drugą. W czém ieszcze przydamy uwagę ułatwiaiącą działanie; że naywiększy spólny dzielnik dwóch funkcyi nie odmieni się, ieżeli iednę z nich pomnożymy lub rozdzielimy przez liczbę albo ilość, która nie wchodzi iako mnożnik do składu wszystkich terminów funkcyi drugiéy: to samo się stosuie i do każdych dwóch reszt sobie przyległych. Korzystaiąc z téy uwagi, opuścimy w drugiéy funkcyi mnożnik $b$, a piérwszą rozmnożymy przez 4: tym sposobem początkowy termin piérwszéy staie się zupełnie rozdzielnym przez początkowy termin drugiéy.

*Wzór działania.*

$$\begin{array}{l|l} 12a^3-12a^2b+4ab^2-4b^3 & 4a^2-5ab+b^2 \\ \cline{2-2} 12a^3-15a^2b+3ab^2 & 3a \\ - \quad\;\; + \quad\;\; - & \\ \hline +3a^2b+ab^2-4b^3. & \end{array}$$

Szukany dzielnik iest ten sam, iaki zachodzi między resztą dopiéro otrzymaną a funkcyą dzielącą, i nieodmieni się kiedy w reszcie opuścimy mnożnik $b$ a przydamy mnożnik 4. Ciągnąc przeto daléy rachunek, należy wykonać następuiące dzielenie

$$\begin{array}{l|l} 12a^2+4ab-16b^2 & 4a^2-5ab+b^2 \\ \cline{2-2} 12a^2-15ab+3b^2 & 3 \\ - \quad\;\; + \quad\;\; - & \\ \hline +19ab-19b^2. & \end{array}$$

W ostatniéy reszcie potęga ilości porządkowéy iuż iest niższa niżeli w funkcyi dzielącéy: dla tego w dalszéy robocie, weźmiemy resztę za dzielącą, a dzielącą za podzielną, toiest dzielić będziemy funkcyą $4a^2-5ab+b^2$ przez

$19ab-19b^2$. Lecz w drugiéy funkcyi można opuścić mnożnik $19b$, który nie wchodzi do wszystkich terminów piérwszéy; wypadnie więc do dzielenia

$$\begin{array}{l|l} 4a^2-5ab+b^2 & a-b \\ \cline{2-2} 4a^2-4ab & 4a-b \\ -\quad + & \\ \hline \quad -ab+b^2 & \\ \quad -ab+b^2 & \\ \quad +\quad - & \\ \hline \quad 0 & \end{array}$$

Nie zostaie żadna reszta; zatém funkcya $a-b$ iest nay-większym szukanym dzielnikiem spólnym dla obu funkcyy podanych. Wykonawszy dzielenie tych funkcyy przez $a-b$ znaydziemy wielorazy skończone

$$3a^2+b^2, \quad 4ab-b^2.$$

Za drugi przykład weźmy dwie funkcye

$$a^2c^2-ab+ac-b^2, \quad ac-b$$

uszykowane podług wykładników ubywaiących litery $a$.

*Wzór działania.*

$$\begin{array}{l|l} a^2c^2-ab+ac-b^2 & ac-b \\ \cline{2-2} a^2c^2-abc & ac \\ -\quad + & \\ \hline \quad abc-ab+ac-b^2 & \\ \text{czyli}\quad a(bc-b+c)-b^2; & \end{array}$$

funkcyą mnożoną przez $a$, toiest $bc-b+c$ nazwiymy przez $m$; więc reszta wystawi się przez $am-b^2$; przez nię wypada dzielić $ac-b$: w tę podzielną możemy wprowadzić mnożnik $m$ iako niewchodzący do wszystkich wyrazów funkcyi $am-b^2$; będzie więc do wykonania dzielenie

$$\begin{array}{l|l} acm-bm & am-b^2 \\ \cline{2-2} acm-cb^2 & c \\ -\quad + & \\ \hline \quad cb^2-bm. & \end{array}$$

Tu reszta nie ma w sobie $a$; to iest znakiem że $a$ nie może wchodzić w skład szukanego spólnego dzielnika; wtedy potrzeba w danych funkcyach wziąć inną literę za porządkową i przeyść przez podobną koléy rachunku.

Gdyby dane funkcye miały spólny dzielnik iednowyrazowy; ten się naprzód odłącza, i potém odbywa się działanie na funkcyach od niego oswobodzonych. np. funkcye $a^4b—ab^4$ i $a^3b—ab^3$ maią spólny dzielnik $ab$, po którego odłączeniu zamieniaią się na prostsze $a^3—b^3$ i $a^2—b^2$: w tych ostatnich łatwo znaleść, że spólnym dzielnikiem iest $a—b$; a przeto spólnym dzielnikiem funkcyy danych będzie $ab(a—b)$ czyli $a^2b—ab^2$.

*Dodawanie i odeymowanie ułamków.*

Powiedzieliśmy niedawno, że podpisuiąc iakiéy ilości mianownik, zmnieyszamy ią tyle razy ile w mianowniku zawiera się iedności. np. $\frac{p}{q}$ iest mnieysze od $p$ razy $q$. Podobnie ułamek *iedność dzielona przez siedm* czyli $\frac{1}{7}$ iest siedm razy mnieyszy od iedności, a zatém wyraża część siódmą téy iedności; następnie ułamek $\frac{2}{7}$ iako dwa razy większy znaczyć będzie dwie siódme części, ułamek $\frac{3}{7}$ wystawi nam trzy części siódme, itd. Słowem, *każdy ułamek może się uważać iako zbiór tylu części równych, ile ma iedności licznik: gatunek zaś tych części iest wskazany liczbą iedności zamkniętych w mianowniku*. Ponieważ więc mianownik oznacza gatunek części zawartych w ułamku. a dodawanie i odciąganie wykonać się nie może tylko na wielkościach iednego gatunku; zatém ułamki, na których te działania odbyć chcemy, powinny mieć iednaki mianownik, Takiemi są np. $\frac{5}{11}$ i $\frac{3}{11}$. Oczywista rzecz, że gdy do pięciu iedenastych części przydamy iedenastych części trzy wypadnie na summę takich samych części ośm, toiest $\frac{5}{11}+\frac{3}{11}=\frac{8}{11}$. Jeżeli znowu od pięciu iedenastych części odeymiemy takich samych części trzy, pozostanie na resztę takichże części dwie, toiest $\frac{5}{11}—\frac{3}{11}=\frac{2}{11}$. Zkąd poznaiemy że *tak w dodawaniu iak i w odeymowaniu ułamków z równemi mianownikami, zawsze wypadek będzie ułamkiem maiącym tenże sam mianownik, a licznik równy w piérwszym razie summie, w drugim różnicy liczników*. Przykłady.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b};\quad \frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b};$$

www.rcin.org.pl

$$\frac{3a^2-6bc}{p-q}+\frac{4a^2+2bc}{p-q}-\frac{2bc-6a^2}{p-q}=$$
$$\frac{3a^2-6bc+4a^2+2bc-2bc+6a^2}{p-q}=\frac{13a^2-6bc}{p-q}.$$

*Przywodzenie do spólnego mianownika.* Gdy ułamki maiące się dodać lub odiąć są z różnemi mianownikami, należy ie przywieść wprzód do mianownika spólnego *mnożąc każdy licznik i iego mianownik przez wieloczyn z mianowników pozostałych*, a potém uskutecznić działanie podług prawideł któreśmy wyżéy podali. Przykłady.

I. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}-\frac{f}{g}=\frac{adg}{bdg}+\frac{bgc}{bdg}-\frac{bdf}{bdg}=\frac{adg+bgc-bdf}{bdg}.$

II. $\frac{a^2-3b}{cd-f^2}+\frac{k}{f}-\frac{2c^2-4bf}{a+b}=$

$$\frac{f(a+b)(a^2-3b)+k(cd-f^2)(a+b)-(cd-f^2)(2c^2-4bf)f}{f(cd-f^2)(a+b)};$$

tu wykonawszy wskazane działania, otrzymamy ułamek, którego licznikiem będzie $fa^3-3fab+fba^2-3fb^2+kacd+kbcd-kaf^2-kbf^2-2fc^3d+2c^2f^3+4f^2bcd-4f^4b$, mianownikiem $adcf-af^3+bcdf-bf^3$.

Można w niektórych przypadkach przyyśdź do spólnego mianownika prostszego niż ten iaki się według zwyczaynego prawidła otrzymuie. W dwóch np. ułamkach $\frac{a}{bc}$, $\frac{d}{bf}$. łatwo postrzedz, że mianowniki byłyby iednakie, gdyby piérwszemu przybył mnożnik $f$, a drugiemu $c$; pomnóżmy więc oba wyrazy piérwszego ułamku przez $f$, drugiego przez $c$, a otrzymamy ułamki $\frac{af}{fbc}$, $\frac{dc}{fbc}$ z iednostaynym mianownikiem prostsze od ułamków $\frac{abf}{b^2cf}$, $\frac{bcd}{b^2cf}$, które wypadaią używszy sposobu zwyczaynego. Zeby przyyść do ułamków nayprostszych z iednakowym mianownikiem, trzeba postąpić według następuiącego prawidła. *Pobrać z mianowników w ułamkach danych wszystkie mnożniki*

www.rcin.org.pl

*róźne z nay większémi wykładnikami iakie maią: wieloczyn z tych mnożników zrobiony będzie mianownikiem spólnym. Dla otrzymania liczników, potrzeba rozmnożyć licznik każdego ułamku przez te mnożniki wieloczynu których nie dostaie w mianowniku*. np. maiąc ułamki $\frac{a}{b^2c^2}$, $\frac{d}{bf}$, $\frac{h}{c^3g^2}$; robię wieloczyn $b^2c^3fg^2$; piérwszy licznik mnożę przez $cfg^2$, drugi przez $bc^3g^2$, trzeci przez $b^2f$; i otrzymam $\frac{acfg^2}{b^2c^3fg^2}$, $\frac{bc^3g^2d}{b^2c^3fg^2}$, $\frac{b^2fh}{b^2c^3fg^2}$. Jeżeliby się między ułamkami znaydowała całość; z nią postąpić należy iak z ułamkiem którego mianownik iest równy jedności. np. $a+\frac{b}{c}=\frac{ac}{c}+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c}$.

*Mnożenie ułamków.* W mnożeniu ułamków rozróżnić możemy dwa przypadki: albo będzie do mnożenia ułamek przez całość, albo ułamek przez ułamek. Daymy naprzód, iż trzeba rozmnożyć $\frac{a}{b}$ przez $c$. Wykonać to działanie, iest to ułamek $\frac{a}{b}$ powiększyć razy $c$; na ten koniec dosyć iest licznik rozmnożyć przez $c$, i będzie $\frac{a}{b}\times c=\frac{ac}{b}$. Ztąd widzimy, że *maiąc mnożyć ułamek przez całość, trzeba mianownik zachować ten sam, a za licznik położyć wieloczyn z licznika i całości.* W tym samym przykładzie zmnieyszywszy mnożnik $c$ razy $d$, toiest wziąwszy $\frac{c}{d}$ na mieyscu $c$, wieloczyn stanie się tyleż razy mnieyszy, i iuż nie będzie $\frac{ac}{b}$ ale $\frac{ac}{bd}$; zatem $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$. Co pokazuie, że *mnożąc ułamki, trzeba liczniki rozmnożyć przez siebie, a mianowniki przez siebie, i piérwszą mnogość wziąć*



www.rcin.org.pl

*za licznik, drugą za mianownik.* Przykłady.

$$\text{I.}\quad \frac{a+b}{c}\times\frac{g-h}{p-q}=\frac{ag-ah+bg-bh}{cp-cq}\ ;$$

$$\text{II.}\quad \left(a+\frac{b}{c}-\frac{d}{f}\right)\left(\frac{p}{q}-r\right)=\frac{ap}{q}+\frac{bp}{cq}-\frac{dp}{qf}-ar-\frac{br}{c}+\frac{dr}{f}\,.$$

*Dzielenie ułamków.* W dzieleniu ułamków zachodzą trzy przypadki; albo wypadnie dzielić ułamek przez całość, albo ułamek przez ułamek, albo nakoniec całość przez ułamek. Niech naprzód $\frac{a}{b}$ będzie do podzielenia przez $c$; Wykonać to działanie, iest to ułamek $\frac{a}{b}$ zmnieyszyć razy $c$; na ten koniec dosyć iest rozmnożyć mianownik tego ułamku przez c, i będzie $\frac{a}{b}:c=\frac{a}{bc}$. Zkąd wnosimy prawidło, że *dzieląc ułamek przez całość, trzeba licznik zachować ten sam, a za mianownik napisać wieloczyn z mianownika i całości.* W tym samym przykładzie zmnieyszywszy dzielącą c razy $d$, toiest wziąwszy $\frac{c}{d}$ na mieyscu $c$, wieloraz stanie się tyleż razy większy, i już nie będzie $\frac{a}{bc}$ ale $\frac{ad}{bc}$, toiest $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$. Zatém *dzieląc ułamek przez ułamek trzeba licznik ułamku podzielnego rozmnożyć przez mianownik dzielącego, i tę mnogość napisać za licznik dla wielorazu; rozmnożyć potém mianownik ułamku podzielnego przez licznik dzielącego, i tę mnogość położyć za mianownik dla wielorazu.* Jeżeli w ostatnim przykładzie weźmiemy iedność na mieysce $b$, otrzymamy $\frac{a}{1}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{1c}$ czyli $a:\frac{c}{d}=\frac{ad}{c}$.

Z czego wniesiemy, że *dzieląc całość przez ułamek, trzeba rozmnożyć całość przez mianownik, i tę mnogość rozdzielić* *przez licznik.* Przykłady. I. $(a+\frac{b}{c}):d=\frac{a}{d}+\frac{b}{cd}$; II. $(a-b):(c-\frac{d}{f})=(a-b):(\frac{cf-d}{f})=\frac{af-bf}{cf-d}$; III. $(a-b+\frac{c}{d}):(m+n-\frac{p}{q})=\frac{ad-bd+c}{d}:\frac{mq+nq-p}{q}=\frac{adq-bdq+cq}{dmq+dnq-dp}$.

Znaiąc reguły na odbywanie działań z ułamkami, możemy dzielenie funkcyy kończyć się nie mogące ciągnąć bez określenia. np.

$$
\begin{array}{l|l}
a^4-2a^2b+3ab^2 & a^3-3ab \\
\cline{2-2}
a^4-3a^2b & a+\frac{b}{a}+\frac{3b^2}{a^2}+\text{itd.} \\
-\quad + & \\
\hline
a^2b+3ab^2 & \\
a^2b-3b^2 & \\
-\quad + & \\
\hline
3ab^2+3b^2 & \\
3ab^2+\frac{9b^3}{a} & \\
-\quad - & \\
\hline
\text{itd.} &
\end{array}
$$

*Uwaga.* Z wyłożonych dotąd prawideł na działania wypada, iż można wprowadzić w znaki wyrażenia algebraicznego pewne odmiany bez naruszenia iego wartości. Obaczmy iakie są te odmiany i na czém zależą.

I Wiemy z nauki o odciąganiu, że $a-(b-c)=a-b+c$; uczyniwszy $a=0$, będzie $-(b-c)=-b+c$. Co pokazuie, że można w funkcyi odmienić wszystkie znaki na przeciwne, byle ią potém zamknąć w nawias i poprzedzić znakiem —. A następnie znak — położony przed nawiasem obeymuiącym funkcyą będzie nas zawsze ostrzegał, że ta funkcya powinna bydź wzięta ze znakami przeciwnémi.

II Pamiętaiąc regułę na znaki w mnożeniu, łatwo poymiemy, że wieloczyn, z ilukolwiek mnożników złożony, zostanie zawsze ten sam, ieżeli dwom mnożnikom, czterem, itd. słowem, liczbie parzystéy, odmienimy znaki na przeciwne, np.

www.rcin.org.pl

$$\left.\begin{array}{r} a\times-b\times-c\times d=abcd \\ -a\times b\times-c\times d=abcd \\ -a\times b\times c\times-d=abcd \end{array}\right|, \text{ ztąd}$$

$$a\times-b\times-c\times d=-a\times b\times-c\times d=-a\times b\times c\times-d.$$

Podobnie

$$(a-b)(c-d)(f-g)(h-k)=(b-a)(d-c)(f-g)(h-k)=$$
$$(b-a)(d-c)(g-f)(k-h).$$

Lecz ieżeli iednemu mnożnikowi, trzem, i w ogólności liczbie nieparzystéy odmienimy znaki; mnogość wypadnie ze znakami przeciwnémi, np.

$$(a-b)(c-d)=ac-ad-bc+bd,$$
$$(b-a)(c-d)=bc-bd-ac+ad.$$

Obie te mnogości niczém się oczywiście nie różnią tylko znakami. Chcąc przeto aby ostatnia wyrażała zupełnie to samo co piérwsza, trzeba przed nią położyć znak — dla ostrzeżenia że się brać powinna ze znakami przeciwnémi tym iakie z mnożenia wynikaią: i tak

$$(a-b)(c-d)=-(b-a)(c-d).$$

III. Ułamek, iako wieloraz wypadaiący z dzielenia licznika mianownikiem, iest dodatny, kiedy się licznik i mianownik co do znaku zgadzaią, odiemny kiedy się różnią. Zatém.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{+a}{+b}=+\dfrac{a}{b} \\ \dfrac{-a}{-b}=+\dfrac{a}{b} \end{array}\right| \text{ zkąd } \frac{+a}{+b}=\frac{-a}{-b}; \quad \left.\begin{array}{l} \dfrac{-a}{+b}=-\dfrac{a}{b} \\ \dfrac{+a}{-b}=-\dfrac{a}{b} \end{array}\right| \text{ zkąd } \frac{-a}{+b}=\frac{+a}{-b}.$$

Co pokazuie, że odmieniwszy znaki licznika i mianownika, zawsze ułamek swoię piérwszą wartość i znak swóy zachowa.

### § 7. *Co są zrównania i iak się rozwiązuią?*

Podane prawidła działań, są to różne sposoby łączenia i rozkładu ilości i funkcyy, stawiace nas w możności wyrażenia znakami rachunku wszelkich pomiędzy ilości kombinacyy, których algebraiczne dociekania wymagaią. Przystosuymy ie teraz do rozwiązania pytań. Wiemy (§ 1), że rozwiązanie każdego pytania zaczyna się od rostrząśnienia iego

www.rcin.org.pl

warunków dla odkrycia związku między wielkościami znanémi i nieznanémi. Odkryć związek, iest to dostrzedz, iż pewne połączenia takowych wielkości są równe. Kiedy upatrzony ten związek wskażemy znakiem równości $=$, będziemy mieli wyrażenie algebraiczne, które się nazywa *zrównaniem* ( équation ). ( * ). Gdyby nam np. zadano wynaleźć taką liczbę, aby od niéy potroionéy odciągnąwszy 20 wypadła taż sama liczba powiększona o 30; nazwawszy liczbę niewiadomą $x$, otrzymamy z warunków zagadnienia następuiące zrównanie

$$3x-20=x+30.$$

W każdém zrównaniu terminy położone przed znakiem równości składaią stronę albo członek piérwszy tego zrównania, a terminy po znaku składaią stronę albo członek drugi. Żeby zrównanie dało nam wartość ilości niewiadoméy, potrzeba w niém tę ilość oddzielić od wszystkich znanych tak, aby na iednéy stronie była sama ilość nieznana, a na drugiéy same ilości wiadome; toiest trzeba przywieść zrównanie do wzoru $x=A$, w którym $A$ wystawia wszystkie ilości dane, pewnémi działaniami z sobą połączone. Takie przerobienie zrównania nazywa się iego *rozwiązaniem*. Widzimy tu oczywiście, że chcąc rozwiązać zrównanie, potrzeba wyrażenie iego pierwiastkowe przeprowadzić przez pewny ciąg odmian. Zastanowić się więc nam teraz wypada, iakie sa te odmiany, i na czém się gruntuie wolność ich czynienia?

Ponieważ zrównanie iest wyrażeniem równości dwóch swoich członków, możemy w niém przeto robić wszelkie przekształcenia, które tylko téy równości nie znoszą. Wolno więc do niego wprowadzić iakąkolwiek odmianę, bylebyśmy to, co czynimy w iednym członku, uczynili zaraz i w drugim. Idąc od téy uwagi, weźmy naprzód zrównanie

$$x+a=b,$$

w którém na stronie piérwszéy ilość nieznana $x$ połączona

---

( * ). Większość wyraża się przez znak $>$, mnieyszość przez $<$; np. $a>b$ wskazuie że $a$ iest większe od $b$; $c<d$ wskazuie że $c$ mnieysze od $d$.

www.rcin.org.pl

iest z wiadomą $a$ przez dodawanie. Chcąc żeby na téy stronie zostało samo $x$, trzeba oczywiście od summy $x+a$ odiąć $a$; ale odeymuiąc $a$ w członku piérwszym, powinniśmy dla ocalenia równości odiąć i w drugim; przez co otrzymamy

$$x=b-a.$$

W zrównaniu

$$x-a=b$$

ilość $x$ zostanie w piérwszym członku samotna, kiedy po obu stronach dodamy $a$; wypadnie bowiem $x-a+a=b+a$, czyli

$$x=b+a.$$

W zrównaniu

$$ax=b$$

odłączymy $x$ od ilości wiadomych dzieląc oba członki przez $a$, i będziemy mieli $\frac{ax}{a}=\frac{b}{a}$ czyli

$$x=\frac{b}{a}.$$

Nakoniec w zrównaniu

$$\frac{x}{a}=b,$$

żeby oddzielić ilość niewiadomą od znanych, należy obie strony rozmnożyć przez $a$; znaydziemy $\frac{ax}{a}=ab$ czyli

$$x=ab.$$

Ztąd widzimy *naprzód*, że przez iakiekolwiek działania ilość niewiadoma będzie połączona ze znanémi, oddzielimy ią zawsze przez działania przeciwne; toiest ilości wiadome, połączone z nieznaną przez dodawanie, odciągaiąc; połączone przez odciąganie, dodaiąc po obu stronach; przez ilości, które są mnożnikami niewiadoméy, obie strony dzieląc; a przez ilości, które są iéy dzielnikami, obie strony mnożąc. *Powtóre*, pokazuie się z dwóch piérwszych przykładów, że chcąc iaki wyraz w zrównaniu przenieść z iednego członka w drugi, trzeba go w piérwszym zmazać, a w drugim napisać ze znakiem przeciwnym, np. zrównanie $ax+b=c+dx$ może bydź napisane tak

$$ax-dx=c-b.$$

Gdybyśmy w ostatniém zrównaniu przenieśli członek piérwszy na stronę drugą, a drugi na piérwszą, mielibyśmy

$$b-c=dx-ax,$$

wyrażenie różniące się od poprzedzaiącego znakami wszystkich terminów; ztąd poznaiemy, że *w całém zrównaniu można odmienić znaki, a przez to się równość nie naruszy*. Przeniósłszy wszystkie wyrazy zrównania na iednę stronę, strona druga będzie równa zero; toiest zrównanie przyymie postać $A=0$, gdzie $A$ zawiera wszystkie ilości do zrównania wchodzące. Takowego sposobu wystawiania zrównań będziemy nayczęściéy używali w dalszych naszych dociekaniach.

Jeżeliby iaka ilość była dodana lub odięta po obu stronach zrównania, można ią opuścić, a związek się nie zerwie. Można także opuścić, bez zepsucia równości, ilość albo funkcya, która iest mnożnikiem lub dzielnikiem wszystkich terminów zrównania. Jnawzaiem wolno zrównanie we wszystkich terminach przez tę samę wielkość rozmnożyć lub rozdzielić. Wolno także ilekolwiek zrównań wynikaiących z iednego pytania do siebie dodać lub odiąć. W tych wszystkich odmianach dwa członki zrównania równości nie stracą.

Maiąc te uwagi obecne w pamięci, potrafimy rozwiązać wszelkie zrównanie, iakkolwiek zawikłane, byleby wykładnik ilości niewiadoméy nie przewyższał iedności, toiest byleby to zrównanie było *stopnia piérwszego*. Żeby pokazać iakim porządkiem prowadzi się rozwiązanie, weźmy sobie za przykład

$$\frac{ax}{b}+c=\frac{dx}{f}+a-\frac{cx}{m}; \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (a).$$

1ód wszystkie terminy przywodzą się do iednostaynego mianownika: poczém ten mianownik, iako dzielnik wszystkich wyrazów zrównania, opuści się, i będzie

$$afmx+bcfm=bdmx+abfm-bcfx.$$

2re terminy zawieraiące w sobie ilość niewiadomą przenoszą się w ieden członek, a inne wszystkie w członek drugi: tym sposobem wypada

$$afmx-bdmx+bcfx=abfm-bcfm.$$

3cie po takiém przerobieniu, piérwsza strona ma ilość nie-

www.rcin.org.pl

wiadomą mnożnikiem wszystkich swoich wyrazów: rozebrawszy na ten mnożnik, mamy

$$x(afm-bdm+bcf)=abfm-bcfm; \quad . \quad . \quad . \quad (b).$$

4te dzielą się obie strony przez funkcyą, którą w piérwszym członku mnoży $x$, z czego się otrzymuie ostateczny wypadek

$$x=\frac{abfm-bcfm}{afm-bdm+bcf}.$$

Wartość takowa ilości nieznanéy, wyrażona przez same ilości wiadome, nazywa się *pierwiastkiem zrównania*, który iest zawsze poiedynczy ieżeli wynika ze zrównania stopnia piérwszego; obaczymy niżéy, że będzie dwoisty w zrównaniach stopnia drugiego, troisty w zrównaniach stopnia trzeciego, itd: słowem, każde zrównanie ma tyle pierwiastków, ile iedności zawiera naywiększy wykładnik ilości nieznanéy, pokazuiący stopień zrównania.

Jeżeli pierwiastek iest dobrze wynaleziony; położywszy go na mieyscu ilości nieznanéy w zrównaniu *przywiedzioném do zero* czyli wystawioném pod postacią $A=0$, wszystkie terminy nawzaiem się zniszczą czyniąc $0=0$. To się nazywa *sprawdzić zrównanie* albo *zadosyć uczynić zrównaniu*. W zrównaniu $(b)$, znaczącém iedno co zrównanie początkowe $(a)$, przeniósłszy wszystkie wyrazy na stronę piérwszą, mamy

$$x(afm-bdm+bcf)-abfm+bcfm=0;$$

położywszy za $x$ odkrytą dopiéro wartość, znaydziemy

$$\frac{(abfm-bcfm)(afm-bdm+bcf)}{amf-bdm+bcf}-abmf+bcfm=0.$$

Ponieważ ułamek zaczynaiący to zrównanie ma za mianownik tę samę funkcyą $afm-bdm+bcf$ która iest mnożnikiem licznika, może bydź przeto uproszczony przez opuszczenie téy funkcyi w obu iego wyrazach; po czém zrównanie zamieni się na następuiące

$$abfm-bcfm-abfm+bcfm=0,$$

w którém terminy $abfm$ i $-abfm$, $-bcfm$ i $+bcfm$, będąc zupełnie te same, a różne znakami, zniszczą się wzaiemnie, i wypadnie $0=0$.

www.rcin.org.pl

§ 8. *Rozwiązuią się zagadnienia szczególne z iedną ilością nieznaną.*

Zeby się wprawić w rozbiór warunków, w dostrzeganie związków i składanie zrównań; weźmy sobie do rozwiązania następuiące przykłady.

I. *Złodziéy uciekaiący ubiega na dzień mil* 10: *pogoń we* 4 *dni po ucieczce za nim wysłana, ubiegaiąc na dzień mil* 14, *za ile go dni doścignie?*

Nieznaną liczbę dni biegu pogoni nazwiymy $x$; więc liczba dni biegu złodzieia będzie $x+4$. Ponieważ pogoń ubiega w dniu iednym mil 14, przeto w dniach $x$ ubieży mil $14x$. Złodziéy w dniach $x+4$ ubieży mil $10(x+4)$, kiedy w iednym ubiega mil 10. Aże droga przebyta od złodzieia i pogoni iest taż sama, przeto

$$14x=10(x+4)$$

czyli $$14x=10x+40,$$

ztąd $$14x-10x=40,$$

toiest $$4x=40,$$

$$x=10.$$

Więc złodziéy dognany w dniach dziesięciu.

II. *Maiątek osoby iedney iest trzy razy większy niż drugiéy: gdy obie zyskaią iednakową summę* a, *wtedy maiątek piérwszéy osoby iuż tylko będzie dwa razy większy niżeli drugiéy. Jakież są maiątki tych osób?*

Nazwawszy przez $x$ maiątek osoby drugiéy; będzie maiatek piérwszéy $3x$. A ponieważ według warunku zagadnienia $3x$ powiększone summą $a$ ma bydź dwa razy większe od $x$ powiększonego taż summą $a$; zatém

$$3x+a=2(x+a)$$

$$3x+a=2x+2a$$

$$x=a$$

Przeto maiątek osoby drugiéy iest $a$, a następnie piérwszéy iest $3a$.

III. *Pewna osoba umawia robotnika, z warunkiem, iż mu dawać będzie żywność i za każdy dzień pracy dopłacać* *po groszy* 48, *a za każdy dzień próżnowania potrącać groszy* 24. *Uczyniwszy rozrachunek po dniach* 96 *pokazało się, że trzeba zapłacić robotnikowi* 1008 *groszy. Przez ileż on dni pracował a przez ile próżnował?*

Nazwawszy liczbę dni pierwszych przez $x$, liczba dni drugich będzie $96-x$; zapłata za pierwsze będzie groszy $48x$; potrącenie za drugie będzie groszy $24(96-x)$. A ponieważ po potrąceniu wypada ieszcze zapłacić groszy 1008; więc

$$48x-24(96-x)=1008,$$

czyli

$$48x-2304+24x=1008$$

a ztąd

$$x=\frac{1008+2304}{48+24}=\frac{3312}{72}=46.$$

Zaczém dni pracy było 46, a następnie próżnowania 50.

IV. *Woda ciekąca iednym kanałem może napełnić kadź w którą wpływa trzy razy w siedmiu dniach. Taż woda wypływaiąca innym kanałem może wypróżnić tę kadź dwa razy w pięciu dniach. Otworzywszy oba kanały, ileż dni potrzeba będzie do napełnienia kadzi?*

Nieznaną liczbę dni nazwiymy przez $x$, a obiętość kadzi wyraźmy przez iedność. Gdyby woda wpływaiąca piérwszym kanałem napełniała kadź w dniach siedmiu raz tylko ieden, więc w dniu iednym napełniłaby część kadzi $\frac{1}{7}$; lecz że przez dni siedm może trzy razy kadź napełnić, przeto w dniu iednym napełni $\frac{3}{7}$ części kadzi. Z Podobnego rozumowania wypada, że woda wypływaiąca drugim kanałem wypróżni w dniu iednym $\frac{2}{5}$ części kadzi. Przeto na końcu dnia piérwszego woda pozostaiąca w kadzi zaymuie $\frac{3}{7}-\frac{2}{5}$ iéy części, a na końcu dni $x$ zaymie iéy części $(\frac{3}{7}-\frac{2}{5})x$: a ponieważ po dniach $x$ cała obiętość kadzi powinna bydź napełniona pozostaiącą ilością wody, więc

$$(\tfrac{3}{7}-\tfrac{2}{5})x=1,\quad \text{zkąd } x=35.$$

Do napełnienia więc kadzi potrzeba dni 35.

Gdybyśmy w teraźniéyszém zadaniu na mieyscu liczb użyli znaków ogólnych; toiest gdybyśmy założyli iż *woda ciekąca iednym kanałem może napełnić kadź w którą wpływa razy* a *w dniach* b; *wypływaiąca zaś innym kanałem może wypróżnić tę kadź razy* c *w dniach* d; wtedy zrównanie służące do odkrycia liczby dni $x$ potrzebnéy do napełnienia kadzi wzięłoby postać

$$\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right)x=1, \quad \text{zkąd} \quad x=\frac{bd}{ad-bc}.$$

Wartość $x$, wystawiona tym sposobem w znakach literalnych, zamyka w sobie odpowiedź na wszystkie pytania w teraźnieyszém ogarnione, a różniące się tylko wartością liczb danych $a$, $b$, $c$, $d$. Położywszy np. $a=4$, $b=10$, $c=3$, $d=8$, będzie $x=40$. Jeżeli zas $a=1$, $b=1$, $c=1$, $d=2$, natenczas $x=2$.

V. *Na zapłacenie trzem robotnikom wyszła pewna liczba rubli. Jednemu dano połowę tey liczby i rubel ieden; drugiemu połowę tego co pozostało i także rubel ieden; trzeciemu połowę reszty i rubli trzy. Jleż rubli wydano?*
Odpowiedź 30.

VI. *Kupiec płacił pewną matyryą po rubli pięć za każde sześć łokci; a przedaiąc brał po rubli sześć za każde pięć łokci. Po wyprzedaniu całey materyi miał w zysku rubli 55. Jleż było łokci?*
Odpowiedź 150.

## § 9. *Co rozumieć należy przez wartości odiemne otrzymywane z rozwiązania zagadnień.*

Odpowiedź na zagadnienia rozwiązywane w §fie poprzedzaiącym czyli wartość ilości nieznaney była bez żadnego przed sobą znaku, toiest miała domyślny znak $+$. Trafia się atoli iż takowa wartość wypadnie poprzedzona znakiem $-$. Zastanowimy się teraz, zkąd to zdarzenie może pochodzić i co wyraża? Na ten koniec zadaymy sobie to proste pytanie: *osoba, którey maiątek iest* a, *ile powinna zyskać żeby miała* b? Nazwawszy zysk szukany przez $x$, będziemy mieli zrównanie następuiące

$$a+x=b, \text{ z którego } x=b-a.$$

Ta odpowiedź, wyrażona przez litery, da wartość ilości $x$ we wszystkich przypadkach szczególnych teraźnieyszego pytania. Jeżeli np. $a=3000$, $b=5000$, wtedy zysk $x=2000$. Przypuśćmy ieszcze, że maiątek początkowy iest 8000 i że po otrzymanym zysku powinien wynosić 6000. W tym

www.rcin.org.pl

przypadku zrównanie będzie

$$8000+x=6000, \quad . \ : \ . \quad (c)$$

zkąd

$$x=6000-8000=-2000.$$

Taka wartość otrzymana na $x$ zowie się *odpowiedzią odiemną*. Jakże ią wytłumaczyć? znak — pokazuie że powinna bydź odciagniona, a niemasz od czego. Zeby ten rodzay niepodobieństwa obiaśnić i uprzątnąć, obróćmy uwagę na zrównanie $8000+x=6000$ z którego odiemna wartość wynikła. Widzimy oczywiście, że to zrównanie iest błędne, bo wyraża iż do liczby większéy przydawszy ieszcze pewną liczbę wypadnie liczba mnieysza. Lecz przestanie bydź błędném, gdy ilość $x$ nie iako zysk, ale iako stratę uważać będziemy: naówczas bowiem to zrównanie bierze postać

$$8000-x=6000. \quad ; \ . \ . \ . \quad (d)$$

i prowadzi do wartości na $x$ dodatnéy

$$x=8000-6000=2000.$$

Dwa zrównania ( $c$ ) i ( $d$ ) niczém się więcéy nie różnią tylko że w piérwszém $x$ wyraża zysk, w drugiém stratę: wartości na $x$ wyciagnione z tych zrównań są zupełnie co do wielkości iednakie, ale maią przed sobą odmienne znaki. Ztąd wypada, że znaki + i — mogą nam służyć do rozróżnienia dwóch stanów przeciwnych w ilościach. Przykłady tych stanów mamy w zysku i stracie, w maiątku i długu, w przychodzie i wydatku, w dwóch siłach przeciw sobie działaiących, itd. Jeżeli więc układaiąc zrównanie z warunków pytania uważaliśmy ilość nieznaną np. za maiątek, a po rozwiązaniu znaydziemy odpowiedź odiemną; będzie to znakiem, że zrównanie iest błędne z przyczyny iż nieznaną ilość $x$ braliśmy za maiątek, kiedy ona rzeczywiście iest długiem. Nie ma iednak potrzeby poprawiać zrównania i powtórnie rozwiązywać, bo znowubyśmy przyszli do téy saméy wartości ale iuż dodatnéy; należy tylko wartość z piérwszego rozwiązania uważać za dług, kiedy z początku była brana za maiątek.

Weźmy ieszcze następuiace zagadnienie: *Oyciec ma lat* a, *syn ma lat* b; *za ileż lat wiek syna będzie czwartą częścią wieku oyca?* Nazwiymy przez $x$ liczbę lat szukaną; będzie po upłynieniu téy liczby wiek oyca $a+x$ wiek syna $b+x$: z warunków zagadnienia wypada zrównanie

www.rcin.org.pl

$$b+x=\frac{a+x}{4} \text{ zkąd } x=\frac{a-4b}{3}.$$

Położywszy $a=54$, $b=9$; mamy $x=\frac{54-36}{3}=\frac{18}{3}=6$. Jakoż po latach sześciu wiek oyca będzie lat 60, syna 15 cztéry razy mnieyszy. Daymy teraz że $a=45$, $b=15$; będzie $x=\frac{45-60}{3}=-5$. Wypada wartość odiemna. Więc ilość lat na odpowiedź otrzymaną trzeba brać w rozumieniu przeciwném, toiest nie iako maiącą ieszcze upłynąć, lecz iako już upłynioną: a przeto nie za lat pięć wiek syna będzie czwartą częścią wieku oyca, ale iuż był przed laty pięcia. W rzeczy samey od 45 i 15 uiąwszy po lat pięć, zostaie na wiek oyca 40, na wiek syna 10.

Jeżeli liczba nieznana iest takiéy natury, iż nie może bydź brana w dwóch rozumieniach przeciwnych, gdy np. wyraża liczbę ludzi: wtedy odpowiedź odiemna pokazuie, że warunki pytania są fałszywe i nie podobne. Przykład. *Liczba żołnierzy pewnego woyska iest taka, że trzy razy wzięta i zmnieyszona o tysiąc równa się wziętéy razy cztéry i powiększonéy o dwa tysiące: iakaż iest ta liczba?* Warunki tego zagadnienia są oczywiście niepodobne; bo nie może zachodzić równość między liczbą trzy razy wziętą i tąż samą wziętą razy cztéry, a tém bardziéy ieszcze kiedy piérwszą zmnieyszymy a drugą powiększymy. Zrównanie z takowych warunków wynikłe

$$3x-1000=4x+2000$$

prowadzi do pierwiastku odiemnego $x=-3000$.

§ 10. *Rozwiązanie pytań z iląkolwiek ilościami nieznanémi. Sposoby eliminacyi.*

Ponieważ iedno zrównanie odkrywa nam wartość iednéy tylko ilości nieznanéy; przeto każde pytanie powinno w sobie zawierać dostateczną liczbę warunków, aby z nich można było wyciągnąć tyle zrównań, ile iest ilości do ocenienia. Gdyby te wszystkie zrównania zamykały po ie-

www.rcin.org.pl

dnéy coraz innéy ilości nieznanéy, wtedybyśmy ie rozwiązali podług sposobów poprzedzaiących. Lecz pospolicie do każdego zrównania wchodzi kilka ilości niewiadomych. Póty więc nie potrafimy znaleść odpowiedzi na takie pytania, póki nie przerobimy zrównań z kilką ilościami nieznanémi na inne zawieraiące tylko po iednéy. Sposoby do tego przerabiania służące zowią się *eliminacyą* ( wyrzucenie ).

I. Piérwszy sposób eliminacyi zasadza się na tém, że w zrównaniach wypadaiących z iednego pytania, którakolwiek ilość niewiadoma np. $x$ znaczy w każdém z nich to samo; czyli że iéy wartość wyciągniona z iednego zrównania równa iest wartościom wydobytym ze wszystkich innych. Niech będą dwa zrównania

$$5x+7y=43$$
$$11x+9y=69$$

zawiaraiące dwie ilości niewiadome $x$, $y$. Z piérwszego mamy

$$x=\frac{43-7y}{5},$$

z drugiego

$$x=\frac{69-9y}{11};$$

te dwie wartości powinny bydź równe; zatém

$$\frac{43-7y}{5}=\frac{69-9y}{11}:$$

oto iest zrównanie z iedną ilością nieznaną $y$. Rozwiązawszy ié znaydziemy $y=4$. Takim samym sposobem można ze zrównań danych wyrzucić $y$, przyyśdź do zrównania zamykaiącego tylko $x$, i z niego wartość ilości $x$ ocenić. Lecz do téy ostatniéy wartości przyydziemy krótszą drogą, podstawuiąc odkrytą wartość ilości $y$ za samę ilość w którekolwiek ze zrównań danych np. w piérwsze, bo otrzymamy zrównanie

$$5x+28=43$$

z samą ilością $x$, z którego $x=\frac{43-28}{5}=\frac{15}{5}=3$.

www.rcin.org.pl

Weźmy ieszcze trzy zrównania

$$\left.\begin{array}{r} 3x+2y+z=23 \\ 5x+2y+4z=46 \\ 10x+5y+4z=75 \end{array}\right| \quad \ldots \; (e)$$

z trzema ilościami nieznanémi $x$, $y$, $z$. Wyciągam z każdego wartość na $x$; będzie

$$x=\frac{23-2y-z}{3},$$

$$x=\frac{46-2y-4z}{5},$$

$$x=\frac{75-5y-4z}{10};$$

pierwszą wartość równam ze wszystkiemi pozostałémi; wypadnie

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{23-2y-z}{3}=\frac{46-2y-4z}{5} & \text{czyli } 7z-4y=23 \\ \frac{23-2y-z}{3}=\frac{75-5y-4z}{10} & \text{czyli } 2z-5y=-5 \end{array}\right| \quad \ldots \; (f).$$

Tym sposobem z trzech zrównań ( $e$ ), maiących trzy ilości nieznane, wyrzuciliśmy iednę $x$ i przyszli do dwóch zrównań ($f$) zamykaiącyah dwie ilości nieznane $y$, $z$. Z tych ostatnich wyrzućmy ieszcze $z$, aby otrzymać iedno zrównanie z samą ilością $y$. Na ten koniec wartości $z$ wyciągnione ze zrównań ($f$), toiest

$$z=\frac{23+4y}{7}$$

$$z=\frac{5y-5}{2}$$

porównywam z sobą i mam zrównanie

$$\frac{23+4y}{7}=\frac{5y-5}{2} \quad \text{czyli } 46+8y=35y-35, \text{ zkąd}$$

$$y=\frac{46+35}{35-8}=\frac{81}{27}=3.$$

Znalezioną wartość na $y$ podstawiam w którekolwiek ze zrównań ( $f$ ), np. w pierwsze; otrzymam zrównanie

www.rcin.org.pl

$7z-12=23$, w którém już niemasz $y$, lecz się tylko znayduje samo $z$: rozwiązawszy, wypada $z=\frac{23+12}{7}=\frac{35}{7}=5$. Maiąc dwie ilości $y$, $z$ ocenione, podstawiam ich wartości w którekolwiek ze zrównań ($e$), np. w piérwsze: tak, przyydę do zrównania $3x+6+5=23$, z samą tylko ilością $x$, zkąd $x=\frac{23-6-5}{3}=\frac{12}{3}=4$.

Używaiąc tego sposobu eliminacyi do zrównań literalnych

$$\left.\begin{array}{r} ax+by+cz=d \\ fx+gy+hz=k \\ mx+ny+pz=q \end{array}\right| \quad . \quad . \quad . \quad (g),$$

naprzódbyśmy wyrzucili $x$ i przyszli do zrównań

$$\frac{d-by-cz}{a}=\frac{k-gy-hz}{f}$$

$$\frac{d-by-cz}{a}=\frac{q-ny-pz}{m}$$

czyli $$\left.\begin{array}{l} (ag-fb)y+(ah-fc)z=ak-fd \\ (an-mb)y+(ap-mc)z=aq-md \end{array}\right| \quad . \quad . \quad (h),$$

z których po wyrzuceniu $y$ wypadłoby zrównanie z samą ilością $z$

$$\frac{ak-fd-(ah-fc)z}{ag-fb}=\frac{aq-md-(ap-mc)z}{an-mb}$$

czyli

$$(ak-fd)(an-mb)-(ah-fc)(an-mb)z=$$
$$(aq-md)(ag-fb)-(ap-mc)(ag-fb)z,$$

zkąd

$$z=\frac{(aq-md)(ag-fb)-(ak-fd)(an-mb)}{(ap-mc)(ag-fb)-(ah-fc)(an-mb)};$$

wykonawszy naznaczone mnożenie i potém uproszczenie, będzie

$$z=\frac{aqg-bfq-dgm-akn+bkm+dfn}{apg-bfp-cgm-ahn+bhm+cfn}.$$

Ta wartość, podstawiona w którekolwiek ze zrównań ($h$), przyprowadzi nas do odkrycia wartości na $y$; a maiąc już

www.rcin.org.pl

ocenione $z$, $y$, wyrzucimy te ilości z którégokolwiek ze zrównań ($g$), przyjdziemy do zrównania zawieraiącego samo $x$ i nareszcie do wartości na $x$.

*Zagadnienie I. Znaleźć dwie liczby, których summa iest* a, *różnica* b. Nazwawszy ilość większą przez $x$, mnieyszą przez $y$, będziemy mieli dwa zrównania

$$x+y=a,\quad x-y=b,$$

z nich wartości na $x$ są $x=a-y$, $x=b+y$; przeto $a-y=b+y$, ztąd $y=\frac{a-b}{2}=\frac{a}{2}-\frac{b}{2}$. Toiest *liczba mnieysza równa się połowie summy zmnieyszonéy połową różnicy*. Kładąc tę wartość w piérwsze ze zrównań początkowych, będzie $x+\frac{a}{2}-\frac{b}{2}=a$, ztąd $x=a-\frac{a}{2}+\frac{b}{2}=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$. Toiest *liczba większa równa się połowie summy powiększonéy połową różnicy*.

*Zagadnienie II. Pewny spotkawszy ubogich chce im dać po* 5 *groszy, ale mu nie staie groszy* 20; *daie więc po groszy* 4 *i zostaie mu groszy* 4. *Jleż miał przy sobie groszy, i ilu było ubogich.* Szukaną liczbę groszy nazwiymy przez $x$, a liczbę ubogich przez $y$; wypadną zrównania

$$5y=x+20.$$
$$4y=x-4;$$

wzięte z nich wartości na $x$ i z sobą porównane prowadzą do

$$5y-20=4y+4;\quad \text{ztąd}\quad 5y-4y=20+4;\quad y=24.$$

Tę wartość na $y$ podstawiwszy w którekolwiek z dwóch zrównań, znaydziemy $x=100$. Było więc groszy 100, ubogich 24. Wyłożony teraz sposób nazywa się *eliminacyą przez porównanie*.

II. Drugi sposób eliminacyi oparty na tym samym początku nosi nazwisko *eliminacyi przez podstawienie*. Maiąc ilekolwiek zrównań z tyląż ilościami nieznanémi; wyciąga się z piérwszego wartość na iednę z tych ilości i podstawia we wszystkie pozostałe. Ztąd wypadną zrównania, których liczba będzie o iedność mnieysza niż zrównań danych, i liczba wchodzących w nie ilości niewiadomych będzie także o iedność mnieysza. Z wypadkowémi zrówna-



www.rcin.org.pl

niami podobnie postępuiąc, i ten rachunek powtarzaiąc następnie, zmnieyszymy za każdym razem liczbę zrównań i liczbę ilości nieznanych, i naostatek otrzymamy iedno zrównanie z iedną ilością nieznaną. Niech będą trzy zrównania

$$\left.\begin{array}{l} 2x-4y+9z=28 \\ 7x+3y-5z=3 \\ 9x+10y-11z=4 \end{array}\right| \quad \ldots \quad (i);$$

z pierwszego

$$x=\frac{28+4y-9z}{2};$$

podstawiwszy tę wartość w dwa pozostałe, otrzymamy

$$\frac{7(28+4y-9z)}{2}+3y-5z=3,\quad \frac{9(28+4y-9z)}{2}+10y-11z=4$$

czyli
$$\left.\begin{array}{l} 34y-73z=-190 \\ 56y-103z=-244 \end{array}\right| \quad \ldots \quad (k).$$

Pierwsze z tych zrównań daie $y=\frac{73z-190}{34}$; co podstawiwszy w drugie, znaydziemy

$$\frac{56(73z-190)}{34}-103z=-244 \quad \text{czyli} \quad 293z=1172$$

zrównanie z iedną tylko ilością nieznaną $z$. Z niego $z=\frac{1172}{293}=4$. Odkrytą dopiero wartość na $z$ kładąc w pierwsze ze zrównań $(k)$, mamy

$$34y-292=-190,\quad \text{zkąd}\quad y=\frac{292-190}{34}=\frac{102}{34}=3.$$

Maiąc wartości na $y$ i na $z$, kładę ie w pierwszém ze zrównań $(i)$; wypadnie

$$2x-12+36=28,\quad \text{zkąd}\quad x=\frac{28+12-36}{2}=2.$$

Znalezione wartości powinny zawsze *sprawdzać* każde ze zrównań danych; toiest powinny ie przywieść do takiego wyrażenia, w którémby strona pierwsza była zupełnie tą samą liczbą co i druga. Podstawmy, dla doświadczenia, wartości w teraźnieyszym przykładzie otrzymane w zrównanie np. trzecie; będziemy mieli

www.rcin.org.pl

$$18+30-44=4 \quad \text{czyli} \quad 4=4.$$

*Zagadnienie. Bryła mieszaniny złota ze srebrem ma obiętości 12 cali sześciennych, a waży uncyy 100. Wynaleźć, ile pod tą obiętością i wagą zawiera się złota, a ile srebra; wiedząc że ieden cal złota waży uncyy* $12\frac{2}{3}$ *czyli* $\frac{38}{3}$, *a ieden cal srebra waży uncyy* $6\frac{8}{9}$ *czyli* $\frac{62}{9}$. Nazwawszy liczbę cali złota przez $x$, srebra przez $y$; będziemy mieli dwa zrównania

$$x+y=12$$

$$\tfrac{38}{3}x+\tfrac{62}{9}y=100 \quad \text{czyli} \quad 114x+62y=900.$$

Wartość na $x$ wziętą z piérwszego zrównania, toiest $x=12-y$ podstawmy w drugie; wypadnie

$$114(12-y)+62y=900 \quad \text{czyli} \quad 1368-114y+62y=900$$

czyli ieszcze $468=52y$, zkąd $y=\frac{468}{52}=9$. Włożywszy tę wartość w zrównanie piérwsze, otrzymamy $x+9=12$, a zatém $x=3$. Więc do téy mieszaniny wchodzi złota cali sześciennych 3, srebra 9. Łatwo się przekonać że znalezione wartości sprawdzaią oba zrównania.

III. Oba poprzedzaiące sposoby maią w sobie ztąd niedogodność, że prowadzą do zrównań z mianownikami, od których ie potém oswobadzać ieszcze musimy; ale bardzo dobrze służą podówczas, kiedy w zrównaniach z których się wydobywa wartość iakiéy ilości, ta ilość ma iedność spółczynnikiem. Gdy zaś spółczynnik większy iest od iedności; lepiéy używać następuiącego sposobu zwanego *eliminacyą przez dodawanie lub odciąganie*. Ten się zasadza na dwóch początkach, 1*ód* że można pomnożyć zrównanie we wszystkich terminach przez tę samę ilość lub funkcyą; 2*re* że zrównań z iednego pytania wynikaiących odpowiednie strony mogą bydź dodane lub odięte bez naruszenia związku. Żebyśmy poznali iego użycie weźmy naprzód dwa zrównania

$$ax+by=c$$

$$dx-fy=g.$$

Chcąc wyrzucić $x$, i przyyśdź do zrównania zawieraiącego samo $y$; bierze się mnożnik ilości $x$ w drugiém zrównaniu toiest $d$, i przezeń mnoży się zrównanie piérwsze; potém przez mnożnik $a$ téyże ilości w zrównaniu piérwszém mnoży się zrównanie drugie: ztąd wypadną dwa zrównania

www.rcin.org.pl

$$adx+bdy=cd$$
$$adx-afy=ag$$

maiące termin piérwszy z ilością $x$ iednaki. Odciągnąwszy drugie od piérwszego zostanie

$$dby+afy=dc-ag$$

gdzie wchodzi iedna tylko ilość niewiadoma $y$. Gdybyśmy znowu chcieli wyrzucić $y$, a otrzymać zrównanie z samą tylko ilością $x$; trzeba piérwsze ze zrównań danych rozmnożyć przez $f$, drugie przez $b$, co prowadzi do dwóch zrównań

$$afx+bfy=cf,$$
$$bdx-bfy=bg,$$

których drugi termin zawieraiący $y$ iest ten sam, ale z odmiennym znakiem. W tym przypadku zrównania się dodaią; przez co iednaki termin ginie, i otrzymamy

$$afx+bdx=cf+bg$$

zrównanie zamykaiące iednę ilość niewiadoma $x$.

W ogólności maiąc zrównań liczbę $n$ z tylaż ilościami nieznanémi; ieżeli sposobem dopiéro podanym kombinować będziemy piérwsze ze wszystkiemi pozostałémi dla wyrzucenia iednéy któréykolwiek ilości; wypadnie zrównań $n-1$ bez téy ilości. Z tych znowu zrównań wyrzucimy drugą ilość, i otrzymamy zrównań $n-2$ o tyluż ilościach niewiadomych. Tak daléy zmnieyszaiąc coraz liczbę zrównań, przyydziemy naostatek do iednego z iedną ilością nieznaną. Potém się postępuie iak w sposobach poprzedzaiących.

*Zagadnienie. Pszenicy korcy* 10, *żyta korcy* 15, *owsa korcy* 6 *kosztowało złotych* 582. *Drugi raz pszenicy korcy* 25, *żyta korcy* 36, *owsa korcy* 18 *kosztowało złotych* 1464. *Trzeci raz pszenicy korcy* 8, *żyta korcy* 10, *owsa korcy* 6, *kosztowało złotych* 444. *Za każdym razem cena zboża była iednaka. Po ileż złotych wypada korzec pszenicy, po ile żyta, i po ile owsa?*

Nazwiymy szukane ceny korca pszenicy, żyta i owsa przez $x$, $y$, $z$; będziemy mieli zrównania

$$10x+15y+6z=582$$
$$25x+36y+18z=1464$$
$$8x+10y+6z=444.$$

Wyrzucam naprzód $x$ z dwóch piérwszych zrównań: naten

www.rcin.org.pl

koniec mnożę piérwsze przez 25, drugie przez 10; wypadnie

$$250x+375y+150z=1455o$$
$$250x+360y+180z=14640.$$

Odciągam od ostatniego przedostatnie; zostanie

$$-15y+30z=90 \quad \text{czyli} \quad -y+2z=6 \quad . \; . \; . \; (l).$$

Wyrzucam powtóre $x$ z piérwszego zrównania i z trzeciego: w tym celu mnożę piérwsze przez 8, trzecie przez 10, i wypadki odciągam;

$$80x+120y+48z=1656$$
$$80x+100y+60z=1440$$
$$- \quad - \quad - \quad -$$
$$20y-12z=216 \quad \text{czyli} \quad 5y-3z=54 \quad . \; . \; (m).$$

Przyszedłem do dwóch zrównań ($l$) i ($m$) zawieraiących dwie ilości nieznane $y$, $z$. Wyrzucam z nich $z$, dodaiąc do zrównania ($l$) rozmnożonego przez 3 zrównanie ($m$) pomnożone przez 2: znaydę

$$7y=126, \quad \text{zkąd} \quad y=\frac{126}{7}=18.$$

Odkrytą wartość na $y$ podkładam w zrównaniu ($l$); wypadnie

$$-18+2z=6 \quad \text{zkąd} \quad z=\frac{6+18}{2}=12.$$

Wartości na $y$ i $z$ podstawiwszy w piérwszém ze zrównań danych, otrzymam

$$10x+270+72=582, \quad \text{zkąd} \quad x=\frac{582-270-72}{10}=24.$$

Zatém korzec pszenicy kosztował złotych 24, żyta 18, owsa 12.

Jeżeli w dwóch zrównaniach, spółczynniki ilości, którą chcemy wyrzucić, maia spólny mnożnik; jak np. w piérwszém i drugiém zrównaniu poprzedzaiącego zagadnienia spółczynniki 10 i 25 znacząc to samo $2\times5$ i $5\times5$ maią spólnym mnożnikiem liczbę 5: wtedy zamiast mnożenia zrównań przez całe spółczynniki, można mnożyć przez ich

www.rcin.org.pl

mnożniki zostaiące po odłączeniu spólnego. Toiest można pierwsze zrównanie rozmnożyć przez 5, drugie przez 2, i wypadną zrównania

$$50x+75y+30z=2910,$$
$$50x+72y+36z=2928,$$

które przez odeymowanie prowadzą do

$$-3y+6z=18 \quad \text{czyli} \quad -y+2z=6.$$

Trafiliśmy na otrzymane pierwey zrównanie ($l$) rachunkiem od poprzedzaiącego łatwieyszym, bo na mnieyszych liczbach odbytym.

W niektórych szczególnych przypadkach droga eliminacyi może bydź skrócona. J tak niech będą cztery zrównania

$$2x-3y+2z=13$$
$$4u-2x=30$$
$$4y+2z=14$$
$$5y+3u=32$$

zawieraiące cztery ilości nieznane $x$, $y$, $z$, $u$. Tu łatwo postrzedz, że wyrzuciwszy $z$ ze zrównań pierwszego i trzeciego, znaydziemy na wypadek zrównanie z dwiema ilościami $x$, $y$, ieżeli znowu wyrzucimy $u$ ze zrównań drugiego i czwartego, przyydziemy także do zrównania z témi samémi ilościami nieznanémi $x$, $y$. Poczém z dwóch wypadkowych zrównań eliminuiąc $x$, otrzymamy zrównanie o iedney tylko ilości $y$. Po odbytym całym rachunku pokaże się że $y=1$, $x=3$, $u=9$, $z=5$.

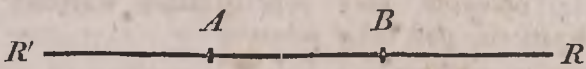
### § 11. *Roztrząsanie zagadnień. Tłumaczenie wyrażeń* $\frac{A}{0}$ *i* $\frac{0}{0}$.

Widzieliśmy w §§*ch* 1 i 8, że gdy zagadnienie rozwiążemy ogólnie, toiest wyobrażaiąc wielkości dane przez litery, mamy iuż tém samém odpowiedź na wszystkie iego przypadki szczególne, wynikłe z nadawania literom rozmaitych wartości liczebnych. Ocenić w każdym razie wartość ilości niewiadomych i wytłumaczyć osobliwe wypadki do

www.rcin.org.pl

iakich częstokroć przychodzimy, stanowi to, co nazywaią *roztrząsaniem zagadnienia*. Poznaliśmy (§ 9) co rozumieć należy przez wartości odiemne: ale ieszcze trafiaią się inne okoliczności w szczególnych wypadkach, które nauczyć się trzeba poymować i tłumaczyć. Następuiące pytanie zawiéra wszystkie zdarzenia, iakie można spotykać w roztrząsaniu zagadnień piérwszego stopnia.

*Dway podróżni wyieżdżaią w tym samym czasie z dwóch punktów* A *i* B *linii* AB *oddalonych od siebie na sążni* a, *i dążą w iedne stronę ku* R. *Ten, który iedzie od* A, *przebywa na godzinę sążni* m; *drugi iadący od* B *przebywa w godzinę sążni* n. *W iakieyże odległości od punktów* A *i* B *ieden drugiego dogoni?*




Niech $R$ będzie punktem ich złączenia: nazwiymy przez $x$, $y$ odległości nieznane $AR$ i $BR$ wyrażone w sążniach. Wypada zaraz piérwsze zrównanie

$$x - y = a.$$

Drugie zrównanie wyprowadzimy z tosamości czasów, w których podróżni po wyiechaniu od $A$ i $B$ powinni przybyć na punkt $R$. Ponieważ iadący od $A$ potrzebuie godziny na sążni $m$, zatém na sążni $x$ będzie potrzebował godzin $\frac{x}{m}$, co wypada z proporcyi $m : x = 1 : \frac{x}{m}$. Drugi podróżny uieżdżaiący po sążni $n$ w godzinie, na przebycie sążni $y$ będzie potrzebował godzin $\frac{y}{n}$. Liczby godzin $\frac{x}{m}$, $\frac{y}{n}$, będąc wyrażeniem iednegoż czasu, daią zrównanie

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} \quad \text{czyli} \quad nx - my = 0.$$

Kombinuiąc te zrównania z sobą podług znaiomych sposobów eliminacyi, otrzymamy

www.rcin.org.pl

$$x=\frac{am}{m-n},\qquad y=\frac{an}{m-n}.$$

Dopóki $m$ będziemy brali za większe od $n$, a tém samém $m-n$ za dodatne, póty wartości $x$, $y$ będą dodatne, i odpowiedzą wyrażeniu pytania w znaczeniu ścisłém. Jakoż rzecz iasna, że gdy podróżny z $A$ iedzie prędzéy niżeli z $B$; piérwszy przebywa co moment drogę większą niż drugi; co moment odległość między nimi staie się mnieysza, nareszcie niknie, i wtedy oba podróżni muszą się znaydować na iednym punkcie linii po któréy biegną.

*Odpowiedź odiemna.* Lecz gdy założymy że $m$ iest mnieysze od $n$, a tém samém $m-n$ odiemne; będą odiemne obie poprzedzaiące wartości: możemy ie wystawić pod taką postacią

$$x=-\frac{am}{n-m},\qquad y=-\frac{an}{n-m}\quad\ldots\ (n).$$

Zeby wytłumaczyć te wypadki, uważmy iż iest niepodobieństwo, aby podrożni mogli się złączyć dążąc w stronę $R$; gdyż podróżny iadący od $B$ postępuie prędzéy niż iadący po nim od $A$; zatém ich odległość coraz bardziéy rośnie. Ale założywszy że zmierzaią w stronę przeciwną ku $R'$; ponieważ wszystkie okoliczności staią się naówczas te same iak w przypadku $m$ większego od $n$, rzecz iasna, że podróżni ziadą się w pewnym punkcie $R'$ na przedłużeniu $BA$. Kiedy więc $n$ iest większe od $m$, żeby zadanie nie było fałszywe, trzeba ie tak odmienić: *Dway podróżni wyieżdżaią razem od* B *i* A *dążąc ku* R': *piérwszy przebywa na godzinę sążni* n, *drugi sążni* m. *W chwili wyiazdu odlegli są od siebie na sążni* a. *Gdzież się z sobą złączą?*

Nazywaiąc, iak przedtém, $x$ odległość punktu $A$ od punktu złączenia $R'$, a $y$ odległość $B$ od tegoż punktu, będziemy mieli zrównania

$$y-x=a,\qquad \frac{x}{m}=\frac{y}{n}$$

które po rozwiązaniu dadzą

www.rcin.org.pl

$$x=\frac{am}{n-m}, \qquad y=\frac{an}{n-m}.$$

Te wartości nie różnią się od ( $n$ ) tylko samym znakiem. Ztąd widzimy, że w teraźnieyszém zadaniu wartości odiemne oznaczaią niepodobieństwo aby się podróżni mogli złączyć, ale razem pokazuią, gdzieby przypadł punkt złączenia, ieżeliby ci podróżni obrócili swóy bieg w stronę przeciwną.

Gdybyśmy uważali podróżnych nie od punktów $A$ i $B$ ruszaiących, ale będących w biegu od czasu nieokreślonego, i że w téy saméy chwili, ieden przybywa na punkt $A$, drugi na punkt $B$; w takim razie złączenie ich albo nastąpi po przeyściu za punkta $A$ i $B$, albo iuż nastąpiło przed ich przybyciem do tych punktów; podług tego iak $m$ iest większe albo mnieysze od $n$. Naówczas wyraziwszy przez $x$, $y$ odległości $AR$, $BR$, kiedy po rozwiązaniu zrównań trafimy na wartości dodatne; te nam oznaczą punkt $R$; ieżeli na odiemne, te nam wskażą punkt $R'$.

*Odpowiedź nieskończenie wielka.* Niech teraz $m=n$: ztąd $m-n=0$. Wartości na $x$, $y$ wezmą postać

$$x=\frac{am}{0}, \qquad y=\frac{an}{0}.$$

Trzeba wytłumaczyć te nowe wypadki. Wróciwszy się do wyrażenia pytania, postrzegamy zupełne niepodobieństwo uczynić mu zadosyć, toiest aby podróżni dążąc w którąkolwiek stronę po linii $AB$ mogli się z sobą gdzie złączyć: gdyż obadwa będąc w początku oddaleni na sążni $a$, i iadąc z równą szybkością, muszą zachowywać zawsze iednakową między sobą odległość. Można przeto uważać wypadek $\frac{am}{0}$, równie iak odpowiedzi odiemne, za znak sprzeczności warunków. W rzeczy saméy zrównania z warunków wynikłe $x-y=a$, $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}$, w przypadku $m=n$, staią się $x-y=a$, $x-y=0$ widocznie z sobą niezgodne. Wypadki $x=\frac{am}{0}$, $y=\frac{an}{0}$ nazywaią się wartościami nieskoń-



www.rcin.org.pl

*czenie wielkiemi* albo *nieskończonémi;* co pochodzi z następuiącéy uwagi:

*Granice ubywania i wzrostu wielkości.* Ponieważ $o$ iest mnieysze od każdéy wielkości; można ié przeto wziąć za znak na cechowanie ostatecznego stanu ilości, która zdolna iest pomnieyszać się do takiego stopnia iak sami zechcemy. Wiemy znowu, że ułamek tém iest większy, im będzie większy licznik względem swego mianownika. Wziąwszy przeto za licznik iakąkolwiek liczbę stałą, a mianownik coraz zmnieyszaiąc, będzie się on coraz więcéy razy mieścił w liczniku; i wartość ułamku będzie coraz większa: posunąwszy więc myślą mianownik do ostatecznéy małości, wartość ułamku przewyższy wszelką liczbę naznaczyć się mogącą. Toiest, kiedy iakiemukolwiek licznikowi $A$ położymy za mianownik ostatnią granicę ubywania wielkości czyli $o$, ułamek $\frac{A}{o}$ stanie się nieskończenie wielkim, i może służyć za znak do cechowania ostatecznéy granicy wzrostów ilości. Wyraża się także nieskończoność przez znak liczebny ośm leżący poziomo $\infty$: ztąd wielkość mnieysza od wszelkiéy naznaczyć się mogącéy czyli $o$ może się ieszcze wystawić przez $\frac{A}{\infty}$; bo ułamek tém iest mnieyszy, im iego mianownik będzie względem licznika większy. Tak więc $o$ i $\frac{A}{\infty}$ są cechy iednoznaczne; podobnież i cechy $\frac{A}{o}$ i $\infty$. Piérwsze dwie są granicą ubywania, drugie granicą wzrostu wielkości.

