BRILL

VORLESUNGEN ZUR EINFÜHRUNG IN DIE MECHANIK

Inw

Kat

VORLESUNGEN ZUR EINFÜHRUNG IN DIE MECHANIK RAUMERFÜLLENDER MASSEN

VON

ALEXANDER BRILL

PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT TÜBINGEN

MIT 27 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1909

12/x. 1909

Vorwort.

Dieses Buch ist aus einer Vorlesung über „nichtstarre Systeme und die Mechanik von H. Hertz“ hervorgegangen, die an der Universität Tübingen seit einer Reihe von Jahren von dem Verfasser im Anschluß an eine solche über die Mechanik des materiellen Punktes und der starren Systeme gehalten wird.

Kirchhoffs „Mechanik“ und W. Thomson und Taits „Treatise on natural philosophy“ haben sich im Gegensatz zu ihren nächsten Vorgängern wieder auf den Standpunkt der „Mécanique analytique“ von Lagrange gestellt und die raumerfüllenden Massen in den Rahmen der Mechanik einbezogen. Ihrem Beispiel sind andere Autoren gefolgt: W. Voigt, P. Appell, H. Weber u. a. haben den seitdem stark angewachsenen Stoff neu bearbeitet und in trefflichen Werken weiten Kreisen der mathematischen und physikalischen Welt zugänglich gemacht.

Aber es scheint an einem kurzen Abriß zu fehlen, durch den der angehende Mathematiker, ohne sich gleich in Anwendungen zu vertiefen, in die ersten Grundlagen jener Wissenszweige eingeführt und nebenher mit einigen von den treibenden Ideen und Anschauungen bekannt gemacht wird, die in jüngster Zeit sich dort Bürgerrecht verschafft und ihre Wirkung auch auf die reine Mechanik ausgedehnt, ja deren Grundlagen zur Diskussion zu stellen begonnen haben.

Diese Lücke will das vorliegende kleine Werk ausfüllen, indem es in einer auch für Studierende verständlichen Fassung auf der gleichen Grundlage wie die Mechanik des materiellen Punktes diejenige flüssiger und elastischer Massen behandelt und anhangsweise einen Einblick in die Elektronentheorie zu geben unternimmt.

Zu einer gleichförmigen Behandlung der Mechanik kontinuierlicher Massen hat Lagrange die ewig mustergültige Grundlage gelegt. Auch die Theorie der Elastizität läßt auf ihr sich aufbauen, wenn

a*

man die einleitenden Untersuchungen über innere Druckkräfte durch die Annahme eines Potentials ersetzt, das dann noch als einziger Rest der Kräfte in das anzuwendende Prinzip der Mechanik eingeht. Man wird durch diese Wendung zugleich der Bedeutung gerecht, die der Energiebegriff seit ROBERT MAYER gewonnen hat. Ihr Wert wird aber noch erhöht durch die neue Auffassung von dem Wesen der Kraft, welche die Physik seitdem entwickelt hat.

Es ist das Verdienst von HEINRICH HERTZ, die Beseitigung des Begriffes der Fernwirkung aus der Mechanik grundsätzlich gefordert und in Ansatz gebracht zu haben („Prinzipien der Mechanik", Leipzig 1894). Aus dem einzigen Axiom, auf dem seine Theorie beruht, dem „Grundgesetz", ist das Wort „Kraft" verschwunden. Nur auf indirektem Wege und an späterer Stelle werden Druck und Fernkraft in die Theorie eingeführt, letztere eben durch ihr Potential, indem (wohl unabhängig von J. J. THOMSON, der bereits vorher[1]) eine ähnliche Bemerkung gemacht hatte) HERTZ nachweist, daß formal die Wirkung einer Kraft durch Annahme verborgener Massen, deren kinetische Energie gleich der potentiellen Energie der sichtbaren Massen ist, erklärt werden kann.

Hiermit freilich ist der Begriff der Kraft aus den Grundlagen so lange nicht wirklich beseitigt, als man nicht die verborgenen Massen oder Zwischenmittel, welche die Wirkung der Kraft hervorbringen, nachweist oder doch wahrscheinlich macht. Von einer Lösung dieses Problems aber, namentlich für die an Bedeutung alles überragende Schwerkraft, sind wir heute noch ebensoweit entfernt wie zur Zeit von FARADAY. Deshalb bedeutet streng genommen die Mechanik von HERTZ nicht mehr als ein Programm. Aber auch wenn man aus diesen und anderen Gründen den HERTZschen Standpunkt ablehnt, so lassen sich doch gewisse praktische Vorzüge seines Ausgangspunktes — Vorzüge übrigens, deren manche das Prinzip des kleinsten Zwanges von GAUSS mit ihm teilt — nicht in Abrede stellen.

Wenn der Fall eintritt, daß die Bedingungsgleichungen eines Problems „nichtholonome" sind, d. h. in Form von nicht unbedingt integrabelen Differentialgleichungen vorliegen — ein wichtiger Fall, den schon LAGRANGE (Mécanique analytique T. I, 1. part. Seite IV § 1) in Betracht gezogen hat — so verursacht die Aufstellung der aus ihnen folgenden Gleichungen zwischen den Variationen der

1) J. J. THOMSON, Anwendungen der Dynamik auf Physik und Chemie 1888 (Deutsche Ausg. Leipzig 1890), 2. Kapitel.

Koordinaten bei Anwendung anderer Prinzipien, insbesondere des HAMILTONschen[1]), Schwierigkeiten, die darin beruhen, daß diese Gleichungen nicht durch bloß mathematische Operationen aus jenen ableitbar sind. Dies ist jedoch ohne weiteres möglich bei Anwendung des GAUSSschen Prinzips, weil hier die zu variierenden Größen zweite Ableitungen nach der Zeit sind. HERTZ scheint diesen Umstand übersehen zu haben, vielleicht deshalb, weil er (Mechanik, Artt. 501, 394) das D'ALEMBERTsche Prinzip auf dem Umweg über die LAGRANGEschen Differentialgleichungen ableitet, statt durch Variation des Ausdrucks für den Zwang (a. a. O. Art. 497). Wohl aber hat GIBBS (Fund. Formulae usw. Amer. Journ. of math. 2 [1879]) schon vor HERTZ auf diese und andere Vorzüge des Prinzips des kleinsten Zwanges aufmerksam gemacht. Doch begegnet auch er nicht dem oft erhobenen Einwand, daß die Aufstellung und Transformation des Ausdrucks für den Zwang, der sich aus zweiten Differentialquotienten nach der Zeit zusammensetzt, rechnerisch weniger bequem sei, als der etwa für die lebendige Kraft, an den z. B. das HAMILTONsche Prinzip anknüpft. Deshalb[2]), wie es scheint, hat man auch bisher davon abgesehen, das Prinzip des kleinsten Zwanges grundsätzlich zu verwenden. Aber es ist bemerkenswert, daß die *Variation* des Zwanges keineswegs die Aufstellung des Ausdruckes für den Zwang selbst erfordert, wie dies GIBBS annimmt. Man wird im folgenden sehen, daß in keinem Falle, auch nicht bei Anwendung auf hydrodynamische Probleme oder solche der Elastizitätstheorie, die Ableitung der Differentialgleichungen aus dem Prinzip größere Rechnungen erheischt, wie die Verwendung des HAMILTONschen Prinzips.

Vor dem letzteren aber hat das GAUSSsche Prinzip den weiteren Vorzug, daß es, indem es die natürliche Bewegung auf ein gewöhnliches Minimum zurückführt, den fremdartigen Apparat der Variationsrechnung, der auf recht subtiler Grundlage beruht, und der in dem erwähnten Falle nichtholonomer Bedingungsgleichungen, wie Herr HÖLDER ge-

1) Auch bei Anwendung des D'ALEMBERTschen Prinzips kann man für die Bildung der Gleichungen zwischen den Variationen nicht immer die zwischen den unvariierten Größen verwenden. So im Falle inkompressibler flüssiger Massen, wo das D'ALEMBERTsche Prinzip die (meist zuvor abgeleitete) Inkompressibilitätsbedingung unbenutzt lassen muß (S. KIRCHHOFF, Mechanik, 1876, S. 120; RIEMANN-WEBER, Partielle Differentialgleichungen der math. Physik, 1901, II, S. 428).

2) S. z. B. den Bericht von A. VOSS über die Prinzipien der rationellen Mechanik in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. IV, 1, 1901, S. 82, 91.

zeigt hat, überhaupt nur unter Beachtung besonderer Vorsichtsmaßregeln verwendbar ist, entbehrlich macht. Überhaupt ist doch wohl die Frage erlaubt: was haben die Bewegungsgleichungen, die für ein bestimmtes Zeitelement gelten, mit einem Zeitintegral zu tun, dessen Grenzen keinen anderen Bedingungen zu genügen brauchen, als daß sie jenes Zeitelement einschließen? Die Formulierung eines Problems sollte doch von fremdem Beiwerk frei bleiben. Diesem Einwand unterliegt auch die Anwendung des Prinzips auf raumerfüllende Massen, wo das HAMILTONsche Prinzip wegen der gleichmäßigen Behandlung, die es Zeit- und Raumkoordinaten angedeihen läßt, noch in seinem besten Licht erscheint. Denn auch hier stellen sich infolge der partiellen Integration des Zeitintegrals Grenzausdrücke ein, die für das Problem ohne Bedeutung sind, deren Verschwinden aber durchaus nicht immer leicht nachzuweisen ist.[1]) — Endlich ist nicht zu übersehen, daß im Fall einseitig begrenzender Bedingungen, die durch Ungleichungen ausgedrückt werden, das Prinzip des kleinsten Zwanges selbst dem D'ALEMBERTschen überlegen ist, wie dies schon GAUSS (Werke, Bd. V, S. 27) und später noch einmal GIBBS (a. a. O.) hervorgehoben haben.

Ich habe daher geglaubt, in der Wahl des Grundgesetzes HERTZ folgen zu sollen. Erst nachträglich, da, wo es sich um den Ausdruck für die Kräftefunktion handelt, habe ich, um mich von der üblichen Form nicht zu entfernen, die Gleichung des GAUSSschen Prinzips durch einen formalen Prozeß — einen Weg, den, wie ich nachträglich sehe, schon GIBBS eingeschlagen hat — in diejenige des D'ALEMBERTschen Prinzips übergeführt.

HERTZ spricht in seiner Mechanik nur von diskreten Massenpunkten. Für den Ausschluß raumerfüllender Massen ist jedoch kein Grund vorhanden. Begriffsbildungen wie Beweisgänge sind nach sachgemäßer Umdeutung auch auf sie übertragbar. Nur die Definition der Bedingungsgleichungen für ein „freies System“ war neu zu fassen.

Was endlich die Einführung des Begriffes „Kraft“ angeht, so muß sie, wie für die Fernkräfte bei Punktsystemen, so für die elastischen Kräfte bei raumerfüllenden Massen (wie schließlich ja auch bei HERTZ) in der Gestalt des Potentials erfolgen. Freilich erscheint

1) Ich erinnere an den im Falle der Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit (KIRCHHOFF, Mechanik, 19. Vorl., Formel (1), S. 234, 1876; vgl. auch RIEMANN-WEBER, partielle Differentialgleichungen der math. Physik, Bd. II, § 162, S. 426ff.) auftretenden Grenzausdruck.

damit die Beseitigung der Kraft aus dem Grundgesetz zu einer Frage bloß der Anordnung herabzusinken. Denn indem man das Potential elastischer Kräfte einführt, kommt man nur wieder auf den Weg zurück, den schon im Jahre 1839 in seiner Abhandlung on a dynamical theory of crystalline reflexion and refraction MAC CULLAGH für die elastische Kraft eingeschlagen hat. Im folgenden jedoch erscheint es als die Folge einer bestimmten Grundanschauung über das Wesen der Kraft; das einzelne Potential ist nur Glied einer Kette, in die sich ebenso punktförmige wie kontinuierliche, flüssige wie elastisch-feste Körper und selbst das Lichtmedium einreihen.

Indem so das Grundgesetz bei diesen durch ihre spezifischen Eigenschaften unterschiedenen Massen in gleicher Weise Anwendung findet, schließt sich die Mechanik zu einem Ganzen zusammen, das wohl der E. MACHschen Forderung ökonomischen Denkens genügen dürfte.

Ein Vorzug des angegebenen Weges besteht ferner darin, daß die verschiedenen Bewegungsursachen und -widerstände, die man unter dem Namen Kraft zusammenfaßt, durch die Art ihrer Einführung auseinandergehalten werden. Endlich sprechen didaktische Momente für die spätere Einführung der Bewegungsursache, eine Bemerkung, der schon W. SCHELL beim Abfassen seines Lehrbuches der Mechanik Ausdruck gegeben hat.

Aus dem Gesagten ergibt sich die Anordnung dieser Vorlesungen von selbst. Anstelle des Begriffes „Kraft“ tritt — neben Zeit und Raum — der Begriff „Masse“ an die Spitze, ohne daß seine Einführung begründet wird. Der erste Abschnitt enthält eine Skizze der HERTZschen Mechanik diskreter Massenpunkte, aus der sich die dem „Grundgesetz“ entstammenden Gleichungen bereits wesentlich in derjenigen Gestalt ergeben, in der sie in den späteren Abschnitten verwendet werden. Im zweiten und dritten Abschnitt, welche die Mechanik raumerfüllender Massen behandeln, beschränkt man sich fast ganz auf die Elemente und verzichtet auf Anwendungen, ohne übrigens Beispiele, die zur Erläuterung von Begriffen und Sätzen dienen können, grundsätzlich auszuschließen. Dabei erweist sich für die knappe Darstellung der mannigfachen Beziehungen zwischen Kraftfeldern (zumal im vierten Abschnitt) die Vektorrechnung als ein fast unentbehrliches Instrument. Deshalb wird im zweiten und dritten Abschnitt nicht nur von ihren Bezeichnungen, sondern in zunehmendem Maße auch von ihren Operationen Gebrauch gemacht. Hinsichtlich der Bezeichnungen schließe ich mich an die „Einführung in die Vektoranalysis“ von R. Gans (Leipzig 1905) an, die ihrerseits wesentlich mit derjenigen der „Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften“, Band V übereinstimmt.

Daß (im vierten Abschnitt) auch die elektromagnetische Lichttheorie in eine Vorlesung aufgenommen wurde, die sich vorzugsweise an einen mathematischen Leserkreis wendet, mag verwunderlich erscheinen. Aber abgesehen von der Befriedigung, die ein Einblick in die H. A. Lorentzsche Theorie — nach den mancherlei Proben, die sie bereits bestanden hat — auch dem Nichtfachmann gewährt, muß den Mathematiker in hohem Maße die Vorstellungsreihe ansprechen, die an das „Relativitätsprinzip“ anknüpft. Mag dieses Prinzip sich in der Folge als Naturgesetz bewahrheiten oder nicht: es bedeutet eine nicht hoch genug einzuschätzende Erweiterung des Gesichtskreises der theoretischen Mechanik. Von dieser Überzeugung war, wie seine letzten wissenschaftlichen Äußerungen bekunden, auch der weitschauende Minkowski durchdrungen.

Die angebrachten Zitate sind, wie es bei einer Skizze nicht anders möglich war, nur dem Nachweise von weiteren Ausführungen gewidmet für solche Leser, die tiefer einzudringen wünschen. Sowenig wie fremde Zutaten habe ich die eigenen, von denen vielleicht der Kenner einige bemerken wird, besonders hervorgehoben.

Es ist zum Schluß mir eine angenehme Pflicht, meinen beiden Mitarbeitern beim Lesen der Korrektur, Herrn Professor Dr. J. Sommer in Danzig-Langfuhr und Herrn Professor Dr. R. Gans in Tübingen, denen ich zahlreiche wertvolle Bemerkungen und Anregungen sachlicher und didaktischer Natur verdanke, Herrn Professor Gans besonders auch für die Durchsicht des letzten Abschnittes des Manuskripts vor der Drucklegung, an dieser Stelle meinen Dank auszusprechen.

Tübingen, im Juli 1909.

A. Brill.

Inhaltsverzeichnis.

Dritter Abschnitt.

Elastisch-feste und quasi-elastische Massen.

Vierter Abschnitt.

Die elektromagnetische Lichttheorie.

Einleitung.

Die Mechanik beschäftigt sich mit der Ortsänderung der Massen und stellt sich die Aufgabe, von den Bewegungsvorgängen in der Natur — zunächst der leblosen — ein so getreues Abbild zu geben, daß es auch die zukünftigen Vorgänge umfaßt.

Was wir beobachten, ist die relative Lage der Körper und ihre Bewegung gegeneinander. Indessen kann man, auch wenn nur die gegenseitigen Bewegungen darzustellen sind, die Annahme eines in gewissem Sinne absoluten Koordinatensystems nicht entbehren, in bezug auf welches nämlich bereits der einzelne Körper dem Gesetze der Trägheit[1]) genügt. Zwar ist die Lage eines solchen — in gewissen Grenzen noch willkürlichen[2]) — „Inertialsystems"[3]) gegen die uns umgebenden Weltmassen nicht bekannt. Doch lehrt die Erfahrung, daß das von den Astronomen eingeführte empirische Koordinatensystem, das, kurz gesagt, mit dem Fixsternhimmel fest verbunden ist, als Inertialsystem angesprochen werden kann.[4]) Für Bewegungen, die in räumlich und zeitlich genügend engen Grenzen erfolgen, vertritt die Stelle eines solchen bereits irgendein mit der rotierenden und um die Sonne kreisenden Erde fest verbundenes Koordinatensystem, und selbst die für weite Zeit- und Raumgrenzen zu berechnenden Bewegungen der Planeten bezieht man auf ein System, von dem eine Koordinatenebene die selbst gegen jenes Inertialsystem verschiebliche Ekliptik und eine Achse die langsam sich

1) In weiterem Umfange: das Planetensystem der Newtonschen Mechanik (Anding, Über Koordinaten und Zeit, Enzykl. der math. Wiss., VI, 2, 1905), eine Forderung, deren Erfüllung sich mit astronomischen Mitteln prüfen läßt.

2) Eine Bewegung, die in einem Koordinatensystem nach dem Prinzip der Trägheit erfolgt, wird in einem anderen, das gegen dieses sich dreht oder ungleichförmig fortschreitend sich bewegt, diesem Gesetz nicht mehr genügen, wenn man nicht Hilfskräfte zufügt.

3) Diese Bezeichnung rührt von L. Lange her (Der Bewegungsbegriff Leipzig 1886; vgl. auch Mach, Die Mechanik in ihrer Entwicklung, 4. Aufl., Leipzig 1901, S. 252).

4) Vgl. H. Seeliger, Über die sogenannte absolute Bewegung, Münch. Akad. Ber., Bd. 36, 1906, S. 137.

drehende Verbindungslinie des Sonnenmittelpunktes mit dem Frühlingspunkt ist.

Sowenig wie ein Inertialsystem können wir die Annahme eines absoluten Längenmaßes und eines ebensolchen Zeitmaßes entbehren, trotz der Bedenken, die sich gegen die Beständigkeit beider, namentlich des uns durch die Umdrehung der Erde dargebotenen Zeitmaßes erheben.

Überhaupt, welche Einwände man auch gegen die besprochenen und andere sogleich noch zu erwähnende Fiktionen der Mechanik geltend machen kann: die Erfahrung lehrt, daß das auf Grund derselben und zweckmäßig gewählter Grundsätze gewonnene Bild der Bewegungsvorgänge den wirklichen Erscheinungen — oft sogar innerhalb weiter Grenzen der Genauigkeit nach Raum und Zeit — entspricht.

Auch bezüglich des Begriffes Masse sind wir zu einer Abstraktion genötigt. Wenn man die räumliche Bahn eines Körpers zu beschreiben hat, beschränkt man sich zweckmäßig in erster Annäherung auf die Bestimmung der Bahn eines durch den Körper mitbestimmten Punktes, seines Schwerpunktes, in welchem man sich die Masse des Körpers vereinigt zu denken hat. Der Schwerpunkt als ein *materieller*, d. h. mit Masse begabter *Punkt*, ersetzt bei dieser Auffassung den ganzen Körper. Die Bewegung eines Systems von Körpern wird zunächst durch die ihrer Schwerpunkte vertreten, und das Bild dann dadurch vervollständigt, daß man die Bewegung und Gestaltsänderung der Körper in bezug auf die vielleicht noch zu berichtigenden Bahnen der Schwerpunkte beschreibt. — Man pflegt deshalb mit der Mechanik des materiellen Punktes zu beginnen, wie auch wir dies tun werden.

Ähnliche Bemerkungen gelten in bezug auf alle im folgenden einzuführenden Begriffe und Grundsätze. Indem man die verwickelten, niemals ganz erkennbaren Zusammenhänge der Natur durch vereinfachte ersetzt, um sie, so idealisiert, der rechnerischen Analyse zugänglich zu machen, muß man ein für allemal darauf verzichten, mehr als ein im besten Falle leidlich angenähertes Bild der Naturvorgänge zu erhalten. Das Ziel der Wissenschaft kann lediglich das sein, die Grenzen der Annäherung durch zweckmäßige Wahl der Grundbegriffe und Grundsätze und Hinzunahme immer neuer Fiktionen allmählich weiter hinauszurücken.

Wir setzen im folgenden *einige Begriffe als bekannt* voraus, die dem *elementaren* Gebiet der Mechanik entstammen, und die man in einer vorbereitenden Vorlesung, wie wir sie hier als bereits erledigt voraussetzen, zu erörtern pflegt. Abgesehen von einigen rein geometrischen Begriffen, die mit den Krümmungsverhältnissen der Bahnkurve zusammenhängen, sind es die folgenden:

Schwerpunkt; Trägheitsmoment, Trägheitsellipsoid und Hauptträgheitsachsen; einige einfache Sätze aus der Kinematik starrer Systeme; der Vektorbegriff; endlich die Begriffe Geschwindigkeit, lebendige Kraft, Beschleunigung, Kraft, Kräftefunktion, Arbeit.

Für die drei in der Mechanik auftretenden Grundbegriffe: Raum, Masse und Zeit sind die üblichen Maßeinheiten Zentimeter, Gramm und Sekunde (c, g, s). Jede der erwähnten und der noch einzuführenden Größen und jede Gleichung zwischen ihnen steigt hinsichtlich dieser Einheiten zu einer gewissen Dimension an, die wir, wie üblich, durch eine in Klammern eingefügte Potenz der Buchstaben l, m, t (Länge, Masse, Zeit) angeben. Das Trägheitsmoment eines Körpers hat die Dimensionen $[l^2 m]$; die Masse der Volumeinheit oder die Dichte $[l^{-3} m]$; Geschwindigkeit $[l t^{-1}]$, Beschleunigung $[l t^{-2}]$, Kraft $[l m t^{-2}]$, Arbeit $[l^2 m t^{-2}]$; eine Kraft pro Flächeneinheit (Flächendruck oder -zug) $[l^{-1} m t^{-2}]$ usw.

Zwei Punkte heißen *starr* miteinander verbunden, wenn ihr Abstand unveränderlich[1]) ist. Wir nennen zuweilen eine Bedingungsgleichung, die zwischen den Koordinaten von Massenpunkten besteht, eine *geometrische*, wenn keine anderen benannten Größen, insbesondere nicht die Zeit, eingehen. So wird z. B. die Starrheit eines *Punktsystems* durch geometrische Bedingungsgleichungen dargestellt, ebenso die Forderung, daß ein Punkt auf einer Fläche oder einer Kurve bleibe, usw.

Man sagt, ein System von n Punkten hat r *Grade von Bewegungsfreiheit*, wenn zwischen ihren $3n$ Koordinaten $3n - r$ Bedingungsgleichungen bestehen, so daß nur noch r von ihnen willkürlich annehmbar sind. *Ein starres Punktsystem* hat 6 Grade von Freiheit. Denn durch irgend drei ein ungleichseitiges Dreieck bildende Punkte des Systems, deren 9 Koordinaten also durch 3 Gleichungen verbunden sind, ist die Lage jedes vierten eindeutig bestimmbar. Oder auch: Verbindet man jenes System fest mit einem rechtwinkligen Koordinatensystem, so ist durch dessen Lage gegenüber

1) Die Beseitigung eines hierbei naheliegenden Kreisschlusses verweisen wir in die Geometrie. Vgl. Hölder, Anschauung und Denken in der Geometrie. Leipzig 1900, S. 5.

einem anderen im Raume festen Koordinatensystem diejenige aller Punkte des starren Systems festgelegt, d. h. die Anzahl seiner Freiheitsgrade ist gleich derjenigen des Koordinatensystems. Aber die Lage eines Koordinatensystems gegenüber einem anderen hängt von sechs Konstanten ab: den drei Koordinaten des Ursprungs und von drei (etwa den Eulerschen) Winkeln, die die Achsenrichtungen bestimmen. Die Zahl reduziert sich auf drei, wenn z. B. einer der Punkte des Systems befestigt ist usw.

Außer den Systemen von diskreten materiellen Punkten werden uns in der Folge noch solche Massen beschäftigen, die *den Raum stetig erfüllen.* Wie sich der Übergang vom diskreten materiellen Punkt zur raumerfüllenden Masse ausführen läßt, bleibe hier unerörtert. Formal vollzieht er sich so, daß man die Masse des materiellen Punktes durch das mit dem Faktor „*Dichte*“ (Masse der Volumeinheit) multiplizierte Raumelement ersetzt, und zugleich das auf die Gesamtheit der Massenpunkte bezügliche Summenzeichen — wie es z. B. in den Ausdrücken für die Schwerpunktskoordinaten oder für Trägheitsmomente von Punktsystemen auftritt — in ein Integralzeichen verwandelt, das sich über alle Elemente des mit Masse erfüllten Raumes erstreckt: ein Verfahren, das wiederum nur der Erfolg rechtfertigt.

Von einer starren kontinuierlichen Masse gilt dasselbe, was oben von starren Punktsystemen gesagt wurde, sie hat sechs Grade von Bewegungsfreiheit, ihre Lage hängt also von sechs Konstanten ab. Dagegen werden biegsame Fäden und Flächen, elastische Körper und Flüssigkeiten nach ihrer Lage und Dichtigkeitsverteilung, wie wir unten (Art. 17) sehen werden, durch drei *Funktionen* bestimmt; nichtstarre kontinuierliche Massen besitzen also im allgemeinen einen *unendlich hohen* Grad von Bewegungsfreiheit.

Erster Abschnitt.

Materielle Punkte und starre Massen.

1. Geschwindigkeit, Beschleunigung des materiellen Punktes; Krümmung der Bahn.

Die Bewegung eines Punktes in seiner Bahn wird, wenn x, y, z seine Koordinaten in bezug auf ein bekanntes, festes Koordinatensystem sind, durch drei Funktionen der Zeit t beschrieben, die diese Koordinaten für jeden Zeitpunkt darstellen,

$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$
$$z = z(t),$$

wo x, y, z rechts Funktionszeichen sein mögen. Die Komponenten seiner *Geschwindigkeit* zur Zeit t sind dann

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad \frac{dz}{dt} = \dot{z},$$

wo die ersten, zweiten ... Differentialquotienten nach der Zeit hier und in der Folge durch ein, zwei ... Punkte über dem Funktionszeichen (der abhängig Veränderlichen) dargestellt werden. Die Geschwindigkeit ist ein Vektor, den wir (wie in der Folge Vektoren überhaupt) mit deutschen Buchstaben bezeichnen wollen. Er sei $\mathfrak{v}$. Dann stellen wir dessen Länge (Größe, Betrag) durch

$$|\mathfrak{v}| = v = \dot{s} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \tag{1}$$

dar, wenn ds das im Zeitelement dt mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ durchlaufene Bogenelement ist. Hat v einen in der Zeit unveränderlichen Wert, verschwindet also die *Tangentialbeschleunigung*

$$|\dot{\mathfrak{v}}| = \dot{v} = \ddot{s} = 0,$$

so heißt die Bewegung des Punktes *gleichförmig.*

Die Winkel α, β, γ, die das Element ds (die Tangente an die Bahnkurve) mit den Koordinatenaxen bildet, ergeben sich aus

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{\dot{x}}{\dot{s}}; \quad \cos\beta = \frac{\dot{y}}{\dot{s}}; \quad \cos\gamma = \frac{\dot{z}}{\dot{s}}.$$

Die *Beschleunigung* des Punktes in seiner Bahn ist ein Vektor $\mathfrak{f}$ mit den Komponenten $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ von der Länge

$$f = |\mathfrak{f}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}. \tag{2}$$

Auch die Krümmung der Bahn läßt sich durch Differentialquotienten der Koordinaten nach der Zeit darstellen. Den einfachsten Ausdruck für den Krümmungshalbmesser ϱ erhält man, wenn man die Koordinaten der Bahnkurve als Funktionen der Bogenlänge s, gerechnet von einer festen Stelle der Bahn an, dargestellt annimmt. Dann ist[1])

$$\varrho^2 = \frac{1}{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}. \tag{3}$$

1) Sind in der beistehenden Figur die Längen $PP' = P'P'' = ds$ konsekutive Elemente der Raumkurve, und verlängert man $PP' = P'P''' = ds$ um sich selbst, so ist $\sphericalangle P'''P'P'' = \tau$ der Kontingenzwinkel; daher, wenn ϱ der Hauptkrümmungshalbmesser ist, für sehr kleine Werte von τ,

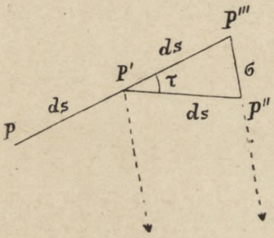

Fig. 1.

$$\varrho\tau = ds.$$

Andererseits ist $P''P''' = \sigma$ mit einem Kreisbogenstück vertauschbar

$$ds \cdot \tau = \sigma.$$

Nun sind die Koordinaten der Punkte P die folgenden:

$P \;\ldots\; x,\ y,\ z.$

$P' \;\ldots\; x + dx,\ y + dy,\ z + dz = x + \frac{dx}{ds} ds,$ usw.

$P'' \;\ldots\; x + dx + d(x + dx) = x + 2dx + d^2x = x + 2\frac{dx}{ds} ds + \frac{d^2x}{ds^2} ds^2,$ usw.

$P''' \ldots\; x + 2dx = x + 2\frac{dx}{ds} ds,$ usw.

Daher besteht für die Länge σ die Gleichung

$$\sigma^2 = [(x + 2dx + d^2x) - (x + 2dx)]^2 + [d^2y]^2 + [d^2z]^2$$

oder

$$\sigma^2 = \left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right] ds^4,$$

woraus sich ergibt:

$$\varrho^2 = \frac{ds^2}{\tau^2} = \frac{ds^4}{\sigma^2} = \frac{1}{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}.$$

Zugleich erhält man für die Richtung $(\varkappa, \lambda, \mu)$ des Krümmungshalbmessers, die mit derjenigen $P'''P''$ übereinstimmt,

$$\cos\varkappa : \cos\lambda : \cos\mu = \frac{d^2x}{ds^2} : \frac{d^2y}{ds^2} : \frac{d^2z}{ds^2}.$$

Führt man nun statt s die Unabhängige t mittels der Beziehungen ein

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{x}}{\dot{s}}\right) = \frac{1}{\dot{s}}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{\dot{s}}\right) = \frac{\dot{s}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{s}}{\dot{s}^3}, \tag{4}$$

und bezeichnet man, wie immer im folgenden, mit $\mathbf{S}$ eine auf die drei Funktionen x, y, z bezügliche Summe, von der nur ein Glied angeschrieben wird, so ist

$$\frac{1}{\varrho^2} = \mathbf{S}\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 = \mathbf{S}\left(\frac{\dot{s}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{s}}{\dot{s}^3}\right)^2 = \frac{1}{\dot{s}^4}\mathbf{S}\ddot{x}^2 + \frac{\ddot{s}^2}{\dot{s}^6}\mathbf{S}\dot{x}^2 - \frac{2\dot{s}\ddot{s}}{\dot{s}^6}\mathbf{S}\dot{x}\ddot{x} \tag{4a}$$

oder, weil wegen

$$|\mathfrak{v}|^2 = \mathbf{S}\dot{x}^2 = \dot{s}^2, \quad \mathbf{S}\dot{x}\ddot{x} = \dot{s}\ddot{s}$$

ist,

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{\dot{s}^4}(\mathbf{S}\ddot{x}^2 - \ddot{s}^2). \tag{5}$$

Diese Gleichung enthält die bekannte Tatsache, daß die Gesamtbeschleunigung $\mathfrak{f}$ in die Tangentialbeschleunigung $\ddot{s}$ und die dazu senkrechte Normalbeschleunigung v^2/ϱ zerlegbar ist.

Die Krümmung c der Bahn an einer Stelle, nämlich der reziproke Wert des Krümmungshalbmessers,

$$c = \frac{1}{\varrho},$$

eine skalare Größe, ist die positive Wurzel der Gleichung

$$\begin{aligned} c^2 &= \frac{1}{\dot{s}^4}(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2 - \ddot{s}^2) \\ &= \frac{1}{v^4}(f^2 - \ddot{s}^2), \end{aligned} \tag{6}$$

wo f, v, wie oben, die (absoluten Beträge von) Beschleunigung und Geschwindigkeit sind. — Im Falle gleichförmiger Bewegung ist die Krümmung der Beschleunigung proportional, weil für $\ddot{s} = 0$

$$c^2 = \frac{f^2}{v^4} = \frac{1}{v^4}(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2)$$

wird. — Wir nennen nun mit Hertz die *geradeste Bahn* eines Punktes — unter allen möglichen, welche etwa vorliegende geometrische Bedingungsgleichungen (s. d. Einl.) zulassen — diejenige, für welche die Krümmung c an jeder Stelle den kleinsten Wert hat, für die also allenthalben $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ so bestimmt sind, daß

$$\delta c = 0$$

ist. Dabei bezieht sich das Variationszeichen δ auf die Beschleunigungskomponenten $\ddot{x}, \ldots$ allein.

Eine Variation wie $\delta\ddot{x}$ mag man sich analytisch als kleinen Zuwachs $\varepsilon\xi(t)$ zu der Funktion $\ddot{x}(t)$ vorstellen, wo $\xi(t)$ eine beliebige (auch unstetige) Funktion, ε eine sehr kleine Konstante ist. Wir kommen darauf in Art. 18 a. E. zurück.

Hiernach kommt z. B. die Aufgabe, die geradeste Bahn eines Punktes zu finden, der sich auf einer Oberfläche

$$\varphi(x, y, z) = 0 \tag{7}$$

gleichförmig bewegt, darauf hinaus, durch passende Wahl der Funktionen $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, welche die Gleichung (7) der Oberfläche identisch erfüllen, die Größe c zum Minimum zu machen, während zugleich

$$\dot{v} = \ddot{s} = 0$$

ist. *Statt c kann man dann auch $\frac{1}{2}c^2v^4$ oder $\frac{1}{2}f^2$ zum Minimum machen,* womit jene Bedingung entbehrlich wird. Wegen der grundlegenden Bedeutung des Begriffes der geradesten Bahn wollen wir dieses elementare Beispiel etwas ausführen. Zwischen den Größen $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ und $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ bestehen die folgenden, durch wiederholte Differentiation der Gleichung (7) erhaltenen Beziehungen

$$\varphi'(x)\dot{x} + \varphi'(y)\dot{y} + \varphi'(z)\dot{z} = 0; \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \Phi \equiv \varphi''(xx)\dot{x}^2 + 2\varphi''(xy)\dot{x}\dot{y} + \cdots \\ + \varphi''(zz)\dot{z}^2 + \varphi'(x)\ddot{x} + \varphi'(y)\ddot{y} + \varphi'(z)\ddot{z} = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

wo $\varphi'(x), \ldots \varphi''(xx), \ldots$ die ersten, zweiten ... partiellen Ableitungen von φ nach $x, \ldots$ sind, und mit Φ abkürzend die linke Seite der letzten Gleichung bezeichnet wird. Für irgendeine gegebene Stelle x, y, z der Bahn, für die zugleich $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ gegebene, der Gleichung (8) genügende Werte sind, hat man die Größen $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ der Gleichung $\Phi = 0$ entsprechend so zu wählen, daß $\frac{1}{2}f^2$ zum Minimum wird. Variiert man also $\frac{1}{2}f^2$ und $\Phi = 0$, während $x, y, z;\ \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ konstant bleiben, so erhält man

$$\tfrac{1}{2}\delta(f^2) \equiv \ddot{x}\delta\ddot{x} + \ddot{y}\delta\ddot{y} + \ddot{z}\delta\ddot{z} = 0,$$

$$\delta\Phi \equiv \varphi'(x)\delta\ddot{x} + \varphi'(y)\delta\ddot{y} + \varphi'(z)\delta\ddot{z} = 0.$$

Nach der Theorie der relativen Minima führt man nun zweckmäßig eine noch zu bestimmende Funktion λ von x, y, z, t ein und bewirkt dadurch, daß in

$$\tfrac{1}{2}\delta f^2 + \lambda\delta\Phi \equiv (\ddot{x} + \lambda\varphi'(x))\delta\ddot{x} + (\ddot{y} + \lambda\varphi'(y))\delta\ddot{y} + (\ddot{z} + \lambda\varphi'(z))\delta\ddot{z} = 0$$

die Variationen $\delta\ddot{x}, \delta\ddot{y}, \delta\ddot{z}$ voneinander unabhängig werden. So ergeben sich die bekannten Gleichungen

$$\ddot{x} + \lambda\varphi'(x) = 0, \quad \ddot{y} + \lambda\varphi'(y) = 0, \quad \ddot{z} + \lambda\varphi'(z) = 0, \tag{10}$$

durch welche, weil dt mit ds proportional ist, eine „geodätische“

Linie auf der Fläche definiert wird, eine Linie nämlich, für die in jedem Punkt die Richtungswinkel der Flächennormalen (deren Kosinusse sich wie $\varphi'(x) : \varphi'(y) : \varphi'(z)$ verhalten) mit denen der Hauptnormalen der Bahnkurve übereinstimmt.

2. Krümmung der Punktbahn im Falle einer unstetigen Richtungsänderung.

Für eine spätere Anwendung wollen wir den Begriff der Krümmung einer Raumkurve auf den Fall eines geradlinigen Polygons mit Seiten von endlicher Länge übertragen. Wir fassen die Seiten in ihrer Folge als Vektoren auf. Dann werde, wie in der Fußnote des Art. 1 die Krümmung einer stetig verlaufenden Kurve durch

$$c^2 = \frac{1}{\varrho^2} = \frac{\sigma^2}{ds^4}$$

definiert wurde, so auch hier die Krümmung c des Polygons in einem Eckpunkte durch die (vektorielle) Differenz der anstoßenden Polygonseiten $\Delta\mathfrak{s}$, $\Delta\mathfrak{s}_1$ — diese Differenz dem absoluten Betrage σ nach genommen — dargestellt. Bezeichnet man mit Δs, Δs_1 die Seitenlängen selbst, mit $\Delta x, \ldots \Delta x_1, \ldots$ ihre Projektionen, so ist

$$\sigma^2 = (\Delta x_1 - \Delta x)^2 + (\Delta y_1 - \Delta y)^2 + (\Delta z_1 - \Delta z)^2,$$

und wir setzen wieder:

$$c^2 = \frac{\sigma^2}{\Delta s^4}.$$

Nimmt man nun an, ein beweglicher Punkt durchlaufe die zwei Polygonseiten in der Weise, daß seine Geschwindigkeit längs jeder der Seiten gleichförmig ist, aber beim Übergang von Δs zu Δs_1 derart unstetig sich ändert, daß er jede der beiden Seiten in demselben Zeitintervall Δt zurücklegt, so wird, wenn $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{v}_1$ mit den Komponenten (u, v, w); (u_1, v_1, w_1) diese Geschwindigkeiten sind, $|\mathfrak{v}|$, $\mathfrak{v}_1|$, ihre absoluten Beträge,

$$c^2 = \frac{\sigma^2}{\Delta s^4} = \frac{\Delta t^2}{\Delta s^4}\left[(u_1 - u)^2 + (v_1 - v)^2 + (w_1 - w)^2\right],$$

sein, oder, wenn man zur Abkürzung die Geschwindigkeitszuwächse, auf die es allein ankommt, mit

$$u_1 - u = \Delta u; \quad v_1 - v = \Delta v; \quad w_1 - w = \Delta w$$

bezeichnet:

$$c^2 = \frac{1}{|\mathfrak{v}|^2 \Delta s^2}(\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2).$$

Die Bedingung der geradesten Bahn ist nun wieder (Art. 1) in der Weise zu erfüllen, daß man die Variation δc, welche durch Veränderung der Größen $\varDelta u$, $\varDelta v$, $\varDelta w$ (nicht aber von $\mathfrak{v}$ oder von $\varDelta\mathfrak{s}$) bewirkt wird, gleich Null setzt.

Somit erfordert die *geradeste Bahn* eines Punktes im Falle diskontinuierlicher Änderung der Bahnrichtung, daß

$$\delta\left(|\mathfrak{v}|^2 \varDelta s^2 \cdot \frac{c^2}{2}\right) = \delta \tfrac{1}{2}(\varDelta u^2 + \varDelta v^2 + \varDelta w^2)$$
$$= \varDelta u \delta \varDelta u + \varDelta v \delta \varDelta v + \varDelta w \delta \varDelta w = 0,$$

oder wenn man

$$\mathsf{v}^2 = \varDelta u^2 + \varDelta v^2 + \varDelta w^2$$

setzt,

$$\delta \tfrac{1}{2} \mathsf{v}^2 = 0, \tag{1}$$

d. h. daß das Quadrat des Geschwindigkeitszuwachses an der Stelle, wo die Bahn unstetig wird, ein Minimum sei.

Die oben gemachte Annahme, daß die Seiten $\varDelta\mathfrak{s}$, $\varDelta\mathfrak{s}_1$ beide in gleichen Zeiten durchlaufen werden, läßt sich durch passende Wahl ihrer Längen erfüllen. Da diese Längen in der Formel (1) nicht auftreten, so enthält die Annahme keine Beschränkung.

Beispiel. Die geradeste Bahn eines Punktes zu finden, der sich geradlinig mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf einer Halbebene bis zu ihrem Schnitt mit einer zweiten gegen sie geneigten Halbebene bewegt, auf die er übergeht.

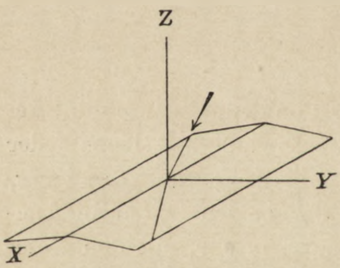

Fig. 2.

Verlegt man die Schnittkante der zwei Ebenen in die X-Achse, und bilden die beiden mit der XZ-Ebene gleiche Winkel, so bestehen zwischen den Koordinaten des bewegten Punktes vor und nach dem Übergang über die Kante die Gleichungen

$$y - \varrho z = 0, \quad y + \varrho z = 0,$$

wo ϱ eine Konstante ist. Sind dann die Geschwindigkeitskomponenten vorher $u = a$; v; $w = b$ (a und b konstant); nachher u_1, v_1, w_1 so ist $v - \varrho w = 0$, also $v = \varrho b$, und $v_1 = -\varrho w_1$. Die Bahn wird dann eine geradeste sein, wenn die Größe

$$\delta \tfrac{1}{2} v^2 = \delta \tfrac{1}{2}((u_1 - a)^2 + \varrho^2(b + w_1)^2 + (b - w_1)^2)$$
$$= (u_1 - a)\delta u_1 + [\varrho^2(b + w_1) - (b - w_1)]\delta w_1$$

für alle Werte von δu_1, δw_1 verschwindet. Es ergibt sich

$$u_1 = a; \quad w_1 = b \cdot \frac{1 - \varrho^2}{1 + \varrho^2},$$

also überschreitet der Punkt immer nur den stumpfen Winkel der beiden Ebenen.

3. Bewegung eines Punktsystems: Geschwindigkeit, Beschleunigung, Krümmung der Bahn.

Einige der in Art. 1 für den einzelnen Massenpunkt entwickelten Begriffe übertragen wir nun auf ein System von materiellen Punkten. Wir definieren mit Hertz eine Art von mittlerer oder Durchschnitts-Geschwindigkeit, -Beschleunigung, -Bahnkrümmung des Systems ihrem Betrage nach dadurch, daß wir die Quadrate der Geschwindigkeiten usw. der Punkte je mit deren Masse multiplizieren und die Produkte addieren; die positive Wurzel aus dieser Summe, dividiert durch die Gesamtmasse, heißt dann die Geschwindigkeit des Systems (Hertz, Mechanik, Artt. 265, 275, 106), seine Beschleunigung[1]) usw.

Hiernach bestimmt sich die Größe der *„Geschwindigkeit v eines Systems von Punkten“* mit den Koordinaten x_i, y_i, z_i $(i = 1, 2, \ldots n)$, den Massen m_i und den Geschwindigkeiten v_i, wenn

$$m = \Sigma m_i$$

die Gesamtmasse ist, durch die Gleichung

$$mv^2 = m\dot{s}^2 = \Sigma m_i v_i^2 = \Sigma m_i \dot{s}_i^2 = \Sigma m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2). \tag{1}$$

Die Länge s der „Bahn des Systems“ (der Gesamtheit der Lagen, die es durchläuft) bestimmt sich in Funktion der Zeit aus der Differentialgleichung (1).

Die Bewegung wird dann eine *gleichförmige* genannt, wenn die Geschwindigkeit des Systems sich mit der Zeit nicht ändert (während die Einzelpunkte sich ungleichförmig bewegen können), also wenn

$$\ddot{s} = 0$$

oder wenn

$$m\dot{s}^2 = \Sigma m_i v_i^2 = \text{const.} \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

eine Konstante ist. Da nach der üblichen Bezeichnungsweise die Größe

$$T = \tfrac{1}{2} m v^2 = \tfrac{1}{2} m \dot{s}^2 = \tfrac{1}{2} \Sigma m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \tag{1a}$$

die lebendige Kraft oder kinetische Energie des Systems ist, so hat

1) Auf die vektorielle Definition dieser Größen, die für das Folgende ohne Belang ist, gehen wir nicht ein.

bei gleichförmiger Bewegung die lebendige Kraft des Punktsystems an jeder Stelle denselben Wert.

Zusatz. Man zerlegt mit Vorteil die kinetische Energie eines Punktsystems in zwei Teile, die einzeln eine einfache Deutung zulassen. Sind nämlich a, b, c die Koordinaten des Schwerpunkts eines Systems von diskreten Massenpunkten $m_1, m_2, \ldots m_n$, und verschiebt man den Ursprung des Achsensystems in diesen Punkt, indem man setzt

$$x_i = a + \xi_i; \quad y_i = b + \eta_i; \quad z_i = c + \zeta_i,$$

wo wegen

$$a \Sigma m_i = \Sigma m_i x_i; \quad b \Sigma m_i = \Sigma m_i y_i; \quad c \Sigma m_i = \Sigma m_i z_i$$

sowohl

$$\Sigma m_i \xi_i = 0; \quad \Sigma m_i \eta_i = 0; \quad \Sigma m_i \zeta_i = 0$$

als auch

$$\Sigma m_i \dot{\xi}_i = 0 \quad \text{usw.}$$

ist, so erhält man für die kinetische Energie T den Ausdruck

$$T = \tfrac{1}{2} \Sigma m_i \dot{x}_i^2 = \tfrac{m}{2}(\dot{a}^2 + \dot{b}^2 + \dot{c}^2) + \tfrac{1}{2} \Sigma m_i (\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2). \qquad (1\text{b})$$

Daher zerlegt sich die ganze lebendige Kraft des Punktsystems in diejenige der fortschreitenden Bewegung des Schwerpunkts und diejenige der relativen Bewegung gegen den als fest gedachten Schwerpunkt.

Wir definieren ferner den Betrag der *Beschleunigung f eines Punktsystems* durch die Gleichung

$$mf^2 = \Sigma m_i f_i^2 = \Sigma m_i (\ddot{x}_i^2 + \ddot{y}_i^2 + \ddot{z}_i^2), \qquad (2)$$
$$(i = 1, 2, \ldots n)$$

und die „*Krümmung c der Bahn des Systems*“ an einer gegebenen Stelle (s) durch

$$mc^2 = \sum m_i \left[\left(\frac{d^2 x_i}{ds^2}\right) + \left(\frac{d^2 y_i}{ds^2}\right) + \left(\frac{d^2 z_i}{ds^2}\right)\right],$$

wo wieder m die Gesamtmasse ist und die Variable s, die Bahnlänge des Systemes, die als unabhängig Veränderliche für die Ortsbestimmung der einzelnen Punkte x_i, y_i, z_i benutzt ist, durch die Gleichung (1) und irgendeine Anfangslage bestimmt ist. Führt man wieder statt s die Zeit t als unabhängig Veränderliche ein, so wird wegen (1)

$$m\dot{s}\ddot{s} = \Sigma m_i (\dot{x}_i \ddot{x}_i + \dot{y}_i \ddot{y}_i + \dot{z}_i \ddot{z}_i),$$

und mit Benutzung der Formel (4a) des Art. 1:

$$mc^2 = \frac{1}{\dot{s}^4} \sum m_i (\ddot{x}_i^2 + \ddot{y}_i^2 + \ddot{z}_i^2) + \frac{\ddot{s}^2}{\dot{s}^6} \sum m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)$$
$$- 2 \frac{\dot{s}\ddot{s}}{\dot{s}^6} \sum m_i (\dot{x}_i \ddot{x}_i + \dot{y}_i \ddot{y}_i + \dot{z}_i \ddot{z}_i)$$

oder

$$mc^2 = \frac{1}{\dot{s}^4}(\Sigma m_i f_i^2 - m\ddot{s}^2),$$

das heißt

$$c^2 v^4 = f^2 - \ddot{s}^2.$$

Bei gleichförmiger Bewegung, also für $\ddot{s} = 0$, wird wiederum die Krümmung der Beschleunigung des Systemes proportional.

4. Die geradeste Bahn eines Punktsystemes.

Auch der in Art. 1 für den einzelnen Massenpunkt aufgestellte Begriff der geradesten Bahn läßt sich ohne weiteres auf das Punktsystem übertragen. *Die geradeste Bahn eines Systemes* setzt sich aus geradesten Bahnelementen zusammen. Ein geradestes Bahnelement an einer gegebenen Stelle, d. h. bei gegebener Lage und Geschwindigkeit des Systemes, ist ein solches, für das *die Krümmung* c (s. vor. Art.) den *kleinsten Wert hat*, den die bestehenden Bedingungsgleichungen zulassen. Zwischen den Koordinaten der Punkte mögen etwa k Bedingungsgleichungen bestehen von der Form

$$\begin{aligned} &\varphi(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \ldots z_n) = 0 \\ &\psi(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \ldots z_n) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{1}$$

Man leitet aus ihnen durch zweimalige Differentiation nach der Zeit k andere ab, von denen die erste die Form hat

$$\begin{aligned} \Phi \equiv \varphi''(x_1 x_1)\dot{x}_1^2 + 2\varphi''(x_1 y_1)\dot{x}_1\dot{y}_1 + \cdots \\ + \varphi''(z_n z_n)\dot{z}_n^2 + \varphi'(x_1)\ddot{x}_1 + \varphi'(y_1)\ddot{y}_1 + \cdots + \varphi'(z_n)\ddot{z}_n = 0. \end{aligned} \tag{1a}$$

Die Bedingung für die geradeste Bahn, d. h. für ein Extremum von c, oder auch, wie wir in der Folge zu schreiben vorziehen, von $\frac{m}{2}c^2$, fordert dann die Bildung der Variation $\delta\left(\frac{m}{2}c^2\right)$ wiederum in der Weise, *daß zwar die Beschleunigungskomponenten, nicht aber die Koordinaten und die Geschwindigkeitskomponenten variiert werden.* Ebenso sind die *Bedingungsgleichungen* (1a) zu variieren und *ihnen gemäß die Variationen der Beschleunigungen zu wählen.* Man erhält so:

$$\delta\Phi \equiv \Sigma[\varphi'(x_i)\delta\ddot{x}_i + \varphi'(y_i)\delta\ddot{y}_i + \varphi'(z_i)\delta\ddot{z}_i] = 0. \tag{1b}$$

Da k solcher Gleichungen vorliegen, so sind von den $3n$ Größen $\delta\ddot{x}_1, \ldots \delta\ddot{z}_n$ nur $3n - k$ willkürlich annehmbar, die anderen vermöge der (1b) durch sie bestimmt. Mit diesen Werten ist

$$\delta\left(\frac{m}{2}c^2 v^4\right) = \delta\tfrac{1}{2}[\Sigma m_i(\ddot{x}_i^2 + \ddot{y}_i^2 + \ddot{z}_i^2) - m\ddot{s}^2] = 0. \tag{2}$$

Addiert man wiederum zu dieser Gleichung die mit den unbestimmten Größen $\lambda, \mu, \ldots$ multiplizierten Gleichungen (1b), ordnet nach $\delta \ddot{x}_1$, $\delta \ddot{y}_1, \ldots \delta \ddot{z}_n$ und nimmt an, daß die k Multiplikatoren $\lambda, \mu, \ldots$ so bestimmt seien, daß die Koeffizienten von k dieser Variationen verschwinden, so müssen, weil $3n-k$ von ihnen beliebig annehmbar sind, die Koeffizienten auch der übrigen $3n-k$ verschwinden. In anderer Fassung: nach Einführung der $\lambda, \mu, \ldots$ verhalten sich die $3n$ Variationen so, als ob sie sämtlich voneinander unabhängig wären. Unter dieser Annahme erhält man aus

$$\delta(\tfrac{1}{2} m v^4 c^2) - \lambda \delta \Phi - \mu \delta \Psi \cdots = 0 \tag{3}$$

$3n$ Gleichungen, von denen die erste lautet

$$m_i \ddot{x}_i - \frac{m_i \dot{x}_i \ddot{s}}{\dot{s}} = \lambda \varphi'(x_i) + \mu \psi'(x_i) + \cdots \tag{3a}$$

oder in kürzerer Form ((4) Art. 1):

$$\left.\begin{aligned} m_i v^2 \frac{d^2 x_i}{ds^2} &= \lambda \varphi'(x_i) + \mu \psi'(x_i) + \cdots \\ m_i v^2 \frac{d^2 y_i}{ds^2} &= \lambda \varphi'(y_i) + \mu \varphi'(y_i) + \cdots \\ m_i v^2 \frac{d^2 z_i}{ds^2} &= \lambda \varphi'(z_i) + \mu \psi'(z_i) + \cdots, \end{aligned}\right\} \tag{3b}$$

wo v durch den Ausdruck (1) Art. 3 definiert ist. — Diese Gleichungen beschreiben die *geradeste Bahn*. Wir wenden sie sogleich auf den Fall an, daß die Bewegung des Systemes eine gleichförmige, also daß:

$$\ddot{s} = 0$$

ist. Weil dann die Bedingung für die geradeste Bahn $\delta \frac{mc^2}{2} = 0$ durch diejenige für die kleinste Systembeschleunigung ersetzt werden kann:

$$\delta \frac{m v^4 c^2}{2} = \delta \frac{m f^2}{2} = 0,$$

da ja in (2) das letzte Glied rechts verschwindet, so tritt an Stelle der Forderung (3) die folgende

$$\delta\left(\frac{mf^2}{2}\right) - \lambda \delta \Phi - \mu \delta \Psi - \cdots = 0, \tag{4}$$

woraus sich

$$\begin{aligned} m_i \ddot{x}_i &= \lambda \varphi'(x_i) + \mu \psi'(x_i) + \cdots \\ m_i \ddot{y}_i &= \lambda \varphi'(y_i) + \mu \psi'(y_i) + \cdots \\ m_i \ddot{z}_i &= \lambda \varphi'(z_i) + \mu \psi'(z_i) + \cdots \end{aligned} \tag{4a}$$

ergibt. Die Gleichungen (4a) und (1) sind notwendig und hinreichend zur Bestimmung der $3n$ Koordinaten und der k Multiplikatoren $\lambda, \mu, \ldots$ in Funktion der Zeit. Die bei der Integration auftretenden willkürlichen Konstanten lassen sich durch die $3n$ Koordinaten der Anfangslage des Systemes und die $3n$ Komponenten der Anfangsgeschwindigkeiten bestimmen. Multipliziert man die Gleichungen (4a) bezw. mit $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$ und addiert alle $3n$ Gleichungen, so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichungen (1) oder vielmehr deren erste Ableitungen nach der Zeit:

$$\sum m_i(\ddot{x}_i\dot{x}_i + \ddot{y}_i\dot{y}_i + \ddot{z}_i\dot{z}_i) = \sum m_i\dot{s}_i\ddot{s}_i = \frac{m}{2}\frac{d}{dt}v^2 = 0$$

oder

$$\ddot{s} = 0.$$

Daher kann die *Forderung der kleinsten Beschleunigung* $\delta f = 0$ oder

$$\delta \frac{mf^2}{2} = 0$$

— wenn die Variation in der oben angegebenen Weise ausgeführt wird, nämlich bei konstanten Koordinaten und Geschwindigkeiten — diejenige *der geradesten Bahn bei gleichförmiger Geschwindigkeit* auch hinsichtlich des Umfanges der Forderung ersetzen. Man nennt sie, mit Rücksicht auf eine später (Art. 15) einzuführende Benennung, auch die *Forderung des kleinsten Zwanges.*

5. Beispiel: Drehung eines starren Punktsystemes um seinen Schwerpunkt.[1])

Durch zweckmäßige Wahl der Koordinaten lassen sich die Bedingungsgleichungen an Zahl verringern oder ganz beseitigen. In dem Fall eines starren Punktsystemes oder Körpers umgeht man (Einleitung) den Ansatz von Bedingungsgleichungen dadurch, daß man ein mit diesem fest verbundenes Koordinatensystem einführt. Wir nehmen an, der Schwerpunkt eines solchen sei fest, es besitze also nur drei Grade von Freiheit, und es handele sich darum, die geradeste Bahn des Systems bei gleichförmiger Bewegung desselben zu bestimmen, also die Forderung des kleinsten Zwanges zu erfüllen. Wir verlegen den Ursprung O eines im Raume festen Koordinatensystems mit den Achsen Ξ, H, Z in den Schwerpunkt. Sowohl dieses wie ein mit dem Punktsystem (Körper) starr verbundenes (also gegen

1) Aus einer im Wintersemester 1898/99 gehaltenen Vorlesung.

dieses bewegliches) System X, Y, Z mit dem gleichen Ursprung O sei ein Rechts- (englisches) System, s. d. Figur.

Diese Annahme machen wir in der Folge für alle benutzten Koordinatensysteme.

Es ist dann die Aufgabe, den Ausdruck $\frac{1}{2} m c^2 v^4$ unter der Voraussetzung, daß

$$2T = \Sigma m_i(\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2) = h$$

eine Konstante ist, oder, weil $\ddot{s} = 0$ ist, den Ausdruck

$$\frac{1}{2} m f^2 = \frac{1}{2} \Sigma m_i(\ddot{\xi}_i^2 + \ddot{\eta}_i^2 + \ddot{\zeta}_i^2)$$

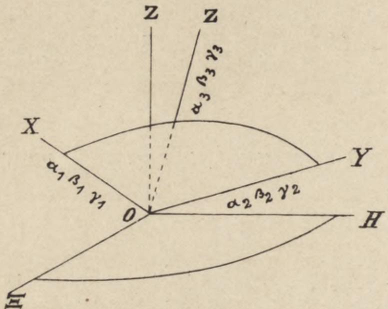

Fig. 3.

zu einem Minimum zu machen. Zunächst handelt es sich um die Wahl von drei voneinander unabhängigen Winkelgrößen („Koordinaten" im weiteren Sinne des Wortes), durch welche die Lage des beweglichen gegen das feste Koordinatensystem bestimmt ist. Sind α_1, β_1, γ_1 die Kosinusse der Winkel, welche die X-Achse des beweglichen mit bez. den Achsen Ξ, H, Z des festen Koordinatensystems einschließt, und gehören entsprechend die Größen $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ den Achsen Y, Z zu, so hat man die Beziehungen

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z \\ \eta &= \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z \\ \zeta &= \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z, \end{aligned} \tag{1}$$

wo zwischen den α, β, γ die bekannten 6 Relationen bestehen

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 &= 1 & \qquad \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 &= 0 \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 &= 1 & \qquad \alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1 &= 0 \\ \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 &= 1 & \qquad \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Durch Differentiation erhält man aus (1), weil nur die Winkel in der Zeit sich ändern,

$$\dot{\xi} = \dot{\alpha}_1 x + \dot{\alpha}_2 y + \dot{\alpha}_3 z; \qquad \ddot{\xi} = \ddot{\alpha}_1 x + \ddot{\alpha}_2 y + \ddot{\alpha}_3 z \tag{2a}$$

usw. usw.

Die 9 Größen $\dot{\alpha}_1, \ldots$ hat man nun durch drei unabhängige auszudrücken.

Nach einem bekannten Satze der Kinematik starrer Körper läßt sich jede unendlich kleine Bewegung eines Körpers um einen festen

Punkt O darstellen durch eine (Momentan-)Drehung um eine durch O gehende Achse A, also durch einen Vektor, den wir durch seine drei Komponenten in Richtung der Achsen X, Y, Z des beweglichen Systems ersetzen wollen. — Bei einer relativen Bewegung der Systeme Ξ, H, Z und X, Y, Z gegeneinander kann man aber auch X, Y, Z als fest, Ξ, H, Z als beweglich ansehen. Durch eine Momentandrehung des letzteren um die Achse A gehe ein mit Ξ, H, Z fest verbundener Punkt mit den Koordinaten x, y, z in die Lage $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$ über. Zerlegt man den infinitesimalen Drehungswinkel $\delta'\omega$ in drei Komponenten $\delta'\varphi$, $\delta'\psi$, $\delta'\chi$, welchen Drehungen um die Achsen X, Y, Z entsprechen, so trägt $\delta'\varphi$ zu δx nichts bei, zu δy die Größe $-z\delta'\varphi$, zu δz die Größe $y\delta'\varphi$, wenn $\delta'\varphi$ ($\delta\varphi$ in der Figur) aus einer Rechtsdrehung hervorgeht. Durch zyklische Vertauschung erhält man die von den Drehungen $\delta'\psi$, $\delta'\chi$ herrührenden Beiträge. Ihre Zusammensetzung ergibt für die kleinen Koordinatenänderungen des Punktes x, y, z infolge der Drehung $(\delta'\varphi, \delta'\psi, \delta'\chi)$ des Systems Ξ, H, Z um die Achse A

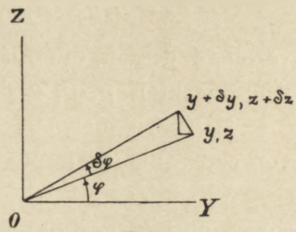

Fig. 4.

$$\begin{aligned} \delta x &= z\delta'\psi - y\delta'\chi \\ \delta y &= x\delta'\chi - z\delta'\varphi \\ \delta z &= y\delta'\varphi - x\delta'\psi . \end{aligned} \tag{3}$$

Geht man von den virtuellen Drehungswinkeln $\delta'\varphi, \cdots$ zu den in dem Zeitelement dt wirklich eintretenden $d'\varphi, \cdots$ über, so erhält man, wenn man dementsprechend die Komponenten p, q, r der momentanen Winkelgeschwindigkeit, genommen in bezug auf die Achsen X, Y, Z durch[1])

$$\frac{d'\varphi}{dt} = p; \quad \frac{d'\psi}{dt} = q; \quad \frac{d'\chi}{dt} = r$$

einführt, die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= zq - yr \\ \dot{y} &= xr - zp \\ \dot{z} &= yp - xq . \end{aligned} \tag{4}$$

1) Die Striche an d, wie vorher an δ, sollen ausdrücken, daß p, q, r nicht Differentialquotienten *bestimmter* Winkel nach der Zeit sind, wenn auch die *Zuwächse* selbst sich definieren lassen. — Man hat solche fingierte Größen, wie die Winkel φ, ψ, χ, „*nichtholonome Koordinaten*“ genannt. (S. z. B. Hamel, Virtuelle Verschiebungen in der Mechanik, Math. Ann. 59.) Für sie ist immer $\delta d'\varphi \neq d\delta'\varphi$ usw.

Der mit dem Koordinatensystem Ξ, H, Z fest verbundene Raumpunkt sei nun der Endpunkt der auf der Achse Ξ aufgetragenen Strecke 1. Für ihn ist

$$x = \alpha_1; \quad y = \alpha_2; \quad z = \alpha_3.$$

Dann ergibt sich aus (4) die erste Spalte des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} \dot\alpha_1 &= \alpha_3 q - \alpha_2 r; & \dot\beta_1 &= \beta_3 q - \beta_2 r; & \dot\gamma_1 &= \gamma_3 q - \gamma_2 r; \\ \dot\alpha_2 &= \alpha_1 r - \alpha_3 p; & \dot\beta_2 &= \beta_1 r - \beta_3 p; & \dot\gamma_2 &= \gamma_1 r - \gamma_3 p; \\ \dot\alpha_3 &= \alpha_2 p - \alpha_1 q; & \dot\beta_3 &= \beta_2 p - \beta_1 q; & \dot\gamma_3 &= \gamma_2 p - \gamma_1 q, \end{aligned} \tag{5}$$

vermöge dessen die Änderungen der neun Achsenwinkel durch die Komponenten p, q, r der Winkelgeschwindigkeit sich ausdrücken.

Hiernach bieten sich für die weitere Behandlung diese letzteren von selbst als die gesuchten drei unabhängigen Größen dar.

Wir bilden mit Hilfe der Gleichungen (5) und der Beziehungen (2), sowie mittels der durch ein- und zweimalige Differentiation nach der Zeit aus ihnen abgeleiteten Gleichungen die folgenden Summen **S**

$$\begin{gathered} \mathbf{S}\alpha_2\dot\alpha_3 = \alpha_2\dot\alpha_3 + \beta_2\dot\beta_3 + \gamma_2\dot\gamma_3 = -\mathbf{S}\dot\alpha_2\alpha_3 = p \\ \mathbf{S}\alpha_3\dot\alpha_1 = -\mathbf{S}\dot\alpha_3\alpha_1 = q; \quad \mathbf{S}\alpha_1\dot\alpha_2 = -\mathbf{S}\dot\alpha_1\alpha_2 = r \\ \mathbf{S}\dot\alpha_1^2 = q^2 + r^2; \quad \mathbf{S}\dot\alpha_2^2 = r^2 + p^2; \quad \mathbf{S}\dot\alpha_3^2 = p^2 + q^2; \end{gathered} \tag{6}$$

endlich, wenn man bei Bildung der Variation bloß die Größen $\dot p$, $\dot q$, $\dot r$ berücksichtigt (Art. 4 a. E.):

$$\begin{aligned} \mathbf{S}\ddot\alpha_1\delta\ddot\alpha_1 &= \mathbf{S}(\alpha_3\dot q + \dot\alpha_3 q - \alpha_2\dot r - \dot\alpha_2 r)(\alpha_3\delta\dot q - \alpha_2\delta\dot r) \\ &= \dot q\delta\dot q + pr\delta\dot q + \dot r\delta\dot r - pq\delta\dot r. \end{aligned} \tag{7}$$

Handelt es sich nun um die geradeste Bahn bei gleichförmiger Bewegung, so sind bei gegebenen Werten $\alpha_1, \beta_1, \cdots \gamma_3$; $\dot\alpha_1, \dot\beta_1, \cdots \dot\gamma_3$; p, q, r die Differentialquotienten von p, q, r so zu bestimmen, daß

$$\delta\left(\frac{mf^2}{2}\right) = mf\delta f = \Sigma m_i(\ddot\xi_i\delta\ddot\xi_i + \ddot\eta_i\delta\ddot\eta_i + \ddot\zeta_i\delta\ddot\zeta_i) = 0 \tag{8}$$

ist, wobei nur die Variationen der Beschleunigungen nicht verschwinden. Nun ist wegen (2a)

$$\Sigma m_i\ddot\xi_i\delta\ddot\xi_i = \Sigma m_i(\ddot\alpha_1 x_i + \ddot\alpha_2 y_i + \ddot\alpha_3 z_i)(\delta\ddot\alpha_1 x_i + \delta\ddot\alpha_2 y_i + \delta\ddot\alpha_3 z_i). \tag{8a}$$

Wählt man das mit dem Körper fest verbundene Koordinatensystem so, daß die Achsen X, Y, Z mit den Hauptträgheitsachsen des Körpers zusammenfallen, und nennt A, B, C die Hauptträgheitsmomente, so ist bekanntlich

$$\begin{aligned}
\Sigma m_i(y_i^2 + z_i^2) &= A; \qquad & \Sigma m_i y_i z_i &= 0;\\
\Sigma m_i(z_i^2 + x_i^2) &= B; & \Sigma m_i z_i x_i &= 0;\\
\Sigma m_i(x_i^2 + y_i^2) &= C; & \Sigma m_i x_i y_i &= 0.
\end{aligned}$$

Hiermit geht aber der Ausdruck (8a) über in

$$\delta\frac{mf^2}{2} = \Sigma m_i x_i^2 \mathbf{S}\ddot{\alpha}_1\delta\ddot{\alpha}_1 + \Sigma m_i y_i^2 \cdot \mathbf{S}\ddot{\alpha}_2\delta\ddot{\alpha}_2 + \Sigma m_i z_i^2 \mathbf{S}\ddot{\alpha}_3\delta\ddot{\alpha}_3$$

und mit Benutzung der Beziehung (7) wird[1])

$$\begin{aligned}
\delta\frac{mf^2}{2} &= \Sigma m_i x_i^2[(\dot q + pr)\delta\dot q + (\dot r - pq)\delta\dot r]\\
&\quad + \Sigma m_i y_i^2[(\dot r + qp)\delta\dot r + (\dot p - qr)\delta\dot p]\\
&\quad + \Sigma m_i z_i^2[(\dot p + rq)\delta\dot p + (\dot q - rp)\delta\dot q]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \delta\frac{mf^2}{2} = \delta\dot p[A\dot p - (C-B)qr] + \delta\dot q[B\dot q - (A-C)rp]\\
+ \delta\dot r[C\dot r - (B-A)pq].
\end{aligned} \tag{9}$$

Setzt man die Koeffizienten von $\delta\dot p$, $\delta\dot q$, $\delta\dot r$ einzeln Null, so erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned}
A\dot p &= (C-B)qr,\\
B\dot q &= (A-C)rp,\\
C\dot r &= (B-A)pq
\end{aligned} \tag{10}$$

als Bedingung für die geradeste Bahn bei gleichförmiger Bewegung. Es sind die bekannten EULERschen Gleichungen, die zusammen mit dem System (5) die natürliche Bewegung eines um seinen Schwerpunkt sich drehenden Körpers beschreiben.

Wir werden unten (Art. 6, a. E.) sehen, daß man von dem Ausdruck $\delta\frac{mf^2}{2}$ wieder rückwärts dadurch zu $\frac{dT}{dt}$ gelangen kann, daß man die Größen $\delta\dot p$, $\delta\dot q$, $\delta\dot r$ durch bzw. p, q, r ersetzt. Geschieht dies in (9), so erhält man:

$$\frac{dT}{dt} = A\dot p p + B\dot q q + C\dot r r$$

und hieraus

$$T = \tfrac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = h$$

gleich einer konstanten Größe, was sich auch aus (10) durch Multiplikation dieser Gleichungen mit bezw. p, q, r und Addition ergibt.

1) GIBBS, American Journ. II. Bd., S. 64 (1879) und APPELL, Journ. f. Math. Bd. 121 (1900) stellen den mühsam zu bildenden Wert von mf^2 selbst auf. Auch HERTZ bildet überall erst f^2, anstatt $2f\delta f$ direkt darzustellen.

Daß überhaupt die natürliche Bewegung durch die geradeste Bahn bei gleichförmiger Bewegung dargestellt wird, werden wir sogleich feststellen.

Zuvor ist jedoch der Begriff des „freien Systems“ in dem Sinne, den HERTZ mit diesem Wort verbindet, einzuführen.

6. Allgemeine Koordinaten. Nichtholonome Bewegung. Geradeste Bahn eines Punktsystems.

Die im vorigen Artikel eingeführten neun Winkel, welche Bedingungsgleichungen für die Starrheit des Punktsystems entbehrlich machen, kann man „Koordinaten“ im weiteren Sinne des Wortes nennen. Überhaupt nennt man „allgemeine“ oder „LAGRANGEsche“ Koordinanten irgendwelche geometrische Bestimmungsstücke für die Punkte eines Systems. LAGRANGE hat solche verwendet, um die zwischen den rechtwinkligen Koordinaten bestehenden Bedingungsgleichungen zu beseitigen oder doch deren Anzahl zu vermindern. Diesen Zweck kann man, theoretisch gesprochen, immer dadurch erreichen, daß man, wenn

$$\varphi(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \cdots z_n) = 0$$

eine solche Bedingungsgleichung ist, die Größe $\varphi = p$ selbst als Koordinate an Stelle einer der rechtwinkligen treten läßt, diese mittels $\varphi = p$ eliminiert und dann das Problem unter der Annahme $p = 0$ löst. Doch ergibt dieses Verfahren im allgemeinen nicht gerade die dem Problem angemessenen Koordinaten. Hat man aber solche auf irgendeinem Wege eingeführt, und bezeichnet man sie mit $p_1, p_2, \cdots p_r$, so differenziere man die Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(p_1, p_2, \cdots p_r) \\ y_i &= y_i(p_1, p_2, \cdots p_r) \\ z_i &= z_i(p_1, p_2, \cdots p_r), \end{aligned} \tag{1}$$

wo wieder $x_i, \cdots$ rechts Funktionszeichen sind, ein- und zweimal nach der Zeit, und setze die erhaltenen Werte in die Ausdrücke (Art. 3) für $T, f, c, \cdots$ ein. Es möge sich ergeben

$$\begin{aligned} 2T = \Sigma m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) &= a_{11}\dot{p}_1^2 + 2a_{12}\dot{p}_1\dot{p}_2 + \cdots a_{rr}\dot{p}_r^2 \\ &= \Sigma\Sigma a_{ik}\dot{p}_i\dot{p}_k, \end{aligned} \tag{2}$$

wo die a_{ik} noch die Koordinaten $p_1, p_2, \cdots p_r$ selbst enthalten können. Die Ausdrücke für f^2, c^2 werden wesentlich verwickelter.[1])

1) Indem HERTZ die Größe $\delta(c^2)$ anstatt $2c\delta c$ bildet, wird er (Art. 108 der Mechanik) zu mühsamen Rechnungen genötigt.

Es genügt, wenn man, wie wir dies unten tun werden, sich auf die Bildung der Variationen dieser Größen beschränkt, wobei zur Vereinfachung die Größe T zur Verfügung steht.

Die Anzahl r der unabhängigen Koordinaten p, die nach Beseitigung aller Bedingungsgleichungen übrigbleiben, ist der Grad der Freiheit des Systems. Es ist jedoch nicht immer möglich oder ratsam, die Bedingungsgleichungen durch Einführung neuer Variablen gänzlich zu beseitigen. Insbesondere gelingt dies dann nicht, wenn die Bedingungen in der Form von Differentialgleichungen vorliegen, die nicht integrabel sind und auch durch Kombination nicht integrabel gemacht werden können. Für Bewegungen dieser Art, die HERTZ *nichtholonome* nennt, haben also die Bedingungsgleichungen etwa die Form

$$
\begin{aligned}
d'\varphi &\equiv \Sigma(\varphi_{xi}dx_i + \varphi_{yi}dy_i + \varphi_{zi}dz_i) = 0 \\
d'\psi &\equiv \Sigma(\psi_{xi}dx_i + \psi_{yi}dy_i + \psi_{zi}dz_i) = 0 \qquad (3) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&(i = 1, 2, \ldots n)
\end{aligned}
$$

wo $\varphi_{xi}, \varphi_{yi}, \cdots \psi_{xi}, \cdots$ Funktionen der Koordinaten $x_1, y_1, \cdots z_n$ sind, und wo hier wie in der Folge der Strich an d oder δ andeutet, daß nicht notwendig Funktionen $\varphi, \psi \ldots$ existieren, deren Differential bezw. Variation die rechte Seite ist. Dagegen ist die Bewegung wieder eine *holonome*, wenn die Gleichungen (3) unbeschränkt integrabel sind, insbesondere also dann, wenn $\varphi_{xi}, \varphi_{yi}, \ldots$ partielle Differentialquotienten derselben Funktion φ usw. nach den entsprechenden Koordinaten sind oder durch einen gemeinsamen Multiplikator zu solchen gemacht werden können.

Aus den Gleichungen (3) erhält man die Beziehungen zwischen den Variationen durch Division mit dt, nochmalige Differentiation nach der Zeit und nachfolgende Variation der 2. Differentialquotienten. Die Beziehungen, die auf diese Weise an Stelle der Gleichungen (1b) Art. 4 treten, haben die Gestalt[1])

$$\delta'\ddot{\Phi} \equiv \Sigma\{\varphi_{xi}\delta\ddot{x}_i + \varphi_{yi}\delta\ddot{y}_i + \varphi_{zi}\delta\ddot{z}_i\} = 0. \qquad (3a)$$

Die Gleichungen für das Bestehen des Grundgesetzes: geradeste Bahn bei gleichförmiger Bewegung, oder, wie wir die Forderung auch bezeichnet haben, die Bedingung des kleinsten Zwanges, ergeben sich dann aus

$$\delta\frac{mf^2}{2} - \lambda\delta'\ddot{\Phi} - \mu\delta'\ddot{\Psi} - \cdots = 0, \qquad (4)$$

1) Die nicht ganz folgerichtige Bezeichnung $\delta\ddot{\Phi}$ wurde vorübergehend gewählt, um die Art der Variation auszudrücken.

in rechtwinkligen Koordinaten also aus

$$0 = \Sigma m_i(\ddot{x}_i\delta\ddot{x}_i + \ddot{y}_i\delta\ddot{y}_i + \ddot{z}_i\delta\ddot{z}_i) - \lambda\Sigma(\varphi_{xi}\delta\ddot{x}_i + \varphi_{yi}\delta\ddot{y}_i + \varphi_{zi}\delta\ddot{z}_i)$$
$$- \mu\Sigma(\psi_{xi}\delta\ddot{x}_i + \cdots) - \ldots \qquad (4a)$$

und lauten im letzteren Fall

$$\begin{aligned} m_i\ddot{x}_i &= \lambda\varphi_{xi} + \mu\psi_{xi} + \cdots \\ m_i\ddot{y}_i &= \lambda\varphi_{yi} + \mu\psi_{yi} + \cdots \qquad (i = 1, 2 \ldots n) \qquad (5) \\ m_i\ddot{z}_i &= \lambda\varphi_{zi} + \mu\psi_{zi} + \cdots, \end{aligned}$$

wozu die Bedingungsgleichungen (3) kommen, die im Falle einer holonomen Bewegung durch Integralgleichungen ersetzbar sind.

