

---

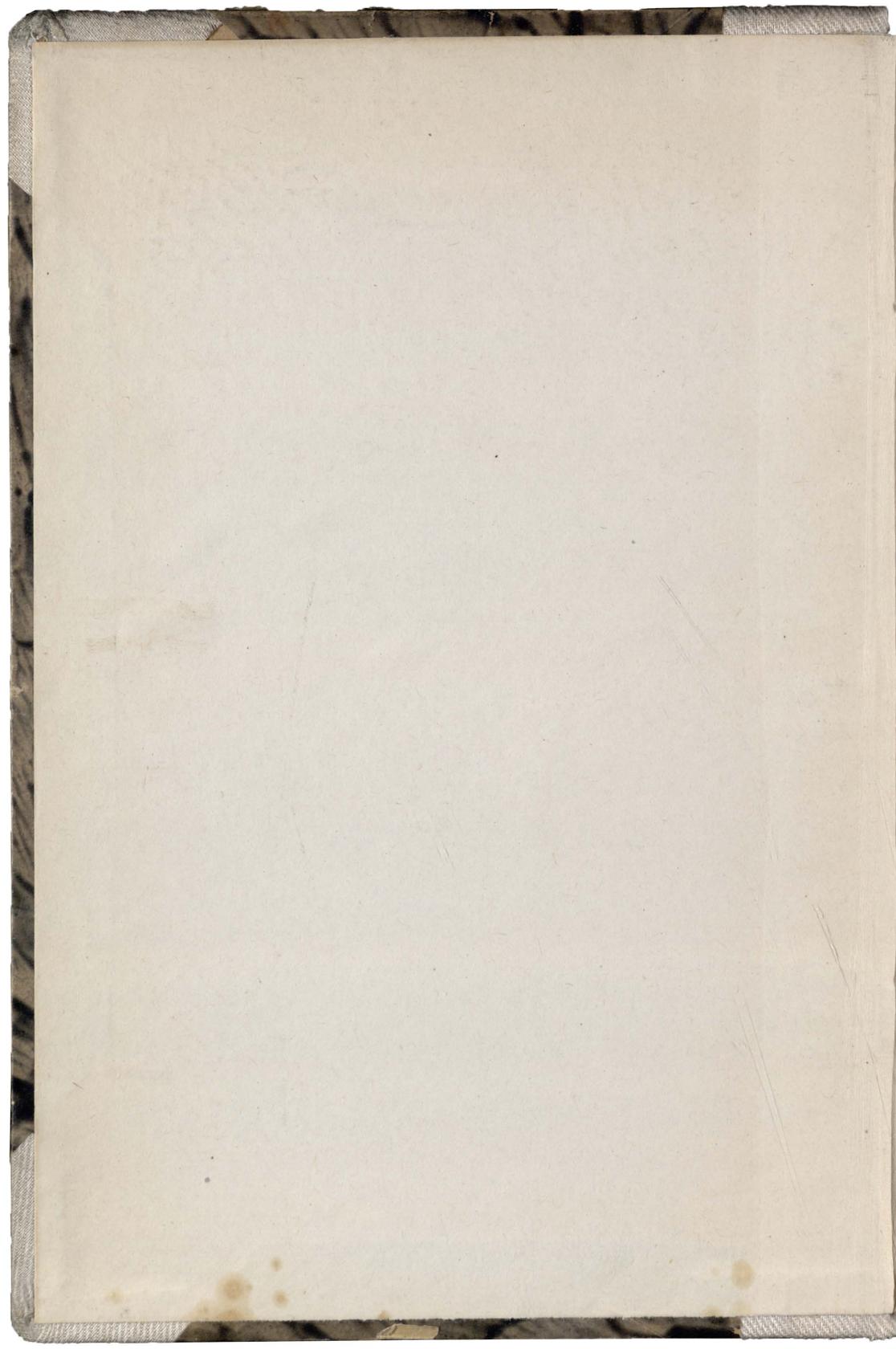
R. FRICKE  
DIFFERENTIAL-  
UND  
INTEGRALRECHNUNG

---

T.N.W.

.









# LEHRBUCH DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG UND IHRER ANWENDUNGEN

VON

DR. ROBERT FRICKE

GEH. HOFRAT UND PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER  
HERZOGL. TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN BRAUNSCHWEIG

ZWEITER BAND: INTEGRALRECHNUNG

MIT 100 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN,  
EINER SAMMLUNG VON 242 AUFGABEN  
UND EINER FORMELTABELLE



TOWARZYSTWO NAUKOWE WARSZAWSKIE

GABINET MATEMATYCZNY  
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego

*S. W. K. K.*

VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER · LEIPZIG · BERLIN 1918



opus nr: 46653

WYDZIAŁ BIBLIOTEKI I MUSEUM  
KRAJOWY ARCHIWALNIK  
KRAJOWY ZBIOR DOKUMENTÓW

WYDZIAŁ BIBLIOTEKI I MUSEUM  
KRAJOWY ARCHIWALNIK  
KRAJOWY ZBIOR DOKUMENTÓW

WYDZIAŁ BIBLIOTEKI I MUSEUM  
KRAJOWY ARCHIWALNIK  
KRAJOWY ZBIOR DOKUMENTÓW

G.M. II 1280 / II

ALLE RECHTE,  
EINSCHLIESSLICH DES UeBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

## Inhaltsverzeichnis.

## Abschnitt IV.

## Grundlagen der Integralrechnung.

## Kapitel I. Das unbestimmte Integral.

	Seite
1. Der Begriff des unbestimmten Integrals . . . . .	1
2. Integration von Aggregaten und von Vielfachen eines Differentials . . . . .	5
3. Einführung einer neuen Variablen in ein Integral . . . . .	7
4. Regel der partiellen Integration . . . . .	13
5. Integration aller rationalen Differentiale . . . . .	19
6. Integration einiger algebraischer Differentiale . . . . .	26
7. Zweite Integrationsmethode von Differentialen mit der Quadratwurzel einer ganzen Funktion zweiten Grades . . . . .	31
8. Beispiele und Aufgaben zur Integration algebraischer Differentiale . . . . .	34
9. Notizen über nicht-elementare Integrale . . . . .	38
10. Graphische und mechanische Integration . . . . .	40

## Kapitel II. Das bestimmte Integral.

1. Begriff des bestimmten Integrals . . . . .	48
2. Berechnung und Deutung des bestimmten Integrals . . . . .	51
3. Sätze über bestimmte Integrale . . . . .	54
4. Zulassung von Unstetigkeiten der Funktion $\varphi(x)$ und von unendlichen Integrationsintervallen . . . . .	59
5. Angenäherte Berechnung bestimmter Integrale . . . . .	67
6. Mechanische Auswertung bestimmter Integrale . . . . .	76
7. Gaußsche Methode zur angenäherten Berechnung bestimmter Integrale . . . . .	81

## Kapitel III. Integrationen bei mehreren Variablen.

1. Die Bogenlänge der Kurven und das Linienintegral . . . . .	86
2. Begriff und Deutung des Flächenintegrals in der Ebene . . . . .	92
3. Die Doppelintegrale und die Berechnung der Flächenintegrale . . . . .	96
4. Einführung neuer Variablen in Doppelintegrale und Flächenintegrale . . . . .	100
5. Der Inhalt krummer Flächen und das allgemeine Flächenintegral . . . . .	107
6. Raumintegrale und dreifache Integrale . . . . .	114
7. Flächendifferentiale und Raumdifferentiale . . . . .	119
8. Zulassung von Unstetigkeiten der Funktion $f$ und von unendlichen Integrationsbereichen . . . . .	124

9. Integrale mit Parametern. Die Gammafunktion . . . . .	132
10. Die Integralsätze von Gauß und Stokes . . . . .	137
11. Integration vollständiger Differentiale . . . . .	146

## Abschnitt V.

## Anwendungen der Integralrechnung.

## Kapitel I. Geometrische Anwendungen der Integralrechnung.

1. Die Bogenlängen der Kurven. . . . .	152
2. Aufgaben über Bogenlängen der Kurven . . . . .	159
3. Die Inhalte ebener Bereiche . . . . .	162
4. Das Polarplanimeter . . . . .	169
5. Die Inhalte krummflächiger Bereiche . . . . .	178
6. Die Inhalte räumlicher Bereiche . . . . .	187

## Kapitel II. Physikalische Anwendungen der Integralrechnung.

1. Massen und Schwerpunkte . . . . .	197
2. Lineare und quadratische Momente. . . . .	207
3. Integratoren . . . . .	212
4. Vektorentheorie. . . . .	218
5. Schwerkraftfelder und Potentiale . . . . .	225
6. Greensche Sätze mit Anwendungen. . . . .	230

## Kapitel III. Fouriersche Reihen und harmonische Analyse.

1. Ansatz der Fourierschen Reihen . . . . .	236
2. Konvergenz der Fourierschen Reihen . . . . .	239
3. Weitere Gestalten und Beispiele Fourierscher Reihen . . . . .	245
4. Harmonische Analyse . . . . .	249

## Abschnitt VI.

## Lösung von Differentialgleichungen.

## Kapitel I. Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung.

1. Ansätze über Differentialgleichungen und ihre Lösungen . . . . .	258
2. Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung . . . . .	265
3. Methode der Trennung der Variablen. . . . .	269
4. Differentialgleichungen mit homogenen Funktionen . . . . .	273
5. Lineare Differentialgleichungen. . . . .	276
6. Methode des integrierenden Faktors . . . . .	280
7. Hauptsätze der Wärmelehre . . . . .	286
8. Differentialgleichungen höheren Grades und singuläre Lösungen . . . . .	290
9. Isogonale Trajektorien . . . . .	295

## Kapitel II. Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung.

1. Ansatz der Gleichungen und Existenz ihrer Lösungen . . . . .	298
2. Beispiele leicht lösbarer Differentialgleichungen . . . . .	300
3. Beispiele aus der Mechanik . . . . .	304

	Seite
4. Zentralbewegungen . . . . .	309
5. Lineare homogene Differentialgleichungen. . . . .	318
6. Lineare homogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . . .	322
7. Lineare nicht-homogene Differentialgleichungen . . . . .	326
8. Schwingungsvorgänge . . . . .	331
9. Lösung linearer Differentialgleichungen durch Reihen . . . . .	336

### Kapitel III. Partielle Differentialgleichungen.

1. Saitenschwingungen . . . . .	341
2. Membranschwingungen . . . . .	349
3. Wärmeleitung . . . . .	355
4. Laplacesche Differentialgleichung. . . . .	365
5. Kugelfunktionen . . . . .	369
6. Weiteres über Kugelfunktionen. . . . .	373
7. Elektrizitätsverteilung auf einer leitenden Kugel. . . . .	377

### Anhang. Komplexe Zahlen und Funktionen.

1. Komplexe Zahlen . . . . .	382
2. Komplexe Reihen . . . . .	388
3. Elementare komplexe Funktionen. . . . .	392
4. Eulersche Formeln nebst Folgerungen. . . . .	394
5. Inversion der Funktionen $e^z$ usw. . . . .	396
6. Geometrische Deutung der komplexen Funktionen . . . . .	399
7. Analytische Funktionen . . . . .	403
Register . . . . .	407

Faint, illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page. The text is arranged in several paragraphs and appears to be a formal document or report.

## Abschnitt IV.

## Grundlagen der Integralrechnung.

## Kapitel I. Das unbestimmte Integral.

**1. Der Begriff des unbestimmten Integrals.** Ist die Funktion  $f(x)$  in einem abgeschlossenen Intervalle  $a \leq x \leq b$  eindeutig, stetig und differenzierbar, so gibt es in jenem Intervalle eine eindeutig bestimmte Funktion  $\varphi(x)$ , welche wir als die „*abgeleitete Funktion*“ oder die „*Ableitung*“  $f'(x)$  von  $f(x)$  bezeichnen:

$$(1) \quad \varphi(x) = f'(x),$$

und welche wir nach den I, 108\*) ff. entwickelten Regeln durch „*Differentiation der Funktion*  $f(x)$ “ berechneten. Nach I, 107 konnten wir die Ableitung (1) auch als „*Differentialquotienten der Funktion*  $f(x)$ “:

$$(2) \quad \varphi(x) = f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

darstellen, eine Formel, welche auf der Erklärung des „*Differentials der Funktion*“:

$$(3) \quad df(x) = f'(x)dx = \varphi(x)dx$$

beruhte (s. I, 106).

Die Umkehrung der Differentiation einer Funktion  $f(x)$  führt auf folgende „*Grundaufgabe der Integralrechnung*“: *Ist in einem endlichen abgeschlossenen Intervalle  $a \leq x \leq b$  eine eindeutige, stetige und abteilungsweise monotone Funktion  $\varphi(x)$  gegeben\*\*), so soll in diesem Intervalle eine Funktion  $f(x)$  angegeben werden, von welcher  $\varphi(x)$  die Ableitung ist.*

Die Lösung dieser Aufgabe kann man in der Art einleiten, daß man aus der gegebenen Funktion  $\varphi(x)$  das zu einem beliebigen Argumente  $x$  des Intervalles und einem Differential  $dx$  gehörende „*Differential*  $df(x)$  der gesuchten Funktion  $f(x)$ “ berechnet, nämlich zufolge (3) in der Gestalt des Produktes  $df(x) = \varphi(x)dx$ . *Dieses Differential der gesuchten*

\*) I, 108 heißt „Band I, Seite 108“; Seitenangaben ohne Bandzahl beziehen sich auf den vorliegenden Band.

\*\*) Die Ausdehnung des Intervalles bis  $+\infty$  oder  $-\infty$  bleibt vorbehalten, ebenso die Zulassung von Unstetigkeiten der Funktion  $\varphi(x)$  im Intervalle.

*Funktion ist demnach eindeutig bestimmt. Die weiter zu lösende Aufgabe ist dann die, daß wir den Übergang vom Differential  $df(x)$  zur gesuchten Funktion  $f(x)$  selbst finden.*

Welche Mittel wir haben, diesen Übergang wirklich zu vollziehen, ob überhaupt eine Funktion  $f(x)$  existiert, welche unserer Aufgabe entspricht, ob es vielleicht mehrere derartige Funktionen gibt, sind Fragen, welche die nachfolgenden Untersuchungen zu entscheiden haben werden. Vorbehaltlich derselben wollen wir aber schon hier folgende Bezeichnungen einführen: Wir nennen den Übergang von  $df(x)$  zu  $f(x)$  „*Integration des Differentials  $df(x)$* “ und bezeichnen  $f(x)$  als „*Integral des Differentials  $df(x)$* “; als *symbolische Schreibweise eines Integrals* aber benutzen wir ein langgezogenes S, dessen eigentlicher Sinn später aufgeklärt werden wird:

$$(4) \quad f(x) = \int df(x) = \int \varphi(x) dx.$$

Diese Gleichung, welche aussagt, daß  $f(x)$  ein Integral des Differentials  $\varphi(x)dx$  oder kurz ein „*Integral von  $\varphi(x)dx$* “ sei, bedeutet also im Grunde nichts weiter als eine der Formeln (1), (2) oder (3); denn der Sinn der Formel (4) ist einzig der, daß  $f(x)$  eine Funktion sein soll, deren Ableitung die gegebene Funktion  $\varphi(x)$  ist.

Das „*Integralzeichen*“  $\int$  und das „*Differentialzeichen*“  $d$  erscheinen hiernach in der Art einander entgegengesetzt, daß sie, wo sie in einer Formel unmittelbar aufeinander folgen, sich gegenseitig aufheben. Wenn wir  $f(x)$  differenzieren und hernach das Differential  $df(x)$ , wie wir sagen wollen, „*integrieren*“, so gelangen wir zu  $f(x)$  zurück; aber auch wenn wir umgekehrt  $df(x)$  integrieren und hernach das Integral  $f(x)$  differenzieren, gelangen wir wieder zum Ausgangspunkte  $df(x)$  zurück, so daß sich beide Zeichen auch in der Anordnung  $d\int$  aufheben. Es ist demnach sehr leicht, eine etwa vorliegende Formel (4) der Integralrechnung auf ihre Richtigkeit zu prüfen; man hat vor die rechte und linke Seite der Gleichung (4) die Differentialzeichen zu setzen und muß unter Aufhebung der Zeichen  $d$  und  $\int$  auf der rechten Seite der Gleichung zu einer richtigen Formel (3) der Differentialrechnung gelangen.

Auf der anderen Seite ist einleuchtend, daß jede Formel (3) der Differentialrechnung, welche wir bereits als richtig erkannt haben, einfach durch Vorsetzen der Integralzeichen zu einer Formel (4) der Integralrechnung wird, die eine Lösung unserer Grundaufgabe für die besondere Funktion  $\varphi(x)$  ergibt. Wir lesen demnach aus bekannten Regeln der Differentialrechnung hier sogleich folgendes wichtige Formelsystem der Integralrechnung ab:

- $$1) \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}, \quad (m \neq -1),$$
- $$2) \int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln |x|,$$
- $$3) \int e^x dx = e^x,$$
- $$4) \int b^x dx = \frac{b^x}{\ln b},$$
- $$5) \int \sin x dx = -\cos x,$$
- $$6) \int \cos x dx = \sin x,$$
- $$7) \int \sin x dx = \cos x,$$
- $$8) \int \cos x dx = \sin x,$$
- $$9) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cotg x,$$
- $$10) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tg x,$$
- $$11) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cotg x,$$
- $$12) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tg x,$$
- $$13) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x, \quad (|x| \leq 1),$$
- $$14) \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x,$$
- $$15) \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{Ar} \sin x = \ln(x + \sqrt{1+x^2}),$$
- $$16) \int \frac{dx}{\pm \sqrt{x^2-1}} = \operatorname{Ar} \cos x = \ln(x \pm \sqrt{x^2-1}), \quad (x \geq +1),$$
- $$17) \int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} x = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right), \quad (|x| < 1),$$
- $$18) \int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{Ar} \cotg x = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{x+1}{x-1} \right), \quad (|x| > 1).$$

Die hier zusammengestellten Integrale wollen wir als die achtzehn „Grundintegrale“ bezeichnen und mit ihren angegebenen Nummern zitieren. Das Grundintegral 1) heißt auch das „Potenzintegral“; es gilt für jeden von  $-1$  verschiedenen Wert des konstanten Exponenten  $m$ . Ebenso nennt man die Grundintegrale 2), 13) und 14) auch wohl „Logarithmusintegral“, „arc sin-Integral“ und „arc tg-Integral“. Man wird die Richtigkeit der vorstehenden Formeln leicht aus den in Betracht kommenden Regeln von Bd. I bestätigen. Betreffs des doppelten Vorzeichens beim Grundintegral 16) erinnere man sich, daß die Funktion  $\operatorname{Ar} \cos x$  für alle der Ungleichung  $x > +1$  genügenden Argumente zweideutig ist. Den Darstellungen der letzten vier Grundintegrale durch den natürlichen Logarithmus liegen die Relationen (2) I, 75 zugrunde.

Wir wenden uns nun zu der Frage, ob es für jede unserer Funktionen  $\varphi(x)$  auch wirklich ein Integral  $f(x)$  gibt, sowie weiter, ob vielleicht neben einem schon gefundenen Integrale  $f(x)$  des Differentials  $\varphi(x)dx$  noch ein zweites von  $f(x)$  verschiedenes Integral  $g(x)$  des gleichen Diffe-

rentials  $\varphi(x)dx$  existieren kann. Die zweite Frage, welche wir zuerst behandeln, ist leicht mit Hilfe des in I, 134 aufgestellten „besonderen“ Mittelwertsatzes zu beantworten. Nehmen wir an, daß die beiden im Intervalle  $a \leq x \leq b$  eindeutigen, differenzierbaren und damit stetigen (s. I, 135) Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  daselbst ein und dieselbe Funktion  $\varphi(x)$  zur Ableitung haben, so wird ihre Differenz:

$$(5) \quad F(x) = g(x) - f(x)$$

im Intervalle eindeutig, stetig und differenzierbar sein; und zwar wird, da  $f'(x) = g'(x) = \varphi(x)$  ist, die Ableitung  $F'(x)$  der Funktion  $F(x)$  im ganzen Intervalle konstant gleich 0 sein. Die Gleichung (9) in I, 135 des Mittelwertsatzes liefert demnach für irgend zwei dem Intervalle entnommene Argumente  $x$  und  $x_1$ :

$$(6) \quad F(x_1) - F(x) = (x_1 - x)F'(x + \vartheta(x_1 - x)) = 0.$$

Es gilt also  $F(x_1) = F(x)$ , so daß die Funktion  $F(x)$  im ganzen Intervalle mit einer Konstanten, die wir  $C$  nennen wollen, identisch ist. Aus (5) ergibt sich somit, daß die zweite Funktion  $g(x)$ , deren Existenz wir annehmen, aus dem Integral  $f(x)$  einfach durch Addition der Konstanten  $C$  entsteht:

$$(7) \quad g(x) = f(x) + C.$$

Andererseits ist einleuchtend, daß, wenn wir aus  $f(x)$  und einer willkürlich gewählten „additiven“ Konstanten  $C$  nach (7) die Funktion  $g(x)$  herstellen, diese Funktion  $g(x)$  dieselbe Ableitung wie  $f(x)$  hat. Die Antwort auf unsere Frage ist also diese: *Gibt es überhaupt ein Integral  $f(x)$  des Differentials  $\varphi(x)dx$ , so ist jede mit einer „willkürlichen Konstanten“  $C$  aus  $f(x)$  hergestellte Funktion  $(f(x) + C)$  auch ein Integral von  $\varphi(x)dx$ , und hiermit erschöpfen wir zugleich die gesamten Integrale von  $\varphi(x)dx$ .*

Die unsere Grundaufgabe lösende Funktion, das Integral  $f(x)$  von  $\varphi(x)dx$ , ist also insoweit „unbestimmt“, als in dieser Funktion noch eine additive Konstante  $C$ , die sogenannte „Integrationskonstante“ willkürlich wählbar bleibt. Man spricht in diesem Sinne von einem „unbestimmten“ Integral und schreibt, um das gewonnene Ergebnis durch eine Gleichung zum Ausdruck zu bringen, an Stelle von (4) ausführlicher:

$$(8) \quad f(x) = \int \varphi(x)dx + C,$$

wobei das im ersten Gliede rechts stehende Symbol eine speziell gewählte Funktion bedeutet, deren Ableitung gleich  $\varphi(x)$  ist.

Die andere Frage, ob es überhaupt ein Integral  $f(x)$  des Differentials  $\varphi(x)dx$  im Intervalle gibt, beantworten wir sofort auf Grund der Ausführungen in I, 104 ff. über die damals näher erklärte „Inhaltsfunktion“

$f(x)$ . Die gegebene Funktion  $\varphi(x)$  sollte im Intervall  $a \leq x \leq b$  eindeutig, stetig und abteilungsweise monoton sein. Es hat demnach keine Schwierigkeit, für die Kurve der Funktion  $\varphi(x)$  die Inhalte der im Kurvensatz I, 104 näher bezeichneten ebenen Flächenstücke eindeutig zu erklären, wobei, was die Vorzeichen der Maßzahlen der Flächeninhalte angeht, an den damaligen Vorschriften festgehalten werden soll. Grenzen wir die auszumessende Fläche rechts und links durch zwei Ordinaten der Kurve ein, die zu einer im Intervalle beliebig, aber fest gewählten Abszisse  $x_0$  und zu einer ebenda variablen Abszisse  $x$  gehören, so ist die Maßzahl der Fläche eine Funktion  $f(x)$  der veränderlichen Abszisse  $x$ , von der wir in I, 105 erkannten, daß sie differenzierbar ist und als Ableitung unsere Funktion  $\varphi(x)$  liefert. In dieser „Inhaltsfunktion“  $f(x)$  haben wir demnach ein Integral von  $\varphi(x)dx$  tatsächlich gewonnen. Die Unbestimmtheit des Integrals kommt bei dieser Betrachtung dadurch zum Ausdruck, daß die konstante Abszisse  $x_0$  im Intervall willkürlich wählbar war; aus den Darlegungen von I, 104 ist nämlich einleuchtend, daß ein Wechsel in der Auswahl von  $x_0$  die Inhaltsfunktion  $f(x)$  um eine additive Konstante ändert.

**2. Integration von Aggregaten und von Vielfachen eines Differentials.** Den in I, 117 entwickelten Sätzen der Differentialrechnung stehen entsprechende Sätze der Integralrechnung gegenüber, die unmittelbare Folgen jener Sätze sind. Eine Summe oder Differenz  $(\varphi(x) \pm \psi(x))dx$  zweier Differentiale  $\varphi(x)dx$  und  $\psi(x)dx$  wird integriert, indem man beide Glieder einzeln integriert und die Integrale addiert bzw. subtrahiert:

$$(1) \quad \int (\varphi(x) \pm \psi(x))dx = \int \varphi(x)dx \pm \int \psi(x)dx.$$

Indem man nämlich die rechts stehende Funktion nach I, 117 „gliedweise“ differenziert, ergibt sich als ihre Ableitung  $\varphi(x) \pm \psi(x)$ , wie es sein muß. Die Regel überträgt sich sofort auf irgend welche Aggregate von Differentialen, d. h. endlichgliedrige Summen oder Differenzen solcher. Ein Aggregat von Differentialen wird integriert, indem man jedes Glied im Aggregat durch sein Integral ersetzt, oder, indem man das Aggregat „gliedweise“ integriert.

Das Produkt einer Konstanten  $c$  und eines Differentials  $\varphi(x)dx$  wollen wir der Kürze halber für den Augenblick auch dann ein „Vielfaches“ vom Differential  $\varphi(x)dx$  nennen, wenn  $c$  keine positive ganze Zahl ist. Es besteht der Satz: Ein Vielfaches  $c\varphi(x)dx$  vom Differential  $\varphi(x)dx$  wird integriert, indem man den konstanten Faktor mit dem Integral des Differentials  $\varphi(x)dx$  multipliziert:

$$(2) \quad \int c\varphi(x)dx = c \int \varphi(x)dx.$$

Differenziert man nämlich die rechts stehende Funktion nach der Regel (3) in I, 117, so ergibt sich, wie es sein muß, als ihre Ableitung die Funktion  $c\varphi(x)$ . Man kann den Satz auch so aussprechen: *Folgt auf das Integralzeichen ein konstanter Faktor des zu integrierenden Differentials, so darf derselbe als Faktor vor das Integralzeichen gesetzt werden.*

Durch Vereinigung beider Sätze und Heranziehung des „Potenzintegrals“ finden wir als Regel für eine ganze rationale Funktion  $\varphi(x)$ :

$$(3) \quad \int (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) dx = a_0x + \frac{1}{2}a_1x^2 + \frac{1}{3}a_2x^3 + \dots + \frac{1}{n+1}a_nx^{n+1} *).$$

Auch sind wir imstande, irgend ein Aggregat, welches aus Differentialen der 18 Grundintegrale mit Hilfe irgendwelcher konstanter Koeffizienten zusammengesetzt ist, zu integrieren; ein Beispiel sei:

$$\int (5e^x - 7x^6 + \frac{a}{\cos^2 x} - \frac{b}{\sqrt{1+x^2}}) dx = 5e^x - x^7 + a \operatorname{tg} x - b \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Aufgaben: Der Leser wolle die in den folgenden Gleichungen links stehenden Integrale selbständig berechnen; die Ergebnisse sind rechts zur Kontrolle beifügt.

$$1) \int (3 - x + 2x^2 - \sqrt{3}x^3 + 6x^5) dx = 3x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{\sqrt{3}}{4}x^4 + x^6.$$

$$2) \int \left( \frac{2}{x^5} - \frac{3}{x^4} + \frac{7}{x^2} - 5 + x^{10} \right) dx = -\frac{1}{2x^4} + \frac{1}{x^3} - \frac{7}{x} - 5x + \frac{1}{11}x^{11}.$$

$$3) \int \left( \frac{3}{2x^3} + 5\sqrt{x} - 5\sqrt[3]{x^2} + \frac{p}{q\sqrt{x}} \right) dx = -\frac{3}{2x} + \frac{10}{3}\sqrt{x^3} - 3\sqrt[3]{x^5} + \frac{np}{(n-1)q\sqrt{x}}.$$

$$4) \int \frac{3 - 5z^2 + az^3 - 7z^5}{2z^2} dz = -\frac{3}{2z} - \frac{5}{2}z + \frac{a}{4}z^2 - \frac{7}{8}z^4.$$

$$5) \int (a\sqrt[5]{t^n} + b\sqrt[5]{t^2} - \frac{c}{\sqrt[5]{t^3}}) dt = \frac{3a}{n+3}\sqrt[5]{t^{n+3}} + \frac{5b}{7}\sqrt[5]{t^7} - \frac{7c}{4}\sqrt[5]{t^4}.$$

$$6) \int \left( \frac{3}{x} - 2x^7 + 3 \cdot 7^x + 1 \right) dx = 3 \ln |x| - \frac{1}{4}x^8 + \frac{3}{\ln 7} \cdot 7^x + x.$$

$$7) \int \left( \frac{1}{u} + \frac{2}{\sqrt{u}} + a^u - 3u^5 \right) du = \ln |u| + 4\sqrt{u} + \frac{a^u}{\ln a} - \frac{1}{2}u^6.$$

$$8) \int \left( 5 \cos x - a \sin x + \frac{c}{\cos^2 x} - \sqrt{x} \right) dx = 5 \sin x + a \cos x + c \operatorname{tg} x - \frac{5}{6}x\sqrt{x}.$$

\*) In Formeln dieser Art sehen wir der Kürze halber gewöhnlich von der Hinzufügung einer Integrationskonstanten ab.

- 9)  $\int \left( 2,5 \cdot \sin x - \frac{3,3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{7,2}{\cos^2 x} \right) dx = 2,5 \cdot \cos x - 3,3 \arcsin x + 7,2 \operatorname{tg} x.$
- 10)  $\int \left( a^v - \frac{m}{\sin^2 v} + \frac{n}{1+v^2} \right) dv = \frac{a^v}{\ln a} + m \operatorname{Cotg} v + n \arctg v.$
- 11)  $\int \left( \frac{3}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{6}{1-y^2} + 2 \right) dy = 3 \arcsin y + 3 \ln \left| \frac{1+y}{1-y} \right| + 2y.$
- 12)  $\int \left( \frac{k}{\sqrt{s^2-1}} + l \cdot 3^s + \frac{m}{\sin^2 s} \right) ds = k \ln (s + \sqrt{s^2-1}) + \frac{l}{\ln 3} 3^s - m \operatorname{Cotg} s.$
- 13)  $\int \left( 3x^{m-1} - \frac{5}{1-x^2} + \frac{7}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx = \frac{3}{m+1} x^{m+1} - \frac{5}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + 7 \ln (x + \sqrt{1+x^2}).$
- 14)  $\int \left( \frac{2}{7w} - 3,5 \cdot \cos w + \frac{1}{2} e^w \right) dw = \frac{2}{7} \ln |w| - 3,5 \sin w + \frac{1}{2} e^w.$
- 15)  $\int \left( \frac{2-t^2}{5t} + \pi \cos t - \frac{e}{\sin^2 t} \right) dt = \frac{2}{5} \ln |t| - \frac{1}{10} t^2 + \pi \sin t + e \operatorname{cotg} t.$

**3. Einführung einer neuen Variablen in ein Integral.** Die „Kettenregel“ der Differentialrechnung (I, 127 ff.) führt uns zu einer Methode, durch Einführung oder Substitution einer neuen Variablen in ein bereits berechnetes Integral zur Kenntnis eines neuen Integrals zu gelangen. Es sei bekannt, daß das Integral des Differential  $\varphi(z) dz$  gleich  $f(z)$  ist:

$$(1) \quad \int \varphi(z) dz = f(z), \quad f'(z) = \varphi(z).$$

An Stelle von  $z$  werde eine neue Variable  $x$  eingeführt, welche mit  $z$  durch die Gleichung:

$$(2) \quad z = \psi(x)$$

zusammenhänge. Hierdurch wird  $f(z)$  zu einer „zusammengesetzten Funktion“ von  $x$ :

$$f(z) = f(\psi(x)),$$

deren Ableitung in bezug auf  $x$  sich nach der Kettenregel so darstellt:

$$\frac{df(z)}{dx} = f'(\psi(x)) \psi'(x) = \varphi(\psi(x)) \psi'(x).$$

Umgekehrt ist demnach  $f(z) = f(\psi(x))$  das Integral des Differential  $\varphi(\psi(x)) \psi'(x) dx$ :

$$(3) \quad \int \varphi(\psi(x)) \psi'(x) dx = f(\psi(x)).$$

Aus der als bekannt geltenden Gleichung (1) folgt demnach durch Einführung der mit  $z$  durch die Gleichung (2) zusammenhängenden neuen Variablen  $x$  die Gleichung (3), so daß aus dem bekannten Integrale (1) wegen der willkürlichen Wahl der Funktion  $\psi(x)$  sofort unendlich viele weitere

*Integrale folgen.* Wie man sieht, geht die Gleichung (3) aus (1) einfach dadurch hervor, daß man:

$$(4) \quad z = \psi(x), \quad dz = \psi'(x) dx$$

in (1) einträgt.

Um die Methode an einigen Beispielen zu erläutern, wollen wir für (1) der Reihe nach das 1., 2., 3., 5., 13., 14., 15., 16., 17. und 18. Grundintegral eintragen und gelangen auf diese Weise zu folgenden zehn Ansätzen:

$$(5) \quad \int \psi(x)^m \psi'(x) dx = \frac{1}{m+1} \psi(x)^{m+1}, \quad (m \neq -1),$$

$$(6) \quad \int \frac{\psi'(x) dx}{\psi(x)} = \ln |\psi(x)|,$$

$$(7) \quad \int e^{\psi(x)} \psi'(x) dx = e^{\psi(x)},$$

$$(8) \quad \int \sin(\psi(x)) \psi'(x) dx = -\cos(\psi(x)),$$

$$(9) \quad \int \frac{\psi'(x) dx}{\sqrt{1-\psi(x)^2}} = \arcsin(\psi(x)), \quad (|\psi(x)| \leq 1),$$

$$(10) \quad \int \frac{\psi'(x) dx}{1+\psi(x)^2} = \arctg \psi(x),$$

$$(11) \quad \int \frac{\psi'(x) dx}{\sqrt{1+\psi(x)^2}} = \ln(\psi(x) + \sqrt{1+\psi(x)^2}),$$

$$(12) \quad \int \frac{\psi'(x) dx}{\sqrt{\psi(x)^2-1}} = \ln(\psi(x) + \sqrt{\psi(x)^2-1}), \quad (\psi(x) \geq 1),$$

$$(13) \quad \int \frac{\psi'(x) dx}{1-\psi(x)^2} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+\psi(x)}{1-\psi(x)} \right), \quad (|\psi(x)| < 1),$$

$$(14) \quad \int \frac{\psi'(x) dx}{\psi(x)^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\psi(x)-1}{\psi(x)+1} \right), \quad (|\psi(x)| > 1).$$

Tragen wir z. B. in die Formeln (5) bis (8) für  $\psi(x)$  die lineare Funktion  $(ax+b)$  ein, so ergeben sich die vier Integrale:

$$(15) \quad \left| \int (ax+b)^m dx = \frac{(ax+b)^{m+1}}{a(m+1)}, \quad \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln |ax+b|, \right. \\ \left. \int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b}, \quad \int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b). \right.$$

Für die Auswahl  $\psi(x) = \frac{x}{a}$  liefern die Ansätze (9) bis (12):

$$(16) \quad \left| \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \left( \frac{x}{a} \right), \quad \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctg \left( \frac{x}{a} \right), \right. \\ \left. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln(x + \sqrt{a^2+x^2}), \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2-a^2}|. \right.$$

Weiter ergeben die Ansätze (9), (11) und (12) für  $\psi(x) = \frac{a}{x}$ :

$$(17) \quad \begin{cases} \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = -\frac{1}{a} \arcsin\left(\frac{a}{x}\right), \\ \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + a^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} \right|, \\ \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right|. \end{cases}$$

Unter  $a, b, c, d$  irgend vier Zahlen verstanden, die die Bedingung  $ad - bc \neq 0$  befriedigen, setzen wir ferner:

$$\psi(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad \psi'(x) = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$$

und gewinnen aus den beiden Formeln (5) und (6):

$$(18) \quad \begin{cases} \int \frac{(ax + b)^m dx}{(cx + d)^{m+2}} = \frac{1}{(ad - bc)(m + 1)} \left( \frac{ax + b}{cx + d} \right)^{m+1}, \\ \int \frac{dx}{(ax + b)(cx + d)} = \frac{1}{ad - bc} \ln \left| \frac{ax + b}{cx + d} \right|. \end{cases}$$

Leicht beweisbare Spezialfälle der ersten Formel (18) sind:

$$(19) \quad \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}, \quad \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-1}} = -\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Setzen wir in (6) für  $\psi(x)$  der Reihe nach  $\cos x$ ,  $\sin x$ ,  $\operatorname{Cos} x$ ,  $\operatorname{Sin} x$  ein, so ergeben sich die Integrale:

$$(20) \quad \begin{cases} \int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln |\cos x|, & \int \operatorname{cotg} x \, dx = \ln |\sin x|, \\ \int \operatorname{Zg} x \, dx = \ln \operatorname{Cos} x, & \int \operatorname{Cotg} x \, dx = \ln |\operatorname{Sin} x|. \end{cases}$$

Durch Addition der beiden ersten Gleichungen (20) mit Benutzung von (1) S. 5 ergibt sich:

$$(21) \quad \int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{2 dx}{\sin 2x} = \ln |\operatorname{tg} x|,$$

und ebenso folgt durch Subtraktion der dritten Gleichung (20) von der vierten:

$$(22) \quad \int \frac{dx}{\operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x} = \int \frac{2 dx}{\operatorname{Sin} 2x} = \ln |\operatorname{Zg} x|.$$

Aus (21) ziehen wir noch die weiteren Folgerungen:

$$(23) \quad \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|, \quad \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|.$$

Die erste Gleichung entsteht aus (21), wenn man  $x' = 2x$  einführt und hernach den Index bei  $x'$  fortläßt; die zweite Gleichung folgt aus der ersten durch die Substitution  $x = x' + \frac{\pi}{2}$ .

Unter  $a$  und  $b$  zwei positive Zahlen verstanden, setze man:

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{tg} x, \quad \psi'(x) = \sqrt{\frac{a}{b}} \frac{1}{\cos^2 x};$$

die Quadratwurzeln sollen hier und in der sich anschließenden Rechnung durchweg positiv genommen werden. Die Eintragung der gewählten Funktion  $\psi(x)$  in den Ansatz (10) liefert:

$$(24) \quad \int \frac{dx}{a \sin^2 x + b \cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{tg} x \right).$$

Weiter ziehe man (13) oder (14) heran, je nachdem  $|\psi(x)| < 1$  oder  $> 1$  ist; die Ergebnisse lassen sich in den Ausdruck zusammenfassen:

$$(25) \quad \int \frac{dx}{a \sin^2 x - b \cos^2 x} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \left| \frac{\sqrt{a} \sin x - \sqrt{b} \cos x}{\sqrt{a} \sin x + \sqrt{b} \cos x} \right|.$$

Andere bemerkenswerte Gestalten dieser Gleichungen erhält man durch Benutzung der Beziehungen:

$$2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x, \quad 2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x$$

und Übergang zu  $x' = 2x$  bei nachheriger Fortlassung des Index. Bei Umrechnung der Gleichung (24) benutze man die Abkürzungen  $a + b = \alpha$ ,  $a - b = \beta$ , so daß  $\alpha$  und  $\beta$  irgend zwei der Bedingung  $\alpha > |\beta|$  genügende Zahlen sind; es ergibt sich:

$$(26) \quad \int \frac{dx}{\alpha - \beta \cos x} = \frac{2}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \sqrt{\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right), \quad (\alpha > |\beta|).$$

Auf dieselbe Art findet man aus der Gleichung (25):

$$(27) \quad \int \frac{dx}{\alpha - \beta \cos x} = \frac{2}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{\beta + \alpha} \sin \frac{x}{2} - \sqrt{\beta - \alpha} \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{\beta + \alpha} \sin \frac{x}{2} + \sqrt{\beta - \alpha} \cos \frac{x}{2}} \right|, \quad (\beta > |\alpha|).$$

Die Methode der Substitution einer neuen Variablen kann man auch umgekehrt in der Art anwenden, daß man ein zu berechnendes Integral auf ein bereits bekanntes zurückzuführen sucht. Handelt es sich z. B. um das erste Integral (15), so hat man den Ausdruck  $(ax + b)$  als neue Variable einzuführen und demnach zu setzen:

$$z = ax + b, \quad dz = d(ax + b) = a dx, \quad dx = \frac{1}{a} dz.$$

Das auszurechnende Integral geht hierbei über in das „Potenzintegral“:

$$\int (ax + b)^m dx = \frac{1}{a} \int z^m dz = \frac{1}{a} \frac{z^{m+1}}{m+1}.$$

Indem man im Ergebnis  $z$  wieder durch  $(ax + b)$  ersetzt, gelangt man zur ersten Formel (15) zurück. Ist ferner z. B. das Integral:

$$\int \frac{z^2 dz}{(a + bz^3)^2}$$

zu berechnen, so führe man  $(a + bz^3)$  als neue Variable  $u$  ein und hat zu setzen:

$$u = a + bz^3, \quad du = d(a + bz^3) = 3bz^2 dz, \quad z^2 dz = \frac{1}{3b} du.$$

Das Integral ergibt auf  $u$  umgerechnet:

$$\int \frac{z^2 dz}{(a + bz^3)^2} = \frac{1}{3b} \int u^{-2} du = -\frac{1}{3bu} = -\frac{1}{3b(a + bz^3)}.$$

Der Leser wolle die Gleichungen (15)ff. auf diesem Wege erneut bestätigen. In den folgenden Übungsaufgaben sind die Ergebnisse (wie auch späterhin stets geschehen wird) zur Kontrolle beigefügt; auch sind die zur Berechnung geeigneten neuen Variablen angegeben.

Aufgaben:

$$1) \int (5 + 3x^2)^7 x dx = \frac{1}{48} (5 + 3x^2)^8, \quad (z = 5 + 3x^2).$$

$$2) \int \frac{3z^2 dz}{(7 + 5z^3)^3} = -\frac{1}{10(7 + 5z^3)^2}, \quad (u = 7 + 5z^3).$$

$$3) \int b^{5+3x} dx = \frac{1}{3 \ln b} \cdot b^{5+3x}, \quad (z = 5 + 3x).$$

$$4) \int \cos(m + nv) dv = \frac{1}{n} \sin(m + nv), \quad (t = m + nv).$$

$$5) \int \frac{dy}{\sqrt{3-y^2}} = \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right), \quad \left(z = \frac{y}{\sqrt{3}}\right).$$

$$6) \int \frac{x dx}{x^4 + a^4} = \frac{1}{2a^3} \arctg\left(\frac{x^2}{a^2}\right), \quad \left(z = \frac{x^2}{a^2}\right).$$

$$7) \int \left(\frac{1}{7+x^2} + \frac{1}{3x+2}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{7}} \arctg\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right) + \frac{1}{3} \ln|3x+2|,$$

$$\left(z = \frac{x}{\sqrt{7}} \text{ bzw. } t = 3x+2\right).$$

$$8) \int \frac{\arctg y}{1+y^2} dy = \frac{1}{2} (\arctg y)^2, \quad (x = \arctg y).$$

$$9) \int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx = \frac{2}{3} (\sqrt{\arcsin x})^3, \quad (z = \arcsin x).$$

$$10) \int e^{ax^2+2bx+c} (ax+b) dx = \frac{1}{2} e^{ax^2+2bx+c}, \quad (z = ax^2 + 2bx + c).$$

$$11) \int \frac{y dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = -\sqrt{a^2 - y^2}, \quad (z = a^2 - y^2).$$

$$12) \int z \sqrt{1+z^2} dz = \frac{1}{3} (\sqrt{1+z^2})^3, \quad (t = 1 + z^2).$$

$$13) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^3}} = \frac{5}{12} (\sqrt{1+x^3})^4, \quad (z = 1 + x^3).$$

$$14) \int \frac{dz}{1 + \cos z} = \operatorname{tg} \left( \frac{z}{2} \right), \quad \left( t = \frac{z}{2} \right).$$

$$15) \int \frac{dz}{1 - \cos z} = -\operatorname{cotg} \left( \frac{z}{2} \right), \quad \left( t = \frac{z}{2} \right).$$

$$16) \int \frac{\alpha + \beta e^x}{\gamma + \delta e^x} dx = \frac{\alpha}{\gamma} x - \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma\delta} \ln |\gamma + \delta e^x|. \quad \text{Anleitung: Man setze:}$$

$$z = \gamma + \delta e^x, \quad dz = \delta e^x dx = (z - \gamma) dx, \quad dx = \frac{dz}{z - \gamma},$$

worauf sich das zu berechnende Integral in die Summe:

$$\int \frac{\alpha + \beta e^x}{\gamma + \delta e^x} dx = \frac{\beta}{\delta} \int \frac{dz}{z} + \alpha \int \frac{dz}{z(z - \gamma)}$$

zerlegt. Das letzte Integral rechts ist nach der zweiten Formel (18) zu berechnen.

$$17) \int \sqrt{a^2 + e^x} dx = 2\sqrt{a^2 + e^x} + a \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + e^x} - a}{\sqrt{a^2 + e^x} + a} \right|, \quad (z = \sqrt{a^2 + e^x}).$$

$$18) \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} dx = \sqrt{1-x^2} - \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} \right). \quad \text{Anleitung: Man erweitere}$$

den Ausdruck unter dem Integralzeichen mit  $\sqrt{1-x^2}$ , worauf sich das Integral in die Differenz zweier bereits bekannter Integrale zerlegen läßt.

$$19) \int \frac{dx}{a \sin^2 x + b \cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{Tg} x \right), \quad \left( z = \sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{Tg} x \right).$$

$$20) \int \frac{dx}{a \sin^2 x - b \cos^2 x} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \left| \frac{\sqrt{a} \sin x - \sqrt{b} \cos x}{\sqrt{a} \sin x + \sqrt{b} \cos x} \right|, \quad \left( z = \sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{Tg} x \right).$$

Bemerkung: In den beiden letzten Aufgaben seien  $a$  und  $b$  zwei positive Zahlen; übrigens vgl. man die Gleichungen (24) und (25).

$$21) \int \frac{(\ln x)^m}{x} dx = \frac{1}{m+1} (\ln x)^{m+1}, \quad (m \neq -1, z = \ln x).$$

$$22) \int \frac{dx}{x \cdot \ln x} = \ln (\ln x), \quad (z = \ln x).$$

$$23) \int \frac{\arcsin v}{\sqrt{1-v^2}} dv = \frac{1}{2} (\arcsin v)^2, \quad (w = \arcsin v).$$

$$24) \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2 + x^2}}, \quad \left(z = \arcsin \left(\frac{x}{a}\right)\right).$$

$$25) \int \frac{dx}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad \left(z = \arcsin \left(\frac{x}{a}\right)\right).$$

**4. Regel der partiellen Integration.** Die „Produktregel“ der Differentialrechnung (I, 121) versieht uns mit einer Formel, welche in vielen Fällen die Zurückführung eines zu berechnenden Integrales auf ein schon bekanntes ermöglicht. Das Produkt der Funktion  $\varphi(x)$  und des Integrales vom Differential  $\psi(x)dx$  werde durch  $f(x)$  bezeichnet:

$$(1) \quad f(x) = \varphi(x) \int \psi(x) dx.$$

Die Ableitung dieser Funktion ist nach der Produktregel durch:

$$f'(x) = \varphi(x)\psi(x) + \varphi'(x) \int \psi(x) dx$$

gegeben; hieraus folgt umgekehrt:

$$f(x) = \int (\varphi(x)\psi(x) + \varphi'(x) \int \psi(x) dx) dx.$$

Integriert man die Summe rechts „gliedweise“ und setzt den dadurch entstehenden Ausdruck von  $f(x)$  gleich dem in (1) gegebenen, so folgt nach Transposition eines Gliedes:

$$(2) \quad \int \varphi(x)\psi(x) dx = \varphi(x) \int \psi(x) dx - \int (\varphi'(x) \int \psi(x) dx) dx.$$

Die durch diese Gleichung gegebene Entwicklung des links stehenden Integrales wird als die *Regel der „partiellen Integration“* bezeichnet. Die Benennung rührt daher, daß zur Berechnung der rechten Seite das Differential  $\varphi(x)\psi(x)dx$  zunächst nur „teilweise“ zu integrieren ist, indem erstlich  $\int \psi(x) dx$  zu berechnen ist; der berechnete Ausdruck ist dann in (2) einzusetzen, womit das erste Glied rechter Hand fertig berechnet ist, während im zweiten Gliede noch das „äußere“ Integral zu bestimmen bleibt.

Als einfachste Beispiele für die Regel (2) mögen dienen:

$$\int x e^x dx = x \int e^x dx - \int (\int e^x dx) dx = x e^x - \int e^x dx,$$

$$(3) \quad \int x e^x dx = (x - 1) e^x.$$

$$\int x \cos x dx = x \int \cos x dx - \int (\int \cos x dx) dx = x \sin x - \int \sin x dx,$$

$$(4) \quad \int x \cos x dx = x \sin x + \cos x.$$

$$\int \ln x \, dx = \ln x \int dx - \int \left( \frac{1}{x} \int dx \right) dx = x \ln x - \int dx,$$

$$(5) \quad \int \ln x \, dx = x \ln x - x.$$

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = \operatorname{arctg} x \int dx - \int \left( \frac{1}{1+x^2} \int dx \right) dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x \, dx}{1+x^2},$$

$$(6) \quad \int \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx = x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$$

$$\int \operatorname{arc} \sin x \, dx = \operatorname{arc} \sin x \int dx - \int \left( \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \int dx \right) dx$$

$$= x \operatorname{arc} \sin x - \int \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(7) \quad \int \operatorname{arc} \sin x \, dx = x \operatorname{arc} \sin x + \sqrt{1-x^2}.$$

In manchen Fällen gelangt man erst nach wiederholter Anwendung der partiellen Integration zum Ziele. Um z. B. die beiden Integrale:

$$(8) \quad f(x) = \int e^{ax} \cos bx \, dx, \quad g(x) = \int e^{ax} \sin bx \, dx$$

zu berechnen, schreiben wir für  $f(x)$  unter Anwendung der Regel (2):

$$f(x) = e^{ax} \int \cos bx \, dx - a \int \left( e^{ax} \int \cos bx \, dx \right) dx,$$

$$f(x) = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx \, dx.$$

Da das im letzten Gliede stehende Integral gleich  $g(x)$  ist, so folgt:

$$bf(x) + ag(x) = e^{ax} \sin bx.$$

Durch Anwendung der Regel (2) auf das Integral  $g(x)$  folgt entsprechend:

$$af(x) - bg(x) = e^{ax} \cos bx.$$

Die Auflösung der beiden letzten Gleichungen nach  $f(x)$  und  $g(x)$  liefert:

$$(9) \quad \begin{cases} \int e^{ax} \cos bx \, dx = e^{ax} \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2}, \\ \int e^{ax} \sin bx \, dx = e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2}. \end{cases}$$

Ist  $n$  irgend eine positive ganze Zahl, so folgt durch partielle Integration:

$$(10) \quad \int x^n e^x \, dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x \, dx.$$

Wir haben hier ein erstes Beispiel einer „Rekursionsformel“ vor uns, welche uns gestattet, von dem links stehenden Integrale auf ein entspre-

chend, jedoch einfacher gebautes Integral zurückzugehen, nämlich auf dasjenige des Differentials  $x^{n-1} e^x dx$ . Wenden wir auf dieses Integral die Rekursionsformel erneut an, so folgt:

$$\int x^n e^x dx = x^n e^x - n x^{n-1} e^x + n(n-1) \int x^{n-2} e^x dx.$$

Entsprechend gelangt man durch  $n$ -malige Anwendung der Formel (10) zum Integral von  $e^x dx$ , das gleich  $e^x$  ist. *Hiernach ist das Integral (10) für jeden positiven ganzen Exponenten  $n$  berechenbar.*

Ebenso findet man,  $n$  in der gleichen Bedeutung gebraucht:

$$(11) \quad \begin{cases} \int x^n \cos x dx = + x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x dx, \\ \int x^n \sin x dx = - x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x dx, \end{cases}$$

zwei weitere Rekursionsformeln, welche uns gestatten, *die links stehenden Integrale für jeden positiven ganzen Exponenten  $n$  zu berechnen.*

Ist  $m$  irgend eine von  $-1$  verschiedene Zahl, und wird  $n$  in der bisherigen Bedeutung gebraucht, so folgt mittels der Regel der partiellen Integration:

$$(12) \quad \int x^m (\ln x)^n dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} (\ln x)^n - \frac{n}{m+1} \int x^m (\ln x)^{n-1} dx.$$

Die  $n$ -malige Anwendung dieser Rekursionsformel führt auf das Potenzintegral zurück, so daß auch das Integral (12) für irgend einen positiven ganzzahligen Exponenten  $n$  berechenbar ist.\*

Unter  $f(x)$  und  $g(x)$  die in (8) und (9) angegebenen Funktionen verstanden, folgt durch die Regel (2):

$$\int x^n e^{ax} \cos bx dx = x^n f(x) - n \int x^{n-1} f(x) dx$$

und also, wenn wir im Integral rechter Hand für  $f(x)$  den Ausdruck (9) einsetzen:

$$(13) \quad \begin{aligned} & \int x^n e^{ax} \cos bx dx \\ &= x^n f(x) - \frac{an}{a^2 + b^2} \int x^{n-1} e^{ax} \cos bx dx - \frac{bn}{a^2 + b^2} \int x^{n-1} e^{ax} \sin bx dx. \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise findet man weiter:

$$(14) \quad \begin{aligned} & \int x^n e^{ax} \sin bx dx \\ &= x^n g(x) - \frac{an}{a^2 + b^2} \int x^{n-1} e^{ax} \sin bx dx + \frac{bn}{a^2 + b^2} \int x^{n-1} e^{ax} \cos bx dx. \end{aligned}$$

Durch wiederholte Anwendung dieses Paares von Rekursionsformeln ge-

\*) Für  $m = -1$  ist das Integral (12) bereits in Aufgabe 21) S. 12 gelöst.

lingt es, die in (13) und (14) links stehenden Integrale für jeden positiven ganzen Exponenten  $n$  zu berechnen.

Wir notieren ferner die beiden Gleichungen:

$$(15) \quad \begin{cases} \int x^m \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{1}{m+1} \int \frac{x^{m+1}}{1+x^2} dx, \\ \int x^m \operatorname{arc} \sin x \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \operatorname{arc} \sin x - \frac{1}{m+1} \int \frac{x^{m+1}}{\sqrt{1-x^2}} dx, \end{cases}$$

in denen wir unter  $m$  irgend eine von  $-1$  verschiedene ganze Zahl verstehen wollen. Die rechts stehenden Integrale „algebraischer Differentiale“ kommen unten zur Behandlung.

Gewöhnlich behandelt man an dieser Stelle auch das Integral des Differentials  $\sin^m x \cos^n x \, dx$ , unter  $m$  und  $n$  irgend zwei ganze Zahlen verstanden. Durch Einführung der neuen Variablen  $z = \sin x$  nimmt dieses Integral die Gestalt an:

$$(16) \quad \int \sin^m x \cos^n x \, dx = \int z^m (\sqrt{1-z^2})^{n-1} dz.$$

Wir gewinnen damit wieder das Integral eines „algebraischen Differentials“ und könnten uns auf die Entwicklungen im übernächsten Paragraphen beziehen, wo diese Integrale allgemein behandelt werden. Um jedoch die Art, wie man die fraglichen Integrale der partiellen Integration zugänglich macht, wenigstens an einem Beispiele zu erläutern, nehmen wir  $m$  und  $n$  als nicht-negative ganze Zahlen an und wollen  $n \geq 2$  voraussetzen. Indem wir  $\cos x \, dx = d \sin x$  setzen, ergibt die Regel (2):

$$\begin{aligned} & \int \cos^{n-1} x \sin^m x \, d \sin x \\ &= \cos^{n-1} x \int \sin^m x \, d \sin x + \int \left( (n-1) \cos^{n-2} x \sin x \int \sin^m x \, d \sin x \right) dx, \end{aligned}$$

woraus sich leicht weiter berechnet:

$$(m+1) \int \sin^m x \cos^n x \, dx = \sin^{m+1} x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x \, dx.$$

Unter dem letzten Integral spaltet man vom ersten Faktor den Bestandteil  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$  ab und findet, indem man „gliedweise“ integriert:

$$\begin{aligned} & (m+1) \int \sin^m x \cos^n x \, dx \\ &= \sin^{m+1} x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \sin^m x \cos^{n-2} x \, dx - (n-1) \int \sin^m x \cos^n x \, dx. \end{aligned}$$

Das letzte Integral ist wieder das zu berechnende, auf der linken Seite der Gleichung stehende Integral. Unter Zusammenfassung beider Glieder und Teilung der Gleichung durch den links auftretenden Faktor  $(m+n)$  folgt die erste der beiden Rekursionsformeln:

$$(17) \left\{ \begin{aligned} \int \sin^m x \cos^n x dx &= + \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x dx, \\ \int \sin^m x \cos^n x dx &= - \frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-2} x \cos^n x dx, \end{aligned} \right.$$

deren zweite durch eine analoge Rechnung gewonnen wird. Die Exponenten werden hier immer um 2 Einheiten reduziert, so daß man durch wiederholte Anwendung auf eines der vier Integrale:

$\int dx = x$ ,  $\int \sin x dx = -\cos x$ ,  $\int \cos x dx = \sin x$ ,  $\int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \sin^2 x$  geführt wird; *jedenfalls ist das Integral (16) für irgend zwei nicht-negative ganze Zahlen  $m$  und  $n$  durch wiederholte Anwendung der beiden Rekursionsformeln (17) berechenbar.*

Bemerkenswerte Spezialfälle der Formeln (17) sind:

$$(18) \left\{ \begin{aligned} \int \sin^m x dx &= - \frac{1}{m} \sin^{m-1} x \cos x + \frac{m-1}{m} \int \sin^{m-2} x dx, \\ \int \cos^m x dx &= + \frac{1}{m} \sin x \cos^{m-1} x + \frac{m-1}{m} \int \cos^{m-2} x dx. \end{aligned} \right.$$

Bereits ohne die partielle Integration kann man die Integrale der beiden Differentiale  $\operatorname{tg}^m x dx$  und  $\operatorname{cotg}^m x dx$  für alle ganzzahligen Exponenten  $m$  berechnen, nämlich mittelst der Rekursionsformeln:

$$(19) \left\{ \begin{aligned} \int \operatorname{tg}^m x dx &= \frac{1}{m-1} \operatorname{tg}^{m-1} x - \int \operatorname{tg}^{m-2} x dx, \\ \int \operatorname{cotg}^m x dx &= \frac{-1}{m-1} \operatorname{cotg}^{m-1} x - \int \operatorname{cotg}^{m-2} x dx, \end{aligned} \right.$$

die man ohne Mühe bestätigen wird. Wir brauchen nur positive ganze Zahlen  $m$  zuzulassen und haben übrigens in den Gleichungen (19)  $m > 1$  anzunehmen; für  $m = 1$  und  $m = 0$  sind die Integrale bereits bekannt.

Aufgaben: 1)  $\int x^2 e^x dx = e^x (x^2 - 2x + 2)$ .

2)  $\int z^n e^z dz = e^z (z^n - n z^{n-1} + n(n-1) z^{n-2} - \dots + (-1)^n n!)$ .

3)  $\int y^3 \cos y dy = (y^3 - 6y) \sin y + (3y^2 - 6) \cos y$ .

4)  $\int (5 + 8x) \ln x dx = (5x + 4x^2) \ln x - 5x - 2x^2$ .

5)  $\int \operatorname{tg}^3 v dv = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 v + \ln |\cos v|$ .

6)  $\int \operatorname{cotg}^4 x dx = -\frac{1}{3} \operatorname{cotg}^3 x + \operatorname{cotg} x + x$ .

$$7) \int \cos^2 x \sin^2 x \, dx = \frac{1}{8} x - \frac{1}{8} \sin x \cos x + \frac{1}{4} \sin^3 x \cos x.$$

$$8) \int y^n \ln y \, dy = \frac{y^{n+1}}{n+1} \ln y - \frac{y^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

$$9) \int \sin \mu x \cos \nu x \, dx = -\frac{\cos(\mu + \nu)x}{2(\mu + \nu)} - \frac{\cos(\mu - \nu)x}{2(\mu - \nu)}. \text{ Bemerkung: Es gilt } \mu \neq \nu.$$

Die Aufgabe ist am leichtesten auf Grund der Formel:

$$2 \sin \mu x \cos \nu x = \sin(\mu + \nu)x + \sin(\mu - \nu)x$$

zu lösen; man bestätige das Ergebnis, indem man die Aufgabe mittelst zweimaliger partieller Integration löst.

$$10) \int \sin \mu x \sin \nu x \, dx = \frac{\sin(\mu - \nu)x}{2(\mu - \nu)} - \frac{\sin(\mu + \nu)x}{2(\mu + \nu)}.$$

$$11) \int \cos \mu x \cos \nu x \, dx = \frac{\sin(\mu - \nu)x}{2(\mu - \nu)} + \frac{\sin(\mu + \nu)x}{2(\mu + \nu)}.$$

$$12) \int \cos^3 y \, dy = \sin y - \frac{1}{3} \sin^3 y.$$

$$13) \int \sin^4 z \, dz = \frac{3}{8} z - \frac{3}{8} \sin z \cos z - \frac{1}{4} \sin^3 z \cos z.$$

$$14) \int \frac{w \, dw}{\cos^2 w} = w \operatorname{tg} w + \ln |\cos w|.$$

$$15) \int (\ln x)^5 \, dx = x ((\ln x)^5 - 5(\ln x)^4 + 20(\ln x)^3 - 60(\ln x)^2 + 120 \ln x - 120).$$

$$16) \int \sin(b \cdot \ln x) \, dx = \frac{x}{1+b^2} (\sin(b \cdot \ln x) - b \cos(b \cdot \ln x)), \quad (z = \ln x).$$

$$17) \int \cos(b \cdot \ln x) \, dx = \frac{x}{1+b^2} (\cos(b \cdot \ln x) + b \sin(b \cdot \ln x)).$$

$$18) \int e^{a \cdot \arcsin x} \, dx = \frac{x + a\sqrt{1-x^2}}{a^2+1} \cdot e^{a \cdot \arcsin x}, \quad (z = \arcsin x).$$

$$19) \int \frac{e^x}{x^n} \, dx = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{e^x}{x^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{e^x}{x^{n-1}} \, dx, \quad (n \neq 1).$$

$$20) \int \frac{dx}{\sin^n x} = \frac{-\cos x}{(n-1) \sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}, \quad (n \neq 1). \text{ Anleitung: Man setze:}$$

$\int \frac{dx}{\sin^n x} = \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x} + \int \cos x \frac{d \sin x}{\sin^n x}$  und wende auf das letzte Integral die partielle Integration an.

$$21) \int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1) \cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}, \quad (n \neq 1).$$

$$22) \int \frac{dy}{\sin^2 y} = -\frac{\cos y}{2 \sin^2 y} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{y}{2} \right) \right|. \quad 23) \int \frac{dz}{\cos^4 z} = \frac{\sin z}{3 \cos^3 z} + \frac{2}{3} \operatorname{tg} z.$$

$$24) \int x^n \operatorname{Sin} x \, dx = x^n \operatorname{Cos} x - n \int x^{n-1} \operatorname{Cos} x \, dx.$$

$$25) \int e^{ax} \operatorname{Cos} bx \, dx = e^{ax} \frac{a \operatorname{Cos} bx - b \operatorname{Sin} bx}{a^2 - b^2}.$$

$$26) \int \operatorname{I}g^n x \, dx = -\frac{1}{n-1} \operatorname{I}g^{n-1} x + \int \operatorname{I}g^{n-2} x \, dx, \quad (n \neq 1).$$

$$27) \int \operatorname{Cotg}^3 z \, dz = -\frac{1}{2} \operatorname{Cotg}^2 z + \ln |\operatorname{Sin} z|.$$

**5. Integration aller rationalen Differentiale.** Während in der Differentialrechnung für jede elementare Funktion  $f(x)$  eine gleichfalls elementare Funktion  $\varphi(x)$  angegeben werden konnte, die die Ableitung von  $f(x)$  war, ist, wie wir weiter unten noch ausführlicher darlegen werden, keineswegs jedes Integral  $f(x) = \int \varphi(x) dx$ , dessen Differential mit einer elementaren Funktion  $\varphi(x)$  aufgebaut ist, eine elementare Funktion  $f(x)$ , d. h. eine einfache oder zusammengesetzte Funktion der Art, wie wir sie in der Einleitung aus den bereits in der Elementarmathematik vorkommenden Abhängigkeiten aufbauten. Es tritt demnach die wichtige Frage auf: *Kann man vielleicht der unter dem Integralzeichen stehenden Funktion  $\varphi(x)$  von vornherein ansehen, ob das Integral des Differentials  $\varphi(x) dx$  eine elementare Funktion ist oder nicht?* Wir können diese Frage wenigstens insoweit bejahend beantworten, daß wir einige Gattungen von Funktionen  $\varphi(x)$  anzugeben vermögen, für welche das Integral  $\varphi(x) dx$  unter allen Umständen eine elementare Funktion ist.

Um einen ersten hierher gehörigen Satz aufzustellen, wollen wir, falls  $\varphi(x)$  eine rationale Funktion  $R(x)$  von  $x$  ist (I, 80), das Differential  $R(x) dx$  als ein „rationales Differential“ bezeichnen. Es gilt dann der wichtige Satz: *Das Integral jedes rationalen Differentials ist eine elementare Funktion.* Entsprechend der Beschränkung unserer bisherigen Entwicklungen beziehen wir diesen Satz natürlich nur auf rationale Funktionen mit reellen Koeffizienten, obschon der Satz auch für rationale „komplexe Funktionen“ gültig bleibt.

Die Möglichkeit, ein rationales Differential zu integrieren, beruht auf der Zerlegung der Funktion  $R(x)$  in Partialbrüche\*). Falls  $R(x)$  eine „unecht gebrochene“ Funktion ist, hat man sie zunächst nach (3) in I, 82

\*) Es ist dem Leser zu empfehlen, hier zunächst die Entwicklungen in I, 77 ff., insbesondere diejenigen über Partialbruchzerlegung, zu wiederholen, ebenso die sich anschließenden Entwicklungen in I, 135 ff.

in die Summe einer ganzen Funktion  $G(x)$  und einer „echt gebrochenen“ Funktion zu zerlegen. Da die Integration von  $G(x) dx$  durch die Gleichung (3) S. 6 bereits geleistet ist, so bleibt nur noch die Integration des echt gebrochenen Bestandteils übrig. Die echt gebrochene Funktion zerlegen wir in ein Aggregat von Partialbrüchen, deren einzelner eine der beiden folgenden Gestalten hat:

$$\frac{A}{(x-\alpha)^n}, \quad \frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^n}$$

Die hierbei auftretenden Partialnenner werden von der Faktorenerlegung (9) in I, 85 der im Nenner von  $R(x)$  stehenden ganzen Funktion geliefert;  $(x-\alpha)$  ist ein reeller „Linearfaktor“, die reelle Funktion zweiten Grades  $(x^2+\beta x+\gamma)$  entspricht einem „Paare konjugiert komplexer Wurzeln“ der durch Nullsetzen des Nenners von  $R(x)$  entstehenden Gleichung, so daß die Koeffizienten  $\beta$  und  $\gamma$  die Bedingung:

$$(1) \quad 4\gamma - \beta^2 > 0$$

erfüllen. Endlich ist der Exponent  $n$  eine positive ganze Zahl. Da die  $A, B, C$  konstante Größen sind, so besteht die noch zu leistende Aufgabe in der Berechnung der drei folgenden Integrale:

$$(2) \quad \int \frac{dx}{(x-\alpha)^n}, \quad \int \frac{x dx}{(x^2+\beta x+\gamma)^n}, \quad \int \frac{dx}{(x^2+\beta x+\gamma)^n}$$

Das erste Integral ist sofort berechnet; denn wir haben:

$$(3) \quad \int \frac{dx}{x-\alpha} = \ln|x-\alpha|, \quad \int \frac{dx}{(x-\alpha)^n} = -\frac{1}{(n-1)(x-\alpha)^{n-1}}, \quad (n > 1).$$

Das zweite Integral können wir so entwickeln:

$$\int \frac{x dx}{(x^2+\beta x+\gamma)^n} = \frac{1}{2} \int \frac{(2x+\beta) dx}{(x^2+\beta x+\gamma)^n} - \frac{\beta}{2} \int \frac{dx}{(x^2+\beta x+\gamma)^n}$$

Indem wir uns zur Berechnung des ersten Gliedes rechter Hand der Variablen  $z = x^2 + \beta x + \gamma$  bedienen, folgt für  $n = 1$ :

$$(4) \quad \int \frac{x dx}{(x^2+\beta x+\gamma)} = \frac{1}{2} \ln(x^2+\beta x+\gamma) - \frac{\beta}{2} \int \frac{dx}{x^2+\beta x+\gamma},$$

während sich für  $n > 1$  ergibt:

$$\int \frac{x dx}{(x^2+\beta x+\gamma)^n} = \frac{-1}{2(n-1)(x^2+\beta x+\gamma)^{n-1}} - \frac{\beta}{2} \int \frac{dx}{(x^2+\beta x+\gamma)^n},$$

so daß nur noch das dritte Integral (2) zu berechnen übrig bleibt.

Wir formen dieses dritte Integral zunächst durch Einführung der neuen Variablen:

$$(5) \quad y = \frac{2x+\beta}{\sqrt{4\gamma-\beta^2}}$$

um, wobei wegen (1) die im Nenner stehende Wurzel reell ist und positiv genommen werden mag. Die neue Gestalt des Integrales ist:

$$(6) \quad \int \frac{dx}{\left(\left(x + \frac{\beta}{2}\right)^2 + \gamma - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2\right)^n} = \left(\frac{2}{\sqrt{4\gamma - \beta^2}}\right)^{2n-1} \int \frac{dy}{(1+y^2)^n}.$$

Im niedersten Falle  $n=1$  haben wir rechts das arc tg-Integral. Ist dagegen  $n > 1$ , so führen wir nochmals eine neue Variable  $z$  ein, indem wir:

$$z = \text{arc tg } y, \quad y = \text{tg } z$$

setzen; es folgt:

$$\int \frac{dy}{(1+y^2)^n} = \int \cos^{2n-2} z \, dz,$$

so daß wir Anschluß an die zweite Rekursionsformel (18) S. 17 gewinnen. Auf  $y$  umgerechnet lautet diese Formel:

$$(7) \quad \int \frac{dy}{(1+y^2)^n} = \frac{1}{2n-2} \frac{y}{(1+y^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dy}{(1+y^2)^{n-1}}.$$

Rechts steht im ersten Gliede eine in  $y$  und also auch in  $x$  rationale Funktion, während sich im zweiten Gliede ein mit dem links stehenden gleichgebautes Integral findet, bei dem jedoch der Exponent im Nenner um eine Einheit verringert ist. Somit gelangt man durch  $(n-1)$ -malige Anwendung dieser Rekursionsformel nach Abspaltung einer Anzahl rationaler Glieder zum arc tg-Integral zurück.

Die Integrale (2) sind also durchweg durch „elementare“ Funktionen darstellbar, und wir haben den wichtigen Satz gewonnen: *Das Integral jedes rationalen Differentials  $R(x) dx$  läßt sich als elementare Funktion in der Gestalt:*

$$(8) \quad \int R(x) dx = R_1(x) + \sum A \ln |x - \alpha| + \sum A' \ln (x^2 + \beta x + \gamma) \\ + \sum A'' \text{arc tg} \left( \frac{2x + \beta}{\sqrt{4\gamma - \beta^2}} \right)$$

berechnen. Im Ausdrucke  $R_1(x)$  haben wir alle im Laufe der Rechnung sich einstellenden rationalen Glieder zusammengefaßt; die logarithmischen Glieder der ersten Summe rühren von den linearen Partialbrüchen her, und die weiteren logarithmischen Glieder und die arc tg-Glieder können nur dann auftreten, wenn die durch Nullsetzen des Nenners von  $R(x)$  zu gewinnende Gleichung Paare komplexer Lösungen besitzt.

Ein Beispiel, bei dem nur lineare Partialbrüche auftreten werden, ist:

$$\int \frac{2x^4 - 6x^3 + x^2 - 7x + 8}{2x^3 - 4x^2 - 2x + 4} dx.$$

Die unter dem Integralzeichen stehende Funktion  $R(x)$  zerlegen wir zu-

nächst durch Division des Nenners in den Zähler in die Summe einer ganzen Funktion und einer echt gebrochenen Funktion:

$$(9) \quad R(x) = x - 1 + \frac{-\frac{1}{2}x^2 - \frac{13}{2}x + 6}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$$

Wie in I, 82 möge die im Nenner der echt gebrochenen Funktion stehende ganze Funktion  $g(x)$  heißen und der Zähler mit  $h(x)$  bezeichnet werden. Um die Faktorenerlegung der im Nenner stehenden Funktion  $g(x)$  zu leisten, haben wir nach I, 77 ff. die Gleichung:

$$g(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

zu lösen; dieselbe hat die drei einfachen Wurzeln  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = -1$  und  $\alpha_3 = 2$ , so daß nach Gleichung (4) in I, 79 die Zerlegung gilt:

$$(10) \quad g(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-1)(x+1)(x-2).$$

Wir haben demnach die echt gebrochene Funktion in die Summe dreier linearer Partialbrüche von folgender Gestalt zu zerlegen:

$$(11) \quad \frac{h(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3}{x-2}$$

Für die Berechnung der konstanten Partialzähler haben wir drei Wege zur Verfügung. Erstlich können wir nach der allgemeinen Vorschrift von I, 82 verfahren. Wir haben dann die Gleichung (10) in die Gestalt zu kleiden:

$$g(x) = (x-1)(x^2 - x - 2) = (x-1)g_1(x), \quad g_1(x) = x^2 - x - 2$$

und finden auf Grund der Gleichung (1) in I, 82:

$$A_1 = \frac{h(\alpha_1)}{g_1(\alpha_1)} = \frac{h(1)}{g_1(1)} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}.$$

Nach derselben Methode gewinnt man  $A_2 = 2$ ,  $A_3 = -3$ , so daß die Partialbruchzerlegung der echt gebrochenen Funktion geleistet ist durch:

$$(12) \quad \frac{-\frac{1}{2}x^2 - \frac{13}{2}x + 6}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{x-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{(-3)}{x-2}.$$

Ein zweiter Weg, unmittelbar zu diesem Ergebnis zu gelangen, wird durch die Gleichung (7) in I, 170 eröffnet, nach welcher die fertige Partialbruchzerlegung im vorliegenden Falle lautet:

$$(13) \quad \frac{h(x)}{g(x)} = \frac{h(\alpha_1)}{g'(\alpha_1)} \cdot \frac{1}{x-\alpha_1} + \frac{h(\alpha_2)}{g'(\alpha_2)} \cdot \frac{1}{x-\alpha_2} + \frac{h(\alpha_3)}{g'(\alpha_3)} \cdot \frac{1}{x-\alpha_3},$$

unter  $g'(x)$  die Ableitung von  $g(x)$  verstanden. Da in unserem Falle:

$$\frac{h(x)}{g'(x)} = \frac{-\frac{1}{2}x^2 - \frac{13}{2}x + 6}{3x^2 - 4x - 1}$$

ist, so hat man hier der Reihe nach  $x = 1, -1, 2$  einzutragen und gelangt so in der Tat zu den angegebenen Werten der Partialzähler zurück.

Drittens kann man so verfahren, daß man die drei in (11) rechts stehenden Brüche wieder addiert:

$$\frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3}{x-2} = \frac{(A_1 + A_2 + A_3)x^2 + (-A_1 - 3A_2)x + (-2A_1 + 2A_2 - A_3)}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$$

und die Forderung stellt, daß man auf diese Weise zu der in (11) links stehenden rationalen Funktion zurückgelangt. Da der Nenner bereits die Funktion  $g(x)$  ist, so muß die im Zähler stehende Funktion mit  $h(x)$  identisch sein. Es müssen also die  $A_1, A_2, A_3$  so bestimmt werden, daß die im Zähler des letzten Bruches stehenden Klammerausdrücke bzw. mit den Koeffizienten  $-\frac{1}{2}, -\frac{13}{2}, 6$  von  $h(x)$  gleich werden:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 &= -\frac{1}{2}, \\ A_1 + 3A_2 &= \frac{13}{2}, \\ -2A_1 + 2A_2 - A_3 &= 6. \end{aligned}$$

Wir erhalten also auf diese Weise ein System von drei linearen Gleichungen für die drei zu berechnenden Größen  $A$ . Die Auflösung dieser Gleichungen führt auf die schon bekannten Werte der  $A$  zurück.

Das Ergebnis der Integration ist endlich:

$$\int \frac{2x^4 - 6x^3 + x^2 - 7x + 8}{3x^3 - 4x^2 - 2x + 4} dx = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} \ln|x-1| + 2 \ln|x+1| - 3 \ln|x-2|.$$

Als zweites Beispiel diene die Berechnung des Integrales:

$$\int \frac{x^3 - 4x^2 + 1}{x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2} dx.$$

Die hier unter dem Integralzeichen stehende Funktion  $R(x)$  ist bereits echt gebrochen. Da die durch Nullsetzen des Nenners entstehende Gleichung die dreifache Wurzel 1 und die einfache Wurzel 2 hat, so gilt nach (3) in I, 83 der Ansatz:

$$\frac{h(x)}{g(x)} = \frac{x^3 - 4x^2 + 1}{(x-1)^3(x-2)} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{A_1}{(x-1)^2} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A'}{x-2}.$$

Um den Zähler des ersten Partialbruches zu berechnen, verfahren wir

nach I, 82, verstehen also unter  $g_1(x)$  die Funktion  $(x-2)$  und schreiben zunächst die identische Gleichung an:

$$(14) \quad \frac{x^3 - 4x^2 + 1}{(x-1)^3 g_1(x)} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{x^3 - 4x^2 + 1 - A g_1(x)}{(x-1)^3 g_1(x)}.$$

Bestimmen wir nun  $A$  der Gleichung (1) in I, 82 entsprechend aus:

$$A = \frac{h(1)}{g_1(1)} \quad \text{zu} \quad A = 2,$$

so muß sich nach den Darlegungen von I, 82 der im letzten Gliede der Gleichung (14) stehende Bruch um den Faktor  $(x-1)$  heben lassen; in der Tat ist:

$$x^3 - 4x^2 + 1 - 2(x-2) = (x-1)(x^2 - 3x - 5),$$

so daß der erste Schritt der Partialbruchzerlegung zum Ergebnis führt:

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 1}{(x-1)^3(x-2)} = \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{x^2 - 3x - 5}{(x-1)^2(x-2)}.$$

Die Anwendung des gleichen Verfahrens auf das weiter zu zerlegende zweite Glied der rechten Seite dieser Gleichung führt auf:

$$\frac{x^2 - 3x - 5}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{7}{(x-1)^2} + \frac{x-9}{(x-1)(x-2)}.$$

Das zweite Glied rechter Hand ist nach einer der im ersten Beispiel benutzten Methoden in zwei lineare Partialbrüche zu zerlegen. Unter Zusammenfassung der Einzelergebnisse erhalten wir als fertige Zerlegung der vorliegenden Funktion:

$$\frac{2}{(x-1)^3} + \frac{7}{(x-1)^2} + \frac{8}{x-1} - \frac{7}{x-2},$$

so daß sich das gesuchte Integral so darstellt:

$$\int \frac{x^3 - 4x^2 + 1}{x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2} dx = -\frac{7x-6}{(x-1)^2} + 8 \ln|x-1| - 7 \ln|x-2|.$$

Als drittes Beispiel betrachten wir das Integral:

$$\int \frac{x^3 + 3x + 1}{(x^2 - 4x + 5)^2} dx.$$

Die quadratische Gleichung  $x^2 - 4x + 5 = 0$  hat die komplexe Lösung  $\alpha = 2 + i$ , so daß die Partialbruchzerlegung nach der allgemeinen Vorschrift von I, 83 ff. zu geschehen hat. Unter Gebrauch der damaligen Bezeichnungen haben wir, da die Funktion  $g_1(x)$  mit 1 identisch ist, zu setzen:

$$h(\alpha) = h(2+i) = (2+i)^3 + 3(2+i) + 1 = D + iE,$$

woraus sich  $D = 9$  und  $E = 14$  berechnet. Die Koeffizienten  $B$  und  $C$  des ersten Partialzählers berechnen sich daraufhin aus (6) in I, 84 zu

$B = 14$  und  $C = -19$ . Für diese Werte muß demnach die Funktion  $h(x) - (Bx + C)$  den Faktor  $x^2 - 4x + 5$  bekommen; in der Tat ist:

$$h(x) - (Bx + C) = x^3 + 3x + 1 - (14x - 19) = (x^2 - 4x + 5)(x + 4).$$

Wir haben damit folgende, dem allgemeinen Ansatz (8) in I, 84 entsprechende Partialbruchzerlegung gewonnen:

$$(15) \quad \frac{x^3 + 3x + 1}{(x^2 - 4x + 5)^2} = \frac{14x - 19}{(x^2 - 4x + 5)^2} + \frac{x + 4}{x^2 - 4x + 5}.$$

Das Integral des ersten Gliedes rechter Hand ist nach Vorschrift von S. 20 weiter so zu entwickeln:

$$\begin{aligned} \int \frac{14x - 19}{(x^2 - 4x + 5)^2} dx &= 7 \int \frac{2x - 4}{(x^2 - 4x + 5)^2} dx + 9 \int \frac{dx}{(x^2 - 4x + 5)^2}, \\ \int \frac{14x - 19}{(x^2 - 4x + 5)^2} dx &= \frac{-7}{x^2 - 4x + 5} + 9 \int \frac{dy}{(1 + y^2)^2}, \quad (y = x - 2). \end{aligned}$$

Das rechts noch verbleibende Integral ist auf Grund der Formel (7) zu reduzieren. Durch entsprechende Behandlung des letzten Gliedes in (15) gelangt man zum Schlusse. Unter Zusammenfassung der rationalen Glieder sowie der beiden im Laufe der Rechnung sich einfindenden arc tg-Glieder ergibt sich:

$$\int \frac{x^3 + 3x + 1}{(x^2 - 4x + 5)^2} dx = \frac{9x - 32}{2(x^2 - 4x + 5)} + \frac{1}{2} \ln(x^2 - 4x + 5) + \frac{21}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x - 2).$$

Aufgaben: 1)  $\int \frac{x - 1}{x^2 - 7x} dx = \frac{1}{7} \ln|x| + \frac{6}{7} \ln|x - 7|.$

2)  $\int \frac{dz}{z^2 - 7z + 10} = \frac{1}{3} \ln|z - 5| - \frac{1}{3} \ln|z - 2| = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{z - 5}{z - 2} \right|.$

3)  $\int \frac{6u^3 du}{u^3 - 2u^2 - u + 2} = -3 \ln|u - 1| + \ln|u + 1| + 8 \ln|u - 2|.$

4)  $\int \frac{x^3 - 2}{x^2 + 3x + 2} dx = \frac{1}{2} x^2 - 3x - 3 \ln|x + 1| + 10 \ln|x + 2|.$

5)  $\int \frac{dy}{2y - 3y^2} = \frac{1}{2} \ln|y| - \frac{1}{2} \ln|y - \frac{2}{3}| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{3y}{3y - 2} \right|.$

6)  $\int \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x - 1}{x^2 - 8x + 7} dx = \frac{1}{3} x^3 + 3x^2 + 42x + \ln|x - 1| + 288 \ln|x - 7|.$

7)  $\int \frac{dv}{v^2 - 8v + 15} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{v - 5}{v - 3} \right|.$

8)  $\int \frac{dx}{ax^2 + 2bx + c} = \frac{1}{2\sqrt{b^2 - ac}} \ln \left| \frac{ax + b - \sqrt{b^2 - ac}}{ax + b + \sqrt{b^2 - ac}} \right|, \quad (b^2 > ac).$

- 9)  $\int \frac{dx}{ax^2 + 2bx + c} = \frac{1}{\sqrt{ac - b^2}} \operatorname{arc\,tg} \left( \frac{ax + b}{\sqrt{ac - b^2}} \right), \quad (b^2 < ac).$
- 10)  $\int \frac{dx}{ax^2 + 2bx + c} = -\frac{1}{ax + b}, \quad (b^2 = ac).$
- 11)  $\int \frac{x^3 - 4x^2 + 1}{(x-2)^4} dx = -\frac{6x^2 - 30x + 29}{3(x-2)^3} + \ln|x-2|.$
- 12)  $\int \frac{5t^2 + 9}{t^4 - 3t^3} dt = \frac{3}{2t^2} + \frac{1}{t} - 2 \ln|t| + 2 \ln|t-3|.$
- 13)  $\int \frac{dx}{x^3 + 1} = \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \left( \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right).$
- 14)  $\int \frac{dz}{1-z^4} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{z+1}{z-1} \right| + \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} z.$
- 15)  $\int \frac{dy}{y^5 - 1} = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{y-1}{y+1} \right| + \frac{1}{12} \ln \left( \frac{y^2 - y + 1}{y^2 + y + 1} \right) - \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \left( \frac{2y+1}{\sqrt{3}} \right) - \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \left( \frac{2y-1}{\sqrt{3}} \right).$
- 16)  $\int \frac{x^3 - 2x + 3}{x^5 - 5x^3 + 11x - 15} dx = \frac{3}{4} \ln|x-3| + \frac{1}{8} \ln(x^2 - 2x + 5) + \frac{1}{4} \operatorname{arc\,tg} \left( \frac{x-1}{2} \right).$
- 17)  $\int \frac{y^2 + 1}{y^4 + y^2 + 1} dy = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \left( \frac{2y+1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \left( \frac{2y-1}{\sqrt{3}} \right).$
- 18)  $\int \frac{6x^3 - 40x^2 + 122x - 132}{x^4 - 10x^3 + 42x^2 - 82x + 65} dx = 3 \ln(x^2 - 4x + 5) - 2 \operatorname{arc\,tg}(x-2) + 5 \operatorname{arc\,tg} \left( \frac{x-3}{2} \right).$
- 19)  $\int \frac{x^2 - 21}{(x^2 - 2x + 6)^2} dx = -\frac{5x-3}{2(x^2 - 2x + 6)} - \frac{3}{2\sqrt{5}} \operatorname{arc\,tg} \left( \frac{x-1}{\sqrt{5}} \right).$
- 20)  $\int \frac{x^4 + 18x^3 - 186x^2 + 449x - 336}{(x^2 - 5x + 4)^3} dx = \frac{2}{(x-4)^2} - \frac{7}{x-4} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{3}{x-1} + \ln \left| \frac{x-1}{x-4} \right|.$

6. Integration einiger algebraischer Differentiale. In I, 86 wurde im Anschluß an die damalige Gleichung (3) der Begriff einer algebraischen Funktion  $y = \varphi(x)$  erklärt; das aus einer solchen Funktion gebildete Differential  $\varphi(x) dx$  heiße ein „*algebraisches Differential*“. In der allgemeinen Theorie der algebraischen Funktionen wird dieser Ansatz insofern erweitert, daß sowohl das Argument  $x$  als „komplexe Variable“ vorausgesetzt wird, als auch in der die Funktion erklärenden Gleichung (3) in

I, 86 ganze Funktionen  $g_0(x), g_1(x), \dots$  mit beliebigen komplexen Koeffizienten zugelassen werden. Die genannte Theorie hat zu dem Ergebnis geführt, daß die Integrale der algebraischen Differentiale im allgemeinen (d. i. von besonderen Fällen abgesehen) Eigenschaften besitzen, welche bei den „elementaren“ Funktionen einer komplexen Variablen\*) noch nicht vorkommen können. Diese Integrale stellen also nicht mehr elementare Funktionen dar; wir nennen sie deshalb „höhere transzendente Funktionen“ oder sprechen von einem „nicht-elementaren Integrale“.

Diese Sachlage bleibt auch dann noch bestehen, wenn wir uns im Sinne von I, 86 auf „elementare“ algebraische Funktionen beschränken, d. h. auf Funktionen  $\varphi(x)$ , die aus  $x$  und gegebenen Konstanten durch eine Kette „algebraischer Rechnungen“, d. h. rationaler Rechnungen und Wurzelziehungen, berechenbar sind. Jedoch gibt es in diesem Gebiete besondere Fälle, in denen wir zu einem elementaren Integrale geführt werden. *Jedenfalls ist das Integral des Differential  $\varphi(x)dx$  stets dann elementar, wenn es gelingt, durch Einführung einer neuen Variablen  $z$  vermöge einer Gleichung  $x = \psi(z)$  das Differential auf ein in  $z$  rationales Differential umzurechnen:*

$$(1) \quad \varphi(x) dx = \varphi(\psi(z)) \psi'(z) dz = R(z) dz.$$

Vier hierher gehörige Fälle sollen ausführlich betrachtet werden. Wir beschränken die Untersuchung dabei wieder ausschließlich auf *reelle* Werte der Variablen und Funktionen.

I. Das Integral habe die Gestalt:

$$(2) \quad \int R(x, \sqrt[n]{\alpha x + \beta}) dx,$$

d. h. die Funktion unter dem Integralzeichen sei aus  $x$  und der  $n^{\text{ten}}$  Wurzel der linearen Funktion  $(\alpha x + \beta)$  durch eine Kette von rationalen Rechnungen berechenbar;  $n$  sei ganzzahlig und  $\geq 2$ .

Der Koeffizient  $\alpha$  gilt als von 0 verschieden, da sonst in (2) das Integral eines rationalen Differential vorliegen würde. Die Funktion  $(\alpha x + \beta)$  hat bei  $\varepsilon = -\frac{\beta}{\alpha}$  einen Nullpunkt; für  $x > \varepsilon$  hat sie das Vorzeichen  $\text{sgn}(\alpha)$ , für  $x < \varepsilon$  aber  $-\text{sgn}(\alpha)$ . Ist  $n$  gerade, so ist  $x$  auf dasjenige Intervall zu beschränken, für welches  $(\alpha x + \beta) > 0$  ist; dabei werde das Vorzeichen der Wurzel beliebig gewählt. Für ungerades  $n$  tritt indessen keine Beschränkung von  $x$  ein.

Die Transformation auf ein rationales Differential gelingt nun durch folgende Substitution:

\*) Vgl. über die Erweiterung unserer elementaren Funktionen auf solche einer komplexen Variablen die Ausführungen am Schlusse des vorliegenden Bandes.

$$(3) \quad z = \sqrt[n]{\alpha x + \beta}, \quad x = \frac{1}{\alpha} z^n - \frac{\beta}{\alpha}, \quad dx = \frac{n}{\alpha} z^{n-1} dz;$$

denn wir erhalten:

$$(4) \quad R(x, \sqrt[n]{\alpha x + \beta}) dx = R\left(\frac{1}{\alpha} z^n - \frac{\beta}{\alpha}, z\right) \cdot \frac{n}{\alpha} z^{n-1} dz.$$

Jedes Integral der Gestalt (2) ist somit elementar.

II. Das Integral habe die Gestalt:

$$(5) \quad \int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right) dx,$$

d. h. die Funktion unter dem Integralzeichen sei aus  $x$  und der  $n^{\text{ten}}$  Wurzel einer gebrochenen linearen Funktion von  $x$  durch eine Kette von rationalen Rechnungen berechenbar;  $n$  sei wieder ganzzahlig und  $\geq 2$ .

Die vier Koeffizienten  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  sind nicht völlig willkürlich wählbar. Zunächst ist einleuchtend, daß  $\alpha$  und  $\beta$  (und ebenso  $\gamma$  und  $\delta$ ) nicht zugleich verschwinden dürfen. Auch  $\alpha$  und  $\gamma$  dürfen nicht zugleich verschwinden, da sonst in (5) ein rationales Differential vorliegen würde. Wir dürfen aber sogar voraussetzen, daß weder  $\alpha$  noch  $\gamma$  verschwindet, da, wenn einer dieser Koeffizienten gleich 0 sein würde, offenbar der schon erledigte Fall (2) vorläge. Demnach sind:

$$(6) \quad -\frac{\beta}{\alpha} = \varepsilon_1, \quad -\frac{\delta}{\gamma} = \varepsilon_2$$

zwei endliche Zahlen, die die Nullpunkte des Zählers und Nenners der linearen Funktion festlegen, und mit deren Hilfe sich diese Funktion in die folgende Gestalt setzen läßt:

$$(7) \quad \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} = \frac{\alpha}{\gamma} \frac{x - \varepsilon_1}{x - \varepsilon_2}.$$

Zufolge dieser Gleichung muß, damit die lineare Funktion nicht mit der Konstanten  $\frac{\alpha}{\gamma}$  identisch ist, die weitere Bedingung erfüllt sein:

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{\delta}{\gamma} - \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\alpha\gamma} \neq 0.$$

Es sind also  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  irgend vier endliche Zahlen, die den Ungleichungen  $\alpha\gamma \neq 0, \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$  genügen sollen.

Im Innern des durch  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  eingegrenzten Intervalles hat die lineare Funktion das Vorzeichen  $-\text{sgn}(\alpha\gamma)$ , außerhalb desselben aber  $+\text{sgn}(\alpha\gamma)$ . Ist  $n$  eine gerade Zahl, so ist hiernach  $x$  auf solche Werte zu beschränken, für welche die lineare Funktion positiv ist; das beim Ausziehen der Wurzel verfügbare Vorzeichen mag beliebig gewählt werden. Für ungerades  $n$  liegt eine solche Beschränkung der Werte  $x$  nicht vor.

Die Umrechnung des Differentials (5) auf rationale Gestalt wird geleistet durch die Substitution:

$$(8) \quad z = \sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}, \quad x = \frac{\delta z^n - \beta}{-\gamma z^n + \alpha}, \quad dx = \frac{\alpha \delta - \beta \gamma}{(\alpha - \gamma z^n)^2} n z^{n-1} dz;$$

denn wir erhalten:

$$(9) \quad R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right) dx = R\left(\frac{\delta z^n - \beta}{-\gamma z^n + \alpha}, z\right) \cdot \frac{\alpha \delta - \beta \gamma}{(\alpha - \gamma z^n)^2} n z^{n-1} dz.$$

Jedes Integral der Gestalt (5) ist somit elementar.

III. Das Integral habe die Gestalt:

$$(10) \quad \int R(x, \sqrt{ax^2 + 2bx + c}) dx,$$

d. h. die Funktion unter dem Integralzeichen sei aus  $x$  und der Quadratwurzel einer rationalen ganzen Funktion zweiten Grades von  $x$  durch eine Kette rationaler Rechnungen berechenbar.

Der Koeffizient  $a$  gilt als von 0 verschieden, damit nicht der Fall I vorliegt. Durch Nullsetzen der ganzen Funktion erhalten wir eine quadratische Gleichung, deren Wurzeln  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  zunächst als reell vorausgesetzt werden mögen, was für  $b^2 - ac \geq 0$  eintritt. In diesem Falle können wir unter Benutzung der Zerlegung  $a(x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2)$  der ganzen Funktion die Quadratwurzel so schreiben:

$$\sqrt{ax^2 + 2bx + c} = (x - \varepsilon_2) \sqrt{\frac{a(x - \varepsilon_1)}{x - \varepsilon_2}}$$

und haben also in (10) für  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$  (d. h. für  $b^2 - ac = 0$ ) ein rationales Differential, für  $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$  (d. h. für  $b^2 - ac > 0$ ) ein Differential der schon erledigten Gestalt (5).

Wir haben demnach nur noch den Fall  $b^2 - ac < 0$  zu betrachten. Aus:

$$ax^2 + 2bx + c = \frac{1}{a} ((ax + b)^2 + (ac - b^2))$$

folgt jetzt, da der Ausdruck in der Klammer für alle Werte  $x$  größer als 0 ist:

$$\operatorname{sgn}(ax^2 + 2bx + c) = \operatorname{sgn}(a).$$

Damit die Quadratwurzel reell ausfällt, ist somit  $a > 0$  vorauszusetzen;  $x$  unterliegt keiner Beschränkung, und das Vorzeichen der Quadratwurzel mag beliebig gewählt sein.

Die Umrechnung des Integrales (10) auf rationale Gestalt geschieht im vorliegenden Falle durch Einführung der Variablen:

$$(11) \quad z = x\sqrt{a} + \sqrt{ax^2 + 2bx + c},$$

wo rechter Hand das Vorzeichen von  $\sqrt{a}$  beliebig gewählt sei. Aus (11) ergibt sich:

$$(12) \quad (z - x\sqrt{a})^2 = ax^2 + 2bx + c, \quad z^2 - 2xz\sqrt{a} = 2bx + c.$$

Durch Auflösung der letzten Gleichung nach  $x$  und Differentiation folgt weiter:

$$(13) \quad x = \frac{z^2 - c}{2(z\sqrt{a} + b)}, \quad dx = \frac{z^2\sqrt{a} + 2bz + c\sqrt{a}}{2(z\sqrt{a} + b)^2} dz.$$

Andrerseits ergibt sich aus der ersten Gleichung (12) nach Eintragung des inzwischen berechneten Ausdrucks von  $x$  in  $z$ :

$$(14) \quad \sqrt{ax^2 + 2bx + c} = \frac{z^2\sqrt{a} + 2bz + c\sqrt{a}}{2(z\sqrt{a} + b)}.$$

Somit folgt für unser Differential:

$$R(x, \sqrt{ax^2 + 2bx + c}) dx = R\left(\frac{z^2 - c}{2(z\sqrt{a} + b)}, \frac{z^2\sqrt{a} + 2bz + c\sqrt{a}}{2(z\sqrt{a} + b)}\right) \frac{z^2\sqrt{a} + 2bz + c\sqrt{a}}{2(z\sqrt{a} + b)^2} dz;$$

dasselbe ist also in  $z$  in der Tat rational geworden, so daß auch die Integrale (10) in allen für uns in Betracht kommenden Fällen als elementar erkannt sind.

IV. Das Integral habe endlich die Gestalt:

$$(15) \quad \int R(x, \sqrt{\alpha x + \beta}, \sqrt{\gamma x + \delta}) dx,$$

d. h. die Funktion unter dem Integralzeichen sei aus  $x$  und den Quadratwurzeln zweier linearer ganzer Funktionen von  $x$  durch eine Kette rationaler Rechnungen berechenbar.

Die Koeffizienten  $\alpha$  und  $\gamma$  haben als von 0 verschieden zu gelten. Wir schreiben dann,  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  wieder im Sinne von (6) gebraucht:

$$(16) \quad \sqrt{\alpha x + \beta} = \sqrt{\alpha(x - \varepsilon_1)}, \quad \sqrt{\gamma x + \delta} = \sqrt{\gamma(x - \varepsilon_2)}.$$

Damit wir nicht auf den Fall I zurückkommen, haben wir die beiden Nullpunkte  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  der linearen Funktionen als voneinander verschieden vorauszusetzen und nehmen etwa an, daß  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$  sei. Je nach den Vorzeichen von  $\alpha$  und  $\gamma$  ist alsdann  $x$ , wie man leicht feststellt, in folgender Art zu beschränken:

$$\begin{aligned} x &\geq \varepsilon_2 && \text{für } \alpha > 0, \quad \gamma > 0, \\ \varepsilon_1 &\leq x \leq \varepsilon_2 && \text{für } \alpha > 0, \quad \gamma < 0, \\ x &\leq \varepsilon_1 && \text{für } \alpha < 0, \quad \gamma < 0. \end{aligned}$$

Die Annahme  $\alpha < 0, \gamma > 0$  ist auszuschließen, da dann für keinen Wert  $x$  beide Wurzeln zugleich reell ausfallen. Die Vorzeichen der Wurzeln mögen beliebig gewählt sein.

Man führt nun die neue Variable  $z = \sqrt{\alpha x + \beta}$  ein und findet:

$$z = \sqrt{\alpha x + \beta}, \quad x = \frac{1}{\alpha} z^2 - \frac{\beta}{\alpha}, \quad dx = \frac{2}{\alpha} z dz, \quad \sqrt{\gamma x + \delta} = \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha} z^2 + \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\alpha}},$$

so daß sich das Integral (15) auf die Gestalt:

$$\int R(x, \sqrt{\alpha x + \beta}, \sqrt{\gamma x + \delta}) dx = \int R\left(\frac{1}{\alpha} z^2 - \frac{\beta}{\alpha}, z, \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha} z^2 + \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\alpha}}\right) \frac{2}{\alpha} z dz,$$

und damit auf ein Integral der Gattung (10) umrechnet. Also haben wir auch das Integral (15) in allen für uns in Betracht kommenden Fällen als elementar erkannt.

**7. Zweite Integrationsmethode von Differentialen mit der Quadratwurzel einer ganzen Funktion zweiten Grades.** Eine zweite Methode, ein Integral:

$$(1) \quad \int R(x, \sqrt{ax^2 + 2bx + c}) dx$$

zu berechnen, behält die Quadratwurzel bei und sucht durch Zerlegung und wiederholte Einführung neuer Variablen zum Ziele zu kommen. Wir schreiben zur Abkürzung:

$$(2) \quad w = \sqrt{ax^2 + 2bx + c}$$

und denken  $R(x, w)$  in der normalen Gestalt des Quotienten zweier ganzer rationaler Funktionen von  $x$  und  $w$  dargestellt (vgl. I, 95). Da zufolge (2) jede gerade Potenz von  $w$  in  $x$  eine ganze rationale Funktion ist, jede ungerade Potenz von  $w$  aber das Produkt von  $w$  und einer ganzen rationalen Funktion von  $x$  darstellt, so können wir  $R(x, w)$  in folgende Gestalt setzen:

$$R(x, w) = \frac{g_0(x) + w g_1(x)}{g_2(x) + w g_3(x)},$$

wo die  $g$  ganze rationale Funktionen von  $x$  sind. Erweitern wir den rechter Hand stehenden Bruch mit  $(g_2 - w g_3)$ , so folgt:

$$R(x, w) = \left( \frac{g_0 g_2 - w^2 g_1 g_3}{g_2^2 - w^2 g_3^2} \right) + \left( \frac{g_1 g_2 w^2 - g_0 g_3 w^2}{g_2^2 - w^2 g_3^2} \right) \cdot \frac{1}{w},$$

wo in beiden Klammern rechter Hand rationale Funktionen  $R_1(x)$  und  $R_2(x)$  stehen. Auf diese Weise ist das Integral (1) dargestellt als Summe von zwei Integralen:

$$\int R(x, w) dx = \int R_1(x) dx + \int \frac{R_2(x) dx}{w},$$

von denen das erste Integral eines rationalen Differentials hier als erledigt zu gelten hat, während das zweite der weiteren Entwicklung zu unterwerfen ist.

Man zerlegt jetzt  $R_2(x)$  in Partialbrüche und stellt auf diese Weise das noch zu berechnende Integral als ein *Aggregat von Integralen der drei Typen* dar:

$$\text{I. } \int \frac{x^n dx}{w}, \quad \text{II. } \int \frac{dx}{(x-\alpha)^n w}, \quad \text{III. } \int \frac{(Bx+C) dx}{(x^2+\beta x+\gamma)^n w};$$

in I ist  $n$  eine nicht-negative ganze Zahl, in II und III eine positive ganze Zahl, die Koeffizienten  $\beta$  und  $\gamma$  befriedigen die Bedingung:

$$(3) \quad 4\gamma > \beta^2.$$

Indem wir die Behandlung des Typus I hinausschieben, *reduzieren wir zunächst den Typus II auf I*. Dies gelingt leicht durch die Substitution:

$$(4) \quad \begin{cases} z = \frac{1}{x-\alpha}, & x = \frac{1}{z} + \alpha, & dx = -\frac{dz}{z^2}, \\ wz = \sqrt{(a\alpha^2 + 2b\alpha + c)z^2 + 2(a\alpha + b)z + a} = w_1. \end{cases}$$

Das Integral II geht hierbei in der Tat in die Gestalt:

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n w} = -\int \frac{z^{n-1} dz}{w_1}$$

über, welche dem Typus I angehört.

*Auch der Typus III ist auf I reduzierbar*, freilich durch eine weit umständlichere Rechnung. Wir üben zunächst die Substitution aus:

$$(5) \quad x + \frac{\beta}{2} = x' \sqrt{\gamma - \frac{\beta^2}{4}}, \quad dx = dx' \sqrt{\gamma - \frac{\beta^2}{4}}$$

und gelangen auf diese Weise zu einem Integrale der Gestalt:

$$(6) \quad \int \frac{(B'x' + C') dx'}{(x'^2 + 1)^n \sqrt{a'x'^2 + 2b'x' + c'}},$$

das wiederum den Typus III, aber mit der Vereinfachung  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 1$  besitzt.

Ist  $b' \neq 0$ , so führen wir zu weiterer Vereinfachung die Substitution:

$$(7) \quad x' = \frac{z-\varepsilon}{\varepsilon z + 1}, \quad dx' = (1+\varepsilon^2) \frac{dz}{(\varepsilon z + 1)^2}, \quad x'^2 + 1 = \frac{\varepsilon^2 + 1}{(\varepsilon z + 1)^2} \cdot (z^2 + 1)$$

aus, wobei wir uns die Auswahl von  $\varepsilon$  vorbehalten. Man berechnet leicht, indem man der Kürze halber die oberen Indizes der Koeffizienten  $B'$ ,  $C'$ ,  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  fortläßt:

$$(8) \quad \begin{cases} Bx' + C = \frac{(B+C\varepsilon)z - (B\varepsilon - C)}{\varepsilon z + 1} = \frac{B_1 z + C_1}{\varepsilon z + 1}; \\ w(\varepsilon z + 1) = \sqrt{(a+2b\varepsilon+c\varepsilon^2)z^2 - 2((a-c)\varepsilon + (\varepsilon^2-1)b)z + (a\varepsilon^2 - 2b\varepsilon + c)} = w_1. \end{cases}$$

Abgesehen von dem vortretenden konstanten Faktor  $(1 + \varepsilon^2)^{1-n}$  nimmt das Integral (6) die neue Gestalt an:

$$(9) \quad \int \frac{(B_1 z + C_1) (\varepsilon z + 1)^{2n-2}}{(z^2 + 1)^n \cdot w_1} dz.$$

Die Auswahl von  $\varepsilon$  treffen wir so, daß:

$$(a - c) \varepsilon + b(\varepsilon^2 - 1) = 0 \quad \text{und also} \quad \varepsilon = -\frac{a - c}{2b} \pm \sqrt{\left(\frac{a - c}{2b}\right)^2 + 1}$$

wird, wobei wir von den beiden zur Verfügung stehenden reellen Werten  $\varepsilon$  einen beliebig wählen. Der Erfolg ist, daß im Radikanden von  $w_1$  das lineare Glied ausfällt:

$$(10) \quad w_1 = \sqrt{Az^2 + B}.$$

Die im Zähler von (9) stehende ganze Funktion  $(2n - 1)$ ten Grades schreiben wir unter Sonderung der geraden und ungeraden Potenzen von  $z$  in die Gestalt um:

$$(B_1 z + C_1) (\varepsilon z + 1)^{2n-2} = g_1(z^2) + z g_2(z^2).$$

Wir haben dann in  $g_1$  und  $g_2$  zwei ganze Funktionen  $(n - 1)$ ten Grades von  $z^2$ , die wir unter Benutzung der Taylorsche Formel (I, 172 ff.) auch nach Potenzen von  $(z^2 + 1)$  anordnen können:

$$g_1(z^2) = a_0 + a_1(z^2 + 1) + \dots + a_{n-1}(z^2 + 1)^{n-1},$$

$$g_2(z^2) = b_0 + b_1(z^2 + 1) + \dots + b_{n-1}(z^2 + 1)^{n-1}.$$

Tragen wir diese Ausdrücke in (9) ein, so spaltet sich das Integral (9) in ein Aggregat von Integralen der beiden Gestalten:

$$(11) \quad \int \frac{dz}{(z^2 + 1)^n \cdot \sqrt{Az^2 + B}}, \quad \int \frac{z dz}{(z^2 + 1)^n \cdot \sqrt{Az^2 + B}},$$

wo  $n$  die bisherige Bedeutung hat oder eine kleinere ganze Zahl ist.

Beide Integrale (11) sind jetzt durch je eine weitere Substitution auf den Typus I reduzierbar. Für das erste Integral setzen wir:

$$(12) \quad v = \frac{z}{\sqrt{z^2 + 1}}, \quad \frac{1}{z^2 + 1} = 1 - v^2, \quad dz = \frac{dv}{(1 - v^2)\sqrt{1 - v^2}}$$

und finden:

$$(13) \quad \int \frac{dz}{(z^2 + 1)^n \cdot \sqrt{Az^2 + B}} = \int \frac{(1 - v^2)^{n-1} dv}{\sqrt{(A - B)v^2 + B}}.$$

Beim zweiten Integral bedienen wir uns der Substitution:

$$(14) \quad u = \frac{1}{z^2 + 1}, \quad z^2 = \frac{1}{u} - 1, \quad z dz = -\frac{du}{2u^2}$$

und gewinnen:

$$(15) \quad \int \frac{z \, dz}{(z^2+1)^n \cdot \sqrt{Az^2+B}} = -\frac{1}{2} \int \frac{u^{n-1} \, du}{\sqrt{(B-A)u^2+Au}}$$

Das letzte Integral hat unmittelbar den Typus I, aus (13) aber gewinnen wir nach Entwicklung des Zählers ein Aggregat von Integralen des Typus I.\*

Es bleibt demnach jetzt nur noch die weitere Behandlung des Integrales I. Dieselbe gründet sich auf eine „Rekursionsformel“, welche man am kürzesten durch Differentiation des Produktes  $x^{n-1} \cdot w$  gewinnt,  $w$  in der Bedeutung (2) gebraucht. Es ergibt sich nach einer einfachen Rechnung:

$$\frac{d(x^{n-1}w)}{dx} = na \frac{x^n}{w} + (2n-1)b \frac{x^{n-1}}{w} + (n-1)c \frac{x^{n-2}}{w}$$

Durch Integration und Auflösung nach dem ersten rechts auftretenden Integrale folgt:

$$(16) \quad \int \frac{x^n \, dx}{w} = \frac{1}{na} x^{n-1} w - \frac{2n-1}{n} \cdot \frac{b}{a} \int \frac{x^{n-1} \, dx}{w} - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{c}{a} \int \frac{x^{n-2} \, dx}{w}$$

Mittels dieser Rekursionsformel führen wir jedes Integral des Typus I auf die beiden schließlich noch zu berechnenden Integrale zurück:

$$(17) \quad \int \frac{x \, dx}{w} = \int \frac{x \, dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}, \quad \int \frac{dx}{w} = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}$$

Für das erste dieser Integrale folgt leicht:

$$(18) \quad \int \frac{x \, dx}{w} = \frac{1}{a} w - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{w},$$

so daß letzten Endes nur noch das zweite Integral (18) zu berechnen bleibt; dasselbe wird sich unter den gleich zu betrachtenden Beispielen vorfinden.

**8. Beispiele und Aufgaben zur Integration algebraischer Differentiale.** Zur Berechnung des eben noch übrig gebliebenen Integrals setzt man für  $a > 0$ :

$$(1) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{ac-b^2}{a^2}\right)}}$$

\* Übrigens kommt man für  $B=A$  in beiden Fällen einfach auf Potenzintegrale zurück. Das zweite Integral (11) läßt sich auch durch die Substitution  $u = z^2$  auf ein Integral der in § 6 unter I behandelten Art zurückführen.

und gelangt mittelst der Substitution  $x + \frac{b}{a} = z$ ,  $dx = dz$  zum dritten oder vierten Integrale (16) S. 8 zurück:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + \left(\frac{ac - b^2}{a^2}\right)}} = \ln \left| z + \sqrt{z^2 + \left(\frac{ac - b^2}{a^2}\right)} \right|.$$

Bei Wiedereinführung von  $x$  folgt:

$$z + \sqrt{z^2 + \left(\frac{ac - b^2}{a^2}\right)} = \frac{1}{a} (ax + b + \sqrt{a} \sqrt{ax^2 + 2bx + c}).$$

Für das Integral (1) ergibt sich dadurch bei Fortlassung des *konstanten* Gliedes  $-\frac{1}{\sqrt{a}} \ln a^*$ :

$$(2) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| ax + b + \sqrt{a} \sqrt{ax^2 + 2bx + c} \right|, \quad (a > 0).$$

Für  $a < 0$  haben wir  $b^2 - ac > 0$  vorauszusetzen (S. 29); wir schreiben dann:

$$(3) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{b^2 - ac}{a^2}\right) - \left(x + \frac{b}{a}\right)^2}},$$

wo alle drei Quadratwurzeln mit positivem Vorzeichen genommen sein mögen, und erreichen durch die soeben angewandte Substitution das erste Integral (16) S. 8:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{\left(\frac{b^2 - ac}{a^2}\right) - z^2}} = \arcsin \left( \frac{z}{\sqrt{\frac{b^2 - ac}{a^2}}} \right).$$

Rechts sei der *Hauptwert* der *arc sin*-Funktion genommen, und die im Nenner des Argumentes stehende Wurzel ist mit dem *positiven* Vorzeichen zu versehen. Man hat also, wenn auch  $\sqrt{b^2 - ac}$  positiv genommen wird, wegen  $a < 0$ :

$$\sqrt{\frac{b^2 - ac}{a^2}} = \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{-a}$$

zu setzen und findet bei Wiedereinführung von  $x$ :

$$(4) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \left( \frac{ax + b}{\sqrt{b^2 - ac}} \right), \quad (a < 0).$$

Bedienen wir uns wieder der Abkürzung  $\sqrt{ax^2 + 2bx + c} = w$ , so ist

$$\int w dx = \int \sqrt{ax^2 + 2bx + c} dx = a \int \frac{x^2 dx}{w} + 2b \int \frac{x dx}{w} + c \int \frac{dx}{w},$$

\*) Alle unsere Integrale sind nur bis auf die additive „Integrationskonstante“ bestimmt (s. S. 4).

wie man durch Erweiterung mit  $w$  unter dem Integralzeichen leicht findet. Durch Heranziehung der Formeln (16) und (18) S. 34 kann man das erste und zweite Integral rechter Hand auf das dritte zurückführen; man gelangt auf diese Weise nach kurzer Rechnung zu:

$$\int w \, dx = \frac{1}{2} x w + \frac{b}{2a} w - \frac{b^2 - ac}{2a} \int \frac{dx}{w}.$$

Das letzte rechts noch verbleibende Integral bestimmt sich nach (2) bzw. (4). Es ergibt sich schließlich für  $a > 0$ :

$$(5) \quad \int \sqrt{ax^2 + 2bx + c} \, dx \\ = \frac{(ax+b)\sqrt{ax^2 + 2bx + c}}{2a} - \frac{b^2 - ac}{2a\sqrt{a}} \ln \left| ax + b + \sqrt{a}\sqrt{ax^2 + 2bx + c} \right|,$$

woran sich für  $a < 0$ ,  $b^2 - ac > 0$  anschließt:

$$(6) \quad \int \sqrt{ax^2 + 2bx + c} \, dx = \frac{(ax+b)\sqrt{ax^2 + 2bx + c}}{2a} + \frac{b^2 - ac}{2a\sqrt{-a}} \arcsin \left( \frac{ax+b}{\sqrt{b^2 - ac}} \right).$$

In dem Integral:

$$(7) \quad \int \frac{dx}{(x^2 + 1)\sqrt{Ax^2 + B}}$$

sei die Quadratwurzel als reell und positiv vorausgesetzt. Ein besonders einfacher Weg zur Berechnung dieses Integrals beruht auf der Substitution:

$$(8) \quad \sqrt{Ax^2 + B} = xz, \quad x^2(z^2 - A) = B, \quad x^2 + 1 = \frac{z^2 - A + B}{z^2 - A}.$$

Durch Differentiation der zweiten Gleichung folgt nach Forthebung von  $2x$

$$(z^2 - A) \, dx + xz \, dz = 0$$

und also durch Benutzung der ersten Gleichung (8):

$$\frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + B}} = -\frac{dz}{z^2 - A}.$$

Das Integral (7) rechnet sich daraufhin in  $z$  auf das Integral eines rationalen Differentials um:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)\sqrt{Ax^2 + B}} = -\int \frac{dz}{(B - A) + z^2}.$$

Nach früheren Entwicklungen ist das rechts stehende Integral gleich:

$$\frac{1}{\sqrt{B - A}} \arctg \left( \frac{z}{\sqrt{B - A}} \right) \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2\sqrt{A - B}} \ln \left| \frac{z - \sqrt{A - B}}{z + \sqrt{A - B}} \right|,$$

je nachdem  $B - A > 0$  oder  $< 0$  ist\*). Wir gelangen also zu dem Ergebnis:

$$(9) \int \frac{dx}{(x^2 + 1)\sqrt{Ax^2 + B}} = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{B-A}} \operatorname{arc\,tg} \left( \frac{\sqrt{Ax^2 + B}}{x\sqrt{B-A}} \right), & B > A, \\ -\frac{1}{2\sqrt{A-B}} \ln \left| \frac{\sqrt{Ax^2 + B} - x\sqrt{A-B}}{\sqrt{Ax^2 + B} + x\sqrt{A-B}} \right|, & (A > B). \end{cases}$$

Aufgaben: 1)  $\int \frac{dx}{x^2(\sqrt{x-1})^3} = \frac{1-3x}{x\sqrt{x-1}} - 3 \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{x-1}).$

2)  $\int \frac{\sqrt{2z-3}}{z^2} dz = -\frac{1}{z} \sqrt{2z-3} + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \left( \frac{\sqrt{2z-3}}{\sqrt{3}} \right).$

3)  $\int \frac{\sqrt[6]{x} dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2} (\sqrt[3]{x})^3 + 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6 \ln |1 - \sqrt[6]{x}|.$

Bemerkung: Unter dem Integralzeichen steht eine rationale Funktion von  $\sqrt[6]{x}$ , so daß die Substitution  $x = z^6$  ein in  $z$  rationales Differential ergibt.

4)  $\int \frac{dy}{\sqrt{y+1} + (\sqrt[3]{y+1})^2} = 3\sqrt[3]{y+1} - 6\sqrt[6]{y+1} + 6 \ln |1 + \sqrt[6]{y+1}|.$

5) 
$$\int \frac{y dy}{\sqrt{y+1} + \sqrt[3]{y+1}}$$

$$= \frac{2}{3} (\sqrt{y+1})^3 - \frac{3}{4} (\sqrt[3]{y+1})^4 + \frac{6}{7} (\sqrt[6]{y+1})^7 - (y+1) + \frac{6}{5} (\sqrt[6]{y+1})^6 - \frac{3}{2} (\sqrt[3]{y+1})^2.$$

6)  $\int \sqrt{r^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{r^2 - x^2} + \frac{1}{2} r^2 \operatorname{arc\,sin} \left( \frac{x}{r} \right).$

7)  $\int \sqrt{x^2 + a} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + a} + \frac{1}{2} a \ln |x + \sqrt{x^2 + a}|.$

8)  $\int \frac{x dx}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}} = \frac{1}{a} \sqrt{ax^2 + 2bx + c} - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}}.$

9)  $\int x \sqrt{ax^2 + 2bx + c} dx = \frac{1}{3a} (\sqrt{ax^2 + 2bx + c})^3 - \frac{b}{a} \int \sqrt{ax^2 + 2bx + c} dx.$

10)  $\int \frac{dz}{\sqrt{2rz - z^2}} = \operatorname{arc\,sin} \left( \frac{z-r}{r} \right).$

11)  $\int \frac{az + b}{\sqrt{2rz - z^2}} dz = -a \sqrt{2rz - z^2} + (ar + b) \operatorname{arc\,sin} \left( \frac{z-r}{r} \right).$

12)  $\int \frac{2z^2 dz}{\sqrt{2rz - z^2}} = -(z + 3r) \sqrt{2rz - z^2} + 3r^2 \operatorname{arc\,sin} \left( \frac{z-r}{r} \right).$

\*) Der Fall  $B = A$  führt auf das in Aufgabe 24) S. 13 gelöste Integral (für  $a = 1$ ) zurück.

$$13) \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + y + 1}} = \ln \left| y + \frac{1}{2} + \sqrt{y^2 + y + 1} \right|.$$

$$14) \int \frac{y dy}{\sqrt{y^2 + y + 1}} = \sqrt{y^2 + y + 1} - \frac{1}{2} \ln \left| y + \frac{1}{2} + \sqrt{y^2 + y + 1} \right|.$$

$$15) \int \sqrt{2rz - z^2} dz = \frac{1}{2} (z - r) \sqrt{2rz - z^2} + \frac{1}{2} r^2 \arcsin \left( \frac{z - r}{r} \right).$$

$$16) \int \frac{dv}{\sqrt{1 - 4v - 5v^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \arcsin \left( \frac{5v + 2}{3} \right).$$

$$17) \int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2 + 6x + 1}} = \ln |x| - \ln \left| 3x + 1 + \sqrt{2x^2 + 6x + 1} \right|.$$

$$18) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 4x - 3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \left( \frac{2x - 3}{x\sqrt{7}} \right).$$

$$19) \int \frac{z^6 dz}{\sqrt{1 - z^2}} = -\frac{1}{6} \sqrt{1 - z^2} \left( z^5 + \frac{5}{4} z^3 + \frac{15}{8} z \right) + \frac{5}{16} \arcsin z.$$

$$20) \int \frac{z^4 dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \frac{1}{4} \sqrt{1 + z^2} \left( z^3 - \frac{3}{2} z \right) + \frac{3}{8} \ln |z + \sqrt{1 + z^2}|.$$

$$21) \int \frac{dx}{(x^2 + b^2)\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{b\sqrt{a^2 + b^2}} \arctg \left( \frac{b\sqrt{a^2 - x^2}}{x\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

$$22) \int \frac{dx}{(x^2 + b^2)\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{2b\sqrt{a^2 + b^2}} \ln \left| \frac{b\sqrt{x^2 - a^2} + x\sqrt{a^2 + b^2}}{b\sqrt{x^2 - a^2} - x\sqrt{a^2 + b^2}} \right|.$$

Bemerkung: In Aufgabe 21) und 22) führt die Substitution  $x = bz$  zum Integral (9).

$$23) \int \frac{dx}{(1 - \sqrt{x-1})\sqrt{x-2}} = 2 \frac{1 + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}} - 2 \ln \left| \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} \right|.$$

$$24) \int \frac{a + b\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} dx = 2a \arcsin \sqrt{x} - 2b\sqrt{1-x}.$$

**9. Notizen über nicht-elementare Integrale.** Unter den algebraischen Differentialen, welche „nicht-elementare“ Integrale liefern, haben die einfachste Bauart die Differentiale  $R(x, \sqrt{g(x)}) dx$ , wo  $g(x)$  eine ganze rationale Funktion dritten oder vierten Grades von  $x$  ist und das Symbol  $R$  im bisherigen Sinne gebraucht ist\*). Zu einem Integrale dieser Gestalt:

$$(1) \int R(x, \sqrt{g(x)}) dx$$

\*) Der Vollständigkeit halber möge bemerkt werden, daß sich auch solche Differentiale noch „in vereinzelt Fällen“ durch Einführung geeigneter neuer Variablen in rationale Differentiale transformieren lassen.

werden wir unten bei der Ausmessung der Bogenlänge („Rektifikation“) der Ellipse geführt werden; auch die Ausmessung der Bogenlänge anderer elementarer Kurven, so der Hyperbel, der Lemniskate, der verkürzten und verlängerten Zykloide usw., führt auf Integrale der Gestalt (1), und man gelangt darüber hinaus bei der Behandlung vieler Aufgaben der Mechanik zu solchen Integralen. Wir werden hierauf bei Gelegenheit zurückkommen. Der Beziehung zur Rektifikation der Ellipse verdanken die fraglichen Integrale ihren Namen „elliptische Integrale“; ihre vielseitig entwickelte Theorie ist in zahlreichen besonderen Lehrbüchern behandelt.

Die bekanntesten nicht-elementaren Integrale, die elementaren „transzendenten Differentialen“ entsprechen, sind die folgenden vier:

$$(2) \quad \int \frac{e^x}{x} dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{\cos x}{x} dx, \quad \int e^{-x^2} dx.$$

Das erste dieser Integrale kann man durch die Substitution  $z = e^x$  auch in die Gestalt überführen:

$$(3) \quad \int \frac{e^x}{x} dx = \int \frac{dz}{\ln z}.$$

Unter den vier „höheren transzendenten Funktionen“, welche durch die Integrale (2) erklärt werden, sind es namentlich die erste und die vierte, welche wichtige Anwendungen gefunden haben, jene innerhalb der Zahlentheorie, diese innerhalb der Wahrscheinlichkeitsrechnung; wir kommen auf diese Funktionen unten nochmals zurück.

Der Beweis, daß die vier Funktionen (2) „höhere transzendente Funktionen“ sind\*), ist im Jahre 1833 durch Liouville geführt\*\*). Ein näheres Eingehen hierauf verbietet sich wegen der Umständlichkeit des fraglichen Beweisverfahrens. *Demgegenüber ist es sehr leicht, Potenzreihen für die vier nicht-elementaren Funktionen (2) anzugeben*; wir gewinnen für die zweite und vierte Funktion:

$$(4) \quad \int \frac{\sin x}{x} dx = x - \frac{x^3}{3! \cdot 3} + \frac{x^5}{5! \cdot 5} - \frac{x^7}{7! \cdot 7} + \dots,$$

$$(5) \quad \int e^{-x^2} dx = x - \frac{x^3}{1! \cdot 3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} - \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \frac{x^9}{4! \cdot 9} - \dots,$$

\*) Über den Begriff der „elementaren transzendenten Funktion“ vgl. man I, 87 ff. Die Aussage des Textes bedeutet, daß es unmöglich ist, z. B. die erste Funktion (2) aus  $x$  durch eine *endliche* Anzahl von Schritten zu berechnen, deren einzelner eine rationale Rechnung oder eine Wurzelziehung oder die Berechnung einer elementaren transzendenten Funktion ist.

\*\*\*) S. dessen Abhandlung „Mémoire sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendentes“ Journ. für Math. Bd. 13 (1835).

während wir an Stelle der ersten und dritten Funktion die mit ihnen nahe verwandten treten lassen:

$$(6) \quad \int \frac{e^x - 1}{x} dx = x + \frac{x^2}{2! \cdot 2} + \frac{x^3}{3! \cdot 3} + \frac{x^4}{4! \cdot 4} + \frac{x^5}{5! \cdot 5} + \dots,$$

$$(7) \quad \int \frac{1 - \cos x}{x} dx = \frac{x^2}{2! \cdot 2} - \frac{x^4}{4! \cdot 4} + \frac{x^6}{6! \cdot 6} - \frac{x^8}{8! \cdot 8} + \dots *).$$

Die hier rechter Hand stehenden Reihen sind alle „unbeschränkt konvergent“ (I, 221), wie man leicht auf Grund der Entwicklungen von I, 176 ff. feststellt. Sie stellen also in jedem endlichen Intervalle eindeutige, stetige und differenzierbare Funktionen dar; und zwar wird nach I, 228 in jedem Falle die Ableitung gewonnen, indem man die Reihe „gliedweise“ nach  $x$  differenziert. Hierbei ergeben sich dann eben in allen vier Fällen die bekannten Reihenentwicklungen der linker Hand unter dem Integralzeichen stehenden Funktionen, woraus die Richtigkeit der Darstellungen (4) ff. ersichtlich wird. Soweit die Reihen (4) ff. „gut“ konvergieren, was jedenfalls für absolut ausreichend kleine Werte von  $x$  zutrifft, sind diese Reihen auch für „numerische Berechnungen“ unserer vier höheren transzendenten Funktionen brauchbar.

**10. Graphische und mechanische Integration.** Fig. 1 erläutert eine Methode, ein Integral:

$$(1) \quad f(x) = \int \varphi(x) dx$$

angenähert auf graphischem Wege zu gewinnen. Wir nehmen an, daß die Variable  $x$  auf ein der Zeichnung auf dem Reißbrett zugängliches Intervall beschränkt sei, und daß auch die Funktionswerte  $\varphi(x)$  sich innerhalb eines Intervalles bewegen, so daß die Zeichnung der Kurve der Funktion  $\varphi(x)$  auf dem Reißbrett möglich ist.\*\*) Wir wollen diese Kurve,

\*) Auf die Funktionen (4) und (5), deren erste „Integralsinus“  $Si(x)$  heißt, während die zweite, abgesehen von einem konstanten Faktor das „Gaußsche Fehlerintegral“ ist, kommen wir in § 8 des dritten Kapitels zurück. Führt man in (6) eine neue Variable  $z$  durch die Substitution  $x = \ln z$  ein, so folgt:

$$\int \frac{e^x - 1}{x} dx = \int \frac{e^x}{x} dx - \ln x = \int \frac{dz}{\ln z} - \ln(\ln z);$$

die im ersten Gliede rechter Hand stehende Funktion heißt „Integrallogarithmus“ und wird durch  $li(z)$  bezeichnet. Endlich steht die Funktion (7) in naher Beziehung zum „Integralkosinus“  $Ci(x)$ .

\*\*) Diese Voraussetzungen hängen natürlich wesentlich von der Wahl der Längeneinheit ab. Übrigens mag man dabei, falls es für die Zeichnung zweckmäßig erscheint, für die Ordinaten eine andere Einheit benutzen wie für die Abszissen. Das läuft für die Rechnung offenbar darauf hinaus, daß man in (1) die Funktion  $\varphi(x)$  durch  $\mu\varphi(x)$  ersetzt, wo  $\mu$  ein geeignet gewählter konstanter Faktor ist; an Stelle von  $f(x)$  tritt dann einfach auch  $\mu f(x)$ .

insofern sie vom gegebenen Differential  $\varphi(x) dx$  herrührt, als „*Differentialkurve*“ bezeichnen; die Kurve der gesuchten Funktion  $f(x)$  heiße entsprechend „*Integralkurve*“. In der Figur tragen diese beiden Kurven demnach die Bezeichnungen  $D$  und  $J$ .

Da es sich in (1) um ein *unbestimmtes* Integral handelt, so ist die Funktion  $f(x)$  nur erst bis auf eine willkürlich wählbare additive Konstante bestimmt. Es ist demnach erlaubt, etwa für den Punkt  $Q$  der  $x$ -Achse (s. Fig. 1\*), den wir nahe dem linken Endpunkte der ge-

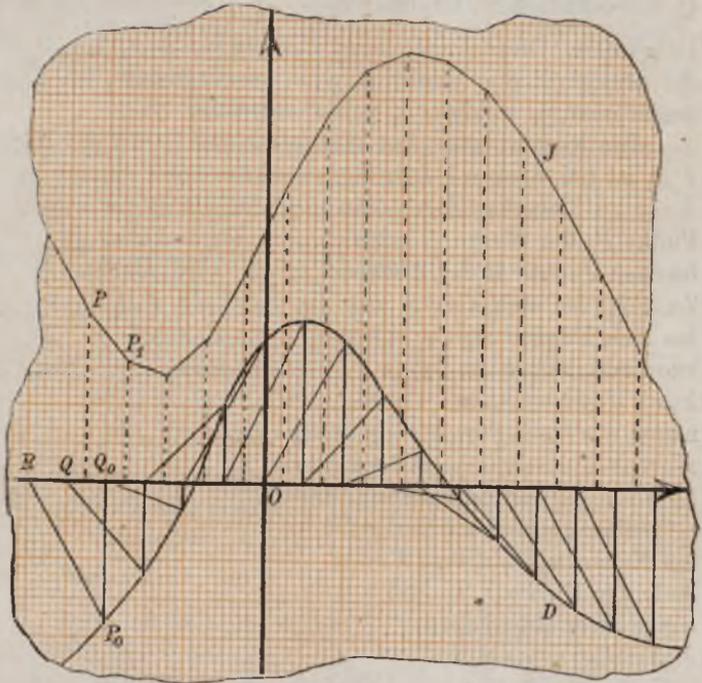


Fig. 1.

zeichneten Differentialkurve  $D$  wählen, die Ordinate  $PQ$  der Integralkurve  $J$  willkürlich zu bestimmen. Durch die Auswahl dieser Ordinate  $PQ$  ist dann aber über die Integrationskonstante verfügt, so daß die durch den Punkt  $P$  hindurchlaufende Integralkurve  $J$  eindeutig bestimmt ist.

Es sei nun  $x$  die Abszisse des Punktes  $Q$ , und es sei  $x_1 > x$ , jedoch von  $x$  nur sehr wenig verschieden; dem Argumente  $x_1$  entspreche der Punkt  $P_1$  der Integralkurve. Aus der Gleichung (1) in I, 102 und dem Mittelwertsatze (9) in I, 135 folgt:

$$(2) \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = f'(x + \vartheta(x_1 - x)) = \varphi(x + \vartheta(x_1 - x)), \quad (0 < \vartheta < 1),$$

wo  $\beta$  der Winkel zwischen der nach rechts gerichteten Sehne  $PP_1$  der Kurve  $J$  und der positiven  $x$ -Achse ist. Als Näherungswert der rechten

\*) Zum richtigen Verständnis der Figur sei bemerkt, daß  $Q$  der Fußpunkt der Ordinate des Punktes  $P$  der Integralkurve  $J$  sein soll.

Seite der Gleichung (2) wählen wir nun denjenigen für  $\vartheta = \frac{1}{2}$  und damit die Ordinate  $\varphi(x_0)$  der Differentialkurve  $D$  für den in der Figur mit  $Q_0$  bezeichneten Mittelpunkt  $x_0 = \frac{x + x_1}{2}$  des durch  $x$  und  $x_1$  eingegrenzten Intervalles. Diese Annäherung des Wertes  $\varphi(x_0)$  an den Wert  $\operatorname{tg} \beta$  wird, die Stetigkeit der Funktion  $\varphi(x)$  vorausgesetzt, im allgemeinen um so besser sein, je weniger  $x_1$  von  $x$  abweicht.

Die Konstruktion des Winkels  $\beta$  und damit der Richtung der Sehne  $PP_1$  ist bei diesem Näherungsverfahren dann einfach dadurch zu bewerkstelligen, daß man den zu  $x_0$  gehörigen Punkt  $P_0$  der Kurve  $D$  mit dem auf der  $x$ -Achse gelegenen Punkte  $R$  der Abszisse  $(x_0 - 1)$  verbindet\*).

Zu  $RP_0$  ist also von  $P$  aus die Parallele  $PP_1$  bis zum Punkte  $P_1$  der Abszisse  $x_1$  zu ziehen,

womit dann eben die Sehne  $PP_1$  der Integralkurve  $J$  gewonnen ist. Die Figur erläutert

näher, wie durch Fortsetzung dieses Verfahrens eine Sehnenkette der Integralkurve  $J$  zu konstruieren ist. Be-

reits diese gebrochene Linie gibt ein Näherungsbild vom Ver-

laufe der Kurve  $J$ , so daß wir es unterlassen haben,

einstetig gekrümmte Kurve durch die

Ecken der gebro-

chenen Linie hin-

durchzu-

legen.

\*\*)

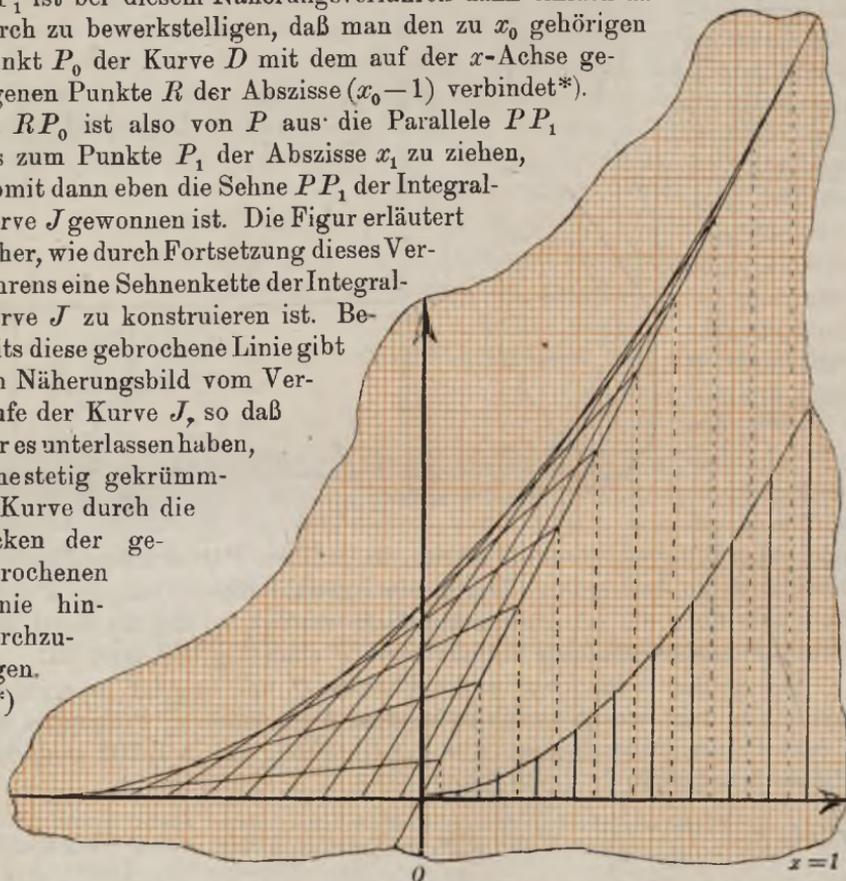


Fig. 2.

\*) In Fig. 1 ist als Einheit 1 cm gewählt.

\*\*\*) Man veranschauliche sich, daß die Kurve  $J$  Extremwerte  $f(x)$  an den beiden Stellen liefert, wo  $D$  die  $x$ -Achse schneidet, und daß ein Wendepunkt der Kurve  $J$  dem höchsten Punkte der Kurve  $D$  entspricht.

Nach diesem Verfahren ist in Fig. 2 die Integralkurve des Differential  $2x dx$ , in Fig. 3 diejenige des Differential  $\sqrt{1-x^2} dx$  gezeichnet. Als Längeneinheit (gemeinsam für  $x$  und  $y$ ) ist beide Male 5 cm gewählt. Beide Zeichnungen beziehen sich auf das Intervall  $0 \leq x \leq 1$ ; für  $x = 0$  ist als Funktionswert  $f(x)$  jedesmal 0 gewählt. Im ersten Falle gelangen wir einfach zur Parabel\*):

$$y = \int 2x dx = x^2.$$

Im zweiten Falle handelt es sich um die transzendente Kurve der Gleichung:

$$y = \int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x.$$

Im übrigen sind die Figuren für sich verständlich.\*\*)

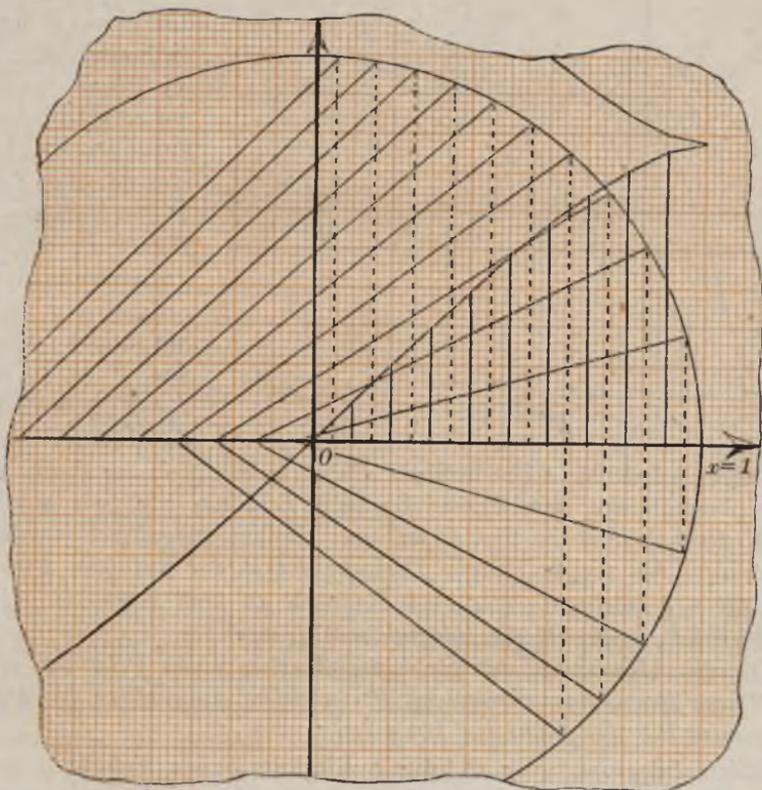


Fig. 3.

\*) Hier gilt für den in (2) gemeinten echten Bruch  $\vartheta$  stets  $\vartheta = \frac{1}{2}$ , so daß in Fig. 2 eine genaue Konstruktion der Sehnen der Parabel vorliegt.

\*\*) Für  $x = 1$  ist  $y = \frac{\pi}{4} = 0,785 \dots$ ; die Zeichnung liefert etwa 0,778.

Wie schon bemerkt wurde, liefert die Sehnketten ein um so genaueres Bild der Integralkurve  $J$ , je kleiner wir die Intervalle wählen, die der Konstruktion der einzelnen Sehne zugrunde gelegt werden. Die

Integralkurve  $J$  würden wir demnach genau erhalten, wenn die Intervalle sämtlich verschwindend klein werden. Hierbei gelangen wir zu folgendem, durch Fig. 4 näher erläuterten Bilde: Wir denken den Punkt  $P$  der Koordinaten  $x, y$  etwa im Sinne wachsender  $x$  die Differentialkurve  $D$  stetig durchlaufend. Dem Punkte  $P$  entspreche der Punkt  $P_1$  der Integralkurve mit den Koordinaten  $x_1, y_1$ ;  $P_1$  hat dieselbe Abszisse wie  $P$  (d. h. es ist  $x_1 = x$ ) und wird also die Integralkurve  $J$

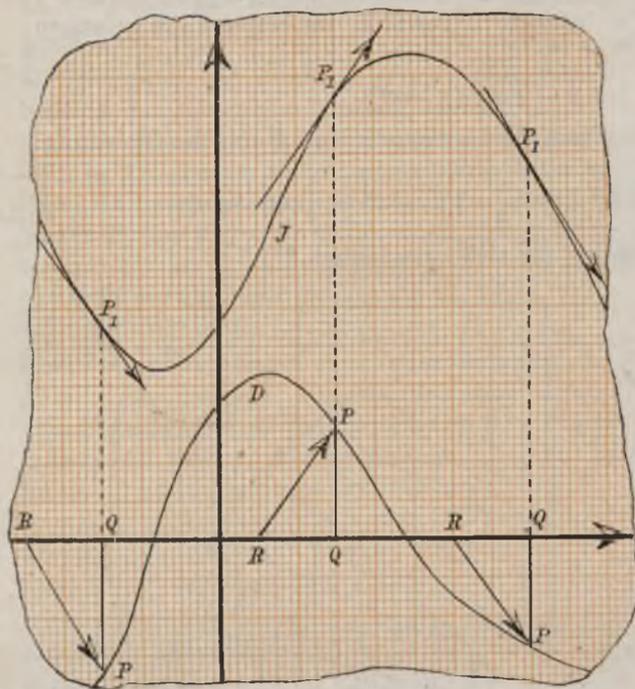


Fig. 4.

im Sinne wachsender  $x$  beschreiben. Dabei bewegt sich der Punkt  $P_1$  in jedem Augenblicke parallel zur Geraden  $RP$ , die wir (wie schon in Fig. 1 geschah und in Fig. 4 an drei Stellen ausgeführt wurde) als Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks  $PQR$  der Katheten  $PQ = |y|$  und  $QR = 1$  zeichnen. Wir sind demnach zu dem Ergebnis gelangt: Der Punkt  $P_1$  beschreibt die Integralkurve  $J$ , wenn:

- 1) seine Abszisse  $x_1$  stets gleich der Abszisse  $x$  von  $P$  ist, und wenn
- 2) die Bewegungsrichtung von  $P_1$  in jedem Augenblicke parallel zur Hypotenuse  $RP$  des genannten Dreiecks ist.

Der „Integrgraph“ von Abdank-Abakanowicz liefert einen die Punkte  $P$  und  $P_1$  verbindenden Mechanismus, der bei Bewegung von  $P$  über die Kurve  $D$  den Punkt  $P_1$  den beiden eben genannten Bedingungen entsprechend mitbewegt, so daß also  $P_1$  die Integralkurve  $J$  von  $D$  beschreibt. Die schematische Figur 5 erläutert das Prinzip des Appa-

rates, Fig. 6 (S. 46) stellt die von Coradi (Zürich) ausgeführte Konstruktion (älteren Stiles) dar.

Gegenüber Fig. 4 liegt hier der einzige Unterschied vor, daß die beiden Kurven  $D$  und  $J$  auf zwei verschiedene Koordinatensysteme mit parallelen Achsen bezogen sind. Ein in Richtung der  $x$ -Achse (der durch die Punkte  $R$  und  $Q$  laufenden Geraden der Figur 5) fahrbares rechteckiges Rahmengestell trägt zwei längs seiner großen Seiten verschiebbare Wagen  $W$  und  $W'$ ; die vier kleinen Kreise des einzelnen Wagens denke man als vier kleine Rädchen, welche in Nuten längs der Seiten des Rahmens eingelassen sind.  $W$  trägt bei  $P$  eine Hülse, in welche der Schreibstift der Differentialkurve eingesteckt wird,

$W'$  bei  $P_1$  eine solche für den Schreibstift der Integralkurve  $J$ . Der Abstand der  $y$ -Achsen der beiden Koordinatensysteme für  $D$  und  $J$  ist also gleich dem in Richtung der  $x$ -Achse (Linie  $RQ$ ) geschätzten Abstände der beiden Hülsenmitten. Es ist klar, daß bei jeder Bewegung des Apparates  $P$  und  $P_1$  in ihren Koordinatensystemen beständig gleiche Abszissen

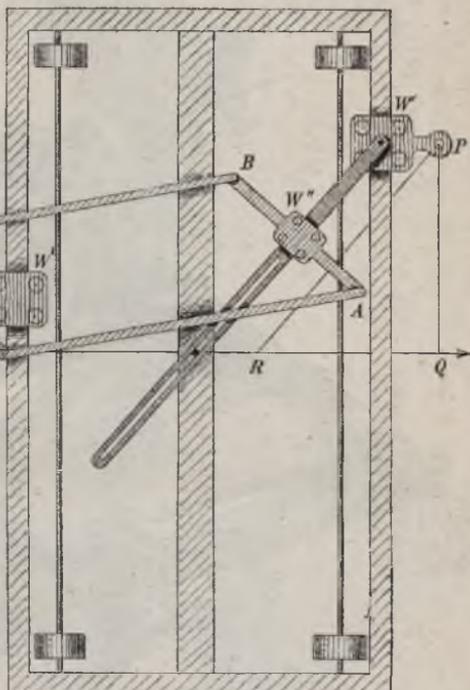


Fig. 5.

behalten, so daß der Bewegungsbedingung 1) des Punktes  $P_1$  genügt ist. Die Lage der zur  $x$ -Achse parallelen  $x_1$ -Achse wird nicht weiter fixiert, was zur Folge hat, daß die Integrationskonstante unbestimmt bleibt.

Die Forderung 2) erfüllen die übrigen Bestandteile des Apparates. Um einen in der Mitte des Wagens  $W$  angebrachten Zapfen ist eine Schiene drehbar, welche mittelst eines Schlitzes auf einen etwa in der Mitte des Rahmengestells angebrachten Zapfen verschiebbar aufgesetzt ist. Der in Richtung der  $x$ -Achse geschätzte Abstand der beiden Zapfen ist die Längeneinheit. Sie tritt auch als Strecke  $RQ$  der Figur in die Erscheinung, und wir erkennen in  $RP$  und damit in der Schienenrichtung die augenblickliche Bewegungsrichtung, welche der Punkt  $P_1$  haben muß. Die Nötigung, daß  $P_1$  parallel zur Schiene fortschreitet, ist nun

durch zwei weitere wesentliche Bestandteile des Mechanismus erzielt. Hierzu dient erstlich das Gelenkparallelogramm  $A, B, C, D$  und zweitens ein am Wagen  $W'$  links angebrachtes scharfkantiges Rad  $R'$ , das auf der Papierebene steht. Die Seite  $CD$  ist in ihrem Mittelpunkte um einen senkrecht über der Radmitte angebrachten Zapfen drehbar; die Gegenseite  $AB$  läuft senkrecht zur Schiene und ist längs derselben mittelst

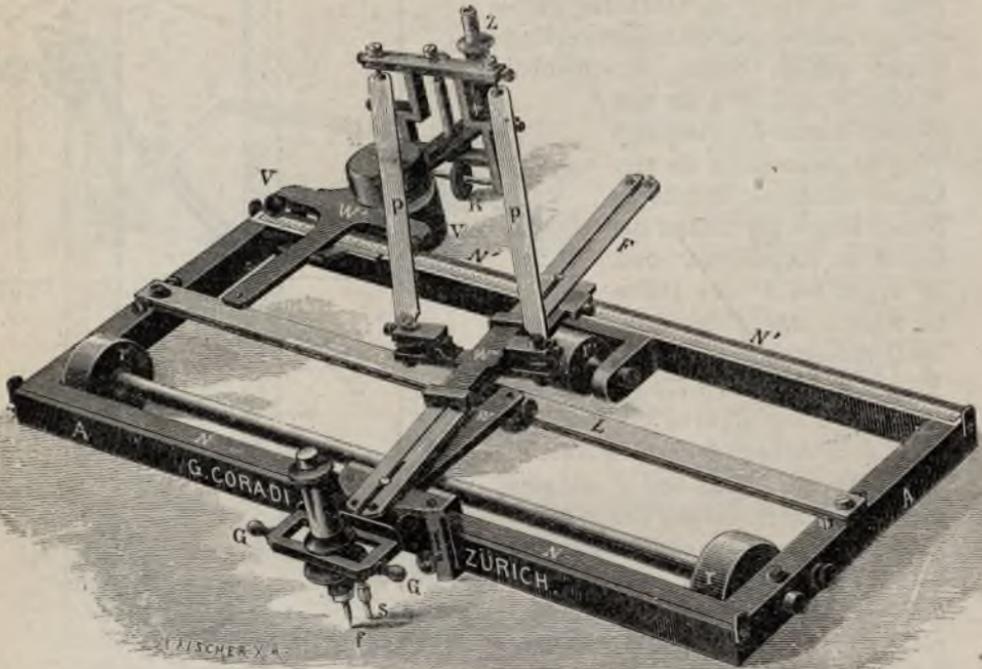


Fig. 6.

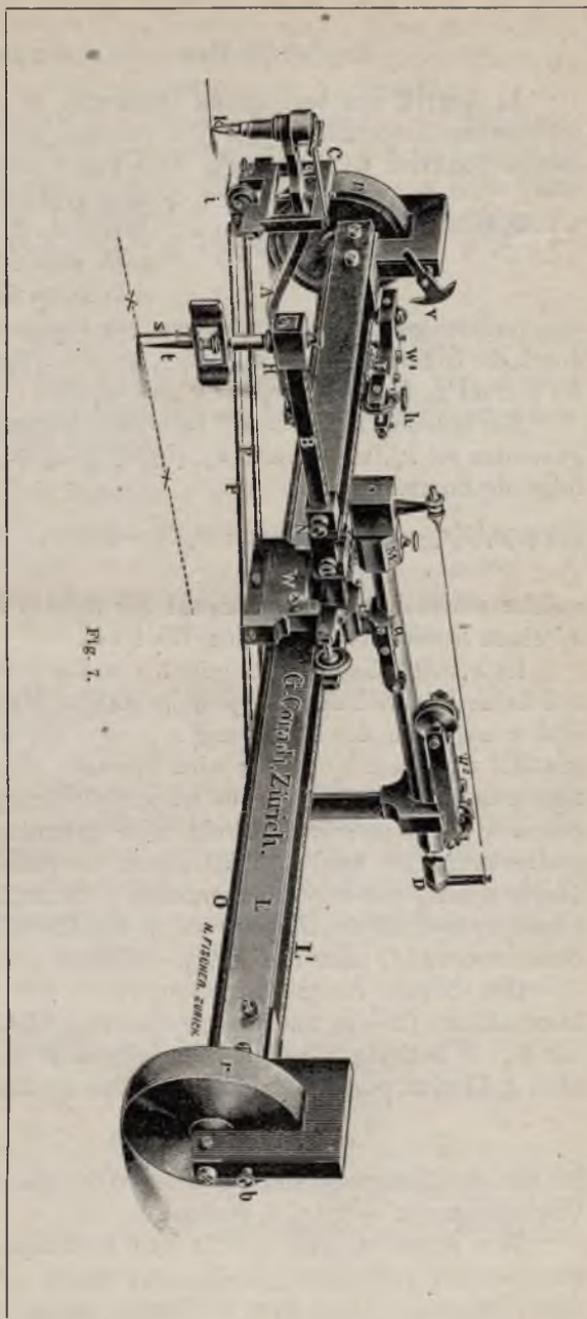
des Wagens  $W''$  verschiebbar. Die Achse des Rades  $R'$  läuft parallel zur Seite  $CD$  unterhalb derselben (Fig. 6 zeigt die Anordnung). Es ist hiernach einleuchtend, daß die Ebene des Rades parallel zu  $RP$  verläuft. Die Wirkung der scharfen Schneide des Radkranzes ist es nun, daß bei jeder Bewegung des Mechanismus  $R'$  nur in seiner Ebene fortrollen kann. Dadurch aber verläuft die Bewegung von  $P_1$  entsprechend der zweiten Bedingung, d. h.  $P_1$  schreitet in der Tat parallel zu  $RP$  fort.

Der wirklich ausgeführte Apparat weicht von den Angaben der Fig. 5, die nur das Grundprinzip darlegen soll, in mehrfacher Hinsicht ab, enthält auch noch eine Reihe von Einrichtungen (so z. B. eine solche

zur Veränderung der Längeneinheit), auf die wir nicht weiter eingehen können. Übrigens wird die Konstruktion der Fig. 6 jetzt nicht mehr hergestellt, ist vielmehr durch die in Fig. 7 wiedergegebene Konstruktion ersetzt, die eine Reihe technischer Vervollkommnungen besitzt. Wir haben die Einrichtung des Integraphen im engeren Anschluß an die ältere Konstruktion der Fig. 6 besprochen, weil in derselben die Rolle, welche das Gelenkparallelogramm

spielt, deutlicher hervortritt. Neben dem in Fig. 7 abgebildeten Apparate wird noch eine kleinere Konstruktion mit einigen unwesentlichen technischen Abänderungen gebaut.

Der Apparat der Fig. 7 beherrscht in der normalen Größe eine Ordinatendifferenz von 52 cm, der kleinere Apparat eine solche von 27 cm. Die Längeneinheit ist beim größeren Apparat zwischen 5 cm und 20 cm, beim kleineren zwischen 4 cm und  $12\frac{1}{2}$  cm wählbar.



## Kapitel II. Das bestimmte Integral.

**1. Begriff des bestimmten Integrals.** In dem endlichen und abgeschlossenen Intervalle  $a \leq x \leq b$  sei eine eindeutige und gleichmäßig stetige Funktion  $\varphi(x)$  gegeben. Wie Fig. 8 zeigt, sei das durch  $a$  und  $b$  eingegrenzte Intervall durch  $(n-1)$  Werte  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ , die der Größe nach angeordnet sind ( $x_{k-1} < x_k$ ), in  $n$  Teilintervalle zerlegt, unter  $n$  irgend

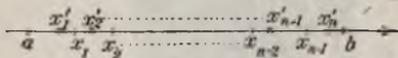


Fig. 8.

eine positive ganze Zahl verstanden. Die Länge des  $k^{\text{ten}}$  Teilintervalles ist durch die Differenz  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$  gegeben; der Gleichmäßigkeit wegen ist hierbei  $x_0$  für  $a$  und  $x_n$  für  $b$  geschrieben.

Ein beliebig aus dem  $k^{\text{ten}}$  Intervalle herausgegriffener Wert des Argumentes sei  $x'_k$ , so daß also  $x_{k-1} \leq x'_k \leq x_k$  gilt. Man bilde alsdann die folgende Summe:

$$(1) \varphi(x'_1)(x_1 - x_0) + \varphi(x'_2)(x_2 - x_1) + \dots + \varphi(x'_n)(x_n - x_{n-1}) = \sum_{k=1}^n \varphi(x'_k) \Delta x_k,$$

welche offenbar für jede Auswahl der Anzahl  $n$ , der Werte  $x_k$  und der  $x'_k$  einen bestimmten endlichen Wert hat.

Ist  $\varepsilon > 0$  beliebig klein gewählt und sollen alle  $\Delta x_k \leq \varepsilon$  sein, d. h. soll keine Intervalllänge die positive Zahl  $\varepsilon$  übertreffen, so muß die Anzahl  $n$  natürlich die Bedingung  $n \geq (b-a) \cdot \varepsilon^{-1}$  erfüllen. Je kleiner  $\varepsilon$  gewählt wird, um so größer wird demnach diese für die Anzahl  $n$  gültige untere Schranke; und es ist einleuchtend, daß für  $\lim \varepsilon = 0$  die Schranke der Grenze  $\infty$  zustrebt. Eine grundlegende Tatsache der Integralrechnung ist nun, daß bei diesem Grenzübergange  $\lim \varepsilon = 0$  unabhängig davon, wie wir beim einzelnen  $\varepsilon$  die zulässige Anzahl  $n$ , die Teilpunkte  $x_k$  und die den Teilintervallen angehörenden  $x'_k$  wählen mögen, die Summenwerte (1) einer bestimmten endlichen Grenze zustreben.

Den Beweis dieser Tatsache gründen wir auf die Endlichkeit der Intervalllänge  $(b-a)$  und die gleichmäßige Stetigkeit von  $\varphi(x)$ . Wählen wir  $\delta > 0$  beliebig klein und berechnen  $\delta' = (b-a)\delta$ , so ist nach I, 17 eine positive Zahl  $\lambda$  angebar, so daß

$$|\varphi(x') - \varphi(x)| < \delta'$$

für alle dem Intervalle entnommenen Wertepaare  $x, x'$  erfüllt ist, die der Ungleichung  $|x' - x| \leq \lambda$  genügen.

Wir schreiben nun  $\lambda = 2\varepsilon$  und bestimmen, daß nur noch solche Summen (1) zugelassen werden, bei denen  $\Delta x_k \leq \varepsilon$  ist. Irgend zwei dieser Summen, die  $n$  bzw.  $m$  Glieder haben, mögen kurz  $\Sigma_n$  und  $\Sigma_m$

heißen. Um dieselben zu vergleichen, knüpfen wir an  $\Sigma_n$  an und nehmen für diese Summe die Darstellung (1) in Anspruch. Wir wollen nun zu der zugehörigen Einteilung des Intervalles durch die Punkte  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  auch noch die Teilpunkte der Summe  $\Sigma_m$  eintragen, so daß beide Teilungen übereinander getragen erscheinen. Finden sich im Innern des durch  $x_{k-1}$  und  $x_k$  begrenzten Teilintervalles als neue, von links nach rechts aufeinander folgende Teilpunkte  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(i-1)}$ , so können wir das zugehörige Glied der Summe (1) so entwickeln:

$$\begin{aligned} & \varphi(x_k')(x_k - x_{k-1}) \\ &= \varphi(x_k')(x^{(1)} - x_{k-1}) + \varphi(x_k')(x^{(2)} - x^{(1)}) + \dots + \varphi(x_k')(x_k - x^{(i-1)}). \end{aligned}$$

Nehmen wir diese Entwicklung mit allen Gliedern von  $\Sigma_n$  vor, so läßt sich, falls die übereinander getragenen Teilungen  $l$  Teilintervalle erzeugen, die Summe  $\Sigma_n$  in die Gestalt kleiden:

$$(2) \quad \Sigma_n = \varphi(\xi_1')(\xi_1 - \xi_0) + \varphi(\xi_2')(\xi_2 - \xi_1) + \dots + \varphi(\xi_l')(\xi_l - \xi_{l-1}).$$

Hier sind also die  $\xi_1, \xi_2, \dots$  die in die richtige Anordnung gebrachten Teilpunkte beider Einteilungen, und es sind speziell  $\xi_0 = a$  und  $\xi_l = b$ ;  $\xi_k'$  liegt aber nicht notwendig im Intervall  $\xi_{k-1} \leq x \leq \xi_k$ , wohl aber in demjenigen der ursprünglichen Teilintervalle von  $\Sigma_n$ , dem das neue Intervall  $\xi_{k-1} \leq x \leq \xi_k$  angehört.

In eine entsprechende Form:

$$(3) \quad \Sigma_m = \varphi(\xi_1'')(\xi_1 - \xi_0) + \varphi(\xi_2'')(\xi_2 - \xi_1) + \dots + \varphi(\xi_l'')(\xi_l - \xi_{l-1})$$

können wir die Summe  $\Sigma_m$  kleiden und haben auf diese Weise erreicht, daß beide Summen sich auf dieselbe Einteilung beziehen. Dabei sind  $\xi_k''$  und  $\xi_k'$  Punkte aus zwei Intervallen der ursprünglichen Einteilungen von  $\Sigma_n$  und  $\Sigma_m$ , welche ein endliches Stück (nämlich das von  $\xi_{k-1}$  und  $\xi_k$  eingeschlossene Intervall) gemein haben, und welche demnach zusammengenommen ein Intervall  $< 2\varepsilon$  bilden. Somit gilt  $|\xi_k'' - \xi_k'| < 2\varepsilon$  oder  $|\xi_k'' - \xi_k'| < \lambda$  und also zufolge der gleichmäßigen Stetigkeit unserer Funktion:

$$(4) \quad |\varphi(\xi_k'') - \varphi(\xi_k')| < \delta'.$$

Zur Vergleichung von  $\Sigma_m$  und  $\Sigma_n$  bilden wir nun die Differenz:

$$\begin{aligned} \Sigma_m - \Sigma_n &= (\varphi(\xi_1'') - \varphi(\xi_1'))(\xi_1 - \xi_0) + (\varphi(\xi_2'') - \varphi(\xi_2'))(\xi_2 - \xi_1) + \dots \\ &\quad \dots + (\varphi(\xi_l'') - \varphi(\xi_l'))(\xi_l - \xi_{l-1}) \end{aligned}$$

und finden, da die  $(\xi_1 - \xi_0), (\xi_2 - \xi_1), \dots$  alle positiv sind, mit Benutzung der Ungleichung (4):

$$|\Sigma_m - \Sigma_n| < \delta'((\xi_1 - \xi_0) + (\xi_2 - \xi_1) + \dots + (\xi_l - \xi_{l-1})) = \delta'(b - a)$$

oder, da die rechte Seite gleich  $\delta$  ist:

$$(5) \quad \left| \sum_m - \sum_n \right| < \delta.$$

Hieraus folgt die Existenz der Grenze unserer Summenwerte für  $\lim \varepsilon = 0$  auf Grund einer bekannten Schlußweise. Bei einem zunächst gewählten  $\delta$  sei  $\Sigma_n$  eine speziell ausgesuchte zulässige Summe. Alle Summen  $\Sigma_m$ , bei denen die  $\Delta x_k$  kleiner als das zugehörige  $\varepsilon$  sind, liegen dann zufolge (5) in dem durch die beiden Zahlen  $(\Sigma_n \pm \delta)$  eingegrenzten Intervalle der Zahlenlinie von der Länge  $2\delta$ . Bezeichnen wir die untere Grenze dieser Summenwerte mit  $\Sigma_n - \delta'$ , die obere mit  $\Sigma_n + \delta''$ , so sind die beiden nicht-negativen Zahlen  $\delta'$  und  $\delta'' \leq \delta$ , und dem Intervalle von  $\Sigma_n - \delta'$  bis  $\Sigma_n + \delta''$  gehören alle noch zugelassenen Summen an.

Bei Verkleinerung von  $\varepsilon$  werden nun stets Summen  $\Sigma$  ausgeschaltet, während keine neu hinzukommen. Das Intervall zwischen der unteren und der oberen Grenze der zugelassenen Summenwerte wird sich also bei Verkleinerung von  $\varepsilon$  nicht ausdehnen können, sondern entweder unverändert bleiben oder sich zusammenziehen. Lassen wir also  $\varepsilon$  von dem eben vorliegenden Anfangswerte aus irgend eine monoton abnehmende Reihe  $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$  mit der Grenze 0 durchlaufen und bestimmen jedesmal das Intervall zwischen der unteren und der oberen Grenze der noch zugelassenen Summenwerte, so erhalten wir eine Reihe von Intervallen, von denen jedes folgende ganz dem vorhergehenden angehört. Die Längen dieser ineinander geschachtelten Intervalle bilden eine nicht zunehmende Reihe positiver Zahlen, die also eine Grenze haben. Letztere kann nicht von 0 verschieden sein, da wir einem *beliebig* kleinen  $\delta$  mit jedem *ausreichend* kleinen  $\varepsilon$  entsprechen. Die Intervalle ziehen sich somit auf einen bestimmten Punkt zusammen. Der gleiche Punkt ergibt sich aber bei jedem anderen Grenzübergange  $\varepsilon, \varepsilon_1', \varepsilon_2', \dots$ , da das einem beliebigen  $\varepsilon_i'$  zugehörige Intervall stets im Intervalle von  $\varepsilon_k$  liegt, sobald  $\varepsilon_i' < \varepsilon_k$  ist. Der Grenzpunkt der Intervalle liefert die Grenze der Summenwerte (1).