*Odpowiedź nieoznaczona.* Kiedy zachowamy warunek $m=n$, a przydamy ieszcze, że $a=o$; dwie wartości staną się

$$x=\frac{o}{o},\ y=\frac{o}{o}.$$

Jakież znaczenie mamy przywiązać do tego nowego wypadku? Jdąc z założonémi warunkami do wyrażenia zadania; widzimy że podróżni iadą z równą szybkością; i z tego samego punktu ruszaią; rzecz zatém iasna, iż muszą bydź zawsze z sobą razem; a następnie każdy punkt linii po któréy biegną iest punktem ich złączenia. Ztąd, nie można wskazać żadnych szczególnych odległości maiących stanowić wartość $x$, $y$; bo każda odległość uczyni zadosyć pytaniu. To więc pytanie, mogąc się zaspokoić wszelką odpowiedzią, musi bydź oczywiście nieoznaczone. O czém też przekonywaią nas i same zrównania, które na teraźnieyszy przypadek biorą postać $x-y=0$, $\frac{x}{m}=\frac{y}{m}$. Pierwsze daie $x=y$; ta wartość podstawiona w drugiém czyni $\frac{y}{m}=\frac{y}{m}$. Ostatnie zrównanie, maiąc oba członki zupełnie te same zostanie sprawdzone przez wszelką wartość iakąbyśmy nadali dla $y$; nie może więc téy ilości niewiadoméy oznaczyć. Prócz tego oczywista iest, że drugie zrównanie $\frac{x}{m}=\frac{y}{m}$ przywodząc się do $x=y$, nic więcéy nie wyraża tylko to co i piérwsze. Wypada iedynie z piérwszego i drugiego, że podróżni będą zawsze z sobą razem; bo odległości $x$, $y$ zaczynaią się obie od punktu $A$ i są równe, nie będąc niczém co do swoiéy wielkości oznaczone. Kształt przeto $\frac{0}{0}$ iest w tym razie cechą ilości nieoznaczonéy. Powiadamy *w tym razie;* są bowiem przypadki w których tego nie wyraża; ale tez naówczas z innego źródła wypływa. Ułamek np $\frac{a(a^2-b^2)}{b(a-b)}$ zamienia się na $\frac{0}{0}$ uczyniwszy $a=b$; lecz gdy go przywiedziemy do nayprostszéy postaci przez odrzucenie mnożnika $a-b$ spólnego licznikowi i mianownikowi znaydziemy $\frac{a(a+b)}{b}$, co się staie równe $2a$ kiedy $a=b$. Nie tak się rzecz ma z wartościami $x$, $y$, powyżéy znalezionémi, które do prostszego wyrażenia przyprowadzić się nie dadzą. Jle razy więc trafimy na wyrażenie przechodzące w $\frac{0}{0}$; nim postanowimy o iego wzrtości', należy wprzód śledzić czy mianownik i licznik nie maią spólnego mnożnika, który gi-

www.rcin.org.pl

nąc czyni oba terminy ułamku w iednym czasie zerem: a usunąwszy ten mnożnik, otrzymamy wartość danego wyrażenia.

Na koniec zatrzymawszy w rostrzasanèm od nas zagadnieniu warunek $a=0$, kiedy weźmiemy prędkości podróżnych nierówne, toiest $m$ większe lub mnieysze od $n$; wypadną wartości $x=0$, $y=0$. W rzeczy samèy podróżni, wyieżdżaiąc z iednegoż punktu, a maiąc odmienne prędkości, nie mogą oczywiście być z sobą razem tylko w punkcie ich wyiazdu.

Poprzedzaiące założenia są iedyne, które prowadzą do wypadków godnieyszych uwagi; i pokazuią nam dostatecznie iakim sposobem algebra odpowiada wszystkim okolicznościom w zadaniu obiętym.

## § 12. *O pytaniach nieoznaczonych.*

W pytaniach dotąd rozwiazywanych, warunki dostarczały nam tyle zrównań, ile było ilości nieznanych. Takie pytania przyymować nie mogły więcèy odpowiedzi nad iednę, i dla tego zowią się *pytaniami oznaczonèmi* (problèmes determinés). Lecz gdy z warunków wypada mnièy zrównań a niżeli iest ilości do ocenienia; naówczas pytanie, iak zaraz obaczymy, da się zaspokoić nieskończoną liczbą coraz innych odpowiedzi, i z tèy przyczyny pytania takowego gatunku noszą nazwisko *nieoznaczonych* (problèmes indeterminés). Naprzykład: *znaleźć dwie liczby którychby summa była* 10. Wyraziwszy te liczby przez $x$, $y$, będziemy mieli zrównanie

$$x+y=10 \quad . \quad . \quad (b),$$

z którego

$$x=10-y.$$

Tu nadaiąc podług upodobania różne wartości na $y$, otrzymywać będziemy odpowiedne na $x$; i tak kiedy $y=1$, wtenczas $x=9$; ieżeli $y=2$, wtedy $x=8$; biorąc $y=\frac{2}{5}$, będzie $x=9+\frac{3}{5}$; itd. Układy wartości ($y=1$, $x=9$); ($y=2$, $x=8$); ($y=\frac{2}{5}$, $x=9+\frac{3}{5}$); itd; są odpowiedziami na dane pytanie, których oczywiście można mieć tyle, ile sami zechcemy. Zamiast brania wartości arbitralnych dla $y$

www.rcin.org.pl

można przydać ieden iakikolwiek warunek, albo, co na to samo wychodzi, napisać iedno iakiekolwiek zrównanie byleby nie przeciwne pierwszemu. np. zrównanie $x+y=4$ byłoby niezgodne z ( $o$ ); lecz wolno założyć że

$$x-y=4 \quad . \quad . \quad . \quad (p),$$

albo

$$2x+3y=29 \quad . \quad . \quad (q),$$

albo

itd.

W pierwszym razie ze zrównań ( $o$ ) i ( $p$ ) wypadłoby $x=7$, $y=3$; w drugim, zrównania ( $o$ ) i ( $q$ ) dałyby $x=1$, $y=9$. Każdy takowy układ wartości odpowie danemu pytaniu; bo muszac sprawdzać zrównania z których wynika, uczyni zadosyć i zrównaniu dowolnemu i zrównaniu koniecznemu ( $o$ ).

Postrzeżenia na tém szczególném pytaniu zrobione można tak w ogólności wyrazić. *W każdém pytaniu nieoznaczoném wolno iest liczbę zrównań koniecznych dopełnić arbitralnémi, tak aby wszystkich było tyle, ile iest ilości niewiadomych: albo też wolno przewyższaiącey liczbie ilości nieznanych nadadź wartość podług upodobania.* Gdyby np. warunki pytania przywiodły do trzech zrównań

$$7x-2z+3u=17$$
$$4y-2z+t=11$$
$$5y-3x-2u=8$$

z pięcią ilościami nieznanémi $x$, $y$, $z$, $u$, $t$; moglibyśmy ieszcze założyć dwa iakiekolwiek warunki podług woli obrane, np. że

$$4y-3u+2t=9$$
$$3z+8u=33;$$

bo z tych pięciu zrównań wyciągniony układ wartości ($x=2$, $y=4$, $z=3$, $u=3$, $t=1$) sprawdzaiąc ie wszystkie, sprawdza tem samem trzy dane, a następnie odpowiada pytaniu. Zamiast przybierania dwóch zrównań dowolnych, można dwóm ilościom niewiadomym naznaczyć wartość podług upodobania, a trzy pozostałe ocenić za pomocą

www.rcin.org.pl

trzech zrównań danych. Położywszy np. $y=6$, $u=5$, znaleźlibyśmy $x=4$ $z=13$, $t=13$. Układ tych pięciu wartości uczyni zadosyć trzem danym zrównaniom, i będzie drugą odpowiedzią na to samo pytanie. Jeżeli znowu naznaczymy $x=4$, $y=10$, wypadnie $z=28$, $u=15$, $t=27$, i to będzie odpowiedź trzecia, itd.

## § 13. *Sposób eliminacyi oparty na własnościach pytań nieoznaczonych.*

Pokazaliśmy w §*fie* poprzedzaiącym, że maiąc w pytaniu mniey zrównań niż ilości nieznanych; wolno założyć warunki arbitralne, któreby nam dostarczały nowych związków i nowych zrównań tyle, ile związków i zrównań koniecznych w tym pytaniu brakuie. Idzie zatém, że gdybyśmy w zagadnienie nawet oznaczone wciągnęli iakimkolwiek sposobem nowe nieznane ilości bez naruszenia związków; wyrobilibyśmy sobie prawo zakładania warunków i przypuszczeń upodobanych: a z tych przypuszczeń, iako zawisłych od woli, moglibyśmy wybrać albo takie, które przywiążą nas do pewnéy drogi w dociekaniu iaką sobie sami iśdź zamierzymy, albo nawet takie ktore dadzą natychmiast odpowiedź na zagadnienie. Ta sztuka rachunku, niezmiernie rozległego użycia w badaniach matematycznych, odkrywa nam często sposoby proste i łatwe, z iakichbyśmy bez iéy pomocy korzystać, a czasem nawet ani pytania rozwiązać nie mogli. Żeby poznać w przykładzie iéy użycie, przystosuiemy ią teraz do eliminacyi, którąśmy wyżéy podług innych sposobów odbyli.

Niech będą dwa zrównania

$$ax+by=c, \qquad dx+fy=g$$

z dwiema ilościami nieznanémi $x$, $y$. Możemy wprowadzić trzecią nieznaną $m$, mnożąc przez nię oba członki pierwszego zrównania, przez co związek żadnéy nie poniesie odmiany, iakabykolwiek była wielkość $m$; i otrzymamy $max+mby=mc$. Od tego zrównania odiąwszy drugie, wypadnie następuiące

$$(ma-d)x+(mb-f)y=mc-g \quad . \quad . \quad . \quad (r)$$

www.rcin.org.pl

które powstaiąc z dwóch danych, osobnego związku nie wyraża. Ponieważ ilość $m$ może mieć wszelką wartość, więc na iéy oznaczenie wolno nam przypuścić warunek, iaki się podoba: aże naszym celem i potrzebą iest otrzymać zrównanie któreby nie zawiarało iednéy z ilości nieznanych np. $x$; osiągniemy ten cel, założywszy warunek że

$$ma-d=0$$

daiący zrównanie zwane *warunkowém*: po czém zostanie

$$(mb-f)y=mc-g$$

zrównanie z samą ilością $y$. Wziąwszy ztąd $y=\frac{mc-g}{mb-f}$, kiedy za $m$ podstawimy wartość $\frac{d}{a}$ wydobytą ze zrównania warunkowego, znaydziemy

$$y=\frac{cd-ag}{bd-af}$$

wyrażone przez same ilości znane. Gdybyśmy znowu chcieli ze zrównania ( $r$ ) wyrzucić $y$, założyćby należało warunek że $mb-f=0$; zostanie naówczas

$$(ma-d)x=mc-g,$$

zkąd $x=\frac{mc-g}{ma-d}$: w to wyrażenie kładąc wartość $\frac{f}{b}$ którą przypuszczony warunek naznacza dla $m$, będzie

$$x=\frac{cf-bg}{fa-bd}.$$

Maiąc trzy zrównania

$$ax+by+cz=d,\quad fx+gy+hz=k,\quad mx+ny+pz=q;$$

ponieważ teraz przychodzi wyrzucić dwie razem ilości nieznane, należy wprowadzić dwie nowe nieznane, któreby nam dały prawo przypuszczenia dwóch potrzebnych warunków. Pomnóżmy więc piérwsze zrównanie przez ilość nieznaną $r$, drugie przez $s$, i od ich summy odciągniymy trzecie; wypadnie

$$(ra+sf-m)x+(rb+sg-n)y+(rc+sh-p)z=$$
$$rd+sk-q\,; \quad . \quad . \quad (s)$$

www.rcin.org.pl

chcąc teraz $y$, $z$, wyrzucić razem, uczynimy

$$\left.\begin{array}{l} rb+sg-n=o \\ rc+sh-p=o \end{array}\right| \quad . \quad . \quad (t);$$

zostanie

$$x=\frac{rd+sk-q}{ra+sf-m}.$$

Dwa zrównania warunkowe ( $t$ ) służą do wynalezienia $r$ i $s$, które rozwiązuiąc podług poprzedzaiącego przykładu rozmnożymy piérwsze z nich przez ilość nieznaną $t$, a potém odciągnąwszy od niego drugie otrzymamy

$$(bt-c)r+(gt-h)s-nt+p=o:$$

żeby ztąd wyrzucić $s$, założymy $gt-h=o$, co daie $t=\frac{h}{g}$;

zostanie $r=\frac{nt-p}{bt-c}=\frac{nh-pg}{bh-cg}$: żeby znowu wyrzucić $r$, uczynimy $bt-c=o$, co daie $t=\frac{c}{b}$; zostanie $s=\frac{nt-p}{gt-h}=\frac{nc-bp}{cg-bh}=\frac{bp-nc}{bh-cg}$. Te dwie wartości za $r$, $s$, włożywszy w zrównanie na $x$, wypadnie

$$x=\frac{dnh-dpg+kpb-knc+qcg-qbh}{anh-apg+fpb-fnc+mcg-mbh}.$$

Dla znalezienia wartości na $y$, trzeba ze zrównania ( $s$ ) wyrzucić $x$, $z$, przez założenie warunków $ra+sf-m=o$, $rc+sh-p=o$; zostanie

$$(rb+sg-n)y=rd+sk+q\,, \quad \text{zkąd} \quad y=\frac{rd+sk-q}{rb+sg-n};$$

w ten wypadek należy ieszcze włożyć za $r$, $s$ ich wartości wzięte ze zrównań warunkowych: naostatek znaydziemy

$$y=\frac{aqh-kap+dfp-gfc+kcm-dmh}{anh-apg+fpb-fnc+mcg-mbh}.$$

Jlość pozostałą $z$ ocenimy z któregokolwiek zrównania danego, podstawiwszy w niém na mieyscu $x$, $y$, odkryte wartości: otrzymamy

www.rcin.org.pl

$$=\frac{ank-aqg+fqb-fnd+mdg-mbk}{anh-apg+fpb-fnc+mcg-mbh}.$$

Z tych dwóch przykładów łatwo poznaiemy, iak teraźnieyszego sposobu eliminacyi użyć do wszelkiéy liczby zrównań.

*Zagadnienie. Pewny podiął się przewieźć naczynia szklanne dwoiakiéy wielkości, z warunkiem że za przewiezienie każdéy sztuki w całości weźmie trzeci procent od iéy ceny, a za każdą stłuczoną nic nie weźmie i ieszcze zwróci iéy wartość. Raz mu dano do przewiezienia* 1002 *sztuk większych i* 2003 *sztuk mnieyszych: on stłukł z piérwszych* 2, *z drugich* 3, *i wziął złotych* 113. *Drugi raz dano do przewiezienia sztuk większych* 3004, *mnieyszych* 4005: *on stłukł piérwszych* 4, *drugich* 5 *i wziął* 287 *złotych. Po ileż złotych wypada na cenę każdéy sztuki większéy i po ile mnieyszéy?* Nazwawszy przez $x$ cenę sztuki większéy, przez $y$ mnieyszéy, będziemy mieli zrównania

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1000.3x}{100}+\frac{2000.3y}{100}-2x-3y=113\\ \frac{3000.5x}{100}+\frac{4000.5y}{100}-4x-5y=287\end{array}\right|\text{ czyli }\left|\begin{array}{l}28x+57y=113\\ 86x+115y=287,\end{array}\right.$$

z których po rozwiązaniu wypadnie $x=2$, $y=1$.

*Zagadnienie. Za pszenicy korcy* 5, *żyta kocy* 4, *owsa korcy* 3 *wzięto złotych* 55. *Drugi raz za pszenicy korcy* 7, *żyta korcy* 3, *owsa korcy* 4 *wzięto złotych* 63. *Trzeci raz za pszenicy korcy* 6, *żyta korcy* 2, *owsa korcy* 8 *wzięto złotych* 64. *W drugim razie pszenica była o złoty tańsza, owies o złoty droższy, cena żyta taż sama. W trzecim razie cena pszenicy i owsa była ta sama iak w piérwszym, a żyto było tańsze o dwa złote. Po czemuż w piérwszéy przedaży wypada korzec każdego gatunku zboża?* Nazwawszy cenę pszenicy w piérwszym razie przez $x$, żyta przez $y$, owsa przez $z$; wypadną zrównania

$$\left.\begin{array}{c}5x+4y+3z=55\\ 7(x-1)+3y+4(z+1)=63\\ 6x+2(y-2)+8z=64\end{array}\right|\text{ czyli }\left|\begin{array}{l}5x+4y+3z=55\\ 7x+3y+4z=66\\ 6x+2y+8z=68,\end{array}\right.$$

z których po rozwiązaniu znaydziemy $x=6$, $y=4$, $z=3$.



www.rcin.org.pl

*Zagadnienie. Maiąc trzy mieszaniny metalliczne: iednę, któréy każdy funt zawiera* 14 *łótów srébra*, 6 *miedzi i* 12 *cyny; drugą któréy każdy funt zawiera* 24 *łótów srébra*, 6 *miedzi i* 2 *cyny; trzecią któréy każdy funt ma* 8 *łótów srébra*, 14 *miedzi i* 10 *cyny. Po wieleż łótów potrzeba wziąć z każdéy mieszaniny na złożenie funta mieszaniny czwartéy, któraby miała* 16 *łótów srébra*, $7\frac{1}{2}$ *miedzi*, $8\frac{1}{2}$ *cyny*? Niech $x$ wyraża liczbę łótów wziąć się maiących z piérwszéy mieszaniny, $y$ z drugiéy, $z$ z trzeciéy. Ponieważ łóty $x$, $y$, $z$, złożą funt maiący 16 łótów srébra, $7\frac{1}{2}$ miedzi, $8\frac{1}{2}$ cyny; przeto ilość srébra zawarta w $x$, $y$, $z$, powinna się równać 16 łótom, ilość miedzi powinna bydź równa $7\frac{1}{2}$, ilość cyny powinna bydź równa $8\frac{1}{2}$. Kiedy funt piérwszéy mieszaniny ma srébra 14 łótów, więc ieden łót ma $\frac{14}{32}$ łóta, a łóty $x$ maią srébra $\frac{14}{32}x$. Podobnie łóty $y$ maią srébra $\frac{24}{32}y$, łóty $z$ maią $\frac{8}{32}z$. Ztąd $\frac{14}{32}x+\frac{24}{32}y+\frac{8}{32}z=16$. Drugie zrównanie wypadnie z porównania ilości miedzi; trzecie z porównania ilości cyny. Te zrównania uwolnione od mianowników i uproszczone okażą się pod kształtem

$$7x+12y+4z=256,\quad 3x+3y+7z=120,\quad 6x+y+5z=136,$$

i po rozwiązaniu dadzą $x=16$, $y=10$, $z=6$.

*Uwaga*. Powiedzieliśmy, że gdy liczba zrównań równa się liczbie ilości nieznanych; pytanie iest oznaczone: przydamy tu ieszcze, iż koniecznie potrzeba, aby każde z tych zrównań wyrażało inny związek, toiest aby iedno z nich którekolwiek nie wypadało z innych za pomocą odmian iakie wolno czynić w zrównaniach: bo inaczéy do ocenienia stałego ilości niewiadomych przyyśdź z nich nie będzie można. J tak np. gdyby iakie pytanie pzzywiodło nas do dwóch zrównań

$$6x+2y-16=0,\quad 3x+y-8=0;$$

wyrzuciwszy $x$ przez *porównanie*, znaydziemy

$$\frac{16-2y}{6}=\frac{8-y}{3} \quad \text{czyli} \quad \frac{8-y}{3}=\frac{8-y}{3}$$

zrównanie, które zamykaiąc z obudwóch stron też same ilości z iednakowemi znakami, nazywa się *tosame* (équation identique). Nie możemy z niego ocenić ilości $y$, bo każda liczba na iéy mieyscu użyta sprawdzi to zrównanie.

Wpadliśmy zaś na takie zrównanie dla tego, że drugie z danych wyraża ten sam związek co i piérwsze, na które się zupełnie zamieni po rozmnożeniu swoich terminów przez liczbę 2. Na podobnebyśmy trafili zdarzenie w zrównaniach

$$2x+3y-3z=4,\quad 3x-2y+5z=2,\quad 5x+3y+2z=6,$$

których iest trzy na pozór, a w istocie dwa; bo ostatnie wypada z dwóch piérwszych przez dodanie w nich stron sobie odpowiadaiących.

Rostrząsaliśmy dotąd dwa przypadki pytań stopnia piérwszego. *Jeden*, kiedy z warunków tyle wypada związków, ile iest ilości nieznanych: *drugi*, gdy iakiéy liczby związków brakuie. Wystawić sobie można ieszcze *trzeci*, kiedy liczba zrównań większa iest od liczby ilości niewiadomych. Gdyby np. nieznanych ilości było $m$, a zrównań $m+n$; oceniwszy te ilości podług sposobów wyżéy wyłożonych ze zrównań $m$, i odkryte wartości podstawiwszy w pozostałe zrównania $n$; ieżeli tym ostatnim stanie się zadosyć, będzie to znakiem że wszystkie warunki pytania są z sobą zgodne; inaczéy pytanie będzie fałszywe, i nie zaspokoi się żadną odpowiedzią. Przykład. *Znaleźć dwie liczby, którychby summa była* 12, *różnica* 4, *a wieloraz* 2. Nazwawszy te liczby przez $x$, $y$; będziemy mieli trzy zrównania $x+y=12$, $x-y=4$, $\frac{x}{y}=2$. Z dwóch piérwszych wyciągniemy $x=8$, $y=4$. Te wartości wprowadzone w zrównanie trzecie uczynią mu zadosyć. Przeto warunki teraźnieyszego zagadnienia nie są w niczém sobie przeciwne i mogą bydź wszystkie razem spełnione. Lecz gdyby trzeci warunek wymagał, aby wieloraz liczb szukanych był 3, a tém samém gdyby trzecie zrównanie było $\frac{x}{y}=3$: iuż by to, czego żąda pytanie, było nie podobne; bo liczby 8 i 4, czyniące zadosyć dwóm piérwszym zrównaniom, trzeciego nie sprawdzaią.

www.rcin.org.pl

# ROZDZIAŁ DRUGI.

## Z ODKRYTYCH PRAW NA RÓŻNE POTĘGI I SPOSOBÓW OBCHODZENIA SIĘ Z NIEMI W ROZMAITYCH DZIAŁANIACH WYDOBYWA SIĘ ROZWIĄZANIE ZRÓWNAŃ STOPNIA DRUGIEGO.

---

### § 1. *Sposoby rozwiązania zrównań dotąd wyłożone nie mogą przyprowadzić do ocenienia ilości niewiadomych nacechowanych wykładnikami.*

Wszystkie zrównania z wielą ilościami nieznanémi, dotąd od nas uważane, były zawsze takiego wzoru

$$ax+by+cz+\;.\;\;.\;\;.\;+k=0,$$

gdzie w każdym terminie zawieraiącym ilość niewiadomą, ta ilość była mnożona przez same ilości znane. Łatwo atoli poymuiemy, że pytanie może przez swoie warunki przyprowadzić i do takich zrównań, w których ilość nieznana będzie mnożona przez drugą ilość niewiadomą albo też przez samę siebie: wtedy wypadną do rozwiązania np. następuiące wzory

$$xy+ay+b=0,\quad \text{lub}\quad ax^2+bx+c=0,\quad \text{lub itd.}$$

Zastanowić się nam przeto należy, czyli prawidła rozwiązania, któreśmy podali w rozdziale pierwszym, są wystarczaiące i dla zrównań teraźnieyszego rodzaiu. Przypuśćmy, że pytanie iakie przywodzi do dwóch następuiących zrównań

$$xy+by=a,\quad y=bx:$$

kładąc w piérwsze wartość na $y$ wziętą z drugiego, otrzymamy

$$bx^2+b^2x=a.$$

To zrównanie zamyka iednę tylko ilość nieznaną $x$, ale swoią postacią bardzo się różni od wzorów, które nas dotąd zatrudniały; bo w tamtych ilość niewiadoma nigdy mnożnikiem samey siebie nie była. Na iego rozwiązanie używaiąc sposobów w rozdziale poprzedzaiącym wyłożonych, okażą się wszystkie bezskuteczne. Gdyby nawet nie wchodził termin $b^2x$; ieszcze i zrównania $bx^2=a$ rozwiązać nie potrafimy: chociaż możemy ztąd otrzymać $x^2=\frac{a}{b}$, bę-

www.rcin.org.pl

dzie to wartość wieloczynu z $x$ przez $x$, ale nie saméy ilości $x$, do któréy ocenienia wiadome nam dotąd drogi nigdy niedoprowadzą. Z czego wnieść powinniśmy, że działania przez iakie teraz ilość nieznana połączona iest z danémi muszą bydź inne. Jakoż widzimy tu ilość niewiadomą nacechowaną wykładnikiem, który oznacza potęgi. Póty więc nie postawimy się w możności rozwiązywania zrównań tego nowego składu, póki nie rostrząśniemy działań potęgom właściwych. Od nich przeto dalsze nasze dociekania rospocząć należy.

## § 2. *O podnoszeniu iednowyrazów do iakieykolwiek potęgi.*

Wiémy że potęga iakieykolwiek ilości iestto wieloczyn wypadaiący z kilkokrotnego téy ilości saméy przez siebie mnożenia, i że się oznacza wykładnikiem maiącym tyle iedności ile mnożników równych wchodzi do iéy składu. To samo rozumieć należy o potęgach iednowyrazów i funkcyy: np. wyrazu $3a^2b$ i funkcyi $a+b$ potęgi drugie będą $(3a^2b)^2$ i $(a+b)^2$, potęgi trzecie będą $(3a^2b)^3$ i $(a+b)^3$, potęgi wskazane przez iakikolwiek wykładnik $n$ będą $\overset{n}{(3a^2b)}$ i $\overset{n}{(a+b)}$. Tym sposobem działanie wynoszenia do potęg tylko się naznacza: obaczmy iak ié wykonać. Ponieważ potęgi otrzymuią się przez mnożenie; więc prawidła podnoszenia do potęg muszą wypadać z prawideł mnożenia. Zaczniymy od uwagi iednowyrazów. Daymy że potrzeba $2a^3b^2$ wynieść do potęgi czwartéy: będzie $(2a^3b^2)^4 = 2a^3b^2 \times 2a^3b^2 \times 2a^3b^2 \times 2a^3b^2$; gdzie widzimy że spółczynnik 2 powinien bydź mnożony przez siebie samego razy trzy czyli powinien bydź wyniesiony do potęgi czwartéy, że każdy z wykładników nad literami powinien bydź dodany do siebie trzy razy czyli pomnożony przez 4. Zatém $(2a^3b^2)^4 =$

$$2^4 a^{3.4} b^{2.4} = 16a^{12}b^8.$$ Podobnie $(8a^3b^2c)^3 =$

$$8^3 a^{3.3} b^{2.3} c^{1.3} = 512a^9b^6c^3.$$ Z czego się pokazuie, że *chcąc otrzymać iaką potęgę z iednowyrazu, trzeba spół-*

www.rcin.org.pl

*czynnik wynieść do téy potęgi, a każdy z wykładników nad literami rozmnożyć przez wykładnik teyże potęgi.* Wieloczyn powstaiący z iakichkolwiek mnożników, z których iedne mogą bydź liczbami, drugie ilościami ogólnémi, inne funkcyami, da się zawsze wystawić pod postacią iednowyrazu; następnie podana dopiéro reguła na iednowyrazy rościąga się i do takich wieloczynów. W wyrażeniu np. $3a^2(a—4b)^3$ położywszy $p$ na mieyscu $a—4b$, będzie $3a^2p^3$; więc $[\,3a^2(a—4b)^3\,]^4=(3a^2p^3)^4=3^4a^8p^{12}$; a wracaiąc w ostatnim wypadku funkcyą $a—4b$ za $p$, otrzymamy $[\,3a^2(a—4b)^3\,]^4=3^4a^8(a—4b)^{12}=81a^8(a—4b)^{12}$. Podobnie $[\,3a^2(2a—c)^2(3b—a^2)^3\,]^2=9a^4(2a—c)^4(3b—a^2)^6$: ale w tym przypadku wykładniki są tylko znakami działań które na funkcyach niémi cechowanych wykonać ieszcze należy; do czego prawidła będą zaraz niżéy podane. W teraźnieyszym przykładzie zrobiwszy potęgę czwartą z funkcyi $2a—c$ a szóstą z funkcyi $3b—a^2$, trzeba te potęgi rozmnożyć przez siebie a potém ich wieloczyn rozmnożyć ieszcze przez $9a^4$. Prawidło na znaki odkryiemy wynosząc za pomocą mnożenia do różnych potęg ilość np. $a$ braną raz dodatnie drugi raz odiemnie: będziemy ztąd mieli

| | |
|---|---|
| $+a$ | $—a$ |
| $+a$ | $—a$ |
| $+a^2$ | $+a^2$ |
| $+a$ | $—a$ |
| $+a^3$ | $—a^3$ |
| $+a$ | $—a$ |
| $+a^4$ | $+a^4$ |
| $+a$ | $—a$ |
| $+a^5$ | $—a^5$ |
| itd. | itd. |

Te wypadki uczą, że *wszelka potęga nacechowana wykładnikiem parzystym tak z ilości dodatnéy iak i z odiemnéy iest zawsze dodatna, cechowana zaś wykładnikiem nieparzystym iest tego samego znaku z podnoszoną ilością.* To prawidło służy także iednowyrazom iakkolwiek złożonym i funkcyom np. $(+2a^2b^3c)^4=+16a^8b^{12}c^4$, $(—2a^2b^3c)^4=+16a^8b^{12}c^4$, $(+4a^2b)^3=+64a^6b^3$, $(—4a^2b)^3=—64a^6b^3$, $[\,—3(2a+3b)^2(4c^2—7ab)^3\,]^5=—243(2a+3b)^{10}(4c^2—7ab)^{15}$; w ostatnim przykładzie wykładniki 10 i 15 oznaczaią, iak i wyżéy, działanie maiące się ieszcze na funkcyach uskutecznić.

Z prawideł na mnożenie ułamków wypada, że *podnosząc do iakieykolwiek potęgi ułamek, trzeba podnieść do téy potęgi iego licznik i mianownik*. np. $\left(\frac{3a^2}{4b^5}\right)^3=$

www.rcin.org.pl

$$\frac{3a^2}{4b^5}\times\frac{3a^2}{4b^5}\times\frac{3a^2}{4b^5}=\frac{3a^2\times3a^2\times3a^2}{4b^5\times4b^5\times4b^5}=\frac{(3a^2)^3}{(4b^5)^3}=\frac{27a^6}{64b^{15}}.$$

## § 3. *Skład potęgi drugiéy i sposób podnoszenia do niéy funkcyy wielowyrazowych.*

Zostało nam ieszcze odkryć prawidła na rozwiianie potęg z funkcyy wykładnikami naznaczonych. Zaczniemy naprzód od uwagi funkcyy nayprostszych, iakiemi są dwuwyrazowe, i wytłumaczywszy skład nayniższéy ich potęgi toiest drugiéy, przeydziemy potém do funkcyy wielowyrazowych i do składu potęg wyższych. Weźmy funkcyą dwuwyrazową $x+a$. Oznaczaiąc iéy potęgę drugą, będzie $(x+a)^2$. Rozwinienie téy potęgi otrzymamy pomnożywszy raz przez siebie $x+a$, i będziemy mieli $(x+a)^2=(x+a)(x+a)=x^2+ax+ax+a^2=x^2+2ax+a^2$. Ten wypadek odkrywa nam części wchodzące do składu potęgi drugiéy z funkcyy dwuwyrazowych. Z niego widzimy, że każda takowa potęga zamyka w sobie *naprzód* potęgę drugą terminu piérwszego, toiest $x^2$; *powtóre* podwóyną mnogość terminu piérwszego $x$ przez termin drugi $a$, toiest $2ax$; *potrzecie* potęgę drugą wyrazu drugiego, toiest $a^2$. Dostrzeżone to prawo, na części wchodzące do potęgi drugiéy z funkcyy dwuwyrazowych, służyć nam może na funkcye z większéy liczby terminów złożone: bo każdą takową funkcyą wystawić sobie możemy pod postacią dwuwyrazowéy, biorąc wszystkie iéy terminy prócz ostatniego za piérwszy a ostatni za drugi. Tak np. w funkcyi $x+a+b$ ze trzech wyrazów złożonéy, wziąwszy $x+a$ za wyraz piérwszy, będzie według poprzedzaiącego prawa $(x+a+b)^2$ czyli $[(x+a)+b]^2=(x+a)^2+2b(x+a)+b^2$. Położywszy za część piérwszą $(x+a)^2$ wyrażenie wyżéy znalezione, i wykonawszy mnożenie naznaczone w części drugiéy $2b(x+a)$, otrzymamy $(x+a+b)^2=x^2+2ax+a^2+2bx+2ba+b^2$. Weźmy ieszcze funkcyą o czterech wyrazach $x+a+b+c$; przerobiwszy ią na dwuwyrazową tak $(x+a+b)+c$, będziemy mieli podług ustanowionéy reguły $(x+a+b+c)^2=[(x+a+b+c]^2=(x+a+b)^2+2c(x+a+b)+c^2=x^2+2ax+a^2+2bx+2ba+b^2+2cx+2ca+2cb+c^2$. Za-

www.rcin.org.pl

stanawiaiąc się w tych wypadkach nad składem i porządkiem terminów, postrzegamy prawo następuiące: *w potęgę drugą funkcyi wielowyrazowéy wchodzi 1sze wyraz pierwszy wyniesiony do potęgi drugiéy; 2re każdy inny po nim idący wyraz podwoiony i rozmnożony przez każdy z wyrazów które go poprzedziły a potém sam wyniesiony do potęgi drugiéy*. Przykłady.

$$(3a^2b-4b^3c^2)^2=(3a^2b)^2-2\,.\,3a^2b\,.\,4b^3c^2+(4b^3c^2)^2$$
$$=9a^4b^2-24a^2b^4c^2+16b^6c^4\,.$$

$(7ab^3c-9a^2bc^3-8bd^2+4a^2d)^2=49a^2b^6c^2-126a^3b^4c^4+81a^4b^2c^6-112ab^4cd^2+144a^2b^2c^3d^2+64b^2d^4+56a^3b^3cd-72a^4bc^3d-64a^2bd^3+16a^4d^2$.

## § 4. *Skład i własności wyższych potęg. Wzór Newtona.*

Ponieważ potęga funkcyi iakieykolwiek iest to wielosczyn powstaiący z rozmnożenia teyże funkcyi saméy przez się tyle razy mniéy iednym, ile w wykładniku żądanéy potęgi zawiéra się iedności; chcąc przeto funkcyą $a+b+c$ wynieść do potęgi $m$, trzeba ią mnożyć przez siebie razy $m-1$. Gdybyśmy przestali na tym sposobie, musielibyśmy dla otrzymania iakieykolwiek potęgi przechodzić przez niższe. Tego unikniemy, ieżeli, iak dostrzegliśmy iuż w drugiéy potędze, tak upatrzymy i w potęgach wyższych pewne prawo, podług którego wyrazy każdéy potęgi powstaią z wyrazów funkcyi. A ponieważ wiémy, że funkcyą z ilukolwiek terminów złożoną można przerobić na dwuwyrazową; dosyć nam przeto rostrząsnąć skład rozmaitych potęg z funkcyy dwuwyrazowych. Weźmy np. dwuwyrazy $x+a$, $x-a$; mnożąc każdy z nich przez się raz, dwa, trzy, itd. przyydziemy do różnych potęg zawartych w następnéy tablicy:

| | |
|---|---|
| I. | $x+a$ |
| II. | $x^2+2ax+a^2$ |
| III. | $x^3+3ax^2+3a^2x+a^3$ |
| IV. | $x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4$ |
| V. | $x^5+5ax^4+10a^2x^3+10a^3x^2+5a^4x+a^5$ |
| | itd. |

www.rcin.org.pl

I. $x-a$
II. $x^2-2ax+a^2$
III. $x^3-3ax^2+3a^2x-a^3$
IV. $x^4-4ax^3+6a^2x^2-4a^3x+a^4$
V. $x^5-5ax^4+10a^2x^3-10a^3x^2+5a^4x-a^5$
itd.

Tu widzimy *naprzód*, że w każdéy potędze z funkcyi dwuwyrazowéy znayduie się tyle terminów więcéy iednym ile wykładnik potęgi zawiéra w sobie iedności: i tak w potędze drugiéy terminów iest trzy, w trzeciéy cztéry, itd. *Powtóre*, że piérwszym terminem każdéy potęgi iest piérwszy termin dwuwyrazu samotny z wykładnikiem téy potędze właściwym, który w dalszych terminach zmnieyscza się zawsze iednością póki w ostatnim nie zniknie. Wykładnik zaś drugiego terminu dwuwyrazu rośnie tyle ile tamten ubywa: iest on w piérwszym terminie potęgi zerem, w drugim iednością, a równy wykładnikowi potęgi w terminie ostatnim, w którym drugi termin dwuwyrazu nacechowany tym wykładnikiem znayduie się samotny. Jeżeli więc weźmiemy $m$ za wykładnik potęgi z dwuwyrazu $x+a$; piérwszym terminem téy potęgi będzie $x^m$, drugim $ax^{m-1}$ z pewnym spółczynnikiem, trzecim $a^2x^{m-2}$ z pewnym także spółczynnikiem, i tak następnie, a ostatnim będzie $a^m$. *Potrzecie*, ieżeli znaki w dwuwyrazie są oba dodatne, wszystkie terminy każdéy potęgi będą dodatne: ieżeli piérwszy termin dwuwyrazu iest dodatny a drugi odiemny, znaki w potęgach idą naprzemian, tak, że wszystkie terminy na mieyscu nieparzystém są dodatne, na parzystém są odiemne. Łatwo się przekonać, że gdy dwuwyraz będzie $-x-a$ z obudwoma terminami odiemnemi; wtedy wszystkie terminy we wszystkich potęgach cechowanych wykładnikiem parzystym są dodatne, nieparzystym są odiemne. Podług tych uwag potęga $m$ z funkcyi dwuwyrazowéy $x\pm a$ tak się ułoży

$$(x\pm a)^m = x^m \pm Aax^{m-1} + B^2a^{m-2}x \pm Ca^3x^{m-3} + Da^4x^{m-4}$$
$$\pm \text{ itd } \pm a^m;$$

w ostatnim terminie znak — służy tylko wtenczas, kiedy $a$ w dwuwyrazie iest odiemne i oraz wykładnik $m$ nieparzysty: we wszystkich innych przypadkach służyć będzie znak +. Litery $A$, $B$, $C$, $D$, . . zastępuią mieysce spółczynników liczebnych. Piérwszy z nich należący do drugiego wyrazu potęgi równa się, iak widzimy, zawsze wykładnikowi téy potęgi. Na utworzenie spółczynników dalszych, ogólne wszystkim potęgom prawo nie łatwo daie się postrzegać. Odkrył ié Newton: i nauczył, że *spółczynnik każdego wyrazu w każdéy potędze iest równy mnogości ze spółczynnika przez ubywaiący wykładnik w terminie który poprzedził rozdzieloney przez liczbę terminów poprzedzaiących.* J tak spółczynnik trzeciego terminu w potędze piątéy $10 = \frac{5 \times 4}{2}$; spółczynnik czwartego terminu w potędze czwartéy $4 = \frac{6 \times 2}{3}$; itd. Będzie więc $A = m$, $B = \frac{m(m-1)}{2}$

$$C = \frac{m(m-1)}{2} \times (m-2) : 3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}, \quad D =$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} \times (m-3) : 4 = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}, \text{ itd;}$$

a następnie

$$(x \pm a)^m = x^m \pm m a x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} a^2 x^{m-2}$$

$$\pm \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} a^3 x^{m-3} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} a^4 x^{m-4}$$

$$\pm \; . \; . \; . \; . \; . \pm a^m .$$

Ten wzór zamykaiący prawidła na wynoszenie funkcyi dwuwyrazowéy do iakieykolwiek potęgi ma nazwisko *dwuwyrazu Newtona* (binomium Neutoni) albo też *wzoru Newtona.* Jest on niezmiernie rozległego w całéy matematyce użycia. Teraz go wydobyliśmy z podobieństwa upatrzonego w składzie kilku tylko potęg początkowych; nie możemy zatém bydź iuż dostatecznie ztąd przekonani, że to podobieństwo rościąga się na wszystkie bez wyiątku potęgi następne. Ten przeto wzór potrzeba ieszcze utwierdzić ścisłym a ogólnym dowodem. Taki dowód będzie wkrótce podany.

*Przykłady.* Chcąc otrzymać rozwinienie potęgi piątéy z funkcyi dwuwyrazowéy $a^2 - 3b^4$, potrzeba we wzorze Newtona na mieyscu $m$ położyć 5, a otrzymawszy ztąd

$$(x-a)^5 = x^5 - 5ax^4 + 10a^2x^3 - 10a^3x^2 + 5a^4x - a^5,$$

należy potém za $x$ wziąć $a^2$, za $a$ wziąć $3b^4$; i będzie

www.rcin.org.pl

$$(a^2-3b^4)^5=(a^2)^5-5.3b^4(a^2)^4+10(3b^4)^2(a^2)^3$$
$$-10(3b^4)^3(a^2)^2+5(3b^4)^4a^2-(3b^4)^5=a^{10}-15b^4a^8$$
$$+90b^8a^6-270b^{12}a^4+405b^{16}a^2-243b^{20}.$$

Niech ieszcze będzie do rozwinienia potęga trzecia z funkcyi trzywyrazowéy $2ab^3-5a^2c^2+7abc$. Rozbieram tę funkcyą na dwie części, na $2ab^3-5a^2c^2$ i $7abc$; część piérwszą kładę na mieyscu $x$, część drugą na mieyscu $a$ we wzorze Newtona zastosowanym do potęgi trzeciéy, toiest we wzorze

$$(x+a)^3=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3;$$

wypadnie

$$(2ab^3-5a^2c^2+7abc)^3=(2ab^3-5a^2c^2)^3+$$
$$3.7abc(2ab^3-5a^2c^2)^2+3(7abc)^2(2ab^3-5a^2c^2)+(7abc)^3.$$

Po wykonaniu wskazanych potęg na funkcyi dwuwyrazowéy $2ab^3-5a^2c^2$ i terminie $7abc$, i po odbyciu mnożenia w dwóch wyrazach średnich, znaydziemy ostatecznie

$$(2ab^3-5a^2c^2+7abc)^3=8a^3b^9-60a^4b^6c^2+150a^3b^3c^4$$
$$-125a^6c^6+84a^3b^7c-420a^4b^4c^3+525a^5bc^5+294a^3b^5c^2$$
$$-735a^4b^2c^4+343a^3b^3c^3.$$

*Uwaga.* Maiąc dany wykładnik potęgi, np. $m$; można zaraz przygotować spółczynniki dla wszystkich iéy wyrazów. Potrzeba napisać szereg

$$m,\quad \frac{m-1}{2},\quad \frac{m-2}{3},\quad \frac{m-3}{4},\quad \frac{m-4}{5},\quad \text{itd.}$$

Piérwszy wyraz tego szeregu będzie spółczynnikiem drugiego terminu potęgi; wieloczyn z dwóch wyrazów szeregu będzie spółczynnikiem dla trzeciego terminu potęgi; wieloczyn ze trzech wyrazów szeregu będzie spółczynnikiem dla terminu czwartego potęgi; itd. Jeżeli wykładnik potęgi iest 5; wtedy podług podanego dopiéro prawidła, z szeregu $5,\ \frac{5-1}{2},\ \frac{5-2}{3},\ \frac{5-3}{4},\ \frac{5-4}{5}$ czyli z szeregu $5,\ \frac{4}{2},\ \frac{3}{3},\ \frac{2}{4},\frac{1}{5}$, otrzymamy na spółczynniki potęgi piątéy

$$5,\quad 5\times\tfrac{4}{2},\quad 5\times\tfrac{4}{2}\times\tfrac{3}{3},\quad 5\times\tfrac{4}{2}\times\tfrac{3}{3}\times\tfrac{2}{4},\quad 5\times\tfrac{4}{2}\times\tfrac{3}{3}\times\tfrac{2}{4}\times\tfrac{1}{5},$$

czyli 5, 10, 10, 5, 1.

## § 5. *Dowód wzoru Newtona.*

www.rcin.org.pl

Dowód wzoru Newtona wyprowadzimy z następuiących postrzeżeń:

I. Maiąc summę ilukolwiek ilości

$$a+b+c+d+e$$

którą nazwiymy przez $A$; żeby otrzymać summę wszystkich wieloczynów zamykaiących po dwie z tych ilości, trzeba przez każdą ilość mnożyć wszystkie ią poprzedzaiące, toiest przez $b$ mnożyć $a$, przez $c$ mnożyć $a$ i $b$, itd; będzie

$$ab+ac+bc+ad+bd+cd+ae+be+ce+de;$$

tę summę wyraźmy przez $B$. Jeżeli do summy piérwszéy przydamy na końcu ieszcze iednę ilość $l$; wtedy do summy wieloczynów przybędą te które powstaią z ilości $l$ przez wszystkie poprzedzaiące, toiest

$$al+bl+cl+dl+el=Al.$$

Teraz więc summa wieloczynów będzie $B+Al$.

Chcąc otrzymać summę wszystkich wieloczynów zamykaiących po trzy z tych samych ilości, należy przez każdą ilość mnożyć wszystkie wieloczyny z dwóch ilości ią poprzedzaiących. Nie wypadnie przeto nic do mnożenia ani przez $a$, ani przez $b$; przez ilość $c$ mnożyć będziemy sam tylko wieloczyn $ab$, przez $d$ rozmnożymy wieloczyny $ab$, $ac$, $bc$, przez $e$ rozmnożymy wieloczyny $ab$, $ac$, $bc$, $ad$, $bd$, $cd$. Uformowaną summę tych wieloczynów

$$abc+abd+acd+bcd+abe+ace+bce+ade+bde+cde$$

nazwiymy przez $C$. Przyłączywszy ilość $l$; dla dopełnienia summy wieloczynów z trzech ilości, trzeba będzie przez $l$ mnożyć wszystkie wieloczyny zawarte w summie $B$; gdyż te wszystkie składaią się z ilości poprzedzaiących $l$. Więc teraz summa wieloczynów po trzy ilości zamykaiących wyrazi się przez $C+Bl$.

Podobnie postępuiąc daléy, znaydziemy, że gdy summa wszystkich wieloczynów maiących w swoim składzie po cztéry ilości iest $D$; za przybraniem nowéy ilości $l$, summa takich wieloczynów powiększy się o $Cl$, i będzie $D+Cl$; i tak następnie.

Możemy iuż wyciągnąć ogólny ztąd wniosek: *ieżeli liczba ilości iest* m, *ieżeli summa wieloczynów zamykaiących po* n—1 *z tych ilosci iest* P, *a zamykaiących po* n *z tychże ilości iest* Q; *będzie summa ostatniego gatunku wielo-*

www.rcin.org.pl

*czynów* Q+Pl, *skoro przybierzemy ieszcze iednę ilość* $I_r$ *a tém samém kiedy liczba ilości będzie* m+1.

II. Po takiém przygotowaniu weźmy ilekolwiek funkcyy dwuwyrazowych $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$, . . w których termin piérwszy $x$ iest spólny. Mnożąc ich dwie, trzy, cztéry, itd. przez siebie otrzymamy

$$(x+a)(x+b)=x^2(a+b)x+a^2.$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc.$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4+(a+b+c+d)x^3+(ab+ac+bc+ad+bd+cd)x^2+(abc+abd+acd+bcd)x+abcd.$$

itd. itd.

Postrzegamy w każdym z tych wieloczynów 1ód *że wykładnik ilości* x *iest w piérwszym terminie równy liczbie mnożników; że w dalszych terminach zmnieysza się coraz o iedność; nareszcie w ostatnim równa się zero.* 2re *że naywyższa potęga ilości* x *ma spółczynnikiem iedność; potęga następna o iedność niższa ma za spółczynnik summę drugich terminów funkcyy dwuwyrazowych; potęgi o dwie iedności niższey spółczynnikiem iest summa wszystkich wieloczynów z drugich terminów funkcyy dwuwyrazowych po dwa branych w każdy wieloczyn; potęgi o trzy iedności niższey spółczynnikiem iest summa wszystkich wieloczynów z drugich terminów funkcyy dwuwyrazowych po trzy branych w każdy wieloczyn; itd.* 3cie *że termin ostatni każdego wieloczynu iest mnogością wszystkich drugich terminów funkcyy dwuwyrazowych.*

Zeby się upewnić, iż prawa w kilku wieloczynach dopiéro postrzeżone rościągaią się do wszystkich powstaiących z ilukolwiek mnożników dwuwyrazowych; potrzeba dowieść, że skoro służą iednemu iakiemukolwiek wieloczynowi, muszą koniecznie służyć i wieloczynowi bezśrednie następnemu toiest maiącemu ieden mnożnik przybyły do swego składu. Na ten koniec daymy że

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+Dx^{m-4}+\ .\ .\ +Mx+N \quad (u).$$

iest wieloczynem otrzymanym z $m$ mnożników dwuwyrazowych $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)(x+e)$ . . . . , i że w iego składzie powyższe prawa są zachowane; toiest że wykładniki nad $x$ zmnieyszaią się ciągłe o iedność od $m$ do zero, że

www.rcin.org.pl

$A=a+b+c+d+\ldots$, $B=ab+ac+bc+\ldots$, $C=abc+abd+acd+\ldots$, $D=abcd+abce+abde+\ldots$, itd. $N=abcde\ldots$ Rozmnóżmy ten wieloczyn przez dwuwyraz $x+l$; otrzymamy wieloczyn z mnożników dwuwyrazowych w liczbie $m+1$; w którym pisząc pod sobą wyrazy maiące iednaką potęgę z $x$, będzie

$$\begin{aligned} &x^{m+1}+Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+Dx^{m-3}+\ \ldots\ +Nx \\ &\quad +lx^m+Alx^{m-1}+Blx^{m-2}+Clx^{m-3}+\ \ldots\ +Mlx+Nl, \end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned} &x^{m+1}+(A+l)x^m+(B+Al)x^{m-1}+(C+Bl)x^{m-2}+ \\ &(D+Cl)x^{m-3}+\ \ldots\ +(N+Ml)x+Nl. \end{aligned}$$

W tym ostatnim wieloczynie widzimy, że się wszystkie prawa składu utrzymuią. 1*ód* oczywiste iest ubywanie o iedność wykładników nad $x$ od $m+1$ do zero. 2*re* ponieważ $A$ iest summą z $m$ ilości $a, b, c, d, \ldots$; więc $A+l$ znaczy summę z $m+1$ ilości $a, b, c, d, \ldots l$. Skoro $B$ iest summą wieloczynów z $m$ ilości $a, b, c\ldots$ branych po dwie na raz; będzie, na mocy postrzeżeń zrobionych w początku teraźnieyszego §*fu*, $B+Al$ summą takichże wieloczynów z $m+1$ ilości $a, b, \ldots l$. Podobnie gdy $C$ iest summą wieloczynów z $m$ ilości $a, b, c, \ldots$ po trzy branych; $C+Bl$ wyrazi summę takiegoż gatunku wieloczynów z $m+1$ ilości $a, b, c, \ldots l$. Taż sama iednostayność co do składu spółczynników równie iest widoczna we wszystkich terminach dalszych. 3*cie* iak tylko w piérwszym wieloczynie ostatni wyraz $N$ iest mnogością ze wszystkich $m$ ilości $a, b, c, \ldots$; tém samém wyraz ostatni $Nl$ w drugim wieloczynie oznacza mnogość z $m+1$ ilości $a, b, c\ldots l$.

Mamy więc ogólny dowód, że skoro wyliczone niedawno prawa składu są niewątpliwe dla wieloczynu ze cztérech mnożników, o czém dostateczne mamy przekonanie, muszą bydź zachowane w wieloczynie z mnożników pięciu; a skoro z pięciu, więc i z liczby mnożników większéy o iedność, toiest z sześciu; i tak następnie.

III. Wieloczyny z mnożników dwuwyrazowych, nad któremi zatrzymywaliśmy teraz naszę uwagę, zamienią się na potęgi przez założenie że drugie terminy mnożników są równe. Wieloczyn np. ($u$) powstaiący z liczby $m$ mnożników dwuwyrazowych

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)\ \ldots\ldots$$

www.rcin.org.pl

przerobi się na potęgę $(x+a)^m$, gdy uczynimy $x=a=c=d$ $=$ itd, i będzie

$$(x+a)^m=x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+Dx^{m-4}+ \text{itd.} \ldots +N.$$

Uważmy, iakie w tym razie przyymą wyrażenie spółczynniki $A$, $B$, $C$, $D$ . . $N$. Nayłatwiéy poznać, co teraz będą znaczyły, $A$ i $N$. Ponieważ $A=a+b+c+d+ \ldots$, $N=abcd$ . . ; liczba zaś ilości $a$, $b$, $c$, $d$, . . sobie równych iest $m$; więc $A=ma$, $N=a^m$; a przeto

$$(x+a)^m=x^m+max^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+Dx^{m-4}+ \text{itd} +a^m \quad \ldots\ldots\ldots \quad (w).$$

Co do spółczynników pozostałych $B$, $C$, $D$, . . . . ; wiemy, że piérwszy z nich $B$ iest zbiorem wszystkich wieloczynów z $m$ ilości $a$, $b$, $c$, . . po dwie branych w każdy wieloczyn; spółczynnik $C$ iest zbiorem wszystkich wieloczynów z tychże ilości branych po trzy; spółczynnik $D$ iest zbiorem wieloczynów z tychże ilości branych po cztéry; itd. Przez założenie, że $a=b=c=d=$ itd. każdy z piérwszych wieloczynów zamienia się na $a^2$, każdy z drugich na $a^3$, każdy z trzecich na $a^4$, itd. Zatém $B$ równa się $a^2$ wziętemu tyle razy, ile może powstawać różnych wieloczynów z $m$ ilości branych po dwie; $C$ równa się $a^3$ powtórzonemu tyle razy ile można otrzymać różnych wieloczynów z $m$ ilości branych po trzy; $D$ równa się $a^4$ rozmnożonemu przez liczbę pokazuiącą ile wypada różnych wieloczynów z $m$ ilości branych po cztéry; itd. Ztąd widzimy, że chcąc oznaczyć spółczynniki $B$, $C$, $D$, . . , trzeba wprzód poznać, ile różnych wieloczynów wynikać może z liczby $m$ ilości branych po dwie w każdy wieloczyn, po trzy, po cztéry, itd: do czego przyprowadzą nas uwagi następuiące.

IV. Maiac $m$ ilości $a$, $b$, $c$, $d$, . . , i chcąc ie po dwie z sobą układać tak, aby wypisać wszystkie połączenia po dwie z tych ilości zamykaiące, któreby się różniły albo ilościami, albo samym ich tylko porządkiem; potrzeba do każdéy dopisywać wszystkie inne; i otrzymamy

$$\begin{array}{l} ab,\ ac,\ ad \ \ldots \\ ba,\ bc,\ bd \ \ldots \\ ca,\ cb,\ cd \ \ldots \end{array}$$

W każdym szeregu będzie oczywiście połaczeń $m-1$, a szeregów liczba $m$. Zatém liczba wszystkich połączeń zawieraiących po dwie z ilości $m$ iest $m(m-1)$.

Do każdego z tych połączeń przybieraiąc koleią ilości pozostałe, których iest $m-2$; wypadną połączenia zamykaiące po trzy ilości. Gdy więc każde połączenie z ilości dwóch wydaie $m-2$ połączeń z ilości trzech; przeto liczba wszystkich połączeń z $m$ ilości po trzy branych będzie $m-2$ rozmnożone przez $m(m-1)$ czyli $m(m-1)(m-2)$.

Jeżeli każdemu połączeniu z trzech ilości dopisywać będziemy następnie ilości pozostałe w niém niezawarte, których iest $m-3$; wynikną ztąd połączenia po cztéry z ilości $m$ w sobie zamykaiące: liczba ich będzie $m-3$ rozmnożone przez $m(m-1)(m-2)$ czyli $m(m-1)(m-2)(m-3)$.

Ciągnąc daléy te uwagi, wniesiemy ogólnie, że *maiąc* m *ilości, gdy po ilekolwiek układać ie z sobą będziemy, liczba wszystkich połączeń wyrazi się przez wieloczyn z tyłu mnożników po ile z ilości* m *na raz łączymy: pierwszym mnożnikiem iest* m; *dalsze coraz się o iedność zmnieyszaią.*

V. Od liczby połączeń łatwe iest przeyście do liczby mnogości. Ponieważ połączenia złożone z iednakich ilości a różniące się tylko ich porządkiem stanowią tę samę mnogość; przeto liczba mnogości iest mnieysza od liczby połączeń, i tyle razy mnieysza pod ilą różnémi postaciami może bydź wystawiona mnogość, kiedy ią przeprowadzimy przez wszystkie odmiany co do porządku iéy mnożników. Gdy więc doydziemy, iaka iest liczba różnych połączeń złożonych z tychże samych ilości, a następnie znaczących iednaką mnogość; tą liczbą rozdzieliwszy liczbę połączeń wszystkich, otrzymamy liczbę wszystkich mnogości.

W tém badaniu będzie dla nas przewodnikiem ogólny niedawno wydobyty wniosek o liczbie połączeń. Z niego wypada, że kiedy ilości iest $m$, i kiedy każde połączenie zamyka ilości $m$, toiest kiedy ie wszystkie w sobie ogarnia; liczba połączeń będzie wieloczynem z mnożników $m$ coraz się o iedność zmnieyszaiących; aże w tym wieloczynie pierwszy mnożnik iest $m$, więc ostatni musi bydź iednością: ten wieloczyn napisany wstecznym porządkiem swoich mnożników będzie $1. 2. 3. 4. \ldots m$. Ze zaś wszystkie uważane teraz połączenia stanowią iednę mnogość, bo zawieraią te same ilości; zatém *wieloczyn* 1. 2. 3. 4. . . m *pokazuie ile różnych postaci przybiera mnogość z* m *mnożników przez odmianę ich porządku.* Więc gdy mnogość powstaie z dwóch mnożników, ma różnych postaci 1. 2; gdy z trzech, ma różnych postaci 1. 2. 3; gdy z cztérech, ma różnych postaci 1. 2. 3. 4; itd. Z teraźnieyszych rozumowań wypada nareszcie, że liczba wszystkich różnych wieloczynów z $m$ ilości branych po dwie iest $\frac{m(m-1)}{1.\ 2}$; liczba wieloczynów z tychże ilości branych po trzy iest $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}$; z branych po cztéry iest $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}$; itd.

Odkrywszy te liczby wieloczynów, dopełniliśmy tém samém oznaczenia spółczynników $B$, $C$, $D$, . . ., dla którego teraźnieysze dociekania były przedsięwzięte. Ztąd iuż bowiem wynika, że $B=\frac{m(m-1)}{1.\ 2}a^2$, $C=\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}a^3$

$$D=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}a^4, \text{ itd.}$$

Na mieyscu tych spółczynników położywszy w szeregu ($w$) otrzymane tu ich wyrażenia, będziemy mieli

$$(x+a)^m=x^m+max^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.\ 2}a^2x^{m-2}+$$
$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}a^3x^{m-3}+ \text{ itd. } +a^m,$$

co iest poznanym od nas wyżéy wzorem Newtona. Droga, iakąśmy teraz ten wzór wyprowadzili, stanowi iego dowód gruntowny, nayogólnieyszy, i nic iuż w téy mierze do żądania nie zostawuiący.

## § 6. *O wyciąganiu pierwiastków.*

Wyłożywszy sposób podnoszenia ilości i funkcyy do iakieykolwiek potęgi; okażemy teraz odwrotny, który od potęg prowadzi do samych funkcyy lub ilości z iakich potęga dana powstała. Takowe ilości lub funkcye nazywaią się *pierwiastkiem potęgi*: działanie zaś, przez które do nich przychodzimy, ma nazwisko *wyciągania pierwiastku*. Na wskazanie tego działania używaią się znaki $\sqrt[2]{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$ . . $\sqrt[m]{\ }$: liczby w ich otworzystości położone oznaymuią iakiéy potęgi należy szukać pierwiastku, i zowią się wykładnikami znaku pierwiastkowego. np. $\sqrt[3]{a}$ znaczy że z $a$ ma bydź wyciągniony pierwiastek potęgi trzeciéy; $\sqrt[4]{(a^3+b^3)}$ znaczy że z funkcyi zawartéy nawiasami ma się wyciągać pierwiastek potęgi czwartéy. Wykładnik 2 pospolicie się w znaku pierwiastkowym opuszcza pisząc np. $\sqrt{d}$ zamiast $\sqrt[2]{d}$. Poznawszy cechy na oznaczenie działania, postąpmy do odkrycia prawideł, podług których się ma wykonywać. Takowe prawidła muszą bydź odwrotne prawidłom podnoszenia do potęg. Zatém *w iednowyrazach trzeba ze spółczynnika wyciągać pierwiastek, a wykładniki nad literami dzielić przez wykładnik znaku pierwiastkowego.* np. $\sqrt{64a^8b^6c^{12}}=8a^4b^3c^6$; $\sqrt[3]{729a^{12}b^6}=9a^4b^2$. Gdyby dane wyrażenie było mnogością z funkcyy tak iak iednowyraz iest wieloczynem z ilości; wyciągaiąc pierwiastek z tego wyrażenia, należy się obeyść według prawidła podanego na iednowyrazy np. $\sqrt[5]{32(2a-3b)^{10}(5ab^2+3c^4)^{15}}=2(2a-3b)^2(5ab^2+3c^4)^3$. Słowem *iak na podnoszenie do potęg tak na wyciąganie pierwiastku z mnogosci służy to ogólne prawidło, iż potrzeba odbyć działanie na każdym mnożniku i potém wypadki przez siebie rozmnożyć.*

*Co są ilości niewymierne?*

Podług dopiéro podanego prawidła mamy $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$, $\sqrt[m]{(a+b)^n}=(a+b)^{\frac{n}{m}}$. Ztąd wyciąganie pierwiastku może bydź wskazane dwoiako, albo przez znak pierwiastkowy, albo przez wykładnik ułamkowy którego licznik iest wykładnikiem danéy ilości lub funkcyi, a mianownikiem wykładnik potęgi, iakiéy szukamy pierwiastku. Jeżeli w ułamkowym wykładniku licznik da się bez reszty rozdzielić przez mianownik; wtedy zamiast ułamku położywszy wieloraz, będziemy mieli żądany pierwiastek zupełny, np. $\sqrt[3]{a^6}=a^{\frac{6}{3}}=a^2$: ieżeli zaś dzielenie licznika przez

www.rcin.org.pl

mianownik wykonać się nie da; naówczas, nie mogąc uskutecznić wyciągania pierwiastku, przestaniemy na samém iego oznaczeniu przez ieden ze sposobów teraz wskazanych: np. maiąc wynaleźć pierwiastek potęgi trzeciéy z $a^3$, napiszemy albo $\sqrt[3]{a^3}$ albo $a^{\frac{3}{3}}$. Pierwiastki niepodobne do wyciągnienia, i tylko tak naznaczone zowią się *pierwiastkami niewymiernémi,* albo też *ilościami niewymiernémi* (quantités irrationelles, incommensurables).

Jdźmy teraz do prawideł na znaki. Ponieważ potęgi maiące wykładnik nieparzysty są z dodatnych ilości dodatne, z odiemnych odiemne; zatém wyciągnąwszy pierwiastek takich potęg, trzeba go poprzedzić tym samym znakiem iaki służył potędze. np. $\sqrt[3]{-a^6}=-a^2$, $\sqrt[5]{a^{15}}=a^3$. Widzieliśmy znowu, że potęgi cechowane wykładnikami parzystémi są zawsze dodatne, iakibykolwiek był znak przed ilościami do nich podnoszonémi: więc *naprzód,* pierwiastkowi z takich potęg służy zarówno znak $+$ iak i $-$, np. $\sqrt[4]{a^{12}}=\pm a^3$. *Powtóre,* gdyby iakie dociekanie przywiodło nas do potrzeby wyciągania z ilości odiemnéy pierwiastku potęg wskazanych wykładnikiem parzystym; znalezienie tego pierwiastku byłoby niepodobne, bo żaden pierwiastek nigdy nam téy odiemnéy ilości przez działanie przeciwne nie wróci: wynaydować taki pierwiastek, iest to szukać rzeczy nie mogącéy mieć bytu; dla tego ilości odiemne poprzedzone przez znak pierwiastkowy nacechowany wykładnikiem parzystym, iak np. $\sqrt{-a}$ $\sqrt[4]{-ab}$, . . . zowią się *pierwiastkami uroionémi,* albo też *ilościami uroionémi* (quantités imaginaires).