Bei Einführung allgemeiner Koordinaten $p_1, p_2 \cdots p_r$ mögen die endlichen Bedingungsgleichungen die Form annehmen

$$\begin{aligned} \varphi(p_1, p_2 \cdots p_r) &= 0 \\ \psi(p_1, p_2 \cdots p_r) &= 0 \qquad (6) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

und die differentiellen Bedingungsgleichungen (3) übergehen in

$$\begin{aligned} d'\varphi &\equiv \varphi_1 dp_1 + \varphi_2 dp_2 + \cdots + \varphi_r dp_r = 0 \\ d'\psi &\equiv \psi_1 dp_1 + \psi_2 dp_2 + \cdots + \psi_r dp_r = 0 \qquad (7) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

womit diejenigen zwischen den Variationen die Form erhalten

$$\delta'\ddot{\Phi} \equiv \varphi_1\delta\ddot{p}_1 + \varphi_2\delta\ddot{p}_2 + \cdots + \varphi_r\delta\ddot{p}_r = 0 \text{ usw.} \qquad (7a)$$

Um in den Koordinaten p nun auch das Quadrat der Beschleunigung, das in der Forderung des kleinsten Zwanges (Art. 4 a. E.)

$$\delta\,\frac{mf^2}{2} = 0$$

auftritt, oder vielmehr $mf\delta f$, auszudrücken, bemerke man zunächst, daß sich aus

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial p_1}\dot{p}_1 + \frac{\partial x_i}{\partial p_2}\dot{p}_2 + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial p_r}\dot{p}_r = \sum^k \frac{\partial x_i}{\partial p_k}\dot{p}_k \qquad (8)$$
$$(k = 1, 2, \ldots r)$$

ergibt

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{p}_k} = \frac{\partial x_i}{\partial p_k}, \text{ usw.} \qquad (9)$$

Ferner ist

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial p_k} = \frac{\partial}{\partial p_k}\sum^e \frac{\partial x_i}{\partial p_e}\dot{p}_e = \sum^e \frac{\partial^2 x_i}{\partial p_k \partial p_e}\dot{p}_e = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_k}\right). \qquad (10)$$

Endlich erhält man durch Differentiation von (8)

$$\ddot{x}_i = \sum^k\sum^e \frac{\partial x_i}{\partial p_k \partial p_e}\dot{p}_k\dot{p}_e + \sum^k \frac{\partial x_i}{\partial p_k}\ddot{p}_k, \qquad (k, e, = 1, 2, \ldots r)$$

und daher, wenn man *bloß die Beschleunigungen variiert*, wie dies die erwähnte Forderung (Art. 4 a. E.) mit sich bringt,

$$\delta \ddot{x}_i = \sum^k \frac{\partial x_i}{\partial p_k} \delta \ddot{p}_k. \tag{10a}$$

Nun läßt sich der Ausdruck

$$\delta \frac{mf^2}{2} = \Sigma m_i (\ddot{x}_i \delta \ddot{x}_i + \ddot{y}_i \delta \ddot{y}_i + \ddot{z}_i \delta \ddot{z}_i), \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

weil

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i \text{ ist usw.},$$

auch in der Form anschreiben

$$\delta \frac{mf^2}{2} = \sum^i \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) \delta \ddot{x}_i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i}\right) \delta \ddot{y}_i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i}\right) \delta \ddot{z}_i \right].$$

Wenn man die $\delta \ddot{x}_i$, $\delta \ddot{y}_i$, ... durch die $\delta \ddot{p}$ ausdrückt, wird also wegen (10a)

$$\delta \frac{mf^2}{2} = \sum^k \sum^i \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) \frac{\partial x_i}{\partial p_k} \delta \ddot{p}_k + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i}\right) \frac{\partial y_i}{\partial p_k} \delta \ddot{p}_k + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i}\right) \frac{\partial z_i}{\partial p_k} \delta \ddot{p}_k \right]$$

$$= \sum^k P_k \delta \ddot{p}_k, \tag{10b}$$

wo nun

$$P_k = \sum^i \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) \frac{\partial x_i}{\partial p_k} + \cdots \right] \tag{10c}$$

ist, und die Punkte andeuten, daß noch die entsprechenden Glieder in y und z anzuschreiben sind. Unter der Annahme, daß die x_i, y_i, ·· Funktionen der p sind, kann man diesen Ausdruck folgendermaßen umgestalten (s. Routh-Schepp, Dynamik, Leipzig 1898, I, §. 398)

$$P_k = \frac{d}{dt} \sum^i \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial p_k} + \cdots \right] - \sum^i \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_k}\right) + \cdots \right]$$

$$= \frac{d}{dt} \sum^i \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{p}_k} + \cdots \right] - \sum^i \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial p_k} + \cdots \right],$$

was sich durch die Gleichungen (9), (10) rechtfertigt. Daher erhält man, wegen $\frac{\partial T}{\partial x_i} = 0$,

$$P_k = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial p_k},$$

und somit endlich den wichtigen Ausdruck für die Variation des Quadrates der Systembeschleunigung f

$$\delta \frac{mf^2}{2} = \sum^k \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial p_k} \right] \delta \ddot{p}_k, \tag{11}$$

wo T die früher angegebene Form hat

$$T = \frac{1}{2} \sum\nolimits^i \sum\nolimits^k a_{ik} \dot{p}_i \dot{p}_k.$$

Es ist bemerkenswert, daß man *von der Funktion* (11) $\delta \frac{mf^2}{2}$ *dadurch rückwärts wieder zu* $\dot{T}$ *gelangen kann*, daß man $\delta \ddot{p}_k$ durch $\dot{p}_k$ ersetzt. Denn wenn dies in 10a geschieht, so geht $\delta \ddot{x}_i$ in $\dot{x}_i$ über, also $\Sigma m_i \ddot{x}_i \delta \ddot{x}_i$ und damit $\delta \frac{mf^2}{2}$ (in jeder Form) in $\dot{T}$, q. e. d.

Führt man in (4) auch die Variation in der transformierten Form (7a) ein, so erhält man als *Gleichung für die geradeste Bahn bei gleichförmiger Bewegung* (die Bedingung des kleinsten Zwanges)

$$\sum \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial p_k} - \lambda \varphi_k - \mu \psi_k - \cdots \right] \delta \ddot{p}_k = 0, \tag{12}$$

die wegen der nun erlangten Unabhängigkeit der Variationen $\delta \ddot{p}$ in die einzelnen zerfällt

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_k}\right) = \frac{\partial T}{\partial p_k} + \lambda \varphi_k + \mu \psi_k + \cdots, \tag{13}$$
$$(k = 1, 2, \ldots r)$$

ein System von Differentialgleichungen, das dem oben für rechtwinklige Koordinaten aufgestellten (5) äquivalent ist und es umfaßt.

Die Gleichförmigkeit der Bewegung ergibt sich übrigens aus den Gleichungen (5) ohne weiteres, indem man sie mittels $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$ linear kombiniert.

7. Geradeste Bahn eines Punkt-Systems bei unstetiger Geschwindigkeits-Änderung.

Um die Forderung der geradesten Bahn auch für ein Punktsystem zu formulieren, das an einer Stelle seiner Bahn Richtung und Geschwindigkeit *plötzlich um eine endliche* Größe ändert, müssen wir auf den in Art. 2 für den einzelnen Punkt aufgestellten Ausdruck zurückgreifen. Wir haben dort die Variation gebildet

$$\delta \tfrac{1}{2} \mathsf{v}^2 = \delta \tfrac{1}{2} (\varDelta u^2 + \varDelta v^2 + \varDelta w^2).$$

Analog ist im Fall eines Punktsystems die Variation

$$\begin{aligned} \delta \mathsf{T} = \delta \tfrac{1}{2} m \mathsf{v}^2 &= \delta \tfrac{1}{2} \Sigma m_i (\varDelta u_i^2 + \varDelta v_i^2 + \varDelta w_i^2) \\ &= \Sigma m_i (\varDelta u_i \delta \varDelta u_i + \varDelta v_i \delta \varDelta v_i + \varDelta w_i \delta \varDelta w_i) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

gleich Null zu setzen, wenn $(\varDelta u_i, \varDelta v_i, \varDelta w_i)$ die Geschwindigkeitsänderung des Punktes m_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ ist.

Bestehen noch Bedingungsgleichungen zwischen den Koordinaten der Punkte, vermöge deren sich für die Geschwindigkeitsänderungen Beziehungen ergeben von der Form

$$\Phi \equiv \Sigma(\Phi_{xi}\varDelta u_i + \Phi_{yi}\varDelta v_i + \Phi_{zi}\varDelta w_i) = 0, \tag{2}$$

so sind diese wieder so zu variieren, daß die Koordinaten und die Geschwindigkeiten davon nicht betroffen werden, wohl aber die Geschwindigkeitsänderungen $\varDelta u_i, \ldots$ Man erhält so

$$\delta\Phi \equiv \Sigma(\Phi_{xi}\delta\varDelta u_i + \Phi_{yi}\delta\varDelta v_i + \Phi_{zi}\delta\varDelta w_i) = 0. \tag{3}$$

Diese Gleichungen lassen sich wie in Art. 6 a. E. durch Multiplikatoren $\lambda, \ldots$ mit $\delta\mathsf{T}$ vereinigen und dadurch die $\delta\varDelta u_i$ voneinander unabhängig machen.

Wir führen dies allgemein aus, indem wir wieder Veränderliche $p_1, p_2 \ldots p_r$ annehmen, welche die Bedingungsgleichungen alle oder teilweise identisch erfüllen, die wir uns jedoch so gewählt denken wollen, daß nicht sie selbst, sondern nur ihre ersten Ableitungen plötzlich Änderungen erfahren. Führt man sie ein mittels der Gleichungen (1), (8) des vorigen Artikels, sind also die Geschwindigkeiten vor und nach der plötzlichen Änderung

$$u_i = \dot{x}_i = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial p_k}\dot{p}_k \quad \text{und}$$

$$u_i^{(0)} = \dot{x}_i^{(0)} = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial p_k}\dot{p}_k^{(0)},$$

so wird

$$\varDelta u_i = \varDelta\dot{x}_i = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial p_k}\varDelta\dot{p}_k, \tag{4}$$

und der Ausdruck

$$\mathsf{T} = \tfrac{1}{2} m_i(\varDelta u_i^2 + \varDelta v_i^2 + \varDelta w_i^2)$$

geht über in:

$$\mathsf{T} = \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma a_{ik}\varDelta\dot{p}_i\varDelta\dot{p}_k, \tag{5}$$

wo die Koeffizienten a_{ik} dieselben sind wie im Ausdruck der lebendigen Kraft T im vor. Art. Die Bedingung für die geradeste Bahn wird dann, wenn keine Nebenbedingungen auftreten:

$$0 = \delta\mathsf{T} = \sum\sum a_{ik}\varDelta\dot{p}_i\delta\varDelta\dot{p}_k = \sum \frac{\partial\mathsf{T}}{\partial\varDelta\dot{p}_k}\delta\varDelta\dot{p}_k$$

$$= \sum\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{p}_k} - \frac{\partial T^{(0)}}{\partial\dot{p}_k^0}\right)\delta\varDelta\dot{p}_k = \sum\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{p}_k} - \frac{\partial T^{(0)}}{\partial\dot{p}_k^{(0)}}\right)\delta(\dot{p}_k - \dot{p}_k^{(0)}), \tag{6}$$

wo nun T bzw. $T^{(0)}$ der Ausdruck für die lebendige Kraft selbst ist, geschrieben in den $\dot{p}_k$ bzw. $\dot{p}_k^{(0)}$, also

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma a_{ik}\dot{p}_i\dot{p}_k \\ T^{(0)} &= \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma a_{ik}\dot{p}_i^{(0)}\dot{p}_k^{(0)}. \end{aligned} \tag{7}$$

Bestehen dann zwischen den $\delta(\dot{p}_k - \dot{p}_k^{(0)}) = \delta\varDelta\dot{p}_k$ noch Bedingungsgleichungen wie:

$$\delta\Phi \equiv \Phi_1\ \delta\varDelta\dot{p}_1 + \Phi_2\delta\varDelta\dot{p}_2 + \cdots \Phi_r\delta\varDelta\dot{p}_r = 0, \tag{8}$$

so erhält man aus der Forderung

$$0 = \delta\mathsf{T} - \lambda\delta\Phi - \cdots = 0, \tag{9}$$

wo nun die $\delta\varDelta\dot{p}_i$ voneinander unabhängig sind, die r Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial\dot{p}_1} - \frac{\partial T^{(0)}}{\partial\dot{p}_1^{(0)}} &= \lambda\Phi_1 + \cdots \\ \frac{\partial T}{\partial\dot{p}_2} - \frac{\partial T^{(0)}}{\partial\dot{p}_2^{(0)}} &= \lambda\Phi_2 + \cdots \\ \ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{10}$$

neben denen die Bedingungsgleichungen bestehen, aus denen diejenigen (8) durch Differentiation, Differenzenbildung und Variation hervorgegangen sind.

8. Das freie System. Das Grundgesetz von HERTZ und die LAGRANGEschen Bewegungsgleichungen.

Ein *freies Punktsystem* nennen wir mit Hertz ein solches, zwischen dessen Koordinaten nur geometrische Bedingungsgleichungen, d. h. solche von der Form (6) (7) des Art. 6 bestehen, also endliche Gleichungen oder Differentialgleichungen 1. Ord. 1. Grades zwischen den Koordinaten, in welche die Zeit nicht explizit eingeht.

Ein „freies“ System ist beispielsweise das in Art. 5 behandelte starre Punktsystem, das sich um einen Punkt dreht. Auch starre Körper oder Systeme von solchen, die etwa durch Gelenke miteinander verbunden sind, von denen auch einzelne Punkte sich auf vorgeschriebenen Bahnen oder Flächen bewegen können, bilden freie Systeme im Sinne von Hertz. Dagegen ist ein System z. B. von sich anziehenden Massenpunkten kein freies System, weil die Forderung der Anziehung sich nicht in geometrische Form bringen läßt. — Wir werden in den Artt. 17, 18 den Begriff des freien Systems auch auf nichtstarre kontinuierliche Massen ausdehnen.

Die natürliche Bewegung eines solchen freien Systems — zunächst mit einem endlichen Grad der Bewegungsfreiheit — wird nun durch das folgende einzige *Grundgesetz* bestimmt, das HERTZ an die Stelle der drei von NEWTON aufgestellten und neuerer, sie ergänzender Axiome setzt (HERTZ, Mechanik Art. 309):

Jedes freie System beharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung in einer geradesten Bahn.

Dieses Axiom setzt sich zusammen aus dem Trägheitsgesetz — denn es verlangt gleichförmige Bewegung (Trägheit im weiteren Sinne) — und dem Prinzip des kleinsten Zwanges — denn es verlangt die geradeste Bahn — und beschränkt sich zunächst auf das freie [kräftelose] System. Aber eben für dieses wurde in Art. 6 die Bewegung untersucht, die jene beiden Forderungen erfüllt, und die Bedingung formuliert

$$\delta\left(\frac{mf^2}{2}\right) - \lambda\delta'\ddot{\Phi} - \mu\,\delta'\ddot{\Psi} - \cdots = 0, \tag{1}$$

deren Ausführung in allgemeinen Koordinaten $p_1, p_2, \ldots p_r$

$$\sum\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial p_k} - \lambda\varphi_k - \mu\psi_k - \cdots\right]\delta\ddot{p}_k = 0 \cdots (k=1,2\cdots r) \tag{2}$$

das Gleichungssystem ergab (Art. 6, a. E.)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_k}\right) = \frac{\partial T}{\partial p_k} + \lambda\varphi_k + \mu\psi_k + \cdots, \tag{3}$$

wo

$$T = \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma a_{ik}\dot{p}_i\dot{p}_k \tag{4}$$

der Ausdruck für die lebendige Kraft des Systems ist, und

$$\begin{aligned} d'\Phi &\equiv \varphi_1 dp_1 + \varphi_2 dp_2 + \cdots + \varphi_r dp_r = 0 \\ d'\Psi &\equiv \psi_1 dp_1 + \psi_2 dp_2 + \cdots + \psi_r dp_r = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{5}$$

(nichtholonome oder holonome) *geometrische Bedingungsgleichungen* sind. Die Gleichungen (3) definieren nun nach dem „Grundgesetz" die natürliche Bewegung unseres Punktsystems. Sie sind die bekannten *Lagrangeschen (Bewegungs-)Gleichungen 2. Art* für den Fall, daß keine äußeren Kräfte wirken, während die äquivalenten für rechtwinklige Koordinaten (Art. 6 (5)) LAGRANGEsche Differentialgleichungen *1. Art* heißen.

Deutet man in der Gleichung (2) die völlig *willkürlichen Größen $\delta\ddot{p}_k$ als Variationen der Koordinaten p_k selbst, und ersetzt sie dementsprechend durch δp_k*[1]), so tritt an Stelle von (2) die Forderung

$$\sum\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial p_k} - \lambda\varphi_k - \mu\psi_k - \cdots\right]\delta p_k = 0, \tag{6}$$

1) Hervorzuheben ist, daß sich auf dem hier betretenen Weg ohne weiteres diejenigen Beziehungen zwischen den Variationen $\delta p_1, \ldots \delta p_k$ ergeben, die in

oder in rechtwinkligen Koordinaten

$$\Sigma[(m_i\ddot{x}_i - \lambda\varphi_{xi} - \mu\psi_{xi} - \cdots)\,\delta x_i + (m_i\ddot{y}_i - \lambda\varphi_{yi} - \mu\psi_{yi} - \cdots)\,\delta y_i + (m_i\ddot{z}_i - \lambda\varphi_{zi} - \mu\psi_{zi} - \cdots)\,\delta z_i] = 0, \tag{7}$$

Gleichungen, die zusammen mit den obigen Bedingungen (5) (bzw. (3) des Art. 6) genau die Form besitzen, in die man das *d'Alembertsche Prinzip* für ein System von Massenpunkten, auf das keine äußeren Kräfte wirken, zu kleiden pflegt. Wir werden darauf unten Art. 15 zurückkommen.

Die Größen $\lambda\varphi_{xi}$, $\mu\psi_{xi}\ldots$ in (7) haben die Dimension $[lmt^{-2}]$ einer „Kraft" in dem üblichen Sinne. Man kann daher

$$\lambda\sqrt{\varphi_{xi}^2 + \varphi_{yi}^2 + \varphi_{zi}^2}$$

als eine Kraft (Druck) deuten, deren Komponenten sich wie $\varphi_{xi} : \varphi_{yi} : \varphi_{zi}$ verhalten, und sie als einen der Bewegung des Punktes m_i durch die Bedingung $d'\varphi = 0$ auferlegten Widerstand auffassen. In dem Beispiel des Art. 1 ist λ der Gegendruck der Oberfläche. Wir wollen zunächst einige weitere Beispiele für die Verwendung der Lagrangeschen Differentialgleichungen im Falle holonomer und nichtholonomer Bewegungen einschalten.

9. Beispiele.

Das nächste einfache Beispiel wird uns später noch Dienste leisten.

---

jedem Falle, auch in dem einer nichtholonomen Bewegung, den unbeschränkten Übergang auch zu dem *Hamiltonschen Prinzip* ermöglichen. Denn wenn man in (7a) des Art. 6 die $\delta\ddot{p}_k$ durch δp_k ersetzt, so erhält man diejenigen Bedingungsgleichungen

$$\varphi_1\,\delta p_1 + \varphi_2\,\delta p_2 + \cdots + \varphi_r\,\delta p_r = 0$$

zwischen den Variationen, die man bei Anwendung des d'Alembertschen (oder eines aus ihm abgeleiteten) Prinzips gewöhnlich durch einfache *Verwandlung der d in δ* aus den vorliegenden Bedingungsgleichungen (5) entnimmt. Man pflegt die Berechtigung zu diesem Verfahren aus der Vorschrift des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten abzuleiten, nach der die in (6) einzuführenden Verrückungen δp, *virtuelle*, d. h. gedachte, mit den Bedingungen des Systems verträgliche Verrückungen sind. Dies letztere heißt aber doch wohl nur: Die Beziehungen zwischen den virtuellen Verrückungen müssen durch bloß rechnerische Operationen aus jenen Bedingungsgleichungen ableitbar sein. *Die Vertauschung der d mit den δ ist jedoch keine solche Operation:* wohl aber die zweimalige Differentiation nach der Zeit und nachmalige Variation. Dieser Vorzug des Prinzips des kleinsten Zwanges wurde, wie ich glaube, bisher nicht, auch von Gibbs nicht, der es zuerst grundsätzlich anwendet, genügend betont.

1. Ein materieller Punkt m bewege sich in dem gekrümmten Teil einer Röhre, die nach einer ebenen Kurve gebogen ist und in einen geraden Fortsatz endigt. In dem letzteren befinde sich ein zweiter materieller Punkt m_1, der mit dem ersten durch einen unausdehnbaren Faden, der in der Röhre verläuft, verbunden sei. Der gerade Teil der Röhre falle mit der Z-Achse zusammen (s. d. Figur). Um diese letztere als feste Achse werde das System durch einen Anstoß in Drehung versetzt und dann sich selbst überlassen. Welche Bewegung führen die beiden Punkte aus? Röhre und Faden sind massenlos.

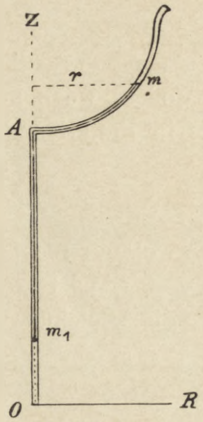

Fig. 5.

Sind r, z die Koordinaten von m in der Ebene zur Zeit t, ist ϑ der Winkel der in Drehung befindlichen mit einer festen Ebene, s die Länge des gekrümmten Fadenstücks, so ist

$$ds^2 = dr^2 + dz^2.$$

Die kinetische Energie T der beiden Massenpunkte ist dann

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}\,(m\dot{s}^2 + m_1\dot{s}^2 + mr^2\dot{\vartheta}^2) \\ &= \tfrac{1}{2}\,[(m + m_1)(\dot{r}^2 + \dot{z}^2) + mr^2\dot{\vartheta}^2], \end{aligned} \tag{1}$$

und zwar gleich einer Konstanten, wenn man von Reibung und der Wirkung der Schwerkraft absieht, was wir tun wollen. Die Bedingungsgleichung, die zwischen den Koordinaten r, z, ϑ des Systems besteht, ist die Gleichung

$$\varphi(r, z) \equiv z - f(r) = 0 \tag{2}$$

der Kurve, nach der die Röhre gebogen ist. Dann lauten die durch das Grundgesetz

$$0 = \delta\frac{mf^2}{2} = \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial T}{\partial r}\right]\delta\ddot{r} + \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial T}{\partial z}\right]\delta\ddot{z} + \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial T}{\partial \vartheta}\right]\delta\ddot{\vartheta} \tag{3}$$

gelieferten Bewegungsgleichungen, bei Berücksichtigung der Bedingungsgleichung

$$-f'(r)\,\delta\ddot{r} + \delta\ddot{z} = 0, \tag{3a}$$

$$\begin{aligned} (m + m_1)\,\ddot{r} &= mr\dot{\vartheta}^2 - \lambda f'(r) \\ (m + m_1)\,\ddot{z} &= \lambda \\ mr^2\dot{\vartheta} &= \mathfrak{q}\cdot m, \end{aligned} \tag{4}$$

wo $\mathfrak{q}$ eine Integrationskonstante ist. Der Vektor λ hat die Dimension einer Kraft und steht, da seine Komponenten in der Ebene der Röhre sich wie $-f'(r):1$ verhalten, auf der Kurve derselben senkrecht, ist also der Reaktionsdruck der Röhre. Durch Elimination von λ aus den Gleichungen (4) erhält man

$$\dot{s}\ddot{s}(m+m_1) = \frac{m\mathfrak{q}^2\dot{r}}{r^3},$$

oder, wenn man sich aus der Gleichung $z = f(r)$ die Koordinate r in Funktion des Bogens s, also $r = \psi(s)$, berechnet denkt:

$$\frac{m+m_1}{\mathfrak{q}^2 m}\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{1}{r^3}\frac{dr}{ds} = \frac{\psi'(s)}{\psi^3(s)}, \tag{5}$$

wo nun rechts eine bekannte Funktion von s steht.

Andererseits erhält man durch Substitution von $\dot{\vartheta}$, r und $\dot{r}$ in die Gleichung der lebendigen Kraft $T = h$ (1):

$$\frac{m+m_1}{\mathfrak{q}^2 m}\dot{r}^2(1+f'(r)^2) + \frac{1}{r^2} = \frac{2h}{\mathfrak{q}^2 m},$$

und hieraus, nach Annahme der Funktion $f(r)$ für den krummen Röhrenteil, r in Funktion von t. Setzt man die Länge des geraden Röhrenteils $OA = l$, und den Abstand des Punktes m_1 von dem Endpunkt O gleich z_1, so ist, wenn L die ganze Fadenlänge ist,

$$l - z_1 + s = L,$$

also

$$z_1 = s + \text{const.} \tag{6}$$

Statt die Funktion $f(r)$ als gegeben anzusehen, kann man auch umgekehrt für

$$\ddot{z}_1 = \ddot{s}$$

eine bestimmte Funktion von s oder von $k - s$, wo k eine Konstante ist,

$$\ddot{s} = F(k-s) \tag{7}$$

annehmen und hieraus die Gestalt der krummen Röhre bestimmen, indem man (7) in (5) einträgt und r zunächst in Funktion von s, dann in Funktion von z berechnet. Wären nun der Massenpunkt m sowie Röhre und Faden unsichtbar, so schiene sich der Punkt m_1 in der Achse Z so zu bewegen, als ob auf ihn die beliebig angenommene Fernkraft $F(k_1 - z_1)$ wirkte, denn aus (7) ergibt sich wegen (6):

$$\ddot{z}_1 = F(k_1 - z_1), \tag{7a}$$

wo k_1 wieder eine Konstante ist.

2. Als Beispiel einer nichtholonomen Bewegung diene die eines einfachen Apparates, der vor nicht langer Zeit als

„PRYTZsches Stangenplanimeter" in der Feldmeßkunst eingeführt worden ist. Er besteht im wesentlichen aus einer Stange, deren eines Ende einen beilartigen Ansatz A (s. d. Figur), deren anderes Ende eine ebenso lange etwas abgerundete Spitze B trägt, die beide auf einer horizontalen Ebene E ruhen. Das Instrument bewege sich infolge eines auf den Schwerpunkt S ausgeübten horizontalen Stoßes. Die Spitze B kann sich nach allen Seiten bewegen, aber die Schneide des Ansatzes A verhindert die seitliche Verschiebung dieses Punktes und bewirkt, daß A sich nur in einer durch

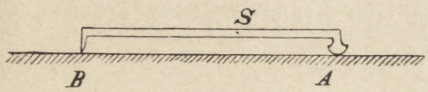

Fig. 6a.

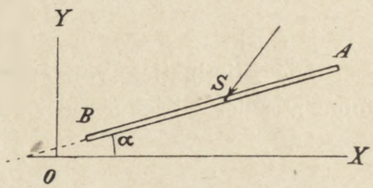

Fig. 6b.

die Schneide bestimmten Richtung vorwärts bewegen kann Diese falle mit der Stabrichtung AB zusammen. Der Stoß auf den Schwerpunkt erteilt dem Instrument

1. eine Anfangsdrehung um A und bewirkt
2. eine fortschreitende Bewegung von S. Sind x, y die rechtwinkligen Koordinaten von A, ξ, η die des Schwerpunktes S in irgendeinem Zeitpunkt t; ist $AS = a$, und α der Neigungswinkel der Stabrichtung mit der X-Achse, so ist

$$x - \xi = a \cos \alpha; \quad y - \eta = a \sin \alpha. \tag{1}$$

Die Bedingung, daß A sich in der Richtung der Beilschneide bewege, drückt sich durch die Gleichung aus

$$dy = dx \operatorname{tg} \alpha, \tag{2}$$

die eine nichtholonome Bedingung darstellt. Die lebendige Kraft des Systems ist, wenn die Masse gleich 1 gesetzt wird und k der Trägheitsradius ist (Art. 3 (1b)),

$$T = \tfrac{1}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + k^2\dot{\alpha}^2). \tag{3}$$

Aus (1), (2) erhält man die Bedingungsgleichung

$$d'\Phi \equiv d\eta - d\xi \operatorname{tg} \alpha + \frac{a\,d\alpha}{\cos \alpha} = 0. \tag{4}$$

Das Grundgesetz ergibt:

$$\delta \frac{mf^2}{2} - \lambda \delta' \Phi = 0,$$

oder ausgeführt (Art. 8 (2))

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}}\right) + \lambda \operatorname{tg} \alpha\right]\delta\ddot{\xi} + \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}}\right) - \lambda\right]\delta\ddot{\eta} + \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}}\right) - \frac{\lambda a}{\cos\alpha}\right]\delta\ddot{\alpha} = 0.$$

Daher sind die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + \lambda \operatorname{tg} \alpha &= 0 \\ \ddot{\eta} - \lambda \qquad &= 0 \\ k^2 \ddot{\alpha} - \frac{a\lambda}{\cos\alpha} &= 0, \end{aligned} \tag{5}$$

wozu noch kommt (4):

$$\dot{\eta} - \operatorname{tg}\alpha \cdot \dot{\xi} + \frac{a\dot{\alpha}}{\cos\alpha} = 0.\text{[1]} \tag{4a}$$

Die Elimination von λ, $\ddot{\eta}$, $\ddot{\xi}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\xi}$, in der angegebenen Reihenfolge aus der Gleichung der lebendigen Kraft

$$2\,T = h^2, \tag{6}$$

den Gleichungen (5), (4a) und der differenzierten Gleichung (4a) ergibt folgende Differentialgleichung für α

$$\frac{a^2 + k^2}{a}\,\ddot{\alpha} = \dot{\alpha}\sqrt{h^2 - (k^2 + a^2)\,\dot{\alpha}^2},$$

wozu vermöge (1), (2), (3) noch kommt

$$\frac{\dot{x}^2}{\cos^2\alpha} + (a^2 + k^2)\,\dot{\alpha}^2 = h^2$$

$$\dot{y} = \dot{x}\operatorname{tg}\alpha.$$

Setzt man

$$m^2 = \frac{k^2 + a^2}{a^2},$$

so erhält man, wenn man für $t = 0$, $\alpha = 0$, $x = \dot{x} = y = 0$ annimmt:

$$ht = m^2 a \log\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2m} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$x = am\int_0^\alpha \operatorname{tg}\frac{\alpha}{m}\cos\alpha\, d\alpha$$

$$y = am\int_0^\alpha \operatorname{tg}\frac{\alpha}{m}\sin\alpha\, d\alpha.$$

---

1) Hätte man die nichtholonome Beziehung (4a) zur Elimination von $\dot{\eta}$ aus (3) benutzt und das Grundgesetz auf diese Form von T (mit bloß zwei Veränderlichen) angewandt, so wäre jene Elimination, nach algebraischen Grundsätzen, gleichbedeutend mit der Addition nicht von $\lambda\delta'\Phi$, sondern von $\lambda\delta\frac{d'\Phi}{dt}$ gewesen. Dies hätte aber ein falsches Resultat ergeben, weil, bei *nicht* holonomer Bedingungsgleichung $d'\Phi = 0$, das Ergebnis $\delta d'\Phi \neq d\delta'\Phi$ ist.

Die beistehenden Figuren, die ich Herrn Dr. W. Reiff in Kirchheim u. T. verdanke, geben die Bahnkurve des Punktes A für die Fälle $a = 1$, $m = 4$ (gestrichelt), $a = 1$, $m = 9$, und (in der

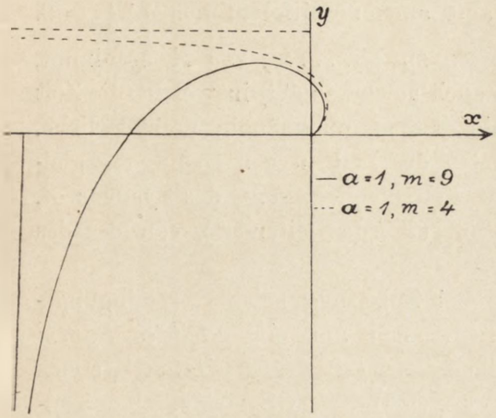

Fig. 7a.

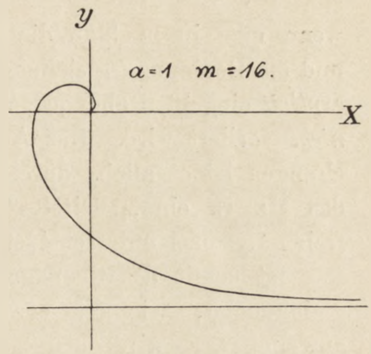

Fig. 7b.

zweiten Figur) $a = 1$, $m = 16$, letztere in dem doppelten Maßstab gezeichnet. Sie besitzen alle drei Asymptoten; je größer m ist, um so größer ist die Anzahl der Windungen um den Ursprung.

10. Geleitete Systeme, Druckkräfte.

Ein freies System setze sich in einer sogleich anzugebenden Weise aus zwei Teilen zusammen, A und $\mathfrak{A}$, deren jedes nur einen Teil der Massenpunkte des Ganzen enthält; A enthalte die Punkte $m_1, m_2, \ldots m_r$, $\mathfrak{A}$ die Punkte $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots \mathfrak{m}_{\mathfrak{r}}$. Der Ausdruck für die lebendige Kraft, geschrieben in rechtwinkligen Koordinaten, zerfällt dann in zwei Teile, die Bedingungsgleichungen zerfallen in drei, nämlich solche für A allein, solche für $\mathfrak{A}$ allein und gemischte. Denkt man sich die Integration der Bewegungsgleichungen für sämtliche Punkte des freien Systems bewerkstelligt, aber nur die Koordinaten des Systems $\mathfrak{A}$ in Funktion der Zeit bekannt und diese in die Bedingungsgleichungen eingesetzt, so werden die für $\mathfrak{A}$ allein identisch erfüllt sein, die für A ungeändert bleiben, und die gemischten außer den Koordinaten der in A auftretenden Massenpunkte noch die Zeit explizit enthalten. Von den Differentialgleichungen der Bewegung lassen sich nach Einsetzung jener Koordinaten die für das Massensystem A für sich integrieren, nur geht die Zeit in einen Teil der Bedingungsgleichungen ein. Die für das System $\mathfrak{A}$ gehen in Beziehungen über zwischen den Koordinaten der Punkte von A, den Multiplikatoren $\lambda, \mu, \ldots$ und der Zeit t, die identisch erfüllt werden, wenn man die aus dem ersten System sich ergebenden Werte für diese Größen einsetzt; sie können also ausgeschaltet werden. — Die Gleichungen für das Massensystem A ergeben sich aber auch unmittelbar aus $\delta \frac{mf^2}{2} = 0$, wenn man in m bloß die Massen $m_1, m_2, \ldots m_r$ von A aufnimmt, und als Bedingungsgleichungen auch solche zuläßt, in welche die Zeit *explizit* eingeht, wobei jedoch die Zeit, als unabhängig Veränderliche, *nicht* variiert wird. Das Auftreten der Zeit in den Bedingungsgleichungen ist es allein, durch das sich die Bewegung des Systems A, das Hertz ein „geleitetes" nennt ($\mathfrak{A}$ „das leitende"), von der des freien Systems unterscheidet.

Ist somit das Grundgesetz bei Zulassung solcher Bedingungsgleichungen, wie die erwähnten, auch auf ein *geleitetes System* anwendbar, so wird doch die lebendige Kraft des geleiteten Systems allein nicht mehr, wie die des freien (ganzen) Systems, eine Konstante sein. — Bevor wir weitere Folgerungen ziehen, knüpfen wir als Beispiel an die oben (Art. 9) betrachtete Bewegung zweier durch einen Faden verbundenen Massenpunkte m, m_1 an, die sich in einer aus einem geradlinigen und einem krummlinigen Teil bestehenden Röhre bewegen, während diese um den geraden Teil rotiert. Die lebendige Kraft der Massenpunkte war (Art. 9 (1))

$$T = \tfrac{1}{2}[(m + m_1)(\dot{r}^2 + \dot{z}^2) + m r^2 \dot{\vartheta}^2], \tag{1}$$

und es bestehe als Bedingungsgleichung für den krummen Röhrenteil die Beziehung

$$r - F(z) = 0. \tag{2}$$

Machen wir nun die Annahme, daß zu den Punkten m, m_1 als System A ein System $\mathfrak{A}$ hinzutrete, welches bewirkt, daß die Umdrehung um die Achse Z in *vorgeschriebener* Weise z. B. gleichförmig vor sich geht, so tritt eine neue Bedingungsgleichung hinzu, die die Zeit explizit enthält

$$\vartheta - at = 0, \tag{3}$$

wo a eine Konstante ist. Das Grundgesetz gibt nunmehr:

$$\delta \frac{mf^2}{2} - \lambda(\delta \ddot{r} - F'(z)\delta \ddot{z}) - \mu \delta \ddot{\vartheta} = 0, \tag{4}$$

wo für $\delta \frac{1}{2} mf^2$ der frühere Ausdruck ((3) Art. 9) einzusetzen ist. Der Multiplikator λ bedeutet dabei, wie dort, den Reaktionsdruck der Röhre auf die Masse m. Auch μ ist ein Vektor, der die Dimension einer Kraft mal eine Länge, also eines Drehmomentes hat. Auf den krummen Röhrenteil wirkend macht es die Drehung zu einer gleichförmigen. Die Gleichungen (2) (3) zusammen mit den drei aus (4) sich ergebenden und den Anfangsbedingungen reichen zur Bestimmung der Größen r, z, ϑ, λ, μ in Funktion von t aus.

Man kann sich nun aber auch denken, daß diesem Gleichungssystem nur die Größen λ, μ in Funktion der Zeit entnommen und in (4) eingesetzt würden. Dann werden 2 von den 5 Gleichungen überflüssig. Beseitigt man insbesondere die Bedingungsgleichungen (2) (3), so wird der Widerstand der Röhre durch eine *Kraft* oder einen *Druck* ersetzt, der (als Funktion der Zeit bekannt) in jedem Augenblick in Richtung und Größe wechselnd die gleiche Wirkung hervorruft wie jener Widerstand. — Man könnte auch nur eine der Bedingungsgleichungen, z. B. (3) weglassen, und sie durch Annahme der Größe μ, also des die Bewegung regulierenden Drehmomentes, in Funktion der Zeit ersetzen. So z. B. gibt $\mu = 0$ die früher (Art. 9) behandelte Bewegung.

Allgemein: Für ein System von Massenpunkten möge man durch die Formulierung des Art. (6) auf das folgende System von LAGRANGEschen Bewegungsgleichungen zweiter Art geführt worden sein:

$$
\begin{aligned}
-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_1} + \frac{\partial T}{\partial p_1} + \lambda\varphi_1 + \mu\psi_1 + \cdots &= 0 \\
-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_2} + \frac{\partial T}{\partial p_2} + \lambda\varphi_2 + \mu\psi_2 + \cdots &= 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &
\end{aligned}
\tag{5}
$$

neben denen k Bedingungsgleichungen bestehen

$$
\begin{aligned}
d'\Phi &\equiv \varphi_1 dp_1 + \varphi_2 dp_2 + \cdots + \varphi_r dp_r + \varphi dt = 0 \\
d'\Psi &\equiv \psi_1 dp_1 + \psi_2 dp_2 + \cdots + \psi_r dp_r + \psi dt = 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{5a}
$$

die nun auch die Zeit explizit enthalten können[1]), da wir geleitete Systeme nicht ausschließen. Die Integration sei ausgeführt und ergebe für die Multiplikatoren λ, μ, ... und die Größen φ_i, ψ_i, φ, ψ in (5) gewisse Funktionen der Zeit. Denkt man sich diese bekannt und in (5) eingesetzt, so werden die Bedingungsgleichungen (5a) überflüssig. Dann stellen die Gleichungen (5) für sich allein die Bewegung eines Punktsystems dar, das durch ein System von Vektoren beeinflußt

1) Bei einer Variation der Gleichungen (5a) — nach Division mit dt und nochmaliger Differentiation nach der Zeit (Art. 8) — fällt das mit dt multiplizierte Glied heraus.

wird, deren Komponenten in Richtung der Koordinate p_i durch $\lambda\varphi_i$, bzw. $\mu\psi_i, \ldots$ dargestellt sind. Man kann diese Vektoren, deren Dimension, wenn p_i eine Länge ist, diejenige $[lmt^{-2}]$ einer Kraft ist, weil $[T] = [l^2mt^{-2}]$ ist, als „*Druckkräfte*" oder Widerstände deuten, welche andere Systeme auf das vorliegende ausüben, und die so wirken, daß die Bedingungsgleichungen (5a) von selbst erfüllt werden. Führt man also an Stelle der letzteren den Gesamtdruck

$$P_i = \lambda\varphi_i + \mu\psi_i + \cdots \qquad (i = 1, 2, \ldots r)$$

in Richtung der Koordinate p_i ein, so ist durch das System von Gleichungen

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_1} + \frac{\partial T}{\partial p_1} + P_1 &= 0 \\ -\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_2} + \frac{\partial T}{\partial p_2} + P_2 &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{6}$$

die Bewegung des Punktsystems ebenso vollständig definiert, wie durch die simultanen Systeme (5) (5a).

v. Helmholtz (Journ. f. M. 100, S. 145; Wissensch. Abh. Bd. 3, S. 212) nennt jene in Funktion der Zeit gegebenen Kräfte (Kraftkomponenten) $P_1, P_2, \ldots P_r$ *Lagrangesche Kräfte*. Sagen von den Bedingsgleichungen (5a) einige aus, daß Koordinaten des betrachteten Systems mit solchen eines anderen übereinstimmen, so nennt Hertz das zweite System mit dem ersten *gekoppelt*. *Die Wirkung des einen auf das andere* stellt sich auch in diesem Fall durch *Kräfte P* dar, die entweder, wie wir bisher annahmen, als Funktionen der Zeit bekannt sind, oder deren Größe und Richtung, wie wir später sehen werden (Art. 14), sich auf indirektem Wege bestimmen läßt.

Für jedes einzelne der gekoppelten Systeme sind die Kräfte P „äußere" Kräfte; für das Gesamtsystem „innere".

Die Theorie dieser (Druck-)Kräfte hat Hertz in den Artt. 450 bis 493 seiner Mechanik ausführlich entwickelt, namentlich auch die Gleichheit von Kraft und Gegenkraft (Druck und Gegendruck) nachgewiesen (Art. 468).

11. Beispiel eines geleiteten Systems.

Ein bemerkenswertes Beispiel verdankt man v. Helmholtz. Er hat an dem Bohnenbergerschen Kreisel, einem Rotationskörper in Cardanischer Aufhängung, eine Reziprozität nachgewiesen, die zwischen gewissen auf die Ringe des Gestells ausgeübten Drucken und deren Wirkungen besteht (Über das Prinzip der kleinsten Wirkung, Journ. f. Math. Bd. 100, S. 163, Wissensch. Abh. Bd. 3, S. 222).

L sei ein fester Kreisring in der Vertikalebene. Der Ring M drehe sich gegen L um einen vertikalen Durchmesser $Z'O$ von L und bilde zu einer Zeit t mit ihm den Winkel φ. M trägt eine horizontale Achse OV, um welche ein dritter Ring N sich dreht. Er bilde den Winkel ϑ mit der Ebene von M. In der Ebene von N liege senkrecht zu OV die Achse OZ, auf die eine massive Kreisscheibe mit dem Schwerpunkt in O aufgesteckt sei. Die Achsen OX, OY in der Mittelebene der Scheibe seien zueinander und zu der Scheibenachse OZ senkrecht. Nimmt man in der Ebene XOY $OU \perp OV$ an, so wird diese Ebene von der Ebene ZOZ' in OU geschnitten, weil OV zugleich auf OZ und auf OZ' senkrecht steht, und zwar ist $\sphericalangle\, \vartheta = (OZ, OZ')$. Der Winkel von OU gegen OX sei ψ. Die Winkel φ, ψ, ϑ sind dann keine anderen als die „Eulerschen Winkel". Das System befinde sich zur Zeit t in Bewegung, und es seien $\dot\varphi$, $\dot\vartheta$, $\dot\psi$ die Winkelgeschwindigkeiten der Drehung bzw. um die Achsen OZ', OV, OZ. Wir müssen zunächst die in Richtung der X, Y, Z-Achsen fallenden Komponenten p, q, r der Resultanten aus $\dot\varphi$, $\dot\vartheta$, $\dot\psi$ berechnen.

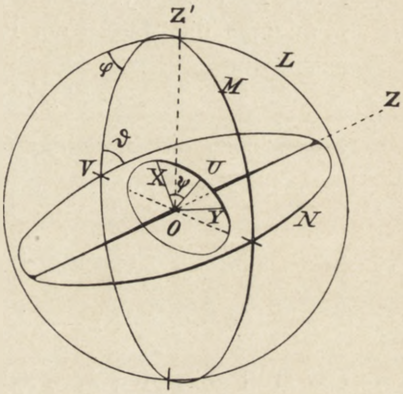

Fig. 8.

Die Komponente $\dot\varphi$ zerlegt man in der Ebene ZOZ' in die Richtungen OZ und OU und erhält $\dot\varphi \cos\vartheta$, $\dot\varphi \sin\vartheta$. Die Komponente $\dot\varphi \sin\vartheta$ in die Richtungen OX, OY zerlegt, gibt $\dot\varphi \sin\vartheta \cos\psi$, $\dot\varphi \sin\vartheta \sin\psi$. Endlich zerlegt sich $\dot\vartheta$ in die Richtungen OX, OY mit den Komponenten $\dot\vartheta \sin\psi$, $\dot\vartheta \cos\psi$. Daher hat man folgende Beziehungen

$$\begin{aligned} p &= \dot\varphi \sin\vartheta \cos\psi - \dot\vartheta \sin\psi \\ q &= \dot\varphi \sin\vartheta \sin\psi + \dot\vartheta \cos\psi \\ r &= \dot\varphi \cos\vartheta + \dot\psi. \end{aligned} \tag{7}$$

Unter Benutzung des Ausdrucks, den wir in Art. 5 (a. E.) für die lebendige Kraft T der drehenden Bewegung eines Körpers um seinen Schwerpunkt gefunden haben, erhält man daher, wenn A, B, C die Hauptträgheitsmomente sind und wenn $A = B$ ist, in den Eulerschen Winkeln dargestellt die lebendige Kraft der sich drehenden Scheibe:

$$T = \tfrac{1}{2}(Ap^2 + Aq^2 + Cr^2) = \tfrac{1}{2}[A\dot{\vartheta}^2 + A(\dot{\varphi}\sin\vartheta)^2 + C(\dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi})^2]. \quad (8)$$

Wir wollen nun annehmen, daß die Ringe M und N sich um ihre Achsen OZ' und OV in vorgeschriebener Weise drehen, daß also, wenn φ, ϑ gegebene Funktionen der Zeit sind, die Bedingungsgleichungen bestehen

$$\begin{aligned} \Phi &\equiv \varphi - \varphi(t) = 0 \\ \Theta &\equiv \vartheta - \vartheta(t) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Dann ist unser System ein geleitetes, und das Grundgesetz liefert, wenn man die Massen der Ringe M und N und der Achse OZ vernachlässigt

$$\delta \tfrac{1}{2} m f^2 - \lambda \delta \ddot{\Phi} - \mu \delta \ddot{\Theta} = 0,$$

woraus sich die Bewegungsgleichungen ergeben ((2) (3) Art. 8)

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{d}{dt}(A\dot{\varphi}\sin^2\vartheta + C\cos\vartheta(\dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi})) \\ 0 &= \frac{d}{dt}C(\dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi}) \\ \mu &= \frac{d}{dt}(A\dot{\vartheta}) - A\dot{\varphi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta + C\sin\vartheta\dot{\varphi}(\dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi}). \end{aligned} \quad (10)$$

Die Multiplikatoren λ, μ haben auch in diesem Beispiel die Bedeutung von Momenten, d. h. von Druckkräften im Abstand 1 von der Drehachse. Man kann nun entweder, nachdem man φ, ϑ in Funktion der Zeit aus (9) in die Gleichungen (10) eingeführt hat, ψ, λ, μ zu bestimmen verlangen. Man kann das System aber auch als ein gekoppeltes ansehen, indem man nach Beseitigung der Gleichungen (9) λ, μ als gegebene Funktionen der Zeit oder der Winkel annimmt, und φ, ψ, ϑ aus (10) und den Anfangsbedingungen bestimmt.

Aus der 2. Gleichung (10) ergibt sich

$$\dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi} = \beta;$$

wo β eine Integrationskonstante ist, und damit aus den beiden anderen Gleichungen

$$\begin{aligned} \lambda &= A\ddot{\varphi}\sin^2\vartheta + 2A\dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\vartheta\dot{\vartheta} - C\beta\sin\vartheta\dot{\vartheta} \\ \mu &= A\ddot{\vartheta} - A\dot{\varphi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta + C\beta\dot{\varphi}\sin\vartheta. \end{aligned}$$

Differenziert man die erste partiell nach $\dot{\vartheta}$, die zweite nach $\dot{\varphi}$, so kommt

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\dot{\vartheta}} = A\dot{\varphi}\sin 2\vartheta - C\beta\sin\vartheta = -\frac{\partial\mu}{\partial\dot{\varphi}}\cdot$$

Sind also $\partial\lambda$, $\partial\mu$, $\partial\dot\vartheta$ positiv, so ist $\partial\dot\varphi$ negativ, d. h. wenn vermöge einer Vergrößerung des Druckes λ (durch den die Präzessionsgeschwindigkeit $\dot\varphi$ vergrößert wird) die Kreiselachse sich von der Vertikalebene entfernt ($\dot\vartheta$ positiv wird), so muß umgekehrt vermöge einer Vergrößerung des Druckes μ (der die Achse von der Vertikalen entfernt) sich die Geschwindigkeit $\dot\varphi$ der Präzessionsbewegung vermindern. — Es hat einen großen Reiz, dieses Ergebnis durch Versuche an dem Modell des BOHNENBERGERschen Kreisels zu bestätigen.

12. Unstetige Bewegung und Stoßkräfte.

Ebenso wie an Stelle von Bedingungsgleichungen oder von gekoppelten Systemen Druckkräfte als bekannte Funktionen der Zeit eintreten können, lassen sich auch diskontinuierlich wirkende Bedingungsgleichungen durch *Stoßkräfte (Impulse)* ersetzen. Wird nämlich eine plötzliche Geschwindigkeitsänderung beschrieben durch die in Art. 7 aufgestellten Gleichungen

$$\frac{\partial T}{\partial \dot p_k} - \frac{\partial T^{(0)}}{\partial \dot p_k^{(0)}} = \lambda \Phi_k + \mu \Psi_k + \cdots = P_k, \tag{1}$$

wo $T, T^{(0)}$ die lebendige Kraft des Systems vor und nach dem Eintritt der Unstetigkeit der Bahngeschwindigkeit sind, so kann man wieder die Vektorkomponenten $\lambda \Phi_k$, $\mu \Psi_k, \ldots$, welche die plötzlichen auf der linken Seite angegebenen Geschwindigkeitsänderungen bewirken, als bekannte Größen auffassen, die sich zu den Größen P_k vereinigen. P_k stellt dann eine in der Richtung der Koordinate p_k wirkende „Stoßkraft“ (Impuls-Komponente) dar, deren Dimension, wenn p_k eine lineare Größe ist, gleich $[lmt^{-1}]$, also die einer Geschwindigkeit mal einer Masse ist.

In rechtwinkligen Koordinaten geschrieben lauten die obigen Gleichungen

$$\begin{aligned} m_i(u_i - u_i^{(0)}) &= X_i \\ m_i(v_i - v_i^{(0)}) &= Y_i \qquad\qquad i=1,2,\ldots n \\ m_i(w_i - w_i^{(0)}) &= Z_i, \end{aligned} \tag{2}$$

wenn (u_i, v_i, w_i), $(u_i^{(0)}, v_i^{(0)}, w_i^{(0)})$ die Geschwindigkeiten des Punktes mit der Masse m_i vor und nach dem Stoße sind, (X_i, Y_i, Z_i) die auf ihn wirkende Stoßkraft. In eine Gleichung zusammengefaßt lauten sie:

$$\begin{aligned} \Sigma[(m_i(u_i - u_i^{(0)}) - X_i)\delta(u_i - u_i^{(0)}) + (m_i(v_i - v_i^{(0)}) - Y_i)\delta(v_i - v_i^{(0)}) + \\ + (m_i(w - w_i^{(0)}) - Z_i)\delta(w_i - w_i^{(0)})] = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Wirkt beispielsweise auf ein um seinen Schwerpunkt drehbares starres Punktsystem eine Stoßkraft, deren Moment die Komponenten L, M, N hat, und war das System vor dem Stoß in Ruhe, ist also $u_i^{(0)} = v_i^{(0)} = w_i^{(0)} = 0$, so ergibt sich (Art. 5), wenn p, q, r die Komponenten der entstehenden Winkelgeschwindigkeit sind, aus

$$u = zq - yr \text{ usw.}$$

$$\delta u = z\delta q - y\delta r \text{ usw.}$$

und hiermit geht (3) über in:

$$\Sigma(m_i(z_i q - y_i r) - X_i)(z_i\delta q - y_i\delta r) + \cdots = 0$$

oder, in den Bezeichnungen des Art. 5, wenn die Achsen eines mit dem Punktsystem fest verbundenen Koordinatensystems die Hauptträgheitsachsen sind, also $\Sigma m_i y_i z_i = 0$ usw.,

$$Ap\delta p + Bq\delta q + Cr\delta r - (Y_i z_i - Z_i y_i)\delta p - \cdots = 0$$

$$(Ap - L)\delta p + (Bq - M)\delta q + (Cr - N)\delta r = 0,$$

woraus sich die durch die Stoßkraft hervorgerufenen Winkelgeschwindigkeiten ergeben,

$$Ap = L, \qquad Bq = M, \qquad Cr = N.$$

13. Momente (Impulskoordinaten).

In der 2. Form der LAGRANGEschen Bewegungsgleichungen (Art. 8) treten die partiellen Differentialquotienten der kinetischen Energie T, genommen nach den Geschwindigkeitskomponenten $\dot{p}_i$, auf. Man bezeichnet diese Größen

$$q_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_i},$$

nach Analogie der gleichen Bildungen für rechtwinklige Koordinaten, wo sie die Werte $m_i\dot{x}_i, m_i\dot{y}_i, m_i\dot{z}_i$ haben, als „*Momente*" des Systems hinsichtlich der Koordinaten p_i (nach KLEIN und SOMMERFELD, Theorie des Kreisels als „*Impulskoordinaten*"). Man führt sie (alle oder teilweise) oft mit Vorteil an Stelle der $\dot{p}_i$ ein. Die Koordinaten p_i werden, ebenso wie sie in den Koeffizienten a_{ik} von

$$T = \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma a_{ik}\dot{p}_i\dot{p}_k \tag{1}$$

auftreten, so auch in denen b_{ik} des transformierten Ausdrucks

$$T = T_1 = \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma b_{ik}q_i q_k \tag{2}$$

vorkommmen können. Die Einführung der q_i erfolgt mit Hilfe der Gleichungen

$$q_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_i} = a_{1i}\dot{p}_1 + a_{2i}\dot{p}_2 + \cdots + a_{ri}\dot{p}_r = \sum^k a_{ki}\dot{p}_k. \tag{3}$$

Wegen der Homogenität von T hinsichtlich der $\dot{p}$ ist

$$2T = q_1\dot{p}_1 + q_2\dot{p}_2 + \cdots + q_r\dot{p}_r = \sum q_i\dot{p}_i, \tag{4}$$

woraus man durch Differentiation erhält

$$\begin{aligned} 2dT &= \Sigma q_i d\dot{p}_i + \Sigma \dot{p}_i dq_i \\ &= \sum \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_i} d\dot{p}_i + \Sigma \dot{p}_i dq_i. \end{aligned}$$

Andererseits liefert die Differentiation von (1):

$$dT = \sum \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_i} d\dot{p}_i + \sum \frac{\partial T}{\partial p_i} dp_i.$$

Zieht man diese Gleichung von der vorigen ab, so kommt

$$dT = \Sigma \dot{p}_i dq_i - \sum \frac{\partial T}{\partial p_i} dp_i.$$

Endlich erhält man durch Differentiation von (2)

$$dT_1 = \sum \frac{\partial T_1}{\partial q_i} dq_i + \sum \frac{\partial T_1}{\partial p_i} dp_i.$$

Aus

$$dT = dT_1 \tag{5}$$

ergeben sich durch Vergleichen die bekannten Gleichungen (Jacobi, Vorl. über Dynamik, herausg. von Clebsch, S. 352)

$$\frac{\partial T_1}{\partial q_i} = \dot{p}_i, \qquad \frac{\partial T_1}{\partial p_i} = -\frac{\partial T}{\partial p_i}. \tag{6}$$

Wenn also in T neben den r Variabeln p statt der Geschwindigkeiten $\dot{p}$ die Momente q eingeführt werden, so nehmen die partiellen Differentialquotienten von T nach den Koordinaten selbst, den p, *entgegengesetztes* Vorzeichen an. Dies rührt eben von dem Eintreten der p in die Koeffizienten der Transformationsformeln her.

Ein Beispiel für die Einführung der Momente liefert wieder der Kreisel. Setzt man in (8) des Art. 11

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \Phi; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} = \Theta, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = \Psi,$$

(wo Φ, Θ eine andere Bedeutung haben, wie in Art. 11) und löst diese Gleichungen nach $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$, $\dot{\vartheta}$ auf, so erhält man

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{A\sin^2\vartheta}[\Phi - \Psi\cos\vartheta]; \quad \dot{\vartheta} = \frac{\Theta}{A}; \quad \dot{\psi} = \frac{\Psi}{C},$$

und daher

$$T_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{\Theta^2}{A} + \frac{(\Phi - \Psi\cos\vartheta)^2}{A\sin^2\vartheta} + \frac{\Psi^2}{C}\right],$$

womit man leicht

$$\frac{\partial T}{\partial \vartheta} = -\frac{\partial T_1}{\partial \vartheta}$$

bestätigt.

Von der Einführung der Momente macht man in der Theorie der „zyklischen Systeme" Gebrauch, zu der wir uns jetzt wenden.

14. Zyklische Systeme und Fernkräfte.

Wenn in dem Ausdrucke T für die kinetische Energie eine der Koordinaten p_i nicht selbst auftritt, sondern bloß vermöge ihres Differentialquotienten nach der Zeit $\dot p_i$, so nennen wir sie mit Hertz (Art. 546) eine *zyklische Koordinate.* In dem ersten Beispiel des Art. 9 sind z und ϑ, in dem zweiten φ und ψ zyklische Koordinaten (die Bezeichnung zyklisch rührt von v. Helmholtz her, Journ. f. Math. Bd. 92, Bd. 100). Sind in einem System die *„zyklischen Geschwindigkeiten"* oder „Intensitäten", d. h. die Änderungsgeschwindigkeiten der zyklischen Koordinaten, gegenüber den nicht zyklischen so groß, daß die kinetische Energie des Systems mit hinreichender Annäherung eine homogene quadratische Funktion bloß der zyklischen Geschwindigkeiten ist, so heißt es ein zyklisches, seine Bewegung eine zyklische. Wir bezeichnen öfter die zyklischen Koordinaten eines Systems mit deutschen Buchstaben $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2, \cdots \mathfrak{p}_{\mathfrak{r}}$, die nicht zyklischen (langsam veränderlichen Parameter, wie sie v. Helmholtz nennt) mit $p_1, p_2, \cdots p_r$. Ein zyklisches System ist also definiert durch die Annahme

$$T = \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma\mathfrak{a}_{ik}\dot{\mathfrak{p}}_i\dot{\mathfrak{p}}_k; \quad \text{(nahezu)}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{p}_k} = 0; \quad \frac{\partial T_1}{\partial \mathfrak{p}_k} = 0; \quad \frac{\partial T_1}{\partial q_k} = \dot p_k = 0, \qquad \text{(nahezu)}$$

wenn T_1 der in den Momenten $q_1, q_2, \cdots q_r$, $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \cdots \mathfrak{q}_{\mathfrak{r}}$ (statt der $\dot p$, $\dot{\mathfrak{p}}$) geschriebene Ausdruck für die kinetische Energie T ist. Wenn insbesondere $\mathfrak{r} = 1, 2$ ist, heißt das System ein mono- bezw. dizyklisches. Monozyklisch ist die Bewegung des 1. Beispiels des Art. 9, wenn $m r \dot\vartheta^2$ sehr groß gegen $(m + m_1)\dot s^2$ ist, ferner die Bewegung des Bohnenbergerschen Kreisels kurz nach erfolgtem Antrieb, wenn also die Drehgeschwindigkeit $\dot\psi$ der Scheibe gegen diejenigen $\dot\varphi$, $\dot\vartheta$ der Ringe sehr groß ist. Dizyklische Bewegungen werden wir unten kennen lernen (Art. 34).

Werden auf irgendeine Weise (z. B. durch Systeme, die mit dem zyklischen gekoppelt sind) die zyklischen Geschwindigkeiten konstant erhalten, ist also

$$\dot{\mathfrak{p}}_k = \text{const}, \qquad (i = 1, 2, \cdots \mathfrak{r})$$

so heißt das System *isozyklisch*. Finden dagegen auf sie keine äußeren Einwirkungen statt, verschwinden also in den LAGRANGEschen Gleichungen für das zyklische Teilsystem die Ableitungen der zyklischen Momente nach der Zeit

$$\frac{d\mathfrak{q}_k}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathfrak{p}}_k} = 0, \qquad (k = 1, 2, \cdots \mathfrak{r})$$

so nennen wir mit HERTZ das zyklische System *adiabatisch*. Die oben definierte monozyklische Bewegung des Kreisels ist adiabatisch, auch wenn die Kräfte λ, μ von Null verschieden sind.

In der Mechanik von HERTZ wird nun die Koppelung unbekannter zyklischer Systeme mit einem System von bekannten Massen zur Erklärung der auf das letztere wirkenden *Fernkräfte* verwendet, wie folgt. Ein System setze sich aus einem Teil $\mathfrak{A}$ mit Massenpunkten in rascher zyklischer Bewegung und einem Teil A mit relativ langsam ihre Lage ändernden Massenpunkten zusammen. Die kinetische Energie des zyklischen und des nichtzyklischen Teilsystems seien

$$\mathfrak{T} = \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma\mathfrak{a}_{ik}\dot{\mathfrak{p}}_i\dot{\mathfrak{p}}_k \qquad (i, k = 1, 2, \cdots \mathfrak{r})$$

$$T = \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma a_{ik}\dot{p}_i\dot{p}_k \qquad (i, k = 1, 2, \cdots r)$$

Die kinetische Energie des Gesamtsystems ist dann

$$\mathsf{T} = T + \mathfrak{T},$$

sofern Glieder mit Produkten aus den $\dot{p}$ und $\dot{\mathfrak{p}}$ nicht auftreten, eine Annahme, die z. B. im Falle rechtwinkliger Koordinaten erfüllt ist. Ist das ganze System ein freies, so ist $\mathsf{T} = h$ eine Konstante.

In den Koeffizienten a_{ik} und $\mathfrak{a}_{ik}$ treten nach Voraussetzung die Koordinaten $\mathfrak{p}_k$ nicht auf, wohl aber die p_k. T und $\mathfrak{T}$ sind also Funktionen von der Form

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}((\dot{\mathfrak{p}}_k, p_k)); \quad T = T((\dot{p}_k; p_k)),$$

wo von den auftretenden Variabeln nur je ein Repräsentant der $\mathfrak{r}$ bzw. r eingesetzt wurde, was die doppelte Klammer andeuten soll. Und zwar mögen einige der Koeffizienten a_{ik} in T so groß sein, daß diese Funktion der langsam veränderlichen Parameter p nicht gegen $\mathfrak{T}$ verschwindet (dies tritt z. B. in dem oben erwähnten 1. Beispiel des Art. 9 ein, wenn man $\dot{\vartheta}$ groß gegen $\dot{s}$ und zugleich m_1 groß gegen m annimmt). Wir wollen nun statt der $\dot{\mathfrak{p}}_k$ in $\mathfrak{T}$ die zugehörigen Momente

$$\mathfrak{q}_k = \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot{\mathfrak{p}}_k} \tag{1}$$

einführen, wodurch $\mathfrak{T}$ in die Funktion $\mathfrak{T}_1$

$$\mathfrak{T}((\dot{\mathfrak{p}}_k,\ p_k)) = \mathfrak{T}_1((\mathfrak{q}_k,\ p_k)) \tag{2}$$

übergehen möge. Der Ausdruck für die Gesamtenergie wird

$$\mathsf{T} = T((\dot{p}_k, p_k)) + \mathfrak{T}((\dot{\mathfrak{p}}_k, p_k)) = T((\dot{p}_k, p_k)) + \mathfrak{T}_1((\mathfrak{q}_k, p_k)). \tag{3}$$

Wir wollen der Einfachheit halber vorerst annehmen, daß das System ein freies sei, für das zugleich keine Bedingungsgleichungen bestehen. Dann ergeben sich aus der Formulierung des Grundgesetzes (Artt. 6, 8)

$$\delta \frac{mf^2}{2} = 0 \tag{4}$$

oder:

$$\sum^k \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathsf{T}}{\partial \dot{p}_k} - \frac{\partial \mathsf{T}}{\partial p_k}\right)\delta \ddot{p}_k + \sum^k \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathsf{T}}{\partial \dot{\mathfrak{p}}_k} \cdot \delta \ddot{\mathfrak{p}}_k = 0$$

die Differentialgleichungen der Bewegung in der Form

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_k} = \frac{\partial T}{\partial p_k} + \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial p_k} \qquad (k = 1, 2, \cdots r) \tag{5}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathsf{T}}{\partial \dot{\mathfrak{p}}_k} = \frac{d\mathfrak{q}_k}{dt} = 0. \qquad (k = 1, 2, \cdots \mathfrak{r}) \tag{6}$$

Der zyklische Teil $\mathfrak{A}$ des Systems bewegt sich also adiabatisch; die zyklischen Momente $\mathfrak{q}_k$ sind Konstanten. *Dann geht aber der Ausdruck $\mathfrak{T}_1$ für die lebendige Kraft dieses Teils in eine Funktion bloß der Koordinaten p_k über,* die wir mit $-U$ bezeichnen wollen,

$$\mathfrak{T}_1((\mathfrak{q}_k, p_k)) = -U(p_1, p_2, \cdots p_r),$$

und es wird die Gesamtenergie des Systems

$$\mathsf{T} = \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma a_{ik}\dot{p}_i\dot{p}_k - U(p_1, p_2, \cdots p_r) = h. \tag{7}$$

In den Bewegungsgleichungen (5), die allein noch übrigbleiben, ist nun, wegen des in Art. 13 Gl. (6) bewiesenen Satzes über die Einführung der Momente an Stelle der Geschwindigkeiten,

$$\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial p_k} = -\frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial p_k} = \frac{\partial U}{\partial p_k} \tag{7a}$$

zu setzen. Sie werden also

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_k} = \frac{\partial T}{\partial p_k} + \frac{\partial U}{\partial p_k}. \qquad (k = 1, 2, \cdots r) \tag{8}$$

Dieses Gleichungssystem hätte sich auch ergeben, wenn man die aus dem Grundgesetz fließende Bedingung für das Gesamtsystem

$$\delta \frac{mf^2}{2} = 0$$

ersetzt hätte durch die Forderung für das Teilsystem A, daß

$$\delta \frac{mf^2}{2} - \delta \ddot{U} = 0 \tag{9}$$

ist, wo

$$\delta \ddot{U} = \sum \frac{\partial U}{\partial p_k} \delta \ddot{p}_k \tag{9a}$$

ist, eine Forderung, der man insbesondere für rechtwinklige Koordinaten die Gestalt geben kann:

$$\Sigma m_i \left[\left(\ddot{x}_i - \frac{X_i}{m_i} \right) \delta \ddot{x}_i + \left(\ddot{y}_i - \frac{Y_i}{m_i} \right) \delta \ddot{y}_i + \left(\ddot{z}_i - \frac{Z_i}{m_i} \right) \delta \ddot{z}_i \right] = 0, \tag{10}$$

wo X_i, Y_i, Z_i die nach den Koordinaten genommenen partiellen Differentialquotienten einer und derselben Funktion sind

$$U = \int \Sigma (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i), \quad (i = 1, 2, \cdots n) \tag{11}$$

die man nun die *Kräftefunktion* oder *das Potential der Kräfte* (X_i, Y_i, Z_i) nennen wird.

Die Gleichung (10) ist dann aber nichts anderes, als der Ausdruck für das *Prinzip des kleinsten Zwanges,* wie wir im folgenden Art. sehen werden, für den Fall, daß auf die Punkte m_i *Kräfte* wirken — auf den Massenpunkt m_i die Kraft (X_i, Y_i, Z_i).

Die Gleichung der lebendigen Kraft (7) nimmt für rechtwinklige Koordinaten die Form an

$$\mathsf{T} \equiv T - U = h, \tag{12}$$

wo

$$T = \tfrac{1}{2} \Sigma m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)$$

und U aus (11) zu entnehmen ist.

15. Das Prinzip des kleinsten Zwanges. Das D'ALEMBERTsche Prinzip.

Mit dieser Formulierung der Wirkung des zyklischen Teilsystems $\mathfrak{A}$ sind wir auf dem Standpunkt der gewöhnlichen Mechanik angelangt. Gekoppelt mit dem System A stellt $\mathfrak{A}$ diesem seine kinetische Energie $\mathfrak{T}$ in Gestalt der Kräftefunktion U zur Verfügung. Denkt man sich also das *zyklische Teilsystem als unsichtbar* (seine Masse verborgen), so läßt sich seine Existenz nur an dem Einfluß erkennen, den es auf die Bewegung des sichtbaren Teilsystems A

vermöge des Auftretens der Kräftefunktion U ausübt, wie sie sich durch formale Umgestaltung der lebendigen Kraft des verborgenen zyklischen Systems ergeben hat.

Die negativ genommene Kräftefunktion, also die *gegen* die wirkenden Kräfte geleistete Arbeit, bildet als *potentielle Energie* zusammen mit der lebendigen Kraft (der *kinetischen Energie*)

$$T + (-U) = h$$

die (im vorliegenden Fall konstante) Gesamtenergie des Punktsystems A. Das verborgene System, dessen kinetische Energie die potentielle des sichtbaren lieferte, war ein adiabatisch zyklisches. Man nennt in diesem Fall das sichtbare System ein *konservatives*, eine Bezeichnung, die man auf jedes System überträgt, *auf das nur Kräfte wirken, die eine Kräftefunktion besitzen.*

Ein konservatives System bilden z. B. zwei sich nach dem Gravitationsgesetz anziehende Massenpunkte, die sich ohne Reibung im Raume bewegen können.

Nimmt man nun noch an, daß für das System A der sichtbaren Massen auch *Bedingungsgleichungen* zwischen den Koordinaten bestehen (in die auch die Zeit explizit eintreten kann), so kommen in den Gleichungen (8) rechts noch Glieder von der Form

$$\lambda \varphi_k + \mu \psi_k + \cdots$$

hinzu (Art. 6 a. E.), und auch die Gleichung (11) des vor. Art. bleibt nur in dem Falle ungeändert, daß die Bedingungsgleichungen die Zeit nicht enthalten.

Hat man also ein System von Massenpunkten $m_1, m_2, \cdots m_n$, auf das Kräfte wirken, die eine Kräftefunktion $U(p_1, p_2 \cdots p_r) = 0$ besitzen, ferner als Funktionen der Zeit gegebene LAGRANGEsche Kräfte P_i in Richtung der Koordinaten p_i (Art. 10), bestehen endlich noch die Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} d'\Phi &\equiv \varphi_1\, dp_1 + \varphi_2\, dp_2 + \cdots + \varphi_r\, dp_r + \varphi\, dt = 0 \\ d'\Psi &\equiv \psi_1\, dp_1 + \psi_2\, dp_2 + \cdots + \psi_r\, dp_r + \psi\, dt = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \qquad (1)$$

(an deren Stelle auch endliche solche treten können), wo die φ, ψ, ... Funktionen der Koordinaten und der Zeit sind, *so liefert das Grundgesetz die Aussage*, daß für alle Werte der Variationen $\delta \ddot{p}$ die Gleichung besteht:

$$\delta \frac{mf^2}{2} - \delta \ddot{U} - \sum P_k \delta \ddot{p}_k - \lambda \delta' \ddot{\Phi} - \mu \delta' \ddot{\Psi} - \cdots = 0 \qquad (2)$$

oder:

$$\sum\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_k}-\frac{\partial T}{\partial p_k}-\frac{\partial U}{\partial p_k}-P_k-\lambda\varphi_k-\mu\psi_k-\cdots\right)\delta\ddot{p}_k=0 \tag{3}$$

$$(k=1,2,\ldots r)$$

und in rechtwinkligen Koordinaten, wenn man die Potentialkräfte und die LAGRANGEschen Kräfte in X_i, Y_i, Z_i zusammenfaßt:

$$\Sigma[(m_i\ddot{x}_i-X_i-\lambda\varphi_{xi}-\mu\psi_{xi}-\cdots)\delta\ddot{x}_i+(m_i\ddot{y}_i-Y_i-\lambda\varphi_{yi}-\mu\psi_{yi}\cdots)\delta\ddot{y}_i$$
$$+(m_i\ddot{z}_i-Z_i-\lambda\varphi_{zi}-\mu\psi_{zi}-\cdots)\delta\ddot{z}_i=0 \tag{4}$$

$$(i=1,2,\ldots n).$$

Dies ist aber genau diejenige Gleichung, die das GAUSSsche *Prinzip des kleinsten Zwanges* ergibt, wenn Bedingungsgleichungen von der Form:

$$\sum^i(\varphi_{xi}dx_i+\varphi_{yi}d_{yi}+\cdots)+\varphi dt=0 \tag{5}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

bestehen, und die Kraft (X_i, Y_i, Z_i) auf die Masse m_i wirkt. Um dies darzutun, müssen wir an einige bekannte Begriffe erinnern. Aus der Gleichung (4) folgt sofort das Verschwinden der Koeffizienten von $\delta\ddot{x}_i$, $\delta\ddot{y}_i$, $\delta\ddot{z}_i$ einzeln. Daher unterscheiden sich die Kraftkomponenten (X_i, Y_i, Z_i) von den Komponenten der sogenannten *Effektivkraft*, nämlich von $(m_i\ddot{x}_i, m_i\ddot{y}_i, m_i\ddot{z}_i)$, nur um die Größe $(\lambda\varphi_{xi}+\mu\psi_{xi}+\cdots, \lambda\varphi_{yi}+\cdots, \lambda\varphi_{zi}+\cdots)$.

Setzt man daher diese letzteren — durch m_i dividierten — Größen zu einem Vektor zusammen, den man den durch die Bedingungen auf den Massenpunkt m_i ausgeübten *Zwang* nennt, so läßt sich dieser auch durch die Komponenten

$$\frac{1}{m_i}(m_i\ddot{x}_i-X_i),\ \frac{1}{m_i}(m_i\ddot{y}_i-Y_i),\ \frac{1}{m_i}(m_i\ddot{z}_i-Z_i).$$

derjenigen Beschleunigung darstellen, die der Punkt m_i nach Aufhebung der Bedingungsgleichungen besitzen würde. Bildet man nun wieder einen Mittelwert (vgl. Art. 3), indem man die Quadrate der auf die Massenpunkte wirkenden Zwangskräfte, mit deren Massen multipliziert, addiert, so wollen wir unter dem *Zwang Z des ganzen Systems* die durch folgende Gleichung definierte Größe verstehen:

$$mZ^2=\sum m_i\left[\left(\ddot{x}_i-\frac{X_i}{m_i}\right)^2+\left(\ddot{y}_i-\frac{Y_i}{m_i}\right)^2+\left(\ddot{z}_i-\frac{Z_i}{m_i}\right)^2\right]. \tag{6}$$

Das von GAUSS aufgestellte Grundgesetz sagt nun aus, daß die natürliche Bewegung eines Systems so erfolgt, daß der Systemzwang einen kleinsten Wert annimmt, daß also

$$\delta \frac{mZ^2}{2} = 0 = \sum m_i \Big[\Big(\ddot{x}_i - \frac{X_i}{m_i}\Big)\delta \ddot{x}_i + \Big(\ddot{y}_i - \frac{Y_i}{m_i}\Big)\delta \ddot{y}_i + \Big(\ddot{z}_i - \frac{Z_i}{m_i}\Big)\delta \ddot{z}_i\Big] = 0. \qquad (7)$$

Diese Forderung aber, zusammen mit den aus (5) für die $\delta\ddot{x}_i, \ldots$ (wie in Art. 6 (3a)) abzuleitenden Bedingungsgleichungen geben eben die Gleichung (4).

In der Folge wollen wir nicht bloß die LAGRANGEschen Kräfte (Art. 10), sondern auch die durch ihre Kräftefunktion bestimmten, insbesondere die Fernkräfte, in die Formel (7) aufnehmen, ohne dafür eine Deutung durch verborgene Massen zu versuchen. Und zwar verwenden wir *die das* GAUSSsche *Prinzip des kleinsten Zwanges aussprechende Formel* (7) als Grundlage ebenso für die Dynamik und Statik eines Punktsystems, wie für die Bewegungsvorgänge in raumerfüllenden Massen, indem wir im einen Falle die LAGRANGEschen und Potentialkräfte, im anderen die inneren (elastischen) Kräfte *durch ihr* der Beobachtung zu entnehmendes *Potential* in (7) *einführen.*

Indem wir uns hiermit auf den in der Mechanik üblichen Standpunkt stellen, wollen wir uns den Bezeichnungen derselben auch in der Weise anschließen, daß wir in den Formeln (3) (4) die völlig willkürlichen Zuwächse der Beschleunigungen

$$\delta\ddot{p}_i,\ \delta\ddot{x}_i,\ \delta\ddot{y}_i,\ \delta\ddot{z}_i$$

durch die entsprechenden ebenso willkürlichen Koordinatenzuwächse

$$\delta p_i,\ \delta x_i,\ \delta y_i,\ \delta z_i$$

ersetzen. Sie nehmen damit die bekannte Form des D'ALEMBERTschen Prinzips an, das man sonst wohl an die Spitze der Dynamik der Punktsysteme setzt[1]), nämlich die Form:

$$\sum \Big(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_k} - \frac{\partial T}{\partial p_k} - \frac{\partial U}{\partial p_k} - P_k - \lambda\varphi_k - \mu\psi_k - \cdots\Big)\delta p_k = 0, \qquad (8)$$
$$(k = 1, 2, \ldots r)$$

oder in rechtwinkligen Koordinaten:

$$\begin{aligned} \Sigma[(m_i\ddot{x}_i - X_i - \lambda\varphi_{xi} - \mu\psi_{xi} - \cdots)\,\delta x_i \\ + (m_i\ddot{y}_i - Y_i - \lambda\varphi_{yi} - \mu\psi_{yi} - \cdots)\,\delta y_i \quad (i = 1, 2, \ldots n) \\ + (m_i\ddot{z}_i - Z_i - \lambda\varphi_{zi} - \mu\psi_{zi} - \cdots)\,\delta z_i] = 0, \end{aligned} \qquad (9)$$

1) Auf die Vorzüge des hier eingeschlagenen Weges haben wir bereits in Art. 8 hingewiesen.

mit den Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} \varphi_1 dp_1 + \varphi_2 dp_2 + \cdots \varphi_r dp_r + \varphi dt = 0 \\ \psi_1 dp_1 + \psi_2 dp_2 + \cdots \psi_r dp_r + \psi dt = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{10}$$

beziehungsweise:

$$\begin{aligned} \Sigma(\varphi_{x_i} dx_i + \varphi_{y_i} dy_i + \varphi_{z_i} dz_i) + \varphi dt = 0 \\ \Sigma(\psi_{x_i} dx_i + \cdots \qquad\qquad) + \psi dt = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{11}$$

Wir nennen dann, wie üblich, die Größen

$$P_k \delta p_k, \ \frac{\partial U}{\partial p_k} \delta p_k$$

die *Elementararbeit*, welche die Kraft P_k, bezw. die durch U definierten Kräfte *auf dem virtuellen* (gedachten, mit den Bedingungen verträglichen) *Wege* δp_k leisten, in rechtwinkligen Koordinaten:

$$X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i$$

die *Elementararbeit der Kraft* (X_i, Y_i, Z_i) *an dem Massenpunkt* m_i *auf dem virtuellen Wege* δs_i, und nennen demgemäß das Integral

$$\int (P_1 dp_1 + P_2 dp_2 + \cdots + P_r dp_r); \tag{12}$$

$$U = \int \left(\frac{\partial U}{\partial p_1} dp_1 + \cdots \frac{\partial U}{\partial p_r} dp_r\right) = \int \sum^i \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial U}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial U}{\partial z_i} dz_i\right);$$

$$\int \Sigma (X_i dx_i + Y_i dy_i + z_i dz_i) \tag{13}$$

die *Gesamtarbeit dieser Kräfte* auf einem Wege, den das System von einer (meist nicht näher bezeichneten) Anfangslage bis zu einer durch die Koordinaten $p; x, y, z$ gegebenen Stelle beschreibt. Wir kommen hierauf später noch (Art. 29) zurück und stellen hier nur fest, daß die Arbeit, als skalare Größe, positiven oder negativen Wert haben kann.

Wir werden somit in der Folge die Probleme zumeist in die Gestalt des d'Alembertschen Prinzips kleiden und nur da, wo es sich um grundsätzlich neue Formulierungen handelt, wie im Falle flüssiger Massen, auf das Prinzip des kleinsten Zwanges zurückgreifen. — Auch dann (Art. 18, 19) werden wir die Größen

$$P_k \delta \ddot{p}_k, \quad \frac{\partial U}{\partial p_k} \delta \ddot{p}_k, \quad X_i \delta \ddot{x}_i + Y_i \delta \ddot{y}_i + Z_i \delta \ddot{z}_i$$

usw. als „virtuelle Arbeit" der Kräfte P_k usw. auf dem Wege $\delta \ddot{p}_k$, bzw. $\delta \ddot{s}_i$ bezeichnen, ebenso als wenn die zwei Punkte über den Buchstaben p, x, y, z fehlten.

Wenn man in dem Ausdruck für das Prinzip des kleinsten Zwanges (4) statt der virtuellen Beschleunigungszuwächse $\delta\ddot{x}_i$, $\delta\ddot{y}_i$, $\delta\ddot{z}_i$, oder, wenn man in der Gleichung des D'ALEMBERTschen Prinzips (9) statt der virtuellen Verschiebungen δx_i, δy_i, δz_i *die wirklich eintretenden Verschiebungen* dx_i, dy_i, dz_i einführt, so ergibt sich infolge der Bedingungsgleichungen (11)

$$\Sigma m_i(\ddot{x}_i dx_i + \ddot{y}_i dy_i + \ddot{z}_i dz_i) - d'U + (\lambda\varphi + \mu\psi + \cdots)dt = 0 \quad (14)$$

oder

$$dT - d'U + (\lambda\varphi + \mu\psi + \cdots)dt = 0,$$

wo

$$d'U = \Sigma(X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i),$$

und dT die Zunahme der kinetischen Energie ist. Wenn nun $d'U$ ein vollständiges Differential, nämlich die Zunahme der potentiellen Energie ist, und wenn die Bedingungsgleichungen nicht die Zeit enthalten, also $\varphi = \psi = \cdots = 0$ sind, so geht (14) wieder *in die Gleichung der lebendigen Kraft*, die *„Energiegleichung“*, ((12) des vor. Art.) über

$$T - U = h,$$

wo h eine Konstante ist.