Den eindeutig bestimmten endlichen Grenzwert der Summen (1) bezeichnen wir durch das Symbol:

$$(6) \quad \lim \sum_{k=1}^n \varphi(x_k') \Delta x_k = \int_a^b \varphi(x) dx.$$

Hier hat also das Symbol  $\int$  den Sinn eines *Summenzeichens*; es soll zum Ausdruck bringen, daß auf der linken Seite von (6) Summen von Gliedern stehen, die einzeln genommen die Bauart eines Differential  $\varphi(x) dx$  haben, insofern ja bei unserem Grenzübergange die  $\Delta x$  veränderlich sind und die Grenze 0 haben sollen. Man nennt den in (6) rechts stehenden Grenzwert das „bestimmte Integral“ des Differential  $\varphi(x) dx$  mit den

„Grenzen“  $a$  und  $b$ ; die letzteren sind am Integralzeichen unten und oben angebracht und werden als „untere“ und „obere Grenze“ des Integrals unterschieden. Das durch  $a$  und  $b$  eingegrenzte Intervall heißt das „Integrationsintervall“, die der Gliederanordnung in (1) zugrunde liegende Richtung des Intervalls von der unteren Grenze  $a$  zur oberen  $b$  heißt die „Richtung der Integration“.

**2. Berechnung und Deutung des bestimmten Integrals.** Die Berechnung des Grenzwertes (6) § 1 gründet sich auf eine Betrachtung, die eine enge Beziehung zwischen dem bestimmten und dem unbestimmten Integrale aufdeckt und uns zum „*Hauptsatze der Integralrechnung*“ hinführen wird. Es sei zunächst  $c$  ein endlicher, die Bedingung  $c > b$  befriedigender Wert, und es sei  $\varphi(x)$  auch noch im abgeschlossenen Intervalle  $a \leq x \leq c$  eindeutig und stetig. Da uns bei der Bildung der endlichen Summe (1), S. 48, die Wahl der Teilpunkte  $x_k$  und der Argumente  $x_k$  im einzelnen Teilintervalle freisteht, so können wir bei einer auf das Intervall  $a \leq x \leq c$  bezogenen Summe den Punkt  $b$  stets als Teilpunkt benutzen. Die Summe läßt sich dann in jedem Falle in zwei Summen zerlegen, deren eine sich auf das Intervall  $a \leq x \leq b$  bezieht, während die andere zum Intervalle  $b \leq x \leq c$  gehört. Vollziehen wir den Grenzübergang, so folgt offenbar:

$$(1) \quad \int_a^c \varphi(x) dx = \int_a^b \varphi(x) dx + \int_b^c \varphi(x) dx.$$

Wir wollen nun im Integrale (6) § 1 die obere Grenze  $b$  als veränderlich denken und schreiben zu diesem Zwecke  $b = x_1$  \*); doch soll dabei  $x_1 \geq a$  bleiben, und  $\varphi(x)$  soll in allen zu benutzenden Integrationsintervallen als eindeutig und stetig vorausgesetzt werden. Das bestimmte Integral (6) § 1 wird auf diese Weise zu einer *eindeutigen Funktion seiner oberen Grenze*  $x_1$  und werde als solche durch:

$$(2) \quad \int_a^{x_1} \varphi(x) dx = F(x_1)$$

bezeichnet. Bilden wir diese Funktion für ein um den *positiven* Wert  $\Delta x_1$  vergrößertes Argument  $(x_1 + \Delta x_1)$ , so ergibt sich aus (1):

$$F(x_1 + \Delta x_1) = F(x_1) + \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x_1} \varphi(x) dx.$$

\*) Es bedarf kaum der Hervorhebung, daß diese Variable  $x_1$  natürlich nichts mit dem oben durch  $x_1$  bezeichneten Teilpunkte zu tun hat.

Der Änderung  $\Delta x_1$  des Argumentes entspricht somit die Änderung:

$$(3) \quad \Delta F(x_1) = \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x_1} \varphi(x) dx$$

der Funktion  $F(x_1)$ .

Nach I, 18 ff. erreicht die im abgeschlossenen Intervalle  $a \leq x \leq b$  gleichmäßig stetige Funktion  $\varphi(x)$  ihr Minimum in mindestens einem Punkte des Intervalles, der unter Benutzung einer in I, 134 ff. viel benutzten Schreibweise durch  $(a + \vartheta(b-a))$  bezeichnet werde; das im Intervalle eintretende Maximum von  $\varphi(x)$  aber finde im Punkte  $(a + \vartheta'(b-a))$  statt. Ersetzt man in (1), S. 48, alle Faktoren  $\varphi(x_k')$  durch  $\varphi(a + \vartheta(b-a))$ , so wird die Summe auf der linken Seite jener Gleichung nicht vergrößert; schreibt man  $\varphi(a + \vartheta'(b-a))$  für alle Faktoren  $\varphi(x_k')$ , so wird der Summenwert nicht verkleinert. Somit ist einleuchtend, daß die Ungleichung gilt:

$$(4)^* \quad \varphi(a + \vartheta(b-a)) \cdot (b-a) \leq \int_a^b \varphi(x) dx \leq \varphi(a + \vartheta'(b-a)) \cdot (b-a),$$

$$(0 \leq \vartheta, \vartheta' \leq 1).$$

Wenden wir diese Ungleichung auf das in (3) stehende Integral an, so ergibt sich:

$$\varphi(x_1 + \vartheta \Delta x_1) \cdot \Delta x_1 \leq \Delta F(x_1) \leq \varphi(x_1 + \vartheta' \Delta x_1) \Delta x_1$$

oder, da wir  $\Delta x_1 > 0$  annehmen:

$$\varphi(x_1 + \vartheta \Delta x_1) \leq \frac{\Delta F(x_1)}{\Delta x_1} \leq \varphi(x_1 + \vartheta' \Delta x_1).$$

Aus der Stetigkeit der Funktion  $\varphi(x)$  folgt demnach, wenn wir jetzt den Grenzübergang  $\lim \Delta x_1 = 0$  vollziehen:

$$(5) \quad \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta F(x_1)}{\Delta x_1} = \varphi(x_1).$$

Die Betrachtung überträgt sich sehr leicht auf den Fall, daß  $\Delta x_1 < 0$  ist, und führt hier wieder zur Gleichung (5). Wir haben demnach den Satz gewonnen: *Die eindeutige Funktion  $F(x_1)$  ist differenzierbar und also auch stetig (I, 135); ihre Ableitung ist  $\varphi(x_1)$ :*

$$(6) \quad \frac{dF(x_1)}{dx_1} = F'(x_1) = \varphi(x_1).$$

Hierdurch ist ein naher Zusammenhang zwischen dem bestimmten und dem unbestimmten Integrale des Differentials  $\varphi(x) dx$  aufgedeckt. Die nach den Methoden des vorigen Kapitels zu vollziehende unbestimmte

Integration des Differentials  $\varphi(x)dx$  führe bei beliebiger, aber fester Auswahl der Integrationskonstanten auf:

$$(7) \quad \int^* \varphi(x) dx = f(x).$$

Dann ist  $f'(x) = \varphi(x)$ . Da aber auch  $F'(x) = \varphi(x)$  ist, so unterscheiden sich die beiden Funktionen  $F(x)$  und  $f(x)$  nur um eine Konstante (vgl. S. 4):

$$(8) \quad F(x) = f(x) + C.$$

Die Berechnung dieser Konstanten  $C$  ist einfach dadurch zu vollziehen, daß man den zulässigen Wert  $x = a$  einträgt. Aus den Erklärungen in § 1 ist einleuchtend, daß, wenn sich das Integrationsintervall auf 0 zusammenzieht, der Wert des bestimmten Integrals selbst gleich 0 wird; also gilt:

$$0 = F(a) = f(a) + C, \quad C = -f(a),$$

und die Formel (8) schreibt sich endgültig:

$$(9) \quad F(x) = f(x) - f(a)^*).$$

Indem wir in (2) für die obere Grenze wieder  $b$  einsetzen und den Ausdruck (9) der Funktion  $F$  benutzen, ergibt sich der „Hauptsatz der Integralrechnung“: *Die Berechnung des bestimmten Integrals (6) § 1 geschieht auf Grund der Gleichung:*

$$(10) \quad \int_a^b \varphi(x) dx = f(b) - f(a),$$

wo  $f(x)$  durch unbestimmte Integration des Differentials  $\varphi(x) dx$  bei willkürlicher Auswahl der Integrationskonstanten zu gewinnen ist.

Man überträgt die Betrachtungen von §§ 1 und 2 sehr leicht auf den Fall, daß  $a > b$  ist. Die Teilpunkte  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  müssen dann eine Reihe abnehmender Zahlen darstellen ( $x_{k-1} > x_k$ ), und die Summe (1), S. 48, bekommt lauter *negative* Faktoren  $\Delta x_k$ . Es bedarf indessen nur eines Zeichenwechsels aller  $\Delta x_k$ , um eine Summe zu erhalten, auf welche die bisherige Entwicklung ohne weiteres paßt. Der Grenzwert der Summe:

$$\sum_{k=1}^n \varphi(x_k') \cdot (-\Delta x_k) = - \sum_{k=1}^n \varphi(x_k') \Delta x_k$$

ist das bestimmte Integral des Differentials  $\varphi(x) dx$  mit der unteren Grenze  $b$  und der oberen Grenze  $a (> b)$ :

\*) Man beachte, daß der Wert der in (9) rechts stehenden Differenz unverändert bleibt, falls man die bei der Berechnung von  $f(x)$  verfügbare Integrationskonstante in anderer Weise auswählt.

$$-\lim \sum_{k=1}^n \varphi(x_k') \Delta x_k = \int_b^a \varphi(x) dx = f(a) - f(b).$$

Schreiben wir hierfür unter Zeichenwechsel:

$$\lim \sum_{k=1}^n \varphi(x_k') \Delta x_k = f(b) - f(a)$$

und wenden zur abgekürzten Bezeichnung des links stehenden Grenzwertes nach wie vor die Gleichung (6), S. 50, an, so erhalten wir als eine unmittelbare Folge auch die Gleichung (10): *Also ist auch für  $a > b$  nicht nur die Existenz des Grenzwertes unserer Summen (1), S. 48, evident, sondern auch der Hauptsatz (10) der Integralrechnung bleibt unverändert bestehen.*

Eine erste Deutung des bestimmten Integrals (der sich später noch viele andere anreihen werden) erhalten wir, wenn wir  $y = \varphi(x)$  schreiben und  $x$  und  $y$  als rechtwinklige Koordinaten ansehen. Wir erkennen sofort, daß die Entwicklungen von I, 23 ff. über den *Inhalt der ebenen Fläche, die durch die Kurve der Gleichung  $y = \varphi(x)$ , die  $x$ -Achse und die Kurvenordinaten bei  $x = a$  und  $x = b$  eingegrenzt ist*, sich der am Anfang des vorigen Paragraphen durchgeführten allgemeinen Betrachtung einordnen. Das bestimmte Integral, aufgefaßt als Funktion seiner etwa wieder als veränderlich gedachten oberen Grenze, stellt bei der vorliegenden Deutung der  $x$  und  $y$  genau im damaligen Sinne die „*Inhaltsfunktion*“ dar\*); und wir kommen mit der Gleichung (6) auf die schon in I, 105 bewiesene und eben in (6) wieder erhaltene Tatsache zurück, *daß die Inhaltsfunktion differenzierbar ist und als Ableitung  $\varphi(x)$  ergibt.*

**3. Sätze über bestimmte Integrale.** Die nachfolgenden Sätze, von denen einige bereits im vorigen Paragraphen gebraucht wurden, sind meist unmittelbar einleuchtend oder doch ohne Mühe beweisbar. Wie bisher gelte die Voraussetzung, daß die unter den Integralzeichen auftretenden Funktionen in den Integrationsintervallen eindeutig und stetig seien.

1) *Ein bestimmtes Integral, bei dem die obere Grenze gleich der unteren ist, hat den Wert 0.*

2) *Austausch der Grenzen bei einem bestimmten Integral bewirkt einen Zeichenwechsel seines Wertes:*

$$(1) \quad \int_b^a \varphi(x) dx = - \int_a^b \varphi(x) dx.$$

\*) Man vergegenwärtige sich noch, daß die in I, 104 angegebenen Vorzeichenregeln für die Maßzahlen der Inhalte hier selbstverständlich unverändert bestehen bleiben.

3) Ist  $c$  irgend eine innerhalb oder nicht innerhalb des zunächst gebrauchten Integrationsintervalles gelegene dritte Grenze, so gilt:

$$(2) \quad \int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^c \varphi(x) dx + \int_c^b \varphi(x) dx.$$

4) Die Ableitung des bestimmten Integrals vom Differential  $\varphi(x) dx$  nach der variabel gedachten oberen Grenze  $x_1$  ist gleich  $\varphi(x_1)$ :

$$(3) \quad \frac{d}{dx_1} \int_0^{x_1} \varphi(x) dx = \varphi(x_1).$$

Der Satz 3) wurde bereits oben in (1) S. 51 herangezogen, der Satz 4) ist die Grundlage der Betrachtung von S. 52 ff.

Die Variable  $x$ , welche unter dem Integralzeichen (10) S. 53 für den Aufbau des Differentials  $\varphi(x) dx$  benutzt wurde, wird als die „Integrationsvariable“ bezeichnet. Da für die Berechnung der rechten Seite der genannten Gleichung  $x$  durch  $b$  bzw.  $a$  zu ersetzen ist, so ist es für den Wert  $(f(b) - f(a))$  des bestimmten Integrals gleichgültig, ob bei seiner Berechnung die Integrationsvariable  $x$  oder sonst irgendwie genannt wurde. Es ist wegen späterer Verwendung nützlich, diesen an sich selbstverständlichen Satz doch besonders zu nennen:

5) Bei der Berechnung eines bestimmten Integrales mit konstanten Grenzen kann ohne Änderung des Integralwertes ein beliebiger Wechsel der Bezeichnung der Integrationsvariablen vorgenommen werden:

$$(4) \quad \int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^b \varphi(y) dy = \int_a^b \varphi(t) dt = \dots$$

Die nachfolgenden Sätze, welche leicht aus der Erklärung des bestimmten Integrals hervorgehen, entsprechen einigen oben (S. 5 ff.) aufgestellten Sätzen über unbestimmte Integrale und könnten auch aus diesen letzteren Sätzen auf Grund des Hauptsatzes (10) S. 53 gefolgert werden.

6) Zwei Integrale mit gleichen Intervallen und gleichen Richtungen der Integration lassen sich nach folgender Regel addieren oder subtrahieren:

$$(5) \quad \int_a^b \varphi(x) dx \pm \int_a^b \psi(x) dx = \int_a^b (\varphi(x) \pm \psi(x)) dx.$$

7) Ein konstanter Faktor  $c$  hinter dem Zeichen des bestimmten Integrals darf als Faktor vor dasselbe gesetzt werden:

$$(6) \quad \int_a^b c \varphi(x) dx = c \int_a^b \varphi(x) dx.$$

Die Einführung einer neuen Variablen in ein bestimmtes Integral muß uns zu den entsprechenden Betrachtungen über unbestimmte Integrale (S. 7) zurückführen. Die neue Variable  $z$  möge mit  $x$  durch die Gleichung  $x = \psi(z)$  zusammenhängen. Die Beziehung sei eine solche, daß das Integrationsintervall des gegebenen Integrales sich eindeutig und stetig auf das endliche durch die Werte  $z = \alpha$  und  $z = \beta$  begrenzte Intervall der Variablen  $z$  überträgt. Wir nehmen ferner an, daß die Funktion  $\psi(z)$  im neuen Intervalle überall differenzierbar sei. Sind  $z_1, z_2, \dots$  die den Teilpunkten  $x_1, x_2, \dots$  des ursprünglichen Intervalles entsprechenden Teilpunkte des neuen, so finden wir unter Benutzung des Mittelwertsatzes (8) in I, 135:

$$x_k - x_{k-1} = \frac{\psi(z_k) - \psi(z_{k-1})}{z_k - z_{k-1}} (z_k - z_{k-1}) = \psi'(z'_k) (z_k - z_{k-1}),$$

wo  $z'_k$  dem durch  $z_{k-1}$  und  $z_k$  eingegrenzten Intervalle angehört. Wählen wir nun für den Aufbau des betreffenden Gliedes der Summe (1), S. 48, wie uns freisteht, den zu  $z'_k$  gehörenden Wert  $x'_k = \psi(z'_k)$  als Argument der Funktion  $\varphi$ , so ist:

$$\varphi(x'_k) (x_k - x_{k-1}) = \varphi(\psi(z'_k)) \psi'(z'_k) (z_k - z_{k-1}),$$

woraus wir die Bauart des auf  $z$  umgerechneten Integrales ablesen. Es ergibt sich der Satz:

8) *Bei Einführung einer neuen Variablen  $z$  in ein bestimmtes Integral vermöge der Gleichung  $x = \psi(z)$  rechnet sich das Integral nach folgender Regel um:*

$$(7) \quad \int_a^b \varphi(x) dx = \int_\alpha^\beta \varphi(\psi(z)) \psi'(z) dz,$$

wo  $\alpha$  und  $\beta$  die den Werten  $a$  und  $b$  entsprechenden Werte  $z$  sind.\*)

Den Übergang zu einer letzten Reihe von Sätzen vermittelt die folgende Betrachtung: Von den beiden eindeutigen und stetigen Funktionen  $\varphi(x)$  und  $\psi(x)$  gelte in jedem Punkte des Integrationsintervalles:

$$(8) \quad \varphi(x) \geq \psi(x).$$

Ist  $a < b$ , so sind die in (1), S. 48, benutzten  $\Delta x_k > 0$ ; dann folgt aus (8):

$$\varphi(x'_k) \Delta x_k \geq \psi(x'_k) \Delta x_k,$$

während für  $a > b$  und also  $\Delta x_k < 0$  in der letzten Formel das Zeichen  $\geq$  in  $\leq$  umzuschreiben ist. Man gelangt von hieraus leicht zu dem Satze:

\*) Vgl. die Entwicklungen von S. 7, wo jedoch die Bezeichnungen  $x$  und  $z$  ausgetauscht erscheinen.

9) Gilt im ganzen Intervalle der Integration die Bedingung (8), so ist für  $a < b$  auch:

$$(9) \quad \int_a^b \varphi(x) dx \geq \int_a^b \psi(x) dx,$$

während für  $a > b$  das Zeichen  $\geq$  in  $\leq$  umzuwandeln ist.

Ist  $m$  das Minimum der Funktion  $\varphi(x)$  im Intervall, so gilt die Bedingung (8), falls wir  $\psi(x)$  konstant gleich  $m$  setzen. Da zufolge (6):

$$\int_a^b m dx = m \int_a^b dx = m(b-a)$$

ist, so folgt aus (9):

$$\int_a^b \varphi(x) dx \geq m(b-a) \quad \text{bzw.} \quad \leq m(b-a),$$

je nachdem  $a < b$  oder  $a > b$  ist. Aus beiden Angaben zieht man die gleiche Folgerung:

$$(10) \quad \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(x) dx \geq m.$$

Ebenso ergibt sich, wenn  $M$  das Maximum von  $\varphi(x)$  im Intervalle ist:

$$(11) \quad \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(x) dx \leq M.$$

Den in (10) und (11) links stehenden Quotienten:

$$(12) \quad \Phi = \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(x) dx$$

nennt man den „mittleren Wert“ oder den „Mittelwert“ der Funktion  $\varphi(x)$  im Intervalle; zufolge der vorstehenden Betrachtung gilt für denselben:

$$(13) \quad m \leq \Phi \leq M.$$

Aus der in die Gestalt:

$$(14) \quad \int_a^b \varphi(x) dx = \Phi \cdot (b-a)$$

umgeschriebenen Gleichung (12) folgern wir den „ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung“:

10) Der zwischen den Extremwerten  $m$  und  $M$  gelegene Mittelwert  $\Phi$  der Funktion  $\varphi(x)$  hat die Bedeutung, daß das Integral unverändert seinen Wert behält, wenn man die Funktion  $\varphi(x)$  im ganzen Intervall durch ihren Mittelwert ersetzt.

Da wir  $\varphi(x)$  als stetig voraussetzten, so gibt es nach I, 19 im Integrationsintervalle mindestens einen Punkt  $(a + \vartheta(b-a))$ , in dem  $\varphi(x)$  den zwischen den Extremwerten  $m$  und  $M$  liegenden Wert  $\Phi$  annimmt:

$$\Phi = \varphi(a + \vartheta(b-a)), \quad (0 \leq \vartheta \leq 1).$$

11) Bei unserer stetigen Funktion  $\varphi(x)$  läßt sich mindestens ein dem Intervalle  $0 \leq \vartheta \leq 1$  angehörnder Zahlwert  $\vartheta$  angeben, für welchen die Gleichung gilt:

$$(15) \quad \int_a^b \varphi(x) dx = \varphi(a + \vartheta(b-a)) \cdot (b-a).$$

Bei der S. 54 besprochenen geometrischen Deutung des bestimmten Integrals liefert der Mittelwert  $\Phi$  die „mittlere Ordinate“ der Kurve der Funktion  $\varphi(x)$  im Intervall der Integration; im Anschluß an (14) kann man diese mittlere Ordinate als „Höhe“ desjenigen Rechtecks über der „Basis“  $(b-a)$  auffassen, welches mit dem durch das Integral ausgemessenen Flächenstücke inhaltsgleich ist.

Von weiteren Mittelwertsätzen nennen wir noch den folgenden, den wir als den „zweiten Mittelwertsatz der Integralrechnung“ bezeichnen:

12) Ist  $\psi(x)$  im Integrationsintervalle entweder nirgends  $< 0$  oder nirgends  $> 0$ , so gibt es,  $m$  und  $M$  wie bisher als Extremwerte von  $\varphi(x)$  im Intervalle benutzt, wieder einen im Intervalle  $m \leq \Phi' \leq M$  gelegenen Wert  $\Phi'$ , für welchen die Gleichung besteht:

$$(16) \quad \int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx = \Phi' \int_a^b \psi(x) dx,$$

die wegen der Stetigkeit von  $\varphi(x)$  auch wieder in die Gestalt gekleidet werden kann:

$$(17) \quad \int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx = \varphi(a + \vartheta(b-a)) \int_a^b \psi(x) dx.$$

Ist  $\psi(x)$  im Intervall überall gleich 0, so gilt die Gleichung (16) für jeden Wert  $\Phi'$ . Ist die Gleichung für eine im Intervalle nirgends negative Funktion  $\psi(x)$  richtig, so zeigt der Zeichenwechsel von  $\psi(x)$  links und rechts in (16) (welcher die Gleichung bestehen läßt), daß der Satz auch gilt, wenn  $\psi(x)$  im Intervalle nirgends positiv ist. Ist die Gleichung (16) für  $a < b$  richtig, so zeigt der Austausch der Integralgrenzen in (16) links und rechts (wobei wiederum die Gleichung bestehen bleibt), daß der Satz auch für  $a > b$  richtig ist.

Der Beweis ist also nur noch für den Fall zu führen, daß  $a < b$  gilt, und daß  $\psi(x)$  im Intervalle nirgends negativ und nicht überall gleich 0 ist. Unter diesen Umständen folgt aber aus:

$$m \leq \varphi(x_k') \leq M, \quad \psi(x_k) \geq 0, \quad \Delta x_k > 0$$

für jedes Glied der nach (1) S. 48 anzusetzenden Summen:

$$m \psi(x_k') \Delta x_k \leq \varphi(x_k') \psi(x_k') \Delta x_k \leq M \psi(x_k') \Delta x_k.$$

Für die Summen selbst und ihre Grenzwerte aber ergibt sich hieraus:

$$(18) \quad m \int_a^b \psi(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx \leq M \int_a^b \psi(x) dx.$$

Das in den äußeren Seiten dieser Ungleichung stehende Integral ist jedenfalls nicht negativ. Es kann aber auch nicht verschwinden. Da nämlich  $\psi(x)$  im Intervalle nicht überall gleich 0 ist, so läßt sich zufolge der Stetigkeit von  $\psi(x)$  ein endlich ausgedehntes Teilintervall angeben, in dem  $\psi(x)$  überall  $> 0$  ist, woraus die Behauptung sofort folgt. Demnach ist:

$$(19) \quad \int_a^b \psi(x) dx > 0 \quad \text{und also} \quad \frac{\int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx}{\int_a^b \psi(x) dx} = \Phi'$$

ein endlicher Zahlwert. Zuzufolge (18) genügt der Wert  $\Phi'$  der Bedingung  $m \leq \Phi' \leq M$ , worauf die zweite Gleichung (19) den zu beweisenden Satz (16) liefert.

Der erste Mittelwertsatz erweist sich als ein Spezialfall des zweiten und wird aus ihm gewonnen, indem man  $\psi(x)$  konstant gleich 1 setzt. Übrigens erkennt man auf Grund des „Hauptsatzes“ (10), S. 53 in den beiden aufgestellten Sätzen sofort die Mittelwertsätze der Differentialrechnung wieder, wie hier noch kurz unter der Annahme einer im Integrationsintervalle nirgends verschwindenden Funktion  $\psi(x)$  ausgeführt werden möge. Findet man durch unbestimmte Integration:

$$\int \varphi(x) \psi(x) dx = f(x), \quad \int \psi(x) dx = g(x),$$

so folgt unmittelbar:

$$f'(x) = \varphi(x) \psi(x), \quad g'(x) = \psi(x), \quad \varphi(x) = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Als umgeschriebene Gestalt der Gleichung (17) ergibt sich nach Division durch den von 0 verschiedenen Wert  $(g(b) - g(a))$ :

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(a + \vartheta(b-a))}{g'(a + \vartheta(b-a))},$$

womit wir zur Gleichung (5) in I, 134 des „Mittelwertsatzes der Differentialrechnung“ zurückgelangen. Ebenso leicht ergibt sich aus der Formel (15) des ersten Mittelwertsatzes der Integralrechnung der besondere durch die Formel (8) in I, 135 zum Ausdruck kommende Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

**4. Zulassung von Unstetigkeiten der Funktion  $\varphi(x)$  und von unendlichen Integrationsintervallen.** Fragt man nach den Bedingungen,

die eine eindeutige Funktion  $\varphi(x)$  in einem durch die Punkte  $a$  und  $b$  begrenzten Intervalle erfüllen muß, damit die nach (1) S. 48 anzusetzenden Summen  $\Sigma_n$  einem bestimmten endlichen Grenzwerte zustreben, so wird die Formulierung dieser Bedingungen zum Begriffe der *im fraglichen Intervalle „integrierbaren“ Funktion* hinführen. Daß die stetigen Funktionen zu den integrierbaren gehören, hat die Entwicklung von S. 48 ff. gezeigt; es erschien für unsere Zwecke ausreichend, von der Aufstellung des allgemeinen Begriffs der integrierbaren Funktion abzusehen und die grundlegenden Betrachtungen über bestimmte Integrale sogleich an den Begriff der stetigen Funktion anzuknüpfen. Doch werden jetzt ein paar Erweiterungen nötig sein.

Es sei erstlich  $c$  ein im Inneren des Integrationsintervalls gelegener Unstetigkeitspunkt von  $\varphi(x)$ , in welchem der Funktionswert eine plötzliche Wertänderung (einen Sprung) um einen endlichen, von 0 verschiedenen Betrag erfährt. In den beiden abgeschlossenen Teilintervallen, welche durch den Teilpunkt  $c$  aus dem Integrationsintervalle entstehen, sei jedoch  $\varphi(x)$  gleichmäßig stetig; als Funktionswert  $\varphi(c)$  hat beim einzelnen dieser Intervalle natürlich der von dem Innern des Intervalles her erreichbare Grenzwert  $\lim_{x=c} \varphi(x)$  zu gelten. Es wäre nicht schwer zu zeigen, daß sich in diesem Falle die Konvergenzbetrachtung von S. 48 ff. ohne wesentliche Änderung durchführen läßt, und daß das Integral in die Gestalt gesetzt werden kann:

$$(1) \quad \int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^c \varphi(x) dx + \int_c^b \varphi(x) dx.$$

*Wir ziehen indessen vor, das linksstehende Integral einfach durch diese Formel zu erklären, und können offenbar in entsprechender Weise verfahren, wenn  $\varphi(x)$  im Intervall irgend eine endliche Anzahl von Unstetigkeitspunkten hat oder (wie wir sagen können) daselbst „abteilungsweise“ stetig ist.*

Inwieweit die Sätze der vorigen Paragraphen für Integrale dieser Art eine Veränderung erleiden, wird man beim einzelnen Satze ohne Mühe feststellen. Ersetzt man z. B. die obere Grenze des eben betrachteten Integrals (1) durch eine im Inneren des Intervalles variable Größe  $x_1$ , so ist das Integral zwar eine stetige und im allgemeinen differenzierbare Funktion von  $x_1$ . Jedoch existiert im Punkte  $c$  keine Ableitung, d. h. die beiden von rechts her und von links her zu bildenden Differenzenquotienten konvergieren hier nicht gegen denselben Grenzwert\*), wie ja aus den Voraussetzungen über  $\varphi(x)$  selbstverständlich ist.

\*) S. die zweite der drei in I, 99 für die Existenz einer Ableitung formulierten Bedingungen.

Wir nehmen zweitens an, daß die Funktion  $\varphi(x)$  an der oberen Grenze  $b$  des Integrals einen „Unendlichkeitspunkt“ habe (s. I, 31); doch soll  $\varphi(x)$  in jedem durch  $a$  und  $x_1$  begrenzten abgeschlossenen Intervalle gleichmäßig stetig sein, unter  $x_1$  irgend einen Innenpunkt des Integrationsintervalles verstanden. Hier kann für die Grenzen  $a, b$  der Integralbegriff auf Grund der Betrachtung von S. 48 ff. nicht entwickelt werden. Da nämlich nach Festlegung der Breite  $|b - x_{n-1}|$  des letzten Teilintervalles wegen  $\lim_{x=b} \varphi(x) = \infty$  der Punkt  $x'_n$  stets noch so ausgewählt werden

kann, daß das letzte Glied der Summe (1) S. 48 absolut genommen einen beliebig groß gewählten Wert übersteigt, während die übrigen Summenglieder innerhalb angegebener endlicher Schranken verbleiben, so ist Konvergenz der Summenwerte  $\Sigma_n$  gegen eine bestimmte endliche Grenze jetzt ausgeschlossen. Man erklärt hier wenigstens in gewissen aus dem aufzustellenden Satze hervorgehenden Fällen auf folgendem Wege den Begriff des Integrales vom Differential  $\varphi(x) dx$  für die Grenzen  $a$  und  $b$ : Der Annahme gemäß besitzt das Integral:

$$(2) \quad \int_a^{x_1} \varphi(x) dx$$

für jeden zwischen  $a$  und  $b$  gelegenen Wert  $x_1$  einen bestimmten endlichen von  $x_1$  abhängenden Wert. Sollte der Integralwert (2) für  $\lim x_1 = b$  einer bestimmten endlichen Grenze zustreben, so wollen wir diesen Grenzwert als bestimmtes Integral des Differentials  $\varphi(x) dx$  mit den Grenzen  $a$  und  $b$  erklären:

$$(3) \quad \int_a^b \varphi(x) dx = \lim_{x_1 \rightarrow b} \int_a^{x_1} \varphi(x) dx.$$

Man spricht in diesem Falle von einem „uneigentlichen“ Integrale, insofern dasselbe nicht unmittelbar aus Summen der Gestalt (1) S. 48 durch den damals bezeichneten Grenzübergang herstellbar ist; man sagt auch, das Integral (3) sei im fraglichen Falle „konvergent“.

Ist das unbestimmte Integral des Differentials  $\varphi(x) dx$  eine bereits bekannte Funktion  $f(x)$ , so folgt aus dem „Hauptsatze“:

$$\int_a^{x_1} \varphi(x) dx = f(x_1) - f(a),$$

und man mag alsdann unmittelbar nachsehen, ob eine Grenze  $\lim_{x_1 \rightarrow b} f(x_1) = f(b)$  existiert oder nicht. Eine andere Überlegung, die hier noch kurz angedeutet sein mag, zeigt uns durch direkte Rechnung, daß trotz der Vor-

aussetzung  $\lim_{x=b} \varphi(x) = \infty$  in gewissen Fällen die Integralwerte (2) für  $\lim x_1 = b$  tatsächlich einer endlichen Grenze zustreben. Es besteht nämlich folgender Satz: *Läßt sich eine dem Intervalle  $0 < \nu < 1$  angehörende Zahl  $\nu$  angeben, für welche das Produkt:*

$$(4) \quad \varphi_1(x) = |x - b|^\nu \cdot \varphi(x)$$

im Intervalle auch noch unter Einschluß des Endpunktes  $b$  stetig ist, so existiert der Grenzwert und damit das Integral (3)\*). Transformieren wir nämlich das Integral (2) nach (7) S. 56 vermöge der Substitution:

$$z = |x - b|^{1-\nu}, \quad dz = (1-\nu) \cdot \operatorname{sgn}(a-b) \cdot |x-b|^{-\nu} dx^{**}),$$

so überträgt sich wegen  $1-\nu > 0$  das Integrationsintervall auf das durch  $z = \alpha = |a-b|^{1-\nu}$  und  $z = 0$  begrenzte Intervall von  $z$ . Zur Ausführung der Umrechnung schreiben wir mit Benutzung von (4) zunächst:

$$\int_a^{x_1} \varphi(x) dx = \frac{\operatorname{sgn}(a-b)}{1-\nu} \int_a^{x_1} \varphi_1(x) \cdot (1-\nu) \cdot \operatorname{sgn}(a-b) |x-b|^{-\nu} dx$$

und finden daraufhin, wenn wir  $\varphi_1(x)$  als Funktion von  $z$  durch  $\psi(z)$  und den  $x$ , entsprechenden Wert  $z$  durch  $z_1$  bezeichnen:

$$\int_a^{x_1} \varphi(x) dx = \frac{\operatorname{sgn}(a-b)}{1-\nu} \int_{z_1}^{\alpha} \psi(z) dz.$$

Rechts steht auch für die obere Grenze  $z_1 = 0$  ein „eigentliches“ Integral, da  $\psi(z) = \varphi_1(x)$  im ganzen Intervalle unter Einschluß der oberen Grenze stetig ist. Damit ist auch für das links stehende Integral die Existenz der endlichen Grenze (3) einleuchtend.

Da ein Austausch der Integralgrenzen nur einen Zeichenwechsel des Integralwertes bewirkt, so überträgt sich die vorstehende Betrachtung sofort auch auf den Fall, daß  $\varphi(x)$  an der unteren Grenze des Integrals einen Unendlichkeitspunkt hat. Endlich können wir mit den bisherigen Mitteln auch den Fall behandeln, daß  $\varphi(x)$  im Innern des Intervalles einen oder auch mehrere Unendlichkeitspunkte hat. Kommt z. B. ein solcher Punkt bei  $x=c$  im Intervalle vor, so bilden wir für das Integral der Grenzen  $a$  und  $b$  den Ansatz:

\*) Die Voraussetzung des Textes ist erfüllt, wenn  $\varphi(x)$  bei  $x=b$  einen Unendlichkeitspunkt „ $\nu$ ter Ordnung“ hat (s. I, 193) oder die Art des Unendlichwerdens schwächer ist als diejenige der  $\nu$ -ten Ordnung.

\*\*\*) Da  $x$  im Inneren des Integrationsintervalles zu denken ist, so gilt

$$\operatorname{sgn}(x-b) = \operatorname{sgn}(a-b).$$

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^c \varphi(x) dx + \int_c^b \varphi(x) dx$$

und wenden auf die beiden Summanden rechter Hand die bisherige Betrachtung an.

In den folgenden Beispielen wollen wir uns bei der Berechnung eines bestimmten Integrals auf Grund des „Hauptsatzes“ folgender Schreibweise bedienen:

$$(5) \quad \int_a^b \varphi(x) dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a),$$

d. h. wir schreiben zunächst das Ergebnis der unbestimmten Integration in Klammern und merken an der rechts stehenden Klammer die Integralgrenzen an. In dem ersten der drei folgenden Beispiele ist  $n > 1$  und ganzzahlig gedacht; in den beiden ersten Fällen wird die Funktion  $\varphi(x)$  an der oberen Grenze unendlich, im dritten Beispiel an der unteren Grenze:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x}} = \left[ -\frac{n}{n-1} (1-x)^{1-\frac{1}{n}} \right]_0^1 = \frac{n}{n-1}.$$

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \left[ \arcsin \frac{x}{a} \right]_0^a = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^1 \ln x dx = [x \ln x - x]_0^1 = -1.$$

Die Überlegung von S. 49 ff. beruht wesentlich auf der Endlichkeit der Differenz  $(b-a)$ . Die auf diese Überlegung sich gründende Erklärung des Begriffs eines bestimmten Integrals versagt demnach auch in dem Falle, daß das Integrationsintervall unendlich ausgedehnt ist, d. h. daß eine der Grenzen  $+\infty$  oder  $-\infty$  ist, oder daß sich das Intervall von  $-\infty$  bis  $+\infty$  erstreckt. Wir betrachten etwa den Fall, daß  $a$  endlich und  $b = +\infty$  ist. *Wir erklären, falls ein endlicher und bestimmter Grenzwert:*

$$\lim_{x_1 = +\infty} \int_a^{x_1} \varphi(x) dx = \lim_{x_1 = +\infty} (f(x_1) - f(a))$$

existieren sollte, diesen als das bestimmte Integral des Differentials  $\varphi(x) dx$  mit den Grenzen  $a$  und  $+\infty$ :

$$(6) \quad \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx = \lim_{x_1 = +\infty} \int_a^{x_1} \varphi(x) dx = \lim_{x_1 = +\infty} (f(x_1) - f(a)).$$

Auch ein solches Integral bezeichnet man als ein „uneigentliches“; man sagt auch wieder (im Falle der Bestimmtheit und Endlichkeit von  $\lim_{x_1 \rightarrow +\infty} f(x_1)$ ), das Integral von  $\varphi(x) dx$  mit der oberen Grenze  $+\infty$  sei „konvergent“.\*)

Die Fälle, daß  $b = -\infty$  oder  $a = \pm\infty$  und  $b$  endlich ist, werden entsprechend behandelt. Ein Integral mit den Grenzen  $-\infty$  und  $+\infty$  kann man durch Spaltung des Intervalles etwa in der Gestalt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^0 \varphi(x) dx + \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx$$

als Summe zweier Integrale der eben erledigten Art erklären.

Ein paar Beispiele hierher gehöriger uneigentlicher Integrale sind:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^m} = \left[ \frac{-1}{m-1} \frac{1}{x^{m-1}} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{m-1}, \quad (m > 1),$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = [\operatorname{arc} \operatorname{tg} x]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha^2 x} dx = \left[ -\frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha^2 x} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\alpha^2},$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin ax dx = \left[ -e^{-x} \frac{\sin ax + a \cos ax}{1+a^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{a}{1+a^2},$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos ax dx = \left[ -e^{-x} \frac{\cos ax - a \sin ax}{1+a^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1+a^2}.$$

Die in den beiden letzten Fällen erforderlichen unbestimmten Integrationen sind in (9) S. 14 geleistet. Ein letztes Beispiel, das wir noch betrachten wollen, wird später für die Untersuchung der „Eulerschen Inte-

\*) Insbesondere heißt das Integral „unbedingt“ oder „bedingt“ konvergent, je nachdem auch noch ein endlicher Grenzwert:

$$\lim_{x_1 = \infty} \int_a^{x_1} |\varphi(x)| dx$$

existiert oder nicht; s. die Bezeichnungen der Reihentheorie in I, 209 ff.

grale“ wichtig. Ist  $n$  eine positive ganze Zahl, so findet man durch partielle Integration (s. S. 13) und Einsetzung der Grenzen 0 und  $x_1$ :

$$\int_0^{x_1} e^{-x} x^n dx = -e^{-x_1} x_1^n + n \int_0^{x_1} e^{-x} x^{n-1} dx.$$

Für  $\lim x_1 = +\infty$  nähert sich das erste Glied rechter Hand der Grenze 0 (s. I, 194). Nähert sich also das rechts stehende Integral einem endlichen Grenzwerte, so gilt dasselbe vom links stehenden Integrale, und zwar erhalten wir die „Rekursionsformel“:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx = n \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{n-1} dx.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formel und Heranziehung des dritten unter den Beispielen von S. 64 (für  $\alpha = 1$ ) finden wir als für jede positive ganze Zahl  $n$  gültig:

$$(7) \quad \int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$$

Ist das unbestimmte Integral von  $\varphi(x) dx$  nicht elementar und uns demnach unzugänglich, so können wir auf Grund der Regel (6) nicht entscheiden, ob dem daselbst links stehenden Symbole eine Bedeutung, d. h. ein bestimmter endlicher Wert zukommt. Man muß dann auf anderem Wege zum Ziele zu kommen versuchen.

Um z. B. zu untersuchen, ob dem Symbole:

$$(8) \quad \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

ein bestimmter endlicher Wert zukommt, stelle man auf Grund der Regel (9) S. 57 die für jedes  $x_1 > 1$  gültige Ungleichung fest:

$$\int_1^{x_1} e^{-x^2} dx < \int_1^{x_1} e^{-x} dx.$$

Die beiden hier rechts und links stehenden Funktionen von  $x_1$  sind stetig und wachsen mit wachsendem  $x_1$  monoton. Dabei nähert sich die rechts stehende Funktion für  $\lim x_1 = +\infty$  der Grenze  $e^{-1}$ , und also kann die links stehende Funktion bei ihrem Wachstume niemals den Betrag  $e^{-1}$  überschreiten. Es liegt demnach (vgl. z. B. die Betrachtung in I, 8 ff.) für  $\lim x_1 = +\infty$  ein endlicher Grenzwert (8) tatsächlich vor.

Daß das Integral:

$$\int_0^{x_1} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{x_1} = 1 - \cos x_1$$

für  $\lim x_1 = +\infty$  einer Grenze *nicht* zustrebt, ist einleuchtend.

Dagegen läßt sich beweisen, daß:

$$(9) \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx$$

einen bestimmten endlichen Wert besitzt. Ist nämlich für irgend ein positives  $x_1$  durch  $n\pi$  das größte, den Wert  $x_1$  nicht übertreffende Multiplum von  $\pi$  bezeichnet, so schreiben wir unter wiederholter Anwendung der Regel (2) S. 55:

$$\int_0^{x_1} \frac{\sin x}{x} \, dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x} \, dx + \cdots + \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\sin x}{x} \, dx + \int_{n\pi}^{x_1} \frac{\sin x}{x} \, dx,$$

wo rechts der Kürze halber der immer wiederkehrende Ausdruck unter dem Integralzeichen nicht hinzugesetzt wurde. Nun findet man durch Einführung einer neuen Variablen  $x'$  vermöge der Substitution  $x = x' + k\pi$  bei nachheriger Fortlassung des Index rechter Hand (vgl. (4) S. 55):

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x} \, dx = (-1)^k \int_{k\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x+k\pi} \, dx.$$

Das rechts stehende Integral ohne das vor demselben stehende Vorzeichen hat einen *positiven* Wert, der durch  $u_k$  bezeichnet sein möge. Es gilt dann:

$$(10) \quad \int_0^{x_1} \frac{\sin x}{x} \, dx = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \cdots + (-1)^{n-1} u_{n-1} + (-1)^n \vartheta_n \cdot u_n,$$

wo  $0 \leq \vartheta_n < 1$  ist, da  $x_1$  zwar gleich  $n\pi$  sein kann, aber notwendig  $x_1 < (n+1)\pi$  ist.

Nun folgt aus der Integralgestalt von  $u_k$  nach der Regel (9) S. 57, daß allgemein  $u_{k-1} > u_k$  gilt; die  $u_0, u_1, u_2, \dots$  bilden also eine *Reihe positiver, monoton abnehmender Zahlen*. Andererseits folgt aus dem Mittelwertsatze (15) S. 58:

$$u_n = \int_{n\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x+n\pi} \, dx = \frac{\sin \vartheta \pi}{\vartheta \pi + n\pi} \cdot \pi < \frac{1}{n},$$

woraus sich  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$  ergibt. Aus (10) folgt demnach die Bestimmtheit und Endlichkeit des Integrales (9) durch dieselbe Betrachtung, durch welche man die Konvergenz einer unendlichen Reihe mit alternierenden Zeichen und mit monoton gegen die Grenze 0 abnehmenden Gliedern beweist (vgl. I, 238).

Die wirklichen Werte der Integrale (8) und (9) werden wir im nächsten Kapitel berechnen können.

**5. Angenäherte Berechnung bestimmter Integrale.** Die Verwendung des „Hauptsatzes“ zur Berechnung eines bestimmten Integrals versagt, wenn das unbestimmte Integral des in Betracht kommenden Differentials  $\varphi(x) dx$  entweder nicht elementar ist oder so kompliziert ausfällt, daß mit demselben schlecht zu rechnen ist. Man hilft sich dann mit Regeln zur Berechnung von *Näherungswerten* des Integrals und kann eine erste Klasse solcher Regeln dadurch gewinnen, daß man die Funktion  $\varphi(x)$  in geeignet gewählten Teilintervallen des ganzen Integrationsintervalles je durch eine *rationale ganze „Näherungsfunktion“* ersetzt, deren Integration keine Schwierigkeit findet.

In I, 169 ff. lernten wir zwei Ansätze kennen, für eine gegebene eindeutige Funktion  $\varphi(x)$  eine rationale ganze Näherungsfunktion aufzustellen, nämlich die *Lagrangesche Interpolationsformel* (6) in I, 170 und die *Taylorische Formel* (8) in I, 174. Der erste dieser beiden Ansätze liefert uns Näherungsformeln für das Integral, die wegen ihrer einfachen Bauart besonders brauchbar sind. Über den Grad der damit erzielten Annäherung werden wir dann aber durch Heranziehung des zweiten Ansatzes entscheiden können.

Da bei Austausch der Grenzen  $a$  und  $b$  das Integral nur einen Zeichenwechsel erfährt, so wird es erlaubt sein,  $a < b$  als erfüllt anzusehen. Wir zerlegen, unter  $n$  irgend eine positive ganze Zahl verstanden, das Integrationsintervall zunächst in  $n$  gleich lange Teilintervalle. Um uns sodann für jedes dieser Teilintervalle nach der Lagrangeschen Interpolationsformel eine besondere Näherungsfunktion zu verschaffen, zerlegen wir, unter  $\nu$  irgend eine zweite positive ganze Zahl verstanden, jedes Teilintervall seinerseits nochmals in  $\nu$  gleich lange Teilintervalle. Die Länge des einzelnen auf diese Weise erhaltenen kleinen Intervalles, also der  $(n \cdot \nu)^{\text{te}}$  Teil von  $(b-a)$ , werde  $h$  genannt; die Teilpunkte sind:

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + h, \quad x_2 = a + 2h, \quad \dots, \quad x_{n\nu-1} = a + (n\nu-1)h, \quad x_{n\nu} = b$$

die ihnen zugehörigen Werte der Funktion  $y = \varphi(x)$  mögen:

$$y_0 = \varphi(x_0), \quad y_1 = \varphi(x_1), \quad y_2 = \varphi(x_2), \quad \dots, \quad y_{n\nu} = \varphi(x_{n\nu})$$

genannt werden.

Wir betrachten nun zunächst ausschließlich das durch die Punkte  $x_0$  und  $x_\nu$  begrenzte Teilintervall und können für dasselbe eine rationale ganze Näherungsfunktion  $\nu^{\text{ten}}$  Grades  $\psi(x)$  angeben, welche für die  $(\nu+1)$  Argumente  $x_0, x_1, \dots, x_\nu$  die Werte  $y_0, y_1, \dots, y_\nu$  annimmt. Diese Funktion ist freilich unter Gebrauch anderer Bezeichnungen in (8) I, 171 bereits explizite dargestellt. Auf die hier gebrauchten Bezeichnungen umgerechnet, nimmt die Funktion die folgende Gestalt an:

$$(1) \quad \psi(x) = \frac{(-1)^\nu}{\nu! h^\nu} \left( y_0 g_0(x) - \binom{\nu}{1} y_1 g_1(x) + \binom{\nu}{2} y_2 g_2(x) - \dots + (-1)^\nu y_\nu g_\nu(x) \right),$$

wobei  $g_k(x)$  diejenige Funktion  $\nu^{\text{ten}}$  Grades ist, welche aus:

$$(2) \quad (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_\nu)$$

bei Fortlassung des Faktors  $(x-x_k)$  hervorgeht.\*)

Ersetzen wir nun in dem durch die Punkte  $x_0$  und  $x_\nu$  begrenzten Intervalle die Funktion  $\varphi(x)$  durch die Näherungsfunktion, so liefert dieses Intervall folgenden Beitrag zum Näherungswerte des Integrals:

$$(3) \quad \int_{x_0}^{x_\nu} \psi(x) dx = \frac{1}{\nu! h^\nu} \sum_{k=0}^{\nu} \left( (-1)^{\nu-k} \binom{\nu}{k} y_k \int_{x_0}^{x_\nu} g_k(x) dx \right).$$

Um die rechts in den einzelnen Gliedern auftretenden Integrale in eine einfachere Gestalt zu transformieren, führen wir eine neue Variable  $z$  durch die Substitution ein:

$$x = x_0 + \nu h \cdot z, \quad dx = \nu h \cdot dz.$$

Dabei ergibt sich:

$$x_i = x_0 + i h \quad x - x_i = \nu h \left( z - \frac{i}{\nu} \right),$$

und den Integralgrenzen  $x_0$  und  $x_\nu$  entsprechen die neuen Grenzen  $z=0$  und  $z=1$ . Bei der Bedeutung von  $g_k(x)$  erhält man:

$$\int_{x_0}^{x_\nu} g_k(x) dx = (\nu h)^{\nu+1} \int_0^1 z \left( z - \frac{1}{\nu} \right) \left( z - \frac{2}{\nu} \right) \dots (z-1) dz.$$

\*) Man wolle nicht unterlassen, die Richtigkeit der Gleichung (1) nochmals zu prüfen. Daß zunächst  $\psi(x)$  in  $x$  eine ganze Funktion „höchstens“  $\nu^{\text{ten}}$  Grades ist, ist sofort einleuchtend. Da ferner alle Funktionen  $g_0(x), g_1(x), \dots, g_\nu(x)$ , abgesehen von  $g_k(x)$ , für  $x = x_k$  verschwinden, so ist:

$$\psi(x_k) = \frac{(-1)^{\nu+k}}{\nu! h^\nu} \binom{\nu}{k} g_k(x_k) \cdot y_k,$$

während sich (vgl. den Ausdruck (2)) leicht:

$$g_k(x_k) = (-1)^{\nu-k} k! (\nu-k)! h^\nu$$

ergibt. Aus beiden Gleichungen folgt dann unmittelbar  $\psi(x_k) = y_k$ .

Bei Eintragung dieser neuen Ausdrücke der in Rede stehenden Integrale in die Gleichung (3) wollen wir uns der Abkürzung:

$$(4) \quad A_k = (-1)^{v-k} \frac{v^{v+1}}{v!} \binom{v}{k} \int_0^1 \frac{z \left(z - \frac{1}{v}\right) \left(z - \frac{2}{v}\right) \cdots (z-1)}{z - \frac{k}{v}} dz$$

bedienen, worauf sich die Gleichung (3) in die einfachere Gestalt:

$$(5) \quad \int_{x_0}^{x_v} \psi(x) dx = h(A_0 y_0 + A_1 y_1 + \cdots + A_v y_v)$$

zusammenzieht. Die  $A_0, A_1, \dots, A_v$ , die hier als Koeffizienten der Funktionswerte  $y_k$  auftreten, sind zufolge (4) rationale, allein von der Anzahl  $v$  abhängende Zahlen. Sie befriedigen das Gesetz  $A_{v-k} = A_k$ . Führt man nämlich im Integrale (4) die Substitution  $z = 1 - z'$ ,  $dz = -dz'$  aus, so transformiert sich dieses Integral in die Gestalt:

$$\int_0^1 \frac{z \left(z - \frac{1}{v}\right) \cdots (z-1)}{z - \frac{k}{v}} dz = - \int_1^0 \frac{(1-z') \left(\frac{v-1}{v} - z'\right) \cdots \left(\frac{1}{v} - z'\right) (-z')}{\frac{v-k}{v} - z'} dz'$$

Tauscht man rechter Hand die Integralgrenzen (unter Zeichenwechsel des Integrals), läßt den Index an der Integrationsvariablen fort (s. (4) S. 55) und kehrt bei allen Linearfaktoren unter dem Integralzeichen die Vorzeichen um, so folgt nach Umordnung jener Linearfaktoren:

$$\int_0^1 \frac{z \left(z - \frac{1}{v}\right) \cdots (z-1)}{z - \frac{k}{v}} dz = (-1)^v \int_0^1 \frac{z \left(z - \frac{1}{v}\right) \cdots (z-1)}{z - \frac{v-k}{v}} dz.$$

Hieraus ergibt sich mit Rücksicht auf das Gesetz (4) in 1, 142 der Binomialkoeffizienten die behauptete Gleichheit  $A_{v-k} = A_k$ . Wir fassen die Ergebnisse vorläufig in folgendem Satze zusammen: *Bei Benutzung der durch die Lagrangesche Interpolationsformel gelieferten rationalen ganzen Näherungsfunktion ist der zunächst auf das Teilintervall von  $x_0$  bis  $x_v$  bezogene Näherungswert unseres Integrals in der Gestalt (5) als mit  $h$  multipliziertes lineares Aggregat der Funktionswerte  $y_0, y_1, \dots, y_v$  darstellbar, wobei die Koeffizienten  $A_0, A_1, \dots, A_v$  rationale, allein von der Anzahl  $v$  abhängende Zahlen sind, die der Relation  $A_{v-k} = A_k$  genügen.*



$$(9) \quad \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) dx = h \left( \frac{3}{8} y_0 + \frac{9}{8} y_1 + \frac{9}{8} y_2 + \frac{3}{8} y_3 \right).$$

Wir wollen nun zunächst die erste dieser Formeln auf alle  $n$  Teilintervalle anwenden, wie sie in diesem Falle durch die Teilpunkte  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  geliefert werden. Die Zusammenfügung der Teilergebnisse führt uns für das Gesamtintegral der Grenzen  $x_0 = a$  und  $x_n = b$  zu der Näherungsformel:

$$(10) \quad \int_a^b \varphi(x) dx = \frac{1}{2} h (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n).$$

Mit dieser Formel haben wir bereits in I, 33 ff. eine Inhaltsbestimmung bei der gleichseitigen Hyperbel geleistet. Deuten wir nach S. 54 das Integral als einen Flächeninhalt, so entspricht der Zerlegung des Intervalles in die  $n$  Teilintervalle eine Zerschneidung der Fläche in  $n$  „Parallelstreifen“ gleicher Breite. Die Näherungsformel (7) aber bedeutet, daß wir den einzelnen Streifen angenähert als ein *Trapez* ansehen, indem wir das den Streifen berandende Stück der Kurve  $y = \varphi(x)$  durch die zugehörige, die Ordinatenendpunkte  $(x_0, y_0)$  und  $(x_1, y_1)$  verbindende Sehne ersetzen\*. Im Anschluß hieran wollen wir die Näherungsformel (10) kurz als „*Trapezregel*“ bezeichnen.

Für  $\nu = 2$  leitet man aus (8) auf demselben Wege die Näherungsformel:

$$(11) \quad \int_a^b \varphi(x) dx = \frac{1}{3} h (y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2})$$

ab, welche man als die „*Simpsonsche Regel*“ bezeichnet. Endlich liefert der Ansatz (9) für  $\nu = 3$  die Näherungsformel:

$$(12) \quad \int_a^b \varphi(x) dx = \frac{3}{8} h (y_0 + y_{3n}) + 3(y_1 + y_2 + y_4 + y_5 + \dots + y_{3n-2} + y_{3n-1}) \\ + 2(y_3 + y_6 + y_9 + \dots + y_{3n-3}),$$

die man „*zweite Simpsonsche Regel*“ oder „*Drei-Acht-Regel*“ nennt. Bis  $\nu = 11$  hin sind die sich weiter anreihenden Regeln bekannt; doch gehen wir auf diese nicht ein.

Die einzelne Formel (10) ff. ist natürlich nur dann brauchbar, wenn man für dieselbe eine „*Fehlergrenze*“ angeben kann, d. h. einen Betrag,

\* Im Falle  $\nu = 2$  ist die der Gleichung (8) zugrunde liegende „*Näherungskurve*“  $y = \psi(x)$  eine „*Parabel zweiten Grades*“ durch die drei Ordinatenendpunkte  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$  und  $(x_2, y_2)$ . Entsprechend hat man in (9) als Näherungskurve eine „*Parabel dritten Grades*“ durch vier Ordinatenendpunkte.

um welchen schlimmsten Falles der Näherungswert von dem wirklichen Werte des Integrals abweichen kann\*). Ist die Funktion  $\varphi(x)$  analytisch gegeben, und hat sie im Integrationsintervall eindeutige und stetige Ableitungen (soweit dieselben gebraucht werden), so können wir uns mittelst der Taylorschen Formel Fehlergrenzen verschaffen. Für irgend ein dem Integrationsintervalle angehörendes  $x$  liefert jene Formel:

$$(13) \quad \varphi(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0) \frac{x-x_0}{1!} + \varphi''(x_0) \frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots \\ + \varphi^{(l-1)}(x_0) \frac{(x-x_0)^{l-1}}{(l-1)!} + \varphi^{(l)}(x_0 + \vartheta(x-x_0)) \frac{(x-x_0)^l}{l!}.$$

Durch Integration ergibt sich, wenn man auf das letzte Glied den Mittelwertsatz (16) S. 58 anwendet:

$$(14) \quad \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x) dx = \varphi(x_0) \cdot \nu h + \varphi'(x_0) \frac{(\nu h)^2}{2!} + \dots + \varphi^{(l-1)}(x_0) \frac{(\nu h)^l}{l!} \\ + \varphi^{(l)}(x_0 + \vartheta' \nu h) \frac{(\nu h)^{l+1}}{(l+1)!},$$

wo natürlich wieder  $0 \leq \vartheta' \leq 1$  gilt\*\*).

Mit diesem genauen Werte unseres auf das erste Teilintervall bezogenen Integrales haben wir nun den Näherungswert (5), dem wir die Gestalt:

$$(15) \quad \int_{x_0}^{x_1} \psi(x) dx = h \sum_{k=0}^r A_k \varphi(x_0 + kh)$$

verleihen, zu vergleichen. Zu diesem Zwecke entwickeln wir  $\varphi(x_0 + kh)$  gleichfalls nach dem Taylorschen Lehrsatz:

$$\varphi(x_0 + kh) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0) \cdot kh + \varphi''(x_0) \frac{(kh)^2}{2!} + \dots \\ + \varphi^{(l-1)}(x_0) \frac{(kh)^{l-1}}{(l-1)!} + \varphi^{(l)}(x_0 + \vartheta_k \cdot kh) \frac{(kh)^l}{l!}$$

und finden durch Eintragung in (15) bei zweckmäßiger Anordnung:

\*) S. hierzu die Fehlerabschätzungen in I, 33 ff. bei Gebrauch der Trapezregel.

\*\*) In (13) ist  $\vartheta$  als von  $x$  abhängig anzusehen; dabei ist es nicht schwer, zu erkennen, daß  $\varphi^{(l)}(x_0 + \vartheta(x-x_0))$  eine „stetige“ Funktion von  $x$  ist, so daß der Anwendung des Mittelwertsatzes nichts im Wege steht. Will man diese Betrachtung vermeiden, so mag man das Integral (14) vorerst mit variabler oberer Grenze bilden und als Funktion der oberen Grenze mit Benutzung der Regel (3) S. 55 nach dem Taylorschen Satze entwickeln. Die Eintragung der oberen Grenze  $x_1$  liefert dann die Formel (14).

$$(16) \int_{x_0}^{x_1} \psi(x) dx = \varphi(x_0)h \sum_{k=0}^{\nu} A_k + \varphi'(x_0)h^2 \sum_{k=1}^{\nu} k A_k + \varphi''(x_0) \cdot \frac{h^3}{2!} \sum_{k=1}^{\nu} k^2 A_k + \dots$$

$$+ \varphi^{(l-1)}(x_0) \frac{h^l}{(l-1)!} \sum_{k=1}^{\nu} k^{l-1} A_k + \frac{h^{l+1}}{l!} \sum_{k=1}^{\nu} \varphi^{(l)}(x_0 + \vartheta_k kh) k^l A_k.$$

Die Werte der hier rechts in den einzelnen Gliedern auftretenden Summen sind bis zum Exponenten  $\nu$  der Faktoren  $k$  aus dem Formelsystem (6) S. 70 abzulesen. Die Eintragung der Werte führt uns genau zu den  $(\nu + 1)$  ersten Gliedern der Entwicklung (14) zurück, so daß insofern beide Darstellungen (14) und (16) übereinstimmen. Die Übereinstimmung wird aber noch in weiter folgenden Gliedern bestehen, so lange die mit den Gleichungen (6) von S. 70 gleichgebauten Relationen:

$$\sum_{k=1}^{\nu} k^{v+i} A_k = \frac{\nu^{v+i+1}}{\nu+i+1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

zutreffen sollten. Hier zeigen nun die in den drei ersten Fällen  $\nu = 1, 2, 3$  oben berechneten Werte  $A_k$ , daß bei  $\nu = 1$  und  $\nu = 3$  die vorstehende Relation schon für  $i = 1$  nicht mehr gilt, daß sie hingegen bei  $\nu = 2$  noch für  $i = 1$ , aber nicht mehr für  $i = 2$  besteht.

Dieser Tatsache folgend, wählen wir zur Berechnung der Fehlergrenzen in den beiden Gleichungen (14) und (16) die ganze Zahl  $l = \nu + 1$  für  $\nu = 1$  und  $\nu = 3$ , dagegen  $l = 4$  für  $\nu = 2$ . Wir erreichen hierdurch, daß die beiden Darstellungen (14) und (16) bis auf die Schlußglieder übereinstimmen, und daß die in diesen auftretenden Potenzen von  $h$  tunlichst hoch sind. Durch Subtraktion des Näherungswertes (16) vom genauen Werte (14) finden wir als Differenz  $D_\nu$  beider Werte:

$$D_\nu = \frac{h^{l+1}}{(l+1)!} \left\{ \nu^{l+1} \varphi^{(l)}(x_0 + \vartheta' \nu h) - (l+1) \sum_{k=1}^{\nu} \varphi^{(l)}(x_0 + \vartheta_k kh) k^l A_k \right\}.$$

Ist nun  $M_l$  das Maximum der absoluten Beträge aller Werte der  $l$ ten Ableitung  $\varphi^{(l)}(x)$  im gesamten Integrationsintervalle von  $a$  bis  $b$ , so sind auch die in der letzten Formel auftretenden Werte der Ableitung  $\varphi^{(l)}$  im ersten Teilintervalle absolut nicht größer als  $M_l$ , so daß die Ungleichung:

$$(17) \quad |D_\nu| \leq \frac{h^{l+1}}{(l+1)!} M_l \left\{ \nu^{l+1} + (l+1) \sum_{k=1}^{\nu} k^l A_k \right\}$$

zutrifft\*).

\*) Hier kommt in Betracht, daß die  $A_k$  sämtlich positiv sind.

In den übrigen  $(n - 1)$  Teilintervallen gilt diese Bedingung für die entsprechenden Differenzen sogleich mit. Nennen wir also die Überschüsse des genauen Integralwertes über die Näherungswerte (10)ff. etwa  $R_\nu$ , so ist  $|R_\nu|$  jedenfalls nicht größer als das  $n$ -fache der rechten Seite von (17). Da wir nun  $n\nu \cdot h$  durch die Intervalllänge  $(b - a)$  ersetzen können, so besteht für  $R_\nu$  die Bedingung:

$$(18) \quad |R_\nu| \leq h^\nu \frac{b-a}{\nu(l+1)!} M_l \left\{ \nu^{l+1} + (l+1) \sum_{k=1}^{\nu} k^l A_k \right\}.$$

Hiermit haben wir den allgemeinen Ausdruck der gesuchten Fehlergrenze gewonnen. Wir spezialisieren die Formel für die drei Fälle  $\nu = 1, 2, 3$  und gewinnen die Sätze: *Schreiben wir die Trapezformel in der genauen Gestalt:*

$$(19) \quad \int_a^b \varphi(x) dx = \frac{1}{2} h (y_0 + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) + y_n) + R_1,$$

so gilt für den Absolutwert von  $R_1$  die Schranke:

$$(20) \quad |R_1| \leq \frac{5}{12} (b-a) M_2 \cdot h^2.$$

Für  $\nu = 2$  reiht sich hieran: *Bei der genauen Gestalt:*

$$(21) \quad \int_a^b \varphi(x) dx = \frac{1}{3} h \{ (y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) \} + R_2$$

der Simpsonschen Regel besteht für  $R_2$  die Schranke:

$$(22) \quad |R_2| \leq \frac{49}{180} (b-a) M_4 \cdot h^4.$$

Endlich gilt für  $\nu = 3$  der Satz: *Schreibt man an Stelle der Näherungsgleichung (12) die genaue:*

$$(23) \quad \int_a^b \varphi(x) dx = \frac{3}{8} h \{ (y_0 + y_{3n}) + 3(y_1 + y_2 + y_4 + y_5 + \dots + y_{3n-2} + y_{3n-1}) + 2(y_3 + y_6 + \dots + y_{3n-3}) \} + R_3,$$

so liegt für  $R_3$  die Schranke vor:

$$(24) \quad |R_3| \leq \frac{109}{80} (b-a) M_4 \cdot h^4.$$

Bei gleicher Gesamtzahl  $n\nu$  der Teilintervalle und also bei gleichem  $h$  ist die einzelne Näherungsformel um so brauchbarer, je höher die Potenz von  $h$  im Ausdruck der Schranke von  $|R_\nu|$  (der Fehlergrenze) aus-

fällt. In dieser Hinsicht sind wir zu dem bemerkenswerten Ergebnisse gelangt, daß die *Simpsonsche Regel günstiger als die Trapezregel ist, daß indessen die Drei-Acht-Regel keine Steigerung der Genauigkeit gegenüber der Simpsonschen Regel bietet, vielmehr sogar hinter der letzteren Regel wegen des größeren numerischen Faktors auf der rechten Seite von (24) zurücksteht.*

Um die vorstehenden Regeln an einem leicht zugänglichen Beispiele zu erläutern, wählen wir das „Logarithmusintegral“, und zwar für die Grenzen  $a = 1$  und  $b = 2,2$ . Dabei werde  $h = \frac{1}{10}$  genommen, eine Wahl, welche eine bequeme Prüfung der drei Näherungsformeln gestattet. Da wegen  $\varphi(x) = x^{-1}$  offenbar im Integrationsintervall  $M_2 = 2$  und  $M_4 = 24$  zutrifft und übrigens  $b - a = 1,2$  ist, so berechnet man für die drei  $R$ , leicht die Schranken:

$$|R_1| \leq 0,01, \quad |R_2| \leq 0,000784, \quad R_3| \leq 0,003924.$$

Mit Rücksicht darauf, daß diese Schranken wegen des Faktors  $M$ , sicher sehr weitgegriffen sind, wollen wir die den  $x_0 = 1; x_1 = 1,1; \dots; x_{12} = 2,2$  zugehörigen Funktionswerte  $y_0, y_1, \dots$  mit sechsstelliger Genauigkeit aus einer Reziprokentafel ablesen:

$$\begin{array}{lll} y_0 = 1, & y_1 = 0,909091, & y_2 = 0,833333, \\ y_3 = 0,769231, & y_4 = 0,714286, & \\ y_5 = 0,666667, & y_6 = 0,625000, & \\ y_7 = 0,588235, & y_8 = 0,555555, & \\ y_9 = 0,526316, & y_{10} = 0,500000, & \\ y_{11} = 0,476190, & y_{12} = 0,454545, & \end{array}$$

wobei, wie üblich, ein Strich unter der letzten Stelle bedeutet, daß der angegebene Wert um weniger als die Hälfte einer Einheit der sechsten Stelle zu groß ist.

Unsere Regeln liefern daraufhin folgende Näherungswerte:

$$\int_1^{2,2} \frac{dx}{x} = 0,78912; \quad = 0,78846; \quad = 0,78846.$$

Die zweite und dritte Regel geben also denselben Näherungswert, wie nach der obigen allgemeinen Bemerkung verständlich ist. Da der auf fünf Stellen genaue Wert des Integrals 0,78845 ist, so gilt:

$$R_1 = -0,00067, \quad R_2 = -0,00001, \quad R_3 = -0,00001,$$

was die Vermutung, die obigen Fehlergrenzen seien sehr weit gegriffen, bestätigt.

**6. Mechanische Auswertung bestimmter Integrale.** Bei dem Näherungsverfahren des vorigen Paragraphen hatten wir, geometrisch gesprochen, durch  $(\nu + 1)$  Ordinatenendpunkte eine Näherungskurve  $\nu^{\text{ten}}$  Grades gelegt, gegeben durch eine ganze Funktion  $\nu^{\text{ten}}$  Grades  $y = \psi(x)$ , wobei  $\nu = 1, 2$  und  $3$  genommen war. Gehen wir noch einen Schritt zurück und lassen auch  $\nu = 0$  zu, so läuft dies darauf hinaus, daß wir als Näherungskurven *die zur  $x$ -Achse parallelen Geraden durch die Endpunkte der Ordinaten  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$*  benutzen, wobei der einzelne Parallelstreif angenähert als ein *Rechteck* betrachtet wird. Dem würde für die Berechnung eines Näherungswertes unseres Integrales die „*Rechteckregel*“:

$$(1) \quad \int_a^b \varphi(x) dx = h(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1})$$

entsprechen. Daß auch die hier rechts stehende Summe für  $\lim n = \infty$  dem Integralwerte als Grenze zustrebt, folgt aus der allgemeinen Theorie (S. 48 ff.) und ist übrigens ausführlich durch die Entwicklungen in I, 24 ff. bewiesen.

Es ist nun sehr interessant, daß dieser Grenzübergang *mittels der bekannten „Linearplanimeter“ gewissermaßen mechanisch durchgeführt wer-*

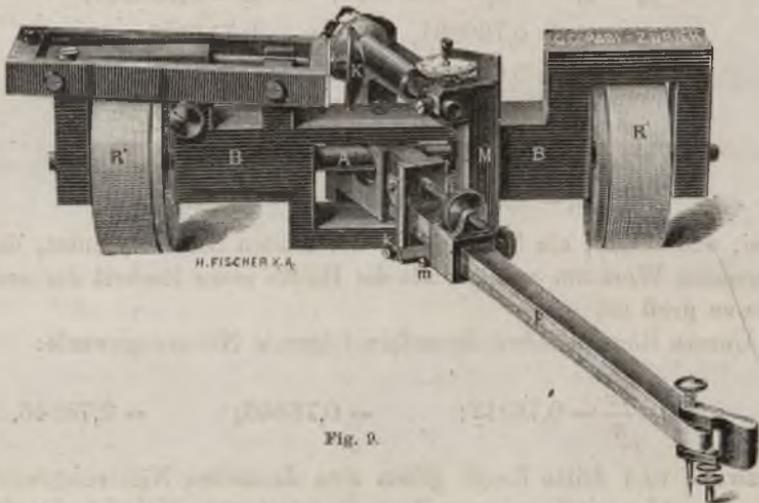


Fig. 9.

*den kann*, wie wir an einem hierher gehörigen Apparate näher ausführen wollen. Wir wählen zu diesem Zwecke das von Coradi hergestellte „*Kugelrollplanimeter*“, das in Fig. 9 abgebildet ist. Der mittelst zweier Walzen  $R'$  auf der Zeichnungsebene lagernde Wagen  $B$  sei in der Rich-

tung der  $x$ -Achse fahrbar, welche senkrecht zur Wagenachse genau inmitten der beiden Walzen verlaufe; die positive Richtung der  $x$ -Achse weise nach vorn und also die positive  $y$ -Achse nach rechts. Der Fahrarm  $F$  (mit dem vorn angebrachten Schreibstifte) ist um einen in der Wagenmitte vertikal verlaufenden Zapfen drehbar. Die Länge des Fahrarmes (Abstand des Schreibstiftes vom Zapfen) sei gleich  $l$ . Hat der Schreibstift die Ordinate  $y$ , und bildet der Fahrarm mit der  $x$ -Achse den Winkel  $\alpha$ , so ist offenbar:

$$(2) \quad y = l \cdot \sin \alpha,$$

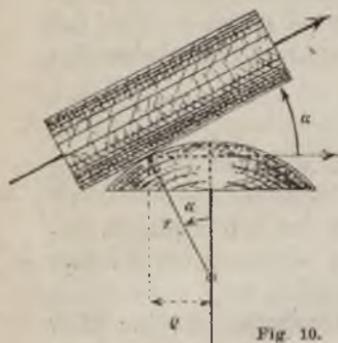
sofern wir der Maßzahl  $\alpha$  dasselbe Vorzeichen wie  $y$  geben. In Richtung der  $y$ -Achse ist der Spielraum des Schreibstiftes beiderseits symmetrisch zur  $x$ -Achse und unterliegt einer Schranke, die von der Fahrarmlänge und sonstigen Konstruktionsbedingungen abhängt; in Richtung der  $x$ -Achse aber liegt keine Beschränkung vor.

Als weiterer wesentlicher Bestandteil des Apparates ist eine über der linken Wagenseite parallel zur Wagenachse angeordnete Achse zu nennen, die am rechten Ende ein genau geschliffenes Kugelsegment  $K$  trägt. Sie ist zugleich die Achse des Kugelsegmentes (der Mittelpunkt der Kugel  $K$  liegt auf jener Achse), so daß das Kugelsegment  $K$  bei Drehung der Achse in sich rotiert. Die Achse lagert mit einem Zahnkranze auf der Rolle  $R'$  (in der Figur nicht sichtbar), welche ihrerseits am rechten Rande  $R$  einen Zahnkranz trägt. Vermöge dieser Verzahnung nimmt die Kugel  $K$  die Drehung der Walze  $R'$  auf und erfährt eine zu jener proportionale Drehung. Bewegt sich also der Apparat in Richtung der  $x$ -Achse um die Strecke  $h$  voran, so dreht sich  $K$  um einen mit  $h$  proportionalen Winkel  $\beta = ch$ .

Endlich ist ein letzter wesentlicher Bestandteil des Apparates eine genau geschliffene zylindrische Rolle\*), die über der Mitte des Wagens in einen am Fahrarme angebrachten Rahmen  $M$  derart eingelagert ist, daß die Rollachse stets parallel zum Fahrarm ist und also gleichfalls mit der  $x$ -Achse den Winkel  $\alpha$  bildet. Die Rolle ist unter Federdruck an das Kugelsegment  $K$  angelegt. Dabei berührt sie für  $\alpha = 0$  das Segment  $K$  in seinem Mittelpunkte, während bei Drehung des Fahrarmes die Berührungsstelle den horizontalen größten Kugelkreis von  $K$  beschreibt. Zur Ablesung der Größe der Rollendrehung dient ein Zählwerk, und zwar findet sich am vorderen Ende der Rolle eine Vorkehrung zur Ablesung der ganzen Umdrehungen, am anderen Ende eine solche zur Ablesung der Zehntel, Hundertstel und Tausendstel einer ganzen Umdrehung.

\*) Nach der Kugel und der Rolle ist das Planimeter benannt.

Man überlege nun das Spiel des Apparates, wenn der Fahrstift die zur  $x$ -Achse parallele Strecke  $h$  der Ordinate  $y$  beschreibt. Der Ort der Berührungspunkte  $P$  von Kugel und Rolle ist sowohl auf der Kugel wie auf der Rolle je ein „Parallelkreis“, und zwar handelt es sich auf dem



Kugelsegment  $K$ , wie Fig. 10 erläutert, um den Parallelkreis, der von der Segmentmitte den Bogenabstand  $\alpha$  hat. Ist also  $r$  der Kugelradius, so ist  $\rho = r \sin \alpha$  der Radius jenes Parallelkreises auf  $K$ . Bei Drehung von  $K$  um den Winkel  $\beta = ch$  kommt also das Bogenstück:

$$(3) \quad \rho \beta = r \sin \alpha \cdot ch = \left(\frac{cr}{l}\right) \cdot hy$$

des Parallelkreises der Kugel zur Abwicklung auf den in Betracht kommenden Parallelkreis der Rolle\*). Nennen wir also  $r_0$  den Rollenradius, und ist die in ganzen Umdrehungen als

Einheit gemessene Drehungszahl der Rolle  $\delta$ , so hat sich die Rolle um den Winkel  $2\pi\delta$  gedreht, und also ist das Bogenstück  $2\pi r_0 \cdot \delta$  des Parallelkreises der Rolle zur Abwicklung gelangt. Setzen wir dasselbe gleich dem in (3) berechneten Bogen, so folgt:

$$(4) \quad hy = \left(\frac{2\pi r_0 l}{cr}\right) \cdot \delta = a \cdot \delta, \quad a = \frac{2\pi r_0 l}{cr},$$

wo  $a$  eine durch die Abmessungen des Apparates gegebene Konstante ist. Es hat sich auf diese Weise ergeben: *Durchläuft der Schreibstift die zur  $x$ -Achse parallele Strecke  $h$  der Ordinate  $y$ , so erfährt die Rolle eine zu  $hy$  proportionale Drehung  $\delta = a^{-1} \cdot hy$ , und umgekehrt ist  $hy$  gleich dem Produkte der Konstanten  $a$  und der Rollendrehung  $\delta$ .*

Zur Bestimmung der Drehung  $\delta$  liest man am Zählwerke die Stellung der Rolle am Anfang und am Schlusse der Bewegung des Schreibstiftes über die Strecke  $h$  ab. Der Überschuß der zweiten Ablesung über die erste ist dann die mit dem richtigen Vorzeichen versehene Maßzahl  $\delta$  der Drehung. Der Apparat ist so eingerichtet, daß dieser Überschuß das Vorzeichen von  $y$  hat, so daß die Konstante  $a$  positiv ist\*\*). Eine bequeme Auswertung dieser Konstanten werden wir unten beschreiben.

\*) Bei konstanter Stellung  $\alpha$  des Fahrarmes ist die Relativbewegung der Rolle gegen die Kugel ein *ohne Gleitung* vor sich gehendes *Abrollen*.

\*\*\*) Man veranschauliche sich, daß bei Berührung der Rolle im Mittelpunkte des Kugelsegmentes ( $y = 0$ ) keine Rollendrehung eintritt, und daß zwei im Vorzeichen entgegengesetzte Winkel  $\alpha$  (Ordinaten  $y$ ) entgegengesetzte Drehrichtungen der Rolle liefern.

In Fig. 11 sind zwei benachbarte Parallelstreifen und die an ihre Stelle tretenden, oberhalb durch  $PP_1'$  und  $P_1P_2'$  begrenzten Rechtecke gezeichnet. Führen wir den Fahrstift über die Strecke  $PP_1'$  der Länge  $h$ , so gibt die mit  $a$  multiplizierte Rollendrehung  $\delta$  den Flächeninhalt des Rechtecks  $QPP_1'Q_1$ . Wir erhalten nun offenbar dieselbe Rollendrehung, wenn wir den Fahrstift vom Punkte  $Q$  beginnend über die Ordinate  $QP$ , dann über  $PP_1'$  und endlich von  $P_1'$  geradlinig zum Punkte  $Q_1$  der  $x$  Achse führen; die durch die Strecke  $QP$  bewirkte Rollendrehung wird nämlich durch die im entgegengesetzten Sinne durchlaufene Strecke  $P_1'Q_1$  wieder aufgehoben\*).

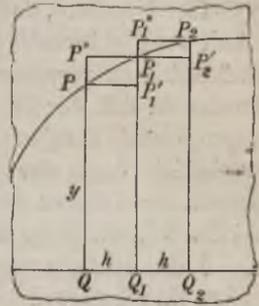


Fig. 11.

Wollen wir die Inhalte der beiden nebeneinander liegenden Rechtecke  $QPP_1'Q_1$  und  $Q_1P_1P_2'Q_2$  der Fig. 11 bestimmen, so reihen wir an die Durchlaufung der drei eben genannten Seiten des ersten Rechtecks die Beschreibung der Seiten  $Q_1P_1$ ,  $P_1P_2'$ ,  $P_2'Q_2$  des zweiten an. Dieses Verfahren können wir nun offenbar in der Art kürzen, daß wir die zweimal in entgegengesetzten Richtungen durchlaufene Strecke  $P_1'Q_1$  sparen, worauf die zu durchlaufenden Strecken  $QP$ ,  $PP_1'$ ,  $P_1'P_2'$ ,  $P_2'Q_2$  sind.

Man überblickt jetzt sofort, wie wir den Gesamtinhalt aller  $n$  Rechtecke herstellen, die unserer Rechteckregel (1) zugrunde liegen. Wir haben mit dem Schreibstifte im Punkte  $x = a$  der  $x$ -Achse beginnend zunächst die am linken Rande liegende Ordinate  $y_0$  zu beschreiben, sodann den treppenförmigen Rand des Rechtecksystems, der der  $x$ -Achse gegenüberliegt, zu durchlaufen und endlich längs der Ordinate  $y_n$  zum Punkte  $x = b$  der  $x$ -Achse zurückzukehren.

Bei wachsenden Werten  $n$  schmiegt sich nun der treppenförmige Rand enger und enger an das dem Integrationsintervalle angehörende Stück der Kurve der Funktion  $\varphi(x)$  an. Für  $\lim n = \infty$  scheint demnach der mechanische Vorgang der Durchlaufung des treppenförmigen Randes einfach der Beschreibung jenes Kurvenstücks als „Grenze“ zuzustreben\*\*).

\*) Zuzufolge des stetig wechselnden Winkels  $\alpha$  kann hier die Relativbewegung der Rolle gegen die Kugel aus einer *Gleitung* und einer *Rollung* zusammengesetzt sein; doch brauchen wir auf den Vorgang aus dem im Texte angegebenen Grunde nicht näher einzugehen.

\*\*) Die Kurve selbst ist als „Grenze“ der *Sehnenkette* aufzufassen, die wir bei der „Trapezregel“ als Rand benutzen. Um den im Texte sogleich mitzuteilenden Satz streng zu beweisen, hat man die Rollendrehung bei Beschreibung der Sehne  $PP_1'$  (s. Fig. 11) zu untersuchen. Dieser Vorgang ist komplizierter, da neben einer Rollung eine *Gleitung* der Rolle längs der Kugel  $K$  eintreten kann. Einleuch-

In der Tat besteht der Satz: *Man gewinnt den Wert des Integrales (1) als die mit  $a$  multiplizierte Rollendrehung  $\delta$ , falls man den Schreibstift vom Punkte  $x = a$  der  $x$ -Achse über die zugehörige Ordinate, sodann über das genannte Stück der Kurve der Funktion  $\varphi(x)$  und endlich über die zu  $x = b$  gehörende Ordinate zur  $x$ -Achse zurückführt.*

Der Umstand, daß bei der Deutung des Integrales durch einen Flächeninhalt etwa unterhalb der  $x$ -Achse gegebene Flächenstücke mit negativen Maßzahlen zu versehen sind, kommt an unserem Apparate dadurch zum Ausdruck, daß der Drehsinn für Kurventeile unterhalb der  $x$ -Achse entgegengesetzt demjenigen der oberhalb der  $x$ -Achse gelegenen Kurvenstücke ist. Auch der Satz über Vorzeichenwechsel des Integrales bei Austausch der Grenzen ist aus dem Spiele des Apparates einleuchtend; denn bei Durchlaufung der beiden Ordinaten und des Kurvenstückes vom Punkte  $x = b$  der  $x$ -Achse aus in entgegengesetzter Richtung kehrt sich der ganze Bewegungsvorgang einfach um.

Für den Gebrauch des Apparates zur Ausmessung ebener Flächenstücke kann man hieraus noch einen Vorteil ziehen. Will man z. B. das

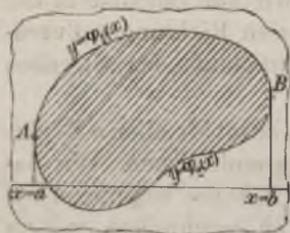


Fig. 12.

in Fig. 12 schraffierte Stück ausmessen, so wird man zunächst den Schreibstift vom Punkte  $x = a$  der  $x$ -Achse aus nach  $A$ , dann über die Kurve  $y = \varphi_1(x)$  bis  $B$  und von hier längs der Ordinate nach dem Punkte  $x = b$  der  $x$ -Achse führen. Dies ergibt den Inhalt des von jener Kurve, den beiden Ordinaten und der  $x$ -Achse berandeten Stückes. Beschreibt man sodann von  $x = b$  beginnend nochmals die Ordinate bis  $B$ , sodann die Kurve  $y = \varphi_2(x)$  bis  $A$  und hierauf die Ordinate bis zum Punkte  $x = a$  der  $x$ -Achse, so kommen gerade die beiden überschüssigen Stücke der eben ausgemessenen Fläche in Abzug, und das unterhalb der  $x$ -Achse gelegene schraffierte Stück kommt mit richtigem (positiven) Zeichen hinzu. Wir können nun offenbar noch die beiden Ordinaten (die je zweimal in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen werden) einsparen und gelangen zu dem Satze: *Umfahren wir mit dem Schreibstifte die schraffierte Fläche in der eben angegebenen Richtung vom Punkte  $A$  (oder auch von irgend einem anderen Randpunkte) be-*

tend ist indessen sofort, daß die eintretende Rollendrehung größer ist als die bei der Beschreibung von  $PP_1'$ , und zugleich kleiner als die bei der Beschreibung von  $P''P_1$  (s. Fig. 11). Hiernit sind aber die Vorbedingungen für die Heranziehung der Grenzbetrachtung in I, 24 ff. gegeben, und man gelangt, indem man die Kurve als Grenze ihrer Sehnenkette faßt, zu einem strengen Beweise des im Texte aufzustellenden Satzes.

*ginnend einmal vollständig, so ergibt die mit  $a$  multiplizierte Rollendrehung  $\delta$  den Inhalt der umfahrenen Fläche.*

Dieses Ergebnis eröffnet uns zugleich die Möglichkeit, die Konstante  $a$  jetzt auf besonders einfachem Wege auszuwerten. Umfahren wir z. B. die Peripherie eines Kreises vom Radius  $1^*$ ), so möge die Ablesevorrichtung der Rolle die zugehörige Rollendrehung  $\delta_0$  ergeben. Dann ist  $a \cdot \delta_0$  gleich dem Flächeninhalte des Kreises, d. h. gleich  $\pi$ , woraus nun einfach  $a = \frac{\pi}{\delta_0}$  folgt.

**7. Gaußsche Methode zur angenäherten Berechnung bestimmter Integrale\*\*).**  
Der Näherungsformel (5) S. 69. für ein bestimmtes Integral lag die Annahme zugrunde, daß die  $y_0, y_1, y_2, \dots$  Funktionswerte  $\varphi(x)$  für *äquidistante Argumente*  $x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = a + 2h, \dots$  seien. In der ursprünglichen Summe (1) S. 48, welche uns das bestimmte Integral begründete, waren die Intervalle  $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots$  keineswegs notwendig einander gleich, auch konnten die  $x'_1, x'_2, \dots$  den Teilintervallen beliebig entnommen werden. Es liegt demnach nahe zu prüfen, ob man Vorteile erzielen kann, wenn man die genannte, der Formel (5) S. 69 zugrunde liegende Annahme aufgibt. Indem wir die Integralgrenzen statt  $x_0$  und  $x_n$  gleich wieder  $a$  und  $b$  nennen, stellen wir folgende Frage: *Wie muß man die Funktionswerte  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$  in „vorgeschriebener Anzahl  $n$ “ dem Intervalle entnehmen, um eine „möglichst günstige“, der Gleichung (5) S. 69 analog gebaute Näherungsformel:*

$$(1) \quad \int_a^b \varphi(x) dx = B_1 y_1 + B_2 y_2 + \dots + B_n y_n,$$

*zu gewinnen, und welches sind die dabei zu benutzenden Werte der Koeffizienten  $B_k$ ?*

Für eine fest ausgewählte Funktion  $\varphi(x)$  ist diejenige Formel die günstigste, welche den am genauesten Werte des Integrals nächst gelegenen Näherungswert ergibt. Beziehen wir, wie geschehen soll, unsere Entwicklung auf eine noch nicht näher ausgewählte Funktion  $\varphi(x)$ , so ist zunächst zu erläutern, was wir unter einer „möglichst günstigen“ Annäherung verstehen wollen. Der Formel (5) S. 69 liegt eine rationale ganze Ersatzfunktion  $\nu^{\text{ten}} \text{ Grades}^{***})$  zugrunde. Ist insbesondere die Funktion  $\varphi(x)$  selbst eine ganze Funktion  $\nu^{\text{ten}} \text{ Grades}$ , so liefert die Näherungsformel den genauen Integralwert. Dies folgt z. B. aus den Entwicklungen von S. 73 in der Art, daß die daselbst mit  $D_\nu$  bezeichnete Differenz gleich 0 ist, falls  $\varphi^{(\nu+1)}(x)$  mit 0 identisch ist und also  $\varphi(x)$  infolge von (13) S. 72 eine ganze Funktion  $\nu^{\text{ten}} \text{ Grades}$  ist. Allgemein können wir jene Entwicklungen und insbesondere die Formel (17) S. 73 durch folgende Aussage charakterisieren: *Die An-*

\*) Um dies bequem ausführen zu können, ist dem Apparat ein sogenanntes „Kontrolllineal“ beigelegt. Dieses trägt an dem einen Ende eine Spitze, die in das Reißbrett eingesteckt wird und eine Drehung des Lineals um diese Spitze gestattet. Auf der oberen Seite des Lineals findet sich dann in der Entfernung 1 von der Spitze eine kleine Vertiefung zum Einsetzen des Schreibstiftes. Bei einmaliger Umdrehung des Lineals um die fixierte Spitze wird dann eben die Peripherie des Kreises vom Radius 1 sehr bequem durch den Schreibstift zurückgelegt.

\*\*) Diese Methode ist von Gauß im Jahre 1814 in der Abhandlung „Methodus nova integralium valorum per approximationem inveniendi“ entwickelt, s. Gauß' Werke, Bd. 3, S. 163.

\*\*\*) Hier wie oben ist dies so zu verstehen, daß der Grad die Zahl  $\nu$  nicht übersteigt.

näherung der Formel (5) S. 69 an den wirklichen Integralwert besitzt denselben Grad der Genauigkeit, wie die Annäherung der durch die ersten  $(\nu + 1)$  Glieder der Taylorschen Reihe gegebenen ganzen Funktion  $\nu^{\text{ten}}$  Grades an die Funktion  $\varphi(x)$ .

Im Anschluß hieran können wir die Bedeutung der Gaußschen Theorie so bezeichnen: Bei gegebener Anzahl  $\nu$  ist es möglich, ein Koeffizientensystem  $B_k$  und eine Auswahl der Funktionswerte  $y_k$  derart ausfindig zu machen, daß der Grad der Annäherung der Formel (1) an den genauen Integralwert derselbe ist, wie derjenige der von den  $2\nu$  ersten Gliedern der Taylorschen Reihe gegebenen „ganzen Funktion  $(2\nu - 1)^{\text{ten}}$  Grades“ an die Funktion  $\varphi(x)$ . Speziell wird die Formel (1) den genauen Integralwert liefern, wenn  $\varphi(x)$  selbst eine ganze Funktion (höchstens)  $(2\nu - 1)^{\text{ten}}$  Grades ist. Es ist also die Graderhöhung von  $\nu$  auf  $(2\nu - 1)$  der ganzen Funktion bei gleichbleibender Anzahl  $\nu$  der Glieder in (1), welche den Vorrang der Gaußschen Methode begründet. Dabei liegt die Annahme zugrunde, daß die Taylorsche Entwicklung konvergiere; dann nämlich haben wir im allgemeinen eine um so bessere Annäherung an die Funktion  $\varphi(x)$  zu erwarten, je größer die Gliederanzahl der Taylorschen Formel genommen wird.

Bei der Durchführung der Rechnung erzielt man eine Erleichterung durch Einführung einer neuen Variablen  $z$  vermöge der Substitution:

$$(2) \quad x = \frac{b-a}{2}z + \frac{b+a}{2}, \quad dx = \frac{b-a}{2}dz,$$

da hierdurch die Integralgrenzen in  $z = -1$  und  $z = +1$  umgeformt werden. Zur Abkürzung schreiben wir:

$$(3) \quad \varphi(x) = \varphi\left(\frac{b-a}{2}z + \frac{b+a}{2}\right) = \frac{1}{b-a}\psi(z),$$

wodurch das auszuwertende Integral, das wir kurz durch  $J$  bezeichnen wollen, die Gestalt annimmt:

$$(4) \quad J = \int_a^b \varphi(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \psi(z) dz.$$

Den Ansatz der Mac Laurinschen Formel (11) in I, 174 für  $n = 2\nu$  sehen wir bei der Funktion  $\psi(z)$  als zulässig an und schreiben abkürzend:

$$(5) \quad \psi(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{2\nu-1} z^{2\nu-1} + R_{2\nu}(z),$$

wobei  $R_{2\nu}$  die Bedeutung hat:

$$(6) \quad R_{2\nu} = \psi^{(2\nu)}(\vartheta z) \frac{z^{2\nu}}{(2\nu)!}.$$

Durch Eintragung des Ausdrucks (5) der Funktion  $\psi(z)$  in (4) und Integration folgt dann:

$$(7) \quad J = a_0 + \frac{1}{3} a_2 + \frac{1}{5} a_4 + \frac{1}{7} a_6 + \dots + \frac{1}{2\nu-1} a_{2\nu-2} + \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} R_{2\nu}(z) dz.$$

Sind nun  $z_1, z_2, \dots, z_\nu$  die im neuen Integrationsintervalle auszuwählenden Argumente, die die Funktionswerte der Näherungsformel liefern, so haben wir dem Ansatz (1) folgend mit  $\nu$  noch zu bestimmenden konstanten Koeffizienten  $C$  den durch  $N$  zu bezeichnenden Näherungswert:

$$(8) \quad N = C_1 \psi(z_1) + C_2 \psi(z_2) + \dots + C_\nu \psi(z_\nu)$$

zu bilden und diesen mit dem genauen Integralwerte zu vergleichen. Zu diesem Zwecke schreiben wir wieder unter Heranziehung von (5):

$$N = \sum_{k=1}^{\nu} C_k (a_0 + a_1 z_k + a_2 z_k^2 + \dots + a_{2\nu-1} z_k^{2\nu-1} + R_{2\nu}(z_k))$$

oder unter Zusammenfassung gleicher Potenzen der  $z_k$ :

$$(9) \quad N = a_0 \sum_{k=1}^{\nu} C_k + a_1 \sum_{k=1}^{\nu} C_k z_k + a_2 \sum_{k=1}^{\nu} C_k z_k^2 + \dots \\ \dots + a_{2\nu-1} \sum_{k=1}^{\nu} C_k z_k^{2\nu-1} + \sum_{k=1}^{\nu} C_k R_{2\nu}(z_k).$$

Man beachte nun, daß unsere Entwicklung *bestimmt* zu wählende  $z_k$  bei einer *beliebigen* Funktion  $\psi(z)$  und also bei *willkürlichen* Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_{2\nu-1}$  anstrebt. Sollen demnach  $J$  und  $N$  in jedem Falle bis auf die vom Restgliede  $R_{2\nu}(z)$  der Entwicklung (5) herrührenden Bestandteile gleich sein, so ist hierzu notwendig und hinreichend, daß in (9) die als Faktoren der  $a$  auftretenden Summen den entsprechenden Koeffizienten der  $a$  in (7) gleich sind, d. h. daß die folgenden  $2\nu$  Gleichungen bestehen:

$$(10) \quad \begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_\nu = 1, \\ C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3 + \dots + C_\nu z_\nu = 0, \\ C_1 z_1^2 + C_2 z_2^2 + C_3 z_3^2 + \dots + C_\nu z_\nu^2 = \frac{1}{3}, \\ \dots \\ C_1 z_1^{2\nu-2} + C_2 z_2^{2\nu-2} + C_3 z_3^{2\nu-2} + \dots + C_\nu z_\nu^{2\nu-2} = \frac{1}{2\nu-1}, \\ C_1 z_1^{2\nu-1} + C_2 z_2^{2\nu-1} + C_3 z_3^{2\nu-1} + \dots + C_\nu z_\nu^{2\nu-1} = 0. \end{cases}$$

Diese  $2\nu$  Gleichungen, welche mit der Funktion  $\psi(z)$ , wie man sieht, nichts zu tun haben, sind nun als *Bestimmungsgleichungen für die  $\nu$  Argumente  $z_k$  und die  $\nu$  Koeffizienten  $C_k$*  zu benutzen. Haben wir ein den Bedingungen  $|z_k| \leq 1$  genügendes Lösungssystem gewonnen, so gilt für den mit Hilfe desselben berechneten Näherungswert  $N$  und den genauen Integralkwert  $J$ :

$$(11) \quad J = N + \left\{ \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} R_{2\nu}(z) dz - \sum_{k=1}^{\nu} C_k R_{2\nu}(z_k) \right\},$$

womit unser obiger Satz über den Grad der Annäherung von  $N$  an  $J$  in der Tat bestätigt ist.

Der niederste Fall, der praktische Bedeutung haben kann, ist  $\nu = 2$ , wo es sich um die Auflösung der vier Gleichungen handelt:

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 1, & C_1 z_1 + C_2 z_2 &= 0, \\ C_1 z_1^2 + C_2 z_2^2 &= \frac{1}{3}, & C_1 z_1^3 + C_2 z_2^3 &= 0. \end{aligned}$$

Da man leicht einsieht, daß keine der Zahlen  $C_k, z_k$  verschwindet und  $z_2$  von  $z_1$  verschieden ist, so folgt aus der zweiten und vierten Gleichung  $z_1^2 = z_2^2$  und also  $z_2 = -z_1$ . Die erste und dritte Gleichung liefern daraufhin:

$$C_1 z_1^2 + C_2 z_2^2 = z_1^2 (C_1 + C_2) = z_1^2 = \frac{1}{3}, \quad z_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad z_2 = +\frac{1}{\sqrt{3}},$$

sofern wir die  $z_k$  nach wachsender Größe angeordnet denken. Aus  $C_1 + C_2 = 1$  und  $C_1 - C_2 = 0$  ergeben sich endlich die  $C$ . Für  $\nu = 2$  haben wir somit das Lösungssystem:

$$(12) \quad \nu = 2, \quad C_1 = C_2 = \frac{1}{2}, \quad z_1 = -z_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Im nächsten Falle  $\nu = 3$  haben wir die Auflösung der sechs Gleichungen auszuführen:

$$(13) \quad \begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 1, \\ C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3 = 0, \\ C_1 z_1^2 + C_2 z_2^2 + C_3 z_3^2 = \frac{1}{3}, \\ C_1 z_1^3 + C_2 z_2^3 + C_3 z_3^3 = 0, \\ C_1 z_1^4 + C_2 z_2^4 + C_3 z_3^4 = \frac{1}{5}, \\ C_1 z_1^5 + C_2 z_2^5 + C_3 z_3^5 = 0. \end{cases}$$

Wir wollen gleich der Symmetrie Rechnung tragen, die beim Gleichungssystem (13), wie allgemein bei (10), vorliegt und auch am Lösungssystem (12) hervortritt\*), und setzen zu diesem Zwecke:

$$C_3 = C_1, \quad z_3 = -z_1, \quad z_2 = 0$$

in (13) ein, wodurch die zweite, vierte und sechste Gleichung sofort erfüllt werden, während der Rest die Gestalt annimmt:

$$2C_1 + C_2 = 1, \quad 2C_1 z_1^2 = \frac{1}{3}, \quad 2C_1 z_1^4 = \frac{1}{5}.$$

Wir ordnen die  $z_k$  wieder nach wachsender Größe und finden: Für  $\nu = 3$  ist das Lösungssystem gegeben durch:

$$(14) \quad \nu = 3, \quad C_1 = C_3 = \frac{5}{18}, \quad C_2 = \frac{4}{9}, \quad z_1 = -z_3 = -\sqrt{\frac{3}{5}} = -0,77460, \quad z_2 = 0.$$

Auch im nächsten Falle  $\nu = 4$  setzen wir der Symmetrie entsprechend:

$$C_4 = C_1, \quad C_5 = C_2, \quad z_4 = -z_1, \quad z_3 = -z_2$$

in das für  $\nu = 4$  anzusetzende System (10) ein, wodurch vier unter den aufzulösenden Gleichungen sofort erfüllt werden. Die übrigen vier ergeben:

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= \frac{1}{2}, & C_1 z_1^2 + C_2 z_2^2 &= \frac{1}{6}, \\ C_1 z_1^4 + C_2 z_2^4 &= \frac{1}{10}, & C_1 z_1^5 + C_2 z_2^5 &= \frac{1}{14}. \end{aligned}$$

Die Elimination von  $C_1$  aus je zwei aufeinander folgenden Gleichungen liefert:

$$C_2(z_1^2 - z_2^2) = \frac{3z_1^2 - 1}{6}, \quad C_2 z_2^2(z_1^2 - z_2^2) = \frac{5z_1^2 - 3}{30}, \quad C_2 z_2^4(z_1^2 - z_2^2) = \frac{7z_1^2 - 5}{70}.$$

Demnach gilt weiter:

$$\frac{3z_1^2 - 1}{6} \cdot \frac{7z_1^2 - 5}{70} - \left(\frac{5z_1^2 - 3}{30}\right)^2 = 0$$

\*) Die Symmetrie ist natürlich in der symmetrischen Anordnung des Interventionsintervalls um den Punkt  $z = 0$  begründet. Übrigens ist die aufzustellende Lösung die einzige des Systems (13).

oder nach leichter Umrechnung:

$$z_1^4 - \frac{6}{7} z_1^2 + \frac{3}{35} = 0.$$

Auf entsprechendem Wege ergibt sich für  $z_2$  dieselbe Gleichung. Wir ordnen die  $z_k$  wieder nach steigender Größe an und bestimmen jetzt leicht auch noch  $C_1$  und  $C_2$ . Für  $\nu = 4$  haben wir damit das Lösungssystem gewonnen:

$$(15) \quad \nu = 4 \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1 = C_4 = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{5}{6}} \right) = 0,1739\bar{3}, \\ C_2 = C_3 = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{5}{6}} \right) = 0,3260\bar{7}, \\ z_1 = -z_4 = -\sqrt{\frac{1}{7} \left( 3 + 2 \sqrt{\frac{6}{5}} \right)} = -0,4305\bar{7}, \\ z_2 = -z_3 = -\sqrt{\frac{1}{7} \left( 3 - 2 \sqrt{\frac{6}{5}} \right)} = -0,1699\bar{9}. \end{array} \right.$$

Natürlich gestalten sich die Lösungen des Systems (10) bei wachsendem  $\nu$  immer schwieriger. Indessen ist leicht zu übersehen, daß, wenn die Rechnung beim einzelnen  $\nu$  einmal durchgeführt ist, der Ansatz für *alle* Funktionen  $\psi(z)$ , soweit sie konvergente Entwicklungen (5) gestatten, damit in fertiger Form hergestellt ist.

Um an einem einfachen Beispiele die Brauchbarkeit der entwickelten Regeln zu erläutern, wollen wir das Integral:

$$(16) \quad \int_2^4 \frac{dx}{x} = \ln 2$$

zunächst mit Hilfe der zu  $\nu = 3$  gehörenden Näherungsformel berechnen. Hier ist zu setzen  $x = z + 3$ ,  $dx = dz$ , sowie:

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{z+3} = \frac{1}{2} \psi(z), \quad \psi(z) = \frac{2}{z+3}.$$

Der Näherungswert  $N$  ist:

$$N = \frac{5}{18} \psi \left( -\sqrt{\frac{3}{5}} \right) + \frac{4}{9} \psi(0) + \frac{5}{18} \psi \left( \sqrt{\frac{3}{5}} \right)$$

und also bei der Bedeutung der Funktion  $\psi(z)$ :

$$N = \frac{5}{18} \left( \frac{2}{3 - \sqrt{\frac{3}{5}}} + \frac{2}{3 + \sqrt{\frac{3}{5}}} \right) + \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3},$$

$$N = \frac{25}{63} + \frac{8}{27} = 0,69312 \dots$$

Der auf fünf Stellen genaue Wert ist  $\ln 2 = 0,69315$ , so daß mit diesem geringen Rechenaufwande ein erst in der *fünften* Dezimalstelle um drei Einheiten abweichender Näherungswert erzielt ist.

Bei Anwendung der zu  $\nu = 4$  gehörenden Regel auf das Integral (16) folgt:

$$\ln 2 = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{5}{6}} \right) \left\{ \frac{2}{3 - \sqrt{\frac{1}{7} \left( 3 + 2 \sqrt{\frac{6}{5}} \right)}} + \frac{2}{3 + \sqrt{\frac{1}{7} \left( 3 + 2 \sqrt{\frac{6}{5}} \right)}} \right\} \\ + \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{5}{6}} \right) \left\{ \frac{2}{3 - \sqrt{\frac{1}{7} \left( 3 - 2 \sqrt{\frac{6}{5}} \right)}} + \frac{2}{3 + \sqrt{\frac{1}{7} \left( 3 - 2 \sqrt{\frac{6}{5}} \right)}} \right\},$$

was sich sofort zusammenzieht zu:

$$\ln 2 = \frac{445}{642} = 0,6931464 \dots$$

Der auf acht Stellen genaue Wert aber ist 0,69314718, so daß der Näherungswert um weniger als eine Einheit der sechsten Stelle abweicht.

### Kapitel III. Integrationen bei mehreren Variablen.

**1. Die Bogenlänge der Kurven und das Linienintegral.** Eine ebene Kurve sei in rechtwinkligen Koordinaten durch die Gleichung  $y = f(x)$  gegeben. Die Funktion  $f(x)$  sei in einem abgeschlossenen Intervalle  $a \leq x \leq b$  eindeutig und stetig und besitze daselbst eine gleichfalls eindeutige und stetige\*) erste Ableitung  $f'(x)$ . Es ist dann zunächst möglich, die „Bogenlänge“ des dem Intervalle angehörigen Bogenstücks der Kurve zu erklären\*\*).

Wie oben (S. 48) zerlegen wir das Intervall in  $n$  Teilintervalle durch die Teilpunkte  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ , die wir in der Richtung von  $a$  nach  $b$  und also nach steigender Größe angeordnet denken, und schreiben der Gleichmäßigkeit wegen  $a = x_0, b = x_n$ . Zur Abszisse  $x_k$  gehöre die Kurvenordinate  $y_k = f(x_k)$ . Die Endpunkte  $(x_{k-1}, y_{k-1}), (x_k, y_k)$  zweier aufeinander folgender Ordinaten verbinden wir geradlinig durch eine Kurvensehne, deren Länge wir durch  $\sigma_k$  bezeichnen:

$$(1) \quad \sigma_k = + \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}.$$

Die den  $n$  Teilintervallen zugehörigen Sehnen bilden eine „Sehnenkette“, deren Gesamtlänge:

$$(2) \quad \sum_{k=1}^n \sigma_k = \sum_{k=1}^n + \sqrt{1 + \left( \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \right)^2} \cdot (x_k - x_{k-1})$$

geschrieben werden kann.

\*) Die folgende Betrachtung überträgt sich leicht auch auf den Fall, daß  $f'(x)$  im Intervalle „abteilungsweise“ stetig ist (s. S. 60).

\*\*) Dies geschah bereits in I, 30 und 109 auf Grund einer mechanischen Vorstellung; der Integralbegriff macht diese Vorstellung jetzt überflüssig.

Nun ergibt sich aus dem Mittelwerte (9) in I, 135:

$$\frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(x_k'), \quad x_k' = x_{k-1} + \vartheta_k(x_k - x_{k-1}),$$

wo also  $x_k'$  ein dem  $k^{\text{ten}}$  Teilintervalle angehörender Punkt ist. Die Gesamtlänge der Sehnenkette kann demnach auch so dargestellt werden:

$$\sum_{k=1}^n \sigma_k = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + f'(x_k')^2} \cdot (x_k - x_{k-1}).$$

Nach der Konvergenzbetrachtung von S. 48 ff. strebt diese Summe einem bestimmten endlichen Grenzwerte zu, wenn wir  $\lim n = \infty$  vorschreiben und dabei natürlich jedes Teilintervall „unendlich klein“ werden lassen. Die Sehnenkette schmiegt sich dabei enger und enger an das dem Intervall  $a \leq x \leq b$  angehörende Kurvenstück an, und es entspricht demnach unserer Anschauung der Kurve, wenn wir den nach S. 50 durch:

$$(3) \quad s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

zu bezeichnenden Grenzwert als die „Bogenlänge“  $s$  jenes Kurvenstückes bezeichnen. Verstehen wir gleich allgemeiner unter  $s$  die von dem Anfangspunkte des Intervalls bis zu einem beliebigen Punkte  $x$  desselben gemessene Bogenlänge der Kurve, so hat dieser Wert  $s$  als Funktion von  $x$  nach (3) S. 55 die Ableitung:

$$(4) \quad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + f'(x)^2},$$

was uns in der Tat zu der Regel (2) in I, 112 zurückgeführt hat. Für das „Bogendifferential“ der Kurve erhalten wir die Darstellung (3) in I, 112 wieder; das Integral (3) heiße entsprechend das „Bogenintegral“ unserer Kurve.

Ist übrigens die Kurve nach (1) in I, 274 durch ein Gleichungenpaar:

$$(5) \quad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

gegeben, und wollen wir  $t$  als unabhängige Variable in das Bogenintegral (3) einführen, so hat dies der Regel (7) S. 56 entsprechend zu geschehen, die natürlich auf die vorliegenden Bezeichnungen umzurechnen ist. Hierbei ist, wie schon in I, 285 ausgerechnet ist:

$$f'(x) = y' = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad dx = \frac{dx}{dt} \cdot dt = \varphi'(t) dt$$

zu setzen, und wir erhalten als die der Kurvendarstellung (5) entsprechende Darstellung des Bogenintegrals:

$$(6) \quad s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt,$$

wenn  $\alpha$  und  $\beta$  die den Werten  $a$  und  $b$  von  $x$  entsprechenden Werte von  $t$  sind\*).

Etwas umständlicher ist die Erklärung der Bogenlänge einer Raumkurve. Wir stellen eine solche nach (5) in I, 321 durch die Gleichungen:

$$(7) \quad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$$

mittelst einer vierten unabhängigen Variablen  $t$  dar und nehmen an, daß die Funktionen  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $\chi(t)$  samt ihren ersten Ableitungen im endlichen abgeschlossenen Intervalle  $\alpha \leq t \leq \beta$  eindeutig und stetig seien\*\*). Wie in I, 328 setzen wir ferner voraus, daß in keinem Punkte des Intervalles die drei Ableitungen  $\varphi'(t)$ ,  $\psi'(t)$ ,  $\chi'(t)$  gleichzeitig verschwinden; das zu betrachtende Kurvenstück hat dann in jedem Punkte eine bestimmte Tangente (s. I, 325).

Die senkrechte Projektion der Kurve auf die  $x, y$ -Ebene ist durch die beiden ersten Gleichungen (7) darstellbar. Sie besitzt eine Bogenlänge, die wir, vom Punkte  $t = \alpha$  bis zu einem beliebigen Punkte  $t$  des Intervalles gemessen, durch  $s$  bezeichnen; zufolge (6) gilt alsdann:

$$(8) \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}.$$

Wir können nun  $z$  als stetige Funktion dieser Bogenlänge  $s$  auffassen. Die erste Ableitung dieser Funktion  $z$  von  $s$ :

$$\frac{dz}{ds} = \chi'(t) \cdot \frac{dt}{ds}$$

ist dann gleichfalls im ganzen Intervalle stetig, falls daselbst nirgends  $\varphi'(t)$  und  $\psi'(t)$  gleichzeitig verschwinden, oder (geometrisch gesprochen) wenn in keinem Punkte des Kurvenstücks die Tangente parallel zur  $z$ -Achse läuft\*\*\*).

\*) Der Kürze halber ist  $\varphi'(t) > 0$  als im Intervalle zutreffend angenommen. Übrigens vgl. man hier und weiterhin die Entwicklungen von I, 310 ff.

\*\*) Auch abteilungsweise stetige  $\varphi'(t)$ ,  $\psi'(t)$ ,  $\chi'(t)$  würden keine Schwierigkeiten machen.

\*\*\*). Sollte ein solcher Punkt vorkommen, so wird man dessen Umgebung besonders betrachten, indem man daselbst nicht  $z$ , wie im Texte, sondern  $x$  oder  $y$  bevorzugt. Die Symmetrie des abzuleitenden Schlußergebnisses wird zeigen, daß die Annahme des Textes die allgemeine Gültigkeit jenes Ergebnisses nicht beeinträchtigt.

Jetzt teilen wir das Intervall durch  $(n - 1)$  nach wachsender Größe angeordnete Werte  $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$  in  $n$  Teilintervalle und schreiben wie üblich  $\alpha = t_0, \beta = t_n$ . Markieren wir die betreffenden Punkte  $(x_k, y_k, z_k)$  auf dem Stücke der Raumkurve und verbinden je zwei aufeinander folgende Punkte geradlinig, so erhalten wir eine „Schnekkette“ der Raumkurve, und die Länge der  $k^{\text{ten}}$  unter diesen Sehnen ist:

$$(9) \quad \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2 + (z_k - z_{k-1})^2}.$$

Die Projektion der  $k^{\text{ten}}$  Sehne auf die  $x, y$ -Ebene ist die etwa wieder durch  $\sigma_k$  zu bezeichnende zugehörige Sehne:

$$\sigma_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}$$

der schon betrachteten ebenen Projektion unserer Raumkurve. Nennen wir das ihr entsprechende Bogenstück dieser ebenen Kurve  $\Delta s_k$  und schreiben zur Abkürzung  $z_k - z_{k-1} = \Delta z_k$ , so können wir die Länge (9) der  $k^{\text{ten}}$  Sehne der Raumkurve auch so darstellen:

$$(10) \quad \sqrt{\sigma_k^2 + (\Delta z_k)^2} = \Delta s_k \cdot \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\Delta z_k}{\Delta s_k}\right)^2\right) - \left(1 - \left(\frac{\sigma_k}{\Delta s_k}\right)^2\right)}.$$

Nun gilt jedenfalls:

$$1 + \left(\frac{\Delta z_k}{\Delta s_k}\right)^2 \geq 1, \quad 0 \leq 1 - \left(\frac{\sigma_k}{\Delta s_k}\right)^2 \leq 1,$$

da die Sehne  $\sigma_k$  keinesfalls größer als der Bogen  $\Delta s_k$  ist. Sind aber  $A$  und  $B$  irgend zwei den Bedingungen:

$$A \geq 1, \quad 0 \leq B \leq 1$$

genügende Zahlen, so zeigt man ohne Mühe das Bestehen der Ungleichungen:

$$\sqrt{A - B} \leq \sqrt{A - B} \leq \sqrt{A}.$$

Die Anwendung auf die in (10) rechts stehende Wurzel lehrt nach Multiplikation mit  $\Delta s_k$ :

$$(11) \quad \Delta s_k \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta z_k}{\Delta s_k}\right)^2} - \frac{(\Delta s_k)^2 - \sigma_k^2}{\Delta s_k} \leq \sqrt{\sigma_k^2 + (\Delta z_k)^2} \leq \Delta s_k \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta z_k}{\Delta s_k}\right)^2}.$$

Weiter folgt aus  $\sigma_k \leq \Delta s_k$  sofort:

$$(\Delta s_k)^2 - \sigma_k^2 = (\Delta s_k + \sigma_k)(\Delta s_k - \sigma_k) \leq 2\Delta s_k(\Delta s_k - \sigma_k),$$

$$\frac{(\Delta s_k)^2 - \sigma_k^2}{\Delta s_k} \leq 2(\Delta s_k - \sigma_k).$$

Ersetzen wir also in (11) links den Subtrahenden durch die nicht kleinere Zahl  $2(\Delta s_k - \sigma_k)$ , so folgt:

$$\Delta s_k \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta z_k}{\Delta s_k}\right)^2} - 2(\Delta s_k - \sigma_k) \leq \sqrt{\sigma_k^2 + (\Delta z_k)^2} \leq \Delta s_k \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta z_k}{\Delta s_k}\right)^2}.$$

Hiernach können wir die Gesamtlänge der Sehnenkette der Raumkurve in folgende Schranken einschließen:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta z_k}{\Delta s_k}\right)^2} \cdot \Delta s_k - 2 \left(s - \sum_{k=1}^n \sigma_k\right) \\ & \leq \sum_{k=1}^n \sqrt{\sigma_k^2 + (\Delta z_k)^2} \leq \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta z_k}{\Delta s_k}\right)^2} \cdot \Delta s_k, \end{aligned}$$

wo  $s = \sum_{k=1}^n \Delta s_k$  die Bogenlänge der Projektion unseres Raumkurvenstückes ist. Beim Grenzübergange  $\lim n = \infty$  wird nun, wie bereits für die ebenen Kurven festgestellt ist,  $\lim \sum_{k=1}^n \sigma_k = s$ , und also folgt sofort:

$$\begin{aligned} (12) \quad & \lim \sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2 + (z_k - z_{k-1})^2} \\ & = \lim \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta z_k}{\Delta s_k}\right)^2} \cdot \Delta s_k. \end{aligned}$$

Die rechts stehende Grenze ist (vgl. die an (2) angeschlossene Betrachtung) das bestimmte Integral:

$$(13) \quad \int_0^s \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} ds,$$

unter der oberen Grenze  $s$  wieder die Länge der Projektion unseres Kurvenstückes verstanden. *Beim Grenzübergange nähert sich also auch die Gesamtlänge der Sehnenkette unserer Raumkurve einer bestimmten durch (13) gegebenen endlichen Grenze, die wir als „Bogenlänge“ des fraglichen Kurvenstückes erklären.* Führen wir  $t$  wieder als unabhängige Variable ein, so transformiert sich das Integral (13) in:

$$\int_0^s \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} ds = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \left(\frac{dt}{ds}\right)^2} \frac{ds}{dt} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt.$$

Hier schreiben wir endlich noch  $\chi'(t)$  für  $\frac{dz}{dt}$  und ersetzen  $\frac{ds}{dt}$  durch seinen Ausdruck (8). *Auf diese Weise erhalten wir die gleich selbst wieder durch  $s$  zu bezeichnende Bogenlänge des Raumkurvenstückes dargestellt durch das „Bogenintegral“:*

$$(14) \quad s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2} dt.$$

Fassen wir bei einer im Intervalle variablen oberen Grenze  $t$  die Bogenlänge  $s$  als Funktion von  $t$ , so gilt nach (3) S. 35 für deren Ableitung in bezug auf  $t$ :

$$(15) \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2},$$

eine Gleichung, die wir bereits in I, 332 unter (1) gewonnen hatten. Das „Bogendifferential“ der Raumkurve ist dann weiter durch die in I, 332 unter (2) gegebene Gleichung dargestellt. Übrigens gewinnen wir, falls  $\chi(t)$  und damit  $\chi'(t)$  konstant gleich 0 sind, die auf die ebenen Kurven bezogenen Gleichungen als Spezialfälle der vorstehenden Gleichungen.

Eine für die Rechnungen besonders bequeme Darstellung der Raumkurve erhalten wir, falls wir an Stelle der Variablen  $t$  direkt die von einem geeigneten Anfangspunkte (Nullpunkte) gemessene Bogenlänge  $s$  als unabhängige Variable einführen. Wir schreiben dann  $x(s)$ ,  $y(s)$ ,  $z(s)$  als Funktionen von  $s$  und haben übrigens von dieser Darstellung in I, 332 ff. bereits ausgedehnten Gebrauch gemacht.

Es sei jetzt in einem abgeschlossenen räumlichen Bereiche, in dessen Innerem das betrachtete Stück unserer Raumkurve liegt, eine eindeutige und gleichmäßig stetige Funktion  $f(x, y, z)$  gegeben (s. I, 94 ff.). Dann ist auch  $f(x(s), y(s), z(s))$  eine „längs des Kurvenstücks“ eindeutige und stetige Funktion von  $s$ . Sind also  $a$  und  $b$  zwei dem Kurvenstücke angehörige Werte von  $s$ , so ist es möglich, das Integral:

$$(16) \quad \int_a^b f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(s), y(s), z(s)) ds$$

zu bilden. Wir können dieses Integral unter Zugrundelegung der Raumkurve (an Stelle der Zahlenlinie für  $x$ ) auch als Grenzwert der Summen der Gestalt:

$$\sum_{k=1}^n f(x'_k, y'_k, z'_k) \cdot (s_k - s_{k-1})$$

fassen, wie man leicht verstehen wird. Analytisch hat sich, indem wir  $s$  als unabhängige Variable ansehen, hier gegenüber S. 48 ff. nichts geändert; der einzige Unterschied liegt in der geometrischen Deutung, *insofern wir jetzt  $s$  nicht auf der „Zahlenlinie“, sondern auf unserer Raumkurve deuten und entsprechend  $f(x, y, z)$  als eine auf der Kurve gegebene Funktion denken*. Das so gedeutete Integral (16) bezeichnen wir als ein „Kurven-“ oder „Linienintegral“. Wollen wir übrigens zum Gebrauche der Variablen  $t$  zurückkehren, so wandelt sich das Linienintegral (16) in die folgende Gestalt um:

$$(17) \quad \int_a^b f(x, y, z) ds = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \frac{ds}{dt} dt,$$

unter  $\alpha$  und  $\beta$  die den Werten  $s = a$  und  $s = b$  entsprechenden Werte von  $t$  verstanden.

**2. Begriff und Deutung des Flächenintegrals in der Ebene.** In der  $x, y$ -Ebene sei ein von einer in sich zurücklaufenden Kurve berandeter, endlicher „abgeschlossener“ Bereich  $B$  gegeben (s. Fig. 13), dem ein bestimmter Flächeninhalt zukommt; dieser Inhalt werde durch  $\omega$  bezeichnet. Im Bereiche  $B$  sei ferner eine eindeutige und daselbst gleichmäßig stetige Funktion  $f(x, y)$  gegeben.

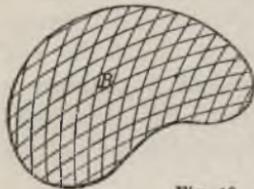


Fig. 13.

Den Bereich  $B$  denken wir in  $n$  Teilbereiche zerlegt, unter  $n$  irgend eine positive ganze Zahl verstanden. Diese Zerlegung kann in mannigfachster Weise geschehen. So ist z. B. in Fig. 13

eine Zerlegung durch zwei einander überkreuzende Systeme von Kurven ausgeführt. In Fig. 14 ist links eine Einteilung durch regelmäßig angeordnete Kreise eines gegebenen Radius angedeutet, wobei die einzelnen Teilbereiche entweder Kreisflächen oder Flächen von Kreisbogendreiecken sind, und wobei natürlich am Rande von  $B$  Teile solcher Flächen auftreten. In Fig. 14 rechts ist eine Einteilung durch aneinander gebaute Rechtecke veranschaulicht. Doch kann jede andere Art der Einteilung ebenso gut zugrunde gelegt werden.

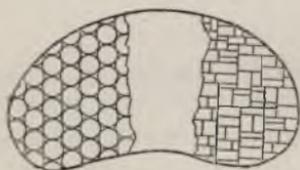


Fig. 14.

Da die Anzahl  $n$  der Teilbereiche endlich sein sollte, so können wir diese Bereiche in einer bestimmten Reihe angeordnet denken. Wir nennen die Inhalte der Teilbereiche bei der gewählten Anordnung  $\Delta\omega_1, \Delta\omega_2, \dots, \Delta\omega_n$ , so daß sich der Gesamtinhalt  $\omega$  des Bereiches  $B$  als folgende Summe darstellen läßt:

$$(1) \quad \omega = \sum_{k=1}^n \Delta\omega_k.$$

Für die Entfernungen irgend zweier Randpunkte des  $k^{\text{ten}}$  Teilbereiches  $\Delta\omega_k$  existiere eine obere Grenze. Ist diese obere Grenze nicht größer als eine vorgeschriebene Zahl  $\varepsilon$ , so ist die Fläche  $\Delta\omega_k$  sicher kleiner als der Inhalt  $\pi\varepsilon^2$  des Kreises vom Radius  $\varepsilon$ . Gilt diese Annahme

für alle  $n$  Teilbereiche, so ist die in (1) rechts stehende Summe  $< n\pi\varepsilon^2$ , d. h. wir folgern:

$$(2) \quad \omega < n\pi\varepsilon^2, \quad n > \frac{\omega}{\pi\varepsilon^2}.$$

Nimmt demnach  $\varepsilon$  gegen die Grenze 0 ab, so ist einleuchtend, daß die in (2) angegebene untere Schranke für die Anzahl  $n$  der Grenze  $\infty$  zustrebt.

Wir verstehen nun unter  $(x_k, y_k)$  irgend einen Punkt des  $k^{\text{ten}}$  Teilbereiches, multiplizieren den daselbst stattfindenden Funktionswert  $f(x_k, y_k)$  mit  $\Delta\omega_k$  und summieren die Produkte:

$$(3) \quad \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta\omega_k.$$

Hier haben wir einen Ansatz, der dem auf das Intervall  $a \leq x \leq b$  der Zahlenlinie bezogenen Ansatz (1) S. 48 genau nachgebildet ist. Dabei besteht auch hier die Tatsache, daß beim Grenzübergange  $\lim \varepsilon = 0$  unabhängig davon, wie wir beim einzelnen  $\varepsilon$  die Teilbereiche und die denselben angehörenden Punkte  $(x_k, y_k)$  wählen mögen, die Summenwerte (3) einer bestimmten endlichen Grenze zustreben.

Den Beweis gründen wir wieder auf die Endlichkeit des Inhaltes  $\omega$  vom Bereiche  $B$  und die gleichmäßige Stetigkeit der Funktion  $f(x, y)$  im Bereiche, und zwar erweist sich die Betrachtung von S. 48 ff. ohne jede grundsätzliche Änderung übertragbar. Wir wählen eine Zahl  $\delta > 0$  beliebig klein und berechnen  $\delta'$  aus  $\delta = \omega \cdot \delta'$ . Dann können wir nach I, 94 eine positive Zahl  $\lambda$  derart angeben, daß:

$$|f(x', y') - f(x, y)| < \delta'$$

zutrifft für je zwei dem Bereiche  $B$  angehörende Punkte  $(x, y)$  und  $(x', y')$ , deren Abstand nicht größer als  $\lambda$  ist:

$$(x' - x)^2 + (y' - y)^2 \leq \lambda^2.$$

Man berechne jetzt  $\varepsilon$  aus  $\lambda = 2\varepsilon$  und bestimme, daß nur noch solche Summen (3) zugelassen werden, bei denen die Entfernungen irgend zweier Randpunkte jedes einzelnen Teilbereiches  $\leq \varepsilon$  sind. Irgend zwei hiernach noch zulässige Summen (3) mögen  $n$  und  $m$  Glieder haben und entsprechend durch  $\Sigma_n$  bzw.  $\Sigma_m$  bezeichnet werden. Zum Vergleiche der beiden Summen lagere man die beiden zugehörigen Einteilungen von  $B$  übereinander. Hierdurch entstehe eine neue Einteilung in  $l$  Teilbereiche der Inhalte  $\Delta'\omega_1, \Delta'\omega_2, \dots, \Delta'\omega_l$ . Die beiden Summen  $\Sigma_n, \Sigma_m$  gestatten dann die Darstellungen:

$$\Sigma_n = \sum_{k=1}^i f(x'_k, y'_k) \Delta'\omega_k, \quad \Sigma_m = \sum_{k=1}^l f(x''_k, y''_k) \Delta'\omega_k,$$

welche sich auf dieselbe Zerlegung des Bereiches  $B$  beziehen. Auch folgt, da  $(x'_k, y'_k), (x''_k, y''_k)$  Punkte aus zwei übereinander greifenden Bereichen der ursprünglichen Teilungen von  $\Sigma_n$  und  $\Sigma_m$  sind:

$$(x''_k - x'_k)^2 + (y''_k - y'_k)^2 < 4\varepsilon^2 = \lambda^2,$$

so daß für die zugehörigen Funktionswerte:

$$|f(x''_k, y''_k) - f(x'_k, y'_k)| < \delta'$$

zutrifft. Der Schluß auf die Gültigkeit der Ungleichung:

$$|\Sigma_m - \Sigma_n| < \delta$$

ist damit einleuchtend. Die Fortsetzung des Beweises gestaltet sich genau wie S. 50.

Den eindeutig bestimmten endlichen Grenzwert der Summen (3) bezeichnet man durch das Symbol:

$$(4) \quad \lim_{\varepsilon=0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta \omega_k = \int^{(B)} f(x, y) d\omega$$

und nennt ihn das „*Flächenintegral*“ des *Differentials*  $f(x, y)d\omega$  für den „*Integrationsbereich*“  $B$ .

Indem wir uns vorbehalten, auf die Berechnung der Flächenintegrale sogleich zurückzukommen, wollen wir zunächst eine erste geometrische Deutung dieser Integrale entwickeln. Wir führen zu diesem Zwecke rechtwinklige Raumkoordinaten  $x, y, z$  ein und denken der bequemen Sprechweise halber die  $x, y$ -Ebene horizontal gestellt. Die Funktion  $z = f(x, y)$ , welche im abgeschlossenen Bereiche  $B$  eindeutig und gleichmäßig stetig sein sollte, haben wir dann nach I, 95 durch eine *Fläche* zu deuten, welche für jeden Bereichspunkt  $(x, y)$  einen Flächenpunkt  $(x, y, z)$  liefert und also den Bereich überspannt. Denken wir uns am Rande des Bereiches einen Zylinder mit zur  $z$ -Achse parallelen Mantellinien errichtet, so können wir uns die Fläche der Funktion  $f(x, y)$  in diesen Zylinder eingehängt denken.

Die Deutung des Flächenintegrals ist dann durch folgenden Satz gegeben: *Der Raumteil oder die Raumteile, welche durch die Fläche der Funktionen  $z = f(x, y)$ , die längs des Randes von  $B$  errichtete Zylinderfläche und die  $x, y$ -Ebene begrenzt werden, besitzen einen bestimmten Rauminhalt, dessen Maßzahl durch das Flächenintegral (4) gegeben ist.* Dies entspricht genau der Deutung eines bestimmten Integrals durch einen Flächeninhalt (s. S. 54 und I, 104). Entsprechend der damaligen Vorzeichenbestimmung sind hier die Maßzahlen der Raumteile mit positiven oder negativen Zeichen zu versehen, je nachdem diese Teile oberhalb oder unterhalb der  $x, y$ -Ebene liegen. Durchdringt die Fläche die  $x, y$ -Ebene,

und kommen also sicher mehrere Raumteile vor, so ist der gesamte Rauminhalt die Summe der mit ihren richtigen Vorzeichen versehenen Teilinhalte.

Der Beweis unseres Satzes ist nach dem Vorbilde der Entwicklung von I, 24 ff. zu führen. Der bequemen Sprechweise halber nehmen wir an, daß die Fläche der Funktion  $f(x, y)$  ganz oberhalb der  $x, y$ -Ebene liegt. Wir führen eine unserer Zerlegungen des Bereiches  $B$  in  $n$  Teilbereiche  $\Delta\omega_1, \Delta\omega_2, \dots, \Delta\omega_n$  ein. Der größte im „abgeschlossenen“ Teilbereiche  $\Delta\omega_k$  eintretende Funktionswert  $f(x, y)$  finde an der Stelle  $(x_k, y_k)$ , der kleinste an der Stelle  $(x'_k, y'_k)$  statt. Über  $\Delta\omega_k$  steht nun von dem auszumessenden Raume ein etwa als eine „Säule“ zu bezeichnendes Stück, das oben durch das senkrecht über  $\Delta\omega_k$  liegende Stückchen unserer Fläche der Funktion  $f(x, y)$  und seitlich durch einen längs des Randes von  $\Delta\omega_k$  errichteten Zylindermantel begrenzt ist. Ersetzen wir das obere Flächenstückchen durch ein in der Höhe  $f(x_k, y_k)$  zur  $x, y$ -Ebene parallel laufendes Ebenenstückchen, so wird dadurch eine jene Säule ganz umfassende Säule des Inhaltes  $f(x_k, y_k) \Delta\omega_k$  hergestellt. Wählen wir aber das zur  $x, y$ -Ebene parallele Ebenenstückchen in der Höhe  $f(x'_k, y'_k)$ , so entsteht eine in der zuerst genannten Säule gänzlich enthaltene Säule des Inhaltes  $f(x'_k, y'_k) \Delta\omega_k$ .

Nun verfähre man genau nach I, 24 ff. und bilde die Summen:

$$(5) \quad \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta\omega_k, \quad \sum_{k=1}^n f(x'_k, y'_k) \Delta\omega_k,$$

von denen die erste den Inhalt eines Raumes darstellt, der den auszumessenden Raum als Teil enthält, während die zweite den Inhalt eines Raumes liefert, der im auszumessenden Raume als Teil enthalten ist. Für  $\lim \varepsilon = 0$  nähern sich beide Summen (5) ein und demselben Grenzwerte, nämlich dem Flächenintegrale (4). Diesen Grenzwert haben wir nun als Inhalt des auszumessenden Raumes zu erklären, und damit gelangen wir in der Tat zu der ausgesprochenen Deutung des Flächenintegrals (4).

Wir stellen endlich noch einen dem ersten Mittelwertsatz (14) S. 57 entsprechenden Satz für das Flächenintegral (4) auf. Ist  $m$  der kleinste und  $M$  der größte Wert der Funktion  $f(x, y)$  im abgeschlossenen Bereiche  $B$ , so folgt aus der Erklärung des Flächenintegrals leicht:

$$m\omega \leq \int^{(\omega)} f(x, y) d\omega \leq M\omega.$$

Das mit  $\omega^{-1}$  multiplizierte Integral liefert somit einen Wert  $F$ , der dem Intervalle  $m \leq F \leq M$  angehört. Ziehen wir nun von dem Punkte bzw.

von einem der Punkte, wo  $f(x, y)$  sein Minimum annimmt, im Bereiche  $B$  eine Kurve nach einer Stelle, wo  $f(x, y)$  den Wert  $M$  annimmt, so tritt wegen der Stetigkeit der Funktion längs dieser Kurve mindestens ein Punkt  $(x_0, y_0)$  auf, in dem  $f(x, y)$  den Wert  $F$  annimmt: *Man kann im Bereiche  $B$  (auf unbegrenzt viele Arten) einen Punkt  $(x_0, y_0)$  so wählen, daß die Gleichung:*

$$(6) \quad \int_{(B)} f(x, y) d\omega = \omega f(x_0, y_0)$$

besteht. Der Wert  $f(x_0, y_0)$  ist als „Mittelwert“ oder „mittlerer Wert“ der Funktion  $f(x, y)$  im Bereiche  $B$  zu bezeichnen.

### 3. Die Doppelintegrale und die Berechnung der Flächenintegrale.

Durch:

$$(1) \quad a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq 1$$

sei ein abgeschlossener endlicher Bereich der  $x, y$ -Ebene festgelegt, in dem eine eindeutige und gleichmäßig stetige Funktion  $f(x, y)$  gegeben sei. Dann ist für irgend ein bestimmtes, dem Intervalle  $a \leq x \leq b$  angehörendes  $x$  die Funktion  $f(x, y)$  im Intervalle  $0 \leq y \leq 1$  eindeutig und stetig. Das Integral:

$$(2) \quad \int_0^1 f(x, y) dy = F(x)$$

hat demnach einen bestimmten endlichen, durch das ausgewählte  $x$  bedingten Wert und werde als Funktion von  $x$  durch  $F(x)$  bezeichnet.

Diese Funktion  $F(x)$  ist im Intervalle  $a \leq x \leq b$  gleichmäßig stetig. Ist nämlich  $\delta > 0$  beliebig klein gewählt, so ist nach I, 94 eine positive Zahl  $\lambda$  angebbar, so daß:

$$(3) \quad |f(x_2, y) - f(x_1, y)| < \delta$$

für je zwei Werte  $x_1$  und  $x_2$  des Intervalles zutrifft, für welche  $|x_2 - x_1| \leq \lambda$  gilt. Nun ist nach dem Satze (5) S. 55:

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_0^1 (f(x_2, y) - f(x_1, y)) dy,$$

und also folgt aus (3):

$$|F(x_2) - F(x_1)| < \delta,$$

sobald  $|x_2 - x_1| \leq \lambda$  ist. Damit ist die gleichmäßige Stetigkeit von  $F(x)$  erkannt.

Statt der oberen Grenze 1 wollen wir jetzt eine mit  $x$  veränderliche obere Grenze  $g(x)$  einführen, indem wir  $g(x)$  im Intervall  $a \leq x \leq b$  irgendwie als eindeutige stetige Funktion von  $x$  gewählt denken. Auch jetzt ist:

$$(4) \quad \int_0^{g(x)} f(x, y) dy = F(x)$$

für jedes  $x$  des Intervalls eine bestimmte endliche, durch  $x$  bedingte Zahl, die als Funktion von  $x$  gleich wieder durch  $F(x)$  bezeichnet werde. Auch diese Funktion von  $x$  ist im Intervalle  $a \leq x \leq b$  gleichmäßig stetig. Führen wir nämlich beim einzelnen  $x$  statt  $y$  eine neue Integrationsvariable  $y'$  durch  $y = y' \cdot g(x)$  ein, so entsprechen den Grenzen  $y = 0$  und  $y = g(x)$  die neuen Grenzen  $y' = 0$  und  $y' = 1$ , und es tritt an Stelle von (4):

$$F(x) = \int_0^1 f(x, y' g(x)) g(x) dy',$$

woraus die Stetigkeit der Funktion  $F(x)$  ersichtlich ist.

Wir führen nun einen endlichen abgeschlossenen Bereich  $B$  in der  $x, y$ -Ebene ein, von dem wir vorerst annehmen wollen, daß sein Rand von keiner zur  $y$ -Achse parallelen Geraden in mehr als zwei Punkten getroffen wird (s. Fig. 15, S. 98). Die Abszissen der Bereichspunkte mögen das Intervall  $a \leq x \leq b$  liefern. Der obere Rand des Bereiches sei, wie die Figur andeutet, die Kurve der Gleichung  $y = g_2(x)$ , der untere die Kurve der Gleichung  $y = g_1(x)$ . Da nach den Sätzen (1) und (2) S. 54 und 55:

$$F(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy = \int_0^{g_2(x)} f(x, y) dy - \int_0^{g_1(x)} f(x, y) dy$$

geschrieben werden kann, so ist auch die hierdurch erklärte Funktion  $F(x)$  im Intervalle  $a \leq x \leq b$  eindeutig und gleichmäßig stetig. Demnach hat das Integral:

$$(5) \quad \int_a^b F(x) dx = \int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx \quad \cdot$$

einen bestimmten endlichen Wert.

Wir bezeichnen das in (5) rechts stehende Integral als ein „Doppelintegral“ und können leicht den Satz beweisen: *Das Doppelintegral (5) ist gleich dem auf den Bereich  $B$  bezogenen Flächenintegrale von  $f(x, y)$ :*

$$(6) \quad \int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int^{(B)} f(x, y) d\omega,$$

eine Gleichung, welche uns in den Stand setzt, die Berechnung des Flächenintegrals durch die Berechnung zweier bestimmter Integrale zu leisten.

Zerlegen wir nämlich das Intervall  $a \leq x \leq b$  in eine ausreichend große Anzahl  $n$  von Teilintervallen der Längen  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ , so

läßt sich entsprechend das Integral (5) in  $n$  auf diese Intervalle bezogene Teilintegrale zerlegen. Auf jedes dieser  $n$  Teilintegrale wenden wir den Mittelwertsatz (14) S. 57 an und können demnach  $n$  jenen Intervallen angehörende  $x_1, x_2, \dots, x_n$  so wählen, daß

$$\int_a^b F(x) dx = \sum_{k=1}^n F(x_k) \Delta x_k, \quad F(x_k) = \int_{g_1(x_k)}^{g_2(x_k)} f(x_k, y) dy$$

zutrifft. Auf das einzelne der rechts stehenden Integrale wenden wir eine entsprechende Zerlegung an, indem wir das Intervall  $g_1(x_k) \leq y \leq g_2(x_k)$  in eine ausreichend große Anzahl  $n_k$  von Teilintervallen  $\Delta y_{k1}, \Delta y_{k2}, \dots, \Delta y_{k, n_k}$  zerlegen. Der Mittelwertsatz liefert dann eine Darstellung:

$$F(x_k) = \sum_{i=1}^{n_k} f(x_k, y_{ki}) \Delta y_{ki}$$

und also erhalten wir für unser Doppelintegral den Ausdruck:

$$(7) \quad \int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^{n_k} f(x_k, y_{ki}) \Delta y_{ki} \right) \Delta x_k.$$

Die rechts stehende Summe läßt sich nun leicht zum Ansatz (4) S. 94 des Flächenintegrals in Beziehung setzen. Der einzelne Parallelstreifen der Breite  $\Delta x_k$ , der unseren Bereich parallel zur  $y$ -Achse durch-

setzt, erscheint, wie Fig. 15 andeutet, mit einer Kette von  $n_k$  Rechtecken belegt, deren Inhalte  $\Delta x_k \cdot \Delta y_{ki}$  sind. Die Punkte  $(x_k, y_{ki})$  sind dann immer in diesen Rechtecken gelegen. Jedoch liegt insofern ein Unterschied gegen den Ansatz (4) S. 94 vor, als jeweils unten und oben im Streifen ein Rechteck oder auch mehrere über den Bereich  $B$  hinausgreifen können oder hinter demselben zurückbleiben mögen (s. Fig. 15). Ein fehlendes Flächenstückchen wollen wir

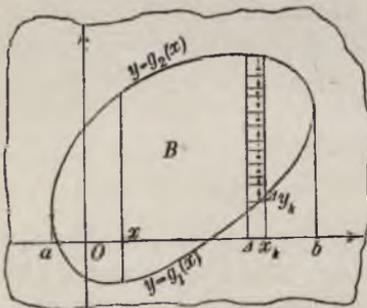


Fig. 15.

als negativen Überschub rechnen. Der Gesamtüberschub an Flächeninhalt, der bei der Einteilung  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$  vorliegt, kann nun nach einer bekannten Betrachtung (s. „Rechteckregel“, S. 76) bei hinreichend klein gewählten  $\Delta x_k$  beliebig klein gemacht werden; und also wird, da wir die Funktion  $f(x, y)$  im Bereiche  $B$  als zwischen endlichen Schranken gelegen annehmen, auch die in (7) stehende Summe bei hinreichend klein gewähl-

ten  $\Delta x_k$  an die genau dem Ansätze (4) S. 94 sich unterordnende Summe, welche bei Korrektur der Randrechtecke entsteht, beliebig nahe herangebracht werden. Da nun die letztere Summe bei ausreichend klein gewählten  $\Delta x_k, \Delta y_{ki}$  beliebig nahe an den Wert des Flächenintegrals herangebracht werden kann, so finden wir, daß bei richtiger Auswahl der  $\Delta x_k, \Delta y_{ki}$  die Differenz der in (7) rechts stehenden Summe und des Flächenintegrals, absolut genommen, kleiner als eine beliebig klein gewählte positive Zahl  $\delta$  ist. Nun hat aber jene Summe zufolge (7) einen *festen* Wert, nämlich den unseres Doppelintegrals. Ist der Unterschied dieses Wertes gegen den gleichfalls *festen* Wert des Flächenintegrals absolut kleiner als die *beliebig* klein gewählte Zahl  $\delta$ , so kann jener konstante Unterschied nicht von 0 verschieden sein, und also ist die Gleichung (6) bewiesen.

Einige beschränkende Voraussetzungen über die Gestalt des Bereiches  $B$  sind nun hinwegzuräumen. In Fig. 15 nahmen wir an, daß die obere und untere Randkurve bei  $x = a$  mit der gleichen Ordinate beginnen und bei  $b$  mit der gleichen enden. Dies ist keineswegs wesentlich, da die Durchführung der vorstehenden Betrachtung auch, wenn z. B. die Ordinaten  $g_1(b), g_2(b)$  verschieden sind, nicht schwierig ist. Auch ist es statthaft, daß die Funktionen  $g_1(x)$  und  $g_2(x)$  an endlich vielen Stellen des Intervalles  $a \leq x \leq b$  durch endliche Sprünge unstetig werden, wie dies wenigstens an einer Stelle für die Funktion  $g_2(x)$  durch Fig. 16 angedeutet ist.

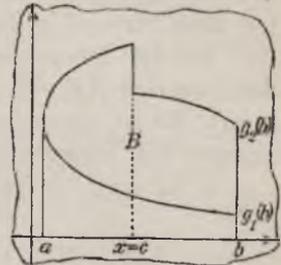


Fig. 16.

Vor allem aber wollen wir die Beschränkung hinwegräumen, daß der Rand des Bereiches  $B$  von keiner zur  $y$ -Achse parallelen Geraden in mehr als zwei Punkten getroffen werden sollte. In Fig. 17 ist ein Bereich vorgelegt, dessen Rand von jeder zwischen  $x = c$  und  $x = d$  parallel zur  $y$ -Achse verlaufenden Geraden viermal getroffen wird. Wir können hier zunächst so verfahren, daß wir mittelst einer bei  $x = d$  zur  $y$ -Achse parallel gezogenen Geraden den in der Figur mit  $B_1$  bezeichneten Teilbereich abtrennen und alsdann die beiden Bereiche  $B_1$  und  $B_2$  gesondert betrachten. Vorzuziehen ist indessen folgende Verabredung: *Wir wollen im vorliegenden Falle unter:*

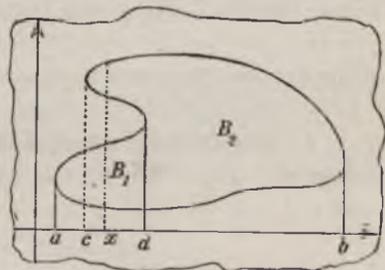


Fig. 17.

$$\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy = F(x)$$

für ein  $x$  des Intervalls  $c < x < d$  einfach die Summe der beiden Integrale verstehen, welche sich auf die beiden in  $B_1$  und  $B_2$  gelegenen Strecken der zur  $y$ -Achse Parallelen der Abszisse  $x$  beziehen (s. Fig. 17); dann gilt unsere Formel (6) auch für diesen Bereich. Diese Verabredung überträgt sich sofort auf alle Integrationsbereiche, welche der Forderung genügen, daß die Anzahlen der Schnittpunkte des Randes mit den Parallelen zur  $y$ -Achse durchweg unter einer endlichen Schranke liegen. Das aber wird bei allen für uns in Betracht kommenden Bereichen zutreffen.

Bei der Herstellung des Doppelintegrals (5) für den Bereich  $B$  und die Funktion  $f(x, y)$  haben wir zunächst nach  $y$  und dann nach  $x$  integriert. Es ist einleuchtend, daß man ein entsprechend gebautes Doppelintegral bei Voranstellung der Integration nach  $x$  in der Gestalt:

$$(8) \quad \int_c^d \left( \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

erklären kann, wobei man die Bedeutung der Integralgrenzen bzw. diejenige des inneren Integrals leicht verstehen wird.

Nun gelangt man durch Übertragung der obigen Überlegung zu der Erkenntnis, daß auch dieses Doppelintegral mit dem Flächenintegral gleich ist. Eben daraus ergibt sich dann weiter die Gleichheit der beiden Doppelintegrale (5) und (8):

$$(9) \quad \int_c^d \left( \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Man bringt dieses Ergebnis durch den Satz zum Ausdruck: *Bei einem auf einen Bereich  $B$  bezogenen Doppelintegrale mit einer im Bereiche eindeutigen und gleichmäßig stetigen Funktion  $f(x, y)$  ist Umordnung der Reihenfolge der Integrationen ohne Änderung des Integralwertes statthaft.*

**4. Einführung neuer Variablen in Doppelintegrale und Flächenintegrale.** Die Variablen  $x$  und  $y$  mögen mit zwei neuen Variablen  $u$  und  $v$  durch die beiden Gleichungen:

$$(1) \quad x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v)$$

verknüpft sein, die wir für den einzelnen Punkt  $(x, y)$  des bisherigen Integrationsbereiches  $B$  eindeutig nach  $u$  und  $v$  auflösbar annehmen. Wir deuten  $u$  und  $v$  in einer besonderen Ebene als rechtwinklige Koordinaten und nehmen an, daß die den Bereichspunkten  $(x, y)$  entsprechenden

Punkte  $(u, v)$  einen endlichen abgeschlossenen Bereich  $B'$  liefern, der nicht nur eindeutig, sondern auch stetig auf  $B$  bezogen ist. Wir setzen dementsprechend voraus, daß die Funktionen  $\varphi(u, v)$  und  $\psi(u, v)$  im Bereiche  $B'$  eindeutig und gleichmäßig stetig seien. Auch wollen wir annehmen, daß sie daselbst Ableitungen erster Ordnung  $\varphi'_u, \varphi'_v, \psi'_u, \psi'_v$  besitzen, die in  $B'$  gleichfalls eindeutig und gleichmäßig stetig sind. Von diesen Ableitungen soll ferner angenommen werden, daß  $\varphi'_u$  und  $\varphi'_v$  in keinem Punkte des Bereiches  $B$  zugleich verschwinden, und daß dasselbe für  $\psi'_u$  und  $\psi'_v$  gilt. Wir kennzeichnen das gegenseitige Verhältnis der beiden Bereiche  $B$  und  $B'$  dadurch, daß wir jeden Bereich ein „Abbild“ des anderen nennen.

Um die Beziehung beider Bereiche aufeinander zu versinnlichen, denken wir den Bereich  $B'$  mit den beiden zu den Koordinatenachsen der  $u, v$ -Ebene parallelen Geradenscharen überzogen. Einige Gerade aus jeder Schar sind in Fig. 18 gezeichnet; sie zerlegen den Bereich  $B'$  in ein Netz von Rechtecken. Längs der einzelnen zur  $u$ -Achse parallelen Geraden habe  $v$  den konstanten Wert  $v_0$ . Diese Gerade bildet sich demnach auf eine den Bereich  $B$  durchsetzende Kurve ab, die wir durch das Gleichungenpaar:

$$(2) \quad x = \varphi(u, v_0), \quad y = \psi(u, v_0)$$

mittelst der unabhängigen Variablen  $u$  darstellen; diese Kurve bezeichnen wir durch  $K_{v_0}$  und gebrauchen allgemein die Benennung  $K_v$  für die von den Parallelen zur  $u$ -Achse herrührenden Kurven des Bereiches  $B$ . Ebenso erklären wir im Bereiche  $B$  die Abbilder  $K_u$ , die den Parallelen zur  $v$ -Achse des Bereiches  $B'$  entsprechen. Der Bereich  $B$  erscheint nun überzogen mit zwei einander überkreuzenden Scharen von Kurven  $K_u$  und  $K_v$ , von denen in Fig. 19 diejenigen gezeichnet sein mögen, welche den Geraden der Fig. 18 entsprechen. Die Zuordnung der Rechtecke und der Kurvenvierecke in beiden Figuren gibt uns dann ein oberflächliches Bild der Beziehung beider Bereiche aufeinander\*).

Um diese Angaben zu belegen, stellen wir zunächst fest, daß zufolge

\*) Die dem einzelnen Punkte von  $B$  zukommenden Zahlenpaare  $u, v$  bezeichnet man wohl auch als „krummlinige Koordinaten“ dieses Punktes.

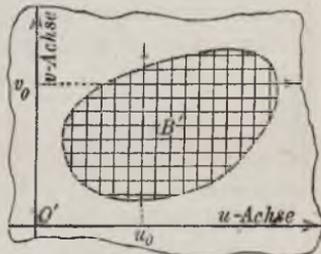


Fig. 18.

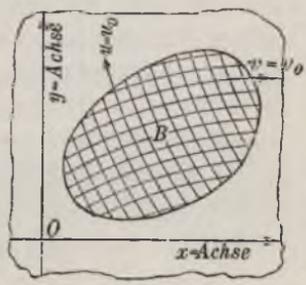


Fig. 19.

der über die Funktionen  $\varphi$  und  $\psi$  gemachten Voraussetzungen jede Kurve  $K_v$  in ihrem einzelnen „Punkte  $u$ “ eine bestimmte Tangente hat. Bildet die in der Richtung wachsender  $u$  genommene Tangente mit der positiven  $x$ -Achse den Winkel  $\alpha$ , so gilt nach bekannten Regeln (s. I, 285):

$$(3) \quad \cos \alpha = \frac{\varphi'_u(u, v)}{\sqrt{\varphi'^2_u + \psi'^2_u}}, \quad \sin \alpha = \frac{\psi'_u(u, v)}{\sqrt{\varphi'^2_u + \psi'^2_u}},$$

wo der Kürze halber im Nenner die Argumente fortgelassen wurden und übrigens die Wurzeln positiv zu nehmen sind. Erklärt man für die einzelne Kurve  $K_u$  im „Punkte  $v$ “ den Winkel  $\beta$  der Tangente gegen die positive  $x$ -Achse entsprechend, so gilt weiter:

$$(4) \quad \cos \beta = \frac{\varphi'_v(u, v)}{\sqrt{\varphi'^2_v + \psi'^2_v}}, \quad \sin \beta = \frac{\psi'_v(u, v)}{\sqrt{\varphi'^2_v + \psi'^2_v}}.$$

Irgend eine andere den Bereich  $B'$  durchziehende Gerade, deren Gleichung etwa  $v = \mu u + \nu$  sei, liefert als Abbild die durch:

$$(5) \quad x = \varphi(u, \mu u + \nu), \quad y = \psi(u, \mu u + \nu)$$

dargestellte Kurve, die gleichfalls in jedem ihrer Punkte eine bestimmte Tangente hat. Es folgt dies aus der Existenz und Bestimmtheit der Ableitungen der in (5) rechts stehenden Funktionen in bezug auf  $u^*$ .

Wir können diese Darlegungen auch durch den Satz deuten, daß sich die gestreckten Winkel des Bereiches  $B'$  auf Winkel der gleichen Größe in  $B$  übertragen. Abbildungen, bei denen sich jeder Winkel auf einen Winkel der gleichen Größe überträgt, heißen „winkel-treu“ oder „konform“; die „konformen Abbildungen“ sind besonders wichtig, doch sollen die vorliegenden Betrachtungen keineswegs auf diesen besonderen Fall eingeschränkt sein. Es werden sich also z. B. die Winkel, welche in den einzelnen Punkten  $(u, v)$  durch die zu den positiven Achsen parallelen Geraden gebildet werden, nicht notwendig wieder auf rechte Winkel des Bereiches  $B$  übertragen, mögen hier vielmehr auch spitze oder stumpfe Winkel als Abbilder liefern. Übrigens können wir die Größe des Abbildes sofort aus (3) und (4) berechnen; denn offenbar ist die Größe dieses Winkels durch  $(\beta - \alpha)$  gegeben und also sein Sinus durch:

$$\sin(\beta - \alpha) = \frac{\varphi'_u \psi'_v - \varphi'_v \psi'_u}{\sqrt{\varphi'^2_u + \psi'^2_u} \sqrt{\varphi'^2_v + \psi'^2_v}}.$$

Der hier im Zähler stehende Ausdruck heißt die „Funktionaldeterminante“ der Funktionen (1) und werde durch  $D(\varphi, \psi)$  bezeichnet:

\*) Zunächst ist freilich noch ein gleichzeitiges Verschwinden der Ableitungen von  $x$  und  $y$  nach  $u$  möglich. Dieses gleichzeitige Verschwinden wird indessen dadurch ausgeschlossen, daß der im Texte unter (6) zu erklärende Ausdruck im Bereiche  $B'$  nirgends verschwinden soll.

$$(6) \quad D(\varphi, \psi) = \varphi'_u \psi'_v - \varphi'_v \psi'_u.$$

Mit ihrer Hilfe schreibt sich die vorstehende Gleichung so:

$$(7) \quad \sin(\beta - \alpha) = \frac{D(\varphi, \psi)}{\sqrt{\varphi'^2_u + \psi'^2_u} \sqrt{\varphi'^2_v + \psi'^2_v}}.$$

Diese Gleichung veranlaßt uns übrigens, den Funktionen  $\varphi(u, v)$  und  $\psi(u, v)$  noch ausdrücklich die Bedingung aufzuerlegen, daß die Funktionaldeterminante (6) in keinem Punkte des Bereiches  $B'$  verschwindet. Nur dann trifft unsere obige Annahme zu, daß sich die Kurven  $K_u$  und  $K_v$  im Bereiche  $B$  überall unter Winkeln überkreuzen, welche von 0 und  $\pi$  verschieden sind\*).

Aus der Stetigkeit von  $D(\varphi, \psi)$  im Bereiche  $B'$  folgt übrigens jetzt noch weiter, daß daselbst entweder nur positive oder nur negative Werte  $D(\varphi, \psi)$  vorkommen. Diese Fallunterscheidung hat auch eine wichtige geometrische Bedeutung; denn im ersten Falle ist  $\beta - \alpha > 0$ , im zweiten  $\beta - \alpha < 0$ . Bei der oben festgelegten Erklärung der Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  ergibt sich hieraus der Satz: *Der Drehungssinn der Schenkel unserer Winkel bleibt im Abbilde der gleiche wie im Original oder er wird entgegengesetzt, je nachdem  $D > 0$  oder  $D < 0$  im Bereiche gilt.* Man spricht im letzteren Falle von einer „Abbildung mit Umlegung der Winkel“.

Den Übergang von  $B$  zu  $B'$  können wir nun in folgender Art in zwei Schritte zerlegen. Wir wollen zunächst  $x$  noch beibehalten, aber  $y$  durch  $v$  ersetzen. Zu diesem Zwecke lösen wir die erste Gleichung (1) nach  $u$  auf:

$$(8) \quad u = \chi(x, v)$$

und tragen diesen Ausdruck in die zweite Gleichung (1) ein:

$$(9) \quad y = \psi(\chi(x, v), v).$$

Damit sich die einfachere Transformation den vorstehenden Sätzen fügt, nehmen wir an, daß sich im Bereiche  $B$  die Kurven  $K_v$  mit den zur  $y$ -Achse parallelen Geraden, den „Kurven  $K_x$ “, überall unter Winkeln überkreuzen, die von 0 und  $\pi$  verschieden sind. Zuzufolge (3) läuft dies einfach auf die Annahme hinaus, daß  $\varphi'_u$  im Bereiche  $B'$  überall von 0 verschieden ist\*\*). In unserem Falle zeigt Fig. 20, daß dieser Annahme entsprochen

\*) Die Bedingung  $D(\varphi, \psi) \neq 0$  ist auch für einige weitere oben für die Funktionen  $\varphi, \psi$  gemachte Annahme grundlegend; vgl. z. B. die vorige Note.

\*\*\*) Das abzuleitende Schlußresultat erleidet durch diese Annahme keine Beschränkung. Die Umgebungen solcher Stellen des Bereiches  $B'$ , in denen etwa  $\varphi'_u$  verschwindet, behandle man besonders, indem man durch Drehung unseres ursprünglichen Koordinatensystems der  $x, y$  daselbst der Forderung des Textes genügt.

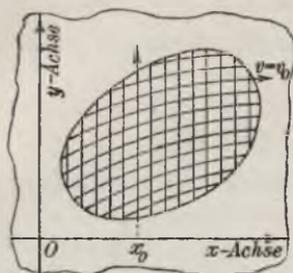


Fig. 20.

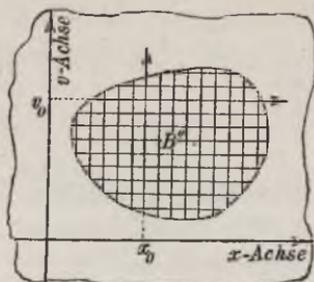


Fig. 21.

ist. Schalten wir nun die  $x, v$ -Ebene ein, so ergibt sich in ihr ein Abbild  $B''$  von  $B$ , in dem die Geraden- und die Kurvenschar der Fig. 20 die zu den Achsen parallelen Geraden liefern, wie dies Fig. 21 zur Anschauung bringt.

Als zweiter mit dem ersten gleichartiger Schritt reiht sich nun der Übergang von den  $x, v$  zu den Variablen  $u, v$  an, so daß jetzt  $v$  erhalten bleibt. Dieser Übergang ist einfach durch die erste Gleichung (1) oder, was auf dasselbe hinausläuft, durch die Transformation (8) zu vollziehen. Die auf den Bereich  $B''$  übertragenen Kurven  $K_u$  liefern mit den „Geraden  $K_v$ “ ein brauchbares Netz; denn es handelt sich um Übertragung des in Fig. 19 angedeuteten Netzes auf den Bereich  $B''$ . Eine neue einschränkende Bedingung kommt demnach nicht hinzu. Rechnerisch bestätigt sich dies in der Weise, daß die Funktionaldeterminante der beiden Funktionen  $\varphi(u, v)$  und  $v$  einfach  $\varphi'_u$  ist; der Annahme nach aber ist  $\varphi'_u$  in  $B'$  von 0 verschieden. Der Fortgang von  $B''$  zum Bereiche  $B'$  bewirkt nun, daß die „Geraden“  $K_v$  als solche erhalten bleiben, während an Stelle der Kurven  $K_u$  in  $B'$  gleichfalls Gerade treten.

Die Zerlegung der Transformation (1) in zwei Schritte wird nun wichtig bei der Umrechnung des auf den Bereich  $B$  bezogenen Doppelintegrals:

$$(10) \quad \int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

auf die neuen Variablen  $u, v$ . Führen wir zunächst die Transformation (9) aus, so bleibt  $x$  erhalten, und die Rechnung läuft darauf hinaus, in dem einfachen Integrale:

$$\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy$$

an Stelle der Variablen  $y$  die neue Variable  $v$  durch (9) einzuführen. Hierbei ergibt sich nach (7) S. 56:

$$\int_{\gamma_1(x)}^{\gamma_2(x)} f(x, y) dy = \int_{\gamma_1(x)}^{\gamma_2(x)} f(x, \psi(\chi(x, v), v)) \frac{dy}{dv} dv,$$

wo  $v = \gamma_1(x)$  und  $v = \gamma_2(x)$  die Gleichungen der Teile des Randes von  $B''$  sind und übrigens das Integral rechter Hand ebenso wie das links stehende nütigenfalls als Symbol für eine Integralsumme zu gelten hat (s. S. 100). Für die Berechnung von  $\frac{dy}{dv}$  hat man zu beachten, daß  $v$  sowohl im ersten wie im zweiten Argumente der in (9) rechts stehenden Funktion auftritt. Es folgt somit:

$$\frac{dy}{dv} = \psi'_u(\chi(x, v), v) \frac{\partial \chi}{\partial v} + \psi'_v(\chi(x, v), v).$$

Die partielle Ableitung von  $\chi$  nach  $v$  ist aus (8) oder, was auf dasselbe hinausläuft, aus der ersten Gleichung (1) als Ableitung von  $u$  nach  $v$  bei konstantem  $x$  zu berechnen. Verfahren wir in letzterer Art, so folgt:

$$0 = \varphi'_u du + \varphi'_v dv, \quad \frac{du}{dv} = -\frac{\varphi'_v}{\varphi'_u} = -\frac{\varphi'_v(\chi(x, v), v)}{\varphi'_u(\chi(x, v), v)},$$

wo die im Nenner stehende Funktion voraussetzungsgemäß im ganzen Bereiche  $B''$  von 0 verschieden ist. Durch Eintragung dieses für  $\frac{\partial \chi}{\partial v}$  gewonnenen Ausdrucks in die voraufgehende Gleichung folgt bei Benutzung der Abkürzung (6):

$$(11) \quad \frac{dy}{dv} = \frac{D(\varphi(\chi(x, v), v), \psi(\chi(x, v), v))}{\varphi'_u(\chi(x, v), v)}.$$

In der damit gewonnenen Gestalt unseres Doppelintegrals:

$$\int_a^b \left( \int_{\gamma_1(x)}^{\gamma_2(x)} f(x, \psi(\chi(x, v), v)) \frac{dy}{dv} dv \right) dx$$

wollen wir nunmehr nach der Regel (9) S. 100 Umkehrung der Integrationsfolge vornehmen; es ergibt sich:

$$(12) \quad \int_{c'}^{d'} \left( \int_{\eta_1(v)}^{\eta_2(v)} f(x, \psi(\chi(x, v), v)) \frac{dy}{dv} dx \right) dv,$$

wo nun der Rand von  $B''$  in richtiger Art durch  $x = \eta_1(v)$  und  $x = \eta_2(v)$  dargestellt ist. In dem inneren einfachen Integrale, das bei konstantem  $v$  die einzige Variable  $x$  enthält, führen wir jetzt an Stelle von  $x$  die neue Variable  $u$  mittelst der Gleichung  $u = \chi(x, v)$  oder  $x = \varphi(u, v)$  ein. Sind

die zu  $v$  gehörenden Integralgrenzen  $u = \eta_1(v)$  und  $u = \eta_2(v)$ , so finden wir für das innere Integral in (12) nach (7) S. 56:

$$\int_{\eta_1(v)}^{\eta_2(v)} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dx}{du} \cdot du.$$

Nach (11), (8) und (1) aber folgt, da  $\frac{dx}{du}$  bei konstantem  $v$  zu berechnen ist:

$$\frac{dy}{dv} \cdot \frac{dx}{du} = \frac{D(\varphi(u, v), \psi(u, v))}{\varphi'_u(u, v)} \cdot \varphi'_u(u, v) = D(\varphi, \psi).$$

Tragen wir diesen Ausdruck des links stehenden Produktes in unser Integral ein, so gelangen wir zu folgendem Satze: *Die Transformation des Doppelintegrals (10) auf die neuen Variablen  $u, v$  kann vollzogen werden auf Grund der Gleichung:*

$$(13) \quad \int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_{c'}^{c''} \left( \int_{\eta_1(v)}^{\eta_2(v)} f(\varphi, \psi) \cdot D(\varphi, \psi) du \right) dv,$$

wo im inneren Integrale die Funktionaldeterminante  $D(\varphi, \psi)$  als Faktor auftritt; doch kann natürlich in (13) sowohl rechts als links Umordnung der Integrationsfolge vorgenommen werden.

