RAUSE[illegible]RGER

[illegible]eometrie

685

665
www.rcin.org.pl

www.rcin.org.pl

DIE
ELEMENTARGEOMETRIE
DES PUNKTES, DER GERADEN UND DER EBENE,

SYSTEMATISCH UND KRITISCH BEHANDELT

VON

DR. OTTO RAUSENBERGER.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1887.

www.rcin.org.pl

opis nr 48869

PAŃSTW. INSTYTUT MAT.
BIBLIOTEKA

7017

G.M.I. 169.

www.rcin.org.pl

Vorwort.

Zweck und Anlage des kleinen Buches, welches ich hiermit der Öffentlichkeit übergebe, glaube ich in der folgenden „Einleitung“ ausreichend erörtert zu haben. Es lag nicht in meiner Absicht, das auf dem Gebiete der Elementargeometrie vorhandene Material zusammenzutragen oder eine historische Entwicklung des Gegenstandes zu geben. Demgemäſs beschränken sich auch die litterarischen Nachweise auf das Wesentlichste. Umfassendere historische Angaben findet man in den öfters angeführten Werken von *Baltzer*, *Kruse*, *Hankel* u. A., denen ich manches Material verdanke. — Bei der Lektüre des Buches bitte ich die beigefügten Berichtigungen und Zusätze beachten zu wollen.

Frankfurt a. M., im September 1887.

Dr. **Otto Rausenberger.**

www.rcin.org.pl

Inhaltsverzeichnis.

www.rcin.org.pl

www.rcin.org.pl

klar, dafs es nur eine *einzige* Geometrie geben kann, deren Teile sich zu einem grofsen Ganzen zusammenfügen.

Ist aber unsere Elementargeometrie ein einheitliches Ganzes? Ist sie nicht vielmehr ein Konglomerat einzelner Sätze und Sätzchen, von denen sich wohl manche zu Gruppen vereinigen, die aber zum Teil auch recht äufserlich zusammengestellt sind? Wie mancher angehende Mathematiker mag sich die Frage vorgelegt haben: läfst sich denn nicht die gesamte Elementargeometrie nach einheitlichen Prinzipien behandeln, so dafs nicht blos Sätze nacheinander vorgetragen werden, die zufälligerweise gefunden worden sind, während andere ebenso interessante vielleicht noch unbekannt bleiben? Kann man die Lehre nicht so entwickeln, dafs man sofort übersieht, ob alle wesentlichen Punkte erledigt werden oder nicht, und dafs man den Eindruck einer bis zu gewissem Grade abgeschlossenen Entwicklung erhält? Es giebt in der That eine Reihe von Werken, welche die Elemente nach den Gesichtspunkten zu behandeln bestrebt sind, die sich in der neueren synthetischen Geometrie ergeben; Begriffe wie Projektivität, Kollineation mit ihren Untergattungen u. s. w. sollen schon in den Anfangsgründen die Herrschaft in Anspruch nehmen. Dieser Anschauungsweise kann sich der Verfasser jedoch nicht anschliefsen. Wohl ist es überall möglich, die einfachsten Begriffe unter umfassendere, daher kompliziertere zu subsumieren; aber diese Subsumtion ist gewöhnlich auf mehrere Arten möglich, so dafs zahlreiche umfassendere Begriffe existieren, welche alle denselben einfachen Begriff als Spezialfall in sich enthalten. Alsdann ist das Vorausschicken eines solchen umfassenderen Begriffs immer etwas Unnatürliches, Willkürliches. Eine naturgemäfse Entwicklung mufs von dem Einfachsten ausgehen und allmählich zum Komplizierteren fortschreiten.

Suchen wir uns darüber klar zu werden, welche Schwierigkeiten sich einer einheitlichen Entwicklung der Elementargeometrie entgegenstellen. Zunächst wird ein weitgehender Dualismus hervorgerufen durch die Benutzung zweier Fundamentallinien: der *Geraden* und des *Kreises*. Die neuere synthetische Geometrie zeigt, dafs durch geeignete Zuord-

www.rcin.org.pl

nung von Punkte- und Geradensystemen sämtliche Kegelschnitte erzeugt werden können; unter diesen ist der Kreis ein ganz spezielles Gebilde. Trotzdem räumt man ihm den Vorzug vor den übrigen Kegelschnitten ein, in die Elementargeometrie aufgenommen und hier gewissermafsen als gleichwertig mit der Geraden behandelt zu werden. Der Grund hierfür ist freilich recht einleuchtend: der Kreis ist die Linie, welche mechanisch am leichtesten erzeugt werden kann; seine Eigenschaften sind zum Teil überaus einfach und er bietet die Möglichkeit zu den einfachsten und nützlichsten Konstruktionen. Durch diese Eigenschaften wird allerdings der Kreis zu einem wichtigen und geradezu unentbehrlichen Bestandteile des geometrischen *Elementarunterrichtes.*

Der Verfasser erklärt, um Mifsverständnissen vorzubeugen, ausdrücklich, dafs er eine Geometrie, aus der der Kreis verbannt ist, als gänzlich ungeeignet für den Unterricht in den mittleren Klassen höherer Lehranstalten ansieht. Es ist psychologisch feststehend, dafs zum wirklichen geistigen Erwerb eines Wissensgebietes blofses rezeptives Studium nicht ausreicht; selbstthätige, produktive (wenn auch nur reproduktive) Übung mufs hinzutreten. So ist denn namentlich für den geometrischen Unterricht nichts förderlicher als das selbständige Lösen von Konstruktionsaufgaben. Ohne den Kreis werden aber fast sämtliche Elementarkonstruktionen unmöglich, und schon aus diesem Grunde wird die Kreislehre in Lehrbüchern, die für den Schulunterricht bestimmt sind, eine wesentliche Rolle spielen. Anders gestaltet sich die Sachlage bei einer *wissenschaftlichen* Darstellung; hier mufs die Kreislehre an die ihr gebührende Stelle verlegt werden: in die Theorie der Kegelschnitte. *Die Gerade ist die einzige Fundamentallinie und ebenso die Ebene die einzige Fundamentalfläche, die eine Behandlung in der wissenschaftlichen Elementargeometrie zu beanspruchen hat.*

Noch ein anderer Umstand stellt sich der Einheitlichkeit der Geometrie hindernd entgegen. Die Darstellung hat ihre Richtung zu sehr auf *spezielle* Eigenschaften und Figuren von besonderem Charakter genommen und verliert hierdurch die Allgemeinheit vielfach aus dem Auge. Auch

www.rcin.org.pl

die neuere Entwicklung hat die Mängel der älteren in dieser Hinsicht nicht vollständig ausgeglichen. Manche ganz einfache und naheliegende Relationen sind fast unbeachtet geblieben. Gewifs sind die Eigenschaften von Elementargebilden, welche auf der Voraussetzung von speziellen Gröfsenverhältnissen beruhen, keineswegs uninteressant und für den Elementarunterricht wiederum nicht zu entbehren; aber es ist auch eine Darstellung wünschenswert, welche, alle Spezialitäten beiseite lassend, eine vollständige Beantwortung der sich naturgemäfs darbietenden allgemeineren Fragen anstrebt.

Nach dem Gesagten geht die Tendenz der vorliegenden Arbeit auf eine einheitliche und systematische Behandlung der allgemeineren Gebilde, welche durch die Zusammenstellung einer endlichen Zahl von Punkten, Geraden und Ebenen erzeugt werden. Doch konnte ein anderer Punkt hierbei nicht aufser acht gelassen werden: die korrekte und eingehende Darlegung der Grundprinzipien, auf denen die Geometrie ihre Sätze aufbaut. Namentlich schien es wünschenswert, das so viel diskutierte Parallelenaxiom ausführlich zu behandeln und die Stellung der einzelnen Sätze zu demselben vollkommen klar zu legen. Im übrigen betrachtet der Verfasser die Anschauung als die nicht zu beseitigende Grundlage der Geometrie und schliefst daher sämtliche Spekulationen, die mit derselben nicht in Einklang sind, trotz des Interesses, welches sie darbieten, von der Darstellung grundsätzlich aus; nur kurze Hinweise auf solche Entwicklungen werden gegeben.

Über die äufserliche Anlage des Buches sei noch das Folgende bemerkt. Da ein vollständiges Lehrgebäude gegeben werden soll, sind alle Beweise, mit Ausnahme ganz selbstverständlicher, ausführlich behandelt; es werden bei keinem geometrische Begriffe und Resultate verwandt, die nicht vorher hergeleitet wurden. Der Leser wird von dem zusammenhängenden Lehrvortrage leicht die zusätzlichen Bemerkungen trennen, bei denen diese Rücksicht nicht genommen zu werden brauchte. Das Buch ist für den mathematisch Gebildeten, nicht für den ersten Anfänger bestimmt, der über die Elemente Belehrung sucht.

www.rcin.org.pl

Grundlagen.

§ 1.

Die geometrischen Grundbegriffe.

1. Sämtliche Gegenstände der Anschauung erscheinen uns in der Form des *Raumes*; weitere Erörterungen darüber, was der Raum sei, würden sich nur im Zirkel bewegen und den Begriff nicht klarer machen; wir müssen voraussetzen, daſs jeder Mensch, der überhaupt an die Beschäftigung mit der Geometrie herantritt, mit dem Worte Raum eine bestimmte Vorstellung verbindet.

Der an sich *unbegrenzte* Raum, wie ihn uns unmittelbar die Anschauung bietet, erscheint ausgefüllt mit Gegenständen mannigfacher Art, die sich teilweise als deutlich von einander *abgegrenzte Individuen* charakterisieren. Wir gelangen hiervon durch Abstraktion zum Begriffe des begrenzten Raumteils, des *Körpers.* Die Grenze zweier Raumteile heiſst eine *Fläche.* Letztere kann wieder in mehrere Teile zerlegt erscheinen; die Grenzen derselben heiſsen *Linien.* Auch die Linie kann begrenzt sein; ihre Grenzen heiſsen *Punkte.* Wie uns die Anschauung lehrt, ist ein Punkt keiner weiteren Zerlegung fähig; er ist das letzte Element, zu dem uns unsere Betrachtung führt. Die Untersuchung der verschiedenen Formen und möglichen Zusammenstellungen der erhaltenen Gebilde, ohne Rücksicht auf ihren konkreten Inhalt, ist die Aufgabe der *Geometrie.*

2. Sowie wir der Anschauung die Begriffe des Punktes, der Linie, der Fläche und des Körpers entlehnen muſsten, ohne eine eigentliche Definition derselben, d. h. eine logische Zurückführung auf einfachere Begriffe geben zu können,

www.rcin.org.pl

müssen wir ihr noch eine andere fundamentale Vorstellung entnehmen. Wir stellen uns vor, dafs jeder Körper innerhalb des als fest angenommenen Gesamtraumes seinen Ort verändern kann, ohne selbst nebst allen zugehörigen Teilen geändert zu werden. Jeder feste Körper liefert hierzu die Grundanschauung. Diese Möglichkeit des Verschiebens eines Körpers ohne wesentliche Änderung ist ein Begriff, der sich jeder weiteren Definition und Erörterung entzieht. Wollte man den Begriff eines Körpers mit unveränderlich zusammengehörigen Teilen, der aber gegen andere Körper bewegt werden kann, näher analysieren (wie dies z. B. in der analytischen Mechanik des festen Körpers notwendig wird), so würde dies auf grofse Komplikationen führen, die nur mit Hilfe erst später einzuführender, sich wieder auf den besprochenen Grundgedanken basierender Begriffe lösbar sind.

Bei Aufhebung des „*Axioms der Kongruenz*",*) wie die erörterte Vorstellung genannt wird, ist die folgende Erzeugung der Geraden, ferner die Vergleichung irgend welcher geometrischer Gebilde (wie z. B. in den Gleichheitssätzen), d. h. eben die ganze Geometrie unmöglich.

Anm. Das Axiom der Kongruenz ist noch von einem ganz anderen Gesichtspunkte aus, namentlich durch *v. Helmholtz*, einer Diskussion unterzogen worden, deren Grundgedanke am leichtesten durch Vergleich mit anderen geometrischen Untersuchungen klar wird. Nehmen wir auf einer Ebene, einem Cylindermantel, einer Kugelfläche eine bestimmte Figur an, so kann dieselbe auf der Fläche ohne Änderung der gegenseitigen Lage ihrer Teile verschoben werden; auch auf einem Kegelmantel kann eine solche Verschiebung stattfinden, wenn man nur eine *Biegung* der Figur, nicht aber eine *Verzerrung* der Teile durch Dehnung zuläfst. Dagegen kann auf einem dreiachsigen Ellipsoid eine Figur überhaupt nicht verschoben werden. Nach der Gaufs'schen Theorie der Krümmung ist eine solche Verschiebbarkeit nur dann möglich, wenn das Gaufs'sche Krümmungsmafs für alle Teile der

*) Wir bezeichnen mit *Axiom* oder *Grundsatz* eine Wahrheit, die sich nicht durch Verstandesschlüsse aus einfacheren herleiten läfst.

www.rcin.org.pl

Fläche konstant ist. Nun werden bei dem Raume analoge Eigenschaften angenommen. Gilt das Axiom der Kongruenz, so mufs dem Raume eine konstante Krümmung zugeschrieben werden, andernfalls eine variable Krümmung. Im ersten Falle könnte das Krümmungsmafs, für das sich analoge analytische Ausdrücke herstellen lassen wie bei Flächen, noch unendlich viele Werte besitzen, ein Punkt, auf den wir später erst eingehen können. Bei dem wirklichen Raume wird wie bei der Ebene das Krümmungsmafs gleich Null angenommen, weshalb dieser Raum als *„ebener Raum“* bezeichnet wird. Nach dieser Anschauungsweise kann kein logischer Grund für das Axiom der Kongruenz beigebracht werden; Systeme der Geometrie, welche dasselbe nicht zur Voraussetzung haben, könnten widerspruchsfrei sein. Um nicht jede Vergleichbarkeit der Raumgebilde auszuschliefsen, wodurch nach Obigem die Untersuchung überhaupt jeden Halt verlieren würde, macht v. Helmholtz die Annahme, dafs bei verschwindend kleinen Teilen des Raumes wenigstens das Axiom Geltung habe (s. Helmholtz, Göttinger Nachrichten, 1868, S. 193—221).

3. Dem Punkte, der Linie, der Fläche und dem Körper pflegt man der Reihe nach *keine, eine, zwei und drei Dimensionen* beizumessen, ohne dafs es möglich wäre, diesen Begriff hier näher zu fixieren. Wir können nur sagen, dafs ein Gebilde von $(n-1)$ Dimensionen als Grenze eines solchen von n Dimensionen erscheint. Umgekehrt erzeugt ein $(n-1)$-dimensionales Gebilde bei einer Bewegung im Raume im allgemeinen ein n-dimensionales (im besonderen Falle auch wieder ein $(n-1)$-dimensionales). Der Körper kann nicht als Grenze eines vierdimensionalen Gebildes vorgestellt werden und erzeugt auch bei einer Bewegung nur wieder einen Körper. Wir schreiben daher dem Raume drei Dimensionen zu. Alle Spekulationen über mehrdimensionale Räume basieren entweder auf rein algebraischen Rechnungen oder auf logischen Schlüssen, welche an Voraussetzungen anknüpfen, die den in der gewöhnlichen Geometrie gegebenen möglichst analog gebildet sind. Da wir uns in der hier vorzutragenden Geometrie lediglich mit dem Raume unserer Anschauung

www.rcin.org.pl

beschäftigen wollen, müssen wir die mehrdimensionale Geometrie ausschliefsen*).

4. Alle Raumgebilde bezeichnen wir als *stetig;* eine Definition dieses Begriffs liegt uns ferne, da es sich wieder um eine Fundamentalvorstellung handelt, die der Anschauung entlehnt werden mufs.

§ 2.

Die Gerade.

1. Während zwischen zwei Punkten kein anderer Unterschied denkbar ist als ihre Ortsverschiedenheit im Raume, sind bei den Linien die mannigfachsten Gestaltungen möglich. Es handelt sich darum, unter diesen zahllosen Linienarten eine auszuwählen, die als Fundamentallinie der gesamten Geometrie zu Grunde gelegt wird. Für diese Auswahl ein Prinzip aufzustellen, ist allerdings an dieser Stelle unmöglich; durch ein gewisses Gefühl der Einfachheit geleitet wählen wir die *gerade Linie* oder kurzweg die *Gerade*, indem wir es der weiteren Entwickelung überlassen, diese Wahl wirklich als die zweckmäfsigste zu bestätigen.

2. Eine Definition der Geraden durch rein logische Zurückführung auf andere Grundbegriffe zu geben ist nicht gelungen. Die häufig gebrauchte Erklärung, dafs diejenige Linie gerade sei, die überall dieselbe Richtung besitzt, ist ebenso nichtssagend als die Euklidische Definition: *Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται* (etwa: die Gerade ist eine Linie, welche zu ihren sämtlichen Punkten gleichartig liegt). Während die erstere Definition auf den Begriff der *Richtung* zurückgeht, der selbst erst mit Hilfe der Geraden festgestellt werden kann, operiert die Eukli-

*) Es ist daher hier auch nicht der Ort, eine Übersicht über die ausgedehnte Litteratur dieses Gegenstandes zu geben. Als grundlegend kann die Abhandlung von *Riemann: „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen“*, Ges. Werke, p. 254, gelten. Das bereits oben erwähnte Krümmungsmafs der Räume wird hier eingeführt. Andererseits führte auch schon *H. Grassmanns: „Die Wissenschaft der extensiven Gröfse oder die Ausdehnungslehre“*, 1844, zur Betrachtung n-facher Mannigfaltigkeiten.

www.rcin.org.pl

dische mit so vagen und unklaren Begriffen, dafs sie ebenfalls ganz unzulänglich ist. Auch die Definition: „Eine Gerade ist die kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte“, mufs, ganz abgesehen davon, dafs sich aus ihr keine weiteren Schlüsse über die Natur der Geraden ziehen lassen, schon deshalb verworfen werden, weil die Gröfsenvergleichung von Linien, die nicht direkt zur Deckung gebracht werden können, ohne ein neues Axiom nicht möglich ist. (Vgl. § 5, 9.) — Trotzdem ist es möglich, die Gerade durch *anschauliche Konstruktion* zu erzeugen, ohne neue Vorstellungen zu den schon gewonnenen hinzuzunehmen.

3. Wir haben in § 1 die Vorstellung gewonnen, dafs irgend ein Raumteil (der sich zu dem Gesamtraume erweitern kann) innerhalb des als fest gedachten Raumes verschoben werden kann, ohne dafs seine einzelnen Punkte ihre gegenseitige Lage ändern. Nehmen wir nun an, dafs zwei beliebigen Punkten dieses Raumteils feste Stellen im Raume angewiesen seien, so zeigt die Anschauung, dafs alsdann der Raumteil noch einer Bewegung fähig ist, die man als eine *Drehung* bezeichnet. Bei dieser Bewegung werden die Punkte des Raumteils im allgemeinen ihre Lage ändern, während es auch Punkte aufser den beiden als fest angenommenen giebt, die ihre Stelle nicht verlassen. *Die Gesamtheit dieser festen Punkte heifst eine Gerade**). Die Anschauung zeigt uns weiter, dafs dieselbe eine überall stetig zusammenhängende,

---

*) *F. Kruse,* welcher in seinen „*Elementen der Geometrie*“ die hiermit wesentlich übereinstimmende Definition giebt: „Eine Linie, welche ihre Lage nicht ändert, während sie sich um zwei ihrer Punkte dreht, wird eine gerade Linie genannt“, führt an, dafs diese Begriffsbestimmung nach *G. W. Krafft* (Institut. geom. subl., Tub. 1753, p. 2) von *F. C. Maier* herrühre. Späterhin wird sie öfters gebraucht. So z. B. von *Gerling,* Crelles Journ. XX, p. 332.

Erwähnt sei noch die Definition von *P. Cassani* (Nuove proposte intorno ai fondamenti della geometria, Giorn. mat. d. G. Battaglini, XV, p. 284—289): Eine Gerade ist der geometrische Ort aller Punkte, welche von drei Punkten gleichen Abstand haben, die einen Kreis in drei gleiche Teile teilen. Der Kreis, sowie der feste Abstand zweier Punkte lassen sich, wie wir noch sehen werden, ohne weitere Voraussetzungen definieren.

www.rcin.org.pl

überall einfache (so dafs sie z. B. nicht gestattet, zwischen den beiden Fixpunkten auf ihr einen doppelten Weg zurückzulegen) und sich beiderseits ins Unendliche erstreckende Linie ist.

Anm. Der Begriff des Unendlichen, über jede Grenze Ausgedehnten, ist aus der Anschauung, die uns keine Grenzen des Weltraumes zeigt, abstrahiert; wir dürfen ihn daher ohne weiteres als anschaulich gegeben ansehen, wenn auch das verstandesmäfsige, rechnende Operieren mit dem Unendlichen auf Schwierigkeiten stöfst. Soweit es sich nur um *Lagen*-, nicht *Gröfsen*-Verhältnisse handelt, verursacht die Unendlichkeit gerader Linien keine Bedenken.

Mit besonderer Sorgfalt, auf die wir wohl hier verzichten dürfen, hat *M. Pasch* in seinen *„Vorlesungen über neuere Geometrie“* den Umstand behandelt, dafs zunächst nur begrenzte Strecken von Geraden gegeben sind und dafs man erst durch Erweiterung dieses Gebildes ins Unbegrenzte zur vollständigen Geraden gelangt. Ähnliches gilt von der Ebene. — Die Unendlichkeit der Geraden — wie später der Ebene — ist keine *logische* Folge ihrer Erzeugungsweise. Man kann daher eine widerspruchsfreie, wenn auch der Anschauung widersprechende Geometrie konstruieren, welche die Gerade als endlich und in sich selbst zurücklaufend ansieht. Wir kommen auf diesen Gegenstand später zurück.

4. Aus der gegebenen Entstehungsweise der Geraden können wir ihre Haupteigenschaften ableiten.

a. Wählen wir an Stelle der vorhin als fest angenommenen beiden Punkte zwei andere, auf der erzeugten Geraden gelegene und führen wieder eine Drehung des Raumteiles aus, so wird die hierbei ihren Ort nicht ändernde Gerade offenbar mit der früheren zusammenfallen. Es folgt hieraus zugleich, dafs, wenn man zwei Punkte einer Geraden festlegt und letztere dann die noch mögliche Drehung ausführen läfst, keiner ihrer Punkte seinen Ort ändert.

b. Bringt man zwei beliebige Gerade so zusammen, dafs sie zwei Punkte gemeinsam haben (die Anschauung zeigt uns unmittelbar, dafs zwei beliebige Linien mit zwei Punkten zum Zusammenfallen gebracht werden können), so fallen sie

www.rcin.org.pl

ganz ineinander. Dies ist sofort ersichtlich, wenn man die Drehung um die beiden Punkte vornimmt. Zwei nicht zusammenfallende Geraden können daher höchstens *einen* Punkt gemeinsam haben.

c. Alle Geraden sind, von ihrer Lage abgesehen, vollständig gleich; denn sie fallen zusammen, wenn man sie mit zwei Punkten aufeinander legt.

d. Hieraus geht noch hervor, dafs man jede Gerade in sich selbst verschieben kann.

5. Man pflegt einen Punkt durch einen beigesetzten grofsen lateinischen Buchstaben, eine Gerade dagegen durch einen kleinen lateinischen oder zwei an ihre Endpunkte (in der Zeichnung) gesetzte grofse lateinische Buchstaben zu bezeichnen.

§ 3.

Die Ebene.

1. Auch unter den Flächen wollen wir eine besonders einfache auswählen: die *Ebene.* Nehmen wir einen Punkt und eine Gerade als fest gegeben an und lassen wir eine andere Gerade sich so bewegen, dafs sie immer durch jenen Punkt und die feste Gerade geht, so beschreibt sie wenigstens einen Teil einer Ebene. Ersetzt man dann den festen Punkt durch andere Punkte in dem konstruierten Ebenenteile, so erhält man Fortsetzungen der Ebene. Diese Erzeugungsweise liefert *nicht* die Grundeigenschaften der Ebene; vielmehr müssen wir wieder zu der direkten Anschauung rekurrieren, die schon nötig ist, um zu erkennen, dafs bei der eben angegebenen verschiedenen Wahl des festen Punktes nur Teile *derselben* Fläche erhalten werden.

2. Eine Ebene wird meistens mit einem kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet.

3. Die Ebene erstreckt sich ins Unendliche und zeigt nirgends eine notwendige Grenze. Sie teilt den Raum in zwei unendliche Teile; man kann von zwei Seiten einer Ebene sprechen, die je einen dieser Teile begrenzen.

4. Die Fundamentaleigenschaften der Ebene sind die folgenden:

www.rcin.org.pl

a. Jede Gerade, die mit einer Ebene zwei Punkte gemein hat, fällt ganz in dieselbe. Man kann also irgend zwei Punkte einer Ebene durch eine in ihr liegende Gerade verbinden. — Dieser Satz, der wieder sehr komplizierte Beziehungen in sich faſst, muſs als Axiom ausgesprochen werden, da wenigstens zur Zeit kein hinreichender Nachweis desselben existiert.

b. Jede in der Ebene gelegene Gerade kann durch Drehung um einen ihrer Punkte, wie der Augenschein zeigt, die ganze Ebene beschreiben.

c. Durch drei gegebene Punkte A, B, C, die nicht in dieselbe Gerade fallen, läſst sich nur eine (aber auch immer eine) Ebene legen.

Beweis: Daſs sich eine Ebene wirklich durch A, B, C legen läſst, folgt aus der obigen Konstruktion der Ebene, wenn man dabei etwa A als festen Punkt und BC als feste Gerade annimmt. Gesetzt nun es lieſsen sich durch A, B, C zwei Ebenen legen, so hätten dieselben zunächst die Geraden AB, BC, CA gemeinsam, da von jeder zwei Punkte in jede der Ebenen fallen. Bewegt sich aber eine Gerade so, daſs sie beständig durch den Punkt A und einen Punkt von BC geht, so bleibt sie ebenfalls beiden Ebenen gemeinsam, da sie immer mit beiden zwei Punkte gemeinsam hat. Das Gleiche ist der Fall, wenn man Gerade durch B und CA, sowie C und AB legt; daſs aber durch diese Geraden beide Ebenen vollständig überdeckt werden, ist evident. — Liegen A, B, C in einer Geraden, so werden diese Schlüsse hinfällig.

Durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte ist also die Lage einer Ebene vollständig bestimmt.

d. Eine Gerade, welche nur *einen* Punkt mit einer Ebene gemein hat, durchdringt dieselbe, d. h. sie liegt zum Teil auf der einen, zum Teil auf der andern Seite der Ebene (Axiom). Hieraus folgt, daſs auch eine Ebene, die mit einer andern einen Punkt gemeinsam hat, ohne ganz in sie zu fallen, sie durchdringen muſs; man braucht nämlich nur eine Gerade in ihr, welche, ohne in die zweite Ebene zu fallen, durch jenen Punkt geht, ins Auge zu fassen. Ein Durchdringen zweier Ebenen kann aber augenscheinlich nur in einer *Linie*, nicht in einzelnen Punkten statthaben. Die Schnitt-

www.rcin.org.pl

linie der beiden Ebenen muſs eine Gerade sein; denn andernfalls hätten sie mehr als zwei nicht in einer Geraden gelegene Punkte gemein, ohne zusammenzufallen.

e. Alle Ebenen sind, bis auf ihre Lage, vollkommen identisch. Man kann nämlich zwei Ebenen zuerst mit einem Punkte in einander legen; dann haben sie mindestens eine Gerade gemein; dreht man nun die eine um diese Schnittlinie, so kann noch ein weiterer Punkt zum Zusammenfallen gebracht werden, wodurch nach c. die Ebenen in einander zu liegen kommen.

f. Da ein solches Ineinanderlegen zweier Ebenen auf unendlich viele Arten möglich ist (man kann die ursprüngliche Schnittlinie ganz beliebig wählen), so folgt, daſs man jede Ebene in sich selbst beliebig drehen und verschieben kann. Auch kann man eine Ebene derart mit sich selbst zur Deckung bringen, daſs die beiden Seiten vertauscht erscheinen (Umklappen); die Ebene ist *umkehrbar*.

5. Von anderen Erzeugungsweisen der Ebene und der Geraden, durch welche die aufgestellten Axiome vermieden werden sollen, ist die von *J. Bolyai* und *Lobatschewsky* gegebene die merkwürdigste. Indem wir in betreff einer eingehenderen Darstellung auf „*Frischauf*, *Elemente der absoluten Geometrie*“ verweisen, geben wir hier nur einen kurzen Abriſs und eine sich anschlieſsende Kritik derselben.

An Stelle der Geraden und der Ebene kann man zuerst die *Kugel* und den *Kreis* konstruieren. Die Kugel ist die Fläche, die von dem einen von zwei in irgend welcher Weise fest verbundenen Punkte beschrieben wird, wenn der andere (der *Mittelpunkt*) fest bleibt. Eine Kugelfläche kann dieser Definition nach beliebig in sich selbst verschoben werden. Zwei Kugeln sind gleich, wenn die erzeugenden Punktepaare A, B und A', B' zur Deckung gebracht werden können; die eine ist gröſser als die andere, wenn sie beim Aufeinanderlegen der Mittelpunkte die andere ganz in sich schlieſst; das Sich-schneiden konzentrischer Kugeln ist ausgeschlossen. Schneiden sich zwei exzentrische Kugeln, so heiſst die Schnittlinie ein Kreis; derselbe kann ebenfalls in sich verschoben werden. Ein Kreis kann von jedem seiner Punkte aus der-

www.rcin.org.pl

art in zwei Teile geteilt werden, daſs diese zur Deckung zu bringen sind; hierdurch wird ein zweiter Punkt, der *Gegenpunkt* des ersten, auf dem Kreise fixiert. Nimmt man zwei feste Mittelpunkte A und A' an und konstruiert um dieselben unendlich viele Kugeln, so bilden die von je zwei gleichen Kugeln beider Systeme erzeugten Schnittlinien (soweit sie sich überhaupt schneiden) eine zusammenhängende Fläche, welche *Ebene* heiſst. Fixiert man in einem der die Ebene zusammensetzenden Kreise zwei Gegenpunkte C und C', und nimmt nun eine Drehung des ganzen Systems um C und C' vor, die A mit A', A' mit A zur Deckung bringt, so bilden die in Ruhe bleibenden Punkte der Kreise eine zusammenhängende Linie, die *Gerade.*

Diese Erzeugungsweise erscheint schon deshalb als unnatürlich, weil sie zuerst die Kugel und den Kreis liefert, die Gebilde einer höheren Stufe sind, wie die Ebene und die Gerade. Trotzdem müſsten wir sie der hier gegebenen vorziehen, wenn sich aus ihr die Eigenschaften der beiden letzteren ohne Zuhilfenahme von Axiomen (auſser dem der Kongruenz) herleiten lieſsen. Dies wird allerdings beabsichtigt, aber nach des Verfassers Ansicht keineswegs geleistet. Der Haupteinwurf gegen die Bolyai-Lobatschewskysche Theorie ist der, daſs aus ihr keineswegs hervorgeht, daſs sich zwei Kugeln nur in einer *einfachen* Linie, nicht etwa in mehreren, schneiden. Ohne Nachweis dieses Satzes ist aber z. B. der Beweis des zweiten Gleichheitssatzes (Kongruenzsatzes; a. a. O. p. 12) hinfällig, der p. 17 zum Beweis der Fundamentaleigenschaften der Ebene benutzt wird. Es scheint, daſs der zweite Gleichheitssatz nur nach Einführung der Ebene beweisbar ist; nur in der Ebene sind Winkelvergleichungen möglich.

Weitere historische Angaben über Versuche, das Axiom der Ebene zu beseitigen, siehe bei *Baltzer*, „*Die Elemente der Mathematik*“, *Planimetrie*, p. 5. *Euklid* definiert die Ebene ganz analog wie die Gerade: Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθαίαις κεῖται (die Ebene ist eine Fläche, welche zu den in ihr enthaltenen Geraden gleichartig liegt).

www.rcin.org.pl

6. Punkt, Gerade und Ebene sind die einzigen Grundgebilde, aus denen die gesamte Geometrie aufgebaut werden soll. In der *elementaren* Geometrie werden nur Zusammenstellungen einer *endlichen* Anzahl von Punkten, Geraden und Ebenen behandelt. In der *höheren* Geometrie treten hierzu Zusammenstellungen *unendlich vieler* dieser Grundgebilde, wodurch krumme Linien, Flächen, Kurvensysteme u. s. w. erzeugt werden.

In der Folge werden wir, dem alten Gange folgend, zuerst nur Gebilde in einer Ebene (*Planimetrie*), dann erst solche im Raume (*Stereometrie*) behandeln. Allerdings bildet die Planimetrie nur einen Spezialabschnitt der Stereometrie; doch ist derselbe so umfangreich, dafs durch ihn die stereometrischen Betrachtungen zu sehr auseinander gerissen würden. Wir stellen daher die Planimetrie an den Anfang, uns vorbehaltend, sie später an geeignetem Orte in die Stereometrie einzureihen.

Ein Beispiel der vereinigten Behandlung von Planimetrie und Stereometrie bilden u. a. die „*Elemente der Geometrie*“ von *J. Frischauf*.

www.rcin.org.pl

Planimetrie.

§ 4.

Disposition.

1. Auf dem Gebiete der elementaren Planimetrie haben wir es mit der Zusammenstellung einer endlichen Zahl von Punkten und Geraden zu thun. Da ein Punkt als Schnittpunkt zweier Geraden, eine Gerade als Verbindungslinie zweier Punkte gedacht werden kann, genügt es Gebilde zu betrachten, die durch Zusammenstellung von Punkten allein oder von Geraden allein erhalten werden. In erster Linie werden wir uns mit Komplexen von Geraden beschäftigen; doch werden wir daneben auch wegen gewisser Analogien die entsprechenden Punktgebilde ins Auge fassen. Die erste Direktive für den Gang unserer Untersuchungen wird uns die *Anzahl* der zusammengefügten Geraden oder Punkte bieten; wir werden die Fragen zu beantworten suchen, die sich bei Zusammenstellungen von 2, 3, 4 u. s. w. Geraden, resp. Punkten aufwerfen lassen. Freilich werden wir uns nicht immer pedantisch an diese Disposition halten können, vielmehr werden wir durch dieselbe erst auf höhere Gesichtspunkte hingewiesen werden. Das Gebiet, dessen Erforschung wir uns vorgesetzt haben, würde hiernach immer noch unerschöpflich grofs sein, wenn wir uns nicht weitere Beschränkungen auferlegten. Wir werden daher unsere Aufmerksamkeit in erster Linie solchen Gebilden zuwenden, die einen ganz allgemeinen Charakter tragen; von Spezialfällen sollen nur die wesentlichsten behandelt werden. Hiernach wird allerdings unsere Darstellung der Elementargeometrie ein ganz anderes Aussehen gewinnen, wie die zahlreichen Bearbeitungen nach Muster der Euklidischen Elemente. Sätze, die sonst eine wichtige Rolle spielten, werden nur nebensächlich oder gar nicht behandelt werden, während andere, die in Elementar-

www.rcin.org.pl

büchern entweder gar nicht zu finden sind oder eine unverdiente Zurücksetzung erfahren, an die ihnen zukommende Stelle gerückt werden.

2. Durch zwei beliebig gegebene Punkte ist eine Gerade vollständig bestimmt; zwei in einer Ebene vorgelegte Geraden *können* sich schneiden und bestimmen dann einen einzigen Punkt, ihren *Schnittpunkt.* Sind n Punkte gegeben, so kann jeder derselben mit jedem anderen durch eine Gerade verbunden werden; da eventuell mehrere dieser Geraden zusammenfallen können, so sagen wir, dafs durch n Punkte höchstens und im allgemeinen $\frac{n(n-1)}{2}$ Gerade bestimmt sind. Ebenso sind durch n in einer Ebene gelegene Geraden höchstens $\frac{n(n-1)}{2}$ Punkte bestimmt. Wir begegnen bereits hier einer Art *Dualismus* zwischen Punkt und Gerade, d. h. wir haben zwei Sätze, die (nahezu) in einander übergehen, wenn wir die Worte Punkt und Gerade, verbinden und sich schneiden vertauschen. Dieser Dualismus ist vorläufig noch *unvollkommen*; denn während sich zwei Punkte immer durch eine Gerade verbinden lassen, können wir noch nicht behaupten, dafs zwei in einer Ebene gelegene Geraden sich immer schneiden müssen.

Wir untersuchen nun die Zusammenstellung von zwei Punkten und von zwei Geraden genauer.

§ 5.

Die begrenzte Gerade.

1. Durch einen auf einer Geraden angegebenen Punkt wird erstere in zwei Teile zerlegt, die auf der einen Seite begrenzt, auf der anderen aber völlig unbegrenzt sind; dieselben heifsen *Halbgerade.* Geht eine Gerade durch zwei bestimmte Punkte, so wird sie in drei Teile zerlegt, von denen die beiden äufseren nur einseitig begrenzt sind, während der mittlere vollständig begrenzt ist; letzteren nennen wir eine *Strecke* und bezeichnen ihn durch die an seine Endpunkte gesetzten grofsen oder durch einen einzigen kleinen lateinischen Buchstaben. Während Halbgerade ebenso wie die ganzen Geraden zur Deckung gebracht werden können, ge-

www.rcin.org.pl

lingt dies mit Strecken nur ausnahmsweise. Legen wir zwei Strecken so, dafs sie in dieselbe Gerade fallen und den einen Endpunkt gemeinsam haben, so sind noch zwei Lagen möglich. Erstens können die Strecken ganz oder teilweise aufeinander fallen; decken sie sich vollständig, so heifsen sie *gleich*, andernfalls nennen wir diejenige gröfser, welche nur teilweise mit der anderen zusammenfällt; das nicht gemeinsame Stück wird als die *Differenz* der beiden Strecken bezeichnet. Liegen dagegen zweitens die Strecken so, dafs sie nicht aufeinander fallen, so bilden sie zusammen eine dritte Strecke, welche ihre *Summe* heifst. In analoger Weise kann man auch eine gröfsere Anzahl von Strecken zu einer Summe vereinigen. Wir sprechen das Axiom aus: *Man erhält dieselbe Gesamtstrecke, in welcher Reihenfolge man auch die Einzelstrecken (summatorisch) zusammensetzt.* Dasselbe gilt noch, wenn ein Teil der Strecken subtraktiv angetragen wird. — Hinzuzufügen sind die folgenden unmittelbar einleuchtenden Wahrheiten: Sind zwei Strecken einer dritten gleich, so sind sie auch unter einander gleich. Fügt man zu gleichen Strecken Gleiches hinzu oder nimmt es davon weg, so bleiben sie gleich. Verfährt man ebenso mit ungleichen Strecken, so bleibt diejenige die gröfsere, die vorher die gröfsere war u. s. w.

2. Die eben gewonnenen einfachen Resultate sind für die Weiterentwickelung der Geometrie fundamental; *sie geben uns die Möglichkeit, die Gesetze der Arithmetik auf die Geometrie anzuwenden.* Die gesamte Arithmetik baut sich auf zwei Grundelementen auf: dem Begriff der positiven ganzen Zahl und dem der Addition; alle andern Zahlengröfsen und Rechnungsoperationen lassen sich aus diesen ableiten. Es ist eine Eigentümlichkeit unseres rechnenden Verstandes, nicht mit *stetigen*, frei veränderlichen Gröfsen operieren zu können; wir rechnen zunächst nur mit *Anzahlen* von Individuen. Die weitere Entwickelung bringt es dann freilich mit sich, noch andere Gröfsen einzuführen; allein diese sind alle aus den ganzen Zahlen herleitbar*). Soll auf irgend einem Gebiete

*) Ausführlicheres über diesen Gegenstand findet man in des Verfassers: *Lehrbuch der Theorie der periodischen Funktionen einer Variabeln u. s. w. Leipzig 1884.*

www.rcin.org.pl

die Arithmetik zur Anwendung gelangen, so handelt es sich zuerst um Einführung von Individuen, die gezählt und deren Anzahlen addiert werden können. Hierzu gelangen wir durch unsere geometrische Untersuchung. Wir brauchen nur eine ganz beliebige Strecke — zu einer besonderen Wahl haben wir bis jetzt keine Veranlassung — als sog. *Mafseinheit* anzunehmen und diese mit anderen zu vergleichen. Das Verfahren kann etwa das folgende sein. Wir tragen die Mafseinheit AB auf der zu messenden Strecke CD von C aus ab (bis E); finden wir, dafs hierdurch CD noch nicht vollständig bedeckt ist, so tragen wir CD von E aus ein zweites Mal ab, dann eventuell ein drittes Mal u. s. w. Bei diesem fortgesetzten Abtragen kommt entweder einmal (etwa nach $m$maligem Abtragen) ein Teilungspunkt gerade auf D zu liegen, oder es bleibt ein Rest GD, der kleiner ist als AB. Im ersteren Falle ist das Verfahren beendigt; wir sagen, CD sei das $m$fache von AB. Haben wir den Begriff der Vervielfältigung einer Strecke gewonnen, so haben wir damit auch sofort den der Teilung.

Wir nennen MN den $n$ten Teil von AB, wenn MN $n$mal an einander gesetzt AB giebt; dieser $n$te Teil ist eine *eindeutig* bestimmte Strecke; denn verschiedene Strecken geben mit n vervielfältigt Verschiedenes*). Hierdurch erhalten wir die Möglichkeit, im Falle des Nichtaufgehens von AB in CD das Verfahren fortzusetzen, und zwar auf verschiedene Arten. Wir können uns z. B. AB in n gleiche Teile geteilt denken, wo n beliebig ganzzahlig ist, und zusehen, wie oft ein solcher Teil in dem Reste GD enthalten ist; geht diese Operation für ein geeignetes n auf, so ist CD durch ein ganzzahliges Vielfaches m, vermehrt um einen Bruchteil $\frac{r}{n}$ von AB ausdrückbar. Läfst sich kein solches n finden, so nimmt man n beliebig grofs, wodurch der übrig bleibende Teil beliebig klein gemacht werden kann; der Rest stellt

*) Die gröfsere der beiden ungleichen Strecken besteht nämlich aus der kleineren, vermehrt um eine zweite Strecke; das $n$fache von ihr ist also das $n$fache der kleineren, vermehrt um das $n$fache der Zusatzstrecke.

www.rcin.org.pl

sich dann als *irrationales* Vielfaches der Maſseinheit dar. Will man das Verfahren der Dezimalbruchrechnung anpassen, so teilt man AB zuerst in 10 gleiche Teile, dann nötigenfalls einen dieser Teile wieder in 10 gleiche u. s. w., und kann so jeden Grad von Genauigkeit erzielen.

Ein anderes, sehr instruktives Verfahren, welches das Teilen einer Strecke ganz vermeidet und nur erfordert, daſs man eine Strecke auf einer andern abtragen kann, ist die *Kettenbruchmethode.* Wir nehmen an, daſs AB sich $a$mal auf CD abtragen läſst, bis der Rest $GD < AB$ wird. Dann läſst sich wieder GD etwa $b$mal auf AB abtragen, der gefundene Rest $HB < GD$ $c$mal auf GD, der neue Rest $d$mal auf dem vorhergehenden u. s. w. Schlieſslich können wir

$$CD = AB \,.\left(a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cdots}}}\right)$$

setzen, wo der Kettenbruch abbrechen oder ins Unendliche fortlaufen kann; im letzteren Falle ist er, da $b, c, d \ldots$ alle positive, ganze Zahlen sind, konvergent.

3. Das Hauptergebnis ist: *Wenn wir eine beliebige Strecke AB als Einheit zu Grunde legen, so können wir jede andere als das $r$fache derselben bezeichnen, wo r irgend eine reelle, rationale oder irrationale, zunächst positive Zahl ist.* Man schreibt demgemäſs jeder Strecke eine *Gröſse*, hier speziell *Länge* genannt, zu, die durch eine *Zahl* ausgedrückt werden kann, nachdem willkürlich eine *Längeneinheit* festgesetzt wurde. Man nennt das Vergleichen mit der Einheit *Messen.*

4. Nachdem für jede Strecke ein Zahlenwert (nach Bestimmung der Einheit) festgesetzt ist, kann man sämtliche Rechnungsoperationen auf Strecken anwenden. Die Addition und Subtraktion sind unmittelbar geometrisch gegeben (s. 1.). Das Resultat bleibt nicht *numerisch*, aber *geometrisch* das gleiche, wenn man die Maſseinheit ändert. Für die Multiplikation gilt dies nicht; ändert man die Einheit, so erhält man für das Produkt zweier Strecken nicht allein andere Zahlenwerte, sondern es entsprechen denselben auch geometrisch andere Strecken. Der Quotient zweier Strecken ist eine

www.rcin.org.pl

reine Zahl, die von der Maſseinheit unabhängig ist; denn ist eine Maſseinheit a- und $b$mal in zwei Strecken enthalten, ist ferner eine zweite Einheit in der ersten $k$mal, also in den beiden Strecken ak- und bkmal enthalten, so haben wir $\frac{ak}{bk} = \frac{a}{b}$.

5. *Alle algebraischen Gleichungen zwischen Strecken, für die keine bestimmte Maſseinheit vorgeschrieben ist, müssen homogen sein*, d. h. ihre sämtlichen Glieder müssen gleich viele Faktoren, welche Strecken darstellen, enthalten. Dividiert man die Gleichung durch die Faktoren eines Gliedes derselben (oder überhaupt durch die gleiche Anzahl Strecken darstellender Faktoren), so enthält sie nur *Quotienten* von Strecken.

Beweis: Aus der letzten Bemerkung und 4. geht hervor, daſs eine solche Gleichung thatsächlich von der willkürlich gewählten Maſseinheit unabhängig ist. Lautet dagegen eine Gleichung etwa

$$a_1 a^2bc + a_2 ab^2c + a_3b^3 + a_4 c^2 = 0,$$

worin a_1, a_2, a_3, a_4 Zahlenfaktoren sind, während a, b, c Strecken darstellen, die natürlich alle nach derselben Längeneinheit gemessen sind, so dividieren wir zunächst durch den Streckenfaktor eines der niedrigsten Glieder, hier c^2, und erhalten

$$a_1 \frac{a^2b}{c} + a_2 \frac{ab^2}{c} + a_3 \frac{b^3}{c^2} + a_4 = 0.$$

Wählen wir nun eine Maſseinheit, die $k$mal in der ursprünglichen enthalten ist, so treten an Stelle von a, b, c die Werte ak, bk, ck und die Gleichung geht über in

$$k^2 \left(a_1 \frac{a^2b}{c} + a_2 \frac{ab^2}{c}\right) + ka_3 \frac{b^3}{c^2} + a_4 = 0.$$

Diese Gleichung ändert sich aber für verschiedene Werte von k, kann also nicht für eine beliebige Maſseinheit bestehen.

Alle allgemein gültigen Gleichungen, in denen lediglich Strecken vorkommen, enthalten geeignet umgeformt nur *Quotienten* der letztern.

6. Der arithmetische Ausdruck $a - b$ kann in doppelter Weise interpretiert werden. Entweder soll von a die Gröſse b

www.rcin.org.pl

weggenommen oder es soll zu a die negative Gröfse $-b$ hinzugefügt werden. Die Subtraktion kann also durch Einführung der negativen Gröfsen in eine Addition verwandelt werden. Dies suchen wir auf die Geometrie zu übertragen. Teilen wir eine Gerade durch einen Punkt in zwei Halbgerade, so können wir uns von dem Punkte aus auf jeder derselben weiter bewegen, ohne einen schon durchlaufenen Punkt zum zweiten Male zu überschreiten; wir sagen dann, dafs wir uns immer *in derselben Richtung* bewegen. Gehen von einem Punkte beliebig viele Halbgerade aus, so sagen wir, dafs jede derselben eine *Richtung* fixiert, in der sich ein von dem gemeinsamen Schnittpunkte ausgehender Punkt fortbewegen kann. Die Richtungen der zwei Halbgeraden insbesondere, die zusammen eine Gerade ausmachen, nennen wir *entgegengesetzt*. Begrenzen wir eine Strecke durch die Punkte A und B, so können wir diese von A bis B und von B bis A durchlaufen; in beiden Fällen ist die Bewegungsrichtung die entgegengesetzte. Nehmen wir nun bei einer Strecke nicht allein auf ihre absolute Gröfse, sondern auch auf die Richtung Rücksicht, in der wir sie uns durchlaufen denken, so können wir ihr für die eine Bewegungsrichtung (beliebig welche) das Zeichen $+$, für die umgekehrte das Zeichen $-$ beilegen. Bezeichnet nun, wie immer in der Folge, AB die von A nach B, BA die von B nach A durchlaufene Strecke, so ist $AB = -BA$ oder

$$AB + BA = 0. \tag{1}$$

Sollen mehrere Strecken (die entweder Teile derselben Geraden sein müssen oder für die ein bestimmtes Vorzeichen irgendwie fixiert ist) addiert werden, so sind dieselben nach einander auf einer Geraden in dem ihrem Zeichen entsprechenden Richtungssinne zu durchlaufen; ist eine Strecke CD zu subtrahieren, so addiert man statt derselben $DC = -CD$*).

7. Sind A, B, C Punkte derselben Geraden, so ist

$$AB + BC + CA = 0. \tag{2}$$

*) Diese konsequente Mitbezeichnung der Richtung einer Strecke verdankt man *Möbius*.

www.rcin.org.pl

Sind auf einer Geraden n Punkte gegeben, so bestimmen je zwei eine Strecke; es sind im ganzen also $\frac{n(n-1)}{2}$ Strecken bestimmt. Von diesen können aber nur $(n-1)$ beliebig gegeben werden (z. B. die Abstände des ersten Punktes von den $(n-1)$ übrigen oder die Abstände je zweier aufeinander folgender Punkte), während die übrigen durch (2) analoge Gleichungen aus diesen berechnet werden können. Aus diesen einfachen, *linearen* Gleichungen lassen sich zahlreiche kompliziertere herleiten, wie z. B. bei vier Punkten A, B, C, D:

$$AB \,.\, CD + BC \,.\, AD + CA \,.\, BD = 0, \tag{3}$$

was leicht durch Zurückführung der Strecken auf drei derselben zu identifizieren ist.

8. Das Ausdrücken von Strecken durch Zahlen ist deshalb so wichtig, weil es die Anwendung arithmetischer Schlüsse auf die Geometrie ermöglicht, und kann nicht entbehrt werden, wo es sich um Gröſsenbestimmungen handelt. Dagegen darf nicht verschwiegen werden, daſs hierbei ein der Natur der geometrischen Gebilde absolut fremdes Element in die Betrachtung eingeführt wird: die Längeneinheit. Die geometrischen Längen sind stetig, wir können sie durch Verschieben des einen Endpunkts ohne Sprung ändern. Allein mit solchen Gröſsen können wir nicht rechnen; nur durch jene Willkürlichkeit sind wir überhaupt in den Stand gesetzt, geometrische Gebilde der Rechnung zu unterwerfen. Das Gefühl, daſs auf diese Weise etwas nicht Naturgemäſses geschieht, mag manche Geometer veranlassen, die *Geometrie des Maſses* gegenüber der später zu erörternden, übrigens ganz speziellen *Geometrie der Lage* gewissermaſsen zurückzusetzen.

9. Die Gröſsenvergleichung der Strecken beruhte auf der Möglichkeit, Strecken zum Zusammenfallen zu bringen oder in solche Teile zu zerlegen, die identifiziert werden können. Eine Gröſsenvergleichung zwischen einer geradlinigen Strecke und einer krummen Linie (Kurve), d. h. einer Linie, von der kein noch so kleiner Teil gerade ist, wird hiermit ausgeschlossen, ebenso wie in den meisten Fällen die Gröſsenvergleichung krummer Linien untereinander. Denken

www.rcin.org.pl

wir uns die Kurve in noch so kleine Teile zerlegt, so können wir diese doch nicht mit geradlinigen Strecken zur Deckung bringen, können auch in keiner Weise schliefsen, dafs sie kleinen geradlinigen Strecken an Gröfse beliebig nahe kommen. Trotzdem haben wir die Vorstellung, die von einem unausdehnbaren, jedoch völlig biegsamen Faden hergenommen sein mag, dafs Kurven untereinander und mit der Geraden an Gröfse vergleichbar sind. Man bedarf zur Messung von Kurven eines doppelten Axioms*):

a. *Kurven sind mit Geraden an Länge vergleichbar.*

b. *Ein Stück einer Kurve, welches zwischen zwei unendlich benachbarten Punkten liegt, ist zwar gröfser als die die beiden Punkte verbindende geradlinige Strecke, unterscheidet sich aber von ihr im allgemeinen nur um eine unendlich kleine Gröfse höherer Ordnung.*

Dabei ist das beigefügte „*im allgemeinen*“ wohl zu beachten, denn es können sehr wohl Ausnahmen vorkommen, deren Eruierung durch Differentialbetrachtungen möglich ist.

Es ist ein Zeichen von tiefer mathematischer Einsicht, dafs *Archimedes* ein solches Axiom seiner Kreisrechnung vorherschickt, vorausgesetzt, dafs er es wirklich der besprochenen Schwierigkeit wegen aufstellte**). *Euklides* behandelt diesen Gegenstand überhaupt nicht. In neueren elementaren Lehrbüchern wird die Schwierigkeit meistens totgeschwiegen oder durch Scheinbetrachtungen verdeckt. Bei der Kreisrechnung pflegt man wohl zuerst den Flächeninhalt des Kreises, bei dem eine solche Schwierigkeit nicht eintritt, zu berechnen und dann erst zum Umfange überzugehen; aber

---

*) Falls man nicht die Länge der Kurve direkt als den Grenzwert der Summe unendlich vieler unendlich kleiner Sehnen der Kurve, von denen je zwei aufeinander folgende einen Endpunkt gemeinsam haben, erklären will.

**) „Auch ist bei ungleichen Linien, Flächen und Körpern der Überschufs des gröfseren über das kleinere so grofs, dafs er durch mehrmalige Zusammenfügung zu sich selbst gröfser werden kann, als jede Gröfse von der Art der verglichenen.“ Ausführlicheres über den Gegenstand s. bei *O. Stolz, B. Bolzano's* Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung. Math. Ann., B. XVIII, p. 268.

www.rcin.org.pl

bei diesem Übergange treten dieselben Schwierigkeiten ein wie bei der direkten Behandlung.

Ähnliche Bemerkungen gelten für die Flächeninhaltsberechnung gekrümmter Flächen.

10. Wir wollen hier kurz einer höchst interessanten Erweiterung des Begriffes des Messens gedenken, die nach ihrer Begründung durch *Cayley* besonders von *F. Klein* ausgebildet wurde und in neuerer Zeit mannigfache Anwendung fand*). Eine weitergehende Durchführung dieser Ideen kann hier nicht gegeben werden, da sie die Benutzung der Kegelschnitte und der Flächen zweiter Ordnung nötig macht.

Bei der gewöhnlichen Messung einer Strecke wird die Maſseinheit wiederholt zu sich selbst addiert, bis die Länge der Strecke erreicht ist. Die Anzahl der nötigen Additionen giebt die Länge der Strecke. Freilich muſs diese Operation dahin erweitert werden, daſs auch die Ausführung einer gebrochenen Anzahl von Operationen — durch Antragen eines Bruchteils der Maſseinheit — einen Sinn erhält. Denkt man sich nun eine Gerade bereits nach irgend einer Einheit von einem willkürlichen Nullpunkte aus eingeteilt und die Teilpunkte in bekannter Weise mit den positiven und negativen Zahlen bezeichnet, so wird das Messen des Abstandes zweier Punkte x_1 und x_2 auf dieser Geraden nach einer Maſseinheit n nichts anderes sein wie die Untersuchung, wie oft mal die Transformation

$$y = x + n$$

angewandt werden muſs, um aus der Gröſse x_1 die Gröſse x_2 herzuleiten.

An Stelle dieser kann man nun irgend eine beliebige andere, reelle, lineare Transformation

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

setzen. Muſs man diese Transformation $k$fach iteriert auf x_1 anwenden, um x_2 zu erhalten, so kommt der Strecke $x_1 x_2$

*) *Cayley, Sixth Memoir upon Quantics* in Philos. Transact., B. 149; *Klein, Über die sogenannte Nichteuklidische Geometrie,* Math. Ann. B. 4, p. 573—625, B. 5, p. 112—145, B. 7, p. 531—537. S. auch die Darstellung bei *Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der Kegelschnitte.*

www.rcin.org.pl

in diesem Maſssysteme das Maſs k zu. Auch hier kann leicht ein gebrochenes k erklärt werden. Jede lineare Transformation kann*) durch geeignete Transformation auf eine der beiden

$$y = px \text{ und } y = x + n$$

zurückgeführt werden. Der Maſszahl k entsprechen in diesen beiden Fundamentalfällen die Transformationen

$$y = p^k x \text{ und } y = x + kn,$$

die auch für gebrochene k einen Sinn behalten. Bei der Transformation $y = px$ sind zwei Fälle von besonderer Wichtigkeit, auf die sich die übrigen zurückführen lassen: daſs p eine reelle, positive Zahl und daſs p eine Einheitswurzel ist.

Die lineare Transformation führt im allgemeinen je zwei Punkte in sich selbst über. Man braucht nur

$$x = \frac{ax + b}{cx + d}$$

zu setzen und berechnet für beide die Werte

$$x = \frac{a - d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2c}.$$

Je nachdem

a. $$(a-d)^2 + 4bc > 0,$$

b. $$(a-d)^2 + 4bc = 0,$$

c. $$(a-d)^2 + 4bc < 0$$

ist, werden die beiden Doppelpunkte reell und verschieden, reell und zusammenfallend, konjugiert komplex. Die eingehendere Untersuchung zeigt, daſs dem ersten und letzten Falle die Fundamentaltransformation $y = px$ entspricht, das erste Mal mit reellem p, das zweite Mal mit komplexem p, dessen absoluter Betrag der Einheit gleich ist; es genügt im ersten Falle, nur positive p zu betrachten. Im Falle b. entspricht die Fundamentaltransformation $y = x + n$. Nach *Klein* wird die Transformation im Falle

a. als *hyperbolisch*,
b. als *parabolisch*,
c. als *elliptisch*

bezeichnet.

---

*) S. hierüber des Verfassers: „*Lehrbuch der Theorie der periodischen Funktionen u. s. w.*“, p. 147 u. 370.

www.rcin.org.pl

Bei der hyperbolischen Transformation teilen die beiden reellen Doppelpunkte die Reihe der reellen Zahlen in zwei getrennte Abteilungen; ein Punkt der einen wird durch keine Transformation in einen der andern übergeführt. Wir können also nicht nach diesem Verfahren die Distanz zweier Punkte bestimmen, welche in getrennten Abteilungen liegen. Die Distanz irgend eines Punktes von den beiden Doppelpunkten ist unendlich.

Bei der parabolischen Transformation ist nur *ein* Doppelpunkt vorhanden, welcher von allen Punkten eine unendliche Distanz hat. Bei der gewöhnlichen Maſsbestimmung, welcher die einfachste parabolische Transformation entspricht, ist der unendlich ferne Punkt der Doppelpunkt. Bei der elliptischen Transformation endlich liegen in der Reihe der reellen Zahlen gar keine Doppelpunkte. Jeder Punkt hat von jedem andern eine endliche Distanz.

Diese wenigen Andeutungen mögen hier genügen; an späterer Stelle kommen wir auf den Gegenstand zurück.

§ 6.

Der Winkel.

1. Während sich zwei Punkte immer durch eine Gerade verbinden lassen, ist es bei zwei Geraden, auch wenn sie in *einer* Ebene liegen, nicht notwendig, daſs sie einen Punkt gemeinsam haben. *Zwei in derselben Ebene liegende Gerade, welche keinen Punkt gemeinsam haben, heiſsen parallel.* Daſs parallele Geraden wirklich existieren, wird später nachgewiesen werden.

Die gegebene Definition der Parallelen ist wesentlich identisch mit der *Euklid*ischen; auf die *Bolyai*'sche kommen wir später zu sprechen. Die landläufige, daſs zwei Gerade parallel heiſsen, wenn sie dieselbe Richtung haben, ist nichtssagend, da der Begriff der Richtung nicht vorher festgesetzt wird; auſserdem nimmt sie eine später zu erörternde Thatsache als selbstverständlich an, die in Wirklichkeit unerwiesen ist. Auch die *Graſsmann*'sche Ausdehnungslehre läſst diese fundamentale Schwierigkeit unerledigt.

www.rcin.org.pl

2. Den anderen Fall, dafs zwei Gerade einen Punkt gemeinsam haben, müssen wir noch genauer untersuchen. Die Geraden liegen dann in einer Ebene, da man durch den gemeinsamen Punkt und je einen anderen Punkt der beiden Geraden eine Ebene legen kann, die mit jeder der Geraden zwei Punkte gemeinsam hat. Wir stellen nun das Axiom auf, *dafs zwei Gerade, welche ohne zusammenzufallen einen Punkt gemeinsam haben, sich einander durchschneiden.* Dies ist folgendermafsen zu verstehen. Jede Ebene wird durch eine in ihr liegende Gerade in zwei vollständig getrennte *Halbebenen* zerlegt derart, dafs man aus der einen (in der Ebene bleibend) nicht in die andere gelangen kann, ohne die Gerade zu überschreiten. Man kann hiernach der Geraden (in der Ebene) zwei *Seiten* („*Ufer*") beimessen, von denen jede einer der beiden Halbebenen zugewandt ist. Unser Axiom sagt nun, dafs eine zweite Gerade derselben Ebene, welche mit der ersten einen Punkt gemeinsam hat, aus der einen Halbebene in die andere hinüberführt, nicht ganz in der einen derselben verläuft. Gerade können sich also nicht „*berühren*"*).

3. Wir betrachten zunächst die beiden sich schneidenden Geraden nicht in ihrer vollen Ausdehnung, sondern an ihrer Stelle nur zwei *Halbgerade*, die von demselben Punkte auslaufen. Es leuchtet ein, dafs zwei so zusammengesetzte Gebilde entweder gleich oder verschieden sein können, je nachdem es möglich ist sie zur Deckung zu bringen oder nicht. Um indessen zu einer weitergehenden Gröfsenvergleichung derselben zu gelangen, müssen wir etwas genauer auf ihre Entstehungsweise eingehen. Wir denken uns eine Halbgerade AB festliegend, eine zweite AC aber in einer Ebene derartig bewegt („*gedreht*"), dafs A immer festbleibt. Geben wir AC die Anfangslage AB, so kann die Bewegung in doppelter Weise so ausgeführt werden, dafs AC niemals in eine eben erst verlassene Lage zurückkehrt; AC kann sich, von einer bestimmten Seite der Ebene aus betrachtet, bewegen wie der Zeiger einer Uhr oder umgekehrt (um an

---

*) Vgl. *v. Staudt, Geometrie der Lage,* p. 2 und 13.

www.rcin.org.pl

Stelle mangelhafter abstrakter Auseinandersetzungen einen die Sache sofort klarmachenden Vergleich zu setzen). Hiernach kann AC in irgend eine bestimmte Lage auf doppeltem Wege gedreht werden. Aber bei genauerem Zusehen wird die Sache noch komplizierter. Dreht man AC immer in demselben Sinne weiter, so gelangt man schliefslich wieder zur Lage AB zurück und kommt dann zum zweiten Male in jede vorgegebene Lage, und das Verfahren kann beliebig oft wiederholt werden. Man kann also AC auf *zweifach unendlich viele* Arten in jede Lage bringen. Bei einer vollständigen Umdrehung um A überstreicht AC die gesamte Ebene; die beiden zuerst beschriebenen Drehungen, die AC in eine bestimmte Lage bringen, lassen zusammen AC ebenfalls die Gesamtebene beschreiben. *Wir nennen nun ein aus zwei von einem Punkte ausgehenden Halbgeraden zusammengesetztes Gebilde, insofern es durch eine Drehung bestimmter Art erzeugt ist, einen Winkel.* Das Gebilde BAC stellt daher verschiedene Winkel dar, je nachdem wir AC von der Anfangslage AB aus im Sinne des Uhrzeigers oder umgekehrt drehend nach seiner bestimmten Lage gebracht haben; auch wird ihm eine verschiedene Winkelgröfse beizumessen sein, je nachdem bei den genannten Drehungen die Halbgerade AC gar nicht oder ein-, zwei-, drei-, . . . mal in ihre Anfangslage AB zurückkehrte.

Die beiden Halbgeraden, welche einen Winkel bilden, heifsen seine *Schenkel*, deren Schnittpunkt sein *Scheitel.*

4. Was wir unter *Addition* zweier Winkel verstehen wollen, ist nun leicht einzusehen: wir legen die Winkel mit dem Scheitel und dem einen Schenkel an einander, und zwar derart, dafs der andere Schenkel des ersten Winkels bei einer Drehung aus seiner gegebenen Lage in dem den Winkeln zukommenden Richtungssinne dieselben nach einander überstreichen würde; der von den beiden freien Schenkeln eingeschlossene Winkel (durch jene Drehung des einen Schenkels erzeugt) ist die Summe der beiden Winkel. Analog wird die Differenz definiert.

5. Hiermit ist nun auch die Gröfsenvergleichung, das Messen der Winkel möglich gemacht. Wir sehen wieder

www.rcin.org.pl

zuerst zu, wie oft wir den Winkel, der als Maſseinheit dienen soll, auf dem zu messenden abtragen können, ohne daſs der freie Schenkel bei der letzten Abtragung über den zweiten Schenkel des zu messenden Winkels hinausfällt; mit dem etwa bleibenden Rest können wir ebenso weiter verfahren, wie wir es beim Messen geradliniger Strecken thaten. Überhaupt stimmen die zugehörigen Axiome und Fundamentalsätze wesentlich mit den dort aufgestellten überein, so daſs eine Wiederholung überflüssig erscheint.

Bemerkt zu werden verdient, daſs alle Winkelmessungen erst nach Einführung der *Ebene* einen Sinn haben, wenn auch das Winkelgebilde selbst von der Ebene unabhängig erscheint; denn das Addieren zweier Winkel durch Aneinanderlegen hat nur dann einen präzisen Sinn, wenn dabei die Winkel in dieselbe Ebene gebracht werden.