Die Energiegleichung besteht für jedes System, das im Sinne des HERTZschen Grundgesetzes ein „freies“ ist, auf das also, kurz gesagt, keine äußeren Kräfte wirken; denn sie formuliert nur die Forderung des Grundgesetzes. Wohl aber können zwischen den Massenpunkten eines freien Systems *innere* Kräfte wirken, deren Arbeit alsdann, negativ genommen ($-U$), als „potentielle Energie“ neben der kinetischen auftritt. Je nach der Art dieser Kräfte wird ihr Beitrag zu der Gesamtenergie als eine besondere *Energieform* bezeichnet. Wie man von der kinetischen Energie oder der Energie der Gravitation spricht, so gibt es Energie elastischer (innerer) Kräfte in einem raumerfüllenden Mittel, elektromagnetische Energie, Wärme, chemische Energie usw. Wir werden mehreren dieser Energieformen später noch begegnen, zunächst der Wärme, die bei Überwindung von Reibungswiderständen entwickelt wird, und die dann entweder als Arbeit der Reibungskraft oder als mechanisches Äquivalent der entwickelten Wärme (JOULE hat zuerst 1850 Versuche über die Verwandlung der Arbeit der Schwerkraft in Wärme angestellt) in Rechnung zu stellen ist.

Immer aber ist die Summe aller bei einem freien System auftretenden Energieformen, jede in dem gleichen Maße gemessen, eine konstante Größe. Zeitliche Änderungen können nur in der Weise eintreten, daß einige Formen sich auf Kosten der anderen vergrößern. So verlangsamt sich eine gleitende Bewegung auf Kosten der Erwärmung der Reibflächen. Der Bolzen empfängt seine Schnellkraft auf Kosten der Spannung einer elastischen Feder oder eines gedrehten Seiles. Die Trennung der Elektrizitäten in einer Elektrisiermaschine erfolgt durch die Arbeit des Drehenden, ihre Vereinigung erzeugt wieder Licht und Wärme usw.

Unser Planetensystem ist nahezu ein freies System. Aber auch auf der Erde kann man solche Systeme einigermaßen abgrenzen und sich so von der Richtigkeit des Satzes von der Erhaltung der Energie überzeugen. Auf diese Weise ist ROBERT MAYER 1842 zur Formulierung jenes weltumfassenden Naturgesetzes gelangt.

16. Beispiele. Reibungswiderstand.

Der Übergang von der kinetischen Energie verborgener zur potentiellen Energie der sichtbaren Massen möge nun an dem Beispiel (Art. 9) der Bewegung von zwei Massenpunkten in einer Röhre, die ein undehnbarer Faden verbindet, nochmals ausgeführt werden.

Wir haben in Art. 9 für die Gesamtenergie T des Systems gefunden

$$\mathsf{T} = \tfrac{1}{2}\{(m + m_1)\dot{s}^2 + mr^2\dot{\vartheta}^2\},$$

wo

$$\dot{s}^2 = \dot{r}^2 + \dot{z}^2$$

ist.

Die Koordinate ϑ ist eine zyklische, und die Bewegung des in dem krummen Röhrenteil befindlichen Massenpunktes für sich wird zu einer zyklischen, wenn man, was im Anfange der Bewegung sicher möglich ist, dafür sorgt, daß $\dot{s}$ gegenüber $r\dot{\vartheta}$ klein wird. Dies werde angenommen. Dann ist die Bewegung auch adiabatisch wegen der Beziehung ((4) Art. 9)

$$r^2\dot{\vartheta} = \mathfrak{q},$$

aus der sich $\dot{\vartheta}$ entnehmen und in T einsetzen läßt. Zerlegt man nun T in T und $\mathfrak{T}$, wo die lebendige Kraft

$$T = \tfrac{1}{2} m_1 \dot{s}^2$$

dem aus m_1 bestehenden Teilsystem zugehört, und

$$\mathfrak{T} = \tfrac{1}{2} m\dot{s}^2 + \tfrac{1}{2} mr^2\dot{\vartheta}^2 = \tfrac{1}{2} mr^2\dot{\vartheta}^2 \text{ (nahezu)}$$

dem aus m bestehenden zyklischen Teilsystem, ersetzt hier $\dot{\vartheta}$ durch die Konstante $\mathfrak{q}$, wodurch $\mathfrak{T}$ übergeht in

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1 = \tfrac{1}{2}\frac{m\mathfrak{q}^2}{r^2} = -U,$$

und nimmt endlich die Masse m_1 gegenüber der Masse m erheblich groß an, so folgt aus

$$T + \mathfrak{T} = h,$$

daß $\dot{s}$ gegen $r\dot{\vartheta}$ auch klein bleibt, solange nicht r sehr groß wird. Stellt man sich nun vor, daß die in rascher zyklischer Bewegung begriffene Masse m sowie Röhre und Faden unsichtbar seien, so genügt das sichtbare Teilsystem m_1 nicht nur den in Art. 9 aufgestellten Bewegungsgleichungen (4), in denen $m + m_1$ nahezu durch m_1 ersetzbar ist, sondern auch der durch Elimination von λ aus ihnen hervorgehenden Gleichung (5)

$$\frac{m_1}{\mathfrak{q}^2 m}\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{\psi'(s)}{\psi^3(s)} = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\psi^{-2}(s),$$

(wo

$$r = \psi(s)$$

die Gleichung der Kurve $z = f(r)$ vertritt), einer Gleichung von der Form

$$\frac{m_1}{\mathfrak{q}^2 m}\ddot{z}_1 = F(z_1),$$

wo $z_1 = s +$ constans der Abstand des Massenpunktes m von einem festen Punkt der z-Achse ist. — Dies ist aber nach der Auffassung der gewöhnlichen Mechanik die Bewegungsgleichung für einen Massenpunkt, der sich unter dem Einfluß einer Fernkraft

$$\mathfrak{q}^2 m F(z_1) = -\tfrac{1}{2}\mathfrak{q}^2 m \frac{d}{dz_1}\left[\frac{1}{\psi^2(z_1)}\right]$$

in der Richtung z_1 bewegt. Denkt man sich z. B. die Röhre so gebogen, daß $\psi^2(z_1)$ mit $k - z_1$ proportional wird, wo k eine Konstante ist, so erfolgt die Bewegung der Masse m_1 so, als ob sie von dem Punkte $z_1 = k$ umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung angezogen würde.

Mit Zuhilfenahme des vierdimensionalen Raumes könnte man dem Vorigen analog die Anziehung nach einem festen Punkt in einer Ebene nachbilden.

Ein anderes Beispiel wird uns später die Bewegung flüssiger Massen liefern.

Auch Bewegungen, die mit *Reibung* erfolgen, fügen sich ohne weiteres in diesen Rahmen ein, wenn die von der Reibung geleistete Arbeit in Funktion der Koordinaten oder ihrer Differentialquotienten darstellbar ist.

Ein Beispiel ist die geradlinige Bewegung einer homogenen Kugel, die, um eine horizontale Achse sich drehend, vorsichtig auf eine horizontale Ebene aufgesetzt wird, und sich dann teils gleitend, teils rollend vorwärts bewegt. Zur Zeit t sei x die Entfernung des Mittelpunktes der Kugel von seiner Anfangslage, ϑ der Winkel, um den die Kugel sich aus der Anfangslage heraus gedreht hat, m ihre Masse, k ihr Trägheitsradius. Dann ist die lebendige Kraft der Kugel zur Zeit t

$$T = \tfrac{1}{2} m (\dot{x}^2 + k^2 \dot{\vartheta}^2).$$

Wir nehmen an, die Reibung sei eine Kraft, die, dem Gewicht mg (g = Beschleunigung der Schwerkraft) der Kugel und einem Faktor μ (dem Reibungskoeffizienten) proportional, nur auf demjenigen Wege $\delta \xi$ eine Elementararbeit leistet, auf welchem ein Gleiten des Flächenelementes der Berührstelle der Kugel vom Radius a gegen die Unterlage stattfindet. Das Maß für diesen Weg ergibt sich aus

$$\delta \xi = a \delta \vartheta - \delta x.$$

Daher ist, *solange* $a\vartheta > x$ ist, d. h. solange die Kugel noch zugleich gleitet und rollt, die Elementararbeit der Reibung

$$\mu m g \delta \xi = -\delta [m g \mu (a\vartheta - x)],$$

die Kräftefunktion selbst somit

$$U = -m g \mu (a \vartheta - x);$$

und die Gleichung der lebendigen Kraft $T - U = h$ liefert

$$\tfrac{1}{2} m (\dot{x}^2 + k^2 \dot{\vartheta}^2) + m g \mu (a\vartheta - x) = h.$$

Die erweiterte Fassung des Grundgesetzes

$$\frac{\delta m f^2}{2} - \delta \dot{U} = 0$$

ergibt

$$m \ddot{x} \delta \ddot{x} + k^2 m \ddot{\vartheta} \delta \ddot{\vartheta} + m g \mu (a \delta \ddot{\vartheta} - \delta \ddot{x}) = 0$$

oder

$$\ddot{x} = g \mu$$
$$k^2 \ddot{\vartheta} = -a g \mu,$$

woraus, wenn für $t = 0 : x = 0,\ \dot{x} = 0,\ \vartheta = 0,\ \dot{\vartheta} = \dot{\vartheta}_0$ ist, folgt

$$x = g \mu \frac{t^2}{2}; \quad k^2 \vartheta = -a g \mu \frac{t^2}{2} + k^2 \dot{\vartheta}_0 t,$$

und

$$a\vartheta - x = -\frac{a^2 + k^2}{k^2} \cdot \frac{\mu g t^2}{2} + a^2 \dot{\vartheta}_0 t.$$

Die kinetische Energie der Bewegung T wird durch die Reibungsarbeit U mehr und mehr verkleinert, bis das Gleiten aufhört, was nach Ablauf der Zeit

$$t = \frac{2ak^2\dot{\vartheta}_0}{\mu g(a^2 + k^2)}$$

eintritt, wo dann $a\dot{\vartheta} = \dot{x}$ wird, und die Bewegung in reines Rollen mit gleichförmiger Geschwindigkeit übergeht.

Wir betrachten noch eine Bewegung, für welche der Reibungswiderstand der Richtung der Geschwindigkeit des sich bewegenden Punktes entgegengesetzt und ihr selbst an Größe proportional ist. Dann wird bei einer kleinen Verschiebung von der widerstehenden Kraft eine Elementararbeit geleistet, die, für alle Systempunkte berechnet, in rechtwinkligen Koordinaten ausgedrückt den Betrag hat

$$\delta R = -\Sigma k_i(\dot{x}_i\delta x_i + \dot{y}_i\delta y_i + \dot{z}_i\delta z_i), \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

wo die k_i Konstanten sind. Die Grundgleichung erhält dann die Gestalt

$$\frac{\delta m f^2}{2} - \delta U - \delta R = 0,$$

und die Gleichung der lebendigen Kraft wird

$$T - U - R = h,$$

wenn U die Kräftefunktion ist, wobei dann die Funktion

$$R = -\int \tfrac{1}{2} \sum k_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)\, dt$$

eine negative Größe sein muß, weil R zu der Gesamtenergie h des Systems einen positiven, und zwar immerfort wachsenden Beitrag liefert, der einer *Dissipation*, einer Vergeudung der Energie gleichkommt. Lord RAYLEIGH, der diese Funktion oder vielmehr die Funktion $\dot{R}$ eingeführt hat (J. W. STRUTT, Proceedings Lond. Math. Soc. IV, 1873), nennt die letztere „Dissipationsfunktion".

Man transformiert R und δR ähnlich wie oben $\frac{\delta m f^2}{2}$ in allgemeine Koordinaten. Zunächst ist

$$\delta R = \sum_i \left(\frac{\partial \dot{R}}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i + \frac{\partial \dot{R}}{\partial \dot{y}_i}\delta y_i + \frac{\partial \dot{R}}{\partial \dot{z}_i}\delta z_i\right), \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

wo

$$\dot{R} = -\tfrac{1}{2}\Sigma k_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)$$

ist. Hieraus möge sich durch Transformation in die Koordinaten $p_1, p_2, \ldots p_r$ ergeben

$$\dot{R} = -\tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma r_{ik}\dot{p}_i\dot{p}_k. \qquad (i, k = 1, 2, \ldots r)$$

Dann ist, wegen ((9) Art. 6)

$$\delta x_i = \sum \frac{\partial x_i}{\partial p_k} \delta p_k = \sum \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{p}_k} \delta p_k,$$

$$\delta R = \sum^i \sum^k \left[\frac{\partial \dot{R}}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{p}_k} + \frac{\partial \dot{R}}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{p}_k} + \frac{\partial \dot{R}}{\partial \dot{z}_i} \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{p}_k} \right] \delta p_k, \quad \begin{matrix} (i = 1, 2, \ldots n) \\ (k = 1, 2, \ldots r) \end{matrix}$$

oder

$$\delta R = \sum^k \frac{\partial \dot{R}}{\partial \dot{p}_k} \delta p_k = \sum^k \dot{R}_k \delta p_k.$$

Und hiermit liefert wieder das Grundgesetz die Gleichung

$$\sum \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial p_i} - \frac{\partial U}{\partial p_i} - \dot{R}_i \right] \delta p_i,$$

wo

$$\dot{R}_i = \frac{\partial \dot{R}}{\partial \dot{p}_i}$$

ist. — Einer Anwendung der Dissipationsfunktion werden wir in dem Abschnitt über elastische Mittel begegnen.

Zweiter Abschnitt.

Raumerfüllende und insbesondere flüssige Massen.

17. Gestalt der Bedingungsgleichungen.[1])

Von den diskreten Massenpunkten wenden wir uns nunmehr zu den kontinuierlichen Massen, die ganze Raumteile stetig erfüllen. „Eine kontinuierliche Masse hat man sich nicht als eine unendliche Menge von benachbarten Punkten vorzustellen, sondern, dem Geiste der Infinitesimalrechnung entsprechend, als aus unendlich kleinen Elementen von derselben Beschaffenheit, wie die Masse selbst, zusammengesetzt" (LAGRANGE, Méc. analyt. I, Sect. IV, § 2), also aus mit Masse gefüllten Volumelementen bestehend. An die Stelle der Summen über Massenpunkte treten Integrale über diese Elemente. Das Massenelement dm ist, gleichviel ob die Masse starr, elastisch oder flüssig ist, eine unveränderliche Größe. Aber das Volumelement $d\tau$, das die Masse dm enthält, kann mit der Zeit seine Größe und Gestalt ändern, wobei dann auch die Dichte ϱ (die Masse der Volumeinheit) sich ändert. Diese drei Größen sind daher miteinander durch die Gleichung verbunden

$$dm = \varrho\, d\tau,$$

wo ϱ eine Funktion des Ortes und der Zeit ist.

Durch eine Abstraktion, ähnlich der, die zu dem Begriff des materiellen Punktes führt (s. Einleitung), gelangt man zu dem Begriff der linearen (längs einer Linie verteilten) Masse (Faden, Draht, Kette) und zu der auf einer Fläche verteilten Masse. Für sie ist bzw. das Massenelement

$$dm = \varrho_s ds$$

$$dm = \varrho_\sigma d\sigma,$$

wenn ds die Länge des Linienelementes, $d\sigma$ der Inhalt des Oberflächenelementes ist, und durch die Indizes s, σ der geänderten Bedeutung von ϱ Rechnung getragen wird.

1) S. die Noten des Verf. „Über die Mechanik von HERTZ" (1900) in Mitt. d. math.-nat. Ver. v. Württemberg, und „Über ein Beispiel des Herrn BOLTZMANN zu der Mechanik von HERTZ" im Jahresber. der D. Math. Ver., VIII (1900).

Ist eine kontinuierliche Masse begrenzt, so ist ihr Verhalten an der Grenze anzugeben; ist sie in einer oder mehreren Richtungen unbegrenzt, ihr Verhalten im Unendlichen. Die Natur einer raumerfüllenden Masse (oder wie wir auch sagen werden, eines Mittels, Mediums), deren Bewegung zu untersuchen ist, wird durch Gleichungen „für das Innere" definiert, die sich auf die möglichen Gestalts- und Größenänderungen des Volum- (Oberflächen-, Linien-) Elementes beziehen, das ein Massenelement enthält. Diese nehmen, wie wir sehen werden, die Gestalt von partiellen Differentialgleichungen nach den Koordinaten an.

Ein Massenelement, das zur Zeit t die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z hat, beziehen wir auf diejenige Lage a, b, c, die es in demselben System zur Zeit $t = 0$ besaß, so daß also das Wertetripel a, b, c die Rolle des (früher an dem Massenpunkt angebrachten) Index übernimmt. Kennt man dann x, y, z in Funktion von a, b, c und der Zeit t:

$$x = x(a, b, c; t); \quad y = y(a, b, c; t); \quad z = z(a, b, c; t), \tag{1}$$

so ist die Gestalt und Verteilung, Dichtigkeit und Bewegung der Masse zu jeder Zeit bekannt. Ein dem Punkt a, b, c benachbarter $a + da,\ b + db,\ c + dc$ hat zur Zeit t die Koordinaten:

$$\begin{aligned}
x + dx &= x + \frac{\partial x}{\partial a} da + \frac{\partial x}{\partial b} db + \frac{\partial x}{\partial c} dc \\
y + dy &= y + \frac{\partial y}{\partial a} da + \frac{\partial y}{\partial b} db + \frac{\partial y}{\partial c} dc \\
z + dz &= z + \frac{\partial z}{\partial a} da + \frac{\partial z}{\partial b} db + \frac{\partial z}{\partial c} dc.
\end{aligned} \tag{2}$$

Insbesondere also entstehen aus den dem Punkt a, b, c in Richtung der Koordinatenachsen benachbarten

$$\begin{gathered}
a + da, b, c \\
a, b + db, c \\
a, b, c + dc
\end{gathered}$$

die folgenden

$$\begin{array}{lll}
x + \frac{\partial x}{\partial a} da, & y + \frac{\partial y}{\partial a} da, & z + \frac{\partial z}{\partial a} da \\[1ex]
x + \frac{\partial x}{\partial b} db, & y + \frac{\partial y}{\partial b} db, & z + \frac{\partial z}{\partial b} db \\[1ex]
x + \frac{\partial x}{\partial c} dc, & y + \frac{\partial y}{\partial c} dc, & z + \frac{\partial z}{\partial c} dc.
\end{array}$$

Jede Forderung, die sich auf das Tetraeder bezieht, das von diesen dreien und dem Punkt (x, y, z) gebildet wird, drückt sich daher durch eine Gleichung zwischen x, y, z; a, b, c und den ersten partiellen Differentialquotienten der x, y, z nach den a, b, c aus.

Beispiele. 1. Der Punkt (x, y, z) eines *Fadens* habe zur Zeit $t = 0$ den Abstand a vom Anfangspunkt. Dann ist die Lage des Fadens bestimmt durch Gleichungen von der Form

$$x = x(a, t); \quad y = y(a, t); \quad z = z(a, t).$$

Man kann die Forderung stellen, daß die einzelnen Linienelemente ihre Länge nicht ändern. Dies gibt die Beziehung

$$\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)^2 = 1.$$

Soll etwa auch die Hauptkrümmung der Fadenkurve ungeändert bleiben, so ist noch die Gleichung zu befriedigen

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial a^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial a^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial a^2}\right)^2 = f(a),$$

wo f eine gegebene Funktion ist.

2. Eine unendlich dünne elastische *Platte*, die zur Zeit $t = 0$ ebene Gestalt hat, bewege sich in deformiertem Zustand im Raume. Ein Punkt, der zur Zeit $t = 0$ in bezug auf ein Koordinatensystem in der Ebene der Platte die Koordinaten a, b hat, sei zur Zeit t an der Stelle x, y, z. Dann ist die Lage der verbogenen Platte jederzeit bekannt, wenn man die Funktionen

$$x = x(a, b; t); \quad y = y(a, b; t); \quad z = z(a, b; t)$$

kennt. — Man kann z. B. verlangen, daß bei der Bewegung die Seitenlängen der Rechtecke, in welche die Linien $a = \text{const.}$, $b = \text{const.}$ die ebene Platte zerlegen, ungeändert bleiben. Dann muß

$$\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial b}\right)^2 = 1$$

sein. Soll auch der rechte Winkel der Rechtecke erhalten bleiben, so muß noch die Gleichung bestehen

$$\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b} = 0.$$

Diese drei letzten Gleichungen zusammen drücken bekanntlich die Bedingung dafür aus, daß die ebene Platte sich ohne Faltung und Dehnung verbiegt, also immer eine abwickelbare Fläche bildet.

Soll dagegen bei der Verbiegung nur der Flächeninhalt der einzelnen Elemente erhalten bleiben, so muß, weil der doppelte Flächeninhalt eines Dreiecks sich bekanntlich durch die Determinante aus den rechtwinkligen Koordinaten der Eckpunkte und eine Reihe von Einsen ausdrückt, wenn man sich zunächst auf eine Bewegung in der Ebene der Platte selbst beschränkt,

$$da\,db = \begin{vmatrix} x & x + \frac{\partial x}{\partial a} da & x + \frac{\partial x}{\partial b} db \\ y & y + \frac{\partial y}{\partial a} da & y + \frac{\partial y}{\partial b} db \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= da\,db \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} \end{vmatrix} = da\,db\,\frac{\partial (xy)}{\partial (ab)},$$

sein, oder man hat

$$\frac{\partial (xy)}{\partial (ab)} = 1,$$

wo mit dem links stehenden Symbol die Funktionaldeterminante der x, y nach den a, b bezeichnet wird.

Eine im Raume sich verbiegende Fläche von unveränderlichem Inhalt der Flächenelemente erfüllt analog die Forderung

$$\left(\frac{\partial (yz)}{\partial (ab)}\right)^2 + \left(\frac{\partial (zx)}{\partial (ab)}\right)^2 + \left(\frac{\partial (xy)}{\partial (ab)}\right)^2 = 1.$$

3. Ebenso läßt sich der Inhalt des Raumelements $d\tau$, das aus demjenigen $d\tau_0 = da\,db\,dc$ hervorgegangen ist, durch die Determinante darstellen

$$d\tau = \begin{vmatrix} x & x + \frac{\partial x}{\partial a} da & x + \frac{\partial x}{\partial b} db & x + \frac{\partial x}{\partial c} dc \\ y & y + \frac{\partial y}{\partial a} da & y + \frac{\partial y}{\partial b} db & y + \frac{\partial y}{\partial c} dc \\ z & z + \frac{\partial z}{\partial a} da & z + \frac{\partial z}{\partial b} db & z + \frac{\partial z}{\partial c} dc \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = R \cdot da\,db\,dc,$$

wo R die Funktionaldeterminante ist

$$R = \frac{\partial (xyz)}{\partial (abc)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Ist die Masse *elastisch*, d. h. ändert sich das die Masse $dm = \varrho_0 d\tau_0$ umschließende Volumelement $d\tau_0$ mit der Zeit, bekommt also das Volumelement

$$d\tau_0 = da\,db\,dc,$$

das zur Zeit $t = 0$ Masse von der Dichte ϱ_0 umschloß, den Umfang $d\tau$, während die Dichte gleich ϱ wird, so besteht die Beziehung

$$\frac{d\tau}{d\tau_0} = \frac{\varrho_0}{\varrho} \tag{4}$$

oder

$$R - \frac{\varrho_0}{\varrho} = 0. \tag{4a}$$

Die Zunahme der Volumeinheit, die räumliche Ausdehnung (Dilatation) elastischer Massen — eine positive oder negative Größe — ist demnach ausgedrückt durch

$$\frac{d\tau - d\tau_0}{d\tau_0} = R - 1. \tag{4b}$$

Die Gleichung (4a) (oder (4)) ist eine der Formen der sogenannten *Kontinuitätsgleichung*, welche den Grundsatz von der Erhaltung der Masse ausdrückt, indem sie den Zusammenhang zwischen der Änderung der Volumeinheit und der Dichte an einer Stelle angibt.

Bleibt bei der Bewegung einer Masse in allen ihren Punkten das Volumelement seinem Inhalt nach ungeändert, ist also die Masse *inkompressibel, so hat man die Bedingungsgleichung*

$$R = 1. \tag{5}$$

Da diese Gleichung die Koordinaten der Punkte enthält, die aus dem Punkt a, b, c und aus seinen Nachbarpunkten in Richtung der Achsen hervorgegangen sind, so hat sie durchaus den Charakter einer *geometrischen Bedingungsgleichung* in dem früher (Art. 8) definierten Sinn. In dieselbe Kategorie gehören alle Gleichungen, die wir in diesem Art. aufgestellt haben, überhaupt alle zwischen a, b, c, x, y, z und den partiellen Differentialquotienten der x, y, z nach den a, b, c bestehenden Gleichungen.

Dagegen kann man die *Kontinuitätsgleichung* (4a)

$$R - \frac{\varrho_0}{\varrho} = 0$$

nicht als geometrische Gleichung ansprechen, weil zwar der Größe R, nicht aber der ϱ_0/ϱ eine geometrische Bedeutung zukommt.

Alle geometrischen Bedingungsgleichungen dieses Artikels sind im Sinne des Art. 5 als *holonome* zu bezeichnen, und zwar haben sie den Charakter von Integralgleichungen, die nur die Koordinaten selbst, nicht aber deren Differentialquotienten nach der Zeit enthalten.

Aus den in (2) aufgestellten Koordinaten der dem Punkt x, y, z benachbarten geht hervor, daß die Zuwächse dx, dy, dz von der Ordnung der sehr kleinen Größen da, db, dc sein werden, solange die Differentialquotienten $\frac{\partial x}{\partial a}, \ldots \frac{\partial z}{\partial c}$ nicht unendlich werden, was im allgemeinen nur längs einzelner Flächen eintreten wird, also solange die Masse sich nicht spaltet und keine Unstetigkeits- (Wirbel-) Flächen auftreten, was wir ausschließen wollen. Im allgemeinen werden also die einem Punkt unendlich *benachbarten Punkte* einer kontinuierlichen Masse ihm *immer benachbart bleiben.* Dementsprechend wollen wir aus Stetigkeitsgründen annehmen, daß die *Oberfläche* immer von *denselben Massenteilchen* gebildet werde.

18. Das Grundgesetz angewandt auf kontinuierliche Massen. Das D'ALEMBERTsche Prinzip.

Der in Art. 8 aufgestellte Begriff des freien Systems läßt sich nun leicht auf raumerfüllende Massen übertragen. Sind die Bedingungsgleichungen für das Innere von der Form (s. vor. Art.)[1])

$$\varphi\left(x, y, z, a, b, c, \frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial x}{\partial b}, \cdots \frac{\partial^2 x}{\partial a^2} \cdots\right) = 0, \tag{1}$$

— an Stelle von φ könnte auch der Differentialquotient von φ nach der Zeit treten — bestehen ferner die Grenzbedingungen nur in Gleichungen zwischen den Koordinaten der Oberflächen- oder Grenzpunkte, so muß man das raumerfüllende Massensystem im Sinne des Art. 8 als ein „freies" erklären.

Das Grundgesetz sagt aus, daß ein freies System im Zustande der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung in geradester Bahn beharrt. Der Forderung der „gleichförmigen Bewegung" wird genügt durch die Annahme, daß die lebendige Kraft T konstant sei (Art. 3)

$$T = \tfrac{1}{2} m \dot{s}^2 = \tfrac{1}{2} \int (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\, dm = h, \tag{2}$$

wo m die Gesamtmasse des Systems ist, $\dot{s}$ seine Bahngeschwindigkeit, x, y, z die Koordinaten des Massenelements dm, $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ dessen

1) Ihre Zahl kann offenbar zwei nicht übersteigen, wenn nicht die Bedingungsgleichungen allein bereits den Freiheitsgrad des Systems auf einen endlichen herabdrücken sollen.

Geschwindigkeitskomponenten sind[1]), und h eine Konstante ist. Die Forderung der geradesten Bahn ergibt die Aussage (Art. 4), daß die Bahnkrümmung, oder, da bei gleichförmiger Bewegung diese der Bahnbeschleunigung f proportional ist, die Größe $\frac{1}{2}mf^2$ ein Minimum sei, daß also

$$\frac{\delta m f^2}{2} = \delta \int \tfrac{1}{2}(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2)\,dm = \int (\ddot{x}\delta\ddot{x} + \ddot{y}\delta\ddot{y} + \ddot{z}\delta\ddot{z})\,dm = 0, \qquad (3)$$

wo $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$[2]) die Komponenten der Beschleunigung des Massenelementes dm sind.

Die Gleichungen (1) bis (3) zusammen beschreiben die natürliche Bewegung des „freien" (kräftelosen) Systems. Dabei haben die drei Variationen $\delta\ddot{x}, \delta\ddot{y}, \delta\ddot{z}$ den aus den Bedingungsgleichungen sich ergebenden Beziehungen zu genügen. Differenziert man die Gleichung (1) zweimal nach der Zeit, $\dot{\varphi} = 0$, $\ddot{\varphi} = 0$, und variiert dann in der Weise, wie es das Grundgesetz verlangt, d. h. indem man die Koordinaten und Geschwindigkeiten konstant läßt, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$\delta\ddot{\varphi} = \frac{\partial\ddot{\varphi}}{\partial\ddot{x}}\delta\ddot{x} + \frac{\partial\ddot{\varphi}}{\partial\ddot{y}}\delta\ddot{y} + \cdots + \frac{\partial\ddot{\varphi}}{\partial\left(\frac{\partial\ddot{x}}{\partial a}\right)}\delta\frac{\partial\ddot{x}}{\partial a} + \cdots = 0, \qquad (4)$$

die man sich für jedes Volumelement $d\tau = da\,db\,dc$ besonders aufgestellt zu denken hat. Multipliziert man dann $\delta\ddot{\varphi}$ mit $\lambda d\tau$, wo λ eine unbestimmte Funktion des Ortes und der Zeit ist, und addiert, bildet also das Integral

$$\delta\ddot{\Phi} = \int \lambda\,\delta\ddot{\varphi}\,d\tau,$$

so sind wieder in der Summe

$$\frac{\delta m f^2}{2} - \delta\ddot{\Phi}$$

die Größen $\delta\ddot{x}, \delta\ddot{y}, \delta\ddot{z}$ nicht mehr durch (4) aneinander gebunden, weil λ die Stelle dieser Relation in dem in Art. 4 erklärten Sinne vertritt.

Ist längs der Oberfläche noch das System von einem anderen System geleitet (Art. 10), das auf die Einheit der Oberfläche an der Stelle x, y, z einen Druck $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ ausübt, so gehen diese letzteren

1) Wir bezeichnen hier und in den nächstfolgenden Artikeln mit Punkten über den Buchstaben x, y, z, φ, ... die Differentialquotienten dieser Funktionen von a, b, c, t, *genommen nach* t.

Funktionen als LAGRANGEsche Kräfte in die Formel (4) des Art. 15 ein, welche somit ergibt

$$0 = \frac{\delta m f^2}{2} - \delta \ddot{\Phi} - \delta' \ddot{S} \equiv \int [\varrho (\ddot{x} \delta \ddot{x} + \ddot{y} \delta \ddot{y} + \ddot{z} \delta \ddot{z}) - \lambda \delta \ddot{\varphi}] \, d\tau \\ - \int (\overline{X} \delta \ddot{x} + \overline{Y} \delta \ddot{y} + \overline{Z} \delta \ddot{z}) \, d\sigma, \tag{5}$$

wo das Integral

$$\delta' \ddot{S} = \int (\overline{X} \delta \ddot{x} + \overline{Y} \delta \ddot{y} + \overline{Z} \delta \ddot{z}) \, d\sigma$$

(der Strich an δ deutet wieder an, daß der Ausdruck unter dem Integralzeichen nicht notwendig ein vollständiges Differential ist) über die Oberfläche des von Masse erfüllten Raumes zu erstrecken ist, $\delta \ddot{x}, \ldots$ die Variation der Beschleunigung des Massenelementes $d\tau$ bzw. des Oberflächenelementes $d\sigma$ bedeutet.

Der Übergang zu der üblichen Form des D'ALEMBERTschen Prinzips geschieht nun wieder ebenso wie bei diskreten Massenpunkten (Artt. 8, 15). Wegen der Unabhängigkeit der $\delta \ddot{x}, \delta \ddot{y}, \delta \ddot{z}$ in (5) sind diese Größen durch irgend drei gleichfalls unabhängige, z. B. die Variationen $\delta x, \delta y, \delta z$ der Koordinaten selbst ersetzbar. Die Größe $\delta \ddot{\varphi}$ geht dann über in

$$\delta \varphi \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \delta y + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial \left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)} \delta \frac{\partial x}{\partial a} + \cdots, \tag{6}$$

einen Ausdruck, *der sich auch unmittelbar aus φ durch Variation der Koordinaten x, y, z ergeben hätte*, $\delta \ddot{\Phi}$ geht in $\delta \Phi$, und (5) geht über in:

$$\int [\varrho (\ddot{x} \delta x + \ddot{y} \delta y + \ddot{z} \delta z) - \lambda \delta \varphi] \, d\tau \\ - \int (\overline{X} \delta x + \overline{Y} \delta y + \overline{Z} dz) \, d\sigma = 0. \tag{7}$$

Dies ist die Aussage des Grundgesetzes, in die Form des *d'Alembertschen Prinzips* gebracht. Die weitere Behandlung der Gleichung richtet sich nach dem besonderen Fall. Sie wird sogleich durch einige Anwendungen beleuchtet werden. Im allgemeinen ist zu sagen, daß zunächst alle in $\lambda \delta \varphi$ auftretenden Glieder von der Form $p \delta \frac{\partial x}{\partial a}$ usw. durch partielle Integration in solche mit dem Faktor δx usw. zu verwandeln sind, wie folgt:

$$\int p \delta \frac{\partial x}{\partial a} d\tau = \int p \frac{\partial \delta x}{\partial a} d\tau = \iint db\, dc \int p \frac{\partial \delta x}{\partial a} da \\ = \iint db\, dc \, [p \delta x] - \int \frac{\partial p}{\partial a} d\tau \cdot \delta x, \tag{8}$$

wo sich der eckige Klammerausdruck auf die Oberflächenelemente bezieht, die von dem über $dbdc$ errichteten Parallelepiped ausgeschnitten werden. Hierbei rechtfertigt sich die Vertauschung von Variation und Differentiation durch die in Art. 1 angegebene Deutung der Variation, wonach z. B.

$$\delta x = \varepsilon \xi (a, b, c, t)$$

ist, wo ε eine sehr kleine Konstante, ξ eine beliebige (auch unstetige) Funktion von a, b, c, t ist. Denn da sich die Variation weder auf die Zeit noch auf die Anfangskoordinaten, sondern nur auf die Gestalt der Funktion bezieht, so ist

$$\delta \frac{\partial x}{\partial a} = \frac{\partial (x + \delta x)}{\partial a} - \frac{\partial x}{\partial a} = \frac{\partial \delta x}{\partial a} = \varepsilon \lim \left(\frac{\xi_1 - \xi}{a_1 - a}\right)_{a_1 = a},$$

wo $\xi_1 = \xi (a_1, b, \ldots)$ ist.

Dasselbe gilt von $\lambda \delta \ddot{\varphi}$ in (5), nur ist $x, \ldots$ durch $\ddot{x}, \ldots$ zu ersetzen.

19. Raumkräfte und Oberflächenkräfte. Beispiel.

Eine letzte Erweiterung der Formel (7) des vorigen Artikels besteht darin, daß man noch solche an dem System angreifenden Kräfte annimmt, deren Wirkung nach der Vorschrift des Art. 15 durch ihre potentielle Energie oder allgemeiner durch die bei einer Verrückung geleistete Arbeit in Rechnung zu ziehen ist. Kräfte, die auf raumerfüllende Massen wirken, sind, je nachdem sie an den Massenelementen selbst oder an den Elementen der Oberfläche angreifen, entweder Raum-(Volum-)Kräfte oder Oberflächenkräfte.

Die letzteren haben wir schon im vorigen Artikel a. E. in die Formel des Grundgesetzes einbezogen und ihre virtuelle Arbeit (Art. 15) durch

$$\delta' \ddot{S} = \int (\overline{X} \delta \ddot{x} + \overline{Y} \delta \ddot{y} + \overline{Z} \delta \ddot{z})\, d\sigma$$

dargestellt; in der Formel des D'Alembertschen Prinzips durch

$$\delta' S = \int (\overline{X} \delta x + \overline{Y} \delta y + \overline{Z} \delta z)\, d\sigma.$$

Die Raumkräfte sind innere oder äußere, je nachdem sie zwischen den Elementen der zu untersuchenden Masse oder zwischen diesen und äußeren Massen wirken (Art. 10 a. E.). Zu den letzteren, die man wohl auch *eingeprägte* Kräfte nennt, rechnen wir die Schwerkraft. Die Variation der Arbeit der äußeren Kräfte läßt sich, wenn (X, Y, Z) die auf die Masseneinheit wirkende Kraft ist, und wo bezüglich des Striches an δ das oben Gesagte gilt, in der Form ansetzen

$$\delta' U = \int (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\varrho d\tau.$$

Von inneren wollen wir bloß die *elastischen Kräfte* ins Auge fassen, d. h. solche, die bereits bei einer Gestaltsänderung (Deformation) des einzelnen Elementes auftritt, wozu wir in einem besonderen Fall (Art. 37) die bloße Drehung — ohne Deformation und Verschiebung — rechnen wollen, sowie gewisse *Reibungskräfte.* Die Arbeit der inneren Kräfte nimmt, je nachdem die Masse, die das Volumelement ausfüllt, fest oder flüssig, unzusammendrückbar oder elastisch ist, eine verschiedene Gestalt an. Wir werden die virtuelle Arbeit für die verschieden beschaffenen Medien erst später (Art. 36 ff.) aufstellen und wollen sie, da der Ausdruck sich in allen Fällen als vollständiges Differential erweisen wird, mit δW bezeichnen. Unter diesem Symbol wollen wir auch die im vorigen Artikel mit $\delta \Phi$ bezeichneten Größen einbegreifen, die von derselben Form und gleichfalls als bekannt anzusehen sind.

Man erhält dann durch Anwendung des D'ALEMBERTschen Prinzips auf das im übrigen freie System [1])

$$\int \mathbf{S}(\ddot{x}\delta x)\varrho d\tau - \delta' U - \delta W - \delta' S = 0, \tag{1}$$

wo hier und im folgenden das Summenzeichen $\mathbf{S}$ bedeutet, daß noch zwei gleichartige Glieder (hier in y und z) zuzufügen sind; ausgeführt:

$$\begin{aligned}&\int [(\ddot{x} - X)\delta x + (\ddot{y} - Y)\delta y + (\ddot{z} - Z)\delta z]\varrho d\tau - \delta W \\ &-\int (\bar{X}\delta x + \bar{Y}\delta y + \bar{Z}\delta z) d\sigma = 0.\end{aligned} \tag{2}$$

Diese Formel gilt für jedes System von Variationen δx, δy, δz.

Bei Anwendung des GAUSSschen Prinzips hätte sich genau dieselbe Formel, nur geschrieben in $\delta\ddot{x}$, $\delta\ddot{y}$, $\delta\ddot{z}$ statt δx, δy, δz ergeben.

Als Beispiel diene die *Bewegung eines unausdehnbaren Fadens* (einer „Kette") auf einer Oberfläche, wenn auf die Längeneinheit die äußere Kraft (X, Y, Z) (z. B. Schwerkraft) wirkt. Die Bedingung für Unausdehnbarkeit ist (Art. 17)

$$\varphi \equiv \left(\frac{dx}{da}\right)^2 + \left(\frac{dy}{da}\right)^2 + \left(\frac{dz}{da}\right)^2 - 1 = 0, \tag{3}$$

1) Von demjenigen Bewegungszustand der Teilchen, den man als Wärme bezeichnet, sehen wir im folgenden ab, indem wir uns, wo nicht ausdrücklich das Gegenteil gesagt wird, auf Bewegungen ohne Temperaturänderung beschränken.

wo a der Abstand des Punktes (x, y, z) von dem einen Ende der Kette ist. Die Gleichung der Oberfläche sei

$$\psi(x, y, z) = 0. \tag{4}$$

Die Formel (2) nimmt dann die Gestalt an:

$$\begin{aligned}&\int(\varrho\,\mathbf{S}(\ddot{x} - X)\,\delta x - \tfrac{1}{2}\lambda\,\delta\varphi - \mu\,\delta\psi)\,da\\ &= \int\mathbf{S}\left(\varrho(\ddot{x} - X)\,\delta x - \lambda\frac{dx}{da}\,\delta\frac{dx}{da} - \mu\frac{\partial\psi}{\partial x}\,\delta x\right)da = 0,\end{aligned} \tag{5}$$

wo das Summenzeichen $\mathbf{S}$ wieder die oben angegebene Bedeutung hat. Das Glied mit dem Faktor λ wird durch partielle Integration umgeformt:

$$\begin{aligned}&\int\lambda\,\mathbf{S}\frac{dx}{da}\,\delta\frac{dx}{da}\,da = \int\lambda\,\mathbf{S}\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{da}\,da\\ &= \left[\lambda\,\mathbf{S}\frac{dx}{da}\,\delta x\right]_{a=0}^{a=l} - \int\mathbf{S}\frac{d}{da}\left(\lambda\frac{dx}{da}\right)\delta x\,da,\end{aligned} \tag{6}$$

wo l die Länge der Kette ist. Sind nun $\delta\mathfrak{s}$, $d\mathfrak{s}$ Vektoren (mit den Längen δs, ds), welche die virtuelle Verschiebung bzw. das Kettenelement an der Stelle a angeben, so ist der eckige Klammerausdruck darstellbar durch

$$[\lambda\,\delta s\cos(d\mathfrak{s}, \delta\mathfrak{s})]_0^l.$$

Setzt man (6) in (5) ein und vergleicht die Koeffizienten von δx, δy, δz einzeln mit Null, ebenso den für die Grenzpunkte geltenden Variationsausdruck, so erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned}\varrho\ddot{x} + \frac{d}{da}\left(\lambda\frac{dx}{da}\right) - \mu\psi'(x) &= X\\ \varrho\ddot{y} + \frac{d}{da}\left(\lambda\frac{dy}{da}\right) - \mu\psi'(y) &= Y\\ \varrho\ddot{z} + \frac{d}{da}\left(\lambda\frac{dz}{da}\right) - \mu\psi'(z) &= Z\end{aligned} \tag{7}$$

$$\lambda_l\,\delta s_l\cos(d\mathfrak{s}_l, \delta\mathfrak{s}_l) - \lambda_0\,\delta s_0\cos(d\mathfrak{s}_0, \delta\mathfrak{s}_0) = 0 \tag{8}$$

in leicht verständlicher Bezeichnung. Neben den 3 Gleichungen (7) sind zur Bestimmung der 5 Größen x, y, z, λ, μ in Funktion von a und t noch (3) und (4) verwendbar. Die Gleichung (8) wird identisch erfüllt, wenn etwa einzeln

$$\delta s_l = 0; \quad \delta s_0 = 0,$$

wenn also die beiden Endpunkte befestigt sind; oder auch, wenn für jeden Endpunkt eine reibungslose Führung längs einer Kurve hergestellt ist, die eine Verschiebung nur längs dieser Kurve gestattet, weil dann die beiden Kosinusse verschwinden; oder endlich, wenn die Größen λ_0, λ_l beide Null sind. Die Bedeutung des Vektors λ ergibt sich aus der Dimension von $\varrho \ddot{x}\, da = [ml^{-1}lt^{-2}l] = [lmt^{-2}]$ — denn ϱ hat die Dimension der Masse einer Längeneinheit $= [ml^{-1}]$ — also hat λ die Dimension einer Kraft = Masse mal Beschleunigung, ist somit die in der Richtung $dx : dy : dz$ wirkende Zugspannung (eine innere Kraft, s. vor. Art.); die Größen λ_0, λ_l sind die auf die Endpunkte wirkenden Zugkräfte. Sie sind Null, wenn z. B. die Enden der Kette frei sind.

Eine Verwendung der Formeln (7), (8) für Probleme des Gleichgewichts von Fäden findet man bei Clebsch, Journ. f. Math., Bd. 57, S. 93 ff.

20. Gestaltsänderung eines Elementar-Parallelepipeds im Inneren einer bewegten Masse.

In dem einleitenden Art. 17 zu dem Abschnitt über raumerfüllende Massen wurde der Zustand einer Masse zur Zeit t mit dem zu einer gewissen Anfangszeit herrschenden in Beziehung gesetzt. Es ist aber auch nötig, ihn mit den zeitlich unmittelbar vorhergehenden und folgenden in Zusammenhang zu bringen, wie man in der Geometrie das Element einer Kurve mit den benachbarten hinsichtlich der Richtung vergleicht und so auf ihre Krümmungseigenschaften schließt. Wir betrachten die unendlich kleine Änderung, welche die Lage und Gestalt eines Volumelementes, das man in Form eines rechtwinkligen Parallelepipeds in Richtung der Koordinatenebenen aus der Masse herausgeschnitten hat, nach Ablauf eines Zeitelementes erfahren haben.

Die Punkte eines endlichen Raumteiles oder auch des unendlichen Raumes seien bezogen auf ein im Raume festes rechtwinkliges Koordinatensystem X, Y, Z. Man erteile diesem Raumteil, ohne daß das Koordinatensystem sich ändert, eine Deformation, die in einer Ausdehnung (Dilatation) oder Zusammendrückung (negativer Dilatation) in einer gegebenen Richtung besteht. Diese Richtung, die durch die Kosinusse α_1, β_1, γ_1 der Neigungswinkel gegen X, Y, Z gegeben sei, möge die Achse Ξ eines zweiten rechtwinkligen Koordinatensystems Ξ, H, Z bestimmen, das den gleichen Ursprung O, wie X, Y, Z besitzt, und dessen Lage durch die Kosinusse $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ gegeben sei. Die Ausdehnung erfolge so, daß die Ebene HZ, und also insbesondere der Punkt O nicht von der Stelle rückt, und daß irgendein Punkt mit den Koordinaten x, y, z, der in dem System Ξ, H, Z diejenigen ξ, η, ζ hat, in dem letzteren nach vollzogener Dilatation die Koordinaten $\xi(1+\varrho_1), \eta, \zeta$ besitze. Wir lassen eine zweite Ausdehnung des Raumteils in der Richtung der Achse H folgen, durch die η in $\eta(1+\varrho_2)$, eine dritte, durch die ζ in $\zeta(1+\varrho_3)$ übergehen möge, und fragen nach denjenigen Koordinaten x_1, y_1, z_1, in die nach Ausführung der 3 Dilatationen die Koordinaten x, y, z übergegangen sind.

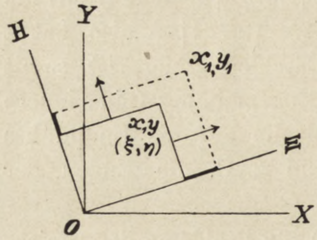

Fig. 9.

Die nebenstehende Figur veranschaulicht den entsprechenden Prozeß in der Ebene, also die Wirkung von zwei zueinander senkrechten Dilatationen.

Man hat für den Raum zunächst die Beziehungen

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z \\ \eta &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z \\ \zeta &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z. \end{aligned} \tag{1}$$

Nach erfolgter Deformation tritt an Stelle dieser Gleichungen das System

$$\begin{aligned} \xi(1+\varrho_1) &= \alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 + \gamma_1 z_1 \\ \eta(1+\varrho_2) &= \alpha_2 x_1 + \beta_2 y_1 + \gamma_2 z_1 \\ \zeta(1+\varrho_3) &= \alpha_3 x_1 + \beta_3 y_1 + \gamma_3 z_1. \end{aligned} \tag{2}$$

Multipliziert man diese Gleichungen bzw. mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ und addiert sie, so erhält man mit Rücksicht auf die bekannten 6 Relationen zwischen den 9 Kosinussen α, β, γ die erste der folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 \xi(1+\varrho_1) + \alpha_2 \eta(1+\varrho_2) + \alpha_3 \zeta(1+\varrho_3) \\ y_1 &= \beta_1 \xi(1+\varrho_1) + \beta_2 \eta(1+\varrho_2) + \beta_3 \zeta(1+\varrho_3) \\ z_1 &= \gamma_1 \xi(1+\varrho_1) + \gamma_2 \eta(1+\varrho_2) + \gamma_3 \zeta(1+\varrho_3) \end{aligned} \tag{3}$$

und hieraus, nachdem man die Werte von ξ, η, ζ aus (1) in (3) eingesetzt hat, mit Benutzung der Abkürzungen

$$\varrho_1 \alpha_1^2 + \varrho_2 \alpha_2^2 + \varrho_3 \alpha_3^2 = \mathbf{S}\, \varrho \alpha^2$$

$$\varrho_1 \alpha_1 \beta_1 + \varrho_2 \alpha_2 \beta_2 + \varrho_3 \alpha_3 \beta_3 = \mathbf{S}\, \varrho \alpha \beta \text{ usw.,}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= (1+\mathbf{S}\,\varrho\alpha^2)\,x + \mathbf{S}\,\varrho\alpha\beta\, y + \mathbf{S}\,\varrho\alpha\gamma\, z \\ y_1 &= \mathbf{S}\,\varrho\beta\alpha\, x + (1+\mathbf{S}\,\varrho\beta^2)\,y + \mathbf{S}\,\varrho\beta\gamma\, z \\ z_1 &= \mathbf{S}\,\varrho\gamma\alpha\, x + \mathbf{S}\,\varrho\gamma\beta\, y + (1+\mathbf{S}\,\varrho\gamma^2)\,z, \end{aligned} \tag{4}$$

also Gleichungen von der Form

$$\begin{aligned} x_1 &= (a_{11}+1)x + a_{12}y + a_{13}z \\ y_1 &= a_{21}x + (a_{22}+1)y + a_{23}z \\ z_1 &= a_{31}x + a_{32}y + (a_{33}+1)z, \end{aligned} \tag{4a}$$

wo $a_{ik} = a_{ki}$ ist. Man hat so den Satz:

Ändert ein Raumteil infolge von drei (irgendwie aufeinander folgenden) *Dehnungen oder Kontraktionen in drei aufeinander senkrechten Richtungen seine Gestalt, während das Koordinatensystem seine Lage nicht ändert, so geht irgendein Raumpunkt von der Stelle* (x, y, z) *in diejenige* (x_1, y_1, z_1) *der Formel* (4a) *über.*

Wir schließen gleich *die Umkehrung dieses Satzes* an, indem wir diejenigen Größen $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ zu bestimmen verlangen, die durch eine vorliegende Transformation (4a) definiert werden.

Die Vergleichung von (4), (4a) liefert

$$\begin{aligned} \varrho_1\alpha_1^2 + \varrho_2\alpha_2^2 + \varrho_3\alpha_3^2 &= a_{11} \\ \varrho_1\alpha_1\beta_1 + \varrho_2\alpha_2\beta_2 + \varrho_3\alpha_3\beta_3 &= a_{12} \\ \varrho_1\alpha_1\gamma_1 + \varrho_2\alpha_2\gamma_2 + \varrho_3\alpha_3\gamma_3 &= a_{13} \end{aligned} \tag{5}$$

und zwei ähnliche weitere Systeme. Multipliziert man die Gleichungen (5) bzw. mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und addiert, so erhält man mit Rücksicht auf die Relationen zwischen den α, β, γ die erste der folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} (a_{11}-\varrho_1)\alpha_1 + a_{12}\beta_1 + a_{13}\gamma_1 &= 0 \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22}-\varrho_1)\beta_1 + a_{23}\gamma_1 &= 0 \\ a_{31}\alpha_1 + a_{32}\beta_1 + (a_{33}-\varrho_1)\gamma_1 &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Hätte man die Gleichungen (5) mit bzw. $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ multipliziert so hätte man die erste von 3 Gleichungen erhalten, die aus (6) hervorgehen, wenn man $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \varrho_1$ mit bzw. $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \varrho_2$ vertauscht. — Durch Elimination der $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ aus (6) erhält man zur Bestimmung der Größe ϱ_1 dieselbe Gleichung, die man durch Elimination von $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ aus den 3 anderen Gleichungen erhalten hätte: die gesuchten Größen $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ sind also Wurzeln der kubischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\varrho & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\varrho & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\varrho \end{vmatrix} = 0, \tag{7}$$

und die zu ϱ_1 gehörigen Werte $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ergeben sich aus (6),

$\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ usw. aus den analogen Gleichungen in ϱ_2 usw. Wir ordnen (7) nach Potenzen von ϱ und erhalten

$$\varrho^3 - \varrho^2(a_{11} + a_{22} + a_{33})$$
$$- \varrho\,(a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} + a_{11}a_{22} - a_{23}^2 - a_{31}^2 - a_{12}^2) - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Für die symmetrischen Funktionen der Wurzeln ergeben sich, wenn mit $\mathbf{S}$, wie immer, die Summe von je 3 Gliedern der angeschriebenen Art bezeichnet wird, die Ausdrücke

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \mathbf{S}\,a_{11}$$
$$\varrho_2\varrho_3 + \varrho_3\varrho_1 + \varrho_1\varrho_2 = \mathbf{S}\,a_{22}a_{33} - \mathbf{S}\,a_{23}^2,$$

woraus

$$\varrho_1^2 + \varrho_2^2 + \varrho_3^2 = (\mathbf{S}\,\varrho_1)^2 - 2\,\mathbf{S}\,\varrho_1\varrho_2 = (\mathbf{S}\,a_{11})^2 - 2\,\mathbf{S}\,a_{22}a_{33} + 2\,\mathbf{S}\,a_{23}^2, \quad (8)$$

was wir für später vormerken.

Wenn, was im folgenden vorausgesetzt wird, *die Verlängerungen* $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ der Längeneinheiten in Richtung der Achsen Ξ, H, Z so *kleine Größen* sind, daß man deren Quadrate und Produkte gegen die ersten Potenzen vernachlässigen kann, so nimmt der Ausdruck für die Vergrößerung der Volumeinheit, *die räumliche Dilatation* (Dehnung), die wir mit Θ bezeichnen wollen, eine einfache Form an. Aus der Gleichung nämlich

$$1 + \Theta = (1 + \varrho_1)(1 + \varrho_2)(1 + \varrho_3) = 1 + \mathbf{S}\,\varrho_1$$

ergibt sich

$$\Theta = \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 = a_{11} + a_{22} + a_{33}. \quad (8a)$$

21. Fortsetzung.

Den oben bewiesenen Satz wenden wir nun auf diejenige Deformation eines parallelepipedischen *Raumelementes* (Elementar-Parallelepipedes) an, die durch eine sehr kleine stetige Veränderung der Lage aller Punkte einer raumerfüllenden Masse bewirkt wird. Ein Punkt x, y, z gehe durch diese Veränderung in $x + u$, $y + v$, $z + w$ über, wo die Verschiebungsgrößen

$$u = \varepsilon \cdot f(xyz)$$
$$v = \varepsilon \cdot \varphi(xyz) \quad (9)$$
$$w = \varepsilon \cdot \psi(xyz)$$

mit dem sehr kleinen Faktor ε [1]) multiplizierte Funktionen f, φ, ψ der Koordinaten des Punktes sind. Die Koordinaten eines Nachbarpunktes $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ gehen dann, rein analytisch aufgefaßt, über in

$$\begin{aligned} x+u+d(x+u) &= x+u+d_1x \\ & y+v+d_1y \\ & z+w+d_1z, \end{aligned}$$

wo

$$d_1x = dx + du = dx + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

oder

$$\begin{aligned} d_1x &= \left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz \\ d_1y &= \frac{\partial v}{\partial x}dx + \left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz \\ d_1z &= \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dz \end{aligned} \tag{10}$$

ist, und d_1x die Projektion der Diagonale des deformierten Elementarparallelepipeds auf die X-Achse darstellt. Diese Beziehungen lassen sich nun im Sinne des Satzes im vorstehenden Artikel als Transformationsgleichungen der Koordinaten dx, dy, dz in die d_1x, d_1y, d_1z auffassen, beide bezogen auf rechtwinklige Koordinatensysteme, deren Achsen parallel den Koordinatenachsen X, Y, Z durch die Punkte x, y, z, bzw. $x+u$, $y+v$, $z+w$ hindurchgehen. Wir wollen das erste mit K, das zweite mit K' bezeichnen. Man kann dann nach der hierdurch definierten Gestaltsänderung des an den Punkt x, y, z angrenzenden Raumes beim Übergang nach $x+u$, $y+v$, $z+w$ fragen. Da im allgemeinen die Elemente $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$ usw. der Transformationsdeterminante, die paarweise symmetrisch zur Diagonale stehen, verschieden sind, so ist die Transformation zunächst nicht von der Form (4a) des vor. Art., keine „affine“. Wir bringen nun die Gleichungen (10) in folgende Gestalt

$$\begin{aligned} d_1x = \left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx &+ \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)dy + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)dz \\ &+ \left[\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)dz - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy\right]; \end{aligned}$$

---

1) Der Faktor ε ist so klein anzunehmen, daß die Produkte und zweiten Potenzen der u, v, w und ihrer Ableitungen gegen die ersten Potenzen vernachlässigt werden können.

$$d_1 y = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) dz$$
$$+ \left[\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) dz\right]; \quad (10a)$$
$$d_1 z = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) dx + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) dy + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dz$$
$$+ \left[\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) dy - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) dx\right];$$

oder mit Benutzung der auch später noch oft zu gebrauchenden Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= x_x; & \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} &= y_z = z_y \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= y_y; & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} &= z_x = x_z \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= z_z; & \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} &= x_y = y_x \end{aligned} \quad (11)$$

und

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) &= \xi \\ \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) &= \eta \\ \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) &= \zeta \end{aligned} \quad (12)$$

in die Form:

$$\begin{aligned} d_1 x &= (1 + x_x) dx + \tfrac{1}{2} x_y dy + \tfrac{1}{2} x_z dz + [\eta dz - \zeta dy] \\ d_1 y &= \tfrac{1}{2} y_x dx + (1 + y_y) dy + \tfrac{1}{2} y_z dz + [\zeta dx - \xi dz] \\ d_1 z &= \tfrac{1}{2} z_x dx + \tfrac{1}{2} z_y dy + (1 + z_z) dz + [\xi dy - \eta dx]. \end{aligned} \quad (13)$$

Dann kann man die Transformation (13) sich durch Aufeinanderfolge zweier Transformationen von folgender Gestalt erzeugt denken:

$$\begin{aligned} d_2 x &= (1 + x_x) dx + \tfrac{1}{2} x_y dy + \tfrac{1}{2} x_z dz \\ d_2 y &= \tfrac{1}{2} y_x dx + (1 + y_y) dy + \tfrac{1}{2} y_z dz \\ d_2 z &= \tfrac{1}{2} z_x dx + \tfrac{1}{2} z_y dy + (1 + z_z) dz \end{aligned} \quad (14)$$

und

$$\begin{aligned} d_1 x &= d_2 x + \eta d_2 z - \zeta d_2 y \\ d_1 y &= d_2 y + \zeta d_2 x - \xi d_2 z \\ d_1 z &= d_2 z + \xi d_2 y - \eta d_2 x. \end{aligned} \quad (15)$$

Denn weil $z_x \ldots y_x \ldots$ kleine Größen von der Ordnung der $u, v \ldots$ sind (s. Formel (9) dieses Art.), die, mit η bzw. ζ multipliziert, gegen

η selbst zu vernächlässigen sind, so geht die erste der Gleichungen (15) durch Einsetzen der Werte von $d_2 z$, $d_2 y$ über in

$$d_1 x = d_2 x + \eta dz - \zeta dy \quad \text{usw.}$$

Setzt man daher

$$d_1 x = d_2 x + d_3 x \quad \text{usw.}, \tag{16}$$

wo

$$d_3 x = \eta dz - \zeta dy$$

ist, und entsprechend

$$\left.\begin{aligned} d_3 y &= \zeta dx - \xi dz \\ d_3 z &= \xi dy - \eta dx, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

so zerlegt sich die Koordinate $d_1 x$, in welche nach der Deformation dx übergegangen ist, in

1. die Größe $d_2 x$; die Formeln (14) bedeuten eine Dehnung des Volumelementes in drei zueinander senkrechten Richtungen (vgl. 4a);

2. den (im Verhältnis zu $d_2 x$ sehr kleinen) Zuwachs $d_3 x$. Die Bedeutung dieses Bestandteiles ergibt sich aus einer Vergleichung der Formeln (17) mit denen (3) des Art. 5. Hiernach ist $d_3 x$ derjenige Zuwachs, welchen die Koordinate dx infolge einer infinitesimalen Drehung des Elementarparallelepipeds mit den Komponenten ξ, η, ζ bez. der Achsen des Koordinatensystems K erfährt.

Man beweist wie oben, daß man die infinitesimalen Änderungen $d_2 x$, $d_3 x$ auch in der umgekehrten Anordnung vornehmen kann. — Die Teiltransformation (14) hat nunmehr den Charakter einer affinen.

Es läßt sich also der *Satz* aussprechen: ***Die unendlich kleine Zustandsänderung, die infolge einer Deformation der raumerfüllenden Masse ein Raumteil an der Stelle (x, y, z) erfährt, besteht aus drei Teilen:***

1. Einer Parallelverschiebung (u, v, w), die wir, als einen Vektor, in der Folge mit dem deutschen Buchstaben $\mathfrak{u}$[1]) bezeichnen wollen.

2. Einer Drehung (ξ, η, ζ) um eine Achse durch den Punkt x, y, z (gleichfalls ein Vektor).

3. Dehnungen (oder Verkürzungen) in drei zueinander senkrechten Richtungen, den sog. *Hauptdilatationsachsen*[2]).

1) Wir werden später mit u, v, w auch die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors $\mathfrak{v}$ bezeichnen, wo dessen Verwechslung mit der Verschiebung $\mathfrak{u}$ ausgeschlossen ist.

2) Diese Größen, allgemeiner die $x_x \ldots$, $y_z \ldots$, hat W. Voigt (Göttinger Nachr. 1900, S. 120 ff.) unter dem Namen *Tensortripel* als eine Art doppelseitiger Vektoren mit anderen gleichartigen zusammenzufassen vorgeschlagen.

Ebenso wie ξ, η, ζ lassen auch die Größen x_x, $x_y \ldots$ eine einfache geometrische Deutung zu. Das rechtwinklige Parallelepiped mit den gegenüberstehenden Eckpunkten x, y, z und $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ wird nach der Deformation sowohl die Kantenlängen wie die Winkel geändert haben, die diese miteinander einschließen. Wir wollen diese Größen bestimmen. Die der Ecke x, y, z benachbarte Ecke $x + dx$, y, z geht über in einen Punkt, dessen Koordinaten in dem System K' man erhält, wenn man in den Formeln (10) $dy = dz = 0$ setzt. Man erhält so die erste Spalte der folgenden Tabelle, die die Koordinaten der drei an x, y, z anstoßenden Eckpunkte des Parallelepipeds *nach* der Deformation enthält.

Punkt:	$dx, 0, 0$	$0, dy, 0$	$0, 0, dz$
x-Koordinate	$\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx$	$\frac{\partial u}{\partial y} dy$	$\frac{\partial u}{\partial z} dz$
y-Koordinate	$\frac{\partial v}{\partial x} dx$	$\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy$	$\frac{\partial v}{\partial z} dz$
z-Koordinate	$\frac{\partial w}{\partial x} dx$	$\frac{\partial w}{\partial y} dy$	$\left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dz$

Man entnimmt dieser Tabelle sogleich die Länge $\overline{dx}$, $\overline{dy}$, $\overline{dz}$ der Kanten des deformierten Parallelepipeds:

$$\overline{dx}^2 = dx^2 \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right],$$

oder mit Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung

$$\overline{dx} = dx \sqrt{1 + 2\frac{\partial u}{\partial x}} = dx\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Somit *bedeutet* die (wiederum sehr kleine) Größe

$$x_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\overline{dx} - dx}{dx} \tag{18}$$

die Verlängerung, welche die Einheit der Kantenlänge dx erfahren hat. — Der Winkel $(\overline{dy}, \overline{dz})$, den die Kanten $\overline{dy}$, $\overline{dz}$ des deformierten Parallelepipeds miteinander einschließen, berechnet sich aus

$$\cos(\overline{dy}, \overline{dz}) = \frac{dy\,dz}{\overline{dy}\,\overline{dz}}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right)$$

oder, mit Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung:

$$\cos(\overline{dy}, \overline{dz}) = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = y_z = z_y. \tag{19}$$

Die (sehr kleinen) *Größen* $z_y = y_z$ usw. *sind also die Kosinusse der*

Winkel, die nach der Deformation die Kanten $\overline{dy}$, $\overline{dz}$ usw. miteinander einschließen.

Wir bilden endlich noch den Ausdruck für die räumliche Dilatation Θ, für den wir oben Art. 20 (8a) gefunden haben

$$\Theta = a_{11} + a_{22} + a_{33}\,.$$

Mit Hilfe von

$$a_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} = x_x \text{ usw.}$$

$$a_{12} = a_{21} = \tfrac{1}{2}\,x_y = \tfrac{1}{2}\,y_x \text{ usw}$$

erhält man für die *räumliche Dilatation*

$$\Theta = \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = x_x + y_y + z_z\,, \tag{20}$$

und die Formel (8) liefert

$$\varrho_1^2 + \varrho_2^2 + \varrho_3^2 = \Theta^2 - 2\,(y_y z_z + z_z x_x + x_x y_y) + \tfrac{1}{2}\,(y_z^2 + z_x^2 + x_y^2). \tag{21}$$

Die Größen ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 und ihre symmetrischen Funktionen sind wegen ihrer Bedeutung dem Wert nach unabhängig von der Lage des Koordinatensystems. Andere solche „invariante" Größen, die sich aus den $x_x, \ldots y_z, \ldots$ zusammensetzen, findet man bei Love, Lehrbuch der Elastizität, deutsch v. Timpe, Leipzig 1907, Art. 13 angegeben.

22. Anwendung auf flüssige Massen.

Die im vorigen Artikel entwickelten Anschauungen und Formeln sind sowohl auf elastisch-feste wie auf flüssige Massen anwendbar. Einen Unterschied jedoch bedingt der Umstand, daß bei Körpern, die sich dem Zustande der Starrheit nähern, wie überhaupt bei elastisch-festen Körpern innerhalb der durch die Anwendbarkeit gesteckten Grenzen, irgend zwei von den Zuständen, die sie im Laufe der Zeit durchlaufen, sich nur wenig voneinander unterscheiden, daß sie also, als benachbarte, die unmittelbare Anwendung jener Formeln zulassen[1]), wogegen die Verschiebungen der Elemente flüssiger Massen an keine Grenze gebunden sind, so daß die Formeln nur auf zwei zeitlich unmittelbar aufeinander folgende Zustände anwendbar sind.

1) Wenn ein elastisch-fester Körper hinsichtlich einer oder zweier Dimensionen sehr klein ist, wie dünne Schalen oder Stäbe, so können trotz erheblicher Starrheit des Materials endliche Verschiebungen, die wir in Art. 21 ausgeschlossen haben, eintreten. Man pflegt dann die Formeln dieses Artikels nur in der nächsten Umgebung eines (in dem Körper beweglich angenommenen) Koordinatensystems zu verwenden. S. das Beispiel in Art. 41.

Im Falle der Flüssigkeiten ist es deshalb zweckmäßig, die sehr kleinen Verschiebungen, Drehungen und Dehnungen u, v, w; ξ, η, ζ; $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$; Θ, die innerhalb des Zeitelementes dt erfolgen, auch formal dadurch auf diesen Zeitteil zu beziehen, daß man sie durch Differentiale $du, dv, \ldots d\Theta$ ersetzt und mit dt dividiert sich vorstellt. Die Verschiebungsgröße $\mathfrak{u}$ geht dadurch in die *Geschwindigkeit* $\mathfrak{v}$ der fortschreitenden Bewegung der Flüssigkeit über. Wir wollen jedoch, wenn es sich um Bewegung flüssiger Massen handelt, die Komponenten der Geschwindigkeit $\mathfrak{v} = \dot{\mathfrak{u}}$, dem allgemeinen Gebrauche folgend, nicht mit $\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$, sondern selbst wieder mit u, v, w bezeichnen[1]). Ebenso gehen ξ, η, ζ in die Komponenten der *Drehungsgeschwindigkeit* (Wirbelgeschwindigkeit) eines Massenelementes an der Stelle x, y, z über, die wiederum ξ, η, ζ heißen mögen[1]). $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ werden zu Dehnungen *in der Zeiteinheit.* Der Satz endlich des vor. Art. überträgt sich auf die Geschwindigkeiten

$$\frac{dx_1 - dx}{dt} \quad \text{usw.}$$

mit der das Volumelement Lage und Zustand ändert.

Die Gleichungen (12), (20) des vorigen Art., die in den mit dt dividierten Größen homogen sind, werden nunmehr zu *Beziehungen zwischen* den *Geschwindigkeitskomponenten der drehenden und der fortschreitenden Bewegung* in einem Punkt der flüssigen Masse, ohne ihre Form

$$\begin{aligned} \xi &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \eta &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \zeta &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \end{aligned} \tag{1}$$

zu ändern. Die Vektoranalysis ersetzt die Beziehung (1) durch *eine* Gleichung. Leitet man nämlich aus $\mathfrak{v}$ einen neuen Vektor, *die Rotation von* $\mathfrak{v}$ (auch *Curl* von $\mathfrak{v}$ genannt) mit den Komponenten

$$\operatorname{rot} \mathfrak{v} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{1a}$$

ab, so wird, wenn ξ, η, ζ die Komponenten eines Vektors $\mathfrak{w}$ sind,

$$\mathfrak{w} = \tfrac{1}{2} \operatorname{rot} \mathfrak{v}\,. \tag{2}$$

---

1) Erst in der Theorie elastischer Körper, also von Art. 36 ab, werden wir unter u, v, w wieder Verschiebungskomponenten ($\mathfrak{u}$), unter ξ, η, ζ wieder Winkelgrößen verstehen.

Während die Ausdrücke (1) einzeln von der Wahl des Koordinatensystems abhängen, ist dies, ihrer Definition nach, mit den Vektoren $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ nicht der Fall. Daher müssen die Beziehungen (1) für jedes beliebige rechtwinklige Achsensystem gelten. Diese *Invarianz* gegenüber einer Transformation auf ein anderes Achsensystem bringt die Vektoranalysis durch die Formel (2) zum unmittelbaren Ausdruck.

Hierin, nicht bloß in der Kürze, liegt ein wesentlicher Vorzug der vektoriellen Darstellung.

Sind nun auch die in dem Ausdruck Θ des vorigen Art. auftretenden Größen u, v, w Geschwindigkeitskomponenten, so geht die räumliche Dilatation in *die Geschwindigkeit der Dilatationszunahme* über. — Für Ausdrücke dieser Art hat die Vektoranalysis die Bezeichnung: *Divergenz des Vektors* $\mathfrak{v}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div} \mathfrak{v}, \tag{3}$$

die sich später rechtfertigen wird, eingeführt.

Aus der Definition von $\operatorname{rot} \mathfrak{v}$ (1a) ergibt sich sogleich die vielbenutzte Identität:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathfrak{v} = 0. \tag{4}$$

23. Beschreibung der Flüssigkeitsbewegung. Die Kontinuitätsgleichung.

Die Größen $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, $\operatorname{div} \mathfrak{v}$ wurden im vorstehenden als Funktionen eines im Raume *festen* Ortes x, y, z und der Zeit t aufgefaßt. Andererseits haben wir in Art. 17 den im Raum *veränderlichen* Ort, den ein bestimmtes Massenelement, das durch seine Lage a, b, c zur Zeit $t = 0$ gegeben war, in der Zeit beschreibt, durch x, y, z bezeichnet. Beide Auffassungen können in gleicher Weise der Beschreibung einer Flüssigkeitsbewegung zugrunde gelegt werden.

Wir wollen sie zunächst miteinander in Beziehung setzen. Wenn man die in Art. 14 angenommenen Ausdrücke

$$x = x(a, b, c, t); \quad y = y(a, b, c, t); \quad z = z(a, b, c, t), \tag{1}$$

welche die Lage x, y, z eines Massenelementes zur Zeit t mit derjenigen a, b, c desselben zu irgendeiner Anfangszeit t_0 verknüpfen, nach den a, b, c auflöst und die erhaltenen Werte

$$a = a(x, y, z, t); \quad b = b(x, y, z, t); \quad c = c(x, y, z, t), \tag{2}$$

wo a, b, c rechts wieder Funktionszeichen sind, in die Ableitungen der Ausdrücke (1) nach der Zeit, die wir durch

$$\dot{x} = U(a, b, c, t); \quad \dot{y} = V(a, b, c, t); \quad \dot{z} = W(a, b, c, t) \tag{3}$$

bezeichnen wollen, einsetzt, so erhält man für die der Stelle x, y, z zugehörigen Geschwindigkeitskomponenten eben diejenigen Ausdrücke — sie mögen in Übereinstimmung mit der Bezeichnung des vorigen Art. und zur Unterscheidung von denen (3) mit u, v, w bezeichnet werden —

$$\dot{x} = u(x, y, z, t); \quad \dot{y} = v(x, y, z, t); \quad \dot{z} = w(x, y, z, t), \tag{4}$$

die der Auffassung und den Formeln (1), (2), (3) des vorigen Art. zugrunde liegen.

$$(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (U, V, W) = (u, v, w) = \mathfrak{v}$$

bedeuten also denselben Vektor $\mathfrak{v}$; nur die analytische Darstellung ist verschieden. Dieser Umstand macht sich bemerklich, wenn es sich nun um die Bildung von

$$\dot{\mathfrak{v}} = \frac{d\mathfrak{v}}{dt}$$

handelt.

Sieht man in den Gleichungen (1) die a, b, c als gegeben, t als veränderlich an, so stellen sie diejenige Bahnkurve dar, die das Massenelement beschreibt, das zur Zeit $t = t_0$ die Stelle a, b, c einnahm. Bahnkurven von ursprünglich benachbarten Elementen bleiben für alle Zeiten benachbart (Art. 17). Die Gleichungen (3) geben die Geschwindigkeit jenes *Massenelementes* in seiner Bahn an, und der *totale* Differentialquotient[1])

$$\dot{\mathfrak{v}} = (\dot{U}, \dot{V}, \dot{W}) = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$$

die Änderung *dieser* Geschwindigkeit oder die Beschleunigung eines und desselben Massenelementes. Dagegen stellen die Gleichungen (4) für einen gegebenen *Raumpunkt* die Geschwindigkeiten der *verschiedenen* Massenelemente dar, die der Reihe nach diese Stelle passieren. Geht man von der Geschwindigkeit eines dieser Elemente zu der seines Nachfolgers über, so ist diese Änderung, weil x, y, z dabei ungeändert bleibt, durch den *partiellen* Differentialquotienten nach der Zeit

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}\right)$$

zu bezeichnen. Die Komponenten der beiden Vektoren $\dot{\mathfrak{v}}$ und $\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t}$ hängen durch drei Gleichungen zusammen, von denen eine lautet

$$\ddot{x} = \dot{U} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt},$$

1) Durch die übergesetzten Punkte werden im nächstfolgenden solche Differentialquotienten nach der Zeit bezeichnet, die unter der Annahme gebildet sind, daß in der differenzierten Funktion die übrigen Veränderlichen a, b, c sind.

oder:

$$\ddot{x} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w = \dot{u}, \tag{5}$$

wo nun u, v, w durch (4) definiert sind.

Man nennt (Art. 29) *Gradient der skalaren Größe* φ (grad φ) einen Vektor, dessen Komponenten $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ usw. sind. Wenn dann noch die Klammer $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, wie üblich, das sogenannte *skalare* oder *innere Produkt* darstellt,

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = |\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}| \cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}), \tag{6}$$

wo $|\mathfrak{a}|$ der *Betrag* von $\mathfrak{a}$ ist, so erklärt sich der Operator $(\mathfrak{v}, \operatorname{grad}) = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$, mit dessen Hilfe sich die Gleichungen (5) in die eine vektorielle zusammenfassen lassen:

$$\dot{\mathfrak{v}} = \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + (\mathfrak{v}, \operatorname{grad})\mathfrak{v}. \tag{7}$$

Eine Flüssigkeitsbewegung ist zwar, wie schon gesagt, vollständig beschrieben erst durch die Gleichungen (1), welche die Bahnkurve der Teilchen geben. Von den Gleichungen (4) führt der Weg zu ihnen durch die Integration der letzteren und die Annahme $x = a$, $y = b$, $z = c$ zur Zeit $t = t_0$. Da man aber diese Integration, eine rein analytische Operation, als ausführbar ansieht, so genügt bereits die Kenntnis der Funktionen (4). Diesen beiden Auffassungen entsprechend, d. h. je nachdem man die Funktionen (1) oder die (4) sucht, sind nun auch die Bewegungsgleichungen verschieden, welche durch Anwendung des Grundgesetzes erhalten werden. — Wir werden uns in diesem Abschnitt meistens auf *inkompressible Flüssigkeiten* (Art. 17) beschränken und die *elastischen* nur beiläufig betrachten.

Wenn man die erste Auffassung zugrunde legt, die Komponenten der Beschleunigung also in der Gestalt

$$\dot{\mathfrak{v}} = (\dot{U}, \dot{V}, \dot{W}) \tag{8}$$

verwendet, so ist die Bedingung der Inkompressibilität in der Form (Art. 17)

$$\varphi \equiv R - 1 = 0 \tag{9}$$

anzunehmen. Geht man aber von der zweiten Auffassung aus, stellt man also die Beschleunigung durch

$$\dot{\mathfrak{v}} = (\dot{u}, \dot{v}, \dot{w})$$

dar, so ist die Inkompressibilitätsbedingung (Art. 22)

$$\varphi \equiv \operatorname{div} \mathfrak{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{9a}$$

Es wird sich später bei der Aufstellung der hydrodynamischen Bewegungsgleichungen um die Herstellung der Ausdrücke $\delta \ddot{\varphi}$ oder $\delta \varphi$ handeln, je nachdem man das Prinzip des kleinsten Zwanges oder das D'ALEMBERTsche Prinzip anwendet. Im zweiten Fall ist zwar (9a) keine holonome Bedingungsgleichung im Sinne der Definition des Art. 6. Sie ist jedoch trotzdem als solche auffaßbar, wie man erkennt, wenn man sie mit derjenigen (9) in Beziehung setzt. Dies möge gleich allgemein für die Kontinuitätsbedingung ausgeführt werden.

Leitet man den in Art. 17 aufgestellten Ausdruck

$$R = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix}$$

nach t ab, was nach der Note S. 78 wieder durch einen übergesetzten Punkt bezeichnet wird, und denkt man sich, wie in R selbst, so in $\dot{R}$ die Größen a, b, c mit Hilfe von (2) durch x, y, z ausgedrückt, so erhält man, weil z. B.

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial a} = \frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a}$$

ist, für $\dot{R}$ eine Summe **S** von 3 Determinanten, deren jede wieder in ein Produkt von zweien spaltbar ist. Es ergibt sich, wenn man die Operation nur für eine Determinante ausführt:

$$\dot{R} = \mathbf{S} \begin{vmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial a} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial b} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} = \mathbf{S} \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial x}{\partial c} & \frac{\partial y}{\partial c} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} = R\,\mathbf{S}\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\dot{R} = R\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \equiv R \operatorname{div} \mathfrak{v}. \tag{10}$$

Hiermit geht die in Art. 17 (4a) aufgestellte Kontinuitätsgleichung

$$R - \frac{\varrho_0}{\varrho} = 0$$

durch logarithmische Differentiation nach der Zeit in die folgende Form über:

$$\frac{\dot{R}}{R} + \frac{\dot{\varrho}}{\varrho} \equiv \operatorname{div} \mathfrak{v} + \frac{\dot{\varrho}}{\varrho} = 0,$$

ausgeführt[1])

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{dt} = 0, \tag{11}$$

eine Form der Kontinuitätsgleichung, die, weil sie die Geschwindigkeiten enthält, in der Theorie der Flüssigkeiten Verwendung findet und wieder die Erhaltung der Masse aussagt.