Setzen wir insbesondere  $f(x, y)$  konstant gleich 1, so liefert das Integral in (13) links den Inhalt  $\omega$  des Bereiches  $B$ , so daß sich dieser Inhalt  $\omega$  mittelst der neuen Variablen  $u$  und  $v$  so darstellt:

$$(14) \quad \omega = \int_{c'}^{c''} \left( \int_{\eta_1(v)}^{\eta_2(v)} D(\varphi, \psi) du \right) dv.$$

Wenden wir auf das rechts stehende Integral, das wir als Flächenintegral des Bereiches  $B'$  auffassen können, den Satz (6) S. 96 an, so folgt die Existenz eines Punktes  $(u_0, v_0)$  in  $B'$ , für welchen:

$$\omega = D(\varphi(u_0, v_0), \psi(u_0, v_0)) \cdot \int_{c'}^{c''} \left( \int_{\eta_1(v)}^{\eta_2(v)} du \right) dv$$

zutrifft. Ist  $D > 0$  (Abbildung ohne Umlegung der Winkel), so liefert das rechts stehende Integral den Inhalt  $\omega'$  von  $B'$ ; für  $D < 0$  (Abbildung mit Umlegung der Winkel) ist dagegen der Wert jenes Integrales gleich  $-\omega'$ . In jedem Falle ist im Bereiche  $B'$  ein Punkt  $(u_0, v_0)$  der Art angebar, daß

$$(15) \quad \omega = \omega' \cdot |D(\varphi(u_0, v_0), \psi(u_0, v_0))|$$

für die Inhalte  $\omega$  und  $\omega'$  zutrifft.

Hiermit sind wir dann auch im Stande, an Stelle von (13) eine auf die Transformation der *Flächenintegrale* bezogene Formel treten zu lassen. Unter Rückgang auf die Entwicklung von S. 101 mögen wir den Teilbereich  $\Delta\omega_k$  auf den Teilbereich  $\Delta\omega'_k$  von  $B'$  abgebildet finden. Dann gibt es einen in  $\Delta\omega'_k$  gelegenen Punkt  $(u_k, v_k)$ , für welchen:

$$(16) \quad \Delta\omega_k = |D(\varphi(u_k, v_k), \psi(u_k, v_k))| \cdot \Delta\omega'_k$$

gilt. Den entsprechenden Punkt  $(x_k, y_k)$  benutzen wir zum Aufbau der endlichen Summe (3) S. 93 und finden für das einzelne Glied dieser Summe:

$$f(x_k, y_k) \Delta\omega_k = f(\varphi_k, \psi_k) \cdot |D(\varphi_k, \psi_k)| \cdot \Delta\omega'_k,$$

wo  $\varphi_k$  und  $\psi_k$  zur Abkürzung für  $\varphi(u_k, v_k)$  und  $\psi(u_k, v_k)$  geschrieben ist. Indem wir summieren und den Grenzübergang vollziehen, ergibt sich: *Das Flächenintegral transformiert sich bei Einführung der neuen Variablen  $u$  und  $v$  gemäß folgender Regel:*

$$(17) \quad \int^{(B)} f(x, y) d\omega = \int^{(B')} f(\varphi, \psi) \cdot |D(\varphi, \psi)| d\omega'.$$

### 5. Der Inhalt krummer Flächen und das allgemeine Flächenintegral.

Bei der Deutung des Integrals (4) S. 94 war die im Bereiche  $B$  eindeutige und stetige Funktion  $z = f(x, y)$  durch eine Fläche versinnlicht, welche in den längs des Randes von  $B$  errichteten Zylindermantel eingespannt war. Es sei jetzt von  $f(x, y)$  weiter vorausgesetzt, daß diese Funktion in  $B$  eindeutige und gleichmäßig stetige partielle Ableitungen erster Ordnung  $f'_x$  und  $f'_y$  habe. Die im abgeschlossenen Bereiche  $B$  vorkommenden Werte dieser Ableitungen dürfen wir (vgl. etwa I, 20) innerhalb angegebener endlicher Schranken gelegen annehmen. Die Voraussetzungen können wir dann nach I, 324 auch dahin aussprechen, daß das obige Flächenstück in jedem Punkte eine bestimmte Tangentialebene hat, deren Neigungswinkel gegen die  $x, y$ -Ebene von einem rechten Winkel mindestens um einen angebbaren positiven Betrag abweicht.

Es ist nun möglich, für unser (bei variablen  $f'_x$  und  $f'_y$ ) gekrümmtes Flächenstück einen „*Flächeninhalt*“ zu erklären, und zwar durch Übertragung der bei der Bogenmessung der Raumkurven befolgten Maßregeln (S. 88ff.). Wie wir uns damals der Kurve mit einer Reihe von Sehnenketten mehr und mehr annäherten, so werden wir uns hier dem Flächenstücke mit einer Reihe von „*Facettenflächen*“, die aus ebenen geradlinigen Dreiecken zusammengesetzt sind, annähern.

Wir zeichnen zunächst in den Rand von  $B$  eine den Bereich ganz

umlaufende Sehnenkette ein und bauen, wie Fig. 22 veranschaulichen mag, an diese Sehnenkette eine Zerlegung von  $B$  in geradlinige Dreiecke (Triangulation) an. Dabei dürfen die am Rande gelegenen Dreiecke ein wenig über  $B$  hinausgreifen oder gegen  $B$  zurückbleiben; im ersteren Falle nehmen wir vorübergehend an, daß  $f(x, y)$  auch in den übergreifenden Ebenenstückchen alle vorausgesetzten Eigenschaften bewahre. Benutzen wir diese Dreiecke bei der Raumausmessung (S. 94) als Teilbereiche  $\Delta\omega$ , so werden die damals betrachteten auf den Teilbereichen errichteten Säulen zu ebenflächigen dreiseitigen Prismen. Das einzelne Prisma wird dem Bereiche  $\Delta\omega$  gegenüber durch ein Teilstückchen unserer auszumessenden Fläche begrenzt, das durch drei von den Prismenflächen ausgeschnittene Kurvenstückchen berandet ist.

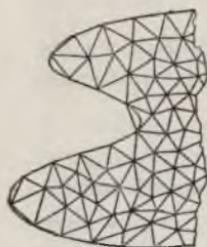


Fig. 22.

Wir wollen nun dieses Teilstückchen der Fläche durch das ebene geradlinige Dreieck ersetzen, das in die drei Ecken des Stückchens eingespannt ist; die Ecken dieses Dreiecks, dessen Inhalt wir  $D$  nennen, sind einfach die Schnittpunkte der Prismenkanten mit der Fläche  $z = f(x, y)$ , so daß die Dreiecksseiten in den Prismenflächen liegen. Indem wir diese Konstruktion für alle Dreiecke des  $B$  überziehenden Netzes (Fig. 22), deren Anzahl  $n$  sei, ausführen, schließen sich die als Ersatz der Flächenstückchen gewählten ebenen Dreiecke längs ihrer Seiten aneinander. Sie liefern hierbei die schon angezeigte „Facettenfläche“, deren Gesamtinhalt gleich der Summe der Inhalte der  $n$  sie zusammensetzenden Dreiecke ist.

Nach Auswahl einer beliebig kleinen Zahl  $\varepsilon > 0$  schreiben wir nun vor, daß die Umfänge der Teildreiecke  $\Delta\omega_k$  durchweg  $\leq \varepsilon$  sein sollen, wobei dann in bekannter Weise für die Anzahl  $n$  der Dreiecke eine untere Schranke auftritt, die sich für  $\lim \varepsilon = 0$  der Grenze  $\infty$  nähert. Zum Unterschiede gegen die bisherigen Erfahrungen besteht hier folgender Satz: *Schreiben wir für die Dreiecke  $\Delta\omega_k$  keine weitere Bedingung vor, als daß die Umfänge durchweg  $\leq \varepsilon$  sein sollen, so nähern sich für  $\lim \varepsilon = 0$  die Inhalte  $\sum_{k=1}^n D_k$  aller zulässigen Facettenflächen keiner Grenze an. Jedoch existiert eine solche Grenze, sobald wir folgende weitere Bedingung stellen: Nach Auswahl irgend einer festen Zahl  $\sigma$  des Intervalles  $0 < \sigma < \frac{\pi}{2}$  soll jedes Dreieck  $\Delta\omega_k$  mindestens einen Winkel  $\gamma$  besitzen, dessen Größe durch die Schranken eingeschlossen ist:*

$$(1) \quad \sigma \leq \gamma \leq \pi - \sigma.$$

Der geometrische Sinn dieser neuen Einschränkung ist leicht ver-

ständig\*). Damit nämlich die Facettenflächen für unseren Zweck brauchbar sind, müssen sie sich bei ausreichend kleinem  $\varepsilon$  hinreichend genau an die auszumessende Fläche der Gleichung  $z = f(x, y)$  anschmiegen, d. h. die Ebene der einzelnen ein Flächenstück ersetzenden Facette muß mehr und mehr parallel zu irgend einer auszuwählenden *Tangentialebene* jenes Flächenstückchens werden. Dem ist aber durch die Forderung, der Umfang des Dreiecks  $\Delta\omega$  sei  $\leq \varepsilon$ , allein gar nicht zu genügen. Können wir doch, wenn z. B. die Normale der Fläche  $z = f(x, y)$  an irgend einer Stelle nicht gerade parallel zur  $z$ -Achse verläuft, sogar in einer zugehörigen *Normalebene* eine Facette von beliebig kleinem Umfange wählen\*\*). Andererseits ist folgendes einleuchtend: Nennen wir die Ecken einer Facette  $P', P_1', P_2'$ , und ist der Winkel  $\gamma' = \sphericalangle P_1'P'P_2'$  stets in einem Intervalle:

$$0 < \sigma' \leq \gamma' \leq \pi - \sigma'$$

liegen, so werden, wenn wir die Sehnen  $P'P_1'$  und  $P'P_2'$  der Fläche gegen die Grenze 0 abnehmen lassen, die Richtungen dieser Sehnen sich zwei *verschiedenen* Flächentangenten im Punkte  $P'$  annähern, so daß sich die Facette dann sicher der Tangentialebene im Punkte  $P'$  anschmiegt.

Diese vorläufigen Betrachtungen werden die folgenden Rechnungen verständlich machen. Ein einzelnes Dreieck  $\Delta\omega$  habe die Ecken  $P, P_1, P_2$  der Koordinaten  $(x, y), (x + \Delta x_1, y + \Delta y_1), (x + \Delta x_2, y + \Delta y_2)$ ;  $P$  sei als Scheitelpunkt eines Dreieckswinkels  $\gamma$  gewählt, der die Bedingung (1) befriedigt. Dann ist nach „A. G.“ S. 19 und nach einer bekannten Elementarformel die doppelte Dreiecksfläche  $2\Delta\omega$  gegeben durch:

$$(2) \quad 2\Delta\omega = |\Delta x_1 \Delta y_2 - \Delta x_2 \Delta y_1| = \overline{PP_1} \cdot \overline{PP_2} \sin \gamma.$$

Da nun  $|\Delta x_i|, |\Delta y_i|$  die Projektionen der Strecke  $\overline{PP_i}$  auf die Achsen sind, so ist keines der vier Produkte  $\Delta x_1 \cdot \Delta x_2, \Delta x_1 \cdot \Delta y_2, \Delta y_1 \cdot \Delta x_2, \Delta y_1 \cdot \Delta y_2$  absolut genommen, größer als  $\overline{PP_1} \cdot \overline{PP_2}$ . Mit Rücksicht auf (1) ergeben sich somit die vier Ungleichungen:

$$(3) \quad |\Delta x_1 \cdot \Delta x_2|, |\Delta x_1 \cdot \Delta y_2|, |\Delta y_1 \cdot \Delta x_2|, |\Delta y_1 \cdot \Delta y_2| \leq \frac{2\Delta\omega}{\sin \gamma} \leq \frac{2\Delta\omega}{\sin \sigma}.$$

Die den  $P, P_1, P_2$  entsprechenden Facettenecken  $P', P_1', P_2'$  haben die

\*) Um tunlichst weiten Spielraum für die Auswahl der Dreiecke zu haben, wird man  $\sigma$  nahe bei 0 wählen. Es kommen dann nur diejenigen Dreiecke zum Ausschluß, bei denen ein Winkel  $> \pi - \sigma$  und zwei  $< \sigma$  sind. Es ist einleuchtend, daß es keine Schwierigkeit hat, der Forderung des Textes zu genügen. Hätten wir nämlich einmal eine Teilung, in der unerlaubte Dreiecke vorkommen, so wird jedes solche Dreieck durch Fällen einer Höhe in zwei zulässige Dreiecke zerlegt.

\*\*) Nur kann dann eben für  $\lim \varepsilon = 0$  die Bedingung (1) nicht eingehalten werden.

Koordinaten  $(x, y, z)$ ,  $(x + \Delta x_1, y + \Delta y_1, z + \Delta z_1)$ ,  $(x + \Delta x_2, y + \Delta y_2, z + \Delta z_2)$  so daß sich nach „A. G.“ S. 110 die doppelte Facettenfläche  $2D$  so darstellt:

$$(4) \quad 2D = \sqrt{(\Delta x_1 \Delta y_2 - \Delta x_2 \Delta y_1)^2 + (\Delta y_2 \Delta z_1 - \Delta y_1 \Delta z_2)^2 + (\Delta x_1 \Delta z_2 - \Delta x_2 \Delta z_1)^2}.$$

Hierbei ist  $\Delta z_i$  gegeben durch:

$$\Delta z_i = f(x + \Delta x_i, y + \Delta y_i) - f(x, y).$$

Die Funktionswerte  $f$  längs der Strecke  $PP_i$  stellen wir mittelst einer im Intervalle  $0 \leq s \leq 1$  variablen Größe in der Gestalt:

$$F(s) = f(x + s \cdot \Delta x_i, y + s \cdot \Delta y_i)$$

dar, deren Ableitung nach  $s$  sich zufolge I, 158 so berechnet:

$$F'(s) = f'_x(x + s \cdot \Delta x_i, y + s \cdot \Delta y_i) \cdot \Delta x_i + f'_y(x + s \cdot \Delta x_i, y + s \cdot \Delta y_i) \cdot \Delta y_i.$$

Nach dem Mittelwertsatze ist dann:

$$\Delta z_i = F(1) - F(0) = F'(\vartheta),$$

so daß wir finden:  $\Delta z_i = f'_x(x_i, y_i) \Delta x_i + f'_y(x_i, y_i) \Delta y_i$ ,

wo  $(x_i, y_i)$  ein der Strecke  $PP_i$  angehörender Punkt ist. Benutzen wir die Abkürzung:

$$(5) \quad f'_x(x_i, y_i) = p_i, \quad f'_y(x_i, y_i) = q_i,$$

so folgt:

$$\Delta z_i = p_i \Delta x_i + q_i \Delta y_i.$$

Die unter der Wurzel (4) auftretenden Ausdrücke lassen sich daraufhin nach kurzer Rechnung so entwickeln:

$$\Delta y_2 \Delta z_1 - \Delta y_1 \Delta z_2 = (p_1 + \alpha) (\Delta x_1 \Delta y_2 - \Delta x_2 \Delta y_1),$$

$$\Delta x_1 \Delta z_2 - \Delta x_2 \Delta z_1 = (q_1 + \beta) (\Delta x_1 \Delta y_2 - \Delta x_2 \Delta y_1),$$

wobei  $\alpha$  und  $\beta$  Abkürzungen für die Quotienten sind:

$$(6) \quad \begin{cases} \alpha = + \frac{(p_1 - p_2) \Delta x_2 \Delta y_1 + (q_1 - q_2) \Delta y_1 \Delta y_2}{\Delta x_1 \Delta y_2 - \Delta x_2 \Delta y_1}, \\ \beta = - \frac{(p_1 - p_2) \Delta x_1 \Delta x_2 + (q_1 - q_2) \Delta x_1 \Delta y_2}{\Delta x_1 \Delta y_2 - \Delta x_2 \Delta y_1}. \end{cases}$$

Die doppelte Facettenfläche selbst schreibt sich jetzt:

$$2D = +\sqrt{1 + (p_1 + \alpha)^2 + (q_1 + \beta)^2} \cdot |\Delta x_1 \Delta y_2 - \Delta x_2 \Delta y_1|,$$

so daß wir für  $D$  finden:

$$(7) \quad D = +\sqrt{1 + (p_1 + \alpha)^2 + (q_1 + \beta)^2} \cdot \Delta \omega.$$

Ehe wir diesen Ausdruck weiter untersuchen, lesen wir aus (6):

$$|\alpha| \leq |p_1 - p_2| \left| \frac{\Delta x_2 \Delta y_1}{2 \Delta \omega} \right| + |q_1 - q_2| \left| \frac{\Delta y_1 \Delta y_2}{2 \Delta \omega} \right|,$$

$$|\beta| \leq |p_1 - p_2| \left| \frac{\Delta x_1 \Delta x_2}{2 \Delta \omega} \right| + |q_1 - q_2| \left| \frac{\Delta x_1 \Delta y_2}{2 \Delta \omega} \right|$$

ab und folgern also mit Benutzung von (3) weiter:

$$(8) \quad |\alpha|, \quad |\beta| \leq \frac{1}{\sin \sigma} (|p_1 - p_2| + |q_1 - q_2|)$$

als eine für die Absolutwerte  $|\alpha|$  und  $|\beta|$  gültige Ungleichung.

Wir beweisen nun zunächst folgenden Zwischensatz: *Sind  $p, q, \alpha, \beta$  irgend vier endliche Zahlen, so ist bei positiv genommenen Wurzeln:*

$$(9) \quad \left| \sqrt{1 + (p + \alpha)^2 + (q + \beta)^2} - \sqrt{1 + p^2 + q^2} \right| \leq |\alpha| + |\beta|.$$

Zunächst gelten nämlich für je vier endliche Zahlen  $p, q, \alpha, \beta$  (die Wurzeln stets positiv genommen) die Ungleichungen:

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} - |\alpha| \leq \sqrt{1 + (p + \alpha)^2 + q^2} \leq \sqrt{1 + p^2 + q^2} + |\alpha|,$$

wie man durch Quadrieren der verglichenen Ausdrücke leicht feststellt. Es ist also:

$$(10) \quad \left| \sqrt{1 + (p + \alpha)^2 + q^2} - \sqrt{1 + p^2 + q^2} \right| \leq |\alpha|.$$

Hieraus folgt weiter:

$$\left| \sqrt{1 + (p + \alpha)^2 + (q + \beta)^2} - \sqrt{1 + (p + \alpha)^2 + q^2} \right| \leq |\beta|.$$

Die Regel (9) ergibt sich nun einfach, indem wir die in (9) links stehende Differenz als Summe:

$$\begin{aligned} & \left( \sqrt{1 + (p + \alpha)^2 + (q + \beta)^2} - \sqrt{1 + (p + \alpha)^2 + q^2} \right) \\ & + \left( \sqrt{1 + (p + \alpha)^2 + q^2} - \sqrt{1 + p^2 + q^2} \right) \end{aligned}$$

schreiben und den Satz benutzen, daß der absolute Betrag einer Summe nicht größer als die Summe der absoluten Beträge der Summanden ist.

Wenden wir nun die Regel (9) auf den Ausdruck (7) an, so folgt:

$$\left| D - \sqrt{1 + p_1^2 + q_1^2} \cdot \Delta \omega \right| \leq (|\alpha| + |\beta|) \cdot \Delta \omega$$

und also mit Benutzung von (8):

$$\left| D - \sqrt{1 + p_1^2 + q_1^2} \cdot \Delta \omega \right| \leq \frac{2}{\sin \sigma} (|p_1 - p_2| + |q_1 - q_2|) \Delta \omega.$$

Nun waren die partiellen Ableitungen von  $f(x, y)$  als gleichmäßig stetig vorausgesetzt. Da  $\sigma$  eine von 0 verschiedene festgewählte Zahl des Intervalles  $0 < \sigma < \frac{\pi}{2}$  ist und die  $p_i, q_i$  Werte der Ableitungen  $f'_x, f'_y$  in zwei

Randpunkten des Dreiecks  $\Delta\omega$  sind, so können wir nach Auswahl einer beliebig kleinen Zahl  $\delta > 0$  eine Zahl  $\varepsilon > 0$  so angeben, daß:

$$\frac{\varepsilon}{\sin \sigma} (|p_1 - p_2| + |q_1 - q_2|) < \delta,$$

zutrifft, falls der Umfang vom Dreieck  $\Delta\omega$  nicht größer als  $\varepsilon$  ist. Dann aber folgt unmittelbar:

$$(11) \quad |D - \sqrt{1 + p^2 + q^2} \Delta\omega| < \delta \cdot \Delta\omega,$$

wo wir  $p$  und  $q$  für  $p_1$  und  $q_1$  geschrieben haben und also unter  $p$  und  $q$  die Werte von  $f'_x$  und  $f'_y$  in einem gewissen Punkte (nämlich einem Randpunkte) des Dreiecks  $\Delta\omega$  zu verstehen haben.

Für das  $k^{\text{te}}$  Dreieck unseres den Bereich  $B$  bedeckenden Netzes wolle man die Ungleichung (11) in die besondere Gestalt:

$$(12) \quad |D_k - \sqrt{1 + p_k^2 + q_k^2} \Delta\omega_k| < \delta \cdot \Delta\omega_k$$

kleiden. Schreibt man alsdann:

$$\sum_{k=1}^n D_k - \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + p_k^2 + q_k^2} \Delta\omega_k = \sum_{k=1}^n (D_k - \sqrt{1 + p_k^2 + q_k^2} \Delta\omega_k)$$

und benutzt wieder den Satz vom Absolutwerte einer Summe, so folgt mit Rücksicht auf (12):

$$(13) \quad \left| \sum_{k=1}^n D_k - \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + p_k^2 + q_k^2} \cdot \Delta\omega_k \right| < \delta \cdot \sum_{k=1}^n \Delta\omega_k.$$

Hieraus geht hervor, daß sich für  $\lim \varepsilon = 0$  die Summen  $\Sigma D_k$  der  $D_k$ , d. h. die Inhalte der Facettenflächen derselben Grenze nähern, wie die Summenwerte:

$$(14) \quad \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + p_k^2 + q_k^2} \Delta\omega_k.$$

Da sich nämlich die Summe in (13) rechts für  $\lim \varepsilon = 0$  dem Werte  $\omega$  des Inhaltes von  $B$  nähert und die Auswahl von  $\delta$  freisteht, so sind für alle *ausreichend* klein gewählten  $\varepsilon$  je zwei zur gleichen Teilung gehörende Werte (14) und  $\Sigma D_k$  *beliebig* wenig voneinander verschieden. Dies aber würde nicht zutreffen, falls die Werte  $\Sigma D_k$  einer anderen Grenze zustreben wie die Summen (14) oder sich überhaupt keiner Grenze annähern.

Die Grenze der Werte (14) und damit der Inhalte der Facettenflächen ist nun das Integral:

$$(15) \quad \int^{(B)} \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} d\omega.$$

Indem wir den Grenzwert der Inhalte der Facettenflächen als „Inhalt“ des auszumessenden Stückes unserer krummen Fläche auffassen, sind wir zu dem Ergebnis gelangt: *Unter den betreffs der Funktion  $f(x, y)$  gemachten Voraussetzungen hat das zum Bereiche  $B$  gehörende Stück der krummen Fläche der Gleichung  $z = f(x, y)$  einen Flächeninhalt, der berechenbar ist als Wert des auf  $B$  bezogenen Flächenintegrals (15) und also nach (6) S. 97 auch als Doppelintegral z. B. in der Gestalt darstellbar ist:*

$$(16) \quad \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} dy \right) dx.$$

In I, §23 war eine Darstellung der Fläche durch drei Gleichungen:

$$(17) \quad x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v)$$

mittelst zweier unabhängiger Variablen  $u, v$  besprochen. Der Bereich  $B$  werde durch die beiden ersten Gleichungen nach den Darlegungen von S. 101 ff. auf einen Bereich  $B'$  der  $u, v$ -Ebene abgebildet. In diesem Bereiche  $B'$  mögen die  $\varphi(u, v)$ ,  $\psi(u, v)$  und ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung die S. 101 ff. aufgestellten Bedingungen befriedigen; insbesondere soll also die Funktionaldeterminante  $D(\varphi, \psi)$  in  $B'$  nicht verschwinden. Dann können wir das Integral (15) bzw. (16) leicht auf die Variablen  $u, v$  transformieren.

Zunächst liefern die Differentiale  $du$  und  $dv$  die drei totalen Differentiale:

$$dx = \varphi_u' du + \varphi_v' dv, \quad dy = \psi_u' du + \psi_v' dv, \quad dz = \chi_u' du + \chi_v' dv,$$

drei Gleichungen, aus denen man durch Elimination der  $du$  und  $dv$  findet:

$$(18) \quad D(\psi, \chi) dx + D(\chi, \varphi) dy + D(\varphi, \psi) dz = 0,$$

unter  $D$  die Funktionaldeterminanten verstanden. Hieraus folgt für die bei konstantem  $y$  bzw.  $x$  zu berechnenden Differentiale  $\partial_x z$ ,  $\partial_y z$ :

$$D(\psi, \chi) dx + D(\varphi, \psi) \partial_x z = 0, \quad D(\chi, \varphi) dy + D(\varphi, \psi) \partial_y z = 0.$$

Da  $D(\varphi, \psi)$  in  $B'$  nicht verschwindet, so berechnet man:

$$f_x' = \frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{D(\psi, \chi)}{D(\varphi, \psi)}, \quad f_y' = \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{D(\chi, \varphi)}{D(\varphi, \psi)}.$$

Aus (17) S. 107 ergibt sich nun unmittelbar: *Der zunächst durch das Integral (15) gegebene Flächeninhalt ist als Inhalt des dem Bereiche  $B'$  entsprechenden Stückes der krummen Fläche in den Variablen  $u, v$  darstellbar durch:*

$$(19) \quad \int^{(B')} \sqrt{D(\varphi, \psi)^2 + D(\psi, \chi)^2 + D(\chi, \varphi)^2} \cdot d\omega',$$

ein Integral, das sich natürlich auch wieder als Doppelintegral, bezogen auf den Bereich  $B'$ , darstellen läßt.

Wir können endlich noch ohne jede wesentliche Änderung die Betrachtung von S. 107 aus der Ebene auf unsere krumme Fläche übertragen. Wir gehen dabei von einer auf der Fläche gegebenen eindeutigen und stetigen Funktion  $F(x, y, z)$  aus und gelangen zur Auffassung eines auf die krumme Fläche bezogenen Flächenintegrals:

$$(20) \quad \int^{(B)} F(x, y, z) \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} d\omega,$$

das sich bei Gebrauch der  $u, v$  so darstellt:

$$(21) \quad \int^{(B')} F(\varphi, \psi, \chi) \sqrt{D(\varphi, \psi)^2 + D(\psi, \chi)^2 + D(\chi, \varphi)^2} d\omega'.$$

**6. Raumintegrale und dreifache Integrale.** Die Entwicklungen der §§ 2, 3 und 4 über Flächen- und Doppelintegrale sind auf „Raumintegrale“ und „dreifache Integrale“ übertragbar. Das rechtwinklige Koordinatensystem sei im Raume so angeordnet, daß die  $x, y$ -Ebene horizontal verläuft. Es sei ein endlicher und abgeschlossener räumlicher Bereich  $B$  vorgelegt und in diesem Bereiche eine eindeutige und gleichmäßig stetige Funktion  $f(x, y, z)$ . Man zerlege  $B$  in  $n$  Teilbereiche, deren Rauminhalte  $\Delta\tau_1, \Delta\tau_2, \dots, \Delta\tau_n$  seien\*). Ein dem Bereiche  $\Delta\tau_k$  angehörender Punkt sei  $(x_k, y_k, z_k)$ . Man bilde alsdann die Summe:

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta\tau_k,$$

welche für jede Raumteilung und Auswahl der Punkte  $(x_k, y_k, z_k)$  einen bestimmten endlichen Wert hat. Schreiben wir jetzt nach Auswahl einer positiven Zahl  $\varepsilon$  vor, daß das Maximum der Entfernung zweier Randpunkte in keinem Bereiche  $\Delta\tau_k$  größer als  $\varepsilon$  sein soll, so wiederholen sich für  $\lim \varepsilon = 0$  die Betrachtungen von S. 93 ff., und wir finden, daß die Summen (1) für  $\lim \varepsilon = 0$  einer bestimmten endlichen Grenze zustreben. Wir bezeichnen diese Grenze durch:

$$(2) \quad \lim_{\varepsilon=0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta\tau_k = \int^{(B)} f(x, y, z) d\tau$$

\*) Die Erklärung des Rauminhaltes ist oben (S. 94 ff.) nur erst für speziell gebaute räumliche Bereiche durch Flächenintegrale gegeben, kann indessen leicht auch auf andere Gestalten der räumlichen Bereiche verallgemeinert werden (vgl. die S. 80 gegebene Entwicklung über den Inhalt ebener Bereiche).

und nennen sie das auf den Bereich  $B$  bezogene „Raumintegral“ des Differentials  $f(x, y, z) d\tau$ .

Zum Aufbau der dreifachen Integrale legen wir durch  $B$  eine Horizontalebene der Koordinate  $z$ , welche  $B$  in einem ebenen Bereiche  $B_z$  schneidet. Für  $B_z$  bilde man nach S. 94 ff. das Flächen- bzw. Doppelintegral:

$$(3) \quad \int_{(B_z)} f(x, y, z) d\omega = \int_{g_1(z)}^{g_2(z)} \left( \int_{h_1(y,z)}^{h_2(y,z)} f(x, y, z) dx \right) dy,$$

wobei natürlich die Grenzen als von dem gewählten  $z$  abhängig anzusehen sind. Wenn, wie wir annehmen, die Funktionen  $g_i(z)$  und  $h_i(y, z)$  gleichmäßig stetig sind, so liegt in (3) eine stetige Funktion von  $z$  vor\*). Sind die extremen  $z$ -Koordinaten des Bereiches  $B$  durch  $z = a$  und  $z = b > a$  gegeben, so wolle man die stetige Funktion (3) zwischen diesen Grenzen integrieren und gelangt so zu dem auf unseren Bereich  $B$  bezogenen „dreifachen Integrale“:

$$(4) \quad \int_a^b \left( \int_{g_1(z)}^{g_2(z)} \left( \int_{h_1(y,z)}^{h_2(y,z)} f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz.$$

Durch Wiederholung der Überlegungen von S. 98 ergibt sich, daß der Wert des dreifachen Integrals (4) gleich dem des Raumintegrals (2) ist. Hieraus geht dann weiter leicht hervor, daß bei den vorliegenden Voraussetzungen beliebige Abänderung der Integrationsfolge ohne Wertänderung des dreifachen Integrals statthaft ist.

Die Einführung neuer Variablen  $u, v, w$  vermöge dreier Gleichungen:

$$(5) \quad x = \varphi(u, v, w), \quad y = \psi(u, v, w), \quad z = \chi(u, v, w)$$

in unsere Integrale ist weit umständlicher als die entsprechende Entwicklung von S. 101 ff. Wir deuten die  $u, v, w$  als rechtwinklige Koordi-

\*) Es gelte für zwei Bereiche  $B_{z_1}$  und  $B_{z_2}$  die Bedingung  $|z_2 - z_1| \leq \lambda$ . Man verstehe unter  $B'_{z_1}$  den Teil von  $B_{z_1}$ , der senkrecht über oder unter  $B_{z_2}$  liegt und nenne den überragenden Teil  $B''_{z_1}$ ; nach entsprechender Vorschrift zerlege man  $B_{z_2}$  in  $B'_{z_2}$  und  $B''_{z_2}$ . Dann ist erstens zufolge der gleichmäßigen Stetigkeit von  $f(x, y, z)$  die Differenz:

$$\left| \int_{(B'_{z_1})} f(x, y, z_1) d\omega - \int_{(B'_{z_2})} f(x, y, z_2) d\omega \right|$$

durch hinreichend kleines  $\lambda$  beliebig klein zu machen. Zweitens können wegen der Stetigkeit der in den Integralgrenzen stehenden Funktionen die Inhalte von  $B''_{z_1}$  und  $B''_{z_2}$  durch hinreichend kleines  $\lambda$  gleichfalls beliebig klein gemacht werden. Daraus folgt dann die Behauptung des Textes.

naten in einem besonderen Raume, in dem sich vermöge der Beziehungen (5) der Bereich  $B$  auf einen endlichen Bereich  $B'$  eindeutig und stetig abbilde. In  $B'$  werden dann  $\varphi, \psi, \chi$  als *eindeutige und gleichmäßig stetige Funktionen* vorausgesetzt, die *eindeutige und gleichmäßig stetige partielle Ableitungen erster Ordnung*  $\varphi'_u, \psi'_u, \chi'_u, \varphi'_v, \dots$  besitzen mögen. Wir nehmen weiter an, daß die drei *positiv zu nehmenden Wurzeln*:

$$(6) \quad U = \sqrt{\varphi'_u{}^2 + \psi'_u{}^2 + \chi'_u{}^2}, \quad V = \sqrt{\varphi'_v{}^2 + \psi'_v{}^2 + \chi'_v{}^2}, \quad W = \sqrt{\varphi'_w{}^2 + \psi'_w{}^2 + \chi'_w{}^2}$$

in  $B'$  nirgends verschwinden.

Den drei Ebenenscharen, die parallel zu den Koordinatenebenen den Bereich  $B'$  durchsetzen, entsprechen drei Flächenscharen des Bereiches  $B$ , die wir durch die Symbole  $F_u, F_v, F_w$  bezeichnen. Die zu einem konstanten Werte  $u$  gehörende Fläche  $F_u$  wird dann durch die drei Gleichungen (5) mit diesem  $u$  und mit variablen  $v, w$  dargestellt, eine Angabe, die man leicht auf  $F_v$  und  $F_w$  überträgt. Zwei Flächen verschiedener Scharen, etwa eine  $F_v$  und eine  $F_w$ , schneiden sich in einer Kurve  $K_{v,w}$ , die durch (5) mittels der Variablen  $u$  dargestellt wird und einer zur  $u$ -Achse parallelen Geraden des Bereiches  $B'$  entspricht. Die drei durch den einzelnen Punkt  $(x, y, z)$  von  $B$  hindurchlaufenden Flächen  $F_u, F_v, F_w$  bilden drei vermitteltst ihrer Tangentialebenen zu messende Neigungswinkel, die drei rechten Winkeln des Bereiches  $B'$  entsprechen. Wir setzen voraus, daß jene drei Neigungswinkel überall in  $B$  von 0 und  $\pi$  verschieden sind, und können diese Annahme auch dahin aussprechen, daß die drei durch den einzelnen Punkt  $(x, y, z)$  hindurchlaufenden Kurven  $K_{v,w}, K_{w,u}, K_{u,v}$  daselbst Tangenten haben, die niemals (d. h. für keinen Punkt des Bereiches  $B$ ) in einer und derselben Ebene liegen.

Wie oben läßt sich diese Annahme durch das Nichtverschwinden eines Ausdrucks charakterisieren, den wir als „*Funktionaldeterminante*“ der  $\varphi, \psi, \chi$  bezeichnen werden. Geben wir der Tangente der Kurve  $K_{v,w}$  im Punkte  $(x, y, z)$  die Richtung wachsender  $u$ , so sind nach I, 325 die Richtungskosinus der Tangente  $\frac{\varphi'_u}{U}, \frac{\psi'_u}{U}, \frac{\chi'_u}{U}$ ; entsprechend stellen sich die Richtungskosinus der beiden anderen Tangenten dar. Tragen wir jetzt auf den Tangenten in den gewählten Richtungen drei Strecken bzw. der Längen  $U, V, W$  ab, so haben die Endpunkte dieser drei Strecken die Koordinaten  $(x + \varphi'_u, y + \psi'_u, z + \chi'_u), (x + \varphi'_v, \dots), (x + \varphi'_w, \dots)$ . Unsere Annahme über die Tangentenrichtungen können wir dann dadurch zum Ausdruck bringen, daß wir fordern, das durch den Punkt  $(x, y, z)$  und jene drei Streckenendpunkte gebildete Tetraeder habe stets einen von 0 verschiedenen Inhalt. Nach „A. G.“ S. 110 berechnet sich aber der sechsfache Inhalt  $6T$  des Tetraeders zu:

$$6T = \pm D(\varphi, \psi, \chi),$$

wo  $D(\varphi, \psi, \chi)$  der folgende Ausdruck ist:

(7)  $D(\varphi, \psi, \chi) = \varphi_u \psi_v \chi_w + \varphi_v \psi_w \chi_u + \varphi_w \psi_u \chi_v - \varphi_w \psi_v \chi_u - \varphi_v \psi_u \chi_w - \varphi_u \psi_w \chi_v$   
 und die „Funktionaldeterminante“ der drei Funktionen (5) genannt wird. Als eine weitere Eigenschaft der Funktionen (5) merken wir hiernach an, daß ihre Funktionaldeterminante in  $B'$  nirgends verschwindet.

Um die Umrechnung des Integrals (4) zu vollziehen, zerlegen wir den Übergang von  $B$  zu  $B'$  in drei Schritte, indem wir zunächst von den  $x, y, z$  zu den Variablen  $u, y, z$  gehen, sodann zu den  $u, v, z$  und endlich zu den  $u, v, w$ . Hierbei kommen ähnlich wie S. 103 ff. noch zwei (sogleich unter dem Texte zu nennende) Bedingungen betreffs der Funktionen (5) zur Benutzung, die jedoch ohne wesentliche Bedeutung sind\*). Den beiden zur Vermittlung dienenden Systemen der Variablen entsprechen zwei zwischen  $B$  und  $B'$  tretende Bereiche  $B''$  und  $B'''$  in den betreffenden Räumen; diese beiden Bereiche sind nacheinander als Integrationsbereiche zu benutzen. Da es übrigens recht umständlich sein würde, für die Integralgrenzen stets besondere Bezeichnungen zu wählen, so wollen wir die Grenzen der Integrale bei den folgenden Rechnungen nicht mit anschreiben, beziehen uns vielmehr einfach darauf, daß die Integrationsbereiche die eben genannten  $B''$  und  $B'''$  sind.

Zur Einführung von  $u$  statt  $x$  löst man die zweite und dritte Gleichung (5) nach  $v$  und  $w$ :

$$v = \Psi(y, z, u), \quad w = X(y, z, u)$$

und trägt diese Ausdrücke für  $v$  und  $w$  in die erste Gleichung ein:

$$(8) \quad x = \varphi(u, \Psi(y, z, u), X(y, z, u)).$$

Das innere Doppelintegral (4) nimmt bei Übergang zu  $u$  die Form an:

$$(9) \quad \int \left( \int f(\varphi(u, \Psi(y, z, u), X(y, z, u)), y, z) \frac{dx}{du} du \right) dy.$$

Aus (8) folgt dabei:

$$(10) \quad \frac{dx}{du} = \varphi'_u + \varphi'_v \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial u} + \varphi'_w \cdot \frac{\partial X}{\partial u}.$$

Da aber die rechts stehenden partiellen Ableitungen von  $v = \Psi$  und  $w = X$  bei konstanten  $y$  und  $z$  zu berechnen sind, so ergibt sich aus der zweiten und dritten Gleichung (5):

$$0 = \psi'_u + \psi'_v \frac{\partial \Psi}{\partial u} + \psi'_w \frac{\partial X}{\partial u}, \quad 0 = \chi'_u + \chi'_v \frac{\partial \Psi}{\partial u} + \chi'_w \frac{\partial X}{\partial u},$$

\*) Sie können entsprechend wie oben durch Zerlegung von  $B$  und Änderung des Koordinatensystems der  $x, y, z$  umgangen werden.

woraus man folgende Ausdrücke der fraglichen partiellen Ableitungen bestimmt\*):

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u} = \frac{\psi_w' \chi_u' - \psi_u' \chi_w'}{\psi_v' \chi_w' - \psi_w' \chi_v'}, \quad \frac{\partial X}{\partial u} = \frac{\psi_u' \chi_v' - \psi_v' \chi_u'}{\psi_v' \chi_w' - \psi_w' \chi_v'}.$$

Durch Eintragung in (10) folgt:

$$(11) \quad \frac{dx}{du} = \frac{D(\varphi, \psi, \chi)}{\psi_v' \chi_w' - \psi_w' \chi_v'}.$$

Wir nehmen nun in (9) Umkehrung der Integrationsfolge vor:

$$(12) \quad \int \left( \int f(\varphi(u, \Psi(y, z, u), X(y, z, u)), y, z) \frac{dx}{du} dy \right) du$$

und vollziehen den Übergang zu  $u, v, z$ . Zu diesem Zwecke berechnen wir  $w$  aus der dritten Gleichung (5):

$$(13) \quad w = \Phi(u, v, z)$$

und tragen diesen Ausdruck in die zweite ein:

$$(14) \quad y = \psi(u, v, \Phi(u, v, z)).$$

Der Bedeutung von (12) entspricht es dann, bei konstanten  $u$  und  $z$  die Variable  $y$  im inneren Integral durch  $v$  zu ersetzen, wodurch dieses Integral die Form:

$$\int f(\varphi(u, v, \Phi), \psi(u, v, \Phi), z) \frac{dx}{du} \cdot \frac{dy}{dv} dv$$

annimmt, unter  $\Phi$  die in (13) rechts stehende Funktion verstanden. Dabei folgt (wegen der konstanten  $u$  und  $z$ ) aus (14):

$$\frac{dy}{dv} = \psi_v' + \psi_w' \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial v},$$

und es berechnet sich die Ableitung von  $w = \Phi$  nach  $v$  (wieder wegen der konstanten  $u, z$ ) so\*\*):

$$0 = \chi_v' + \chi_w' \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v} = -\frac{\chi_v'}{\chi_w'}.$$

Unter Zusammenfassung finden wir:

$$(15) \quad \frac{dx}{du} \cdot \frac{dy}{dv} = \frac{D(\varphi, \psi, \chi)}{\chi_w'}.$$

\*) Der Nenner in den folgenden Quotienten gilt als von 0 verschieden.

\*\*) Hier tritt als zweite Bedingung auf, daß  $\chi_w'$  in  $B'$  nirgends verschwinden soll.

und unser dreifaches Integral nimmt unter nochmaliger Abänderung der Integrationsfolge die Gestalt an:

$$(16) \quad \int \left( \int \left( \int f(\varphi(u, v, \Phi), \psi(u, v, \Phi), z) \cdot \frac{D(\varphi, \psi, \chi)}{\chi_w} dz \right) dv \right) du.$$

Wir transformieren endlich das innere Integral von  $z$  auf  $w$  und gelangen leicht zum Schlusse: *Bei Transformation des dreifachen Integrals (4) auf die neuen Variablen  $u, v, w$  nimmt dasselbe die Gestalt an:*

$$(17) \quad \int_{a'}^{b'} \left( \int_{\gamma_1(u)}^{\gamma_2(u)} \left( \int_{\eta_1(u, v)}^{\eta_2(u, v)} f(\varphi, \psi, \chi) D(\varphi, \psi, \chi) dw \right) dv \right) du,$$

so daß auch hier die Funktionaldeterminante im Integral als Faktor auftritt; das Integral bezieht sich auf den Bereich  $B'$ , von dem also die in (17) wieder angeführten Integralgrenzen entsprechend dem oben beschriebenen Aufbau des Integrals (4) geliefert werden. Als Transformationsformel für das Raumintegral schließt sich an:

$$(18) \quad \int^{(B)} f(x, y, z) d\tau = \int^{(B')} f(\varphi, \psi, \chi) \cdot |D(\varphi, \psi, \chi)| d\tau'.$$

**7. Flächendifferentiale und Raumdifferentiale.** Für zwei einander entsprechende Teilbereiche  $\Delta\omega$  und  $\Delta\omega'$  der S. 101 ff. betrachteten ebenen Bereiche  $B$  und  $B'$  bestand die Relation:

$$(1) \quad \Delta\omega = |D(\varphi(u_0, v_0), \psi(u_0, v_0))| \Delta\omega',$$

unter  $(u_0, v_0)$  einen geeignet gewählten Punkt von  $\Delta\omega'$  verstanden. Wir wählen jetzt insbesondere den Teilbereich  $\Delta\omega'$  als ein Rechteck, dessen Seiten zu den Achsen der  $u, v$ -Ebene parallel sind. Die Ecken mögen bei  $(u, v)$ ,  $(u + \Delta u, v)$ ,  $(u + \Delta u, v + \Delta v)$ ,  $(u, v + \Delta v)$  liegen, die  $\Delta u$  und  $\Delta v$  mögen der Bequemlichkeit halber positiv gewählt sein. Auch wollen wir, was nötigenfalls durch Zeichenwechsel einer der Variablen  $u, v$  erreichbar ist, die Funktionaldeterminante  $D(\varphi, \psi)$  in  $B'$  als positiv voraussetzen; bei der Abbildung von  $B'$  auf  $B$  findet dann keine Umlegung der Winkel statt. An Stelle von (1) tritt als Gleichung zwischen den Inhalten einander entsprechender Teilbereiche:

$$(2) \quad \Delta\omega = D(\varphi(u_0, v_0), \psi(u_0, v_0)) \Delta u \Delta v.$$

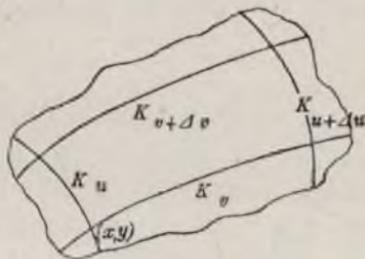


Fig. 23.

Dabei ist also  $\Delta\omega$  der Inhalt eines „Kurvenvierecks“ im Bereiche  $B$ , welches durch die beiden Kurvenpaare  $K_u, K_{u+\Delta u}, K_v, K_{v+\Delta v}$  begrenzt ist (s. Fig. 23). Die Koordinaten der Ecken dieses Vierecks sind:

$$(3) \quad \begin{cases} x = \varphi(u, v), & y = \psi(u, v) \\ x + \Delta x_1 = \varphi(u + \Delta u, v), & y + \Delta y_1 = \psi(u + \Delta u, v), \\ x + \Delta x_2 = \varphi(u, v + \Delta v), & y + \Delta y_2 = \psi(u, v + \Delta v), \\ \dots & \dots \end{cases}$$

Beim Grenzübergange, der zu den Flächenintegralen führt, haben wir nun die Größen  $\Delta u$  und  $\Delta v$  als variabel und gegen die Grenze 0 abnehmend uns vorzustellen. Wir schreiben dann statt  $\Delta u$  und  $\Delta v$  auch  $du$  und  $dv$  und bezeichnen diese Größen als „Differential“. Auch  $\Delta \omega' = du \cdot dv$  ist eine variable gegen 0 abnehmende Größe, so daß wir neben der Bezeichnung  $\Delta \omega'$  auch  $d\omega'$  verwenden und mit Rücksicht auf die geometrische Bedeutung  $d\omega'$  als ein „Flächendifferential“ benennen.

Ist  $\varepsilon$  als positive Zahl beliebig klein gewählt, und schreiben wir vor, daß die Diagonale des Rechteckes  $\Delta \omega'$  nicht größer als  $\varepsilon$  sein soll, so nähert sich der Quotient  $\frac{\Delta \omega}{\Delta \omega'}$ , wie der Differentialquotient einer differenzierbaren Funktion, für  $\lim \varepsilon = 0$  einem von der fest zu denkenden Stelle  $(u, v)$  abhängigen eindeutigen endlichen Grenzwerte, der zufolge (2) durch die Funktionaldeterminante:

$$(4) \quad \lim_{\varepsilon=0} \frac{\Delta \omega}{\Delta \omega'} = D(\varphi(u, v), \psi(u, v))$$

im Punkte  $(u, v)$  gegeben ist. Entsprechend den grundlegenden Erklärungen der Differentialrechnung schließen wir hieran folgenden Satz: Das zur Stelle  $(u, v)$  und zum „unabhängigen“ Flächendifferentiale  $d\omega' = du \, dv$  gehörende „abhängige“ Flächendifferential  $d\omega$  sei gegeben durch das Produkt:

$$(5) \quad d\omega = D(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \, du \, dv.$$

Eine geometrische Deutung dieses Differentials  $d\omega$  erhalten wir durch Rückgang auf die Gleichung (7) S. 103, aus der sich ergibt:

$$(6) \quad d\omega = (\sqrt{\varphi_u'^2 + \psi_u'^2} \, du) \cdot (\sqrt{\varphi_v'^2 + \psi_v'^2} \, dv) \cdot \sin(\beta - \alpha).$$

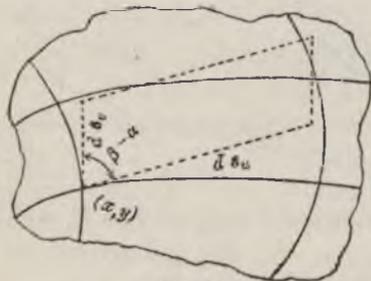


Fig. 24.

Die in den beiden ersten Klammern rechts stehenden Ausdrücke sind die Bogen-differentiale  $ds_u, ds_v$  der durch den Punkt  $(x, y)$  des Kurvenvierecks der Fig. 23 hindurchlaufenden Kurven  $K_v$  und  $K_u$ , die den Differentialen  $du$  und  $dv$  entsprechen (s. I, 285 ff.). Wir tragen diese Bogen-differentiale auf den Kurventangenten, die den Winkel  $(\beta - \alpha)$  miteinander bilden, ab und ergänzen sie, wie Fig. 24 zeigt,

zu einem Parallelogramm. Dann ist das „abhängige“ Differential  $d\omega$  durch den Inhalt dieses Parallelogramms geometrisch gedeutet.

Betreffs der Beziehung des Differentials  $d\omega$  zum Flächeninhalte des Kurvenvierecks  $\Delta\omega$  findet man durch bekannte Schlußweise (s. I, 108 und 157) den Satz: Halten wir beim Grenzübergange an der Bestimmung fest, daß  $\Delta\omega$  und  $d\omega$  sich stets auf das gleiche Rechteck der  $u, v$ -Ebene beziehen, so nähert sich der Quotient des Flächeninhalts  $\Delta\omega$  und des Differentials  $d\omega$  für  $\lim \varepsilon = 0$  dem Grenzwerte 1:

$$(7) \quad \lim_{\varepsilon=0} \frac{\Delta\omega}{d\omega} = 1.$$

Dieses Ergebnis hat für den Aufbau der Flächenintegrale eine wichtige Bedeutung. Wir stellen zunächst unter Rückgang auf den ursprünglichen Ansatz (3) S. 93 des Flächenintegrals folgenden Grundsatz auf: Ersetzen wir in der auf den Bereich  $B$  bezogenen Summe:

$$(8) \quad \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta\omega_k$$

den Faktor  $\Delta\omega_k$  des einzelnen Gliedes durch eine mit  $\Delta\omega_k$  eindeutig bestimmte Zahl  $\Delta'\omega_k$ , von der wir wissen, daß für jeden Index  $k$  die Gleichung zutrifft:

$$(9) \quad \lim_{\varepsilon=0} \frac{\Delta'\omega_k}{\Delta\omega_k} = 1,$$

so nähert sich für  $\lim \varepsilon = 0$  die Summe:

$$(10) \quad \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta'\omega_k.$$

derselben Grenze an, wie die Summe (8). Die Differenz der beiden Summen (10) und (8) kann man nämlich so schreiben:

$$\sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta'\omega_k - \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta\omega_k = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \left( \frac{\Delta'\omega_k}{\Delta\omega_k} - 1 \right) \Delta\omega_k.$$

Der hier rechts stehende Wert kann aber, da  $B$  endlich ist und die Funktionswerte  $f$  als zwischen endlichen Schranken gelegen anzunehmen sind, zufolge (9) durch hinreichend kleines  $\varepsilon$  beliebig klein gemacht werden.

Nach dem aufgestellten Satze ist es erlaubt, an Stelle der Inhalte  $\Delta\omega_k$  der Kurvenvierecke in der Summe (8) die zu diesen Vierecken gehörenden Flächendifferentiale  $d\omega_k$  zu setzen, ohne daß die beim Grenzübergange eintretende Gleichung:

$$(11) \quad \lim_{\epsilon=0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) d\omega_k = \int^{(B)} f(x, y) d\omega$$

*Einbuße erleidet\*).*

Auch noch in anderer Art können wir brauchbare Ersatzgrößen  $\Delta'\omega_k$  erklären. Wenn wir z. B. statt der Bogendifferentiale  $ds_u, ds_v$  die Bogenlängen  $\Delta s_u, \Delta s_v$  des Kurvenvierecks auf den Tangenten abtragen und wieder die Ergänzung zum Parallelogramm vornehmen, so ist dessen Inhalt:

$$(12) \quad \Delta'\omega = \Delta s_u \cdot \Delta s_v \cdot \sin(\beta - \alpha).$$

Für  $\Delta s_u$  aber gilt:

$$\Delta s_u = \int_u^{u+\Delta u} \sqrt{\varphi_u'^2 + \psi_u'^2} du = \sqrt{\varphi_u'(u + \vartheta \Delta u, v)^2 + \psi_u'(u + \vartheta \Delta u, v)^2} \Delta u,$$

so daß der Quotient von  $\Delta s_u$  und  $ds_u$  wegen des Nichtverschwindens von  $(\varphi_u'^2 + \psi_u'^2)$  und der Stetigkeit der Ableitungen die Bedingung:

$$\lim_{\epsilon=0} \frac{\Delta s_u}{ds_u} = \lim \frac{\sqrt{\varphi_u'(u + \vartheta \Delta u, v)^2 + \psi_u'(u + \vartheta \Delta u, v)^2}}{\sqrt{\varphi_u'(u, v)^2 + \psi_u'(u, v)^2}} = 1$$

befriedigt. Aus dieser und der entsprechenden Gleichung für  $\Delta s_v$  und  $ds_v$  folgt, daß auch die durch (12) erklärten Größen die Gleichung (9) erfüllen: *Mit Rücksicht auf den hinterher vorzunehmenden Grenzübergang ist es statthaft, im einzelnen Gliede der Summe (8) den Inhalt  $\Delta\omega$  des Kurvenvierecks zu ersetzen durch den Inhalt eines geradlinigen Parallelogramms, das die Bogenlängen  $\Delta s_u$  und  $\Delta s_v$  der vom Punkte  $(x, y)$  ausziehenden Vierecksseiten zu Seiten und den Winkel  $(\beta - \alpha)$  an der Ecke  $(x, y)$  mit dem Kurvenviereck gemein hat.*

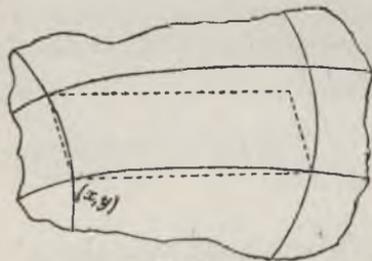


Fig. 25.

Eine andere Ersatzgröße  $\Delta'\omega_k$  können wir so gewinnen: Wir verbinden die Ecke  $(x, y)$  des Kurvenvierecks geradlinig sowohl mit der zweiten unter (3) genannten Ecke als mit der dritten und lassen längs der Diagonale des Kurvenvierecks die Ergänzung zum Parallelogramm eintreten (s. Fig. 25). Der Inhalt  $\Delta'\omega$  dieses Parallelogramms:

\*) Das rechts stehende  $d\omega$  stellt in der vorliegenden Verbindung natürlich nicht das übrigens mit  $d\omega$  bezeichnete Flächendifferential dar, ist vielmehr nur im Verein mit dem Zeichen  $\int$  ein Symbol für den Grenzwert der links stehenden Summe.

$$\Delta' \omega = \Delta x_1 \Delta y_2 - \Delta x_2 \Delta y_1$$

läßt sich zufolge (3) in die Gestalt kleiden:

$$\begin{aligned} \Delta' \omega &= (\varphi'_u(u + \vartheta \Delta u, v) \cdot \psi'_v(u, v + \vartheta_2 \Delta v) \\ &\quad - \varphi'_v(u, v + \vartheta_2 \Delta v) \cdot \psi'_u(u + \vartheta_1 \Delta u, v)) \Delta \omega', \end{aligned}$$

die Zahlen  $\vartheta$  in der bekannten Bedeutung gebraucht. Hieraus folgt leicht, daß auch die auf dieser Grundlage zu gewinnenden  $\Delta' \omega_k$  die Bedingung (9) befriedigen: *Mit Rücksicht auf den zu vollziehenden Grenzübergang ist es statthaft, im einzelnen Gliede der Summe (8) den Inhalt  $\Delta \omega_k$  des Kurvenvierecks zu ersetzen durch den Inhalt des geradlinigen Parallelogramms, welches die drei genannten Ecken mit dem Kurvenviereck gemein hat.*

Die vorstehenden Entwicklungen übertragen sich leicht auf die S. 113ff. betrachtete Beziehung zwischen der  $u, v$ -Ebene und der durch (17) S. 113 dargestellten krummen Fläche. Dem Bereiche  $B'$  der Ebene entspreche der Bereich  $B$  der krummen Fläche. Wir halten an den für  $B'$  bisher gebrauchten Bezeichnungen fest und haben als Inhalt  $\Delta \omega$  des krummflächigen Vierecks, das dem Rechtecke  $\Delta \omega' = \Delta u \cdot \Delta v$  entspricht, nach (19) S. 113:

$$(13) \quad \Delta \omega = \sqrt{D(\psi_0, \chi_0)^2 + D(\chi_0, \varphi_0)^2 + D(\varphi_0, \psi_0)^2} \cdot \Delta \omega',$$

wo sich die rechts stehenden Funktionaldeterminanten auf einen gewissen Punkt  $(u_0, v_0)$  des Rechtecks  $\Delta \omega'$  beziehen. *Es existiert wieder ein Grenzwert:*

$$(14) \quad \lim_{\epsilon=0} \frac{\Delta \omega}{\Delta \omega'} = \sqrt{D(\psi, \chi)^2 + D(\chi, \varphi)^2 + D(\varphi, \psi)^2},$$

*wo rechts der feste Eckpunkt  $(u, v)$  des Rechtecks die Argumente liefert, und mit diesem Grenzwerte erklären wir das zur Stelle  $(u, v)$  und zum „unabhängigen“ Differential  $\Delta \omega' = d\omega' = du dv$  gehörende „abhängige“ Flächendifferential  $d\omega$  durch:*

$$(15) \quad d\omega = \sqrt{D(\psi, \chi)^2 + D(\chi, \varphi)^2 + D(\varphi, \psi)^2} du dv,$$

*wobei wie oben auf die Gültigkeit der Gleichung (7) geschlossen wird.*

Die Richtungskosinus der Tangenten, welche die Seiten des krummflächigen Vierecks in dem zu  $(u, v)$  gehörenden Punkte  $(x, y, z)$  haben, sind:

$$\frac{\varphi'_u}{U}, \frac{\psi'_u}{U}, \frac{\chi'_u}{U} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\varphi'_v}{V}, \frac{\psi'_v}{V}, \frac{\chi'_v}{V},$$

$U$  und  $V$  im Sinne von (6) S. 116 gebraucht; die zu den  $du$  und  $dv$  gehörenden Bogendifferentiale der Randkurven sind  $ds_u = U \cdot du$ ,  $ds_v = V \cdot dv$ . *Die geometrische Deutung des Flächendifferentials  $d\omega$  durch den Inhalt eines ebenen Parallelogramms überträgt sich demnach Wort für Wort aus*

den vorausgehenden Betrachtungen\*). In den endlichen Summen, die zum Ansatz der Flächenintegrale dienen, können die Inhalte  $\Delta\omega_k$  der krummflächigen Vierecke natürlich wieder durch die Flächendifferentiale ersetzt werden. Auch können Ersatzfaktoren, die wir genau wie oben bei den ebenen krummlinigen Vierecken erklären, an Stelle der  $\Delta\omega_k$  treten.

Endlich ist die Übertragung auf den Raum und damit auf die Entwicklungen von S. 114ff. leicht vollzogen. Den räumlichen Bereich  $B'$  zerlegen wir durch Parallelebenen zu den Koordinatenebenen in rechtwinklige Hexaeder, deren einzelnes den Inhalt  $\Delta\tau' = \Delta u \cdot \Delta v \cdot \Delta w$  hat. Der Bequemlichkeit halber nehmen wir die Funktionaldeterminante  $D(\varphi, \psi, \chi)$  in  $B'$  als positiv an. Dann entsprechen den rechtwinkligen ebenflächigen Hexaedern *krummflächige Hexaeder* in  $B$ , und für die Inhalte zusammengehöriger Hexaeder besteht die Relation:

$$(16) \quad \Delta\tau = D(\varphi_0, \psi_0, \chi_0) \Delta\tau'$$

Fassen wir  $\Delta u = du$ ,  $\Delta v = dv$ ,  $\Delta w = dw$  als „Differentiale“, so wird  $\Delta\tau' = d\tau'$  das „*unabhängige Raumdifferential*“, dem als „*abhängiges Raumdifferential*“:

$$(17) \quad d\tau = D(\varphi, \psi, \chi) d\tau'$$

in  $B$  entspricht; als Argumente in der Funktionaldeterminante gelten natürlich wieder die Koordinaten der festbleibenden Ecke  $(u, v, w)$  in  $B'$ . *Geometrisch bedeutet das Raumdifferential  $d\tau$  den Inhalt eines ebenflächigen Hexaeders, das mit dem vorgenannten krummflächigen die  $(u, v, w)$  entsprechende Ecke  $(x, y, z)$  gemein hat, die Kurventangenten des letzteren Hexaeders zu Kanten besitzt und als Kantenlängen die Bogendifferentiale  $ds_u = U du$ ,  $ds_v = V dv$ ,  $ds_w = W dw$  hat. Auch die übrigen Betrachtungen übertragen sich ohne Mühe.*

**8. Zulassung von Unstetigkeiten der Funktion  $f$  und von unendlichen Integrationsbereichen.** An der Stelle  $P$  des ebenen Bereiches  $B$  habe die Funktion  $f(x, y)$  einen Unstetigkeitspunkt, und zwar soll, falls wir eine positive Zahl beliebig groß wählen, in der Umgebung von  $P$  stets noch eine Stelle angebar sein, an der  $|f(x, y)|$  die gewählte Zahl übertrifft. Legen wir um den Punkt  $P$  irgend eine nicht durch diesen Punkt selbst hindurchlaufende Kurve  $K$  herum und schneiden die dadurch eingegrenzte Umgebung von  $P$  aus  $B$  heraus, so möge  $f(x, y)$  in dem abgeschlossenen Restbereiche gleichmäßig stetig sein. Es liegt also in diesem Falle an der Stelle  $P$  isoliert ein „*Unendlichkeitspunkt*“ der Funktion vor (vgl. I, 31 und I, 96).

\*) Die durchzuführende Rechnung kann man auf die Formel für den Sinus des von den Tangenten eingeschlossenen Winkels gründen (s. „A. G.“, S. 95).

Wie bei den einfachen Integralen (S. 61) überzeugen wir uns, daß es unmöglich ist, für die fragliche Funktion auf dem bisherigen Wege ein Integral:

$$(1) \quad \int^{(B)} f(x, y) d\omega$$

zu erklären. Gleichwohl gelingt es manchmal, ein „uneigentliches Integral“ (1) auf einem Umwege zu gewinnen. Zu diesem Zwecke denken wir eine unbegrenzte Kette von Kurven  $K_1, K_2, K_3, \dots$ , von denen jede ganz innerhalb der voraufgehenden verläuft, um  $P$  herum, aber nicht durch  $P$  hindurch, gelegt (Fig. 26). Ist irgend eine Kurve  $K$  gezeichnet, die gleichfalls um den Punkt  $P$  herum, aber nicht durch ihn hindurchläuft, so soll es möglich sein, einen Index  $n$  so anzugeben, daß  $K_n$  und also auch alle folgenden Kurven  $K_{n+1}, \dots$  ganz innerhalb  $K$  verlaufen. Diese Vorschrift ist z. B. in der Art durchführbar, daß wir die Kurven als Kreise des Mittelpunktes  $P$  mit Radien wählen, die eine gegen die Grenze  $0$  abnehmende Zahlenreihe darstellen. Nach Herausschneiden des Inneren der Kurve  $K_n$  bleibt von  $B$  der abgeschlossene Restbereich  $B_n$ , für den:

$$(2) \quad \int^{(B_n)} f(x, y) d\omega$$

einen eindeutig bestimmten endlichen Wert hat. *Kann man beweisen, daß unabhängig von der besonderen Auswahl der Kurven  $K_1, K_2, \dots$  die Werte (2) für  $\lim n = \infty$  einer bestimmten endlichen Grenze zustreben, so bezeichnen wir diesen Grenzwert als ein „uneigentliches Integral“ und behalten für ein solches Integral die Schreibweise (1) bei:*

$$(3) \quad \lim_{n=\infty} \int^{(B_n)} f(x, y) d\omega = \int^{(B)} f(x, y) d\omega.$$

Man sagt in diesem Falle auch, das Integral sei „konvergent“. Übrigens findet die Übertragung der vorstehenden Betrachtung auf Raumintegrale keine Schwierigkeit.

Kann man eine Umgebung von  $P$  eingrenzen, in der die Funktionswerte  $f(x, y)$  alle einerlei Vorzeichen haben, so sind die Verhältnisse besonders einfach: Dann genügt es, die Existenz der Grenze für eine einzige irgendwie gewählte Kurvenschar  $K_1, K_2, \dots$  festzustellen; jede andere Schar  $K'_1, K'_2, \dots$  liefert notwendig die gleiche Grenze. Entsprechen nämlich den Kurven  $K_1, K_2, \dots$  die Restbereiche  $B_1, B_2, \dots$ , den  $K'_1, K'_2, \dots$  aber  $B'_1, B'_2, \dots$ , so gilt folgende Überlegung: Wir wählen  $m$  beliebig groß, und zwar jedenfalls so groß, daß innerhalb  $K_m$  nur noch Werte

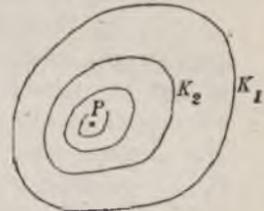


Fig. 26.

$f(x, y)$  von gleichem, etwa positivem Vorzeichen auftreten. Man kann alsdann eine Zahl  $n$  derart angeben, daß  $K'_n$  ganz innerhalb  $K_m$  gelegen ist; weiter kann man eine Zahl  $h$  so wählen, daß  $K_{m+h}$  wieder ganz innerhalb  $K'_n$  liegt. Wegen der positiven Funktionswerte gilt dann:

$$\int_{(B_m)} f(x, y) d\omega < \int_{(B'_n)} f(x, y) d\omega < \int_{(B_{m+h})} f(x, y) d\omega,$$

woraus die Behauptung leicht hervorgeht. Auch die Übertragung dieser Betrachtung auf den Raum ist nicht schwer.

Ist der Bereich  $B$  nicht endlich, so ist es gleichfalls unmöglich, ein zugehöriges Integral (1) auf dem gewöhnlichen Wege zu erklären. Doch gelingt es vielfach, durch einen ähnlichen Umweg wie soeben zur Erklärung eines auf  $B$  bezogenen „uneigentlichen Integrales“ zu gelangen. Wir denken eine unbegrenzte Reihe von endlichen Teilbereichen  $B_1, B_2, \dots$  gebildet, von denen jeder ein Bestandteil des folgenden ist. Auch soll, wenn ein beliebiger endlicher Teilbereich  $B'$  von  $B$  gewählt ist, ein Index  $n$  derart angebar sein, daß  $B'$  ein Teil von  $B_n$  und also auch von jedem folgenden Bereiche ist. Von  $f(x, y)$  gelte, daß diese Funktion in jedem Bereiche  $B_n$  eindeutig und gleichmäßig stetig ist, so daß für jedes  $n$  das Integral (2) einen bestimmten endlichen Wert hat. *Existiert ein von der besonderen Auswahl der Bereiche  $B_n$  unabhängiger Grenzwert* (3) für  $\lim n = \infty$ , so erklären wir diesen Grenzwert als „uneigentliches Integral“ von  $f(x, y) d\omega$  für den nicht endlichen Integrationsbereich  $B$ . Auch hier ist wieder die Übertragung auf Raumintegrale leicht vollzogen. Übrigens sagt man im Falle der Existenz der Grenze (3) auch wieder, das Integral (1) sei „konvergent“\*).

Kommen von irgend einem Bereiche  $B_m$  an im überschießenden Teile jedes weiteren Bereiches  $B_{m+1}, B_{m+2}, \dots$  nur Funktionswerte von einerlei Vorzeichen vor, so genügt es wieder, eine speziell gewählte Kette von Bereichen zur Feststellung eines etwaigen Grenzwertes (3) heranzuziehen; jede andere Auswahl wird zu derselben Grenze führen. Der Beweis wird wie oben geführt. Auch ist die Übertragung dieses Satzes auf den Raum leicht zu vollziehen.

Ein bekanntes Beispiel eines Integrales mit nur positiven Werten  $f(x, y)$  ist:

$$(4) \quad \int_{(B)} e^{-x^2 - y^2} d\omega,$$

\* Insbesondere heißt das Integral (1) „unbedingt“ oder „bedingt“ konvergent, je nachdem, eine endliche Grenze:

$$\lim_{n=\infty} \int_{(B_n)} |f(x, y)| d\omega$$

existiert oder nicht.

wobei wir unter  $B$  den durch die beiden positiven Koordinatenachsen eingegrenzten Quadranten der  $x, y$ -Ebene verstehen wollen. Als Teilbereiche benutzen wir hier erstlich Rechtecke, die durch die Achsen und durch je zwei zu ihnen parallel laufende Gerade eingegrenzt werden. Das auf ein solches Rechteck bezogene Integral können wir dann als Doppelintegral:

$$\int_0^{x_1} \left( \int_0^{y_1} e^{-x^2 - y^2} dy \right) dx$$

schreiben, wo durch die Gleichungen  $x = x_1$  und  $y = y_1$  die den Achsen gegenüberliegenden Rechteckseiten dargestellt sind. Für das innere Integral findet man nun:

$$\int_0^{y_1} e^{-x^2 - y^2} dy = e^{-x^2} \int_0^{y_1} e^{-y^2} dy,$$

und da das rechts als Faktor auftretende Integral unabhängig von  $x$  ist, so liefert die Eintragung in das Doppelintegral:

$$\int_0^{x_1} \left( \int_0^{y_1} e^{-x^2 - y^2} dy \right) dx = \left( \int_0^{y_1} e^{-y^2} dy \right) \left( \int_0^{x_1} e^{-x^2} dx \right),$$

wodurch dasselbe in das Produkt zweier einfacher Integrale mit gleichgebauten Differentialen aufgelöst ist. Nach S. 65 haben die beiden rechts stehenden Integrale für  $\lim x_1 = +\infty$ ,  $\lim y_1 = +\infty$  eine und natürlich dieselbe Grenze; also existiert das Integral (4) für den unbegrenzten Bereich  $B$  und hat den Wert:

$$(5) \quad \int^{(B)} e^{-x^2 - y^2} d\omega = \left( \lim_{x_1 = +\infty} \int_0^{x_1} e^{-x^2} dx \right)^2.$$

Übrigens können wir durch eine andere Auswahl der Teilbereiche sogar den numerischen Wert des Integrals (5) angeben. Mit  $R$  ist in Fig. 27 der Quadrant eines Kreisringes bezeichnet, der durch zwei Kreisquadranten der Radien  $r_0$  und  $r_1 > r_0$  und des Mittelpunktes  $O$ , sowie durch zwei Stücke der Achsen begrenzt ist. In diesem Bereiche  $R$  wollen wir unser Integral als Doppelintegral mittelst Polarkoordinaten aufbauen. Die Transformationsformeln sind:

$$x = r \cos \vartheta, \quad y = r \sin \vartheta,$$

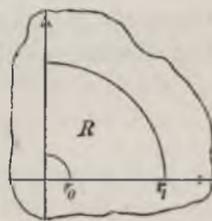


Fig. 27.

wo also  $r$  und  $\vartheta$  an Stelle der sonst mit  $u$  und  $v$  bezeichneten Größen treten. Die Funktionaldeterminante ist:

$$D(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) = r,$$

verschwindet also im Pole; dieserhalb ist zunächst der Kreisbogen mit dem Radius  $r_0$  bei Herstellung des Bereiches  $R$  benutzt. Wir haben nun:

$$d\omega = D(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) dr d\vartheta = r dr d\vartheta,$$

woraus sich für das anzusetzende Integral ergibt:

$$\int_{(R)} e^{-x^2-y^2} d\omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_{r_0}^{r_1} e^{-r^2} r dr \right) d\vartheta.$$

Das innere Integral ist elementar und liefert den von  $\vartheta$  unabhängigen Wert:

$$\int_{r_0}^{r_1} e^{-r^2} r dr = \frac{1}{2} (e^{-r_0^2} - e^{-r_1^2}),$$

so daß wir finden:

$$\int_{(R)} e^{-x^2-y^2} d\omega = \frac{1}{4} \pi (e^{-r_0^2} - e^{-r_1^2}).$$

Für  $\lim r_0 = 0$  und  $\lim r_1 = +\infty$  ergibt sich als Wert des Integrals (4):

$$(6) \quad \int_{(R)} e^{-x^2-y^2} d\omega = \frac{1}{4} \pi.$$

Tragen wir diesen Wert in (5) ein, so folgt durch Quadratwurzelnziehen:

$$(7) \quad \lim_{x_1 \rightarrow +\infty} \int_0^{x_1} e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

Wir sind hiermit zu der in (5) S. 39 aufgestellten nicht-elementaren Funktion zurückgeführt, deren Wert für  $\lim x = +\infty$  wir erkannt haben. Die durch:

$$(8) \quad \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx$$

erklärte eindeutige Funktion von  $x$  trägt wegen ihrer Bedeutung für die Theorie der Fehlerausgleichung den Namen des „Gaußschen Fehlerintegrals“. Sie wächst bei einem von 0 bis  $+\infty$  wachsenden Argumente  $x$  monoton von 0 bis 1. Ein paar Näherungswerte sind:

$$\Phi(0,5) = 0,5205, \quad \Phi(1) = 0,8427, \quad \Phi(1,5) = 0,9661, \quad \Phi(2) = 0,9953$$

aus denen hervorgeht, daß sich die Funktion sehr schnell ihrer oberen Grenze 1 annähert\*).

Erheblich umständlicher wird die Untersuchung uneigentlicher Integrale mit nicht-endlichen Bereichen  $B$ , falls die Funktion  $f(x, y)$  beständigen Zeichenwechseln unterworfen ist\*\*). Ein Beispiel liefern uns die Funktion  $f(x, y) = e^{-xy} \sin x$  und der eben zugrunde gelegte Quadrant  $B$  der  $x, y$ -Ebene. Die Funktion erfährt dann eben wegen ihres Faktors  $\sin x$  bei wachsendem  $x$  beständig Zeichenwechsel. Wir wählen zunächst endliche und von 0 verschiedene Integralgrenzen  $x_1 > x_0 > 0$  und  $y_1 > y_0 > 0$  und benutzen den Satz von der Änderung der Integrationsfolge:

$$\int_{x_0}^{x_1} \left( \int_{y_0}^{y_1} e^{-xy} \sin x \, dy \right) dx = \int_{y_0}^{y_1} \left( \int_{x_0}^{x_1} e^{-xy} \sin x \, dx \right) dy.$$

Für das linke innere Integral gilt:

$$\int_{y_0}^{y_1} e^{-xy} \sin x \, dy = \sin x \int_{y_0}^{y_1} e^{-xy} \, dy = \frac{\sin x}{x} (e^{-xy_0} - e^{-xy_1}).$$

Für das rechts stehende innere Integral knüpfen wir an die zweite Formel (9) S. 14 an, in die wir  $a = -y$  und  $b = 1$  eintragen:

$$\int e^{-xy} \sin x \, dx = -e^{-xy} \frac{\cos x + y \sin x}{1 + y^2}.$$

Wir gelangen auf diese Weise zu dem Ergebnis:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\sin x}{x} (e^{-xy_0} - e^{-xy_1}) \, dx = \int_{y_0}^{y_1} \left( e^{-x_0 y} \frac{\cos x_0 + y \sin x_0}{1 + y^2} - e^{-x_1 y} \frac{\cos x_1 + y \sin x_1}{1 + y^2} \right) dy.$$

Die links unter dem Integralzeichen stehende Funktion von  $x$  ist für alle positiven  $x$  unter Einschluß von  $x = 0$  stetig; das Integral ist also für alle  $x_0 \geq 0$  eine stetige Funktion seiner unteren Grenze  $x_0$ . Das rechts stehende Integral ist nach den Sätzen von S. 96 ff. gleichfalls unter Einschluß von  $x_0 = 0$  eine stetige Funktion von  $x_0$  (da die Funktion unter dem Integralzeichen für die fraglichen Werte  $x_0$  stetig ist). Wir dürfen demnach in der letzten, für alle  $x_0 > 0$  geltenden Gleichung

\*) Eine Tabelle der Werte der Funktion  $\Phi(x)$  und ihrer sechs ersten Ableitungen findet man bei Jahnke und Emde „Funktionentafeln mit Formeln und Kurven“, Leipzig 1909, S. 33.

\*\*) und insbesondere das Integral nur *bedingt konvergent* ist.

auch  $x_0 = 0$  eintragen und finden unter Zerlegung des links stehenden Integrals in eine Differenz:

$$\int_0^{x_1} \frac{\sin x}{x} e^{-x y_0} dx - \int_0^{x_1} \frac{\sin x}{x} e^{-x y_1} dx$$

$$= \operatorname{arc} \operatorname{tg} y_1 - \operatorname{arc} \operatorname{tg} y_0 - \int_{y_0}^{y_1} e^{-x_1 y} \frac{\cos x_1 + y \sin x_1}{1 + y^2} dy.$$

Da die Exponentialfaktoren links zwischen 0 und 1 liegen und mit wachsendem  $x$  abnehmen, so nähern sich die links stehenden Integrale für  $\lim x_1 = +\infty$  endlichen Grenzwerten (s. die Betrachtung von S. 66). Auf das letzte Integral rechts können wir, da der Exponentialfaktor im ganzen Integrationsintervalle positiv ist, den zweiten Mittelwertsatz (17) S. 58 anwenden. Mit Rücksicht auf die im ganzen Intervalle gültige Ungleichung:

$$\left| \frac{\cos x_1 + y \sin x_1}{1 + y^2} \right| < 1 + y_1$$

sowie die Gleichung:

$$\int_{y_0}^{y_1} e^{-x_1 y} dy = \frac{e^{-x_1 y_0} - e^{-x_1 y_1}}{x_1}$$

ergibt der Mittelwertsatz:

$$\left| \int_{y_0}^{y_1} e^{-x_1 y} \frac{\cos x_1 + y \sin x_1}{1 + y^2} dy \right| < (1 + y_1) \cdot \frac{e^{-x_1 y_0} - e^{-x_1 y_1}}{x_1}.$$

Hieraus folgt, daß sich das fragliche Integral für  $\lim x_1 = +\infty$  der Grenze 0 nähert:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-x y_0} dx - \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-x y_1} dx = \operatorname{arc} \operatorname{tg} y_1 - \operatorname{arc} \operatorname{tg} y_0.$$

Schreiben wir diese Gleichung in die Gestalt um:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-x y_0} dx + \operatorname{arc} \operatorname{tg} y_0 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-x y_1} dx + \operatorname{arc} \operatorname{tg} y_1,$$

so ergibt sich als für jedes endliche  $y > 0$  gültig:

$$(9) \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-x y} dx = C - \operatorname{arc} \operatorname{tg} y,$$

unter  $C$  eine von  $y$  unabhängige Konstante verstanden.

Wir untersuchen jetzt das Verhalten der Gleichung (9) nacheinander für die Grenzübergänge  $\lim y = 0$  und  $\lim y = +\infty$ . Da  $e^{-xy}$  für ein fest gewähltes  $y > 0$  mit wachsendem  $x$  abnimmt, so ist die auf der Teilung des Integrationsintervalles durch die Punkte  $x = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$  beruhende Konvergenzbetrachtung von S. 66 auf das Integral (9) anwendbar. Der damaligen Formel (10) entsprechend findet man hier:

$$(10) \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx = \sum_{k=0}^{2\nu-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx + \vartheta \cdot \int_{\frac{1}{2}\nu\pi}^{(2\nu+1)\pi} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx$$

als für jede Anzahl  $\nu$  gültig, wobei  $\vartheta$  eine von  $y$  und  $\nu$  abhängende Zahl des Intervalles  $0 < \vartheta < 1$  ist. Die Glieder der Summe, welche sich durchweg auf *endliche* Integrationsintervalle beziehen, sind nach S. 96 für alle positiven  $y$ , unter Einschluß von  $y = 0$ , stetige Funktionen von  $y$ . Das letzte Glied kann durch ausreichend großes  $\nu$  dem Werte 0 beliebig nahe gebracht werden. Es folgt in bekannter Schlußweise (vgl. z. B. die Entwicklungen in I, 219 ff.) die Stetigkeit des Integrals (10) für alle endlichen positiven  $y$  unter Einschluß von  $y = 0$ . Da sich der in (9) rechts stehende Ausdruck für  $\lim y = 0$  dem Werte  $C$  als Grenze nähert, so finden wir:

$$(11) \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = C.$$

Daß das links stehende Integral einen bestimmten endlichen Wert hat, wurde bereits S. 66 ff. festgestellt.

Für irgend ein  $x$ , das der Ungleichung  $x > x_0 > 0$  mit einem bestimmt gewählten  $x_0$  genügt, ist weiter:

$$\lim_{y=+\infty} e^{-xy} = 0.$$

Für  $\lim y = +\infty$  werden also bis auf das noch zu untersuchende erste Glied der Summe in (10) alle Bestandteile der rechten Seite dieser Gleichung die Grenze 0 aufweisen. Für das erste Glied aber gilt, da  $\sin x \leq x$  im ganzen Integrationsintervalle zutrifft:

$$0 < \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx < \int_0^{\pi} e^{-xy} dx = \frac{1 - e^{-\pi y}}{y},$$

so daß sich auch dieses erste Glied für  $\lim y = +\infty$  der Grenze 0 nähert. Wir haben somit:

$$\lim_{y=+\infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx = 0,$$

und die Formel (9) liefert also:

$$0 = C - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \infty = C - \frac{\pi}{2}, \quad C = \frac{\pi}{2}.$$

Die Eintragung in (11) ergibt das Resultat:

$$(12) \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Durch die Formel:

$$(13) \quad Si(x) = \int_0^x \frac{\sin x}{x} dx$$

erklärt man die unter dem Namen „*Integralsinus*“ bekannte nicht-elementare Funktion (vgl. S. 40). Aus (12) folgt, daß diese Funktion  $Si(x)$  für  $\lim x = +\infty$  den endlichen Grenzwert  $\frac{\pi}{2}$  hat\*).

**9. Integrale mit Parametern. Die Gammafunktion.** Alle Punkte  $(x, y)$ , deren Koordinaten den endlichen Intervallen:

$$a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d$$

angehören, bilden einen abgeschlossenen endlichen Bereich  $B$  von der Gestalt eines Rechtecks. In diesem Bereiche sei  $f(x, y)$  eine eindeutige und gleichmäßig stetige Funktion. Wie S. 96 bewiesen wurde, ist dann:

$$(1) \quad \int_a^b f(x, y) dx = F(y)$$

im Intervalle  $c \leq y \leq d$  eine eindeutige und gleichmäßig stetige Funktion von  $y$ . Sieht man von der Deutung des  $y$  als Ordinate ab, so sagt man auch, in (1) liege ein Integral mit einem „*Parameter*“  $y$  vor; dieses Integral ist dann, wie wir sahen, eine stetige Funktion dieses Parameters.

Wir fragen nun, ob die Funktion  $F(y)$  im Intervalle  $c \leq y \leq d$  auch differenzierbar ist. Dabei setzen wir voraus, daß  $f(x, y)$  im Bereiche  $B$  eine eindeutige und stetige partielle Ableitung  $f'_y(x, y)$  besitze. Dann können wir für irgend ein  $y_1$  des Intervalles  $c \leq y_1 \leq d$  bei stehendem  $x$  den Ansatz bilden:

$$\int_c^{y_1} f'_y(x, y) dy = f(x, y_1) - f(x, c).$$

\*) Auch für die Werte dieser Funktion  $Si(x)$  gibt das S. 129 genannte Werk eine Tafel.

Durch Multiplikation mit  $dx$  und Integration zwischen den Grenzen  $a$  und  $b$  folgt mit Rücksicht auf (1):

$$\int_a^b \left( \int_c^{y_1} f'_y(x, y) dy \right) dx = F(y_1) - F(c).$$

Da nun  $f'_y(x, y)$  in  $B$  gleichmäßig stetig sein sollte, so ist (s. S. 100) links Umordnung der Integrationsfolge statthaft; wir erhalten:

$$F(y_1) = F(c) + \int_c^{y_1} \left( \int_a^b f'_y(x, y) dx \right) dy.$$

Jetzt steht unter dem äußeren Integralzeichen eine stetige Funktion von  $y$ . Differenzieren wir nach  $y_1$ , so liefert die Regel (3) S. 55:

$$F'(y_1) = \int_a^b f'_y(x, y_1) dx.$$

Damit ist der Satz bewiesen: *Das Integral (1), aufgefaßt als Funktion seines dem Intervalle  $c \leq y \leq d$  angehörnden Parameters  $y$ , ist unter der Voraussetzung der Existenz einer in  $B$  stetigen Ableitung  $f'_y(x, y)$  nach dem Parameter differenzierbar, und zwar auf Grund der Regel:*

$$(2) \quad \frac{dF(y)}{dy} = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx,$$

*d. h. die Differentiation darf vor der Integration an der Funktion  $f(x, y)$  vollzogen werden oder die beiden in Rede stehenden Operationen dürfen in ihrer Reihenfolge ausgetauscht werden.*

Die Übertragung der Regel (2) auf uneigentliche Integrale erfordert natürlich stets eine Prüfung der Konvergenz der in Betracht kommenden Integrale. Ein bekanntes und wichtiges Beispiel ist:

$$(3) \quad \Phi_n(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{y-1} (\ln x)^n dx,$$

wo  $n$  irgend eine nicht-negative ganze Zahl sein soll und  $y$  einem beliebig wählbaren endlichen Intervalle  $0 < c \leq y \leq d$  angehören möge, dessen untere Schranke  $c$  zwischen 0 und 1 liege.

An der unteren Grenze des Integrals bleibt  $x^{y-1} (\ln x)^n$  nach I, 195 stetig, falls  $y > 1$  ist, für  $n = 0$  auch noch bei  $y = 1$ ; dagegen hat diese Funktion den Punkt  $x = 0$  zum Unendlichkeitspunkt, falls  $y \leq 1$  gilt (natürlich mit Ausschluß des Gleichheitszeichens im Falle  $n = 0$ ). Nach der Regel (4) S. 62 ist aber das Integral:

$$(4) \quad \int_0^{x_1} e^{-x} x^{y-1} (\ln x)^n dx$$

(mit einstweilen endlichem  $x_1$ ) konvergent, da für irgend eine dem Intervalle  $1 - c < \nu < 1$  entnommene Zahl  $\nu$  das Produkt:

$$x^\nu (x^{y-1} (\ln x)^n) = x^{y-c} (x^{\frac{\nu+c-1}{n}} \cdot \ln x)^n$$

sich wegen  $y - c \geq 0$  und der Regel (11) in I, 195 für  $\lim x = 0$  der Grenze 0 nähert.

Um zweitens das Verhalten des Integrales (4) für  $\lim x_1 = +\infty$  zu untersuchen, knüpfen wir an die in I, 195 bewiesene Gleichung an:

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{n}}} \right) = 0.$$

Hiernach können wir einen Wert  $x_0 > 1$  so wählen, daß der in (5) stehende Quotient für alle  $x > x_0$  zwischen 0 und 1 liegt. Da das für die Grenzen 0 und  $x_0$  berechnete Integral einen endlichen Wert hat, so bleibt nur noch:

$$(6) \quad \int_{x_0}^{x_1} e^{-x} x^{y-1} (\ln x)^n dx = \int_{x_0}^{x_1} e^{-x} x^y \left( \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{n}}} \right)^n dx$$

in seinem Verhalten bei  $\lim x_1 = +\infty$  zu untersuchen. Da die unter dem Integralzeichen stehende Funktion im ganzen Intervalle positiv ist, so hat das Integral (6) einen positiven, mit wachsendem  $x_1$  stetig wachsenden Wert. Dabei gilt zufolge der Auswahl von  $x_0$ :

$$(7) \quad \int_{x_0}^{x_1} e^{-x} x^y \left( \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{n}}} \right)^n dx < \int_{x_0}^{x_1} e^{-x} x^y dx.$$

Wir wählen nun irgend eine der Bedingung:

$$(8) \quad m - y \geq m - d > 2$$

genügende ganze Zahl  $m$  und stellen mit Hilfe der Exponentialreihe (1) in I, 230, der Ungleichung  $x \geq x_0 > 1$  und der Bedingung (8) fest, daß folgende Ungleichungen gelten:

$$(9) \quad e^x > \frac{x^m}{m!}, \quad e^{-x} < \frac{m!}{x^m}, \quad e^{-x} x^y < \frac{m!}{x^{m-y}} < \frac{m!}{x^2}.$$

Hieraus ergibt sich:

$$(10) \quad \int_{x_0}^{x_1} e^{-x} x^y dx < m! \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{x^2} = m! \left( \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1} \right) < \frac{m!}{x_0}.$$

Die hier rechts stehende Zahl ist also eine endliche obere Schranke für die mit wachsendem  $x_1$  beständig wachsende stetige Funktion (6). Damit ist die Konvergenz unseres Integrals (3) bewiesen.

Es ist nun auch leicht, die gleichmäßige Stetigkeit der Funktion (3) im Intervalle  $0 < c \leq y \leq d$  zu beweisen. Man zerlege zu diesem Zwecke das Integrationsintervall durch zwei Punkte  $x_0$  und  $x_1$ , die der Bedingung  $0 < x_0 < 1 < x_1$  genügen sollen, und schreibe:

$$(11) \quad \Phi_n(y) = \int_0^{x_0} e^{-x} x^{y-1} (\ln x)^n dx + \int_{x_0}^{x_1} e^{-x} x^{y-1} (\ln x)^n dx + \int_{x_1}^{+\infty} e^{-x} x^{y-1} (\ln x)^n dx,$$

wobei das nur einmal ausgeschriebene Differential bei den beiden ersten Integralen zu ergänzen ist. Das erste Integral ist, absolut genommen, wegen  $x_0 < 1$  um so größer, je kleiner  $y$  ist. Zuzufolge der Konvergenz des Integrals können wir nach Auswahl einer beliebig kleinen Zahl  $\delta > 0$  die Grenze  $x_0$  so nahe bei 0 wählen, daß:

$$\left| \int_0^{x_0} e^{-x} x^{y-1} (\ln x)^n dx \right| \leq \left| \int_0^{x_0} e^{-x} x^{c-1} (\ln x)^n dx \right| < \delta$$

für alle  $y$  des Intervalles zutrifft. Das dritte Integral in (11), das stets positiv ist, wird wegen  $x_1 > 1$  um so größer sein, je größer  $y$  ist. Wegen der Konvergenz können wir hier  $x_1$  so groß wählen, daß:

$$0 < \int_{x_1}^{+\infty} e^{-x} x^{y-1} (\ln x)^n dx \leq \int_{x_1}^{+\infty} e^{-x} x^{d-1} (\ln x)^n dx < \delta$$

wieder für alle  $y$  des Intervalles gilt. Endlich ist das mittlere Integral in (11) stetig, woraus dann nach bekannter Schlußweise die behauptete Stetigkeit von  $\Phi_n(y)$  folgt.

Sind weiter  $y_0$  und  $y_1$  zwei der Bedingung  $c \leq y_0 < y_1 \leq d$  genügende Zahlen, so folgt aus (11):

$$\int_{y_0}^{y_1} \Phi_n(y) dy = \int_{y_0}^{y_1} \left( \int_0^{x_0} + \int_{x_0}^{x_1} + \int_{x_1}^{+\infty} \right) dy + \int_{y_0}^{y_1} \left( \int_{x_0}^{x_1} e^{-x} x^{y-1} (\ln x)^n dx \right) dy$$

und, da im dritten Integrale Umkehrung der Integrationsfolge statthaft ist, so ergibt sich weiter nach Ausführung einer Integration in bezug auf  $y$ :

$$(12) \quad \int_{y_0}^{y_1} \Phi_n(y) dy = \int_{y_0}^{y_1} \left( \int_0^{x_0} + \int_{x_1}^{+\infty} \right) dy + \int_{x_0}^{x_1} e^{-x} (x^{y_1-1} - x^{y_0-1}) (\ln x)^{n-1} dx.$$

Das erste Integral rechts ist bei der obigen Auswahl der  $x_0$  und  $x_1$ , absolut genommen, kleiner als  $2\delta(d-c)$ , kann also dem Werte 0 beliebig

nahe gebracht werden. Das letzte Integral in (12) konvergiert für  $\lim x_0 = 0$  und  $\lim x_1 = +\infty$ , und man findet:

$$(13) \quad \int_{y_0}^{y_1} \Phi_n(y) dy = \Phi_{n-1}(y_1) - \Phi_{n-1}(y_0).$$

Bei Differentiation nach der oberen Grenze  $y_1$  folgt:

$$\Phi_n(y_1) = \frac{d\Phi_{n-1}(y_1)}{dy_1}.$$

Lassen wir den Index bei  $y_1$  fort und tragen  $(n+1)$  an Stelle von  $n$  in diese Formel ein, so ergibt sich: Die im Intervalle  $0 < c \leq y \leq d$  durch (3) erklärte Funktion  $\Phi_n(y)$  ist differenzierbar, und zwar ist:

$$(14) \quad \frac{d\Phi_n(y)}{dy} = \int_c^{+\infty} e^{-x} x^{y-1} (\ln x)^{n+1} dx,$$

so daß auch hier die Ausführung der Differentiation nach  $y$  an der unter dem Integralzeichen (3) stehenden Funktion vor der Integration statthaft ist.

Die im niedersten Falle  $n = 0$  eintretende Funktion  $\Phi_0(y)$  bezeichnet man durch  $\Gamma(y)$ :

$$(15) \quad \Gamma(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{y-1} dx$$

und nennt sie die „Gammafunktion“<sup>\*)</sup>. Zur Aufstellung einer merkwürdigen Eigenschaft dieser Funktion folgern wir durch partielle Integration (vgl. S. 13):

$$y \int e^{-x} x^{y-1} dx = e^{-x} x^y + \int e^{-x} x^y dx.$$

Tragen wir die Grenzen 0 und  $+\infty$  ein, so verschwindet, da  $y$  zwischen den positiven Schranken  $c$  und  $d$  liegt,  $e^{-x} x^y$  sowohl an der unteren als an der oberen Grenze. Es folgt somit:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^y dx = y \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{y-1} dx,$$

worin der nachfolgende Satz enthalten ist: Die für jedes Intervall  $0 < c \leq y \leq d$  erklärte Funktion  $\Gamma(y)$  hat die Eigenschaft, daß  $\Gamma(y+1)$  gleich dem Produkte  $y$  und  $\Gamma(y)$  ist:

$$(16) \quad \Gamma(y+1) = y \cdot \Gamma(y).$$

<sup>\*)</sup> Das Integral (15) heißt auch „Eulersches Integral zweiter Art“. Das Integral (15) und einige verwandte Integrale betrachtete Euler in den „Institutiones calculi integralis“; der Name „Eulersches Integral“ und die Bezeichnung  $\Gamma$  rühren von Legendre her.

Durch wiederholte Anwendung dieser Formel ergibt sich weiter für jede positive ganze Zahl  $(m-1)$ :

$$(17) \quad \Gamma(y+m-1) = (y+m-2)(y+m-3)\cdots(y+1)y \cdot \Gamma(y).$$

Da  $\Gamma(1) = 1$  aus (15) durch Ausführung der Integration unmittelbar folgt, so ergibt sich, wenn man in (17) für  $y$  den Wert 1 einsetzt, das auch schon aus (7) S. 65 hervorgehende Resultat: *Die Werte der Gammafunktion für die positiven ganzzahligen Argumente sind:*

$$(18) \quad \Gamma(1) = 1, \Gamma(2) = 1!, \Gamma(3) = 2!, \Gamma(4) = 3!, \dots, \Gamma(m) = (m-1)!, \dots$$

Da die zweite Ableitung  $\Gamma''(y) = \Phi_2(y)$  im ganzen Intervalle positiv ist, so ist  $\Gamma'(y) = \Phi_1(y)$  eine mit wachsendem  $y$  beständig wachsende Funktion. Die Funktion  $\Gamma(y)$  hat demnach für positive Argumente  $y$  nur ein einziges zwischen 1 und 2 (und übrigens nahe bei  $y = 1,46$ ) gelegenes Minimum\*) und nähert sich, wie aus den Formeln (16) ff. leicht folgt, sowohl für  $\lim y = 0$  als für  $\lim y = +\infty$  der Grenze  $+\infty$ . Die einfachsten Mittel zur ausführlichen Untersuchung der Gammafunktion liefert übrigens erst die Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Variablen.

**10. Die Integralsätze von Gauß und Stokes.** Eine in der  $x, y$ -Ebene gelegene Kurve  $K$  habe überall eine mit dem Berührungspunkte stetig veränderliche Tangente und damit eine Bogenlänge, deren Maßzahl wir  $s$  nennen; die Richtung, in welcher  $s$  längs der Kurve wächst, sei beliebig, aber fest gewählt. Fassen wir die Koordinaten  $x, y$  der Kurvenpunkte als Funktionen von  $s$  auf (vgl. I, 332), so gilt:

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \alpha,$$

wo  $\alpha$  der Winkel der in der Richtung wachsender  $s$  genommenen Kurventangente gegen die positive  $x$ -Achse ist (man veranschauliche sich die Verhältnisse an Fig. 28). Mit dem Symbol  $\nu$  bezeichnen wir die Normale der Kurve im einzelnen Punkte und zwar in der Richtung, die durch Drehung der gewählten Tangentenrichtung um den Winkel  $+\frac{\pi}{2}$  entsteht. Der durch  $(\nu, x)$  zu bezeichnende Winkel dieser Normalen gegen die positive  $x$ -Achse ist dann:

$$(\nu, x) = \alpha + \frac{\pi}{2},$$

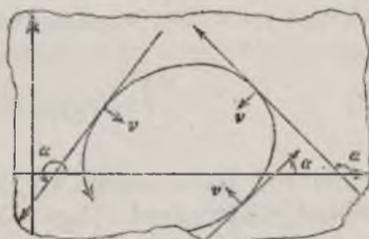


Fig. 28.

\*) S. die Tafel der Gammafunktion für das Intervall  $1 < y \leq 2$  in dem S. 129 genannten Werke S. 31.

und wir können die beiden oben angegebenen Gleichungen ersetzen durch:

$$(1) \quad \frac{dx}{ds} = \sin(\nu, x), \quad \frac{dy}{ds} = -\cos(\nu, x).$$

Es sei jetzt weiter in der  $x, y$ -Ebene ein endlicher Bereich  $B$  vorgelegt, auf dessen Randkurve  $K$  wir die vorstehenden Bestimmungen beziehen wollen. Dabei soll statthaft sein, daß der Rand  $K$  von  $B$  aus mehr als einem geschlossenen Kurvenstücke besteht, wie z. B. in Fig. 29 aus zweien. Man bezeichnet als *positiven Umlaufssinn* um den Bereich denjenigen, bei dem man den Bereich selbst zur *linken* Hand hat. Für die beiden geschlossenen Kurvenstücke der Fig. 29 ist durch einige längs dieser Stücke ange-

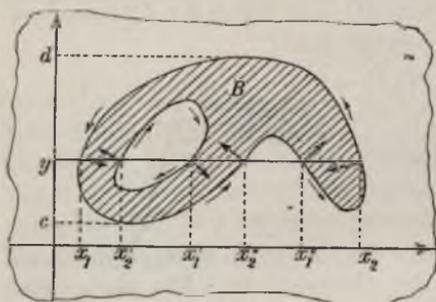


Fig. 29.

brachte Pfeile der positive Umlaufssinn angedeutet. Wählen wir  $s$  als in dieser Richtung wachsend, so wird die oben vereinbarte Richtung der Normalen  $\nu$  nach dem Bereichinneren weisen.

Wir verstehen nun unter  $\psi(x, y)$  eine im abgeschlossenen Bereiche  $B$  eindeutige und gleichmäßig stetige Funktion, die daselbst eine ebensolche Ableitung  $\psi'_x(x, y)$  besitzt. Das auf  $B$  bezogene Flächenintegral von  $\psi'_x(x, y) d\omega$  wollen wir dann nach (8) S. 100 als Doppelintegral:

$$(2) \quad \int^{(B)} \psi'_x(x, y) d\omega = \int_c^d \left( \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \psi'_x(x, y) dx \right) dy$$

schreiben. Dabei haben wir das innere Integral der damaligen Verabredung entsprechend nötigenfalls als ein Symbol für eine Integralsumme zu fassen. So ist z. B. für das in Fig. 29 eingezeichnete  $y$  als inneres Integral die Summe:

$$\int_{x_1}^{x_1'} \psi'_x dx + \int_{x_1''}^{x_2''} \psi'_x dx + \int_{x_1'}^{x_2} \psi'_x dx$$

einzutragen. Da wir übrigens unter dem Integral die Ableitung von  $\psi(x)$  nach  $x$  haben, so ist die Integration ausführbar, und wir finden, indem wir die vorstehende Betrachtung gleich allgemein fassen:

$$(3) \quad \int^{(B)} \psi'_x(x, y) d\omega = \int_c^d (\psi(x_2, y) + \psi(x_2', y) + \dots - \psi(x_1, y) - \psi(x_1', y) - \dots) dy.$$

In dem rechts stehenden Integrale, das sich auf lauter Punkte  $(x, y)$  der Kurve  $K$  bezieht, soll  $s$  als unabhängige Variable eingeführt werden. Dabei beachte man, daß an den Austrittsstellen  $(x_2, y), (x_2', y), \dots$  der zur  $x$ -Achse parallelen Geraden der Ordinate  $y$  aus  $B$  die Richtung wachsender  $s$  nach oben, d. h. in der Richtung wachsender  $y$  weist, nicht jedoch an den Eintrittsstellen  $(x_1, y), (x_1', y), \dots$  (s. Fig. 29). Wir kehren demnach für die negativen Glieder in (3) rechts die Integrationsrichtung, welche zunächst die Richtung wachsender  $y$  hat, um:

$$(4) \int_{(B)} \psi'_x d\omega = \int_c^d (\psi(x_2, y) + \psi(x_2', y) + \dots) dy + \int_d^c (\psi(x_1, y) + \psi(x_1', y) + \dots) dy.$$

Hierdurch erreichen wir, daß bei Einführung von  $s$  als der Integrationsvariablen in jedem Falle nach (1):

$$dy = \frac{dy}{ds} ds = -\cos(\nu, x) ds$$

zu setzen ist. Dabei erschöpfen wir gerade die ganze rechte Seite von (4), indem wir das „Linienintegral“ (s. S. 91) von  $-\psi(x, y) \cos(\nu, x) ds$  über den gesamten Rand  $K$  von  $B$  im positiven Umlaufsinne hinführen:

$$(5) \int_{(B)} \psi'_x(x, y) d\omega = - \int_{(K)} \psi(x, y) \cos(\nu, x) ds.$$

Diese Gleichung wandelt unter der Voraussetzung eindeutiger und stetiger Funktionen  $\psi, \psi'_x$  das links stehende „Flächenintegral“ in ein „Linienintegral“ um. An Stelle der Gleichung (5) schreibt man auch etwas kürzer:

$$(6) \int_{(B)} \psi'_x(x, y) d\omega = \int_{(K)} \psi(x, y) dy,$$

wobei natürlich unter  $dy$  das zur Stelle  $(x, y)$  der Kurve  $K$  und zum Differential  $ds$  derselben gehörende Differential der Ordinate zu verstehen ist. \*)

Der gewonnene Satz bleibt auch dann gültig, wenn die Randkurve  $K$  von  $B$  Einknickungen in endlicher Anzahl besitzt. So liegen z. B. in Fig. 30 zwei Einknickungen vor, die  $K$  in die beiden Teile  $K'$  und  $K''$  zerlegen. Das auf  $K$  bezogene Linienintegral

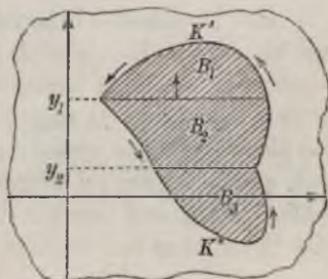


Fig. 30.

\*) Für die hier auftretenden Linien- oder Kurvenintegrale benutzen wir, was sofort verständlich sein wird, eine symbolische Bezeichnung ähnlich derjenigen der Flächenintegrale, indem wir die „Integrationskurve“  $K$  als oberen Index an das Integralzeichen setzen.

ist dann einfach die Summe der beiden auf  $K'$  und  $K''$  bezogenen Integrale. Die beiden der  $x$ -Achse parallelen Geraden der Ordinaten  $y_1$  und  $y_2$  (s. Fig. 30) zerlegen  $B$  in drei Teilbereiche  $B_1, B_2, B_3$ , für die einzeln die durchgeführten Rechnungen in Kraft bleiben. Für die geradlinigen Randstücke dieser Teilbereiche liefert freilich die Formel (4) keine Bestandteile der Randintegrale, doch würden diese Bestandteile, wenn wir sie auf den rechten Seiten der Gleichungen:

$$\int_{(B_i)} \varphi'_x(x, y) d\omega = - \int_{(K_i)} \varphi(x, y) \cos(\nu, x) ds$$

hinzudenken, doch wegen  $(\nu, x) = \frac{\pi}{2}$  verschwinden. Die Summe der drei vorstehenden Gleichungen liefert nun einfach den Satz (5) für unseren Bereich  $B$ .

Benutzt man an Stelle von (2) das Doppelintegral, bei dem die Integration nach  $y$  vorangestellt ist, so gelangt man für eine Funktion  $\varphi(x, y)$ , die mit ihrer Ableitung  $\varphi'_y(x, y)$  in  $B$  eindeutig und gleichmäßig stetig ist, zur Gleichung:

$$\int_{(B)} \varphi'_y(x, y) d\omega = - \int_{(K)} \varphi(x, y) \sin(\nu, x) ds$$

oder in kürzerer Schreibweise:

$$(7) \quad \int_{(B)} \varphi'_y(x, y) d\omega = - \int_{(K)} \varphi(x, y) dx.$$

Durch Subtraktion der Gleichung (7) von (6) stellen wir noch die bald zu benutzende Gleichung her:

$$(8) \quad \int_{(B)} (\varphi'_x - \varphi'_y) d\omega = \int_{(K)} (\varphi(x, y) dx + \psi(x, y) dy).$$

Der „Gaußsche Integralsatz“\*) ist der dem Satze (5) entsprechende, auf räumliche Bereiche  $B$  bezogene Satz. Der Anschaulichkeit halber legen wir zunächst einen endlichen räumlichen Bereich  $B$  mit einer ovalen Oberfläche  $O$  zugrunde, welche überall eine bestimmte, mit dem Berührungspunkte stetig veränderliche Tangentialebene hat. Die Funktion  $\varphi(x, y, z)$  sei im abgeschlossenen Bereiche  $B$  eindeutig und gleichmäßig stetig und besitze daselbst eine ebensolche Ableitung  $\varphi'_x(x, y, z)$ . Mit Benutzung des dreifachen Integrals (4) S. 115 schreiben wir dann:

$$(9) \quad \int_{(B)} \varphi'_x(x, y, z) d\tau = \int_a^b \left( \int_{g_1(z)}^{g_2(z)} \left( \int_{h_1(y,z)}^{h_2(y,z)} \varphi'_x(x, y, z) dx \right) dy \right) dz.$$

\*) S. die Abhandlung „Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum etc.“ in Gauß' Werken Bd. 5, S. 3.

Die Bedeutung der Integralgrenzen mache man sich an Fig. 31 klar. Die zur  $x$ -Achse parallelen Tangenten von  $O$  liefern einen  $B$  umschriebenen Zylinder, welcher in der  $y, z$ -Ebene die aus den beiden Teilkurven  $y = g_1(z)$  und  $y = g_2(z)$  zusammengesetzte Kurve ausschneidet. Sie umgrenzt einen der  $y, z$ -Ebene angehörenden Bereich, der mit  $B'$  bezeichnet werden möge. Der Zylinder berührt die Oberfläche  $O$  längs einer Kurve  $K$ , welche  $O$  in zwei Teiloberflächen  $O_1$  und  $O_2$  der Gleichungen  $x_1 = h_1(y, z)$  und  $x_2 = h_2(y, z)$  zerlegt.

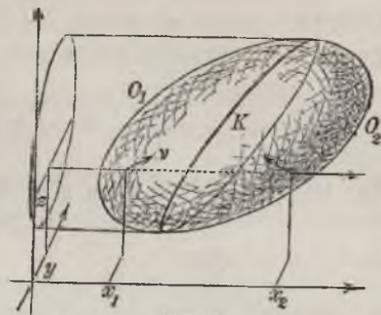


Fig. 31.

Es ist nun erstlich das innere Integral (9) sofort ausführbar:

$$\int_{h_1(y, z)}^{h_2(y, z)} \varphi'_x(x, y, z) dx = \varphi(x_2, y, z) - \varphi(x_1, y, z),$$

wo  $x_2 = h_2(y, z)$  und  $x_1 = h_1(y, z)$  zu setzen ist. Damit aber können wir das Integral (9) in die Differenz zweier auf  $B'$  bezogenen Flächenintegrale umwandeln:

$$(10) \quad \int^{(B')} \varphi'_x(x, y, z) d\tau = \int^{(B')} \varphi(x_2, y, z) d\omega' - \int^{(B')} \varphi(x_1, y, z) d\omega'.$$

Da  $(x_2, y, z)$  ein Punkt der Teiloberfläche  $O_2$  ist, so erscheint es am Platze, das erste Integral in (10) rechts in ein auf  $O_2$  bezogenes Flächenintegral zu transformieren. Um die Gleichung (15) S. 123 und die damaligen Voraussetzungen anwenden zu können, ziehen wir zunächst die Randkurve von  $B'$  ein wenig zusammen und bilden damit einen den Rand von  $B'$  nirgends erreichenden Teilbereich  $\bar{B}'$  von  $B'$ , der die Teiloberfläche  $\bar{O}_2$  von  $O_2$  liefere\*). Wir haben dann als Gleichungen (17) S. 113 von  $\bar{O}_2$ :

$$x = h_2(u, v), \quad y = u, \quad z = v$$

in (15) S. 123 einzutragen und finden als dem „Ebenendifferential“  $d\omega' = du dv = dy dz$  entsprechend das Flächendifferential  $d\omega$  von  $\bar{O}_2$ :

$$(11) \quad d\omega = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h_2}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial h_2}{\partial v}\right)^2} d\omega' = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial h_2}{\partial z}\right)^2} d\omega'.$$

Nun gilt aber, wenn wir die nach dem Bereichinneren gerichtete

\*) Die Maßregel ist nötig, weil, wie wir sogleich sehen werden, der erste Faktor auf der rechten Seite von (15) S. 123 gegen den Rand von  $B$  hin nicht endlich bleibt.

Oberflächennormale durch das Symbol  $\nu$  und den Richtungswinkel von  $\nu$  gegen die positive  $x$ -Achse mit  $(\nu, x)$  bezeichnen, nach I, 327:

$$\cos(\nu, x) = - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial h_2}{\partial z}\right)^2}}.$$

Die Gleichung (11) kann also in die Gestalt gesetzt werden:

$$d\omega' = - \cos(\nu, x) d\omega,$$

und wir erhalten:

$$\int_{(\bar{B}')} \varphi(x_2, y, z) d\omega' = - \int_{(\bar{O}_2)} \varphi(x_2, y, z) \cos(\nu, x) d\omega.$$

Beide Integrale bleiben stetig, wenn wir  $\bar{B}'$  jetzt wieder zu  $B'$  und entsprechend  $\bar{O}_2$  zu  $O_2$  wachsen lassen, so daß die Gleichung besteht:

$$\int_{(B')} \varphi(x_2, y, z) d\omega' = - \int_{(O_2)} \varphi(x_2, y, z) \cos(\nu, x) d\omega.$$

Auf demselben Wege findet man:

$$\int_{(B')} \varphi(x_1, y, z) d\omega' = + \int_{(O_1)} \varphi(x_1, y, z) \cos(\nu, x) d\omega.$$

Damit gewinnen wir aus Gleichung (10) den auf den räumlichen Bereich  $B$  mit der Oberfläche  $O$  bezogenen „Gaußschen Integralsatz“:

$$(12) \quad \int_{(B)} \varphi'_x(x, y, z) d\tau = - \int_{(O)} \varphi(x, y, z) \cos(\nu, x) d\omega,$$

der das links stehende „Raumintegral“ in ein „Flächenintegral“ umwandelt.

Es ist nun die Frage, wie weit wir die Voraussetzungen über die Gestalt der Oberfläche  $O$  von  $B$  verallgemeinern dürfen. Wie bei ebenen Bereichen können wir auch die vorstehenden Rechnungen ohne Mühe in dem Falle durchführen, daß das innere Integral (9) als eine Integralsumme anzusehen ist. Die Oberfläche  $O$  des endlichen Bereiches  $B$  mag demnach irgendwie gestaltet sein, wenn sie nur überall eine mit dem Berührungspunkte stetig veränderliche Tangentialebene hat oder auch (wie wir sogleich hinzusetzen) aus einer endlichen Anzahl von Teiloberflächen  $O', O'', \dots$  besteht, die diese die Tangentialebenen betreffende Bedingung erfüllen. Es mag also  $O$  ein „Polyeder“ mit einer endlichen Anzahl krummer Teilflächen sein. Das Flächenintegral (12) ist dann einfach die Summe der auf die Teilflächen bezogenen Integrale. Den letzten Teil des ausgesprochenen Satzes wolle man sich durch Übertragung der an Fig. 30 angeschlossenen Betrachtung veranschaulichen. Durch jeden Kantenpunkt des Polyeders  $O$  lege man die zur  $x$ -Achse parallele Gerade. Dadurch wird  $B$  in eine endliche Anzahl zylindrischer Teilbereiche  $B_1, B_2, \dots$  der Oberflächen  $O_1, O_2, \dots$  zerlegt, für welche die Gleichungen:

$$\int_{(B)} \varphi'_x(x, y, z) d\tau = - \int^{(0)} \varphi(x, y, z) \cos(\nu, x) d\omega$$

wie oben leicht beweisbar sind. Dabei mag rechter Hand in jedem Falle der auf den Zylindermantel bezogene Teil des Oberflächenintegrals, der ja wegen  $(\nu, x) = \frac{\pi}{2}$  verschwindet, hinzugesetzt werden oder nicht. Die Summe der vorstehenden Formeln liefert den Satz (12) für unseren jetzigen Bereich  $B$ .

Die Übertragung der Formel (5) aus der  $x, y$ -Ebene auf eine krumme Fläche liefert den „Integralsatz von Stokes“<sup>\*)</sup>. Bei der Transformation kommen die Formeln (17) ff. S. 113 zur Verwendung. Zur Darstellung der krummen Fläche seien die Formeln (17) S. 113 mit den beiden unabhängigen Variablen  $u$  und  $v$  zugrunde gelegt; doch wollen wir, um die Bezeichnungen  $\varphi, \psi, \chi$  in anderem Sinne gebrauchen zu können, die Koordinaten der Flächenpunkte  $(x, y, z)$  als Funktionen von  $u$  und  $v$  einfach  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$  schreiben. Auf der Fläche denken wir einen endlichen abgeschlossenen Bereich  $B$  eingegrenzt, dessen Rand mit  $K$  bezeichnet werde. Die Fläche soll zunächst in  $B$  überall eine bestimmte und mit dem Berührungspunkte stetig veränderliche Tangentialebene haben. Ebenso habe  $K$  überall eine bestimmte stetig veränderliche Tangente und damit eine Bogenlänge, oder es soll doch  $K$  aus endlich vielen Stücken bestehen, von denen dies gilt. In der  $u, v$ -Ebene entspreche dem Bereiche  $B$  der endliche Bereich  $B'$  mit der Randkurve  $K'$ . Wir verabreden einen *positiven* Umlaufssinn um  $B'$  genau wie oben (S. 138), indem wir  $x$  durch  $u$  und  $y$  durch  $v$  ersetzen<sup>\*\*)</sup>. Diesen positiven Umlaufssinn übertragen wir auf die Umlaufung von  $B$  und wollen alsdann sogleich in  $B$  die Normalen der krummen Fläche in der Richtung aufgefplantz denken, daß der Umlauf um  $B$  im positiven Sinne mit der Verschiebung in Richtung der aufgefplantzten Normalen eine „rechtsgängige“ Schraubebewegung liefert<sup>\*\*\*)</sup>.

<sup>\*)</sup> Vgl. Stokes „Mathematical and physical papers“, Cambridge 1905, Bd. 5, S. 320.

<sup>\*\*)</sup> Die positive Achse der Ordinaten  $v$  habe gegen die positive Achse der Abszissen  $u$  die übliche Orientierung.

<sup>\*\*\*)</sup> Vgl. „A. G.“ S. 92. Bei der üblichen Anordnung des räumlichen Koordinatensystems (positive  $x$ -Achse nach rechts, positive  $y$ -Achse vom Beschauer fort, positive  $z$ -Achse nach oben gerichtet) wird eine rechtsgängige Schraubebewegung zusammengesetzt aus einer Translation in der Richtung der positiven  $z$ -Achse und einer Drehung um diese Achse, bei der die positive  $x$ -Achse nach der positiven  $y$ -Achse bewegt wird. S. Fig. 32.

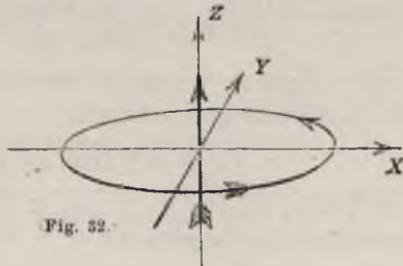


Fig. 32.

Im Bereiche  $B$  soll nun eine eindeutige und gleichmäßig stetige Funktion  $\varphi(x, y, z)$  gegeben sein, die in jedem Punkte  $(x, y, z)$  von  $B$  partielle Ableitungen  $\varphi'_x, \varphi'_y, \varphi'_z$  besitzt\*), welche in  $B$  gleichfalls eindeutig und gleichmäßig stetig sind. Man bilde alsdann das auf die Kurve  $K$  in der Richtung des positiven Umlaufs bezogene Linienintegral:

$$\int^{(K)} \varphi(x, y, z) dx = \int^{(K)} \varphi(x, y, z) \frac{dx}{ds} ds.$$

Hierbei gilt, wenn wir  $u$  und  $v$  als unabhängige Variable einführen und mit  $s'$  die Bogenlänge von  $K'$  bezeichnen:

$$\frac{dx}{ds} ds = \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{ds} \right) ds = \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{ds'} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{ds'} \right) ds',$$

woraus für das angesetzte Linienintegral folgt:

$$\int^{(K)} \varphi(x, y, z) dx = \int^{(K')} \left( \varphi \frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{ds'} + \varphi \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{ds'} \right) ds'$$

oder in abgekürzter Schreibweise:

$$\int^{(K)} \varphi(x, y, z) dx = \int^{(K')} \left( \varphi \frac{\partial x}{\partial u} du + \varphi \frac{\partial x}{\partial v} dv \right).$$

Das letzte Integral läßt sich nun auf Grund von (8) in ein auf  $B'$  bezogenes Flächenintegral umwandeln; wir erhalten:

$$\int^{(K)} \varphi(x, y, z) dx = \int^{(B')} \left( \frac{\partial}{\partial u} \left( \varphi \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( \varphi \frac{\partial x}{\partial u} \right) \right) d\omega'$$

oder bei Entwicklung der rechten Seite unter Benutzung der Regel (5) in I, 163:

$$\int^{(K)} \varphi(x, y, z) dx = \int^{(B')} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) d\omega'.$$

Nun ist aber:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \varphi'_x \frac{\partial x}{\partial u} + \varphi'_y \frac{\partial y}{\partial u} + \varphi'_z \frac{\partial z}{\partial u}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \varphi'_x \frac{\partial x}{\partial v} + \varphi'_y \frac{\partial y}{\partial v} + \varphi'_z \frac{\partial z}{\partial v},$$

so daß sich, wenn wir unter  $D(x, y), \dots$  die Funktionaldeterminanten (S. 102) verstehen, die Gleichung:

$$\int^{(K)} \varphi(x, y, z) dx = \int^{(B')} \left( -\varphi'_y D(x, y) + \varphi'_x D(z, x) \right) d\omega'$$

findet. Endlich vermittelt wieder die Formel (15) S. 123, der wir hier die Gestalt zu geben haben:

$$d\omega = +\sqrt{D(y, z)^2 + D(z, x)^2 + D(x, y)^2} d\omega',$$

\*) Dies setzt natürlich voraus, daß  $\varphi(x, y, z)$  auch in der räumlichen Nachbarschaft von  $B$  gegeben ist.

den Übergang zum krummflächigen Bereiche  $B$ , dessen Flächendifferential  $d\omega$  ist. Unser auf den Rand  $K$  von  $B$  bezogenes Linienintegral läßt sich also in ein auf  $B$  bezogenes Flächenintegral verwandeln:

$$(13) \quad \int^{(K)} \varphi(x, y, z) dx = \int^{(B)} \frac{-\varphi'_y D(x, y) + \varphi'_z D(z, x)}{+\sqrt{D(y, z)^2 + D(z, x)^2 + D(x, y)^2}} d\omega.$$

Die Formel läßt sich noch ein wenig kürzer schreiben. Bezeichnen wir die vorhin im einzelnen Bereichpunkte  $(x, y, z)$  errichtete Flächennormale symbolisch durch  $\nu$ , ihre Richtungswinkel gegen die positiven Achsen aber mit  $(\nu, x)$ ,  $(\nu, y)$ ,  $(\nu, z)$ , so gilt nach (8) in I, 327:

$$\cos(\nu, x) : \cos(\nu, y) : \cos(\nu, z) = D(y, z) : D(z, x) : D(x, y).$$

Indem wir die positiv genommene Wurzel im Nenner der rechten Seite von (13) mit  $W$  bezeichnen, gilt demnach:

$$(14) \quad \cos(\nu, x) = \pm \frac{D(y, z)}{W}, \quad \cos(\nu, y) = \pm \frac{D(z, x)}{W}, \quad \cos(\nu, z) = \pm \frac{D(x, y)}{W},$$

wo entweder nur die oberen oder nur die unteren Vorzeichen gelten. Die Vorzeichenbestimmung geschieht auf Grund einer Kontinuitätsbetrachtung. Drehen wir das Achenkreuz *stetig* um den Nullpunkt, so gelten, da die drei Kosinus (14) nie zugleich verschwinden, beständig die gleichen Vorzeichen. Man drehe nun so, daß die positive  $z$ -Achse parallel und gleichgerichtet mit der Flächennormale  $\nu$  im Punkte  $(x, y, z)$  wird, und daß die positive  $x$ -Achse parallel und gleichgerichtet zur Tangente der durch  $(x, y, z)$  hindurchlaufenden Kurve  $K_\nu$  (s. S. 123), in Richtung wachsender  $u$  genommen, ausfällt. Dann gilt an der betrachteten Stelle (vgl. I, 327):

$$\frac{\partial x}{\partial u} > 0, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial u} > 0.$$

Die letzte Ungleichung ist eine Folge unserer Vereinbarung über die Wahl der Richtung der Normalen  $\nu$ ; die Richtungen der Kurven  $K_\nu$ ,  $K_u$  (genommen nach Seiten wachsender  $u, \nu$ ) und die Normale  $\nu$  bilden ein „Rechtssystem“ (s. „A. G.“, S. 92), wie die positiven Achsen  $x, y, z$ . Da nun nach vollzogener Drehung  $\cos(\nu, z) = +1$  wird, so gilt zufolge der Auswahl der Richtung der Flächennormalen  $\nu$  in der dritten Gleichung (14) und also in allen dreien das „obere“ Vorzeichen.

Die Gleichung (13) nimmt jetzt die Gestalt an:

$$(15) \quad \int^{(K)} \varphi(x, y, z) dx = \int^{(B)} (-\varphi'_y \cos(\nu, z) + \varphi'_z \cos(\nu, y)) d\omega.$$

Zwei weitere Funktionen  $\psi(x, y, z)$ ,  $\chi(x, y, z)$  mögen mit ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung im Bereiche  $B$  dieselben Bedingungen be-

friedigen wie  $\varphi(x, y, z)$ . Unter zyklischer Vertauschung der  $x, y, z$  haben wir dann die beiden (15) entsprechenden Gleichungen:

$$\int^{(K)} \psi(x, y, z) dy = \int^{(B)} (-\psi'_z \cos(\nu, x) + \psi'_x \cos(\nu, z)) d\omega,$$

$$\int^{(K)} \chi(x, y, z) dz = \int^{(B)} (-\chi'_x \cos(\nu, y) + \chi'_y \cos(\nu, x)) d\omega.$$

Durch Addition aller drei Gleichungen folgt als *Ausdruck des „Stokesschen Satzes“*:

$$(16) \quad \int^{(K)} (\varphi dx + \psi dy + \chi dz) = \int^{(B)} \{(\chi'_y - \psi'_z) \cos(\nu, x) + (\varphi'_z - \chi'_x) \cos(\nu, y) + (\psi'_x - \varphi'_y) \cos(\nu, z)\} d\omega.$$

Diese Formel wandelt das links stehende auf die geschlossene Raumkurve  $K$  bezogene „Linienintegral“ in ein „Flächenintegral“ um, das sich auf einen in  $K$  eingespannten krummflächigen Bereich  $B$  bezieht; die Richtung der Normalen  $\nu$  bildet, um diese wichtige Voraussetzung zu wiederholen, mit der Umlaufsrichtung des Linienintegrals eine „Rechtsschraube“.

Der Satz gilt übrigens auch dann, wenn  $B$  eine „Polyederfläche“ mit endlich vielen Teilflächen  $B_1, B_2, \dots$  der Randkurven  $K_1, K_2, \dots$  ist, sofern er nur für jede dieser Teilflächen gilt. Bei der Addition der auf die einzelnen Teilflächen bezogenen Formeln (16) heben sich nämlich je die beiden Linienintegrale, welche zur einzelnen Polyederkante gehören, gegenseitig fort, da jede Kante zweimal und zwar in entgegengesetzten Richtungen als Integrationsbahn dient.

**11. Integration vollständiger Differentiale.** Hat die in einem endlichen Bereiche  $B$  der  $x, y$ -Ebene eindeutige Funktion  $f(x, y)$  daselbst partielle Ableitungen  $f'_x$  und  $f'_y$ , so heißt nach (7) in I, 151 die Summe:

$$(1) \quad df(x, y) = f'_x(x, y) dx + f'_y(x, y) dy$$

das zur Stelle  $(x, y)$  und zu den  $dx, dy$  gehörende „vollständige Differential“ von  $f(x, y)$ . Existieren in  $B$  auch noch stetige Ableitungen  $f''_{xy}$  und  $f''_{yx}$ , so sind diese nach (5) in I, 163 miteinander identisch:

$$(2) \quad f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

Die Umkehrung dieses Prozesses der Bildung eines vollständigen Differentials (1) führt zur Aufgabe der *Integration vollständiger zweigliedriger Differentiale*, die wir näher so zu bezeichnen haben: Es sei ein Differentialausdruck:

$$(3) \quad \varphi(x, y) dx + \psi(x, y) dy$$

mit Funktionen  $\varphi(x, y)$  und  $\psi(x, y)$  vorgelegt, die in einem endlichen Bereiche  $B$  eindeutig und gleichmäßig stetig seien. Wir nehmen an, daß in  $B$  die Ableitungen  $\varphi'_y(x, y)$  und  $\psi'_x(x, y)$  existieren und stetig seien. Soll es alsdann eine Funktion  $f(x, y)$  geben, von der der Ausdruck (3) das vollständige Differential ist, so müssen der Gleichung (2) entsprechend jedenfalls die Funktionen  $\varphi'_y$  und  $\psi'_x$  identisch sein:

$$(4) \quad \varphi'_y(x, y) = \psi'_x(x, y).$$

Wir können nun folgenden Satz beweisen: „Unter der Bedingung (4) existiert eine bis auf eine additive Konstante bestimmte, freilich nicht immer eindeutige Funktion  $f(x, y)$ , von der der Ausdruck (3) das vollständige Differential ist.“

Wir beweisen zunächst die behauptete Bestimmtheit der Funktion  $f(x, y)$ . Ist neben  $f(x, y)$  auch noch  $g(x, y)$  ein „Integral“ des Differentials (3), wie wir kurz sagen wollen, so stimmen die partiellen Ableitungen beider Funktionen in  $B$  überein, so daß  $F(x, y) = g(x, y) - f(x, y)$  daselbst eine Funktion darstellt, deren partielle Ableitungen  $F'_x(x, y)$  und  $F'_y(x, y)$  in  $B$  existieren und zwar überall verschwinden. Sind nun  $(x, y)$  und  $(x + \Delta x, y)$  zwei Bereichspunkte, deren Verbindungsgerade ganz dem Bereiche angehört, so ist die zugehörige „Differenz der Funktion  $F(x, y)$ “:

$$\Delta F(x, y) = F'_x(x + \vartheta \Delta x, y) \Delta x = 0.$$

Entsprechendes gilt für einen zur  $y$ -Achse parallelen Weg des Bereiches  $B$ . Wir nehmen nun an, daß es möglich ist, durch „treppenförmige“ Wege (s. Fig. 33) mit endlich vielen abwechselnd zu den Achsen parallelen Geradenstücken von einem ersten Punkte  $P_1$  zu „jedem“ anderen Punkte  $P_2$  des Bereiches  $B$  hin zu gelangen. Dann ist einleuchtend, daß  $F(x, y)$  in allen Punkten von  $B$  gleiche Werte hat und also im ganzen Bereiche konstant ist. Dies heißt aber, daß  $g(x, y)$  und  $f(x, y)$  nur um eine additive Konstante verschieden sind.

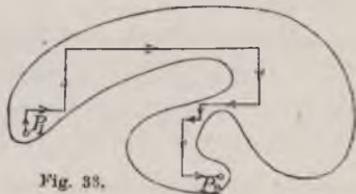


Fig. 33.

Es sei weiter zunächst der Bereich  $B$  durch einen einzigen geschlossenen Kurvenzug berandet. In einem ersten Bereichspunkte  $(a, b)$  schreiben wir den Funktionswert  $f(a, b)$  willkürlich vor und ziehen von diesem Punkte nach einem beliebigen anderen Bereichspunkte  $(x_1, y_1)$  eine erste Kurve  $K_1$  mit einer Bogenlänge  $s$ . Wir bilden für die Integrationsrichtung von  $(a, b)$  nach  $(x, y)$  das Linienintegral des Differentials  $(\varphi dx + \psi dy)$  und fügen den gewählten Funktionswert  $f(a, b)$  hinzu:

$$(5) \quad f(a, b) + \int_{(K_1)} (\varphi(x, y) dx + \psi(x, y) dy) = f(a, b) + \int (\varphi \frac{dx}{ds} + \psi \frac{dy}{ds}) ds.$$

Es besteht dann der wichtige Satz, daß dieser Ausdruck für alle in  $B$  wählbaren Kurven zwischen  $(a, b)$  und  $(x_1, y_1)$  einen und denselben, nur von  $(x_1, y_1)$  abhängigen Wert hat. Irgend eine zweite in der Richtung von  $(a, b)$  nach  $(x_1, y_1)$  gezogene Kurve möge durch  $+K_2$  bezeichnet sein; soll sie indessen in umgekehrter Richtung durchlaufen werden, so möge sie durch das Symbol  $-K_2$  bezeichnet werden. Dann ist zunächst einleuchtend, daß:

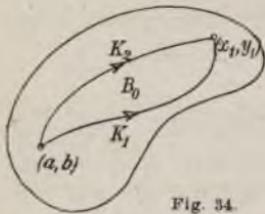


Fig. 34.

$$\int_{(-K_2)} (\varphi dx + \psi dy) = - \int_{(+K_2)} (\varphi dx + \psi dy)$$

gilt. Nun bilden aber die Kurven  $+K_1$  und  $-K_2$  den Rand eines Teilbereiches  $B_0$  von  $B$ , und zwar liegt bei der Anordnung der Fig. 34 der positive Umlauf um  $B_0$  vor\*). Nach (8) S. 140 gilt also die Gleichung:

$$\int_{(B_0)} (\psi'_x - \varphi'_y) d\omega = \int_{(+K_1 - K_2)} (\varphi dx + \psi dy).$$

Zufolge (4) verschwindet aber das links stehende Integral. Unter Zerlegung der rechten Seite folgt also mit Rücksicht auf die vorletzte Gleichung:

$$0 = \int_{(K_1)} (\varphi dx + \psi dy) - \int_{(K_2)} (\varphi dx + \psi dy),$$

woraus die Unabhängigkeit des Wertes (5) von der gewählten Kurve einleuchtet.

Wir schreiben nun bei beliebig gewählter Kurve  $K$ :

$$(6) \quad f(a, b) + \int_{(a, b)}^{(x_1, y_1)} (\varphi(x, y) dx + \psi(x, y) dy) = f(x_1, y_1)$$

und haben damit bereits die nach Auswahl des Wertes  $f(a, b)$  in  $B$  eindeutig bestimmte Funktion  $f(x_1, y_1)$  gewonnen, deren Ableitungen:

$$(7) \quad f'_x(x_1, y_1) = \varphi(x_1, y_1), \quad f'_y(x_1, y_1) = \psi(x_1, y_1)$$

sind, deren vollständiges Differential also der vorgelegte Ausdruck (3) ist. Benutzen wir nämlich z. B. bei der Berechnung von  $f(x_1 + \Delta x, y_1)$  zunächst dieselbe Kurve wie in (6) und sodann die Verbindungsgerade der Punkte  $(x_1, y_1)$  und  $(x_1 + \Delta x, y_1)$ , so ist:

$$f(x_1 + \Delta x, y_1) - f(x_1, y_1) = \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} \varphi(x, y_1) dx$$

\*) Es kann natürlich auch der negative Umlauf vorliegen. Überkreuzen sich übrigens die Kurven  $K_1$  und  $K_2$ , so hat man die folgende Betrachtung auf mehrere Teilbereiche  $B_0$  zu beziehen.

und also auf Grund des ersten Mittelwertsatzes (S. 57):

$$f(x_1 + \Delta x, y_1) - f(x_1, y_1) = \varphi(x_1 + \vartheta \Delta x, y_1) \Delta x,$$

woraus die Behauptung folgt. Daß aber die Funktion  $f(x_1, y_1)$  im Punkte  $(a, b)$  den Wert  $f(a, b)$ , den wir vorschrieben, annimmt, ist unmittelbar aus (6) einleuchtend.

Besitzt der Bereich  $B$  mehr als eine Randkurve oder ist er, wie man sagt, „mehrfach zusammenhängend“, so ist der Schluß auf die Eindeutigkeit der Funktion (6) nicht mehr möglich. Zwar werden z. B. im Falle der Fig. 35 die Kurven  $K_1, K_2$ , von denen die zweite aus der ersten durch stetige Verschiebung im Inneren des Bereiches  $B$  gewinnbar ist, gleiche Integralwerte liefern, auch eine Funktion  $f(x_1, y_1)$  erklären, die den Gleichungen (7) genügt. Ob aber z. B. die Kurve  $K_1'$ , welche jenseits der durch den inneren Rand eingeschlossenen Bereichslücke verläuft, denselben Wert  $f(x_1, y_1)$  liefert, bleibt unentschieden. Tatsächlich gelangt man hier in das Gebiet *mehrdeutiger* Funktionen  $f(x, y)$ , auf das wir jedoch nicht weiter eingehen können.

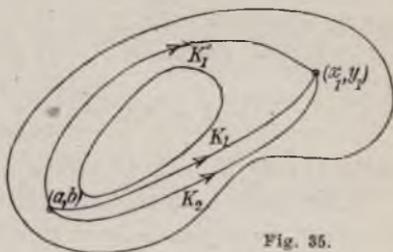


Fig. 35.

Für die Berechnung des Integrals (6) bedient man sich zweckmäßig eines treppenförmigen Weges wie in Fig. 33, wobei dann längs jedes Geradenstückes eines der Argumente konstant ist und nach dem anderen allein zu integrieren ist. In besonders elementaren Fällen, wenn z. B. die  $\varphi(x, y)$ ,  $\psi(x, y)$  einfache, in der ganzen  $x, y$ -Ebene erklärte Funktionen sind, kann man sich auch unbestimmter Integrale auf Grund folgender Schlußweise bedienen. Erstlich ist:

$$\int \varphi(x, y) dx + \chi(y),$$

wo die Integration bei konstantem  $y$  auszuführen ist und  $\chi(y)$  irgend eine Funktion von  $y$  allein bedeutet, eine Funktion von  $x$  und  $y$ , deren partielle Ableitung nach  $x$  mit  $\varphi(x, y)$  identisch ist. Soll die Ableitung nach  $y$  mit  $\psi(x, y)$  identisch sein:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \varphi(x, y) dx + \chi'(y) = \psi(x, y),$$

so brauchen wir nur  $\chi(y)$  der Bedingung:

$$(8) \quad \chi'(y) = \psi(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int \varphi(x, y) dx$$

entsprechend zu wählen. Man beachte dabei, daß rechts zwar in den einzelnen Gliedern  $x$  auftritt, in der ausgerechneten Differenz aber  $x$  nicht mehr vorkommt. Die Ableitung der rechten Seite von (8) nach  $x$  ist nämlich (bei Umkehrung der Differentiationsfolge im zweiten Gliede, s. (5) in I, 163):

$$\psi_x' - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} \int \varphi dx \right) = \psi_x' - \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \psi_x' - \varphi_y'$$

und ist demnach zufolge (4) mit 0 identisch; der Wert der rechten Seite von (8) ist also von  $x$  unabhängig. Durch Integration des in (8) gegebenen Ausdrucks für  $\chi'(y)$  in bezug auf  $y$  gewinnt man  $\chi(y)$  und damit die gesuchte Funktion  $f(x, y)$  in der Gestalt:

$$(9) \quad f(x, y) = \int \varphi(x, y) dx + \int \left( \psi(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int \varphi(x, y) dx \right) dy + C,$$

unter  $C$  eine Konstante verstanden.

Ein paar Andeutungen über den nächst höheren Fall dreier unabhängiger Variablen mögen sich hier noch anschließen. Es sei ein dreigliedriger Differentialausdruck:

$$(10) \quad \varphi(x, y, z) dx + \psi(x, y, z) dy + \chi(x, y, z) dz$$

vorgelegt, gebildet mit Funktionen  $\varphi, \psi, \chi$ , die in einem räumlichen Bereiche  $B$  eindeutig und stetig seien. Soll derselbe das vollständige Differential einer Funktion  $f(x, y, z)$  sein, so müssen der Bedingung (4) entsprechend die partiellen Ableitungen der  $\varphi, \psi, \chi$ , die wir als existierend annehmen, die Gleichungen befriedigen:

$$(11) \quad \varphi_y' = \psi_x', \quad \psi_z' = \chi_y', \quad \chi_x' = \varphi_z'.$$

Zur Integration des Ausdrucks (10) bilde man den der Gleichung (6) entsprechenden Ansatz:

$$(12) \quad f(a, b, c) + \int_{(a, b, c)}^{(x_1, y_1, z_1)} (\varphi dx + \psi dy + \chi dz) = f(x_1, y_1, z_1),$$

wo der Funktionswert  $f(a, b, c)$  im Punkte  $(a, b, c)$  willkürlich vorgegeschrieben sei und das Integral längs einer von  $(a, b, c)$  im Innern des Bereiches  $B$  zum Punkte  $(x_1, y_1, z_1)$  führenden Kurve  $K_1$  zu erstrecken ist. Hier besteht dann der Satz, daß der Integralwert jedenfalls immer dann von der Wahl der Kurve  $K_1$  unabhängig ist, wenn für „jede“ geschlossene Kurve  $K$  des Bereiches  $B$  das Linienintegral:

$$(13) \quad \int^{(K)} (\varphi dx + \psi dy + \chi dz)$$

den Wert 0 hat. Wählen wir nämlich statt  $K_1$  eine andere von  $(a, b, c)$

nach  $(x_1, y_1, z_1)$  laufende Kurve  $K_2$ , so wird  $K = +K_1 - K_2$  eine solche geschlossene Kurve liefern, und die weiteren Schlußfolgerungen sind dann einleuchtend. Auch erkennt man wieder in der nunmehr eindeutigen Funktion (12) das gesuchte Integral des Ausdrucks (10).

Das Integral (13) wird aber stets dann verschwinden, wenn sich in die geschlossene Kurve  $K$  eine nur durch  $K$  berandete Fläche einspannen läßt, die ganz in  $B$  liegt. Wenden wir nämlich auf diese Fläche den Stokesschen Satz (16) S. 146 an, so verschwindet zufolge (11) die rechte Seite dieser Gleichung und damit das Integral (13). Hat z. B. der räumliche Bereich eine einzige ovale Randfläche, so erscheint die Einspannung einer solchen Fläche in  $K$  stets möglich. Anders liegen z. B. die Verhältnisse bei einem Bereiche  $B$ , der eine ringförmig geschlossene Röhre darstellt. Hier erkennt man sofort die Existenz von geschlossenen Kurven  $K$ , in die sich keine nur durch  $K$  berandete ganz in  $B$  liegende Fläche einspannen läßt. Entsprechend hat man hier das Auftreten von mehrdeutigen Funktionen (12) zu erwarten.

## Abschnitt V.

### Anwendungen der Integralrechnung.

#### Kapitel I. Geometrische Anwendungen der Integralrechnung.

1. Die Bogenlängen der Kurven. Eine ebene Kurve sei in rechtwinkligen Koordinaten durch eine Gleichung  $y = f(x)$  gegeben. Ist  $f(x)$  im Intervalle  $x_0 \leq x \leq x_1$  eindeutig und differenzierbar, so hat nach (3) S. 87 die Kurve zwischen den Punkten  $(x_0, f(x_0))$  und  $(x_1, f(x_1))$  ein Stück, dessen Bogenlänge sich durch das Integral darstellt:

$$(1) \quad s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx^*).$$

Für eine auf ihre Hauptachsen  $2a$  und  $2b$  als Koordinatenachsen bezogene Ellipse ist der Radikand unter dem Integralzeichen (1) bereits in I, 304 berechnet. Den damaligen Ausdruck von  $(1 + y'^2)$  in  $y$  formt man mit Hilfe der Ellipsengleichung leicht in  $x$  um:

$$1 + y'^2 = \frac{e^2}{a^2} + \frac{b^4}{a^2 y^2} = \frac{a^4 - e^2 x^2}{a^2 (a^2 - x^2)};$$

hier bedeutet  $e = \sqrt{a^2 - b^2}$  die „lineare Exzentrizität“ der Ellipse. Die Bogenlänge eines Stückes der Ellipse ist demnach durch:

$$(2) \quad s = \frac{1}{a} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{a^4 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}} dx = \frac{1}{a} \int_{x_0}^{x_1} \frac{a^4 - e^2 x^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)(a^4 - e^2 x^2)}} dx$$

gegeben. Nach den Angaben von S. 38 haben wir hier ein nicht-elementares Integral, das eben wegen seines Auftretens bei der Bogenmessung der Ellipse als „elliptisches Integral“ bezeichnet wird; genauer handelt es sich um ein „elliptisches Integral zweiter Gattung“. Elementar

\*) Durch dieses Integral wird also in der Sprechweise von I, 51 und 109 die „Rektifikation“ der Kurve geleistet.

ist der besondere Fall  $e = 0$ , d. h. der Fall des Kreises; die Gleichung (2) liefert hier:

$$s = a \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a \left( \arcsin \frac{x_1}{a} - \arcsin \frac{x_0}{a} \right),$$

was leicht zu dem elementaren Gesetze hinführt, daß die Länge eines Kreisbogens gleich dem Produkte des Radius und des (in Bogenmaß gemessenen) Zentriwinkels ist.

Ist die Kurve durch ein Gleichungenpaar (5) S. 87 mittelst einer dritten Variablen  $t$  dargestellt, so ist nach (6) S. 88 an Stelle von (1) die Bogenlänge der Kurve für das fragliche Intervall durch das folgende Integral gegeben:

$$(3) \quad s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt,$$

unter  $t_0$  und  $t_1$  die den  $x_0, x_1$  entsprechenden Werte von  $t$  verstanden.

Für die Bogenlänge einer (gemeinen, verkürzten oder verlängerten) Zykloide (s. Fig. 55 in I, 275) gewinnt man auf Grund der Darstellung (2) in I, 276 leicht:

$$(4) \quad s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos t} dt.$$

Führt man  $y$  als neue Variable an Stelle von  $t$  in das Integral ein, so ist zu setzen:

$$b \cos t = a - y, \quad dt = \frac{dy}{\sqrt{b^2 - (a - y)^2}}.$$

Für das Integral (4) berechnet sich hieraus:

$$\int \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos t} dt = \int \frac{(b^2 - a^2 + 2ay) dy}{\sqrt{(b^2 - a^2 + 2ay)(b^2 - a^2 + 2ay - y^2)}}.$$

Da rechts unter dem Integralzeichen eine Funktion steht, die in  $y$  und der Quadratwurzel einer ganzen Funktion dritten Grades von  $y$  rational aufgebaut ist, so liegt nach S. 38 wieder ein elliptisches Integral vor. Elementar ist jetzt der Fall  $b = a$ , d. h. der der „gemeinen Zykloide“. Die letzte Gleichung nimmt dann die Gestalt an:

$$a\sqrt{2} \int \sqrt{1 - \cos t} dt = 2a \int \sin \frac{t}{2} dt = \sqrt{2}a \int \frac{dy}{\sqrt{2a - y}}.$$

Die Ausführung der Integration in bezug auf  $t$  ergibt nach Eintragung der in (4) angegebenen Grenzen:

$$s = 4a \left( \cos \frac{t_0}{2} - \cos \frac{t_1}{2} \right).$$

Die besondere Wahl  $t_0 = 0, t_1 = 2\pi$  liefert als Bogenlänge der gemeinen

Zykloide zwischen zwei aufeinander folgenden Spitzen 8a, in Übereinstimmung mit dem in I, 313 erhaltenen Resultate.

Man setze für  $t$  die Amplitude  $\vartheta$  in einem *Polarkoordinatensysteme* ein, dessen Pol der bisherige Nullpunkt  $O$  und dessen Achse die positive  $x$ -Achse ist. In diesem Systeme sei die Kurve durch die Gleichung  $r = f(\vartheta)$  gegeben. Dann gilt:

$$x = \varphi(\vartheta) = r \cos \vartheta = f(\vartheta) \cos \vartheta, \quad y = \psi(\vartheta) = r \sin \vartheta = f(\vartheta) \sin \vartheta,$$

und man gewinnt für den Radikanden der in (3) stehenden Quadratwurzel:

$$\varphi'(\vartheta)^2 = \frac{dr}{d\vartheta} \cos \vartheta - r \sin \vartheta, \quad \psi'(\vartheta) = \frac{dr}{d\vartheta} \sin \vartheta + r \cos \vartheta,$$

$$\varphi'(\vartheta)^2 + \psi'(\vartheta)^2 = \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2 + r^2 = f'(\vartheta)^2 + f(\vartheta)^2,$$

so daß sich das Integral für die Bogenlänge in Polarkoordinaten so ausdrückt:

$$(5) \quad s = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2 + r^2} d\vartheta = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \sqrt{f'(\vartheta)^2 + f(\vartheta)^2} d\vartheta.$$

Man findet z. B. für die durch Fig. 60 in I, 279 dargestellte „Archimedische Spirale“ der Gleichung  $r = a\vartheta$ :

$$s = a \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \sqrt{1 + \vartheta^2} d\vartheta.$$

Das unbestimmte Integral ist in Aufg. 7, S. 37 berechnet und ergibt bei Gebrauch der in (5) S. 63 erklärten symbolischen Schreibweise des bestimmten Integrals:

$$(6) \quad s = \frac{1}{2} a [\vartheta \sqrt{1 + \vartheta^2} + \ln(\vartheta + \sqrt{1 + \vartheta^2})]_{\vartheta_0}^{\vartheta_1}.$$

Zur Berechnung der Bogenlänge einer *Raumkurve* legt man am zweckmäßigsten eine Darstellung (7) S. 88 durch drei Gleichungen für die Kurve zugrunde. Die Bogenlänge der Raumkurve ist dann nach (14), S. 90 gegeben durch:

$$(7) \quad s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2} dt.$$

Die durch den Schnitt einer Schraubenfläche mit einem koachsialen Kreiskegel erzeugte „konische Schraubenlinie“ hat nach I, 330 (Aufg. 4) die Gleichungen der Gestalt:

$$x = t \cos(bt), \quad y = t \sin(bt), \quad z = at.$$

Hier gewinnt das Integral (7) die Form:

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(a^2 + 1) + b^2 t^2} dt,$$

so daß sich die Bogenlänge der konischen Schraubenlinie zufolge (5) S. 36 so darstellt:

$$s = \frac{1}{2b} [bt\sqrt{a^2 + 1 + b^2 t^2} + (a^2 + 1) \ln (bt + \sqrt{a^2 + 1 + b^2 t^2})]_{t_0}^{t_1}.$$

Zur Erklärung der *Polarkoordinaten im Raume* denken wir die positive  $z$ -Achse des rechtwinkligen Systems vertikal nach oben gerichtet und legen um  $O$  eine Kugelfläche des Radius 1 (s. Fig. 36), für welche wir an die in der Erdbeschreibung übliche Ortsbestimmung anknüpfen.

Zu dem Zwecke nennen wir den höchsten und den tiefsten Punkt der Kugel (Schnittpunkte mit der  $z$ -Achse) „Nord-“ bzw. „Südpol“ und die die beiden Pole verbindenden Halbkreise „Meridiankreise“, deren einzelnem eine in die  $z$ -Achse eingehängte „Meridianhalbebene“ entspricht. Als erste Polarkoordinate eines Raumpunktes  $P$  wählen wir den „Radius vektor“  $r = \overline{OP}$  von  $O$  zum Punkte  $P$ ; natürlich gilt dann für die Werte  $r$  stets  $r \geq 0$ . Als zweite Polarkoordinate von  $P$  werde die „Poldistanz“  $\theta = \sphericalangle POZ$  gewählt (s. Fig. 36), d. h. der Richtungswinkel des Radius vektor  $r$  gegen

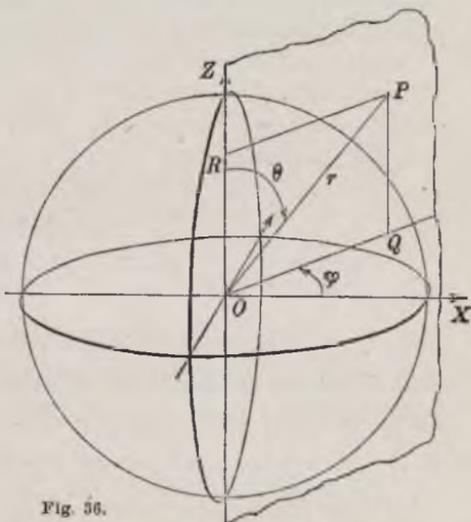


Fig. 36.

die positive  $z$ -Achse; man erschöpft alle Poldistanzen, wenn man  $\theta$  das Intervall  $0 \leq \theta \leq \pi$  durchlaufen läßt. Die dritte Polarkoordinate werde durch die Meridianhalbebene des Punktes  $P$  geliefert und als „östliche Länge“  $\varphi = \sphericalangle QOX$  gemessen (s. Fig. 36) die durch die positive  $x$ -Achse laufende Meridianhalbebene bekommt also  $\varphi = 0$ , und im übrigen ist  $\varphi$  einfach die „Amplitude“ der Projektion  $OQ$  von  $r$  auf die  $x, y$ -Ebene (s. Fig. 36), welche zur Erschöpfung aller Meridianhalbenen das Intervall  $0 \leq \varphi < 2\pi$  zu durchlaufen hat\*).

\*) Doch können wir, wie dies bei einem gleich zu betrachtenden Beispiele der Fall sein wird,  $\varphi$  auch als unbeschränkte Variable ansehen, wo dann zwei

Die *Beziehungen zwischen den rechtwinkligen und den Polarkoordinaten* des einzelnen Punktes  $P$  sind leicht aus Fig. 36 abzulesen. Erstlich hat man  $z = r \cos \theta$  und  $\overline{OQ} = r \sin \theta$ . Da aber der Punkt  $Q$  die rechtwinkligen Koordinaten  $x, y$  von  $P$  hat und seine „Polarkoordinaten in der  $x, y$ -Ebene“  $\overline{OQ}$  und  $\varphi$  sind, so gilt:

$$(8) \quad x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

Nennen wir die Richtungswinkel des von  $O$  nach  $P$  gerichteten Radiusvektor  $r$  gegen die positiven Achsen  $\alpha, \beta, \gamma$ , so ist unmittelbar  $\gamma = \theta$ , und übrigens zeigt der Vergleich der Formeln (8) mit den Gleichungen (1) in „A. G.“, S. 94:

$$(9) \quad \cos \alpha = \sin \theta \cos \varphi, \quad \cos \beta = \sin \theta \sin \varphi, \quad \cos \gamma = \cos \theta,$$

wobei die beiden ersten Gleichungen einen bekannten Satz der sphärischen Trigonometrie zum Ausdruck bringen.

Man zeichne gleich noch in der Meridianhalbebene von  $P$  mit dem Radius  $r$  den Halbkreis um  $O$  und an diesen im Punkte  $P$  die „nach oben“ gerichtete Tangente\*). Der von  $O$  aus ihr parallel laufende Strahl hat die Koordinaten:

$$\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta, \quad \varphi' = \varphi + \pi \quad \text{für } 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2},$$

$$\theta' = \theta - \frac{\pi}{2}, \quad \varphi' = \varphi \quad \text{für } \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi.$$

Für  $\theta = \frac{\pi}{2}$  bleiben beide Gleichungen für  $\theta'$  richtig, während  $\varphi'$  unbestimmt bleibt, da der von  $O$  ausziehende Strahl die positive  $z$ -Achse ist. In allen Fällen findet man als „Richtungskosinus“ jener Tangente:

$$(10) \quad \cos \alpha' = -\cos \theta \cos \varphi, \quad \cos \beta' = -\cos \theta \sin \varphi, \quad \cos \gamma' = +\sin \theta.$$

Eine *Raumkurve* geben wir in Polarkoordinaten etwa durch zwei Gleichungen:

$$(11) \quad r = g(\theta), \quad \varphi = f(\theta),$$

die  $r$  und  $\varphi$  als Funktionen von  $\theta$  darstellen. Tragen wir diese Ausdrücke in (8) ein, so liefern uns diese drei Gleichungen, in denen wir jetzt  $\theta$  als Variable  $t$  auffassen, eine Darstellung der bisherigen Art für unsere Raumkurve. Werden die Ableitungen in bezug auf  $\theta$  durch Indizes angedeutet, so folgt aus (8):

Werte  $\varphi$ , die um ein Multiplum von  $2\pi$  differieren, eine und dieselbe Meridianhalbebene liefern.

\*) Ist  $P$  der Nordpol oder der Südpol, so möge sich die Tangentenrichtung stetig an die der übrigen Punkte des Meridians anschließen.

$$\begin{aligned}x' &= r' \sin \theta \cos \varphi + r \cos \theta \cos \varphi - r \sin \theta \sin \varphi \cdot \varphi', \\y' &= r' \sin \theta \sin \varphi + r \cos \theta \sin \varphi + r \sin \theta \cos \varphi \cdot \varphi', \\z' &= r' \cos \theta - r \sin \theta.\end{aligned}$$

Indem man quadriert und addiert, folgt weiter:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2 + r^2 + r^2 \sin^2 \theta \cdot \varphi'^2.$$

Das Integral für die Bogenlänge einer Raumkurve bei Gebrauch von Polarkoordinaten ist also:

$$(12) \quad s = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{r'^2 + r^2 + r^2 \sin^2 \theta \cdot \varphi'^2} d\theta.$$

Ist  $r$  konstant und etwa gleich  $a$ , so liegt die Kurve auf einer Kugelfläche des Radius  $a$  um  $O$  und heißt dann eine „sphärische Kurve“. In diesem Falle verschwindet  $r'$ , so daß sich das Integral der Bogenlänge einer sphärischen Kurve in der Gestalt darbietet:

$$(13) \quad s = a \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{1 + \sin^2 \theta \cdot \varphi'^2} d\theta = a \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{1 + \sin^2 \theta \cdot f'(\theta)^2} d\theta,$$

wobei  $\varphi = f(\theta)$  die Gleichung der Kurve ist.

Auf der Kugelfläche des Radius 1 wird durch die Gleichung:

$$(14) \quad \varphi = c \cdot \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$$

eine als „Loxodrome“ bezeichnete Kurve dargestellt. Die Konstante  $c$  sei von 0 verschieden und werde als negativ vorausgesetzt. Für  $\theta = \frac{\pi}{2}$  gilt  $\varphi = 0$ , so daß die Kurve durch den Schnittpunkt der positiven  $x$ -Achse mit der Kugelfläche hindurchläuft. Nimmt  $\theta$  von  $\frac{\pi}{2}$  bis 0 ab, so wächst  $\varphi$  von 0 bis  $+\infty$ ; die Kurve läuft also auf der „nördlichen Halbkugel“ im Sinne zunehmender  $\varphi$  unendlich oft um den Pol herum, wie dies in Fig. 37 veranschaulicht ist. Lassen wir  $\theta$  von  $\frac{\pi}{2}$  bis  $\pi$  zunehmen, so nimmt  $\varphi$  von 0 bis  $-\infty$  ab; auf der „südlichen Halbkugel“ führt also die Loxodrome gegen den Pol hin unendlich viele Umläufe um denselben in Richtung abnehmender  $\varphi$  aus.



Fig. 37.

Aus (14) ergibt sich sofort:

$$(15) \quad \varphi' = \frac{1}{2} c \cotg \frac{\theta}{2} \cdot \left(1 + \tg^2 \frac{\theta}{2}\right) = \frac{c}{\sin \theta},$$

so daß das Integral (13) die einfache Gestalt gewinnt:

$$s = \sqrt{1 + c^2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} d\theta = \sqrt{1 + c^2} (\theta_1 - \theta_0).$$

Die Bogenlänge der Loxodrome zwischen zwei Punkten ist also dem „Breitenunterschiede“ dieser beiden Punkte proportional.

Nach I, 332 sind die Richtungskosinus  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$  der Tangente der Loxodrome im Punkte  $(\theta, \varphi)$  den  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  proportional. Tragen wir den Wert (15) für  $\varphi'$  und außerdem  $r=1$  und  $r'=0$  in die obigen Gleichungen für  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  ein, so folgt:

$$\cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma = (\cos \theta \cos \varphi - c \sin \varphi) : (\cos \theta \sin \varphi + c \cos \varphi) : -\sin \theta.$$

Wenn wir also der Tangente die Richtung nach oben geben, so gilt:

$$\cos \alpha = -\frac{\cos \theta \cos \varphi - c \sin \varphi}{\sqrt{1 + c^2}}, \quad \cos \beta = \frac{\cos \theta \sin \varphi + c \cos \varphi}{\sqrt{1 + c^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 + c^2}}.$$

Ist demnach  $\eta$  der Winkel, unter dem die Loxodrome den Meridiankreis des Punktes  $(\theta, \varphi)$  schneidet, so gilt nach Formel (3) in „A. G.“, S. 95:

$$\cos \eta = \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma',$$

wo  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$  die in (10) dargestellten Richtungswinkel sind. Durch Ausrechnung der rechten Seite dieser Gleichung findet man:

$$(16) \quad \cos \eta = \frac{1}{\sqrt{1 + c^2}},$$

d. h. einen von der Stelle  $(\theta, \varphi)$  unabhängigen Wert: die Loxodrome schneidet alle Meridiankreise unter einem und demselben aus (16) hervorgehenden Winkel  $\eta$ .

Projiziert man die eben benutzte Kugelfläche des Radius 1 vom „Südpol“ aus auf die  $x, y$ -Ebene (sogenannte „stereographische Projektion“), so gehen die Meridianhalbkreise in die von  $O$  ausziehenden geradlinigen Strahlen über, und zwar liefert der Halbkreis der „östlichen Länge“  $\varphi$  den Strahl der „Amplitude“  $\varphi$ . Die zu konstanten  $\theta$  gehörenden „Parallelkreise“ der Kugelfläche liefern die konzentrischen Kreise der  $x, y$ -Ebene um  $O$ . Dabei ist der Radius  $r$  des zum einzelnen  $\theta$  gehörenden Kreises aus Fig. 38 leicht abzulesen. In dieser Figur sind zwei diametrale Meridianhalbebenen gezeichnet; rechts ist ein Punkt  $P$  mit  $\theta < \frac{\pi}{2}$

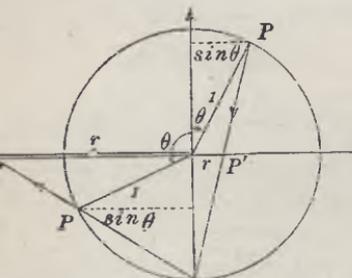


Fig. 38.

in den Punkt  $P'$  der  $x, y$ -Ebene projiziert, links ein Punkt  $P$  mit  $\theta > \frac{\pi}{2}$ . Man stellt sofort fest, daß beide Male:

$$(17) \quad \frac{r}{\sin \theta} = \frac{1}{1 + \cos \theta}, \quad r = \tg \frac{\theta}{2}$$

gilt. Zuzolge (14) ist die Gleichung der Projektion der Loxodrome:

$$\varphi = c \cdot \ln r, \quad r = e^{\frac{1}{c} \varphi}.$$

Bei der stereographischen Projektion der Kugelfläche vom Südpol aus auf die  $x, y$ -Ebene geht die Loxodrome in eine logarithmische Spirale über (s. I, 251). Gegenüber der Fig. 63 in I, 252 liegt hier übrigens wegen der Annahme  $c < 0$  der Unterschied vor, daß sich die Spirale in der Richtung „zunehmender“ Amplituden immer enger und enger um den Pol herumwindet.

**2. Aufgaben über Bogenlängen der Kurven.** Man bestimme die Bogenlänge für folgende Kurven\*): 1) Parabel  $x^2 = 2py$ . —

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{p}\right)^2} dx = \frac{1}{2p} [x\sqrt{p^2 + x^2} + p^2 \ln(x + \sqrt{p^2 + x^2})]_{x_0}^{x_1}.$$

2) Kettenlinie  $y = a \operatorname{Cosech}\left(\frac{x}{a}\right)$ . —

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \operatorname{Cosec}^2\left(\frac{x}{a}\right)} dx = \int_{x_0}^{x_1} \operatorname{Cosech}\left(\frac{x}{a}\right) dx = a \left[ \operatorname{Sin}\left(\frac{x}{a}\right) \right]_{x_0}^{x_1}.$$

Die vom Scheitelpunkte  $(0, a)$  bis zum Punkte  $(x, y)$  der Kettenlinie gemessene Bogenlänge ist demnach:

$$s = a \operatorname{Sin}\left(\frac{x}{a}\right) = a \sqrt{\operatorname{Cosec}^2\left(\frac{x}{a}\right) - 1} = \sqrt{y^2 - a^2}.$$

Es ist somit leicht möglich, aus der Scheitelordinate  $a$  (s. Fig. 69 in I, 288) und der Endordinate  $y$  des gemessenen Bogens eine dem Bogen gleiche Gerade zu konstruieren. (In der oben genannten Figur ist der Bogen  $SP$  gleich der Geraden  $QC$ ).

3) Evolute der Parabel (s. Fig. 92 und Gleichung (1) in I, 313):

$$8(x-p)^3 = 27py^2.$$

Man zeige die Beziehung  $3p(1+y'^2) = 2x+p$  und wird finden:

$$s = \frac{1}{\sqrt{3p}} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{2x+p} dx = \frac{1}{3\sqrt{3p}} [(\sqrt{2x+p})^3]_{x_0}^{x_1}.$$

4) Die in I, 311 ff. besprochene Evolute der Ellipse:

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{2}{3}}.$$

Das Integral für die Bogenlänge ist auf die Gestalt zu bringen:

$$s = \frac{3e}{2b} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{a^{\frac{2}{3}} e^{-\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}} d(x^{\frac{2}{3}}) = -\frac{e}{b} [(\sqrt{a^{\frac{2}{3}} e^{-\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}})^3]_{x_0}^{x_1}.$$

Für einen Quadranten der Kurve hat man nach I, 304 einzutragen  $x_0 = 0$ ,

\*) Die im Einzelfalle zu benutzenden Variablen gehen aus der Kurvengleichung hervor.