6. Während bei den Strecken die Maſseinheit beliebig war, bieten sich bei den Winkeln naturgemäſse Einheiten dar. Der Drehung, welche eine Halbgerade zum ersten Male in ihre Anfangslage zurückführt, entspricht der *volle Winkel*; die Schenkel desselben fallen zusammen. Alle vollen Winkel sind gleich, da sie einerseits zur Deckung zu bringen sind und bei allen die Art der Drehung gleichmäſsig festgesetzt ist. Die Hälfte eines vollen Winkels heiſst ein *gestreckter Winkel*; die Schenkel desselben sind entgegengesetzt gerichtete Teile einer Geraden. Daſs man wirklich durch Aneinandersetzen zweier so beschaffener Winkel einen vollen Winkel erhält, ergiebt sich aus der Zusammenlegbarkeit irgend zweier Geraden. Die Hälfte eines gestreckten heiſst ein *rechter* Winkel; daſs alle rechten und gestreckten Winkel resp. gleich sind, geht aus der Gleichheit der vollen hervor. Zwei Gerade, welche einen rechten Winkel miteinander bilden, heiſsen *senkrecht*, *lotrecht*, *perpendikulär* aufeinander (*Senkrechte*, *Lot*, *Perpendikel*). Ein Winkel, der kleiner ist als ein rechter, heiſst ein *spitzer*, ein solcher, der gröſser ist als ein rechter, aber kleiner als ein gestreckter, heiſst ein *stumpfer* Winkel. Ein *überstumpfer* (*konkaver*) Winkel ist gröſser als ein gestreckter aber kleiner als ein voller. Die Winkel unterhalb eines gestreckten heiſsen auch *konvex.*

www.rcin.org.pl

Alle Winkel, welche sich um ganzzahlige Vielfache eines vollen unterscheiden, sind, von ihrer Entstehungsweise abgesehen, vollkommen identisch; sie spielen bei Liniengebilden genau dieselbe Rolle. Bei allen Berechnungen können wir daher die Winkel, welche gröſser sind als ein voller, durch solche, die kleiner sind, ersetzen. Zieht man nur Winkel in Betracht, welche kleiner als ein voller sind, so stellen zwei von demselben Punkte ausgehende Halbgerade zwei Winkel dar, die zusammen einen vollen ausmachen und von denen der eine konvex, der andere konkav ist, wenn nicht beide gestreckt sind.

7. Als Maſseinheit für Winkel werden auſser dem vollen Winkel auch der gestreckte und rechte, besonders aber der 360^{te} Teil des vollen, 1 *Grad* (1^0) genannt, und dessen Unterteile, die *Minute* ($60' = 1^0$) und *Sekunde* ($60'' = 1'$) benutzt; wir werden öfters, dem alten Gebrauche folgend, nach rechten Winkeln (R) rechnen.

8. Es ist üblich, einen Winkel durch einen kleinen griechischen Buchstaben, durch drei groſse lateinische oder zwei kleine lateinische Buchstaben zu bezeichnen. Im zweiten Falle setzt man den einen Buchstaben, der bei der Bezeichnung in die Mitte gestellt wird, an den Scheitel, die beiden anderen an Punkte der Schenkel, wobei man insbesondere unter ABC den Winkel versteht, der durch Drehung des Schenkels BA um B in der einmal als positiv festgesetzten Richtung bis BC hervorgebracht wird. Ist daher ABC ein konvexer Winkel, so ist CBA ein konkaver; übrigens kann man letzteren auch durch einen konvexen *negativen* Winkel ersetzt denken, der durch Drehung von BA nach CA in der der positiven entgegengesetzten Richtung erzeugt wird, falls man Winkel, die um Vielfache eines vollen unterschieden sind, als identisch behandelt. ab oder $\widehat{ab}$ bezeichnet einen Winkel, der durch positive Drehung der Halbgeraden a um den Schnittpunkt mit b bis zur Lage von b erzeugt wird.

Im allgemeinen ist

$$\sphericalangle ABC + CBA = k \,.\, 360^0 \text{ und}$$
$$\sphericalangle ab + ba = k \,.\, 360^0.$$

www.rcin.org.pl

Das Zeichen $\sphericalangle$ oder $\angle$ wird einem Winkel nötigenfalls vorgesetzt, um Verwechslungen zu vermeiden.

9. Betrachten wir jetzt die Gesamtfigur, welche durch zwei sich schneidende Gerade dargestellt wird, so bemerken wir in derselben vier konvexe Winkel. Je zwei nebeneinander liegende derselben bilden zusammen einen Gestreckten; sie heifsen *Nebenwinkel.* Je zwei nicht aneinanderstofsende heifsen *Scheitelwinkel;* sie sind einander gleich, da sie durch Subtraktion desselben Winkels (ihres einen gemeinsamen Nebenwinkels) von einem Gestreckten erhalten werden.

10. Werfen wir einen Rückblick auf unsere Definition der Winkel, so ist ersichtlich, dafs es uns lediglich darauf ankam, sie als *mefsbare Gröfsen* einzuführen, ohne ihnen sonst eine Beschaffenheit beizulegen, genau ebenso wie wir auch bei den Strecken verfuhren. Die gewöhnliche Definition, dafs der Winkel der *Richtungsunterschied* zweier zusammenstofsenden Halbgeraden sei, ist einerseits zu wenig präzis, andererseits nicht ganz logisch, da sie ein konkretes räumliches Gebilde durch einen abstrakten Begriff erklärt. Den Winkel als einen durch die beiden Schenkel aus der Gesamtebene ausgeschnittenen Flächenteil zu definieren hat das Mifsliche, dafs dadurch das Operieren mit unendlichen Gröfsen, das ohne Weiteres wissenschaftlich nicht zulässig ist, notwendig gemacht wird, ganz abgesehen davon, dafs der Begriff des Flächeninhalts ein fremdartiges Moment in die Betrachtung bringt.

11. Obgleich Strecken und Winkel beide mefsbare Gröfsen sind, so zeigen sie doch fundamentale Unterschiede. Während man eine Strecke beliebig vergröfsern kann, ohne zum Anfangswerte zurückzugelangen, führt die fortgesetzte Vergröfserung eines Winkels unendlich oft zu Gebilden, die mit früher erzeugten äufserlich identisch sind. — Wollte man eine einleuchtende Interpretation der Verschiedenheit der Winkel geben, welche um $k \,.\, 360^0$ verschieden sind, so müfste man sich der *Riemann*'schen Fläche bedienen, die unendlich vielfach um den Scheitelpunkt gewunden ist; doch liegt es nicht in der Absicht unserer Darstellung, auf diesen Punkt

www.rcin.org.pl

weiter einzugehen. — Dafs für Winkel eine bestimmte Mafseinheit existiert, ist nur eine Folge jener periodischen Wiederkehr desselben Gebildes.

§ 7.

Dreiseit und Dreieck.

1. Wir wenden uns jetzt zu den Gebilden, die aus der Zusammenstellung von drei Geraden oder drei Punkten hervorgehen, dem *Dreiseit* und dem *Dreieck.* Da man durch drei Punkte, welche nicht in eine Gerade fallen, immer drei Gerade legen kann, so ist ein Dreieck, jenen Spezialfall abgerechnet, stets zugleich ein Dreiseit; dagegen ist ein Dreiseit nur dann ein Dreieck, wenn sich die drei Geraden wirklich alle in drei verschiedenen Punkten schneiden. Wir werden in der Folge in erster Linie vom Dreiseit als dem allgemeineren Gebilde sprechen und das Wort Dreieck nur dann gebrauchen, wenn die spezielle Natur des Satzes drei *sich schneidende* Gerade verlangt.

Die Fälle, wo drei Punkte auf einer Geraden liegen oder drei Gerade durch einen Punkt gehen, bieten nichts wesentlich Neues und können daher beiseite gelassen werden.

2. Durch das Dreieck — wir denken uns die Geraden hier wie in der Folge immer in ihrem vollen Umfange ausgezogen — wird die Gesamtebene in sieben getrennte Teile zerlegt, von denen der eine vollständig begrenzt ist (das Dreieck im gewöhnlichen Sinne); von den sechs übrigen teilweise unbegrenzten enthalten drei je einen, drei andere je zwei Winkel. In der Figur treten drei endliche Strecken auf, die wir als die *Seiten* des Dreiecks bezeichnen, ferner dreimal je vier denselben Scheitel besitzende, konvexe Winkel, von denen die von den Seiten gebildeten die *Dreieckswinkel* heifsen, während ihre sechs Nebenwinkel als die *Aufsenwinkel* bezeichnet werden. Durch drei dieser Winkel, die verschiedene Scheitel haben, sind die übrigen *linear* bestimmt.

Beim Dreiseit sind drei weitere Fälle denkbar:

a. Die drei Geraden sind einander parallel; dann treten weder Seiten noch Winkel auf;

b. zwei Gerade sind parallel und werden von der dritten

www.rcin.org.pl

geschnitten; dann entstehen eine Seite und zwei unabhängige Winkel;

c. zwei Gerade, welche sich schneiden, sind beide der dritten parallel; dann wird ein Winkel, aber keine Seite gebildet.

Wie weit diese Fälle der Wirklichkeit entsprechen, soll erst an späterer Stelle entschieden werden.

3. Bei jedem Dreieck treten also sechs selbständige, mefsbare Gröfsen auf: die drei Seiten und die drei Dreieckswinkel (kurzweg als die Winkel zu bezeichnen), während beim Dreiseit diese Stücke teilweise wegfallen können*). Die erste sich naturgemäfs darbietende Frage ist: *Sind diese sechs Stücke von einander unabhängig, oder sind durch einen Teil derselben die übrigen bestimmt?* Diese Frage kann noch anders formuliert werden. Wir wollen in Zukunft zwei Gebilde *gleich* nennen (wofür das Zeichen $=$ gebraucht wird), wenn sie, von der Lage abgesehen, vollständig übereinstimmen, so dafs das eine mit dem anderen durch geeignete Ortsänderung zu vollständiger Deckung gebracht werden kann. Dann können wir fragen: *In welchen Stücken müssen Dreiseite, resp. Dreiecke übereinstimmen, damit daraus ihre vollständige Gleichheit folgt?* Diese Frage wird durch die *Gleichheitssätze* beantwortet werden.

Finden wir nun, dafs ein Teil der Stücke genügt, um das Dreieck zu bestimmen, so ist dadurch die Aufgabe gestellt, aus den bestimmenden Stücken die übrigen zu *berechnen*, eine Aufgabe, die wir allerdings erst auf einer höheren Stufe werden lösen können.

Der Gang der folgenden Untersuchung ist so angeordnet, dafs zunächst nur Sätze hergeleitet werden, die nicht die Aufstellung neuer Axiome verlangen; erst zum Schlusse wird das Parallelenaxiom eingeführt werden.

Anmerkung: An Stelle des Wortes „*gleich*“ im angegebenen Sinne ist allgemein der Ausdruck „*kongruent*“ üblich geworden, während man Figuren von *gleichem Flächeninhalte*

---

*) Seiten und Winkel des Dreiecks werden wir durchgehends als positive Gröfsen behandeln.

www.rcin.org.pl

kurzweg als *gleich* bezeichnet; als Zeichen der Kongruenz wird $\cong$ gebraucht, wonach sich die Kongruenz aus zwei angeblich einfacheren Begriffen, der *Flächengleichheit* und der *Ähnlichkeit* zusammensetzt. Aber wird denn jemals die Kongruenz zweier Figuren dadurch nachgewiesen, daſs man die Gleichheit ihres Flächeninhaltes und ihrer Gestalt darthut? Im Gegenteil. Immer ist die Kongruenz dasjenige, was zuerst erwiesen wird, während sich die ganze Lehre vom Flächeninhalt und der Ähnlichkeit auf die Kongruenzsätze gründet. Die Kongruenz ist der einfachere Begriff, und es ist geradezu monströs, daſs derselbe in der Bezeichnung wenigstens auf zwei kompliziertere zurückgeführt wird. Vollkommen unlogisch ist die Anwendung des Zeichens $\cong$ für die Gleichheit von Gebilden, bei denen von Ähnlichkeit ohne volle Übereinstimmung gar nicht die Rede sein kann, wie bei Ecken. Es ist daher an der Zeit, die gewöhnliche unlogische und schwerfällige Bezeichnung durch die einfachere und näher liegende „*gleich*“ zu ersetzen. Auch *Euklid* gebraucht für die volle Übereinstimmung nur das Wort ἴσος, und entsprechend verfährt die französische Sprache.

4. Zwei in einer Ebene liegende gleiche Gebilde können nicht immer durch *Verschiebung in dieser* zum Zusammenfallen gebracht werden; es kann auch nötig sein, das eine Gebilde vorher *umzuklappen*, so daſs die beiden Seiten der Ebene vertauscht werden.

§ 8.

Die zwei ersten Gleichheitssätze.

1. Erster Gleichheitssatz: *Zwei Dreiseite sind gleich, wenn sie in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen.* Dabei müssen die Winkel in beiden Gebilden als auf *derselben* Seite der Geraden anliegend gedacht werden.

Beweis*): Legen wir die beiden Dreiseite abc und $a_1b_1c_1$,

---

*) Wir bezeichnen die drei Geraden eines Dreiseits mit drei kleinen lateinischen Buchstaben, meistens a, b, c, indem wir unter denselben gleichzeitig die begrenzten Teile dieser Geraden, soweit solche überhaupt vorhanden sind, verstehen; der Punkt ab heiſst C u. s. w., der

www.rcin.org.pl

bei welchen $a = a_1$, $\sphericalangle \beta = \beta_1$, $\sphericalangle \gamma = \gamma_1$ ist, mit a und a_1 aufeinander und zwar so, dafs B auf B_1, C auf C_1 kommt, so können die Dreiseite in einer Ebene noch eine doppelte Lage zu einander haben; wir wählen diejenige, bei der die Winkel β und γ auf β_1 und γ_1 fallen. Wegen der Gleichheit der entsprechenden Winkel fallen die Geraden b und c in b_1 und c_1, so dafs sich beide Gebilde vollständig decken.

2. Zweiter Gleichheitssatz: *Zwei Dreiecke sind gleich, wenn sie in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.*

Beweis: Durch Aufeinanderlegung der Dreiecke, etwa von dem gleichen Winkel ausgehend, erkennt man, dafs sie mit ihren drei Eckpunkten, also ganz zum Zusammenfallen zu bringen sind.

3. Diejenigen Stücke gleicher Figuren, welche beim Aufeinanderlegen zusammenfallen, heifsen *homolog*. Homologen Seiten eines Dreiecks liegen homologe Winkel gegenüber. Aus der bewiesenen Gleichheit zweier Gebilde folgt die Gleichheit ihrer homologen Stücke. Durch die Gleichung $\triangle ABC = A_1 B_1 C_1$ drücken wir nicht nur die Übereinstimmung der beiden Gebilde aus, sondern geben noch genauer an, dafs A und A_1 u. s. w., AB und $A_1 B_1$ u. s. w. homolog sein sollen, und ebenso in anderen Fällen. Die Gleichung $\triangle ABC = BAC$ ist daher *keine* Identität.

4. Die beiden ersten Gleichheitssätze (bei Euklid der dritte und erste) haben den Umstand gemein, dafs drei nebeneinander liegende Stücke als gleich gegeben sind; die Erledigung der übrigen Fälle macht das Vorausschicken anderweiter Betrachtungen nötig.

Vorerst untersuchen wir einen Spezialfall des zweiten Gleichheitssatzes weiter.

§ 9.

Parallele Gerade.

1. Werden zwei Gerade von einer dritten, der sog. *Sekante*, geschnitten, so entstehen acht konvexe Winkel um

---

Winkel bei C heifst γ u. s. w. Ein Dreiseit wird mit $\triangle\, abc$, ein Dreieck mit $\triangle\, ABC$ bezeichnet.

www.rcin.org.pl

zwei Scheitel. Wir nennen Winkel, die auf derselben Seite der Sekante und derselben Seite der geschnittenen Geraden liegen, *korrespondierende Winkel;* solche, die auf derselben Seite der Sekante und verschiedenen Seiten der geschnittenen Geraden liegen, *entgegengesetzte Winkel;* Winkel auf verschiedenen Seiten der Sekante und derselben Seite, resp. verschiedenen Seiten der geschnittenen Geraden nennen wir *korrespondierende Wechselwinkel*, resp. *Wechselwinkel.* Bei entgegengesetzten Winkeln und Wechselwinkeln sind insofern zwei Unterabteilungen möglich, als sie beide innerhalb oder aufserhalb der geschnittenen Geraden liegen können.

2. Sind zwei korrespondierende Winkel gleich, so sind es auch die übrigen, sowie die Wechselwinkel; die entgegengesetzten Winkel und Wechselwinkel sind supplementär*): dies ist unmittelbar mit Hilfe von Neben- und Scheitelwinkeln zu verifizieren. Gilt ferner für irgend eines der Winkelpaare die angegebene Beziehung, so finden für alle übrigen die entsprechenden statt.

3. Nehmen wir nun an, dafs (Figur 1) diese Relationen statthaben, so sind die Gebilde $AFGC$ und $DGFB$ gleich, da $FG = FG$, $\sphericalangle \alpha = \delta$, $\sphericalangle \beta = \gamma$ ist (§ 8, 1). Wenn sich nun die Geraden AB und CD in der Richtung nach A und C hin schneiden würden, so müfste dies wegen dieser Übereinstimmung auch in der entgegengesetzten Richtung geschehen, d. h. AB und CD müfsten sich in zwei Punkten schneiden, was nicht möglich ist (Beweis von *Ptolemäos*). Wir haben den wichtigen Satz: *Bilden zwei Gerade mit einer dritten gleiche korrespondierende*

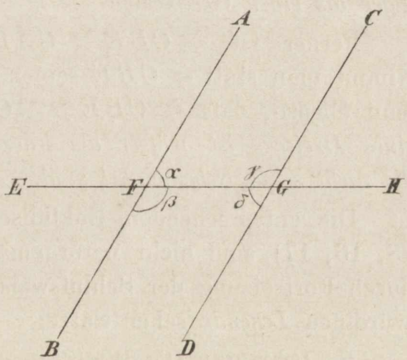


Fig. 1.

---

*) Zwei Winkel heifsen *supplementär,* wenn sie zusammen einen Gestreckten, *komplementär,* wenn sie zusammen einen Rechten betragen.

www.rcin.org.pl

Winkel oder Wechselwinkel, oder supplementäre entgegengesetzte Winkel oder korrespondierende Wechselwinkel, so sind sie parallel.

Da es nun offenbar möglich ist, in zwei Punkten einer Geraden Gerade unter beliebigen Winkeln an sie anzutragen, so ist hiermit die Existenz paralleler Geraden nachgewiesen.

4. Macht man bei $\triangle ABC \sphericalangle DBE = CAB$ (Fig. 2), so ist $BD \nparallel AC$. Der Teil von BD, welcher auf derselben Seite von AE wie $\triangle ABC$ liegt, mufs aufserhalb $\sphericalangle ABC$ fallen, da er sonst BC zum zweiten Male oder die Parallele AC schneiden müfste*). Daher ist $\sphericalangle CBE > DBE$ oder $> CAB$, und da $\sphericalangle ABC + CBE = 2R$, so folgt $\sphericalangle CAB < CBE + CBA < 2R$.

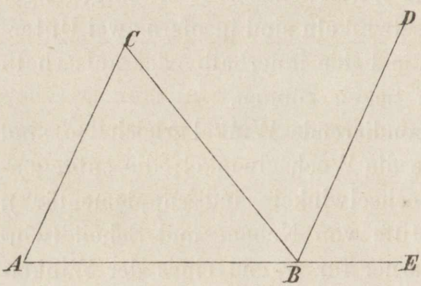


Fig. 2.

*Zwei Dreieckswinkel betragen daher zusammen immer weniger als einen Gestreckten***).

Ferner ist $\sphericalangle CBE > CAB$, da $\sphericalangle CBE > DBE$. Nimmt man statt $\sphericalangle CBE$ seinen Scheitelwinkel, so erkennt man ebenso, dafs $\sphericalangle CBE > ACB$ ist. *Ein Aufsenwinkel eines Dreiecks ist gröfser als jeder der beiden Dreieckswinkel, die nicht seine Nebenwinkel sind.*

Die entsprechenden Euklidischen Beweise (Elem. I, 27, 28, 16, 17) sind nicht naturgemäfs; doch führen dieselben durch Fortsetzung der Schlufsweise zu dem folgenden merkwürdigen *Legendre*'schen Satze:

5. Lehrsatz: *Die Winkelsumme eines Dreiecks kann nicht mehr betragen als einen Gestreckten.*

---

*) Die Anschauung zeigt, dafs eine Gerade, welche in eine geschlossene Figur eintritt, auch wieder aus derselben austreten mufs.

**) Ein Dreieck kann daher nur *einen* rechten oder stumpfen Winkel enthalten.

www.rcin.org.pl

Beweis: Im Dreieck ABC (Figur 3) denken wir uns BC in E halbiert, auf der verlängerten Geraden AE $EF = AE$ gemacht und BF und CF gezogen. Dann ist $\triangle BEF = CEA$, $\triangle CEF = BEA$ nach § 8, 2. Die Dreiecke ABF und ACF haben daher mit ABC die gleiche Winkelsumme; denn es ist z. B. $\sphericalangle FAB + ABF + BFA = FAB + ABC + ACE + CAE$. Nun ist aber von den beiden Winkeln FAB und CAF jedenfalls einer $\leqq \frac{1}{2}\alpha$, so dafs wir ein Dreieck (ABF oder ACF) konstruiert haben, welches mit CAB die gleiche Winkelsumme, aber an Stelle von α einen Winkel α_1 hat, der $\leqq \frac{1}{2}\alpha$ ist. Ebenso konstruieren wir ein weiteres Dreieck von gleicher Winkelsumme, welches einen Winkel $\alpha_2 \leqq \frac{1}{2}\alpha_1 \leqq \frac{1}{4}\alpha$ hat, und so fortfahrend schliefslich ein ebensolches Dreieck mit einem Winkel $\alpha_n \leqq \frac{1}{2^n}\alpha$. Bei wachsendem n nimmt also α_n unter jede Grenze ab. Da nun die beiden andern Winkel des letzten Dreiecks zusammen kleiner als ein Gestreckter sind, α_n aber beliebig klein gedacht werden darf, so folgt der behauptete Satz.

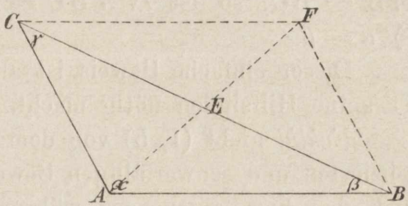


Fig. 3.

6. Alle Resultate dieses Paragraphen beruhen auf der Voraussetzung, dafs zwei Gerade sich nur in *einem* Punkte schneiden können, was gleichzeitig involviert, dafs die Gerade keine endliche, in sich selbst zurücklaufende Linie ist. Verwirft man diese, der Anschauung entlehnte, nicht logisch zu folgernde Erkenntnis, so sind Dreiecke möglich, deren Winkelsumme mehr als zwei Rechte beträgt. Wir betrachten in der Folge den Legendre'schen Satz als bestehend; später haben wir auf den Gegenstand zurückzukommen.

§ 10.

Sätze über die Seiten und Winkel eines Dreiecks.

An die beiden bewiesenen Gleichheitssätze schliefsen sich direkt einige einfache Sätze über den Zusammenhang zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreiecks an.

www.rcin.org.pl

1. *Gleichen Seiten eines Dreiecks („gleichschenkliges Dreieck“) liegen gleiche Winkel gegenüber.* Denn ist in $\triangle ABC$ $AB = BC$, so ist $\triangle ABC = CBA$ nach § 8, 2, also $\sphericalangle \alpha = \beta$.

Dieser einfache Beweis ist allen andern vorzuziehen, da er keine Hilfslinien nötig macht.

Euklid giebt (I, 5) von dem Satze einen überaus komplizierten und schwerfälligen Beweis; er übersah wahrscheinlich den hier gegebenen, während er sich unnötigerweise scheute, den Winkel an der Spitze zu halbieren, ohne vorher das Winkelhalbieren behandelt zu haben.

2. *Der gröfseren Seite im Dreieck liegt der gröfsere Winkel gegenüber.*

Beweis: Ist $AB > AC$, so machen wir auf AB $AD = AC$ und ziehen DC; dann teilt DC den Winkel ACB. Es ist $\sphericalangle ACD = ADC$, also $\sphericalangle ACB > ADC$, ferner $\sphericalangle ADC > DBC$ nach § 9, 4, also $\sphericalangle ACB > DBC$.

3. Aus diesen beiden Sätzen lassen sich zwei andere ableiten, welche zusammen genau dasselbe aussagen wie jene. Die gewöhnliche, aus dem Altertum überkommene Art der rein logischen Herleitung von Sätzen aus anderen, mit ihnen wesentlich identischen, ist die *indirekte* Beweismethode, welche die Annahme, dafs der Satz falsch sei, als unrichtig nachweist und damit eben den Satz begründet. Diese Methode hat etwas Schwerfälliges, ist aber bis jetzt durch keine andere von gleicher Präzision ersetzt. Wir betonen nochmals, dafs durch sie (wenn sie nicht nur als *Teil* eines Beweises auftritt) nichts materiell Neues hergeleitet, sondern nur bereits Bekanntes in andere Form transformiert wird, ähnlich wie man etwa aus n Gleichungen mit n Unbekannten auf unendlich viele Arten n andere herleiten kann, die dasselbe Resultat geben.

Wir sprechen die beiden Sätze aus:

Gleichen Winkeln im Dreieck liegen gleiche Seiten gegenüber, und

dem gröfseren Winkel im Dreieck liegt die gröfsere Seite gegenüber.

Beweis: Gleichen Winkeln können nicht verschiedene

www.rcin.org.pl

Seiten gegenüberliegen, da solchen wieder ungleiche Winkel gegenüberliegen müſsten. Dem gröſseren von zwei Winkeln kann ebenso wegen 1. und 2. weder eine gleiche, noch eine kleinere Seite gegenüberliegen.

Übrigens macht es keine Schwierigkeit, die beiden Sätze direkt zu beweisen, z. B. den ersten genau wie 1., nach § 8, 1.

Einem rechten oder stumpfen Winkel im Dreieck liegt immer die gröſste Seite gegenüber.

4. *Dreiecke mit drei gleichen Seiten haben drei gleiche Winkel und umgekehrt (gleichseitige Dreiecke).*

Bei den Winkeln eines Dreiecks ist die Gröſsenfolge dieselbe wie bei den gegenüberliegenden Seiten.

5. Lehrsatz: *Zwei Seiten eines Dreiecks sind zusammen immer gröſser als die dritte.*

Beweis: Macht man auf der Verlängerung der Seite AC des Dreiecks ABC $CD = CB$, so ist $\sphericalangle CBD = CDB$, also $\sphericalangle ABD > CDB$ und somit $AD > AB$ oder $AC + CB > AB$. — Diesen Satz als Axiom zu formulieren, wie *Archimedes* es wollte, ist kein Grund vorhanden. Er läſst sich leicht zu dem folgenden erweitern:

6. Lehrsatz: *Die gerade Verbindungslinie zweier Punkte A und B ist kürzer als jede aus geraden Teilen bestehende gebrochene Verbindungslinie* (z. B. $ACDEB$).

Beweis: Im vorliegenden Beispiel ist $AC + CD > AD$, $DE + EB > DB$, $AD + DB > AB$ u. s. w., und analog in jedem andern Falle.

Nach den Bemerkungen § 5, 9 läſst sich dieser Satz ohne Zuhilfenahme eines Axioms nicht auf krummlinige Verbindungslinien ausdehnen.

7. Der Satz von Nr. 5 giebt keine eigentliche Gröſsenbeziehung zwischen den drei Seiten eines Dreiecks, sondern nur eine Grenze für die Werte derselben, ähnlich wie man in dem arithmetischen Ausdrucke $a - b$, so lange man nur mit positiven Zahlen operiert, nicht $b > a$ nehmen darf. Solche Begrenzungen von zulässigen Werten haben immer etwas Unbefriedigendes und fordern zur Erweiterung der fundamentalen Begriffe auf, wie ja auch der Ausdruck $a - b$ durch Annahme von $b > a$ zu den negativen Gröſsen führt.

www.rcin.org.pl

Ebenso liegt in jener Beschränkung der Werte der Seiten eines Dreiecks eine Aufforderung zur Erweiterung der geometrischen Begriffe, zur Schaffung einer *imaginären* Geometrie. Wir müssen jedoch darauf verzichten, das Material, welches für eine solche vorhanden ist, hier zusammenzutragen, da es an einer elementaren Entwickelung ohne Zuhilfenahme von Koordinaten oder gewisser projektivischer Beziehungen noch fehlt.

§ 11.

Zwei weitere Gleichheitssätze.

1. Dritter Gleichheitssatz (zweiter Kongruenzsatz): *Zwei Dreiecke sind gleich, wenn sie in den drei Seiten übereinstimmen.*

Beweis: Legen wir die beiden in den Seiten übereinstimmenden Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ mit den Seiten AB und A_1B_1 (A_1 auf A, B_1 auf B) *aneinander* und verbinden C mit C_1, so ist $\sphericalangle ACC_1 = A_1C_1C$, $\sphericalangle BCC_1 = B_1C_1C$, woraus bei jeder Lage der Verbindungslinie $\sphericalangle \gamma = \gamma_1$ folgt, wodurch der Satz auf § 8, 2 zurückgeführt ist.

2. Vierter Gleichheitssatz (dritter Kongruenzsatz, zweiter Teil): *Zwei Dreiecke sind gleich, wenn sie in einer Seite, einem anliegenden und dem gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen.*

Beweis: Ist $AB = A_1B_1$, $\sphericalangle \alpha = \alpha_1$, $\sphericalangle \gamma = \gamma_1$, so können wir $\triangle A_1B_1C_1$ so auf $\triangle ABC$ legen, daſs A_1 auf A, B_1 auf B, die Gerade A_1C_1 auf AC (der Richtung nach) zu liegen kommt. Dann muſs auch C_1 auf C fallen; denn sonst wäre $\sphericalangle \gamma \gtrless \gamma_1$, da einer derselben der Auſsenwinkel des Dreiecks CBC_1 würde.

§ 12.

Punkt und Gerade; der fünfte Gleichheitssatz.

1. Wir schalten einige Betrachtungen ein über die Lage eines Punktes A zu einer Geraden BC, die nicht durch ihn hindurchgeht. Da der Punkt als Schnittpunkt zweier Geraden betrachtet werden kann, so gehören diese Untersuchungen hierher. A kann mit sämtlichen Punkten von BC durch Gerade verbunden werden; die Vergleichung der Längen der so bestimmten Strecken soll uns beschäftigen.

www.rcin.org.pl

Ist AD eine beliebige dieser Strecken und läſst man Punkt E von D aus nach der einen oder der andern Richtung auf BC ins Unendliche fortrücken, so wächst auch AE ins Unendliche; es ist nämlich $AE + AD > DE$ oder $AE > DE - AD$, so daſs AE mit DE unendlich wird. Es existiert also keine längste Verbindungsgerade zwischen A und BC.

2. Da keine der Strecken gleich Null wird, so müssen unter ihnen eine oder mehrere kürzeste von endlicher Länge existieren; die Länge einer solchen heiſst der *Abstand* des Punktes A von BC.

3. Ist nun AD diese kürzeste Strecke, so wissen wir aus dem Vorhergehenden, daſs wenn sich Punkt E von D aus auf BC nach der einen oder andern Seite hin ins Unendliche bewegt, AE bis ins Unendliche wächst, wobei freilich ein fortgesetztes Wachstum ohne zeitweiliges Abnehmen noch nicht nachgewiesen ist. Doch können wir sofort darthun, daſs die Gröſsenänderung von AE *stetig*, nicht *sprungweise* vor sich geht. Ist nämlich EF eine beliebig klein zu denkende Strecke auf BC, so ist $AE - EF < AF < AE + EF$, d. h. AF unterscheidet sich von AE nur um eine Gröſse von beliebiger Kleinheit.

Da hiernach AE von AD ausgehend nach beiden Seiten hin stetig bis ins Unendliche wächst, also alle endlichen Werte $> AD$ durchläuft, so werden sich unter den beiderseitigen Werten von AE je zwei gleiche (vielleicht auch mehrere) finden. Ist etwa $AG = AH$ und liegen G und H auf verschiedenen Seiten von D, so halbieren wir GH in J und ziehen AJ; dann ist $\triangle AJG = AJH$, also $\sphericalangle GJA = HJA = 1R$. Wir finden also, *daſs es möglich ist, von A auf BC ein Perpendikel zu fällen**), *und zwar nur eines*, da sonst ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln entstehen würde.

4. Nachdem nun die Existenz eines Perpendikels AJ auf BC nachgewiesen ist, erkennen wir sofort, daſs es die

*) Man *errichtet* ein Perpendikel in einem Punkte einer Geraden auf dieser; man *fällt* ein Perpendikel von einem Punkte auſserhalb einer Geraden auf diese.

www.rcin.org.pl

kürzeste Verbindungslinie zwischen A und BC ist; denn in jedem Dreieck AJE ist wegen $\sphericalangle AJE = 1R$ $AE > AJ$. Ferner ist, wenn E und F in BC auf derselben Seite von J liegen, $AF > AE$, falls $JF > JE$ ist; denn in $\triangle AEF$ ist $\sphericalangle AEF > AJE > 1R$. Umgekehrt folgt aus $AF > AE$ auch $JF > JE$; denn weder $JF = JE$ noch $JF > JE$ verträgt sich nach dem Vorhergehenden mit $AF > AE$. Auf derselben Seite von AJ sind daher keine zwei gleichlangen Strecken von A nach BC möglich.

Liegen dagegen E und F auf verschiedenen Seiten von J in BC, so ist bei $JE = JF$ auch $\triangle AJE = AJF$, also $AE = AF$. Aus $AE = AF$ folgt auch umgekehrt $JE = JF$; denn im Falle der Ungleichheit von JE und JF brauchte man nur JE auf der umgekehrten Seite von J aus abzutragen, um sofort auf einen Widerspruch zu stofsen. In gleicher Weise kann man darthun, dafs die oben aufgestellte Beziehung zwischen $AF > AE$ und $JE > JE$ auch noch gilt, wenn F und E auf verschiedenen Seiten von J liegen.

Von besonderer Wichtigkeit ist das Resultat, *dafs man von A nach BC nur je zwei gleichlange Strecken legen kann.*

5. Es möge nun in den beiden Dreiecken ABC und $A_1B_1C_1$ $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ und $\sphericalangle \beta = \beta_1$ sein. Wir können dann $\triangle A_1B_1C_1$ so auf $\triangle ABC$ legen, dafs $\sphericalangle \beta_1$ auf β und B_1C_1 auf BC fällt. Da man von C nach AB je zwei gleichlange Gerade ziehen kann, so mufs A_1C_1 entweder auf AC oder in eine zweite Lage $A'C$ kommen; nur wenn $\sphericalangle \alpha = \alpha_1 = 1R$ ist, reduzieren sich beide Lagen auf eine einzige. Ist nun $A_1C_1 < B_1C_1$, so fällt A_1C_1 nach dem Vorhergehenden in beiden Lagen auf dieselbe Seite von BC, ist aber $A_1C_1 > B_1C_1$, so fällt es auf verschiedene Seiten von BC. Im letzteren Falle enthält aber $A'B_1C_1$ nicht $\sphericalangle \beta_1$, sondern dessen Nebenwinkel. Die Fälle, dafs $\sphericalangle \beta_1 = 2R - \beta_1 = 1R$ und dafs $A_1C_1 = B_1C_1$ ist, erledigen sich unmittelbar.

Wir haben den

fünften Gleichheitssatz (*vierten Kongruenzsatz*): *Zwei Dreiecke sind gleich, wenn sie in zwei Seiten und dem der gröfseren von ihnen gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen.*

www.rcin.org.pl

Der Satz bleibt richtig, wenn die beiden Seitenpaare gleich sind.

Durch zwei Seiten und den der kleineren gegenüberliegenden Winkel ist ein Dreieck nur *zweideutig* bestimmt (wenn es überhaupt möglich ist); nur in dem Spezialfalle, dafs der der gröfseren Seite gegenüberliegende Winkel ein rechter wird, findet eindeutige Bestimmung statt.

Der fünfte Gleichheitssatz findet sich merkwürdiger Weise nicht in den Elementen des *Euklid;* es ist dies um so auffälliger, als der entsprechende Ähnlichkeitssatz bewiesen wird, der implizite den Gleichheitssatz enthält. Derselbe war also den Alten thatsächlich bekannt.

§ 13.

Dreiecke, welche nur in einzelnen Stücken übereinstimmen.

1. Nach den vorhergehenden Untersuchungen ist ein Dreieck ein- oder zweideutig bestimmt, wenn von ihm drei Stücke gegeben sind; die einzige Ausnahme bildet der Fall der drei gegebenen Winkel, über den wir an dieser Stelle noch nicht ins Klare kommen können. Durch weniger als drei Stücke ist ein Dreieck niemals bestimmt, wovon man sich ohne Schwierigkeit überzeugen kann.

Wir schliefsen nun einige Sätze an, in denen Dreiecke verglichen werden, die in *weniger als drei* Stücken übereinstimmen; nur ein Teil derselben findet sich bei *Euklid* vor und es würde auch keine Schwierigkeit bieten, ihre Zahl zu vermehren.

2. Lehrsatz: *Wenn zwei Dreiecke eine Seite AB gemeinsam haben und das eine ABC_1 ganz innerhalb des anderen ABC zu liegen kommt, so ist die Summe der beiden nicht gemeinsamen Seiten bei dem inneren Dreieck gröfser als bei dem äufseren; dagegen ist der der gemeinsamen Seite gegenüberliegende Winkel bei dem inneren Dreieck gröfser als bei dem äufseren.*

Beweis: Verlängert man AC_1 bis es BC in D schneidet, so ist $AC + CD > AC_1 + C_1D$, $C_1D + DB > C_1B$, also $AC + CD + C_1D + DB > AC_1 + C_1D + C_1B$ oder

$AC + CD + DB > AC_1 + C_1B$ oder $AC + CB > AC_1 + C_1B$. Ferner ist nach § 9, 4 $\sphericalangle AC_1B > C_1DB > ACB$.

3. Lehrsatz: *Wenn zwei Dreiecke übereinstimmen in zwei Seiten, aber nicht in dem von ihnen eingeschlossenen Winkel, so ist die dritte Seite in demjenigen Dreieck die gröfsere, in dem der eingeschlossene Winkel der gröfsere ist.*

Beweis: Ist in den Dreiecken ABC und $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\sphericalangle \alpha > \alpha_1$, so legen wir das zweite Dreieck so auf das erste, dafs A_1 auf A, B_1 auf B kommt; dann fällt AC_1 zwischen die Schenkel des Winkels α. Kommt nun C_1 gerade auf BC zu liegen, so ist selbstverständlich $BC > B_1C_1$. Liegt C_1 innerhalb $\triangle ABC$, so ist nach dem vorigen Satze $AC + BC > A_1C_1 + B_1C_1$, also $BC > B_1C_1$. Fällt endlich C_1 aufserhalb $\triangle ABC$, so dafs BC durch A_1C_1 in O geschnitten wird, so ist $BO + OC_1 > B_1C_1$, $A_1O + OC > AC$, also nach Addition $BO + A_1C_1 + OC > B_1C_1 + AC$ oder $BC > B_1C_1$.

4. Lehrsatz: *Wenn zwei Dreiecke übereinstimmen in zwei Seiten, aber nicht in der dritten, so ist der von den beiden ersten eingeschlossene Winkel in demjenigen Dreieck der gröfsere, in welchem die dritte Seite die gröfsere ist.*

Beweis: Wäre bei den Winkeln das Verhältnis das umgekehrte oder wären sie beide gleich, so würde dies dem vorigen Satze oder dem zweiten Gleichheitssatze widersprechen.

5. Lehrsatz: *Stimmen zwei Dreiecke überein in einem rechten oder stumpfen Winkel und einer anliegenden Seite, nicht aber der andern, so ist die dem Winkel gegenüberliegende Seite in demjenigen Dreieck die gröfsere, in welchem die zweite anliegende Seite die gröfsere ist und umgekehrt.*

Beweis: Legt man die Dreiecke mit den übereinstimmenden Stücken auf einander, so folgt die Richtigkeit des Satzes sofort aus den Betrachtungen von § 12, 4.

6. Lehrsatz: *Stimmen zwei Dreiecke überein in einem rechten oder stumpfen Winkel, sind aber die beiden anschliefsenden Seiten in dem einen Dreieck einzeln gröfser als die entsprechenden in dem andern, so ist die dritte Seite in dem ersten gröfser als in dem letzteren.*

Beweis: Nimmt man ein Hilfsdreieck an, welches den-

www.rcin.org.pl

selben Winkel hat, in der einen anliegenden Seite mit dem einen, in der andern mit dem andern vorliegenden Dreieck übereinstimmt, so folgt der Satz durch zweimalige Anwendung des vorhergehenden.

7. Lehrsatz: *Stimmen zwei Dreiecke in zwei Winkeln überein, aber nicht in der beiden anliegenden Seite, so sind in demjenigen Dreieck die beiden andern Seiten die gröſseren, in dem die erste die gröſsere ist.*

Beweis: Ist in $\triangle ABC$ und $\triangle A_1B_1C_1$ $A_1B_1 > AB$, $\sphericalangle \alpha = \alpha_1$, $\sphericalangle \beta = \beta_1$, so legen wir die Dreiecke mit α und α_1 aufeinander, so daſs A_1B_1 in die Gerade AB fällt. Dann wird nach § 9, 3 $B_1C_1 \nparallel BC$, so daſs B_1C_1 ganz auſserhalb $\triangle ABC$ fällt. Daher ist $A_1C_1 > AC$. Durch Aufeinanderlegen mit β und β_1 folgt ebenso $B_1C_1 > BC$.

§ 14.

Mögliche Konstruktionen von Dreiecken.

1. Wir haben nun noch folgende Frage zu untersuchen: Wann läſst sich aus drei gegebenen, das Dreieck gemäſs den Gleichheitssätzen ein- oder zweideutig bestimmenden Stücken, wirklich ein Dreieck bilden? Sind zwei Seiten und der eingeschlossene, natürlich konkave, Winkel willkürlich gegeben, so kann man sich die Seiten auf den Schenkeln des Winkels abgetragen denken; es läſst sich aus diesen Stücken immer ein Dreieck bilden. Sind eine Seite und die anliegenden Winkel gegeben, so kann man die Winkel an die Seite angetragen denken; doch ist es fraglich, ob hierdurch ein geschlossenes Dreieck entsteht. Jedenfalls müssen die beiden Winkel zusammen weniger als ein Gestreckter betragen, doch kann hier nicht darüber entschieden werden, ob diese Bedingung genügt. Dieselbe Bedingung und derselbe Zweifel über die Möglichkeit gelten für den Fall, daſs eine Seite, ein anliegender und ein gegenüberliegender Winkel gegeben sind.

2. Der Fall, daſs zwei Seiten und einer der nicht eingeschlossenen Winkel die vorgelegten Stücke sind, ist leicht mit Hilfe von § 12 zu erledigen. Wir denken uns auf einem

INSTYTUT M. A. W. PAN BIBLIOTEKA
www.rcin.org.pl

Schenkel des Winkels die eine Seite abgetragen und können von dem freien Endpunkte aus die andere gegebene Seite, falls sie gröfser ist als das von hier auf die gegenüberliegende Seite gefällte Perpendikel, auf doppelte Art anlegen; ist sie gleich dem Perpendikel, so giebt es für sie nur eine einzige Lage; ist sie kleiner, so ist das Dreieck unmöglich. Ist die Seite, welche dem gegebenen Winkel gegenüberliegt, die gröfsere, so ist das Dreieck immer möglich. Das weitere folgt aus § 12, 5.

3. Sind drei Seiten gegeben, von denen jede kleiner als die Summe und daher auch gröfser als die Differenz der beiden anderen sein mufs, so setzen wir zwei derselben mit einem Endpunkte aneinander und denken uns die eine um diesen gemeinsamen Endpunkt aus der Lage, wo beide Seiten ineinander fallen, gedreht, bis beide einen Gestreckten mit einander bilden.

Nach § 13, 3 mufs bei dieser Drehung die dritte Seite fortwährend wachsen, und zwar von der Differenz der beiden anderen bis zu deren Summe. Falls nun dieses Wachstum überall stetig, nirgends sprungweise vor sich geht, mufs sie einmal den vorgeschriebenen Wert annehmen; die angegebene Bedingung ist also ausreichend.

Die Stetigkeit des Wachstums der dritten Seite scheint freilich nicht strenge beweisbar; sie ergiebt sich aus der Anschauung unmittelbar.

Auch durch Zuhilfenahme der Lehre vom Kreise wird die Schwierigkeit insofern nicht gehoben, als nur aus der Anschauung hervorgeht, dafs der Kreis, der Inbegriff aller Punkte, welche von einem gegebenen gleichen Abstand haben, eine *zusammenhängende Linie* ist.

§ 15.

Das Parallelenaxiom.

1. Denken wir uns an der Geraden AB in A und B die Halbgeraden BC und AD angesetzt derart, dafs $\sphericalangle CBA + BAD = 2R$ wird, so ist nach § 9, 3 $AD \nparallel BC$. Es fragt sich nun: giebt es noch andere durch A gehende

Parallelen zu BC? Möge etwa AE, welches in den Winkel BAD fällt, zu BC parallel sein; dann können alle zwischen EA und DA fallenden Geraden BC nicht schneiden. Lassen wir AE sich von AD ausgehend um A gegen AB hin drehen, so ist es denkbar, daſs erst, nachdem AE einen endlichen Winkel beschrieben hat, ein Schneiden mit BC eintritt, um nachher fortwährend bis zur Endlage stattzuhaben. Oder lassen wir umgekehrt F auf BC sich von B über C ins Unendliche bewegen, so ist es möglich, daſs sich AF einer Grenzlage AX nähert, die mit AD einen endlichen Winkel einschlieſst; andererseits ist es auch möglich, daſs diese Grenzlage mit AD selbst zusammenfällt. Unsere Anschauung erklärt das letztere für richtig; doch ist es trotz zahlloser Versuche nicht gelungen, mit Hilfe der bis jetzt eingeführten Grundlagen diese Thatsache zu beweisen. Wir sprechen daher mit *Euklid* das *Axiom* aus:

Wenn zwei Gerade mit einer dritten entgegengesetzte Winkel bilden, welche zusammen weniger als einen Gestreckten betragen, so schneiden sie sich, und zwar selbstverständlich auf derjenigen Seite der dritten Geraden, auf der jene entgegengesetzten Winkel liegen.

2. **Folgerungen**: a. *Korrespondierende Winkel und Wechselwinkel an Parallelen sind gleich, entgegengesetzte Winkel und korrespondierende Wechselwinkel supplementär. Denn andernfalls würden die inneren entgegengesetzten Winkel auf der einen Seite der Sekante zusammen mehr, auf der andern weniger als einen Gestreckten betragen, was ein Schneiden der Parallelen bedingen würde.*

b. *Zu jeder Geraden ist durch einen Punkt auſserhalb derselben immer eine und nur eine Parallele möglich.*

c. *Schneidet eine Gerade die eine von zwei Parallelen, so schneidet sie auch die andere.* Denn sonst wäre sie ihr parallel, und wir hätten zu ihr zwei durch einen Punkt gehende Parallelen.

d. *Sind zwei Gerade einer dritten parallel, so sind sie auch unter einander parallel.* Denn verbindet man je einen Punkt zweier dieser drei Geraden durch eine Gerade miteinander, so schneidet dieselbe auch nach c. die dritte Gerade;

www.rcin.org.pl

durch Vergleichung der entstehenden korrespondierenden Winkel folgt dann sofort das Behauptete.

e. *Winkel mit paarweise parallelen Schenkeln sind gleich oder supplementär.*

3. Lehrsatz: *Die Winkelsumme eines Dreiecks beträgt einen Gestreckten.*

Beweis: Legt man beim Dreieck ABC eine Parallele DE zu AB durch C, so ist $\sphericalangle DCA = \alpha$, $\sphericalangle BCE = \beta$, $\sphericalangle DCA + ACB + BCE = \alpha + \beta + \gamma = 1$ Gestreckter.

Zusatz 1. Die drei inneren Winkel des Dreiecks lassen sich in diesem Satze einzeln durch je einen anliegenden Aufsenwinkel ersetzen. Hierdurch erhält der Satz die folgenden drei weiteren Formen:

a. *Ein Aufsenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden Dreieckswinkel, welche nicht seine Nebenwinkel sind.*

b. *Zwei Aufsenwinkel eines Dreiecks betragen zusammen einen Gestreckten mehr als der Dreieckswinkel, welcher der Nebenwinkel zu keinem von beiden ist.*

c. *Die drei Aufsenwinkel eines Dreiecks betragen zusammen zwei Gestreckte.*

Zusatz 2. Nach Einführung des Parallelenaxioms reduzieren sich die Fälle von Dreiseiten, die keine Dreiecke sind, auf die beiden, dafs entweder alle drei Geraden parallel sind, oder dafs zwei parallel sind und beide durch die dritte geschnitten werden.

4. Von den scheinbaren Beweisen für das Parallelenaxiom wollen wir hier nur den *Bertrand*'schen vorführen, weil er am meisten Schein für sich hat.

Denken wir uns eine Gerade in unendlich viele gleiche Teile geteilt und durch die Teilpunkte Gerade unter gleichen Winkeln angelegt, so sind diese Geraden sämtlich parallel und die entstehenden Parallelstreifen sind gleich, wie sich durch Aufeinanderlegen zweier verifizieren läfst. Die ganze Ebene enthält somit unendlich viele solcher gleichen Streifen. Andererseits ist das unendliche Flächenstück, welches durch die Schenkel eines Winkels aus der Ebene ausgeschnitten wird, ein *endlicher* Bruchteil der letzteren, da es bei endlicher Vervielfältigung einen vollen Winkel oder mehr liefert. Ist

www.rcin.org.pl

es nun möglich, in einem der Parallelstreifen eine zweite Parallele zur benachbarten Geraden zu ziehen, so ist in dem Streifen, der nur einen unendlich kleinen Bruchteil der Ebene ausmacht, ein Winkelraum ganz enthalten, der ein endlicher Bruchteil der Ebene ist.

So plausibel auch diese Beweisführung auf den ersten Blick erscheint, so mufs sie doch verworfen werden, weil sie mit unendlichen Gröfsen in durchaus unzulässiger Weise operiert. Unendliche Gröfsen werden bei wissenschaftlich strengen Betrachtungen immer nur in der Weise eingeführt, dafs man endliche Gröfsen nach einem bestimmt vorgeschriebenen Gesetze über jede Grenze wachsen läfst. Von einem Grenzübergang ist aber bei dem Bertrand'schen Beweise keine Rede; die Bemühungen, einen solchen vorzunehmen, stofsen auf unüberwindliche Schwierigkeiten.

5. Das Scheitern aller Versuche, das Parallelenaxiom zu beweisen, führte zu einer überaus merkwürdigen Weiterentwicklung der Geometrie. Schon von *Gauss* wurde der Gedanke angeregt, es müsse sich eine widerspruchsfreie Geometrie herstellen lassen, welche das Parallelenaxiom verwirft. Dieser Gedanke wurde hauptsächlich von *J. Bolyai* und *Lobatschewsky* verwirklicht durch die Konstruktion einer Geometrie, die man im Gegensatz zu der gewöhnlichen, der *Euklidischen*, die *nicht-Euklidische* Geometrie, auch die *absolute* Geometrie zu nennen pflegt. Dieselbe hat sämtliche Sätze, die wir vor dem gegenwärtigen Paragraphen herleiteten und ebenso eine entsprechende Zahl stereometrischer Sätze mit der Euklidischen Geometrie gemeinsam, weicht aber im Übrigen vollständig von ihr ab. Behufs eingehenderen Studiums der nicht-Euklidischen Geometrie ist auf das Werk von *J. Frischauf*: „*Elemente der absoluten Geometrie*" zu verweisen. Indessen erscheint es zweckmäfsig, einige Resultate dieser Geometrie hier anzuführen.

a. Ist $AB \perp AC$ und ist CD unter den von C ausgehenden Halbgeraden diejenige, welche am meisten gegen AB hingeneigt ist ohne sie zu schneiden, so dafs also jede in den Winkelraum ACD fallende Halbgerade AB schneidet, so wird CD nach Bolyai als die Parallele zu AB für den

4*

www.rcin.org.pl

Abstand AC bezeichnet; die übrigen durch C gehenden Geraden, die mit AB keinen Punkt gemeinsam haben, werden nur als nicht schneidende Gerade bezeichnet. $\sphericalangle\, ACD$ heiſst der Parallelwinkel für die Entfernung AC. Der Parallelwinkel ist verschieden für verschiedene Abstände; er nimmt zu für abnehmende Entfernungen und nähert sich bei verschwindender Entfernung einem Rechten. In der nicht-Euklidischen Geometrie sind die Winkelverhältnisse von den absoluten Längen nicht unabhängig.

b. Dreiecke können eine Winkelsumme besitzen, die nach § 9, 5 nicht mehr als zwei Rechte betragen kann, aber im allgemeinen unter zwei Rechten liegt. Dreiecke von gleicher Winkelsumme (die kleiner als zwei Rechte ist) haben gleichen Flächeninhalt. Haben zwei Dreiecke den Flächeninhalt i_1 und i_2, die Winkelsumme σ_1 und σ_2, so ist

$$i_1 : i_2 = (2R - \sigma_1)\,(2R - \sigma_2).$$

Es giebt ein gröſstes Dreieck, dessen Winkelsumme gleich Null ist, wie auch der Flächeninhalt irgend einer geradlinigen, begrenzten Figur von bestimmter Seitenzahl einen bestimmten Wert nicht überschreiten kann. *Bei verschwindend kleinen Dreiecken nähert sich die Winkelsumme einem Gestreckten, wie überhaupt für unendlich kleine Figuren die nicht-Euklidische Geometrie in die Euklidische übergeht.*

6. Als hervorspringendster Unterschied zwischen Euklidischer und absoluter Geometrie muſs bezeichnet werden, daſs in der ersteren die Längen an sich (wie später weiter ausgeführt wird) keine Rolle spielen, sondern in allen Relationen nur *Längenverhältnisse* auftreten, während in der absoluten Geometrie die Längen selbst von bestimmendem Einfluſs sind. Von einer Willkürlichkeit der Längeneinheit kann hier nicht mehr die Rede sein. Die Beziehungen zwischen Längen und Winkeln erscheinen aber abhängig von einer Konstanten k, deren Wert sich nicht herleiten läſst. Jeder Wert dieser Konstanten giebt ein anderes System der Geometrie; dem Werte $k = \infty$ entspricht die Euklidische Geometrie. Es wäre denkbar, wenn auch unseren Vorstellungen durchaus widerstreitend, daſs in Figuren von uns zugäng-

www.rcin.org.pl

licher Gröſse die Euklidische Geometrie so nahezu gilt, daſs eine Abweichung von ihr nicht zu bemerken ist, daſs dagegen bei gröſseren Dimensionen, etwa bei Fixsternfernen, eine Abweichung stattfindet.

7. Wir wollen an dieser Stelle noch einen weiteren Satz von *Legendre* einfügen, der eine Ergänzung zu demjenigen von § 9, 5 bildet:

Wenn die Winkelsumme eines Dreiecks von endlichen Dimensionen ein Gestreckter ist, so ist sie es bei jedem.

Beweis. Zerlegt man das Fundamentaldreieck mit der Winkelsumme von einem Gestreckten durch eine durch einen Eckpunkt gehende Gerade in zwei kleinere Dreiecke, so muſs jedes derselben ebenfalls dieselbe Winkelsumme besitzen; denn die Summe der beiden Winkelsummen muſs nach Abzug von einem Gestreckten wieder diejenige des Fundamentaldreiecks geben, was nicht möglich ist, wenn nur eine derselben weniger als einen Gestreckten beträgt. Diese Zerlegung läſst sich beliebig oft wiederholen und man kann mit Hilfe derselben leicht beweisen, daſs in jedem Dreieck, welches sich ganz in das Fundamentaldreieck legen läſst, die Winkelsumme dieselbe ist. Andererseits überzeugt man sich aber in gleicher Weise davon, daſs in jedem Dreieck, welches sich in kleinere Dreiecke zerlegen läſst, deren Winkelsummen sämtlich einem Gestreckten gleich sind, die Winkelsumme ebenso groſs ist. Zerlegt man nun irgend ein Dreieck in so kleine Dreiecke, daſs sie in dem Fundamentaldreieck Platz finden, so folgt das Weitere von selbst.

8. Es ist nun noch die Frage aufzuwerfen: welche wissenschaftliche Stellung ist der nicht-Euklidischen Geometrie einzuräumen? Die Meinungen gehen in dieser Hinsicht weit auseinander. Während manche dieselbe in das Gebiet des „wissenschaftlichen Aberglaubens“ verweisen, gehen andere, wie *Zöllner*, so weit, ihr wirkliches Bestehen als möglich anzusehen, so daſs sich z. B. bei sehr groſsen Dreiecken, wie sie in astronomischen Untersuchungen vorkommen, eine merkliche Verschiedenheit der Winkelsumme von einem Gestreckten herausstellen könnte. Wir wollen unserer Beurteilung zwei Gesichtspunkte zu Grunde legen.

www.rcin.org.pl

a. Das Parallelenaxiom ist trotz zahlreicher, ernstlicher Bemühungen, auch bedeutender Mathematiker, nicht bewiesen; auf der Voraussetzung seiner Ungiltigkeit hat die nicht-Euklidische Geometrie eine umfangreiche Reihe von Schlüssen aufgebaut, ohne dafs sich ein Widerspruch bemerklich gemacht hätte. Man hat hieraus geschlossen, dafs das Parallelenaxiom überhaupt unbeweisbar sei, d. h. dafs es sich nicht auf konstruktivem Wege und durch logische Schlüsse aus den übrigen Grundvoraussetzungen der Geometrie herleiten lasse. Allein dieser Schlufs ist nicht zutreffend. Wenn auch eine grofse Zahl umfangreicher Schlufsreihen auf keinen Widerspruch führt, so ist damit doch noch nicht dargethan, dafs man nicht bei anderen Folgerungen auf einen Widerspruch stofsen könnte. Thatsächlich ist die Beweisbarkeit des Parallelenaxioms nur in hohem Grade unwahrscheinlich gemacht; der negative Beweis der Unbeweisbarkeit ist nicht erbracht und läfst sich vielleicht auch niemals erbringen; man kann eben das Problem nicht so bestimmt formulieren, wie etwa das der algebraischen Lösbarkeit der Gleichungen von höherem als dem vierten Grade oder der Quadratur des Kreises, der Verdoppelung des Würfels, deren Unmöglichkeit sich erweisen läfst. Es ist demnach die Möglichkeit, dafs die nicht-Euklidische Geometrie noch einmal als unzulässig erkannt wird, nicht unbedingt ausgeschlossen.

b. Wir haben früher gesehen, dafs zum Aufbau der Geometrie unsere Verstandesthätigkeit nicht genügt; wir müssen nicht allein gewisse gar nicht so einfache Grundvorstellungen der Anschauung entleihen, sondern uns auch bei unseren geometrischen Schlüssen fortwährend durch dieselbe unterstützen lassen*).

Auch die *Bolyai*'sche Entwicklung der Elementarbegriffe kommt, selbst von dem vorausgesetzten Axiom der Kongruenz abgesehen, ohne ein weiteres Axiom nicht durch, wenn sie es auch anstrebt (vgl. § 3, 5). Die absolute Geometrie ist

*) Gegenteilige Ansichten sind vielfach verbreitet. Man sehe hierüber z. B. die soeben erschienene Abhandlung: *Petersen*, Bemerkungen über den Beweis des Satzes von der Winkelsumme des Dreiecks; Math. Ann. B. 29, p. 239.

www.rcin.org.pl

demnach kein freies Erzeugnis der Denkthätigkeit, sondern wurzelt zum grofsen Teil in der Anschauung. Während in anderen Fällen die Anschauung auch in der absoluten Geometrie als kompetent erachtet werden mufs, wird sie in einem einzigen Falle ausgeschlossen. Die nicht-Euklidische Geometrie ist keine einheitliche Bildung.

Aus den angeführten Gründen kann die nicht-Euklidische Geometrie wohl als eine höchst interessante Spekulation gelten, die möglicherweise logisch nicht zu widerlegen ist; sie hat auch das unleugbare Verdienst, klar zu entscheiden, welche Sätze der Geometrie vom Parallelenaxiom unabhängig sind, welche nicht; aber als eigentliche Geometrie, d. h. Lehre vom Raum, kann sie nicht angesehen werden. Der Raumbegriff wurzelt in der Anschauung, und giebt man einmal zu, dafs überhaupt der Anschauung etwas zu entlehnen ist, so braucht man logischer Weise vor anderweitigen Entlehnungen nicht zurück zu schrecken. Das Parallelenaxiom ist mit unserer Vorstellungsweise nicht minder eng verwachsen, als das Axiom der Kongruenz und das Axiom der Ebene.

Wir beschäftigen uns in der Folge nur mit der Euklidischen Geometrie. Die weiteren planimetrischen Sätze sind sämtlich ohne Voraussetzung des Parallelenaxioms ungiltig.

9. In § 9, 5 erwähnten wir schon, dafs auch der *Legendre*'sche Satz, dafs die Winkelsumme eines Dreiecks zwei Rechte nicht überschreiten könne, hinfällig wird, wenn man die Gerade als eine endliche, in sich selbst zurücklaufende Linie ansieht. Auch die Ebene mufs dann als endliche, in sich selbst zurückkehrende Fläche betrachtet werden. Die Gerade erhält so die Eigenschaften eines Kreises, die Ebene die einer Kugel. Die Planimetrie geht geradezu in die *Sphärik* über.

F. Klein bezeichnet diese Geometrie als die *elliptische*, die nicht-Euklidische als die *hyperbolische*, die Euklidische aber als die *parabolische*, indem er die in § 5 erörterten Mafsbestimmungen mit den drei Geometrieen in Beziehung setzt. Eine weitere Erörterung dieses Gegenstandes kann hier nicht stattfinden, weshalb auf die in § 5 angezogene Litteratur zu verweisen ist.

www.rcin.org.pl

§ 16.

Die unendlich fernen Punkte.

1. Es seien ein Punkt A und eine Gerade b gegeben und durch A eine Gerade a gelegt, welche b im Punkte B schneidet. Dreht sich nun a in bestimmtem Sinne um A, so wird der Schnittpunkt B auf b fortrücken und zwar über jede Grenze weit, bis schlieſslich $a \parallel b$ wird, wo dann ein Schneiden überhaupt nicht mehr stattfindet. Setzt man die Drehung fort, so wird, dem Parallelenaxiom zufolge, sofort wieder ein Schneiden eintreten und zwar auf der entgegengesetzten Seite von b. Nach Vollendung einer vollen Umdrehung ist B an seinen Ausgangspunkt zurückgekehrt. Die sich drehende Gerade a schneidet also immer b und zwar unter einem Winkel, der desto kleiner wird, je weiter sich B von dem Fuſspunkte des von A auf a gefällten Perpendikels entfernt, um schlieſslich unter jede Grenze abzunehmen; eine Ausnahme findet nur für $a \parallel b$ statt. Für viele Untersuchungen ist es nun vorteilhaft, nicht immer das Parallelsein von zwei Geraden als Separatfall anführen zu müssen, sondern dasselbe als Spezialfall des Schneidens behandeln zu können derart, daſs alle Sätze, die für sich schneidende Gerade gelten, sofort nach einer bestimmten Regel auf parallele übertragen werden können. Durch das besprochene Drehungsgesetz ist uns hierzu der Weg angezeigt. Da der Punkt B in desto weitere Ferne rückt, je mehr sich a der Parallellage zu b nähert, so sagen wir, daſs sich a und b im Falle des Parallelseins *in unendlicher Ferne schneiden* und dann einen verschwindend kleinen Winkel mit einander bilden. Da sich zwei Gerade nur in *einem* Punkte schneiden, so nehmen wir der Gleichmäſsigkeit wegen an, daſs auf jeder Geraden nur *ein* unendlich ferner Punkt vorhanden ist, zu dem man durch Weitergehen nach beiden Richtungen hin gelangt. Die Gerade erscheint dann im Unendlichen geschlossen. Andernfalls würden sich die Parallelen in mehreren Punkten schneiden. Die unendlich fernen Punkte zweier in einer Ebene befindlichen Geraden können, ohne das Grundgesetz des einfachen Schneidens aufzugeben, nicht als identisch an-

www.rcin.org.pl

gesehen werden, aufser wenn die Geraden parallel sind. Die Ebene enthält daher unendlich viele unendlich ferne Punkte, die man sich zu einer Linie vereinigt denken kann. Diese Linie besitzt die Eigenschaft, dafs sie von jeder in der Ebene gelegenen Geraden in einem einzigen Punkte geschnitten wird — denn jede solche hat einen einzigen Punkt im Unendlichen. Eine Linie von dieser Eigenschaft ist aber immer eine Gerade. Denn man kann durch zwei beliebige Punkte einer jeden Linie eine Gerade legen, die, wenn kein Schneiden statthaben soll, ganz in die Linie fallen mufs; durch Fortsetzung dieses Schlusses gelangt man zu dem Resultat, dafs aufser der Geraden keine Linie existiert, die von keiner Geraden in mehr als einem Punkte geschnitten wird. Um konsequent zu sein, müssen wir daher annehmen, *dafs alle unendlich fernen Punkte einer Ebene in einer unendlich fernen Geraden liegen.* Eine wirkliche Vorstellung läfst sich hiermit freilich nicht mehr verbinden.

Im Gegensatz zu manchen Darstellungen ist es nicht unnötig zu betonen, dafs diese Festsetzungen einen rein *symbolischen* Charakter tragen und nur bezwecken, die Sätze über sich schneidende Gerade ohne Änderung der Ausdrucksweise direkt auf parallele Gerade übertragen zu können. Eine reale Bedeutung kommt ihnen nicht zu; parallele Gerade schneiden sich eben in Wirklichkeit gar nicht. Wir werden es auch als unzulässig vermeiden, auf unsere Festsetzungen Beweise zu basieren; wir werden vielmehr in jedem einzelnen Falle nachweisen, dafs sie zu keinem Widerspruche führen. Dafs der Satz über die Winkelsumme des Dreiecks erhalten bleibt, wenn zwei der Geraden parallel werden, leuchtet ein; auch bei drei parallelen Geraden läfst er sich aufrecht erhalten. Ubrigens werden wir in der Folge ebenso wie bei dem Satze über die Winkelsumme des Dreiecks die Erfahrung machen, dafs es gar nicht gelingt, die Sätze direkt allgemein nachzuweisen, sondern dafs man, von dem Spezialfall des Parallelseins gewisser Geraden ausgehend, erst allmählich zu dem allgemeinen Satze aufsteigt.

2. Wir wurden zur Interpretation der unendlich fernen Punkte durch keine zwingenden Schlüsse, sondern lediglich

www.rcin.org.pl

durch Analogieen geführt und begnügten uns mit dem Nachweis, dafs die Interpretation widerspruchsfrei sei. Damit ist aber nicht ausgeschlossen, dafs noch andere widerspruchsfreie Darstellungen des Unendlichen existieren. Es ist merkwürdig, dafs algebraische Untersuchungen wirklich zu einer solchen führen, die wir hier kurz skizzieren wollen.