Auf genau demselben Wege wie die Formel (10) beweist man, daß die Variation der zweiten Ableitung von R nach der Zeit durch die Divergenz die Variation von $\mathfrak{v}$ sich wie folgt ausdrückt:

$$\delta \ddot{R} = \mathsf{S} \begin{vmatrix} \frac{\partial \delta \ddot{x}}{\partial a} & \frac{\partial \delta \ddot{x}}{\partial b} & \frac{\partial \delta \ddot{x}}{\partial c} \\ \frac{\partial \delta y}{\partial a} & \frac{\partial \delta y}{\partial b} & \frac{\partial \delta y}{\partial c} \\ \frac{\partial \delta z}{\partial a} & \frac{\partial \delta z}{\partial b} & \frac{\partial \delta z}{\partial c} \end{vmatrix} = R\left(\frac{\partial \delta \ddot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \delta \ddot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \delta \ddot{z}}{\partial z}\right) = R \operatorname{div} \delta \dot{\mathfrak{v}}.$$

Ist nun das Medium nicht zusammendrückbar, die Bedingungsgleichung also $R - 1 = 0$, so liefert die zweimalige Differentiation und nachmalige Variation dieser Gleichung

$$\delta \frac{d^2}{dt^2}(R-1) = 0 \tag{12}$$

bei Anwendung des d'Alembertschen Prinzips

$$\delta R = 0. \tag{12a}$$

Wir wollen von einer direkten Ableitung der Differentialgleichungen auf Grund dieser Auffassung, welche also die x, y, z als Funktionen von a, b, c, t zugrunde legt, absehen[2]) und wenden uns gleich zur zweiten, für welche[3])

$$\dot{\varphi} \equiv \operatorname{div} \mathfrak{v} = 0 \tag{13}$$

1) Eine andere Form der Kontinuitätsgleichung erhält man, wenn man

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial \varrho}{\partial x} u + \frac{\partial \varrho}{\partial y} v + \frac{\partial \varrho}{\partial z} w$$

in (11) einführt. Es ergibt sich

$$\frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho w)}{\partial z} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = \operatorname{div}(\varrho \mathfrak{v}) + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0.$$

2) Man findet sie nach J. Larmor durchgeführt in Basset, Hydrodynamics (2 Bde., 1888), Bd. I, S. 32.

3) Wir setzen einen Punkt über φ, um anzudeuten, daß es sich um eine Gleichung zwischen Geschwindigkeiten handelt.

die Inkompressibilitätsbedingung ist. Weil allgemein (10)

$$\frac{d}{dt}(R-1) = R \operatorname{div} \mathfrak{v}$$

ist, so hat, ebenso wie $R - 1 = 0$ oder $\dot{R} dt = 0$, so auch $\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0$ als geometrische und zwar *holonome* Bedingungsgleichung zu gelten. — Bei Anwendung des Prinzips des kleinsten Zwanges hat man den ersten Differentialquotienten von (13) nach t zu bilden und dessen Variation, also $\delta \ddot{\varphi} = \delta \operatorname{div} \dot{\mathfrak{v}}$ mit λ multipliziert und über die Masse integriert (Art. 18), zu $\delta \frac{mf^2}{2}$ addiert, gleich Null zu setzen. Wir werden dies in Art. 25 ausführen. Benutzt man aber statt dessen das D'ALEMBERTsche Prinzip, so hat man — dem rein formalen Zusammenhang zwischen den Formeln (5), (7) des Art. 18 entsprechend — auch die Bedingungsgleichung

$$\operatorname{div} \delta \dot{\mathfrak{v}} \equiv \frac{\partial \delta \ddot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \delta \ddot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \delta \ddot{z}}{\partial z} = 0 \tag{14}$$

formal zu ersetzen durch

$$\operatorname{div} \delta \mathfrak{s} \equiv \frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z} = 0, \tag{15}$$

wo

$$\delta \mathfrak{s} = (\delta x, \delta y, \delta z)$$

die Variation der Verschiebung des Massenelementes ist, das zur Zeit t die Stelle x, y, z einnimmt. Demnach ist $\operatorname{div} \delta \mathfrak{s} = \delta \Theta$ die bei dieser (virtuellen) Verschiebung erfolgende Dilatation der Volumeinheit (Art. 21), und $\mathfrak{s}$ der früher mit (u, v, w) bezeichnete Vektor.

Im Falle *elastischer Medien* ergibt die Kontinuitätsgleichung, wenn man immer nur Beschleunigungen variiert und bemerkt, daß aus $\delta R = 0$, $\delta \dot{R} = 0$ auch $\delta \varrho = 0$, $\delta \dot{\varrho} = 0$ folgt,

$$\frac{\delta \ddot{R}}{R} + \frac{\delta \ddot{\varrho}}{\varrho} = 0, \tag{16}$$

eine Beziehung, die wieder beim Übergang zum D'ALEMBERTschen Prinzip zu ersetzen ist durch

$$\frac{\delta R}{R} + \frac{\delta \varrho}{\varrho} = 0, \tag{16a}$$

bzw. durch

$$\operatorname{div} \delta \mathfrak{s} + \frac{\delta \varrho}{\varrho} = \delta \Theta + \frac{\delta \varrho}{\varrho} = \frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z} + \frac{\delta \varrho}{\varrho} = 0. \tag{17}$$

24. Eine Integralbeziehung. Der Gaußsche Satz.

Der in Art. 25 zu liefernde Beweis der hydrodynamischen Differentialgleichungen gründet sich auf eine wichtige Beziehung zwischen einem oft auftretenden Raum- und einem Oberflächenintegral.

In einem Raume **T**, dessen Oberfläche Σ auch — ähnlich wie die Begrenzungslinie des nebengezeichneten ebenen Flächenstücks — in Teile zerfallen kann, sei ein Vektor $\mathfrak{v}$ mit den Komponenten u, v, w gegeben, die stetige und zugleich mit

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

endliche, eindeutige Funktionen des Ortes x, y, z in **T** sind. Ist λ eine ebensolche skalare Funktion, so besteht die sogleich zu beweisende Gleichung:

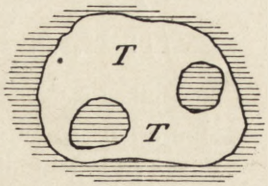

Fig. 10.

$$\begin{aligned}\int \lambda \operatorname{div} \mathfrak{v}\, d\tau &= \int \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) d\tau \\ &= -\int \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} u + \frac{\partial \lambda}{\partial y} v + \frac{\partial \lambda}{\partial z} w\right) d\tau \\ &\quad - \int \lambda \left(u \cos(n, x) + v \cos(n, y) + w \cos(n, z)\right) d\sigma, \qquad (1)\end{aligned}$$

wo die Raumintegrale über **T**, das Flächenintegral über die Oberfläche Σ zu erstrecken ist; (n, x) der Winkel der nach dem Inneren des Raumes **T** gerichteten Normalen gegen die X-Achse ist.

Zum Beweise gestalten wir das Glied links:

$$\int \lambda \frac{\partial u}{\partial x} d\tau = \iint dy\, dz \int \lambda \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

durch partielle Integration um. Es ist

$$\int \lambda \frac{\partial u}{\partial x} dx = [\lambda u] - \int \frac{\partial \lambda}{\partial x} u\, dx,$$

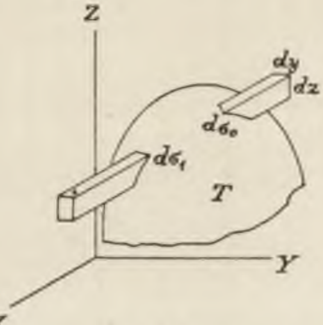

Fig. 11.

wo die eckige Klammer bedeutet: genommen für diejenigen (zwei oder eine höhere gerade Anzahl von) Stellen — als obere bzw. untere Grenze —, an welchen das über dem Rechteck dy, dz parallel zur X-Achse errichtete Parallelepiped (s. die Figur) die Oberfläche Σ des Raumes **T** durchsetzt. Bezeichnet man diese Stellen mit den Indizes $0, 1, 2, \ldots$, so wird also

$$\int \lambda \frac{\partial u}{\partial x} d\tau = -\int \frac{\partial \lambda}{\partial x} u\, d\tau + \iint [-\lambda_0 u_0 + \lambda_1 u_1 - \lambda_2 u_2 + \cdots]\, dy\, dz. \quad (2)$$

Die Grundfläche $dy\,dz$ des Parallelepipeds kann nun als Projektion der Flächenelemente $d\sigma_0, d\sigma_1, d\sigma_2, \cdots$, die es schneidet, aufgefaßt und demnach

$$dy\, dz = d\sigma_0 \cos(n_0, x) = -d\sigma_1 \cos(n_1, x) = \cdots$$

gesetzt werden, wenn n die auf dem Oberflächenelement $d\sigma$ nach dem *Inneren* von $\mathbf{T}$ errichtete Normale ist. Hiermit geht das letzte Integral (2) über in

$$\iint[-\lambda_0 u_0 + \lambda_1 u_1 - \cdots]\, dy\, dz = -\int \lambda u \cos(n, x)\, d\sigma,$$

dies über alle Flächenelemente $d\sigma$, jedes jedoch nur einmal, erstreckt.

Man erhält so je die ersten Glieder der rechten Seite von (1).

Für $\lambda = 1$ geht die bewiesene Relation in die folgende über:

$$\int\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) d\tau = -\int[u \cos(n, x) + v \cos(n, y) + w \cos(n, z)]\, d\sigma,$$

die sich auch in die Form:

$$\int \operatorname{div} \mathfrak{v}\, d\tau = -\int |\mathfrak{v}| \cos(\mathfrak{v}, n)\, d\sigma$$

oder

$$\int \operatorname{div} \mathfrak{v}\, d\tau = -\int \mathfrak{v}_n\, d\sigma \tag{3}$$

kleiden läßt, wo $|\mathfrak{v}|$ der absolute Betrag von $\mathfrak{v}$, und $\mathfrak{v}_n$ die Projektion von $\mathfrak{v}$ auf die nach dem Inneren von $\mathbf{T}$ gerichtete Normale ist.

Diese Beziehung, die zu den Grundlagen der Vektorrechnung gehört, heißt der Gausssche *Satz* (Gauss' Werke V, S. 211). Man führt damit ein oft (s. z. B. Art. 27, 30) auftretendes Raumintegral auf ein über die Oberfläche des Raumes sich erstreckendes Integral über.

Die allgemeine Beziehung (1) lautet in vektorieller Form

$$\int \lambda \operatorname{div} \mathfrak{v}\, d\tau = -\int(\operatorname{grad} \lambda, \mathfrak{v})\, d\tau - \int \lambda \mathfrak{v}_n\, d\sigma, \tag{4}$$

wo wieder (Art. 23 (6)) (grad λ, $\mathfrak{v}$) das skalare Produkt bedeutet.

25. Die Bewegungsgleichungen für nicht zusammendrückbare Flüssigkeiten.

Wir wenden nun die Formeln des Art. 19 auf inkompressible kontinuierliche Massen an, auf deren Teilchen noch äußere (eingeprägte) Kräfte, (X, Y, Z) auf die Masseneinheit, wirken mögen. Wir wollen jedoch nicht an das d'Alembertsche Prinzip, sondern an das des kleinsten Zwanges (Art. 14 (10), 18 (5)) anknüpfen in der Form

$$\int[\varrho(\ddot{x} - X)\delta\ddot{x} + \varrho(\ddot{y} - Y)\delta\ddot{y} + \varrho(\ddot{z} - Z)\delta\ddot{z} - \lambda\delta\ddot{\varphi}]\, d\tau - \delta\ddot{S} = 0, \tag{1}$$

wo die Beschleunigungskomponenten $\ddot{x} = \frac{du}{dt}$, usw. als Funktionen von x, y, z, t gedacht sind, ϱ die durch die ganze Masse konstante Dichte ist. Die Bedingung für die Inkompressibilität

$$\dot{\varphi} = \operatorname{div} \mathfrak{v} = 0 \tag{2}$$

liefert (Art. 23) die Beziehung zwischen den Variationen[1])

$$\begin{aligned}\delta \ddot{\varphi} &= \frac{\partial \delta \ddot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \delta \ddot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \delta \ddot{z}}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \delta \frac{du}{dt} + \frac{\partial}{\partial y} \delta \frac{dv}{dt} + \frac{\partial}{\partial z} \delta \frac{dw}{dt} = 0.\end{aligned} \tag{2a}$$

Das Volumelement sei

$$d\tau = dx\, dy\, dz,$$

und also die Integration über den zur Zeit t mit Flüssigkeit erfüllten Raum zu erstrecken. Das Glied $\int \lambda\, \delta \ddot{\varphi}\, d\tau$ behandelt man nach dem in Art. 18 a. E. angegebenen Verfahren.

Ersetzt man in der Formel (1) des vorigen Artikels $\mathfrak{v}$ durch $\delta \dot{\mathfrak{v}}$, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\int \lambda \delta \ddot{\varphi}\, d\tau &= \int \lambda \left(\frac{\partial \delta \dot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \delta \dot{v}}{\partial y} + \frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial z} \right) d\tau \\ &= -\int \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \delta \dot{u} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \delta \dot{v} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \delta \dot{w} \right) d\tau \\ &\quad - \int \lambda \left(\delta \dot{u} \cos(n,x) + \delta \dot{v} \cos(n,y) + \delta \dot{w} \cos(n,z) \right) d\sigma,\end{aligned} \tag{3}$$

wo das letzte Integral über die Oberfläche des Raumes T zu erstrecken ist.

Der Ausdruck in (1) $\delta \ddot{S} = \overline{X} \delta \ddot{x} + \overline{Y} \delta \ddot{y} + \overline{Z} \delta \ddot{z}$ fällt weg, wenn die Oberfläche der Flüssigkeit frei ist, oder wenn sie von einer festen glatten Wand gebildet wird. Denn im ersteren Fall ist $\overline{X} = \overline{Y} = \overline{Z} = 0$; im letzteren verhält sich, weil der Druck auf die Flüssigkeit normal zum Oberflächenelement steht,

$$\overline{X} : \overline{Y} : \overline{Z} = \cos(n,x) : \cos(n,y) : \cos(n,z).$$

Man kann sich dann das Glied $\delta \ddot{S}$ mit dem letzten Glied in (3) vereinigt denken.

Führt man (3) in (1) ein, vereinigt die unter den dreifachen Integralen mit bzw. $\delta \dot{u}$, $\delta \dot{v}$, $\delta \dot{w}$ multiplizierten Glieder und setzt

---

1) Bei Verwendung des d'Alembertschen Prinzips wäre diese Beziehung durch die folgende zu ersetzen (Art. 23 a. E.):

$$\delta \varphi \equiv \operatorname{div} \delta \mathfrak{s} = \frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z} = 0.$$

deren Summen einzeln Null, vergleicht endlich auch das Oberflächenintegral mit Null, so erhält man das folgende System der *hydrodynamischen Differentialgleichungen*

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\lambda}{\partial x} &= X \\ \frac{dv}{dt} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\lambda}{\partial y} &= Y \\ \frac{dw}{dt} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\lambda}{\partial z} &= Z, \end{aligned} \tag{4}$$

und für die Oberfläche die Bedingung

$$\begin{aligned} &\int \lambda(\delta\dot{u}\cos(n,x) + \delta\dot{v}\cos(n,y) + \delta\dot{w}\cos(n,z))\,d\sigma \\ &\equiv \int \lambda\,|\,\delta\dot{\mathfrak{v}}\,|\cos(\delta\dot{\mathfrak{v}}, n)\,d\sigma = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

wobei die Variation $\delta\dot{\mathfrak{v}}$ den Bedingungen des Problems entsprechend zu wählen ist (Art. 4). Hierzu tritt allgemein noch die Inkompressibilitätsbedingung

$$\operatorname{div}\mathfrak{v} = 0. \tag{5a}$$

Die Größe $\frac{\partial\lambda}{\partial x}$ hat die Dimension von $\varrho\dot{u} = \varrho\ddot{x}$; also hat λ die Dimension

$$[\lambda] = [l^{-2}mt^{-2}][l] = \left[\frac{lmt^{-2}}{l^2}\right]$$

einer Kraft dividiert durch eine Fläche, d. h. eines *Flächendruckes* (Einl.); λ ist offenbar derjenige Druck, der im Inneren der Flüssigkeitsmasse an der Stelle x, y, z auf die Flächeneinheit ausgeübt wird, und zwar in irgendwelcher Orientierung, weil λ eine skalare, keine gerichtete Größe ist.

Durch Einführung der Werte für $\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$ aus Art. 23 (5) erhalten die Gleichungen (4) die Gestalt

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\lambda}{\partial x} &= X \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}u + \frac{\partial v}{\partial y}v + \frac{\partial v}{\partial z}w + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\lambda}{\partial y} &= Y \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x}u + \frac{\partial w}{\partial y}v + \frac{\partial w}{\partial z}w + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\lambda}{\partial z} &= Z. \end{aligned} \tag{6}$$

Sie heißen die EULERsche Form der hydrodynamischen Differentialgleichungen und dienen in Verbindung mit der Bedingung (5a) zur Bestimmung der Geschwindigkeitskomponenten u, v, w und des Druckes λ als stetige und endliche Funktionen der Größen x, y, z, t, wenn die Flüssigkeitsbewegung durch Anfangs- und Grenzbedingungen passend bestimmt ist. Mit den letzteren darf die Oberflächenbedingung (5) nicht in Widerspruch stehen.

Ist etwa die Oberfläche der Flüssigkeit durch eine glatte Gefäßwand begrenzt, die der Gleichung

$$\psi(x, y, z) = 0$$

genügt, so läßt sich durch zweimalige Differentiation dieser Gleichung nach t und nachmalige Variation, wobei jedoch (Art. 18) die Koordinaten und die Geschwindigkeiten *nicht* variiert werden, für die Variation $\delta\dot{\mathfrak{v}}$ des Vektors $\dot{\mathfrak{v}}$ die Bedingung ableiten

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}\,\delta\dot{u} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\,\delta\dot{v} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\,\delta\dot{w} = 0,$$

die aussagt, daß $\delta\dot{\mathfrak{v}}$ die Oberfläche berühren muß. Dann ist auch Gleichung (5) befriedigt, weil $\cos(\delta\dot{\mathfrak{v}}, n) = 0$ ist. An Stellen jedoch, wo die Oberfläche frei ist, kann $\delta\dot{\mathfrak{v}}$ jede Richtung und Größe haben. So wird z. B. die Gleichung (5) auch dadurch erfüllt, daß $\lambda = 0$ ist, d. h. daß überhaupt kein Oberflächendruck vorhanden, die Oberfläche frei ist.

Man leitet aus der Eulerschen (oder zweiten) Form die Lagrangesche (oder erste) Form der hydrodynamischen Differentialgleichungen ab, indem man in den Gleichungen (4) $\dot{u}$ durch $\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$ usw. ersetzt und x, y, z (nach Art. 17) als Funktionen von a, b, c auffaßt. Multipliziert man dann die 3 Gleichungen der Reihe nach mit $\frac{\partial x}{\partial a}$, $\frac{\partial y}{\partial a}$, $\frac{\partial z}{\partial a}$ und addiert, so erhält man:

$$(\ddot{x} - X)\frac{\partial x}{\partial a} + (\ddot{y} - Y)\frac{\partial y}{\partial a} + (\ddot{z} - Z)\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \lambda}{\partial a} = 0.$$

Nimmt man noch äußere (eingeprägte) Volumkräfte an, für die eine Kräftefunktion U existiert, so daß

$$X = \frac{\partial U}{\partial x},\quad Y = \frac{\partial U}{\partial y},\quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

ist, und denkt man sich auch in U die x, y, z durch a, b, c ausgedrückt, so geht jene Gleichung in die erste der folgenden Gleichungen über, welche die Lagrangeschen *Differentialgleichungen* der Hydrodynamik heißen (wiewohl auch sie von Euler herrühren):

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \lambda}{\partial a} &= \frac{\partial U}{\partial a}\\
\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial b} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \lambda}{\partial b} &= \frac{\partial U}{\partial b}\\
\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial c} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \lambda}{\partial c} &= \frac{\partial U}{\partial c}.
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Hierzu kommt die Inkompressibilitätsbedingung in der Form (Art. 17)

$$R - 1 = 0.$$

Aus der EULERschen Form (6) der Differentialgleichungen läßt sich *der Druck im Inneren* λ dann allgemein berechnen, wenn die Flüssigkeitsbewegung ein „Geschwindigkeitspotential“ $\varphi(x, y, z, t)$ und die äußere Kraft X, Y, Z eine Kräftefunktion besitzen. Sind nämlich u, v, w partielle Differentialquotienten *einer* Funktion, und führt man

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

und

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

in (6) ein, so geht die erste dieser Gleichungen über in

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x}.$$

Multipliziert man diese mit dx, die beiden anderen ebenso umgestalteten mit dy, dz und addiert, so erhält man als Zuwachs längs eines Linienelementes

$$d\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}d\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}d\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}d\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{\varrho}d\lambda = dU,$$

und hieraus durch Integration die Gleichung für den Druck λ:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right) + \frac{1}{\varrho}\lambda = U + \text{const.}, \qquad (8)$$

wo const. noch die Zeit enthalten kann.

26. Anwendung.

Als einfaches Beispiel möge die Bewegung einer Flüssigkeit dienen, die in einem kreis-zylindrischen, durch zwei Böden begrenzten Gefäß stationär um die Achse rotiert. Wir wollen den Druck auf die Böden und die zylindrische Seitenwand berechnen, wobei von der Wirkung der Schwere und der Reibung abgesehen werde.

Wir machen die Zylinderachse zur Z-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems und setzen

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Die Geschwindigkeit sei überall der Bodenebene parallel und im Abstand r von der Achse allenthalben gleich $q(r) = q$. Dann ist

$$u = -q\frac{y}{r}; \quad v = q\frac{x}{r}; \quad w = 0.$$

Wegen
$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{xy}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{q}{r}\right); \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{q}{r}\right) - \frac{q}{r};$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{q}{r}\right) + \frac{q}{r}; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{xy}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{q}{r}\right)$$

ist die Bedingung der Unzusammendrückbarkeit $\operatorname{div}\mathfrak{v} = 0$ erfüllt. Ferner verschwinden bei *stationärer* Bewegung alle partiellen Ableitungen nach der Zeit (Art. 23). Für den Druck λ auf die Flächeneinheit ergeben so die Gleichungen (6) des vor. Art.:
$$q^2\frac{x}{r^2} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\lambda}{\partial x} = 0; \quad q^2\frac{y}{r^2} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\lambda}{\partial y} = 0,$$
woraus
$$\lambda - \lambda_0 = \int\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}dx + \frac{\partial\lambda}{\partial y}dy\right) = \varrho\int_0^r\frac{q^2}{r}dr,$$
wenn $\lambda_0(\geqq 0)$ der Druck in der Achse $(r = 0)$ ist. Auf den Zylindermantel wirkt der Druck
$$\lambda = \lambda_0 + \varrho\int_0^a\frac{q^2}{r}dr,$$
wenn a der Halbmesser der oberen und unteren Grenzfläche ist. Wir machen nun die Annahme, daß die Winkelgeschwindigkeit ω überall die gleiche sei, daß also die Flüssigkeit wie ein starrer Körper rotiere. Dann ist
$$q = \omega \cdot r,$$
und der Druck im Abstand r wird
$$\lambda = \lambda_0 + \tfrac{1}{2}\varrho\omega^2 r^2.$$

Ein unendlich schmales ringförmiges Stück der Bodenfläche vom Halbmesser r und der Breite dr erfährt den Druck $\lambda \cdot 2r\pi dr$, und somit der Boden den Gesamtdruck
$$\Lambda = 2\pi\int_0^a\lambda r dr = \pi\left(\varrho\frac{\omega^2 a^4}{4} + \lambda_0 a^2\right).$$

Durchschnittlich wirkt also auf die Flächeneinheit der Druck
$$\lambda_1 = \frac{\Lambda}{a^2\pi} = \lambda_0 + \frac{\varrho\omega^2 a^2}{4},$$
und auf die Seitenwand
$$\lambda = \lambda_0 + \frac{\varrho\omega^2 a^2}{2}.$$

Wären Wand und Deckel veränderlich, so jedoch, daß sich der Zylinder immer wieder in einen Zylinder von gleichem Inhalt deformierte, so würde der Überdruck auf die Seitenwand

$$\lambda - \lambda_1 = \frac{\varrho\omega^2 a^2}{4}$$

bewirken, daß sich Deckel und Boden einander näherten.

Die kinetische Energie der flüssigen Masse ist, wenn h die Höhe des Zylinders ist,

$$T = \int \frac{\varrho}{2}(u^2 + v^2)d\tau = \varrho h \int_0^a q^2 r\pi dr = \varrho h \pi \omega^2 \frac{a^4}{4},$$

also ebenso groß, wie wenn der Zylinder starr wäre, was zu erwarten war.

Stellt man für die einzelnen Flüssigkeitsteilchen den oben (Art. 22) definierten Vektor der Drehungsgeschwindigkeit

$$\mathfrak{w} = \tfrac{1}{2}\operatorname{rot}\mathfrak{v}$$

auf, so wird

$$\xi = \eta = 0, \quad \zeta = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{q}{r} + \frac{r}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{q}{r}\right) = \omega.$$

Wiewohl also die Flüssigkeitsmasse sich wie ein starrer Körper bewegt, die einzelnen Teilchen also ihre gegenseitige Lage und Orientierung nicht ändern, besitzt doch jedes eine drehende Bewegung von derselben Winkelgeschwindigkeit ω. In der Tat erfährt jedes Teilchen bei einmaliger Umdrehung des Zylinders um die Achse selbst eine einmalige Umdrehung um die eigene Achse, ähnlich wie der Mond, wenn er die Erde einmal umkreist.

27. Kinematik der Flüssigkeiten. Strom- und Wirbellinien.

In der Mécanique analytique T. II. Sect. 10 findet sich der Ausspruch: „Euler verdankt man die ersten allgemeinen Gleichungen für die Bewegung der Flüssigkeiten in der einfachen und klaren Bezeichnung der partiellen Differentiale dargestellt. Durch diese Entdeckung wurde die ganze Mechanik der Flüssigkeiten auf einen einzigen Punkt der Analysis gebracht, und wenn die sie enthaltenden Gleichungen integrabel wären, so könnte man in jedem Falle vollkommen alle Umstände der Bewegung und die Wirkung einer durch beliebige Kräfte bewegten Flüssigkeit bestimmen. Aber leider sind sie so rebellisch, daß man bis jetzt nur in sehr speziellen Fällen hat zum Ziele gelangen können.“[1])

1) Nach der deutschen Ausgabe von Servus, Berlin 1887.

Wenn diese Bemerkung im wesentlichen auch heute noch zutrifft, so ist doch seit Lagrange die Hydrodynamik um einige Wissenszweige bereichert worden, die den Kreis der zugänglichen Probleme nicht unerheblich erweitert haben. Unter diesen stellt sich insbesondere die *Geometrie der Bewegung flüssiger Massen* die Aufgabe, von den zeitlichen Zustands- (Geschwindigkeits-) Änderungen die *örtlichen* abzusondern, und die gegenseitige Lage, das Nebeneinander der fortschreitenden und rotierenden Massenteilchen mit Hilfe der Bedingungen für Stetigkeit, Erhaltung der Masse u. a. zu untersuchen.

Die Darstellung dieser Beziehungen wird nun aber erheblich erleichtert, wenn man sich der Ausdrucksweise der *Vektor-Rechnung* bedient. Zur Entwicklung dieses neuen kraftvollen Zweiges der Mechanik hat die Hydrodynamik selbst nicht wenig beigetragen. Aus Begriffen und Sätzen entstanden, die verschiedenen Teilen der Physik entnommen und, von zufälligem Beiwerk befreit, zu einem einheitlichen Algorithmus verschmolzen sind, hat die Vektorrechnung große Gebiete der Mechanik der Koordinaten-Analysis mit Erfolg streitig gemacht.

In der Mechanik der raumerfüllenden Massen gewinnt das neue Werkzeug immer mehr an Bedeutung. Weil aber die ganze ältere Literatur seit Lagrange sich der Sprache der Koordinaten bedient, so wollen wir die beiden Darstellungen nebeneinander benutzen, ohne darum den Vorzug zu verkennen, den die Vektorrechnung dadurch besitzt, daß ihre Aussagen meist von der Annahme des Koordinatensystems unabhängig sind, einen gegenüber der Koordinatenänderung „invarianten“ Charakter tragen.

Zu ihren Hilfsmitteln gehört der Satz von Gauss und der von Stokes, den wir im folgenden Artikel kennen lernen werden. Der Satz von Gauss ergab sich uns in Art. (24) aus Anlaß der Verwandlung eines gewissen Raumintegrals in ein Flächenintegral. Er besteht in der Beziehung (Art. 24 (3)):

$$\int \operatorname{div} \mathfrak{v}\, d\tau = -\int \mathfrak{v}_n\, d\sigma, \tag{1}$$

deren Inhalt am besten aus den Anwendungen verstanden wird, die wir sogleich machen werden.

Die oben (Art. 23) definierte Bahnkurve eines Flüssigkeitsteilchens wird im Verlaufe der Zeit beschrieben. Dagegen besitzt die „Stromlinie“ eine Bedeutung nur für einen Zeitmoment. Wenn man im Inneren einer (elastischen oder auch nicht zusammendrückbaren) Flüssigkeit von dem Punkt x, y, z aus in der Richtung des Geschwindigkeitsvektors $\mathfrak{v}$ sich ein unendlich kleines Linienelement aufgetragen denkt und auf ihm zu einem Nachbarpunkt übergeht, wo diese Konstruktion wiederholt wird usf., so erhält man eine *Stromlinie*, deren Elemente den Differentialgleichungen

$$dx : dy : dz = u : v : w$$

genügen. Andere Anfangspunkte liefern andere Stromlinien, von denen somit eine ∞^2-Schar den mit bewegter Flüssigkeit gefüllten Raum durchzieht. Sie bilden in ihrer Gesamtheit das, was man ein *Vektorfeld* nennt, füllen also einen Raum aus, in dem der Vektor $\mathfrak{v}$ den Bewegungszustand darstellt. Im allgemeinen wird sich dieses Vektorfeld mit der Zeit ändern. Wir denken uns im folgenden zunächst das eines gegebenen Zeitpunktes festgehalten.

Zwei Stromlinien werden in ihrer ganzen Ausdehnung unendlich nahe benachbart verlaufen, wenn dies an einer Stelle geschieht, weil der Vektor $\mathfrak{v}$ oben als stetige Funktion der Koordinaten vorausgesetzt wurde (Art. 17 a. E.). Zwei Stromlinien können ferner sich nur an einer Stelle schneiden, wo $\mathfrak{v} = 0$ ist, und wo infolgedessen die Fortschreitungsrichtung unbestimmt ist. — In irgendeinem Punkt einer Stromlinie konstruieren wir senkrecht zu $\mathfrak{v}$ ein Flächenelement dq, durch dessen Berandungspunkte wir Stromlinien legen. Diese bilden eine Röhre (Stromröhre, Stromfaden), deren Inneres wir uns mit Stromlinien derart ausgefüllt denken, daß an jeder Stelle die Anzahl derjenigen, die einen Querschnitt treffen, durch die Größe $k\,|\mathfrak{v}|\,dq$, wo k eine positive Konstante, $|\mathfrak{v}| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ der Betrag von $\mathfrak{v}$ an dieser Stelle ist, (oder vielmehr durch die dieser Größe nächste ganze Zahl) gemessen wird. Die flüssige Masse läßt sich auf diese Weise in Stromröhren zerlegen, in deren Innerem die Dichte der Stromlinien noch veränderlich sein kann.

Grenzt man nun im Inneren der flüssigen Masse irgendeinen Raum T mit der Oberfläche Σ ab, so wird eine Stromröhre, die in T eintritt, nachdem sie Σ eine gerade Anzahl mal geschnitten hat, wieder austreten. Ist dq der Querschnitt der Röhre an einer Schnittstelle, $d\sigma$ das daselbst ausgeschnittene Flächenelement, n die nach dem Inneren von T gerichtete Normale zu Σ, so ist

$$dq = \pm\, d\sigma \cos(\mathfrak{v}, n)$$

wo das —Zeichen negativen Werten des Kosinus, also austretenden Stromlinien entspricht.

Bildet man nun die Summe

$$\int k \; \mathfrak{v} \; \cos(\mathfrak{v}, n) d\sigma,$$

so stellt der positive Teil der Summanden die Zahl der in **T** eintretenden, der negative die der austretenden, das Integral also den Überschuß der ein- über die austretenden Stromlinien dar. Andererseits aber ist nach dem GAUSSschen Satze (s. oben):

$$-k \int \mathfrak{v} \; \cos(\mathfrak{v}, n) d\sigma = -k \int \mathfrak{v}_n d\sigma = k \int \operatorname{div} \mathfrak{v} \, d\tau. \tag{2}$$

Daher stellt auch das *über* **T** *erstreckte Raumintegral*

$$k \int \operatorname{div} \mathfrak{v} \, d\tau = k \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) d\tau \tag{2a}$$

den Überschuß der Anzahl von austretenden über die der eintretenden Stromlinien dar. — Ist **T** $= 1/k$, und innerhalb dieses als klein vorzustellenden Raumes div $\mathfrak{v}$ konstant, so stellt div $\mathfrak{v}$ selbst die Anzahl der austretenden Stromlinien dar.

In einer *inkompressiblen Flüssigkeit* insbesondere, wo für jeden noch so kleinen Raum **T**

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0$$

ist, und damit jener Überschuß verschwindet, kann nirgends eine Stromlinie beginnen oder endigen, in jedem Querschnitt einer Stromröhre befinden sich gleichviel Stromlinien. Diese Röhren müssen also sich ringförmig schließen oder an der Oberfläche endigen.

In elastisch flüssigen Massen dagegen mit wechselnder Dichte ϱ treten an denjenigen Stellen, wo $\dot{\varrho}$ positiv, die Dichte also im Zunehmen begriffen ist, und wo demnach

$$\frac{\dot{\varrho}}{\varrho} = - \operatorname{div} \mathfrak{v}$$

positiv ist, mehr Stromlinien ein als aus. Man nennt solche Stellen *Senken*, diejenigen, wo div $\mathfrak{v}$ positiv ist, wo also mehr *austreten* als eintreten, *Quellen*. So erklärt sich das Wort „Divergenz".

Wie man in der Lehre von den ponderablen Massen aus der raumerfüllenden Masse von kleinen Dimensionen durch eine Abstraktion den „Massenpunkt" ableitet, so gelangt man hier zu *punktförmigen* Quellen und Senken. In einer Flüssigkeit treten in Wirklichkeit Quellen und Senken von nur beschränkter Ergiebigkeit oder Saugkraft auf. Nimmt man sie als unbegrenzt wirksam an, so muß man sich entschließen, für den Zu- oder Abfluß eine uns unzugängliche

Raumdimension anzunehmen. Dies wird in dem Beispiel des Art. 32 geschehen.

Wenn man in einer *inkompressiblen* Flüssigkeit ($\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0$) eine Stromröhre durch zwei unendlich kleine senkrecht zu den Stromfäden verlaufende Querschnitte von den Flächeninhalten q_0 und q_1 abgrenzt, und wenn an diesen Stellen die absoluten Beträge der Stromgeschwindigkeiten bzw. $|\mathfrak{v}_0|$ und $|\mathfrak{v}_1|$ sind, so ergibt die Anwendung des GAUSSschen Satzes auf den so begrenzten Raumteil **T**, weil längs der Seitenwand der Röhre $\cos(\mathfrak{v}, n) = 0$ ist, und in den kleinen Elementen q_0, q_1 die Geschwindigkeit als konstant gelten kann,

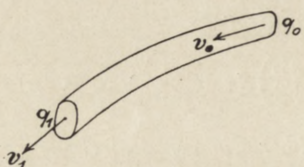

Fig. 12.

$$|\mathfrak{v}_0| q_0 = |\mathfrak{v}_1| q_1. \tag{3}$$

Die Querschnitte eines Stromfadens verhalten sich also umgekehrt wie die daselbst herrschenden Geschwindigkeiten.

Diese Schlußweise kann ohne weiteres auf jeden Vektor übertragen werden, dessen *Divergenz Null* ist. Man nennt solche Vektoren $\mathfrak{v}$, für welche $\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0$ ist, *Solenoidal-Vektoren* (ὁ σωλήν, die Röhre). Zu ihnen gehört offenbar die früher eingeführte „Rotation" eines andern Vektors $\mathfrak{v}$, also auch

$$\mathfrak{w} = \tfrac{1}{2} \operatorname{rot} \mathfrak{v}, \tag{4}$$

ein Vektor mit den Komponenten

$$\xi = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$
$$\eta = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$
$$\zeta = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

der, wie wir früher (Art. 22) sahen, die Dreh- oder Wirbelgeschwindigkeit eines Flüssigkeitsteilchens an der Stelle, wo $\mathfrak{v} = (u, v, w)$ die Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung ist, definiert. Wir werden später erfahren, daß sogar *jeder* Solenoidalvektor als Rotation eines andern Vektors aufgefaßt werden kann. Überträgt man die oben für den Vektor $\mathfrak{v}$ aufgestellten Begriffe Stromlinie, Stromfaden und die hierfür geltenden Sätze auf den Solenoidalvektor $\mathfrak{w}$, so gelangt man zunächst zu den Benennungen *Wirbellinie, Wirbelfaden,* für welche dann die von HELMHOLTZ (Journ. f. Math. Bd. 55 1858) aufgestellten Sätze gelten, daß Wirbellinien sich entweder ringförmig schließen oder an der Oberfläche der Flüssigkeit endigen müssen, und daß sich zwei Querschnitte eines Wirbelfadens von sehr kleinem Querschnitt umgekehrt wie die dort herrschenden Drehgeschwindigkeiten verhalten. Für das Produkt aus Querschnitt in Drehgeschwindigkeit hat man die Bezeichnung Wirbelstärke, Wirbelintensität oder Wirbelmoment eingeführt. Diese Größe also ist längs eines Wirbelfadens konstant.

Neben diesen kinematischen Sätzen über Wirbel gelten noch andere aus den Differentialgleichungen folgende kinetische, wegen deren wir auf Art. 33 verweisen.

28. Der Satz von Stokes.

In einem gewissen Gegensatz zu dem Solenoidalvektor, dessen Divergenz Null ist, steht der in Art. 29 zu behandelnde *Potentialvektor*, dessen Rotation verschwindet. Die Bedeutung, die für den ersteren der Gaussche Satz besitzt, hat für den Potentialvektor der Satz von Stokes. Wir schicken diesen Satz voraus. Der Beweis desselben läßt sich auf eine bekannte von Cauchy (1846) herrührende Formel der Funktionentheorie gründen, die sich auf die Verwandlung eines Integrals über ein ebenes „einfach zusammenhängendes" Flächenstück — dessen ganze Begrenzung nämlich aus einem in sich selbst zurücklaufenden sich nicht schneidenden Linienzuge besteht — in ein Linienintegral bezieht.

Sind u, v zwei in allen Punkten einer solchen ebenen Fläche Σ stetige und eindeutige Funktionen von x, y, so läßt sich das über alle Flächenelemente $d\sigma$ von Σ erstreckte Integral

$$\int\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) d\sigma$$

in das folgende über die ganze Begrenzung von Σ erstreckte Linienintegral

$$\int(u dx + v dy)$$

verwandeln. Um nämlich den Teil

$$\int\frac{\partial v}{\partial x} d\sigma = \iint\frac{\partial v}{\partial x} dx dy$$

umzugestalten, teilen wir die Fläche in Streifen parallel der X-Achse. Der Beitrag eines dieser Streifen, der aus der Y-Achse das Element dy ausschneidet, zu dem Wert des Integrals ist

$$dy\int\frac{\partial v}{\partial x} dx = dy(-v_0 + v_1 - v_2 + \cdots),$$

wenn $v_0, v_1, \cdots$ die Werte von v in den zwei oder mehr Schnittpunkten des Streifens mit der Randkurve bedeuten. Durch Integration über sämtliche in Betracht kommenden y werden offenbar sämtliche Elemente der Fläche Σ und sämtliche Elemente der Begrenzung erschöpft, und man erhält daher, in diesem Umfang genommen:

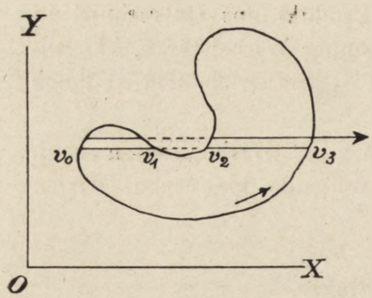

Fig. 13.

$$\int \frac{\partial v}{\partial x} d\sigma = \int v\,dy,$$

wenn unter dy die Projektion auf die Y-Achse eines Linienelementes ds des im Sinne einer Rechtsdrehung durchlaufenen Umfanges verstanden wird. Man beweist ebenso den zweiten Teil der folgenden Gleichung:

$$\int \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) d\sigma = \int (u\,dx + v\,dy). \tag{1}$$

Stokes (Smiths Prize Examination 1854) überträgt diesen Satz auf ein gekrümmtes Flächenstück. Zunächst läßt er sich für ein beliebig im Raume gelegenes ebenes Flächenstück aussprechen. Ein ebenes Dreieck ABC (s. d. Figur), das von den Koordinatenebenen eines rechtwinkligen Systems begrenzt wird, ergibt, auf diese Ebenen projiziert, die Dreiecke OBC, OCA, OAB, deren Flächeninhalt bekanntlich dadurch aus dem von ABC abgeleitet wird, daß man den letzteren je mit dem Kosinus des Neigungswinkels multipliziert, den die von O aus gefällte Normale n zu ABC mit der entsprechenden Koordinatenachse bildet. Sind nun wieder u, v, w drei stetige Funktionen des Ortes, die wir als Komponenten des Vektors $\mathfrak{v}$ auffassen wollen, und erstreckt man das Linienintegral

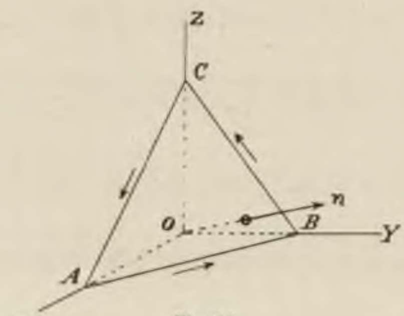

Fig. 14.

$$\int (u\,dx + v\,dy + w\,dz)$$

der Reihe nach über den Umfang der drei Dreiecke $OBCO$, $OCAO$, $OABO$ in dem durch die Buchstaben bezeichneten Sinn, so läßt sich auf jedes der vorher bewiesene Satz anwenden: für $OBCO$ ist

$$\iint \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) dy\,dz = \int (v\,dy + w\,dz). \tag{2}$$

Addiert man die drei so erhaltenen Flächen- und Linienintegrale und bemerkt, daß die letztere Summe sich durch das bloß über den Umfang des Dreiecks ABC erstreckte Linienintegral ersetzen läßt, weil die längs der Linien OA, OB, OC positiv und negativ erstreckten Integrale sich aufheben, so ergibt sich, wenn man nun die linke Seite gemäß (1) deutet[1]), die Gleichheit der folgenden über den Inhalt, bzw. den Umfang des Dreiecks ABC erstreckten Integrale:

$$\begin{aligned}\iint\left[\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)dy\,dz+\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)dz\,dx+\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy\right]\\ =\int(2\,\xi\cos(n,x)+2\,\eta\cos(n,y)+2\,\zeta\cos(n,z))\,d\sigma\\ =\int(u\,dx+v\,dy+w\,dz),\qquad(3)\end{aligned}$$

wobei 2ξ, 2η, 2ζ wie früher die Komponenten von $2\mathfrak{w}=\operatorname{rot}\mathfrak{v}$ sind, $d\sigma$ ein Element des Dreiecks ABC ist, und die Richtung der Normalen n zusammen mit der Umkreisung von ABC ein Rechtssystem bilden.

Die Formel (3) gilt offenbar auch für das Dreieck $A'B'C'$, das zu ABC

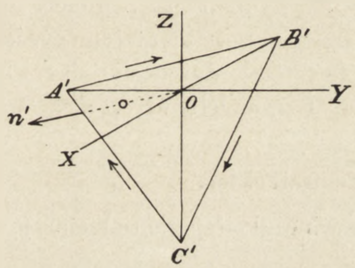

Fig. 15.

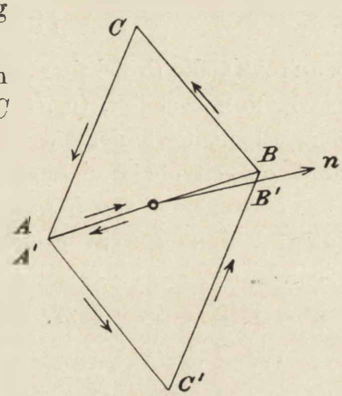

Fig. 16.

hinsichtlich des Ursprungs symmetrisch liegt, wobei wieder die Normale n' mit dem Drehungssinn ein Rechtssystem bildet. Kehrt man nun die Richtung von n' um — so daß n' mit n gleichgerichtet ist — und zugleich den Sinn der Umkreisung von $A'B'C'$ in $A'C'B'$, so bleibt (3) ungeändert. Vereinigt man endlich durch Parallelverschiebung die beiden Dreiecke an einer beliebigen Stelle des Raumes zu einem Parallelogramm mit etwa der gemeinsamen Seite AB (s. Figur 16), so gilt die Formel (3)

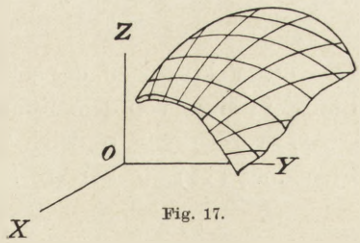

Fig. 17.

1) Dieser nicht ganz strenge Schluß wird einwandfrei, wenn ξ, η, ζ Konstanten sind, wie dies bei dem späteren Übergang zu unendlich kleinen Tetraedern eintritt.

für beide Dreiecke und damit, weil wieder die Linienintegrale längs AB sich aufheben, auch für das Parallelogramm $AC'BC$.

In infinitesimale Parallelogramme von der betrachteten Art läßt sich aber jedes beliebige, auch gekrümmte Flächenstück (s. Figur 17) zerlegen, indem man es durch zwei Systeme von Parallelebenen zu den Koordinatenebenen (im obigen Fall zur XZ- und YZ-Ebene) schneidet. Summiert man die Linienintegrale längs der Begrenzung der infinitesimalen Parallelogramme, so heben sich wiederum die Integrale längs der inneren Teilungslinien auf, und es bleibt bloß noch das Linienintegral (3) rechts längs der Umrandung des Flächenstücks, während die linke Seite der Formel (3) sich auf das Innere des Flächenstücks bezieht.

Hiermit ist die Gültigkeit der Formel (3) für ein beliebig gestaltetes Flächenstück nachgewiesen. Man kann ihr die Gestalt geben

$$\int (\operatorname{rot} \mathfrak{v})_n \, d\sigma = \int (\mathfrak{v}, d\mathfrak{s}), \tag{3a}$$

wo $(\operatorname{rot} \mathfrak{v})_n$ die Projektion von $\operatorname{rot} \mathfrak{v}$ auf die an der Stelle $d\mathfrak{s}$ gezogene Normale n bedeutet, $(\mathfrak{v}, d\mathfrak{s})$ das skalare Produkt (Art. 23) aus $\mathfrak{v}$ und dem Element $d\mathfrak{s}$ der Begrenzung ist. Damit ist zugleich die Unabhängigkeit der Beziehung (3) vom Koordinatensystem erwiesen.

Man nennt *die Beziehungen* (3), (3a), durch die das Flächenintegral links in ein Randintegral verwandelt wird, *den Satz von* Stokes.

29. Der Potentialvektor.

Wenn der Vektor $\mathfrak{v}$ ein Geschwindigkeitspotential $\varphi(x, y, z)$ besitzt, wenn also (Art. 25 a. E.)

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \tag{1}$$

ist, nennt man (Art. 23) $\mathfrak{v}$ den *Gradienten von* φ,

$$\mathfrak{v} = \operatorname{grad} \varphi. \tag{1a}$$

Daß der Vektor $\mathfrak{v}$ zu der durch den Raum verteilten skalaren Funktion φ in einer von dem Koordinatensystem unabhängigen Beziehung steht, werden wir sogleich erkennen. Wir benutzen zunächst die Gleichung (1a) als kürzere Schreibweise von (1). Aus (1) folgt

$$\operatorname{rot} \mathfrak{v} = 0, \tag{2}$$

daher ist für *die skalare Funktion* φ

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0. \tag{2a}$$

Die Eigenschaft des Vektor $\mathfrak{v} = \operatorname{grad} \varphi$, die sich durch Formel (1) ausdrückt, macht für $\mathfrak{v}$ die Bezeichnung „Potentialvektor" verständlich. Um diesen aber in einer von dem Koordinatensystem unabhängigen Form zu definieren, stellt man die durch die Gleichung (2) ausgedrückte Eigenschaft voran und *nennt Potentialvektor* jeden Vektor, *dessen Rotation verschwindet. Daß umgekehrt aus* $\operatorname{rot}\mathfrak{v} = 0$ die Eigenschaft (1a) $\mathfrak{v} = \operatorname{grad}\varphi$ *folgt,* erkennt man auf folgende Weise.

Die Größen u, v, w seien im Inneren eines Raumes T stetige, endliche und einwertige Funktionen des Ortes, die sich zu einem Vektor $\mathfrak{v}$ zusammensetzen, für den $\operatorname{rot}\mathfrak{v} = 0$ ist. Der Raumteil T sei *einfach zusammenhängend*, d. h. so beschaffen, daß durch jede geschlossene innerhalb T verlaufende Kurve eine von ihr allein begrenzte Fläche gelegt werden kann, die ebenfalls ganz innerhalb T verläuft.[1]) Erstreckt man längs dieser Kurve das Integral

$$\int (u\,dx + v\,dy + w\,dz) = \int (\mathfrak{v}, d\mathfrak{s}), \tag{3}$$

so ist dieses nach dem STOKESschen Satz (s. vor. Art.) in das Flächenintegral

$$\int (\operatorname{rot}\mathfrak{v})_n d\sigma$$

überführbar, verschwindet also, wenn in T überall

$$\operatorname{rot}\mathfrak{v} = 0$$

ist. Daher verschwindet das Linienintegral (3) auf *jedem* in T verlaufenden geschlossenen Integrationsweg. Wenn man andererseits das Integral (3) von einem festen Punkt $M_0(x_0, y_0, z_0)$ im Inneren von T bis zu einem anderen in T gelegenen Punkt $M(x, y, z)$ auf irgendeinem Wege führt, so kann der Wert des Integrals von dem gewählten Wege nicht abhängen, weil zwei verschiedene Wege von M_0 nach M zu einer geschlossenen Kurve vereinigt werden können, längs deren das Integral erstreckt, wie eben gezeigt, den Wert Null

1) Daß diese Forderung nicht immer erfüllbar ist, zeigt das Beispiel eines von zwei Kreisringen begrenzten Hohlzylinders T. Denn ein zwischen den zylindrischen Seitenwänden verlaufender Kreis, dessen Mittelpunkt sich auf der Achse befindet, ist eine Kurve, durch welche sich keine von ihr (allein) begrenzte Fläche legen läßt, die ganz innerhalb T verläuft. Man kann T durch ein Rechteck, das in einer Ebene durch die Achse liegt, und das von den 4 Grenzflächen begrenzt wird, (als „Querschnitt") in einen *einfach zusammenhängenden* Raum verwandeln, indem man es (zweimal) zur Begrenzung hinzunimmt. T heißt ein „zweifach zusammenhängender Raumteil".

gibt. Das Integral von M_0 bis M auf dem *einen* Wege ist dann gleich dem Integral von M bis M_0 auf dem *anderen* genommen, aber mit negativem Vorzeichen; oder beide, von M_0 bis M genommen, sind einander gleich. Daher ist der Wert des Integrals

$$\int_{M_0}^{M} d\varphi = \int_{M_0}^{M} (u\,dx + v\,dy + w\,dz) = \varphi(x, y, z) - \varphi(x_0, y_0, z_0) \quad (4)$$

bloß von den gewählten Grenzpunkten abhängig und eine eindeutige Funktion derselben. Aus (4) folgen aber die Gleichungen (1), w. z. b. w.

Führt man das Integral $\int d\varphi$ insbesondere längs einer Linie, für die

$$u = \frac{dx}{ds}, \quad v = \frac{dy}{ds}, \quad w = \frac{dz}{ds}$$

ist, also im Falle, daß φ Geschwindigkeitspotential ist, längs einer Stromlinie, so ist $d\varphi = ds$ immer positiv. Daher *bewegt sich ein Flüssigkeitsteilchen immer von Stellen niederen zu solchen höheren Geschwindigkeitspotentials.*

Statt als Komponenten einer Geschwindigkeit kann man u, v, w auch als solche einer *Kraft* deuten. Bezeichnet man sie dann mit X, Y, Z, die Kraft mit $\mathfrak{P}$, so ist

$$\varphi = \int_{M_0}^{M} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = \int_{M_0}^{M} |\mathfrak{P}|\,ds \cos(\mathfrak{P}, ds) = \int_{M_0}^{M} (\mathfrak{P}, d\mathfrak{s})$$

die sogenannte *Kräftefunktion* oder *Potentialfunktion* (*Potential* im weiteren Sinne). Sie bedeutet, wie schon früher erwähnt (Art. 15), die auf dem Wege M_0 nach M von der Kraft $\mathfrak{P}$ geleistete Arbeit, und setzt sich aus den *Elementararbeiten* längs der infinitesimalen Wegestrecken zusammen, die durch das Produkt aus Kraft, Wegelement und dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels dargestellt werden. — Die Flächen, in deren Punkten das Potential φ einen und denselben numerischen Wert c besitzt, deren Gleichung also

$$\varphi(x, y, z) = c$$

ist, nennt man *Niveauflächen.* Sie geben ein Mittel an die Hand zur Bestimmung der Richtung der Kraft $\mathfrak{P}$ an einer gegebenen Stelle und damit zur Konstruktion der *Kraftlinien*, in welche die Stromlinien bei dieser Deutung von φ übergehen, also zur Konstruktion des Vektorfeldes für $\mathfrak{P} = (X, Y, Z)$. Weil nämlich die Richtung der Normalen n zu der Fläche $\varphi =$ const. in einem Punkt x, y, z derselben sich aus

$$\cos(n, x) : \cos(n, y) : \cos(n, z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial y} : \frac{\partial \varphi}{\partial z} = X : Y : Z$$

bestimmt, so gibt die Normale gerade die Richtung der Kraftlinie an. Sie fällt mit der *Richtung des Vektors* grad φ zusammen. Da andererseits die Summe der Quadrate $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2$, wie eine leichte Rechnung zeigt, eine bei Drehung und Verschiebung des Koordinatensystems invariante Größe ist, so ist dies auch mit grad φ selbst der Fall, wie oben behauptet worden war. Ändert man den Wert der Konstanten c, so erhält man ein System von Niveauflächen, deren Orthogonaltrajektorien alsdann die erwähnten Linien sind. Umgekehrt kann jede innerhalb eines Raumes **T** mit ihren 1. Differentialquotienten stetige, endliche und eindeutige Funktion φ zur Bestimmung eines Potentialvektors (grad φ) verwendet werden. Die Funktion φ bestimmt in **T** *ein skalares Feld*: die Gesamtheit aller Punkte, denen endliche Werte von φ eindeutig sich zuordnen lassen. Zugleich ist in **T** durch grad φ ein Vektorfeld definiert. Soll der Raum **T** dieses Feld nicht überragen, so muß man aus **T** solche Stellen, wo die Funktion φ oder ihre Differentialquotienten unendlich werden, durch Umgebung derselben mit geschlossenen Flächen ausschließen.

Wir wollen uns mit der Konstruktion eines solchen Feldes **T** in einem besonderen Fall beschäftigen. Das Potential sei

$$\varphi = \frac{e}{r} + \frac{e_1}{r_1},$$

wo e, e_1 positive oder negative Konstanten, r, r_1 die Abstände eines unbestimmten Punktes x, y, z (des „Aufpunktes") von zwei festen Zentren O, O_1 mit den Koordinaten a, b, c; a_1, b_1, c_1 sind, also

$$r^2 = (a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2; \quad r_1^2 = (a_1 - x)^2 + (b_1 - y)^2 + (c_1 - z)^2.$$

Weil φ in O, O_1 unendlich wird, wollen wir diese Punkte aus **T** durch kleine sie umgebende Kugeln ausschließen, die wir dann zur Begrenzung Σ des Raumes **T** rechnen müssen, der sich im übrigen bis ins Unendliche erstrecken möge. Der Vektor $\mathfrak{v} = (u, v, w)$ ist nunmehr in **T** stetig, und seine Richtung unbestimmt nur in den „*Indifferenzpunkten*", d. h. an den Stellen, wo $\mathfrak{v} = 0$ oder wo zugleich

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

ist. Um diese zu ermitteln, legen wir die Z-Achse in die Verbindungslinie OO_1 und den Ursprung des Koordinatensystems in den Punkt O_1. Dann ist

$$a = b = a_1 = b_1 = c = 0,$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2; \quad r_1^2 = x^2 + y^2 + (z - c_1)^2.$$

Die Niveauflächen

$$\varphi \equiv \frac{e}{r} + \frac{e_1}{r_1} = \text{const.}$$

sind Rotationsflächen mit der Z-Achse als Umdrehungsachse und durch ihre Meridiankurven darstellbar, von denen in beistehenden

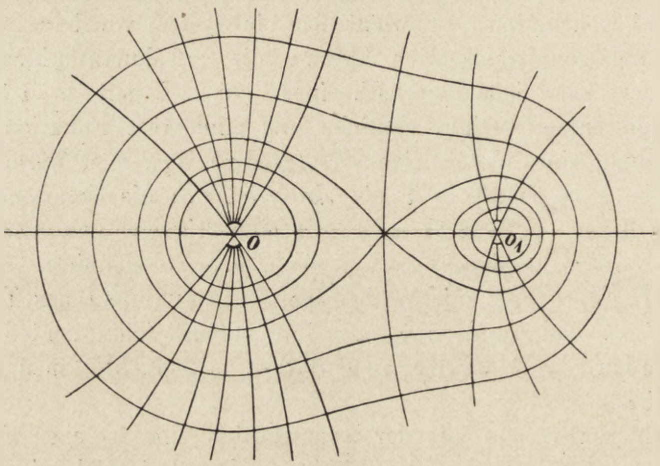

Fig. 18.

Figuren für die Fälle $e = 2$; $e_1 = 1$; und $e = 2$; $e_1 = -1$ einige (nach Holzmüller, Das Potential, Leipzig 1898) gezeichnet sind.

In den Indifferenzpunkten ist

$$\frac{ex}{r^3} + \frac{e_1 x}{r_1^3} = 0; \quad \frac{ey}{r^3} + \frac{e_1 y}{r_1^3} = 0; \quad \frac{ez}{r^3} + \frac{e_1 (z - c_1)}{r_1^3} = 0.$$

Die beiden ersten Ausdrücke verschwinden, außer für $\frac{e}{r^3} = -\frac{e_1}{r_1^3}$ (was in die dritte Gleichung eingesetzt, $c_1 = 0$ ergäbe), nur für $x = y = 0$. Geht man hiermit in die dritte Gleichung ein und beachtet, daß für gleichnamige e, e_1 $c_1 > z$ sein muß, also $r_1 = c_1 - z$ zu setzen ist, für ungleichnamige e, e_1 $c_1 < z$, also $r_1 = z - c_1$, so erhält man

für gleichnamige e, e_1 $z = \frac{c_1}{1 + \lambda}$, für ungleichnamige $z = \frac{c_1}{1 - \lambda}$,

wenn $\lambda = +\sqrt{\left|\frac{e_1}{e}\right|}$ ist.

Ist φ ein Geschwindigkeitspotential, so besteht die Bewegung bei gleichem Vorzeichen von e und e_1 (Fig. 18) entweder aus einem Einströmen der Flüssigkeit in die Senken $r = 0$, $r_1 = 0$ von der

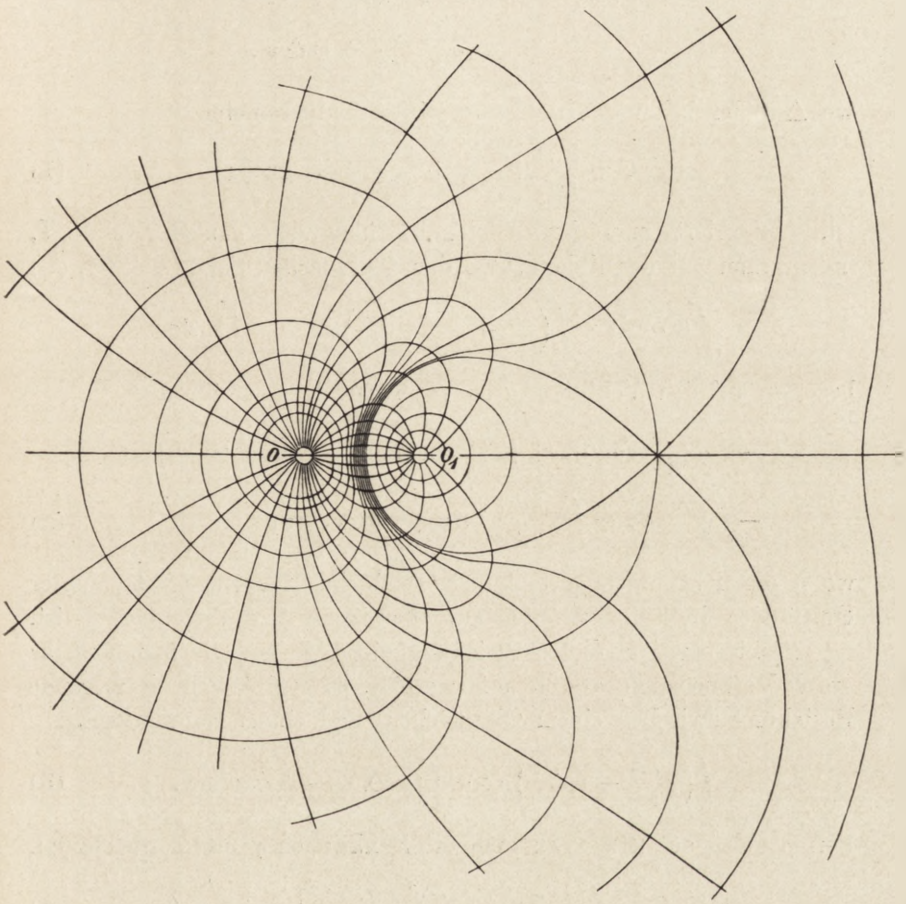

Fig. 19.

„Saugkraft" e und e_1 (s. Art. 32) oder einem Entströmen aus diesen Quellen von der „Mächtigkeit" e und e_1. Fig. 19 entspricht ungleichem Vorzeichen von e und e_1.

30. Der Satz von Green. Das Newtonsche Potential.

Sind φ, ψ zwei skalare Funktionen des Ortes, die nebst ihren ersten Differentialquotienten innerhalb eines irgendwie (nach außen und nach innen) begrenzten Raumteiles **T** eindeutig, stetig und endlich sind, und bedeutet die Summe S drei Glieder in x, y, z, von denen wir je nur eines ausschreiben, so ist

$$\mathsf{S}\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = \mathsf{S}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \varphi\,\mathsf{S}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$
$$= \mathsf{S}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \varphi\triangle\psi,$$

wo $\triangle\psi$ der bekannte Lamésche Differentialparameter

$$\triangle\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \operatorname{div}\operatorname{grad}\psi \tag{1}$$

ist. Integriert man jene Gleichung über den ganzen Raum T, indem man auf der linken Seite den Gaussschen Satz (Art. 24, (3))

$$\int \operatorname{div}\mathfrak{v}\,d\tau = \int\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)d\tau = -\int \mathfrak{v}_n\,d\sigma,$$

bezogen auf den Vektor φ grad ψ anwendet, so erhält man

$$-\int\varphi\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\cos(n,x) + \frac{\partial\psi}{\partial y}\cos(n,y) + \frac{\partial\psi}{\partial z}\cos(n,z)\right)d\sigma$$
$$= -\int\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}d\sigma = \int\mathsf{S}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}d\tau + \int\varphi\triangle\psi\,d\tau, \tag{2}$$

wo n die nach innen gerichtete Normale im Element $d\sigma$ der (unter Umständen in Teile zerfallenden) Oberfläche Σ des Raumes T ist.

Zieht man von dieser Gleichung diejenige ab, die man aus ihr durch Vertauschung von φ mit ψ erhält, so ergibt sich die folgende Beziehung zwischen einem Oberflächen- und einem Raumintegral:

$$\int\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)d\sigma = \int(\varphi\triangle\psi - \psi\triangle\varphi)d\tau. \tag{3}$$

Ferner folgt aus (2), wenn man die Funktionen φ und ψ gleichsetzt,

$$-\int\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\sigma = \int\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]d\tau + \int\varphi\triangle\varphi\,d\tau. \tag{4}$$

Die Beziehung (3) heißt der *Satz von Green.* Sie wird dazu dienen, eine Funktion φ im Inneren eines Raumes T darzustellen, wenn man allenthalben dort den Wert von $\triangle\varphi$ und außerdem die (übrigens voneinander nicht unabhängigen) Werte von φ und $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ an der Oberfläche von T kennt.

Man führt zu diesem Zweck für ψ den besonderen Wert

$$\psi = \frac{1}{r}$$

ein, wo

$$r^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2$$

ist, und a, b, c die Koordinaten des Ortes des Volumenelementes $d\tau$ sind. Setzt man in (3) demnach

$$d\tau = da\,db\,dc,$$

so ist auf der rechten Seite auch φ, ψ in a, b, c zu schreiben und

$$\triangle\,\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial a^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial b^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial c^2} = -\,4\pi\,\mu\,(a, b, c)$$

$$\triangle\,\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial a^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial b^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial c^2}$$

zu setzen, wo nun μ eine bekannte Funktion von a, b, c sein möge.

Ist nun P ein Punkt von T in allgemeiner Lage, dessen Koordinaten x, y, z als Argumente in die zu bildende Funktion φ eingehen sollen (der „Aufpunkt"), so läßt sich φ auf folgende Weise ermitteln. Zunächst ergibt eine kleine Rechnung, daß

$$\triangle\,\psi \equiv \triangle\left(\frac{1}{r}\right) \equiv \frac{\partial^2}{\partial a^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial b^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial c^2}\left(\frac{1}{r}\right) = 0.$$

Weil in (3) die Funktionen φ, ψ innerhalb des Raumes T als endliche und stetige Funktionen von a, b, c vorausgesetzt wurden, ψ aber nebst seinen Differentialquotienten für $a = x$, $b = y$, $c = z$ unendlich wird, so muß man den Punkt P und seine nächste Umgebung aus T ausschließen, etwa dadurch, daß man P mit einer Kugel von sehr kleinem Halbmesser α umgibt und diese nicht zu T rechnet. Dann ist die Oberfläche dieser Kugel der Begrenzung Σ von T zuzurechnen. T gehe dadurch in T', die Oberfläche Σ von T in die Σ' von T' über. Eine zu der kugelförmigen Begrenzung von T' nach innen gerichtete Normale ist dann äußere Normale der Kugelfläche, und zwar ist

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = \frac{\partial\psi}{\partial\alpha} = -\frac{1}{\alpha^2}.$$

Das Oberflächenelement $d\sigma$ der Kugel kann durch

$$d\sigma = \alpha^2 d\omega$$

ersetzt werden, wo $d\omega$ das Oberflächenelement einer Kugel vom Halbmesser 1 ist. Scheidet man nun aus dem Oberflächenintegral auf der linken Seite von (3) den auf die kleine Kugel bezüglichen Teil aus, so geht (3) über in

$$\int\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\right)d\sigma + \alpha\int\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\omega + 4\pi\cdot\varphi(x, y, z) = -\int\frac{\triangle\,\varphi}{r}d\tau,$$

wo nun das erste Integral links bloß noch über die ursprüngliche Begrenzung Σ zu erstrecken ist. Für verschwindend kleine α ergibt sich hieraus

$$4\pi\varphi(x, y, z) = -\int\frac{\triangle\varphi}{r}d\tau - \int\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\right)d\sigma, \tag{5}$$

womit die allgemeine Darstellung von φ in der in Aussicht gestellten Form geleistet ist. Es genügt übrigens (KIRCHHOFF, Mechanik, 16. Vorlesung, § 5), φ an der Oberfläche zu kennen, weil sich dann $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ bestimmen läßt, oder umgekehrt.

Läßt man nun den Raum T *allseitig sich ins Unendliche ausdehnen,* indem man für die äußere Grenzfläche Σ eine Kugel mit zunächst großem Radius $\mathfrak{R}$ annimmt, deren Mittelpunkt im Endlichen liegt, so geht $d\sigma$ über in

$$d\sigma = \mathfrak{R}^2 d\omega, \tag{5a}$$

wo $d\omega$ wieder das Element der Einheitskugel ist. Für unbegrenzt wachsende a, b, c und etwa $\mathfrak{R} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ nehmen die Größen

$$\frac{\mathfrak{R}}{r}, \quad \mathfrak{R}^2\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)$$

endliche Werte an, wenn x, y, z endlich bleiben. Macht man daher über das Verhalten von $\varphi(a, b, c)$ und $\partial\varphi/\partial n$ im Unendlichen passende Annahmen, so kann man bewirken, daß das Oberflächenintegral auf der rechten Seite von (5) verschwindet. Wir wollen für einen Augenblick diese Bedingung als erfüllt voraussetzen. Dann erhält man

$$4\pi\varphi(x, y, z) = -\int\frac{\triangle\varphi}{r}d\tau = 4\pi\int\frac{\mu\,d\tau}{r}. \tag{6}$$

Um nun die zu erfüllende Bedingung zu finden, multiplizieren wir (6) beiderseits mit

$$\mathfrak{R} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

und lassen in dem nach a, b, c auszuführenden Integral

$$\mathfrak{R}\varphi(x, y, z) = \int\frac{\mathfrak{R}}{r}\mu\,d\tau$$

x, y, z und $\mathfrak{R}$ unbegrenzt wachsen. Dann behält, wenn μ nur in irgendwelchen *endlichen* Raumteilen von Null verschieden ist, die rechte Seite und damit $\mathfrak{R}\varphi$ einen endlichen Wert, ebenso das Integral

$$\mathfrak{R}^2\frac{\partial\varphi}{\partial l},$$

wenn l eine der Koordinaten x, y, z bedeutet. Führt man nun umgekehrt *die Bedingung, daß*

$$\Re\varphi(x, y, z) \quad \text{und} \quad \Re^2\frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial l} \tag{7}$$

(übrigens in a, b, c statt in x, y, z geschrieben) *für wachsende* $\Re$ *nicht unendlich werden* sollen, in das Oberflächenintegral rechts von (5) ein, so verschwinden wegen (5a) die zwei Glieder einzeln, und (5) verwandelt sich in

$$\varphi(x, y, z) = \int\frac{\mu\, d\tau}{r}. \tag{8}$$

Dieser Ausdruck für φ ist lediglich aus folgenden *drei Annahmen* abgeleitet:

1. daß die Funktion φ und ihre ersten Differentialquotienten im unendlichen Raume stetige und endliche Funktionen seien;

2. daß ihr Verhalten im Unendlichen das durch die Annahme (7) vorgeschriebene sei;

3. daß die Größe

$$\triangle\varphi = -4\pi\mu$$

im Raume **T** beliebig — auch unstetig veränderlich — gegeben sei, jedoch (wegen 2.) mit unbegrenzt wachsendem x, y, z verschwinde.

Setzt man nun die in Funktion von a, b, c gegebene Größe μ[1]) in das über alle Elemente $d\tau = da\,db\,dc$ des unendlichen Raumes erstreckte Integral ein

$$\varphi(x, y, z) = \int\frac{\mu\, d\tau}{r} \tag{8}$$

(wo also rechts x, y, z bloß in der Größe r auftreten), so ist dieser Ausdruck die einzige Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\triangle\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -4\pi\mu, \tag{8a}$$

welche jene drei Annahmen zugleich erfüllt. Dabei schließt, wir wiederholen es, die Annahme, daß $\triangle\varphi$ (mit μ) unstetig im unendlichen Raume verteilt sei, die Stetigkeit von φ und $\partial\varphi/\partial n$ nicht aus.[2])

1) Wegen flächen- oder linienhaft verteilter Massen μ vgl. man das Werk Riemann-Weber, part. Differentialgleichungen der math. Physik, Braunschweig, 1900, I. Bd. S. 234 ff., dessen Darstellung unser Text im wesentlichen folgt.

2) Eine auf die Strenge der Beweisführung in der Potentialtheorie bezügliche Untersuchung findet man in Hölder's Diss. „Beiträge zur Potentialtheorie", 1882.

Die den Bedingungen (1)—(3) genügende Funktion φ heißt das NEWTONsche oder *räumliche Potential*, auch „Potential" im engeren Sinne, die partielle Differentialgleichung (8a), welcher φ (8) genügt, heißt die LAPLACE-POISSON*sche Gleichung.*

Je nach der Bedeutung, die man der Funktion μ beilegt, findet die Formel (8) Verwendung in verschiedenen Gebieten der Mechanik und der Physik. Bedeutet μ die Dichte *ponderabler* im unendlichen Raume irgendwie verteilter *Massen*, wo dann μ für die einzelnen Raumelemente $d\tau$ eine positive Größe oder Null ist, so ist φ das (NEWTONsche) *Potential dieser Massen.* Die Differentialquotienten

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\int \frac{\mu}{r^2} \frac{x-a}{r} d\tau, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\int \frac{\mu}{r^2} \frac{y-b}{r} d\tau; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\int \frac{\mu}{r^2} \frac{z-c}{r} d\tau$$

haben, mit der Gravitationskonstanten $\varkappa$ und der Masse m des Punktes x, y, z multipliziert, die Bedeutung der Komponenten einer *Kraft*, die man erhält, wenn man die Resultante aus allen elementaren Anziehungskräften $-\varkappa \frac{m \mu d\tau}{r^2}$ nimmt, die nach dem Gravitationsgesetz von der in jedem a, b, c vorhandenen Masse $\mu d\tau$ auf einen in der Entfernung r an der Stelle x, y, z befindlichen Aufpunkt von der Masse m ausgeübt werden. — Bedeuten dagegen μ und m beide elektrische oder (als frei gedachte) magnetische Massen, die auch negative Werte annehmen können, so treten an die Stelle von $\varkappa$ negative Größen; gleichnamige Massen dieser Art stoßen sich ab.

Ist endlich φ innerhalb des Raumes T *ein Geschwindigkeitspotential*, sind also die Differentialquotienten die Komponenten der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ einer Flüssigkeitsbewegung, so ist diese in T wirbellos, weil im Falle eines Potentialvektors $\operatorname{rot} \mathfrak{v} = 0$ ist, und die Bedeutung von μ ergibt sich (Art. 22 a. E.) aus:

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \triangle \varphi = -4\pi\mu = -\frac{d \log \varrho}{dt}. \tag{9}$$

μ ist also dann eine der *Divergenz* (oder der Zunahme des Logarithmus der Dichte) proportionale Größe. Ist die Flüssigkeit *inkompressibel*, so ist die Divergenz Null an allen Stellen, wo sich keine Quellen und Senken befinden. Wo aber solche vorhanden sind, hat *μ die Bedeutung der Ergiebigkeit der Quelle oder der Saugkraft der Senke.* Kennt man ihre Verteilung im unendlichen Raume T, so bestimmt sich der Bewegungszustand der Flüssigkeit an jeder Stelle durch das Integral der Gleichung

$$\triangle \varphi = \operatorname{div} \mathfrak{v},$$

also durch das Potential

$$\varphi = \int \frac{\mu \, d\tau}{r} = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\operatorname{div} \mathfrak{v}}{r} d\tau, \tag{10}$$

sofern nur die aus (7) abgeleitete Bedingung erfüllt ist, daß die Geschwindigkeitskomponenten für große Werte der Koordinaten $\mathfrak{R}$ so verschwinden, daß $\mathfrak{R}^2 u, \mathfrak{R}^2 v, \mathfrak{R}^2 w$ endliche Werte behalten. Wir sagen dann, daß *die Flüssigkeit „im Unendlichen ruht“* (eine Bezeichnung, die übrigens auch dann verwendet wird, wenn bloß $\mathfrak{R} u, ..$ einen endlichen Wert hat). Wenn man sich die in einer inkompressiblen Flüssigkeit vorhandenen Quellen und Senken mit geschlossenen Flächen umgeben denkt und auf den so nach innen begrenzten, im übrigen aber endlichen oder unendlichen Raum T die Gleichung (4) anwendet, so geht sie, weil nun innerhalb T $\triangle \varphi = 0$ ist, in die folgende über:

$$\int \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau = \int (u^2 + v^2 + w^2) \, d\tau = -\int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma \tag{11}$$

Multipliziert man (11) mit dem Faktor $\varrho/2$, wo ϱ die (überall konstante) Dichte ist, so bedeutet die linke Seite die *kinetische Energie der Flüssigkeit.* Diese also ist innerhalb eines quellen- und senkenfreien Raumes durch den Zustand an der Oberfläche dann völlig bestimmt, wenn die Flüssigkeitsbewegung stationär, d. h. φ von der Zeit unabhängig ist.

31. Zusammensetzung eines Vektors aus einem Potential- und einem Solenoidalvektor.

In Art. 27 wurde bemerkt, daß jeder Solenoidalvektor $\mathfrak{v} = \operatorname{rot} \mathfrak{q}$ der Bedingung

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathfrak{q} = 0$$

genügt. Umgekehrt *läßt sich jeder Vektor* $\mathfrak{v} = (u, v, w)$, *dessen Divergenz verschwindet*, welcher also der partiellen Differentialgleichung

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

genügt, *als Solenoidalvektor, d. h. als Rotation eines andern Vektors darstellen.* Der Beweis hierfür ist erbracht, wenn man zeigen kann, daß aus der *Annahme*:

$$\mathfrak{v} = \operatorname{rot} \mathfrak{q},$$

oder, wenn L, M, N die Komponenten von $\mathfrak{q}$ sind, aus der Annahme:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \\ v &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \\ w &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \end{aligned} \tag{2}$$

solche Größen L, M, N berechnet werden können, daß die durch sie ausgedrückten u, v, w die Gleichung (1) befriedigen. Man bemerkt zunächst, daß die Größen L, M, N aus (2), wenn überhaupt, dann nur bis auf die partiellen Differentialquotienten einer und derselben Funktion bestimmt sind. Denn wenn man ein System L, M, N kennt, das den Gleichungen (2), (1) genügt, so ist auch

$$\begin{aligned} L_1 &= L + \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ M_1 &= M + \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ N_1 &= N + \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{aligned} \tag{3}$$

ein solches, wo ψ irgendeine Funktion von x, y, z ist. Berechnet man nun aus (2) die Komponenten $2\xi, 2\eta, 2\zeta$ der Rotation (Art. 22)

$$2\mathfrak{w} = \operatorname{rot} \mathfrak{v},$$

so kann man den Ausdruck für z. B. 2ξ in die Form bringen

$$2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z}\right) - \triangle L,$$

oder

$$2\xi = \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \mathfrak{q} - \triangle L, \tag{4}$$

wo wieder

$$\triangle L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}$$

ist. — Wenn man die Formeln für $2\xi, 2\eta, 2\zeta$ in eine zusammenfaßt

$$\operatorname{rot} \mathfrak{v} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{q} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{q} - \triangle \mathfrak{q}, \tag{4a}$$

so ist damit eine oft anzuwendende *Identität der Vektorrechnung* bewiesen. —

Man bestimme nun ein Lösungssystem $(L, M, N) = \mathfrak{q}$ aus (4), jedoch unter der *Annahme* $\operatorname{div} \mathfrak{q} = 0$, also aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \triangle L &= -2\xi \\ \triangle M &= -2\eta \\ \triangle N &= -2\zeta, \end{aligned} \tag{5}$$

d. h. man bestimme $\mathfrak{q}$ aus

$$\triangle \mathfrak{q} = -\operatorname{rot} \mathfrak{v} \tag{5a}$$

unter der Voraussetzung, daß für unbegrenzt wachsende Koordinaten x, y, z die Größen

$$\Re^2 u, \quad \Re^2 v, \quad \Re^2 w \tag{5b}$$

(wo

$$\Re^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

ist), und also

$$\Re^3 \xi, \quad \Re^3 \eta, \quad \Re^3 \zeta$$

nicht unendlich werden, weshalb auch

$$\Re L, \quad \Re M, \quad \Re N$$

und

$$\Re^2 \frac{\partial L}{\partial n}, \quad \Re^2 \frac{\partial M}{\partial n}, \quad \Re^2 \frac{\partial N}{\partial n}$$

endlich bleiben. Dann sind die Lösungen der partiellen Differentialgleichungen (5) (Art. 30)

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{\xi \, d\tau}{r} \\ M &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{\eta \, d\tau}{r} \\ N &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{\zeta \, d\tau}{r}, \end{aligned} \tag{6}$$

oder in Vektorschreibweise

$$\mathfrak{q} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\operatorname{rot} \mathfrak{v} \, d\tau}{r}, \tag{6a}$$

wo $d\tau = da\,db\,dc$ ist,

$$r^2 = (a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2,$$

und wo ξ, η, ζ in den Koordinaten a, b, c eines Punktes des Raumes T zu schreiben sind, über welchen sich die Integration erstreckt.