$x_1 = e^2 a^{-1}$ ; die sich ergebende Quadrantenlänge  $\frac{a^3 - b^3}{ab}$  ist aus der Theorie der Evoluten und Evolventen (I, 312) zu bestätigen.

5) Die durch Fig. 94 in I, 314 dargestellte Traktrix, welche eine Evolvente der  $\text{C}\text{O}\text{S}$ -Kurve ist, hatte die Gleichung:

$$x = -\sqrt{1 - y^2} + \text{Ar C}\text{O}\text{S}\left(\frac{1}{y}\right). \quad -$$

Man zeige unter Gebrauch von  $y$  als Integrationsvariable, daß  $a\epsilon$  von der Spitze der Kurve bis zum Punkte  $(x, y)$  derselben gemessene Bogenlänge gleich  $-\ln y$  ist.

6) Astroide der Gleichungen (s. (11) in I, 288):

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t. \quad -$$

Das Integral nimmt die Gestalt an:

$$s = 3a \int_{t_0}^{t_1} \sin t \cos t \, dt = \frac{3}{2} a [\sin^2 t]_{t_0}^{t_1}.$$

woraus man für die Gesamtlänge der Astroide den Wert  $6a$  ablese (vgl. Aufg. 7 in I, 315).

7) Beliebige Hypozykloide der Gleichungen (s. I, 278):

$$x = (a - b) \cos t + b \cos\left(\frac{a - b}{b} t\right), \quad y = (a - b) \sin t - b \sin\left(\frac{a - b}{b} t\right). \quad -$$

Das Ergebnis ist:

$$s = 2(a - b) \int_{t_0}^{t_1} \sin\left(\frac{a}{2b} t\right) dt = \frac{4(a - b)b}{a} \left[ -\cos\left(\frac{a}{2b} t\right) \right]_{t_0}^{t_1}.$$

Für  $t_0 = 0$  und  $t_1 = \frac{2\pi b}{a}$  erhält man als Länge eines zwischen zwei aufeinander folgenden Spitzen gelegenen Stückes der Kurve  $\frac{8b(a - b)}{a}$ .

8) Kardioide oder Herzkurve, nach I, 278 und 283 darstellbar durch:

$$x = 2a \cos t - a \cos 2t, \quad y = 2a \sin t - a \sin 2t. \quad -$$

Man beweise die Richtigkeit der Angabe:

$$s = 4a \int_{t_0}^{t_1} \sin \frac{t}{2} dt = 8a \left[ -\cos \frac{t}{2} \right]_{t_0}^{t_1};$$

die Gesamtlänge der Herzkurve ist somit  $16a$  (s. I, 315).

9) Kreisevolvente (s. Fig. 93 in I, 314) von den Gleichungen:

$$x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t). \quad -$$

Das Integral für die Bogenlänge nimmt hier die besonders einfache Gestalt an:

$$s = a \int_{t_0}^{t_1} t \, dt = \frac{1}{2} a (t_1^2 - t_0^2).$$

$$c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{2} \quad z_2 = -z_1$$

$$\frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} z_1^2 = \frac{1}{3}, \quad z_1^2 = \frac{1}{3}$$

$$z_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$-\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$$

$$z_2 = +\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$-\frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$c_1 + c_2 = 1, \quad c_2 = 1 - c_1$$

$$c_1 z_1 + (1 - c_1) z_2 = 0$$

$$z_2 = -\frac{c_1}{1 - c_1} z_1$$

$$c_1 z_1^2 + (1 - c_1) \frac{c_1^2}{(1 - c_1)^2} z_1^2 = \frac{1}{3}$$

$$c_1 z_1^2 + \frac{c_1^2}{1 - c_1} z_1^2 = \frac{1}{3}$$

$$z_1^2 \left( c_1 + \frac{c_1^2}{1 - c_1} \right) = \frac{1}{3}$$

$$z_1^2 (c_1 - c_1^2 + c_1^2) = \frac{1}{3}$$

$$z_1^2 = \frac{1}{3}, \quad z_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$z_2 = +\frac{c_1}{1 - c_1} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$-c_1 \frac{1}{\sqrt{3}} + (1 - c_1) \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$$

$$-c_1 + 1 - c_1 = 0$$

$$-2c_1 = -1$$

$$c_1 = \frac{1}{2}$$

$$b_2 = 1 - c_1$$

$$c_1(z_1 - z_2) + z_2 =$$

$$c_1 z_1 + b_2 z_2 = 0$$

$$z_2 = -c_1 z_1$$

$$c_1 z_1 + (1 - c_1) z_2 = 0$$

$$c_1 z_1 + z_2 - c_1 z_2 = 0$$

$$z_2 = -\frac{c_1}{1 - c_1} z_1$$

~~$$c_1 z_1^2 + (1 - c_1) \frac{c_1^2}{(1 - c_1)^2} z_1^2 = 0$$~~

~~$$c_1 z_1^2 + \frac{c_1^3}{1 - c_1} z_1^2 = 0$$~~

~~$$c_1 + \frac{c_1^2}{1 - c_1} = 0$$~~

~~$$c_1 - c_1^2 + c_1^2 = 0$$~~

~~$$c_1 z_1^2 + (1 - c_1) \frac{c_1^2}{(1 - c_1)^2} z_1^2 = 0$$~~

~~$$c_1 + \frac{c_1^2}{1 - c_1} = 0$$~~

~~$$\frac{c_1}{1 - c_1} = 1 \quad c_1 - c_1^2 + c_1^2 = 0$$~~

$$c_1 = 1 - c_1$$

$$c_1 = \frac{1}{2}$$

$$c_1 = \frac{1}{2}$$

$$\int_a^b f(x) dx$$

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$$

$$dx = \frac{b-a}{2} dt$$

$$J = \int_{-1}^{+1} f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right) \frac{b-a}{2} dt$$

$$= \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{+1} g(t) dt$$

$$g(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_{2n-1} t^{2n-1} + R_{2n}(t)$$

$$R_{2n} = \mathcal{O}\left(\frac{t^{2n}}{(2n)!}\right)$$

$$J = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_{2n-1} t^{2n-1}) dt + \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} R_{2n}(t) dt$$

$$= \frac{1}{2} \left( a_0 t + a_1 \frac{t^2}{2} + a_2 \frac{t^3}{3} + \dots + a_{2n-1} \frac{t^{2n}}{2n} \right) + \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} R_{2n}(t) dt$$

$$= a_0 + \frac{1}{3} a_2 + \frac{1}{5} a_4 + \dots + \frac{1}{2n-1} a_{2n-2} + \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} R_{2n}(t) dt$$

for  $t_1, t_2, \dots, t_n$

~~$$\int_a^b f(x) dx = C_1 \varphi(t_1) + C_2 \varphi(t_2) + \dots + C_n \varphi(t_n)$$~~

$$\int_a^b f(x) dx = C_1 \varphi(t_1) + C_2 \varphi(t_2) + \dots + C_n \varphi(t_n)$$

$$= \sum_{k=1}^n C_k (a_0 + a_1 t_k + \dots + a_{2n-2} t_k^{2n-2} + R_{2n}(t_k))$$

$$= a_0 \sum_{k=1}^n C_k + a_1 \sum_{k=1}^n C_k t_k + \dots$$

*[Faint, illegible handwritten text, possibly bleed-through from the reverse side of the page.]*



10) Bei Gebrauch der „Polargleichung der Kegelschnitte“ (Gleichung (5) in I, 279):

$$r = \frac{p}{1 - c \cos \vartheta}$$

führe man die Bogenmessung durch. — Das hier eintretende Bogenintegral:

$$s = p \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \frac{\sqrt{1 + c^2 - 2c \cos \vartheta}}{(1 - c \cos \vartheta)^2} d\vartheta$$

wird, abgesehen vom Falle des Kreises ( $c = 0$ ), nur für die Parabel ( $c = 1$ ) elementar. Man zeige mit Benutzung von Aufg. 22 S. 19 für  $c = 1$ :

$$s = p \left[ -\frac{\cos \frac{\vartheta}{2}}{1 - \cos \vartheta} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{4} \right| \right]_{\vartheta_0}^{\vartheta_1}$$

11) Für die logarithmische Spirale (s. Fig. 63 in I, 282) von der Gleichung  $r = e^{a\vartheta}$  zeige man die sehr einfache Regel:

$$s = \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a} (e^{a\vartheta_1} - e^{a\vartheta_0}) = \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a} (r_1 - r_0)$$

und erläutere das Ergebnis speziell für  $\lim \vartheta_0 = -\infty$ .

12) Für die Lemniskate (Fig. 78 in I, 295) von der Gleichung  $r = a \sqrt{\cos 2\vartheta}$  beweise man die Gleichung:

$$s = a \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos 2\vartheta}} = a \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - 2 \sin^2 \vartheta}}$$

Es handelt sich hier um ein „elliptisches Integral erster Gattung“, das man durch die Substitution  $\sin \vartheta = u$  auf die algebraische Gestalt transformiert.

13) Für die zylindrische Schraubenlinie (s. Fig. 100 in I, 322 und die Gleichung (7) in I, 321) wird man ohne Mühe die Regel beweisen:

$$s = \sqrt{a^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2} (t_1 - t_0)$$

14) Die in I, 330 besprochene sphärische Zyloide entsteht durch Abrollen eines geraden Kreiskegels auf einer Ebene in der daselbst näher bezeichneten Art. Man wähle die Mantellinie  $m = 1$ , den Radius des Grundkreises  $r = \frac{1}{2}$ , so daß die Höhe  $h = \frac{1}{2} \sqrt{3}$  wird. Man zeige zunächst, daß die Gleichungen der Kurve sich in diesem Falle auf die Gestalt bringen lassen:

$$x = \cos t \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 t\right), \quad y = \frac{1}{2} \sin^3 t, \quad z = \frac{1}{2} \sqrt{3} \sin^2 t.$$

Als Bogenintegral wird man daraufhin finden:

$$s = -\frac{1}{2} \sqrt{3} \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{3 + \cos^2 t} d \cos t,$$

so daß sich die Bogenlänge elementar ausdrücken läßt (s. Aufg. 7, S. 37):

$$s = -\frac{1}{4} \sqrt{3} [\cos t \sqrt{3 + \cos^2 t} + 3 \ln |\cos t + \sqrt{3 + \cos^2 t}|]_{t_0}^{t_1}.$$

Die Kurve schließt sich nach einem vollen Umlaufe des Kegels und besteht aus zwei bezüglich der  $x, z$ -Ebene symmetrischen Stücken, die in Spitzen zusammenhängen. Die Gesamtlänge der Kurve bestimme man zu:

$$2\sqrt{3} + \frac{3}{2}\sqrt{3} \ln 3.$$

**3. Die Inhalte ebener Bereiche.** Der Inhalt eines ebenen Bereiches ist gleich dem über den Bereich erstreckten Flächenintegral  $\omega$  des Differentials  $d\omega$ . Je nach der besonderen Darstellung, welche wir für  $d\omega$  bevorzugen, gelangen wir zu verschiedenen Darstellungen für das Integral.

Bei Gebrauch *rechtwinkliger Koordinaten* bietet sich zunächst die Darstellung von  $\omega$  durch ein Doppelintegral dar\*):

$$\omega = \int_{x_0}^{x_1} \left( \int_{f_0(x)}^{f_1(x)} dy \right) dx,$$

das wir im Sinne der Darlegungen von S. 97 ff. zu verstehen haben. Die unmittelbar mögliche Ausführung des inneren Integrals liefert weiter das „einfache“ Integral:

$$(1) \quad \omega = \int_{x_0}^{x_1} (f_1(x) - f_0(x)) dx.$$

Am meisten benutzt man diese Formel für den Fall, daß der durch  $y = f_0(x)$  dargestellte Rand des Bereiches die  $x$ -Achse ist. Dann ist  $f_0(x) = 0$ , und wir gelangen, wenn wir bei  $f_1(x)$  den Index fortlassen, zu dem Satze: *Der Inhalt desjenigen ebenen Bereiches, der durch die  $x$ -Achse, das dem Intervalle  $x_0 \leq x \leq x_1$  zugehörige Stück der Kurve  $y = f(x)$  und die zu  $x_0$  und  $x_1$  gehörigen Kurvenordinaten begrenzt ist, wird dargestellt durch:*

$$(2) \quad \omega = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} y dx^{**}.$$

Wir gelangen hier zu der einfachsten Deutung des bestimmten Integrals zurück (s. S. 54); man erinnere sich noch daran, daß bei dieser Darstellung von  $\omega$  die „unterhalb“ der  $x$ -Achse liegenden Flächenstücke „negative“ Maßzahlen  $\omega$  bekommen.

\*) Die Bezeichnungen der Grenzen ist gegenüber S. 97 den gegenwärtigen Zwecken angepaßt.

\*\*\*) Man sagt, dieses Integral leiste die „Quadratur“ der Kurve  $y = f(x)$  oder des im Texte beschriebenen Bereiches.

Für die Ellipse gewinnen wir sofort:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad \omega = \frac{b}{a} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

und also nach Aufg. 6, S. 37:

$$\omega = \frac{b}{2a} \left[ x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \left( \frac{x}{a} \right) \right]_{x_0}^{x_1}.$$

Ein Ellipsenquadrant wird gewonnen, wenn man  $x_0 = 0$  und  $x_1 = a$  setzt; man erhält  $\frac{1}{4} ab\pi$  und also für den ganzen von der Ellipse umschlossenen Bereich  $ab\pi$ , worin die Elementarformel für die Kreisfläche als Spezialfall enthalten ist.

Ist die Kurve durch zwei Gleichungen  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  gegeben, so nimmt das Integral (2) für den Inhalt  $\omega$  nach (7) S. 56 die Gestalt an:

$$(3) \quad \omega = \int_{t_0}^{t_1} \psi(t) \varphi'(t) dt.$$

Ziehen wir als Beispiel wieder die Zykloide der Gleichungen (2) in I, 276 heran, so ergibt sich:

$$\omega = \int_{t_0}^{t_1} (a - b \cos t)^2 dt = \frac{1}{2} [(2a^2 + b^2)t - 4ab \sin t + b^2 \sin t \cos t]_{t_0}^{t_1}.$$

Hier ist also auch für  $b \geq a$  das Integral elementar; insbesondere folgt für die gemeine Zykloide ( $b = a$ ):

$$\omega = \frac{1}{2} a^2 [3t - 4 \sin t + \sin t \cos t]_{t_0}^{t_1}.$$

Für  $t_0 = 0$  und  $t_1 = 2\pi$  folgt als Inhalt des Bereiches, den das zwischen zwei aufeinander folgenden Spitzen verlaufende Zykloidenstück und die  $x$ -Achse eingrenzen, der Betrag  $3a^2\pi$ ; dieser Bereich ist also dreimal so groß wie die Fläche des die Zykloide erzeugenden Kreises\*).

Führen wir statt der  $x, y$  neue Variable  $u, v$  durch die Gleichungen:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v)$$

ein, so kann nach (14) S. 106 das Integral für den Flächeninhalt  $\omega$  des Bereiches in den  $u, v$  als Doppelintegral\*\*):

\*) Zeichnet man inmitten des Bereiches (für den Berührungspunkt  $x = a\pi$ ) den die Zykloide erzeugenden Kreis, so zerlegt dieser den Bereich in drei inhalts-gleiche Teilbereiche.

\*\*) Auch hier sind die Integralgrenzen anders als oben (S. 106) geschrieben.

$$(4) \quad \omega = \int_{r_0}^{r_1} \left( \int_{g_0(r)}^{g_1(r)} D(\varphi, \psi) du \right) dv$$

geschrieben werden, wo  $D(\varphi, \psi)$  die *Funktionaldeterminante* ist (s. S. 102).

Der wichtigste Fall ist der, daß  $u = r$ ,  $v = \vartheta$  als „*Polarkoordinaten*“ in der Ebene gewählt werden. Die Funktionaldeterminante bestimmt sich aus  $x = r \cos \vartheta$ ,  $y = r \sin \vartheta$  zu:

$$D(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \vartheta} - \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \frac{\partial y}{\partial r} = r,$$

so daß für den Pol  $O$  die Funktionaldeterminante verschwindet. Wir nehmen demnach zunächst an, daß der Pol  $O$  dem Bereiche nicht angehört. Das Integral (4) nimmt dann für Polarkoordinaten die Gestalt an:

$$\omega = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \left( \int_{g_0(\vartheta)}^{g_1(\vartheta)} r dr \right) d\vartheta,$$

so daß auch hier das innere Integral sofort ausführbar wird:

$$(5) \quad \omega = \frac{1}{2} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} (g_1(\vartheta)^2 - g_0(\vartheta)^2) d\vartheta.$$

Man benutzt nun die Polarkoordinaten meist zur Ausmessung eines Bereiches der in Fig. 39 dargestellten Art, der also durch das einem Intervall  $\vartheta_0 \leq \vartheta \leq \vartheta_1$  zugehörige Stück einer Kurve  $r = g(\vartheta)$  und die beiden zu  $\vartheta_0$  und  $\vartheta_1$  gehörenden Radienvektoren begrenzt ist. Um den Ansatz (5) ungehindert anwenden zu können, schneide man, wie Fig. 39 andeutet, durch einen kleinen Kreisbogen des Radius  $r_0$  einen am Pole liegenden kleinen Kreissektor des Inhaltes

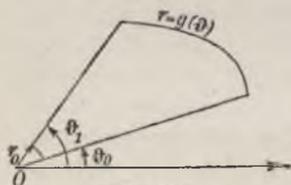


Fig. 39.

$\frac{1}{2} r_0^2 (\vartheta_1 - \vartheta_0)$  ab. Formel (5) liefert:

$$\omega = \frac{1}{2} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} (g(\vartheta)^2 - r_0^2) d\vartheta = \frac{1}{2} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} g(\vartheta)^2 d\vartheta - \frac{1}{2} r_0^2 (\vartheta_1 - \vartheta_0),$$

und man erkennt durch Hinzunahme des Kreissektors, daß der auszumessende Bereich sich durch das auf der rechten Seite der letzten Gleichung verbleibende Integral darstellt: *Der Inhalt eines Bereiches, der durch das dem Intervalle  $\vartheta_0 \leq \vartheta \leq \vartheta_1$  angehörende Stück der Kurve*

$r = g(\vartheta)$  und durch die zu  $\vartheta_0$  und  $\vartheta_1$  gehörenden Radien vektoren begrenzt ist, wird vom Integral geliefert:

$$(6) \quad \omega = \frac{1}{2} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} g(\vartheta)^2 d\vartheta = \frac{1}{2} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} r^2 d\vartheta.$$

Bei der Hyperbel der Halbachsen  $a, b$  (s. Fig. 40) haben wir zu setzen:

$$(7) \quad r^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 \vartheta - a^2 \sin^2 \vartheta}$$

und finden für den Inhalt  $\omega$  eines durch die Polarachse, den Radius vektor  $r$  des Hyperbelpunktes  $(r, \vartheta)$  und den zwischenliegenden Hyperbelbogen begrenzten Bereiches:

$$\omega = \frac{1}{2} a^2 b^2 \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{b^2 \cos^2 \vartheta - a^2 \sin^2 \vartheta}.$$

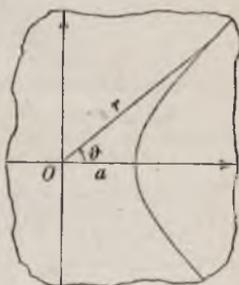


Fig. 40.

Das Integral ist nach (25) S. 10 zu berechnen und liefert:

$$\omega = \frac{1}{4} ab \ln \left| \frac{b \cos \vartheta + a \sin \vartheta}{b \cos \vartheta - a \sin \vartheta} \right|.$$

Erweitert man den rechts stehenden Bruch mit dem Zähler, so folgt mit Benutzung von (7) und durch Rückgang zu rechtwinkligen Koordinaten:

$$\omega = \frac{1}{2} ab \ln \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right), \quad -\omega = \frac{1}{2} ab \ln \left( \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right),$$

wobei sich die zweite Gleichung aus der ersten leicht auf Grund der Hyperbelgleichung in  $x, y$  ergibt. Für  $x$  und  $y$  findet man umgekehrt:

$$x = a \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{S} \left( \frac{2\omega}{ab} \right), \quad y = b \mathfrak{S} \mathfrak{I} \mathfrak{N} \left( \frac{2\omega}{ab} \right),$$

was im Falle  $a = b = 1$  zur ursprünglichen Erklärung der hyperbolischen Funktionen (I, 69) zurückführt.

Kombinieren wir die Polarkoordinaten mit einer Darstellung der Kurve in der Gestalt:

$$(8) \quad x = r \cos \vartheta = \varphi(t), \quad y = r \sin \vartheta = \psi(t)$$

mittels einer Variablen  $t$ , so folgt zunächst durch Differentiation in bezug auf  $\vartheta$ :

$$\frac{dr}{d\vartheta} \cos \vartheta - r \sin \vartheta = \varphi'(t) \frac{dt}{d\vartheta}, \quad \frac{dr}{d\vartheta} \sin \vartheta + r \cos \vartheta = \psi'(t) \frac{dt}{d\vartheta}.$$

Vereinigt man diese Gleichungen mit den Gleichungen (8) zur Elimination der Glieder mit  $\frac{dr}{d\vartheta}$ , so folgt unmittelbar:

$$r^2 d\vartheta = \varphi(t) \psi'(t) - \varphi'(t) \psi(t) dt.$$

Die durch das Integral (6) ausgemessene Fläche  $\omega$  wird bei Benutzung der in den Kurvengleichungen (8) vorliegenden Variablen  $t$  durch das Integral:

$$(9) \quad \omega = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (\varphi(t) \psi'(t) - \varphi'(t) \psi(t)) dt$$

gegeben. Anwendungen folgen sogleich.

Aufgaben: Man berechne den Inhalt des zwischen der  $x$ -Achse, zwei Ordinaten und der Kurve gelegenen Bereiches in folgenden Fällen:

1) Parabel  $y^2 = 2px$ . —

$$\omega = \sqrt{2p} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \sqrt{2p} (x_1 \sqrt{x_1} - x_0 \sqrt{x_0}) = \frac{2}{3} (x_1 y_1 - x_0 y_0).$$

Hier (und weiterhin) bedeuten  $y_1, y_0$  die zu  $x_1, x_0$  gehörenden Kurvenordinaten. Für  $x_0 = 0$  ergibt sich  $\omega = \frac{2}{3} x_1 y_1$ , so daß das Rechteck der Höhe  $y_1$  über der Grundlinie  $x_1$  durch den Parabelbogen in zwei Teilbereiche zerlegt wird, deren Inhalte sich wie 1 : 2 verhalten.

2) „Verallgemeinerte Parabel“ der Gleichung  $y^m = 2px^n$  mit zwei positiven ganzzahligen Exponenten  $m$  und  $n$ . —

$$\omega = \sqrt[m]{2p} \int_{x_0}^{x_1} x^{\frac{n}{m}} dx = \frac{m}{m+n} \sqrt[m]{2p} \left[ x^{\frac{n}{m}+1} \right]_{x_0}^{x_1} = \frac{m}{m+n} (x_1 y_1 - x_0 y_0).$$

Man deute das Ergebnis für  $x_0 = 0$  wieder geometrisch.

3) Gleichseitige Hyperbel  $y = x^{-1}$  oder  $xy = 1$ . Für die Integralgrenzen gelte  $0 < x_0 < x_1$ . —

$$\omega = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{x} = \ln x_1 - \ln x_0.$$

Man vgl. die Erklärung der Funktion  $\ln x$  in I, 33 ff.

4) „Verallgemeinerte Hyperbel“ der Gleichung  $x^m y^n = 1$  mit positiven ganzzahligen und voneinander verschiedenen Exponenten  $m, n$ . Die Integralgrenzen mögen wieder der Bedingung  $0 < x_0 < x_1$  genügen. —

$$\omega = \int_{x_0}^{x_1} x^{-\frac{m}{n}} dx = \frac{n}{n-m} \left( x_1^{\frac{n-m}{n}} - x_0^{\frac{n-m}{n}} \right) = \frac{n}{m-n} \left( \frac{1}{x_0^{\frac{m-n}{n}}} - \frac{1}{x_1^{\frac{m-n}{n}}} \right).$$

Ist  $n > m$ , so konvergiert das Integral für  $\lim x_0 = 0$ ; ist  $m > n$ , so konvergiert es für  $\lim x_1 = +\infty$ . Man erläutere diese Angaben durch Zeichnung einiger spezieller Kurven.

5) Kettenlinie  $y = a \operatorname{Coth} \left( \frac{x}{a} \right)$ . —

$$\omega = a \int_{x_0}^{x_1} \operatorname{Coth} \left( \frac{x}{a} \right) dx = a^2 \left( \operatorname{Sin} \left( \frac{x_1}{a} \right) - \operatorname{Sin} \left( \frac{x_0}{a} \right) \right).$$

Für  $x_0 = 0$  und  $x_1 = x$  folgt:

$$\omega = a^2 \operatorname{Sin} \left( \frac{x}{a} \right) = a \sqrt{y^2 - a^2},$$

so daß man an die Konstruktion der Bogenlänge  $s = \sqrt{y^2 - a^2}$  (s. Aufg. 2 S. 159) leicht die Konstruktion eines dieser Fläche  $\omega$  gleichen Rechtecks anschließt.

6) Für die Sinuslinie folgt:

$$\omega = \int_{x_0}^{x_1} \sin x dx = \cos x_0 - \cos x_1.$$

Auch dieses Ergebnis deute man geometrisch. —

Unter Gebrauch von Polarkoordinaten ist der von zwei Radien vektoren und dem zwischenliegenden Kurvenstücke begrenzte Bereich für folgende Kurven auszumessen:

7) Kegelschnitte unter Benutzung der Polargleichung (5) in I, 279. — Für den gesuchten Flächeninhalt  $\omega$  gilt der Ansatz:

$$\omega = \frac{1}{2} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} r^2 d\vartheta = \frac{1}{2} p^2 \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \frac{d\vartheta}{(1 - e \cos \vartheta)^2}.$$

a) Im Falle der Parabel ist  $e = 1$ :

$$\omega = \frac{1}{2} p^2 \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \frac{d\vartheta}{(1 - \cos \vartheta)^2} = \frac{1}{4} p^2 \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \frac{d \left( \frac{\vartheta}{2} \right)}{\sin^4 \left( \frac{\vartheta}{2} \right)},$$

wo das Integral nach Aufgabe 20, S. 18, weiter zu behandeln ist.

b) Bei der Ellipse führe man zur Integration den in Fig. 41 mit  $\eta$  bezeichneten Winkel ein. Es ist hier um den Mittelpunkt  $M$  der Ellipse mit der halben großen Achse  $a$  der Kreis beschrieben und die zum Punkte  $P$  der Koordinaten  $r, \vartheta$  gehörende

Ellipsenordinate  $y$  zur Kreisordinate  $y' = \frac{a}{b} y$  verlängert. Man liest aus der Figur leicht ab:

$$(10) \quad \overline{OQ} = r \cos \vartheta = e + a \cos \eta, \quad \overline{PQ} = r \sin \vartheta = b \sin \eta.$$

Durch Differentiation in bezug auf  $\vartheta$  folgt:

$$\frac{dr}{d\vartheta} \cos \vartheta - r \sin \vartheta = -a \sin \eta \frac{d\eta}{d\vartheta}, \quad \frac{dr}{d\vartheta} \sin \vartheta + r \cos \vartheta = +b \cos \eta \frac{d\eta}{d\vartheta}.$$

Man beweise durch zweckmäßige Vereinigung dieser Gleichungen mit den Gleichungen (10) die Richtigkeit der Angabe:

$$r^2 d\vartheta = b(a + e \cos \eta) d\eta.$$

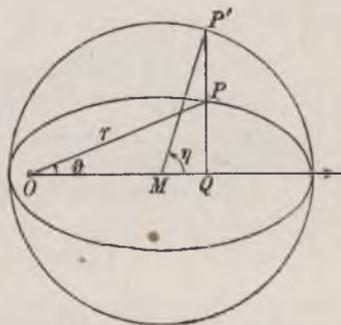


Fig. 41.

Die Integration ist nun sofort ausführbar:

$$\omega = \frac{1}{2} b \int_{\eta_0}^{\eta_1} (a + e \cos \eta) d\eta = \frac{1}{2} b [a\eta + e \sin \eta]_{\eta_0}^{\eta_1}.$$

Für  $\eta_0 = 0$ ,  $\eta_1 = 2\pi$  kommt als Inhalt des von der Ellipse umschlossenen Bereiches  $ab\pi$ .

c) Bei der Hyperbel führe man eine Variable  $\eta$  entsprechend den Gleichungen (10) durch:  $r \cos \vartheta = -e + a \cos \eta$ ,  $r \sin \vartheta = b \sin \eta$

ein und deute zunächst  $\eta$  geometrisch als doppelte Sektorfläche einer gewissen gleichseitigen Hyperbel. Als neue Gestalt des Integrals muß man finden:

$$\omega = \frac{1}{2} b \int_{\eta_0}^{\eta_1} (a - e \cos \eta) d\eta = \frac{1}{2} b [a\eta - e \sin \eta]_{\eta_0}^{\eta_1}.$$

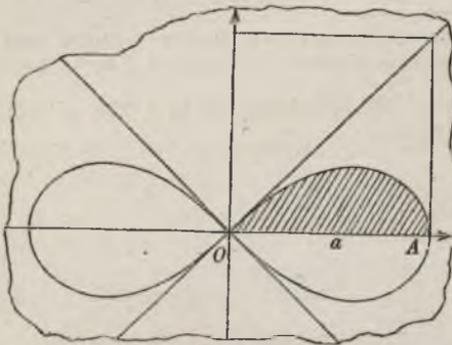


Fig. 42.

Man beachte bei der Durcharbeitung der Aufgabe, daß  $\eta$  mit wachsendem  $\vartheta$  abnimmt.

8) Lemniskate der Gleichung  $r = a \sqrt{\cos 2\vartheta}$  (s. Fig. 78 in I, 295 und Aufgabe 12, S. 161). —

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{2} a^2 \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \cos 2\vartheta d\vartheta \\ &= \frac{1}{4} a^2 (\sin 2\vartheta_1 - \sin 2\vartheta_0). \end{aligned}$$

Man lese hieraus ab, daß die in Fig. 42 schraffierte Hälfte des von der einzelnen Schleife der Kurve umschlossenen

Bereiches inhaltsgleich mit einem Viertel des über der Halbchse  $OA = a$  errichteten Quadrates ist.

9) Logarithmische Spirale  $r = e^{a\vartheta}$ . —

$$\omega = \frac{1}{2} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} e^{2a\vartheta} d\vartheta = \frac{1}{4a} (e^{2a\vartheta_1} - e^{2a\vartheta_0}) = \frac{1}{4a} (r_1^2 - r_0^2).$$

Bei den Hypozykloiden und Epizykloiden messe man den Bereich, der durch zwei vom Mittelpunkte des festen Kreises ausziehende Radien vektoren und die Kurve eingegrenzt ist. Hierbei ist der Ansatz (9) heranzuziehen.

10) Beliebige Hypozykloide der Gleichungen (s. I, 278):

$$x = (a - b) \cos t + b \cos \left( \frac{a-b}{b} t \right), \quad y = (a - b) \sin t - b \sin \left( \frac{a-b}{b} t \right).$$

Als Ergebnis muß man hier finden:

$$\omega = \frac{1}{2} (a-b)(a-2b) \int_{t_0}^{t_1} \left( 1 - \cos \left( \frac{a}{b} t \right) \right) dt = \frac{1}{2} (a-b)(a-2b) \left[ t - \frac{b}{a} \sin \left( \frac{a}{b} t \right) \right]_{t_0}^{t_1}.$$

Im Falle der Astroide ( $4b = a$ ) leite man für den Inhalt des ganzen von der Kurve umschlossenen Bereiches  $\frac{3}{8} a^2 \pi$  ab, so daß dieser Bereich sich zur Fläche des der Astroide umschriebenen Kreises wie 3 zu 8 verhält.

11) Beliebige Epizykloide der Gleichungen (s. I, 278):

$$x = (a + b) \cos t - b \cos \left( \frac{a+b}{b} t \right), \quad y = (a + b) \sin t - b \sin \left( \frac{a+b}{b} t \right).$$

Die Rechnung führt zu:

$$\omega = \frac{1}{2} (a + b) (a + 2b) \left[ t - \frac{b}{a} \sin \left( \frac{a+b}{b} t \right) \right]_{t_0}^{t_1}.$$

Bei der Kardioiden ( $b = a$ ) ist der Inhalt des von der Kurve umschlossenen Bereiches  $6a^2\pi$ , d. h. das Sechsfache der Kreisfläche des Radius  $a$ .

12) Kreisevolvente (s. Fig. 93 in I, 314) der Gleichungen:

$$x = a (\cos t + t \sin t), \quad y = a (\sin t - t \cos t).$$

Die von den Radien vektoren der Punkte  $t_0$  und  $t_1$  sowie der Kurve eingeschlossene Fläche hat den Inhalt:

$$\omega = \frac{1}{6} a^2 (t_1^3 - t_0^3).$$

**4. Das Polarplanimeter.** Wie das Kugelrollplanimeter (S. 76) eine mechanische Auswertung des auf rechtwinklige Koordinaten bezogenen bestimmten Integrals darstellt, so kann man mittelst des „Amslerschen Polarplanimeters“ das auf Polarkoordinaten bezogene Integral (5) S. 164 mechanisch auswerten. In Fig. 43 ist eine Abbildung eines neueren von

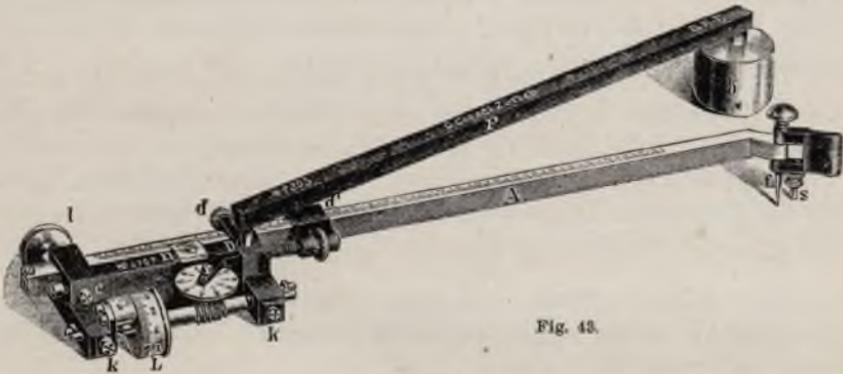


Fig. 43.

Coradi hergestellten Polarplanimeters gegeben. Das festliegende Gewicht  $b$  gibt im Mittelpunkte seiner Grundfläche den Pol  $O$  an, um welchen der „Polarm“  $P$  parallel zur Papierebene drehbar ist. Am linken Ende von  $P$  ist mittelst eines Gelenkes über die Papierebene hin drehbar der „Fahrarm“  $A$  angebracht, der am rechten Ende den „Fahrstift“  $f$  trägt. Links am Fahrarm befindet sich die mit ihrem Rande auf der Papierebene lagernde „Rolle“  $L$ , deren Achse parallel zum Fahrarm eingelagert

ist. Ein Zählwerk gestattet die vollen Umdrehungen der Rolle mit einer Genauigkeit von drei Dezimalstellen abzulesen.

Es besteht hier die Grundtatsache, daß, wenn der Fahrstift  $f$  über irgend eine Kurve hingeführt wird, die Bewegung der Rolle  $L$  auf der Papierebene im allgemeinen aus einer Rollung und einer Gleitung zusammengesetzt ist. Das Gesetz, nach dem sich bei diesem Vorgange die Rollendrehung regelt, ist zunächst festzustellen.

In Fig. 44 denken wir die Rollenachse mit zwei Handhaben  $G$  und  $H$  versehen und führen die zur Papierebene parallele Achse derart ohne Änderung ihrer Richtung über die Papierebene hin, daß der Berührungspunkt des Rollenrandes auf der Papierebene die gerade Strecke  $AB$  von  $A$  nach  $B$  beschreibt. Wir geben der Rollenachse die Richtung von  $H$  nach  $G$  und wollen die Umdrehungszahl  $U$  der Rollendrehung (in einer vollen Umdrehung als Einheit gemessen) positiv oder negativ rechnen, je nachdem die Drehung, vereint mit einer Translation in Richtung der Achse, eine Rechts- oder Linksschraube liefert\*).

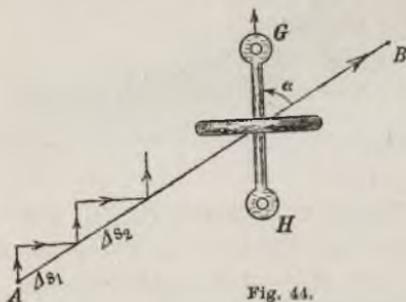


Fig. 44.

Mit  $\alpha$  werde der Überschuß der Amplitude der (gerichteten) Rollenachse über die Amplitude der Bahnrichtung von  $A$  nach  $B$  (s. Fig. 44) in irgend einem zugrunde liegenden Polarkoordinatensysteme bezeichnet. Im Falle der Fig. 44 ist  $\alpha$  im Intervall  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

gelegen; wenn man will, kann man statt etwaiger konvexer Winkel  $\alpha$  auch konkave Winkel negativer Maßzahlen benutzen.

Ist nun  $\alpha = 0$  oder  $= \pi$ , so liegt bei der vorgeschriebenen Bewegung der Rolle reine Gleitung derselben vor, so daß keine Achsendrehung der Rolle auftritt. Ist hingegen  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , so liegt reine Rollung vor; und es ist einleuchtend, daß, wenn  $\rho$  der Rollenradius ist, die Umdrehungszahl  $U$  der Rolle mit der Streckenlänge  $s = \overline{AB}$  durch die Beziehung verbunden ist:

$$\overline{AB} = s = 2\rho\pi \cdot U.$$

Ist hingegen  $\alpha$  irgend ein Winkel des Intervalles  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , wie in Fig. 44, so ersetze man den Weg von  $A$  nach  $B$  durch den treppenförmigen in der Figur angedeuteten Weg, dessen Stücke abwechselnd par-

\*) Dementsprechend ist das Zählwerk am Planimeter eingerichtet, falls man als Richtung der Rollenachse diejenige des Fahrarmes vom Gelenk zum Fahrstift wählt.

allel und senkrecht zur Rollenachse verlaufen. Ersetzen die beiden eine Stufe der Treppe zusammensetzenden Stücke die Teilstrecke  $\Delta s_k$ , so entnimmt man aus Fig. 44 sofort, daß die Hinführung der Rolle über die Stufe die Rollendrehung:

$$\Delta U_k = \frac{\Delta s_k \cdot \sin \alpha}{2 \varrho \pi}$$

bewirkt. Die Hinführung über die ganze Treppe liefert also die Drehung:

$$(1) \quad U = \sum \Delta U_k = \frac{\sin \alpha}{2 \varrho \pi} \cdot \sum \Delta s_k = \frac{1}{2 \varrho \pi} \cdot s \cdot \sin \alpha.$$

Dieses Ergebnis besteht unabhängig von der Auswahl der  $\Delta s_k$ , bleibt also auch bestehen, wenn wir die  $\Delta s_k$  kleiner und kleiner wählen. Wir sehen nun den „kinematischen“ Satz als einleuchtend an, daß für  $\lim \Delta s_k = 0$  die Führung der Rolle über die Treppen sich einem Grenzvorgange nähert, nämlich der Bewegung der Rolle über die Strecke  $AB$ . Das Ergebnis (1) aber heißt dann einfach, daß die Umdrehungszahl  $U$  der mit dem Sinus des Winkels  $\alpha$  multiplizierten Streckenlänge  $s$  proportional ist.

Auf sonstige Werte  $\alpha$  überträgt man diese Betrachtung sofort, wobei man nur für  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  und für  $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$  die Treppenstufen auf der anderen Seite von  $AB$  anzubringen hat. Die Formel (1) und der ausgesprochene Satz bleiben unverändert gültig; wie es sein muß, treten für  $\alpha > \pi$  negative Maßzahlen  $U$  auf.

Es sei jetzt irgend eine Kurve  $K$  mit einer Bogenlänge  $s$  gegeben, die wir im Sinne wachsender  $s$  mit unserer Rolle beschreiben. Dabei möge an der „Stelle  $s$ “ der Kurve der Winkel  $\alpha$  der Rollenachse gegen die in Richtung wachsender  $s$  genommene Kurventangente wie oben bestimmt sein. Ersetzen wir die Kurve durch eine Sehnenkette  $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots$ , so findet sich längs des zur Sehne  $\Delta s_k$  gehörenden Kurvenstückes mindestens ein Punkt, in dem die Kurventangente der Sehne parallel ist\*). Hier liege der Winkel  $\alpha_k$  vor. Führen wir jetzt die Rolle über die Sehnenkette, indem wir längs  $\Delta s_k$  den Winkel  $\alpha_k$  konstant halten, so erscheint am Schlusse die Rollendrehung:

$$U = \frac{1}{2 \varrho \pi} \sum \sin \alpha_k \cdot \Delta s_k.$$

Wir vollziehen jetzt wieder den Grenzübergang  $\lim \Delta s_k = 0$  und finden: Bei Hinführung der Rolle über die Kurve  $K$  tritt die Rollendrehung:

$$(2) \quad U = \frac{1}{2 \varrho \pi} \int \sin \alpha \cdot ds$$

\*) Wir setzen voraus, daß sich die Tangente längs der Kurve stetig (oder doch wenigstens „abteilungsweise“ stetig) ändert.

ein, so daß sich insbesondere, falls die Rollachse gegen die Kurve konstante Neigung  $\alpha$  hat, die Formel (1) wieder ergibt.

In Fig. 45 ist eine schematische Zeichnung des Polarplanimeters entworfen. Dabei sei der Polarm  $\overline{OA} = a$ , der Fahrarm vom Gelenk bis zum Fahrstift  $\overline{AF} = b$ , der senkrechte Abstand des Gelenkes  $A$  von der Rollenebene  $\overline{AC} = c$ , und endlich seien  $r$  und  $r'$  die Radien vektoren von  $F$  und vom Auflagerpunkte der Rolle. Die Erklärung der Winkel  $\beta$  und  $\gamma$  entnehme man aus der Figur. Es gilt nun offenbar:

$$r^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma,$$

$$-\cos \gamma = \frac{AC + BC}{a} = \frac{c + r' \cos \beta}{a},$$

so daß wir finden:

$$(3) \quad r^2 = a^2 + b^2 + 2bc + 2b \cdot r' \cos \beta.$$

Der Leser wolle sich eine der Lage des Planimeters in Fig. 43 entsprechende schematische Zeichnung entwerfen und

wird an der Hand derselben leicht wieder zur Relation (3) gelangen.

Wir führen jetzt den Fahrstift über einen Kreisbogen um  $O$  vom Radius  $r$  und Zentriwinkel  $\Delta\vartheta$  hin. Da hierbei  $\gamma$  konstant ist, so bleibt die Figur mit sich kongruent, und der Auflagerpunkt der Rolle beschreibt seinerseits einen Kreisbogen um  $O$  vom Radius  $r'$  und Zentriwinkel  $\Delta\vartheta$ , dessen Länge also  $r' \cdot \Delta\vartheta$  ist. Der Winkel  $\alpha$  der Rollachse gegen diesen Kreisbogen ist konstant und, wie die Figuren zeigen, einfach gleich  $(\beta + \frac{3}{2}\pi)$  oder um  $2\pi$  kleiner\*), so daß an Stelle von (3) nach Multiplikation mit  $\Delta\vartheta$  geschrieben werden kann:

$$(4) \quad r^2 \Delta\vartheta = (a^2 + b^2 + 2bc) \Delta\vartheta - 2b \cdot r' \Delta\vartheta \sin \alpha.$$

Die bei der Bewegung eintretende Rollendrehung  $U$  ist aber gegeben durch:

$$U = \frac{1}{2\varrho\pi} r' \Delta\vartheta \sin \alpha$$

oder also zufolge (4) durch:

$$(5) \quad U = \frac{1}{4b\varrho\pi} (a^2 + b^2 + 2bc) \Delta\vartheta - \frac{1}{4b\varrho\pi} \cdot r^2 \Delta\vartheta.$$

Auf dieser Gleichung beruht die Beziehung des Polarplanimeters

\*) In Fig. 45 ist  $\alpha > \frac{3}{2}\pi$ , in der vom Leser zu entwerfenden Figur aber  $< \pi$ .

zum Integrale (5) S. 164. Wir wollen den Fahrstift  $F$  über den Rand des in Fig. 46 gezeichneten Vierecks  $P_1 Q_1 Q_0 P_0$  hinführen, das von den Strahlen der Amplituden  $\vartheta$  und  $(\vartheta + \Delta\vartheta)$ , sowie von zwei Kreisbogen der Radien  $OP_1 = r_1$  und  $OP_0 = r_0$  begrenzt ist. Die Beschreibung des Kreisbogens  $P_i Q_i$  in der Richtung von  $P_i$  nach  $Q_i$  liefert die Rollendrehung:

$$U_i = \frac{1}{4b\varrho\pi} (a^2 + b^2 + 2bc) \Delta\vartheta - \frac{1}{4b\varrho\pi} \cdot r_i^2 \Delta\vartheta.$$

Die Durchlaufung von  $Q_0 P_0$  in der Richtung von  $Q_0$  auf  $P_0$  liefert also  $-U_0$  als Drehung. Die Durchlaufung von  $Q_1$  nach  $Q_0$  und die von  $P_0$  nach  $P_1$  liefern kongruente, aber im entgegengesetzten Sinne erfolgende Bewegungen des Planimeters; die zugehörigen Drehungen heben sich also auf. Die Gesamtdrehung, die wir gleich mit  $\Delta U$  bezeichnen wollen, ist also  $(U_1 - U_0)$  und stellt sich demnach in der Gestalt dar:

$$(6) \quad \Delta U = -\frac{1}{4b\varrho\pi} (r_1^2 - r_0^2) \Delta\vartheta.$$

Der Übergang zum Integral beruht nun auf einer bekannten Betrachtung. Wir überlagern den auszumessenden Bereich, wie Fig. 47 andeutet, mit einer Reihe von Vierecken der eben betrachteten Art, wobei der Inhalt des einzelnen Vierecks auf Grund der Gleichung:

$$\frac{1}{2} (r_1^2 - r_0^2) \Delta\vartheta = -2b\varrho\pi \cdot \Delta U$$

durch die Umdrehung  $\Delta U$  geliefert wird. Bei der Addition können wir die gemeinsamen geradlinigen Randstücke zweier benachbarter Vierecke, die je zweimal und zwar in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen werden, einsparen. Die Summe der Inhalte aller Vierecke ist dann einfach:

$$\frac{1}{2} \sum (r_1^2 - r_0^2) \Delta\vartheta = -2b\varrho\pi \cdot U,$$

wo jetzt  $U$  die Rollendrehung ist, die beim Beschreiben des treppenförmigen äußeren Randes des Viereckssystems eintritt. Der Grenzübergang  $\lim \Delta\vartheta = 0$  führt zum Integral: Für den Bereichsinhalt und damit für das Integral gilt die Darstellung:

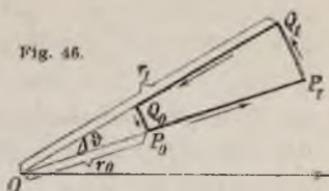
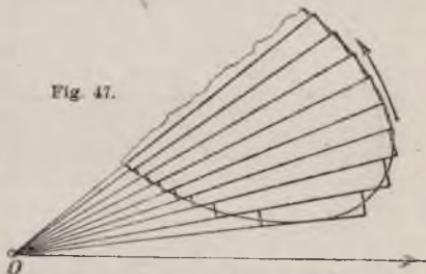


Fig. 47.



$$(7) \quad \frac{1}{2} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} (r_1^2 - r_0^2) d\vartheta = -2b\varrho\pi \cdot U,$$

wo  $U$  die Rollendrehung des Planimeters ist, die bei einem vollen Umlaufe des Fahrstiftes um den Bereich in der in Fig. 47 angedeuteten Pfeilrichtung erzielt wird\*).

Ist der auszumessende Bereich sehr groß, so kann man den Pol  $O$  auch in das Innere des Bereiches verlegen und auf Grund folgender Überlegung vorgehen: Zufolge (5) tritt keine Rollendrehung ein, wenn der Fahrstift den Kreis des Radius  $r_0 = \sqrt{a^2 + b^2} + 2bc$  um  $O$  beschreibt. In Fig. 48 ist dieser Kreis des Radius  $r_0$  angedeutet, seine Fläche möge aus dem Bereiche zunächst herausgeschnitten werden. Um dem ringförmigen Restbereiche eine einzige Randkurve zu geben, fügen wir noch

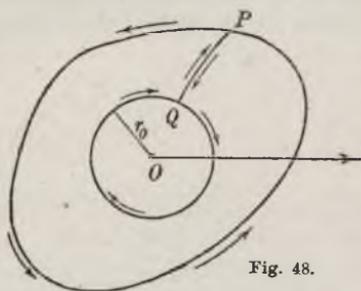


Fig. 48.

das Verbindungsstück  $PQ$  des äußeren und inneren Randes hinzu, das dann als Rand des Restbereiches zweimal in entgegengesetzten Richtungen zu durchlaufen ist. Durch Führung des Fahrstiftes über den ganzen Rand des Restbereiches (in der Pfeilrichtung) wird auf Grund von (7) der Inhalt dieses Bereiches gewonnen. Da aber der innere Kreis keinen Beitrag zu  $U$  liefert und die beiden von  $PQ$  herrührenden Bei-

träge sich aufheben, so folgt einfach: *Führt man im Falle eines im Inneren des Bereiches liegenden Poles den Fahrstift über den Rand des Bereiches, so liefert die Rollendrehung den um den Kreisinhalt  $(a^2 + b^2 + 2bc)\pi$  verminderten Bereichinhalt, so daß der gewünschte Inhalt erst durch Zusatz des Betrages  $(a^2 + b^2 + 2bc)\pi$  gewonnen wird.*

Einige beiläufige Entwicklungen über Beziehungen des Polarplanimeters zu früheren Sätzen mögen sich hier noch anschließen. Die Rollachse ist parallel zum Fahrarm und in starrer Verbindung mit demselben angeordnet. Da aber der Faktor  $2b\varrho\pi$  in (7) allein vom Rollenradius  $\varrho$  und der Fahrarmlänge  $b$  abhängt, so ist die Größe der Rollendrehung  $U$  unabhängig davon, wie die Rollachse des näheren angebracht ist. Man darf demnach (wie dies tatsächlich auch bei älteren Apparaten ausgeführt wurde) die Rolle direkt auf dem Fahrarme oder senkrecht unter demselben anordnen; auch können wir uns vorstellen, daß die Rolle direkt

\*) Bei der üblichen Anordnung des Zählwerkes liefert die Umlaufsrichtung des Textes negative Maßzahlen  $U$ . Will man lieber mit positiven  $U$  arbeiten, so hat man einfach die Umlaufsrichtung umzukehren. Kennt man die Konstanten  $b$  und  $\varrho$  nicht genau, so umfährt man einmal eine bekannte Fläche, z. B. einen Kreis des Radius 1, und liest die zugehörige Umdrehung  $U_0$  ab. Dann ist  $\pi = -2b\varrho\pi \cdot U_0$ , und also folgt für  $-2b\varrho\pi$ , d. h. für den in (7) rechts stehenden Faktor, der Wert  $\pi \cdot U_0^{-1}$ .

an Stelle des Fahrstiftes angebracht ist, und daß mit dem Auflagerpunkte der Rolle unmittelbar die Randkurve  $K$  des auszumessenden Bereiches  $B$  beschrieben wird.

An diese Vorstellung können wir folgende Theorie des Planimeters anschließen: Da die Polarmlänge  $a$  in der Gleichung (7) gleichfalls nicht auftritt, so nehmen wir  $a = b$  und setzen zur Vereinfachung der Formeln  $a = b = 1$ . Die Schar der Kurven, längs deren „reine Rollung“ beim Planimeter eintritt, wird nun von den gesamten Kreisen des Radius 1 geliefert, deren Mittelpunkte auf dem geometrischen Orte des Endpunktes vom Polarme liegen, d. h. also auf dem Kreise des Radius 1 um  $O$ . Entsprechend der in Fig. 45 bevorzugten Anordnung des Planimeters mit „konkavem“ Winkel  $\gamma$  deuten wir in Fig. 49 nur die Schar der „Halbkreise“ an, längs deren reine Rollung eintritt. Ist  $u$  die Amplitude des einzelnen Kreismittelpunktes, so ist die Gleichung des Halbkreises:

$$(x - \cos u)^2 + (y - \sin u)^2 = 1$$

oder in Polarkoordinaten:

$$(8) \quad r = 2 \cos(\vartheta - u),$$

wo  $(\vartheta - u)$  dem Intervalle  $0 \leq (\vartheta - u) \leq \frac{\pi}{2}$  angehört und  $u$  als „Parameter“ der Schar zu gelten hat.

Diese Schar wird nun allenthalben senkrecht überkreuzt von einer zweiten Kurvenschar, die in Fig. 49 gleichfalls angedeutet ist, und deren Gleichung mit dem Parameter  $v$  sich so schreibt:

$$(9) \quad \vartheta - v = \arccos\left(\frac{1}{2}r\right) - \frac{1}{r}\sqrt{4-r^2}.$$

Die Wurzel ist positiv zu nehmen, und im ersten Gliede ist der „Hauptwert“ der Funktion  $\arccos$  gemeint. Man bestätigt für die einzelne „Kurve  $K_p$ “ nach kurzer Rechnung:

$$(10) \quad \frac{d\vartheta}{dr} = \frac{\sqrt{4-r^2}}{r^2}.$$

Bei Abnahme des Wertes  $r$  von 2 bis 0 nimmt also auch  $\vartheta$  ab, und zwar vom Werte  $\vartheta = v$  bis  $\vartheta = -\infty$ . Die einzelnen der Kurven  $K_p$ , die sämtlich kongruent sind und durch Drehung um  $O$  ineinander übergehen, windet sich also spiralförmig unendlich oft um den Pol.

Daß sich in einzelnen „Punkte  $(u, v)$ “ die beiden durch ihn hindurchlaufenden Kurven  $K_u$  (d. i. der Kreis (8)) und  $K_p$  senkrecht schneiden, folgt sofort durch Heranziehung des in I, 290 erklärten Winkels  $\beta$  zwischen der Kurventangente und dem Radiusvektor, für welchen nach Formel (1) daselbst:

$$\operatorname{tg} \beta = r \frac{d\vartheta}{dr}$$

gilt. Für die Kurve  $K_p$  hat man zufolge (10):

$$\operatorname{tg} \beta_p = \frac{\sqrt{4-r^2}}{r}.$$

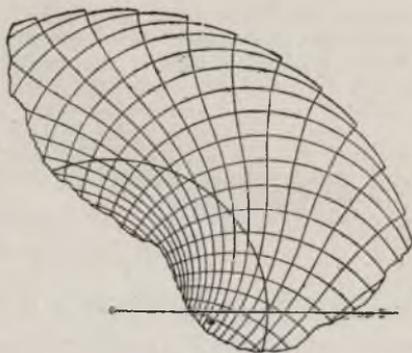


Fig. 49.

Aus (8) aber folgt durch kurze Rechnung:

$$(11) \quad \vartheta - u = \arccos\left(\frac{1}{2}r\right), \quad \operatorname{tg} \beta_u = -\frac{r}{\sqrt{4-r^2}},$$

woraus die Behauptung hervorgeht. Da nun bei jeder Lage des Planimeters der Fahrarm die Tangente der durch den Auflagerpunkt der Rolle hindurchlaufenden Kurve  $K_v$  ist, so können wir zusammenfassend das Ergebnis aussprechen: Die durch (11) und (9) gegebenen Kurven  $K_u$  und  $K_v$  sind die Kurven der „reinen Rollung“ und der „reinen Gleitung“ der Planimeterrolle.

Wir führen nun unter Heranziehung der allgemeinen Entwicklungen von S. 101 ff. die  $u, v$  als neue „Variable“ oder als neue „krummlinige Koordinaten“ ein, wobei man als Darstellung der alten Koordinaten  $r, \vartheta$  in den neuen aus (9) und (11) leicht folgert:

$$(12) \quad r = \frac{2}{\sqrt{1+(v-u)^2}}, \quad \vartheta = u + \arccos\left(\frac{1}{2}r\right).$$

Die partiellen Ableitungen der  $r, \vartheta$  nach den  $u, v$  sind:

$$(13) \quad \frac{\partial r}{\partial u} = +\frac{2(v-u)}{(\sqrt{1+(v-u)^2})^3}, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial u} = \frac{(v-u)^2}{1+(v-u)^2},$$

$$(14) \quad \frac{\partial r}{\partial v} = -\frac{2(v-u)}{(\sqrt{1+(v-u)^2})^3}, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial v} = \frac{1}{1+(v-u)^2}.$$

Für die Funktionaldeterminante  $D(r, \vartheta)$  folgt hieraus:

$$D(r, \vartheta) = \frac{\partial r}{\partial u} \frac{\partial \vartheta}{\partial v} - \frac{\partial r}{\partial v} \frac{\partial \vartheta}{\partial u} = \frac{2(v-u)}{(\sqrt{1+(v-u)^2})^3}.$$

Sind also  $d\omega, d\omega'$  und  $d\omega'' = du \cdot dv$  einander entsprechende Flächendifferentiale in der Ebene der Fig. 49, der „ $r, \vartheta$ -Ebene“ und der „ $u, v$ -Ebene“, so gilt (vgl. S. 107):

$$(15) \quad d\omega = r d\omega' = r \cdot D(r, \vartheta) du dv = \frac{4(v-u) du dv}{(1+(v-u)^2)^2}.$$

Hierbei ist  $d\omega'' = du \cdot dv$  der Inhalt eines Rechteckes der  $u, v$ -Ebene, das sich auf ein Kurvenviereck der Fig. 49 überträgt.

Der vom Punkte  $(u, v)$  nach  $(u, v + dv)$  laufenden Seite  $dv$  dieses Rechtecks entspricht dabei ein Bogendifferential  $ds_v$  der durch den „Punkt  $(u, v)$ “ der Fig. 49 hindurchlaufenden Kurve  $K_u$ , für welches wir auf Grund des Ausdrucks (6) in I, 292 für  $ds$  aus (12) und (13) leicht berechnen:

$$ds_v = \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)^2 + r^2 \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial v}\right)^2} dv = \frac{2 dv}{1+(v-u)^2}.$$

Der gegenüberliegenden Seite, die von  $(u + du, v)$  nach  $(u + du, v + dv)$  führt, gehört demnach folgendes Bogendifferential der Kurve  $K_{u+du}$  zu:

$$ds_u + \frac{\partial(ds_v)}{\partial u} du = ds_v + \frac{4(v-u) du dv}{(1+(v-u)^2)^2}.$$

Der Vergleich mit (15) liefert die Beziehung:

$$(16) \quad d\omega = \frac{\partial(ds_u)}{\partial u} du,$$

welche die Eigenart des Planimeters begründet. Wählen wir als Bereich erstlich ein Rechteck der  $u, v$ -Ebene der Ecken  $(u_0, v_0), (u_1, v_0), (u_1, v_1), (u_0, v_1)$ , und wird

das entsprechende krummlinige Viereck der Fig. 49 durch  $B$  bezeichnet, so folgt unmittelbar:

$$\int^{(B)} d\omega = \int_{v_0}^{v_1} \left( \int_{u_0}^{u_1} \frac{\partial(ds_v)}{\partial u} du \right) = \int_{v_0}^{v_1} (ds_v^{(u_1)} - ds_v^{(u_0)}),$$

wo die rechts in der Klammer stehenden Ausdrücke die Bogendifferentiale der Kurven  $K_{u_1}$  und  $K_{u_0}$  sind. Es steht also rechts einfach der Überschuß der Seite  $K_{u_1}$  vom Viereck  $B$  über die Seite  $K_{u_0}$ ; dieser Überschuß, wie er eben von der Planimeterrolle beim Umfahren von  $B$  aufgenommen wird, ist also in der Tat dem Inhalte von  $B$  gleich. Der Übergang zu beliebigen Bereichen wird dann in bekannter Weise durch immer kleiner zu wählende Vierecke der bisherigen Art vermittelt. —

Für einen den Pol nicht enthaltenden Bereich  $B$  der Randkurve  $K$  gilt zufolge (2) und (7):

$$(17) \quad \int^{(B)} d\omega = -b \int^{(K)} \sin \alpha ds.$$

Die Analogie dieser Gleichung zu den Formeln (5) ff. S. 139, in denen gleichfalls Flächenintegrale durch Linienintegrale dargestellt werden, ist augenfällig; und es liegt daher der Wunsch nahe, von den damaligen Entwicklungen aus das Planimeter erneut verständlich zu machen. Dies gelingt sehr leicht unter Heranziehung des Satzes über Integration vollständiger Differentiale über geschlossene Kurven (S. 148).

In Fig. 50 ist  $\beta$  der schon vorhin gebrauchte Winkel zwischen dem Radiusvektor  $r$  und der Tangente von  $K$ , wobei nach I, 290 und 292:

$$(18) \quad \sin \beta = \frac{r d\vartheta}{ds}, \quad \cos \beta = \frac{dr}{ds}$$

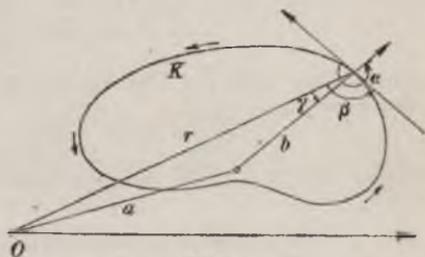


Fig. 50.

gilt. Der Winkel  $\alpha$  der Rollennachse (des Fahrarmes) gegen die Kurve  $K$  ist konvex; endlich bedeutet  $\gamma$  den Winkel zwischen  $r$  und  $b$ , für welchen man aus dem Kosinussatze abliest:

$$(19) \quad \cos \gamma = \frac{r^2 + b^2 - a^2}{2br}, \quad \sin \gamma = \frac{\sqrt{4b^2r^2 - (r^2 + b^2 - a^2)^2}}{2br}$$

mit positiv zu nehmender Wurzel. Zur Abkürzung schreiben wir:

$$\sqrt{4b^2r^2 - (r^2 + b^2 - a^2)^2} = h(r), \quad \sin \gamma = \frac{h(r)}{2br}.$$

Nun folgt aus Fig. 50 sofort:

$$\alpha = 2\pi + \gamma - \beta, \quad -\sin \alpha = \sin(\beta - \gamma)$$

und also weiter zufolge (18) und (19):

$$(20) \quad -b \sin \alpha ds = \frac{1}{2} \left( r^2 d\vartheta + (b^2 - a^2) d\vartheta - \frac{h(r)}{r} dr \right).$$

Der Leser wolle sich vorerst überzeugen, daß diese Relation für alle Lagen des Planimeters längs  $K$  richtig bleibt\*).

\*) Damit die Rechnung unverändert besteht, wolle man insofern von der in I, 290 gegebenen Erklärung des Winkels  $\beta$  abweichen, daß jetzt  $\beta$  der Winkel

Wir kehren nun zu rechtwinkligen Koordinaten durch die Gleichungen:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \vartheta = \arctg \left( \frac{y}{x} \right)$$

zurück und schreiben:

$$\int \frac{h(r)}{r} dr = f(x, y),$$

wo nach Ausführung der Integration  $r$  durch  $x$  und  $y$  auszudrücken ist. Die Gleichung (20) gewinnt die Gestalt:

$$-b \sin \alpha ds = \frac{1}{2} (x dy - y dx + (b^2 - a^2) d \arctg \left( \frac{y}{x} \right) - df(x, y)),$$

wo in den beiden letzten Gliedern vollständige Differentiale von Funktionen stehen, die in  $B$  eindeutige und stetige partielle Ableitungen haben\*). Somit gilt nach S. 148 für die über die geschlossene Kurve  $K$  geführten Linienintegrale:

$$\int^{(K)} d \arctg \left( \frac{y}{x} \right) = 0, \quad \int^{(K)} df(x, y) = 0,$$

und die letzte Gleichung führt zu:

$$-b \int^{(K)} \sin \alpha ds = \frac{1}{2} \int^{(K)} x dy - \frac{1}{2} \int^{(K)} y dx.$$

Nun liefern aber die Gleichungen (6) S. 139 für  $\psi(x, y) = x$  und (7) S. 140 für  $\varphi(x, y) = y$ :

$$\int^{(K)} x dy = \int^{(B)} d\omega, \quad - \int^{(K)} y dx = \int^{(B)} d\omega,$$

so daß wir in der Tat zur Grundgleichung (17) des Planimeters zurückgelangen.

**5. Die Inhalte krummflächiger Bereiche.** Durch die Gleichung  $z = f(x, y)$  sei in rechtwinkligen Koordinaten eine *krumme Fläche* gegeben. Ist in einem Bereiche  $B$  der  $x, y$ -Ebene die Funktion  $f(x, y)$  mit ihren Ableitungen  $f'_x$  und  $f'_y$  eindeutig und stetig, so hat das über dem Bereiche  $B$  gelegene Stück der krummen Fläche nach S. 112 ff. den Inhalt:

$$(1) \quad \omega = \int^{(B)} \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y} d\omega^{**}.$$

In der bereits in I, 321 betrachteten Fig. 51 ist eine Kugel mit einem Zylinder, dargestellt durch die Gleichungen:

$$(2) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0, \\ x^2 + y^2 - ax = 0, \end{cases}$$

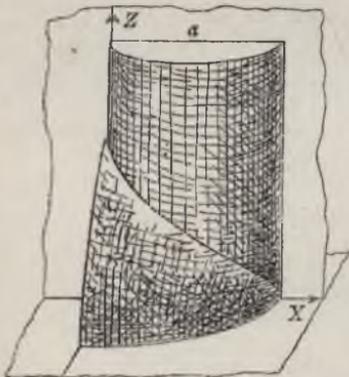


Fig. 51.

zwischen  $r$  und der entgegen der Umlaufsrichtung von  $K$  gerichteten Kurventangente ist.

\*) Der Pol  $O$  sollte dem Bereiche  $B$  nicht angehören.

\*\*) Man sagt, dieses Integral leiste die „Komplanation“ der krummen Fläche.

zum Durchschnitt gebracht. Wir wollen als erstes Beispiel den in der Figur sichtbaren Teil des Kugeloktanten ausmessen. Im Innern des Zylinders liegt oberhalb der  $x,y$ -Ebene ein blattförmiges Stück der Kugel-  
fläche, das man als die „Fläche von Viviani“ bezeichnet. Dasselbe wird durch die  $x,z$ -Ebene in zwei symmetrische Hälften zerlegt, von denen wir zunächst das hinter der  $x,z$ -Ebene (nach Seiten der positiven  $y$ -Achse) gelegene ausmessen wollen. Der unter dieser Fläche gelegene Bereich  $B$  der  $x,y$ -Ebene ist durch die  $x$ -Achse und den von der Grundfläche des Zylinders gelieferten Halbkreis  $y = +\sqrt{ax - x^2}$  eingegrenzt; für die krumme Fläche aber berechnen wir aus der ersten Gleichung (2) leicht:

$$z = f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Der Ansatz (1) in Form eines Doppelintegrals liefert also als Inhalt der halben blattförmigen Fläche\*):

$$\omega = a \int_0^a \left( \int_0^{\sqrt{ax-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{(a^2-x^2)-y^2}} \right) dx.$$

Das innere, bei konstantem  $x$  auszuführende Integral liefert nach (16) S. 8:

$$\int_0^{\sqrt{ax-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{(a^2-x^2)-y^2}} = \left[ \arcsin \frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}} \right]_0^{\sqrt{ax-x^2}} = \arcsin \sqrt{\frac{x}{a+x}},$$

so daß für den auszurechnenden Inhalt folgt:

$$\omega = a \int_0^a \arcsin \sqrt{\frac{x}{a+x}} dx.$$

Durch partielle Integration gewinnt man:

$$\int \arcsin \sqrt{\frac{x}{a+x}} dx = x \arcsin \sqrt{\frac{x}{a+x}} - \frac{1}{2} \sqrt{a} \int \frac{\sqrt{x} dx}{a+x},$$

wobei sich das hier noch verbleibende Integral nach einer bekannten Regel (S. 27) leicht bestimmt zu:

$$\int \frac{\sqrt{x} dx}{a+x} = 2\sqrt{x} - 2\sqrt{a} \arcsin \sqrt{\frac{x}{a}}.$$

\*) In der bei  $x = a$  gelegenen Spitze des Blattes wird zwar  $f'_x$  unendlich, doch konvergiert das Integral.

Es ist demnach:

$$\omega = a \left[ x \arcsin \sqrt{\frac{x}{a+x}} - \sqrt{ax} + a \arctg \sqrt{\frac{x}{a}} \right]_0^a = \frac{1}{2} a^2 \pi - a^2.$$

Da der Kugeloktant den Inhalt  $\frac{1}{2} a^2 \pi$  hat, so ist der in Fig. 51 sichtbare Teil des Kugeloktanten, der außerhalb des Zylinders liegt, gleich  $a^2$ , d. h. inhaltsgleich mit dem Quadrate über dem Kugelradius\*).

Stellt man die krumme Fläche mittelst zweier Variablen  $u, v$  durch drei Gleichungen (17) S. 113 dar, so wird der Inhalt  $\omega$  nach (19) S. 113 durch:

$$(3) \quad \omega = \int^{(B')} \sqrt{D(x, y)^2 + D(y, z)^2 + D(z, x)^2} d\omega'$$

geliefert, wo die  $D$  die Funktionaldeterminanten sind und  $B'$  das Abbild des auszumessenden Flächenstücks in der  $u, v$ -Ebene ist.

Beim betrachteten Beispiele, wo es sich um das Stück einer Kugel- fläche handelt, wird man zweckmäßig die S. 155 eingeführten Polar- koordinaten  $\theta$  und  $\varphi$  heranziehen, in denen die Darstellung der Kugel- fläche des Radius  $a$  durch:

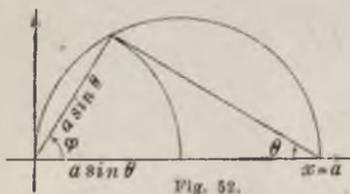
$$x = a \sin \theta \cos \varphi, \quad y = a \sin \theta \sin \varphi, \quad z = a \cos \theta$$

gegeben ist. Man berechnet hier leicht:

$$D(x, y) = a^2 \cos \theta \sin \theta, \quad D(y, z) = a^2 \sin^2 \theta \cos \varphi, \quad D(z, x) = a^2 \sin^2 \theta \sin \varphi,$$

so daß sich der Ansatz (3) in die einfache Form kleidet:

$$\omega = a^2 \int^{(B')} \sin \theta d\omega'^{**}.$$



Schreiben wir, um die Hälfte des Vivianischen Blattes auszumessen, dies Integral als Doppelintegral, so ist bei konstantem  $\theta$ , d. i. längs eines „Parallelkreises“ (vom Radius  $a \sin \theta$ ) der Kugel von  $\varphi = 0$  bis zum Zylindermantel zu integrieren. In der Ebene des Parallelkreises sind die Verhältnisse durch Fig. 52

skizziert, aus der man sofort abliest, daß die obere Grenze  $\varphi$  das Komplement von  $\theta$  ist. Somit gilt:

\*) Von Viviani entdeckter und 1692 veröffentlichter Satz.

\*\*\*) Den Entwicklungen von S. 108 ff. liegt die Annahme zugrunde, daß der Wurzelausdruck unter dem Integrale (3) im Bereiche  $B'$  überall endlich und von 0 verschieden ist. Nun verschwindet aber  $a^2 \sin \theta$  in den beiden Schnittpunkten der  $z$ -Achse mit der Kugeloberfläche des Radius  $a$ , auf der der Bereich  $B'$  des Textes liegt. Indessen folgt aus der Stetigkeit des Integrals bei  $\theta = 0$  und  $\theta = \pi$  oder auch durch Übertragung der S. 127 ff. für die Umgebung des Poles  $r = \theta$  ausgeführten Überlegung, daß das oben für  $\omega$  angegebene Integral seine Brauchbarkeit behält, falls  $B'$  einen oder beide Punkte  $\theta = 0$  und  $\theta = \pi$  enthält.

$$\omega = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2} - \theta} \sin \theta \, d\varphi \right) d\theta = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \sin \theta \, d\theta.$$

Die Ausführung des Integrals bietet keine Schwierigkeit und führt zum schon bekannten Ergebnis zurück.

Ganz besonders einfach gestaltet sich die Ausmessung von „Umdrehungsflächen“. Wir wählen die Achse einer solchen Fläche als  $x$ -Achse und denken die Fläche dadurch entstanden, daß eine in der  $x,y$ -Ebene gelegene, etwa durch  $y = f(x)$  dargestellte Kurve im Raume um die  $x$ -Achse rotiert (s. Fig. 53). Der einzelne Punkt der Kurve erzeugt dabei einen „Parallelkreis“ der Umdrehungsfläche, die verschiedenen Lagen der rotierenden Kurve aber heißen „Meridiankurven“ der Fläche\*).

Für die Darstellung solcher Flächen eignen sich besonders sogenannte „Zylinderkoordinaten“ im Raume. Wir gelangen zu denselben, indem wir  $x$  beibehalten und an Stelle von  $y$  und  $z$  nach Art der Polarkoordinaten in der  $y,z$ -Ebene zwei Koordinaten  $r, \vartheta$  durch die bekannten Gleichungen:

$$r = \sqrt{y^2 + z^2}, \quad \vartheta = \arctg \left( \frac{z}{y} \right)$$

einführen; es ist also einfach  $r$  die Länge des Lotes vom Punkte  $(x, y, z)$  auf die  $x$ -Achse und  $\vartheta$  der richtig abgelesene Neigungswinkel dieses Lotes gegen die  $x,y$ -Ebene\*\*). Natürlich gilt umgekehrt:

$$y = r \cos \vartheta, \quad z = r \sin \vartheta.$$

Die soeben betrachtete Umdrehungsfläche der Meridiankurve  $y = f(x)$

\*) Die Bezeichnungen sind vom Erdsphäroid hergenommen.

\*\*\*) Der Name der Koordinaten gründet sich auf den Umstand, daß die Flächen konstanter Werte  $r$  „Zylinder“ mit der  $x$ -Achse als Achse sind. Behalten wir statt  $x$  die Koordinate  $z$  bei und führen für  $x$  und  $y$  Polarkoordinaten  $r_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\vartheta_1 = \arctg \frac{y}{x}$  ein, so ergibt der Vergleich mit den Formeln (8) S. 156 der dort eingeführten räumlichen Polarkoordinaten  $r, \theta, \varphi$  sofort:

$$r_1 = r \sin \theta, \quad \vartheta_1 = \varphi.$$

Die Zylinderkoordinaten  $r_1, \vartheta_1, z$  nennt man demnach auch „Semipolarkoordinaten“.

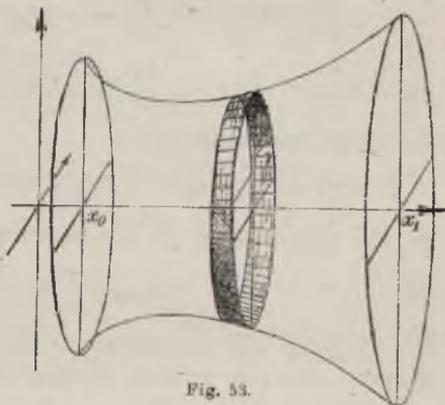


Fig. 53.

hat nun offenbar in Zylinderkoordinaten einfach die Gleichung  $r = f(x)$ . Wollen wir sie durch drei Gleichungen (17) S. 113 mittelst zweier unabhängiger Variablen  $u, v$  darstellen, so wählen wir  $u = \vartheta$  und  $v = x$ , so daß die drei Gleichungen der Fläche lauten:

$$x = x, \quad y = f(x) \cos \vartheta, \quad z = f(x) \sin \vartheta.$$

Die drei unter der Wurzel des Integrals (3) stehenden Funktionaldeterminanten berechnen sich aus:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \vartheta} &= 0, & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} &= -f(x) \sin \vartheta, & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} &= f(x) \cos \vartheta, \\ \frac{\partial x}{\partial x} &= 1, & \frac{\partial y}{\partial x} &= f'(x) \cos \vartheta, & \frac{\partial z}{\partial x} &= f'(x) \sin \vartheta \end{aligned}$$

sofort in den Gestalten:

$$D(x, y) = f(x) \sin \vartheta, \quad D(y, z) = -f(x) f'(x), \quad D(z, x) = f'(x) \cos \vartheta,$$

so daß das Integral (3) die Form annimmt:

$$(4) \quad \omega = \int^{(B')} f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} d\omega'.$$

Wollen wir insbesondere eine „Zone“ der Umdrehungsfläche ausmessen, die von zwei zu  $x_0$  und  $x_1 > x_0$  gehörenden Parallelkreisen eingegrenzt ist (s. Fig. 53), so wird diese Zone in der  $\vartheta, x$ -Ebene auf ein Rechteck  $B'$  abgebildet, das von der  $x$ -Achse, der Geraden  $\vartheta = 2\pi$  und den beiden zur  $\vartheta$ -Achse parallelen Geraden der Gleichungen  $x = x_0$  und  $x = x_1$  begrenzt ist. Schreiben wir also (4) als Doppelintegral, so folgt:

$$(5) \quad \omega = \int_{x_0}^{x_1} \left( \int_0^{2\pi} f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} d\vartheta \right) dx.$$

Da das innere Integral bei konstantem  $x$  auszuführen ist, so folgt: *Der Flächeninhalt  $\omega$  einer Zone der in Zylinderkoordinaten durch  $r = f(x)$  gegebenen Umdrehungsfläche wird durch das „einfache“ Integral geliefert:*

$$(6) \quad \omega = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx^*.$$

\*) Kehren wir zur Gleichung  $y = f(x)$  der Meridiankurve zurück, so ist  $\sqrt{1 + f'(x)^2} dx = ds$  das zu  $dx$  gehörende Bogendifferential (die zur Stelle  $x$  und dem Differential  $dx$  gehörende Tangentenlänge). Aus (6) folgt:

$$d\omega = 2\pi y ds = \pi(y + (y + dy)) ds - \pi dy ds,$$

wo im ersten Gliede rechts die Mantelfläche des vom Tangentenstückchen  $ds$  bei der Rotation beschriebenen abgestumpften Kegels steht. Die zugehörige „Dif-

Für das Umdrehungsellipsoid gilt:

$$y = f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad f'(x) = -\frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Schreiben wir  $a^2 - b^2 = \pm e^2$ , je nachdem  $a \geq b$  oder  $a < b$  ist, so finden wir nach kurzer Rechnung für den Zoneninhalt:

$$(7) \quad \omega = \frac{2\pi b}{a^2} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{a^4 \mp e^2 x^2} dx.$$

Für die Kugel des Radius  $a$ , d. h. für  $b = a$ ,  $e = 0$ , folgt:

$$\omega = 2\pi a(x_1 - x_0)$$

in Übereinstimmung mit einem Elementarsatze. Für  $a > b$  folgt unter Benutzung der Aufg. 6, S. 37:

$$\omega = \frac{\pi b}{a^2 e} \left[ ex \sqrt{a^4 - e^2 x^2} + a^4 \arcsin \left( \frac{ex}{a^2} \right) \right]_{x_0}^{x_1},$$

woraus man für die Gesamtoberfläche findet:

$$(8) \quad \omega = 2\pi \left( b^2 + \frac{a^2 b}{e} \arcsin \left( \frac{e}{a} \right) \right).$$

Ist endlich  $a < b$  (Fall des sogenannten „Sphäroids“), so haben wir das Integral (7) nach Aufg. 7, S. 37 zu behandeln:

$$\omega = \frac{\pi b}{a^2 e} \left[ ex \sqrt{a^4 + e^2 x^2} + a^4 \ln (ex + \sqrt{a^4 + e^2 x^2}) \right]_{x_0}^{x_1}.$$

Für die Gesamtoberfläche folgt jetzt:

$$\omega = 2\pi \left( b^2 + \frac{a^2 b}{e} \ln \left( \frac{b+e}{a} \right) \right).$$

Da man aus der Gleichung  $b^2 - a^2 = e^2$  sofort auf:

$$\left( \frac{b+e}{a} \right)^2 = \frac{(b+e)^2}{b^2 - e^2} = \frac{b+e}{b-e}$$

schließt, so kann die eben für  $\omega$  angegebene Gleichung auch so geschrieben werden:

$$(9) \quad \omega = 2\pi \left( b^2 + \frac{a^2 b}{2e} \ln \left( \frac{b+e}{b-e} \right) \right).$$

Der Leser wolle sowohl von der Gleichung (8) als von (9) aus durch Grenzübergang  $\lim e=0$  die Elementarformel für den Inhalt der Kugel-  
fläche herstellen.

ferenz“  $\Delta\omega$  ist der dem  $dx = \Delta x$  entsprechende Zoneninhalt (s. die schmale in Fig. 53 angedeutete Zone). Für  $\lim dx=0$  gilt  $\lim \frac{d\omega}{\Delta\omega} = 1$ , woraus die Bauart des Integrals (6) unmittelbar geometrisch verständlich wird.

Ist die Meridiankurve durch ein Gleichungenpaar  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  gegeben, so führt man auf Grund der Regel (7) S. 56 das Integral (6) für den Zoneninhalt leicht in die Gestalt über:

$$(10) \quad \omega = 2\pi \int_{t_0}^{t_1} \psi(t) \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt.$$

Für die gemeine Zyклоide als Meridiankurve hat man z. B. (vgl. die Rechnungen von S. 153):

$$\omega = 2\pi a^2 \int_{t_0}^{t_1} (1 - \cos t) \sqrt{2 - 2 \cos t} dt = 16\pi a^2 \int_{t_0}^{t_1} \sin^3 \frac{t}{2} d\left(\frac{t}{2}\right).$$

Das Integral ist nach bekannten Regeln berechenbar und liefert:

$$\omega = 16\pi a^2 \left[ \frac{1}{3} \cos^3 \left(\frac{t}{2}\right) - \cos \left(\frac{t}{2}\right) \right]_{t_0}^{t_1}.$$

Für den Gesamtinhalt der Fläche, die durch Rotation eines zwischen zwei aufeinander folgenden Spitzen gelegenen Stückes der Zyклоide entsteht, ergibt sich  $\omega = \frac{64}{3} \pi a^2$ , d. h. diese Fläche verhält sich zur Fläche des die Zyклоide erzeugenden Kreises wie 64 zu 3.

**Aufgaben:** Es sind die Zoneninhalte bei den Umdrehungsflächen folgender Meridiankurven zu berechnen:

1) Parabel  $y^2 = 2px$  (Umdrehungsparaboloid). —

$$\omega = 2\pi \sqrt{2p} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{x + \frac{p}{2}} dx = \frac{4}{3} \pi \sqrt{2p} \left[ \left( \sqrt{x + \frac{p}{2}} \right)^3 \right]_{x_0}^{x_1}.$$

2) Hyperbel  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  (zweischaliges Umdrehungshyperboloid). — Das Integral muß bei Benutzung der Abkürzung  $e^2 = a^2 + b^2$  die Gestalt annehmen:

$$\omega = \frac{2\pi b}{a^2} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{e^2 x^2 - a^4} dx.$$

Man nehme  $a < x_0 < x_1$  an und wird nach Aufg. 7, S. 37 zu dem Ergebnis kommen:

$$\omega = \frac{\pi b}{a^2 e} \left[ ex \sqrt{e^2 x^2 - a^4} - a^4 \ln (ex + \sqrt{e^2 x^2 - a^4}) \right]_{x_0}^{x_1}.$$

3) Hyperbel  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$  (einschaliges Umdrehungshyperboloid). —

$$\omega = \frac{\pi b}{a^2 e} \left[ ex \sqrt{e^2 x^2 + a^4} + a^4 \ln (ex + \sqrt{e^2 x^2 + a^4}) \right]_{x_0}^{x_1}.$$

4) Die auf ihre Asymptoten als Koordinatenachsen bezogene gleichseitige Hyperbel  $y = x^{-1}$  für  $0 < x_0 < x_1$ . — Das Integral für den Zoneninhalt:

$$\omega = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^2} dx$$

wird durch die Substitution  $z = x^{-2}$  auf ein nach S. 32 leicht ausführbares Integral gebracht. Das Ergebnis ist:

$$\omega = \pi \left[ \ln(x^2 + \sqrt{1 + x^4}) - x^{-2} \sqrt{1 + x^4} \right]_{x_0}^{x_1}.$$

5) Kettenlinie  $y = a \cos\left(\frac{x}{a}\right)$ . — Man muß zu folgendem Ergebnis gelangen:

$$\omega = 2a\pi \int_{x_0}^{x_1} \cos^2\left(\frac{x}{a}\right) dx = a\pi \left[ x + a \sin\left(\frac{x}{a}\right) \cos\left(\frac{x}{a}\right) \right]_{x_0}^{x_1}.$$

6) Astroide  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$ . — Der Ansatz (10) führt leicht zu:

$$\omega = 6a^2\pi \int_{t_0}^{t_1} \sin^4 t \cos t dt = \frac{6}{5} a^2\pi \left[ \sin^5 t \right]_{t_0}^{t_1}.$$

Bei der Drehung der Astroide (s. Fig. 65 in I, 282) um die  $x$ -Achse entsteht ein mit zwei Spitzen und einer scharfen Kante ausgestatteter Umdrehungskörper mit der Oberfläche  $\frac{12}{5}\pi a^2$ .

7) Sinuslinie  $y = \sin x$ . — Mit Benutzung der Aufg. 7, S. 37 muß man finden

$$\omega = -\pi \left[ \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x} + \ln(\cos x + \sqrt{1 + \cos^2 x}) \right]_{x_0}^{x_1}.$$

Das Stück der Sinuskurve zwischen 0 und  $\pi$  erzeugt bei der Drehung einen spindelförmigen Körper der Oberfläche  $2\pi(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$ . —

Eine ganz oberhalb der  $x$ -Achse\*) gelegene geschlossene ovale Kurve möge zwei zur  $y$ -Achse parallele Tangenten haben mit den Berührungspunkten  $A, B$ , denen die Abszissen  $x = a$  und  $x = b > a$  zukommen (Fig. 54). Durch  $A$  und  $B$  wird die Kurve in zwei Teilkurven  $y = f_0(x)$  und  $y = f_1(x)$  zerlegt, von denen die zweite über der ersten liegt. Bei Drehung um die  $x$ -Achse entsteht eine „Ringfläche“, die durch die beiden von  $A$  und  $B$  beschriebenen „Parallelkreise“ in zwei Teilflächen der Inhalte:

$$\omega_i = 2\pi \int_a^b f_i(x) \sqrt{1 + f_i'(x)^2} dx, \quad (i = 0, 1)$$

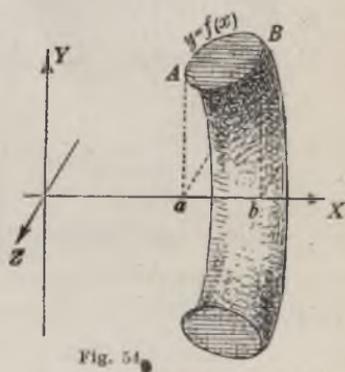


Fig. 54

\*) d. i. auf Seiten der positiven  $y$ -Achse; s. die Fig. 54, wo die  $x, y$ -Ebene horizontal und die positive  $y$ -Achse vertikal nach oben weisend gedacht ist.

zerlegt wird. Nach der Regel (5) S. 55 können wir diese beiden auf dasselbe Intervall bezogenen Integrale addieren und erhalten als Flächeninhalt  $\omega$  der Ringfläche:

$$(11) \quad \omega = 2\pi \int_a^b (f_0(x)\sqrt{1+f_0'(x)^2} + f_1(x)\sqrt{1+f_1'(x)^2}) dx.$$

8) Man messe hiernach die Oberfläche eines Kreisrings vom Meridiankreise:

$$x^2 + (y-c)^2 = r^2, \quad y = c \pm \sqrt{r^2 - x^2}$$

aus, wobei die Mittelpunktsordinate  $c > r$  sei, damit der Kreis ganz oberhalb der  $x$ -Achse liegt. — Hier folgt, wenn die oberen Zeichen für  $f_1(x)$  und die unteren für  $f_0(x)$  gelten, aus  $f_i(x) = c \pm \sqrt{r^2 - x^2}$  leicht:

$$f_i'(x) = \mp \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad \sqrt{1+f_i'(x)^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

so daß der Ansatz (11) ergibt:

$$(12) \quad \omega = 2\pi \int_{-r}^{+r} (f_0(x) + f_1(x)) \frac{r dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 4cr\pi \int_{-r}^{+r} \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

$$\omega = 4cr\pi \left[ \arcsin \left( \frac{x}{r} \right) \right]_{-r}^{+r} = (2r\pi) \cdot (2c\pi).$$

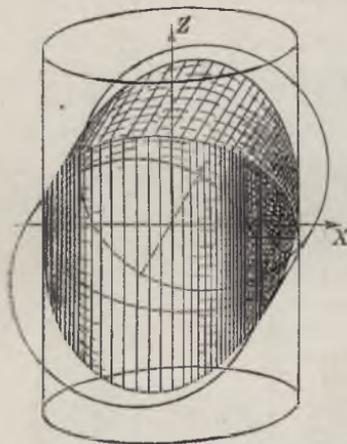


Fig. 55.

Auf dieses Ergebnis kommen wir unten zurück.

9) In Fig. 55 ist der den beiden Kreiszyklindern der Gleichungen:

$$(13) \quad x^2 + z^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 = a^2$$

gemeinsame Raumteil durch Schraffierung der Oberfläche skizziert. Die Oberfläche setzt sich aus vier kongruenten haubenartigen Teilen zusammen, welche auf der  $x$ -Achse an den beiden Stellen  $x = \pm a$  mit je vier Ecken zusammenlaufen. Man zeige, daß die Gesamtoberfläche den Inhalt  $16a^2$  hat. —

Der Inhalt der oberen Haube wird durch das Integral (1) geliefert, wenn man der ersten Gleichung (13) entsprechend  $z = f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2}$  setzt und der zweiten Gleichung (13) entsprechend als Bereich  $B$  den Kreis des Radius  $a$  um  $O$  wählt.

10) Man beweise, daß über dem Dreieck der  $x, y$ -Ebene mit den Ecken  $O, (1, 0), (0, 1)$  ein Stück der durch  $2(x+y)^3 - 9z^2 = 0$  gegebenen Fläche dritten

Grades vom Inhalte  $\frac{4}{15}(1 + \sqrt{2})$  gelegen ist. — Die Lösung beruht auf der Berechnung des Integrals:

$$\omega = \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} \sqrt{1+x+y} dy \right) dx.$$

11) Man stelle fest, welchen Flächeninhalt der im Kugellinnern der Fig. 51, S. 178 verlaufende Teil der Zylinderfläche hat. — Die in der Figur sichtbare Schnittkurve vierten Grades hat nach I, 322 die drei Gleichungen:

$$x = a \cos^2 t, \quad y = a \cos t \sin t, \quad z = a \sin t,$$

projiziert sich also in der  $x, z$ -Ebene auf die Parabel der Gleichung  $z^2 = a(a-x)$ . Machen wir also der Bequemlichkeit halber die positive  $z$ -Achse zur positiven  $y$ -Achse und die negative  $y$ -Achse zur positiven  $z$ -Achse, so handelt es sich um die Ausmessung des in Fig. 56 skizzierten, oberhalb der  $x, y$ -Ebene gelegenen Zylinderstückes der Gleichung  $z = \sqrt{x(a-x)}$ , das durch die  $x, z$ -Ebene und den parabolischen Zylinder der Gleichung  $y = \sqrt{a(a-x)}$  ausgeschnitten wird. Man gründe die Entwicklung auf den Ansatz (1) und zeige, daß die auszumessende Fläche den Inhalt  $a^2$  hat, d. h. daß sie inhaltsgleich ist mit dem in Fig. 51 außerhalb des Zylinders sichtbaren Teile des Kugelklotzes.

12) Nach I, 323 ist durch die drei Gleichungen

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = \frac{h}{2\pi} v$$

eine Schraubenfläche der „Ganghöhe“  $h$  dargestellt. Durch zwei Kreiszyylinder, welche die  $z$ -Achse zur gemeinsamen Achse und die Radien  $u_0$  und  $u_1 > u_0$  haben, wird auf der Schraubenfläche eine bandförmige Wendelfläche ausgeschnitten. Man berechne den Inhalt desjenigen Stückes dieser letzteren Fläche, welches zwischen den beiden zu  $v_0$  und  $v_1 > v_0$  gehörenden Horizontalebene liegt. — Der Ansatz (3) liefert für den Inhalt das Integral:

$$\omega = \int_{u_0}^{u_1} \left( \int_{v_0}^{v_1} \sqrt{\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 + u^2} dv \right) du = (v_1 - v_0) \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 + u^2} du;$$

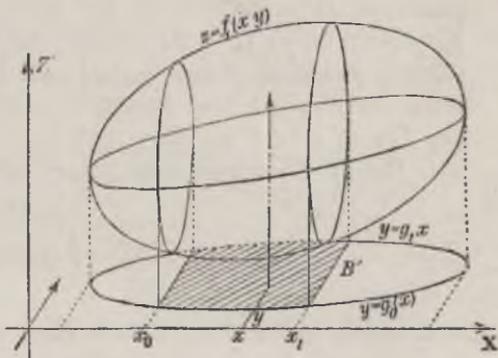
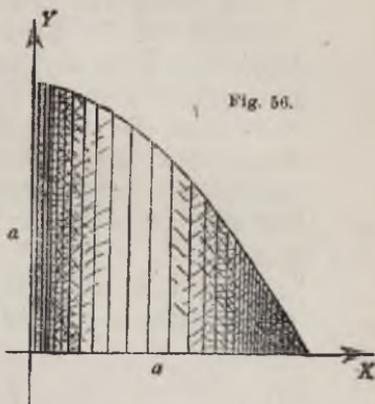
das rechts stehende Integral ist weiter nach Aufg. 7, S. 37 zu behandeln.

**6. Die Inhalte räumlicher Bereiche.** Der Inhalt  $\tau$  eines endlichen räumlichen Bereiches  $B$  ist das über diesen Bereich erstreckte Raumintegral des Differentials  $d\tau$ . Je nach der Darstellung des Raumdifferentials nimmt das den Inhalt  $\tau$  darstellende Integral besondere Gestalten an.

Wählen wir zunächst *rechtwinklige Koordinaten*, so kann man das Raumintegral als dreifaches Integral (4) S. 115 aufbauen. Unter Abänderung der Integrationsfolge und der Bezeichnung der Grenzen schreiben wir:

$$(1) \quad \tau = \int_{x_0}^{x_1} d\tau = \int_{x_0}^{x_1} \left( \int_{y_0(x)}^{y_1(x)} \left( \int_{f_0(x,y)}^{f_1(x,y)} dz \right) dy \right) dx,$$

wobei die Bedeutung der Integralgrenzen durch Fig. 57 erläutert wird



(s. auch S. 115ff.). Von dem in dieser Figur skizzierten ovalen räumlichen Bereiche  $B$  ist durch das Integral (1) der durch die beiden Ebenen  $x = x_0$  und  $x = x_1$  eingeschlossene Teil ausgemessen. In der  $x, y$ -Ebene projiziert sich der Bereich  $B$  auf einen ebenen Bereich  $B'$ , dessen Randkurve vom „Umrißzylinder“ des räumlichen Bereiches herrührt. Die Berührungskurve dieses Zylinders zerlegt die Oberfläche von  $B$  in zwei Teilflächen, eine untere durch  $z = f_0(x, y)$  und eine obere durch  $z = f_1(x, y)$  dargestellte. Entsprechend wird die Randkurve von  $B'$  durch die beiden zur  $y$ -Achse parallel laufenden Tangenten in zwei Teilkurven  $y = g_0(x)$  und  $y = g_1(x)$  zerlegt. Diese Gebilde geben also die Grenzen im Integrale (1) ab.

Das innere Integral in (1) ist unmittelbar ausführbar und liefert den Rauminhalt  $\tau$  in Gestalt eines Doppelintegrals\*):

$$(2) \quad \tau = \int_{x_0}^{x_1} \left( \int_{g_0(x)}^{g_1(x)} (f_1(x, y) - f_0(x, y)) dy \right) dx.$$

Als ein auf den schraffierten Teil  $B'$  bezogenes Flächenintegral können wir an Stelle von (2):

$$(3) \quad \tau = \int^{(B')} (f_1(x, y) - f_0(x, y)) d\omega'$$

schreiben. Das zum Flächendifferential  $d\omega'$  gehörende Differential  $d\tau$ \*\*\*) von  $\tau$  ist, wenn wir gleich noch  $d\omega' = dx dy$  setzen:

$$(4) \quad d\tau = (f_1(x, y) - f_0(x, y)) d\omega' = (f_1(x, y) - f_0(x, y)) dx dy;$$

dasselbe gestattet folgende anschauliche Deutung: Das zu  $d\omega' = dx dy$  gehörende Differential  $d\tau$  ist der Rauminhalt eines über dem Rechtecke der Eckpunkte  $(x, y)$ ,  $(x + dx, y)$ ,  $(x + dx, y + dy)$ ,  $(x, y + dy)$  stehenden vierseitigen Prismas, dessen untere und obere Grundfläche parallel zur  $x, y$ -Ebene durch die beiden Punkte  $(x, y, f_0(x, y))$ ,  $(x, y, f_1(x, y))$  der Randfläche von  $B$  laufen (s. Fig. 57).

Das in (2) vorliegende innere Integral:

$$(5) \quad \omega(x) = \int_{g_0(x)}^{g_1(x)} (f_1(x, y) - f_0(x, y)) dy$$

stellt nach S. 162 den Flächeninhalt desjenigen ebenen Bereiches  $B_x$  dar,

\*) Man sagt auch, daß durch dieses Integral (sowie die sonstigen Integrale für  $\tau$ ) die „Kubatur“ des Bereiches  $B$  ausgeführt oder das „Volumen“ von  $B$  berechnet werde.

\*\*) Wir vermeiden hier die Benennung „Raumdifferential“, da dieses  $d\tau$  den Charakter eines „Flächendifferentials“ hat.

in welchem die an der Stelle  $x$  zur  $y, z$ -Ebene parallele Ebene den räumlichen Bereich durchsetzt (s. die beiden in Fig. 57 angedeuteten Bereiche  $B_{x_0}$  und  $B_{x_1}$ ). Mit Hilfe dieser von  $x$  allein abhängigen Größe  $\omega(x)$  verwandelt sich das Integral (2) in ein einfaches Integral:

$$(6) \quad \tau = \int_{x_0}^{x_1} \omega(x) dx,$$

das wir auch als ein längs der  $x$ -Achse zu erstreckendes *Linienintegral* auffassen können. Das zur Stelle  $x$  und zum Differential  $dx$  gehörende Differential  $d\tau = \omega(x) dx^*$  ist geometrisch zu deuten als Inhalt einer zylindrischen Scheibe der Grundfläche  $\omega(x)$  und der Höhe  $dx$ .

Ist  $f_0(x, y)$  mit 0 identisch, so kommen wir mit (3) bzw. (2) auf das Integral:

$$(7) \quad \tau = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y) d\omega' = \int_{x_0}^{x_1} \left( \int_{g_0(x)}^{g_1(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

zurück, welches bereits S. 94 geometrisch gedeutet wurde. Hier ist der räumliche Bereich  $B$  von dem Inhalte  $\tau$  der schon a. a. O. näher bezeichnete Bereich, der durch die  $x, y$ -Ebene, die längs des Randes von  $B'$  senkrecht zur  $x, y$ -Ebene errichtete Zylinderfläche und die Fläche  $z = f(x, y)$  eingegrenzt ist.

Ein Beispiel schließen wir an den in Fig. 51 S. 178 dargestellten Kugeloktanten an, und zwar möge der Inhalt  $\tau$  desjenigen Raumstückes des Kugeloktanten<sup>\*)</sup> ausgemessen werden, welches im Zylinderinneren liegt. Um mit positiven  $y$  arbeiten zu können, messen wir lieber das bezüglich der  $x, z$ -Ebene symmetrische Stück aus und haben dem Doppelintegrale (7) entsprechend den Ansatz:

$$\tau = \int_0^a \left( \int_0^{\sqrt{ax-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2} dy \right) dx.$$

Das innere Integral liefert nach Aufg. 6, S. 37:

$$\int_0^{\sqrt{ax-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2} dy = \frac{1}{2} \left[ y\sqrt{a^2-x^2-y^2} + (a^2-x^2) \arcsin \left( \frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}} \right) \right]_0^{\sqrt{ax-x^2}}$$

<sup>\*)</sup> das nun natürlich selbst den Charakter eines „Liniendifferentials“ (Bogendifferentials) besitzt.

<sup>\*\*)</sup> Hier ist natürlich unter „Kugeloktant“ ein durch die Koordinatenebenen ausgeschnittenes Achtel vom „Kugelinneren“ gemeint.

Durch Eintragung der Grenzen für  $y$  findet sich:

$$\tau = \frac{1}{2} \sqrt{a} \int_0^a (a-x) \sqrt{x} dx + \frac{1}{2} \int_0^a (a^2 - x^2) \arcsin \left( \sqrt{\frac{x}{a+x}} \right) dx.$$

Das erste Integral berechnet sich unmittelbar auf Grund des Potenzintegrals:

$$\frac{1}{2} \sqrt{a} \int_0^a (a-x) \sqrt{x} dx = \frac{2}{15} a^3.$$

Das letzte Integral bringt man mittelst der partiellen Integration nach kurzer Rechnung auf die algebraische Gestalt:

$$\begin{aligned} & \int (a^2 - x^2) \arcsin \sqrt{\frac{x}{a+x}} dx \\ &= \left( a^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \arcsin \sqrt{\frac{x}{a+x}} - \frac{1}{6} \sqrt{a} \int \frac{(3a^2 - x^2) \sqrt{x}}{a+x} dx, \end{aligned}$$

so daß man durch Einsetzung der Grenzen und Multiplikation mit  $\frac{1}{2}$  erhält:

$$\frac{1}{2} \int_0^a (a^2 - x^2) \arcsin \sqrt{\frac{x}{a+x}} dx = \frac{1}{12} \pi a^3 - \frac{1}{12} \sqrt{a} \int_0^a \frac{(3a^2 - x^2) \sqrt{x}}{a+x} dx.$$

Endlich entwickeln wir das noch übrigbleibende Integral so:

$$\int \frac{(3a^2 - x^2) \sqrt{x}}{a+x} dx = 2a^2 \int \frac{\sqrt{x} dx}{a+x} - \int (x-a) \sqrt{x} dx$$

und berechnen das erste Integral rechts durch Vermittlung der neuen Variablen  $z = \sqrt{x}$ ; es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int \frac{(3a^2 - x^2) \sqrt{x}}{a+x} dx &= 2a^2 \left( 2\sqrt{x} - 2\sqrt{a} \arctg \sqrt{\frac{x}{a}} \right) - \left( \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} - \frac{2}{3} a x \sqrt{x} \right), \\ \frac{1}{12} \sqrt{a} \int_0^a \frac{(3a^2 - x^2) \sqrt{x}}{a+x} dx &= \frac{16}{45} a^3 - \frac{1}{12} \pi a^3. \end{aligned}$$

Unter Zusammenfassung der Einzelergebnisse folgt:

$$\tau = \frac{1}{6} \pi a^3 - \frac{2}{9} a^3.$$

Da im ersten Gliede der Inhalt des Kugeloktanten steht, so hat der in Fig. 51, S. 178 vor der Zylinderfläche gelegene Teil des Kugeloktanten den Rauminhalt  $\frac{2}{9} a^3$ . Bohrt man demnach aus der zur rechten Seite

der  $y, z$ -Ebene gelegenen Halbkugel das Zylinderinnere aus, so bleibt von der Halbkugel ein Stück des Inhaltes  $\frac{8\pi}{9} a^3$  übrig.

Führt man neue Variable  $u, v, w$  durch die Gleichungen (5) S. 115 ein, so transformiert sich das Integral für den Rauminhalt  $\tau$  nach (18) S. 119 in die Gestalt:

$$(8) \quad \tau = \int^{(B')} D(x, y, z) d\tau',$$

bezogen auf das Abbild  $B'$  des Bereiches  $B$  im  $u, v, w$ -Raume.  $D(x, y, z)$  ist die nach (7) S. 117 zu berechnende Funktionaldeterminante. So gilt z. B. für räumliche Polarkoordinaten  $u = r, v = \theta, w = \varphi$ , wie aus den Transformationsformeln (8) S. 156 leicht folgt:

$$D(x, y, z) = r^2 \sin \theta.$$

Das Integral für den Inhalt  $\tau$  des räumlichen Bereiches  $B$  ist bei Gebrauch von Polarkoordinaten gegeben durch:

$$(9) \quad \tau = \int^{(B')} r^2 \sin \theta d\tau',$$

bezogen auf das Abbild  $B'$  des Bereiches  $B$  im  $r, \theta, \varphi$ -Raume.

Unter den verschiedenen Darstellungen dieses Raumintegrals als eines mehrfachen oder einfachen Integrals stellen wir die sich an (1) anschließende Gestalt:

$$(10) \quad \tau = \int_{r_0}^{r_1} \left( \int_{g_0(r)}^{g_1(r)} \left( \int_{f_0(r, \theta)}^{f_1(r, \theta)} r^2 \sin \theta d\varphi \right) d\theta \right) dr,$$

voran. Wir nehmen dabei der Anschaulichkeit halber zunächst an, daß  $B$  eine ovale Gestalt hat und den Pol nicht enthält. Die Deutung dieses und der weiteren Integrale würde sich im „ $r, \theta, \varphi$ -Raume“ gerade so gestalten, wie die Deutung der Integrale (1) ff. im  $x, y, z$ -Raume. Doch können wir die Deutung der Integrale (10) ff. auch gleich im letzteren Raume vornehmen, wobei dann die etwa durch  $F_r, F_\theta, F_\varphi$  zu bezeichnenden Flächen zur Benutzung kommen, längs deren  $r$  bzw.  $\theta, \varphi$  konstante Werte haben. Man mache sich vorab klar, daß die  $F_r$  die Kugelflächen um  $O$ , die  $F_\theta$  die Kegelmäntel mit der Spitze in  $O$  und mit der  $z$ -Achse als Achse und endlich die  $F_\varphi$  die Meridianhalbebenen des Raumes sind.

Durch Ausführung der inneren Integration in (10) folgt:

$$\tau = \int_{r_0}^{r_1} \left( r^2 \int_{g_0(r)}^{g_1(r)} (f_1(r, \theta) - f_0(r, \theta)) \sin \theta d\theta \right) dr.$$

Setzen wir demnach:

$$(11) \quad r^2 \int_{g_0(r)}^{g_1(r)} (f_1(r, \theta) - f_0(r, \theta)) \sin \theta \, d\theta = \omega(r),$$

so stellt sich der Rauminhalt  $\tau$  als *einfaches Integral* dar:

$$\tau = \int_{r_0}^{r_1} \omega(r) \, dr.$$

Hier ist nun einfach  $\omega(r)$  der Flächeninhalt desjenigen Teiles der Kugeloberfläche vom Radius  $r$  um  $O$ , der in  $B$  verläuft. Zuzufolge der zweiten Note S. 180 hat es übrigens keine Schwierigkeit, wenn dieses Flächenstück den Punkt  $\theta = 0$  oder  $\theta = \pi$  enthält. *Das Differential  $d\tau = \omega(r) \, dr$  ist nun der Inhalt einer auf dem fraglichen Flächenstücke aufgelagerten Kugelschale der Dicke  $dr$ , die so zu gestalten ist, daß sie von jeder Kugelfläche eines zwischen  $r$  und  $(r + dr)$  gelegenen Radius wieder in einem Stücke des Inhaltes  $\omega(r)$  geschnitten wird.*

Stellen wir die Integration nach  $r$  voran, so können wir:

$$(12) \quad \tau = \int_{h_0(\theta, \varphi)}^{h_1(\theta, \varphi)} \left( \sin \theta \int r^2 \, dr \right) d\omega' = \frac{1}{3} \int (h_1(\theta, \varphi)^3 - h_0(\theta, \varphi)^3) \sin \theta \, d\omega'$$

schreiben. Hier dürfen wir (s. S. 180)  $\sin \theta \cdot d\omega'$  als Flächendifferential auf der Kugel des Radius 1 um  $O$  fassen. Die Strahlen von  $O$  nach dem Rande dieses Differentials bohren aus dem Bereiche  $B$  ein an einen abgestumpften Kegel erinnerndes Raumstück heraus. *Das zu  $d\omega'$  gehörende Differential:*

$$d\tau = \frac{1}{3} (h_1(\theta, \varphi)^3 - h_0(\theta, \varphi)^3) \sin \theta \, d\omega'$$

*bedeutet nun den Inhalt eines Kegelstumpfes, dessen beide „Grundflächen“ von den Kugeln der Radien  $r_0 = h_0(\theta, \varphi)$  und  $r_1 = h_1(\theta, \varphi)$  geliefert werden. Übrigens ist wieder leicht einzusehen, daß in der vorstehenden Formel auch  $h_0(\theta, \varphi)$  mit 0 identisch sein darf, d. h. daß sich der Bereich  $B$  an den Pol heranziehen mag.*

Die letzte Bemerkung ist um so wichtiger, als man die Polarkoordinaten besonders gern gerade in dem Falle zu Raumaussmessungen gebraucht, wenn der Bereich  $B$  den Pol rings umgibt. Als Beispiel berechnen wir vorerst nur den Inhalt einer Kugel vom Radius  $a$  um  $O$ . Hier gilt einfach:

$$\tau = \int_0^a \left( r^2 \left( \int_0^\pi \sin \theta \left( \int_0^{2\pi} d\varphi \right) d\theta \right) \right) dr,$$

woraus man leicht die bekannte Elementarformel  $\tau = \frac{4}{3} \pi a^3$  abliest.

Besonders einfach stellen sich die Inhalte von *Umdrehungskörpern* dar. Wählen wir die Achse eines solchen Körpers wieder als  $x$ -Achse, und ist  $y = f(x)$  die Gleichung der Meridiankurve der Oberfläche des Körpers, so möge der zwischen den beiden zu  $x_0$  und  $x_1$  gehörenden Kreisscheiben gelegene Teil des Körpers (s. Fig. 53 S. 181) ausgemessen werden. Wir können hier unmittelbar an die Darstellung von  $\tau$  durch das einfache Integral (6) anknüpfen. Dabei bedeutet  $\omega(x)$  den Inhalt der an der Stelle  $x$  senkrecht zur Achse aus dem Körper ausgeschnittenen Kreisscheibe. Da der Radius dieser Kreisscheibe  $y = f(x)$  ist, so ist  $\omega(x) = \pi f(x)^2$ , und wir finden: *Aus einem Umdrehungskörper mit der  $x$ -Achse als Achse und der Meridiankurve  $y = f(x)$  wird durch die beiden zur  $x$ -Achse senkrechten Ebenen  $x = x_0$  und  $x = x_1 > x_0$  ein Raumstück des folgenden Inhaltes ausgeschnitten:*

$$(13) \quad \tau = \pi \int_{x_0}^{x_1} f(x)^2 dx.$$

Für ein Umdrehungsellipsoid finden wir:

$$f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad \tau = \frac{\pi b^2}{a^2} \int_{x_0}^{x_1} (a^2 - x^2) dx = \frac{\pi b^2}{a^2} \left[ a^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{x_0}^{x_1}.$$

Setzen wir  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = a$  und multiplizieren mit 2, so kommt als Rauminhalt des ganzen Ellipsoids  $\tau = \frac{4}{3} ab^2 \pi$ , was für  $b = a$  auf den Kugelinhalt zurückführt.

Ist die Meridiankurve durch ein Gleichungenpaar  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  gegeben, so tritt an Stelle von (13) das Integral:

$$(14) \quad \tau = \pi \int_{t_0}^{t_1} \psi(t)^2 \varphi'(t) dt.$$

So gilt z. B. im Falle der gemeinen Zykloide:

$$\tau = \pi a^3 \int_{t_0}^{t_1} (1 - \cos t)^3 dt = \pi a^3 \left[ \frac{5}{2} t - \sin t \left( 4 - \frac{3}{2} \cos t - \frac{1}{3} \sin^2 t \right) \right]_{t_0}^{t_1}.$$

Für  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 2\pi$  ergibt sich  $5\pi^2 a^3$  als Inhalt des ovalen Umdrehungskörpers, der von einem zwischen zwei aufeinander folgenden Spitzen verlaufenden Stücke der Zykloide geliefert wird.

**Aufgaben:** Es sind die Rauminhalte der Umdrehungskörper folgender Meridiankurven zu bestimmen:

1) Gerade der Gleichung  $y = \frac{r}{h} x$  für die Grenzen  $x_0 = 0$  und  $x_1 = h$  (Inhalt des geraden Kreiskegels der Höhe  $h$  und des Grundkreisradius  $r$ ). —

$$\tau = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}\right)^2 x^2 dx = \pi \left(\frac{r}{h}\right)^2 \left[\frac{1}{3} x^3\right]_0^h = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

2) Parabel  $y^2 = 2px$  (Umdrehungsparaboloid). —

$$\tau = 2p \pi \int_{x_0}^{x_1} x dx = p \pi (x_1^2 - x_0^2).$$

Für  $x_0 = 0$  und  $x_1 = x$  folgt:

$$\tau = p \pi x^2 = \frac{1}{2} \pi x \cdot 2px = \frac{1}{2} \pi y^2 \cdot x,$$

wenn  $y$  die zu  $x$  gehörige Parabelordinate ist. Man leite aus den Ergebnissen der Aufg. 1 und 2 den Satz ab: Konstruiert man über der gleichen Kreisfläche einen Kreiskegel, ein Umdrehungsparaboloid und einen Kreiszyylinder ein und derselben Höhe, so verhalten sich deren Inhalte wie 2 : 3 : 6.

3) Hyperbel  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  für  $a \leq x_0 < x_1$  (zweischaliges Umdrehungshyperboloid). —

$$\tau = \pi \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{b^2}{a^2} x^2 - b^2\right) dx = \pi \frac{b^2}{3a^2} [x^3 - 3a^2 x]_{x_0}^{x_1}.$$

4) Hyperbel  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$  (einschaliges Umdrehungshyperboloid). —

$$\tau = \pi \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{b^2}{a^2} x^2 + b^2\right) dx = \pi \frac{b^2}{3a^2} [x^3 + 3a^2 x]_{x_0}^{x_1}.$$

5) Die auf ihre Asymptoten als Koordinatenachsen bezogene gleichseitige Hyperbel  $y = x^{-1}$  für  $0 < x_0 < x_1$ . —

$$\tau = \pi \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{x^2} = \pi \left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1}\right).$$

Das Integral konvergiert für  $\lim x_1 = \infty$  gegen die Grenze  $\pi x_0^{-1}$ .

6) Sinuslinie  $y = \sin x$ . —

$$\tau = \pi \int_{x_0}^{x_1} \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \pi [x - \sin x \cos x]_{x_0}^{x_1}.$$

Der in Aufg. 7, S. 185 beschriebene spindelförmige Umdrehungskörper hat den Rauminhalt  $\frac{1}{2} \pi^2$ .

7) Kettenlinie  $y = a \operatorname{Cosech} \left( \frac{x}{a} \right)$ . —

$$\tau = a^2 \pi \int_{x_0}^{x_1} \operatorname{Cosech}^2 \left( \frac{x}{a} \right) dx = \frac{1}{2} \pi a^2 \left[ x + a \operatorname{Sin} \left( \frac{x}{a} \right) \cdot \operatorname{Cosech} \left( \frac{x}{a} \right) \right]_{x_0}^{x_1}.$$

8) Astroide  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$ . Den Grenzen  $x_0$  und  $x_1$ , die die Ungleichungen  $0 \leq x_0 < x_1 \leq a$  befriedigen, entsprechen hier zwei Grenzen  $t_0$  und  $t_1$  mit den Bedingungen  $\frac{\pi}{2} \geq t_0 > t_1 \geq 0$ . —

$$\tau = -\pi \int_{t_0}^{t_1} a^2 \sin^6 t \cdot 3a \cos^2 t \sin t dt = -3a^3 \pi \int_{t_0}^{t_1} (1 - \cos^2 t)^3 \cos^2 t \sin t dt.$$

Setzt man  $\cos t = u$ , so folgt:

$$-\int (1 - \cos^2 t)^3 \cos^2 t \sin t dt = \int (1 - u^2)^3 u^2 du.$$

Man beweise, daß der in Aufg. 6, S. 185 beschriebene Umdrehungskörper den Inhalt  $\frac{32}{105} \pi a^3$  hat.

9) Der Rauminhalt des in Aufg. 8, S. 186 betrachteten Kreisrings (s. auch Fig. 54, S. 185) ist auszumessen. — Wir benutzen zunächst den oberen Halbkreis  $y = f_1(x)$  als Meridiankurve und erhalten in:

$$\tau_1 = \pi \int_{-r}^{+r} f_1(x)^2 dx$$

den Inhalt des Umdrehungskörpers, der durch das auf der  $x$ -Achse aufstehende Ebenenstück  $CAEBD$  der Fig. 58 bei der Umdrehung um die  $x$ -Achse beschrieben wird. Um den von der schraffierten Kreisfläche der Fig. 58 beschriebenen Kreisring übrig zu behalten, haben wir den vom Ebenenstück  $CAFB D$  beschriebenen Umdrehungskörper des Inhaltes:

$$\tau_0 = \pi \int_{-r}^{+r} f_0(x)^2 dx$$

in Abzug zu bringen. Für den gesuchten Rauminhalt  $\tau$  finden wir hiernach unter Benutzung der Regel (5) S. 55:

$$\tau = \tau_1 - \tau_0 = \pi \left( \int_{-r}^{+r} f_1(x)^2 dx - \int_{-r}^{+r} f_0(x)^2 dx \right) = \pi \int_{-r}^{+r} (f_1(x)^2 - f_0(x)^2) dx.$$

Man trage die Ausdrücke für  $f_1(x)$  und  $f_0(x)$  ein, führe die Integration aus und beweise die Richtigkeit der Angabe  $\tau = (r^2 \pi) \cdot (2c\pi)$ , auf die wir unten zurückkommen.

10) Man berechne den Rauminhalt eines dreiaxigen Ellipsoids, dessen Oberfläche durch:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

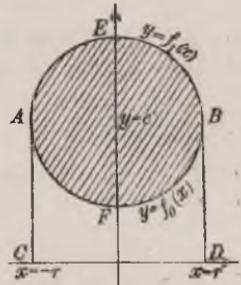


Fig. 58.

dargestellt ist. — Für einen Oktanten findet sich bei Benutzung des Ansatzes (7):

$$\tau = \frac{c}{b} \int_0^a \left( \int_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{\frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) - y^2} dy \right) dx.$$

Das innere Integral, nach Aufg. 6, S. 37 berechnet, liefert:

$$\int_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{\frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) - y^2} dy = \frac{\pi}{4} \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2).$$

Für den Gesamthalt des Ellipsoids findet man  $\frac{4}{3} \pi abc$ .

11) Man löse die Aufgabe 10 mit Hilfe von Polarkoordinaten. — Die in die Gestalt  $r = h(\theta, \varphi)$  gesetzte Gleichung des Ellipsoids ist:

$$r = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{b^2} + \frac{\cos^2 \theta}{c^2}}}.$$

Der Ansatz (12) liefert also für den Gesamthalt des Ellipsoids:

$$\tau = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\pi} r^3 \sin \theta d\theta \right) d\varphi.$$

Das innere Integral kann durch Einführung der Variablen  $u = \cos \theta$  in die folgende Gestalt gesetzt werden:

$$\int r^3 \sin \theta d\theta = - \int \frac{du}{(\sqrt{A + B u^2})^3} = - \frac{1}{A} \frac{u}{\sqrt{A + B u^2}},$$

wobei  $A$  und  $B$  Abkürzungen sind für:

$$A = \frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}, \quad B = \frac{1}{c^2} - A.$$

Die Einsetzung der Grenzen  $\theta = 0$  und  $\theta = \pi$  oder also  $u = 1$  und  $u = -1$  liefert:

$$\int_0^{\pi} r^3 \sin \theta d\theta = \frac{2}{A \sqrt{A + B}} = \frac{2 a^2 b^2 c}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}.$$

Schließlich ist noch in bezug auf  $\varphi$  zu integrieren, was unter Heranziehung der Gleichung (24) S. 10 zu geschehen hat:

$$\tau = \frac{2}{3} a^2 b^2 c \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} = \frac{2}{3} abc \left[ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{a}{b} \operatorname{tg} \varphi \right) \right]_0^{2\pi} = \frac{4}{3} \pi abc.$$

12) Welches ist der Inhalt des in Fig. 55, S. 186 dargestellten und in Aufgabe 9 daselbst beschriebenen Raumteiles, der den beiden Zylindern gemeinsam ist? — Der fragliche räumliche Bereich wird durch die Koordinatenebenen in acht teils symmetrische, teils kongruente Oktanten zerlegt. Für den Gesamthalt muß man  $\frac{16}{3} a^3$  finden.

## Kapitel II. Physikalische Anwendungen der Integralrechnung.

**1. Massen und Schwerpunkte.** Der physikalische Begriff der „Masse“ eines materiellen Körpers  $K$  kann aus der Tatsache der Wägbarkeit des Körpers abgeleitet werden. Nach Erklärung der *Masseneinheit* (1 Gramm) erhält  $K$  die positive Zahl  $\mu$  als Masse, falls  $K$  mit  $\mu$  Gramm die Wage hält. Die Physik hat darzulegen, unter welchen Voraussetzungen dem Körper  $K$  auf diese Weise eine eindeutig bestimmte Zahl  $\mu$  als seine Masse zugewiesen ist, und in welcher Art diese Voraussetzungen in der physikalischen Praxis als erfüllt anzusehen sind. Auch hat die Physik die weiteren Eigenschaften dieses Begriffs zu entwickeln, z. B. den Satz darzulegen, daß bei irgend einer Zerlegung von  $K$  in Teilkörper die Summe der Teilmassen gleich der Gesamtmasse ist usw.

Der Körper erfülle einen räumlichen Bereich, dessen Inhalt  $\tau$  nach den Methoden des vorigen Kapitels bestimmbar sei. Den Quotienten  $\frac{\mu}{\tau}$  der Masse und des Inhaltes bezeichnet man als die „mittlere Dichte“ des Körpers  $K$ . Ein einzelner Punkt des Körpers  $K$  habe die rechtwinkligen Koordinaten  $x, y, z$ . Ein diesen Punkt umgebender Teilbereich habe den Inhalt  $\Delta\tau$  und der daselbst befindliche Teil des Körpers  $K$  die Masse  $\Delta\mu$ . Dann ist  $\frac{\Delta\mu}{\Delta\tau}$  die mittlere Dichte dieses Teiles. Hieran schließt sich ein bekannter Grenzübergang: Es werde der den Punkt  $(x, y, z)$  enthaltende Teilbereich  $\Delta\tau$  kleiner und kleiner gewählt, und zwar in der Art, daß das Maximum der Entfernungen der Punkte des Teilbereiches vom Punkte  $(x, y, z)$  sich hierbei der Grenze 0 nähere. Wir nehmen an, daß, wie auch dieser Grenzübergang vollzogen werden möge, der Quotient  $\frac{\Delta\mu}{\Delta\tau}$  sich hierbei einer bestimmten endlichen, allein von der Stelle  $(x, y, z)$  abhängenden Grenze:

$$(1) \quad \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta\mu}{\Delta\tau} = \delta(x, y, z)$$

annähern möge, die wir als die „Dichte“ des Körpers  $K$  an der Stelle  $(x, y, z)$  bezeichnen.

Die Werte dieser für den Bereich von  $K$  erklärten Funktion  $\delta(x, y, z)$  mögen zwischen den beiden Schranken  $\delta_0$  und  $\delta_1 > \delta_0$  liegen. Wir zerlegen alsdann  $K$  in bereits so kleine Teilbereiche der Inhalte  $\Delta\tau_1, \Delta\tau_2, \dots$ , daß für jeden dieser Teilbereiche:

$$(2) \quad \delta_0 < \frac{\Delta\mu}{\Delta\tau} < \delta_1, \quad \delta_0 \cdot \Delta\tau < \Delta\mu < \delta_1 \cdot \Delta\tau$$

gilt; dies ist deshalb möglich, weil zufolge (1) der hier eingeschlossene

Quotient  $\frac{\Delta\mu}{\Delta\tau}$  für  $\lim \Delta\tau = 0$  einer zwischen  $\delta_0$  und  $\delta_1$  gelegenen Grenze zustrebt. Da nun die Summe aller Teilmassen  $\Delta\mu_1, \Delta\mu_2, \dots$  die Gesamtmasse  $\mu$  ist und  $\sum \Delta\tau = \tau$  gilt, so folgt aus (2) sofort:

$$\delta_0 \cdot \tau < \mu < \delta_1 \cdot \tau, \quad \delta_0 < \frac{\mu}{\tau} < \delta_1.$$

Verstehen wir unter  $\delta_0$  und  $\delta_1$  fortan den kleinsten und den größten Wert, den  $\delta(x, y, z)$  in  $K$  annimmt, so dürfen wir nur mehr die Folgerung ziehen  $\delta_0 \leq \frac{\mu}{\tau} \leq \delta_1$ , eine Ungleichung, die den Satz liefert: *Die mittlere Dichte des Körpers  $K$  ist ein Wert, der nicht kleiner als das Minimum  $\delta_0$  und nicht größer als das Maximum  $\delta_1$  der Dichte  $\delta(x, y, z)$  ist. Dieser Satz überträgt sich natürlich auch auf jeden Teil des Körpers.*

Wir nehmen nun weiter an, daß  $\delta(x, y, z)$  im Bereiche  $K$  stetig sei, oder daß doch wenigstens dieser Bereich in eine endliche Anzahl von Teilbereichen zerfalle, in denen  $\delta(x, y, z)$  stetig ist. Der Rückgang von  $\delta(x, y, z)$  zur Masse  $\mu$  von  $K$  ist dann durch Integration zu vollziehen: *Die Masse  $\mu$  des Körpers  $K$  ist durch das auf  $K$  bezogene Raumintegral:*

$$(3) \quad \mu = \int^{(K)} \delta(x, y, z) d\tau$$

gegeben. Zerlegen wir nämlich  $K$  in Teilbereiche der Inhalte  $\Delta\tau_1, \Delta\tau_2, \dots$ ), so mögen ihnen die Teilmassen  $\Delta\mu_1, \Delta\mu_2, \dots$  entsprechen. Die mittlere Dichte im Teilbereiche des Inhaltes  $\Delta\tau_k$  liegt ihrem Werte nach nicht unter dem Minimum und nicht über dem Maximum der daselbst auftretenden Werte  $\delta(x, y, z)$ . Zuzufolge der Stetigkeit von  $\delta(x, y, z)$  im Teilbereiche können wir also einen Punkt  $(x_k, y_k, z_k)$  daselbst angeben, in dem der Wert  $\delta(x_k, y_k, z_k)$  gleich dem Werte der mittleren Dichte dieses Bereiches ist:

$$\frac{\Delta\mu_k}{\Delta\tau_k} = \delta(x_k, y_k, z_k).$$

Nun ist  $\mu = \sum \Delta\mu_k$  und also:

$$\mu = \sum_k \delta(x_k, y_k, z_k) \Delta\tau_k.$$

Da hier rechts eine Summe steht, die beim Grenzübergange  $\lim \Delta\tau = 0$  das Integral (3) liefert, so ist die Gleichung (3) bewiesen. Übrigens steht nichts im Wege, bei der Integration statt rechtwinkliger Koordinaten

\*) Ist  $\delta(x, y, z)$  nur „abteilungsweise“ stetig, so mögen die Trennflächen der „Abteilungen“ bei der Herstellung der Teile  $\Delta\tau_1, \Delta\tau_2, \dots$  sämtlich mit herangezogen werden, damit wir in den einzelnen Teilbereichen  $\delta(x, y, z)$  als stetig voraussetzen dürfen.

$x, y, z$  auch andere Koordinaten für die Punkte des Bereiches  $K$  zu benutzen.

Stellt der Körper eine dünnwandige Schale dar, so kann man der Rechnung die Näherungsvorstellung zugrunde legen, *ihn als eine mit einer Masse  $\mu$  „belegte“ ebene oder krumme Fläche  $F$  aufzufassen*. In derselben Art bedient man sich, falls der Körper eine drahtförmige Gestalt hat, der Vorstellung *einer geraden oder krummen, mit einer Masse  $\mu$  belegten Linie  $L$* . Der Begriff der mittleren Dichte sowie der Dichte  $\delta(x, y, z)$  an einer einzelnen Stelle von  $F$  bzw.  $L$  ist dann mittelst des Flächeninhaltes  $\omega$  von  $F$  und der Bogenlänge  $s$  von  $L$  genau wie oben zu entwickeln. Man spricht in diesen Fällen wohl auch von einer „*Flächendichte*“ und „*Liniendichte*“ der Massenbelegung. Daß wir die Gesamtmasse in beiden Fällen wieder in Gestalt von Integralen erhalten, ist wie oben zu beweisen; wir schreiben diese Integrale:

$$(4) \quad \mu = \int^{(F)} \delta(x, y, z) d\omega, \quad \mu = \int^{(L)} \delta(x, y, z) ds$$

und behalten uns natürlich auch den Gebrauch anderer Koordinaten an Stelle der  $x, y, z$  vor.

Ist die Dichte  $\delta$  konstant, so heißen der Körper  $K$ , die belegte Fläche  $F$  oder Linie  $L$  „*homogen*“. In diesem Falle ist natürlich die Gesamtmasse einfach durch  $\delta \cdot \tau$  bzw.  $\delta \cdot \omega$  und  $\delta \cdot s$  gegeben,  $\tau, \omega$  und  $s$  in der Bedeutung des Rauminhaltes von  $K$ , des Flächeninhaltes von  $F$  und der Bogenlänge von  $L$  gebraucht.

Ist endlich der Körper in jeder Richtung nur sehr wenig ausgedehnt, so benutzt man als Näherungsvorstellung *die eines mit einer Masse  $\mu$  belegten Punktes  $(x, y, z)$*  und gelangt auf diese Weise zu dem in der Mechanik grundlegenden Begriffe *des materiellen Punktes der Masse  $\mu$* .

An die Vorstellung eines Systems endlich vieler materieller Punkte  $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n)$  der Massen  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  knüpft der Begriff des „*Schwerpunktes*“ an. Wir nennen  $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n$  die Gesamtmasse des Punktsystems und berechnen uns drei endliche Zahlen  $\xi, \eta, \zeta$  aus den drei Gleichungen:

$$(5) \quad \mu \xi = \sum_{k=1}^n \mu_k x_k, \quad \mu \eta = \sum_{k=1}^n \mu_k y_k, \quad \mu \zeta = \sum_{k=1}^n \mu_k z_k,$$

die wir als Koordinaten eines Punktes  $(\xi, \eta, \zeta)$  im zugrunde liegenden Koordinatensysteme deuten. *Dieser Punkt wird als „Massenmittelpunkt“ oder „Schwerpunkt“ des Systems der  $n$  materiellen Punkte bezeichnet*. Die physikalische Bedeutung dieses Punktes ist hier nicht zu entwickeln. Dagegen haben wir zu zeigen, *daß der Schwerpunkt unabhängig von dem*

zu seiner Erklärung benutzten Koordinatensysteme ein dem System materieller Punkte eigentümlicher, durch das System eindeutig bestimmter Punkt ist. Führen wir nämlich neue rechtwinklige Koordinaten  $x', y', z'$  ein, so bestehen nach „A. G.“ S. 99 drei lineare Beziehungen:

$$(6) \quad \begin{cases} x = a_1 x' + a_2 y' + a_3 z' + a, \\ y = b_1 x' + b_2 y' + b_3 z' + b, \\ z = c_1 x' + c_2 y' + c_3 z' + c \end{cases}$$

zwischen den alten und neuen Koordinaten. Der aus (5) berechnete Punkt  $(\xi, \eta, \zeta)$  hat somit neue Koordinaten  $\xi', \eta', \zeta'$ , die mit den alten durch die Gleichungen:

$$(7) \quad \xi = a_1 \xi' + a_2 \eta' + a_3 \zeta' + a, \dots$$

verbunden sind. Berechnen wir andererseits aus den neuen Koordinaten unserer  $n$  materiellen Punkte und ihren Massen entsprechend der Regel (5) den Punkt  $(\xi'', \eta'', \zeta'')$ :

$$\mu \xi'' = \sum_{k=1}^n \mu_k x_k', \quad \mu \eta'' = \sum_{k=1}^n \mu_k y_k', \quad \mu \zeta'' = \sum_{k=1}^n \mu_k z_k',$$

so finden wir durch Kombination dieser Gleichungen mit Benutzung der Erklärung  $\mu = \sum \mu_k$  von  $\mu$ :

$$\mu (a_1 \xi'' + a_2 \eta'' + a_3 \zeta'' + a) = \sum_{k=1}^n \mu_k (a_1 x_k' + a_2 y_k' + a_3 z_k' + a),$$

. . . . .

Zufolge der Gleichungen (6) und (5) bestehen also die Relationen:

$$\mu (a_1 \xi'' + a_2 \eta'' + a_3 \zeta'' + a) = \sum_{k=1}^n \mu_k x_k = \mu \xi,$$

. . . . .

deren Vergleich mit (7) zeigt, daß tatsächlich die Punkte  $(\xi', \eta', \zeta')$  und  $(\xi'', \eta'', \zeta'')$  identisch sind.

Haben wir ein zweites System materieller Punkte  $(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}), \dots, (x_{n+m}, y_{n+m}, z_{n+m})$  der Massen  $\mu_{n+1}, \dots, \mu_{n+m}$  und also der Gesamtmasse  $\mu' = \mu_{n+1} + \dots + \mu_{n+m}$ , so ist dessen Schwerpunkt  $(\xi', \eta', \zeta')$  zu berechnen aus:

$$\mu' \xi' = \sum_{k=n+1}^{n+m} \mu_k x_k, \quad \mu' \eta' = \sum_{k=n+1}^{n+m} \mu_k y_k, \quad \mu' \zeta' = \sum_{k=n+1}^{n+m} \mu_k z_k.$$

Die Addition dieser Gleichungen zu den Gleichungen (5) liefert:

$$\mu \xi + \mu' \xi' = \sum_{k=1}^{n+m} \mu_k x_k, \quad \mu \eta + \mu' \eta' = \sum_{k=1}^{n+m} \mu_k y_k, \quad \mu \zeta + \mu' \zeta' = \sum_{k=1}^{n+m} \mu_k z_k.$$

Die hier rechts stehenden Summen sind aber zufolge (5) gleich den mit  $(\mu + \mu')$  multiplizierten Koordinaten  $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$  des Schwerpunktes des aus beiden Systemen zusammengesetzten Systems materieller Punkte, so daß die Gleichungen gelten:

$$(8) \quad (\mu + \mu') \xi_0 = \mu \xi + \mu' \xi', \quad (\mu + \mu') \eta_0 = \mu \eta + \mu' \eta', \quad (\mu + \mu') \zeta_0 = \mu \zeta + \mu' \zeta'.$$

Man wird diese Formeln leicht auf die Zusammensetzung von mehr als zwei Punktsystemen übertragen und aus ihnen den folgenden Satz ablesen: *Hat man  $\nu$  Systeme materieller Punkte zu einem größeren Systeme zusammengesetzt, so kann man dessen Schwerpunkt  $(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$  auf folgendem Wege gewinnen: Man ersetzt das einzelne System der Gesamtmasse  $\mu$  durch seinen mit dieser Masse  $\mu$  belegten Schwerpunkt  $(\xi, \eta, \zeta)$ ; der Schwerpunkt des Gesamtsystems ist dann identisch mit dem Schwerpunkte des Systems der  $\nu$  materiellen Punkte  $(\xi, \eta, \zeta), (\xi', \eta', \zeta'), \dots$  der Massen  $\mu, \mu', \dots$ . Es ist einleuchtend, daß wir diesen Satz zur Bestimmung des Schwerpunktes eines Punktsystems auch in der Weise anwenden können, daß wir das System in Teilsysteme zerlegen, für diese einzeln die Schwerpunkte bestimmen usw.*

Die Erklärung des Schwerpunktes für einen materiellen Körper oder für eine mit Masse belegte Fläche oder Linie vollziehen wir jetzt durch sachgemäße Übertragung der Formeln (5). An Stelle der Summen treten Integrale, an Stelle des einzelnen Gliedes, z. B. des Produktes  $\mu_k x_k$ , tritt das Produkt des „Massendifferentials“  $d\mu$  und der Koordinate  $x$ ;  $d\mu$  aber ist gleich dem Produkte der an der Stelle  $(x, y, z)$  vorliegenden Dichte und des Raum- bzw. Flächen- oder Liniendifferentials. *Der Schwerpunkt  $(\xi, \eta, \zeta)$  eines materiellen Körpers  $K$  der Masse  $\mu$  berechnet sich somit aus:*

$$(9) \quad \mu \xi = \int^{(K)} x \delta(x, y, z) d\tau, \quad \mu \eta = \int^{(K)} y \delta(x, y, z) d\tau, \quad \mu \zeta = \int^{(K)} z \delta(x, y, z) d\tau,$$

*und entsprechend sind die Erklärungen der Schwerpunkte einer mit Masse belegten Fläche  $F$  bzw. Linie  $L$ :*

$$(10) \quad \mu \xi = \int^{(F)} x \delta(x, y, z) d\omega, \dots, \quad \mu \xi = \int^{(L)} x \delta(x, y, z) ds, \dots,$$

*wo  $\delta(x, y, z)$  die „Flächendichte“ bzw. die „Liniendichte“ an der Stelle  $(x, y, z)$  ist.*

Zerlegen wir den Körper  $K$  in  $n$  „Teilkörper“ der Massen  $\mu_1, \mu_2,$

$\dots, \mu_n$  und bestimmen für diese einzeln die Schwerpunkte  $(\xi_1, \eta_1, \xi_1), \dots$ , so folgt durch Addition der Teilintegrale und Benutzung von (9):

$$\sum_{k=1}^n \mu_k \xi_k = \mu \xi, \quad \sum_{k=1}^n \mu_k \eta_k = \mu \eta, \quad \sum_{k=1}^n \mu_k \xi_k = \mu \xi,$$

womit wir den Ansatz (5) wiedergewonnen haben. Durch Übertragung auf Gebilde  $F$  oder  $L$  ergibt sich der Satz: *Zerlegt man einen materiellen Körper  $K$  oder eine mit Masse belegte Fläche  $F$  oder Linie  $L$  in  $n$  Teilgebilde, so kann der Schwerpunkt des Gesamtgebildes auf folgende Art gewonnen werden: Man ersetze das Teilgebilde durch seinen Schwerpunkt, den man mit der Masse des Teilgebildes belegt; der Gesamtschwerpunkt ist dann einfach der Schwerpunkt des so gewonnenen Systems von  $n$  materiellen Punkten.*

Für *homogene* Gebilde, d. i. für Gebilde konstanter Dichte  $\delta$ , lassen sich die Gleichungen (9) und (10), in denen jetzt  $\mu = \delta \cdot \tau$  bzw.  $\delta \cdot \omega$  und  $\delta \cdot s$  eingetragen werden kann, durch  $\delta$  heben und dadurch in die Gestalten setzen:

$$(11) \quad \tau \xi = \int^{(K)} x d\tau, \dots, \quad \omega \xi = \int^{(F)} x d\omega, \dots, \quad s \xi = \int^{(L)} x ds.$$

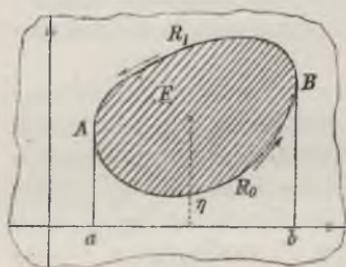


Fig. 59.

Aus einer dieser Gleichungen ergibt sich leicht ein nach Guldin benannter Satz.  $F$  sei ein homogener in der  $x, y$ -Ebene „oberhalb“ der  $x$ -Achse gelegener Bereich mit der Randkurve  $R$  (s. Fig. 59). Durch zwei zur  $y$ -Achse parallele Tangenten der Abszissen  $x = a$  und  $x = b > a$  werde  $R$  in zwei Teilkurven zerlegt, eine untere  $R_0$  durch  $y = f_0(x)$  und eine obere  $R_1$  durch  $y = f_1(x)$  dargestellte. Ist  $\omega$  der Flächeninhalt von  $F$ , so folgt für die Ordinate  $\eta$  des der  $x, y$ -Ebene angehörnden Schwerpunktes von  $F$  aus (11):

$$(12) \quad \omega \eta = \int^{(F)} y d\omega.$$

Nach (7) S. 140 können wir dieses Flächenintegral in ein auf  $R$  bezogenes Linienintegral umwandeln, bei dem  $R$  in der für den Bereich  $F$  „positiven“ Umlaufrichtung (s. S. 138) zu durchlaufen ist:

$$\int^{(F)} y d\omega = -\frac{1}{2} \int^{(R)} y^2 dx.$$

Das Linienintegral läßt sich in zwei auf  $R_0$  und  $R_1$  einzeln bezogene Integrale zerlegen und gestattet, wenn wir noch bei  $R_1$  die Integrationsrichtung umkehren, die Schreibweise:

$$\int^{(F)} y d\omega = -\frac{1}{2} \left( \int_a^b f_0(x)^2 dx - \int_a^b f_1(x)^2 dx \right).$$

Multiplizieren wir mit  $2\pi$ , so folgt weiter:

$$(13) \quad 2\pi \int_a^b y \, d\omega = \pi \int_a^b (f_1(x)^2 - f_0(x)^2) \, dx.$$

Das rechts stehende Integral hat eine in Aufg. 9, S. 195 dargelegte geometrische Bedeutung\*); es liefert nämlich den Rauminhalt  $\tau$  desjenigen Umdrehungskörpers, der bei Rotation der Fläche  $F$  um die  $x$ -Achse entsteht. Aus (12) und (13) ergibt sich sonach  $\tau = \omega \cdot 2\pi\eta$  und damit die „Guldinsche Regel“: *Der Rauminhalt  $\tau$  des bei Drehung der Fläche  $F$  um die  $x$ -Achse entstehenden ringförmigen Umdrehungskörpers ist gleich dem Produkte des Flächeninhaltes  $\omega$  von  $F$  und der Länge des vom Schwerpunkte der Fläche  $F$  bei der Umdrehung beschriebenen Kreises* (s. das Ergebnis der Aufg. 9, S. 195).

Ein ähnlicher Satz besteht für den Inhalt der Ringfläche, welche bei der Umdrehung durch die Randkurve  $R$  geliefert wird. Denken wir diese Kurve homogen mit Masse belegt, so ist die Ordinate  $\eta$  des natürlich wieder in der  $x, y$ -Ebene gelegenen Schwerpunktes der Kurve  $R$  gegeben durch:

$$s\eta = \int_a^b y \, ds,$$

wenn  $s$  die Gesamtlänge von  $R$  ist. Zerlegen wir das Integral wieder in die beiden auf  $R_0$  und  $R_1$  bezogenen Teile und beachten, daß längs  $R_1$  (s. Fig. 59) die Bogenlänge bei abnehmenden  $x$  wächst, und daß also hier zu setzen ist:

$$ds = -\sqrt{1 + f_1'(x)^2} \, dx,$$

so folgt bei Umkehrung der Integrationsrichtung längs  $R_1$ :

$$\int_a^b y \, ds = \int_a^b (f_0 \sqrt{1 + f_0'^2} + f_1 \sqrt{1 + f_1'^2}) \, dx.$$

Der Zusatz des Faktors  $2\pi$  liefert nach (11) S. 186 rechts den Inhalt der Ringoberfläche  $\omega$ , so daß nun  $s \cdot 2\pi\eta = \omega$  und damit der Satz gilt: *Der Inhalt  $\omega$  der bei der Umdrehung von  $R$  beschriebenen Ringfläche ist gleich dem Produkte der Bogenlänge  $s$  von  $R$  und der Länge des vom Schwerpunkte der Linie  $R$  bei der Umdrehung beschriebenen Kreises* (s. Aufg. 8, S. 186).

Aufgaben: Soweit nichts weiter bemerkt ist, soll es sich im folgenden um homogene Gebilde handeln.

1) Man bestimme den Schwerpunkt eines Ellipsenbogens. — Die Ellipse sei auf ihre Hauptachsen als Koordinatenachsen bezogen; der Bogen sei begrenzt durch die beiden Punkte der Abszissen  $x_0$  und  $x_1$ . Die Koordinaten  $\xi, \eta$  des Schwerpunktes bestimmen sich bei Benutzung des aus (2) S. 152 hervorgehenden Ausdrucks für das Bogendifferential  $ds$  durch:

$$s\xi = \frac{1}{a} \int_{x_0}^{x_1} x \sqrt{\frac{a^4 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}} \, dx, \quad s\eta = \frac{b}{a^2} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{a^4 - e^2 x^2} \, dx.$$

Beide Integrale sind elementar; doch vergesse man nicht, daß sich  $s$  in Gestalt eines elliptischen Integrals darstellt.

\*) Die damalige auf einen Kreis  $R$  bezogene Betrachtung überträgt man leicht auf die Kurve  $R$  des Textes.

Im Falle  $e = 0$ ,  $b = a$ , d. h. für den Kreis, zeige man die einfachen Regeln:

$$s \xi = -a(y_1 - y_0), \quad s \eta = a(x_1 - x_0),$$

wenn  $y_0, y_1$  die zu  $x_0, x_1$  gehörenden Kreisordinaten sind. Für den „oberhalb“ der  $x$ -Achse gelegenen Halbkreis leite man hieraus die Schwerpunktsordinate  $\eta = \frac{2a}{\pi}$  ab, desgleichen für die aus dem Halbkreise und dem seine Endpunkte verbindenden Durchmesser bestehende geschlossene Kurve  $\eta = \frac{2a}{\pi + 2}$ . Nach dem eben aufgestellten Satze erzeugt diese Kurve der Länge  $s = a\pi + 2a$  bei der Drehung um die  $x$ -Achse eine Oberfläche des Inhaltes:

$$(a\pi + 2a) \cdot 2\pi \frac{2a}{\pi + 2} = 4a^2\pi.$$

Dies ist in der Tat der Inhalt der Kugeloberfläche.

2) Man bestimme den Schwerpunkt eines oberhalb der  $x$ -Achse gelegenen Bogens der Parabel  $y^2 = 2px$ . — Die auftretenden Integrale sind sämtlich elementar; man muß zum Ergebnis gelangen:

$$32s \cdot \xi = \left[ 4(4x + p) \sqrt{x^2 + \frac{1}{2}px} - p^2 \ln \left( x + \frac{1}{4}p + \sqrt{x^2 + \frac{1}{2}px} \right) \right]_{x_0}^{x_1},$$

$$3s \cdot \eta = 2\sqrt{2p} \left[ \left( \sqrt{x + \frac{1}{2}p} \right)^3 \right]_{x_0}^{x_1},$$

$$s = \left[ \sqrt{x} \sqrt{x + \frac{1}{2}p} + \frac{1}{2}p \ln \left( \sqrt{x} + \sqrt{x + \frac{1}{2}p} \right) \right]_{x_0}^{x_1}.$$

3) Es ist der Schwerpunkt eines Bogens der Kettenlinie zu bestimmen, deren Gleichung  $y = a \cosh \left( \frac{x}{a} \right)$  ist. — Gehören zu den Bogenendpunkten  $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$

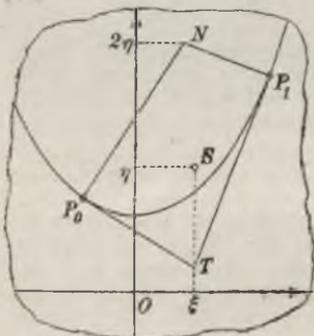


Fig. 60.

die Werte  $y_0'$  und  $y_1'$  der Ableitung  $y' = \sinh \left( \frac{x}{a} \right)$ , so muß man zu folgenden Ergebnissen gelangen (s. auch die Aufgaben 2, S. 159 und 7, S. 195):

$$(y_1' - y_0') \xi = x_1 y_1' - x_0 y_0' - y_1 + y_0,$$

$$2(y_1' - y_0') \eta = y_1 y_1' - y_0 y_0' + x_1 - x_0.$$

Man leite hieraus die in Fig. 60 angegebene Konstruktion des Schwerpunktes  $S$  ab.  $P_0$  und  $P_1$  sind die Bogenendpunkte,  $T$  der Schnittpunkt ihrer Tangenten, dem die Abszisse  $\xi$  zukommt, und  $N$  der Schnittpunkt der Normalen, der die Ordinate  $2\eta$  hat.

4) Den Schwerpunkt eines Bogens der gemeinen Zyklode zu bestimmen. — Unter Benutzung der Variablen  $t$  muß man finden:

$$\left[ \cos \left( \frac{t}{2} \right) \right]_{t_1}^{t_0} \cdot \xi = 2a \left[ \sin \left( \frac{t}{2} \right) - \frac{1}{2} t \cos \left( \frac{t}{2} \right) - \frac{1}{3} \sin^3 \left( \frac{t}{2} \right) \right]_{t_1}^{t_0},$$

$$\left[ \cos \left( \frac{t}{2} \right) \right]_{t_1}^{t_0} \cdot \eta = 2a \left[ \frac{1}{3} \cos^3 \left( \frac{t}{2} \right) - \cos \left( \frac{t}{2} \right) \right]_{t_1}^{t_0}.$$

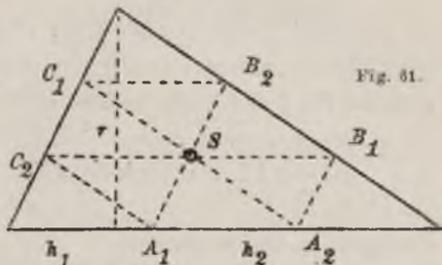
Für den Schwerpunkt des Stückes zwischen der Spitze  $t_0 = 0$  und dem höchsten Punkte  $t_1 = \pi$  findet man das einfache Ergebnis  $\xi = \eta = \frac{3}{4} a$ .

5) Für den durch die positive  $x$ -Achse und den Radius der Amplitude  $\vartheta$  begrenzten Kreisabschnitt beim Kreise des Radius  $a$  um  $O$  sind die Koordinaten des Schwerpunktes zu berechnen. — Bei Gebrauch von Polarkoordinaten hat man:

$$\omega \xi = \int_0^{\vartheta} x d\omega = \int_0^{\vartheta} \left( \int_0^a r \cos \vartheta \cdot r dr \right) d\vartheta, \quad \xi = \frac{2}{3} a \frac{\sin \vartheta}{\vartheta},$$

$$\omega \eta = \int_0^{\vartheta} y d\omega = \int_0^{\vartheta} \left( \int_0^a r \sin \vartheta \cdot r dr \right) d\vartheta, \quad \eta = \frac{2}{3} a \frac{1 - \cos \vartheta}{\vartheta}.$$

Aus der für den Halbkreis eintretenden Schwerpunktsordinate  $\eta = \frac{4a}{3\pi}$  leite man mittelst der Guldinschen Regel die Formel für den Kugelinhalt ab.



6) Auf Grund der Guldinschen Regel ist der Schwerpunkt eines ebenen Dreiecks zu ermitteln. — Benutzt man die Grundlinie ( $h_1 + h_2$ ) des Dreiecks der Höhe  $r$  (s. Fig. 61) als Umdrehungsachse, so beschreibt die Dreiecksfläche des Inhalte

$\frac{1}{2}(h_1 + h_2)r$  einen Doppelkegel vom Rauminhalte  $\frac{1}{3} \pi r^2(h_1 + h_2)$ , so daß sich die Schwerpunktsordinate  $\eta$  aus:

$$\frac{1}{2}(h_1 + h_2)r \cdot 2\pi\eta = \frac{1}{3} \pi r^2(h_1 + h_2) \quad \text{zu} \quad \eta = \frac{1}{3} r$$

ergibt. Man gelangt zu dem gleichen Ergebnis, wenn ein Winkel an der Grundlinie des Dreiecks  $> \frac{\pi}{2}$  ist. Teilen somit die Punkte  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$  (s. Fig. 61) die Dreiecksseiten je in drei gleiche Teile, so ist der Schnittpunkt  $S$  von  $A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2$  der Schwerpunkt. Daß es sich hier um den Schnittpunkt der drei Mittellinien handelt, lehrt ein Blick auf Fig. 61.

7) Man zeige, daß der Schwerpunkt der von der  $x$ -Achse, der Parabel der Gleichung  $y^2 = 2px$  und der zu  $x$  gehörigen Ordinate  $y$  eingegrenzten ebenen Fläche die Koordinaten  $\xi = \frac{3}{5} x, \eta = \frac{3}{8} y$  hat, und leite daraus mittelst der Guldinschen Regel den Inhalt des Umdrehungsparaboloids ab (s. Aufg. 1, S. 166 und Aufg. 2, S. 194).

8) Für das durch die  $x$ -Achse, die gemeine Zykloide und deren zu  $x_0$  und  $x_1$  gehörende Ordinaten eingegrenzte Ebenenstück sollen die Schwerpunktskoordinaten bestimmt werden. — Rechnet man den Ansatz:

$$\omega \xi = \int_{x_0}^{x_1} \left( \int_0^y x dy \right) dx = \int_{x_0}^{x_1} xy dx, \quad \omega \eta = \int_{x_0}^{x_1} \left( \int_0^y y dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} y^2 dx$$

auf  $t$  als Integrationsvariable um, so gelangt man zu elementar ausführbaren Integralen. Man zeige insbesondere für  $t_0 = 0$  und  $t_1 = \pi$ :

$$\xi = a \left( \frac{\pi}{2} + \frac{8}{9\pi} \right), \quad \eta = \frac{5}{6} a.$$

Für das zwischen der Spitze  $t=0$  und der nächsten Spitze  $t=2\pi$  verlaufende Flächenstück folgt  $\xi = a\pi$ ,  $\eta = \frac{5}{6}a$ , woraus nach dem Guldinschen Satze als Rauminhalt des zugehörigen Umdrehungskörpers  $5\pi^2 a^3$  in Übereinstimmung mit der S. 193 durchgeführten Rechnung folgt.

9) Ein Kreissektor des Radius  $a$  und des Zentriwinkels  $\vartheta$  sei mit einer Masse belegt, deren Dichte der Entfernung vom Mittelpunkte proportional sei ( $\varrho = c \cdot r$ ). Man zeige, daß der Schwerpunkt auf der Halbierungslinie des Zentriwinkels im Abstände  $\frac{3a}{2\vartheta} \cdot \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$  vom Kreismittelpunkte liegt. — Bei Gebrauch von Polarkoordinaten hat man für die Masse  $\mu$  des Kreissektors:

$$\mu = c \int_0^{\vartheta} \left( \int_0^a r^2 dr \right) d\vartheta = \frac{1}{3} ca^3 \vartheta,$$

während für  $\xi$  und  $\eta$  die Ansätze gelten:

$$\mu \xi = c \int_0^{\vartheta} \left( \int_0^a r^3 \cos \vartheta dr \right) d\vartheta; \quad \mu \eta = c \int_0^{\vartheta} \left( \int_0^a r^3 \sin \vartheta dr \right) d\vartheta,$$

die leicht zu entwickeln sind.

10) Man bestimme den Schwerpunkt eines geraden Kreiskegels. — Es werde der Nullpunkt zum Scheitelpunkte und die positive  $z$ -Achse zur Kegelachse gewählt. Die Höhe sei  $h$ , die Mantellinien mögen mit der Achse den Winkel  $\alpha$  bilden. Bei Gebrauch räumlicher Polarkoordinaten ist alsdann für die Berechnung der Raumintegrale bei stehenden  $\theta, \varphi$  in bezug auf  $r$  zwischen den Grenzen 0 und  $\frac{h}{\cos \theta}$  zu integrieren, hernach in bezug auf  $\theta$  zwischen den Grenzen 0 und  $\alpha$ , sowie endlich in bezug auf  $\varphi$  zwischen den Grenzen 0 und  $2\pi$ . Für den auf der  $z$ -Achse gelegenen Schwerpunkt folgt somit, da  $z = r \cos \theta$  gilt:

$$\tau \xi = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\alpha} \left( \int_0^{\frac{h}{\cos \theta}} r \cos \theta \cdot r^2 \sin \theta dr \right) d\theta \right) d\varphi.$$

Durch Ausführung der Integration nach  $r$  ergibt sich:

$$\tau \xi = \frac{1}{4} h^4 \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\alpha} \frac{\sin \theta d\theta}{\cos^3 \theta} \right) d\varphi = \frac{1}{2} \pi h^4 \int_{\alpha}^0 \frac{d \cos \theta}{\cos^3 \theta}.$$

Durch Fortsetzung der Rechnung und Heranziehung des bekannten Wertes für  $\tau$  zeige man  $\xi = \frac{3}{4} h$ .

11) Man berechne den Schwerpunkt des Oktanten der Kugel des Radius  $a$  um  $O$ , der dem Bereiche positiver Koordinaten angehört. — Da hier offenbar  $\xi = \zeta = \eta$  gilt, so genügt es,  $\xi$  zu berechnen, was man auf Grund des Ansatzes:

$$\frac{1}{6} \pi a^3 \cdot \xi = \int_0^a x \left( \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \left( \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dz \right) dy \right) dx$$

ausführen kann. Nach Aufg. 6, S. 37 stellt man leicht:

$$\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2} dy = \frac{\pi}{4} (a^2-x^2)$$

fest und wird als Ergebnis  $\xi = \eta = \zeta = \frac{3}{8} a$  gewinnen. Man bestätige das Ergebnis, indem man  $\xi$  mit Hilfe räumlicher Polarkoordinaten berechnet.

12) Es ist für das durch zwei Punkte  $t_0$  und  $t_1$  begrenzte Stück der durch (7) in I, 321 gegebenen zylindrischen Schraubenlinie der Schwerpunkt zu berechnen. — Da nach Aufg. 13, S. 161:

$$ds = \sqrt{a^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2} dt, \quad s = \sqrt{a^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2} \cdot (t_1 - t_0)$$

gilt, so wird man unter Benutzung des Ansatzes (11) die geometrisch leicht deutbaren Ergebnisse finden:

$$\xi = a \frac{\sin t_1 - \sin t_0}{t_1 - t_0}, \quad \eta = a \frac{\cos t_0 - \cos t_1}{t_1 - t_0}, \quad \zeta = \frac{h}{4\pi} (t_1 + t_0).$$

**2. Lineare und quadratische Momente.** Die in den Formeln (5) S. 199 rechts stehenden Ausdrücke sind besondere Fälle sogenannter „*linearer Momente*“ des Systems der  $n$  materiellen Punkte. Ist  $r_k$  der Abstand des  $k^{\text{ten}}$  Punktes von einer festen Ebene oder einer festen Geraden oder von einem festen Punkte des Raumes, so nennt man:

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n \mu_k r_k$$

das *lineare Moment* des Punktsystems in bezug auf die Ebene, die Gerade oder den Punkt. Man unterscheidet die drei Fälle auch, indem man von einem „*planaren*“, einem „*axialen*“ oder einem „*polaren Momente*“ des Punktsystems spricht. Handelt es sich um einen materiellen Körper  $K$  oder eine mit einer Masse belegte Fläche  $F$  oder Linie  $L$ , so treten an Stelle von (1) die Erklärungen:

$$(2) \quad \int^{(K)} r \delta \cdot d\tau, \quad \int^{(F)} r \delta \cdot d\omega, \quad \int^{(L)} r \delta \cdot ds$$

für die linearen Momente.

Hieran reiht sich die Erklärung der „*quadratischen Momente*“ durch die Summe:

$$(3) \quad \sum_{k=1}^n \mu_k r_k^2,$$

an deren Stelle im Falle eines Körpers  $K$ , einer Fläche  $F$  oder einer Linie  $L$  die Integrale treten:

$$(4) \quad \int^{(K)} r^2 \delta \cdot d\tau, \quad \int^{(F)} r^2 \delta \cdot d\omega, \quad \int^{(L)} r^2 \delta \cdot ds.$$

Man bezeichnet diese Momente auch als „Trägheitsmomente“ und unterscheidet sie wieder als „planare“, „axiale“ und „polare“.

Die axialen Momente kommen vornehmlich bei der Untersuchung der Drehungen um eine Achse zur Verwendung, die axialen Trägheitsmomente ebener Flächen auch in der Elastizitätstheorie. Jedoch gehen wir hier weder diesen noch den sonstigen vielfältigen geometrischen und physikalischen Entwicklungen nach, die sich an die erklärten Begriffe anschließen. Das hier vorliegende Interesse erstreckt sich vielmehr nur auf die Durchführung der Integrationen (2) und (4). Da die linearen Momente bereits bei der Lehre vom Schwerpunkt zur Geltung kamen, so wenden wir uns sogleich zu den Trägheitsmomenten und zwar zum wichtigsten Falle der „axialen Momente“. Die Gebilde seien bei den folgenden Aufgaben durchweg als homogen angenommen, so daß die Faktoren  $\delta$  vor die Integrale gesetzt werden können.

Aufgaben: 1) Man bestimme das Trägheitsmoment einer Geraden der Länge  $l$  und der Masse  $\mu$  in bezug auf eine zu ihr senkrecht verlaufende Achse erstens durch einen Endpunkt, zweitens durch den Mittelpunkt der Geraden. Wählen wir die Gerade zur  $x$ -Achse und den Nullpunkt im End- bzw. Mittelpunkte derselben, so folgt mit Benutzung der Gleichung  $\mu = \delta \cdot l$ :

$$1. \quad \delta \int_0^l x^2 dx = \frac{1}{3} \delta \cdot l^3 = \frac{1}{3} \mu l^2, \quad 2. \quad \delta \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} x^2 dx = \frac{1}{3} \delta \cdot \frac{1}{4} l^3 = \frac{1}{12} \mu l^2$$

für die Werte der gesuchten Momente. Diese Momente können übrigens auch als polare in bezug auf den Endpunkt bzw. Mittelpunkt der Geraden aufgefaßt werden, ja auch als planare Momente in bezug auf leicht näher angebbare Ebenen.

2) Trägheitsmoment eines Kreises vom Radius  $a$  in bezug auf einen Durchmesser. — Wählen wir den Kreismittelpunkt zum Pole eines Polarkoordinatensystems und lagern die Polarachse auf den fraglichen Durchmesser, so ist in das dritte Integral (4) einzutragen  $r = a \sin \vartheta$ , und übrigens ist  $ds = a d\vartheta$  zu setzen. Das gesuchte Moment ist, da  $2a\pi \cdot \delta = \mu$  die Masse des Kreises ist:

$$a^3 \delta \int_0^{2\pi} \sin^2 \vartheta d\vartheta = a^3 \delta \cdot \pi = \frac{1}{2} \mu a^2.$$

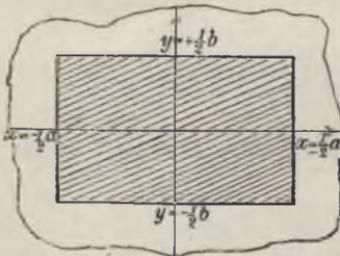


Fig. 62.

3) Trägheitsmoment eines ebenen Rechtecks der Seiten  $a$  und  $b$ , erstens in bezug auf eine Mittellinie, zweitens in bezug auf eine im Mittelpunkte auf dem Rechtecke senkrecht stehende Achse. — Nehmen wir die Mittellinie  $a$  zur  $x$ -Achse, die Mittellinie  $b$  zur  $y$ -Achse (s. Fig. 62), so ist z. B. das Trägheitsmoment des Rechtecks in bezug auf die letztere:

$$\delta \int_{-\frac{1}{2}a}^{+\frac{1}{2}a} \left( \int_{-\frac{1}{2}b}^{+\frac{1}{2}b} x^2 dy \right) dx = \frac{1}{12} \delta \cdot a^3 b = \frac{1}{12} \mu a^2,$$

unter  $\mu$  wie üblich die Masse des Rechtecks verstanden. Für die in der Rechteckmitte senkrecht stehende Achse folgt das Trägheitsmoment:

$$\delta \int_{-\frac{1}{2}a}^{+\frac{1}{2}a} \left( \int_{-\frac{1}{2}b}^{+\frac{1}{2}b} (x^2 + y^2) dy \right) dx = \frac{1}{12} \delta (a^3 b + a b^3) = \frac{1}{12} \mu (a^2 + b^2).$$

4) Man zeige folgenden für ebene Flächen allgemein bestehenden Satz: Sind  $M_1$  und  $M_2$  die Trägheitsmomente von  $F$  in bezug auf zwei in der Ebene von  $F$  gelegene, sich senkrecht schneidende Achsen, so ist das Trägheitsmoment  $M_3$  in bezug auf die zur Ebene von  $F$  im Schnittpunkte jener beiden Achsen senkrecht stehende Achse gleich  $(M_1 + M_2)$ . — Wenn man nämlich die beiden ersten Achsen zur  $x$ - und  $y$ -Achse, die dritte zur  $z$ -Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems macht, so hat man einfach:

$$M_1 = \int^{(F)} y^2 \delta \cdot d\omega, \quad M_2 = \int^{(F)} x^2 \delta \cdot d\omega, \quad M_3 = \int^{(F)} (x^2 + y^2) \delta \cdot d\omega,$$

woraus der Satz unmittelbar hervorgeht. Man erläutere den Satz an den Ergebnissen der Aufg. 3.