Die komplexen Zahlen $x = \xi + \eta i$ lassen sich in bekannter Weise als Punkte einer Ebene darstellen; vermöge irgend einer linearen Transformation, z. B. $y = \frac{1}{x}$, wird dem Punkte x ein einziger, ganz bestimmter y zugeordnet, so lange x endlich und von Null verschieden ist. Nimmt man nun der Gleichmäfsigkeit wegen an, dafs dies auch für $x = 0$ und $x = \infty$ noch der Fall sein möge, so müssen sämtliche unendlich fernen Punkte der Ebene als zusammenfallend angesehen werden, da sie dem einzigen Punkte 0 entsprechen. Wir werden also hier zu der Hypothese gedrängt, dafs die Ebene nur einen einzigen unendlich fernen Punkt besitzt. Alle nicht parallelen Geraden der Ebene schneiden sich dann zweimal, einmal im Endlichen und einmal im unendlich fernen Punkte; parallele Gerade haben in letzterem zwei zusammenfallende Punkte gemeinsam, sie *berühren* sich im Unendlichen. Die Theorie der konformen Abbildung lehrt ferner, dafs ein in der Ebene der komplexen Zahlen gegebener Kreis durch irgend eine lineare Transformation wieder als Kreis abgebildet wird; die Gerade tritt hierbei als Spezialfall, nämlich als Kreis mit unendlich grofsem Radius auf. Dies stimmt vollkommen zu der zweiten Hypothese. Zwei Kreise schneiden sich, wenn sie nicht getrennt liegen, immer in zwei Punkten, die im Falle der Berührung in einen einzigen zusammenfallen können. Man mufs daher bei dieser Grundauffassung nicht die Gerade, sondern den *Kreis* als Grundgebilde ansehen. Während sich zwei eigentliche Kreise oder ein Kreis und eine Gerade, wenn überhaupt, in zwei im Endlichen gelegenen, eventuell zusammenfallenden Punkten schneiden, rückt von denselben bei zwei Geraden einer (eventuell auch beide) ins Unendliche. Dafs wir diese Hypothese in unserer Geometrie nicht weiter benutzen, hat seinen Hauptgrund

www.rcin.org.pl

darin, dafs es einfacher erscheint, mit Grundelementen zu operieren, die nur *einen* Schnittpunkt besitzen. Dann gelangen wir aber zu dem Kreise erst auf einer höheren Stufe, wo er auch nur als Spezialfall der Kegelschnitte auftritt.

In der nicht-Euklidischen Geometrie macht man die Annahme, dafs jede Gerade *zwei* unendlich ferne Punkte besitze, in der elliptischen Geometrie sind dieselben imaginär.

Wir beschliefsen an dieser Stelle die Besprechung der Dreigeradengebilde; die weiteren Untersuchungen, zu denen sie noch anregen: die Aufstellung der Relationen zwischen Seiten und Winkeln, sowie die Behandlung des Flächeninhalts, werden besser erst auf der folgenden Stufe in Angriff genommen.

§ 17.

Vierseit und Viereck; Allgemeineres.

1. Das *Vierseit* wird von vier Geraden gebildet, die sich in höchstens sechs Punkten schneiden, das *Viereck* von vier Punkten, die durch höchstens sechs Gerade verbunden sind*). Beim Vierseit liegen im allgemeinen auf einer Geraden je drei Schnittpunkte, beim Viereck gehen durch jeden Punkt drei Gerade; beide Gebilde sind im allgemeinen nicht identisch.

Besonders zu behandelnde Spezialfälle entstehen beim Vierseit dadurch,

a. dafs drei der Geraden durch einen Punkt gehen — vier durch einen Punkt gehende Gerade bieten nichts Bemerkenswerthes,

b. dafs die Geraden paarweise parallel sind,

c. dafs zwei der Geraden parallel sind — drei oder vier parallele Gerade können aufser acht bleiben.

Beim Viereck ist, abgesehen von dem möglichen Parallelwerden eines Teils der Geraden, der Fall hervorzuheben, dafs

---

*) *Carnot* führte zuerst in seiner *„Géométrie de position“* die Ausdrücke *vollständiges* n-seit und n-eck für ein aus n Linien, resp. aus n Punkten bestehendes Gebilde ein, um das einfache Wort n-eck im gewöhnlichen Sinne zu gebrauchen. Wir unterdrücken das Wort *„vollständig“* und bemerken es, wo nötig, besonders, falls das Wort n-eck für eine von n Strecken begrenzte Figur gebraucht wird.

www.rcin.org.pl

drei der Punkte in einer Geraden liegen. Alsdann treten vier Punkte auf, die durch nur vier Gerade verbunden werden, so dafs das Gebilde mit dem Falle c. des Vierseits übereinstimmt.

2. Um uns ein Bild eines allgemeinen Vierseits (ohne Parallele und zusammenfallende Punkte) zu verschaffen, gehen wir von drei sich schneidenden Geraden a, b, c aus (Fig. 4).

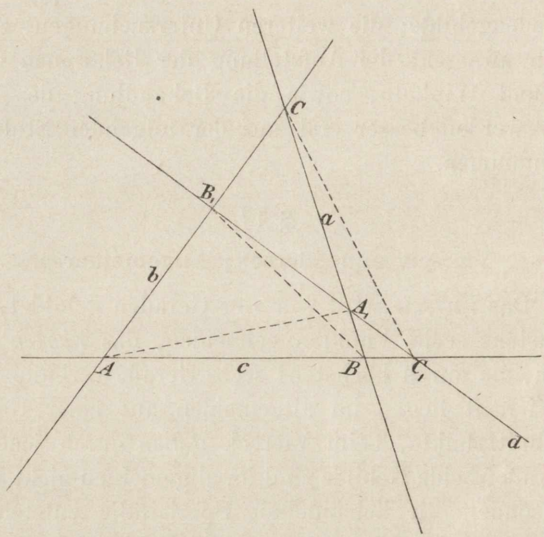


Fig. 4.

Die vierte Gerade d kann zu dem von a, b, c begrenzten Dreiecksraum ABC eine doppelte Lage haben. Sie geht entweder durch $\triangle ABC$ und schneidet dann zwei der Dreiecksseiten in ihrem begrenzten Teile, während sie die dritte in ihrem unbegrenzten Teile trifft; oder sie tritt in $\triangle ABC$ nicht ein und schneidet alle drei Dreiecksseiten in ihren unbegrenzten Teilen. Würde man aber d mit a oder b vertauschen, so erhielte man den vorigen Fall. Die allgemeinen Vierseite sind daher alle von demselben Typus, während jedoch die vier Geraden, was die äufsere Form anlangt, nur paarweise dieselbe Rolle spielen (b und c, a und d). Man kann Teile der vier Geraden auf drei Arten in geschlossenem Zuge durchlaufen. Denn vier Gerade lassen 4 . 3 . 2 . 1 Anordnungen

www.rcin.org.pl

zu; da es aber gleichgiltig ist, welche Gerade dabei als die erste angenommen wird, da ferner auch die Reihenfolge ohne wesentlichen Einfluſs umgekehrt werden kann, so ergeben sich $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 2} = 3$ in Betracht kommende Anordnungen. Indem man dabei nur die Schnittpunkte je zweier aufeinanderfolgenden Geraden ins Auge faſst, erhält man drei *Vierecke* von wesentlich verschiedener Gestalt. Wir haben

a. ein Viereck mit lauter konkaven Winkeln (auf der einen Seite des als geschlossen gedachten Umfangs): AB_1A_1B oder $bdac$;

b. ein Viereck mit einem konvexen Winkel: AC_1A_1C oder $cdab$;

c. ein Viereck, dessen Umfang sich selbst durchdringt: BC_1B_1C oder $cdba$.

Immer sind drei begrenzte Flächenteile, die einander nicht durchsetzen, vorhanden: ein Viereck AB_1A_1B und zwei Dreiecke A_1BC_1 und A_1B_1C. In jedem der Vierecke (a), (b), (c) heiſsen zwei nicht auf einander folgende Seiten *Gegenseiten*.

Die sechs Schnittpunkte der Seiten des Vierseits lassen noch drei Verbindungsgerade zu, die nicht zu den Seiten gehören; dieselben heiſsen *Diagonalen* des Vierseits. Von jedem der sechs Punkte kann nämlich nur nach einem einzigen andern Punkte eine Diagonale gezogen werden u. s. w. Die durch je eine Diagonale verbundenen Punkte (AA_1, BB_1, CC_1) sollen *Gegenpunkte* heiſsen. Je zwei Diagonalen schneiden sich in einem *Diagonalpunkte*, deren es also drei giebt.

Sind zwei Paar Seiten parallel, so liegen nur vier Schnittpunkte und zwei Diagonalen im Endlichen; das Vierseit heiſst dann ein *Parallelogramm*.

Sind zwei Seiten parallel (*Paralleltrapez*), so fällt ein Schnittpunkt ins Unendliche; hierdurch wird die eine Diagonale zu den beiden parallelen Seiten parallel.

3. Die Gestalt des allgemeinen Vierecks kann eine doppelte sein. Gehen wir von dem Dreieck ABC aus, so kann der vierte Punkt D zu demselben eine dreifache Lage haben:

a. er fällt in das Dreieck ABC,

www.rcin.org.pl

b. er fällt in den Winkelraum der Scheitelwinkel der Dreieckswinkel,

c. er fällt in einen der drei übrigen Raumteile.

Fall a. und b. gehen indessen durch Vertauschen der Punkte in einander über. Entweder liegt daher einer der vier Punkte innerhalb des von den drei andern gebildeten Dreiecks, oder es liegen alle vier aufserhalb des von den drei andern gebildeten Dreiecks (Fig. 5).

Die entstehenden begrenzten Raumteile sind immer sechs Dreiecke. Die sechs Geraden schneiden sich aufser in den vier gegebenen noch in drei weiteren Punkten A_1, B_1, C_1, welche *Diagonalpunkte* heifsen. Die drei Verbindungsgeraden je zweier dieser Diagonalpunkte: $B_1 C_1$, $C_1 A_1$, $A_1 B_1$ mögen *Diagonalen* des Vierecks heifsen.

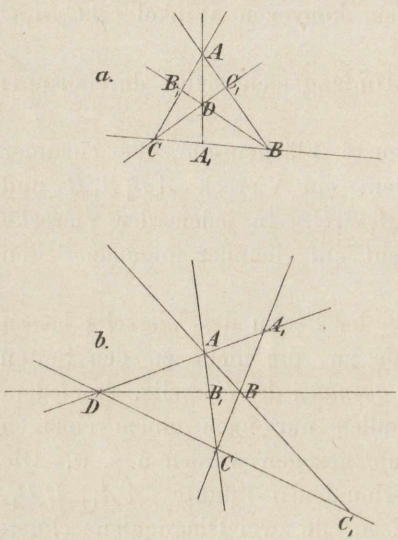


Fig. 5.

4. Über Vierseite und Vierecke lassen sich Gleichheitssätze aufstellen, die aber komplizierter werden als beim Dreiseit und meistens nichts von Bedeutung darbieten. Ein Umstand tritt indessen auf, der beim Dreiseit nicht vorkam und der in der Folge unser Hauptinteresse in Anspruch nehmen wird: es werden nämlich Strecken lediglich durch andere Strecken bestimmt. Wenn sich n Gerade gegenseitig durchschneiden, ohne dafs Schnittpunkte zusammenfallen, so werden auf jeder $(n-2)$ nicht durch lineare Beziehungen verknüpfte Strecken ausgeschnitten, im ganzen also $n(n-2)$. Nun können zunächst drei Gerade so festgelegt werden, dafs sie auf einander drei willkürliche Strecken ausschneiden. Jede weitere Gerade ist vollständig festgelegt, wenn die beiden Strecken angegeben werden, welche sie von zwei der ersten

www.rcin.org.pl

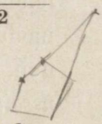
Geraden, von einem der schon festgesetzten Punkte aus unter Bestimmung der Richtung gerechnet, abschneiden.

Somit ist die gegenseitige Lage der n Geraden durch $3 + 2(n - 3) = 2n - 3$ Strecken bestimmt; die übrigen von ihnen fixierten

$$n(n-2) - (2n-3) = n^2 - 4n + 3 = (n-3)(n-1)$$

Strecken müssen sich aus diesen berechnen lassen. Beim Vierseit insbesondere treten acht Strecken auf, von denen fünf willkürlich sind, *so daſs drei Gleichungen zwischen den acht Strecken existieren.* $4(4-2)=8$, $(4-3)(4-1)=3$

Beim allgemeinen *n-eck* liegen auf jeder der $\frac{n(n-1)}{2}$ Geraden



$$\frac{(n-2)(n-3)}{2} + 1 = \frac{n^2 - 5n + 8}{2}$$

Strecken; denn die beiden Eckpunkte, welche der Geraden angehören, bestimmen eine und die Schnittpunkte der Verbindungslinien je zweier der übrigen $(n - 2)$ Eckpunkte je eine Strecke. Im ganzen sind also

$$\frac{n(n-1)(n^2 - 5n + 8)}{4} = \frac{n^4 - 6n^3 + 13n^2 - 8n}{4}$$

Strecken bestimmt. Nachdem aber ein Dreieck fixiert ist, kann jeder weitere Eckpunkt durch seine Abstände von zweien der Dreieckspunkte wenigstens zweideutig festgesetzt werden; durch $3 + 2(n - 3) = 2n - 3$ Strecken sind also die übrigen

$$\frac{n^4 - 6n^3 + 13n^2 - 8n}{4} - (2n - 3) = \frac{n^4 - 6n^3 + 13n^2 - 16n + 12}{4}$$

bestimmt. Beim Viereck treten zwölf Strecken auf, zwischen denen sieben Relationen bestehen.

Gleichungen zwischen meſsbaren Gröſsen, also insbesondere auch zwischen Strecken, werden als *metrische Relationen* bezeichnet.

5. Zwischen den Winkeln eines n-seits, bei dem nicht mehr als je zwei Gerade durch einen Punkt gehen, bestehen sehr einfache Beziehungen. Wir beachten, daſs die Ersetzung einer der Geraden durch eine Parallele an den Winkelverhältnissen nichts ändert. Die Lage irgend einer der Geraden ist daher hinsichtlich der Winkelrelationen genügend be-

www.rcin.org.pl

stimmt, wenn man den Winkel kennt, den sie mit einer der als fest angenommenen Geraden bildet. Behandelt man die vier konkaven Winkel, die an einem Schittpunkte auftreten, als einen einzigen, so sind $\frac{n(n-1)}{2}$ Winkel vorhanden, von denen nur $(n-1)$ willkürlich sind, so dafs

$$\frac{n(n-1)}{2}-(n-1)=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

Winkelrelationen bestehen müssen.

Der Winkel, den irgend zwei der Geraden aufser der als fest angenommenen mit einander bilden, läfst sich aber leicht aus den beiden, welche sie mit der letzteren bilden, nach dem Satze über die Winkelsumme des Dreiecks berechnen. *Hiernach sind alle Winkelrelationen beim allgemeinen n-seit linear.*

6. Besondere Aufmerksamkeit haben diejenigen Winkelrelationen auf sich gezogen, welche an den Teilen der n Geraden auftreten, die man nacheinander in geschlossenem Zuge durchlaufen kann. Eine geschlossene, geradlinig-n-seitige Figur im gewöhnlichen Sinne ist das einfachste Beispiel hiervon; doch kann sich der Linienzug auch selbst durchschneiden (Fig. 6). Man unterscheidet an jedem solchen Linienzuge zwei Seiten (in den Figuren ist die eine schraffiert), bei der einfachen, geschlossenen Figur insbesondere eine äufsere und eine innere; wir wollen sie die *positive* und *negative* nennen. Man kann nun zunächst jeder der n Geraden der Figur einen bestimmten Richtungssinn dadurch beilegen, dafs man den ganzen Umfang in der einen oder andern Richtung in einem Zuge durchlaufen denkt. Dann kann man jede Gerade in der festgesetzten Richtung über ihren Endpunkt verlängern und hierdurch n „*Aufsenwinkel*“ erzeugen, die in der Weise zu berechnen sind, dafs man sich die Drehung von der Verlängerung des ersten zur zweiten, der Verlängerung der zweiten zur dritten u. s. w. immer in demselben Drehungssinne und zwar von der negativen Seite der Verlängerung zur positiven der folgenden Geraden ausgeführt denkt. Um die Summe dieser Aufsenwinkel zu finden, denken wir uns von einem beliebigen Punkte aus zu den n Seiten in dem ihnen zukommenden Richtungssinne Parallele gelegt, welche dieselben

www.rcin.org.pl

Winkel einschliefsen. Man erkennt dann sofort, dafs die Summe dieser Winkel ein Vielfaches von $4R$ beträgt; denn wenn man die Winkel der Reihe nach durchläuft, wird man,

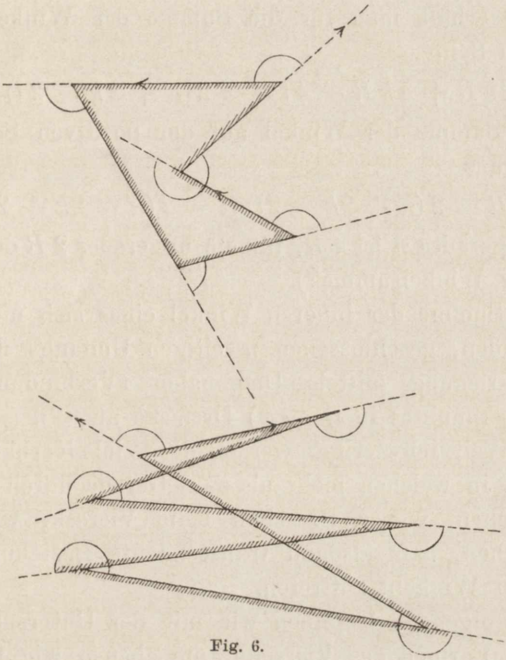


Fig. 6.

bis man zum ersten Schenkel zurückkehrt, eine ganze Zahl von vollen Umdrehungen ausgeführt haben. Im einfachsten Falle eines geschlossenen Umfangs, der sich nicht selbst durchschneidet und dessen innere Winkel alle konvex sind, erhält man (wenn kein Winkel als über $4R$ betragend angenommen wird) gerade $4R$, wie auch noch in anderer Weise dargethan werden kann.

Da jeder einzelne Winkel unter $4R$ liegt, so kann die Summe der Aufsenwinkel nicht mehr als $4(n - 1)R$ betragen.

Will man die Winkel summieren, welche auf der positiven oder negativen Seite des Linienzugs enstehen, ohne dafs eine Verlängerung vorgenommen wird, so verfahre man folgendermafsen.

www.rcin.org.pl

Die Winkel auf der negativen Seite betragen mit den entsprechenden Aufsenwinkeln zusammen je $2R$ oder $6R$, je nachdem sie konkav oder konvex sind. Beträgt also die Zahl der konvexen Winkel k, die Summe der Aufsenwinkel $4lR$, so erhält man für die Summe der Winkel auf der negativen Seite

$$2nR + 4kR - 4lR = 2(n + 2k - 2l)R.$$

Für die Summe der Winkel auf der positiven Seite findet man hieraus

$$4nR - 2(n + 2k - 2l)R = 2(n - 2k + 2l)R.$$

Für ein gerades n ist $4R$, für ein ungerades $2R$ der kleinste Wert der Winkelsumme*).

Die Summe der inneren Winkel eines sich nicht durchschneidenden, geschlossenen n-seitigen Umfangs findet man durch Zerlegung mittels Diagonalen (Verbindungsgeraden zweier Eckpunkte) in $(n - 2)$ Dreiecke als $(2n - 4)R$.

7. Weit schwieriger werden die Winkelverhältnisse bei Gebilden, in welchen mehr als zwei Gerade durch denselben Punkt gehen, wie z. B. schon beim Viereck; wir werden später sehen, dafs alsdann transcendente Beziehungen zwischen den Winkeln auftreten.

Im Folgenden beginnen wir mit der Untersuchung der speziellen Formen des Vierseits, um ebenso wie früher allmählich zu den allgemeinen Untersuchungen emporzusteigen.

§ 18.

Das Parallelogramm.

1. Bei dem Vierseit mit zwei Paaren paralleler Seiten, dem *Parallelogramm*, liegen zwei Eckpunkte im Unendlichen; die eine Diagonale ist die unendlich ferne Gerade. Zieht man die beiden andern Diagonalen, so kann die Figur auch als Viereck angesehen werden.

Leicht beweist man die folgenden Sätze mit alleiniger Benutzung der Gleichheits- und Parallelensätze.

---

*) Weitere Einzelnheiten über diesen Gegenstand findet man bei *Kruse*, *Elemente der Geometrie*, 1. Abt., p. 27 ff.

www.rcin.org.pl

2. Lehrsätze: a. Die nebeneinanderliegenden Winkel des Parallelogramms sind supplementär, die gegenüberliegenden gleich.

b. Jede Diagonale teilt das Parallelogramm in zwei gleiche Dreiecke.

c. Daher sind im Parallelogramm die gegenüberliegenden Seiten (d. h. ihre endlichen Teile) gleich.

d. Die beiden Diagonalen teilen das Parallelogramm in vier Dreiecke, von denen die gegenüberliegenden gleich sind, die Diagonalen halbieren sich daher einander.

e. Ein Viereck, bei dem zwei Paar Gegenseiten gleich sind oder ein Paar Gegenseiten gleich und parallel sind, ist ein Parallelogramm.

3. Die Parallelogramme werden eingeteilt in

a. *Quadrate* (mit vier gleichen Seiten und vier rechten Winkeln),

b. *Rechtecke* oder *Oblongen* (mit ungleichen Seiten und vier rechten Winkeln),

c. *Rhomben* oder *Rauten* (mit vier gleichen Seiten und schiefen Winkeln),

d. *Rhomboide* (mit ungleichen Seiten und schiefen Winkeln).

Über diese einzelnen Gattungen lassen sich noch mancherlei Sätze aufstellen, die hier übergangen werden können.

4. Zwischen den vier endlichen Strecken des Parallelogramms bestehen also zwei metrische Relationen; sind zwei anstofsende Seiten bekannt, so sind damit auch die beiden andern gegeben.

Die Sätze über das Parallelogramm verlangen in formeller Beziehung keine neuen Hilfsmittel; sie sind *alle* vom Parallelenaxiom abhängig.

§ 19.

Das Paralleltrapez; die Ähnlichkeit.

1. Das Vierseit mit zwei parallelen Seiten, das *Paralleltrapez*, kann eine doppelte Gestalt darbieten (Fig. 7); der Schnittpunkt A der beiden nicht parallelen Seiten kann näm-

www.rcin.org.pl

lich zwischen die beiden parallelen oder aufserhalb derselben fallen. Die folgenden Untersuchungen gelten für beide Spezialitäten gleichmäfsig, wenn nur festgehalten wird, dafs die Strecken, die von A aus in entgegengesetzter Richtung laufen, mit dem umgekehrten Zeichen zu versehen sind; die

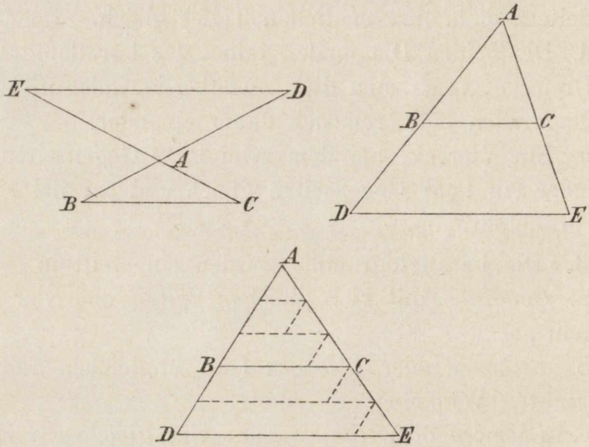


Fig. 7.

Strecken AB und AC mögen als positiv betrachtet werden. Die Zahl der metrischen Relationen zwischen endlichen Stücken beschränkt sich hier auf zwei, die durch die folgenden Sätze geliefert werden.

2. Lehrsatz: *Die von den beiden nicht parallelen Seiten durch die parallelen abgeschnittenen Strecken, von dem Schnittpunkte der ersteren aus gerechnet, stehen in Proportion.* Es ist also $AB : AD = AC : AE$.

Beweis: Nehmen wir zunächst an, dafs AB und AD ein gemeinsames Mafs besitzen, welches in AB $m$mal, in AD $n$mal enthalten ist (n ist eventuell negativ), so teilen wir hiernach AB und AD von A aus ein, legen durch die Teilpunkte Parallelen zu BC und DE und durch deren Schnittpunkte mit ACE Parallelen zu AD. Die entstehenden, den Teilen von ACE anliegenden Dreiecke sind, wie aus den Sätzen über Parallele und Parallelogramme unmittelbar folgt, gleich, woraus weiter hervorgeht, dafs AC und

www.rcin.org.pl

AE in resp. m und n *gleiche* Teile zerlegt werden. Es ist daher $AB:AD = m:n$ und $AC:AE = m:n$, also $AB:AD = AC:AE$.

Existiert kein gemeinsames Maſs von AB und AD, so teile man AB in m Teile von beliebiger Kleinheit; das $n$fache eines solchen Teiles mag dann kleiner sein als AD, während das $(n+1)$fache gröſser ist. Verfahren wir dann wie vorhin, so finden wir

$$\frac{n}{m} < \frac{AD}{AB} < \frac{n+1}{m},$$

$$\frac{n}{m} < \frac{AE}{AC} < \frac{n+1}{m},$$

also

$$-\frac{1}{m} < \frac{AD}{AB} - \frac{AE}{AC} < \frac{1}{m},$$

und da m beliebig groſs genommen werden kann, so wird

$$\frac{AD}{AB} - \frac{AE}{AC}$$

unter jeder endlichen Gröſse klein, d. h. $= 0$, wodurch wieder dasselbe Resultat erlangt ist*).

Die Hilfsmittel, mittels deren wir diesen Satz fanden, beschränken sich allerdings auf die Dreiecksgleichheitslehre, verbunden mit dem Parallelenaxiom; allein im allgemeinen sind *unendlich viele* Dreiecke zu betrachten und es ist ein Grenzübergang auszuführen. Dieser Umstand scheidet die folgenden Relationen scharf von den früheren.

3. Umkehrung: *Teilen zwei Gerade zwei andere sich schneidende von deren Schnittpunkt aus gerechnet in proportionale Teile* (mit Berücksichtigung der Vorzeichen der auf *einer* Geraden gelegenen Strecken), *so sind sie parallel.*

Beweis (Fig. 8): Wäre bei $AB : AD = AC : AE$ nicht $BC \nparallel DE$, so könnte man $BF \nparallel DE$ machen und hätte $AB : AD = AF : AE$. Aus diesen Proportionen würde aber $AC = AF$ folgen.

4. Lehrsatz: *Die begrenzten Teile der beiden parallelen Seiten des Paralleltrapezes stehen in demselben Verhältnis* (eine

---

*) Auf die verschiedenen Umformungen, denen die gefundene Proportion unterworfen werden kann, brauchen wir wohl nicht einzugehen.

www.rcin.org.pl

Rücksicht auf Vorzeichen ist hierbei nicht nötig), *wie die Stücke, welche sie von einer der beiden andern Seiten, von deren Schnittpunkt aus gerechnet, abschneiden.*

Beweis: In Fig. 9 machen wir $CF \parallel AD$ und haben

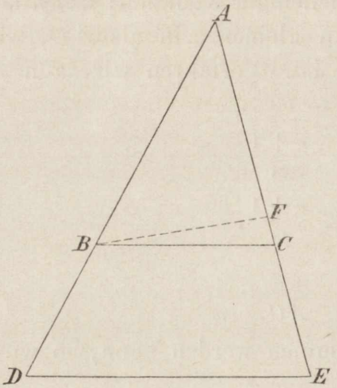


Fig. 8.

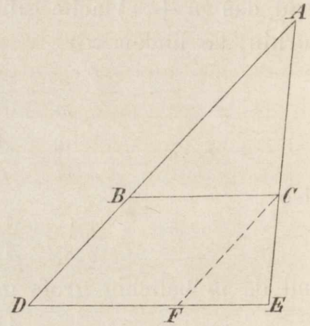


Fig. 9.

$EC : EA = EF : ED$ oder $CA : EA = FD : ED$, $FD = CB$ und somit $CA : EA = CB : ED$.

5. Zwei Dreiecke, deren Winkel gleich sind, lassen sich in die Lage von ABC und DAE bringen; ihre drei Seitenpaare stehen daher in Proportion. *Man nennt zwei solche Dreiecke ähnlich**).

Ohne Schwierigkeit beweist man durch Zurückführung auf die analogen Gleichheitssätze noch folgende Umkehrungen (*Ähnlichkeitssätze*):

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Paare ihrer Seiten in Proportion stehen und die eingeschlossenen oder die den gröſseren von ihnen gegenüberliegenden Winkel gleich sind; ferner wenn die drei Seiten in Proportion stehen.

6. Zwei ebene Gebilde überhaupt heiſsen ähnlich, wenn ihre sämtlichen homologen (entsprechenden) Winkel übereinstimmen, während die homologen Strecken in Proportion stehen. Daſs wirklich zu jedem vorgelegten Gebilde ein ähnliches existiert, dessen Strecken zu denen des ersten in beliebig gegebenem Verhältnis stehen, erkennt man unmittelbar,

*) Das Zeichen für die Ähnlichkeit ist $\sim$ (similis).

www.rcin.org.pl

indem man das erstere in Dreiecke zerlegt, dann zu einer beliebigen Strecke die homologe gezeichnet denkt und nun nach und nach durch Antragen gleicher Winkel zu sämtlichen Teildreiecken ähnliche erzeugt.

Ähnliche Gebilde stimmen in allen Mafsbeziehungen vollkommen überein, wenn man nur für die Strecken verschiedene Mafseinheiten wählt. Hieraus wird erst vollkommen klar, dafs in der Euklidischen Geometrie die *absolute Länge* der Strecken irrelevant ist.

Für die nicht-Euklidische und die elliptische Geometrie gilt nicht das Gleiche.

§ 20.

Der Satz des Menelaos.

1. Um nun endlich zu den metrischen Relationen beim allgemeinen Vierseit zu gelangen, betrachten wir drei belie-

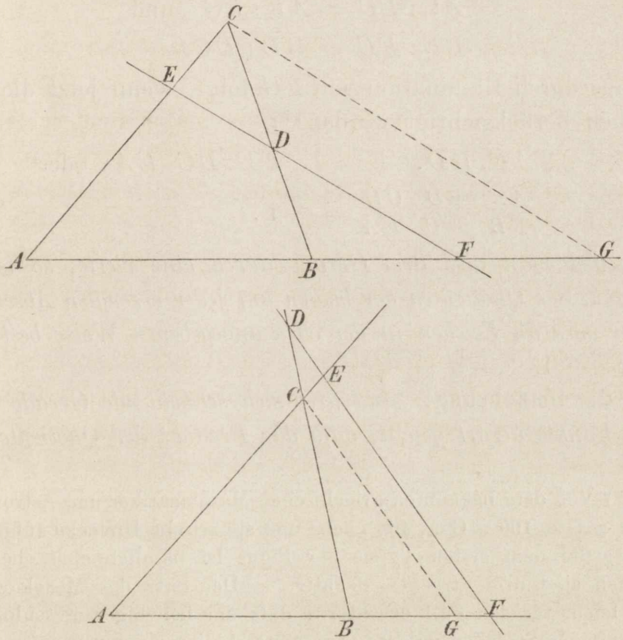


Fig. 10.

bige der Geraden (Fig. 10) als Dreiseit ABC, während die vierte, EDF, als schneidende Gerade aufgefafst wird. Letztere kann entweder die drei anderen in ihren unendlichen Teilen, oder zwei in ihren endlichen, eine in ihrem unendlichen Teile schneiden; die Relationen sind beidesmal dieselben. Zwischen den sechs Stücken, in welche die Dreiseitsseiten durch die Schneidende zerlegt werden, können wir eine Relation herleiten, die unter dem Namen „*Satz des Menelaos*“*) bekannt ist. Um über die Vorzeichen der betreffenden Strecken im Klaren zu sein, denken wir uns den Umfang des Dreiseits ABC folgendermaſsen durchlaufen: von A nach F, von F nach B, von B über D nach C und dann über E nach A. Dabei sind die in den Richtungen von A nach B, B nach C, C nach A durchlaufenen Teile als positiv, die andern als negativ zu rechnen, so daſs die algebraische Summe der durchlaufenen Stücke dem Umfange von ABC gleich ist.

Legen wir $CG \nparallel EF$, so ist zunächst ohne Beachtung der Vorzeichen

$$AC : EC = AF : FG \quad \text{und}$$

$$BF : FG = BD : DC,$$

woraus durch Elimination von FG folgt, wenn jetzt die Vorzeichen berücksichtigt werden**),

$$AF . BD . CE = - FB . DC . EA \quad \text{oder}$$

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = -1 .$$

Schneidet man also drei Gerade durch eine vierte, so ist das Produkt der Quotienten der beiden auf jeder erzeugten Abschnitte, wenn man die Zeichen in der oben angegebenen Weise bestimmt, gleich — 1.

2. **Umkehrung**: *Sind drei sich schneidende Gerade durch drei Punkte derart geteilt, daſs das Produkt der Quotienten der*

---

*) Von dem bekannten griechischen Mathematiker und Astronomen *Menelaos*, c. 100 n. Chr., für ebene und sphärische Dreiecke aufgestellt.

**) Bei dem ersten Typus der Figur ist nämlich eine, bei dem zweiten sind drei Strecken negativ. — Der Satz des Menelaos läſst sich leicht für den Fall erweitern, daſs ein beliebiger geschlossener, aus geraden Strecken zusammengesetzter Linienzug durch eine Gerade, falls er eben ist, oder im allgemeinen durch eine Ebene geschnitten wird. Wir glauben jedoch diese Erweiterung hier, wo es sich nur um die grundlegenden Sätze handelt, übergehen zu dürfen.

www.rcin.org.pl

beiden Abschnitte jeder Geraden gleich -1 *ist, so liegen jene drei Punkte in einer Geraden.*

Beweis: Sind BC, CA, AB die drei Geraden, D, E, F die teilenden Punkte, so kann man zunächst durch D und E eine Gerade legen. Trifft diese AB nicht in F, sondern in F_1, so ist

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA} = -1 \quad \text{und}$$

$$\frac{AF_1}{F_1B}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA} = -1\,,$$

woraus

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AF_1}{F_1B} \quad \text{oder}$$

$$\frac{AF+FB}{FB} = \frac{AF_1+F_1B}{F_1B} \quad \text{oder}$$

$$\frac{AB}{FB} = \frac{AB}{F_1B},$$

d. h. $FB = F_1B$, also die Identität von F und F_1 folgt, was der Annahme widerspricht.

3. Da man je drei Seiten eines Vierseits als Dreiseit, die vierte als schneidende Gerade auffassen kann, so liefert uns der Satz des *Menelaos* bei jedem Vierseit vier Relationen. Wir haben (Fig. 11)

$$\frac{AF.BD.CE}{FB.DC.EA} = -1,$$

$$\frac{FB.AC.ED}{BA.CE.DF} = -1,$$

$$\frac{BA.FE.DC}{AF.ED.CB} = -1,$$

$$\frac{DB.CA.EF}{BC.AE.FD} = -1.$$

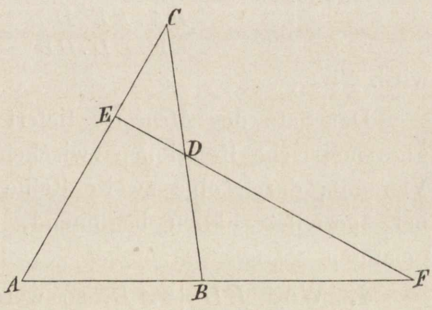


Fig. 11.

Multipliziert man drei dieser Gleichungen miteinander, so erhält man die vierte; die vier Relationen reduzieren sich daher zunächst auf drei; aber auch diese sind voneinander nicht unabhängig, wie die folgende Betrachtung zeigt. Die vier Gleichungen stellen Relationen dar zwischen vier Variabeln, nämlich zwischen den Verhältnissen der Strecken

www.rcin.org.pl

auf je einer der Geraden, wobei es gleichgiltig ist, welche zwei der drei jedesmal ausgeschnittenen Strecken man benutzt; so ist z. B. $\frac{AF}{AB} = \frac{AB + BF}{AB} = 1 + \frac{BF}{AB}$ u. s. w. Eliminiert man nun aus zwei der Gleichungen, die immer je zwei gleiche Variabeln und eine verschiedene enthalten, eine der ersteren, so kommt man zu einer der beiden andern Gleichungen. In der That können wir für die beiden ersten Gleichungen

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{EC}{AE} = -1 \quad \text{und} \quad \frac{FB}{BA}\left(1 + \frac{AE}{EC}\right)\frac{ED}{DF} = 1$$

schreiben, woraus durch Elimination von $\frac{AE}{EC}$

$$\frac{FB}{BA}\left(1 - \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC}\right)\frac{ED}{DF} = 1$$

oder

$$\left(-\frac{AF + BA}{BA} + \frac{AF}{BA} \cdot \frac{CB + DC}{DC}\right)\frac{ED}{ED + FE} = -1$$

oder

$$\left(-1 + \frac{AF}{BA} \cdot \frac{CB}{DC}\right) \cdot \frac{ED}{ED + FE} = -1$$

oder

$$-BA.DC.ED + AF.CB.ED = -BA.DC(ED + FE)$$

oder endlich

$$\frac{BA.FE.DC}{AF.ED.CB} = -1$$

wird.

Der Satz des *Menelaos* liefert also nur *zwei* unabhängige metrische Relationen zwischen den acht Strecken eines Vierseits; durch eine zweite Reihe von Sätzen werden wir, bei speziellen Fällen beginnend, zu der dritten Relation gelangen.

4. Wird $ED \dashv\vdash AB$, so werden AF, BF, EF, DF unendlich, unterscheiden sich aber von einander nur um endliche Gröfsen; so ist z. B. $AF - BF = AB$, während die Differenz von AF und EF, wenn beide auch über alle Grenzen wachsen, kleiner als AE bleiben mufs u. s. w. Daher werden die Quotienten je zweier dieser Gröfsen der Einheit gleich. Aus unseren Relationen wird mithin

www.rcin.org.pl

$$\frac{BD \cdot CE}{DC \cdot EA} = 1,$$

$$\frac{AC \cdot ED}{BA \cdot CE} = 1,$$

was die Gleichungen von § 19, 2 und 4 sind.

Wird auch noch $AE \# BD$, das Vierseit also zu einem Parallelogramm, so reduzieren sich dieselben auf

$$\frac{BD}{AE} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{ED}{AB} = 1.$$

Mit Hilfe der in § 16 erörterten Anschauungsweise über das Parallelsein und die unendlich fernen Punkte gelangt man also in der Theorie der metrischen Relationen (auch bei den noch zu untersuchenden) von den allgemeinen Gleichungen zu richtigen Spezialresultaten. Wir werden daher bei Herleitungen, denen die metrischen Relationen zur Grundlage dienen, das Parallelwerden von Geraden nicht immer besonders unterscheiden, sondern stillschweigend als Spezialfall betrachten, der sich dem allgemeinen Resultate unterordnet.

§ 21.

Der Pythagoreische Lehrsatz.

1. *Fällt man in einem rechtwinkligen Dreieck von dem Scheitel des rechten Winkels ein Perpendikel auf die Hypotenuse*), so teilt dieses das Dreieck in zwei unter sich und dem ganzen ähnliche Dreiecke.*

Die drei Dreiecke stimmen nämlich in den Winkeln überein.

Ist ABC das Dreieck, $\sphericalangle ACB = 1R$, $CD \perp AB$, so folgt hieraus einerseits

$$AD : DC = CD : DB,$$

andererseits

$$AD : AC = AC : AB \quad \text{und}$$

$$BD : BC = BC : BA.$$

2. Aus den beiden letzten Gleichungen folgt

---

*) *Hypotenuse* heifst im rechtwinkligen Dreieck (d. h. einem Dreieck mit einem rechten Winkel) die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite, während die beiden andern Seiten *Katheten* genannt werden.

www.rcin.org.pl

$$AC^2 = AD \,.\, AB,$$
$$BC^2 = BD \,.\, BA,$$

also durch Addition

$$AC^2 + BC^2 = AB(AD + DB) = AB \,.\, AB,$$

oder $AC^2 + BC^2 = AB^2$.

Die Summe der Quadrate der beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Quadrat der Hypotenuse (Pythagoreischer Lehrsatz).*

§ 22.

Die dritte metrische Relation beim Vierseit.

1. Wir betrachten zunächst den Spezialfall, daſs drei Gerade des Vierseits durch einen Punkt gehen; zwischen den fünf Strecken der Figur besteht dann eine Relation, welche aus dem Satze des Menelaos nicht folgt. Bei der in Figur 12 gewählten Bezeichnung ist, wenn h auf n senkrecht steht:

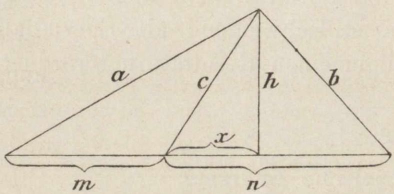


Fig. 12.

$$c^2 = h^2 + x^2, \quad h^2 = a^2 - (m + x)^2, \quad h^2 = b^2 - (n - x)^2,$$

also

$$a^2 - (m + x)^2 = b^2 - (n - x)^2$$

oder

$$a^2 - m^2 - 2mx = b^2 - n^2 + 2nx,$$

also

$$x = \frac{a^2 - b^2 - m^2 + n^2}{2(m + n)};$$

ferner folgt

$$c^2 = a^2 - (m + x)^2 + x^2 = a^2 - m^2 - 2mx,$$

so daſs wir erhalten

$$c^2 = \frac{a^2 n + b^2 m - mn(m + n)}{m + n} = \frac{a^2 n + b^2 m}{m + n} - mn.$$

---

*) Das Wort Quadrat ist hier selbstverständlich nur im *arithmetischen* Sinne zu verstehen.

www.rcin.org.pl

Von a, b, c kommen hier nur die absoluten Werte in Betracht; bei m und n ist auf das Zeichen (ob gleiches oder entgegengesetztes) Rücksicht zu nehmen*).

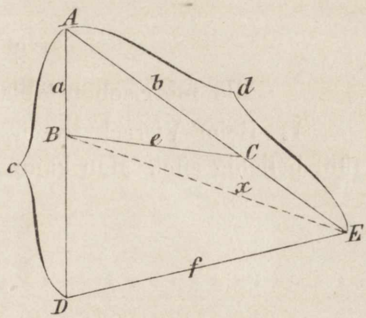


Fig. 13.

2. Von diesem Spezialfall gelangen wir sofort zur allgemeinen Relation. Wir bringen (Fig. 13) die sechs Strecken $a = AB$, $b = AC$, $c = AD$, $d = AE$, $e = BC$, $f = DE$ in Beziehung; es es sei $BE = x$. Es ist nach dem Vorigen

$$x^2 = \frac{d^2(c-a) + f^2 a - a(c-a)c}{c},$$

$$e^2 = \frac{x^2 b + a^2(d-b) - b(d-b)d}{d},$$

oder nach Einsetzung des ersten Ausdrucks für x^2 und nach einigen Vereinfachungen

$$e^2 = \frac{abf^2 + cd(a^2+b^2) - ab(c^2+d^2)}{cd}$$

oder

$$cd(a^2+b^2-e^2) = ab(c^2+d^2-f^2)$$

oder

$$\frac{a^2+b^2-e^2}{ab} = \frac{c^2+d^2-f^2}{cd}$$

oder auch

$$cde^2 - abf^2 = (ac-bd)(ad-bc)$$

oder endlich

$$\frac{c}{f}\cdot\frac{d}{f} - \frac{a}{e}\cdot\frac{b}{e} = \left(\frac{a}{e}\cdot\frac{c}{f} - \frac{b}{e}\cdot\frac{d}{f}\right)\left(\frac{a}{e}\cdot\frac{d}{f} - \frac{b}{e}\cdot\frac{c}{f}\right).$$

In der letzten Form erscheint die Relation als eine Gleichung zwischen den vier Quotienten $\frac{a}{e}, \frac{b}{e}, \frac{c}{f}, \frac{d}{f}$.

3. Stimmen zwei Dreiecke in dem Winkel γ überein,

*) Die Relation wurde von *Stewart* angegeben. (De quibusd. theorem. general.; Edinburg 1746).

www.rcin.org.pl

so ist $\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}$ für beide dieselbe Gröfse, so dafs dieser Ausdruck nur von dem Winkel γ abhängt*).

§ 23.

Die metrischen Relationen beim Viereck.

1. Beim Viereck treten zwölf Strecken auf, von denen fünf beliebig sind. Man kann z. B. in Fig. 14 AB, BE, EC,

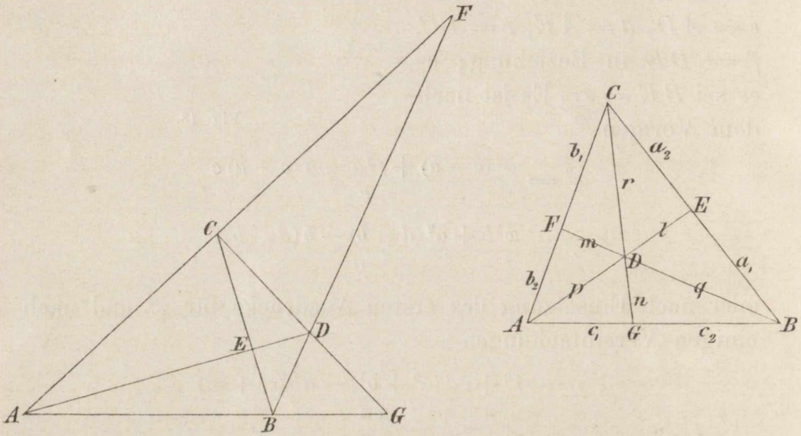


Fig. 14.

CF und FA beliebig annehmen, während die übrigen Strecken hierdurch bestimmt sind. Wir fassen zunächst ABC als ein Dreieck auf, in dessen Ebene der Punkt D gegeben ist, und suchen eine Relation zwischen den sechs Strecken, in die die Dreiecksseiten durch die von den Eckpunkten durch D gezogenen Geraden geteilt werden.

Wendet man den Satz des *Menelaos* auf $\triangle\ AGD$ und die Schneidende BC, dann auf $\triangle\ BGD$ und die Schneidende AC an, so erhält man

$$\frac{AB.GC.DE}{BG.CD.EA} = -1 \quad \text{und} \quad \frac{BA.GC.DF}{AG.CD.FB} = -1,$$

aus denen durch Division

*) Die dritte Vierseitsrelation findet sich in *Carnot's Géométrie de position*, ohne dafs jedoch ihre prinzipielle Bedeutung hervorgehoben würde.

www.rcin.org.pl

$$\frac{AG}{BG} = \frac{DF \cdot EA}{DE \cdot FB}$$

folgt. Bildet man die beiden analogen Relationen und multipliziert alle drei, so findet man, wenn man das Vorzeichen, das nach der Entwickelung nicht evident ist, der Figur entsprechend bestimmt,

$$\frac{AG \cdot BE \cdot CF}{GB \cdot EC \cdot FA} = 1 \, .$$

Wir haben somit den bekannten *Satz des Ceva**): *Legt man durch einen festen Punkt und die Eckpunkte eines Dreiecks drei Gerade, so werden die drei Seiten des Dreiecks durch dieselben derart geschnitten, dafs der Quotient der Produkte je dreier nicht auf einander folgenden Stücke* (gerechnet wie beim Satze des Menelaos) *gleich* $+1$ *ist.*

Die *Umkehrung* dieses Satzes, die zahlreiche Anwendungen auf spezielle Fälle gestattet, wird genau wie die Umkehrung des Satzes des Menelaos bewiesen.

2. Analoge Relationen ergeben sich, wenn man von den Dreiecken ABD u. s. w. ausgeht. Um indessen sämtliche Gleichungen des Vierecks aufzustellen, nehmen wir noch § 22, 1 zu Hilfe. Der Kürze wegen setzen wir $BE = a_1$, $EC = a_2$, $CF = b_1$, $a_1 + a_2 = a$ u. s. w., $AD = p$, $DE = l$ u. s. w., Fig. 14 entsprechend. Dann haben wir

$$(p + l)^2 = \frac{b^2 a_1 + c^2 a_2}{a} - a_1 a_2 \, ,$$

$$(q + m)^2 = \frac{c^2 b_1 + a^2 b_2}{b} - b_1 b_2 \, ,$$

$$(r + n)^2 = \frac{a^2 c_1 + b^2 c_2}{c} - c_1 c_2 \, .$$

Ferner ist nach dem Satze des Menelaos mit steter Rücksicht auf die Vorzeichen

$$\frac{c_1 a l}{c_2 a_2 p} = 1 \quad \text{oder}$$

$$\left(\frac{c_1}{c_2} + \frac{c_1 a_1}{c_2 a_2}\right) \frac{l}{p} = 1 \quad \text{oder}$$

---

*) *Ceva, De lineis se invicem secantibus.* Mailand 1678.

www.rcin.org.pl

$$\left(\frac{c_1}{c_2} + \frac{b_2}{b_1}\right) \frac{l}{p} = 1,$$

also

$$p = l\left(\frac{c_1}{c_2} + \frac{b_2}{b_1}\right)$$

und somit

$$(p + l)^2 = l^2\left(1 + \frac{c_1}{c_2} + \frac{b_2}{b_1}\right)^2,$$

woraus folgt

$$l^2 = \frac{b^2 a_1 + c^2 a_2 - a a_1 a_2}{a\left(1 + \frac{c_1}{c_2} + \frac{b_2}{b_1}\right)^2},$$

$$m^2 = \frac{c^2 b_1 + a^2 b_2 - b b_1 b_2}{b\left(1 + \frac{a_1}{a_2} + \frac{c_2}{c_1}\right)^2},$$

$$n^2 = \frac{a^2 c_1 + b^2 c_2 - c c_1 c_2}{c\left(1 + \frac{b_1}{b_2} + \frac{a_2}{a_1}\right)^2}$$

und andererseits

$$p^2 = \frac{(b^2 a_1 + c^2 a_2 - a a_1 a_2)\left(\frac{c_1}{c_2} + \frac{b_2}{b_1}\right)^2}{a\left(1 + \frac{c_1}{c_2} + \frac{b_2}{b_1}\right)^2},$$

$$q^2 = \frac{(c^2 b_1 + a^2 b_2 - b b_1 b_2)\left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{c_2}{c_1}\right)^2}{b\left(1 + \frac{a_1}{a_2} + \frac{c_2}{c_1}\right)^2},$$

$$r^2 = \frac{(a^2 c_1 + b^2 c_2 - c c_1 c_2)\left(\frac{b_1}{b_2} + \frac{a_2}{a_1}\right)^2}{c\left(1 + \frac{b_1}{b_2} + \frac{a_2}{a_1}\right)^2}.$$

Aus den sechs Stücken a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, die unter sich durch eine Relation verbunden sind, lassen sich also die sechs übrigen algebraisch berechnen.

Die Relation zwischen a, b, c, p, q, r, den sechs Entfernungen zwischen je zwei von vier Punkten, läſst sich (s. darüber *Baltzer*, *Theorie und Anwendung der Determinanten*, p. 215), auf die Form

www.rcin.org.pl

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c & b & p \\ 1 & c & 0 & a & q \\ 1 & b & a & 0 & r \\ 1 & p & q & r & 0 \end{vmatrix} = 0$$

bringen.

3. Wenn ein festes Dreieck vorgelegt ist, so kann man die Lage eines Punktes derselben Ebene dadurch bestimmen, dafs man den Punkt mit den Eckpunkten des Dreiecks verbindet und die Verhältnisse angiebt, in welchen die Verbindungsgeraden die Dreiecksseiten schneiden. Aus zwei dieser Verhältnisse läfst sich das dritte nach dem Satze des Ceva bestimmen; doch empfiehlt es sich der Homogenität halber die drei Verhältnisse in betracht zu ziehen. Man gelangt so zu dem vielleicht einfachsten, homogenen Koordinatensystem. *Möbius* führt dasselbe in seinem „*Baryzentrischen Kalkül*"*) in einer Form ein, welche seinen geometrischen Charakter etwas verdeckt.

Denkt man sich in zwei Punkten A_1 und A_2 die Massen m_1 und m_2 konzentriert, die auch negativ sein können, so liegt der Schwerpunkt der beiden Massen in dem Punkte A der Geraden $A_1 A_2$, für welchen

$$\frac{A_1 A}{A A_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

ist. Sind in den Eckpunkten eines Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ die Massen m_1, m_2, m_3 konzentriert, so liegt ihr Schwerpunkt auf den Verbindungslinien je eines Massenpunktes mit dem Schwerpunkte der beiden andern. Man findet daher den Gesamtschwerpunkt, indem man die Seiten des Dreiecks im umgekehrten Verhältnis zu den Massen der begrenzenden Eckpunkte teilt und die Teilpunkte mit den gegenüberliegenden Eckpunkten verbindet; der gemeinsame Schnittpunkt der drei Verbindungslinien ist der Schwerpunkt. Man erkennt leicht, dafs durch geeignete Wahl der drei Massen jeder Punkt der Ebene zum Schwerpunkt gemacht werden kann,

*) Gesammelte Werke, B. 1, p. 1.

und zwar nur auf eine Art, wenn man lediglich die Verhältnisse der Massen in betracht zieht. Diese Massenverhältnisse können an Stelle der oben besprochenen Schnittverhältnisse als Koordinaten des Schwerpunktes benutzt werden.

Für den Raum lassen sich ähnliche Betrachtungen anstellen, auf die wir nicht weiter eingehen.

§ 24.

Flächeninhalt und Flächenverwandlung.

1. Es erscheint zweckmäfsig, erst nach der Behandlung der metrischen Relationen zu der Lehre vom Flächeninhalt überzugehen, wenngleich der Begriff des Flächeninhalts schon beim Dreieck auftritt; wir werden nämlich von den Untersuchungen der letzten Paragraphen mehrfach Anwendung zu machen haben.

Wir nennen zwei Figuren, die von sich selbst nirgends durchschneidenden und in sich selbst zurücklaufenden Linienzügen begrenzt werden, *flächengleich*, wenn beide durch Linien derart zerlegt werden können, dafs je zwei Teile beider gleich (kongruent) sind. Sowie wir bei der Addition von Strecken das Axiom benutzen mufsten, dafs die Reihenfolge der Aneinanderfügung für das Resultat gleichgiltig ist, so müssen wir hier das folgende Axiom aufstellen:

Wenn zwei geschlossene Figuren durch irgend eine Zerlegung als flächengleich nachgewiesen sind, so ist es nicht möglich eine andere Zerlegung auszuführen, bei der die eine Figur sämtliche Teile der andern, aufserdem aber noch weitere Teile enthält.

Die Definition und das Axiom lassen auch *negative*, d. h. subtraktiv anzutragende Teile zu.

2. Bei der Zerlegung zweier Figuren in bezüglich gleiche Teile beschränken wir uns prinzipiell nicht auf Teile von endlicher Ausdehnung, sondern lassen auch den Grenzübergang zu unendlich vielen unendlich kleinen Teilen zu*). Es

*) Der Begriff des unendlich Kleinen beim Flächeninhalt kann wohl als unmittelbar einleuchtend angenommen werden; zerlegt man eine Figur von endlichen Dimensionen in unendlich viele Teile, so müssen dieselben teilweise unendlich klein sein.

www.rcin.org.pl

mufs hervorgehoben werden, dafs wir uns krummlinigen Figuren gegenüber hier in einer günstigeren Lage befinden, als früher bei der Ausmessung krummer Linien. Denn während es unmöglich ist, eine krumme Linie in gerade Teile zu zerlegen, um hierdurch eine Gröfsenvergleichung zu erzielen, können wir in und um eine krummlinige Figur je eine geradlinige mit beliebig vielen Seiten zeichnen, von denen die eine selbstverständlich kleiner, die andere gröfser als die krummlinige ist, und deren Unterschied beliebig klein gemacht werden kann, so dafs der Flächeninhalt der krummlinigen Figur durch einen Grenzübergang vollkommen streng ermittelt werden kann.

3. Beim Messen der Geraden konnte eine beliebige Strecke als Einheit gewählt werden; beim Messen von Flächen hat man eine weit umfangreichere Auswahl, da man eine Figur von beliebiger Gestalt und Gröfse zur Mafseinheit machen kann. Ein aprioristischer Grund für die Zugrundelegung einer bestimmten Mafsfigur kann nicht angeführt werden. Da in der Praxis hauptsächlich Figuren zu vermessen sind, die Rechtecken mehr oder weniger nahe kommen, Rechtecke aber am leichtesten wieder in Rechtecke zerlegt werden können und unter den Rechtecken das *Quadrat* das regelmäfsigste ist, und da ferner die gesamte unendliche Ebene mit unendlich vielen Quadraten vollständig bedeckt werden kann, so hat sich als vorteilhafteste Flächeneinheit das Quadrat, dessen Seite gleich der Längeneinheit ist, eingebürgert. Da die wissenschaftliche Vermessungslehre das Quadrat durch nichts besseres zu ersetzen vermag und eine willkürliche Festsetzung doch einmal gemacht werden mufs, so wird es von derselben gleichfalls als Flächenmafseinheit acceptiert.

Euklid beschränkt sich lediglich auf die Lehre von der Flächenvergleichung und Flächenverwandlung, die eigentliche Flächenvermessung vollständig ausschliefsend; sei es, weil ihm die Wahl der Mafseinheit zu willkürlich erschien, sei es, weil er die Vermessungslehre überhaupt mehr für einen Teil der praktischen Feldmefskunst als für reine Mathematik hielt. Auch wir wollen die Flächenvergleichung in den

www.rcin.org.pl

Vordergrund stellen, die Vermessung jedoch, welche immerhin charakteristische Formeln liefert, nicht ausschliefsen; die Übertragung der Formeln von einer Mafseinheit zu einer beliebigen anderen ist übrigens durch eine einfache Proportion sofort auszuführen.

Wir stellen sogleich das Fundamentalgesetz der Flächenvergleichung geradliniger Figuren an die Spitze:

Zwei flächengleiche geradlinige Figuren lassen sich immer durch Zerlegung (auf additivem oder subtraktivem Wege) in eine endliche Anzahl von bezüglich gleichen Teilen ineinander überführen.

Wesentlich ist also, dafs niemals eine Zerlegung in unendlich viele Teile zu Hilfe genommen werden mufs.

Wir führen die Untersuchung zuerst für Dreiecke, dann für beliebige geradlinige Figuren.

4. Im Dreiecke ABC (Fig. 15), in dem an der Seite AB zwei spitze Winkel liegen mögen, halbieren wir AC und BC in D und E, machen $JEG \perp AB$, $HDF \perp AB$ und $FCG \parallel AB$. Dann ist $\triangle\, ADH = CDF$ und $\triangle\, BEJ = CEG$, so dafs das Dreieck ABC und das Rechteck $HJGF$ flächengleich sind. *Jedes Dreieck läfst sich daher durch Zerschneiden in höchstens drei Teile und Umlegen derselben in ein flächengleiches Rechteck verwandeln.*

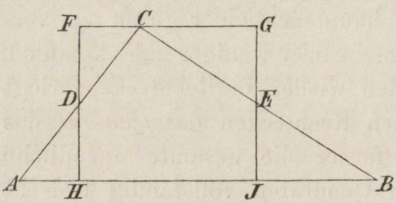


Fig. 15.

5. Ist $ABCD$ ein Rechteck (Fig. 16), ziehen wir AC und durch einen Punkt J dieser Geraden $HF \parallel AB$, $EG \parallel BC$, so wird $ABCD$ in vier Rechtecke zerlegt; wir behaupten, dafs die von der Diagonale nicht durchschnittenen $BFJE$ und $DGJH$ flächengleich sind. Es ist nämlich $\triangle\, ABC = CDA$, $\triangle\, AEJ = JHA$, $\triangle\, CFJ = JGC$, und man erhält die fraglichen

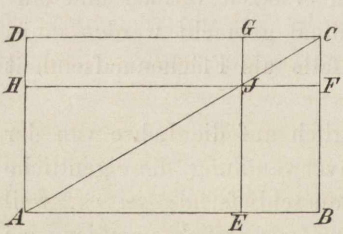


Fig. 16.

www.rcin.org.pl

Rechtecke, indem man von $\triangle ABC$ und $\triangle CDA$ je eines der beiden andern Paare abzieht.

Nehmen wir aber umgekehrt an, daſs $DGJH$ und $BEJF$ flächengleich sind und sich in der Lage befinden, daſs JF die Verlängerung von HJ, JE die Verlängerung von GJ ist, und verlängern wir DG und BF, DH und BE, bis sie sich in C und A schneiden, so können wir behaupten, daſs J in AC liegt. Nach Fig. 17 müſste nämlich sonst Rechteck $BFLK$, welches gröſser als $JFBE$ ist, flächengleich mit $DMLH$ sein, welches kleiner als $DGJH$ ist.

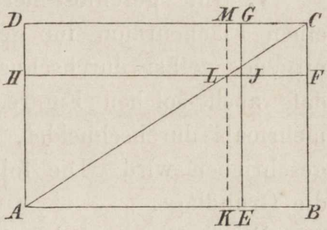


Fig. 17.

Da nun jedes Dreieck in ein gleichgroſses Rechteck, nach der letzten Betrachtung aber zwei flächengleiche Rechtecke ineinander verwandelt werden können, und zwar lediglich auf additivem oder subtraktivem Wege, so ist bewiesen, daſs zwei flächengleiche Dreiecke auf demselben Wege in einander übergeführt werden können; denn man braucht nur das eine Dreieck in ein Rechteck, dieses in ein anderes, welches durch die gleiche Operation aus dem zweiten Dreieck hervorgehen würde, und schlieſslich das zweite Rechteck in das zweite Dreieck überzuführen.

6. Sind zwei flächengleiche geradlinige Figuren (*Polygone*) vorgelegt, so können dieselben zunächst in eine endliche Zahl von Dreiecken zerlegt, letztere aber einzeln in Rechtecke übergeführt werden. Es ist aber auch leicht, beliebig viele Rechtecke in ein einziges zu vereinigen. Man braucht sie zu diesem Zwecke nur in Rechtecke mit einer gleichen Seite zu verwandeln, worauf das Aneinandersetzen unmittelbar möglich ist. Diese Umwandlung ist aber nach 5. ausführbar; denn wenn $DGJH$ und die zur neuen Seite bestimmte Strecke vorgelegt sind, so braucht man letztere nur zu JF zu nehmen und die Figur zu ergänzen, wodurch man zu $JFBE$ gelangt. So läſst sich jedes der beiden Polygone in ein flächengleiches Rechteck verwandeln und die Recht-

www.rcin.org.pl

ecke lassen sich schliefslich ineinander überführen. Durch teilweise Umkehrung der Operationen ist daher das eine Polygon in das andere überführbar. Der am Eingang behauptete allgemeine Satz ist also erwiesen.

7. Ein geschlossener Linienzug umgrenzt nur dann einen Flächenraum im gewöhnlichen Sinne, wenn er sich nirgends selbst durchschneidet; doch verlangt die Analogie, dafs auch solchen Figuren, deren Umfang sich ein- oder mehrmals durchschneidet, ein bestimmter Flächeninhalt zugeschrieben wird. Die folgende Betrachtung liefert hierzu die Grundlage.

Bei jedem geschlossenen Linienzuge kann man zwei Seiten unterscheiden (man kann etwa die eine durch Schattierung u. dgl. markieren), die man bei Figuren mit sich nicht schneidender Umgrenzung als *äufsere* und *innere*, bei allen aber nach willkürlicher Festsetzung als *rechte* und *linke* bezeichnen kann*). Ist nun zunächst eine Figur $ABCDE$.. der ersten Art vorgelegt (Fig. 18), verbindet man einen in derselben Ebene beliebig gewählten Punkt O mit den Punkten A, B, C, D, E, .. durch Gerade und nimmt den Inhalt der Dreiecke OAE u. s. w. als positiv, wenn die innere Seite von AE u. s. w. bei ihnen nach innen liegt, als negativ, wenn das Umgekehrte der Fall ist, so ist die algebraische Summe der Dreiecke OAE u. s. w. unter allen Umständen — mag O innerhalb oder aufserhalb des Polygons liegen — mit dem Inhalte des Polygons flächengleich. Bei umgekehrter Festsetzung des Vorzeichens der Dreiecke erhält man als Summe das Negative des Polygoninhalts. In der Folge wollen wir bei dem Endresultat nur

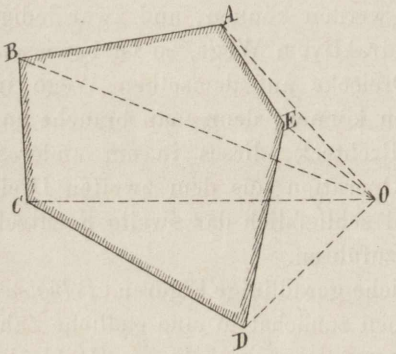


Fig. 18.

*) Vgl. § 17, 6, wo die Bezeichnung anders gewählt ist.

www.rcin.org.pl

den absoluten Wert in Betracht ziehen, also nur bei der Zusammenfügung auf das Zeichen achten.

Wir sprechen nun für *beliebige* geschlossene Linienzüge den Satz aus: *Zieht man von zwei Punkten O und P aus Gerade nach den Eckpunkten eines geschlossenen Linienzuges* $ABCDE\ldots$ (Fig. 19) *und summiert einerseits die Dreiecke* OAB, OBC *u. s. w., andererseits die Dreiecke* PAB, PBC *u. s. w., wobei diejenigen Dreiecke als positiv, resp. negativ gerechnet werden, bei denen die linke, resp. rechte Seite des Linienzuges nach innen gekehrt ist, so sind beide Summen flächengleich.* Es ist nämlich, wenn wir die Flächengleichheit durch $\equiv$ bezeichnen und die Dreiecke, welche OP zur Seite haben, als positiv oder negativ betrachten, je nachdem sie auf der einen oder anderen Seite von OP liegen (in der Figur sei OPA positiv, während OAB positiv, PAB negativ ist u. s. w.),

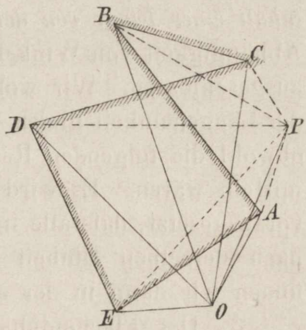


Fig. 19.

$$OAB + OPB \equiv PAB + OPA,$$
$$OBC + OPC \equiv PBC + OPB$$
u. s. w.,

woraus durch Summierung folgt

$$OAB + OBC + \ldots \equiv PAB + PBC + \ldots$$

Wir können daher als Flächeninhalt eines Linienzuges die algebraische Summe der Dreiecke bezeichnen, welche seine Seiten mit den von einem beliebigen Punkte derselben Ebene nach ihren Endpunkten gezogenen Geraden einschliefsen, wobei die oben gegebene Zeichenregel zu beachten ist.

Man erkennt nach dieser Definition leicht, dafs z. B. der Flächeninhalt eines Vierecks mit sich schneidendem Umfange der Differenz der beiden Dreiecke gleich ist, welche von dem Umfange gebildet werden.