Daß diese Lösungen (6) umgekehrt auch der Bedingung

$$\operatorname{div} \mathfrak{q} = \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0 \tag{7}$$

genügen, ergibt sich aus folgendem. Weil

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} = -\frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial a}$$

und demnach

$$\frac{\partial \left(\frac{\xi}{r}\right)}{\partial x} = -\xi \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial a} = -\frac{\partial \left(\frac{\xi}{r}\right)}{\partial a} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial a}$$

ist, so wird

$$\operatorname{div}\mathfrak{q} = -\frac{1}{2\pi}\int d\tau\left[\frac{\partial\left(\frac{\xi}{r}\right)}{\partial a}+\frac{\partial\left(\frac{\eta}{r}\right)}{\partial b}+\frac{\partial\left(\frac{\zeta}{r}\right)}{\partial c}\right]+\frac{1}{2\pi}\int\frac{d\tau}{r}\left(\frac{\partial\xi}{\partial a}+\frac{\partial\eta}{\partial b}+\frac{\partial\zeta}{\partial c}\right).$$

Das letzte Integral rechts ist Null wegen $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathfrak{v} = 0$. Auf das erste wenden wir den GAUSSschen Satz (Art. 24) an und erhalten

$$\operatorname{div}\mathfrak{q} = \frac{1}{2\pi}\int\frac{d\sigma}{r}\Big[\xi\cos(n, x) + \eta\cos(n, y) + \zeta\cos(n, z)\Big], \tag{7a}$$

wobei die Integration auszudehnen ist über die unendlich entfernten Oberflächenelemente

$$d\sigma = \Re^2 d\omega$$

des Raumes T, wo $d\omega$ das Element der Einheitskugel ist und $\Re$ mit r unbegrenzt wächst. Der Klammerausdruck verschwindet aber mit $\Re\xi$, $\Re\eta$, $\Re\zeta$, und daher ist $\operatorname{div}\mathfrak{q} = 0$.

Aus dem so erhaltenen besonderen Lösungssystem L, M, N der Gleichungen (4), für welches $\operatorname{div}\mathfrak{q} = 0$ ist, läßt sich aber jedes andere (3) L_1, M_1, N_1, für das $\operatorname{div}\mathfrak{q}$ einen gegebenen Wert hat, durch Bestimmung der Funktion ψ aus der Gleichung

$$\triangle\psi = \operatorname{div}\mathfrak{q}$$

nach Art. 30 herstellen. Denn kennt man ψ, so wird z. B.

$$\triangle L_1 = \triangle L + \triangle\frac{\partial\psi}{\partial x} = \triangle L + \frac{\partial}{\partial x}\operatorname{div}\mathfrak{q},$$

also

$$-2\xi = \triangle L = \triangle L_1 - \frac{\partial}{\partial x}\operatorname{div}\mathfrak{q} \text{ usw.},$$

so daß L_1 die Lösung von (4) ist. Bei der Bildung von u, v, w fällt jedoch die Funktion ψ überhaupt heraus. Daher liefern schon die Formeln (6) ein Lösungssystem. Man nennt den durch (2) definierten Vektor $\mathfrak{q}$ das *Vektorpotential* des Vektors $\mathfrak{v} = (u, v, w)$, im Gegensatze zu dem *skalaren Potential*, wie es Geschwindigkeits- oder Kraftpotentiale sind.

Nun kann man den folgenden (für die Kinematik der Flüssigkeiten wichtigen) Satz der Vektoranalysis beweisen:

Jeder Vektor läßt sich aus einem Potential- und einem Solenoidalvektor zusammensetzen. Oder in ausgeführter Form:

Sind u, v, w drei mit ihren Differentialquotienten im unendlichen Raume stetige, endliche und eindeutige Funktionen von x, y, z, die im Unendlichen die Bedingung erfüllen, daß (Art. 30) $\Re^2 u$, $\Re^3\frac{\partial u}{\partial x}, \cdots$

mit wachsendem $\mathfrak{R}$ usw. endliche Werte behalten, so lassen sich immer vier Funktionen ψ, L, M, N auf nur eine Weise so bestimmen, daß die Gleichungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \\ v &= \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \\ w &= \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, \end{aligned} \tag{8}$$

oder in Vektorbezeichnung

$$\mathfrak{v} = \operatorname{grad} \psi + \operatorname{rot} \mathfrak{q}. \tag{8a}$$

Dieser von Clebsch (Journ. f. Math. Bd. 61, S. 197) zuerst ausgesprochene Satz läßt sich beweisen wie folgt. Durch Differentiation der Gleichungen (8) bzw. nach x, y, z und Addition erhält man für ψ die Gleichung

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \psi = \triangle \psi. \tag{9}$$

Ferner ergeben sich für L, M, N Gleichungen von der Form (4), die nach dem Vorstehenden durch

$$\triangle \mathfrak{q} = -\operatorname{rot} \mathfrak{v} \tag{10}$$

mit der Bedingung

$$\operatorname{div} \mathfrak{q} = 0$$

ersetzbar sind. Dann sind aber die Funktionen (6a)

$$\mathfrak{q} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\operatorname{rot} \mathfrak{v}}{r} d\tau$$

und (11)

$$\psi = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\operatorname{div} \mathfrak{v}}{r} d\tau$$

die auf Grund der Annahme (5b) eindeutig bestimmten[1]) Lösungen der Differentialgleichungen (9), (10). Mit ihrer Hilfe lassen sich nach (8) *die Größen u, v, w für alle Stellen des Raumes bilden, wenn man die Verteilung der Größen rot* $\mathfrak{v}$ *und div* $\mathfrak{v}$ *im Raume kennt.*

1) Daß ein Vektor $\mathfrak{v}$, dessen Divergenz und dessen Rotation bekannt sind, und der im Unendlichen wie $1/\mathfrak{R}^2$ verschwindet, dadurch eindeutig bestimmt ist, beweist unabhängig von dessen Darstellung z. B. R. Gans, Einführung in die Vektoranalysis, Leipzig 1905, S. 44. Was das Verhalten von $\mathfrak{v}$ im Unendlichen angeht, so genügt nach O. Blumenthal (Math. Ann. Bd. 61, S. 235, 1905) für seine Darstellung bereits das Verschwinden von $\mathfrak{v}$ und seinen Differentialquotienten.

Bedeutet $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit der Teilchen einer inkompressiblen Flüssigkeit, die den unendlichen Raum erfüllt, so läßt sich dieses Ergebnis so deuten: Kennt man in einem gegebenen Augenblick

1. Die Verteilung der *Quellen und Senken* (div $\mathfrak{v}$),
2. Die Stellen, wo *wirbelnde Bewegung* stattfindet und die Komponenten ξ, η, ζ derselben, also alle Wirbelfäden (rot $\mathfrak{v}$),
3. *Ruht die Flüssigkeit im Unendlichen* (bleiben $\mathfrak{R}^2\mathfrak{v}$, $\mathfrak{R}^3\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial l}$ endlich bei wachsendem $\mathfrak{R}$),

so läßt sich mittels der Formeln (8) und (11) *allenthalben* die fortschreitende Bewegung $\mathfrak{v} = (u, v, w)$ bestimmen.

Durch die Verteilung von Wirbeln und Senken (Quellen) ist somit in einem gegebenen Zeitpunkt der Zustand der Flüssigkeit bestimmt; aus der Kenntnis von $\mathfrak{v}$ ergibt sich ferner der im nächsten Augenblick, und man könnte also, falls keine äußeren Kräfte wirken, durch fortgesetzte Konstruktion im Unendlichkleinen die Bewegung für einen endlichen Zeitabschnitt ermitteln.

Wir schließen noch eine allgemeine Bemerkung über die in diesem Artikel viel gebrauchte Operation $\Delta\varphi$ an. Weil (9)

$$\Delta\varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi$$

durch eine Aufeinanderfolge von zwei Vektoroperationen darstellbar ist, deren jede für sich eine von einem Koordinatensystem unabhängige Deutung zuläßt (Art. 27; Art. 29), so ist auch $\Delta\varphi$ eine von der Lage des rechtwinkligen Koordinatensystems unabhängige Größe, eine „Differential-Invariante" gegenüber orthogonaler Transformation. Wenn man also eine beliebige Drehung und Verschiebung des Koordinatensystems (etwa von X, Y, Z in X', Y', Z') vornimmt, bei welcher die Funktion $\varphi(x, y, z)$ etwa in $\varphi'(x', y', z')$ übergeht, so muß notwendig auch

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

in

$$\Delta\varphi' = \frac{\partial^2\varphi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2\varphi'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2\varphi'}{\partial z'^2}$$

übergehen.

32. Beispiele zur Flüssigkeitsbewegung mit ein- und mehrwertigem Geschwindigkeits-Potential.

1. Beispiel. Wir wenden zunächst den Greenschen Satz an auf die in Art. 29 erwähnte Strömung einer Flüssigkeit nach zwei festen Zentren a, b, c; a_1, b_1, c_1 mit dem Potential

$$\varphi = \frac{e}{r} + \frac{e_1}{r_1}, \tag{1}$$

wo

$$\begin{aligned} r^2 &= (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \\ r_1^2 &= (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2 \end{aligned} \tag{2}$$

ist. Wenn man diese zwei Zentren mit sehr kleinen Kugeln von den Halbmessern α, α_1, die wir α, α_1 nennen wollen, umgibt, so besteht im übrigen Raume **T** die Gleichung

$$\Delta\varphi = 0. \tag{3}$$

Auf das Innere dieses, nach innen von den Kugeln α, nach außen von einer Kugel mit unendlich großem Halbmesser begrenzten Raumes **T** wenden wir nun die Formel (11) des Art. 30 an, durch welche die gesamte kinetische Energie einer inkompressiblen Flüssigkeit, die den unendlichen Raum erfüllt, durch ein Integral dargestellt wird, das sich allein über die Oberfläche des Raumes, hier über die Kugelflächen α, α_1 erstreckt, die den Raum nach innen begrenzen, weil unsere Funktion φ im Unendlichen die Bedingungen (7) des Art. 30 erfüllt. Ist T die kinetische Energie der Flüssigkeit, so ist nach jener Formel (11):

$$T = \int \frac{\varrho}{2}(u^2 + v^2 + w^2)\,d\tau = -\frac{\varrho}{2}\int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\,d\sigma, \tag{4}$$

wo ϱ die Dichte ist. Auf der Kugeloberfläche α hat, weil der Radius eine sehr kleine Größe ist, φ nahezu den Wert

$$\varphi = \frac{e}{\alpha} + \frac{e_1}{R},$$

wo R der Abstand der Mittelpunkte der Kugeln

$$R^2 = (a-a_1)^2 + (b-b_1)^2 + (c-c_1)^2 \tag{5}$$

ist. Wir bilden nun den Ausdruck

$$\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}$$

für die Kugel α. Weil die nach dem Inneren von **T** gerichtete Normale die äußere der Kugel ist, so ist

$$dn = d\alpha,$$

ferner (nahezu)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{e}{\alpha^2} - \frac{e_1}{R^2}\frac{\partial r_1}{\partial n},$$

und, wenn wieder $d\omega$ das Oberflächenelement der Einheitskugel ist,

$$-\int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\,d\sigma = \int \left(\frac{e^2}{\alpha} + \frac{e e_1}{R}\right) d\omega + \int \left(\frac{e}{\alpha} + \frac{e_1}{R}\right) \frac{e_1}{R^2}\frac{\partial r_1}{\partial n}\,\alpha^2 d\omega.$$

Das letzte Integral rechts ist Null, weil für je zwei Elemente der Kugel α, die an entgegengesetzten Enden eines Durchmessers liegen, $\frac{\partial r_1}{\partial n}$ entgegengesetzt gleiche Werte hat. Daher wird schließlich für die Kugel α

$$-\int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = 4\pi\left(\frac{e^2}{\alpha} + \frac{e e_1}{R}\right). \tag{6}$$

Bildet man das entsprechende Integral für die Kugel α_1 und summiert, so kommt

$$T = 2\pi\varrho\left(\frac{e^2}{\alpha} + \frac{2 e e_1}{R} + \frac{e_1^2}{\alpha_1}\right). \tag{7}$$

Wie wir die räumlich verteilte Divergenz auf eine Senke zusammengezogen haben (Art. 27), so kann man sich die punktförmige Senke von der Saugkraft e wieder durch einen das Innere der Kugel α stetig erfüllenden Senkenraum, welcher die Saugkraft ε pro Volumeinheit hat, ersetzt denken, wo dann

$$e = \tfrac{4}{3}\alpha^3\pi \cdot \varepsilon$$

ist. Ähnlich für e_1. Der Gausssche Satz, auf die Oberfläche der Kugel α angewandt, wenn die Einströmung in sie als gleichförmig verteilt und normal erfolgend angesehen wird, ergibt

$$\int \triangle\, \varphi\, d\tau = -4\pi \int \varepsilon\, d\tau = -4\pi e = -\int v\, d\sigma = -v \cdot 4\pi\alpha^2,$$

woraus sich die Einströmungsgeschwindigkeit $v = |\mathfrak{v}|$ bestimmt:

$$v = \frac{e}{\alpha^2},$$

was sich auch aus (nahezu) $\varphi = e/\alpha$ ergeben hätte. Die pro Sekunde in die Senke α einströmende Flüssigkeitsmenge ist dann

$$4\alpha^2\pi\varrho v = 4\pi e\varrho = \frac{16}{3}\pi^2\varepsilon\varrho \cdot \alpha^3.$$

Daher ist die kinetische Energie der in der Sekunde in α verschwindenden Flüssigkeit nahezu

$$\tfrac{1}{2}v^2 \cdot 4\pi e\varrho = 2\pi\varrho \cdot \frac{e^3}{\alpha^4} = \left(\frac{4\pi\varepsilon}{3}\right)^3 \cdot 2\pi\varrho \cdot \alpha^5,$$

eine mit der 5. Potenz des Kugelhalbmessers α und der 3. Potenz der Saugkraft ε auf die Volumeinheit der Kugel proportionale Größe.

2. Beispiel. Der Greensche Satz in der bisherigen Verwendung setzt die Eindeutigkeit des Geschwindigkeitspotentials φ voraus. Daß und in welcher Weise er benutzt werden kann, wenn die Funktion φ in der Formel (11) des Art. 30 eine mehr- oder unend-

lich vieldeutige Größe ist, wollen wir zunächst an einem Beispiel zeigen.

In Art. 26 haben wir eine stationäre Flüssigkeitsbewegung im Inneren eines durch zwei kreisförmige Böden geschlossenen geraden Zylinders betrachtet, die durch die Geschwindigkeitskomponenten

$$u = -q\frac{y}{r}; \quad v = q\frac{x}{r}; \quad w = 0$$

gegeben war, wo q eine Funktion des Abstandes

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ist. Man kann q so zu bestimmen verlangen, daß die Bewegung ein Potential hat, daß also

$$d\varphi = u dx + v dy = \frac{q}{r}(x dy - y dx)$$

ein vollständiges Differential ist. Eine Lösung ist:

$$q = \frac{\varkappa}{r},$$

wo $\varkappa$ eine Konstante ist. Man erhält so, wie man leicht sieht:

$$\varphi = \varkappa \operatorname{arctg}\frac{y}{x}. \tag{8}$$

In der Achse des Zylinders wird φ unbestimmt. Wir nehmen diese von der Bewegung aus, indem wir sie durch einen Kreiszylinder mit dem sehr kleinen Radius α einschließen. Dann ist im Inneren des durch die äußere Wandung und den Zylinder α begrenzten Hohlzylinders die Geschwindigkeit $|\mathfrak{v}|$ eindeutig bestimmt. Aber φ ist eine unendlich vieldeutige Funktion des Argumentes y/x. Einem bestimmten Werte desselben entsprechen, wenn φ *irgend* eine Lösung der Gleichung (8) ist, sämtliche Größen

$$\varphi + 2n\pi \cdot \varkappa,$$

wo n eine positive oder negative ganze Zahl ist. Diese Vieldeutigkeit rührt von der Gestalt des Raumes her, für den φ definiert ist. Er ist kein „einfach zusammenhängender Raum" im Sinne des Art. 29, worauf dort schon in der Fußnote hingewiesen worden ist. Deshalb hängt der Wert des Integrals $\int d\varphi$, etwa zwischen den Endpunkten x_0, y_0, z_0 und x_1, y_1, z_1 genommen, nicht bloß von den Endpunkten, sondern auch von dem Wege ab, der die beiden verbindet.

Um nun doch den Greenschen Satz nutzbar zu machen, verwandelt man den zweifach zusammenhängenden Raum $\mathbf{T}$ in einen einfach zusammenhängenden **T′** dadurch, daß man in dem Hohlzylinder eine Sperrfläche, einen „Querschnitt" einschaltet, der (s. die Fußnote zu Art. 29) aus einem Rechteck (in einer Ebene durch die Achse) besteht, das bei jeder Umkreisung der Achse innerhalb **T** passiert werden muß. Diesen Querschnitt hat man sich doppelt, als Abschlußfläche nach beiden Richtungen hin zu denken. In dem so zerschnittenen Zylinderraum **T′** ist nun wieder die Funktion φ eindeutig; an den beiden Seiten der Sperrfläche aber hat φ, wie wir sehen werden, einen verschiedenen Wert. Um auf die so definierte Funktion φ den Greenschen Satz anwenden zu können, hat man für **T′** zu den Grenzflächen von **T** die beiden Seiten des Querschnitts hinzuzunehmen. Jede dieser Flächen liefert zu dem Ausdruck für die kinetische Energie

$$T = -\frac{\varrho}{2}\int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma$$

einen Beitrag. Setzt man

$$x = r\cos\vartheta,\ y = r\sin\vartheta$$

also (8)
$$\varphi = \varkappa \cdot \vartheta,$$

so ist für die Zylindermäntel

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \pm \frac{\partial(\vartheta\varkappa)}{\partial r} = 0,$$

der Beitrag zu T also Null. Aus dem gleichen Grund ist der von den Bodenflächen gelieferte Beitrag Null. Zu beiden Seiten des Querschnitts hat, wenn man ihn in die Ebene $\vartheta = 0$ verlegt,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{r\partial \vartheta} = \pm \frac{\varkappa}{r}$$

denselben Wert, aber mit entgegengesetztem Vorzeichen; φ dagegen ist zu beiden Seiten um die Größe

$$\varkappa(\vartheta + 2\pi) - \varkappa\vartheta = 2\varkappa\pi$$

verschieden. Hat der Zylinder die Höhe h, ist also ein Flächenelement des Querschnitts

$$d\sigma = h\,dr,$$

so ist der von diesem herrührende Beitrag

$$T = -\frac{\varrho}{2} 2\varkappa\pi \int \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma$$

$$= \frac{\varrho}{2} 2\varkappa\pi h \int \frac{\varkappa}{r} dr = \varrho\pi h\varkappa^2 \log\frac{a}{\alpha},$$

wenn, wie oben, α der Radius des inneren, a der des äußeren Zylindermantels ist.

Man berechnet übrigens im vorliegenden Falle die lebendige Kraft T kürzer direkt, indem man in

$$T = \frac{\varrho}{2}\int (u^2 + v^2)\,d\tau$$

die Werte für u und v einführt und über den Inhalt des Hohlzylinders integriert.

Weil
$$\log(x + iy) = \log\sqrt{x^2 + y^2} + i\cdot\operatorname{arctg}\frac{y}{x},$$
$$i = \sqrt{-1}$$

ist, so ordnet sich nach bekannten Sätzen der Funktionentheorie der Potentialbewegung

$$\varphi = \varkappa \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

die andere

$$\varphi = \varkappa \log\sqrt{x^2 + y^2}$$

in der Weise zu, daß (in der XY-Ebene) die Strömungskurven der einen Niveaulinien der anderen sind. Für die eine Bewegung ist die Z-Achse Wirbelachse, für die andere eine Linie von Senken (oder Quellpunkten). Die kinetische Energie hat in beiden Fällen den gleichen Wert.

Das hier angewandte Verfahren läßt sich verallgemeinern.

Ist *in einem mehrfach zusammenhängenden Raume* **T** *eine Potentialfunktion* φ *gegeben,* für die, weil sie mehrdeutig ist, der Greensche Satz nicht unmittelbar verwendbar ist, so verwandelt man sie dadurch in eine eindeutige, daß man den Raum **T** durch Querschnitte (Sperrflächen) zu einem einfach zusammenhängenden **T**′ macht, wobei dann jeder dieser Querschnitte zur Begrenzung von **T**′ zweimal heranzuziehen ist. *Für zwei Punkte von* **T**′, *die auf den zwei Seiten desselben Querschnitts einander gegenüberliegen, ist dann der Potentialwert* φ *um eine Größe verschieden, die längs des ganzen Querschnitts denselben Wert hat.*

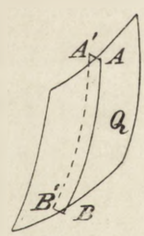

Fig. 20.

Sind nämlich (Figur 20) A, A' und B, B' zwei solcher Punktepaare diesseits und jenseits des Querschnitts Q, so ist, auch wenn φ in A und A' (bzw. B und B') verschiedene Werte hat, der Wert des Integrals:

$$\int_{A'}^{B'} d\varphi = \int_{A}^{B} d\varphi$$

auf dem Wege $A'B'$ gleich dem auf dem Wege AB genommen, weil die Zuwächse $d\varphi$ längs unendlich benachbarter Linienelemente gleiche Werte haben. Daher ist auch

$$\varphi(B') - \varphi(B) = \varphi(A') - \varphi(A), \ w \cdot z \cdot b \cdot w.$$

Indem man die so konstruierten Querschnitte zu der Begrenzung von T hinzunimmt, treten zu den über die Oberfläche Σ erstreckten Integralen solche von der Form

$$\frac{\varrho}{2} k \int \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma$$

hinzu, wo k jene Potentialdifferenz ist. Hierbei bedeutet das Integral das Volum der durch den Querschnitt in der Sekunde strömenden Menge, weil $\partial\varphi/\partial n$ die Geschwindigkeit in Richtung der Normalen ist.

33. Fortsetzung. Zwei Wirbelringe in einer Flüssigkeit.

Ein mehrwertiges Geschwindigkeitspotential tritt allemal dann auf, wenn eine Flüssigkeitsmasse von Wirbeln durchzogen ist. Denn nach Art. 27 a. E. kehren Wirbellinien entweder in sich selbst zurück oder endigen an der Oberfläche der Flüssigkeit. Der von ihnen freigelassene Raum ist also nicht mehr einfach zusammenhängend.

In einer inkompressiblen allenthalben unendlich ausgedehnten Flüssigkeit, die im Unendlichen ruht (Art. 30 a. E.), mögen zwei Wirbelfäden von sehr kleinem Querschnitt verlaufen, die, ohne sich zu verschlingen, geschlossen sind. Wir wollen die Verbindungslinie der Schwerpunkte der Querschnitte Wirbelachse nennen. Umgibt man jeden dieser Fäden mit einer röhrenförmigen Fläche von ebenfalls sehr kleinem Querschnitt und schließt ihn so vom übrigen Raum aus, so ist dieser nun wirbelfreie unendliche Raum T dreifach zusammenhängend. Den einen „Querschnitt" bilde eine Fläche, die durch die eine der in sich zurücklaufenden Wirbelachsen geht. Man begrenze sie durch die Wandung der Röhrenfläche (s. d. Figur S. 122). Die andere Röhre begrenze ebenso den anderen Querschnitt. Diese Sperrflächen, doppelt gerechnet zur Oberfläche von T hinzugezogen, begrenzen nunmehr einen einfach zusammenhängenden Raum T'. Für jeden Wirbelfaden ist dann nach Art. 27 a. E. das Produkt aus Wirbelgeschwindigkeit in Querschnitt, die „Wirbelstärke", längs des Wirbels eine konstante Größe, die wir mit $2\varkappa\pi$ und $2\varkappa_1\pi$ bezeichnen wollen. Durch sie und die Gestalt der Wirbelfäden ist aber der Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$ — immer für den gegebenen Augenblick — in der ganzen Flüssigkeitsmasse bestimmt. Denn nach Art. 31 hat man

$$\mathfrak{v} = \operatorname{rot} \mathfrak{q}, \tag{1}$$

wo das Vektorpotential $\mathfrak{q}$ mit den Komponenten L, M, N sich aus:

$$L = \frac{1}{2\pi}\int\frac{\xi\,d\tau}{r}; \quad M = \frac{1}{2\pi}\int\frac{\eta\,d\tau}{r}; \quad N = \frac{1}{2\pi}\int\frac{\zeta\,d\tau}{r} \tag{2}$$

berechnet — die Integration über den Inhalt der Wirbelfäden erstreckt.

Andererseits hat aber $\mathfrak{v}$ in dem wirbelfreien Raume T' auch ein Potential φ, es ist also:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \\ v &= \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \\ w &= \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}. \end{aligned} \tag{3}$$

Daher ist die aus dem GREENschen Satz folgende Beziehung (11) des Art. 30 anwendbar, wonach die kinetische Energie durch

$$T = -\frac{\varrho}{2}\int\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma, \tag{4}$$

das Integral rechts über die ganze Begrenzung von T' erstreckt, darstellbar ist. Diese besteht 1. aus der unendlich fernen Grenzfläche, 2. aus den Wandungen der Röhrenflächen, 3. aus den Querschnitten Q und Q_1, je doppelt gerechnet.

Der Beitrag, den 1. gibt, ist gleich Null, weil die Flüssigkeit im Unendlichen ruht. Auch das längs der Röhrenflächen erstreckte Integral

$$J = -\int\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma \tag{5}$$

gibt Null. Denn ist φ_0 bzw. φ_0' der größte absolute Betrag, den längs der Wandung der Röhrenflächen die Größen φ, $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ besitzen, so bleibt der Wert von J unterhalb

$$J_0 = -\varphi_0\varphi_0'\int d\sigma = -\varphi_0\varphi_0'\Sigma,$$

wo Σ der Inhalt der Röhrenoberflächen ist. Diesen kann man aber durch genügend kleinen Querschnitt der Wirbelfäden so klein machen, daß der Betrag J_0 nicht in Betracht kommt.

Was den Beitrag 3. angeht, den zunächst die Sperrfläche Q gibt, so hat an irgend zwei entsprechenden Stellen A, A' zu beiden Seiten derselben die Größe $\partial\varphi/\partial n$ gleichen, aber dem Vorzeichen nach entgegengesetzten Wert. Sind die Werte von φ in A und A' $\varphi(A)$ und $\varphi(A')$, so ist (s. vor. Art. a. E.) das Integral

$$J = -\int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = -[\varphi(A) - \varphi(A')] \int \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma \tag{6}$$

nun bloß noch über die eine Seite von Q zu erstrecken. Die vor dem Integral stehende Differenz läßt sich darstellen durch das Linienintegral

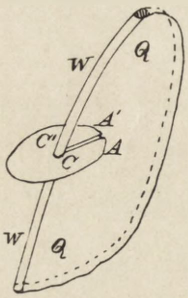

Fig. 21.

$$\int_A^{A'} d\varphi = \int_A^{A'} (u\,dx + v\,dy + w\,dz), \tag{7}$$

längs einer Kurve erstreckt, welche den Wirbel, zu dem Q gehört, einmal umkreist. Man kann (Fig. 21) diesen Weg von A nach A' ersetzen durch eine enge Umkreisung des Wirbels W an der Stelle CC' und zwei sich gegenseitig aufhebende geradlinig geführte Integrale längs AC und $C'A'$. Das Integral, welches den Wirbel an der Stelle C umkreist, läßt sich aber in ein Flächenintegral, genommen über den Querschnitt des Wirbelfadens in C, überführen. Es ist nämlich (Art. 28) nach dem STOKESschen Satze

$$\begin{aligned} \int_A^{A'} d\varphi = \int_C^{C'} d\varphi &= \int_C^{C'} (u\,dx + v\,dy + w\,dz) \\ &= 2\int [\xi \cos(n, x) + \eta \cos(n, y) + \zeta \cos(n, z)]\, d\sigma \\ &= 2\int \omega\, d\sigma = 2\omega q = 4\pi\varkappa, \end{aligned} \tag{7a}$$

wenn ω der Betrag der Wirbelgeschwindigkeit an der Stelle C, also $\omega = |\mathfrak{w}|$, und $\mathfrak{w} = (\xi, \eta, \zeta)$ ist, q der Wirbelquerschnitt daselbst, $2\pi\varkappa$ die nach Art. 27 längs des Wirbels konstante „Wirbelstärke". Die Potentialdifferenz zu beiden Seiten der Sperrfläche oder die „Zirkulation", wie die englischen Schriftsteller sagen[1]), ist also gleich der doppelten Wirbelstärke. Andererseits ist

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma &= \int \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos(n, y) + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos(n, z)\right] d\sigma \\ &= \int [u \cos(n, x) + v \cos(n, y) + w \cos(n, z)]\, d\sigma \\ &= \int \left[\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) \cos(n, x) + \cdots\right] d\sigma \\ &= \int (L\,dx + M\,dy + N\,dz) \end{aligned} \tag{8}$$

1) S. z. B. BASSET, Hydrodynamics, Cambridge 1888, I, S. 70. — Von H. LAMB (Hydrodynamik, deutsch von FRIEDEL, Leipzig 1907) wird die Intensität doppelt so groß wie im Text angenommen.

wiederum nach dem STOKESschen Satze, wobei das Linienintegral längs der Begrenzung der Sperrfläche Q, also (nahezu) längs der Achse des Wirbels zu erstrecken ist.

Die Komponenten L, M, N des Vektorpotentials berechnen sich aber aus

$$L = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\xi\, d\tau}{r} \text{ usw.,} \tag{9}$$

wo die Integrale über die von den zwei Röhrenflächen umschlossenen wirbelnden Massen zu erstrecken sind. Sind ds, ds_1 die Linienelemente der Wirbelachsen der Wirbelfäden Q, Q_1; q, q_1 ihre Querschnitte an diesen Stellen, ω, ω_1 die Winkelgeschwindigkeiten, so ist, weil z. B.

$$\xi = \omega \frac{dx}{ds}$$

ist,

$$L = \frac{1}{2\pi}\int \omega \frac{dx}{ds}\frac{q\, ds}{r} + \frac{1}{2\pi}\int \omega_1 \frac{dx_1}{ds_1}\frac{q_1\, ds_1}{r} = \varkappa \int \frac{dx}{r} + \varkappa_1 \int \frac{dx_1}{r}. \tag{10}$$

Mit den entsprechend gebildeten Werten für M, N ergibt sich für das längs der Wirbelachse des ersten Wirbels erstreckte Linienintegral

$$\begin{aligned}
&\int (L dx + M dy + N dz) \\
&= \varkappa \int\int \frac{dx\,dx' + dy\,dy' + dz\,dz'}{r} + \varkappa_1 \int\int \frac{dx_1\,dx + dy_1\,dy + dz_1\,dz}{r} \\
&= \varkappa \int\int \frac{ds\,ds' \cos(ds, ds')}{r} + \varkappa_1 \int\int \frac{ds_1\,ds \cos(ds_1, ds)}{r}
\end{aligned} \tag{11}$$

wo der Nenner r die Entfernung der im Zähler auftretenden Linienelemente ds, ds' einer und derselben Wirbelachse, ds_1, ds verschiedener Wirbelachsen bedeuten, und das Doppelintegral sich auf jedes Elementenpaar im Zähler erstreckt. Setzt man nun noch

$$\begin{aligned}
A &= \int\int \frac{ds\,ds' \cos(ds, ds')}{r}; \quad B = \int\int \frac{ds_1\,ds \cos(ds_1, ds)}{r}; \\
C &= \int\int \frac{ds_1\,ds_1' \cos(ds_1, ds_1')}{r}.
\end{aligned} \tag{12}$$

so erhält man für die kinetische Energie der Flüssigkeit, in der sich die zwei Wirbelringe befinden, den Gesamtwert

$$T = 2\pi\varrho(\varkappa^2 A + 2\varkappa\varkappa_1 B + \varkappa_1^2 C), \tag{13}$$

ausgedrückt durch die Wirbelstärken $\varkappa$, $\varkappa_1$, die „Potentiale“ A, C der Wirbel auf sich selbst und das B des einen auf den anderen.

Weil der Abstand r zweier Elemente desselben Wirbels unendlich klein werden kann, so enthalten die Integrale A, C unendlich große Beiträge. Dieser Umstand rührt von der Annahme unendlich dünner Wirbelfäden her, die wir machten, um die Querschnittbegrenzung mit der Wirbelachse zusammenfallen lassen zu können. Im Falle endlicher, wenn auch kleiner Querschnitte der Wirbel werden A und C ebensowenig unendlich wie die Potentiale von Massen in bezug auf einen Punkt im Inneren derselben. Unsere Annahmen stellen eben nur eine Annäherung dar; das Ergebnis deutet jedoch darauf hin, daß in jedem Falle die Größen A, C erheblich größer sein werden als B.

In dem Ausdruck (13) für die kinetische Energie sind die Größen A, B, C rein geometrischer Natur; sie hängen nur von der Gestalt und Lage der die Wirbel umschließenden Röhrenflächen ab. Durch die Röhrenflächen selbst findet, wie wir oben gesehen haben, kein Austausch von Energie statt. Da nun die kinetische Energie der sonst ungestörten Flüssigkeitsbewegung in der Zeit sich nicht ändert, und da, wie wir sogleich sehen werden, die Wirbelstärken $\varkappa, \varkappa_1$ auch in der *Zeit* unveränderliche Größen sind, so kann man von der Wirbelbewegung in den Röhren ganz absehen, wenn es sich um die Bewegung der Röhren in der Flüssigkeit handelt, und diese auf Grund des Ausdrucks T (13) und der Lagrangeschen Gleichungen für sich behandeln, indem man z. B. statt der Röhren starre Ringe annimmt, die sich reibungslos bewegen. Wir kommen darauf zurück.

Daß nun die im Art. 27 a. E. eingeführten Wirbelstärken einen auch in der Zeit unveränderlichen Wert haben, sieht man so ein: Das Linienintegral

$$\int_{\bullet}^{\bullet}(udx + vdy + wdz) = \int_{\bullet}^{\bullet} d\varphi \tag{14}$$

werde zur Zeit t über einen Weg $A \ldots B$ geführt, der irgendwelche innerhalb des einfach zusammenhängenden Raumes T' gelegene Elemente der Flüssigkeit miteinander verbindet. Nach Ablauf des Zeitelementes dt haben diese Elemente ihre Lage geändert; das Linienintegral, über dieselben geführt, hat zugenommen um

$$dt\frac{d}{dt}\int d\varphi = dt\int\frac{d}{dt}(d\varphi) = dt\int d\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)\cdot$$

Nun ist nach Art. 25 a. E. für irgendeine Stelle der inkompressiblen Flüssigkeit, wenn keine Volumkräfte wirken,

$$d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = -d\left|\frac{\mathfrak{v}^2}{2}\right| - \frac{d\lambda}{\varrho},$$

wo $|\mathfrak{v}|$ die Geschwindigkeit und λ der Druck ist. Daher hat man

$$d\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = d\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}u + \frac{\partial\varphi}{\partial y}v + \frac{\partial\varphi}{\partial z}w\right] = d\left|\frac{\mathfrak{v}^2}{2}\right| - \frac{d\lambda}{\varrho}$$

wegen $u = \partial\varphi/\partial x$ usw. Weil aber die Größe

$$\int_A^B \left[d\left|\frac{\mathfrak{v}^2}{2}\right| - \frac{d\lambda}{\varrho}\right] = \left[\frac{u^2+v^2+w^2}{2} - \frac{\lambda}{\varrho}\right]_A^B$$

als eindeutige Funktion des Ortes in T' nur von den Grenzpunkten A, B abhängen kann, so ist, über eine *geschlossene* von materiellen Punkten gebildete Kurve ausgedehnt, der Zuwachs zu dem Linienintegral (1) für jedes Zeitelement

$$\int d\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = 0.$$

Hat also das Linienintegral $\int d\varphi$, über eine solche Kurve genommen, in irgendeinem Zeitpunkt einen bestimmten Wert k, so behält es diesen Wert für alle Zeit. Insbesondere *hat die Intensität* (Art. 27) eines Wirbelfadens, die (nach dem Obigen) durch ein Linienintegral über einen geschlossenen, den Wirbelfaden einmal umkreisenden Weg darstellbar ist, nicht nur längs des Wirbelfadens, sondern auch *einen für alle Zeit konstanten Wert.*

34. Zwei Beispiele zur zyklischen Bewegung flüssiger Massen[1]).

Ebenso wie sich die Begriffe des „freien Systemes" und der geometrischen Bedingungsgleichung auf raumerfüllende Massen übertragen lassen, kann man auch zyklische Flüssigkeitsbewegungen im Sinne des Art. 14 definieren.

„Zyklische Koordinaten" treten in dem Ausdruck für die (kinetische) Energie nur in der Gestalt von Differentialquotienten nach der Zeit, als „zyklische Geschwindigkeiten", nicht aber explizit auf; und „zyklisch" heißen solche Systeme, für welche die zyklischen Geschwindigkeiten gegenüber den nichtzyklischen (von „langsam veränderlichen Parametern") so groß sind, daß die Energie T in

1) Eine andere Anwendung des Begriffes der zyklischen Bewegung auf Flüssigkeiten, die sich dabei jedoch wie starre Massen bewegen, gibt Volterra (Annali di mat. (2) 23, 1895, vgl. auch Wangerin, Univ. Schrift, Halle 1889), indem er den Einfluß der Meeresströmungen auf die Umdrehung der Erde untersucht.

erster Annäherung als Funktion allein der ersteren angesehen werden kann (Art. 14).

Zu den zyklischen, und zwar den dizyklischen, adiabatischen Systemen gehören hiernach die folgenden beiden:

1. Die in Art. 32 behandelte Flüssigkeitsbewegung, die in einem Einströmen in zwei Raumpunkte (Senken) aus dem mit Flüssigkeit gefüllten unendlichen Raum besteht. Denn *die Größen* e, e_1, welche die Saugkraft der Senken darstellen, lassen sich als *Geschwindigkeiten* auffassen (etwa mit der die ausfließende Masse ein Gefäß füllt), die sich auch mit der Zeit ändern können, und die zugehörigen Koordinaten treten in dem Ausdruck T für die kinetische Energie der bewegten Masse nicht auf:

$$T = 2\pi\varrho\left(\frac{e^2}{\alpha} + \frac{2ee_1}{R} + \frac{e_1^2}{\alpha_1}\right),$$

wo ϱ die Dichte, α, α_1 die Radien der die Senken umgebenden kleinen Kugeln sind.

2. Die in Art. 33 behandelte Bewegung, die in dem Umkreisen der Flüssigkeit um zwei in sich geschlossene Ringe (oder Wirbelfäden) besteht. Die kinetische Energie war

$$T = 2\pi\varrho(A\varkappa^2 + 2B\varkappa\varkappa_1 + C\varkappa_1^2), \tag{1}$$

wo die Größen $\varkappa$, $\varkappa_1$ im Falle der Wirbelbewegung die Wirbelstärken darstellen.

Die Größen $\varkappa$, $\varkappa_1$ als Differentialquotienten zyklischer Koordinaten zu deuten, geht nicht an, weil sie (s. vor. Art. a. E.) in der Zeit konstant bleiben, während doch die Bewegung sicher keine isozyklische, sondern eine adiabatische ist (s. Art. 14). Dagegen sind veränderlich die durch die Sperrflächen in der Zeiteinheit fließenden Flüssigkeitsmengen, die sich durch Auswertung des Integrals

$$\lambda = \int \frac{\partial\varphi}{\partial n} d\sigma, \tag{2}$$

(Art. 32 a. E.) für jeden der beiden Querschnitte bestimmen lassen. Wir fanden oben (Art. 33 (11)), daß diese Integrale die Werte

$$\begin{aligned} \lambda &= \varkappa A + \varkappa_1 B \\ \lambda_1 &= \varkappa B + \varkappa_1 C \end{aligned} \tag{3}$$

für bzw. die Querschnitte Q und Q_1 haben. — In diesen Größen dargestellt lautet der Ausdruck für die kinetische Energie

$$T = \frac{2\pi\varrho}{AC - B^2}(C\lambda^2 - 2B\lambda\lambda_1 + A\lambda_1^2). \tag{4}$$

Man kann sich nun im ersten Fall die unendlich kleinen Kugelflächen α, α_1, im zweiten Fall die unendlich dünnen Röhren mit anderer Materie ausgefüllt denken und jeweils die Bewegung des aus diesen Massen und der Flüssigkeit bestehenden Systems untersuchen.

Wir führen dies für die beiden Fälle aus.

35. Verborgene zyklische Systeme[1]).

Das im vorigen Artikel beschriebene zyklische System einer Flüssigkeit, die in zwei von den sehr kleinen Kugeln α, α_1 umschlossene Senken einströmt, wollen wir als den Sinnen *verborgen* annehmen, während die Kugeln wahrnehmbar sein mögen. Dann wird sich die Wirkung des Systems nur in dem Verhalten der Kugeln bemerklich machen. Der von den Kugeln eingenommene Raum sei mit den Massen m, m_1 ausgefüllt. Das System dieser Massen, zusammen mit der verborgenen Flüssigkeit, sei ein „freies System“ im Sinne des Art. 8, d. h. die Bewegung erfolge so, daß 1. die gesamte Energie des Systems sich nicht ändert; 2. daß das System die geradeste Bahn einschlägt. Sind dann a, b, c; a_1, b_1, c_1 die Koordinaten der Kugelmittelpunkte zur Zeit t; $\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}, \cdots$ die Komponenten ihrer Geschwindigkeiten, ist R ihr Abstand, also

$$R^2 = (a-a_1)^2 + (b-b_1)^2 + (c-c_1)^2,$$

so ist die kinetische Energie der Kugeln:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{a}^2 + \dot{b}^2 + \dot{c}^2) + \frac{m_1}{2}(\dot{a}_1^2 + \dot{b}_1^2 + \dot{c}_1^2). \tag{5}$$

Die kinetische Energie $\mathfrak{T}$ der zyklischen Flüssigkeitsbewegung wurde (Art. 32) gleich

$$\mathfrak{T} = 2\pi\varrho\left(\frac{e^2}{\alpha} + \frac{2ee_1}{R} + \frac{e_1^2}{\alpha_1}\right) \tag{6}$$

gefunden. Nun ist die Energie des ganzen Systems

$$\mathsf{T} = T + \mathfrak{T} \tag{7}$$

eine konstante Größe. Die LAGRANGEschen Bewegungsgleichungen lauten (Art. 14 (5), (6)):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{a}} = \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial a}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{a}_1} = \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial a_1} \tag{8}$$

usw. usw.

1) Die folgenden beiden Beispiele zu HERTZ' Mechanik habe ich seit 1901 bzw. 1903 in meinen Vorlesungen vorgetragen, und das erste im 58. Bde. der Math. Annalen 1904 veröffentlicht. Daß beide bereits H. POINCARÉ, freilich nur andeutungsweise, in dem Anhange „À propos de la théorie de Larmor“ zu der 2. Aufl. seines Werkes Électricité et optique, 1901, p. 623 ff. herangezogen hat, habe ich erst kürzlich bemerkt.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial e} = 0$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial e_1} = 0. \tag{8a}$$

Aus den beiden letzten folgt zunächst

$$\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial e} = 4\pi\varrho\left(\frac{e}{\alpha} + \frac{e_1}{R}\right) = \mathfrak{q}$$
$$\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial e_1} = 4\pi\varrho\left(\frac{e}{R} + \frac{e_1}{\alpha_1}\right) = \mathfrak{q}_1, \tag{9}$$

wo $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}_1$ Konstante sind. Aus der Unveränderlichkeit der Impulse (Momente) $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}_1$, die den adiabatischen Charakter der Bewegung ausmacht (Art. 14), folgt die Veränderlichkeit der Einflußgeschwindigkeiten in die Senken während der Veränderung des gegenseitigen Abstandes R. Löst man die Gleichungen (9) nach e und e_1 auf, so ergibt sich

$$e = \frac{\alpha\alpha_1}{4\pi\varrho}\left(\frac{\mathfrak{q}}{\alpha_1} - \frac{\mathfrak{q}_1}{R}\right)$$
$$e_1 = \frac{\alpha\alpha_1}{4\pi\varrho}\left(-\frac{\mathfrak{q}}{R} + \frac{\mathfrak{q}_1}{\alpha}\right), \tag{9a}$$

wo wegen der Kleinheit der Größen α, α_1 der Nenner $\left(1 - \frac{\alpha\alpha_1}{R^2}\right)$ durch 1 ersetzt worden ist. Nun ist aber $\mathfrak{T}$ als homogene quadratische Funktion der e in der Form darstellbar

$$\mathfrak{T} = \tfrac{1}{2}(e\mathfrak{q} + e_1\mathfrak{q}_1).$$

Daher wird, wenn man $\mathfrak{T}$ in den $\mathfrak{q}$ allein ausdrückt:

$$\mathfrak{T}(e, e_1) = \mathfrak{T}_1(\mathfrak{q}, \mathfrak{q}_1) = \frac{\alpha\alpha_1}{8\pi\varrho}\left(\frac{\mathfrak{q}^2}{\alpha_1} - \frac{2\mathfrak{q}\mathfrak{q}_1}{R} + \frac{\mathfrak{q}_1^2}{\alpha}\right),$$

oder

$$\mathfrak{T}_1 = h - \frac{\alpha\mathfrak{q}\cdot\alpha_1\mathfrak{q}_1}{4\pi\varrho}\cdot\frac{1}{R},$$

wo der Index an $\mathfrak{T}_1$ bedeuten soll, daß $\mathfrak{T}$ statt in den Geschwindigkeiten e in den Impulsen $\mathfrak{q}$ geschrieben ist, und die Konstante

$$h = \frac{1}{4\pi\varrho}(\alpha\mathfrak{q}^2 + \alpha_1\mathfrak{q}_1^2)$$

einen erheblich größeren Wert hat als (bei endlichen Werten von R) das veränderliche Glied in $\mathfrak{T}_1$.

Man kann nun wieder, wie in Art. 14, die negative kinetische Energie $\mathfrak{T}$ des verborgenen flüssigen Mediums als potentielle Energie der sichtbaren Massen, also als Kräftefunktion U deuten:

$$U = -\mathfrak{T}_1 = \frac{\alpha\mathfrak{q}\cdot\alpha_1\mathfrak{q}_1}{4\pi\varrho}\cdot\frac{1}{R} - h.$$

Wenn man dann noch weiter, einer Andeutung von RIEMANN (ges. Werke, hrsgeg. v. WEBER, S. 503) folgend, U mit dem Potential der Schwerkraft identifiziert, indem man, unter Verwendung einer unbestimmten Größe σ, setzt

$$m = \alpha \mathfrak{q} \sigma; \quad m_1 = \alpha_1 \mathfrak{q}_1 \sigma$$

$$k = \frac{1}{4\pi\varrho\sigma^2},$$

wo k die Gravitationskonstante ist, so gehen (Art. 14 (7a)) die Gleichungen (8) über in die bekannten Gleichungen für zwei sich nach dem Gravitationsgesetz anziehende Massen

$$m\ddot{a} = \frac{\partial U}{\partial a}, \quad m_1 \ddot{a}_1 = \frac{\partial U}{\partial a_1}$$

usw. usw.,

wo

$$U = \frac{m m_1 k}{R} - h$$

das bekannte Potential der Gravitation ist. Auf diese Weise lassen sich die Erscheinungen, die man an zwei sich anziehenden Massenpunkten (z. B. einem Doppelstern) beobachtet, durch die Wirkung von zwei Senken nachbilden.

Man könnte an ihrer Stelle auch zwei Quellen verwenden. Dann wären gleichzeitig die Vorzeichen von e und e_1, von $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}_1$ und σ zu ändern, aber die in diesen Größen homogenen quadratischen Ausdrücke $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}_1$, U blieben ebenso wie m, m_1, k ungeändert. Würde man nun zwei sich überdeckende Flüssigkeitssysteme annehmen, die sich unabhängig voneinander bewegen, und für die nur die sichtbaren Massen (die Kugeln α, α_1) dieselben, und zwar für das eine Senken, für das andere Quellen wären, so würde die Wirkung der beiden sich nicht aufheben, sondern addieren.[1])

1) Dieses Doppelsystem ist einem Einwand nicht unterworfen, den in einem Brief an den Verfasser Herr EHRENFEST gegenüber dem Einzelsystem, wie es der Verf. in Math. Ann. Bd 58 angegeben hatte, erhoben hat, daß nämlich das System durch Ausströmen an Masse einbüße. In Art. 32 wurde dieser Verlust zu $4\pi e\varrho$, bzw. $4\pi e_1 \varrho$ in der Sekunde berechnet. In dem Doppelsystem erfolgt durch die Massenpunkte m, m_1 hindurch bloß ein Übertrag von Masse, die mit kinetischer Energie geladen ist, aus einem Raum in den andern, wobei den Massenpunkten die Rolle von Verzweigungsstellen, in denen die zwei Räume in etwa einem 4 dimensionalen Raume zusammenhängen, zufällt.

Übrigens ist auch im Falle des Einzelsystems der Massen- und Energieverlust im Verhältnis zu dem Vorrat des unendlichen Raumes verschwindend klein.

Das zweite Beispiel einer zyklischen Flüssigkeitsbewegung, nämlich die in eine Flüssigkeit eingetauchten Ringe (Art. 33), unterscheidet sich von dem eben behandelten dadurch, daß von dem zyklischen System der Ausdruck für die kinetische Energie $\mathfrak{T}$ in Funktion nicht der zunächst sich darbietenden Wirbelstärken $2\pi\varkappa$, $2\pi\varkappa_1$, sondern der aus ihnen abgeleiteten die Querschnitte durchströmenden Flüssigkeitsmengen λ, λ_1 zu verwenden ist.

Wir hatten im Art. 34 für $\mathfrak{T}$ den Wert erhalten

$$\mathfrak{T} = \frac{2\pi\varrho}{AC - B^2}[\lambda^2 C - 2\lambda\lambda_1 B + \lambda_1^2 A],$$

wo die Größen λ als Geschwindigkeiten (zyklische Intensitäten) auffaßbar sind. Man könnte nun wieder das aus den materiellen Ringen und dem zyklischen System zusammengesetzte „freie System" behandeln. Wir wollen uns jedoch auf die dem zyklischen Teilsystem allein zugehörigen Gleichungen beschränken:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda}\right) = 0; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda_1}\right) = 0.$$

Dann sind

$$\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda} = \mathfrak{q}; \quad \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda_1} = \mathfrak{q}_1$$

Konstanten, deren Werte sich aus den Gleichungen (4) des Art. 34 wieder rückwärts zu

$$\mathfrak{q} = 4\pi\varkappa\varrho; \quad \mathfrak{q}_1 = 4\pi\varkappa_1\varrho$$

bestimmen. Durch die Größen $\varkappa$ ausgedrückt, hat die kinetische Energie den aus Art. 34 bekannten Wert:

$$\mathfrak{T}(\varkappa, \varkappa_1) = \mathfrak{T}_1 = 4\pi\varkappa\varkappa_1\varrho \cdot B + h,$$

wo in dem Falle, daß die Ringe starr sind, h eine konstante Größe ist. Die Kräftefunktion

$$U = -\mathfrak{T}_1 = -4\pi\varrho\varkappa\varkappa_1 \cdot B + h$$

oder:

$$U = -4\varkappa\varkappa_1\varrho\int\int\frac{ds\,ds_1\cos(ds, ds_1)}{r} + h$$

ist, wie schon Kirchhoff (Journal f. Math., Bd. 71, S. 273) hervorgehoben hat, gleich dem Potential der Wirkung von zwei elektrischen Strömen von den Intensitäten $\varkappa$, $\varkappa_1$, die durch die Ringe fließen, aufeinander.

Dritter Abschnitt.

Elastisch-feste und quasi-elastische Massen.

36. Elastisch-feste Massen: Die Arbeit der inneren Kräfte.

In Art. 22 wurde zwischen (elastisch) *festen* und *flüssigen Massen* in der Weise unterschieden, daß die ersteren, wenn sie in jeder Richtung endlich ausgedehnt sind, sich niemals weit von einer gewissen Gleichgewichtslage entfernen — so daß die auf sehr kleine Zustandsänderungen bezüglichen Formeln des Art. 20 auf sie allgemein anwendbar sind — während bei flüssigen Massen diesen Formeln nur zeitlich unmittelbar aufeinanderfolgende Zustände genügen.

Die *flüssigen Massen* wurden weiter (Art. 23) in solche mit *unveränderlicher Dichte* (inkompressible) und in *elastische* (kompressible) eingeteilt, je nachdem die Divergenz allenthalben (von Ausnahmestellen abgesehen) gleich Null ist oder von Null verschieden.

Einen weiteren Einteilungsgrund für raumerfüllende Massen liefert nun diejenige *Arbeit*, die (auch wenn keine eingeprägten Volumkräfte wirken) bei einer Lagen- oder Zustandsänderung eines im Inneren der deformierten Masse befindlichen Volumelementes geleistet oder verbraucht wird. Man schreibt sie *inneren* (elastischen) *Kräften* zu, die bei der Deformation auftreten, und spricht deshalb von *innerer Arbeit.*

Denkt man sich in einem Punkt eines raumerfüllenden Mittels eine sehr kleine Scheibe eingesetzt, so ist der auf die Flächeneinheit derselben wirkende Druck, der übrigens im allgemeinen schief zur Fläche gerichtet, also in eine Normal- und eine Tangentialkomponente zerlegbar ist, auch wenn etwa das Mittel und mit ihm die Scheibe sich in Bewegung befinden, beiderseits entgegengesetzt gleich, weil sonst eine Teilung der Masse längs der Scheibe und eine Beschleunigung des einen Teiles gegen den anderen erfolgen würde, was wir in Art. 17 a. E. ausgeschlossen haben.

Man nimmt an, daß im Inneren irgendeines parallelepipedischen Raumelementes einer elastischen Masse, welches zugleich mit dieser durch Oberflächendrucke oder Volumkräfte deformiert wird, *elastische Kräfte* wachgerufen werden, die den Druckkräften auf die Grenzflächen, welche die Nachbarelemente ausüben, das Gleichgewicht halten und durch diese gemessen werden. Dabei wird bei *elastisch festen* Körpern weiter vorausgesetzt, daß es einen Zustand der Masse gibt, den *Gleichgewichtszustand*, für welchen an keiner Stelle im Inneren elastische Kräfte auftreten, für den also alle inneren Druckkräfte Null sind. Bei *elastisch flüssigen* Körpern ist der Gleichgewichtszustand ein Grenzzustand, der dann eintritt, wenn die Dichte Null ist.

Anstatt die bei einer Entfernung aus dem Gleichgewichtszustand geleistete Arbeit $-\delta w$ der elastischen Kräfte zu bilden, ermitteln wir diejenige δw der *angreifenden* Oberflächenkräfte, welche die Nachbarelemente auf das Elementar-Parallelepiped ausüben, indem wir ihm zunächst *endliche* Abmessungen geben und zur Berechnung der Arbeit jener Kräfte die Erfahrung zu Hilfe ziehen. Die Elementararbeit δw, bzw. deren Summe δW, über die ganze Masse ausgedehnt, ist mit demselben Vorzeichen wie die äußeren Volum- und Oberflächenkräfte $\delta' U$ und $\delta' S$ in die Formel des D'ALEMBERTschen Prinzips einzuführen.

Nach Art. 20 läßt sich die allgemeinste Lagen- und Gestaltsänderung eines Raumelementes aus drei Elementarbewegungen zusammensetzen, aus

1. einer Parallelverschiebung,
2. einer Drehung,
3. einer Folge von drei Dehnungen (Zusammendrückungen) in drei zueinander senkrechten Richtungen, den Hauptdilatationsachsen.

Im Falle ponderabler Massen, mit denen wir es vorerst allein zu tun haben, bewirkt bloß die letztere Veränderung eine Arbeit elastischer Kräfte. Im Inneren einer bereits deformierten (ruhenden oder bewegten) Masse denken wir uns in Richtung der Hauptdilatationsachsen einen Elementarwürfel von der Kantenlänge 1 herausgeschnitten. Die Oberflächenkräfte, welche die Verlängerungen in Richtung der Kanten bewirken, P_1, P_2, P_3, mögen *senkrecht zu den Würfelflächen* wirken. Diese Annahme ist immer dann erfüllt, wenn der elastische Körper „isotrop" ist (s. Art. 39). Ihr entsprechend werden wir die Hauptdilatationsachsen, also die Richtung jener Würfelkanten, auch *Hauptdruckachsen* nennen.

Bei einer auf die erwähnte Deformation folgenden weiteren virtuellen Deformation der Masse mögen sich die Kantenlängen bzw.

um $\delta\varrho_1$, $\delta\varrho_2$, $\delta\varrho_3$ verlängern. Dann ist die virtuelle Gesamtarbeit jener Kräfte am Würfel

$$\delta w = P_1\delta\varrho_1 + P_2\delta\varrho_2 + P_3\delta\varrho_3. \tag{1}$$

Die unendlich kleinen Richtungsänderungen, die hierbei die Hauptdruckachsen erfahren können, vernachlässigen wir, und nehmen den Kosinus der kleinen Winkel, die sie messen, gleich 1 an.

Bei elastisch festen Körpern sind die Druckkräfte P, wie wir später (Art. 39) der Erfahrung entnehmen werden, als lineare Funktionen der Dilatationen ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 darstellbar.

Bei elastisch flüssigen dagegen bewirkt erfahrungsgemäß die Beweglichkeit der Teilchen, daß für jeden Ort die drei Hauptdrucke untereinander gleich sind. Setzen wir also $P_1 = P_2 = P_3 = P$, so lehrt weiter die Erfahrung, daß die *Druckkraft* P im Inneren eines *elastisch flüssigen Mittels* eine von der Natur desselben abhängige (also als bekannt anzusehende) *Funktion der Dichte* ϱ, $P = f(\varrho)$ ist, die mit ϱ verschwindet. Im Falle des elastisch flüssigen Mittels ist also die Arbeit bei einer virtuellen Deformation

$$\delta w = P(\delta\varrho_1 + \delta\varrho_2 + \delta\varrho_3) = P\delta\Theta, \tag{2}$$

wo $\delta\Theta$ die virtuelle Zunahme der räumlichen Dilatation (Art. 21) ist, oder mittels der Beziehung (17) des Art. 23 a. E.

$$\delta w = P\left(\frac{\partial\delta x}{\partial x} + \frac{\partial\delta y}{\partial y} + \frac{\partial\delta z}{\partial z}\right) = P\,\mathrm{div}\,\delta\mathfrak{s} = -P\frac{\delta\varrho}{\varrho}. \tag{2a}$$

Bezeichnet man mit δW den *Gesamtbetrag* der von den angreifenden Kräften geleisteten Arbeit, so ist demnach für *elastisch feste Körper* zu setzen:

$$\delta W = \int\delta w\,d\tau = \int(P_1\delta\varrho_1 + P_2\delta\varrho_2 + P_3\delta\varrho_3)\,d\tau; \tag{3}$$

für *elastisch flüssige Körper*:

$$\delta W = \int\delta w\,d\tau = \int P\left(\frac{\partial\delta x}{\partial x} + \frac{\partial\delta y}{\partial y} + \frac{\partial\delta z}{\partial z}\right)d\tau. \tag{4}$$

Mit diesen Werten von δW hat man, je nach der Natur des elastischen Mittels, in die Gleichung des D'ALEMBERTschen Prinzips (Art. 19 (2))

$$\int[(\ddot{x} - X)\delta x + (\ddot{y} - Y)\delta y + (\ddot{z} - Z)\delta z]\varrho\,d\tau - \delta W - \delta' S = 0 \tag{5}$$

einzugehen, wo wieder die x, y, z als Funktionen von a, b, c und t

gedacht sind. Angenommen ist auch hier, wie in Art. 19, daß die Bewegung im allgemeinen ohne Wärmeentwicklung erfolgt. Wenn durch Reibung — entweder innere Reibung, wie bei zähen Flüssigkeiten, oder solche gegen die Umgebung — ein Energieverlust erfolgt, so wollen wir diesen als Arbeit der Reibungskraft besonders in Rechnung bringen (Art. 16 a. E.).

Zu der Größe δW in (5) existiert, wie wir sehen werden, im Falle des elastisch festen Körpers eine Funktion W, das Potential der elastischen Kräfte, deren Variation sie ist. Im Falle des elastisch flüssigen ergibt eine solche sich ohne weiteres aus Formel (2a) mit Rücksicht darauf, daß P eine Funktion von ϱ ist. In diesem Fall hat ersichtlich δw genau dieselbe Gestalt wie in Text und Fußnote des Art. 25 für inkompressible Flüssigkeiten $\lambda \delta \varphi$, wo $\delta \varphi = 0$ aus der Bedingung $\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0$ für die Inkompressibilität abgeleitet worden war (Art. 23). Wenn man $P = \lambda$ setzt, so sind die Formulierungen, die das D'ALEMBERTsche Prinzip liefert, für beide Fälle identisch. Daher führt die weitere Behandlung der Gleichung (5) für den Fall elastischer Flüssigkeiten auf dieselben Differentialgleichungen der Bewegung, wie sie in Art. 25 unter (4), (5) aufgestellt worden sind. Nur tritt als weitere Bedingungsgleichung (an Stelle von $\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0$) die Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} + \frac{\dot{\varrho}}{\varrho} = 0$$

bzw. eine zwischen Druck und Dichte bestehende Beziehung

$$P = f(\varrho)$$

hinzu.

37. Das quasi-elastische Mittel: Arbeit der inneren Kräfte.

Mit den im vorigen Artikel gemachten Annahmen läßt sich die Bewegung oder das Gleichgewicht im Inneren ponderabler, elastisch fester und flüssiger Massen erfahrungsgemäß beschreiben. Die hiermit begründete und im folgenden noch weiter auszuführende Theorie umfaßt ebenso die Lehre von der Festigkeit technischer Konstruktionen, wie die von der Fortpflanzung des Schalles in Luft und Wasser oder von den Schwingungen tönender Saiten und Membrane.

Man hat versucht, auch die Fortpflanzung des Lichtes (und neuerdings die mit der Lichtbewegung verwandten elektromagnetischen

Erregungszustände) auf dieselbe Grundlage zu stellen, indem man als Träger der Oszillationen, die von einem leuchtenden oder elektrisch erregten Körper ausgehen, ein elastisches Mittel annahm. Aber schon MAC CULLAGH hat in einer gegen CAUCHY gerichteten Abhandlung[1]) auf gewisse Widersprüche hingewiesen, die sich z. B. der Erklärung der elliptischen Polarisation in den Weg stellen, wenn man den Äther als elastisch festen Körper ansieht. Dagegen gelang es ihm, diese Schwierigkeit und andere, die das Verhalten des Lichtes an der Grenzfläche zweier Medien bereitet, durch die Annahme zu beseitigen, daß der Träger der Lichtbewegung ein Mittel sei, das eine eigentümliche, mit der besprochenen nicht vergleichbare Art von Elastizität besitze, dieselbe nämlich, wie sie auch die elektromagnetische Lichttheorie für den Vermittler ihrer Wellen in Anspruch nimmt.[2]) Der *Äther*, so wollen wir diesen Vermittler nennen, hat hiernach kurz gesagt die elastische Eigenschaft, daß bereits eine bloße Drehung des Volumelementes — ohne daß es die Form ändert oder sich verschiebt — Aufwand an Arbeit erfordert.

Lord KELVIN macht ein solches Mittel auch der Vorstellung zugänglich, indem er[3]) ein Gerüste konstruiert, in das, in besonderer Weise verteilt, eine Anzahl Kreisel eingesetzt sind, die paarweise entgegengesetzt jeder um seine Achse rotieren. Vermöge ihres Bestrebens, die Drehachse zu erhalten, setzen diese Kreisel, wenn ihre Achsen in verschiedenen Richtungen orientiert sind, jedem Versuch einer Drehung einen Widerstand entgegen, dessen Überwindung Arbeitsaufwand erfordert: ein fein ausgedachtes Modell eben des elastischen Mediums, das MAC CULLAGH eingeführt hat.

KELVIN nennt ein solches Mittel uneigentlich fest (quasi rigid) oder schlechthin „Äther". Wir wollen ihm darin folgen und nur das Wort quasi-rigid durch *quasi-elastisch* übersetzen.

---

1) Notes on some Points in the Theory of Light, Proc. Irish Ac. II, 1841, Coll. Works of MAC CULLAGH, p. 194 Die mechanische Erklärung wird gegeben in der Abhdlg.: An Essay towards a Dynamical Theory of Crystalline Reflexion and Refraction, Trans. Irish. Ac. 21, 1839, Coll. W. p. 145.

2) Zuerst wohl tat dies Lord KELVIN (WILLIAM THOMSON) in Math. and Phys. Papers, III, p. 436 (1890), Art. 99: „Viscous Liquid, Elastic Solid, Ether"; dann fast gleichzeitig A. SOMMERFELD: „Mechanische Darstellung" usw., Ann. Chem. Phys., N. Folge, 46 (1892); R. REIFF: „Elastizität und Elektrizität, Freiburg 1893; und J. LARMOR: „a Dynam. Theory of the Electric and Luminiferous Medium, Proc. Lond. math. Soc., 54 (1893).

3) l. c. Art. 100: On a Gyrostatic Adynamic Constitution for „Ether".

Wir nehmen also an, daß der Arbeitszuwachs δw der an einem Elementarparallelepiped angreifenden Kraft, welcher bei einem kleinen Drehungszuwachs geleistet wird, proportional ist:

1. diesem Drehungszuwachs $\delta\mathfrak{w} = (\delta\xi, \delta\eta, \delta\zeta)$, seinem absoluten Betrage nach genommen, wenn wie früher

$$\xi = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad \eta = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad \zeta = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{1}$$

(wo u, v, w kleine Verschiebungsgrößen sind) die Komponenten der Drehung $\mathfrak{w}$ aus der Gleichgewichtslage bedeuten;

2. eben dieser Drehung $\mathfrak{w}$ aus der Gleichgewichtslage, ihrem absoluten Betrage nach genommen;

3. dem Kosinus des Winkels der Achsen von $\mathfrak{w}$ und $\delta\mathfrak{w}$.

Wir setzen also in der Vektorbezeichnung des Art. 23, wenn $\mathbf{B}$ eine positive Konstante ist,

$$-\delta w = 4\mathbf{B}(\mathfrak{w}, \delta\mathfrak{w}) = 4\mathbf{B}\,|\mathfrak{w}|\,|\delta\mathfrak{w}|\,\cos(\mathfrak{w}, \delta\mathfrak{w}) = 4\mathbf{B}(\xi\delta\xi + \eta\delta\eta + \zeta\delta\zeta)$$
$$= 2\mathbf{B}\delta(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = 2\mathbf{B}\delta\,|\mathfrak{w}|^2. \tag{2}$$

Damit wird die Variation der Gesamtarbeit W der inneren Kräfte des quasi-elastischen Mittels:

$$\begin{aligned} \delta W = \int \delta w\, d\tau &= -\int 4\mathbf{B}(\xi\delta\xi + \eta\delta\eta + \zeta\delta\zeta)\, d\tau \\ &= -\int 2\mathbf{B}\delta(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\, d\tau. \end{aligned} \tag{3}$$

Diese Annahme ist derjenigen nachgebildet, die für die Arbeit an einem elastisch festen Körper (Art. 36) die Natur an die Hand gibt. Alle diese Annahmen beziehen sich jedoch wieder auf ideale Fälle, denen sich die in der Natur vorkommenden in ihren Eigenschaften nur mehr oder weniger annähern.

Wir haben im vorstehenden — indem wir von innerer Reibung absahen — vier verschiedene Mittel definiert: 1. die inkompressible Flüssigkeit, 2. die elastische Flüssigkeit, 3. die elastisch feste Masse, 4. das quasi-elastische Mittel. Wir stellen für sie noch einmal tabellarisch diejenigen Eigenschaften und Beziehungen zusammen, die sich als notwendig und hinreichend erwiesen haben bzw. erweisen werden, um die Bewegung oder den Gleichgewichtszustand eines Massenteilchens im Inneren jedes derselben vollständig zu definieren.

Definierende Eigenschaften und Beziehungen	*Flüssige Massen* (ohne Reibung) ϱ = Dichte; $\mathfrak{v} = (u, v, w)$ = Geschwindigkeit — *unzusammendrückbar*	*Flüssige Massen* — *zusammendrückbar* (elastisch)	*Elastisch-feste Massen* (in weiterem Sinn) ϱ = Dichte; $\mathfrak{u} = (u, v, w)$ = Verschiebung aus der Gleichgewichtslage — *ponderable isotrope elastisch-feste Massen*	*Elastisch-feste Massen* — *quasi-elastisches Mittel* (Äther)
1. Eine *Gleichgewichtslage*, für welche der Arbeitsvorrat der inneren Kräfte in allen Volumelementen verschwindet	gibt es nicht		gibt es	
2. Ausdruck für die *kinetische Energie*	$\frac{\varrho}{2}(u^2+v^2+w^2) = \frac{\varrho}{2}\lvert\mathfrak{v}\rvert^2$		$\frac{\varrho}{2}(\dot u^2+\dot v^2+\dot w^2) = \frac{\varrho}{2}\lvert\dot{\mathfrak{u}}\rvert^2 = \frac{\varrho}{2}\lvert\mathfrak{v}\rvert^2$	
3. Beziehung zwischen: *räumlicher Ausdehnung* (Dilatation) $\Theta = \operatorname{div}\mathfrak{u}$ und den linearen Dilatationen; bzw. der *Änderung* $\dot\Theta = \operatorname{div}\mathfrak{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$	—	—	$\Theta = \operatorname{div}\mathfrak{u} = \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3$, wo $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$, die Dehnungen in Richtung der Hauptdruckachsen sind, von der Gleichgewichtslage aus gerechnet	$\operatorname{div}\mathfrak{u} = 0$
von Θ und der *Dichte-Änderung* $\dot\varrho$	$\operatorname{div}\mathfrak{v} = 0$ [1] ϱ = konst.	$\operatorname{div}\mathfrak{v} + \frac{\dot\varrho}{\varrho} = 0$ [1]	—	—
4. *Änderungen (Deformationen)*, bei welchen *elastische* (innere) *Arbeit* geleistet wird	keine	Inhaltsänderung des Volumelementes mit Dichteänderung (s. 3.)	Lineare Dehnung oder Pressung in irgendeiner Richtung	Drehung
5. Die bei den Deformationen 4. geleistete *elastische Arbeit* δw am Volumelement	keine	$\delta w = P \operatorname{div}\delta\mathfrak{s} = -P\frac{\delta\varrho}{\varrho}$, wo P der Druck ist. Wegen $\delta\mathfrak{s}$ s. d. Fußnote	$\delta w = P_1\delta\varrho_1 + P_2\delta\varrho_2 + P_3\delta\varrho_3$, wo P_1, P_2, P_3 die Drucke in Richtung der Hauptdruckachsen sind	$\delta w = -4B(\xi\delta\xi + \eta\delta\eta + \zeta\delta\zeta)$ $= -2B\delta\lvert\mathfrak{w}\rvert^2$, wo $(\xi, \eta, \zeta) = \mathfrak{w} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathfrak{u}$ die Drehung aus der Gleichgewichtslage bedeutet
6. *Beziehung* zwischen den inneren *Druckkräften* und den durch sie bewirkten *Deformationen*	keine	Zwischen Druck und Dichte besteht eine durch die Natur des flüssigen Mittels bedingte Beziehung $f(P, \varrho) = 0$	Zwischen den Dehnungen $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ und den Drucken in Richtung der Hauptdruckachsen bestehen (s. Art. 39) die Beziehungen: $\varrho_1 = \frac{1}{E}(-P_1 + \mu P_2 + \mu P_3)$ $\varrho_2 = \frac{1}{E}(-P_2 + \mu P_3 + \mu P_1)$ $\varrho_3 = \frac{1}{E}(-P_3 + \mu P_1 + \mu P_2)$ wo E d. Elastizitätsmod. ist	Man kann den Vektor $(-4B\xi, -4B\eta, -4B\zeta) = -4B\mathfrak{w}$ als das Drehmoment ansehen, welches vorhanden ist, wenn das Volumelement aus der Gleichgewichtslage um die Größe $\mathfrak{w}$ herausgedreht ist

1) Durch Differentiation dieser Gleichungen nach der Zeit und Variation der Beschleunigungen $\dot u, \dot v, \dot w, \ddot\varrho$ erhält man die Beziehungen zwischen den Variationen: $\operatorname{div}\delta\ddot{\mathfrak{s}} = 0$ bzw. $\operatorname{div}\delta\ddot{\mathfrak{s}} + \frac{\delta\ddot\varrho}{\varrho} = 0$, die ersetzbar sind durch: $\operatorname{div}\delta\mathfrak{s} = 0$ bzw. $\operatorname{div}\delta\mathfrak{s} + \frac{\delta\varrho}{\varrho} = 0$.

38. Der elastische Faden.

Wie bei flüssigen Massen der Zuwachs δw der inneren Arbeit infolge einer virtuellen Deformation sich in Funktion allein der Dichte und damit der durch die Deformation bewirkten räumlichen Dilatation darstellen läßt, so handelt es sich im Falle des elastisch-festen Körpers um einen Zusammenhang zwischen den linearen Dilatationen ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 und den Kräften, welche diese hervorrufen.

Diese Beziehung liefert das HOOKEsche Gesetz in Verbindung mit einer Annahme über die Querkontraktion. Bevor wir jedoch in die allgemeine Erörterung eintreten, wollen wir einen besonderen Fall betrachten, den des elastischen Fadens, dessen Behandlung sich auf die des unelastischen (der Kette) zurückführen läßt, ähnlich wie in Art. 36 die Bewegungsgleichungen für die elastische Flüssigkeit auf die für die unelastische zurückgeführt werden konnten.

Wie in Art. 19 beziehen wir die Bewegung eines homogenen Fadens auf seinen Anfangszustand: den (Gleichgewichts-)Zustand des nicht ausgedehnten Fadens, für den ein Punkt, der zur Zeit t sich in x, y, z befindet, die Entfernung a vom Anfangspunkt besitzen möge. Ist der Querschnitt durchweg gleich 1, so ist das Volumelement $d\tau = 1 \cdot da$. Die Variation δw der inneren Arbeit, vermöge deren da in ds übergegangen ist, ergibt sich, wenn P_1 der Zug in Richtung des Fadenelementes (eine der Hauptdruckachsen) ist, ϱ_1 die Verlängerung der Einheit, nach der Formel (1) des Art. 36,

$$\begin{aligned} \delta w = P_1 \delta \varrho_1 = P_1 \delta\left(\frac{ds}{da} - 1\right) = \frac{P_1}{2} \frac{\delta(ds^2)}{ds\,da} \\ = P_1\left(\frac{dx}{ds}\delta\frac{dx}{da} + \frac{dy}{ds}\delta\frac{dy}{da} + \frac{dz}{ds}\delta\frac{dz}{da}\right), \end{aligned} \tag{1}$$

oder, wenn man

$$P_1 \frac{da}{ds} = \lambda \tag{2}$$

setzt,

$$\delta w = \lambda\left(\frac{dx}{da}\delta\frac{dx}{da} + \frac{dy}{da}\delta\frac{dy}{da} + \frac{dz}{da}\delta\frac{dz}{da}\right).$$

Hiermit wird die Variation der Gesamtarbeit der inneren Kräfte

$$\delta W = \int \delta w \cdot da = \int \lambda \mathbf{S} \frac{dx}{da}\delta\frac{dx}{da} da, \tag{3}$$

wo wieder **S** eine Summe von 3 ähnlich gebildeten Gliedern bedeutet.

Dieser Ausdruck für δW ist in der Gleichung (2) des Art. 19 für das D'ALEMBERTsche Prinzip einzuführen und tritt, wenn man statt des dort behandelten unelastischen Fadens nun den elastischen setzt, an die Stelle des (Formel (5), l. c.) aus der Bedingung für die Unausdehnsamkeit abgeleiteten Gliedes

$$\tfrac{1}{2}\lambda\delta\varphi = \lambda \mathbf{S}\frac{dx}{da}\delta\frac{dx}{da}da. \tag{4}$$

Die weitere rechnerische Ausführung liefert daher beidemal genau dieselbe Form. Zugleich hat λ in beiden Fällen die Bedeutung eines Druckes. Nur ist die Inkompressibilitätsbedingung zu ersetzen durch die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{ds}{da} = \frac{\varrho_0}{\varrho}, \tag{5}$$

die aussagt, daß sich die Masse $\varrho_0 da$ auf die Länge ds verteilt. Zur Bestimmung der fünf Größen x, y, z, ϱ, λ reichen aber die drei Differentialgleichungen (7) des Art. 19 zusammen mit (5) nicht aus; man muß noch den Zusammenhang zwischen der Verlängerung der Längeneinheit und dem Zug P kennen, der dieselbe veranlaßt. *Diesen liefert das erwähnte Hookesche Gesetz*, ein Naturgesetz, das, ob es gleich für viele Materialien nur in sehr engem Umfange gilt, doch die Grundlage der ganzen mathematischen Theorie der Elastizität bildet.

Im vorliegenden Falle sagt es aus, daß, solange ds/da sich nur um eine sehr kleine Größe von 1 unterscheidet, Zug und Verlängerung (Druck und Verkürzung) proportionale Größen sind („ut vis sic tensio"), daß also

$$P = E\left(1 - \frac{ds}{da}\right) \tag{6}$$

ist, wo E, der „Elastizitätsmodul", eine sehr große positive Zahl ist, die, ebenso wie die Grenzen, innerhalb deren diese Formel anwendbar ist, je nach dem Material verschieden ist.[1])

Wir verfolgen das von Art. 19 (7) zu übernehmende System von Differentialgleichungen nicht weiter, sondern verweisen wegen Anwendungen beispielsweise auf die Theorie der schwingenden Saiten in Rouths Dynamik, deutsch von Schepp, Leipzig 1898, II. Bd. S. 465.

1) Die rechte Seite der Gleichung (6) wird negativ, wenn das Fadenelement sich verlängert. Demnach bedeutet $(-P)$ einen Zug, in Übereinstimmung mit der Bezeichnungsweise des vorigen und des folgenden Artikels.

39. Deformation und innere Kräfte beim isotropen elastisch-festen Körper.

Wir machen für das Folgende die vereinfachende Annahme, daß die elastisch-festen Medien, die uns beschäftigen, im natürlichen (Gleichgewichts-)Zustand 1. *homogen* seien, d. h. gleiche Widerstandsfähigkeit an allen Stellen gegen eine irgendwie gerichtete Zug- oder Druckkraft aufweisen, und daß sie außerdem 2. *isotrop* seien, d. h. daß sie in jeder Richtung das gleiche Verhalten zeigen. Für gewisse technisch wichtige Materialien, wie Draht oder Holz, die in der Richtung der Faser eine andere Beschaffenheit zeigen als senkrecht dazu, sind daher die folgenden Untersuchungen nur mit Vorsicht verwendbar.

An einer Stelle im Inneren einer isotropen elastisch-festen Masse mögen, nachdem eine Deformation eingetreten ist, die Verlängerungen der Länge 1 in Richtung der Hauptdruckachsen bzw. ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 (gegen 1 sehr kleine Größen) betragen. Die Verlängerungen, die die Kanten eines in diesen Richtungen geschnittenen Würfels **K** erfahren, schreiben wir Zugkräften zu, die in Richtung jener Achsen, also senkrecht zu den Grenzflächen des Würfels, von den Nachbarelementen auf die letzteren ausgeübt werden. Die Dehnungen ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 hängen von diesen Zugkräften, die wir (als negative Druckkräfte) mit $-P_1$, $-P_2$, $-P_3$ bezeichnen wollen, ab. Das Gesetz der Abhängigkeit entnimmt man der Erfahrung, indem man das Verhalten eines Würfels von *endlichen* Dimensionen zugrunde legt, dessen gegenüberliegende Seitenflächen von Zug- (oder Druck-) Kräften gleichmäßig in Anspruch genommen werden. Dabei ergibt sich folgendes:

1. Für den Zusammenhang zwischen Zugkraft (Druckkraft) und Ausdehnung (Verkürzung, beide zusammengefaßt unter „Deformation", englisch „strain") das schon erwähnte *Hookesche Gesetz*, das die Proportionalität[1]) zwischen beiden aussagt. Genauer: Ein Parallelepiped von der Länge l und dem Querschnitt q, auf dessen zwei gegenüberstehende Basisflächen je eine Zugkraft $-Q$ (negative Druckkraft) wirkt, erfahre dadurch die Verlängerung (negative Verkürzung) λ. Dann gilt, wenn die Zugkraft eine gewisse, vom Material abhängige Grenze[2]) nicht überschreitet, die Beziehung

1) Die Grenze, bis zu der die Proportionalität noch besteht, ist z. B. für Schmiedeeisen 16 kg pro qmm.

2) Das negative Vorzeichen rührt davon her, daß (Art. 36) die hier eingeführten angreifenden Druckkräfte zu den inneren elastischen entgegengesetzt gerichtet sind.

$$\lambda = -\frac{Ql}{qE}, \tag{1}$$

wo der Proportionalitätsfaktor E, der „Elastizitätsmodul“, eine vom Material abhängige Konstante[1]) ist. *Diese Beziehung bleibt bestehen,* wenn sich der Zug in Druck und damit die Verlängerung in eine Verkürzung verwandelt.