*Co są ilości uroione?*

*Wydobycie mnożników z pod znaku pierwiastkowego i podciągnienie pod ten znak.*

Powiedzieliśmy, że wyciągaiąc pierwiastek z wieloczynu, trzeba to działanie odbyć na każdym z mnożników i potém wypadki przez siebie rozmnożyć. Gdyby z niektórych mnożników pierwiastki były zupełne, a z innych niewymierne; wtedy na mnożnikach ostatnich można działanie tylko wskazać poprzedzaiąc ie znakiem pier-

www.rcin.org.pl

wiastkowym, a na piérwszych wykonać, i wypadki przy sobie napisać dla oznaczenia iż maią bydź przez siebie mnożone: np. daymy że potrzeba wyciągnąć pierwiastek potęgi trzeciéy z wyrazu $32a^6b^5c^{10}d^8f$; rozbieram ten wyraz na dwa mnożniki $8a^6b^3c^9d^6$ i $4b^2cd^2f$, z których piérwszy iest potęgą trzecią dokładną; będzie zatém $\sqrt[3]{32a^6b^5c^{10}d^8f}=$

$$\sqrt[3]{8a^6b^3c^9d^6.4b^2cd^2f}=\sqrt[3]{8a^6b^3c^9d^6}.\sqrt[3]{4b^2cd^2f},$$ a że

$$\sqrt[3]{8a^6b^3c^9d^6}=2a^2bc^3d^2,$$ przeto $\sqrt[3]{32a^6b^5c^{10}d^8f}=$

$2a^2bc^3d^2\sqrt[3]{4b^2cd^2f}$. Nawzaiem chcąc od wyrażenia $2a^2bc^3d^2\sqrt[3]{4b^2cd^2f}$ wrócić się do piérwszéy postaci $\sqrt[3]{32a^6b^5c^{10}d^8f}$; trzeba mnożnik leżący przed znakiem pierwiastkowym $2a^2bc^3d^2$ wynieść do potęgi wskazanéy przez wykładnik tego znaku, i wypadek $8a^6b^3c^9d^6$ rozmnożywszy przez to co się znayduie pod znakiem toiest przez $4b^2cd^2f$, otrzymany wieloczyn poprzedzić tymże samym znakiem pierwiastkowym, zkąd wypadnie $\sqrt[3]{32a^6b^5c^{10}d^8f}$. Piérwsze działanie nazywa się *wydobyciem mnożników z pod znaku pierwiastkowego*, drugie *podciągnieniem ich pod znak pierwiastkowy*. Przykłady do obu działań: $\sqrt{8a^3b^4c^2d}=$

$$2ab^2c\sqrt{2ad},\quad \sqrt[5]{64(a+2b)^9(3m-n^2)^{13}d^{20}}=$$

$$2(a+b)(3m-n^2)^2d^4\sqrt[5]{2(a+b)^4(3m-n^2)^3};\quad 5a^2b^3\sqrt[3]{4ab^2c}=$$

$$\sqrt[3]{500a^7b^{11}c},\quad 3(a-b)^3c^2\sqrt[4]{9(a-b)^2c^3d^2}=$$

$$\sqrt[4]{729(a-b)^{14}c^{11}d^2}.$$

*Odmiany, iakie wolno wprowadzać w wykładniki znaku pierwiastkowego i ilości lub funkcyi leżącéy pod tym znakiem. Przywodzenie do iednostaynego znaku pierwiastkowego.*

Ponieważ $\frac{n}{m}=\frac{2n}{2m}=\frac{3n}{3m}=$itd; więc

$$a^{\frac{n}{m}}=a^{\frac{2n}{2m}}=a^{\frac{3n}{3m}}=\text{itd:}$$ lecz

wiemy że $a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}$, $a^{\frac{2n}{2m}}=$

$\sqrt[2m]{a^{2n}}$, $a^{\frac{3n}{3m}}=\sqrt[3m]{a^{3n}}$, itd; zatém $\sqrt[m]{a^n}=\sqrt[2m]{a^{2n}}=\sqrt[3m]{a^{3n}}=$ itd.
Ztąd widzimy że *pierwiastek nie odmieni wartości, kiedy wykładnik wyrażenia z którego się ma wyciągnąć i razem wykładnik znaku pierwiastkowego pomnożymy lub rozdzielimy przez tę samę liczbę.* np. $\sqrt[3]{2a^2(b-c)^2}=\sqrt[6]{[2a^2(b-c)^2]^2}$ $=\sqrt[6]{4a^4(b-c)^4}$.

Opieraiąc się na téy własności, można dane iakiekolwiek wyrażenia niewymierne z różnym wykładnikiem znaku pierwiastkowego przerobić na to samo znaczące z wykładnikiem iednakim: *potrzeba tylko wykładnik znaku pierwiastkowego i będącego pod nim wyrażenia rozmnożyć przez wieloczyn z wykładników w pozostałych znakach pierwiastkowych.* np. wyrażenia $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt[5]{c^4}$ znaczą iedno co $\sqrt[3\cdot2\cdot5]{a^{2\cdot2\cdot5}}$, $\sqrt[2\cdot3\cdot5]{b^{1\cdot3\cdot5}}$, $\sqrt[5\cdot3\cdot2]{c^{4\cdot3\cdot2}}$ czyli $\sqrt[30]{a^{20}}$, $\sqrt[30]{b^{15}}$, $\sqrt[30]{c^{24}}$. Podobnie wyrażenia $\sqrt[8]{(a^2+b)^3c^2d}$, $\sqrt[9]{a^2b^3c}$ zamieniaią się na równe im $\sqrt[8\cdot9]{[(a^2+b)^3c^2d]^9}$, $\sqrt[8\cdot9]{(a^2b^3c)^8}$ czyli na $\sqrt[72]{(a^2+b)^{27}c^{18}d^9}$, $\sqrt[72]{a^{16}b^{24}c^8}$. To działanie zowie się *przywodzeniem do iednostaynego znaku pierwiastkowego.*

Wiemy że $\sqrt[3]{a^3}=a$, więc $-\sqrt[3]{a^3}=-a$; aże $\sqrt[3]{-a^3}=-a$, zatém $-\sqrt[3]{a^3}=\sqrt[3]{-a^3}$.
Ztąd poznaiemy, że *znak odiemny położony przed cechą pierwiastkową z wykładnikiem nieparzystym może bydź przeniesiony pod tę cechę i przywiązany do wyrażenia tam się znayduiącego, albo też nawzaiem.* np.

$$-\sqrt[5]{3a^2-5ab}=\sqrt[5]{-(3a^2-5ab)}=\sqrt[5]{5ab-3a^2},$$

$$\sqrt[7]{9a^3b-4b^2c}=\sqrt[7]{-(4b^2c-9a^3b)}=-\sqrt[7]{4b^2c-9a^3b}.$$

Nie wolno téy odmiany wprowadzać w znaki, gdy wykładnik cechy pierwiastkowéy iest parzysty, toiest niemożna zamiast $-\sqrt{a}$ kłaść $\sqrt{-a}$, bobyśmy za wielkość rzetelną wzięli uroioną.

www.rcin.org.pl

## § 7. *Działania zachodzące w ilościach i funkcyach niewymiernych.*

Ponieważ wielkości niewymierne, iak wszystkie inne, podlegać mogą odmianom przez wzrost i ubywanie; też same więc zachodzić w nich muszą działania iakie w ilościach lub funkcyach całkich i ułamkowych. Aże każdą funkcyą lub ilość niewymierną możemy wystawić w postaci wymiernéy z ułamkowym wykładnikiem; potrzeba więc nam tylko prawidła działań podane dla ilości lub funkcyy wymiernych przyzwoicie zastosować i wykonać w funkcyach niemymiernych.

*Dodawanié i odeymowanie.* Jako ilości lub funkcyy wymiernych od siebie różnych, albo nawet iednakowych ale z odmiennémi wykładnikami, nie mogliśmy dodawać ani odciągać, przestaiąc tylko na samém oznaczeniu tych działań; tak żeby też działania uskutecznić się dały na wielkościach niewymiernych, trzeba aby i same wielkości były zupełnie iednakie i miały nad sobą w znakach pierwiastkowych iednakie wykładniki; np. $\sqrt{5a}+2\sqrt{5a}+3\sqrt{5a}=6\sqrt{5a}$, $7\sqrt[3]{9a^2b}-5\sqrt[3]{9a^2b}=2\sqrt[3]{9a^2b}$; inaczéy zostawić musimy działania tylko oznaczone, np. $\sqrt{a}+\sqrt{5a}-\sqrt[4]{a}$.

*Mnożenie i dzielenie.* W mnożeniu i dzieleniu ilości lub funkcyy niewymiernych możemy natrafić na ieden z dwóch przypadków: albo wielkości do mnożenia lub dzielenia przedsięwzięte będą miały w swoich znakach pierwiastkowych wykładniki iednakie, albo różne. *Co do pierwszego*: podług prawidła na wyciąganie pierwiastku z mnogości mamy $\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}.\ \sqrt[n]{b}.\ \sqrt[n]{c}$; zatém wieloczyn z mnożników $\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{b}, \sqrt[n]{c}$, równa się $\sqrt[n]{abc}$. Co nas uczy, że *maiąc do mnożenia wielkości niewymierne, z iednakim wykładnikiem znaku pierwiastkowego, należy te wielkości mnożyć przez siebie tak iak wymierne i przed wy-*

www.rcin.org.pl

*padkiem położyć znak pierwiastkowy z tymże samym wykładnikiem.* A ztąd znowu wypada, że *dzielenie w takimże przypadku trzeba odbywać na samych ilościach lub funkcyach i przed wielorazem napisać znak pierwiastkowy iaki iest w każdym z dzielników.* Przykłady. $\sqrt[3]{(a+b)}.\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{(ax+bx)}$, $a^2\sqrt{b}.(a+b)\sqrt{c}=a^2(a+b).\sqrt{b}.\sqrt{c}=a^2(a+b)\sqrt{bc}$ $=(a^3+a^2b)\sqrt{bc}$; $\dfrac{3\sqrt[5]{(a^2-b^2)}}{2\sqrt[5]{(a-b)}}=\dfrac{3}{2}\sqrt[5]{(a+b)}$.

*W drugim przypadku* dane wyrażenia niewymierne przywodzą się naprzód do iednostaynego znaku pierwiastkowego, a potém się postępuie według prawideł służących przypadkowi piérwszemu. np. $\sqrt[3]{(a^2-3b)}\times-\sqrt{7abc}=$

$$\sqrt[6]{(a^2-3b)^2}\times-\sqrt[6]{343a^3b^3c^3}=-\sqrt[6]{343a^3b^3c^3(a^2-3b)^2}=$$

$$-\sqrt[6]{343a^3b^3c^3(a^4-6a^2b+9b^2)}=$$

$$-\sqrt[6]{(343a^7b^3c^3-2058a^5b^4c^3+3087a^3b^5c^3)};$$

$$\sqrt[5]{(8a^5b^4c^2-16a^6b^3d)}:\sqrt{2a^2b}=\sqrt[10]{(8a^5b^4b^2-16a^6b^3d)^2}:$$

$$\sqrt[10]{(2a^2b)^5}=\sqrt[10]{(64a^{10}b^8c^4-256a^{11}b^7c^2d+256a^{12}b^6d^2)}:$$

$$\sqrt[10]{32a^{10}b^5}=\sqrt[10]{(2b^3c^4-8ab^2c^2d+8a^2bd^2)}.$$

*Wynoszenie do potęg i wyciąganie pierwiastków.*

Wynoszac do potęgi ilości wymierne, mnożyliśmy ich wykładniki przez wykładnik potęgi; a wyciągaiąc pierwiastek dzieliliśmy ich wykładniki przez wykładnik znaku pierwiastkowego: stosuiąc to prawidło do ilości i funkcyy niewymiernych wyrażonych w postaci wymierney, trzeba w piérwszym razie przez wykładnik żądaney potęgi mnożyć wykładnik ułamkowy, toiest mnożyć iego licznik; w drugim razie trzeba wykładnikiem żądanego pierwiastku dzielić wykładnik ułamkowy, toiest mnożyć iego mianownik. A ponieważ licznik wykładnika ułamkowego iest wykładnikiem samey ilości, a mianownik iest wykładnikiem znaku pierwiastkowego: zatém wynosząc do

www.rcin.org.pl

potęg ilości niewymierne trzeba ich wykładnik mnożyć przez wykładnik żądaney potęgi; wyciągaiąc zaś pierwiastek należy wykładnik znaku pierwiastkowego mnożyć przez wykładnik potęgi, iakiey pierwiastku szukamy. np. $(\sqrt[3]{a^2})^5 = \sqrt[3]{a^{10}}$, $(2a\sqrt[4]{b^3c})^2 = 4a^2\sqrt[4]{b^6c^2}$; $\sqrt[3]{[\sqrt{(a+b)^5}]} = \sqrt[6]{(a+b)^5}$, $\sqrt[4]{(a^3\sqrt[3]{b^2c})} = \sqrt[4]{a^3}\,\sqrt[12]{b^2c}$. Ten ostatni wypadek może bydź ieszcze tak wystawiony $\sqrt[12]{a^9}\,\sqrt[12]{b^2c}$ czyli $\sqrt[12]{a^9b^2c}$.

## § 8. *Działania z funkcyami uroionémi.*

Ponieważ funkcye uroione są tylko szczególnym przypadkiem funkcyy niewymiernych; wszystkie więc prawidła działań, któreśmy na te ostatnie znaleźli, służyć muszą i piérwszym. Ale że cechą pierwiastków uroionych iest znak odiemny położony przed ilościami lub funkcyami poprzedzonémi od znaku pierwiastkowego z wykładnikiem parzystym: wystawiaiąc przeto ilości lub funkcye uroione w postaci wymiernéy, rozróżnić trzeba dwa znaki, ieden należący do ilości, drugi do znaku pierwiastkowego. Dla tego znak należący do ilości wraz z samą ilością zawiera się w nawias, a znak należący do znaku pierwiastkowego pisze się przed nawiasem. np. $\sqrt{-a} = (-a)^{\frac{1}{2}}$, $-\sqrt[4]{-b^3} = -(-b)^{\frac{3}{4}}$, $-\sqrt[6]{-(a+b)} = -[-(a+b)]^{\frac{1}{6}}$. Gdybyśmy zaś napisali $-a^{\frac{1}{2}}$ za $\sqrt{-a}$, możnaby znak należący do ilości przywiązać do znaku pierwiastkowego, toiest uważać że $-a^{\frac{1}{2}}$ powstało z $-\sqrt{a}$; wtedy zamiast ilości uroionéy wzięlibyśmy rzetelną. Poznamy w dalszym ciągu nauki, że wszelkie wyrażenie uroione z iakimkolwiek wykładnikiem znaku pierwiastkowego da się przerobić na takie, w którém wykładnik znaku będzie 2. Ostatniego więc tylko gatunku wyrażenia uroione uważać odtąd możemy.

Wiemy że $-a = a\times-1$, zatém $\sqrt{-a} = \sqrt{a\times-1}$, lecz że $\sqrt{a\times-1} = \sqrt{a}.\sqrt{-1}$, więc $\sqrt{-a} = \sqrt{a}.\sqrt{-1}$. Będzie podobnie $\sqrt{-(a+b)} = \sqrt{(a+b)}.\sqrt{-1}$. Każda przeto ilość uroiona może bydź wyrażoną przez dwa mnożniki z których iednym będzie taż sama ilość rzetelna, drugim uroiona iedność: i to się nazywa *wystawić ilość lub funkcyą uroioną w postaci rzetelnéy*. Wszystkie prawidła działań, któreśmy odkryli na funkcye niewymierne, nayłatwiéy stosować się daią do funkcyy uroionych kiedy ie wprzód wystawimy pod postacią rzetelną. Ale wystawiwszy ie w postaci rzetelnéy, mamy zawsze do czynienia z dwoma mnożnikami, z których iednym iest ilość lub funkcya rzetelna, drugim uroiona iedność. W mnożeniu więc i wynoszeniu do potęg przyydzie nam tę iedność uroioną mnożyć przez siebie samę. Zaczém dla ułatwienia rachunków należy poznać wieloczyny z uroionéy iedności branéy za mnożnik dwa, trzy, cztéry, itd. razy. Kiedy wyciągniemy z $-1$ pierwiastek kwadratowy, będzie $\sqrt{-1}$; przeto $-1$ iest potęgą drugą względem $\sqrt{-1}$, a następnie $\sqrt{-1}.\sqrt{-1}=-1$; zkąd $\sqrt{-1}.\sqrt{-1}.\sqrt{-1}=-1\times\sqrt{-1}=1\times-\sqrt{-1}=-\sqrt{-1}$; daléy $\sqrt{-1}.\sqrt{-1}.\sqrt{-1}.\sqrt{-1}=-1\times-1=+1$; $\sqrt{-1}.\sqrt{-1}.\sqrt{-1}.\sqrt{-1}.\sqrt{-1}=+1\times\sqrt{-1}=\sqrt{-1}$. Sledząc podobnym sposobem, iakie będą wieloczyny z większéy liczby mnożników, znaydziemy, że gdy ta liczba iest którymkolwiek wyrazem postępu arytmetycznego 1, 5, 9, 13, 17, itd, wieloczynem albo raczéy potęgą będzie $\sqrt{-1}$; ieżeli iest wyrazem postępu 2, 6, 10, 14, 18, itd, potęgą będzie $-1$; ieżeli iest wyrazem postępu 3, 7, 11, 15, 19, itd, potęgą będzie $-\sqrt{-1}$; naostatek ieżeli wyrazem postępu 4, 8, 12, 16, 20, itd, potęgą będzie $+1$. Słowem potęga z uroionéy iedności albo iest $\sqrt{-1}$, albo $-1$, albo $-\sqrt{-1}$, albo $+1$, podług tego iak wykładnik takowéy potęgi dzielony przez 4 zostawi na resztę 1, albo 2, albo 3, albo 0. np. potęga dziewiętnasta będzie $-\sqrt{-1}$, bo z dzielenia 19 przez 4 zostaie reszta 3.

Jeżeli teraz będzie zadano do mnożenia $\sqrt{-a}.\sqrt{-b}.\sqrt{-cd}$; wyraziwszy w postaci rzetelnéy, wypadnie $\sqrt{a}\sqrt{-1}.\sqrt{b}\sqrt{-1}.\sqrt{cd}\sqrt{-1}$. Wieloczyn z mnożników niewymiernych iest $\sqrt{abcd}$, z iedności uroionéy wziętéy trzy razy za mnożnik powstaie $-\sqrt{-1}$; przeto żądany wypadek będzie $-\sqrt{abcd}\sqrt{-1}$. Z prawa, któreśmy podali na rozmaite potęgi uroionéy iedności, pokazuie się, że z mnożników uroio-



www.rcin.org.pl

nych wziętych w liczbie parzystéy wieloczyn zawsze iest rzetelny, z mnożników zaś w liczbie nieparzystéy zawsze uroiony.

Dwa mnożniki, częścią uroione, częścią rzetelne; nie różniące się niczém więcéy od siebie tylko znakiem części uroionéy, daią wieloczyn rzetelny. np. $(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})=a^2-ab\sqrt{-1}+ab\sqrt{-1}+b^2=a^2+b^2$. Podobnie $(c+d\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1})=c^2+d^2$. Gdybyśmy piérwszą parę mnożników rozmnożyli przez drugą, wieloczyn byłby rzetelny, taki sam, iaki powstaie z rozmnożenia $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$. Ogólnie, ilekolwiekbyśmy wzięli par mnożników poprzedzaiącego kształtu, zawsze wieloczyn wypadłby rzetelny; aleby został uroiony, gdybyśmy do kilku par przyłączyli ieszcze ieden np. $m+n\sqrt{-1}$: i tak wieloczyn z pięciu mnożników
$(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1})(m+n\sqrt{-1})$
$=(a^2+b^2)(c^2+d^2)(m+n\sqrt{-1})=a^2c^2m+b^2c^2m+a^2d^2m+b^2d^2m+a^2c^2n\sqrt{-1}+b^2c^2n\sqrt{-1}+a^2d^2n\sqrt{-1}+b^2d^2n\sqrt{-1}$
zamyka terminy uroione.

## § 9. *Wyciąganie pierwiastku wszelkich potęg z funkcyi iakieykolwiek.*

Poznaliśmy z czego się składa potęga iakakolwiek funkcyi dwuwyrazowéy, lub wielowyrazowéy uważaiąc ią z dwóch części złożoną. Używszy teraz działań przeciwnych, potrafimy daną potęgę rozebrać i wrócić się do pierwiastku, z którego powstała. J tak gdybyśmy mieli wyciągnąć pierwiastek potęgi $m$ z funkcyi, którą wyraźmy ogólnie przez $A$; ieżeli funkcya $A$ iest taka, że iéy pierwiastek składa się z dwóch tylko wyrazów, ten pierwiastek będzie należał do wzoru $x+a$, toiest $\sqrt[m]{A}=x+a$, a sama funkcya do wzoru

$$A=x^m+mx^{m-1}a+\frac{m(m-1)}{1.\ 2}x^{m-2}a^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}x^{m-3}a^3+\text{itd.}+a^m; \ldots. \quad (x)$$

gdzie ponieważ widzimy że pierwszym wyrazem iest piérwsza część pierwiastku wyniesiona do potęgi $m$ takiéy saméy iakiéy pierwiastek z funkcyi $A$ ma bydź znaleziony; ieżeli więc uszykuiemy funkcyą daną $A$ podług ubywaiącego wykładnika któréykolwiek litery obranéy za porządkową, tak iak iest uszykowany wzór ($x$) podług wykładników ilości $x$, i ieżeli z piérwszego wyrazu téy funkcyi wyciągniemy pierwiastek potęgi $m$, otrzymamy część piérwszą pierwiastku szukanego. Aże w drugim wyrazie potęgi toiest w $mx^{m-1}a$ znayduie się część piérwsza pierwiastku wyniesiona do potęgi niższéy o iedność pomnożona przez wykładnik potęgi i przez część drugą pierwiastku; gdy więc odkrytą część piérwszą wyniesiemy do potęgi niższéy o iedność, rozmnożymy przez wykładnik potęgi, i przez ten wieloczyn rozdzielimy drugi termin funkcyi podanéy, wypadnie na wieloraz część druga pierwiastku. Otrzymany dwuwyrazowy pierwiastek podniósłszy do potęgi $m$ podług wzoru ($x$), i tę potęgę odiąwszy od funkcyi $A$, ieżeli nic nie zostanie, będzie robota skończona. Jeżeli zaś wypadnie iaka reszta, naówczas albo pierwiastek szukany iest niewymierny, albo się składa z więcéy niż dwóch terminów: może więc ten pierwiastek należéć do wzoru $\sqrt[m]{A}=x+a+b$, sama zaś funkcya $A$ wtedy podpada pod wzór

$$A=(x+a)^m+m(x+a)^{m-1}b+\frac{m(m-1)}{1.\ 2}(x+a)^{m-2}b^2+\text{ itd.}$$
$$+b^m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (y).$$

Znalazłszy sposobem poprzedzaiącym $x$ i $a$, kiedy uformowaną potęgę $m$ z odkrytego pierwiastku $x+a$ odciągniemy od funkcyi $A$, pozostała reszta będzie wzoru

$$m(x+a)^{m-1}b+\frac{m(m-1)}{1.\ 2}(x+a)^{m-2}b^2+ \quad . \quad . \quad . \quad +b^m:$$

téy reszty część piérwsza $m(x+a)^{m-1}b$ po rozwinieniu ma postać

$$mx^{m-1}b+m(m-1)x^{m-2}ab+ \quad . \quad . \quad . \quad +ma^{m-1}b:$$

łatwo widzieć że z terminu początkowego $mx^{m-1}b$ maiącego oczywiście wykładnik ilości porządkowéy $x$ naywiększy w całéy reszcie, otrzymamy część trzecią pierwiastku $b$, kiedy ten termin rozdzielimy przez $mx^{m-1}$. Co pokazuie, że

www.rcin.org.pl

dla wynalezienia terminu trzeciego na pierwiastek, potrzeba piérwszy termin reszty, z naywiększym wykładnikiem ilości porządkowéy, rozdzielić przez piérwszy termin pierwiastku wyniesiony do potęgi $m-1$ i rozmnożony przez wykładnik $m$. Przyszedłszy do trzywyrazowego pierwiastku $x+a+b$; trzeba go wynieść do potęgi $m$ podług wzoru ($y$), i tę potęgę odiąć od funkcyi $A$; ieżeli nic nie zostanie, będzie działanie skończone. Jeżeli zaś ieszcze wypadnie reszta; będzie znakiem, że albo pierwiastek iest niewymierny, albo że się składa z więcéy niż trzech wyrazów: może więc naówczas ten pierwiastek bydź wzoru $\sqrt[m]{A}=x+a+b+c$, wtedy tak się szuka czwarty wyraz pierwiastku $c$, iak piérwéy trzeci $b$ i drugi $a$; toiest piérwszy termin reszty zamykaiący ilość porządkową z naywiększym wykładnikiem trzeba rozdzielić przez piérwszy termin pierwiastku podniesiony do potęgi $m-1$ i rozmnożony przez $m$.

Z tych uwag wyciągniemy następuiące ogólne prawidło.
„ *Naprzód*, potrzeba ułożyć funkcyą daną podług uby-
„ waiących wykładników któréykolwiek litery. *Powtóre*,
„ z piérwszego terminu tak uszykowanéy funkcyi wycią-
„ gnąć pierwiastek; ten będzie piérwszym terminem pier-
„ wiastku szukanego. *Potrzecie*, otrzymany termin na pier-
„ wiastek podnieść do potęgi niższéy o iedność, tę potęgę
„ rozmnożyć przez wykładnik, i wypadaiącym ztąd wielo-
„ czynem rozdzielić drugi termin funkcyi danéy; wieloraz
„ będzie drugim terminem pierwiastku. *Poczwarte*, kiedy
„ z całego odkrytego pierwiastku zrobioną potęgę odeymie-
„ my od funkcyi danéy i nie znaydziemy żadnéy reszty,
„ będzie to znakiem, że potęga dana powstała z funkcyi
„ dwuwyrazowéy. Jeśli zaś wypadnie reszta, to pokaże nam
„ iż pierwiastek szukany zawiera więcéy niż dwa terminy,
„ albo też iest niewymierny. Dla znalezienia terminu trze-
„ ciego na pierwiastek, potrzeba piérwszy termin uszyko-
„ wanéy reszty rozdzielić przez to samo wyrażenie, które
„ służyło za dzielnik w szukaniu terminu drugiego, itd."

Przykłady.

$$\sqrt[3]{(8a^6-48a^5b+132a^4b^2-208a^3b^3+198a^2b^4-108ab^5+27b^6)}=2a^2-4ab+3b^2;$$

$\sqrt[4]{(16x^8-32bx^7+24b^2x^6+96cx^6-8b^3x^5-144bcx^5+b^4x^4 + 72b^2cx^4+216c^2x^4-12b^3cx^3-216bc^2x^3+54b^2c^2x^2 +216c^3x^2-108bc^3x+81c^4)} = 2x^2-bx+3c.$

*Wzór działania.*

wzór potęgi.
$x^3+3x^2a+3xa^2+a^3;$

$\sqrt[3]{(8a^6-48a^5b+132a^4b^2-208a^3b^3 +198a^2b^4-108ab^5+27b^6)}=2a^2 -4ab+3b^2.$

$\sqrt[3]{8a^6}=2a^2;\ 3(2a^2)^2=12a^4;\ \frac{-48a^5b}{12a^4}=-4ab;$

$(2a^2-4ab)^3=8a^6-48a^5b+96a^4b^2-64a^3b^3;$ to się odciąga od funkcyi danéy; zostaie reszta

$$36a^4b^2-144a^3b^3+198a^2b^4+108ab^5+27b^6;$$

$$\frac{36a^4b^2}{12a^4}=3b^2.$$

Zeby doświadczyć, czy funkcya $2a^2-4ab+3b^2$ iest pierwiastkiem zupełnym z funkcyi danéy, trzeba od téy ostatniéy odiąć $(2a^2-4ab+3b^2)^3$ czyli $(2a^2-4ab)^3 +3(2a^2-4ab)^2.3b^2+3(2a^2-4ab)(3b^2)^2+(3b^2)^3$ albo co na iedno wychodzi trzeba od reszty już otrzymanéy $36a^4b^2 -144a^3b^3+198a^2b^4-108ab^5+27b^6$ odciągnąć $3(2a^2-4ab)^2.3b^2+3(2a^2-4ab)(3b^2)^2+(3b^2)^3$ czyli $36a^4b^2-144a^3b^3+144a^2b^4+54a^2b^4-108ab^5+27b^6$; z takowego odciągania żadna nie zostaie reszta, więc funkcya dana iest dokładną potęgą trzecią ze znalezionego pierwiastku $2a^2-4ab+3b^2$.

*Wzór działania.*

wzór potęgi.

$x^4+4x^3a+6x^2a^2+4xa^3+a^4;$

$\sqrt[4]{(16x^8-32bx^7+24b^2x^6 +96cx^6-8b^3x^5-144bcx^5 +b^4x^4+72b^2cx^4+216c^2x^4 -12b^3cx^3-216bc^2x^3 +54b^2c^2x^2+216c^3x^2 -108bc^3x+81c^4)}=2x^2 -bx+3c.$

$\sqrt[4]{16x^8}=2x^2;\quad 4(2x^2)^3=32x^6;\quad \frac{-32bx^7}{32x^6}=-bx.$

www.rcin.org.pl

$(2x^2-bx)^4=16x^8-32bx^7+24b^2x^6-8b^3x^5+b^4x^4$; to odciągnąwszy od funkcyi daney wypadnie na reszte

$$96cx^6-144bcx^5+72b^2cx^4+216c^2x^4-12b^3cx^3$$
$$-216bc^2x^3+54b^2c^2x^2+216c^3x^2-108bc^3x+81c^4; \ldots (z)$$
$$\frac{96cx^6}{32x^6}=3c.$$

Od reszty $(z)$ trzeba odiąć potęgę czwartą z funkcyi $2x^2-bx+3c$ prócz części $(2x^2-bx)^4$, toiest trzeba odiąć $4(2x^2-bx)^3.3c+6(2x^2-bx)^2(3c)^2+4(2x^2-bx)(3c)^3+(3c)^4$: lecz

$4(2x^2-bx)^3.3c=96cx^6-144bcx^5+72b^2cx^4-12b^3cx^3$,

$6(2x^2-bx)^2(3c)^2=216c^2x^4-216bc^2x^3+54b^2c^2x^2$,

$4(2x^2-bx)(3c)^3=216c^3x^2-108bc^3x$

$(3c)^4=81c^4$.

Po odciągnieniu summy stron drugich od reszty $(z)$, nic nie zostanie; przeto funkcya $2x^2-bx+3c$ iest pierwiastkiem szukanym zupełnym. Gdyby ieszcze wypadła reszta; należałoby iéy pierwszy wyraz dzielić przez $32x^6$ dla odkrycia czwartego wyrazu na pierwiastek. itd.

## § 10. *O wyciąganiu pierwiastków z liczb.*

Wypada z początków mnożenia, że potęga $m$ z liczby 10 iest iedność maiąca po sobie zer $m$; zatém wszystkich liczb mnieyszych od 10, toiest wyrażonych iednym znakiem potęga $m$ niemoże zawiérać więcéy znaków nad $m$: i naodwrót, liczby maiącéy znaków $m$ albo mniéy, pierwiastek potęgi $m$ będzie w sobie zawiérał znak tylko ieden. Zeby wynaleźć ten pierwiastek, trzeba przez mnożenie uformować potęgi z dziewięciu początkowych liczb 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, i uważać z którą się liczba dana zupełnie zgadza, lub do którey z nich nayblizéy przystępuie.

Potęga $m$ z liczby 100 iest iedność maiąca po sobie zer $2m$: ztąd wszystkich liczb dwoma znakami wyrażonych; a tém samém środkuiących między 10 i 100 potęga $m$ będzie większa od iedności z zerami $m$, a mnieysza od iedności z zerami $2m$; ma przeto więcéy znaków niż $m$, a niemoże mieć więcéy nad $2m$.

www.rcin.org.pl

Z podobnych uwag przekonamy się, że potęgi $m$ z liczb trzema znakami wyrażonych maią więcéy znaków niż $2m$, a nie mogą mieć więcéy nad $3m$. Gdyby zatém liczba dana zawierała np. znaków więcéy niż $5m$ ale nie więcéy od $6m$, pierwiastek potęgi $m$ z téy liczby zawierać będzie sześć znaków. W ogólności, kiedy liczbę daną podzielimy na klassy od prawéy ku lewéy ręce, zamykaiąc w każdéy klassie po znaków $m$, prócz ostatniéy która ich mniéy może zawierać; liczba tych klass pokaże z ilu znaków ma się składać pierwiastek potęgi $m$.

Przypuśćmy naprzód, że liczba dana zawiéra dwie tylko klassy; iéy przeto pierwiastek będzie złożony z dziesiątków i iedności. Nazwawszy liczbę tych dziesiątków przez $x$, liczbę iedności przez $a$, pierwiastek wyrazi się przez $x+a$, a dana liczba przez

$$x^m+mx^{m-1}a+\frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}a^2+\ldots+a^m, \quad . \quad . \quad (A)$$

toiest składać się musi z dodanych do siebie części $m+1$ we wzorze $(A)$ zamkniętych. Gdybyśmy liczbę daną potrafili na te części rozebrać; wtedy z piérwszéy $x^m$ wyciągnąwszy pierwiastek potęgi $m$, otrzymalibyśmy liczbę dziesiątków $x$. Ta potęga $m$ z dziesiątków zawarta iest w znakach liczby danéy składaiących klassę drugą idąc od prawéy ku lewéy stronie. O czém żeby się iasno przekonać, weźmy liczbę szczególną 83 czyli $80+3$ złożoną z 8 dziesiątków i z 3 iedności: podnosząc ią np. do potęgi trzeciéy, część piérwsza potęgi będzie $80^3$ czyli 512000, gdzie postrzegamy że znaki liczebne 512 maiące wartość, które przez wyciąganie pierwiastku wracaią nam 8 dziesiątków, kończą się na mieyscu czwartém, a do trzech mieysc ostatnich nie zachodzą, bo tam już są zera. Jeżeli więc zrobimy summę wszystkich cztérech części składaiących potęgę trzecią z 83, zawsze potęga trzecia z dziesiątków 8 czyli 512 nie będzie sięgała do trzech mieysc ostatnich które stanowią klassę piérwszą, ale będzie zawarta w klassie drugiéy. Podobnież wynosząc liczbę 83 do potęgi $m$, część piérwsza téy potęgi, toiest $80^m$ będzie $8^m$ z zerami $m$ na końcu; więc znaki téy części maiące wartość, z których przez wyciąganie pierwiastku wracaią się nam 8 dziesiątków, nie sięgaią do klassy piérwszéy z $m$ znaków złożonéy, lecz zamknięte

www.rcin.org.pl

są w klassie drugiéy. Widzimy więc w ogólności, że dziesiątków $x$ trzeba szukać w klassie drugiéy przez wyciąganie pierwiastku potęgi $m$. Znalazłszy dziesiątki $x$, zrobiwszy z nich potęgę $m$, i odciągnąwszy od liczby danéy; reszta będzie zbiorem wszystkich części pozostałych, potęgę składaiących, toiest części

$$mx^{m-1}a+\frac{m(m-1)}{1.\ 2}x^{m-2}a^2+\text{itd.}+a^m.$$

Jeżelibyśmy z téy reszty potrafili odosobnić część $mx^{m-1}a$; moglibyśmy ztąd wynaleźć iedności $a$. Na ten koniec uważmy, że iako potęga $m$ z dziesiątków $x$ nie zachodziła do mieysc ostatnich $m$, tak potęga $x^{m-1}$ ani sama ani pomnożona przez $ma$ nie będzie sięgała do końcowych znaków $m-1$; zatém w otrzymanéy reszcie odciąwszy od prawéy ręki znaków $m-1$, w znakach pozostałych zawarta będzie część $mx^{m-1}a$. Gdy więc znalezione dziesiątki wyniesiemy do potęgi $m-1$, rozmnożymy przez $m$, i tym wieloczynem rozdzielimy rzeczone pozostałe znaki, otrzymamy na wieloraz iedności $a$ szukanego pierwiastku. Maiąc $x$ i $a$, kiedy z nich zrobimy $mx^{m-1}a$ i od całéy reszty piérwszéy odciągniemy, wypadnie reszta druga, od któréy gdy odeymiemy wszystkie części pozostałe i przez to ią zupełnie wyczerpamy, będzie znakiem że liczba dana iest potęgą dokładną; ieżeli nie wyczerpamy, wtedy pierwiastek szukany iest niewymierny. Przykład. $\sqrt[5]{335,54432}=32$

*wzór potęgi*

$$x^5+5x^4a+10x^3a^2+10x^2a^3+5xa^4+a^5;$$

*Wzór działania.*

$$\sqrt[5]{335,54432}=32.$$

$$3^5 = 243$$

$$3^4\times5=405 \,|\, 925,4432$$

$$3^4\times5\times2=810$$

$$115 4432 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (*)$$

Reszta (*) została, iak widzimy, po odciągnieniu od liczby danéy dwóch piérwszych części potęgę piątą składaiących. Jeżeli przeto liczba dana iest potęgą zupełną, ta reszta powinna bydź dokładnym zbiorem części pozostałych $10x^3a^2+10x^2a^3+5xa^4+a^5$. Uważaiąc, że w teraźnieyszym przykładzie $x$ znaczy trzy *dziesiątki*, $a$ dwie *iedności*, i że każda część musi mieć tyle na końcu zer iaki iest w niéy wykładnik nad $x$, takowe części po wykonaniu będą

$$\begin{array}{r} 10x^3a^2 = 1080{,}000 \\ 10x^2a^3 = ..720{,}00 \\ 5xa^4 = ...240{,}0 \\ a^5 = .....32 \\ \hline \text{Summa} \quad 1154432 \end{array} \quad . \quad (**).$$

Ta summa odciągniona od reszty (*) nic nie zostawia; zatém otrzymany pierwiastek iest zupełny. Gdyby summa (**) wypadła większą od reszty (*), toby pokazywało, że ostatni znak pierwiastku iest za wielki: wtedy należy ten znak pomnieyszyć o iedność i przeyść znowu przez podobny iak teraz rachunek.

Weźmy teraz przypadek, kiedy liczba dana zawiéra klass trzy, z których piérwsze dwie od prawéy ręki maią po znaków $m$, trzecia albo ma znaków $m$ albo mniéy niż $m$. Pierwiastek więc zamknie sta, dziesiątki i iedności. Nazwawszy liczbę set przez $x$, dziesiątków przez $a$, iedności przez $b$, wzór pierwiastku będzie $x+a+b$, a liczba daną wyrazi się przez

$$(x+a)^m+m(x+a)^{m-1}b+\frac{m(m-1)}{1.\ 2}(x+a)^{m-2}b^2+\text{itd.}+b^m.$$

Uważmy w których znakach liczby danéy zawarta iest część $(x+a)^m$. Ponieważ $x+a$ składa się z set i dziesiątków, więc iest liczbą która ma na końcu iedno zero; przeto w potędze iéy $m$ czyli w $(x+a)^m$ będzie na końcu zer $m$, a następnie znaki liczebne téy potęgi maiące wartość nie będą wchodziły do klassy ostatniéy: ztąd cała potęga $(x+a)^m$ zawiéra się w dwóch klassach po stronie lewéy; z tych przeto klass potrzeba szukać $x+a$. Takim sposobem działanie przywodzi się do przypadku poprzedzaiącego, toiest do wynaydowania dwóch znaków liczebnych $x$ i $a$ z dwóch klass. Wyciągnąwszy, podług wskazanych niedawno prawideł, $x$ i $a$, zrobiwszy potęgę $(x+a)^m$, i tę odiąwszy od liczby danéy, pozostała reszta zamknie w sobie części

$$m(x+a)^{m-1}b+\frac{m(m-1)}{1.\ 2}(x+a)^{m-2}b^2+$$
$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}(x+a)^{m-3}b^3+\text{itd.}+b^m.$$

Część $m(x+a)^{m-1}b$, maiąc na końcu zer $m-1$, do tyluż znaków ostatnich otrzymaney reszty nie zachodzi, ale się zawiéra w tych znakach reszty które zostaią po odcięciu końcowych $m-1$. Liczbę, złożoną ze znaków pozostałych z odłączenia ostatnich $m-1$, rozdzieliwszy przez $m(x+a)^{m-1}$, wypadnie na wieloraz $b$. Będziemy więc mieli cały pierwiastek znany $x+a+b$; trzeba potém porobić i odiąć wszystkie części potęgi w skład reszty wchodzące, żeby się przekonać czy znak otrzymany nie iest zawielki, lub też czy dana liczba iest potęgą dokładną, a następnie czy znaleziony pierwiastek iest zupełny. Odciąganie różnych części można albo razem odbyć, toiest zrobić summę wszystkich i odiąć, albo też odeymować następnie iednę po drugiéy, naprzód $m(x+a)^{m-1}b$, potém $\frac{m(m-1)}{1.\ 2}(x+a)^{m-2}b^2$; itd. Nadto, ponieważ część np. $\frac{m(m-1)}{1.\ 2}(x+a)^{m-2}b^2$ ma na końcu zer $m-2$, można te zera opuścić, a same tylko znaki maiące wartość odciągać, ale też w liczbie od któréy się odeymuie trzeba pierwéy odciąć znaków końcowych $m-2$ i tylko od pozostałych odeymować. Toż samo o odciąganiu innych części rozumieć należy. Stosuiąc te uwagi do liczby z ilukolwiek klass złożoney, możemy ustanowić na wyciąganie z niéy pierwiastku następuiące prawidło. „Podzieliwszy liczbę daną na klassy, trzeba z piérwszéy od „lewéy ręki wyciągnąć pierwiastek potęgi $m$; ten będzie „piérwszym znakiem pierwiastku szukanego. Do reszty, „iaka zostanie po odciągnieniu potęgi $m$ z otrzymanego zna„ku od klassy piérwszéy, składa się klassa następuiąca i „w niéy się odcina $m-1$ znaków końcowych. Znak wy„naleziony pierwiastku podnosi się do potęgi $m-1$, ta po„tęga mnoży się przez $m$ i wypadaiącym ztąd wieloczy„nem dzieli się liczba na lewéy stronie względem odcina„iącéy kreski położona; wieloraz będzie znakiem drugim

„ pierwiastku. Należy potém uformować wszystkie części,
„ oprócz piérwszéy, składaiące potęgę $m$ z liczby wyrażo-
„ néy dwoma znakami i summę tych części odiąć od licz-
„ by którąśmy dopiéro dzielili ale wziętéy ze znakami od-
„ ciętémi $m-1$. Do reszty dopisuie się klassa następuiąca;
„ potém, co dla wynalezienia znaku drugiego robiliśmy
„ z piérwszym, to samo dla wynalezienia znaku nowego,
„ trzeba robić z całą liczbą na pierwiastek otrzymaną. Tym
„ sposobem póty się ciągnie rachunek, aż zniesiemy wszyst-
„ kie klassy i wszystkie znaki pierwiastku odkryiemy."

*Przykład.* Wyciągnąć pierwiastek potęgi czwartéy z liczby 29,9821,9536 zawiéraiącéy trzy klassy. W tym rachunku potrzeba mieć zawsze przed oczami wzór odpowiadaiącéy potęgi

$$x^4+4x^3a+6x^2a^2+4xa^3+a^4$$

*Wzór działania.*

$$\sqrt[4]{29,9821,9536}=234$$

$$2^4=16$$

| | | |
|---|---|---|
| $4\times2^3=32$ | 139,821 | . . . (*) |
| | 119 841 | |
| $4\times23^3=48668$ | 199809,536 | . . . (**) |
| | 199809 536 | |
| | 0 | |

$$4\times2^3\times3=96,000$$
$$6\times2^2\times3^2=216,00$$
$$4\times2\times3^3=\ 216,0$$
$$3^4=\ldots81$$

Summa $=119841$. Ta summa odciąga się od reszty (*).

$$4\times23^3\times4=194672,000$$
$$6\times23^2\times4^2=..50784,00$$
$$4\times23\times4^3=....5888,0$$
$$4^4=.....256$$

Summa $=199809536$. Ta summa odciaga się od reszty (**).

*Uwaga I.* Niech $a$ wystawia iakąkolwiek liczbę całką.

www.rcin.org.pl

Wiemy że $\sqrt[m]{a \times 10^m} = 10 . \sqrt[m]{a}$, $\sqrt[m]{a \times 100^m} = 100 . \sqrt[m]{a}$, itd. Gdy więc liczbę iaką pomnożymy przez 10, 100, itd, czyli dopiszemy iéy na końcu zer $m$, $2m$, itd; pierwiastek potęgi $m$ z téy liczby stanie się większym razy 10, 100, itd. Ztąd wypada sposób na dochodzenie przybliżonego pierwiastku z liczby nie będącéy zupełną potęgą. Potrzeba iéy przydać iednę, lub dwie, lub trzy, itd, klassy z samych zer złożone; a potém, według okazanego wyżéy prawidła, wyciągać pierwiastek, który można, iak widzimy, posunąć do upodobanéy liczby znaków. Ale ten pierwiastek będzie większy od żądanego razy 10, 100, itd; należy więc go tyleż razy zmnieyszyć przez odcięcie na ułamek dziesiątny tyle końcowych znaków, ile było klass dopisanych.

*Uwaga II. A).* Nazwiymy liczbę przez $N$, iednę część iéy pierwiastku kwadratowego przez $a$, drugą przez $b$: ieżeli np. ten pierwiastek iest 24538, wtedy $a$ może wyrażać 245 set, $b$ zaś 38 iedności. Więc $N = a^2 + 2ab + b^2$; ztąd

$$\frac{N - a^2}{2a} = b + \frac{b^2}{2a}.$$

$N - a^2$ iest to reszta, iaką w działaniu wyciągania pierwiastku otrzymuiemy, odiąwszy kwadrat ze znalezionéy części $a$ pierwiastku od liczby danéy. Dzieląc tę resztę przez podwoioną odkrytą część pierwiastku, wypadnie iak widzimy na wieloraz część piarwiastku pozostała $b$ złączona z ułamkiem $\frac{b^2}{2a}$. Gdybyśmy byli pewni, że ułamek $\frac{b^2}{2a}$ iest mnieyszy od iedności: wtedy na otrzymanie drugiéy części $b$ pierwiastku dosyć byłoby resztę $N - a^2$ póty dzielić przez $2a$ pókibyśmy nie wyczerpali części całkiéy wielorazu: i wyciągnienie całéy drugiéy części odbyłoby się zapomocą samego tylko dzielenia reszty $N - a^2$ przez $2a$. Uważmy teraz, kiedy $\frac{b^2}{2a}$ musi bydź koniecznie mnieysze od iedności. Daymy że wszystkich znaków pierwiastku ma bydź $2n$, i żeśmy odkryli przez wyciąganie sposobem zwyczaynym znaków $n+1$; więc $a$ ma znaków $n+1$ i prócz tego na końcu zer $n-1$; czyli $a$ ma wszystkich znaków $2n$, następnie $2a$ ma znaków albo $2n$ albo $2n+1$: część $b$ po-

www.rcin.org.pl

winna mieć wtedy znaków $n-1$, więc $b^2$ będzie ich miało $2n-2$ albo $2n-3$; ztąd $b^2$ ma koniecznie mniéy znaków niż $2a$: Przeto $b^2<2a$, a następnie $\frac{b^2}{2a}<1$. Z teraźnieyszych uwag wypada prawidło: *potrzeba wyciągnąć na pierwiastek więcéy znaków niż połowa wszystkich maiących się otrzymać; z téy odkrytéy części pierwiastku zrobiony kwadrat odiąć od liczby danéy, i resztę podzielić przez podwóyną znalezioną część, a wypadaiący wieloraz całki będzie pozostałą częścią pierwiastku szukanego.*

*Przykład.* $\sqrt{19,55,85,06,25} = 442$

$$\begin{array}{r|l}
 & 16 \\ \hline
8 & 35,5 \\
 & 32 \\ \hline
 & 35 \\
 & 16 \\ \hline
88 & 198,5 \\
 & 176 \\ \hline
 & 225 \\
 & 4 \\ \hline
 & 221.
\end{array}$$

Do téy ostatniéy reszty złożywszy dwie klassy następne, otrzymamy różnicę między liczbą daną a kwadratem ze znalezionéy części pierwiastku toiest z 44200. Dla odkrycia dwóch znaków dalszych pierwiastku dosyć takową różnicę 2210625 rozdzielić przez $44200\times2$.

$$\begin{array}{r|r|l}
88400 & 2210625 & 25 \\
 & 176800 & \\ \hline
 & 442625 & \\
 & 442000 & \\ \hline
 & 625. &
\end{array}$$

Łatwo się przekonać że 44225 iest pierwiastkiem kwadratowym z liczby danéy.

*B*). Gdy $a$ i $b$ są dwiema częściami pierwiastku sześciennego z liczby $N$, będzie

$$N=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3;$$

zkąd

www.rcin.org.pl

$$\frac{N-a^3}{3a^2}=b+\frac{b^2}{a}+\frac{b^3}{3a^2}.$$

Dzieląc przeto $N-a^3$ przez $3a^2$, wypadnie na wieloraz całki druga część pierwiastku $b$, ieżeli summa ułamków $\frac{b^2}{a}+\frac{b^3}{3a^2}$ iest mnieysza od iedności. Będzie zaś pewnie mnieysza, gdy liczba wszystkich znaków pierwiastku ma bydź $2n$ i kiedy $a$ ma ich $n+1$, a tém samém kiedy $b$ ma znaków $n-1$; bo wtedy $b^2$ może mieć naywięcéy znaków $2n-2$; aże $a$ ma znaków $n+1$ więc z końcowémi zeram $n-1$ ma ich wszystkich $2n$ toiest o dwa więcéy niż $b^2$ przeto ułamek $\frac{b^2}{a}$ iest mnieyszy od 0,1. Drugi ułamek $\frac{b^3}{3a^2}$ iako równy $\frac{b^2}{a}\times\frac{b}{3a}$ ieszcze iest mnieyszy od $\frac{b^2}{a}$, więc i summa obu ułamków iest mnieysza od iedności.

*Przykład.* Wyciągaiąc pierwiastek sześcienny z liczby

12,539,396,102,682,267,

kiedy otrzymamy cztéry znaki 2323 zostanie reszta

3723835.

Do téy reszty przyłączywszy dwie klassy ostatnie, będziemy mieli różnicę między liczbą daną a sześcianem ze znalezionéy części pierwiastku toiest z 232300. Żeby odkryć dwa znaki pierwiastku pozostałe, należy tylko takową różnicę 3723835682267 rozdzielić przez $232300^2\times3$ czyli przez 161889870000.

| | | |
|---|---|---|
| 161889870000 | 3723835682267 | 23. |
| | 323779740000 | |
| | 486038282267 | |
| | 485669610000 | |
| | 368672267. | |

Łatwo sprawdzić że 232323 iest zupełnym pierwiastkiem sześciennym z liczby danéy.

www.rcin.org.pl

§ 11. *Rozciągnienie wzoru Newtona do wykładników ułamkowych i odiemnych. Zkąd wypada użycie tego wzoru w dochodzeniu pierwiastków przybliżonych.*

Wykładniki użyte są naprzód do cechowania wieloczynów powstaiących z równych mnożników, czyli do cechowania potęg. Te wykładniki, wskazuiąc liczbę mnożników składaiących potęgę, są koniecznie całkie i dodatne; bo liczba mnożników nie może bydź tylko całka i dodatna. W nauce o dzieleniu wypadły nam wykładniki odiemne: te służą do wystawienia wyrażeń ułamkowych w postaci całkiéy. np. $a^{-2}$ znaczy iedno co ułamek $\frac{1}{a^2}$ czyli co wieloraz z podzielenia iedności przez potęgę drugą z $a$. Wyciąganie pierwiastku przyprowadziło nas do wykładników ułamkowych, które wyrażeniom niewymiernym nadaią kształt wymierny. np. $a^{\frac{2}{3}}$ znaczy iedno co $\sqrt[3]{a^2}$ i pokazuie że potrzeba liczbę $a$ wynieść do potęgi drugiéy i z wypadku wyciągnąć pierwiastek potęgi trzeciéy. Reguły na obchodzenie się z każdym gatunkiem wykładników były dotąd we wszystkich działaniach iednakie. Możemy się więc domyślać że i prawa zawarte we wzorze Newtona na rozwiianie funkcyy cechowanych wykładnikami całkiemi i dodatnémi rozciągaią się zarówno do funkcyy maiących wykładniki ułamkowe i odiemne. Zeby się atoli gruntownie przekonać o takiéy ogólności wzoru Newtona, potrzeba ią osobnym ustalić dowodem, który teraz podamy.

Uważmy naypiérwéy, że dwuwyraz $x+a$ może przyiąć kształt $x(1+\frac{a}{x})$; przeto $(x+a)^m = x^m(1+\frac{a}{x})^m$, a następnie gdy rozwiniemy potęgę $m$ z dwuwyrazu $1+\frac{a}{x}$ maiącego piérwszym terminem iedność i tę potęgę rozmnożymy przez $x^m$, wypadnie ztąd potęga $m$ dwuwyrazu $x+a$. Rozwinienie potęgi $(1+\frac{a}{x})^m$ otrzymamy położywszy we wzorze Newtona

www.rcin.org.pl

$$(x+a)^m = x^m + mx^{m-1}a + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}x^{m-2}a^2 + \ldots\ldots ;$$

iedność na mieyscu $x$, ułamek $\frac{a}{x}$ na mieyscu $a$, i pamiętaiąc że iedność do iakieykolwiek potęgi wyniesiona iest zawsze iednością; tak znaydziemy

$$\left(1+\frac{a}{x}\right)^m = 1+m\frac{a}{x}+\frac{m(m-1)}{1.\ 2}\frac{a^2}{x^2}+$$
$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}\frac{a^3}{x^3}+\text{itd.}$$

Jeżeli się przekonamy że tu dwie strony są sobie równe kiedy nawet $m$ będzie ułamkowe lub odiemne, tém samém będą równe po rozmnożeniu ich przez $x^m$, toiest będzie

$$x^m\left(1+\frac{a}{x}\right)^m = x^m\left(1+m\frac{a}{x}+\frac{m(m-1)}{1.\ 2}\frac{a^2}{x^2}+\ \ldots\ldots\right)$$

czyli

$$(x+a)^m = x^m + mx^{m-1}a + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}x^{m-2}a^2 + \ldots\ldots$$

tak więc nadamy wzorowi Newtona rościągłość do wykładników ułamkowych i odiemnych Cała zatém rzecz do tego się przywodzi, aby okazać, że szereg

$1+m\frac{a}{x}+\frac{m(m-1)}{1.\ 2}\frac{a^2}{x^2}+$itd. równa się funkcyi $\left(1+\frac{a}{x}\right)^m$ kiedy $m$ iest ułamkowe lub odiemne.

Niech *naprzód* $m=\frac{p}{q}$ ułamkowi dodatnemu; zadaymy sobie pytanie „z iakiéy funkcyi pochodzi szereg

$$1+m\frac{a}{x}+\frac{m(m-1)}{1.\ 2}\frac{a^2}{x^2}+\ \ldots\ldots$$

kiedy $m$ zastępuie mieysce ułamku $\frac{p}{q}$?". Nazwiymy tę funkcyą nieznaną przez $y$; więc

$$y=1+m\frac{a}{x}+\frac{m(m-1)}{1.\ 2}\frac{a^2}{x^2}+\text{itd.}\ \ldots\ (*);$$

www.rcin.org.pl

ieżeli się pokaże że $y$ musi znaczyć w tym razie $(1+\frac{a}{x})^{\frac{p}{q}}$ będziemy mieli dowód, że funkcya cechowana wykładnikiem ułamkowym rozwiia się na szereg podług wzoru Newtona. Podnosząc obie strony zrównania ( * ) do potęgi $q$ wskazaney przez mianownik ułamku $\frac{p}{q}$, wypada

$$y^q = [1+m\frac{a}{x} + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}\frac{a^2}{x^2} + \text{itd.}]^q \quad \ldots (^{**}).$$

Rozwinienie potęgi $q$ na drugiéy stronie bardzo łatwo otrzymamy, daiąc baczność na to, że kształt téy potęgi co do składu iéy terminow taki bydź musi teraz kiedy $m$ iest ułamkiem, iaki byłby gdyby $m$ znaczyło całość. Lecz gdy $m$ iest całością, wtenczas

$$1+m\frac{a}{x} + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}\frac{a^2}{x^2} + \text{itd} = (1+\frac{a}{x})^m$$

a następnie

$$[1+m\frac{a}{x} + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}\frac{a^2}{x^2} + \text{itd}]^q = (1+\frac{a}{x})^{mq}$$

$$= 1+mq\frac{a}{x} + \frac{mq(mq-1)}{1.\ 2}\frac{a^2}{x^2} + \text{itd};$$

ten więc ostatni wypadek iest rozwinieniem drugiéy strony w zrównaniu ( ** ). Będzie przeto

$$y^q = 1 + mq\frac{a}{x} + \frac{mq(mq-1)}{1.\ 2}\frac{a}{x^2} + \frac{mq(mq-1)(mq-2)}{.\ 2.\ 3}\frac{a^3}{x^3} + \text{itd};$$

aże $m = \frac{p}{q}$, zatém $mq = p$; ztąd

$$y^q = 1+p\frac{a}{x} + \frac{p(p-1)}{1.\ 2}\frac{a^2}{x^2} + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.\ 2.\ 3}\frac{a^3}{x^3} + \text{itd.}$$

Ponieważ $p$ iest całkie i dodatne, więc druga strona znaczy $(1+\frac{a}{x})^p$; idzie zatém że $y^q = (1+\frac{a}{x})^p$; wy-



www.rcin.org.pl

ciągaiąc z obu stron pierwiastek potęgi $q$, otrzymamy $y=(1+\frac{a}{x})^{\frac{p}{q}}$: kładąc to wyrażenie za $y$ w zrównaniu (*) i razem $\frac{p}{q}$ za $m$, wypada

$$(1+\frac{a}{x})^{\frac{p}{q}}=1+\frac{p}{q}\frac{a}{x}+\frac{\frac{p}{q}(\frac{p}{q}-1)}{1.\ 2}\frac{a^2}{x^2}+\text{itd.}$$

Tak iuż mamy przekonanie, że wzór Newtona ogarnia w sobie przypadek kiedy wykładnik dwuwyrazu iest ułamkowy dodatny.

Idźmy *powtóre* do uwagi przypadku, w którym wykładnik dwuwyrazu iest odiemny. Weźmy dwa szeregi

$$1+m\frac{a}{x}+\frac{m(m-1)}{1.\ 2}\frac{a^2}{x^2}+\text{itd},$$

$$1+n\frac{a}{x}+\frac{n(n-1)}{1.\ 2}\frac{a^2}{x^2}+\text{itd},$$

i daymy że $m$ iest dodatne, a zaś $n$ zastępuie mieysce ilości odiemnéy. Szereg więc piérwszy wyraża rozwinienie funkcyi $(1+\frac{a}{x})^m$. Nie wiémy z iakiéy funkcyi pochodzi szereg drugi; potrzeba kształt iéy wynaleźć: nazwawszy ią przez $z$, będzie

$$(1+\frac{a}{x})^m z=[1+m\frac{a}{x}+\frac{m(m-1)}{1.\ 2}\frac{a^2}{x^2}+\text{itd.}][1+n\frac{a}{x}+\frac{n(n-1)}{1.\ 2}\frac{a^2}{x^2}+\text{itd}]\ .\ .\ .\ .\ (**)$$

Wieloczyn na drugiéy stronie po wykonaniu okazać się musi pod taką postacią co do składu swoich terminów, iakąby miał gdyby ilości $m$ i $n$ były obie dodatne; tylko w wypadku zaydzie odmiana w znakach, którą łatwo wprowadzić biorąc w nim wszędzie $n$ za odiemne. Lecz kiedy $m$ i $n$ są dodatne, wtenczas mnogość z szeregów znaczy

$$(1+\frac{a}{x})^m(1+\frac{a}{x})^n \text{ czyli } (1+\frac{a}{x})^{m+n} \text{ czyli}$$

www.rcin.org.pl

$$1+(m+n)\frac{a}{x}+\frac{(m+n)(m+n-1)}{1.\ 2}\frac{a^2}{x^2}+$$

$$\frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)}{1.\ 2.\ 3}\frac{a^3}{x^3}+\text{ itd};$$

to więc ostatnie wyrażenie możemy wziąć za wieloczyn oznaczony w zrównaniu (**), i będzie

$$(1+\frac{a}{x})^m z=1+(m+n)\frac{a}{x}+\frac{(m+n)(m+n-1)}{1.\ 2}\frac{a^2}{x^2}+\text{itd};$$

tylko w mieyscu ilości $n$ dodatnéy trzeba położyć iéy wartość odiemną. Daymy ze $n$ znaczy $-m$; zatém

$$(1+\frac{a}{x})^m z=1+(m-m)\frac{a}{x}+$$

$$\frac{(m-m)(m-m-1)}{1.\ 2}\frac{a^2}{x^2}+\text{ itd}$$

czyli

$$(1+\frac{a}{x})^m z=1,\quad \text{zkąd } z=\frac{1}{(1+\frac{a}{x})^m}=(1+\frac{a}{x})^{-m}.$$

To pokazuie że wziąwszy $-m$ za $n$ w drugim szeregu, ten szereg będzie równy funkcyi $(1+\frac{a}{x})^{-m}$, toiest

$$(1+\frac{a}{x})^{-m}=1-m\frac{a}{x}-\frac{m(-m-1)}{1.\ 2}\frac{a^2}{x^2}$$

$$-\frac{m(-m-1)(-m-2)}{1.\ 2.\ 3}\frac{a^3}{x^3}+\text{ itd}$$

czyli

$$(1+\frac{a}{x})^{-m}=1-m\frac{a}{x}+\frac{m(m+1)}{1.\ 2}\frac{a^2}{x^2}$$

$$-\frac{m(m+1)(m+2)}{1.\ 2.\ 3}\frac{a^3}{x^3}+\text{ itd.}$$

Przeto funkcya cechowana wykładnikiem odiemnym rozbiera się na szereg złożony podług praw zawartych we wzorze Newtona.

*Uwaga I.* Gdyby wykładnik $m$ dwuwyrazu był ilo-

www.rcin.org.pl

ścią niewymierną; ieszcze i wtedy rozwinienie potęgi cechowanéy przez ten wykładnik podpadałoby pod wzór Newtona. Bo każda liczba niewymierna da się wyciąganiem pierwiastku wyrazić przez ułamek dziesiątny, przybliżony wprawdzie, ale którego przybliżenie ku ściśléy wartości możemy posunąc do takiego stopnia, iż różnica między ułamkiem i liczbą niewymierną będzie mnieysza od wszelkiéy ilości danéy choćby iak naymnieyszéy.

*Uwaga II.* We wzorze Newtona

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.\ 2} a^2 x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3} a^3 x^{m-3} + \text{itd}$$

łatwo postrzedz, że gdy wykładnik $m$ iest całki i dodatny, liczba wszystkich terminów bedzie ograniczona. Jeżeli bowiem $m$ znaczy np. iedność, wtedy wyraz trzeci i wszystkie po nim następne znikną, z przyczyny mnożnika $m-1$ wchodzącego do ich składu: gdyby $m$ znaczyło 2, natenczas wyraz czwarty i wszystkie dalsze stałyby się zerem, z przyczyny mnożnika $m-2$: itd. Jeżeli zaś wykładnik $m$ iest ułamkowy lub odiemny; w takim razie potęga tym wykładnikiem cechowana pociągnie się przez szereg nieskończony: bo żaden z mnożników $m-1$, $m-2$, itd, zniknąć nie może.

*Uwaga III.* Każdy wyraz szeregu Newtona może bydź zamknięty we wzorze

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ \ldots\ldots\ (m-n+1)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ldots\ n} a^n x^{m-n},$$

gdzie $n$ znaczy liczbę terminów poprzedzaiących. Ten wzór nazywa się *wyrazem ogólnym szeregu.* Z niego możemy wydobyć każdy szeregowy termin, uważaiąc na to, że w liczniku i mianowniku spółczynnika trzeba zawsze brać tyle początkowych mnożników, ile terminów poprzedza.

*Zastosowanie.* Wzór Newtona rozciągniony do wykładników ułamkowych podaie nam sposób, w niektórych przypadkach prędki i łatwy, na dochodzenie pierwiastków przybliżonych iakieykolwiek potęgi z liczb. Zadaymy sobie

www.rcin.org.pl

wynaleźć pierwiastek blizki kwadratowy z liczby 101. Będziemy mieli

$$\sqrt{101}=\sqrt{100+1}=(100+1)^{\frac{1}{2}}=100^{\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{100})^{\frac{1}{2}}=$$

$$10(1+\frac{1}{100})^{\frac{1}{2}}=10(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{100}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{100^2}$$

$$+\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{100^3}-\frac{5}{128}\cdot\frac{1}{100^4}+\text{itd.});$$

tu spółczynniki są uformowane według prawidła podanego na końcu *§fu 4go*, pisząc szereg

$$\frac{1}{2},\ \frac{\frac{1}{2}-1}{2},\ \frac{\frac{1}{2}-2}{3},\ \frac{\frac{1}{2}-3}{4},\ \text{itd,}$$

potém biorąc wieloczyny z coraz większéy liczby wyrazów tego szeregu. Znaki spółczynników idą naprzemian, a wartość tém iest mnieysza, im wyraz do którego spółczynnik należy iest odleglejszy od początku. Aże coraz wyższe potęgi ułamku właściwego $\frac{1}{100}$ są coraz mnieysze: przeto szereg obięty nawiasami iest *maleiący*: iego więc terminy od początku odległe, iako mało znaczące, można zaniedbać i summę kilku pierwszych poczytać za przybliżoną wartość całego szeregu. Wykonawszy w terminach szeregu podnoszenie do potęg i mnożenie, otrzymamy

$$\sqrt{101}=10(1+\frac{1}{200}-\frac{1}{80000}+\frac{1}{16000000}-\frac{5}{12800000000}+\text{itd})$$

$$=10+\frac{1}{20}-\frac{1}{8000}+\frac{1}{1600000}-\frac{5}{1280000000}+\text{itd.}$$

Ułamki zwyczayne w tym szeregu zamieńmy na dziesiątne i potém zbierzmy dodatne w iednę summę, odiemne w drugą: będzie

$$\frac{1}{20}=0{,}05$$

$$\frac{1}{1600000}=0{,}000000625$$

Summa $=0{,}050000625$

$$-\frac{1}{8000} = -0{,}000125$$

$$-\frac{5}{1280000000} = -0{,}0000000039140625$$

$$\text{Summa} = -0{,}0001250039140625$$

Od summy dodatnéy odciągnąwszy odiemną i do reszty przydawszy termin piérwszy szeregu 10, wypadnie

$$\sqrt{101} = 10{,}04987562\mathrm{1}\ \ldots\ldots$$

Na otrzymanie tego przybliżonego pierwiastku wzięliśmy pięć wyrazów szeregu, opuszczaiąc wszystkie następne. Summa opuszczonych iest mnieysza od piérwszego z nich, a tém bardziéy od ostatniego z zatrzymanych. Jakoż wystawmy sobie szereg, któryśmy opuścili, ogólnie przez

$$a-b+c-d+e-f+g- \text{ itd,}$$

gdzie ilości $a$, $b$, $c$ . . . są coraz mnieysze i niech piérwsza z nich będzie np. dodatna. W tym razie summa wszystkich musi bydź dodatna; bo połączenia $a-b$, $c-d$, $e-f$, . . . są dodatne dla tego iż $a>b$, $c>d$, . . . Można otrzymać tę summę dodaiąc do $a$ zbiór dwuwyrazów $-b+c$, $-d+e$, $-f+g$, . . . ; lecz wartość każdego dwuwyrazu iest odiemna, gdyż $b>c$, $d>e$, $f>g$, itd; ich więc zbiór będzie odiemny i musi bydź koniecznie mnieyszy od $a$, inaczéy bowiem summa szeregu wypadłaby odiemna: a przeto ten zbiór zniszczy w części $a$ i da na summę szeregu liczbę mnieyszą od $a$. Gdyby szereg teraz uważany zaczynał się od wyrazu odiemnego, przekonalibyśmy się podobnie, że summa iego terminów iest odiemna, a zawsze od piérwszego z nich mnieysza.