Eingehenderes über diesen Gegenstand siehe bei *Möbius*,

www.rcin.org.pl

Über die Bestimmung des Inhalts eines Polyeders. Ges. Werke, B. II, p. 473*).

§ 25.

Flächenmessung.

1. Die Fundamentalfrage, die wir nunmehr zu beantworten haben, ist die: *in welcher Weise hängt der Flächeninhalt einer Figur von den sie bestimmenden Strecken ab?* Die Abhängigkeit von Winkelgröfsen bleibt an dieser Stelle noch ausgeschlossen. Wir wollen jetzt das Quadrat, dessen Seite der Längeneinheit gleich ist, als Flächenmafseinheit benutzen, obwohl die folgenden Resultate leicht auch ohne dies zu ermitteln wären. Es wird in der Folge als selbstverständlich vorausgesetzt, dafs alle in der Rechnung auftretenden Längen nach derselben Einheit gemessen sind; die Flächeninhalte finden wir dann in der entsprechenden Flächeneinheit.

2. Der Flächeninhalt F eines Rechtecks, dessen anstofsende Seiten die Längen a und b besitzen, ist $F = ab$. Denn ist die Längeneinheit genau in den beiden Seiten enthalten, so braucht man die letzteren nur nach ihr zu teilen und durch die Teilpunkte Parallele zu den Seiten des Rechtecks zu legen; dann ist das Rechteck in $a \cdot b$ Quadrate, welche die Flächeneinheit darstellen, zerlegt. Trifft diese Voraussetzung nicht zu, so denke man sich die Längeneinheit in n gleiche Teile geteilt und betrachte einen solchen Teil als neue Längeneinheit; die alte Flächeneinheit ist dann nach dem eben Bewiesenen das n^2fache der neuen. Geht nun die neue Längeneinheit in den Seiten des Rechtecks genau auf, so dafs $an = a_1$, $bn = b_1$ ganzzahlig sind, so ist nach der alten Einheit $F = \frac{a_1 b_1}{n^2} = ab$. Geht für kein ganzzahliges n die neue Einheit in beiden Seiten auf, so sei (a_1 und a_2 sind ganzzahlig)

$$a_1 \leqq an < a_1 + 1,$$
$$b_1 \leqq bn < b_1 + 1;$$

*) Der erste, welcher diesen Gegenstand behandelte, ist *A. L. F. Meister* (Generalia de genesi figurarum planarum et inde pendentibus earum affectionibus, novi comment. soc. reg. scient. Gotting., T. I ad annos 1769 & 1770).

www.rcin.org.pl

alsdann ist

$$\frac{a_1 b_1}{n^2} < F < \frac{(a_1 + 1)(b_1 + 1)}{n^2}$$

oder

$$\frac{a_1 b_1}{n^2} < F < \frac{a_1 b_1}{n^2} + \frac{a_1 + b_1 + 1}{n^2}$$

oder, da $\frac{a_1}{n} \leqq a$, $\frac{b_1}{n} \leqq b$ ist,

$$\frac{a_1 b_1}{n^2} < F < \frac{a_1 b_1}{n^2} + \frac{a + b}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

Wächst nun n ins Unendliche, so nimmt $\frac{a+b}{n} + \frac{1}{n^2}$ gegen die Null hin ab, wodurch sich F der Grenze $\frac{a_1 b_1}{n^2}$ und damit auch ab beliebig nähert.

Für das Quadrat ist $F = a^2$.

3. Bezeichnet man im Dreieck ABC das von A auf BC gefällte Perpendikel (*Höhenperpendikel*) AD mit h, so ist der Inhalt F des Dreiecks

$$F = \frac{ah}{2}.$$

Dies geht aus der Vermessung des Rechtecks und der Konstruktion von § 24, 4 hervor. — a heiſst die zur *Höhe* h gehörige *Basis* oder *Grundlinie.*

4. Die Flächeninhalte zweier Rechtecke verhalten sich hiernach wie die Produkte zweier anstoſsenden Seiten, diejenigen zweier Dreiecke wie die Produkte entsprechender Grundlinien und Höhen. Stimmen zwei Rechtecke, resp. Dreiecke in einer Seite überein, so verhalten sich ihre Inhalte wie die zugehörigen Höhen u. s. w.

5. Die Inhalte F und F_1 zweier ähnlichen Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ verhalten sich wie die Quadrate*) entsprechender Seiten. Denn es ist $F = \frac{ah}{2}$, $F_1 = \frac{a_1 h_1}{2}$, $h : h_1 = b : b_1 = a : a_1$, also $F : F_1 = ah : a_1 h_1 = a^2 : a_1^2$.

Da sich zwei ähnliche Polygone in entsprechende ähnliche Dreiecke zerlegen lassen, *verhalten sich auch die Inhalte zweier ähnlichen Polygone wie die Quadrate entsprechender Seiten.*

---

*) Das Wort Quadrat kann arithmetisch oder geometrisch verstanden werden.

www.rcin.org.pl

6. Wir machen im Dreieck ABC $AD \perp CB$ und setzen $AD = h$, $CD = u$; ferner rechnen wir a, b, c und h als positiv, dagegen u als positiv oder negativ, je nachdem es sich von C aus in der Richtung nach B oder in der umgekehrten erstreckt. Dann ist nach dem Pythagoreischen Lehrsatz:

$$h^2 = b^2 - u^2 \text{ und } h^2 = c^2 - (a - u)^2,$$

also

$$b^2 - u^2 = c^2 - (a - u)^2$$

oder

$$u = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a},$$

folglich

$$h^2 = b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)^2 = \frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2}.$$

Demnach wird der Flächeninhalt

$$\begin{aligned} F = \frac{ah}{2} &= \tfrac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2} \\ &= \tfrac{1}{4}\sqrt{(2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2)} \\ &= \tfrac{1}{4}\sqrt{[(a + b)^2 - c^2][c^2 - (a - b)^2]} \\ &= \tfrac{1}{4}\sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(c + a - b)(c - a + b)} \end{aligned}$$

oder, wenn $s = a + b + c$ gesetzt wird,

$$F = \sqrt{\frac{s}{2}\left(\frac{s}{2} - a\right)\left(\frac{s}{2} - b\right)\left(\frac{s}{2} - c\right)}.$$

Dies ist die bekannte von *Heron von Alexandria* gefundene Dreiecksformel.

7. Ist irgend ein geradliniges Gebilde vorgelegt, so kann man den Flächeninhalt eines darin enthaltenen in sich abgeschlossenen Linienzuges additiv und subtraktiv zusammensetzen aus den in der Figur auftretenden Dreiecken, wie leicht an beliebigen Beispielen zu erkennen ist. Wird nun das Gebilde durch einen Teil seiner Strecken bestimmt, so kann man zunächst die übrigen Strecken nach §§ 20—23 *algebraisch* berechnen und dann den Inhalt der Dreiecke, somit auch des Linienzuges ebenfalls *algebraisch* ausdrücken. Wir erhalten das wichtige Gesamtresultat:

Der Flächeninhalt eines geschlossenen Linienzuges, der in einem geradlinigen Gebilde enthalten ist, ist eine algebraische Funktion der bestimmenden Strecken.

www.rcin.org.pl

8. Alle Formeln für den Flächeninhalt sind in Gröfsen, die Strecken darstellen, von der *zweiten* Dimension, d. h. sie nehmen den Faktor k^2 an, wenn man sämtliche darin enthaltenen Streckenwerte mit k multipliziert, wie aus No. 5 folgt.

9. Die Lehre vom *Flächeninhalt* bietet mit derjenigen von der *Ähnlichkeit* zahlreiche Berührungspunkte dar. So kann man den Fundamentalsatz der Ähnlichkeitslehre (§ 19, 2) auch mit Hilfe der Flächenvergleichung beweisen, wie dies *Euklid* thut. Die Beweise des Pythagoreischen Lehrsatzes gründen sich teils auf die Ähnlichkeitslehre, teils auf die Lehre von der Flächenvergleichung u. s. w. Diese Verwandtschaft beruht darin, dafs die in der Ähnlichkeitslehre auftretenden Gleichungen Proportionen von Geraden sind, die sich durch Ausmultiplizieren als Gleichungen zwischen Produkten von je zwei Strecken darstellen, während sich der Flächeninhalt ebenfalls vielfach durch solche Produkte ausdrückt. Bei den allgemeineren metrischen Relationen, wo die Produkte von drei Verhältnissen auftreten, hört der Zusammenhang auf.

§ 26.

Beziehungen zwischen Seiten und Winkeln des Dreiecks (ebene Trigonometrie).

1. Die metrischen Relationen beim Vierseit, die uns die Beziehungen von Strecken untereinander sowie zwischen Strecken und Flächeninhalten lieferten, geben uns auch die nötigen Hilfsmittel an die Hand, um das noch offen gelassene Problem zu lösen: *die Relationen zwischen den Strecken und Winkeln geradliniger Figuren, zunächst des Dreiecks aufzusuchen.*

In einem Dreieck treten, wenn man das Parallelenaxiom annimmt, nur fünf nicht direkt aufeinander zurückführbare Stücke auf: drei Seiten und zwei Winkel; durch drei derselben ist das Dreieck ein- oder zweideutig bestimmt. Es handelt sich also darum, zwischen den fünf Stücken des Dreiecks zwei Relationen aufzustellen. Über den Charakter dieser Gleichungen können wir uns sofort Rechenschaft geben. Wir sahen, dafs Winkel, die um $4kR$ verschieden sind, sich in Bezug auf Linienverhältnisse vollkommen äquivalent ver-

www.rcin.org.pl

halten. Es werden daher in den Gleichungen Funktionen der Winkel auftreten, die durch eine Vermehrung des Arguments um $4kR$ ungeändert gelassen werden, d. h. *additiv periodische* Funktionen. Da diese Funktionen für unendlich viele Werte des Argumentes den gleichen Wert annehmen, so können sie nicht algebraisch sein. Die Relationen zwischen Seiten und Winkeln des Dreiecks sind *transcendent.*

2. Es handelt sich nun darum, gewisse periodische Funktionen der Winkel zu definieren, die wir statt der letzteren immer in Rechnung bringen wollen; wir schlagen den Weg ein, der erfahrungsmäfsig zu den bequemsten Funktionen dieser Art führt. Wir nehmen eine Gerade AB, die wir, A nach links gekehrt, wagrecht legen wollen (Fig. 20), als festen Schenkel eines veränderlichen Winkels α an; der positive Drehungssinn möge der Bewegung des Uhrzeigers entgegengesetzt sein. Machen wir den zweiten Schenkel AC des Winkels gleich der Längeneinheit und fällen von C ein Perpendikel CD auf AB, so repräsentiert DC einen nur von dem Winkel $\alpha = DAC$ abhängigen Zahlenwert, wie aus einfachen Ähnlichkeitsbetrachtungen hervorgeht; DC möge als positiv angesehen werden, wenn es bei der fixierten Lage von AB oberhalb dieser Geraden, als negativ, wenn es unterhalb derselben liegt. Wir nennen dann den Zahlenwert von DC den *Sinus**) von α und schreiben dafür $\sin\alpha$.

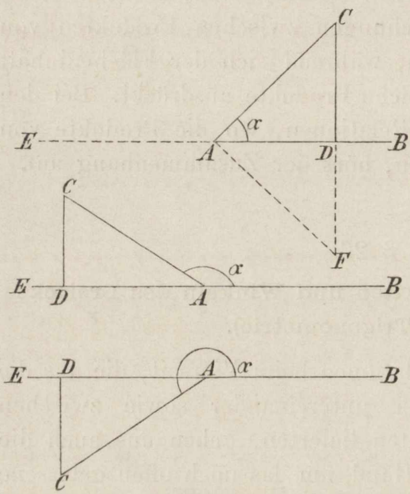


Fig. 20.

*) Über die mutmafsliche Entstehung dieser Bezeichnung s. *Cantor,* Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, p. 632. Geschichtliche Angaben über Trigonometrie u. s. w. findet man auch in den öfters angeführten Werken von *Baltzer* und *Kruse.*

www.rcin.org.pl

3. Es ist $\sin 0^0 = 0$, $\sin 90^0 = 1$; bei spitzen Winkeln nimmt der Sinus mit wachsendem Winkel immer zu. Verlängert man nämlich in Fig. 20 CD über D hinaus um es selbst bis F und zieht AF, so ist CAF ein Dreieck mit den festen Seiten $AC = AF$ und dem veränderlichen Winkel 2α; die dritte Seite CF (also auch DC) ist desto gröſser, je gröſser 2α ist (§ 13, 3). Für spitze Winkel hat der Sinus also einen positiven Wert, der von 0 bis 1 wächst. Überschreitet der Winkel 90^0, so bleibt der Sinus positiv, nimmt aber derart ab, daſs $\sin\alpha = \sin(2R - \alpha)$ ist. Für 180^0 wird der Sinus wieder 0, um für wachsende Winkel ins Negative überzugehen, für 270^0 der negativen Einheit gleich zu werden und dann wieder zu 0 aufzusteigen. Dabei ist $\sin\alpha = -\sin(\alpha - 2R)$. Für negative Winkel ist der Sinus durch die Relation bestimmt: $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.

Der Sinus schwankt also zwischen den Werten -1 und $+1$; es gelten für ihn allgemein die Gleichungen

$$\sin(\alpha + 4R) = \sin\alpha,$$
$$\sin(2R - \alpha) = \sin\alpha,$$
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha.$$

Zu einem gegebenen Werte des Sinus gehören daher doppelt unendlich viele Winkel, die durch die Ausdrücke

$$\alpha + 4kR,$$
$$2R - \alpha + 4kR = (4k + 2)R - \alpha$$

dargestellt sind. Während also der Sinus durch den Winkel *eindeutig* bestimmt ist, wird der Winkel durch den Sinus, auch wenn man Winkel über $4R$ ausschlieſst, nur *zweideutig* bestimmt. Dieser Umstand läſst es wünschenswert erscheinen, noch eine zweite Funktion des Winkels in die Rechnung zu bringen.

4. Wir nennen den Sinus des Komplementwinkels von α den *Kosinus* (= complementi sinus) von α und schreiben dafür $\cos\alpha$; es ist also

$$\cos\alpha = \sin(R - \alpha).$$

Man überzeugt sich ferner leicht davon, daſs für *beliebige* α in Fig. 20 die Strecke AD den Kosinus von α darstellt,

www.rcin.org.pl

wenn diese Gröfse positiv oder negativ gerechnet wird, je nachdem D rechts oder links von A liegt.

Der Kosinus beginnt bei 0^0 mit 1, nimmt dann ab, um für 90^0 Null zu werden, dann ins Negative überzugehen und für 180^0 den Wert -1 anzunehmen; dann nimmt er wieder zu, wird bei 270^0 Null und geht nun von neuem ins Positive über.

Es gelten allgemein die Gleichungen

$$\cos(\alpha + 4kR) = \cos\alpha,$$
$$\cos(2R - \alpha) = -\cos\alpha,$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha.$$

Ferner liefert der Pythagoreische Lehrsatz die Gleichung*)

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1,$$

also

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}, \quad \sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}.$$

Ist also der Sinus oder Kosinus eines Winkels, nicht aber der Winkel selbst bekannt, so wird hierdurch die andere Funktion nur *zweideutig* bestimmt.

Die beiden Funktionen Sinus und Kosinus sind *theoretisch* vollkommen ausreichend, um alle hierher gehörigen Aufgaben zu lösen. Dem Charakter unserer Untersuchung entsprechend führen wir daher keine weiteren Winkelfunktionen ein, was freilich für die Einfachheit der Rechnung vorteilhafter wäre.

Man nennt sämtliche eindeutigen, periodischen Funktionen der Winkel *trigonometrische* Funktionen und bezeichnet die Lehre von den Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreiecks als (ebene) *Trigonometrie*.

5. Nunmehr bietet die „*Auflösung*“ der *rechtwinkligen* Dreiecke, d. h. die Herleitung der Relationen zwischen Seiten und Winkeln, keine Schwierigkeit. Man findet, wenn $\gamma = 1R$ ist:

$$a = c\sin\alpha = c\cos\beta,$$
$$b = c\cos\alpha = c\sin\beta,$$

während nach dem Pythagoreischen Lehrsatze $c^2 = a^2 + b^2$ ist. Diese Gleichungen bieten die Möglichkeit, aus zwei

---

*) Die Schreibweise $\sin^2\alpha$ und $\cos^2\alpha$ für $(\sin\alpha)^2$ und $(\cos\alpha)^2$ kann, obgleich *Gauss* dagegen Einsprache erhob, jetzt als fast allgemein üblich betrachtet werden.

www.rcin.org.pl

gegebenen Stücken die übrigen zu berechnen (sind a und b gegeben, so berechne man, wenn man keine weitere Winkelfunktion einführen will, zuerst c u. s. w.).

6. Beim beliebigen Dreieck machen wir $AD \perp CB$ und haben, wenn β und γ spitze Winkel sind und $AD = h$ gesetzt wird,

$$h = b \sin \gamma \quad \text{und} \quad h = c \sin \beta,$$

also

$$b \sin \gamma = c \sin \beta \quad \text{oder} \quad \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma};$$

wenn γ ein stumpfer Winkel ist,

$$h = b \sin (2R - \gamma) = b \sin \gamma, \quad h = c \sin \beta,$$

also dieselbe Relation. Fällen wir auf AC gleichfalls ein Perpendikel von B aus, so erhalten wir eine weitere Gleichung, die mit der ersten zusammengestellt

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma},$$

die sog. *Sinusregel* oder den *Sinussatz* liefert.

Sind eine Seite a und zwei Winkel gegeben, so berechnet man zuerst den dritten Winkel aus $\alpha + \beta + \gamma = 2R$; dann ist

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}, \quad c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}.$$

Sind zwei Seiten a und b und einer der nicht eingeschlossenen Winkel, α, gegeben, so ist $\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}$. Hierdurch ist $\sphericalangle \beta$ nur zweideutig bestimmt, da zu demselben positiven Sinus ein spitzer und ein stumpfer Winkel gehört. Liegt β der kleineren Seite ($b < a$) gegenüber, so ist der spitze Winkel zu nehmen, während im anderen Falle das Problem nach Früherem wirklich zweideutig ist, aufser für $\sin \beta = 1$. Finden wir $\sin \beta > 1$, so ist die Aufgabe unmöglich. Haben wir β bestimmt, so berechnen wir $\gamma = 2R - \alpha - \beta$ und haben endlich $c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$.

7. Sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel oder drei Seiten gegeben, so führt die Sinusregel nicht direkt zum Ziele. Die Schwierigkeit besteht darin, dafs wir noch nicht gezeigt haben, wie $\sin \gamma$ sich durch $\sin \alpha$ und $\sin \beta$ ausdrückt; anderenfalls wären auch diese Fälle mit Hilfe der

www.rcin.org.pl

Sinusregel zu erledigen, da diese zwei Gleichungen liefert und in der That zwischen den sechs Stücken eines Dreiecks aufser $\alpha + \beta + \gamma = 2R$ noch zwei Gleichungen bestehen. Wir leiten eine weitere Formel, den *Kosinussatz*, direkt her. Machen wir $AD \perp CB$, und setzen $AD = h$, $CD = x$, so ist bei jeder Lage von D, wenn nur das Zeichen von x beachtet wird*),

$$c^2 = h^2 + (a - x)^2, \quad h^2 = b^2 - x^2,$$

also

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ax$$

und, wenn $x = b \cos \gamma$ eingesetzt wird,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma;$$

für a und b finden wir zwei analoge Gleichungen.

Nach dieser Formel läfst sich c aus a, b und γ berechnen; die fehlenden Winkel α und β lassen sich nach der Sinusregel finden und zwar eindeutig, wenn man nur beachtet, dafs $\alpha + \beta + \gamma = 2R$ ist und, falls diese Gleichung zur Annahme eines stumpfen Winkels nötigt, dieser der gröfsten Seite gegenüber liegen mufs; andererseits führt auch das folgende Verfahren zum Ziele. Wenn die drei Seiten bekannt sind, so hat man nach dem Kosinussatze

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad \text{u. s. w.},$$

wodurch die Winkel eindeutig bestimmt sind, da zu einem positiven oder negativen Kosinus jeweilig ein spitzer oder stumpfer Winkel gehört. Man vergleiche übrigens über den für $\cos \gamma$ gefundenen Wert § 22, 3.

8. Die zur Vereinfachung der Rechnung dienenden trigonometrischen Formeln gehören nicht hierher. Was die Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks aus drei bestimmenden Stücken anlangt, so haben wir leicht

$$F = \frac{ab \sin \gamma}{2}$$

und

$$F = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha};$$

*) Die Richtung von C nach B ist als die positive anzusehen.

www.rcin.org.pl

unter allen Umständen ist klar, dafs sich der Flächeninhalt *algebraisch* durch die Seiten und die trigonometrischen Funktionen der Winkel ausdrückt.

9. Die Möglichkeit, die Funktionen Sinus und Kosinus selbst analytisch darzustellen, wird durch das *Additionstheorem* gegeben, dessen Herleitung lediglich auf den metrischen Relationen beruht. Am einfachsten gelangen wir vielleicht folgendermafsen zum Ziele.

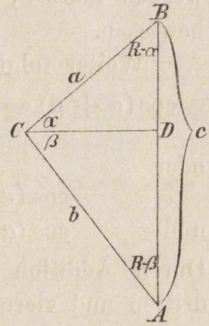


Fig. 21.

Sind α und β zwei spitze Winkel, so machen wir (Fig. 21) $CD = 1$, $\sphericalangle BCD = \alpha$, $\sphericalangle DCA = \beta$, $\sphericalangle CDB = ADC = 1R$ und setzen $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Dann ist nach der Sinusregel

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{c \sin(R - \alpha)}{b} = \frac{c \cos \alpha}{b};$$

andererseits haben wir

$$a = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad b = \frac{1}{\cos \beta}, \quad c = a \sin \alpha + b \sin \beta,$$

also

$$c = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}$$

und daher

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}\right)$$

oder

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

Diese Formel gilt auch für negative β (es ist dann nur β in der umgekehrten Richtung an α anzutragen); wir haben

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta)$$

oder

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

Die gefundenen Formeln gelten nicht allein für spitze, sondern für beliebige Winkel. Ist zunächst α ein stumpfer Winkel, so setzen wir $\alpha = 2R - \alpha_1$ und haben

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(2R - (\alpha_1 - \beta)) = \sin(\alpha_1 - \beta)$$
$$= \sin \alpha_1 \cos \beta - \cos \alpha_1 \sin \beta = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta;$$

ist β stumpf, so kann die analoge Transformation vorgenommen werden. Auf die entsprechenden negativen Winkel

www.rcin.org.pl

überträgt sich die Formel ganz von selbst, so daſs sie für $-2R \leqq \alpha \leqq 2R$, $-2R \leqq \beta \leqq 2R$ gilt. Nimmt man hinzu, daſs alle übrigen Winkel auf diese durch Zufügung von $4kR$ zurückgeführt werden können und daſs Winkel, die nur um diese Gröſse verschieden sind, als äquivalent betrachtet werden müssen, so ist das Theorem für beliebige Winkel bewiesen.

Weiter folgt

$$\cos(\alpha+\beta) = \sin((R-\alpha)-\beta) = \sin(R-\alpha)\cos\beta - \cos(R-\alpha)\sin\beta$$

oder

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

und

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Durch Addition und Subtraktion der ersten und zweiten, dritten und vierten Gleichung folgt

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) &= 2\sin\alpha\cos\beta, \\
\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) &= 2\cos\alpha\sin\beta, \\
\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) &= 2\cos\alpha\cos\beta, \\
\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) &= -2\sin\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$

oder, wenn für $\alpha+\beta$ und $\alpha-\beta$ nunmehr α und β gesetzt wird,

$$\begin{aligned}
\sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \\
\sin\alpha - \sin\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}, \\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.
\end{aligned}$$

10. Da die Umkehrungen von $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$, abgesehen von der Periodizität, noch zweideutig sind, so liegt es nahe, eine Funktion dieser beiden Gröſsen zu bilden, deren Umkehrung nur einfach unendlich vieldeutig ist. Hierzu empfiehlt sich die komplexe Funktion

$$f(\alpha) = \cos\alpha + i\sin\alpha.$$

Es ist $f(\alpha + 4kR) = f(\alpha)$, während für kein anderes reelles α_1 $f(\alpha_1) = f(\alpha)$ ist, wie man durch Verfolgung des Verlaufs von $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ erkennt.

www.rcin.org.pl

Es ist

$$f(\alpha) f(\beta) = (\cos\alpha + i \sin\alpha)(\cos\beta + i \sin\beta)$$
$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$
$$= \cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta) = f(\alpha + \beta).$$

Hieraus folgt

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha \quad \text{oder}$$
$$f(\alpha)^n = f(n\alpha).$$

Durch Entwicklung der linken Seite $(\cos\alpha + i \sin\alpha)^n$ nach dem binomischen Satze und Trennung von Reellem und Imaginärem finden wir

$$\cos n\alpha = \cos^n\alpha - \frac{n(n-1)}{1.2}\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha - \ldots,$$
$$\sin n\alpha = \frac{n}{1}\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha + \cdots,$$

Formeln, die noch weiteren Umformungen zugänglich sind. Speziell ist

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \quad \text{und}$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha;$$

aus den letzten Formeln folgt

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} \quad \text{oder} \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \quad \text{und}$$
$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

11. Die Anschauung lehrt, dafs für verschwindend kleine α auch $\sin\alpha$ verschwindend klein wird, wenn auch (vgl. § 14, 3) kein strenger Beweis dafür erbracht werden kann.

Bezeichet α einen sehr kleinen Winkel derart, dafs auch $n\alpha$, worin n eine beliebige ganze Zahl bedeutet, noch unter jeder Grenze klein gedacht werden kann, so ist

$$\frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha} = n\cos n^{n-1}\alpha - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos^{n-3}\alpha\sin^2\alpha + \cdots$$

oder, da die Potenzen von $\sin\alpha$ als verschwindend klein gegen das erste Glied vernachlässigt werden können und $\cos\alpha$ der 1 sich unendlich nähert,

$$\frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha} = n.$$

www.rcin.org.pl

Da hiernach $\frac{\sin\frac{\alpha}{m}}{\sin\alpha} = \frac{1}{m}$ ist, so folgt weiter

$$\frac{\sin\frac{n\alpha}{m}}{\sin\alpha} = \frac{n}{m}.$$

Die Gröfse $\frac{n}{m}$ kann aber bei genügend grofsen n und m jedem beliebigen reellen Werte beliebig nahe gebracht werden; setzen wir nun $\frac{n\alpha}{m} = \alpha_1$, so folgt

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha} = \frac{\alpha_1}{\alpha} \quad \text{oder} \quad \frac{\sin\alpha_1}{\alpha_1} = \frac{\sin\alpha}{\alpha},$$

worin α_1 eine beliebige, verschwindend kleine Gröfse ist. Die Gröfse $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ nähert sich daher für verschwindende α einer festen Grenze, deren Wert lediglich von dem Mafse abhängt, nach dem die Winkel gemessen werden. — Nehmen wir an, dafs die Winkel nach *Gestreckten* gemessen werden, so wollen wir

$$\left[\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right]_{\alpha=0} = \pi$$

setzen, so dafs, wenn wir $\varphi = \alpha\pi$ nehmen und dem Ausdrucke $\sin\varphi$ jetzt die Bedeutung von $\sin\alpha$ geben,

$$\frac{\sin\varphi}{\varphi} = 1$$

wird. *Wir nehmen von jetzt ab an, dafs die Argumente der trigonometrischen Funktionen, falls sie mit φ, ψ u. s. w. bezeichnet werden, derart gemessen sind, dafs $2R$ gleich π gerechnet wird, wo π eine festdefinierte, alsbald zu berechnende Konstante bedeutet.*

12. Da es gleichgiltig ist, welchen sehr kleinen Wert man in $\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \pi$ für α wählt, so ist es leicht, π mit beliebiger Näherung zu berechnen. Geht man von $\alpha = R$ aus, so hat man $\sin\alpha = 1$, $\cos\alpha = 0$ und kann nun der Reihe nach $\sin\frac{\alpha}{2}$ und $\cos\frac{\alpha}{2}$, dann $\sin\frac{\alpha}{4}$ und $\cos\frac{\alpha}{4}$, schliefslich $\sin\frac{\alpha}{2^n}$ und $\cos\frac{\alpha}{2^n}$ berechnen. Man findet

www.rcin.org.pl

$$\sin\frac{R}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos\frac{R}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\sin\frac{R}{4}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},\quad \cos\frac{R}{4}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}};$$

$$\sin\frac{R}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}},\quad \cos\frac{R}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}};$$

$$\sin\frac{R}{16}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}},$$

$$\cos\frac{R}{16}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

u. s. w.

Beachtet man, daſs wegen $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$: $\frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha} < 1$, also $\frac{\sin\alpha}{\alpha} > \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}$ ist, so erkennt man, daſs $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ einen *zu groſsen* Wert liefert. Um eine Kontrolle für die Rechnung zu haben, betrachten wir $\frac{\sin\alpha}{\alpha\cos\alpha}$, welches sich derselben Grenze für verschwindende α nähert, aber beständig einen *zu kleinen* Wert liefert, da

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha < \cos^2\alpha, \quad \text{also}$$

$$\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha\cos 2\alpha} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\alpha\cos 2\alpha} > \frac{\sin a\cos\alpha}{\alpha\cos^2\alpha} > \frac{\sin\alpha}{\alpha\cos\alpha}$$

ist. Berechnen wir daher gleichzeitig $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ und $\frac{\sin\alpha}{\alpha\cos\alpha}$, so liegt π zwischen beiden, wodurch eine Kontrolle für die Genauigkeit der Rechnung geliefert ist. Man findet

$$\pi = 3{,}1415926535\ldots,$$

eine irrationale Zahl, die sich nicht als Lösung einer algebraischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten darstellen läſst*).

13. Durch Entwickelung nach dem binomischen Satze finden wir

---

*) Den Beweis für das Letztere erbrachte *Lindemann*, Math. Annalen, XX, p. 213.

www.rcin.org.pl

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = \left[\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right]^n$$

$$= \left[1 + \left(i\sin\frac{\varphi}{n} - 2\sin^2\frac{\varphi}{2n}\right)\right]^n$$

$$= 1 + \frac{n}{1}\left(i\sin\frac{\varphi}{n} - 2\sin^2\frac{\varphi}{2n}\right) + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(i\sin\frac{\varphi}{n} - 2\sin^2\frac{\varphi}{2n}\right)^2 + \cdots$$

Lassen wir n ins Unendliche wachsen, so wird

$$n\sin\frac{\varphi}{n} = \varphi,$$

während $(n - k)$ durch n ersetzt werden darf und $n\sin^2\frac{\varphi}{2n} = \frac{\varphi}{2}\cdot\sin\frac{\varphi}{2n} = 0$ wird; wir erhalten

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = 1 + \frac{i\varphi}{1} - \frac{\varphi^2}{1.2} - \frac{i\varphi^3}{1.2.3} + \frac{\varphi^4}{1.2.3.4} + \cdots$$

und durch Trennung von Reellem und Imaginärem

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{1.2} + \frac{\varphi^4}{1.2.3.4} - \frac{\varphi^6}{1.2.3.4.5.6} + \cdots,$$

$$\sin\varphi = \frac{\varphi}{1} - \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \frac{\varphi^5}{1.2.3.4.5} - \frac{\varphi^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \cdots,$$

wobei die Gröfse φ so zu berechnen ist, dafs $\alpha = 2R$ $\varphi = \pi$ entspricht. Die beiden Reihen konvergieren für beliebige endliche φ.

Mit der analytischen Umkehrung der trigonometrischen Funktionen und den daraus entspringenden unendlichen Reihen für π wollen wir uns an dieser Stelle nicht befassen. Die gefundenen Gleichungen liefern zur Genüge die Beziehungen zwischen Winkeln und linearen Gröfsen. Auch die Einführung von $e^{i\varphi}$ für $\cos\varphi + i\sin\varphi$ braucht nicht weiter behandelt zu werden, da die trigonometrischen Rechnungen durch sie nicht besonders vereinfacht werden.

14. Die Definition des Sinus und Kosinus geschah mit Hilfe von rechtwinkligen Dreiecken, deren absolute Dimensionen irrelevant sind, demnach auch als unendlich klein betrachtet werden dürfen. Nach § 15, 5 gelten diese Definitionen auch in der nicht-Euklidischen Geometrie, wenn man nur die definierenden Dreiecke unendlich klein nimmt; die Gleichungen für $\sin(\alpha + \beta)$ u. s. w., sowie die Reihenentwicklungen für $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ behalten hier ebenfalls ihre

www.rcin.org.pl

Giltigkeit. Die trigonometrischen Dreiecksformeln dagegen bleiben nur für unendlich kleine Dreiecke, nicht aber für Dreiecke von endlichen Dimensionen richtig.

§ 27.

Allgemeineres über Strecken- und Winkelrelationen.

1. Aus den Formeln des vorigen Paragraphen für sin $n\alpha$ und cos $n\alpha$ folgt, dafs die Funktionen von Winkeln, die ein rationaler Bruchteil eines Winkels sind, sich algebraisch durch die Funktionen des letzteren ausdrücken. Da nun für $\alpha = R$ Sinus und Kosinus rationale, bekannte Gröfsen sind, so folgt, *dafs die Sinus und Kosinus aller Winkel, die rationale Bruchteile eines Rechten darstellen, die Lösungen von algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten sind.*

2. Ist irgend eine geradlinige Figur durch gewisse Strecken und Winkel ein- oder mehrdeutig bestimmt, so hat es keine Schwierigkeit, die zur Berechnung der noch unbekannten Strecken und Winkel nötigen Gleichungen aufzustellen; man braucht, wie man auch ohne speziellere Durchführung übersieht, nur die metrischen Relationen für Strecken und die Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln der Dreiecke, die immer auftreten, zu benutzen. Das Endresultat lautet:

Die Beziehungen zwischen Strecken und Winkeln geradliniger Figuren stellen sich als algebraische Gleichungen zwischen den Seiten selbst und den trigonometrischen Funktionen der Winkel dar. Treten insbesondere neben Strecken nur Winke als Bestimmungsstücke auf, die rationale Bruchteile eines Rechten sind, so ergeben sich zwischen den Strecken lediglich algebraische Relationen.

3. Während in einem allgemeinen n-seit die vorkommenden Winkel durch $(n-1)$ von ihen linear bestimmt waren, stellt sich bei einem n-Eck die Sache anders; es treten hier auch transcendente Winkelrelationen auf. Es möge die Durchführung für das Viereck genügen, da die allgemeine Untersuchung hierauf zurückgeführt werden kann. Im Viereck treten in jedem der vier Eckpunkte zwei nicht direkt ab-

www.rcin.org.pl

hängige Winkelgröfsen auf, im ganzen also acht. Die übrigen in der Figur (an den weiteren Schnittpunkten der Seiten) auftretenden Winkel sind aus diesen linear herleitbar. Da in jedem der vier Dreiecke, welche je drei der vier Fundamentalpunkte zu Eckpunkten haben, die Winkelsumme $2R$ betragen mufs, so sind hierdurch vier lineare Relationen gegeben, von denen jedoch eine aus den drei andern herleitbar ist, so dafs noch fünf von den Winkeln willkürlich bleiben. Es ist aber leicht ersichtlich, dafs bereits durch vier Winkel (z. B. die an zwei Eckpunkten gelegenen) die übrigen bestimmt sind; eine Relation bleibt also noch herzuleiten*). Bei der Bezeichnungsweise von Fig. 22, wo die Winkel in der Weise festzusetzen sind, dafs zuerst von AC nach AD, dann von AD nach AB gedreht und dabei die Drehungsrichtung von AC nach AD als die positive genommen wird (ebenso diejenige von BA nach BC und von CB nach CA), haben wir bei jeder Lage des Punktes D

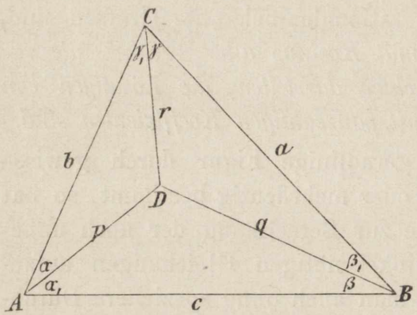


Fig. 22.

$$p \sin \alpha = r \sin \gamma_1$$
$$q \sin \beta = p \sin \alpha_1$$
$$r \sin \gamma = q \sin \beta_1 ,$$

also

$$\frac{\sin \alpha \,.\, \sin \beta \,.\, \sin \gamma}{\sin \alpha_1 \,.\, \sin \beta_1 \,.\, \sin \gamma_1} = 1 \quad \text{oder} \quad \frac{\sin bp \,.\, \sin cq \,.\, \sin ar}{\sin pc \,.\, \sin qa \,.\, \sin rb} = -1,$$

eine Relation, die dem Satze des Menelaos entspricht**). Diese Gleichung ist transcendent.

In derselben Weise läfst sich allgemein erweisen: *Die*

*) S. hierüber auch *R. Hoppe, Bestimmung der Vielecke durch die Winkel zwischen Seiten und Diagonalen; Grunert* Arch. B. 61, p. 439.

**) Wenn wir nämlich uns a, b, c über C, A, B verlängert denken und unter bp den Winkel der Verlängerung von b mit p verstehen u. s. w.

www.rcin.org.pl

Relationen zwischen den Winkeln geradliniger Figuren sind im allgemeinen transcendent derart, daſs zwischen den trigonometrischen Funktionen der Winkel algebraische Gleichungen bestehen; im speziellen Falle können jedoch die transcendenten Funktionen herausfallen.

4. Hieran anknüpfend behandeln wir die weitere Frage: *Welcher Art sind die Winkelrelationen, falls sie algebraisch sind?* Jeder Winkel einer geradlinigen Figur ist unendlich vielwertig; denn man kann ihm beliebige Vielfache von $4R$ zufügen, ohne an der Figur etwas zu ändern. Besteht daher zwischen Winkeln eine Gleichung, so muſs sie so beschaffen sein, daſs Änderungen der Winkel um $4kR$ sie ungeändert lassen oder nur bewirken, daſs andere Winkel ebenfalls um eine solche Gröſse geändert werden müssen. Das erstere tritt dann und nur dann ein, wenn von den Winkeln lediglich Funktionen mit der Periode $4R$ in die Gleichung eingehen; im Falle einer algebraischen Winkelrelation kann nur das letztere zutreffen. Betrachten wir nun in einer solchen algebraischen Winkelrelation alle Winkel bis auf zwei als konstant, so daſs wir $\beta = f(\alpha)$ schreiben können, so muſs $f(\alpha + 4R) = \beta + 4kR$ sein; wäre hierin k nicht von 0 verschieden, so wäre $f(\alpha)$ der Annahme widersprechend eine periodische Funktion. Ist umgekehrt $\alpha = F(\beta)$, so muſs auch $F(\beta + 4R) = \alpha + 4k_1R$ sein. Daher ist $F(\beta + 4kR) = \alpha + 4kk_1R$, während andererseits durch Umkehrung der ersten Gleichung $F(\beta + 4kR) = \alpha + 4R$ folgt, so daſs $kk_1 = 1$, also $k = k_1 = \pm 1$ ist. Eine Funktion f von der gewünschten Eigenschaft ist $\beta = \pm\alpha + \text{Const.}$; ist $f_1(\alpha)$ eine zweite derselben Art, so ist $f_1(\alpha) \mp \alpha - \text{Const.}$ eine periodische Funktion oder eine Konstante; da ersteres hier ausgeschlossen ist, muſs $\beta = \pm\alpha + \text{Const.}$ als die allgemeinste zulässige Gleichung betrachtet werden. Da für die in Const. auftretenden Winkel die gleiche Betrachtung anwendbar ist, so finden wir als allgemeinste algebraische Relation zwischen den Winkeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ einer geradlinigen Figur die Gleichung

$$\pm\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \alpha_3 \pm \cdots \pm \alpha_n = \text{Const.},$$

worin die Doppelzeichen von einander unabhängig sind.

www.rcin.org.pl

Das gefundene Resultat steht scheinbar mit der Wirklichkeit nicht immer im Einklang; beim gleichschenkligen Dreieck mit den Winkeln α, α, β ist z. B. $2\alpha + \beta = 2R$, so dafs der eine Winkel mit dem Koeffizienten 2 behaftet auftritt. Die Sache erklärt sich dahin, dafs die Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks nicht im strengsten Sinne als gleich, sondern nur als bis auf Vielfache von $4kR$ gleich (äquivalent) bezeichnet werden können; läfst man aber die hiernach zu unterscheidenden Basiswinkel getrennt in die Gleichung eintreten, so ist der Widerspruch gehoben. Wir können daher sagen: *Die Winkelrelationen bei geradlinigen Figuren sind transcendent, oder linear in der Weise, dafs die Koeffizienten der Winkel* ± 1 *sind, falls man nur äquivalente Winkel nicht als gleich zusammennimmt.*

§ 28.

Die Doppelverhältnisse.

1. Wir haben im Vorhergehenden willkürliche Systeme von n Geraden und n Punkten ins Auge gefafst. Genauer untersucht wurden allerdings nur Systeme von höchstens vier Geraden oder Punkten; indessen bemerkten wir schon, dafs durch Hinzufügung weiterer Geraden oder Punkte nichts wesentlich Neues erzielt wird. Sollen wir daher hiermit die ebene Elementargeometrie als abgeschlossen betrachten, oder eröffnet sich die Möglichkeit weiterer Spekulationen? Letztere können nur auf *Spezialisierungen* beruhen; durch solche kann man eine unendliche Mannigfaltigkeit von Gebilden erzeugen, von denen in der gewöhnlichen Geometrie zahlreiche behandelt werden. Man braucht nur Figuren einzuführen, bei denen einzelne Strecken in bestimmtem Gröfsenverhältnis stehen, bei denen Winkel von bestimmter Gröfse und Parallellinien vorkommen. Es möge nur an die Lehre von den regulären Polygonen, den Transversalen u. s. w. erinnert werden. Diese Spezialitäten sollen uns hier nicht beschäftigen, da sie kaum einer wissenschaftlichen Anordnung fähig sind und trotz der Merkwürdigkeit vieler keine tiefergehende Bedeutung haben. Aber es existiert auch eine Art von Besonderheit, die einen tieferen Charakter besitzt: *eine Figur kann dadurch*

www.rcin.org.pl

ausgezeichnet sein, daſs mehr als zwei Gerade durch einen Punkt gehen oder daſs mehr als zwei Punkte in einer Geraden liegen. Das Erstere begegnete uns schon bei den Vielecken, das Zweite bei den Vielseiten, sowie in einigen behandelten Spezialfällen. In der Folge wollen wir dieser Besonderheit unser Augenmerk schenken, was sich durch ganz eigenartige und wichtige Resultate rechtfertigen wird. Es wird nämlich möglich sein — um das Hauptresultat vorweg zu nehmen — *Gebilde zu konstruieren, bei denen der Umstand, daſs gewisse Gerade durch dieselben Punkte gehen oder gewisse Punkte auf denselben Geraden liegen, die Folge nach sich zieht, daſs auch andere Gerade durch denselben Punkt gehen oder andere Punkte auf derselben Geraden liegen.* Wir nennen die Lehre von solchen Gebilden die *Geometrie der Lage*)*.

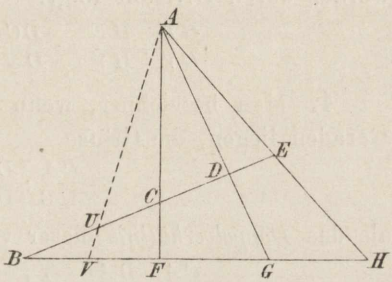


Fig. 23.

2. Der einfachste noch nicht behandelte Fall eines n-seits, bei dem mehrere Gerade durch denselben Punkt gehen, ist derjenige eines Fünfseits, bei dem drei Seiten in dem Punkte A zusammenlaufen. Der Satz des Menelaos liefert uns bei Fig. 23 auf $\triangle BDG$ und die Schneidenden AF und AH angewandt:

$$BF.GA.DC = - FG.AD.CB,$$
$$BH.GA.DE = - HG.AD.EB,$$

woraus durch Division folgt

*) Die historische Entwicklung der „*neueren Geometrie*“, die recht eigentlich mit den folgenden Untersuchungen beginnt, findet man in höchst anregender Weise geschildert in der Einleitung zu *H. Hankel's: Die Elemente der projektivischen Geometrie* u. s. w. Das Bestreben, eine von Maſsverhältnissen ganz unabhängige Geometrie zu schaffen, bildet den Grundgedanken des eigenartigen Werks: *v. Staudt*, *Geometrie der Lage*, an welches sich das gleichnamige Werk *Reye's* anschlieſst. Besonders konsequent und strenge findet man diesen Gedanken durchgeführt in dem kleinen Buche von *J. Thomae: Ebene geometrische Ge-*

www.rcin.org.pl

$$\frac{BF}{BH} \cdot \frac{DC}{DE} = \frac{FG}{HG} \cdot \frac{CB}{EB} \quad \text{oder}$$

$$\frac{BF}{BH} \cdot \frac{GH}{GF} = \frac{BC}{BE} \cdot \frac{DE}{DC} \quad \text{oder}$$

$$\frac{BF}{BH} : \frac{GF}{GH} = \frac{BC}{BE} : \frac{DC}{DE}.$$

3. Dieses Resultat läſst sich sofort erweitern, indem man zu den durch A gehenden Geraden eine vierte AUV hinzufügt. Wir haben

$$\frac{BF}{BV} : \frac{GF}{GV} = \frac{BC}{BU} : \frac{DC}{DU} \quad \text{und}$$

$$\frac{BF}{BV} : \frac{HF}{HV} = \frac{BC}{BU} : \frac{EC}{EU},$$

woraus durch Division folgt:

$$\frac{GF}{GV} : \frac{HF}{HV} = \frac{DC}{DU} : \frac{EC}{EU}.$$

4. Man bezeichnet, wenn A, B, C, D auf derselben Geraden liegen, die Gröſse

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$$

als das *Doppelverhältnis* dieser vier Punkte und schreibt

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = (A, B, C, D) \text{ *)},$$

wobei genau auf die Stellung der Buchstaben zu achten ist. Man bildet das Doppelverhältnis (A, B, C, D) in der Art, daſs man die Strecken von C und D nach A und B ins Auge faſst, die Quotienten $\frac{CA}{CB}$ und $\frac{DA}{DB}$ bildet und den ersteren durch den letzteren dividiert.

Rückt einer der Punkte, etwa D, ins Unendliche, so werden AD, BD, CD unendlich, während die Quotienten $\frac{AD}{BD}$ u. s. w. der Einheit gleich werden. Da die folgenden Untersuchungen in der Theorie der metrischen Relationen

---

bilde erster und zweiter Ordnung vom Standpunkte der Geometrie der Lage betrachtet. Ausführlichere historische Erörterungen dürften in Hinblick auf die *Hankel*'sche Darstellung entbehrlich sein.

*) Diese Bezeichnung rührt von *Möbius* her. Der Fundamentalsatz über die Doppelverhältnisse findet sich schon bei *Pappus*.

www.rcin.org.pl

ihre Grundlage haben, bei diesen aber Grenzübergänge zum Unendlichen zu richtigen Resultaten führen, so werden wir überall, wo nichts Besonderes bemerkt ist, die Zulässigkeit der Übertragung auf unendlich ferne Gebilde als selbstverständlich ansehen (vgl. § 20, 4).

5. Da vier Punkte in $4.3.2 = 24$ verschiedene Reihenfolgen gebracht werden können, so gehören zu vier auf einer Geraden gegebenen Punkten A, B, C, D 24 Doppelverhältnisse; dieselben sind teils identisch, teils in einfacher Weise aufeinander zurückführbar. Man kann damit beginnen, daſs man je zwei der Punkte einander zuordnet, wie oben C und D, A und B; dabei erweist es sich als gleichgiltig, welches Paar man als das erste, welches als das zweite nimmt, denn es ist

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD},$$

so daſs wir haben

$$(ABCD) = (CDAB).$$

Vertauscht man C mit D oder A mit B, so geht das Doppelverhältnis in seinen reciproken Wert über, während die gleichzeitige Vornahme beider Vertauschungen keine Veränderung hervorruft; wir haben also

$$(BACD) = (ABDC) = \frac{1}{(ABCD)},$$

$$(BADC) = (DCBA) = (ABCD).$$

Ferner ist

$$(ACBD) = \frac{BA}{BC} : \frac{DA}{DC} = \frac{BA \,.\, DC}{BC \,.\, DA}$$

$$= \frac{(BC + CA)(DA + AC)}{BC \,.\, DA} = 1 - \frac{AC(DA + CB + AC)}{BC \,.\, DA}$$

$$= 1 - \frac{AC \,.\, DB}{BC \,.\, DA} = 1 - \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$$

oder

$$(ACBD) = 1 - (ABCD).$$

Setzen wir $(ABCD) = \lambda$, so haben wir

$$(BACD) = \frac{1}{\lambda}, \quad (ACBD) = 1 - \lambda,$$

weiter

www.rcin.org.pl

$$(ACDB) = \frac{1}{(ACBD)} = \frac{1}{1-\lambda},$$

$$(ADBC) = 1 - (ABDC) = 1 - \frac{1}{\lambda} = - \frac{1-\lambda}{\lambda},$$

$$(ADCB) = \frac{1}{(ADBC)} = - \frac{\lambda}{1-\lambda}.$$

Schliefslich erhalten wir die folgende Zusammenstellung:

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA) = \lambda,$$

$$(ABDC) = (BACD) = (DCAB) = (CDBA) = \frac{1}{\lambda},$$

$$(ACBD) = (CADB) = (BDAC) = (DBCA) = 1 - \lambda,$$

$$(ACDB) = (CABD) = (DBAC) = (BDCA) = \frac{1}{1-\lambda},$$

$$(ADBC) = (DACB) = (BCAD) = (CBDA) = - \frac{1-\lambda}{\lambda},$$

$$(ADCB) = (DABC) = (CBAD) = (BCDA) = - \frac{\lambda}{1-\lambda}.$$

Die Transformationen $\lambda' = \frac{1}{\lambda}$, $\lambda' = 1 - \lambda$, $\lambda' = - \frac{\lambda}{1-\lambda}$ führen nach einmaliger, die andern $\lambda' = \frac{1}{1-\lambda}$, $\lambda' = - \frac{1-\lambda}{\lambda}$ nach zweimaliger Wiederholung zum Anfangswerte λ zurück*).

Wenn eines der 24 Doppelverhältnisse bekannt ist, lassen sich die übrigen linear aus diesem berechnen; ist $(ABCD) = (A_1B_1C_1D_1)$, so gilt diese Gleichung auch für alle Doppelverhältnisse, die aus den beiden durch entsprechende Umstellungen hervorgehen; es genügt daher, immer *eines* der 24 Doppelverhältnisse ins Auge zu fassen.

Sind drei Punkte A, B, C einer Geraden festgelegt und ist das Doppelverhältnis derselben zu einem vierten Punkte D bekannt, so ist die Lage des letzteren *eindeutig* bestimmt; setzen wir $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, so ist aus

$$\lambda = (ABCD) = \frac{(a+b)(b+c)}{b(a+b+c)}$$

c, d. h. der Abstand des Punktes D von C *eindeutig* zu berechnen.

---

*) Die Transformationsgruppe des Doppelverhältnisses ist dieselbe, die von *F. Klein* als *Diëdergruppe mit* $n = 3$ bezeichnet wird und die auch in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen eine Rolle spielt.

www.rcin.org.pl

6. Wir nennen die Gesamtheit der Geraden (*Strahlen*), die durch einen Punkt (*Mittelpunkt*) gehen, einen *Strahlenbüschel**), die Gesamtheit der Punkte, die auf einer Geraden liegen, eine *Punktreihe.*

Das Resultat von 3. läfst sich nun so ausdrücken:

Wird ein Strahlenbüschel durch beliebige Geraden geschnitten, so sind die Doppelverhältnisse von je vier Punkten dieser Geraden, die durch dieselben Strahlen ausgeschnitten werden, einander gleich.

Ordnen wir die Punkte zweier Punktreihen so einander zu, dafs je zwei einander entsprechen, die durch denselben Strahl eines festen Strahlenbüschels aus ihnen ausgeschnitten werden, so nennen wir diese Zuordnung eine *projektivische;* wir behalten diese Bezeichnung auch noch bei, wenn die beiden Punktreihen nach stattgehabter Zuordnung in eine beliebige andere Lage gebracht werden; die ursprüngliche Lage heifst die *perspektivische. Die Doppelverhältnisse von je vier entsprechenden Punkten zweier projektivischen Punktreihen sind einander gleich.*

7. *Sind zwei Punktreihen a und a_1 so zugeordnet, dafs die Doppelverhältnisse von je vier entsprechenden Punkten gleich sind, so ist die Zuordnung projektivisch. Hierbei können drei Punkte A, B, C der einen Reihe drei ganz beliebigen A_1, B_1, C_1 der anderen willkürlich zugewiesen werden; doch ist hierdurch die Zuordnung vollkommen bestimmt.*

Legen wir nämlich die Punktreihen so, dafs die Punkte A und A_1 zusammenfallen und verbinden dann B mit B_1, C mit C_1, so werden die beiden Punktreihen durch den Strahlenbüschel, welcher den Schnittpunkt O von BB_1 und CC_1 zum Mittelpunkte hat, einander projektiv zugeordnet, so dafs A, B, C und A_1, B_1, C_1 einander entsprechen. Ist nun D ein beliebiger vierter Punkt von a und schneidet OD a_1 in D_1, so ist $(ABCD) = (A_1B_1C_1D_1)$, d. h. D_1 ist derselbe Punkt, der auch durch die Gleichheit der Doppelverhältnisse D zugewiesen wird.

---

*) Rückt der Mittelpunkt des Strahlenbüschels ins Unendliche, so werden die Strahlen parallel (*Parallelstrahlenbüschel*).

www.rcin.org.pl

8. *Sind zwei Punktreihen zu derselben dritten projektivisch, so sind sie auch zueinander projektivisch;* denn die Doppelverhältnisse von je vier ihrer entsprechenden Punkte sind dem entsprechenden der dritten Punktreihe gleich, also untereinander gleich.

Sind zwei Punktreihen projektivisch aufeinander bezogen, und legt man sie so, dafs irgend zwei entsprechende Punkte A und A_1 zusammenfallen, so sind sie in perspektivischer Lage. Dies geht aus 7. hervor.

9. Ordnen wir die Strahlen zweier Strahlenbüschel einander derart zu, dafs die durch dieselben Punkte einer Punktreihe gehenden einander entsprechen, und bringen sie dann in eine beliebige Lage, so heifst die Zuordnung gleichfalls *projektivisch;* die Anfangslage heifst die *perspektivische.* Ein Strahlenbüschel heifst endlich einer Punktreihe *perspektivisch* zugeordnet, wenn man jedem Strahle des einen den Punkt der andern zuweist, durch den er geht und dann die Lage, die zuerst *perspektivisch* ist, beliebig ändert.

Projektivische Strahlenbüschel werden durch irgend welche Gerade derart geschnitten, dafs die Doppelverhältnisse von je vier durch entsprechende Strahlen ausgeschnittenen Punkten gleich sind; denn sie sind dem durch die entsprechenden Punkte der zuordnenden Punktreihe gebildeten Doppelverhältnisse gleich. Sind zwei Strahlenbüschel zu einem dritten oder zu einer Punktreihe projektivisch, so sind sie auch unter einander projektivisch u. s. w., wie man mit Hilfe schneidender Punktreihen erweist.

10. *Ordnet man drei Strahlen eines Büschels drei beliebigen eines andern oder drei Punkten einer Punktreihe zu, so ist damit eine projektivische Zuordnung eindeutig fixiert.* Man braucht im erstern Falle nur die beiden Büschel durch beliebige Punktreihen zu schneiden und letztere projektivisch einander zuzuordnen, so dafs sie durch die drei festen Strahlenpaare in entsprechenden Punkten geschnitten werden; im zweiten Falle verfährt man analog.

Zwei projektivische Strahlenbüschel sind in perspektivischer Lage, wenn sie einen Strahl entsprechend gemein haben (analog zu 8.).

www.rcin.org.pl

11. Gehen (Fig. 24) von O aus nach den Punkten A, B, C, D einer Punktreihe die Strahlen a, b, c, d, so ist

$$CA = \frac{c \sin COA}{\sin OAC}, \quad CB = \frac{c \sin COB}{\sin OBC},$$

also

$$\frac{CA}{CB} = \frac{\sin COA}{\sin COB} \cdot \frac{\sin OBC}{\sin OAC} \quad \text{und ebenso}$$

$$\frac{DA}{DB} = \frac{\sin DOA}{\sin DOB} \cdot \frac{\sin OBC}{\sin OAC}$$

und somit

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{\sin COA}{\sin COB} : \frac{\sin DOA}{\sin DOB}.$$

Ist also ein Strahlenbüschel einer Punktreihe projektivisch zugeordnet, so ist das Doppelverhältnis von je vier Punkten der letzteren dem Doppelverhältnis der Sinus der Winkel gleich, welche die den vier Punkten zugeordneten Strahlen miteinander bilden.

Sind zwei Strahlenbüschel projektivisch zueinander, so sind für je vier zugeordnete Strahlen derselben die Sinus-Doppelverhältnisse gleich.

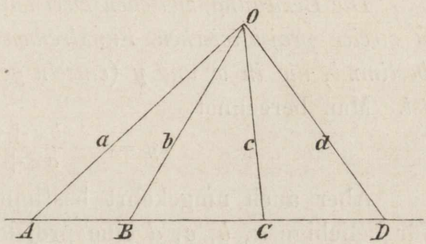


Fig. 24.

Durch diese und die vorigen Sätze sind Strahlenbüschel und Punktreihe als ***dualistisch*** *entsprechende Gebilde nachgewiesen derart, dafs der Strecke zwischen je zwei Punkten der Reihe der Sinus des Winkels zwischen zwei Strahlen des Büschels entspricht.*

12. Wir haben die projektivische Verwandtschaft zweier Geraden in doppelter Weise fixiert: einmal rein geometrisch durch perspektivische Zuordnung mit nachfolgender Lageänderung und dann mit Hilfe der Gleichheit der Doppelverhältnisse; die letztere Beziehung läfst sich jedoch noch in eine einfachere und durchsichtigere arithmetische Form kleiden. Wir denken uns auf jeder von zwei projektivischen Punktreihen einen Nullpunkt willkürlich fixiert und die Lage eines anderen Punktes in ihnen durch seinen Abstand von

www.rcin.org.pl

dem Nullpunkte (mit Rücksicht auf die Richtung), jedesmal nach gleichem Mafse gemessen, festgesetzt. Sind dann x_1, x_2, x_3 und y_1, y_2, y_3 die Abstände von je drei beliebig zugeordneten Punkten von ihren Nullpunkten und bezeichnen x und y beliebige andere zugeordnete Punkte der Reihen, so drückt sich die Gleichheit der Doppelverhältnisse folgendermafsen aus:

$$\frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} : \frac{y - y_1}{y - y_2}$$

oder

$$\left(\frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} - \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2}\right) xy - \left(y_2 \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} - y_1 \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2}\right) x$$

$$- \left(x_1 \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} - x_2 \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2}\right) y + x_1 y_2 \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} - x_2 y_1 \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} = 0$$

oder, wenn man die konstanten Koefficienten durch einfache Buchstaben bezeichnet,

$$a\,xy + bx + cy + d = 0.$$

Die Beziehung zwischen zwei entsprechenden Punkten x und y zweier projektivischen Punktreihen ist durch eine Gleichung bestimmt, die in x und y (einzeln genommen) vom ersten Grade ist. Man berechnet

$$y = -\frac{bx + d}{ax + c}.$$

Aber auch umgekehrt bestimmt die letztere Gleichung für beliebige a, b, c, d eine projektivische Beziehung; denn auch nach beliebiger Festsetzung von x_1, x_2, x_3 können y_1, y_2, y_3 so bestimmt werden, dafs sie drei Gleichungen genügen, also so, dafs $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{d}{a}$ gegebene Werte annehmen.

13. Mittels dieser arithmetischen Beziehung kann man sich am leichtesten ein Bild von dem Verlaufe zweier projektivischen Punktreihen verschaffen, namentlich wenn man die beiden Nullpunkte zweckmäfsig wählt. Entsprechen sich in den Punktreihen die beiden unendlich fernen Punkte, was immer und nur der Fall ist, wenn die Reihen in der perspektivischen Lage parallel sind (wie unmittelbar zu ersehen), so mufs

$$\infty = -\frac{b\infty + d}{a\infty + c} = -\frac{b}{a},$$

www.rcin.org.pl

d. h. $a = 0$ sein, so daſs, wenn wir $-c$ in die Konstanten des Zählers eingehen lassen,

$$y = bx + d$$

wird. Wählen wir nun zwei entsprechende Punkte der Reihen zu Nullpunkten, so muſs für $x = 0$ auch $y = 0$, d. h. $d = 0$ sein, so daſs

$$y = bx$$

ist. Beide Reihen sind *projektivisch ähnlich*, d. h. jeder Strecke der einen entspricht dieselbe mit einer Konstanten multiplizierte Strecke bei der andern; ist b positiv, so bewegt sich Punkt y immer in derselben Richtung wie Punkt x, ist b negativ, so bewegt er sich in der entgegengesetzten Richtung. Für $b = 1$ sind die Reihen *projektivisch gleich.*

Entsprechen sich die unendlich fernen Punkte nicht, so wählen wir die Punkte zu Nullpunkten, welche dem unendlich fernen Punkte der andern Reihe entsprechen; $x = 0$ oder ∞ entspricht dann $y = \infty$ oder 0, was nur zutrifft, wenn die verbindende Relation die Form

$$y = \frac{d}{x}$$

hat. Nehmen wir zuerst d als positiv an, so bewegt sich, falls x von 0 nach $+\infty$ geht, y von $+\infty$ nach 0, geht dann, wenn x nach $-\infty$ überspringt und von hier aus die negativen Werte durchläuft, ins Negative bis zu $-\infty$ u. s. w. Ist d negativ, so geschieht der Verlauf in umgekehrter Richtung. Die y-Reihe ist der durch $y = \frac{1}{x}$ fixierten Reihe projektivisch ähnlich. Wir können also sagen: *jede zu einer andern Reihe projektivische Reihe ist entweder dieser selbst oder der durch $y = \frac{1}{x}$ aus ihr hergeleiteten projektivisch ähnlich.*

14. Nachdem zwei Punktreihen einander projektivisch zugeordnet sind, können sie ineinander gelegt werden, so daſs wir in einer Geraden zwei als verschieden zu betrachtende Punktreihen vereinigt haben; in beiden möge der Nullpunkt derselbe sein. Durch die Gleichung $y = -\frac{bx + d}{ax + c}$ ist jedem Punkte der ersten Reihe ein Punkt der zweiten zu-

www.rcin.org.pl

gewiesen. Wir fragen: *wann entspricht sich derselbe Punkt in beiden Reihen?* Es mufs alsdann*)

$$x = -\frac{bx + d}{ax + c}, \quad \text{also}$$

$$x = \frac{-(b + c) \pm \sqrt{(b + c)^2 - 4ad}}{2a} \quad \text{sein.}$$

Ist $(b + c)^2 - 4ad > 0$, so sind zwei solche „*Doppelpunkte*“ vorhanden; ist $(b + c)^2 - 4ad = 0$, so rücken beide in einen einzigen zusammen; ist endlich $(b + c)^2 - 4ad < 0$, so sind reelle Doppelpunkte nicht vorhanden. Der letzte Fall kann offenbar nur dann eintreten, wenn sich y in der gleichen Richtung wie x bewegt.

Anm. Die projektivische Zuordnung von Punktreihen steht im engsten Zusammenhang mit der Theorie der *linearen Transformationen*, auf die an dieser Stelle nicht weiter eingegangen werden soll. Damit treten auch die Untersuchungen von § 5, 10 zur Theorie der projektivischen Zuordnung in Beziehung. Die Doppelpunkte sind *reell und verschieden*, *zusammenfallend* oder *imaginär*, je nachdem die Transformation nach der Bezeichnung von *F. Klein hyperbolisch*, *parabolisch* oder *elliptisch* ist.

15. Ein bemerkenswerter Spezialfall projektivischer Punktreihen in derselben Geraden ist der, dafs je zwei Punkte derart zusammengehören, dafs jedem derselben als Punkt der ersten Reihe der andere als Punkt der zweiten Reihe entspricht. Die Gleichung

$$axy + bx + cy + d = 0$$

mufs in diesem Falle so beschaffen sein, dafs sie sich bei Vertauschung von x und y nicht ändert, so dafs

$$axy + b(x + y) + d = 0$$

oder

$$y = -\frac{bx + d}{ax + b}$$

ist. Man nennt diese Zusammenordnung eine *Involution***). Dieselbe hat zwei reelle Doppelpunkte, wenn $b^2 - ad > 0$, einen,

---

*) Bei den analogen Untersuchungen von § 5, 10 ist die Bezeichnung eine andere.

**) Diese Bezeichnung rührt von *Desargues* her.

www.rcin.org.pl

wenn $b^2 - ad = 0$, und zwei imaginäre, wenn $b^2 - ad < 0$ ist; sie sind durch die Gleichung

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ad}}{a}$$

gegeben.

Wir untersuchen noch das Doppelverhältnis, welches die beiden Doppelpunkte x_1 und x_2 mit irgend zwei zugeordneten Punkten x und y bestimmen, d. h. die Gröfse

$$\frac{x - x_1}{y - x_1} : \frac{x - x_2}{y - x_2} = \frac{xy - x_2 x - x_1 y + x_1 x_2}{xy - x_1 x - x_2 y + x_1 x_2}.$$

Da $x_1 + x_2 = -\frac{2b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{d}{a}$ ist, so können wir schreiben

$$xy - \frac{x_1 + x_2}{2}(x + y) + x_1 x_2 = 0$$

oder

$$2xy - (x_1 + x_2)(x + y) + 2x_1 x_2 = 0$$

oder

$$xy - x_2 x - x_1 y + x_1 x_2 = -(xy - x_1 x - x_2 y + x_1 x_2),$$

woraus

$$\frac{x - x_1}{y - x_1} : \frac{x - x_2}{y - y_2} = -1$$

folgt.

Wir nennen ein Doppelverhältnis, dessen Wert gleich -1 ist, ein *harmonisches* und sagen:

Die beiden Doppelpunkte der Involution werden durch je zwei zugeordnete Punkte der Involution harmonisch getrennt *).