2. Der Zug $(-Q)$ in Richtung einer Kante bewirkt eine Zusammenziehung des Parallelepipeds in den zur Zugrichtung senkrechten Richtungen, eine „Querkontraktion“ (bei Druck eine „Querdilatation“), die einen Bruchteil μ der Verlängerung λ beträgt, wo μ wieder eine von dem Material abhängige Größe (meist $\mu = \frac{1}{4}$) ist. Die Kante eines Würfels von der Seite 1 verkürzt sich hiernach bei einem Zuge $-P (= -Q/q)$, den wir also nunmehr wie überhaupt in der Folge als eine Flächenkraft, auf die *Querschnittseinheit* bezogen, auffassen, in der Querrichtung um

$$\mu\lambda = -\mu\frac{P}{E}.$$

3. Die in allen Fällen sehr kleinen Verlängerungen (Verkürzungen), welche durch drei in Richtung der Kanten (und je den dazu senkrechten Richtungen) simultan wirkende Zug- und Druckkräfte hervorgerufen werden, setzen sich wie Vektoren zusammen (Prinzip der *Übereinanderlagerung kleiner Wirkungen*).

Wir heben endlich noch hervor, daß die auf das Innere eines Elementarwürfels etwa wirkenden Volumkräfte — ebenso wie die Differenz der auf je gegenüberliegende Flächen wirkenden Oberflächenkräfte — von einer um 1 niedrigeren Größenordnung sind, wie die Flächenkräfte selbst.

An der Hand dieser Festsetzungen ergeben sich sogleich die Verlängerungen $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$, welche die Kanten eines in Richtung der *Hauptdruckachsen* (Art. 36) orientierten Elementarwürfels **K** von der Kantenlänge 1 unter dem Einfluß der in eben diesen Richtungen wirkenden Flächenkräfte P_1, P_2, P_3 erfahren, und daraus umgekehrt die letzteren, wenn die ersteren gegeben sind.

Die Verlängerung der Kantenlänge 1 in Richtung der Kraft $-P_1$ beträgt, wenn man berücksichtigt, daß die Kräfte $-P_2$, $-P_3$ zugleich Querkontraktionen veranlassen, insgesamt:

$$\varrho_1 = -\frac{P_1}{E} + \frac{\mu P_2}{E} + \frac{\mu P_3}{E}.$$

1) Der Elastizitätsmodul E beträgt z. B. für Stahl 21000 kg pro qmm.

Man erhält so

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= \frac{1}{E}(-P_1 + \mu P_2 + \mu P_3) \\ \varrho_2 &= \frac{1}{E}(\mu P_1 - P_2 + \mu P_3) \\ \varrho_3 &= \frac{1}{E}(\mu P_1 + \mu P_2 - P_3). \end{aligned} \tag{2}$$

Um diese Gleichungen nach den P aufzulösen, hat man sie bzw. mit $(1-\mu)$, μ, μ zu multiplizieren und zu addieren. Es ergibt sich

$$\frac{1}{E}[-P_1(1-\mu) + 2P_1\mu^2] = \varrho_1(1-2\mu) + \mu(\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3),$$

oder, wenn man die räumliche Dilatation (Art. 21)

$$\Theta = \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 \tag{3}$$

einführt, die erste der folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} -P_1 &= \frac{E}{1+\mu}\left(\varrho_1 + \frac{\mu}{1-2\mu}\Theta\right) \\ -P_2 &= \frac{E}{1+\mu}\left(\varrho_2 + \frac{\mu}{1-2\mu}\Theta\right) \\ -P_3 &= \frac{E}{1+\mu}\left(\varrho_3 + \frac{\mu}{1-2\mu}\Theta\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Hiernach ist die Arbeit, die bei einer virtuellen Änderung $\delta\varrho_1$, $\delta\varrho_2$, $\delta\varrho_3$ der Kantenlängen des bereits deformierten Würfels geleistet wird, darstellbar durch:

$$\begin{aligned} \delta w &= P_1\delta\varrho_1 + P_2\delta\varrho_2 + P_3\delta\varrho_3 \\ &= -\frac{E}{2(1+\mu)}\left(\delta(\varrho_1^2+\varrho_2^2+\varrho_3^2) + \frac{\mu}{1-2\mu}\delta\Theta^2\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Dieser Ausdruck ändert sich nicht, wenn man die Verlängerungen ϱ in Verkürzungen $(-\varrho)$ verwandelt. Jede Entfernung aus der Gleichgewichtslage ist also mit einer *Aufspeicherung* von Arbeit verbunden, wenn $1-2\mu$ *positiv* ist, was sich dann wieder für sich aus der Forderung ergibt, daß die Gleichgewichtslage stabil sei. — In den Art. 20, 21 haben die ϱ dieselbe Bedeutung wie hier. Wir wollen nun, wie dort, neben den Hauptdruckachsen ein (im allgemeinen gegen diese geneigtes) festes räumliches Koordinatensystem einführen, in bezug auf welches der Punkt x, y, z die Verschiebungen u, v, w erfährt. Dann messen die Ausdrücke $x_x = \partial u/\partial x$; $z_y \equiv \partial w/\partial y + \partial v/\partial z$ usw. (Art. 21) die Veränderungen der Kanten und Winkel eines in Richtung dieser *festen Achsen* ausgeschnittenen Elementarwürfels K. Θ sei wieder die räumliche Dilatation. Nun lassen sich die beiden in δw auftretenden symmetrischen Funktionen der ϱ durch diese Größen wie folgt ausdrücken (a. a. O., F. (20), (21)):

$$\varrho_1^2 + \varrho_2^2 + \varrho_3^2 = \tfrac{1}{2}\mathsf{S}x_y^2 - 2\mathsf{S}y_y z_z + \Theta^2, \tag{6}$$

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 = \Theta = \mathsf{S}x_x, \tag{6a}$$

wo, wie früher, **S** die Summe aus drei dem angeschriebenen analog gebildeten Gliedern bezeichnet.

Hiermit erhält δw die Form

$$\delta w = -\tfrac{1}{2}A\delta\Theta^2 - \tfrac{1}{2}B\delta(x_y^2 + y_z^2 + z_x^2 - 4y_y z_z - 4z_z x_x - 4x_x y_y), \tag{7}$$

wo

$$A = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}, \quad B = \frac{E}{2(1+\mu)} \tag{7a}$$

ist. Der Elementarwürfel K, nach den Achsen des festen Koordinatensystems orientiert, wird nun durch die Deformation nicht nur hinsichtlich seiner Kantenlängen, sondern im allgemeinen auch hinsichtlich seiner Kantenwinkel geändert. Die auf die Deformation der Volumeneinheit verwandte Arbeit und deren Zuwachs δw kann man ersichtlich, statt einer Wirkung der Kräfte an Würfeln wie **K**, auch einer Wirkung von Kräften zuschreiben, die an den Oberflächen von Würfeln wie K angreifen. Aber während auf den Seitenflächen von **K** die Kräfte P senkrecht stehen, sind die am Würfel K angreifenden Kräfte gegen diese im allgemeinen geneigt.

Man findet diese Flächenkräfte einfach durch Berechnung der Koeffizienten des nach den Größen $\delta x_x, \ldots \delta y_z, \ldots$ geordneten Ausdruckes δw (7). Denn diese Größen können als Kantenelemente bzw. Winkelelemente gedeutet werden, längs deren die an den Seitenflächen von K angreifenden Normalkräfte bzw. Tangentialkräftepaare Arbeit verrichten. Nun ist

$$\delta w = -\mathsf{S}[A\Theta - 2B(y_y + z_z)]\delta x_x - \mathsf{S}By_z\delta y_z,$$

wie man leicht durch Ausführung der Variationen in (7) bestätigt, also von der Form:

$$\delta w = \mathsf{S}X_x\delta x_x + \mathsf{S}Y_z\delta y_z. \tag{8}$$

Hieraus ergibt sich für den Druck X_x, welcher *die Verlängerung* δx_x der zur Achse X parallelen *Kante* 1 des Würfels K bewirkt

$$X_x = -A\Theta + 2B(y_y + z_z) = -\Theta(A - 2B) - 2B\frac{\partial u}{\partial x}$$
$$= -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)(A - 2B) - 2B\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{9}$$

und analog

$$\left.\begin{aligned} Y_y &= -\Theta(A-2B) - 2B\frac{\partial v}{\partial y} \\ Z_z &= -\Theta(A-2B) - 2B\frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Ebenso sind die Kräftepaare, welche *die Veränderung der Kantenwinkel* hervorrufen, darstellbar durch

$$\begin{aligned} Y_z = Z_y &= -By_z = -B\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ Z_x = X_z &= -Bz_x = -B\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \qquad (10) \\ X_y = Y_x &= -Bx_y = -B\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right). \end{aligned}$$

Man hat sich also vorzustellen, daß auf jede der 6 Grenzflächen, die paarweise durch den angehängten Index x, y, z bezeichnet sind, drei Druckkomponenten in Richtung der drei Koordinatenachsen wirken — auf die zur X-Achse senkrechten Flächen z. B. X_x, Y_x, Z_x —, die für gegenüberliegende gleichgroß und entgegengesetzt gerichtet sind. Die auf den Flächen senkrechten Komponenten, wie X_x, sind Zug- oder Druckkräfte im eigentlichen Sinne. Die anderen, wie $Y_z, Z_y, \ldots$ setzen sich mit den je an den gegenüberstehenden Flächen angreifenden $-Y_z$, $-Z_y, \ldots$ zu Kräftepaaren zusammen, von denen je zwei in entgegengesetztem Sinne drehend wirken (wie beistehende Figur andeutet), und die so eine Veränderung der Kantenwinkel hervorrufen. Man nennt Kräfte wie Y_z, Z_y, deren Richtung in die Flächen selbst fällt, an denen sie angreifen, *Schubkräfte* oder *Scherkräfte* (Tangentialkräfte).

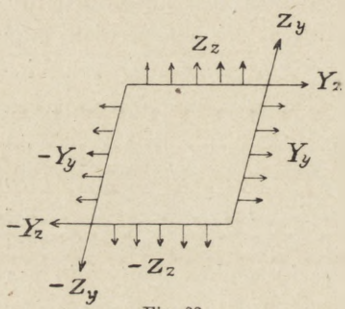

Fig. 22.

Die Variation der Gesamtarbeit δW der inneren Kräfte wird durch das Integral dargestellt

$$\begin{aligned} \delta W = \int \delta w \, d\tau &= \int \mathbf{S}[X_x \delta x_x + Y_z \delta y_z] \, d\tau \\ &= \int \mathbf{S}\left[X_x \delta \frac{\partial u}{\partial x} + Y_z \delta\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\right] d\tau, \end{aligned} \qquad (11)$$

wo $X_x, \ldots Y_z, \ldots$ die oben (9), (10) angegebenen Ausdrücke sind. Wir machen von dieser Formel bei der nun folgenden Herleitung der Differentialgleichungen der Bewegung eines elastisch-festen Körpers Gebrauch.

40. Die Differentialgleichungen der Bewegung für elastisch-feste Körper.

Der im vorigen Artikel a. E. aufgestellte Wert von δW ist in die Gleichung (5) des Art. 36 einzusetzen, die das D'ALEMBERTsche Prinzip für raumerfüllende Massen geliefert hat. Nur sind zuvor die dort als veränderlich angenommenen Koordinaten x, y, z durch die Verschiebungen u, v, w zu ersetzen, weil im vorigen Artikel die Koordinaten x, y, z die Lage des Massenelementes im natürlichen (nicht deformierten) Zustand bestimmen, also weder Funktionen der Zeit sind noch variiert werden können. Wir denken uns also in der Formel (5) des Art. 36 überall

an Stelle von $a, b, c \ldots x, y, z$

„ „ „ $x, y, z \ldots x+u, y+v, z+w$

gesetzt, wobei wir uns die Verschiebungen u, v, w als Funktionen von x, y, z, t vorstellen. Die Ableitungen von $x(a, b, c, t)$ nach der Zeit haben wir früher wie totale behandelt. Da jedoch nun daneben die von u, v, w nach x, y, z auftreten, empfiehlt es sich, die Differentialquotienten nach t als partielle zu bezeichnen. Wir ersetzen demnach

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \quad \text{durch} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \ddot{u} \text{ usw.}$$

und wollen, wie früher die totalen, so in der Folge *die partiellen Ableitungen nach der Zeit durch übergesetzte Punkte* bezeichnen.

Man erhält so mittels des D'ALEMBERTschen Prinzips

$$\int \varrho[(\ddot{u}-X)\delta u + (\ddot{v}-Y)\delta v + (\ddot{w}-Z)\delta w]d\tau - \delta W - \delta' S = 0, \tag{1}$$

wo nun

$$\delta W = \int \mathsf{S}\Big[X_x \delta \frac{\partial u}{\partial x} + Y_z \delta\Big(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\Big)\Big] d\tau \tag{2}$$

ist. Um aus (1) die Differentialgleichungen der Bewegung herzustellen, hat man zunächst δW durch partielle Integration in eine lineare Funktion von $\delta u, \delta v, \delta w$ zu verwandeln. Die bewegten Massen mögen einen Raum T ausfüllen, der endlich oder auch unendlich sein kann. Nach dem öfter verwendeten Verfahren (s. z. B. Art. 24) transformiert man das über den Raum T ausgedehnte Integral (wir beschränken uns auf das erste Glied) wie folgt:

$$\begin{aligned}\int X_x \delta\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big) d\tau &= \int\int dy\,dz \int X_x \frac{\partial \delta u}{\partial x} dx \\ &= \int\int dy\,dz [X_x \delta u] - \int d\tau \frac{\partial X_x}{\partial x} \delta u,\end{aligned}$$

wo das in der eckigen Klammer stehende Glied für diejenigen Stellen der den Raum **T** begrenzenden Oberfläche Σ zu nehmen ist, die von dem über $dydz$ stehenden Parallelepiped ausgeschnitten werden. Ist $d\sigma$ ein solches Flächenelement, n die nach innen gerichtete Normale, ist also

$$dydz = -\,d\sigma \cos(n, x),$$

so läßt sich das erste Integral rechts in ein über Σ zu erstreckendes Integral verwandeln

$$\int\!\!\int dydz[X_x \delta u] = -\int d\sigma X_x \cos(n, x) \delta u,$$

womit

$$\int X_x \delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) d\tau = -\int d\sigma X_x \cos(n, x)\delta u - \int d\tau \frac{\partial X_x}{\partial x}\delta u$$

wird. Man findet in ähnlicher Weise

$$\int Y_z \delta\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) d\tau = -\int d\sigma Y_z(\cos(n, y)\delta w + \cos(n, z)\delta v)$$
$$-\int d\tau\left(\frac{\partial Y_z}{\partial y}\delta w + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\delta v\right)\cdot$$

Insgesamt erhält man daher für die Arbeit der inneren Kräfte, nach erfolgter Umordnung der Glieder rechts,

$$\begin{aligned}\delta W = \int \delta w d\tau = \int \mathbf{S}\left(X_x \delta\frac{\partial u}{\partial x} + Y_z \delta\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\right) d\tau \\ = -\int \mathbf{S}(X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) + X_z \cos(n, z))\delta u d\sigma \quad (3) \\ -\int \mathbf{S}\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right)\delta u d\tau,\end{aligned}$$

wo **S** das oft gebrauchte Summenzeichen ist.

Dieser Ausdruck ist in die Gleichung (1) des D'ALEMBERTschen Prinzips (1) einzusetzen. Das auf die Oberflächenkraft bezügliche Integral $\delta' S$ kann man durch die Komponenten $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ derselben darstellen

$$\delta' S = \int(\overline{X}\delta u + \overline{Y}\delta v + \overline{Z}\delta w)d\sigma, \tag{4}$$

womit (1) die Gestalt erhält

$$\begin{aligned}0 = \int \mathbf{S}\left[\varrho(\ddot{u} - X) + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right]\delta u d\tau \\ + \int \mathbf{S}(X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) + X_z \cos(n, z) - \overline{X})\delta u d\sigma.\end{aligned} \tag{5}$$

Setzt man die Koeffizienten der Variationen $\delta u, \ldots$ im Raum- und Oberflächenintegral einzeln gleich Null, so ergeben sich die *Differentialgleichungen:*

a) für das Innere

$$\begin{aligned}\varrho \ddot{u} &= \varrho X - \frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z}\\ \varrho \ddot{v} &= \varrho Y - \frac{\partial Y_x}{\partial x} - \frac{\partial Y_y}{\partial y} - \frac{\partial Y_z}{\partial z}\\ \varrho \ddot{w} &= \varrho Z - \frac{\partial Z_x}{\partial x} - \frac{\partial Z_y}{\partial y} - \frac{\partial Z_z}{\partial z},\end{aligned} \tag{6}$$

b) für die Grenzfläche

$$\begin{aligned}\overline{X} &= X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) + X_z \cos(n, z)\\ \overline{Y} &= Y_x \cos(n, x) + Y_y \cos(n, y) + Y_z \cos(n, z)\\ \overline{Z} &= Z_x \cos(n, x) + Z_y \cos(n, y) + Z_z \cos(n, z).\end{aligned} \tag{7}$$

Die letzteren sagen aus, daß ein Tetraeder, von dem drei Flächen den Koordinatenebenen parallel laufen und eine der Grenzfläche des Körpers angehört (ABC, s. d. Figur) sich unter dem Einfluß der auf es wirkenden Druckkräfte im Gleichgewicht befindet. — Auch hier spielen die Volumkräfte (X, Y, Z) gegenüber den Flächenkräften keine Rolle, weil sie, berechnet für ein unendlich kleines Tetraeder, von einer um 1 kleineren Dimension sind.

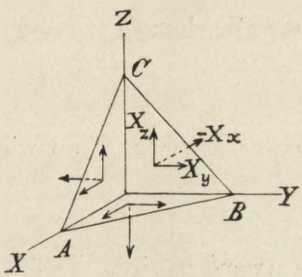

Fig. 23.

Die Gleichung der lebendigen Kraft ergibt sich aus (1), wenn man (Art. 15 a. E.) die Variationen durch die wirklich eintretenden Verschiebungen ersetzt. Man erhält so, wenn man den Zuwachs an kinetischer Energie mit

$$dT = \tfrac{1}{2}\int \varrho(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2)\, d\tau$$

und den der Arbeit der Volumkräfte mit

$$d'U = \int (X dx + Y dy + Z dz)\, d\tau$$

bezeichnet[1]):

$$dT - d'U - dW - d'S = 0.$$

1) Der obere Strich an d in $d'U$ und $d'S$ deutet wie früher an, daß diese Ausdrücke nicht notwendig vollständige Differentiale sind.

Setzt man in den Gleichungen (6) die aus Art. 39 (9), (10) zu entnehmenden Werte für die Druck- und Schubkräfte $X_x, \ldots Y_z, \ldots$ ein, nämlich

$$\begin{aligned} X_x &= -2B\frac{\partial u}{\partial x} - (A-2B)\Theta \\ Y_y &= -2B\frac{\partial v}{\partial y} - (A-2B)\Theta \\ Z_z &= -2B\frac{\partial w}{\partial z} - (A-2B)\Theta \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} Z_y = Y_z &= -B\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ X_z = Z_x &= -B\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ Y_x = X_y &= -B\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right), \end{aligned} \tag{8a}$$

wo

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

die räumliche Dilatation ist, und die Konstanten A, B mit dem Elastizitätsmodul E und dem Querkontraktionskoeffizienten μ durch die Gleichungen zusammenhängen

$$2B = \frac{E}{1+\mu}, \quad A - 2B = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}, \tag{8b}$$

so erhält man, wenn wieder der Differentialparameter

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

verwendet wird, die folgenden *Differentialgleichungen der Bewegung für elastisch feste Körper*

$$\begin{aligned} \varrho\ddot{u} &= B\Delta u + (A-B)\frac{\partial\Theta}{\partial x} + \varrho X \\ \varrho\ddot{v} &= B\Delta v + (A-B)\frac{\partial\Theta}{\partial y} + \varrho Y \\ \varrho\ddot{w} &= B\Delta w + (A-B)\frac{\partial\Theta}{\partial z} + \varrho Z. \end{aligned} \tag{9}$$

Man kann ihnen auch die Form geben

$$\begin{aligned} \varrho\ddot{u} &= A\frac{\partial\Theta}{\partial x} - 2B\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial z}\right) + \varrho X \\ \varrho\ddot{v} &= A\frac{\partial\Theta}{\partial y} - 2B\left(\frac{\partial\xi}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) + \varrho Y \\ \varrho\ddot{w} &= A\frac{\partial\Theta}{\partial z} - 2B\left(\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\right) + \varrho Z, \end{aligned} \tag{9a}$$

wo

$$\xi = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$\eta = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\zeta = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

ist.

Handelt es sich also um die Gestaltsänderung eines bekannten isotropen elastisch-festen Körpers, auf den die Volumkräfte (X, Y, Z) und die Oberflächenkräfte $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ wirken, so ergeben die Gleichungen (9) den Zusammenhang zwischen den ersteren und den Verschiebungen (u, v, w), die der Punkt x, y, z erfährt; (8), (8a) denjenigen zwischen den Verschiebungen und den inneren Kräften; (7) den zwischen den inneren Kräften in der Nähe der Oberfläche und den gegebenen Oberflächenkräften. Aus den letzteren sind die bei Integration der partiellen Differentialgleichungen (9) auftretenden willkürlichen Funktionen zu bestimmen, nachdem eine Annahme über den *Anfangszustand* gemacht ist.

Indessen sind die Schwierigkeiten, die sich der Lösung dieses Problems schon in einfachen Fällen entgegensetzen, meist unüberwindlich. Man geht deshalb alsbald zu erleichternden Annahmen über, indem man entweder sich auf Körper beschränkt, die hinsichtlich einer oder zweier Dimensionen sehr klein sind, wie dünne Platten, Schalen, Stäbe, oder indem man andere vereinfachende Annahmen über die Gestalt des Körpers und die Angriffsweise der Oberflächenkräfte macht. Läßt man dazu noch die Zeit außer Betracht, beschränkt man sich also auf statische Probleme, so gelingt es in manchen Fällen, wie wir im nächsten Artikel sehen werden, die Deformation eines von Kräften angegriffenen Körpers unter besonderen Voraussetzungen über die Kräfte und über die Verschiebungen aus den Differentialgleichungen zu ermitteln. Auch die Fortpflanzung von Erschütterungszuständen in einem unbegrenzten elastischen Medium — wobei dann also in einem bestimmten Zeitpunkt nicht die Kräfte, sondern die Verschiebungen gegeben sind — lassen sich mit Hilfe jener Differentialgleichungen übersehen, wie dies in einem späteren Artikel gezeigt werden wird.

Gewisse Probleme der Hydrodynamik und der Elastizitätstheorie, die sich auf besonders begrenzte Körper oder auf eine besondere Annahme über den Bewegungszustand beziehen, machen die Kenntnis der Differentialgleichungen in anderen als rechtwinkligen Koordinaten wünschenswert. Statt nun die aus zweiten Differentialquotienten zusammengesetzten Bewegungsgleichungen selbst zu transformieren, formuliert man besser schon die Aussage des Grundgesetzes ((1) Art. 25; (5) Art. 36) in den neuen Koordinaten (p_1, p_2, p_3). Denn einerseits transformiert sich der Ausdruck für die doppelte Variation des Zwanges $\delta m f^2$ nach Art. 6 wie folgt:

$$\delta m f^2 = \int \delta(\ddot{u}^2 + \ddot{v}^2 + \ddot{w}^2) dm = \int \sum \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial |\mathfrak{v}|^2}{\partial \dot{\pi}_k}\right) \delta \ddot{\pi}_k dm$$

wo

$$|\mathfrak{v}|^2 = \dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 = 2 \Sigma \Sigma \alpha_{ik} \dot{\pi}_i \dot{\pi}_k$$

das Quadrat der Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung des Massenelementes dm ist, π_k, seine Verschiebung in Richtung der Koordinate p_k, eine lineare Funktion der u, v, w, und die α_{ik} bloß von den (in der Zeit unveränderlichen) p abhängen. Andererseits setzt sich in jedem Fall die potentielle Energie der inneren Kräfte nur aus Differentialquotienten 1. Ordnung der Verschiebungen u, v, w nach den Koordinaten zusammen, und zwar in Ausdrücken, die man schon bei Lamé, leçons s. l. coord. curvilignes, 1859 in orthogonale und bei L. Maurer, Deform. gekrümmter Platten, Archiv d. Math. u. Phys. (3) 5, 1902, in allgemeine Koordinaten transformiert vorfindet. — Doch müssen wir uns versagen, hierauf näher einzugehen. (S. auch eine Abh. d. Verf. in Math. Ann. Bd. I, S. 246.)

41. Torsion eines geraden Zylinders mit elliptischer Basis.

Von Volumkräften sehen wir im folgenden ab, setzen also in den Gleichungen des vorstehenden Artikels

$$X = Y = Z = 0.$$

Man könnte versuchen, zunächst die Funktionen u, v, w von x, y, z, t den Gleichungen (9) des vorigen Artikels entsprechend anzunehmen. Würde man dann solche zufällig gefundenen Lösungen in die Gleichungen (8) einsetzen und an der Hand von (7) zur Oberfläche übergehen, so würden sich Oberflächenkräfte ergeben, die voraussichtlich kein besonderes physikalisches oder technisches Interesse darböten, sich wahrscheinlich auch kaum realisieren ließen.

Wohl von solchen Überlegungen geleitet, hat de Saint-Venant zur Ermittlung von neuen und brauchbaren Lösungen des Gleichungssystems den folgenden Weg eingeschlagen.[1]) Er nimmt nur *einen Teil der Oberflächenkräfte* an und dazu *einen Teil der Verschiebungen (de St.-Venantsches Problem)* in der Weise, daß durch beide zusammen das System der Gleichungen (7)—(9) der Integration zugänglich wird, indem sich die übrigen gerade noch aus ihnen bestimmen lassen. Wie dies zu geschehen hat, wollen wir an dem Problem der Verdrehung (Torsion) eines geraden Zylinders mit elliptischer Basis unter dem Einfluß von Kräften, die tangential in den Endflächen angebracht sind, zeigen.

Die Achse eines geraden Zylinders von elliptischer Basis und zunächst sehr kleiner Höhe sei die Z-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems, dessen Ursprung in die eine Endfläche falle. Mit dem Flächenelement, das den Ursprung enthält, sei auch nach der Deformation die XY-Ebene fest verbunden, so daß für die Punkte $x = y = z = 0$, $x + dx = y = z = 0$, $x = y + dy = dz = 0$, $u = v = w = 0$ sei. Mit anderen Worten, man nimmt an, daß

$$u_0 = v_0 = w_0 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 = \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 = 0 \quad (1)$$

sei, wo durch den Index Null bezeichnet wird: für

$$x = y = z = 0.$$

Bezüglich des deformierten Zustandes machen wir zwei weitere Annahmen, deren jede wir sogleich hinsichtlich des Einflusses besprechen wollen, den sie auf die Formeln (7)—(9) des vorigen Artikels hat.

1. Auf den Zylindermantel wirken überhaupt keine Druckkräfte; auf die Endflächen bloß Kräfte, deren Richtung in die Fläche selbst fällt (also bloß Schub- oder Tangentialkräfte); für alle Stellen des Mantels sei also

$$\bar{Z} = 0.$$

Für dieselben ist andererseits, auch nach einer kleinen Deformation,

$$\cos (n, z) = 0.$$

Daher hat man vermöge (7) für einen beliebigen Punkt des Mantels

$$Z_x \cos (n, x) + Z_y \cos (n, y) = 0,$$

oder auch, weil für jedes Linienelement ds der Oberfläche (nament-

1) De Saint-Venant, Mém. sur la torsion des prismes, Sav. étrang. Mém. 14 (1856). Flexion des prismes, Liouv. Journ. (2) I (1856). S. auch Clebsch, Elastizität fester Körper, Leipzig 1862, S. 74 ff.

lich auch für ein solches der Begrenzungskurve der Endfläche, s. d. Figur)

$$dx \cos(n, x) + dy \cos(n, y) + dz \cos(n, z) = 0$$

ist,

$$Z_x dy - Z_y dx = 0. \tag{2}$$

Die Punkte der ursprünglich in die XY-Ebene fallenden Endfläche des Zylinders werden sich nur wenig von dieser entfernen, weil nach Art. 21 die Verschiebungen u, v, w sehr kleine Größen sind. Daher ist für sie auch nach der Deformation nahezu

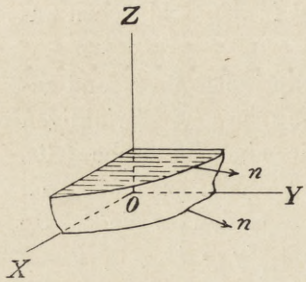

Fig. 24.

$$\cos(n, x) = 0; \ \cos(n, y) = 0, \tag{3}$$

und damit ergibt sich, da nach Annahme (1) $\overline{Z} = 0$ ist, daß für alle Punkte des Endquerschnitts (Formel (7) des vorigen Artikels)

$$Z_z = 0 \tag{3a}$$

ist.

2. Die Längsfasern (parallel zur Achse geschnittene Parallelepipede) des zylindrischen Stabes erleiden keinerlei seitlichen Druck, und ihre etwa rechteckigen Querschnitte bleiben rechtwinklig.

Im Zylinder ist nach dieser Annahme durch das ganze Innere

$$X_x = Y_y = 0; \quad Y_x = X_y = 0. \tag{4}$$

3. Dabei ist die Höhe des Zylinders so gering anzunehmen, daß auch in den von der XY-Ebene entfernten Querschnitten die Verschiebungsgrößen u, v, w sehr kleine Größen (Art. 21) sind.

Dann gelten die Formeln (3), (3a) auch für die andere Endfläche, und damit die (3a) überhaupt.

Durch die Gleichungen (1)—(4) in Verbindung mit denen (7)—(9) des vor. Art. ist, wie man sehen wird, das Problem in eine lösbare Form gebracht.

Zunächst geht das System (9) über in

$$\Delta u = 0; \quad \Delta v = 0; \quad \Delta w = 0. \tag{5}$$

Ferner folgt wegen (3a), (4) aus dem System (8) des vor. Artikels

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{6}$$

weil die rechten Seiten homogene lineare Funktionen dieser drei Großen sind, deren Determinante nicht verschwindet. Also ist auch

$$\Theta = 0. \tag{6a}$$

Die Gleichungen (8a) werden

$$
\begin{aligned}
&B\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-Z_y=-Y_z\\
&B\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)=-X_z=-Z_x\\
&\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Für die Begrenzungskurve eines früher ebenen Querschnitts hat man, wegen (2):

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)dy-\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)dx=0. \tag{8}$$

Im Endquerschnitt $z=0$ ist (vgl. (7) des vor. Art.):

$$X_z=\overline{X};\quad Y_z=\overline{Y};\quad Z_z=0.$$

Aus der letzten Gleichung (7) folgt für alle Punkte im Inneren:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0,$$

oder wegen (6)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0. \tag{9}$$

Daher erhält man aus (5), wegen (6):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0.$$

Hiernach sind die Funktionen u und v je in x, y, z *linear*; und zwar enthält wegen (6) u kein x, v kein y. Es wird also sein

$$
\begin{aligned}
u&=z(py+q)+ry+s\\
v&=z(p_1x+q_1)+r_1x+s_1,
\end{aligned}
$$

wo die p, q, r, s Konstanten sind. Wegen der letzten Gleichung (7) ist noch

$$p_1=-p;\quad r_1=-r.$$

Weil ferner nach (1) für $x=y=z=0$

$$u=v=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

ist, so ist

$$s=s_1=0;\quad r=r_1=0.$$

Man hat also

$$
\begin{aligned}
u&=z(\;\;py+q\;)\\
v&=z(-px+q_1).
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Die Funktion w genügt ((5), (6)) der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \tag{11}$$

Da in der Umgebung von $x = y = 0$ außerdem w eine stetige Funktion von x, y ist, so ist w nach ganzen Potenzen von x, y entwickelbar. Sei also

$$w = \alpha + (\beta x + \gamma y) + (\delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2) + \cdots.$$

ein Integral von (11), wo, wegen (6), die $\alpha, \beta, \cdots$ von z nicht mehr abhängen. Dann ist wegen (1)

$$\alpha = \beta = \gamma = 0,$$

also

$$w = \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2 + \cdots. \tag{12}$$

Aber die Funktion w genügt noch einer Grenzgleichung, die man erhält, wenn man in (8) für $z = 0$ den Wert von $\frac{dy}{dx}$ aus der Gleichung der Grenzkurve des Querschnitts einträgt. Denn wenn etwa die Gleichung der Grenz-Ellipse (bei nicht deformiertem Zylinder)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{13}$$

ist, woraus sich die der deformierten Grenzkurve durch Einsetzen von $x + u$, $y + v$ an Stelle von x, y ergibt, so bestimmt sich wegen (10) die Tangentenrichtung für $z = 0$ aus

$$\frac{x\,dx}{a^2} + \frac{y\,dy}{b^2} = 0.$$

Daher geht (8) mit Benutzung von (10) über in:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} + py + q\right)\frac{x}{a^2} + \left(\frac{\partial w}{\partial y} - px + q_1\right)\frac{y}{b^2} = 0, \tag{14}$$

eine Gleichung, die nach Einführung von (12) mit Hilfe von (13) identisch erfüllt sein muß. Man erhält zunächst

$$(q_1 + (\varepsilon - p)x + 2\zeta y + \cdots)\frac{y}{b^2} + (q + (\varepsilon + p)y + 2\delta x + \cdots)\frac{x}{a^2} = 0, \tag{15}$$

daneben

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} - 1 = 0. \tag{13}$$

Die Gleichungen (15), (13) stellen zwei Kurven in der XY-Ebene dar, die einen Bestandteil gemeinsam haben müssen, wenn nicht (15) identisch, d. h. für alle Werte von x, y verschwindet. Offenbar ist nur das letztere möglich. Man erhält so:

$$q = 0; \quad q_1 = 0;$$

$$\frac{\varepsilon - p}{b^2} + \frac{\varepsilon + p}{a^2} = 0; \quad \delta = \zeta = \cdots = 0,$$

womit

$$w = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} p x y$$

wird, ein Ausdruck, der zugleich der Differentialgleichung (11) für w genügt. — Man könnte w aus (11) und der Randbedingung (8) auch auf einem mehr an die Funktionentheorie sich anschließenden Wege bestimmen (s. z. B. LOVE-TIMPE, Lehrbuch der Elastizität, Leipzig 1907, Art. 217).

Das System der Verschiebungskomponenten ist also

$$\begin{aligned} u &= p z y \\ v &= - p z x \\ w &= \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} p x y. \end{aligned} \tag{16}$$

Hieraus ergeben sich vermöge (7) die Tangentialkräfte in irgendeinem Querschnitt, insbesondere auch die in den Endquerschnitten anzusetzenden äußeren Kräfte. Es wird nämlich (Art. 40 (8)):

$$\begin{aligned} X_z &= - \frac{E}{1 + \mu} \frac{p a^2 y}{a^2 + b^2} \\ Y_z &= \frac{E}{1 + \mu} \frac{p b^2 x}{a^2 + b^2}. \end{aligned} \tag{17}$$

Da in der Begrenzungskurve jedes Querschnittes

$$X_z dy - Y_z dx = 0$$

ist, und da derselbe Wert von dy/dx, welcher der Grenzkurve eines Querschnittes genügt, auch jeder zu ihr ähnlichen Kurve im Inneren desselben genügt, so wirken alle Tangentialkräfte — symmetrisch hinsichtlich der Z-Achse verteilt — in Richtung der Tangenten eines Systemes von Kurven, welche, der Grenzkurve ähnlich, das Innere des Querschnittes ausfüllen. Was die Gestalt des Zylinders nach der Deformation angeht, so ergibt sich aus der Formel für w (16) die Veränderung der z-Koordinate eines Punktes x, y in irgendeinem Querschnitt. Insbesondere geht der ursprünglich ebene Endquerschnitt $z = 0$, für den zugleich $u = v = 0$ ist (16), in die durch die letzte Gleichung von (16)

$$w = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} p x y$$

dargestellte Fläche, ein hyperbolisches Paraboloid über. Die zu größeren Werten von z gehörigen Querschnitte sind dieser kongruent und nur durch einen kleinen Winkel gegen sie um die Z-Achse gedreht. Denn setzt man

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

so wird

$$u^2 + v^2 = p^2 z^2 r^2, \quad \frac{u}{v} = -\operatorname{tg}\varphi,$$

d. h. die Verschiebungen sind für alle von der Z-Achse gleichentfernten Punkte eines Querschnittes ihrem Abstand z von der XY-Ebene proportional und wie die Tangenten eines Kreises gerichtet. Weil für $r = 1$, $z = 1$,

$$u^2 + v^2 = p^2$$

ist, so bedeutet p den (sehr kleinen) Winkel, durch den jeder Querschnitt gegen einen um den Abstand 1 von ihm entfernten gedreht ist, p ist also der Höhe des Schraubenganges der Schraubenlinie, in welche eine zur Z-Achse parallele Faser übergegangen ist, umgekehrt proportional. Wegen der Kongruenz aller deformierten Querschnitte kann man sich das ursprünglich als kurz vorausgesetzte Zylinderstück in kongruenter Wiederholung angeschlossen denken und so den Zylinder beliebig verlängern, wobei dann die Formeln (16) nicht aufhören zu gelten.

Die „gefährliche" Stelle des Querschnitts, die nämlich, wo die Widerstandskraft des Materials gegen Schub am stärksten in Anspruch genommen wird, berechnet sich aus den Formeln (17). Ist a die große, b die kleine Halbachse der Ellipse, so hat der Ausdruck für X_z seinen größten Wert an der Stelle $x = 0$, $y = b$, also am Ende der kleinen Halbachse.

Das Gesamtmoment, das, in den beiden Endquerschnitten angebracht, die besprochene Torsion hervorzubringen imstande ist, hat, wenn man mit $d\sigma$ ein Element des Endquerschnittes bezeichnet, den Wert

$$\int (Y_z x - X_z y)\,d\sigma = \frac{E p a^2 b^2}{(1+\mu)(a^2+b^2)} \int \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) d\sigma = \frac{E p a^3 b^3 \pi}{(1+\mu)(a^2+b^2)} \qquad (18)$$

Es fehlt nur noch der Nachweis, daß bei Annahme der Oberflächenkräfte

$$\overline{X} = X_z; \quad \overline{Y} = Y_z,$$

entsprechend den Formeln (17) und bei der angenommenen Orientierung des Zylinders gegen das Koordinatenkreuz, das System (16) der Verschiebungen u, v, w *das einzig mögliche* ist. Dieser wird im folgenden Artikel erbracht.

42. Eindeutigkeit der Lösung.

Wir werden allgemein zeigen[1], daß zu einem gegebenen System von Volumkräften X, Y, Z und von Oberflächendrücken $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ nur *ein* System von inneren Kräften $X_x, \ldots Y_z, \ldots$ existiert, das — für den Zustand des Gleichgewichts, also für $\ddot{u} = \ddot{v} = \ddot{w} = 0$ gebildet — den allgemeinen Gleichungen (6) bis (8a) des Art. 40 genügt, d. h. daß je zwei Systeme von Verschiebungsgrößen u, v, w und zugehörigen $X_x, \ldots Y_z, \ldots$, die jenen Gleichungen genügen, sich nur durch eine räumliche Parallelverschiebung und Drehung des (hierbei als starr gedachten) elastischen Körpers unterscheiden.

In der Tat: Es mögen die Systeme (6) bis (8a) des Art. 40, außer durch die Größen

$$u, v, w, X_x, \ldots Y_z, \ldots, \tag{A}$$

noch durch

$$u_1, v_1, w_1, X_{x_1}, \ldots Y_{z_1}, \ldots \tag{B}$$

befriedigt werden. Setzt man

$$u_1 - u = u', \quad v_1 - v = v', \quad w_1 - w = w', \tag{1}$$

so haben die Differenzen

$$X_{x_1} - X_x = X'_x; \ldots Y_{z_1} - Y_z = Y'_z; \ldots$$

dieselbe mechanische Bedeutung wie die einzelnen Glieder, weil die partiellen Differentialquotienten der u, v, w, aus denen sie sich linear zusammensetzen, selbst sich linear, d. h. wie die u in (1), transformieren. Nun werden die Gleichungen (6) im Falle des Gleichgewichts, also nachdem

$$\ddot{u} = \ddot{v} = \ddot{w} = 0 \tag{2}$$

gesetzt ist, sowohl durch das System (A) wie durch das (B) befriedigt. Zieht man je entsprechende Gleichungen voneinander ab, so erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial X'_x}{\partial x} + \frac{\partial X'_y}{\partial y} + \frac{\partial X'_z}{\partial z} \\ 0 &= \frac{\partial Y'_x}{\partial x} + \frac{\partial Y'_y}{\partial y} + \frac{\partial Y'_z}{\partial z} \\ 0 &= \frac{\partial Z'_x}{\partial x} + \frac{\partial Z'_y}{\partial y} + \frac{\partial Z'_z}{\partial z}. \end{aligned} \tag{3}$$

[1] Nach Clebsch, Theorie der Elastizität fester Körper, § 21, S. 67.

Ebenso erhält man aus (7), Art. 40,

$$X'_x \cos(n, x) + X'_y \cos(n, y) + X'_z \cos(n, z) = 0. \qquad (4)$$

. . . .

Nun wurden wir zu den Gleichungen (6), (7) des Art. 40 durch die Gleichung des D'ALEMBERTschen Prinzips ((1) dieses Art.) geführt, die wegen (2) die Form erhält

$$\int -\varrho d\tau(X\delta u + Y\delta v + Z\delta w) - \delta W - \delta' S = 0, \qquad (5)$$

wo

$$\delta' S = \int(\overline{X}\delta x + \overline{Y}\delta y + \overline{Z}\delta z)d\sigma$$

war. Zu Gleichungen von der Form (3), (4) würde auch die Bedingung (5) führen, aber nur unter der Annahme

$$X = Y = Z = \overline{X} = \overline{Y} = \overline{Z} = 0.$$

Alsdann reduziert sich jedoch (5) auf

$$-\delta W = \int -\delta w \cdot d\tau = 0,$$

wo

$$-\delta w = \frac{E}{2(1+\mu)}\left(\delta(\varrho_1^2 + \varrho_2^2 + \varrho_3^2) + \frac{\mu}{1-2\mu}\delta\Theta^2\right)$$

eine wesentlich positive Größe ist (weil (Art. 39) der Koeffizient $\mu < \frac{1}{2}$ ist), die nur dann Null wird, wenn allenthalben im Körper

$$\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = 0$$

ist, d. h. wenn überhaupt keine Deformation stattfindet.

Ist also der Körper mit dem Koordinatensystem in bestimmter Weise verbunden (wie wir es von dem elliptischen Zylinder oben vorausgesetzt haben), so ist das Problem des Gleichgewichts des elastisch-festen Körpers durch *die Annahme* der auf ihn wirkenden *Volumkräfte und Oberflächenkräfte völlig bestimmt und eindeutig lösbar.*

43. Fortpflanzung ebener Wellen in einem elastisch-festen Mittel.

Wir machen eine weitere Anwendung von den Differentialgleichungen der Bewegung (9a) in Art. 40, auf den Fall nämlich eines ins Unendliche ausgedehnten elastisch-festen Mediums, auf das keine Oberflächen- und keine Volumkräfte wirken. Diese Gleichungen

$$\begin{aligned}
\varrho\ddot{u} &= A\frac{\partial\Theta}{\partial x} - 2B\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial z}\right)\\
\varrho\ddot{v} &= A\frac{\partial\Theta}{\partial y} - 2B\left(\frac{\partial\xi}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) \qquad (1)\\
\varrho\ddot{w} &= A\frac{\partial\Theta}{\partial z} - 2B\left(\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\right),
\end{aligned}$$

oder in vektoranalytischer Form

$$\varrho \ddot{\mathfrak{u}} = A \operatorname{grad} \Theta - 2B \operatorname{rot} \mathfrak{w},$$

wo wieder der Solenoidalvektor

$$(\xi, \eta, \zeta) = \mathfrak{w} = \tfrac{1}{2} \operatorname{rot} \mathfrak{u}$$

ist, erinnern an diejenigen des Art. 31, durch die ein Vektor in einen Potential- und einen Solenoidalvektor zerlegt wird. In der Tat erhalten sie dieselbe Gestalt, wenn man setzt

$$\Theta = \frac{\varrho}{A} \frac{d^2 \psi}{dt^2}; \tag{2}$$

$$-\xi = \frac{\varrho}{2B} \frac{d^2 L}{dt^2}; \quad -\eta = \frac{\varrho}{2B} \frac{d^2 M}{dt^2}; \quad -\zeta = \frac{\varrho}{2B} \frac{d^2 N}{dt^2}, \tag{2a}$$

wo L, M, N die Komponenten eines Vektorpotentials $\mathfrak{q}$ sind, dessen Divergenz verschwindet. Denn dann gehen die Gleichungen (1) über in:

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= \frac{\partial \ddot{\psi}}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{N}}{\partial y} - \frac{\partial \ddot{M}}{\partial z} \\ \ddot{v} &= \frac{\partial \ddot{\psi}}{\partial y} + \frac{\partial \ddot{L}}{\partial z} - \frac{\partial \ddot{N}}{\partial x} \\ \ddot{w} &= \frac{\partial \ddot{\psi}}{\partial z} + \frac{\partial \ddot{M}}{\partial x} - \frac{\partial \ddot{L}}{\partial y}, \end{aligned} \tag{3}$$

kürzer in:

$$\ddot{\mathfrak{u}} = \operatorname{grad} \ddot{\psi} + \operatorname{rot} \ddot{\mathfrak{q}}.$$

Integriert man die Gleichungen (3) zweimal nach t und läßt die linearen Funktionen von t mit willkürlichen Funktionen von x, y, z als Koeffizienten, die bei der Integration auftreten, in u, v, w eingehen, so ergibt sich

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \\ v &= \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \\ w &= \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}. \end{aligned} \tag{4}$$

Wenn nun im Unendlichen die Größen $\Re u, \Re v, \Re w$ (wo $\Re$ die über jede Grenze wachsende Entfernung vom Ursprung bedeutet) verschwinden, so ist, wie früher (Art. 31) bewiesen worden ist, die allgemeinste Lösung dieses Gleichungssystems auf folgende andere zurückführbar. Wegen

$$\Theta = \operatorname{div} \mathfrak{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \Delta \psi,$$

ist (2)

$$\varrho \frac{d^2\psi}{dt^2} = A\Delta\psi, \tag{5}$$

ferner (Art. 31, F. (10))

$$\Delta L = -2\xi; \quad \Delta M = -2\eta; \quad \Delta N = -2\zeta, \tag{6}$$

und daher, wegen (2a)

$$\varrho \frac{d^2 L}{dt^2} = B\Delta L; \quad \varrho \frac{d^2 M}{dt^2} = B\Delta M; \quad \varrho \frac{d^2 N}{dt^2} = B\Delta N, \tag{6a}$$

wobei noch die Bedingung besteht (s. oben)

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = \operatorname{div} \mathfrak{q} = 0. \tag{6b}$$

Die Gleichungen (4), (5), (6) können diejenigen (1) ersetzen. Trägt man die Lösungen von (5), (6) in (4) ein, so bildet (4) ein System von Verschiebungen, das die Gleichungen (1) befriedigt. Wir wollen den Potentialvektor grad ψ mit $\mathfrak{u}'$, den Solenoidalvektor rot $\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{u}''$ bezeichnen. Dann zerlegt sich der Vektor $\mathfrak{u}$ in:

$$\begin{aligned} \mathfrak{u} &= \mathfrak{u}' + \mathfrak{u}'', \\ \mathfrak{u}' &= \operatorname{grad} \psi \\ \mathfrak{u}'' &= \operatorname{rot} \mathfrak{q} \end{aligned} \tag{7}$$

wo ... ist.

Um zu solchen Lösungen der Gleichungen (5), (6) zu gelangen, die eine mechanische Bedeutung besitzen, wollen wir annehmen, daß sich an einer Stelle im Inneren des ins Unendliche ausgedehnten Mediums eine Energiequelle befinde, welche dort einmalige oder wiederholte Erschütterungen (oszillierende Bewegungen) hervorruft. Jede solche Erschütterung wird infolge der durch sie veranlaßten Deformation der umgebenden Massenteile solche in den Nachbarelementen hervorrufen und auf diese Weise sich in den Raum fortpflanzen. Die Erschütterung wird zu einer gewissen Zeit t auf allen Punkten einer das Erschütterungszentrum umgebenden krummen Oberfläche angelangt sein. Beschränkt man die Untersuchung auf die nächste Umgebung eines Punktes P dieser Oberfläche, so kann man diese in erster Annäherung durch ein Element ihrer Tangentialebene

$$K = \alpha x + \beta y + \gamma z - C = 0$$

ersetzen, wo wir

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \tag{8}$$

annehmen wollen. Während nun die Oberfläche sich ausbreitet, kann man diejenigen Tangentialebenen verfolgen, für welche α, β, γ denselben Wert haben, während nur der Abstand C vom Ursprung sich ändert, wobei dann C eine Funktion von t ist. Wir wollen

$$C = Vt,$$

wo im isotropen Mittel V eine Konstante ist, annehmen und werden die Zulässigkeit dieser Annahme durch Einsetzen prüfen. Dann bedeutet V die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Ebene $K = 0$. Der Vektor $\mathfrak{u} = (u, v, w)$, der die Bewegung von P darstellt, wird auch diejenige von Punkten der Oberfläche, die sich in der Nachbarschaft von P befinden, darstellen. Man gelangt so zur Einführung *ebener Wellen*, d. h. von partikulären Integralen der Differentialgleichungen (1), für welche $\mathfrak{u}$ als Funktion von

$$K \equiv \alpha x + \beta y + \gamma z - Vt$$

angenommen wird, für die also der Ausschlag $\mathfrak{u}$ zu einer Zeit t derselbe ist für *alle* auf der Ebene $K = 0$ gelegenen Punkte. Als Funktion von K (oder besser von K/V), welche den Erregungszustand definiert, wählen wir eine einfache periodische Funktion, indem wir setzen

$$\begin{aligned} u = a\cos 2\pi n \frac{K}{V} &= a\cos 2\pi n\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{V}\right) \\ v &= b\cos 2\pi n\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{V}\right) \\ w &= c\cos 2\pi n\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{V}\right), \end{aligned} \tag{9}$$

wo a, b, c, n Konstanten sind. Wir prüfen die Zulässigkeit der gemachten Annahmen durch Einsetzen der Formeln (9) in die Differentialgleichungen (1), oder auch in [Art 40 (9)]:

$$\varrho \ddot{u} = B\triangle u + (A - B)\frac{\partial \Theta}{\partial x}, \quad \text{usw.}$$

Man erhält, wenn man den Kosinus abwirft und

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = \delta \tag{10}$$

setzt, nach Division mit $-4\pi n^2$,

$$\varrho a = \frac{1}{V^2} Ba(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + \frac{1}{V^2}(A - B)\alpha\delta,$$

oder, mit Rücksicht auf (8), die erste der folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} (A - B)\alpha\delta + (B - \varrho V^2)a &= 0 \\ (A - B)\beta\delta + (B - \varrho V^2)b &= 0 \\ (A - B)\gamma\delta + (B - \varrho V^2)c &= 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Aus ihnen ergibt sich der Zusammenhang zwischen den eingeführten Konstanten, der bestehen muß, wenn (9) ein Lösungssystem sein soll. Bevor wir hierauf eingehen, wollen wir die Bedeutung jener Konstanten feststellen.

Die Verhältnisse

$$u : v : w = a : b : c$$

geben die Richtung an, in der die Punkte der Ebene $K = 0$, der „Wellenebene“, und der zu ihr parallelen Ebenen, auf welche die Bewegung sich fortpflanzt, sich verschieben. Die Größe dieser Verschiebung — der Schwingungsausschlag an der Stelle x, y, z —

$$|\,\mathfrak{u}\,| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cos 2\pi n \left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{V}\right) \tag{12}$$

wächst von Null bis zu $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, der „Amplitude“, und geht wieder auf Null zurück in einer Zeit $\frac{1}{2}T$, der halben „Periode“ (Schwingungsdauer), die sich bestimmt aus der Bedingung, daß der Vektor $\mathfrak{u}$ denselben Wert wieder erhält, nämlich aus

$$\cos 2\pi n \left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{V}\right) = \cos 2\pi n \left(t + T - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{V}\right)$$

oder aus

$$nT = 1\,. \tag{13}$$

n ist also der reziproke Wert der Schwingungsdauer oder die Zahl der in der Zeiteinheit erfolgenden Schwingungen, die „Schwingungszahl“. Um auch die Bedeutung von $\frac{V}{n} = \lambda$ zu ermitteln, betrachten wir den Bewegungszustand, der zu *derselben* Zeit auf parallelen Ebenen besteht.

Die Entfernung λ der beiden Ebenen

$$K = 0, \;\; K + \lambda \equiv K + \frac{V}{n} = 0$$

hat die Eigenschaft, daß der Ausschlag (u, v, w) auf beiden gleichzeitig der nämliche ist, weil

$$2\pi n \frac{K}{V} = 2\pi n \left(K + \frac{V}{n}\right) \cdot \frac{1}{V} - 2\pi$$

ist. Der Entfernung λ entspricht also bei den Wasserwellen die aus Berg und Tal bestehende „Wellenlänge“; daher die Bezeichnung.

Wir wenden uns nun zur Diskussion der Formeln (11) zwischen den Konstanten der Lösungen (9). Multipliziert man die (11) mit bzw. α, β, γ und addiert, so erhält man

$$\delta(A - \varrho V^2) = 0\,. \tag{14}$$

Diese Gleichung wird auf zwei Weisen befriedigt.

a) Man setze

$$\delta = a\alpha + b\beta + c\gamma = 0 .$$

Dann steht die Richtung $\mathfrak{u}$ auf derjenigen (α, β, γ) der Normalen zur Wellenebene, der „Wellennormalen", senkrecht, d. h. die Schwingungen erfolgen *in* der Wellenebene, also *senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung*: man hat *Transversalwellen.* Führt man in (11) $\delta = 0$ ein, so wird

$$B = \varrho V^2 .$$

Daher ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit V der Transversalwellen in einem Medium von der Dichte ϱ

$$V = \sqrt{\frac{B}{\varrho}} .$$

Die Geschwindigkeit V ist um so kleiner, je dichter das Medium ist. Diese Beziehung liefert eine Deutung für die Konstante B.

Weil der Ausdruck für die räumliche Dilatation Θ

$$\Theta = (a\alpha + b\beta + c\gamma)\frac{2\pi}{\lambda} \sin\frac{2\pi}{\lambda}(Vt - (\alpha x + \beta y + \gamma z))$$

den Faktor δ hat, so verschwindet mit δ auch Θ, sowie umgekehrt. Wegen $\Theta = 0$ erfolgt die Fortpflanzung von Transversalwellen in einem elastischen Medium ohne räumliche Ausdehnung oder Verdichtung; es verhält sich wie eine inkompressible Masse.

b) Zweite Annahme. Man setze (14):

$$A = \varrho V^2 .$$

Hiermit ergibt sich aus (11):

$$a = \alpha\delta ; \; b = \beta\delta ; \; c = \gamma\delta .$$

In diesem Falle fällt die Schwingungsrichtung

$$u : v : w = \alpha : \beta : \gamma$$

mit der der Wellennormalen zusammen, sie erfolgt *in der Fortpflanzungsrichtung.* Man hat es also mit *Longitudinalwellen* zu tun, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$V = \sqrt{\frac{A}{\varrho}}$$

wieder eine Deutung der Konstanten A des Mediums gibt.

Im Fall (a) ist, wegen $\delta = 0$, $\Theta = 0$ und (2) die (hier periodische) Funktion $\psi \equiv 0$, und somit der Vektor

$$\mathfrak{u}' = \operatorname{grad} \psi = 0$$

Im Falle (b) dagegen ist $\Theta \neq 0$, und zwar

$$A\Theta = \varrho\ddot{\psi} = A\triangle\psi. \tag{15}$$

Man muß diesem Falle der Longitudinalschwingungen denjenigen Vektor zuordnen, den wir in (7) durch $\mathfrak{u}' = \operatorname{grad}\psi$ definiert hatten, und für den die Differentialgleichungen (1) gelten

$$\begin{aligned} \varrho\ddot{u}' = \varrho\frac{\partial\ddot{\psi}}{\partial x} &= A\frac{\partial\Theta}{\partial x} \\ \varrho\ddot{v}' &= A\frac{\partial\Theta}{\partial y} \\ \varrho\ddot{w}' &= A\frac{\partial\Theta}{\partial z}. \end{aligned} \tag{16}$$

Dem Falle (a) der Transversalschwingungen ordnet sich dagegen der Vektor

$$\mathfrak{u}'' = \operatorname{rot}\mathfrak{q}$$

zu, für welchen, wenn wieder L, M, N die Komponenten des Solenoidalvektors $\mathfrak{q}$ sind, die Gleichungen bestehen (1), (6):

$$\begin{aligned} \varrho\ddot{u}'' &= B\left(\frac{\partial\triangle N}{\partial y} - \frac{\partial\triangle M}{\partial z}\right) = -2B\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial z}\right) \\ \varrho\ddot{v}'' &= B\left(\frac{\partial\triangle L}{\partial z} - \frac{\partial\triangle N}{\partial x}\right) = -2B\left(\frac{\partial\xi}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) \\ \varrho\ddot{w}'' &= B\left(\frac{\partial\triangle M}{\partial x} - \frac{\partial\triangle L}{\partial y}\right) = -2B\left(\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\right). \end{aligned} \tag{17}$$

Im Falle ebener Wellen lassen sich also die allgemeinen Gleichungen (1) für $\mathfrak{u}$ durch diejenigen (16), (17) für die Komponenten von $\mathfrak{u}$ ersetzen.

Die Gesetze der Fortpflanzung ebener Wellen in einem unendlich ausgedehnten Mittel haben eine Bedeutung auch für Kugelwellen oder überhaupt krummflächige Wellen in einem begrenzten Mittel, weil man die krumme Fläche in erster Annäherung durch ein Stück der Tangentialebene selbst, in zweiter durch diese und ihre Nachbarebenen, die Fläche also als eingehüllt von ihren Tangentialebenen ansehen kann. Man denke sich einen Punkt in der Nähe einer krummen Fläche als Schnittpunkt unendlich vieler von ihr der Lage nach unendlich wenig verschiedener Tangentialebenen, deren jede Träger einer Bewegung der oben beschriebenen Art ist. Ist eine Tangentialebene an eine solche Wellenfläche zur Zeit t durch

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - Vt = 0 \tag{18}$$

dargestellt, so gilt für eine Nachbarstelle

$$(\alpha + d\alpha)x + (\beta + d\beta)y + (\gamma + d\gamma)z - Vt = 0.$$

Gehen beide Ebenen durch denselben Punkt x, y, z wenig außerhalb der Fläche, so ist für diesen auch

$$x d\alpha + y d\beta + z d\gamma = 0. \tag{18a}$$

Wegen

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

besteht daneben die Gleichung

$$\alpha d\alpha + \beta d\beta + \gamma d\gamma = 0. \tag{18b}$$

Für die unendlich vielen Tangentialebenen, die alle durch x, y, z gehen, nimmt $d\alpha : d\beta : d\gamma$ andere und andere Werte an. Es muß daher, wenn für sie alle (18a), (18b) nebeneinander bestehen sollen,

$$x : y : z = \alpha : \beta : \gamma$$

sein.

Der Schnittpunkt der Tangentialebenen, die zu derjenigen (18) benachbart sind, bewegt sich also in der Richtung der *Normalen* zur letzteren fort. Man könnte sich vorstellen, daß nur in dieser Linie die Wirkung unendlich vieler unendlich wenig verschiedener Ausschläge von den Sinnen aufgefaßt und als Lichtstrahl oder Schall empfunden würde.

Die Gleichungen (15), (16) für die Fortpflanzung von Longitudinalwellen werden, obgleich für *elastisch feste* Körper aufgestellt, doch auch für die Fortpflanzung von Schallwellen in einem *elastisch flüssigen* Medium in Anspruch genommen. Denn gegenüber einer Bewegungsform, die sich so rasch fortpflanzt wie die Schallwellen, verhält sich auch das flüssige Medium wie ein elastisch fester Körper. Daß sich z. B. die Luft wie ein starrer Körper verhalten kann, zeigen Dynamitexplosionen, deren zerstörende Wirkung sich gleichzeitig nach allen Seiten, auch nach untenhin, äußert.

Die allgemeinen Formeln (1) wurden kürzlich von E. Wiechert auf die Fortpflanzung von Erschütterungen, wie sie ein Erdbeben hervorruft, angewendet (Wiechert und Zöppritz, Über Erdbebenwellen, Gött. Nachr. 1907). Durch Vergleichung der Ergebnisse der theoretischen Untersuchung mit den seismometrischen Aufzeichnungen zahlreicher über die Erdoberfläche verteilter Stationen haben die genannten Forscher das Auftreten sowohl von Longitudinal- wie von Transversalwellen durch das Erdinnere nachgewiesen.

44. Die elastische Lichttheorie.

Daß das Licht sich in Transversalwellen fortpflanzt, beweisen die FRESNELschen Interferenzversuche. Nachdem man dies erkannt hatte, richtete sich die Bemühung der theoretischen Physiker darauf, einen Träger dieser Bewegung zu finden, der, wie die Luft den Schall, so das Licht von Weltkörper zu Weltkörper fortpflanzt, oder doch die Eigenschaften eines solchen Mediums, das man *Äther* nannte, theoretisch festzustellen und auf ihre Annehmbarkeit zu prüfen. Die meisten Erscheinungen ließen sich ohne Zwang erklären, wenn man für den Äther ein elastisch festes Medium setzte, das nur Transversalwellen fortleitet. Nur in wenigen Fällen, wie bei dem Versuche, die Erscheinungen beim Übergang des Lichtes aus einem Medium in ein anderes von anderer Dichte zu erklären, sowie gegenüber dem Verhalten von Kristallen mit elliptischer Polarisation versagte[1]) die sogenannte elastische Lichttheorie.

Wir gehen bloß auf die ersterwähnte Schwierigkeit ein. Die Differentialgleichungen, denen die Transversalschwingung u'' genügt, lauten [Art. 43 F. (17)] wegen $\Theta = 0$

$$\begin{aligned} \varrho\ddot{u} &= B\triangle u = -2B\left[\frac{\partial\zeta}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial z}\right] \\ \varrho\ddot{v} &= B\triangle v = -2B\left[\frac{\partial\xi}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial x}\right] \\ \varrho\ddot{w} &= B\triangle w = -2B\left[\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\right], \end{aligned} \tag{1}$$

wozu für die Grenze die folgenden kommen

$$\begin{aligned} X_x\cos(n,x) + X_y\cos(n,y) + X_z\cos(n,z) &= \overline{X} \\ Y_x\cos(n,x) + Y_y\cos(n,y) + Y_z\cos(n,z) &= \overline{Y} \\ Z_x\cos(n,x) + Z_y\cos(n,y) + Z_z\cos(n,z) &= \overline{Z}\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Wir wollen uns diese Gleichungen für zwei aneinander angrenzende (im übrigen unendlich ausgedehnte) Medien gebildet denken, die sich nur durch die Elastizitätskonstante B unterscheiden. Als Trennungsfläche beider nehmen wir die YZ-Ebene an, setzen also

$$\cos(n,x) = 1;\ \cos(n,y) = \cos(n,z) = 0\,.$$

1) Ein eingehendes Studium widmet dieser Frage der Artikel: Übergang des Lichtes an der Grenze zweier Medien von DRUDE in WINKELMANNS Handbuch der Physik (1. Aufl.), Bd. II, 1. Abteilung.

Da sich die Druckkräfte $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ zu beiden Seiten der Trennungsfläche im Gleichgewicht befinden müssen (Art. 36), so schließt man aus (2), indem man das zweite Medium durch einen oberen Index unterscheidet, für die Grenzfläche

$$X_x = X'_x; \quad Y_x = Y'_x; \quad Z_x = Z'_x. \tag{3}$$

Wir verfolgen nun die Fortpflanzung einer ebenen Welle beim Übergang von einem Mittel in das andere. Das Licht sei homogen (entspreche einer bestimmten Stelle des Spektrums), die Schwingungszahl n also gegeben, ferner sei es geradlinig polarisiert, und zwar mögen die Schwingungen *in* der den Lichtstrahl (die Wellennormale) enthaltenden Ebene (der Einfallsebene) erfolgen. Wir nehmen diese Ebene (die Zeichenebene der nebenstehenden Figur) zur Ebene $z = 0$.

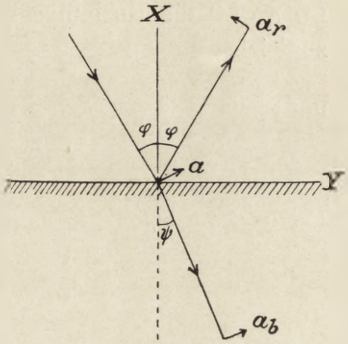

Fig. 25.

Dann ist für die einfallende Lichtwelle $w = 0$, und es wird, wenn a die Amplitude, φ der Einfallswinkel ist [(9) des vorigen Artikels],

$$\begin{aligned} u &= a \sin\varphi \cos 2\pi n\left(t - \frac{-x\cos\varphi + y\sin\varphi}{V}\right) \\ v &= a \cos\varphi \cos 2\pi n\left(t - \frac{-x\cos\varphi + y\sin\varphi}{V}\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Wir entnehmen nun der Erfahrung die folgenden Tatsachen:

1. Die einfallende Welle wird in eine reflektierte (u_r, v_r, w_r) und eine gebrochene (u_b, v_b, w_b) mit den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten V_r, V_b und den Schwingungszahlen n_r, n_b zerlegt.

2. Der Reflexionswinkel ist gleich dem Einfallswinkel.

Es wird somit

$$\begin{aligned} u_r &= a_r \sin\varphi \cos 2\pi n_r\left(t - \frac{x\cos\varphi + y\sin\varphi}{V_r}\right) \\ v_r &= -a_r \cos\varphi \cos 2\pi n_r\left(t - \frac{x\cos\varphi + y\sin\varphi}{V_r}\right) \end{aligned} \tag{4a}$$

und

$$\begin{aligned} u_b &= a_b \sin\psi \cos 2\pi n_b\left(t - \frac{-x\cos\psi + y\sin\psi}{V_b}\right) \\ v_b &= a_b \cos\psi \cos 2\pi n_b\left(t - \frac{-x\cos\psi + y\sin\psi}{V_b}\right). \end{aligned} \tag{4b}$$

Eine Schwingung in der Grenzfläche $x = 0$ kann dem einen oder dem anderen Medium zugerechnet werden. Man schließt daraus auf die folgenden Beziehungen[1]) — durch einen Überstrich möge der Wert in der Grenzfläche $x = 0$ angedeutet werden —

$$\bar{u} + \bar{u}_r = \bar{u}_b; \quad \bar{v} + \bar{v}_r = \bar{v}_b; \quad \bar{w} + \bar{w}_r = \bar{w}_b = 0. \tag{5}$$

Weil diese Gleichungen für alle y und t gelten, so müssen sich, wenn man in (5) die Werte der u, v, w aus (4), (4a), (4b) einsetzt, für $x = 0$ die Kosinusse herausheben. Dies ist nur möglich, wenn zugleich

$$n = n_r = n_b \tag{6}$$

und

$$\frac{\sin\varphi}{V} = \frac{\sin\varphi}{V_r} = \frac{\sin\psi}{V_b}, \tag{7}$$

also $V_r = V$ ist.

Dann wird

$$\left.\begin{aligned}(a + a_r)\sin\varphi &= a_b \sin\psi\\ (a - a_r)\cos\varphi &= a_b \cos\psi.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Die Gleichung (6) sagt aus, daß bei Reflexion und Brechung die Schwingungszahl, d. h. die Farbe, erhalten bleibt. (7) ist der Ausdruck für das Brechungsgesetz, nach welchem

$$\frac{V}{V_b} = \frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = N, \tag{9}$$

d. h. der „Brechungsquotient“ N eine von dem Einfallswinkel unabhängige Größe ist, die das Verhältnis der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichtstrahls in den beiden Medien darstellt. Aus (8) ergeben sich durch Auflösen nach a_r, a_b die bekannten FRESNELschen Formeln für die Amplituden des reflektierten und gebrochenen Strahles — immer für *in* der Einfallsebene schwingendes Licht —

$$\frac{a_b}{a} = \frac{2\sin\varphi\sin\psi}{\sin(\psi + \varphi)}; \quad \frac{a_r}{a} = \frac{\sin(\psi - \varphi)}{\sin(\psi + \varphi)}. \tag{10}$$

Ferner erhält man

$$\frac{a + a_r}{a_b} = \frac{1}{N}. \tag{11}$$

Aber aus den Grenzbedingungen (3) folgen Beziehungen, die diesen — mit der Erfahrung übereinstimmenden — Formeln teilweise widersprechen. Denn die zweite Gleichung (3) ergibt (Art. 39 (10)):

$$B\left(\frac{\partial(\bar{u} + \bar{u}_r)}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{v} + \bar{v}_r)}{\partial x}\right) = B'\left(\frac{\partial \bar{u}_b}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_b}{\partial x}\right),$$

1) W. VOIGT (Theoret. Physik I, S. 483) leitet diese Formeln aus der Forderung ab, daß beim Durchgang durch die Grenzfläche kinetische Energie nicht verloren gehen kann, weil keine Wärme auftritt.

daher für $y = 0$:

$$\frac{B}{V}(-\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)(a + a_r) = \frac{B'}{V_b}(-\sin^2\psi + \cos^2\psi)a_b,$$

oder:

$$\frac{a + a_r}{a_b} = N\frac{B'\cos 2\psi}{B\cos 2\varphi}. \tag{12}$$

Diese Gleichung widerspricht jedoch der (11), *weil*

$$\frac{\cos 2\psi}{\cos 2\varphi}$$

keine vom Einfallswinkel unabhängige Größe ist.

Die Annahme also, daß das Medium, welches Träger der Lichtschwingungen ist, sich wie ein elastisch-fester Körper verhält, stößt auf Schwierigkeiten. Man hat versucht, diese und andere, die sich aus der Theorie der Dispersion ergeben, durch Annahme von Wellen mit veränderlicher Amplitude (K. Vondermühll, Math. Ann. V, 1872) zu heben; Kirchhoff setzt eine Art von Kapillarkraftwirkung zwischen Äther und Materie in der Grenzfläche voraus (s. z. B. dessen Vorl. über Optik, her. v. Hensel, 1891, S. 143). Aber alle diese Annahmen befriedigen nicht vollständig (s. Drude, a. a. O.). Erst die neue von Cl. Maxwell geschaffene Theorie der Elektrizität und des Magnetismus[1]) eröffnete überraschend einen Ausweg. Auf der Faradayschen Anschauung fußend, daß die elektrischen Kräfte Polarisationszustände des Raumes (des Äthers) sind, die sich fortpflanzen, stellte Maxwell ein System von Differentialgleichungen auf, die aussagen, daß diese Fortpflanzung unter Begleitung bestimmter magnetischer Erscheinungen mit Lichtgeschwindigkeit erfolgt, und machte wahrscheinlich, daß die Transversalwellen, die wir als Lichtwellen ansprechen, nichts anderes als elektromagnetische Wellen sind. Diese Hypothese wurde unerwartet bald durch die Versuche von Hertz über die Ausbreitung der elektrischen Kraft in glänzender Weise bestätigt.

Wir werden die Differentialgleichungen von Maxwell in den nächsten Artikeln kennen lernen, und schließen uns, was ihre Ableitung angeht, an die in Art. 37 erwähnte Auffassung von Lord Kelvin an, wonach der Äther ein Medium ist, welches die oben als

1) Aus den zahlreichen Literaturangaben in H. A. Lorentz' Bericht über Maxwells elektromagnetische Theorie in der Enzykl. d. math. W. V, 2. S. 64 heben wir nur hervor: Cl. Maxwell, a Treatise on Electricity and Magnetism. 2 voll. Oxford, 3. ed. 1892.

Quasi-Elastizität bezeichnete Art von Widerstand gegen Drehung besitzt.[1]) Das Potential der widerstehenden Kräfte im Äther ist eben dasjenige, welches bereits MAC CULLAGH ersonnen hatte, um die Schwierigkeiten zu beseitigen, welche dem elastisch festen Medium die Erklärung der elliptischen Polarisation bereitet hatte.

Wir wollen nun die Folgerungen ziehen, die sich aus der Annahme dieses Potentials ergeben.

45. Das quasi-elastische Lichtmittel.

Wir haben in Art. 37 die Arbeit δw der inneren Kräfte gebildet, die bei einer virtuellen Drehung der Volumeinheit eines Mediums, welches die Eigenschaft der *Quasi-Elastizität* besitzt, zu leisten ist. Sind u, v, w die sehr kleinen Verschiebungen eines Punktes, sind

$$\xi = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

usw. die Drehungskomponenten, so haben wir für die Gesamtarbeit den Ausdruck

$$\delta W = -4\mathbf{B}\int(\xi\delta\xi + \eta\delta\eta + \zeta\delta\zeta)d\tau$$

gefunden, der nun zunächst wieder durch partielle Integration in eine lineare Funktion von $\delta u, \delta v, \delta w$ zu verwandeln und dann in den Ausdruck für das D'ALEMBERTsche Prinzip (Art. 40)

$$\int\varrho(\ddot{u}\,\delta u + \ddot{v}\,\delta v + \ddot{w}\,\delta w)d\tau - \delta W - \delta' S = 0,$$

einzutragen ist, wo das Oberflächenintegral

$$\delta' S = \int(\overline{X}\,\delta u + \overline{Y}\,\delta v + \overline{Z}\,\delta w)d\sigma$$

sich auf die Begrenzung des betrachteten Raumes bezieht. Die partielle Integration ergibt — unter Benutzung einer schon öfter gebrauchten Abkürzung —

$$\begin{aligned}
\delta W = -4\mathbf{B}\int \mathbf{S}\xi\delta\xi\,d\tau &= -2\mathbf{B}\int\mathbf{S}\xi\delta\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)d\tau = \\
&= -2\mathbf{B}\int\mathbf{S}\xi\left(\frac{\partial\,\delta w}{\partial y} - \frac{\partial\,\delta v}{\partial z}\right)d\tau \\
&= -2\mathbf{BS}\iint dx\,dz[\xi\delta w] + 2\mathbf{BS}\iint dx\,dy[\xi\delta v] + \\
&\quad + 2\mathbf{BS}\int d\tau\frac{\partial\xi}{\partial y}\delta w - 2\mathbf{BS}\int d\tau\frac{\partial\xi}{\partial z}\delta v,
\end{aligned}$$

1) Einen Überblick über die Versuche, der erwähnten Schwierigkeit zu begegnen, findet man in dem erwähnten Bericht von H. A. LORENTZ, S. 136ff.

wo die eckigen Klammern sich auf die Begrenzung beziehen. Faßt man wieder die Summe anders zusammen, und führt man das Oberflächenelement

$$d\sigma = \pm\, dx\,dz \cos(n,y) = \cdots$$

ein, so erhält man

$$\delta W = -2\mathbf{B}\mathbf{S}\int d\sigma\, \delta u[\zeta \cos(n,y) - \eta \cos(n,z)] -$$

$$-2\mathbf{B}\mathbf{S}\int d\tau\, \delta u\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z}\right). \qquad (1)$$

Das D'ALEMBERTsche Prinzip ergibt daher, indem man die Koeffizienten von $\delta u, \ldots$ sowohl für das Innere wie für die Oberfläche einzeln mit Null vergleicht, die folgenden Gleichungen für die Bewegung im Innern eines quasi-elastischen Mittels:

$$\begin{aligned}
\varrho \ddot{u} &= -2\mathbf{B}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z}\right)\\
\varrho \ddot{v} &= -2\mathbf{B}\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)\\
\varrho \ddot{w} &= -2\mathbf{B}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\right),
\end{aligned} \qquad (2)$$

und für die Oberfläche das Moment:

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= -2\mathbf{B}(\eta \cos(n,z) - \zeta \cos(n,y))\\
\overline{Y} &= -2\mathbf{B}(\zeta \cos(n,x) - \xi \cos(n,z))\\
\overline{Z} &= -2\mathbf{B}(\xi \cos(n,y) - \eta \cos(n,x)).
\end{aligned} \qquad (3)$$

Durch Differentiation der Gleichungen (2) nach x, y, z und Addition ergibt sich:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\operatorname{div}\mathfrak{u} = 0.$$

Nimmt man einen Gleichgewichtszustand des elastischen Mediums als möglich an, so kann man für $t = 0$ $\Theta = \dot{\Theta} = 0$ setzen. Dann ist die Dilatation für alle Zeit

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div}\mathfrak{u} = 0. \qquad (4)$$

Setzt man in (1) die Werte für $\xi, \ldots$ ein, so nehmen die Gleichungen (2) hiermit die Form an:

$$\begin{aligned}
\varrho \ddot{u} &= \mathbf{B}\triangle u\\
\varrho \ddot{v} &= \mathbf{B}\triangle v\\
\varrho \ddot{w} &= \mathbf{B}\triangle w.
\end{aligned} \qquad (4a)$$

Die Gleichungen (2) für das Innere haben dieselbe Gestalt, wie die, welche wir früher ((17) Art. 44) unter der Annahme eines elastisch-festen Mittels erhalten haben. Demnach bleiben alle Folgerungen, die im vorigen Artikel aus diesen allein gezogen worden sind, insbesondere also die Gleichungen (4) bis (11) und die daran geknüpften Bemerkungen auch für die vorliegende Auffassung bestehen, sofern man nur die Konstanten B und B einander gleich setzt. Namentlich hat

$$V = \sqrt{\frac{\mathsf{B}}{\varrho}} \tag{5}$$

auch hier die Bedeutung der *Fortpflanzungsgeschwindigkeit* ebener Wellen in einem Medium von der „Elastizität" B („rigidity" bei W. Thomson).

Dagegen sind die Gleichungen (3) für die Oberfläche (Grenzfläche zweier Medien) andere, wie im Falle des elastisch-festen Körpers; sie widersprechen nun nicht mehr der Erfahrung.

Multipliziert man nämlich (3) bzw. mit $\cos(n,x)$, $\cos(n,y)$, ... und addiert, so kommt

$$\overline{X}\cos(n,x) + \overline{Y}\cos(n,y) + \overline{Z}\cos(n,z) = 0\,.$$

In der Grenzfläche wirkt demnach ein drehendes Moment (ein Kräftepaar), dessen Drehungsachse dem Flächenelement parallel ist. Macht man wieder die Ebene $x = 0$ zur Grenzfläche, so ergibt sich aus (3), indem man wie früher mit dem Strich über den Buchstaben den Oberflächenwert bezeichnet, die Tangentialkraft

$$\overline{X} = 0;\ \overline{Y} = -2\mathsf{B}\bar{\zeta};\ \overline{Z} = 2\mathsf{B}\bar{\eta}\,.$$

Die diesseits und jenseits der Grenzfläche bestehenden Oberflächenkräfte müssen sich (Art. 36) das Gleichgewicht halten. Zeichnet man also wieder das eine Medium durch einen oberen Index aus, so wird

$$\begin{aligned} 2\mathsf{B}\bar{\zeta} &= 2\mathsf{B}'\bar{\zeta}' \\ 2\mathsf{B}\bar{\eta} &= 2\mathsf{B}'\bar{\eta}' \end{aligned} \tag{6}$$

woraus folgt:

$$\bar{\eta} : \bar{\zeta} = \bar{\eta}' : \bar{\zeta}'\,.$$

Die inneren Kräfte längs der Grenzfläche haben demnach beiderseits die gleiche Richtung. Wegen

$$\mathsf{B}^2(\bar{\eta}^2 + \bar{\zeta}^2) = \mathsf{B}'^2(\bar{\eta}'^2 + \bar{\zeta}'^2)$$

verhalten sie sich der Größe nach umgekehrt, wie die Konstanten $\mathbf{B}, \mathbf{B}'$, die das Maß für die Quasi-Elastizität abgeben. Bildet man die Grenzgleichungen (6) nun auch für die im vorigen Artikel angenommenen partikulären Lösungen (4), also für eine Welle von Licht, das in der Einfallsebene schwingt, so ist, wegen

$$\bar{\eta} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = 0 = \bar{\eta}'$$

die zweite der Gleichungen identisch erfüllt. Die erste geht in

$$\frac{\mathbf{B}}{V}(a + a_r)(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \frac{\mathbf{B}'}{V_b} a_b(\cos^2\psi + \sin^2\psi)$$

oder in

$$\frac{a + a_r}{a_b} = \frac{\mathbf{B}'}{\mathbf{B}} \cdot \frac{V}{V_b} = \frac{1}{N}$$

über, wenn man (Art. 44 (9))

$$\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{B}'} = N^2 = \frac{V^2}{V_b^2}$$

setzt. Dies stimmt aber mit den durch die Erfahrung bestätigten Fresnelschen Formeln und mit (11) des vorigen Artikels überein.

Wir fügen für später die Bemerkung an, daß im Inneren des Mittels allenthalben die Richtung der Moment-Achse von

$$\mathbf{B}\mathfrak{w} = (\mathbf{B}\xi, \mathbf{B}\eta, \mathbf{B}\zeta)$$

auf derjenigen der Verschiebung

$$\mathfrak{u} = (u, v, w)$$

und zugleich auf der Wellennormalen α, β, γ senkrecht steht. Denn bildet man mit Hilfe von

$$u = a\cos 2\pi n\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{V}\right)$$

usw. die Komponenten ξ, η, ζ von $\mathfrak{w} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathfrak{u}$, so ergibt sich

$$\xi = (c\beta - b\gamma)\frac{2\pi n}{V}\sin 2\pi n\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{V}\right)$$

usw. Daher ist zugleich

$$a\xi + b\eta + c\zeta = 0$$

und

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 0, \quad \text{q. e. d.}$$

Bevor wir uns einer anderen Deutung der Gleichungen (1) bis (3) zuwenden, wollen wir noch eine Ausdehnung derselben vornehmen auf den Fall, daß das Mittel, dessen Bewegungszustand sie darstellen, außer der Eigenschaft der Quasi-Elastizität noch einen *Widerstand* gegen Bewegung (Zähigkeit, Viskosität) aufweist, durch welchen ein Teil der Energie absorbiert (in Wärme verwandelt) wird, und der der Geschwindigkeit $\dot{\mathfrak{u}}$ proportional sein möge. Dann ist die bei einer virtuellen Verschiebung δu, δv, δw der Volumeinheit geleistete Arbeit

$$-k(\dot{u}\delta u + \dot{v}\delta v + \dot{w}\delta w) = -k\mathbf{S}\dot{u}\delta u,$$

wo k eine wesentlich positive Konstante ist, und hiernach der in den Ausdruck des D'ALEMBERTschen Prinzips aufzunehmende Energieverlust (Art. 16)

$$\delta R = -\int k\mathbf{S}(\dot{u}\delta u)d\tau, \tag{7}$$

womit zu bilden ist:

$$\int \varrho \mathbf{S}\ddot{u}\delta u d\tau - \delta W - \delta R - \delta' S = 0,$$

oder nach Vornahme der in (1) angegebenen Umformung

$$\int \mathbf{S}\Big(\varrho\ddot{u} + 2\mathbf{B}\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial z}\Big) + k\dot{u}\Big)\delta u d\tau -$$
$$- \int \mathbf{S}\big(2\mathbf{B}(\bar{\eta}\cos(n,z) - \bar{\zeta}\cos(n,y)) + \overline{X}\big)\delta u\, d\sigma = 0.$$

Hieraus fließen die Bewegungsgleichungen für das absorbierende Mittel

$$\varrho\ddot{u} + k\dot{u} = 2\mathbf{B}\Big(\frac{\partial\eta}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big) \tag{8}$$

usw., wo wieder

$$\xi = \tfrac{1}{2}\Big(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\Big) \tag{9}$$

usw. und die Grenzbedingung

$$\overline{X} = -2\mathbf{B}(\bar{\eta}\cos(n,z) - \bar{\zeta}\cos(n,y)) \tag{10}$$

usw. ist. In Vektorbezeichnung lauten diese Gleichungen

$$\varrho\ddot{\mathfrak{u}} + k\dot{\mathfrak{u}} = 2\mathbf{B}\operatorname{rot}\mathfrak{w} \tag{8a}$$

$$\mathfrak{w} = \tfrac{1}{2}\operatorname{rot}\mathfrak{u}$$

$$\mathfrak{P} = -2\mathbf{B}[\mathfrak{w},\mathfrak{n}], \tag{10a}$$

wo $\mathfrak{P} = (\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z})$ der Druck auf die Quadrateinheit der Grenzfläche ist, $\mathfrak{n}$ ein Einheitsvektor in Richtung der Normalen zum Flächenelement.

Wenn man in der linken Seite der Gleichung des D'ALEMBERTschen Prinzips die Variationen durch die wirklich eintretenden Verschiebungen ersetzt, so geht diese bekanntlich (Art. 15 a. E.) in den Gesamtzuwachs der Energie über. Dieser beträgt somit in der Zeiteinheit

$$\frac{d}{dt}(T - W - R) - \frac{d'S}{dt} = 0 \tag{11}$$

wo

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}\int \varrho(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2)\,d\tau \\ W &= -\,2\mathbf{B}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\,d\tau \\ \frac{dR}{dt} &= -\tfrac{1}{2}\int k(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2)\,d\tau \end{aligned} \tag{12}$$

$$\frac{d'S}{dt} = \int(\overline{X}\dot{u} + \overline{Y}\dot{v} + \overline{Z}\dot{w})\,d\sigma =$$

$$= -\,2\mathbf{B}\int \begin{vmatrix} \dot{u} & \dot{v} & \dot{w} \\ \bar{\xi} & \bar{\eta} & \bar{\zeta} \\ \cos(n,x) & \cos(n,y) & \cos(n,z) \end{vmatrix} d\sigma \tag{13}$$

ist. — Daß diese gedämpfte Bewegungsform für die Theorie der lichtabsorbierenden Medien ihre Bedeutung hat, sei nur erwähnt. Im folgenden Abschnitt werden wir die Rolle kennen lernen, die sie in der Umdeutung unseres Gleichungssystems auf elektromagnetische Vorgänge spielt.

Vierter Abschnitt.

Die elektromagnetische Lichttheorie.

46. Übergang zu den Gleichungen der elektromagnetischen Lichttheorie.

Indem wir uns nun dazu wenden, den Gleichungen der vorigen Artikel für die Bewegung in einem quasi-elastischen Mittel eine neue Deutung unterzulegen, schicken wir voraus, daß sie jene andere für die Fortpflanzung des Lichtes nicht ausschließen, sondern nur als einen Sonderfall in sich begreifen wird. In den vorstehenden Artikeln haben wir ein Medium betrachtet, das mit der Eigenschaft ausgestattet war, jeder *Drehung* der Volumeinheit $\mathfrak{w} = (\xi, \eta, \zeta)$ — abgelöst von ihrem Zusammenhang mit den Nachbarelementen — einen mit $\mathfrak{w}$ proportionalen Widerstand $\mathbf{B}\mathfrak{w}$ entgegenzusetzen. Durch Anwendung des D'ALEMBERTschen Prinzips

$$\int \varrho(\ddot{u}\delta u + \ddot{v}\delta v + \ddot{w}\delta w)\,d\tau + 4\mathbf{B}\int(\xi\delta\xi + \eta\delta\eta + \zeta\delta\zeta)\,d\tau -$$

$$-\int(\overline{X}\delta u + \overline{Y}\delta v + \overline{Z}\delta w)\,d\sigma = 0, \qquad (1)$$

wo $\mathfrak{u} = (u, v, w)$ die Verschiebung des Volumelementes $d\tau$ ist, $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ die Oberflächenkräfte sind, die auf die Begrenzung des (zunächst noch als endlich betrachteten) Raumes wirken, hatten wir die Gleichungen [(1) bis (4a)] des vorigen Artikels) erhalten:

$$\varrho\ddot{u} = -2\mathbf{B}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial z}\right) \quad \text{usw.} \qquad (2)$$

für die Oberfläche

$$\overline{X} = -2\mathbf{B}(\eta\cos(n,z) - \zeta\cos(n,y)) \quad \text{usw.} \qquad (3)$$

Ferner war

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div}\mathfrak{u} = 0, \qquad (4)$$

während zwischen $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{w}$ die Beziehung bestand:

$$\mathfrak{w} = \tfrac{1}{2}\operatorname{rot}\mathfrak{u},$$

oder ausgeführt:

$$\xi = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \quad \text{usw.} \tag{5}$$

Wir hatten endlich auch den Fall in Betracht gezogen, daß das Mittel ein reibendes (viskoses) ist, das der Bewegung $\mathfrak{u}$ einen Widerstand entgegensetzt, der der Geschwindigkeit $\dot{\mathfrak{u}}$ proportional ist und zu ihr entgegengesetzt gerichtet ist. Bei dieser Annahme trat in den Gleichungen (2) noch links ein Glied $+k\dot{u}$, $+k\dot{v}$, usw. hinzu [voriger Artikel (8)].

Infolge der Gleichungen (2) ist die Beschleunigung $\ddot{\mathfrak{u}}$ mit dem Auftreten des Drehmomentes $\mathbf{B}\mathfrak{w}$ unzertrennlich verbunden; und umgekehrt veranlaßt dieses Moment wegen (5) eine solenoidale Verteilung des Vektors $\mathfrak{u}$ in dem Feld. Nun aber bestehen Beziehungen verwandter Art zwischen elektrischem Strom und magnetischer Kraft (bzw. ihren Zunahmen) in dem elektromagnetischen Feld, wie es die Umgebung eines Stromleiters bildet, den ein veränderlicher elektrischer Strom durchfließt, oder in einem Magnetfeld, das sich relativ zu einem geschlossenen Stromleiter verschiebt. Nur müssen wir, wenn wir diese Analogie weiter verfolgen wollen, die Beschleunigung $\ddot{\mathfrak{u}}$ einer Kraft*zunahme*, z. B. der Zunahme der elektrischen Kraft (des Stromes), diese selbst also der Größe $\dot{\mathfrak{u}}$ proportional setzen, während jenes Moment der anderen (hier also der magnetischen) Kraft proportional anzunehmen ist. Dann aber lassen sich die Aussagen der Formeln (2) bis (5) durchaus mit den experimentell festgestellten Beziehungen zwischen den Kräften im elektromagnetischen Felde, nicht nur der äußeren Erscheinung nach, sondern sogar nach Größe und Richtung der in Betracht kommenden Vektoren vergleichen.

Um dies zu bewirken, wollen wir:

1. Den *Impuls* (die Stoßkraft) $\varrho\dot{\mathfrak{u}}$ *als elektrische Feldstärke* (Kraft) deuten;

2. das *Moment* $\mathbf{B}\mathfrak{w}$ als Ursache einer Beschleunigung in Richtung der Drehachse — wie etwa bei einer Schraube — ansehen und als *magnetische Feldstärke* (Kraft) deuten;

3. ein widerstehendes (reibendes, viskoses) Mittel, das etwa einen Teil des Feldes ausmacht, als einen *Leiter* der Elektrizität auffassen.

Wir identifizieren also unser quasi-elastisches Mittel mit einem elektromagnetischen Feld und setzen, wenn $\mathfrak{E} = (X, Y, Z)$ die elektrische Kraft (die auf die Elektrizitätsmenge 1 wirkende Kraft) an einer Stelle ist, $\mathfrak{H} = (L, M, N)$ die magnetische (die auf einen positiven Magnetpol von der Stärke 1 wirkende) Kraft ist, a und b

Proportionalitätsfaktoren sind, die innerhalb eines homogenen Nichtleiters vorerst als konstant gelten sollen,

1. $$\varrho \dot{\mathfrak{u}} = a \mathfrak{E}$$

oder

$$\varrho \dot{u} = a X; \ \varrho \dot{v} = a Y; \ \varrho \dot{w} = a Z \tag{6}$$

2. $$\mathsf{B} \mathfrak{w} = - b \mathfrak{H}$$

oder

$$\mathsf{B} \xi = - b L; \ \mathsf{B} \eta = - b M; \ \mathsf{B} \zeta = - b N. \tag{7}$$

Indem wir die Richtung der Lichtschwingung $\mathfrak{u}$ mit derjenigen der *elektrischen* Feldstärke zusammenfallen lassen, treffen wir eine Auswahl, zu der uns die Umstände *nicht* nötigen. Wir hätten ebenso gut die Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ in umgekehrter Weise verwenden, d. h. die magnetische Feldstärke mit $\varrho \dot{\mathfrak{u}}$, die elektrische mit $\mathsf{B}\mathfrak{w}$ identifizieren können, wie dies A. Sommerfeld, R. Reiff und J. Larmor (s. d. Note zu Art. 37) auch wirklich getan haben. Für unsere Auffassung, die von W. Thomson und L. Boltzmann vertreten wird, läßt sich der Umstand geltend machen, daß es eine magnetische Kraft ist, durch welche die Drehung der Polarisationsebene hervorgerufen wird.

Führt man die Ausdrücke (6), (7) in die Gleichungen (2) — (5) ein, oder besser gleich in diejenigen, welche das widerstehende Mittel mit umfassen und jene als Spezialfall enthalten (vor. Art. (8), (9)), so erhält man, wenn man zuvor (5) nach der Zeit differenziert hat, das folgende System[1]):

$$\frac{a}{2b}\left(\dot{X} + \frac{k}{\varrho} X\right) = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \tag{8}$$

usw.

$$\frac{2 b \varrho}{a \mathsf{B}} \frac{\partial L}{\partial t} = - \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) \tag{9}$$

usw.

Ferner gilt wegen (4) die Beziehung:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \tag{10}$$

1) Wir wiederholen aus Art. 40, daß die Punkte über den Buchstaben $u, v, \ldots$ partielle Differentialquotienten bedeuten. Dies überträgt sich in der Folge auf alle hieraus abgeleiteten Größen $X, \ldots, L, \ldots \mathfrak{E}, \mathfrak{H}, \mathfrak{A}, \varphi$.

an allen denjenigen Stellen, wo $k = 0$ ist; endlich ist allenthalben

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0. \tag{11}$$

Der Zuwachs an Energie E der Gesamtmasse beträgt in der Zeiteinheit [Art. 45 (11)]

$$\begin{aligned}\frac{d\mathsf{E}}{dt} &= \frac{d}{dt}(T - W - R) = \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\left\{\frac{a^2}{\varrho}(X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{4b^2}{\mathsf{B}}(L^2 + M^2 + N^2)\right\}d\tau + \\ &\quad + \int\frac{ka^2}{\varrho^2}(X^2 + Y^2 + Z^2)\,d\tau\end{aligned} \tag{12}$$

und läßt sich (l. c.) durch den Zuwachs an Oberflächenenergie

$$\frac{d\mathsf{E}}{dt} = \frac{d'S}{dt} \tag{13}$$

darstellen.

47. Die Maxwellschen Gleichungen.

Das Formelsystem des vorigen Artikels, das wir durch Übertragung aus dem für das quasi-elastische Mittel erhalten haben, hat nun die Gestalt der bekannten Formeln, die Maxwell für elektromagnetische Vorgänge aufgestellt hat, oder genauer des von Hertz[1]) und Heaviside[2]) aus diesen abgeleiteten symmetrisch gebauten Formelsystems. Um die Übereinstimmung auch hinsichtlich der Konstanten herzustellen, führen wir an Stelle der Größen a, b, B, k vier andere — wesentlich positive — Größen c, ε, μ, λ ein, indem wir setzen:

$$\begin{aligned} a &= \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon\varrho}{\pi}}; \quad & b &= \frac{c}{4}\sqrt{\frac{\varrho}{\varepsilon\pi}}; \\ \mathsf{B} &= \frac{c^2\varrho}{\varepsilon\mu}; \quad & k &= \frac{4\pi\varrho}{\varepsilon}\lambda. \end{aligned} \tag{1}$$

Man erhält hieraus:

$$\begin{aligned} \frac{a}{2b} &= \frac{\varepsilon}{c}; \quad & \frac{2b\varrho}{a\mathsf{B}} &= \frac{\mu}{c}; \\ \frac{a^2}{\varrho} &= \frac{\varepsilon}{4\pi}; \quad & \frac{4b^2}{\mathsf{B}} &= \frac{\mu}{4\pi}; \\ \frac{ka^2}{\varrho^2} &= \lambda; \quad & c &= \sqrt{\frac{\mathsf{B}}{\varrho}}\sqrt{\varepsilon\mu}. \end{aligned} \tag{1a}$$

---

1) Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft, Leipzig 1892, S. 215, auch Göttinger Nachr. 1890.

2) Electrical papers, 2 voll. 1892, auch Phil. Mag. Febr. 1888.

Geht man mit diesen Werten in die Gleichungen (8), (9) des vorigen Artikels ein, so erhalten sie folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \varepsilon\dot{X} + 4\pi\lambda X &= c\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) \\ \varepsilon\dot{Y} + 4\pi\lambda Y &= c\left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \\ \varepsilon\dot{Z} + 4\pi\lambda Z &= c\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \mu\dot{L} &= -c\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) \\ \mu\dot{M} &= -c\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) \\ \mu\dot{N} &= -c\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right), \end{aligned} \tag{3}$$

oder in Vektorbezeichnung:

$$\varepsilon\dot{\mathfrak{E}} + 4\pi\lambda\mathfrak{E} = c \operatorname{rot}\mathfrak{H} \tag{2a}$$

$$\mu\dot{\mathfrak{H}} = -c\operatorname{rot}\mathfrak{E}, \tag{3a}$$

wobei

$$\begin{aligned} \dot{\mathfrak{u}} &= \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\varrho\pi}}\,\mathfrak{E} \\ \mathfrak{w} &= \tfrac{1}{2}\operatorname{rot}\mathfrak{u} = -\frac{\mu}{4c}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\varrho\pi}}\,\mathfrak{H} \end{aligned} \tag{4}$$

gesetzt wurde, und $\mathfrak{E} = (X, Y, Z)$ die elektrische, $\mathfrak{H} = (L, M, N)$ die magnetische Feldstärke ist. An den Grenzen waren die Komponenten des Oberflächendruckes $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ (eine Bezeichnung, die natürlich nichts mit derjenigen für die elektrische Kraft zu tun hat) dargestellt durch [Art. 46 (3)]:

$$\begin{aligned} \overline{X} &= \frac{c}{2}\sqrt{\frac{\varrho}{\varepsilon\pi}}\left(\overline{M}\cos(n,z) - \overline{N}\cos(n,y)\right) \\ \overline{Y} &= \frac{c}{2}\sqrt{\frac{\varrho}{\varepsilon\pi}}\left(\overline{N}\cos(n,x) - \overline{L}\cos(n,z)\right) \\ \overline{Z} &= \frac{c}{2}\sqrt{\frac{\varrho}{\varepsilon\pi}}\left(\overline{L}\cos(n,y) - \overline{M}\cos(n,x)\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Die Gleichung der Energie lautet:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathsf{E}}{dt} \equiv \frac{d}{dt}\int\frac{1}{8\pi}\{\varepsilon(X^2 + Y^2 + Z^2) + \mu(L^2 + M^2 + N^2)\}\,d\tau\, + \\ + \int\lambda(X^2 + Y^2 + Z^2)\,d\tau = \frac{d'S}{dt}\cdot \end{aligned} \tag{6}$$

Die Volum-*Energie* **E** setzt sich also aus zwei wesentlich verschiedenen Bestandteilen zusammen, nämlich aus der *elektromagnetischen Energie*

$$\int \frac{1}{8\pi}\{\varepsilon(X^2 + Y^2 + Z^2) + \mu(L^2 + M^2 + N^2)\}\, d\tau$$

und aus der gleichfalls immer positiven Größe

$$\int_{-\infty}^{t} dt \int \lambda(X^2 + Y^2 + Z^2)\, d\tau,$$

die mit

$$\lambda = \frac{\varepsilon k}{4\pi\varrho},$$

also mit dem Widerstand k des absorbierenden Mediums proportional ist, und welche sonach nichts anderes sein kann, als die infolge der gehemmten Bewegung der Massenelemente durch Reibung erzeugte sogenannte JOULEschen *Wärme* (Art. 15).

Der Zuwachs der Oberflächenenergie $d'S/dt$ läßt sich (Art. 45 a. E.) in die Form bringen

$$\frac{d'S}{dt} = -2\mathbf{B}\int \begin{vmatrix} \dot{u} & \bar{\xi} & \cos(n,x) \\ \dot{v} & \bar{\eta} & \cos(n,y) \\ \dot{w} & \bar{\zeta} & \cos(n,z) \end{vmatrix} d\sigma = \frac{c}{4\pi}\int \begin{vmatrix} X & L & \cos(n,x) \\ Y & M & \cos(n,y) \\ Z & N & \cos(n,z) \end{vmatrix} d\sigma =$$

$$= \frac{c}{4\pi}\int \mathbf{S}\{(YN - ZM)\cos(n,x)\}\, d\sigma,$$

wo **S** wieder die Summe von drei ähnlich gebauten Gliedern bedeutet. Die Gleichungen (2)—(6) sind diejenigen, die MAXWELL für die Beziehungen zwischen der elektrischen und der magnetischen Kraft in einem aus Nichtleitern (Dielektriken) und Leitern — auch Stromleitern — gebildeten Feld aufgestellt hat, in das von außen eine elektromagnetische Störung eingedrungen ist.

Die eingeführten Größen ε, μ, c, λ haben für das (immer als isotrop vorausgesetzte) Medium die folgende Bedeutung:[1])

ε ist die „Dielektrizitätskonstante", eine positive reine Zahl, die im leeren Raume den Wert 1 hat;

μ ist die Permeabilität, eine positive reine Zahl, im leeren Raume gleich 1, für die meisten Körper von 1 nur sehr wenig ver-

1) S. DRUDE, Optik, Leipz. 1900, S. 249; oder ZENNECK, Elektromagnetische Schwingungen usw. Stuttgart 1905, S. 13.

schieden, für paramagnetische Körper wie Eisen größer als 1, für diamagnetische wie Wismuth kleiner als 1.

Die Bedeutung von c ergibt sich aus der Gleichung (1a)

$$c = \sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{\frac{\mathsf{B}}{\varrho}}, \tag{7}$$

die für den leeren Raum in

$$c = \sqrt{\frac{\mathsf{B}}{\varrho}} \tag{8}$$

übergeht. Daher bedeutet die (sehr große) Zahl c ($= 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec) die *Fortpflanzungsgeschwindigkeit* [Art. 45 (5)] der (Transversal-) Wellen einer elektromagnetischen Störung, wie *Licht, im leeren Raum* (Äther). In einem Nichtleiter mit den Konstanten B', ε, μ ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$V' = \sqrt{\frac{\mathsf{B}'}{\varrho}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \tag{9}$$

Wir kommen auf diese Beziehung im nächsten Artikel zurück.

Endlich ist der Faktor λ ein Maß für die Wärmemenge, die in einem die elektromagnetische Energie absorbierenden Körper entwickelt wird. Sie ist zugleich seine *elektrische Leitfähigkeit.* Während nämlich durch einen Nichtleiter elektrische Wellen ohne Wärmeentwicklung hindurchgehen, wird nach der heute allgemein geteilten Maxwellschen Auffassung gerade in Leitern die Energie der elektrischen Bewegung in Wärme verwandelt. Metalle, die besten Leiter, absorbieren elektrische Schwingungen vollständig, indem sie sie in Joulesche Wärme verwandeln. Für den leeren Raum und alle Nichtleiter, namentlich für die vollkommen durchsichtigen Mittel, ist $\lambda = 0$.

Licht ist nach dieser Auffassung nur eine besondere Form der elektromagnetischen Störung. Wenn die Schwingungszahl einer Welle eine gewisse Grenze überschreitet, empfinden wir sie als Licht. Die am schnellsten schwingenden von H. Hertz beobachteten Wellen mit elektromagnetischer Wirkung zeigten eine Frequenz von 10^8 Schwingungen in der Sekunde. Aber das äußerste Rot hat bereits die Schwingungszahl $395 \cdot 10^{12}$ und Violett gar $758 \cdot 10^{12}$. Indem man Licht als elektromagnetische Wellen von großer Schwingungsfrequenz ansieht, nimmt man auch für die Fortpflanzung des Lichtstrahles die Gleichungen (2), (5) in Anspruch. Beschränken wir uns auf Nichtleiter und setzen $\lambda = 0$, so haben wir ja die obenstehenden aus den Formeln (2) bis (4a) des Art. 45 abgeleitet, indem wir nur die Konstanten mittels der Formeln (1) des Art. 47 durch andere, und den Vektor $\mathfrak{u}$, die Änderung des Ausschlags, durch die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ ersetzten [(6) (7) Art. 46)]. Die magnetische Feldstärke fassen wir als eine Begleiterscheinung auf, die sich nicht als Licht bemerklich macht, die aber wegen des mit ihr verbundenen Energieaufwandes nicht unberücksichtigt bleiben darf. Wir können dann auch die partikulären Integrale Art. 43 (9) der Gleichungen Art. 44 (1), nach entsprechender Umformung, als Integrale der MAXWELLschen Gleichungen ansprechen. Man erhält so für ebene elektromagnetische (oder Licht-) Wellen das folgende System von Lösungen

$$\begin{aligned} X &= \frac{\varrho \dot{u}}{a} = \dot{u} \cdot 2\sqrt{\frac{\pi\varrho}{\varepsilon}} = A \sin 2\pi n\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{V}\right) \\ Y &= \dot{v} \cdot 2\sqrt{\frac{\pi\varrho}{\varepsilon}} = B \sin 2\pi n\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{V}\right) \\ Z &= \dot{w} \cdot 2\sqrt{\frac{\pi\varrho}{\varepsilon}} = C \sin 2\pi n\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{V}\right), \end{aligned} \tag{10}$$

wenn man den Faktor

$$-4\pi n\sqrt{\frac{\pi\varrho}{\varepsilon}}$$

in die Amplituden a, b, c eingehen läßt, wodurch sie in A, B, C übergehen mögen; ferner

$$L = -\frac{\mathsf{B}\xi}{b} = -\frac{\mathsf{B}}{2b}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

oder

$$L = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,(C\beta - B\gamma)\sin 2\pi n\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{V}\right) \tag{11}$$

usw.

Wir werden diese Formeln später (Art. 58) auf den Fall anwenden, daß die Ebene der einfallenden Wellen der Z-Achse parallel ist, und daß der Lichtvektor (die elektrische Feldstärke) in die Einfallsebene fällt. Dann gehen (Art. 44 (4)) die Gleichungen (10) über in

$$\begin{aligned} X &= A \sin\varphi \sin 2\pi n\left(t - \frac{-x\cos\varphi + y\sin\varphi}{V}\right) \\ Y &= A \cos\varphi \sin 2\pi n\left(t - \frac{-x\cos\varphi + y\sin\varphi}{V}\right) \\ Z &= 0; \end{aligned} \tag{12}$$

die magnetische Feldstärke wird (3)

$$\begin{aligned} L &= M = 0 \\ N &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, A \sin 2\pi n\left(t - \frac{-x\cos\varphi + y\sin\varphi}{V}\right). \end{aligned} \tag{13}$$

48. Folgerungen. Der Poyntingsche Strahlungsvektor.

Das System der Gleichungen (2a), (3a) des vorigen Artikels

$$\begin{aligned} c \operatorname{rot} \mathfrak{H} &= \varepsilon \dot{\mathfrak{E}} + 4\pi\lambda\mathfrak{E} \\ - c \operatorname{rot} \mathfrak{E} &= \mu \dot{\mathfrak{H}} \end{aligned} \tag{1}$$

ermöglicht es, zu der für einen Zeitpunkt bekannten räumlichen Verteilung der Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$, welche die Größen $\operatorname{rot}\mathfrak{E}$, $\lambda\mathfrak{E}$, $\operatorname{rot}\mathfrak{H}$ an jeder Stelle anzugeben gestattet, die Verteilung derselben auch *für den nächsten Zeitpunkt* zu ermitteln. Denkt man sich nun diese Berechnung von Zeitelement zu Zeitelement fortgesetzt, also die Gleichungen (1) — etwa durch Potenzreihen, die in einem gewissen Bereiche konvergieren — integriert, so ergibt sich *aus der bekannten Anordnung* der magnetischen und elektrischen Kraftlinien in jenem Zeitpunkt die Gestalt des Feldes *für einen endlichen Zeitraum*, sofern nur die einzelnen Medien, durch welche hindurch die Bewegung sich fortpflanzt, durch die Ortsfunktionen ε, μ und eventuell λ definiert sind. c ist eine universelle Konstante. Aber auch dieses ebenso einfache wie umfassende System von Gleichungen, das der Reziprozität der elektrischen und magnetischen Kraft in eleganter Weise Rechnung trägt, wird gewissen Erscheinungen, die es erklären sollte, nicht gerecht.

Im vor. Art. wurde die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eines elektromagnetischen Bewegungszustandes in einem Nichtleiter

$$V' = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

gefunden, wo c diejenige für den leeren Raum ist. Hiernach wäre das Verhältnis

$$\frac{c}{V'} = \sqrt{\varepsilon\mu} = N \tag{2}$$

der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten einer Lichtwelle bei Übergang vom leeren Raum in ein durchsichtiges Mittel, wie Glas, eine nur von dem Material (ε, μ) abhängige Größe, während bekanntlich der Brechungs-Koeffizient N für verschiedene Lichtgattungen (n) verschiedene Werte hat. Die Größen ε, μ können hiernach nicht bloße Konstanten des Mittels sein. Man hat diesem Widerspruch durch die Einführung der übrigens auch sonst unentbehrlichen Begriffe: *elektrische* und *magnetische Erregung* $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}$ (an Stelle der Feldstärken $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$) und *Leitungsstrom* $\mathfrak{J}$ (an Stelle der Leitungsfähigkeit) abzuhelfen versucht, indem man diese Größen in die Gleichungen (1) mittels der Beziehungen

$$\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}; \quad \mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}; \quad \mathfrak{J} = \lambda\mathfrak{E} \tag{3}$$

einsetzte. In dem so erhaltenen System

$$\begin{aligned} c \operatorname{rot} \mathfrak{H} &= \dot{\mathfrak{D}} + 4\pi\mathfrak{J} \\ -c \operatorname{rot} \mathfrak{E} &= \dot{\mathfrak{B}} \end{aligned} \tag{4}$$

treten die Größen ε, μ nicht mehr auf, und man läßt es vorerst dahingestellt, ob und in welchen Fällen[1]) die Vektoren $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ noch durch die Gleichungen (3) aneinander gebunden sind.

Konnte man der erwähnten Schwierigkeit auf diesem Wege begegnen, so gelang dies nicht mehr, wenn es sich um die Erklärung gewisser Erscheinungen *in selbst bewegten Medien* handelte. Die Ausdehnung der MAXWELLschen Formeln auf diesen Fall hat H. HERTZ unternommen.[2]) Wir wollen ihm darin nicht folgen und bemerken nur, daß seine Formeln nicht bloß das DOPPLERsche Phänomen und die Aberration des Lichtes unerklärt lassen, sondern auch mit dem Versuche von FIZEAU über Lichtwellen in einer strömenden Flüssigkeit nicht in Einklang zu bringen sind. Dem letzteren zufolge teilt die Flüssigkeit diesen Lichtwellen, die sich in Richtung der Strömung bewegt, *nicht* ihre (volle) Geschwindigkeit mit; m. a. W.: Die Geschwindigkeit des Wassers $\mathfrak{w}$ addiert (subtrahiert) sich nicht einfach zu derjenigen c des Lichtes, um diejenige c' des Lichtes in bezug auf das selbstbewegte Medium zu geben, es ist

$$c' \neq c + \mathfrak{v}.$$

Da nun aber die Gleichungen von HERTZ-MAXWELL für ein gleichförmig bewegtes Medium, wenn man mit ihm ein Koordinatensystem fest verbindet, in bezug auf dieses genau dieselbe Form haben, wie für das ruhende im ruhenden, in Integralform wenigstens (E. COHN, das elektromagnetische Feld, Vorlesungen über die Maxwellsche Theorie. Leipzig 1900, Seite 352), und zwar mit der gleichen Konstanten c und, wohlgemerkt, unter der stillschweigenden Annahme, daß die Zeit- und Raummaße die gleichen sind, wie für das ruhende Medium, so können sie für den erwähnten Fall die Verhältnisse nicht richtig darstellen.

1) H. A. LORENTZ, Enzykl. der math. Wissensch. V 2, S. 88.

2) H. HERTZ, Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft. Leipzig 1892. S. 256.

Aus diesem Grunde und zugleich in der Absicht, die elektrischen Vorgänge auch in ihrem Einzelverlaufe zu erfassen, hat H. A. LORENTZ die MAXWELL-HERTZschen Differential-Gleichungen durch andere zu ersetzen bzw. zu ergänzen unternommen. Seine Theorie der Elektronen wird zurzeit den vielgestaltigen Erscheinungen auf dem Gebiete der elektromagnetischen Lichttheorie am besten gerecht.

Bevor wir auf die LORENTZsche Theorie eingehen, wollen wir aus den vorstehenden Gleichungen einen Satz ableiten, der auch für sie seine Gültigkeit behält: den POYNTINGschen Satz von der Fortpflanzung elektromagnetischer Energie.

Wir hatten oben Art. 47 (6) die Energiegleichung in die Gestalt gebracht

$$\frac{d\mathbf{E}}{dt} - \frac{d'\mathbf{S}}{dt} = 0, \tag{5}$$

wo der Zuwachs an Volum-Energie im Innern eines geschlossenen Raumes $\mathbf{T}$ durch

$$\frac{d\mathbf{E}}{dt} = \frac{d}{dt}\int \frac{1}{8\pi}(\varepsilon|\mathfrak{E}|^2 + \mu|\mathfrak{H}|^2)\,d\tau + \int \lambda|\mathfrak{E}|^2 d\tau \tag{6}$$

mit

$$|\mathfrak{E}|^2 = X^2 + Y^2 + Z^2; \quad |\mathfrak{H}|^2 = L^2 + M^2 + N^2$$

dargestellt ist; die Abnahme, indem Energie durch die Oberfläche von $\mathbf{T}$ nach außen entweicht, durch

$$-\frac{d'\mathbf{S}}{dt} = -\frac{1}{4\pi}\int c\,\mathbf{S}\{\cos(n,x)\,(YN - ZM)\}\,d\sigma. \tag{7}$$

Wir gestalten diesen Ausdruck um. Nach dem LAPLACEschen Determinanten-Satz ist

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(YN - ZM)^2 = \mathbf{S}\begin{vmatrix} YZ \\ MN \end{vmatrix}^2 &= \begin{vmatrix} X^2+Y^2+Z^2 & XL+YM+ZN \\ LX+MY+NZ & L^2+M^2+N^2 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{S}X^2 \cdot \mathbf{S}L^2 - (\mathbf{S}XL)^2 = |\mathfrak{E}|^2 \cdot |\mathfrak{H}|^2 - (|\mathfrak{E}| \cdot |\mathfrak{H}| \cos V)^2 \\ &= |\mathfrak{E}|^2 |\mathfrak{H}|^2 \sin^2 V,\end{aligned}$$

wenn V der Winkel von $\mathfrak{E}$ gegen $\mathfrak{H}$ ist, und $|\mathfrak{E}|$, $|\mathfrak{H}|$ wie oben die absoluten Beträge (Längen) der Vektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ sind.

Ist nun α, β, γ diejenige Richtung s, die sowohl auf dem Vektor $\mathfrak{E}$, wie auf $\mathfrak{H}$ senkrecht steht (ebenso wie das Vektorprodukt $[\mathfrak{E}, \mathfrak{H}]$, mit welchem s dem Sinne nach übereinstimmen möge), so ist, wegen

$$X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma = 0$$

$$L\cos\alpha + M\cos\beta + N\cos\gamma = 0,$$

$$\cos\alpha = (YN - ZM)\frac{1}{\sqrt{\mathbf{S}(YN - ZM)^2}}; \text{ usw.}$$

Daher wird:

$$\mathbf{S}\{\cos(n,x)\,(YN - ZM)\} = \mathbf{S}\{\cos(n,x)\cos\alpha\}\,|\mathfrak{E}|\,|\mathfrak{H}|\sin V$$
$$= \cos(n,s)\cdot|\mathfrak{E}|\cdot|\mathfrak{H}|\sin V,$$

und der Ausdruck für die durch die Oberfläche ausströmende Energie lautet

$$-\frac{d'\mathsf{S}}{dt} = -\frac{1}{4\pi}\int c\,|\mathfrak{E}|\cdot|\mathfrak{H}|\cdot\sin(\mathfrak{E},\mathfrak{H})\cos(n,s)\,d\sigma$$
$$= -\int\frac{1}{4\pi}|\mathfrak{S}|\cos(n,\mathfrak{S})\,d\sigma,$$

wenn man den „Poyntingschen Strahlungsvektor"

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathfrak{E},\mathfrak{H}] \tag{8}$$

(mit dem Betrage $|\mathfrak{S}|$) einführt, dessen Richtung mit der von s zuzusammenfällt.

Die Energiegleichung

$$\frac{d\mathsf{E}}{dt} - \int|\mathfrak{S}|\cos(n,\mathfrak{S})\,d\sigma = 0, \tag{9}$$

derzufolge die Energieabnahme gleich der Strömung durch die Oberfläche ist, läßt sich mit Hilfe des Gaussschen Satzes in die Form bringen

$$\frac{d\mathsf{E}}{dt} = -\int\operatorname{div}\mathfrak{S}\,d\tau. \tag{9a}$$

Auf ein einzelnes Raumelement von der Größe

$$d\tau = 1$$

angewendet, sagt diese Gleichung

$$\frac{d\mathsf{E}}{dt} + \operatorname{div}\mathfrak{S} = 0 \tag{9b}$$

aus, daß in einem Nichtleiter (für den $\lambda = 0$ ist) an allen den Stellen, wo div $\mathfrak{S}$ verschwindet, die elektromagnetische Energie E sich weder vermehren noch vermindern kann. Eine Vergleichung der Formel (9b) mit derjenigen der Kontinuität

$$\frac{d\log\varrho}{dt} + \operatorname{div}\mathfrak{v} = 0$$

läßt erkennen, daß der Vektor $\mathfrak{S}$ gegenüber einer Materie „Energie" von der Dichte e^{E} dieselbe Rolle spielt, wie der Vektor $\mathfrak{v}$ gegenüber einer flüssigen Masse von der Dichte ϱ. Wo div $\mathfrak{S}$ positiv ist, sind Energiequellen, wo negativ, Senken einer im übrigen unzerstörbaren und nicht vermehrbaren Flüssigkeit vorhanden. Die Richtung des Vektors $\mathfrak{S}$ ist (8) senkrecht zu $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$, ist also im isotropen Medium diejenige des Lichtstrahls (der Wellennormalen). $\mathfrak{S}$ selbst kann somit im Falle hochfrequenter Oszillationen als Geschwindigkeit der Energie des Lichtes aufgefaßt werden.

49. Die Lorentzschen Gleichungen. Ruhendes System.

Aus der ersten der Gleichungen (4) des vorigen Art.

$$c \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \dot{\mathfrak{D}} + 4\pi \mathfrak{J}$$

erhält man (Art. 22 a. E.)

$$\operatorname{div}(\dot{\mathfrak{D}} + 4\pi \mathfrak{J}) = 0,$$

wo $\mathfrak{D}$ die elektrische Erregung, $\mathfrak{J}$ der Leitungsstrom ist.

Denkt man sich einen Raumteil **T**, innerhalb dessen sich ein elektromagnetischer Prozeß abspielt, mit einer geschlossenen Fläche, die keinen von Elektrizität durchströmten Leiter trifft, umgeben, so ist das über den Raum ausgedehnte Integral

$$\int \operatorname{div}(\dot{\mathfrak{D}} + 4\pi \mathfrak{J}) d\tau = \int \operatorname{div} \dot{\mathfrak{D}} d\tau = \frac{d}{dt} \int \operatorname{div} \mathfrak{D} d\tau = 0,$$

weil das über $\operatorname{div} \mathfrak{J}$ erstreckte Integral bei Anwendung des Gaussschen Satzes (Art. 24) verschwindet. Das Integral

$$4\pi e = \int \operatorname{div} \mathfrak{D} d\tau \tag{1}$$

hat somit den Charakter einer in der Zeit unveränderlichen Größe, ähnlich einer Masse. Man nennt die in dem Raume **T** enthaltene Elektrizitätsmenge e seine *elektrische Ladung*. Sie kann positives oder negatives Vorzeichen haben. Die Ortsfunktion

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = \operatorname{div} \varepsilon \mathfrak{E} = 4\pi \varrho, \tag{2}$$

also die elektrische Ladung der Volum-Einheit an der Stelle x, y, z, heißt die elektrische *Dichte.*[1])

An diese Begriffe knüpft die Elektronentheorie von H. A. Lorentz an. Während alle früheren Theorien, wie die von Cl. Maxwell, E. Cohn, H. Hertz, O. Heaviside beliebig große Raumteile mit elektrischer Masse stetig erfüllt angenommen haben, denkt sich Lorentz nur bestimmte (etwa kugelförmige) Raumteile von kleinster Dimen-

1) Daß dem Buchstaben ϱ hier eine andere Bedeutung beigelegt wird, als in früheren Artikeln, kann nicht irre führen, weil wir die Gleichungen dort nicht mehr benutzen.

sion, „Elektronen“ genannt, mit Elektrizität von bestimmtem Vorzeichen erfüllt, und zwar dasselbe Elektron für alle Zeiten mit derselben Ladung. Wie sich die Elektronen zu den Körperatomen verhalten, läßt man dahingestellt. Doch nimmt man an, daß in einem elektrisch nicht geladenen (neutralen) Körperatom sich die positiven und negativen Elektronen zur Gesamtladung Null vereinigen.

Eine elektromagnetische *Erregung* wird von einem Körperatom zum anderen, von einer ponderablen Masse zur anderen durch Vermittlung des *Äthers* übertragen, der dabei gleichfalls „erregt“ wird. Ebenso wie der Äther den leeren Raum erfüllt, so durchdringt er auch die Elektronen und die ponderable Masse, als ob sie nicht vorhanden wären, und überträgt auf sie den Erregungs-(Schwingungs)-zustand, der, je nachdem er in Oszillationen besteht, die kürzere oder längere Wellenlänge haben, als Licht oder als elektromagnetische Störung wahrgenommen wird.

Den Erregungszustand im Molekül eines Nichtleiters (häufig durchsichtig) hat man sich als eine *Trennung* der im ungestörten Zustand vereinigten zwei Arten von Elektrizität (von Elektronen) zu denken, die (wie dies auch Maxwell annimmt) in einer gegenseitigen Verschiebung (displacement) der beiden besteht. Die Trennung der in jedem solchen „Dipol“ vereinigten positiven und negativen Elektronen kann nur durch eine fortgesetzte elektrische Erregung aufrecht erhalten werden — bei unserer Auffassung durch fortwährende Erneuerung der Stöße

$$\varrho \dot{u} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{D}\sqrt{\frac{\varrho}{\varepsilon\pi}}.$$

Man könnte sich den Vorgang im Äther ähnlich denken; aber der freie Äther enthält keine elektrischen Massen, auch keine im gebundenen Zustand (keine Dipole).

In den Molekülen eines *Leiters* andererseits wird der Zerlegung der Elektrizität in positive und negative geringerer Widerstand entgegengesetzt, wie in denen eines Nichtleiters; die Erregung (Kraft) bewirkt, daß die gegenseitige Entfernung der ungleichnamigen Elektronen zunimmt, nur verzögert durch die Reibung. Indem sich beide in entgegengesetztem Sinne bewegen, bildet sich der elektrische *Strom*. — Pflanzt sich außer diesem „Konvektionsstrom“ noch ein oszillatorischer Erregungszustand durch den Leiter hindurch fort, so überlagert sich dieser jener Fortbewegung.[1])

1) Von *Nichtleitern*, die *undurchsichtig* sind (wie Schwefel oder Kautschuk), welche also die elektromagnetischen Schwingungen, nicht aber die des Lichtes

Dies etwa ist das Bild, das man sich zurzeit von den elektromagnetischen Vorgängen in Nichtleitern und Leitern macht. Doch wollen wir gleich zufügen, daß nur wenige Züge dieses Bildes wirklich verwendet werden, wenn es sich um die Aufstellung und weitere Behandlung der *Differentialgleichungen* handelt, welche jene Vorgänge beschreiben. Wir werden auf diejenigen Gedanken, die tatsächlich zur Verwendung kommen, jedesmal ausdrücklich hinweisen.

Was nun diese Gleichungen für den Erregungszustand angeht, so übernimmt H. A. Lorentz zunächst *für den leeren Raum* (Äther) einfach diejenigen von Maxwell. Sie ergeben sich aus denen (1) (4) des Art. 48, indem man

$$\varepsilon = \mu = 1; \quad \lambda = \mathfrak{J} = \varrho = 0$$

setzt, und lauten

$$c \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \dot{\mathfrak{E}} \tag{3}$$

$$- c \operatorname{rot} \mathfrak{E} = \dot{\mathfrak{H}} \tag{4}$$

$$\operatorname{div} \varepsilon\mathfrak{E} = \operatorname{div} \mathfrak{D} = 4\pi\varrho = 0 \tag{5}$$

(wo die letzte nach (2) wiederholt ist). Hier ist also $\mathfrak{E}$ die elektrische, $\mathfrak{H}$ die magnetische Feldstärke, c die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum.

Für das *Innere eines Elektrons* aber, sowie durchschnittweise auch für jeden *Raumteil, der mit Elektronen* mehr oder weniger dicht *gefüllt* (elektrisch geladen) ist, setzt Lorentz

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi\varrho, \tag{6}$$

wo dann ϱ eine Funktion des Ortes und der Zeit ist. (Diese Definition von ϱ unterscheidet sich also von derjenigen (2) von Hertz.)

Die Bedingung für die Erhaltung der elektrischen Masse in einem Elektron, bzw. für die Anzahl der Elektronen, die von einer sich fortbewegenden und zugleich sich verändernden Fläche eingeschlossen sind, liefert die *Kontinuitätsgleichung* (Art. 23, Fußnote)

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \mathfrak{v}) = 0, \tag{7}$$

wenn $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit des Volumelementes ist.

---

ungeschwächt durchlassen, nimmt man an, daß ihre Körperatome aus solchen Dipolen bestehen, die zwar von kurzwelligen Lichtoszillationen, nicht aber (oder doch viel weniger) von langwelligen elektromagnetischen erregt werden, derart, daß die Energie einer Lichtwelle in Schwingungen der ungleichnamigen Elektronen der Dipole gegeneinander umgesetzt und somit zerstreut wird.

Ein *elektrischer Strom* besteht nach LORENTZ in der Bewegung von positiven Elektronen in der Stromrichtung und von negativen in der entgegengesetzten. Ist $\mathfrak{v}$ ihre Geschwindigkeit, so heißt die Größe

$$\varrho \mathfrak{v},$$

also das Moment (der *Impuls*) der elektrischen Masse bewegter Elektronen, die *Konvektion*. Dieser überlagert sich die *Erregung* $\dot{\mathfrak{E}}$ (der „Verschiebungsstrom" nach MAXWELL) des *Äthers* an derselben Stelle. Der *Gesamtstrom* an einer Stelle ist somit

$$\dot{\mathfrak{E}} + 4\pi\varrho\mathfrak{v}.$$

Nun ist, wegen (6)

$$\operatorname{div}(\dot{\mathfrak{E}} + 4\pi\varrho\mathfrak{v}) = 4\pi\frac{\partial\varrho}{\partial t} + 4\pi\operatorname{div}(\varrho\mathfrak{v})$$

eine Größe, die wegen (7) verschwindet. Der Gesamtstrom ist also durch eine Rotation darstellbar (Art. 31), die für $\varrho = 0$ wegen (3) in $c \operatorname{rot} \mathfrak{H}$ übergehen muß. LORENTZ setzt deshalb auch für einen im freien Äther bewegten Elektronenstrom — wie etwa den in den W. KAUFMANNschen Versuchen von der Kathode ausgehenden Strom — die folgenden Gleichungen[1]) an, deren Form durch die Analogie mit den MAXWELLschen Gleichungen Art. 48 (4) für den Stromvektor nahegelegt wird,

$$c \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \dot{\mathfrak{E}} + 4\pi\varrho\mathfrak{v} \tag{8}$$

$$-c \operatorname{rot} \mathfrak{E} = \dot{\mathfrak{H}}, \tag{9}$$

wozu wegen

$$\operatorname{div} \dot{\mathfrak{H}} = 0$$

noch angenommen wird

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0. \tag{10}$$

Diese Gleichung sagt aus, daß es keinen „freien" (vom polar entgegengesetzten unabhängig existierenden) Magnetismus gibt. Die Gleichungen (7)—(9) hat man sich in jedem Punkt des Raumes als streng erfüllt vorzustellen. Nur setzt ihre Benutzung die Kenntnis von $\varrho\mathfrak{v}$, d. h. die Lage und Bewegung aller Elektronen eines Systems voraus. Man kennt sie z. B., wenn es sich um einen stationären Strom in einem linearen Leiter handelt. In anderen Fällen müßte man den Einfluß der nicht geladenen Körperteilchen auf die Bewegung der Elektronen übersehen können, was ausgeschlossen ist. Deshalb leitet LORENTZ aus jenen Gleichungen solche für Mittelwerte

1) S. den öfter angezogenen Bericht von LORENTZ in Enzykl. d. math. Wiss. V, 2. S. 155 ff.

der betrachteten Zustandsgrößen in ponderablen Körpern ab, auf die wir jedoch hier nicht eingehen können.[1]) Die aufgestellten Gleichungen sind indessen bereits einiger Anwendungen fähig und durchaus charakteristisch für die Theorie. Wir können uns deshalb hier, wo es sich nur um eine Skizze der LORENTZschen Auffassung handelt, auf sie beschränken. Ihr Vorzug besteht vor allem in ihrer Verwendbarkeit auch für bewegte Ladungen, die uns später noch beschäftigen werden. Insbesondere läßt sich auf Grund derselben, wie man sehen wird, das FIZEAUsche Versuchsergebnis erklären. Wir ziehen zunächst aus den Gleichungen (3)—(10) einige Folgerungen.

50. Die elektrische Erregung und die magnetische Kraft. Ihre Potentiale.

Die Komponenten der Kräfte des elektrischen[2]) und magnetischen Feldes, das durch Elektronen in gegebener Lage und Bewegung erzeugt wurde, genügen acht Gleichungen, die sich aus den LORENTZschen (3)—(10) des vorigen Artikels in Vektorform

$$c \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \dot{\mathfrak{E}} + 4\pi\varrho\mathfrak{v} \tag{1}$$

$$-c \operatorname{rot} \mathfrak{E} = \dot{\mathfrak{H}} \tag{2}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi\varrho \tag{3}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho\mathfrak{v}) = 0 \tag{5}$$

durch Zerlegung in die Koordinatenform ergeben:

$$\begin{aligned}
c\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) &= \dot{X} + 4\pi\varrho\mathfrak{v}_x; & -c\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) &= \dot{L} \\
c\left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) &= \dot{Y} + 4\pi\varrho\mathfrak{v}_y; & -c\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) &= \dot{M} \qquad (1\text{a}); (2\text{a}) \\
c\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right) &= \dot{Z} + 4\pi\varrho\mathfrak{v}_z; & -c\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) &= \dot{N}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 4\pi\varrho; \quad \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0, \qquad (3\text{a}); (4\text{a})$$

---

1) S. den mehrfach erwähnten Enzyklopädie-Artikel von LORENTZ, V 2, S. 200 ff.

2) Wir schließen hiermit im wesentlichen an die Bezeichnung von LORENTZ an, werden aber im Text öfter statt dessen das Wort „elektrische Kraft“ gebrauchen, die ja im leeren Raum mit der „Erregung“ zusammenfällt, wie wir auch den Buchstaben $\mathfrak{E}$ (statt $\mathfrak{D}$ bei LORENTZ) hierfür beibehalten wollen.

wozu noch die Kontinuitätsgleichung kommt:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho \mathfrak{v}_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho \mathfrak{v}_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho \mathfrak{v}_z)}{\partial z} = 0. \tag{5}$$

Hier sind $\mathfrak{v}_x$, $\mathfrak{v}_y$, $\mathfrak{v}_z$ die Komponenten der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Konvektionsstromes $\varrho\mathfrak{v}$. Man kann aus den 8 Gleichungen (1a)—(4a) durch Elimination von 5 der 6 Größen $X, \ldots L, \ldots$ solche für die einzelnen Komponenten herleiten. Wir wollen diese Elimination durch Vektorrechnung ausführen. Wendet man die Identität (Art. 31 (4a))

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{E} = -\triangle\mathfrak{E} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{E} \tag{6}$$

auf die Gleichung (2) an, indem man beiderseits die Rotation bildet, und setzt $\operatorname{rot}\dot{\mathfrak{H}}$ in die nach t abgeleitete Gleichung (1) ein, so erhält man

$$c\operatorname{rot}\dot{\mathfrak{H}} = -c^2\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{E} = \ddot{\mathfrak{E}} + 4\pi\frac{\partial}{\partial t}(\varrho\mathfrak{v}),$$

oder (6):

$$\triangle\mathfrak{E} - \frac{1}{c^2}\ddot{\mathfrak{E}} = 4\pi\operatorname{grad}\varrho + \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\varrho\mathfrak{v}). \tag{7}$$

Man erhält auf demselben Weg

$$\triangle\mathfrak{H} - \frac{1}{c^2}\ddot{\mathfrak{H}} = -\frac{4\pi}{c}\operatorname{rot}(\varrho\mathfrak{v}). \tag{8}$$

Durch die Gleichungen (7), (8) sind die Vektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ — und damit auch ihre Komponenten — isoliert. Aus (7) folgt

$$\triangle X - \frac{1}{c^2}\ddot{X} = 4\pi\frac{\partial\varrho}{\partial x} + \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\varrho\mathfrak{v}_x);\quad \text{usw.,}$$

aus (8)

$$\triangle L - \frac{1}{c^2}\ddot{L} = -\frac{4\pi}{c}\left(\frac{\partial(\varrho\mathfrak{v}_z)}{\partial y} - \frac{\partial(\varrho\mathfrak{v}_y)}{\partial z}\right);\quad \text{usw.}$$

Statt der Kräfte selbst führt man jedoch besser ihre *Potentiale* ein, und zwar zunächst für den Solenoidal-Vektor $\mathfrak{H}$ (Art. 31) das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ durch

$$\mathfrak{H} = \operatorname{rot}\mathfrak{A}. \tag{9}$$

Die Gleichung (2)

$$0 = \operatorname{rot}\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{H}} \tag{2}$$

geht dann über in

$$0 = \operatorname{rot}\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{A}}\right).$$

Führt man nun weiter für den in der Klammer stehenden Potentialvektor (Art. 29) durch die Annahme

$$\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{A}} - \operatorname{grad}\varphi \tag{10}$$

ein skalares Potential φ ein, und setzt aus (9), (10) die Werte für $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ in die Gleichungen

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{1}{c}(\dot{\mathfrak{E}} + 4\pi\varrho\mathfrak{v}) \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi\varrho \tag{3}$$

ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathfrak{A} &= -\triangle\mathfrak{A} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{A} \\ &= \frac{1}{c}\left(-\frac{1}{c}\ddot{\mathfrak{A}} - \operatorname{grad}\dot{\varphi} + 4\pi\varrho\mathfrak{v}\right), \end{aligned}$$

oder

$$\operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\mathfrak{A} + \frac{1}{c}\dot{\varphi}\right) = \triangle\mathfrak{A} - \frac{1}{c^2}\ddot{\mathfrak{A}} + \frac{4\pi}{c}\varrho\mathfrak{v}; \tag{11}$$

und

$$\operatorname{div}\left(-\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{A}} - \operatorname{grad}\varphi\right) = 4\pi\varrho,$$

oder, weil $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \triangle\varphi$ ist,

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{div}\mathfrak{A} + \frac{1}{c}\dot{\varphi}\right) = \triangle\varphi - \frac{1}{c^2}\ddot{\varphi} + 4\pi\varrho. \tag{12}$$

Wegen (9) ist die Funktion $\mathfrak{A}$ nur bis auf einen Gradienten bestimmbar. Man kann sich diesen so bestimmt denken, daß der Klammerausdruck links in (11), (12) verschwindet. In der Tat: Es seien $\mathfrak{A}_0$, φ_0 zwei Funktionen, die den Gleichungen (11), (12) genügen. Dann läßt sich eine Funktion χ so bestimmen, daß auch

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{1}{c}\dot{\chi}$$

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 - \operatorname{grad}\chi$$

genügen. Denn setzt man diese Werte in (11), (12) ein, so kommt, wegen

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\chi = \triangle\chi,$$

$$\operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\mathfrak{A}_0 - \triangle\chi + \frac{1}{c}\dot{\varphi}_0 + \frac{1}{c^2}\ddot{\chi}\right) = \triangle\mathfrak{A} - \frac{1}{c^2}\ddot{\mathfrak{A}} + \frac{4\pi}{c}\varrho\mathfrak{v}$$

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{div}\mathfrak{A}_0 - \triangle\chi + \frac{1}{c}\dot{\varphi}_0 + \frac{1}{c^2}\ddot{\chi}\right) = \triangle\varphi - \frac{1}{c^2}\ddot{\varphi} + 4\pi\varrho.$$

Bestimmt man nun die Funktion χ so, daß je der Klammerausdruck auf der linken Seite verschwindet, so haben die zur Berechnung von $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ zu verwendenden Potential-Funktionen $\mathfrak{A}$, φ die Gleichungen zu erfüllen

$$\triangle\varphi - \frac{1}{c^2}\ddot{\varphi} = -4\pi\varrho \tag{13}$$

$$\triangle\mathfrak{A} - \frac{1}{c^2}\ddot{\mathfrak{A}} = -\frac{4\pi}{c}\varrho\mathfrak{v}. \tag{14}$$

Weil nun umgekehrt zu irgendeinem Lösungspaar φ_0, $\mathfrak{A}_0$ dieser Gleichungen immer eine Funktion χ von der angegebenen Art gefunden werden kann, so können die Gleichungen (13), (14) an Stelle von (11), (12) zur Bestimmung von φ, $\mathfrak{A}$ dienen. Zwischen beiden Funktionen besteht noch die Beziehung (wegen (11), (14); (12), (13)):

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} + \frac{1}{c}\dot{\varphi} = 0, \tag{15}$$

welche die Gleichung für χ ersetzen kann.

Die partiellen Differentialgleichungen (13), (14) für das skalare Potential φ und das Vektorpotential $\mathfrak{A}$, die vermöge (9) und (10) den Vektor $\mathfrak{E}$ und den Solenoidalvektor $\mathfrak{H}$ definieren, gleichen im Falle einer stationären Bewegung denen (9), (10) des Art. 31, die wir dort für die Potential- und Solenoidalkomponenten eines allgemeinen Vektors aufgestellt haben. Die Dichte ϱ gibt die Quellen-Verteilung, der Konvektionsstrom $\varrho\mathfrak{v}$ die Wirbelverteilung an, von denen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ abhängen. — Unter Einführung eines vierdimensionalen Gebildes, das sich durch die drei Raumkoordinaten x, y, z und die Zeit t bestimmt, hat Minkowski (in einem kurz vor seinem Tod redigierten Vortrag, den er in der Naturforscherversammlung in Köln gehalten hatte, „Raum und Zeit", Leipzig 1909, S. 12) die Potentiale φ, $\mathfrak{A}$ in eines zusammengefaßt, dem sich in den Begriffsbildungen jenes Raum-Zeit-Koordinatensystems, was hier nicht ausgeführt werden soll, eine elegante Deutung beilegen läßt.

Im Fall einer stationären Bewegung gehen die Gleichungen (13), (14) über in

$$\triangle\varphi = -4\pi\varrho \tag{16}$$

$$\triangle\mathfrak{A} = -\frac{4\pi}{c}\varrho\mathfrak{v}, \tag{17}$$

deren Integrale wir, unter der Annahme, daß φ, $\mathfrak{A}$ im Unendlichen in bestimmter Weise verschwinden, oben (Art. 30 (7), (10) und Art. 31 (5b), (6a)) aufgestellt haben:

$$\varphi = \int \frac{\varrho}{r} d\tau \tag{18}$$

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{c}\int \frac{\varrho\mathfrak{v}}{r} d\tau, \tag{19}$$

wo $\mathfrak{H} = \operatorname{rot}\mathfrak{A}$, $\mathfrak{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ und die Komponenten

$$L = \frac{\partial\mathfrak{A}_y}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{A}_z}{\partial y}, \text{ usw.,} \qquad X = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}; \text{ usw.,}$$

sind, wenn durch die Indizes x, y, z die Komponenten des Vektors, an den sie angehängt sind, bezeichnet werden.

51. Anwendung auf stationäre Zustände.

Einige einfache Beispiele mögen die Verwendung der vorstehenden Formeln zeigen.

1. Beispiel. Das Innere einer sehr kleinen Kugel vom Halbmesser α sei mit elektrischer Masse geladen.

Untersucht man ihre Wirkung auf solche Punkte des Raumes, für welche der Abstand r vom Kugelmittelpunkt gegen α sehr groß ist, so kann man für jeden außerhalb der Kugel gelegenen Raumpunkt (vorig. Art. (18),

$$\varphi = \int \frac{\varrho\, d\tau}{r} = \frac{1}{r}\int \varrho\, d\tau = \frac{e}{r} \tag{1}$$

setzen, wenn e, die Ladung (Art. 49), eine von r unabhängige positive oder negative Konstante ist. Dann aber ist φ nichts anderes als das Potential einer umgekehrt dem Quadrat der Entfernung proportional wirkenden Fernkraft, wie sie das COULOMBsche Gesetz einer elektrischen Masse e in a, b, c zuschreibt, die auf die elektrische Masse 1 in x, y, z wirkt.

Hat man zwei kleine Kugeln von den Halbmessern α, α_1 in a, b, c und a_1, b_1, c_1, so läßt sich außerhalb derselben ihre Wirkung auf die Masse 1 in x, y, z wieder durch (Art. 29)

$$\varphi = \frac{e}{r} + \frac{e_1}{r_1} \tag{2}$$

darstellen, wo e, e_1 positive oder negative Konstanten sind. Da $\mathfrak{E}$ der Gradient von $-\varphi$ ist (vor. Art. a. E.), so wird, wenn wir die elektrischen Massen als ruhend, $\mathfrak{v} = 0$, also $\mathfrak{A} = 0$ annehmen, die elektromagnetische Energie (Art. 48) ausgedrückt durch

$$\mathsf{E} = \int \frac{1}{8\pi} |\mathfrak{E}|^2 d\tau = \frac{1}{8\pi}\int \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right) d\tau.$$

Diesen Integralausdruck haben wir oben, wenn auch auf Grund einer ganz anderen Deutung (Art. 32 (7)), berechnet und dafür

$$\mathsf{E} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{\alpha} + \frac{2ee_1}{R} + \frac{e_1^2}{\alpha_1}\right) = \frac{ee_1}{R} + \text{konst.} \tag{3}$$

gefunden, wo

$$R^2 = (a - a_1)^2 + (b - b_1)^2 + (c - c_1)^2$$

das Quadrat des Abstandes der elektrischen Massenpunkte α, α_1 ist.

Die in dem Medium vorhandene elektromagnetische Energie ist also, abgesehen von einer positiven Konstanten, gleich dem Potential ee_1/R der zwischen den beiden Ladungen wirkenden Anziehungs- oder Abstoßungskraft.

2. Beispiel. Ein konstanter gradliniger Strom fließe in Richtung der positiven Z-Achse durch einen sehr dünnen zylindrischen Leiter vom Querschnitt 1; ϱ sei die in der Zeiteinheit hindurchgehende Elektrizitätsmenge (die Stromdichte). Dann sind die Komponenten der Stromgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_x = \mathfrak{v}_y = 0$. Wir setzen ferner $\mathfrak{v}_z = 1$.

Für eine Stelle des Stromes im Abstand ζ vom Ursprung (s. d. Figur) ist das Volumelement $d\tau = 1.d\zeta$, daher (vor. Art. a. E.)

$$\mathfrak{A}_x = \mathfrak{A}_y = 0; \quad \mathfrak{A}_z = \frac{1}{c}\int \frac{\varrho\, d\zeta}{r}.$$

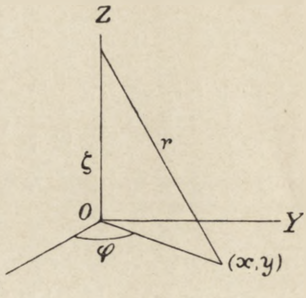

Fig. 26.

Es genügt, das Feld in der XY-Ebene zu kennen. Sei R der Abstand eines Punktes derselben vom Ursprung,

$$R^2 = x^2 + y^2$$

und

$$r^2 = R^2 + \zeta^2,$$

so wird

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{A}_z = \frac{\varrho}{c}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}\frac{d\zeta}{\sqrt{R^2+\zeta^2}}.$$

Daher ist

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x} = -\frac{\varrho x}{c}\int\limits_{+\infty}^{-\infty} \frac{d\zeta}{\sqrt{R^2+\zeta^2}^{\,3}} = \frac{-2\varrho x}{R^2 c}.$$

Man findet ebenso:

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y} = \frac{-2\varrho y}{R^2 c}.$$

Daher sind die Komponenten der magnetischen Kraft

$$L = \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y} = -\frac{2\varrho}{c}\cdot\frac{1}{R}\cdot\sin\varphi; \quad M = -\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x} = \frac{2\varrho}{c}\cdot\frac{1}{R}\cdot\cos\varphi; \quad N = 0, \tag{4}$$

wenn φ der Winkel von R gegen die X-Achse ist.

Dieser Ausdruck für die senkrecht zur Verbindungslinie R gerichtete magnetische Kraft stellt genau das Biot-Savartsche Gesetz für die magnetische Wirkung eines unendlich langen geradlinigen Stromes dar.[1])

1) Eigentlich widerspricht die Voraussetzung eines unendlich langen geradlinigen Stromes der oben (Art. 50 a. E.) gemachten Annahme, daß die Funk-

Wir bilden weiter

$$\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varrho\, d\zeta}{r} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varrho\, d\zeta}{\sqrt{R^2 + \zeta^2}},$$

und erhalten

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{2\varrho x}{R^2}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{2\varrho y}{R^2}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

Daher ist, wegen

$$\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{A}} = -\operatorname{grad} \varphi, \quad \dot{\mathfrak{A}} = 0,$$

$$X = \frac{2\varrho x}{R^2}; \quad Y = \frac{2\varrho y}{R^2},$$

d. h. die elektrische Kraft steht senkrecht zur Stromrichtung. Dieses Ergebnis widerspricht der Erfahrung. Eine Kraft in der angegebenen Richtung ist nicht vorhanden. Man muß eben annehmen (Art. 49), daß *zwei* Ströme von *entgegengesetzter* Richtung und entgegengesetzten Vorzeichen der Ladung sich überlagern und in ihrer elektrischen Wirkung nach außen aufheben.

3. Beispiel. Die Stärke eines elektrischen Stromes kann in zweierlei Maß gemessen werden.

Für einen Stromleiter von kleinem Querschnitt q sei die in der Zeiteinheit durch die Querschnittseinheit fließende Elektrizitätsmenge (die Stromdichte) j bekannt. Dann ist die für alle (auch ungleichen) Querschnitte gleiche Größe $i = j \cdot q$ *die Stromstärke*, in *elektrostatischem* Maße gemessen. Das *elektromagnetische* Maß J für die Stromstärke liefert die Arbeit, die bei einer Umkreisung des Leiters durch einen Magnetpol von der Stärke 1 geleistet wird. Diese Arbeit wird durch das Linienintegral dargestellt

$$4\pi J = \int (L dx + M dy + N dz) = \int (\mathfrak{H}, d\mathfrak{s}). \tag{5}$$

Es kann nach dem Satze von Stokes (Art. 28, (3a)) in ein Flächenintegral

$$\int (\mathfrak{H}, d\mathfrak{s}) = \int (\operatorname{rot} \mathfrak{H})_n d\sigma = \frac{4\pi}{c} \int \varrho \mathfrak{v}_n d\sigma \tag{6}$$

verwandelt werden, das sich über eine durch den Integrationsweg von J begrenzte Fläche erstreckt, oder vielmehr über denjenigen Teil derselben, wo der Vektor $\varrho \mathfrak{v}$ von Null verschieden ist, d. h.

tion $\mathfrak{A}$ und ihre Ableitungen im Unendlichen verschwinden. Man möge sich daher den Schluß des Stromes in entsprechend weiter aber endlicher Entfernung vom Ursprung vorgenommen denken.

wo der Stromleiter geschnitten wird. Wir können also diese Fläche mit dem Querschnitt q zusammenfallen lassen, für den ϱ und $|\mathfrak{v}| = \mathfrak{v}_n$ als konstant gelten können, und erhalten

$$J = \frac{1}{c}\int \varrho \mathfrak{v}_n d\sigma = \frac{\varrho q \cdot |\mathfrak{v}|}{c}.$$

Nun hängt die Dichte ϱ derjenigen elektrischen Menge, die den Querschnitt q passiert, mit der Stromdichte j durch die Gleichung zusammen

$$\varrho |\mathfrak{v}| = j.$$

Daher besteht zwischen dem *elektrostatischen oder mechanischen Maße i und dem elektromagnetischem Maße J einer Stromstärke die Beziehung*

$$cJ = i; \tag{7}$$

wo c die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume ist.

Was die *Dimensionen* der im vorstehenden eingeführten Größen angeht, so ist das in Beisp. 1 berechnete Potential der Fernkraft, die eine kleine elektrische Masse e auf eine solche e_1 ausübt,

$$\frac{ee_1}{R},$$

eine Arbeit im Sinne der Mechanik ponderabler Massen, hat also die Dimension (Einleitung)

$$\left[\frac{ee_1}{R}\right] = [l^2 m t^{-2}].$$

Demnach ist die Dimension einer Elektrizitätsmenge e, mechanisch gemessen,

$$[e] = \left[l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}\right],$$

und diejenige der Dichte einer räumlich verteilten elektrischen Menge (s. oben (1))

$$[\varrho] = \left[l^{-\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}\right].$$

Die Polstärke eines Magneten hat dieselbe Dimension, wie die Elektrizitätsmenge e, weil die Dimension für $|\mathfrak{H}|$ dieselbe ist, wie die für $|\mathfrak{E}|$. Diese letztere ist, wie sich aus der Energieformel (12) des Art. 46 ergibt, wo ε, μ reine Zahlen sind (Art. 45), oder auch aus (8a) des Art. 46, weil

$$\mathbf{E} = [l^2 m t^{-2}]$$

als Energie (Einleitung),

$$[|\mathfrak{E}|] = [|\mathfrak{H}|] = \left[l^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}\right]$$

ferner (Art. 47)

$$[|\mathfrak{S}|] = [m t^{-3}].$$

Für die Stromstärke $[J]$ in elektromagnetischem Maße (5) findet man

$$[J] = \left[l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}\right]$$

und daher für die Stromstärke $[i]$ in mechanischem Maße:

$$[i] = \left[l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-2}\right].$$

52. Nichtstationäre Zustände.

Die allgemeinen Integrale der früher (Art. 50 F. (13) (14)) gefundenen partiellen Differentialgleichungen, denen die Potentiale φ, $\mathfrak{A}$ genügen, lassen sich, was wir hier nicht beweisen wollen, falls diese Funktionen im Unendlichen verschwinden, durch die folgenden Raumintegrale darstellen. Das Integral von

$$\triangle\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\varrho \tag{1}$$

ist

$$\varphi = \int \frac{1}{r}\bar{\varrho}\, d\tau, \tag{1a}$$

wenn $\bar{\varrho}$ bedeutet: die (gegeben vorliegende) Funktion $\varrho(x, y, z, t)$, gebildet für $t - \frac{r}{c}$, statt für t, also

$$\bar{\varrho} = \varrho\left(x, y, z, t - \frac{r}{c}\right),$$

wo

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

ist.[1]) Ferner ist das Integral von

$$\triangle\mathfrak{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{A}}{\partial t^2} = -4\pi\varrho\mathfrak{v} \tag{2}$$

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{c}\int \frac{1}{r}\overline{\varrho\mathfrak{v}}\, d\tau \tag{2a}$$

1) Den in $t + \frac{r}{c}$ $\left(\text{statt } t - \frac{r}{c}\right)$ geschriebenen Lösungen, die ebenfalls formal befriedigen, würden Wellen entsprechen, die sich auf das Erschütterungszentrum zu, statt von ihm fortbewegen; sie werden deshalb unterdrückt. Das Oberflächenintegral, das im allgemeinen noch hinzutritt, verschwindet im oben angenommenen Fall. — Das allgemeine Integral hat, im Anschluß an die Integration derselben Gleichung von Kirchhoff für $\varrho = 0$, 1896 Tedone hergestellt. S. Enzykl. d. math. Wiss. IV 2 II, S. 278.

wo $\overline{\varrho\mathfrak{v}}$ ebenso zu verstehen ist, wie $\bar{\varrho}$, und wo ϱ (Art. 49) die an der Stelle x, y, z zur Zeit t herrschende Dichte der Elektronen ist, die sich dort mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ gegen ein im Raume festes Koordinatensystem bewegen. Zwischen φ und $\mathfrak{A}$ besteht dann noch die Beziehung (Art. 50 (15))

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} + \frac{1}{c}\dot{\varphi} = 0.$$

Wir wollen die Potentiale φ, $\mathfrak{A}$, die man wegen der in (1a), (2a) auftretenden Größen $\bar{\varrho}$, $\overline{\varrho\mathfrak{v}}$ *verzögerte (retardierte) Potentiale* nennt, und die zugehörigen Kräfte nun auch für einen Fall von nicht stationärer Bewegung bilden.

Beispiel. Oszillierender Dipol nach Hertz.[1]) Auf der Z-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems befinden sich in der nächsten Nähe des Ursprungs zwei schwingende Elektronen mit entgegengesetzt gleichen Ladungen $\pm e$: Es ist das elektrische und magnetische Feld zu bestimmen.

Wir integrieren die Gleichungen (1), (2) unter der Annahme, daß, wenn sich das Elektron Q im Abstand ζ vom Ursprung befindet, ζ eine sehr kleine Größe ist.

Ist O der Ursprung, P ein Punkt x, y, z des umgebenden Raumes, so läßt sich die Entfernung r' des Punktes P von dem Elektron Q durch den Abstand $OP = r$ ausdrücken wie folgt.

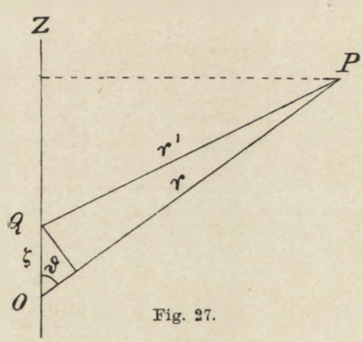

Fig. 27.

Ist ϑ der Winkel von OP gegen die Z-Achse (s. d. Figur), so ist für kleine Werte von ζ:

$$r' = r - \zeta\cos\vartheta = r - \frac{z\zeta}{r}.$$

Ferner ist

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{z\zeta}{r^2}\right).$$

Die zur Zeit $t - \frac{r'}{c}$ von Null verschiedenen Elemente $\bar{\varrho}\,d\tau$ in (1a), (2a) kann man nun durch die Ladung $\bar{e}$ punktförmiger Elektronen ersetzen:

$$\varphi = \sum \frac{\bar{e}}{r'}; \quad \mathfrak{A} = \frac{1}{c}\sum \frac{\overline{e\mathfrak{v}}}{r'}.$$

1) H. Hertz, die Kräfte elektrischer Schwingungen, Wied. Ann. 36, 1889 (Ges. Abhdlgn. II, S. 147 ff.) und H. A. Lorentz, Enzyklop. d. math. Wiss. V, 2, S. 177 ff.

Entwickelt man die Funktion $\bar{e}$ von ζ und $t - r'/c = t - r/c + \sigma$, wo

$$\sigma = \frac{z\zeta}{rc}$$

ist, nach Potenzen der kleinen Größe σ, so wird

$$\bar{e} = \bar{\bar{e}} + \sigma \dot{\bar{\bar{e}}} + \cdots,$$

wo durch die Doppelstriche Funktionen von $t - r/c$ bezeichnet werden mögen. Dann ist[1]) in erster Annäherung

$$\varphi = \sum \left(\bar{\bar{e}} + \dot{\bar{\bar{e}}}\sigma\right)\left(\frac{1}{r} + \frac{z}{r^3}\zeta\right) = \frac{1}{r}\sum \bar{\bar{e}} + \frac{z}{r^2 c}\sum \dot{\overline{\overline{e\zeta}}} + \frac{z}{r^3}\sum \overline{\overline{e\zeta}},$$

weil ζ eine von der Zeit unabhängige Raumkoordinate ist. Analog erhält man

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{cr}\sum \overline{\overline{e\mathfrak{v}}} + \frac{z}{c^2 r^2}\sum \dot{\overline{\overline{e\mathfrak{v}\zeta}}} + \frac{z}{cr^3}\sum \overline{\overline{e\mathfrak{v}\zeta}}.$$

Besteht nun die Bewegung in der Oszillation etwa bloß eines negativen gegen ein positives Elektron, beide von gleicher Ladung und in symmetrischer Lage gegen das Oszillationszentrum O, so ist

$$\sum e = \sum \bar{e} = \sum \bar{\bar{e}} = 0, \text{ ebenso } \sum \overline{\overline{e\mathfrak{v}\zeta}} = \sum \dot{\overline{\overline{e\mathfrak{v}\zeta}}} = 0,$$

und man erhält

$$\mathfrak{A} = \sum \frac{\overline{\overline{e\mathfrak{v}}}}{cr}$$

$$\varphi = \frac{z}{cr^2}\sum \dot{\overline{\overline{e\zeta}}} + \frac{z}{r^3}\sum \overline{\overline{e\zeta}} = -\frac{\partial}{\partial z}\frac{\Sigma \overline{\overline{e\zeta}}}{r},$$

weil

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(t - \frac{r}{c}\right) = -c\frac{\partial}{\partial r}\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

ist. Ist die Bewegung eine periodische, so kann man etwa

$$e\zeta = \gamma \cos(nt + p)$$

setzen. Dann wird

$$\varphi = -\frac{\partial}{\partial z}\frac{\gamma \cos\left\{n\left(t - \frac{r}{c}\right) + p\right\}}{r} = -\frac{z}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\gamma \cos\left\{n\left(t - \frac{r}{c}\right) + p\right\}}{r},$$

ferner, weil $\overline{\overline{e\mathfrak{v}}} = \dot{\overline{\overline{e\zeta}}}$,

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_z = -\frac{n\gamma}{cr}\sin\left\{n\left(t - \frac{r}{c}\right) + p\right\}. \quad \mathfrak{A}_x = \mathfrak{A}_y = 0.$$

---

1) E. Wiechert, Arch. Néerland. V (2), 1900, S. 570.

Aus diesen Ausdrücken für die Potentialfunktionen φ, $\mathfrak{A}$ lassen sich die Kräfte $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ durch Differentiation nach x, y, z, t ableiten. Beschränkt man sich auf Punkte in so erheblicher Entfernung r vom Schwingungsmittelpunkt (dem Ursprung), daß die Größe $\frac{1}{r}$ gegen $\frac{n}{c}$ verschwindet, so findet man (Art. 50 (9), (10))

$$L = \frac{n^2\gamma}{c^2 r} \cdot \frac{y}{r} \cos \Omega \qquad X = -\frac{n^2\gamma}{c^2 r}\frac{xz}{r^2} \cos \Omega$$

$$M = -\frac{n^2\gamma}{c^2 r}\frac{x}{r} \cos \Omega \qquad Y = -\frac{n^2\gamma}{c^2 r}\frac{yz}{r^2} \cos \Omega$$

$$N = 0 \qquad Z = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{A}}_z - \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{n^2\gamma}{c^2 r}\frac{r^2 - z^2}{r^2} \cos \Omega,$$

wo $\Omega = n\left(t - \frac{r}{c}\right) + p$ ist.

53. Bewegte Systeme.

Die Gleichungen (1) bis (5) des Art. 50 wurden aufgestellt unter der Annahme eines im Raume festen Koordinatensystems; $\mathfrak{v}$ war die Geschwindigkeit einer Elektrizitätsmenge gegen dieses System. Beim Übergang zu selbstbewegten Systemen, wie es z. B. unsere Erde in ihrer Bahn um die Sonne ist, hat man dem Umstande Rechnung zu tragen, daß man bis jetzt keinen optischen oder elektromagnetischen Vorgang kennt, der für die Bestimmung der absoluten Geschwindigkeit des Beobachters im Raume verwendbar wäre. Vielmehr bleiben, wie es scheint, die durch jene Gleichungen beschriebenen *Beziehungen* bestehen für jedes mit gleichförmiger Geschwindigkeit zu diesem parallel sich verschiebende Koordinatensystem, wenn man nur zuläßt, daß die *Werte* der auftretenden Größen in einer von der Bewegung abhängigen Weise sich ändern. Wir wollen diese Bemerkung als *Forderung:* als *Postulat der Relativität*, wie H. Poincaré es nennt (Sur la dynamique de l'électron, Rend. circ. mat. Palermo Bd. 21, 1906), dem folgenden voranstellen und demnach mit H. A. Lorentz (S. dessen Bericht über Maxwells elektromagnet. Theorie in Enzykl. d. math. Wiss. V 2 §. 21) annehmen, daß die durch die Gleichungen des Art. 49 dargestellten Zusammenhänge für jedes geradlinig mit gleichförmiger Geschwindigkeit sich bewegende ponderable Medium, bzw. für ein mit ihm festverbundenes Koordinatensystem ihre Giltigkeit behalten.

Unsere Darstellung schließt an die erwähnten Abhandlungen und an die schöne Untersuchung von A. Einstein (Zur Elektrodynamik bewegter Körper, Ann. d. Phys. (4), 17, 1905) an. Wir werden zu Formeln für die Fortpflanzung von Störungen in einem selbstbewegten Medium gelangen, die einerseits den Versuch von FIZEAU (Art. 48), die Aberration und das DOPPLERsche Prinzip erklären, andererseits aber zu merkwürdigen und paradox erscheinenden Folgerungen in bezug auf das Maß für Längen, Massen und Kräfte in einem bewegten Systeme führen.