Na mocy teraźnieyszego rozumowania, znaleziony pierwiastek przybliżony kwadratowy z liczby 101 nie różni się od ścisłéy iego wartości nawet o 0,0000000391 . . a tém bardziéy o 0,00000001. Dopiéro więc ósmy znak dziesiątny może bydź chybny.

Używaiąc tego sposobu na dochodzenie przybliżonych pierwiastków, potrzeba liczbę daną rozebrać na dwie takie części, aby piérwsza była zupełną potęgą którey pierwiastku szukamy, i żeby była większa od drugiéy. Zachowany piérwszy warunek sprawi, że mnożnik szeregu będzie wymierny; drugi, że szereg będzie maleiący. Oba warunki

www.rcin.org.pl

mogą bydź zawsze spełnione. Maiąc np. wynaleźć pierwiastek sześcienny z liczby 24; nie można iéy wprawdzie rozebrać od razu na dwie części żądane: bo wziąwszy za część piérwszą naywiększy dokładny sześcian w téy liczbie zawarty 8; część druga 16 nie będzie od niego mnieysza. Lecz gdy otrzymamy sposobem zwyczaynym na pierwiastek przybliżony do iednego znaku dziesiątnego 2,8 z resztą 2,048; wtedy liczba 24 rozłoży się na dwie części $(2,8)^3 +$ 2,048 odpowiadaiące potrzebnym warunkom; i będzie $\sqrt[3]{24} =$

$$= [(2,8)^3 + 2,048]^{\frac{1}{3}} = 2,8\left(1 + \frac{2,048}{(2,8)^3}\right)^{\frac{1}{3}} = 2,8\left(1 + \frac{2048}{21952}\right)^{\frac{1}{3}} =$$

$$2,8\left(1 + \frac{32}{343}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Tu rozwinąwszy z funkcyi nawiasami obiętéy potęgę cechowaną wykładnikiem $\frac{1}{3}$, wypadnie szereg maleiący, gdyż $\frac{32}{343} < 0,1$.

*Uwaga co do spółczynników szeregu.* Wyraziwszy wykładnik znaku pierwiastkowego ogólnie przez $n$, spółczynniki szeregu powstaną z coraz większéy liczby mnożników

$$\frac{1}{n},\quad \frac{\frac{1}{n} - 1}{2},\quad \frac{\frac{1}{n} - 2}{3},\quad \frac{\frac{1}{n} - 3}{4},\quad \text{itd},$$

czyli z mnożników

$$\frac{1}{n},\quad \frac{1}{2n} - \frac{1}{2},\quad \frac{1}{3n} - \frac{2}{3},\quad \frac{1}{4n} - \frac{3}{4},\quad \text{itd.}$$

Piérwszy mnożnik iest mnieyszy od iedności; każdy z dalszych będąc różnicą ułamków właściwych iest także mnieyszy od iedności i iest oczywiście odiemny. Zatém wieloczyny z coraz większéy liczby mnożników muszą bydź coraz mnieysze i mieć znaki naprzemian. Spółczynniki więc zawsze się przykładaią do uczynienia wyrazów szeregu maleiącémi, i ustanawiaią potrzebną odmianę w znakach.

www.rcin.org.pl

## § 12. *Rozwiązanie zrównań stopnia drugiego.*

Widzieliśmy w §*fie* I*m* tego rozdziału, że zrównania zawieraiące kilka ilości nieznanych między sobą mnożonych prowadzą przez eliminacyą do zrównań z iedną ilością niewiadomą cechowaną wykładnikami. Wielkość tych wykładników stanowi *stopień* albo *wymiar* zrównania. Jeżeli naywiększy wykładnik ilości nieznaney iest 2, zrównanie będzie stopnia drugiego; ieżeli 3, będzie stopnia trzeciego; itd. Rozwiązanie takich zrównań wymagało znaiomości działań właściwych potęgom. Poznawszy teraz naukę wynoszenia do potęg i wyciągania pierwiastków, staraymy się z niey wydobyć sposoby na ocenienie ilości niewiadomych w zrównaniach różnych stopni, zaczynaiąc naprzód od stopnia drugiego. Zrównania tego stopnia mogą mieć troiakiego gatunku wyrazy: iedne zawieraiące ilość nieznaną z wykładnikiem 2, drugie z wykładnikiem 1, trzecie złożone z samych ilości wiadomych. Zamkniemy ie wszystkie w ogólnym wzorze

$$x^2+px+q=0,$$

gdzie $p$ i $q$ mogą bydź iakiekolwiek tak co do wielkości iak i znaku, a wyraz pierwszy $x^2$ iest koniecznie dodatny i ma spółczynnikiem iedność; pod ten bowiem wzór każde zrównanie drugiego stopnia da się podciągnąć: na ten koniec, ieżeli w daném szczególném zrównaniu przed $x^2$ iest —, trzeba w całém zrównaniu odmienić znaki na przeciwne; ieżeli $x^2$ ma iakikolwiek spółczynnik, przezeń rozdzielić należy wszystkie wyrazy zrównania. Np. zrównanie $7x-3x^2+8=2x+x^2-3$ po uproszczeniu bierze postać $5x-4x^2+11=0$; odmieniwszy znaki wszystkim terminom i uszykowawszy podług potęg $x$, będzie $4x^2-5x-11=0$; naostatek dzieląc przez 4, mamy $x^2-\frac{5}{4}x-\frac{11}{5}=0$, zrównanie pod formą ogólnego wzoru.

Rozwiązawszy wzór $x^2+px+q=0$, będziemy iuż mieli tém samém rozwiązanie wszystkich zrównań stopnia drugiego. Gdybyśmy z funkcyi $x^2+px+q$ wyciągnęli pierwiastek kwadratowy; ten zawierałby $x$ w potędze pierwszey:

www.rcin.org.pl

aże funkcya $x^2+px+q$ równa się zero, byłby więc równym zero i iéy pierwiastek; ztąd mielibyśmy zrównanie stopnia piérwszego, które rozwiązane odkryłoby wartość na $x$. Ale żeby pierwiastek z iakieykolwiek funkcyi dał się zupełnie wyciągnąć, powinna bydź ta funkcya potęgą dokładną, toiest wyrazy iéy powinny bydź złożone podług prawa zamkniętego we wzorze $x^2+2ax+a^2$; gdzie widzimy że wyraz ostatni $a^2$ iest potęgą drugą z połowy spółczynnika $2a$ przy terminie drugim czyli z $a$. Gdyby więc w wyrażeniu $x^2+px+q$, termin $q$ był równy kwadratowi z połowy $p$, czyli gdyby było $q=\frac{p^2}{4}$; to wyrażenie stałoby się $x^2+px+\frac{p^2}{4}=0$: możnaby naówczas wyciągnąć pierwiastek zupełny, i mielibyśmy $x+\frac{p}{2}=0$, zkąd $x=-\frac{p}{2}$. Taki przypadek zachodzi w zrównaniu $x^2-6x+9=0$, gdzie $9=(\frac{6}{2})^2=3^2$: wyciągnąwszy pierwiastek, będzie $x-3=0$, a zatém $x=3$.

Lecz kiedy termin $q$ nie iest równy $\frac{p^2}{4}$; trzeba go przenieść na drugą stronę, co daie

$$x^2+px=-q;$$

potém do obudwóch stron przydać $\frac{p^2}{4}$, przez co nie naruszymy związku, a stronę piérwszą uczynimy potęgą dokładną; i będzie

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=\frac{p^2}{4}-q:$$

wyciągaiąc z obu stron pierwiastek, mamy

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{(\frac{p^2}{4}-q)};$$

kładziemy przed drugim członkiem dwa znaki, bo przekonaliśmy się wyżéy że pierwiastkowi potęg cechowanych wkyładnikiem parzystym oba te znaki służą zarówno. Odłączywszy ilość $x$ od znanych, wypada

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{(\frac{p^2}{4}-q)}.$$

Otrzymuiemy zatém ze zrównań stopnia drugiego dwa pierwiastki czyli dwie wartości na ilość niewiadomą

$$x=-\frac{p}{2}+\sqrt{(\frac{p^2}{4}-q)} \quad \text{i} \quad x=-\frac{p}{2}-\sqrt{(\frac{p^2}{4}-q)}.$$

Możemy teraz na rozwiązanie zrównań stopnia drugiego ustanowić to ogólne prawidło. 1ód *przywodzi się zrównanie dane do postaci* $x^2+px+q=0$, *w którey* $x^2$ *ma spółczynnikiem iedność i domyślny znak* $+$; 2re *potém znane terminy przenoszą się na stronę drugą;* 3cie *połowa spółczynnika terminu drugiego podnosi się do kwadratu i dodaie po obu stronach, przez co członek piérwszy staie się potęgą drugą dokładną;* 4te *wyciąga się pierwiastek kwadratowy ze strony piérwszéy, a przed drugą kładzie się znak pierwiastkowy poprzedzony dwoma znakami* $\pm$, *albo ieżeli można wyciąga się pierwiastek i ze strony drugiéy biorąc go zawsze z dwoma znakami* $\pm$; 5te *ze zrównania zniżonego przez ostatnie działanie do piérwszego stopnia wydobywa się wartość ilości nieznanéy: ta wartość będzie dwoista podług dwóch znaków poprzedzaiących pierwiastek z drugiego członka.*

Gdyby w zrównaniu brakowało terminu drugiego zawieraiącego piérwszą potęgę ilości $x$, toiest gdyby było $x^2-q=0$; wtedy droga rozwiązania iest krótsza, bo tylko trzeba przenieść $q$ na drugą stronę i potém z obu członków wyciągnąć pierwiastek kwadratowy. Tym sposobem będzie $x^2=q$, $x=\pm\sqrt{q}$.

*Przykłady.*

I. Zrównanie $\frac{5}{6}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}=8-\frac{2}{3}x-x^2+\frac{273}{12}$ po uproszczeniu bierze postać $x^2+\frac{1}{11}x=\frac{180}{11}$; ztąd

$$x^2+\frac{1}{11}x+(\frac{1}{22})^2=(\frac{1}{22})^2+\frac{180}{11},$$

$$x+\frac{1}{22}=\pm\sqrt{[(\frac{1}{22})^2+\frac{180}{11}]}=\pm\sqrt{(\frac{1}{22^2}+\frac{180.44}{22^2})}=$$

www.rcin.org.pl

$\pm\sqrt{\frac{7921}{22^2}}$, $x+\frac{1}{22}=\pm\frac{89}{22}$, $x=-\frac{1}{22}\pm\frac{89}{22}$, czyli

$$x=\frac{88}{22}=4,\quad x=-\frac{90}{22}.$$

II. Zrównanie $6x^2-37x=-57$ czyli $x^2-\frac{37}{6}x=-\frac{57}{6}$ daie

$$x^2-\frac{37}{6}x+(\frac{37}{12})^2=(\frac{37}{12})^2-\frac{57}{6}=(\frac{37}{12})^2-\frac{2.12.57}{.12^2}=\frac{1}{12^2},$$

$$x-\frac{37}{12}=\pm\frac{1}{12},\text{ czyli } x=\frac{37}{12}+\frac{1}{12}=\frac{19}{6},\ x=\frac{37}{12}-\frac{1}{12}=3.$$

III. Zrównanie $4a^2-2x^2+2ax=18ab-18b^2$ czyli $x^2-ax=2a^2-9ab+9b^2$ daie

$$x^2-ax+\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{4}+2a^2-9ab+9b^2$$

$$=\frac{9a^2}{4}-9ab+9b^2,$$

ztąd

$$x-\frac{a}{2}=\pm\sqrt{(\frac{9a^2}{4}-9ab+9b^2)}=\pm(\frac{3a}{2}-3b),$$

$x=\frac{a}{2}\pm(\frac{3a}{2}-3b)$; dwie przeto wartości na $x$ są

$$x=2a-3b,\quad x=-a+3b.$$

*Zagadnienie I. Znaleźć liczbę, do któreyby podwóynego kwadratu przydawszy ią samę potroioną wypadło na summę* 65.

Nazwawszy liczbę niewiadomą przez $x$, będziemy mieli

$$2x^2+3x=65,$$

zkąd po rozwiązaniu otrzymamy $x=5$, $x=-\frac{13}{2}$.

*Zagadnienie II. Za pewną liczbę łokci zapłacono* 240 *złotych. Za te same pieniądze kupiono potém trzema łokciami mniey, i wtedy cena każdego łokcia była większa o cztéry złote. Jest pytanie, ile łokci było kupionych w piérwszym razie i w drugim?*

www.rcin.org.pl

Liczbę łokci w pierwszym kupnie wyraźmy przez $x$; będzie w drugim $x-3$. Cena łokcia w pierwszym razie iest $\frac{240}{x}$, w drugim $\frac{240}{x-3}$. A że cena druga przewyższa pierwszą o 4 złote, więc

$$\frac{240}{x-3}-\frac{240}{x}=4 \quad \text{czyli} \quad x^2-3x=180$$

zkąd

$$x=\tfrac{3}{2}\pm\sqrt{\tfrac{9}{4}+180}=\tfrac{3}{2}\pm\tfrac{27}{2} \quad \text{czyli } x=15 \quad \text{i } x=-12.$$

Liczba 15 odpowiada pytaniu. Przeto w pierwszym razie kupiono łokci 15, a następnie w drugim 12.

*Zagadnienie III. Naiął kto pewną liczbę robotników i zapłacił każdemu po cztery razy tyle groszy, ile ich było wszystkich: tenże przybrał potém trzech ieszcze robotników i zapłaciwszy każdemu po dwa grosze drożey niżeli pierwéy, wydał tą drugą razą groszy* 456. *Iluż było robotników?*

Wyraziwszy liczbę robotników użytych w pierwszym razie przez $x$, będzie w drugim $x+3$; w pierwszym zapłata każdego była $4x$, więc w drugim będzie $4x+2$. zkąd

$$(4x+2)(x+3)=456, \quad \text{czyli} \quad 4x^2+14x=450.$$

Uwolniwszy pierwszy termin od spółczynnika, mamy

$$x^2+\frac{14}{4}x=\frac{450}{4};$$

po rozwiązaniu znaydziemy

$$x=-\tfrac{7}{4}\pm\sqrt{\left(\frac{49}{16}+\frac{450}{4}\right)}=-\frac{7}{4}\pm\frac{43}{4}$$

czyli

$$x=9 \quad \text{i} \quad x=-\frac{25}{2}$$

Liczba więc robotników naprzód była 9 a potém 12.

*Zagadnienie IV. Kupuie kto pewną liczbę łokci materyi, za które płaci złotych* 204 *Drugą razą kupuie pięcią łokciami więcey niż pierwszą inney materyi, którey ło-*

www.rcin.org.pl

*kieć płaci czterma złotemi drożey, i wydaie złotych 552? Ileż łokci kupił i za iaką cenę tak pierwszey iak drugiey materyi?*

Nazwawszy liczbę łokci pierwszey materyi przez $x$, iey cenę przez $y$; będzie liczba łokci materyi drugiey $x+5$, cena $y+4$. Z warunków otrzymuiemy dwa zrównania

$$xy=204$$

$$(x+5)(y+4)=552 \text{ czyli } xy+4x+5y=532.$$

Wyrzuciwszy z nich $y$ będzie

$$x^2-32x+255=0,$$

zkąd po rozwiązaniu wypadną dwie wartości $x=15$ i $x=17$. Podstawuiąc ie koleią w piérwsze zrównanie znaydziemy $y=13+\frac{3}{5}$ i $y=12$. Więc albo piérwszéy materyi kupiono łokci 15 po złotych 13 i groszy 18, a drugiéy łokci 20 po złotych 17 i groszy 18; albo piérwszéy łokci 17 po złotych 12, drugiéy łokci 22 po złotych 16.

*Zagadnienie V. Przedaie kto konia za 11 czer: zł: i w tey przedaży zyskuie procent taki ile go koń kosztował. Coż więc dał za niego i co zyskał?*

Liczbę dukatów danych początkowo za konia wyraziwszy przez $x$, będzie zysk w przedaży $11-x$. A ponieważ według warunków zagadnienia takim iest procentem $11-x$ od $x$ iakim $x$ od sta; zatém

$$(11-x):x=x:100,$$

żtąd

$$x^2=1100-100x \text{ czyli } x^2+100x=1100.$$

Z rozwiązania wypadnie $x=-50\pm60$; toiest raz $x=10$, drugi raz $x=-110$. Przeto koń kosztował 10 czer: zł. a zyskano w przedaży 1 czer: zł.

Gdybyśmy w teraznieyszém zagadnieniu przez $x$ nazwali zysk; zrównanie miałoby wyrażenie

$$x:(11-x)=(11-x):100 \text{ czyli } x^2-122x+121=0$$

i przyprowadziłoby do obudwoch wartości na $x$ dodatnych $x=1$, $x=121$. Z tych pierwsza tylko odpowiada na dane pytanie, a druga zaspokaiać go oczywiście nie może. Pomiędzy więc wartościami nawet dodatnemi, niekażda bywa odpowiedzią pytaniu.

*Zagadnienie VI. W kompanii złożoney ze 20 osób zrobiono składkę. Mężczyzni ofiarowali 24 rubli i kobiéty ty-*

www.rcin.org.pl

*leż. Każdy mężczyzna dał iednym rublem więcey niż każda kobiéta. Ileż było mężczyzn i ile kobiét?*

Odpowiedź. Mężczyzn 8, kobiét 12.

*Zagadnienie VII. Na zapomożenie pewney liczby ludzi ofiarowano rubli 180. Pokazało się potem że dla czterech z nich wsparcie nie było potrzebne, przez co część ofiary przypadaiącą na każdego z pozostałych powiększyła się 12 rublami. Iluż było ludzi wspomożonych?*

Odpowiedź. 6.

*Uwaga I.* Wzór zrównań stopnia drugiego $x^2+px+q=0$ przyprowadził do wzoru ich pierwiastków

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p^2}{4}-q\right)}.$$

W skład tego ostatniego wchodzi funkcya poprzedzona znakiem pierwiastkowym wykładnika parzystego. Wartości więc na $x$ mogą bydź rzetelne lub uroione podług tego iak funkcya $\frac{p^2}{4}-q$ będzie dodatna lub odiemna. Piérwszy téy funkcyi termin $\frac{p^2}{4}$, iako potęga druga, iest zawsze dodatny, czy w zrównaniu $x^2+px+q=0$ wyraz $px$ będzie dodatny czy odiemny. Jeżeli termin $q$ w zrównaniu przywiedzioném do zera iest odiemny, wtedy odłączony na drugą stronę stanie się dodatnym; cała więc funkcya pod znakiem pierwiastkowym będzie dodatna, a zatém i wartości na $x$ będą rzetelne. Zrównanie przeto wzoru $x^2\pm px-q=0$ ma zawsze pierwiastki rzetelne. Jeżeli zaś $q$ iest w zrównaniu dodatne, przeniesione w członek drugi stanie się odiemném; naówczas żeby funkcya $\frac{p^2}{4}-q$ była dodatną, a tém samém żeby wartości na $x$ były rzetelne, powinno bydź $\frac{p^2}{4}>q$. Skoro $\frac{p^2}{4}<q$, wartości na $x$ są uroione. Zrównanie zatém wzoru $x^2\pm px+q=0$ może mieć pierwiastki rzetelne lub

www.rcin.org.pl

uroione: ma pierwsze kiedy $\frac{p^2}{4}>q$; ma drugie kiedy $\frac{p^2}{4}<q$.

Gdyby było $\frac{p^2}{4}=q$; w takim przypadku funkcya pod znakiem pierwiastkowym zginie i obie wartości na $x$ będą sobie równe: każda z tych równych wartości wyrazi się przez $-\frac{p}{2}$ kiedy pochodzi ze zrównania maiącego drugi termin dodatny, a przez $+\frac{p}{2}$ kiedy drugi termin w zrównaniu iest odiemny. Podług tych uwag, zrównanie $x^2+8x-9=0$ będzie miało pierwiastki rzetelne; bo wyraz 9, odpowiadaiący wyrazowi $q$ we wzorze, iest odiemny. Zrównanie $x^2+8x+9=0$ będzie miało także pierwiastki rzetelne; bo chociaż wyraz 9 iest dodatny, ale $(\frac{8}{2})^2$ czyli 16 iest $>9$. W zrównaniu $x^2-5x+7=0$ pierwiastki będą uroione; bo i wyraz 7 iest dodatny, i $(\frac{5}{2})^2$ czyli $\frac{25}{4}$ iest $<7$. Nakostatek zrównania $x^2-10x+25=0$ maiącego wyraz 25 dodatny i $(\frac{10}{2})^2=25$, oba pierwiastki będą rzetelne równe: iakoż po rozwiązaniu wypadnie $x=5\pm\sqrt{25-25}$ czyli $x=5\pm0$; toiest raz $x=5+0=5$, drugi raz $x=5-0=5$.

*Uwaga II.* Wszystkie zrównania stopni wyższych, które dadzą się przywieść do wzoru $x^{2m}+px^m+q=0$ zawieraiącego ilość nieznaną w dwóch tylko terminach, i gdzie wykładniki téy ilości są w stosunku 2:1, mogą bydź na zrównanie stopnia drugiego zamienione i według prawideł na ten stopień podanych rozwiązane. Jakoż położywszy $x^m=z$, będzie $x^{2m}=z^2$. ztąd wzór poprzedzaiący weźmie postać $z^2+pz+q=0$. Pierwiastki tego ostatniego zrównania podług reguł na stopień drugi wydobyte są $z=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{(\frac{p^2}{4}-q)}$; aże $z=x^m$, przeto $x^m=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{(\frac{p^2}{4}-q)}$. Wyciągaiąc z obu stron pierwiastek potęgi $m$, będzie

$$x = \sqrt[m]{[-\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p^2}{4} - q)}]}.$$

*Zagadnienie. Znaleźć dwie liczby takie, aby summa ich sześcianów była* 28, *a wieloczyn tych liczb żeby się równał* 3.

Nazwawszy liczby szukane przez $x$, $y$; będziemy mieli dwa zrównania $x^3 + y^3 = 28$, $xy = 3$. Z eliminacyi tych zrównań, po wyrzuceniu $y$, otrzymamy

$$x^6 - 28x^3 + 27 = 0$$

zkąd

$$x^3 = 14 \pm \sqrt{14^2 - 27} = 14 \pm 13,$$

toiest raz $x^3 = 27$, drugi raz $x^3 = 1$; więc wartości na $x$ są $x = 3$, $x = 1$. Podstawuiąc koleią te wartości w zrównanie drugie, znaydziemy dwie wartości na $y$, iednę $y = 1$, drugą $y = 3$. Dwie odpowiadaiące sobie wartości na $x$, $y$, toiest liczby 3 i 1 rozwiązuią zagadnienie.

www.rcin.org.pl

# ROZDZIAŁ TRZECI

## Teorya ogólna zrównań zastosowana do rozwiązania zrównań liczebnych wszelkiego stopnia.

### § 1. *Skład zrównań każdego ze stopni wyższych.*

Ponieważ zrównanie powinno się uważać iako wyrażenie związku pomiędzy wielkościami danémi a wielkością nieznaną ustanowionego przez warunki zagadnienia; ztąd naturalnie wynika, że *każde zrównanie musi mieć przynaymniey ieden pierwiastek*, toiest przynaymniey iednę wartość ilości nieznaney. A gdyby nawet warunki były z sobą sprzeczne; wtedy pierwiastek, maiąc zawsze swóy byt, przybrałby tylko postać ostrzegaiącą o niepodobieństwie, i okazałby się nieskończonym lub uroionym. Zawsze iednak znaydować się musi pewne wyrażenie, bądź rzetelne bądź uroione, które, za podstawieniem na mieyscu ilości nieznaney w zrównaniu, uczyni mu zadosyć.

Rozwiązanie zrównań stopnia drugiego przyprowadziło do dwóch wartości na ilość niewiadomą, czyli do dwóch pierwiastków. Każde więc z tych zrównań sprawdzić się daie przez dwie różne liczby na mieysce ilości nieznaney podstawione. Podobna własność zachodzi i w stopniach wyższych. W stopniu drugim dwoista wartość wynikła, iak widzieliśmy, ztąd, iż pierwiastek kwadratowy iakieykolwiek liczby może bydź wzięty albo dodatnie albo odiemnie. Ale ponieważ ta zasada nie łatwoby się zastosowała do stopni wyższych; ustanowimy więc następnie inną, która odkrywaiąc nam skład zrównań wszelkiego stopnia, ułatwi tém samém wyśledzenie ich własności.

Tu nam przewodniczyć będzie następuiący początek: *różnica iednakich potęg z dwóch ilości dzieli się bez reszty przez różnicę między samémi ilościami*; który łatwo sprawdzić rachunkiem. J tak $\frac{x^2-a^2}{x-a}=x+a$, $\frac{x^3-a^3}{x-a}=$ $x^2+ax+a^2$, $\frac{x^4-a^4}{x-a}=x^3+ax^2+a^2x+a^3$, itd: i ogólnie



www.rcin.org.pl

rozdzieliwszy $x^m - a^m$ przez $x - a$, otrzymamy wielorax zupełny, który będzie pod postacią

$$x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+a^3x^{m-4}+ \quad . \quad . \quad . \quad +a^{m-2}x+a^{m-1};$$

w saméy rzeczy wieloczyn z pomnożenia tego wielorazu przez funkcyą dzielącą $x-a$, toiest

$$x^m+ax^{m-1}+a^2x^{m-2}+ \; . \; . \; . \; . \; . \; . + a^{m-2}x^2+a^{m-1}x$$
$$-ax^{m-1}-a^2x^{m-2}- \; . \; . \; . \; . \; . \; . -a^{m-2}x^2-a^{m-1}x-a^m$$

po uproszczeniu wraca funkcyą podzielną $x^m-a^m$. Z piérwszego przykładu mamy $x^2-a^2=(x+a)(x-a)$. Co pokazuie, że *różnica kwadratów z dwóch ilości równa się wieloczynowi z summy tych ilości przez ich różnicę.*

Po takiém przygotowaniu weźmy zrównanie stopnia drugiego $x^2+px+q=0$, i wystawmy ie w postaci

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=\frac{p^2}{4}-q,$$

gdzie strona piérwsza iest zupełnym kwadratem: przeniosłszy członek drugi na stronę piérwszą, będzie

$$(x+\frac{p}{2})^2-(\frac{p^2}{4}-q)=0.$$

Drugi wyraz może się uważać iako kwadrat z $\sqrt{(\frac{p^2}{4}-q)}$; a tém samém całe zrównanie będąc różnicą kwadratów, rozbierze się na dwa mnożniki następuiące

$$[x+\frac{p}{2}+\sqrt{(\frac{p^2}{4}-q)}][x+\frac{p}{2}-\sqrt{(\frac{p^2}{4}-q)}]=0 \quad . \; . \; . \; (C).$$

Ponieważ zaś wieloczyn niknie, skoro staie się zerem którykolwiek z mnożników; więc zrównanie $(C)$ może bydź sprawdzone dwoiako: albo zakładaiąc że $x+\frac{p}{2}+\sqrt{(\frac{p^2}{4}-q)}=0$, albo że $x+\frac{p}{2}-\sqrt{(\frac{p^2}{4}-q)}=0$. Z piérwszego założenia wypada $x=-\frac{p}{2}-\sqrt{(\frac{p^2}{4}-q)}$, z drugiego $x=-\frac{p}{2}-\sqrt{(\frac{p^2}{4}-q)}$; te same dwie wartości na $x$, iakieśmy piérwéy z rozwiązania drugiego stopnia wyciągnęli. Każda

www.rcin.org.pl

z tych wartości podstawiona za $x$ w zrównaniu ($C$) zniszczy ieden mnożnik z którego wypłynęła, a następnie przywiedzie całe zrównanie do zera, toiest uczyni iemu zadosyć. Ztąd widzimy że zrównanie stopnia drugiego $x^2+px+q=0$ to samo znaczące co ($C$) iest wieloczynem z dwóch zrównań stopnia piérwszego, które są różnicą między ilością nieznaną a iéy wartościami.

Odkryta własność w zrównaniach stopnia drugiego co do ich składu i liczby pierwiastków rościąga się do wszystkich stopni wyższych. Weźmy pod uwagę stopień trzeci. Wzór ogólny zrównań tego stopnia iest

$$x^3+px^2+qx+r=0 \quad . \; . \; . \; . \quad (D).$$

Daymy że liczba $a$ iest pierwiastkiem zrównania ($D$), czyli że podstawiona za $x$ przywodzi ié do zera, a zatém że

$$a^3+pa^2+qa+r=0 \quad . \; . \; . \; . \quad (E).$$

Pokażemy iż się znayduią koniecznie ieszcze dwie inne liczby które temu samemu zrównaniu uczynią zadosyć, toiest będą iego pierwiastkami. Biorąc ze zrównania ($E$) wartość na $r$, która iest $r=-a^3-pa^2-qa$ i podstawuiąc w zrównaniu ($D$), przerobimy ie na $x^3-a^3+p(x^2-a^2)+q(x-a)=0$, albo na $(x-a)(x^2+ax+a^2)+p(x+a)(x-a)+q(x-a)=0$ albo ieszcze na

$$(x-a)\left[\begin{array}{r} x^2+ax+a^2 \\ +px+pa \\ +q \end{array}\right]=0 \quad . \; . \; . \quad (F).$$

To zrównanie znaczące iedno co ($D$) może bydź sprawdzone przez założenie że $x-a=0$, albo że $x^2+(a+p)x+a^2+pa+q=0$. To znowu ostatnie będąc stopnia drugiego składa się, podług tego cośmy dopiéro dowiedli, z dwóch mnożników czyli z dwóch zrównań stopnia piérwszego: wystawiwszy te mnożniki przez $x-b$, $x-c$, i wieloczyn $(x-b)(x-c)$ kładąc na mieyscu $\begin{array}{r} x^2+ax+a^2 \\ +px+pa \\ +q \end{array}$ w zrównaniu ($F$) będziemy mieli zrównanie

$$(x-a)(x-b)(x-c)=0$$

znaczące to samo co ($D$), któremu uczynić można zadosyć troiakim sposobem, albo przypuszczaiąc $x-a=0$, albo $x-b=0$, albo $x-c=0$: piérwszy warunek daie $x=a$, drugi $x=b$, trzeci $x=c$. Z czego widzimy, że zrównanie sto-

www.rcin.org.pl

pnia trzeciego ma trzy pierwiastki, i że się może uważać iako powstaiące przez mnożenie ze trzech zrównań stopnia piérwszego.

Łatwo iuż poymuiemy, że ta własność iest spólna wszystkim stopniom wyższym: toiest *zrównanie stopnia* m *ma osobnych pierwiastków* m *i może się uważać za wieloczyn z* m *zrównań stopnia piérwszego, z których każde iest różnicą między ilością nieznaną a iednym z pierwiastków.* Ztąd ieszcze wypada, iż zrównanie wszelkiego stopnia może bydź także uważane za mnogość z pewnéy liczby zrównań w stopniu rozmaitym: np. zrównanie stopnia szóstego może powstawać z mnożenia trzech zrównań stopnia drugiego, albo z dwóch trzeciego; lub też do iego składu może wchodzić iedno zrównanie stopnia drugiego i iedno czwartego, albo iedno piérwszego i iedno piątego.

## § 2. *Jak spółczynniki każdego zrównania składaią się z iego pierwiastków.*

Jeżeli ilości $a$, $b$, $c$, $d$, . . . $l$, w liczbie $m$, są pierwiastkami zrównania; to zrównanie podług §*fu* poprzedzaiącego będzie wieloczynem z mnożników dwuwyrazowych

$$x-a,\ x-b,\ x-c,\ x-d,\ \ldots\ x-l;$$

a następnie co do swoiéy postaci i składu ulegnie prawom dowiedzionym w §*fie 5m* Roz. *2go.* Na mocy tych praw, zrównanie po wykonaniu mnożenia okaże się pod wzorem

$$\left.\begin{array}{l} x^m-a \\ \quad\ -b \\ \quad\ -c \\ \quad\ -\text{itd} \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} x^{m-1}+ab \\ \qquad\ +ac \\ \qquad\ +bc \\ \qquad\ +\text{itd} \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} x^{m-2}-abc \\ \qquad\ -abd \\ \qquad\ -bcd \\ \qquad\ -\text{itd.} \end{array}\right| \begin{array}{l} x^{m-3}+\text{itd}\pm abcd\ldots l=0; \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

w którym 1*od naywyższa potęga ilości nieznanéy stanowiąca termin piérwszy ma spółczynnikiem iedność.* 2*re spółczynnik wyrazu drugiego iest równy summie wszystkich pierwiastków wziętych ze znakiem przeciwnym.* 3*cie spółczynnik terminu trzeciego równa się summie wszystkich wieloczynów, które powstać mogą z pierwiastków po dwa na raz przez siebie mnożonych, a zawsze branych ze znakami przeciwnémi.* 4*te Spółczynnik wyrazu czwar-*

www.rcin.org.pl

*tego równy iest summie wszystkich mnogości, które wypaśdź mogą z pierwiastków po trzy na raz wzietych ze znakami przeciwnemi. itd. Nakoniec termin ostatni iest wieloczynem wszystkich pierwiastków ze znakami przeciwnémi.* Takowe prawa służą każdemu zrównaniu uszykowanemu według ubywaiących wykładników ilości nieznanéy, kiedy w niém oswobodzimy pierwszy termin od spółczynnika przez rozdzielenie tym spółczynnikiem wszystkich terminów zrównania.

*Przykład.* Zrównanie $x^3+2x^2-23x-60=0$ sprawdza się przez trzy wartości $x=5$, $x=-4$, $x=-3$; przeto liczby 5, —4, —3 są pierwiastkami tego zrównania. Summa pierwiastków wziętych ze znakami przeciwnémi $-5+4+3=2$ toiest spółczynnikowi terminu drugiego. Summa wieloczynów z pierwiastków po dwa na raz branych ze znakami przeciwnémi $-5\times4+3\times-5+4\times3=-23$ toiest spółczynnikowi wyrazu trzeciego. Wieloczyn ze wszystkich pierwiastków wziętych ze znakami przeciwnémi $-5\times4\times3=-60$ toiest wyrazowi ostatniemu.

*Uwaga.* Ztąd wypada, że gdy w iakiém zrównaniu brakuie drugiego terminu; ten nie mógł zniknąć inaczéy, tylko że summa wszystkich pierwiastków stała się zerem. W takiém więc zrównaniu znayduią się pierwiastki dodatne i odienne, i summa pierwszych równa się summie ostatnich. Jeżeli braknie terminu trzeciego; musi koniecznie w takiém zrównaniu summa mnogości dodatnych z dwóch na raz pierwiastków bydź równą summie odiemnych. Podobnie sądzić należy o innych terminach. Jeżeli nakoniec nie dostaie wyrazu ostatniego; ten nie mógł inaczéy zniknąć, tylko że ieden z pierwiastków stał się zerem: natenczas całe zrównanie może bydź rozdzielone przez ilość nieznaną i zniży się o ieden stopień.

## § 3. *O przekształcaniu zrównań.*

Celem przekształceń zrównania iest iego zamiana na inne daiące się łatwiéy rozwiązać, i z któregoby pierwiastków można było ocenić pierwiastki zrównania danego.

www.rcin.org.pl

*I. Wyrzucenie terminu drugiego.*

Im zrównanie mniéy ma wyrazów, tém iego rozwiazanie musi bydź oczéwiście łatwieysze: i tak $x^2-q=0$ daie natychmiast $x=\pm\sqrt{q}$, kiedy zrównanie pełne $x^2+px+q=0$ potrzebuie pewnego przygotowania, aby odkryło swoie pierwiastki. Można w każdém zrównaniu wyrzucić termin drugi i przez to uczynić iego wyrażenie prościeyszém. Niech będzie zrównanie ogólne

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+\text{itd}+Mx+N=0 \quad . \; . \; . \; (G).$$

wprowadźmy za $x$ dwie ilości nieznane $y$, $z$ czyniąc $x=y+z$; po rozwinieniu potęg i uszykowaniu według ubywaiącego wykładnika ilości $y$ otrzymamy

$$\left.\begin{array}{l|l|l} y^m+mz & y^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.\;2}z^2 & y^{m-2}+\text{itd}+z^m \\ +A & +(m-1)Az & \qquad\qquad\quad +Az^{m-1} \\ & +B & \qquad\qquad\quad +Bz^{m-2} \\ & & \qquad\qquad\quad +\text{itd} \\ & & \qquad\qquad\quad +Mz \\ & & \qquad\qquad\quad +N \end{array}\right\}=0\,..\,(H)$$

Ponieważ to zrównanie zamyka dwie ilości nieznane $y$, $z$; wolno zatém na iednę z nich nadać wartość podług upodobania albo też założyć ieden iakikolwiek warunek. Załóżmy przeto że wyrazu drugiego $(mz+A)y^{m-1}$ spółczynnik niknie, toiest że $mz+A=0$. Tym sposobem wypadną dwa zrównania

$$\left.\begin{array}{l|l} y^m+\frac{m(m-1)}{1.\;2}z^2 & y^{m-2}+\text{itd}+z^m \\ +(m-1)Az & \qquad\qquad\quad +Az^{m-1} \\ +B & \qquad\qquad\quad +Bz^{m-2} \\ & \qquad\qquad\quad +\text{itd} \\ & \qquad\qquad\quad +Mz \\ & \qquad\qquad\quad +N \end{array}\right\}=0; \quad mz+A=0$$

Drugie zrównanie daie na $z$ wartość $z=-\frac{A}{m}$, którą podstawiwszy w piérwsze, będziemy mieli zrównanie pozbawione terminu drugiego

$$\left.\begin{array}{l|l} y^m+\frac{m(m-1)}{1.\ 2}(-\frac{A}{m})^2 & y^{m-2}+\text{itd}+(-\frac{A}{m})^m \\ +(m-1)A(-\frac{A}{m}) & \quad +A(-\frac{A}{m})^{m-1} \\ +B & \quad +B(-\frac{A}{m})^{m-2} \\ & \quad +\text{itd} \\ & \quad +M(-\frac{A}{m}) \\ & \quad +N \end{array}\right\}=0..(K)$$

Zeby więc założenie początkowe $x=y+z$ zniszczyło wyraz drugi, potrzeba w mieyscu $z$ wziąć $-\frac{A}{m}$, toiest wartość wydobytą z warunku $mz+A=0$ znoszącego termin drugi w zrównaniu na $y$ i uczynić $x=y-\frac{A}{m}$. Ztąd wyciągamy prawidło na wyrzucenie wyrazu drugiego w iakiémkolwiek zrównaniu: *należy za ilość nieznaną położyć inną złączoną ze spółczynnikiem drugiego terminu wziętym ze znakiem przeciwnym i rozdzielonym przez wykładnik pokazuiący stopień zrównania.* Gdybyśmy rozwiązali zrównanie ( $K$ ) i odkryli wartości na $y$; wtedy podstawuiąc ie koleią w $x=y-\frac{A}{m}$, otrzymalibyśmy wartości na $x$ czyniące zadosyć zrównaniu danemu ( $G$ ).

Chcąc zamiast wyrazu drugiego wyrzucić trzeci, lub czwarty, itd; potrzebaby spółczynnik tego wyrazu w zrównaniu ( $H$ ) uczynić zerem. Z założonego np. warunku $\frac{m(m-1)}{1.\ 2}z^2+(m-1)Az+B=0$ wydobyta wartość na $z$ i podstawiona w zrównaniu ( $H$ ) zniszczy wyraz trzeci. Na wyrzucenie więc trzeciego wyrazu, potrzeba, dla odkrycia stosowney wartości na $z$, rozwiązać stopień drugi. J łatwo iuż postrzegamy, że wyrzucenie czwartego wyrazu zależéć będzie od rozwiązania stopnia trzeciego ;itd. Nareszcie chcąc zrównanie pozbawić terminu ostatniego, wypadłoby wartość na $z$ wyciągnąć ze zrównania

$$z^m+Az^{m-1}+Bz^{m-2}+Cz^{m-3}+\text{ itd }+Mz+N=0$$

www.rcin.org.pl

które się niczém nie różni od zrównania danego ( $G$ ) tylko że w niém iest ilość nieznana $z$ na mieyscu $x$. Żeby przeto zrównanie przywieść do stracenia terminu ostatniego, potrzebaby piérwéy umieć ié rozwiązać.

*Przykład.* Wyrzucić termin drugi w zrównaniu $x^3-6x^2+4x-5=0$. Na ten koniec, podług ustanowionéy niedawno reguły, zakłada się $x=y+\frac{6}{3}$ czyli $x=y+2$. Po wykonaniu rachunku znaydziemy ostatecznie $y^3-8y-13=0$.

*Uwaga.* Zamiast przybierania warunku maiącego ocenić $z$, gdybyśmy téy ilości nadali iakąkolwiek wartość np. 1, 2, 3, . . . , wtedy byłoby $x=y+1$, lub $x=y+2$, . . a następnie pierwiastki zrównania ( $H$ ) byłyby mnieysze od pierwiastków zrównania danego ( $G$ ) o iedność, dwie, itd. Czyniąc znowu $z=-1$, lub $z=-2$, . . , mielibyśmy $x=y-1$, lub $x=y-2$, . . ; wtedy pierwiastki zrównania ( $H$ ) byłyby większe od pierwiastków zrównania ( $G$ ) o iedność, dwie, itd. Tu poznaiemy, iż *chcąc pierwiastki zrównania zmnieyszyć lub powiększyć o daną liczbę* m, *trzeba w pierwszym razie podstawić* x=y+m, *w drugim* x=y—m.

*Przykład.* Zmnieyszyć pierwiastki zrównania $x^2-7x+12=0$ o liczbę 2. W tym celu trzeba założyć $x=y+2$. Otrzymamy po odbytym rachunku $y^2-3y+2=0$. Łatwo się przekonać że piérwszego zrównania pierwiastki są 3 i 4, drugiego 1 i 2.

II. *Przywodzenie spółczynników zrównania do ilości całkich.*

Można każde zrównanie zamienić na takie, w którémby spółczynnik naywyzszéy potęgi ilości nieznanéy był iednością, a wszystkie inne całościami.

Weźmy iakiekolwiek zrównanie

$$ax^3+\frac{b}{m}x^2+\frac{c}{m^2}x+\frac{d}{p}=0;$$

uwolniwszy w niém termin pierwszy od spółczynnika, będzie

$$x^3+\frac{b}{am}x^2+\frac{c}{am^2}x+\frac{d}{ap}=0.$$

Za ilość nieznaną $x$ wprowadźmy dwie, $y$ i $z$, czyniąc $x=\frac{y}{z}$; wypadnie

$$\frac{y^3}{z^3}+\frac{b}{am}\frac{y^2}{z^2}+\frac{c}{am^2}\frac{y}{z}+\frac{d}{ap}=0;$$

rozmnożywszy każdy termin przez $z^3$, mamy

$$y^3+\frac{bz}{am}y^2+\frac{cz^3}{am^2}y+\frac{dz^3}{ap}=0.$$

Ponieważ na $z$ możemy nadać wartość podług woli; idzie więc tylko o dobranie takiéy, któraby nas postawiła u zamierzonego celu, toiest przez którąby zrównanie pozbyło mianowników. Na ten koniec dosyć iest oczywiście wziąć za $z$ wyrażenie względem każdego mianownika wielokrotne. Takiém wyrażeniem iest zawsze mnogość ze wszystkich mianowników, a czasem bydź może prościeysze. W naszym przykładzie można uczynić $z=am^2p$. Otrzymamy

$$y^3+\frac{abm^2p}{am}y^2+\frac{a^2cm^4p^2}{am^2}y+\frac{a^3dm^6p^3}{ap}=0$$

czyli

$$y^3+bmpy^2+acm^2p^2y+a^2dm^6p^2=0,$$

zrównanie pod postacią żądaną. Ztąd wyciągamy prawidło, *że przywodzi się zrównanie do terminów całkich, kładąc w mieyscu ilości nieznaney inną rozdzieloną przez wyrażenie wielokrotne względem wszystkich mianowników.*

*Uwaga.* Założenie $x=\frac{y}{z}$ prowadzi do zrównania, w którém wartości na $y$ są większe od wartości na $x$ razy $z$. Gdybyśmy znowu założyli $x=zy$, byłyby wartości na $y$ mnieysze od wartości na $x$ razy $z$. A przeto *chcąc pierwiastki zrównania powiększyć lub zmnieyszyć daną liczbę razy*, np. m; *należy w piérwszym razie podstawić* $x=\frac{y}{m}$, *w drugim* $x=my$.

*Przykład.* Powiększyć pierwiastki zrównania $x^2+7x+12=0$ razy 2. Zakładam $x=\frac{y}{2}$; wypadnie $\frac{y^2}{4}-\frac{7}{2}y+12=0$ czyli $y^2-14y+48=0$. Ostatniego zrównania pierwiastki są 6 i 8, danego 3 i 4.



www.rcin.org.pl

**III.** *Oswobodzenie zrównań od znaków pierwiastkowych.*

Jeżeliby w zrównaniu nad ilością niewiadomą znaydowały się wykładniki ułamkowe, do takiego zrównania aniby się mogły stosować prawa składu okazane w §*fie* II*m*, ani użyć sposoby przekształceń podane w §*fie* teraźnieyszym. Żeby więc zrównanie uległo tym prawom i sposobom, potrzeba w niém pierwéy wykładniki ułamkowe ilości nieznanéy zamienić na całkie, albo co iedno iest, potrzeba oswobodzić zrównanie od znaków pierwiastkowych. Mamy do tego dwa następuiące sposoby.

Piérwszy zasadza się na tém, że ilość niewymierna podniesiona do potęgi wskazanéy przez wykładnik znaku pierwiastkowego traci ten znak i staie się wymierną. Niech będą zrównania

$x^2+a\sqrt{x}+m=0$, $x^3-\sqrt[3]{(x-a)}+d=0$, $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}+dx+f=0$; odłączywszy w dwóch piérwszych wyrazy niewymierne od wymiernych, znayduiemy $a\sqrt{x}=-(x^2+m)$, $x^3+d=\sqrt[3]{x-a}$. Podnosząc obie strony tych zrównań do potęg naznaczonych wykładnikami znaków pierwiastkowych, wypada $a^2x=(x^2+m)^2$, $(x^3+d)^3=x-a$, czyli $x^4+2mx^2-a^2x+m^2=0$, $x^9+3dx^6+3d^2x^3-x+d^3-a=0$. Żeby zrównanie trzecie $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}+dx+f=0$ zawieraiące dwa różne znaki pierwiastkowe oswobodzić od niewymierności; odłączmy naprzód termin $\sqrt[3]{x^2}$, będzie $\sqrt[3]{x^2}=-(\sqrt{x}+dx+f)$, ztąd $x^2=-(\sqrt{x}+dx+f)^3$; położywszy dla krótkości $dx+f=p$, wypadnie $x^2=-x\sqrt{x}-3px-3p^2\sqrt{x}-p^3$ czyli $x^2+3px+p^3=-(3p^2+x)\sqrt{x}$, a podniósłszy obie strony do potęgi drugiéy otrzymamy $(x^2+3px+p^3)^2=(3p^2+x)^2x$. Wróciwszy w to ostatnie zrównanie $dx+f$ za $p$ i wykonawszy naznaczone działania trafimy na zrównanie wymierne stopnia szóstego. Gdybyśmy więcéy ieszcze mieli w zrównaniu terminów niewymiernych połączonych z sobą przez znaki dodatne lub odiemne, działanie byłoby coraz dłuższe i bardziéy zawikłane: ten nawet sposób nie zawszeby się nam udał.

Sposób drugi iest taki: maiąc dane zrównanie z wyra-

www.rcin.org.pl

zami niewymiernémi np. $x^2+\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}+b=0$, zakładam że każdy termin ze znakiem pierwiastkowym równa się iakieykolwiek ilości wymierney, toiest czynię $\sqrt[3]{ax}=y$, $\sqrt[3]{x^2}=z$, $\sqrt{x}=u$: te zrównania podniósłszy do potęg wskazanych wykładnikami znaków pierwiastkowych, otrzymam zrównania wymierne $ax=y^3$, $x^2=z^3$, $x=u^2$, do których przyłączywszy zrównanie $x^2+y+z+u+b=0$ na iakie zamienia się zrównanie dane po włożeniu ilości $y$, $z$, $u$ na mieysce terminów niewymiernych, będziemy mieli wszystkich zrównań $n+1$ ieżeli terminów niewymiernych iest $n$. Ponieważ te zrównania są wymierne, i liczba ich równa się liczbie ilości niewiadomych; zatém przez eliminacyą można będzie przyyśdź do iednego wymiernego z samą tylko ilością $x$, które zastąpi mieysce zrównania danego. Jak się zaś eliminacya w stopniach wyższych odbywa, poznamy w §fie następuiącym.

## § 4. *Sposoby eliminacyi w zrównaniach stopni wyższych.*

I. *Sposób Krampa.* | Niech będą dwa zrównania różnych stopni

$$Lx^m = Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+Dx^{m-4}+ \ldots \ldots (L)$$

$$lx^n = ax^{n-1}+bx^{n-2}+cx^{n-3}+dx^{n-4}+ \ldots \ldots (M),$$

w których $L$, $A$, $B$, $C$, . . , $l$, $a$, $b$, $c$ . . zastępuią mieysce wyrażeń maiących w sobie drugą ilość nieznaną $y$. Daymy że $m>n$. Pomnóżmy zrównanie $(M)$ przez $lx$; będzie

$$l^2x^{n+1}=alx^n+blx^{n-1}+clx^{n-2}+dlx^{n-3}+ \text{itd};$$

podstawmy na drugiéy stronie za $lx^n$ wartość wziętą z $(M)$; wypadnie

$$l^2x^{n+1}=(a^2+lb)x^{n-1}+(ab+lc)x^{n-2}+(ac+ld)x^{n-3}+ \text{itd}$$

co dla krótkości tak wyrazimy

$$l^2x^{n+1}=a'x^{n-1}+b'x^{n-2}+c'x^{n-3}+ \text{itd} \ldots \ldots (N),$$

zastępuiąc funkcyą $a^2+lb$ przez $a'$, funkcyą $ab+lc$ przez $b'$, itd. To wypadkowe zrównanie pomnóżmy znowu przez $lx$ i potém za $lx^n$ podstawmy wartość z $(M)$; otrzymamy

www.rcin.org.pl

$$l^3x^{n+2}=(aa'+lb')x^{n-1}+(ba'+lc')x^{n-2}+(ca'+ld')x^{n-3}+ \text{itd};$$

co znowu dla krótkości tak wyrazimy

$$l^3x^{n+2}=a''x^{n-1}+b''x^{n-2}+c''x^{n-3}+\text{itd} \;.\;.\;.\;.\; (\,O\,).$$

Podobnie mnożąc to ostatnie zrównanie przez $lx$ i podkładając wartość za $lx^n$ znaydziemy

$$l^4x^{n+3}=a'''x^{n-1}+b'''x^{n-2}+c'''x^{n-3}+\text{itd} \;.\;.\;.\;.\; (\,P\,).$$

Takim sposobem należy postępować póty aż wykładnik nad $x$ ze strony piérwszéy będzie równy $m$. Poczém wartości za $x^n$, $x^{n+1}$, $x^{n+2}$, $x^{n+3}$, itd dane, przez zrównania ( $M$ ), ( $N$ ), ( $O$ ), ( $P$ ) . . włożywszy w zrównanie ( $L$ ) przywiedziemy to ostatnie do stopnia $n$—1. Zamiast więc zrównań podanych będziemy mieli zrównanie stopnia $n$ i zrównanie stopnia $n$—1; z których tą samą drogą przyydziemy do stopnia $n$—2, potém do stopnia $n$—3, itd, nareszcie do stopnia zero, toiest do zrównania bez $x$ ale tylko z samą ilością $y$.

*Przykład.* Wyrzucić ilość $x$ z dwóch zrównań

$$y^2x^4-4y^3x^3+3x^2+y+25=0 \;.\;.\;.\; (\,L'\,),$$

$$y^2x^2=2x+y \;.\;.\;.\;.\;.\; (\,M'\,).$$

Mnożę zrównanie ( $M'$ ) przez $y^2x$ i na drugiéy stronie za $y^2x^2$ podstawiam wartość; będzie

$$y^4x^3=(y^3+4)x+2y \;.\;.\;.\;.\;.\; (\,N'\,)$$

Mnożę znowu to ostatnie zrównanie przez $y^2x$ i za $y^2x^2$ podstawiam wartość; ztąd wypadnie

$$y^6x^4=(4y^3+8)x+y^4+4y \;.\;.\;.\;. \; (\,O'\,).$$

W zrównaniu ( $L'$ ) kładę za $x^4$, $x^3$, $x^2$ wartości wzięte ze zrównań ( $O'$ ), ( $N'$ ), ( $M'$ ) pomnożywszy piérwéy, dla uniknienia ułamków zrównanie ( $L'$ ) przez $y^4$. Otrzymam

$$(4y^3+8)x+y^4+4y-(4y^6+16y^3)x-8y^4+6y^2x+3y^3+y^5$$
$$+23y^4=0$$

czyli po uproszczeniu

$$(4y^6+12y^3-6y^2-8)x=y^5+16y^4+3y^3+4y.$$

Potrzeba następnie odbywać eliminacyą na dwóch zrównaniach

$$y^2x^2=2x+y \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (\,L''\,)$$

$$(4y^6+12y^3-6y^2-8)\,x=y^5+16y^4+3y^3+4y \;.\;.\;.\;. \; (\,M''\,).$$

Mnożę zrównanie ( $M''$ ) przez wyrażenie $(4y^6+12y^3-6y^2-8)x$ i potém za to wyrażenie na drugiéy stronie podstawiam wartość; wypadnie

$(4y^6+12y^3-6y^2-8)^2x^2=(y^5+16y^4+3y^3+4y)^2 \ldots (N'')$.
W zrównaniu $(L'')$ kładę wartości za $x^2$ i $x$ wydobyte ze zrównań $(N'')$ i $(M'')$ rozmnożywszy pierwéy, dla uniknienia ułamków zrównanie $(L'')$ przez

$$(4y^6+12y^3-6y^2-8)^2;$$

będzie

$y^2(y^5+16y^4+3y^3+4y)^2 = 2(y^5+16y^4+3y^3+4y)(4y^6+12y^3-6y^2-8)+y(4y^6+12y^3-6y^2-8)^2$,

czyli po wykonaniu wskazanych działań i uproszczeniu

$16y^9-y^8-24y^7-38y^6-120y^5+7y^4+356y^3-288y^2-16y-368=0$.

Przyszliśmy do żądanego zrównania z iedną ilością nieznaną. Jeżelibyśmy ié rozwiązali i odkryli wszystkie wartości na $y$; wtedy dla otrzymania odpowiednych wartości na $x$, potrzeba każdą wartość na $y$ podstawiać w zrównanie nayniższego stopnia co do $x$ w ciągu rachunku otrzymane, iakiém tu iest $(M'')$. Łatwo się przekonać że iednym z pierwiastków ostatniego zrównania iest 2, czyli że $y=2$. Włożywszy tę wartość w zrównanie $(M'')$, znaydziemy $x=1$. Dwie wartości $x=1$, $y=2$ stanowią iednę odpowiedź na zagadnienie z którego dane zrównania pochodzą. Jnna wartość na $y$ z wypadkowego zrównania odkryta przyprowadzi do innéy wartości na $x$; te wartości $x$ i $y$ będą drugą odpowiedzią na zagadnienie. J zawsze pytania, wiodące swoiémi warunkami do zrównań stopni wyższych, daią się zaspokoić przez kilka różnych odpowiedzi.

*Uwaga.* Gdyby było trzy danych zrównań do eliminacyi $A=0$, $B=0$, $C=0$ z trzema ilościami nieznanémi $x$, $y$, $z$; wtedy naprzód ze zrównań $A=0$ i $B=0$ wyrzuca się $x$, i wypadnie zrównanie np. $D=0$ z ilościami $y$, $z$. Potém wyrzuca się $x$ ze zrównań $A=0$ $C=0$; ztąd wyniknie zrównanie np. $E=0$ z ilościami $y$, $z$. Nareszcie eliminuiąc ze zrównań $D=0$, $E=0$ ilość $y$ przyydziemy do zrównania $F=0$ z samą tylko ilością $z$. Podobnie się postępuie, iakabykolwiek była liczba zrównań podanych.

II *Sposób eliminacyi przez naywiększy spólny dzielnik.*

Gdy dwa zrównania

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+ \text{itd} =0$$

$$x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}+cx^{n-3}+ \text{itd} =0$$

w których spółczynniki $A$, $B$, .. $a$, $b$ . . za-

www.rcin.org.pl

mykaią drugą ilość nieznaną $y$, pochodzą z iednego zagadnienia; wtedy iest pewna liczba układów wartości na $x$, $y$, takich, że wartości któregokolwiek układu razem uważane uczynią zadosyć obu zrównaniom. Każdy z tych układów stanowi odpowiedź na zagadnienie; i rozwiązać zagadnienie iest to wynaleźć wszystkie takowe układy. Przypuśćmy, że ieden z układów iest znany, że np. gdy $x = a$ wtedy $y = b$. Te dwie wartości włożone w oba zrównania przywiodą ié do zera. Kładąc naprzód $b$ za $y$, ieszcze zrównań do zera nie przywiedziemy, ale ié zamienimy na inne np. $K = o$ $L = o$ zawiéraiące samo $x$, w które potém za $x$ podstawiwszy $a$, powinny wszystkie terminy zniknąć: muszą więc zrównania $K = o$, $L = o$ miéć spólny mnożnik $x - a$; toiest muszą bydź wzoru $(x - a)M = o$, $(x - a)N = o$, bo wtedy oczywiście stanie się im zadosyć skoro $x = a$. Ztąd się przekonywamy, że *wartość na* y *z któregokolwiek układu wzięta i włożona w zrównania dane przerabia ié na inne maiące spólnym mnożnikiem pewną funkcyą ilosci* x.

*Ale przed podstawieniem nie mogą miéć zrównania żadnego spólnego dzielnika; inaczéy byłyby nieoznaczone, toiest dałyby się sprawdzić przez nieskończoną liczbę układów.* J tak przypuśćmy na chwilę, że zrównania podane są pod kształtem $S.W = o$, $T.W = o$, gdzie $W$ iest spólnym obu dzielnikiem i zamyka bądź dwie ilości nieznane $x$, $y$, bądź iednę z nich tylko. Niech naprzód $W$ będzie funkcyą $x$ i $y$. Wszelki układ wartości na $x$, $y$, któryby zniszczył $W$, czyli któryby uczynił zadosyć zrównaniu $W = o$, sprawdzi zrównania $S.W = o$, $T.W = o$. Lecz układów niszczących $W$ iest liczba nieskończona, bo zrównanie $W = o$ zamykaiąc dwie ilości nieznane iest nieoznaczone; więc i zrównania dane muszą bydź także nieoznaczone. Niech powtóre $W$ zamyka iednę ilość nieznaną np. $x$. Wtedy każda wartość na $x$ wydobyta ze zrównania $W = o$ zniszczy $W$ a następnie sprawdzi zrównania dane niezależnie od wartości na ilość $y$, za którą można dowolnie brać liczbę iakąkolwiek. J w tym więc razie zrównania dane przyymuią nieskończoną liczbę zadosyć czyniących układów.

Te uwagi naprowadzaią nas na następuiącą drogę eliminacyi. Do zrównań danych uszykowanych podług $x$ używaiąc sposobu podanego (§ 6. Roz. 1.) na wynaydowanie

www.rcin.org.pl

naywiększego spólnego dzielnika, potrzeba ciągnąć póty rachunek, aż przyydziemy do reszty bez $x$ toiest zawiéraiącéy iednę ilość nieznaną $y$. Wtedy uczyniwszy tę resztę zerem, otrzymamy zrównanie z którego każda wartość wydobyta na $y$ zniszczy też resztę a następnie sprawi że reszta przedostatnia będzie spólnym dzielnikiem dwóch zrównań podanych. Nazwiymy resztę ostatnią przez $R$; przedostastnia, która w ogólności będzie stopnia piérwszego, przez $Px+Q$, gdzie $P$ i $Q$ zamykaią w sobie ilość $y$. Każda więc wartość na $y$ wydobyta ze zrównania $R=o$ i podstawiona tak w $Px+Q$ iako też w zrównania dane uczyni funkcyą $Px+Q$ spólnym tych zrównań dzielnikiem. Jdzie zatém że zrównanie $R=o$ będzie tém, które przez eliminacyą staramy się otrzymać; gdyż każda z niego wyciągniona wartość na $y$ należy do iednego z układów stanowiących odpowiedź zagadnieniu.

Zeby wydobytym ze zrównania $R=o$ wartościom na $y$ otrzymać odpowiadaiące wartości na $x$; potrzeba każdą wartość $y$ podstawić w przedostatnią resztę $Px+Q$, wypadek z podstawienia porównać z zerem, i wynikłe ztąd zrównanie rozwiązać co do $x$. Włożywszy bowiem wartość za $y$ w funkcyą $Px+Q$ i w zrównania dane, te zrównania przybiorą kształt $M(Px+Q)=o$, $N(Px+Q)=o$ i będą oba sprawdzone przez wartość na $x$ która zniszczy spólny dzielnik $Px+Q$; takowa zaś wartość wynaydzie się rozwiązuiąc zrównanie $Px+Q=o$.

*Uwaga.* Pdwiedzieliśmy dopiéro, że każda wartość na $y$ wyciągniona ze zrównania $R=o$ należy do iednego z układów czyniących zadosyć zrównaniom danym. Czasem atoli trafiaią się w téy mierze wyiatki, które pochodzą z samego sposobu wynaydowania dzielnika spólnego funkcyom. Niech będą zrównania $A=o$, $B=o$ z dwiema ilościami nieznanémi $x$, $y$. Na tych zrównaniach uszykowanych podług $x$ odbywaiąc rachunek prowadzący do odkrycia spólnego dzielnika, i nazywaiąc idące po sobie wielorazy przez $w$, $w'$, $w''$, . . ., reszty przez $r$, $r'$, $r''$, . . . .; będziemy mieli

$$A = Bw+r$$
$$B = rw'+r'$$
$$r = r'w''+r''$$
$$\cdots\cdots$$

www.rcin.org.pl

Lecz ponieważ dla otrzymania wyrażeń całkich na wielorazy potrzeba zawsze mnożyć funkcye podzielne przez spółczynniki pierwszych terminów w funkcyach dzielących; więc nazwawszy te spółczynniki, które w ogólności zamykaią w sobie $y$, przez $m$, $m'$, $m''$, . . . . , zrównania powyższe wezmą postać

$$\left.\begin{array}{l} mA = Bw + r \\ m'B = rw' + r' \\ m''r = r'w''+r'' \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right| \quad \ldots\ldots (*).$$

Tu widzimy, że gdy układ iakikolwiek np. $x=a$, $y=b$ sprawdza zrównania $A=0$, $B=0$ czyli niszczy $A$ i $B$; zniszczyć musi resztę $r$: a skoro niszczy $B$ i $r$, zniszczy także $r'$, itd. Ten przeto układ przywodzi do zera wszystkie reszty, zatém i ostatnią resztę $R$ zamykaiącą iednę tylko ilość nieznaną $y$. Toiest położywszy $b$ za $y$ w $R$, stanie się $R=0$, a następnie $b$ iest pierwiastkiem zrównania $R=0$. Łatwo iuż poymuiemy, że wartości na $y$ wzięte z każdego układu sprawdzaiącego dane zrównania będą pierwiastkami zrównania $R=0$. Ale obaczymy zaraz, że prócz tych pierwiastków może mieć zrównanie $R=0$ ieszcze inne nienależące do układów czyniących zadosyć zrównaniom danym. Gdyby na stronie pierwszéy w zrównaniach (*) nie było mnożników $m$, $m'$, $m''$, . . . ; natenczas układ wartości na $x$, $y$ któryby przywiodł do zera dwie którekolwiek reszty sobie przyległe sprawdziłby koniecznie i zrównania dane. Skoro bowiem $r'=0$, $r''=0$ musi bydź wtedy $r=0$, następnie $B=0$ i $A=0$. W takim więc razie każda wartość na $y$ wydobyta ze zrównania $R=0$ należy do układów czyniących zadosyć zrównaniom danym; bo każdą z tych wartości podstawuiąc koleią w $Px+Q=0$ wynaydziemy odpowiędne wartości na $x$, które z należącémi do siebie wartościami na $y$ sprawdzą dwa zrównania $R=0$, $Px+Q=0$, toiest zniszczą dwie reszty sobie przyległe. Lecz kiedy w zrównaniach (*) znayduią się mnożniki $m$, $m'$, $m''$, . . ; wtedy wartości na $x$, $y$ niszczące dwie reszty sobie przyległe mogą nie sprawdzać zrównań danych: chociaż bowiem zą zniknieniem $r'$ i $r''$ musi $m''r$ stać się zerem: to iednak może pochodzić nie ztąd że $r=0$, tylko że $m''=0$. A skoro nie

www.rcin.org.pl

iest $r=o$, nie będzie też $B=o$ i $A=o$. Gdyby nawet wartości na $x$, $y$ przywodzące do zera $r'$ i $r''$ nie niszczyły $m''$, a tém samém gdyby było $r=o$; wtedy lubo musiałoby bydź $m'B=o$, lecz nie koniecznie $B=o$: zniknienie $m'B$ mogłoby wynikać ztąd iż $m'=o$. Z tych uwag przekonywamy się, że te tylko wartości na $y$ otrzymane ze zrównania $R=o$ należą do układów czyniących zadosyć zrównaniom danym, które nie niszczą mnożników $m$, $m'$, $m''$, itd; a które niszczą, pominny bydź odrzucone. Można zawsze ze zrównania $R=o$ wyłączyć pierwiastki nie należące do zrównań danych. Na ten koniec potrzeba szukać spólnego dzielnika między funkcyą $R$ a każdą z osobna funkcyą $m$, $m'$, $m''$, .. ; ieżeliby się pokazało że $R$ i $m$ maią spólny dzielnik $y-\alpha$, czyli że $y-\alpha$ wchodzi za mnożnik do składu obu funkcyy $R$ i $m$; wtedy $\alpha$ wzięte za $y$ zniszczy $R$ i $m$, i będzie pierwiastkiem zrównania $R=o$ maiącym się odrzucić. Znalazłszy tym sposobem wszystkie pierwiastki $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, . . . . zrównania $R=o$ obce zrównaniom danym, kiedy przez wieloczyn $(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)$ . . . . . rozdzielimy zrównanie $R=o$ otrzymamy na wieloraz zrównanie $R'=o$ z którego wydobyta każda wartość na $y$ należyć będzie do układu sprawdzaiącego zrównania dane.

*Przykład.* Dane są do eliminacyi dwa zrównania

$$x^2-5x-2yx+y^2+5y+6=o,$$

$$x^2-4xy+4y^2-1=o.$$

Dla wyrzucenia z nich ilości $x$ odbywa się rachunek następuiący:



www.rcin.org.pl

$$\begin{array}{l|l}
x^2-(5+2y)x+y^2+5y+6 & \underline{x^2-4xy+4y^2-1} \\
x^2-4xy+4y^2-1 & 1 \\
\underline{-\quad+\quad-\quad+\qquad\qquad} & \\
(2y-5)x-3y^2+5y+7; &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
(2y-5)x^2-4y(2y-5)x+(4y^2-1)(2y-5) & \underline{(2y-5)x-3y^2+5y+7.} \\
(2y-5)x^2-(3y^2-5y-7)x & x \\
\underline{-\qquad\qquad+\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} & \\
-(5y^2-15y+7)x+(4y^2-1)(2y-5); &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
-(5y^2-15y+7)(2y-5)x+(4y^2-1)(2y-5)^2 & \underline{(2y-5)x-3y^2+5y+7} \\
-(5y^2-15y+7)(2y-5)x+(5y^2-15y+7)(3y^2-5y-7) & -(5y^2-15y+7) \\
\underline{+\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad-\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} & \\
(4y^2-1)(2y-5)^2-(5y^2-15y+7)(3y^2-5y-7)=0 &
\end{array}$$

czyli

$$y^4-10y^3+35y^2-50y+24=0.$$

www.rcin.org.pl

Takie iest zrównanie wypadkowe z iedną ilością nieznaną $y$: iego pierwiastkami, iak się łatwo przez podstawienie można przekonać, są liczby 1, 2, 3, 4. Kładąc koleią za $y$ te pierwiastki w przedostatnią resztę porównaną z zerem czyli w zrównanie

$$(2y-3)x-3y^2+5y+7=0,$$

znaydziemy odpowiadaiące wartości na $x$, które będą 3, 5, 5, 7. J dwa dane zrównania sprawdzą się przez cztéry układy ($y=1$, $x=3$), ($y=2$, $x=5$), ($y=3$, $x=5$), ($y=4$, $x=7$).

*Uwaga.* Zdarzyć się może w szczególnych przykładach, że reszta przedostatnia będzie co do $x$ drugiego, trzeciego, itd, stopnia; wtedy każdéy wartości na $y$ otrzymanéy ze zrównania wypadkowego odpowiadać będą dwie, trzy, itd, wartości na $x$.

## § 5. *Rozwiązanie zrównań liczebnych.*

Poznaliśmy iak spółczynniki, toiest ilości wiadome w zrównaniu, składaią się z iego pierwiastków. Gdybyśmy doyść mogli nawzaiem, iakim sposobem potrzeba z sobą łączyć spółczynniki każdego zrównania aby pierwiastki otrzymać, mielibyśmy tém samém ogólną regułę na rozwiązanie wszystkich zrównań: ale od téy korzyści iesteśmy ieszcze niezmiernie dalecy. Zgłębienie powszechnych własności zrównań dało tylko pomoc usiłowaniom Geometrów do odkrycia prawideł na ocenienie bądź ściste bądź przybliżone pierwiastków w samych iedynie zrównaniach ze spółczynnikami liczebnémi. Rozwiązanie zaś zrównań literalnych, wstrzymane nieprzezwyciężonémi trudnościami, posunione iest tylko iak niżéy obaczymy do stopnia trzeciego i czwartego: stopień piąty i dalsze oparły się wszystkim sposobom i sztukom rachunku. Zatrzymamy się następnie nad wyciągnieniem reguł maiących przewodniczyć w szukaniu pierwiastków iakiegokolwiek zrównania liczebnego. To dociekanie rozdzielimy na trzy części odnoszące się do troiakiego gatunku pierwiastków 1*ód* wymiernych; 2*re* niewymiernych; 3*cie* uroionych.

www.rcin.org.pl

*I. Wynaydowanie pierwiastków wymiernych.*

Pierwiastki wymierne mogą bydź całkie lub ułamkowe. Lecz ieżeli podług sposobu podanego w §*fie* III*m* przywiedziemy zrównanie dane do takiego wyrażenia, iżby wszystkie w niém spółczynniki były całkie i razem naywyższa potęga ilości nieznaney miała spółczynnikiem iedność; wtedy żaden pierwiastek wymierny nie może bydź ułamkiem, ale każdy iuż będzie całki. Dla przekonania o téy prawdzie weźmy zrównanie

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+\text{ itd }+Mx+N=0,$$

w którém $A$, $B$, $C$, . . . $M$, $N$, są liczbami całkiemi: gdyby iego pierwiastkiem mógł bydź ułamek iakikolwiek $\frac{a}{b}$, który daymy że iest przywiedziony do nayprostszego wyrażenia czyli że $a$ i $b$ nie maią żadnego spólnego dzielnika; wtenczas po włożeniu $\frac{a}{b}$ na mieysce $x$ powinnyby się wzaiemnie zniszczyć wszystkie wyrazy zrównania

$$\frac{a^m}{b^m}+\frac{Aa^{m-1}}{b^{m-1}}+\frac{Ba^{m-2}}{b^{m-2}}+\text{ itd }+\frac{Ma}{b}+N=0,$$

co iest niepodobieństwem, bo pomnożywszy każdy termin przez $b^{m-1}$, nadamy mu postać

$$\frac{a^m}{b}+(Aa^{m-1}+Ba^{m-2}b+\text{ itd }+Mab^{m-2}+Nb^{m-1})=0$$

która przedstawia dwie części nie mogące się zniszczyć, druga z nich bowiem iest całością a pierwsza koniecznie ułamkiem. Dochodzenie przeto pierwiastków wymiernych przywodzi się do szukania samych tylko całkich.

Ponieważ termin ostatni zrównania iest wieloczynem ze wszystkich pierwiastków; przeto rozebrawszy go na mnożniki całkie, pomiędzy témi mnożnikami znaydować się powinny pierwiastki całkie zrównania. Dosyć więc za ilość nieznaną w zrównaniu podstawić każdy mnożnik całki, biorąc go raz ze znakiem $+$, drugi raz ze znakiem $-$; a który z nich sprawdzi zrównanie, ten będzie pierwiastkiem. W zrównaniu np. $x^3+x^2-3x+9=0$ wyraz ostatni 9 może się rozdzielić przez liczby całkie 1, 3, 9; te więc liczby są iego mnożnikami. Z nich ieden tylko 3 wzięty ze zna-

www.rcin.org.pl

kiem — sprawdza zrównanie, bo po włożeniu za $x$ prowadzi do $-27+9+9+9=0$ czyli $0=0$. Przeto w teraźnieyszym przykładzie ieden iest tylko pierwiastek wymierny $-3$; dwa inne muszą bydź niewymierne lub uroione. Lecz w podstawianiu musimy wynosić do potęgi i mnożyć: ten zatém sposób byłby zbyt długi i pracowity, zwłaszcza w zrównaniach wysokiego stopnia, i kiedy ostatni termin zamyka wiele mnożników. Podamy zaraz inny wymagaiący tylko bardzo prostego dzielenia i dodawania, który daleko prędzéy może okazać, które mnożniki są lub nie są pierwiastkami. Takowy sposób odkryie się z następuiących uwag:

Weźmy iakiekolwiek zrównanie ze spółczynnikami całkiemi

$$x^4+Px^3+Qx^2+Rx+S=0$$

i daymy że liczba całka $a$ iest iednym z iego pierwiastków: podstawiwszy $a$ za $x$, piérwsza strona stać się powinna zerem, toiest musi bydź

$$a^4+Pa^3+Qa^2+Ra+S=0$$

zkąd

$$S=-Ra-Qa^2+Pa^3-a^4,$$

a następnie

$$\frac{S}{a}=-R-Qa-Pa^2-a^3;$$

tu drugi członek, będąc liczbą całą, pokazuie że $\frac{S}{a}$ iest koniecznie całością. Przeniósłszy $R$ na stronę piérwszą, wypada

$$\frac{S}{a}+R=-Qa-Pa^2-a^3;$$

czyniąc $\frac{S}{a}+R=R'$ i dzieląc obie strony zrównania $R'=-Qa-Pa^2-a^3$ przez $a$, będzie

$$\frac{R'}{a}=-Q-Pa-a^2;$$

ztąd wniesiemy że $\frac{R'}{a}$ musi bydź liczbą całą. Jeżeli przeprowadzimy $Q$ do członka piérwszego, nazwiemy $\frac{R'}{a}+Q=Q'$ i potém rozdzielimy obie strony przez $a$, znaydziemy

www.rcin.org.pl

$$\frac{Q'}{a} = -P - a;$$

co nas uczy, że $\frac{Q'}{a}$ powinno bydź całością. Naostatek przenosząc $P$ na stronę piérwszą, nazywaiąc $\frac{Q'}{a} + P = P'$ i dzieląc oba członki przez $a$, otrzymamy

$$\frac{P'}{a} = -1, \quad \text{a zatém} \quad \frac{P'}{a} + 1 = 0.$$

Zebrawszy razem wszystkie postrzeżenia dopiéro uczynione, widzimy że $a$ będąc pierwiastkiem zrównania musi rozdzielić zupełnie wyraz ostatni $S$; i uczynić całkiemi wielorazy $\frac{R'}{a}$, $\frac{Q'}{a}$, $\frac{P'}{a}$, z których końcowy powinien bydź równy odiemnéy iedności, żeby summa $\frac{P'}{a} + 1$ stała się zerem. Ztąd wypada, że aby się upewnić czyli dzielnik którykolwiek $a$ wyrazu ostatniego $S$ może bydź pierwiastkiem zrównania; potrzeba 1ód, *rozdzielić ostatni termin przez* a *i do wielorazu dodadź spółczynnik pierwszéy potęgi* x. 2re, *rozdzielić tę summę przez* a *i do wielorazu dodać spółczynnik drugiéy potęgi* x. 3cie, *tak daléy otrzymywane summy dzieląc przez* a *i do wielorazu dodaiąc spółczynniki terminów coraz bliższych początku, kiedy wreszcie przydamy spółczynnik terminu pierwszego toiest iedność, wypadek powinien bydź zerem, ieśli* a *iest pierwiastkiem. Gdyby w zrównaniu brakowało iakiego terminu, należy za iego spółczynnik brać zero. Przykład.* Wyraz ostatni zrównania $x^4 - 9x^3 + 23x^2 - 20x + 15 = 0$ ma dzielniki 15, 5, 3, 1, —1, —3, —5, —15. Podług wskazanego teraz prawidła doświadczam dzielnika 3:

$$\frac{15}{3} = 5, \quad \frac{5-20}{3} = -5, \quad \frac{-5+23}{3} = 6, \quad \frac{6-9}{3} = -1,$$

$-1 + 1 = 0.$

Więc 3 iest iednym z pierwiastków. Doświadczam ieszcze dzielnika 5:

$$\frac{15}{5} = 3, \qquad \frac{3-20}{5} = \text{nie całości:}$$

www.rcin.org.pl

zatém 5 nie iest pierwiastkiem. Podobnie się można przekonać, że nie są pierwiastkami wszystkie dzielniki pozostałe. Teraźnieysze przeto zrównanie ma tylko ieden pierwiastek wymierny; trzy zaś inne bydź muszą niewymierne lub uroione. Zrównanie $x^3+\frac{4}{5}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{3}{5}=0$ zawieraiące spółczynniki ułamkowe może też mieć ułamkowe pierwiastki wymierne. Takie zrównanie potrzeba naprzód przerobić na inne, któregoby pierwiastki wymierne były koniecznie całkie. Na ten koniec zakłada się $x=\frac{y}{20}$; ztąd wypadnie zrównanie $y^3+16y^2-300y-4800=0$. Z wielkiéy liczby dzielników iakie ma wyraz ostatni 4800 ieden tylko $-16$ pokaże się bydź pierwiastkiem; przeto $y=-16$, a następnie $x=-\frac{16}{20}=-\frac{4}{5}$. Obaczymy niżéy, iż są pewne granice właściwe każdemu zrównaniu, między którémi zawieraią się iego pierwiastki. Niektóre mnożniki wyrazu ostatniego mogą za takowe granice występować: o nich więc będziemy zaraz pewni, że nie są pierwiastkami, nie potrzebuiąc doświadczać sposobem teraz podanym.

II. *Pomocy w szukaniu pierwiastków niewymiernych.*

Dochodzenie pierwiastków niewymiernych wymaga pomocy prawd następuiących:

*A). Jeżeli dwie liczby* p *i* q *podstawione za* x *w zrównaniu liczebném daią wypadki ze znakami przeciwnémi; naówczas między* p *i* q *środkuie przynaymniéy ieden rzetelny iego pierwiastek.* Każde zrównanie po wyrażeniu zbioru wszystkich iego terminów dodatnych przez $A$, odiemnych przez $-B$, przyymie postać

$$A-B=0.$$

Daymy że $p<q$ i że $p$ podstawione za $x$ prowadzi do wypadku odiemnego, $q$ do wypadku dodatnego; więc w pierwszym razie $A<B$, w drugim $A>B$. Z natury funkcyy $A$ i $B$, zamykaiących w swoim składzie potęgi $x$ cechowane wykładnikami całkiemi i dodatnémi, wypada, że obie te funkcye rosną w miarę powiększenia $x$: tak dalece, że gdy $x$ przeprowadzać będziemy przez nieznaczne stopnie

www.rcin.org.pl

wzrostu od $p$ do $q$ zakładaiąc $x=p$, $x=p+\delta$, $x=p+2\delta$, $x=p+3\delta$, . . . $x=q$; będą też funkcye $A$ i $B$ wzrastały stopniami nieznacznémi. Lecz że podług założenia funkcya $A$ będąc z razu mnieysza od $B$ staie się potém większą; przeto wzrost $A$ musi bydź prędszy niżeli wzrost $B$, aby umnieyszaiąc zwolna przewyżkę $B$ nad $A$ sprawił nareszcie przewyżkę $A$ nad $B$. W przeyściu od $A<B$ do $A>B$ musi bydź pośredni moment w którym $A$ staie się równe $B$: wartość $x$ odpowiadaiąca téy okoliczności sprawdzaiąc zrównanie $A-B=0$ będzie iego pierwiastkiem; takowa zaś wartość oczywiście środkuie między $p$ i $q$. Uważaliśmy teraz liczby $p$ i $q$ za dodatne; więc i pierwiastek środkuiący między niemi iest dodatny. Łatwo ten sam dowód rościągnąć do przypadku w którymby liczby $p$ i $q$ były odiemne lub iedna z nich zerem. *Przykład.* W zrównaniu $x^2-2x-3=0$ kładąc 1 i 4 za $x$, otrzymuiemy wypadki $-4$ i $+5$ odmienne co do znaku; zatém ieden pierwiastek środkuie pomiędzy 1 i 4, i tym pierwiastkiem iest w saméy rzeczy liczba 3. Podobnie 0 i $-2$ prowadząc do wypadków $-3$ i $+5$ z różnym znakiem obeymuią między sobą pierwiastek odiemny i takim iest $-1$.

*B*). Pokazaliśmy że między dwiema liczbami, które podstawione w zrównaniu na mieyscu $x$ prowadzą do wypadków z odmiennym znakiem, środkuie przynaymniéy ieden pierwiastek: ale ztąd nie mamy prawa wnosić, żeby te liczby nie obeymowały więcéy pierwiastków nad ieden; owszem środkować ich może iakakolwiek liczba nieparzysta, co wypada z następuiącego początku. *Jeżeli dwie liczby* p *i* q *obeymuią nieparzystą iakąkolwiek liczbę pierwiastków rzetelnych, wypadki z ich podstawienia na mieyscu* x *są koniecznie ze znakiem odmiennym; ieżeli parzystą ze znakiem iednakowym.* Zeby to założenie utwierdzić dowodem, oznaczmy przez $a$, $b$, $c$, . . pierwiastki zrównania $X=0$ obięte między $p$ i $q$, a przez $Y$ wieloczyn z mnożników stopnia pierwszego odpowiadaiących pierwiastkom rzetelnym nie obiętym i uroionym. Pierwszy członek $X$ zrównania może się wystawić pod postacią

$$(x-a)(x-b)(x-c)\ .\ .\ .\ .\ .\times Y=0.$$

Podstawmy teraz w $X$ czyli w poprzedzaiący wieloczyn $p$ i $q$ za $x$; otrzymamy dwa wypadki

www.rcin.org.pl

$$(p-a)(p-b)(p-c) \ldots \times Y'$$
$$(q-a)(q-b)(q-c) \ldots \times Y''$$

gdzie $Y'$, $Y''$ wyrażaią to w co się zamienia $Y$ kiedy w niém zastąpimy $x$ przez $p$ i $q$: te dwie ilości $Y'$ $Y''$ są koniecznie co do znaku zgodne; bo inaczéy na mocy piérwszego początku miałoby $Y=0$ ieszcze ieden przynaymniéy pierwiastek obięty między $p$ i $q$ co iest przeciw założeniu. Dla łatwieyszego zadeterminowania znaków w powyższych dwóch wypadkach, rozdzielmy piérwszy z nich przez drugi; będzie

$$\frac{(p-a)(p-b)(p-c) \ldots \times Y'}{(q-a)(q-b)(q-c) \ldots \times Y''}$$

co się może tak napisać

$$\frac{p-a}{q-a} \times \frac{p-b}{q-b} \times \frac{p-c}{q-c} \ldots\ldots\ldots \times \frac{Y'}{Y''}.$$

A ponieważ liczby $a$, $b$, $c$ . . . środkuią między $p$ i $q$, zatém gdy $p \gtrless a$, $p \gtrless b$, $p \gtrless c$ . . . musi bydź w tym samym razie $q \lessgtr a$, $q \lessgtr b$, $q \lessgtr c$ . . . . . a ztąd $p-a$ musi bydź różnego znaku od $q-a$, $p-b$ od $q-b$, $p-c$ od $q-c$ . . . ; przeto wielorazy cząstkowe $\frac{p-a}{q-a}$, $\frac{p-b}{q-b}$, $\frac{p-c}{q-c}$ . . . . są wszystkie odiemne, lecz $\frac{Y'}{Y''}$ iest koniecznie dodatne, bo $Y'$, $Y''$ zgadzaią się w znaku. Z czego widzimy że wieloczyn

$$\frac{p-a}{q-a} \times \frac{p-b}{q-b} \times \frac{p-c}{q-c} \ldots \times \frac{Y'}{Y''}$$

będzie *odiemny*, ieżeli pierwiastki środkuiące $a$, $b$, $c$ . . są w liczbie *nieparzystéy*; a *dodatny*, ieżeli w *parzystéy*. Nareszcie dwa wypadki $(p-a)(p-b)(p-c) \ldots\ldots \times Y'$, $(q-a)(q-b)(q-c) \ldots \times Y''$ będą znaków *różnych* lub *podobnych* według tego iak liczba pierwiastków zawartych między $p$ i $q$ iest *nieparzysta* albo *parzysta*. Można więc powiedzieć w ogólności na odwrót, że *gdy dwie liczby podstawione za* x *w zrównaniu daią wypadki ze znakami przeciwnémi, wtedy obeymuią przynaymniéy ieden pierwiastek rzetelny, lecz mogą ich obeymować iakąkolwiek liczbę nieparzystą; ieżeli zaś daią wypadki co do znaku zgodne, na-*



www.rcin.org.pl

*tenczas albo żaden między niemi nie środkuie pierwiastek, albo środkuie liczba ich parzysta.*

*C*). Nazywa się granicą wyższą pierwiastków dodatnych w zrównaniu wszelka liczba, która wartością przechodzi naywiększy dodatny pierwiastek tego zrównania. W każdém zrównaniu liczebném można otrzymać takową granicę z wielkości spółczynników. Widzimy z samego opisu, że granica może mieć nieskończone mnóstwo różnych wartości, bo skoro iaka liczba zostanie uznana za przewyższaiącą naywiększy pierwiastek dodatny, każda liczba od niéy większa będzie tém bardziéy miała tę samę własność. Lecz starać się należy oznaczyć granicę w liczbie, ile bydź może, nayprostszéy. Będziemy zaś pewni, żeśmy znaleźli takową granicę, ieżeli otrzymamy liczbę, któraby i sama i każda od niéy większa podstawiona za $x$ w zrównaniu dawała wypadek dodatny.

Jeżeli zrównanie ma wszystkie terminy idące po piérwszym odiemne, czyli kiedy iest wzoru

$$x^m - Ax^{m-1} - Bx^{m-2} - Cx^{m-3} - \text{itd} - Mx - N = 0,$$

wtedy granicą będzie oczywiście liczba, która i sama i każda od niéy większa podstawiona za $x$ uczyni termin piérwszy większym od summy wszystkich pozostałych; toiest która sprawdzi warunek

$$x^m > Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \text{itd} + Mx + N.$$

Naywiększy ze spółczynników nazwiymy $K$, i połóżmy go na mieyscu wszystkich innych; warunek większości zamieni się na

$$x^m > Kx^{m-1} + Kx^{m-2} + Kx^{m-3} + \text{itd} + Kx + K:$$

liczba, która podłożona za $x$ uczyni zadosyć temu nowemu warunkowi, tém bardziéy uczyni poprzedzaiącemu. Ostatni warunek może bydź ieszcze wystawiony pod inną postacią, rozdzieliwszy obie strony przez $x^m$, toiest

$$1 > \frac{K}{x} + \frac{K}{x^2} + \frac{K}{x^3} + \text{itd} + \frac{K}{x^{m-1}} + \frac{K}{x^m};$$

szukaną więc granicą będzie liczba, która wzięta za $x$ uczyni szereg

$$\frac{K}{x} + \frac{K}{x^2} + \frac{K}{x^3} + \text{itd} + \frac{K}{x^{m-1}} + \frac{K}{x^m}$$

mnieyszym od iedności. Gdybyśmy założyli $x = K$; ten sze-

www.rcin.org.pl

reg zamieniłby się na $\frac{K}{K}$ czyli 1 z ciągiem ułamków dodatnych, a przeto byłby większym od iedności; lecz gdy uczynimy $x = K+1$, wtedy wypadek składać się będzie z ułamków właściwych ubywaiących

$$\frac{K}{K+1}+\frac{K}{(K+1)^2}+\frac{K}{(K+1)^3}+\text{itd}+\frac{K}{(K+1)^{m-1}}+\frac{K}{(K+1)^m}.$$

Ten wypadek uważany w porządku wstecznym iestto postęp ieometryczny rosnący, który ma wyraz piérwszy $\frac{K}{(K+1)^m}$, wykładnik $K+1$, wyraz ostatni $\frac{K}{K+1}$; summa wszystkich iego wyrazów podług arytmetyki równa się

$$\frac{\frac{K}{K+1}(K+1)-\frac{K}{(K+1)^m}}{K+1-1} \text{ czyli } 1-\frac{1}{(K+1)^m}$$

liczbie oczywiście mnieyszéy od iedności. Każda liczba większa od $K+1$ użyta na mieyscu $x$ uczyniłaby summę ułamków $\frac{K}{x}+\frac{K}{x^2}+\ldots$ ieszcze mnieyszą. Ztąd poznaiemy, że $\mathrm{K}+1$ *czyli naywiększy spółczynnik powiększony iednością i każda liczba większa od* $\mathrm{K}+1$ *włożona za* x *w zrównanie przyprowadzi do wypadku zawsze dodatnego, a następnie iest granicą wyższą dodatnych pierwiastków.* W zrównaniu np. $x^3-4x^2-5x-2=0$ granicą wyższą pierwiastków dodatnych iest $5+1$ czyli 6.

Jeżeli zrównanie ma prócz terminu piérwszego niektóre ieszcze inne dodatne; granica może bydź liczbą mnieyszą od $K+1$. Weźmy zrównanie

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots-Px^{m-n}-Qx^{m-n-1}$$
$$-Rx^{m-n-2}-\ldots-Tx-U=0$$

w którém początkowych terminów dodatnych iest liczba $n$ a wszystkie dalsze począwszy od $Px^{m-n}$ są odiemne. W tym razie granicą będzie liczba, która podstawiona za $x$ uczyni $x^m$ większém nie od wszystkich wyrazów pozostałych, ale tylko od summy wyrazów odiemnych, toiest która sprawdzi warunek

www.rcin.org.pl

$$x^m > Px^{m-n} + Qx^{m-n-1} + Rx^{m-n-2} + \text{itd} + Tx + U.$$

Daymy że naywiększy ze spółczynników $P$, $Q$ . . . iest $S$ i połóżmy go, iak w przypadku poprzedzaiącym, na mieyscu wszystkich innych; warunek większości zamieni się na

$$x^m > Sx^{m-n} + Sx^{m-n-1} + Sx^{m-n-2} + \text{itd} + Sx + S$$

czyli na

$$1 > \frac{S}{x^n} + \frac{S}{x^{n+1}} + \frac{S}{x^{n+2}} + \text{itd} + \frac{S}{x^{m-1}} + \frac{S}{x^m}.$$

Tu kładąc $x^n = S$ czyli $x = \sqrt[n]{S}$, druga strona stanie się $\frac{S}{S}$ z szeregiem ułamków dodatnych; lecz gdy weźmiemy $x = \sqrt[n]{S} + 1$ albo $x = S' + 1$ (uczyniwszy dla skrócenia $\sqrt[n]{S} = S'$, zkąd $S = S'^n$ ), będziemy mieli na drugiéy stronie szereg ułamków

$$\frac{S'^n}{(S'+1)^n} + \frac{S'^n}{(S'+1)^{n+1}} + \frac{S'^n}{(S'+1)^{n+2}} + \ldots + \frac{S'^n}{(S'+1)^{m-1}} + \frac{S'^n}{(S'+1)^m},$$

który iest postępem ieometrycznym maiącym wyraz piérwszy $\frac{S'^n}{(S'+1)^m}$, wykładnik $S'+1$, wyraz ostatni $\frac{S'^n}{(S'+1)^n}$.

Summa tych wszystkich ułamków równa się

$$\frac{\frac{S'^n}{(S'+1)^n}(S'+1) - \frac{S'^n}{(S'+1)^m}}{S'+1-1} \text{ czyli } \frac{S'^{n-1}}{(S'+1)^{n-1}} - \frac{S'^{n-1}}{(S'+1)^m}$$

co iest oczywiście mnieysze od iedności. Zatém $\sqrt[n]{S} + 1$ czyli *iedność powiększona pierwiastkiem potęgi oznaczonéy liczbą terminów poprzedzaiących piérwszy termin odiemny wyciągnionym z naywiększego odiemnego spółczynnika iest granicą wyższą pierwiastków dodatnych w zrównaniu.* Przykłady. W zrównaniu $x^4 + 11x^2 - 25x - 67 = 0$ granicą iest $\sqrt[3]{67} + 1$, bo to zrównanie ma początkowych terminów dodatnych trzy; dwa wyraźne, a trzeci domyślny $+0x^3$. Jeżeli, iak w teraźnieyszym przykładzie, pierwiastek z naywię-

www.rcin.org.pl

kszego odiemnego spółczynnika iest niewymierny; wtedy na iego mieyscu bierze się liczba cała bezśrednie większa. Za $\sqrt[3]{67}$ wziąwszy 5, będzie granicą 5+1 czyli 6. W zrównaniu $x^4-3x^3+5x^2-8x+9=0$ granica równa się $\sqrt[1]{8}+1=8+1=9$. W niektórych przypadkach może bydź granica ieszcze prostsza, a osobliwie kiedy w zrównaniu po piérwszym terminie odiemnym znayduią się dodatne, iak iest w przykładzie drugim, który wystawiwszy pod kształtem $x^3(x-3)+x(5x-8)+9=0$ łatwo postrzegamy że granicą iest liczba 3, bo oczywiście ta liczba i każda od niéy większa da wypadek dodatny.

Na otrzymanie granicy nayprostszéy wyrażonéy przez liczbę całą Newton podaie sposób następuiący. Niech będzie zrównanie $x^3-x^2-7x+7=0$; zakłada się $x=u+z$; ztąd

$$\left.\begin{array}{c|c|c} u^3+3z & u^2+3z^2 & u+z^3 \\ -1 & -2z & -z^2 \\ & -7 & -7z \\ & & +7 \end{array}\right\} = 0.$$

Z dwóch ilości $u$ i $z$ iedna iest dowolna; za taką uważać będziemy $z$; ilość zaś $u$ pozostanie nieznaną. Na ilość dowolną $z$ dobieram wartości całkiéy, któraby uczyniła wszystkie spółczynniki ostatniego zrównania toiest funkcye $3z-1$, $3z^2-2z-7$, $z^3-z^2-7z+7$, dodatnémi. Naprzód uważam, iaka liczba na mieyscu $z$ wzięta czyni dodatnym spółczynnik piérwszego stopnia co do $z$ czyli $3z-1$; taką iest iedność i każda liczba od iedności większa. Jedność podstawiona za $z$ w spółczynnik drugiego stopnia czyli $3z^2-2z-7$ prowadzi do wypadku odiemnego; ale liczba 2 i każda od niéy większa czyni ten spółczynnik dodatnym. Liczba 2 podstawiona w spółczynniku trzeciego stopnia $z^3-z^2-7z+7$ daie wypadek odiemny; ale liczba 3 i każda od niéy większa czyni ten spółczynnik dodatnym, oraz dodatnémi spółczynniki poprzedzaiące. Wartość $z=3$ będzie granicą żądaną, toiest przewyższy naywiększą wartość dodatną $x$. Aby się o tém przekonać, uważmy że zrównanie na $u$, maiąc po włożeniu 3 za $z$ wszystkie wyrazy dodatne, nie może bydź sprawdzone przez żadną wartość na $u$ dodatną, gdyż wszystkie dodatne liczby od 0 do $\infty$ podstawiane za $u$ przyprowadzą do wypadków dodatnych i nigdy w tych wypad-

www.rcin.org.pl

kach nie będzie odmiany znaku. Skoro więc $z=3$, wtedy wszystkie wartości rzetelne na $u$ są odiemne; założenie zaś $x=u+z$ czyli $u=x-z$ pokazuie, że aby $u$ było odiemne, powinno $z$ przewyższać $x$. Dwie przeto okoliczności $z=3$ i $z>x$ są spółczesne; toiest 3 przewyższa każdą wartość dodatną $x$, a następnie 3 iest granicą.

Pozostaie nam ieszcze oznaczyć granicę wyższą pierwiastków odiemnych; oraz granice niższe pierwiastków tak dodatnych iak odiemnych czyli liczby mnieysze od naymnieyszych z tych pierwiastków. Jeżeli w zrównaniu daném, które dla krótkości wyrażmy przez $X=o$, uczynimy $x=-y$, przerobimy ié na inne np. $Y=o$, którego wszystkie pierwiastki dodatne wzięte ze znakiem — będą pierwiastkami odiemnémi zrównania $X=o$. Zatém oznaczywszy sposobami poprzedzaiącémi granicę wyższą pierwiastków dodatnych w zrównaniu $Y=o$ i położywszy przed nią znak —, będziemy mieli granicę wyższą pierwiastków odiemnych zrównania danego $X=o$. *Przykład.* Zrównanie $x^3-2x^2-3x+4=o$ po założeniu $x=-y$ bierze postać $-y^3-2y^2+3y+4=o$ czyli $y^3+2y^2-3y-4=o$. Granicą wyższą pierwiastków dodatnych ostatniego zrównania iest $\sqrt{4}+1=3$; zatém $-3$ będzie granicą wyższą pierwiastków odiemnych w zrównaniu daném.

Gdy w zrównaniu $X=o$ położymy $x=\frac{1}{y}$, otrzymamy zrównanie $Y=o$: naywiększy pierwiastek dodatny zrównania $Y=o$ odpowiada naymnieyszemu w $X=o$. Odkrywszy więc granicę wyższą $g$ pierwiastków dodatnych w $Y=o$, będzie $\frac{1}{g}$ granicą niższą takichże pierwiastków w $X=o$. *Przykład.* W zrównaniu $x^3+7x^2-5x-3=o$ uczyniwszy $x=\frac{1}{y}$, mamy $\frac{1}{y^3}+\frac{7}{y^2}-\frac{5}{y}-3=o$ czyli $1+7y-5y^2-3y^3=o$ czyli ieszcze $y^3+\frac{5}{3}y^2-\frac{7}{3}y-\frac{1}{3}=o$. Granicą wyższą pierwiastków dodatnych tego zrównania iest $\sqrt{\frac{7}{3}}+1$ albo $\sqrt{\frac{21}{9}}+1$ albo ieszcze $\frac{5}{3}+1=\frac{8}{3}$; przeto granicą niższa takichże pierwiastków w zrównaniu daném będzie $1:\frac{8}{3}=\frac{3}{8}$. Pospolicie zamiast granicy niższéy ułam-

www.rcin.org.pl

kowéy bierze się całka bezśrednie mnieysza: i taką tu będzie o.

Wziąwszy $x=-\frac{1}{y}$ przerobimy zrównanie dane $X=o$ na $Y=o$, gdzie wartość naywiększa $y$ dodatna odpowiada naymnieyszéy wartości $x$ odiemnéy. Jeżeli przeto znaydziemy granicę wyższą $g$ pierwiastków dodatnych w $Y=o$, będzie $-\frac{1}{g}$ granicą niższą pierwiastków odiemnych w $X=o$.

*Przykład.* Zrównanie $x^4-x^3-x^2-x+8=o$ po założeniu $x=-\frac{1}{y}$ zamienia się na $\frac{1}{y^4}+\frac{1}{y^3}-\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y}+8=o$ czyli $y^4+\frac{1}{8}y^3-\frac{1}{8}y^2+\frac{1}{8}y+\frac{1}{8}=o$. Granicą wyższą pierwiastków dodatnych ostatniego zrównania iest $\sqrt{\frac{1}{8}}+1=\sqrt{\frac{2}{16}}+1$ czyli $\frac{2}{4}+1=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$; więc granicą niższą pierwiastków odiemnych zrównania danego będzie $-1:\frac{3}{2}=-\frac{2}{3}$ czyli o.

D). *W każdém zrównaniu iakiegokolwiek stopnia nie może bydź więcéy pierwiastków rzetelnych dodatnych iak przemian w znakach, ani więcéy odiemnych iak następstw czyli powtarzań raz po razu tego samego znaku.*

To założenie będzie dowiedzione, ieżeli się okaże, iż w zrównaniu przywiedzioném do zera pomnożywszy stronę piérwszą przez mnożnik $x+a$ odpowiadaiący pierwiastkowi odiemnemu nie przybywa żadna przemiana lecz przynaymniéy iedno następstwo; i że pomnożywszy przez mnożnik $x-a$ odpowiadaiący pierwiastkowi dodatnemu nie przybywa żadne następstwo lecz przynaymniéy iedna przemiana.

Niech będzie zrównanie

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+\ .\ .\ .\ +Tx+V=o;$$

po rozmnożeniu przez $x+a$ otrzymuiemy

$$x^{m+1}\begin{array}{l}+A\\+a\end{array}\Bigg|\,x^m\begin{array}{l}+B\\+Aa\end{array}\Bigg|\,x^{m-1}\begin{array}{l}+C\\+Ba\end{array}\Bigg|\,x^{m-2}+\ldots\begin{array}{l}+T\\+Sa\end{array}\Bigg|\,x+Va=o.$$

Spółczynnik każdego wyrazu w tym wieloczynie równy iest spółczynnikowi terminu odpowiednego co do mieysca w zrównaniu daném powiększonemu spółczynnikiem terminu poprzedzaiącego rozmnożonym przez $a$. Ztąd widzimy że dla otrzymania znaków terminom wieloczynu pochodzącego z rozmnożenia przez $x+a$, trzeba napisać szereg znaków mnożnéy i pod spodem takiż sam szereg ale zaczynaiąc od drugiego mieysca. W mnogości przez $x-a$, szereg piérwszy składa się także ze znaków mnożnéy, a drugi ze znaków przeciwnych, i podobnież o iedno mieysce w prawą posuniony.

Niech będzie szereg znaków mnożnéy

$$+++-+--+-+--+++,$$

więc szereg znaków wieloczynu pochodzącego z rozmnożenia przez $x+a$ wypadnie

$$\begin{array}{l} +++-+--+-+--+++ \\ \quad +++-+--+-+--+++ \\ \hline +++nnn-nnnn-n+++ \end{array}$$

gdzie $n$ znaczy niepewność znaku wypadkowego, ieżeli nie przywiązuiemy do spółczynnika żadnéy szczególnéy wartości. Dopóki w mnożnéy od piérwszego terminu ciągnie się następstwo znaków, póty trwa toż następstwo i w wieloczynie; lecz skoro się następstwo w mnożnéy przerywa, znak wieloczynu wypada niepewny; i ta niepewność trwa póty, póki w mnożnéy nie powróci następstwo, i podówczas znak wieloczynu staie się znowu oznaczony, i tak daléy Liczba więc znaków niepewnych w wieloczynie będzie taka sama iaka iest przemian w mnożnéy. Jeden znak niepewny nie może środkować tylko między znakami różnémi $+-$ albo $-+$: ieżeli na mieyscu niepewnego weźmiemy znak $+$, będzie w piérwszym razie iedno następstwo $++$ i iedna przemiana $+-$; ieżeli zaś niepewny znak zastąpimy przez $-$, będzie iedna przemiana $+-$ i iedno następstwo $--$. Toż samo znaydziemy kładąc $+$ i $-$ między dwoma znakami $-$ i $+$. Jeżeli przeto znak niepewny między dwoma pewnémi dadź tylko może iednę przemianę. Liczba nieparzysta znaków niepewnych ciągle po sobie idących środkuie między dwoma znakémi różnémi, a parzysta między podobnémi: w piérwszym i drugim przypadku kładąc znaki od upodobania na mieyscu niepewnych, nie wypadnie nigdy więcéy przemian iak iest znaków niepewnych albo, co na iedno wychodzi, iak iest przemian w mnożnéy. Ponieważ zaś w wieloczynie iest iednym znakiem więcéy niżeli w mnożnéy; wnieść należy, że mnożnik $x+a$ wprowadził naymniéy iedno następstwo.

www.rcin.org.pl

Dowiedlibyśmy podobném rozumowaniem, że po rozmnożeniu przez mnożnik $x-a$ odpowiadaiący pierwiastkowi dodatnemu, nie może w wieloczynie więcéy wyniknąć następstw iak iest w mnożnéy: lecz że wieloczyn zamyka iednym znakiem więcéy niż mnożna, przeto do niego musi przybywać przynaymniéy iedna przemiana.

*Wniosek.* Gdyby wszystkie pierwiastki były w daném zrównaniu rzetelne: wtedy liczba dodatnych byłaby dokładnie równa liczbie przemian, a odiemnych liczbie następstw. J tak niech $m$ wyraża liczbę pierwiastków dodatnych, $n$ odiemnych, $m'$ liczbę przemian w znakach, $n'$ następstw: ponieważ liczba wszystkich pierwiastków równa się stopniowi zrównania, tak iak i liczba wszystkich przemian i następstw razem wziętych; przeto

$$m+n=m'+n'.$$

Lecz podług tego co się dopiéro dowiodło, nie może bydź $m>m'$, więc też nie iest $n<n'$; a nie może bydź także $n>n'$, zatém

$$n=n', \text{ a następnie } m=m'.$$

Własność tu okazana zowie się od swoiego wynalazcy *Regułą Dekarta* (Descartes).

III. *Wynaydowanie pierwiastków rzetelnych niewymiernych.*

Odkrywszy pierwiastki wymierne zrównania, należy z nich uformować mnożniki stopnia piérwszego, i przez wieloczyn z tych mnożników rozdzielić zrównanie: na wieloraz wypadnie zrównanie stopnia o tyle iedności niższego, ile było pierwiastków wymiernych. To wypadkowe zrównanie zamykać tylko będzie same pierwiastki rzetelne niewymierne, albo uroione.

Każdy pierwiastek niewymierny da się ocenić przez przybliżenie w liczbie całéy, która może bydź niekiedy zerem, połączonéy z ułamkiem dziesiątnym ciągnącym się bez końca. Zatém prawidło na szukanie pierwiastków niewymiernych powinno mieć za cel 1όd *wynaleść część całką*; 2re *ocenić część ułamkową z żądanym stopniem przybliżenia.*

Sposób na wyśledzenie pierwiastków rzetelnych niewymiernych, iaki się nam może naypiérwey nastręczać, zależy na tém, aby za $x$ podstawiać koleią wszystkie liczby całe



www.rcin.org.pl

záwarte między granicami wyższémi i niższémi pierwiastków tak dodatnych iak odiemnych. Gdy np. o iest granicą niższą dla iednych i dla drugich, $+4$ granica wyższą dla dodatnych, $-3$ dla odiemnych; trzeba za $x$ kłaść porządkiem liczby 4, 3, 2, 1, 0, $-1$, $-2$, $-3$. Wtedy, podług pierwszego początku, ieżeli dwie liczby następnie po sobie idące daią wypadki ze znakiem przeciwnym; te liczby obeymuią przynaymniéy ieden pierwiastek rzetelny; a przeto mnieysza z nich będzie częścią całką tego pierwiastku.

To iednak postępowanie może nam czasem nie okazać wszystkich pierwiastków. Widzieliśmy bowiem w drugim początku, że dwie liczby, które daią wypadki ze znakiem przeciwnym, obeymuią nie tylko ieden pierwiastek, ale mogą ich zawiérać liczbę nieparzystą, i że dwie liczby prowadzące do wypadków zgodnych w znaku mogą obeymować liczbę pierwiastków parzystą. Idzie zatém że podstawuiąc za $x$ szereg liczb całkich po sobie następnych, ieżeli nie znaydziemy tyle przemian znaków w wypadkach ile iest iedności w stopniu zrównania; będzie to mogło pochodzić albo ztąd, że między pierwiastkami zrównania znayduią się uroione, albo że kilka pierwiastków niewymiernych rzetelnych środkuie między liczbami całkiemi sobie przyległémi: np. liczby niewymierne $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ środkuią między 1 i 2; liczby $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt[3]{11}$, $\sqrt[4]{20}$ środkuią między 2 i 3. Niektóre więc pierwiastki mogą się ukrywać przed ich śledzeniem prowadzoném według poprzedzaiącego sposobu. Lecz usunęlibyśmy tę niedogodność gdybyśmy przed otrzymaniem pierwiastków zrównania danego potrafili oznaczyć liczebnie ilość mnieyszą od naymnieyszéy z różnic iakie pomiędzy niémi zachodzą. Przypuśćmy bowiem że ta ilość, którą wyraźmy przez $\delta$, iest wiadoma. Natenczas znalazłszy granicę niższą $g$ i wyższą $G$; ieżeli za $x$ kłaść będziemy $g$, $g+\delta$, $g+2\delta$, $g+3\delta$, . . ., toiest liczby różniące się o $\delta$, coraz większe, póki ostatnia niezrówna lub nie przewyższy $G$; odmiana znaków w wypadkach sobie przyległych pokaże nam niewątpliwie ieden tylko pierwiastek środkuiący między liczbami które do tych wypadków przywiodły, a tosamość znaków upewni że niemasz żadnego pierwiastku; bo inaczéy pierwiastki różniłyby się o ilość mnieyszą niż $\delta$.

Będziemy mogli ocenić $\delta$ w każdém zrównaniu, ieżeli

www.rcin.org.pl

rozwiążemy zagadnienie następuiące: *uformować zrównanie, ktòregoby pierwiastki były kwadratami z różnic zachodzących między pierwiastkami zrównania danego.* Niech będzie zrównanie ogólne

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} + \text{ itd } + Tx + U = 0,$$

którego pierwiastki nazwiymy przez $a$, $b$, $c$, $d$ . . . ; podstawuiąc w niém $a+y$ za $x$, i rozwiiaiąc potęgi, znaydziemy

$$\left.\begin{array}{l} a^m + \quad ma^{m-1}y \quad + \frac{m(m-1)}{1.\ 2} a^{m-2}y^2 \quad + \ldots + y^m \\ + Pa^{m-1} + (m-1)Pa^{m-2}y + \frac{(m-1)(m-2)}{1.\ 2} Pa^{m-3}y^2 + \ldots \\ + Qa^{m-2} + (m-2)Qa^{m-3}y + \frac{(m-2)(m-3)}{1.\ 2} Qa^{m-4}y^2 + \ldots \\ + Ra^{m-3} + (m-3)Ra^{m-4}y + \frac{(m-3)(m-4)}{1.\ 2} Ra^{m-5}y^2 + \ldots \\ + \text{ itd.} \ + \text{ itd.} \qquad + \quad \text{itd.} \\ + Ta \ + Ty \\ + U \end{array}\right\} = 0.$$

Ponieważ $x = a + y$ czyli $y = x - a$, przeto wartości na $y$ w ostatniém zrównaniu są to różnice między wartościami $x$ i ilością $a$, toiest $y = a - a$, $y = b - a$, $y = c - a$, itd. Jeden pierwiastek tego zrównania $a - a$ iest zerem; a następnie bydź musi zerem ostatni termin składaiący piérwszą kolumnę, czyli

$$a^m + Pa^{m-1} + Qa^{m-2} + Ra^{m-3} + \text{ itd } + Tx + U = 0, \ldots \quad (Q),$$

co zkąd-inąd iest oczywista, bo ta piérwsza kolumna niczém się nie różni od zrównania danego, tylko w mieyscu $x$ zamyka $a$ iednę z wartości na $x$. Opuściwszy tę kolumnę i potém wyrazy pozostałe rozdzieliwszy przez $y$, otrzymamy

$$\left.\begin{array}{l} ma^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.\ 2} a^{m-2} \\ + (m-1)Pa^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.\ 2} Pa^{m-3} \\ + (m-2)Qa^{m-3} + \frac{(m-2)(m-3)}{1.\ 2} Qa^{m-4} \\ + \text{ itd} \qquad + \quad \text{itd} \\ + T \end{array}\right| y + \ldots + y^{m-1} = 0 \ldots (R),$$

www.rcin.org.pl

To zrównanie będzie miało za $m-1$ swoich pierwiastków
$$y=b-a,\ y=c-a,\ y=d-a, \text{ itd} \ldots (1).$$
Jeżeli z niego wyrzucimy $a$ za pomocą zrównania ($Q$); w zrównaniu wypadkowém, które nazwiymy $W=0$, wartości na $y$ będą zawsze (1). Gdybyśmy w zrównaniu daném wzięli byli $b+y$ za $x$, przyszlibyśmy także do zrównań ($Q$) i ($R$), tylko w nich na mieyscu $a$ znaydowałoby się $b$; wtedy $y$ w zrównaniu ($R$) miałoby wartości
$$y=a-b,\ y=c-b,\ y=d-b, \text{ itd}, \ldots \ldots (2).$$
Po wyrzuceniu $b$ ze zrównań ($Q$) i ($R$), zrównanie z eliminacyi wynikłe byłoby oczywiście $W=0$ takie samo iak pierwéy bez żadnéy odmiany. Przeto wartościami na $y$ w zrównaniu $W=0$ nie tylko są (1), ale też (2); toiest wartościami na $y$ w zrównaniu wypadkowém z eliminacyi nie tylko są różnice między pierwiastkiem $a$ i wszystkiemi pozostałémi $b$, $c$, $d$, . . ., ale też różnice między pierwiastkiem $b$ i wszystkiemi pozostałémi $a$, $c$, $d$, . . .; i łatwo iuż poznaiemy, że niémi będą także różnice między pierwiastkiem $c$ i wszystkiemi pozostałémi; itd. Słowem wartości na $y$ w zrównaniu $W=0$ wyrażać będą różnice między każdym z osobna i wszystkiemi innémi pierwiastkami zrównania danego. Skoro zaś pierwiastkami zrównania $W=0$ są wszystkie róznice
$$\begin{array}{l} a-b,\ a-c,\ a-d, \ldots \\ b-a,\ b-c,\ b-d, \ldots \\ c-a,\ c-b,\ c-d, \ldots \\ d-a,\ d-b,\ d-c, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{array}$$
a tych różnic iest liczba $m(m-1)$, więc i stopień zrównania $W=0$ powinien bydź także $m(m-1)$. Ponieważ dwuwyrazy $a-b$ i $b-a$, $a-c$ i $c-a$, $b-c$ i $c-b$, itd. nie różnią się iak tylko w znaku; poznaiemy ztąd oczywiście, że każdy pierwiastek wypadkowego zrównania musi mieć drugi iemu równy ze znakiem przeciwnym: ieżeli np. $y=\alpha$, powinno bydź także $y=-\alpha$, ieżeli $y=\beta$, będzie też koniecznie $y=-\beta$, itd. To więc zrównanie można uważać iako złożone z mnożników pierwszego stopnia maiących postać $y-\alpha$, $y+\alpha$, $y-\beta$, $y+\beta$, itd, albo co iedno iest z mnożników stopnia drugiego $y^2-\alpha^2$, $y^2-\beta^2$, itd: do iego zatém wyrażenia wchodzić nie będą potęgi $y$ iak

www.rcin.org.pl

tylko same parzyste; tak iż wzór tego zrównania musi bydź następuiący

$$y^{2n}+py^{2n-2}+qy^{2n-4}+\ldots+ty^2+u=0,$$

gdzie uczyniwszy $y^2=z$, wypadnie

$$z^n+pz^{n-1}+qz^{n-2}+\ldots+tz+u=0;$$

tu ilości $z$, iako równéy $y^2$ wartościami będą kwadraty z różnic zachodzących pomiędzy pierwiastkami w zrównaniu daném. Ztąd widzimy, że *aby otrzymać zrównanie na kwadraty z różnic między pierwiastkami zrównania danego, potrzeba w zrównaniu daném podstawić* a+v *za* x; *wypadek rozłożyć na dwa zrównania, z których iedno będzie to samo co dane po włożeniu* a *za* x, *drugie pozostałe rozdzieli się przez* y *i będzie stopnia niższego o iedność niż dane. Z tych dwóch zrównań należy wyrzucić* a *i w zrównaniu wypadkowém uczynić* $y^2=z$.

*Przykład.* W zrównaniu $x^3-7x+7=0$ kładąc $x=a+y$, znaydziemy

$$\left.\begin{array}{r} a^3+3a^2 \\ -7a-7 \\ +7 \end{array}\right| y+3ay^2+y^3=0$$

To zrównanie rozbieram na dwa

$$a^3-7a+7=0,$$

$$(3a^2-7)y+3ay^2+y^3=0 \text{ czyli } 3a^2+3ay+y^2=0,$$

z których trzeba eliminować $a$; co się może odbyć następuiącym sposobem: od drugiego pomnożonego przez $a$ odciągam pierwsze mnożone przez 3, zostanie

$$3a^2y+a(14+y^2)-21=0;$$

od tego ostatniego odeymuię drugie mnożone przez $y$, otrzymam

$$a(14-2y^2)-21+7y-y^3=0, \text{ zkąd } a=\frac{y^3-7y+21}{2(7-y^2)};$$

znalezioną wartość na $a$ podstawiam w drugie: będzie po uwolnieniu wypadku od mianownika

$$3(y^3-7y+21)^2+6y(y^3-7y+21)(7-y^2)-4(7-y^2)^2=0;$$

odbywszy naznaczone działania i potém uproszczenie, znaydę naostatek

$$y^6-42y^4+441y^2-49=0$$

albo czyniąc $y^2=z$

$$z^3-42z^2+441z-49=0,$$

www.rcin.org.pl

zrównanie w którém wartości $z$ są kwadratami z różnic między pierwiastkami zrównania $x^3-7x+7=0$.

*Użycie zrównania na kwadraty z różnic.*

Niech $Z=0$ będzie zrównaniem na kwadraty z różnic między pierwiastkami zrównania $X=0$: obaczmy iakie iest iego użycie. Ponieważ w zrównaniu $X=0$ mamy szukać samych tylko pierwiastków rzetelnych; dosyć więc na wartość $\delta$ otrzymać ilość mnieysza niżeli naymnieysza z różnic między pierwiastkami tego tylko gatunku. Każda takowa różnica iest oczywiście rzetelna; a z niéy kwadrat dodatny: przeto *kwadraty z różnic między pierwiastkami rzetelnémi zrównania* $X=0$ *są to pierwiastki rzetelne dodatne zrównania* $Z=0$; a następnie granica niższa pierwiastków dodatnych zrównania $Z=0$ okaże nam żądaną wartość ilości $\delta$. Dla znalezienia téy granicy uczynimy w zrównaniu $Z=0$, $z=\frac{1}{v}$; zkąd wypadnie zrównanie przerobione $V=0$. Oceniwszy granicę wyższą $G$ pierwiastków dodatnych w tém ostatniém zrównaniu będzie $\frac{1}{G}$ granicą niższą takichże pierwiastków w zrównaniu $Z=0$. Zatém $\frac{1}{G}$ iest mnieysza od kwadratu naymnieyszéy z różnic między pierwiastkami zrównania $X=0$, a następnie $\frac{1}{\sqrt{G}}$ mnieysza iest niżeli sama takowa różnica. J to iest wartość ilości $\delta$, którą brać należy za przedział między liczbami, maiącémi się koleią podstawiać zamiast $x$ w zrównaniu daném $X=0$. Jeżeli $\sqrt{G}$ iest niewymierny, wtedy używa się liczba cała bezśrednie większa, którą wyraziwszy przez $k$, będzie $\frac{1}{k}$ wartością $\delta$.

*Przykład wynaydowania wartości rzetelnych niewymiernych.*

Zeby dobrze poznać praktykę wyłożonego dopiéro sposobu na dochodzenie pierwiastków rzetelnych niewymiernych, użyymy go do szczególnego przykładu. Weźmy zrównanie

$$x^3-7x+7=0;$$

zrównanie na kwadraty z różnic między iego pierwiastkami znaleźliśmy następuiące

$$z^3-42z^2+441z-49=0.$$

Granicą wyższą dla pierwiastków dodatnych zrównania danego otrzymaną podług sposobu Newtona iest $+2$, dla odiemnych $-4$; granicą niższą dla pierwszych $+1$, dla drugich $-1$. Zeby ocenić wartość na $\delta$ stosowną do teraźnieyszego przykładu, załóżmy w zrównaniu na kwadraty z różnic $z=\frac{1}{v}$; uszykowawszy wypadek podług wykładników $v$, będzie

$$v^3-9v^2+\frac{42}{49}v-\frac{1}{49}=0.$$

Tu łatwo postrzegamy, że liczba 9 i każda od niéy większa położona za $v$ przyprowadzi do wypadku dodatnego; następnie 9 iest granicą wyższą wartości na $v$, a zatém granicą niższą wartości $z$ będzie $\frac{1}{9}$. Ztąd $\delta=\frac{1}{\sqrt{9}}=\frac{1}{3}$. Dla wyśledzenia przeto pierwiastków rzetelnych zrównania danego, należy w tém zrównaniu podstawiać za $x$ liczby między granicami zawarte a różniące się o $\frac{1}{3}$, toiest liczby $1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2$; $-1, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, -2, -\frac{7}{3}, -\frac{8}{3}, -3, -\frac{10}{3}, -\frac{11}{3}, -4$.

Można uniknąć podstawiania ułamków założywszy $x=\frac{y}{3}$; bo w zrównaniu z tego założenia wynikłém

$$y^3-63y+189=0$$

ponieważ pierwiastki są trzy razy większe niżeli w danėm, więc i różnice są trzy razy większe; kiedy przeto naymnieysza różnica pierwiastków w zrównaniu daném przewyższała $\frac{1}{3}$, zatém naymnieysza z różnic między pierwiastkami w zrównaniu przerobioném będzie większa od $\frac{1}{3}\times3$ czyli od iedności: następnie $\delta$ stosowne do zrównania przerobionego będzie iednością. Potrzeba więc w zrównaniu ostatniém podstawiać za $y$ liczby różniące się o iednośc zawarte między granicami. A ile razy powiększyły się pierwiastki, tyle razy powiększą się w ogólności i granice; i będą 3 i 6, $-3$ i $-12$. Podstawuiąc za $y$ w ostatniém zrównaniu liczby

$3, 4, 5, 6$; $-3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10, -11, -12$;

postrzeżemy z odmiany znaków w wypadkach, że iedna war-

www.rcin.org.pl

tość na $y$ środkuie między 4 i 5, druga między 5 i 6, trzecia między —9 i —10; a następnie wartości na $x$ iako trzy razy mnieysze środkować będą, iedna między $\frac{4}{3}$ i $\frac{5}{3}$, druga między $\frac{5}{3}$ i $\frac{6}{3}$, trzecia między $-\frac{9}{3}$ i $\frac{10}{3}$: toiest trzy wartości na $x$ przybliżone, mnieysze od prawdziwych, różniące się od nich mniey niż o $\frac{1}{3}$ są $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, $-\frac{9}{3}$ czyli —3.

Dochodzenie więc pierwiastków rzetelnych niewymiernych prowadzi się następuiącym porządkiem: potrzeba *naprzód* uformować zrównanie $Z=0$ na kwadraty z różnic między pierwiastkami zrównania danego $X=0$; *powtóre* oznaczyć granicę niższą $\frac{1}{G}$ pierwiastków dodatnych zrównania $Z=0$, z téy granicy wyciągnąć pierwiastek kwadratowy toiest otrzymać $\frac{1}{\sqrt{G}}$; ieżeliby ułamek $\frac{1}{\sqrt{G}}$ był niewymierny, wziąć na iego mieysce wymierny bezśrednie mnieyszy $\frac{1}{k}$; *potrzecie* w zrównaniu danêm założyć $x=\frac{y}{k}$, zkąd wypadnie zrównanie przerobione $Y=0$. *Poczwarte* podstawiać za $y$ w zrównaniu $Y=0$ liczby całkie różniące się o iedność zawarte między granicami wyższémi i niższémi pierwiastków tak dodatnych iak odiemnych zrównania $Y=0$. Odkrywszy części całkie pierwiastków niewymiernych zrównania $Y=0$, pozostanie ieszcze ocenić części ich ułamkowe z żądanym stopniem przybliżenia: to się naylepiéy uskutecznia za pomocą ułamków ciągłych, których naukę i użycie do teraźnieyszego celu wkrótce poznamy. Po otrzymaniu wartości przybliżonych na $y$, kiedy ié rozdzielimy przez $k$, wypadną pierwiastki niewymierne przybliżone zrównania danego $X=0$.

IV. *Wnioski z początków dowiedzionych w teraźnieyszym §fie.*

*A*). *Każde zrównanie stopnia nieparzystego ze spółczynnikami rzetelnémi ma przynaymniey ieden pierwiastek rzetelny różniący się w znaku z wyrazem ostatnim.* Weźmy *naprzód* zrównanie

$$x^m + Px^{m-1} + \ldots - U = 0$$

którego ostatni wyraz iest odiemny. Kładąc w têm zrównaniu $o$ za $x$, otrzymuiemy wypadek $-U$ odiemny. Jeżeli wynaydziemy granicę wyższą $G$ pierwiastków dodatnych i podstawimy ią za $x$, przyydziemy do wypadku dodatnego. W tém przeto zrównaniu musi bydź przynaymniéy ieden pierwiastek rzetelny środkuiący między $o$ i $G$: ten pierwiastek iest dodatny, a tém samém przeciwnego znaku z wyrazem ostatnim. Niech *powtóre* zrównanie dane

$$x^m + Px^{m-1} + \ldots\ldots + U = o$$

ma ostatni wyraz dodatny. Uczyniwszy $x = -y$, będzie $-y^m + Py^{m-1} \ldots + U = o$ czyli $y^m - Py^{m-1} \ldots - U = o$: to ostatnie zrównanie należy do przypadku poprzedzaiącego, a zatém ma przynaymniéy ieden pierwiastek rzetelny dodatny. Aże każda wartość na $y$ poprzedzona znakiem $-$ iest wartością odiemną na $x$; przeto zrównanie dane musi mieć przynaymniéy ieden pierwiastek rzetelny odiemny, a następnie znaku różnego z wyrazem ostatnim.

*B*). *Każde zrównanie stopnia parzystego ze spółczynnikami rzetelnémi, którego termin ostatni iest odiemny, ma przynaymniéy dwa pierwiastki rzetelne, ieden dodatny a drugi odiemny.* Niech będzie zrównanie

$$x^m + Px^{m-1} \ldots\ldots - U = o:$$

tu dla podobnéy przyczyny iak w przypadku $m$ nieparzystego będzie przynaymniéy ieden pierwiastek rzetelny dodatny środkuiący między $o$ i $G$. Uczyniwszy $x = -y$, wypadnie

$$y^m - Py^{m-1} \ldots\ldots - U = o;$$

gdzie $y$ dla $m$ parzystego iest dodatne, następnie ostatni wyraz zachowa swóy znak odiemny. Musi więc bydź przynaymniéy iedna wartość na $y$ rzetelna dodatna; a ta poprzedzona znakiem $-$ będzie pierwiastkiem rzetelnym odiemnym zrównania danego.

*C*). *Jeżeli zrównanie ze spółczynnikami rzetelnémi zamyka pierwiastki uroione, liczba tych pierwiastków musi bydź koniecznie parzysta.* Wiemy że każde zrównanie iest wieloczynem z różnic między ilością nieznaną a każdym z osobna iego pierwiastkiem. Jeżeli więc wystawimy sobie zrównanie iakiekolwiek $X = o$ rozdzielone przez wieloczyn z różnic między ilością nieznaną a wszystkiemi pierwiastkami rzetelnémi; na wieloraz wypadnie mnogość z różnic między ilością nieznaną a samémi pierwiastkami uroionémi zrównania $X=o$. Funkcya stanowiąca ten wieloraz musi mieć wszystkie spółczynniki rzetelne, bo wypadek z dzielenia wyrażeń rzetelnych nie może bydź uroionym; a iéy stopień będzie oczywiście równy liczbie pierwiastków uroionych w zrównaniu $X=o$: i ieżeli tę funkcyą porównamy z zerem, otrzymamy zrównanie np. $U=o$ zamykaiące same tylko pierwiastki uroione, które będą pierwiastkami uroionémi zrównania $X=o$. Zrównanie $U=o$ musi bydź stopnia parzystego, bo inaczéy podług wniosku *A*) miałoby ieden przynaymniéy pierwiastek rzetelny, nie zaś wszystkie uroione. A skoro stopień zrównania $U=o$ iest koniecznie parzysty, przeto i wskazana przez ten stopień liczba pierwiastków uroionych zrównania $X=o$ musi bydź parzysta.

*D*). *Zrównania których wszystkie pierwiastki są uroione maią szczególną im wyłącznie służącą własność, że prowadzą zawsze do wypadku dodatnego, iakabykolwiek liczba bądź dodatna bądź odiemna była w nich podstawiona na mieyscu ilości nieznanéy.* Niech będzie zrównanie $U=o$ maiące wszystkie pierwiastki uroione. Nazwiymy naywiększy iego spółczynnik przez $K$. Ten spółczynnik powiększony iednością czyli $K+1$ podstawiony za $x$ w zrównaniu $U=o$ da wypadek dodatny, iak wiémy z nauki o granicach pierwiastków. Gdyby iakakolwiek liczba dodatna $p$ przyprowadziła do wypadku odiemnego; wtedy zrównanie $U=o$ miałoby przynaymniéy ieden pierwiastek rzetelny dodatny środkuiący między $K+1$ i $p$, co się sprzeciwia założeniu. Dla téy saméy przyczyny z podstawienia $o$ na mieyscu $x$ nie może wynikać wypadek odiemny, ale koniecznie dodatny: następnie i każda liczba odiemna musi prowadzić do wypadku dodatnego; bo inaczéy między tą liczbą i $o$ środkowałby ieden przynaymniéy pierwiastek rzetelny odiemny, kiedy podług założenia wszystkie pierwiastki zrównania $U=o$ są uroione.

V. *Wynaydowanie pierwiastków uroionych.*

Dochodzenie pierwiastków uroionych zdaie się bydź daremne; dla tego że wartości uroione nie daią odpowiedzi zagadnieniu, chociaż sprawdzaią zrównanie. Ale użycie wyrażeń uroionych iest bardzo częste w rachunku wyższym, i niekiedy prowadzi do wypadków wielkiéy wagi.

www.rcin.org.pl

Z téy przyczyny szukano reguł na odkrycie pierwiastków uroionych każdego zrównania.