Nehmen wir den Punkt in der Mitte von beiden Doppelpunkten, also Punkt $\frac{x_1 + x_2}{2}$, als Mittelpunkt an (derselbe ist auch bei imaginären Doppelpunkten reell), so wird jetzt $x_1 = -x_2$, also $b = 0$, somit

$$x_1 = \sqrt{-\frac{d}{a}}, \quad x_2 = -\sqrt{-\frac{d}{a}}$$

und

$$y = -\frac{d}{ax} \quad \text{oder} \quad xy = -\frac{d}{a},$$

---

*) Der Ausdruck „*harmonisch getrennt*“ wird in § 29 genauer erläutert werden.

so dafs *das Produkt der Abstände zweier zusammengehörigen Punkte vom Nullpunkt ein konstantes ist.* Bei zusammenfallenden Doppelpunkten fällt auch je einer von zwei zugeordneten Punkten mit diesen zusammen, während der andere beliebig ist.

Eine Involution ist vollkommen bestimmt, wenn man die beiden Doppelpunkte kennt; denn die bestimmende Gröfse $\sqrt{-\frac{d}{a}}$ ist hierdurch bekannt. Auch zwei beliebige Punktepaare bestimmen die Involution (etwa $\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2$); denn aus den Gleichungen

$$a\xi_1\eta_1 + b(\xi_1 + \eta_1) + d = 0,$$
$$a\xi_2\eta_2 + b(\xi_2 + \eta_2) + d = 0$$

lassen sich die Gröfsen $\frac{b}{a}$ und $\frac{d}{a}$ linear berechnen.

Das Vorkommen der *imaginären Doppelpunkte* deutet wiederum auf eine Geometrie des Imaginären hin (vgl. *v. Staudt*, *Beiträge zur Geometrie der Lage*, 1. Heft, p. 76); wir verzichten jedoch auf ein weiteres Eingehen.

16. Die letzten Untersuchungen lassen sich sofort auf zusammengelegte projektivische Strahlenbüschel übertragen, indem man dieselben durch eine Gerade schneidet, welche als Träger zweier projektivischen Punktreihen fungiert, denen dann die Strahlenbüschel perspektivisch zugeordnet werden. Ein genaueres Eingehen auf den gesamten Gegenstand kann hier unterbleiben, da derselbe schon in die *höhere* Geometrie hinüberleitet.

§ 29.

Die harmonische Teilung.

1. Wir führen den Übergang zur Geometrie der Lage in der Weise aus, dafs wir uns die Aufgabe stellen: *ein Doppelverhältnis aufzufinden, welches durch eine Figur bestimmt ist, in der keine andern Besonderheiten vorkommen, als dafs gewisse Gerade durch denselben Punkt gehen und gewisse Punkte auf derselben Geraden liegen;* dabei wollen wir uns bemühen, möglichst wenige Gerade in die Figur einzuführen. Sind auf

www.rcin.org.pl

den Geraden $BCDE$ und $BFGH$ (Fig. 25) durch die Strahlen AB, AF, AG, AH des Büschels A die Punkte B, B; C, F; D, G; E, H einander zugeordnet, so wollen wir eine Besonderheit dadurch einführen, dafs wir dieselben Punkte durch ein zweites

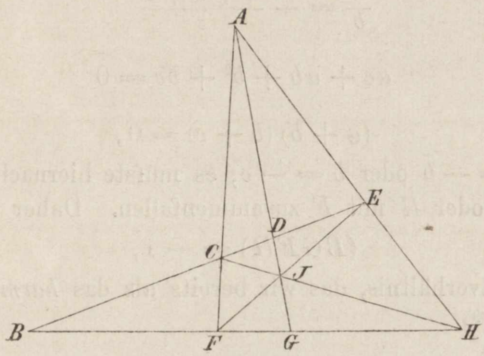


Fig. 25.

passend gewähltes Strahlenbündel einander in anderer Reihenfolge zuordnen. Dies ist durch Zuhilfenahme von nur zwei neuen Geraden möglich, wenn AG so gewählt ist, dafs es durch den Schnittpunkt J von CH und EF hindurchgeht. In der so gefundenen, aus sieben Geraden bestehenden Figur sind die Punkte B, C, D, E und B, F, G, H durch die Büschel A und J in doppelter Weise einander zugeordnet, so dafs

$$(BDCE) = (BGFH)$$

und

$$(BDCE) = (BGHF),$$

also

$$(BGFH) = (BGHF)$$

ist. Nun ist aber nach § 28, 5, wenn

$$(BGFH) = \lambda$$

gesetzt wird,

$$(BGHF) = \frac{1}{\lambda},$$

also

$$\lambda = \frac{1}{\lambda}$$

oder

$$\lambda^2 = 1,$$

d. h.

$$\lambda = \pm 1.$$

www.rcin.org.pl

werden, in welchem eine Diagonale gezogen ist. Man kann daher, wenn man noch hinzunimmt, dafs jeder Büschel von vier Strahlen alle ihn schneidenden Geraden in demselben Doppelverhältnis teilt und wenn man zwei Seiten des Vierecks, die keinen Eckpunkt gemein haben, als *gegenüberliegende* bezeichnet, sagen:

Auf jeder Seite eines Vierecks bestimmen die zwei darauf gelegenen Eckpunkte, der Schnittpunkt mit der gegenüberliegenden Seite und der Schnittpunkt mit derjenigen Diagonale, die nicht durch den letztgenannten Punkt geht, ein harmonisches Doppelverhältnis derart, dafs die Eckpunkte durch die beiden anderen Punkte harmonisch getrennt werden. Auch die Diagonalen selbst werden durch die sechs Seiten in vier harmonischen Punkten geschnitten derart, dafs die Punkte, durch welche je zwei dieser Seiten gehen, zusammengeordnet sind.

Andererseits kann man auch, wenn CE, EH, HF, FC als die Seiten eines Vierseits betrachtet werden, den Satz aussprechen:

Im Vierseit werden auf jeder Diagonale die darauf gelegenen Eckpunkte durch die Schnittpunkte mit den beiden anderen Diagonalen harmonisch getrennt).*

Man sieht also, dafs schon durch vier beliebig gegebene Gerade oder Punkte harmonische Verhältnisse indiziert sind. Man braucht nur die Schnittpunkte der Geraden, resp. die weiteren Schnittpunkte der verbindenden Geraden durch neue Gerade zu verbinden.

5. Jeder Büschel von vier Strahlen, der eine Gerade und somit alle Geraden in vier harmonischen Punkten schneidet, heifst ein *harmonischer Büschel*; einander zugeordnet sind in ihm diejenigen Strahlen, die durch einander zugeordnete Punkte gehen. Bei jedem harmonischen Büschel ist das Sinusdoppelverhältnis gleich -1.

Es ist leicht, in jedem Viereck oder Vierseit die harmonischen Büschel aufzusuchen.

---

*) Man kann die Herleitung auch sehr einfach mit Hilfe der Sätze des Menelaos und des Ceva direkt ausführen, indem man beide auf dasselbe Dreieck mit denselben Teilpunkten bei zwei Seiten anwendet.

www.rcin.org.pl

6. Wenn wir die Annahme machen, dafs es möglich sei, durch zwei gegebene Punkte eine Gerade zu legen (etwa mittels des Lineals), so ist uns die Möglichkeit zu einer Anzahl von *Konstruktionen* gegeben, die man als *lineare* bezeichnet. Die Zahl derselben ist weit beschränkter, als die Zahl der mit Lineal und Zirkel ausführbaren der gewöhnlichen Elementargeometrie. Als einfachste der linear zu lösenden Aufgaben kann die folgende gelten: *Zu drei gegebenen Punkten einer Geraden einen vierten zu bestimmen, der mit ihnen zusammen ein harmonisches Verhältnis liefert.*

Sollen A und B zwei zugeordnete Punkte sein, und wird zu C der zugeordnete D gesucht, so verbindet man A, B und C durch Gerade mit einem beliebigen Punkte E, legt durch einen beliebigen Punkt F von CE die Geraden AF und BF, die BE und AE in H und G schneiden; dann trifft die Gerade GH die Gerade ABC in dem gesuchten Punkte D*).

Wir erkennen nach allem die hervorstechende Eigenschaft des harmonischen Doppelverhältnisses darin, dafs es im Gegensatz zu anderen Verhältnissen durch Figuren erzeugt wird, die keine anderen Besonderheiten aufweisen, als dafs gewisse Gerade durch denselben Punkt gehen, gewisse Punkte auf derselben Geraden liegen.

7. Wenn zwei Punktreihen einander projektivisch zugeordnet sind, entsprechen wegen der stattfindenden Gleichheit der Doppelverhältnisse je vier harmonischen Punkten der einen auch vier harmonische Punkte der anderen. Wir können aber auch umgekehrt behaupten, *dafs eine projektivische Zuordnung zweier Punktreihen hergestellt ist, wenn man jedem Punkte der einen einen einzigen Punkt der anderen so zuweist, dafs je vier beliebigen harmonischen Punkten der einen vier ebensolche der anderen entsprechen sollen und wenn gleichzeitig die Bedingung zugefügt wird, dafs einer stetigen Folge*

*) Es mufs ausdrücklich betont werden, dafs die Möglichkeit einer linearen Konstruktion aufhört, wenn einer der vorkommenden Punkte ins Unendliche rückt, also zwei Gerade parallel werden. Man kann also eine Strecke AB nicht dadurch halbieren, dafs man zu A, B und dem unendlich fernen Punkte der Geraden AB den vierten harmonischen Punkt sucht.

www.rcin.org.pl

von Punkten der einen Reihe eine ebensolche in der anderen entspricht.

Beweis: Wir ordnen zuerst drei willkürlichen Punkten A, B, C der einen Reihe drei willkürliche A_1, B_1, C_1 der anderen zu. Bestimmen wir zu denselben bei beliebiger Zuordnung je einen vierten harmonischen Punkt D und D_1 und betrachten dieselben auch einander zugeordnet, so ist das Resultat dasselbe, wie wenn wir die Punktreihen einander projektivisch so zugeordnet hätten, dafs A, B, C und A_1, B_1, C_1 einander entsprechen; denn wegen der Gleichheit der Doppelverhältnisse müfsten alsdann D und D_1 einander gleichfalls entsprechen. Nun kann man z. B. zu A, B, D einerseits und A_1, B_1, D_1 andererseits die vierten harmonischen Punkte E und E_1 bestimmen und einander zuweisen, und in analoger Weise fortfahrend (wobei auch die Reihenfolge je dreier Punkte noch variiert werden darf) kann man unendlich vielen Punkten der einen Reihe unendlich viele der anderen zuweisen derart, dafs das Resultat dasselbe wird, wie wenn man denselben Punkten der ersten Reihe durch die projektivische Beziehung solche der zweiten zugeordnet hätte. Können wir nun darthun, dafs die in der ersten Reihe nach und nach bestimmten Punkte diese Reihe mit beliebiger Dichtigkeit erfüllen, so dafs also kein noch so kleines Stück dieser Reihe angegeben werden kann, auf welchem nicht ein solcher Punkt läge, so ist wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der Zuordnung der Beweis geführt.

Liegen aber die drei Punkte A, B, C in dieser Reihenfolge und ist D der vierte harmonische Punkt, so haben wir

$$\frac{AB}{AD} + \frac{CB}{CD} = 0$$

oder, wenn $AB = a$, $BC = b$, $CD = x$ gesetzt wird:

$$\frac{a}{b} = \frac{a + b + x}{x}$$

oder

$$x = b\,\frac{a + b}{a - b}.$$

Nehmen wir an, dafs $a > b$ sei (im umgekehrten Falle brauchte man nur die positive mit der negativen Seite zu

www.rcin.org.pl

vertauschen, während für $a = b$ die Sache ohne weiteres erledigt wäre), so ist hiernach

$$x > b.$$

Punkt D ist also, je nachdem er auf die positive oder negative Seite fällt, von C oder A weiter als B entfernt. Sucht man nun für A, C, D, resp. D, A, C den vierten harmonischen Punkt E, so ist er von dem ihm benachbarten äufsersten Punkte abermals weiter als C, resp. A entfernt, d. h. diese Entfernung ist sicher gröfser als die kleinere von den beiden Gröfsen a und b.

Fährt man in dieser Weise fort, so kommen immer weiter entfernte und zwar schliefslich über jede Grenze weit entfernte Punkte hinzu, da die Entfernung des jeweilig letzten Punktes von einem der äufsersten der vorhandenen mehr als eine bestimmte endliche Gröfse (a oder b) beträgt. Ist P ein solcher, so liegt der vierte harmonische Punkt Q zu den zugeordneten Punkten A und B sowie dem dritten Punkte P der Mitte von AB beliebig nahe; dann findet man in gleicher Weise Punkte, die den Mitten von AQ und QB beliebig nahe kommen u. s. w. Man zeigt auf diese Weise, dafs auf der Strecke AB — und ebenso auf jeder anderen zwischen zwei gefundenen Punkten — die fixierten Punkte beliebig dicht liegen.

Unter gleicher Bedingung folgt weiter, dafs zwei Strahlenbüschel projektivisch sind, wenn je vier harmonischen Strahlen des einen je vier harmonische des anderen entsprechen, und dafs ein Strahlenbüschel und eine Punktreihe projektivisch sind, wenn je vier harmonischen Strahlen des ersteren je vier harmonische Punkte der letzteren zugeordnet werden*).

*) Eine *„Geometrie der Lage"*, welche den Mafsbegriff ganz aus ihren Entwickelungen verbannen will, mufs die projektivische Zuordnung dem bewiesenen Satze entsprechend durch das Entsprechen von je vier harmonischen Punkten definieren. Die Litteratur über diesen Gegenstand, die sich mit der Schwierigkeit beschäftigt, welche durch die verlangte stetige Aufeinanderfolge involviert wird, findet man angegeben in der Abhandlung: *Fr. Schur, Über den Fundamentalsatz der projektivischen Geometrie, Math. Ann., B. 18, p. 252.* Vgl. auch den abweichenden Entwickelungsgang in *Thomae, ebene geom. Geb. u. s. w. v. Stdp. der Geometrie der Lage, p. 12.*

www.rcin.org.pl

§ 30.

Das erste Fundamentalgebilde der Geometrie der Lage.

1. Die harmonische Teilung leitet uns zu einem höchst merkwürdigen Gebilde, welches der Geometrie der Lage angehört. Schneiden wir (Fig. 26) die drei durch A gehenden

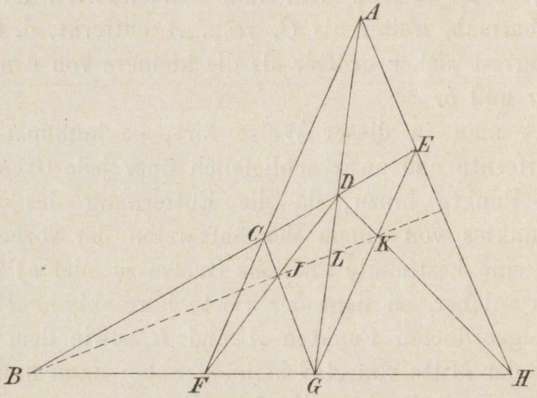


Fig. 26.

Geraden AF, AG, AH durch die Geraden $BCDE$ und $BFGH$ und ziehen CG und DF, DH und EG, die sich in J und K schneiden, so können wir $CDGF$ und $DEHG$ als vollständige Vierecke auffassen. Ziehen wir BJ, so wird der Schnittpunkt L derselben mit AG auf letzterer mit A zusammen D und G harmonisch trennen; ziehen wir dagegen BK, so wird der Schnittpunkt derselben mit AG dieselbe Eigenschaft besitzen, daher mit L identisch sein, d. h. B, J und K liegen auf einer Geraden.

2. Nachdem wir in dieser Weise die Existenz einer Geometrie der Lage nachgewiesen haben, suchen wir das gefundene Resultat etwas zu erweitern; in der That ist die aufgestellte Figur nur ein spezieller Fall der folgenden, zu der uns direkt der Satz des Menelaos führt.

Seien ABC und $A_1B_1C_1$ zwei Dreiecke (Fig. 27), die so beschaffen sind, dafs die Schnittpunkte D, E, F je zweier entsprechenden Seiten (CB und C_1B_1 u. s. w.) auf einer Geraden liegen. Dann wenden wir den Satz des Menelaos für

www.rcin.org.pl

die Dreiecke DBF und DB_1F mit den Schneidenden AE und A_1E an und finden

$$DC \, . \, BA \, . \, FE = - CB \, . \, AF \, . \, ED$$

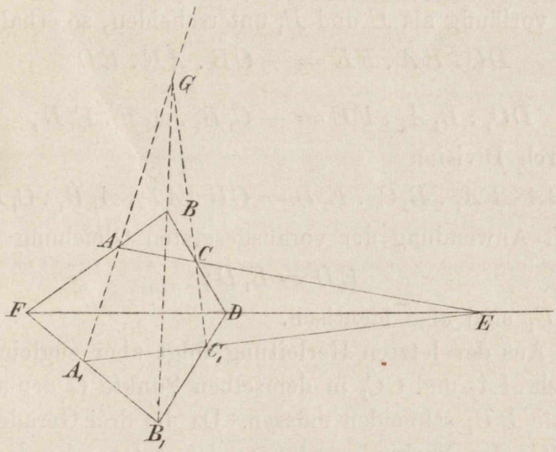


Fig. 27.

und

$$DC_1 \, . \, B_1A_1 \, . \, FE = - C_1B_1 \, . \, A_1F \, . \, ED,$$

woraus durch Division folgt

$$\frac{DC \, . \, BA}{DC_1 \, . \, B_1A_1} = \frac{CB \, . \, AF}{C_1B_1 \, . \, A_1F}$$

oder

$$DC \, . \, BA \, . \, C_1B_1 \, . \, A_1F = CB \, . \, AF \, . \, DC_1 \, . \, B_1A_1$$

oder

$$DC \, . \, BA \, . \, FA_1 \, . \, B_1C_1 = CB \, . \, AF \, . \, A_1B_1 \, . \, C_1D.$$

Faſst man also BDB_1F als vierseitigen Linienzug, FDE als eine Diagonale desselben auf, so kann man vorläufig das Resultat aussprechen: *Schneidet man je zwei Seiten eines vierseitigen Linienzuges, welche sich nicht auf einer bestimmten Diagonale desselben treffen, durch je eine von zwei Geraden, die durch einen Punkt dieser Diagonale gehen, so sind die Produkte von je vier nicht aufeinander folgenden Teilen des Linienzuges einander gleich.*

Wenn umgekehrt die Seiten eines vierseitigen Linienzuges BDB_1F so geteilt sind, daſs

$$DC \, . \, BA \, . \, FA_1 \, . \, B_1C_1 = CB \, . \, AF \, . \, A_1B_1 \, . \, C_1D$$

www.rcin.org.pl

ist, so gehen die Geraden AC und A_1C_1 durch denselben Punkt E der Diagonale FD. Denn wenden wir den Satz des Menelaos auf die Dreiecke DBF und DB_1F mit den Schneidenden AC und A_1C_1 an, deren Schnittpunkte mit FD wir vorläufig als E und E_1 unterscheiden, so erhalten wir

$$DC \,.\, BA \,.\, FE = -\, CB \,.\, AF \,.\, ED$$

und

$$DC_1 \,.\, B_1A_1 \,.\, FE = -\, C_1B_1 \,.\, A_1F \,.\, E_1D,$$

also durch Division

$$DC \,.\, BA \,.\, FA_1 \,.\, B_1C_1 \,.\, E_1D = CB \,.\, AF \,.\, A_1B_1 \,.\, C_1D \,.\, ED$$

oder mit Anwendung der vorausgesetzten Gleichung

$$ED = E_1D;$$

E und E_1 sind also identisch.

3. Aus der letzten Herleitung folgt aber zugleich, dafs sich auch AA_1 und CC_1 in demselben Punkte G der anderen Diagonale BB_1 schneiden müssen. Da die drei Geraden AA_1, BB_1, CC_1 die Verbindungslinien der entsprechenden Eckpunkte der Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ sind, so haben wir den *ersten Fundamentalsatz der Geometrie der Lage**):

Liegen die Schnittpunkte der entsprechenden Seiten zweier Dreiecke auf derselben Geraden, so gehen die Verbindungslinien ihrer entsprechenden Eckpunkte durch denselben Punkt.

Sofort können wir auch die *Umkehrung* zufügen: *Schneiden sich die Verbindungslinien je zweier Eckpunkte zweier Dreiecke in einem Punkte, so liegen die Schnittpunkte je zweier entsprechenden Seiten auf derselben Geraden.* Denn gehen die Geraden A_1A und C_1C durch den Punkt G von B_1B, so ist die Teilung der Seiten des Vierseits dem Vorigen entsprechend, woraus dann folgt, dafs AC und A_1C_1 sich in einem Punkte E von FD schneiden.

Die konstruierte Figur (s. auch Figur 28, in der die Lage der Dreiecke eine andere ist) besteht aus zehn Geraden, von denen sich je drei in einem Punkte schneiden, und aus zehn Punkten, von denen je drei auf derselben Geraden liegen. Der Satz bleibt völlig ungeändert, wenn man einerseits die Worte Gerade und Punkt, andererseits die Worte Schnitt-

*) Der Satz des *Desargues*.

www.rcin.org.pl

punkt und Verbindungsgerade miteinander vertauscht. Wir kommen auf diesen Dualismus später zurück.

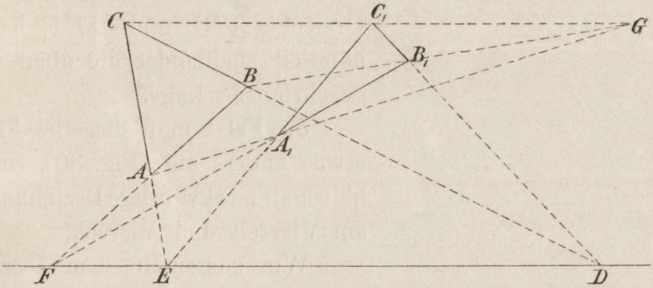


Fig. 28.

Der erste Fundamentalsatz der Geometrie der Lage wurde auf Grundlage der Theorie der metrischen Relationen hergeleitet; später wird sich jedoch zeigen, dafs er sich auch durch einen Grenzübergang ganz ohne Rechnung und ohne Betrachtung von Mafsverhältnissen aus den ersten stereometrischen Grundbegriffen ergiebt.

4. Ein bemerkenswerter Spezialfall unseres Satzes ist der folgende.

Legt man (Fig. 29) durch einen Punkt O in der Ebene eines Dreiecks ABC und die Eckpunkte des Dreiecks drei

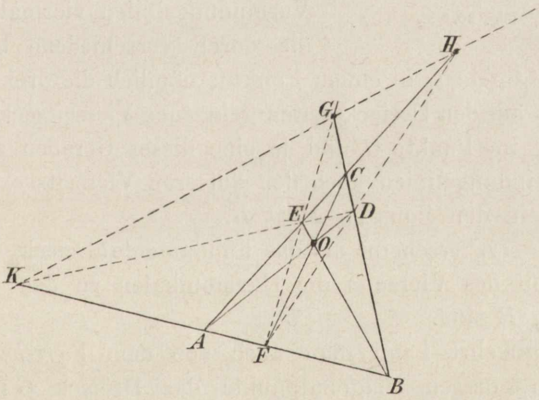


Fig. 29.

Gerade AO, BO, CO und verbindet die drei Schnittpunkte D, E, F dieser mit den Gegenseiten untereinander durch

www.rcin.org.pl

Gerade, so schneiden die letzteren die dritten Dreiecksseiten in drei Punkten G, H, K einer Geraden, welche nach *Salmon* die *Harmonikale* des Punktes O heifst, und umgekehrt; die Dreiecke ABC und DEF haben nämlich zueinander die oben vorgeschriebene Lage.

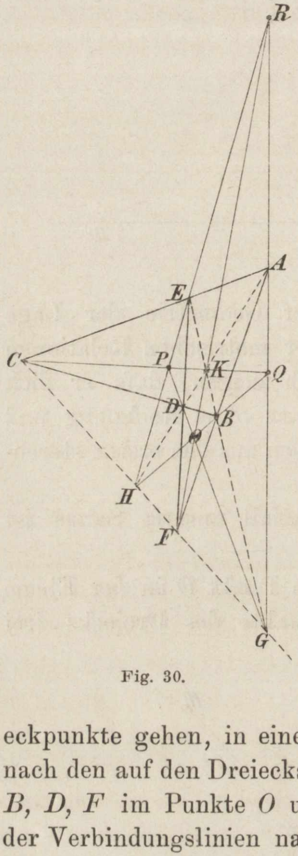


Fig. 30.

5. Fafst man dieselbe Figur etwas anders auf (Fig. 30), so erhält man merkwürdige Beziehungen am Vierseit und Viereck.

Wir ziehen in dem *Vierseit*, dessen Eckpunkte A, B, C, D, E, F sind, die drei Diagonalen, welche das Dreieck GHK bilden. Auf jeder Seite dieses Dreiecks liegen zwei Eckpunkte des Vierseits, und zwar immer einer auf dem begrenzten Teile der Dreiecksseiten, einer aufserhalb desselben*). Verbindet man die Eckpunkte des Dreiecks mit den beiden Vierseitseckpunkten auf der gegenüberliegenden Seite, so schneiden sich von den sechs Verbindungslinien viermal je drei, die durch verschiedene Dreieckseckpunkte gehen, in einem Punkte; nämlich die drei Geraden nach den auf den Dreiecksseiten gelegenen Vierseitseckpunkten B, D, F im Punkte O und je eine dieser Geraden mit zwei der Verbindungslinien nach den äufseren Vierseitseckpunkten A, C, E in den Punkten P, Q, R.

$\triangle GHK$ erscheint als das Fundamentaldreieck, während die Seiten des Vierseits die Harmonikalen zu den Punkten O, P, Q, R sind.

Umgekehrt kann man auch von dem *Vierecke* $OPQR$ ausgehen, dessen Diagonalpunkte das Dreieck GHK be-

---

*) Es sind nämlich z. B. C, H, F, G harmonische Punkte, von denen die Paare C und F, H und G sich gegenseitig trennen.

stimmen. Auf den Seiten desselben werden durch die sechs Vierecksseiten je zwei Punkte, ein äufserer und ein innerer ausgeschnitten; von diesen sechs Punkten liegen je drei auf verschiedenen Dreiecksseiten befindliche, nämlich die drei äufseren und je zwei innere und ein äufserer auf einer Geraden. Diese vier Geraden sind die Seiten des Vierseits, von dem wir bei der Umkehrung ausgingen.

Von dem ganz beliebigen Vierseit oder Viereck ausgehend gelangt man also durch „*Vervollständigung*“, d. h. durch wiederholtes Verbinden von erhaltenen Schnittpunkten durch Gerade zu einem Gebilde der Geometrie der Lage. Dasselbe enthält dreizehn Gerade und dreizehn Punkte; auf neun der Geraden liegen je vier, auf vier je drei dieser Punkte; durch neun der Punkte gehen je vier Gerade, durch vier je drei. Das Gebilde trägt in bezug auf Punkte und Gerade einen vollkommen dualistischen Charakter.

§ 31.

Das zweite Fundamentalgebilde der Geometrie der Lage.

1. Das im vorigen Paragraphen gefundene System von zehn Geraden und zehn Punkten ist nicht das einfachste Gebilde der Geometrie der Lage; es existiert vielmehr ein solches, bei dem nur neun Gerade auftreten, die sich zu je drei in einem Punkte schneiden, und neun Punkte, von denen je drei in einer Geraden liegen. Dasselbe wird durch folgenden Satz definiert: *Liegen je drei nicht aufeinander folgende Punkte eines Sechsecks, welches durch einen zusammenhängenden Linienzug hergestellt wird, auf je einer von zwei Geraden, so liegen die Schnittpunkte von je zwei gegenüberliegenden Seiten* (d. h. von Seiten, die durch zwei andere voneinander getrennt sind) *auf einer dritten Geraden.*

Beweis: In der Figur 31 (S. 132) seien A, B, C, D, E, F die Eckpunkte des Sechsecks, OA und OB die beiden Geraden, auf denen A, C, E und B, D, F liegen; wir wollen nun die Punkte U, V, W, die Schnittpunkte von AB und DE, BC und EF, CD und FA ins Auge fassen. Bezeichnen wir noch, wie aus der Figur ersichtlich, die Eckpunkte der durch

www.rcin.org.pl

die Geraden BC, DE, FA und AB, CD, EF gebildeten Dreiseite mit A_1, C_1, E_1 und B_1, D_1, F_1 und denken wir

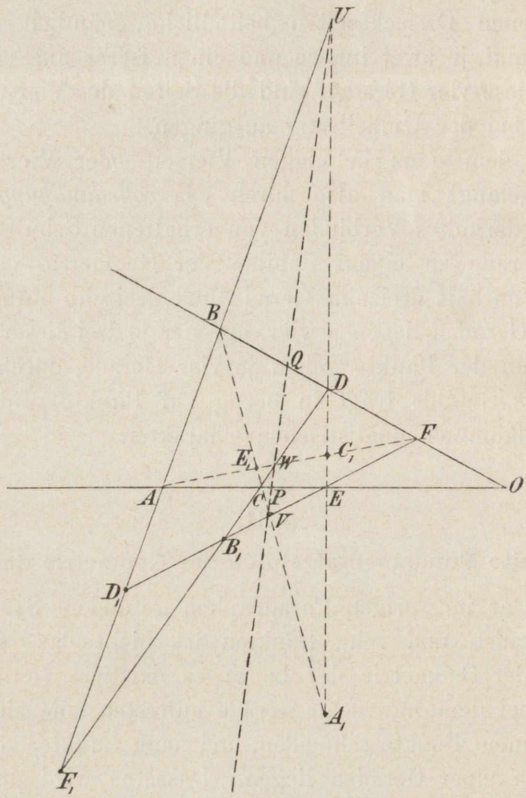


Fig. 31.

uns die Seiten des Dreiecks $A_1C_1E_1$ durch AB, CD und EF geschnitten, so ist

$$A_1U \,.\, C_1A \,.\, E_1B = -\, UC_1 \,.\, AE_1 \,.\, BA_1,$$
$$C_1W \,.\, E_1C \,.\, A_1D = -\, WE_1 \,.\, CA_1 \,.\, DC_1,$$
$$E_1V \,.\, A_1E \,.\, C_1F = -\, VA_1 \,.\, EC_1 \,.\, FE_1$$

und aufserdem, wenn wir OA und OB als Schneidende betrachten,

$$EC_1 \,.\, AE_1 \,.\, CA_1 = -\, C_1A \,.\, E_1C \,.\, A_1E,$$
$$FE_1 \,.\, BA_1 \,.\, DC_1 = -\, E_1B \,.\, A_1D \,.\, C_1F.$$

www.rcin.org.pl

Multipliziert man die fünf Gleichungen miteinander, so folgt

$$A_1U \,.\, C_1W \,.\, E_1V = -\; UC_1 \,.\, WE_1 \,.\, VA_1,$$

woraus hervorgeht, dafs U, V, W in einer Geraden liegen.

2. Die Figur kann auch aufgefafst werden als ein Komplex von drei Dreiecken, nämlich $A_1C_1E_1$, $B_1D_1F_1$ und OPQ, die in vollständig symmetrischer Weise auftreten. Auf jeder Seite irgend eines dieser Dreiecke liegen drei Schnittpunkte, gebildet von je zwei Seiten der beiden anderen Dreiecke.

3. Sind die sechs Punkte A, C, E und B, D, F auf OA und OB gegeben, so kann man sie auf sechs Arten zu Sechsecken verbinden, deren Eckpunkte abwechselnd auf OA und OB liegen. Geht man nämlich von A aus, so kann man eine Seite nach B, D, F ziehen, dann hat man eine zweifache und hierauf nochmals eine zweifache Wahl; die so gefundene Zahl 12 ist durch 2 zu dividieren, da sich je zwei Sechsecke nur durch die Richtung des Linienzuges unterscheiden. Durch Verbindung dieser sechs Sechsecke erhält man weitere merkwürdige Beziehungen, auf die hier jedoch nicht eingegangen werden soll. Sieht man von der Bedingung ab, dafs die Eckpunkte abwechselnd auf OA und OB liegen sollen, so erhält man weitere 54 Sechsecke, im ganzen also 60. Unmittelbar ist aus einer Figur ersichtlich, dafs auch für die letzteren Sechsecke der bewiesene Satz bestehen bleibt, ohne jedoch ein Gebilde der Geometrie der Lage zu liefern.

4. Das gefundene Aggregat von Punkten und Geraden erscheint in der höheren Geometrie als Spezialfall des Satzes vom *Pascal*'schen Sechseck (man braucht nämlich in letzterem als Kegelschnitt nur zwei Gerade anzunehmen) und weiterhin mit dem genannten Satze zusammen als Spezialfall des Theorems, dafs drei Kurven dritter Ordnung, welche durch dieselben acht Punkte gehen, auch einen neunten Punkt gemeinsam haben (jedes der drei oben genannten Dreiecke stellt eine Kurve dritter Ordnung dar).

5. Wir knüpfen an die gefundenen Resultate die Frage an: *welches sind die einfachsten Gebilde der Geometrie der Lage?* Die allgemeinere Aufgabe, *alle* Gebilde der Geometrie der

www.rcin.org.pl

Lage aufzustellen, mufs unbeantwortet bleiben, da zur Zeit keine auch nur einigermafsen abschliefsenden Untersuchungen über diesen Gegenstand existieren.

Das Charakteristische dieser Gebilde besteht darin, dafs Punkte vorhanden sind, in denen mindestens drei Gerade zusammentreffen, und Gerade, auf denen mindestens drei Punkte liegen. Alle anderen Geraden und Punkte sind für das Gebilde unwesentlich, da z. B. eine nur durch zwei Punkte fixierte Gerade nicht im Stande ist, weiter bestimmend zu wirken. Wir wollen Punkte, in denen sich drei Gerade schneiden, *Hauptpunkte*, Gerade, auf denen drei Punkte liegen, *Hauptgerade* nennen, und nur diese in Betracht ziehen; Gebilde, bei denen mehr als drei Gerade durch einen Punkt gehen oder mehr als drei Punkte auf einer Geraden liegen, mögen hier von der Untersuchung ausgeschlossen bleiben; es ist klar, dafs sie mehr Punkte oder Geraden erfordern, als die der zu untersuchenden Art. n Gerade schneiden sich im allgemeinen in $\frac{n(n-1)}{2}$ Punkten; gehen indessen m Gerade durch einen Punkt, so ist derselbe als $\frac{m(m-1)}{2}$ facher Schnittpunkt zu zählen, da sich andernfalls die m Geraden in ebensovielen Punkten schneiden könnten. Analoges gilt für die Verbindungsgeraden von n Punkten. Besteht nun eine Figur der Geometrie der Lage aus n Hauptgeraden, so müssen auf jeder drei Hauptpunkte liegen, die wiederum je drei Hauptgeraden gemeinsam sind, so dafs man die Zahl der Hauptpunkte $= \frac{3n}{3} = n$ findet; *die Zahl der Hauptgeraden ist also derjenigen der Hauptpunkte gleich.* Die Zahl der einfachen Schnittpunkte und Verbindungsgeraden, die aufserdem in dem Gebilde auftreten, ist

$$\frac{n(n-1)}{2} - 3n = \frac{n(n-7)}{2}.$$

Das Minimum für n ist hiernach 7, was auch direkt daraus hervorgeht, dafs eine Hauptgerade durch die Schnittpunkte von drei Paaren anderer Geraden hindurch gehen mufs.

6. Die Möglichkeit eines Gebildes der Geometrie der Lage beruht zunächst auf kombinatorischen, dann aber auf

www.rcin.org.pl

rein geometrischen Bedingungen. Bezeichnen wir die Hauptpunkte mit 1, 2, 3, ..., n, so müssen sich dieselben, da immer drei, nie vier von ihnen auf derselben Geraden liegen sollen, und immer nur drei Gerade durch einen der Punkte gehen sollen, derart in n Gruppen von je drei Punkten ordnen lassen, dafs jeder Punkt drei Gruppen angehört und niemals dieselbe Kombination von zwei Punkten in zwei verschiedenen Gruppen auftritt. Vertauscht man Gerade und Punkte, so ist dieselbe Anordnung notwendig. Da es hierbei nur auf wesentlich verschiedene Arten der Zusammenstellung ankommt, so betrachten wir alle, die durch Vertauschung der Elemente ineinander übergehen, als identisch. Man überzeugt sich nun durch wirkliche Bildung der Zusammenstellungen leicht davon, dafs es für sieben und acht Gerade nur die folgenden Kombinationstypen giebt.

a. Für sieben Punkte*):

1, 2, 3
1, 4, 5
1, 6, 7
2, 4, 6
2, 5, 7
3, 4, 7
3, 5, 6.

b. Für acht Punkte:

1, 3, 4
1, 5, 6
1, 7, 8
2, 3, 5
2, 6, 8
2, 4, 7
3, 6, 7
4, 5, 8.

*) Man braucht hier nur einen beliebigen Punkt 1 an die Spitze von drei Gruppen zu stellen, in denen dann die übrigen sechs vorkommen müssen; dann 2 und 3 noch zweimal an die Spitze zu stellen und die Möglichkeit der weiteren Zuordnung zu untersuchen. Ähnlich wird im folgenden verfahren.

www.rcin.org.pl

Allein diesen Gruppen entsprechen keine wirklichen Gebilde der gesuchten Art. Am leichtesten überzeugt man sich von der Nichtexistenz eines solchen, wenn man von speziellen, einfachen Figuren ausgeht; ergiebt sich bei dieser Konstruktion kein Gebilde der Geometrie der Lage, so existiert ein solches überhaupt nicht. So kann man bei einem Siebenpunktgebilde die Punkte 1, 4, 3, 6 als Eckpunkte eines Parallelogramms annehmen; 2 wird dann der Schnittpunkt der Diagonalen, während 5 und 7 zwei unendlich ferne Punkte sind; 2, 5 und 7 liegen nicht in einer Geraden. In ähnlicher Weise überzeugt man sich, dafs auch die Zusammenstellung von acht Punkten kein Ergebnis liefert. Man findet:

Ein Gebilde der Geometrie der Lage enthält mindestens neun Hauptgerade oder neun Hauptpunkte.

7. Von der soeben durchgeführten Untersuchung ist eine andere wesentlich verschieden. Wenn wir dargethan haben, dafs ein Gebilde der Geometrie der Lage mit acht Hauptpunkten und Hauptgeraden nicht existiert, d. h. dafs bei geeigneter Gruppierung der acht Punkte zu dreien auf sieben der Geraden nicht notwendigerweise folgt, dafs noch drei weitere dieser Punkte durch eine Gerade verbunden werden, so ist hiermit keineswegs die Existenz eines *speziellen* Gebildes bestritten, welches diese Eigenschaft besitzt. In der That existiert ein solches. Man nennt Gebilde dieser Art *Konfigurationen.*

Bei neun und zehn Geraden wird die Untersuchung bedeutend verwickelter. Aufser dem uns bekannt gewordenen ist kein Gebilde der Geometrie der Lage mit neun Hauptpunkten und neun Hauptgeraden vorhanden; dagegen existieren noch zwei spezielle Konfigurationen, welche jene Elemente enthalten.

Bei zehn Hauptpunkten und Hauptgeraden treten noch neun Konfigurationen auf.

Bei einer gröfseren Elementenzahl existieren zahlreiche Lagengebilde, über welche noch keine zusammenfassende Übersicht vorhanden ist*).

*) Hierher gehören die weitergehenden Untersuchungen über das *Pascal*'sche und *Brianchon*'sche *Sechseck.* Von neuesten Abhandlungen

www.rcin.org.pl

Die Beziehungen der Geometrie der Lage zum Parallelenaxiom werden wir erst in der Stereometrie klarstellen.

§ 32.

Die Kollineation.*)

1. Die sämtlichen Punkte und Geraden, welche in derselben Ebene liegen, bezeichnet man als ein *ebenes System*. Man nennt nach *Möbius* zwei ebene Systeme einander *kollinear* zugeordnet, wenn jedem Punkte des einen ein einziger Punkt des andern zugewiesen ist derart, daſs alle Punkte, die in dem einen auf einer Geraden liegen, auch in dem andern diese Eigenschaft haben; es entspricht daher auch jeder Geraden des einen eine Gerade des anderen Systems und dem Schnittpunkt zweier Geraden des einen der Schnittpunkt der entsprechenden Geraden des anderen.

Bei den folgenden Untersuchungen müssen wir die weitere Bedingung hinzutreten lassen, daſs die Zuordnung eine *stetige* ist, d. h. daſs zwei unendlich benachbarten Punkten des einen Systems zwei unendlich benachbarte des anderen entsprechen; nur in der Umgebung des unendlich fernen Punktes soll eine Ausnahme zulässig sein. Es ist bis jetzt nicht gelungen, diese Bedingung unnötig zu machen, resp. sie aus den übrigen Bedingungen der Kollineation herzuleiten.

Daſs solche kollineare Systeme in unendlicher Menge existieren, ist stereometrisch unmittelbar einzusehen; man

---

über Elementargebilde der Geometrie der Lage sind zu erwähnen: *Hess, Beiträge zur Theorie der mehrfach perspektivischen Dreiecke und Tetraeder,* Math. Ann. B. 28, p. 167 und *Schröter, das Clebsch'sche Sechseck,* ebendas., p. 457.

Über ebene *Konfigurationen* handeln die Publikationen von *S. Kantor: Über die Konfigurationen (3, 3) mit den Indices 8, 9 und ihren Zusammenhang mit den Kurven dritter Ordnung* und *Die Konfigurationen (3, 3)$_{10}$,* Sitzungsber. der Wiener Akad., B. 94, p. 915—932 und p. 1291—1314.

*) Vgl. über die Darstellung in diesem und dem folgenden Paragraphen, sowie bei den entsprechenden räumlichen Untersuchungen: *Reye, Die Geometrie der Lage,* 2. Abt. — *Poncelet, Möbius, Plücker, Steiner, Châsles, v. Staudt* verdankt man hauptsächlich die Entwickelung der folgenden Begriffe.

www.rcin.org.pl

braucht nur immer zwei Punkte zweier beliebig im Raume gelegenen Ebenen einander zuzuweisen, die von den durch einen festen Punkt gelegten Geraden ausgeschnitten werden. Jede ähnliche Abbildung eines ebenen Systems ist zu diesem kollinear.

2. Jedem Viereck mit seinen Diagonalen des einen von zwei kollinearen Systemen entspricht ein ebensolches Gebilde in dem anderen. Da man aber zu irgend drei Punkten einer Geraden den vierten harmonischen durch Konstruktion eines Vierecks finden kann (§ 29, 6), so *entsprechen irgend welchen vier harmonischen Punkten des einen Systems vier harmonische Punkte des andern**). Aus § 29, 7 folgt weiter, daſs jeder Punktreihe des einen Systems eine ihr *projektivisch* zugeordnete des andern entsprechen muſs. Auch einem Strahlenbüschel des einen entspricht ein *projektivischer* Strahlenbüschel des anderen, da man beide Büschel auf zwei entsprechende Gerade perspektivisch-projektivisch beziehen kann.

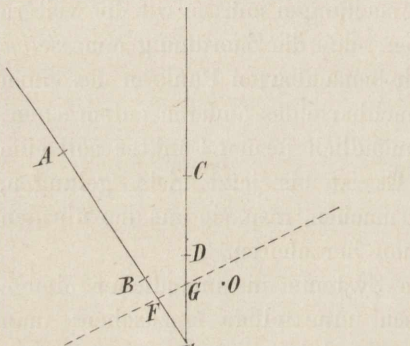


Fig. 32.

3. *Zwei ebene Systeme können immer und nur auf eine einzige Weise einander derart kollinear zugeordnet werden, daſs vier Punkten des einen, von denen keine drei in einer Geraden liegen, vier beliebige Punkte des andern, die dieselbe Bedingung befriedigen, willkürlich als entsprechend zugewiesen werden.*

Beweis: Seien (Fig. 32) A, B, C, D und A_1, B_1, C_1, D_1 die zugeordneten Punkte. Zieht man die Geraden AB und CD, A_1B_1 und C_1D_1,

*) Zur Anwendung von § 29, 6 ist die gemachte Voraussetzung der *Stetigkeit* der Zuordnung notwendig.

www.rcin.org.pl

die resp. die Schnittpunkte E und E_1 liefern, so müssen die durch AB und A_1B_1, CD und C_1D_1 bestimmten Punktreihen einander projektivisch in der Weise zugeordnet werden, daſs die Punkte A, B, E und C, D, E den Punkten A_1, B_1, E_1 und C_1, D_1, E_1 entsprechen; diese Zuordnung ist immer und nur auf eine Art möglich (§ 28, 7). Schneidet nun eine Gerade des ersten Systems die Geraden AB und CD in F und G, so muſs ihr in dem andern System die Gerade zugeordnet werden, welche durch die entsprechenden Punkte F_1 und G_1 der Punktreihen A_1B_1 und C_1D_1 fixiert ist. Jeder Geraden des einen Systems ist also eine Gerade des anderen eindeutig zugewiesen*). Allen Geraden des ersten Systems, welche durch denselben Punkt O gehen, entsprechen aber in dem zweiten Systeme Gerade, welche einen Punkt O_1 gemeinsam haben. Die Strahlen des Büschels O beziehen nämlich die Punktreihen AB und CD perspektivisch-projektivisch aufeinander; die zu diesen projektivischen Punktreihen A_1B_1 und C_1D_1 sind daher auch projektivisch aufeinander bezogen und befinden sich, da sie den Punkt E_1 entsprechend gemein haben, in perspektivischer Lage (§ 28, 8); die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte beider gehen daher durch denselben Punkt O_1. Auf diese Art ist jedem beliebigen Punkte O des ersten Systems ein einziger O_1 des zweiten als Schnittpunkt der entsprechenden Strahlen zugewiesen. Somit ist allen Anforderungen der kollinearen Zuordnung genügt.

4. Wenn zwei kollineare Gebilde in dieselbe Ebene verlegt werden, so kann der Fall eintreten, daſs beide sämtliche Punkte einer Geraden als sich selbst entsprechende gemeinsam haben; man sagt dann: die kollinearen ebenen Gebilde befinden sich in *perspektivischer Lage.*

Ist p die fraglicheGerade und sind $A, B, C\ldots$ und A_1, B_1, $C_1\ldots$ entsprechende Punkte der kollinearen Gebilde, so muſs

*) Diese eindeutige Zuordnung wird zweifelhaft für Gerade, welche durch die Punkte E und E_1 gehen; wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der Zuordnung ist aber hier ein Grenzübergang möglich. Nachdem die Zuordnung als möglich nachgewiesen ist, kann man die Konstruktion leicht mit Hilfe anderer Geraden, z. B. AD und A_1D_1, ausführen.

www.rcin.org.pl

der Schnittpunkt irgend zweier entsprechenden Verbindungsgeraden, z. B. AB und A_1B_1 auf p liegen; denn die Schnittpunkte von p und AB, p und A_1B_1 müssen einander entsprechen, also identisch sein, da jeder Punkt von p sich selbst entspricht. Da nun die Schnittpunkte der entsprechenden Seiten der Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ auf derselben Geraden p liegen, so müssen die Verbindungsgeraden ihrer entsprechenden Eckpunkte AA_1, BB_1, CC_1 nach § 30 durch denselben Punkt P gehen. Lassen wir C alle möglichen Lagen annehmen, während wir A und B beibehalten, so bleibt der Schnittpunkt immer derselbe. Wir finden den Satz:

Befinden sich zwei kollineare ebene Gebilde in perspektivischer Lage, so haben sie nicht nur sämtliche Punkte p einer Punktreihe, sondern auch sämtliche Strahlen eines Büschels P entsprechend gemein. Je zwei entsprechende Strahlen schneiden sich also auf derselben Geraden p, der *Achse der Kollineation*, und die Verbindungsgeraden je zweier entsprechenden Punkte gehen durch denselben Punkt P, das *Zentrum der Kollineation.*

Übrigens beweist man genau in der gleichen Weise, dafs zwei in derselben Ebene gelegene kollineare Gebilde, welche einen Strahlenbüschel entsprechend gemein haben, auch eine gemeinsame Punktreihe besitzen.

5. Mehrere Punktreihen können zwei ebenen kollinearen Gebilden nicht gemeinsam sein, wenn diese nicht identisch sein sollen. In diesem Falle mufs nämlich auch jede Verbindungsgerade zweier Punkte dieser Punktreihen, d. h. jede beliebige Gerade beiden Gebilden gemeinsam sein. Das Gleiche gilt, wenn zwei gemeinsame Strahlenbüschel vorhanden sind. Es können daher die beiden nicht identischen Systeme aufser der Kollineationsachse keine zwei Punkte entsprechend gemein haben; auf der durch beide Punkte fixierten Punktreihe würde nämlich noch ein dritter gemeinsamer Punkt (ihr Schnittpunkt mit der Kollineationsachse) liegen, so dafs sie beiden Systemen punktweise gemeinsam wäre. Es existiert aufser der Kollineationsachse nur ein gemeinsamer Punkt: das Zentrum der Kollineation. Ebenso existiert aufser den

www.rcin.org.pl

unendlich vielen durch das letztere gehenden Strahlen nur noch eine gemeinsame Gerade: die Kollineationsachse*).

Die kollineare Zuordnung in perspektivischer Lage ist vollkommen bestimmt, wenn aufser der Achse und dem Zentrum der Kollineation noch ein entsprechendes Punktepaar, das natürlich mit dem Zentrum auf einer Geraden liegt (oder auch ein Geradenpaar, das sich auf der Achse schneidet), gegeben ist. Die lineare Konstruktion der Kollineation ist in beiden Fällen so unmittelbar einleuchtend, dafs wir sie dem Leser überlassen können.

6. Um nun den Nachweis zu führen, dafs zwei gegebene kollineare ebene Systeme Σ und Σ_1 (mit gewissen Ausnahmen) in perspektivische Lage gebracht werden können, unterscheiden wir zwei Fälle: Es können sich in beiden Systemen die unendlich fernen Geraden entsprechen oder nicht. Wir nehmen zuerst das letztere an. Die Gerade des einen Systems, welche der unendlich fernen Geraden des andern entspricht, wird dann die *Gegenachse* genannt; seien p und q_1 die Gegenachsen in Σ und Σ_1. Liegt nun der Mittelpunkt eines Strahlenbüschels in Σ auf der unendlich fernen Geraden, ist letzterer also ein Parallelstrahlenbüschel, so liegt der Mittelpunkt des entsprechenden Büschels in Σ_1 auf q_1, und auf p liegen die Mittelpunkte der Büschel, welchen Parallelstrahlenbüschel in Σ_1 zugeordnet sind. Sind insbesondere die Strahlen eines Büschels von Σ der Gegenachse p parallel (so dafs der Mittelpunkt der Schnittpunkt von p und der unendlich fernen Geraden ist), so werden die Strahlen des entsprechenden Büschels von Σ_1 zu q_1 parallel (weil ihr Mittelpunkt der Schnittpunkt der unendlich fernen Geraden und q_1 ist); im Übrigen entsprechen sich keine Parallelstrahlenbüschel beider Systeme. Soll nun in beiden Systemen je eine Gerade vorhanden sein, die sich zur Kollineationsachse eignet, d. h. eine Gerade, deren Punktreihe der entsprechenden des andern Systems projektivisch gleich ist, so dafs sie mit ihr zum Zusammenfallen gebracht werden kann, so mufs die-

---

*) Es kann auch das Zentrum der Kollineation auf der Achse derselben liegen, ohne dafs eine besondere Singularität eintritt.

www.rcin.org.pl

der Schnittpunkt irgend zweier entsprechenden Verbindungsgeraden, z. B. AB und A_1B_1 auf p liegen; denn die Schnittpunkte von p und AB, p und A_1B_1 müssen einander entsprechen, also identisch sein, da jeder Punkt von p sich selbst entspricht. Da nun die Schnittpunkte der entsprechenden Seiten der Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ auf derselben Geraden p liegen, so müssen die Verbindungsgeraden ihrer entsprechenden Eckpunkte AA_1, BB_1, CC_1 nach § 30 durch denselben Punkt P gehen. Lassen wir C alle möglichen Lagen annehmen, während wir A und B beibehalten, so bleibt der Schnittpunkt immer derselbe. Wir finden den Satz:

Befinden sich zwei kollineare ebene Gebilde in perspektivischer Lage, so haben sie nicht nur sämtliche Punkte p einer Punktreihe, sondern auch sämtliche Strahlen eines Büschels P entsprechend gemein. Je zwei entsprechende Strahlen schneiden sich also auf derselben Geraden p, der *Achse der Kollineation*, und die Verbindungsgeraden je zweier entsprechenden Punkte gehen durch denselben Punkt P, das *Zentrum der Kollineation.*

Übrigens beweist man genau in der gleichen Weise, dafs zwei in derselben Ebene gelegene kollineare Gebilde, welche einen Strahlenbüschel entsprechend gemein haben, auch eine gemeinsame Punktreihe besitzen.

5. Mehrere Punktreihen können zwei ebenen kollinearen Gebilden nicht gemeinsam sein, wenn diese nicht identisch sein sollen. In diesem Falle mufs nämlich auch jede Verbindungsgerade zweier Punkte dieser Punktreihen, d. h. jede beliebige Gerade beiden Gebilden gemeinsam sein. Das Gleiche gilt, wenn zwei gemeinsame Strahlenbüschel vorhanden sind. Es können daher die beiden nicht identischen Systeme aufser der Kollineationsachse keine zwei Punkte entsprechend gemein haben; auf der durch beide Punkte fixierten Punktreihe würde nämlich noch ein dritter gemeinsamer Punkt (ihr Schnittpunkt mit der Kollineationsachse) liegen, so dafs sie beiden Systemen punktweise gemeinsam wäre. Es existiert aufser der Kollineationsachse nur ein gemeinsamer Punkt: das Zentrum der Kollineation. Ebenso existiert aufser den

www.rcin.org.pl

unendlich vielen durch das letztere gehenden Strahlen nur noch eine gemeinsame Gerade: die Kollineationsachse*).

Die kollineare Zuordnung in perspektivischer Lage ist vollkommen bestimmt, wenn aufser der Achse und dem Zentrum der Kollineation noch ein entsprechendes Punktepaar, das natürlich mit dem Zentrum auf einer Geraden liegt (oder auch ein Geradenpaar, das sich auf der Achse schneidet), gegeben ist. Die lineare Konstruktion der Kollineation ist in beiden Fällen so unmittelbar einleuchtend, dafs wir sie dem Leser überlassen können.

6. Um nun den Nachweis zu führen, dafs zwei gegebene kollineare ebene Systeme Σ und Σ_1 (mit gewissen Ausnahmen) in perspektivische Lage gebracht werden können, unterscheiden wir zwei Fälle: Es können sich in beiden Systemen die unendlich fernen Geraden entsprechen oder nicht. Wir nehmen zuerst das letztere an. Die Gerade des einen Systems, welche der unendlich fernen Geraden des andern entspricht, wird dann die *Gegenachse* genannt; seien p und q_1 die Gegenachsen in Σ und Σ_1. Liegt nun der Mittelpunkt eines Strahlenbüschels in Σ auf der unendlich fernen Geraden, ist letzterer also ein Parallelstrahlenbüschel, so liegt der Mittelpunkt des entsprechenden Büschels in Σ_1 auf q_1, und auf p liegen die Mittelpunkte der Büschel, welchen Parallelstrahlenbüschel in Σ_1 zugeordnet sind. Sind insbesondere die Strahlen eines Büschels von Σ der Gegenachse p parallel (so dafs der Mittelpunkt der Schnittpunkt von p und der unendlich fernen Geraden ist), so werden die Strahlen des entsprechenden Büschels von Σ_1 zu q_1 parallel (weil ihr Mittelpunkt der Schnittpunkt der unendlich fernen Geraden und q_1 ist); im Übrigen entsprechen sich keine Parallelstrahlenbüschel beider Systeme. Soll nun in beiden Systemen je eine Gerade vorhanden sein, die sich zur Kollineationsachse eignet, d. h. eine Gerade, deren Punktreihe der entsprechenden des andern Systems projektivisch gleich ist, so dafs sie mit ihr zum Zusammenfallen gebracht werden kann, so mufs die-

*) Es kann auch das Zentrum der Kollineation auf der Achse derselben liegen, ohne dafs eine besondere Singularität eintritt.

www.rcin.org.pl

selbe der Gegenachse parallel laufen; denn beim Zusammenlegen beider Systeme mit der Kollineationsachse müssen sich einerseits p und die unendlich ferne Gerade von Σ_1, andererseits q_1 und die unendlich ferne Gerade von Σ auf ihr schneiden, d. h. p und q_1 müssen sie in unendlicher Ferne treffen. Um in beiden Systemen zur Gegenachse parallele entsprechende Gerade zu finden, die projektivisch gleich sind, nehmen wir in Σ einen beliebigen Parallelstrahlenbüschel an, welcher p nicht parallel ist und greifen von demselben drei Strahlen a, b, c heraus, welche auf p, also auch auf jeder zu ihm parallelen Geraden, zwei gleiche Strecken ausschneiden. Der vierte harmonische Punkt zu den drei auf p ausgeschnittenen ist dann der unendlich ferne, der vierte harmonische Strahl zu a, b, c also die unendlich ferne Gerade (§ 29, 3). Die entsprechenden Strahlen a_1, b_1, c_1 schneiden sich auf q_1; der vierte harmonische Strahl zu ihnen mufs q_1 selbst sein, weil es der unendlich fernen Geraden entspricht. Auf einer zu q_1 parallelen Geraden liegt also von den vier durch a_1, b_1, c_1, q_1 ausgeschnittenen harmonischen Punkten der eine im Unendlichen, weshalb die drei übrigen gleiche Abstände markieren. Letztere können durch Verschieben der Parallelen beliebig klein und grofs gemacht werden. Es ist einleuchtend, dafs sich zu beiden Seiten von q_1 in gleichem Abstand jederseits eine Gerade m_1 und n_1 findet, auf welcher die drei Punkte dieselben Abstände haben wie auf den entsprechenden, zu p parallelen Geraden m und n; die entsprechenden Punktreihen m_1 und m, n_1 und n sind projektivisch gleich, da sie mit drei Punkten zur Deckung gebracht werden können, und beide Paare dürfen als Kollineationsachse benutzt werden. Sind die Kollineationsachsen geeignet ineinander gelegt, so können die Systeme durch Umklappen des einen um die Kollineationsachse in eine zweite passende Lage gebracht werden. *Die perspektivische Anordnung ist also, wenn die beiden unendlich fernen Geraden sich nicht entsprechen, immer und nur auf vier Arten möglich.*

7. Wenn die unendlich fernen Geraden beider Systeme einander entsprechen, so ist zunächst der Fall möglich, dafs dieselben projektivisch gleich sind, dafs sie also bei geeig-

www.rcin.org.pl

neter Ineinanderlegung als Kollineationsachse dienen können. Je zwei entsprechende Gerade der perspektivisch gelegten Systeme schneiden sich dann auf der unendlich fernen Kollineationsachse, sind also parallel. Infolge dessen sind je zwei entsprechende Dreiecke winkelgleich, die beiden Systeme also einander *ähnlich*, je zwei entsprechende Strecken stehen in demselben festen Verhältnis. Legt man umgekehrt zwei ähnliche Systeme so, daſs je zwei entsprechende Gerade parallel werden, so schneiden sich letztere auf der unendlich fernen Geraden, die Lage ist perspektivisch. Es muſs alsdann ein Kollineationszentrum existieren, welches man in diesem Falle *Ähnlichkeitspunkt* nennt und durch Verbinden von zwei entsprechenden Punktepaaren findet. Die perspektivische Lage kann in diesem Falle auf unendlich viele Arten erzielt werden. Liegen zwei entsprechende Gerade parallel, so sind entweder, wie unmittelbar nachzuweisen, alle entsprechenden Geraden parallel oder werden es durch Umklappen des einen Systems um die zugehörige Parallele; letztere kann auſserdem um einen ihrer Punkte um $2R$ gedreht werden. Je zwei entsprechende Punkte kommen entweder auf dieselbe Seite oder auf verschiedene Seiten des Ähnlichkeitspunktes zu liegen; durch die erwähnte Umdrehung läſst sich der eine Fall in den andern überführen. Daſs entsprechende Strecken der Systeme in gleichem Verhältnis stehen, ergiebt sich aus der Ähnlichkeit der entstehenden Dreiecke.

Die gesamte Ähnlichkeitslehre ordnet sich hiermit als ein Spezialfall in die Lehre von der allgemeinen Kollineation ein, aber als ein singulärer Spezialfall; denn es sind hier unendlich viele perspektivische Lagen möglich, was im allgemeinen nicht der Fall ist. Auch muſs hervorgehoben werden, daſs sich zu einem System ein ähnliches *nicht* linear konstruieren läſst.

Ein Spezialfall der Ähnlichkeit ist die *Gleichheit*, d. h. die völlige Übereinstimmung von Σ und Σ_1. In der perspektivischen Lage liegt dann das Kollineationszentrum im Unendlichen oder in der Mitte zwischen je zwei entsprechenden Punkten.

8. Die unendlich fernen Geraden zweier Systeme Σ und

www.rcin.org.pl

Σ_1 können sich auch einander entsprechen, ohne dafs sie projektivisch gleich sind; alsdann mufs, falls die Systeme in perspektivische Lage gebracht werden können und gebracht werden, das Kollineationszentrum in der unendlich fernen Geraden liegen, während die Kollineationsachse eine im Endlichen gelegene Gerade ist. Da jedem unendlich fernen Punkte von Σ ein unendlich ferner Punkt von Σ_1 zugeordnet ist, entspricht einem Büschel paralleler Geraden von Σ wieder ein Büschel paralleler Geraden in Σ_1. Und umgekehrt ist evident, dafs wenn jedem Parallelstrahlenbüschel von Σ ein ebensolcher von Σ_1 zugeordnet ist, die unendlich fernen Geraden beider Systeme sich entsprechen. Wenn aber zwei Parallelstrahlenbüschel projektivisch sind, so schneiden sie aus irgend welchen Geraden projektivisch ähnliche Punktreihen aus, wie man leicht einsieht, wenn man die Büschel in perspektivische Lage bringt; daher sind alle entsprechenden Punktreihen projektivisch ähnlich. Man nennt solche Systeme *affin**). Um Σ und Σ_1 in der allgemeinsten Weise einander affin zuzuordnen, weisen wir drei nicht in einer Geraden gelegene Punkte von Σ drei ebensolchen von Σ_1 zu. Da in affinen Systemen Parallelogrammen Parallelogramme entsprechen und durch drei Eckpunkte eines Parallelogrammes der vierte bestimmt ist, so ist hierdurch eine kollineare Verwandtschaft eindeutig festgesetzt, und da die unendlich fernen Schnittpunkte je zweier Parallelogrammseiten sich paarweise entsprechen müssen, so entsprechen sich auch die unendlich fernen Geraden, so dafs die Zuordnung wirklich affin ist.

Wegen der projektivischen Ähnlichkeit entsprechender Punktreihen kann man die Konstruktion auch folgendermafsen ausführen. Man fixiere in Σ und Σ_1 durch je zwei nicht parallele Geraden a, b und a_1, b_1 mit den Schnittpunkten O und O_1 je zwei Richtungen willkürlich und ordne a und a_1, b und b_1 einander zu. Den Punkten A und B von a und b

*) Diese Bezeichnung rührt von *Euler* her, der in seiner *Introductio in Anal. Infin.*, T. II, Cap. XVIII affine Figuren durch Änderung der Abscissen und Ordinaten nach bestimmten Verhältnissen erzeugt werden läfst.

www.rcin.org.pl

ordnet man Punkte A_1 und B_1 von a_1 und b_1 in der Weise zu, dafs man $O_1A_1 = m.OA$ und $O_1B_1 = n.OB$ macht, worin m und n konstante Faktoren bezeichnen. Die Zuordnung anderer Punkte geschieht durch Parallelenlegung zu a, b, a_1 und b_1. Man kann also sagen, dafs ein affines Gebilde aus dem andern dadurch hervorgeht, dafs man das letztere in zwei Richtungen nach verschiedenem Mafsstabe dehnt oder verkürzt und dann noch eine Drehung dieser Richtungen gegen einander vornimmt.

9. Affine Systeme können nicht immer in perspektivische Lage gebracht werden. Um dies zu bewerkstelligen, ist es nämlich nötig entsprechende Richtungen in beiden Gebilden aufzufinden, in denen entsprechende Strecken gleich sind; sind solche Richtungen ausfindig gemacht, so kann jedes entsprechende Geradenpaar in denselben zur Kollineationsachse vereinigt werden, worauf noch ein Umklappen statthaft ist. Allein solche Richtungen brauchen nicht zu existieren; man erkennt beispielsweise aus der letzten Konstruktion, dafs nach zwei Richtungen eines Gebildes hin derartige Vergröfserungen vorgenommen werden können, dafs überhaupt in *allen* Richtungen eine Vergröfserung eintreten mufs.

10. Denkt man sich die Ebenen der affinen Systeme Σ und Σ_1 mit je zwei entsprechenden Büscheln von Parallelstrahlen überdeckt, die jeweilig gleichen, beliebig kleinen Abstand haben, so werden beide Ebenen in unendlich viele, unendlich kleine Parallelogramme zerlegt, die in einer Ebene sämtlich gleich sind. Entsprechende begrenzte Figuren der beiden Gebilde enthalten die gleiche Zahl solcher Parallelogramme (für die am Rande gelegenen ist eine einfache Grenzbetrachtung anzustellen, die hier übergangen werden kann), ihr Inhalt verhält sich also wie derjenige zweier dieser. Man kann daher den Satz aussprechen:

*In affinen Systemen stehen die Flächeninhalte entsprechender Figuren in einem konstanten Verhältnis**).

*) Im speziellen Falle kann der Flächeninhalt der gleiche sein; die Beziehung wird dann wohl als *Affingleichheit* bezeichnet. S. hierüber *Kruse, Elemente der Geometrie*, p. 95.

www.rcin.org.pl

11. Die Untersuchung über die Affinität (und die Ähnlichkeit sowie Gleichheit, die als Spezialfälle derselben erscheinen) zeigt uns, dafs die unendlich fernen Punkte keineswegs immer wie endliche behandelt werden dürfen; wenn wir dies in vielen Fällen thaten, so geschah es doch nur da, wo durch einen Grenzübergang der Nachweis der Richtigkeit sicher erbracht werden konnte. Im allgemeinen ist es unerläfslich, bei Operationen mit dem Unendlichen auch in der Geometrie die Strenge anzuwenden, die bei algebraisch-analytischen Untersuchungen gegenwärtig als selbstverständlich betrachtet wird.