5) Trägheitsmoment einer Kreisscheibe des Radius  $a$  in bezug auf die im Mittelpunkte zu ihr senkrecht stehende Achse. — Das zweite Integral (4) ergibt für das gesuchte Moment:

$$\delta \int^{(F)} r^2 d\omega = \delta \int_0^{2\pi} \left( \int_0^a r^2 dr \right) d\vartheta = \frac{1}{2} \mu a^2,$$

unter  $\mu = \delta \cdot a^2 \pi$  die Masse der Kreisscheibe verstanden. Man leite hieraus auf Grund des Satzes 4) als Trägheitsmoment der Kreisscheibe in bezug auf einen Durchmesser  $\frac{1}{4} \mu a^2$  ab.

6) Trägheitsmoment einer elliptischen Scheibe in bezug auf eine Hauptachse. — Für die auf der  $x$ -Achse gelegene Hauptachse ist  $r = y$  in das zweite Integral (4) einzutragen. Statt das Integral über die ganze Ellipsenfläche auszudehnen, kann man auch das Vierfache des über einen Ellipsenquadranten ausgedehnten Integrals benutzen. Das Trägheitsmoment der elliptischen Scheibe in bezug auf die Hauptachse  $2a$  ist demnach gegeben durch:

$$4\delta \int_0^a \left( \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} y^2 dy \right) dx = \frac{4}{3} \delta \left( \frac{b}{a} \right)^3 \int_0^a (1/a^2 - x^2)^{3/2} dx = \frac{1}{4} \mu b^2.$$

Das Integral berechnet man am einfachsten, indem man es durch die Substitution  $x = a \cos z$  auf die Aufg. 13, S. 18 zurückführt. Die Masse  $\mu$  der elliptischen Scheibe ist durch  $\mu = \delta \cdot ab\pi$  gegeben. Das Trägheitsmoment in bezug auf die kleine Achse ist  $\frac{1}{4} \mu a^2$ , dasjenige in bezug auf eine im Mittelpunkte senkrecht zur Scheibe stehende Achse demnach  $\frac{1}{4} \mu (a^2 + b^2)$ .

7) Trägheitsmoment der in Fig. 63 dargestellten parabolischen Scheibe in bezug auf die Parabelachse. — Das Moment ist:

$$2\delta \int_0^x \left( \int_0^{\sqrt{2px}} y^2 dy \right) dx = \frac{2}{3} \delta \int_0^x (\sqrt{2px})^3 dx = \frac{1}{5} \mu y^2,$$

wo  $\mu = \delta \cdot \frac{2}{3} xy$  die Masse der Scheibe ist.

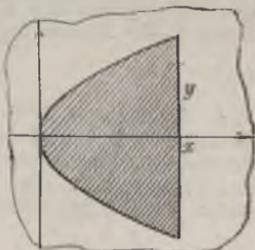


Fig. 63

8) Trägheitsmoment des in Fig. 64 dargestellten Rechteckskörpers der Kantenlängen  $a, b, c$  in bezug auf eine Mittellinie. — Wählt man, wie Fig. 64 darlegt, die Mittellinien zu Koordinatenachsen, so ist das Trägheitsmoment in bezug auf die  $z$ -Achse:

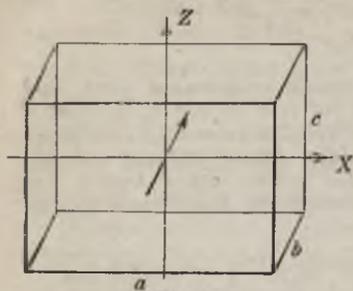


Fig. 64.

$$\begin{aligned} & \delta \int_{-\frac{1}{2}c}^{+\frac{1}{2}c} \left( \int_{-\frac{1}{2}a}^{+\frac{1}{2}a} \left( \int_{-\frac{1}{2}b}^{+\frac{1}{2}b} (x^2 + y^2) dy \right) dx \right) dz \\ &= \frac{1}{12} \delta \int_{-\frac{1}{2}c}^{+\frac{1}{2}c} (a^2 b + ab^2) dz \\ &= \frac{1}{12} \delta abc (a^2 + b^2) = \frac{1}{12} \mu (a^2 + b^2). \end{aligned}$$

Das innere Doppelintegral war bereits in Aufg. 3 berechnet.

9) Trägheitsmoment eines geraden Kreiskegels in bezug auf seine Achse. — Unter Benützung der in Aufg. 10, S. 206 erklärten Bezeichnungen findet man für dieses Moment bei Gebrauch räumlicher Polarkoordinaten:

$$\delta \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\alpha} \left( \int_0^{\frac{h}{\cos \theta}} r^2 \sin^2 \theta \cdot r^2 \sin \theta dr \right) d\theta \right) d\varphi = \frac{1}{5} h^5 \delta \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\alpha} \frac{\sin^3 \theta}{\cos^5 \theta} d\theta \right) d\varphi.$$

Die Integration nach  $\theta$  ergibt:

$$\int_0^{\alpha} \frac{\sin^3 \theta d\theta}{\cos^5 \theta} = \int_0^{\alpha} \operatorname{tg}^3 \theta d \operatorname{tg} \theta = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 \alpha.$$

Da  $h \cdot \operatorname{tg} \alpha = a$  der Radius der Grundfläche des Kegels ist und die Masse  $\mu$  denselben sich in der Gestalt:

$$\mu = \frac{1}{3} a^2 \pi h \cdot \delta$$

darstellt, so ergibt sich für das gesuchte Moment  $\frac{3}{10} \mu a^2$ .

10) Man beweise folgenden Satz: Ist  $M$  das Trägheitsmoment eines Körpers  $K$  in bezug auf eine Achse  $A$  und  $M_0$  dasjenige von  $K$  in bezug auf eine durch den Schwerpunkt von  $K$  parallel zu  $A$  laufende Achse  $A_0$ , so gilt, falls  $q$  der Abstand beider Achsen und  $\mu$  die Masse von  $K$  ist:

$$(5) \quad M = M_0 + \mu q^2,$$

d. h. das Moment  $M$  in bezug auf  $A$  ist gleich dem Momente  $M_0$  in bezug auf die parallele Achse durch den Schwerpunkt, vermehrt um das Trägheitsmoment der im Schwerpunkt konzentriert gedachten Masse  $\mu$  von  $K$  in bezug auf  $A$ . — Man wähle den Schwerpunkt zum Nullpunkte und die Achse  $A_0$  zur  $z$ -Achse; die parallele Achse  $A$  habe die Gleichungen  $x = \alpha, y = \beta$ . Für  $M$  gilt dann:

$$M = \int^{(K)} ((x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2) \delta \cdot d\tau.$$

Entwickelt man den Ausdruck unter dem Integralzeichen, so folgt:

$$M = \int^{(K)} (x^2 + y^2) \delta \cdot d\tau - 2\alpha \int^{(K)} x \delta \cdot d\tau - 2\beta \int^{(K)} y \delta \cdot d\tau + (\alpha^2 + \beta^2) \int^{(K)} \delta \cdot d\tau.$$

Das erste und das letzte Glied liefern  $M_0$  und  $\mu \rho^2$ ; die beiden anderen Glieder verschwinden, da die Koordinaten  $\xi, \eta$  des Schwerpunktes gleich 0 sind.

11) Trägheitsmoment einer Kugel des Radius  $a$  in bezug auf einen Durchmesser. — Bei Gebrauch von Polarkoordinaten findet sich:

$$\delta \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi \left( \int_0^a r^4 \sin^3 \theta dr \right) d\theta \right) d\varphi = \frac{8}{15} \delta a^5 \pi = \frac{2}{5} \mu a^2.$$

Das Trägheitsmoment der Kugel in bezug auf eine Tangente ist demnach  $\frac{7}{5} \mu a^2$ .

12) Aus einem Ellipsoid der Oberflächengleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

werde durch die beiden zur  $y, z$ -Ebene parallelen Ebenen der Gleichungen  $x = x_0$  und  $x = x_1 > x_0$  ein Stück  $K$  herausgeschnitten, dessen Trägheitsmoment in bezug auf die  $x$ -Achse zu bestimmen ist. — Das Integral für das Moment gestattet die Darstellung:

$$\int_{x_0}^{x_1} \left( \delta \int^{(F_x)} (y^2 + z^2) d\omega \right) dx,$$

wo sich das innere Flächenintegral auf eine elliptische Scheibe bezieht, die durch eine an der Stelle  $x$  zur  $x$ -Achse senkrechte Ebene aus  $K$  ausgeschnitten wird. Nach Aufg. 6 ist demnach:

$$\delta \int^{(F_x)} (y^2 + z^2) d\omega = \frac{1}{4} \delta \cdot b' c' \pi (b'^2 + c'^2),$$

wo  $b'$  und  $c'$  die Halbachsen der Schnittellipse  $F_x$  sind:

$$b' = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad c' = \frac{c}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Nach Einsetzung dieser Ausdrücke ist die Integration leicht zu Ende zu führen. Man zeige, daß das Trägheitsmoment des Gesamtellipsoides in bezug auf die  $x$ -Achse  $\frac{1}{5} \mu (b^2 + c^2)$  ist.

13) Trägheitsmoment eines Kreiszyinders des Radius  $a$  und der Höhe  $h$  in bezug auf die Achse des Zylinders. — Man wähle den Schwerpunkt des Zylinders zum Nullpunkte und seine Achse zur  $x$ -Achse. Bei Gebrauch der S. 181 eingeführten Zylinderkoordinaten  $x, r, \vartheta$  ist das Raumdifferential:

$$d\tau = r dx dr d\vartheta$$

und also das gesuchte Moment:

$$\delta \int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^a r^3 dr \right) d\vartheta \right) dx = \delta \cdot \frac{1}{4} a^4 \cdot 2\pi h = \frac{1}{2} \mu a^2.$$

14) Trägheitsmoment desselben Kreiszyinders in bezug auf die  $z$ -Achse. — Bei Gebrauch rechtwinkliger Koordinaten kann man dem Momente die Gestalt geben:

$$\int_{-a}^{+a} \left( \delta \int_{F_z} (x^2 + y^2) d\omega \right) dz,$$

wo  $F_z$  ein zur  $z$ -Achse senkrechter Schnitt ist. Letzterer ist ein Rechteck der Seiten  $h$  und  $2\sqrt{a^2 - z^2}$ . Da die  $z$ -Achse senkrecht zum Rechteck durch seinen Mittelpunkt läuft, so ergibt sich aus Aufg. 3:

$$\delta \int_{F_z} (x^2 + y^2) d\omega = \frac{1}{12} \delta \cdot 2h\sqrt{a^2 - z^2} (h^2 + 4(a^2 - z^2)).$$

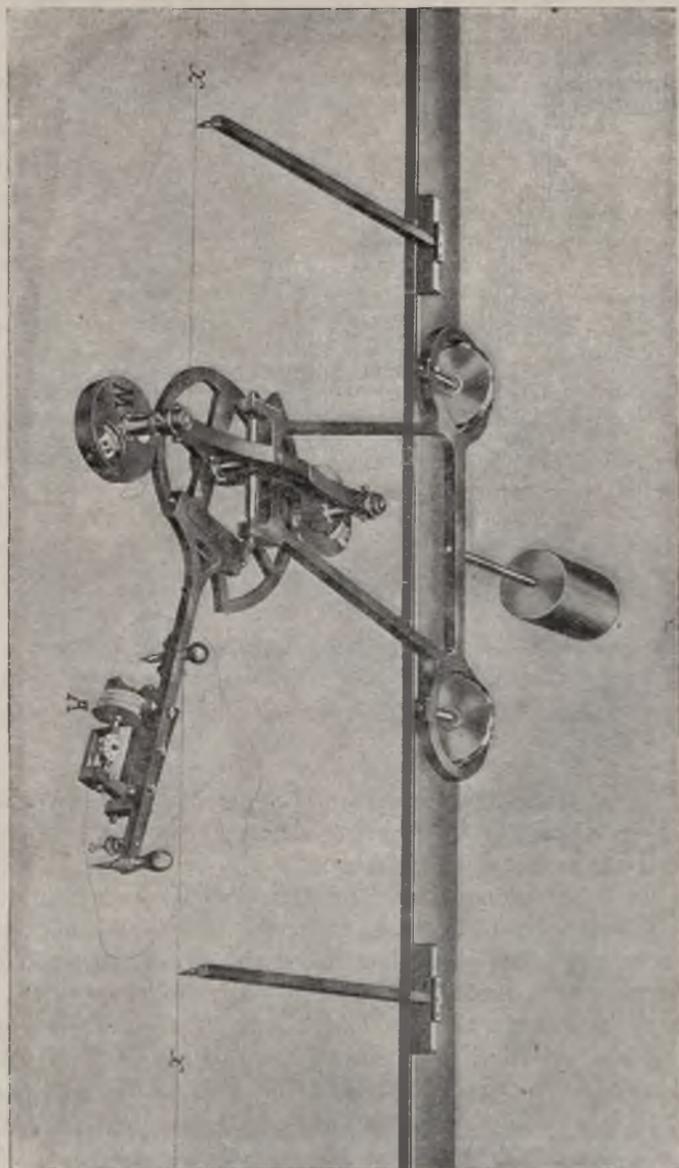
Die Integration nach  $z$  (s. die obige Aufg. 6 und die Aufg. 6, S. 37) führt zum Ausdruck  $\frac{1}{12} \mu (h^2 + 3a^2)$  für das gesuchte Moment.

**3. Integratoren.** Für die in der Praxis vielfach zu bestimmenden linearen und quadratischen Momente  $M_1$  und  $M_2$  einer homogenen ebenen Fläche  $F$  in bezug auf eine Achse, die der Ebene von  $F$  angehört, hat man Apparate erdonnen, die diese Momente mechanisch auszuwerten gestatten. Man bezeichnet solche Apparate als „Momentenplanimeter“ oder „Integratoren“.

Der von Amsler (Schaffhausen) konstruierte Integrator ist in Fig. 65 abgebildet und in Fig. 66 schematisch erläutert. Der Apparat hat freie Beweglichkeit längs der in Fig. 66 punktiert angedeuteten  $x$ -Achse, auf welche sich die Momente beziehen sollen. Um diese Beweglichkeit zu erzielen, legt man parallel zur  $x$ -Achse in richtigem Abstände (s. die beiden Halter in Fig. 65) eine mit einer Rille versehene Eisenschiene auf die Papierebene. In die Rille werden die beiden Räder  $R$  durch ein (nur in Fig. 65 sichtbares) Gewicht eingedrückt, so daß ein Herausspringen der Räder beim Arbeiten mit dem Instrumente vermieden wird. Der Apparat ruht außerdem auf der Papierebene mit den drei Planimeterrollen  $R_0, R_1, R_2$ . Letztere sind mit Zählwerken versehen, welche die Umdrehungen  $U_0, U_1, U_2$ , je in einer ganzen Umdrehung als Einheit gemessen, auf drei Dezimalstellen abzulesen gestatten.

Die Rolle  $R_0$  ist am Fahrarme mit einer zu diesem parallelen Achse angebracht. Am Ende des Fahrarms findet sich die Hülse  $H$  zum Einstecken des Fahrstiftes. Der auf der  $x$ -Achse befindliche Drehpunkt  $D$  des Fahrarmes ist Mittelpunkt zweier konzentrischer Kreisbogen  $K_2$  und  $K_3$ , die mit dem Fahrarme in starrer Verbindung sind. Die Radien dieser Kreisbogen verhalten sich wie 2 zu 3; wir setzen sie gleich  $2r$  und  $3r$ . Endlich sind  $S_1$  und  $S_2$  zwei Kreisscheiben der Radien  $r$ , welche mit  $K_2$  und  $K_3$  verzahnt sind. Die Achsen von  $S_1$  und  $S_2$  werden durch eine zur

Fig. 60



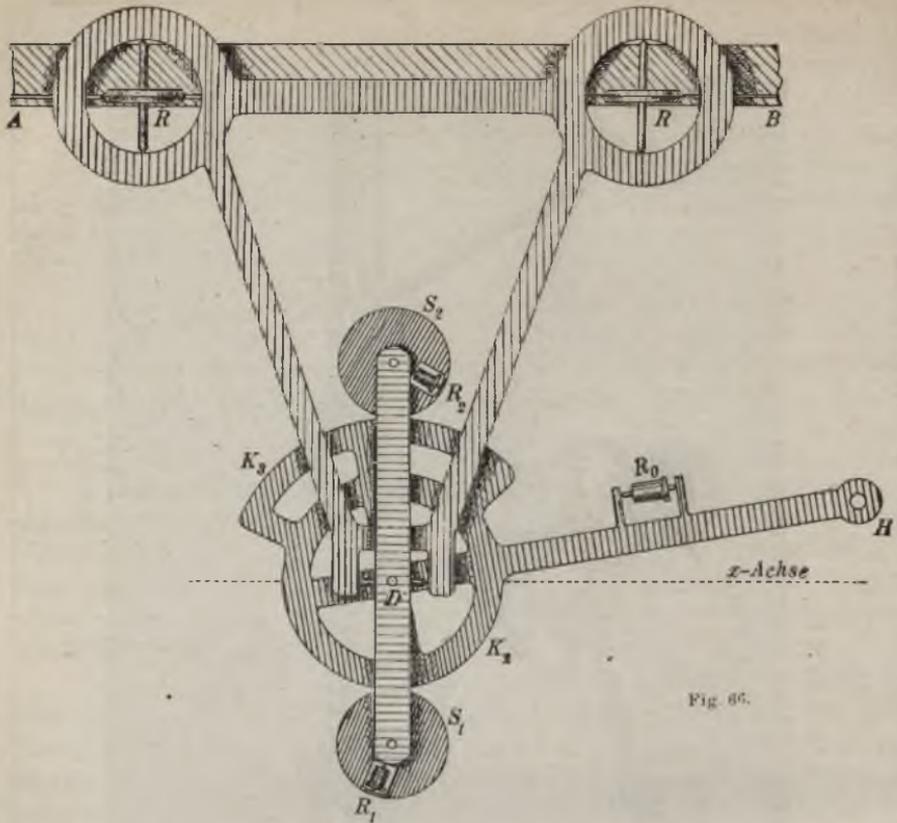


Fig. 66.

$x$ -Achse senkrechte Stange gehalten und nehmen auf diese Weise an der Bewegung des Apparates in Richtung der  $x$ -Achse teil. Die Rollen  $R_1$  und  $R_2$  sind in die Scheiben eingebaut.

Ist  $l$  die Fahrarmlänge vom Drehpunkte  $D$  bis zum Fahrstifte, und ist  $y$  die Ordinate des Fahrstiftes, so setzen wir  $y = l \cdot \sin \alpha$ , so daß  $\alpha$  der mit dem richtigen Vorzeichen (dem von  $y$ ) versehene Winkel des Fahrarmes gegen die positive  $x$ -Achse ist. Die Rollenachse  $R_0$ , die wir nach dem Fahrstifte hin richten, bildet dann gegen die  $x$ -Achse gleichfalls den Winkel  $\alpha$ . Die Rollenachsen  $R_1$  und  $R_2$  mögen von den Scheibenmittelpunkten fort gerichtet sein. Der Apparat ist so gebaut, daß für  $\alpha = 0$ , d. h. wenn der Fahrarm auf der  $x$ -Achse liegt, die Winkel  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  der Rollenachsen  $R_1, R_2$  gegen die positive  $x$ -Achse  $-\frac{\pi}{2}$  bzw.  $0$  sind (s. Fig. 66). Die Größe der Scheiben  $S_1$  und  $S_2$  sowie der Kreisbogen  $K_2$  und  $K_3$  hat dann zur Folge, daß bei beliebigem Winkel  $\alpha$

des Fahrarmes die Winkel  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  der Rollachsen die folgenden sind:

$$(1) \quad \alpha_1 = -\frac{\pi}{2} - 2\alpha, \quad \alpha_2 = -3\alpha,$$

was man sich auch noch mit Fig. 67 deutlich machen wolle.

Auf diesem einfachen Umstande beruht nun die Eigenart des Apparates. Beschreiben wir mit dem Fahrstifte den Rand der Fläche  $F$  (s. Fig. 67) im Drehungssinne des Uhrzeigers\*) einmal vollständig, so messen die Rollendrehungen  $U_0$ ,  $U_1$ ,  $U_2$  den Inhalt  $\omega$  von  $F$ , das lineare Moment  $M_1$  (statische Moment) von  $F$  in bezug auf die  $x$ -Achse und in gleich noch anzugebender Art das quadratische Moment  $M_2$  (Trägheitsmoment) von  $F$  in bezug auf dieselbe Achse.

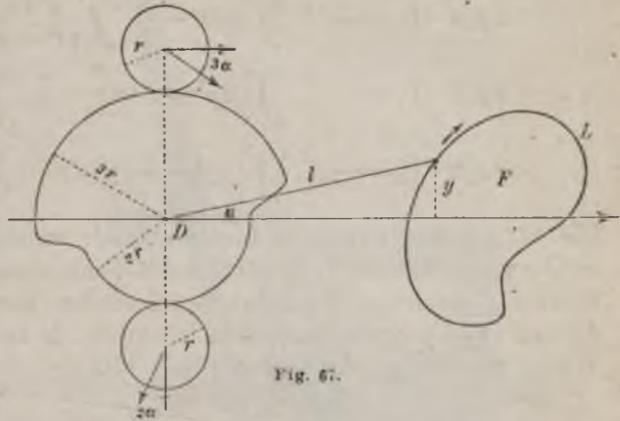


Fig. 67.

Den Beweis gründen wir auf die Integralsätze von S. 139 ff. Die

Abszisse  $x_1$  des Drehpunktes  $D$  ist leicht in den Koordinaten  $x, y$  des Fahrstiftes darstellbar; wir finden für  $x_1$  und das bei gleichzeitiger Änderung von  $x$  und  $y$  eintretende vollständige Differential  $dx_1$  von  $x_1$ :

$$(2) \quad x_1 = x - \sqrt{l^2 - y^2}, \quad dx_1 = dx + \frac{y dy}{\sqrt{l^2 - y^2}}.$$

Ist  $\rho_k$  der Radius der Rolle  $R_k$ , so gilt zufolge (2) S. 171 für das einem Differential  $dx_1$  entsprechende Differential  $dU_k$  der Rollendrehung  $U_k$ :

$$2\rho_k \pi \cdot dU_k = \sin \alpha_k \cdot dx_1.$$

Der volle Umlauf um den Rand  $L$  von  $F$  ergibt somit die Rollendrehungen:\*\*)

$$(3) \quad 2\rho_k \pi \cdot U_k = \int_{(-L)}^{(+L)} \sin \alpha_k \cdot dx_1 = \int_{(-L)}^{(+L)} \sin \alpha_k \left( dx + \frac{y dy}{\sqrt{l^2 - y^2}} \right).$$

\*) d. h. nach den Festsetzungen von S. 138 im *negativen* Umlaufsinne.

\*\*) Beim Amslerschen Integrator ist  $\rho_1 = \rho_2$ . In den Integralen (3) haben wir die Integrationsbahn  $-L$  genannt, insofern es sich um den „negativen“ Umlaufsinne um  $F$  handelt. Der Winkel  $\alpha_0$  ist natürlich der vorhin mit  $\alpha$  bezeichnete Winkel.

Mit Benutzung von (1) finden wir für die Sinus der Winkel  $\alpha$ :

$$\sin \alpha_0 = \sin \alpha = \frac{y}{l}, \quad \sin \alpha_1 = -\cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha - 1 = \frac{2}{l^2} y^2 - 1,$$

$$\sin \alpha_3 = -\sin 3\alpha = 4 \sin^3 \alpha - 3 \sin \alpha = \frac{4}{l^3} y^3 - \frac{3}{l} y.$$

Unter Trennung der drei Fälle haben wir also bei Umkehrung der Integrationsrichtung folgende Ergebnisse:

$$2 \varrho_0 \pi \cdot U_0 = -\frac{1}{l} \int^{(L)} y dx - \frac{1}{l} \int^{(L)} \frac{y^2 dy}{\sqrt{l^2 - y^2}},$$

$$2 \varrho_1 \pi \cdot U_1 = -\frac{1}{l^2} \int^{(L)} (2y^2 - l^2) dx - \frac{1}{l^2} \int^{(L)} \frac{2y^3 - l^2 y}{\sqrt{l^2 - y^2}} dy,$$

$$2 \varrho_2 \pi \cdot U_2 = -\frac{1}{l^3} \int^{(L)} (4y^3 - 3l^2 y) dx - \frac{1}{l^3} \int^{(L)} \frac{4y^4 - 3l^2 y^2}{\sqrt{l^2 - y^2}} dy.$$

Die hier rechts stehenden Linienintegrale wandeln wir nun auf Grund der Formeln (6) und (7) S. 139 ff. in Flächenintegrale um, die sich auf den Bereich  $F$  beziehen. Zunächst verschwinden nach der Formel (6) alle drei an zweiter Stelle stehenden Integrale, da in ihnen  $x$  nicht auftritt. Weiter aber liefert die Formel (7) S. 140:

$$-\int^{(L)} y dx = \int^{(F)} d\omega, \quad -\int^{(L)} (2y^2 - l^2) dx = 4 \int^{(F)} y d\omega,$$

$$-\int^{(L)} (4y^3 - 3l^2 y) dy = 12 \int^{(F)} y^2 d\omega - 3l^2 \int^{(F)} d\omega.$$

Nun aber haben wir für den Inhalt  $\omega$  und die Momente  $M_1$  und  $M_2$  die Erklärungen:

$$\int^{(F)} d\omega = \omega, \quad \int^{(F)} y d\omega = \frac{1}{\delta} M_1, \quad \int^{(F)} y^2 d\omega = \frac{1}{\delta} M_2,$$

unter  $\delta$  die Dichte der Flächenbelegung verstanden. Aus den Umdrehungen  $U$  bestimmen sich somit der Inhalt  $\omega$  und die Momente  $M_1$  und  $M_2$  nach der einfachen Regel:

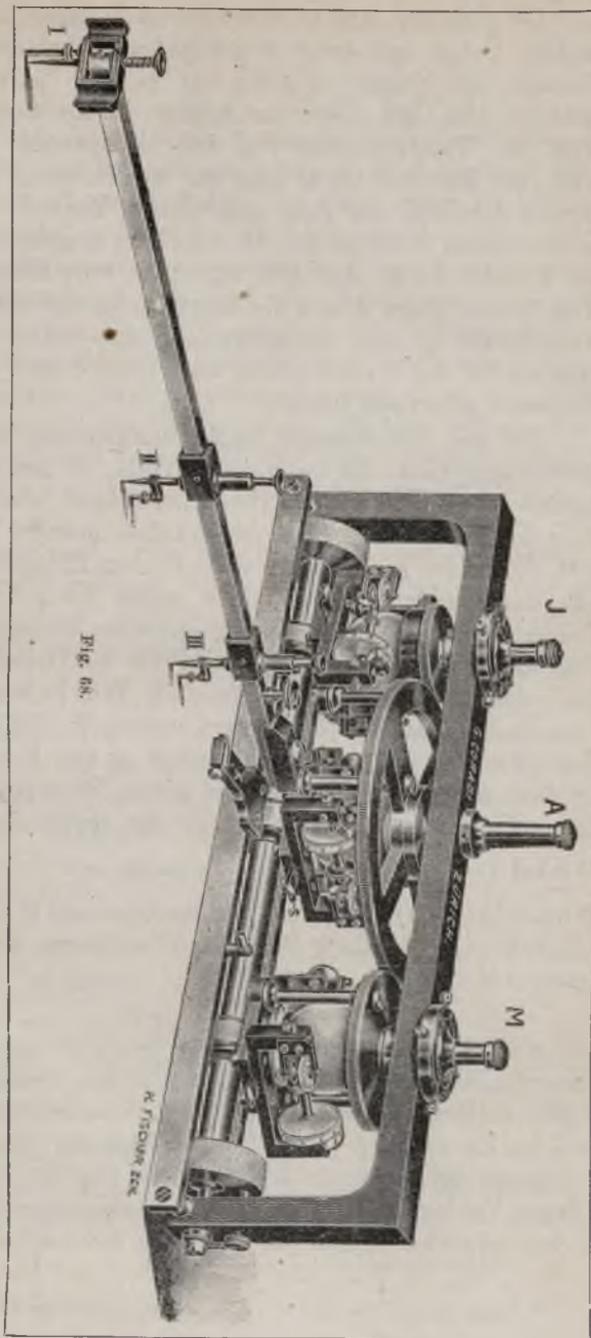
$$(4) \quad \begin{cases} \omega = 2l \varrho_0 \pi \cdot U_0, & M_1 = \frac{1}{2} l^2 \delta \varrho_1 \pi \cdot U_1, \\ M_2 = \frac{1}{6} l^3 \delta \varrho_2 \pi \cdot U_2 + \frac{1}{2} l^3 \delta \varrho_0 \pi \cdot U_0. \end{cases}$$

Die Ungleichmäßigkeiten der Papierfläche können den Gang der Rollen  $R_0, R_1, R_2$  ungünstig beeinflussen und dadurch die Genauigkeit der Ergebnisse beeinträchtigen. Diese Fehlerquelle wird bei dem in

Fig. 68 abgebildeten Integrator von Hele-Shaw, der durch Coradi hergestellt wird, vermeiden. Das Instrument ist auf dem S. 76 ff. ausführlich besprochenen Prinzip des Kugelrollplanimeters aufgebaut; die Rollen  $R_0, R_1, R_2$  sind also nicht auf die Papierebene aufgelagert, sondern auf Kugelflächen welche genau wie beim

Kugelrollplanimeter eine der Verschiebung des Apparates in der  $x$ -Richtung proportionale Drehung erfahren.

Die technische Durchführung dieser Kugeldrehung ist aber gegenüber dem Kugelrollplanimeter stark abgeändert. Das in der Figur sichtbare Rahmen-gestell ruht auf zwei Walzen, auf deren gemeinsamer Achse unter den mit  $J, A$  und  $M$  bezeichneten Apparaten drei Ringe aufgelagert sind. Auf diesen Ringen ruhen drei gleich große matt geschliffene Glas-kugeln. Jede Kugel wird in der Höhe ihres Mittelpunktes durch drei Rollen gehalten, von denen jeweils die eine unsere Planimeterrolle  $R_k$



ist. Der Fahrarm muß in seiner Normalstellung (senkrecht zum Rahmengestell) genau auf die  $x$ -Achse aufgesetzt werden\*); die gemeinsame Zentrale der Kugeln ist also zur  $y$ -Achse parallel. Man mache sich zunächst klar, daß, wenn der Apparat in Richtung der  $x$ -Achse bewegt wird, die Walzendrehung von den auflagernden Kugeln aufgenommen wird, die demnach selbst eine der Verschiebung des Apparates proportionale Drehung um ihre gemeinsame Zentrale erfahren. Die Schnittpunkte dieser Zentrale mit der einzelnen Kugelfläche sind also die „Pole“ der Kugeldrehung. Auf dem durch die Pole hindurchlaufenden größten Kugelkreise, längs dessen die Kugel durch die seitlichen Rollen gehalten wird, führen wir eine Winkelmessung ein, und zwar bekomme der rechts liegende Pol den Winkel 0, und die Winkel mögen nach hinten (s. Fig. 68) wachsend gerechnet werden.

Die drei die einzelne Kugel umfassenden Rollen sind nun in ein Gestell eingebaut, das um eine vertikale, in den oberen Rahmen eingelagerte Achse drehbar ist. Diese Drehungen aber werden von der Stellung des Fahrarmes gegen die  $x$ -Achse mittelst dreier Zahnräder geregelt, die in der Figur unter dem oberen Rahmen sichtbar sind. Wenn nun der Fahrarm den Winkel  $\alpha$  gegen die  $x$ -Achse bildet, so ist der Winkel zwischen der Berührungsstelle der mittleren Rolle und dem Pole eben auch gleich  $\alpha$ , so daß diese Rolle die Drehung des hier hindurchlaufenden „Parallelkreises“ aufnimmt. Wir kommen hier einfach zu der Theorie des Kugelrollplanimeters zurück (S. 77 ff.) und erkennen, daß die Rollendrehung  $U_0$  den Flächeninhalt  $\omega$  von  $F$  liefert. Die Einrichtung ist dann aber weiter die, daß bei einem Winkel  $\alpha$  des Fahrarmes gegen die  $x$ -Achse die Berührungsstelle der rechts liegenden Rolle  $R_1$  den Winkel  $(-\frac{\pi}{2} - 2\alpha)$  besitzt, diejenige der dritten Rolle  $R_2$  aber den Winkel  $(3\alpha - \pi)$ . Nach den Darlegungen von S. 77 ff. gestaltet sich dann die weitere Entwicklung Wort für Wort genau so wie beim Amslerschen Integrator.

**4. Vektorentheorie.** Bei der Betrachtung der Bewegungen von Punkten, Ebenen und Räumen in I, 364 ff. haben wir uns der daselbst S. 365 erklärten „Vektoren“ bedient. Wir verstanden unter einem Vektor eine im Raume nach „Größe“ und „Richtung“ gegebene Strecke; zur Bezeichnung der Vektoren bedienten wir uns der Frakturschrift. Ist  $v$  ein solcher Vektor, dessen Größe oder „absoluter Betrag“  $|v|$  und dessen Richtungswinkel gegen die positiven Achsen eines gewählten Koordi-

\*) Man denke also die positive  $x$ -Achse in Fig. 68 nach vorn links weisend.

nahesystems  $\alpha, \beta, \gamma$  sind, so heißen die durch die Gleichungen (5) in I, 365 gegebenen Zahlgrößen:

$$(1) \quad v_x = v \cos \alpha, \quad v_y = |v| \cos \beta, \quad v_z = |v| \cos \gamma,$$

d. h. die mit den richtigen Vorzeichen versehenen Projektionen von  $v$  auf die Achsen, die nach den Achsen genommenen „Komponenten“ des Vektors  $v$ . Die Größen  $|v|, v_x, v_y, v_z$  haben wir nicht mehr als „Richtungsgrößen“ oder „Vektoren“ aufzufassen; sie sind vielmehr Zahlen, die in der Längeneinheit benannt sind und mit einer in Längeneinheiten eingeteilten „Skala“ gemessen werden können. Sie werden demnach im Gegensatz zu den Vektoren als „Skalare“ bezeichnet, eine Benennung, die wir auch auf andere Größen, die keine Vektoren sind, übertragen.

Das Gesetz der „Addition zweier Vektoren“  $v$  und  $w$  ist in I, 366 besprochen und durch Fig. 114 daselbst erläutert. Es kam auf das Gesetz der „Streckenaddition“ und damit auf das „Parallelogrammgesetz“ der Mechanik hinaus. Die Operation der Subtraktion zweier Vektoren war damit zugleich gegeben.

Neu zu erklären sind zwei Arten von Produkten zweier Vektoren  $v$  und  $w$ . Es sei der „nicht-konvexe“ Richtungsunterschied zwischen  $v$  und  $w$  durch  $(v, w)$  bezeichnet. Als „inneres“ oder „skalares“ Produkt  $v \cdot w$  der beiden Vektoren  $v$  und  $w$  bezeichnet man dann den Skalar:

$$(2) \quad v \cdot w = |v| \cdot |w| \cdot \cos (v, w),$$

d. h. das Produkt der absoluten Beträge  $|v|$  und  $|w|$  und des Kosinus vom Richtungsunterschiede  $(v, w)$ . Da die Richtungskosinus von  $v$  aus (1) folgen und für  $w$  die Kosinus sich entsprechend in  $w$  darstellen, so ergibt sich  $\cos (v, w)$  nach einer bekannten Regel (s. (3) in „A. G.“ S. 95) in der Gestalt:

$$\cos (v, w) = \frac{v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z}{v \cdot |w|}.$$

Das skalare Produkt läßt sich demnach aus den Komponenten der Faktoren nach folgender Regel berechnen:

$$(3) \quad v \cdot w = v_x \cdot w_x + v_y \cdot w_y + v_z \cdot w_z.$$

Hieran reiht sich folgende zweite Produktbildung, die wir zwar weiterhin nicht benutzen, aber der Vollständigkeit halber erwähnen: Als „äußeres“ oder „vektorielles“ Produkt  $[v \cdot w]$  von  $v$  und  $w$  bezeichnet man einen Vektor, dessen absoluter Betrag:

$$(4) \quad [v \cdot w] = |v| \cdot |w| \cdot \sin (v, w)$$

ist, und der sowohl zu  $v$  als zu  $w$  in der Art senkrecht verläuft, daß drei von  $O$  aus laufende mit  $v, w, [v \cdot w]$  gleichgerichtete Strahlen in dieser Anordnung ein „Rechtssystem“ bilden (s. „A. G.“, S. 92).

Schreiben wir kurz  $[v \cdot w] = u$ , so gilt, da der Richtungsunterschied von  $u$  sowohl gegen  $v$  als gegen  $w$  gleich  $\frac{\pi}{2}$  sein soll:

$$u \cdot v = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y + u_z \cdot v_z = 0,$$

$$u \cdot w = u_x \cdot w_x + u_y \cdot w_y + u_z \cdot w_z = 0.$$

Hieraus ergibt sich:

$$u_x : u_y : u_z = (v_y w_z - v_z w_y) : (v_z w_x - v_x w_z) : (v_x w_y - v_y w_x),$$

so daß wir, unter  $\sigma$  einen Proportionalitätsfaktor verstanden, schreiben können:

$$\sigma u_x = v_y w_z - v_z w_y, \quad \sigma u_y = v_z w_x - v_x w_z, \quad \sigma u_z = v_x w_y - v_y w_x.$$

Zeichnen wir von  $O$  aus drei mit  $u, v, w$  gleiche und gleichgerichtete Vektoren, so liefern deren Endpunkte  $(u_x, u_y, u_z), \dots$  mit  $O$  die Ecken eines Tetraders, dessen sechsfacher Inhalt  $6T$  nach (4) in „A. G.“, S. 110 und dem daselbst S. 111 aufgestellten Satze:

$$6T = u_x(v_y w_z - v_z w_y) + u_y(v_z w_x - v_x w_z) + u_z(v_x w_y - v_y w_x)$$

ist. Hierfür können wir nach den vorausgehenden Gleichungen schreiben:

$$6T = \sigma(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) = \sigma u \cdot u = \sigma |u|^2$$

oder, wenn wir einen Faktor  $|u|$  nach (4) ersetzen:

$$6T = \sigma |u| \cdot |v| \cdot |w| \cdot \sin(v, w).$$

Da sich nun nach elementar-stereometrischer Betrachtung  $6T$  in der Gestalt  $|u| \cdot |v| \cdot |w| \cdot \sin(v, w)$  berechnet, so ist  $\sigma = 1$ . Die Komponenten des vektoriellen Produktes  $u = [v \cdot w]$  sind:

$$(5) \quad u_x = v_y w_z - v_z w_y, \quad u_y = v_z w_x - v_x w_z, \quad u_z = v_x w_y - v_y w_x.$$

Wir gehen jetzt von der Annahme aus, daß in jedem Punkte  $(x, y, z)$  des Raumes oder eines Raunteiles ein bestimmter Vektor angebracht sei. Wir nennen dann den Raum bzw. den Raunteil ein „Vektorfeld“ und wollen einige wichtige analytische Entwicklungen über solche Vektorfelder hier ausführen. Wir können das Vektorfeld in der Art erklären, daß wir im Punkte  $(x, y, z)$  des Feldes die Komponenten  $v_x(x, y, z), v_y(x, y, z), v_z(x, y, z)$  des daselbst angebrachten Vektors in Abhängigkeit von  $x, y, z$  angeben. Diese drei Funktionen denken wir im Vektorfelde als eindeutig und stetig\*), auch mögen sie ebensolche partielle Ableitungen erster Ordnung haben.

Die Bezeichnungen der einzuführenden Begriffe versteht man am besten, wenn man das Vektorfeld einer physikalischen Deutung unterzieht. Wir denken uns das Feld von einer Flüssigkeit erfüllt, die sich in einem stationären, d. h. mit der Zeit nicht veränderlichen Bewegungszustande befindet. Die Strömung soll so sein, daß das zu irgend einer Zeit an der Stelle  $(x, y, z)$  befindliche Flüssigkeitsteilchen zu dieser Zeit eine durch den zugehörigen Vektor  $v$  dargestellte Geschwindigkeit hat. Wie wir noch sehen werden, dürfen wir die Flüssigkeit nicht als inkompressibel ansehen; vielmehr müssen wir sie als unbeschränkt dehnbar oder zusammendrückbar uns vorstellen. Will man mit einer inkompressiblen Flüssig-

\*) oder doch wenigstens „abteilungsweise“ stetig.

keit arbeiten, so muß man die Möglichkeit zulassen, daß sich die Flüssigkeitsmenge im Felde beständig irgendwie vermehrt oder vermindert. Dieser Zustand ist dann natürlich auch stationär, d. h. im einzelnen Feldpunkte tritt entweder eine im Laufe der Zeit gleichbleibende Vermehrung oder Verminderung der Flüssigkeitsmenge ein. Man spricht dann an der einzelnen Stelle von einer „Quelle“ bzw. „Senke“ oder auch nur von einer „Quelle“, jedoch mit positiver bzw. „negativer“ Ergiebigkeit. Beide Vorstellungen haben die Bezeichnungen beeinflusst, so daß wir uns für keine ausschließlich entscheiden; doch wollen wir, wenn nichts weiter gesagt ist, die Vorstellung der inkompressiblen Flüssigkeit als zugrunde liegend annehmen.

Wir betrachten jetzt einen ganz im Felde liegenden räumlichen Bereich  $B$  mit der Oberfläche  $O$  und wollen die Gesamtmenge der Flüssigkeit feststellen, welche in der Zeiteinheit über  $O$  aus dem Bereiche  $B$  austritt. Im einzelnen Punkte von  $O$  tragen wir auf der nach „außen“ gerichteten Normalen einen Vektor  $\mathbf{n}$  des absoluten Betrages  $|\mathbf{n}| = 1$  ab, einen sogenannten „Einheitsvektor“. Überdies möge im gleichen Oberflächenpunkte der zugehörige Vektor  $\mathbf{v}$  errichtet sein, der mit  $\mathbf{n}$  den Winkel  $(\mathbf{v}, \mathbf{n})$  bildet. Man mache sich deutlich, daß für  $(\mathbf{v}, \mathbf{n}) < \frac{\pi}{2}$  an der betrachteten Stelle die Flüssigkeit aus  $B$  herausströmt, für  $(\mathbf{v}, \mathbf{n}) > \frac{\pi}{2}$  aber in  $B$  hineinfließt.

Man denke nun um den gemeinsamen Fußpunkt der Vektoren  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{n}$  ein kleines Oberflächenteilchen  $d\omega$  gezeichnet und beachte, daß die in der Zeiteinheit über  $d\omega$  austretende Flüssigkeitsmenge einen auf  $d\omega$  stehenden Zylinder füllen würde, welcher zu  $\mathbf{v}$  parallel und mit  $|\mathbf{v}|$  gleiche Mantellinien hat. Der Zylinderinhalt, der gleich dem Produkte der Grundfläche  $d\omega$  und der Höhe  $|\mathbf{v}| \cdot \cos(\mathbf{v}, \mathbf{n})$  ist, gibt ein Maß für die Menge der in der Zeiteinheit über  $d\omega$  austretenden Flüssigkeit. Da  $|\mathbf{n}| = 1$  ist, so können wir für diese Menge auch:

$$(6) \quad |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{n}| \cdot \cos(\mathbf{v}, \mathbf{n}) \cdot d\omega = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \cdot d\omega$$

schreiben, unter  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  das skalare Produkt verstanden. Die über die Gesamtoberfläche  $O$  in der Zeiteinheit austretende Menge ist demnach:

$$(7) \quad \int_O \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \cdot d\omega;$$

sie kann positiv, gleich 0 oder negativ sein\*).

Die Menge (7) muß nun während der Zeiteinheit durch die  $B$  angehörenden Quellen ersetzt werden. Den Quotienten dieser Menge und

\*) Der Aufbau des Integrals (7) kann leicht mit Hilfe der früheren Mittel (Facettenfläche usw.) streng vollzogen werden.

des Rauminhaltes  $\tau$  von  $B$  nennen wir die „mittlere Ergiebigkeit“ der Quellen in  $B$ . Eine andere Benennung dieser Größe hängt mit der Vorstellung der elastischen Flüssigkeit zusammen. Denken wir z. B. die Flüssigkeit über  $O$  allenthalben austretend, so scheint ein „Divergieren“ der Flüssigkeit aus dem Innern von  $B$  stattzufinden. Wir bezeichnen demnach den mit  $\tau^{-1}$  multiplizierten Wert (7) als die „mittlere Divergenz“ des Vektorfeldes in  $B$ .

Hier setzt dann wieder ein bekannter Grenzprozeß ein. Wir ziehen den Bereich  $B$  mehr und mehr auf einen seiner inneren Punkte  $(x, y, z)$  zusammen und können beweisen, daß dabei die mittlere Divergenz einer bestimmten, allein von  $x, y, z$  abhängenden Grenze zustrebt; diese Grenze nennen wir die „Divergenz“ des Vektorfeldes an der Stelle  $(x, y, z)$  und bezeichnen sie durch  $\text{div } \mathbf{v}$ . Stellen wir nämlich das skalare Produkt  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  auf Grund von (3) durch die Komponenten von  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{n}$  dar, so folgt:

$$(8) \quad \int^{(0)} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \cdot d\omega = \int^{(0)} (v_x n_x + v_y n_y + v_z n_z) d\omega.$$

Ist demnach  $\nu$  die nach dem „Innern“ von  $B$  gerichtete Flächennormale, so gilt unter Heranziehung des Gaußschen Satzes (12) S. 142:

$$\int^{(0)} v_x \cdot n_x \cdot d\omega = - \int^{(0)} v_x(x, y, z) \cdot \cos(\nu x) d\omega = \int^{(B)} \frac{\partial v_x}{\partial x} d\tau,$$

sowie bei entsprechender Behandlung der beiden anderen Glieder in (8):

$$(9) \quad \int^{(0)} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \cdot d\omega = \int^{(B)} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) d\tau.$$

Hieraus folgt sofort: Die mittlere Divergenz ist der Mittelwert der rechts in der Klammer stehenden Funktion der Koordinaten, die Divergenz an der Stelle  $(x, y, z)$  aber ist gegeben durch:

$$(10) \quad \text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Die Divergenz ist ein der Stelle zugeordneter Skalar. Denken wir die Zahlwerte  $\text{div } \mathbf{v}$  in allen Punkten  $(x, y, z)$  des Vektorfeldes angetragen, so hat man damit ein „Skalarfeld“, welches als das zum Vektorfelde gehörende „Quellenfeld“ bezeichnet wird. In der Tat ist ja nach den voraufgehenden Entwicklungen durch  $\text{div } \mathbf{v}$  die „für die Zeiteinheit und Raumeinheit geschätzte“ Ergiebigkeit der an der Stelle  $(x, y, z)$  befindlichen Quelle gegeben. Ist insbesondere  $\text{div } \mathbf{v}$  konstant gleich 0, so heißt das Vektorfeld „quellenfrei“. Übrigens merken wir noch als neue Ausdrucksform des Gaußschen Integralsatzes an:

$$(11) \quad \int^{(0)} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \cdot d\omega = \int^{(B)} \text{div } \mathbf{v} \cdot d\tau.$$

Es sei jetzt weiter irgend eine geschlossene Linie  $L$  im Vektorfelde gewählt und in diese eine Fläche  $F$  eingespannt, die gleichfalls ganz im Felde liegt. Für  $L$  sei eine Umlaufsrichtung ausgewählt, und auf  $F$  seien die Normalen der gewählten Umlaufsrichtung entsprechend nach Vorschrift von S. 143 aufgetragen. Die der Längeneinheit gleich gewählte einzelne Normale fassen wir wieder als einen Einheitsvektor  $\mathbf{n}$  auf. Andererseits tragen wir auf der einzelnen Tangente von  $L$  in der Umlaufsrichtung vom Berührungspunkte aus einen Einheitsvektor  $\mathbf{t}$  ab. Zugleich denken wir im Berührungspunkte den zugehörigen Vektor  $\mathbf{v}$  angebracht, der gegen  $\mathbf{t}$  den Winkel  $(\mathbf{v}, \mathbf{t})$  bilde. Die nach  $\mathbf{t}$  genommene Komponente von  $\mathbf{v}$  werde  $v_t$  genannt; sie ist gegeben durch:

$$(12) \quad v_t = |\mathbf{v} \cdot \cos(\mathbf{v}, \mathbf{t})| = |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{t}| \cdot \cos(\mathbf{v}, \mathbf{t}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}.$$

Ist  $d\mathbf{s}$  ein an der betrachteten Stelle von  $L$  gedachtes Bogendifferential dieser Kurve, das die Richtung des Vektors  $\mathbf{t}$  hat, so können wir, wenn wir dieses Differential selbst als einen Vektor auffassen wollen, dafür  $d\mathbf{s}$  schreiben; es ist dann eben  $d\mathbf{s}$  ein mit  $\mathbf{t}$  gleichgerichteter Vektor des Betrages  $|d\mathbf{s}| = ds$ . Das skalare Produkt  $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$  läßt sich hier nach so entwickeln:

$$\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = |\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}| \cdot \cos(\mathbf{v}, \mathbf{t}) \cdot ds = v_t \cdot ds.$$

Man bilde nun das folgende auf  $L$  bezogene Linienintegral:

$$(13) \quad \int^{(L)} v_t ds = \int^{(L)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$$

und wandle dasselbe auf Grund des Stokesschen Satzes (16) S. 146 in ein auf die in  $L$  eingespannte Fläche  $F$  bezogenes Flächenintegral um. Zu diesem Zwecke beachte man, daß die Komponenten von  $d\mathbf{s}$  einfach die in der genannten Formel links stehenden  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  sind. Entwickelt man also das skalare Produkt  $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$  auf Grund der Gleichung (3), so folgt bei Einführung der auf  $F$  normal errichteten Einheitsvektoren  $\mathbf{n}$  nach dem Stokesschen Satze:

$$\begin{aligned} \int^{(L)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} &= \int^{(L)} (v_x dx + v_y dy + v_z dz) \\ &= \int^{(F)} \left\{ \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) n_x + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) n_y + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) n_z \right\} d\omega. \end{aligned}$$

Der rechts unter dem Integralzeichen stehende Klammerausdruck ist das skalare Produkt des Vektors  $\mathbf{n}$  und eines Vektors der Komponenten:

$$(14) \quad \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y},$$

welchen man den „Wirbel“ oder die „Rotation“ (auch den „Curl“) des Vektor-

feldes im Punkte  $(x, y, z)$  nennt und durch  $\text{rot } \mathbf{v}$  (auch durch  $\text{curl } \mathbf{v}$ ) bezeichnet. Der Stokessche Satz nimmt die neue Gestalt an:

$$(15) \quad \int_{(L)} \mathbf{v} \cdot d\mathfrak{s} = \int_{(F)} \mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{v} \cdot d\omega.$$

Denken wir in jedem Punkte des Feldes den Vektor  $\text{rot } \mathbf{v}$  angetragen, so wird das so entstehende Vektorfeld als das „Wirbelfeld“ des gegebenen Feldes bezeichnet. Da man aus (10) und (14) sofort auf das Zutreffen der Gleichung:

$$(16) \quad \text{div rot } \mathbf{v} = 0$$

schließt, so ist das Wirbelfeld eines gegebenen Vektorfeldes stets quellenfrei.

Bei der Einführung des Vektors  $\text{rot } \mathbf{v}$  durch die Komponenten (14) sind zwar die Koordinaten benutzt. Jedoch ist leicht einzusehen, daß  $\text{rot } \mathbf{v}$  und damit das Wirbelfeld vom Koordinatensysteme unabhängig dem Vektorfelde zugehört. Legt man nämlich um den Punkt  $(x, y, z)$  eine Kugel von sehr kleinem Radius  $r$  und benutzt die Diametralebenen dieser Kugel als Flächen  $F$ , so gilt, wie man leicht sieht:

$$\lim_{r=0} \left( \frac{1}{r^2 \pi} \int_{(F)} \mathbf{v} \cdot d\mathfrak{s} \right) = \mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{v},$$

wo  $\mathbf{n}$  der auf  $F$  senkrecht errichtete Einheitsvektor ist, dessen Richtung sich entsprechend dem bei  $L$  gewählten Umlaufsinne bestimmt. In der vorstehenden Formel sind nun die linke Seite sowie der Faktor  $\pi$  von der Auswahl des Koordinatensystems unabhängig; dasselbe gilt also auch von  $\text{rot } \mathbf{v}$ .

Ein Vektorfeld, in dem  $\text{rot } \mathbf{v}$  konstant gleich 0 ist, heißt „wirbelfrei“. Nach S. 150 folgt aber aus:

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y},$$

daß der dreigliedrige Ausdruck:

$$v_x dx + v_y dy + v_z dz$$

das vollständige Differential einer Funktion von  $x, y, z$  ist, die man bis auf eine additive Konstante durch das Linienintegral (12) S. 150 erklären kann. Indem wir uns die Auswahl der additiven Konstanten vorbehalten, bezeichnen wir diese Funktion durch  $V(x, y, z)$  und nennen sie das zum wirbelfreien Felde gehörende „Potential“. \*) Dann gelten jedenfalls die drei Gleichungen:

$$(17) \quad v_x = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial V}{\partial z},$$

\*) Gewöhnlich spricht man nur dann von einem Potentiale, wenn das Vektorfeld ein „Kraftfeld“ ist; bei einer wirbelfreien Flüssigkeitsströmung gebraucht man die genauere Bezeichnung „Geschwindigkeitspotential“.

und es erscheint möglich, das Vektorfeld durch die Angabe des Potentials  $V(x, y, z)$  zu erklären bzw. zu ersetzen. Umgekehrt ist natürlich jedes durch ein Potential  $V(x, y, z)$  erklärte Vektorfeld wirbelfrei. Nach den Darlegungen von S. 150ff. ist  $V(x, y, z)$  übrigens nicht notwendig eine eindeutige Funktion; doch werden wir in dem gleich zu besprechenden Falle der Gravitationsfelder, die wirbelfrei sind, mit eindeutigen Potentialen zu tun haben.

Die wichtigste Anwendung der Vektoretheorie bezieht sich auf die Untersuchung der *elektromagnetischen Felder*. In einem solchen Felde liegt eine Vektorenverteilung  $\mathfrak{E}$ , die „elektrische Feldstärke“, vor und zugleich eine Verteilung  $\mathfrak{M}$ , die „magnetische Feldstärke“ darstellend. Die gesamte Theorie beruht auf zwei überaus einfachen Grundgesetzen oder Grundformeln, den beiden „*Maxwellschen Gleichungen*“. Bei Änderung von  $\mathfrak{E}$  wird ein Feld  $\mathfrak{M}$  erregt, dessen Wirbelfeld  $\text{rot } \mathfrak{M}$  sich in einfachster Art aus  $\mathfrak{E}$  und der „Änderungsgeschwindigkeit“  $\frac{d\mathfrak{E}}{dt}$  zusammensetzt\*); bei Änderung von  $\mathfrak{M}$  wird ein Feld  $\mathfrak{E}$  erregt, dessen Wirbelfeld  $\text{rot } \mathfrak{E}$  bis auf einen Faktor mit dem Felde der „Änderungsgeschwindigkeit“  $\frac{d\mathfrak{M}}{dt}$  identisch ist. Die wirkliche Aufstellung und Verwendung der Maxwell'schen Gleichungen würde indessen zu weit führen.

**5. Schwerkraftfelder und Potentiale.** Zwei materielle Punkte der Massen  $\mu$  und  $m$  und der Entfernung  $r$  mögen aufeinander nach dem Gesetze der Schwerkraft oder Gravitation wirken. Jeder Punkt übt dann auf den anderen eine Anziehungskraft aus, welche nach dem anziehenden Punkte hin gerichtet ist und die Größe:

$$(1) \quad G \cdot \frac{\mu m}{r^2}$$

hat; hierbei hat  $G$  einen bestimmten numerischen Wert und stellt die sogenannte Schwerkraftskonstante oder Gravitationskonstante dar. Da diese Konstante  $G$  in den zu entwickelnden Formeln überall nur als Faktor auftreten würde, so wollen wir der Bequemlichkeit halber von ihr absehen und die Größe der Schwerkraft durch den in (1) mit  $G$  multiplizierten Quotienten darstellen. Wir wollen die Sachlage weiter so auffassen, daß wir den Punkt der Masse  $\mu$  als fest und anziehend ansehen; dem anderen Punkte erteilen wir die Masse  $m = 1$ , sehen ihn als Angriffspunkt oder, wie man sagt, als „Aufpunkt“ der Anziehungskraft an und fassen ihn als im Raume beweglich auf. Die Koordinaten des an-

\*) S. die Entwicklungen über die Ableitung eines Vektors nach der Zeit in I, 366.

ziehenden Punktes seien  $\xi, \eta, \zeta$ , die des Aufpunktes  $x, y, z$ . Auf den letzteren wirkt alsdann eine Kraft, die wir durch einen nach dem Punkte  $(\xi, \eta, \zeta)$  hin gerichteten Vektor  $v$  des absoluten Betrages:

$$(2) \quad v = \frac{\mu}{r^2}$$

darstellen können. Bei unbeschränkt variablem Punkte  $(x, y, z)$  entsteht ein über den ganzen Raum ausgedehntes Vektorfeld einfachster Art, das wir als ein „Schwerkraftfeld“ oder „Gravitationsfeld“ bezeichnen. Da die Richtungskosinus von  $v$  (s. Fig. 69):

$$(3) \quad \cos \alpha = \frac{\xi - x}{r}, \quad \cos \beta = \frac{\eta - y}{r}, \quad \cos \gamma = \frac{\zeta - z}{r}$$

sind, so sind die Komponenten  $v_x = |v| \cdot \cos \alpha, \dots$  des Vektors  $v$ :

$$(4) \quad v_x = \mu \frac{\xi - x}{r^3}, \quad v_y = \mu \frac{\eta - y}{r^3}, \quad v_z = \mu \frac{\zeta - z}{r^3},$$

wo  $r$  als Funktion von  $x, y, z$  gegeben ist durch:

$$(5) \quad r = +\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}.$$

Wie man aus (4) erkennt, sind die  $v_x, v_y, v_z$  in jedem abgeschlossenen räumlichen Bereiche, der den anziehenden Punkt  $(\xi, \eta, \zeta)$  nicht enthält, eindeutige, stetige und differenzierbare Funktionen der  $x, y, z$ .

Liegen jetzt weiter  $n$  anziehende Punkte  $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1), (\xi_2, \eta_2, \zeta_2), \dots, (\xi_n, \eta_n, \zeta_n)$  der Massen  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  vor, so setzen sich die zugehörigen  $n$  Vektoren im einzelnen Punkte  $(x, y, z)$  nach dem Gesetze der Vektorenaddition zu einer Summe  $v$  zusammen, deren nach den Achsen genommene Komponenten  $v_x, v_y, v_z$  sich auf Grund des durch die Gleichung (6) in I, 366 zum Ausdruck kommenden Gesetzes so darstellen:

$$(6) \quad v_x = \sum_{k=1}^n \mu_k \frac{\xi_k - x}{r_k^3}, \quad v_y = \sum_{k=1}^n \mu_k \frac{\eta_k - y}{r_k^3}, \quad v_z = \sum_{k=1}^n \mu_k \frac{\zeta_k - z}{r_k^3},$$

unter  $r_k$  den Abstand:

$$(7) \quad r_k = +\sqrt{(\xi_k - x)^2 + (\eta_k - y)^2 + (\zeta_k - z)^2}$$

des Aufpunktes vom  $k^{\text{ten}}$  anziehenden materiellen Punkte verstanden. Auch hier sind die  $v_x, v_y, v_z$  in jedem abgeschlossenen räumlichen Bereiche, der keinen der  $n$  anziehenden Punkte enthält, eindeutig, stetig und differenzierbar. Hier sowie in dem gleich zu besprechenden, noch etwas allgemeineren Falle halten wir natürlich an der Bezeichnung „Schwerkraftfeld“ oder „Gravitationsfeld“ für das vorliegende Vektorfeld fest.

An Stelle der Summen (6) treten Integrale, falls ein materieller Körper  $K$  oder eine mit Masse belegte Fläche  $F$  oder Linie  $L$  nach dem Gesetze der Schwerkraft anziehend wirken. Wir gehen nur auf die beiden Fälle eines Körpers  $K$  und einer Fläche  $F$  ein, da diese für die physikalischen Anwendungen die wichtigeren sind. Der Aufpunkt liege zunächst von  $K$  bzw.  $F$  entfernt.

Zur Bestimmung der Anziehung eines Körpers  $K$  denken wir  $K$  in  $n$  kleine Teilkörper der Massen  $\Delta\mu_1, \Delta\mu_2, \dots, \Delta\mu_n$  zerlegt und gehen von der Annahme aus, daß das Teilchen der Masse  $\Delta\mu_k$  in seiner Wirkung auf den Punkt  $(x, y, z)$  ersetzt werden kann durch einen einzelnen materiellen Punkt der Masse  $\Delta\mu_k$ , der sich an einem richtig gewählten Innenpunkte  $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$  des Teilchens befindet. Ist  $r_k$  alsdann die Entfernung des Aufpunktes von diesem Punkte  $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ , so werden sich die Komponenten des Vektors der Anziehungskraft von  $K$  auf den Aufpunkt  $(x, y, z)$  genau wieder in der Gestalt (6) darstellen. Indem wir hieran einen bekannten Grenzübergang schließen und das „Differential der Masse“  $d\mu$  nach S. 197 als Produkt der Dichte  $\delta(\xi, \eta, \zeta)$  des Körpers  $K$  an der Stelle  $(\xi, \eta, \zeta)$  und des Raumdifferentials  $d\tau$  ausdrücken, gewinnen wir für die Komponenten der Anziehungskraft im Punkte  $(x, y, z)$  die auf  $K$  bezogenen Raumintegrale:

$$(8) \quad v_x = \int^{(K)} \delta \frac{\xi - x}{r^3} d\tau, \quad v_y = \int^{(K)} \delta \frac{\eta - y}{r^3} d\tau, \quad v_z = \int^{(K)} \delta \frac{\zeta - z}{r^3} d\tau,$$

wo  $\xi, \eta, \zeta$  die „Integrationsvariablen“ sind und  $r$  natürlich durch den Ausdruck (5) gegeben ist. Die Koordinaten  $x, y, z$  des Aufpunktes sind im Sinne der Sprechweise von S. 132 ff. als „Parameter“ in diesen Integralen aufzufassen.

Eine entsprechende Betrachtung gilt für die Anziehung einer mit einer Masse belegten Fläche  $F$ . Die Komponenten  $v_x, v_y, v_z$  stellen sich hier durch die auf  $F$  bezogenen Flächenintegrale:

$$(9) \quad v_x = \int^{(F)} \delta \frac{\xi - x}{r^3} d\omega, \quad v_y = \int^{(F)} \delta \frac{\eta - y}{r^3} d\omega, \quad v_z = \int^{(F)} \delta \frac{\zeta - z}{r^3} d\omega$$

dar, wo  $\delta = \delta(\xi, \eta, \zeta)$  die „Flächendichte“ an der Stelle  $(\xi, \eta, \zeta)$  von  $F$  ist. Hier wie in (8) nehmen wir  $\delta(\xi, \eta, \zeta)$  als eine stetige\*) Funktion auf  $F$  bzw. in  $K$  an. Handelt es sich insbesondere um homogene Gebilde, so ist  $\delta$  konstant und kann vor die Integralzeichen gesetzt werden.

Es ergibt sich nun zunächst eine sehr einfache Theorie der Schwerkraftfelder für solche Bereiche  $B$ , welche mit dem anziehenden Gebilde keinen Punkt gemein haben. In einem räumlichen Bereiche  $B$ , der keinen

\*) oder doch wenigstens „abteilungsweise“ stetige.

der anziehenden Punkte enthält, ist das Schwerefeld quellenfrei und wirbelfrei und besitzt demnach ein Potential  $V(x, y, z)$ . Wir beweisen den letzten Teil dieses Satzes einfach durch Angabe des Potentials, welches im Falle von  $n$  anziehenden Punkten durch:

$$(10) \quad V(x, y, z) = \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k}{r_k},$$

in den beiden anderen betrachteten Fällen durch:

$$(11) \quad V(x, y, z) = \int^{(K)} \frac{\delta d\tau}{r}, \quad V(x, y, z) = \int^{(F)} \frac{\delta d\omega}{r}$$

gegeben ist. Aus (5) folgt nämlich:

$$(12) \quad \frac{\partial(r^{-1})}{\partial x} = -r^{-2} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\xi - x}{r^3}$$

und entsprechend für die Ableitungen von  $r^{-1}$  nach  $y$  und  $z$ . Bei den Integralen (11) ist die Differentiation nach den Parametern  $x, y, z$  an den unter den Integralzeichen stehenden Funktionen statthaft (vgl. S. 133 ff.), woraus man in allen Fällen auf das Zutreffen der Gleichungen schließt:

$$(13) \quad \frac{\partial V}{\partial x} = v_x, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = v_y, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = v_z.$$

Dies sind aber die für das Potential charakteristischen Relationen (17) S. 224. Weiter folgt aus (12) durch nochmalige Differentiation:

$$\frac{\partial^2(r^{-1})}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} - 3 \frac{\xi - x}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^3} + 3 \frac{(\xi - x)^2}{r^5}$$

und wieder entsprechend für die Ableitungen nach  $y$  und  $z$ . Daraus ergibt sich sofort:

$$\frac{\partial^2(r^{-1})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(r^{-1})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(r^{-1})}{\partial z^2} = -\frac{3}{r^3} + 3 \frac{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}{r^5} = 0.$$

Nehmen wir also auch die zweite Differentiation bei den Integralen (11) „unter den Integralzeichen“ vor, so folgt:

$$(14) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

eine Gleichung, die wir auch in die Gestalt kleiden können:

$$(15) \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Die in (14) links stehende Summe der drei zweiten Ableitungen von  $V$  bezeichnet man durch das Symbol  $\Delta V$ :

$$(16) \quad \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Es hat sich demnach ergeben: Das Potential  $V(x, y, z)$  befriedigt in jedem von anziehender Masse freien Felde  $B$  die nach Laplace benannte Gleichung  $\Delta V = 0$ , die in der Schreibweise der Vektoretheorie die Gestalt (15) annimmt und das Feld als quellenfrei erkennen läßt.

Das zu einem wirbelfreien Felde gehörende Potential war S. 224 nur erst bis auf eine additive Konstante bestimmt. Die in (10) und (11) vorliegenden Potentiale sind endgültig bestimmt und zwar in der Art, daß  $V(x, y, z)$  verschwindet, wenn der Aufpunkt  $(x, y, z)$  auf irgend einem Wege in das Unendliche läuft; dabei nähert sich, falls  $\rho$  der Abstand des Punktes  $(x, y, z)$  vom Nullpunkte ist, für  $\lim \rho = \infty$  das Produkt  $\rho \cdot V$  dem Werte  $\mu$  der gesamten anziehenden Masse. Zum Beweise nehmen wir an, daß sich diese Masse im Innern einer Kugel des endlichen Radius  $a$  um  $O$  finde. Die Entfernung  $\rho$  des Aufpunktes von  $O$  sei  $> a$ . Es kann nun z. B. das erste Integral (11) so geschrieben werden:

$${}^{(K)}\int \frac{\delta d\tau}{r} = \frac{1}{r_0} {}^{(K)}\int \delta d\tau = \frac{\mu}{r_0},$$

wobei  $r_0$  ein gewisser mittlerer Wert der im Integrationsbereiche  $K$  eintretenden Werte  $r$  ist. Da für diese Werte  $r$  die Ungleichungen:

$$\rho - a < r < \rho + a$$

gelten, so wird auch  $r_0$  diesen Ungleichungen genügen, und es wird also eine im Intervalle  $-1 < \eta < +1$  gelegene Zahl geben, für die  $r_0 = \rho + \eta a$  zutrifft. Hieraus folgt:

$$V = \frac{\mu}{\rho + \eta a}, \quad \rho \cdot V = \frac{\mu}{1 + \eta \frac{a}{\rho}},$$

woraus sich  $\lim (\rho \cdot V) = \mu$  für unendlich werdendes  $\rho$  ergibt. Auf die anderen Fälle wird man diese Betrachtung leicht übertragen.

Die Werte des Potentials  $V$  sind positiv und haben, wie wir soeben sahen, den Wert 0 zur unteren Grenze. Im Falle einzelner anziehender Punkte läßt sich für die Werte  $V$  keine obere Schranke angeben, da  $V$  bei Annäherung des Aufpunktes an einen anziehenden Punkt unendlich wird. Ob in einem Falle (11) eine endliche obere Schranke für  $V$  existieren mag, bleibe zunächst unentschieden. Kommen Punkte  $(x, y, z)$  vor, in denen  $V(x, y, z)$  einer vorgeschriebenen positiven Konstanten  $C$  gleich wird, so sagt man, daß alle diese Punkte eine durch die Gleichung  $V(x, y, z) - C = 0$  dargestellte „Potentialniveaufäche“ oder kurz „Niveaufäche“ bilden. Indem wir  $C$  als „Parameter“ der „Flächenschar“:

$$(17) \quad V(x, y, z) - C = 0$$

auffassen, gelangen wir zu der Anschauung, daß das betrachtete Schwerkraft-

feld schlicht von Niveauflächen erfüllt ist, von denen durch jeden Punkt eine hindurchläuft. Die Normale der Niveaufläche im Punkte  $(x, y, z)$  hat nach I, 327 drei der Proportion:

$$\cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma = \frac{\partial V}{\partial x} : \frac{\partial V}{\partial y} : \frac{\partial V}{\partial z}$$

genügende Richtungskosinus. *Zufolge (13) ist also der Kraftvektor im Punkte  $(x, y, z)$  senkrecht zur Niveaufläche gerichtet.* Denken wir uns eine Kurve dargestellt, welche die Niveauflächen überall senkrecht durchdringt (eine sogenannte „orthogonale Trajektorie“ der Niveauflächenschar), so wird die Tangente dieser Kurve in jedem Punkte die Richtung des Kraftvektors angeben. Die Schar dieser Kurven, welche das Schwerkraftfeld gleichfalls schlicht erfüllen, liefert die sogenannten „Kraftlinien“ des Feldes.

Rechnen wir die Bogenlänge  $s$  einer einzelnen Kraftlinie in der Richtung wachsender  $V$  und also in der Krafrichtung wachsend, so folgt, falls wir  $V$  längs der Kraftlinie als Funktion von  $s$  auffassen:

$$\frac{dV}{ds} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{dz}{ds},$$

wo die Ableitungen von  $V$  durch die Vektorkomponenten ersetzt werden können und die Differentialquotienten  $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$  einfach die Richtungskosinus  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  des Vektors sind (vgl. I, 332):

$$\frac{dV}{ds} = v_x \cos \alpha + v_y \cos \beta + v_z \cos \gamma.$$

Ersetzen wir die  $v_x, v_y, v_z$  durch ihre Ausdrücke (1) S. 219, so folgt bei Benutzung der Relation  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ :

$$(18) \quad \frac{dV}{ds} = |v|.$$

*Der absolute Betrag des Kraftvektors  $v$  ist also die nach der Bogenlänge  $s$  der Kraftlinie genommene Ableitung des Potentials  $V$ .*

**6. Greensche Sätze mit Anwendungen.** Für die Aufstellung weiterer Eigenschaften des Potentials  $V(x, y, z)$ , auch für die Berechnung besonderer Potentiale sind einige von Green aufgestellte Formeln grundlegend. Wir können die „Greenschen Sätze“ sehr leicht als Folgerungen des Gaußschen Integralsatzes (12) S. 142 darstellen. Es sei ein räumlicher Bereich  $B$  mit der Oberfläche  $O$  gegeben, und in demselben seien  $\varphi(x, y, z)$  und  $\psi(x, y, z)$  zwei eindeutige und stetige Funktionen, die daselbst ebensolche partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung besitzen mögen. Dann

besteht folgende, einen ersten Greenschen Satz zum Ausdruck bringende Integralrelation:

$$(1) \quad \int^{(B)} (\varphi'_x \psi'_x + \varphi'_y \psi'_y + \varphi'_z \psi'_z) d\tau + \int^{(B)} \varphi \Delta \psi d\tau \\ = - \int^{(0)} \varphi (\psi'_x \cos(\nu, x) + \psi'_y \cos(\nu, y) + \psi'_z \cos(\nu, z)) d\omega.$$

Hierbei ist  $\Delta \psi$  der in (16) S. 228 erklärte Ausdruck, und  $\nu$  ist als Symbol für die nach dem „Bereichinneren“ gerichtete Normale von  $O$  benutzt (s. S. 141). Der Beweis geht aus (12) S. 142 und den beiden entsprechenden für  $y$  und  $z$  aufgebauten Formeln sofort hervor, falls man für  $\varphi$  in diese Formeln bzw.  $\varphi \cdot \psi'_x$ ,  $\varphi \cdot \psi'_y$ ,  $\varphi \cdot \psi'_z$  einträgt und:

$$\frac{\partial(\varphi \cdot \psi'_x)}{\partial x} = \varphi'_x \psi'_x + \varphi \psi''_{xx}, \dots$$

berücksichtigt.

Verstehen wir unter  $\nu$  genauer die vom Fußpunkte aus gemessene Normalenlänge, so können wir unter Wiederholung der zur Relation (18) S. 230 führenden Betrachtung:

$$\frac{d\psi}{d\nu} = \psi'_x \frac{dx}{d\nu} + \psi'_y \frac{dy}{d\nu} + \psi'_z \frac{dz}{d\nu} = \psi'_x \cos(\nu, x) + \psi'_y \cos(\nu, y) + \psi'_z \cos(\nu, z)$$

schreiben und erkennen demnach in dem Klammerausdrucke auf der rechten Seite von (1) den „nach der Normalen  $\nu$  genommenen Differentialquotienten von  $\psi$ “. Der Greensche Satz (1) nimmt dann die noch etwas einfachere Gestalt an:

$$(2) \quad \int^{(B)} (\varphi'_x \psi'_x + \varphi'_y \psi'_y + \varphi'_z \psi'_z) d\tau + \int^{(B)} \varphi \Delta \psi d\tau = - \int^{(0)} \varphi \frac{d\psi}{d\nu} d\omega.$$

Das erste links stehende Integral ist in  $\varphi$  und  $\psi$  symmetrisch. Tauschen wir demnach  $\varphi$  und  $\psi$  aus und ziehen die entstehende Formel von (2) ab, so ergibt sich als ein zweiter Greenscher Satz:

$$(3) \quad \int^{(B)} (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) d\tau = - \int^{(0)} \left( \varphi \frac{d\psi}{d\nu} - \psi \frac{d\varphi}{d\nu} \right) d\omega.$$

Um die Brauchbarkeit dieser Sätze an einem einfachen Beispiele zu erläutern, wollen wir das *Potential einer homogenen Kugelschale* bestimmen, d. h. eines von zwei konzentrischen Kugelflächen der Radien  $a$  und  $A > a$  begrenzten homogenen Körpers. Wir wählen den Mittelpunkt der Kugelschale zum Nullpunkte und führen neben rechtwinkligen auch gleich Polarkoordinaten  $\varrho, \theta, \varphi$  ein, wobei der Radiusvektor, um Verwechslungen mit dem bisherigen  $r$  zu vermeiden,  $\varrho$  genannt sei.

Als Bereich  $B$  legen wir hier einen von zwei mit der Schale konzentrischen Kugelflächen  $O_1$  und  $O_2$  eingegrenzten Raum zugrunde. Die

Radien von  $O_1$  und  $O_2$  seien  $\varrho_1$  und  $\varrho_2 > \varrho_1$ ; beide Radien müssen entweder  $> A$  oder  $< a$  sein, damit  $B$  keinen Punkt der anziehenden Schale enthält. Es sei nun in der zu diesem Bereiche gehörenden Formel (3) die Funktion  $\psi$  mit 1 identisch gewählt, während  $\varphi$  das gesuchte Potential  $V$  der Kugelschale bedeute. Dann gilt in  $B$  bzw. auf  $O$ :

$$\Delta\psi = 0, \quad \Delta\varphi = \Delta V = 0, \quad \frac{d\psi}{dv} = 0, \quad \psi = 1,$$

so daß die Greensche Formel (3) liefert:

$$\int^{(0)} \frac{dV}{dv} d\omega = \int^{(0_1)} \frac{dV}{dv} d\omega + \int^{(0_2)} \frac{dV}{dv} d\omega = 0.$$

Im vorliegenden Falle ist nun  $V$  eine Funktion von  $\varrho$  allein, wie aus der Anordnung der anziehenden Masse hervorgeht. Da die Normalenrichtung längs  $O_1$  die des (wachsenden) Radiusvektor  $\varrho$  ist, längs  $O_2$  aber dem Radiusvektor entgegen gerichtet ist, so sind die Ableitungen des Potentials nach der Normalen längs  $O_1$  und  $O_2$  einfach durch  $V'(\varrho_1)$  bzw.  $-V'(\varrho_2)$  gegeben. Die letzte Gleichung ergibt demnach:

$$V'(\varrho_1) \int^{(0_1)} d\omega - V'(\varrho_2) \int^{(0_2)} d\omega = 4\pi(\varrho_1^2 \cdot V'(\varrho_1) - \varrho_2^2 \cdot V'(\varrho_2)) = 0.$$

Hieraus geht hervor, daß  $\varrho^2 V'(\varrho)$  sowohl außerhalb der Kugelschale einen konstanten Wert  $c$  hat, als auch innerhalb derselben. Schreiben wir aber:

$$V(\varrho) = \frac{c}{\varrho^2},$$

so folgt durch Integration in bezug auf  $\varrho$ :

$$V(\varrho) = b - \frac{c}{\varrho},$$

unter  $b$  eine zweite Konstante verstanden.

Betrachten wir zunächst den Außenraum, so muß  $b$  gleich 0 sein, da  $V$  im Unendlichen verschwindet. Da ferner  $\lim(\varrho \cdot V) = -c$  die Masse  $\mu$  der anziehenden Schale ist, so ist das Potential für den Außenraum durch:

$$(4) \quad V(\varrho) = \frac{\mu}{\varrho}$$

gegeben, d. h. die Schale wirkt nach außen genau in derselben Art anziehend, als wäre ihre Gesamtmasse im Mittelpunkte konzentriert. Für den Innenraum muß  $c = 0$  sein, da sonst  $V$  im Nullpunkte unendlich würde: Das Potential der Kugelschale im Innenraum ist konstant, so daß auf einen hier befindlichen Aufpunkt keine anziehende Kraft durch die homogene Kugelschale ausgeübt wird. Den konstanten Wert von  $V$  im Innern bestimmt man am leichtesten für den Nullpunkt, wo nach Eintragung des Aus-

drucks  $q^2 \sin \theta d\theta d\varphi$  für das Raumdifferential  $d\tau$  und des Wertes  $q$  für  $r$  in das erste Integral (11) S. 228:

$$V = \delta \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\pi} (\sin \theta \int_a^A q d\varrho) d\theta \right) d\varphi$$

sich ergibt. Die Integration ist mühelos auszuführen und liefert:

$$(5) \quad V = 2\pi\delta (A^2 - a^2).$$

Das Potential einzelner anziehender Punkte hatte in jedem dieser Punkte einen Unendlichkeitspunkt. Gehört der Aufpunkt  $(x, y, z)$  dem anziehenden Körper  $K$  oder der anziehenden Fläche  $F$  an, so wird eben im Punkte  $(x, y, z)$  des Integrationsbereiches der unter dem Integralzeichen (11) S. 228 im Nenner stehende Wert  $r$  gleich 0. Gleichwohl konvergieren die Integrale. Man kann, was hier jedoch nicht ausgeführt werden soll, auf Grund von Methoden, wie sie S. 62 bei einfachen Integralen angewandt wurden, folgenden Satz zeigen: *Eine durch ein Integral (11) S. 228 gegebene Funktion  $V(x, y, z)$  bleibt endlich und sogar stetig, falls der Punkt  $(x, y, z)$  in den Bereich des anziehenden Körpers  $K$  oder auf die anziehende Fläche  $F$  tritt; vom Potential eines anziehenden Körpers  $K$  bleiben auch noch die partiellen Ableitungen erster Ordnung beim Eintritt in  $K$  sowie innerhalb  $K$  durchweg stetig.*

Um daraufhin z. B. für eine homogene Vollkugel des Radius  $A$  das Potential für einen inneren Punkt des Abstandes  $q$  vom Mittelpunkte zu bestimmen, zerlege man die Kugel in eine innere Vollkugel des Radius  $q$  und eine Kugelschale, die von zwei Kugelflächen der Radien  $q$  und  $A > q$  eingegrenzt ist. Für die innere Vollkugel ist der Aufpunkt ein „äußerer“ Punkt, so daß sich das Potential dieser Vollkugel nach (4) zu:

$$V_1 = \frac{4}{3} \pi q^3 \cdot \delta \cdot \frac{1}{q} = \frac{4}{3} \pi \delta \cdot q^2$$

berechnet. Das Potential  $V_2$  der Kugelschale ist aber für den „inneren“ Aufpunkt nach (5):

$$V_2 = 2\pi\delta (A^2 - q^2),$$

so daß sich durch Addition von  $V_1$  und  $V_2$  als Gesamtpotential ergibt:

$$(6) \quad V(q) = \frac{2}{3} \pi \delta (3A^2 - q^2).$$

Führen wir wieder  $x, y, z$  ein und nennen  $V_a$  das Potential der Vollkugel für einen äußeren Punkt,  $V_i$  das für einen inneren Punkt, so gilt zufolge (4) und (6):

$$(7) \quad \begin{cases} V_a(x, y, z) = \frac{4\pi\delta A^3}{3\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ V_i(x, y, z) = \frac{2}{3} \pi \delta (3A^2 - x^2 - y^2 - z^2). \end{cases}$$

Aus diesen Formeln bestätigt man leicht, daß weder  $V$  noch die Ableitungen erster Ordnung beim Übergange von dem Äußeren in das Innere der Kugel eine Stetigkeitsunterbrechung erfahren, daß dagegen die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung beim Eintritt in die Kugel sich unstetig ändern. Speziell berechnet man für den Differentialausdruck  $\Delta V$  im Innern der Kugel:

$$(8) \quad \Delta V = -4\pi\delta,$$

während außerhalb, wie wir bereits wissen,  $\Delta V = 0$  ist.

Die vorstehende Betrachtung hat allgemeine Bedeutung für das Potential irgend eines räumlich ausgedehnten Körpers  $K$ . Ist  $(x, y, z)$  ein Innenpunkt von  $K$ , so denke man sich eine sehr kleine Vollkugel des Mittelpunktes  $(x, y, z)$  aus  $K$  ausgeschnitten und zerlege entsprechend das Gesamtpotential  $V$  in das Potential  $V_0$  dieser Kugel und dasjenige  $V_1$  des Restes  $K_1$  von  $K$ . Ist  $\delta$  in der Umgebung von  $(x, y, z)$  stetig, so können wir bei ausreichend klein gewählter Kugel  $K_0$  das Potential  $V_0$  unter der Annahme konstanter Dichte  $\delta(x, y, z)$  berechnen\*). Dann aber gilt zufolge (8), da für  $K_1$  der Punkt  $(x, y, z)$  ein „äußerer“ ist:

$$\Delta V = \Delta V_0 + \Delta V_1 = \Delta V_0 = -4\pi\delta(x, y, z).$$

Dehnen wir also im Falle eines anziehenden Körpers  $K$  das Schwerkraftfeld auf  $K$  aus, so gilt der Satz: *Das Schwerkraftfeld bleibt auch in dem von  $K$  besetzten Bereiche wirbelfrei, aber nicht mehr quellenfrei, insofern:*

$$(9) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = \Delta V = -4\pi\delta(x, y, z)$$

gilt. Es ist dies die nach Poisson benannte Verallgemeinerung der Laplaceschen Gleichung (14) S. 228.

Zufolge der Voraussetzung über die Stetigkeit von  $\delta(x, y, z)$  in  $K$  ist  $\Delta V$ , wenn auch nicht durchweg, so doch „abteilungsweise“ stetig. Bei der Stetigkeit der ersten Ableitungen kann man alsdann ohne Mühe zeigen, daß die Greenschen Formeln (1) und (2) auch in dem durch den Bereich  $K$  erweiterten Kraftfelde gültig bleiben, falls man für  $\varphi$  das Potential  $V$  einsetzt. Daraus ergibt sich z. B. noch folgender Satz: *Ist  $O$  irgend eine geschlossene Fläche, so kann man den innerhalb  $O$  befindlichen Teil  $\mu_0$  der anziehenden Masse so darstellen:*

$$(10) \quad \mu_0 = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\omega}^{(0)} \frac{dV}{d\nu} d\omega.$$

Die Gleichung (3) liefert nämlich für  $\psi=1$ ,  $\varphi=V$  mit Rücksicht auf (9):

$$-\int_{\partial\omega}^{(B)} \Delta V d\tau = 4\pi \int_{\partial\omega}^{(B)} \delta d\tau = \int_{\partial\omega}^{(0)} \frac{dV}{d\nu} d\omega.$$

\*) Die Schlußweise kann durch Anwendung der bei Stetigkeitsbetrachtungen üblichen Überlegungen streng gemacht werden.

Aufgaben: 1) Man bestätige die Angaben (4) und (5) über das Potential der Kugelschale durch direkte Berechnung des Integrals (11) S. 228. — Für einen Punkt der positiven  $z$ -Achse gibt der Ansatz (11) S. 228 bei Gebrauch von Polarkoordinaten  $\varrho, \theta, \varphi$ :

$$V = \delta \int_a^A \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi \frac{\varrho^3 \sin \theta \, d\theta}{\sqrt{\varrho^2 - 2\varrho z \cos \theta + z^2}} \right) d\varphi \right) d\varrho.$$

Für das innere bei konstanten  $\varrho$  und  $\varphi$  zu berechnende Integral gilt:

$$\frac{\varrho}{2z} \int_0^\pi \frac{d(-2\varrho z \cos \theta)}{\sqrt{\varrho^2 - 2\varrho z \cos \theta + z^2}} = \frac{\varrho}{z} \left[ +\sqrt{\varrho^2 - 2\varrho z \cos \theta + z^2} \right]_0^\pi.$$

Für  $\theta = \pi$  hat die Wurzel den Wert  $(\varrho + z)$ . Da sie positiv zu nehmen ist, so hat man bei  $\theta = 0$  zu unterscheiden, ob  $z < a$  oder  $z > A$  ist; im ersten Falle hat die Wurzel für  $\theta = 0$  den Wert  $(\varrho - z)$ , im zweiten  $(z - \varrho)$ . Unterscheiden wir wieder  $V_i$  und  $V_a$  für einen inneren bzw. äußeren Aufpunkt, so gilt:

$$V_i = \delta \int_a^A \left( \int_0^{2\pi} 2\varrho \, d\varphi \right) d\varrho, \quad V_a = \delta \int_a^A \left( \int_0^{2\pi} \frac{2\varrho^2}{z} d\varphi \right) d\varrho,$$

woraus man die Formel (5) und (4) wieder gewinnt.

2) Man berechne das Potential einer homogenen Kreisscheibe vom Radius  $A$  für die Punkte der in der Mitte der Scheibe senkrecht errichteten Achse. — Wir wählen die Achse zur  $z$ -Achse und die Scheibenmitte zum Nullpunkte. Dann sind die von den räumlichen Polarkoordinaten gelieferten  $\varrho, \varphi$  die ebenen Polarkoordinaten des einzelnen Scheibpunktes in der  $x, y$ -Ebene. Im zweiten Integrale (11) S. 228 hat man einzusetzen:

$$r = \sqrt{\varrho^2 + z^2}, \quad d\omega = \varrho \, d\varrho \, d\varphi.$$

Für das gesuchte Potential gilt:

$$V = \delta \int_0^{2\pi} \left( \int_0^A \frac{\varrho \, d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + z^2}} \right) d\varphi = \delta \int_0^{2\pi} \left[ +\sqrt{\varrho^2 + z^2} \right]_0^A d\varphi.$$

Da die Quadratwurzel positiv zu nehmen ist, so folgt:

$$\left[ +\sqrt{\varrho^2 + z^2} \right]_0^A = +\sqrt{z^2 + A^2} - |z| = +\sqrt{z^2 + A^2} - z \cdot \operatorname{sgn}(z),$$

unter  $\operatorname{sgn}(z)$  das Vorzeichen von  $z$  verstanden. Für  $V$  ergibt sich:

$$V = 2\pi\delta \left( +\sqrt{z^2 + A^2} - z \cdot \operatorname{sgn}(z) \right),$$

woraus man weiter sofort folgert:

$$(11) \quad v_z = \frac{\partial V}{\partial z} = 2\pi\delta \left( \frac{z}{\sqrt{z^2 + A^2}} - \operatorname{sgn}(z) \right).$$

Hieraus geht hervor, daß die erste Ableitung von  $V$  nach  $z$  beim Durchgange durch die Scheibe eine unstetige Änderung erfährt. Bedienen wir uns für die bei Annäherung an den Nullpunkt eintretenden Grenzwerte der Bezeichnungen:

$$\lim_{z \rightarrow +0} \frac{\partial V}{\partial z} = \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)_{+0}, \quad \lim_{z \rightarrow -0} \frac{\partial V}{\partial z} = \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)_{-0}.$$

je nachdem die Annäherung von der positiven oder der negativen Seite vollzogen wird, so ergibt sich aus (11):

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{+0} = -2\pi\delta, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{-0} = +2\pi\delta.$$

Den Sprung, den die fragliche Ableitung beim Durchgange durch die Scheibe erfährt, stellen wir somit fest zu:

$$(12) \quad \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{-0} = -4\pi\delta.$$

### Kapitel III. Fouriersche Reihen und harmonische Analyse.

**1. Ansatz der Fourierschen Reihen.** Die Funktionen  $\cos x$  und  $\sin x$  haben die Periode  $2\pi$ , d. h. sie bleiben unverändert, wenn man das Argument  $x$  um  $2\pi$  oder ein Vielfaches von  $2\pi$  ändert. Bildet man mit irgend einer positiven ganzen Zahl  $k$  die Funktionen  $\cos kx$  und  $\sin kx$ , so haben diese die Periode  $\frac{2\pi}{k}$  und also auch die Periode  $2\pi$ . Aus diesen trigonometrischen Funktionen der Vielfachen von  $x$  setze man jetzt mit  $(2n+1)$  Konstanten  $a_k, b_k$  das Aggregat zusammen:

$$(1) \quad \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

unter  $n$  irgend eine endliche positive ganze Zahl verstanden. Auch dieses Aggregat stellt offenbar eine Funktion von  $x$  mit der Periode  $2\pi$  dar.

Man nehme nun in (1) die Zahl  $n$  gleich  $\infty$  und erhält dadurch zunächst in rein formalem Ansatz eine unendliche „trigonometrische Reihe“. Wir werfen die Frage auf, ob es möglich ist, eine beliebig vorgegebene Funktion  $f(x)$  der Periode  $2\pi$  in eine konvergente trigonometrische Reihe zu entwickeln, und welche Werte die dabei zu benutzenden Koeffizienten  $a_k, b_k$  haben müßten. Dabei mögen betreffs  $f(x)$  zunächst folgende Voraussetzungen gelten: Die Funktion  $f(x)$  sei im Intervalle  $-\pi \leq x \leq +\pi$  eindeutig, endlich und abteilungsweise stetig. Die letzte Bedingung besagt, daß die Funktion  $f(x)$  in einer endlichen Anzahl von Stellen des Intervalles Stetigkeitsunterbrechungen erfahren darf. Ist  $x$  eine solche Stelle, so hat die Funktion daselbst zwei verschiedene Grenzwerte, je nachdem man sich der Stelle  $x$  von rechts oder von links her annähert; man bezeichnet diese Grenzwerte symbolisch durch  $f(x+0)$  und  $f(x-0)$ . Welches der Wert  $f(x)$  der Funktion an der einzelnen Unstetigkeitsstelle selbst ist, möge einstweilen vorbehalten bleiben. In dem Intervalle  $\pi \leq x \leq 3\pi$ , sowie in allen weiter sich nach rechts und links anschließenden Intervallen der Länge  $2\pi$  wiederholen sich zufolge der vorausge-

setzten Periodizität der Funktion dieselben Funktionswerte wie im ersten Intervalle  $-\pi \leq x \leq +\pi$ .

Wir nehmen nun unter Vorbehalt der Konvergenzuntersuchung und der näheren Untersuchung der Unstetigkeitsstellen die Möglichkeit der Entwicklung von  $f(x)$  in die konvergente Reihe:

$$(2) \quad f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

an. Zur Bestimmung der Koeffizienten  $a$  multiplizieren wir die Gleichung (2) mit  $\cos mx dx$ , unter  $m$  eine nicht-negative ganze Zahl verstanden, und integrieren die entstehende Gleichung zwischen den Grenzen  $-\pi$  und  $+\pi$ . Dabei nehmen wir als statthaft an, die rechts stehende unendliche Reihe gliedweise zu integrieren:

$$(3) \quad \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos mx dx = \frac{1}{2} a_0 \int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx dx \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx \cos mx dx + b_k \int_{-\pi}^{+\pi} \sin kx \cos mx dx \right).$$

Bei den vorausgesetzten Eigenschaften der Funktion  $f(x)$  existiert das hier links stehende Integral für jedes  $m$  (vgl. S. 60).

Es gilt nun erstlich für  $m = 0$ :

$$(4) \quad \int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx dx = \left[ \frac{1}{k} \sin kx \right]_{-\pi}^{+\pi} = 0, \quad \int_{-\pi}^{+\pi} \sin kx dx = \left[ -\frac{1}{k} \cos kx \right]_{-\pi}^{+\pi} = 0,$$

so daß die Gleichung (3) die Gestalt annimmt:

$$(5) \quad \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) dx = \frac{1}{2} a_0 \int_{-\pi}^{+\pi} dx = \pi a_0.$$

Ist  $m > 0$ , so verschwindet zufolge (4) das in (3) mit  $a_0$  multiplizierte Integral. Für die mit  $a_k$  und  $b_k$  multiplizierten Integrale folgt, wenn  $k \neq m$  ist, aus den Formeln (11) und (9) S. 18:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx \cos mx dx = \left[ \frac{\sin(k-m)x}{2(k-m)} + \frac{\sin(k+m)x}{2(k+m)} \right]_{-\pi}^{+\pi} = 0, \\ \int_{-\pi}^{+\pi} \sin kx \cos mx dx = \left[ -\frac{\cos(k-m)x}{2(k-m)} - \frac{\cos(k+m)x}{2(k+m)} \right]_{-\pi}^{+\pi} = 0,$$

da  $k$  und  $m$  positive, voneinander verschiedene ganze Zahlen sind und also  $(k \pm m)$  von 0 verschiedene ganze Zahlen bedeuten. Ist aber  $k = m$ , so gilt:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} (1 + \cos 2mx) \, dx = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin 2mx \, dx = 0,$$

so daß sich für  $m > 0$  die Gleichung (3) in die Gestalt kleidet:

$$(6) \quad \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos mx \, dx = \pi a_m.$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten  $b_k$  reihen wir an die Gleichung (3) die folgende an:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin mx \, dx = \frac{1}{2} a_0 \int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \, dx$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx \sin mx \, dx + b_k \int_{-\pi}^{+\pi} \sin kx \sin mx \, dx \right),$$

unter  $m$  eine positive ganze Zahl verstanden. Indem wir auch die Gleichung (10) S. 18 heranziehen, ergibt sich wie soeben, daß nur das mit  $b_m$  multiplizierte Integral einen von 0 verschiedenen Wert hat, und zwar ist:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} (1 - \cos 2mx) \, dx = \pi,$$

so daß die letzte Gleichung die Gestalt gewinnt:

$$(7) \quad \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin mx \, dx = \pi b_m.$$

Die Integrationsvariable in (5), (6) und (7) werde zur Unterscheidung vom Argumente  $x$  der Funktion  $f(x)$  durch  $t$  bezeichnet. Statt des Index  $m$  schreiben wir wieder  $k$ . Es gilt dann der Satz: *Für die vorgelegte Funktion  $f(x)$  der Periode  $2\pi$  berechnen sich die Koeffizienten der angesetzten trigonometrischen Reihe (2) unter der Voraussetzung, daß diese Reihe konvergiert und gliedweise integrierbar ist, als bestimmte Integrale in der Gestalt:*

$$(8) \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cos kt \, dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \sin kt \, dt.$$

Die mit diesen Koeffizienten ausgestattete Reihe bezeichnen wir als eine „Fouriersche Reihe“.

**2. Konvergenz der Fourierschen Reihen.** Zur Beantwortung der Frage der Konvergenz der Fourierschen Reihen kehren wir die eben gegebene Entwicklung um. Wir berechnen unter Festhaltung der Voraussetzungen über die Eigenschaften der Funktion  $f(x)$  die für jedes  $k$  existierenden Integrale (8), bilden mit den sich ergebenden Werten  $a_k, b_k$  die endliche Summe:

$$(1) \quad S_n = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

und untersuchen, ob eine Grenze  $\lim S_n$  existiert, und welchen Wert diese Grenze hat.

Eine erste Konvergenzbedingung ist nach (7) in I, 207:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k \cos kx + b_k \sin kx| = 0,$$

und da diese Bedingung für jedes  $x$  des Intervalles  $-\pi < x < +\pi$  gelten muß, so ist zu fordern:

$$(2) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0.$$

Zur Prüfung dieser Bedingung knüpfen wir an die für jedes  $n$  gültige Ungleichung an:

$$(3) \quad \int_{-\pi}^{+\pi} (f(x) - S_n)^2 dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \left( f(x) - \frac{1}{2} a_0 - \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right)^2 dx > 0,$$

deren Richtigkeit aus dem Umstande hervorgeht, daß die unter dem Integralzeichen stehende Funktion für kein  $x$  einen negativen Wert hat. Entwickeln wir das Quadrat des unter dem zweiten Integrale stehenden Trinoms, so folgt:

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{+\pi} \left\{ f(x)^2 + \frac{1}{4} a_0^2 + \left( \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right)^2 - a_0 f(x) \right. \\ & \left. - 2 \sum_{k=1}^n (a_k f(x) \cos kx + b_k f(x) \sin kx) + a_0 \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right\} dx \geq 0. \end{aligned}$$

Die Integrale der einzelnen rechts stehenden Glieder lassen sich wesentlich vereinfachen. Wir finden zunächst, da das Integral der letzten Summe wegen (4) S. 237 verschwindet:

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)^2 dx + \frac{1}{2} a_0^2 \pi + \int_{-\pi}^{+\pi} \left( \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right)^2 dx - a_0 \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) dx \\ & - 2 \sum_{k=1}^n \left( a_k \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos kx dx + b_k \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kx dx \right) \geq 0, \end{aligned}$$

sowie hieraus weiter mit Benutzung der Formeln (5), (6) und (7), S. 237 ff.:

$$(4) \quad \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)^2 dx - \frac{1}{2} \pi a_0^2 + \int_{-\pi}^{+\pi} \left( \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right)^2 dx - 2\pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) > 0.$$

Das Quadrat der unter dem zweiten Integral stehenden Summe ist so zu entwickeln:

$$(5) \quad \sum_k \{ (a_k \cos kx + b_k \sin kx)^2 \} \\ + 2 \sum_{k,m} \{ (a_k \cos kx + b_k \sin kx) (a_m \cos mx + b_m \sin mx) \},$$

wo in der ersten Summe  $k$  die Werte  $1, 2, \dots, n$  durchläuft und die zweite Summe sich auf alle Kombinationen zweier verschiedener ganzer Zahlen  $k, m$  der Reihe  $1, 2, \dots, n$  bezieht. Demnach verschwindet zufolge der Rechnungen in § 1 das Integral der zweiten Summe (5), während das Integral der ersten Summe ergibt:

$$\sum_{k=1}^n \left\{ a_k^2 \int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 kx \, dx + b_k^2 \int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 kx \, dx + a_k b_k \int_{-\pi}^{+\pi} \sin 2kx \, dx \right\} = \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2),$$

wie man wieder mit Hilfe der Rechnungen in § 1 feststellt. Hiernach gewinnt die Ungleichung (4) die einfache Gestalt:

$$\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)^2 \, dx.$$

Da rechts ein fester endlicher Zahlwert steht und diese Ungleichung für jede ganze Zahl  $n$  gilt, so entsteht aus der linken Seite für  $n = \infty$  notwendig eine konvergente Reihe, und also sind die Bedingungen (2) tatsächlich erfüllt.

Wir haben damit einen Satz gewonnen, der eine wesentliche Grundlage unserer Konvergenzbetrachtung ist: *Ist  $f(x)$  im Intervalle  $-\pi \leq x \leq +\pi$  eindeutig, endlich und abteilungsweise stetig, so nähern sich die Integrale:*

$$(6) \quad \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

für  $\lim k = \infty$  der Grenze 0.

Ist durch  $-\pi \leq a < x \leq b \leq +\pi$  irgend ein Teilintervall festgelegt, so wollen wir unter  $f(x)$  in diesem Teilintervalle die bisherige Funktion verstehen, im Reste des Gesamtintervalles aber setzen wir  $f(x)$  mit 0 identisch. Auch die so abgeänderte Funktion erfüllt die Bedingungen des Satzes (6); die zugehörigen Integrale (6) aber können in die Gestalt:

$$(7) \quad \int_a^b f(x) \cos kx \, dx, \quad \int_a^b f(x) \sin kx \, dx$$

gesetzt werden. Es gilt demnach auch folgender noch allgemeinere Satz: *Ist  $f(x)$  im Intervalle  $-\pi \leq a \leq x \leq b \leq +\pi$  eindeutig, endlich und abteilungsweise stetig, so nähern sich die Integrale (7) für  $\lim k = \infty$  dem Grenzwerte 0.*

Als einen weiteren Satz notieren wir: *Gehört a dem Intervalle  $0 < a < \pi$  an, so besteht die Gleichung:*

$$(8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a \frac{\sin nx}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Schreiben wir nämlich  $nx = x'$ , so folgt:

$$\int_0^a \frac{\sin nx}{x} dx = \int_0^{na} \frac{\sin x'}{x'} dx'.$$

Für  $\lim n = \infty$  gelangen wir zur Formel (12) S. 132, welche die Richtigkeit der Regel (8) erkennen läßt.

Das eben betrachtete Integral verallgemeinern wir jetzt zu:

$$(9) \quad J_n = \int_0^a f(x) \frac{\sin nx}{x} dx$$

und fragen, ob auch hier für  $\lim n = \infty$  eine Grenze vorliegt. Zu diesem Zwecke verstehen wir unter  $\delta$  eine positive, dem Werte 0 beliebig nahe gewählte Zahl, die jedenfalls so klein sei, daß  $f(x)$  im Intervalle  $0 \leq x \leq \delta$  stetig ist. Wir machen weiter die wesentliche Voraussetzung, daß  $f(x)$  im Intervalle  $0 \leq x \leq \delta$  monoton ist und also daselbst bei wachsendem  $x$  entweder nirgends zunimmt oder nirgends abnimmt. Unter Spaltung des Integrationsintervalles entwickeln wir die Gleichung (9) so:

$$(10) \quad J_n - \frac{\pi}{2} f(0) = \int_0^{\delta} (f(x) - f(\delta)) \frac{\sin nx}{x} dx - (f(0) - f(\delta)) \int_0^{\delta} \frac{\sin nx}{x} dx \\ + f(0) \left( \frac{\pi}{2} - \int_0^{\delta} \frac{\sin nx}{x} dx \right) + \int_{\delta}^a f(x) \frac{\sin nx}{x} dx.$$

Es sei nun erstlich  $f(x)$  im Intervalle  $0 \leq x < \delta$  eine mit wachsendem  $x$  nicht zunehmende Funktion, so daß daselbst  $(f(x) - f(\delta))$  eine der Bedingung:

$$(11) \quad f(0) - f(\delta) > f(x) - f(\delta) > 0$$

genügende, mit wachsendem  $x$  nicht zunehmende Funktion ist. Setzen wir dann im ersten Integrale (10) wieder  $nx = x'$ , so folgt:

$$(12) \quad \int_0^{\delta} (f(x) - f(\delta)) \frac{\sin nx}{x} dx = \int_0^{n\delta} \left( f\left(\frac{x'}{n}\right) - f(\delta) \right) \frac{\sin x'}{x'} dx'.$$

Bei diesem Integrale führen wir dieselbe Zerlegung des Intervalles aus, die wir S. 66 auf das den Integralsinus erklärende Integral ausübten (s. auch S. 131), d. h. wir zerlegen das Intervall durch die Punkte  $x = \pi, 2\pi, \dots$ , soweit sie demselben angehören, in Teilintervalle. Das Integral zerlegt sich entsprechend wieder wie in (10) S. 66 in ein endlichgliedriges Aggregat mit alternierenden Vorzeichen.

Die Absolutwerte der Glieder nehmen, da  $\left( f\left(\frac{x'}{n}\right) - f(\delta) \right)$  bei wachsendem  $x'$  nicht zunimmt, wie damals monoton ab, und man erkennt aus der Eigenart solcher alternierender Reihen unter Bevorzugung des Anfangsgliedes, daß das Integral (12) der Ungleichung:

$$(13) \quad 0 \leq \int_0^{n\delta} \left( f\left(\frac{x'}{n}\right) - f(\delta) \right) \frac{\sin x'}{x'} dx' \leq \int_0^{\pi} \left( f\left(\frac{x'}{n}\right) - f(\delta) \right) \frac{\sin x'}{x'} dx'$$

genügt\*). Auf das letzte Integral können wir den zweiten Mittelwertsatz (S. 58) anwenden und finden mit Benutzung von (11):

$$\int_0^{\pi} \left( f\left(\frac{x'}{n}\right) - f(\delta) \right) \frac{\sin x'}{x'} dx' = \vartheta'_n (f(0) - f(\delta)) \int_0^{\pi} \frac{\sin x'}{x'} dx',$$

unter  $\vartheta'_n$  eine Zahl des Intervalles  $0 \leq \vartheta'_n < 1$  verstanden. Das hier verbleibende Integral hat nach S. 132 den endlichen positiven Wert  $\text{Si}(\pi)$ . Durch Rückgang auf (13) und (12) findet sich somit:

$$\int_0^{\delta} (f(x) - f(\delta)) \frac{\sin nx}{x} dx = \vartheta_n \cdot (f(0) - f(\delta)) \cdot \text{Si}(\pi),$$

wo auch  $\vartheta_n$  dem Intervalle  $0 < \vartheta_n < 1$  angehört. Der Wert  $\text{Si}(\pi)$  liegt zwischen 1,8 und 1,9, ist also  $< 2$ . Das erste Glied in (10) rechts genügt also der Ungleichung:

$$(14) \quad 0 \leq \int_0^{\delta} (f(x) - f(\delta)) \frac{\sin nx}{x} dx \leq 2(f(0) - f(\delta)).$$

Das zweite Glied auf der rechten Seite von (10) nähert sich zufolge (8) für  $\lim n = \infty$  der Grenze  $\frac{\pi}{2}(f(0) - f(\delta)) < 2(f(0) - f(\delta))$ , während sich die beiden letzten Glieder der Grenze 0 nähern. Es gibt demnach eine von der Auswahl des  $\delta$  abhängende ganze Zahl  $m$  derart, daß für alle  $n > m$  jedes der drei letzten Glieder in (10), absolut genommen,  $< 2(f(0) - f(\delta))$  ist. Dann aber gilt für alle Indizes  $n > m$ :

$$\left| J_n - \frac{\pi}{2} f(0) \right| < 8(f(0) - f(\delta)).$$

Da nun  $f(x)$  in der rechtsseitigen Umgebung des Nullpunktes stetig sein sollte, so gibt es nach Auswahl einer beliebig kleinen Zahl  $\delta' > 0$  stets ein zugehöriges  $\delta$ , für welches  $8(f(0) - f(\delta)) < \delta'$  ist, und also auch eine zugehörige Zahl  $m$  derart, daß für alle  $n > m$  die Ungleichung gilt:

$$\left| J_n - \frac{\pi}{2} f(0) \right| < \delta'.$$

Wir sind so zu dem Ergebnis gelangt:

$$(15) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} f(x) \frac{\sin nx}{x} dx = \frac{\pi}{2} f(0).$$

Die Voraussetzung, daß  $f(x)$  bei einem von 0 wachsenden  $x$  zunächst nicht zunehme, kann ersetzt werden durch die Forderung, daß sich  $f(x)$  daselbst monoton ändere. Falls nämlich  $f(x)$  zunächst nicht abnimmt, brauchen wir die Gleichung (15) nur für  $-f(x)$  anzusetzen und erkennen nach Zeichenwechsel ihre unveränderte Gültigkeit. *Befriedigt die Funktion  $f(x)$  außer den bisherigen Voraussetzungen die Forderung, in einem wenn auch kleinen, so doch endlich ausgedehnten*

\*) Ist  $n\delta < \pi$ , so ist natürlich noch nicht von einer Zerlegung des Intervalles die Rede; die Richtigkeit der Ungleichung (13) ist dann aber unmittelbar einleuchtend.

Intervalle, das sich rechts an den Nullpunkt anschließt, monoton zu sein, so besteht für jede dem Intervalle  $0 < a < \pi$  angehörende obere Grenze  $a$  beim Grenzübergange  $\lim n = \infty$  die Gleichung (15).

Man gebe der Gleichung (15) die Gestalt:

$$(16) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a f(x) \frac{\sin x}{x} \frac{\sin nx}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2} f(0)$$

und schreibe zur Abkürzung:

$$f(x) \cdot \frac{\sin x}{x} = \varphi(x), \quad f(x) = \varphi(x) \cdot \frac{x}{\sin x}.$$

Ist  $\varphi(x)$  eine dicht beim Nullpunkte mit wachsendem  $x$  zunächst nicht abnehmende Funktion, so gilt dasselbe von  $f(x)$ . Im übrigen kommen der Funktion  $\varphi(x)$  im Integrationsintervalle betreffs der Eindeutigkeit und Stetigkeit dieselben Eigenschaften zu wie  $f(x)$ , und umgekehrt folgen dieselben für  $f(x)$ , wenn sie für  $\varphi(x)$  gelten. Da  $f(0) = \varphi(0)$  ist, so können wir die Gleichung (16) auch so schreiben:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a \varphi(x) \frac{\sin nx}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2} \varphi(0).$$

Daß diese Gleichung auch dann gültig bleibt, wenn  $\varphi(x)$  in der Umgebung des Nullpunktes bei wachsendem  $x$  zunächst nicht zunimmt, erkennen wir wie vorhin durch Einführung von  $-\varphi(x)$  und Zeichenwechsel. Das Ergebnis kleiden wir sogleich in die folgende, betreffs der Voraussetzungen ein wenig erweiterte Gestalt, bei der wir zugleich mit Rücksicht auf die fernere Verwendung die Integrationsvariable durch  $u$  statt durch  $x$  bezeichnen und an Stelle einer beliebigen ganzen Zahl  $n$  sogleich eine ungerade Zahl  $(2n + 1)$  treten lassen: Ist die Funktion  $\varphi(u)$  im Intervalle  $0 < u < a < \pi$  eindeutig und endlich, sowie ableitungsweise monoton und stetig, so ist:

$$(17) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a \varphi(u) \frac{\sin (2n + 1)u}{\sin u} du = \frac{\pi}{2} \varphi(+0).$$

Wir haben rechter Hand genauer  $\varphi(+0)$  geschrieben, um anzudeuten, daß es sich um den Wert handelt, der sich von rechts her stetig an die Funktionswerte im Innern des Intervalles anschließt. Dies wird von Bedeutung, falls  $\varphi(u)$  auch in der linksseitigen Umgebung des Nullpunktes erklärt ist und vielleicht gerade im Nullpunkte eine Unstetigkeit vorliegt.

Erfüllt  $\varphi(u)$  die genannten Bedingungen im Intervalle  $0 < u < \pi$ , so ist es jetzt auch leicht, den Grenzwert unseres Integrals mit der oberen Grenze  $\pi$  festzustellen. Wir schreiben, unter  $u$  irgend einen zwischen 0 und  $\pi$  gelegenen Wert verstanden:

$$\int_0^\pi \varphi(u) \frac{\sin (2n + 1)u}{\sin u} du = \int_0^a \varphi(u) \frac{\sin (2n + 1)u}{\sin u} du - \int_\pi^a \varphi(u) \frac{\sin (2n + 1)u}{\sin u} du.$$

Setzen wir im letzten Integrale  $u = \pi - u'$  und lassen nach der Umrechnung gleich wieder den Index bei  $u'$  fort, so folgt:

$$\int_0^\pi \varphi(u) \frac{\sin (2n + 1)u}{\sin u} du = \int_0^a \varphi(u) \frac{\sin (2n + 1)u}{\sin u} du + \int_0^{\pi - a} \varphi(\pi - u) \frac{\sin (2n + 1)u}{\sin u} du.$$

Aus (17) ergibt sich also: *Gelten die für die Funktion  $\varphi(u)$  genannten Bedingungen im Intercalle  $0 \leq u \leq \pi$ , so ist:*

$$(18) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \varphi(u) \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du = \frac{\pi}{2} (\varphi(+0) + \varphi(\pi-0)).$$

Die in (1) angegebene endlichgliedrige Summe  $S_n$  läßt sich nun leicht in einen Ausdruck zusammenziehen, dessen Verhalten bei  $\lim n = \infty$  mit Hilfe der Formeln (17) und (18) feststellbar ist. Man bilde zunächst die Gleichung:

$$\sin((2k+1)u) - \sin((2k-1)u) = 2 \sin u \cdot \cos 2ku$$

für  $k = 1, 2, \dots, n$  und addiere alle  $n$  Formeln. Bei Division des Ergebnisses durch  $\sin u$  folgt:

$$(19) \quad 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos 2ku = \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}.$$

Trägt man jetzt in den Ausdruck (1) von  $S_n$  für die  $a_k, b_k$  ihre Integrale (8) S. 238 ein, so folgt, wenn man die Addition der  $(2n+1)$  Glieder der Summe vor der Integration in bezug auf  $t$  vollzieht:

$$S_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx) \right\} dt$$

oder bei Anwendung des Additionstheorems:

$$S_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) \right\} dt.$$

Die Anwendung der Formel (19) liefert uns somit:

$$S_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \frac{\sin(2n+1) \frac{t-x}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}} dt.$$

Um die Formeln (17) und (18) verwenden zu können, setzen wir voraus, daß  $f(x)$  neben den S. 236 genannten Bedingungen auch noch die Eigenschaft hat, im Intervalle  $-\pi \leq x \leq +\pi$  abteilungsweise monoton zu sein. Um für ein einzelnes  $x$  den Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  festzustellen, zerlegen wir das Integrationsintervall durch diesen Punkt  $x$ :

$$S_n = \frac{1}{2\pi} \int_x^{+\pi} f(t) \frac{\sin(2n+1) \frac{t-x}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}} dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^x f(t) \frac{\sin(2n+1) \frac{t-x}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}} dt$$

und führen im ersten Integrale statt  $t$  die Variable  $u$ , im zweiten die Variable  $v$  durch die Substitutionen  $t = x + 2u$ ,  $t = x - 2v$  ein:

$$(20) \quad S_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}(\pi-x)} f(x+2u) \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du + \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}(\pi+x)} f(x-2v) \frac{\sin(2n+1)v}{\sin v} dv.$$

Gilt  $-\pi < x < +\pi$ , so folgt bei Anwendung der Regel (17) auf beide Integrale sofort:

$$(21) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2} (f(x+0) + f(x-0)),$$

so daß insbesondere, falls die Funktion an der Stelle  $x$  stetig ist:

$$(22) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = f(x)$$

gilt. Ist  $x = +\pi$  oder  $-\pi$ , so fällt eines der Integrale (20) aus, und das andere gestattet Anwendung der Regel (19). Man findet in beiden Fällen:

$$(23) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2} (f(\pi-0) + f(-\pi+0)).$$

Hieraus folgt der von Dirichlet entdeckte Satz: *Ist die Funktion  $f(x)$  der Periode  $2\pi$  in einem Intervalle der Länge  $2\pi$  eindeutig und endlich, sowie abteilungsweise stetig und monoton, so ist die mit den Koeffizienten (8) S. 238 ange-setzte Fouriersche Reihe für jedes endliche  $x$  konvergent; ihr Summenwert ist an einer Stelle  $x$ , an der  $f(x)$  stetig ist, gleich  $f(x)$ , an einer Unstetigkeitsstelle  $x$  aber gleich dem arithmetischen Mittel der beiden Grenzwerte  $f(x+0)$  und  $f(x-0)$ .*

**3. Weitere Gestalten und Beispiele Fourierscher Reihen.** Man trage in die Formeln (2) S. 237 und (8) S. 238 ein:

$$x = \frac{\pi x_1}{l}, \quad f(x) = f\left(\frac{\pi x_1}{l}\right) = f_1(x_1), \quad t = \frac{\pi t_1}{l},$$

unter  $l$  irgend eine positive Größe verstanden, und lasse nach Ausführung der Umrechnung die Indizes 1 überall wieder fort. Es ergibt sich so: *Eine Funktion  $f(x)$  der Periode  $2l$ , die im Intervalle  $-l \leq x \leq +l$  eindeutig, endlich, abteilungsweise monoton und abteilungsweise stetig ist, läßt sich in die konvergente Fouriersche Reihe:*

$$(1) \quad f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right)$$

entwickeln, deren Koeffizienten gegeben sind durch:

$$(2) \quad a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} f(t) \cos \frac{k\pi t}{l} dt, \quad b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} f(t) \sin \frac{k\pi t}{l} dt.$$

Ist die Funktion gerade, d. h. ist  $f(-t) = f(+t)$ , so verschwinden alle Koeffizienten  $b_k$ . Man kann nämlich schreiben:

$$(3) \quad lb_k = \int_0^l f(t) \sin \frac{k\pi t}{l} dt - \int_0^{-l} f(t) \sin \frac{k\pi t}{l} dt$$

und findet, indem man im zweiten Integrale  $t' = -t$  als neue Integrationsvariable einführt:

$$\int_0^{-l} f(t) \sin \frac{k\pi t}{l} dt = \int_0^l f(t') \sin \frac{k\pi t'}{l} dt'.$$

Das zweite Integral in (3) rechts ist also gleich dem ersten, so daß  $b_k = 0$  folgt. Dieselbe Behandlung des ersten Integrals (2) zeigt, daß dieses auch gleich dem mit 2 multiplizierten Integrale der Grenzen 0 und  $l$  geschrieben werden kann. Man wird diese Betrachtung leicht auf den Fall einer ungeraden Funktion übertragen: Eine „gerade“ Funktion  $f(x)$  der Periode  $2l$  mit den erforderlichen Eigenschaften läßt sich in eine „reine Kosinusreihe“:

$$(4) \quad f(x) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos \frac{\pi x}{l} + a_2 \cos \frac{2\pi x}{l} + \dots$$

entwickeln, deren Koeffizienten gegeben sind durch:

$$(5) \quad a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \cos \frac{k\pi t}{l} dt;$$

entsprechend haben wir für eine „ungerade“ Funktion der Periode  $2l$  die Entwicklung in eine „reine Sinusreihe“:

$$(6) \quad f(x) = b_1 \sin \frac{\pi x}{l} + b_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + b_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots$$

mit dem Koeffizientengesetze:

$$(7) \quad b_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \sin \frac{k\pi t}{l} dt.$$

Die nachfolgenden Beispiele betreffen solche reine Sinus- und Kosinusreihen und zwar wieder für den einfachsten Fall  $l = \pi$ .

Ist  $f(x)$  im Intervalle von 0 bis  $\pi$  konstant gleich  $\frac{\pi}{4}$  und im Intervalle von  $-\pi$  bis 0 konstant gleich  $-\frac{\pi}{4}$ , im übrigen aber mit der Periode  $2\pi$  behaftet, so handelt es sich um eine ungerade Funktion, welche an den Stellen  $x = 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \dots$  Stetigkeitssprünge erfährt. Diese Funktion ist in eine reine Sinusreihe mit den Koeffizienten entwickelbar:

$$b_k = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin kt dt = \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{k} \cos kt \right]_0^{\pi} = \frac{1}{2k} (1 - (-1)^k);$$

also verschwinden alle  $b_k$  mit geradem Index, während die  $b_k$  mit ungeradem Index gleich  $k^{-1}$  sind. Hiernach gilt z. B. im Intervalle  $0 < x < \pi$ :

$$(8) \quad \frac{\pi}{4} = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots$$

Für  $x = \frac{\pi}{2}$  werden wir zur Gleichung (9) in I, 239 zurückgeführt:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

Da für die vorliegende Funktion  $f(\pm 0) = \pm \frac{\pi}{4}$  ist, so ist das arithmetische Mittel zwischen den beiden Grenzwerten  $f(\pm 0)$  gleich 0; in der Tat ist der Summenwert der Reihe (8) für  $x = 0$  selbst gleich 0.

Fig. 70 erläutert die Schnelligkeit der Konvergenz der Reihe (8) durch Zeichnung der Kurven der vier ersten Näherungsfunktionen  $y = S_1(x)$ ,

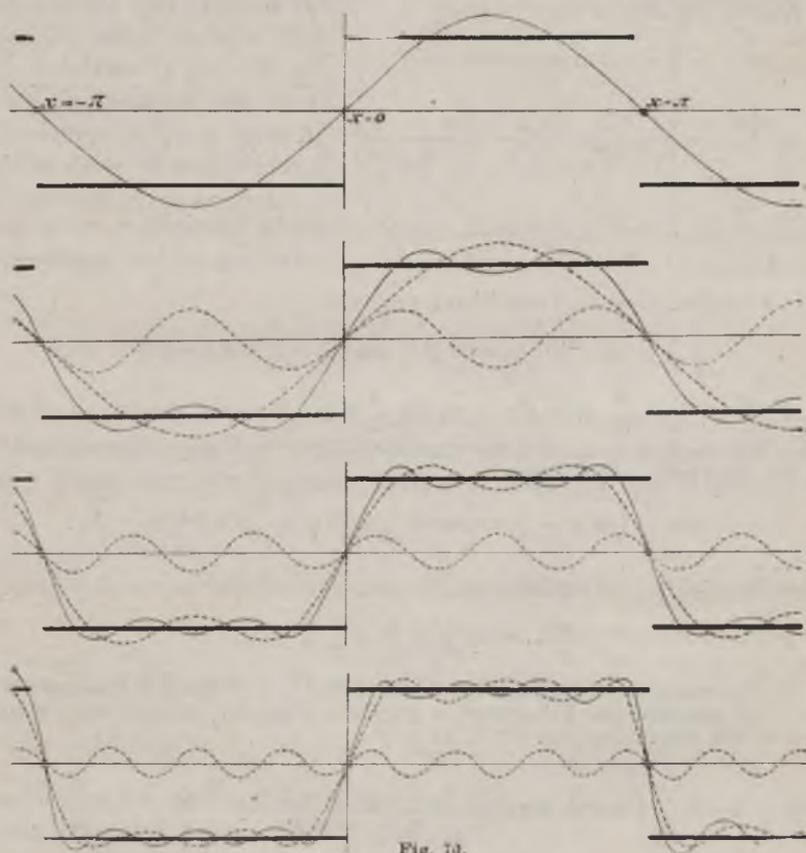


Fig. 70.

$y = S_3(x), \dots, y = S_7(x)$ . Die „Kurve“ der Funktion  $y = f(x)$  ist stark ausgezogen; sie besteht aus geraden Strecken der Länge  $\pi$ , die parallel zur  $x$ -Achse laufen und abwechselnd oberhalb und unterhalb derselben

liegen; die arithmetischen Mittel zwischen den Grenzwerten an den Unstetigkeitsstellen sind durch Punkte markiert. In der obersten Zeichnung liegt die einfache Sinuslinie  $y = S_1(x)$  vor. In der zweiten Zeichnung ist diese Linie punktiert angedeutet, desgleichen die dem zweiten Gliede der Reihe (8) entsprechende Kurve der Gleichung  $3y = \sin 3x$  (eine Sinuskurve, die nach einem auf  $\frac{1}{3}$  verjüngten Maßstabe gezeichnet ist). Durch Addition der Ordinaten dieser beiden Kurven für jede einzelne Stelle  $x$  entsteht die in der zweiten Zeichnung ausgezogene Kurve der Näherungsfunktion  $y = S_3(x)$ . In der dritten Zeichnung ist diese Kurve entsprechend mit der „auf  $\frac{1}{5}$  verjüngten“ Sinuskurve der Gleichung  $5y = \sin 5x$  zur Kurve der Näherungsfunktion  $y = S_5(x)$  vereint, und entsprechend

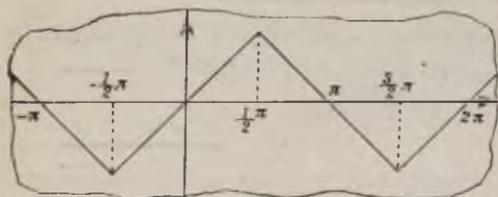


Fig. 71.

wird man die letzte Zeichnung für  $y = S_7(x)$  verstehen. Betreffs der Annäherung an die „Kurve“  $y = f(x)$  sprechen die Zeichnungen für sich selbst.

Aufgaben: 1) Man zeige, daß die im Intervalle  $-\pi < x < \pi$  durch  $f(x) = \frac{1}{2}x$  gegebene un-

gerade Funktion folgende Entwicklung gestattet:

$$(9) \quad \frac{1}{2}x = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \dots$$

2) Für  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$  gelte  $f(x) = x$ , für  $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$  aber  $f(x) = \pi - x$ ; überdies sei  $f(-x) = -f(x)$ , d. h.  $f(x)$  sei ungerade (s. den in Fig. 71 angegebenen Verlauf der Funktion). Man zeige:

$$(10) \quad f(x) = \frac{4}{\pi} \left( \sin x - \frac{1}{9} \sin 3x + \frac{1}{25} \sin 5x - \frac{1}{49} \sin 7x + \dots \right),$$

woraus für  $x = \frac{\pi}{2}$  hervorgeht:

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

3) Man entwickle die im Intervalle  $-\pi < x < +\pi$  durch  $f(x) = \cos \mu x$  mit einer nicht ganzzahligen Konstanten  $\mu$  gegebene Funktion in eine reine Kosinusreihe — Mit Benutzung von 11) S. 18 folgt:

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \mu t \cos kt \, dt = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sin(\mu - k)t}{\mu - k} + \frac{\sin(\mu + k)t}{\mu + k} \right]_0^{\pi}$$

$$b_k = \frac{2\mu \sin \mu \pi}{\pi} \frac{(-1)^k}{\mu^2 - k^2}$$

Es ergibt sich:

$$\frac{\pi \cos \mu x}{2\mu \sin \mu \pi} = \frac{1}{2\mu^2} - \frac{\cos x}{\mu^2 - 1} + \frac{\cos 2x}{\mu^2 - 2^2} - \frac{\cos 3x}{\mu^2 - 3^2} + \dots$$

Die nach der Regel  $f(x + 2\pi) = f(x)$  fortgesetzte Funktion hat bei  $x = \pi$  keine Unstetigkeit; mithin gilt für  $x = \pi$ :

$$\frac{\pi}{2\mu} \cotg \mu \pi = \frac{1}{2\mu^2} + \frac{1}{\mu^2 - 1} + \frac{1}{\mu^2 - 2^2} + \frac{1}{\mu^2 - 3^2} + \dots$$

**4. Harmonische Analyse.** Entwicklungen von Funktionen  $f(x)$  in Fouriersche Reihen werden in der physikalischen und technischen Praxis vielfach benutzt. Man bezeichnet daselbst die Herstellung einer solchen Entwicklung als „*harmonische Analyse*“ der Funktion  $f(x)$ .\* In der Praxis ist nun  $f(x)$  gewöhnlich nicht durch einen geschlossenen analytischen Ausdruck, sondern entweder durch eine Tabelle zusammengehöriger Werte  $x, y$  oder graphisch durch eine Kurve dargestellt.

Zur Berechnung einer Anzahl von Anfangsgliedern der als „gut“ konvergent vorausgesetzten Reihe:

$$(1) \quad f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right)$$

kann man dann zunächst ein *numerisches Verfahren* einschlagen, welches darauf beruht, die Integrale (2) S. 245, die wir auch in die Gestalt setzen können:

$$(2) \quad a_k = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx, \quad b_k = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx,$$

nach einer der Regeln von S. 67 ff. angenähert zu berechnen. Bevorzugt man etwa die „Trapezregel“ (10) S. 71, so wird man sich nach Auswahl der jener Regel zugrunde liegenden Zahl  $n$  zunächst die drei Wertereihen:

$$f_\nu = f\left(\frac{2\nu l}{n}\right), \quad \cos_\nu = \cos \frac{2\nu\pi}{n}, \quad \sin_\nu = \sin \frac{2\nu\pi}{n}$$

für  $\nu = 0, 1, 2, \dots, n$  tabellarisch zusammenstellen. Da der Faktor  $h$  der Formel (10) S. 71 hier gleich  $\frac{2l}{n}$  ist, so folgen die Näherungsdarstellungen:

$$a_k = \frac{1}{n} (f_0 + 2f_1 \cdot \cos_k + 2f_2 \cos_{2k} + \dots + 2f_{n-1} \cdot \cos_{(n-1)k} + f_n),$$

$$b_k = \frac{2}{n} (f_1 \cdot \sin_k + f_2 \cdot \sin_{2k} + f_3 \cdot \sin_{3k} + \dots + f_{n-1} \cdot \sin_{(n-1)k}),$$

wo die Indizes der  $\cos$  und  $\sin$  immer auf ihre bei Division durch  $n$  eintretenden kleinsten Reste zu reduzieren sind.

\*) Als eine *harmonische Bewegung* eines materiellen Punktes etwa auf der  $x$ -Achse bezeichnet man eine solche, bei der die Abszisse  $x$  des Punktes von der Zeit  $t$  nach einem „Sinusgesetze“  $x = a \cdot \sin(bt + c)$  abhängt. Die hier rechts stehende Funktion wird dann auch wohl selbst eine „harmonische Funktion“ genannt, wodurch die Bezeichnung des Textes verständlich wird.

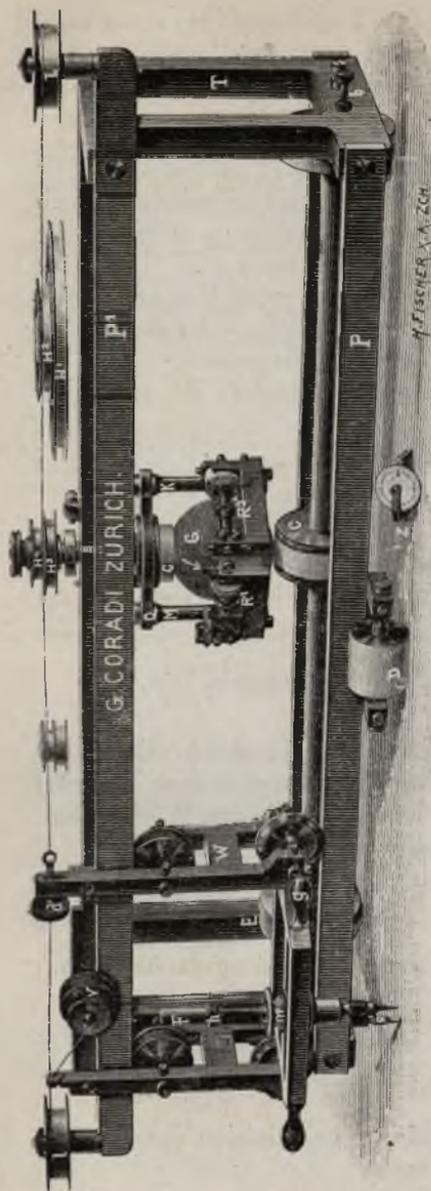


Fig. 72.

Ist die Funktion graphisch durch ihre Kurve  $y = f(x)$  gegeben, so kann man auf *mechanischem Wege* eine Anzahl Anfangskoeffizienten der Entwicklung (1) auswerten. Das erste Integral (2) für  $k = 0$  ist einfach von der Kurve aus mittelst eines Planimeters bestimmbar (s. S. 76 ff. oder S. 169 ff.). Zur Gewinnung einer Anzahl weiterer Koeffizienten sind Apparate konstruiert, die als „*harmonische Analysatoren*“ oder kurz „*Analysatoren*“ bezeichnet werden.

Ein solcher Apparat, der nach Angaben von Henrici und Sharp von Coradi hergestellt ist, findet sich in Fig. 72 abgebildet. Ein parallelepipedisches Rahmengestell ruht mit drei Walzen auf der Zeichnungsebene und ist auf diesen Walzen in Richtung der  $y$ -Achse frei fahrbar. Auf der vorderen Seite des Gestells findet sich ein den Fahrstift tragender Wagen, der längs der beiden vorderen Leisten des Gestells, also in Richtung der  $x$ -Achse verschiebbar ist. Zwei rechts und links angebrachte Anschläge geben dem Fahrstifte in Richtung der  $x$ -Achse einen Spielraum von 36 cm Länge. *Diese Länge gilt als „Basislänge“ 2l der Kurve, so daß die Kurve, wenn ihre „Basis“ 2l eine von 36 cm verschiedene Länge hat, zunächst auf die Basislänge  $2l = 36$  proportional umzuzeichnen ist.*

Die Achse der beiden zurückliegenden Walzen ist in der Mitte zwischen den Walzen von einer nicht ganz bis zur Papierebene reichenden Rolle umfaßt, auf der eine mattgeschliffene Kugel ruht (vgl. den Integrator von Hele-Shaw, S. 217). *Bewegt sich das Rahmengestell in der*

Richtung der  $y$ -Achse um die Strecke  $\Delta y$  voran, so erfährt die Kugel eine Drehung um ihren zur  $x$ -Achse parallelen Durchmesser, und zwar um einen zu  $\Delta y$  proportionalen Winkel. Diesen Kugeldurchmesser nennen wir die „Achse“ der Kugel und führen entsprechend „Parallel-“ und „Meridiankreise“ auf der Kugelfläche ein.

Seitlich wird die Kugel in der Höhe ihres horizontalen Meridianvollkreises durch drei Rollen gehalten. Zwei von ihnen, die den Winkelabstand  $90^\circ$  voneinander haben, stellen wie bei den Planimetern und Integratoren „Meßrädchen“ dar und sind mit Zählwerken versehen; die dritte Rolle dient nur dem Halte der Kugel. Diese drei Rollen sind nun in ein Gestell eingebaut, das senkrecht über der Kugelmitte in eine Querleiste des oberen Rahmenbaues eingehängt ist und um seine Vertikalachse gedreht werden kann. Bei dieser Drehung beschreiben die Berührungstellen der Meßrädchen den horizontalen Meridiankreis der Kugel.

Die Stellung des Rollenapparates wird vom Schreibstift her durch ein in der Figur oben sichtbares Drahtgetriebe geregelt. Zu diesem Zwecke ist auf die Achse des Rollenapparates oben eine Scheibe aufgesetzt, um welche der Draht herumläuft. Befindet sich der Fahrstiftwage an linken Anschlag, so möge der Fahrstift auf der  $y$ -Achse liegen. Der Rollenapparat sei dann so eingestellt, daß das eine Meßrädchen die Kugel in dem zur Rechten liegenden „Pole“ berühre. Die Scheibe des Rollenapparates sei so groß gewählt, daß dieser Apparat genau  $k$  Male um die Kugel herumgeführt wird, wenn der Fahrstift vom linken zum rechten Anschlage hingeführt wird. Beim Arbeiten mit dem Apparate hat man der Reihe nach für  $k = 1, 2, \dots$  die richtigen Scheiben aufzusetzen.\*)

Die Größe der Drehung des Rollenapparates aus seiner in der Figur angedeuteten Anfangslage ist zur Abszisse  $x$  des Fahrstiftes proportional. Die Lage des anfangs im Pole berührenden Meßrädchens  $R_1$  nach einer Verschiebung des Fahrstiftes bis zur Abszisse  $x$  sei in Fig. 73 dargestellt. Die „Poldistanz“  $\vartheta$  der Berührungsstelle messen wir in der angedeuteten Richtung wachsend rings um den Meridianvollkreis herum von  $\vartheta = 0$  bis  $2k\pi$ , wenn die  $k^{\text{te}}$  Scheibe aufgesetzt ist. Haben wir die Abszisse  $x$  erreicht, so liegt bei  $R_1$  der Winkel  $\vartheta = \frac{k\pi x}{l}$  vor, für die andere Rolle  $R_2$  aber der Winkel  $\left(\frac{k\pi x}{l} - \frac{\pi}{2}\right)$ .

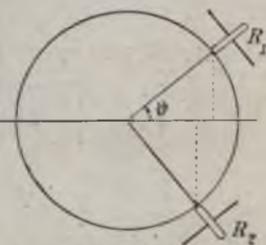


Fig. 73.

\*) In der Figur sind zwei Scheiben auf die Achse des Rollenapparates aufgesetzt und je zwei weitere Scheiben (zur Veranschaulichung ihrer Größe) rechts und links angedeutet. Neuere Apparate werden mit neun Scheiben ausgestattet und gestatten die Bestimmung der Koeffizienten bis  $a_n$  und  $b_n$ .

Beschreibt nun bei stehendem  $x$  der Fahrstift die Strecke  $\Delta y$  (der die Kugeldrehung proportional ist), so nehmen die beiden Rollen  $R_1$  und  $R_2$  die Drehungen ihrer Parallelkreise auf und erfahren also selbst zwei Drehungen der Größen:

$$(3) \quad \begin{cases} -c \sin \vartheta \cdot \Delta y = -c \sin \frac{k\pi x}{l} \cdot \Delta y, \\ -c \sin \left( \vartheta - \frac{\pi}{2} \right) \cdot \Delta y = +c \cos \frac{k\pi x}{l} \cdot \Delta y, \end{cases}$$

wo  $c$  eine vom Bau des Apparates abhängende Konstante ist.\*)

Verschieben wir den Fahrstift bei stehendem  $y$  um das Stück  $\Delta x$  nach rechts, so erfahren die Rollen keine Drehung um ihre Achsen; dagegen nimmt der um einen entsprechenden Winkel  $\Delta \vartheta$  sich drehende Rollenapparat die Kugel, welche sich auf ihrem Auflagerpunkt leicht um ihre vertikalen Durchmesser drehen läßt, einfach mit.

Denken wir uns nun die Kurve  $y = f(x)$  in bekannter Weise (vgl. z. B. S. 79) durch einen treppenförmigen Weg ersetzt, dessen einzelne Stückchen abwechselnd zur  $x$ -Achse und zur  $y$ -Achse parallel sind, und wählen wir nach und nach die Stufen immer kleiner, so ergibt sich in gewohnter Betrachtung: *Bei Hinführung des Fahrstiftes über die Kurve  $y = f(x)$  von  $x = 0$  bis  $x = 2l$  erfahren die Rollen  $R_1$  und  $R_2$  Umdrehungen  $U_1^{(k)}$  und  $U_2^{(k)}$  der Größen:*

$$(4) \quad U_1^{(k)} = -c \int_0^{2l} \sin \frac{k\pi x}{l} \cdot \frac{dy}{dx} dx, \quad U_2^{(k)} = +c \int_0^{2l} \cos \frac{k\pi x}{l} \cdot \frac{dy}{dx} dx.$$

Man setzt nun  $\frac{dy}{dx} = f'(x)$  und findet durch partielle Integration:

$$\int \sin \frac{k\pi x}{l} f'(x) dx = f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} - \frac{k\pi}{l} \int f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx,$$

$$\int \cos \frac{k\pi x}{l} f'(x) dx = f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} + \frac{k\pi}{l} \int f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx,$$

sowie bei Einsetzung der Grenzen und Multiplikation mit  $\mp c$ :

$$-c \int_0^{2l} \sin \frac{k\pi x}{l} \cdot \frac{dy}{dx} dx = \frac{ck\pi}{l} \int_0^{2l} f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx,$$

$$+c \int_0^{2l} \cos \frac{k\pi x}{l} \cdot \frac{dy}{dx} dx = c(f(2l) - f(0)) + \frac{ck\pi}{l} \int_0^{2l} f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx.$$

\*) Die Rollen  $R_1$  und  $R_2$  gelten als gleich groß. Ist  $c$  positiv, so ist durch die Vorzeichenwahl in (3) links sowohl für  $R_1$  als für  $R_2$  ein positiver Drehsinn festgelegt, dem die Einrichtung des Zählwerkes entsprechen muß.

Die gesuchten Koeffizienten  $a_k$  und  $b_k$  werden somit von den Rollendrehungen  $U_1^{(k)}$  und  $U_2^{(k)}$  in der Gestalt geliefert:

$$(5) \begin{cases} a_k = \frac{1}{c\pi} \cdot \frac{1}{k} U_1^{(k)}, \\ b_k = \frac{1}{c\pi} \cdot \frac{1}{k} U_2^{(k)} - \frac{1}{k\pi} (f(2l) - f(0)). \end{cases}$$

Der in der zweiten Formel rechts auftretende Subtrahend kann übrigens dadurch vermieden werden, daß man am Schlusse der Bahn den Fahrstift parallel zur  $y$ -Achse von  $y = f(2l)$  zu dem mit der Anfangsordinate in gleicher Höhe befindlichen Punkte  $y = f(0)$  führt. Die Rolle  $R_1$  nimmt hierbei keine Drehung auf, die Rolle  $R_2$  dagegen gerade noch die zusätzliche Drehung

$$c(f(0) - f(2l)).$$

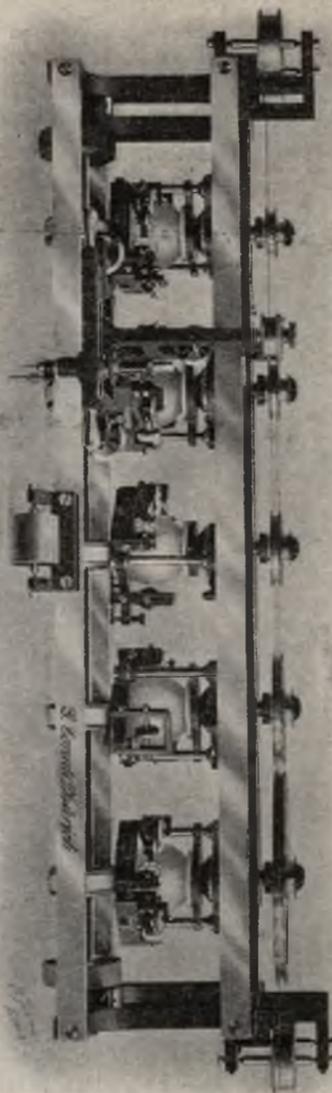
Übrigens sind die Konstanten des Apparates so abgeglichen, daß  $c\pi = 1$  zutrifft. Nach Anhängung des geraden Bahnstückes längs der Endordinate (im Falle  $f(0) \neq f(2l)$ ) haben wir also die einfachen Regeln:

$$(6) \quad a_k = \frac{1}{k} U_1^{(k)}, \quad b_k = \frac{1}{k} U_2^{(k)},$$

so daß die durch  $k$  geteilten Umkehrungszahlen  $U_1^{(k)}$ ,  $U_2^{(k)}$  unmittelbar die Koeffizienten  $a_k$  und  $b_k$  liefern.

In Fig. 74 ist ein mit fünf Kugeln und Rollenapparaten ausgestatteter Analysator abgebildet, welcher durch eine einzige Beschreibung der zu analysierenden Kurve die fünf ersten Koeffizientenpaare  $a_k, b_k$  abzulesen gestattet.

Mit Anlehnung an Ideen von Clifford und Yule hat Mader einen



Analysator konstruiert\*), der in Fig. 75 schematisch abgebildet ist.\*\*)  
 Ein dreieckiges Grundgestell ruht mit einem Rade  $C$  auf der Papierebene, während zwei andere Rädchen in die Rille einer parallel zur  $y$ -Achse lagernden Laufschiene  $AB$  eingelassen sind. Dieses Grundgestell ist somit selbst parallel zur  $y$ -Achse fahrbar. Im Gelenke  $G$  ist ein rechtwinkliger Hebel  $FGZ$  drehbar angebracht, der am einen Ende einen Zapfen  $Z$  trägt, am andern Arme den verschiebbar angebrachten Fahrstift  $F$ . Der Stab  $DE$  lagert auf dem Grundgestell und zwar gegen das letztere in Richtung

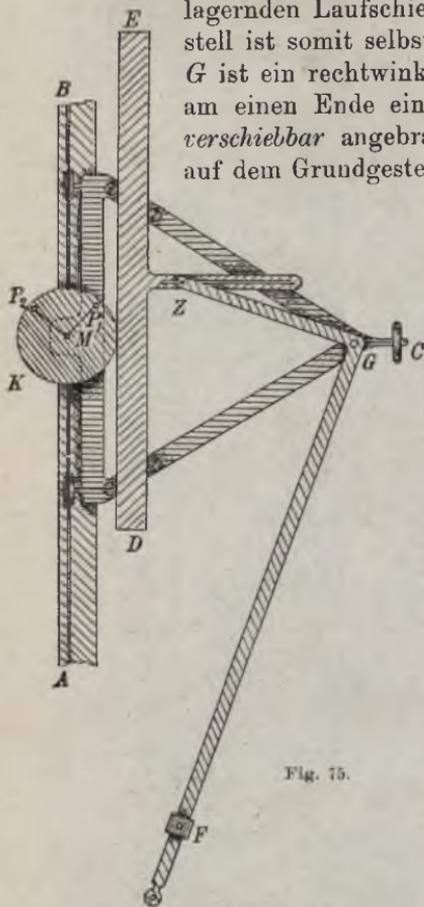


Fig. 75.

der  $y$ -Achse frei verschiebbar. Die Verschiebung wird geregelt durch die inmitten des Stabes rechter Hand angebrachte, mit einer Nute versehene Stange. In diese Nute greift der Zapfen  $Z$  des Winkelhebels ein und regelt nach einem gleich festzustellenden Gesetze bei Verschiebung des Fahrstiftes in der  $x$ -Richtung die Bewegung des Stabes  $DE$ . Der Stab  $DE$  trägt an seinem linken Rande eine Verzahnung, in welche die gleichfalls mit einem Zahnkranze versehene auf dem Grundgestell aufgesetzte und um  $M$  drehbare Kreisscheibe  $K$  eingreift.

Als „Grundstellung“ des Apparates bezeichnen wir die, bei welcher  $FG \parallel AB$  und also parallel zur  $y$ -Achse und damit  $GZ$  parallel zur  $x$ -Achse läuft. Die Schiene  $AB$  ist derart zu lagern, daß der Fahrarm bei der Grundstellung die Abszisse  $x = l$  hat. Für den Arm  $GZ$  sind zwei (in der Figur nicht sichtbare) Anschläge vorhanden, welche dem Arme  $GZ$  einen zu seiner Grundstellung symmetrischen Spielraum gestatten. Wir führen  $F$  nach links, bis  $GZ$  den einen Anschlag erreicht, und bezeichnen die dann erreichte Lage des Apparates als „Anfangsstellung“. Der Fahrstift  $F$  ist jetzt längs des Fahrarmes so zu verschieben, daß er bei der Anfangsstellung auf der  $y$ -Achse liegt; hierdurch ist der Apparat auf die „Basis“ 2l der zu analysierenden Kurve eingestellt.\*\*\*)

\*) Ausgeführt von der Firma Gebr. Stürzl in München.

\*\*\*) Die technische Durchführung weicht von der Figur mehrfach ab.

\*\*\*\*) Es ist also kein Umzeichnen der Kurve auf eine ein für allemal festliegende Basis erforderlich.

Drehen wir den Winkelhebel bis zum anderen Anschläge, so hat der Fahrstift die Abszisse  $x = 2l$  erreicht, und der Stab  $DE$  ist aus seiner einen Extremlage in die andere geführt. Der Radius der Kreisscheibe  $K$  ist so gewählt, daß sie hierbei genau  $k$  volle Umläufe um ihren Mittelpunkt  $M$  ausführt. Dem Apparate sind neun Scheiben beigefügt, die nacheinander aufzusetzen sind und die Bestimmung der neun ersten Koeffizientenpaare gestatten.

Die Wirkung des Apparates beruht nun auf den beiden Tatsachen: Bei Verschiebung des Fahrstiftes parallel zur  $y$ -Achse um einen Betrag  $\Delta y$  erfährt der ganze Apparat eine einfache Translation um  $\Delta y$ , insbesondere ohne Drehung der Scheibe  $K$ ; die Größe der Scheibendrehung von der Anfangsstellung an hängt allein von der Abszisse  $x$  des Fahrstiftes  $F$  ab. Das Gesetz dieser Abhängigkeit soll jetzt festgestellt werden.

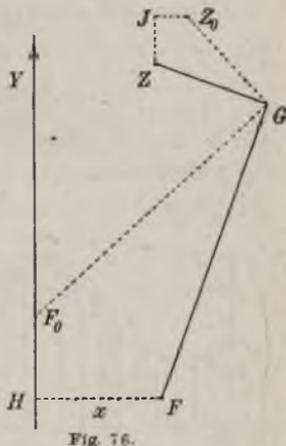
Hat sich der Winkelhebel aus seiner Anfangsstellung  $F_0GZ_0$  in die Lage  $FGZ$  gedreht, so erkennt man aus der leicht verständlichen Figur 76 (in welcher  $FGF_0H$  und  $ZGZ_0J$  zwei ähnliche Vierecke sind), daß die Verschiebung  $JZ$  des Zapfens in Richtung der  $y$ -Achse und damit die Verschiebung des Stabes  $DE$  zu  $\overline{HF} = x$  proportional ist. Also ist auch der Drehungswinkel  $\varphi$  der Scheibe zu  $x$  proportional, und wir gewinnen sofort:

$$(7) \quad \varphi : x = 2k\pi : 2l, \quad \varphi = \frac{k\pi x}{l}.$$

Es sind nun auf der Scheibe zwei Vertiefungen  $P_1$  und  $P_2$  in gleichem Zentralabstande  $r = \overline{MP_1} = \overline{MP_2}$  angebracht, in welche hernach der Fahrstift eines gewöhnlichen Planimeters eingesetzt werden soll. Bei der Anfangsstellung sei  $\overline{MP_1}$  parallel und gleichgerichtet zur positiven  $y$ -Achse,  $\overline{MP_2}$  zur negativen  $x$ -Achse. Von der Anfangsstellung  $\overline{MP_2}$  aus rechnen wir den Winkel  $\varphi$  von 0 an im Sinne der Uhrzeigerdrehung wachsend. Der Stellung  $x$  des Fahrstiftes entsprechen dann die Winkel

$$(8) \quad \varphi_1(x) = \frac{k\pi x}{l} + \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_2(x) = \frac{k\pi x}{l}$$

der Punkte  $P_1$  und  $P_2$ . Sind  $x_1$  und  $x_2$  die Abszissen von  $P_1$  und  $P_2$ , so sind die Änderungen  $\Delta x_1$  und  $\Delta x_2$ , die einer Änderung  $\Delta x$  von  $x$  entsprechen, leicht feststellbar, nämlich in den Gestalten:



$$\Delta x_1 = -r (\cos \varphi_1(x + \Delta x) - \cos \varphi_1(x)),$$

$$\Delta x_2 = -r (\cos \varphi_2(x + \Delta x) - \cos \varphi_2(x)).$$

Mit Rücksicht auf (8) rechnet man diese Größen auf Grund bekannter Regeln leicht um auf:

$$(9) \quad \begin{cases} \Delta x_1 = \frac{rk\pi}{l} \cos \frac{k\pi(x + \vartheta_1 \Delta x)}{l} \cdot \Delta x, \\ \Delta x_2 = \frac{rk\pi}{l} \sin \frac{k\pi(x + \vartheta_2 \Delta x)}{l} \cdot \Delta x, \end{cases}$$

wo  $\vartheta_1$  und  $\vartheta_2$  zwei Zahlen des Intervalles  $0 \leq \vartheta \leq 1$  sind.

Man beobachte nun, welche Wege  $P_1$  und  $P_2$  beschreiben, wenn wir mit dem Fahrstifte  $F$  das in Fig. 77 schraffierte Viereck der Grundlinie  $\Delta x$  und der Höhe  $y = f(x)$ , mit der linken Ordinate beginnend, in der angegebenen Richtung umlaufen. Den beiden Ordinaten entsprechen gleich lange und mit der Fahrstiftichtung gleichgerichtete Wege jedes Punktes  $P_i$ , wobei die Differenz der Abszissen des zweiten und des ersten Weges bei  $P_i$  durch die eben berechnete Größe  $\Delta x_i$  gegeben ist. Den beiden Wegen  $\Delta x$  des

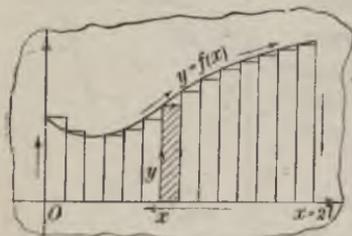


Fig. 77.

Fahrstiftes oben und unten am schraffierten Viereck entsprechen kongruente Wege von  $P_i$ , von denen der eine durch Translation um die Strecke  $y$  in den andern überführbar ist. Wir finden:  $P_i$  umläuft einen viereckigen Bereich des Inhaltes  $y \cdot \Delta x_i$ , und zwar ist dieser Inhalt von positiver oder negativer Maßzahl  $y \cdot \Delta x_i$ , je nachdem  $P_i$  im Uhrzeigersinne den Bereich umläuft oder im entgegengesetzten Sinne. Diesen Inhalt  $y \Delta x_i = f(x) \Delta x_i$  messen wir mittelst eines Planimeters, dessen Fahrstift wir in die Vertiefung  $P_i$  der Scheibe einsetzen.

Die Fortsetzung der Betrachtung regelt sich nun einfach genau so wie beim Kugelrollplanimeter S. 79 ff. (Einteilung des von der Kurve  $y = f(x)$ , der  $x$ -Achse und den beiden Ordinaten bei  $x = 0$  und  $x = 2l$  eingegrenzten Bereiches in Parallelstreifen der Breite  $\Delta x$ , Grenzübergang  $\lim \Delta x = 0$  usw.). Wir gelangen zu dem Ergebnis: Wandert der Fahrstift  $F$  des Analysators vom Nullpunkte  $O$  längs der  $y$ -Achse zur Kurve  $y = f(x)$ , sodann längs der Kurve hin, weiter längs der Endordinate zur  $x$ -Achse zurück und längs der letzteren wieder nach  $O$ , so liefert das Planimeter, falls der Planimeterstift von  $P_1$  geführt wird, den Wert des Integrals:

$$\frac{rk\pi}{l} \int_0^{2l} f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx = rk\pi \cdot a_k,$$

und wenn er von  $P_2$  geführt wird, den Wert des Integrals:

$$\frac{rk\pi}{l} \int_0^{2l} f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx = rk\pi \cdot b_k.$$

Die den verschiedenen  $k$  zugehörigen Scheibenradien müssen mit  $k^{-1}$  proportional sein. Wählen wir auch die zugehörigen Radien  $r = \overline{MP}_k$  mit  $k^{-1}$  proportional, so hat  $rk \cdot \pi = c$  einen für alle Scheiben konstanten Wert. Die Planimeterumdrehungen geben dann, mit dieser Konstanten  $c$  multipliziert, unmittelbar die Werte  $a_k$  und  $b_k$ .

## Abschnitt VI.

### Lösung von Differentialgleichungen.

#### Kapitel I. Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung.

**1. Ansätze über Differentialgleichungen und ihre Lösungen.** In den Elementen der Integralrechnung ist folgende Aufgabe gelöst: Gegeben ist eine Funktion  $\varphi(x)$ , gesucht eine Funktion  $y = f(x)$ , deren Ableitung  $y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$  die Funktion  $\varphi(x)$  ist. Es soll also, wenn wir  $y = f(x)$  in die Gleichung  $y' = \varphi(x)$  einsetzen, die Gleichung  $f'(x) = \varphi(x)$  identisch, d. h. für alle Werte  $x$  eines geeignet gewählten Intervalles gelten.

Diese Aufgabe soll jetzt in folgender Art erweitert werden: *Zwischen der Variablen  $x$ , einer von  $x$  abhängig gedachten Variablen  $y$  und ihrer Ableitung  $y' = \frac{dy}{dx}$  nach  $x$  ist eine Gleichung:*

$$(1) \quad y' = \varphi(x, y)$$

*vorgeschrieben, in welcher rechts eine gegebene Funktion der Argumente  $x, y$  steht; es soll  $y$  als Funktion  $y = f(x)$  so bestimmt werden, daß die Eintragung dieser Funktion in (1) eine identische, d. h. für alle Werte  $x$  eines geeignet gewählten Intervalles gültige Gleichung:*

$$(2) \quad f'(x) = \varphi(x, f(x))$$

*liefert. Man sagt, in (1) sei eine „gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung“ zwischen zwei Variablen vorgelegt. Der Zusatz „gewöhnlich“ bezieht sich darauf, daß nur eine unabhängige Variable  $x$  vorliegt; im Kapitel III reihen sich bei mehr als einer unabhängigen Variablen die „partiellen Differentialgleichungen“ an. Die Differentialgleichung heißt von der „ersten Ordnung“, weil der Differentialquotient erster Ordnung  $y$ , aber keiner von höherer Ordnung auftritt. Eine die Differentialgleichung befriedigende Funktion  $f(x)$  heißt eine „Lösung“ oder ein „Integral“ derselben, insofern sich in vielen Fällen die Lösungen durch Integrale darstellen lassen.\*)*

\*) Z. B. in dem einfachsten und nicht auszuschließenden Falle, daß in (1) rechts  $y$  nicht auftritt: wir kommen dann auf die genannte Grundaufgabe der Integralrechnung zurück.

Deuten wir eine die Differentialgleichung (1) lösende Funktion  $y = f(x)$  durch ihre Kurve, so wird diese als eine „Integralkurve“ der Differentialgleichung (1) bezeichnet. Im Anschluß an diese geometrische Vorstellung kann man auch eine geometrische Bedeutung der Differentialgleichung (1) selbst entwickeln. Die Funktion  $f(x)$  muß differenzierbar sein, d. h. die Integralkurve hat in ihrem einzelnen Punkte  $(x, y)$  eine Tangente. Für den nach I, 102 abzulesenden Winkel  $\alpha$  dieser Tangente gegen die  $x$ -Achse gilt:

$$(3) \quad \operatorname{tg} \alpha = f'(x) = y' = \varphi(x, y), \quad \alpha = \operatorname{arctg} \varphi(x, y).$$

Die Differentialgleichung (1) bzw. die auf ihrer rechten Seite stehende Funktion bestimmt also in jedem Punkte  $(x, y)$  einer Integralkurve auf Grund der zweiten Gleichung (3) die Tangentenrichtung dieser Kurve.

Hieran schließt sich umgekehrt eine vorläufige Entwicklung über die Lösung der Differentialgleichung (1). Eine Umgebung  $U'$  eines Punktes  $(a, b)$  der  $x, y$ -Ebene sei durch die Ungleichungen erklärt:

$$(4) \quad a - \alpha' \leq x \leq a + \alpha', \quad b - \beta \leq y \leq b + \beta,$$

in denen  $\alpha', \beta$  zwei positive Zahlen sind. In  $U'$  sei  $\varphi(x, y)$  eindeutig und stetig. Eine positive Zahl  $A$  wählen wir derart, daß in  $U'$  allenthalben die Ungleichung gilt:

$$(5) \quad |\varphi(x, y)| < A.$$

Ist  $A\alpha' > \beta$ , so ist der durch  $\alpha$  zu bezeichnende Quotient:

$$(6) \quad \frac{\beta}{A} = \alpha < \alpha'.$$

In diesem Falle ist die durch die Ungleichungen:

$$(7) \quad a - \alpha \leq x \leq a + \alpha, \quad b - \beta \leq y \leq b + \beta$$

erklärte Umgebung  $U$  von  $(a, b)$  ein Teil von  $U'$ . Ist indessen  $A\alpha' \leq \beta$ , so verstehen wir unter  $\alpha$  die bisher mit  $\alpha'$  bezeichnete Zahl und unter  $U$  die bisher  $U'$  genannte Umgebung der Stelle  $(a, b)$ .

Man wähle nun eine ganze positive Zahl  $n$ , teile die beiden Intervalle  $a - \alpha \leq x \leq a$ ,  $a \leq x \leq a + \alpha$  der  $x$ -Achse je in  $n$  gleiche Teilintervalle und lege durch die Teilpunkte (auch durch den Punkt  $x = a$ ) Parallele zur  $y$ -Achse, welche die Umgebung  $U$  in  $2n$  Parallelstreifen zerlegen. Die Breite der Streifen heiße  $\Delta x$ , wobei natürlich  $n \cdot \Delta x = \alpha$  ist. Wir konstruieren nun in folgender Art ein Näherungsbild einer durch den Punkt  $(a, b)$  hindurchlaufenden Integralkurve: Vom Punkte  $(a, b)$  ziehen wir unter dem Winkel  $\alpha_0 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \varphi(a, b)$  gegen die  $x$ -Achse nach rechts eine Gerade bis zu der im Punkte  $x_1 = a + \Delta x$  zur  $y$ -Achse parallel ge-

zogenen Geraden. Sie erreicht diese Gerade im Punkte der Ordinate  $y_1 = b + \Delta y_1$ , der jedenfalls in  $U$  gelegen ist, da:

$$(8) \quad |\Delta y_1| = |\varphi(a, b) \Delta x| < \frac{1}{n} A \alpha \leq \frac{1}{n} \beta$$

gilt. Vom Endpunkte  $(x_1, y_1)$  der gezeichneten geraden Strecke ziehen wir wieder nach rechts unter dem Winkel  $\alpha_1 = \arctg \varphi(x_1, y_1)$  gegen die  $x$ -Achse eine zweite Gerade bis zur nächsten Parallelen, die von der neuen Strecke im Punkte  $x_2 = a + 2\Delta x$ ,  $y_2 = b + \Delta y_1 + \Delta y_2$  erreicht wird. Auch dieser Punkt gehört dem Bereiche  $U$  an, da man wie in (8) die Ungleichung  $|\Delta y_2| < \frac{1}{n} \beta$  beweist. In dieser Art fahre man mit der Anhängung von  $(n - 2)$  weiteren geraden Strecken fort, die alle dem Bereiche  $U$  angehören und deren letzte den Rand von  $U$  in einem Punkte der diesen Bereich rechts begrenzenden Geraden erreicht. In gleicher Weise kann man auch von  $(a, b)$  nach links hin eine Kette von  $n$  geraden Strecken der Richtungen:

$$\alpha_0 = \arctg \varphi(a, b), \quad \alpha_{-1} = \arctg \varphi(x_{-1}, y_{-1}), \dots$$

in sofort verständlicher Art konstruieren, deren letzte die links den Bereich begrenzende Gerade erreicht.

Diese Konstruktion liefert uns für jede positive ganze Zahl  $n$  eine den Bereich  $U$  vom linken zum rechten Rande durchsetzende gebrochene Linie, die insofern ein Näherungsbild einer Integralkurve ist, als bei hinreichend großem  $n$  (wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von  $\varphi(x, y)$ ) die Richtung der Näherungskurve in jedem ihrer Punkte beliebig nahe an die Richtung einer Integralkurve herangebracht werden kann. Wir vermuten, daß diese Näherungsbilder für  $\lim n = \infty$  einer Grenze zustreben, welche eine gleichfalls dem Bereiche  $U$  angehörende Integralkurve der Differentialgleichung ist. Hierbei handelt es sich freilich um einen Grenzübergang neuer Art. Es liegt nicht eine unbegrenzte Reihe von Zahlen  $a_1, a_2, \dots$  vor (wie früher), sondern wir haben, indem wir die durch die gebrochene Linie dargestellte Funktion mit  $f_n(x)$  bezeichnen, mit einer unbegrenzten Reihe von Funktionen  $f_1(x), f_2(x), \dots$  zu tun, und wir vermuten die Existenz einer „Grenzfunktion“  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ , welche differenzierbar sein müßte und unsere Differentialgleichung befriedigen soll. Diese Sachlage erfordert eine besondere Untersuchung, die wir in § 2 durchführen.

Ziemlich einfach ist der Beweis des folgenden Satzes, den wir gleich vorwegnehmen: *Hat die Funktion  $\varphi(x, y)$  im Bereiche  $U$  eine stetige partielle Ableitung  $\varphi'_y(x, y)$ , so gibt es jedenfalls nicht mehr als eine dem Bereiche  $U$  angehörende Integralkurve, die durch den Punkt  $(a, b)$  hindurchläuft.* Man

beweist diesen Satz nach C. Jordan indirekt und geht also von der Existenz zweier Lösungen  $f(x)$  und  $g(x)$  der Gleichung (1) aus, die beide für  $x = a$  den Wert  $b$  annehmen:

$$(9) \quad f(a) = g(a) = b.$$

Für  $f(x)$  und  $g(x)$  als Lösungen von (1) bestehen die Gleichungen:

$$df(x) = \varphi(x, f(x))dx, \quad dg(x) = \varphi(x, g(x))dx.$$

Durch Integration zwischen der unteren Grenze  $a$  und einer im Intervalle  $a - \alpha \leq \xi \leq a + \alpha$  gewählten oberen Grenze folgt:

$$f(\xi) - f(a) = \int_a^{\xi} \varphi(x, f(x))dx, \quad g(\xi) - g(a) = \int_a^{\xi} \varphi(x, g(x))dx,$$

und weiter durch Subtraktion dieser Gleichungen mit Rücksicht auf (9):

$$(10) \quad g(\xi) - f(\xi) = \int_a^{\xi} (\varphi(x, g(x)) - \varphi(x, f(x)))dx.$$

Für die obere Grenze  $\xi$  möge noch eine neue Beschränkung eintreten. Die positive Zahl  $B$  sei so groß gewählt, daß in  $U$  allenthalben:

$$(11) \quad |\varphi_y'(x, y)| < B$$

zutrifft. Wir wollen dann  $\xi$  auf das Intervall beschränken:

$$(12) \quad a - \frac{1}{2B} \leq \xi \leq a + \frac{1}{2B},$$

was freilich nur dann gegenüber der bisherigen Festsetzung eine Beschränkung ist, wenn  $2\alpha B > 1$  ist.