Namentlich wird es sich zeigen, daß jede Bewegung eines Bezugssystemes mit einer simultanen Änderung der Zeit- und Längenmaße verbunden ist. Um diesen Umstand bequemer zum Ausdruck bringen zu können, wollen wir eine andere Zeiteinheit als die Sekunde einführen, sie nämlich so bemessen, daß die Lichtgeschwindigkeit gleich Eins wird, d. h. daß im ruhenden Mittel das Licht die Längeneinheit (1 cm) in der Zeiteinheit durchläuft.

Wir bezeichnen die neue Zeit, die also aus der alten durch Multiplikation mit der Lichtgeschwindigkeit c hervorgeht, im ruhenden Mittel gemessen, wieder mit t. Dann lauten die Differentialgleichungen für das skalare und das Vektorpotential, durch welche die elektrischen und magnetischen Kräfte $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ bestimmt sind, bezogen auf das im Raume feste Koordinatensystem X, Y, Z ((13) (14) des Art. 50)

$$\begin{aligned} \triangle\varphi - \ddot{\varphi} &= -4\pi\varrho \\ \triangle\mathfrak{A} - \ddot{\mathfrak{A}} &= -4\pi\varrho\mathfrak{v}. \end{aligned} \tag{1}$$

Aus φ und $\mathfrak{A}$ berechnet sich die elektrische und magnetische Feldstärke mittels

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} &= -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t} \\ \mathfrak{H} &= \operatorname{rot}\mathfrak{A}. \end{aligned} \tag{2}$$

Dieses Formelsystem soll nun seine Geltung behalten für ein im Raum parallel mit sich selbst und mit dem festen Achsensystem X, Y, Z gleichförmig fortbewegtes Medium, bzw. ein damit fest verbundenes Koordinatensystem X', Y', Z', wozu noch, wie erwähnt, eine weitere Änderung treten wird, ein Übergang von t etwa zu der Zeit t'. Es handelt sich also um die Aufstellung von solchen Transformationsgleichungen zwischen den Größen (x', y', z', t') einerseits und (x, y, z, t) andererseits, daß nach ihrer Anwendung die Gestalt des Gleichungspaares (1), (2) nicht geändert ist; kurz: daß ihnen gegenüber (1), (2) sich *„invariant“* verhalten.

Was zunächst die linken Seiten dieser Gleichungen angeht, so besitzt ein Ausdruck wie $\triangle\varphi$, weil die Operation (Art. 30)

$$\triangle = \operatorname{div}\operatorname{grad}$$

eine vektorielle ist, für sich bereits den Charakter der Invarianz gegenüber Drehungen und Verschiebungen des rechtwinkligen Koordinatensystems (einer orthogonalen Transformation von der Determinante 1). Die Größe t spielt nun aber in dem Operator

$$\Delta\varphi - \ddot{\varphi} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \equiv \Box\varphi\,^{1)} \tag{3}$$

keine wesentlich andere Rolle, wie die Koordinaten x, y, z. Wir wollen hier nicht auf die allgemeinen linearen Transformationsformeln eingehen, gegenüber welchen $\Box\varphi$ und die Beziehungen (1), (2) invariant bleiben[2]), sondern uns nur mit derjenigen beschäftigen, für welche die Bewegung des Koordinatensystems X', Y', Z' in einer *Verschiebung mit gleichförmiger Geschwindigkeit q längs der positiven Z-Achse* besteht. Indem wir mit ihr die Z'-Achse zusammenfallen lassen, machen wir also, wenn k ein (durch die Forderung der Orthogonalität bedingter) noch zu bestimmender Faktor ist, den Ansatz

$$z' = k(z - qt). \tag{4}$$

Damit nun die Transformation der zwei Veränderlichen z, t eine orthogonale sei von der Determinante 1, d. h. damit die Koeffizienten (hyperbolische) Sinus und Kosinus desselben Winkels seien (man denke an die Formeln für die Drehung eines ebenen rechtwinkligen Koordinatensystems), ist (4) zu ergänzen durch

$$t' = k(-qz + t), \tag{4a}$$

woraus sich

$$k = \frac{1}{\sqrt{1-q^2}} \tag{4b}$$

ergibt. Man sieht, daß der Faktor k für die Herstellung der Determinante 1 unentbehrlich ist. Wir setzen also

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= k(z - qt) = \frac{z - qt}{\sqrt{1-q^2}} \\ t' &= k(-qz + t) = \frac{-qz + t}{\sqrt{1-q^2}} \end{aligned} \tag{5}$$

1) Bezeichnung von H. Poincaré (sur la dynamique de l'électron, Rend. Circ. Mat. Palermo XXI, 1906).

2) H. Minkowski, die Grundgleichungen für elektromagnetische Vorgänge in bewegten Körpern, Gött. Nachr. 1908.

und sehen q als positive oder negative Konstante an, mit der Bedingung jedoch, daß $|q| < 1$, also kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sei. (Für die Bewegung der Erde in einem Element ihrer Bahn gegenüber dem Fixsternhimmel als Bezugssystem ist $q = 0{,}0001$.) Alsdann ist die Transformation (5) reell; es wird

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi'}{\partial x'}; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi'}{\partial y'}; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\varphi'}{\partial z'}k - \frac{\partial\varphi'}{\partial t'}kq; \quad \text{usw.}$$

und hiermit in der Tat, wenn man mit $\square'$ den Operator

$$\square' = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \frac{\partial^2}{\partial t'^2}$$

bezeichnet,

$$\square'\varphi' = \square\varphi; \quad \square'\mathfrak{A}' = \square\mathfrak{A}, \tag{6}$$

wo die Bezeichnungen φ', $\mathfrak{A}'$ Einführung der gestrichenen Koordinaten bedeuten.

Indem man von den Transformationsformeln (5) fordert, daß sie die Gleichungen (6) erfüllen, nimmt man an, daß die gebrauchten Maßstäbe für Raum und Zeit, also für z und t, mit denen für z' und t' bzw. übereinstimmen. Insbesondere setzt man voraus, daß die Lichtgeschwindigkeit, im bewegten System gemessen, denselben Wert erhält, wie im ruhenden, nämlich den Wert 1.

Durch die „Lorentz-Transformation“ (5) — so hat sie Poincaré a. a. O. genannt — gehen die linken Seiten der partiellen Differentialgleichungen (1) „in sich selbst“ über. *Nicht so die rechten.* Denn wenn man auch annähme, daß vermöge einer passenden Definition die Funktion ϱ von x, y, z, t in ϱ' überginge, so geht doch die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ nicht in $\mathfrak{v}'$ über, weil sich nur ihre Z-Komponente $\mathfrak{v}_z$ ändert. Um dies zu übersehen, wollen wir zunächst an einigen Beispielen[1]) die Wirkung der Transformation (5) untersuchen.

Eine Fläche, die einem Beobachter als Kugel erscheint, wenn er in dem mit der Geschwindigkeit q bewegten Koordinatensystem X', Y', Z' ruht,

$$(x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2 + (z' - \gamma)^2 = a^2$$

geht durch die Transformation (5), für den Zeitpunkt $t = 0$ z. B., über in

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (kz - \gamma)^2 = a^2,$$

erscheint also einem im festen Koordinatensystem ruhenden Beobachter als abgeplattetes Umdrehungsellipsoid. Für $q = 1$, d. h. wenn sich

1) Wir entnehmen diese Beispiele der genannten Abhandlung von A. Einstein.

das System X', Y', Z' mit Lichtgeschwindigkeit bewegt, erscheint sie vollkommen platt. (Deformation des kugelförmigen Elektrons.)

Dagegen geht die Kugelwelle

$$(x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2 + (z' - \gamma)^2 = (t' - \delta)^2 \tag{7}$$

wieder in eine solche über

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - k\gamma - \delta kq)^2 = (t - \delta k - \gamma kq)^2, \tag{7a}$$

wie eine kleine Rechnung zeigt. — Hierdurch erklärt sich u. a. die von Michelson und Morley experimentell festgestellte Tatsache, daß die Lichtgeschwindigkeit in Richtung der Bewegung der Erde sich von der senkrecht zu ihr gemessenen nicht unterscheidet.

Dagegen werden sich infolge der Bewegung die Längen verändern. Und zwar verkleinert sich für $t = 0$, d. h. in dem Augenblicke, wo die Anfangspunkte der beiden Systeme zusammenfallen, die Länge z' gegenüber z im Verhältnis $k : 1 = 1 \; \sqrt{1 - q^2}$. Zugleich wird sich die Zeit t' gegenüber t für die Stelle $z = 0$ im Verhältnis $k : 1$ verkleinern; für andere Werte von z ist das Verhältnis ein anderes.

Man muß also schließen, daß in einem bewegten (starren) Medium nicht nur *die Längen* in Richtung der Bewegung *zusammenschrumpfen*, sondern daß auch *die Uhren*, die mit dem System verbunden sind, durch die Bewegung *einen anderen Gang* annehmen.[1]) Man spricht deshalb von einer „Ortszeit“ t' im bewegten System, die verschieden ist von derjenigen t des Punktes im festen System, den O' gerade passiert. Z. B. für $z' = 0$ wird $t = kt'$, wie man aus der Umkehrung der Formeln (5) ersieht,

$$\begin{aligned} z &= kz' + kqt' \\ t &= kqz' + kt'. \end{aligned} \tag{8}$$

Der Bau dieses Formelsystems ist dem des inversen durchaus ähnlich, und man schließt auf die Umkehrbarkeit aller Beziehungen zwischen bewegtem und festem, überhaupt zwischen je zwei verschieden rasch bewegten Systemen: die Transformation (5) hat die „Gruppeneigenschaft“.

1) Um diesem Schlusse auszuweichen, bezieht M. Abraham (Theor. d. Elektrizität II, 2. Aufl. 1908, S. 368) das Theorem der Relativität nur auf Längenänderungen, indem er die Zeiten t, t' ersetzt durch Längen l'/c', l/c, wo c' die Lichtgeschwindigkeit im bewegten System (an irdischen Lichtquellen gemessen) ist, die er (von Lorentz darin abweichend) von derjenigen c im festen System verschieden $\left(c' = c\sqrt{1 - q^2}\right)$ annimmt, und wo l', l Lichtwege im bewegten, bzw. festen Koordinatensystem sind.

Wir bilden ferner die Differenz $z_2 - z_1$ der z-Koordinaten für zwei in der z-Achse des ruhenden Systems feste Punkte $A(z_1)$ und $B(z_2 > z_1)$. Haben dann zwei Punkte A', B' der Z'-Achse des mit irgendeinem Medium M festverbundenen bewegten Systems, die mit A und B bzw. in den Zeitpunkten t_1 bzw. t_2 (die Zeit im ruhenden System gemessen) zusammentreffen, die Koordinaten z_1', z_2, so drückt sich ihr Abstand durch den von A und B aus durch ((5)):

$$\begin{aligned} z_2' - z_1' &= k(z_2 - qt_2) - k(z_1 - qt_1) \\ &= k(z_2 - z_1) - kq(t_2 - t_1). \end{aligned}$$

Wir wollen nun annehmen, die Strecke AB werde von einem Lichtstrahl durchlaufen, der in der Zeit t_1 von $A(A')$ ausgeht, im Zeitpunkt t_2 von $B(B')$ reflektiert wird und nach dem Ausgangspunkt $A'(z_3' = z_1')$, der nun etwa mit C im festen Koordinatensystem (im Abstand z_3 vom Ursprung) zusammenfällt, zur Zeit t_3 zurückkehrt, so braucht er die Zeit $t_2 - t_1$ von A' nach B' und $t_3 - t_2$ von B' nach A'. Ist nun seine Geschwindigkeit in dem Medium M, wenn es sich im Zustande der *Ruhe* befindet, gleich $V(\leqq 1)$,

so ist
$$V(t_2 - t_1) = z_2 - z_1, \tag{9}$$

daher
$$z_2' - z_1' = k\left(1 - \frac{q}{V}\right)(z_2 - z_1). \tag{9a}$$

Man findet ebenso:

$$t_2' - t_1' = k(1 - qV)(t_2 - t_1) \tag{10}$$

als die für einen Beobachter im bewegten Koordinatensystem verstrichene Zeit, während deren das Licht durch M von A' nach B' eilt. Andererseits ist die Zeit, die das Licht für den Rückweg von B' nach A':

$$z_3' - z_2' = z_1' - z_2' = k(z_3 - z_2) - kq(t_3 - t_2)$$

braucht, gleich

$$t_3' - t_2' = k(t_3 - t_2) - kq(z_3 - z_2),$$

wo nun aber für den rücklaufenden Strahl

$$V(t_3 - t_2) = -(z_3 - z_2) \tag{11}$$

zu setzen ist. Man erhält so

$$z_3' - z_2' = k\left(1 + \frac{q}{V}\right)(z_3 - z_2) \tag{11a}$$

$$t_3' - t_2' = k(1 + qV)(t_3 - t_2). \tag{12}$$

Dividiert man die Formeln (9a), (11a), so erhält man

$$\frac{V-q}{V+q} = -\frac{z_3 - z_2}{z_2 - z_1}, \tag{13}$$

und, durch Division von (11a), (12), bzw. (9a), (10), wegen (9), (11):

$$-(t_3' - t_2')\frac{V+q}{1+qV} = (t_2' - t_1')\frac{V-q}{1-qV} = z_2' - z_1'. \tag{14}$$

die Geschwindigkeit in bezug auf das bewegte System ist also in Richtung der Bewegung

$$V' = \frac{V-q}{1-qV}, \tag{14a}$$

in der entgegengesetzten

$$V'' = \frac{V+q}{1+qV}. \tag{14b}$$

Mit $V=1$ ergibt sich hieraus wieder die (oben bereits verwertete) Tatsache, daß das Licht auf dem Hin- und Rückweg zwischen A' und B' die gleiche (relative) Zeit braucht, wiewohl vom festen System aus gesehen die durchlaufenen Strecken AB, BC verschieden sind. *Die Zeit ändert sich eben beim Übergang zum bewegten System zugleich mit der Länge.*

A. Einstein hat die Grundformeln (5), (7) für die relative Bewegung auf Grund der Forderung abgeleitet, daß die durch die Formeln (14) für $V=1$ ausgesprochene Bedingung erfüllt sei, während sie sich oben aus der formalen Forderung ergeben haben, daß die „Lorentz-Transformation" den Operator $\Box$ in sich überführe, d. h. eine orthogonale sei.

Der Ausdruck für die relative Geschwindigkeit V' ergibt sich auch durch Division der nach t differenzierten Gleichungen (5). Sind $\mathfrak{v}_x, \ldots$ die Komponenten einer beliebig gerichteten Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$, so erhält man, wenn diejenigen für das bewegte System mit Strichen versehen werden,

$$\mathfrak{v}'_{x'} = \mathfrak{v}_x,\ \mathfrak{v}'_{y'} = \mathfrak{v}_y, \tag{15}$$

$$\mathfrak{v}'_{z'} = \frac{dz'}{dt'} = \frac{\frac{dz}{dt} - q}{-q\frac{dz}{dt} + 1},$$

oder

$$\mathfrak{v}'_{z'} = \frac{\mathfrak{v}_z - q}{1 - q\mathfrak{v}_z} \tag{15}$$

Dem Parallelogramm der Geschwindigkeiten würde $\mathfrak{v}'_{z'} = \mathfrak{v}_z - q$ entsprochen haben. — Man merke für später noch die Formeln an

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{d}{dt}\frac{\dot{x}}{k - kq\dot{z}} \cdot \frac{1}{\frac{dt'}{dt}} = \frac{1}{k^2}\frac{\ddot{x}(1-q\dot{z}) + q\dot{x}\ddot{z}}{(1-q\dot{z})^3} \tag{15a}$$

$$\frac{d^2z'}{dt'^2} = \frac{d\mathfrak{v}'_{z'}}{dt'} = \frac{\ddot{z}\sqrt{1-q^2}^3}{(1-q\dot{z})^3}, \tag{15b}$$

wo die Punkte über x, z wie immer Differentialquotienten nach t bedeuten.

Wir wenden uns nun wieder zu den Differentialgleichungen für φ und $\mathfrak{A}$ im transformierten System zurück. Die Formeln (15) bestätigen, daß die rechten Seiten der Gleichungen (1) bei der Transformation (5) *nicht* in sich übergehen. Wohl aber läßt sich zeigen, daß diese Eigenschaft gewissen *linearen Kombinationen derselben* zukommt, sofern man die transformierte Größe ϱ' passend definiert. Daß sie dann auch die linken Seiten der kombinierten Gleichungen besitzen, liegt auf der Hand, weil sie die einzelnen Summanden haben.

Die eine dieser linearen Kombinationen $\mathfrak{A}'$ muß sicher so beschaffen sein, daß sie den Faktor $\mathfrak{v}'$, daß also $\mathfrak{A}'_{z'}$ den Faktor $\mathfrak{v}'_{z'}$ erhält. Wir nehmen deshalb zwei unbestimmte Koeffizienten α, β so an, daß

$$\alpha\varrho + \beta\varrho\mathfrak{v}_z = \varrho'\mathfrak{v}'_{z'} = \varrho'\frac{\mathfrak{v}_z - q}{1 - q\mathfrak{v}_z}$$

wird, wo ϱ' noch von $\mathfrak{v}'_{z'}$ (oder $\mathfrak{v}_z$) abhängen kann, α, β aber und ϱ von $\mathfrak{v}_z$ unabhängig sind. Aus

$$(\alpha + \beta\mathfrak{v}_z)(1 - q\mathfrak{v}_z) = \frac{\varrho'}{\varrho}(\mathfrak{v}_z - q)$$

ergibt sich sogleich

$$\varrho' = \varrho(1 - q\mathfrak{v}_z)\lambda \tag{16}$$

$$\alpha = -q\lambda; \quad \beta = \lambda,$$

wo λ eine Konstante ist. — Nun wollen wir für die Bestimmung von λ noch die *Gruppeneigenschaft* der Transformation in Anspruch nehmen: dieselben Formeln, welche von dem festen auf das bewegte Koordinatensystem führen, müssen (8) von diesem wieder auf das feste führen, wenn man überall q mit $-q$ und die gestrichenen mit den nicht gestrichenen Buchstaben vertauscht. Man erhält so:

$$\varrho = \varrho'(1 + q\mathfrak{v}'_{z'})\lambda = \varrho'\left(1 + q\frac{\mathfrak{v}_z - q}{1 - q\mathfrak{v}_z}\right)\lambda$$

oder

$$\varrho = \varrho'\frac{(1-q^2)\lambda}{1 - q\mathfrak{v}_z}$$

Multipliziert man diese Gleichung mit der (16), so wird

$$\lambda^2(1 - q^2) = 1$$

oder

$$\lambda = k,$$

womit

$$\varrho' = \frac{\varrho(1 - q\mathfrak{v}_z)}{\sqrt{1 - q^2}} \tag{16a}$$

und

$$\varrho'\mathfrak{v}'_z = \frac{\varrho(\mathfrak{v}_z - q)}{\sqrt{1 - q^2}}; \tag{16b}$$

also auch die *Dichte der elektrischen Masse* ist im bewegten Koordinatensystem eine andere, wie im festen.

Die beiden linearen Kombinationen, die zu (16a) (16b) geführt haben, sind nun die folgenden

$$\left.\begin{aligned}\varphi' &= \frac{1}{\sqrt{1 - q^2}}(\varphi - q\mathfrak{A}_z)\\ \mathfrak{A}'_{z'} &= \frac{1}{\sqrt{1 - q^2}}(-q\varphi + A_z),\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

während

$$\mathfrak{A}'_{x'} = \mathfrak{A}_x; \quad \mathfrak{A}'_{y'} = \mathfrak{A}_y; \quad \mathfrak{v}'_{x'} = \mathfrak{v}_x; \quad \mathfrak{v}'_{y'} = \mathfrak{v}_y$$

ungeändert bleiben. *Für den aus diesen Komponenten zusammengesetzten Vektor* $\mathfrak{A}'$ *und das Skalar* φ' *gehen somit die Gleichungen*

$$\left.\begin{aligned}\Box\,\varphi' &= -4\pi\varrho'\\ \Box\,\mathfrak{A}' &= -4\pi\varrho'\mathfrak{v}'\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

und zugleich (1) bis (5) des Art. 50 durch die Lorentz-Transformation (5) in sich über. Sieht man wieder von elektrischen Mengen ab, setzt also $\varrho = \varrho' = 0$, so erhält man aus den Gleichungen (13), (6) wieder diejenigen (1) für $\varrho = 0$, d. h. für den freien Äther, bezogen auf ein festes oder ein bewegtes Koordinatensystem.

Wir wiederholen zum Schluß, daß die in dem vorstehenden Artikel benutzten Transformationen (5), (8), (16a), (16b), (17) die Gruppeneigenschaft besitzen und infolgedessen nicht bloß für den Übergang von einem ruhenden auf ein bewegtes System, sondern auch *für irgend zwei relativ gegeneinander bewegte Systeme verwendet werden können.*

Verbindet man drei Lorentz-Transformationen wie (5), auf die Richtung X, Y, Z angewendet, mit einer Drehung des räumlichen Systems, so erhält man die allgemeine Raum-Zeit-(Lorentz-)Transformation mit 16 reellen Koeffizienten von der Determinante 1. Auch für sie gelten noch die vorstehenden Ergebnisse. Wir kommen später noch einmal auf sie zurück.

54. Der Versuch von Fizeau. Das Dopplersche Prinzip und die Aberration des Lichtes.

Die Formeln des vorstehenden Artikels gründen sich auf die Annahme, daß beim Übergang vom ruhenden zum gleichförmig bewegten System die auftretenden Längen, Zeiten und elektromagnetischen Größen zwar nicht ihre Werte beibehalten, daß aber die gegenseitigen Beziehungen ungeändert bleiben, welche die MAXWELLschen Formeln für das ruhende System ausdrücken. — Wir wollen sie durch den Vergleich mit einigen Versuchsergebnissen beleuchten.

Zunächst kann man an der Hand der Formeln des Art. 53 den früher erwähnten *Versuch von Fizeau* erklären, den 1886 MICHELSON und MORLEY bestätigt gefunden haben. Sendet man nämlich einen Lichtstrahl durch eine von zwei parallelen Röhren, in denen Wasser je in entgegengesetzten Richtungen fließt, läßt ihn mittels Spiegelung durch die zweite Röhre zurückwandern und dann mit einem Lichtstrahl, der den umgekehrten Weg gewandert ist, interferieren, so zeigt sich ein Gangunterschied. Der in Richtung der Strömung eilende Lichtstrahl hat eine größere Geschwindigkeit, wie der entgegenkommende.

Die Geschwindigkeit V' des Lichtes im Wasser relativ gegen das bewegte Wasser hängt mit derjenigen V relativ gegen den mit der Erde verbundenen Beobachter durch die Beziehung (14a) des vor. Art. zusammen. Löst man diese nach V auf, so kommt

$$V = \frac{V' + q}{1 + qV'} = V' + q\,(1 - V'^2) \tag{1}$$

bis auf Glieder 2. Ordnung in der gegen 1 kleinen Größe q.

Der Brechungsquotient für den Übergang der verwendeten Lichtgattung aus dem leeren Raum in ruhendes Wasser sei N. Ein mit dem Wasser bewegter Beobachter würde $N = 1/V'$ finden, wenn auch die Lichtquelle sich mit bewegte. Da es sich aber um eine gegen bewegtes Wasser ruhende oder auch gegen ruhendes Wasser bewegte Lichtquelle handelt, so ist an Stelle von N der Brechungskoeffizient $N' = 1/V'$ einer nach dem DOPPLERschen Satz (s. d. f. Beispiel) im Spektrum etwas verschobenen Lichtgattung einzuführen.

Man erhält so[1])

$$V = V' + q\left(1 - \frac{1}{N'^2}\right). \tag{2}$$

1) Vgl. M. LAUE, Ann. d. Phys. (4) 23, 1907.

Der Klammerfaktor ist der von den genannten Physikern bestätigte FRESNELsche „Mitführungskoeffizient", den H. A. LORENTZ (Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen, Leiden 1895, S. 97) aus seiner Theorie in anderer Weise abgeleitet hat.

Um einige andere Beobachtungsergebnisse zu vergleichen, knüpfen wir an die in Art. 47 (10) (11) aufgestellten partikulären Lösungen der MAXWELLschen Gleichungen für den leeren Raum an, die sich — die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $V = c = 1$ vorausgesetzt — in die Potentiale zusammenfassen lassen:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 \cos \Omega \\ \mathfrak{A} &= \mathfrak{A}_0 \cos \Omega, \end{aligned} \tag{3}$$

wo

$$\Omega = 2\pi n(t - (\alpha x + \beta y + \gamma z)), \tag{3a}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

ist, und φ_0, $\mathfrak{A}_0$ von x, y, z, t unabhängige Größen sind. — Die Ausdrücke (3) leisten den Gleichungen (1) des vor. Art. für $\varrho = 0$ Genüge. Wir fragen nach den Erscheinungen, die diese ebenen Wellen in einem in Richtung der negativen Z-Achse gleichförmig bewegten Lichtmittel hervorrufen. Die Antwort ergibt sich aus der Einführung der x', y', z', t' in die Ausdrücke (3) mittels der Formeln (5) (17) des Art. 53. Man erhält, indem man die in den gestrichenen Koordinaten geschriebenen Potentiale mit

$$\begin{aligned} \varphi' &= \varphi'_0 \cos \Omega' \\ \mathfrak{A}' &= \mathfrak{A}'_0 \cos \Omega' \end{aligned} \tag{4}$$

bezeichnet,

$$\begin{aligned} \varphi'_0 &= k\varphi_0 - kq\mathfrak{A}_{0z} \\ \mathfrak{A}'_{0z'} &= -kq\varphi_0 + k\mathfrak{A}_{0z} \\ \mathfrak{A}'_{0x'} &= \mathfrak{A}_{0x}; \\ \mathfrak{A}'_{0y'} &= \mathfrak{A}_{0y}; \end{aligned} \tag{5}$$

und

$$\begin{aligned} \Omega' &= 2\pi n\left\{t - \gamma z - (\alpha x + \beta y)\right\} \\ &= 2\pi n(1-\gamma q)k\left\{t' - z'\frac{V-q}{1-\gamma q} - \frac{\alpha x + \beta y}{k(1-\gamma q)}\right\} \\ &= 2\pi n'\left\{t' - (\alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z')\right\}, \end{aligned} \tag{6}$$

woraus sich für die Schwingungszahl n' der Oszillationen und für den Kosinus γ' des Neigungswinkels der Wellennormalen im bewegten System die Beziehungen ergeben:

$$\frac{n'}{n} = k(1 - \gamma q) \tag{7}$$

$$\gamma' = \frac{V - q}{1 - \gamma q} \tag{8}$$

Wegen der in Art. 53 a. E. gemachten Bemerkung können wir diese Formeln für irgend zwei gegeneinander bewegte Systeme, z. B. die Erde (n, γ) und einen relativ gegen sie bewegten Stern (n', γ', q) verwenden. Dann spricht die Beziehung (7) das DOPPLERsche *Prinzip* aus, daß nämlich eine Änderung der relativen Geschwindigkeit q des Beobachters gegen eine Lichtquelle mit einer Änderung der Schwingungszahl n' (einer Verschiebung der FRAUNHOFERschen Linien der bewegten gegenüber denen relativ ruhender Lichtquellen) verbunden ist.

Die Beziehung (8) erklärt die Erscheinung der *Aberration des Lichtes der Fixsterne*, welche, durch ein Fernrohr beobachtet, nicht an der Stelle zu stehen scheinen, die ihnen der Jahresdurchschnitt der Beobachtungen zuweist, vielmehr in einem Jahr rings um diese Stelle ein kleines Oval, ein Bild der Erdbahn, zu beschreiben scheinen. Nehmen wir der Einfachheit halber den Fall an, daß $\gamma' = 0$ ist, d. h. daß ein Fixstern sich auf einer Senkrechten zur Ekliptik (Erdbahn) befindet, so ergibt die Formel (8) für den Kosinus γ des Winkels, unter dem der Lichtstrahl vom Stern durch das Fernrohr hindurch anzukommen scheint, $\gamma = q$, wo q die Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn ist.

Die Astronomie bestätigt dieses Ergebnis und damit zugleich die Voraussetzung, auf der die Theorie beruht, nämlich daß der Lichtstrahl, wenn er in den Bereich der Erde gelangt, keine Ablenkung erfährt, daß also der Vermittler der Lichtbewegung (der Äther) sich nicht mit der Erde bewegt (von ihr mitgerissen wird), sondern sich wie ein starres Gerüste verhält, durch das hindurch auch die in raschester Bewegung begriffene Materie sich ungehindert bewegen kann.

55. Die Kräfte im bewegten System.

Aus den Formeln (17) des Art. 53 lassen sich die elektrische und die magnetische Feldstärke $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{H}'$ im bewegten Koordinatensystem bestimmen, indem man diese Größen aus den Potentialen φ',

$\mathfrak{A}'$ in derselben Weise berechnet, wie $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ aus φ, $\mathfrak{A}$ (Art. 53 (2)): nämlich durch

$$\mathfrak{E}' = -\operatorname{grad}\varphi' - \frac{\partial \mathfrak{A}'}{\partial t}$$
$$\mathfrak{H}' = \operatorname{rot}\mathfrak{A}',$$

Ausdrücke, die nun wiederum den LORENTZschen Gleichungen (1) bis (4) des Art. 50 genügen, weil φ', $\mathfrak{A}'$ diejenigen (13), (14) desselben Art. befriedigen. Für die Komponenten X', Y', Z' von $\mathfrak{E}'$ und L', M', N' von $\mathfrak{H}'$ ergibt sich dann, bei Benutzung der Umkehrung (8) der Formeln (5) des Art. 53:

$$\begin{aligned} z &= kz' + kqt' \\ t &= kqz' + kt' \\ x &= x',\; y = y' \end{aligned} \tag{1}$$

und nach Umkehrung der Formeln (17) Art. 53:

$$\begin{aligned} \varphi &= k\varphi' + kq\mathfrak{A}'_{z'} \\ \mathfrak{A}_z &= kq\varphi' + k\mathfrak{A}'_{z'} \\ \mathfrak{A}_x &= \mathfrak{A}'_{x'};\; \mathfrak{A}_y = \mathfrak{A}'_{y'}; \end{aligned} \tag{2}$$

(wenn wir der Einfachheit wegen den Strich bei den Indizes x, y, z weglassen),

$$N' = \frac{\partial \mathfrak{A}'_y}{\partial x'} - \frac{\partial \mathfrak{A}'_x}{\partial y'} = \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y} = N;$$

$$\begin{aligned} Z' &= -\frac{\partial \varphi'}{\partial z'} - \frac{\partial \mathfrak{A}'_z}{\partial t'} = -\frac{\partial \varphi'}{\partial z}k - \frac{\partial \varphi'}{\partial t}kq - \frac{\partial \mathfrak{A}'_z}{\partial z}kq - \frac{\partial \mathfrak{A}'_z}{\partial t}k \\ &= -\frac{\partial}{\partial z}(\varphi' k + \mathfrak{A}_z' kq) - \frac{\partial}{\partial t}(\varphi' kq + \mathfrak{A}_z' k) \\ &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial t} \\ &= Z; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L' &= \frac{\partial \mathfrak{A}'_z}{\partial y'} - \frac{\partial \mathfrak{A}'_y}{\partial z'} = \frac{\partial \mathfrak{A}'_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{A}'_y}{\partial z}k - \frac{\partial \mathfrak{A}'_y}{\partial t}kq \\ &= -qk\left\{\frac{\partial}{\partial y}(k\varphi' + kq\mathfrak{A}_z') + \frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{A}'_y\right\} + k\left\{\frac{\partial}{\partial y}(kq\varphi' + k\mathfrak{A}_z') - \frac{\partial}{\partial z}\mathfrak{A}'_y\right\} \\ &= qk\left\{-\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial t}\right\} + k\left\{\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z}\right\} \\ &= qkY + kL. \end{aligned}$$

Man findet in derselben Weise die anderen Werte der folgenden Tabelle

$$\begin{aligned} X' &= k(X - qM) \qquad & L' &= k(qY + L) \\ Y' &= k(Y + qL) & M' &= k(-qX + M) \\ Z' &= Z & N' &= N, \end{aligned} \tag{3}$$

wo wieder

$$k = \frac{1}{\sqrt{1-q^2}}$$

ist. An der Hand der Gleichungen (3) und derjenigen (15), (16a) des Art. 53 bestätigt man durch eine kleine Rechnung, die wir hier unterdrücken, eine Bemerkung, auf die MINKOWSKI a. a. O. S. 67 seine ganze Theorie der elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern aufgebaut hat. Sie bezieht sich auf das formale Verhalten der hier erörterten physikalischen Begriffe gegenüber der in Art. 53 a. E. erwähnten linearen Raum-Zeit-Transformation von der Determinante 1 mit 16 Elementen (der *allgemeinen* LORENTZ-Transformation) und auf gewisse unerwartete Zusammenhänge zwischen ihnen, die das Relativitätspostulat herstellt. Die vier Größen nämlich $\varrho\mathfrak{v}_x$, $\varrho\mathfrak{v}_y$, $\varrho\mathfrak{v}_z$, ϱ, also die Komponenten des „Konvektionsstromes" und die Dichte, hängen mit den aus ihnen durch eine allgemeine LORENTZ-Transformation hervorgegangenen gestrichenen Größen $\varrho'\mathfrak{v}'_{x'}$, usw. durch lineare Gleichungen ((15), (16a), (16b)) mit *denselben* Koeffizienten zusammen, wie die Raum-Zeitkoordinaten x, y, z, t mit den gestrichenen (s. (5) des Art. 53).

Und weiter: Wenn zwei Reihen von Veränderlichen x, y, z, t und ξ, η, ζ, τ in die entsprechenden gestrichenen durch ein und dieselbe Raum-Zeit-Transformation übergehen, so transformieren sich die aus ihnen gebildeten sechs zweireihigen Determinanten

$$y\zeta - \eta z, \quad z\xi - \zeta x, \quad x\eta - \xi y; \quad x\tau - \xi t, \quad y\tau - \eta t, \quad z\tau - \zeta t$$

in die gestrichenen durch Gleichungen mit beziehungsweise denselben Koeffizienten wie die, durch welche die elektrischen und magnetischen Kraftkomponenten

$$X, Y, Z; \quad L, M, N$$

mit den gestrichenen zusammenhängen. Diese merkwürdige Verwandtschaft jener 4 „Raum-Zeit-Vektoren I. Art" miteinander und andererseits dieser 6 „Raum-Zeit-Vektoren II. Art" unter sich bewirkt eine derartige „Vermischung" (HILBERT, Gedächtnisrede auf MINKOWSKI, Gött. Nachr. 1909 S. 23) von Strom und Dichte, von elektrischer und magnetischer Feldstärke, daß diesen Begriffen *einzeln* gegenüber einem Raum-Zeit-Koordinatensystem allgemeiner Art *keine gesonderte Bedeutung mehr zukommt; vielmehr setzen sie sich zu Vektoren umfassenderer Art zusammen*, die von der Wahl des Bezugssystems nicht mehr abhängen.

Man kann den Gleichungen (3), welche im Grunde genommen von dem Koordinatensystem unabhängige Beziehungen ausdrücken, indem man die Geschwindigkeit $q = |\mathfrak{v}|$ aus der Z-Achse herausverlegt und durch einen Vektor $\mathfrak{v}$ ersetzt, die Gestalt geben

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}' &= k(\mathfrak{E} + [\mathfrak{v}, \mathfrak{H}]) \\ \mathfrak{H}' &= k(\mathfrak{H} - [\mathfrak{v}, \mathfrak{E}]) \end{aligned} \tag{4}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}' &= \mathfrak{E} + [\mathfrak{v}, \mathfrak{H}] \\ \mathfrak{H}' &= \mathfrak{H} - [\mathfrak{v}, \mathfrak{E}], \end{aligned} \tag{4a}$$

je nachdem es sich um eine Komponente der Vektoren $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{H}'$ senkrecht zur Richtung von $\mathfrak{v}$ oder in dieser Richtung handelt, und auch diese Formeln lassen sich (nach einer Mitteilung von Hrn. R. Gans) je in eine zusammenfassen

$$\mathfrak{E}' = k(\mathfrak{E} + [\mathfrak{v}, \mathfrak{H}]) + \frac{1-k}{q^2}(\mathfrak{E}, \mathfrak{v})\,\mathfrak{v}$$

$$\mathfrak{H}' = k(\mathfrak{H} - [\mathfrak{v}, \mathfrak{E}]) + \frac{1-k}{q^2}(\mathfrak{H}, \mathfrak{v})\,\mathfrak{v}.$$

Die Formeln (4), (4a) stimmen überein, wenn die Geschwindigkeit $|\mathfrak{v}| = q$ klein gegen 1 (die Lichtgeschwindigkeit) ist. Infolgedessen drückt sich in der Theorie von Lorentz durch

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{E} + [\mathfrak{v}, \mathfrak{H}] \tag{5}$$

oder, wenn wir wieder die Sekunde als Zeiteinheit einführen und mit c die Lichtgeschwindigkeit bezeichnen, durch

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{E} + \left[\frac{\mathfrak{v}}{c}, \mathfrak{H}\right] \tag{5a}$$

die *ponderomotorische (elektromotorische) Kraft auf die Einheit der Ladung* aus, die mit einer gegen die Lichtgeschwindigkeit geringen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ sich relativ zum (festen) Koordinatensystem geradlinig und gleichförmig bewegt, wenn wieder das durchquerte elektrische und magnetische Feld durch $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ dargestellt wird.

56. Die elektromagnetische Masse des Elektrons.

Vermittels der Formeln, die wir im vorigen Art. für die Kräfte $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{H}'$ im bewegten Koordinatensystem X', Y', Z' gefunden haben, kann man — wir folgen hierin wieder A. Einstein — die Bewegungsgleichungen für ein Elektron in bezug auf dieses System aufstellen, wenn man die folgenden Voraussetzungen macht, bzw. Definitionen zugrunde legt, die übrigens an die üblichen Vorstellungen der Mechanik anschließen.

1. Wenn das Elektron *vom Zustand der (relativen) Ruhe aus* durch eine Kraft beschleunigt wird, so unterscheidet sich — auch im bewegten System — die Kraft von der Beschleunigung, die es erhält, durch einen skalaren Faktor, den man seine Masse (im engeren Sinne) nennt, und der das Maß ist für die Trägheit, die es, gleichviel ob der Widerstand ponderabler Natur ist oder von einer elektrischen Ladung herrührt, beim Übergang aus der *Ruhe* in die Bewegung dem Kraftvektor entgegensetzt.

2. Dieser Faktor μ ist von der Geschwindigkeit der (gleichförmigen) Fortbewegung des Koordinatensystems unabhängig.

Befindet sich nun etwa im Ursprung eines Koordinatensystems X', Y', Z', das sich längs der Z-Achse eines ruhenden Systems X, Y, Z parallel zu sich selbst gleichförmig und geradlinig bewegt, wobei die Achsen Z, Z' zusammenfallen, ein Elektron von der Ladung e, das zur Zeit $t = 0$ relativ zu dem bewegten Systeme ruht, und wirken auf dieses die Kräfte $\mathfrak{E}', \mathfrak{H}'$ eines elektromagnetischen Feldes, so sind nach den gemachten Annahmen seine Bewegungsgleichungen im ersten Augenblick[1])

$$\begin{aligned} \mu \frac{d^2x'}{dt'^2} &= eX' \\ \mu \frac{d^2y'}{dt'^2} &= eY' \\ \mu \frac{d^2z'}{dt'^2} &= eZ'. \end{aligned} \tag{1}$$

Wir wollen diese Gleichungen auf das ruhende System X, Y, Z zurücktransformieren. Nach Art. 53, (15a), (15b) ist, wenn dort

$$\dot{x} = \dot{y} = 0, \; \dot{z} = q \text{ gesetzt wird,} \tag{2}$$

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} = k^2 \frac{d^2x}{dt^2}; \quad \frac{d^2y'}{dt'^2} = k^2 \frac{d^2y}{dt^2}; \quad \frac{d^2z'}{dt'^2} = k^3 \frac{d^2z}{dt^2}. \tag{3}$$

Ferner ist nach Art. 55 (3)

$$\begin{aligned} X' &= k(X - qM) \\ Y' &= k(Y + qL) \\ Z' &= Z. \end{aligned} \tag{4}$$

1) Die gleiche Bezeichnung der Komponenten von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ und der Koordinatenachsen ist wohl unbedenklich.

Setzt man diese Werte in (1) ein, so erhält man für $t = 0$

$$\begin{aligned} \mu k \frac{d^2 x}{dt^2} &= e(X - qM) \\ \mu k \frac{d^2 y}{dt^2} &= e(Y + qL) \\ \mu k^3 \frac{d^2 z}{dt^2} &= eZ, \end{aligned} \tag{5}$$

wo nun auf der rechten Seite (s. d. Schluß des letzten Art.) die Komponenten der elektromagnetischen Kraft, vom ruhenden System aus beurteilt, stehen. Daher unterscheiden sich Kraft und Beschleunigung *im ruhenden System* X, Y, Z für ein mit der Geschwindigkeit q *bewegtes* Elektron nicht mehr durch einen skalaren Faktor, sondern durch einen solchen, dessen Komponenten längs der Achsen X, Y, bzw. der in Richtung der Geschwindigkeit q fallenden Achse Z sind:

$$\mu k, \quad \mu k, \quad \mu k^3.$$

Die Masse also, die den Widerstand (die Trägheit) mißt, welche das *bewegte* Elektron dem Kraftvektor entgegensetzt, ist *verschieden*, je nachdem es sich um eine Beschleunigung senkrecht zur Richtung oder in Richtung der Bewegung handelt; die *„transversale“ elektromagnetische Masse* (im ersten Fall) ist gleich μk; die *„longitudinale“* gleich μk^3. Natürlich fallen die Faktoren anders aus, wenn man „Kraft“ anders definiert; stellt man sie, wie es Einstein tut, durch den Vektor $\mathfrak{E}'$ dar (vor. Art. (4)), so werden jene gleich μk^2, bzw. μk^3.

„Eine Kraft, die in Richtung der Geschwindigkeit q auf das bewegte Elektron wirkt, ruft eine andere Beschleunigung hervor, als eine gleich große, die senkrecht dazu wirkt. Ist die Kraft schief zur Bewegungsrichtung orientiert, so stimmt die Richtung der Beschleunigung nicht mit derjenigen der Kraft überein. — — Die elektromagnetische Masse ist kein Skalar wie die Masse der gewöhnlichen Mechanik, sondern ein Tensor (nach der Bezeichnung von W. Voigt) von der Symmetrie eines Rotationsellipsoids“ (Abraham, Dynamik des Elektrons, Gött. Nachr. 1902, wo zuerst die Begriffe „longitudinale und transversale Masse“ auftreten).

Es ist nun sehr bemerkenswert, daß die Differentialgleichungen (5), auf ein Koordinatensystem in *allgemeiner* (gegen X, Y, Z geneigter) Lage bezogen, ihre einfache Form keineswegs einbüßen (M. Planck, das Prinzip der Relativität und die Grundgleichungen der Mechanik, Ber. der Deutschen Phys. Ges. Berlin IV, 1906). Um dies zu zeigen, transformieren wir das System (5) auf ein Koordinatensystem, das den gleichen Ursprung wie X, Y, Z besitzt, dessen Achsen aber gegen diese und somit gegen die Richtung der Geschwindigkeit q geneigt sind. Wir bewirken diese Drehung mittels der Formeln (1), (2) des Art. 5:

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z; \quad x = \alpha_1 \xi + \beta_1 \eta + \gamma_1 \zeta \\ \eta &= \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z; \quad y = \alpha_2 \xi + \beta_2 \eta + \gamma_2 \zeta \\ \zeta &= \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z; \quad z = \alpha_3 \xi + \beta_3 \eta + \gamma_3 \zeta, \end{aligned} \tag{6}$$

wo zwischen den α, β, γ die bekannten Relationen bestehen, denen zufolge u. A.

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= \beta_1 \gamma_2 - \gamma_1 \beta_2 \\ \beta_3 &= \gamma_1 \alpha_2 - \alpha_1 \gamma_2 \\ \gamma_3 &= \alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2 \end{aligned} \tag{7}$$

ist. Es ergibt sich durch Differentiation:

$$\dot{\xi} = \alpha_1 \dot{x} + \alpha_2 \dot{y} + \alpha_3 \dot{z}; \tag{7a}$$

usw.

$$\ddot{\xi} = \alpha_1 \ddot{x} + \alpha_2 \ddot{y} + \alpha_3 \ddot{z}; \tag{7b}$$

usw.

Hiernach ist für den Zeitpunkt, in dem das Elektron den Ursprung verläßt, wenn also $\dot{x} = \dot{y} = 0$, $\dot{z} = q$ ist, wegen (7a):

$$\alpha_3 = \frac{\dot{\xi}}{q}; \quad \beta_3 = \frac{\dot{\eta}}{q}; \quad \gamma_3 = \frac{\dot{\zeta}}{q}. \tag{8}$$

Multipliziert man die Gleichungen (5) bzw. mit α_1, α_2, α_3 und addiert, so wird die linke Seite, wenn man sich der Bedeutung von k

$$k = \frac{1}{\sqrt{1-q^2}}$$

erinnert,

$$\begin{aligned} \mu k (\alpha_1 \ddot{x} + \alpha_2 \ddot{y}) + \mu k^3 \alpha_3 \ddot{z} &= \mu k (\alpha_1 \ddot{x} + \alpha_2 \ddot{y} + \alpha_3 \ddot{z}) + \mu k (k^2 - 1) \alpha_3 \ddot{z} \\ &= \mu k \ddot{\xi} + \mu k (k^2 - 1) \alpha_3 \frac{d}{dt} \dot{z} \\ &= \mu k \ddot{\xi} + \mu k (k^2 - 1) \frac{\dot{\xi}}{q} \dot{q} \\ &= \frac{\mu}{\sqrt{1-q^2}} \ddot{\xi} + \frac{\mu q}{\sqrt{1-q^2}^3} \dot{\xi} \dot{q} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu \dot{\xi}}{\sqrt{1-q^2}} \right) = \frac{d}{dt} (\mu k \dot{\xi}). \end{aligned} \tag{9}$$

Setzt man endlich

$$\alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z = \Xi \tag{10}$$

usw.

und

$$\begin{aligned} \alpha_1 L + \alpha_2 M + \alpha_3 N &= \Lambda \\ \beta_1 L + \beta_2 M + \beta_3 N &= \mathbf{M} \\ \gamma_1 L + \gamma_2 M + \gamma_3 N &= \mathbf{N}, \end{aligned} \tag{11}$$

so wird

$$\begin{aligned} L &= \alpha_1 \Lambda + \beta_1 \mathbf{M} + \gamma_1 \mathbf{N} \\ M &= \alpha_2 \Lambda + \beta_2 \mathbf{M} + \gamma_2 \mathbf{N} \\ N &= \alpha_3 \Lambda + \beta_3 \mathbf{M} + \gamma_3 \mathbf{N} \end{aligned} \tag{11a}$$

und hiermit die rechte Seite der aus (5) abgeleiteten Gleichung (wegen (11a) bzw. (7), (8)):

$$\begin{aligned} &e(\alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z) + eq(-\alpha_1 M + \alpha_2 L) \\ &= e\Xi + eq\{-(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)\mathbf{M} + (\alpha_2\gamma_1 - \gamma_2\alpha_1)\mathbf{N}\} \\ &= e\Xi + eq\{\beta_3 \mathbf{N} - \gamma_3 \mathbf{M}\} \\ &= e\Xi + e(\dot{\eta}\mathbf{N} - \dot{\zeta}\mathbf{M}). \end{aligned}$$

Man erhält so die folgenden Gleichungen, welche diejenigen (5) in sich enthalten:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu\dot{\xi}}{\sqrt{1-q^2}}\right) &= e\{\Xi + (\dot{\eta}\mathbf{N} - \dot{\zeta}\mathbf{M})\} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu\dot{\eta}}{\sqrt{1-q^2}}\right) &= e\{H + (\dot{\zeta}\Lambda - \dot{\xi}\mathbf{N})\} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu\dot{\zeta}}{\sqrt{1-q^2}}\right) &= e\{Z + (\dot{\xi}\mathbf{M} - \dot{\eta}\Lambda)\}, \end{aligned} \tag{12}$$

oder in Vektorbezeichnung, wenn wieder $\mathfrak{f}$ die ponderomotorische Kraft ist, die auf ein Elektron mit der Ladung 1 wirkt (Art. 55), und $\mathfrak{v} = (\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta})$ die Geschwindigkeit des Elekrons in bezug auf das ruhende Koordinatensystem (Ξ, H, Z):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu\mathfrak{v}}{\sqrt{1-q^2}}\right) = e\mathfrak{f}. \tag{12a}$$

57. Die Bewegungsgleichungen, bezogen auf ein gleichförmig bewegtes System.

An die vorstehende elegante Form der Differentialgleichungen des bewegten Elektrons hat M. Planck eine weittragende Bemerkung geknüpft. Ersetzt man die elektromotorische Kraft $e\mathfrak{f}$ durch irgendeine andere beschleunigende Kraft $\mathfrak{P}$ mit den Komponenten $\mathfrak{P}_\xi, \mathfrak{P}_\eta, \mathfrak{P}_\zeta$, *so kann man die Gültigkeit der Gleichungen* (12) *auch für diese Kraft fordern.* Dann erhalten sie, wenn man wieder die *Sekunde als Einheit* einführt, also t, $\mathfrak{v}$ und q durch bzw. tc, $\mathfrak{v}/c$, q/c ersetzt, die Form:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu\dot{\xi}}{\sqrt{c^2-q^2}}\right) &= \mathfrak{P}_\xi; \\ \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu\dot{\eta}}{\sqrt{c^2-q^2}}\right) &= \mathfrak{P}_\eta; \\ \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu\dot{\zeta}}{\sqrt{c^2-q^2}}\right) &= \mathfrak{P}_\zeta. \end{aligned} \tag{1}$$

Vektoriell:

$$\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu\mathfrak{v}}{\sqrt{c^2-q^2}}\right) = \mathfrak{P}. \tag{1a}$$

Dies sind dann die Bewegungsgleichungen für den *bewegten* Massenpunkt μ in bezug auf ein *festes* Koordinatensystem, sofern man für seine Bewegung vom Ruhezustand aus in bezug auf ein *selbst bewegtes* die *gewöhnliche* LAGRANGEsche Form als gültig annimmt.

Wegen der Reziprozität, die für die relative Bewegung durch die Gruppeneigenschaft der Transformation gewährleistet ist, kann man aber (1) auch *als die Differentialgleichungen eines bewegten* ($q < c$) *Punktes* μ *ansehen in bezug auf ein gleichförmig bewegtes Koordinatensystem, wenn für ihn in bezug auf ein System, gegen das er im ersten Moment ruht, die gewöhnlichen Differentialgleichungen* $\mu\dot{\mathfrak{v}} = \mathfrak{P}$ *gelten.* Sie bilden somit *die Verallgemeinerung der* LAGRANGE*schen Gleichungen für den Fall eines äußerst rasch bewegten Massenpunktes* und gehen wieder in diese über, wenn man $c^2\mathfrak{P}$ durch $\mathfrak{P}$ ersetzt und $c = \infty$ setzt. τ wird dann gleich t. Denn aus den Gleichungen (5) des Art. 53 erhält man durch Einführung des gewöhnlichen Zeitmaßes die Formeln:

$$z' = \frac{c(z-qt)}{\sqrt{c^2-q^2}}, \quad t' = \frac{-qz+c^2t}{c\sqrt{c^2-q^2}}, \tag{1b}$$

die für $c = \infty$ in

$$z' = z - qt, \quad t' = t \tag{1c}$$

übergehen.[1]) — In der Tat sind die Differentialgleichungen der klassischen Mechanik, soweit sie sich auf die gegenseitige Wirkung

1) Eine Vergleichung der klassischen und der elektromagnetischen Mechanik vom Standpunkt der Gruppentheorie aus findet man bei PH. FRANK, Wiener Akad. Ber. Bd. 118, 1909.

von Punktsystemen beziehen, gegenüber der Transformation (1c) invariant.

Wir setzen wieder $c = 1$ und wollen nun aus dem Gleichungssystem (1b) durch Multiplikation der Komponenten mit bzw.

$$\frac{\mathfrak{v}_x dt}{\sqrt{1-q^2}} = \frac{d\xi}{\sqrt{1-q^2}}, \text{ usw.}$$

und Addition ein Integral bilden. Man erhält

$$\frac{\mu}{2} d\left(\frac{\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2+\dot{\zeta}^2}{1-q^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-q^2}}(\mathfrak{P}_\xi d\xi + \mathfrak{P}_\eta d\eta + \mathfrak{P}_\zeta d\zeta). \tag{2}$$

Der Zuwachs links ist

$$d\left(\frac{\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2+\dot{\zeta}^2}{1-q^2}\right) = d\frac{q^2}{1-q^2} = d\left(\frac{q^2}{1-q^2}+1\right) = d\frac{1}{1-q^2}. \tag{3}$$

Es möge nun *als unabhängige Veränderliche* anstatt der Zeit t die *Eigen-* (Orts-) *Zeit* $t' = \tau$ des im Ursprung des bewegten Systemes $\xi = \eta = \zeta = 0$ zur Zeit t befindlichen Punktes μ eingeführt werden. Aus (8) des Art. 53 ergibt sich für $z' = 0$ die Beziehung

$$t = kt' = k\tau = \frac{\tau}{\sqrt{1-q^2}},$$

also auch

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-q^2}}, \tag{4}$$

womit z. B.:

$$\frac{\dot{\xi}}{\sqrt{1-q^2}} = \frac{d\xi}{d\tau} \tag{5}$$

wird. Führt man (4) in (2) ein, so ergibt sich mit Hilfe von (3):

$$(\mathfrak{P}_\xi d\xi + \mathfrak{P}_\eta d\eta + \mathfrak{P}_\zeta d\zeta)\frac{dt}{d\tau} = \frac{\mu}{2} d\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = \mu\frac{dt}{d\tau}\, d\frac{dt}{d\tau}$$

oder

$$\mathfrak{P}_\xi d\xi + \mathfrak{P}_\eta d\eta + \mathfrak{P}_\zeta d\zeta = \mu\, d\frac{dt}{d\tau}. \tag{6}$$

Somit ist der Zuwachs an kinetischer Energie

$$\mu d\frac{dt}{d\tau} = \mu d\left[\frac{dt - d\tau}{d\tau}\right],$$

und die kinetische Energie selbst, bis auf eine Konstante, gleich *dem Produkt aus der Masse* μ des Punktes in *das Vorgehen der Zeit* t *gegen seine Ortszeit* τ.

Faßt man nun wieder, in Verfolgung der in Art. 55 gemachten Bemerkung, *Zeit und Raumkoordinaten* t, ξ, η, ζ des Massenpunktes μ als *gleichberechtigte Bestimmungsstücke* auf, und ergänzt man demgemäß die Gleichungen (1), die mit Hilfe von (5) die Form erhalten:

$$\mu \frac{d}{dt}\frac{d\xi}{d\tau} = \mathfrak{P}_\xi$$

$$\mu \frac{d}{dt}\frac{d\eta}{d\tau} = \mathfrak{P}_\eta \tag{7}$$

$$\mu \frac{d}{dt}\frac{d\zeta}{d\tau} = \mathfrak{P}_\zeta$$

durch:

$$\mu \frac{d}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \mathfrak{P}_t,$$

so besitzt (wegen (6)) die Komponente $\mathfrak{P}_t$ des Vektors $\mathfrak{P}$ in Richtung der t-Achse den Wert

$$\mathfrak{P}_t = \mathfrak{P}_\xi \frac{d\xi}{dt} + \mathfrak{P}_\eta \frac{d\eta}{dt} + \mathfrak{P}_\zeta \frac{d\zeta}{dt}, \tag{8}$$

während

$$\left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right)^2 = \frac{q^2}{1-q^2} = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - 1 \tag{9}$$

ist. Daher hat die hinzugefügte letzte Gleichung des Systems (7) *die Bedeutung der Energiegleichung.*

Die bekannte gegenüber einer Orthogonaltransformation invariante Form gewinnen die Gleichungen (7) durch Multiplikation mit $dt/d\tau$. Erst der mit diesem Faktor multiplizierte Vektor $\mathfrak{P}$ ist als Kraftvektor in dem relativ zum Massenpunkt ruhenden System anzusprechen.

Wenn man sich also auf den Standpunkt des allgemeinen Raum-Zeit-Koordinatensystems stellt und mit Minkowski alsdann vom „Weltpostulat“ statt vom Relativitätspostulat spricht, so erscheint die Energiegleichung als *notwendige Ergänzung der* Lagrange*schen Bewegungsgleichungen.* Und da die kinetische Energie mit der Neigung der Zeitachse t gegen die „Eigenzeit“ τ (wie dann statt „Ortszeit“ zu sagen ist) sich ändert, so umfaßt die eine Energiegleichung, für eine unbestimmte Achse t formuliert, auch das System der drei Bewegungsgleichungen, also die ganze Mechanik des materiellen Punktes (Minkowski, Gött. Nachr. 1908, S. 108). Damit behält in gewissem Sinne die Energetik, die auf dem Prinzip der Erhaltung der Energie die ganze Mechanik aufzubauen wünscht, Recht: dann nämlich, *wenn der Energiesatz seine Geltung behält gegenüber jeder Raum-Zeit-Transformation.* Bewegungsgleichungen und Energie-Satz verschmelzen dann, wie Strom und Dichte, elektrischer und magnetischer Vektor (Art. 55), je zu einer höheren Einheit, welche jene Beziehungen, die zwischen den Komponenten bestehen, umfaßt.

Von *Invarianten* gegenüber einer allgemeinen Raum-Zeit-Transformation wollen wir noch eine hervorheben. Nach Art. 53 a. E. läßt sich die allgemeine LORENTZ-Transformation aus Transformationen von derjenigen Form, durch die wir oben (x, y, z) in (ξ, η, ζ) übergeführt haben, und von der Form (5) des Art. 53 zusammensetzen. Weil nun bei der letzteren die Größe

$$\varrho'^2(1 - \mathfrak{v}_z'^2) = \frac{\varrho^2}{1-q^2}((1 - q\mathfrak{v}_z)^2 - (\mathfrak{v}_z - q)^2) = \varrho^2(1 - \mathfrak{v}_z^2) \quad (10)$$

in sich, bei der ersteren $\mathfrak{v}_z^2$ in $|\mathfrak{v}|^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2$ und zugleich ϱ in sich übergeht, so ändert sich der Ausdruck

$$\varrho^2(1 - |\mathfrak{v}|^2) = \varrho^2\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2$$

gegenüber einer Raum-Zeit-Transformation überhaupt nicht (MINKOWSKI, a. a. O. S. 63). Also nicht die Dichte selbst, sondern das Produkt aus der Dichte und derjenigen Geschwindigkeit, mit der die Eigenzeit τ in der Zeit t sich ändert, ist eine Invariante.

58. Verhalten zum Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung.

Wir wollen zum Schluß dieser Skizze noch auf den merkwürdigen Umstand hinweisen, daß die LORENTZsche Theorie dem Grundsatze der Gleichheit von Aktion und Reaktion, in dem gewöhnlichen Sinne, nämlich zwischen ponderablen Massen genommen, widerspricht. Um einen Einblick in den Differenzpunkt zu gewinnen, wollen wir die Gesamtkraft berechnen, die nach den vorstehenden Gleichungen auf einen Raumteil T wirkt, innerhalb dessen sich in ponderabler Materie elektromagnetische Vorgänge abspielen.

Nach Art. 55 ist diese Kraft dargestellt durch das über den Raum T erstreckte Integral

$$\mathfrak{F} = \int \varrho \mathfrak{f} \, d\tau, \quad (1)$$

(zu dem nur diejenigen Stellen von T beitragen, für welche die Ladung ϱ von Null verschieden ist); dabei ist

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{E} + \left[\frac{\mathfrak{v}}{c}, \mathfrak{H}\right]. \quad (2)$$

Wir beschränken uns (LORENTZ, Enzykl. V 2, S. 161) auf die Berechnung der X-Komponente $\mathfrak{F}_x$ dieser Kraft

$$\mathfrak{F}_x = \int \varrho \mathfrak{f}_x d\tau = \int \varrho X d\tau + \int \left(\frac{\varrho}{c} \mathfrak{v}_y N - \frac{\varrho}{c} \mathfrak{v}_z M \right) d\tau, \tag{3}$$

indem wir für ϱ und $\varrho \mathfrak{v}$ die Werte aus (3) und (1) Art. 50 eintragen. Zunächst erhält man durch partielle Integration ((4) Art. 24)

$$4\pi \int \varrho X d\tau = \int X \operatorname{div} \mathfrak{E} d\tau = -\int (\mathfrak{E}, \operatorname{grad} X) d\tau - \int X \mathfrak{E}_n d\sigma,$$

wo sich das letzte Integral über die Oberfläche Σ des Raumes $\mathbf{T}$ erstreckt. Wegen der Gleichungen (2a) des Art. 50 wird ferner

$$\begin{aligned}(\mathfrak{E}, \operatorname{grad} X) &= X \frac{\partial X}{\partial x} + Y \frac{\partial X}{\partial y} + Z \frac{\partial X}{\partial z} \\ &= X \frac{\partial X}{\partial x} + Y \left(\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{1}{c} \dot{N} \right) + Z \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{1}{c} \dot{M} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{1}{c} (Y \dot{N} - Z \dot{M}),\end{aligned}$$

daher

$$\begin{aligned}4\pi \int \varrho X d\tau = -\int X \mathfrak{E}_n d\sigma - \frac{1}{2} \int \frac{\partial}{\partial x} (X^2 + Y^2 + Z^2) d\tau \\ - \frac{1}{c} \int (Y \dot{N} - Z \dot{M}) d\tau,\end{aligned} \tag{4}$$

wo sich noch (Art. 24 (2))

$$-\int \frac{\partial}{\partial x} (X^2 + Y^2 + Z^2) d\tau = \int (X^2 + Y^2 + Z^2) \cos(n, x) d\sigma \tag{4a}$$

ergibt, indem man wieder für $dy dz = \pm d\sigma \cos(n, x)$ einführt (n die nach innen gerichtete Normale).

Andererseits ergeben die Gleichungen (1a) a. a O.

$$\begin{aligned}4\pi \int \left(\frac{\varrho}{c} \mathfrak{v}_y N - \frac{\varrho}{c} \mathfrak{v}_z M \right) d\tau &= \int \left\{ N \left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) - M \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \right) \right\} d\tau \\ &\quad - \frac{1}{c} \int (\dot{Y} N - \dot{Z} M) d\tau \\ &= -\int \left(L \frac{\partial L}{\partial x} + M \frac{\partial M}{\partial x} + N \frac{\partial N}{\partial x} \right) d\tau \\ &\quad + \int \left(L \frac{\partial L}{\partial x} + M \frac{\partial L}{\partial y} + N \frac{\partial L}{\partial z} \right) d\tau \\ &\quad - \frac{1}{c} \int (\dot{Y} N - \dot{Z} M) d\tau,\end{aligned} \tag{5}$$

wo wieder

$$-2\int\left\{L\frac{\partial L}{\partial x}+M\frac{\partial M}{\partial x}+N\frac{\partial N}{\partial x}\right\}d\tau=\int(L^2+M^2+N^2)\cos(n,x)\,d\sigma \quad (5a)$$

ist, und durch partielle Integration ((4) des Art. 24)

$$\begin{aligned}\int\left(L\frac{\partial L}{\partial x}+M\frac{\partial L}{\partial y}+N\frac{\partial L}{\partial z}\right)d\tau &=-\int L(L\cos(n,x)+M\cos(n,y)+N\cos(n,z))\,d\sigma\\ &\quad-\int\left(\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}\right)L\,d\tau\\ &=-\int L\mathfrak{H}_n\,d\sigma \end{aligned}\quad (5b)$$

erhalten wird, weil

$$\operatorname{div}\mathfrak{H}=0$$

ist. Setzt man (4a) in (4); (5a), (5b) in (5) ein und addiert (4) und (5), so erhält man für die X-Komponente der Kraft $\mathfrak{F}$ den folgenden Ausdruck (LORENTZ, Versuch einer Theor. der elektr. und opt. Erscheinungen usw., Leiden 1895, S. 26)

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_x=&-\frac{1}{4\pi}\int X\mathfrak{E}_n\,d\sigma+\frac{1}{8\pi}\int(X^2+Y^2+Z^2)\cos(n,x)\,d\sigma\\ &+\frac{1}{8\pi}\int(L^2+M^2+N^2)\cos(n,x)\,d\sigma-\frac{1}{4\pi}\int L\mathfrak{H}_n\,d\sigma\\ &-\frac{1}{4\pi c}\frac{d}{dt}\int(YN-ZM)\,d\tau.\end{aligned}\quad (6)$$

Die Kraft $\mathfrak{F}$ zerfällt hiernach in zwei Teile,

$$\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_1+\mathfrak{F}_2, \quad (7)$$

ein Oberflächen-Integral $\mathfrak{F}_1$ und ein Raum-Integral $\mathfrak{F}_2$.

$\mathfrak{F}_1$ hat die X-Komponente:

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_{1x}=-\frac{1}{4\pi}\int\{X\mathfrak{E}_n+L\mathfrak{H}_n&-\tfrac{1}{2}(X^2+Y^2+Z^2)\cos(n,x)\\ &-\tfrac{1}{2}(L^2+M^2+N^2)\cos(n,x)\}\,d\sigma;\end{aligned}\quad (8)$$

$\mathfrak{F}_2$ die X-Komponente:

$$\mathfrak{F}_{2x}=-\frac{1}{4\pi c}\frac{d}{dt}\int(YN-ZM)\,d\tau=-\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int\mathfrak{S}_x\,d\tau, \quad (9)$$

wo $\mathfrak{S}_x$ die X-Komponente des früher (Art. 48 (8)) eingeführten POYNTINGschen Strahlungsvektors

$$\mathfrak{S}=\frac{c}{4\pi}[\mathfrak{E},\mathfrak{H}]$$

ist. Die Kraft $\mathfrak{F}_1$ läßt sich als eine *Spannung des Äthers* auffassen, die auf beiden Seiten des Oberflächenelementes in entgegengesetztem Sinne wirkt. Diese Vorstellung haben MAXWELL und HERTZ entwickelt. LORENTZ lehnt sie ab. Er gesteht zwar dem Äther eine Wirkung auf die Materie (durch die Kraft $\mathfrak{f}$, s. Art. 55 (5a)) zu, nicht aber der Materie eine solche auf den Äther, der für ihn nur der leere Raum ist, gedacht als Träger elektromagnetischer Störungen. Andererseits tritt die Volumkraft $\mathfrak{F}_2$ bei jeder Änderung des POYNTINGschen Strahlungsvektors auf, ist also z. B. dann von Null verschieden, wenn eine elektromagnetische Welle den Raum durchzieht (gleichviel, ob sich dort ponderable Materie befindet, oder nicht). Daß im letzteren Fall auch $\mathfrak{F}_1$ nicht Null ist, erkennt man daraus, daß, wenn in $\mathbf{T}$ sich keine Materie befindet, notwendig $\mathfrak{F} = 0$, also $\mathfrak{F}_1 = -\mathfrak{F}_2$ sein muß.

Die Oberflächenspannung $\mathfrak{F}_1$ verschwindet dann, wenn sich der Raum $\mathbf{T}$ zum unendlichen Raum erweitert, während die Kräfte $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ so beschaffen sind, daß $R\mathfrak{E}$ und $R\mathfrak{H}$ mit unendlich groß werdendem $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ dem Wert Null sich nähern. Trifft in diesem Fall eine elektromagnetische Störung etwa ein im Raume ruhendes Elektron, so wird der Kraft

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_2 = -\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int \mathfrak{S}\, d\tau,$$

die auf das Elektron wirkt, *keine* Gegenkraft gegenüberstehen, wie etwa bei der Gravitationswirkung zwischen *zwei* Massenteilchen, weil eben nur ein solches vorhanden ist, während an Stelle des andern der Ausdruck rechts tritt. Um nun doch das Gesetz der Gleichheit von Druck und Gegendruck in einem gewissen Sinne aufrechtzuerhalten, hat man den Ausdruck selbst:

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{c^2}\int \mathfrak{S}\, d\tau,$$

eine im leeren Raume frei auftretende Vektorgröße, der die Dimension $[lmt^{-1}]$ einer Bewegungsgröße (Art. 51 a. E.) zukommt — als ob sie an eine Masse gebunden wäre, — *elektromagnetische Bewegungsgröße* (H. A. LORENTZ, a. a. O. S. 162) [des Äthers] genannt, und ihr die Rolle einer Gegenwirkung gegen diejenige des Elektrons zugewiesen.

Es ist nun sehr bemerkenswert, daß das Experiment das Auftreten eines solchen Druckes auf einen Körper im leeren Raume bestätigt. P. LEBEDEW hat (Annalen d. Phys. (4) 6, 1901) durch

Messungen mit dem Radiometer den „MAXWELLschen Strahlungsdruck“, den ein auf einen Metallspiegel auffallendes Strahlenbündel auf diesen ausübt, bestimmt und mit dem Ergebnis der Theorie in Übereinstimmung gefunden. Dieses besteht in folgendem.

Ein Metall sieht man als eine Substanz von unendlich großer Leitungsfähigkeit an, in deren Innerem die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ immer und überall unendlich klein ist. Wir führen wie in Art. 47 a. E. die Ebene $x = 0$ als Grenzebene des Spiegels ein; die Einfallsebene des Strahls sei die Ebene $z = 0$, und das polarisierte Licht, das wir annehmen, schwinge, wie dort, *in* der Einfallsebene. Dann sind für die einfallende Welle die Vektoren $\mathfrak{E}_e$, $\mathfrak{H}_e$ (Art. 47 (12), (13)):

$$
\begin{aligned}
X_e &= A \sin\varphi \sin 2\pi n \left(t - \frac{-x\cos\varphi + y\sin\varphi}{V}\right) \\
Y_e &= A \cos\varphi \sin 2\pi n \left(t - \frac{-x\cos\varphi + y\sin\varphi}{V}\right) \\
Z_e &= 0 \\
L_e &= M_e = 0 \\
N_e &= A \sin 2\pi n \left(t - \frac{-x\cos\varphi + y\sin\varphi}{V}\right),
\end{aligned}
$$

da für den Äther $\varepsilon = \mu = 1$ ist. $V (= c)$ ist die Lichtgeschwindigkeit. Für den reflektierten Strahl ist (Art. 44 (4a)):

$$
\begin{aligned}
X_r &= A_r \sin\varphi \sin 2\pi n \left(t - \frac{x\cos\varphi + y\sin\varphi}{V}\right) \\
Y_r &= -A_r \cos\varphi \sin 2\pi n \left(t - \frac{x\cos\varphi + y\sin\varphi}{V}\right) \\
Z_r &= 0,
\end{aligned}
$$

und für den gebrochenen Strahl

$$X_b = Y_b = Z_b = 0,$$

weil im Inneren des Leiters $\mathfrak{E} = 0$ ist.

Ferner ist $A_r = A$, weil (Art. 44 (5)) die in die Trennungsebene fallenden Komponenten $Y_e + Y_r$, $Z_e + Z_r$ von $\mathfrak{E}$ Null sein müssen, da $\mathfrak{E}$ in dem Leiter Null ist.

Ferner ergeben sich für die reflektierte Welle die Komponenten L_r, M_r, N_r der magnetischen Feldstärke $\mathfrak{H}_r$ aus den Formeln (13) des Art. 47:

$$L_r = M_r = 0; \quad N_r = A \sin 2\pi n \left(t - \frac{x\cos\varphi + y\sin\varphi}{V}\right).$$

Fällt insbesondere der Strahl senkrecht auf den Spiegel auf, ist also $\varphi = 0$, so wird:

$$X_e = Z_e = 0;\quad Y_e = \quad A \sin 2\pi n\left(t + \frac{x}{V}\right)$$

$$X_r = Z_r = 0;\quad Y_r = -A \sin 2\pi n\left(t - \frac{x}{V}\right)$$

$$L_e = M_e = 0;\quad N_e = \quad A \sin 2\pi n\left(t + \frac{x}{V}\right)$$

$$L_r = M_r = 0;\quad N_r = \quad A \sin 2\pi n\left(t - \frac{x}{V}\right).$$

Trägt man nun die Werte $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_e + \mathfrak{E}_r$; $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_e + \mathfrak{H}_r$, nämlich

$$X = 0;\ Z = 0;\ Y = A\left\{\sin 2\pi n\left(t + \frac{x}{V}\right) - \sin 2\pi n\left(t - \frac{x}{V}\right)\right\};$$

$$L = 0;\ M = 0;\ N = A\left\{\sin 2\pi n\left(t + \frac{x}{V}\right) + \sin 2\pi n\left(t - \frac{x}{V}\right)\right\}$$

in den Ausdruck für die Komponente $\mathfrak{f}_{1x}$ des Flächendruckes $\mathfrak{f}_1$ ein, die in der Formel (8) für $\mathfrak{F}_{1x}$ unter dem Integralzeichen steht, also des Druckes auf die Flächeneinheit, und ebenso in die Ausdrücke für $\mathfrak{f}_{1y}$, $\mathfrak{f}_{1z}$, so erhält man, mit Rücksicht darauf, daß für $x = 0$

$$\mathfrak{E}_n = X = 0;\quad \mathfrak{H}_n = L = 0$$

ist, ferner daß $\cos(n, y) = 0$, $\cos(n, z) = 0$, $\cos(n, x) = 1$, und daß für $x = 0$ auch $Y = 0$ ist:

$$\begin{aligned}\mathfrak{f}_{1x} = -\frac{1}{4\pi}\{X\mathfrak{E}_n + L\mathfrak{H}_n - \tfrac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2)\cos(n, x)\\ - \tfrac{1}{2}(L^2 + M^2 + N^2)\cos(n, x)\} = \frac{1}{8\pi}N^2 = \frac{1}{2\pi}A^2 \sin^2 2\pi n t\end{aligned}$$

$$\mathfrak{f}_{1y} = \mathfrak{f}_{1z} = 0.$$

Daher ist der Druck $\mathfrak{f}_1$ auf die Flächeneinheit

$$\mathfrak{f}_1 = \frac{1}{2\pi}A^2 \sin^2 2\pi n t,$$

und der Durchschnittswert des Druckes für Wellen von der Schwingungszahl n

$$n\int_0^{\frac{1}{n}} \mathfrak{f}_1\, dt = \frac{A^2}{4\pi}.$$

Diese Beziehung läßt sich experimentell prüfen; man findet sie bestätigt. Nötigt somit bei dieser Auffassung auch das Experiment zur Annahme einer Bewegungsgröße im leeren Raum, die weder an ponderable Materie noch an Elektronen gebunden ist, so drängt sich von neuem der Gedanke an einen *Strom* von elektromagnetischer *Energie* auf, der, von der Erschütterungsstelle ausgehend, durch den leeren Raum sich ergießt. Diese Vorstellung, die nur bezüglich des bewegten Stoffes verschieden ist von derjenigen, die Newton in seiner längst überwunden geglaubten Emanationstheorie vertritt, entwickelt W. Ritz in einer Theorie (Recherches critiques sur l'électrodynamique générale, Ann. Chim. Phys. (8) t. 13, 1908), die in Anlehnung an die von Poincaré in der 2. Auflage seiner Électricité et Optique (Paris 1901, IV. partie) an den bisherigen Theorien geübten Kritik es sich zur Aufgabe macht, auf Grund des Begriffes der elektromagnetischen Bewegungsgröße den Begriff des Äthers gänzlich zu beseitigen und dessen Wirkung durch ein Ausschleudern von Energie von dem Herd der elekromagnetischen Störung aus zu ersetzen. — Übrigens macht auch die im vorstehenden vorgetragene Lorentz-Einsteinsche Theorie — wenn man von der Begründung der Fundamentalgleichungen absieht — von spezifischen Eigenschaften des Äthers an keiner Stelle Gebrauch.

Durch Versuche an Becquerel-Strahlen hat neuerdings A. H. Bucherer (Phys. Zeitschr. 9. Jahrg., 1908, S. 755, Ann. d. Phys. (4) 28, S. 513) die aus dem Relativitätsprinzip folgende Veränderung der Masse eines rasch (über halb so schnell wie das Licht) bewegten Elektrons bestätigt gefunden. So auch E. Hupka, „die träge Masse bewegter Elektronen" in den Ber. d. Deutschen Phys. Ges., Berlin 1909, S. 249.

Register.

Die Zahlen bezeichnen die Seite.

Bezeichnungen.

$\equiv$ bedeutet „Abkürzung für“ oder „identisch gleich.“

$\neq$ nicht gleich.

d, ∂, δ bezw. totales, partielles Differential, Variation (S. 7).

$[l^\alpha m^\beta t^\gamma]$ Dimensionen (S. 3).

d', δ' nicht [notwendig] vollständiges Differential (Variation) (S. 21).

S Summe von drei Gliedern (7, 18), die aus dem angeschriebenen durch Buchstabenvertauschung entstehen.

x_i, y_i, z_i ($i = 1, 2, \cdots n$) rechtwinklige Koordinaten eines Punktes mit der Masse m_i (11).

p_i, $\mathfrak{p}_i$ ($i = 1, 2, \ldots r$, bezw. $\mathfrak{r}$) $r(\mathfrak{r})$ allgemeine (Lagrangesche) Koordinaten (20).

q_i, $\mathfrak{q}_i$ die entsprechenden Momente (Impulskoordinaten) (40).

t Zeit; t' Orts-(Eigen)-Zeit im bewegten Koordinatensystem (207).

x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten des Raumelementes einer kontinuierlichen (raumerfüllenden) Masse oder: Koordinaten des Aufpunktes (101).

a, b, c dieselben zur Anfangszeit $t = 0$, oder: an anderer Stelle.

T, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}_1$ die kinetische Energie eines Systems.

v, $\mathfrak{v}$ Geschwindigkeit.

f, $\mathfrak{f}$ Beschleunigung; im IV. Abschnitt: Kraft auf die elektrische Menge 1.

c (im I. Abschnitt) Krümmung der Bahn.

T einfach oder mehrfach zusammenhängender Raumteil.

Σ dessen Oberfläche.

$d\tau$ Element von **T**.

$d\sigma$ Element von Σ.

ds, $d\mathfrak{s}$ Linienelement.

n die nach dem Innern von **T** gerichtete Normale in einem Punkt von Σ.

$\mathfrak{R} =$ Radius einer sich unbegrenzt ausdehnenden Kugel.

Deutsche Buchstaben bedeuten Vektoren (ausgenommen $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{T}$ s. oben); mit den Indizes x, y, z: deren Komponenten.

$\mathfrak{u} = (u, v, w)$ Verschiebungsgröße (mit den Komponenten u, v, w) im elastischen oder quasi-elastischen Mittel (Tabelle S. 137).

$\mathfrak{v} = (u, v, w) = (\mathfrak{v}_x, \mathfrak{v}_y, \mathfrak{v}_z)$ Geschwindigkeit; II. Abschnitt: im flüssigen Mittel (Tabelle S. 137).

div $\mathfrak{v}$ = Divergenz des Vektors $\mathfrak{v}$. (Tabelle S. 137).

rot $\mathfrak{v}$ = Rotation von $\mathfrak{v}$, Vektor mit dem Komponenten $\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$, usw. (76).

grad $\mathfrak{v}$ = Gradient von $\mathfrak{v}$, Vektor mit den Komponenten $\frac{\partial u}{\partial x}$, usw. (79).

$\mathfrak{w} = (\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2}$ rot $\mathfrak{v}$ im flüssigen Mittel (76. 94).

$\mathfrak{w} = (\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2}$ rot $\mathfrak{u}$ Achsendrehung des Volumelementes im elastischen oder quasi-elastischen Mittel, wo $\mathfrak{u}$ die Verschiebung ist (72. 136. 176).

$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ skalares (inneres) Produkt (79).

$[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ vektorielles (äusseres) Produkt (186), ein Vektor, senkrecht zu den Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, der mit diesen ein Rechtssystem bildet, mit den Komponenten $\mathfrak{a}_y \mathfrak{b}_z - \mathfrak{b}_y \mathfrak{a}_z$ usw.

Übergesetzte Punkte, wie in $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dot{\mathfrak{u}}$, $\dot{\xi}$, ... bedeuten 1. bez. 2. Differentialquotienten nach der Zeit (5. 76).

$\dot{x} = \dfrac{d}{dt} x(a, b, c, t)$ im Falle flüssiger Massen (78).

$\dot{u} = \dfrac{\partial}{\partial t} u(x, y, z, t)$ im Falle elastisch-fester und quasi-elastischer Massen (145. 178).

X, Y, Z (außer im IV. Abschnitt) Komponenten einer äußeren (eingeprägten) Volumkraft (64).

$\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ Komponenten des Oberflächendruckes.

$\mathfrak{E} = (X, Y, Z)$ im IV. Abschnitt: die elektrische Feldstärke (177).

$\mathfrak{H} = (L, M, N)$ im IV. Abschnitt: die magnetische Feldstärke (177).

c (im IV. Abschnitt) Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum.

ϱ im II. und III. Abschnitt: Dichte ponderabler, im IV. Abschnitt: elektrischer Massen.

$\varDelta$, $\triangle$ Laméscher Differentialparameter (104. 148).

$\square = \triangle - \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$ (205).