Po otrzymaniu pierwiastków wymiernych mogliśmy przed szukaniem pozostałych ułatwić dalszy rachunek przez zniżenie stopnia zrównania. Osiągnienie takiéy saméy korzyści po wynalezieniu pierwiastków niewymiernych iest niepodobne; bo iak wartość pierwiastków niewymiernych iest tylko przybliżona, tak i mnożniki piérwszego stopnia uformowane z tych pierwiastków będą także przybliżone; więc dzielenie zrównania przez wieloczyn z tych mnożników nie skończy się i nie da w zupełności na wieloraz zrównania ogarniaiącego same pierwiastki uroione. Zatém pierwiastków uroionych dochodzić musimy z tego samego zrównania w iakiém szukaliśmy niewymiernych; upewniwszy się piérwéy, że rozwiązywane zrównanie zamyka pierwiastki uroione: zamyka zaś pewnie wtenczas, kiedy liczba odkrytych pierwiastków wymiernych i niewymiernych iest mnieysza niż stopień danego zrównania.

Wszystkie wyrażenia uroione a zatém i uroione pierwiastki zrównań dadzą się przywieść, iak niżéy obaczymy, do wzoru $p+q\sqrt{-1}$, gdzie $p$ i $q$ mogą bydź dodatne lub odiemne, wymierne lub niewymierne, ale koniecznie rzetelne. Wzór przeto $p+q\sqrt{-1}$ może nam wyobrażać każdy uroiony pierwiastek iakiegokolwiek zrównania. Potrzeba tylko mieć sposób na odkrycie wartości $p$ i $q$ stosownych do zrównania danego. Tym końcem w zrównanie dane

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots\ldots+Kx+L=0$$

podstawia się $p+q\sqrt{-1}$ za $x$, z czego wypadnie

$$(p+q\sqrt{-1})^m+A(p+q\sqrt{-1})^{m-1}+B(p+q\sqrt{-1})^{m-2}+\ldots$$
$$+K(p+q\sqrt{-1})+L=0;$$

tu rozwinąwszy naznaczone potęgi i nazwawszy przez $M$ zbiór wszystkich terminów rzetelnych, a przez $N\sqrt{-1}$ zbiór wszystkich uroionych, będzie $M+N\sqrt{-1}=0$. A ponieważ wyrazy uroione nie mogą niszczyć rzetelnych, więc musi bydź osobno $M=0$, $N=0$. Te dwa zrównania zamykaią w sobie dwie ilości nieznane $p$ i $q$. Używszy sposobów poprzedniczo wyłożonych, ocenimy wszystkie wartości rzetelne na $p$ i $q$. Każda wartość na $p$ z odpowiadaiącą sobie na $q$ sprawdzi oba zrównania $M=0$, $N=0$: gdy wyśledzimy wszystkie takowe układy wartości $p$ i $q$ i podstawimy ie koleią w wyrażeniu $p+q\sqrt{-1}$, otrzymamy wszystkie pierwiastki uroione zrównania danego. Jeżeli np. ieden z układów wartości na $p$ i $q$ iest $p=2$, $q=3$; będzie $2+3\sqrt{-1}$ iednym z pierwiastków uroionych zrównania danego. Podstawiwszy bowiem w daném zrównaniu $2+3\sqrt{-1}$ za $x$, otrzymamy na wypadek $M'+N'\sqrt{-1}$ gdzie $M'$ i $N'$ są tém w co się zamieniaią $M$ i $N$ kiedy w nich położone będą liczby 2 i 3 na mieyscu $p$ i $q$; lecz $M$ i $N$ nikną gdy 2 iest w mieyscu $p$ a 3 w mieyscu $q$, przeto wypadek $M'+N'\sqrt{-1}$ przywodzi się do zera, a następnie $2+3\sqrt{-1}$ iest pierwiastkiem danego zrównania.

Wartości sobie odpowiadaiące na $p$ i $q$ dochodzą się takim porządkiem. Potrzeba z dwóch zrównań $M=0$ i $N=0$ wyrzucić $q$ przez szukanie spólnego dzielnika: a przyszedłszy do dwóch reszt, ostatniéy bez $q$ którą nazwiymy $P$, i przedostatniéy którą nazwiymy $Q$, należy te reszty porównać z zerem; ze zrównania $P=0$ wynaleźć wszystkie wartości rzetelne na $p$; te wartości wkładać koleią do zrównania $Q=0$ i z niego potém szukać wartości na $q$, które będą odpowiadaiącémi podstawianym wartościom na $p$.

*Uwaga.* Jeżeli iednym z pierwiastków uroionych w zrównaniu daném iest np. $a+b\sqrt{-1}$, będzie w niém koniecznie drugi pierwiastek $a-b\sqrt{-1}$.

Żeby się o tém przekonać, podstawmy oba te wyrażenia uroione za $x$ w zrównaniu daném

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots+Kx+L=0;$$

otrzymamy dwa wypadki

$$(a+b\sqrt{-1})^m+A(a+b\sqrt{-1})^{m-1}+\ldots+K(a+b\sqrt{-1})+L,$$
$$(a-b\sqrt{-1})^m+A(a-b\sqrt{-1})^{m-1}+\ldots+K(a-b\sqrt{-1})+L.$$

Rozwinąwszy wskazane potęgi postrzeżemy, że wyrazy rzetelne w obu wypadkach będą iednakie i zgodne w znaku, a wyrazy uroione będą także iednakie ale ze znakami przeciwnémi. Jeżeli więc zbiór wyrazów rzetelnych nazwiemy przez $R$, uroionych przez $U\sqrt{-1}$; dwa poprzedzaiące wypadki wezmą postać

$$R+U\sqrt{-1},\quad R-U\sqrt{-1}.$$

Założywszy że $a+b\sqrt{-1}$ iest pierwiastkiem zrównania, wypadek $R+U\sqrt{-1}$ powinien zniknąć; co inaczéy nastąpić nie może tylko bydź musi $R=0$; $U=0$: idzie zatém że i wypadek $R-U\sqrt{-1}$ stanie się w tymże czasie zerem; a przeto wyrażenie $a-b\sqrt{-1}$, które podstawione za $x$ przywiodło do tego wypadku, musi bydź także pierwiastkiem. Podobnie ieżeli $c+d\sqrt{-1}$ iest pierwiastkiem, będzie też pierwiastkiem $c-d\sqrt{-1}$. itd.

Ztąd wypada, że każdéy wartości na $p$ wydobytéy ze zrównania $P=0$ odpowiadaią dwie wartości na $q$ sobie równe ze znakami przeciwnémi; przedostatnia więc reszta $Q$ musi bydź stopnia drugiego co do $q$ i nie zawiérać drugiego terminu.

VI. *Sposób rozeznania pierwiastków równych w zrównaniu.*

Pomiędzy pierwiastkami zrównania mogą bydź iedne drugim równe: np. zrównanie $(x-1)^2(x+1)^3=0$ czyli $x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1=0$ ma dwa gatunki pierwiastków równych; iednego gatunku iest ich dwa, drugiego trzy; każdy z piérwszych znaczy $+1$, każdy z drugich znaczy $-1$. Wyłożone prawidła nie mogą nam odkryć iak tylko ieden pierwiastek wymierny każdego gatunku. A gdyby w zrównaniu znaydowały się pierwiastki niewymierne równe, do ich wartości nawetbyśmy przyyśdź nie zawsze potrafili; bo wtedy ilość mnieysza od naymnieyszéy z różnic między pierwiastkami nazwana od nas przez $\delta$ byłaby zerem. Dla tego podamy teraz sposób na rozpoznanie, czyli pomiędzy pierwiastkami danego zrównania są niektóre równe, wiele ich w każdym gatunku, i iaką maią wartość?

Przypomniymy sobie (III. teraźn. §*f*), że gdy w zrównaniu

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+Rx^{m-3}+\text{ itd }+Tx+U=0$$

maiącém $a, b, c, d\ldots$ za swoie pierwiastki, podstawimy $a+y$ za $x$, wypadną dwa zrównania

$$a^m+Pa^{m-1}+Qa^{m-2}+Ra^{m-3}+\text{ itd }+Ta+U=0,$$

www.rcin.org.pl

$$\left.\begin{array}{l} ma^{m-1}+\dfrac{m(m-1)}{1.\ 2}a^{m-2} \\ +(m-1)Pa^{m-2}+\dfrac{(m-1)(m-2)}{1.\ 2}Pa^{m-3} \\ +(m-2)Qa^{m-3}+\dfrac{(m-2)(m-3)}{1.\ 2}Qa^{m-4} \\ +(m-3)Ra^{m-4}+\dfrac{(m-3)(m-4)}{1.\ 2}Ra^{m-5} \end{array}\right| \begin{array}{l} y+\ldots+y^{m-1}=0; \\ +\ldots \\ +\ldots \\ +\ldots \end{array}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . .

$+T$

piérwsze z nich wystawimy dla krótkości przez $V=0$, drugie przez

$$A+\frac{B}{1.\ 2}y+\frac{C}{1.\ 2.\ 3}y^2+\ldots+y \quad =0\ \ldots\ldots (S)$$

uczyniwszy

$$ma^{m-1}+(m-1)Pa^{m-2}+(m-2)Qa^{m-3}+\ldots\ldots+T=A$$
$$m(m-1)a^{m-2}+(m-1)(m-2)Pa^{m-3}+\ldots\ldots\ldots\ldots=B$$

itd.

W zrównaniu $V=0$ wszystkie wyrazy powinny się zniszczyć nawzaiem, dla tego że $V$ iest zupełnie podobne do zrównania danego tylko w mieyscu $x$ ma $a$ toiest iednę z wartości na $x$. Wartości na $y$ w zrównaniu ( $S$ ) są $y=b-a$, $y=c-a$, $y=d-a$, . . .

Jeżeli zrównanie dane ma dwa pierwiastki równe, np. ieżeli $a=b$; iedna z wartości na $y$ stanie się zerem: potrzeba więc aby zrównanie ($S$) było sprawdzone czyniąc w niém $y=0$. A ponieważ założenie $y=0$ znosi wszystkie terminy prócz $A$; ten więc ostatni powinien zginąć sam przez się. Gdy zatém zrównanie dane ma dwa pierwiastki równe $a$; wtedy $a$ powinno przywieść do zera nie tylko wyrażenie $V$ ale i $A$, czyli powinno uczynić zadosyć dwóm zrównaniom

$$V=0,\quad A=0.$$

Natenczas zrównanie ( $S$ ) straciwszy wyraz $A$ zamieni się po rozdzieleniu przez $y$ na

$$\frac{B}{1.\ 2}+\frac{C}{1.\ 2.\ 3}y+\ldots+y^{m-2}=0,$$

www.rcin.org.pl

i będzie miało za swoie pierwiastki $y=c-a$, $y=d-a$, . . Jeżeliby w danêm zrównaniu były trzy pierwiastki równe, np. $a=b=c$; wtedy ieden pierwiastek $c-a$ zrównania ostatniego stałby się zerem, a następnie musiałoby bydź $B=o$. W tym więc przypadku $a$ powinno przywieść do zera trzy wyrażenia $V$, $A$, i $B$, czyli uczynić zadosyć trzem zrównaniom

$$V=o,\quad A=o,\quad B=o.$$

Idąc ciągle za têmi rozumowaniami przekonamy się, że gdy zrównanie dane ma cztéry pierwiastki równe $a$, muszą bydź w zrównaniu $(S)$ trzy wartości na $y$ równe zero: przeto $a$ musi sprawdzić razem cztéry zrównania

$$V=o,\quad A=o,\quad B=o,\quad C=o.$$

*Przykład.* Niech będzie zrównanie $x^3-5x^2+8x-4=o$, którego iednym pierwiastkiem iest 2. Zeby się dowiedzieć czy to zrównanie ma więcéy pierwiastków równych 2, podstawiam $2+y$ za $x$; wypadnie

$$\begin{array}{l|l|l}
2^3+3.2^2 & y+3.2 & y^2+y^3=o. \\
-5.2^2-2.5.2 & -5 & \\
+8.2+8 & & \\
-4 & &
\end{array}$$

To, cośmy nazwali $V$, iest w teraźnieyszym przykładzie $2^3-5.2^2+8.2-4$; wyrażeniu $A$ odpowiada $3.2^2-2.5.2+8$; $\frac{B}{1.2}$ znaczy $3.2-5$, a samo $B$ znaczy $2.3.2-2.5$. Musi bydź zawsze $V$ równêm zero, bo iest wypadkiem z podstawienia iednego pierwiastku za $x$ w zrównaniu danêm: iakoż $2^3-5.2^2+8.2-4$ czyli $8-20+16-4=o$. W tym przykładzie ginie także $A$; gdyż $3.2^2-2.5.2+8$ czyli $12-20+8=o$. Lecz $B$ nie iest zerem i zamienia się po uproszczeniu na 2. Dane przeto zrównanie ma dwa pierwiastki równe liczbie 2.

Nie tylko można tym sposobem upewnić się czy pierwiastek znany $a$ ma kilka sobie równych w zrównaniu podanêm; lecz nawet wpadamy ztąd na drogę dochodzenia czyli to zrównanie ma pierwiastki równe, których wartość iest niewiadoma. Na ten koniec uważmy, że w przypadku kiedy $A=o$ czyli

$$ma^{m-1}+(m-1)Pa^{m-2}+(m-2)Qa^{m-3}+\ .\ .\ .\ .+T=o,$$

www.rcin.org.pl

liczba $a$ iest pierwiastkiem zrównania
$$mx^{m-1}+(m-1)Px^{m-2}+(m-2)Qx^{m-3}+\ .\ .\ +T=0\ .\ .\ (1):$$
podobnie kiedy $B=0$, $C=0$, itd; liczba $a$ iest pierwiastkiem zrównań
$$m(m-1)x^{m-2}+(m-1)(m-2)Px^{m-3}+\ .\ .=0\ .\ .\ .\ (2)$$
$$m(m-1)(m-2)x^{m-3}+(m-1)(m-2)(m-3)Px^{m-4}+\ldots=0\ldots(3)$$
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Ztąd wypada że gdy w zrównaniu danem, które dla skrócenia wyraźmy przez $X=0$, są dwa pierwiastki równe liczbie $a$, ta liczba będzie pierwiastkiem spólnym dwóch zrównań $X=0$ i (1); czyli zrównania $X=0$ i (1) będą miały w swoim składzie mnożnik spólny $x-a$. Dwuwyraz $x-a$ będzie mnożnikiem spólnym trzech zrównań $X=0$, (1), (2), albo cztérech $X=0$, (1), (2), (3), albo itd; ieżeli w zrównaniu danem są trzy pierwiastki równe $a$, albo cztéry, albo itd. Cośmy dopiéro powiedzieli o pierwiastku $a$, stosuie się równie do każdego innego, któryby był kilkakrotnie między pierwiastkami danego zrównania powtórzony. Jdzie zatém, że szukaiąc dzielników spólnych zrównaniom
$$X=0,\quad (1),\quad (2),\quad (3),\quad \text{itd},$$
odkryiemy pierwiastki równe zrównania danego następuiącym porządkiem:

Dzielniki spólne dwóm tylko pierwszym zrównaniom są mnożnikami dwukrotnémi zrównania danego; toiest gdybyśmy na dzielnik spólny między $X=0$ i (1) znaleźli wyrażenie np. $(x-\alpha)(x-\beta)$, ilość nieznana miałaby dwie wartości równe $\alpha$ i dwie równe $\beta$, czyli dane zrównanie miałoby między swoiemi mnożnikami te cztéry
$x-\alpha$, $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\beta$, albo co iedno iest te dwa $(x-\alpha)^2$, $(x-\beta)^2$.
Dzielniki, które są razem spólne trzem piérwszym zrównaniom, pokazuią mnożniki trzykrotne zrównania danego: toiest ieżeli np. $(x-\alpha)(x-\beta)$ iest spólnym dzielnikiem dla $X=0$, (1) i (2); zrównanie dane będzie miało trzy pierwiastki równe $\alpha$ i trzy równe $\beta$, czyli będzie miało w swoim składzie mnożniki $(x-\alpha)^3$, $(x-\beta)^3$. Łatwo iuż byłoby te uwagi i daléy rościągnąć.

Zastanowiwszy się nad postacią zrównań (1), (2), (3), itd, postrzeżemy, że zrównanie (1) czyli

www.rcin.org.pl

$$mx^{m-1}+(m-1)Px^{m-2}+(m-2)Qx^{m-3}+ \text{itd} + T=0$$

może bydź wyprowadzone ze zrównania danego

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+Rx^{m-3}+ \text{itd} + Tx+U=0,$$

mnożąc każdy termin tego ostatniego przez wykładnik ilości $x$ w tymże terminie i razem pomnieyszaiąc wykładnik o iedność: w czém uważać należy, że ponieważ termin $U$ znaczy iedno co $Ux^0$, musi więc zginąć w tém działaniu, gdyż potrzebaby go mnożyć przez zero. Jak (1) wypada z $X=0$, takim samym sposobem otrzymuie się (2) z (1), (3) z (2), itd.

Zeby to wszystko obiaśnić przykładem, weźmy zrównanie

$$x^5-13x^4+67x^3-171x^2+216x-108=0.$$

Zrównanie (1) będzie w tym przypadku

$$5x^4-52x^3+201x^2-342x+216=0:$$

iego dzielnik spólny ze zrównaniem daném iest

$$x^3-8x^2+21x-18 \;.\;.\;.\;.\;.\; (^*).$$

Ten dzielnik będąc stopnia trzeciego zawiéra trzy mnożniki stopnia pierwszego; potrzeba śledzić czy iaki z nich nie wchodzi do składu zrównania (2), toiest do

$$20x^3-156x^2+402x-342=0 \;.\;.\;.\;.\;.\; (^{**}).$$

Szukaiąc spólnego dzielnika między (*) i (**) znaydziemy że nim iest $x-3$. Zatém $x-3$ iest spólnym dzielnikiem dla zrównania danego dla (1) i dla (2); trzy więc są wartości $x=3$, a przeto zrównanie dane zawiéra w liczbie swoich mnożników $(x-3)^3$. Dzieląc (*) przez $x-3$ tyle razy ile można toiest dwa, ostatni wieloraz będzie $x-2$. Ztąd dzielnik (*) zamyka mnożniki $(x-2)(x-3)(x-3)$: z których $x-2$ iest tylko dzielnikiem spólnym między zrównaniem danèm i (1); a przeto dwa są pierwiastki równe 2, czyli zrównanie dane ma w liczbie swoich mnożników $(x-2)^2$. Łatwo się nareszcie przekonać, że dane zrównanie znaczy iedno co $(x-2)^2(x-3)^3$.

*Uwaga.* Maiąc rozwiązywać iakiekolwiek zrównanie liczebne, potrzeba w niém naprzód wyśledzić i ocenić pierwiastki równe sposobem dopiéro wyłożonym: rozdzielić potém dane zrównanie przez wieloczyn z mnożników stopnia pierwszego odpowiadaiących wszystkim tak odkrytym pierwiastkom; wieloraz porównać z zerem, i w zrównaniu ztąd



www.rcin.org.pl

otrzymaném dochodzić wartości pierwiastków nierównych wymiernych, niewymiernych i uroionych.

## § 6. *O Ułamkach ciągłych.*

Dla dopełnienia nauki o rozwiązaniu zrównań liczebnych należy nam ieszcze poznać, iak po otrzymaniu części całkiéy pierwiastków niewymiernych, ocenić ich część ułamkową z zamierzonym stopniem przybliżenia. Do tego celu doprowadzi nas użycie *ułamków ciągłych* (fractions continues), których znaczenie i własności teraz wyłożymy.

I. *Zkąd pochodzą ułamki ciągłe i iak się tworzą?*

Ułamkiem ciągłym nazywamy ten, którego mianownik składa się z całości i ułamku maiącego mianownik złożony znowu z całości i ułamku, itd. np.

$$\cfrac{a}{b+\cfrac{c}{d+\cfrac{f}{g+\text{itd.}}}}$$

Na takie ułamki trafiamy wtenczas, kiedy chcemy stopniami przybliżać się do ścisłego ocenienia ilości, których przez liczby całkie wyrazić nie można, toiest ilości ułamkowych i niewymiernych.

Niech będzie ilość $\alpha$ ułamkowa lub niewymierna, którą potrzeba ocenić. Naturalnie iest zacząć naprzód od wynalezienia całości naybliżéy przystępuiącéy swoią wartością do $\alpha$. Niech ta całość będzie $a$; zatém $\alpha-a<1$, następnie $\frac{1}{\alpha-a}>1$. Nazwiymy $\frac{1}{\alpha-a}=\beta$: ponieważ $\beta$ iest większe od iedności, więc możemy znowu szukać liczby całkiéy naybliższéy $\beta$; daymy że taką iest $b$: przeto $\beta-b<1$, a zaś $\frac{1}{\beta-b}>1$. Położywszy $\frac{1}{\beta-b}=\gamma$, i szukaiąc liczby całkiéy naybliższéy $\gamma$, którą niech znaczy $c$; będziemy mieli $\gamma-c<1$, $\frac{1}{\gamma-c}>1$. Nazwawszy $\frac{1}{\gamma-c}=\delta$, można będzie

www.rcin.org.pl

potém szukać liczby całéy $d$ naybliższéy $\delta$, itd. Ponieważ $\frac{1}{\alpha-a}=\beta$, $\frac{1}{\beta-b}=\gamma$, $\frac{1}{\gamma-c}=\delta$, itd; przeto $\alpha-a=\frac{1}{\beta}$, $\beta-b=\frac{1}{\gamma}$, $\gamma-c=\frac{1}{\delta}$, itd; ztąd $\alpha=a+\frac{1}{\beta}$, $\beta=b+\frac{1}{\gamma}$, $\gamma=c+\frac{1}{\delta}$, itd: podstawuiąc następnie te wartości, będziemy mieli

$$\alpha=a+\frac{1}{\beta}=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{\gamma}}=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{\delta}}}=\text{itd};$$

Gdybyśmy zaniedbali całkiem $\frac{1}{\beta}$, która iest różnicą między $\alpha$ i $a$, byłoby $\alpha=a$; tym sposobem mielibyśmy piérwszą wartość $\alpha$ naymniéy dokładną. Jeżeli zaś nie zaniedbamy zupełnie $\frac{1}{\beta}$, lecz wziąwszy na iéy mieyscu $\frac{1}{b}$ opuścimy $\frac{1}{\gamma}$, która iest różnicą między $\beta$ i $b$, będziemy mieli wartość bliższą $\alpha=a+\frac{1}{b}$. A ieżeli nawet nie całkiem opuścimy $\frac{1}{\gamma}$, lecz weźmiemy na iéy mieyscu $\frac{1}{c}$ zaniedbuiąc tylko $\frac{1}{\delta}$ która iest różnicą między $\gamma$ i $c$, otrzymamy ieszcze bliższą wartość $\alpha=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}$; itd.

Łatwo ztąd widzimy, że ułamek ciągły zamyka w sobie różne stopnie coraz większego zbliżenia do prawdziwéy wartości $\alpha$: i gdybyśmy daléy przedłużali ułamek, przyszlibyśmy albo do zupełnego wyczerpania $\alpha$, albo tak blizko przystąpili do wartości dokładnéy, że różnica byłaby mnieyszą od wszelkiéy wielkości naznaczyć się mogącéy. O czém z późnieyszych rozumowań ieszcze się oczywiściéy przekonamy.

*Przykłady.* Daymy Iód że $\alpha$ iest ułamkiem, i niech np. $\alpha = \frac{157}{68}$. Całością naybliższą tego ułamku iest liczba 2, która się otrzymuie dzieląc licznik przez mianownik; więc $a=2$. Ztąd $\alpha - a$ czyli $\frac{1}{\beta} = \frac{157}{68} - 2 = \frac{157-136}{68} = \frac{21}{68}$; a następnie $\beta = \frac{68}{21}$. Całość naybliższa ułamku $\frac{68}{21}$ wynikła z podzielenia licznika mianownikiem iest 3; przeto $b=3$, $\beta - b$ czyli $\frac{1}{\gamma} = \frac{68}{21} - 3 = \frac{68-63}{21} = \frac{5}{21}$; zatém $\gamma = \frac{21}{5}$. Ztąd $c=4$, $\gamma - c$ czyli $\frac{1}{\delta} = \frac{21}{5} - 4 = \frac{21-20}{5} = \frac{1}{5}$; $\delta = 5$, $d=5$.

Podłożywszy w ułamku ciągłym za $a$, $b$, $c$, $d$, liczby stosowne do wziętego przykładu, będzie

$$\frac{157}{68} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5}}}.$$

Droga, iakąśmy teraz przyszli do odkrycia liczb całkich 2, 3, 4, 5 składaiących wyrażenie ułamku ciągłego, może się zamknąć w następném prawidle.

*Maiąc ułamek pospolity rozwinąć na ciągły, potrzeba rozdzielić licznik przez mianownik, potém mianownik przez otrzymaną resztę, daléy resztę piérwszą przez resztę drugą, i tak póty postępować póki nie przyydziemy do reszty zero. Musi zaś koniecznie w ciągu rachunku wypaśdź reszta zero; gdyż reszty są tu liczbami całkiemi, i coraz się zmnieyszaią. Piérwszy wieloraz będzie całością poprzedzaiącą ułamek ciągły, a dalsze będą mianownikami w tym ułamku: wtzystkie zaś liczniki są, iak widzimy, zawsze iednością.* Jeżeliby w danym ułamku licznik był mnieyszy od mianownika, wtedy dzieląc licznik przez mianownik otrzymalibyśmy na piérwszy całki wieloraz zero: mnogość z tego wielorazu przez dzielącą czyli mianownik równałaby się zero, a następnie piérwsza reszta wypadaiąca z odciągnienia mnogości od podzielnéy czyli od licznika byłaby samym licznikiem. W takim więc przypadku, nie szukaiąc piérwszego wielorazu który iest zerem, należy zacząć rachunek od wy-

www.rcin.org.pl

naydowania wielorazu drugiego, dzieląc mianownik przez piérwszą resztę czyli przez licznik ułamku danego; potém wypada tę piérwszą resztę dzielić przez drugą, itd. Znalezione wielorazy będą mianownikami w ułamku ciągłym, którego żadna już całość nie poprzedzi. Podane teraz prawidło do rozwiiania ułamków pospolitych na ciągłe wypływa także bardzo prostym sposobem z téy własności ułamku, że iego wartość nie ulega odmianie kiedy licznik i mianownik będzie rozdzielony przez iednęż liczbę. Bo na mocy téy własności ułamek np. $\frac{5}{7}=\frac{5:5}{7:5}=\frac{1}{1+\frac{2}{5}}$, a znowu $\frac{2}{5}=\frac{2:2}{5:2}=\frac{1}{2+\frac{1}{2}}$; następnie $\frac{5}{7}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}$. Łatwo widzimy że mianowniki 1, 2, 2 tu są otrzymane przez też same dzielenia iakie powyższa reguła wskazuie. Można podobnież na ułamek ciągły rozebrać i ułamki dziesiątne dawszy im piérwéy postać zwyczaynych.

Niech 2re $\alpha$ będzie ilością niewymierna, i daymy że np. $\alpha=\sqrt[3]{2}$ czyli

$$\alpha^3=2 \ldots\ldots (1).$$

Całością nayblizszą $\alpha$ otrzymaną przez wyciąganie pierwiastku iest iedność, więc $a=1$. Ponieważ $\alpha-a=\frac{1}{\beta}$ czyli $\alpha=a+\frac{1}{\beta}$, przeto w teraźnieyszym przkładzie $\alpha=1+\frac{1}{\beta}$. Podstawiwszy za $\alpha$ to wyrażenie w zrównaniu (1), przyydziemy do

$$\beta^3-3\beta^2-3\beta-1=0 \ldots\ldots (2).$$

Rozwiązuiąc to liczebne zrównanie, znaydziemy że wartość całka nayblizsza $\beta$ iest 3, zatém $b=3$. Aże $\beta-b=\frac{1}{\gamma}$ czyli $\beta=b+\frac{1}{\gamma}$, więc teraz $\beta=3+\frac{1}{\gamma}$. Włożywszy za $\beta$ to wyrażenie w zrównaniu (2), otrzymamy

$$\gamma^3 - \tfrac{3}{5}\gamma^2 - \tfrac{3}{5}\gamma - \tfrac{1}{10} = 0 \; . \; . \; . \; . \; (3);$$

zkąd na wartość całką naybliższą $\gamma$ wypada 1; przeto $c = 1$. Dla znalezienia $d$ należy, iak łatwo iuż widzimy, w zrównaniu (3) za $\gamma$ podstawić $1 + \frac{1}{\delta}$ i ze zrównania ztąd wynikaiącego szukać liczby całkiéy naybliższéy $\delta$. Podług otrzymanych wartości na $a$, $b$, $c$, będzie $\sqrt[3]{2} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \text{itd.}}}$. Ułamki ciągłe pochodzące z liczb niewymiernych nigdy się nie kończą. Z teraźnieyszego przykładu widoczne iest prawidło maiące przewodniczyć rozwiianiu każdéy liczby niewymiernéy na ułamek ciągły. Można także liczbę niewymierną naprzód przez wyciąganie pierwiastku przybliżonego wyrazić w ułamku dziesiątnym i ten potém na ciągły przerobić.

*Uwaga względem znaków.* Według naszego przypuszczenia $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, . . . są liczbami całkiemi naybliższémi $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$, . . Takowe liczby naybliższe są, albo te które bezśrednie następuią po wartości prawdziwéy i są od niéy większe, albo te które tuż poprzedzaią wartość prawdziwą i są od niéy mnieysze. np. ułamek $\frac{11}{4}$ ma naybliższą wartość całką mnieyszą 2, większą 3; liczby niewymiernéy $\sqrt{20}$ naybliższa wartość całka mnieysza iest 4, większa 5. Jeżeli $a$, $b$, $c$, $d$ . . . są poprzedzaiące i mnieysze od prawdziwych $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, . . . . ; reszty pozostałe $\alpha - a$, $\beta - b$, $\gamma - c$ . . . . są dodatne, a następnie $\frac{1}{\alpha - a}$, $\frac{1}{\beta - b}$, $\frac{1}{\gamma - c}$, . . . czyli $\beta$, $\gamma$, $\delta$, . . . są dodatne i wartości ich naybliższe całkie $b$, $c$, $d$ . . są także dodatne. Jeżeli zaś wartości blizkie są większe od prawdziwych, toiest $a > \alpha$, $b > \beta$, $c > \gamma$, $d > \delta$, . . ; natenczas reszta $\alpha - a$ a zatém i ilość $\frac{1}{\alpha - a}$ czyli $\beta$ iest odiemna: skoro $\beta$ iest odiemne, musi bydź odiemne $b$, gdyż iest iednego znaku z i-

www.rcin.org.pl

łością $\beta$ iako nayblizsza iéy wartość; różnica $\beta - b$ w teraźnieyszym przypadku bierze postać $-\beta-(-b)$ czyli $-\beta+b$ i iest ilością dodatną dla tego że podług przypuszczenia $b > \beta$, więc i ułamek $\frac{1}{\beta - b}$ który teraz ma kształt $\frac{1}{-\beta+b}$ iest dodatny, toiest $\gamma$ a następnie i $c$ iest dodatne: gdy $\gamma$ i $c$ są dodatne, a $c > \gamma$; będzie $\frac{1}{\gamma - c}$ czyli $\delta$ odiemne; ztąd $d$ będzie także odiemne. To pokazuie, że kiedy za nayblizsze całkie wartości weźmiemy liczby mnieysze od prawdziwych; te liczby będą wszystkie dodatne: ieżeli zaś większe; wtenczas ich znaki póydą naprzemian. Gdyby niektóre z liczb $a, b, c, d$ . . . były większe od wartości prawdziwych $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, . . . . a niektóre mnieysze; żadnegobyśmy stałego prawa w znakach nie mieli. Odtąd uważać będziemy liczby $a, b, c, d$ . . . za mnieysze od ścisłych wartości, a tém samém za dodatne.

II. *Zamiana ułamków ciągłych na pospolite.*

Niech będzie ułamek ciągły

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\text{itd.}}}}}$$

Rozbieram go na części wystawuiące ten ułamek coraz daléy stopniami przedłużany: takowe części będą

$$a;\quad a+\frac{1}{b};\quad a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}};\quad a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}};\ \text{itd:}$$

każdą z tych części przerabiaymy na ułamek pospolity. Otrzymamy z części piérwszéy $\frac{a}{1}$, toiest

$$a = \frac{a}{1};$$

z drugiéy $\frac{ab+1}{b}$, toiest

$$a+\frac{1}{b}=\frac{ab+1}{b}.$$

Żeby zamienić część trzecią na ułamek pospolity, dosyć iest w ostatniém zrównaniu zamiast $b$ położyć $b+\frac{1}{c}$; strona piérwsza zamieni się na część następną ułamku ciągłego, a druga na $\frac{a(b+\frac{1}{c})+1}{b+\frac{1}{c}}$ czyli na $\frac{a(cb+1)+c}{bc+1}$ albo ieszcze na $\frac{abc+c+a}{bc+1}$; przeto

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}=\frac{abc+c+a}{bc+1}.$$

W otrzymaném dopiéro zrównaniu wziąwszy $c+\frac{1}{d}$ za $c$, znaydziemy

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}=\frac{abcd+cd+ad+ab+1}{bcd+d+b};$$

tu znowu zamiast $d$ położywszy $d+\frac{1}{e}$, przyszlibyśmy do pospolitego ułamku na który się zamienia część następna ułamku ciągłego; itd.

Przypatruiąc się składowi tych kilku ułamków pospolitych, równych coraz dłuższemu ułamkowi ciągłemu, postrzegamy, że *każdy licznik równa się poprzedzaiącemu rozmnożonemu przez mianownik przybyły do ułamku ciągłego i powiększonemu drugim licznikiem poprzedzaiącym: i że każdy mianownik powstaie tym samym sposobem z dwóch poprzedzaiących mianowników.* Będziemy pewni, że to prawo rościąga się na wszystkie dalsze ułamki pospolite, ieżeli się okaże, iż skoro iest zachowane w trzech sobie przyległych a iakkolwiek od początku oddalonych, mu-

www.rcin.org.pl

si też służyć i bezśrednie po nich następuiącemu. Niech będą trzy idące po sobie ułamki $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$, $\frac{R}{R'}$, z których ostatni daymy że iest równy części ułamku ciągłego kończącéy się mianownikiem $r$. Załóżmy iż między témi trzema ułamkami zachodzi taki sam związek, iakiśmy dostrzegli w kilku ułamkach początkowych, toiest że $\frac{R}{R'} = \frac{Qr+P}{Q'r+P'}$. Aby otrzymać ułamek pospolity $\frac{S}{S'}$ równy części następnéy ułamku ciągłego przedłużonego o $\frac{1}{s}$, dosyć iak wiémy w wyrażeniu $\frac{Qr+P}{Q'r+P'}$ za $r$ położyć $r+\frac{1}{s}$; znaydziemy

$$\frac{S}{S'}=\frac{Q(r+\frac{1}{s})+P}{Q'(r+\frac{1}{s})+P'}=\frac{(Qr+P)s+Q}{(Q'r+P')s+Q'}=\frac{Rs+Q}{R's+Q'},$$

wypadek utwierdzaiący ogólność prawa.

Nazwawszy przeto licznik piérwszego ułamku pospolitego przez $A$, drugiego przez $B$; dalszych przez $C$, $D$, $E$,.., a należące do nich mianowniki przez $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, $E'$,..; będziemy mieli pomiędzy niémi zrównania

$$\left.\begin{array}{l} A=a \\ B=Ab+1 \\ C=Bc+A \\ D=Cd+B \\ E=De+C \\ \quad\text{itd.} \end{array}\right| \ldots (T), \qquad \left.\begin{array}{l} A'=1 \\ B'=b \\ C'=B'c+A' \\ D'=C'd+B' \\ E'=D'e+C' \\ \quad\text{itd.} \end{array}\right| \ldots\ldots (U),$$

z których łatwo wyciągnąć ułamki pospolite równaiące się coraz dłuższym częściom iakiegokolwiek ułamku ciągłego danego. Na ten koniec trzeba ułamek dany porównać z ułamkiem $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\text{itd}}}$; ztąd poznamy, iakie liczby odpowiadaią ilościom $a$, $b$, $c$, . . . .; te liczby podstawiwszy w zrównaniach $(T)$ i $(U)$ wynaydziemy wartości na $A$, $A'$, $B$, $B'$, . . . stosowne do ułamku danego. *Przykład.* Niech będzie ułamek $2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}}$; tu $a=2$, $b=3$, $c=4$, $d=5$.

Więc $A=2$, $A'=1$; $B=7$, $B'=3$; $C=30$, $C'=13$; $D=157$, $D'=68$. Następnie ułamki pospolite równe coraz dłuższym częściom wziętego za przykład ułamku ciągłego będą $\frac{2}{1}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{30}{13}$, $\frac{157}{68}$.

III. *Własności ułamków ciągłych.*

*A*). Obie strony drugiego ze zrównań $(T)$ rozdzieliwszy przez $A$, trzeciego przez $B$, czwartego przez $C$, itd; i podobnież obie strony drugiego ze zrównań $(U)$ rozdzieliwszy przez $A'$, trzeciego przez $B'$, itd; otrzymamy

$$\frac{B}{A}=b+\frac{1}{A} \qquad \frac{B'}{A'}=b$$
$$\frac{C}{B}=c+\frac{A}{B} \qquad \frac{C'}{B'}=c+\frac{A'}{B'}$$
$$\frac{D}{C}=d+\frac{B}{C} \qquad \frac{D'}{C'}=d+\frac{B'}{C'}$$
$$\frac{E}{D}=e+\frac{C}{D} \qquad \frac{E'}{D'}=e+\frac{C'}{D'}$$

itd. itd.

W tych zrównaniach drugie strony są większe od iedności; więc strony piérwsze są ułamkami niewłaściwémi, toiest w nich $B>A$, $C>B$, $D>C$, . . . , $B'>A'$, $C'>B'$, . . . . . . Ztąd się uczymy że *liczniki i mianowniki idących po sobie ułamków pospolitych* $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$ ... *są coraz większe.* Dwa tylko piérwsze mianowniki $A'$ i $B'$ mogą bydź równe, a to wtenczas kiedy $b$ iest iednością.

*B*). Z ułamków $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$, .. weźmy trzy którekolwiek sobie przyległe np. $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$, $\frac{R}{R'}$ i odciągniymy piérwszy z nich od drugiego, a drugi od trzeciego: pamiętaiąc że $R=Qr+P$, $R'=Q'r+P'$, znaydziemy

$$\frac{Q}{Q'}-\frac{P}{P'}=\frac{QP'-Q'P}{P'Q'},$$

$$\frac{R}{R'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{RQ'-R'Q}{Q'R'}=\frac{(Qr+P)Q'-(Q'r+P')Q}{Q'R'}$$
$$=\frac{Q'P-QP'}{Q'R'}.$$

Tu widzimy że licznik różnicy $\frac{R}{R'}-\frac{Q}{Q'}$ iest równy wziętemu z przeciwnym znakiem licznikowi różnicy $\frac{Q}{Q'}-\frac{P}{P'}$. Z czego wniesiemy ogólnie że *gdy każdy z ułamków* $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}'}$, $\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{B}'}$, $\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{C}'}$, . . . *odciągać będziemy od bezśrednie następuiącego; liczniki dwóch różnic przyległych będą równe lecz z odmiennym znakiem. Mianownikiem każdéy różnicy będzie oczywiście wieloczyn z mianowników tych ułamków z których różnica pochodzi.* Znalazłszy przeto licznik piérwszéy różnicy $\frac{B}{B'}-\frac{A}{A'}$ będziemy tém samém mieli liczniki wszystkich różnic dalszych: ponieważ zaś $\frac{B}{B'}-\frac{A}{A'}=\frac{A'B-B'A}{A'B'}$, a na mocy zrównań $(T)$ i $(U)$ $A'B-B'A=ab+1-ab=1$; więc $\frac{B}{B'}-\frac{A}{A'}=\frac{1}{A'B'}$; zatém licznik piérwszéy różnicy iest *iedność*. Następnie licznik drugiéy różnicy będzie $-1$, trzeciéy $1$, czwartéy $-1$, itd; ztąd wypada że

www.rcin.org.pl

$$\left.\begin{aligned}\frac{B}{B'}-\frac{A}{A'}&=\frac{1}{A'B'}\\ \frac{C}{C'}-\frac{B}{B'}&=\frac{-1}{B'C'}\\ \frac{D}{D'}-\frac{C}{C'}&=\frac{1}{C'D'}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (W).$$

itd.

Te zrównania pokazuią, że *w szeregu ułamków pospolitych* $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$, .... *im dwa którekolwiek przyległe są odległeysze od początku, tém ich różnica iest mnieysza*; *dowiedliśmy bowiem że mianowniki* A′, B′, C′, ... *są coraz większe.*

*C*). Uwolniwszy zrównania (*W*) od mianowników otrzymamy

$$\left.\begin{aligned}A'B-B'A&=1\\ B'C-C'B&=-1\\ C'D-D'C&=1\\ D'E-E'D&=-1\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (X).$$

itd.

Ztąd wypada, że *ułamki pospolite* $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$ ... *są w nayprostszém swoiém wyrażeniu*, toiest żaden licznik nie ma spólnego mnożnika ze swoim mianownikiem. Bo gdyby np. $A$ i $A'$ miały spólny iakikolwiek mnożnik $m$, wtedy piérwsza strona w piérwszém zrównaniu dałaby się rozdzielić przez $m$; zatém druga musiałaby bydź nie iednością ale liczbą także przez $m$ rozdzielną.

*D*). Okażemy teraz, że ułamki $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$, itd, są naprzemian, iedne mnieysze, drugie większe niż prawdziwa wartość ilości $\alpha$. Na ten koniec przypomniymy sobie, że

$$\alpha=a+\frac{1}{\beta}=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{\gamma}}=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{\delta}}}=$$

www.rcin.org.pl

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{\varepsilon}}}} = \text{itd.}$$

Każdy z tych ułamków ciągłych wyraża zupełną wartość $\alpha$. Piérwszy z nich to samo znaczy co $\frac{A}{A'}+\frac{1}{\beta}$ czyli $\frac{A\beta+A'}{A'\beta}$ czyli ieszcze $\frac{A\beta+1}{A'\beta}$, gdyż $A'=1$ podług zrównań ($U$); przeto

$$\alpha=\frac{A\beta+1}{A'\beta} \quad \ldots\ldots (1).$$

Drugi ułamek ciągły różni się od $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}$ tém iż ma $\gamma$ na mieyscu $c$; gdy więc $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}=\frac{Bc+A}{B'c+A'}$, będzie

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{\gamma}}=\frac{B\gamma+A}{B'\gamma+A'},$$ toiest

$$\alpha=\frac{B\gamma+A}{B'\gamma+A'} \quad \ldots (2).$$

Łatwo iuż widzimy, że trzeci ułamek ciągły da się wystawić przez $\frac{C\delta+B}{C'\delta+B'}$, czwarty przez $\frac{D\varepsilon+C}{D'\varepsilon+C'}$, itd; zatém

$$\alpha=\frac{C\delta+B}{C'\delta+B'} \quad \ldots (3)$$

$$\alpha=\frac{D\varepsilon+C}{D'\varepsilon+C'} \quad \ldots (4)$$

itd.

W zrównaniach (1), (2), (3), (4), itd, dzieląc licznik przez mianownik i pamiętaiąc na zrównania ( $X$ ) przyydziemy do

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=\dfrac{A}{A'}+\dfrac{1}{A'\beta}\\ \alpha=\dfrac{B}{B'}-\dfrac{1}{B'(B'\gamma+A')}\\ \alpha=\dfrac{C}{C'}+\dfrac{1}{C'(C'\delta+B')}\\ \alpha=\dfrac{D}{D'}-\dfrac{1}{D'(D'\epsilon+C')}\end{array}\right\}\quad\ldots\ldots\ (Y).$$

itd.

Te zrównania pokazuią oczywiście że ułamki $\frac{A}{A'}$, $\frac{C}{C'}$, . . . są mnieysze, a ułamki $\frac{B}{B'}$, $\frac{D}{D'}$, . . . są większe od prawdziwéy wartości $\alpha$.

*E*). Ztąd wypada, że wartość ilości $\alpha$ środkuie między każdémi dwoma przyległémi z ułamków $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$, itd; zatém różnica między $\alpha$ a iakimkolwiek ułamkiem iest mnieysza od różnicy między tymże ułamkiem a ułamkiem który bezśrednie po nim następuie. Lecz podług zrównań (*W*) różnice między ułamkami przyległémi coraz dalszémi są coraz mnieysze, więc też różnica między $\alpha$ i iakimkolwiek ułamkiem pospolitym tém iest mnieysza im ten ułamek iest dalszy, czyli im dłuższemu ułamkowi ciągłemu iest równy. Przeto w szeregu ułamków pospolitych $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$, itd, mamy różne stopnie przybliżenia do wartości dokładnéy $\alpha$: każdy z tych ułamków wyrażony iest coraz większémi liczbami, ale bliżéy przystępuie do ścisłéy wartości $\alpha$ niż te które go poprzedzaią. J podług potrzeby możemy brać za $\alpha$ albo ułamki prostsze co do wyrażenia, albo zawiklejsze a daiące ściśleyszą wartość.

*F*). Każdy z ułamków $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$ itd, oznaczaiąc coraz dokładnieyszą wartość ilości $\alpha$ przystępuie do niéy nie tylko bliżéy niż ułamki poprzedzaiące, ale nawet bliżéy niż ułamek iakikolwiek prostszego wyrażenia. Przypuśćmy bo-

www.rcin.org.pl

wiem że ułamek $\frac{m}{n}$ znaczy ściśleyszą wartość $\alpha$ niżeli np. $\frac{C}{C'}$, a wyrażony iest prostszémi liczbami: musiałoby więc $\frac{m}{n}$ środkować między $\frac{C}{C'}$ i $\frac{D}{D'}$; następnie $\frac{D}{D'}-\frac{m}{n}$ musiałoby bydź mnieysze od $\frac{D}{D'}-\frac{C}{C'}$ czyli $\frac{nD-mD'}{nD'}<\frac{1}{C'D'}$, co iest niepodobieństwo: gdyż licznik $nD-mD'$ będąc całki nie może bydź mnieyszy od iedności; mianownik zaś $nD'$ iest mnieyszy niż $C'D'$, bo podług przypuszczenia liczba $n$ iest prostsza czyli mnieysza od $C'$.

*G*). Stopień przybliżenia każdego z ułamków pospolitych $\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}, \ldots$ do wartości $\alpha$ wskazany iest przez zrównania ($Y$); z których widzimy, że biorąc np. $\frac{C}{C'}$ za $\alpha$ popełniamy błąd wytknięty w ułamku $\frac{1}{C'(C'\delta+B')}$. Chcąc ten błąd ocenić, uważmy że $\delta$ za blizką wartość ma liczbę całką $d$ od któréy się różni ułamkiem mnieyszym od iedności; wartość więc $\delta$ zawarta iest między $d$ i $d+1$; przeto mianownik ułamku $\frac{1}{C'(C'\delta+B')}$ zawarty iest między $C'(C'd+B')$ i $C'[C'(d+1)+B']$ czyli między $C'D'$ i $C'(D'+C')$. Zatém odstąpienie ułamku $\frac{C}{C'}$ od ścisłéy wartości $\alpha$ obięte iest między granicami $\frac{1}{C'D'}$ i $\frac{1}{C'(D'+C')}$, i iest większe od $\frac{1}{C'(D'+C')}$ a mnieysze od $\frac{1}{C'D'}$ a tém bardziéy od $\frac{1}{C'^2}$. Podobnież różnica ułamku $\frac{D}{D'}$ od $\alpha$ będzie większa od $\frac{1}{D'(E'+D')}$ a mnieysza od $\frac{1}{D'E'}$ a tém bardziéy od $\frac{1}{D'^2}$;

www.rcin.org.pl

itd. *Każdy więc z ułamków pospolitych* $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$, itd. *różni się od* $\alpha$ *o ilość mnieyszą niż iedność podzieloną przez wieloczyn z mianownika tego ułamku i z mianownika ułamku następnego, a tém bardziéy o ilość mnieyszą niż iedność rozdzieloną przez kwadrat z mianownika tegoż ułamku.* Aże mianowniki ułamków pospolitych są coraz większe, przeto różnice między témi ułamkami a ilością $\alpha$ coraz bardziéy maleią: a następnie, przedłużaiąc coraz daléy ułamek ciągły i ten przerabiaiąc na pospolity, przyydziemy albo do zupełnéy wartości $\alpha$, albo tak blizko do niéy przystąpimy, iż nasze przybliżenie osiągnie stopień żądany.

IV. *Użycie ułamków ciągłych do przybliżenia pierwiastków niewymiernych w zrównaniu.*

Widzieliśmy (§ 5. IV.) że maiąc zrównanie $X=0$ oswobodzone od pierwiastków całkich, kiedy za pomocą zrównania $Z=0$ na kwadraty z różnic wynaydziemy $\frac{1}{k}$ toiest ilość mnieyszą od naymnieyszéy róznicy między wartościami $x$, i kiedy potém w zrównaniu daném $X=0$ za $x$ podstawimy $\frac{y}{k}$, wypada zrównanie $Y=0$ w którém wartości na $y$ różnią się między sobą o więcéy niż iedność, a następnie żadna z nich nie może miéć części całkiéy spólnéy z iakąkolwiek wartością drugą. Daymy że według sposobów wyżéy podanych odkryte są części całkie wszystkich wartości rzetelnych na $y$ tak dodatnych iak i odiemnych: niech témi częściami będą liczby $a$, $a'$, $a''$, . . .; $-\alpha$, $-\alpha'$, $-\alpha''$, . . Mamy teraz ocenić przez przybliżenie części ułamkowe. Zaczniymy od pierwiastku dodatnego maiącego część całką $a$: nazwawszy iego część ułamkową przez $\frac{1}{u}$, gdzie $u$ musi bydź dodatne i większe od iedności, będzie $y=a+\frac{1}{u}$; co podstawuiąc w zrównaniu $Y=0$ przyydziemy do zrównania $U=0$

z ilością nieznaną $u$, w którém iedna tylko wartość rzetelna na $u$ może bydź większa od iedności; bo gdyby były np. dwie, $m$ i $n$, wtenczas wypadłyby na $y$ dwie wartości $y = a + \frac{1}{m}$, $y = a + \frac{1}{n}$ maiące część całką spólną $a$; co iest niepodobieństwo. Niech część całka téy wartości na $u$ przewyższaiącéy iedność, znaleziona ze zrównania $U = o$ wiadomą iuż drogą będzie $b$: więc $u = b + \frac{1}{t}$ gdzie $t$ iest większe od iedności. Kładąc $b + \frac{1}{t}$ za $u$ w zrównaniu $U = o$ wypadnie zrównanie $T = o$ w którém znowu iedna tylko będzie rzetelna wartość na $t$ większa od iedności. Daymy że część całka téy wartości iest $c$; zatém $t = c + \frac{1}{s}$ gdzie $s$ iest koniecznie większe od iedności. Wynaleźć potém należy część całką wartości na $s$ ze zrównania $S = o$ które się otrzymuie z podstawienia $c + \frac{1}{s}$ za $t$ w zrównaniu $T = o$; itd. Ponieważ $y = a + \frac{1}{u}$, $u = b + \frac{1}{t}$, $t = c + \frac{1}{s}$, itd; przeto $y = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{s}}}$. Tak więc wartość na $y$ będzie wyrażona przez ułamek ciągły, który oczywiście możemy przedłużyć podług upodobania. Zamieniwszy ułamek ciągły na zwyczayny np. $\frac{M}{N}$; ten ułamek będzie wartością przybliżoną na $y$ różniącą się od prawdziwéy o mniéy niż $\frac{1}{N^2}$, a wartość przybliżona na $x$ będzie $\frac{M}{kN}$ odstępuiąca od ścisłéy o mniéy niż o $\frac{1}{k.N^2}$. Podobnie się rozwiia na ułamek ciągły i przez przybliżenie ocenia każdy pierwiastek dodatny zrównania $Y = o$, a następnie i zrównania $X = o$.

Zeby ten rachunek zastosować do pierwiastków odiemnych, trzeba piérwéy w zrównaniu $Y=0$ położyć $-y'$ za $y$; ztąd wypadnie zrównanie $Y'=0$, którego pierwiastki dodatne będą odiemnémi zrównania $Y=0$; i ieżeli liczby $-\alpha$, $-\alpha'$, $-\alpha''$, .... są częściami całkiémi pierwiastków odiemnych w zrównaniu $Y=0$, będą liczby $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$, .... częściami całkiémi pierwiastków dodatnych w zrównaniu $Y'=0$. Gdy więc w tém ostatniém przez sposób dopiéro wyłożony, dopełnimy każdą z części całkich $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$, .. ułamkiem ciągłym przedłużonym podług żądania, ten ułamek połączony z całością przerobimy na pospolity i wypadek poprzedzimy znakiem $-$, otrzymamy pierwiastki przybliżone odiemne zrównania $Y=0$; a te rozdzielone przez $k$ dadzą pierwiastki odiemne zrównania $X=0$.

*Przykład.* Widzieliśmy że pomiędzy pierwiastkami zrównania $x^3-7x+7=0$ naymnieysza różnica iest większa od $\frac{1}{3}$, i że położywszy $x=\frac{y}{3}$ wypada zrównanie $y^3-63y+189=0$ którego trzy pierwiastki maią za części całkie 4, 5, $-9$. Zeby otrzymać przybliżenie piérwszego pierwiastku, czynię $y=4+\frac{1}{u}$; ztąd wyniknie zrównanie $u^3-15u^2+12u+1=0$ którego pierwiastek większy od iedności ma za część całką 14. Wziąwszy $u=14+\frac{1}{t}$ przyydziemy do zrównania $t^3-\frac{22}{3}t^2-t-\frac{1}{27}=0$ w którém pierwiastku większego od iedności część całka iest 6, czyli $t=6+\ldots\ldots$ Zatém

$$y=4+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{6+\ldots}}.$$

Przerobiwszy ten ułamek ciągły na pospolity, będziemy mieli wartość przybliżoną $y$ równą $\frac{346}{85}$; a następnie wartość przybliżoną $x$ równą $\frac{346}{85.3}$ czyli $\frac{346}{255}$ mniéy się różniącą od ścisłéy niż o $\frac{1}{85^2\times 3}$ czyli $\frac{1}{21675}$. Podobnie się postępuie z pierwiastkiem drugim.

www.rcin.org.pl

Dla przybliżenia pierwiastku odiemnego, który ma za część całką —9, czynię $y=-y'$; wypadnie zrównanie $y'^3-63y-189=0$ zamykaiące pierwiastek dodatny z częścią całką 9. Kładę potém $y'=9+\frac{1}{u}$, otrzymam zrównanie $u^3-\frac{20}{3}u^2-u-\frac{1}{27}=0$ w którém część całka pierwiastku dodatnego większego od iedności iest 6. Biorę $u=6+\frac{1}{t}$ i trafiam na zrównanie $t^3-\frac{729}{811}t^2-\frac{306}{811}t-\frac{27}{811}=0$ którego pierwiastek większy od iedności środkuie między 1 i 2. Założenie $t=1+\frac{1}{s}$ prowadzi do zrównania $s^3-\frac{669}{251}s^2-\frac{1704}{251}s-\frac{811}{251}=0$ maiącego $s=4+$ ułamkiem mnieyszym od iedności. Przeto $y'=9+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\ldots}}}$. Ztąd $\frac{311}{34}$ będzie wartością przybliżoną na $y'$, $-\frac{311}{34}$ będzie wartością przybliżoną na $y$; nareszcie ułamek $-\frac{311}{34\times3}$ będzie pierwiastkiem przybliżonym odiemnym zrównania danego $x^3-7x+7=0$. Ten ułamek odstępuie od ścisłéy wartości pierwiastku o ilość mnieyszą niż $\frac{1}{34^2\times3}$ czyli $\frac{1}{3468}$.

## § 7. *O Funkcyach symetrycznych.*

*A). Zbiory pierwiastków zrównunia podniesionych do iednakich potęg cechowanych wykładnikami całkiémi wyrażaią się przez funkcye spółczynników.*

Funkcyą symetryczną ilukolwiek ilości iest takie złożone z nich wyrażenie, które się nie odmienia, gdy iednę iakąkolwiek z tych ilości położymy na mieyscu inney i nawzaiem. np. $ab+ac+bc$, $a^3+b^3+c^3$, $a^2b^2c+a^2c^2b+b^2c^2a$ są funkcyami symetrycznémi ilości $a$, $b$, $c$. Takiego rodzaiu funkcyą iest oczywiście summa ilukolwiek ilości; iest także summa wszystkich wieloczynów z tych ilości branych na raz po dwie, po trzy, po cztéry, itd: więc spółczynniki w zrównaniu wszelkiego stopnia są funkcyami symetrycznémi iego pierwiastków. Następnie poznamy, że każda funkcya symetryczna wymierna pierwiastków zrównania da się wyrazić przez pewne połączenie iego spółczynników. Wyprowadzimy naprzód wzory, za pomocą których przez funkcye spółczynników zrównania oceniaią się summy iednakich potęg z pierwiastków należące także do rzędu funkcyy symetrycznych.

Niech będzie zrównanie

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+\ldots+Tx+V=0 \ldots (A')$$

którego pierwiastki są $a$, $b$, $c$, $d$, . . .; zatém

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+\ldots\ldots+Tx+V= (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) \ldots\ldots (B').$$

Ostatnia równość ma mieysce na wszelką wartość $x$; można więc położyć $x+y$ za $x$, i wypadnie

$$(x+y)^m+A(x+y)^{m-1}+B(x+y)^{m-2}+C(x+y)^{m-3}+\ldots+V =(x-a+y)(x-b+y)(x-c+y)(x-d+y)\ldots$$

W tém zrównaniu iako *tosamém* spółczynniki przy iednakich potęgach ilości $y$ muszą bydź równe (*). Porównawszy z sobą spółczynniki piérwszéy potęgi otrzymamy

$$mx^{m-1}+(m-1)Ax^{m-2}+(m-2)Bx^{m-3}+\ldots+T= \left.\begin{array}{l} +(x-b)(x-c)(x-d)\ldots \\ +(x-a)(x-c)(x-d)\ldots \\ +(x-a)(x-b)(x-d)\ldots, \end{array}\right| \ldots (C'). \\ + \text{ i t. d.}$$

Tu druga strona iest summą wielorazów, iakie wynikaią dzieląc wieloczyn ze wszystkich mnożników $x-a$, $x-b$, $x-c$, . . . przez każdy z osobna. Rozdzielmy ($C'$) przez ($B'$); będzie

$$\frac{mx^{m-1}+(m-1)Ax^{m-2}+(m-2)Bx^{m-3}+\ldots\ldots+T}{x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+\ldots\ldots\ldots+Tx+V}$$

(*). Tego dowód iest w przypisku do §fu I. Roz. I. Cz. II.

www.rcin.org.pl

$$=\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}+\frac{1}{x-d}+\ldots;$$

lecz $\frac{1}{x-a}=\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}+\frac{a^2}{x^3}+\ldots,$

$$\frac{1}{x-b}=\frac{1}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{b^2}{x^3}+\ldots,$$

$$\frac{1}{x-c}=\frac{1}{x}+\frac{c}{x^2}+\frac{c^2}{x^3}+\ldots,\text{ itd;}$$

położywszy więc dla skrócenia
$a+b+c+\ldots.=S_1$, $a^2+b^2+c^2+\ldots.=S_2$, $a^3+b^3+c^3+\ldots=S_3,\ldots,$ $a^m+b^m+c^m+\ldots=S_m,\ldots$
zrównanie ostatnie zamieni się na

$$\frac{mx^{m-1}+(m-1)Ax^{m-2}+(m-2)Bx^{m-3}+\ldots\ldots+T}{x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+\ldots\ldots+Tx+V}$$
$$=\frac{m}{x}+\frac{S_1}{x^2}+\frac{S_2}{x^3}+\frac{S_3}{x^4}+\ldots+\frac{S_{m-1}}{x^m}+\frac{S_m}{x^{m+1}}+\frac{S_{m+1}}{x^{m+2}}+\ldots,$$

zkąd po uwolnieniu od mianownika wypadnie

$$mx^{m-1}+(m-1)Ax^{m-2}+(m-2)Bx^{m-3}+(m-3)Cx^{m-4}+\ldots+Tx^0$$

$$=mx^{m-1}+\left.\begin{matrix}S_1\\+mA\end{matrix}\right|x^{m-2}+\left.\begin{matrix}S_2\\+AS_1\\+mB\end{matrix}\right|x^{m-3}+\left.\begin{matrix}S_3\\+AS_2\\+BS_1\\+mC\end{matrix}\right|x^{m-4}+\ldots\ldots$$

$$+\left.\begin{matrix}S_{m-1}\\+AS_{m-2}\\+BS_{m-3}\\+CS_{m-4}\\+\ldots\\+mT\end{matrix}\right|x^0+\left.\begin{matrix}S_m\\+AS_{m-1}\\+BS_{m-2}\\+CS_{m-3}\\+\ldots\\+TS_1\\+mV\end{matrix}\right|x^{-1}+\left.\begin{matrix}S_{m+1}\\+AS_m\\+BS_{m-1}\\+CS_{m-2}\\+\ldots\\+TS_2\\+VS_1\end{matrix}\right|x^{-2}+\ldots\ldots\quad(D')$$

Równaiąc z sobą spółczynniki iednakich potęg ilości $x$ po obu stronach będziemy mieli

$$\left.\begin{array}{r}S_1+mA=(m-1)A\\S_2+AS_1+mB=(m-2)B\\S_3+AS_2+BS_1+mC=(m-3)C\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\S_{m-1}+AS_{m-2}+BS_{m-3}+CS_{m-4}+\ldots+mT=T\end{array}\right|\text{ ztąd}$$

www.rcin.org.pl

$$\left.\begin{array}{l} S_1+A=0 \\ S_2+AS_1+2B=0 \\ S_3+AS_2+BS_1+3C=0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ S_{m-1}+AS_{m-2}+BS_{m-3}+CS_{m-4}+\ .\ .\ .\ +(m-1)T=0 \end{array}\right|\ ..(\alpha).$$

Za pomocą zrównań ( $\alpha$ ), których skład podlega oczywistemu prawu, przez funkcye spółczynników $A$, $B$, $C$, ... $T$ dadzą się ocenić summy pierwiastków podniesionych do potęg cechowanych wykładnikami 1, 2, 3, . . . $m-1$. Na summy potęg wyższych służące do tegoż celu wzory wyciągniemy ze zrównania ($D'$), uczyniwszy zerem spółczynniki na drugiéy stronie przy potęgach $x^{-1}$, $x^{-2}$, . . nie znayduiących się w stronie piérwszéy. Wypadnie

$$\left.\begin{array}{l} S_m+AS_{m-1}+BS_{m-2}+CS_{m-3}+\ldots+TS_1+VS_0=0 \\ S_{m+1}+AS_m+BS_{m-1}+CS_{m-2}+\ldots+TS_2+VS_1=0 \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \end{array}\right|\ ...(\beta),$$

gdzie za $m$ iest położone $S_0$, gdyż $S_0=a^0+b^0+c^0+\ldots=1+1+1+\ldots=m$. Zrównania ( $\beta$ ) mogą bydź zamknięte w iednym wzorze. Pomnóżmy zrównanie ( $A'$ ) przez $x^n$, i w wypadku

$$x^{m+n}+Ax^{m+n-1}+Bx^{m+n-2}+\ .\ .\ .\ +Tx^{n+1}+Vx^n=0$$

za ilość $x$ podstawmy koleią iéy wartości $a$, $b$, $c$ . . . : otrzymamy

$$\begin{array}{l} a^{m+n}+Aa^{m+n-1}+Ba^{m+n-2}+\ldots+Ta^{n+1}+Va^n=0 \\ b^{m+n}+Ab^{m+n-1}+Bb^{m+n-2}+\ldots+Tb^{n+1}+Vb^n=0 \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \end{array}$$

Dodawszy te zrównania, będzie według powyższych znaków

$$S_{m+n}+AS_{m+n-1}+BS_{m+n-2}+\ldots+TS_{n+1}+VS=0;$$

ztąd się wyciągną wszystkie zrównania ( $\beta$ ) czyniąc następnie $n=0$, 1, 2, . . . .

Odkryte wzory zastosuymy do przykładu szczególnego. Niech będzie zrównanie trzeciego stopnia

$$x^3-2x-5=0,$$

w którém $A=0$, $B=-2$, $C=-5$, $D=0$, itd. Zrównania ( $\alpha$ ) do teraźnieyszego przykładu odniesione dadzą $S_1=0$, $S_2=4$, $S_3=15$, $S_4=8$, itd.

Gdy w zrównaniu ($A'$) maiącém pierwiastki $a$, $b$, $c$, $d$, .

www.rcin.org.pl

uczynimy $x=\frac{1}{z}$, zkąd $z=\frac{1}{x}$, przyydziemy do zrównania

$$z^m+\frac{T}{V}z^{m-1}+\frac{S}{V}z^{m-2}+\frac{R}{V}z^{m-3}+\ldots\ldots+$$
$$\frac{B}{V}z^2+\frac{A}{V}z+\frac{1}{V}=0\ \ldots\ldots\ (E')$$

którego pierwiastkami będą $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$, ... czyli $a^{-1}$, $b^{-1}$, $c^{-1}$, $d^{-1}$, .... Nazwiymy summę tych pierwiastków przez $\int_1$; summę ich kwadratów, toiest $a^{-2}+b^{-2}+c^{-2}+$.., przez $\int_2$; itd. Zeby wzory ($\alpha$) i ($\beta$) zastosować do zrównania ($E'$), potrzeba w nich zamiast $S_1$, $S_2$.. wziąć $\int_1$, $\int_2$,..; a na mieyscu spółczynników $A$, $B$, $C$,.. położyć im odpowiedne spółczynniki $\frac{T}{V}$, $\frac{S}{V}$, $\frac{R}{V}$,...

Ztąd otrzymamy

$$\left.\begin{array}{l}\int_1+\frac{T}{V}=0\\ \int_2+\frac{T}{V}\int_1+2\frac{S}{V}=0\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ \int_{m-1}+\frac{T}{V}\int_{m-2}+\frac{S}{V}\int_{m-3}+\ldots+(m-1)A=0\end{array}\right\}\ldots(\gamma)$$

$$\left.\begin{array}{l}\int_m+\frac{T}{V}\int_{m-1}+\frac{S}{V}\int_{m-2}+\ldots+\frac{A}{V}\int_1+\frac{1}{V}\int_0=0\\ \int_{m+1}+\frac{T}{V}\int_m+\frac{S}{V}\int_{m-1}+\ldots+\frac{A}{V}\int_2+\frac{1}{V}\int_1=0\end{array}\right\}\ldots(\delta).$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

We wzorach ($\gamma$) i ($\delta$), które tém są względem zrównania ($E'$) czém ($\alpha$) i ($\beta$) względem ($A'$), zawarty iest związek między spółczynnikami zrównania ($A'$) i zbiorami iego pierwiastków nacechowanych wykładnikami odiemnémi $-1$, $-2$, . . . $-m$, $-(m+1)$, . . .; można więc te zbiory ocenić przez funkcye spółczynników.

Używszy wzorów ($\gamma$) i ($\delta$) do branego wyżéy za przy-

www.rcin.org.pl

kład zrównania $x^3-2x-5=0$, w którém $\frac{T}{V}=\frac{-2}{-5}=\frac{2}{5}$, $\frac{S}{V}=\frac{0}{-5}=0,\ldots,$ $\frac{1}{V}=-\frac{1}{5}$, znaydziemy $\int_1=-\frac{2}{5}$, $\int_2=\frac{4}{25}$, $\int_3=\frac{67}{125}$, $\int_4=\frac{652}{625}$, ....

*B*). *Wszelkie funkcye symetryczne wymierne pierwiastków zrównania wyrażaią się przez pewne połączenia spółczynników.*

Każda funkcya symetryczna wymierna pierwiastków $a, b, c, \ldots l$ zrównania, po rozwinieniu na iednowyrazy, składać się będzie z terminów maiących kształt $a^n$ lub $a^p b^q c^r \ldots$, gdzie wykładniki $n, p, q, r \ldots$ są iednością lub iakąkolwiek liczbą całką. Funkcya np. symetryczna

$$(a^2-b)^2+(b^2-a)^2 \ldots (F')$$

pierwiastków $a$ i $b$, zrównania $x^2+Ax+B=0$ rozwiniona ma postać $a^4-2a^2b+b^2+b^4-2b^2a+a^2$ czyli

$$a^4+b^4+a^2+b^2-2(a^2b+b^2a) \ldots (G').$$

W tém wyrażeniu możemy rozróżnić trzy oddzielne części stanowiące trzy osobne funkcye symetryczne; toiest $a^4+b^4$, $a^2+b^2$, $-2(a^2b+b^2a)$. Podług użytych w poprzedzaiącym §*fie* znaków część pierwsza wyraża się przez $S_4$, druga przez $S_2$; summę $a^2b+b^2a$ oznaczymy dla skrócenia przez $T(a^2b)$, co się czyta *terminy maiące kształt* a²b. Funkcya więc symetryczna $(G')$ wystawi się przez

$$S_4+S_2-2T(a^2b).$$

Podobnego składu iak $(F')$ funkcya symetryczna trzech pierwiastków $a, b, c$, zrównania $x^3+Ax^2+Bx+C=0$ iest

$$(a^2-b)^2+(a^2-c)^2+(b^2-a)^2+(b^2-c)^2+(c^2-a)^2 +(c^2-b)^2$$

czyli po rozwinieniu $a^4-2a^2b+b^2+a^4-2a^2c+c^2+b^4-2b^2a+a^2+b^4-2b^2c+c^2+c^4-2c^2a+a^2+c^4-2c^2b+b^2$ czyli ieszcze $2(a^4+b^4+c^4)+2(a^2+b^2+c^2)-2(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)$.

To wyrażenie może się znowu wystawić przez

$$2S_4+2S_2-2T(a^2b).$$

W poprzedzaiącym przykładzie znak $T(a^2b)$ zastępował mieysce funkcyi symetryczney dwóch ilości $a$ i $b$ która miała dwa terminy; w teraźnieyszym wyraża podobną fun-

www.rcin.org.pl

kcyą trzech ilości $a$, $b$, $c$ zamykaiącą terminów sześć. Liczba terminów składaiących funkcyą $T(a^2b)$ zależy od liczby ilości $a$, $b$, $c$,.. z których ta funkcya powstaie. Jlebykolwiek było ilości $a$, $b$, $c$,...; dla uformowania wszystkich terminów funkcyi $T(a^2b)$, trzeba napisać wszystkie połączenia obeymuiące po dwie z tych ilości, i w każdém połączeniu dadź piérwszéy z nich i drugiéy takie wykładniki iakie są nad piérwszą i druga w $T(a^2b)$. Jeżelibyśmy którekolwiek połączenie opuścili; funkcya przestałaby bydź symetryczną, toiest niezmienną gdy w niéy iakakolwiek z ilości $a$, $b$, c ... będzie położona na mieyscu innéy i nawzaiem.

Podobnie funkcya symetryczna ilukolwiek ilości, złożona z terminów maiących kształt $a^p\,b^q\,c^r$, toiest funkcya $T(a^p\,b^q\,c^r)$ będzie zbiorem wszystkich połączeń z tych ilości po trzy na raz branych; i w każdém połączeniu nad piérwszą ilością będzie wykładnik $p$, nad drugą $q$, nad trzecia $r$. Gdy np. funkcya symetryczna $T(a^p\,b^q\,c^r)$ powstaie ze cztérech ilości $a$, $b$, $c$, $d$; wtedy

$$\left.\begin{aligned}T(a^p\,b^q\,c^r)=&a^p\,b^q\,c^r+a^p\,b^q\,d^r+a^p\,c^q\,b^r+a^p\,c^q\,d^r\\&+a^p\,d^q\,b^r+a^p\,d^q\,c^r+b^p\,a^q\,c^r+b^p\,a^q\,d^r\\&+b^p\,c^q\,a^r+b^p\,c^q\,d^r+b^p\,d^q\,a^r+b^p\,d^q\,c^r\\&+c^p\,a^q\,b^r+c^p\,a^q\,d^r+c^p\,b^q\,a^r+c^p\,b^q\,d^r\\&+c^p\,d^q\,a^r+c^p\,d^q\,b^r+d^p\,a^q\,b^r+d^p\,a^q\,c^r\\&+d^p\,b^q\,a^r+d^p\,b^q\,c^r+d^p\,c^q\,a^r+d^p\,c^q\,b^r.\end{aligned}\right|\ldots(H')$$

Ogólnie, ieżeli wszystkich ilości $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, ... iest $m$, i ieżeli każdy termin funkcyi symetrycznéy ma ich $n$ z wykładnikami $p$, $q$, $r$, $s$, .......; do składu funkcyi symetrycznéy $T(a^p\,b^q\,c^r\,d^s\ldots\ldots)$ weydzie wyrazów $m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)$, toiest tyle, ile powstać może różnych połączeń z ilości $m$ branych na raz po $n$.

Gdyby wykładniki $p$ i $q$ były równe natenczas każdy wyraz w funkcyi złożonéy ze wszystkich połączeń miałby drugi zupełnie z sobą iednaki. W funkcyi np. $(H')$ wyraz $a^p\,b^q\,c^r$ niczémby się nie różnił od wyrazu $b^p\,a^q\,c^r$, $a^p\,b^q\,d^r$ od $b^p\,a^q\,d^r$, itd. W tym więc przypadku liczba terminów funkcyi symetrycznéy zmnieyszyłaby się dwa razy. J ieżelibyśmy formowali tę funkcyą tak iak się formuie kiedy wykładniki są nierówne, toiest składaiąc ią ze wszystkich połączeń; wypadek byłby funkcyą symetryczną podwoioną. W zrównaniu np. $(H')$ położywszy $p$ na mieyscu $q$; druga strona nie będzie wyrażała to samo co piérwsza $T(a^p\, b^q\, c^r)$, lecz znaczyć będzie $2T(a^p\, b^p\, c^r)$. Gdyby trzy wykładniki $p$, $q$, $r$ były równe; w funkcyi złożonéy ze wszystkich połączeń każdy wyraz byłby sześć razy powtórzony: tak, iż w zrównaniu $(H')$ wziąwszy $p$ na mieyscu $q$ i $r$, druga strona wyrażać będzie $1.2\,3.T(a^p\, b^p\, c^p)$. W funkcyi symetrycznéy ilukolwiek ilości $T(a^p\, b^q\, c^r\, d^s\, e^t)$ uczyniwszy $p=q=2$, $r=s=t=1$; ta funkcya zamieni się na $1.2.1.2.3.T(a^2 b^2 cde)$: mnożenie przez 1.2 pochodzi ztąd że dwa wykładniki nad $a$ i $b$ są równe, a mnożenie przez 1.2.3 pochodzi z równości trzech wykładników nad $c$, $d$, $e$.

Wszelka funkcya symetryczna ilukolwiek ilości $a$, $b$, $c$, . . . rozwiniona, skoro zamyka termin $a^n$, musi zamykać $b^n$, $c^n$, . . ., toiest do iéy składu wchodzić musi $S_n$; inaczéy nie byłaby symetryczną. Jeżeli się w niéy znayduie wyraz $a^p\, b^q$ . .; znaydować się powinny wszystkie wyrazy obięte w znaku $T(a^p\, b^q \ldots)$. Każdą więc funkcyą symetryczna uważać możemy iako złożoną z funkcyy nazwanych $S_n$, $T(a^p\, b^q \ldots)$. Widzieliśmy w §fie poprzedzaiącym, że funkcye $S_n$, toiest zbiory iednakich potęg z pierwiastków zrównania daią się wyrazić przez funkcye spółczynników. Potrafimy na funkcye spółczynników zamienić wszystkie funkcye symetryczne pierwiastków, ieżeli każdą funkcyą kształtu $T(a^p\, b^q \ldots)$ ocenimy przez zbiory potęg: do tego zaś celu przyydziemy następuiącym sposobem.

Mnożąc przez siebie dwie funkcye

$$S_p = a^p + b^p + c^p + \ldots, \quad S_q = a^q + b^q + c^q + \ldots:$$

otrzymamy

$$a^{p+q} + a^p\, b^q + a^p\, c^q + \ldots + b^p\, a^q + b^{p+q} + b^p\, c^q + \ldots$$
$$+ c^p\, a^q + c^p\, b^q + c^{p+q} + \ldots$$

czyli

$$a^{p+q} + b^{p+q} + c^{p+q} + \ldots + a^p\, b^q + a^p\, c^q + b^p\, a^q + b^p\, c^q +$$
$$c^p\, a^q + c^p\, b^q + \ldots$$

Ten wieloczyn zamyka, iak widzimy, dwa gatunki wyrazów; ieden składaiący funkcyą $S_{p+q}$, drugi funkcyą $T(a^p\, b^q)$: zatém $S_p \,.\, S_q = S_{p+q} + T(a^p\, b^q)$; ztąd

$$T(a^p\, b^q) = S_p \,.\, S_q - S_{p+q} \quad \ldots \quad (\,'\,),$$

gdzie funkcya $T(a^p\, b^q)$ iest wyrażona przez zbiory potęg. Dla ocenienia $T(a^p\, b^q\, c^r)$ pomnożymy przez siebie funkcye

www.rcin.org.pl

$S_r = a^r + b^r + c^r + \ldots$, $T(a^p b^q) = a^p b^q + a^p c^q + b^p a^q + b^p c^q + c^p a^q + c^p b^q + \ldots$ i znaydziemy

$$S_r \,.\, T(a^p b^q) = a^{p+r} b^q + a^{p+r} c^q + a^{q+r} b^p + b^p c^q a^r + a^{q+r} c^p + c^p b^q a^r + \ldots + b^{q+r} a^p + a^p c^q b^r + b^{p+r} a^q + b^{p+r} c^q + c^p a^q b^r + b^{q+r} c^p + \ldots + a^p b^q c^r + c^{q+r} a^p + b^p a^q c^r + c^{q+r} b^p + c^{p+r} a^q + c^{p+r} b^q + \ldots$$

czyli

$$a^{p+r} b^q + a^{p+r} c^q + b^{p+r} a^q + b^{p+r} c^q + c^{p+r} a^q + c^{p+r} b^q + \ldots$$
$$+ a^{q+r} b^p + a^{q+r} c^p + b^{q+r} a^p + b^{q+r} c^p + c^{q+r} a^p + c^{q+r} b^p + \ldots$$
$$+ a^p b^q c^r + a^p c^q b^r + c^p a^q b^r + b^p a^q c^r + b^p c^q a^r + c^p b^q a^r + \ldots$$

W ostatniém wyrażeniu piérwsza liniia iest funkcyą $T(a^{p+r} b^q)$, druga funkcyą $T(a^{q+r} b^p)$, trzecia funkcyą $T(a^p b^q c^r)$: przeto

$$S^r \,.\, T(a^p b^q) = T(a^{p+r} b^q) + T(a^{q+r} b^p) + T(a^p b^q c^r) \ldots (K').$$

Lecz na mocy wzoru ( $\epsilon$ ), $T(a^p b^q) = S_p \,.\, S_q - S_{p+q}$, $T(a^{p+r} b^q) = S_{p+r} \,.\, S_q - S_{p+q+r}$, $T(a^{q+r} b^p) = S_{q+r} \,.\, S_p - S_{p+q+r}$; więc zrównanie $(K')$ zamieni się na

$$S_p \,.\, S_q \,.\, S_r - S_{p+q} \,.\, S_r = S_{p+r} \,.\, S_q - S_{p+q+r} + S_{q+r} \,.\, S_p - S_{p+q+r} + T(a^p b^q c^r),$$ zkąd

$$T(a^p b^q c^r) = S_p \,.\, S_q \,.\, S_r - S_{p+q} \,.\, S_r - S_{p+r} \,.\, S_q - S_{q+r} \,.\, S_p + 2S_{p+q+r} \quad \ldots\ldots (\zeta).$$

Zeby przez summy potęg wyrazić funkcyą $T(a^p b^q c^r d^s)$; należy obie strony zrównania ( $\zeta$ ) rozmnożyć przez $S_s$, itd.

Wyprowadzaiąc zrównania ( $\epsilon$ ), i ( $\zeta$ ) uważaliśmy wykładniki $p$, $q$, $r$, .. za nierówne. Gdyby niektóre z nich były iednakie; natenczas, według powyższych uwag, trzeba funkcyom $T(a^p b^q)$, $T(a^p b^q c^r)$, .... dadź spółczynnik 1.2 lub 1.2.3, itd, podług tego iak między wykładnikami $p$, $q$, $r$, ... będą równe dwa lub trzy, itd.

*Przykład I.* Daymy że przez spółczynniki zrównania

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$$

potrzeba wyrazić funkcyą symetryczną iego pierwiastków

$$(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2.$$

Łatwo się przekonać iż ta mnogość po rozwinieniu może bydź wystawiona przez

www.rcin.org.pl

$T(a^4b^2)-2T(a^4bc)+2T(a^3b^2c)-2T(a^3b^3)-6a^2b^2c^2$.
Używaiąc wzorów ( $\varepsilon$ ) i ( $\alpha$ ) znaydziemy że

$T(a^4b^2)=S_4.S_2-S_6=-2A^3C+A^2B^2+4ABC-2B^3$
$-3C^2$

$T(a^4bc)$ czyli $-CS_3=A^3C-3ABC+3C^2$

$T(a^3b^2c)$ czyli $-CT(a^2b)=ABC-3C^2$

$T(a^3b^3)$ czyli $\frac{(S_3)^2-S_6}{2}=B^3-3ABC+3C^2$:

wyraz $a^2b^2c^2$ znaczy $C^2$. Przeto

$(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2=-4A^3C+A^2B^2+18ABC-4B^3$
$-27C^2$.

To wyrażenie iest ostatnim terminem zrównania na kwadraty z różnic między pierwiastkami: gdyby więc w szczególnym przypadku stało się zerem, ostrzegłoby iż dane zrównanie ma dwa pierwiastki równe.

*Przykład II.* Oznaczywszy przez $a$, $b$, $c$ pierwiastki zrównania

$$x^3+Ax^2+Bx+C=0,$$

założmy sobie otrzymać zrównanie, któregoby pierwiastki były $a+b$, $a+c$, $b+c$. Zrównanie więc żądane będzie

$$[z-(a+b)][z-(a+c)][z-(b+c)]=0;$$

iego postać iest symetryczna co do $a$, $b$, $c$, a następnie spółczynniki dadzą się ocenić przez funkcye spółczynników $A$, $B$, $C$. Trzeba oznaczyć wyrażenie tych funkcyy. Po wykonaniu mnożenia będzie

$z^3-2(a+b+c)z^2+(a^2+b^2+c^2+3ab+3ac+3bc)z-(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2)=0$

czyli

$$z^3-2S_1z^2+[S_2+3T(ab)]z-T(a^2b)=0.$$

Lecz $S_1=-A$, $S_2=A^2-2B$, $T(ab)=\frac{(S_1)^2-S_2}{2}=$

$\frac{A^2-A^2+2B}{2}=B$, $T(a^2b)=S_2.S_1-S_3=-AB+3C$; więc

szukane zrównanie przyymie postać

$$z^3+2Az^2+(A^2+B)z+AB-3C=0.$$

C). *Oceniaią się spółczynniki zrównania na kwadraty z różnic między pierwiastkami przez spółczynniki zrównania danego.*

www.rcin.org.pl

Formowanie zrównania na kwadraty z różnic między pierwiastkami iest niekiedy bardzo pracowite, ieżeli się odbywa za użyciem eliminacyi w stopniach wyższych. A ponieważ na niém się opiéra rozwiązanie zrównań liczebnych: wielką więc temu rachunkowi przyniosą pomoc wzory wyrażaiące spółczynniki zrównania na kwadraty z różnic między pierwiastkami przez funkcyą spółczynników zrównania danego.

Niech będzie zrównanie

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+\ldots+Tx+V=0 \ldots (A')$$

którego pierwiastki są $a$, $b$, $c$, $d$,.. Wyraźmy przez $A'$, $B'$, $C'$, . . . spółczynniki zrównania na kwadraty z różnic

$$Z=0,$$

w którém pierwiastkami będą $(a-b)^2$, $(a-c)^2$,.. $(b-c)^2$, $(b-d)^2$, . . . , itd. Potrzeba ocenić $A'$, $B'$, $C'$, . . . przez funkcyą $A$, $B$, $C$, . . . .

Otrzymaliśmy dawniéy wzory

$$\left.\begin{array}{r} S_1+A=0 \\ S_2+AS_1+2B=0 \\ S_3+AS_2+BS_1+3C=0 \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots\ldots (\alpha)$$

należące do zrównania $(A')$, w których $S_1$, $S_2$, $S_3$,.. wyrażaią summy $a+b+c+$.., $a^2+b^2+c^2+$.., $a^3+b^3+c^3+$.., itd. Nazwiymy odpowiedne summy w zrównaniu $Z=0$ przez $\Sigma_1$, $\Sigma_2$, $\Sigma_3$, . . . , toiest niech

$$\Sigma_1=(a-b)^2+(a-c)^2+\ldots+(b-c)^2+(b-d)^2+\ldots+\text{itd.}$$
$$\Sigma_2=(a-b)^4+(a-c)^4+\ldots+(b-c)^4+(b-d)^4+\ldots+\text{itd.}$$
$$\Sigma_3=(a-b)^6+(a-c)^6+\ldots+(b-c)^6+(b-d)^6+\ldots+\text{itd.}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Jeżeli we wzorach ( $\alpha$ ) za $A$, $B$, $C$, . . . . weźmiemy $A'$, $B'$, $C'$, . . . ; te wzory zostaną odniesione do zrównania $Z=0$, tak iż w nich razem trzeba za $S_1$, $S_2$,.. położyć $\Sigma_1$, $\Sigma_2$,..; wypadnie więc

$$\left.\begin{array}{r} \Sigma_1+A'=0 \\ \Sigma_2+A'\Sigma_1+2B'=0 \\ \Sigma_3+A'\Sigma_2+B'\Sigma_1+3C'=0 \\ \ldots\ldots \end{array}\right| \ldots\ldots (\varkappa);$$

zkąd można spółczynniki $A'$, $B'$, $C'$, . . . . ocenić przez funkcye zbiorów $\Sigma_1$, $\Sigma_2$, $\Sigma_3$, . . Zeby zatém przedsięwzię-

www.rcin.org.pl

te zagadnienie rozwiązać, należy tylko zbiory $\Sigma_1$, $\Sigma_2$, $\Sigma_3$, .. wyrazić przez funkcye spółczynników zrównania danego $A$, $B$, $C$, .. Do tego przyydziemy następuiącym rachunkiem.

Różnice między ilością $x$ a iéy wartościami $a$, $b$, $c$, .. podnieśmy do potęgi $2n$, i te potęgi z sobą dodaymy; będzie

$$(x-a)^{2n}+(x-b)^{2n}+(x-c)^{2n}+\ldots\ldots = mx^{2n}-2n(a+b+c+\ldots)x^{2n-1}+\frac{2n(2n-1)}{1.2}(a^2+b^2+c^2+\ldots)x^{2n-2}$$
$$-\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1.\,2.\,3}(a^3+b^3+c^3+\ldots)x^{2n-3}+\ldots+(a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}+\ldots)x^0.$$

czyli

$$=mx^{2n}-2nS_1x^{2n-1}+\frac{2n(2n-1)}{1.\,2}S_2x^{2n-2}-$$
$$\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1.\,2.\,3}S_3x^{2n-3}+\ldots+S_{2n}x^0.$$

Tu za $x$ położywszy koleią $a$, $b$, $c$, . . . i wypadki dodawszy, otrzymamy

$$(a-b)^{2n}+(a-c)^{2n}+\ldots+(b-a)^{2n}+(b-c)^{2n}+\ldots+(c-a)^{2n}$$
$$+(c-b)^{2n}+\ldots=m(a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}+\ldots)-2nS_1.(a^{2n-1}+b^{2n-1}+c^{2n-1}+\ldots)+\frac{2n(2n-1)}{1.\,2}S_2(a^{2n-2}+b^{2n-2}+c^{2n-2}+\ldots)$$
$$-\ldots+S_{2n}(a^0+b^0+c^0+\ldots),$$

czyli

$$=mS_{2n}-2nS_1.S_{2n-1}+\frac{2n(2n-1)}{1.\,2}S_2.S_{2n-2}-$$
$$\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1.\,2.\,3}S_3.S_{2n-3}+\ldots+S_{2n}.S_0.$$

Stronę piérwszą składaią, iak widzimy, podniesione do potęgi $n$ i dodane z sobą kwadraty z różnic między pierwiastkami zrównania danego $a$, $b$, $c$, . . ., bo np. $(a-b)^{2n}=[(a-b)^2]^n$. Nadto potęga każdego kwadratu w téy stronie iest dwa razy powtórzona, gdyż np. $(a-b)^{2n}=(b-a)^{2n}$. Strona więc piérwsza stanowi to, co według użytych powyżéy znaków wyraża się przez $2\Sigma_n$. Następnie

$$2\Sigma_n=mS_{2n}-2nS_1\,S_{2n-1}+\frac{2n(2n-1)}{1.\,2}S_2.S_{2n-2}$$
$$-\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1.\,2.\,3}S_3.S_{2n-3}+\ldots+mS_{2n},$$

www.rcin.org.pl

gdzie $m$ iest wzięte za $S_0$. Ostatni szereg ma terminów $2n+1$, toiest tyle, ile ich zamyka potęga $2n$ z dwuwyrazu. Łatwo iest widzieć, że termin piérwszy z końcowym oraz każde dwa równie od skraynych oddalone są iednakie co do wartości i zgodne w znaku. (*). A ponieważ liczba wszystkich terminów iest nieparzysta; znayduie się zatém jeden w samym środku szeregu, który nie ma sobie równego. Wziąwszy połowę tego terminu i wszystkie poprzedzaiące będziemy mieli połowę całego szeregu czyli połowę wartości $2\Sigma_n$ a następnie wartość $\Sigma_n$. Nazwawszy przeto wyraz środkowy przez $P$, będzie

$$\Sigma_n = mS_{2n} - 2nS_1.S_{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{1.\ 2} S_2.S_{2n-2}$$

$$- \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1.\ 2.\ 3} S_3.S_{2n-3} + \ldots \pm \frac{P}{2}$$

gdzie $P$ leży na mieyscu wskazaném liczbą $n+1$ czyli iest poprzedzony od wyrazów $n$. Wchodzące więc do niego summy będą cechowane znakami $S_n$, $S_{2n-n}$ czyli $S_n$; ostatni mnożnik w mianowniku spółczynnika będzie $n$, w liczniku $2n-(n-1)$ czyli $n+1$. Zatém

$$P = \pm \frac{2n(2n-1)(2n-2) \ldots \ldots (n+1)}{1.\ 2.\ 3 \ldots \ldots \ldots \ldots n} (S_n)^2.$$

gdzie znak $+$ należy do $n$ parzystego, — do nieparzystego. Ztąd wypada ostatecznie że

$$\Sigma_n = mS_{2n} - 2nS_1.S_{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{1.\ 2} S_2.S_{2n-2}$$

---

(*). W potędze dwuwyrazu cechowanéy wykładnikiem całkim i dodatnym spółczynniki terminów równie oddalonych od skraynych zawsze są równe. O czém można tak się przekonać. Rozwinąwszy dwie strony zrównania tosamego $(x+1)^m = (1+x)^m$; i spółczynniki, które w obu szeregach będą iednakie, nazwawszy ogólnie przez $A$, $B$, $C$, ... $S$, $T$, $U$, otrzymamy

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots \ldots + Sx^3 + Tx^2 + Ux + 1 =$$
$$1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots \ldots + Sx^{m-3} + Tx^{m-2} + Ux^{m-1} + x^m.$$

Równaiąc z sobą spółczynniki przy iednakich potęgach $x$, wypada

$$A = U,\quad B = T,\quad C = S,\ \ldots,$$

www.rcin.org.pl

$$-\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1.\ 2.\ 3}S_3.S_{2n-3}+\ldots.$$

$$\pm\frac{2n(2n-1)(2n-2)\ .\ .\ .\ .\ n+1}{1.\ 2.\ 3\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ n}\ \frac{(S_n)^2}{2}\ \ldots\ldots(\theta).$$

Tu zakładaiąc koleią $n=1, 2, 3, \ldots$, znaydziemy wartości na $\Sigma_1$, $\Sigma_2$, $\Sigma_3$, ... wyrażone przez zbiory $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$, $S_5$, $S_6$, ...; a gdy, podług zrównań ( $\alpha$ ) i ( $\beta$ ), zamienimy zbiory $S_1$, $S_2$, ... na funkcye spółczynników zrównania danego $A$, $B$, $C$, ..., otrzymamy $\Sigma_1$, $\Sigma_2$, $\Sigma_3$ .. ocenione przez funkcye tychże spółczynników. Po czém zapomocą wzorów ( $\eta$ ) przyydziemy do wyrażenia spółczynników $A'$, $B'$, $C'$, ... przez funkcye spółczynników $A$, $B$, $C$, ..

Z rzędu ( $\eta$ ) weydzie do rachunku zrównań $\frac{m(m-1)}{2}$, bo takiego iest stopnia zrównanie na kwadraty z różnic. Tyleż ich wydobyć należy ze wzoru ( $\theta$ ); a dwa razy tyle ze wzorów ( $\alpha$ ) i ( $\beta$ ), gdyż w wyrażeniu $\Sigma_n$ znayduie się summa $S_{2n}$ i każda summa cechowana liczbami mnieyszémi od $2n$. Wszystkich więc zrównań maiących się użyć w tym rachunku będzie $\frac{m(m-1)}{2}+\frac{m(m-1)}{2}+m\,(m-1)$ czyli $2m(m-1)$.

Wyciągaiąc ze wzoru ( $\theta$ ) wartość na $\Sigma_1$, $\Sigma_2$, $\Sigma_3$,.. pamiętać należy iż zawsze wyrazem ostatnim, maiącym się dzielić przez 2, iest w każdéy wartości ten który zamyka obie summy cechowane iednem znamieniem; np.

$$\Sigma_3=mS_6-6S_1.S_5+15S_2.S_4-20\frac{(S_3)^2}{2}.$$

*Przykład.* Niech będzie zrównanie

$$x^3-2x-5=0.$$

Znosząc ié ze zrównaniem ($A'$) widzimy że

$$m=3,\quad A=0,\quad B=-2,\quad C=-5,\quad D=0, \text{ itd.}$$

Zrównanie na kwadraty z różnic ma w tym razie postać

$$z^3+A'z^2+B'z+C'=0:$$

potrzeba w niém ocenić $A'$, $B'$, $C'$. Ze wzorów ( $\alpha$ ) i ( $\beta$ ), po włożeniu za $m$, $A$, $B$, $C$,... wartości stosownych do obecnego przykładu, wyciągniemy

$$S_1=0,\ S_2=4,\ S_3=15,\ S_4=8,\ S_5=50,\ S_6=91.$$

www.rcin.org.pl

Za pomocą tych wartości, ze wzoru ( $\theta$ ) otrzymamy

$$\Sigma_1=12,\quad \Sigma_2=72,\quad \Sigma_3=-1497.$$

Nakoniec wzory ( $\pi$ ) dadzą

$$A'=-12,\quad B'=36,\quad C'=643.$$

Ztąd szukane zrównanie na kwadraty z różnic będzie

$$z^3-12z^2+36z+643=0.$$



www.rcin.org.pl

# ROZDZIAŁ CZWARTY.

## Dopełnienie nauki o zrównaniach. Rozwiązanie zrównań literalnych stopnia trzeciego i czwartego, oraz nieoznaczonych stopnia pierwszego i drugiego.

### § 1. *Rozwiązanie zrównań stopnia trzeciego.*

Rozwiązaliśmy stopień drugi przez dopełnienie drugiéy potęgi w członku piérwszym zrównania. Doświadczmy czyli ten sposób nie posłuży stopniom dalszym. Na ten koniec weźmy zrównanie stopnia trzeciego $x^3+px^2+qx+r=0$: porównawszy ié ze wzorem potęgi trzeciéy $x^3+3ax^2+3a^2x+a^3$, mamy $p=3a$, $q=3a^2$, $r=a^3$; z tych zrównań piérwsze daie $a=\frac{p}{3}$, drugie $a=\sqrt{(\frac{q}{3})}$, trzecie $a=\sqrt[3]{r}$. Co pokazuie że, aby z funkcyi składaiącéy dane zrównanie trzeciego stopnia mógł bydź wyciągniony pierwiastek potęgi trzeciéy, spółczynniki $p$, $q$, $r$ powinny zachowywać taki między sobą stosunek, żeby było $\frac{p}{3}=\sqrt{(\frac{q}{3})}=\sqrt[3]{r}$. Gdyby sam tylko termin $r$ nie odpowiadał temu stosunkowi; możnaby go przenieść na stronę drugą, a potém w członku piérwszym dopełnić potęgi dodaiąc po obu stronach sześcian z trzeciéy części spółczynnika $p$ terminu drugiego: wtedy z piérwszego członka dałby się wyciągnąć pierwiastek potęgi trzeciéy, i rozwiązalibyśmy zrównanie drogą podobną iak w stopniu drugim. Lecz ponieważ w ogólności spółczynniki $p$ i $q$ mogą bydź iakiekolwiek, a zatém nie koniecznie odpowiadać wskazanemu dopiéro stosunkowi; należy nam przeto szukać innego sposobu rozwiązania, któryby służył na wszystkie przypadki zrównań trzeciego stopnia, nie będąc zawisłym od żadnéy szczególnéy wartości ani od żadnego stosunku spółczynników $p$, $q$, $r$. Żebyśmy sobie takowe dociekanie ułatwili, wyrzućmy w zrównaniu $x^3+px^2+qx+r=0$ termin drugi, kładąc $x=y-\frac{p}{3}$: otrzymamy

www.rcin.org.pl

$$\left.\begin{array}{l|l} y^3 - \frac{p^2}{3} & y + \frac{2p^3}{27} \\ +q & -\frac{pq}{3} \\ & +r \end{array}\right\} = 0;$$

a nazwawszy dla skrócenia $-\frac{p^2}{3}+q=a$, $\frac{2p^3}{27}-\frac{pq}{3}+r=b$ będziemy mieli do rozwiązania zrównanie pod kształtem

$$y^3+ay+b=0,\text{ zkąd } y^3=-ay-b.$$

Gdyby na stronie drugiéy nie znaydowało się $y$, przyszlibyśmy do wartości na tę ilość wyciągaiąc z obu członków pierwiastek sześcienny. Starać się nam przeto należy wyrzucić $y$ z drugiego członka; czego dokażemy przerobiwszy zrównanie na nieoznaczone przez wprowadzenie drugiéy ilości np. $z$, która pozwoli nam założyć warunek, że część drugiego członka zawiéraiąca $y$ iest zerem. Jlość $z$ potrzeba tak wprowadzać, żeby i związek nie był naruszony, i członek piérwszy nie przestał bydź potęgą trzecią dokładną. Obudwom tym warunkom stanie się zadosyć, kiedy funkcyą $y+z$ podniesiemy do sześcianu i wszystkie iego terminy prócz piérwszego do każdéy strony zrównania przydamy. Wypadnie

$$y^3+3zy^2+3z^2y+z^3 = 3zy^2+3z^2y+z^3-ay-b.$$

Możemy teraz założyć że $3zy^2+3z^2y-ay=0$ czyli

$$3zy+3z^2=a. \;.\;.\;.\;.\; (a');$$

pozostanie

$$(y+z)^3=z^3-b. \;.\;.\;.\;.\; (b').$$

W zrównaniu $(a')$ rozebrawszy stronę piérwszą na mnożnik $3z$, mamy $3z(y+z)=a$, ztąd $y+z=\frac{a}{3z}$, następnie $(y+z)^3=\frac{a^3}{37z^3}$; znosząc ten wypadek ze zrównaniem $(b')$, otrzymamy

$$z^3-b=\frac{a^3}{27z^3} \text{ czyli } z^6-bz^3=\frac{a^3}{27}.$$

Ostatnie zrównanie służące nam do ocenienia wprowadzonéy ilości $z$, lubo iest stopnia szóstego, może bydź atoli rozwiązane podług reguł na stopień drugi, gdyż $z$ znayduie się w dwóch tylko terminach z wykładnikami które są w stosunku 2:1. Po rozwiązaniu znaydziemy

$$z^3 = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}\right)}; \text{ więc } z = \sqrt[3]{\left[\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}\right)}\right]}.$$

Wróciwszy się teraz do zrównania ($b'$), wydobędziemy z niego $y+z=\sqrt[3]{(z^3-b)}$, $y=-z+\sqrt[3]{(z^3-b)}$; kładąc za $z$ i za $z^3$ odkryte dopiéro wartości, otrzymamy

$$y=-\sqrt[3]{\left[\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}\right)}\right]}+\sqrt[3]{\left[\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}\right)}-b\right]}$$

$$=\sqrt[3]{\left[-\frac{b}{2}\mp\sqrt{\left(\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}\right)}\right]}+\sqrt[3]{\left[-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}\right)}\right]}.$$

Ponieważ w téy wartości na $y$ biorąc przed cechą pierwiastku potęgi drugiéy znaki wyższe wypada to samo wyrażenie iak biorąc niższe, możemy zatém wziąć iedne z nich tylko, np. niższe, i będziemy mieli

$$y=\sqrt[3]{\left[-\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}\right)}\right]}+\sqrt[3]{\left[-\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}\right)}\right]}.$$

Znaleźliśmy ieden pierwiastek zrównania stopnia trzeciego. Odciągnąwszy ten pierwiastek od ilości $y$, i tę różnicę porównawszy z zerem, otrzymamy zrównanie stopnia pierwszego, które iest iednym z mnożników składaiących zrównanie stopnia trzeciego: a gdy przez ten mnożnik rozdzielimy stopień trzeci, wypadnie na wieloraz zrównanie stopnia drugiego złożone z dwóch mnożników pozostałych. Rozwiązawszy ten stopień drugi, przyydziemy do dwóch innych pierwiastków, które razem z pierwiastkiem naypiérwéy odkrytym stanowić będą trzy pierwiastki zrównania stopnia trzeciego. Zeby więc otrzymać dwa pozostałe pierwiastki, trzeba dane zrównanie rozdzielić przez

$$y-\sqrt[3]{\left[-\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}\right)}\right]}-\sqrt[3]{\left[-\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}\right)}\right]}=0:$$

a że ilości niewymierne czyniłyby działanie bardzo zawikłaném, przeto dla uproszczenia wyrazów nazwiemy

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt[3]{\left[-\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}\right)}\right]}=g\\ \sqrt[3]{\left[-\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}\right)}\right]}=h\end{array}\right| \ldots (c');$$

www.rcin.org.pl

ztąd dzielnik przybierze postać $y-g-h=0$. Jeżeli wyrażenia ($c'$) przez siebie rozmnożymy, wypadnie $-\frac{a}{3}=gh$, zkąd $a=-3gh$: też same wyrażenia podniósłszy do potęgi trzeciéy i dodawszy znaydziemy $b=-g^3-h^3$. Podstawiwszy za $a$ i $b$ takowe wartości w zrównanie trzeciego stopnia $y^3+ay+b=0$, otrzymamy

$$y^3+3ghy-g^3-h^3=0:$$

a to rozdzieliwszy przez $y-g-h=0$, wypadnie zrównanie stopnia drugiego

$$y^2+(g+h)y+g^2+h^2-gh=0,$$

które po rozwiązaniu daie na dwa pozostałe pierwiastki

$$y=\frac{-(g+h)+(g-h)\sqrt{-3}}{2},\ y=\frac{-(g+h)-(g-h)\sqrt{-3}}{2}.$$

## § 2. *Uwagi nad pierwiastkami zrównania stopnia trzeciego.*

Przyszliśmy do trzech pierwiastków zrównania stopnia trzeciego

$$y=g+h,\ y=\frac{-(g+h)+(g-h)\sqrt{-3}}{2},$$

$$y=\frac{-(g+h)-(g-h)\sqrt{-3}}{2};$$

teraz roztrząśniemy, kiedy te pierwiastki są rzetelne lub uroione, wiele z nich i które? Do składu pierwiastków wchodzą ilości $g$ i $h$ zastępuiące mieysce funkcyy $\sqrt[3]{[-\frac{b}{2}+\sqrt{(\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27})}]}$, $\sqrt[3]{[-\frac{b}{2}-\sqrt{(\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27})}]}$: te ilości będą wtenczas rzetelne, kiedy iest $\sqrt{(\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27})}$ rzetelny, czyli kiedy $\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}$ iest dodatne. Wyraz $\frac{b^2}{4}$ iest zawsze dodatny, czy w zrównaniu $y^3+ay+b=0$ ilość $b$ ma przed sobą znak dodatny, czy też gdyby miała odiemny: wyraz $\frac{a^3}{27}$ iest dodatny, kiedy $a$ w zrównaniu iest

www.rcin.org.pl

dodatne. Jeżeli przeto zrównanie iest wzoru $y^3+ay\pm b=0$, funkcya $\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}$ iest dodatna, a tém samém $g$ i $h$ są rzetelne: wtedy piérwszy pierwiastek $y=g+h$ iest rzetelny, a dwa drugie będą uroione dla tego że maią w swoiém wyrażeniu $\sqrt{-3}$. Lecz gdy zrównanie będzie wzoru $y^3-ay\pm b=0$, w którém $a$ iest odiemne; będzie też odiemne $\frac{a^3}{27}$: naówczas funkcya pod znakiem pierwiastkowym potęgi drugiéy weźmie postać $\sqrt{(\frac{b^2}{4}-\frac{a^3}{27})}$, i może bydź rzerzetelną lub uroioną podług względnych wielkości terminów $\frac{b^2}{4}$ i $\frac{a^3}{27}$. Jeżeli $\frac{b^2}{4}>\frac{a^3}{27}$, funkcya $\frac{b^2}{4}-\frac{a^3}{27}$ będzie dodatna; wtenczas $g$ i $h$ są rzetelne, i iak w przypadku poprzedzaiącym piérwszy pierwiastek będzie rzetelny, dwa drugie uroione. Jeżeli $\frac{b^2}{4}=\frac{a^3}{27}$, funkcya $\frac{b^2}{4}-\frac{a^3}{27}$ ginie; ilości $g$ i $h$ staią się sobie równe; trzy pierwiastki biorą kształt $y=2g$, $y=-g$, $y=-g$: wszystkie więc naówczas są rzetelne, dwa równe między sobą, a trzeci podwóyny względem każdego z nich wziętego ze znakiem przeciwnym. Jeżeli nakoniec $\frac{b^2}{4}<\frac{a^3}{27}$, funkcya $\frac{b^2}{4}-\frac{a^3}{27}$ będzie odiemna, a zatém $g$ i $h$ są uroione: w takim więc przypadku wszystkie trzy pierwiastki zawiérać będą wyrażenia uroione; co się sprzeciwia ogólnéy prawdzie we własnościach zrównań dowiedzionéy, że liczba pierwiastków uroionych iakiegokolwiek zrównania musi bydź parzysta, a tém samém że w stopniach nieparzystych iakim iest stopień trzeci musi bydź przynaymniéy ieden pierwiastek rzetelny. Jakoż w ostatnim razie trzy pierwiastki zrównania stopnia trzeciego są tylko na pozór uroione, a w istocie wszystkie są rzetelne nierówne; o czém nas przekonywa rachunek następuiący.

Kładąc dla skrócenia $m$ na mieyscu $-\frac{b}{2}$, a na mieyscu funkcyi $\sqrt{(\frac{b^2}{4}-\frac{a^3}{27})}$ która w przypadku teraz uwa-

www.rcin.org.pl

żanym iest uroioną pisząc $n\sqrt{-1}$; będzie $g=\sqrt[3]{(m+n\sqrt{-1})}$, $h=\sqrt[3]{(m-n\sqrt{-1})}$. Podstawuiąc te wyrażenia we trzech pierwiastkach nadamy im formę

$$(1) \ldots\ y=(m+n\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}+(m-n\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}},$$

$$(2) \ldots\ y=-\tfrac{1}{2}[(m+n\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}+(m-n\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}] + \frac{\sqrt{-3}}{2}[(m+n\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}-(m-n\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}],$$

$$(3) \ldots\ y=-\tfrac{1}{2}[(m+n\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}+(m-n\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}] - \frac{\sqrt{-3}}{2}[(m+n\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}-(m-n\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}].$$

Rozwińmy dwie funkcye $(m+n\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$ i $(m-n\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$: będzie

$$(m+n\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}=m^{\frac{1}{3}}(1+\tfrac{1}{3}\frac{n\sqrt{-1}}{m}+\tfrac{1}{9}\frac{n^2}{m^2}-\frac{5}{81}\frac{n^3\sqrt{-1}}{m^3} - \frac{10}{243}\frac{n^4}{m^4}+\frac{22}{729}\frac{n^5\sqrt{-1}}{m^5}+\text{ itd});$$

$$(m-n\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}=m^{\frac{1}{3}}(1-\tfrac{1}{3}\frac{n\sqrt{-1}}{m}+\tfrac{1}{9}\frac{n^2}{m^2}+\frac{5}{81}\frac{n^3\sqrt{-1}}{m^3} - \frac{10}{243}\frac{n^4}{m^4}-\frac{22}{729}\frac{n^5\sqrt{-1}}{m^5}+\text{ itd}).$$

Dodawszy te dwa szeregi; terminy uroione zginą, i wartość (1) na $y$ wypadnie taka

$$y=2m^{\frac{1}{3}}(1+\tfrac{1}{9}\frac{n^2}{m^2}-\frac{10}{243}\frac{n^4}{m^4}-\text{ itd}).$$

Taż summa szeregów pomnożona przez $-\frac{1}{2}$ stanowi część piérwszą dwóch pozostałych wartości na $y$; zatém część piérwsza tych wartości iest rzetelna. Częścią ich drugą będzie różnica szeregów pomnożona przez $\frac{\sqrt{-3}}{2}$. Odciągaiąc szeregi znaydziemy na różnicę

$$2m^{\frac{1}{3}}(\tfrac{1}{3}\frac{n\sqrt{-1}}{m}-\frac{5}{81}\frac{n^3\sqrt{-1}}{m^3}+\frac{22}{729}\frac{n^5\sqrt{-1}}{m^5}-\text{ itd}).$$

www.rcin.org.pl

rozmnożywszy ten wypadek przez $\frac{\sqrt{-3}}{2}$ czyli przez $\frac{\sqrt{3}}{2}.\sqrt{-1}$, będzie

$$-m^{\frac{1}{3}}(\tfrac{1}{3}\frac{n\sqrt{3}}{m}-\frac{5}{81}\frac{n^3\sqrt{3}}{m^3}+\frac{22}{729}\frac{n^5\sqrt{3}}{m^5}-\text{itd})$$

wyrażenie rzetelne. Zatém i dwie drugie wartości na $y$

$$y=-m^{\frac{1}{3}}(1+\tfrac{1}{9}\frac{n^2}{m^2}-\frac{10}{243}\frac{n^4}{m^4}-\text{itd.})-m^{\frac{1}{3}}\sqrt{3}.(\tfrac{1}{3}\frac{n}{m}-\frac{5}{81}\frac{n^3}{m^3}+\frac{22}{729}\frac{n^5}{m^5}-\text{itd}),$$

$$y=-m^{\frac{1}{3}}(1+\tfrac{1}{9}\frac{n^2}{m^2}-\frac{10}{243}\frac{n^4}{m^4}-\text{itd.})+m^{\frac{1}{3}}\sqrt{3}.(\tfrac{1}{3}\frac{n}{m}-\frac{5}{81}\frac{n^3}{m^3}+\frac{22}{729}\frac{n^5}{m^5}-\text{itd})$$

są rzetelne. Ale widzimy że wszystkie trzy pierwiastki pozbywszy wyrażeń uroionych, stały się szeregami maiącémi nieskończoną liczbę terminów; a przeto ściśle ocenione bydź nie mogą. Mogą bydź tylko otrzymane ich wartości tém bardziéy do prawdziwych przybliżone, im bardziéy szeregi są ubywaiące; toiest kiedy odległe terminy szeregów będąc coraz mnieysze staią się nareszcie tak nieznacznémi, że ié można zaniedbać.

Kiedy więc zrównanie stopnia trzeciego iest wzoru $y^3-ay\pm b=0$ i kiedy $\frac{b^2}{4}<\frac{a^3}{27}$, nie potrafimy iego ściśle rozwiązać, gdyż przychodzimy do pierwiastków ciągnących się przez szeregi nieskończone. Ten przypadek nazywa się *nieprzywiedlnym* (irréductible), dla tego że w nim pierwiastki zrównania, będąc rzetelne, nie daią się przywieśdź do wyrażenia, ktòreby było razem i rzetelne i złożone z ograniczonéy liczby terminów. Trafiamy na przypadek nieprzywiedlny zawsze, ilekroć pierwiastki zrównania stopnia trzeciego są rzetelne nierówne. W tym więc razie, wydobyty ogólny wzór pierwiastków staie się do praktycznego użycia nieprzydatnym; bo z niego pierwiastki zrównań szczególnych trzeciego stopnia otrzymane bydź nie mogą. J tak np. gdyby dane było zrównanie $y^3-7y-6=0$; porównaw-

www.rcin.org.pl

szy ié z $y^3+ay+b=0$, będzie $a=-7$, $b=-6$: kładąc za $a$ i $b$ te liczby w funkcyach nazwanych powyżéy przez $g$ i $h$, wypada

$$g=\sqrt[3]{[3+\sqrt{(-\tfrac{100}{27})}]},\quad h=\sqrt[3]{[3-\sqrt{(-\tfrac{100}{27})}]}.$$

Jlości więc $g$ i $h$ są uroione; a następnie trzy pierwiastki wziętego zrównania wyciągnione z ogólnego wzoru zamykać będą wyrażenia uroione, których pozbywszy rościągną się przez szeregi o nieskończonéy liczbie terminów: chociaż te pierwiastki są całkie i równe liczbom $-1$, $-2$, $+3$, iak łatwo dóyść można drogą wskazaną na wynaydowanie pierwiastków wymiernych zrównania liczebnego.

Sposób, który nas przywiódł do rozwiązania zrównań trzeciego stopnia, zawisł od ocenienia ilości $z$: ta była nam dana przez zrównanie stopnia szóstego. Zkąd możnaby rozumieć, że ponieważ takowe zrównanie powinno mieć sześć pierwiastków, toiest powinno wydać sześć wartości na $z$; a iedna z nich którakolwiek prowadzi do trzech wartości na $y$; więc ze wszystkich wypadnie na $y$ ośmnaście pierwiastków. Rachunek atoli łatwoby nas przekonał, że każda z sześciu wartości na $z$ przywodzi do tych samych wartości na $y$; tak, że z ośmnastu pierwiastków na $y$ trzy tylko są różne, iakieśmy w poprzedzaiącym §*fie* znaleźli.

Weźmy ieszcze pod uwagę przypadki szczególne które zrównanie $x^3+px^2+qx+r=0$ w sobie ogarnia. Przypuśćmy że $p=0$, $q=0$; zostanie $x^3+r=0$: to zrównanie ma ieden pierwiastek $x=\sqrt[3]{-r}$ czyli $x=-\sqrt[3]{r}$. Dla znalezienia dwóch pierwiastków pozostałych trzeba zrównanie $x^3+r=0$ dzielić przez $x+\sqrt[3]{r}$: położmy $\sqrt[3]{r}=m$, zkąd $r=m^3$. Wypadnie więc dzielić $x^3+m^3=0$ przez $x+m=0$; otrzymamy na wieloraz zrównanie $x^2-mx+m^2=0$ drugiego stopnia, które po rozwiązaniu daie

$$x=\frac{m}{2}\pm\sqrt{(\frac{m^2}{4}-m^2)}=\frac{m}{2}\pm\sqrt{(\frac{-3m^2}{4})}$$
$$=\frac{m}{2}\pm\frac{m}{2}\sqrt{-3}.$$

Przyszliśmy więc do trzech pierwiastków na $x$: ieden z nich iest rzetelny, a dwa uroione. Ocaliwszy $p$ i $q$, gdy założy-



www.rcin.org.pl

my że $r=0$; wypadnie ieden pierwiastek równy zero, i zrównanie zniży się do stopnia drugiego.

Skończmy rozwiązanie zrównań trzeciego stopnia tą samą uwagą, którąśmy uczynili nad zrównaniem stopnia drugiego w §fie 12 Rozdz II; toiest, że prawidła dopiéro odkryte rościągaią się do zrównań wyższych stopni zawartych we wzorze $x^{3m}+px^{2m}+qx^{m}+r=0$: uczyniwszy bowiem $x^{m}=y$, zrównanie to zamieni się na $y^3+py^2+qy+r=0$ iakie nas teraz zatrudniało.

## § 3. *Rozwiązanie zrównań stopnia czwartego.*

Wszystkie zrównania czwartego stopnia wystawić się mogą w ogólnym wzorze $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$. Żeby ié uprościć przez wyrzucenie terminu drugiego, trzeba założyć $x=y-\frac{p}{4}$; wypadnie

$$\left.\begin{array}{l|l|l} y^4-\frac{3}{8}p^2 & y^2+\frac{1}{8}p^3 & y-\frac{3}{256}p^4 \\ \quad +q & \quad -\frac{1}{2}pq & \quad +\frac{1}{16}p^2q \\ & \quad +r & \quad -\frac{1}{4}pr \\ & & \quad +s \end{array}\right\}=0.$$

Uczyńmy dla skrócenia wyrazów
$-\frac{3}{8}p^2+q=a$, $\frac{1}{8}p^3-\frac{1}{2}pq+r=b$, $-\frac{3}{256}p^4+\frac{1}{16}p^2q-\frac{1}{4}pr+s=c$,
będzie

$$y^4+ay^2+by+c=0, \quad \text{zkąd } y^4=-ay^2-by-c.$$

Podobnie iak w stopniu trzecim wciągniymy do teraźnieyszego zrównania nową ilość nieznaną $z$, tak, aby się przez to i związek nie zerwał i piérwszy członek nie przestał bydź potęgą dokładną. Na ten koniec podnieśmy $y^2+z$ do kwadratu; będzie $y^4+2zy^2+z^2$: przydaymy w obu członkach terminy $2zy^2+z^2$; otrzymamy $y^4+2zy^2+z^2=2zy^2+z^2-ay^2-by-c$ albo

$$(y^2+z)^2=(2z-a)y^2-by+(z^2-c) \quad \ldots \quad (d').$$

Jlość $z$ pozwala założyć iakikolwiek warunek; przypuśćmy więc że w zrównaniu $(d')$ członek drugi iest potęgą drugą zupełną. Ten warunek wymaga aby pierwiastek kwadratowy z terminu piérwszego pomnożony przez takiż pierwiastek z terminu ostatniego był równy połowie terminu

www.rcin.org.pl

średniego, o czém wzór potęgi drugiéy $x^2+2ax+a^2$ nas przekonywa. Poprzedzaiące zatém przypuszczenie prowadzi do zrównania $y\sqrt{2z-a}\,.\,\sqrt{z^2-c}=-\frac{by}{2}$ czyli do

$$2\sqrt{2z-a}\,.\,\sqrt{z^2-c}=-b \;.\;.\;.\;.\;.\; (e')$$

zkąd

$$4(2z-a)(z^2-c)=b^2 \;.\;.\;.\;.\;.\; (f'):$$

z ostatniego zrównania wynaydzie się wartość na $z$. Podstawuiąc w zrównaniu $(d')$ za $-b$ wyrażenie wzięte z założonego warunku $(e')$ otrzymuiemy

$$(y^2+z)^2=(2z-a)y^2+2y\sqrt{2z-a}\,.\,\sqrt{z^2-c}+(z^2-c);$$

wyciągnąwszy z obu stron pierwiastek kwadratowy, będzie

$$y^2+z=\pm[y\sqrt{2z-a}+\sqrt{z^2-c}].$$

To zrównanie podług znaków $+$ i $-$ poprzedzaiących drugą stronę rozbierze się na dwa następne

$$y^2-y\sqrt{2z-a}=-z+\sqrt{z^2-c},$$
$$y^2+y\sqrt{2z-a}=-z-\sqrt{z^2-c},$$

które po rozwiazaniu daią cztéry wartości na $y$

$$y=\frac{\sqrt{2z-a}}{2}+\sqrt{\left[\frac{-(2z+a)}{4}+\sqrt{z^2-c}\right]},$$

$$y=\frac{\sqrt{2z-a}}{2}-\sqrt{\left[\frac{-(2z+a)}{4}+\sqrt{z^2-c}\right]},$$

$$y=\frac{-\sqrt{2z-a}}{2}+\sqrt{\left[\frac{-(2z+a)}{4}-\sqrt{z^2-c}\right]},$$

$$y=\frac{-\sqrt{2z-a}}{2}-\sqrt{\left[\frac{-(2z+a)}{4}-\sqrt{z^2-c}\right]}:$$

tu potrzeba ieszcze za ilość $z$ podłożyć wartość wydobytą ze zrównania $(f')$ czyli z $8z^3-4az^2-8cz+4ac=b^2$. To ostatnie zrównanie, będąc stopnia trzeciego, może się czasem znaydować w przypadku nieprzywiedlnym: wtedy iak wartości $z$ tak następnie i wartości $y$ nie dałyby się ze ścisłością ocenić.

*Uwaga.* Widzieliśmy że stopień trzeci zawisł w swoiém rozwiązaniu od drugiego, czwarty od trzeciego. Liczne dociekania przez Jeometrów przedsięwzięte dla odkrycia pierwiastków w zrównaniach stopnia piątego i następnych

www.rcin.org.pl

zostały wstrzymane tą trudnością, iż przyprowadzały zawsze do stopni daleko wyższych, które piérwéy wypadałoby rozwiązać, aby przyyść do celu zamierzonego. Lecz chociaż ogólne rozwiązanie stopni dalszych zdaie się bydź na pozór bardzo ważne i pożądane; iest atoli podobieństwo, iżby nie przyniosło rzetelnych w rachunku korzyści. Bo kiedy ze wzorów na pierwiastki zrównań stopnia trzeciego i czwartego nie zawsze można wyciągnąć wartości na ilość nieznaną w zrównaniach szczególnych; tém bardziéy zapewne okazałyby się bez użytku wzory pierwiastków w zrównaniach stopni następnych. J zawsze potrzebaby się było uciekać do podanych wyżéy sposobów na rozwiązywanie zrównań liczebnych.

## § 4. *Sposób rozeznania potęg zupełnych w funkcyach częścią wymiernych a częścią niewymiernych.*

Poznaliśmy na końcu drugiego rozdziału, że zrównań trzywyrazowych należących do wzoru $x^{2m}+px^m+q=0$ mogą bydź otrzymane dwa pierwiastki sposobem właściwym stopniowi drugiemu, i że te pierwiastki maią kształt $\sqrt[m]{[-\frac{p}{2}\pm\sqrt{(\frac{p^2}{4}-q)}]}$: teraz rozwiązanie zrównań stopnia trzeciego i czwartego przywiodło nas do wyrażeń zamykaiących także pod znakami pierwiastkowémi funkcye złożone z części wymiernych i z części niewymiernych. Te wyrażenia znacznieby się uprościły, gdyby z takowych funkcyy dał się wyciągnąć pierwiastek: gdybyśmy np. z funkcyy $-\frac{b}{2}+\sqrt{(\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27})}$ i $-\frac{b}{2}-\sqrt{(\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27})}$ mogli otrzymać pierwiastek potęgi trzeciéy, wtedy wartości wydobyte ze stopnia trzeciego przyięłyby postać daleko mniéy zawikłaną. Ażе wyciąganie pierwiastków udaie się tylko natenczas, kiedy funkcya iest potęgą zupełną; przygotuiemy zatém wielką pomoc do rachunku pierwiastków w zrównaniach stopni wyższych, ieżeli wyśledzimy cechy na rozpoznanie zupełnych potęg w funkcyach częścią wymiernych a częścią niewymiernych. Weźmiemy tu tylko pod uwagę funkcye wzoru $A\pm\sqrt{B}$.

www.rcin.org.pl

*Wyciąganie pierwiastku kwadratowego.*

Jeżeli funkcya $A \pm \sqrt{B}$ iest zupełną potęgą drugą; iéy pierwiastek musi bydź takiego kształtu, aby do kwadratu podniesiony wrócił wyrażenie $A \pm \sqrt{B}$, toiest aby wydał iednę część niewymierną mogącą odpowiadać terminowi $\sqrt{B}$, drugą wymierną mogącą odpowiadać terminowi $A$. Takowy pierwiastek da się wystawić przez $\sqrt{p} \pm \sqrt{q}$; gdzie $p$ i $q$ są ilości nieznane, wymierne, które potrzeba ocenić stosownie do wartości $A$ i $B$. Będzie zatém $\sqrt{(A \pm \sqrt{B})} = \sqrt{p} \pm \sqrt{q}$, ztąd $A \pm \sqrt{B} = p \pm 2\sqrt{pq} + q$. Równaiąc terminy wymierne z wymiernémi, a niewymierne z niewymiernémi, wypada

$$A = p + q \quad \ldots\ldots (1),$$

$$\pm\sqrt{B} = \pm 2\sqrt{pq} \text{ czyli } B = 4pq \quad \ldots\ldots (2).$$

Te zrównania dadzą wartości $p$ i $q$ wyrażone przez $A$ i $B$. Jakoż z (2) mamy $q = \frac{B}{4p}$; co włożywszy w (1) otrzymamy

$$p^2 - Ap + \frac{B}{4} = 0,$$

zkąd wyciagniemy

$$p = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - B}}{2}, \text{ przeto } q = A - p = \frac{A \mp \sqrt{A^2 - B}}{2}.$$

Tu widzimy, że aby $p$ i $q$ były wymierne, a tém samém żeby funkcya $A \pm \sqrt{B}$ była zupełną potęgą drugą maiącą za pierwiastek $\sqrt{p} \pm \sqrt{q}$, potrzeba aby $A^2 - B$ było dokładnym kwadratem. Jeżeli $A$ i $B$ spełniaią ten warunek, wtedy funkcya $A + \sqrt{B}$ będzie miała za pierwiastek kwadratowy

$$\sqrt{p} + \sqrt{q} = \pm\left[\sqrt{\left(\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}\right)} + \sqrt{\left(\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}\right)}\right];$$

funkcyi zaś $A - \sqrt{B}$ będzie pierwiastkiem

$$\sqrt{p} - \sqrt{q} = \pm\left[\sqrt{\left(\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}\right)} - \sqrt{\left(\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}\right)}\right].$$

*Przykłady.* Znaleźć pierwiastek kwadratowy funkcyi $5a^2 - b^2 \pm 4a\sqrt{a^2 - b^2}$. Porównywaiąc tę funkcyą ze wzorem $A \pm \sqrt{B}$, mamy $A = 5a^2 - b^2$, $\sqrt{B} = 4a\sqrt{a^2 - b^2}$ czyli $B = 16a^4 - 16a^2b^2$. Ztąd

www.rcin.org.pl

$\sqrt{(5a^2-b^2+4a\sqrt{a^2-b^2})}=\pm(2a+\sqrt{a^2-b^2})$, $\sqrt{(5a^2-b^2-4a\sqrt{a^2-b^2})}=\pm(2a-\sqrt{a^2-b^2})$. Podobnie znaydziemy, że $\sqrt{(28+10\sqrt{3})}=5+\sqrt{3}$.

*Wyciąganie pierwiastku sześciennego.* Gdy funkcya $A+\sqrt{B}$ iest zupełną potęgą trzecią; iéy pierwiastek będzie miał taki kształt, któryby podniesiony do sześcianu nie wydał iak tylko ieden termin niewymierny, a inne wszystkie wymierne. Teraz więc postać pierwiastku nie może bydź $\sqrt{p}+\sqrt{q}$, bo ta wyniesiona do potęgi trzeciéy prowadzi do wszystkich wyrazów niewymiernych; ale może bydź $p+\sqrt{q}$ albowiem sześcian $(p+\sqrt{q})^3$ czyli $p^3+3p^2\sqrt{q}+3pq+q\sqrt{q}$, daie się zebrać w dwie części, iednę $p^3+3pq$ wymierną, drugą $(3p^2+q)\sqrt{q}$ niewymierną ze znakiem pierwiastkowym potęgi drugiéy. Uważmy ieszcze, że gdy $A$ i $\sqrt{B}$ maią spólny mnożnik, toiest kiedy funkcya $A+\sqrt{B}$ da się przywieść do kształtu $r(C+\sqrt{D})$; iéy pierwiastek może bydź wzoru $\sqrt[3]{r}.(p+\sqrt{q})$. Weźmiemy tę ostatnią postać pierwiastku iako od piérwszéy ogólnieyszą. Będzie zatém $\sqrt[3]{(A+\sqrt{B})}=\sqrt[3]{r}.(p+\sqrt{q})$: potrzeba ocenić ilości $p$, $q$, $r$ stosownie do zadania. Wynosząc obie strony ostatniego zrównania do potęgi trzeciéy, wypada $A+\sqrt{B}=r(p^3+3p^2\sqrt{q}+3pq+q\sqrt{q})$. Równaiąc z sobą wyrazy wymierne i niewymierne, mamy

$$\left.\begin{array}{ll}(3)\ \ldots & A=r(p^3+3pq)\\ (4)\ \ldots & \sqrt{B}=r(3p^2+q)\sqrt{q}\end{array}\right|,\ \text{zkąd}$$

$$A^2=r^2(p^6+6p^4q+9p^2q^2)$$
$$B=r^2(9p^4q+6p^2q^2+q^3),$$

a następnie $A^2-B=r^2(p^6-3p^4q+3p^2q^2-q^3)=r^2(p^2-q)^3$; przeto

$$p^2-q=\sqrt[3]{\left(\frac{A^2-B}{r^2}\right)}=\frac{1}{r}\sqrt[3]{(A^2-B)r}.$$

Ponieważ są do oznaczenia trzy ilości $p$, $q$, $r$, a na to wypadły tylko dwa zrównania (3) i (4), więc wartość na $r$ zawisła od naszéy woli. Nadto gdy $p$ i $q$ maią bydź wymierne, powinno zatém i $p^2-q$ bydź wymierne, a tém samém $(A^2-B)r$ powinno bydź dokładnym sześcianem. Ostatni warunek może bydź zawsze spełniony przez nadanie stoso-

www.rcin.org.pl

wnéy wartości na ilość dowolną $r$. Na ten koniec dosyć iest za $r$ wziąć $(A^2-B)^2$: czasem wartość na $r$ może bydź prościeysza od $(A^2-B)^2$. Przypuśćmy że iuż iest dobrana przyzwoita wartość dla $r$, i uczyńmy $\frac{1}{r}\sqrt[3]{(A^2-B)r}=c$; będzie przeto $c$ wymierne i znane. Ztąd $p^2-q=c$, $q=p^2-c$; co podstawiwszy w zrównaniu (3) znaydziemy $A=r(p^3+3p^3-3cp)$ czyli

$$4rp^3-3crp-A=0 \quad \ldots\ldots \quad (5),$$

gdzie $r$, $c$, $A$ są ilości znane. Jeżeli to zrównanie ma przynaymniéy ieden pierwiastek wymierny; ten znaleziony, będzie żądaną wartością na $p$; a od iego kwadratu odiąwszy $c$ otrzymamy wartość wymierną na $q$: tak przyszedłszy do wartości wymiernych na $p$ i $q$, ocenimy tém samém wyrażenie $p+\sqrt{q}$, zatém i pierwiastek sześcienny z funkcyi $A+\sqrt{B}$. Jeżeli zaś zrównanie (5) nie ma żadnéy wartości wymiernéy na $p$; to nas ostrzeże, iż funkcya $A+\sqrt{B}$ nie iest potęgą trzecią zupełną.

*Przykłady*. I. Wyciągnąć pierwiastek sześcienny z funkcyi $148+46\sqrt{11}$. Porównywaiąc przykład ze wzorem, będzie $A=148$, $\sqrt{B}=46\sqrt{11}=\sqrt{23276}$, ztąd $A^2-B=21904-23276=-1372=-343.4=-7^3.2^2$. Zeby ten wypadek był dokładnym sześcianem, trzeba go, iak widzimy, pomnożyć przez 2; należy zatém uczynić $r=2$. Zkąd $(A^2-B)r=-7^3.2^3$, a następnie $c=\frac{1}{r}\sqrt[3]{(A^2-B)r}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{-7^3.2^3}=-7$. W teraźnieyszym więc przykładzie zrównanie (5) będzie $8p^3+42p-148=0$ czyli $4p^3+21p-74=0$. Postąpiwszy według reguły podanéy na dochodzenie pierwiastków wymiernych w zrównaniu liczebném, znaydziemy $p=2$, przeto $q=p^2-c=4+7=11$; $\sqrt[3]{(148+46\sqrt{11})}=\sqrt[3]{2}.(2+\sqrt{11})$

II. $\sqrt[3]{(7+5\sqrt{2})}$; $A^2-B=49-50=-1$; więc potrzeba założyć $r=1$; ztąd $c=-1$. Zrównanie (5) zamieni się na $4p^3+3p-7=0$ i może się sprawdzić przez $p=1$; $q=p^2-c=1+1=2$; $\sqrt[3]{(7+5\sqrt{2})}=1+\sqrt{2}$.

www.rcin.org.pl

*Wyciąganie pierwiastku potęgi* n.

Wyłożony dopiéro sposób na wyciąganie pierwiastku sześciennego z funkcyi $A+\sqrt{B}$ może bydź ze stosowną odmianą użyty do szukania pierwiastku iakieykolwiek potęgi $n$ z teyże funkcyi. Takowy pierwiastek da się wystawić przez $\sqrt[n]{r}.(p+\sqrt{q})$. Podniosłszy obie strony zrównania $\sqrt[n]{(A+\sqrt{B})}=\sqrt[n]{r}.(p+\sqrt{q})$ do potęgi $n$ i potém równaiąc z sobą termi-ny wymierne i niewymierne, otrzymamy

$$A=r[p^n+\frac{n(n-1)}{1.\ 2}p^{n-2}q+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}p^{n-4}q^2$$
$$+\text{ itd}]\ \ldots\ldots\ldots\ (6),$$
$$\sqrt{B}=r[np^{n-1}\sqrt{q}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}p^{n-3}q\sqrt{q}+\text{ itd}]\ \ldots\ (7).$$

Łatwo się przekonać, że szereg zamknięty nawiasami w zrównaniu (6) iest równy $\frac{1}{2}[(p+\sqrt{q})^n+(p-\sqrt{q})^n]$, a szereg w zrównaniu (7) iest podobnież równy $\frac{1}{2}[(p+\sqrt{q})^n-(p-\sqrt{q})^n]$; zatém

$$A=\tfrac{1}{2}r[(p+\sqrt{q})^n+(p-\sqrt{q})^n],$$
$$\sqrt{B}=\tfrac{1}{2}r[(p+\sqrt{q})^n-(p-\sqrt{q})^n].$$

Te dwa zrównania wynosząc do kwadratu i potém odciągaiąc znaydziemy po uproszczeniu

$$A^2-B=r^2(p^2-q)^n,\ \text{zkąd}\ p^2-q=\sqrt[n]{\left(\frac{A^2-B}{r^2}\right)}$$
$$=\frac{1}{r}\sqrt[n]{(A^2-B)r^{n-2}}.$$

Tu na ilość $r$ potrzeba dobrać taką wartość aby $(A^2-B)r^{n-2}$ było zupełną potęgą $n$. Na ten koniec należy $A^2-B$ rozłożyć na dwa mnożniki, z którychby ieden był zupełną potęgą $n$, a drugi iakikolwiek: ieżeli drugi iest dokładnym kwadratem, a tém samém kiedy $A^2-B$ da się wystawić przez $a^n b^2$; wtedy za $r$ potrzeba wziąć $b$ i wypadnie $a^n b^n$ na mieyscu $(A^2-B)r^{n-2}$: kiedy zaś drugi mnożnik nie będzie kwadratem, wtenczas dobranie stosowney wartości na $r$ a następnie i zamierzone wyciąganie pierwiastku z $A+\sqrt{B}$ iest niepodobne do uskutecznienia. W piérwszym razie uczyniwszy wartość wymierną funkcyi $\frac{1}{r}\sqrt[n]{(A^2-B)r^{n-2}}=c$,

www.rcin.org.pl

będzie $p^2-q=c$, zkąd $q=p^2-c$; co podstawiwszy w (6) otrzymamy zrównanie z samą ilością nieznaną $p$, które pokaże się bydź stopnia $n$. Z tego zrównania potrzeba szukać wartości wymierney na $p$ i z nią daléy postąpić iak w dochodzeniu pierwiastku sześciennego.

*Przykład.* $\sqrt[5]{(228+132\sqrt{3})}$; $A=228$, $\sqrt{B}=132\sqrt{3}=\sqrt{52272}$; $A^2-B=51984-52272=-288=-32.9=-2^5.3^2$; więc $r=3$, $\frac{1}{r}\sqrt[5]{(A^2-B)r^3}=\frac{1}{3}\sqrt[5]{-2^5.3^5}=-2$; przeto $c=-2$; $q=p+2$. To podstawiwszy w zrównaniu (6), które stosownie do teraźnieyszego przykładu zamienia się na $228=3(p^5+10p^3q+5pq^2)$, będziemy mieli $228=3(16p^5+40p^3+20p)$ czyli $4p^5+10p^3+5p-19=0$. Ztąd znaydziemy $p=1$; zatém $q=p^2+2=3$, a następnie

$$\sqrt[5]{(228+132\sqrt{3})}=\sqrt[5]{3}.(1+\sqrt{3}).$$

§ 5. *Każde wyrażenie uroione daie się przywieść do wzoru* $a+b\sqrt{-1}$, *w którym* a *i* b *są rzetelne.*

Wszystkie ilości uroione $\sqrt{-a}$, $\sqrt[4]{-b}$, $\sqrt[6]{-c}$, $\sqrt[8]{-d}$, itd, zamykaią się w ogólnym wzorze $\sqrt[2^n.k]{-U}$ gdzie $k$ i $n$ są całkie, i $k$ nieparzyste. Ten wzór może się wystawić tak $\sqrt[2^n.k]{U}.\sqrt[2^n k]{-1}$ czyli $\sqrt[2^n k]{U}.\sqrt[2^n]{(\sqrt[k]{-1})}$; lecz $\sqrt[k]{-1}=-1$; przeto wzór ilości uroionych weźmie postać $\sqrt[2^n k]{U}.\sqrt[2^n]{-1}$, albo $W\sqrt[2^n]{-1}$ gdzie $W$ zastępuie mieysce ilości rzetelnéy $\sqrt[2^n k]{U}$. Zaraz okażemy, iż $\sqrt[2^n]{-1}$ przywieść się może do wyrażenia zawieraiącego uroioną iedność potęgi tylko drugiéy. Do tego nam posłuży zrównanie otrzymane w §fie poprzedzaiącym



www.rcin.org.pl

$$\sqrt{(A+\sqrt{B})}=\sqrt{\left(\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}\right)};$$

tu za $B$ położywszy $-C^2$, wypadnie

$$\sqrt{(A+C\sqrt{-1})}=\sqrt{\left(\frac{A+\sqrt{A^2+C^2}}{2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{A-\sqrt{A^2+C^2}}{2}\right)} \ldots (g').$$

Wyraz $\sqrt{\left(\frac{A+\sqrt{A^2+C^2}}{2}\right)}$ iest rzetelny; nazwiymy go dla skrócenia przez $D$. Wyraz zaś $\sqrt{\left(\frac{A-\sqrt{A^2+C^2}}{2}\right)}$ iest urojony, bo $A<\sqrt{A^2+C^2}$; dawszy mu kształt $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{A^2+C^2}-A}{2}\right)}.\sqrt{-1}$, i nazwawszy mnożnik rzetelny $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{A^2+C^2}-A}{2}\right)}$ przez $E$, będzie

$$\sqrt{(A+C\sqrt{-1})}=D+E\sqrt{-1} \ldots\ldots (h').$$

Podobnie

$$\sqrt{(D+E\sqrt{-1})}=F+G\sqrt{-1} \ldots\ldots (k'),$$

gdzie $F$ i $G$ tak są złożone z $D$ i $E$ iak $D$ i $E$ z $A$ i $C$. Będzie także

$$\sqrt{(F+G\sqrt{-1})}=K+L\sqrt{-1} \ldots\ldots (m'),$$

i tak daléy. Wyciągaiąc z obu stron w zrównaniu $(h')$ pierwiastek kwadratowy, otrzymamy

$$\sqrt[2^2]{(A+C\sqrt{-1})}=\sqrt{(D+E\sqrt{-1})},$$

czyli na mocy zrównania $(k')$

$$\sqrt[2^2]{(A+C\sqrt{-1})}=F+G\sqrt{-1}.$$

W tém ostatniém zrównaniu wyciągnąwszy znowu pierwiastek kwadratowy z obu stron, mamy

$$\sqrt[2^3]{(A+C\sqrt{-1})}=\sqrt{(F+G\sqrt{-1})};$$

tu za drugą stronę wziąwszy iéy wartość ze zrównania $(m')$, wypadnie

$$\sqrt[2^3]{(A+C\sqrt{-1})}=K+L\sqrt{-1}.$$

Ztąd już możemy wnieść ogólnie, że

www.rcin.org.pl

$$\sqrt[2^n]{(A+C\sqrt{-1})}=P+Q\sqrt{-1} \; . \; . \; . \; . \; . \; (n');$$

toiest, *pierwiastek potęgi cechowanéy wykładnikiem* $2^n$ *wyciągniony z funkcyi podpadaiącéy pod wzór* $a+b\sqrt{-1}$ *należy także do tego wzoru.*

Po takiém przygotowaniu załòżmy że $A=0$, $C=1$; zrównanie $(g')$ zamieni się na

$$\sqrt{(\sqrt{-1})}=\sqrt{(\frac{\sqrt{1}}{2})}+\sqrt{(\frac{-\sqrt{1}}{2})}$$

czyli

$$\sqrt[2^2]{-1}=\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\sqrt{\tfrac{1}{2}}.\sqrt{-1} \; . \; . \; . \; . \; . \; (p');$$

przeto

$$\sqrt[2^3]{-1}=\sqrt{(\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\sqrt{\tfrac{1}{2}}.\sqrt{-1})},$$

$$\sqrt[2^4]{-1}=\sqrt[4]{(\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\sqrt{\tfrac{1}{2}}.\sqrt{-1})}.$$

itd.

Druga strona zrównania $(p')$ należy do wzoru $a+b\sqrt{-1}$, więc i wyciągnione z niéy pierwiastki potęgi drugiéy, czwartéy, ósméy, itd, będą tegoż wzoru: toiest wyrażenia $\sqrt[2^3]{-1}$, $\sqrt[2^4]{-1}$, $\sqrt[2^5]{-1}$, . . . . . $\sqrt[2^n]{-1}$ mogą się zamienić na postać $a+b\sqrt{-1}$. Ztąd się pokazuie, że wzór ilości uroionych $W\sqrt[2^n]{-1}$ daiąc się przerobić na $aW+bW\sqrt{-1}$ ma kształt $a+b\sqrt{-1}$. J iakiebykolwiek było wyrażenie, np. $A+\sqrt{-B}+\sqrt[4]{-C}+$ itd, zamykaiące funkcyą rzetelną $A$ i funkcye uroione rozmaitych potęg: kiedy zamienimy iednę z funkcyy uroionych na $p+q\sqrt{-1}$, drugą na $r+s\sqrt{-1}$, itd; wyrażenie dane przybierze postać $(A+p+r+\ldots)+(q+s+\ldots)\sqrt{-1}$ podległą wzorowi $a+b\sqrt{-1}$.

Jeżeli z wyrażeniami uroionémi przywiedzionémi do kształtu $a+b\sqrt{-1}$ wykonywać będziemy rozmaite działania algebraiczne; zawsze wypadek będzie miał postać $a+b\sqrt{-1}$. J tak

I. $(m+n\sqrt{-1})+(p+q\sqrt{-1})=(m+p)+(n+q)\sqrt{-1}$.

II. $(m+n\sqrt{-1})-(p+q\sqrt{-1})=(m-p)+(n-q)\sqrt{-1}$.

III. $(m+n\sqrt{-1})(p+q\sqrt{-1})=mp+mq\sqrt{-1}+np\sqrt{-1}-nq$
$=(mp-nq)+(mq+np)\sqrt{-1}$.

www.rcin.org.pl

IV. $\frac{m+n\sqrt{-1}}{p+q\sqrt{-1}}=\frac{(m+n\sqrt{-1})(p-q\sqrt{-1})}{(p+q\sqrt{-1})(p-q\sqrt{-1})}=(\frac{mp+nq}{p^2+q^2})$
$+(\frac{np-mq}{p^2+q^2})\sqrt{-1}$.

V. $(p+q\sqrt{-1})^m=p^m+mp^{m-1}q\sqrt{-1}-\frac{m(m-1)}{1.\ 2}p^{m-2}q^2$
$-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}p^{m-3}q^3\sqrt{-1}+$ itd;

nazwawszy w rozwinieniu zbiór wyrazów rzetelnych przez $r$, uroionych przez $u\sqrt{-1}$; wypadek przyymie kształt $r+u\sqrt{-1}$.

VI. $\frac{1}{(p+q\sqrt{-1})^m}$ mogąc się zamienić podług poprzedzaiącego przykładu na $\frac{1}{r+u\sqrt{-1}}$, a następnie na $\frac{r-u\sqrt{-1}}{(r+u\sqrt{-1})(r-u\sqrt{-1})}$ czyli $\frac{r-u\sqrt{-1}}{r^2+u^2}$ bierze nareszcie postać $\frac{r}{r^2+u^2}-\frac{u}{r^2+u^2}.\sqrt{-1}$ podpadaiącą pod wzór $a+b\sqrt{-1}$.

VII. Pozostała nam ieszcze do oznaczenia postać pierwiastku iakieykolwiek potęgi wyciągnionego z funkcyi $a+b\sqrt{-1}$. Wykładnik znaku pierwiastkowego może się wystawić nayogólniéy przez $2^n k$ gdzie $k$ iest iakąkolwiek liczbą nieparzystą. Będziemy więc mieli do uwagi wyrażenie $\sqrt[2^nk]{(a+b\sqrt{-1})}$. To wyrażenie znaczy iedno co $\sqrt[k]{[\sqrt[2^n]{(a+b\sqrt{-1})}]}$. A ponieważ, podług wyprowadzonego wyżéy zrównania ( $n'$ ), pierwiastek potęgi $2^n$ z funkcyi $a+b\sqrt{-1}$ ma kształt $a+b\sqrt{-1}$; możemy więc ten pierwiastek nazwać przez $A+C\sqrt{-1}$, i będzie $\sqrt[2^nk]{(a+b\sqrt{-1})}=\sqrt[k]{[\sqrt[2^n]{(a+b\sqrt{-1})}]}=\sqrt[k]{(A+C\sqrt{-1})}$. Cała przeto rzecz do tego się przywodzi, aby dowieść że z funkcyi $A+C\sqrt{-1}$ wyciągniony pierwiastek iakieykolwiek potęgi nieparzystéy należy do wzoru $a+b\sqrt{-1}$. Widzieliśmy w §fie poprzedzaiącym, że pierwiastek iakieykolwiek potęgi $n$ z funkcyi $A+\sqrt{B}$ może się wystawić przez $\sqrt[n]{r}.(p+\sqrt{q})$.

Połóżmy $-C^2$ na mieyscu $B$: funkcya $A+\sqrt{B}$ zamieni się na $A+C\sqrt{-1}$. Okażemy następnie że i funkcyi odmienionéy $A+C\sqrt{-1}$ pierwiastek potęgi nieparzystéy iakieykolwiek $n$ będzie miał zawsze kształt $\sqrt[n]{r}.(p+\sqrt{q})$, toiest

$$\sqrt[n]{(A+C\sqrt{-1})}=\sqrt[n]{r}.(p+\sqrt{q}),$$

tylko że w tym razie $q$ bydź musi koniecznie odiemne. Podnosząc w ostatniém zrównaniu obie strony do potęgi $n$, i potém równaiąc terminy wymierne z sobą a pozostałe z sobą, otrzymamy

$$A=r[p^n+\frac{n(n-1)}{1.\ 2}p^{n-2}q+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}p^{n-4}q^2 + \text{itd.}] \ldots\ldots (q'),$$

$$C\sqrt{-1}=r[np^{n-1}\sqrt{q}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}p^{n-3}q\sqrt{q}+\text{itd}]\ldots (r').$$

Z tych dwóch zrównań, podobnie iak w §*fie* poprzedzaiącym, znaydziemy że

$$A^2-(C\sqrt{-1})^2 \quad \text{czyli} \quad A^2+C^2=r^2(p^2-q)^n;$$

zkąd $p^2-q=\sqrt[n]{(\frac{A^2+C^2}{r^2})}$: tu druga strona czasem bydź może wymierną a czasem niewymierną, ale iest koniecznie rzetelną; nazwawszy ią przez $c$, będzie $p^2-q=c$, $q=p^2-c$. Kładąc za $q$ to ostatnie wyrażenie w zrównaniu $(q')$, otrzymamy zrównanie z samą ilością nieznaną $p$, które będzie stopnia $n$. Ze zaś $n$ iest z założenia nieparzyste; a dowiedliśmy w rozdziale trzecim, że każde zrównanie stopnia nieparzystego ze spółczynnikami rzetelnémi ma przynaymniéy ieden pierwiastek rzetelny; musi bydź przeto iedna przynaymniéy wartość na $p$ rzetelna; tę wartość wyraźmy przez $a$. Ztąd $q=a^2-c$ iest także rzetelne. Zrównanie $(r')$ wystawione pod postacią

$$C\sqrt{-1}=r[np^{n-1}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}p^{n-3}q+\text{itd}]\sqrt{q}$$

po wyniesieniu obu stron do potęgi drugiéy daie

$$-C^2=r^2[np^{n-1}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}p^{n-3}q+\text{itd}]^2q;$$

zatém

www.rcin.org.pl

$$q = \frac{-C^2}{r^2[np^{n-1}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}p^{n-3}q+\text{ itd }]^2}.$$

Tu na drugiéy stronie mianownik iest dodatny, iako kwadrat z wyrażenia do którego składu wchodzą same ilości rzetelne; licznik zaś iest odiemny. Przeto wartość na $q$ iest odiemna: nazwiymy ią przez $-b^2$. W zrównaniu $\sqrt[n]{(A+C\sqrt{-1})}=\sqrt[n]{r}.(p+\sqrt{q})$ położywszy $a$ za $p$, $-b^2$ za $q$; będzie

$$\sqrt[n]{(A+C\sqrt{-1})}=\sqrt[n]{r}.(a+b\sqrt{-1})=a\sqrt[n]{r}+b\sqrt[n]{r}.\sqrt{-1}.$$

Znosząc z sobą wszystkie wypadki w teraźnieyszym §*fie* otrzymane, możemy już powziąć gruntowne przekonanie, że nie masz wyrażenia uroionego, któreby się pod wzór $a+b\sqrt{-1}$ podciągnąć nie dało.

## § 6. *Rozwiązanie pytań nieoznaczonych piérwszego i drugiego stopnia.*

Lubo w ogólności pytaniom nieoznaczonym, toiest dostarczaiącym warunkami swoiémi mniéy zrównań niżeli iest ilości nieznanych, służy nieskończona liczba odpowiedzi; częstokroć atoli się zdarza, iż gatunek ilości niewiadomych ogranicza znacznie takową liczbę, gdyż dołącza pytaniu pewne szczególne warunki, które do osobnych zrównań nie prowadzą, a którym iednak powinno także stać się zadosyć. Jeżeli np. ilości niewiadome oznaczaią liczbę ludzi, wtedy wartości tylko całkie i dodatne brane bydź powinny. Przy takim warunku trafia się czasem, że liczba odpowiedzi ieszcze będzie nieskończona; czasem się staie bardzo określoną; a niekiedy nawet niepodobna mieć ani iednéy odpowiedzi zaspokaiaiącéy ten warunek.

### I.

Przedmiotem rozwiązania zagadnień nieoznaczonych piérwszego stopnia iest wynalezienie wszystkich odpowiedzi wyrażonych przez liczby całkie i dodatne.

1). Weźmy naprzód pod uwagę pytania tego rodzaiu nay-

www.rcin.org.pl

prostsze, które zamykaią dwie ilości nieznane powiązane z sobą iedném zrównaniem. Każde takowe zrównanie zawiéra się we wzorze

$$ax+by=c,$$

gdzie $a$, $b$, $c$ są liczby całkie dodatne lub odiemne. Zeby ten wzór mógł wydać wartości na $x$ i na $y$ całkie, potrzeba aby spółczynniki $a$ i $b$ albo żadnego spólnego dzielnika nie miały, albo żeby i wyraz $c$ dał się przezeń bez reszty podzielić. Przypuściwszy bowiem że $a=km$, $b=kn$; będzie $kmx+kny=c$, zkąd $mx+ny=\frac{c}{k}$: nie podobnaby więc ilościom $x$, $y$ mieć wartości całkich, ieżeliby $c$ nie było rozdzielne przez $k$. Nayprościéy rozwiązuie się zrównanie $ax+by=c$ gdy ieden ze spółczynników $a$ i $b$ iest iednością: ieżeli np. $a=1$, będzie

$$x=c-by;$$

tu liczbom całkim wziętym za $y$ odpowiadaią oczywiście wartości całkie na $x$, a z pomiędzy nich łatwo iest wybrać same tylko dodatne. Gdy ani $a$ ani $b$ nie iest iednością; wtedy starać się należy uczynić rozwiązanie zrównania $ax+by=c$ zawisłém od takiego, w którémby ieden ze spółczynników był koniecznie równy iedności. Zeby iasno poiąć koléy rachunku maiącego się odbyć w tym celu, zaczniymy od zagadnienia szczególnego. *Kupuie się pewna liczba koni i wołów za* 1770 *rubli: cena konia iest rubli* 31, *wołu* 21. *Jleż kupiono wołów, a ile koni?* Nazwawszy liczbę wołów przez $x$, koni przez $y$; będzie summa rubli za woły $21x$, za konie $31y$: z obu tych summ powstaie rubli 1770. Ztąd wynika zrównanie

$$21x+31y=1770 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Staraymy się naprzód wynaleźć wzory daiące wszystkie wartości na $x$ i $y$ całkie, z pomiędzy których będziemy potém mogli odłączyć i pobrać same tylko dodatne. Wyciągaiąc wartość na ilość $x$, któréy spółczynnik iest mnieyszy, mamy $x=\frac{1770-31y}{21}$. Uskuteczniwszy, ile można, dzielenie na spółczynniku $y$, wypada

$$x=-y+\frac{1770-10y}{21}.$$

www.rcin.org.pl

Tu widzimy że $x$ będzie całkie, ieżeli $y$ będzie liczbą całą taką, aby uczyniła całością wyrażenie $\frac{1770-10y}{21}$.

Niech $p$ oznacza tę całość; toiest niech $\frac{1770-10p}{21}=p$:

zatém $1770-10y=21p$ czyli

$$10y+21p=1770 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

a wartość na $x$ staie się

$$x=-y+p \quad \ldots\ldots\ldots \quad (*).$$

Wszelka wartość całka ilości $p$, która podstawiona w zrównaniu (2) sprawi że wydobyta z tego zrównania wartość $y$ będzie całka, uczyni tém samém całością ilość $x$ iak pokazuie zrównanie (*). Takiéy wartości na $p$ odpowiadaiące wartości $x$, $y$ sprawdzą zrównanie (1), które oczywiście wypada przez eliminacyą $p$ z dwóch zrównań (2) i (*). Pytanie więc nasze zostaie przywiedzione do tego, żeby rozwiązać w liczbach całych zrównanie (2) maiące dwie ilości nieznane $y$, $p$ ze spółczynnikami prostszémi niż są w zrównaniu (1). Postępuiąc ze zrównaniem (2) podobnie iak z (1) wydobędziemy naprzód

$$y=\frac{1770-21p}{10};$$

potém wykonawszy w części dzielenie na spółczynniku ilości $p$, otrzymamy

$$y=-2p+\frac{1770-p}{10}.$$

Ten wypadek pokazuie, że każda wartość całka, która uczyni wyrażenie $\frac{1770-p}{10}$ całością, da na wartość $y$ liczbę całą, a zatém będzie właśnie taka iakiéy potrzebuiemy

Połóżmy $\frac{1770-p}{10}=p'$; ztąd $1770-p=10p'$ czyli

$$p+10p'=1770 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

$$y=-2p+p' \quad \ldots\ldots \quad (**).$$

Jak zrównanie (1) zawisło w swoiém rozwiązaniu od (2), tak (2) zależy od (3). Zrównanie (3) maiąc spółczynnik przy $p$ równy iedności, iest w takim przypadku o iakim mówiliśmy na początku. W niém każda wartość całka $p'$

www.rcin.org.pl

daie wartość całką na $p$. Te wartości podstawione w (**) uczynią $y$ całością; następnie wartość na $x$ wyrażona przez $y$ i $p$ w zrównaniu (*) będzie także całka. Jlości nieznane *główne* $x$, $y$, oraz ilości $p$, $p'$ które nazywaią się ilościami *nieznanémi pośredniemi* są powiązane z sobą przez zrównania (*), (**), (3). Za pomocą tych zrównań można ilości $x$, $y$ wyrazić przez funkcye ostatniéy ilości pośredniéy $p'$. Jakoż z (3) mamy $p=1770-10p'$; co podstawiwszy w (**), wypada

$$y=-2.1770+21p' \text{ czyli } y=-3540+21p' \;\ldots\; (\alpha).$$

Tę znowu wartość na $y$ i poprzedzaiącą na $p$ włożywszy w (*), otrzymamy

$$x=3.1770-31p' \text{ czyli } x=5310-31p' \;\ldots\; (\beta).$$

Wzory ($\alpha$) i ($\beta$) ogarniaią w sobie wszystkie układy wartości całkich $x$, $y$ czyniace zadosyć zrównaniu (1). Dla ich otrzymania potrzeba za $p'$ brać następnie wszystkie liczby całkie 0, 1, 2, 3, . . . —1, —2, . . . ; takowych przeto układów iest mnóstwo nieskończone. Ale kiedy przydamy warunek, żeby $x$, $y$ były ieszcze i dodatne, czego koniecznie gatunek tych ilości w teraźnieyszém zagadnieniu wymaga; wtedy należy takie tylko nadawać wartości na $p'$, aby było

$$\left.\begin{array}{l} 21p'>3540 \\ 31p'<5310 \end{array}\right| \text{ czyli } \left.\begin{array}{l} p'>\dfrac{3540}{21} \\ p'<\dfrac{5310}{31} \end{array}\right| \text{ czyli ieszcze } \begin{array}{l} p'>168+\frac{4}{7}, \\ p'<171+\frac{9}{31}; \end{array}$$

przeto $p'$ może mieć tylko trzy wartości 169, 170 i 171. Piérwsza daie $x=71$, $y=9$; druga $x=40$, $y=30$; trzecia $x=9$, $y=51$. Pytaniu więc teraźnieyszemu odpowiedzieć można troiakim sposobem przez trzy dopiéro wskazane układy wartości na $x$, $y$. Gdybyśmy na mieyscu liczby 1770 wzięli 300, znaleźlibyśmy że pytanie mogłoby mieć tylko iednę odpowiedź; byłoby więc zupełnie oznaczone. Wziąwszy liczbę 100; pytanie żadnegoby układu całkich i dodatnych wartości na $x$, $y$ przyiąć nie mogło, a zatém byłoby niepodobne.

2). Przenieśmy teraz sposoby i rozumowania użyte w rozwiązaniu poprzedzaiącego zagadnienia do ogólnego wzoru

$$ax+by=c \;\ldots\ldots\; (1),$$

w którym załóżmy że $a < b$: wydobywaiąc wartość na $x$, mamy $x = \frac{c - by}{a}$. Daymy że z dzielenia $b$ przez $a$ otrzymuie się wieloraz $w$ i zostaie reszta $r$; zatém $x = -wy + \frac{c - ry}{a}$ albo

$$x = -wy + p \;.\;.\;.\;.\;.\; (*)$$

czyniąc $\frac{c - ry}{a} = p$. Stosownie do powyższych uwag, rozwiązanie w liczbach całkich zrównania (1) zawisło od podobnegoż rozwiązania zrównania $\frac{c - ry}{a} = p$ czyli

$$ry + ap = c \;.\;.\;.\;. (2).$$

Z tego zrównania wypada $y = \frac{c - ap}{r}$. Nazwawszy $w'$ wieloraz a $r'$ resztę z podzielenia $a$ przez $r$, będzie $y = -w'p + \frac{c - r'p}{r}$ albo

$$y = -w'p + p' \;.\;.\;.\;.\;.\; (**),$$

czyniąc $\frac{c - r'p}{r} = p'$. Od rozwiązania w liczbach całych zrównania $\frac{c - r'p}{r} = p'$ czyli

$$r'p + rp' = c \;.\;.\;.\;.\;.\; (3)$$

zależy podobneż rozwiązanie zrównania (2), a od tego znowu zależy odkrycie wartości całkich na $x$, $y$ czyli rozwiązanie zrównania (1). Zrównanie (3), w którém $r'$ iest mnieysze od $r$ daie $p = \frac{c - rp'}{r'}$. Niech $w''$ znaczy wieloraz a $r''$ resztę z podzielenia $r$ przez $r'$; będziemy mieli $p = -w''p' + \frac{c - r''p'}{r'}$ albo

$$p = -w''p' + p'' \;.\;.\;.\;.\;.\; (***),$$

kładąc $\frac{c - r''p'}{r'} = p''$. Od zrównania $\frac{c - r''p'}{r'} = p''$ czyli

$$r''p' + r'p'' = c \;.\;.\;.\;.\;.\; (4)$$

www.rcin.org.pl

postępuiąc ciągle tą samą drogą otrzymamy naprzód zrównanie

$$r'''p''+r''p'''=c \; . \; . \; . \; . \; . \; (5),$$

potém zrównanie

$$r''''p'''+r'''p''''=c \; . \; . \; . \; . \; . \; (6),$$

itd;

a zawsze od rozwiązania w liczbach całych każdego z tych zrównań zależéć będzie rozwiązanie wszystkich poprzedzaiących (1), (2), (3), itd.

Ponieważ $r$ iest resztą z podzielenia $b$ przez $a$, $r'$ iest resztą z podzielenia $a$ przez $r$, itd; więc te reszty są też same przez iakie przechodzimy w szukaniu naywiększego dzielnika spólnego ilościom $a$ i $b$. Lecz że ilości $a$ i $b$ żadnego spólnego dzielnika mieć nie powinny; ostatnia przeto reszta musi bydź iednością. Idzie zatém, że musimy pomiędzy zrównaniami (1), (2), (3), .... trafić na takie w którém spółczynnik przedostatniéy ilości pośredniéy $p$ z pewną liczbą kresek będzie iednością. Każda więc wartość całka ostatniego $p$ wyda w tém zrównaniu wartość całką na $p$ przedostatnie; to znowu wyda liczby całe na $p$ poprzedzaiące, itd aż do $p$ bez kresek, które będąc całkie wyda nareszcie podobneż wartości na $x$, $y$. Za pomocą końcowego zrównania oraz zrównań (*), (**), (***), .... przyydziemy do wyrażenia ilości $x$, $y$ przez funkcye ostatniéy ilości pośredniéy $p$. Poczém przypuszczaiąc rozmaite wartości całkie na to $p$, otrzymamy podobneż na $x$, $y$, z których będziemy mogli wybrać same dodatne, iakośmy w rozwiązanym przykładzie uczynili.

3). Daymy że ieden z układów wartości całkich $x$, $y$ sprawdzaiących zrównanie

$$ax+by=c \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

iest $x=\alpha$, $y=\beta$, gdzie $\alpha$ i $\beta$ są dodatne lub odiemne. Zatém $a\alpha+b\beta=c$: to odciągnąwszy od (1) będziemy mieli

$$a(x-\alpha)+b(y-\beta)=0 \; . \; . \; . \; . \; . \; (2),$$

zkąd

$$x-\alpha=-\frac{b(y-\beta)}{a} \; . \; . \; . \; . \; . \; (3).$$

Zeby wartość na $x$ odpowiadaiąca wartości całkiéy na $y$ była sama całką, potrzeba, iak widzimy, aby $b(y-\beta)$ było rozdzielne przez $a$; lecz $b$ nie da się zupełnie rozdzielić

www.rcin.org.pl

przez $a$, gdyż $a$ i $b$ nie powinny mieć żadnego spólnego dzielnika; więc potrzeba aby $\gamma-\beta$ było wielokrotne względem $a$, toiest żeby było

$$\gamma-\beta=ap \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

gdzie $p$ wyraża iakąkolwiek liczbę całą; tę wartość podstawmy w (3); wypadnie

$$x-\alpha=-bp \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Ze (4) i (5) wyciągamy

$$\left.\begin{array}{l} \gamma=\beta+ap \\ x=\alpha-bp \end{array}\right| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a).$$

Gdybyśmy ze zrównania (2) wydobyli $\gamma-\beta=-\frac{a(x-\alpha)}{b}$ i założyli $x-\alpha=bp$, zkąd $\gamma-\beta=-ap$, przyszlibyśmy do

$$\left.\begin{array}{l} x=\alpha+bp \\ \gamma=\beta-ap \end{array}\right| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b).$$

Łatwo się przekonać że tak wartości ($a$) iak ($b$) podstawione w zrównaniu (1) uczynią mu zadosyć nie zależnie od $p$. Z podstawienia np. wartości ($a$) wypada $a\alpha+abp+\beta b-abp=c$ czyli $a\alpha+b\beta=c$, co iest równością dokładną, gdyż podług założenia $\alpha$ i $\beta$ stanowią iedno rozwiązanie zrównania danego. Przeto każdy ze wzorów ($a$) i ($b$) zamykaiących w sobie ilość dowolną $p$ obeymuie wszystkie układy wartości całkich na $x$, $\gamma$. Te układy wyciągniemy biorąc za $p$ wszelkie liczby całe tak dodatne iak odiemne.

Tu ieszcze postrzegamy, że maiąc ieden układ wiadomy $x=\alpha$, $\gamma=\beta$; dla otrzymania wzorów na wszystkie układy, potrzeba do wartości $x$ toiest do $\alpha$ dołączyć ilość dowolną $p$ ze spółczynnikiem iaki ma ilość $\gamma$ w zrównaniu danem, a do wartości $\gamma$ toiest do $\beta$ dołączyć $p$ ze spółczynnikiem ilości $x$. Jeden z tych spółczynników powinien zachować swóy znak iaki ma w zrównaniu, drugi powinien bydź wzięty ze znakiem przeciwnym. Wiemy np. że zrównanie

$$21x+31\gamma=1770$$

sprawdza się przez układ $x=71$, $\gamma=9$. Więc wzory na wszystkie układy będą

$$x=71-31p,$$
$$\gamma=9+21p;$$

albo

$$x = 71 + 31p,$$
$$y = 9 - 21p.$$

Każdy z tych wzorów przyprowadzi do wypadków iednakich; bo oczywiście wartości na $x$, $y$ wydobyte z piérwszego przez branie liczb dodatnych za $p$ będą też same iakie wynikną ze wzoru drugiego kiedy za $p$ weźmiemy takież liczby odiemne. Używaiąc np. wzoru ($a$), gdy uczynimy $p = 0, 1, 2, 3, \ldots, \quad -1, -2, -3, \ldots,$ wypadnie

$$y = \beta,\ \beta + a,\ \beta + 2a,\ \beta + 3a, \ldots, \text{ i } y = \beta - a,\ \beta - 2a,\ \beta - 3a, \ldots,$$
$$x = \alpha,\ \alpha - b,\ \alpha - 2b,\ \alpha - 3b, \ldots, \quad x = \alpha + b,\ \alpha + 2b,\ \alpha + 3b, \ldots,$$

gdzie widzimy że odpowiadaiące sobie wartości na $x$, $y$, składaią dwa postępy arytmetyczne; w postępie złożonym z wartości $y$ wykładnikiem iest spółczynnik ilości $x$ i nawzaiem.

4). Ztąd wypada, że zupełne rozwiązanie zrównania $ax + by = c$ przywodzi się do odkrycia iednego układu wartości całkich na $x$, $y$; wszystkie bowiem inne można wyciągnąć ze wzorów

$$x = \alpha - bp, \quad y = \beta + ap.$$

Jeden zaś układ otrzymamy następuiącym sposobem. Ułamek $\frac{a}{b}$ rozwińmy na ciągły, i części coraz dłuższe ułamku ciągłego przeróbmy na ułamki pospolite. Ostatnim ułamkiem pospolitym będzie $\frac{a}{b}$: niech $\frac{m}{n}$ wyraża ułamek przedostatni. Wiémy że $\frac{a}{b} - \frac{m}{n} = \pm \frac{1}{bn}$ gdzie $+$ służy wtenczas kiedy $\frac{a}{b}$ w szeregu ułamków pospolitych iest na mieyscu parzystém, $-$ kiedy na nieparzystém. Daymy że mieysce ułamku $\frac{a}{b}$ iest parzyste, a zatém że $\frac{a}{b} - \frac{m}{n} = \frac{1}{bn}$; ztąd $an - bm = 1$. Tego ostatniego zrównania obie strony pomnóżmy przez $c$; będzie $acn - bcm = c$, co iest równością dokładną, a nie różni się od zrównania danego $ax + by = c$, tylko że ma $cn$ na mieyscu $x$, $-cm$ na mieyscu $y$. Zrównanie więc dane będzie sprawdzone kiedy

www.rcin.org.pl

uczynimy $x=cn$, $y=-cm$. Gdyby było $\frac{a}{b}-\frac{m}{n}=-\frac{1}{bn}$ czyli $an-bm=-1$; wtedy obie strony w ostatniem zrównaniu mnożą się przez $-c$, i wypada $-acn+bcm=c$; przeto ieden układ wartości na $x$, $y$ iest $x=-cn$, $y=cm$.

5). W zrównaniu $ax+by=c$ gdy $a$ i $b$ są ze znakiem $+$, tegoż znaku musi bydź $c$; bo inaczéy zrównanie nie mogłoby się sprawdzić przez żaden układ wartości na $x$, $y$ całkich i dodatnych. W tym razie ieden z układów otrzymany sposobem podanym w liczbie poprzedzaiącéy iest $x=cn$, $y=-cm$, lub $x=-cn$, $y=cm$ podług tego iak różnica $\frac{a}{b}-\frac{m}{n}$ czyli $\frac{1}{bn}$ iest dodatna lub odiemna. Zawsze wartości na $x$, $y$ tego układu różnią się w znaku. Wzór na wszystkie układy będzie

$$\begin{aligned} x&=cn-bp, \\ y&=-cm+ap, \end{aligned} \quad \text{lub} \quad \begin{aligned} x&=-cn+bp, \\ y&=cm-ap; \end{aligned}$$

gdzie widzimy że liczba rozwiązań całkich i dodatnych iest ograniczona, gdyż za $p$ nie mogą bydź brane tylko wartości dodatne obięte między granicami $\frac{cn}{b}$ i $\frac{cm}{a}$.

Gdy $a$ i $b$ są znaku różnego, wtedy $c$ może bydź odiemne; lecz w takim razie zawsze zrównanie da się przywieść do postaci $ax-by=c$ maiącéy $c$ dodatne. Jeżeli $\frac{a}{b}-\frac{m}{n}=+\frac{1}{bn}$ czyli $an-bm=1$, a następnie $acn-bcm=c$; iednym układem wartości na $x$, $y$ będzie $x=cn$, $y=cm$. Wtedy ze wzoru na wszystkie układy

$$\begin{aligned} x&=cn+bp \\ y&=cm+ap \end{aligned}$$

pokazuie się że liczba rozwiązań całkich i dodatnych iest nieskończona; bo za $p$ może bydź brana wszelka wartość dodatna; a nawet odiemna byle nie przewyższaiąca mnieyszéy z ilości $\frac{cn}{b}$ i $\frac{cm}{a}$. Gdy $\frac{a}{b}-\frac{m}{n}=-\frac{1}{bn}$ czyli $an-bm=-1$; naówczas $-acn+bcm=c$: ztąd wypada ieden układ $x=-cn$, $y=-cm$; i wzór na wszystkie układy

www.rcin.org.pl

$$x = -cn + bp$$
$$y = -cm + ap$$

znowu pokazuie że liczba rozwiązań całkich i dodatnych iest nieskończona, albowiem za $p$ może bydź wzięta wszelka liczba dodatna byle przewyższaiąca większą z ilości $\frac{cn}{b}$ i $\frac{cm}{a}$. Liczba więc układów wartości na $x$, $y$ całkich i dodatnych iest określona dla zrównania $ax+by=c$, a dla zrównania $ax-by=c$ iest nieskończona.

*Przykład I. W pewnéy kompanii zebrano na składkę złotych* 100; *każdy mężczyzna dał złotych* 5, *każda kobieta złotych* 3. *Jluż było mężczyzn, a ile kobiet?* Nazwawszy liczbę mężczyzn przez $x$, kobiet przez $y$, będzie zrównanie

$$5x+3y=100.$$

Ułamek $\frac{5}{3}$ rozwiia się na ciągły $1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}$. Ułamki pospolite równe coraz dłuższym iego częściom są $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{5}{3}$. Różnica między ostatnim i poprzedzaiącym $\frac{5}{3}-\frac{2}{1}=-\frac{1}{3}$. Ztąd $5.1-3.2=-1$, następnie $-5.100+3.200=100$. Jdzie zatém że ieden układ wartości całkich iest $x=-100$, $y=200$. Wszystkie zaś inne układy obeymuią się we wzorze

$$x=-100+3p, \quad y=200-5p.$$

Dla otrzymania wartości na $x$, $y$ nie tylko całkich ale ieszcze dodatnych, potrzeba za $p$ brać liczby całkie zawarte między $\frac{100}{3}$ i $\frac{200}{5}$ czyli między $33+\frac{1}{3}$ i 40, toiest liczby 34, 35, 36, 37, 38, 39. Ztąd wypadnie sześć odpowiedzi na dane pytanie

$$x=2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ 17.$$
$$y=30,\ 25,\ 20,\ 15,\ 10,\ 5.$$

*Przykład II. Wynaleźć liczbę, któraby rozdzielona przez* 7 *zostawiała na resztę* 6, *a rozdzielona przez* 11 *dawała resztę* 9. Nazwawszy wieloraz z piérwszego dzielenia przez $x$, z drugiego przez $y$; liczba szukana wyrazi się dwoiako, raz przez $7x+6$, drugi raz przez $11y+9$. Ztąd $7x+6=11y+9$ czyli

$$7x-11y=3.$$

www.rcin.org.pl

$$\frac{11}{7} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}} \; ; \quad \frac{1}{1}, \; \frac{2}{1}, \; \frac{3}{2}, \; \frac{11}{7}; \quad \frac{11}{7} - \frac{3}{2} = \frac{1}{7 \cdot 2};$$

$11.2-7.3=1$; $11.2.3-7.3.3=3$ czyli $-7.9+11.6=3$. Przeto $x=-9$; $y=-6$. We wzorze $x=-9+11p$, $y=-6+7p$, czyniąc $p=1, 2, 3, 4, \ldots$ będzie

$$x=2, \quad 13, \quad 24, \quad 35, \quad \ldots$$
$$y=1, \quad 8, \quad 15, \quad 22, \quad \ldots$$

Wartości na $x$ podstawuiąc w wyrażeniu liczby szukanéy $7x+6$, lub wartości na $y$ w wyrażeniu $11y+9$, otrzymamy odpowiedzi na dane pytanie

$$20, \quad 97, \quad 174, \quad 251, \ldots$$

których liczba będzie nieskończona.

6). Pod wyłożone teraz sposoby podpada rozwiązanie wszelkich zagadnień piérwszego stopnia, w których liczba zrównań iest tylko o iedność mnieysza od liczby ilości niewiadomych. Niech będą dwa zrównania

$$\left.\begin{array}{l} ax+by+cz=d \\ fx+gy+hz=k \end{array}\right| \ldots (1)$$

z trzema ilościami nieznanémi $x$, $y$, $z$. Wyrzuciwszy z nich $z$ przyydziemy do zrównania maiącego kształt

$$Ax+By=C \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

Rozwiązuiąc to zrównanie wskazaną powyżéy regułą otrzymamy wzory

$$\left.\begin{array}{l} x=\alpha+Bp \\ y=\beta-Ap \end{array}\right| \ldots (3),$$

w których każda wartość całka na $p$ wyda wartości całkie na $x$, $y$ czyniące zadosyć zrównaniu (2). Za $x$, $y$ podstawiwszy ich wyrażenia (3) w którémkolwiek ze zrównań (1) będziemy mieli na wypadek zrównanie z dwiema ilościami nieznanémi $z$, $p$, pod postacią

$$A'z+B'p=C'.$$

Znalazłszy stosowne do tego zrównania wzory

$$z=\alpha'+B'q \quad \ldots\ldots \quad (4)$$
$$p=\beta'-A'q,$$

kiedy za $p$ włożymy teraźnieyszą wartość w (3) wypadnie

$$x=\alpha+B\beta'-BA'q \quad \ldots\ldots \quad (5)$$
$$y=\beta-A\beta'+AA'q \quad \ldots\ldots \quad (6).$$

www.rcin.org.pl

W zrównaniach (4), (5), (6), ilości $x$, $y$, $z$ są wyrażone przez funkcye całkie ilości dowolnéy $q$: biorąc za $q$ wszystkie wartości całkie tak dodatne iak odiemne, otrzymamy wszystkie układy wartości całkich na $x$, $y$, $z$ czyniące zadosyć zrównaniom danym (1), a z pomiędzy tych wartości wybierzemy same dodatne iak w zagadnieniach poprzedniczych.

Łatwo iuż poznaiemy drogę rachunku, którą przebyć należy w rozwiązaniu pytań nieoznaczonych prowadzących swoiémi warunkami do iakieykolwiek liczby zrównań $n$ piérwszego stopnia z liczbą $n+1$ ilości nieznanych.

*Przykład. Za pewną liczbę koni, wołów i owiec zapłacono rubli* 158. *Każdy koń kosztował rubli* 19, *wół* 15, *owca* 2. *Liczba koni trzy razy była mnieysza od podwóynéy liczby wołów i owiec razem. Jleż kupiono sztuk każdego gatunku bydła?* Nazwawszy liczbę koni przez $x$, wołów przez $y$, owiec przez $z$, będziemy mieli zrównania

$$\left.\begin{array}{l} 19x+15y+2z=158 \\ x=\frac{2(y+z)}{3} \text{ czyli } 3x-2y-2z=0 \end{array}\right| \quad \ldots\ldots \quad (1).$$

Po wyrzuceniu $z$ otrzymamy $22x+13y=158$ albo

$$22x+13y=a$$

kładąc dla krótkości $a$ na mieyscu 158.

$$\frac{22}{13}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}}\,; \quad \frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{5}{3},\ \frac{22}{13}; \quad \frac{22}{13}-\frac{5}{3}=\frac{1}{13.3};$$

$22.3-13.5=1$; $22.3a-13.5a=a$; $x=3a$, $y=-5a$.

$$\left.\begin{array}{l} x=3a-13p \\ y=-5a+22p \end{array}\right| \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

Włożywszy te wartości w drugie ze zrównań (1), znaydziemy $83p+2z=19a$.

$$\frac{83}{2}=41+\tfrac{1}{2}; \quad \frac{41}{1},\ \frac{83}{2}; \quad \frac{83}{2}-\frac{41}{1}=\frac{1}{2.1}; \quad 83-2.41=1;$$

$83.19a-2.41.19a=19a$; $p=19a$, $z=-41.19a$.

$$\begin{array}{l} p=19a-2q \\ z=-41.19a+83q \quad \ldots\ldots \quad (3). \end{array}$$

Z podstawienia téy wartości na $p$ w (2) wypada



www.rcin.org.pl

$$\left.\begin{array}{l} x=3a-13.19a+13.2q \text{ czyli } x=-244a+26q, \\ y=-5a+22.19a-22.2q \text{ czyli } y=413a-44q; \\ \text{do czego przyłączywszy zrównanie (3) czyli} \\ \qquad\qquad z=-779a+83q \end{array}\right\} \ldots (4),$$

będziemy mieli wzór na wszystkie układy wartości całkich $x, y, z$. Te układy wyciągniemy biorąc rozmaite wartości całkie na $q$. Lecz żeby ilości $x, y, z$ były nie tylko całkie, ale ieszcze i dodatne, czego istotnie gatunek tych ilości wymaga, powinno $q$ uczynić zadosyć warunkom

$$q>\frac{244a}{26},\ q<\frac{413a}{44},\ q>\frac{779a}{83},$$

czyli

$$q>9a+\frac{5a}{13},\quad q<9a+\frac{17a}{44},\ q>9a+\frac{32a}{83}.$$

Ponieważ ułamek $\frac{32}{83}$ iest większy od $\frac{5}{13}$, gdy się więc spełni warunek ostatni, już będzie tém samém zachowany i piérwszy. Musi więc $q$ zaspokoić dwa warunki

$$q<9a+\frac{17a}{44};\ q>9a+\frac{32a}{83},$$

czyli po włożeniu wartości za $a$ musi bydź

$$q<1422+\frac{2686}{44},\ q>1422+\frac{5056}{83},$$

albo $q<1483+\frac{1}{22}$, $q>1482+\frac{76}{83}$.
Przeto za $q$ może tylko bydź wzięta liczba 1483. Tę liczbę podstawiwszy we wzorze (4) otrzymamy

$$x=6,\quad y=2,\quad z=7.$$

7). Jak się rozwiązuią zagadnienia, w których liczba ilości nieznanych przewyższa liczbę zrównań o dwie iedności, trzy, itd, obaczymy w następuiących przykładach.

*Przkład I. Wypłacić złotych 187 pieniędzmi troiakiego gatunku: pięćzłotówkami, talarami wartuiącémi po złotych sześć, i dukatami idącémi po złotych dwadzieścia. Po ileż sztuk z każdego gatunku dać wypadnie?* Liczbę pięćzłotówek wyraziwszy przez $x$, talarów przez $y$, dukatów przez $z$, będzie

$$5x+6y+20z=187.$$

czyli

$$5x+6y=187-20z \quad \ldots\ldots \quad (1).$$

www.rcin.org.pl

Uważaiąc ilość $z$ na chwilę za wiadomą, i w mieyscu $187-20z$ kładąc $c$, mamy

$$5x+6y=c$$

iedno zrównanie z dwiema ilościami nieznanémi, które rozwiążemy podług wskazanych wyżéy prawideł.

$\frac{6}{5}=1+\frac{1}{5}$; $\frac{1}{1}$, $\frac{6}{5}$; $\frac{6}{5}-\frac{1}{1}=\frac{1}{5}$; $6-5=1$; $-5c+6c=c$; $x=-c$, $y=c$;

$$x=-c+6p$$
$$y=c-5p.$$

Ztąd po wróceniu funkcyi $187-20z$ za $c$ otrzymuiemy

$$\left.\begin{array}{l} x=-187+20z+6p \\ y=187-20z-5p \end{array}\right| \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

Tu wszelkie liczby całkie wzięte za $p$ i $z$ wydadzą wartości całkie na $x$, $y$. Obrawszy iakąkolwiek wartość całką na $z$ np. $z=1$, a za $p$ kładąc rozmaite liczby całkie np. 0, 1, 2, 3, ..; wyciągniemy układy całkich wartości na $x$, $y$, $z$,

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $z=$ | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| $x=$ | $-167$ | $-161$ | $-155$ | $-149$ | itd. |
| $y=$ | 167 | 162 | 157 | 152 | |

czyniące zadosyć zrównaniu danemu. Jeżeli znowu uczynimy $z=2$, $p=0, 1, 2, ..$; wypadnie inny szereg układów: itd. Zostaie nam ieszcze do rozeznania, iakie liczby całkie brane bydź iedynie powinny za $p$ i $z$, żeby przyprowadziły do układów złożonych z wartości nie tylko całkich ale ieszcze i dodatnych. Zrównanie (1) pokazuie, że aby $x$, $y$ były dodatne, musi bydź dodatną funkcya $187-20z$; a następnie musi bydź $z<\frac{187}{20}$ czyli $z<9+\frac{7}{20}$: przeto na $z$ można tylko przypuszczać wartości 0, 1, 2; 3, ... 9. Gdy $z=0$; wtedy podług (2)

$$x=-187+6p$$
$$y=187-5p.$$

Ztąd dla otrzymania wartości dodatnych na $x$, $y$ trzeba za $p$ brać liczby zawarte między granicami $\frac{187}{6}$ i $\frac{187}{5}$ czyli między $31+\frac{1}{6}$ i $37+\frac{2}{5}$, toiest trzeba za $p$ podstawiać koleią liczby 32, 33, 34, 35. 36, 37. Tak przyydziemy do sześciu układów

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $z=0$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $x=5$ | 11 | 17 | 23 | 29 | 35 |
| $y=27$ | 22 | 17 | 12 | 7 | 2 . |

Podobniebyśmy znaleźli że układy, do których wchodzi $z=1$, są

www.rcin.org.pl

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $z=1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $x=1$ | 7 | 13 | 19 | 25 | 31 |
| $y=27$ | 22 | 17 | 12 | 7 | 2 |

Takim sposobem przeszedłszy przez wszystkie następne wartości $z$, toiest 2, 3, 4,... 9, odkrylibyśmy wszystkie odpowiedzi danemu pytaniu.

*Przykład II. Płacąc konie po* 10 *czer. złł, woły po* 5 *czer. złł, krowy po* 2 *czer. złł, owce po* $\frac{1}{2}$ *czer. zł, wydano* 100 *czer. złł. Zakupiono wszystkich sztuk ogółem* 100. *Jleż ich było w każdym gatunku?* Nazwawszy ilości szukane przez $x$, $y$, $z$, $u$, będą zrównania

$$10x+5y+2z+\tfrac{1}{2}u=100 \text{ czyli } \left.\begin{array}{r} 20x+10y+4z+u=200 \\ x+y+z+u=100 \end{array}\right| \ldots (1).$$

Po wyrzuceniu $u$ otrzymuiemy

$$19x+9y+3z=100$$

zrównanie z którém postąpić należy iak w zagadnieniu poprzedzaiącém. Przeniósłszy $19x$ na drugą stronę, mamy

$$9y+3z=100-19x \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

Tu widzimy że powinno bydź $x<\frac{100}{19}$ czyli $x<5+\frac{5}{19}$. Przeto za $x$ można tylko brać 1, 2, 3, 4, 5. Nadto ponieważ w ostatniém zrównaniu spółczynniki przy $y$, $z$ maią spólny dzielnik 3, więc tez $100-19x$ powinno bydź rozdzielne przez 3. Temu warunkowi czynią zadosyć dwie tylko wartości na $x$

$$x=1, \quad x=4.$$

Zatém oprócz tych dwóch wartości $x$ żadna inna wzięta bydź nie może.

Gdy $x=1$; wtedy z (2)

$$z=27-3y \quad \ldots\ldots \quad (3).$$

Włożywszy to wyrażenie za $z$ i razem iedność za $x$ w drugie ze zrównań (1), otrzymamy

$$u=72+2y \quad \ldots\ldots \quad (4).$$

Zrównania (3) i (4) pokazuią że wzięte iakiekolwiek liczby całkie za $y$ przyprowadzą do wartości na $z$, $u$ także całkich; lecz żeby te ostatnie były dodatne, potrzeba aby $y$ nie przewyższało 9. Można więc na $y$ przypuszczać wartości 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Ztąd wypadnie dziesięć układów

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x=1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $y=0$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $z=27$ | 24 | 21 | 18 | 15 | 12 | 9 | 6 | 3 | 0 |
| $u=72$ | 74 | 76 | 78 | 80 | 82 | 84 | 86 | 88 | 90 |

www.rcin.org.pl

Jeżeli $x=4$; natenczas z (2)

$$z=8-3y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Tę wartość za $z$ i razem 4 za $x$ podstawiwszy w drugiém ze zrównań (1), znaydziemy

$$u=88+2y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Dla otrzymania wartości całkich i dodatnych na $z$, $u$, ze zrównań (5) i (6), potrzeba za $y$ brać liczby całkie i dodatne mnieysze od $\frac{8}{3}$, toiest liczby 0, 1, 2. Wartość przeto $x=4$ należy do trzech układów

| | | |
|---|---|---|
| $x=4$ | 4 | 4 |
| $y=0$ | 1 | 2 |
| $z=8$ | 5 | 2 |
| $u=88$ | 90 | 92 |

Teraźnieysze więc zagadnienie przyymuie trzynaście rozwiązań; lub też dziesięć, gdy wyłączymy wartości 0.

## II.

Jak rozwiązanie zagadnień nieoznaczonych stopnia piérwszego, tak równie stopnia drugiego i wyższych ma za cel wynalezienie wszystkich odpowiedzi wyrażonych przez liczby całkie. Lecz gdy z warunków pytania wypada np. zrównanie stopnia drugiego z dwiema ilościami nieznanémi; wtedy w ogólności wartość na iednę ilość wyraża się przez funkcyą niewymierną ilości drugiéy: zatém rozwiązanie takiego pytania wymaga, 1*ód* żeby odkryć wartości wymierne na iednę ilość, któreby przyprowadziły do podobnychże wartości na ilość drugą; 2*re* żeby pomiędzy wartościami wymiernémi ilości piérwszéy wybrać same całkie, któreby wydały na ilość drugą wartości także całkie. W tém dociekaniu trafiaią się wielkie trudności, których pokonanie należy do teoryy głębszych w nauce, występuiących z obrębu iéy części początkowych. Tu przestaniemy na okazaniu, iak się rozwiązuią przez liczby całkie zagadnienia z dwiema ilościami nieznanémi, niezamykaiące w swoich zrównaniach kwadratów tych ilości, lecz tylko ich wieloczyn. Takowe zrównania są zawarte w ogólnym wzorze

$$mxy+ax+by=c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

gdzie $m$, $a$, $b$, $c$ są całkie.

1). Zacząwszy od przypadku prostszego kiedy w zrównaniu (1) $m=1$, wyciągniemy

www.rcin.org.pl

$$y = \frac{c - ax}{x + b} \quad \text{czyli} \quad y = -a + \frac{ab + c}{x + b}.$$

Liczbę $ab + c$ rozbierzmy na dwa iakiekolwiek mnożniki, i daymy np. że $ab + c = fg$; zatém

$$y = -a + \frac{fg}{x + b}.$$

Ztąd otrzymamy dwa układy wartości na $x$, $y$: ieden, uczyniwszy $x + b = f$ czyli

$$x = f - b,$$

a następnie

$$y = g - a;$$

drugi, kiedy założymy że $x + b = g$ czyli

$$x = g - b,$$

zkąd

$$y = f - a.$$

Jeżeli liczba $ab + c$ ma wiele dzielników, wtedy też wielorakim sposobem może bydź na dwa mnożniki rozebrana. Gdy np. $ab + c$ znaczy liczbę 12 maiacą sześć dzielników 1, 2, 3, 4, 6, 12; każdy z mnożników $f$ i $g$ będzie miał trzy wartości: albo $f = 1$, $g = 12$; albo $f = 2$, $g = 6$; albo $f = 3$, $g = 4$: a z każdéy pary mnożników wypadną dwa układy wartości na $x$, $y$. Więc układów będzie sześć, toiest tyle ile ma dzielników liczba 12. Wyciągniemy zaś te wszystkie układy porównywaiąc $x + b$ koleią z każdym dzielnikiem.

*Przykład. Ocenić w liczbach całkich boki prostokąta zamykaiącego sążni kwadratowych w powierzchni cztéry razy więcéy niż liniiowych w obwodzie.* Nazwawszy boki szukane prostokąta wyrażone w sążniach przez $x$, $y$, będziemy mieli zrównanie

$$xy = 8y + 8x \quad \text{zkąd} \quad y = \frac{8x}{x - 8} \quad \text{czyli} \quad y = 8 + \frac{64}{x - 8}.$$

Dzielniki liczby 64 są 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64; porównywaiąc ié następnie z $x - 8$ znaydziemy siedm układów wartości na $x$, $y$

$$x = 9, \quad 10, \quad 12, \quad 16, \quad 24, \quad 40, \quad 72,$$
$$y = 72, \quad 40, \quad 24, \quad 16, \quad 12, \quad 10, \quad 9.$$

Piérwszy układ i ostatni daie tę samę odpowiedź pytaniu, i pokazuią że ieden z boków prostokąta powinien mieć są-

www.rcin.org.pl

żni 9, drugi 72. J każde dwa układy równie od skraynych oddalone stanowią iednaką odpowiedź; tak iż odpowiedzi różnych będzie tylko cztéry. Umnieyszenie liczby odpowiedzi pochodzi ztąd, że szeregi wartości na $x$, $y$ zawieraią też same liczby, tylko odwrotnym porządkiem po sobie idące. Jednostayność zaś szeregów wynika z symetrycznego składu zrównania $xy=8y+8x$ co do obu ilości.

2). Podobnym sposobem rozwiązuie się zrównanie (1) kiedy w niém $m>1$. Wyciągnąwszy wartość na $y$, mamy

$$y=\frac{c-ax}{mx+b} \text{ albo } my=\frac{mc-max}{mx+b} \text{ albo } my=-a+\frac{ab+mc}{mx+b}.$$

Daymy że iednym z dzielników liczby $ab+mc$ iest $d$ i że wieloraz $\frac{ab+mc}{d}=w$. Uczyniwszy $mx+b=d$, będzie

$$x=\frac{d-b}{m}, \qquad y=\frac{w-a}{m}.$$

Tu widzimy że dla otrzymania wartości całkich na $x$, $y$, potrzeba z dzielników liczby $ab+mc$ wybrać tylko takie od którychby odiąwszy $b$ i razem od wielorazów im odpowiadnich odiąwszy $a$ zostawały reszty wielokrotne względem $m$. Zamiast tych reszt powinny bydź summy wielokrotne względem $m$, gdy liczby $a$ i $b$ są w zrównaniu odiemne.

*Przykład. Maiąc dany bok* a *sześcianu wyrażony przez liczbę całą, ocenić w liczbach całkich bok podstawy i wysokość równoległościanu prostokątnego stoiącego na podstawie kwadratowéy, a któregoby obiętość była do obiętości sześcianu w stosunku powiérzchni tychże brył.* Niech $x$ będzie bokiem podstawy, $y$ wysokością równoległościanu; więc $x^2y$ i $2x^2+4xy$ wystawią obiętość i powiérzchnią téy bryły. Obiętość i powiérzchnia sześcianu danego maią wyrażenie $a^3$ i $6a^2$. Warunek zagadnienia wymaga aby było

$$\frac{x^2y}{2x^2+4xy}=\frac{a^3}{6a^2} \text{ czyli } 3xy=ax+2ay;$$

$$\text{ztąd } y=\frac{ax}{3x-2a}=\frac{a}{3}+\frac{2a^2}{3(3x-2a)} \text{ albo}$$

$$3y=a+\frac{2a^2}{3x-2a} \quad \ldots\ldots \quad (*).$$

Daymy że dzielnikami liczby $2a^2$ są $d$, $d'$, $d''$, ...; a wieilorazy im odpowiadaiące niech będą $w$, $w'$, $w''$ ... Uczyniwszy $3x-2a=d$, $d'$, $d''$, . . . . ., wypada

$$x=\frac{d+2a}{3},\ \frac{d'+2a}{3},\ \frac{d''+2a}{3},\ \ldots\ldots;$$

a następnie

$$y=\frac{w+a}{3},\ \frac{w'+a}{3},\ \frac{w''+a}{3},\ \ldots\ldots$$

W tych dwóch szeregach wartości na $x$, $y$, wybrawszy same całkie otrzymamy układy odpowiadaiące pytaniu.

Niech będzie np. $a=8$. Zrównanie (*) stanie się

$$3y=8+\frac{128}{3x-16}.$$

Dzielniki liczby 128 są

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128;

odpowiadaią im wielorazy

128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1.

Wartości na $x$, $y$ będą

$$\begin{array}{l|c|c|c|c|c|c|c|c}
x= & \frac{1+16}{3} & \frac{2+16}{3} & \frac{4+16}{3} & \frac{8+16}{3} & \frac{16+16}{3} & \frac{32+16}{3} & \frac{64+16}{3} & \frac{128+16}{3}, \\
y= & \frac{128+8}{3} & \frac{64+8}{3} & \frac{32+8}{3} & \frac{16+8}{3} & \frac{8+8}{3} & \frac{4+8}{3} & \frac{2+8}{3} & \frac{1+8}{3};
\end{array}$$

z których wyłączywszy ułamkowe, zostanie

$x=6,\ 8,\ 16,\ 48,$

$y=24,\ 8,\ 4,\ 3.$

Dane więc pytanie może bydź zaspokoione przez cztéry różne odpowiedzi.

GABINET MATEMATYCZNY
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego

INSTYTUT

www.rcin.org.pl

# Figury do Rachunku trygonometrycznego

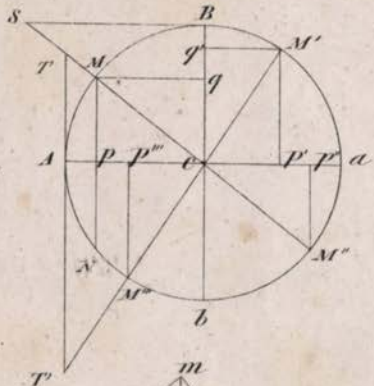



Fig. 1.

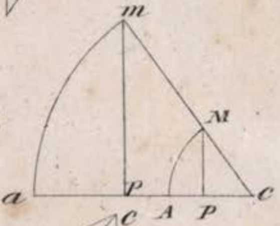



Fig. 2.

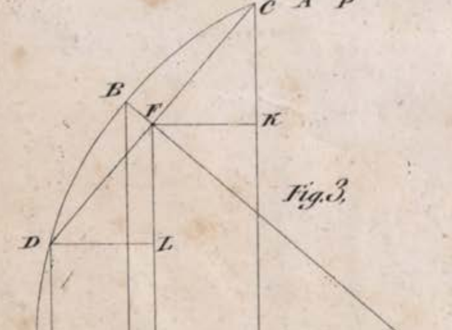



Fig. 3.

www.rcin.org.pl

www.rcin.org.pl

www.rcin.org.pl