Zufolge der Existenz und Stetigkeit der Ableitung  $\varphi_y'$  können wir den unter dem Integrale (10) stehenden Klammerausdruck nach dem Mittelwertsatze so entwickeln:

$$\varphi(x, g(x)) - \varphi(x, f(x)) = \varphi_y'(x, f(x) + \vartheta_x(g(x) - f(x))) \cdot (g(x) - f(x)),$$

wo  $0 \leq \vartheta_x \leq 1$  ist. Da die beiden Punkte  $(x, g(x))$  und  $(x, f(x))$  dem Bereiche  $U$  angehören, so gilt dasselbe vom Punkte  $(x, f(x) + \vartheta_x(g(x) - f(x)))$ , und also folgt aus der letzten Gleichung mit Rücksicht auf (11):

$$(13) \quad |\varphi(x, g(x)) - \varphi(x, f(x))| \leq B \cdot |g(x) - f(x)|.$$

Es muß hier auch das Gleichheitszeichen als möglich zugelassen werden, da die Gleichung  $f(x) = g(x)$  nicht ausgeschlossen ist.

Es sei nun  $M$  das Maximum der absoluten Werte der stetigen Funktion  $(g(\xi) - f(\xi))$  im Intervalle (12): Wir folgern dann aus (13) für alle  $x$  des Integrationsintervalls (10):

$$|\varphi(x, g(x)) - \varphi(x, f(x))| \leq BM$$

und ziehen aus der Gleichung (10) selbst für jedes dem Intervalle (12) angehörige  $\xi$  die Folgerung:

$$|g(\xi) - f(\xi)| \leq \int_a^\xi |\varphi(x, g(x)) - \varphi(x, f(x))| \cdot dx \leq BM \cdot |\xi - a| \leq \frac{1}{2} M.$$

Ist  $\xi$  insbesondere ein Wert, für den  $|g(\xi) - f(\xi)| = M$  wird, so folgt  $M \leq \frac{1}{2} M$ . Die einzige nicht-negative Zahl  $M$ , welche diese Bedingung befriedigt, ist  $M = 0$ . *Es sind also jedenfalls im Intervalle (12) die beiden Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  identisch.*

Erschöpft das Intervall (12) noch nicht den Bereich  $U$ , so kann man z. B. für den Punkt:

$$a_1 = a + \frac{1}{2B}, \quad b_1 = f\left(a + \frac{1}{2B}\right) = g\left(a + \frac{1}{2B}\right)$$

an Stelle des Punktes  $(a, b)$  eine entsprechende Betrachtung wiederholen, sowie nötigenfalls in gleicher Art weitergehen. Man gelangt zu dem Ziele, daß  $f(x)$  und  $g(x)$  im ganzen Bereiche  $U$  identisch sind.

Halten wir  $a$  fest, während  $b$  veränderlich gedacht wird, so beschreibt der Punkt  $(a, b)$  die zur  $y$ -Achse parallele Gerade  $x = a$ . Insoweit sich um die verschiedenen Punkte  $(a, b)$  Umgebungen  $U$  eingrenzen lassen, in denen die Funktion  $\varphi(x, y)$  und ihre Ableitung  $\varphi_y(x, y)$  eindeutig und stetig sind, können wir immer wieder die vorstehende Betrachtung durchführen. *Wir würden auf diese Weise sogar zu einer „einfach unendlichen“ Schar von Integralkurven gelangen, von denen eine einzelne durch eine bestimmte Auswahl der Zahl  $b$  charakterisierbar ist.*

Die vorstehende Entwicklung ist auf den Fall von mehr als einer abhängigen Variablen übertragbar. Der Bequemlichkeit halber beschränken wir uns zunächst auf den Fall zweier abhängiger Variablen  $y_1$  und  $y_2$ , legen die Betrachtung aber gleich so an, daß ihre Verallgemeinerung auf  $n$  abhängige Variable ohne Mühe ausführbar ist. *Zwischen der Variablen  $x$ , zwei von  $x$  abhängigen Variablen  $y_1$  und  $y_2$  sowie ihren Ableitungen  $y_1' = \frac{dy_1}{dx}$ ,*

*$y_2' = \frac{dy_2}{dx}$  seien zwei Gleichungen:*

$$(14) \quad y_1' = \varphi_1(x, y_1, y_2), \quad y_2' = \varphi_2(x, y_1, y_2)$$

*vorgeschrieben, in denen rechts gegebene Funktionen der drei Argumente  $x, y_1, y_2$  stehen; es sollen  $y_1$  und  $y_2$  als Funktionen  $y_1 = f_1(x), y_2 = f_2(x)$  von  $x$  so bestimmt werden, daß die Eintragung dieser Funktionen in die Gleichungen (14) zwei identische, d. h. für alle  $x$  eines geeignet gewählten Intervalls gültige Gleichungen liefert:*

$$(15) \quad f_1'(x) = \varphi_1(x, f_1(x), f_2(x)), \quad f_2'(x) = \varphi_2(x, f_1(x), f_2(x)).$$

Man sagt, in (14) liege ein „System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung“ vor; der Anzahl der abhängigen Variablen entspricht die Anzahl der vorgelegten Gleichungen. Zwei die Differentialgleichungen im angegebenen Sinne befriedigende Funktionen  $y_1 = f_1(x)$ ,  $y_2 = f_2(x)$  stellen ein „System von Lösungen“ oder „Integralen“ des Systems (14) dar.

Dem Systeme der Lösungen  $y_1 = f_1(x)$ ,  $y_2 = f_2(x)$  entspricht in der  $x, y$ -Ebene ein „System von Integralkurven“\*); je zwei zu gleicher Abszisse gehörende Punkte dieser Kurven ordnen wir einander zu. Die im Falle einer abhängigen Variablen gefundenen geometrischen Sätze übertragen sich dann leicht: Die Tangenten der Integralkurven in zwei zugeordneten Punkten  $(x, y_1)$  und  $(x, y_2)$  bilden gegen die  $x$ -Achse Winkel  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  für welche:

$$(16) \quad \operatorname{tg} \alpha_k = f'_k(x) = y'_k = \varphi_k(x, y_1, y_2), \quad \alpha_k = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \varphi_k(x, y_1, y_2), \\ (k = 1, 2)$$

gilt. Die Differentialgleichungen (14) bzw. die auf ihren rechten Seiten stehenden Funktionen bestimmen also in jedem Punktepaare  $(x, y_1)$ ,  $(x, y_2)$  der Integralkurven auf Grund der zweiten Gleichung (16) die Tangentenrichtungen dieser Kurven.

Hieran schließt sich wieder eine vorläufige Entwicklung über die Lösungen der Gleichungen (14). Eine „Umgebung“  $U$  des Punktepaars  $(a, b_1)$  und  $(a, b_2)$  sei gebildet durch alle Paare von Punkten  $(x, y_1)$  und  $(x, y_2)$  gleicher Abszissen  $x$ , deren Koordinaten die Bedingungen erfüllen:

$$(17) \quad a - \alpha' \leq x \leq a + \alpha', \quad b_k - \beta \leq y_k \leq b_k + \beta,$$

unter  $\alpha'$  und  $\beta$  zwei positive Zahlen verstanden. In  $U$  seien die Funktionen  $\varphi_k(x, y_1, y_2)$  eindeutig und stetig, und es sei  $A$  eine bestimmte positive Zahl, die derart gewählt ist, daß in  $U$  überall die Ungleichung:

$$(18) \quad |\varphi_k(x, y_1, y_2)| < A$$

gilt. Die Zahl  $\alpha$  wird dann wie oben (in (6) S. 259) erklärt und nötigenfalls eine Verkleinerung von  $U$  zur „Umgebung“  $U$  des Punktepaars  $(a, b_k)$  entsprechend den Ungleichungen:

$$(19) \quad a - \alpha \leq x \leq a + \alpha, \quad b_k - \beta \leq y_k \leq b_k + \beta$$

vorgenommen.

Alles Weitere entwickelt sich wie oben. Die die Umgebung zusammensetzenden Punktepaare  $(x, y_k)$  erfüllen zwei Rechtecke, die zwischen

\*) Im Falle zweier abhängiger Variablen  $y_1, y_2$  würde man besser  $x, y_1, y_2$  als rechtwinklige Raumkoordinaten deuten, wo alsdann durch das Gleichungenpaar  $y_1 = f_1(x)$ ,  $y_2 = f_2(x)$  eine *einsige* im Raume gelegene Integralkurve dargestellt wäre. Indessen wäre diese Auffassung für mehr als zwei abhängige Variable nicht verallgemeinerungsfähig.

den beiden zur  $y$ -Achse parallelen Geraden  $x = a \pm \alpha$  liegen. Wir zerlegen die Rechtecke in je  $2n$  Parallelstreifen gleicher Breite  $\Delta x$  und beginnen vom Punktepaare  $(a, b_k)$  die Konstruktion zweier Näherungsbilder von Integralkurven, die für jedes  $n$  die beiden Rechtecke von zwei Punkten der linken Seiten zu zweien der rechten Seiten durchziehen. Wir vermuten, daß diese Näherungsbilder für  $\lim n = \infty$  einer Grenze zustreben, ein System von Integralkurven darstellend, die die Umgebung  $U$  gleichfalls von den Seiten  $x = a - \alpha$  zu den gegenüberliegenden Seiten durchziehen.

Auch hier besteht der Satz: *Haben die Funktionen  $\varphi_k(x, y_1, y_2)$  im Bereiche  $U$  stetige partielle Ableitungen erster Ordnung in bezug auf  $y_1$  und  $y_2$ , so gibt es jedenfalls nicht mehr als ein dem Bereiche  $U$  angehörendes System von Integralkurven, die bzw. durch die Punkte  $(a, b_1)$  und  $(a, b_2)$  hindurchziehen.*

Der indirekte Beweis von S. 261 überträgt sich ohne Mühe. Hätten wir neben  $f_1(x), f_2(x)$  noch ein zweites System von Lösungen  $g_1(x), g_2(x)$ , so ziehen wir wie oben leicht die Folgerung:

$$(20) \quad g_k(\xi) - f_k(\xi) = \int_a^\xi (\varphi_k(x, g_1(x), g_2(x)) - \varphi_k(x, f_1(x), f_2(x))) dx.$$

Die positive Zahl  $B$  sei so groß gewählt, daß in  $U$  überall die Ungleichungen gelten:

$$\left| \frac{\partial \varphi_k(x, y_1, y_2)}{\partial y_1} \right| < B, \quad \left| \frac{\partial \varphi_k(x, y_1, y_2)}{\partial y_2} \right| < B, \quad (k = 1, 2),$$

und  $\xi$  sei auf das gegenüber (19) vielleicht verkleinerte Intervall:

$$(21) \quad a - \frac{1}{4} B \leq \xi \leq a + \frac{1}{4} B$$

beschränkt.

Den unter dem Integralzeichen (20) stehenden Ausdruck entwickeln wir so:

$$\{ \varphi_k(x, g_1(x), g_2(x)) - \varphi_k(x, f_1(x), g_2(x)) \} + \{ \varphi_k(x, f_1(x), g_2(x)) - \varphi_k(x, f_1(x), f_2(x)) \}$$

und schätzen die beiden hier addierten Klammerausdrücke, absolut genommen, vermöge des Mittelwertsatzes ab:

$$| \varphi_k(x, g_1(x), g_2(x)) - \varphi_k(x, f_1(x), f_2(x)) | \leq B |g_1(x) - f_1(x)| + B |g_2(x) - f_2(x)|.$$

Es sei wieder  $M$  das Maximum, welches die Absolutwerte  $|g_1(x) - f_1(x)|$  und  $|g_2(x) - f_2(x)|$  im Intervalle (21) erreichen; dann gilt jedenfalls:

$$| \varphi_k(x, g_1(x), g_2(x)) - \varphi_k(x, f_1(x), f_2(x)) | \leq 2BM$$

Wir beziehen nun die Gleichung (20) auf diejenige der beiden Funktionen

$(g_k(x) - f_k(x))$ , welche das Maximum  $M$  erreicht, und folgern übrigens aus (20) ganz entsprechend wie oben aus (12):

$$|g_k(\xi) - f_k(\xi)| \leq 2BM \cdot |\xi - a| \leq \frac{1}{2}M,$$

woraus dann wieder der Schluß auf  $M = 0$  gezogen wird. Hieraus ist die Behauptung der eindeutigen Bestimmtheit der Integralkurven einleuchtend.

Halten wir  $a$  fest, während  $b_1, b_2$  als voneinander unabhängig veränderlich gedacht werden, so würden wir, insoweit die benutzten Voraussetzungen über die Funktionen  $\varphi_k(x, y_1, y_2)$  zutreffen, zu einer „zweifach unendlichen“ Schar von Lösungssystemen  $f_1(x), f_2(x)$  gelangen, von denen wir ein einzelnes durch eine bestimmte Auswahl der  $b_1, b_2$  herausgreifen können.

Der Erweiterung der Betrachtung auf Systeme von  $n$  gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$(22) \quad y_1' = \varphi_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \dots, y_n' = \varphi_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

steht, wie man gesehen haben wird, nichts im Wege. Wir vermuten hier unter den erforderlichen Voraussetzungen die Existenz und Bestimmtheit einer „ $n$ -fach unendlichen“ Schar von Lösungssystemen  $y_1 = f_1(x), \dots, y_n = f_n(x)$ , unter denen wir ein einzelnes System dadurch herausgreifen, daß wir für ein vorab festgewähltes Argument  $x = a$  die  $n$  zugehörigen Funktionswerte  $b_1 = f_1(a), \dots, b_n = f_n(a)$  willkürlich vorschreiben.

**2. Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung.** Die Lösung der Differentialgleichung (1) S. 258 vollziehen wir nach E. Picard durch einen Grenzübergang, der von dem S. 260 angedeuteten verschieden ist. Unter Beibehaltung aller Bezeichnungen und Voraussetzungen von § 1 bilden wir eine erste Funktion  $f_1(\xi)$  vermöge des Integrals:

$$(1) \quad f_1(\xi) = b + \int_a^{\xi} \varphi(x, b) dx,$$

wo  $\xi$  dem Intervalle angehören soll:

$$(2) \quad a - \alpha \leq \xi \leq a + \alpha.$$

In der Funktion unter dem Integralzeichen ist also das zweite Argument konstant gleich  $b$  gesetzt. Für jedes die Bedingung (2) befriedigende  $\xi$  gilt alsdann:

$$(3) \quad |f_1(\xi) - b| \leq A |\xi - a| \leq A\alpha, \quad |f_1(\xi) - b| < \beta.*$$

Die Kurve der Funktion  $y = f_1(x)$  durchzieht also den Bereich  $U$  von der linken zur rechten Randgeraden.

\* Das erste Gleichheitszeichen in (3) gilt nur für  $\xi = a$ , das zweite nur für die beiden Extremwerte  $\xi$ .

Mit Hilfe der Funktion  $f_1(x)$  erklären wir eine zweite Funktion:

$$(4) \quad f_2(\xi) = b + \int_a^{\xi} \varphi(x, f_1(x)) dx,$$

wo jetzt also das zweite Argument der Funktion  $\varphi$  die Funktion  $f_1(x)$  ist. Wir finden dann zunächst, da alle „Punkte“  $(x, f_1(x))$  dem Bereiche  $U$  angehören und also im ganzen Integrationsintervalle  $|\varphi(x, f_1(x))| < A$  ist:

$$(5) \quad |f_2(\xi) - b| \leq A |\xi - a| \leq A\alpha, \quad |f_2(\xi) - b| < \beta^*,$$

so daß auch die dieser zweiten eindeutigen und stetigen Funktion  $y = f_2(x)$  zugehörige Kurve den Bereich  $U$  von der linken zur rechten Randgeraden durchzieht. Die Differenz der beiden erklärten Funktionen stellen wir so dar:

$$(6) \quad f_2(\xi) - f_1(\xi) = \int_a^{\xi} (\varphi(x, f_1(x)) - \varphi(x, b)) dx.$$

Um ihren Absolutwert abzuschätzen, folgern wir aus dem Mittelwertsatze unter Benutzung von (3):

$$|\varphi(x, f_1(x)) - \varphi(x, b)| \leq B |f_1(x) - b| \leq AB |x - a|.$$

Aus (6) folgt somit:

$$(7) \quad |f_2(\xi) - f_1(\xi)| \leq AB \int_a^{\xi} |x - a| dx, \quad |f_2(\xi) - f_1(\xi)| \leq AB \frac{|\xi - a|^2}{1 \cdot 2}.$$

Der eingeleitete Prozeß wird nun in gleicher Weise fortgesetzt und durch den Schluß der vollständigen Induktion gesichert. Wir erklären die Funktionen  $f_3(x), \dots, f_n(x)$  durch die Integrale:

$$(8) \quad f_3(\xi) = b + \int_a^{\xi} \varphi(x, f_2(x)) dx, \dots, \quad f_n(\xi) = b + \int_a^{\xi} \varphi(x, f_{n-1}(x)) dx,$$

nehmen an, daß  $f_{n-1}(x)$  die Bedingung:

$$(9) \quad |f_{n-1}(\xi) - b| \leq A |\xi - a| \leq A\alpha, \quad |f_{n-1}(\xi) - b| < \beta$$

erfüllt, und daß die beiden Funktionen  $f_{n-1}(x)$  und  $f_{n-2}(x)$  die Ungleichung:

$$(10) \quad |f_{n-1}(\xi) - f_{n-2}(\xi)| \leq AB^{n-2} \frac{|\xi - a|^{n-1}}{(n-1)!}$$

befriedigen. Dann folgt aus der letzten Gleichung (8), da zufolge (9) für das ganze Integrationsintervall die „Punkte“  $(x, f_{n-1}(x))$  dem Bereiche  $U$  angehören:

$$(11) \quad |f_n(\xi) - b| \leq A |\xi - a| \leq A\alpha, \quad |f_n(\xi) - b| < \beta.$$

Weiter aber reiht sich die Gleichung an:

$$(12) \quad f_n(\xi) - f_{n-1}(\xi) = \int_a^{\xi} (\varphi(x, f_{n-1}(x)) - \varphi(x, f_{n-2}(x))) dx,$$

\*) S. hier und weiterhin an den entsprechenden Stellen die vorige Note.

die sich wie die Gleichung (6) behandeln läßt. Der Mittelwertsatz lehrt:

$$|\varphi(x, f_{n-1}(x)) - \varphi(x, f_{n-2}(x))| \leq B |f_{n-1}(x) - f_{n-2}(x)| \leq AB^{n-1} \frac{|x - \alpha|^{n-1}}{(n-1)!},$$

und also folgt aus (12):

$$|f_n(\xi) - f_{n-1}(\xi)| \leq AB^{n-1} \int_{\alpha}^{\xi} \frac{|x - \alpha|^{n-1}}{(n-1)!} dx$$

und damit nach Ausführung der Integration:

$$|f_n(\xi) - f_{n-1}(\xi)| \leq AB^{n-1} \frac{|\xi - \alpha|^n}{n!}.$$

Das bisherige Ergebnis fassen wir so zusammen: *Durch die Kette der Gleichungen (1), (4), (8) ist für jedes  $n$  eine im Intervalle  $a - \alpha \leq x \leq a + \alpha$  eindeutige, stetige und differenzierbare Funktion  $f_n(x)$  erklärt, deren Kurve den Bereich  $U$  von der linken zur rechten Randgeraden durchzieht; die Ableitung der Funktion  $f_n(x)$  ist:*

$$(13) \quad \frac{df_n(x)}{dx} = f'_n(x) = \varphi(x, f_{n-1}(x)),$$

und je zwei aufeinander folgende Funktionen erfüllen die Bedingung:

$$(14) \quad |f_n(x) - f_{n-1}(x)| \leq AB^{n-1} \frac{|x - \alpha|^n}{n!},$$

ihre Ableitungen aber befriedigen die Ungleichung:

$$(15) \quad |f'_n(x) - f'_{n-1}(x)| = |\varphi(x, f_{n-1}(x)) - \varphi(x, f_{n-2}(x))| \leq AB^{n-1} \frac{|x - \alpha|^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Diese Vorbereitungen setzen uns nun leicht in den Stand, die Existenz und Beschaffenheit einer „Grenzfunktion“  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  aufzuweisen. Wir bilden die Reihe der Funktionen:

$$(16) \quad u_1(x) = f_1(x), \quad u_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x), \quad (n > 1)$$

und stellen aus ihnen die unendliche Reihe her:

$$(17) \quad u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots$$

Zufolge der bei allen  $n > 1$  gültigen Ungleichung (14) für  $|u_n(x)|$  konvergiert die Reihe (17) im Intervalle  $a - \alpha \leq x \leq a + \alpha$  nicht schlechter als die beständig konvergente Potenzreihe der Exponentialfunktion  $AB^{-1} \cdot e^{B|x-\alpha|}$ . Die Reihe (17) konvergiert somit im fraglichen Intervalle gleichmäßig und stellt also daselbst eine eindeutige und „stetige“ Funktion  $f(x)$  dar. Für den Einzelwert  $x$  kann man den Funktionswert  $f(x)$  als Grenzwert der Summe der  $n$  ersten Glieder der Reihe (17) beim Grenzübergange  $\lim_{n \rightarrow \infty}$  berechnen. Mit Rücksicht auf (16) folgt hieraus:

$$(18) \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Die Funktionenreihe  $f_1(x), f_2(x), \dots$  besitzt also tatsächlich eine eindeutige stetige Grenzfunktion  $f(x)$ , und die Kurve derselben wird den Bereich  $U$  gleichfalls von der linken zur rechten Randgeraden durchziehen, kann dabei aber auch beiderseits in einer Ecke des Bereiches  $U$  endigen.

Auch die zur Reihe (17) gehörende „abgeleitete“ Reihe:

$$(19) \quad u_1'(x) + u_2'(x) + u_3'(x) + \dots$$

ist im fraglichen Intervalle zufolge (15) gleichmäßig konvergent, und ihre Summe

stellt demnach daselbst gleichfalls eine eindeutige und stetige Funktion  $\psi(x)$  dar. Dabei gilt für jeden Einzelwert  $x$  des Intervalles:

$$\psi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_1'(x) + u_2'(x) + \dots + u_n'(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x, f_{n-1}(x)),$$

und da wir  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{n-1}(x) = f(x)$  bereits feststellten, so besteht für jeden Wert  $x$  des Intervalles die Gleichung:

$$(20) \quad \psi(x) = \varphi(x, f(x)).$$

Zufolge der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe (19) können wir setzen:

$$\psi(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + \dots + u_n'(x) + R_n(x)$$

und dabei  $n$  so groß wählen, daß  $|R_n(x)|$  im ganzen Intervalle beliebig klein bleibt. Durch Integration folgt alsdann:

$$(21) \quad b + \int_a^{\xi} \psi(x) dx = u_1(\xi) + u_2(\xi) + \dots + u_n(\xi) + \int_a^{\xi} R_n(x) dx,$$

da für die untere Grenze die Gleichungen  $u_1(a) = b$ ,  $u_2(a) = 0$ ,  $u_3(a) = 0$ , ...,  $u_n(a) = 0$  gelten. Da auch das im letzten Gliede von (21) stehende Integral für ausreichend großes  $n$  beliebig klein gemacht werden kann, so folgt mit Benutzung von (18):

$$b + \int_a^{\xi} \psi(x) dx = f(\xi).$$

Hieraus lesen wir ab, daß  $f(x)$  im Intervalle  $a - \alpha \leq x \leq a + \alpha$  eine differenzierbare Funktion ist, und daß die Ableitung  $f'(x)$  mit  $\psi(x)$  identisch ist. Die Gleichung (20) führt demnach auf:

$$(22) \quad f'(x) = \varphi(x, f(x)),$$

so daß wir in der Funktion  $f(x)$  tatsächlich die Lösung unserer Differentialgleichung gewonnen haben.

Die Entwicklung ist leicht auf den Fall von mehr als einer abhängigen Variablen übertragbar, wie am nächst höheren Falle zweier abhängiger Variablen erläutert werden soll. Die Erklärungen und Bezeichnungen von § 1 sollen hierbei wieder alle gültig bleiben.

Wir erklären unter Vorbehalt der gleich folgenden näheren Erläuterung zwei Reihen eindeutiger und stetiger Funktionen durch die Integrale:

$$(23) \quad \begin{cases} f_k^{(1)}(\xi) = b_k + \int_a^{\xi} \varphi_k(x, b_1, b_2) dx, \\ f_k^{(2)}(\xi) = b_k + \int_a^{\xi} \varphi_k(x, f_1^{(1)}(x), f_2^{(1)}(x)) dx, \\ \dots \\ f_k^{(n)}(\xi) = b_k + \int_a^{\xi} \varphi_k(x, f_1^{(n-1)}(x), f_2^{(n-1)}(x)) dx. \end{cases} \quad (k = 1, 2)$$

Da für das erste Funktionenpaar in bekannter Weise folgt:

$$|f_k^{(1)}(\xi) - b_k| \leq A |\xi - a| \leq A\alpha, \quad |f_k^{(1)}(\xi) - b_k| < \beta,$$

so steht dem Ansatz des zweiten Funktionenpaars nichts im Wege. In dieser Weise fortschließend finden wir für jedes  $n$  ein Paar eindeutiger und stetiger Funktionen  $f_k^{(n)}(\xi)$ , für welche bei allen dem Intervalle (2) angehörigen Argumenten  $\xi$  die Ungleichungen:

$$(24) \quad |f_k^{(n)}(\xi) - b_k| \leq A |\xi - a| \leq A\alpha, \quad |f_k^{(n)}(\xi) - b_k| < \beta$$

gelten. Die beiden Kurven  $y = f_k^{(n)}(x)$  durchziehen somit die beiden den Bereich  $U$  zusammensetzenden Rechtecke von den linken zu den gegenüberliegenden Seiten.

Auch der Vergleich je zweier aufeinander folgender Funktionen der beiden Reihen (23) kann wie oben vollzogen werden. Für die Abschätzung des absoluten Wertes der Differenz:

$$\varphi_k(x, f_1^{(n-1)}(x), f_2^{(n-1)}(x)) - \varphi_k(x, f_1^{(n-2)}(x), f_2^{(n-2)}(x))$$

können wir die Rechnung von S. 264 wiederholen und finden:

$$\begin{aligned} & |\varphi_k(x, f_1^{(n-1)}(x), f_2^{(n-1)}(x)) - \varphi_k(x, f_1^{(n-2)}(x), f_2^{(n-2)}(x))| \\ & \leq B |f_1^{(n-1)}(x) - f_1^{(n-2)}(x)| + B |f_2^{(n-1)}(x) - f_2^{(n-2)}(x)|. \end{aligned}$$

Indem wir  $f_k^{(0)}(x)$  mit  $b_k$  identisch nehmen, folgt zunächst aus den beiden ersten Gleichungen (23):

$$|f_k^{(2)}(\xi) - f_k^{(1)}(\xi)| \leq 2AB \frac{|\xi - a|^2}{1 \cdot 2},$$

sodann weiter durch den Schluß der vollständigen Induktion allgemein:

$$(25) \quad |f_k^{(n)}(\xi) - f_k^{(n-1)}(\xi)| \leq 2^{n-1} \cdot A B^{n-1} \frac{|\xi - a|^n}{n!}.$$

Übrigens sind die für jedes  $n$  im Intervalle (2) erklärten beiden Funktionen  $f_k^{(n)}(\xi)$  daselbst differenzierbar. Ihre Ableitungen sind:

$$(26) \quad \frac{df_k^{(n)}(\xi)}{d\xi} = \varphi_k(\xi, f_1^{(n-1)}(\xi), f_2^{(n-1)}(\xi)),$$

für dieselben gelten die Ungleichungen:

$$(27) \quad \left| \frac{df_k^{(n)}(\xi)}{d\xi} - \frac{df_k^{(n-1)}(\xi)}{d\xi} \right| \leq 2^{n-1} \cdot A B^{n-1} \frac{|\xi - a|^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Auch die weiter mit den Gleichungen (16) beginnende Betrachtung wird man leicht übertragen, wobei natürlich jedesmal an Stelle einer einzelnen gleichmäßig konvergenten Reihe ein solches Reihenpaar zu betrachten ist. Wir gelangen zur Existenz zweier „Grenzfunktionen“:

$$(28) \quad f_k(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_k^{(n)}(x),$$

welche im Bereiche  $a - \alpha \leq x \leq a + \alpha$  die gewünschten Lösungen des Systemes (14) S. 262 darstellen, und deren Kurven  $y = f_k(x)$  die den Bereich  $U$  zusammensetzenden Rechtecke von den linken Randgeraden (vielleicht von einem Endpunkte derselben) zur rechten durchziehen.

**3. Methode der Trennung der Variablen.** Es gibt eine Reihe einfach gebauter Differentialgleichungen, bei denen man zur Gewinnung der Lösung nicht auf die entwickelten allgemeinen Methoden zurückzugehen braucht, sondern durch geeignete Umgestaltung der Differentialgleichung und Berechnung eines oder einiger Integrale die Lösungen gewinnt.

Man nehme zunächst an, daß die auf der rechten Seite einer zu lösenden Differentialgleichung  $y' = \varphi(x, y)$  stehende Funktion sich als Quotient einer Funktion  $-\Phi(x)$  von  $x$  allein und einer Funktion  $\Psi(y)$  von  $y$  allein schreiben lasse:

$$(1) \quad y' = \frac{dy}{dx} = \varphi(x, y) = -\frac{\Phi(x)}{\Psi(y)}.$$

Man setzt die Differentialgleichung dann auch wohl in die Gestalt:

$$(2) \quad \Phi(x)dx + \Psi(y)dy = 0$$

und sagt, insofern in dem mit  $dx$  multiplizierten Gliede nur  $x$  und in dem mit dem Faktor  $dy$  behafteten Gliede nur  $y$  auftritt, es habe sich die „Trennung der Variablen“ ermöglichen lassen.

Zur Gewinnung der Lösung  $y = f(x)$  berechnen wir zunächst das unbestimmte Integral:

$$(3) \quad \int \Psi(y)dy = X(y)$$

unter willkürlicher Auswahl der Integrationskonstanten. Wir haben dann in  $X(y)$  eine Funktion von  $x$ , für deren Ableitung man nach der „Kettenregel“ und der Gleichung (1) findet:

$$\frac{dX(y)}{dx} = \frac{dX(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \Psi(y) \frac{dy}{dx} = -\Phi(x).$$

Durch Integration in bezug auf  $x$  folgt hieraus:

$$X(y) = -\int \Phi(x)dx + C,$$

unter  $C$  die Integrationskonstante verstanden. Ersetzen wir jetzt  $X(y)$  durch das Integral (3), so ergibt sich: *Hat sich bei der gegebenen Differentialgleichung unter Trennung der Variablen die Gestalt (2) erreichen lassen, so gewinnt man die Lösung  $y = f(x)$  in der einstweilen „unentwickelten“ Gestalt:*

$$(4) \quad \int \Phi(x)dx + \int \Psi(y)dy = C.$$

Eine Gleichung dieser Art, welche ein Integral der Gleichung (1) unentwickelt darstellt, heißt eine „Integralgleichung“ der vorgelegten Differentialgleichung. Da  $C$  willkürlich wählbar ist, so gewinnen wir bei der geometrischen Deutung eine „einfach unendliche“ Schar von „Integralkurven“, was mit den Ergebnissen von S. 262 in Übereinstimmung ist. Denken wir in der Gleichung (4) die Konstante  $C$  noch unbestimmt, so sagen wir, die Gleichung stelle das „allgemeine Integral“ oder die „allgemeine Lösung“ der Differentialgleichung dar. Jede Einzelauswahl von  $C$ , der also eine besondere Integralkurve entspricht, liefert ein sogenanntes „partikuläres Integral“ oder eine „partikuläre Lösung“. Diese Bezeich-

nungen werden wir auch bei anderen Differentialgleichungen in Anwendung bringen.

Statt der in (4) benutzten unbestimmten Integrale können wir uns auch der bestimmten Integrale bedienen; wir schreiben dann:

$$(5) \quad \int_a^x \Phi(\xi) d\xi + \int_b^y \Psi(\eta) d\eta = C,$$

wo  $\xi$  und  $\eta$  als Integrationsvariable benutzt sind und die unteren Grenzen in geeigneter Weise fest gewählt seien. Insofern man die Berechnung eines bestimmten Integrals nach S. 54 und 162 in einfachster Art durch die „Quadratur“ einer ebenen Kurve veranschaulichen kann, bezeichnet man auch wohl kurz die Berechnung eines bestimmten Integrals, ja auch diejenige eines unbestimmten Integrals als eine „Quadratur“. In diesem Sinne ist die Aussage zu verstehen, daß die Differentialgleichung (2) mit getrennten Variablen durch „zwei Quadraturen“ lösbar sei. Auch diese Sprechweise wollen wir in den späteren Fällen beibehalten.

Aufgaben: Man löse die folgenden Differentialgleichungen:

1.  $y'(x-3) = y-7$ . — Man findet durch Trennung der Variablen und Integration:

$$\frac{dx}{x-3} - \frac{dy}{y-7} = 0, \quad \ln\left(\frac{x-3}{y-7}\right) = C',$$

sowie durch Übergang vom Logarithmus zum Numerus:

$$\frac{x-3}{y-7} = e^{C'} = C, \quad x-3 - C(y-7) = 0.$$

Die Schar der Integralkurven ist also hier einfach das Geradenbüschel durch den Punkt (3, 7).

2.  $(x^2-3)y' - 2\sqrt{3} \cdot y = 0$ . — Durch Trennung der Variablen und Partialbruchzerlegung folgt:

$$\left(\frac{1}{x+\sqrt{3}} - \frac{1}{x-\sqrt{3}}\right) dx + \frac{dy}{y} = 0.$$

Die allgemeine Lösung ist:

$$\ln(x+\sqrt{3}) - \ln(x-\sqrt{3}) + \ln y = C''$$

und kann leicht umgerechnet werden in die Gestalt:

$$xy - Cx + \sqrt{3}y + C\sqrt{3} = 0.$$

Die Integralkurven stellen hier eine Schar gleichseitiger Hyperbeln dar, die in Fig. 78 angedeutet ist. Die zum Parameter  $C$  gehörende Hyperbel hat den Mittelpunkt  $(-\sqrt{3}, C)$ , durch den die Asymptoten parallel zu den Koordinatenachsen laufen. Während durch jeden endlichen Punkt mit  $|x| \neq \sqrt{3}$  nur eine Integralkurve hindurchläuft, ziehen durch den Punkt  $(\sqrt{3}, 0)$  alle Kurven hindurch und durch den Punkt  $(-\sqrt{3}, 0)$  deren zwei, falls man die beiden Geraden, in welche die zu  $C=0$  gehörende Hyperbel zerfällt, als je eine

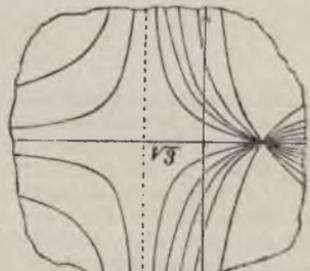


Fig. 78.

Integralkurve auffaßt. Man vergleiche das Ergebnis mit der allgemeinen Theorie (S. 261 ff.) durch Betrachtung der hier vorliegenden Funktionen:

$$\varphi(x, y) = \frac{2\sqrt{3y}}{x^2 - 3}, \quad \varphi' = \frac{2\sqrt{3}}{x^2 - 3}.$$

3.  $(x-1)y' + y^2 = 0$ . — Die allgemeine Lösung ist:

$$y(C + \ln(x-1)) = 1.$$

4. Man untersuche, ob es ebene Kurven gibt, bei denen in jedem Punkte  $(x, y)$  die in I, 287 dargestellte Strecke  $T$  der Tangente zwischen dem Berührungspunkte  $(x, y)$  und der  $x$ -Achse die konstante Länge 1 hat. — Nach (8) in I, 287 muß also für alle Werte  $x$  die Gleichung gelten:

$$\left| \frac{y\sqrt{1+y'^2}}{y'} \right| = 1, \quad y' = \pm \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Wir kleiden sie unter Trennung der Variablen in die Gestalt:

$$dx \mp \frac{\sqrt{1-y^2}}{y} dy = 0$$

und finden durch Integration:

$$\pm x = \sqrt{1-y^2} + \ln y - \ln(1 + \sqrt{1-y^2}) + C.$$

Wir gelangen zu einer Schar kongruenter Kurven, die auseinander durch Translation in Richtung der  $x$ -Achse hervorgehen. Es gibt also im wesentlichen nur eine Kurve der geforderten Art, nämlich die in I, 314 betrachtete und daselbst in Fig. 94 abgebildete „Traktrix“.

5. Man bestimme alle ebenen Kurven, bei denen die Polarsubtangente in bezug auf ein fest gewähltes Polarkoordinatensystem für alle Kurvenpunkte den konstanten positiven Wert  $a$  hat. — Nach der dritten Gleichung (3) in I, 291 drückt sich die geforderte Eigenschaft in den Polarkoordinaten  $r, \vartheta$  so aus:

$$r^2 = a \cdot |r'|,$$

wo  $r'$  die Ableitung von  $r$  in bezug auf  $\vartheta$  ist. Nehmen wir  $r$  als eine mit wachsendem  $\vartheta$  abnehmende Funktion an, so gilt:

$$a \frac{dr}{d\vartheta} + r^2 = 0, \quad a \frac{dr}{r^2} + d\vartheta = 0.$$

Durch Integration findet man  $r(\vartheta - C) = a$ . Für  $C=0$  gelangen wir zu der durch Fig. 61, in I, 280 dargestellten „hyperbolischen Spirale“. Die zu sonstigen Werten  $C$  gehörenden Kurven gehen aus der eben genannten Kurve durch Drehung um den Pol  $O$  hervor; die geforderte Eigenschaft besitzt also nur die hyperbolische Spirale.

6. Eine vertikal herabhängende Stange von kreisförmigem Querschnitt trägt an ihrem unteren Ende ein Gewicht  $P$ . In welcher Weise muß der Stangenquerschnitt nach oben zunehmen, wenn das Stangenmaterial in allen Querschnitten gleiche Beanspruchung auf Zug erfahren soll? —

Es gilt als selbstverständlich, daß die Stange eine geradlinige Achse hat, in bezug auf welche sie dann einen „Umdrehungskörper“ darstellt. Wir betrachten einen Querschnitt in der Höhe  $x$  über dem unteren Ende und bezeichnen den dortigen Querschnittsradius mit  $y$ . Wir können dann auch die Frage dahin stellen, wie  $y$  von  $x$  abhängen muß, oder welches die „Meridiankurve“ für die vorliegende Umdrehungsfläche sein muß.

In der Höhe  $x$  wirkt neben dem Gewichte  $P$  auch noch das Gewicht des

darunter befindlichen Teiles der Stange. Der Rauminhalt dieses Teiles ist nach (13) S. 193:

$$\pi \int_0^x y^2 dx.$$

Bezeichnen wir somit das spezifische Gewicht des Stangenmaterials mit  $\sigma$ , so wirkt im Querschnitt der Höhe  $x$  die Zugkraft:

$$P + \sigma \pi \int_0^x y^2 dx.$$

Diese Kraft verteilt sich gleichmäßig auf die Querschnittfläche, deren Inhalt  $\pi y^2$  ist. Soll demnach in allen Höhen  $x$  die gleiche Beanspruchung des Materials auf Zug vorliegen, so muß die eben berechnete Zugkraft zu  $\pi y^2$  proportional sein, d. h. es ist  $y$  als Funktion von  $x$  so zu bestimmen, daß:

$$P + \sigma \pi \int_0^x y^2 dx = \tau \pi y^2$$

gilt, unter  $\tau$  einen konstanten Faktor verstanden.

Differenzieren wir diese Gleichung in bezug auf  $x$ , so folgt:

$$\sigma y^2 = 2\tau y \cdot y', \quad 2\tau \frac{dy}{dx} = \sigma y.$$

Diese Differentialgleichung ist durch Trennung der Variablen leicht lösbar und liefert, wenn am unteren Ende  $x=0$  der Stange der Radius  $y_0$  vorliegt:

$$2\tau \ln\left(\frac{y}{y_0}\right) = \sigma x, \quad y = y_0 e^{\frac{\sigma}{2\tau} x},$$

so daß der Querschnittsradius nach einem „Exponentialgesetze“ zunehmen muß.

**4. Differentialgleichungen mit homogenen Funktionen.** Multipliziert man die Differentialgleichung  $y' = \varphi(x, y)$  mit  $\Psi(x, y)dx$ , unter  $\Psi(x, y)$  eine geeignet gewählte Funktion von  $x$  und  $y$  verstanden, und setzt man zur Abkürzung:

$$(1) \quad -\varphi(x, y) \Psi(x, y) = \Phi(x, y),$$

so nimmt die Differentialgleichung die Gestalt an:

$$(2) \quad \Phi(x, y)dx + \Psi(x, y)dy = 0,$$

welche die Gleichung (2) S. 270 als Spezialfall enthält und in vielen Fällen nützlich verwendet wird. Die beiden Funktionen  $\Phi(x, y)$  und  $\Psi(x, y)$  sind hierbei natürlich nur insoweit bestimmt, daß ihr negativer Quotient gleich der Funktion  $\varphi(x, y)$  ist.

Eine Funktion  $F(x, y)$  der Argumente  $x, y$  heiße „homogen von der Dimension  $\delta$ “, wenn sie der Bedingung genügt:

$$(3) \quad F(tx, ty) = t^\delta \cdot F(x, y).$$

So ist z. B. die Funktion  $F(x, y) = 3x^3 - 2xy^2 + y^3$  homogen von der Dimension 3 oder die Funktion:

$$F(x, y) = \frac{2xy}{x^3 - y^3} \ln\left(\frac{5x - y}{x}\right) + \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

homogen von der Dimension  $-1$ . Zwei homogene Funktionen der Dimensionen  $\delta_1$  und  $\delta_2$  liefern offenbar einen Quotienten, der homogen von der Dimension  $(\delta_1 - \delta_2)$  ist.

Es gilt nun folgender Satz: *Falls in der Differentialgleichung (2) die Funktionen  $\Phi(x, y)$  und  $\Psi(x, y)$  homogen von gleicher Dimension sind und also die Funktion  $\varphi(x, y)$  homogen von der Dimension  $\delta = 0$  ist, so ist die Differentialgleichung nach Einführung einer sogleich zu erklärenden, neuen abhängigen Variablen  $z$  an Stelle von  $y$  nach der Methode der Trennung der Variablen lösbar.* Führen wir nämlich an Stelle der Funktion  $y$  von  $x$  die Funktion  $z = y \cdot x^{-1}$  ein, so gilt:

$$(4) \quad y = xz, \quad y' = xz' + z,$$

und die Gleichung  $y' = \varphi(x, y)$  liefert die folgende Differentialgleichung zwischen  $x$  und  $z$ :

$$xz' + z = \varphi(x, xz) = x^0 \cdot \varphi(1, z) = \varphi(1, z) = \psi(z).$$

Man sagt im vorliegenden Falle auch wohl, *die Funktion  $\varphi(x, y)$  hänge nur vom Quotienten  $y : x$  ab.* Die Trennung der Variablen  $x$  und  $z$  ist sofort vollziehbar:

$$\frac{dx}{x} + \frac{dz}{z - \psi(z)} = 0,$$

und man erhält als „allgemeine Integralgleichung“:

$$(5) \quad \ln|x| + \int \frac{dz}{z - \psi(z)} = C,$$

wo nach Ausführung der Integration  $z$  wieder durch  $y \cdot x^{-1}$  ersetzt werden mag.

**Aufgaben:** 1.  $(2x + y)dx + xdy = 0$ . — Man wird als allgemeine Lösung  $x^2 + xy = C$  finden, die Schar der Hyperbeln darstellend, welche die  $y$ -Achse und die Gerade  $x + y = 0$  zu gemeinsamen Asymptoten haben.

2.  $2xy dx - (x^2 - y^2)dy = 0$ . — Man wird hier zu der Gleichung gelangen:

$$\ln|x| + \int \frac{z^2 - 1}{z^3 + z} dz = C'.$$

Das Integral berechnet sich am einfachsten durch Substitution einer neuen Variablen  $\vartheta$  vermöge der Gleichung  $z = \operatorname{tg} \vartheta$ . Man findet:

$$\int \frac{z^2 - 1}{z^3 + z} dz = \int (\operatorname{tg} \vartheta - \operatorname{cotg} \vartheta) d\vartheta = -\ln|\sin \vartheta \cdot \cos \vartheta| = \ln \frac{1 + z^2}{|z|},$$

worauf die allgemeine Integralgleichung die Form annimmt:

$$\ln \left| \frac{x(1+z^2)}{z} \right| = \ln \frac{x^2+y^2}{|y|} = C'$$

oder auch, wenn wir  $e^{C'} = C$  setzen:

$$x^2 + y^2 - Cy = 0.$$

Die Schar der Integralkurven besteht aus allen Kreisen, die die  $x$ -Achse im Nullpunkte berühren.

3. Ein Hohlspiegel habe die Gestalt einer Umdrehungsfläche. Wie muß dieselbe gewählt werden, wenn die parallel zur Achse der Fläche auffallenden Lichtstrahlen nach einem und demselben Punkte der Achse zurückgeworfen werden sollen? — Man wähle die Achse der Fläche zur  $x$ -Achse und das gemeinsame Konvergenzzentrum der Strahlen zum Nullpunkte  $O$ . Die Meridiankurve habe die zu suchende Gleichung  $y = f(x)$ . Ein parallel zur  $x$ -Achse auffallender Strahl treffe die Meridiankurve im Punkte  $P$  der Koordinaten  $x, y$  (s. Fig. 79). Da nach dem Reflexionsgesetze der „Reflexionswinkel“  $\sphericalangle OPR$  gleich dem „Einfallswinkel“ ist und letzterer gleich dem Winkel  $\sphericalangle ORP$  ist, so gilt  $\overline{OR} = \overline{OP}$ . Nun ist aber  $\overline{OR} + x$  die Subtangente  $\overline{RQ}$ , für welche wir nach (8) in I, 287 den Ausdruck  $y : y'$  besitzen. Da andererseits  $\overline{OR} = \overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$  ist, so folgt:

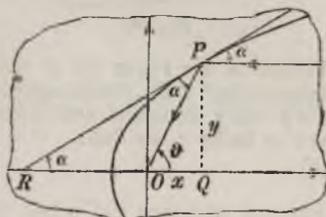


Fig. 79.

$$x + \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{y}{y'}$$

oder auch nach kurzer Umrechnung:

$$(6) \quad y' = \frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y}$$

mit positiv genommener Quadratwurzel.

Die der Vorschrift entsprechende Behandlung dieser Differentialgleichung führt, wenn wir auf die Möglichkeit negativer  $x$  Rücksicht nehmen, auf:

$$\ln |x| + \int \frac{z dz}{1+z^2 - \sqrt{1+z^2}} = C.$$

Um die Integration zu erleichtern, führen wir den Winkel  $\vartheta$  der Fig. 79, die „Amplitude“ des Punktes  $(x, y)$ , als neue Variable ein, indem wir  $z = \operatorname{tg} \vartheta$  setzen. Es folgt:

$$\int \frac{z dz}{1+z^2 - \sqrt{1+z^2}} = \int \frac{\operatorname{tg} \vartheta d\vartheta}{1 - \cos \vartheta} = - \int \frac{d \cos \vartheta}{\cos \vartheta - \cos^2 \vartheta} = \ln(1 - \cos \vartheta) - \ln |\cos \vartheta|.$$

Setzen wir demnach, um endgültig Polarkoordinaten einzuführen, auch noch  $x = r \cos \vartheta$ , so ergibt sich:

$$\ln(r \cdot |\cos \vartheta|) + \ln(1 - \cos \vartheta) - \ln |\cos \vartheta| = C.$$

Führen wir endlich  $e^C = p$  als neue Konstante ein, so nimmt das Ergebnis die Gestalt an:

$$(7) \quad r = \frac{p}{1 - \cos \vartheta},$$

womit wir die Polargleichung der Parabel gewonnen haben (vgl. „A. G.“ S. 64). Der Hohlspiegel muß also die Gestalt eines „Umdrehungsparaboloids“ haben.

4. Fig. 80 soll einen achsialen Schnitt einer Glaslinse darstellen, die auf der konkaven Seite kugelförmig geschliffen ist und auf der konvexen Seite eine Umdrehungsfläche hat, deren Achse durch die Kugelmittelpunkte läuft. Wie hat man die Umdrehungsfläche zu wählen, wenn parallel zur Achse auf die konvexe Fläche fallende Strahlen einfarbiges Lichtes senkrecht zur konkaven Fläche gebrochen werden sollen, so daß sie nach Austritt aus der Linse nach dem Mittelpunkte der Kugelfläche konvergieren? — Man wähle, wie Fig. 81 anzeigt, den Kugelmittelpunkt zum Nullpunkte  $O$  und die Linsenachse zur  $x$ -Achse. Ein einzelner Strahl treffe die Linse im Punkte  $P$  der Koordinaten  $x, y$ , in welchem  $PR$  die Normale der Meridiankurve  $y=f(x)$  ist. Der abgelenkte Strahl soll dann also  $PO$  sein. Die

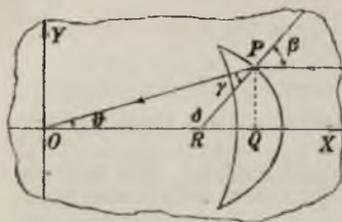


Fig. 80.

beiden in der Figur mit  $\beta$  und  $\gamma$  bezeichneten Winkel heißen in der Optik „Einfallswinkel“ und „Brechungswinkel“; nach dem Brechungsgesetze ist der Quotient  $\sin \beta : \sin \gamma$  konstant und liefert den „Brechungsindex“  $n$ .<sup>\*)</sup> Der reziproke Wert von  $n$  heiße  $c$ , so daß:

$$(8) \quad \sin \gamma = c \sin \beta$$

gilt und übrigens  $c < 1$  ist. Da im vorliegenden Falle  $y' < 0$  ist, so ist die Subnormale  $RQ$  nach der Gleichung (8) in I, 287 durch  $-yy'$  gegeben, so daß die Strecke  $OR = x + yy'$  ist. Da übrigens  $\sin \delta = \sin \beta$  ist, so folgt aus dem Sinussatze:

$$\overline{OR} : \overline{OP} = (x + yy') : +\sqrt{x^2 + y^2} = \sin \gamma : \sin \beta = c,$$

woraus die Differentialgleichung hervorgeht:

$$(9) \quad y' = \frac{-x + c\sqrt{x^2 + y^2}}{y}$$

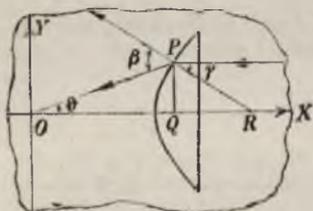


Fig. 81.

Diese Gleichung gestattet dieselbe Behandlung wie die Gleichung (6). Die Einführung der Polarkoordinaten führt zum Ergebnis:

$$r = \frac{y}{1 - c \cos \vartheta}$$

Die Meridiankurve ist also eine „Ellipse“, für welche  $O$  der „links liegende“ Brennpunkt ist und  $c$  die „numerische Exzentrizität“ darstellt.

Der Leser formuliere und löse eine entsprechende Aufgabe für eine plankonvexe Glaslinse an der Hand der Fig. 81.

**5. Lineare Differentialgleichungen.** Eine Differentialgleichung der Gestalt:

$$(1) \quad y' + \varphi(x)y = \psi(x),$$

die in der gesuchten Funktion  $y$  und ihrer Ableitung  $y'$  vom „ersten“

<sup>\*)</sup> Für die Natriumlinie und Flintglas ist  $n = 1,63 \dots$ ; s. übrigens I, 363.

Grade oder „linear“ ist, wird selbst als eine „*lineare Differentialgleichung*“ bezeichnet. Die von  $y$  und  $y'$  freien Glieder sind auf der rechten Seite der Gleichung (1) in den Ausdruck  $\psi(x)$  zusammengezogen. Ist  $\psi(x)$  mit 0 identisch, so heißt die lineare Differentialgleichung „*homogen*“, andernfalls „*nicht-homogen*“.

Die Funktionen  $\varphi(x)$  und  $\psi(x)$  mögen entweder für alle endlichen  $x$  oder doch in einem begrenzten Intervalle als eindeutig und stetig vorausgesetzt werden. Wir können dann in diesem Intervalle die Gleichung (1) leicht durch „*Quadraturen*“ lösen. Zunächst gestattet die *homogene* Gleichung:

$$(2) \quad y' + \varphi(x)y = 0, \quad \frac{dy}{y} + \varphi(x)dx = 0,$$

wie man sieht, die Anwendung der „*Methode der Trennung der Variablen*“. Die Integration liefert:

$$\ln |y| + \int \varphi(x)dx = \ln |y \cdot e^{\int \varphi(x)dx}| = C'$$

oder, wenn wir  $\pm e^{C'} = C$  als neue Konstante einführen:

$$(3) \quad y = Ce^{-\int \varphi(x)dx}.$$

In (3) haben wir das allgemeine Integral der homogenen linearen Differentialgleichung (2) vor uns, wobei also die willkürliche Konstante  $C$  (der „*Parameter*“ der Schar der Integralkurven) „*multiplikativ*“ auftritt. Die bei der Berechnung des Integrals von  $\varphi(x)dx$  verfügbare Konstante denken wir beliebig, aber bestimmt gewählt. Änderung des Integrales um die „*additive*“ Konstante  $c$  bewirkt Änderung der rechten Seite um den „*Faktor*“  $e^c$ , läuft also einfach auf eine Änderung der „*multiplikativen*“ Konstanten hinaus.

Weiter kann man die Lösung der *nicht-homogenen* Gleichung (1) nach der „*Methode der Variation der Konstanten*“ von Lagrange auf die Lösung der „*zugehörigen*“ homogenen Gleichung zurückführen. Als „*zugehörig*“ zu (1) bezeichnen wir die *homogene* Gleichung:

$$(4) \quad \eta' + \varphi(x)\eta = 0,$$

in welcher  $\varphi(x)$  dieselbe Funktion wie in (1) bedeutet, die rechte Seite identisch gleich 0 gesetzt ist und übrigens zum Unterschiede gegen die Lösung  $y$  der Gleichung (1) die abhängige Variable durch  $\eta$  bezeichnet wurde. Als partikuläres Integral  $\eta_0$  von (4) benutzen wir die Exponentialfunktion des Integrales von  $-\varphi(x)dx$ . Dann ist die „*allgemeine*“ Lösung von (4) einfach  $\eta = C\eta_0$ . Die genannte Methode besteht nun darin, daß man im Produkte  $C\eta_0$  an Stelle der Konstanten  $C$  eine von  $x$

abhängige Funktion  $z$  treten läßt und dieselbe so zu bestimmen sucht, daß das abgeänderte Produkt  $z\eta_0 = y$  die Gleichung (1) befriedigt. Tragen wir aber:

$$(5) \quad y = z\eta_0, \quad y' = z'\eta_0 + z\eta_0'$$

in (1) ein, so folgt:

$$z'\eta_0 + z\eta_0' + \varphi(x)z\eta_0 = z'\eta_0 + z(\eta_0' + \varphi(x)\eta_0) = \psi(x).$$

Da nun der hier mit  $z$  multiplizierte Ausdruck in der Klammer zufolge (4) identisch verschwindet, so ergibt sich, wenn wir für  $\eta_0$  noch seinen Exponentialausdruck eintragen:

$$(6) \quad \frac{dz}{dx} = \psi(x)e^{\int \varphi(x) dx}$$

Hieraus findet sich  $z$  durch eine einfache Integration:

$$z = C + \int (\psi(x)e^{\int \varphi(x) dx}) dx.$$

Die erste Gleichung (5) liefert also das Ergebnis: Die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung (1) ist durch „zwei Quadraturen“ in der Gestalt zu gewinnen:

$$(7) \quad y = e^{-\int \varphi(x) dx} \left( C + \int (\psi(x)e^{\int \varphi(x) dx}) dx \right).$$

Es könnte scheinen, daß den zwei Quadraturen entsprechend in der allgemeinen Lösung (7) zwei willkürliche Konstanten enthalten sind. Dies ist indessen nicht der Fall. Eine Änderung des Integrals von  $\varphi(x)dx$  um die additive Konstante  $c$  bewirkt nämlich das Auftreten des Faktors  $e^c$  im zweiten Gliede der Klammer in (7) und dasjenige des Faktors  $e^{-c}$  vor der Klammer. Indem wir also den letzteren Faktor in die Klammer hineinmultiplizieren, resultiert nur eine Änderung der Konstanten  $C$ , nämlich zu  $Ce^{-c}$ .

Beiläufig sei bemerkt, daß die als „Bernoullische Differentialgleichung“ bezeichnete Gleichung:

$$(8) \quad y' + \varphi(x)y = \psi(x)y^n$$

leicht auf eine lineare Differentialgleichung zurückführbar ist. Für  $n = 0$  und  $n = 1$  liegt unmittelbar eine solche vor. Für andere Werte  $n$  führen wir eine neue abhängige Variable  $z$  so ein:

$$(9) \quad z = y^{1-n}, \quad z' = (1-n)y^{-n}y', \quad (1-n)\frac{y'}{y} = \frac{z'}{z}.$$

Die Gleichung (8) kleidet sich in die Gestalt:

$$(10) \quad z' + (1-n)\varphi(x)z = (1-n)\psi(x),$$

womit wir für  $z$  eine „lineare Differentialgleichung“ erhalten haben.

Aufgaben: 1.  $(1 + x^2)y' = xy + 1$ . — Lösung:  $y = x + C\sqrt{1 + x^2}$ .

2.  $(x + 1)y' - 2y - (x + 1)^4 = 0$ . — Lösung:  $y = C(x + 1)^2 + \frac{1}{2}(x + 1)^4$ .

3.  $(1 + x^2)y' + y - a = 0$ . — Lösung:  $y = a + C \cdot e^{-\arctg x}$ .

4.  $y' - y \cos x = a \sin 2x$ . — Lösung:  $y = C \cdot e^{\sin x} - 2a(1 + \sin x)$ .

5. Eine lineare Differentialgleichung tritt bei der Untersuchung elektrischer Ströme wechselnder Stärke infolge der Selbstinduktion der Ströme auf. In den beiden Endpunkten  $A$  und  $B$  eines linearen Stromleiters werden durch geeignete Vorkehrungen Spannungszustände unterhalten, und zwar sei  $V$  der Überschuß der Spannung in  $A$  über diejenige in  $B$ , wobei übrigens  $V$  auch einen negativen Wert oder den Wert  $0$  haben darf. Ist  $R$  der Gesamtwiderstand des Leiters, so wird bei konstantem  $V$  zufolge des Ohmschen Gesetzes ein von  $A$  nach  $B$  laufender Strom der Stärke  $J = V \cdot R^{-1}$  erregt; die Bedeutung negativer Vorzeichen von  $V$  und  $J$  ist dabei einfach die, daß der Strom von  $B$  nach  $A$  fließt.

Ist nun  $V$  und damit auch  $J$  mit der Zeit veränderlich, so schreiben wir  $V(t)$  und  $J(t)$  als Funktionen der Zeit  $t$ . Es tritt dann durch „Selbstinduktion“ im Leiter eine „elektromotorische Gegenkraft“ auf, welche der durch  $V(t)$  gemessenen elektromotorischen Kraft entgegenwirkt. Diese Gegenkraft ist proportional der „Geschwindigkeit“ des Anwachsens von  $J(t)$ , d. i. gleich  $L \cdot \frac{dJ}{dt}$ , wo  $L$  eine Konstante, nämlich der sogenannte „Selbstinduktionskoeffizient“ des Stromleiters ist. An Stelle von  $V$  in der Gleichung des einfachen Ohmschen Gesetzes  $V = R \cdot J$  hat also die Differenz  $(V - L \cdot J')$  einzutreten, so daß das Gesetz zwischen der Spannung  $V(t)$  und der Stromstärke  $J(t)$  die Gestalt einer linearen Differentialgleichung annimmt:

$$(11) \quad \frac{dJ}{dt} + \frac{R}{L} J = \frac{1}{L} V(t).$$

Man nehme an, daß die Spannung „sinusartig“ wechsele:

$$V(t) = V_0 \cdot \sin qt,$$

unter  $V_0$  und  $q$  Konstante verstanden, und bestimme für diesen Fall das Gesetz der Stromstärke  $J(t)$ . — Man findet zunächst:

$$J(t) = e^{-\frac{R}{L}t} \left( C + \frac{V_0}{L} \int \sin qt \cdot e^{\frac{R}{L}t} dt \right).$$

Das Integral berechnet sich nach (9) S. 14 und führt auf:

$$J(t) = C \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V_0}{R^2 + q^2 L^2} (R \sin qt - qL \cos qt).$$

Schreiben wir zur Abkürzung:

$$\arctg \frac{qL}{R} = \varepsilon, \quad \cos \varepsilon = \frac{R}{\sqrt{R^2 + q^2 L^2}}, \quad \sin \varepsilon = \frac{qL}{\sqrt{R^2 + q^2 L^2}},$$

so nimmt die Formel für  $J(t)$  die Gestalt an:

$$(12) \quad J(t) = C \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + q^2 L^2}} \sin (qt - \varepsilon).$$

Der Wert der Konstanten  $C$  ist dadurch zu bestimmen, daß man etwa zur Zeit

$t = 0$  den Wert  $J(0)$  der Stromstärke vorschreibt. Übrigens hat  $R:L$  in der Praxis einen großen Wert, so daß das erste Glied in (12) rechts schnell gegen 0 abnimmt. Die Stromstärke verläuft also alsbald angenähert auch „sinusartig“; durch den Wert  $\varepsilon$  wird die „Phasenverschiebung“ oder „Nacheilung“ des Stromes hinter der Spannung gemessen.

Ist die Spannung zwar eine periodische Funktion von  $t$  mit der bisherigen Periode  $\frac{2\pi}{q}$ , ohne indessen einem einfachen Sinusgesetze zu folgen, so hat man sich zur Berechnung der Stromstärke der Fourierschen Reihen zu bedienen. Man untersuche z. B. den Fall, daß  $V(t)$  in der ersten Hälfte der Zeitperiode konstant gleich  $V_0$ , in der zweiten Hälfte gleich  $-V_0$  ist. — Man hat an die „reine Sinusreihe“ (8) S. 246 anzuknüpfen und wird als Entwicklung von  $V(t)$  finden:

$$V(t) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)qt}{2n+1}.$$

Für die Stromstärke ergibt sich der Ausdruck:

$$J(t) = C \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)qt - \varepsilon_n)}{(2n+1)\sqrt{R^2 + (2n+1)^2 q^2 L^2}},$$

wo  $\varepsilon_n$  die folgende Bedeutung hat:

$$\varepsilon_n = \arctg \frac{(2n+1)qL}{R}.$$

**6. Methode des integrierenden Faktors.** Es werde die S. 273 eingeführte Gestalt:

$$(1) \quad \Phi(x, y)dx + \Psi(x, y)dy = 0$$

der Differentialgleichung zugrunde gelegt, und es gelte die Voraussetzung, daß in einem der Betrachtung zugrunde zu legenden Bereiche  $B$  der  $x, y$ -Ebene die beiden Funktionen  $\Phi(x, y)$  und  $\Psi(x, y)$  eindeutig und stetig seien und ebensolche partielle Ableitungen erster Ordnung haben. Von der ursprünglichen Gestalt (1) S. 258 der Differentialgleichung aus sind die Funktionen  $\Phi$  und  $\Psi$  nur erst insoweit bestimmt, daß ihr negativer Quotient mit der auf der rechten Seite der Gleichung (1) S. 258 stehenden Funktion identisch ist. Wir können demnach bei einer und derselben Gleichung (1) S. 258 noch unbegrenzt viele Gestalten (1) erzielen, deren einzelne wir aus einer zunächst gewählten Gestalt (1) dadurch herstellen, daß wir die letztere mit irgend einer Funktion  $\mu(x, y)$  von  $x$  und  $y$  multiplizieren. Um die an die Funktionen  $\Phi$  und  $\Psi$  gestellten Forderungen beständig zu befriedigen, werden wir natürlich solche Funktionen  $\mu(x, y)$  wählen, die in  $B$  eindeutig und stetig sind und daselbst ebensolche Ableitungen  $\mu'_x, \mu'_y$  haben.

Wir stellen nun folgende Erklärung auf: *Eine Funktion  $\mu(x, y)$  soll*

ein „integrierender Faktor“\*) der Gleichung (1) heißen, wenn die mit  $\mu$  multiplizierte linke Seite der Gleichung:

$$(2) \quad \mu(x, y)\Phi(x, y)dx + \mu(x, y)\Psi(x, y)dy$$

bei unabhängig gedachten Variablen  $x, y$  ein „vollständiges Differential“ darstellt (s. I, 151). Hierzu ist, wenn wir uns der Abkürzungen:

$$(3) \quad \mu(x, y)\Phi(x, y) = \varphi(x, y)**), \quad \mu(x, y)\Psi(x, y) = \psi(x, y)$$

bedienen, nach (4) S. 147 hinreichend und notwendig, daß im Bereiche  $B$  die folgende Gleichung identisch besteht:

$$(4) \quad \varphi'_y(x, y) = \psi'_x(x, y).$$

Der Name „integrierender Faktor“ rechtfertigt sich dadurch, daß wir die Differentialgleichung unmittelbar zu integrieren imstande sind, falls wir auf irgend einem Wege die Kenntnis eines Faktors  $\mu(x, y)$  gewonnen haben. Wir können nämlich das vollständige Differential:

$$(5) \quad \varphi(x, y)dx + \psi(x, y)dy$$

nach den S. 146 ff. entwickelten Regeln im Bereiche  $B$  integrieren, sei es durch das daselbst unter (6) angegebene bestimmte Integral\*\*\*)) oder auch entsprechend der Regel (9) S. 150, die wir hier in der Gestalt:

$$(6) \quad f(x, y) = \int \varphi(x, y)dx + \int \left\{ \psi(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int \varphi(x, y)dx \right\} dy$$

wiederholen. Für die so gewonnene Funktion gilt dann:

$$(7) \quad f'_x(x, y) = \varphi(x, y), \quad f'_y(x, y) = \psi(x, y),$$

und es ist leicht einzusehen, daß wir in

$$(8) \quad f(x, y) = c \quad \text{oder} \quad f(x, y) - c = 0$$

eine Darstellung für das allgemeine Integral von (1) vor uns haben. Berechnen wir nämlich für die durch (8) gegebene unentwickelte Funktion  $y$  von  $x$  nach der Regel (6) in I, 159 die Ableitung, so folgt:

$$y' = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} = -\frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)} = -\frac{\Phi(x, y)}{\Psi(x, y)},$$

so daß diese Funktion  $y$  von  $x$  die Differentialgleichung wirklich befriedigt.

\*) oder „Eulerscher Multiplikator“.

\*\*\*) Es bedarf kaum eines Hinweises, daß die hiermit eingeführte Funktion  $\varphi(x, y)$  natürlich nicht die auf der rechten Seite von (1) S. 258 stehende Funktion  $\varphi(x, y)$  ist.

\*\*\*\*) Zur Vermeidung von Umständlichkeiten denken wir dann  $B$  als von einer geschlossenen Randkurve begrenzt.

In der Annahme, daß ein erster integrierender Faktor  $\mu(x, y)$  bereits gewonnen sei, schließen wir an die eben beendete Rechnung gleich noch folgende Betrachtung: Für die im Bereiche  $B$  auftretenden Integralkurven (8) wird der „Parameter“  $c$  Werte eines gewissen endlichen Intervalles zu durchlaufen haben. Wir verstehen unter  $\chi(c)$  eine in diesem Intervalle eindeutige und differenzierbare, im übrigen aber „willkürlich gewählte“ Funktion. Es besteht dann der Satz: *Wie auch im übrigen die Funktion  $\chi$  gewählt sein mag, stets ist mit  $\mu(x, y)$  auch:*

$$(9) \quad M(x, y) = \chi(f(x, y)) \mu(x, y)$$

ein integrierender Faktor. Setzen wir nämlich:

$$\bar{\varphi}(x, y) = M(x, y)\Phi(x, y) = \chi(f(x, y))\varphi(x, y),$$

$$\bar{\psi}(x, y) = M(x, y)\Psi(x, y) = \chi(f(x, y))\psi(x, y),$$

so folgt für die Ableitungen nach  $y$  bzw.  $x$ :

$$\bar{\varphi}'_y(x, y) = \chi(f(x, y)) \varphi'_y(x, y) + \chi'(f(x, y)) f'_y(x, y) \varphi(x, y),$$

$$\bar{\psi}'_x(x, y) = \chi(f(x, y)) \psi'_x(x, y) + \chi'(f(x, y)) f'_x(x, y) \psi(x, y),$$

die zufolge (4) und (7) sich in  $B$  als identisch erweisen. Das Kennzeichen (4) eines vollständigen Differentials ist also auch bei  $(\bar{\varphi}dx + \bar{\psi}dy)$  erfüllt.

Ist andererseits  $M(x, y)$  irgend ein zweiter integrierender Faktor, so möge derselbe durch das Integrationsverfahren zur Darstellung  $F(x, y) = C$  des allgemeinen Integrals führen. Dann ergibt sich aus:

$$F'_y(x, y) = M(x, y) \Psi(x, y), \quad f'_y(x, y) = \mu(x, y) \Psi(x, y)$$

die folgende, in  $B$  identisch bestehende Gleichung:

$$(10) \quad \frac{M(x, y)}{\mu(x, y)} = \frac{F'_y(x, y)}{f'_y(x, y)}.$$

Es ist nun leicht einzusehen, daß die hier rechts (und also auch links) stehende Funktion von  $x$  und  $y$  längs der einzelnen Integralkurve konstant ist. Tragen wir nämlich in (10) eine durch eine einzelne Gleichung (8) gegebene Funktion  $y$  von  $x$  ein, so ergibt sich aus (10) eine Funktion von  $x$  allein, deren Ableitung nach  $x$  mit 0 identisch ist, woraus die Behauptung hervorgeht. In der Tat berechnet sich die Ableitung jener Funktion von  $x$  als ein Quotient, dessen Zähler (bei Fortlassung der Argumente) die Gestalt annimmt:

$$(11) \quad f'_y(F''_{xy} + F''_{yy} \cdot y') - F'_y(f''_{xy} + f''_{yy} \cdot y') = f'_y F''_{xy} + f''_{yy} F'_x - f'_x F''_{yy} - f''_{xy} F'_y,$$

wie man mit Rücksicht auf die identischen Gleichungen:

$$y' = -\frac{f'_x(x, y)}{f''_y(x, y)} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$$

leicht feststellt.\*) Andererseits folgt, indem man die in  $B$  identisch bestehende Gleichung:

$$f'_y(x, y) F'_x(x, y) - f'_x(x, y) F'_y(x, y) = 0$$

partiell nach  $y$  differenziert:

$$f'_y F''_{xy} + f''_{yy} F'_x - f''_{xy} F''_{yy} - f''_{xy} F'_y = 0.$$

Der Ausdruck (11) ist also tatsächlich mit 0 identisch, so daß unsere Behauptung über die Funktion (10) zu Recht besteht.

Hiernach gehört zu jeder Kurve (8) und also zu jedem Werte des Parameters  $c$  ein bestimmter Wert des Quotienten (10). Wir wollen diese eindeutige Abhängigkeit des Wertes (10) als Funktion von  $c$  durch das Symbol  $\chi(c)$  bezeichnen. Für irgend einen Punkt  $(x, y)$  von  $B$  berechnen wir demnach den Wert (10), indem wir zunächst den Wert  $c = f(x, y)$  für diesen Punkt ausrechnen und diesen Wert als Argument in  $\chi(c)$  eintragen, d. h. es gilt:

$$(12) \quad \frac{M(x, y)}{\mu(x, y)} = \chi(f(x, y)).$$

Übrigens ist die Differenzierbarkeit von  $\chi$  eine Folge derjenigen von  $\mu$ ,  $M$  und  $f$ . Wir sind damit zu dem Ergebnis gelangt, daß jeder integrierende Faktor  $M(x, y)$  der Differentialgleichung (1) durch den ersten Faktor  $\mu(x, y)$  und die zugehörige Funktion  $f(x, y)$  in der Gestalt (9) darstellbar ist.

Die Möglichkeit, daß die Funktion  $\chi$  mit einer Konstanten identisch ist, schließen wir nicht aus. Liegt sie vor, so unterscheiden sich die beiden Funktionen  $M(x, y)$  und  $\mu(x, y)$  eben selbst nur um einen konstanten Faktor. Kommen aber dem Quotienten (10) Werte zu, die nur längs der einzelnen Kurve konstant sind, jedoch von Kurve zu Kurve wechseln, so kommt der einzelne dieser Werte  $C$  eben nur einer Kurve zu. Unter diesen Umständen erkennen wir in der Gleichung:

$$(13) \quad M(x, y) - C\mu(x, y) = 0$$

eine aus den beiden integrierenden Faktoren aufgebaute neue Darstellungsart des allgemeinen Integrals unserer Gleichung (1).

Umständlicher ist der Beweis der Existenz eines ersten Faktors  $\mu(x, y)$ . Man pflegt denselben auf den Existenzbeweis der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung zurückzuführen. Wir haben oben (S. 262) von den verschiedenen Punkten  $(a, c)$  einer zur  $y$ -Achse parallelen Geraden  $x = a$  aus eine Schar von Integralkurven konstruiert.\*\*\*) Bei der

\*) Man beachte, daß aus den Voraussetzungen betreffs  $\Phi, \Psi, \mu, M$  die Existenz der zweiten Ableitungen von  $f$  und  $F$  folgt.

\*\*) Für die Ordinate des Punktes  $(a, c)$  ist hier zum besseren Anschluß an die vorliegenden Entwicklungen statt  $b$  die Bezeichnung  $c$  gebraucht.

einzelnen Kurve ist die zur Abszisse  $x$  gehörende Ordinate  $y$  neben diesem  $x$  von der Anfangsordinate  $c$  abhängig; in diesem Sinne werde  $y$  als Funktion zweier Argumente  $x, c$  so geschrieben:

$$(14) \quad y = g(x, c).$$

Durch diese Gleichung können wir  $c$  unentwickelt als Funktion von  $x$  und  $y$  erklärt denken. Schreiben wir diese Funktion in entwickelter Gestalt  $c = f(x, y)$ , so gelte die Annahme, daß wir dabei zu einer Funktion  $f(x, y)$  gelangen, die im Bereiche  $B$  eindeutig und stetig ist und ebensolche Ableitungen der ersten und zweiten Ordnung besitzt.\*) Dann gilt, da wir in  $f(x, y) - c = 0$  eine Darstellung des allgemeinen Integrals haben:

$$y' = - \frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} = - \frac{\Phi(x, y)}{\Psi(x, y)}$$

als identische Gleichung, und wir haben in:

$$\mu(x, y) = \frac{f'_x(x, y)}{\Phi(x, y)} = \frac{f'_y(x, y)}{\Psi(x, y)}$$

einen ersten integrierenden Faktor gewonnen.

Zur wirklichen Berechnung eines integrierenden Faktors  $\mu(x, y)$  für eine gegebene Gleichung (1) kann man so vorgehen, daß man für die beiden Funktionen  $\varphi = \mu\Phi$ ,  $\psi = \mu\Psi$  das hinreichende und notwendige Kennzeichen (4) eines vollständigen Differentials ansetzt. Dies führt nach kurzer Zwischenrechnung zu der Relation:

$$(15) \quad \Psi(x, y) \frac{\partial \mu}{\partial x} - \Phi(x, y) \frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu(\Psi'_x(x, y) - \Phi'_y(x, y)) = 0,$$

welche die beiden „unabhängigen Variablen“  $x, y$ , die „abhängige Variable“  $\mu$  und die partiellen Ableitungen erster Ordnung von  $\mu$  nach  $x$  und  $y$  verbindet. Der bisherigen Bezeichnung entspricht es, wenn wir die Gleichung (15) eine „homogene lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung“ nennen. Indem wir auch den Begriff der „Lösung“ auf diese Gleichung anwenden, ist nach dem Bisherigen folgender Satz einleuchtend: *Jeder integrierende Faktor  $\mu(x, y)$  der Gleichung (1) ist eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (15), und umgekehrt ist jede solche Lösung auch ein integrierender Faktor von (1).*

Der Wert dieses Ergebnisses erscheint zunächst insofern illusorisch, als die Auflösung der *partiellen* Differentialgleichung (15) im allgemeinen ein weit schwierigeres Problem als diejenige der *gewöhnlichen* Differentialgleichung (1) ist. In besonderen Fällen kann aber die Gleichung (15)

\*) Die allgemeine Prüfung der Berechtigung dieser Annahme auf Grundlage der Entwicklungen in § 2 (S. 265 ff.) würde uns hier zu weit führen.

zugänglicher sein als die Gleichung (1). Wir wollen, unter  $z = \omega(x, y)$  eine geeignet gewählte Funktion von  $x$  und  $y$  verstanden, die Annahme machen, es seien  $\Phi$  und  $\Psi$  speziell so gebaut, daß sich der Quotient:

$$(16) \quad -\frac{\Psi'_x - \Phi'_y}{\Psi \cdot \omega'_x - \Phi \cdot \omega'_y} = X(z)$$

als eine Funktion  $X(z)$  von  $z = \omega(x, y)$  allein schreiben läßt. Dann gibt es einen bis auf eine multiplikative Konstante bestimmten Faktor  $\mu$ , der gleichfalls von  $z$  allein abhängt und durch eine Quadratur in der Gestalt:

$$(17) \quad \mu(\omega(x, y)) = e^{\int X(z) dz}$$

berechenbar ist. Für dieses  $\mu$  gilt nämlich:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dz} \omega'_x = \mu \frac{d \ln \mu}{dz} \omega'_x = \mu X(z) \omega'_x,$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{dz} \omega'_y = \mu \frac{d \ln \mu}{dz} \omega'_y = \mu X(z) \omega'_y;$$

$\mu(\omega(x, y))$  befriedigt also, wie man mit Hilfe von (16) feststellt, tatsächlich die Gleichung (15). Die beiden wichtigsten Spezialfälle dieses Ergebnisses sind die, daß  $\omega(x, y)$  entweder mit  $x$  oder mit  $y$  identisch ist. Sie ergeben den Satz: Fällt aus dem Quotienten  $(\Psi'_x - \Phi'_y) : \Psi$  die Variable  $y$  heraus, so daß eine Funktion von  $x$  allein restiert, so ist:

$$(18) \quad \mu(x) = e^{-\int \frac{\Psi'_x - \Phi'_y}{\Psi} dx}$$

ein integrierender Faktor; ist aber  $(\Psi'_x - \Phi'_y) : \Phi$  eine Funktion von  $y$  allein, so ist:

$$(19) \quad \mu(y) = e^{+\int \frac{\Psi'_x - \Phi'_y}{\Phi} dy}$$

ein integrierender Faktor von (1).

Aufgaben: 1)  $(2x^2y + 2y + 5) dx + (2x^3 + 2x) dy = 0$ . — Es existiert ein von  $x$  allein abhängender integrierender Faktor; die allgemeine Lösung ist:

$$2xy + 5 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = C.$$

2)  $(2xy^2 - 3y^3) dx + (7 - 3xy^2) dy = 0$ . — Es existiert ein von  $x$  freier Faktor; als allgemeine Lösung wird man finden  $x^2y - 3xy^2 + Cy - 7 = 0$ .

3)  $(x + y) dx - (x - y) dy = 0$ . — Es gibt einen allein von der Funktion  $\omega(x) = x^2 + y^2$  abhängenden Faktor  $\mu$ ; Lösung:  $\ln(x^2 + y^2) + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{y} = C$ .

4) Für die „lineare“ Differentialgleichung:

$$(y\varphi(x) - \psi(x)) dx + dy = 0$$

existiert ein von  $x$  allein abhängender Faktor. — Man führe die Integration durch und muß zur Gleichung (7) S. 278 zurückgelangen.

**7. Hauptsätze der Wärmelehre.** Die Begriffe des vollständigen Differentials und des integrierenden Faktors finden Verwendung bei der Entwicklung der „Hauptsätze“ der „mechanischen Wärmetheorie“. Der Zustand eines in einem Behälter eingeschlossenen homogenen Gases, dessen Gewicht gleich der Gewichtseinheit (1 kg) sei, wird durch drei Größen bestimmt, den Rauminhalt oder das Volumen  $v$  des vom Gase angefüllten Behälters, den Druck  $p$  des Gases etwa auf die Flächeneinheit der Umwandung und die in der „absoluten“ Skala gemessene Temperatur  $T$  des Gases. Diese drei „Zustandsgrößen“ sind in der Art aneinander gebunden, daß durch willkürliche Auswahl zweier unter ihnen die dritte Größe eindeutig mitbestimmt ist. Als Näherungsformel für die hierbei vorliegende Abhängigkeit benutzte man früher ausschließlich:

$$(1) \quad p \cdot v = R \cdot T,$$

wo  $R$  eine für das Gas charakteristische Konstante ist. Diese Formel ist indessen nur brauchbar bei kleinen Werten  $p$  und entsprechend großen Werten  $v$ . In der neueren Thermodynamik hat die Untersuchung stark komprimierter Gase, bei denen übrigens der früher als grundsätzlich erachtete Unterschied zwischen dem gasförmigen und dem flüssigen Aggregatzustande mehr und mehr hinweggeräumt wurde, zur Unbrauchbarkeit des Gesetzes (1) bei großen Werten  $p$  und entsprechend kleinen Werten  $v$  geführt. An Stelle von (1) ist als Näherungsgesetz jetzt die sogenannte „Zustandsgleichung“ von van der Waals getreten:

$$(2) \quad \left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = R \cdot T,$$

in welcher  $a$  und  $b$  zwei weitere für das Gas charakteristische Konstante sind.\*) Diese Gleichung ist die Grundlage der neueren Thermodynamik geworden. Übrigens sei zunächst nur die Existenz einer Zustandsgleichung ohne eine besondere Annahme über ihre Gestalt vorausgesetzt; weiter unten mag jedoch die Gleichung (1) als hinreichend genau gelten.

Wärmemengen bezeichnen wir, in der mechanischen Einheit gemessen, allgemein durch  $Q$ , sehr kleine Wärmemengen durch  $dQ$ . Führen wir dem Gase ohne Änderung des Volumens  $v$  eine Wärmemenge zu, so steigt die Temperatur nach einem gewissen Gesetze, das wir zunächst als durch den vorliegenden und konstant gedachten Wert  $v$  mitbedingt anzunehmen haben. Den reziproken Wert der Ableitung dieser Funktion  $T$  von  $Q$  in bezug auf  $Q$  bezeichnet man durch  $c_p$  und nennt ihn die „spezifische Wärme“ des Gases bei konstantem Volumen. Die Bedeutung der Benennung leuchtet ein, insofern wir bei einer sehr kleinen Wärmezufuhr  $dQ$  zwischen ihr und der zugehörigen Temperaturerhöhung  $dT$  die Näherungsgleichung finden:

$$(3) \quad dQ = c_p \cdot dT,$$

so daß bei konstant gedachtem  $c_p$  dieser Wert  $c_p$  die Wärmemenge sein würde, die eine Erhöhung der Gastemperatur um einen Grad bewirken würde. Wir dachten eben  $c_p$  als eine durch  $v$  mitbedingte Funktion von  $Q$ , können indessen wegen der gerade besprochenen Beziehung zwischen  $Q$  und  $T$  die Größe  $c_p$  auch als Funktion von  $v$  und  $T$  und damit überhaupt als Funktion irgend zweier unter den drei Zustandsgrößen  $p$ ,  $v$  und  $T$  auffassen.

Gibt die Wandung des Gefäßes dem Drucke  $p$  in der Weise nach, daß eine Vergrößerung des Volumens um den sehr kleinen Betrag  $dv$  eintritt, so leistet hierbei das Gas eine durch das Produkt  $p \cdot dv$  gemessene „Arbeit“ und verliert dementsprechend an „innerer Energie“. Dieser Verlust tritt als Verminderung der Temperatur um einen bestimmten Betrag  $dT$  in die Erscheinung und kann demnach durch Zuführung einer bestimmten Wärmemenge  $dQ$  wieder ersetzt werden. Es läuft dies darauf hinaus, daß wir bei Zufuhr einer sehr kleinen Wärmemenge  $dQ$

\*) Für sehr große Werte von  $v$  kommt die Gleichung (2) auf (1) zurück.

eine Volumenvermehrung um einen bestimmten sehr kleinen Betrag  $dv$  bei konstanter Temperatur  $T$  erzeugen können. Der „Differentialquotient“  $dQ:dv$  wird dabei durch den Anfangszustand bedingt sein; wenn wir also an die Gleichung (3) die weitere Gleichung:

$$(4) \quad dQ = l \cdot dv$$

anreihen, so haben wir auch hier den Faktor  $l$  als eine Funktion irgend zweier unter den drei Zustandsgrößen aufzufassen.

Es werde jetzt ein erster Teil  $dQ_1$  einer sehr kleinen Wärmemenge  $dQ$  zur Erhöhung der Temperatur bei konstantem Volumen  $v$  zugeführt, während der Rest  $dQ_2 = dQ - dQ_1$  zur Vergrößerung von  $v$  um  $dv$  bei konstanter Temperatur verwandt werde. Dann gilt  $dQ_1 = c_v dT$ , wo als Argumente von  $c_v$  die anfänglichen Zustandsgrößen gelten, während in  $dQ_2 = l dv$  als Argumente von  $l$  nur das ursprüngliche  $v$ , aber der um  $dT$  vergrößerte ursprüngliche Wert  $T$  eintritt. Sind indessen  $dQ_1$  und damit  $dT$  außerordentlich klein, so können wir angenähert auch in  $l$  als Argumente die ursprünglichen Zustandsgrößen denken. Dann aber haben wir das Ergebnis: *Wird unter Zuführung einer sehr kleinen Wärmemenge  $dQ$  eine Zustandsänderung des Gases bewirkt, bei der  $T$  und  $v$  sich gleichzeitig um  $dT$  und  $dv$  ändern, so ist:*

$$(5) \quad dQ = c_v dT + l dv,$$

wo  $c_v$  und  $l$  die beiden besprochenen Funktionen der Zustandsgrößen sind und die ursprünglichen Werte dieser Größen als Argumente gelten. Die beiden Teilmengen  $dQ_1$  und  $dQ_2$  sind bei der vorstehenden Überlegung nur der Einfachheit wegen positiv gedacht; die Betrachtung überträgt sich sofort auch auf negative und verschwindende Werte dieser Wärmemengen.

Ehe wir die Relation (5) weiter verfolgen, bemerken wir, daß der rechtsstehende zweigliedrige Ausdruck zufolge der Zustandsgleichung noch in zwei andre Gestalten gesetzt werden kann. Der gleichzeitigen Änderung zweier unter den drei Zustandsgrößen entspricht auf Grund jener Gleichung eine Änderung der dritten Größe, die wir nach der Regel der „vollständigen Differentiale“ berechnen können. Hiernach gilt erstlich für  $T$  und  $p$  als unabhängige Variable:

$$dv = \frac{\partial v}{\partial p} dp + \frac{\partial v}{\partial T} dT.$$

Tragen wir diesen Ausdruck in (5) ein, so folgt:

$$dQ = \left( c_v + l \frac{\partial v}{\partial T} \right) dT + l \frac{\partial v}{\partial p} dp,$$

eine Gleichung, der wir unter Gebrauch der Abkürzungen:

$$(6) \quad c_v + l \frac{\partial v}{\partial T} = c_p, \quad l \frac{\partial v}{\partial p} = L$$

die folgende Gestalt verleihen:

$$(7) \quad dQ = c_p dT + L dp.$$

Die hier durch  $c_p$  bezeichnete Funktion der Zustandsgrößen heißt „spezifische Wärme“ des Gases bei konstantem Drucke.\*) Endlich hat man für  $p$  und  $v$  als unabhängige Variable:

$$dT = \frac{\partial T}{\partial p} dp + \frac{\partial T}{\partial v} dv.$$

\*) Wegen Begründung dieser Benennung vgl. man die an (3) angeschlossene Bemerkung.

Hieraus ziehen wir unter Benutzung der Abkürzungen:

$$(8) \quad c_v \frac{\partial T}{\partial p} = P, \quad l + c_v \frac{\partial T}{\partial v} = V$$

die an (5) und (7) sich anschließende Relation:

$$(9) \quad dQ = P dp + V dv.$$

Auch durch die Eintragung des eben benutzten Ausdrucks von  $dT$  in (7) muß man zur Relation (9) gelangen. Man erkennt auf diesem Wege, daß sich die beiden Funktionen  $P$  und  $V$  der Zustandsgrößen durch die beiden „spezifischen Wärmen“  $c_p$  und  $c_p$  mittelst der Zustandsgleichung so darstellen:

$$(10) \quad P = c_p \frac{\partial T}{\partial p}, \quad V = c_p \frac{\partial T}{\partial v}.$$

Wir gelangen nun zu den Hauptsätzen der Wärmelehre, indem wir auf die in (5), (7) und (9) rechts stehenden Summen die Begriffe des „integrierenden Faktors“, des „vollständigen Differentials“ und der „Integration“ eines solchen anwenden. Sehen wir in (9)  $P$  und  $V$  als Funktionen der beiden Zustandsgrößen  $p$  und  $v$  an, so sagt der „erste Hauptsatz“: *Es ist zwar nicht  $(P dp + V dv)$ , wohl aber die Differenz:*

$$(11) \quad dU = dQ - p dv = P dp + (V - p) dv$$

ein „vollständiges Differential“, oder mit anderen Worten, es gilt die Relation:

$$(12) \quad \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial(V - p)}{\partial p} = \frac{\partial V}{\partial p} - 1.$$

Nach S. 146 ff. gewinnt man also durch Integration des Differentials (11) eine nur von der oberen Grenze des Integrals abhängende eindeutige Funktion  $U$  des Gaszustandes, die als „Energie“ desselben bezeichnet wird und hier natürlich nur erst bis auf eine additive Konstante bestimmt ist.

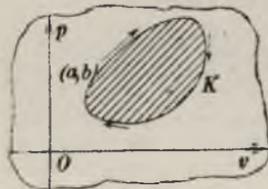


Fig. 82.

Deuten wir  $v$  als Abszisse und  $p$  als Ordinate eines rechtwinkligen Systems, so legt der einzelne „Punkt“  $(v, p)$  einen bestimmten Gaszustand fest. Führen wir den Punkt  $(v, p)$  von einer Anfangsstelle  $(a, b)$  über die in Fig. 82 gezeichnete Kurve  $K$  in der angegebenen Pfeilrichtung zum Punkte  $(a, b)$  zurück, so ist hierdurch eine geschlossene Veränderung des Gaszustandes vom Anfangszustande zu ihm zurück festgelegt. Die Physik bezeichnet solche Veränderungen als „Kreisprozesse“. Nach den Sätzen von S. 148 ist das über die geschlossene Kurve ausgedehnte Integral des vollständigen Differentials  $dU$  gleich 0. Wir erhalten also:

$$(13) \quad \int^{(K)} dU = \int^{(K)} (dQ - p dv) = \int^{(K)} dQ - \int^{(K)} p dv = 0.$$

Das Integral von  $dQ$  ist die gesamte während des Kreisprozesses dem Gase zugeführte Wärmemenge; das Integral von  $p \cdot dv$  aber stellt die vom Gase geleistete „Arbeit“ dar, deren Größe übrigens durch den in Fig. 82 schraffierten, von  $K$  umschlossenen Flächeninhalt dargestellt wird.\*) *Den vom Gase während des Kreisprozesses geleistete Arbeit ist also gleich der zugeführten Wärmemenge.*

\*) S. die Entwicklungen von S. 162 ff. über Ausmessung ebener Flächen.

Schließen wir die Aussage des ersten Hauptsatzes an die Darstellung (5) von  $dQ$ , so kleidet sich diese Aussage in die Gestalt der folgenden Gleichung:

$$(14) \quad \frac{\partial c_v}{\partial v} = \frac{\partial l}{\partial T} - \frac{\partial p}{\partial T}.$$

Diese Gleichung ist für den „zweiten Hauptsatz“ wichtig, welcher an die Annahme von  $T$  und  $v$  als unabhängige Variable angeschlossen werden mag und folgendes aussagt: *Das in (5) rechts stehende Differential hat einen von  $T$  allein abhängenden integrierenden Faktor, nämlich  $T^{-1}$ .* Die Integration des Differentials:

$$(15) \quad dS = \frac{dQ}{T} = \frac{c_v}{T} dT + \frac{l}{T} dv$$

liefert also eine zweite, hier wieder nur erst bis auf eine additive Konstante bestimmte, *eindeutige Funktion  $S$  des Gaszustandes*, die man als die „*Entropie*“ des Gases bezeichnet. Die Bedingung (4) S. 281 kleidet sich für das vollständige Differential (15) nach kurzer Rechnung in die Gestalt:

$$(16) \quad \frac{\partial c_v}{\partial v} = \frac{\partial l}{\partial T} - \frac{l}{T}$$

und kann demnach auf Grund des ersten Hauptsatzes (14) auch so geschrieben werden:

$$(17) \quad \frac{\partial p}{\partial T} = \frac{l}{T}.$$

Die entwickelten Formeln nehmen sehr einfache Gestalten an, falls sich die Zustandsgrößen in einem Gebiete bewegen, in dem wir die Gleichung (1) als hinreichend genau ansehen dürfen. Aus ihr und der Gleichung (17) folgt:

$$p = R \frac{T}{v}, \quad \frac{l}{T} = \frac{\partial p}{\partial T} = \frac{R}{v}, \quad l = R \frac{T}{v} = p.$$

Weiter folgt aus (1) und der zweiten Gleichung (6):

$$v = R \frac{T}{p}, \quad L = l \frac{\partial v}{\partial p} = -Rl \frac{T}{p^2} = -R \frac{T}{p}, \quad L = -v.$$

Die Funktion  $c_v$ , als solche von  $v$  und  $T$  angesehen, genügt der Gleichung (14). Da  $l = p$  ist, so ist die partielle Ableitung von  $c_v$  nach  $v$  mit 0 identisch, so daß  $c_v$  eine Funktion von  $T$  allein ist. Mit Hilfe der ersten Gleichung (6) finden wir endlich:

$$c_p = c_v + l \frac{\partial v}{\partial T} = c_v + p \cdot \frac{R}{p}, \quad c_p = c_v + R.$$

*Darf die Gleichung (1) als Zustandsgleichung für hinreichend genau gelten, so ist  $c_v$  eine Funktion von  $T$  allein, und die drei Gleichungen für  $dQ$  nehmen die Gestalten an:*

$$(18) \quad \begin{cases} dQ = c_v dT + p dv, \\ dQ = (c_v + R) dT - v dp, \\ dQ = \frac{vc_v}{R} dp + \frac{p(c_v + R)}{R} dv. \end{cases}$$

Die Differentiale  $dU$  und  $dS$  schreiben sich jetzt so:

$$dU = c_v dT, \quad dS = \frac{c_v}{T} dT + R \frac{dv}{v}.$$

so daß wir bis auf zwei additive Konstante  $C$  und  $C'$  die Energie und Entropie dargestellt finden durch:

$$U = \int c_v dT + C, \quad S = \int \frac{c_p}{T} dT + R \ln v + C'.$$

Die einzige hier noch vorkommende unbekanntete Funktion  $c_v$  von  $T$  allein darf nun gar noch als *konstant* gelten, wie die Versuche gezeigt haben. *Daraus aber ergeben sich folgende einfache Ausdrücke für die Energie und die Entropie des Gases:*

$$(19) \quad U = c_v T + C, \quad S = c_p \ln T + R \ln v + C'.$$

### S. Differentialgleichungen höheren Grades und singuläre Lösungen.

Es sei eine Differentialgleichung der Gestalt:

$$(1) \quad y'^2 + y' \varphi(x, y) + \psi(x, y) = 0$$

vorgelegt, in welcher  $\varphi(x, y)$  und  $\psi(x, y)$  in einem der Betrachtung zugrunde zu legenden Bereiche  $B$  der  $x, y$ -Ebene eindeutige und stetige Funktionen seien und ebensolche Ableitungen in bezug auf  $y$  haben. Insofern die Gleichung (1) in  $y'$  vom zweiten Grade ist, nennen wir sie eine *Differentialgleichung „zweiten Grades“*.

Löst man die Gleichung (1) nach  $y'$  auf, so nimmt sie die folgende Gestalt an:

$$(2) \quad y' = -\frac{1}{2} \varphi(x, y) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\varphi(x, y)^2 - 4\psi(x, y)}.$$

Durch Nullsetzen des Radikanden:

$$(3) \quad \varphi(x, y)^2 - 4\psi(x, y) = 0$$

werde eine  $B$  durchziehende Kurve dargestellt, die wir als „*Diskriminantenkurve*“ von (1) bezeichnen. Indem wir annehmen, daß beim Überschreiten dieser Kurve  $K$  die Werte des Radikanden Vorzeichenwechsel erfahren, dürfen wir entsprechend diesem Vorzeichen einen Teilbereich  $B_+$  mit positivem Vorzeichen des Radikanden und einen solchen  $B_-$  mit negativem unterscheiden, die dann durch die Kurve  $K$  getrennt sind. Innerhalb  $B_+$  gewinnen wir in (2) für jedes der beiden Vorzeichen eine Differentialgleichung, die den Vorbedingungen der Entwicklung von S. 265 ff. genügt. Für einen Punkt  $(x, y)$  von  $K$  selbst aber sind diese Vorbedingungen nicht mehr erfüllt, da hier die partielle Ableitung von (2) in bezug auf  $y$  unendlich werden kann. Ebenso bestehen die Vorbedingungen nicht mehr in  $B_-$ , insofern hier  $y'$  nicht mehr reell ist. Es folgt: *Durch einen Punkt  $(x, y)$  im Innern von  $B_+$  ziehen je zwei Integralkurven der Gleichung (1) hindurch, das Innere von  $B_-$  ist frei von Integralkurven.*

Nähert sich ein Punkt  $(x, y)$  in  $B_+$  einem Punkte  $(x_0, y_0)$  der Kurve  $K$  an, so nähern sich die beiden zu  $(x, y)$  gehörenden Werte  $y'$  stetig dem gemeinsamen Grenzwerte  $-\frac{1}{2} \varphi(x_0, y_0)$ . Der Verlauf der Integralkurven

kann demnach so sein, daß jeder Punkt von  $K$  eine „Spitze“ oder ein „Rückkehrpunkt“ für eine in  $B_+$  verlaufende Integralkurve ist, wie dies Fig. 83 skizziert (s. I, 317). Wir können auch sagen, daß jetzt von jedem Punkte der Kurve  $K$  zwei Integralkurven ausziehen, die sich in jenem Punkte berühren, und die natürlich den beiden Differentialgleichungen (2) zugehören. Insbesondere kann aber auch der in Fig. 84 angedeutete Fall vorliegen, daß die Kurve  $K$  im Sinne von I, 358 ff. eine „Hüllkurve“ der Schar der Integralkurven darstellt. In diesem Falle finden wir nach I, 361 aus der Gleichung  $f(x, y, C) = 0$  der Schar der Integralkurven (der „allgemeinen Lösung“ von (1)) die Gleichung der Diskriminantenkurve  $K$ , indem wir zwischen den beiden Gleichungen:

$$(4) \quad f(x, y, C) = 0, \quad \frac{\partial f(x, y, C)}{\partial C} = 0$$

den „Parameter“  $C$  eliminieren. Da jetzt die Kurve  $K$  in jedem Punkte  $(x_0, y_0)$  von einer partikulären Integralkurve berührt wird, so hat das für die Kurve  $K$  berechnete  $y'$  in jedem Punkte dieser Kurve den daselbst für eine Integralkurve charakteristischen, d. h. durch die Differentialgleichung vorgeschriebenen Wert. Es ist somit, falls die Schar der Integralkurven eine Hüllkurve besitzt, diese letztere selbst eine Integralkurve der Differentialgleichung (1) und ergibt demnach eine Lösung dieser Gleichung. Insofern diese Lösung nicht aus dem allgemeinen Integrale (4) vermöge besonderer Auswahl von  $C$  ableitbar ist, wird sie als eine „besondere“ oder „singuläre Lösung“ oder als ein „singuläres Integral“ der Differentialgleichung bezeichnet.

Die vorstehenden Betrachtungen wiederholen sich in einer algebraisch entsprechend umständlicheren Gestalt auch bei Differentialgleichungen höheren als zweiten Grades. Eine „Differentialgleichung  $n^{\text{ten}}$  Grades“ sei gegeben durch:

$$(5) \quad y'^n + y'^{n-1} \varphi_1(x, y) + y'^{n-2} \varphi_2(x, y) + \dots + \varphi_n(x, y) = 0.$$

Berechnen sich für die Umgebung einer Stelle  $(x, y)$  durch Lösung dieser algebraischen Gleichung  $n^{\text{ten}}$  Grades für  $y'$  im ganzen  $\nu$  verschiedene reelle Funktionen, während  $(n - \nu)$  Lösungen komplex ausfallen, so werden unter den erforderlichen Voraussetzungen über jene Funktionen durch jenen Punkt  $\nu$  Integralkurven hindurchlaufen. Die zugehörige „Diskriminantenkurve“ ist der Ort der Punkte  $(x, y)$ , für welche die algebraische

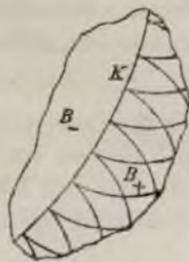


Fig. 83.

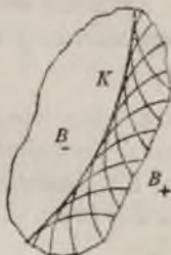


Fig. 84.

Gleichung  $n^{\text{ten}}$  Grades (5) eine mindestens zweifache Wurzel hat. An diese Kurve schließen sich dann die weiteren Betrachtungen entsprechend dem ausführlich besprochenen Falle  $n = 2$  an.

Mit der vorstehenden Betrachtung nahe verwandt ist die Theorie der sogenannten „Clairautschen Differentialgleichung“:

$$(6) \quad y = xy' + \varphi(y'),$$

in welcher wir  $\varphi(y')$  in einem geeigneten Intervalle als eine eindeutige und differenzierbare Funktion voraussetzen. Diese Differentialgleichung hat die Besonderheit, daß ihre Lösung durch „Differentiation“ angebahnt werden kann. Differenzieren wir nämlich die Gleichung (6) nach  $x$ , so folgt:

$$(7) \quad 0 = y''(x + \varphi'(y')),$$

und also muß notwendig eine der beiden Gleichungen zutreffen:

$$(I) \quad y'' = 0, \quad (II) \quad x + \varphi'(y') = 0.$$

Gilt die Gleichung (I), d. h. ist  $y''$  mit 0 identisch, so ist  $y'$  mit einer Konstanten  $C$  identisch. Tragen wir aber, um der Gleichung (6) zu genügen,  $y' = C$  in dieselbe ein, so folgt:

$$(8) \quad y = Cx + \varphi(C)$$

als die Funktion, deren Ableitung konstant gleich  $C$  ist, und die für jedes  $C$  die Gleichung (6) zu einer in  $x$  identisch bestehenden macht. In (8) haben wir also das „allgemeine“ Integral der Differentialgleichung (6) vor uns und erkennen, daß die Integralkurven (8) eine „Geradenschar“ bilden.

Gilt die Gleichung (II), so können wir aus ihr und der Gleichung (6) durch Elimination von  $y'$  eine Gleichung  $y = g(x)$  gewinnen, welche im vorliegenden Falle die „singuläre Lösung“ darstellt. Wir erhalten nämlich dasselbe Eliminationsresultat, wenn wir entsprechend der allgemeinen Vorschrift (4) aus:

$$Cx - y + \varphi(C) = 0, \quad x + \varphi'(C) = 0$$

den Parameter  $C$  eliminieren.

Die besprochenen Verhältnisse haben die einfache geometrische Bedeutung, daß die Integralkurven (8) die „Schar der Tangenten“ der singulären Integralkurve  $y = g(x)$  darstellen (vgl. Aufg. 1 in I, 362). Schreiben wir für den einzelnen Punkt der singulären Integralkurve  $y' = \text{tg } \alpha$ , wo  $\alpha$  in der bekannten Bedeutung gebraucht ist, und fassen wir (8) als die Gleichung der Tangente dieses Punktes auf:

$$y = x \text{tg } \alpha + \varphi(\text{tg } \alpha),$$

so ist die Ordinate  $y_0$  des Schnittpunktes dieser Tangente mit der  $y$ -Achse:

$$y_0 = \varphi(\text{tg } \alpha).$$

Man kann also der Clairautschen Differentialgleichung im Anschluß an die singuläre Integralkurve die Bedeutung unterlegen, daß sie für die Ordinate  $y_0$  des Schnittpunktes jeder Tangente der Integralkurve mit der  $x$ -Achse eine durch  $\varphi(\operatorname{tg} \alpha)$  zum Ausdruck kommende Abhängigkeit von der Tangentenrichtung vorschreibt. Einleuchtend ist, daß die einzelne Tangente immer auch selbst eine „Kurve“ ist, deren „sämtliche Tangenten“ die gestellte Forderung befriedigen.

Aufgaben: 1) Welche Kurven haben die Eigenschaft, daß die Tangente mit den Koordinatenachsen stets ein Dreieck vorgeschriebenen Inhaltes  $\frac{1}{2} a$  einschließt? — Bedient man sich der Anordnung und der Bezeichnungen der Fig. 85, so gilt  $y_0 = -x_0 y'$  und also der Vorschrift entsprechend:

$$a = x_0 y_0 = -\frac{y_0^2}{y'}, \quad y_0 = \sqrt{-a y'},$$

so daß die gesuchten Kurven die folgende Clairautsche Gleichung befriedigen:

$$y = x y' + \sqrt{-a y'}.$$

Das allgemeine Integral ergibt sich durch die Substitution  $y' = -C$ :

$$Cx + y = \sqrt{aC}.$$

Die singuläre Integralkurve ist die Hyperbel  $4xy = a$ . Man setze die Differentialgleichung in die Gestalt (1) und zeige, daß die Diskriminantenkurve die eben gewonnene Hyperbel ist.

2) Bei welchen Kurven wird auf jeder Tangente durch die Achsen eine Strecke der konstanten Länge  $a$  abgeschnitten? — Bedienen wir uns wieder der Fig. 85, so hat man den Ansatz:

$$x_0^2 + y_0^2 = \frac{y_0^2}{y'^2} + y_0^2 = a^2, \quad y_0 = -\frac{a y'}{\sqrt{1 + y'^2}};$$

es handelt sich also um die Clairautsche Gleichung:

$$y = x y' - \frac{a y'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

deren allgemeines Integral das folgende ist:

$$y = Cx - \frac{aC}{\sqrt{1 + C^2}}.$$

Zur Berechnung der singulären Lösung setze man  $C = \operatorname{tg} \alpha$  und benutze  $\alpha$  als „Parameter“ der Schar:

$$(9) \quad x \operatorname{tg} \alpha - y - a \sin \alpha = 0.$$

Durch partielle Differentiation nach  $\alpha$  folgt leicht:

$$(10) \quad x = a \cos^2 \alpha$$

und durch Eintragung dieses Wertes  $x$  in (9) ebenso leicht:

$$(11) \quad y = -a \sin^3 \alpha.$$

Die Elimination von  $\alpha$  aus (10) und (11) führt auf die Gleichung der Astroide  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ , die also die singuläre Lösung gibt.

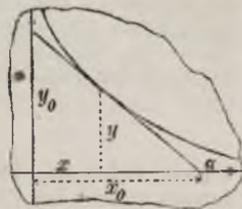


Fig. 85.

3) Für welche Kurven ist das Produkt je der beiden Lote von zwei festen Punkten auf die einzelne Tangente einer gegebenen Konstanten  $b^2$  gleich? — Man lege die  $x$ -Achse durch die beiden festen Punkte und wähle den Nullpunkt  $O$  in der Mitte zwischen ihnen; sie mögen die Abszissen  $\pm e$  haben. Setzen wir die Gleichung der Tangente in die Normalgestalt\*):

$$\frac{xy' - y + y_0}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0,$$

so sind die beiden Lote durch Eintragen der Koordinaten  $\pm e, 0$  in die linke Gleichungsseite als absolute Werte der beiden Ausdrücke:

$$\frac{y_0 \pm e y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

zu gewinnen. Die Vorzeichen dieser Ausdrücke sind gleich oder entgegengesetzt, je nachdem die beiden Punkte  $(\pm e, 0)$  auf gleicher Seite oder auf verschiedenen Seiten der Tangente liegen. Nehmen wir als Beispiel den ersten Fall, so gilt hiernach der Vorschrift entsprechend:

$$\frac{y_0^2 - e^2 y'^2}{1 + y'^2} = b^2, \quad y_0 = \sqrt{b^2 + a^2 y'^2},$$

wo zur Abkürzung  $b^2 + e^2 = a^2$  gesetzt ist. Die gesuchten Kurven sind also die Integralkurven der Clairautschen Gleichung:

$$y = xy' + \sqrt{b^2 + a^2 y'^2}.$$

Um aus dem allgemeinen Integrale:

$$(12) \quad y = Cx + \sqrt{b^2 + a^2 C^2}$$

die singuläre Lösung zu finden, stellen wir durch Differentiation nach  $C$  aus dieser Gleichung die folgende her:

$$(13) \quad x = -\frac{a^2 C}{\sqrt{b^2 + a^2 C^2}}$$

und tragen diesen Wert von  $x$  in (12) ein:

$$(14) \quad y = \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + a^2 C^2}}.$$

Aus (13) und (14) folgt sofort:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

so daß die „Ellipse der Halbachsen  $a$  und  $b$ “, die die beiden festen Punkte  $(\pm e, 0)$  zu „Brennpunkten“ hat, die singuläre Integralkurve ist. Falls die Tangente zwischen den beiden Punkten  $(\pm e, 0)$  verläuft, gelangt man entsprechend zur Hyperbel (s. „A. G.“ S. 56 und 58).

4)  $yy'^2 - 2xy' + y = 0$ . — Die nach  $y'$  gelöste Gleichung ist der in § 4 (S. 273 ff.) entwickelten Methode zugänglich. Die allgemeine Lösung  $y^2 - 2Cx + C^2 = 0$  stellt eine Schar von Parabeln dar; die Diskriminantenkurve von der Gleichung  $x^2 - y^2 = 0$  gibt die singuläre Lösung. Man kann die Gleichung auch durch „Differentiation“ lösen. Indem man sie nach  $2x$  auflöst und sodann nach  $x$  differenziert, folgt nämlich leicht:

$$(y'^2 - 1)(y^2 + yy'') = 0, \quad (y'^2 - 1)\frac{d(yy')}{dx} = 0.$$

\*) S. die in „A. G.“ S. 15 unter IV genannte Normalgleichung und die Sätze von S. 17 daselbst.

Durch Nullsetzen des ersten Faktors gelangt man zum singulären Integrale. Das Verschwinden des zweiten Faktors liefert  $yy' = C$ , so daß die mit  $y$  multiplizierte gegebene Gleichung nach Substitution von  $yy' = C$  zum angegebenen allgemeinen Integrale führt.

**9. Isogonale Trajektorien.** Ein Bereich  $B$  der  $x, y$ -Ebene sei von einer gegebenen Kurvenschar in der Art bedeckt, daß durch jeden Punkt von  $B$  eine und nur eine Kurve hindurchläuft. Die Gleichung der Kurvenschar habe die Gestalt:

$$(1) \quad f(x, y) - C = 0,$$

die Funktion  $f(x, y)$  sei in  $B$  eindeutig und stetig und habe daselbst ebensolche Ableitungen erster und zweiter Ordnung. Dann gilt folgender Satz: *Durch jeden Punkt von  $B$  läuft eine und nur eine Kurve hindurch, welche die Kurven der Schar (1) überall unter einem beliebig vorgeschriebenen Winkel  $\varepsilon$  überkreuzt.* Eine solche Kurve heißt eine „gleichwinklige“ oder „isogonale Trajektorie“ der Schar (1). Ist  $\varepsilon$  speziell ein rechter Winkel, so spricht man von einer „orthogonalen Trajektorie“.

Bezeichnet man nämlich, wie üblich, mit  $\alpha$  den Winkel der Tangente der durch den Punkt  $(x, y)$  hindurchlaufenden Kurve (1) gegen die positive  $x$ -Achse, so gilt:

$$\operatorname{tg} \alpha = - \frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}.$$

Für die Trajektorie des Winkels  $\varepsilon$  müßte an dieser Stelle  $(x, y)$ :

$$y' = \operatorname{tg}(\alpha + \varepsilon) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \varepsilon}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varepsilon} = \frac{f'_y \sin \varepsilon - f'_x \cos \varepsilon}{f'_x \sin \varepsilon + f'_y \cos \varepsilon}$$

gelten, und andererseits ist jede Integralkurve dieser Differentialgleichung eine isogonale Trajektorie vom Winkel  $\varepsilon$  für die Schar (1). *Man gewinnt somit aus der Funktion  $f(x, y)$  in der Gestalt:*

$$(2) \quad (f'_x \cos \varepsilon - f'_y \sin \varepsilon) dx + (f'_x \sin \varepsilon + f'_y \cos \varepsilon) dy = 0$$

die Differentialgleichung der Trajektorien des Winkels  $\varepsilon$  und erkennt bei den über  $f(x, y)$  gemachten Voraussetzungen die Existenz und Bestimmtheit der Trajektorien aus den Entwicklungen von S. 265 ff. Speziell für die orthogonalen Trajektorien gilt die Differentialgleichung:

$$(3) \quad f'_y(x, y) dx - f'_x(x, y) dy = 0.$$

Aufgaben: 1) Man zeige, daß die Schar der Parabeln  $x^2 - Cy = 0$  die Ellipsen der Gleichungen  $x^2 + 2y^2 = C'$  zu orthogonalen Trajektorien hat.

2) Man zeige, daß zur Schar der gleichseitigen Hyperbeln  $x^2 - y^2 = C$  die mit ihr kongruente Schar  $xy = C'$  die orthogonalen Trajektorien ergibt.

3) In „A. G.“ S. 29 ff. sind die Paare einander „konjugierter“ Kreisscharen betrachtet und durch Figuren erläutert, die hier als Fig. 86 und 87 wiederholt sind. Als Gleichungen der beiden Scharen sind a. a. O. bei geeigneter Auswahl des Koordinatensystems gefunden:

$$x^2 + y^2 - 2Cx + a = 0, \quad x^2 + y^2 - 2C'y - a = 0;$$

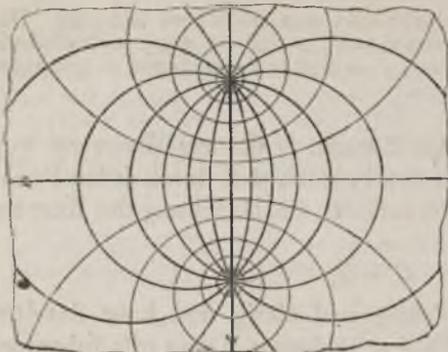


Fig. 86.

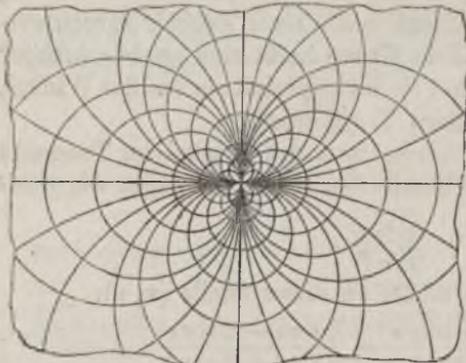


Fig. 87.

(4)

$$\frac{x^2}{a^2 + C} + \frac{y^2}{b^2 + C} - 1 = 0.$$

Offenbar haben nämlich alle durch (4) gelieferten Kegelschnitte, die sämtlich  $O$  zum Mittelpunkt und die Koordinatenachsen zu Hauptachsen haben, die gleiche „lineare“ Exzentrizität  $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ . Man mache sich deutlich, daß für  $C > -b^2$  in (4) Ellipsen dargestellt sind und für  $-a^2 < C < -b^2$  Hyperbeln; die Werte  $C < -a^2$  geben keine reelle Kurven. Die Schar (4) hat nun die Eigenschaft,

sich selbst in der Art orthogonal zu sein, daß die Hyperbeln die orthogonalen Trajektorien der Ellipsen darstellen. Wenn man also nach Vorschrift von (3) für die Schar (4) die Differentialgleichung der orthogonalen Trajektorien berechnet, so muß deren allgemeines Integral eben wieder die Gleichung (4) sein. Dies ist näher zu prüfen. — Die Auflösung der Gleichung (4) nach  $C$  ist umständlich. Wir berechnen uns demnach für die durch einen gewählten Punkt  $(x, y)$  hindurchlaufende Kurve der gegebenen Schar (4) vermittelst der Differentiation nach  $x$  bei konstantem  $C$  zunächst:

$$\frac{x}{a^2 + C} + \frac{y \cdot \operatorname{tg} \alpha}{b^2 + C} = 0,$$

zum besonderen Falle  $a = 0$  gehören die Scharen der Fig. 87. Man zeige, daß die orthogonalen Trajektorien jeder Kreisschar von der konjugierten Schar geliefert werden. — Als gegeben betrachte man die Schar der Gleichung:

$$x^2 + y^2 - 2Cx + a = 0$$

oder 
$$\frac{x^2 + y^2 + a}{2x} - C = 0.$$

Die Differentialgleichung der orthogonalen Schar ist dann:

$$2xy \, dx + (a - x^2 + y^2) \, dy = 0.$$

Diese Gleichung hat einen von  $y$  allein abhängenden integrierenden Faktor; man bestimme denselben und berechne die allgemeine Lösung auf Grund der Regel (6) S. 281. Als Gleichung der orthogonalen Schar wird man finden:

$$x^2 + y^2 - 2C'y - a = 0,$$

womit in der Tat die konjugierte Kreisschar gewonnen ist.

4) In Fig. 88 ist eine Schar konfokaler Kegelschnitte dargestellt, d. h. eine Schar von Ellipsen und Hyperbeln, die sämtlich dasselbe Brennpunktepaar haben. Hat eine unter den Ellipsen die Halbachsen  $a$  und  $b < a$ , so ist die Gesamtschar mittelst eines Parameters  $C$  darstellbar durch:

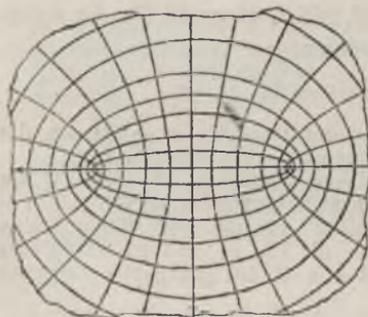


Fig. 88.



Führen wir durch die Substitution  $x = r \cos \vartheta$ ,  $y = r \sin \vartheta$  Polarkoordinaten  $r$ ,  $\vartheta$  ein, so folgt nach Division der entstehenden Gleichung durch  $r^2$ :

$$\sin \varepsilon \cdot \frac{dr}{r} = \cos \varepsilon \cdot d\vartheta.$$

Hier liegt eine Differentialgleichung zwischen  $r$  und  $\vartheta$  mit getrennten Variablen vor. Die Lösung ist:

$$r = e^{\cotg \varepsilon \cdot (\vartheta - \vartheta_0)},$$

unter  $\vartheta_0$  die Integrationskonstante verstanden.

## Kapitel II. Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung.

1. Ansatz der Gleichungen und Existenz ihrer Lösungen. Die S. 258 entwickelte Aufgabe soll jetzt in folgender Art verallgemeinert werden. *Zwischen der Variablen  $x$ , einer von  $x$  abhängigen Variablen  $y$  und ihren  $n$  ersten Ableitungen:*

$$(1) \quad y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \dots, \quad y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$$

ist eine Gleichung der Gestalt vorgeschrieben:

$$(2) \quad y^{(n)} = \varphi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

in welcher  $\varphi$  eine gegebene Funktion der  $(n+1)$  Argumente  $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$  ist; es soll  $y$  als Funktion  $y = f(x)$  so bestimmt werden, daß die Eintragung dieser Funktion in (2) eine identische, d. h. für alle Werte  $x$  eines geeignet gewählten Intervalles gültige Gleichung:

$$(3) \quad f^{(n)}(x) = \varphi(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x))$$

liefert. Man sagt, in (2) sei eine „gewöhnliche Differentialgleichung  $n^{\text{ter}}$  Ordnung“ zwischen zwei Variablen vorgelegt, eine Benennung, die nach den Darlegungen von S. 258 von selbst verständlich ist. Eine die Differentialgleichung im angegebenen Sinne befriedigende Funktion  $y = f(x)$  heißt eine „Lösung“ oder ein „Integral“ derselben; ist eine solche Funktion noch unentwickelt durch eine Gleichung  $f(x, y) = 0$  gegeben, so nennen wir diese eine „Integralgleichung“ der Differentialgleichung (2).

Die „Existenz“ und „Bestimmtheit“ der Lösungen unserer Differentialgleichung (2) kann aus den allgemeinen Sätzen von S. 268 ff. gefolgert werden. In der Tat können wir die Aufgabe, die Gleichung (2) zu lösen, leicht umkleiden in die Aufgabe der Lösung eines Systems von  $n$  gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung der Gestalt (22) S. 265 mit der einen unabhängigen Variablen  $x$  und  $n$  abhängigen Variablen  $y, y_1, \dots, y_{n-1}$ . Wir verstehen zu diesem Zwecke unter  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$  die Ableitungen  $y', y'', \dots, y^{(n-1)}$  von  $y$ , so daß die  $n$  Gleichungen bestehen:

$$(4) \quad y' = y_1, \quad y_1' = y_2, \quad \dots, \quad y_{n-2}' = y_{n-1}, \quad y_{n-1}' = \varphi(x, y, y_1, \dots, y_{n-1}).$$

Damit haben wir bereits ein System (22) S. 265 von spezieller Bauart vor uns und erkennen umgekehrt, daß jede Lösung  $y = f(x)$  dieses Systems eine Lösung der Gleichung (2) liefert. Die Sätze von S. 268 ff. gestatten nun folgende Schlußweise: Für ein vorab festgesetztes Argument  $x = a$  schreiben wir  $n$  Funktionswerte  $y = b, y_1 = b_1, \dots, y_{n-1} = b_{n-1}$  willkürlich vor. In der „Umgebung der Stelle“  $(a, b, b_1, \dots, b_{n-1})$  im Gebiete der  $(n+1)$  Variablen  $x, y, \dots, y_{n-1}$  sei die Funktion  $\varphi$  eindeutig und stetig und habe daselbst ebensolche partielle Ableitungen erster Ordnung in bezug auf  $y, y_1, \dots, y_{n-1}$ . Dann läuft durch jene Stelle im Gebiete der  $(n+1)$  Variablen eine und nur eine „Integralkurve“ des Systems (4) hindurch.

Auf die Differentialgleichung (2) übertragen, lautet dieses Ergebnis so: *Schreiben wir für ein vorab bestimmtes Argument  $x = a$  den Funktionswert  $y = b$  sowie die Werte  $y' = b_1, y'' = b_2, \dots, y^{(n-1)} = b_{n-1}$  der  $(n-1)$  ersten Ableitungen willkürlich vor, so gibt es unter den nötigen Voraussetzungen über Eindeutigkeit, Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Funktion  $\varphi$  in der Umgebung der Stelle  $x = a$  eine und nur eine Lösung  $y = f(x)$  der Differentialgleichung (2), die mit ihren Ableitungen bis  $f^{(n-1)}(x)$  hin für  $x = a$  die vorgeschriebenen Werte  $b, b_1, \dots, b_{n-1}$  annimmt.*

Wir wollen gleich wieder einen Bezeichnungswechsel vornehmen, indem wir  $b = C_1, b_1 = C_2, \dots, b_{n-1} = C_n$  setzen. Insofern diese Werte die Lösung  $y = f(x)$  mitbestimmen, schreiben wir dieselbe:

$$(5) \quad y = f(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

und erkennen also, daß in dieser Lösung  $n$  willkürliche Konstante enthalten sind\*). Entsprechend dem früheren Brauche sprechen wir vom „allgemeinen Integrale“, falls die Konstanten noch unbestimmt gedacht sind; eine besondere Wahl derselben liefert ein „partikuläres Integral“.

Auch die Übertragung dieser Entwicklung auf „Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen“ mit mehr als einer abhängigen Variablen hat keine Schwierigkeit, wie der Fall zweier abhängiger Variablen darlegen mag. Zwischen  $x$ , zwei von  $x$  abhängenden Variablen  $y$  und  $z$  und deren Ableitungen bis zur  $m^{\text{ten}}$  bzw.  $n^{\text{ten}}$  Ordnung hin seien die beiden Gleichungen:

$$(6) \quad \begin{cases} y^{(m)} = \varphi(x, y, y', \dots, y^{(m-1)}, z, z', \dots, z^{(n-1)}), \\ z^{(n)} = \psi(x, y, y', \dots, y^{(m-1)}, z, z', \dots, z^{(n-1)}) \end{cases}$$

vorgeschrieben; es sollen  $y$  und  $z$  als Funktionen  $y = f(x), z = g(x)$  von  $x$

\*) Die willkürliche Auswahl des oben mit  $a$  bezeichneten Argumentes  $x$  bedingt nicht etwa das Auftreten einer  $(n+1)^{\text{ten}}$  willkürlichen Konstanten in der Lösung. Wir treffen nämlich dieselbe Lösung, falls wir für ein verändertes Argument  $x = a'$  die Konstanten  $b', b'_1, \dots, b'_{n-1}$  in richtiger Art wählen.

so bestimmt werden, daß die Eintragung dieser Funktionen in (6) zwei identische, d. h. für alle  $x$  eines geeignet gewählten Intervalles gültige Gleichungen liefert:

$$(7) \quad \begin{cases} f^{(m)}(x) = \varphi(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(m-1)}(x), g(x), g'(x), \dots, g^{(n-1)}(x)), \\ g^{(n)}(x) = \psi(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(m-1)}(x), g(x), g'(x), \dots, g^{(n-1)}(x)). \end{cases}$$

Es ist nämlich in diesem Falle sofort wieder die Zurückführbarkeit auf ein System von  $(m+n)$  Differentialgleichungen erster Ordnung möglich. Man setzt zu diesem Zwecke  $y^{(\mu)} = y_{\mu}$ ,  $z^{(\nu)} = z_{\nu}$  und gelangt in der Tat zu folgendem Systeme von  $(m+n)$  Differentialgleichungen:

$$(8) \quad \begin{cases} y' = y_1, y_1' = y_2, \dots, y_{m-2}' = y_{m-1}, y_{m-1}' = \varphi(x, y, y_1, \dots, y_{m-1}, z, z_1, \dots, z_{n-1}), \\ z' = z_1, z_1' = z_2, \dots, z_{n-2}' = z_{n-1}, z_{n-1}' = \psi(x, y, y_1, \dots, y_{m-1}, z, z_1, \dots, z_{n-1}) \end{cases}$$

mit einer unabhängigen Variablen und den  $(m+n)$  abhängigen Variablen  $y, y_1, \dots, y_{m-1}, z, z_1, \dots, z_{n-1}$ . Die Lösungen dieses Systems liefern uns zugleich diejenigen von (6).

**2. Beispiele leicht lösbarer Differentialgleichungen.** Es sollen zunächst drei einfache Beispiele solcher Differentialgleichungen höherer Ordnung besprochen werden, die durch Quadraturen lösbar sind.

I. Es gilt folgender Satz: *Eine Differentialgleichung zweiter Ordnung der Gestalt:*

$$(1) \quad y'' = \varphi(x),$$

in der also neben der zweiten Ableitung von  $y$  nach  $x$  nur noch die unabhängige Variable  $x$  (aber weder  $y$  noch  $y'$ ) auftritt, ist durch zwei Quadraturen lösbar und hat als allgemeines Integral:

$$(2) \quad y = \int \left( \int \varphi(x) dx \right) dx + C_1 x + C_2,$$

wobei die willkürlichen Konstanten als Koeffizienten einer ganzen Funktion ersten Grades von  $x$  auftreten. Das zur Gleichung (1) gehörige System (4) S. 298 ist nämlich:

$$\frac{dy}{dx} = y_1, \quad \frac{dy_1}{dx} = \varphi(x)$$

und führt sofort zur Lösung (2) hin.

Für das in (2) rechts stehende Integral benutzen wir die symbolische Schreibweise:

$$\int \left( \int \varphi(x) dx \right) dx = \int_{(2)} \varphi(x) dx^2$$

und schreiben entsprechend das Ergebnis  $n$ -maliger Differentiation. Dann gilt der ebenso beweisbare allgemeine Satz: *Eine Differentialgleichung  $n$ ter Ordnung der Gestalt:*

$$(3) \quad y^{(n)} = \varphi(x),$$

in der also neben der  $n^{\text{ten}}$  Ableitung von  $y$  nur noch  $x$  allein auftritt, ist durch  $n$  Quadraturen lösbar und hat das allgemeine Integral:

$$(4) \quad y = \int_{(n)} \varphi(x) dx^n + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \dots + C_n.$$

II. Eine Differentialgleichung zweiter Ordnung der Gestalt:

$$(5) \quad y'' = \varphi(y')$$

besitzt als System (4) S. 298:

$$(6) \quad \frac{dy}{dx} = y_1, \quad \frac{dy_1}{dx} = \varphi(y_1).$$

Die zweite Gleichung ist durch Trennung der Variablen lösbar und führt zur allgemeinen Integralgleichung:

$$\int \frac{dy_1}{\varphi(y_1)} = x + C_1.$$

Nach Berechnung des linksseitigen Integrals denken wir die Gleichung in bezug auf  $y_1$  aufgelöst:

$$y_1 = \psi(x + C_1)$$

und tragen das Ergebnis in die erste Gleichung (6) ein. Die entstehende Differentialgleichung ist unmittelbar lösbar und ergibt:

$$(7) \quad y = \int \psi(x + C_1) dx + C_2.$$

Die Differentialgleichung zweiter Ordnung (5), in der neben  $y''$  nur noch die erste Ableitung  $y'$  (nicht jedoch  $x$  und  $y$ ) auftritt, ist gleichfalls durch zwei Quadraturen lösbar und hat das allgemeine Integral (7).

An (5) reihen wir die Differentialgleichung  $n^{\text{ter}}$  Ordnung:

$$(8) \quad y^{(n)} = \varphi(y^{(n-1)}),$$

der das folgende System von Differentialgleichungen erster Ordnung entspricht:

$$(9) \quad \frac{dy}{dx} = y_1, \quad \frac{dy_1}{dx} = y_2, \quad \dots, \quad \frac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1}, \quad \frac{dy_{n-1}}{dx} = \varphi(y_{n-1}).$$

Die letzte dieser Gleichungen gestattet dieselbe Behandlung wie die zweite Gleichung (6) und führe auf:

$$y_{n-1} = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \psi(x + C_1),$$

womit wir für  $y$  eine Differentialgleichung  $(n-1)^{\text{ter}}$  Ordnung der unter I behandelten Art gewonnen haben. Entsprechend der Gleichung (4) ist also:

$$(10) \quad y = \int_{(n-1)} \psi(x + C_1) dx^{n-1} + C_2 x^{n-2} + C_3 x^{n-3} + \dots + C_n.$$

Auch eine Differentialgleichung  $n^{\text{ter}}$  Ordnung (8), die neben der  $n^{\text{ten}}$  Ableitung von  $y$  nur noch die  $(n-1)^{\text{te}}$  Ableitung (aber keine weitere und auch nicht  $x$ ) enthält, ist durch  $n$  Quadraturen lösbar und hat das allgemeine Integral (10).

III. Zu einer Differentialgleichung zweiter Ordnung der Gestalt:

$$(11) \quad y'' = \varphi(y)$$

gehört das System:

$$(12) \quad \frac{dy}{dx} = y_1, \quad \frac{dy_1}{dx} = \varphi(y).$$

Betrachten wir  $y_1$  als Funktion von  $y$  und damit (indem  $y$  Funktion von  $x$  ist) als „zusammengesetzte“ Funktion von  $x$ , so folgt nach der „Kettenregel“:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{dy_1}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = y_1 \frac{dy_1}{dy} = \varphi(y).$$

Damit haben wir zwischen  $y$  und  $y_1$  eine durch Trennung der Variablen lösbare Differentialgleichung erster Ordnung:

$$y_1 \frac{dy_1}{dy} = \varphi(y)$$

gewonnen. Die Integration ergibt:

$$y_1^2 = 2 \int \varphi(y) dy + C_1, \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{2 \int \varphi(y) dy + C_1}.$$

Auch die hier rechts noch verbleibende Differentialgleichung erster Ordnung zwischen  $x$  und  $y$  ist durch Trennung der Variablen lösbar und ergibt:

$$(13) \quad \int \frac{dy}{\sqrt{2 \int \varphi(y) dy + C_1}} = x + C_2.$$

Eine Differentialgleichung zweiter Ordnung (11), die neben  $y''$  nur noch  $y$  (aber weder  $y'$  noch  $x$ ) enthält, ist durch zwei Quadraturen lösbar und ergibt die allgemeine Integralgleichung (13).

Endlich können wir die Gleichung (11) noch verallgemeinern zu:

$$(14) \quad y^{(n)} = \varphi(y^{(n-2)}).$$

Aus ihr berechnet sich zwischen  $y_{n-2} = y^{(n-2)}$  und  $x$  wie soeben:

$$\int \frac{dy_{n-2}}{\sqrt{2 \int \varphi(y_{n-2}) dy_{n-2} + C_1}} = x + C_2.$$

Wenn man diese Gleichung nach Berechnung des Integrals in bezug auf  $y_{n-2}$  auflöst, so folgt:

$$(15) \quad y_{n-2} = \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \psi(x + C_2, C_1).$$

Damit haben wir wieder eine Differentialgleichung von der unter I behandelten Art gewonnen und finden nun sofort:

$$(16) \quad y = \int_{(n-2)} \psi(x + C_2, C_1) dx^{n-2} + C_3 x^{n-3} + C_4 x^{n-4} + \dots + C_n.$$

Auch eine Differentialgleichung  $n^{\text{ter}}$  Ordnung (14), die neben der  $n^{\text{ten}}$  Ableitung von  $y$  nur noch die  $(n-2)^{\text{te}}$  (aber weder eine weitere noch auch  $x$ ) enthält, ist durch  $n$  Quadraturen lösbar und liefert das allgemeine Integral (16),

Aufgaben: 1)  $y'' = ay' - \quad y = c_1 e^{ax} + c_2.$

2)  $8y''y' = 9. - \quad y = (x + c_1)^{\frac{3}{2}} + c_2.$

3)  $y'' = \sqrt{5y' - 6}. - \quad y = \frac{6}{5}x + \frac{5}{12}(x + c_1)^3 + c_2.$

4) Man zeige, daß der Kreis die einzige ebene Kurve ist, für welche der Krümmungsradius  $\rho$  längs der Kurve konstant ist. — Zufolge (3) in I, 303 gilt, falls  $\rho$  konstant gleich  $r$  sein soll:

$$ry'' = (\sqrt{1 + y'^2})^3.$$

Nach der an (6) angeschlossenen Rechnung folgt:

$$r \cdot \int \frac{dy'}{(\sqrt{1 + y'^2})^3} = x - a,$$

unter  $a$  eine erste Integrationskonstante verstanden. Zur Berechnung des Integrals führe man an Stelle von  $y'$  als neue Variable den Winkel  $\alpha$  durch die Gleichung  $y' = \operatorname{tg} \alpha$  ein; man wird finden:

$$(17) \quad r \int \cos \alpha d\alpha = r \sin \alpha = x - a.$$

Mit Benutzung dieses Ergebnisses folgt weiter:

$$\operatorname{tg} \alpha = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dx} = \frac{1}{r \cos \alpha} \cdot \frac{dy}{d\alpha}$$

und damit, unter  $b$  die zweite Integrationskonstante verstanden:

$$r \sin \alpha d\alpha = dy, \quad -r \cos \alpha = y - b.$$

Quadrieren wir die letzte Gleichung sowie die Gleichung (17), so folgt durch Addition:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

also in der Tat die Gleichung eines Kreises vom Radius  $r$ .

5) Für welche ebenen Kurven ist der Krümmungsradius  $\rho$  stets gleich der dritten Potenz der Normalen  $N$ ? — Da:

$$\rho = \frac{(\sqrt{1 + y'^2})^3}{y'}, \quad N = |y| \sqrt{1 + y'^2}$$

gilt, so befriedigen die gesuchten Kurven die Differentialgleichung:

$$y'' y^3 = \pm 1,$$

deren Lösung aus (13) hervorgeht. Da in der Gleichung (13) die Änderung von  $x$



Mechanik, daß zwischen den drei Kräften nur dann Gleichgewicht bestehen „kann“, wenn die Summe jener drei Vektoren gleich 0 ist:

$$\mathfrak{R} + \mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S} = 0.$$

Hieraus folgt aber (s. I, 366), daß sowohl die Summe der drei nach der  $x$ -Achse genommenen Vektorkomponenten verschwindet, als auch diejenige der drei nach der  $y$ -Achse genommenen Komponenten. Da die „ $x$ -Komponente“ von  $\mathfrak{R}$  verschwindet, so liefern die beiden  $x$ -Komponenten von  $\mathfrak{S}_0$  und  $\mathfrak{S}$ , nämlich:

$$(2) \quad -H_0 = -S_0 \cos \alpha_0, \quad H = S \cdot \cos \alpha,$$

die Summe 0, d. h. es ist:

$$(3) \quad H_0 = H, \quad S_0 \cos \alpha_0 = S \cos \alpha.$$

Man bezeichnet  $H$  als „Horizontalzug“ im Punkte  $P$ ; wir finden also, daß der Horizontalzug über das ganze Seil hin konstant ist, so daß insbesondere auch in den beiden festen Punkten  $A_0$  und  $A$  zwei gleiche (und natürlich entgegengesetzt gerichtete) Horizontalzüge  $H$  wirken.

Die „ $y$ -Komponenten“ unserer drei Vektoren sind:

$$-R, \quad -V_0 = -S_0 \sin \alpha_0, \quad V = S \sin \alpha,$$

von denen die beiden letzten als die „Vertikalzüge“ in  $P_0$  und  $P$  bezeichnet werden. Da auch die Summe dieser drei Komponenten verschwindet, so folgt:

$$S \sin \alpha - S_0 \sin \alpha_0 = R.$$

Hieraus ergibt sich endlich mit Benutzung von (1), (2) und (3):

$$H(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha_0) = - \int_{x_0}^x \varphi(x) dx.$$

Sehen wir nun  $x$  als variabel an und verstehen unter  $y$  die Ordinate der „Seilkurve“, so nimmt die letzte Gleichung die Gestalt an:

$$(4) \quad H \cdot (y' - y_0') = - \int_{x_0}^x \varphi(x) dx.$$

Durch Differentiation nach  $x$  finden wir als „Differentialgleichung der Seilkurve“:

$$(5) \quad Hy'' = -\varphi(x),$$

die in der Tat die Gestalt I hat. Ihr „allgemeines Integral“:

$$Hy = - \int_{(x)} \varphi(x) dx^2 + C_1 x + C_2$$

ergibt den Ansatz für die Gleichung der Seilkurve. Die Konstanten sind durch die Forderung zu bestimmen, daß die Kurve durch die beiden festen

Punkte  $A_0$  und  $A$ , deren Koordinaten als gegeben gelten, hindurchläuft. Ist z. B., wie es bei einer Hängebrücke angenähert zutrifft, die Belastung gleichmäßig und also  $\varphi(x)$  konstant, etwa gleich  $-2C_0$ , so folgt:

$$Hy = C_0 x^2 + C_1 x + C_2,$$

d. h. die Seilkurve ist eine *Parabel* mit vertikaler Achse.

2) Ist das eben betrachtete Seil homogen und nur dem Eigengewichte unterworfen, so bezeichnet man die Seilkurve als „*Kettenlinie*“. Ist  $\gamma$  das Gewicht der Längeneinheit des Seiles und  $s$  die nach rechts wachsende Bogenlänge, so ist (s. Fig. 89) offenbar  $R = \gamma(s - s_0)$ . Die Gleichung (4) nimmt daraufhin die Gestalt an:

$$H \cdot (y' - y_0') = \gamma(s - s_0),$$

ihre Differentiation liefert mit Benutzung von (3) in I, 112 als „*Differentialgleichung der Kettenlinie*“:

$$(6) \quad Hy'' = \gamma \cdot \sqrt{1 + y'^2}.$$

Diese Differentialgleichung gehört der unter II behandelten Art an. Indem wir  $y' dx = dy'$  setzen, folgt durch Trennung der Variablen  $y'$  und  $x$  und Integration:

$$H \int \frac{dy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = H \ln(y' + \sqrt{1 + y'^2}) = \gamma(x + C_1).$$

Nach (2) in I, 75 kann man bei Einführung der Hyperbelfunktionen und Gebrauch der Abkürzung  $H : \gamma = a$  hierfür schreiben:

$$a \cdot \text{Ar Sin } y' = x + C_1, \quad y' = \text{Sin } \frac{x + C_1}{a}.$$

Die zweite Integration liefert als *Gleichung der Kettenlinie*:

$$(7) \quad y = a \text{ Cos } \frac{x + C_1}{a} + C_2,$$

womit der öfters ausgesprochene Satz, die *Cos*-Kurve sei eine Kettenlinie, bewiesen ist.

3) Als Beispiel für eine Gleichung der Art III betrachten wir erstlich das *einfache Pendel*. Ein materieller Punkt  $P$  der Masse  $m$  sei an einen festen Punkt  $O$  mittelst einer Stange  $OP$  gebunden, die in einer Vertikalebene um  $O$  drehbar ist. Die Länge der Stange  $OP = l$  heißt die „*Pendellänge*“; die Masse der Stange sei im Vergleich zur Masse des materiellen Punktes  $P$  so klein, daß sie gleich 0 gesetzt werden mag. In der vertikalen Ebene des Pendels wählen wir  $O$  als Pol eines Polarkoordinatensystems und die von  $O$  nach unten gerichtete Gerade als Achse. Der Punkt  $P$  kann sich nur auf der Peripherie eines Kreises vom Radius  $l$  um  $O$  bewegen. Unsere Aufgabe ist, festzustellen, wie sich der Punkt  $P$

unter der eben bezeichneten Beschränkung der Beweglichkeit bewegen wird, falls auf ihn als beschleunigende Kraft einzig die Schwerkraft wirkt.

Bei freier Beweglichkeit würde die Schwerkraft dem Punkte eine Beschleunigung erteilen, deren Vektor die Richtung der Polarachse und den absoluten Betrag  $g = 9,81 \dots$  hat. Da der Punkt durch die Stange an  $O$  gebunden ist, so übt er bei seiner Bewegung auf die Stange einen Zug oder einen Druck aus und erfährt demnach selbst von der Stange einen gleichen, aber entgegengesetzt gerichteten Zug bzw. Druck. Die wirklich eintretende Bewegung ist das Ergebnis dieser letzteren Kraft, deren Vektor auf der durch  $O$  und  $P$  laufenden Geraden liegt, und der Schwerkraft.

Es sind nun bereits in I, 369 Aufg. 4) die Gleichungen für die Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Punktes in Polarkoordinaten ausgedrückt. Speziell unter (3) daselbst finden sich für die Komponente  $b_r$  der Beschleunigung in der Richtung von  $O$  nach  $P$ , sowie für die Komponente  $b_\vartheta$  senkrecht zu  $OP$  nach Seiten wachsender  $\vartheta$  die Darstellungen:

$$(8) \quad b_r = \ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2, \quad b_\vartheta = 2\dot{r}\dot{\vartheta} + r\ddot{\vartheta},$$

wo die Ableitungen nach der Zeit  $t$  durch Punkte angedeutet sind. Zur Komponente  $b_\vartheta$  liefert die Schwerkraft, wie in Fig. 90 für zwei Lagen von  $P$  näher erläutert ist, den Beitrag  $-g \sin \vartheta$ ; die Zug- oder Druckkraft, deren Vektor auf der durch  $O$  und  $P$  laufenden Geraden liegt, kann eben wegen dieser Lage keinen Beitrag für  $b_\vartheta$  ergeben. Für  $b_r$  liefert die Schwerkraft den Beitrag  $g \cos \vartheta$ ; die durch die Stange auf  $P$  ausgeübte Kraft habe in Richtung wachsender  $r$  die Größe  $p^*$ ), sie würde dem frei beweglichen Punkte die Beschleunigung  $\frac{p}{m}$  erteilen. Es gilt somit:

$$b_r = \frac{p}{m} + g \cos \vartheta, \quad b_\vartheta = -g \sin \vartheta.$$

Da nun  $r$  konstant gleich  $l$  ist, so erhalten wir aus (8) als „Differentialgleichungen des einfachen Pendels“:

$$(9) \quad -l\dot{\vartheta}^2 = \frac{p}{m} + g \cos \vartheta, \quad l\ddot{\vartheta} = -g \sin \vartheta.$$

Die zweite dieser Gleichungen dient zur Berechnung von  $\vartheta$  als Funktion der Zeit  $t$ ; sie ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung der unter III behandelten Art, deren allgemeine Integralgleichung nach (13) S. 302 die folgende ist:

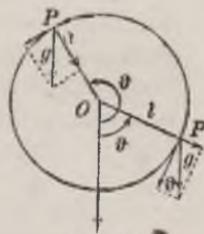


Fig. 90.

\*) Ist  $p < 0$ , so liegt eine „Zugkraft“ vor.

$$(10) \quad \int \frac{d\vartheta}{\sqrt{c_1 + \cos \vartheta}} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \cdot t + c_2.$$

Statt der in (13) S. 302 mit  $C_1$  und  $C_2$  bezeichneten Konstanten sind hier die folgenden gebraucht:

$$c_1 = \frac{l}{2g} C_1, \quad c_2 = \sqrt{\frac{2g}{l}} C_2.$$

Die erste Quadratur war sofort ausführbar; das in (10) noch verbleibende Integral ist indessen ein „elliptisches“\*). *Die Theorie des einfachen Pendels ist also nur mit Hilfe der elliptischen Funktionen endgültig zu behandeln.*

Indessen können wir doch in einem gleich näher zu bezeichnenden Spezialfalle eine „Näherungsrechnung“ mit „elementaren“ Funktionen durchführen. Wir berechnen aus (10) die „Winkelgeschwindigkeit“:

$$(11) \quad \dot{\vartheta} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \sqrt{c_1 + \cos \vartheta}^{**).$$

Zur Zeit  $t = 0$  möge nun  $\vartheta = 0$  zutreffen und die Winkelgeschwindigkeit einen sehr kleinen positiven Betrag haben. Dann hat die Konstante  $c_1$  einen Wert, der  $-1$  nur um sehr wenig übertrifft. Erklären wir demnach einen sehr kleinen positiven Winkel  $\alpha$  durch die Festsetzung  $c_1 = -\cos \alpha$ , so folgt aus (26):

$$\dot{\vartheta} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \sqrt{\cos \vartheta - \cos \alpha},$$

woraus hervorgeht, daß  $\vartheta$  beständig dem Intervalle  $-\alpha \leq \vartheta \leq +\alpha$  angehören muß und also selbst stets sehr klein bleibt. Unter diesen Umständen können wir auf Grund der „Kosinusreihe“ angenähert:

$$\cos \vartheta = 1 - \frac{1}{2} \vartheta^2, \quad \cos \alpha = 1 - \frac{1}{2} \alpha^2, \quad 2(\cos \vartheta - \cos \alpha) = \alpha^2 - \vartheta^2$$

schreiben und finden, da für  $t = 0$  auch  $\vartheta = 0$  sein sollte:

$$t \sqrt{\frac{g}{l}} = \int \frac{d\vartheta}{\sqrt{\alpha^2 - \vartheta^2}} = \arcsin \frac{\vartheta}{\alpha}.$$

Umgekehrt ergibt sich für  $\vartheta$  hieraus:

$$(12) \quad \vartheta = \alpha \sin \left( t \sqrt{\frac{g}{l}} \right),$$

\*) Man vgl. S. 38. Setzt man  $\cos \vartheta = z$ , so rechnet sich das Integral in algebraische Gestalt um und hat dann die Quadratwurzel aus einer ganzen Funktion dritten Grades unter dem Integralzeichen.

\*\*) Die Eintragung dieses Ausdrucks in (9) gestattet die Berechnung von  $p$  als Funktion von  $\vartheta$ .

so daß sich  $\vartheta$  in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  nach einem „Sinusgesetze“ ändert. Wir erkennen sofort in  $\alpha$  den „Ausschlagswinkel“ des Pendels, d. i. in  $\pm \alpha$  die Extremwerte von  $\vartheta$ , und in:

$$(13) \quad T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

die „Schwingungsdauer“, d. i. die Zeit, die das Pendel gebraucht, um aus der einen Extremlage in die andere zu gelangen.

**4. Zentralbewegungen.** Eine bemerkenswerte Verwendung finden die Differentialgleichungen der Art III bei der Untersuchung gewisser „Zentralbewegungen“. Ein frei beweglicher materieller Punkt  $P$  werde von einem festen Punkte  $O$  mit einer Kraft angezogen oder abgestoßen, die allein von der Entfernung  $\overline{OP} = r$  abhängt. Der Vektor  $\mathfrak{b}$  der Beschleunigung hat demnach die Richtung von  $P$  nach  $O$  (Anziehung) oder die entgegengesetzte Richtung (Abstoßung), während der Betrag  $|\mathfrak{b}|$  eine Funktion des Radiusvektor  $r$  allein ist. Die Komponente  $\mathfrak{b}_r$  der Beschleunigung ist hiernach gleich  $-|\mathfrak{b}|$  im Falle der Anziehung und gleich  $|\mathfrak{b}|$  im Falle der Abstoßung. Schreiben wir  $\mathfrak{b}_r = \psi(r)$ , so wird durch das Vorzeichen der Funktionswerte  $\psi(r)$  bestimmt, ob Anziehung oder Abstoßung vorliegt.

Es sei nun  $\psi(r)$  gegeben und die Aufgabe gestellt, die Bewegung des Punktes zu untersuchen. Die Aufgabe ist erst dann eine bestimmte, wenn zu irgend einer fest gewählten Zeit  $t_0$  der Ort  $P_0$  des Punktes und der Vektor  $\mathfrak{v}_0$  der Geschwindigkeit vorgeschrieben sind. Ist  $\mathfrak{v}_0$  mit dem augenblicklichen Beschleunigungsvektor, d. h. mit der Richtung  $P_0O$ , gleich oder entgegengesetzt gerichtet, so wird  $P$  stets auf der Geraden  $OP_0$  verbleiben, und wir haben mit einer geradlinigen Bewegung zu tun. Liegt dieser Fall nicht vor, so wird durch  $\mathfrak{v}_0$  und  $O$  eine Ebene festgelegt, in welcher  $P$  beständig verbleibt, und wir haben eine „ebene Zentralbewegung“, deren Grundformeln in I, 369 entwickelt sind. Dieser Fall liege vor.

Für die beiden Komponenten  $\mathfrak{b}_r$  und  $\mathfrak{b}_\vartheta$  der Beschleunigung haben wir nach (3) in I, 369 und der vorstehenden Überlegung:

$$(1) \quad \mathfrak{b}_r = \ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 = \psi(r), \quad \mathfrak{b}_\vartheta = 2\dot{r}\dot{\vartheta} + r\ddot{\vartheta} = 0.$$

Die zweite Gleichung führte a. a. O. zur Gleichung:

$$(2) \quad r^2\dot{\vartheta} = \alpha, \quad \alpha dt = r^2 d\vartheta,$$

wobei  $\alpha$  (damals  $a$  genannt) eine Konstante war; hieraus entsprang der an

die Gleichung (8) in I, 370 angeschlossene „Flächensatz“. Tragen wir den aus (2) folgenden Wert für  $\dot{\vartheta}$  in die erste Gleichung (1) ein, so folgt:

$$(3) \quad \ddot{r} = \alpha^2 r^{-3} + \psi(r).$$

Damit haben wir zur Berechnung von  $r$  als Funktion von  $t$  eine Differentialgleichung zweiter Ordnung der unter III behandelten Art gewonnen. Die Lösung kleiden wir nach (13) S. 302 in die Gestalt:

$$(4) \quad t - t_0 = \int^* \frac{dr}{\sqrt{C - \alpha^2 r^{-2} + 2 \int \psi(r) dr}},$$

wo  $C$  und  $t_0$  die Integrationskonstanten sind. Differenzieren wir die Gleichung (4), so folgt nach Zusatz des konstanten Faktors  $\alpha$  mit Rücksicht auf (2):

$$\alpha dt = r^2 d\dot{\vartheta} = \alpha \frac{dr}{\sqrt{C - \alpha^2 r^{-2} + 2 \int \psi(r) dr}}.$$

Diese Differentialgleichung zwischen  $r$  und  $\dot{\vartheta}$  ist sofort durch Trennung der Variablen lösbar und liefert:

$$(5) \quad \dot{\vartheta} - \dot{\vartheta}_0 = \alpha \int \frac{dr}{r \sqrt{Cr^2 - \alpha^2 + 2r^2 \int \psi(r) dr}}.$$

In (5) haben wir die Gleichung der „Bahnkurve“ des Punktes  $P$ ; Gleichung (4) liefert  $r$  als Funktion von  $t$  und (5) damit auch  $\dot{\vartheta}$  als Funktion von  $t$ . Die gestellte Aufgabe ist demnach durch Quadraturen vollständig lösbar.

Die den  $\dot{b}_r$  und  $\dot{b}_\vartheta$  entsprechenden Komponenten  $v_r$  und  $v_\vartheta$  des Geschwindigkeitsvektors  $\mathbf{v}$  (s. I, 369) berechnen sich so:

$$(6) \quad v_r = \dot{r} = \sqrt{C - \alpha^2 r^{-2} + 2 \int \psi(r) dr}, \quad v_\vartheta = r \dot{\vartheta} = \frac{\alpha}{r},$$

woraus für den Betrag  $v = |\mathbf{v}|$  der Geschwindigkeit sich ergibt:

$$(7) \quad v = +\sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2} = +\sqrt{C + 2 \int \psi(r) dr}.$$

Die Bestimmung der Integrationskonstanten behalten wir uns für die weiter zu betrachtenden Beispiele vor.

Wir wählen nun  $\psi(r)$  mit einer Potenz von  $r$  proportional und finden alsdann drei Fälle, in denen die Integrale (4) und (5) elementar werden; dies tritt ein, wenn  $\psi(r)$  mit  $r$ ,  $r^{-2}$  oder  $r^{-3}$  proportional ist. Wir behandeln diese drei Fälle, indem wir uns jedesmal auf eine „Anziehungskraft“ beschränken.

1) Ist  $\psi(r) = -\mu^2 r$ , so ist das Integral von  $2\psi(r)dr$  gleich  $-\mu^2 r^2$ , und die Gleichungen (4) und (5) nehmen nach kurzer Umrechnung die Gestalt an:

$$2(t - t_0) = + \int \frac{d(r^2)}{\sqrt{-\alpha^2 + Cr^2 - \mu^2 r^4}},$$

$$2(\vartheta - \vartheta_0) = - \int \frac{d(r^{-2})}{\sqrt{-\frac{\mu^2}{\alpha^2} + \frac{C}{\alpha^2} r^{-2} - r^{-4}}}.$$

Beide Integrale berechnen sich nach (4) S. 35; es findet sich:

$$2\mu^2 r^2 = C + \sqrt{C^2 - 4\alpha^2 \mu^2} \sin 2\mu(t - t_0),$$

$$2\alpha^2 r^{-2} = C - \sqrt{C^2 - 4\alpha^2 \mu^2} \sin 2(\vartheta - \vartheta_0).$$

Über die Auswahl des Zeitnullpunktes sowie auch über die Richtung der Polarachse können wir noch willkürlich verfügen. Dies läuft darauf hinaus, daß wir  $t_0$  und  $\vartheta_0$  frei wählen dürfen; wir setzen:

$$(8) \quad t_0 = -\frac{\pi}{4\mu}, \quad \vartheta_0 = -\frac{\pi}{4}$$

und finden dann:

$$(9) \quad \begin{cases} 2\mu^2 r^2 = C + \sqrt{C^2 - 4\alpha^2 \mu^2} \cos 2\mu t, \\ 2\alpha^2 r^{-2} = C - \sqrt{C^2 - 4\alpha^2 \mu^2} \cos 2\vartheta. \end{cases}$$

Die Konstante  $C$  muß offenbar positiv sein. Für  $r$  haben wir eine periodische Funktion der Zeit gewonnen, die, falls wir die Wurzel in (9) positiv nehmen, für  $t = 0$  ihr durch  $a$  zu bezeichnendes Maximum und für  $t = \frac{\pi}{2\mu}$  ihr Minimum  $b$  erreicht. Für diese Extremwerte  $a$  und  $b$  von  $r$  gilt dann:

$$2\mu^2 a^2 = C + \sqrt{C^2 - 4\alpha^2 \mu^2}, \quad 2\mu^2 b^2 = C - \sqrt{C^2 - 4\alpha^2 \mu^2},$$

woraus wir leicht die drei folgenden Gleichungen entwickeln:

$$C = \mu^2(a^2 + b^2), \quad \sqrt{C^2 - 4\alpha^2 \mu^2} = \mu^2(a^2 - b^2), \quad \alpha^2 = \mu^2 a^2 b^2.$$

Tragen wir diese Werte in (9) ein und schreiben überdies:

$$\cos 2\mu t = \cos^2 \mu t - \sin^2 \mu t, \quad \cos 2\vartheta = \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta,$$

so ergibt die Rechnung:

$$(10) \quad r^2 = a^2 \cos^2 \mu t + b^2 \sin^2 \mu t, \quad \frac{(r \cos \vartheta)^2}{a^2} + \frac{(r \sin \vartheta)^2}{b^2} = 1.$$

Durch Einführung rechtwinkliger Koordinaten  $x = r \cos \vartheta$ ,  $y = r \sin \vartheta$  und Auflösung der beiden Gleichungen (10) nach  $x$  und  $y$  folgt:

$$(11) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x = \pm a \cos \mu t, \quad y = \pm b \sin \mu t.$$

Damit haben wir folgendes Ergebnis gewonnen: Wird der Punkt  $P$  vom Zentrum  $O$  mit einer der Entfernung proportionalen Kraft angezogen, so beschreibt er eine Ellipse des Mittelpunktes  $O$ , und die Koordinaten ändern sich mit der Zeit  $t$  nach „Sinusgesetzen“.\*)

2) Die Annahme  $\psi(r) = -\mu^2 r^{-2}$  für die Beschleunigung ist beim „Gravitationsgesetze“ erfüllt, und also finden sich Beispiele für die zu untersuchenden Vorgänge in den *Bewegungen der Planeten*. Ist  $m$  die Masse des angezogenen Punktes  $P$  und  $M$  diejenige des anziehenden Punktes  $O$ , so ist die Anziehungskraft  $K$  einmal nach einem allgemeinen Grundsatz der Mechanik gleich dem Produkte der Masse  $m$  und der Beschleunigung  $|\psi(r)|$ ; andererseits gilt für  $K$  das Gravitationsgesetz in seiner bekannten Form  $K = \kappa^2 \cdot Mm \cdot r^{-2}$ , unter  $\kappa^2$  die sogenannte „Gravitationskonstante“ verstanden. Hieraus findet sich:

$$(12) \quad K = m \cdot |\psi(r)| = \mu^2 m \cdot r^{-2} = \kappa^2 Mm \cdot r^{-2}, \quad \mu^2 = \kappa^2 M,$$

so daß  $\mu^2$  das Produkt der Konstanten  $\kappa^2$  und der Masse  $M$  des anziehenden Punktes ist.

Für die jetzt vorliegende Funktion  $\psi(r)$  folgt aus (5):

$$\vartheta - \vartheta_0 = \int \frac{\alpha dr}{r\sqrt{Cr^2 - \alpha^2 + 2\mu^2 r}} = - \int \frac{d(r^{-1})}{\sqrt{-r^{-2} + 2\frac{\mu^2}{\alpha^2} r^{-1} + \frac{C}{\alpha^2}}}.$$

Das Integral berechnet sich wieder nach (4) S. 35 und zwar in der Gestalt:

$$\vartheta - \vartheta_0 = \arcsin \left( \frac{-r^{-1} + \frac{\mu^2}{\alpha^2}}{\sqrt{\frac{\mu^4}{\alpha^4} + \frac{C}{\alpha^2}}} \right)$$

mit positiv genommener Wurzel. Wie beim vorigen Beispiele können wir über  $\vartheta_0$  verfügen und setzen  $\vartheta_0 = -\frac{\pi}{2}$ . Dann folgt:

$$-r^{-1} + \frac{\mu^2}{\alpha^2} = \sqrt{\frac{\mu^4}{\alpha^4} + \frac{C}{\alpha^2}} \cos \vartheta.$$

Zur Abkürzung führen wir zwei positive Konstante  $p$  und  $c$  durch:

$$(13) \quad p = \frac{\alpha^2}{\mu^2}, \quad \frac{c}{p} = \sqrt{\frac{\mu^4}{\alpha^4} + \frac{C}{\alpha^2}}, \quad c = \sqrt{1 + \frac{\alpha^2 C}{\mu^4}}$$

\*) Vgl. Aufg. 1) in I, 368. Übrigens rührt das erste Doppelzeichen in (11) daher, daß die Festsetzungen des Textes noch offen lassen, ob dem Werte  $t = 0$  der Wert  $\vartheta = 0$  oder  $\vartheta = \pi$  entsprechen soll. Wegen des zweiten Doppelzeichens beachte man, daß zwar  $\alpha^2$  durch  $\mu$ ,  $a$  und  $b$  eindeutig bestimmt ist, aber noch nicht  $\alpha$  selbst.

ein. Dann ist:

$$-r^{-1} + p^{-1} = cp^{-1} \cos \vartheta,$$

woraus sich als einfachste Gleichung der Bahnkurve von  $P$  ergibt:

$$(14) \quad r = \frac{p}{1 - c \cos \vartheta}.$$

Damit ist das „erste Keplersche Gesetz“ in erweiterter Gestalt gewonnen: *Der Punkt  $P$  beschreibt einen Kegelschnitt, für welchen  $O$  ein Brennpunkt ist (s. „A. G.“, S. 64), und zwar liegt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel vor, je nachdem  $0 \leq c < 1$ ,  $c = 1$  oder  $c > 1$  ist oder, wie man zufolge (13) auch sagen kann, je nachdem  $-\mu^4 \alpha^{-2} \leq C < 0$ ,  $C = 0$  oder  $C > 0$  ist.*

Das „zweite Keplersche Gesetz“ ist der schon in I, 370 allgemein für Zentralbewegungen bewiesene „Flächensatz“; das „dritte“ aber bezieht sich nur auf elliptische Bahnkurven und kann aus (4) oder auf folgende Art entwickelt werden: Aus dem zweiten Gesetze  $r^2 \dot{\vartheta} = \alpha$  folgt, wenn wir  $\alpha = \mu \sqrt{p}$  setzen und für  $r$  den Ausdruck (14) eintragen:

$$\frac{p^2 d\vartheta}{(1 - c \cos \vartheta)^2} = \alpha dt, \quad \mu(t - t_0) = p\sqrt{p} \int \frac{d\vartheta}{(1 - c \cos \vartheta)^2}.$$

Das hier rechts stehende Integral ist in Aufg. 7b) S. 167 bereits berechnet und zwar mit Hilfe des in Fig. 41 daselbst dargestellten Winkels  $\eta$ ; es ergibt sich:

$$\mu(t - t_0) = \frac{b}{\sqrt{p}} (a\eta + e \sin \eta),$$

wenn mit  $a, b$  die Halbachsen und mit  $e$  die lineare Exzentrizität der Ellipse bezeichnet werden. Nach „A. G.“, S. 60 ff. stellen sich die Halbachsen  $a, b$  im „Halbparameter“  $p$  und der „numerischen Exzentrizität“  $e$  so dar:

$$a = \frac{p}{1 - c^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - c^2}}.$$

Mit Rücksicht hierauf läßt sich die zwischen  $t$  und  $\eta$  bestehende Beziehung auch so schreiben:

$$(15) \quad \mu(t - t_0) = \sqrt{a} (a\eta + e \sin \eta).$$

Bei positiv genommener Wurzel\*) wird  $\eta$  mit wachsender Zeit  $t$  gleichfalls wachsen. Der Zunahme von  $\eta$  um  $2\pi$  entspricht eine Zunahme von  $t$  um die „Umlaufszeit“  $T$ . Für  $T$  folgt demnach aus (15) und (12):

$$(16) \quad T = \frac{2\pi}{\mu} a \sqrt{a} = \frac{2\pi}{\kappa \sqrt{M}} a \sqrt{a}.$$

Wird nun noch ein zweiter Punkt  $P'$  vom Punkte  $O$  der Masse  $M$  nach

\*) Es gelte  $\alpha > 0$  und also  $\dot{\vartheta} > 0$ .

dem Gravitationsgesetze angezogen und ist die Bahnkurve dieses Punktes eine Ellipse der großen Halbachse  $a'$ , so gilt:

$$(17) \quad T' = \frac{2\pi}{\kappa\sqrt{M}} a' \sqrt{a'}, \quad T^2 : T'^2 = a^3 : a'^3.$$

Die zweite Gleichung bringt das „dritte Keplersche Gesetz“ zum Ausdruck: *Die Quadrate der beiden Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen.*

3) Im dritten Falle  $\psi(r) = -\mu^2 r^{-3}$  einer dem Kubus der Entfernung indirekt proportionalen Anziehungskraft werden die Integrale (4) und (5) besonders einfach; dagegen gestalten sich die möglichen Bewegungsvorgänge sehr verschiedenartig und kompliziert. Zunächst ergibt sich für die Komponenten der Geschwindigkeit:

$$(18) \quad v_r = \sqrt{C - (\alpha^2 - \mu^2)r^{-2}}, \quad v_\vartheta = \alpha r^{-1}$$

und für den Betrag der Geschwindigkeit:

$$(19) \quad v = +\sqrt{C + \mu^2 r^{-2}}.$$

Die Gleichungen (4) und (5) nehmen die Gestalt an:

$$(20) \quad t - t_0 = \int \frac{r dr}{\sqrt{Cr^2 - (\alpha^2 - \mu^2)}}, \quad \vartheta - \vartheta_0 = -\alpha \int \frac{d(r^{-1})}{\sqrt{C - (\alpha^2 - \mu^2)r^{-2}}}.$$

Es gelte  $\alpha > 0$ , so daß sich  $P$  im Sinne wachsender Werte  $\vartheta$  bewegt; auch  $\mu$  möge positiv sein.