12. Verwandelt man irgend ein ebenes Gebilde in ein kollineares, so modifiziert diese Umwandlung das äufsere Ansehen oft beträchtlich; trotzdem bleibt eine leicht zu umgrenzende Klasse von Eigenschaften ungeändert; man kann sagen: *Alle Relationen, die auf keinen andern Besonderheiten beruhen, als dafs gewisse Gerade durch bestimmte Punkte gehen oder dafs gewisse Punkte auf bestimmten Geraden liegen, werden durch die Kollineation nicht alteriert.* Alle Gebilde der Geometrie der Lage verlieren also ihren Charakter nicht; die allgemeinen metrischen Relationen bleiben unverändert in Geltung. In diesen Relationen treten nur jeweilig Stücke von *einem* der beiden Gebilde auf; aber es giebt auch eine allgemeine Beziehung zwischen Stücken der beiden kollinearen Gebilde: *die entsprechenden Doppelverhältnisse sind einander gleich.*

Geändert werden dagegen durch die Kollineation im allgemeinen nicht nur Strecken und Winkel selbst, sondern auch deren Verhältnisse. Einem gleichseitigen Dreieck kann ein ungleichseitiges, einem rechtwinkligen Viereck ein ganz beliebiges entsprechen. Man bezeichnet alle geometrischen Formeln, die durch Kollineation keine Änderung erfahren als *projektivische.*

Besonders auffällig wird die Änderung durch Kollineation, wenn im Endlichen gelegene Punkte ins Unendliche gerückt werden und umgekehrt, wie dies immer vorkommt, wenn die Beziehung keine affine ist.

www.rcin.org.pl

§ 33.

Die Reciprozität; das Prinzip der Dualität.

1. War schon die Verwandtschaft der Kollineation geeignet, den geometrischen Gesichtskreis bedeutend zu erweitern, so gilt dies noch in höherem Maſse von der Verwandtschaft der *Reciprozität*, welche uns direkt zu dem schon öfters angedeuteten *Prinzipe der Dualität**) führt. Wir nennen zwei ebene Systeme Σ und Σ_1 *reciprok* zugeordnet, wenn jedem Punkte von Σ eine Gerade von Σ_1, jeder Geraden von Σ ein Punkt von Σ_1 und somit dem Schnittpunkt zweier Geraden von Σ die Verbindungsgerade zweier Punkte von Σ_1 und umgekehrt entspricht. Auch hier ist die Bedingung der *Stetigkeit* der Zuordnung zuzufügen; zwei unendlich benachbarten Punkten des einen Systems sollen zwei Gerade entsprechen, welche einen unendlich kleinen Winkel miteinander bilden oder im Falle des Parallelseins einen unendlich kleinen Abstand haben und umgekehrt; bei den unendlich fernen Punkten und Geraden ist eine Ausnahme zu machen.

Jedem Viereck $ABCD$ in Σ entspricht ein Vierseit $a_1 b_1 c_1 d_1$ in Σ_1, jeder der sechs Seiten des ersteren einer der sechs Eckpunkte des letzteren, jedem Diagonalpunkte des Vierecks eine Diagonale des Vierseits, jeder Diagonale des Vierecks ein Diagonalpunkt des Vierseits; den vier harmonischen Punkten, die durch die Seiten und Diagonalen des Vierecks auf einer der ersteren ausgeschnitten werden, entsprechen die vier harmonischen Strahlen, die von einem der Eckpunkte des entsprechend vervollständigten Vierseits ausgehen. Je vier harmonischen Punkten in Σ entsprechen demnach je vier harmonische Strahlen in Σ_1. Nach § 29, 7 schlieſsen wir hieraus:

Jeder Punktreihe des einen von zwei reciproken Systemen entspricht ein zu ihr projektivischer Strahlenbüschel des andern.

---

*) Die reciproke Zuordnung wurde von *Poncelet* in seinem grundlegenden Werke: *Traité des propriétés projectives des figures* vielfach angewandt; das allgemeine Prinzip der Dualität wurde zuerst von *Gergonne* ausgesprochen.

www.rcin.org.pl

2. Hiernach kann die Konstruktion reciproker Systeme ganz analog zu derjenigen kollinearer ausgeführt werden. Die Beziehung ist eindeutig festgesetzt, wenn wir vier willkürlichen Punkten A, B, C, D von Σ, unter denen keine drei in einer Geraden liegen, vier Gerade a_1, b_1, c_1, d_1 von Σ_1, unter denen keine drei durch einen Punkt gehen, zuordnen. Schneiden sich nämlich die Geraden AB und CD im Punkte E, so entspricht letzterem die Gerade e_1, welche die Punkte $a_1 b_1$ und $c_1 d_1$ verbindet. Durch die drei Punkte A, B, E und die drei zugeordneten Strahlen a_1, b_1, e_1 ist die projektivische Beziehung zwischen der Punktreihe AB und dem Strahlenbüschel $a_1 b_1$ eindeutig festgesetzt; das Gleiche gilt für CD und $c_1 d_1$. Hierdurch ist aber jeder Geraden in Σ ein Punkt in Σ_1 zugewiesen; denn der Verbindungslinie irgend zweier Punkte von AB und CD entspricht der Schnittpunkt der entsprechenden Strahlen von $a_1 b_1$ und $c_1 d_1$. Allen Strahlen von Σ, welche durch denselben Punkt O gehen, entsprechen in Σ_1 die Punkte, welche auf der zugeordneten Geraden o_1 liegen. Durch die Strahlen von O werden nämlich AB und CD perspektivisch-projektivisch auf einander bezogen, weshalb auch die Büschel $a_1 b_1$ und $c_1 d_1$ in projektivische Beziehung gesetzt sind, wenn in ihnen die Strahlen einander zugeordnet werden, welche den zugeordneten Punkten von AB und CD entsprechen; da aber die Büschel $a_1 b_1$ und $c_1 d_1$ den Strahl e_1 gemeinsam haben, so befinden sie sich in perspektivischer Lage, und die Schnittpunkte entsprechender Strahlen liegen auf derselben Geraden o_1. Hieraus geht hervor, dafs die hergestellte Beziehung den Anforderungen der reciproken Verwandtschaft genügt.

3. Wenn zwei Systeme zu demselben dritten reciprok sind, so sind sie zueinander kollinear. Die Untersuchungen über Kollineation, aufser denen über die perspektivische Lage, können daher aus denen über Reciprozität abgeleitet werden.

4. Durch den geführten Nachweis, dafs zu jedem ebenen System unendlich viele reciproke konstruiert werden können, ist das *Prinzip der Dualität* begründet. Wir können den Satz aussprechen:

Aus jedem Satze der Geometrie der Lage geht ein weiterer

www.rcin.org.pl

richtiger Satz dadurch hervor, dafs man die Worte Punkt und Gerade, Schnittpunkt und Verbindungsgerade vertauscht.

Man braucht eben nur zu dem Gebilde, welches den ersten Satz darstellt, das reciproke zu konstruieren, um die Richtigkeit hiervon einzusehen*). Wie verhält es sich aber mit den metrischen Relationen? Besteht eine Dualität zwischen Strecken, die von zwei Punkten eingeschlossen werden und Winkeln, die durch zwei Gerade bestimmt werden? Diese Fragen können im allgemeinen nicht bejaht werden; doch findet ein *beschränkter Dualismus* allerdings statt.

Betrachten wir zuerst das Dreieck, so steht der Relation zwischen den drei Winkeln keine Relation zwischen den Seiten gegenüber. Dagegen entspricht der Sinussatz:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

sich selbst in der Art dualistisch, dafs er keine Änderung erleidet, wenn man die Seiten und die Sinus der gegenüberliegenden Winkel vertauscht. Versucht man dasselbe bei dem Kosinussatze: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$, so gelangt man wiederum zu keinem richtigen Resultate. Der Satz des Menelaos besitzt ein reciprokes Analogon, bei welchem die Strecken durch die Sinus der entsprechenden Winkel ersetzt erscheinen (s. § 27, 3). Die dritte Vierseitsrelation dagegen besitzt kein reciprokes Analogon.

Je vier Punkte einer Geraden und je vier entsprechende Strahlen eines Büschels besitzen dasselbe Doppelverhältnis. Dies alles zusammenfassend kann man sagen:

Die metrischen Relationen zeigen nur teilweise einen Dualismus, der darin besteht, dafs man Strecken mit den Sinus der analogen Winkel vertauschen darf.

Der Versuch, direkt mittels der reciproken Zuordnung derartige dualistische Formeln herzuleiten, führt im allge-

*) Die früher gefundenen Gebilde der Geometrie der Lage entsprechen sich selbst dualistisch; doch braucht dies mit anderen durchaus nicht der Fall zu sein.

www.rcin.org.pl

meinen auf komplizierte Ausdrücke, aus denen die speziellen Bestimmungsstücke der gewählten Zuordnung nicht herausfallen*).

Weitere Untersuchungen über reciproke ebene Systeme, namentlich solche, welche ineinander liegen, würden über die Grenzen hinausführen, die wir unserer Darstellung gesteckt haben.

---

*) Eingehenderes hierüber findet man bei *Hankel*, die Elemente der projektivischen Geometrie in synthetischer Behandlung (Leipzig 1875), p. 75 ff.

www.rcin.org.pl

Stereometrie.

§ 34.

Fundamentalverhältnisse.

1. Das Gebiet der *Stereometrie,* der Lehre von den räumlichen Gebilden, ist wegen der gröfseren Zahl der auftretenden Elemente ein ausgedehnteres als das der Planimetrie, welche sich als Spezialfall in jenes einreiht. Wenn thatsächlich die wissenschaftliche Ausbeute den hiernach zu hegenden Erwartungen nicht ganz entspricht, wenn uns zwar zahlreiche einfache Sätzchen, aber weit weniger wirklich interessante Resultate begegnen, so liegt dies hauptsächlich in dem Umstande, dafs bei Ebenen keine *metrischen Relationen* auftreten, die mit den bei Geraden gefundenen auf gleicher Stufe stehen. Kein Wunder, dafs infolge dessen die Stereometrie in vielen Büchern nur stiefmütterlich behandelt wird und zahlreiche Autoren von Elementarbüchern ihre Darstellung nicht über die Planimetrie hinaus ausdehnen. Wir werden uns hierdurch nicht abhalten lassen, gerade der Stereometrie eine eingehende und die fundamentalen Verhältnisse beleuchtenden Darstellung zu teil werden zu lassen. Namentlich die Stellung zu dem Parallelenaxiom bedarf besonderer Aufmerksamkeit; wir werden zuerst nur Sätze bringen, welche von demselben unabhängig sind und später die Abhängigkeit oder Unabhängigkeit von ihm immer hervorheben.

2. Die elementar-stereometrischen Untersuchungen haben es mit der Zusammenstellung von drei Elementargebilden zu thun: *dem Punkt, der Geraden und der Ebene.* Es erweist sich jedoch als zweckmäfsig, den Punkt und die Ebene in die erste Linie zu stellen, während die Geraden von selbst

www.rcin.org.pl

in die Untersuchung eintreten. Um eine Direktive für die Anordnung zu haben, legen wir in erster Linie die Zahl der *Ebenen* zu Grunde, die ein Gebilde zusammensetzen, ohne uns jedoch ausschliefslich an diese Einteilung zu halten; in zweiter Linie denken wir uns ein Gebilde durch eine Anzahl von *Punkten* bestimmt*).

3. Wenn zwei Ebenen einen (im Endlichen gelegenen) Punkt gemeinsam haben, so schneiden sie sich in einer Geraden (§ 3); sie teilen den Raum in vier getrennte Teile, deren weitere Untersuchung erst an späterer Stelle möglich ist.

Haben zwei Ebenen keinen Punkt gemeinsam, so heifsen sie *parallel.* Die Existenz paralleler Ebenen wird sich später ergeben.

Im allgemeinen kann man (wenn man das Parallelsein ausschliefst) sagen, dafs *zwei Ebenen eine Gerade bestimmen.* Dem steht die Thatsache entsprechend gegenüber, dafs auch *zwei Punkte eine Gerade bestimmen.*

4. Bei einer Zusammenstellung von drei Ebenen sind folgende Fälle denkbar:

a. die drei Ebenen sind paarweise parallel;
b. zwei Ebenen schneiden sich, während die dritte beiden parallel ist (kann erst nach Einführung des Parallelenaxioms als unmöglich ausgeschlossen werden);
c. zwei Ebenen sind parallel und werden beide von der dritten geschnitten;
d. die Ebenen schneiden sich alle in derselben Geraden;
e. die Ebenen schneiden sich in drei verschiedenen Geraden.

Die Fälle a., b. und d. bieten nichts Bemerkenswertes; c. und e. sind weiter zu untersuchen. Hierbei werden wir gleichzeitig auf die Betrachtung der Lage einer Ebene zu einer Geraden, nämlich der Schnittlinie der beiden anderen Ebenen geführt.

5. Eine Gerade, die mit einer Ebene *keinen* Punkt ge-

---

*) Litteraturangaben über die folgenden einfachen Definitionen und Sätzchen, die sich meistens schon bei *Euklid* finden, dürften überflüssig sein.

www.rcin.org.pl

meinsam hat, heifst zu ihr *parallel*. Eine Gerade, die mit einer Ebene *einen* Punkt gemeinsam hat, *schneidet* sie. Eine Gerade endlich, welche mit einer Ebene *zwei* gemeinsame Punkte hat, *fällt ganz in dieselbe* (§ 3).

6. *Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten Ebene geschnitten, so sind die beiden Schnittlinien parallel.* Denn andernfalls müfsten sie sich, da sie in derselben Ebene liegen, schneiden, was auch ein Schneiden der beiden ersten Ebenen zur Folge hätte. Jede der Schnittlinien ist natürlich der Ebene, in die sie nicht fällt, parallel*). Überhaupt *ist eine Gerade a immer einer Ebene α parallel, wenn sie, ohne ganz in die Ebene zu fallen, einer Geraden b in dieser Ebene parallel ist.* Legt man nämlich durch die beiden parallelen Geraden eine Ebene β, so müfste ein etwaiger Schnittpunkt von a und α auch in β, d. h. in der Schnittlinie b von α und β liegen, was unmöglich ist. Da man durch irgend eine Gerade b in α eine zweite Ebene β legen und in dieser eine Parallele a zu b ziehen kann, *so ist die wirkliche Existenz von Geraden, die zu Ebenen parallel sind, dargethan. Durch einen Punkt A lassen sich unendlich viele parallele Gerade zu einer Ebene α legen*, mag man das Parallelenaxiom annehmen oder nicht; dies wird klar, wenn man von a eine beliebige Gerade nach α zieht, durch diese unendlich viele Ebenen legt und in diesen die Parallelenkonstruktion vornimmt.

Ebenso kann man zu einer gegebenen Geraden durch einen Punkt aufser ihr unendlich viele parallele Ebenen legen.

7. Wenn sich drei Ebenen α, β, γ der Reihe nach in den Geraden c, a, b schneiden, so sind zwei Fälle möglich. Schneiden sich a und b in O, so ist O den drei Ebenen α, β, γ, also auch der Schnittlinie c gemeinsam. Sind a und b parallel, so kann auch c keine dieser Geraden schneiden, da z. B. der Schnittpunkt mit a allen drei Ebenen gemeinsam wäre, also auch in c liegen müfste. Also:

Schneiden sich drei Ebenen in drei Geraden, so sind letz-

---

*) Zugleich ist erwiesen: *Wenn eine Gerade in der einen von zwei sich schneidenden Ebenen liegt und der andern parallel ist, so ist sie auch der Schnittlinie parallel.*

www.rcin.org.pl

tere entweder alle drei paarweise parallel oder schneiden sich in einem Punkte.

Betrachtet man den letzteren Fall als das gewöhnliche Verhalten dreier Ebenen zueinander, während man alle übrigen als Singularitäten ansieht, so gelangt man zu der folgenden dualen Gegenüberstellung:

a. *drei Ebenen bestimmen einen Punkt* (ihren gemeinsamen Schnittpunkt), *in dem drei Gerade zusammenlaufen;*

b. *drei Punkte bestimmen eine Ebene, in der drei Gerade liegen.*

Der hierin ausgesprochene Dualismus wird später durch Einführung des Parallelenaxioms vollkommen gemacht werden. Wir können bereits an dieser Stelle die Erkenntnis aussprechen, die erst in der Folge eingehender begründet werden soll: *Es besteht in der Stereometrie ein Dualimus, bei dem sich Ebenen und Punkte als gleichberechtigte Elemente gegenüberstehen. Den Geraden, die in den Figuren auftreten, entsprechen wieder Gerade, nämlich der Schnittlinie zweier Ebenen die Verbindungsgerade zweier Punkte und umgekehrt.* Dieser Dualismus ist von dem aus der Planimetrie bekannten zwischen Punkten und Geraden wesentlich verschieden; der letztere ist kein Spezialfall des ersteren, sondern eine sekundäre Erscheinung.

8. Wenn sich n Ebenen so oft als möglich schneiden und unter den Schnittlinien keine parallelen auftreten, auch nirgends mehrere Schnittlinien oder Schnittpunkte in einzelne zusammenfallen, so entstehen $\frac{n(n-1)}{1.2}$ Schnittlinien und $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ Schnittpunkte. Die erste Zahl giebt nämlich an, wie oft je zwei Ebenen, die zweite, wie oft je drei Ebenen zusammengestellt werden können. Ebenso sind durch n Punkte $\frac{n(n-1)}{1.2}$ Gerade und $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ Ebenen bestimmt, wenn keine Singularitäten eintreten, die diese Zahlen vermindern.

Bevor wir der umfassenden Untersuchung des Hauptfalles, dafs drei Ebenen sich in drei durch einen Punkt gehen-

www.rcin.org.pl

den Geraden schneiden, näher treten, mufs ein wichtiger Spezialfall erörtert werden: der Fall, *dafs zwei der Schnittlinien mit der dritten rechte Winkel bilden.*

§ 35.

Senkrechte Gerade und Ebenen; Neigungswinkel.

1. Eine Gerade soll auf einer Ebene *senkrecht* (ein *Perpendikel* u. s. w.) heifsen, wenn sie mit allen durch ihren Fufspunkt (d. h. Schnittpunkt mit der Ebene) in der Ebene gezogenen Geraden rechte Winkel bildet. Diese Definition wird durch den folgenden Satz ergänzt, aus dem sich ihre Möglichkeit erst folgern läfst.

Lehrsatz: *Bildet eine Gerade mit zwei durch ihren Fufspunkt in einer Ebene gelegten Geraden rechte Winkel, so bildet sie überhaupt mit allen solchen Geraden rechte Winkel; sie steht also auf der Ebene senkrecht.*

Beweis: Ist in Fig. 33 $\sphericalangle\, BAC = BAD = 1\,R$ und liegen AC, AD, AE in der Ebene α, so machen wir $AB_1 = AB$ und ziehen die Geraden CFD, dann BC, BD, BF, B_1C, B_1D, B_1F. Wir haben $\triangle\, ABC = AB_1C$ und $\triangle\, ABD = AB_1D$, also $BC = B_1C$ und $BD = B_1D$, woraus weiter $\triangle\, BCD = B_1CD$ folgt. Da hiernach $\sphericalangle\, BCF = B_1CF$ ist, so haben wir auch $\triangle\, BCF = B_1CF$, also $BF = B_1F$ und schliefslich $\triangle\, ABF = AB_1F$, also $\sphericalangle\, BAF = B_1AF = 1\,R$, da BAB_1F eine ebene Figur ist.

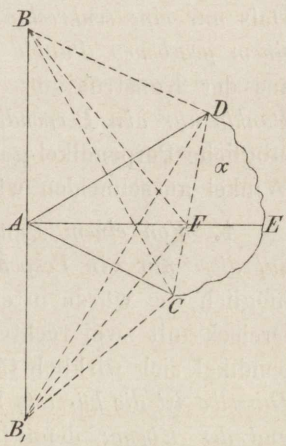


Fig. 33.

Dieser von *Cauchy* nach dem etwas schwerfälligeren *Euklidischen* gebildete Beweis hat vor dem bekannten rechnenden *Legendre*'schen den Vorzug, dafs er das Parallelenaxiom nicht voraussetzt.

2. Umkehrung: *Bilden drei (oder mehrere) Gerade AC, AD, AE, welche durch denselben Punkt A einer Geraden AB*

www.rcin.org.pl

gelegt sind, alle mit der letzteren rechte Winkel, so liegen sie in einer Ebene.

Beweis: Fiele AE nicht in die Ebene α von AC und AD, so würde eine durch AB und AE gelegte Ebene β die Ebene α in einer Geraden AF schneiden. Nach dem Vorigen müſste dann $\sphericalangle BAF = 1R = BAE$ sein, was nicht möglich ist.

Dreht man also einen rechten Winkel um den einen Schenkel, so beschreibt der andere eine Ebene.

3. Aus den letzten Sätzen geht hervor, daſs *man zu einer Geraden in jedem ihrer Punkte eine senkrechte Ebene legen kann.* Man braucht nur durch die Gerade zwei beliebige Ebenen zu legen, in diesen auf ihr in demselben Punkte Perpendikel zu errichten und durch diese eine Ebene zu legen. Hieraus kann man weiter folgern, daſs *sich auf jeder Ebene in jedem Punkte ein Perpendikel errichten läſst;* denn man braucht nur auf einer Geraden eine senkrechte Ebene zu errichten und letztere dann mit der gegebenen Ebene und zwar in den richtigen Punkten zum Zusammenfallen zu bringen. Daſs *nur eine senkrechte Ebene zu einer gegebenen Geraden in einem gegebenen Punkte derselben existiert*, folgt unmittelbar aus der Konstruktion. Auch *ist auf einer Ebene in einem Punkte nur ein Perpendikel möglich*, da eine durch zwei etwa mögliche Perpendikel gelegte Ebene zwei verschiedene rechte Winkel ausschneiden würde.

4. *Von einem Punkte auſserhalb einer Ebene läſst sich auf diese nur ein Perpendikel fällen;* denn wären zwei solche möglich, so würde in einer durch beide gelegten Ebene ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln entstehen. Daſs ein Perpendikel sich wirklich fällen läſst, wird weiter unten gezeigt. *Dasselbe ist die kürzeste Verbindungsgerade zwischen dem Punkte und der Ebene;* denn in einer durch das Perpendikel und eine andere Verbindungsgerade gelegten Ebene entsteht ein rechtwinkliges Dreieck, in dem dem rechten Winkel die gröſste Seite gegenüberliegt. Von zwei solchen Verbindungsgeraden ist diejenige die kürzere, deren Fuſspunkt dem Fuſspunkte des Perpendikels näher liegt, und beide sind gleich, wenn ihre

www.rcin.org.pl

Fufspunkte gleichweit von demselben entfernt sind; beides ist aufs Einfachste zu beweisen.

5. Die beiden Teile, in die eine Ebene durch eine in ihr gelegene Gerade geteilt wird, nennen wir *Halbebenen.* Zwei Halbebenen, α und β, die in der begrenzenden Geraden a (*Scheitelgeraden*) aneinanderstofsen, bilden einen *Flächenwinkel.* Wir verzichten darauf, denselben weiter zu charakterisieren und beschränken uns, genau wie bei dem ebenen Winkel, auf den Nachweis, dafs *Flächenwinkel gleich sein und addiert werden können*, woraus folgt, dafs sie der Gröfse nach verglichen, dafs sie *gemessen* werden können. Zu diesem Zwecke errichten wir in einem Punkte A von a auf diesem in α und β die Perpendikel AB und AC; den Winkel BAC, den dieselben einschliefsen, nennen wir den *Neigungswinkel* der beiden Ebenen für den Punkt A; ob derselbe für alle Punkte der Schnittlinie der gleiche ist, bleibt noch dahingestellt. Die Ebene dieses Winkels heifst *Neigungsebene;* sie ist senkrecht zur Scheitelgeraden, weil es zwei ihrer Geraden sind. Sollen zwei Flächenwinkel gleich sein, d. h. zum Decken gebracht werden können, so müssen selbstverständlich an entsprechenden Stellen der Scheitelgeraden die Neigungswinkel gleich sein. Umgekehrt *sind aber auch die Flächenwinkel gleich, wenn an je einer Stelle der Scheitelgeraden die Neigungswinkel gleich sind.* Legt man nämlich die gleichen Neigungswinkel aufeinander, so fallen auch die Scheitelgeraden als Senkrechte zu der Neigungsebene ineinander; infolge dessen fallen aber die betreffenden Ebenen zusammen, da deren Lage durch zwei sich schneidende Gerade vollständig bestimmt ist Setzt man zwei Flächenwinkel mit der Scheitelgeraden und einer der Halbebenen aneinander, *so ist an irgend einer Stelle der Neigungswinkel der Summe der Flächenwinkel gleich der Summe der Neigungswinkel der einzelnen Flächenwinkel;* denn die Schenkel dieser Neigungswinkel stehen alle auf der Scheitelgeraden senkrecht, fallen also alle in eine gemeinsame Neigungsebene. Ist ein Flächenwinkel das $m$fache oder der $n$te Teil eines andern, so stehen auch die Neigungswinkel an einer entsprechenden Stelle in demselben Verhältnis. Das Gleiche gilt infolge dessen auch, wenn ein Flächenwinkel

www.rcin.org.pl

das $\frac{m}{n}$ fache des andern ist, wo $\frac{m}{n}$ auch jedem irrationalen Werte beliebig nahe gebracht werden kann. *Die Neigungswinkel verhalten sich also wie die Flächenwinkel*, können also geradezu als Gröſsenmaſs der letzteren dienen. Nunmehr erkennt man auch, daſs *der Neigungswinkel für alle Punkte der Scheitelgeraden der gleiche sein muſs.* Ergänzen sich nämlich die Halbebenen eines Flächenwinkels zu einer vollständigen Ebene, so ist der Neigungswinkel an allen Stellen der Scheitelgeraden ein Gestreckter; ist nun ein Flächenwinkel das $\frac{m}{n}$ fache eines solchen, so muſs auch der Neigungswinkel überall $\frac{m}{n}$ eines Gestreckten sein. *Gleiche Flächenwinkel sind daher zur Deckung zu bringen, wenn man ihre Scheitelgeraden irgendwie ineinander legt.* Als Maſs des Flächenwinkels dient immer der hiernach eindeutig bestimmte Neigungswinkel desselben.

Daſs dasselbe Gebilde unendlich viele verschiedene Flächenwinkel repräsentiert, braucht kaum erwähnt zu werden; diese Verhältnisse sind genau dieselben wie beim ebenen Winkel. Es ist unmöglich, daſs zwei zusammenstoſsende Halbebenen, die irgendwo um eine endliche Strecke voneinander entfernt sind, einen verschwindend kleinen Flächenwinkel einschlieſsen.

Schneiden sich zwei vollständige Ebenen, so entstehen vier konkave Flächenwinkel, von denen die gegenüberliegenden (*Scheitelwinkel*) gleich, die nebeneinander liegenden (*Nebenwinkel*) supplementär sind.

6. Zwei Ebenen heiſsen aufeinander *senkrecht*, wenn ihr Neigungswinkel ein rechter ist. *In einer Geraden einer Ebene kann man auf ihr nur eine senkrechte Ebene errichten,* da sonst verschiedene rechte Neigungswinkel existieren müſsten. *Steht eine Gerade auf einer Ebene senkrecht, so stehen auch alle durch diese Gerade gelegten Ebenen auf ihr senkrecht;* denn die im Fuſspunkte der Geraden konstruierten Neigungswinkel sind Rechte. Hiernach steht die Neigungsebene eines Flächenwinkels auf den beiden Halbebenen, welche den Winkel bilden, senkrecht.

Stehen zwei Ebenen aufeinander senkrecht und errichtet

www.rcin.org.pl

man auf ihrer Schnittlinie eine senkrechte Gerade in der einen der Ebenen, so steht sie auf der andern senkrecht; sie bildet nämlich mit zwei Geraden in derselben, der Schnittlinie und dem in ihrem Fuſspunkte zu konstruierenden zweiten Schenkel des Neigungswinkels rechte Winkel.

Stehen zwei Ebenen aufeinander senkrecht und errichtet man auf einer derselben in der Schnittlinie ein Perpendikel, so fällt dieses in die andere; denn eine durch die Schnittlinie und das Perpendikel gelegte Ebene steht auf der ersten Ebene senkrecht und muſs daher mit der andern zusammenfallen.

Fällt man von einem Punkte der einen zweier aufeinander senkrechten Ebenen auf die andere ein Perpendikel, so fällt es in die erstere; denn andernfalls könnte man von demselben Punkte noch ein zweites Perpendikel auf die zweite Ebene fällen, nämlich das Perpendikel auf die Durchschnittslinie.

Stehen zwei sich schneidende Ebenen auf derselben Ebene senkrecht, so steht auch ihre Schnittlinie auf ihr senkrecht; denn das in dem gemeinsamen Schnittpunkte auf der dritten Ebene errichtete Perpendikel muſs in die beiden ersten Ebenen fallen, also mit ihrer Schnittlinie identisch sein.

7. *Zwei Perpendikel auf derselben Ebene sind parallel.* Errichtet man nämlich in der Verbindungsgeraden ihrer Fuſspunkte auf der Ebene eine zu ihr senkrechte Ebene, so müssen beide Perpendikel in sie fallen; auſserdem können sie sich nicht schneiden.

8. Wir sind jetzt in den Stand gesetzt nachzuweisen, daſs *von einem gegebenen Punkte A auſserhalb einer Ebene α auf diese ein Perpendikel gefällt werden kann.* Nimmt man in α eine beliebige Gerade a an, so kann man durch sie und A eine Ebene β legen; in dieser fällt man von A ein Perpendikel AB auf a und errichtet in B auf a in α ein Perpendikel BC; durch dieses und A legt man eine dritte Ebene γ, und in dieser fällt man von A auf BC das Perpendikel AD; dieses steht auf α senkrecht. Die Ebene γ ist nämlich die Neigungsebene zu α und β, steht also auf α senkrecht, woraus das Weitere nach 6. folgt.

9. *Zwei Ebenen, welche auf derselben Geraden senkrecht stehen, sind parallel;* denn andernfalls würde in einer durch

www.rcin.org.pl

die Gerade und einen Punkt der Schnittlinie der beiden Ebenen gelegten Ebene ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln ausgeschnitten. Da man durch jeden Punkt einer Geraden eine zu ihr senkrechte Ebene legen kann, so *ist hiermit die Existenz paralleler Ebenen dargethan.*

10. Eine Halbgerade a (AB), welche eine Ebene α trifft, aber nicht auf ihr senkrecht steht, heifst *schief* zu ihr. Wir untersuchen die Winkel, welche sie mit den verschiedenen durch ihren Fufspunkt in der Ebene gelegten Geraden bildet.

Fällen wir zunächst von einem beliebigen Punkte B der Halbgeraden a ein Perpendikel auf die Ebene α und verbinden seinen Fufspunkt C mit dem Fufspunkte A von a, so heifst die Halbgerade $AC = b$ die *Projektion* (im engeren Sinne) von a auf α. Hätten wir anstatt B einen anderen Punkt B_1 gewählt, so müfste das Perpendikel B_1C_1 mit BC in einer Ebene liegen (7.), in die auch a und somit A fällt; das Resultat wäre also das gleiche. Der Winkel, den die Halbgerade a mit ihrer Projektion b auf α bildet, heifst ihr *Neigungswinkel* zu der Ebene α, die Ebene β desselben ihre *Neigungsebene.* Die Neigungsebene β steht auf der Ebene α senkrecht (6.). Man ersieht zugleich, dafs man durch eine die Ebene α schneidende Gerade a immer eine zu α senkrechte Ebene β legen kann, aber nicht mehrere, da sich sonst in jeder derselben von demselben Punkte B aus Perpendikel auf α fällen lassen müfsten. Legen wir durch A in α eine andere Halbgerade AD, wobei wir $AD = AC$ machen, und ziehen aufser BC noch BD und CD, so ist in dem rechtwinkligen Dreieck BCD $BD > BC$; da die Dreiecke ABC und ABD in den beiden anderen Seiten übereinstimmen, so ist $\sphericalangle BAD > BAC$. *Der Neigungswinkel ist also von den Winkeln, welche a mit den verschiedenen durch A in α gezogenen Geraden bildet, der kleinste.*

Sein Nebenwinkel mufs demnach der gröfste dieser Winkel sein. Nimmt man $AD \perp AC$, so wird $\sphericalangle BAD = 1R$, da α senkrecht auf β steht und daher auch AD (als in α auf AC senkrechte Gerade) auf β senkrecht sein mufs u. s. w. Dreht man AD von AB ausgehend nach der einen oder anderen Richtung weiter, so nimmt $\sphericalangle BAD$ beständig

www.rcin.org.pl

zu, bis AD mit der Verlängerung von AC zusammenfällt; der Beweis ist leicht zu erbringen, ergiebt sich aber auch aus den späteren metrischen Relationen.

11. Aus der vorigen Nummer geht hervor, dafs die auf einer Ebene senkrechte Gerade die einzige ist, welche mit allen durch ihren Fufspunkt in der Ebene gezogenen Geraden den gleichen Winkel bildet; ihre Stellung zu der Ebene trägt also einen *singulären* Charakter, was für spätere Untersuchungen mafsgebend ist. In der Planimetrie haben wir nichts Analoges; denn der rechte Winkel kann keine andere Besonderheit für sich in Anspruch nehmen, als dafs er der einfachste aliquote Teil, nämlich die Hälfte, eines Gestreckten ist.

§ 36.

Einführung des Parallelenaxioms.

Wir ergänzen die bisherigen Untersuchungen durch eine Reihe von Sätzen, welche das Parallelenaxiom zur Grundlage haben.

1. *Wenn eine Gerade n auf der einen (α) von zwei parallelen Ebenen senkrecht steht, so steht sie auch auf der anderen (β) senkrecht.* Legt man nämlich durch n zwei beliebige Ebenen γ und δ, so schneiden diese α und β in Paaren paralleler Geraden: a_1 und b_1, a_2 und b_2 (§ 34, 6); da nun die korrespondierenden Winkel gleich sind, so bilden nicht nur a_1 und a_2, sondern auch b_1 und b_2 mit n rechte Winkel, weshalb nach § 35 n auf β senkrecht ist. Hieraus folgt, dafs *man durch einen Punkt A zu einer Ebene α nur eine parallele Ebene legen kann.* Fällt man nämlich von A auf α ein Perpendikel a, so ist die in A zu a senkrechte Ebene die einzige parallele zu α.

Nimmt man das Parallelenaxiom nicht an, so ist es denkbar, dafs man nicht nur durch einen Punkt, sondern sogar durch eine Gerade unendlich viele parallele Ebenen zu einer gegebenen Ebene legen kann; die Sache ist ganz analog zu dem Verhalten von parallelen Geraden (vgl. § 15).

Der Fall § 34, 4, b ist jetzt auszuschliefsen.

www.rcin.org.pl

2. *Ist die eine* (a) *von zwei parallelen Geraden auf einer Ebene* (α) *senkrecht, so ist es auch die andere* (b). Denn zunächst mufs b die Ebene α schneiden, wie man sofort erkennt, wenn man durch a und b eine Ebene β legt, und dann mufs b senkrecht auf α sein, weil sonst in dem gleichen Fufspunkte eine andere Senkrechte möglich wäre, die gleichfalls zu a parallel liefe (§ 35, 7). Durch einen Punkt ist aber zu einer Geraden nur *eine* Parallele möglich (nämlich in der Ebene, welche durch Punkt und Gerade bestimmt ist).

Sind zwei Ebenen einer dritten parallel, so sind sie auch untereinander parallel; denn ein Perpendikel auf der dritten Ebene steht auch auf den beiden anderen senkrecht.

3. *Sind zwei Gerade a und b einer dritten c parallel, so sind sie untereinander parallel*, auch wenn nicht alle drei in einer Ebene liegen. Legt man nämlich zu c eine senkrechte Ebene, so stehen auch a und b auf ihr senkrecht, sind also parallel.

4. *Winkel mit paarweise parallelen Schenkeln sind gleich oder supplementär; ihre Ebenen sind, wenn sie nicht zusammenfallen, parallel.*

Beweis: Sind $A_1A_2A_3$ und $B_1B_2B_3$ die beiden Winkel, α und β ihre Ebenen, $A_2A_1 \# B_2B_1$, $A_2A_3 \# B_2B_3$, so machen wir, falls α und β nicht identisch sind, A_2C_2 senkrecht auf β und $C_2C_1 \# B_2B_1 \# A_2A_1$, $C_2C_3 \# B_2B_3 \# A_2A_3$. Da $\sphericalangle A_2C_2C_1 = A_2C_2C_3 = 1R$, so folgt auch $\sphericalangle C_2A_2A_1 = C_2A_2A_3 = 1R$, also A_2C_2 senkrecht auf α und somit α parallel β. Ferner ist $\sphericalangle A_1A_2A_3$ oder sein Nebenwinkel gleich $\sphericalangle C_1C_2C_3$, da beide Neigungswinkel der Ebenen von $A_2A_1C_2C_1$ und $A_2A_3C_2C_3$ sind; aufserdem ist $\sphericalangle C_1C_2C_3$ oder sein Nebenwinkel gleich $B_1B_2B_3$ (§ 15, 2).

5. *Wenn die eine* (a) *von zwei parallelen Geraden einer Ebene* (α) *parallel ist, so ist es auch die andere* (b). Legt man durch a und b eine Ebene β, so ist diese entweder α parallel oder schneidet α; im ersten Falle kann b selbstverständlich α nicht schneiden, im zweiten ist a (§ 34, 6 Anm.), also auch b parallel zur Schnittlinie und infolge dessen b auch parallel zu α (§ 34, 6).

6. *Zwei parallele Ebenen sind überall gleichweit vonein-*

www.rcin.org.pl

ander entfernt, d. h. die zwischen ihnen gelegenen Teile von irgend welchen gemeinsamen Perpendikeln sind gleich. Denn legt man durch irgend zwei dieser Perpendikel eine Ebene, so wird in dieser ein Parallelogramm ausgeschnitten, dessen gegenüberliegende Seiten gleich sind. Ebenso *ist auch eine Gerade überall gleichweit von einer zu ihr parallelen Ebene entfernt*, d. h. die von ihr auf die Ebene gefällten Perpendikel sind gleich. *Umgekehrt ist eine Gerade einer Ebene parallel, wenn zwei von ihr auf die Ebene gefällte Perpendikel* (auch dem Zeichen nach) *gleich sind.* Denn alsdann wird in einer durch die Perpendikel gelegten Ebene nach § 18, 2, e ein Parallelogramm gebildet, worauf § 34, 6 angewandt werden kann. *Zwei Ebenen sind parallel, wenn die auf einer von ihnen in drei Punkten, welche nicht in einer Geraden liegen, errichteten Perpendikel, soweit sie zwischen beiden liegen, gleich sind.* Legt man nämlich durch zwei Paare dieser Perpendikel Ebenen, so entstehen in diesen wieder nach § 18, 2, e Parallelogramme; infolge dessen liegen in beiden Ebenen Winkel mit paarweise parallelen Schenkeln. Nebenbei folgt, dafs *eine Gerade, welche zu einer von zwei parallelen Ebenen parallel ist, es auch zu der anderen ist;* man braucht nur von zwei ihrer Punkte Perpendikel auf beide Ebenen zu fällen u. s. w. Schneidet daher eine Gerade die eine von zwei parallelen Ebenen, so schneidet sie auch die andere.

7. *Werden zwei parallele Ebenen durch eine dritte Ebene geschnitten, so sind die acht entstehenden konkaven Flächenwinkel paarweise gleich oder supplementär*, analog zu den entsprechenden Winkelpaaren an parallelen Geraden, die von einer dritten Geraden durchschnitten werden. Legt man nämlich eine vierte Ebene senkrecht zu den beiden parallelen Schnittlinien, so erhält man die entsprechende ebene Figur, deren Winkel die Neigungswinkel der drei Ebenen sind. In gleicher Weise ergiebt sich, dafs *eine Gerade, welche zwei parallele Ebenen schneidet, mit beiden gleiche Neigungswinkel bildet.*

8. *Durch zwei sich kreuzende Gerade a und b läfst sich immer ein Paar und nur ein Paar paralleler Ebenen legen.* Zieht man durch irgend einen Punkt von a eine Parallele c zu b, durch einen Punkt von b eine Parallele d zu a, so sind die

www.rcin.org.pl

durch a und c, b und d gelegten Ebenen α und β parallel (4.); die Wahl der Scheitelpunkte auf a und b ist gleichgiltig. Umgekehrt ist klar, dafs z. B. durch b nur die eine Ebene β gelegt werden kann, welche a nicht schneidet; denn eine beliebige andere durch b gelegte Ebene mufs die Ebene α in einer Parallelen zu b schneiden, welche wieder a schneidet. *Der senkrechte Abstand von α und β ist auch der kürzeste Abstand zwischen zwei Punkten von a und b.* Man findet die kürzeste Verbindungsgerade von beiden, indem man in a und b auf α und β senkrechte Ebenen errichtet; ihre Schnittlinie ist die gesuchte Gerade.

9. Sowie man parallelen Geraden gleiche *Richtung* zuschreibt, so sagt man von parallelen Ebenen, dafs sie gleiche *Stellung* haben.

§ 37.

Die unendlich ferne Ebene.

1. In § 16 gelangten wir zu dem Resultate, dafs es zweckmäfsig ist, in der Ebene unendlich viele unendlich ferne Punkte anzunehmen, die zusammen die unendlich ferne Gerade bilden. Da sich zwei Ebenen nur in einer einzigen Geraden schneiden können, müssen wir sich schneidenden Ebenen verschiedene unendlich ferne Gerade zuschreiben, während parallele Ebenen dieselbe unendlich ferne Gerade besitzen. Sämtliche unendlich ferne Gerade bilden zusammen eine Fläche, die wir als Ebene betrachten müssen, da jede endliche Gerade mit ihr nur *einen* Punkt gemeinsam hat. Eine Fläche, welche mit *jeder* Geraden, die nicht ganz in sie fällt, nur *einen* Punkt gemeinsam hat, mufs nämlich eine Ebene sein, weil alle Gerade, die durch zwei beliebige von ihren Punkten gelegt werden, ganz in sie fallen müssen, so dafs sich in der Fläche nach allen Richtungen hin Gerade ziehen lassen. Die sämtlichen unendlich fernen Punkte des Raumes bilden also zusammen die unendlich ferne Ebene.

Nach dieser Auffassung bestimmen drei Ebenen immer einen im Endlichen oder Unendlichen gelegenen Punkt. Parallele Gerade gehen alle durch denselben unendlich fernen Punkt u. s. w.

www.rcin.org.pl

2. Die entwickelte Auffassung der unendlich fernen Punkte ist wiederum keine *notwendige,* sondern nur eine *widerspruchsfreie.* Auch für den Raum (vgl. § 16) kann man die Annahme eines einzigen unendlich fernen Punktes durchführen; man mufs nur die Ebene als einen Spezialfall der Kugel, nämlich als eine Kugel mit unendlich grofsem Radius ansehen. Alle Kugeln schneiden sich in Kreisen oder berühren sich in einem Punkte oder haben überhaupt keinen Punkt gemeinsam. Stellt man eine Ebene mit einer Kugel zusammen, so trifft das Gleiche zu. Zwei Ebenen schneiden sich entweder in einer Geraden, d. h. einem Kreise mit unendlichem Radius, oder sie berühren sich in dem unendlich fernen Punkte.

Wir werden nur von der ersten Auffassungsweise weiterhin Gebrauch machen.

§ 38.

Der Strahlenbündel.

1. Durch die soeben auseinandergesetzte Anschauungsweise wird der Dualismus zwischen Punkt und Ebene ein vollständiger; denn drei Ebenen, die nicht eine Gerade gemeinsam haben, bestimmen ebenso immer einen Punkt, wie drei nicht in einer Geraden gelegene Punkte eine Ebene bestimmen. Der *Punktreihe* entspricht der *Ebenenbüschel*, d. h. der Inbegriff der Ebenen, welche durch dieselbe Gerade (*Achse*) gehen. Der *ebene Strahlenbüschel*, der alle Geraden umfafst, welche in derselben Ebene liegen und durch denselben Punkt gehen, entspricht sich selbst dualistisch. Dem *ebenen Systeme*, der Gesamtheit von Punkten und Geraden, die in einer Ebene enthalten sind, steht der *Strahlenbündel**) gegenüber, die Gesamtheit von Ebenen und Geraden, die durch denselben Punkt gehen. Punktreihe, Strahlenbüschel und Ebenenbüschel werden als Grundgebilde der *ersten* Stufe, ebenes System und Strahlenbündel als Grundgebilde der *zweiten* Stufe bezeichnet.

---

*) Die Unterscheidung von *Büschel* und *Bündel,* wie sie hier durchgeführt wird, entspricht dem Sprachgebrauche von *v. Staudt* und *Reye.* Bei manchen Autoren ist der Gebrauch dieser Bezeichnungen ein anderer.

www.rcin.org.pl

2. Die Zusammenstellung dreier sich schneidenden Ebenen insbesondere, die uns noch weiterhin zu beschäftigen hat, ist das Gegenstück des ebenen Dreiecks und mufs zu diesem analoge Eigenschaften zeigen. Es erscheint naturgemäfs, hieran sofort die Untersuchung der Systeme von n Ebenen oder n Strahlen zu schliefsen, die durch denselben Punkt gehen, also demselben Strahlenbündel angehören; dieselben sind das Gegenstück zu dem ebenen n-eck und n-seit. Wir nennen ein System von n durch denselben Punkt gehenden Ebenen nebst ihren Durchschnittsstrahlen ein *n-flach*, ein System von n durch denselben Punkt gehenden Strahlen nebst den verbindenden Ebenen ein *n-kant**). Betrachtet man nur die Winkelteile der Ebenen, welche n aufeinander folgende Strahlen verbinden, so bezeichnet man das Gebilde, das sowohl als n-kant wie n-flach angesehen werden kann, als eine n-seitige *Ecke*, das Gegenstück des ebenen Polygons.

3. Nach dem Vorhergehenden entsprechen sich n-kant und n-seit, n-flach und n-eck gegenseitig dualistisch; aber wir können auch die umgekehrte Zuordnung herstellen. Denken wir uns einen Strahlenbündel durch eine beliebige, nicht durch den Mittelpunkt gehende Ebene geschnitten oder, was auf dasselbe hinausläuft, durch die Geraden und Punkte eines ebenen Systems einerseits und durch einen aufserhalb gelegenen Punkt andererseits Ebenen und Strahlen gelegt und den Elementen des ebenen Systems, durch die sie gehen, zugeordnet, so ist zwischen einem ebenen Systeme und einem Strahlenbündel eine Beziehung hergestellt, die man als *kollinear* bezeichnet; man schreibt ferner beiden Gebilden bei dieser Anordnung eine *perspektivische* Lage zu, die aufhört, wenn man die Systeme nach geschehener Zuordnung in eine beliebige andere Lage bringt. Jetzt entsprechen den Punkten und Geraden des ebenen Systems Strahlen und Ebenen, also dem n-seit und dem n-eck das n-flach und das n-kant.

4. Bei den ebenen Figuren treten Strecken und Winkel als Bestimmungsstücke auf; bei den Gebilden im Strahlenbündel treten an ihre Stelle die Winkel zwischen zwei Strahlen

*) Nach der Bezeichnungsweise von *v. Staudt*.

www.rcin.org.pl

(*Kantenwinkel*) und die Flächenwinkel (Neigungswinkel) zweier Ebenen zueinander, oder umgekehrt, je nachdem man die Art der Zuordnung wählt. *Die metrischen Relationen im Strahlenbündel sind also lediglich Relationen zwischen Winkeln; da sie ungeändert bleiben müssen, wenn man die Winkel einzeln um $4kR$ ändert, so werden trigonometrische Funktionen der Winkel in die Gleichungen eintreten.*

Sowie bei dem ebenen Systeme die sekundäre Dualität zwischen Punkt und Gerade besteht, so ist bei dem Strahlenbündel eine solche zwischen Strahl und Ebene vorhanden, und zwar macht sich dieselbe aus zwei Gründen auch bei den metrischen Relationen viel deutlicher geltend als in der Planimetrie. Erstens sind die gegenüberstehenden Gröſsen, Winkel und Neigungswinkel, gleichartiger als Winkel und Strecken. Zweitens aber läſst sich in dem Strahlenbündel viel einfacher eine reciproke Zuordnung*) herstellen wie in dem ebenen Systeme, eine Zuordnung, die eine direkte Überführung von Winkeln in Flächenwinkel und umgekehrt gestattet. Während nämlich in einem ebenen Systeme kein Punkt zu einer Geraden eine singuläre Lage hat, steht in dem Strahlenbündel jede Ebene zu dem auf ihr senkrechten Strahle in besonderer Beziehung. Hierauf beruht die folgende wichtige reciproke Zuordnung.

5. Wir denken uns durch das Zentrum O zwei Strahlenbündel S_1 und S_2 gelegt, die wir dadurch aufeinander beziehen, daſs *wir jeder Ebene von S den zu ihr senkrechten Strahl in S_1 zuordnen.* Schneiden sich die Ebenen α, β, γ ... von S in demselben Strahle r, so sind die ihnen in S_1 zugeordneten Strahlen a_1, b_1, c_1 ... alle auf r senkrecht, liegen also alle in derselben Ebene ϱ_1, welche zu r senkrecht ist. Jedem Strahle r von S entspricht also in S_1 die auf ihm senkrechte Ebene ϱ_1. Hieraus ist nicht nur ersichtlich, daſs die Zuordnung der beiden Bündel eine reciproke ist, sondern daſs auch durch eine Vertauschung von S und S_1 die Art

*) Wir nennen zwei Strahlenbündel *kollinear* aufeinander bezogen, wenn jedem Strahle und jeder Ebene des einen ein Strahl und eine Ebene des anderen, *reciprok,* wenn ihnen eine Ebene und ein Strahl entspricht.

www.rcin.org.pl

der Beziehung in keiner Weise geändert wird. Wir bezeichnen die hier gegebene reciproke Beziehung eines Strahlenbündels auf sich selbst, die durchaus nicht die einzig mögliche ist, als die *polare*; eine Ebene und ein Strahl in ihm, die aufeinander senkrecht stehen, heifsen *Polarebene* und *Polargerade*.

6. Um die polare Zuordnung auf metrische Verhältnisse anwenden zu können, ist noch eine weitergehende Festsetzung nötig; denn zwei Ebenen und zwei Strahlen bilden *zwei* Winkelpaare miteinander, und es ist fraglich, welche von diesen sich entsprechen sollen. Zwei Halbebenen α und β von S, die im Strahle c zusammenstofsen, bilden zwei Winkel miteinander, einen konkaven und einen konvexen; wir wollen die Seiten der Halbebenen, welche dem Winkel zugekehrt sind, den wir gerade betrachten, als die *inneren*, die beiden anderen als die *äufseren* bezeichnen. Auf den beiden *äufseren* Seiten errichten wir die senkrechten Halbstrahlen; den von ihnen eingeschlossenen konkaven Winkel ordnen wir dem Flächenwinkel von α und β zu, und zwar betrachten wir ihn als *positiv*, wenn der Flächenwinkel *konkav*, als *negativ*, wenn der Flächenwinkel *konvex* ist. Im letzteren Falle können wir uns jedoch auch den negativen Winkel um $4R$ vermehrt, ihn also durch den konvexen Winkel der beiden Perpendikel ersetzt denken; doch mufs dann die folgende Formel modifiziert werden.

Legen wir nach dieser Festsetzung eine Ebene durch a_1 und b_1, so steht diese auf c senkrecht, ist also die Neigungsebene von α und β. Bezeichnen wir den Neigungswinkel von α und β mit (α, β), den Winkel zwischen a_1 und b_1 mit (a_1, b_1), so liegen in dieser Neigungsebene die beiden Winkel (α, β) und (a_1, b_1), sowie noch zwei Rechte. Hieraus folgt, dafs in jedem Falle

$$(a_1, b_1) + (\alpha, \beta) = 2R$$

ist.

Jedem Flächenwinkel in S entspricht in S_1 ein zu ihm supplementärer Kantenwinkel. Wegen der Vertauschbarkeit von S und S_1 *entspricht auch jedem Kantenwinkel in S ein zu ihm supplementärer Flächenwinkel in S_1.*

www.rcin.org.pl

7. Durch die polare Zuordnung ist ein Dualitätsgesetz für Strahlenbündel begründet, welches sich nicht nur auf Sätze der Geometrie der Lage, sondern auch auf metrische Relationen erstreckt. Dasselbe lautet: *Jedem Gebilde im Strahlenbündel entspricht ein anderes dualistisch in der Art, dafs Ebenen und Strahlen vertauscht erscheinen; aus jeder metrischen Relation, die sich auf Gebilde im Strahlenbündel bezieht, erhält man eine zweite für das dualistisch entsprechende Gebilde, indem man an Stelle der Kanten- und Flächenwinkel des ersten die Supplemente der Flächen- und Kantenwinkel des zweiten setzt.*

Mittels dieses Satzes können wir aus jeder metrischen Relation beim Strahlenbündel eine dualistisch entsprechende herleiten, was in der Planimetrie nicht möglich war.

8. Die Untersuchungen über Strahlenbündel werden zum grofsen Teile in den Lehrbüchern in ganz anderem Gewande vorgetragen. Beschreibt man nämlich um den Mittelpunkt eines Strahlenbündels eine beliebige Kugelfläche, so schneiden die Strahlen des Bündels aus derselben Punkte, die Ebenen aber gröfste Kreise aus; jedem Kantenwinkel des Bündels entspricht ein Bogen eines gröfsten Kreises, jedem Flächenwinkel der Winkel zweier solcher Kreisbogen; einer n-seitigen Ecke entspricht ein spärisches n-eck u. s. w. Kurz, die Lehre von den Strahlenbündeln ist wesentlich identisch mit der sog. *Sphärik.* Wir überlassen es dem Leser, die folgenden Sätze auf die Kugel zu übertragen, wodurch sie meistens an Anschaulichkeit gewinnen. Auf der anderen Seite bietet die hier gewählte Darstellung den grofsen Vorteil, dafs die Wechselbeziehungen zwischen Planimetrie und Sphärik in das hellste Licht gerückt werden.

Die einfachsten Sätze über Ecken finden sich bei *Euklid.* Die Sphärik wurde bearbeitet von *Theodosius* von Tripolis, ferner, besonders nach der trigonometrischen Seite hin, von *Menelaos* und *Ptolemäos.* Die dualistischen Beziehungen wurden erst später erkannt (*Vieta, Snellius* u. a.). Im Übrigen sei auf die Litteraturangaben in *Baltzer's Stereometrie* und *Trigonometrie* verwiesen.

www.rcin.org.pl

§ 39.

Die dreiseitige Ecke.

1. Werden drei ebene Winkelräume mit ihren Schenkeln paarweise aneinandergesetzt, so dafs der Scheitel gemeinschaftlich wird, so entsteht die *dreiseitige Ecke*; sie besitzt die Winkelräume als *Seitenflächen*, die in den *Kanten* zusammenstofsen. Bei der dreiseitigen Ecke kommen sechs Bestimmungsstücke in Betracht: *die drei Winkelgröfsen der Seitenflächen und die drei inneren**) *Neigungswinkel zwischen je zwei aufeinander folgenden Seitenflächen.* Wie beim ebenen Dreieck bezeichnen wir in der Folge die Mafse der drei Seiten der Ecke mit a, b, c, die Mafse der gegenüberliegenden Winkel mit α, β, γ.

Eine Ecke, deren Seiten und Winkel sämtlich einzeln kleiner als $2R$ sind, nennt man eine *konvexe* Ecke.

2. Drei Ebenen, die sich in einem im Endlichen gelegenen Punkte schneiden, teilen den Raum in acht Teile, deren jedem eine konvexe Ecke entspricht. Greifen wir eine beliebige unter diesen acht konvexen Ecken heraus, so heifst die ihr gegenüberliegende die *Gegenecke*, die drei an ihre Seiten angrenzenden heifsen *Nebenecken*, die drei Gegenecken der Nebenecken, die an die Kanten der Ecke anstofsen, heifsen *Scheitelecken.* Die Seiten und Winkel der Gegenecke sind Scheitelwinkel zu den Seiten und Winkeln der Ecke, also ihnen gleich. Trotzdem ist die Gegenecke der Ecke im allgemeinen nicht gleich, da man beide nicht ineinander legen kann; bringt man sie so ineinander, dafs sie sich mit einer Seite decken, so kommen nicht die entsprechenden Winkel aufeinander. *Man nennt zwei räumliche Gebilde, die in allen einzelnen Teilen der Reihe nach übereinstimmen ohne gleich zu sein, symmetrisch.* In der ebenen Geometrie tritt der Begriff der Symmetrie nicht auf, weil die Ebene umkehrbar ist. *Zwei Gegenecken sind also symmetrisch.* Die Nebenecken und Scheitelecken stimmen mit der Ecke in

---

*) Jedes Gebilde der beschriebenen Art repräsentiert zwei Ecken, je nachdem man die eine oder die andere Seite der Gesamtheit der Seitenflächen als innere oder äufsere festsetzt, was willkürlich ist.

www.rcin.org.pl

einer Seite und dem ihr gegenüberliegenden Winkel überein, während die beiden anderen Seiten und Winkel denen der Ecke supplementär sind. Jede Nebenecke ist zu der gegenüberliegenden Scheitelecke symmetrisch.

Zu jeder Ecke erhält man die *Polarecke*, indem man im Scheitelpunkt auf den drei Seitenflächen nach aufsen Perpendikel errichtet und durch Ebenen verbindet; sie ist bei jeder konvexen Ecke wieder konvex, wie aus § 38, 7 folgt.

3. *In jeder konvexen dreiseitigen Ecke sind zwei Seiten zusammen immer gröfser als die dritte.*

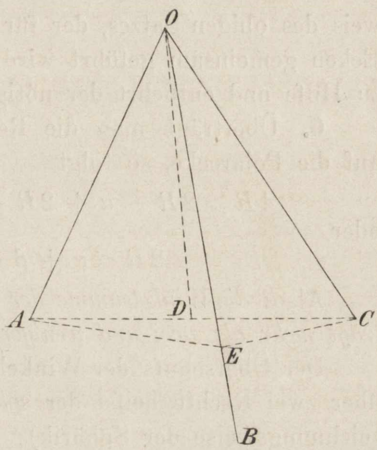


Fig. 34.

Beweis. (Fig. 34.) Seien O der Scheitel, AO, BO, CO die Kanten der Ecke und $\sphericalangle AOC$ die gröfste Seite derselben (nur für diese als dritte Seite braucht der Beweis geführt zu werden). Wir ziehen dann AC, machen $\sphericalangle AOD = AOB$ auf AOC, ferner $OE = OD$ auf OB und ziehen AE und CE. Dann ist $\triangle AOD = AOE$, also $AD = AE$. Da andererseits $AE + EC > AD + DC$ ist, so folgt $EC > DC$. Da $\triangle EOC$ und DOC in zwei Seiten übereinstimmen, so folgt weiter (§ 13, 4) $\sphericalangle EOC > DOC$, also $\sphericalangle AOB + BOC > AOC$.

Ist $\sphericalangle AOC > 2R$, so ergiebt die Konstruktion eine wesentlich andere Figur; der Satz gilt, wie die einfachsten Beispiele zeigen, nicht für Ecken mit einer überstumpfen Seite.

4. Wendet man diesen Satz auf die Polarecke an, so folgt

$$2R - \alpha < 2R - \beta + 2R - \gamma$$

oder

$$\beta + \gamma - \alpha < 2R.$$

5. Wendet man andererseits den Satz auf eine Nebenecke an, so erhält man

$$2R - a + 2R - b > c$$

www.rcin.org.pl

oder

$$4R > a + b + c.$$

Dies giebt den Satz: *Die Summe der Seiten einer konvexen dreiseitigen Ecke beträgt weniger als vier Rechte.*

Für nicht konvexe Ecken wird auch dieser Satz, wie der folgende, hinfällig.

Die untere Grenze für die Summe der Seiten ist 0, wie die einfachste Anschauung zeigt, aber auch aus den späteren metrischen Relationen ersichtlich ist. Der gewöhnliche Beweis des obigen Satzes, der für beliebige vielseitige konvexe Ecken gemeinsam geführt wird, nimmt das Parallelenaxiom zu Hilfe und entbehrt der nötigen Strenge.

6. Überträgt man die Resultate der letzten Nummer auf die Polarecke, so folgt

$$4R > 2R - \alpha + 2R - \beta + 2R - \gamma > 0$$

oder

$$2R < \alpha + \beta + \gamma < 6R.$$

Also: *die Winkelsumme der konvexen dreiseitigen Ecke beträgt mehr als zwei und weniger als sechs Rechte.*

Der Überschufs der Winkelsumme der dreiseitigen Ecke über zwei Rechte heifst der *sphärische Exzefs* (nach der Bezeichnungsweise der Sphärik).

7. *Zwei dreiseitige Ecken sind gleich oder symmetrisch, wenn sie in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln oder in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.*

In beiden Fällen kann man nämlich entweder die Ecken selbst (Gleichheit) oder die eine Ecke mit der Gegenecke der andern (Symmetrie) zum Zusammenfallen bringen. Der eine Satz folgt aufserdem aus dem anderen durch Anwendung auf die Polarecke.

8. *Gleichen Seiten der dreiseitigen Ecke liegen gleiche Winkel gegenüber und umgekehrt.*

Solche (*gleichschenklige* und *gleichseitige*) Ecken sind nach der vorigen Nummer ihrer Gegenecke gleich.

In der *gleichseitigen* Ecke sind alle drei Winkel gleich und umgekehrt.

Sind zwei Seiten der Ecke Rechte, so sind es auch die

www.rcin.org.pl

gegenüberliegenden Winkel und umgekehrt. Im ersten Falle steht nämlich die den beiden gleichen Seiten gemeinsame Kante auf der dritten Seitenfläche senkrecht, also thun dies auch die durch sie gehenden Seitenflächen; im zweiten Falle wird umgekehrt geschlossen. *Die dritte Seite ist dann jedesmal dem dritten Winkel gleich*, da sie den Neigungswinkel der beiden anderen Seitenflächen darstellt.

9. *Zwei dreiseitige Ecken sind gleich oder symmetrisch, wenn sie in den drei Seiten oder in den drei Winkeln übereinstimmen.* Im ersten Falle legt man beide Ecken oder die eine und die Gegenecke der anderen aneinander, so dafs die Lage eine symmetrische wird; alsdann verbindet man die gegenüberliegenden Kanten durch eine Ebene und schliefst wie in § 11, 1 weiter. Der zweite Fall reduziert sich auf den ersten, wenn man an Stelle der Ecken ihre Polarecken betrachtet.

Die beiden Fälle, dafs zwei dreiseitige Ecken in zwei Seiten und einem nicht eingeschlossenen Winkel oder in einer Seite, einem anliegenden und dem gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, behandeln wir am einfachsten bei den metrischen Relationen der Ecken. —

Die Sätze dieses Paragraphen sind sämtlich vom Parallelenaxiom unabhängig.

§ 40.

Metrische Relationen bei der dreiseitigen Ecke.

1. Aus dem Vorhergehenden ist schon ersichtlich, dafs eine dreiseitige Ecke (abgesehen von der Reihenfolge der Stücke) durch drei Stücke ein- oder mehrdeutig bestimmt sein wird, dafs also *drei unabhängige Relationen zwischen den sechs Stücken der Ecke existieren.* Die Behandlung dieser Relationen wird als die *sphärische Trigonometrie* bezeichnet.

Ist in Fig. 35 (S. 174) $OABC$ die zunächst als konvex vorausgesetzte Ecke, in der die Winkel α, β, γ an den Kanten OA, OB, OC, die Seiten a, b, c diesen gegenüber liegen, so machen wir in den Ebenen AOB und AOC die Geraden ED und FD senkrecht auf OA und ziehen FE; es ist

www.rcin.org.pl

dann $\sphericalangle EDF = \alpha$ *). Wir haben nun, wenn $OD = r$, $EF = x$ gesetzt wird,

$$DE = r\,\frac{\sin c}{\cos c}, \quad DF = r\,\frac{\sin b}{\cos b}, \quad OE = \frac{r}{\cos c}, \quad OF = \frac{r}{\cos b}$$

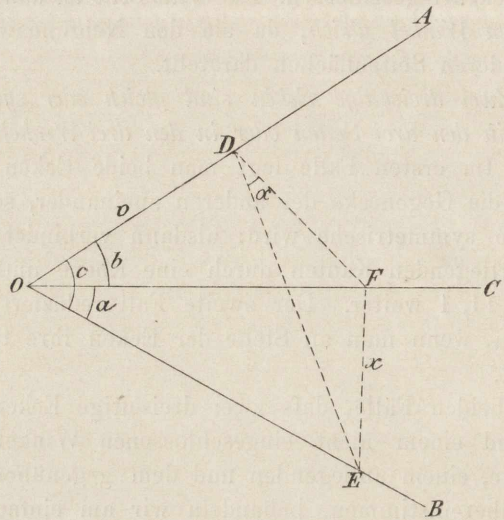


Fig. 35.

und nach § 26, 7 durch Behandlung der Dreiecke DEF und OEF

$$x^2 = r^2\,\frac{\sin^2 b}{\cos^2 b} + r^2\,\frac{\sin^2 c}{\cos^2 c} - \frac{2\,r^2 \sin b \sin c \cos \alpha}{\cos b \cos c}$$

und

$$x^2 = \frac{r^2}{\cos^2 b} + \frac{r^2}{\cos^2 c} - \frac{2\,r^2 \cos a}{\cos b \cos c},$$

woraus durch Gleichsetzen der rechten Seiten folgt

$$\frac{\sin^2 b}{\cos^2 b} + \frac{\sin^2 c}{\cos^2 c} - \frac{2 \sin b \sin c \cos \alpha}{\cos b \cos c} = \frac{1}{\cos^2 b} + \frac{1}{\cos^2 c} - \frac{2 \cos a}{\cos b \cos c}$$

oder nach Umstellung und geeigneter Zusammenfassung

$$\frac{2 \cos a}{\cos b \cos c} = 2 + \frac{2 \sin b \sin c \cos \alpha}{\cos b \cos c}$$

oder

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

---

*) Die Figur bekommt nur dann das gezeichnete Aussehen, wenn b und c spitze Winkel sind; andernfalls bleibt jedoch die Schlufsweise dieselbe.

www.rcin.org.pl

und ebenso

$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos \beta,$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma.$$

Diese drei Formeln, welche den *sphärischen Kosinussatz* darstellen, sind voneinander unabhängig, da die Gröfsen $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ immer nur in einer von ihnen vorkommen; sie liefern die metrischen Relationen der dreiseitigen Ecke vollständig.

2. Die gegebene Entwicklung ist von der absoluten Gröfse der Hilfsdreiecke vollkommen unabhängig; dieselben können auch als verschwindend klein angenommen werden. Da nun nach § 26, 14 die ebene Trigonometrie auch bei Nichtannahme des Parallelenaxioms für unendlich kleine Dreiecke gilt, *so sind der sphärische Kosinussatz und damit die ganze sphärische Trigonometrie wie überhaupt sämtliche metrische Relationen im Strahlenbündel vom Parallelenaxiom unabhängig.*

3. Wendet man den Kosinussatz auf die Polarecke an, so findet man

$$\cos(2R - \alpha) = \cos(2R - \beta)\cos(2R - \gamma)$$
$$+ \sin(2R - \beta)\sin(2R - \gamma)\cos(2R - a)$$

oder nach Umkehrung der Zeichen

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a,$$

ferner

$$\cos \beta = -\cos \gamma \cos \alpha + \sin \gamma \sin \alpha \cos b,$$

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c.$$

Diese Formeln hätten auch auf algebraischem Wege aus den vorhergehenden abgeleitet werden können.

4. Wir haben nach dem Kosinussatze

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

also

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{(\cos a - \cos b \cos c)^2}{\sin^2 b \sin^2 c}}$$

$$= \frac{\sqrt{\sin^2 b \sin^2 c - \cos^2 b \cos^2 c - \cos^2 a + 2\cos a \cos b \cos c}}{\sin b \sin c}$$

oder nach Ersetzung der Sinus im Zähler durch die Kosinus

www.rcin.org.pl

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + \cos a \cos b \cos c}}{\sin b \sin c},$$

worin der Zähler in a, b und c symmetrisch ist*). Daher haben wir

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \pm \frac{\sin c \sin a}{\sin b \sin c} = \pm \frac{\sin a}{\sin b}.$$

Weil bei der konvexen Ecke alle auftretenden Sinus positiv sind, ist das Pluszeichen zu wählen. Durch Umstellung und Buchstabenvertauschung finden wir den *sphärischen Sinussatz:*

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma}.$$

Derselbe entspricht sich selbst polar; er liefert nur zwei Gleichungen und genügt daher allein nicht zur vollständigen Bestimmung der Ecke. Für sämtliche acht Ecken, welche durch drei Ebenen bestimmt werden, gelten dieselben Sinusformeln.

5. Aus

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

folgt

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{\sin b \sin c + \cos a - \cos b \cos c}{2 \sin b \sin c}}$$

$$= \sqrt{\frac{\cos a - \cos(b + c)}{2 \sin b \sin c}} = \sqrt{\frac{\sin\frac{a + b + c}{2} \sin\frac{-a + b + c}{2}}{\sin b \sin c}}$$

und ebenso

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{\cos(b - c) - \cos a}{\sin b \sin c}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sin\frac{a - b + c}{2} \sin\frac{a + b - c}{2}}{\sin b \sin c}}.$$

Da $\frac{\alpha}{2} < 1\,R$, so ist für die Wurzelgröfsen der positive Wert zu wählen. Mit Hilfe dieser und der entsprechenden Formeln haben wir

---

*) Dieser Zähler wird von *v. Staudt* als der *Sinus der Ecke* bezeichnet.

www.rcin.org.pl

$$\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\pm\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$$

$$=\sqrt{\frac{\sin^2\frac{a-b+c}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}\sin\frac{a+b+c}{2}}{\sin a\sin b\sin^2 c}}$$

$$\pm\sqrt{\frac{\sin\frac{a+b+c}{2}\sin^2\frac{-a+b+c}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}}{\sin a\sin b\sin^2 c}}$$

$$=\frac{1}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}}{\sin a\sin b}}\left(\sin\frac{a-b+c}{2}\pm\sin\frac{-a+b+c}{2}\right)$$

$$=\frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}}\left(\sin\frac{a-b+c}{2}\pm\sin\frac{-a+b+c}{2}\right),$$

also nach ausgeführter Faktorenzerlegung auf der rechten Seite

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{2\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{c}{2}\cos\frac{a-b}{2}}{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}}=\frac{\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}},$$

$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}.$$

Multiplizieren wir die Nenner weg und machen die analogen Entwicklungen für $\cos\frac{\alpha\pm\beta}{2}$, so erhalten wir die vier *Gauss*'schen *Formeln* *):

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{c}{2}=\cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$$

$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{c}{2}=\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{c}{2}=\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{c}{2}=\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{\gamma}{2},$$

die sich gegenseitig polar entsprechen.

*) Gleichzeitig mit *Gauss* leiteten *Delambre* und *Mollweide* diese Gleichungen ab.

www.rcin.org.pl

6. Die *Gauss*'schen Formeln sind das bequemste Mittel, um einige bemerkenswerte Sätze über konvexe dreiseitige Ecken zu finden.

a. Da $\cos\frac{c}{2}$ und $\sin\frac{\gamma}{2}$ positiv sind, so müssen nach der dritten Formel $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ und $\cos\frac{a+b}{2}$ dasselbe Zeichen haben, resp. gleichzeitig verschwinden. *Es sind daher* $\alpha+\beta$ und $a+b$ gleichzeitig $\gtreqless 2R$. Ist $a+b \geqq 2R$, so ist die gröfsere von beiden Seiten stumpf, ist $a+b \leqq 2R$, so ist die kleinere Seite spitz; dasselbe gilt für α und β.

b. Da auch $\sin\frac{c}{2}$ und $\cos\frac{\gamma}{2}$ positiv sind und $\frac{\alpha-\beta}{2}$ und $\frac{a-b}{2}$ nicht über $1R$ betragen, so folgt aus der zweiten Formel, dafs für $\alpha \gtreqless \beta$ auch $a \gtreqless b$ ist; also:

In der konvexen dreiseitigen Ecke liegt der gröfseren von zwei Seiten auch der gröfsere Winkel gegenüber und umgekehrt; gleichen Seiten liegen gleiche Winkel gegenüber und umgekehrt, wie schon § 39, 8 bewiesen wurde.

7. Wir haben noch kurz zu zeigen, wie man mittels der aufgestellten Formeln aus drei gegebenen Stücken einer konvexen dreiseitigen Ecke die übrigen berechnet, und dabei zu entscheiden, wann sich überhaupt aus drei gegebenen Stücken Ecken bilden lassen, resp. wie viele solche möglich sind. Direkt klar ist nur, dafs man aus drei nebeneinander liegenden Stücken (zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel oder einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln) immer eine Ecke (und die zu ihr symmetrische) bilden kann; sind wir aber im Stande zu irgend drei Stücken die übrigen als reelle Gröfsen zu berechnen, so ist hiernach die Ecke auch konstruierbar.

Sind b, c und α gegeben, so berechnen wir nach dem Kosinussatze a und zwar in eindeutiger Weise; die Umkehrung des Kosinussatzes liefert dann auch β und γ eindeutig:

$$\cos\beta = \frac{\cos b - \cos c \cos a}{\sin c \sin a} \quad \text{u. s. w.}^{*})$$

*) Die Formeln für $\cos\frac{\beta}{2}$ und $\sin\frac{\beta}{2}$ sind zweckmäfsiger für die Rechnung, doch befassen wir uns hier grundsätzlich nicht mit Aufstellung der bequemsten Formeln.

www.rcin.org.pl

Auch der Sinussatz kann zur Berechnung von β und γ benutzt werden; da indessen zu demselben Sinus ein spitzer und ein stumpfer Winkel gehört, so müssen die Sätze der vorigen Nummer zur Entscheidung herangezogen werden.

Sind β, γ und a gegeben, so führt der polare Kosinussatz in gleicher Weise zum Ziele.

Sind die drei Seiten a, b, c gegeben, so haben wir

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \quad \text{u. s. w.},$$

woraus die Winkel eindeutig gefunden werden. Soll die Rechnung ein reelles, brauchbares Resultat liefern, so mufs

$$-1 < \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} < 1$$

oder

$$-\sin b \sin c < \cos a - \cos b \cos c < \sin b \sin c$$

oder

$$\cos b \cos c - \sin b \sin c < \cos a < \cos b \cos c + \sin b \sin c$$

oder

$$\cos(b + c) < \cos a < \cos(b - c)$$

sein, d. h. es mufs für $b + c \leqq 2R$

$$b + c > a > \pm(b - c)$$

sein. Ist $b + c > 2R$, so betrachten wir die an a angelegte Nebenecke, für die

$$\cos(4R - b - c) < \cos a < \cos(b - c),$$

also

$$4R - b - c > a > \pm(b - c)$$

oder

$$4R > a + b + c, \quad a > \pm(b - c)$$

sein mufs. *Die Ecke ist also immer dann und nur dann möglich, wenn je zwei Seiten zusammen gröfser sind als die dritte und die Summe der drei Seiten weniger als vier Rechte beträgt.*

Die Berechnung der drei Seiten aus den drei Winkeln α, β, γ ergiebt sich in gleicher Weise aus dem polaren Kosinussatz. Die Winkel dürfen beliebig gewählt werden, wenn nur die Ungleichheiten, die aus den vorhergehenden durch polare Umformung hervorgehen, gewahrt bleiben:

$$2R < \alpha + \beta + \gamma < 6R,$$
$$\alpha + \beta < 2R + \gamma, \quad \beta + \gamma < 2R + \alpha, \quad \gamma + \alpha < 2R + \beta;$$

www.rcin.org.pl

aus den drei letzten Ungleichheiten folgt der zweite Teil der ersten.

Sind a, b und α gegeben, so findet man nach dem Sinussatze

$$\sin\beta = \frac{\sin b \sin\alpha}{\sin a},$$

wodurch β zweideutig bestimmt ist. Diese Gleichung giebt als notwendige Bedingung für die Existenz der Ecke

$$\frac{\sin b \sin\alpha}{\sin a} \leqq 1$$

oder

$$\sin b \sin\alpha \leqq \sin a.$$

Die Bestimmung von β wird eindeutig, falls $\sin\beta = 1$, $\beta = 1R$ ist; aber auch sonst sind nicht immer beide Werte für β zulässig.

a. Ist $a + b = 2R$, also auch $\alpha + \beta = 2R$, so ist schon durch die letztere Gleichung β eindeutig bestimmt.

b. Ist $a + b < 2R$, also $\alpha + \beta < 2R$, so mufs im Falle $a > b$, also $\alpha > \beta$, der Winkel β spitz sein, während er für $a < b$, $\alpha < \beta$ sowohl spitz wie stumpf sein kann.

c. Ist $a + b > 2R$, also $\alpha + \beta > 2R$, so mufs für $a < b$, $\alpha < \beta$ sicher β stumpf sein, während für $a > b$ beide Werte zulässig sind.

d. Für $a = b$ wird $\alpha = \beta$.

Nachdem β bestimmt ist, läfst sich c und damit auch γ auf eindeutige Weise finden, z. B. in der folgenden Art. Wir eliminieren aus

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma \quad \text{und}$$
$$\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos c$$

die Gröfse $\cos\gamma$ und finden

$$\cos c = \frac{\cos a \cos b - \sin a \sin b \cos\alpha\cos\beta}{1 - \sin a \sin b \sin\alpha \sin\beta}.$$

Damit diese Bestimmung möglich sei, mufs die Bedingung

$$-1 < \frac{\cos a \cos b - \sin a \sin b \cos\alpha\cos\beta}{1 - \sin a \sin b \sin\alpha \sin\beta} < 1$$

erfüllt sein, die sich nach Wegschaffung des positiven Nenners in die beiden Ungleichheiten

www.rcin.org.pl

$$-1 < \cos a \cos b - \sin a \sin b \cos(\alpha - \beta)$$

und

$$1 > \cos a \cos b - \sin a \sin b \cos(\alpha + \beta)$$

umgestaltet. Die Werte der rechtsstehenden Gröfsen liegen zwischen

$$\cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos(a + b)$$

und

$$\cos a \cos b + \sin a \sin b = \cos(a - b),$$

genügen den Bedingungen daher immer.

Vollständig parallel hierzu ist die Untersuchung, wenn a, α und β gegeben sind; wir brauchen nur Seiten und Winkel zu vertauschen. Wir können schliefslich noch die beiden Gleichheitssätze aussprechen:

Zwei konvexe dreiseitige Ecken sind gleich oder symmetrisch, wenn sie übereinstimmen in zwei Seiten und dem der gröfseren oder kleineren derselben gegenüberliegenden Winkel, je nachdem die Summe der beiden Seiten $\leqq 2R$ *oder* $\geqq 2R$ *ist. Auch sind sie gleich oder symmetrisch, wenn sie übereinstimmen in einer Seite, einem anliegenden und dem gegenüberliegenden Winkel, wenn der gegenüberliegende Winkel der gröfsere oder kleinere ist, je nachdem die Summe der beiden Winkel* $\leqq 2R$ *oder* $\geqq 2R$ *ist.*

8. *Wenn die Seiten oder Winkel der dreiseitigen Ecke teilweise gröfser als zwei Rechte sind, so bleiben die gefundenen Formeln der sphärischen Trigonometrie in Gültigkeit*).*

Beweis: Es genügt, Elemente in betracht zu ziehen, die vier Rechte nicht erreichen, da gröfsere ohne Weiteres durch kleinere ersetzt werden können. Denkt man sich die drei Ebenen, welche die nicht konvexe Ecke bilden, zu ihrem ganzen Umfange ausgedehnt, so erhält man wieder acht konvexe Ecken, von denen mehrere zusammengenommen die zu untersuchende Ecke geben. Im einfachsten Falle besteht die Ecke aus drei konvexen Ecken, die sich aber auf doppelte Art zusammensetzen können: entweder sind an eine konvexe

*) In voller Allgemeinheit wurden die Formeln der sphärischen Trigonometrie zuerst von *Möbius* begründet (*Über eine neue Behandlungsweise der analytischen Sphärik*, Ges. Werke, B. II, p. 1). Die hier gewählte Darstellung ist von der Möbius'schen verschieden.

www.rcin.org.pl

Ecke zwei Nebenecken, oder es ist eine Nebenecke und die gegenüberliegende Scheitelecke angesetzt. Im ersten Falle wird die Ecke durch Zufügung einer konvexen Ecke zum Halbraume, im zweiten zu einem doppelten Flächenwinkel ergänzt. Im ersten Falle hat sie eine konvexe und zwei konkave Seiten, denen gleichartige Winkel gegenüber liegen; im zweiten sind zwei Seiten konvex, eine ist konkav, und die Winkel sind zu den gegenüberliegenden Seiten gleichartig. Bezeichnen wir die sechs Stücke der Ecke wie früher, die entsprechenden der ergänzenden konvexen Ecke mit a_1, b_1, c_1; α_1, β_1, γ_1, so haben wir im ersten Falle

$$a_1 = 4R - a, \quad b_1 = b, \quad c_1 = c,$$
$$\alpha_1 = 4R - \alpha, \quad \beta_1 = 2R - \beta, \quad \gamma_1 = 2R - \gamma,$$

im zweiten

$$a_1 = a, \quad b_1 = 4R - b, \quad c_1 = 4R - c,$$
$$\alpha_1 = \alpha, \quad \beta_1 = 2R - \beta, \quad \gamma_1 = 2R - \gamma.$$

Führt man diese Werte in die verschiedenen Gleichungen (Kosinussatz, polarer Kosinussatz, Sinussatz, Gauss'sche Gleichungen) ein, so nehmen diese für a, α u. s. w. die gleiche Form an (die Gauss'schen Gleichungen vertauschen sich untereinander).

Die weiteren möglichen Ecken setzen sich aus fünf oder sieben konvexen zusammen; ihre Ergänzungen zum Gesamtraum bestehen aus drei konvexen Ecken oder aus einer. Ihre Seiten stimmen mit denen der ergänzenden Ecke überein; ihre Winkel betragen mit den entsprechenden der Ergänzungsecke zusammen vier Rechte. Ersetzt man aber in den Formeln die Winkel durch ihre Ergänzungen zu vier Rechten, so erleiden sie ebenfalls keine Veränderung.

§ 41.

Der Inhalt der Ecken.

1. Fassen wir die Ecke als ein durch aneinanderstofsende Winkelräume, die sich zunächst nicht gegenseitig durchsetzen mögen, umgrenztes Gebilde auf, so können wir derselben einen *Inhalt* beimessen. Wir werden denselben ebensowenig definieren wie den Flächeninhalt einer ebenen Figur; wir werden

www.rcin.org.pl

nur zu zeigen haben, dafs Ecken als gleich erkannt und addiert werden können. Das erstere leuchtet unmittelbar ein; das letztere ist auch möglich, da man durch Aneinandersetzen zweier Ecken wieder eine neue Ecke erhält. Das Weitere ist analog dem über den Flächeninhalt Gesagten (§ 24). Auch hier kommen wir ohne ein Axiom nicht aus: *Zwei Ecken, welche durch eine Art der Zusammensetzung — additiver oder subtraktiver — aus einzelnen, gleichen Ecken als inhaltsgleich erkannt sind, erweisen sich auch bei jeder andern Zerschneidung und Zusammensetzung als inhaltsgleich.*

Wir bezeichnen die Inhaltsgleichheit zweier Ecken mit demselben Zeichen $\equiv$ wie die Flächengleichheit ebener Gebilde. — Übrigens ist zu bemerken, dafs eine Ecke auch mehrfach den Gesamtraum umfassen kann, ähnlich wie man bei einem Winkel ein beliebiges Vielfache von vier Rechten zufügen darf; wir brauchen hierauf wohl nicht weiter einzugehen.

2. *Zwei symmetrische dreiseitige Ecken sind inhaltsgleich.*

Beweis: Man errichte bei beiden in den Mitten je zweier Seiten senkrechte Ebenen und lege je drei Ebenen durch die Schnittlinie derselben und die drei Kanten. Durch diese Ebenen werden die beiden Ecken in je drei gleichschenklige Ecken zerlegt, die einzeln einander gleich sind.

Da man irgend welche Ecken in dreiseitige zerlegen kann, so folgt, dafs *überhaupt symmetrische Ecken inhaltsgleich sind.*

3. Da der gesamte Raum als Ecke mit beliebigem Scheitel gedacht werden kann, so kann man ihn als Mafseinheit der Ecken benutzen. Die Flächenwinkel können ebenfalls mit in Vergleich gezogen werden; ist die Gröfse eines solchen, in Rechten ausgedrückt, α, so ist sein Inhalt gleich $\frac{\alpha}{4R}$.

4. Ist eine konvexe dreiseitige Ecke mit den Winkeln α, β, γ vorgelegt, so erzeugen wir durch Erweiterung ihrer Ebenen die Nebenecken, Scheitelecken und die Gegenecke. Der Inhalt der letzteren ist demjenigen, J, der Ecke selbst gleich. Die Ecke bildet mit jeder Nebenecke zusammen einen Flächenwinkel, ebenso die Gegenecke mit jeder Scheitelecke;

www.rcin.org.pl

die letzteren Flächenwinkel sind den ersteren einzeln gleich. Diese Flächenwinkel haben die Gröfse α, β, γ, also den Inhalt $\frac{\alpha}{4R}, \frac{\beta}{4R}, \frac{\gamma}{4R}$. Die sechs Flächenwinkel zusammen bedecken den ganzen Raum und aufserdem die Ecke und ihre Gegenecke noch doppelt. Wir haben also die Gleichung

$$\frac{2\alpha}{4R} + \frac{2\beta}{4R} + \frac{2\gamma}{4R} = 1 + 4J,$$

woraus

$$J = \frac{\alpha + \beta + \gamma - 2R}{8R} = \frac{E}{8R}$$

folgt, wenn E den sphärischen Exzefs der Ecke bezeichnet. Bei einer nicht konvexen Ecke, welche aus drei konvexen zusammengesetzt ist, und deren Seitenebenen sich gegenseitig nicht durchsetzen, die also dem ersten Falle von § 40, 8 angehört, bestimme man den Inhalt der ergänzenden konvexen Ecke und ziehe ihn von dem Halbraume ab. Analog verfahre man, wenn die Ecke aus fünf oder sieben konvexen zusammengesetzt ist. Immer erhält man die gleiche Formel

$$J = \frac{E}{8R}.$$

Dieses Resultat ist streng analog dem Satze über den Flächeninhalt ebener Dreiecke bei Verwerfung des Parallelenaxioms (§ 15, 5. b). Es braucht kaum hinzugefügt zu werden, dafs die Lehre vom Inhalte der Ecken von diesem Axiom unabhängig ist.

5. Eine konvexe n-seitige Ecke mit sich nicht durchsetzenden Seitenebenen läfst sich durch $n - 3$ Diagonalebenen (die durch zwei Kanten gehen, welche noch nicht durch Ebenen der Ecke verbunden sind) in $n - 2$ dreiseitige Ecken zerlegen. Daher ist die Winkelsumme der n-seitigen Ecke gröfser als $(n - 2)\, 2R = 2nR - 4R$. Da kein Winkel $2R$ erreicht, so ist sie kleiner als $2nR$.

6. Für den Inhalt der n-seitigen Ecke, deren Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \nu$ sind, finden wir durch dieselbe Zerlegung

$$J = \frac{\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \nu - (2nR - 4R)}{8R}$$

www.rcin.org.pl

oder, wenn wir hier mit E_n den Überschufs der Winkelsumme über diejenige des ebenen n-ecks bezeichnen:

$$J = \frac{E_n}{8R}.$$

7. Den Inhalt einer Ecke mit sich durchschneidenden Seitenebenen können wir nunmehr als durch die letzte Formel definiert ansehen; die Ecke erhält einen verschiedenen Inhalt, je nachdem man sich ihre Umgrenzung auf der einen oder der anderen Seite durchlaufen denkt; bei Messung der Winkel mufs ein bestimmter Drehungssinn als der positive festgesetzt werden.

§ 42.

Vier und mehr Ebenen oder Strahlen im Strahlenbündel.

1. Schneiden sich vier Ebenen eines Strahlenbündels, ohne dafs drei einen Strahl gemeinsam haben, so werden in jeder durch die drei andern zwei Kantenwinkel bestimmt, die nicht linear voneinander abhängig sind. Von den acht auf diese Weise in den vier Ebenen bestimmten Kantenwinkeln sind fünf voneinander unabhängig; denn man kann zunächst drei Ebenen dadurch zueinander festlegen, dafs man die drei Seiten einer der dreiseitigen Ecken bestimmt, welche sie bilden, und kann dann die Lage der vierten Ebene durch Angabe von zwei weiteren Winkeln, die sie in zwei der ersten Ebenen ausschneidet, fixieren. Zwischen jenen acht Kantenwinkeln bestehen daher drei Relationen. Um dieselben herzuleiten, denken wir uns eine der dreiseitigen Ecken $OABC$, welche die drei ersten Ebenen bilden, durch die vierte Ebene geschnitten, und bezeichnen je eine der Hälften ihrer Schnittlinien mit den Ebenen BOC, COA, AOB durch OD, OE, OF. Die Kantenwinkel AOB u. s. w. bezeichnen wir mit AB u. s. w. und betrachten hierbei die Winkel AB und BA als entgegengesetzt. Den Umlauf um die Umgrenzung der Ecke in der Richtung ABC betrachten wir als den positiven, den umgekehrten als den negativen. Analog bezeichnen wir den Neigungswinkel von BOC und COA mit BCA u. s. w. Nun ist nach dem Sinussatze, wenn wir zunächst auf die Zeichen keine Rücksicht nehmen,

www.rcin.org.pl

$$\frac{\sin AF}{\sin EA} = \frac{\sin AEF}{\sin BFD},$$

$$\frac{\sin BD}{\sin FB} = \frac{\sin BFD}{\sin BDF},$$

$$\frac{\sin CE}{\sin DC} = \frac{\sin EDC}{\sin CED} = \frac{\sin BDF}{\sin AEF}.$$

Multiplizieren wir diese drei Gleichungen und beachten in bezug auf das Vorzeichen, daſs die vierte Ebene entweder von einer oder von drei Seiten der Ecke nur die Verlängerung trifft, wodurch jedesmal je zwei Kantenwinkel entgegengesetztes Zeichen annehmen, so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{\sin AF \sin BD \sin CE}{\sin FB \sin DC \sin EA} = -1.$$

Dieselbe ist von *Menelaos* (in anderer Form) gefunden und entspricht dem Satze desselben für das Vierseit vollkommen; an die Stelle von Strecken treten hier die Sinus der entsprechenden Kantenwinkel.

Welche der beiden Halbschnittgeraden, die die vierte Ebene mit einer der ersten bildet, man wählt, ist gleichgiltig, da die fraglichen Winkel um $2R$ verschieden sind, ihre Sinus also das entgegengesetzte Zeichen haben; da diese Zeichenänderung immer bei zwei der Sinus eintritt, ist sie ohne Einfluſs.

Die Umkehrung des Satzes ist leicht zu erweisen.

2. Der Satz des Menelaos liefert, da man jede der vier Ebenen als die Schneidende der drei andern ansehen kann, vier Relationen, von denen jede die Folge der drei andern ist. Dagegen lassen sich die Relationen nicht, wie in der Planimetrie, auf zwei reduzieren, wie man bei dem Versuche, die analoge Reduktion wie in § 20, 3 durchzuführen, erkennt. Der dritten metrischen Relation (§ 22, 2) läſst sich allerdings eine analoge an die Seite setzen; wendet man den Kosinussatz auf die Ecken $OCDE$ und $OCAB$, welche den Winkel $DCE = ACB$ gemeinsam haben, an und setzt die Ausdrücke für $\cos DCE$ gleich, so findet man

$$\frac{\cos AB - \cos AC \cos BC}{\sin AC \sin BC} = \frac{\cos DE - \cos DC \cos EC}{\sin DC \sin EC}.$$

Diese Gleichung kann jedoch auch aus dem Satze des Menelaos abgeleitet werden.

www.rcin.org.pl

3. Infolge der Analogie der beiden Sätze des Menelaos läſst sich eine Reihe von Sätzen, die für ebene Figuren gelten, direkt auf die analogen Gebilde des Strahlenbündels übertragen; *alle planimetrischen Sätze, die aus dem des Menelaos folgen, ohne daſs Strecken aus einzelnen Teilen zusammenzusetzen wären* (man vgl. die dritte metrische Relation — es ist eben $\sin(AB + BC)$ nicht gleich $\sin AB + \sin BC$), *gelten in der Weise für den Strahlenbündel, daſs an Stelle von Strecken die Sinus der entsprechenden Kantenwinkel treten, während die ebenen Winkel durch Flächenwinkel ersetzt werden.* Es möge dem Leser überlassen bleiben, diese Sätze eingehend zu entwickeln; hier mag eine kurze Übersicht genügen. Es lassen sich auf den Strahlenbündel übertragen:

a. der Satz des Ceva (§ 23);
b. der reciproke Satz zum Satze des Menelaos (§ 27, 3);
c. die meisten Sätze über Doppelverhältnisse und projektivische Zuordnung;
d. die beiden Fundamentalsätze der Geometrie der Lage;
e. die Sätze über Kollineation und Reciprozität, soweit sie von den Besonderheiten der unendlich fernen Punkte nicht beeinfluſst sind. Von Ähnlichkeit und Affinität kann hier keine Rede sein.

4. Die gefundenen Resultate der Geometrie der Lage im Strahlenbündel sind vom Parallelenaxiom vollkommen unabhängig, falls man nur den Mittelpunkt des Bündels als im Endlichen gelegen annimmt. Wir gelangen von hier aus zu einem wichtigen Rückblick auf die Sätze der ebenen Geometrie der Lage, die nur unter der Voraussetzung des Parallelenaxioms bewiesen wurden. Hat man irgend einen solchen Satz für das Strahlenbündel begründet (also z. B. den Satz, daſs wenn die Verbindungsebenen je zweier entsprechenden Kanten zweier dreiseitigen Ecken durch denselben Strahl gehen, die Schnittlinien der entsprechenden Seitenebenen dieser Ecken in derselben Ebene liegen), so braucht man das Strahlenbündel nur durch eine beliebige, nicht durch seinen Mittelpunkt gehende Ebene zu schneiden, um in derselben ein entsprechendes Gebilde ausgeschnitten zu erhalten, vorausgesetzt, daſs die in Frage kommenden Strahlen des Bündels

www.rcin.org.pl

auch wirklich die Ebene treffen; das letztere ist aber bei Verwerfung des Parallelenaxioms nicht notwendig. Hieraus folgt das Resultat:

Die ebene Geometrie der Lage bleibt auch bei Nichtannahme des Parallelenaxioms bestehen mit der Beschränkung, daſs an Stelle des Vorhandenseins eines gemeinsamen Schnittpunktes von mehr als zwei Geraden auch das Nichtschneiden (Parallelsein) derselben treten kann.

Mit den Hilfsmitteln der nicht-Euklidischen Geometrie kann das Resultat auch planimetrisch abgeleitet werden.

§ 43.

Vier Ebenen und Punkte; die Pyramide.

1. Vier Ebenen schneiden sich bei Annahme des Parallelenaxioms im allgemeinen Falle in sechs Geraden und vier Punkten und ebenso bestimmen vier Punkte sechs Gerade und vier Ebenen; beide Gebilde sind identisch. Liegen die vier nicht einer Ebene angehörigen Punkte A, B, C, D im Endlichen, so wird der Raum durch die vier Ebenen BCD CDA, DAB, ABC in 15 Teile zerlegt, von denen einer allseitig begrenzt ist; letzteren nennt man ein *Tetraëder oder eine dreiseitige Pyramide.* Das Tetraëder hat also vier Flächen, welche Dreiecke sind, vier dreiseitige Ecken und acht Kanten. Die übrigen 14 Raumteile haben mit dem Tetraëder entweder je eine Fläche, oder nur eine Kante, oder nur einen Eckpunkt gemeinsam. Wir bezeichnen das Tetraëder mit $(ABCD)$, die vier erstgenannten Raumteile mit (ABC) u. s. w., je nach der Fläche ABC u. s. w., an welche sie anstoſsen, die folgenden sechs mit (AB) u. s. w., die letzten vier mit A u. s. w., je nach der Kante, resp. dem Eckpunkte, welche sie mit dem Tetraëder gemeinsam haben.

Liegen die vier Punkte nicht alle im Endlichen oder zum Teil in einer Geraden u. s. w., so tritt ein allseitig begrenzter Raumteil überhaupt nicht auf.

2. *Das Tetraëder entspricht in vieler Hinsicht dem Dreieck der Planimetrie:* es ist sich selbst reciprok, es ist der einfachste begrenzte Körper, wie das Dreieck der einfachste begrenzte Flächenteil u. s. w. Man kann daher über das Tetraëder

www.rcin.org.pl

analoge Sätze wie über das Dreieck erwarten, vor allen Dingen Gleichheitssätze. Man kann bei dem Tetraëder von 24 Bestimmungsstücken sprechen, nämlich den sechs Kanten, den sechs Flächenwinkeln zwischen je zwei Ebenen und den zwölf Winkeln der begrenzenden Dreiecke. Von diesen Bestimmungsstücken sind im allgemeinen sechs, deren Wahl nur durch gewisse Ungleichheiten beschränkt ist, willkürlich. Man kann nämlich z. B. drei Kantenwinkel, welche in einer Ecke A zusammenstofsen, beliebig annehmen, wodurch diese Ecke bestimmt ist; dann kann man den drei Kanten dieser Ecke noch beliebige Längen geben und hat dann das Tetraëder insofern eindeutig bestimmt, als irgend zwei Tetraëder ($ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$) mit diesen Bestimmungsstücken gleich oder symmetrisch sind. Die Ecken A und A_1 sind nämlich gleich oder symmetrisch; im ersten Falle kann man die Tetraëder zum Zusammenfallen bringen, im zweiten kann man nur ihr Übereinstimmen in den entsprechenden Stücken nachweisen. Aus den Sätzen der ebenen und sphärischen Trigonometrie ist unmittelbar zu erkennen*), wie man aus den sechs gegebenen Stücken die übrigen berechnet. Zugleich ergiebt sich hieraus, dafs *überhaupt zwischen den 24 Bestimmungsstücken 18 Gleichungen bestehen, die in den Strecken und den Sinus der auftretenden Winkel algebraisch sind, so dafs durch sechs voneinander unabhängige Stücke die übrigen mit endlicher Vieldeutigkeit bestimmt sind.*

Insbesondere ist ein Tetraëder durch die Länge seiner sechs Kanten *eindeutig* bestimmt; denn durch diese sind die Winkel der vier Dreiecke und hierdurch wieder die Winkel der vier Ecken eindeutig gegeben.

3. Aus sechs gegebenen Kanten läfst sich nur unter gewissen Bedingungen ein Tetraëder bilden. Selbstverständlich müssen je zwei zusammenstofsende Kanten gröfser sein als die dritte in derselben Ebene gelegene. Aufserdem kommt noch die Bedingung hinzu, dafs bei einer der Ecken, z. B. D, zwei Seiten gröfser sein müssen als die dritte. Sind die hieraus folgenden Ungleichheiten befriedigt, so ist das Tetraëder konstruierbar, wie aus dem Vorhergehenden ersichtlich ist.

---

*) Hier tritt natürlich Abhängigkeit vom Parallelenaxiom ein.

www.rcin.org.pl

Setzen wir $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $AD=d$, $BD=e$, $CD=f$, $\sphericalangle BDC=\alpha$, $\sphericalangle CDA=\beta$, $\sphericalangle ADB=\gamma$, so haben wir in drei Ungleichheiten, deren eine

$$\alpha+\beta>\gamma$$

ist, die Gröſsen a, b, c, d, e, f einzuführen. Wir schreiben dafür

$$\frac{\alpha+\beta}{2}>\frac{\gamma}{2}$$

oder

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}<\cos\frac{\gamma}{2} \quad \text{oder} \quad \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}<\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Da

$$\cos\alpha=\frac{e^2+f^2-a^2}{2ef},$$

$$\cos\beta=\frac{f^2+d^2-b^2}{2fd},$$

$$\cos\gamma=\frac{d^2+e^2-c^2}{2de},$$

also (die Wurzelgröſsen sind alle mit dem positiven Zeichen zu nehmen)

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{(e+f)^2-a^2}{4ef}},$$

$$\cos\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(f+d)^2-b^2}{4fd}},$$

$$\cos\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(d+e)^2-c^2}{4de}}$$

und

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{a^2-(e-f)^2}{4ef}},$$

$$\sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{b^2-(f-d)^2}{4fd}},$$

$$\sin\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{c^2-(d-e)^2}{4de}}$$

ist, so wird aus der obigen Bedingung

$$\sqrt{\frac{[(e+f)^2-a^2][(f+d)^2-b^2]}{16def^2}}-\sqrt{\frac{[a^2-(e-f)^2][b^2-(f-d)^2]}{16def^2}}$$
$$<\sqrt{\frac{(d+e)^2-c^2}{4de}}$$

oder

www.rcin.org.pl

$$\sqrt{[(e+f)^2-a^2][(f+d)^2-b^2]} < \sqrt{[a^2-(e-f)^2][b^2-(f-d)^2]} + 2f\sqrt{(d+e)^2-c^2}.$$

Durch Quadrieren folgt

$$[(e+f)^2-a^2][(f+d)^2-b^2] < [a^2-(e-f)^2][b^2-(f-d)^2] + 4f^2[(d+e)^2-c^2] + 4f\sqrt{[a^2-(e-f)^2][b^2-(f-d)^2][(d+e)^2-c^2]}$$

oder nach einigen Vereinfachungen

$$(d+e)(f-d)(f-e)-a^2d-b^2e+c^2f < \sqrt{[a^2-(e-f)^2][b^2-(f-d)^2][(d+e)^2-c^2]}$$

und durch nochmaliges Quadrieren und nach leichten Vereinfachungen

$$a^2b^2c^2+a^2d^2(a^2-b^2-c^2)+b^2e^2(-a^2+b^2-c^2) + c^2f^2(-a^2-b^2+c^2) < a^2(d^2-e^2)(f^2-d^2) + b^2(e^2-f^2)(d^2-e^2)+c^2(f^2-d^2)(e^2-f^2)$$

oder

$$a^2d^2(b^2+c^2+e^2+f^2)+b^2e^2(a^2+c^2+d^2+f^2) + c^2f^2(a^2+b^2+d^2+e^2)-a^2e^2f^2-b^2f^2d^2-c^2d^2e^2-a^2b^2c^2 - a^4d^2-a^2d^4-b^4e^2-b^2e^4-c^4f^2-c^2f^4 > 0.$$

Die Symmetrie dieser Ungleichheit zeigt, daſs auſser den Relationen $a+b>c$ u. s. w., durch welche das Reellwerden der Winkel bedingt ist, sie die *einzige* zu befriedigende Bedingung ist.

4. Für den Neigungswinkel λ an der Kante d haben wir

$$\cos\lambda = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$$

oder

$$\cos\lambda = \frac{2d^2(e^2+f^2-a^2)-(f^2+d^2-b^2)(d^2+e^2-c^2)}{\sqrt{[4f^2d^2-(f^2+d^2-b^2)^2][4d^2e^2-(d^2+e^2-c^2)^2]}}$$

oder

$$\cos\lambda = \frac{d^2(b^2+c^2+f^2+e^2)-2a^2d^2-d^4-(b^2-f^2)(c^2-e^2)}{\sqrt{\begin{array}{l}(f+d+b)(-f+d+b)(f-d+b)(f+d-b)\\ \cdot(d+e+c)(-d+e+c)(d-e+c)(d+e-c)\end{array}}}.$$

5. Da man sich das Tetraëder durch Abgrenzung einer dreiseitigen Ecke vermittelst einer vierten Ebene entstanden denken kann, so liegt die Verallgemeinerung nahe, ein Strahlen-

www.rcin.org.pl

bündel durch eine nicht durch das Zentrum gehende Ebene zu schneiden. Schneidet man insbesondere eine n-seitige Ecke im engeren Sinne durch eine solche Ebene, so wird im allgemeinen ein begrenzter Körper erzeugt, welchen man als *n-seitige Pyramide* bezeichnet.

Das in dieser Ebene ausgeschnittene n-Eck heifst die *Grundfläche* (*Basis*), die n begrenzenden Dreiecke heifsen die *Seitenflächen* der Pyramide. An der Grundfläche liegen die *Grundkanten*, je zwei Seitenflächen bilden eine *Seitenkante*.

§ 44.

Fünf sich schneidende Ebenen und fünf Punkte.

1. Fünf Ebenen schneiden sich, wenn keine Singularitäten eintreten, in $\frac{5.4.3}{1.2.3} = 10$ Punkten und in $\frac{5.4}{1.2} = 10$ Geraden; auf jeder der Geraden liegen drei Punkte, durch jeden der Punkte gehen drei Gerade. Bei jeder Lage der Ebenen werden vier begrenzte, einander nicht durchsetzende Räume ausgeschnitten: zwei *Pentaëder*, die von zwei Dreiecken und drei Vierecken begrenzt werden, und zwei *Tetraëder*, welche sich an eine Seite je eines Pentaëders anfügen. Die Pentaëder mögen mit A und B, die an sie angesetzten Tetraëder resp. mit C und D bezeichnet werden. Die beiden Tetraëder A und B können so entstanden gedacht werden, dafs man von den Tetraëdern $A + C$ und $B + D$ die Tetraëder C und D durch Ebenen, welche drei Kanten treffen, abgeschnitten denkt. Beide Pentaëder haben eine vierseitige Fläche gemeinsam, während die beiden andern Vierecksflächen in die Ebenen der Dreiecksflächen des anderen fallen. $A + B$ ist ein Tetraëder, welches durch eine Ebene, die vier Kanten trifft, in die beiden Pentaëder zerlegt wird. $C + D$ kann als ein Pentaëder (im weiteren Sinne) betrachtet werden, welches durch Abgrenzung zweier dreiseitigen Gegenecken durch Ebenen entsteht. Endlich sind $A + B + C$ und $A + B + D$ Pentaëder, welche je zwei Vierecke mit einem konvexen Winkel enthalten. Man überzeugt sich leicht durch die Anschauung, dafs bei jedem Schneiden eines Tetraëders

www.rcin.org.pl

durch eine Ebene eine der drei Arten von Pentaedern entsteht und dafs das Gesamtgebilde (ein *vollständiges Pentaeder*) immer denselben Charakter trägt.

2. In jeder der fünf Ebenen wird durch die vier andern ein Vierseit ausgeschnitten, welches acht Strecken enthält; im ganzen treten $\frac{5\,.\,8}{2} = 20$ Strecken auf. Von diesen sind nur neun unabhängig. Man kann nämlich aus sechs willkürlichen Strecken ein Tetraeder formieren und auf drei zusammenstofsenden Kanten desselben durch Fixierung von drei weiteren Strecken drei Punkte festsetzen, welche die Lage der fünften Ebene bestimmen. In drei Ebenen des Tetraeders sind hierdurch je fünf Strecken der Vierseite bestimmt, aus denen sich die übrigen berechnen lassen; hierdurch sind aber wieder in den beiden andern Ebenen fünf Strecken bekannt, welche die noch fehlenden liefern. Die fünf Vierseite liefern im ganzen 15 metrische Relationen, von denen jedoch nur $20 - 9 = 11$ unabhängig sind. Das Resultat lautet:

Die elf metrischen Relationen zwischen den 20 Strecken eines vollständigen Pentaeders sind durch diejenigen des Vierseits gegeben.

Die Zusammenstellung von beliebig vielen Ebenen führt infolge dessen zu keinen metrischen Relationen, die von den planimetrischen wesentlich verschieden sind.

3. Die zehn Geraden des vollständigen Pentaeders schneiden sich zu je drei in zehn Punkten, von denen wiederum je drei auf einer Geraden liegen. Es ist dies genau dieselbe Anordnung wie bei dem ersten planimetrischen Fundamentalgebilde der Geometrie der Lage (§ 30). Denkt man sich zwei Dreiecke im Raume, deren Ebenen α und β sind, so gelegen, dafs sich je zwei entsprechende Seiten derselben schneiden, d. h. je in einer Ebene γ, δ, ε liegen, so liegen einerseits die drei Schnittpunkte in einer Geraden, nämlich der Schnittlinie von α und β, während andererseits die Verbindungsgeraden je zweier entsprechenden Eckpunkte der Dreiecke durch denselben Punkt, den Schnittpunkt von γ, δ und ε gehen; die Umkehrung ist ebenso einfach ersichtlich. Drehen wir die Ebene β um ihre Schnittlinie mit α, so gehen

www.rcin.org.pl

die Verbindungsgeraden je zweier entsprechenden Eckpunkte der Dreiecke fortwährend durch denselben Punkt, auch wenn sich β der Ebene α beliebig nähert; durch einen Grenzübergang, der allerdings der strengen Beweiskraft entbehrt, gelangt man so zur Figur von § 30.

Übrigens kann man auch mit *Poncelet* das räumliche Gebilde mittels eines beliebigen Strahlenbündels auf eine Ebene projizieren und so ohne jede Rechnung den Satz von § 30 nachweisen.

4. Von Spezialfällen ist zunächst der zu erwähnen, dafs zwei der Ebenen parallel sind; allgemeiner der Fall, dafs eine beliebige Pyramide durch eine zur Grundfläche parallele Ebene geschnitten wird; der zwischen den parallelen Ebenen gelegene Teil der Pyramide heifst ein *Pyramidenstumpf*, mag nun die Spitze der Pyramide innerhalb oder aufserhalb der parallelen Ebenen fallen. Es ist leicht zu erweisen, dafs die gleichzeitig entstehenden beiden Pyramiden, welche dieselbe Spitze und je eine der parallelen Ebenen zur Grundfläche haben, in allen homologen Kanten- und Flächenwinkeln übereinstimmen und dafs die homologen Kanten in Proportion stehen. Nennen wir zwei Körper, wenn ihre Kanten in demselben Verhältnis stehen und ihre Kanten- und Flächenwinkel entsprechend gleich sind, *ähnlich*, falls entsprechende Ecken gleich sind, *symmetrisch ähnlich*, wenn letztere symmetrisch sind, so können wir sagen, dafs *die fraglichen Pyramiden ähnlich oder symmetrisch ähnlich sind, je nachdem die Spitze aufserhalb oder innerhalb der parallelen Ebenen liegt.*

5. Rückt die Spitze eines Pyramidenstumpfs ins Unendliche, werden also die Seitenkanten parallel, so geht er in ein *Prisma* über. Mit Leichtigkeit beweist man, dafs die beiden Grundflächen des Prismas gleiche Figuren und die Seitenflächen Parallelogramme darstellen. Sind auch die Grundflächen Parallelogramme, so heifst der von sechs Parallelogrammen begrenzte Körper ein *Parallelepipedon*; man weist ohne Schwierigkeit nach, dafs in demselben je zwei gegenüberliegende Flächen und je vier Kanten parallel sind, dafs also je zwei gegenüberliegende Flächen als Grundflächen, die übrigen als Seitenflächen angesehen werden können.

www.rcin.org.pl

Sind alle Flächen gleiche Quadrate, so heifst das Prisma ein *Würfel*. Dafs wirklich Würfel möglich sind, erkennt man, indem man auf einem Quadrate in dessen Eckpunkten Perpendikel von der gleichen Länge der Seiten errichtet; dieselben bestimmen einen Würfel, weil die vier an das gegebene Quadrat angrenzenden Flächen auch Quadrate werden, während von der sechsten Fläche dasselbe unschwer zu erweisen ist.

Die Resultate dieser Nummer hängen vom Parallelenaxiom ab, die übrigen des Parapraphen nur soweit, als sie sich auf metrische Relationen beziehen.

6. Da jedes Punktgebilde auch als Ebenengebilde, nämlich als Zusammenstellung der Ebenen, die durch je drei seiner Punkte bestimmt sind, betrachtet werden kann, so werden auch Punktegebilde keine metrischen Relationen aufweisen, welche nicht auf planimetrische zurückführbar wären. Trotzdem verdienen gewisse Beziehungen dieser Art Beachtung. Verbindet man je zwei von n Punkten, von denen keine drei in einer Geraden, keine vier in einer Ebene liegen, durch eine Gerade, so schneiden sich diese Geraden nur in den Fundamentalpunkten; auf jeder wird nur eine Strecke begrenzt, so dafs die n Punkte $\frac{n(n-1)}{2}$ Strecken, ihre Entfernungen voneinander, bestimmen. Zwischen diesen Entfernungen bestehen Relationen, falls die Zahl der Punkte vier überschreitet. Die gegenseitige Lage von drei Punkten ist nämlich durch drei Strecken, die jedes weiteren durch drei Strecken — seine Abstände von den drei ersten Punkten — mit endlicher Vieldeutigkeit bestimmt. Daher genügen

$$3 + 3(n - 3) = 3n - 6$$

Strecken zur Bestimmung des Punktegebildes, während

$$\frac{n(n-1)}{2} - (3n - 6) = \frac{(n-3)(n-4)}{2}$$

Relationen zwischen sämtlichen Strecken auftreten.

Bei fünf Punkten ist *eine* solche Relation zwischen zehn Strecken vorhanden, mit deren Aufstellung wir uns hier beschäftigen wollen. Durch Legen von Ebenen durch je drei der Punkte könnten wir natürlich die Untersuchung auf

www.rcin.org.pl

planimetrische metrische Relationen zurückführen; doch wollen wir lieber trigonometrische Hilfsmittel in Anwendung bringen.

Wir bezeichnen die fünf Punkte durch 1, 2, 3, 4, 5, den Abstand von α und β durch $a_{\alpha\beta}$. Der Anschaulichkeit halber können wir uns das ganze Gebilde aus zwei Tetraedern, 1, 2, 3, 4 und 2, 3, 4, 5, zusammengesetzt denken, die durch neun Kanten zweideutig bestimmt sind; es handelt sich dann darum, aus diesen die Diagonale a_{15} zu berechnen, resp. zwischen den zehn Gröſsen $a_{\alpha\beta}$ eine Gleichung herzustellen.

Zu diesem Zwecke wollen wir das Gebilde in drei Tetraeder, 1, 5, 2, 3; 1, 5, 3, 4; 1, 5, 4, 2 zerlegt denken, welche die Strecke a_{15} gemeinsam haben. Die Neigungswinkel λ, μ, ν an dieser gemeinsamen Strecke lassen sich nach § 43, 4 durch die $a_{\alpha\beta}$ ausdrücken. Für diese drei Neigungswinkel gilt aber bei jeder Lage die Relation

$$\cos \nu = \cos (\lambda + \mu)$$

oder

$$\cos \nu = \cos \lambda \cos \mu - \sin \lambda \sin \mu$$

oder, wenn die Sinus durch die Kosinus ersetzt und die Wurzeln beseitigt werden,

$$\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu - 2 \cos \lambda \cos \mu \cos \nu = 1.$$

Fügt man hierin die gefundenen Werte für $\cos \lambda$, $\cos \mu$, $\cos \nu$ ein, so ergiebt sich eine algebraische Gleichung zwischen den $a_{\alpha\beta}$, freilich in sehr verwickelter Gestalt. *Cayley* hat dieselbe durch Entwickelungen, die man bei *Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten* findet, in die sehr elegante Form

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{12}^2 & a_{13}^2 & a_{14}^2 & a_{15}^2 \\ 1 & a_{12}^2 & 0 & a_{23}^2 & a_{24}^2 & a_{25}^2 \\ 1 & a_{13}^2 & a_{23}^2 & 0 & a_{34}^2 & a_{35}^2 \\ 1 & a_{14}^2 & a_{24}^2 & a_{34}^2 & 0 & a_{45}^2 \\ 1 & a_{15}^2 & a_{25}^2 & a_{35}^2 & a_{45}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

gesetzt. *Lagrange* und *Carnot* behandelten die Aufgabe ohne Determinanten.

www.rcin.org.pl

§ 45.
Die Polyeder.

1. Wenn sich mehr als fünf Ebenen durchschneiden, so entstehen Gebilde von groſser Mannigfaltigkeit, ohne daſs im allgemeinen neue metrische Relationen hinzukämen. Einiges Interesse nehmen bei diesen Gebilden diejenigen Ebenenteile in Anspruch, *welche zusammen eine überall zusammenhängende, nirgends begrenzte, aber in sich selbst zurücklaufende Fläche bilden.* Wir wollen eine Fläche dieser Art eine *Polyederfläche* nennen. Wenn sich diese Fläche nirgends selbst durchschneidet, so umgrenzt sie einen Körper, der als ein *Polyeder* bezeichnet wird. Die Ebenenteile, welche eine Polyederfläche bilden, heiſsen ihre *Flächen*, deren Grenzlinien und Eckpunkte ihre *Kanten* und *Ecken.*

Wir dehnen den Begriff des Polyeders auch auf solche Körper aus, welche von *mehreren* Polyederflächen, die sich nicht selbst oder einander durchschneiden, begrenzt sind.

2. Es ist hier die geeignete Stelle, um einige kurze Betrachtungen aus der sogen. *analysis situs* anzustellen, die sich auf den *Zusammenhang* von Flächen und Körpern beziehen.

Wir nennen eine allseitig begrenzte oder in sich selbst abgeschlossene Fläche *einfach zusammenhängend*, wenn jede in ihr gezogene Linie (*Querschnitt*), welche zwei Punkte der Umgrenzung verbindet oder in sich selbst zurückläuft, die Fläche in zwei Teile zerlegt, aus deren einem man auf keinem Wege in den anderen (natürlich nur in der Fläche fortschreitend) gelangen kann, ohne den Querschnitt zu überschreiten. Eine Kreisfläche, ein gewöhnliches Polygon, die Oberfläche einer Kugel, eines Würfels sind Beispiele hierfür.

Wir nennen eine Fläche *zweifach zusammenhängend*, wenn sie durch einen geeigneten Querschnitt in eine einfach zusammenhängende verwandelt werden kann. Ein Kreisring z. B. wird durch jede Gerade, welche je einen Punkt des inneren und des äuſseren Kreises verbindet, in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt, welche durch jeden weiteren Querschnitt zerstückelt wird. Dagegen giebt es

www.rcin.org.pl

auch Querschnitte, welche den Ring sofort zerstückeln, z. B. eine Gerade, welche zwei Punkte desselben Kreises verbindet, oder ein konzentrischer Kreis, welcher zwischen den beiden begrenzenden liegt.

Eine Fläche heifst n-fach zusammenhängend, wenn sie durch einen Querschnitt in eine (n — 1)*-fach zusammenhängende verwandelt werden kann**). Eine beliebige, einfach begrenzte Figur, aus der (n — 1) ebensolche ausgeschnitten sind, bietet ein Beispiel hierfür. Die Oberfläche eines körperlichen Ringes ist dreifach zusammenhängend; sie wird durch einen quer und einen der Länge nach um den Ring laufenden, in sich selbst zurückkehrenden Querschnitt in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt.

Diese ganze Darstellung entbehrt freilich vielfach der vollen Evidenz; es ist nicht so ohne weiteres klar, dafs z. B. eine Fläche, die durch einen Querschnitt in eine (n — 1)-fach zusammenhängende verwandelt werden kann, nicht durch eine andere in eine (n — 2)-fach zusammenhängende übergeführt wird. Dieser Mangel an Evidenz liegt in dem höchst abstrakten und von jeder Besonderheit absehenden Charakter des Problems; es ist eben nicht möglich, alle sich darbietenden Eventualitäten mit Sicherheit zu überblicken.

Zu eingehenderem Studium dieses von *Riemann* zu grofser Wichtigkeit erhobenen Wissenszweiges sei namentlich auf die sehr ausführliche, übrigens in den Definitionen etwas von der hier gegebenen abweichende Darstellung bei *Neumann*, „*Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abel'schen Integrale*" verwiesen**).

Bei begrenzten *Körpern* lassen sich ganz analoge Betrachtungen anstellen. Wir nennen einen Körper n-fach zu-

---

*) Die Zahl n wird als die *Grundzahl* der Fläche bezeichnet.

**) Als grundlegende Arbeit über die Lehre vom Zusammenhang ist die *Riemann'sche* Inauguraldissertation (Göttingen 1851): *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Gröfse* anzusehen; dieselbe wird ergänzt durch die weitere Abhandlung: *Theorie der Abel'schen Funktionen* (Gesammelte Werke, p. 3 und 81). Sehr bemerkenswert ist der Abschnitt: „*Zur Theorie der Polyeder und der Elementarverwandtschaft*" in den Mitteilungen aus *Möbius* Nachlafs, Ges. W. B. 2, p. 515.

www.rcin.org.pl

sammenhängend, wenn er durch einen Querschnitt (hier eine Fläche, welche in sich überall abgeschlossen ist oder ringsum durch die Grenzfläche des Körpers begrenzt wird) in einen $(n-1)$-fach zusammenhängenden verwandelt werden kann; einfach zusammenhängend ist er, wenn er durch jeden Querschnitt zerstückelt wird. Eine Kugel ist ein einfach, ein Ring ein zweifach zusammenhängender Körper.

3. Um in der Folge keine lästigen Unterscheidungen machen zu müssen, denken wir uns eine nirgends begrenzte, also überall in sich zurücklaufende Fläche durch Ausschneiden eines beliebig kleinen, einfach zusammenhängenden, begrenzten Stückes in eine begrenzte Fläche verwandelt; die letztere hat noch denselben Zusammenhang wie die unbegrenzte Fläche. Man kann sich das ausgeschnittene Stück in einen Punkt zusammengezogen denken.

Wir erlangen so den Vorteil, dafs wir den Begriff des Querschnitts etwas beschränken können. Während bei der Überführung einer unbegrenzten, mehrfach zusammenhängenden Fläche in eine einfach zusammenhängende mindestens *ein* in sich selbst zurücklaufender Querschnitt benutzt werden mufs, kommt man bei Flächen, welche begrenzt sind, mit Querschnitten aus, welche zwei Punkte der Grenze miteinander verbinden. Ein strikter Beweis für diese Behauptung kann kaum erbracht werden; man vergegenwärtige sich den Vorgang an möglichst mannigfaltigen Beispielen. Ist die Oberfläche eines ringförmigen Körpers vorgelegt, so trenne man von dieser zunächst einen beliebigen Punkt oder kleinen Flächenteil ab. Zwei Punkte der Umgrenzung desselben, die auch in einen zusammenfallen dürfen, verbinde man durch einen Querschnitt, der sich quer um den Ring schlingt; derselbe gehört jetzt mit zur Begrenzung. Dann lege man einen zweiten Querschnitt zwischen zwei Punkten des letzteren, der etwa den inneren Umkreis des Ringes umzieht. Diese beiden Querschnitte verwandeln die Oberfläche des Ringes in eine einfach zusammenhängende Fläche, wie dies in analoger Weise bereits oben gezeigt wurde.

Von den Linien, welche eine Fläche begrenzen, wird im allgemeinen nur die eine Seite an die Fläche anstofsen und

www.rcin.org.pl

daher im engeren Sinne als Grenze bezeichnet werden können. Doch können auch beide Seiten der Linie als Grenzen auftreten, wie dies namentlich bei allen Querschnitten der Fall ist. Geht man von einem Punkte der Grenze aus immer an dieser entlang, so mufs man wieder zum Ausgangspunkte zurückgelangen. Das durchlaufene Stück der Grenze heifst dann ein *selbständiger* Begrenzungsteil.

Die Grenze einer einfach zusammenhängenden Fläche kann nur aus *einem* solchen Teile bestehen. Denn wären deren etwa zwei vorhanden, so könnte man sie durch einen Querschnitt in Verbindung setzen und dann beide zusammen nebst den beiden Seiten des Querschnittes in einem Zuge durchlaufen; die Fläche würde also durch den Querschnitt nicht zerstückelt, wäre also nicht einfach zusammenhängend gewesen.

Wir suchen jetzt eine Beziehung zwischen der Anzahl r der selbständigen Begrenzungsteile und der Grundzahl n einer beliebigen begrenzten Fläche. Jeder Querschnitt, welcher zwei Punkte *desselben* Begrenzungsteiles verbindet, erhöht die Zahl der Begrenzungsstücke um 1; denn an Stelle des einen treten jetzt zwei selbständige Begrenzungsteile. Jeder Querschnitt, welcher zwei selbständige Begrenzungsstücke verbindet, vermindert die Zahl der Begrenzungsstücke um 1.

Unter den $(n - 1)$ Querschnitten, welche zusammen die n-fach zusammenhängende Fläche in eine einfach zusammenhängende verwandeln, mögen sich m befinden, welche die Zahl der Begrenzungsstücke um 1 erhöhen, also $n - m - 1$ solche, welche sie um 1 vermindern. Da die schliefslich erzielte einfach zusammenhängende Fläche nur eine einzige Grenzlinie besitzt, so gilt die Gleichung

$$r + m - (n - m - 1) = 1$$

oder

$$r + 2m = n.$$

Die Grundzahl der Fläche unterscheidet sich also von der (im allgemeinen kleineren) *Zahl der Begrenzungsstücke um eine gerade Zahl**). Da man nun einer nirgends begrenzten

*) Bei den weiterhin vorkommenden mehrfach zusammenhängenden Polygonen ist die Zahl der Begrenzungsstücke der Grundzahl gleich.

www.rcin.org.pl

Fläche zunächst eine einfache Grenzlinie verleihen kann, ohne ihre Grundzahl zu ändern, so folgt der bemerkenswerte Satz, *dafs die Grundzahl einer nirgends begrenzten Fläche immer ungerade ist.* Insbesondere ist also die Grundzahl einer jeden Polyederfläche ungerade.

4. Für einfach zusammenhängende Polyederflächen, welche wirklich einen Körper begrenzen, gilt der folgende merkwürdige, von *L. Euler**) gefundene Satz (*Euler'scher Satz*), falls auch die einzelnen Flächen einfach zusammenhängend und die Ecken einfach sind: *Bezeichnet man die Zahl der Ecken, Kanten und Flächen einer solchen Polyederfläche resp. mit e, k, f, so ist*

$$e + f - k = 2.$$

Beweis: Wir wollen die Polyederfläche nach und nach aus ihren einzelnen Flächen zusammensetzen und in jedem Stadium der Konstruktion die Zahl $e + f - k$ bestimmen. Sei zunächst eine n-seitige Fläche gegeben, so ist $e = n$, $k = n$, $f = 1$, also $e + f - k = 1$. Setzen wir an eine Kante der ersten Fläche eine zweite, m-seitige an, so kommen eine Fläche, $m - 2$ Ecken und $m - 1$ Kanten neu hinzu; es bleibt also $e + f - k = 1$. Setzen wir eine dritte Fläche an, sei es mit einer oder mit zwei Kanten, so kommt wieder eine Kante mehr hinzu als Ecken, so dafs $e + f - k = 1$ bleibt. Man sieht leicht ein, dafs auch weiterhin immer die Zahl der hinzutretenden Kanten die der hinzutretenden Ecken um 1 übertrifft, wenn man es nur vermeidet, die zusammengesetzte Fläche mehrfach zusammenhängend werden zu lassen. So fahren wir fort, bis alle Flächen mit Ausnahme *einer* angelegt sind. Beim Ansetzen dieser letzten kommen keine Ecken und Kanten hinzu, wohl aber eine Fläche, so dafs $e + f - k = 2$ wird.

Polyederflächen, welche dem Euler'schen Satze genügen,

---

*) Nov. Comment. Petropol. B. 4, p. 109; 1752. —

Eine Ecke soll als *einfach* angesehen werden, wenn ihre Seiten der Reihe nach in einem Umgange durchlaufen werden können. Durch Zusammenfügen mehrerer solcher Ecken mit dem Scheitelpunkte erhält man eine zusammengesetzte Ecke.

www.rcin.org.pl

sollen *Euler'sche Polyederflächen* heifsen, die Körper, welche sie begrenzen, *Euler'sche Polyeder*.

5. Der Euler'sche Satz hat bis in die neueste Zeit vielfache Neubehandlungen erfahren*). Dieselben beziehen sich teils auf den Beweisgang — vielfach wird der Satz durch Projektion der Polyederfläche auf eine Kugelfläche oder Ebene bewiesen, wodurch jedoch unnötige Beschränkungen eingeführt werden —, teils auf die Ausdehnung des Satzes. Es ist ganz irrelevant, ob das Polyeder einspringende Ecken hat oder nicht. Dafs die Fläche nicht aus unzusammenhängenden Teilen bestehen darf, ist einleuchtend; in diesem Falle sind die Flächenteile einzeln zu untersuchen. Die Hauptfrage, welche wir jetzt beantworten wollen, ist die: *welchen Einflufs hat ein mehrfacher Zusammenhang der gesamten Polyederfläche oder der einzelnen Flächen auf die Euler'sche Gleichung***)?*

Es sei hierbei vorausbemerkt, dafs eine Polyederfläche einfach zusammenhängend sein kann, während einzelne ihrer Flächen mehrfachen Zusammenhang besitzen. Man schneide z. B. aus der Fläche eines Polygons ein zweites aus und errichte auf dem inneren und äufseren Polygon eine Pyramide, so hat man ein Beispiel dieser Art. Eine Polyeder-

---

*) Über die ältere Litteratur des Satzes nebst Folgerungen findet man zahlreiche Angaben bei *Baltzer, Stereometrie* p. 213, ferner in der *Steiner'schen* Abhandlung: *Leichter Beweis eines stereometrischen Satzes von Euler* u. s. w., Ges. W., B. I, p. 95. — Von anderen Abhandlungen seien besonders erwähnt: die *Becker*'schen Abhandlungen in Schlömilch's Zeitschrift, B. 14, p. 65 und 337 und B. 18, p. 328; *R. Hoppe, Ergänzung des Euler'schen Satzes von den Polyedern,* Grunerts Arch. B. 63, p. 100; *Godt, Untersuchungen über Polyeder von mehrfachem Zusammenhang,* Progr., Lübeck; *F. Lippich, Zur Theorie der Polyeder,* Wien. Ber. B. 84, p. 20. Die letztere Abhandlung giebt das hier abgeleitete Resultat. Dasselbe findet sich schon für Polyeder mit einfach zusammenhängenden Einzelflächen in dem erwähnten Teile von *Möbius* Nachlafs. Auch *Jordan* (Borchardts Journ. B. 66, p. 35) behandelt das Problem in diesem Umfange.

**) Auszuschliefsen von der Betrachtung sind solche Flächen, deren beide Seiten miteinander in Verbindung stehen, denen daher, wie weiter unten angegeben werden wird, kein Rauminhalt zugeschrieben werden kann.

www.rcin.org.pl

fläche kann aber auch mehrfach zusammenhängend sein, während die Flächen, welche sie zusammensetzen, einzeln betrachtet, alle einfach zusammenhängend sind. Die Bildung solcher Polyeder liegt auf der Hand.

Wir untersuchen zuerst den Einfluſs des Vorhandenseins einer mehrfach zusammenhängenden Einzelfläche auf die Gröſse $e + f - k$. Jede solche Fläche kann man durch Querschnitte, welche zu den Kanten hinzutreten, in eine einfach zusammenhängende verwandeln. Durch das Anlegen eines Querschnittes wird aber immer eine Kante mehr erzeugt als Ecken hinzukommen. Führt man den Querschnitt nämlich zwischen zwei Ecken gerade, so tritt eine Kante, aber keine Ecke hinzu. Stöſst der Querschnitt an eine Kante an, so erzeugt er an dieser Stelle eine Ecke, zerlegt aber jene Kante in zwei u. s. w.; immer wird das erwähnte Resultat erzielt. Die Gröſse $e + f - k$ wird also durch Anlegen eines jeden Querschnitts um 1 vermindert. Ist p die Anzahl der Querschnitte, welche nötig sind, um sämtliche Einzelflächen in einfach zusammenhängende zu verwandeln, so wird $e + f - k$ durch diese Querschnitte um p vermindert. Umgekehrt ist bei der unveränderten Fläche $e + f - k$ um p gröſser, als bei derjenigen, deren Einzelflächen einfach zusammenhängend gemacht wurden.

Es sei nun eine n-fach zusammenhängende Polyederfläche vorgelegt, deren Einzelflächen und Ecken jedoch durch Querschnitte bereits einfach zusammenhängend gemacht wurden. Wir nehmen aus ihr eine beliebige der Flächen heraus und haben sie nun in dem Stadium, in welchem sich beim Beweise des Euler'schen Satzes die Polyederfläche vor dem Einsetzen der Endfläche befand; die Zahl $e + f - k$ ist daher jetzt um 1 kleiner als vor dem Ausschneiden. Die Fläche ist noch n-fach zusammenhängend, aber mit einer einzigen Grenzlinie versehen. Durch $q = n - 1$ Querschnitte wollen wir nun die Polyederfläche in eine einfach zusammenhängende verwandeln. Dabei dürfen wir uns ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Querschnitte mit den schon vorhandenen Kanten zusammenfallend denken. Legen wir nämlich einen Querschnitt durch eine der einfach zusammen-

www.rcin.org.pl

hängenden Einzelflächen, so kommt allerdings wie oben eine Kante mehr hinzu als Ecken hinzutreten, aber die Zahl der Flächen wird durch die stattfindende Trennung um eine erhöht; $e + f - k$ bleibt daher ungeändert. Es macht also nichts aus, wenn man auf diese Art beliebig viele Kanten neu erzeugt.

Wir beginnen die Reduktion der Polyederfläche mit dem Legen eines Querschnittes über vorhandene Kanten von einem Eckpunkte der Grenzfläche bis zu einem anderen; in diesem Querschnitte durchschneiden wir die Fläche. Hierdurch treten an Stelle je einer Ecke oder Kante des Schnittes je zwei. Da aber der Schnitt beiderseits durch Ecken begrenzt ist, so wird die Zahl der Ecken um 1 stärker vermehrt als diejenige der Kanten; $e + f - k$ erfährt also eine Vermehrung um 1. Das Gleiche wiederholt sich beim Durchschneiden in jedem weiteren Querschnitte, wobei es nötig ist, jeden solchen in zwei Punkten der schon vorhandenen Grenzlinie endigen zu lassen. Beim Einfachwerden des Zusammenhangs hat sich $e + f - k$ um q vermehrt. Wir schliefsen hieraus, dafs bei einer Polyederfläche, welche durch q Querschnitte in eine einfach zusammenhängende verwandelt wird und nur einfach zusammenhängende Einzelflächen besitzt,

$$e + f - k = 2 - q$$

ist.

Fassen wir unsere beiden gewonnenen Resultate zusammen, so gelangen wir zu dem Ergebnis, dafs *für jede nicht in getrennte Teile zerfallende Polyederfläche, welche geeignet ist, einen Körper zu begrenzen,*

$$e + f - k = 2 + p - q$$

ist, worin p und q die Zahlen der Querschnitte bezeichnen, welche resp. erforderlich sind, um die Einzelflächen und die Gesamtfläche einfach zusammenhängend zu machen.

Ist n die Grundzahl der Polyederfläche und enthält letztere m_2, m_3, m_4 u. s. w. Flächen mit den Grundzahlen 2, 3, 4 u. s. w., so kann man hierfür auch schreiben

$$e + f - k = 3 - n + m_2 + 2m_3 + 3m_4 + \cdots.$$

www.rcin.org.pl

Bisher wurden die sämtlichen Ecken des Polyeders als *einfach* vorausgesetzt. Kommen zusammengesetzte Ecken vor, so kann man sich das Polyeder so deformiert denken, dafs die einzelnen Bestandteile dieser Ecken auseinander rücken. Man erkennt hieraus, dafs die hergeleiteten Formeln ihre Gültigkeit behalten, wenn man für jede n-fach zusammengesetzte Ecke n einfache Ecken in Rechnung bringt. Analog kann man Kanten behandeln, in denen mehr als zwei Flächen zusammenstofsen.

Das Auftreten einer n-fach zusammengesetzten Ecke — die man auch als eine *n-fach zusammenhängende* bezeichnen kann — ist in bezug auf die Gröfse $e + f - k$ von der umgekehrten Wirkung, wie das Vorkommen einer n-fach zusammenhängenden Fläche.

6. Unter Voraussetzung des Parallelenaxioms gilt der weitere Satz: *Die Summe der Kantenwinkel einer Polyederfläche beträgt* $4(k - f)R$ *oder, wenn* $e + f - k = 2$ *ist,*

$$4(e-2)R.$$

Beweis: Ist die Polyederfläche aus f_3 Dreiecken, f_4 Vierecken, f_5 Fünfecken u. s. w. zusammengesetzt, so beträgt jene Summe

$$2(3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \cdots)R - 4(f_3 + f_4 + f_5 + \cdots)R$$
$$= 4(k-f)R,$$

da jede Kante zwei Flächen gemeinsam, also $3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \cdots = 2k$ ist, während $f = f_3 + f_4 + f_5 + \cdots$ ist.

7. *Bei einem Euler'schen Polyeder mit konvexen Ecken beträgt die Summe der Flächenwinkel, vermindert um den mit* $4R$ *multiplizierten Inhalt seiner Ecken,* $2(f-2)R$.

Beweis: Ist die Winkelsumme einer p_k-seitigen Ecke des Polyeders q_k, so ist nach § 41, 6 der Inhalt derselben

$$\frac{q_k - (2p_k - 4)R}{8R},$$

so dafs der Inhalt der sämtlichen Ecken des Polyeders

$$J = \frac{q_1 + q_2 + \cdots - (p_1 + p_2 + \cdots)\,2R + 4eR}{8R}$$

beträgt. Nun ist aber $q_1 + q_2 + \cdots$ die doppelte Summe 2σ

www.rcin.org.pl

der Flächenwinkel des Polyeders und $p_1 + p_2 + \cdots = 2k$, so dafs wir

$$J = \frac{2\sigma - 4kR + 4eR}{8R} = \frac{2\sigma - 4(f-2)R}{8R}$$

oder

$$\sigma - 4JR = 2(f-2)R$$

haben.

8. Da an jeder Kante vier Polygonwinkel liegen, jeder Polygonwinkel aber von zwei Kanten gebildet wird, ist, wie schon bemerkt, die Zahl der Polygonwinkel die doppelte der Kanten, also *gerade. Polygone von ungerader Seitenzahl und Ecken von ungerader Seitenzahl können daher nur in gerader Zahl auftreten.*

Da jedes Polygon und jede Ecke mindestens drei Kanten enthält, während jede Kante zwei Polygonen, resp. zwei Ecken gemeinsam ist, so hat man

$$3f \leqq 2k \quad \text{und} \quad 3e \leqq 2k.$$

Setzt man hierin $f = k - e + 2$, $e = k - f + 2$, so erhält man für ein Euler'sches Polyeder

$$6 + k \leqq 3e \quad \text{und} \quad 6 + k \leqq 3f,$$

also

$$6 + k \leqq 3f \leqq 2k, \quad 6 + k \leqq 3e \leqq 2k.$$

Eliminiert man k mittels $k = e + f - 2$, so folgt

$$4 + e \leqq 2f \leqq 4e - 8, \quad 4 + f \leqq 2e \leqq 4f - 8.$$

Ferner ist $6 + k \leqq 2k$ oder $6 \leqq k$, was auch unmittelbar klar ist. Da für $k = 7$

$$13 \leqq 3f \leqq 14$$

sein müfste, *so ist ein Euler'sches Polyeder mit sieben Kanten unmöglich. Die Flächen eines Polyeders können nicht alle mehr als fünfeckig sein;* denn sonst wäre die Zahl der Polygonwinkel $\geqq 6f$, also $k \geqq 3f$, während $6 + k \leqq 3f$ ist. Das Entsprechende gilt für die Ecken, wie überhaupt für Ecken nnd Flächen dieselben Relationen auftreten.

9. Wenn ein Euler'sches Polyeder f_3 dreieckige, f_4 viereckige, ... Flächen, e_3, e_4 ... dreiseitige, vierseitige, ... Ecken besitzt, so ist

www.rcin.org.pl

$$\begin{aligned} f &= f_3 + f_4 + f_5 + \cdots, \\ e &= e_3 + e_4 + e_5 + \cdots, \\ 2k &= 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \cdots, \\ 2k &= 3e_3 + 4e_4 + 5e_5 + \cdots. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von $2k = 2f + 2e - 4$ wird hieraus

$$\text{(a)} \begin{cases} 2(f_3 + f_4 + f_5 + \cdots) = 4 + e_3 + 2e_4 + 3e_5 + \cdots, \\ 2(e_3 + e_4 + e_5 + \cdots) = 4 + f_3 + 2f_4 + 3f_5 + \cdots. \end{cases}$$

Die Addition beider Gleichungen (a) giebt

$$f_3 + e_3 = 8 + (f_5 + e_5) + 2(f_6 + e_6) + \cdots,$$

woraus der Schlufs zu ziehen, dafs *kein Polyeder**) *existiert, welches gleichzeitig von dreiseitigen Flächen und Ecken frei ist; die Summe beider Anzahlen beträgt mindestens acht.*

Addiert man die Gleichungen (a), nachdem man die eine mit 2 multipliziert hat, so erhält man

$$\begin{aligned} 3f_3 + 2f_4 + f_5 &= 12 + 2e_4 + 4e_5 + \cdots + f_7 + 2f_8 + \cdots, \\ 3e_3 + 2e_4 + e_5 &= 12 + 2f_4 + 4f_5 + \cdots + e_7 + 2e_8 + \cdots. \end{aligned}$$

Ein Polyeder ohne dreieckige und viereckige Flächen hat hiernach wenigstens zwölf fünfeckige Flächen.

Ein Polyeder ohne dreieckige und fünfeckige Flächen hat mindestens sechs viereckige Flächen.

Ein Polyeder ohne viereckige und fünfeckige Flächen hat mindestens vier dreieckige Flächen.

Sind die Ecken eines Polyeders alle dreiseitig, die Flächen höchstens sechseckig, so ist

$$3f_3 + 2f_4 + f_5 = 12.$$

Soll aufser beliebig vielen sechseckigen Flächen nur eine der drei Gattungen von Flächen mit weniger Seiten auftreten, so müssen es vier Dreiecke, sechs Vierecke oder zwölf Fünfecke sein.

Multipliziert man die Gleichungen (a) mit 3 und 2 oder 2 und 3 und addiert, so folgt noch

$$\begin{aligned} 4f_3 + 2f_4 + e_3 &= 20 + 2e_4 + 5e_5 + 8e_6 + \cdots + 2f_6 + 4f_7 + \cdots, \\ 4e_3 + 2e_4 + f_3 &= 20 + 2f_4 + 5f_5 + 8f_6 + \cdots + 2e_6 + 4e_7 + \cdots, \end{aligned}$$

---

*) Hier und in den folgenden Sätzen sind immer *Euler*'sche Polyeder gemeint.

www.rcin.org.pl

woraus u. a. hervorgeht, dafs *ein Polyeder ohne dreieckige und viereckige Flächen mindestens 20 dreiseitige Ecken hat.*

Alle diese Sätze bleiben richtig, wenn man in ihnen die Worte Fläche und Ecke u. s. w. vertauscht; zwischen Flächen und Ecken herrscht fast durchgehends Dualismus, wie später aus dem Reciprozitätsgesetz folgen wird.

10. Hat ein Euler'sches Polyeder lauter m-seitige Flächen, resp. n-seitige Ecken, so ist

$$mf = 2k, \quad e - 2 = k - f = \tfrac{1}{2}f(m - 2),$$

resp.

$$ne = 2k, \quad f - 2 = k - e = \tfrac{1}{2}e\,(n - 2).$$

Sollen beide Bedingungen gleichzeitig statthaben, so ist

$$\frac{(m-2)(n-2)}{4} = \frac{(e-2)(f-2)}{ef} < 1.$$

Die einzigen diesen Bedingungen genügenden Werte für m, n und die daraus folgenden für f, e, k sind

$$\begin{array}{llllll} m & = 3, & 3, & 3, & 4, & 5 \\ n & = 3, & 4, & 5, & 3, & 3 \\ f & = 4, & 8, & 20, & 6, & 12 \\ e & = 4, & 6, & 12, & 8, & 20 \\ k & = 6, & 12, & 30, & 12, & 30. \end{array}$$

Spezialfälle dieser fünf Polyedertypen mit lauter gleichartigen Flächen und Ecken sind die bekannten *fünf regelmäfsigen Körper*, die ihrer speziellen Eigenschaften wegen hier nicht weiter untersucht werden sollen.

Setzt man nur fest, dafs alle Ecken n-seitig sein sollen, so gelangt man zu Körpertypen, welche die Verallgemeinerung der *Archimedischen Körper* bilden.

11. Um zu einer Klassifizierung sämtlicher Polyeder zu gelangen, die jedoch wegen der bald eintretenden Komplikation nicht durchgeführt ist, wird man nach dem Früheren entweder von einer Zusammenstellung von 4, 5, 6, 7 u. s. w. Ebenen ausgehen und zusehen, welche Polyederflächen hierdurch erzeugt werden, oder man geht von einer analogen Zusammenstellung von Punkten aus, durch welche Ebenen gelegt werden. Bei dem ersten Verfahren werden im allgemeinen nur je drei Ebenen durch denselben Punkt gehen,

www.rcin.org.pl

also nur *dreiseitige* Ecken auftreten; alle mehrseitigen Ecken sind als Singularitäten aufzufassen. Analog liefert das zweite Verfahren im allgemeinen nur *dreieckige* Flächen, während mehrseitige Flächen als Singularitäten erscheinen. In beiden Kategorien zugleich erscheint nur das Tetraëder allein als Normal-Polyeder. Wir wollen nach dem ersten Verfahren die einfachsten Fälle zusammenstellen, zu denen das zweite dualistisch entsprechende Gebilde liefert. Aufser den früheren Relationen ist zu beachten, dafs die gröfstmögliche Seitenzahl eines Polygons und einer Ecke im Polyeder $f-1$ ist.

a. $f=4$: Das Tetraëder.

b. $f=5$. Im Normalfalle (alle Ecken dreiseitig) ist

$$2k=3e,\quad k=\frac{3e}{2},\quad e+5-\frac{3e}{2}=2,$$

also $e=6$, $k=9$. Da hier $f=f_3+f_4$ ist, so folgt weiter $f_3+e_3=8$, $f_3=2$, somit $f_4=3$. Dies entspricht dem Pentaëder. Treten auch vierseitige Ecken auf, so ist nach (a)

$$2(f_3+f_4)=4+e_3+2e_4$$

oder

$$6=e_3+2e_4,$$

woraus $e_4=1$ folgt, da $4+f\leqq 2e$, also $e\geqq 5$ ist. Wir haben also $e_4=1$, $e_3=4$, und aus

$$2(e_3+e_4)=4+f_3+2f_4 \quad \text{wird}$$

$$6=(f_3+f_4)+f_4 \quad \text{oder} \quad 1=f_4.$$

Der Körper ist von einem Viereck und vier Dreiecken begrenzt, ist also die vierseitige Pyramide. Dieselbe entspricht sich, wie alle Pyramiden, selbst dualistisch, während dem Pentaëder ein aus zwei dreiseitigen Pyramiden zusammengesetzter Körper gegenübersteht.

c. Ist $f=6$, so haben wir für den Normalfall

$$8=e_3 \quad \text{und}$$

$$2e_3=4+f_3+2f_4+3f_5=10+f_4+2f_5,$$

also

$$6=f_4+2f_5.$$

Die hieraus folgenden Möglichkeiten sind

$$f_3=0,\ 1,\ 2,\ 3$$
$$f_4=6,\ 4,\ 2,\ 0$$
$$f_5=0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

www.rcin.org.pl

Von diesen Typen kommt jedoch nur der erste und dritte wirklich vor; man erhält sie, indem man vom Pentaëder durch eine sechste Ebene zwei Ecken oder eine abschneidet.

Für die singulären Fälle hat man

$$8 = e_3 + 2e_4 + 3e_5,$$

$$2(e_3 + e_4 + e_5) = 4 + f_3 + 2f_4 + 3f_5 = 10 + f_4 + 2f_5$$

und $10 \leqq 2e \leqq 16$ oder $5 \leqq e \leqq 8$. Nach der ersten Gleichung sind die Fälle

$$\begin{array}{l} e_3 = 6,\ 4,\ 2,\ 3,\ 5 \\ e_4 = 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 0 \\ e_5 = 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1 \end{array}$$

denkbar. Die weitere Diskussion zeigt, dafs der erste Fall für $f_3 = 2$, $f_4 = 4$, der zweite für $f_3 = 4$, $f_4 = 2$, der dritte für $f_3 = 6$, der fünfte für $f_3 = 5$, $f_5 = 1$ möglich ist. Bei dem ersten dieser Polyeder werden in der vierseitigen Ecke die beiden Dreiecke durch zwei Vierecke getrennt. Das zweite erhält man durch Aneinandersetzen zweier Vierecke mit einer Kante, mit welcher die gegenüberliegenden Kanten nicht beide parallel sein dürfen und Vervollständigung durch vier Dreiecke. Das dritte wird durch Aneinanderfügen zweier Tetraëder mit einer gleichen Fläche erzeugt; das vierte ist die fünfseitige Pyramide.

12. Da man die gegenseitige Lage von drei Eckpunkten eines Polyeders durch drei Angaben, die der übrigen aber durch je drei Angaben (zweideutig) bestimmen kann, so genügen $3(e - 3) + 3 = 3e - 6$ Angaben zur Bestimmung eines Polyeders. Doch ist diese Zahl im allgemeinen noch zu grofs; denn wenn mehr als drei Eckpunkte, etwa n, in einer Fläche liegen, so werden hierdurch $n - 3$ Bestimmungen ersetzt. Hierdurch vermindert sich die Zahl der Bestimmungsstücke um

$$3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \cdots - 3f = 2k - 3f,$$

so dafs sie sich beim Euler'schen Polyeder auf

$$3e - 6 - 2k + 3f = 3(k + 2) - 6 - 2k = k$$

reduziert (*Legendre*). Das Polyeder ist also im allgemeinen durch die Angabe seiner Kantenlängen (mehrdeutig) bestimmt. Doch giebt es hiervon Ausnahmen, da diese Kanten nicht

www.rcin.org.pl

immer voneinander unabhängig sind. Ein Prisma ist z. B. *nicht* durch seine Kanten bestimmt; die noch mögliche Verschiebbarkeit bei unveränderlichen Kanten ist einleuchtend.

Eine der interessantesten, aber auch schwierigsten Fragen der Polyedertheorie ist die, ob *durch Festsetzung der einzelnen Flächen und deren Zusammenordnung ein Polyeder mit endlicher Vieldeutigkeit bestimmt ist.* Dafs dies im allgemeinen zutrifft, geht aus dem soeben Behandelten hervor; aber es ist schlechterdings nicht ersichtlich, ob nicht auch hier eine so grofse Zahl von Bestimmungsgleichungen identisch werden kann, dafs das Problem unbestimmt bleibt. Dafs eine *eindeutige* Bestimmung nicht stattfindet, zeigen die einfachsten Beispiele; man braucht nur auf einer Fläche eines Polyeders dieselbe Pyramide einmal nach aufsen, einmal nach innen zu errichten, um zwei verschiedene Polyeder mit derselben Oberfläche (demselben „*Netz*“) zu erhalten.

Cauchy hat zuerst den Beweis erbracht, dafs Polyeder mit lauter konvexen Ecken (*konvexe Polyeder*) durch ihr Netz eindeutig bestimmt sind; hiermit ist aber nicht ausgeschlossen, dafs mit demselben Netz auch nicht-konvexe Polyeder gebildet werden können. Dieser Beweis, den wir nach der *Legendre*'schen Darstellung geben, erfordert einige Hilfsbetrachtungen.

13. Lehrsatz: *Bleiben in einer konvexen Ecke $OABCD\ldots$ alle Seiten aufser AOB und alle Winkel aufser den beiden anliegenden und einem beliebigen andern ε (an der Kante OE) konstant, so nimmt AOB mit ε zu und ab, so lange die Ecke nicht den Charakter der Konvexität verliert.*

Beweis: Legen wir die Diagonalebenen AOE und BOE, so sind die Seiten AOE und BOE fest bestimmte, unveränderliche Gröfsen und ebenso die beiden äufseren von den drei Teilen, in welche ε zerlegt wird; die Änderung des inneren Teiles η ist mit derjenigen von ε identisch. In der konvexen dreiseitigen Ecke $OABE$ sind also die beiden Seiten AOE und BOE konstant, während sich AOB und der gegenüberliegende Winkel η gleichzeitig ändern. Aus dem sphärischen Kosinussatze folgt aber, dafs AOB mit η, also auch mit ε zu- und abnimmt.

www.rcin.org.pl

Durch wiederholte Anwendung derselben Schlufsweise gelangt man zu dem erweiterten Resultate: *Wenn in der konvexen Ecke $OABCD\ldots$ alle Seiten aufser AOB ungeändert bleiben, die Winkel aber aufser den beiden anliegenden sämtlich oder teilweise zunehmen, während keiner abnimmt, so wird AOB gröfser; nehmen die genannten Winkel alle oder teilweise ab, ohne dafs einer zunimmt, so nimmt auch AOB ab. Alles dies gilt nur so lange, als die Ecke konvex bleibt.*

14. Lehrsatz: *Bleiben die Seiten einer mehr als dreiseitigen konvexen Ecke ungeändert, während sich die Winkel beliebig ändern, ohne dafs jedoch einer $2R$ überschreitet, und bezeichnet man die Kanten, deren Winkel eine Vergröfserung, resp. eine Verkleinerung erlitten haben, mit $+$, resp. $-$, während man die unverändert gebliebenen aufser betracht läfst, so erhält man bei einem vollständigen Umlauf um die Ecke mindestens einen vierfachen Zeichenwechsel.*

Beweis: Da man von $+$ ausgehend nach einem vollständigen Umlauf wieder zu $+$ gelangt, so mufs die Zahl der Zeichenwechsel eine gerade sein. Dafs nur Vergröfserungen oder nur Verkleinerungen von Winkeln vorkommen, ist nicht möglich; denn aus dem vorigen Satze ist zu schliefsen, dafs sich dann mindestens eine Seite vergröfsern oder verkleinern müfste. Hierdurch ist ein zweifacher Zeichenwechsel nachgewiesen. Gesetzt nun, es kämen keine weiteren Zeichenwechsel vor, so könnte man die Ecke durch eine Diagonalebene derart in zwei zerlegen, dafs die Winkel einer jeden, die an der Diagonalebene anliegenden ausgenommen, nur Vergröfserungen, resp. nur Verkleinerungen erfahren. Aus dem vorigen Satze schliefsen wir dann, dafs die Diagonalebene als Seite der einen Ecke sich vergröfsern, als Seite der andern sich verkleinern müfste, was einen Widerspruch enthält. Hieraus folgt unser Satz.

15. Es sei nun ein konvexes Polyeder mit bestimmter Oberfläche vorgelegt; wir untersuchen, ob es eine Verschiebung zuläfst, ohne den Charakter der Konvexität zu verlieren. Bei der Verschiebung können alle Ecken oder nur ein Teil derselben Änderungen erleiden; wir untersuchen zunächst den ersten Fall. Behalten wir sämtliche eingeführten Notationen

www.rcin.org.pl

bei, so werden bei jeder Ecke mindestens vier Zeichenwechsel, in dem eben besprochenen Sinne, stattfinden; die Summe Z aller dieser Zeichenwechsel beim Umkreisen der einzelnen Ecken ist also $Z \geqq 4e$ oder

$$Z \geqq 8 + 4k - 4f.$$

Statt die Ecken zu umkreisen, wollen wir jetzt den Umfang irgend einer Fläche vollständig durchlaufen und die Zahl der Zeichenwechsel bei den anliegenden Flächenwinkeln in betracht ziehen. Bedenken wir, dafs irgend zwei Flächenwinkel, welche in einer Ecke aufeinander folgen, auch in einer der Flächen nebeneinander liegen und umgekehrt (man betrachte nur die Fläche als eine der Seitenflächen jener Ecke), so gelangen wir zu dem Resultate, dafs die Summe aller Zeichenwechsel, welche man beim Durchlaufen der Umringe sämtlicher Flächen des Polyeders erhält, derjenigen gleich ist, welche sich beim Umkreisen sämtlicher Ecken ergiebt; denn jedem Zeichenwechsel bei einer Fläche entspricht ein solcher bei einer Ecke. Die gröfstmögliche Zahl von Zeichenwechseln, welche bei einem 3, 4, 5, 6, 7 ... $2n$, $(2n+1)$-Eck möglich ist, beträgt 2, 4, 4, 6, 6 ... $2n$, $2n$, da eine ungerade Anzahl nicht vorkommen kann. Demgemäfs ist die Gesamtzahl der Zeichenwechsel

$$Z \leqq 2f_3 + 4f_4 + 4f_5 + 6f_6 + 6f_7 + \cdots.$$

Hiermit stellen wir das vorhin gefundene Resultat zusammen, welches wir durch die Bemerkung, dafs

$$2k = 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \cdots,$$

$$f = f_3 + f_4 + f_5 + \cdots$$

ist, zu

$$Z \geqq 8 + 2f_3 + 4f_4 + 6f_5 + \cdots$$

umgestalten. Beide Resultate widersprechen aber einander, da der gefundene obere Grenzwert kleiner ist als der untere.

Ein Variieren sämtlicher Ecken eines konvexen Polyeders bei bestimmter Oberfläche ist daher nicht möglich.

16. Die Möglichkeit, dafs nur ein Teil der Ecken variiert, während die übrigen fest bleiben, mufs besonders untersucht werden. Denken wir uns sämtliche Kanten, an denen unveränderliche Winkel liegen, und alle Ecken, in denen nur

www.rcin.org.pl

solche Kanten zusammenstofsen, beseitigt, so geht die Polyederoberfläche in ein Konglomerat von Einzelflächen über, welche nicht mehr eben sind, aber aus ebenen Teilen bestehen, und deren Winkel an den übrigbleibenden Kanten sämtlich variieren. Für diese neue Fläche gilt noch, wenn nicht gerade sämtliche Flächen sich in eine einzige vereinigen, was natürlich nicht in betracht kommt, der Euler'sche Satz; denn bei dem Beweise desselben wurde in keiner Weise vorausgesetzt, dafs die Flächen *eben* sein müfsten.

Die Betrachtungen der vorigen Nummer bleiben daher, wie man sich leicht überzeugt, bei der neuen Fläche vollkommen bestehen.

Das Resultat lautet: *Durch die gegebene Oberfläche ist ein konvexes Polyeder eindeutig bestimmt.*

§ 46.

Der Rauminhalt.

1. Bei einem Polyeder im gewöhnlichen Sinne kann man in gleicher Weise von einem *Rauminhalte* sprechen, wie bei einer ebenen Figur vom *Flächeninhalte.* Man kann mehrere Polyeder zu einem einzigen vereinigen, sie also addieren, und ebenso subtrahieren, und zwei Polyeder als *inhaltsgleich* bezeichnen, wenn sie sich aus vollkommen gleichen Teilen zusammensetzen lassen; hierbei wird wiederum das Axiom benutzt, dafs *zwei Polyeder, die bei irgend einer Zerschneidung in entsprechend gleiche Teile sich als inhaltsgleich erweisen, nicht bei einer anderen ungleich erscheinen können.* Im Anschlufs an das übliche Flächenmafs, das Quadrat, benutzt man als Körpermafs den *Würfel, dessen Kanten der Längeneinheit gleich sind.*

Auch die Raumgleichheit soll durch das Zeichen $\equiv$ ausgedrückt werden. Der Kürze wegen sollen Raumvergleichung und Raumvermessung im folgenden gemeinsam durchgeführt werden. Im Gegensatze zu den Sätzen der Flächenvergleichung (§ 24) *ist es nicht gelungen* — und dürfte daher auch kaum gelingen — *beliebige inhaltsgleiche zwei Polyeder durch Zerschneidung in eine endliche Anzahl gleicher Teile ineinander überzuführen.*

www.rcin.org.pl

Alle hierher gehörenden Untersuchungen sind vom Parallelenaxiom abhängig*).

2. Der am einfachsten zu vermessende Körper ist das *Parallelepipedon*, dessen Flächen Rechtecke sind (das rechtwinklige Parallelepipedon). Betragen drei anstofsende Seiten desselben a, b und c Längeneinheiten, so läfst es sich in $a \,.\, b \,.\, c$ Würfel, welche die Raumeinheit darstellen, zerlegen. Falls die Seiten die Längeneinheit nicht ganzzahlig enthalten, so sind die zu § 25, 2 analogen Betrachtungen auszuführen. In jedem Falle ist $J = abc$.

3. *Der Gesamtraum läfst sich durch gleiche Würfel ausfüllen;* man braucht ihn zu diesem Zwecke nur durch drei zueinander senkrechte Systeme äquidistanter Parallelebenen zu zerschneiden. Denkt man sich in dem Raume einen beliebigen begrenzten Körper (mit gewissen Ausnahmen) enthalten, so wird ein Teil der Würfel innerhalb, ein Teil aufserhalb des Körpers liegen, während noch andere von der Oberfläche des Körpers durchschnitten werden. Läfst man die fraglichen Würfel zu unendlicher Kleinheit abnehmen, so *wird der durch die durchschnittenen Würfel ausgefüllte Raum unendlich klein gegen die Summe der innerhalb gelegenen Würfel werden.* Um dies einzusehen, denken wir uns die Würfel zunächst in Schichten, die von je zwei Parallelebenen eingeschlossen sind, gruppiert, in einer Schicht gruppieren wir sie wieder durch ein zweites System von Parallelebenen in Reihen. In jeder Reihe einer Schicht, einzelne ausgenommen, wird nur eine endliche Zahl der Würfel von der Oberfläche durchschnitten, während unendlich viele innerhalb liegen; die Zahl der Reihen, bei denen ein endlicher Bruchteil der Würfel von der Oberfläche getroffen wird, verschwindet wieder gegen die Zahl der übrigen. In jeder Schicht, einzelne aus-

---

*) Im ganzen haben wir in der Elementargeometrie fünf mefsbare Gröfsen kennen gelernt. Von einer Dimension sind Strecken und Winkel, von zwei Dimensionen der Flächen- und der Eckeninhalt, von drei Dimensionen ist der Rauminhalt.

Die Euklidischen Sätze, welche sich mit dem Rauminhalte beschäftigen, geben nur *Inhaltsvergleichungen,* keine *Inhaltsberechnungen* (vgl. § 24).

www.rcin.org.pl

genommen, ist daher die Zahl der durchschnittenen Würfel verschwindend klein gegen die Zahl der innerhalb gelegenen. Da ferner die Zahl der Schichten, in denen ein endlicher Bruchteil der Würfel durchschnitten wird, gegen die übrigen verschwindet, so ergiebt sich das behauptete Resultat*).

Man kann dasselbe bei der Vermessung irgend eines Körpers in der Weise benutzen, dafs man die Zerlegung in bebiebig kleine Würfel vorgenommen und die im Innern des Körpers gelegenen Würfel abgezählt denkt; man kann deren Inhalt mit dem Inhalt des gesamten Körpers identifizieren, gleichgiltig ob die von der Oberfläche durchschnittenen Würfel ganz oder teilweise zugerechnet werden oder nicht. Wir werden von diesem Prinzip ausgiebigen Gebrauch machen, da mit einer Zerlegung in endliche Teile wohl bei den Prismen, aber schon nicht mehr bei den Pyramiden auszukommen ist.

Vorläufig konstatieren wir noch, dafs *symmetrische Körper inhaltsgleich sind*, da bei einer symmetrischen Zerlegung beider in Würfel die Zahl der innen gelegenen die gleiche ist.

4. Bei einem Prisma, dessen Grundfläche G Flächeneinheiten, dessen Höhe**) h Längeneinheiten enthält, denken wir uns die Zerlegung in Würfel derart vorgenommen, dafs das eine System von Parallelebenen mit dem Abstande $\frac{1}{n}$ den Grundflächen parallel wird. In jeder Schicht sind dann offenbar, von verschwindenden Zahlen abgesehen, $n^2 G$, im ganzen Körper $hn \,.\, n^2 G$ Würfel enthalten, so dafs wir für das Prisma den Rauminhalt $J = \frac{n^3 Gh}{n^3} = Gh$ finden.

5. Legen wir bei einer Pyramide von der Grundfläche G und der Höhe h das erste System der Parallelebenen eben-

*) Diese auf Anschauung beruhende Darstellung möge hier genügen; für jeden in der Folge vorkommenden Fall läfst sie sich leicht strenger fassen. Eine vollständige Erledigung würde auf Infinitesimalbetrachtungen führen. Körper, deren Oberfläche unendlich vielfach gefaltet ist, können eine Ausnahme bilden.

**) Beim Prisma versteht man unter *Höhe* den senkrechten Abstand der beiden Grundflächen, bei der Pyramide den der Spitze von der Grundfläche; die Perpendikel, welche diesen Abstand bestimmen, heifsen *Höhenperpendikel.*

www.rcin.org.pl

falls parallel zur Grundfläche, so werden durch diese Ebenen Figuren ausgeschnitten, welche der Grundfläche ähnlich sind. Bezeichnet G_1 den Flächeninhalt der im Abstande h_1 von der Spitze befindlichen Figur, so ist $G_1 = G \cdot \frac{h_1^{\,2}}{h^2}$; die Zahl der auf ihr gelegenen Würfel kann mit $n^2 G \cdot \frac{h_1^{\,2}}{h^2}$ angegeben werden. Hieraus folgt

$$J = \frac{G n^2 h}{n^3} \sum \frac{h_1^{\,2}}{h^2} = \frac{1}{n} G h \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^2}$$

$$= G \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

oder

$$J = \frac{Gh}{3}.$$

Prismen und Pyramiden von flächengleicher Grundfläche und gleicher Höhe sind resp. inhaltsgleich. Jede Pyramide ist der dritte Teil eines Prismas von flächengleicher Grundfläche und gleicher Höhe.

6. Jeder geschlossene Körper läfst sich, wie auch ohne weitere Beschreibung einleuchtet, in Pyramiden, diese lassen sich in dreiseitige Pyramiden (Tetraëder) zerlegen*). Es wird daher genügen an Stelle der Aufgabe: *den Rauminhalt eines Körpers aus den ihn bestimmenden Strecken (Kanten) zu berechnen*, die einfachere zu setzen:

Den Rauminhalt eines Tetraëders aus seinen sechs Kanten zu berechnen.

Die Lösung dieser von *Jungius* und *Euler* behandelten Aufgabe gelingt am bequemsten mit Hilfe von trigonometrischen Sätzen, weshalb wir letztere bei der Rechnung nicht ausschliefsen. Setzen wir wie früher bei dem Tetraëder $ABCD$

$$BC = a, \; CA = b, \; AB = c, \; AD = d, \; BD = e,$$
$$CD = f,$$

so handelt es sich darum die Länge h des von D auf ABC gefällten Höhenperpendikels DE zu berechnen. Die Ebene

*) Es ist dies auch auf additivem und subtraktivem Wege lediglich durch Ausdehnung der vorhandenen Flächen zu erreichen; freilich können hierbei unendliche Pyramiden auftreten, deren Differenzen jedoch berechenbare Prismen sind.

www.rcin.org.pl

ADE steht auf ABC senkrecht und zerlegt die dreiseitige Ecke A in zwei rechtwinklige. Wir setzen $\sphericalangle BAD = \gamma$, $\sphericalangle DAC = \beta$, $\sphericalangle CAB = \delta$, $\sphericalangle DAE = \varepsilon$ und bezeichnen die inneren Neigungswinkel an den Kanten b und c mit μ und ν. Dann ist

$$\cos\mu = \frac{\cos\gamma - \cos\beta\cos\delta}{\sin\beta\sin\delta},$$

$$\sin\varepsilon = \sin\beta\sin\mu = \sqrt{\frac{\sin^2\beta\sin^2\delta - (\cos\gamma - \cos\beta\cos\delta)^2}{\sin^2\delta}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 - \cos^2\beta - \cos^2\gamma - \cos^2\delta + 2\cos\beta\cos\gamma\cos\delta}{\sin^2\delta}}.$$

Ferner ist

$$h = d\sin\varepsilon;$$

der Flächeninhalt von $\triangle ABC$ ist $F = \frac{bc\sin\delta}{2}$ und somit der Inhalt J der Pyramide

$$J = \frac{Fh}{3} = \frac{bcd}{6}\sqrt{1 - \cos^2\beta - \cos^2\gamma - \cos^2\delta + 2\cos\beta\cos\gamma\cos\delta}.$$

Hierin ist einzusetzen:

$$\cos\beta = \frac{b^2 + d^2 - f^2}{2bd},$$

$$\cos\gamma = \frac{c^2 + d^2 - e^2}{2cd},$$

$$\cos\delta = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

wodurch wir erhalten

$$J = \frac{1}{12}\sqrt{\Big[4b^2c^2d^2 - c^2(b^2 + d^2 - f^2)^2 - b^2(c^2 + d^2 - e^2)^2}$$
$$\overline{- d^2(b^2 + c^2 - a^2)^2 + (b^2 + d^2 - f^2)(c^2 + d^2 - e^2)(b^2 + c^2 - a^2)\Big]}.$$

Durch Ausmultiplizieren der Klammern und symmetrische Anordnung der Glieder erhalten wir

$$J = \frac{1}{12}\sqrt{\Big[a^2d^2(b^2 + c^2 + e^2 + f^2) + b^2e^2(a^2 + c^2 + d^2 + f^2)}$$
$$\overline{+ c^2f^2(a^2 + b^2 + d^2 + e^2) - a^2e^2f^2 - b^2d^2f^2 - c^2d^2e^2}$$
$$\overline{- a^2b^2c^2 - a^4d^2 - a^2d^4 - b^4e^2 - b^2e^4 - c^4f^2 - c^2f^4\Big]}.$$

a und d u. s. w. sind gegenüberliegende, a, e, f u. s. w. in einer Ebene liegende Kanten; die Symmetrie des Ausdrucks ist hiernach einleuchtend.

www.rcin.org.pl

Nach *v. Staudt* und *Sylvester* kann die gefundene Formel mit Hilfe einer Determinante folgendermaſsen ausgedrückt werden:

$$288\,J^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & a^2 & 0 & d^2 & e^2 \\ 1 & b^2 & d^2 & 0 & f^2 \\ 1 & c^2 & e^2 & f^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

S. hierüber *Baltzer, Determinanten,* p. 215 und *Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes,* 1. Teil, p. 69.

Die Bedingungen für das Reellwerden des Tetraëderinhalts sind identisch mit den § 43, 3 für die Existenz des Tetraëders gegebenen.

Da sich die Berechnungen der Inhalte beliebiger Polyeder auf diejenigen von Tetraëdern reduzieren lassen, so können wir den Satz aussprechen:

Der Inhalt eines Polyeders ist algebraisch ausdrückbar durch die bestimmenden Strecken (Kanten).

Der Ausdruck für den Inhalt irgend eines Körpers ist in den bestimmenden Strecken von der dritten Dimension (wie § 25, 8 zu begründen).

7. Entsprechend den Untersuchungen von § 24, 7 ist auch denjenigen Polyederflächen, welche kein Polyeder im gewöhnlichen Sinne begrenzen, ein Rauminhalt zuzuerkennen, soweit dies überhaupt möglich ist. Bei der Begrenzung der eigentlichen Polyeder sind zwei Seiten, eine *innere*, dem begrenzten Körper zugewandte, und eine *äuſsere* zu unterscheiden; man kann von keiner derselben zu der anderen auf kontinuierlichem Wege gelangen, ohne durch die Fläche selbst hindurchzudringen. Bei den Polyederflächen, welche sich selbst durchdringen, kann dieselbe Unterscheidung möglich sein, und dann läſst sich ein bestimmter Rauminhalt festsetzen. Dies ist aber nicht thunlich bei Flächen — und solche existieren nach den *Möbius*'schen Untersuchungen*)

---

*) Die sämtlichen folgenden Untersuchungen rühren von *Möbius* her (*Über die Bestimmungen des Inhalts eines Polyeders*, Ges. Werke B. 2, p. 473).

www.rcin.org.pl

wirklich —, deren beide Seiten in Zusammenhang stehen (*Möbius'sche Flächen*).

Bei den Polyederflächen der ersten Art, die für uns allein in betracht kommen, gilt ein einfaches *Kantengesetz*. Bezeichnet man die eine Seite einer solchen Fläche willkürlich als die *äufsere*, so kann man von den beiden Richtungen, in denen der Umfang (oder ein in sich zurückkehrender Teil desselben) einer der Polyederflächen durchlaufen werden kann, die eine als die nach *rechts*, die andere als die nach *links* gehende bezeichnen. Die erstere soll diejenige sein, die den Drehungssinn eines Uhrzeigers besitzt, falls man sich das Zifferblatt auf der äufseren Polyederseite in der betreffenden Polygonfläche angebracht denkt. Jede Kante ist nun zwei Polygonen gemeinsam. Die Anschauung zeigt, dafs *jede Kante in entgegengesetztem Sinne durchlaufen wird, wenn die Umringe der beiden Polygone, denen sie angehört, in gleichem Sinne durchlaufen werden.*

In der Folge wollen wir den nach *rechts* gehenden Umlauf als den *positiven* bezeichnen.

8. Der Inhalt eines Tetraëders $ABCD$, den wir durch diesen Ausdruck bezeichnen, soll als *positiv* oder *negativ* betrachtet werden, wenn von A aus gesehen der Umlauf $BCDB$ als nach *rechts* oder *links* gehend erscheint. Mit $A\alpha$ bezeichnen wir den Inhalt einer Pyramide, deren Grundfläche ein Polygon α ist, wobei wir über die Zeichenbestimmung dieselbe Festsetzung treffen. Unter diesen Voraussetzungen gilt folgender Satz:

Errichtet man auf den Flächen eines Polyeders, welches dem Kantengesetze genügt, Pyramiden, welche alle die Spitze O besitzen, so ist die algebraische Summe dieser Pyramiden von der Lage des Punktes O unabhängig.

Beweis: Wir vergleichen die Inhalte jener Pyramiden für zwei verschiedene Punkte O und O_1 als Spitzen. Ist $\alpha = ABCD\ldots$ eine Seite des Polyeders, so ist für den Fall, dafs OO_1 der Fläche α parallel läuft, $O\alpha \equiv O_1\alpha$. Andernfalls schneidet OO_1 die Fläche α in einem Punkte P und wir haben nach § 24, 7

$$\alpha \equiv PAB + PBC + PCD + \cdots,$$

www.rcin.org.pl

folglich

$$O\alpha \equiv OPAB + OPBC + OPCD + \cdots,$$
$$O_1\alpha \equiv O_1PAB + O_1PBC + O_1PCD + \cdots,$$

und da offenbar

$$OPAB - O_1PAB \equiv OO_1AB$$

ist u. s. w.,

$$O\alpha - O_1\alpha \equiv OO_1AB + OO_1BC + OO_1CD + \cdots.$$

Den ersten Fall können wir für die Folge unberücksichtigt lassen, da wir einen Hilfspunkt O_2 so bestimmen können, daſs weder OO_2 noch O_1O_2 einer der Flächen des Polyeders parallel wird, worauf dann durch doppelte Umformung das gleiche Resultat erzielt wird.

Summieren wir die gefundenen Differenzen für alle Flächen α_1, α_2 ... des Polyeders, so erhalten wir

$$O\alpha_1 + O\alpha_2 + O\alpha_3 + \cdots - O_1\alpha_1 - O_1\alpha_2 - O_1\alpha_3 - \cdots$$
$$\equiv \Sigma OO_1AB.$$

Bei der Summierung auf der rechten Seite tritt jede Kante AB doppelt auf, nämlich als Seite je zweier Polygone, und zwar infolge des Kantengesetzes mit entgegengesetztem Zeichen. Daher ist

$$O\alpha_1 + O\alpha_2 + O\alpha_3 + \cdots - (O_1\alpha_1 + O_1\alpha_2 + A_1\alpha_3 + \cdots) \equiv 0.$$

Die für beliebige Punkte O hiernach konstante Summe

$$O\alpha_1 + O\alpha_2 + O\alpha_3 + \cdots$$

wird als der *Inhalt* des Polyeders bezeichnet; man überzeugt sich leicht davon, daſs er bei gewöhnlichen Polyedern mit dem früher so genannten Rauminhalte identisch ist.

§ 47.

Die räumliche Geometrie der Lage.

1. In der räumlichen Geometrie der Lage treten mannigfaltigere Verhältnisse auf als in der ebenen, ein Umstand, durch den eine übersichtliche Untersuchung sehr erschwert wird. Als Besonderheiten, die von Maſsverhältnissen unabhängig sind, können wir die folgenden bezeichnen*):

---

*) Wir setzen in der Folge das Parallelenaxiom als eingeführt voraus und behandeln demgemäſs unendlich ferne Gebilde wie die im

www.rcin.org.pl

a. *wenn sich zwei Gerade schneiden oder*, was dasselbe ist, *in einer Ebene liegen;*

b. *wenn mehr als zwei Ebenen durch dieselbe Gerade gehen oder mehr als zwei Punkte in derselben Geraden liegen;*

c. *wenn mehr als drei Ebenen durch denselben Punkt gehen oder mehr als drei Punkte in derselben Ebene liegen.*

Man kann diese Besonderheiten auf die erste reduzieren, da das Vorkommen der beiden letzten Fälle in einem Gebilde auch das sich Schneiden von Geraden zur Folge hat, die sich im allgemeinen kreuzen würden; doch ist dabei nicht aufser acht zu lassen, dafs auch die allgemeinen Ebenen- oder Punktegebilde sich schneidende Gerade aufweisen und infolge dessen schon im weiteren Sinne zur Geometrie der Lage gerechnet werden können. Wir weisen der Geometrie der Lage im allgemeinen die Gebilde zu, *bei denen das Vorhandensein einer Anzahl der angeführten Besonderheiten andere Besonderheiten dieser Art nach sich zieht.*

Abschliefsende Untersuchungen über die Grundgebilde der Geometrie der Lage im Raume sind nicht vorhanden; wir beschränken uns daher auf das Vorführen von zwei einfachen und charakteristischen Fällen, nachdem einige vorbereitende Sätze vorausgeschickt wurden.

2. *Durch einen Ebenenbüschel werden aus beliebigen Geraden*, welche nicht zu seiner Achse parallel sind, *gleiche Doppelverhältnisse ausgeschnitten.*

Beweis: Schneiden zwei sich schneidende Gerade den Ebenenbüschel, so braucht man nur eine Ebene durch sie zu legen, die den Ebenenbüschel in einem Strahlenbüschel schneidet; aus § 28, 6 folgt dann das Behauptete. Durchdringen zwei in verschiedenen Ebenen gelegene Gerade a und b den Ebenenbüschel, so kann man eine dritte Gerade c durch je einen Punkt von a und b legen; auf a und c, sowie auf

---

Endlichen gelegenen. Da jedoch in der nicht-Euklidischen Geometrie die Doppelverhältnisse denen in der Euklidischen Geometrie ganz analog sind, so bestehen die Gebilde der Geometrie der Lage mit der Beschränkung von § 42, 4 unabhängig vom Parallelenaxiom.

www.rcin.org.pl

b und c, also auch auf a und b werden dann gleiche Doppelverhältnisse ausgeschnitten. *Irgend zwei Punktreihen werden also durch die Ebenen eines Ebenenbüschels projektivisch aufeinander bezogen.*

Vier Ebenen eines Strahlenbüschels heifsen *harmonisch*, wenn sie aus irgend einer Geraden vier harmonische Punkte ausschneiden.

Zwei Ebenenbüschel heifsen einander *projektivisch* zugeordnet, wenn irgend zwei durch sie ausgeschnittene Punktreihen projektiv aufeinander bezogen sind.

3. *Drei Gerade a_1, a_2, a_3, von denen keine zwei derselben Ebene angehören, werden gleichzeitig durch unendlich viele Gerade geschnitten derart, dafs durch jeden Punkt dieser drei Geraden eine und nur eine der schneidenden Geraden hindurchgeht.* Man kann nämlich durch a_3 und einen Punkt A_1 von a_1 eine Ebene legen, welche von a_2 in A_2 geschnitten wird; $A_1 A_2$ ist die einzige a_1, a_2 und a_3 schneidende Gerade, welche durch A_1 geht. Durch die drei Geraden a_1, a_2, a_3 ist also ein System von unendlich vielen Geraden, d. h. eine *geradlinige Fläche* bestimmt*).

Durch je vier dieser Geraden b_1, b_2, b_3, b_4 werden aus a_1, a_2, a_3 gleiche Doppelverhältnisse ausgeschnitten. Durch die Gerade a_1 und je eine der Geraden b_1, b_2, b_3, b_4 ist eine Ebene bestimmt; die vier Ebenen bilden ein Büschel mit der Achse a_1. Durch dieses Büschel, also auch durch b_1, b_2, b_3, b_4, werden aus a_2 und a_3 gleiche Doppelverhältnisse ausgeschnitten. Ebenso beweist man die Gleichheit der Doppelverhältnisse auf a_1 und a_3. Vier Gerade des Systems b, welche aus den Geraden a harmonische Punkte ausschneiden, können als *harmonische Gerade* bezeichnet werden.

4. *Schneiden die vier Geraden b_1, b_2, b_3, b_4 die drei Geraden a_1, a_2, a_3, so schneidet jede weitere Gerade a_4, welche durch b_1, b_2 und b_3 hindurchgeht, auch b_4.*

Beweis: Die Schnittpunkte B_1, B_2, B_3 von a_4 auf b_1, b_2, b_3 bilden mit den Schnittpunkten von a_1, a_2, a_3 auf

*) Dieselbe ist ein *einschaliges Hyperboloid* oder ein *hyperbolisches Paraboloid;* eine eingehendere Untersuchung dieser Fläche gehört nicht hierher.

www.rcin.org.pl

denselben Geraden gleiche Doppelverhältnisse. Legt man weiter eine Gerade a_4' durch B_1, welche b_1, b_2 und b_4 in B_1, B_2' und B_4' schneidet, so werden durch a_1, a_2, a_3, a_4' auf b_1, b_2 und b_4 ebenfalls gleiche Doppelverhältnisse ausgeschnitten. B_2' ist daher mit B_2, folglich a_4' mit a_4 identisch.

Dieser Satz ist das einfachste Resultat der räumlichen Geometrie der Lage*); es treten in ihm acht Gerade auf, die sich in zwei Systeme von je vier Geraden gliedern; jede Gerade des einen Systems schneidet jede des andern Systems. Das Gebilde entspricht sich selbst dualistisch.

Wir ziehen aus diesem Satze die weitere Folgerung, dafs *die Gerade* a_4 *das gesamte System der unendlich vielen Geraden* b, *welche durch* a_1, a_2, a_3 *bestimmt sind, durchschneidet.* Es existieren daher zwei Systeme a und b von unendlich vielen Geraden, wo jede Gerade des einen Systems jede des anderen durchschneidet.

5. Während die planimetrischen Gebilde der Geometrie der Lage ihre Grundlage in den metrischen Relationen besitzen, treten in der Stereometrie solche auf, *die lediglich auf den Fundamentalgesetzen des Schneidens von Ebenen beruhen.* Hierher gehört schon das Gebilde von zehn Geraden mit zehn Schnittpunkten, welches durch fünf sich schneidende Ebenen erzeugt wird (§ 44). Von derselben Art ist das durch den folgenden Satz begründete, welches dem von § 30 durchaus analog erscheint:

Gehen die Verbindungsgeraden entsprechender Eckpunkte zweier Tetraëder $ABCD$ *und* $A_1B_1C_1D_1$ *durch denselben Punkt* O, *so liegen die Schnittgeraden entsprechender Flächen derselben in einer Ebene* ω *und umgekehrt* (*Poncelet*).

Beweis: Aus der gemachten Voraussetzung geht hervor, dafs je zwei entsprechende Kanten der Tetraëder in derselben Ebene liegen (z. B. AB und A_1B_1 in der Ebene von OAA_1

---

*) Wenn man von rein ebenen Gebilden absieht. Schon der Satz: „*Wenn drei Gerade sich gegenseitig schneiden und eine vierte schneidet zwei derselben, so schneidet sie auch die dritte*" kann als ein Resultat der räumlichen Geometrie der Lage bezeichnet werden. —

Der oben entwickelte Satz wurde von *Steiner* gefunden (*Systematische Entwickelung u. s. w.*, Ges. W. B. 1, p. 369 ff.).

www.rcin.org.pl

und OBB_1) und sich also schneiden. Von diesen sechs Schnittpunkten liegen je drei in der Schnittgeraden eines der Flächenpaare (z. B. liegen in der Schnittgeraden von ABC und $A_1B_1C_1$ die Schnittpunkte von BC und B_1C_1, CA und C_1A_1, AB und A_1B_1); infolge dessen hat jede der vier Schnittgeraden mit jeder anderen einen Punkt gemein (z. B. hat die Schnittgerade von ABC und $A_1B_1C_1$ mit derjenigen von ABD und $A_1B_1D_1$ den Schnittpunkt von AB und A_1B_1 gemein); diese vier Geraden liegen also in einer Ebene. Die Umkehrung wird in derselben Weise bewiesen, wobei die Worte Punkt und Ebene u. s. w. zu vertauschen sind.

Vollständigere Untersuchungen der elementaren räumlichen Geometrie der Lage müssen der Zukunft überlassen bleiben.

Über *Konfigurationen* im Raume handeln:

Reye, das Problem der Konfigurationen, Acta math., B. I, p. 93; *die Hexaëder- und Oktaëder-Konfigurationen* $(12_6, 16_3)$, ebendas. p. 97, und mehrere andere Abhandlungen.

§ 48.

Die Kollineation räumlicher Systeme.

1. Die Gesamtheit von Punkten, Geraden und Ebenen, welche in dem ganzen Raume enthalten sind — derselbe kann als beliebig vielfach vorgestellt werden —, soll als ein *räumliches System* bezeichnet werden. Dasselbe ist das einzige *Grundgebilde dritter Stufe* (vgl. § 38, 1).

Zwei räumliche Systeme heifsen kollinear verwandt, wenn jedem Punkt, jeder Geraden und jeder Ebene des einen resp. ein Punkt, eine Gerade und eine Ebene des anderen entspricht, so dafs also der Schnittlinie zweier Ebenen des einen die Schnittlinie der entsprechenden Ebenen des anderen zugeordnet ist u. s. w. Die Stetigkeit der Zuordnung soll auch hier stets vorausgesetzt werden.

2. Aus dieser Definition geht unmittelbar hervor, dafs jedes entsprechende Paar von ebenen Systemen oder Strahlenbündeln, welche in den kollinearen räumlichen Systemen enthalten sind, in kollinearer Beziehung steht (§§ 32 und 42).

www.rcin.org.pl

Entsprechende Punktreihen und Strahlenbüschel beider Systeme stehen daher in projektivischer Beziehung; dasselbe folgt hiernach auch für Ebenenbüschel.

3. *Zwei räumliche Systeme Σ und Σ_1 können immer und nur auf* eine *Art so in kollineare Beziehung gesetzt werden, dafs je fünf Punkten des einen, von denen keine vier in derselben Ebene liegen, oder fünf Ebenen, von denen keine vier durch denselben Punkt gehen, fünf ebensolche Elemente des anderen entsprechen.*

Beweis: Die beiden Fälle der Zuordnung lassen eine so analoge Behandlung zu, dafs es genügt, sich auf den einen zu beschränken. Seien den Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ von Σ die Ebenen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \varepsilon_1$ von Σ_1 zugeordnet. Jede der fünf Ebenen eines Systems wird durch die vier anderen in vier Geraden geschnitten, die den entsprechenden Geraden des anderen Systems zuzuordnen sind; hierdurch sind aber nach § 32 die ebenen Systeme α und α_1, β und β_1 u. s. w. kollinear aufeinander bezogen. Da jede Gerade, welche nicht durch die Schnittlinie von α und β geht, durch die beiden Punkte bestimmt ist, in denen sie α und β schneidet, so ist jeder Geraden in Σ eine einzige Gerade in Σ_1 dadurch zugewiesen, dafs den Schnittpunkten der ersten mit α und β die Schnittpunkte der zweiten mit α_1 und β_1 entsprechend zugeordnet sind. Gehen die beiden entsprechenden Geraden durch die Schnittpunkte von α und β, α_1 und β_1, so ist wieder infolge der Stetigkeit der Zuordnung ein Grenzübergang möglich (vgl. § 32, 2). Auch jeder Ebene μ von Σ ist hierdurch eine Ebene μ_1 von Σ_1 eindeutig zugewiesen. Die sämtlichen Geraden nämlich, welche μ enthält, schneiden α und β in zwei Geraden a und b, die sich auf der Schnittlinie von α und β treffen; a und b entsprechen aber in α_1 und β_1 zwei Gerade a_1 und b_1, die sich auf der Schnittlinie von α_1 und β_1 treffen, also eine Ebene μ_1 bestimmen. Wir haben nun noch zu zeigen, dafs sämtlichen Geraden von Σ, welche durch einen Punkt O gehen, in Σ_1 Gerade entsprechen, welche alle durch einen Punkt O_1 gehen, d. h. dafs jedem Punkte O in Σ ein Punkt O_1 in Σ_1 eindeutig zugewiesen ist. Durch das Strahlenbündel O sind die beiden Ebenen α und β kollinear

www.rcin.org.pl

aufeinander bezogen*) und zwar derart, daſs die Punkte der Schnittlinie von α und β sich selbst entsprechen. Wir schreiben den beiden in dieser Weise kollinear bezogenen ebenen Systemen α und β, obgleich sie nicht in eine Ebene fallen, *perspektivische* Lage zu. Nun sind bereits die ebenen Systeme α und α_1, β und β_1 kollinear aufeinander bezogen; also ist auch kollineare Beziehung zwischen α_1 und β_1 hergestellt und zwar so, daſs die Punkte der Schnittlinie von α_1 und β_1 sich selbst entsprechen. Sind nun A_1 und B_1, A_2 und B_2, A_3 und B_3 drei Paare entsprechender Punkte in α_1 und β_1, so schneiden sich A_1A_2 und B_1B_2 u. s. w. in jener Schnittlinie von α_1 und β_1; hieraus folgt aber (§ 44, 3), daſs A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 durch denselben Punkt O_1 gehen. Durch Wiederholung desselben Schlusses finden wir, daſs die Verbindungsgeraden von irgend zwei entsprechenden Punkten von α_1 und β_1 durch denselben Punkt O_1 gehen, daſs also den Geraden von Σ, welche sich im Punkte O schneiden, in Σ_1 Gerade entsprechen, welche O_1 zum Schnittpunkte haben; dem Punkte O in Σ ist somit O_1 in Σ_1 eindeutig zugewiesen.

4. Zwei kollineare räumliche Systeme heiſsen *affin*, wenn sich ihre unendlich fernen Ebenen entsprechen; sie heiſsen *ähnlich* (resp. *symmetrisch ähnlich*), wenn die unendlich fernen Ebenen entsprechend gleich sind. In beiden Fällen ergeben sich ähnliche Beziehungen, wie bei den entsprechenden Zuordnungen ebener Systeme; wir gehen darauf nicht weiter ein.

5. Wir sagen von zwei kollinearen räumlichen Systemen Σ und Σ_1, daſs sie sich in *perspektivischer* Lage befinden, wenn sie ein ebenes System σ entsprechend gemein haben. Entsprechende Ebenen beider Systeme müssen sich in der Ebene von σ, der *Kollineationsebene* schneiden. Sind A, B, C, D vier Punkte von Σ, A_1, B_1, C_1, D_1 die entsprechenden von Σ_1, so liegen die Schnittlinien entsprechender Ebenen der beiden hierdurch fixierten Tetraëder in der Kollineationsebene. Nach § 47, 5 gehen daher die Verbindungsgeraden ent-

*) Jedem Punkte von α entspricht derjenige von β, welcher auf demselben Strahle von O liegt; eine Ebene von O schneidet α und β in entsprechenden Geraden.

www.rcin.org.pl

sprechender Punkte A und A_1 u. s. w. durch denselben Punkt S. Nimmt man nach und nach noch andere Punktepaare hinzu, so gelangt man zu dem Satze: *Zwei kollineare räumliche Systeme in perspektivischer Lage haben aufser einem ebenen Systeme σ auch einen Strahlenbündel S (Zentrum der Kollineation) entsprechend gemein.* Die Umkehrung ist in analoger Art nachzuweisen.

Kollineare Systeme können im allgemeinen nicht in perspektivische Lage gebracht werden.

6. Was die Änderung eines räumlichen Gebildes durch Kollineation anlangt, so gelten genau dieselben Bemerkungen wie für die Kollineation ebener Systeme (§ 32, 12).

§ 49.

Die Reciprozität räumlicher Systeme; das Prinzip der Dualität.

1. *Ein räumliches System Σ heifst einem anderen Σ_1 reciprok zugeordnet, wenn jedem Punkte des einen eine Ebene des anderen entspricht und umgekehrt; die Zuordnung wird als stetig angenommen.*

Der Verbindungsgeraden zweier Punkte des einen Systems entspricht die Schnittgerade der entsprechenden Ebenen des anderen. Den Punkten des einen Systemes, welche auf einer Geraden liegen, entsprechen Ebenen des anderen, welche durch dieselbe Gerade gehen. Einem ebenen Systeme des einen entspricht ein Strahlenbündel des anderen u. s. w.

Ehe wir zur Konstruktion reciproker Systeme übergehen, schicken wir eine Hilfsbetrachtung voraus.

2. In § 38, 4 wurde die kollineare und reciproke Beziehung eines Strahlenbündels zu einem ebenen Systeme definiert. *Ein Strahlenbündel S läfst sich immer auf eine und nur auf eine Art reciprok auf ein ebenes System σ_1 so beziehen, dafs vier Strahlen von S, von denen keine drei in einer Ebene liegen, vier beliebigen Geraden in σ_1, von denen keine drei durch denselben Punkt gehen, entsprechen; oder auch so, dafs vier Ebenen von S, von denen keine drei sich in derselben Geraden schneiden, vier Punkte von σ_1, von denen keine drei in derselben*

www.rcin.org.pl

Geraden liegen, zugeordnet sind. Man braucht zu diesem Zwecke den Strahlenbündel S nur durch eine Ebene α zu schneiden, welche nicht durch seinen Mittelpunkt geht, und das in α durch die Elemente des Bündels ausgeschnittene, zu ihm kollineare System mit σ_1 nach § 33 in reciproke Beziehung zu setzen.

3. *Zwei räumliche Systeme Σ und Σ_1 können immer auf eine einzige Art so zueinander in reciproke Beziehung gesetzt werden, dafs fünf Punkten A, B, C, D, E von Σ, von denen keine vier in einer Ebene liegen, fünf Ebenen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \varepsilon_1$ von Σ_1, von denen keine vier durch denselben Punkt gehen, willkürlich zugeordnet werden.*

Beweis: Da den vier Strahlen AB, AC, AD, AE des Strahlenbündels A von Σ, von denen keine drei in einer Ebene liegen, vier Gerade des ebenen Systems α_1 in Σ_1, von denen keine drei durch denselben Punkt gehen, nämlich die Schnittgeraden von α_1 mit $\beta_1, \gamma_1, \delta_1, \varepsilon_1$ zugewiesen sind, so sind der Strahlenbündel A und das ebene System α_1 einander in eindeutiger Weise reciprok zugeordnet; das Gleiche gilt für B und β_1 u. s. w. Jede Gerade von Σ ist als Schnittlinie zweier Ebenen der Strahlenbündel A und B eindeutig bestimmt (mit der analogen Ausnahme wie in § 48, 3, die in derselben Weise erledigt wird) und so der Geraden von Σ_1 zugewiesen, welche durch die entsprechenden Punkte in α_1 und β_1 bestimmt ist. Jeder Ebene, welche durch AB geht, welche also beiden Bündeln angehört, entspricht ein Punkt, welcher der Schnittlinie von α_1 und β_1 angehört. Ein Punkt in Σ ist bestimmt durch zwei sich schneidende Strahlen von A und B, die also in einer durch AB gehenden Ebene liegen; ihm entspricht eine Ebene in σ_1, welche durch ihre Schnittlinien mit α_1 und β_1, die sich auf der Schnittlinie dieser Ebenen treffen, bestimmt ist. Es fragt sich nur, ob allen Punkten und Geraden von Σ, welche in einer Ebene liegen, in σ_1 Ebenen und Gerade entsprechen, welche durch denselben Punkt gehen, ob also einer Ebene von Σ ein Punkt von σ_1 bestimmt und eindeutig zugeordnet ist. Nun werden die Bündel A und B durch irgend eine Ebene μ von Σ kollinear aufeinander bezogen derart, dafs je zwei Strahlen

www.rcin.org.pl

oder Ebenen einander zugeordnet werden, welche sich in einem Punkte oder einer Geraden von μ schneiden. Da aber A und B zu α und α_1 in reciproker Beziehung stehen, so werden hierdurch auch α und α_1 kollinear aufeinander bezogen. Die kollinearen Bündel haben aber den Ebenenbüschel AB entsprechend gemein; daher haben α_1 und β_1 eine Punktreihe, nämlich in ihrer Schnittlinie, entsprechend gemein. Hieraus folgt (§ 48, 3, Beweis), dafs die beiden ebenen Systeme α_1 und β_1 in perspektivischer Lage sind, dafs also die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte durch denselben Punkt M_1 gehen, welcher hierdurch der Ebene μ eindeutig zugeordnet ist.

4. Durch die nachgewiesene Möglichkeit reciproker räumlicher Systeme ist das oft erwähnte *Dualitätsprinzip* bewiesen. *Jedem räumlichen Gebilde der Geometrie der Lage entspricht ein anderes in der Art, dafs Punkte und Ebenen vertauscht erscheinen, während Gerade Geraden entsprechen.* Metrische Relationen entprechen sich nur unvollständig.

www.rcin.org.pl

Alphabetisches Namen- und Sachregister.

www.rcin.org.pl

www.rcin.org.pl

www.rcin.org.pl

www.rcin.org.pl

Berichtigungen und Zusätze.

Durch ein Versehen wurden die Bezeichnungen *konkav* und *konvex* mehrere Male vertauscht; dies ist der Fall: p. 30, Z. 3 u. 1 von unten, p. 31, Z. 11 u. 10 v. u., p. 32, Z. 5, p. 33, Z. 9 v. u., p. 36, Z. 1 v. u., p. 65, Z. 7.

p. 27 ist in § 6 einzuschalten: Das Parallelsein zweier Geraden wird durch $\#$ bezeichnet.

p. 29. Zusatz: Die der Anschauung entlehnte Thatsache, dafs eine Gerade durch Umdrehung in einer Ebene um einen ihrer Punkte wieder in ihre frühere Lage zurückgelangt, fällt wesentlich zusammen mit der von *v. Helmholtz* als Axiom ausgesprochenen Thatsache, dafs ein Körper bei einer Drehung um zwei feste Punkte einmal wieder in seine Anfangslage zurückgelangt (*Monodromie*).

Zu p. 54 a. Es wurde öfters versucht, den Beweis der Unbeweisbarkeit des Parallelenaxioms zu erbringen (*Hoüel, de Tilly*); doch sind diese Versuche nicht einwandsfrei. Wenn auch eine Geometrie, welche mit der nicht-Euklidischen wesentlich übereinstimmt, auf einer gewissen Fläche möglich ist, so ist damit noch nicht ihre Existenzberechtigung in der Ebene dargethan, da letztere ganz bestimmte, nur ihr zukommende Eigenschaften besitzt.

Nach der Ansicht von *Donadt* (*Das mathematische Raumproblem und die geometrischen Axiome*) ist das Parallelenaxiom zur logischen Verknüpfung der beiden qualitativ verschiedenen Elementarmafsgröfsen der Geometrie, der Strecke und des Winkels, nötig.

Zu p. 78, § 22. Sind beliebig viele (n) Gerade in einer Ebene vorhanden, so kann man je vier unter ihnen als Vierseit betrachten und die drei Vierseitsrelationen für dasselbe aufstellen; dieselben sind in den auftretenden Strecken *algebraisch*. Man überzeugt sich unmittelbar davon, dafs alle Relationen zwischen Strecken im n-seit durch Elimination aus den Vierseitsrelationen abgeleitet werden können. Da aber durch solche Eliminationen aus algebraischen Gleichungen wieder algebraische hervorgehen, so gelangen wir zu dem wichtigen Resultate:

Die Relationen zwischen den Strecken eines n-seits sind durchaus algebraisch.

www.rcin.org.pl

Zu p. 113, § 28, 11. Wegen der bewiesenen Beziehung zwischen dem Sinusdoppelverhältnis von vier Strahlen und dem Doppelverhältnis von vier Punkten einer Geraden erfährt das erstere bei Umordnung der Strahlen dieselben Änderungen wie das letztere bei entsprechender Umordnung der Punkte.

Zu p. 139, § 32, 3. In analoger Weise beweist man, dafs auch die Kollineation zweier ebenen Systeme durch entsprechende Zuordnung von je vier Geraden, von denen keine drei durch denselben Punkt gehen, eindeutig festgesetzt wird.

Zu p. 155, § 34. Von Geraden, welche nicht in derselben Ebene liegen, welche sich also auch nicht schneiden, sagt man, dafs sie sich *kreuzen*.

Zu p. 165, § 38, 1. An dieser Stelle wird die *Planimetrie* der Stereometrie als Spezialgebiet eingereiht; sie steht der Geometrie des Strahlenbündels dualistisch gegenüber.

INSTYTUT MAT. PAN BIBLIOTEKA

www.rcin.org.pl

www.rcin.org.pl