Ist nun erstlich  $\alpha > \mu$ , so ist  $C > 0$ . Das erste Integral (20) liefert, falls wir  $t_0 = 0$  setzen, folgende Darstellung von  $r$  als Funktion von  $t$ :

$$(21) \quad r = \sqrt{Ct^2 + \varepsilon^2}, \quad \varepsilon = +\sqrt{\frac{\alpha^2 - \mu^2}{C}} > 0.$$

Wir erkennen in der damit eingeführten Zahl  $\varepsilon$  die zur Zeit  $t = 0$  eintretende *kleinste Entfernung des Punktes  $P$  von  $O$* ; zwecks Bestimmung der Integrationskonstanten gilt die Zahl  $\varepsilon$  als gegeben. Wächst die Zeit  $t$  von 0 bis  $\infty$ , so wächst  $r$  von  $\varepsilon$  bis  $\infty$ ; überdies treten in je zwei Zeitpunkten  $\pm t$  gleiche Werte  $r$  auf. Die Geschwindigkeit  $v$  hat zur Zeit  $t = 0$  ihr Maximum erreicht und nimmt sowohl für  $\lim t = +\infty$  als für  $\lim t = -\infty$  gegen den Grenzwert  $+\sqrt{C}$  ab; für  $v_r$  insbesondere gilt:

$$(22) \quad v_r = \operatorname{sgn}(t) \sqrt{C} \sqrt{1 - \varepsilon^2 r^{-2}}.$$

Zur Zeit  $t = 0$  verschwindet  $v_r$ . Indem wir also für  $t = 0$  die Geschwindigkeit gegeben denken, läuft dies darauf hinaus, daß  $\alpha$  gegeben ist. Der Grenzwert der Geschwindigkeit  $\sqrt{C}$  bestimmt sich dann aus  $\mu$ ,  $\alpha$  und  $\varepsilon$  auf Grund von (21).

Das zweite Integral (20) ergibt:

$$\vartheta - \vartheta_0 = -\frac{\alpha}{\varepsilon\sqrt{C}} \arcsin\left(\frac{\varepsilon}{r}\right).$$

Soll, wie wir vorschreiben wollen, zur Zeit  $t=0$  und also für  $r=\varepsilon$  auch  $\vartheta=0$  zutreffen, so folgt, indem wir  $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$  eintragen:

$$\vartheta_0 = +\frac{\alpha\pi}{2\varepsilon\sqrt{C}}.$$

Zur Kürzung der Formeln führen wir noch eine Zahl  $\beta$  durch:

$$\beta = \frac{\varepsilon\sqrt{C}}{\alpha} = +\sqrt{1 - \frac{\mu^2}{\alpha^2}}$$

ein; sie gehört dem Intervalle  $0 < \beta < 1$  an. Betreffs der Konstanten können wir uns auf den Standpunkt stellen,  $\alpha$  und  $\varepsilon$  als positive Zahlen willkürlich und  $\beta$  aus dem Intervalle  $0 < \beta < 1$  willkürlich zu wählen, womit dann über  $\mu$  in folgender Art verfügt ist:

$$\mu = +\alpha\sqrt{1 - \beta^2}.$$

Als Gleichung der Bahnkurve ergibt sich nun leicht:

$$(23) \quad r \cos(\beta\vartheta) = \varepsilon,$$

wobei  $\vartheta$ , während  $t$  von  $-\infty$  bis  $+\infty$  läuft, als wachsende Variable das Intervall durchläuft:

$$(24) \quad -\frac{\pi}{2\beta} \leq \vartheta \leq +\frac{\pi}{2\beta}.$$

Die Beziehung zwischen  $\vartheta$  und  $t$  ergibt sich leicht durch Elimination von  $r$  aus (21) und (23).

Man wolle sich die Gestalt der gewonnenen Bahnkurve klar machen. Die beiden in (24) für  $\vartheta$  vorgeschriebenen Grenzen sind, absolut genommen, stets  $> \frac{\pi}{2}$ ; sie werden um so größer, je kleiner  $\beta$  ist, und es besteht für sie, da  $\beta$  dem Werte 0 beliebig nahe gewählt werden kann, keine obere Schranke. Man stellt ferner für die Bahnkurve leicht zwei Asymptoten fest. Gleichung (23) kann nämlich in die Gestalt:

$$r \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \beta\vartheta\right) = \varepsilon$$

gekleidet werden, wo das Argument von  $\sin$  für das obere Zeichen an der unteren Grenze (24), für das untere Zeichen aber an der oberen Grenze verschwindet. Da für einen sehr kleinen Winkel  $\vartheta_0$  angenähert

$\sin \beta \vartheta_0 = \beta \cdot \sin \vartheta_0$  gesetzt werden kann, so finden wir gegen die beiden Grenzen hin als Näherungsgleichungen der Bahnkurve:

$$r \sin \left( \frac{\pi}{2\beta} \pm \vartheta \right) = r \left( \sin \frac{\pi}{2\beta} \cos \vartheta \pm \cos \frac{\pi}{2\beta} \sin \vartheta \right) = \frac{\varepsilon}{\beta}$$

oder bei Einführung rechtwinkliger Koordinaten  $x = r \cos \vartheta$ ,  $y = r \sin \vartheta$ :

$$(25) \quad x \sin \frac{\pi}{2\beta} \pm y \cos \frac{\pi}{2\beta} = \frac{\varepsilon}{\beta}.$$

Diese Gleichungen stellen die beiden Asymptoten der Kurve dar.

Hieraus ergibt sich, wenn wir  $\beta$  nahe an 0 wählen, folgendes Bild der Bewegung: *Der Punkt P kommt von der einen Asymptote aus dem Unendlichen, beschreibt spiralig eine durch  $\beta$  bestimmte Anzahl von Umläufen um O, bis er zur Zeit  $t = 0$  die kleinste Entfernung von O im Punkte  $r = \varepsilon$ ,  $\vartheta = 0$  erreicht; der weitere Verlauf ist dem bisherigen symmetrisch, P windet sich wieder nach außen und zieht gegen die zweite Asymptote hin ins Unendliche.* Fig. 91 gibt die Gestalt der Bahnkurve wieder,

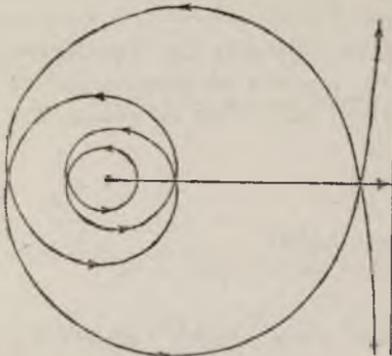


Fig. 91.

die bei  $\beta = \frac{1}{9}$  eintritt, die beiden Asymptoten setzen hier die Gerade der Gleichung  $x = 9\varepsilon$  zusammen.

Der Fall  $\alpha = \mu$  ist rechnerisch besonders elementar, insofern die Gleichung (3) die Gestalt  $\ddot{r} = 0$  annimmt und also  $\dot{r}$  konstant ist. Wir setzen  $\dot{r} = \pm \sqrt{C}$  und haben dann die Fallunterscheidung  $C = 0$  und  $C > 0$  zu treffen. Für  $C = 0$  ist  $r$  konstant, etwa gleich  $\rho$ , und aus Formel (19) folgt dann, daß sich der Punkt P mit konstanter Geschwindigkeit  $\mu \rho^{-1}$  auf der Peripherie des Kreises vom Radius  $\rho$  bewegt. Ist  $C > 0$ , so folgt, wenn wir  $\sqrt{C}$  positiv nehmen und über  $t_0$  und  $\vartheta_0$  zweckmäßig verfügen:

$$(26) \quad r = \operatorname{sgn}(t) \sqrt{C} \cdot t, \quad r \dot{\vartheta} = - \operatorname{sgn}(t) \frac{\mu}{\sqrt{C}}, \quad \dot{\vartheta} = - \frac{\mu}{Ct}.$$

Jetzt besteht also die Bahnkurve aus zwei zur Polarachse symmetrischen „hyperbolischen“ Spiralen (s. I, 280); der Punkt P läuft im Augenblick  $t = 0$  durch das anziehende Zentrum O hindurch, wobei die Winkelgeschwindigkeit für  $\lim t = \pm 0$  gegen die Grenze  $+\infty$  wächst.\*)

\*) Die für  $C = 0$  gefundene Kreisbahn liefert ein Beispiel einer sogenannten „instabilen“ Bewegung; jedes noch so kleine Wachstum von  $C$  liefert eine vom Kreise total verschiedene Bewegungsform, nämlich die eines Paares hyperbolischer Spiralen.

Ist endlich  $\alpha < \mu$ , so werden die Verhältnisse noch mannigfaltiger, da man jetzt zu unterscheiden hat, ob  $C > 0$ ,  $= 0$  oder  $< 0$  ist. Wir betrachten nur den Fall  $C < 0$  und finden, falls  $\varepsilon$  wie in (21) erklärt und  $t_0 = 0$  gesetzt wird, aus der ersten Gleichung (20) wie oben leicht:

$$(27) \quad r = +\sqrt{\varepsilon^2 + Ct^2}.$$

Hieraus geht das Resultat hervor, daß sich der Bewegungsvorgang auf das „endliche“ Zeitintervall:

$$(28) \quad -\frac{\varepsilon}{\sqrt{-C}} \leq t \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{-C}}$$

erstreckt, da nur für die diesem Intervalle angehörenden  $t$  reelle  $r$  aus (27) folgen. Zur Zeit  $t = 0$  gewinnt  $P$  jetzt seine größte Entfernung  $\varepsilon$  von  $O$ ; für die Geschwindigkeitskomponente  $v_r = \dot{r}$  findet man:

$$(29) \quad v_r = -\operatorname{sgn}(t) \sqrt{-C} \sqrt{-1 + \varepsilon^2 r^{-2}}$$

mit positiv genommenen Wurzeln. Das zweite Integral (20) führt jetzt auf die Funktion  $\operatorname{Ar} \operatorname{Cos}$ ; indem man zur Zeit  $t = 0$  auch  $\vartheta = 0$  vorschreibt, findet man leicht:

$$\vartheta = -\frac{\alpha}{\sqrt{\mu^2 - \alpha^2}} \operatorname{Ar} \operatorname{Cos} \left( \frac{\varepsilon}{r} \right).$$

Zur Abkürzung der Bezeichnungen führen wir noch die positive Zahl:

$$\beta = \frac{\varepsilon \sqrt{-C}}{\alpha} = \sqrt{\frac{\mu^2}{\alpha^2} - 1}$$

ein und können uns auch auf den Standpunkt stellen, daß  $\alpha$ ,  $\varepsilon$  und  $\beta$  als positive Zahlen willkürlich gewählt sind, wobei dann über  $\mu$  so verfügt ist:

$$\mu = \alpha \sqrt{1 + \beta^2}.$$

Da  $\operatorname{Cos}$  eine gerade Funktion ist, wird die Gleichung der Bahnkurve:

$$(30) \quad r \operatorname{Cos}(\beta \vartheta) = \varepsilon,$$

wobei  $\vartheta$ , während  $t$  das endliche Zeitintervall (28) durchläuft, von  $-\infty$  bis  $+\infty$  wächst.

Wir gewinnen also folgendes Bild der Bewegung: Die zur Polarachse symmetrische Bahnkurve windet sich gegen die Zeitschranken (28) hin beiderseits unendlich oft um  $O$ ; während der ersten Hälfte des Zeitintervalls entfernt sich der Punkt von  $O$  auf der einen Hälfte der Doppelspirale mit abnehmender Geschwindigkeit bis zum Maximum  $\varepsilon$  der Entfernung von  $O$ , worauf in der zweiten Hälfte des Zeitintervalls der symmetrische Bewegungszustand wieder gegen  $O$  hin eintritt. Gegen die Zeitschranken hin wird sowohl  $|\dot{r}|$  als auch die Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\vartheta}$  unendlich; man vgl. die in Fig. 92 beigefügte Skizze.

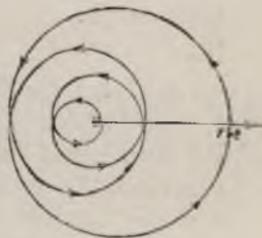


Fig. 92.

**Aufgaben:** 1) Man untersuche die Zentralbewegung für  $\psi(r) = +\mu^2 r$ , d. h. bei Wirkung einer der Entfernung proportionalen Abstoßungskraft. — Als Bahnkurve wird man eine Hyperbel finden, deren Mittelpunkt der abstoßende Punkt  $O$  ist. An Stelle der Gleichungen (11) tritt:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x = a \cos \mu t, \quad y = b \sin \mu t.$$

2) Wie bewegt sich der Punkt  $P$ , falls er von  $O$  mit einer dem Quadrate der Entfernung indirekt proportionalen Kraft abgestoßen wird? — In der an (12) sich anschließenden Entwicklung hat  $-\mu^2$  an Stelle von  $+\mu^2$  zu treten. Es ist notwendig  $C > 0$ . Als Gleichung der Bahnkurve muß man finden:

$$r = \frac{p}{c \cos \vartheta - 1}.$$

$P$  bewegt sich auf einem Hyperbelzweige, dessen auf der konvexen Seite gelegener Brennpunkt  $O$  ist (vgl. „A. G.“ S. 65).

3) Man untersuche die für  $\psi(r) = -\mu^2 r^{-3}$ ,  $\alpha < \mu$  und  $C = 0$  eintretende Zentralbewegung. — Man wird zu folgenden Gleichungen gelangen:

$$r^2 = 2 |t| \sqrt{\mu^2 - \alpha^2} = 2 \alpha \beta |t|, \quad r = e^{\operatorname{sgn}(t) \cdot \beta^2},$$

so daß dem gesamten Zeitverlaufe eine aus zwei symmetrischen „logarithmischen“ Spiralen zusammengesetzte Kurve entspricht.

**5. Lineare homogene Differentialgleichungen.** Eine Differentialgleichung zweiter Ordnung der Gestalt:

$$(1) \quad y'' + \varphi(x)y' + \psi(x)y = \chi(x)$$

heißt eine „lineare Differentialgleichung“, da sie in  $y$ ,  $y'$  und  $y''$  linear gebaut ist. Die Funktionen  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  und  $\chi(x)$  von  $x$  allein, die „Koeffizienten“ der Gleichung (1), seien in einem geeignet begrenzten Intervalle eindeutig und stetig. Ist insbesondere die Funktion  $\chi(x)$  mit 0 identisch, so heißt die Differentialgleichung „homogen“ (s. S. 277); eine solche Gleichung:

$$(2) \quad y'' + \varphi(x)y' + \psi(x)y = 0$$

sei zunächst zur Behandlung vorgelegt.

Die Gleichung (2) wird befriedigt, wenn man  $y$  mit 0 identisch nimmt. Ist noch irgend ein von dieser Lösung verschiedenes partikuläres Integral  $y_1$  bekannt\*), so kann man die allgemeine Lösung durch eine Quadratur und die Lösung einer linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung (s. S. 277), mithin insgesamt durch zwei Quadraturen finden. Führt man nämlich statt  $y$  eine neue abhängige Variable  $z$  durch:

$$(3) \quad z = \frac{d(y_1^{-1} \cdot y)}{dx}$$

\*) Die Existenz einer solchen Lösung folgt aus den allgemeinen Sätzen von S. 298 ff.

ein, so ist für  $y$  und die Ableitungen von  $y$  in (2) einzusetzen:

$$(4) \quad \begin{cases} y = y_1 \left( \int z dx + C_1 \right), \\ y' = y_1' \left( \int z dx + C_1 \right) + y_1 z, \\ y'' = y_1'' \left( \int z dx + C_1 \right) + 2y_1' z + y_1 z', \end{cases}$$

unter  $C_1$  eine erste Konstante verstanden. Da die Gleichung (2) für  $y_1$  identisch erfüllt ist, so ergibt sich für  $z$  die „lineare homogene Differentialgleichung erster Ordnung“:

$$z' + \left( \varphi(x) + 2 \frac{y_1'}{y_1} \right) z = 0,$$

die nach S. 277 durch Trennung der Variablen zu integrieren ist\*); es findet sich als allgemeine Lösung:

$$z = C_2 y_1^{-2} \cdot e^{-\int \varphi(x) dx}$$

Durch Eintragung dieses Ausdrucks von  $z$  in die erste Gleichung (4) erhält man als allgemeine Lösung der Gleichung (2):

$$(5) \quad y = C_1 y_1 + C_2 y_1 \int \left( y_1^{-2} e^{-\int \varphi(x) dx} \right) dx.$$

*Kennt man ein erstes, nicht identisch verschwindendes Integral  $y_1$  der homogenen linearen Differentialgleichung (2), so ist die allgemeine Lösung durch zwei Quadraturen in der Gestalt (5) zu berechnen, wo  $C_1$  und  $C_2$  willkürliche Konstanten sind.*

Schreiben wir zur Abkürzung:

$$(6) \quad y_2 = y_1 \int \left( y_1^{-2} e^{-\int \varphi(x) dx} \right) dx,$$

so nimmt das allgemeine Integral (5) die Gestalt an:

$$(7) \quad y = C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

Diese Bauart des allgemeinen Integrals ist übrigens leicht aus derjenigen der Gleichung (2) verständlich. Trägt man nämlich den Ausdruck (7) für  $y$  in (2) ein, so folgt bei Fortlassung des Arguments  $x$ :

$$y'' + \varphi y' + \psi y = C_1 (y_1'' + \varphi y_1' + \psi y_1) + C_2 (y_2'' + \varphi y_2' + \psi y_2).$$

Sind aber  $y_1$  und  $y_2$  partikuläre Integrale, so verschwinden die beiden Klammerausdrücke rechts in  $x$  identisch, so daß auch  $y$ , wie auch die beiden Konstanten gewählt sein mögen, die Gleichung (2) befriedigt.

Wir nahmen an, daß  $y_1$  irgend ein nicht mit 0 identisches partiku-

\*) Das Intervall der unabhängigen Variablen  $x$  denken wir hier und weiterhin nötigenfalls so beschränkt, daß  $y_1$  in demselben nicht verschwindet.

läres Integral sei. Es sei jetzt ferner  $\bar{y}_2$  irgend ein weiteres Integral, jedoch so gewählt, daß  $\bar{y}_2 : y_1$  nicht mit einer Konstanten identisch ist.\*) Dann können wir  $\bar{y}_2$  als Integral von (2) in der Form:

$$\bar{y}_2 = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

darstellen, und zwar ist dabei  $c_2$  notwendig von 0 verschieden, da eben sonst  $\bar{y}_2 : y_1$  mit  $c_1$  identisch wäre. Dieserhalb kann man schreiben:

$$y_2 = -\frac{c_1}{c_2} y_1 + \frac{1}{c_2} \bar{y}_2.$$

Tragen wir aber diesen Ausdruck von  $y_2$  in (7) ein, so folgt:

$$(8) \quad y = C_1' y_1 + C_2' \bar{y}_2, \quad C_1' = \frac{C_1 c_2 - C_2 c_1}{c_2}, \quad C_2' = \frac{C_2}{c_2}.$$

Schreiben wir statt  $\bar{y}_2$  wieder  $y_2$ , so folgt: *Sind  $y_1, y_2$  irgend zwei nicht identisch verschwindende partikuläre Integrale der homogenen linearen Differentialgleichung (2), und ist der Quotient  $y_1 : y_2$  nicht mit einer Konstanten identisch, so ist das allgemeine Integral von (2) in der Gestalt (7) gewonnen, wo  $C_1$  und  $C_2$  zwei willkürliche Konstante sind.*

Um diesen Satz verallgemeinern zu können, nennen wir zwei Funktionen  $y_1, y_2$  der Variablen  $x$  „linear-abhängig“, falls eine Gleichung:

$$(9) \quad c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0$$

mit konstanten und nicht zugleich verschwindenden Koeffizienten  $c_1, c_2$  in  $x$  identisch besteht; gibt es indessen keine solche Relation zwischen  $y_1$  und  $y_2$ , so heißen diese beiden Funktionen „linear-unabhängig“. Ist mindestens eine der Funktionen, z. B.  $y_1$ , mit 0 identisch, so liegt lineare Abhängigkeit vor, da die Gleichung (9) für  $c_1 \neq 0, c_2 = 0$  identisch gilt. Ist keine der beiden Funktionen mit 0 identisch, so könnte eine Gleichung (9) nur dann gelten, wenn  $c_1$  und  $c_2$  beide von 0 verschieden sind; dann aber erweist sich der Quotient  $y_1 : y_2$  als mit einer Konstanten identisch. Andererseits gilt, wenn das letztere zutrifft, immer auch eine Gleichung (9). Wir können demnach den letzten über die Lösungen von (2) ausgesprochenen Satz in die einfachere Form kleiden: *Sind  $y_1, y_2$  irgend zwei linear-unabhängige Lösungen von (2), so ist die allgemeine Lösung in der Gestalt (7) mit willkürlichen Konstanten  $C_1, C_2$  gewonnen.*

Es sei nun eine *lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung*:

$$(10) \quad y''' + \varphi(x) y'' + \psi(x) y' + \chi(x) y = 0$$

vorgelegt mit „Koeffizienten“  $\varphi(x), \psi(x)$  und  $\chi(x)$ , die in einem geeignet begrenzten Intervalle eindeutig und stetig sind. Wir nehmen wieder

\*) Es gibt sicher derartige Integrale; denn z. B. das obige  $y_2$  ist ein solches.

an, es sei irgend ein erstes, nicht identisch verschwindendes partikuläres Integral  $y_1$  bereits bekannt. Führen wir auch hier als neue abhängige Variable das in (3) gegebene  $z$  ein, so ist an die Gleichungen (4) noch die weitere zu reihen:

$$y''' = y_1''' \left( \int z dx + C_1 \right) + 3y_1'' z + 3y_1' z' + y_1 z''.$$

Aus (10) folgt dann für  $z$  die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$(11) \quad z'' + \left( \varphi(x) + 3 \frac{y_1'}{y_1} \right) z' + \left( \psi(x) + 2\varphi(x) \frac{y_1''}{y_1'} + 3 \frac{y_1'''}{y_1} \right) z = 0.$$

Nach dem schon bewiesenen Satze stellen wir das allgemeine Integral  $z$  dieser Gleichung in zwei partikulären, linear-unabhängigen Lösungen  $z_2, z_3$  mittelst zweier willkürlicher Konstanten  $C_2$  und  $C_3$  in der Gestalt:

$$z = C_2 z_2 + C_3 z_3$$

dar. Dann aber folgt aus der ersten Gleichung (4) für das allgemeine Integral  $y$  von (10) sofort:

$$(12) \quad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3,$$

wo  $y_2, y_3$  die zwei weiteren partikulären Integrale sind:

$$(13) \quad y_2 = y_1 \int z_2 dx, \quad y_3 = y_1 \int z_3 dx.$$

Indem wir den Begriff der linearen Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit von zwei auf mehr als zwei Funktionen von  $x$  übertragen, erkennen wir leicht, daß die drei gewonnenen Lösungen  $y_1, y_2, y_3$  linear-unabhängig sind. Bestände nämlich eine Relation:

$$(14) \quad c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 = y_1 \left( c_1 + c_2 \int z_2 dx + c_3 \int z_3 dx \right) = 0$$

mit nicht durchweg verschwindenden  $c$  identisch, so könnten jedenfalls  $c_2$  und  $c_3$  nicht zugleich verschwinden; denn in diesem Falle wäre auch  $c_1 = 0$ , da  $y_1$  nicht mit 0 identisch ist. Aus dem gleichen Grunde (des nicht identisch verschwindenden  $y_1$ ) würde sich ergeben, daß notwendig:

$$c_1 + c_2 \int z_2 dx + c_3 \int z_3 dx = 0$$

identisch bestände, woraus durch Differentiation:

$$c_2 z_2 + c_3 z_3 = 0$$

als identische Gleichung folgen würde. Da aber  $z_2$  und  $z_3$  linear-unabhängig sind, so folgt die Unmöglichkeit einer identischen Gleichung (14) mit nicht durchweg verschwindenden  $c$ .

Nach der Voraussetzung war  $y_1$  irgend eine nicht identisch ver-

schwindende Partikularlösung von (10). Es seien jetzt  $y_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3$  irgend drei linear-unabhängige partikuläre Integrale dieser Gleichung; dann sind:

$$(15) \quad \bar{z}_2 = \frac{d(y_1^{-1} \cdot \bar{y}_2)}{dx}, \quad \bar{z}_3 = \frac{d(y_1^{-1} \cdot \bar{y}_3)}{dx}$$

zwei Integrale der Gleichung (11), die gleichfalls linear-unabhängig sind. Bestände nämlich eine Relation:

$$c_2 \bar{z}_2 + c_3 \bar{z}_3 = c_2 \frac{d(y_1^{-1} \cdot \bar{y}_2)}{dx} + c_3 \frac{d(y_1^{-1} \cdot \bar{y}_3)}{dx} = 0$$

mit nicht zugleich verschwindenden  $c_2, c_3$  identisch, so würde durch Integration und Multiplikation mit  $y_1$  eine Relation:

$$c_1 y_1 + c_2 \bar{y}_2 + c_3 \bar{y}_3 = 0$$

folgen, deren Existenz wir ausschlossen. Nach dem über die Gleichungen zweiter Ordnung bereits bewiesenen Satze können wir nun  $\bar{z}_2, \bar{z}_3$ , als linear-unabhängig, der Darstellung aller Lösungen der Gleichung (11), also auch der obigen Lösungen  $z_2, z_3$ , zugrunde legen:

$$z_2 = C_2' \bar{z}_2 + C_3' \bar{z}_3, \quad z_3 = C_2'' \bar{z}_2 + C_3'' \bar{z}_3.$$

Man trägt diese Ausdrücke in (13) ein und findet:

$$(16) \quad y_2 = C_1' y_1 + C_2' \bar{y}_2 + C_3' \bar{y}_3, \quad y_3 = C_1'' y_1 + C_2'' \bar{y}_2 + C_3'' \bar{y}_3.$$

Wenn wir demnach zunächst das allgemeine Integral  $y$  durch die  $y_1, y_2, y_3$  in der Gestalt (12) darstellten, so können zufolge der Gleichungen (16) zu diesem Zwecke an Stelle der  $y_1, y_2, y_3$  auch die  $y_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3$  benutzt werden. Damit aber haben wir den Satz gewonnen: *Das allgemeine Integral der linearen homogenen Differentialgleichung dritter Ordnung (10) ist in irgend drei partikulären Lösungen  $y_1, y_2, y_3$ , die linear-unabhängig sind, mittelst dreier willkürlicher Konstanten in der Gestalt (12) darstellbar.*

Die Überlegung ist so angelegt, daß ihrer Verallgemeinerung auf Grund des Schlusses der „vollständigen Induktion“ nichts im Wege steht. Es sei eine lineare homogene Differentialgleichung  $n^{\text{ter}}$  Ordnung:

$$(17) \quad y^{(n)} + \varphi_1(x) y^{(n-1)} + \varphi_2(x) y^{(n-2)} + \dots + \varphi_n(x) y = 0,$$

vorgelegt, deren „Koeffizienten“  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$  in einem geeignet gewählten Intervalle eindeutig und stetig seien. Dann gibt es  $n$  partikuläre, linear-unabhängige Integrale  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , und die allgemeine Lösung ist in irgend einem solchen Integralsysteme in der Gestalt:

$$(18) \quad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$$

mit  $n$  willkürlichen Konstanten  $C_1, C_2, \dots, C_n$  darstellbar.

**6. Lineare homogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.** Die Entwicklungen in § 5 gründeten sich auf die Annahme, daß ein erstes partikuläres Integral  $y_1$ , das nicht identisch verschwindet,

bereits bekannt sei. Nun geht zwar die *Existenz* eines Integrals  $y = f(x)$ , für welches man z. B. im Falle einer Differentialgleichung zweiter Ordnung in einem Punkte  $x_0$  des Intervalles sogar die Werte  $f(x_0)$  und  $f'(x_0)$  nach Belieben vorschreiben mag, aus dem Satze von S. 299 hervor. Dagegen kann man schon im Falle einer Gleichung zweiter Ordnung keineswegs immer eine gewünschte Lösung  $y_1$  durch Quadraturen gewinnen.

Es gibt indessen einen wichtigen Spezialfall, in dem man die Lösung der Differentialgleichung zweiter Ordnung mit Hilfe von Quadraturen erhalten kann. Sind die Funktionen  $\varphi(x)$  und  $\psi(x)$  mit Konstanten  $a, b$  identisch, handelt es sich also um die Lösung einer „linearen homogenen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten“:

$$(1) \quad y'' + ay' + by = 0, \quad "$$

so gelingt die Angabe des allgemeinen Integrals auf folgendem Wege:

Ist erstlich  $a = 0$ , so liegt eine Differentialgleichung der Art (11) S. 302 vor, und wir gelangen nach (13) S. 302 zur allgemeinen Lösung:

$$(2) \quad \int \frac{dy}{\sqrt{C_1 - by^2}} = x + C_2.$$

Bei Berechnung des Integrals ist zu unterscheiden, ob  $b < 0$ ,  $= 0$  oder  $> 0$  ist; im ersten und dritten Falle kommen die Formeln (2) und (4) S. 35 zur Verwendung:

$$\frac{1}{\sqrt{-b}} \ln |y\sqrt{-b} + \sqrt{C_1 - by^2}| = x + C_2, \quad b < 0,$$

$$y = x\sqrt{C_1} + C_2\sqrt{C_1}, \quad b = 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{b}} \arcsin \left( \frac{y\sqrt{b}}{\sqrt{C_1}} \right) = x + C_2, \quad b > 0.$$

Die erste dieser Gleichungen gibt bei Übergang zur Exponentialfunktion die erste der folgenden Gleichungen:

$$|y\sqrt{-b} + \sqrt{C_1 - by^2}| = e^{c_2\sqrt{-b}} \cdot e^{x\sqrt{-b}},$$

$$|y\sqrt{-b} - \sqrt{C_1 - by^2}| = |C_1| \cdot e^{-c_2\sqrt{-b}} e^{-x\sqrt{-b}},$$

während die zweite eine einfache Folge der ersten ist. Durch Addition der beiden Werte  $y\sqrt{-b} \pm \sqrt{C_1 - by^2}$  gelangt man zu  $y$ ; man setzt zur Abkürzung:

$$\pm \frac{e^{c_2\sqrt{-b}}}{2\sqrt{-b}} = c_1, \quad \pm \frac{C_1 e^{-c_2\sqrt{-b}}}{2\sqrt{-b}} = c_2$$

und findet als *allgemeine Lösung der Gleichung (1) für  $a = 0, b < 0$* :

$$(3) \quad y = c_1 e^{x\sqrt{-b}} + c_2 e^{-x\sqrt{-b}},$$

die man nach der zwischen der Exponentialfunktion und den hyperbolischen Funktionen bestehenden Beziehung auch so schreiben kann:

$$(4) \quad y = c_1' \text{Cos} (x\sqrt{-b}) + c_2' \text{Sin} (x\sqrt{-b}).$$

Hieran reiht sich der selbstverständliche Satz: *Die allgemeine Lösung der Gleichung (1) für  $a = 0$ ,  $b = 0$  ist:*

$$(5) \quad y = c_1 x + c_2.$$

Endlich gelangen wir für  $b > 0$  von der obigen vorläufigen Form der Lösung durch Übergang zu den trigonometrischen Funktionen zu:

$$y\sqrt{\frac{b}{c_1}} = \sin(C_2\sqrt{b} + x\sqrt{b}) = \sin(C_2\sqrt{b}) \cdot \cos(x\sqrt{b}) + \cos(C_2\sqrt{b}) \cdot \sin(x\sqrt{b}).$$

Schreiben wir zur Abkürzung:

$$\sqrt{\frac{c_1}{b}} \sin(C_2\sqrt{b}) = c_1, \quad \sqrt{\frac{c_1}{b}} \cos(C_2\sqrt{b}) = c_2,$$

so ergibt sich: *Die allgemeine Lösung der Gleichung (1) für  $a = 0$ ,  $b > 0$  ist:*

$$(6) \quad y = c_1 \cos(x\sqrt{b}) + c_2 \sin(x\sqrt{b}).$$

Eine Gleichung (1) mit  $a \neq 0$  ist auf den eben erledigten Fall leicht zurückführbar. Führt man nämlich an Stelle von  $y$  eine neue abhängige

Variable  $z$  durch die Substitution  $y = e^{-\frac{1}{2}ax} z$  ein, so geht die Gleichung nach Forthebung des Exponentialfaktors über in:

$$z'' + \left(b - \frac{1}{4}a^2\right)z = 0,$$

womit eine Gleichung der eben behandelten Art gewonnen ist. Die allgemeine Lösung  $z$  berechnet sich nach (3) ff., und man erhält daraus für  $y$ :

$$(7) \quad \begin{cases} y = e^{-\frac{1}{2}ax} \left( c_1 e^{x\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}} + c_2 e^{-x\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}} \right), \\ y = e^{-\frac{1}{2}ax} (c_1 x + c_2) \\ y = e^{-\frac{1}{2}ax} \left( c_1 \cos \left( x\sqrt{b - \frac{1}{4}a^2} \right) + c_2 \sin \left( x\sqrt{b - \frac{1}{4}a^2} \right) \right), \end{cases}$$

je nachdem  $a^2 - 4b > 0$ ,  $= 0$  oder  $< 0$  ist.

Um dieses Ergebnis in seine einfachste Form zu kleiden, führen wir die algebraische Gleichung zweiten Grades:

$$(8) \quad \lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

mit der Unbekannten  $\lambda$  und den Koeffizienten  $a, b$  der Differentialglei-

chung (1) ein. Diese Gleichung heißt die „*charakteristische Gleichung*“ der Differentialgleichung. Ihre Wurzeln:

$$-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}, \quad -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}$$

bezeichnen wir durch  $\lambda_1, \lambda_2$ , falls sie reell und verschieden sind, durch  $\lambda$ , falls sie gleich, durch  $\lambda + i\mu, \lambda - i\mu$ , falls sie nicht reell sind. Dies sind gerade die drei bei (7) unterschiedenen Fälle; wir finden: *Die allgemeine Lösung der linearen homogenen Differentialgleichung (1) mit konstanten Koeffizienten ist:*

$$(9) \quad \begin{cases} y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}, \\ y = e^{\lambda x}(c_1 x + c_2), \\ y = e^{\lambda x}(c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x), \end{cases}$$

je nachdem die Wurzeln der charakteristischen Gleichung (8) reell und verschieden, zusammenfallend oder nicht reell sind.

Ist der Gebrauch komplexer Größen gestattet (s. darüber den Anhang), so kann man die dritte Gleichung (9) als Spezialfall der ersten fassen und den Satz aussprechen: *Hat die charakteristische Gleichung (8) zwei „verschiedene“ (reelle oder nichtreelle) Wurzeln  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ , so ist das allgemeine Integral:*

$$(10) \quad y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Gilt nämlich  $\lambda_1 = \lambda + i\mu, \lambda_2 = \lambda - i\mu$ , so ist (s. § 4 des Anhangs):

$$e^{(\lambda \pm i\mu)x} = e^{\lambda x} \cdot e^{\pm i\mu x} = e^{\lambda x} (\cos \mu x \pm i \sin \mu x),$$

und (10) liefert, wenn wir  $c_1 + c_2 = c_1', i(c_1 - c_2) = c_2'$  schreiben:

$$y = e^{\lambda x}(c_1' \cos \mu x + c_2' \sin \mu x),$$

d. h. das dritte Integral (9).

Auch bei der Verallgemeinerung auf eine *lineare homogene Differentialgleichung  $n^{\text{ter}}$  Ordnung mit konstanten Koeffizienten:*

$$(11) \quad y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = 0$$

vermeiden wir Umständlichkeiten durch Einführung der komplexen Größen. Die zugehörige „*charakteristische Gleichung*“:

$$(12) \quad \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0,$$

deren linke Seite wir als ganze Funktion  $n^{\text{ten}}$  Grades von  $\lambda$  mit  $g(\lambda)$  bezeichnen wollen, möge die  $m$ -fache reelle oder komplexe Wurzel  $\lambda$  haben. Wir führen dann die neue abhängige Variable  $z = e^{-\lambda x} y$  in (11) ein und finden zunächst unter Heranziehung der Regel (2) in I, 142 für  $y$  und die Ableitungen von  $y$ :

$$\begin{aligned} y &= e^{\lambda x} z, \\ y' &= \lambda e^{\lambda x} z + e^{\lambda x} z', \\ y'' &= \lambda^2 e^{\lambda x} z + 2\lambda e^{\lambda x} z' + e^{\lambda x} z'', \\ y''' &= \lambda^3 e^{\lambda x} z + 3\lambda^2 e^{\lambda x} z' + 3\lambda e^{\lambda x} z'' + e^{\lambda x} z''', \\ &\dots \dots \dots \\ y^{(n)} &= \lambda^n e^{\lambda x} z + \binom{n}{1} \lambda^{n-1} e^{\lambda x} z' + \binom{n}{2} \lambda^{n-2} e^{\lambda x} z'' + \dots + e^{\lambda x} z^{(n)}. \end{aligned}$$

Tragen wir diese Ausdrücke in (11) ein und heben den Exponentialfaktor fort, so nimmt die entstehende Gleichung bei Gebrauch der Ableitungen  $g'(\lambda)$ ,  $g''(\lambda)$ , ... der ganzen Funktion  $g(\lambda)$  die einfache Gestalt an:

$$z^{(n)} + \frac{g^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} z^{(n-1)} + \dots + \frac{g''(\lambda)}{2!} z'' + \frac{g'(\lambda)}{1!} z' + g(\lambda) z = 0.$$

Ist nun  $\lambda$  eine  $m$ -fache (nicht jedoch eine  $(m+1)$ -fache) Wurzel der Gleichung (12), so gilt (s. I, 79 ff.):

$$g(\lambda) = 0, \quad g'(\lambda) = 0, \quad \dots, \quad g^{(m-1)}(\lambda) = 0, \quad g^{(m)}(\lambda) \neq 0.$$

Die Differentialgleichung für  $z$  hat also die Gestalt:

$$z^{(n)} + \frac{g^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} z^{(n-1)} + \dots + \frac{g^{(m)}(\lambda)}{m!} z^{(m)} = 0$$

und ist demnach erfüllt, wenn  $z^{(m)}$  mit 0 identisch ist, d. h. wenn  $z$  eine ganze Funktion  $(m-1)$ ten Grades von  $x$  mit *willkürlichen* Koeffizienten ist. Hieraus berechnet sich für  $y$ :

$$(13) \quad y = e^{\lambda x} (c_1 x^{m-1} + c_2 x^{m-2} + \dots + c_m).$$

Offenbar können wir wegen der Willkür der  $c$  auch sagen, daß der  $m$ -fachen Wurzel  $\lambda$  der Gleichung (12) entsprechend die  $m$  partikulären Integrale:

$$(14) \quad e^{\lambda x}, \quad x e^{\lambda x}, \quad x^2 e^{\lambda x}, \quad \dots, \quad x^{m-1} e^{\lambda x}$$

gewonnen sind.

Ist  $\lambda$  komplex, so schreiben wir besser  $(\lambda + i\mu)$  für  $\lambda$  und benutzen den Satz, daß die Gleichung (12) auch die konjugierte Zahl  $(\lambda - i\mu)$  zur  $m$ -fachen Wurzel hat (s. I, 77 ff.). Wir haben also dann die  $2m$  partikulären Lösungen:

$$(15) \quad x^\nu e^{\lambda x} e^{i\mu x}, \quad x^\nu e^{\lambda x} e^{-i\mu x}, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, m-1.$$

Statt des beim einzelnen  $\nu$  eintretenden Lösungs-paars (15) können wir aber auch (s. den Schlußsatz von § 5) das folgende Paar benutzen:

$$x^\nu e^{\lambda x} \frac{e^{i\mu x} + e^{-i\mu x}}{2} = x^\nu e^{\lambda x} \cos \mu x,$$

$$x^\nu e^{\lambda x} \frac{e^{i\mu x} - e^{-i\mu x}}{2i} = x^\nu e^{\lambda x} \sin \mu x.$$

Auf diese Weise gewinnt das Schlußergebnis wieder reelle Gestalt: *Einer reellen  $m$ -fachen Wurzel  $\lambda$  der Gleichung (12) entsprechen die  $m$  partikulären Integrale:*

$$(16) \quad e^{\lambda x}, \quad x e^{\lambda x}, \quad x^2 e^{\lambda x}, \quad \dots, \quad x^{m-1} e^{\lambda x},$$

*einem Paare  $m$ -facher komplexer Wurzeln die  $2m$  partikulären Integrale:*

$$(17) \quad \begin{cases} e^{\lambda x} \cos \mu x, & x e^{\lambda x} \cos \mu x, & \dots, & x^{m-1} e^{\lambda x} \cos \mu x, \\ e^{\lambda x} \sin \mu x, & x e^{\lambda x} \sin \mu x, & \dots, & x^{m-1} e^{\lambda x} \sin \mu x. \end{cases}$$

**7. Lineare nicht-homogene Differentialgleichungen.** Die Lösung einer linearen Differentialgleichung:

$$(1) \quad y'' + \varphi(x)y' + \psi(x)y = \chi(x)$$

wird nach der „*Methode der Variation der Konstanten*“ von Lagrange bewerkstelligt, die für die linearen Differentialgleichungen erster Ordnung

S. 277 ff. entwickelt wurde. Sie geht von der Voraussetzung aus, daß die zu (1) „gehörende“ *homogene Gleichung*:

$$(2) \quad \eta'' + \varphi(x)\eta' + \psi(x)\eta = 0$$

bereits gelöst sei; es seien  $\eta_1, \eta_2$  irgend zwei linear-unabhängige Lösungen, so daß die „allgemeine Lösung“ von (2) in der Gestalt  $(C_1\eta_1 + C_2\eta_2)$  darstellbar ist. Die Methode besteht nun darin, daß wir an Stelle der Konstanten  $C_1, C_2$  zwei neue von  $x$  abhängige Variable  $z_1, z_2$  einführen und versuchen, mit dem so abgeänderten Ausdrücke:

$$(3) \quad y = z_1\eta_1 + z_2\eta_2$$

die Differentialgleichung (1) zu befriedigen.

In dieser Form würde freilich der Aufgabe noch eine Unbestimmtheit anhaften, da an Stelle einer jetzt zwei abhängige Variable  $z_1, z_2$  eingeführt sind. Wir heben diese Unbestimmtheit in einer Art, die für die durchzuführende Rechnung grundlegend ist, indem wir für die beiden von  $x$  abhängigen Variablen  $z_1, z_2$  die Relation:

$$(4) \quad z_1'\eta_1 + z_2'\eta_2 = 0$$

vorschreiben. Aus derselben können wir folgern:

$$z_2 = - \int z_1' \frac{\eta_1}{\eta_2} dx$$

und würden auf diese Weise unsere Aufgabe so fassen, daß wir an Stelle von  $y$  eine neue Variable  $z_1$  in (1) einzuführen haben, welche mit  $y$  durch die folgende Gleichung zusammenhängt:

$$y = z_1\eta_1 - \eta_2 \int z_1' \frac{\eta_1}{\eta_2} dx.$$

Versuchen wir nun, die Gleichung (1) mit dem in (3) angesetzten  $y$  zu befriedigen, so haben wir in (1) für  $y, y', y''$  einzutragen:

$$(5) \quad \begin{cases} y = z_1\eta_1 + z_2\eta_2, \\ y' = z_1\eta_1' + z_2\eta_2', \\ y'' = z_1\eta_1'' + z_2\eta_2'' + z_1'\eta_1' + z_2'\eta_2'. \end{cases}$$

Hierbei ist es eine Folge der ausgewählten Relation (4), daß der Ausdruck für  $y'$  nur zweigliedrig ausfällt, da eben die Summe der bei der Differentiation zunächst noch auftretenden Glieder  $z_1'\eta_1, z_2'\eta_2$  verschwindet. Tragen wir nun die Ausdrücke (5) in (1) ein, so soll eine in  $x$  identisch bestehende Gleichung folgen, und umgekehrt wird, wenn das letztere zutrifft, in  $y$  die Lösung von (1) gewonnen sein. Es soll demnach:

$$z_1\eta_1'' + z_2\eta_2'' + z_1'\eta_1' + z_2'\eta_2' + \varphi(x)(z_1\eta_1' + z_2\eta_2') + \psi(x)(z_1\eta_1 + z_2\eta_2) = \chi(x)$$

in  $x$  identisch bestehen. Ordnen wir nach  $z_1, z_2$  an und berücksichtigen, daß  $\eta_1$  und  $\eta_2$  Lösungen von (2) sind, so nimmt die letzte Gleichung die einfache Form an:

$$(6) \quad z_1' \eta_1' + z_2' \eta_2' = \chi(x).$$

Sie dient uns im Verein mit der Gleichung (4) zur Berechnung der Ableitungen erster Ordnung  $z_1', z_2'$  als Funktionen  $\Phi_1(x), \Phi_2(x)$  von  $x$ :

$$(7) \quad z_1' = \Phi_1(x) = -\frac{\eta_2 \chi(x)}{\eta_1 \eta_2' - \eta_2' \eta_1}, \quad z_2' = \Phi_2(x) = +\frac{\eta_1 \chi(x)}{\eta_1 \eta_2' - \eta_2' \eta_1}.$$

Der hier beide Male im Nenner auftretende Ausdruck heißt die „Determinante“  $D$  des zur Berechnung der  $z_1', z_2'$  dienenden Systemes linearer Gleichungen (4), (6) und wird symbolisch durch Zusammenstellung der „Koeffizienten“ der Gleichungen in der Gestalt:

$$(8) \quad D = \eta_1 \eta_2' - \eta_2 \eta_1' = \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ \eta_1' & \eta_2' \end{vmatrix}$$

bezeichnet. Die Möglichkeit der Lösung (7) unserer beiden Gleichungen setzt voraus, daß die Determinante  $D(x)$  nicht mit 0 identisch ist.\*) Dieser Forderung aber ist offenbar zufolge der Gleichung:

$$D(x) = \eta_1^2 \cdot \frac{\eta_1 \eta_2' - \eta_2 \eta_1'}{\eta_1^2} = \eta_1^2 \frac{d\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)}{dx}$$

genügt, da weder  $\eta_1$  mit 0, noch der Quotient  $\eta_2 : \eta_1$  unserer „linear-unabhängigen“ Lösungen  $\eta_1, \eta_2$  von (2) mit einer Konstanten identisch ist.

Aus den berechneten Funktionen  $\Phi_1(x), \Phi_2(x)$  finden wir nun  $z_1, z_2$  selbst durch zwei Quadraturen:

$$(9) \quad z_1 = \int \Phi_1(x) dx + C_1, \quad z_2 = \int \Phi_2(x) dx + C_2.$$

Durch Eintragung dieser Ausdrücke in (3) gelangen wir zur „allgemeinen Lösung“:

$$(10) \quad y = \eta_1 \int \Phi_1(x) dx + \eta_2 \int \Phi_2(x) dx + C_1 \eta_1 + C_2 \eta_2$$

der gegebenen Gleichung (1). Es besteht demnach der Satz: Die nicht-homogene Gleichung (1) ist mittelst zweier Quadraturen (9) allgemein lösbar, wenn man zwei linear-unabhängige Integrale und damit die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung (2) kennt.

Die vorstehende Entwicklung ist leicht auf Differentialgleichungen höherer Ordnung zu verallgemeinern, wie der nächste Fall einer Gleichung dritter Ordnung:

$$(11) \quad y''' + \varphi(x)y'' + \psi(x)y' + \chi(x)y = \omega(x)$$

\*) Vereinzelte Nullpunkte der Funktion  $D(x)$  kann man durch Verkleinerung des zugrunde liegenden Intervalles ausschalten.

darlegen möge. Für die „zugehörige“ *homogene* Gleichung:

$$(12) \quad \eta''' + \varphi(x) \eta'' + \psi(x) \eta' + \chi(x) \eta = 0$$

denken wir ein System linear-unabhängiger Lösungen  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  und damit die „allgemeine Lösung“  $(C_1 \eta_1 + C_2 \eta_2 + C_3 \eta_3)$  bekannt gegeben. Unter „Variation“ der Konstanten bilden wir dann für die Lösung  $y$  von (11) den Ansatz:

$$(13) \quad y = z_1 \eta_1 + z_2 \eta_2 + z_3 \eta_3,$$

wobei wir etwa  $z_1$  als neue abhängige Variable denken und  $z_2, z_3$  an  $z_1$  mittelst der gegebenen Funktionen  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  durch die folgenden Relationen ketten\*):

$$(14) \quad \begin{cases} z_1' \eta_1 + z_2' \eta_2 + z_3' \eta_3 = 0, \\ z_1' \eta_1' + z_2' \eta_2' + z_3' \eta_3' = 0. \end{cases}$$

Damit wir in (13) eine Lösung von (11) haben, ist nun wieder hinreichend und notwendig, daß die Eintragung von

$$\begin{aligned} y &= z_1 \eta_1 + z_2 \eta_2 + z_3 \eta_3, \\ y' &= z_1 \eta_1' + z_2 \eta_2' + z_3 \eta_3', \\ y'' &= z_1 \eta_1'' + z_2 \eta_2'' + z_3 \eta_3'', \\ y''' &= z_1 \eta_1''' + z_2 \eta_2''' + z_3 \eta_3''' + z_1' \eta_1'' + z_2' \eta_2'' + z_3' \eta_3'' \end{aligned}$$

in (11) eine in  $x$  identisch bestehende Gleichung gibt:

$$(15) \quad z_1' \eta_1'' + z_2' \eta_2'' + z_3' \eta_3'' = \omega(x).$$

Die Gleichungen (14) und (15) stellen uns jetzt ein System dreier linearer Gleichungen für die drei Unbekannten  $z_1', z_2', z_3'$  dar.

Indem man die Auflösung dieser Gleichungen nach elementaren Regeln vollzieht, ergeben sich für die  $z_1', z_2', z_3'$  drei Quotienten mit dem gemeinsamen Nenner:

$$(16) \quad D(x) = \eta_1 \eta_2' \eta_3'' + \eta_2 \eta_3' \eta_1'' + \eta_3 \eta_1' \eta_2'' - \eta_3 \eta_2' \eta_1'' - \eta_1 \eta_3' \eta_2'' - \eta_2 \eta_1' \eta_3'',$$

den man wieder die „Determinante“ des Gleichungssystems nennt und entsprechend (8) durch das Symbol bezeichnet:

$$D(x) = \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \eta_1' & \eta_2' & \eta_3' \\ \eta_1'' & \eta_2'' & \eta_3'' \end{vmatrix}.$$

Die Möglichkeit der Auflösung der Gleichungen (14) und (15) setzt wieder voraus, daß die Determinante  $D(x)$  als Funktion von  $x$  nicht mit 0 identisch ist.

Es besteht nun in dieser Hinsicht der Satz, daß die Determinante  $D(x)$  stets und nur dann nicht identisch mit 0 ist, wenn  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  linear-unabhängig sind. Leicht einzusehen ist die Tatsache, daß  $D(x)$  identisch mit 0 ist, falls eine Relation:

$$(17) \quad c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2 + c_3 \eta_3 = 0$$

mit nicht durchweg verschwindenden  $c$  identisch besteht, und daß demnach umgekehrt, wenn  $D(x)$  nicht identisch mit 0 ist, sicher auch die  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  linear-unabhängig sind. Durch Differentiation nach  $x$  finden wir nämlich aus (17) die beiden weiteren Gleichungen:

$$(18) \quad c_1 \eta_1' + c_2 \eta_2' + c_3 \eta_3' = 0, \quad c_1 \eta_1'' + c_2 \eta_2'' + c_3 \eta_3'' = 0.$$

\*) Diese beiden Gleichungen sind nach  $z_2', z_3'$  lösbar, da die „Determinante“

$\eta_2 \eta_3' - \eta_3 \eta_2' = \begin{vmatrix} \eta_2 & \eta_3 \\ \eta_2' & \eta_3' \end{vmatrix}$  wegen der linearen Unabhängigkeit der beiden Funktionen  $\eta_2, \eta_3$  nicht mit 0 identisch ist.

Ist nun etwa  $c_1 \neq 0$ , so multipliziere man die Gleichungen (17) und (18) der Reihe nach mit  $(\eta_2' \eta_3'' - \eta_3' \eta_2'')$ ,  $(\eta_2'' \eta_3 - \eta_3'' \eta_2)$ ,  $(\eta_2 \eta_3' - \eta_3 \eta_2')$  und addiere sie. Man erhält als Ergebnis:

$$c_1 \cdot D(x) = 0$$

mit  $c \neq 0$  als identisch bestehend, so daß  $D(x) = 0$  identisch gilt. Der Beweis der Ergänzung, daß für linear-unabhängige  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  die Determinante  $D(x)$  nicht mit 0 identisch sein kann, hat indessen die Kenntnis einiger Sätze der Determinantentheorie zur Voraussetzung. Wir begnügen uns mit der Angabe eines besonderen Systems  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$ , bei dem  $D(x)$  sicher nicht identisch mit 0 ist.

Nach S. 299 gibt es drei eindeutig bestimmte Integrale  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$ , die für einen Punkt  $x_0$  des Intervalles den Gleichungen:

$$(19) \quad \begin{cases} \eta_1(x_0) = 0, & \eta_1'(x_0) = 0, & \eta_1''(x_0) = \gamma_1, \\ \eta_2(x_0) = 0, & \eta_2'(x_0) = \beta_2, & \eta_2''(x_0) = \gamma_2, \\ \eta_3(x_0) = \alpha_3, & \eta_3'(x_0) = \beta_3, & \eta_3''(x_0) = \gamma_3 \end{cases}$$

genügen, in denen die  $\alpha, \beta, \gamma$  vorgeschriebene Konstante und die  $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$  von 0 verschieden sind. Man rechnet sich für diese  $\eta$  sofort  $D(x_0) = -\alpha_3 \beta_2 \gamma_1$  aus, so daß  $D(x_0) \neq 0$  ist und also (wegen der Stetigkeit der  $\eta$ ) in einem  $x_0$  umgebenden Intervalle  $D(x)$  von 0 verschieden bleibt. Diese  $\eta_1(x), \eta_2(x), \eta_3(x)$  sind also sicher linear-unabhängig und ermöglichen, in die Gleichungen (14) und (15) eingesetzt, die Berechnung dreier Funktionen:

$$z_1' = \Phi_1(x), \quad z_2' = \Phi_2(x), \quad z_3' = \Phi_3(x).$$

Durch Integration finden wir wie in (9) die  $z$  selbst und in:

$$(20) \quad y = \eta_1 \int \Phi_1(x) dx + \eta_2 \int \Phi_2(x) dx + \eta_3 \int \Phi_3(x) dx + C_1 \eta_1 + C_2 \eta_2 + C_3 \eta_3$$

die „allgemeine Lösung“ von (11). Nach Lösung der homogenen Gleichung (12) ist also die allgemeine Lösung der nicht-homogenen Gleichung (11) durch drei Quadraturen berechenbar.

Bei beliebigem  $n$  wolle man sogleich mit einem Integralsysteme  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  der „homogenen“ Gleichung arbeiten, das den entsprechend (19) anzusetzenden Bedingungen genügt. Die Durchführung der Betrachtung begegnet dann keinen Schwierigkeiten und führt zu dem Satze, daß nach Lösung der homogenen Gleichung die nicht-homogene Gleichung durch  $n$  Quadraturen gelöst werden kann.

Die folgenden Aufgaben beziehen sich zugleich auf die Paragraphen 5 und 6.

1)  $2x^2 y'' + xy' - y = 0$ . Aus der partikulären Lösung  $y = x$  ist die allgemeine zu berechnen. — Allgemeine Lösung:  $y = c_1 x + \frac{c_2}{\sqrt{x}}$ .

2)  $(1 - x^2) y'' - xy' + \frac{1}{4} y = 0$ . Aus der partikulären Lösung  $y = \sqrt{1+x}$  berechne man die allgemeine. — Lösung:  $y = c_1 \sqrt{1+x} + c_2 \sqrt{1-x}$ .

3)  $y'' - 3y' + 2y = 0$ . — Lösung:  $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ .

4)  $y'' + 13y' + 42y = 0$ . — Lösung:  $y = c_1 e^{-6x} + c_2 e^{-7x}$ .

5)  $y' + 2y' + 5y = 0$ . — Lösung:  $y = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$ .

6)  $y'' - 2y' + y = 0$ . — Lösung:  $y = e^x(c_1 x + c_2)$ .

7)  $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$ . — Lösung:  $y = c_1 e^x + e^{2x}(c_2 x + c_3)$ .

8) Man zeige, daß eine Differentialgleichung der Gestalt:

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0$$

durch Einführung der neuen unabhängigen Variablen  $x_1 = \ln x$  auf eine lineare homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten zurückgeführt wird. — Man stellt nämlich leicht die folgenden Beziehungen fest:

$$xy' = \frac{dy}{dx_1}, \quad x^2 y'' = \frac{d^2 y}{dx_1^2} - \frac{dy}{dx_1}, \quad x^3 y''' = \frac{d^3 y}{dx_1^3} - 3 \frac{d^2 y}{dx_1^2} + 2 \frac{dy}{dx_1}, \quad \dots$$

$$9) y'' - 3y' + 2y = 4(x-1). \quad \text{— Lösung: } y = 1 + 2x + c_1 e^x + c_2 e^{2x}.$$

10) Man löse die Differentialgleichung  $y''' = \varphi(x)$  nach der Methode der Variation der Konstanten. — Die zugehörige homogene Gleichung hat die Integrale  $x^2, x, 1$ . Die Lösung kleidet sich in die Form:

$$y = \frac{1}{2} x^2 \int \varphi dx - x \int x \varphi dx + \frac{1}{2} \int x^2 \varphi dx + c_1 x^2 + c_2 x + c_3.$$

Man zeige die Identität dieser Lösung mit der aus (4) S. 301 folgenden.

**8. Schwingungsvorgänge.** Ein materieller Punkt sei auf der  $x$ -Achse beweglich und habe im Nullpunkte  $O$  seine Gleichgewichtslage. Wird er aus der letzteren entfernt, so möge eine „elastische Zugkraft“ nach dem Punkte  $O$  zurück auftreten, die der Entfernung des Punktes von  $O$  proportional ist. Unter dieser Voraussetzung wird die Bewegung des Punktes, wie gleich gezeigt wird, durch Lösung einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten festgestellt und erfolgt nach einem einfachen „Sinusgesetz“. Es findet also eine „periodische“ Bewegung statt, oder es tritt, wie wir sagen wollen, ein „Schwingungsvorgang“ ein, der des näheren von der Masse des Punktes, der Größe der anziehenden Kraft und den „Anfangsbedingungen“ abhängt.

Übt das den Punkt umgebende Medium, etwa die Luft, eine „bremsende Kraft“ aus, so gelte das Gesetz, daß diese Kraft der Geschwindigkeit des Punktes proportional ist. Auch dann wird, wie wir zeigen werden, die Bewegung des Punktes durch Lösung einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten festgestellt. Der Bewegungsvorgang kann jetzt zwar insofern noch ein „periodischer“ sein, als wechselnde Hin- und Hergänge, also „Schwingungen“ stattfinden; es kann aber auch, wie wir finden werden, eine „aperiodische Bewegung“ eintreten. Gleichwohl sagt man in beiden Fällen, der Punkt führe „gedämpfte Schwingungen“ aus, wogegen man beim Fehlen einer bremsenden Kraft von „freien“ oder „natürlichen“ Schwingungen oder auch von den „Eigenschwingungen“ des Punktes spricht, die er eben allein vermöge seiner Masse und der ihm zukommenden elastischen Zugkraft vollführt.

Ein häufig vorkommender Fall ist nun der, daß auf den materiellen Punkt außer der elastischen Zugkraft noch eine „äußere“ allein von der Zeit abhängende Kraft wirkt. Durch diese tritt dann eine „Störung“ des Schwingungsvorganges ein, und man nennt dieserhalb die Funktion,

welche die Abhängigkeit der durch die äußere Kraft hervorgerufenen Beschleunigung von der Zeit darstellt, die „*Störungsfunktion*“. Ist die letztere selbst eine *periodische* Funktion der Zeit, so zwingt sie dem materiellen Punkte eine neue Schwingungsbewegung auf, und man spricht dann von „*erzwungenen Schwingungen*“, die der materielle Punkt (mit oder ohne Dämpfung) ausführt. Hier werden wir zu einer nicht-homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung geführt werden.

Der geradlinig schwingende Punkt ist nur ein einfachstes Beispiel für zahlreiche, nach den gleichen Gesetzen erfolgende Schwingungsvorgänge bei mechanischen Vorrichtungen oder auch bei elektrischen Strömen. Eine an einer Spiralfeder hängende Last, bei der die „*Störung*“ durch eine schwankende Vertikalbewegung des Aufhängepunktes bewirkt wird, eine Hängebrücke mit rhythmischen Stößen der Fußgänger, ein aufrecht stehender Mast mit periodisch erfolgenden Windstößen, eine Torsionsschwingungen ausführende Schiffswelle mit rhythmisch vor sich gehenden Antrieben einer Kolbenmaschine sind naheliegende mechanische Beispiele. Für alle diese Schwingungsvorgänge sind die Ergebnisse der folgenden Rechnung grundlegend.

Wir kehren zu dem auf der  $x$ -Achse beweglichen materiellen Punkte zurück, nennen  $m$  seine Masse und  $x$  seine Abszisse zur Zeit  $t$  und gewinnen in den beiden ersten Ableitungen von  $x$  nach  $t$  die in Richtung der positiven  $x$ -Achse gemessene Geschwindigkeit  $\dot{x}$  und Beschleunigung  $\ddot{x}$  des Punktes zur Zeit  $t$ . Die in der gleichen Richtung wirkende Kraft, die gleich dem Produkte  $m\ddot{x}$  ist, setzt sich im allgemeinsten Falle zusammen erstens aus der „*elastischen*“ Zugkraft  $-\alpha^2 x$  gegen  $O$ , zweitens aus der mit  $\dot{x}$  proportionalen „*bremsenden*“ oder „*dämpfenden*“ Kraft  $-\delta\dot{x}$ , drittens aus der von  $t$  allein abhängenden „*störenden*“ Kraft  $m\chi(t)$ , wo  $\chi(t)$  die „*Störungsfunktion*“ im obigen Sinne ist. Hierbei ist  $\delta$  ein positiver Faktor, der als „*Dämpfungsfaktor*“ benannt werden möge und den Absolutwert der dämpfenden Kraft im Falle der Geschwindigkeit 1 darstellt; wegen des Vorzeichens von  $-\delta\dot{x}$  beachte man, daß die dämpfende Kraft die Richtung der positiven oder negativen  $x$ -Achse hat, je nachdem  $\dot{x} < 0$  oder  $\dot{x} > 0$  ist. Durch Zusammenfügung der drei Teilkräfte erhalten wir die Gesamtkraft, die zur Zeit  $t$  auf den Punkt wirkt:

$$m\ddot{x} = -\alpha^2 x - \delta\dot{x} + m\chi(t).$$

Als *Differentialgleichung der allgemeinen Schwingungsbewegung* entsteht:

$$(1) \quad \ddot{x} + \frac{\delta}{m} \dot{x} + \frac{\alpha^2}{m} x = \chi(t).$$

Ist  $\chi(t)$  mit 0 identisch und  $\delta = 0$ , so liegt der Fall der freien Schwingungen oder der Eigenschwingungen vor; ist  $\chi(t)$  mit 0 identisch und

$\delta > 0$ , so haben wir gedämpfte Schwingungen; ist aber  $\chi(t)$  eine nicht identisch verschwindende periodische Funktion der Zeit, so haben wir erzwungene Schwingungen, und zwar mit oder ohne Dämpfung, je nachdem  $\delta > 0$  oder  $= 0$  ist.

I. Freie Schwingungen. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1) für  $\delta = 0$  und eine mit 0 identische Funktion  $\chi(t)$  ist nach S. 324:

$$(2) \quad x = c_1 \cos \frac{\alpha t}{\sqrt{m}} + c_2 \sin \frac{\alpha t}{\sqrt{m}},$$

unter  $c_1$  und  $c_2$  die beiden Integrationskonstanten verstanden. An Stelle derselben können wir auch zwei Konstante  $c_0$  und  $\beta$  einführen, die mit ihnen durch die Relationen:

$$(3) \quad c_0 = +\sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad c_0 \sin \beta = c_1, \quad c_0 \cos \beta = c_2$$

verbunden sind; die Gleichung (2) nimmt dann die Gestalt an:

$$(4) \quad x = c_0 \sin(\mu t + \beta), \quad \mu = \frac{\alpha}{\sqrt{m}}.$$

Die freie Schwingung erfolgt also nach einem einfachen „Sinusgesetz“, und sie hat die „Periode“:

$$(5) \quad T = \frac{2\pi}{\mu} = \frac{2\pi\sqrt{m}}{\alpha},$$

d. h. nach Verlauf der Zeit  $T$  ist der Bewegungszustand jedesmal der gleiche. Die Zahl  $c_0$ , die „Amplitude“ oder der „Ausschlag“ der Schwingung, gibt die größte vom Punkte erreichte Entfernung von der Gleichgewichtslage  $O$  an.

II. Gedämpfte Schwingungen. Für die jetzt vorliegende Gleichung (1) mit identisch verschwindendem  $\chi(t)$ , aber  $\delta > 0$ , ist nach S. 325 zu unterscheiden, ob die zugehörige „charakteristische Gleichung“:

$$(6) \quad \lambda^2 + \frac{\delta}{m}\lambda + \frac{\alpha^2}{m} = 0$$

komplexe, reelle und verschiedene oder zusammenfallende Wurzeln hat. Hierauf bezieht sich die folgende Fallunterscheidung:

1) Fall schwacher Dämpfung. Derselbe ist durch  $\delta < 2\alpha\sqrt{m}$  charakterisiert und liefert komplexe Wurzeln von (6), die wir durch:

$$\lambda \pm i\mu = -\frac{\delta}{2m} \pm i \frac{\sqrt{4\alpha^2 m - \delta^2}}{2m}$$

bezeichnen; für die damit erklärten reellen Zahlen  $\lambda$  und  $\mu$  gilt also:

$$(7) \quad \lambda = -\frac{\delta}{2m} < 0, \quad \mu = \frac{\sqrt{4\alpha^2 m - \delta^2}}{2m}.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist jetzt:

$$(8) \quad x = e^{\lambda t} (c_1 \cos \mu t + c_2 \sin \mu t)$$

oder, wenn wir  $c_0$  und  $\beta$  wieder durch (3) erklären:

$$(9) \quad x = c_0 e^{\lambda t} \sin (\mu t + \beta).$$

Der Punkt führt hiernach Schwingungen aus, die alle die gleiche „Periode“:

$$(10) \quad T = \frac{2\pi}{\mu} = \frac{4\pi m}{\sqrt{4\alpha^2 m - \delta^2}}$$

haben und dieserhalb „isochron“ heißen; indessen nehmen die „Aussschläge“, da  $\lambda < 0$  ist, mit wachsender Zeit ab, und zwar, wie man sieht, nach einem „Exponentialgesetze“. Sind allgemein  $x_0 = x(t)$  und  $x_1 = x(t + T)$  die Werte von  $x$  in zwei durch die Periode  $T$  getrennten Augenblicken, so gilt:

$$(11) \quad x_0 : x_1 = e^{-\lambda T}, \quad \ln x_0 - \ln x_1 = -\lambda T = \frac{2\delta\pi}{\sqrt{4\alpha^2 m - \delta^2}}.$$

Es ist also die Differenz der Logarithmen von  $x_0$  und  $x_1$  konstant; sie wird als das „logarithmische Dekrement“ der gedämpften Schwingung bezeichnet.

Deuten wir in einem rechtwinkligen Koordinatensysteme die „Zeit“  $t$  als Abszisse und den „Weg“  $x$  als Ordinate, so entspricht der Bewegungsgleichung (9) als sogenannte „Zeitwegkurve“ die durch Fig. 25 in I, 90 dargestellte Kurve, welche zwischen zwei bezüglich der  $x$ -Achse symmetrischen und nach rechts hin sich dieser Achse asymptotisch nähernden Exponentialkurven eingeschlossen ist.

2) Fall starker Dämpfung. Ist  $\delta > 2\alpha\sqrt{m}$ , so sind die Wurzeln:

$$(12) \quad \lambda_1, \lambda_2 = \frac{-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4\alpha^2 m}}{2m}$$

der Gleichung (6) reell und verschieden; dabei genügen sie der Bedingung:

$$\lambda_2 < \lambda_1 < 0.$$

Das allgemeine Integral der Differentialgleichung ist nach (9) S. 325:

$$(13) \quad x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

und lehrt, daß der Punkt eine „aperiodische“ Bewegung ausführt, und zwar mit der Geschwindigkeit:  $\dot{x} = c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}$ .

Sind  $c_1$  und  $c_2$  nicht von verschiedenem Vorzeichen, so nähert sich der Punkt mit wachsendem  $t$  „asymptotisch“ dem Punkte  $O$ , ohne ihn in endlicher Zeit zu erreichen. Sind  $c_1$  und  $c_2$  von verschiedenem Zeichen, so berechnet man die beiden Werte:

$$t_0 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \left| \frac{c_2}{c_1} \right|, \quad t_1 = t_0 + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

und wird leicht feststellen, daß der Punkt *einmal*, nämlich zur Zeit  $t_0$ , die Gleichgewichtslage  $O$  durchläuft, zur späteren Zeit  $t_1$  eine Extremlage gewinnt, um sich fortan „asymptotisch“ dem Punkte  $O$  zu nähern.

(3) Übergangsfall. Ist  $\delta = 2\alpha\sqrt{m}$ , so hat die Gleichung (6) zusammenfallende Wurzeln  $\lambda = -\frac{\delta}{2m}$ . Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$(14) \quad x = e^{\lambda t}(c_1 t + c_2)$$

führt zu einer „aperiodischen“ Bewegung, die einen ähnlichen Charakter besitzt, wie die zuletzt beschriebene.

III. Erzwungene Schwingungen ohne Dämpfung. Die Störungsfunktion  $\chi(t)$ , die als periodisch angenommen wird, werde in eine Fouriersche Reihe (s. S. 245) entwickelt:

$$(15) \quad \chi(t) = a_0 + (a_1 \cos \pi t + b_1 \sin \pi t) + (a_2 \cos 2\pi t + b_2 \sin 2\pi t) + \dots;$$

die „Periode“  $\tau$  der Störungsfunktion ist alsdann durch  $\tau = \frac{2\pi}{\pi}$  gegeben.

Die Integration der Differentialgleichung:

$$(16) \quad \ddot{x} + \frac{\alpha^2}{m} x = \chi(t)$$

ist nach der „Methode der Variation der Konstanten“ durchzuführen.

Als Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichung benutzen wir:

$$\xi_1 = \cos \mu t, \quad \xi_2 = \sin \mu t, \quad \mu = \frac{\alpha}{\sqrt{m}},$$

woraus sich für die S. 328 mit  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  bezeichneten Funktionen der unabhängigen Variablen die Ausdrücke berechnen:

$$\Phi_1(t) = -\frac{1}{\mu} \sin \mu t \cdot \chi(t), \quad \Phi_2(t) = +\frac{1}{\mu} \cos \mu t \cdot \chi(t).$$

Wir nehmen an, daß nach Eintragung des Ausdrucks (15) für  $\chi(t)$  die entstehenden Reihen gliedweise integrierbar seien, und haben die Ansätze:

$$\int \Phi_1(t) dt = -\frac{1}{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ a_n \int \sin \mu t \cos n\pi t dt + b_n \int \sin \mu t \sin n\pi t dt \right\},$$

$$\int \Phi_2(t) dt = +\frac{1}{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ a_n \int \cos \mu t \cos n\pi t dt + b_n \int \cos \mu t \sin n\pi t dt \right\}.$$

Es gelte nun erstlich die Voraussetzung, daß für keinen Index  $n$  die Gleichung  $n\pi = \mu$  zutrifft. Dann berechnen sich alle Integrale auf Grund der bekannten Formeln in Aufg. 9, 10 und 11, S. 18. Die Ergebnisse sind wie in Aufgabe 3, S. 248 zusammenzufassen und liefern nach einer kurzen

Zwischenrechnung als allgemeine Lösung von (16) den übersichtlichen Ausdruck:

$$(17) \quad x = c_1 \cos \mu t + c_2 \sin \mu t + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t}{\mu^2 - n^2 \pi^2}.$$

Die Bewegung setzt sich hiernach zusammen aus den „Eigenschwingungen“ des Punktes und den „erzwungenen Schwingungen“, die letzteren liefern einen rein periodischen Schwingungsvorgang von der Periode  $\tau$  der Störungsfunktion.

Besonderes Interesse (wegen der praktischen Bedeutung) erweckt nun aber der Spezialfall, daß es einen Index  $n$  gibt, für den  $n\pi = \mu$  wird. Für die Perioden  $T$  und  $\tau$  folgt dann  $nT = \tau$ ; es liegt der „Fall der Resonanz“ vor, bei dem die Periode  $\tau$  der Störungsfunktion irgend ein Vielfaches der Periode  $T$  der Eigenschwingungen ist. Die zum fraglichen  $n$  gehörenden Integrale sind besonders leicht zu berechnen, liefern aber im Ausdrucke von  $x$  zwei nicht rein periodische Glieder der Gestalt:

$$\frac{a_n}{2\mu} t \sin \mu t - \frac{b_n}{2\mu} t \cos \mu t.$$

Da hier beide Male  $t$  als Faktor auftritt, so liefern diese Glieder Bewegungen von der Periode der Eigenschwingungen mit Ausschlägen, die bei wachsender Zeit  $t$  über alle Grenzen wachsen. Es handelt sich um den für elastische Bauwerke gefürchteten „Fall der Resonanz“, der bei gefährlichem Anwachsen der Ausschläge die Zerstörung der Bauwerke zur Folge hat.

Der Fall erzwungener Schwingungen mit Dämpfung, auf den wir nicht mehr eingehen, ist etwas umständlicher durchzurechnen, da stets noch Exponentialfaktoren auftreten und übrigens auch die drei Fälle der gedämpften Schwingungen zu unterscheiden sind.

**9. Lösung linearer Differentialgleichungen durch Reihen.** Ein wichtiges Hilfsmittel zur Lösung linearer Differentialgleichungen bilden die Potenzreihen. Es sei eine homogene Gleichung zweiter Ordnung:

$$(1) \quad \varphi(x)y'' + \psi(x)y' + \chi(x)y = 0$$

vorgelegt, deren Koeffizienten  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$ ,  $\chi(x)$  in der Umgebung von  $x=0$  in drei als gegeben anzusehende konvergente Potenzreihen entwickelbar seien. Wir tragen für  $y$  den Ausdruck:

$$(2) \quad y = x^\nu (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)$$

ein, wo  $\nu$  ein konstanter Exponent sei, dessen Auswahl vorbehalten bleibe; auch die Potenzreihe (2) sei in der Umgebung von  $x=0$  konvergent.

Nach den in I, 213ff entwickelten Regeln über das Rechnen mit Potenzreihen ist dann die linke Seite der Gleichung (1) nach Forthebung des Faktors  $x^{v-2}$  in eine in der Umgebung von  $x=0$  gleichfalls konvergente Reihe entwicklungsfähig, deren Koeffizienten sich aus den noch unbestimmten Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots$  des Ansatzes (2) linear aufbauen. Soll nun (2) eine Lösung von (1) sein, so ist hierzu hinreichend und notwendig, daß die linke Seite von (1) nach Eintragung des Ausdrucks (2) eine mit 0 identische Funktion von  $x$  darstellt. Dies ist aber nach I, 229 stets und nur dann der Fall, wenn die eben erwähnte Potenzreihe, deren Koeffizienten in den  $a_0, a_1, \dots$  linear sind, durchweg verschwindende Koeffizienten hat. So gelangen wir zu Gleichungen für die Berechnung der  $a_0, a_1, \dots$  und müssen natürlich, falls die Berechnung vollständig geglückt sein sollte, hinterher noch die Frage entscheiden, ob die gewonnene Reihe (2) zum mindesten in der Umgebung von  $x=0$  auch wirklich konvergent ist.

Dieser Ansatz werde an einigen Beispielen erläutert.

I. Legendresche Differentialgleichung. Als solche bezeichnet man die Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$(3) \quad (1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0,$$

in der  $n$  eine nicht-negative ganze Zahl sei. Kleiden wir die Gleichung durch Division mit  $(1-x^2)$  in die Gestalt (2) S. 318, so sind die „Koeffizienten“ von  $y'$  und  $y$  in der Umgebung von  $x=0$  eindeutige, stetige und differenzierbare Funktionen. Sonach gibt es (S. 299) ein eindeutig bestimmtes partikuläres Integral  $y(x)$ , für welches die beiden Werte  $y(0)$ ,  $y'(0)$  willkürlich vorgeschrieben werden können. Wir wählen ein erstes Integral mit  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ , ein zweites mit  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$  und versuchen demnach die Gleichung (3) durch die Reihe:

$$(4) \quad y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

zu befriedigen, indem wir einmal  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 0$ , das andere Mal  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 1$  vorschreiben.

Die Eintragung der Reihe (4) in (3) liefert nun, wie man sich leicht ausrechnet, für die linke Seite von (3) die Potenzreihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left( (k+2)(k+1)a_{k+2} + (n+k+1)(n-k)a_k \right) x^k.$$

Es muß somit für jedes  $k$  die Gleichung gelten:

$$(5) \quad (k+2)(k+1)a_{k+2} = - (n+k+1)(n-k)a_k,$$

womit eine „Rekursionsformel“ für die Berechnung aller Koeffizienten

aus den beiden ersten  $a_0, a_1$  gewonnen ist. Es ergibt sich für geraden Index:

$$(2l)! a_{2l} = (-1)^l (n+1)(n+3) \dots (n+2l-1) \cdot n(n-2) \dots (n-2l+2) \cdot a_0,$$

während man für  $k = 2l + 1$  findet:

$$(2l+1)! a_{2l+1} = (-1)^l (n+2)(n+4) \dots (n+2l) \cdot (n-1)(n-3) \dots (n-2l+1) \cdot a_1.$$

Somit gelangen wir für die beiden vorhin ausgesuchten partikulären Integrale vorbehaltlich der Konvergenzuntersuchung zu den Darstellungen:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1 = 1 - \frac{(n+1)n}{2!} x^2 + \frac{(n+1)(n+3)n(n-2)}{4!} x^4 \\ \quad - \frac{(n+1)(n+3)(n+5)n(n-2)(n-4)}{6!} x^6 + \dots \\ y_2 = x - \frac{(n+2)(n-1)}{3!} x^3 + \frac{(n+2)(n+4)(n-1)(n-3)}{5!} x^5 \\ \quad - \frac{(n+2)(n+4)(n+6)(n-1)(n-3)(n-5)}{7!} x^7 + \dots \end{array} \right.$$

Die Konvergenz ist nur bei einem  $y$  zu untersuchen, da eine der beiden vorstehenden Entwicklungen bei der Potenz  $y^n$  abbricht, nämlich für gerades  $n$  die erste Entwicklung, für ungerades die zweite. Um beide Fälle abbrechender Reihen zusammenzufassen, beginnen wir die Entwicklung mit  $a_n x^n$  und ordnen nach absteigenden Potenzen bis  $a_0$  bzw.  $a_1 x$ . Wir erkennen somit die Tatsache, daß die Legendresche Differentialgleichung durch eine rationale ganze Funktion  $n^{\text{ten}}$  Grades:

$$y = a_n x^n + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-4} x^{n-4} + \dots$$

befriedigt werden kann, die übrigens bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt ist (s. S. 320). Die Berechnung der Koeffizienten können wir entweder von den Formeln (6) aus oder auch direkt durch die Rekursionsformel leisten:

$$a_{k-2} = - \frac{k(k-1)}{(n+k-1)(n-k+2)} a_k.$$

Setzen wir zur Bestimmung des noch disponiblen Faktors:

$$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{n!},$$

so gelangen wir zu folgender, durch  $P_n(x)$  zu bezeichnenden rationalen ganzen Lösung der Differentialgleichung (3):

$$(7) \quad P_n(x) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{n!} \left\{ x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} \right. \\ \left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 (2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2 \cdot 4 \cdot 6 (2n-1)(2n-3)(2n-5)} x^{n-6} + \dots \right\}.$$

Man bezeichnet diese Funktion aus einem später ersichtlichen Grunde als eine „Kugelfunktion“ und zwar genauer als die „Legendresche Kugelfunktion erster Art  $n^{\text{ter}}$  Ordnung“.

Die andere Entwicklung (6) stellt eine unendliche Reihe mit dem Konvergenzintervalle  $-1 < x < +1$  dar und liefert also in diesem Intervalle eine zweite Lösung der Differentialgleichung. Für den Quotienten zweier aufeinander folgender Glieder der Reihe gilt nämlich:

$$\left| \frac{a_{k+2} x^{k+2}}{a_k x^k} \right| = \left| \frac{\left(1 + \frac{n+1}{k}\right) \left(1 - \frac{n}{k}\right)}{\left(1 + \frac{2}{k}\right) \left(1 + \frac{1}{k}\right)} \right| \cdot |x|^2,$$

so daß sich dieser Quotient für  $\lim k = \infty$  der Grenze  $|x|^2$  nähert (vgl. hierzu I, 217). Die Lösung liefert, abgesehen von einem konstanten, hier nicht näher zu betrachtenden Faktor, „die Kugelfunktion zweiter Art  $n^{\text{ter}}$  Ordnung  $Q_n(x)$ “, für welche man auf Grund der allgemeinen Regel (6) S. 319 auch die Darstellung:

$$(8) \quad Q_n(x) = P_n(x) \int \frac{dx}{(1-x^2) P_n(x)^2}$$

in der zugehörigen Funktion erster Art hat.

II. Besselsche Differentialgleichung. Mit diesem Namen bezeichnet man die Gleichung:

$$(9) \quad x^2 y'' + x y' + (x^2 - m^2) y = 0,$$

in der wir unter  $m$  zunächst irgend eine nicht-negative ganze Zahl verstehen wollen. Hier führt der Ansatz (2) zur Kenntnis einer ersten Lösung, falls man  $\nu = m$  setzt. Die linke Seite von (9) liefert nach Eintragung des Ausdrucks (2) und Forthebung des überflüssigen Faktors  $x^{m+1}$  die Reihe:

$$(2m+1)a_1 + \sum_{k=0}^{\infty} ((k+2)(2m+k+2)a_{k+2} + a_k) x^{k+1}.$$

Indem man alle Koeffizienten dieser Reihe gleich 0 setzt, folgt:

$$(10) \quad a_1 = 0, \quad a_{k+2} = -\frac{a_k}{(k+2)(2m+k+2)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Es sind also alle  $a_k$  mit ungeradem Index gleich 0, während sich für  $a_{2l}$  ergibt:

$$a_{2l} = (-1)^l \frac{a_0}{2^{2l} \cdot l! (m+1)(m+2) \cdots (m+l)}.$$

Die entstehende Reihe erkennt man leicht als „beständig konvergent“. Der

Wert  $a_0$  ist frei wählbar; unter Verfügung über denselben gelangt man zur folgenden Lösung der Gleichung (9):

$$(11) \quad J_m(x) = \frac{x^m}{2^m \cdot m!} \left( 1 - \frac{x^2}{2^2(m+1)} + \frac{x^4}{2^4 \cdot 2!(m+1)(m+2)} - \frac{x^6}{2^6 \cdot 3!(m+1)(m+2)(m+3)} + \dots \right),$$

wobei für den niedersten Fall  $m = 0$  unter 0! der Wert 1 verstanden sein soll. Man bezeichnet die hiermit gewonnene Funktion von  $x$  als die „Zylinderfunktion“ oder „Besselsche Funktion erster Art  $m^{\text{ter}}$  Ordnung“.

Ein zweites Integral findet man nach der Regel (6) S. 319 hier in der Gestalt:

$$(12) \quad y = J_m(x) \int \frac{dx}{x J_m(x)^2}.$$

Ist  $m$  eine nicht-ganze, positive Zahl, so gilt die vorstehende Rechnung ohne wesentliche Änderung. Man wolle dann nur im Nenner des ausgewählten konstanten Faktors  $m!$  durch die Gammafunktion  $\Gamma(m+1)$  ersetzen (vgl. S. 137).

III. Gaußsche Differentialgleichung. Als „Gaußsche“ oder „hypergeometrische Differentialgleichung“ bezeichnet man:

$$(13) \quad (x^2 - x)y'' + ((\alpha + \beta + 1)x - \gamma)y' + \alpha\beta y = 0,$$

wo  $\alpha, \beta, \gamma$  drei reelle Konstante sein mögen. Diese viel betrachtete Gleichung kann, falls  $\gamma$  weder gleich 0 noch gleich einer negativen ganzen Zahl ist, durch eine Reihe (2) mit  $\nu = 0$  und  $a_0 = 1$  befriedigt werden. Durch Eintragen der Reihe (2) in (13) und Anordnung nach ansteigenden Potenzen von  $x$  geht nämlich die linke Seite der Gleichung (13) über in:

$$\sum_{k=0}^{\infty} ((\alpha + k)(\beta + k)a_k - (1 + k)(\gamma + k)a_{k+1})x^k,$$

so daß wir zur Rekursionsformel gelangen:

$$(1 + k)(\gamma + k)a_{k+1} = (\alpha + k)(\beta + k)a_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Vermöge derselben berechnet man sich die  $a_1, a_2, \dots$  leicht aus  $a_0 = 1$ . Die entstehende, symbolisch durch  $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$  bezeichnete Reihe:

$$(14) \quad F(\alpha, \beta, \gamma; x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \dots$$

heißt „hypergeometrische Reihe“; sie ist, wie man aus:

$$\left| \frac{a_{k+1} x^{k+1}}{a_k x^k} \right| = \left| \frac{\left(1 + \frac{\alpha}{k}\right) \left(1 + \frac{\beta}{k}\right)}{\left(1 + \frac{1}{k}\right) \left(1 + \frac{\gamma}{k}\right)} \right| \cdot |x|$$

erkennt, im Intervalle  $-1 < x < +1$  konvergent. Ist  $\gamma$  weder gleich 0, noch gleich einer negativen ganzen Zahl, so haben wir in der Reihe  $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$  für die Umgebung von  $x = 0$  eine erste Lösung der Gaußschen Gleichung (13) gewonnen. Eine zweite Lösung kann natürlich wieder mittelst des Ansatzes (6) S. 319 hergestellt werden.

Aufgaben: 1) Man zeige (durch Rückgang auf die „Logarithmusreihe“, I, 231), daß die Funktion  $\ln(1+x)$  in folgender Art durch die hypergeometrische Reihe darstellbar ist:

$$\ln(1+x) = x \cdot F(1, 1, 2; x).$$

2) Desgleichen zeige man das Zutreffen der Gleichungen:

$$(1+x)^m = F(-m, 1, 1; -x),$$

$$\arcsin x = x F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; x^2\right)$$

durch Heranziehung der „Binomialreihe“ (I, 233) und der „arc sin-Reihe“ (I, 239).

### Kapitel III. Partielle Differentialgleichungen\*).

**1. Saitenschwingungen.** Die Bewegungsvorgänge bei einer elastischen, homogenen und fest eingespannten Saite irgend eines Musikinstrumentes gestatten eine Näherungsdarstellung, die auf der Lösung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung beruht. Nehmen wir als Beispiel eine Klaviersaite in nicht zu tiefer Tonlage, so entfernt sich die Saite beim Anschlagen aus ihrer als geradlinig angenommenen Gleichgewichtslage so wenig, daß die Schwingungen mit unbewaffnetem Auge kaum wahrnehmbar sind. Wir wollen dementsprechend allgemein annehmen, daß die Saite bei ihren Schwingungen nur ganz wenig von der Gleichgewichtslage abweicht. Auch soll die Voraussetzung gelten, daß die Tangentenrichtung der Saite in irgend einem ihrer Punkte zu jeder Zeit nur sehr wenig von der Richtung der Gleichgewichtslage verschieden ist. Hieraus folgt, daß die Länge der Saite, die in der Gleichgewichtslage gleich  $l$  sei, während der Schwingung sich nur in einem sehr kleinen Intervalle der unteren Grenze  $l$  ändert. Wir dürfen dann aber auch die Spannung der Saite als eine nur in einem ganz kleinen Intervalle variable Größe ansehen. Für die Rechnung möge sogar die Spannung durch einen „konstanten“ mitt-

\*) Das Ziel der folgenden Darstellung ist die Besprechung einiger Beispiele der in der Physik auftretenden partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung; von allgemeinen Entwicklungen über die Lösung partieller Differentialgleichungen wird abgesehen.

leren Wert  $p$  ersetzt werden. Die Schwingungen der Saite mögen ferner in einer bestimmten Ebene erfolgen, wie dies z. B. bei der Klaviersaite gleichfalls zutrifft. Auch nehmen wir an, daß es sich um *reine Transversalschwingungen* handelt, bei denen also die einzelnen Punkte der Saite geradlinig und senkrecht zur Gleichgewichtslage der Saite schwingen.

Es werde nun die Ebene der Schwingung zur  $xy$ -Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems gemacht, die  $x$ -Achse durch die beiden festen Endpunkte der Saite gelegt und der eine Saitenendpunkt zum Nullpunkt gewählt, während der andere Endpunkt die „positive“ Abszisse  $x = l$  hat. Der einzelne Punkt der Saite, der in der Gleichgewichtslage die Abszisse  $x$  habe, hat dann, auch wenn sich die Saite in einem Schwingungszustande befindet, beständig die gleiche Abszisse  $x$  und eine Ordinate  $y$ , die von der gewählten Stelle  $x$  und von der Zeit  $t$  abhängig ist und dieserhalb als Funktion der beiden unabhängigen Variablen  $x$  und  $t$  durch  $f(x, t)$  bezeichnet werde. Den Bewegungszustand der Saite bei gegebenen Bedingungen festzustellen, läuft dann darauf hinaus, die Funktionen  $f(x, t)$  in der Art zu bestimmen, daß einmal den allgemein hier vorliegenden mechanischen Voraussetzungen genügt wird, und daß zweitens die besonderen, etwa für den Augenblick  $t = 0$  vorgeschriebenen „Anfangsbedingungen“ befriedigt werden.

In ersterer Hinsicht gilt folgende Betrachtung: In Fig. 93 sei die Gestalt der Saite zur Zeit  $t$  der Deutlichkeit halber mit stark vergrößerten Ordinaten dargestellt; die Kurve hat für diesen Zeitpunkt  $t$  die Gleichung  $y = f(x, t)$ , wo alsdann  $t$  den fraglichen konstanten Wert hat. Der kreisförmig gedachte Querschnitt der Saite habe den Flächeninhalt  $q$ , und die Dichte des Materials sei  $\delta$ . Dann hat das in der Gleichgewichtslage von den beiden Punkten  $x$  und  $x_1 = x + dx > x$  eingeschlossene Saitenteilchen die Masse  $dm = q\delta \cdot dx$ . In seiner Lage zur Zeit  $t$  ist das Stückchen  $dm$  den beiden Zugkräften  $p$  ausgesetzt, die, wie die Figur näher darlegt, tangential zur augenblicklichen Kurve  $y = f(x, t)$  wirken. Sind  $\alpha$  und  $\alpha_1$  die in üblicher Art abgelesenen Winkel der beiden fraglichen Kurventangenten gegen die  $x$ -Achse, so hat die links wirkende Zugkraft in Richtung der „positiven“  $y$ -Achse die Komponente  $-p \sin \alpha$ , die rechts wirkende aber  $+p \sin \alpha_1$ . Da die Winkel  $\alpha$  sehr klein sind, so können wir ihre Sinus durch ihre Tangens ersetzen. Dann aber liefern die beiden eben berechneten Komponenten die in Richtung der positiven  $y$ -Achse wirkende Resultante:

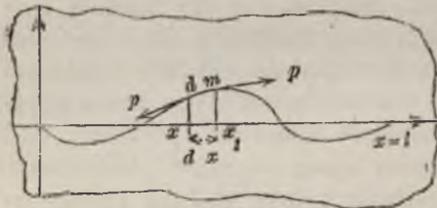


Fig. 93.

$$-p \operatorname{tg} \alpha + p \operatorname{tg} \alpha_1 = p(f'_x(x_1, t) - f'_x(x, t)) = p f''_{xx}(x + \vartheta \cdot dx, t) dx,$$

wo  $\vartheta$  eine Zahl des Intervalles  $0 < \vartheta < 1$  ist.

Indem wir  $dx$  außerordentlich klein wählen, denken wir das Teilchen  $dm$  der Saite als einen „materiellen Punkt“ der Masse  $dm$  und der Abszisse  $x_0 = x + \vartheta \cdot dx$ , der alsdann unter Wirkung der eben berechneten Kraft nach einem bekannten Grundsatz der Mechanik die Beschleunigung:

$$f''_{xx}(x_0, t) = \frac{1}{dm} \cdot p f''_{xx}(x_0, t) dx = \frac{p}{q \delta} f''_{xx}(x_0, t)$$

erfährt. Wenn wir den rechts auftretenden Faktor als positive Zahl durch  $\mu^2$  bezeichnen, so gilt unter Fortlassung des Index bei  $x_0$ :

$$f''_{xx}(x, t) = \mu^2 f''_{xx}(x, t).$$

Wir haben also das Ergebnis gewonnen: Die Funktion  $y = f(x, t)$  befriedigt die als „Differentialgleichung der schwingenden Saite“ bezeichnete Relation:

$$(1) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \mu^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad \mu = \sqrt{\frac{p}{q \delta}},$$

die, insofern hier die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von  $y$  auftreten, als partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung bezeichnet wird. Unter Gebrauch der Sprechweise von S. 284 haben wir diese Gleichung als *linear* und *homogen* zu bezeichnen, was für die Herstellung von Lösungen wichtig ist.

Man versuche nun erstlich, eine Lösung in der Gestalt  $y = g(x) \cdot h(t)$  anzusetzen, d. h. als Produkt eines nur von  $x$  und eines nur von  $t$  abhängenden Faktors. Dann folgt aus (1):

$$g(x) h''(t) = \mu^2 g''(x) h(t), \quad \frac{1}{\mu^2} \frac{h''(t)}{h(t)} = \frac{g''(x)}{g(x)}.$$

Da  $t$  und  $x$  unabhängig variabel sind, so kann die letzte Gleichung nur bestehen, wenn die hier einander gleich gesetzten Quotienten mit einer Konstanten  $\alpha$  identisch sind:

$$g''(x) = \alpha g(x), \quad h''(t) = \alpha \mu^2 h(t).$$

Hiermit haben wir zwei „gewöhnliche“ Differentialgleichungen gewonnen, deren Lösung oben (S. 323) gelehrt wurde und je nach dem Werte von  $\alpha$  nach der Regel (4), (5) oder (6) S. 324 anzusetzen ist. Nun muß aber, da die Saitenendpunkte fest sind,  $f(x, t)$  sowohl für  $x = 0$  als für  $x = l$  unabhängig von  $t$  verschwinden, d. h. also es muß  $g(0) = 0$  und  $g(l) = 0$  sein. Dieserhalb sind die beiden Lösungen (4) und (5) S. 324 unbrauchbar, da jede derselben keinesfalls mehr als *einen* Nullpunkt hat. Somit muß  $\alpha < 0$  sein, und die Funktion  $g(x)$  ist entsprechend der Regel (6)

S. 324 anzusetzen. Da übrigens  $g(0) = 0$  sein soll, so fällt das  $\cos$ -Glied aus, und wir setzen demnach:

$$g(x) = \sin(x\sqrt{-\alpha}).$$

Da ferner  $g(l) = 0$  sein muß, so ist  $l\sqrt{-\alpha}$  ein Vielfaches  $n\pi$  von  $\pi$ , woraus sich  $\sqrt{-\alpha}$  berechnet und  $g(x)$  in der Gestalt ergibt:

$$g(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Trägt man den berechneten Wert von  $\alpha$  in die Gleichung für  $h(t)$  ein, so folgt als deren allgemeine Lösung:

$$h(t) = a \cos \frac{n\pi \mu t}{l} + b \sin \frac{n\pi \mu t}{l}.$$

Als Lösung der partiellen Differentialgleichung (1) gewinnen wir damit:

$$(2) \quad y = \left( a \cos \frac{n\pi \mu t}{l} + b \sin \frac{n\pi \mu t}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

wo  $n$  irgend eine positive ganze Zahl ist und  $a, b$  willkürliche Konstanten sind; statt ihrer können wir wie in (3) S. 333 auch zwei Konstante  $c$  und  $\beta$  einführen, mit denen sich die Lösung (2) in die Form kleidet:

$$(3) \quad y = c \sin \left( \frac{n\pi \mu t}{l} + \beta \right) \cdot \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Die hierdurch für die verschiedenen Werte  $n = 1, 2, 3, \dots$  dargestellten Schwingungsvorgänge der Saite sind leicht zu beschreiben. Die Saite hat in jedem Augenblicke die Gestalt einer *Sinuslinie*, welche die  $x$ -Achse in den  $(n-1)$  Punkten  $\frac{l}{n}, 2\frac{l}{n}, \dots, (n-1)\frac{l}{n}$  schneidet; diese heißen die *Knotenpunkte* der Schwingung. Jeder Punkt  $x$  der Saite schwingt dabei senkrecht zur  $x$ -Achse selbst nach einem *Sinusgesetze* zwischen den Extremlagen  $\pm c \sin \frac{n\pi x}{l}$  hin und her; man kann auch sagen, daß der Wert:

$$(4) \quad c \sin \left( \frac{n\pi \mu t}{l} + \beta \right),$$

der der *Ausschlag* der Sinuslinie (3) der Zeit  $t$  heißen mag, im Laufe der Zeit nach einem Sinusgesetze wechselt. So oft der Sinus in (4) verschwindet, geht die Saite durch ihre Gleichgewichtslage hindurch. *Der Schwingungsvorgang ist ein periodischer*, insofern allemal nach Verlauf der Zeit:

$$(5) \quad T = \frac{2l}{n\mu} = \frac{2l}{n} \sqrt{\frac{g\delta}{p}}$$

die Gestalt der Saite wieder dieselbe ist. Dieser Wert  $T$  heißt die *Schwingungsdauer*, der reziproke Wert von  $T$  die *Schwingungszahl*, welche

die Anzahl der Schwingungen in der Zeiteinheit angibt. Nach bekannten Sätzen der Akustik entspricht im Klange der Saite dem Werte  $n = 1$  der „Grundton“; die Werte  $n = 2, 3, 4, \dots$  aber liefern die „Obertöne“, nämlich die „Oktave“, „Quinte“, „Quarte“ usw.

Eine zweite Art der Lösung der Gleichung (1) gründet sich auf folgende einfache Tatsache. Ist  $g(x)$  eine eindeutige und stetige Funktion der einen Variablen  $x$ , deren beide erste Ableitungen  $g'(x)$ ,  $g''(x)$  existieren und gleichfalls eindeutig und stetig sind, so haben wir in  $y = g(x \pm \mu t)$  für jedes der beiden Zeichen eine Lösung von (1), wie auch im übrigen die Funktion  $g$  gewählt sein mag. Wir können von hieraus eine Funktion  $f(x, t)$  konstruieren, die erstlich für  $x=0$  und  $x=l$  beständig gleich 0 ist, und die zweitens den nun allgemein zu formulierenden „Anfangsbedingungen“ genügt. In dieser Hinsicht soll zur Zeit  $t=0$  die Gestalt und der Geschwindigkeitszustand der Saite durch die Festsetzungen:

$$(6) \quad f(x, 0) = \varphi(x), \quad f'_t(x, 0) = \psi(x)$$

vorgeschrieben sein; hierbei sind  $\varphi(x)$  und  $\psi(x)$  zwei im Intervalle  $0 \leq x \leq l$  willkürlich gewählte eindeutige und stetige Funktionen, die in den Endpunkten des Intervalles verschwinden und, soweit erforderlich, differenzierbar sein müssen.

Wir wollen diese Funktionen gleich auch über das fragliche Intervall hinaus fortsetzen und zwar durch die Vorschriften:

$$(7) \quad \varphi(-x) = -\varphi(x), \quad \psi(-x) = -\psi(x), \quad \varphi(x+2l) = \varphi(x), \quad \psi(x+2l) = \psi(x).$$

Sie sind so für alle möglichen Argumente erklärt, und zwar als ungerade, periodische Funktionen mit der Periode  $2l$ .

Wir versuchen nun, eine Lösung von (1), die wir in der Gestalt:

$$(8) \quad y = f(x, t) = g_1(x + \mu t) + g_2(x - \mu t)$$

ansetzen, den fraglichen Bedingungen anzupassen. Es müßte demnach entsprechend den Gleichungen (6):

$$g_1(x) + g_2(x) = \varphi(x), \quad \mu g_1'(x) - \mu g_2'(x) = \psi(x)$$

gelten. Durch Integration der zweiten Gleichung folgt:

$$g_1(x) - g_2(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \psi(x) dx + 2C,$$

und wir gewinnen aus dieser und der ersten der beiden voraufgehenden Gleichungen sofort:

$$g_1(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2\mu} \int_0^x \psi(x) dx + C, \quad g_2(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2\mu} \int_0^x \psi(x) dx - C.$$

Hiermit erhalten wir die alle Bedingungen befriedigende Lösung (8) in der Gestalt:

$$(9) \quad y = \frac{1}{2}(\varphi(x+\mu t) + \varphi(x-\mu t)) + \frac{1}{2\mu} \int_{x-\mu t}^{x+\mu t} \psi(x) dx.$$

Es ist nun sehr leicht, einen Zusammenhang zwischen dieser Lösung unserer Aufgabe und den besonderen Integralen (2) der Differentialgleichung herzustellen. Nach S. 245 ff. lassen sich die ungeraden Funktionen  $\varphi(x)$  und  $\psi(x)$  der Periode  $2l$  in konvergente Fouriersche Sinusreihen entwickeln:

$$(10) \quad \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

deren Koeffizienten nach der Regel (7) S. 246 berechenbar sind. Aus den Koeffizienten  $a'_n$  der zweiten Reihe berechnen wir für  $n = 1, 2, 3, \dots$ :

$$(11) \quad b_n = \frac{l}{\pi\mu} \cdot \frac{a'_n}{n},$$

so daß wir durch Integration:

$$\frac{1}{\mu} \int_0^x \psi(x) dx = b_0 - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

finden, unter  $b_0$  die Integrationskonstante verstanden. Mit Benutzung der Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen stellt man dann sofort die Gleichungen her:

$$\frac{1}{2}(\varphi(x+\mu t) + \varphi(x-\mu t)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi\mu t}{l} \sin \frac{n\pi x}{l},$$

$$\frac{1}{2\mu} \int_{x-\mu t}^{x+\mu t} \psi(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi\mu t}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Damit aber erhalten wir für die Lösung (9) die folgende Fouriersche Reihe:

$$(12) \quad y = \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi\mu t}{l} + b_n \sin \frac{n\pi\mu t}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

wobei die Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  auf Grund von (10) und (11) aus den Entwicklungen der vorgegebenen Funktionen  $\varphi(x)$  und  $\psi(x)$  hervorgehen.

Da die Differentialgleichung (1) „linear“ und „homogen“ ist, so ist einleuchtend, daß aus einer Anzahl von Lösungen  $y_1, y_2, y_3, \dots$  immer in deren Summe ( $y_1 + y_2 + y_3 + \dots$ ) eine weitere Lösung gewonnen wird. Von hieraus ist das Auftreten einer Lösung  $y$  in Gestalt einer Summe von Lösungen der Gestalt (2) oder (3) verständlich. Umgekehrt erkennen wir

aber aus (12) den Satz, daß die den willkürlich angenommenen Anfangsbedingungen genügende Lösung (9) in Lösungen der Gestalt (2), die den einzelnen ganzen Zahlen  $n$  zugeordnet sind, aufgelöst werden kann. Wir haben hier die bekannte Tatsache der Akustik vor uns, daß der durch eine schwingende Saite hervorgerufene Klang zusammengesetzt ist aus dem Grundton der Saite und ihren Obertönen. Dabei ist für die Stärke, mit der der  $n^{\text{te}}$  Oberton im Klange auftritt, die Größe von  $c_n = +\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  maßgeblich.

Um diese allgemeinen Entwicklungen wenigstens an einem Beispiele auszuführen, betrachten wir die Schwingungen einer *gezupften Saite*, wie sie z. B. bei einer Laute oder Harfe auftreten. Die Saite sei an der Stelle  $x = a$  um die Strecke  $y = b$  aus der Gleichgewichtslage entfernt und habe damit zur Zeit  $t = 0$  die in Fig. 94 zwischen  $x = 0$  und  $x = l$  mit übertrieben großen Ordinaten gezeichnete Gestalt der Gleichung:

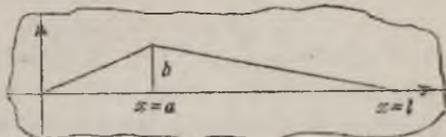


Fig. 94.

$$(13) \quad y = \varphi(x) = \begin{cases} \frac{b}{a} x, & 0 \leq x \leq a, \\ b \frac{l-x}{l-a}, & a \leq x \leq l. \end{cases}$$

Die Fortsetzung der Funktion  $\varphi(x)$  über das Intervall  $0 \leq x \leq l$  hinaus geschehe nach der obigen, durch die Gleichungen (7) gegebenen Vorschrift. Wird nun zur Zeit  $t = 0$  die Saite losgelassen, so beginnt sie ihre Bewegung an allen Stellen  $x$  mit der Anfangsgeschwindigkeit 0, so daß also  $\psi(x)$  konstant gleich 0 ist. Dieserhalb fällt das Integral in (9) aus, und wir erhalten als Darstellung der vorliegenden Schwingung:

$$(14) \quad y = \frac{1}{2} (\varphi(x + ut) + \varphi(x - ut)),$$

unter  $\varphi(x)$  die in (13) bzw. durch Fig. 94 dargestellte und nach Vorschrift fortgesetzte Funktion verstanden.

In (14) haben wir eine höchst einfache Regel gewonnen, um den Schwingungsvorgang zeichnerisch zu verfolgen: Um die Gestalt der Saite zur Zeit  $t$  zu gewinnen, zeichne man die „Kurve“ der Funktion  $y = \frac{1}{2} \varphi(x)$ , d. h. man verkleinere die Ordinaten der „Kurve“ der Fig. 94 auf die Hälften, verschiebe die neue Kurve einmal nach rechts um die Strecke  $ut$ ,

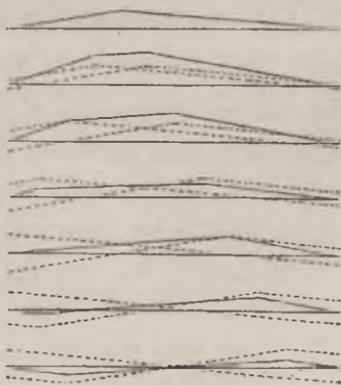


Fig. 95.

sodann nach links um die gleiche Strecke und füge die beiden so erhaltenen Kurven durch Addition der Ordinaten bei der einzelnen Abszisse  $x$  zusammen. In Fig. 95 sind für die erste Hälfte der Periode einige Gestalten der Saite aufgezeichnet.

Die Koeffizienten der Fourierschen Sinusreihe (10) der vorliegenden Funktion  $\varphi(x)$  sind nach der Regel (7) S. 246 durch:

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^a \frac{b}{a} x \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \frac{2}{l} \int_a^l \frac{b}{l-a} (l-x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

gegeben. Die Integrale sind leicht ausgewertet und ergeben:

$$a_n = \frac{2bl}{n^2\pi^2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{l-a} \right) \sin \frac{n\pi a}{l},$$

so daß die Darstellung (12) des Schwingungsvorgangs die folgende ist:

$$(15) \quad y = \frac{2bl}{\pi^2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{l-a} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi a}{l} \cos \frac{n\pi \mu t}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Wir lesen hieraus Angaben über das Auftreten und die Stärke des Grundtones und der Obertöne im Klange der gezupften Saite ab. Die Verhältnisse hängen, wenn wir etwa  $b$  konstant nehmen, wesentlich von der Stelle  $x = a$  ab, an welcher gezupft wird. Man sieht zunächst, daß der  $n^{\text{te}}$  Oberton ausfällt, wenn die Saite in einem der Knotenpunkte  $a = \frac{l}{n}$ ,  $2\frac{l}{n}$ ,  $\dots$ ,  $(n-1)\frac{l}{n}$  der betreffenden Schwingung gezupft wird. Ist die Stelle  $a$  nicht weit von der Mitte  $\frac{1}{2}l$  gelegen, so ist der Klammerfaktor in (15) nur wenig größer als sein Minimalwert  $\frac{4}{l}$ , und wir folgern, da das „Quadrat“ von  $n$  im Nenner des  $n^{\text{ten}}$  Gliedes steht und  $|\sin \frac{n\pi a}{l}| \leq 1$  ist, daß mit steigendem  $n$  die Stärke der Obertöne schnell abnimmt. Ist indessen  $a$  nahe an einem Saitenende, vielleicht dicht bei  $x = 0$  gelegen, so dürfen wir bei nicht zu großem  $n$  angenähert  $\sin \frac{n\pi a}{l}$  durch  $\frac{n\pi a}{l}$  ersetzen und finden dann wenigstens für die Anfangsglieder:

$$y = \frac{2bl}{\pi(l-a)} \sum \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi \mu t}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Hier steht nur noch die „erste“ Potenz von  $n$  im Nenner, so daß jetzt die Obertöne mit nicht zu großem  $n$  weit stärker hervortreten.

**2. Membranschwingungen.** Wir betrachten auch noch die ein wenig schwieriger zu untersuchenden Schwingungen einer elastischen Membran, die in eine ebene Randkurve eingespannt sein möge. Zur Erleichterung der Rechnung werden ähnlich wie in § 1 verschiedene beschränkende Annahmen über die Schwingungen gemacht. Die Membran soll sich aus ihrer als eben angenommenen Gleichgewichtslage bei den Schwingungen *überall nur ganz wenig entfernen*, auch sollen die *Tangentialebenen* der Membran während der Schwingung allenthalben *von der Gleichgewichtsebene der Membran nur sehr wenig abweichen*. Die *Spannung\**) der Membran sei über die ganze Fläche derselben hin *konstant gleich  $p$*  und möge auch während eines Schwingungszustandes nur so wenig von diesem Werte abweichen, *daß wir sie auch dann konstant gleich  $p$  setzen dürfen*. Endlich soll es sich wieder um reine *Transversalschwingungen* der Membran handeln.

Es möge nun die Gleichgewichtsebene der Membran die  $x,y$ -Ebene rechtwinkliger Raumkoordinaten liefern, in welcher die nicht-schwingende Membran einen in die geschlossene Randkurve  $R$  eingespannten Bereich bedeckt. Der Membranpunkt  $(x, y)$  der Gleichgewichtslage wird dann bei den Schwingungen beständig die Koordinaten  $x, y$  bewahren, während die dritte Koordinate  $z$  als Funktion der Zeit  $t$  und der Stelle  $(x, y)$  anzusehen ist:

$$(1) \quad z = f(x, y, t);$$

natürlich muß die rechts stehende Funktion zu jeder Zeit  $t$  in dem durch  $R$  eingeschlossenen Bereiche eindeutig und stetig sein und am Rande  $R$  des Bereiches verschwinden. Durch (1) ist in jedem Augenblicke  $t$  die Gestalt der Membran als eine in  $R$  eingespannte Fläche gegeben. Nach den über die Schwingung gemachten Voraussetzungen sind die Koordinaten  $z$  der Flächenpunkte beständig sehr klein, und die Normale der Fläche im einzelnen Punkte  $(x, y, z)$  weicht nur sehr wenig von der  $z$ -Achse ab. Geben wir der Normalen die mit der „positiven“  $z$ -Achse naheliegender zusammenfallende Richtung und bezeichnen die Richtungswinkel der so gerichteten Normalen gegen die positiven Achsen wie oben (S. 142) durch  $(\nu, x), (\nu, y), (\nu, z)$ , so folgt für die „Richtungskosinus“ nach (4) in I, 325:

$$\cos(\nu, x) = \frac{-f'_x}{+\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}}, \quad \cos(\nu, y) = \frac{-f'_y}{+\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}},$$

$$\cos(\nu, z) = \frac{1}{+\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}}.$$

\*) Über deren Erklärung vergleiche die unten folgende Betrachtung.

Da nun die Normale nur ganz wenig von der  $z$ -Achse abweichen soll, so werden die Werte  $f'_x, f'_y$  beständig sehr nahe an 0 liegen. Indem wir demnach die Quadrate  $f'^2_x, f'^2_y$  neben dem Werte 1 vernachlässigen, haben wir:

$$(2) \quad \cos(v, x) = -f'_x, \quad \cos(v, y) = -f'_y.$$

Es gilt nun erstlich die Funktion (1) so zu bestimmen, daß den allgemeinen mechanischen Voraussetzungen, die hier vorliegen, genügt wird.

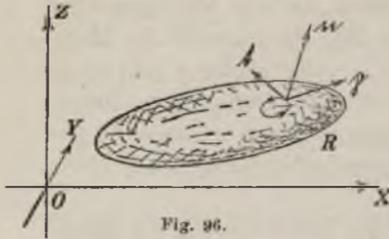


Fig. 96.

Wir denken uns zur Zeit  $t$  aus der Fläche (1) einen kleinen Bereich  $B$  mit der Randkurve  $K$  herausgeschnitten (s. Fig. 96) und wollen die auf das Stückchen  $B$  der Membran wirkenden Kräfte betrachten. Die Bogenlänge  $s$  von  $K$  denken wir uns in der in Fig. 96 angedeuteten Richtung wachsend gemessen. Auf ein sehr kleines Bogenstückchen  $ds$  von  $K$  wirkt dann tangential zur

Fläche (1) und zugleich senkrecht zum Randstückchen  $ds$  von  $B$  nach „außen“ die durch die Spannung  $p$  gelieferte Zugkraft  $p \cdot ds$ . In der Figur ist diese Zugkraft durch den Vektor  $\mathfrak{p}$  angedeutet, dessen Betrag  $|\mathfrak{p}| = p$  ist, und dessen „Richtungskosinus“ wir abgekürzt:

$$a_1 = \frac{p_x}{p}, \quad b_1 = \frac{p_y}{p}, \quad c_1 = \frac{p_z}{p}$$

nennen, unter  $p_x, p_y, p_z$ , wie üblich, die Komponenten von  $\mathfrak{p}$  verstanden (s. S. 219). Die weiter in der Figur angedeuteten Vektoren  $\mathfrak{t}$  und  $\mathfrak{n}$  seien „Einheitsvektoren“ tangential zu  $K$  in der vorgeschriebenen Umlaufsrichtung von  $B$  bzw. normal zur Fläche (1) nach „oben“ gerichtet. Unter Benutzung von I, 332 finden wir für die Richtungskosinus  $a_2, b_2, c_2$  von  $\mathfrak{t}$  und  $a_3, b_3, c_3$  von  $\mathfrak{n}$ :

$$a_2 = \frac{dx}{ds}, \quad b_2 = \frac{dy}{ds}, \quad c_2 = \frac{dz}{ds}; \quad a_3 = \cos(v, x), \quad b_3 = \cos(v, y), \quad c_3 = \cos(v, z).$$

Die drei Vektoren bilden ein „Rechtssystem“, so daß wir die im Anschluß an (2) in I, 388 entwickelten Regeln über die neun Richtungskosinus  $a_1, \dots, c_3$  anwenden können. Insbesondere folgt aus der dritten Gleichung (6) daselbst (unter zyklischer Vertauschung der Indizes)  $c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2$ , was hier:

$$\frac{p_z}{p} = \cos(v, y) \frac{dx}{ds} - \cos(v, x) \frac{dy}{ds}$$

liefert. Die auf das Stückchen  $ds$  in Richtung der „positiven“  $z$ -Achse wirkende Komponente der Zugkraft ist somit:

$$p_z ds = p (\cos(v, y) dx - \cos(v, x) dy).$$

Durch Integration über  $K$  und Benutzung von (2) finden wir, daß das aus der Fläche (1) mittelst  $K$  herausgeschnittene Stückchen in Richtung der positiven  $z$ -Achse zur Zeit  $t$  der Gesamtkraft ausgesetzt ist:

$$(3) \quad \int^{(K)} p_z ds = p \int^{(K)} (-f'_y dx + f'_x dy).$$

Das rechts stehende Linienintegral können wir auch auf die Projektion  $K_0$  von  $K$  auf die  $xy$ -Ebene beziehen, wobei in dieser Ebene durch  $K_0$  die Projektion  $B_0$  des Flächenstückchens  $B$  umrandet wird. Wandeln wir nun die rechte Seite von (3) auf Grund des Integralsatzes (8) S. 140 in ein auf  $B_0$  bezogenes Flächenintegral um, so folgt für die berechnete Kraft:

$$\int^{(K)} p_z ds = p \cdot \int^{(B_0)} (f''_{xx} + f''_{yy}) d\omega.$$

Ist endlich  $B_0$  selbst außerordentlich klein und vom Inhalte  $d\omega$ , so können wir  $(f''_{xx} + f''_{yy})$  durch einen mittleren Wert dieses Ausdrucks in  $B_0$  ersetzen und finden die Kraft:

$$(4) \quad \int^{(K)} p_z ds = p (f''_{xx} + f''_{yy}) d\omega = p \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) d\omega.$$

Es sei nun die „Flächendichte“ der homogen gedachten Membran gleich  $\delta$ ; dann ersetzen wir das in Rede stehende Membranstückchen durch einen materiellen Punkt der Masse  $\delta d\omega$ , der an jener Stelle von  $B_0$  gelegen ist, auf die sich der eben genannte Mittelwert bezieht. Die zur Zeit  $t$  in Richtung der positiven  $z$ -Achse eintretende Beschleunigung ist dann  $f''_{zz} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$  und muß, mit der Masse  $\delta d\omega$  multipliziert, der vorstehend berechneten Kraft gleich sein:

$$\delta d\omega \cdot f''_{zz} = p (f''_{xx} + f''_{yy}) d\omega.$$

Heben wir den gemeinsamen Faktor  $d\omega$  fort und setzen den Quotienten  $p:\delta$  als positive Zahl gleich  $\mu^2$ , so ergibt sich als „Differentialgleichung der Membranschwingungen“:

$$(5) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \mu^2 \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right), \quad \mu = \sqrt{\frac{p}{\delta}}.$$

Die allgemeine Theorie dieser Gleichung erfordert längere Entwicklungen, auf die wir nicht eingehen können. Einfach und seit längerem bekannt sind indessen zwei Spezialfälle, nämlich die beiden Fälle, daß der Rand  $B$  der Membran entweder ein *Rechteck* oder ein *Kreis* ist. In beiden Fällen gelingt es, nach dem in § 1 an erster Stelle benutzten Grundsätze besondere Lösungen aufzustellen, indem man  $z$  als Produkt dreier Faktoren ansetzt, deren einzelner nur von je einer der drei unabhängigen Variablen abhängt.

Ist die Membran ein *Rechteck* der Seiten  $\alpha, \beta$ , so mögen die Koordinatenachsen und die Geraden  $x = \alpha, y = \beta$  das Rechteck eingrenzen. Dann gelingt es sehr leicht, mittelst trigonometrischer Funktionen Lösungen von (5) zu finden. *In der Tat erkennt man sofort in:*

$$(6) \quad z = (a \cos \lambda \pi t + b \sin \lambda \pi t) \sin \frac{m \pi x}{\alpha} \sin \frac{n \pi y}{\beta}$$

eine die „Randbedingungen“ befriedigende Lösung von (5), wo  $m$  und  $n$  irgend ein Paar positiver ganzer Zahlen sind,  $\lambda$  aus:

$$(7) \quad \lambda = \mu \sqrt{\frac{m^2}{\alpha^2} + \frac{n^2}{\beta^2}}$$

zu berechnen ist und  $a, b$  willkürliche Konstanten bedeuten. Es ist nämlich  $z$ , wie es sein muß, längs  $R$  konstant gleich 0, und die Forderung, daß die Differentialgleichung befriedigt wird, führt einfach auf die Gleichung (7). In bekannter Art kann übrigens die Gleichung (6) auch in die Gestalt:

$$(8) \quad z = c \sin (\lambda \pi t + \gamma) \cdot \sin \frac{m \pi x}{\alpha} \sin \frac{n \pi y}{\beta}$$

gesetzt werden.

Der entsprechende Schwingungsvorgang ist sehr anschaulich. Die zu den Rechteckseiten parallelen Geraden der Gleichungen:

$$x = \frac{\alpha}{m}, 2 \frac{\alpha}{m}, \dots, (m-1) \frac{\alpha}{m}; \quad y = \frac{\beta}{n}, 2 \frac{\beta}{n}, \dots, (n-1) \frac{\beta}{n}$$

bleiben beständig in der Gleichgewichtslage, sie liefern die „Knotenlinien“ der Schwingung. Durch dieselben wird die ganze Membran in  $m \cdot n$  kongruente Rechtecke zerlegt, die einzeln hin und her schwingen. Der ganze Vorgang ist *periodisch* und hat die „Schwingungsdauer“:

$$(9) \quad T = \frac{2}{\mu \sqrt{\frac{m^2}{\alpha^2} + \frac{n^2}{\beta^2}}}$$

Der Auswahl  $m = n = 1$  entspricht der „Grundton“ der Membran, die übrigen Zahlenkombinationen liefern zweifach unendlich viele „Obertöne“.

Ein wesentlicher Unterschied gegenüber den Saitenschwingungen besteht darin, daß je zwei Obertöne im allgemeinen nicht „harmonisch“ sind; sie sind nur dann harmonisch, wenn die beiden zugehörigen Werte  $T$  in einem rationalen Verhältnisse stehen. Nehmen wir die „quadratische“ Membran ( $\beta = \alpha$ ) als Beispiel und fragen nach etwaigen zum Grundtone harmonischen Obertönen, so sind nur diejenigen ganzen Zahlen  $m$  und  $n$  zulässig, für welche  $(m^2 + n^2)$  das Doppelte einer Quadratzahl  $l^2$  wird:

$$2l^2 = m^2 + n^2.$$

Die gesamten Lösungen dieser Gleichung in positiven ganzen Zahlen an-

zugeben, ist eine Aufgabe der Zahlentheorie. Einleuchtend ist natürlich die Lösung  $l = m = n$ ; wir begnügen uns damit, noch die weiteren Lösungen zu nennen  $l = 5, m = 1, n = 7$ ;  $l = 29, m = 1, n = 41$ ;  $l = 17, m = 7, n = 23$  usw.

Da die Differentialgleichung (5) wieder linear und homogen ist, so können wir aus verschiedenen Lösungen der Gestalt (8) durch Addition neue Lösungen gewinnen. Ein Hauptinteresse bezieht sich dabei auf das Auftreten von „Knotenlinien“, d. h. also von Kurven der Membran, die dauernd in der Gleichgewichtslage verbleiben. Wir wählen als Beispiel wieder eine quadratische Membran, setzen der Einfachheit wegen  $\alpha = \beta = 1$  und untersuchen den Fall zweigliedriger Lösungen:

$$(10) \quad z = c_1 \sin(\lambda_1 \pi t + \beta_1) \sin m_1 \pi x \sin n_1 \pi y \\ + c_2 \sin(\lambda_2 \pi t + \beta_2) \sin m_2 \pi x \sin n_2 \pi y.$$

Gerade, die zugleich Knotenlinien der beiden Teilschwingungen sind, stellen sich natürlich auch als solche der zusammengesetzten Schwingung ein. Allgemein bleibt ein Punkt  $(x, y)$  auf einer Knotenlinie der einen Teilschwingung stets und nur dann beständig in Ruhe, wenn er zugleich einer Knotenlinie der zweiten Teilschwingung angehört. Soll demnach noch ein weiterer Punkt  $(x, y)$  in Ruhe bleiben, so werden für ihn die in (10) auftretenden, von den  $x, y$  abhängenden Sinus sämtlich von 0 verschieden sein; also muß, da für diesen Punkt  $(x, y)$  der Wert  $z$  beständig gleich 0 sein soll:

$$\sin(\lambda_2 \pi t + \beta_2) = C \cdot \sin(\lambda_1 \pi t + \beta_1)$$

mit einer Konstanten  $C$  in  $t$  identisch gelten. Hieraus folgt sofort, daß die Perioden der beiden Teilschwingungen gleich sein müssen:

$$(11) \quad \lambda_1 = \lambda_2, \quad T_1 = T_2, \quad m_1^2 + n_1^2 = m_2^2 + n_2^2.$$

Weiter ergibt sich  $C = \pm 1$  und  $\beta_2 = \beta_1 + 2\kappa\pi$  oder  $= \beta_1 + (2\kappa + 1)\pi$ , je nachdem  $C = +1$  oder  $= -1$  ist, so daß wir die Lösung (10) in die Gestalt\*):

(12)  $z = \sin(\lambda \pi t + \beta) (c_1 \sin m_1 \pi x \sin n_1 \pi y + c_2 \sin m_2 \pi x \sin n_2 \pi y)$   
kleiden können. Haben wir demnach ein die dritte Gleichung (11) befriedigendes System ganzer Zahlen  $m_1, n_1, m_2, n_2$  gewonnen, so liefert:

$$(13) \quad c_1 \sin m_1 \pi x \sin n_1 \pi y + c_2 \sin m_2 \pi x \sin n_2 \pi y = 0$$

für jede Auswahl der Koeffizienten  $c$  eine Knotenlinie der zugehörigen Schwingung (12). Die hierbei sich ergebenden Kurven bezeichnet man als „Klangfiguren“ der quadratischen Membran.

\*) Für  $C = -1$  ist  $c_2$  durch  $-c_2$  ersetzt.

Eine sehr einfache Lösung der dritten Gleichung (11) ist  $m_1 = 1$ ,  $n_1 = n$ ,  $m_2 = n$ ,  $n_2 = 1$ . Schreiben wir noch  $c_2 : c_1 = -c$ , so haben wir für jede Zahl  $n$  eine Schar möglicher Knotenlinien:

$$(14) \quad \sin \pi x \sin \pi y = c \sin \pi x \sin \pi y.$$

Für  $n = 2$  folgt nach Forthebung des Faktors  $2 \sin \pi x \sin \pi y$  die Gleichung:

$$(15) \quad \cos \pi y = c \cos \pi x,$$

welche für jeden endlichen Wert  $c$  eine bestimmte, von einer Quadratseite durch den Mittelpunkt des Quadrates zur gegenüberliegenden Seite ziehende



Fig. 97.

Knotenlinie liefert. Fig. 97 veranschaulicht die Gestalt der Kurven für die dem Intervalle  $0 \leq c \leq 1$  angehörenden Werte  $c$ , wobei

$c = 0$  die Mittellinie und  $c = 1$  die Diagonale des Quadrates liefert. Die den Werten  $c \geq 1$  und den negativen  $c$  entsprechenden Kurven gehen aus den eben betrachteten durch Spiegelung an der Diagonale bzw. der Mittellinie des Quadrats hervor.

Weit mannigfaltiger sind die Klangfiguren schon für  $n = 3$ , wo man die Gleichung (14) leicht in die Gestalt setzt:

$$(16) \quad \cos^2 \pi y - \frac{1}{4} = c \left( \cos^2 \pi x - \frac{1}{4} \right).$$

Hier entspricht jedem endlichen Werte  $c$  eine bestimmte Kurve, die die beiden Mittellinien des Quadrates zu Symmetrielinien hat und jedenfalls durch die vier Punkte  $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ,  $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ,  $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ,  $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$  hindurchläuft. Da zwei

reziproke Werte  $c$  zwei Kurven liefern, die durch Vertauschung von  $x$  und  $y$  ineinander übergehen, so lernt man bereits alle Gestalten der hier eintretenden Klangfiguren kennen, wenn man  $c$  auf das Intervall  $-1 \leq c \leq +1$  beschränkt. Für  $c = 0$ artet die Kurve in das Geradenpaar  $y = \frac{1}{3}$ ,  $y = \frac{2}{3}$

aus, für  $c = 1$  in das Diagonalenpaar des Quadrates. Für  $-1 \leq c < -\frac{1}{3}$  ist die Knotenlinie eine im Quadratinnern verlaufende geschlossene Kurve. In Fig. 98 sind die Klangfiguren für einige Werte  $c$  gezeichnet; die in zwei Gerade zerfallende Figur für  $c = 0$  steht an vierter Stelle, der

Fall des Diagonalenpaares ( $c = 1$ ) schließt sich als die letzte Figur an.

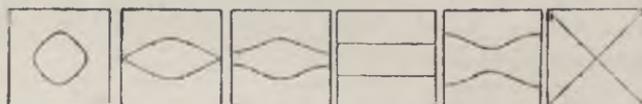


Fig. 98

Im Falle einer kreisförmigen Membran führt man an Stelle von  $x, y$  Polarkoordinaten  $r, \vartheta$  ein und hat die rechte Seite der Gleichung (5) auf  $r$  und  $\vartheta$  als unabhängige Variable zu transformieren, eine Entwicklung, auf die wir erst später eingehen. Setzt man dann  $z = f(t) \cdot g(\vartheta) \cdot h(r)$  als Produkt dreier je nur von einer der unabhängigen Variablen abhängigen Faktoren an, so gelingt es, die partielle Differentialgleichung in drei gewöhnliche für die Funktionen  $f(t), g(\vartheta)$  und  $h(r)$  zu spalten, von denen die beiden ersten durch trigonometrische Funktionen lösbar sind, während sich die dritte durch eine sehr einfache Substitution auf die Besselsche Differentialgleichung (9) S. 339 zurückführen läßt. Man kann also hier besondere Lösungen mit Hilfe trigonometrischer und Besselscher Funktionen herstellen.

**3. Wärmeleitung.** Ein ungleichmäßig erwärmter homogener Körper  $K$  der Randfläche  $R$  habe zur Zeit  $t$  an der Stelle der rechtwinkligen Koordinaten  $x, y, z$  die etwa in Celsiusgraden gemessene Temperatur:

$$(1) \quad u = f(x, y, z, t).$$

Die hier rechts stehende Funktion sei im Bereiche  $K$  während des der Betrachtung unterworfenen Zeitintervalles eindeutig und stetig und habe ebensolche Ableitungen, soweit wir dieselben zu benutzen haben. Setzen wir zu irgend einer Zeit  $t$  die linke Seite der Gleichung (1) einer Konstanten  $u_0$  gleich und deuten die Gleichung in variablen Raumkoordinaten  $x, y, z$ , so stellt sie eine Fläche dar, die wir, soweit sie dem Körper  $K$  angehört, als eine „isothermische Fläche“ oder „Isotherme“ des Körpers bezeichnen. Den verschiedenen zur Zeit  $t$  auftretenden Werten  $u_0$  entspricht dabei eine ganze „Schar von Isothermen“, die den Körper ausfüllen.

Mittels der Funktion  $u$  stellen wir jetzt den Bereich  $K$  zu einem mit der Zeit veränderlichen Vektorfelde aus, indem wir dem Punkte  $(x, y, z)$  zur Zeit  $t$  den Vektor  $\nu$  der drei Komponenten:

$$(2) \quad \nu_x = -\frac{\partial u}{\partial x} = -f'_x, \quad \nu_y = -\frac{\partial u}{\partial y} = -f'_y, \quad \nu_z = -\frac{\partial u}{\partial z} = -f'_z$$

zuerteilen. Nach I, 325 steht dieser Vektor senkrecht zur Isotherme. Wir bezeichnen mit  $\nu$  die Länge einer Normalen zur Isotherme, vom Fußpunkte  $(x, y, z)$  ab gemessen, und rechnen die Maßzahl  $\nu$  positiv nach der Seite abfallender Werte der Temperatur  $u$ . Sind  $(\nu, x), (\nu, y), (\nu, z)$  die Richtungswinkel der so gerichteten Normalen gegen die positiven Achsen, so gilt für den „nach der Normalen  $\nu$  genommenen Differentialquotienten“ von  $u$  (s. I, 155 ff.):

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\nu, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\nu, y) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(\nu, z).$$

Da  $u$  bei wachsendem  $v$  abnimmt, so ist dieser Differentialquotient negativ; mit Benutzung von (2) finden wir somit:

$$-\frac{\partial u}{\partial v} = v_x \cos(\nu, x) + v_y \cos(\nu, y) + v_z \cos(\nu, z) > 0.$$

Nun gilt weiter:

$$v_x = \pm |v| \cos(\nu, x), \quad v_y = \pm |v| \cos(\nu, y), \quad v_z = \pm |v| \cos(\nu, z),$$

wo die oberen oder unteren Zeichen gelten, je nachdem der Vektor  $v$  die gewählte Normalenrichtung hat oder ihr entgegengerichtet ist. Tragen wir diese Ausdrücke der  $v_x, v_y, v_z$  in die voraufgehende Gleichung ein, so folgt:

$$-\frac{\partial u}{\partial v} = \pm |v| > 0,$$

so daß das obere Zeichen gilt: *Der im Punkte  $(x, y, z)$  zur Zeit  $t$  angelegte Vektor, der als „Temperaturgradient“ oder „Temperaturgefälle“ bezeichnet wird, verläuft senkrecht zur Isotherme und hat die Richtung abfallender Temperatur; sein Betrag ist gegeben durch:*

$$(3) \quad |v| = -\frac{\partial u}{\partial v}.$$

Erfahrungsgemäß tritt nun im Laufe der Zeit im Körper  $K$  in der Art ein Wärmevergange auf, daß Teile höherer Temperatur Wärme an benachbarte kältere Teile des Körpers abgeben. Man beschreibt diesen Vorgang am besten dadurch, daß man sich im Innern von  $K$  ein sehr kleines Flächenstückchen des Inhaltes  $d\omega$  vorstellt und die „Wärmemenge“  $dQ$  (vgl. S. 286) angibt, welche während der sehr kleinen Zeit  $dt$  durch das Stückchen  $d\omega$  „hindurchfließt“. Um dies ausführen zu können, errichten wir auf  $d\omega$  einmal den Vektor  $v$ , andererseits einen „Einheitsvektor“  $n$  (s. S. 221) in einer der beiden Normalenrichtungen. Wir tragen ferner der Erfahrungstatsache Rechnung, daß verschiedene Substanzen ungleich durchlässig für die Wärme sind. Indem wir den Körper als „homogen“ und „isotrop“ ansehen, nehmen wir damit an, daß für ihn die „Wärmeleitfähigkeit“ an allen Stellen und für alle Richtungen die gleiche sei; auch möge dieselbe nicht etwa noch mit wechselnder Temperatur sich ändern.\*) Um die Wärmeleitfähigkeit rechnerisch zu erklären, denken wir für den Augenblick die Wärme als eine den Körper durchströmende Flüssigkeit, wobei die Geschwindigkeit an der Stelle  $(x, y, z)$  zur Zeit  $t$  gleich  $k \cdot v$ , d. h. dem oben erklärten Vektor proportional und gleich ge-

\*) Inwieweit diese Voraussetzungen in der Praxis zutreffen, bleibe hier unerörtert.

richtet sein soll. Hier ist dann eben der positive Faktor  $k$  die „Wärmeleitfähigkeit“ der Substanz des Körpers  $K$ .\*)

Ist die Dichte der gedachten Flüssigkeit an der betrachteten Stelle gleich 1, so würde, wie man durch wörtliche Wiederholung der Überlegung von S. 221 findet, während des sehr kleinen Zeitteilchens  $dt$  durch das Flächenstück  $d\omega$  die Wärmemenge:

$$(4) \quad dQ = k \cdot (v \cdot n) d\omega dt$$

nach der Seite der aufgepflanzten Normale  $n$  hindurchfließen, wo  $v \cdot n$  das „skalare Produkt“ der beiden Vektoren ist.\*\*) Die Analogie mit einer strömenden Flüssigkeit soll hier dazu dienen, um das Gesetz (4), das in der Tat für die Wärmeabgabe über das Flächenteilchen  $d\omega$  besteht, verständlich zu machen.

Von hieraus gewinnt man sehr leicht für den Wärmefluß im Inneren von  $K$  eine Differentialgleichung. Ist  $B$  ein räumlicher Bereich innerhalb  $K$  und  $O$  die Oberfläche von  $B$ , so tritt während der sehr kleinen Zeit  $dt$  über  $O$  aus dem Bereiche  $B$  die gesamte Wärmemenge:

$$k \left( \int_{(O)} v \cdot n \cdot d\omega \right) dt$$

heraus, wenn wir die Einheitsvektoren  $n$  nach außen senkrecht auf  $O$  errichten. Der gewonnene Ausdruck kann nach dem Gaußschen Satze (11) S. 222 auch in die Form gekleidet werden:

$$k \left( \int_{(B)} \operatorname{div} v \cdot d\tau \right) dt = k \left( \int_{(B)} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) d\tau \right) dt.$$

Denken wir den Bereich  $B$  außerordentlich klein und vom Rauminhalte  $d\tau$ , so dürfen wir  $\operatorname{div} v$  durch einen zugehörigen Mittelwert ersetzen und finden mit Benutzung von (2), daß dieses Teilchen des Körpers  $K$  während der Zeit  $dt$  die folgende Wärmemenge an die Umgebung abgibt:

$$(5) \quad dQ = k \operatorname{div} v \cdot d\tau \cdot dt = -k \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) d\tau \cdot dt.$$

Es sei nun  $\delta$  die Dichte des Körpers  $K$  und damit  $\delta \cdot d\tau$  die Masse des eben betrachteten Raunteilchens. Soll dieses Raunteilchen eine Änderung der Temperatur  $u$  um  $du$  erfahren, so ist hierzu die Zuführung einer Wärmemenge  $c \cdot \delta \cdot d\tau \cdot du$  erforderlich; dabei ist  $c$  die der Substanz des Körpers zugehörige „spezifische Wärme“ (vgl. S. 286), die wir wieder

\*) Die Leitfähigkeit ist für verschiedene Substanzen bekanntlich sehr verschieden; so verhält sich z. B. die Leitfähigkeit des Silbers zu der des Bleies wie 83 zu 7.

\*\*) Ein negatives Vorzeichen von  $dQ$  bedeutet natürlich, daß der „Wärmefluß“ über  $d\omega$  entgegen der Richtung von  $n$  stattfindet.

als eine Konstante voraussetzen. Nun wird aber dem betrachteten Teilchen des Körpers  $K$  während der Zeit  $dt$  die Wärmemenge  $-dQ$  „zugeführt“; für die neben dieser Zuführung einhergehende Temperaturänderung  $du$  haben wir also die Gleichung:

$$-dQ = c \cdot \delta \cdot d\tau \cdot du = c \cdot \delta \cdot d\tau \frac{\partial u}{\partial t} dt.$$

Durch Elimination von  $dQ$  aus dieser und der Gleichung (5) folgt nach Forthebung überflüssiger Faktoren als „Differentialgleichung der Wärmeleitung“ im Innern des Körpers  $K$ :

$$(6) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \mu^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad \mu = \sqrt{\frac{k}{c\delta}}.$$

Diese Gleichung hat eine sehr vielseitig entwickelte Theorie, von der hier nur ein paar einfachste Proben gegeben werden können. Es soll sich dabei um Fälle handeln, bei denen die Temperatur  $u$  eine Funktion von  $t$  und  $x$  allein ist, sich also bei partieller Änderung von  $y$  und  $z$  nicht ändert. In diesem Falle sind die partiellen Ableitungen  $u'_y$  und  $u'_z$  mit 0 identisch, und die Differentialgleichung (6) für die Funktion  $u = f(x, t)$  nimmt die Gestalt an:

$$(7) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \mu^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Um diesen Fall zu verwirklichen, denken wir uns z. B. den Körper  $K$  als den ganzen rechts von der  $y, z$ -Ebene gelegenen Raum ausfüllend, wobei alsdann in der Randebene  $R$ , d. i. in der  $y, z$ -Ebene, sowie in jeder einzelnen zu ihr parallel laufenden Ebene in einem einzelnen Augenblicke  $t$  die Temperatur überall gleich sein soll. Es genügt in diesem Falle, die Temperaturverteilung längs der positiven  $x$ -Achse zu untersuchen. Wir können uns die Verhältnisse auch so vorstellen, daß es sich um die Temperaturverteilung in einem dünnen, die positive  $x$ -Achse vorstellenden Stabe handelt, der also nach rechts ins Unendliche läuft; der Stab gilt dabei seitlich als von einem für die Wärme undurchlässigen Medium umgeben. Ein zweites sehr einfaches Beispiel wird geliefert, wenn wir  $K$  als den gesamten zwischen der  $y, z$ -Ebene und einer ihr parallelen Ebene  $x = l$  gelegenen Raum füllend ansehen, wobei dann wieder in der einzelnen Ebene  $x = a$  des Körpers  $K$  zur Zeit  $t$  überall dieselbe Temperatur herrschen soll. Dieses zweite Beispiel kann man auch auffassen als dasjenige des Wärmeflusses in einem Stabe der endlichen Länge  $l$ , wenn der Stab wieder seitlich von einem für Wärme undurchlässigen Medium umgeben ist.

Versuchen wir nun, die Gleichung (7) nach dem Grundsätze zu lösen, daß wir  $u$  in das Produkt zweier Funktionen  $g(x)$  und  $h(t)$  spalten, so

zerlegt sich (s. die betreffende Überlegung von S. 343) die Gleichung (7) in die beiden „gewöhnlichen Differentialgleichungen“:

$$g''(x) = \frac{a^2}{\mu^2} g(x), \quad h'(t) = a^2 h(t),$$

wo  $a$  eine noch zu wählende Konstante ist. Beide Gleichungen führen auf Exponentialfunktionen, und wir gewinnen als Lösung  $u$  der Gleichung (7):

$$(8) \quad u = g(x)h(t) = e^{\frac{a}{\mu}x + a^2t}.$$

Es sei nun gestattet, für  $a$  auch komplexe Werte einzutragen, wobei für die Umrechnung der zugehörigen Lösungen in reelle Gestalt von den im Anhang (§ 4) zwischen der Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen aufzustellenden Beziehungen Gebrauch zu machen ist. Wir setzen erstlich  $a = -\alpha(1 \pm i)$ , unter  $\alpha$  eine positive reelle Zahl verstanden. Dieser Auswahl entsprechen die beiden Lösungen:

$$e^{-\frac{\alpha}{\mu}x} \cdot e^{\pm i(2\alpha^2t - \frac{\alpha}{\mu}x)},$$

aus deren halber Summe wir für die „lineare“ und „homogene“ Gleichung (7) die reelle Lösung gewinnen:

$$e^{-\frac{\alpha}{\mu}x} \cdot \cos\left(2\alpha^2t - \frac{\alpha}{\mu}x\right). *$$

Wir dürfen auch noch eine multiplikative Konstante  $A$  und eine additive  $B$  hinzufügen und erhalten so die Lösung:

$$u = A \cdot e^{-\frac{\alpha}{\mu}x} \cdot \cos\left(2\alpha^2t - \frac{\alpha}{\mu}x\right) + B.$$

Der dieser Gleichung entsprechende Vorgang ist in bezug auf die Zeit ein *periodischer*, insofern jedesmal nach Verlauf der Periode  $T = \frac{\pi}{\alpha^2}$  die Temperaturverteilung dieselbe ist. Führen wir an Stelle von  $\alpha$  die Periode  $T$  ein, so gewinnt unsere Lösung die Gestalt:

$$(9) \quad u = A \cdot e^{-\frac{x}{\mu} \sqrt{\frac{\pi}{T}}} \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{x}{\mu} \sqrt{\frac{\pi}{T}}\right) + B.$$

Wir wenden diese Gleichung auf den rechts von der  $y, z$ -Ebene gelegenen „Halbraum“  $K$  an und erkennen aus ihr den Wärmefluß im Halb-

\*) Will man den Gebrauch komplexer Zahlen meiden, so bestätigt man leicht direkt, daß dieser Ausdruck eine Lösung von (7) darstellt.

raume, falls die Randebene  $x = 0$  durch Abgabe bzw. Zufuhr von Wärme einer nach dem „Sinusgesetz“:

$$(10) \quad u = A \cos \frac{2\pi t}{T} + B$$

der „Amplitude“  $A$  vor sich gehenden Temperaturschwankung um einen mittleren Wert  $B$  unterworfen ist und für sehr große Werte  $x$  die Temperatur näherungsweise „konstant“ gleich  $B$  ist. In irgend einer Entfernung  $x$  von der Randebene  $R$  erfolgt dann die Temperaturschwankung im Laufe der Zeit gleichfalls nach einem Sinusgesetze um den Mittelwert  $B$ . Aber die „Amplituden“ dieser Schwankungen nehmen mit wachsendem  $x$  nach einem „Exponentialgesetze“ ab, es ist nämlich die Amplitude  $A_x$  in der Entfernung  $x$  vom Rande  $R$  gegeben durch:

$$(11) \quad A_x = A \cdot e^{-\frac{x}{\mu} \sqrt{\frac{\pi}{T}}}$$

Dabei erleiden diese Schwankungen insofern eine „Phasenverschiebung“, als die Extremwerte der Temperatur um so später auftreten, je größer  $x$  ist. Es tritt von der Randebene  $R$  eine „Wärmewelle“ in das Innere von  $K$  ein, wobei der Gipfel des Wellenberges die Entfernung  $x$  vom Rande zur Zeit:

$$t = \frac{x}{2\mu} \sqrt{\frac{T}{\pi}}$$

erreicht; die Wärmewelle schreitet also mit der konstanten Geschwindigkeit:

$$(12) \quad \frac{dx}{dt} = 2\mu \sqrt{\frac{\pi}{T}}$$

in der Richtung der  $x$ -Achse fort.

Die Oberfläche der Erde ist einmal einer täglichen Temperaturschwankung unterworfen, zweitens einer jährlichen.\*) Wird als Zeiteinheit 1 Tag und als Längeneinheit 1 m genommen, so findet man für die Geschwindigkeit der Fortpflanzung der von der täglichen Periode herrührenden Wärmewelle in das Erdinnere ziemlich genau den Wert 1. Aus der Gleichung (12) folgt damit als Wert von  $\mu$ :

$$\mu = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} = 0,28.$$

Eine Kontrolle dieses Wertes ergab die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der von der jährlichen Periode herrührenden Wärmewelle; für diese Geschwindigkeit hat man den Wert 0,0464 beobachtet. Derselbe liefert in (12) eingesetzt:

\*) Diese Schwankungen erfolgen selbstverständlich nur angenähert nach Sinusgesetzen.

$$\mu = \frac{0,0464 \cdot \sqrt{365,25}}{2\sqrt{\pi}} = 0,25$$

in guter Übereinstimmung mit dem vorberechneten Werte. Für die Amplitude der Temperaturschwankung bei der jährlichen Periode in der Tiefe  $x$  unter dem Erdboden liefert alsdann die Gleichung (11):

$$A_x = A \cdot e^{-0,37 \cdot x}.$$

Für eine Tiefe von 8 m unter der Erdoberfläche findet man:

$$A_8 = 0,05 \cdot A,$$

d. h. die in dieser Tiefe vorliegende Amplitude ist bereits auf den 20. Teil der Oberflächenamplitude herabgesunken. Die Beobachtungen haben gezeigt, daß schon in einer Tiefe von 20 m unter dem Erdboden Schwankungen der Temperatur nicht mehr wahrnehmbar sind.

Eine weitere bemerkenswerte Lösung von (7), die wir gleichfalls auf den Halbraum mit  $x \geq 0$  beziehen wollen, erzielen wir, indem wir:

$$u = f(z), \quad z = \frac{x}{\sqrt{t}}$$

in (7) eintragen. Wir gewinnen dadurch:

$$-f'(z) \frac{x}{2t\sqrt{t}} = \mu^2 f''(z) \cdot \frac{1}{t},$$

eine Gleichung, die man leicht in die folgende Gestalt umsetzt:

$$\frac{d \ln f'(z)}{dz} = -\frac{z}{2\mu^2}.$$

Durch wiederholte Integration findet man die Lösung:

$$f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = f(z) = \int_0^z e^{-\frac{z^2}{4\mu^2}} dz = \int_0^{\frac{x}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{z^2}{4\mu^2}} dz,$$

oder wenn wir statt  $z$  eine neue Integrationsvariable  $\xi$  durch  $z = 2\mu\xi$  einführen:

$$f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = 2\mu \int_0^{\frac{x}{2\mu\sqrt{t}}} e^{-\xi^2} d\xi.$$

Setzen wir wieder eine multiplikative Konstante  $A \frac{1}{\mu\sqrt{\pi}}$  und eine additive  $B$  hinzu, so folgt als Lösung von (7):

$$(13) \quad u = A \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\mu\sqrt{t}}} e^{-\xi^2} d\xi + B.$$

Das hier auftretende Integral haben wir S. 128 das „Gaußsche Fehlerintegral“ genannt und näher betrachtet. Benutzen wir für dasselbe die S. 128 eingeführte Bezeichnung  $\Phi(x)$ , so schreibt sich die Gleichung (13):

$$(14) \quad u = A \Phi\left(\frac{x}{2\mu\sqrt{t}}\right) + B.$$

Die Funktion  $\Phi(x)$  wächst bei einem von 0 bis  $\infty$  wachsenden Argumente  $x$  selbst monoton von 0 bis 1. Für „ $t = +0$ “ ist also  $u$  im ganzen Halbraume konstant gleich  $(A + B)$ . Sobald  $t > 0$  wird, findet in der ganzen Randebene  $x = 0$  eine plötzliche Änderung der Temperatur auf  $u(0, t) = B$  statt. Wir nehmen etwa  $A > 0$  an. Dann stellt unsere Lösung (13) oder (14) den Wärmevergang im Halbraume dar, wenn in dem Augenblicke  $t = 0$  die Randebene des Halbraumes, der bis dahin die überall konstante Temperatur  $(A + B)$  besaß, eine plötzliche Abkühlung auf die Temperatur  $B$  erfährt.

Auch die Gleichung (13) gestattet eine Anwendung auf die Verhältnisse der Erde. Solange sich dieselbe im flüssigen Zustande befand, erhielt sich die Temperatur infolge der Strömungen, die beim Untersinken gekühlter Oberflächenteile entstanden, durch den ganzen Erdkörper auf gleicher Höhe, die infolge der Ausstrahlung mit der Zeit langsam zurückging. Sobald einmal die Oberfläche erstarrte, was bei etwa 4000° Celsius stattfand, trat weiterhin eine rapide Kühlung der äußersten Schicht bis auf einen Stand ein, der von dem gegenwärtigen Temperaturmittel nicht weit entfernt war. Rechnen wir  $t$  von dieser Zeit an, setzen das fragliche Mittel gleich 0° und tragen für  $A$  den schon erwähnten Wert 4000, für  $\mu$  aber den oben berechneten  $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$  ein, so ist das Gesetz für den weiteren Kühlungsprozeß der Erde:

$$(15) \quad u = \frac{8000}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}}} e^{-\xi^2} d\xi.$$

Bemerkenswert ist, daß diese Gleichung einen Schluß auf die Zeitdauer gestattet, die von der Zeit der Entstehung der Erdkruste bis zur Gegenwart verflissen ist. Wir berechnen aus (15) leicht:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{8000}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{\pi x^2}{t}} \sqrt{\frac{\pi}{t}}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} = \frac{8000}{\sqrt{t}},$$

wo in der zweiten Gleichung links der Wert der Ableitung von  $u$  nach  $x$  für  $x = 0$  gemeint ist. Nun weiß man aber, daß gegenwärtig dicht an

der Erdoberfläche die Temperatur auf je 25 m um 1 Grad Celsius steigt; daraus folgt:

$$\frac{1}{25} = \frac{8000}{\sqrt{t}}, \quad \sqrt{t} = 200000.$$

Da wir als Zeiteinheit 1 Tag wählten, so ist die fragliche Zeitdauer etwa gleich 100 Millionen Jahre.

Während in den betrachteten Beispielen die Lösung der Gleichung (7) vorangestellt wurde und die Anfangs- und Randbedingungen nachträglich der Lösung angepaßt wurden, soll bei der Untersuchung des Wärmeflusses in einem Stabe endlicher Länge  $l$  umgekehrt verfahren werden. Wir schreiben vor, daß zur Zeit  $t = 0$  die Temperaturverteilung durch  $u = \varphi(x)$  gegeben sei. Im Augenblicke  $t = 0$  möge alsdann das Stabende  $x = 0$  auf die Temperatur  $u = \alpha$  und das Ende  $x = l$  auf  $u = \beta$  gebracht und fortan durch Zu- oder Abführung von Wärme dauernd auf diesen Temperaturen gehalten werden.

Um in diesem Falle den Wärmefluß für  $t > 0$  festzustellen, entnehmen wir aus dem Ansatz (8), indem wir  $a$  gleich den rein imaginären Zahlen  $\pm i\alpha\mu$  mit reellem positiven  $\alpha$  setzen, die Lösungen:

$$e^{-\alpha^2 \mu^2 t} \cdot e^{\pm i\alpha x} = e^{-\alpha^2 \mu^2 t} (\cos \alpha x \pm i \sin \alpha x),$$

deren durch  $2i$  geteilte Differenz uns die reelle Lösung:

$$u = e^{-\alpha^2 \mu^2 t} \cdot \sin \alpha x$$

liefert.\*) Diese Lösung verschwindet für  $x = 0$ . Soll sie auch am anderen Stabende  $x = l$  verschwinden, so muß  $\alpha l$  ein Vielfaches  $n\pi$  von  $\pi$  sein; wir setzen demnach  $\alpha = \frac{n\pi}{l}$ , unter  $n$  irgend eine positive ganze Zahl verstanden. Fügen wir noch eine multiplikative Konstante  $b_n$  hinzu, so erhalten wir den Werten  $n = 1, 2, 3, \dots$  entsprechend die Lösungen:

$$b_n e^{-\frac{n^2 \mu^2 \pi^2}{l^2} t} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Auch eine Summe solcher Lösungen, sowie eine unendliche Reihe:

$$(16) \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2 \mu^2 \pi^2}{l^2} t} \sin \frac{n\pi x}{l},$$

sofern sie konvergent und gliedweise differenzierbar ist, stellt eine Lösung von (7) dar, die in den beiden Stabenden beständig gleich 0 ist.

\*) Man beweist auch sofort direkt, daß dieser Ausdruck die Gleichung (7) befriedigt.

Auf der anderen Seite haben wir in dem von  $t$  unabhängigen linearen Ausdrücke:

$$(17) \quad \alpha + \frac{\beta - \alpha}{l} x$$

eine die Differentialgleichung (7) befriedigende Funktion, welche die für uns vorgeschriebenen Randbedingungen erfüllt. In der Summe der Ausdrücke (16) und (17):

$$(18) \quad u = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{l} x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2 \mu^2 \pi^2}{l^2} t} \sin \frac{n \pi x}{l}$$

haben wir demnach eine Lösung, die jedenfalls die Randbedingungen befriedigt und die wir nun noch den „Anfangsbedingungen“ anzupassen haben. Dies läuft darauf hinaus, die  $b_n$  so zu bestimmen, daß der Ausdruck (18) für  $t = 0$  die im Intervalle  $0 \leq x \leq l$  willkürlich vorgeschriebene Funktion  $\varphi(x)$  darstellt, d. h. daß:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n \pi x}{l} = \varphi(x) - \alpha - \frac{\beta - \alpha}{l} x$$

gilt. Wir haben also hier links einfach die „reine Sinusreihe“ der rechts stehenden Funktion von  $x$  und finden nach der Regel (7) S. 246:

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l \left( \varphi(\xi) - \alpha - \frac{\beta - \alpha}{l} \xi \right) \sin \frac{n \pi \xi}{l} d\xi,$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{n \pi \xi}{l} d\xi - \frac{2}{n \pi} (\alpha - (-1)^n \beta).$$

Durch Eintragung dieses Ausdrucks von  $b_n$  in (18) ergibt sich als die sowohl die Rand- als die Anfangsbedingungen befriedigende Lösung unserer Aufgabe:

$$(19) \quad u = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{l} x - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha - (-1)^n \beta) e^{-\frac{n^2 \mu^2 \pi^2}{l^2} t} \sin \frac{n \pi x}{l} \\ + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{-\frac{n^2 \mu^2 \pi^2}{l^2} t} \sin \frac{n \pi x}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{n \pi \xi}{l} d\xi \right\}.$$

Es ist die Wirkung der hier auftretenden Exponentialfaktoren, daß die Werte der einzelnen Reihenglieder mit wachsender Zeit schnell gegen 0 abnehmen. Der Wärmefluß strebt also mit wachsender Zeit der durch:

$$u = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{l} x$$

dargestellten, gleichförmig ansteigenden oder abfallenden oder auch konstanten Temperaturverteilung zwischen den beiden Randtemperaturen zu.

4. **Laplacesche Differentialgleichung.** Nach einem S. 227 aufgestellten Satze ist ein Schwerkraftfeld oder irgend ein anderes Kraftfeld mit entsprechendem Kraftgesetze außerhalb der anziehenden Massen sowohl wirbelfrei als quellenfrei. Für ein Vektorfeld  $\mathbf{v}$  dieser Art gilt  $\text{rot } \mathbf{v} = 0$  und  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ . Aus der ersten Gleichung folgte (s. S. 224), daß nach Auswahl eines *beliebigen* rechtwinkligen Koordinatensystems sich eine als zugehöriges „Potential“ bezeichnete Funktion  $V(x, y, z)$  bilden läßt, deren drei partielle Ableitungen erster Ordnung die Vektorkomponenten sind. Aus  $\text{div } \mathbf{v} = 0$  folgt (s. (14), S. 228), daß *unabhängig von der Auswahl des Koordinatensystems\** für die Funktion  $V(x, y, z)$  die nach Laplace benannte partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung besteht:

$$(1) \quad \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

wobei für die Summe der drei zweiten Ableitungen die a. a. O. eingeführte Abkürzung  $\Delta V$  wieder herangezogen wurde. Statt der gravitierend wirkenden Massen können, wie schon angedeutet ist, auch elektrische oder magnetische vorliegen, bei denen das Anziehungsgesetz dem Gravitationsgesetz gleich ist. Auch bei einem sogenannten „stationären“ Wärmeflusse, bei dem die Temperatur  $u$  an der einzelnen Stelle  $(x, y, z)$  sich im Laufe der Zeit nicht ändert und also  $\frac{\partial u}{\partial t}$  konstant gleich 0 ist, genügt zufolge (6) S. 358 die Funktion  $u$  der Gleichung  $\Delta u = 0$ , so daß die Differentialgleichung (1) vielseitige Verwendung findet.

Neben (1) sind die Gestalten der Laplaceschen Gleichung in „Zylinderkoordinaten“ sowie in „Polarkoordinaten“ viel gebraucht. Diese Gestalten sollen zunächst aufgestellt werden. Nach S. 181 führen wir *Zylinderkoordinaten* ein, indem wir die dritte Koordinate  $z$  beibehalten\*\*) und  $x, y$  nach Art der Polarkoordinaten in der Ebene durch  $\rho$  und  $\varphi$  ersetzen, die mit  $x$  und  $y$  durch:

$$(2) \quad x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad \rho = +\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \text{arc tg } \frac{y}{x}$$

zusammenhängen. Die Flächen  $\rho = \text{konst.}$  sind dann eben „Zylinder“ mit der  $z$ -Achse als Achse. Für die partiellen Ableitungen von  $\rho$  und  $\varphi$  nach  $x$  und  $y$  findet man aus den Gleichungen (2):

$$(3) \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = \sin \varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin \varphi}{\rho}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos \varphi}{\rho}.$$

\*) S. die unten folgende Aufgabe 1).

\*\*) A. a. O. wurde  $x$  beibehalten und statt  $y, z$  führten wir Polarkoordinaten ein.

Demgemäß drücken sich die ersten Ableitungen von  $V$  nach  $x$  und  $y$  in den neuen Variablen so aus:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial \varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial \varrho} \cos \varphi - \frac{\partial V}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{\varrho},$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial \varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial \varrho} \sin \varphi + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{\varrho}.$$

Setzt man in die erste Gleichung  $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$  an Stelle von  $V$  und in die zweite  $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$  für  $V$  ein, so folgt:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \frac{\partial V}{\partial \varrho} \cos \varphi - \frac{\partial V}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{\varrho} \right) \cos \varphi - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial V}{\partial \varrho} \cos \varphi - \frac{\partial V}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{\varrho} \right) \frac{\sin \varphi}{\varrho},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \frac{\partial V}{\partial \varrho} \sin \varphi + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{\varrho} \right) \sin \varphi + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial V}{\partial \varrho} \sin \varphi + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{\varrho} \right) \frac{\cos \varphi}{\varrho}.$$

Bei Weiterentwicklung der rechten Seite und Addition beider Gleichungen fassen sich entsprechende Glieder teils sehr einfach zusammen, teils heben sie sich gegenseitig auf:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2} + \frac{\partial V}{\partial \varrho} \cdot \frac{1}{\varrho} + \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \cdot \frac{1}{\varrho^2}.$$

Hiernach lautet die Laplacesche Differentialgleichung in Zylinderkoordinaten  $z, \varrho, \varphi$ :

$$(4) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial V}{\partial \varrho} = 0.$$

Der Übergang von den Zylinderkoordinaten („Semipolarkoordinaten“) zu den räumlichen Polarkoordinaten  $r, \theta, \varphi$  vollzieht sich dadurch, daß wir unter Beibehaltung von  $\varphi$  die Koordinaten  $z, \varrho$  durch  $r, \theta$  auf Grund der Gleichungen:

$$z = r \cos \theta, \quad \varrho = r \sin \theta, \quad r = +\sqrt{z^2 + \varrho^2}, \quad \theta = \arctg \frac{\varrho}{z}$$

ersetzen. Es handelt sich hier um genau dieselbe Transformation, die uns vorhin von  $x, y$  zu  $\varrho, \varphi$  hinführte. Aus den obigen Rechnungen folgern wir demnach sofort:

$$\frac{\partial V}{\partial \varrho} = \frac{\partial V}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}.$$

Die Umrechnung der Gleichung (4) wird daraufhin leicht vollzogen. Die Laplacesche Differentialgleichung hat in Polarkoordinaten  $r, \theta, \varphi$  die Gestalt:

$$(5) \quad r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \cotg \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0,$$

die sich auch noch etwas kürzer so zusammenfassen läßt:

$$(6) \quad r \frac{\partial^2(rV)}{\partial r^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Führt man an Stelle von  $\theta$  die Variable  $\xi = \cos \theta$  ein, so ist:

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\partial V}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} = -\frac{\partial V}{\partial \xi} \sin \theta, \quad \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} = -(1 - \xi^2) \frac{\partial V}{\partial \xi},$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( (1 - \xi^2) \frac{\partial V}{\partial \xi} \right).$$

Die Gleichung (6) geht damit über in:

$$(7) \quad r \frac{\partial^2(rV)}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( (1 - \xi^2) \frac{\partial V}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{1 - \xi^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Um wenigstens ein Beispiel zu den vorstehenden Entwicklungen auszuführen, denken wir an der Stelle  $r = 1, \theta = 0$ , d. h. also im „Nordpole“ der Kugel des Radius 1 um  $O$  (s. S. 155), ein gravitierend wirkendes Massenteilchen der Masse 1 oder auch (was für die Rechnung auf dasselbe hinausläuft) ein nach dem Coulombschen Gesetze wirkendes elektrisches Massenteilchen der Masse  $-1$ . Es befinde sich nun an der Stelle  $(r, \theta, \varphi)$  ein angezogenes Massenteilchen der Masse 1. Sehen wir alsdann der Kürze halber von der „Gravitationskonstanten“ bzw. der entsprechenden im Coulombschen Gesetze auftretenden Konstanten ab, so haben wir nach S. 228, da die Entfernung des Punktes  $(r, \theta, \varphi)$  vom Nordpole der fraglichen Kugel  $\sqrt{1 - 2r \cos \theta + r^2}$  ist, als zugehöriges Potential:

$$(8) \quad V(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2r\xi + r^2}}, \quad \xi = \cos \theta,$$

das natürlich von  $\varphi$  unabhängig ist.

Ist  $|2r\xi - r^2| < 1$ , so läßt sich die rechte Seite von (8) nach der Binomialreihe (I, 233) so darstellen:

$$V = (1 - (2r\xi - r^2))^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} (2r\xi - r^2)^n.$$

Man entwickle hier  $(2r\xi - r^2)^n$  nach dem binomischen Lehrsatz und ordne das Ergebnis nach ansteigenden Potenzen von  $r$ . Von der entstehenden Reihe können wir im Anhang leicht zeigen, daß sie für  $r < 1$  konvergent ist, was wir hier bereits benutzen wollen. Als Koeffizient von  $r^n$  bei  $n > 0$  aber findet sich eine rationale ganze Funktion  $n^{\text{ten}}$  Grades  $G_n(\xi)$  von  $\xi$ , von der wenigstens das höchste Glied unmittelbar feststellbar ist:

$$(9) \quad G_n(\xi) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \cdot 2^n \xi^n + \cdots = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n!} \xi^n + \cdots$$

Setzen wir der Gleichförmigkeit wegen  $G_0(\xi) = 1$ , so folgt:

$$(10) \quad V = \frac{1}{\sqrt{1 - 2r\xi + r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(\xi) r^n.$$

Die  $G_n(\xi)$  lassen sich nun sehr leicht vollständig angeben. Tragen wir nämlich die Reihe (10) in die Differentialgleichung (7) ein, so folgt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n(n+1)G_n - 2\xi G'_n + (1-\xi^2)G''_n) r^n = 0.$$

Die rationale ganze Funktion  $n^{\text{ten}}$  Grades  $G_n$  befriedigt also die Legendresche Differentialgleichung (3) S. 337. Nach der damaligen Entwicklung und dem unter (9) angegebenen Anfangsgliede erweist sich somit  $G_n(\xi)$  als mit der unter (7) S. 338 aufgestellten Funktion  $P_n(\xi)$  identisch. Die für  $r < 1$  konvergente Entwicklung des Potentials (8) nach ansteigenden Potenzen von  $r$  ist:

$$(11) \quad V = \frac{1}{\sqrt{1 - 2r\xi + r^2}} = P_0(\xi) + P_1(\xi)r + P_2(\xi)r^2 + \dots,$$

wo  $P_n(\xi)$  die „Legendresche Kugelfunktion erster Art  $n^{\text{ter}}$  Ordnung“ ist. Die Auswahl des Faktors vor der Klammer in (7) S. 338 findet hier ihre Begründung.

Aufgaben: 1) Man beweise die Unveränderlichkeit des Ausdrucks  $\Delta V$  bei einer Drehung des Achsenkreuzes um  $O$  durch direkte Rechnung. — Nach „A. G.“ S. 98 ff. stellen sich die alten Koordinaten in den neuen  $x', y', z'$  durch drei Gleichungen:

$$x = a_1 x' + a_2 y' + a_3 z', \quad y = b_1 x' + \dots, \quad z = c_1 x' + \dots$$

dar, wo die Koeffizienten die sechs Relationen erfüllen:

$$(12) \quad \begin{cases} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1, & b_1^2 + \dots = 1, & c_1^2 + \dots = 1, \\ b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = 0, & c_1 a_1 + \dots = 0, & a_1 b_1 + \dots = 0. \end{cases}$$

Man wird finden:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2} = a_1^2 V''_{xx} + b_1^2 V''_{yy} + c_1^2 V''_{zz} + 2b_1 c_1 V''_{yz} + 2c_1 a_1 V''_{zy} + 2a_1 b_1 V''_{xy},$$

sowie zwei entsprechende Gleichungen für  $\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}$ ,  $\frac{\partial^2 V}{\partial z'^2}$ . Die Addition ergibt mit Rücksicht auf (12):

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z'^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

2) Man beweise durch direkte Rechnung, daß das Potential (8) ein Integral der Gleichung (7) ist.

5. **Kugelfunktionen.** Um wenigstens eine besonders einfache Klasse von Integralen der Laplaceschen Differentialgleichung ausführlicher zu untersuchen, versuchen wir diese Gleichung durch eine „rationale ganze homogene Funktion  $n^{\text{ten}}$  Grades“ von  $x, y, z$  zu befriedigen. Es soll also  $V$  ein Aggregat der Gestalt sein:

$$(1) \quad V(x, y, z) = \sum_{s,t} C_{s,t} x^s y^t z^{n-s-t}, \quad 0 \leq t \leq s \leq n,$$

wo sich die Summe auf alle der zugefügten Ungleichung genügenden Paare ganzer Zahlen  $t, s$  bezieht und die  $C$  konstante Koeffizienten sind.

Das Aggregat (1) hat  $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$  Glieder. Da nun durch Eintragung des Ausdrucks (1) von  $V$  in die linke Seite der Differentialgleichung für  $\Delta V(x, y, z)$  eine rationale ganze homogene Funktion  $(n-2)^{\text{ten}}$  Grades gewonnen wird, die mit 0 identisch sein soll, so erhalten wir durch Nullsetzen der  $\frac{1}{2}(n-1)n$  Koeffizienten dieser letzteren Funktion  $\frac{1}{2}(n-1)n$  offenbar lineare Gleichungen für die  $C_{s,t}$ . Wir ziehen den vorläufigen Schluß, daß:

$$\frac{1}{2}(n+1)(n+2) - \frac{1}{2}(n-1)n = 2n+1$$

unter jenen Koeffizienten willkürlich wählbar sind, während sich die übrigen aus den gewählten Koeffizienten linear berechnen.

Zur genaueren Untersuchung tragen wir unter Einführung von Polarkoordinaten:

$$(2) \quad x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta$$

in (1) ein und schreiben nach Absonderung des gemeinsamen Faktors  $r^n$ :

$$(3) \quad V(x, y, z) = r^n X_n(\theta, \varphi),$$

wo der nur noch von  $\theta$  und  $\varphi$  abhängige zweite Faktor:

$$(4) \quad X_n(\theta, \varphi) = \sum_{s,t} C_{s,t} \cos^{n-s} \theta \sin^s \theta \cos^t \varphi \sin^{s-t} \varphi$$

ist. Durch Einsetzung des Ausdrucks (3) von  $V$  in die Gleichung (6) § 4 ergibt sich für  $X_n(\theta, \varphi)$  die Gleichung:

$$(5) \quad n(n+1) X_n + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial X_n}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 X_n}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Die drei Argumente  $\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta$  der Funktion (4) können wir als die rechtwinkligen Koordinaten der Punkte der um den Nullpunkt beschriebenen Kugel des Radius 1 auffassen, oder wir können noch etwas kürzer die Argumente  $\theta, \varphi$  selbst von  $X_n(\theta, \varphi)$  als Koordinaten

auf dieser Kugelfläche deuten (s. S. 155). Auf diese Weise wird  $X_n(\theta, \varphi)$  eine die partielle Differentialgleichung (5) befriedigende „Funktion auf der Kugelfläche“, die wir auch kurz als eine „Kugelflächenfunktion“ oder „Kugelfunktion“  $n^{\text{ter}}$  Ordnung bezeichnen. Die Gleichung (5) heißt entsprechend die „Differentialgleichung der Kugelfunktionen  $n^{\text{ter}}$  Ordnung“. Gehen wir vermöge (3) auf  $V(x, y, z)$  zurück, so erhalten wir diejenigen Integrale der Laplaceschen Gleichung, welche als „räumliche Kugelfunktionen“ bezeichnet werden.

Es soll nun gezeigt werden, daß die wirkliche Herstellung der fraglichen Kugelfunktionen  $X_n(\theta, \varphi)$  geleistet werden kann, indem man eine gewisse Anzahl gewöhnlicher linearer homogener Differentialgleichungen zweiter Ordnung durch rationale ganze Funktionen löst. Zu diesem Zwecke formen wir zunächst den Ausdruck (4) ein wenig um. Sind  $l$  und  $m$  irgend zwei nicht-negative ganze Zahlen, so gilt:

$\cos^l \varphi \sin^m \varphi = a_0 \cos(l+m)\varphi + a_1 \cos(l+m-2)\varphi + a_2 \cos(l+m-4)\varphi + \dots$ ,  
falls  $m$  gerade ist, und:

$\cos^l \varphi \sin^m \varphi = b_0 \sin(l+m)\varphi + b_1 \sin(l+m-2)\varphi + b_2 \sin(l+m-4)\varphi + \dots$ ,  
falls  $m$  ungerade ist; hier sind die  $a, b$  von  $\varphi$  unabhängige Koeffizienten, und die Reihen sind so lange fortzusetzen, als noch nicht-negative Multipla von  $\varphi$  als Argumente von  $\cos$  bzw.  $\sin$  auftreten. Im Falle  $l+m=2$  hat man die bekannten Elementarformeln:

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{2}, \quad \sin^2 \varphi = -\frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{2},$$

$$\cos \varphi \sin \varphi = \frac{1}{2} \sin 2\varphi;$$

die allgemeine Richtigkeit der Angaben beweist man von hieraus etwa durch den Schluß der vollständigen Induktion mittelst Zusatzes von Faktoren  $\cos \varphi$  bzw.  $\sin \varphi$  unter Benutzung der Relationen:

$$\sin h\varphi \cos \varphi, \cos h\varphi \sin \varphi = \frac{1}{2} \sin(h+1)\varphi \pm \frac{1}{2} \sin(h-1)\varphi,$$

$$\cos h\varphi \cos \varphi, \sin h\varphi \sin \varphi = \frac{1}{2} \cos(h-1)\varphi \pm \frac{1}{2} \cos(h+1)\varphi.$$

Hiernach können wir  $\cos^s \varphi \sin^{s-t} \varphi$  durch den Ausdruck:

$$\sum_k a_k \cos(s-2k)\varphi \quad \text{bzw.} \quad \sum_k b_k \sin(s-2k)\varphi$$

ersetzen; zugleich wollen wir für  $\cos^{n-s} \theta \sin^s \theta$  entsprechend:

$$\sin^{s-2k} \theta \{ (1 - \cos^2 \theta)^k \cos^{n-s} \theta \}$$

schreiben. Es ergibt sich damit die Möglichkeit, den Ausdruck in (4) rechts nach  $\cos$  und  $\sin$  der Vielfachen von  $\varphi$  anzuordnen:

$$(6) \quad X_n(\theta, \varphi) = \Phi_0(\theta) + \Phi_1(\theta) \cos \varphi + \Phi_2(\theta) \cos 2\varphi + \dots + \Phi_n(\theta) \cos n\varphi \\ + \Psi_1(\theta) \sin \varphi + \Psi_2(\theta) \sin 2\varphi + \dots + \Psi_n(\theta) \sin n\varphi,$$

wobei die  $\Phi_\nu$  und  $\Psi_\nu$  jedenfalls die Gestalten haben:

$$(7) \quad \begin{cases} \Phi_\nu(\theta) = \sin^\nu \theta (A_0 \cos^{n-\nu} \theta + A_1 \cos^{n-\nu-2} \theta + A_2 \cos^{n-\nu-4} \theta + \dots), \\ \Psi_\nu(\theta) = \sin^\nu \theta (B_0 \cos^{n-\nu} \theta + B_1 \cos^{n-\nu-2} \theta + B_2 \cos^{n-\nu-4} \theta + \dots) \end{cases}$$

mit rationalen ganzen Funktionen von  $\cos \theta$  in den Klammern.

Die Darstellung (6) unserer Funktion  $X_n(\theta, \varphi)$  erweist sich nun der Differentialgleichung (5) besonders leicht zugänglich. Tragen wir den Ausdruck (6) von  $X_n$  in (5) ein, so liefert die Forderung, daß die Differentialgleichung erfüllt ist, die in  $\theta$  und  $\varphi$  identische Gleichung:

$$(8) \quad \sum_{\nu=0}^n (\bar{\Phi}_\nu(\theta) \cos \nu\varphi + \bar{\Psi}_\nu(\theta) \sin \nu\varphi) = 0,$$

wobei  $\bar{\Phi}_\nu(\theta)$  und  $\bar{\Psi}_\nu(\theta)$  Abkürzungen für folgende Ausdrücke sind:

$$\bar{\Phi}_\nu = \left( n(n+1) - \frac{\nu^2}{\sin^2 \theta} \right) \Phi_\nu + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Phi_\nu}{d\theta} \right), \\ \bar{\Psi}_\nu = \left( n(n+1) - \frac{\nu^2}{\sin^2 \theta} \right) \Psi_\nu + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Psi_\nu}{d\theta} \right).$$

Nun liegt aber in (8) für jedes speziell gewählte  $\theta$  die „Fouriersche Reihe“ der mit 0 identischen Funktion von  $\varphi$  vor. Die Theorie der Fourierschen Reihen lehrt also, daß die  $\bar{\Phi}_\nu(\theta)$ ,  $\bar{\Psi}_\nu(\theta)$  für alle  $\theta$  verschwinden müssen. Andererseits folgt auch sofort, daß, wenn dies der Fall ist, in (6) ein Integral der Gleichung (5) vorliegt. *Wir erhalten also die gesuchten Kugelfunktionen  $n^{\text{ter}}$  Ordnung, falls wir in (6) irgend welche Funktionen  $\Phi_\nu(\theta)$ ,  $\Psi_\nu(\theta)$  der Gestalt (7) eintragen, die Integrale der gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung sind:*

$$(9) \quad \left( n(n+1) - \frac{\nu^2}{\sin^2 \theta} \right) F_\nu + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dF_\nu}{d\theta} \right) = 0.$$

Schreiben wir noch im Anschluß an die Gleichungen (7):

$$F_\nu(\theta) = \sin^\nu \theta \cdot f_\nu(\cos \theta)$$

und ziehen die Abkürzung  $\cos \theta = \xi$  wieder heran, so ist  $f_\nu(\xi)$  eine rationale ganze Funktion der Gestalt:

$$(10) \quad f_\nu(\xi) = C_0 \xi^{n-\nu} + C_1 \xi^{n-\nu-2} + C_2 \xi^{n-\nu-4} + \dots$$

Die Differentialgleichung (9) aber liefert nach kurzer Umrechnung für

die Funktion  $f_\nu(\xi)$  die gewöhnliche lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$(11) \quad (1 - \xi^2) f_\nu'' - 2(\nu + 1) \xi f_\nu' + (n(n + 1) - \nu(\nu + 1)) f_\nu = 0,$$

womit unsere obige Behauptung über die Herstellung der gesamten Kugelfunktionen  $X_n(\theta, \varphi)$  eingelöst ist.

Hier kommt nun die S. 337 ff. eingeübte Methode der Lösung von Differentialgleichungen durch Reihen zur Geltung. Für  $\nu=0$  haben wir in (11) unmittelbar die Legendresche Differentialgleichung (3) S. 337 vor uns, so daß das „allgemeine“ Integral der Gestalt (10) für die Gleichung (11) im Falle  $\nu=0$  die mit einer willkürlichen Konstanten  $A_0$  multiplizierte Funktion  $P_n(\xi)$  ist, die in (7) S. 338 dargestellt wurde und damals als „Legendresche Kugelfunktion erster Art  $n^{\text{ter}}$  Ordnung“ bezeichnet wurde.\*) Indem wir aber für beliebiges  $\nu$  die ganze rationale Funktion (10) in (11) eintragen, finden wir nach der fraglichen Methode als „allgemeine“ Lösung der Gestalt (10) für die Gleichung (11) die Funktion:

$$f_\nu(\xi) = C_0 \left( \xi^{n-\nu} - \frac{(n-\nu)(n-\nu-1)}{2(2n-1)} \xi^{n-\nu-2} + \frac{(n-\nu)(n-\nu-1)(n-\nu-2)(n-\nu-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} \xi^{n-\nu-4} - \dots \right),$$

wo  $C_0$  willkürlich wählbar bleibt. Wir schreiben unter Auswahl einer besonderen Konstanten  $C_0$  und unter Zusatz des Faktors  $\sin^\nu \theta$ :

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} P_n^{(\nu)}(\cos \theta) &= \frac{(2n)!}{2^n(n+\nu)!(n-\nu)!} \sin^\nu \theta \left( \cos^{n-\nu} \theta \right. \\ &\quad \left. - \frac{(n-\nu)(n-\nu-1)}{2(2n-1)} \cos^{n-\nu-2} \theta + \dots \right) \end{aligned} \right.$$

und haben dann das Ergebnis, daß die Funktionen  $\Phi_\nu(\theta)$  und  $\Psi_\nu(\theta)$  einfach in der Gestalt:

$$\Phi_\nu(\theta) = A_\nu P_n^{(\nu)}(\cos \theta), \quad \Psi_\nu(\theta) = B_\nu P_n^{(\nu)}(\cos \theta)$$

mitteltst zweier willkürlicher Konstanten  $A_\nu, B_\nu$  darstellbar sind. Durch Eintragung in (6) erhalten wir als die gewünschte Darstellung der Kugelfunktionen  $n^{\text{ter}}$  Ordnung:

$$(13) \quad X_n(\theta, \varphi) = A_0 P_n(\cos \theta) + \sum_{\nu=1}^n (A_\nu \cos \nu \varphi + B_\nu \sin \nu \varphi) P_n^{(\nu)}(\cos \theta),$$

\*) Der Name „Kugelfunktion für  $P_n(\xi)$ “ erscheint durch die Entwicklung des Textes gerechtfertigt. Wir erwähnen bei dieser Gelegenheit, daß sich an die Lösung der Laplaceschen Gleichung in Zylinderkoordinaten (4) S. 366 eine dem Texte ähnliche Theorie der „Zylinderfunktionen“ anschließt, bei der sich die oben betrachteten „Zylinderfunktionen“  $J_m(x)$  efinden.

wo in Übereinstimmung mit unserer vorläufigen Abzählung in der Tat  $(2n + 1)$  willkürlich wählbare Koeffizienten  $A, B$  auftreten. Die Legendreschen Kugelfunktionen  $P_n(\cos \theta)$  ordnen sich hier einfach in der Weise ein, daß wir  $A_0 = 1$  und alle übrigen  $A, B$  gleich 0 nehmen.

**6. Weiteres über Kugelfunktionen.** Nach S. 369 ff. ist das Produkt:

$$(1) \quad V_n(x, y, z) = r^n X_n(\theta, \varphi)$$

eine „räumliche“ Kugelfunktion, die als solche der Laplaceschen Differentialgleichung genügt. Wir wollen den Greenschen Satz (3) S. 231 auf zwei solche Funktionen  $V_m$  und  $V_n$  der Ordnungen  $m$  und  $n$  anwenden, die wir für die damaligen Funktionen  $\varphi$  und  $\psi$  eintragen. Die Fläche  $O$  sei die Kugelfläche des Radius 1 um den Nullpunkt und also der Bereich  $B$  das Kugellinnere. Da die nach Innen gerichtete Normale der Fläche  $O$  die Richtung abnehmender  $r$  hat, so folgt:

$${}^{(O)}\int \left( V_m \frac{\partial V_n}{\partial r} - V_n \frac{\partial V_m}{\partial r} \right) d\omega = \int^{(B)} (V_m \Delta V_n - V_n \Delta V_m) d\tau.$$

Nun sind aber die beiden Ausdrücke  $\Delta V_m$  und  $\Delta V_n$  mit 0 identisch, und übrigens ist:

$$\frac{\partial V_n}{\partial r} = nr^{n-1} X_n(\theta, \varphi), \quad \frac{\partial V_m}{\partial r} = mr^{m-1} X_m(\theta, \varphi).$$

Der Greensche Satz liefert also, wenn wir noch der Oberfläche  $O$  entsprechend  $r = 1$  eintragen:

$$(n - m) \int^{(O)} X_m(\theta, \varphi) \cdot X_n(\theta, \varphi) d\omega = 0.$$

So oft  $m \neq n$  ist, muß also das Integral verschwinden. Dieses Ergebnis wird als „erster Integralsatz“ der Kugelfunktionen bezeichnet: Sind  $X_m(\theta, \varphi)$  und  $X_n(\theta, \varphi)$  irgend zwei Kugelfunktionen verschiedener Ordnungen  $m$  und  $n$ , so verschwindet das über die Kugelfläche des Radius 1 um den Nullpunkt ausgedehnte Integral von  $X_m X_n d\omega$ :

$$(2) \quad \int^{(O)} X_m(\theta, \varphi) X_n(\theta, \varphi) d\omega, \quad m \neq n.$$

Für zwei Legendresche Kugelfunktionen läßt sich diese Formel in folgender Weise weiter entwickeln: Wir setzen (s. S. 180) das Flächendifferential  $d\omega = \sin \theta d\theta d\varphi$  und verwandeln das Flächenintegral (2) in ein Doppelintegral:

$${}^{(O)}\int P_m(\cos \theta) P_n(\cos \theta) d\omega = \int_0^\pi \left( P_m(\cos \theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi \right) d\theta = 0,$$

wobei die von  $\varphi$  unabhängigen Faktoren  $P_m, P_n$  und  $\sin \theta$  vor das innere

Integral gesetzt werden durften. Nach Ausführung des inneren Integrals, Fortlassung des Faktors  $2\pi$  und Einführung der Variablen  $\xi = \cos \theta$  ergibt sich als besonderer Fall des ersten Integralsatzes:

$$(3) \quad \int_{-1}^{+1} P_m(\xi) P_n(\xi) d\xi = 0, \quad m \neq n.$$

Im Anschluß hieran stellen wir gleich noch den Wert dieses Integrals für  $m = n$  fest. Ist  $r < 1$ , so folgt aus (11) S. 368:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{1 - 2r\xi + r^2} = \int_{-1}^{+1} \left( \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\xi) r^n \right)^2 d\xi.$$

Das links stehende Integral ist unmittelbar durch die Funktion  $\ln$  ausführbar. Die rechts stehende konvergente Summe multiplizieren wir unter Benutzung von I, 214ff. mit sich selbst und finden, daß beim Integrieren alle die Glieder, die zwei Faktoren  $P$  verschiedener Ordnungen enthalten, wegen (3) das Ergebnis 0 liefern. Es ergibt sich:

$$-\frac{1}{r} \ln \left( \frac{1-r}{1+r} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( r^{2n} \int_{-1}^{+1} P_n(\xi)^2 d\xi \right).$$

Nun ist aber die Reihenentwicklung der links stehenden Funktion von  $r$ :

$$-\frac{1}{r} \ln \left( \frac{1-r}{1+r} \right) = 2 \left( 1 + \frac{1}{3} r^2 + \frac{1}{5} r^4 + \frac{1}{7} r^6 + \dots \right).$$

Der Vergleich mit der in der vorletzten Gleichung rechts stehenden Reihe ergibt:

$$(4) \quad \int_{-1}^{+1} P_n(\xi)^2 d\xi = \frac{2}{2n+1}.$$

Mit Benutzung dieser Formel können wir jetzt weiter das über  $O$  erstreckte Integral des Differentials  $X_n(\theta, \varphi) P_n(\cos \theta) d\omega$  berechnen. Wir entwickeln dieses Flächenintegral wieder in ein Doppelintegral:

$${}^{(4)} \int X_n P_n d\omega = \int_0^\pi \left( P_n(\cos \theta) \sin \theta \int_0^{2\pi} X_n(\theta, \varphi) d\varphi \right) d\theta$$

und tragen für  $X_n$  den Ausdruck (13) S. 372 ein. Bei dem inneren, für stehendes  $\theta$  in bezug auf  $\varphi$  auszuführenden Integrale liefern alle Glieder mit  $\nu > 0$  das Ergebnis 0, und wir finden:

$$\int_0^{2\pi} X_n(\theta, \varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} A_0 P_n(\cos \theta) d\varphi = 2\pi A_0 P_n(\cos \theta).$$

Somit gilt:

$${}^{(0)}\int X_n(\theta, \varphi) P_n(\cos \theta) d\omega = 2\pi A_0 \int_0^\pi P_n(\cos \theta)^2 \sin \theta d\theta,$$

wofür wir unter Einführung der Variablen  $\xi = \cos \theta$  auch schreiben können:

$${}^{(0)}\int X_n(\theta, \varphi) P_n(\cos \theta) d\omega = 2\pi A_0 \int_{-1}^{+1} P_n(\xi)^2 d\xi.$$

Mit Benutzung von (4) ergibt sich demnach:

$$(5) \quad {}^{(0)}\int X_n(\theta, \varphi) P_n(\cos \theta) d\omega = \frac{4\pi}{2n+1} A_0.$$

Zur Weiterentwicklung der rechten Seite dieser Gleichung trage man in die Gleichung (11) S. 368 den für  $\theta = 0$  eintretenden Wert  $\xi = 1$  ein; sie nimmt dabei die Gestalt an:

$$\frac{1}{1-r} = P_0(1) + P_1(1)r + P_2(1)r^2 + \dots,$$

aus der wir den Schluß  $P_n(1) = 1$  ziehen. Hiernach kann, da die Funktionen  $P_n^{(v)}(\cos \theta)$  für  $v > 0$  alle den Faktor  $\sin \theta$  enthalten,  $A_0$  nach (13) S. 372 als Wert  $X_n(0, \varphi)$  der Kugelfunktion  $X_n(\theta, \varphi)$  im „Nordpole“ der Kugel, d. i. im Punkte  $\theta = 0$ , angesehen werden:

$$(6) \quad {}^{(0)}\int X_n(\theta, \varphi) P_n(\cos \theta) d\omega = \frac{4\pi}{2n+1} X_n(0, \varphi).$$

Wir nehmen jetzt eine beliebige Drehung des Achsenkreuzes vor. Der neue „Nordpol“ rücke an den im bisherigen Systeme durch  $(\theta_0, \varphi_0)$  zu bezeichnenden Punkt; an Stelle von  $\theta$  und  $\varphi$  mögen als neue „Pol-distanz“  $\eta$  und als „östliche Länge“  $\psi$  treten. Zuzufolge der Unveränderlichkeit der Laplaceschen Gleichung gegenüber der fraglichen Transformation der Koordinaten formt sich  $X_n(\theta, \varphi)$  wieder in eine Kugelfunktion  $n^{\text{ter}}$  Ordnung der Argumente  $\eta, \psi$  um:

$$(7) \quad X_n(\theta, \varphi) = Y_n(\eta, \psi).$$

Für diese gilt zufolge (6):

$${}^{(0)}\int Y_n(\eta, \psi) P_n(\cos \eta) d\omega = \frac{4\pi}{2n+1} Y_n(0, \psi).$$

Diese Gleichung möge nun noch auf die ursprünglichen Koordinaten umgerechnet werden. Die Gleichung (7) ergibt für den neuen Nordpol:

$$Y_n(0, \psi) = X_n(\theta_0, \varphi_0).$$

Die „Poldistanz“  $\eta$  ist im alten Systeme einfach der Winkel zwischen den Radien nach den beiden Punkten  $(\theta, \varphi)$  und  $(\theta_0, \varphi_0)$ . Zuzufolge (9) S. 156 und der bekannten Regel (3) in „A. G.“ S. 95 findet sich also:

$\cos \eta = \sin \theta \cos \varphi \sin \theta_0 \cos \varphi_0 + \sin \theta \sin \varphi \sin \theta_0 \sin \varphi_0 + \cos \theta \cos \theta_0$   
oder unter Benutzung des Additionstheorems der Funktion  $\cos$ :

$$(8) \quad \cos \eta = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0).$$

Wir gelangen auf diesem Wege zum „zweiten Integralsatze“ der Kugelfunktionen: Für die beiden Kugelfunktionen  $X_n(\theta, \varphi)$  und  $P_n(\cos \theta)$  gleicher Ordnung  $n$ , von denen die erste  $X_n(\theta, \varphi)$  beliebig wählbar ist, gilt die Regel:

$$(9) \quad \int^{(0)} X_n(\theta, \varphi) P_n(\cos \eta) d\omega = \frac{4\pi}{2n+1} X_n(\theta_0, \varphi_0),$$

wo  $\cos \eta$  die in (8) angegebene Bedeutung hat.

An die vorstehenden Integralsätze schließt sich eine Theorie der Darstellung einer willkürlich auf der Kugelfläche gegebenen Funktion  $f(\theta, \varphi)$  in eine nach Kugelfunktionen steigender Ordnungen entwickelte unendliche Reihe. Diese mit der Lehre von den Fourierschen Reihen analoge Theorie möge hier ohne Darlegung der zur Vollständigkeit erforderlichen Konvergenzbetrachtung kurz angedeutet werden. Die Funktion  $f(\theta, \varphi)$  sei auf der ganzen Kugelfläche eindeutig und gestatte eine Entwicklung in eine daselbst gleichmäßig konvergente Reihe:

$$(10) \quad f(\theta, \varphi) = X_0(\theta, \varphi) + X_1(\theta, \varphi) + X_2(\theta, \varphi) + \dots,$$

deren Glieder Kugelfunktionen steigender Ordnung sind. Dann gelingt es auf folgendem Wege, die Bedeutung der einzelnen Reihenglieder festzustellen. Es sei  $(\theta, \varphi)$  irgend ein fest gewählter Punkt der Kugelfläche,  $(\theta', \varphi')$  ein variabler; für den Winkel  $\eta$  zwischen den Radien dieser beiden Punkte gilt dann:

$$(11) \quad \cos \eta = \cos \theta' \cos \theta + \sin \theta' \sin \theta \cos(\varphi' - \varphi).$$

Multiplizieren wir die für  $(\theta', \varphi')$  gebildete Gleichung (10) mit  $P_n(\cos \eta) d\omega'$  und integrieren über die Kugelfläche, so folgt:

$$\int^{(0)} f(\theta', \varphi') P_n(\cos \eta) d\omega' = \sum_{m=0}^{\infty} \int^{(0)} X_m(\theta', \varphi') P_n(\cos \eta) d\omega'.$$

Nach dem ersten Integralsatze (2) verschwinden rechts alle Glieder mit  $m \neq n$ ; das einzige nicht verschwindende Glied berechnet sich auf Grund des zweiten Integralsatzes (9). Man findet als Ergebnis: Die einzelnen

*Glieder der Reihenentwicklung (10) der auf der Kugeloberfläche willkürlich gewählten Funktion  $f(\theta, \varphi)$  berechnen sich auf Grund der Regel:*

$$(12) \quad X_n(\theta, \varphi) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta', \varphi') P_n(\cos \eta) d\omega',$$

wo die Argumente  $\theta, \varphi$  der links stehenden Funktion rechter Hand der Formel (11) entsprechend in  $\cos \eta$  enthalten sind.

**7. Elektrizitätsverteilung auf einer leitenden Kugel.** Eine gewisse Elektrizitätsmenge sei in irgend welcher Verteilung auf einem aus einem oder mehreren Stücken bestehenden im Raume ruhenden „Isolator“  $J$  festgehalten. Hierdurch wird ein Kraftfeld erzeugt, in dem sich gleichfalls ruhend eine außer Berührung mit dem Isolator  $J$  befindliche leitende Kugel des Radius 1 finde. Diesem „Konduktor“  $K$  sei vorab Elektrizität in der Gesamtmenge  $\mu$  mitgeteilt. Dieselbe sammelt sich bekanntlich nur an der Oberfläche  $O$  von  $K$  an und zwar nach einem Verteilungsgesetze, das durch die Menge  $\mu$  und das durch  $J$  hervorgerufene Kraftfeld bestimmt ist. Dieses Verteilungsgesetz soll festgestellt werden.

Nach Einführung des Konduktors  $K$  in das Feld und Eintritt der Verteilung an seiner Oberfläche  $O$  liegt ein Kraftfeld des Potentials  $V$  vor, das einmal von der elektrischen Ladung des Isolators  $J$ , dann aber auch von der Ladung der Oberfläche  $O$  herrührt. Nennen wir  $V_J$  und  $V_K$  die beiden entsprechenden Bestandteile des Gesamtpotentials  $V$ , so ist einfach  $V = V_J + V_K$ . Dabei ist  $V_J$  mit dem Isolator und seiner Ladung als gegeben anzusehen; ein Ausdruck von  $V_J$  soll sogleich entwickelt werden. Da nun nach Eintritt der Verteilung auf  $O$  im Innern von  $K$  keine weitere Strömung von Elektrizität auftritt, so ist daselbst  $V$  konstant, etwa  $V = C$ ; im Kugelinneren gilt also  $V_K = C - V_J$ . Von hieraus werden wir mit Rücksicht auf die gegebene Menge  $\mu$  einen Schluß auf die *Flächendichte* der auf  $O$  lagernden Elektrizität zu ziehen imstande sein.

Für die Rechnung führen wir ein System von Polarkoordinaten  $r, \theta, \varphi$  mit dem Nullpunkte im Kugelmittelpunkte ein. Da  $J$  außerhalb  $K$  liegt, so ist für einen einzelnen Punkt  $(r', \theta', \varphi')$  von  $J$  sicher  $r' > 1$ . Ist daselbst  $\delta'$  die Dichte der Ladung und  $d\tau'$  ein sehr kleines Raumteilchen von  $J$ , das demnach die Elektrizitätsmenge  $\delta' \cdot d\tau'$  enthält, so liefert diese Menge als Beitrag für das Potential  $V_J$  im Punkte  $(r, \theta, \varphi)$  von  $K$ :

$$\frac{\delta' \cdot d\tau'}{\sqrt{r^2 - 2r r' \cos \eta + r'^2}},$$

wo  $\cos \eta$  sich wie in (11) S. 376 aus den Koordinaten der beiden Punkte berechnet. Das Potential  $V_J$  ist demnach einfach:

$$(1) \quad V_J(r, \theta, \varphi) = \int^{(J)} \frac{\delta' \cdot d\tau'}{\sqrt{r^2 - 2r r' \cos \eta + r'^2}},$$

wo das Integral über den vom Isolator  $J$  besetzten Bereich auszudehnen ist. Wir schreiben diese Gleichung in die Gestalt um:

$$V_J(r, \theta, \varphi) = \int^{(J)} \frac{\delta' d\tau'}{r'} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \frac{r}{r'} \cos \eta + \left(\frac{r}{r'}\right)^2}}$$

und können, da  $r < r'$  ist, die konvergente Reihenentwicklung (11) S. 368 heranziehen:

$$(2) \quad V_J(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( r^n \int^{(J)} \frac{\delta'}{r'^{n+1}} P_n(\cos \eta) d\tau' \right).$$

Bezeichnet man das hier mit  $r^n$  multiplizierte Integral in seiner Abhängigkeit von  $\theta$  und  $\varphi$  durch  $X_n(\theta, \varphi)$ , so gelangt man zu einer für  $r < 1$  sicher konvergenten Darstellung:

$$(3) \quad V_J(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n X_n(\theta, \varphi),$$

in welcher man in den  $X_n(\theta, \varphi)$ , sei es aus (2) oder, weil die Funktion (3) der Laplaceschen Gleichung (6) S. 367 genügt, eine Kugelfunktion  $n^{\text{ter}}$  Ordnung erkennt. Da  $J$  mit seiner Ladung gegeben ist, so gelten die hier auftretenden Kugelfunktionen  $X_n(\theta, \varphi)$  als bekannt.

Um zweitens das Potential  $V_K$  des Konduktors  $K$  zu berechnen, bezeichnen wir mit  $f(\theta', \varphi')$  die gesuchte Flächendichte der elektrischen Verteilung an der Stelle  $(\theta', \varphi')$  der Oberfläche  $O$ . In einem sehr kleinen daselbst gelegenen Flächenteilchen  $d\omega'$  findet sich somit die Elektrizitätsmenge  $f(\theta', \varphi') d\omega'$ , und damit erhalten wir als Wert des Potentials  $V_A$  im Innenpunkte  $(r, \theta, \varphi)$  der Kugel:

$$V_K(r, \theta, \varphi) = \int^{(0)} \frac{f(\theta', \varphi') d\omega'}{\sqrt{1 - 2r \cos \eta + r^2}},$$

wo  $\cos \eta$  wieder durch (11) S. 376 gegeben ist. Vollziehen wir auch hier die Entwicklung nach ansteigenden Potenzen von  $r$  auf Grund von (11) S. 368, so folgt:

$$V_K(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( r^n \int^{(0)} f(\theta', \varphi') P_n(\cos \eta) d\omega' \right).$$

Man entwickle jetzt nach dem Schlußsatze von § 6 die noch unbekannte Funktion  $f(\theta, \varphi)$  in eine Reihe nach Kugelfunktionen:

$$(4) \quad f(\theta, \varphi) = Y_0(\theta, \varphi) + Y_1(\theta, \varphi) + Y_2(\theta, \varphi) + \dots$$

und findet dann unter Benutzung der beiden Integralsätze von § 6:

$$(5) \quad \int^{(0)} f(\theta', \varphi') P_n(\cos \eta) d\omega' = \sum_{m=0}^{\infty} \int^{(0)} Y_m(\theta', \varphi') P_n(\cos \eta) d\omega' \\ = \frac{4\pi}{2n+1} Y_n(\theta, \varphi),$$

so daß die Entwicklung von  $V_K$  für  $r < 1$  die Gestalt gewinnt:

$$(6) \quad V_K(r, \theta, \varphi) = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{2n+1} Y_n(\theta, \varphi).$$

Nun benutzen wir, daß im Innern von  $K$  die Gleichung  $V_K = C - V_J$  mit einer Konstanten  $C$  identisch gilt. Der Vergleich von (3) und (6) liefert uns also für alle  $n > 0$ :

$$\frac{4\pi}{2n+1} Y_n(\theta, \varphi) = -X_n(\theta, \varphi), \quad n > 0,$$

so daß sich die Kugelfunktionen  $Y_1, Y_2, \dots$  aus den als gegeben geltenden  $X_1, X_2, \dots$  einfach nach der Regel berechnen:

$$(7) \quad Y_n(\theta, \varphi) = -\frac{2n+1}{4\pi} X_n(\theta, \varphi), \quad n > 0.$$

Das noch fehlende Glied  $Y_0$  bestimmt man aus (5) unmittelbar, indem man  $n = 0$  und entsprechend  $P_0(\cos \eta) = 1$  einträgt:

$$\int^{(0)} f(\theta', \varphi') d\omega' = 4\pi Y_0.$$

Da das Integral linker Hand die Gesamtmenge  $\mu$  der der Kugel mitgeteilten Elektrizität ist, so folgt:

$$Y_0 = \frac{\mu}{4\pi}.$$

Als Antwort auf die gestellte Frage gewinnen wir demnach: *Die durch Influenz auf dem Konduktor eintretende Verteilung ist eine solche, daß im Punkte  $(\theta, \varphi)$  der Konduktoroberfläche die folgende Flächendichte eintritt:*

$$(8) \quad f(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \left( \mu - \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) X_n(\theta, \varphi) \right).$$

Besteht z. B. der Isolator  $J$  nur aus einem einzigen Punkte der Elektrizitätsmenge  $+1$  in der Entfernung  $\rho > 1$  vom Kugelmittelpunkte, so legen wir die positive  $z$ -Achse durch  $J$  hindurch und finden:

$$V_J(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{\varrho^2 - 2\varrho r \cos \theta + r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \frac{P_n(\cos \theta)}{\varrho^{n+1}}$$

als besondere Gestalt der Entwicklung (3). Die Dichte  $f(\theta, \varphi)$  ist also jetzt einfach:

$$(9) \quad f(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \left( \mu - \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \frac{P_n(\cos \theta)}{\varrho^{n+1}} \right).$$

Der Summenwert der rechts stehenden Reihe ist übrigens leicht angebbar. Differenziert man nämlich die Gleichung:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2r \cos \theta + r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(\cos \theta)$$

nach  $r$  und multipliziert das Ergebnis mit  $2r$ , so folgt:

$$\frac{2r \cos \theta - 2r^2}{(\sqrt{1 - 2r \cos \theta + r^2})^3} = \sum_{n=0}^{\infty} 2n r^n P_n(\cos \theta).$$

Die Addition der beiden letzten Gleichungen liefert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) r^n P_n(\cos \theta) = \frac{1 - r^2}{(\sqrt{1 - 2r \cos \theta + r^2})^3},$$

woraus wir sofort weiter finden:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \frac{P_n(\cos \theta)}{\varrho^{n+1}} = -\frac{1}{\varrho} + \frac{\varrho^2 - 1}{(\sqrt{\varrho^2 - 2\varrho \cos \theta + 1})^3}.$$

Die Gleichung (9) nimmt damit die Gestalt an:

$$(10) \quad f(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \left( \mu + \frac{1}{\varrho} - \frac{\varrho^2 - 1}{(\sqrt{\varrho^2 - 2\varrho \cos \theta + 1})^3} \right).$$

Ist z. B.  $\mu = 0$ , so sind die Dichten in dem dem Isolator  $J$  zugewandten Nordpole und im abgewandten Südpole:

$$-\frac{3\varrho - 1}{4\pi\varrho(\varrho - 1)^2} \quad \text{bzw.} \quad +\frac{3\varrho + 1}{4\pi\varrho(\varrho + 1)^2}.$$

Die behandelten partiellen Differentialgleichungen sind nur wenige Beispiele der in der Physik und Technik auftretenden Gleichungen dieser Art. Unter den zahlreichen weiteren wichtigen Gleichungen stehen insbesondere die beiden Maxwell'schen Gleichungen (s. S. 225) voran. Jede dieser Gleichungen liefert in Koordinatendarstellung ein System dreier

partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, denen in einem elektromagnetischen Felde die drei Komponenten der magnetischen Feldstärke und die drei der elektrischen Feldstärke in bezug auf die Zeit  $t$  und die drei Koordinaten  $x, y, z$  genügen. Eines der nächstliegenden hierbei eintretenden Probleme ist die Untersuchung ebener elektrischer Wellen in einem absorbierenden Medium, wobei es sich um die Lösung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung mit den beiden unabhängigen Variablen  $x$  und  $t$  handelt:

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 4\pi \lambda \mu \frac{\partial u}{\partial t},$$

die die beiden oben behandelten Differentialgleichungen (1) S. 343 und (7) S. 358 als Spezialfälle umfaßt. Doch würde bereits eine verständliche Darlegung der physikalischen Bedeutung der hier auftretenden Faktoren  $c, \varepsilon, \lambda, \mu$  bei weitem den hier zur Verfügung stehenden Raum übersteigen.

## Anhang. Komplexe Zahlen und Funktionen.

**1. Komplexe Zahlen.** Bei der Erklärung der komplexen Zahlen und der auf sie auszuübenden Rechnungen können wir den in I, 3 bei der Einführung der irrationalen Zahlen befolgten Gedankengang wieder benutzen. Wir wurden dort zur Gesamtheit aller endlichen reellen (rationalen und irrationalen) Zahlen von den gesamten Punkten einer beiderseits unbegrenzten Geraden aus geführt und hatten die zunächst nur für die rationalen Zahlen arithmetisch erklärten rationalen Rechnungsarten durch eine geometrische Überlegung auf die irrationalen Zahlen übertragen. Die fragliche Gerade fassen wir jetzt als Abszissenachse eines rechtwinkligen Koordinatensystems in der Ebene und gehen über zur Betrachtung *aller endlichen Punkte dieser Ebene*, die vermöge der Koordinatendarstellung in bekannter Art umkehrbar eindeutig auf alle Paare endlicher reeller Zahlen  $a, b$  bezogen sind.

Einem Punkte der Abszissenachse und also einem Zahlenpaare  $a, 0$  entsprach bei der bisherigen Auffassung nur eine einzige (reelle) Zahl. Wir übertragen diese Auffassung auch auf die übrigen Punkte der Ebene und lassen jedem *einzelnen* Punkte der Ebene auch nur *eine* durch ihn dargestellte „Zahl“ entsprechen, die wir unter Benutzung der rechtwinkligen Koordinaten des Punktes einstweilen durch  $(a, b)$  bezeichnen. Zu den bisherigen *reellen* Zahlen kommen alsdann neu alle Zahlen  $(a, b)$  mit  $b \neq 0$  hinzu, die wir „komplexe Zahlen“ nennen. Benutzen wir Polarkoordinaten  $r, \vartheta$  in der Ebene mit dem bisherigen Nullpunkte als Pol und der positiven  $x$ -Achse als Achse, so möge die einzelne komplexe Zahl einstweilen durch das Symbol  $[r, \vartheta]$  bezeichnet sein; hierbei gilt dann in bekannter Weise:

$$(1) \quad a = r \cos \vartheta, \quad b = r \sin \vartheta.$$

Wenn man von dem Gesamtsystem aller komplexen Zahlen  $(a, b)$  spricht, ist es zweckmäßig, die reellen Zahlen  $(a, b)$  mit  $b = 0$  als in dem Systeme mit enthalten anzusehen. Die „Polardarstellung“  $[r, \vartheta]$  der Zahlen betreffend haben wir dann nur darauf aufmerksam zu machen, daß für die reelle Zahl 0 der Radiusvektor  $r = 0$  ist, während  $\vartheta$  unbestimmt bleibt. Im übrigen kann man natürlich für die Veränderlichkeit von  $r$  und  $\vartheta$  die

den Polarkoordinaten eigentümlichen Schranken vorschreiben. Den Radiusvektor  $r$  nennen wir auch den „*absoluten Betrag*“ der komplexen Zahl; wir bezeichnen denselben durch  $|(a, b)|$  und haben also die Darstellung:

$$(2) \quad r = |(a, b)| = +\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Zwei Zahlen  $(a, b)$  und  $(a, -b)$  oder  $[r, \vartheta]$  und  $[r, 2\pi - \vartheta]$ , deren Bildpunkte also bezüglich der Abszissenachse, der „*Achse der reellen Zahlen*“ oder kurz der „*reellen Achse*“, einander symmetrisch liegen, heißen „*konjugiert komplexe Zahlen*“; jede reelle Zahl ist sich selbst konjugiert.

Es gilt nun zunächst, die rationalen Rechnungen der Addition, Subtraktion usw. für die komplexen Zahlen in zweckmäßiger Art und zwar natürlich so zu erklären, daß die bekannten Regeln der rationalen Rechnungen bei den reellen Zahlen durch die Erklärungen mit umfaßt werden. Die „*Summe*“ der beiden komplexen Zahlen  $(a_1, b_1)$  und  $(a_2, b_2)$  soll die Zahl  $(a_1 + a_2, b_1 + b_2)$  sein:

$$(3) \quad (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2).$$

Die Vorschrift steht in engster Beziehung zu der in I, 366 erklärten Addition der Vektoren. Deuten wir die Zahl  $(a, b)$  an Stelle ihres Bildpunktes durch den vom Nullpunkte  $O$  nach diesem Bildpunkte hingezogenen Vektor, so gewinnt man den Vektor der Summe (3) einfach durch Addition der beiden zu den Summanden gehörenden Vektoren, wie dieselbe in I, 366 erklärt und in Fig. 114 daselbst erläutert ist. Hieraus folgt sofort: *Der absolute Betrag der Summe (3) ist nicht größer als die Summe der absoluten Beträge der Summanden:*

$$(4) \quad |(a_1, b_1) + (a_2, b_2)| \leq |(a_1, b_1)| + |(a_2, b_2)|.$$

Die „*Differenz*“ mit dem Minuenden  $(a_1, b_1)$  und dem Subtrahenden  $(a_2, b_2)$  ist einfach als die Summe von  $(a_1, b_1)$  und  $(-a_2, -b_2)$  zu erklären:

$$(5) \quad (a_1, b_1) - (a_2, b_2) = (a_1 - a_2, b_1 - b_2)$$

und kommt auf die in I, 366 besprochene „*Subtraktion*“ der zu  $(a_1, b_1)$  und  $(a_2, b_2)$  gehörenden Vektoren hinaus. An (4) reiht sich dabei der Satz an: *Der absolute Betrag der Differenz (5) ist nicht kleiner als die Differenz der absoluten Beträge von Minuend und Subtrahend:*

$$(6) \quad |(a_1, b_1) - (a_2, b_2)| \geq |(a_1, b_1)| - |(a_2, b_2)|.$$

Die Erklärung des „*Produktes*“ zweier komplexer Zahlen weicht von den Produktbildungen der Vektoretheorie (s. S. 219) ab. Das „*Produkt*“ der beiden komplexen Zahlen  $[r_1, \vartheta_1]$  und  $[r_2, \vartheta_2]$  soll die Zahl  $[r_1 \cdot r_2, \vartheta_1 + \vartheta_2]$  sein:

$$(7) \quad [r_1, \vartheta_1] \cdot [r_2, \vartheta_2] = [r_1 \cdot r_2, \vartheta_1 + \vartheta_2],$$

deren absoluter Betrag das „Produkt“ der beiden absoluten Beträge  $r_1, r_2$  und deren Amplitude die „Summe“ der beiden Amplituden der Faktoren ist. Die Multiplikationsregel reeller Zahlen mit ihrer Vorzeichenvorschrift ist hierin in der Tat als spezieller Fall enthalten. Das Produkt zweier konjugiert komplexer Zahlen  $[r, \vartheta], [r, 2\pi - \vartheta]$  ist nach (7) die reelle, nicht-negative Zahl  $r^2$ ; man kann auch schreiben:

$$(8) \quad (a, b) \cdot (a, -b) = a^2 + b^2.$$

Bei der „Division“ zweier komplexer Zahlen  $[r_1, \vartheta_1], [r_2, \vartheta_2]$  muß der Divisor von 0 verschieden sein und also  $r_2 > 0$  gelten. Die Divisionsregel ist dann einfach:

$$(9) \quad [r_1, \vartheta_1] : [r_2, \vartheta_2] = \frac{[r_1, \vartheta_1]}{[r_2, \vartheta_2]} = [r_1, \vartheta_1 - \vartheta_2],$$

da hier in der Tat das Produkt des Quotienten und des Divisors  $[r_2, \vartheta_2]$  gleich dem Dividenten  $[r_1, \vartheta_1]$  ist.

Der Herstellung der Summen von mehr als zwei Summanden oder der Produkte von mehr als zwei Faktoren steht keine Schwierigkeit entgegen. Insbesondere folgt aus (7): Die  $n^{\text{te}}$  Potenz einer komplexen Zahl  $[r, \vartheta]$ , unter  $n$  irgend eine positive ganze Zahl verstanden, ist:

$$(10) \quad [r, \vartheta]^n = [r^n, n\vartheta],$$

hat also als absoluten Betrag die  $n^{\text{te}}$  Potenz von  $r$  und als Amplitude die  $n$ -fache Amplitude  $\vartheta$ . Liegt  $n\vartheta$  nicht mehr im Intervalle  $0 \leq n\vartheta < 2\pi$ , so darf man durch Abzug eines Multiplums von  $2\pi$  natürlich die Amplitude der Potenz in dieses Intervall zurückverlegen.

Wir benutzen die Regel (10), um nunmehr aus ihr die allgemein übliche Darstellung der komplexen Zahlen zu entwickeln. Die Zahl  $[1, \frac{\pi}{2}]$  oder  $(0, 1)$ , deren Bildpunkt also auf der positiven Ordinatenachse in der Entfernung 1 vom Nullpunkte liegt, gibt, zur zweiten Potenz erhoben, die Zahl  $[1, \pi]$  oder  $(-1, 0)$ , d. h. die reelle Zahl  $-1$ :

$$(0, 1)^2 = (-1, 0) = -1.$$

Zur Bezeichnung der Zahl  $(0, 1)$  gebraucht man nun bekanntlich das Symbol  $i$  und nennt sie eine „imaginäre“ Zahl, genauer die „positive imaginäre Einheit“.\* Indem wir uns vorbehalten, sogleich auf die Radizierung zurückzukommen, folgern wir aus  $i^2 = -1$  als Darstellung der

\* Vom Standpunkte der hier gewählten Einführung der komplexen Zahlen ist die Benennung „imaginär“ („eingebildet“) im Gegensatze zu „reell“ natürlich ebenso unberechtigt, wie die Benennung „irrational“ im Gegensatze zu „rational“ (s. I, 3).

Zahl  $i$  auch  $i = \sqrt{-1}$  oder genauer  $i = +\sqrt{-1}$ . Für das Produkt der Zahl  $i$  und irgend einer komplexen Zahl  $[r, \vartheta]$  findet sich aus (7):

$$i \cdot [r, \vartheta] = \left[1, \frac{\pi}{2}\right] \cdot [r, \vartheta] = \left[r, \vartheta + \frac{\pi}{2}\right].$$

Ist der zweite Faktor insbesondere eine reelle Zahl  $(b, 0) = b$ , so gilt  $i \cdot b = (0, 1) \cdot (b, 0) = (0, b)$ . Durchläuft  $b$  die reellen Zahlen, so erhalten wir hier die gesamten komplexen Zahlen, deren Bildpunkte die  $y$ -Achse füllen; wir nennen sie zusammenfassend „die imaginären Zahlen“, bezeichnen die Ordinatenachse demnach auch als die „imaginäre Achse“ und unterscheiden je nach dem Vorzeichen von  $b$  „positive“ und „negative“ imaginäre Zahlen, sowie eine „positive“ und eine „negative“ imaginäre Achse; die Zahl  $(0, -1) = -i$  heißt entsprechend die „negative imaginäre Einheit“.

Zufolge (3) läßt sich nun jede komplexe Zahl  $(a, b)$  als Summe der reellen Zahl  $(a, 0)$  und der imaginären  $(0, b)$  darstellen. Indem wir  $(a, 0) = a$  und  $(0, b) = ib$  eintragen, ergibt sich die übliche Darstellung der komplexen Zahl:

$$(11) \quad (a, b) = a + ib$$

mittelst ihres „reellen Bestandteiles“  $a$  und ihres „imaginären Bestandteiles“  $ib$ .

Als zugehörige Polardarstellung schließen wir noch an:

$$(12) \quad (a, b) = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta).$$

Man wird die Formeln (3) ff. leicht auf die neue Darstellung unserer Zahlen umschreiben. Für die Addition und Subtraktion zweier komplexer Zahlen finden wir die neue Ausdrucksform:

$$(13) \quad (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2),$$

so daß wir den links stehenden Ausdruck einfach unter Beibehaltung des „kommutativen“ und des „assoziativen“ Gesetzes aus den Elementen der Algebra reeller Größen in den rechts stehenden umwandeln dürfen. Ebenso kleidet sich das Multiplikationsgesetz (7) in die Gestalt:

$$(14) \quad (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2),$$

so daß wir auch hier die rechte Seite einfach unter Beibehaltung des „distributiven“ Gesetzes der Algebra der reellen Größen aus der linken Seite entwickeln können, wobei im Verlaufe der Rechnung  $i^2 = -1$  zu setzen ist. Es ist nämlich, wenn wir auf Grund von (1) zu den Polardarstellungen übergehen:

$$a_1 a_2 - b_1 b_2 = r_1 r_2 (\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 - \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2) = r_1 r_2 \cos (\vartheta_1 + \vartheta_2),$$

$$a_1 b_2 + b_1 a_2 = r_1 r_2 (\cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 + \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2) = r_1 r_2 \sin (\vartheta_1 + \vartheta_2),$$

womit wir auf das Gesetz (7) zurückkommen. Als Spezialfall von (14) haben wir der Gleichung (8) entsprechend:

$$(15) \quad (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2.$$

Wir merken endlich noch als neue Schreibweise der Formel (9) an:

$$(16) \quad \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2},$$

wobei  $a_2^2 + b_2^2 > 0$  gelten muß; die rechte Seite führt bei Benutzung der Polardarstellung in der Tat auf (9) zurück. Auch hier können wir den rechts stehenden Ausdruck aus dem auf der linken Seite nach den Elementarregeln der reellen Algebra entwickeln, indem wir mit  $(a_2 - ib_2)$  erweitern usw., wobei natürlich wieder  $i^2 = -1$  zu setzen ist.

Auch die wiederholte Anwendung rationaler Rechnungen auf komplexe Zahlen führt, wenn wir nur stets die Division durch 0 vermeiden, immer wieder zu einer eindeutig bestimmten komplexen Zahl als Ergebnis; dabei ist  $i^2$  stets durch  $-1$  zu ersetzen und für die höheren Potenzen von  $i$  entsprechend zu schreiben  $i^3 = -i$ ,  $i^4 = +1$ ,  $i^5 = i$ , ... Wie in den bisher besprochenen Einzelfällen bleiben wieder alle genannten Elementarregeln der Algebra der reellen Größen unverändert erhalten.\*)

Falls man in einer der Gleichungen (13), (14) oder (16) alle in der Gleichung enthaltenen komplexen Zahlen zugleich durch ihre konjugiert komplexen Zahlen ersetzt, erscheint als Ergebnis wieder eine zutreffende Gleichung. Dieses Gesetz bleibt auch bei wiederholten rationalen Rechnungen erhalten: *Kleidet man das Ergebnis einer auf komplexe Zahlen angewandten rationalen Rechnung in die Gestalt einer Gleichung, so bleibt diese Gleichung richtig, falls man alle in ihr auftretenden komplexen Zahlen durch ihre konjugierten Zahlen ersetzt.* Dieser Satz wurde bereits in I, 77 benutzt.

Einen bekannten Satz folgern wir aus Gleichung (10) für  $r = 1$ , wosie in der neuen Darstellung der komplexen Zahlen die Gestalt annimmt:

$$(17) \quad (\cos \vartheta + i \sin \vartheta)^n = \cos n\vartheta + i \sin n\vartheta.$$

Diese Gleichung bringt den „Moiwreschen Satz“ für irgend einen positiven ganzzahligen Exponenten  $n$  zum Ausdruck. Da es statthaft ist, die linke Seite von (17) nach dem binomischen Satze zu entwickeln, so findet man, wenn man den hierbei zu gewinnenden reellen Bestandteil der linken

\*) Die Darlegungen des Textes haben nur mehr die Bedeutung einer Wiederholung des gewöhnlich schon in der Elementarmathematik behandelten Lehrstoffes über komplexe Zahlen, so daß ein genaueres Eingehen auf Einzelheiten an dieser Stelle vermieden wird.

Seite gleich  $\cos n\vartheta$  und den vom Faktor  $i$  befreiten imaginären Bestandteil gleich  $\sin n\vartheta$  setzt:

$$(18) \begin{cases} \cos n\vartheta = \cos^n \vartheta - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \vartheta \sin^2 \vartheta + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \vartheta \sin^4 \vartheta - \dots, \\ \sin n\vartheta = \binom{n}{1} \cos^{n-1} \vartheta \sin \vartheta - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \vartheta \sin^3 \vartheta \\ \qquad \qquad \qquad + \binom{n}{5} \cos^{n-5} \vartheta \sin^5 \vartheta - \dots, \end{cases}$$

zwei Gleichungen, die man mit Hilfe der Regel (3) in I, 142 leicht auch durch vollständige Induktion aus den Additionstheoremen entnimmt. Behalten wir für komplexe Basen die Erklärungen der Potenzlehre:

$$(a + ib)^0 = 1, \quad (a + ib)^{-n} = \frac{1}{(a + ib)^n}$$

bei, so zeigt sich leicht, daß der Moivresche Satz (17) für alle ganzzahligen Exponenten gilt.

Setzen wir in (17) für  $\vartheta$  eine der  $n$  Amplituden  $0, \frac{2\pi}{n}, 2\frac{2\pi}{n}, 3\frac{2\pi}{n}, \dots, (n-1)\frac{2\pi}{n}$ , sagen wir  $\vartheta = \frac{2\nu\pi}{n}$ , ein, so folgt:

$$\left( \cos \frac{2\nu\pi}{n} + i \sin \frac{2\nu\pi}{n} \right)^n = 1.$$

Die  $n$  komplexen Zahlen:

$$(19) \quad \varepsilon_\nu = \cos \frac{2\nu\pi}{n} + i \sin \frac{2\nu\pi}{n}, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

deren Bildpunkte auf dem Kreise des Radius 1 um den Nullpunkt, dem sogenannten „Einheitskreise“, in gleichen Intervallen, beginnend mit dem Punkte  $(1, 0)$ , aufeinander folgen und solcherart die Ecken eines jenem Kreise eingeschriebenen regulären  $n$ -Ecks bilden, haben also die Eigenschaft, daß ihre  $n^{\text{ten}}$  Potenzen einander gleich und gleich 1 sind. Die  $n$  Zahlen  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$  heißen demnach „Wurzeln  $n^{\text{ten}}$  Grades der Einheit“ oder kurz „ $n^{\text{te}}$  Einheitswurzeln“. Soll andererseits irgend eine Zahl  $[r, \vartheta]$  eine  $n^{\text{te}}$  Einheitswurzel sein und also in die  $n^{\text{te}}$  Potenz erhoben das Resultat 1 liefern, so folgt aus (10):

$$r^n = 1, \quad \cos n\vartheta = 1, \quad \sin n\vartheta = 0,$$

so daß  $r = 1$  und  $n\vartheta = 2\mu\pi$  sein muß, unter  $\mu$  irgend eine ganze Zahl verstanden. Da wir aber  $\vartheta$  auf das Intervall  $0 \leq \vartheta < 2\pi$  einschränken dürfen, so erhalten wir bereits alle  $n^{\text{ten}}$  Wurzeln der Einheit, wenn wir  $\mu$  auf die Werte  $0, 1, 2, \dots, (n-1)$  einschränken. Damit aber kommen wir zu den Zahlen (19) zurück. Aus (17) folgt übrigens die Darstellbar-

keit  $\varepsilon_\nu = \varepsilon_1^\nu$  aller Zahlen (19) als Potenzen der besonderen Zahl  $\varepsilon_1$ . Es gibt im Gebiete unserer komplexen Zahlen genau  $n$  verschiedene  $n^{\text{te}}$  Wurzeln der Einheit  $\varepsilon_\nu$ , die sich in einer unter ihnen,  $\varepsilon_1$ , in der Gestalt  $\varepsilon_\nu = \varepsilon_1^\nu$  für  $\nu = 0, 1, \dots, (n-1)$  darstellen lassen.

Fast ebenso leicht erledigt sich allgemein die „Radizierung“ der komplexen Zahlen. Soll  $[r_0, \vartheta_0]$ , in die  $n^{\text{te}}$  Potenz erhoben, eine gegebene komplexe Zahl  $[r, \vartheta]$  liefern, so folgt aus (10):

$$[r_0, \vartheta_0]^n = [r_0^n, n\vartheta_0] = [r, \vartheta],$$

so daß zunächst  $r_0^n = r$  ist und somit  $r_0 = \sqrt[n]{r}$  sich als nicht-negative reelle Zahl eindeutig berechnet. Ist  $r = 0$ , so ist  $r_0 = 0$ , so daß die  $n^{\text{te}}$  Wurzel aus 0 eindeutig und selbst gleich 0 ist. Ist  $r > 0$ , so haben wir zufolge der letzten Gleichung  $\vartheta_0$  so zu berechnen, daß:

$$\cos n\vartheta_0 = \cos \vartheta, \quad \sin n\vartheta_0 = \sin \vartheta$$

wird. Diese beiden Gleichungen sind aber gleichwertig mit der einen:

$$n\vartheta_0 = \vartheta + 2\nu\pi, \quad \vartheta_0 = \frac{\vartheta}{n} + \frac{2\nu\pi}{n},$$

unter  $\nu$  zunächst irgend eine ganze Zahl verstanden. Da aber zwei um ein Vielfaches von  $n$  verschiedene Zahlen  $\nu$  ein und dieselbe Wurzel liefern, die  $n$  Werte  $\nu = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$  jedoch lauter verschiedene Wurzeln ergeben, so dürfen wir  $\nu$  wieder auf diese Zahlen einschränken. Übrigens gilt zufolge (7):

$$\left[ \sqrt[n]{r}, \frac{\vartheta}{n} + \frac{2\nu\pi}{n} \right] = \left[ \sqrt[n]{r}, \frac{\vartheta}{n} \right] \cdot \left[ 1, \frac{2\nu\pi}{n} \right] = \varepsilon_\nu \cdot \left[ \sqrt[n]{r}, \frac{\vartheta}{n} \right].$$

Im Gebiete der komplexen Zahlen gibt es für einen von 0 verschiedenen Radikanden  $[r, \vartheta]$  immer genau  $n$  verschiedene Wurzeln  $n^{\text{ten}}$  Grades, die aus einer ersten unter ihnen,  $\left[ \sqrt[n]{r}, \frac{\vartheta}{n} \right]$ , durch Multiplikation mit den  $n$  Wurzeln der Einheit  $\varepsilon_\nu$  hervorgehen.

**2. Komplexe Reihen.** Es sei eine unbegrenzte Reihe komplexer Zahlen:

$$(1) \quad a_1 + ib_1, a_2 + ib_2, a_3 + ib_3, \dots$$

vorgelegt. Man sagt alsdann, daß sich die Zahlen dieser Reihe einer bestimmten endlichen komplexen Zahl  $(g + ih)$  als ihrer „Grenze“:

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + ib_n) = g + ih$$

annähern, falls nach Auswahl einer beliebig kleinen positiven Zahl  $\delta$  stets ein Index  $m$  derart angegeben werden kann, daß:

$$(3) \quad |g + ih - a_n - ib_n| < \delta$$

für alle Indizes  $n \geq m$  gilt. Da der absolute Betrag:

$$|g + ih - a_n - ib_n| = +\sqrt{(g - a_n)^2 + (h - b_n)^2}$$

offenbar  $\geq |g - a_n|$  sowie auch  $\geq |h - b_n|$  ist, so folgt aus (3):

$$(4) \quad |g - a_n| < \delta, \quad |h - b_n| < \delta$$

für alle Indizes  $n \geq m$ . Die Zahlen der beiden reellen Reihen  $a_1, a_2, a_3, \dots$  und  $b_1, b_2, b_3, \dots$  nähern sich somit den Grenzen:

$$(5) \quad \lim_{n=\infty} a_n = g, \quad \lim_{n=\infty} b_n = h.$$

Besitzen umgekehrt diese beiden reellen Reihen bestimmte endliche Grenzen, so folgt daraus wieder die Existenz einer Grenze (2). Wenn nämlich nach Auswahl von  $\delta$  für alle  $n \geq m$  die Ungleichungen (4) gelten, so folgt bei Benutzung der Regel (4) S. 383:

$$|g + ih - a_n - ib_n| \leq |g - a_n| + |h - b_n| < 2\delta, \quad n \geq m.$$

Die Reihe (1) hat demnach stets und nur dann eine bestimmte endliche Grenze  $(g + ih)$ , falls die beiden Reihen reeller Zahlen  $a_1, a_2, a_3, \dots$  und  $b_1, b_2, b_3, \dots$  bestimmte endliche Grenzen  $g$  und  $h$  haben.

Es sollen nun die Entwicklungen in I, 205 ff. über „unendliche Reihen“ aus reellen Gliedern auf solche aus komplexen Gliedern übertragen werden. Wir denken eine unbegrenzte Anzahl zunächst konstanter komplexer Größen  $(u_0 + iv_0), (u_1 + iv_1), (u_2 + iv_2), \dots$  vorgelegt und bilden aus ihnen in dieser Anordnung einstweilen in formalem Ansatz die „unendliche Reihe mit komplexen Gliedern“:

$$(6) \quad (u_0 + iv_0) + (u_1 + iv_1) + (u_2 + iv_2) + \dots$$

Die wirkliche Durchführung der Addition ist für jede Anzahl von „Anfangsgliedern“ möglich, d. h. wir können für jeden Index  $n$  die komplexe Zahl:

$$(7) \quad S_n + iT_n = (u_0 + iv_0) + (u_1 + iv_1) + \dots + (u_{n-1} + iv_{n-1})$$

berechnen, wobei die beiden reellen Zahlen  $S_n$  und  $T_n$  gegeben sind durch:

$$(8) \quad S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}, \quad T_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}.$$

Gibt es nun eine bestimmte endliche Grenze:

$$\lim_{n=\infty} (S_n + iT_n) = S + iT,$$

so heißt die unendliche Reihe (6) „konvergent“ und  $(S + iT)$  ihr „Summenwert“ oder ihre „Summe“; man sagt auch, durch (6) werde der Wert  $(S + iT)$  in Gestalt einer unendlichen Reihe dargestellt. Existiert eine solche Grenze nicht, so heißt die Reihe „divergent“. Nach den vorausge-

schickten Betrachtungen ist einleuchtend, daß die komplexe Reihe (6) stets und nur dann konvergent ist, wenn die beiden reellen Reihen:

$$(9) \quad u_0 + u_1 + u_2 + \dots, \quad v_0 + v_1 + v_2 + \dots$$

konvergent sind.

Man nennt die Reihe (6) „absolut konvergent“, wenn die „zugehörige Reihe der absoluten Beträge“:

$$(10) \quad |u_0 + iv_0| + |u_1 + iv_1| + |u_2 + iv_2| + \dots$$

konvergent ist. Ferner heißt die Reihe (6) „unbedingt konvergent“, wenn sie konvergent ist und nach jeder „Gliederumordnung“ (s. I, 208) die Konvergenz und der gleiche Summenwert bestehen bleiben. Dann gilt der Satz: *Eine absolut konvergente Reihe ist stets auch unbedingt konvergent.* Da nämlich die Werte

$$|u_0| + |u_1| + \dots + |u_{n-1}| \quad \text{und} \quad |v_0| + |v_1| + \dots + |v_{n-1}|$$

nicht größer als  $|u_0 + iv_0| + |u_1 + iv_1| + \dots + |u_{n-1} + iv_{n-1}|$  sind, so folgt im Falle der Konvergenz von (10) nach I, 209ff. die absolute und also auch die unbedingte Konvergenz der reellen Reihen (9) und damit auch die unbedingte Konvergenz der Reihe (6).

Auch die Sätze von I, 213ff. über Addition, Subtraktion und Multiplikation zweier Reihen übertragen sich leicht auf die komplexen Reihen. Ist neben (6) eine zweite Reihe:

$$(11) \quad (u'_0 + iv'_0) + (u'_1 + iv'_1) + (u'_2 + iv'_2) + \dots$$

gegeben, so heißt die Reihe, deren Glieder:

$$(12) \quad u''_n + iv''_n = (u_n + iv_n) \pm (u'_n + iv'_n)$$

sind, die „Summe“ bzw. die „Differenz“ der beiden gegebenen Reihen. Sind die beiden gegebenen Reihen konvergent, und haben sie die Summen  $(S + iT)$ ,  $(S' + iT')$ , so stellt auch ihre „Summe“ bzw. „Differenz“ eine konvergente Reihe dar, und es ist deren Summe:

$$S'' + iT'' = (S + iT) \pm (S' + iT').$$

Der Beweis regelt sich wie in I, 213. Da übrigens:

$$|u''_n + iv''_n| \leq |u_n + iv_n| + |u'_n + iv'_n|$$

ist, so erweist sich die Reihe der Glieder (12) auch als „absolut konvergent“, falls es die beiden gegebenen Reihen sind. Die Übertragung dieser Sätze auf die Addition und Subtraktion von mehr als zwei gegebenen Reihen wird leicht vollzogen.

Wir nehmen jetzt an, daß die Reihen (6) und (11) absolut konvergent sind. Dasselbe gilt dann von den vier reellen Reihen:

$$(13) \quad u_0 + u_1 + \dots, \quad v_0 + v_1 + \dots, \quad u'_0 + u'_1 + \dots, \quad v'_0 + v'_1 + \dots,$$

deren Summen  $S, T, S', T'$  sind. Auf diese Reihen wenden wir den Satz von I, 214 über das „Produkt“ zweier absolut konvergenter Reihen an. Wir bilden insbesondere die vier Reihen, deren Glieder nach den Gesetzen gebildet sind:

$$(u_0 u'_n + u_1 u'_{n-1} + \cdots + u_n u'_0), \quad (v_0 v'_n + v_1 v'_{n-1} + \cdots + v_n v'_0),$$

$$(u_0 v'_n + u_1 v'_{n-1} + \cdots + u_n v'_0), \quad (v_0 u'_n + v_1 u'_{n-1} + \cdots + v_n u'_0).$$

Nach dem genannten Satze sind diese vier Reihen wieder absolut konvergent und haben die Summen  $SS', TT', ST', TS'$ . Man wolle nun in der zweiten dieser Reihen alle Glieder mit  $-1$ , in der dritten und vierten alle Glieder mit  $i$  multiplizieren. Nach den vorausgehenden Sätzen entsteht durch Addition der so gewonnenen vier Reihen wieder eine absolut konvergente Reihe der Summe:

$$(14) \quad SS' - TT' + iST' + iTS' = (S + iT)(S' + iT').$$

Man kann das Ergebnis auch so aussprechen: Man bilde aus den beiden Reihen (6) und (11) die Reihe der Glieder:

$$(15) \quad u''_n + iv''_n = (u_0 + iv_0)(u'_n + iv'_n) + (u_1 + iv_1)(u'_{n-1} + iv'_{n-1}) + \cdots$$

$$\cdots + (u_n + iv_n)(u'_0 + iv'_0)$$

und bezeichne diese Reihe als „Produkt“ der beiden gegebenen Reihen. Dann gilt der Satz: *Sind die beiden gegebenen Reihen absolut konvergent, und haben sie die Summen  $(S + iT)$  und  $(S' + iT')$ , so ist auch ihr „Produkt“ absolut konvergent und hat als Summe das Produkt  $(S + iT)(S' + iT')$  der Summen der beiden gegebenen Reihen.*

Eine komplexe Variable bezeichnen wir durch  $(x + iy)$ , wobei  $x$  und  $y$  als voneinander unabhängige reelle Variable anzusehen sind. Zur Abkürzung schreiben wir für  $(x + iy)$  den einzigen Buchstaben  $z$  und wollen auch sogleich komplexe konstante Größen  $(a + ib)$  kurz durch einen Buchstaben  $c$  bezeichnen. Es soll jetzt die Reihe (6) mit folgenden Gliedern gebildet werden:

$$(16) \quad u_n + iv_n = (a_n + ib_n)(x + iy)^n = c_n z^n;$$

die entstehende Reihe:

$$(17) \quad c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots$$

bezeichnen wir im Anschluß an I, 221 als eine „komplexe Potenzreihe“. Ist in der Polardarstellung  $z = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$ , so ist  $r = |z|$  der absolute Betrag von  $z$ , so daß zur Reihe (17) als „Reihe der absoluten Beträge“ die folgende reelle Potenzreihe zugehört:

$$(18) \quad |c_0| + |c_1| r + |c_2| r^2 + |c_3| r^3 + \cdots$$

Ist für ein einzelnes  $z$  des absoluten Betrages  $r$  die Reihe (18) konver-

gent, so ist die Reihe (17) für dieses  $z$  „absolut“ und damit „unbedingt“ konvergent. Die Konvergenzsätze der reellen Reihe (18) sind in I, 221 ff. entwickelt. Wir merken sogleich das Ergebnis an: *Hat die Reihe (18) ein „Konvergenzintervall“, das durch die beiden endlichen und von 0 verschiedenen Zahlen  $-g$  und  $+g$  eingegrenzt ist, so ist die Reihe (17) jedenfalls für alle  $z$  mit  $|z| < g$  konvergent; die zugehörigen Punkte  $z = x + iy$  der Zahlenebene bilden die Innenpunkte des Kreises vom Radius  $g$  um den Nullpunkt, den man den „Konvergenzkreis“ der Reihe (17) nennt. Ist aber die Reihe (18) „unbeschränkt“ konvergent, so wollen wir auch die Reihe (17) so nennen; sie hat dann für jedes endliche  $z$  einen bestimmten endlichen Summenwert.* Andere Sätze über komplexe Potenzreihen kommen weiterhin nicht zur Anwendung.

**3. Elementare komplexe Funktionen.** Ohne zunächst grundsätzlich auf den Begriff der Funktion einer komplexen Variablen einzugehen, fragen wir, wie wir die in I, 75 ff. besprochenen elementaren Funktionen einer reellen Veränderlichen auf entsprechende Funktionen einer komplexen variablen Größe  $z = x + iy$  verallgemeinern können. In dieser Hinsicht bieten zunächst die rationalen Funktionen keine Schwierigkeit: *Hängt die komplexe Variable  $w = u + iv$  von der „unabhängigen“ Variablen  $z = x + iy$  in der Art ab, daß der zum einzelnen Werte  $z$  gehörende Wert  $w$  aus  $z$  und gegebenen komplexen Konstanten durch eine Kette endlich vieler rationaler Rechnungen berechenbar ist, so nennen wir  $w$  eine „rationale Funktion“ von  $z$ .* Man wird sofort verstehen, wenn wir als „Normalgestalt“ insbesondere einer „rationalen ganzen Funktion  $n^{\text{ten}}$  Grades“:

$$g(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n$$

anschreiben, unter den  $c$  komplexe Konstante verstanden, und wenn wir den Satz anmerken, daß sich irgend eine „gebrochene rationale Funktion“ stets als Quotient zweier ganzer rationaler Funktionen darstellen läßt.

Ebenso leicht ergibt sich die folgende Erklärung: *Eine Variable  $w$  heißt eine „elementare algebraische Funktion“ der komplexen Variablen  $z$ , falls sich für jeden einzelnen Wert  $z$  der zugehörige Wert  $w$  aus  $z$  und gegebenen komplexen Konstanten durch eine Kette endlich vieler rationaler Rechnungen und Wurzelziehungen berechnen läßt.*

Die früher ausschließlich betrachteten reellen Funktionen des reellen Argumentes  $x$  erweitern sich hierbei unmittelbar zu „komplexen Funktionen“ der angegebenen Arten, wenn wir an Stelle von  $x$  die komplexe Variable  $z = x + iy$  treten lassen. Bei jenen reellen Funktionen handelt es sich dann einfach um die Werte dieser komplexen Funktionen längs der „reellen Achse“.

Wie aber soll man die transzendenten Funktionen der Elementarmathematik, z. B. die Funktionen  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ , zu komplexen Funktionen verallgemeinern? Die ursprünglichen Erklärungen dieser Funktionen, z. B. diejenigen von  $\sin x$  und  $\cos x$  aus dem rechtwinkligen Dreiecke, arbeiten mit geometrischen Vorstellungen, die sich nicht unmittelbar, wie z. B. die rationalen Rechnungen, auf komplexe Größen übertragen lassen. Unter den verschiedenen Möglichkeiten, die fragliche Verallgemeinerung zunächst der drei Funktionen  $e^x$ ,  $\sin x$  und  $\cos x$  vorzunehmen, liegt uns diejenige am nächsten, welche an die „Potenzreihen“ dieser Funktionen (s. I, 230) anknüpft, von denen wir damals feststellten, daß sie „beständig“ konvergent sind. Wir erklären die natürliche Exponentialfunktion  $e^z$  und die Funktionen  $\sin z$ ,  $\cos z$  durch die Reihen:

$$(1) \quad \begin{cases} e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots, \\ \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots, \\ \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots, \end{cases}$$

für welche aus dem Schlußsatze des vorigen Paragraphen folgt, daß sie gleichfalls beständig konvergent sind. Auf diese Art sind die fraglichen Funktionen für jeden endlichen Wert von  $z$  eindeutig durch die Summenwerte der drei Reihen (1) erklärt, und zwar in der Art, daß längs der reellen Achse unsere alten Funktionen  $e^x$ ,  $\sin x$  und  $\cos x$  in den „komplexen Funktionen“  $e^z$ ,  $\sin z$  und  $\cos z$  wieder enthalten sind. In entsprechender Weise erklären wir die „hyperbolischen Funktionen“  $\operatorname{Sin} z$ ,  $\operatorname{Cos} z$  eines komplexen Argumentes durch die beständig konvergenten Reihen:

$$(2) \quad \operatorname{Sin} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots, \quad \operatorname{Cos} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

Auch für die übrigen „einfachen“ transzendenten Funktionen  $\operatorname{tg} z$ ,  $\operatorname{cotg} z$ ,  $\operatorname{I}g z$ ,  $\operatorname{Co}g z$ ,  $\operatorname{arc} \sin z$  usw. könnten wir entsprechend vorgehen. Da indessen die betreffenden Reihen nicht unbeschränkt konvergent sein würden, so ziehen wir vor, zunächst die vier Funktionen  $\operatorname{tg} z$ ,  $\dots$ ,  $\operatorname{Co}g z$  unter Beibehaltung der für reelle Argumente bestehenden Relationen durch die Gleichungen:

$$(3) \quad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \operatorname{I}g z = \frac{\operatorname{Sin} z}{\operatorname{Cos} z}, \quad \operatorname{Co}g z = \frac{\operatorname{Cos} z}{\operatorname{Sin} z}$$

zu erklären. Zu den übrigen einfachen transzendenten Funktionen  $\ln z, \dots$  gelangen wir dann durch Übertragung der „Inversion“ oder „Umkehrung“ der Funktionen (s. I, 29) auf  $e^z, \dots$ . Wir behalten uns vor, hierauf noch näher zurückzukommen.

Endlich steht nichts im Wege, auch „zusammengesetzte Funktionen“ aus den bisherigen einfachen zu bilden und auf diese Weise zu einem allgemeinen Begriffe der „elementaren komplexen Funktionen“ aufzusteigen.

**4. Eulersche Formeln nebst Folgerungen.** Durch Addition der beiden unbedingt konvergenten Reihen (2) § 3 ergibt sich die Reihe für  $e^z$ . Mit Rücksicht auf die aus (2) § 3 folgenden Regeln  $\text{Sin}(-z) = -\text{Sin } z$ ,  $\text{Cos}(-z) = \text{Cos } z$  merken wir somit die Gleichungen an:

$$(1) \quad \text{Cos } z + \text{Sin } z = e^z, \quad \text{Cos } z - \text{Sin } z = e^{-z},$$

aus denen umgekehrt folgt:

$$(2) \quad \text{Cos } z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \text{Sin } z = \frac{e^z - e^{-z}}{2i}.$$

Diese für die reellen Funktionen in I, 70 aufgestellten Relationen bleiben somit nach der Erweiterung auf komplexe Funktionen in Kraft.

Trägt man  $iz$  an Stelle von  $z$  in die Reihen (2) § 3 ein, so liefert die  $\text{Cos}$ -Reihe unmittelbar diejenige für  $\cos z$ , die  $\text{Sin}$ -Reihe aber die mit  $i$  multiplizierte Reihe für  $\sin z$ :

$$(3) \quad \cos z = \text{Cos}(iz), \quad i \sin z = \text{Sin}(iz).$$

Die gewählte Erweiterung unserer Funktionen ist also in der Art getroffen, daß die trigonometrischen Funktionen  $\cos z$  und  $\sin z$  im wesentlichen (d. h. abgesehen vom Faktor  $i$  in der zweiten Gleichung (3)) identisch sind mit den entsprechenden hyperbolischen Funktionen für  $iz$ . Die Gleichungen (2) und (1) ergeben nunmehr, wenn man  $iz$  für  $z$  einträgt und die zweite Formel (2) durch  $i$  teilt, die sogenannten „Eulerschen Formeln“:

$$(4) \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

$$(5) \quad e^z = \cos z + i \sin z, \quad e^{-z} = \cos z - i \sin z,$$

welche einen nahen Zusammenhang zwischen den trigonometrischen Funktionen  $\cos z$  und  $\sin z$  einerseits und der Exponentialfunktion des Argumentes  $iz$  andererseits herstellen.

Zufolge der entwickelten Formeln kann man die Eigenschaften der trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen aus denjenigen der Exponentialfunktion  $e^z$  ableiten. Es soll dies ein wenig weiter für die „Additionstheoreme“ ausgeführt werden. Nach dem S. 391 ausgesprochenen Satze über Multiplikation unendlicher Reihen ist das Produkt der beiden Reihen:

$$(6) \quad e^{z_1} = 1 + \frac{z_1}{1!} + \frac{z_1^2}{2!} + \frac{z_1^3}{3!} + \dots, \quad e^{z_2} = 1 + \frac{z_2}{1!} + \frac{z_2^2}{2!} + \frac{z_2^3}{3!} + \dots$$

die unendliche Reihe des Summenwertes  $e^{z_1} \cdot e^{z_2}$  und des zum Index  $n$  gehörenden Gliedes:

$$u_n + i v_n = \frac{z_1^n}{n!} + \frac{z_1^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{z_2}{1!} + \frac{z_1^{n-2}}{(n-2)!} \cdot \frac{z_2^2}{2!} + \dots + \frac{z_2^n}{n!}.$$

Der rechts stehende Ausdruck läßt sich auf Grund des binomischen Lehrsatzes so zusammenfassen:

$$u_n + i v_n = \frac{1}{n!} \left( z_1^n + \binom{n}{1} z_1^{n-1} z_2 + \binom{n}{2} z_1^{n-2} z_2^2 + \dots + z_2^n \right) = \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!},$$

so daß man das Ergebnis der Multiplikation der Reihen (6) so schreiben kann:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = 1 + \frac{(z_1 + z_2)}{1!} + \frac{(z_1 + z_2)^2}{2!} + \frac{(z_1 + z_2)^3}{3!} + \dots$$

Da nun die rechts stehende Reihe zufolge (1) § 3 die Summe  $e^{z_1 + z_2}$  hat, so gilt die Regel:

$$(7) \quad e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2},$$

die das „*Additionstheorem der Exponentialfunktion*“ genannt wird.

Die „*Additionstheoreme der trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen*“ sind einfache Folgen dieser Regel (7). So folgt z. B. aus (5):

$$\begin{aligned} \cos(z_1 + z_2) \pm i \sin(z_1 + z_2) &= e^{\pm i(z_1 + z_2)} = e^{\pm i z_1} \cdot e^{\pm i z_2} \\ &= (\cos z_1 \pm i \sin z_1) (\cos z_2 \pm i \sin z_2) = (\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2) \\ &\quad \pm i (\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2). \end{aligned}$$

Bei Addition dieser beiden Formeln und Teilung durch 2 folgt:

$$(8) \quad \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2,$$

bei Subtraktion und Teilung durch 2*i* ergibt sich:

$$(9) \quad \sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2.$$

Indem man ähnlich bei den hyperbolischen Funktionen verfährt, gelangt man zu der Erkenntnis, daß die für die reellen Funktionen gültigen *Additionstheoreme unverändert auch nach der Erweiterung auf die komplexen Funktionen bestehen bleiben.*

Setzt man in (8) und (9) für  $z_2$  den Wert  $2\pi$  ein und schreibt  $z$  statt  $z_1$ , so folgt, da  $\cos 2\pi = 1$  und  $\sin 2\pi = 0$  ist:

$$(10) \quad \cos(z + 2\pi) = \cos z, \quad \sin(z + 2\pi) = \sin z.$$

*Auch die komplexen Funktionen  $\cos z$ ,  $\sin z$  sind „periodisch“, da sie bei Änderung des Argumentes  $z$  um ein Vielfaches von  $2\pi$  unverändert bleiben.*

Weiter liefert die erste Formel (5):

$$e^{i(z+2\pi)} = \cos(z+2\pi) + i \sin(z+2\pi) = \cos z + i \sin z = e^{iz}.$$

Lösen wir links im Exponenten die Klammer und schreiben  $z$  statt  $iz$ , so folgt:

$$(11) \quad e^{-z+2i\pi} = e^z.$$

Auch die Exponentialfunktion und mit ihr die hyperbolischen Funktionen eines komplexen Argumentes sind „periodisch“; ihre Periode ist imaginär, nämlich gleich  $2i\pi$ .

Aus (7) ziehen wir den Schluß:

$$e^z \cdot e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1.$$

Bei Zeichenwechsel von  $z$  geht also die Exponentialfunktion in ihren reziproken Wert über. Daraufhin liefern die Formeln (5) und (1):

$$(12) \quad \cos^2 z + \sin^2 z = 1, \quad \text{Cos}^2 z - \text{Sin}^2 z = 1.$$

Auch das Fortbestehen anderer Elementarformeln wird man leicht zeigen, wie z. B. die Gleichungen:

$$\cos(z + \pi) = -\cos z, \quad \sin(z + \pi) = -\sin z, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z, \dots$$

Sehr leicht ist jetzt der Beweis des „Moirreschen Lehrsatzes“ für beliebiges komplexes  $z$ . Aus (7) schließt man ohne Mühe auf:

$$(e^{iz})^n = e^{in z}.$$

Mit Hilfe der ersten Gleichung (5) schreibt sich diese Formel:

$$(13) \quad (\cos z + i \sin z)^n = \cos n z + i \sin n z.$$

Für die „Polardarstellung“ haben wir als neue kürzere Schreibweise:

$$(14) \quad r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) = r e^{i\vartheta}.$$

Auch merken wir noch für die S. 387 unter (19) dargestellten  $n$  Wurzeln  $n^{\text{ten}}$  Grades der Einheit die neue Schreibweise an:

$$\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_1 = e^{\frac{2i\pi}{n}}, \quad \varepsilon_2 = e^{\frac{2 \cdot 2i\pi}{n}}, \quad \dots, \quad \varepsilon_{n-1} = e^{\frac{(n-1) \cdot 2i\pi}{n}}.$$

**5. Inversion der Funktionen  $e^z$  usw.** Die Eulerschen Formeln gestatten uns nun auch, ausführlicher die Inversion der Funktionen  $e^z$  usw. zu behandeln. Unter dem zu einem Werte  $z = r e^{i\vartheta}$  gehörenden „natürlichen Logarithmus“  $w = \ln z$  haben wir einen Wert  $w = u + iv$  zu verstehen, für den:

$$e^w = z, \quad e^{u+iv} = e^u (\cos v + i \sin v) = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$$

gilt. Hieraus ziehen wir sofort die beiden Gleichungen:

$$(1) \quad e^u \cos v = r \cos \vartheta, \quad e^u \sin v = r \sin \vartheta,$$

aus denen durch Quadrieren und Addieren:

$$(2) \quad e^{2u} = r^2, \quad 2u = \ln(r^2) = 2\ln r, \quad u = \ln r$$

hervorgeht. Demnach ist für jedes  $r > 0$  der Wert  $u = \ln r$  als endlicher reeller Wert eindeutig bestimmt, während für  $\lim r = 0$  der Wert  $u$  der Grenze  $-\infty$  zustrebt. Mit Benutzung dieses Ergebnisses folgt aus (1) weiter:

$$\cos v = \cos \vartheta, \quad \sin v = \sin \vartheta.$$

Die Gesamtheit der Lösungen  $v$  dieser Gleichung ist durch  $v = \vartheta + 2\nu\pi$  gegeben, wo  $\nu$  alle ganzen Zahlen zu durchlaufen hat. Damit haben wir das Ergebnis gewonnen: *Der natürliche Logarithmus  $w = \ln z$  ist für jedes endliche und von 0 verschiedene  $z = re^{i\vartheta}$  eine unendlich vieldeutige Funktion:*

$$(3) \quad w = u + iv = \ln r + \vartheta i + 2\nu\pi i, \quad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots,$$

deren reeller Bestandteil  $u = \ln r$  eindeutig ist, während der imaginäre Bestandteil allen ganzen Zahlen  $\nu$  entsprechend unendlich vieldeutig ist. Der zu  $\nu = 0$  gehörende Wert (3) heißt der „Hauptwert“ der Funktion  $\ln z$ ; indem wir an der Annahme  $0 \leq \vartheta < 2\pi$  festhalten, ist der Hauptwert  $\ln z = u + iv$  durch das Kennzeichen  $0 \leq v < 2\pi$  ausgezeichnet.

Die Logarithmen der reellen positiven Zahlen  $x$  liefern in ihren Hauptwerten die bisher einzig betrachtete reelle Funktion  $\ln x$ ; die Hauptwerte der Logarithmen der reellen negativen Zahlen haben den konstanten imaginären Bestandteil  $\pi i$ , so ist z. B.  $\ln(-1) = i\pi$ . Wir notieren noch, daß dem Additionstheoreme (7) S. 395 der Exponentialfunktion die leicht daraus herleitbare Logarithmenregel entspricht:

$$(4) \quad \ln(z_1 \cdot z_2) = \ln z_1 + \ln z_2.$$

Unter  $w = \arcsin z$  haben wir für irgend ein gegebenes komplexes  $z$  jeden der Gleichung:

$$z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$$

genügenden Wert  $w$  zu verstehen. Man berechnet hieraus leicht:

$$iz = \frac{1}{2}(e^{iw} - e^{-iw}), \quad \sqrt{1-z^2} = \frac{1}{2}(e^{iw} + e^{-iw})$$

und findet durch Addition dieser beiden Gleichungen und Auflösung nach  $w = \arcsin z$  die erste der beiden Gleichungen:

$$(5) \quad \begin{cases} \arcsin z = -i \ln(iz + \sqrt{1-z^2}), \\ \arccos z = -i \ln(z + \sqrt{z^2-1}), \end{cases}$$

während die zweite auf ähnlichem Wege gewonnen wird. Mittels der aus (3) S. 394 hervorgehenden Relationen:

$$(6) \quad \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} z = i \arcsin(-iz), \quad \operatorname{Ar} \operatorname{Cos} z = i \arccos z$$

folgt aus (5) für die Hyperbelfunktionen:

$$(7) \quad \begin{cases} \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} z = \ln(z + \sqrt{1+z^2}), \\ \operatorname{Ar} \operatorname{Cos} z = \ln(z + \sqrt{z^2-1}), \end{cases}$$

so daß die in I, 75 gegebenen Darstellungen der Funktionen  $\operatorname{Ar} \operatorname{Sin} x$ ,  $\operatorname{Ar} \operatorname{Cos} x$  durch den Logarithmus auch bei komplexen Argumenten bestehen bleiben.

Ein zu gegebenem  $z$  gehörender Funktionswert  $w = \operatorname{arctg} z$  ist ein der Gleichung  $z = \operatorname{tg} w$  genügender Wert. Wir entwickeln diese Gleichung so:

$$iz = i \operatorname{tg} w = \frac{i \sin w}{\cos w} = \frac{e^{2iw} - 1}{e^{2iw} + 1}, \quad e^{2iw} = \frac{1 + iz}{1 - iz}$$

und finden durch Logarithmierung und Teilung mit  $2i$  die erste der beiden folgenden Formeln:

$$(8) \quad \begin{cases} \operatorname{arc} \operatorname{tg} z = \frac{1}{2i} \ln \left( \frac{1 + iz}{1 - iz} \right), \\ \operatorname{arc} \operatorname{cotg} z = \frac{1}{2i} \ln \left( \frac{iz - 1}{iz + 1} \right), \end{cases}$$

deren zweite wieder auf entsprechendem Wege gewonnen wird. Da man aus den Formeln (3) S. 394 leicht die Beziehungen:

$$(9) \quad \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} z = i \operatorname{arc} \operatorname{tg} (-iz), \quad \operatorname{Ar} \operatorname{Cotg} z = i \operatorname{arc} \operatorname{cotg} (iz)$$

ableitet, so ergibt sich aus (8) weiter für die Hyperbelfunktionen:

$$(10) \quad \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} z = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+z}{1-z} \right), \quad \operatorname{Ar} \operatorname{Cotg} z = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{z+1}{z-1} \right),$$

welche für reelle Argumente bereits in I, 75 aufgestellt wurden.

Die vorstehenden Formeln gestatten uns, die *Eigenschaften der zyklometrischen Funktionen und der Hyperbelfunktionen aus denen des Logarithmus abzulesen*. Um dies wenigstens an einem Beispiele ein wenig näher auszuführen, knüpfen wir an die erste Formel (5) und bemerken zunächst, daß  $\sqrt{1-z^2}$  für  $z = \pm 1$  eindeutig und gleich 0 ist, für alle anderen endlichen  $z$  aber zweideutig ist. Trennen wir die beiden Werte der Wurzeln ausdrücklich durch die Schreibweise:

$$w = -i \ln(iz + \sqrt{1-z^2}), \quad w' = -i \ln(iz - \sqrt{1-z^2}),$$

so folgt durch Addition und Benutzung der Regel (4):

$$w + w' = -i \ln((iz + \sqrt{1-z^2}) \cdot (iz - \sqrt{1-z^2})) = -i \ln(-1).$$

Wählen wir den „Hauptwert“  $\ln(-1) = \pi i$ , so folgt:

$$(11) \quad w + w' = \pi, \quad w' = \pi - w.$$

An jeden der beiden Werte  $w$  und  $(\pi - w)$  unserer Funktion  $\arcsin z$  aber schließt sich nun der Vieldeutigkeit des Logarithmus in (5) rechts entsprechend eine unendliche Reihe von Funktionswerten an:

$$w + 2\nu\pi, \quad w' + 2\nu\pi = -w + (2\nu + 1)\pi, \quad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Wir brauchen kaum zu bemerken, daß wir hiermit eine in I, 62 entwickelte Haupteigenschaft der  $\arcsin$ -Funktion wieder gewonnen haben.

**6. Geometrische Deutung der komplexen Funktionen.** Ist irgend eine elementare komplexe Funktion  $w = f(z)$  vorgelegt, so schreiben wir unter Trennung des Reellen und Imaginären:

$$w = u + iv = f(x + iy) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

und können unter Gleichsetzung der beiderseitigen Bestandteile:

$$(1) \quad u = \varphi(x, y), \quad v = \psi(x, y)$$

setzen. Hier sind dann  $\varphi(x, y)$  und  $\psi(x, y)$  reelle Funktionen der beiden „reellen“, von einander „unabhängigen“ Variablen  $x$  und  $y$ . Zur geometrischen Deutung der beiden Gleichungen (1) und damit der Funktion  $w = f(z)$  ziehen wir die S. 101 entwickelten Vorstellungen wieder heran: Neben der  $x, y$ -Ebene, der „Zahlenebene“ der komplexen Variablen  $z = x + iy$ , gebrauchen wir eine zweite „Zahlenebene“ für die komplexen Werte  $w = u + iv$  mit einem rechtwinkligen Koordinatensysteme  $u, v$ ; wir nennen diese beiden Ebenen die „ $z$ -Ebene“ und die „ $w$ -Ebene“. *Durch (1) und also durch die Funktion  $w = f(z)$  ist dann (wie S. 101) eine „Abbildung“ der  $z$ -Ebene auf die  $w$ -Ebene festgelegt, und umgekehrt können wir mittels dieser Abbildung eine geometrische Versinnlichung der Funktion erzielen.*

Zur unmittelbaren Veranschaulichung der Abbildung im Einzelfalle bedienen wir uns der Maßregeln von S. 101. Wir denken in der  $w$ -Ebene die beiden Geradenscharen der Gleichungen  $u = u_0, v = v_0$  gezeichnet; die erste Schar besteht aus allen zur  $v$ -Achse parallelen Geraden, die zweite aus allen zur  $u$ -Achse parallelen. Sie übertragen sich rückwärts in die  $z$ -Ebene auf zwei „Kurvenscharen“ der Gleichungen:

$$(2) \quad \varphi(x, y) - u_0 = 0, \quad \psi(x, y) - v_0 = 0$$

mit den „Parametern“  $u_0, v_0$ . Die Brauchbarkeit dieser Maßregel möge sogleich an ein paar Beispielen erläutert werden.

Die Funktion  $w = z^2$  liefert:

$$(3) \quad u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy,$$

so daß die beiden Kurvenscharen (2) in diesem Falle die beiden schon in Aufg. 2) S. 295 betrachteten, zueinander „orthogonalen“ Scharen von gleichseitigen Hyperbeln sind. In Fig. 99 sind in der  $w$ -Ebene die den ganzzahligen Parameterwerten  $u_0, v_0$  entsprechenden Geraden gezeichnet,

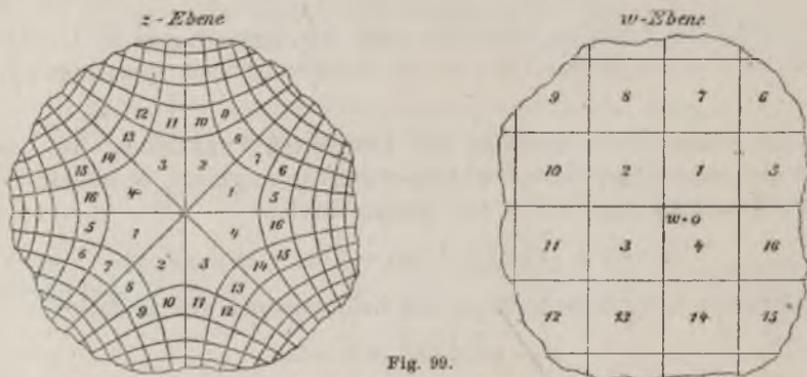


Fig. 99.

deren Abbilder die links gezeichneten Hyperbeln sind. Die mit Nummern versehenen Quadrate der  $w$ -Ebene finden ihre mit den gleichen Nummern versehenen Abbilder der  $z$ -Ebene in den von Hyperbelbogen eingegrenzten Vierecken. Da  $w = z^2$  eine *eindeutige* Funktion ist, so entspricht jedem Punkte der  $z$ -Ebene *ein* Punkt der  $w$ -Ebene. Umgekehrt ist  $z = \sqrt{w}$  für jedes von 0 verschiedene endliche  $w$  *zweideutig*; jedes der Quadrate 1, 2, ... liefert demnach links *zwei* Abbilder, die bezüglich des Nullpunktes diametral sind.

Die Haupteigenschaft der hier vorliegenden Abbildung ist, daß sie *abgesehen vom Punkte*  $z = 0$  „*winkeltreu*“ oder „*konform*“ ist (s. S. 102). Für einen vom Nullpunkte verschiedenen Punkt wollen wir ein „Bogendifferential“  $ds$  in der Richtung der „Amplitude“  $\alpha$  gegen die positive  $x$ -Achse zeichnen. Die Projektionen von  $ds$  auf die Achsen sind dann  $dx = ds \cdot \cos \alpha$ ,  $dy = ds \cdot \sin \alpha$ . Diese Differentiale liefern die „vollständigen Differentiale“ (s. I, 151 ff.):

$$(4) \quad \begin{cases} du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 2x dx - 2y dy, \\ dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = 2y dx + 2x dy \end{cases}$$

der Funktionen (3). Entspricht dem Differentiale  $ds$  in der  $w$ -Ebene das am Punkte  $(u, v)$  anzubringende Differential  $d\sigma$  der „Amplitude“  $\beta$  gegen die positive  $u$ -Achse, so gilt, wenn wir noch für  $z$  die Polardarstellung einführen, zufolge (4):

$$du = d\sigma \cdot \cos \beta = 2r ds (\cos \alpha \cos \vartheta - \sin \alpha \sin \vartheta),$$

$$dv = d\sigma \cdot \sin \beta = 2r ds (\sin \alpha \cos \vartheta + \cos \alpha \sin \vartheta),$$

so daß wir für  $\cos \beta$  und  $\sin \beta$  finden:

$$\cos \beta = \frac{2r ds}{d\sigma} \cos (\alpha + \vartheta), \quad \sin \beta = \frac{2r ds}{d\sigma} \sin (\alpha + \vartheta).$$

Diese beiden Gleichungen lassen sich sofort umgestalten in die beiden neuen:

$$(5) \quad d\sigma = 2r ds, \quad \beta = \alpha + \vartheta,$$

von denen die zweite den behaupteten Charakter unserer Abbildung dar-  
tut. Zeichnen wir nämlich vom fraglichen Punkte  $(x, y)$  zwei verschie-  
dene Differentiale  $ds$  und  $ds'$  der Amplituden  $\alpha$  und  $\alpha'$ , und haben die  
entsprechenden  $d\sigma$ ,  $d\sigma'$  die Amplituden  $\beta$ ,  $\beta'$ , so gilt  $\beta' - \beta = \alpha' - \alpha$ , so  
daß bei der Abbildung die Winkel erhalten bleiben. Übrigens liefert die  
erste Gleichung (5):

$$d\sigma' : ds' = d\sigma : ds = 2r,$$

so daß alle an der Stelle  $(x, y)$  zu zeichnenden Bogendifferentiale nach einem  
nur von dieser Stelle abhängenden, aber von der Richtung der Differentiale  
unabhängigen Verhältnis vergrößert oder verkleinert werden. Man nennt  
dieses Verhältnis (im vorliegenden Falle  $2r$ ) den „Modul“ oder das „Ver-  
größerungsverhältnis“ der Abbildung.

Die gewonnenen Ergebnisse sind charakteristisch für alle bei den  
bisher betrachteten Funktionen eintretenden Abbildungen. Es möge dies  
noch am Beispiele der Exponentialfunktion:

$$w = e^z, \quad u + iv = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

erläutert werden, wo die beiden Gleichungen (1) die Gestalt annehmen:

$$(6) \quad u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y.$$

Wir zeichnen hier durch die beiden Punkte  $y = \pm \pi$  der  $y$ -Achse zwei  
zur  $x$ -Achse parallele Gerade und grenzen damit einen nach rechts und  
links ins Unendliche laufenden „Streifen“ der  $z$ -Ebene ein. Verschieben  
wir diesen Streifen in Richtung der  $y$ -Achse nach oben und nach unten  
um den Betrag  $2\pi$ , so lagern sich an den ersten Streifen zwei „Parallel-  
streifen“ glatt an, und wir können durch Wiederholung dieser Operation  
die ganze  $z$ -Ebene glatt mit Parallelstreifen dieser Art überlagern. Es  
gilt nun zunächst einzusehen, daß die Funktion  $w = e^z$  in allen diesen  
Streifen die gleiche Werteverteilung besitzt. Homologe Punkte dieser Streifen  
liefern nämlich Werte  $z$ , die um Vielfache von  $2i\pi$  differieren, so daß  
wegen der Periodizität (11) S. 396 der Funktion  $e^z$  in allen diesen Punkten  
gleiche Funktionswerte  $w$  auftreten.

Somit genügt es, den ersten, symmetrisch um die  $x$ -Achse angeordneten Streifen auf die  $w$ -Ebene abzubilden. Zur Veranschaulichung ist in Fig. 100 der Streifen mit einem Quadratnetze überzogen von der Seitenlänge  $\frac{1}{8} \pi$  des einzelnen Quadrates. Die zur  $x$ -Achse parallelen Geraden  $y = y_0$  liefern in der  $w$ -Ebene\*) die vom Nullpunkte ausstrahlenden

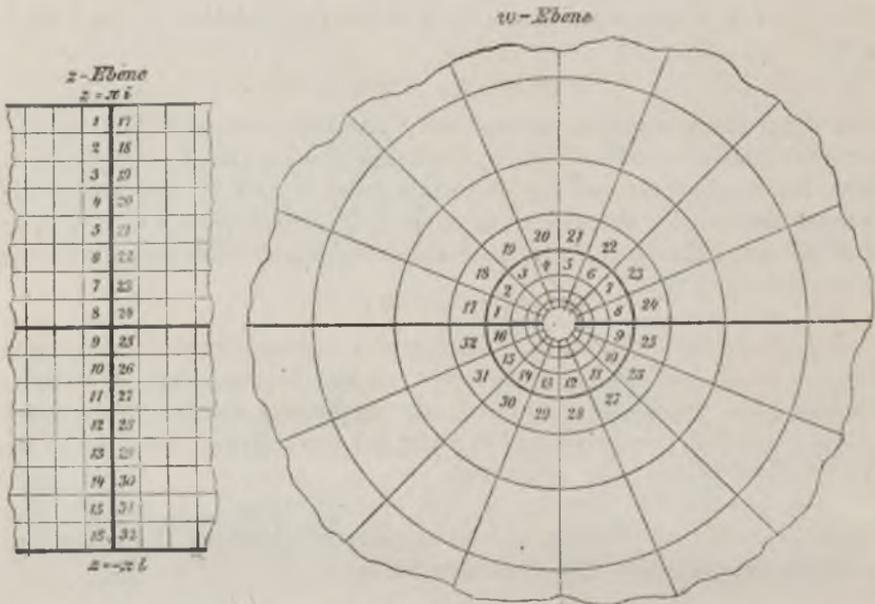


Fig. 100.

„Halbgeraden“ der Gleichungen  $u \sin y_0 - v \cos y_0 = 0$ , wobei man sich deutlich mache, daß für  $\lim x = -\infty$  der Nullpunkt die Grenze der Abbildung ist, während für  $\lim x = +\infty$  die Abbilder ins Unendliche laufen. Die den Streifen durchsetzenden Strecken der Länge  $2\pi$  und der Gleichungen  $x = x_0$  schließen sich in der  $w$ -Ebene gerade genau zu den „Vollkreisen“ der Gleichungen  $u^2 + v^2 = e^{2x_0}$  zusammen, die die  $w$ -Ebene vollständig überspannen. Das in Betracht kommende Stück der  $y$ -Achse liefert den „Einheitskreis“ der  $w$ -Ebene. Die in der Figur zugesetzten Nummern einzelner Quadrate und ihrer Abbilder mögen die Zuordnung noch besser veranschaulichen.

Die Kreise und die Geraden der  $w$ -Ebene bilden zwei orthogonale Scharen, so daß sich die rechten Winkel der Quadrate der  $z$ -Ebene wieder auf Winkel gleicher Größe übertragen. Es ist aber auch leicht allgemein

\*) Die Längeneinheiten beider Ebenen sind nicht genau gleich gewählt.

zu sehen, daß wir hier wieder mit einer „winkeltreuen“ Abbildung zu tun haben. Unter Benutzung der oben eingeführten Bezeichnungen  $ds, d\sigma, \dots$  findet man aus (6):

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = u dx - v dy,$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = v dx + u dy,$$

woraus man leicht weiter berechnet:

$$d\sigma \cos \beta = ds \cdot e^x \cos(\alpha + y), \quad d\sigma \sin \beta = ds \cdot e^x \sin(\alpha + y).$$

Diese beiden Gleichungen können aber ersetzt werden durch:

$$d\sigma = e^x ds, \quad \beta = \alpha + y.$$

Die zweite Gleichung zeigt, daß es sich um eine „winkeltreue“ Abbildung handelt, die erste liefert  $e^x$  als „Vergrößerungsverhältnis“ an der Stelle  $z$ .

**7. Analytische Funktionen.** Ein paar allgemeinere Ausführungen über Funktionen einer komplexen Variablen knüpfen wir an die Entwicklungen von S. 101 ff. In einem endlichen Bereiche  $B$  der  $x, y$ -Ebene, der der Einfachheit halber von einer einzigen geschlossenen Kurve berandet sein möge, seien zwei eindeutige und stetige Funktionen:

$$(1) \quad u = \varphi(x, y), \quad v = \psi(x, y)$$

der beiden unabhängigen reellen Variablen  $x, y$  gegeben. Diese Funktionen mögen in  $B$  partielle Ableitungen erster Ordnung besitzen, die daselbst gleichfalls eindeutig und stetig sind; auch sei die nach (6) S. 103 zu bildende „Funktionaldeterminante“ von 0 verschieden und etwa positiv:

$$(2) \quad D(\varphi, \psi) = \varphi'_x \psi'_y - \varphi'_y \psi'_x > 0.$$

Wir nehmen wie S. 101 an, daß der Bereich  $B$  durch (1) umkehrbar eindeutig auf einen Bereich  $B'$  der  $u, v$ -Ebene abgebildet werde, und erinnern daran, daß die zu den Koordinatenachsen parallelen Geraden der  $u, v$ -Ebene auf zwei Kurvenscharen der Gleichungen:

$$(3) \quad \varphi(x, y) - u_0 = 0, \quad \psi(x, y) - v_0 = 0$$

mit den „Parametern“  $u_0, v_0$  übertragen werden.

Wir setzen nun  $x + iy = z, u + iv = w$ , so daß jedem Punkte  $z$  von  $B$  eindeutig der komplexe Wert:

$$(4) \quad w = u + iv = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

zugeordnet ist und damit  $w$  als eine „komplexe Funktion“  $w = f(z)$  von  $z$  aufgefaßt werden kann. Aus der Gesamtheit der so gedachten Funktionen sondert sich nun als eine wichtige spezielle Gattung diejenige der „analy-

tischen Funktionen“ aus, zu denen insbesondere alle „elementaren Funktionen“ von  $z$  gehören. Man kann den Charakter einer analytischen Funktion  $f(z)$  an den Begriff der „Differenzierbarkeit“ anschließen, wie hier kurz angedeutet werden soll.

Gebrauchen wir für die Bogendifferentiale wieder die in § 6 benutzten Bezeichnungen  $ds, d\sigma, \dots$ , so finden wir zunächst für ein am Punkte  $(x, y)$  gezeichnetes Differential  $ds$  der Amplitude  $\alpha$  die Differentiale  $dx = ds \cdot \cos \alpha, dy = ds \cdot \sin \alpha$  der Argumente  $x, y$  und ihnen entsprechend die „vollständigen“ Differentiale:

$$(5) \quad \begin{cases} du = d\sigma \cos \beta = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = \varphi'_x dx + \varphi'_y dy, \\ dv = d\sigma \sin \beta = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = \psi'_x dx + \psi'_y dy \end{cases}$$

der beiden reellen Funktionen (1). Für die zugehörige komplexe Funktion  $w = f(z)$  und ihr Argument gilt dabei:

$$|dz| = |dx + i dy| = ds, \quad |dw| = |du + i dv| = d\sigma.$$

Tragen wir in (5) für die  $dx, dy$  ihre Produkte  $ds \cdot \cos \alpha, ds \cdot \sin \alpha$  ein, so ergibt sich nach kurzer Rechnung:

$$(6) \quad \left| \frac{dw}{dz} \right| = \frac{d\sigma}{ds} = \frac{+ \sqrt{(\varphi'_x{}^2 + \psi'_x{}^2) \cos^2 \alpha + 2(\varphi'_x \varphi'_y + \psi'_x \psi'_y) \cos \alpha \sin \alpha + (\varphi'_y{}^2 + \psi'_y{}^2) \sin^2 \alpha}}{1}$$

Der absolute Betrag des Differentialquotienten  $\frac{dw}{dz}$  erscheint hiernach im allgemeinen von der Amplitude  $\alpha$  oder, wie man sagt, von der „Richtung der Differentiation“ abhängig. Demgegenüber geht aus (6) hervor, daß der Betrag  $\left| \frac{dw}{dz} \right|$  stets und (wie leicht gezeigt wird) auch nur dann von der Richtung  $\alpha$  der Differentiation unabhängig ist, wenn die beiden Gleichungen:

$$(7) \quad \varphi'_x \varphi'_y + \psi'_x \psi'_y = 0, \quad \varphi'_x{}^2 + \psi'_x{}^2 = \varphi'_y{}^2 + \psi'_y{}^2$$

identisch bestehen. Hieran schließt sich die Erklärung: Die besonderen Funktionen (4), bei denen die Gleichungen (7) gelten, heißen „analytische“ Funktionen.

Wir können zunächst die Bedingungen (7) noch etwas vereinfachen. Zuzufolge (2) können die Funktionen  $\varphi'_x$  und  $\psi'_x$  nie zugleich verschwinden. Ist  $\varphi'_x$  für eine betrachtete Stelle  $(x, y)$  nicht 0\*), so schreibe man  $\psi'_y = \mu \cdot \varphi'_x$ , wo  $\mu$  für diese Stelle einen bestimmten endlichen Wert hat.

\*) Falls  $\varphi'_x = 0$  ist, gelangt man unter Anknüpfung an den nicht verschwindenden Wert  $\psi'_x$  zu demselben Schlüßergebnis.

Aus der ersten Gleichung (7) folgt dann  $\varphi'_y = -\mu\psi'_x$ , und aus den beiden letzten Gleichungen und der zweiten Gleichung (7) ergibt sich weiter:

$$\varphi'^2_y + \psi'^2_y = \mu^2(\varphi'^2_x + \psi'^2_x) = \varphi'^2_x + \psi'^2_x.$$

Da nun die Summe  $(\varphi'^2_x + \psi'^2_x)$  nicht verschwindet, so ist  $\mu^2 = +1$  und also  $\mu = \pm 1$ . Wir haben somit  $\varphi'_x = \pm\psi'_y$ ,  $\varphi'_y = \mp\psi'_x$ . Setzen wir aber diese Ausdrücke der  $\varphi'_x$ ,  $\varphi'_y$  in (2) ein, so folgt:

$$\pm(\psi_y'^2 + \psi_x'^2) > 0,$$

so daß die oberen Zeichen gelten. Offenbar ziehen die beiden Gleichungen  $\varphi'_x = \psi'_y$ ,  $\varphi'_y = -\psi'_x$  umgekehrt die Relation (7) nach sich. Unter Rückkehr zu den Bezeichnungen  $u, v$  können wir den Satz aussprechen: *Die Funktion  $w = f(z)$  der komplexen Variablen  $z$  heißt eine „analytische“ Funktion, wenn der reelle Bestandteil  $u(x, y)$  und der vom Faktor  $i$  befreite imaginäre Bestandteil  $v(x, y)$  den partiellen Differentialgleichungen:*

$$(8) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

genügen. Man bezeichnet diese Gleichungen als die „Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen“.

Für eine analytische Funktion kann man die Gleichungen (5) so schreiben:

$$du = \varphi'_x dx + \varphi'_y dy, \quad dv = -\varphi'_y dx + \varphi'_x dy$$

und folgert aus ihnen für die Differentiale  $dw, dz$  die Beziehung:

$$dw = du + i dv = (\varphi'_x - i\varphi'_y)(dx + i dy) = (\varphi'_x - i\varphi'_y) dz.$$

Für den Differentialquotienten berechnet man daraus:

$$(9) \quad \frac{dw}{dz} = \varphi'_x - i\varphi'_y;$$

derselbe hängt, wie man sieht, nur noch von der Stelle  $z = x + iy$ , aber nicht mehr von der „Richtung“ der Differentiation ab. In Abhängigkeit von  $z$  bezeichnet man den gewonnenen Wert des Differentialquotienten durch  $f'(z)$  und nennt diese Funktion die „Ableitung“ von  $f(z)$ . Zufolge der durchlaufenen Entwicklung kann man den Charakter der Funktion  $f(z)$  als einer „analytischen Funktion“ auch dahin kennzeichnen, daß eine analytische Funktion  $f(z)$  eine „Ableitung“  $f'(z)$  besitzt.

Wir gehen nochmals auf die Relationen (5) zurück und setzen sie für unsere analytische Funktion in die Gestalt:

$$(10) \quad d\sigma \cos \beta = ds(\varphi'_x \cos \alpha - \psi'_x \sin \alpha), \quad d\sigma \sin \beta = ds(\psi'_x \cos \alpha + \varphi'_x \sin \alpha).$$

Aus (2) folgt für die abgekürzt durch  $D$  zu bezeichnende Funktionaldeterminante:

$$D = D(\varphi, \psi) = \varphi'^2_x + \psi'^2_y.$$

Erklären wir also für die Stelle  $(x, y)$  einen Winkel  $\eta$  durch die Gleichungen:

$$\varphi'_x = \sqrt{D} \cos \eta, \quad \psi'_x = \sqrt{D} \sin \eta$$

mit positiv genommener Wurzel, so kleiden sich die Gleichungen (10) in die Gestalt:

$$d\sigma \cos \beta = ds \sqrt{D} \cos (\alpha + \eta), \quad d\sigma \sin \beta = ds \sqrt{D} \sin (\alpha + \eta),$$

die wir wegen  $\sqrt{D} > 0$  auch ersetzen können durch:

$$\frac{d\sigma}{ds} = \sqrt{D(\varphi, \psi)}, \quad \beta = \alpha + \eta.$$

Wir lesen hieraus ab: *Die Abbildung des Bereiches B auf den Bereich B' durch die analytische Funktion  $w = f(z)$  ist „winkeltreu“ und hat an der Stelle  $(x, y)$  das „Vergrößerungsverhältnis“  $\sqrt{D(\varphi, \psi)}$ .*

Es bleibt schließlich nur noch übrig, die Frage der „Integration“ einer komplexen Funktion kurz zu berühren. Wir ziehen im Bereiche B von einer Stelle  $z_0 = x_0 + iy_0$  nach einer zweiten Stelle  $z_1 = x_1 + iy_1$  eine Kurve, die eine Bogenlänge hat, und erklären das längs dieser Kurve auszudehnende Integral des Differential  $f(z) dz$  durch:

$$(11) \int_{z_0}^{z_1} f(z) dz = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} (u + iv) (dx + i dy) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} (u dx - v dy) + i \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} (v dx + u dy),$$

wo wir rechter Hand mit reellen „Linienintegralen“ der S. 147 ff. betrachteten Art zu tun haben. Nun ist  $(u \cdot dx - v \cdot dy)$  zufolge der zweiten Gleichung (8) ein „vollständiges“ Differential und  $(v \cdot dx + u \cdot dy)$  zufolge der ersten Gleichung (8). Danach können wir ohne weiteres das auf solche Linienintegrale bezogene Theorem von S. 148 anwenden: *Da der Bereich B nur von „einer“ Randkurve begrenzt sein sollte, also im Sinne von S. 149 „einfach zusammenhängend“ ist, so sind die Werte der Linienintegrale (11) und damit das Integral (11) links für eine „analytische“ Funktion  $f(z)$  allein von den Grenzen  $z_0, z_1$ , aber nicht von der gewählten Integrationsbahn abhängig.*

Der weitere Ausbau aller dieser Sätze gehört indessen in eine ausführliche Theorie der analytischen Funktionen. Ein einführendes Lehrbuch über Differential- und Integralrechnung kann nur bis an die Tore dieses weiten Gebietes führen.

TOWARZYSTWO NAUKOWE WARSZAWSKIE

GABINET MATEMATYCZNY  
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego.

## Register.

(Die Zahlen beziehen sich auf die Seiten des ersten und zweiten Bandes).

- Abbildung II, 101.  
 —, konforme oder winkeltreue II, 102, 406.  
 — mit Umlegung der Winkel II, 103.  
 Abgeleitete Funktion I, 99.  
 — — höherer Ordnung I, 138.  
 Abgeschlossener Bereich I, 94.  
 Abgeschlossenes Intervall I, 14.  
 Abhängige Variable I, 16.  
 Ableitung I, 99.  
 — einer analytischen Funktion II, 405.  
 — höherer Ordnung I, 138.  
 Absolut konvergente Reihe I, 209.  
 Abteilungsweise monotone Funktion I, 16.  
 Abwicklungskurve I, 311.  
 Achsenfläche I, 398.  
 Achsiales Moment II, 207.  
 Addition der Vektoren I, 366.  
 — unendlicher Reihen I, 213.  
 Additionstheorem der Exponentialfunktion I, 40.  
 — des natürlichen Logarithmus I, 40.  
 Additionstheoreme der hyperbolischen Funktionen I, 71.  
 — — trigonometrischen Funktionen I, 60.  
 — komplexer Funktionen II, 395.  
 Algebraische Differentiale (Integration) II, 27.  
 — Funktionen I, 86.  
 — Rechnungen I, 86.  
 Allgemeines Integral einer Differentialgleichung II, 270, 299.  
 Alternierende Reihe I, 207.  
 Amplitude I, 279.  
 — einer Schwingung II, 333.  
 Amslerscher Integrator II, 212.  
 Analysator von Henrici II, 250.  
 — — Mader II, 254.  
 Analytische Funktion II, 404.  
 Archimedische Spirale I, 279.  
 arc sin-Integral II, 3.  
 arc sin-Reihe I, 239.  
 arc tg-Integral II, 3.  
 arc-tg-Reihe I, 238.  
 Argument I, 16.  
 Astroide I, 233.  
 Ausschlag einer Schwingung II, 333.  
 Äußeres Produkt zweier Vektoren II, 219.  
 Basis  $e$  der natürlichen Logarithmen I, 12, 40, 176.  
 Bedingt konvergente Reihe I, 210.  
 Begleitendes Dreikant I, 335.  
 Bereich I, 93.  
 Bernoullische Differentialgleichung II, 278.  
 Beschleunigung I, 364.  
 Beschleunigungspol I, 379.  
 Beschleunigungsvektor I, 367.  
 Beschränkt konvergente Reihe I, 221.  
 Besselsche Funktion erster Art II, 340.  
 Bewegliche Achsenfläche I, 398.  
 — Polkurve I, 374.  
 Beweglicher Polkegel I, 392.  
 Binomialkoeffizient I, 143.  
 Binomialreihe I, 233.  
 Binomischer Lehrsatz I, 143.  
 Binormale einer Raumkurve I, 335.  
 Bogendifferential einer ebenen Kurve I, 112.  
 — — Raumkurve I, 332.  
 Bogenintegral II, 87.  
 — einer ebenen Kurve II, 152.  
 — — Raumkurve II, 154.  
 Bogenlänge einer ebenen Kurve I, 109.  
 Bogenmaß der Winkel I, 53.  
 Bogenmessung einer Evolute I, 310.  
 Brechungsgesetz I, 249.

- Bremsende Kraft bei Schwingungen II, 331.  
 Brennlinie I, 363.  
 Briggsche Logarithmen I, 42.  
 Cauchy - Riemannsche Differentialgleichungen II, 405.  
 Charakteristische Gleichung bei linearen homogenen Differentialgl. II, 325.  
 Clairautsche Differentialgleichung II, 292.  
 Cosinusreihe I, 230.  
 Curl II, 223.  
 Dämpfende Kraft bei Schwingungen II, 331.  
 Dämpfungsfaktor II, 332.  
 Dekadische Logarithmen I, 42.  
 Deutung der Ableitung I, 102.  
 — des bestimmten Integrals II, 54.  
 Diakaustik I, 363.  
 Dichte II, 197.  
 Differential der Funktion I, 108.  
 — des Argumentes I, 106.  
 Differentialgleichung 1. Ordnung  $n$ . Grades II, 291.  
 —, gewöhnliche II, 258.  
 —, gewöhnliche höherer Ordnung II, 298.  
 Differential höherer Ordnung I, 148.  
 Differentialquotient I, 106.  
 — höherer Ordnung I, 148.  
 Differentiation der Potenzreihen I, 228.  
 — impliziter Funktionen I, 159.  
 — zusammengesetzter Funktionen I, 128, 158.  
 Differenz höherer Ordnung I, 144.  
 Differenzenquotient I, 98.  
 — höherer Ordnung I, 147.  
 Dirichlets Konvergenzsatz der Fourierschen Reihen II, 245.  
 Divergente Reihe I, 205.  
 Divergenz des Vektorfeldes II, 222.  
 Doppelintegral II, 97.  
 Doppelpunkt einer ebenen Kurve I, 316.  
 Drahtseil einer Hängebrücke II, 304.  
 Drehachse eines starren Körpers I, 391.  
 Drehpol bei ebener Bewegung I, 374.  
 Drehung eines starren Körpers I, 388.  
 Drei-acht-Regel II, 71.  
 Dreifaches Integral II, 115.  
 Ebene Bewegung I, 372.  
 Echt gebrochene Funktion I, 81.  
 Eigenschwingungen II, 331.  
 Eindeutige Funktion I, 30.  
 Einfache transzendente Funktion I, 88.  
 Einheitsvektor II, 221.  
 Einheitswurzel II, 387.  
 Einhüllende Kurve I, 360.  
 Elektrische Wellen, Differentialgleichung II, 381.  
 Elektrizitätsverteilung auf der Kugel I, 377.  
 Elektromagnetische Felder II, 225.  
 Elementare algebraische Funktionen I, 86  
 — transzendente Funktionen I, 88.  
 Elliptische Flächenkrümmung I, 349.  
 — Integrale II, 152.  
 Energie eines Gases II, 288.  
 Entropie eines Gases II, 289.  
 Entwickelte Funktion I, 31.  
 Enveloppe I, 360.  
 Epizykloide I, 276.  
 Epizykloidenbewegung I, 383.  
 Erzwungene Schwingung II, 332, 335.  
 Eulersche Formeln II, 394.  
 Eulerscher Multiplikator II, 281.  
 Eulersches Integral 2. Art II, 136.  
 Evolvente I, 309.  
 Evolute I, 311.  
 Explizite Funktion I, 31.  
 Exponentialfunktion I, 42.  
 Exponentialreihe I, 230.  
 Extremwerte bei Nebenbedingungen I, 265.  
 Extremwert einer Funktion  $f(x)$  I, 240.  
 — — — mehrerer Variablen I, 255.  
 Exzentrizität, lineare II, 152.  
 —, numerische I, 279.  
 Facettenfläche II, 107.  
 Faktorenzerlegung ganzer Funktionen I, 79.  
 Feste Achsenfläche I, 398.  
 Feste Polkurve I, 374.  
 Fester Polkegel I, 391.  
 Flächendichte II, 199.  
 Flächendifferential II, 120.  
 Flächeninhalt I, 23.  
 Flächenintegral, allgemeines II, 113.  
 Flächenintegral in der Ebene II, 94.  
 Flächensatz bei einer Zentralbewegung I, 370; II, 310.

- Fläche, Parameterdarstellung I, 323.  
 — von konstantem Krümmungsmaß I, 356.  
 Flexion einer Raumkurve I, 338.  
 Flexionsradius I, 341.  
 Fouriersche Reihe II, 238.  
 Frenetsche Formeln I, 343.  
 Freie Schwingungen II, 331, 333.  
 Fundamentalsatz der Algebra I, 76.  
 Funktion I, 15.  
 Funktionaldeterminante II, 102, 116.  
 Funktion mehrerer Variablen I, 93.  
  
**Gammafunktion** II, 136.  
 Ganze rationale Funktion I, 76.  
 Gaußsche Differentialgleichung II, 340.  
 — Näherungsberechnung bestimmter Integrale II, 81.  
 Gaußscher Integralsatz II, 140, 142.  
 Gaußsches Fehlerintegral II, 128.  
 — Krümmungsmaß I, 353.  
 Gedämpfte Schwingungen II, 331, 333.  
 Geometrische Deutung der Ableitung I, 102, 155.  
 — — einer Funktion I, 22.  
 Geometrische Reihe I, 207.  
 Gerade Funktion I, 27.  
 Geradenschar des Hyperboloids I, 324.  
 Geschwindigkeit I, 364.  
 Geschwindigkeitsachse I, 391.  
 Geschwindigkeitsvektor I, 364.  
 Gezupfte Saite II, 347.  
 Gleichmäßige Konvergenz I, 219.  
 Gleichmäßig stetige Funktion I, 17.  
 Gradmaß der Winkel I, 53.  
 Graphische Integration II, 41.  
 Gravitationsfeld II, 226.  
 Gravitationsgesetz II, 312.  
 Greensche Sätze II, 231.  
 Grenze einer Zahlenreihe I, 14.  
 Grundintegral II, 3.  
 Grundton einer Saite II, 345.  
 Guldinscher Satz II, 202.  
  
**Halbparameter** eines Kegelschnitts I, 279.  
 Harmonische Analyse II, 249.  
 Hauptkrümmungsradien I, 352.  
 Hauptnormale einer Raumkurve I, 334.  
 Hauptsätze der Wärmetheorie II, 286.  
 Hauptschnitte einer Fläche I, 352.  
  
 Hauptwert der Funktion  $\ln z$  II, 397.  
 Hauptwerte der zyklometrischen Funktionen I, 63.  
 Häufungsstelle eines Punktsystems I, 5.  
 Herzkurve I, 283.  
 Höhenkurven I, 358.  
 Höhere transzendente Funktionen II, 27, 39.  
 Hüllkurve I, 360.  
 Hyperbelfunktionen I, 74.  
 Hyperbolische Flächenkrümmung I, 349.  
 — Funktionen I, 80.  
 — Spirale I, 280.  
 Hypozykloide I, 278.  
  
**Implizite Funktion** I, 31.  
 Inneres Produkt zweier Vektoren II, 219.  
 Indikatrix eines Flächenpunktes I, 353.  
 Instantane Drehachse I, 391.  
 Integral, bestimmtes II, 50.  
 Integralcosinus II, 40.  
 Integrale mit Parametern II, 132.  
 — im komplexen Gebiete II, 406.  
 Integralkurve einer Differentialgl. II, 259.  
 Integrallogarithmus II, 40.  
 Integralsatz von Gauß II, 140, 142.  
 — — Stokes II, 146.  
 Integralsätze der Kugelfunktionen II, 373.  
 Integralsinus II, 132.  
 Integral, unbestimmtes II, 2, 4.  
 Integrationsbereich II, 94.  
 Integrationsgrenzen II, 51.  
 Integrationsintervall II, 51.  
 Integrationskonstante II, 4.  
 Integration vollständiger Differentiale II, 146.  
 Integralkurve von Abdank II, 44.  
 Integratoren II, 212.  
 Integrator von Hele-Shaw II, 217.  
 Integrierender Faktor II, 281.  
 Interpolation durch ganze Funktionen I, 170.  
 Interpolationsformel I, 170.  
 Intervall I, 14.  
 Inverse Funktion I, 29.  
 Inversion einer Funktion I, 29.  
 Irrationale Punkte der Zahlenlinie I, 3.  
 — Zahlen I, 3.  
 Isogonale Trajektorien II, 295.  
 Isolierte Punkte ebener Kurven I, 317.

- Isothermen II, 355.  
 Isotrope Körper II, 356.
- K**ardioide I, 283.  
 Katakaustik I, 363.  
 Keplersche Gesetze II, 313.  
 Kettenlinie I, 313.  
 —, Differentialgleichung II, 306.  
 Kottenregel I, 128.  
 Klangfiguren II, 353.  
 Knotenlinie I, 388.  
 Knotenlinie bei Membranschwingungen II, 353.  
 Komplanatation krummer Flächen II, 178.  
 Komplexe Funktionen II, 392.  
 — Potenzreihen II, 391.  
 — Reihen II, 388.  
 — Zahlen II, 382.  
 Konchoide I, 381.  
 Konchoidenbewegung I, 380.  
 Konfokale Kegelschnitte II, 296.  
 Konforme Abbildung II, 102, 406.  
 Konische Schraubenlinie I, 330.  
 Konjugierte Kreisscharen II, 296.  
 Konjugiert komplexe Zahlen II, 383.  
 Konkavität ebener Kurven I, 296.  
 Konstante I, 13.  
 Konvergente Reihen I, 205.  
 Konvergenzgrenzen I, 221.  
 Konvergenzintervall I, 221.  
 Konvergenzkennzeichen I, 216.  
 Konvergenzkreis II, 392.  
 Konvexität ebener Kurven I, 296.  
 Koppel beim Gelenkviereck I, 386.  
 Kraftlinien II, 230.  
 Kreisfunktionen I, 54.  
 Kreisscharen II, 296.  
 Kreisschnitte des Ellipsoids I, 272, 359.  
 Krümmung einer ebenen Kurve I, 302.  
 — — Fläche I, 353.  
 — — Raumkurve I, 337.  
 Krümmungskreis einer ebenen Kurve I, 303.  
 — — Raumkurve I, 342.  
 Krümmungsmittelpunktskurve I, 309.  
 Krümmungsmittelpunkt I, 303.  
 Krümmungsradius einer ebenen Kurve I, 303.  
 — — Raumkurve I, 341.  
 Kubatur räumlicher Bereiche II, 188.
- Kugelfunktion, allgemeine II, 370.  
 —, Entwicklung nach  $-n$  II, 376.  
 Kugelfunktion zweiter Art II, 339.  
 Kurbelmechanismus I, 386.  
 Kurbelwinkel I, 386.  
 Kurve als Bild einer Funktion I, 22.  
 Kurvenintegral II, 91.
- Lagrangesche Interpolationsformel I, 170.  
 Laplacesche Gleichung II, 229, 365.  
 — — in Polarkoordinaten II, 366.  
 — — — Zylinderkoordinaten II, 366.  
 Laplace-Poissonsche Gleichung II, 234.  
 Legendresche Differentialgleichung II, 337.  
 — Kugelfunktionen II, 339.  
 Lemniskate I, 295.  
 Lineare Differentialgleichungen II, 277.  
 — — höherer Ordnung II, 319.  
 — —, nicht homogene II, 326.  
 — Funktionen I, 76.  
 — Unabhängigkeit II, 320.  
 Lineares Moment II, 207.  
 Liniendichte II, 199.  
 Linienelement II, 91.  
 Logarithmen, Berechnung I, 180.  
 Logarithmische Differentiation I, 129.  
 — Skala I, 45.  
 — Spirale I, 281.  
 Logarithmisches Dekrement II, 334.  
 Logarithmus I, 42.  
 Logarithmusintegral II, 3.  
 Logarithmusreihe I, 231.  
 Loxodrome II, 157.
- M**ac Laurinsche Reihe I, 229.  
 Mac Laurinscher Lehrsatz I, 174.  
 Masse II, 197.  
 Massenmittelpunkt II, 199.  
 Materieller Punkt II, 199.  
 Maximum einer Funktion  $f(x)$  I, 240.  
 — — — mehrerer Variablen I, 255.  
 Maxwellsche Gleichungen II, 225.  
 Mechanische Auswertung bestimmter Integrale II, 76.  
 — Integration II, 44.  
 — Wärmetheorie II, 286.  
 Mehrdeutige Funktionen I, 30.  
 Mehrfach zusammenhängende Bereiche II, 149.

- Membranschwingungen II, 349.  
 Meusnierscher Satz I, 347.  
 Minimum einer Funktion  $f(x)$  I, 240.  
 — — — mehrerer Variablen I, 255.  
 Mittelwertsatz I, 133.  
 —, besonderer I, 134.  
 — der Integralrechnung II, 57.  
 Mittlere Krümmung einer Fläche I, 353.  
 Modul der konformen Abbildung II, 401.  
 — eines Logarithmensystems I, 42.  
 Moivrescher Lehrsatz II, 386.  
 Moment II, 207.  
 Momentenplanimeter II, 212.  
 Monotone Funktion I, 16.  
 — Variable I, 15.  
 — Zahlenreihe I, 7.  
 Monotonie der Funktionen I, 136.  
 Multiplikation der Vektoren II, 219.  
 — unendlicher Reihen I, 214.  
 Muschellinie I, 381.  
  
 Nabelpunkt einer Fläche I, 348.  
 Natürliche Exponentialfunktion I, 40  
 — Logarithmen I, 40.  
 — Schwingungen II, 331, 333.  
 Näherungsfunktion I, 169.  
 Näherungsrechnungen bei bestimmten  
 Integralen II, 69.  
 Newtonsche Näherungsformel I, 187.  
 Nichtabgeschlossener Bereich I, 94.  
 Nichtabgeschlossenes Intervall I, 14.  
 Nichtelementare Integrale II, 39.  
 Niveauflächen II, 229.  
 Niveaukurven II, 358.  
 Normalebene einer Raumkurve I, 327.  
 Normale einer ebenen Kurve I, 284, 287,  
 291.  
 — — Fläche I, 327.  
 Normalschnitt einer Fläche I, 347.  
 Nullpunkt einer ganzen Funktion I, 80.  
 — — Funktion I, 191.  
  
 Obertöne einer Saite II, 345.  
 Orthogonale Trajektorien II, 295.  
 Östliche Länge II, 155.  
 Oszillierende Reihen I, 206.  
  
 Parabolische Flächenkrümmung I, 350  
 Parallellkurve I, 311.  
  
 Parameterdarstellung der Flächen I, 323.  
 Partialbruchzerlegung I, 82.  
 Partielle Ableitung I, 150.  
 — — höherer Ordnung I, 161.  
 — Differentialgleichungen II, 341 ff.  
 — Differentialgleichung des integrieren-  
 den Faktors II, 284.  
 — Differenz höherer Ordnung I, 162.  
 — Integration II, 13.  
 Partieller Differentialquotient I, 150.  
 — — höherer Ordnung I, 161.  
 Partielles Differential I, 151.  
 — — höherer Ordnung I, 164.  
 Partikuläres Integral II, 270, 299.  
 Pascalsche Kurven I, 283.  
 Pendelbewegung II, 307.  
 Perizykloide I, 283.  
 Physikalische Deutung der Ableitung  
 I, 104.  
 — — einer Funktion I, 22.  
 Planares Moment II, 207.  
 Planetenbewegung II, 312.  
 Polardarstellung der komplexen Zahlen  
 II, 382, 385.  
 Polargleichung der Kegelschnitte I, 279.  
 Polares Moment II, 207.  
 Polarkoordinaten in der Ebene I, 279.  
 — im Raume II, 155.  
 Polarplanimeter II, 169.  
 Poldistanz II, 155.  
 Polkegel I, 391.  
 Polkurve I, 374.  
 Potential II, 224.  
 Potentialniveaufläche II, 229  
 Potenz  $x^n$  I, 27.  
 Potenzintegral II, 3.  
 Potenzregel I, 99.  
 Potenzreihe I, 221.  
 —, komplexe II, 391.  
 Präzession I, 393.  
 Produktregel I, 121, 130.  
 Pseudosphäre I, 356.  
  
 Quadratisches Moment II, 207.  
 Quadratur ebener Kurven II, 162.  
 Quadraturen, Lösung von Differential-  
 gleichungen durch — II, 271.  
 Quellenfeld II, 222.  
 Quelle im Vektorfelde II, 221.  
 Quotientenregel I, 122

- Radiusvektor I, 279.  
 Rationale Differentiale, Integration II, 19.  
 — Funktion I, 80.  
 — Punkte I, 3.  
 — Rechnungen I, 1.  
 — Zahlen I, 1.  
 Raumdifferential II, 124.  
 Raumintegral II, 114.  
 Raumkurven, Darstellung I, 321.  
 Rechenschieber I, 47.  
 Rechtsschraube I, 336.  
 Reelle Zahlen I, 3.  
 Reguläre Präzession I, 393.  
 Rektifikation der Evoluten I, 310.  
 — des Kreises I, 49.  
 — ebener Kurven II, 152.  
 Rektifizierende Ebene I, 334.  
 Resonanz II, 336.  
 Rollescher Satz I, 132.  
 Rotation im Vektorfelde II, 223.  
 Rückkehrpunkt I, 317.  
 Rückkehrtangente I, 317.  
  
 Saitenschwingungen II, 341.  
 Scheitelkrümmungskreise der Ellipse I, 305.  
 Schmiegeungsebene I, 334.  
 Schraubenachse I, 397.  
 Schraubenbewegung I, 397.  
 Schraubenfläche I, 323.  
 Schraubenlinie I, 321.  
 Schubkurbelmechanismus I, 371.  
 Schwerkraftfeld II, 226.  
 Schwerpunkt II, 199.  
 Schwingende Saite, Differentialgleichung II, 343.  
 Schwingungsbewegung, Differentialgleichung II, 332.  
 Schwingungsdauer des Pendels II, 309.  
 Schwingungsvorgänge II, 331.  
 Seilkurve II, 305.  
 Selbstinduktion elektrischer Ströme II, 279.  
 Semipolarkoordinaten II, 181.  
 Senke im Vektorfelde II, 221.  
 Simpsonsche Regel II, 71.  
 Singuläre Lösung II, 291.  
 — Punkte ebener Kurven I, 317.  
 Sinuskurve I, 56, 89.  
 Sinusreihe I, 230.  
  
 Skalar II, 219.  
 Skalares Produkt zweier Vektoren II, 219.  
 Skalarfeld II, 222.  
 Spezifische Wärme II, 286.  
 Sphärische Kurven II, 157.  
 — Zykloide I, 330.  
 Spiralen I, 229.  
 Spitzen ebener Kurven I, 317.  
 Sternkurve I, 283.  
 Stetige Funktion I, 17, 19 ff.  
 — Variable I, 14.  
 — Vieldeutigkeit I, 96.  
 Stetigkeitssätze I, 20 ff.  
 Stetigkeitsunterbrechungen I, 91.  
 Stokesscher Satz II, 146.  
 Störende Kraft bei Schwingungen II, 332.  
 Störungsfunktion II, 332.  
 Subnormale I, 287, 291.  
 Subtangente I, 287, 291.  
 Subtraktion unendlicher Reihen I, 213.  
 Substitution einer neuen Integrationsvariablen II, 7.  
  
 Tangente einer ebenen Kurve I, 284, 287, 291.  
 — — Raumkurve I, 325.  
 Tangentialbeschleunigung I, 368.  
 Tangentialebene einer Fläche I, 325.  
 Taylorsche Reihe I, 229.  
 Taylorsche Lehrsatz I, 174.  
 — — für Funktionen mehrerer Variablen I, 204.  
 Temperaturgefälle II, 356.  
 Temperaturgradient II, 356.  
 Torsion I, 338.  
 Torsionsradius I, 341.  
 Totale Krümmung einer Fläche I, 353.  
 — — — Raumkurve I, 345.  
 Totales Differential I, 151 ff.  
 — — höherer Ordnung I, 167.  
 Trajektorien einer Kurvenschar II, 295  
 Traktrix' I, 314.  
 Transzendente Funktion I, 87.  
 Trapezregel II, 71.  
 Trägheitsmoment II, 268.  
 Trennung der Variablen bei Differentialgleichungen II, 270.  
 Trigonometrische Funktion I, 54.  
 — —, Berechnung I, 178.  
 — Reihen II, 236.

- Umdrehungsfläche, Inhalt II, 181.  
 Umdrehungskörper, Inhalt II, 193.  
 Umgekehrte Funktion I, 29.  
 Umkehrregel I, 113.  
 Umkehrung einer Funktion I, 29.  
 Umordnung der Integrationsfolge II, 100.  
 Unbedingt konvergente Reihe I, 210.  
 Unbeschränkte Variable I, 13.  
 Unbeschränkt konvergente Reihe I, 221.  
 Unbestimmte Gestalten von Funktionen I, 196.  
 Unbestimmte Multiplikatoren bei Berechnung von Extremwerten I, 267.  
 Unecht gebrochene Funktion I, 81.  
 Uneigentliche Flächenintegrale II, 126.  
 — Integrale II, 61 ff.  
 Unendliche Reihe I, 205.  
 — — mit komplexen Gliedern II, 388.  
 Unendlichkeitspunkt I, 31, 193.  
 Unentwickelte Funktion I, 31.  
 Ungerade Funktion I, 27.  
  
 Variable I, 13.  
 Variation der Konstanten II, 277, 326.  
 Vektor I, 365.  
 Vektorenaddition I, 366.  
 Vektorfeld II, 220.  
 Vektoriellcs Produkt zweier Vektoren II, 219.  
 Veränderliche I, 13.  
 Vergrößerungsverhältnis der konformen Abbildung II, 401.  
 Vivianische Fläche II, 179.  
  
 Vollständige Induktion I, 9.  
 Vollständiges Differential I, 151 ff.  
 — — höherer Ordnung I, 167.  
  
 Wärmeleitfähigkeit II, 356.  
 Wärmeleitung, Differentialgl. II, 358.  
 Wärmewelle II, 360.  
 Wechselkreis I, 377.  
 Wendekreis I, 377.  
 Wendepol I, 379.  
 Wendepunkt I, 297.  
 Wendetangente I, 297.  
 Winkeltreue Abbildung II, 102, 406.  
 Wirbelfeld II, 224.  
 Wirbelfreies Feld II, 224.  
 Wirbel im Vektorfelde II, 223.  
 Wurzel einer komplexen Zahl II, 388.  
 — — Gleichung I, 77.  
  
 Zahlenebene I, 93.  
 Zahlenlinie I, 3.  
 Zahlenraum I, 97.  
 Zentralbewegungen I, 369; II, 309.  
 Zentripetalbeschleunigung I, 368.  
 Zusammengesetzte transzendente Funktionen I, 88.  
 Zustandsgleichung II, 286.  
 Zykloide I, 275.  
 Zykloidenbewegung I, 383, 393.  
 Zyklometrische Funktionen I, 54, 60.  
 Zylinderfunktionen II, 340.  
 Zylinderkoordinaten II, 181.  
 Zylindrische Schraubenlinie I, 321.

~~TOWARZYSTWO NAUKOWE WARSZAWSKIE~~



Von demselben Verfasser sind ferner erschienen:

**Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung** und ihre Anwendungen. Bd. I. Differentialrechnung. Mit 129 Figuren, einer Sammlung von 253 Aufgaben und einer Formeltafel. [XII u. 399 S.] gr. 8. 1918. Geh. M. 14.—, geb. M. 15.—

**Kurzgefaßte Vorlesungen über verschiedene Gebiete der höheren Mathematik mit Berücksichtigung der Anwendungen.** 2 Teile. I. Teil: Analytisch-funktionentheoretischer Teil. Mit 102 in den Text gedruckten Figuren. [IX u. 520 S.] gr. 8. 1900. Geb. M. 14.— II. Teil: Algebra und Geometrie. [In Vorb.]

**Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen.** In 3 Teilen. I. Teil: Die funktionentheoretischen und analytischen Grundlagen. Geh. M. 22.—, geb. M. 24.—

**Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen.** Von R. Fricke und F. Klein. In 2 Bänden. Mit vielen Figuren. gr. 8. Geh. I. Band: Die gruppentheoretischen Grundlagen. [XIV u. 634 S.] 1897. M. 22.— II. Band: Die funktionentheoretischen Ausführungen und die Anwendungen. [XIV u. 668 S.] 1912. M. 28.— Auch in 3 Lieferungen: I. Engere Theorie der automorphen Funktionen. [282 S.] 1901. M. 10.— II. Kontinuitätsbetrachtungen im Gebiete der Hauptkreisgruppen. [155 S.] 1911. M. 7.— III. Direkte Beweismethoden der Fundamentaltheoreme und Anhang. [229 S.] 1912. M. 11.—

**Analytische Geometrie.** Mit 96 Figuren im Text. [VI u. 135 S.] 8. 1915. Geb. M. 2.80.

**Höhere Analysis für Ingenieure.** Von Dr. J. Perry F. R. S., Prof. am Royal College of Science zu London. Autorisierte deutsche Bearbeitung von R. Fricke u. F. Sticking, Prof. an der Bergakademie in Klausthal im Harz. 2. Aufl. Mit 106 Figuren. [X u. 464 S.] gr. 8. 1910. Geb. M. 13.—

**Über angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an den höheren Schulen.** Nebst Erläuterung der bezüglichen Göttinger Universitätseinrichtungen. Vorträge, gehalten in Göttingen Ostern 1900 bei Gelegenheit des Ferienkurses für Oberlehrer der Mathematik und Physik. Gesammelt von Geh. Regierungsrat Dr. F. Klein, Prof. an der Universität Göttingen, und Geh. Regierungsrat Dr. E. Riecke, Prof. an der Universität Göttingen. Mit einem Wiederabdruck verschiedener einschlägiger Aufsätze von F. Klein. Mit 84 Textfiguren. [VI u. 252 S.] gr. 8. 1900. Geb. M. 6.—

**Die mathematische Ausbildung der Architekten, Chemiker und Ingenieure an den deutschen Technischen Hochschulen.** Von Geh.-Rat Dr. P. Stäckel, Professor an der Univ. Heidelberg. [XIII u. 198 S.] gr. 8. 1915. (IMUK B. IV. Band, Heft 9.) Steif geh. M. 6.80.

**Taschenbuch für Mathematiker und Physiker.** Unter Mitwirkung namhafter Fachgenossen herausg. von Hofrat Dr. F. Auerbach, Prof. in Jena, und Dr. R. Rothe, Prof. in Berlin. I. Jahrg. 1909. Mit Bildnis Lord Kelvins. [XLIV u. 450 S., unbedruckt 12 S.] 8. Geb. M. 6.— II. Jahrg. 1911. Mit Bildnis H. Minkowskis. [IX u. 567 S.] 8. Geb. M. 7.— III. Jahrg. 1913. Mit Bildnis Fr. Kohlrauschs. [X u. 463 S.] 8. Geb. M. 6.— IV. Jahrg. [In Vorb.]

Hierzu Teuerungszuschläge des Verlags und der Buchhandlungen.

**Verlag von B.G. Teubner in Leipzig und Berlin**

**Vorlesungen über numerisches Rechnen.** Von Geh. Reg.-Rat Dr. *J. Lüroth*, weil. Prof. a. d. Univ. Freiburg i. B. Mit 14 Fig. [VI u. 194 S.] gr. 8. 1900. Geh. M. 8.—

**Lehrbuch der Differenzenrechnung.** Von Dr. *D. Selivanoff*, Prof. a. d. Univ. St. Petersburg. [VI u. 92 S.] gr. 8. 1904. (TS 13.) Geb. M. 4.—

**Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung.** Ursprünglich Übersetzung des Lehrbuches von *J. A. Serret*, seit der 3. Aufl. gänzlich neu bearbeitet von Geh. Reg.-Rat Dr. *G. Scheffers*, Prof. an der Techn. Hochschule zu Berlin. gr. 8. I. Band: Differentialrechnung. Mit 70 Fig. [XVI u. 670 S.] 1915. Geh. M. 13.—, geb. M. 14.— II. Band: Integralrechnung. 4. u. 5. Aufl. Mit 108 Fig. [XIV u. 639 S.] 1911. Geb. M. 13.— III. Band: Differentialgleichungen und Variationsrechnungen. 4. u. 5. Aufl. Mit 64 Fig. [XIV u. 735 S.] 1914. Geh. M. 13.—, geb. M. 14.—

**Vorlesungen über Differential- u. Integralrechnung.** Von Hofrat Dr. *E. Czuber*, Prof. a. d. Techn. Hochschule Wien. gr. 8. I. Bd. 3., sorgfältig durchges. Aufl. Mit 125 Fig. [XIV u. 605 S.] 1912. II. Band. 3., sorgfältig durchges. Aufl. Mit 103 Fig. [X u. 590 S.] 1912. Geb. je M. 12.—

**Sammlung von Aufgaben zur Anwendung der Differential- und Integralrechnung.** Von Geh. Hofrat Dr. *F. Dingeldey*, Prof. a. d. Techn. Hochschule Darmstadt. I. Teil: Aufgaben zur Anwendung der Differentialrechnung. Mit 99 Fig. [V u. 202 S.] gr. 8. 1910. Geh. M. 6.—, geb. M. 7.— II. Teil: Aufgaben zur Anwend. der Integralrechnung. Mit 96 Fig. [IV u. 382 S.] gr. 8. 1913. Geh. M. 12.—, geb. M. 13.—

**Theorie der elliptischen Funktionen.** Von Geh.-Rat Dr. *M. Krause*, Prof. an der Techn. Hochschule Dresden. Mit 25 Figuren. [VI u. 186 S.] 8. 1912. (SMPL 13.) Geh. M. 3.60, geb. M. 4.—

**Die Theorie der Besselschen Funktionen.** Von Realgymn.-Prof. Dr. *P. Schafheitlin* in Berlin. Mit 1 Figurentafel. [V u. 128 S.] 8. 1908. (SMPL 4.) Kart. M. 2.80, geb. M. 3.20.

**Konforme Abbildung.** Von *L. Lewent*, weil. Oberl. in Berlin. Mit 40 Fig. [VI u. 118 S.] 8. 1912. (SMPL 14.) Geh. M. 2.80, geb. M. 3.20.

**Vorlesungen über die Vektorenrechnung.** Mit Anwendung auf Geometrie, Mechanik u. math. Physik. Von Geh. Bergrat Dr. *E. Jahnke*, Prof. a. d. Techn. Hochschule Berlin. Mit 32 Fig. [XII u. 235 S.] gr. 8. 1905. Geb. M. 5.60.

**Einführung in die Vektoranalysis.** Von Prof. Dr. *R. Gans*, Direktor der Physik. Hochschule La Plata. 3. Aufl. Mit 36 Fig. [VIII u. 131 S.] gr. 8. 1913. Geh. M. 3.40, geb. M. 4.—

**Die Vektoranalysis u. ihre Anwendung. i. d. theoretischen Physik.** Von Dr. *W. v. Ignatowsky* in Paris. I. Die Vektoranalysis. Mit 27 Fig. [VIII u. 112 S.] 8. 1909. Geh. M. 2.60, geb. M. 3.— II. Anwendung der Vektoranalysis in der theoretischen Physik. Mit 14 Fig. [IV u. 123 S.] 8. 1910. (SMPL 6.) Geh. M. 2.60, geb. M. 3.—

**Funktionentafeln mit Formeln und Kurven.** Von Geh. Bergrat Dr. *E. Jahnke*, Prof. a. d. Techn. Hochschule Berlin, u. Dr. *F. Emde*, Prof. a. d. Techn. Hochschule Stuttgart. Mit 53 Fig. [XII u. 176 S.] gr. 8. 1909. (SMPL 5.) Geb. M. 6.—

**Analytische Geometrie der Ebene.** Von Geh. Reg.-Rat Dr. *C. Runge*, Prof. an der Univ. Göttingen. Mit 75 Fig. [IV u. 198 S.] gr. 8. 1908. Geb. M. 6.—

Hierzu Teuerungszuschläge des Verlags und der Buchhandlungen.

**Verlag von B.G. Teubner in Leipzig und Berlin**

**Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung in rein geometrischer Darstellung.** Von Dr. *W. Schell*, weil. Prof. am Polytechn. Karlsruhe. 3. Aufl. von Dr. *E. Salkowski*, Prof. a. d. Techn. Hochsch. Berlin. Mit 66 Fig. [XI u. 196 S.] gr. 8. 1914. Geh. M. 8.—

**Lehrbuch der darstellenden Geometrie** für Technische Hochschulen. Von Hofrat Dr. *E. Müller*, Prof. a. d. k. k. Techn. Hochsch. Wien. I. Bd. 2. Aufl. Mit Fig. u. Tafeln. gr. 8. 1918. Geh. ca. M. 15.—, geb. ca. M. 16.— II. Bd. Mit 328 Fig. [X u. 361 S.] 1916. Geh. M. 12.80, geb. M. 14.— II. Band auch in 2 Hefen erhältlich: 1. Heft. Mit 140 Fig. [VII u. 128 S.] 1912. Geh. M. 4.40. 2. Heft. Mit 188 Fig. [VII u. 232 S.] 1916. Geh. M. 8.40.

**Über die Anwendungen der darstellenden Geometrie**, insbes. üb. die Photogrammetrie. Von Geh. Reg.-Rat Dr. *F. Schilling*, Prof. a. d. Techn. Hochsch. Danzig. Mit 151 Fig. u. 5 Doppeltaf. [VI u. 196 S.] gr. 8. 1904. Geh. M. 5.—

**Darstellende Geometrie des Geländes.** Von Dr. *R. Rothe*, Prof. a. d. Techn. Hochsch. Berlin. Mit 82 Fig. [IV u. 67 S.] 8. 1914. (MPB 14.) Steif geb. M. 1.—

**Das militärische Aufnehmen.** Von *B. Schulze*, Generalmajor u. Chef der Topogr. Abtlg. der Landesaufnahme, Gr.-Lichterfelde. Mit 129 Abb. [XIII u. 305 S.] gr. 8. 1903. Geb. M. 8.—

**Lehrbuch der Vermessungskunde.** Von Geh. Reg.-Rat Dr. *A. Baule*, Prof. an der Kgl. Forstakademie Hann.-Münden. 2., erw. u. umg. Aufl. Mit 280 Fig. [VIII u. 471 S.] gr. 8. 1901. Geb. M. 8.80.

**Geodäsie.** Eine Anleitung zu geodätischen Messungen für Anfänger mit Grundzügen der direkten Zeit- und Ortsbestimmung. Von Dr. *H. Hohenner*, Prof. an der Techn. Hochschule Darmstadt. Mit 216 Abb. [XII u. 347 S.] gr. 8. 1910. Geb. M. 12.—

**Grundzüge der Geodäsie** mit Einschluß der Ausgleichsrechnung. Von Dr. *M. Näbauer*, Prof. a. d. Techn. Hochsch. Braunschweig. Mit 277 Fig. [XVI u. 420 S.] 8. 1915. (Handb. d. ang. Math. Bd. 3.) Geh. M. 9.—, geb. M. 9.60.

**Leitfaden zum graphischen Rechnen.** Von Dr. *R. Mehmke*, Prof. a. d. Techn. Hochsch. Stuttgart. Mit 121 Fig. und 1 Additions- und Subtraktionskurve als Beilage. [VIII u. 152 S.] 8. 1917. (SMPL 19.) Geh. M. 4.80, geb. M. 5.40.

**Graphische Methoden.** Von Geh. Reg.-Rat Dr. *C. Runge*, Prof. a. d. Univ. Göttingen. Mit 94 Fig. [IV u. 142 S.] 8. 1915. (SMPL 18.) Geh. M. 4.40, geb. M. 5.—

**Die graphische Darstellung.** Von Hofrat Dr. *F. Auerbach*, Prof. a. d. Univ. Jena. Mit 100 Fig. [VI u. 97 S.] 8. 1914. (ANuG 437.) Geh. M. 1.20, geb. M. 1.50.

**Praktische Analysis.** Von Dr. *H. v. Sanden*, Priv.-Doz. a. d. Univ. Göttingen. Mit 30 Fig. [XIX u. 185 S.] 8. 1914. (Handb. d. ang. Math., Bd. I.) Geh. M. 3.60, geb. M. 4.20.

**Die mathematischen Instrumente.** Von Geh. Reg.-Rat Dr. *A. Galle*, Prof. am Kgl. Geodät. Inst. in Potsdam. Mit 86 Abb. u. Fig. [VI u. 187 S.] 8. 1912. (SMPL 15.) Steif geb. M. 4.40, geb. M. 4.80.

**Lehrbuch d. elementaren prakt. Geometrie (Vermessungskunde).** Bd. I: Feldmessen und Nivellieren. Von Dr. *E. Hanmer*, Prof. a. d. Kgl. Techn. Hochsch. Stuttgart. Mit 500 Fig. [XX u. 766 S.] gr. 8. 1911. Geh. M. 22.—, geb. M. 24.— [Band II in Vorb.]

Hierzu Teuerungszuschläge des Verlages und der Buchhandlungen.

Verlag von B.G. Teubner in Leipzig und Berlin

GABINET MATEMATYCZNY

Towarzystwa [www.reinholdkoprowskiego](http://www.reinholdkoprowskiego)

Formeltabelle.

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1},$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x|,$$

$$\int e^x dx = e^x,$$

$$\int b^x dx = \frac{b^x}{\ln b},$$

$$\int \sin x dx = -\cos x,$$

$$\int \cos x dx = \sin x,$$

$$\int \operatorname{Sin} x dx = \operatorname{Cos} x,$$

$$\int \operatorname{Cos} x dx = \operatorname{Sin} x,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{Sin}^2 x} = -\operatorname{Cotg} x,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{Cos}^2 x} = \operatorname{Tg} x,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arc} \sin \left( \frac{x}{a} \right),$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{x}{a} \right),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln (x + \sqrt{a^2 + x^2}),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}|,$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|,$$

$$\int \frac{\psi'(x) dx}{\psi(x)} = \ln |\psi(x)|,$$

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln |x-a|,$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln |ax+b|,$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sqrt{a^2 + x^2},$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2},$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = -\frac{1}{a} \operatorname{arc} \sin \left( \frac{a}{x} \right),$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + a^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} \right|,$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right|,$$

$$\int \frac{dx}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{1}{ad-bc} \ln \left| \frac{ax+b}{cx+d} \right|,$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}},$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x|,$$

$$\int \operatorname{cotg} x dx = \ln |\sin x|,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \ln |\operatorname{tg} x|,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|,$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|,$$

$$\int \operatorname{Tg} x dx = \ln \operatorname{Cos} x,$$

$$\int \operatorname{Cotg} x dx = \ln |\operatorname{Sin} x|,$$

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2 + x^2}},$$

$$\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$\int \frac{dx}{a \sin^2 x + b \cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{tg} x \right),$$

$$\int \frac{dx}{a \sin^2 x - b \cos^2 x} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \left| \frac{\sqrt{a} \sin x - \sqrt{b} \cos x}{\sqrt{a} \sin x + \sqrt{b} \cos x} \right|,$$

$$\int \frac{dx}{\alpha - \beta \cos x} = \frac{2}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \sqrt{\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right), \quad (\alpha > |\beta|),$$

$$\int \frac{dx}{\alpha - \beta \cos x} = \frac{2}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{\beta + \alpha \sin \frac{x}{2}} - \sqrt{\beta - \alpha \cos \frac{x}{2}}}{\sqrt{\beta + \alpha \sin \frac{x}{2}} + \sqrt{\beta - \alpha \cos \frac{x}{2}}} \right|, \quad (\beta > |\alpha|),$$

$$\int \varphi(x) \psi(x) dx = \varphi(x) \int \psi(x) dx - \int (\varphi'(x) \int \psi(x) dx) dx,$$

$$\int e^{ax} \cos bx dx = e^{ax} \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2},$$

$$\int e^{ax} \sin bx dx = e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2},$$

$$\int \frac{dx}{ax^2 + 2bx + c} = \frac{1}{2\sqrt{b^2 - ac}} \ln \left| \frac{ax + b - \sqrt{b^2 - ac}}{ax + b + \sqrt{b^2 - ac}} \right|, \quad (b^2 > ac),$$

$$\int \frac{dx}{ax^2 + 2bx + c} = \frac{1}{\sqrt{ac - b^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{ax + b}{\sqrt{ac - b^2}} \right), \quad (b^2 < ac),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln |ax + b + \sqrt{a\sqrt{ax^2 + 2bx + c}}|, \quad (a > 0),$$

$$\int \sqrt{ax^2 + 2bx + c} dx = \frac{(ax+b)\sqrt{ax^2 + 2bx + c}}{2a} - \frac{b^2 - ac}{2a\sqrt{a}} \ln |ax + b + \sqrt{a\sqrt{ax^2 + 2bx + c}}|,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \operatorname{arc} \sin \left( \frac{ax + b}{\sqrt{b^2 - ac}} \right), \quad (a < 0),$$

$$\int \sqrt{ax^2 + 2bx + c} dx = \frac{(ax+b)\sqrt{ax^2 + 2bx + c}}{2a} + \frac{b^2 - ac}{2a\sqrt{-a}} \operatorname{arc} \sin \left( \frac{ax + b}{\sqrt{b^2 - ac}} \right),$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}} = \frac{1}{a} \sqrt{ax^2 + 2bx + c} - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}},$$

$$\int x \sqrt{ax^2 + 2bx + c} dx = \frac{1}{3a} (\sqrt{ax^2 + 2bx + c})^3 - \frac{b}{a} \int \sqrt{ax^2 + 2bx + c} dx,$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)\sqrt{ax^2 + b}} = -\frac{1}{2\sqrt{a-b}} \ln \left| \frac{\sqrt{ax^2 + b} - x\sqrt{a-b}}{\sqrt{ax^2 + b} + x\sqrt{a-b}} \right|, \quad a > b),$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)\sqrt{ax^2 + b}} = -\frac{1}{\sqrt{b-a}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{\sqrt{ax^2 + b}}{x\sqrt{b-a}} \right), \quad (b > a)$$

TOWARZYSTWO NAUKOWE WARSZAWSKIE

~~TOWARZYSTWO NAUKOWE WARSZAWSKIE~~

~~GABINET MATEMATYCZNY~~  
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego



