Andrzej Sławiński

STATECZNOŚĆ ROZMAITOŚCI RUCHU USTALONEGO UKŁADÓW NIEHOLONOMICZNYCH

WARSZAWA 1980

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 8 maja 1980 r.

Zarejestrowana pod nr 18/1980

IPPT
PAN

N a p r a w a c h r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 140 egz. Ark.druk, 2. Ark. wyd. 1,25.
Oddano do drukarni w czerwcu 1980 r.
Nr zamówienia 421/0/80

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

Andrzej Sławiński
Zakład Układów Mechanicznych

STATECZNOŚĆ ROZMAITOŚCI RUCHU USTALONEGO UKŁADÓW NIEHOLONOMICZNYCH

Niech będzie dany układ mechaniczny o zadanej energii kinetycznej, poruszający się pod wpływem znanych sił uogólnionych zgodnie z nałożonymi nań więzami i o znanych wartościach parametrów układu w wybranej chwili początkowej. Na gruncie mechaniki klasycznej powyższe założenia wystarczają już do określenia stateczności ruchu rozpatrywanego układu. Najczęściej dla każdego modelu wyznacza się różniczkowe (zwykle nieliniowe) równania ruchu, a następnie bada się ich stateczność na przykład za pomocą linearyzacji tych równań w małym otoczeniu wybranego rozwiązania. Jednakże każdorazowe wyprowadzanie równań ruchu nie jest konieczne. Celem pracy jest sprowadzenie badania stateczności ruchu pewnej klasy układów mechanicznych z liniowymi jednorodnymi więzami nieholonomicznymi do badania wartości własnych macierzy zlinearyzowanego układu równań ruchu. Ruch, którego stateczność jest badana, nazwany został ustalonym ze względu na stałość pewnych funkcji na jego trajektorii. Wyniki otrzymane w niniejszej pracy można wykorzystać do optymalizacji parametrów układu mechanicznego z punktu widzenia stateczności ruchu ustalonego. W pracy przedstawiono przykład ilustrujący zastosowanie jej wyników do określania warunków stateczności układu mechanicznego.

1. Definicja ruchu ustalonego

Pojęcie ruchu ustalonego (zwanego też stacjonarnym), pomimo częstego jego stosowania, bywa różnie rozumiane. Istnieją dwa nurty w definiowaniu tego pojęcia:

a/ ruch ustalony - jako graniczny ruch układu mechanicznego przy $t \to \pm\infty$ (por. [4]). Tak rozumiany ruch ustalony dla $t \to +\infty$ jest zawsze asymptotycznie stateczny,

b/ ruch ustalony - jako taki ruch, na którego trajektorii pewne funkcje zachowują stałe wartości (por. [1], [2], [3], [5], [6]). Ruch ustalony zdefiniowany w powyższy sposób może być zarówno stateczny, jak i niestateczny.

W dalszym ciągu ruch ustalony będziemy rozumieć w znaczeniu b/. Jeśli ruch układu mechanicznego opisany jest układem równań różniczkowych

(1) $$\dot{x} = f(t, x)$$

z warunkami początkowymi

(2) $$x\Big|_{t=t_0} \equiv x\Big|_0 \equiv x_0 ,$$

gdzie $x = [x_1, \ldots, x_n]^T$, to szczególnym przypadkiem ruchu ustalonego będzie każde z możliwych położeń równowagi, to znaczy kiedy prawe strony równań (1) jednocześnie zerują się. Innym szczególnym przypadkiem ruchu ustalonego będzie ruch zachowujący stałość energii mechanicznej układu lub ruch układu pod działaniem stałych co do wartości sił wymuszających.
W przypadku układu holonomicznego, jeśli energia kinetyczna i siły uogólnione nie zależą jawnie od pewnej liczby współrzędnych uogólnionych (zwanych wtedy cyklicznymi), to istnieje ruch ustalony, w którym współrzędne pozycyjne i prędkości uogólnione odpowiadające współrzędnym cyklicznym zachowują stałe wartości. W [2] jako współrzędne cykliczne dla układu nieholonomicznego (podobnie jak dla holonomicznego) przyjmuje się te, które nie występują w energii kinetycznej i w siłach uogólnionych, a odpowiadające im siły uogólnione są równe zero. Współrzędne cykliczne nie mogą również występować w równaniach więzów nieholonomicznych. Analogicznie jak dla układu holonomicznego jako ruch ustalony układu nieholonomicznego rozumiany jest taki ruch, w którym współrzędne pozycyjne i prędkości cykliczne są stałe.
Niech wektory $p = [p_1, \ldots, p_m]^T$ oraz $r = [r_1, \ldots, r_{n-m}]^T$ oznaczają odpowiednio wektory współrzędnych pozycyjnych i cykli-

cznych, gdzie n - liczba współrzędnych uogólnionych. Równania ruchu w postaci równań Lagrange'a II rodzaju i liniowe jednorodne równania więzów takiego układu można przedstawić w postaci:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}}\right) - \frac{\partial T}{\partial p} - Q_1 = D_1^T \mu \ , \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) = D_2^T \mu \ , \tag{4}$$

$$D_1\dot{p} + D_2\dot{r} = 0, \tag{5}$$

gdzie

$T(p,\dot{p},\dot{r})$ - energia kinetyczna układu,

$Q_1(p,\dot{p},\dot{r})$ - wektor sił uogólnionych odpowiadających współrzędnym pozycyjnym,

$D_1(p)$, $D_2(p)$ - s x m i sx(n-m) - wymiarowe macierze współczynników więzów nieholonomicznych, liniowych, jednorodnych, s - liczba więzów nieholonomicznych ,

μ - s - elementowy wektor mnożników Lagrange'a.

Zgodnie z przyjętą w [2] definicją ruchu ustalonego mamy

$$\begin{aligned} p\big|_0 &= p_0 = [\text{const}], \\ \dot{r}\big|_0 &= \omega_0 = [\text{const}], \\ \mu\big|_0 &= \mu_0 = [\text{const}], \end{aligned} \tag{6}$$

gdzie " $|_0$ " - oznacza odpowiednią wartość w ruchu ustalonym. Równania ruchu ustalonego (6) mają więc postać

$$-\frac{\partial T}{\partial p}\Big|_0 - Q_1(p_0, 0, \omega_0) = D_1^T(p_0)\mu_0 \ , \tag{7}$$

$$D_2^T(p_0)\mu_0 = 0, \tag{8}$$

(9) $D_2(p_0)\omega_0 = 0.$

Równania (7), (8) i (9), których jest n+s, określają współrzędne punktu (p_0, ω_0, μ_0) w przestrzeni (p, ω, μ). Jeśli wśród równań (7), (8) i (9) są równania zależne, to liczba niewiadomych jest większa od liczby równań. W przestrzeni (p, ω, μ) istnieje wtedy rozmaitość rozwiązań układu (7), (8), (9), a tym samym rozmaitość ruchu ustalonego. Conajmniej jedno z równań tego układu jest zależne od pozostałych, gdyż jeśli równanie (8) pomnożyć lewostronnie przez wektor ω_0^T, to z równania (9) wynika zerowanie się lewej strony równania (8). Zatem w przypadku układu nieholonomicznego opisanego równaniami (3), (4), (5) istnieje co najmniej jednowymiarowa rozmaitość ruchu ustalonego.

W niniejszej pracy, jako ruch ustalony układu nieholonomicznego rozumiany będzie taki ruch, w którym część quasiprędkości zachowuje stałe wartości.

Niech będzie dany układ mechaniczny, dla którego określona jest energia kinetyczna

(10) $$T = T(q, \dot{q}),$$

energia potencjalna

(11) $$V = V(q)$$

oraz funkcja Rayleigh`a

(12) $$F = F(q, \dot{q}),$$

gdzie $q = [q_1, \ldots, q_n]^T$ - wektor współrzędnych uogólnionych Załóżmy, że na układ nałożone są liniowe więzy nieholonomiczne

(13) $$D(q)\,\dot{q} = 0,$$

gdzie D - macierz prostokątna o wymiarach s x n (s- liczba więzów nieholonomicznych). Ruch takiego układu, to znaczy ruch punktu odpowiadającego stanowi układu w przestrzeni zmiennych $(q, \dot{q}, \mu)$, określony jest równaniami d`Alemberta - Lagrange'a i równaniami więzów

$$(14) \qquad \delta \mathbf{q}^T \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \mathbf{D}^T \mu \right] = 0 ,$$

$$(15) \qquad \mathbf{D}\,\delta \mathbf{q} = 0 .$$

Jak wiadomo wyrażenie

$$(16) \qquad \varrho = \mathbf{D}^T \mu$$

odpowiada siłom reakcji więzów nieholonomicznych (13) . Na podstawie (15) praca tych sił na dowolnych przesunięciach wirtualnych układu jest równa zeru

$$(17) \qquad \delta W = \varrho^T \delta \mathbf{q} = \mu^T \mathbf{D}\, \delta \mathbf{q} = 0,$$

a więc więzy (15) są idealne. W przypadku rozpatrywanego układu nieholonomicznego pochodna energii układu wyraża się wzorem

$$(18) \qquad \frac{d}{dt}\,(T + V) = - 2F.$$

Wprowadzimy n quasiprędkości w ten sposób, że jako s równań przekształcenia przyjmiemy równania więzów nieholonomicznych:

$$(19) \qquad \dot{\pi} = \begin{bmatrix} \dot{\pi}_1 \\ \dot{\pi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^*(\mathbf{q}) \\ \mathbf{D}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{U}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} ,$$

gdzie

- π - wektor n - quasiprędkości,
- ω - wektor n - s - niezerowych quasiprędkości,
- $\mathbf{D}^*$ - macierz (n - s) x n (o sposobie doboru tej macierzy będzie mowa w dalszej części pracy);
- $\mathbf{U}$ - nieosobliwa macierz przekształcenia (det $\mathbf{U} \neq 0$).

Oznaczmy przez $\mathbf{W}$ macierz odwrotną przekształcenia (19) , tj.

$$(20) \qquad \mathbf{W} = \mathbf{U}^{-1}.$$

Przekształcenie odwrotne do (19) przybierze więc postać

(21) $\dot{q} = W\dot{\pi} = W_1\dot{\pi}_1 + W_2\dot{\pi}_2 = W_1\omega$,

gdzie

$$W = {}^{n}\begin{array}{c} \overset{n-s}{} \quad \overset{s}{} \\ \left[W_1 \,\vdots\, W_2 \right] \end{array}$$

W_1 - macierz n x (n - s) ,

W_2 - macierz n x s .

Wektor wariacji współrzędnych uogólnionych można na podstawie (21) wyrazić w następującej postaci

(22) $\delta q^T = \delta\pi^T W^T$ lub $\delta\pi = U\,\delta q$.

Wprowadzimy zależność (22) do (14)

(23) $$\delta\pi^T W^T\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial q} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} - D^T\mu\right] = 0 .$$

Równanie (23) przybierze postać

(24) $$\delta\pi^T\left[W^T\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - W^T\frac{\partial T}{\partial q} + W^T\frac{\partial V}{\partial q} + W^T\frac{\partial F}{\partial \dot{q}} - W^T D^T\mu\right] = 0.$$

Wyznaczymy kolejne wyrazy równania (24) . W tym celu zróżniczkujemy względem czasu iloczyn $W^T\frac{dT}{d\dot{q}}$:

(25) $$\frac{d}{dt}\left(W^T\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{dW^T}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} + W^T\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right).$$

Otrzymamy stąd

(26) $$W^T\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{d}{dt}\left(W^T\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{dW^T}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} .$$

Jednocześnie mamy

(27) $$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \dot{\pi}^T}{\partial \dot{q}}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}} = U^T\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}} ,$$

gdzie

$$T^* = T^*(\mathbf{q}, \dot{\boldsymbol{\pi}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}),$$

$$(28)\qquad \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\pi}}^T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \left(\frac{\partial \dot{\boldsymbol{\pi}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}\right)^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{\pi}_1}{\partial \dot{q}_1} & \cdots & \frac{\partial \dot{\pi}_n}{\partial \dot{q}_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \dot{\pi}_1}{\partial \dot{q}_n} & \cdots & \frac{\partial \dot{\pi}_n}{\partial \dot{q}_n} \end{bmatrix} = \mathbf{U}^T.$$

Wyrażenie (26) przybiera więc postać

$$(29)\qquad \mathbf{W}^T \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\boldsymbol{\pi}}}\right) + \mathbf{W}^T \frac{d\mathbf{U}^T}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\boldsymbol{\pi}}},$$

przy czym

$$(30)\qquad \frac{d\mathbf{U}^T}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{U}^T}{\partial q_k}\dot{q}_k,$$

gdzie

$\dot{q}_k$ - k - ty element wektora $\dot{\mathbf{q}}$.

Podobnie wyznaczamy następne wyrazy równania (24) :

$$(31)\qquad \mathbf{W}^T \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{W}^T\left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\pi}}^T}{\partial \mathbf{q}}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\boldsymbol{\pi}}}\right) = \\ = \mathbf{W}^T\left(\frac{\partial T^*}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial(\mathbf{U}\dot{\mathbf{q}})^T}{\partial \mathbf{q}}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\boldsymbol{\pi}}}\right) = \\ = \mathbf{W}^T\frac{\partial T^*}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{W}^T\frac{\partial(\mathbf{U}\dot{\mathbf{q}})^T}{\partial \mathbf{q}}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\boldsymbol{\pi}}},$$

$$(32)\qquad \mathbf{W}^T\frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial F^*}{\partial \dot{\boldsymbol{\pi}}},$$

gdzie $F^* = F^*(\mathbf{q}, \dot{\boldsymbol{\pi}})$.

Równanie (24) można zapisać w postaci

$$(33)\qquad \delta\boldsymbol{\pi}^T\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\boldsymbol{\pi}}}\right) - \mathbf{W}^T\frac{\partial T^*}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{W}^T\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial F^*}{\partial \dot{\boldsymbol{\pi}}} + \mathbf{W}^T\boldsymbol{\Gamma}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\boldsymbol{\pi}}} - \mathbf{W}^T\mathbf{D}^T\boldsymbol{\mu}\right] = 0,$$

gdzie

$$(34)\qquad \boldsymbol{\Gamma} = \frac{d\mathbf{U}^T}{dt} - \frac{\partial(\mathbf{U}\dot{\mathbf{q}})^T}{\partial \mathbf{q}} = \sum_{k=1}^{n}\dot{q}_k\frac{\partial \mathbf{U}^T}{\partial q_k} - \frac{\partial(\mathbf{U}\dot{\mathbf{q}})^T}{\partial \mathbf{q}}.$$

Na podstawie (15) s elementów wektora $\delta\pi$ jest zależnych i równych zero. Równanie wektorowe (33) odpowiada układowi n - s niezależnych równań skalarnych

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^*}{\partial \boldsymbol{\omega}}\right) - \mathbf{W}_1^T \frac{\partial T^*}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{W}_1^T \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial F^*}{\partial \boldsymbol{\omega}} + \mathbf{W}_1^T \boldsymbol{\Gamma} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\boldsymbol{\pi}}} - \mathbf{W}_1^T \mathbf{D}^T \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}. \tag{35}$$

Na podstawie (20)

$$\mathbf{W}_1^T \mathbf{D}^T \equiv \mathbf{0} \tag{36}$$

i ostatni wyraz równania (35) znika. Ostatecznie otrzymujemy następujący układ równań:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^*}{\partial \boldsymbol{\omega}}\right) - \mathbf{W}_1^T \frac{\partial T^*}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{W}_1^T \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial F^*}{\partial \boldsymbol{\omega}} + \mathbf{W}_1^T \boldsymbol{\Gamma} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\boldsymbol{\pi}}} = \mathbf{0}, \tag{37}$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\omega}. \tag{38}$$

Równania ruchu układu mechanicznego o energii kinetycznej (10), potencjalnej (11) z funkcją Rayleigh'a (12), skrępowanego więzami nieholonomicznymi (13) mają w przestrzeni zmiennych $E_1^{2n-s} = (\mathbf{q}, \boldsymbol{\omega})$ postać (37) i (38).

W celu zdefiniowania i zbadania możliwości istnienia ruchu ustalonego powyższego układu mechanicznego wektor współrzędnych uogólnionych podzielimy na dwa wektory składowe:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix}, \tag{39}$$

gdzie

$$\mathbf{p} = \left[p_1, \ldots, p_m \right]^T ;$$

$$\mathbf{r} = \left[r_1, \ldots, r_{n-m} \right]^T .$$

Wybór m i sposobu podziału wektora współrzędnych uogólnionych jest uzależniony od niewystępowania współrzędnych $\mathbf{r}$ w części równań układu (37) i (38).

Dokonujemy podziału na bloki macierzy $\mathbf{U}$ i $\mathbf{W}$:

$$(40)\qquad \mathbf{U} = \begin{array}{c} \\ n-s \\ s \end{array}\!\!\begin{array}{c} m \\ \left[\begin{array}{c} \mathbf{D}^{*} \\ \hline \mathbf{D} \end{array}\right] \end{array} = \begin{array}{c} \\ n-s \\ s \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} m & n-m \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{U}_{11} & \mathbf{U}_{12} \\ \hline \mathbf{U}_{21} & \mathbf{U}_{22} \end{array}\right] \end{array} = n\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} m & n-m \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{U}_{1} & \mathbf{U}_{2} \end{array}\right] \end{array},$$

$$(41)\qquad \mathbf{W} = n\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} n-s & s \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{W}_{1} & \mathbf{W}_{2} \end{array}\right] \end{array} = \begin{array}{c} \\ m \\ n-m \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} n-s & s \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{W}_{11} & \mathbf{W}_{12} \\ \hline \mathbf{W}_{21} & \mathbf{W}_{22} \end{array}\right] \end{array}.$$

Układ równań (37) , (38) można teraz przedstawić w postaci

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^{*}}{\partial \omega}\right) - \mathbf{W}_{11}^{T}\frac{\partial T^{*}}{\partial p} - \mathbf{W}_{21}^{T}\frac{\partial T^{*}}{\partial r} + \mathbf{W}_{11}^{T}\frac{\partial V}{\partial p} + \mathbf{W}_{21}^{T}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial F^{*}}{\partial \omega} +$$

$$(42)\qquad + \mathbf{W}_{11}^{T}\Gamma_{11}\frac{\partial T^{*}}{\partial \omega} + \mathbf{W}_{11}^{T}\Gamma_{12}\frac{\partial T^{*}}{\partial \pi_2} + \mathbf{W}_{21}^{T}\Gamma_{21}\frac{\partial T^{*}}{\partial \omega} + \mathbf{W}_{21}^{T}\Gamma_{22}\frac{\partial T^{*}}{\partial \pi_2} = 0,$$

$$(43)\qquad \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{W}_{11}\boldsymbol{\omega},$$

$$(44)\qquad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{W}_{21}\boldsymbol{\omega},$$

przy czym

$$\Gamma = \begin{array}{c} \\ m \\ n-m \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} n-s & s \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \hline \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{array}\right] \end{array} = \left[\begin{array}{c|c} \dfrac{d\mathbf{U}_{11}^{T}}{dt} - \dfrac{\partial(\dot{q}^{T}\mathbf{D}^{*T})}{\partial p} & \dfrac{d\mathbf{U}_{21}^{T}}{dt} - \dfrac{\partial(\dot{q}^{T}\mathbf{D}^{T})}{\partial p} \\ \hline \dfrac{d\mathbf{U}_{12}^{T}}{dt} - \dfrac{\partial(\dot{q}^{T}\mathbf{D}^{*T})}{\partial r} & \dfrac{d\mathbf{U}_{22}^{T}}{dt} - \dfrac{\partial(\dot{q}^{T}\mathbf{D}^{T})}{\partial r} \end{array}\right].$$

Jeśli równania (42) i (43) dadzą się odseparować od równania (44), to układ równań (42) , (43) wyznaczy ruch rozpatrywanego układu mechanicznego w przestrzeni $E^{n+m-s} = (\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega})$. Jest to możliwe, jeśli równania (42) i (43) nie zależą jawnie od $\mathbf{r}$. Istnieje więc w tym przypadku możliwość takiego ruchu, w którym $\mathbf{r}$ zmienia się w czasie, a $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$ oraz $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0$ pozostają stałe.

Definicja 1

Współrzędne uogólnione $\mathbf{r}$ będziemy nazywać cyklicznymi , jeśli nie występują jawnie w równaniach (42) i (43) . Pozostałe współrzędne uogólnione $\mathbf{p}$ będziemy nazywać pozycyjnymi.

Z postaci równania (43) wynika, że warunkiem koniecznym odseparowania równań (42), (43) od (44) jest niezależność macierzy $\mathbf{W}_{11}$ od wektora $\mathbf{r}$ współrzędnych cyklicznych, tj.

(45) $$\mathbf{W}_{11} = \mathbf{W}_{11}(\mathbf{p}).$$

Definicja 2.

Ruchem ustalonym układu o energiach (10), (11), dysypacji (12) z więzami (9) nazywać będziemy taki ruch, w którym m współrzędnych pozycyjnych $\mathbf{p}$ i n-s quasiprędkości $\boldsymbol{\omega}$ zachowuje stałe wartości:

(46) $$\mathbf{p}\big|_o = \mathbf{p}_o = [\mathrm{const}];$$

(47) $$\dot{\boldsymbol{\pi}}_1\big|_o = \boldsymbol{\omega}\big|_o = \boldsymbol{\omega}_o = [\mathrm{const}];$$

W dalszym ciągu wskaźnik "o" będzie oznaczał wartość funkcji w punkcie, w którym $\mathbf{p}=\mathbf{p}_o$, $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_o$, $\dot{\mathbf{p}}=0$.
Z przekształcenia prędkości uogólnionych na quasiprędkości (19) mamy

(48) $$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{U}_{11}(\mathbf{p},\mathbf{r})\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{U}_{12}(\mathbf{p},\mathbf{r})\dot{\mathbf{r}};$$

(49) $$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{U}_{21}(\mathbf{p},\mathbf{r})\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{U}_{22}(\mathbf{p},\mathbf{r})\dot{\mathbf{r}},$$

a z przekształcenia odwrotnego (21)

(50) $$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{W}_{11}(\mathbf{p},\mathbf{r})\boldsymbol{\omega};$$

(51) $$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{W}_{21}(\mathbf{p},\mathbf{r})\boldsymbol{\omega}.$$

W ruchu ustalonym (46), (47) zależności (48), (49), (50), (51) przybiorą postać:

(52) $$\boldsymbol{\omega}_o = \mathbf{U}_{12}(\mathbf{p}_o,\mathbf{r}|_o)\,\dot{\mathbf{r}}|_o = \mathbf{U}_{12o}\dot{\mathbf{r}}_o,$$

(53) $$0 = \mathbf{U}_{22}(\mathbf{p}_0, \mathbf{r}|_0)\, \dot{\mathbf{r}}|_0 = \mathbf{U}_{220}\dot{\mathbf{r}}_0 \;;$$

oraz

(54) $$0 = \mathbf{W}_{11}(\mathbf{p}_0, \mathbf{r}|_0)\, \boldsymbol{\omega}_0 = \mathbf{W}_{110}\boldsymbol{\omega}_0 \;;$$

(55) $$\dot{\mathbf{r}}|_0 = \mathbf{W}_{21}(\mathbf{p}_0, \mathbf{r}|_0)\, \boldsymbol{\omega}_0 = \mathbf{W}_{210}\boldsymbol{\omega}_0 .$$

Wektory $\mathbf{r}|_0, \dot{\mathbf{r}}|_0$ i macierze $\mathbf{U}_{120}, \mathbf{U}_{220}, \mathbf{W}_{110}, \mathbf{W}_{210}$ w ogólnym przypadku są funkcjami zmiennymi w czasie.

Możliwość istnienia ruchu ustalonego (46) , (47) , a zatem rozsprzężenia równań (42) i (43) rozpatrzymy w przypadku układu o energii kinetycznej w postaci

(56) $$T = \frac{1}{2}\langle \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \rangle \;;$$

gdzie $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ - macierz nxn , ($\langle \cdot , \cdot \rangle$ - oznaczenie iloczynu skalarnego) , energii potencjalnej w postaci

(57) $$V = V(\mathbf{q})$$

oraz funkcji Rayleigh`a w postaci

(58) $$F = \frac{1}{2}\langle \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \rangle ,$$

gdzie $\mathbf{H} = \mathbf{H}^T$ - macierz nxn.
Przy pomocy zależności (21) dokonamy w (56) , (57) zamiany prędkości uogólnionych na quasiprędkości:

(59) $$T(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = T^*(\mathbf{q},\dot{\boldsymbol{\pi}}) = \frac{1}{2}\langle \dot{\boldsymbol{\pi}}, \mathbf{W}^T\mathbf{A}\mathbf{W}\,\dot{\boldsymbol{\pi}} \rangle = \frac{1}{2}\langle \dot{\boldsymbol{\pi}}, \mathbf{B}\,\dot{\boldsymbol{\pi}} \rangle = \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{B}_{11}\boldsymbol{\omega} \rangle ,$$

gdzie

(60) $$\mathbf{B} = \mathbf{B}^T = \mathbf{W}^T\mathbf{A}\mathbf{W} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} n-s & s \end{array} \\ n & \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \end{array}\right] \end{array} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} n-s & s \end{array} \\ \begin{array}{c} n-s \\ s \end{array} & \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \hline \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{array}\right] \end{array} ,$$

(61) $$F(q,\dot{q}) = F^{*}(q,\omega) = \frac{1}{2}\langle \dot{\pi}, W^{T}HW\dot{\pi}\rangle = \frac{1}{2}\langle \dot{\pi}, Q\dot{\pi}\rangle = $$

$$= \frac{1}{2}\langle \omega, Q_{11}\omega\rangle ,$$

a

(62) $$Q = Q^{T} = W^{T}HW = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} n-s & s \end{array} \\ \begin{array}{c} n-s \\ s \end{array} & \left[\begin{array}{c|c} Q_{11} & Q_{12} \\ \hline Q_{21} & Q_{22} \end{array}\right] \end{array}$$

Pochodna cząstkowa wektora energii kinetycznej T^{*} względem wektora quasiprędkości będzie miała postać następującą:

(63) $$\frac{\partial T^{*}}{\partial \dot{\pi}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T^{*}}{\partial \omega} \\ \frac{\partial T^{*}}{\partial \dot{\pi}_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}\omega \\ B_{21}\omega \end{bmatrix} .$$

Funkcje (57) , (59) i (61) podstawimy do równań (42) , (43)

(64) $$\frac{d}{dt}\left(B_{11}\omega\right) - \frac{1}{2}W_{11}^{T}\frac{\partial}{\partial p}\langle \omega, B_{11}\omega\rangle - \frac{1}{2}W_{21}^{T}\frac{\partial}{\partial r}\langle \omega, B_{11}\omega\rangle +$$
$$+ W_{11}^{T}\frac{\partial V}{\partial p} + W_{21}^{T}\frac{\partial V}{\partial r} + Q_{11}\omega + W_{11}^{T}\Gamma_{11}B_{11}\omega + W_{11}^{T}\Gamma_{12}B_{21}\omega +$$
$$+ W_{21}^{T}\Gamma_{21}B_{11}\omega + W_{21}^{T}\Gamma_{22}B_{21}\omega = 0,$$

(65) $$\dot{p} = W_{11}\omega .$$

Załóżmy, że spełniony jest warunek (45) , tzn.

$$W_{11} = W_{11}(p)$$

oraz, że

(66) $$B_{11} = B_{11}(p) ,$$

(67) $$Q_{11} = Q_{11}(p) ,$$

(68) $$V = V(p) ,$$

(69) $$W_{1}^{T}\Gamma \quad B_{1} = K(p,\omega) .$$

Jeżeli warunki (45), (66), (67), (68), (69) są spełnione, to współrzędne r są cykliczne, a współrzędne p - pozycyjne. Należy przy tym zauważyć, że spełnienie tych warunków zależy nie tylko od własności układu, lecz także od wyboru dodatkowych n-s quasiprędkości, czyli macierzy $D^*(q)$ w przekształceniu (19). Powyższe warunki umożliwiają istnienie dodatkowych postaci ruchu ustalonego układu nieholonomicznego. Równania (64) i (65) po wykorzystaniu (45), (66), (67), (68), (69) przybiorą postać:

$$\dot{\omega} = -B_{11}^{-1}\frac{dB_{11}}{dt}\omega + \frac{1}{2}B_{11}^{-1}W_{11}^{T}\frac{\partial}{\partial p}\langle\omega, B_{11}\omega\rangle - B_{11}^{-1}W_{11}^{T}\frac{\partial V}{\partial p} - \tag{70}$$
$$- B_{11}^{-1}Q_{11}\omega - B_{11}^{-1}W_{1}^{T}\Gamma B_{1}\omega,$$

$$\dot{p} = W_{11}\omega. \tag{71}$$

Ważną cechą ruchu ustalonego (46), (47) jest stałość energii kinetycznej, potencjalnej i funkcji Rayleigh`a:

$$T|_0 = \frac{1}{2}\langle\dot{q}, A(q)\dot{q}\rangle|_0 \quad = \frac{1}{2}\langle\omega, B_{11}(p)\omega\rangle|_0 \quad = \tag{72}$$
$$= \frac{1}{2}\langle\omega_0, B_{11}(p_0)\omega_0\rangle \quad = \text{const};$$

$$V|_0 = V(p)|_0 \quad = V(p_0) \quad = \text{const}; \tag{73}$$

$$F|_0 = \frac{1}{2}\langle\dot{q}, H(q)\dot{q}\rangle \quad = \frac{1}{2}\langle\omega, Q_{11}(p)\omega\rangle|_0 \quad = \tag{74}$$
$$= \frac{1}{2}\langle\omega_0, Q_{11}(p_0)\omega_0\rangle \quad = \text{const}.$$

Ponieważ w rozpatrywanym układzie spełniona jest zależność

$$\frac{d(T + V)}{dt} = -2F,$$

więc w ruchu ustalonym funkcja Rayleigh`a zeruje się. Można pokazać, że aby funkcja Rayleigh'a w ruchu ustalonym zerowała się, musi być spełniony warunek

(75) $$W_{210}^T H_{220} W_{210} = 0 ,$$

gdzie

(76) $$H = \begin{array}{c} \\ m \\ n-m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} m & n-m \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} H_{11} & H_{12} \\ \hline H_{21} & H_{22} \end{array}\right] \end{array} .$$

Warunek (75) jest spełniony na przykład, jeśli

(77) $$H_{220} = 0 .$$

Równania (70) , (71) określają ruch punktu reprezentującego w przestrzeni (p, ω) . Jeśli wyznaczylibyśmy p i ω z układu równań (70) , (71) i wstawilibyśmy do (44), otrzymalibyśmy równanie różniczkowe określające wektor współrzędnych cyklicznych:

(78) $$\dot{r} = W_{21}(p, r)\, \omega \quad .$$

Równania ruchu ustalonego otrzymamy wstawiając (46) , (47) do (70) , (71) /zakładamy spełnienie założeń (45) , (66) , (67) , (68) , (69) , (77) /

(79) $$W_{110}\, \omega_0 = 0 ;$$

$$W_{110}^T \frac{\partial}{\partial p} \left[V - \frac{1}{2} \langle \omega_0 , B_{11} \omega_0 \rangle \right] \Big|_0$$

(80) $$- W_{10}^T \frac{\partial}{\partial q} \langle \omega_0 , W_{210}^T U_2^T B_{10} \omega_0 \rangle \Big|_0 +$$

$$+ W_{10}^T \frac{\partial (U^T B_{10} \omega_0)}{\partial r^T} \Big|_0 W_{210}\, \omega_0 = 0 .$$

Jeśli w rozpatrywanym układzie zachodzi ponadto

(81) $$- W_{210}^T \frac{\partial}{\partial r} \langle \omega_0 , W_{210}^T U_2^T B_{10} \omega_0 \rangle \Big|_0 + W_{10}^T \frac{\partial (U^T B_{10} \omega_0)}{\partial r^T} \Big|_0 W_{210} \omega_0 = 0 ,$$

to równania ruchu ustalonego przybiorą postać:

(82) $$W_{110}\,\omega_0 = 0 ;$$

(83) $$W_{110}^{T} \left.\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right|_0 = 0 ,$$

gdzie

(84) $$\begin{aligned}\Phi &= V - \tfrac{1}{2}\langle \omega_0 , B_{11}\omega_0\rangle - \langle \omega_0 , W_{210}^{T} U_2^{T} B_{10}\omega_0\rangle = \\ &= V - \langle \omega_0 , \left[\tfrac{1}{2} B_{11} + W_{210}^{T} U_2^{T} B_{10}\right]\omega_0\rangle .\end{aligned}$$

Równania (79) , (8o) wyznaczają w przestrzeni (p,ω) punkt (p_0,ω_0) . Jeśli są wśród nich równania zależne od siebie, to w przestrzeni (p,ω) istnieje rozmaitość ruchu ustalonego. Rozmaitość taka jest co najmniej jednowymiarowa, gdyż, jeśli równanie (80) pomnożyć lewostronnie przez ω_0^{T}, to będzie ono równe zero tożsamościowo.

2. Określenie stateczności rozmaitości ruchu ustalonego na podstawie pierwszego przybliżenia równań ruchu.

Dokonamy linearyzacji równań (70) , (71) w nieskończenie małym otoczeniu rozmaitości ruchu ustalonego (79) , (80):

(85) $$p = p_0 + \Delta p ,$$

(86) $$\omega = \omega_0 + \Delta\omega .$$

Zakładamy więc, że punkt (p_0 , ω_0) jest punktem rozmaitości ruchu ustalonego (79) , (80) . Po podstawieniu (85) , (86) do (79) , (80) i odrzuceniu małych wyższych rzędów oraz uwzględnieniu równań ruchu ustalonego otrzymany układ równań różniczkowych liniowych ze stałą macierzą G :

(87) $$\dot{x} = Gx,$$

gdzie

$$\text{(88)} \qquad x = \begin{bmatrix} \Delta p \\ \Delta\omega \end{bmatrix} \qquad\qquad x = \left[x_1, \ldots, x_{m+n-s}\right]^T ,$$

$$\text{(89)} \qquad G = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} m & n-s \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n-s \end{array} & \left[\begin{array}{c:c} G_{11} & G_{12} \\ \hdashline G_{21} & G_{22} \end{array}\right] \end{array}$$

Odpowiednie bloki macierzy G mają postać następującą:

$$\text{(90)} \qquad G_{11} = \left.\frac{\partial(W_{11}\omega_0)}{\partial p^T}\right|_0 ;$$

$$\text{(91)} \qquad G_{12} = W_{110} ,$$

$$\text{(92)} \qquad G_{21} = -\frac{\partial}{\partial p^T}\left[B_{11}^{-1} W_{11}^T \frac{\partial \Phi}{\partial p}\right]_0 - B_{110}^{-1} \left.\frac{\partial(B_{11}\omega_0)}{\partial p^T}\right|_0 \left.\frac{\partial(W_{11}\omega_0)}{\partial p^T}\right|_0 - B_{110}^{-1} \left.\frac{\partial(Q_{11}\omega_0)}{\partial p^T}\right|_0 -$$

$$- B_{110}^{-1} W_{10}^T \left[\left.\frac{\partial(U^T B_{10}\omega_0)}{\partial q^T}\right|_0 - \left.\frac{\partial(U^T B_{10}\omega_0)^T}{\partial q}\right|_0\right] \left.\frac{\partial(W_1\omega_0)}{\partial p^T}\right|_0 -$$

$$- \frac{\partial}{\partial p^T}\left[B_{11}^{-1} W_1^T \frac{\partial(U^T B_{10}\omega_0)}{\partial r^T} W_{210}\omega_0 - B_{11}^{-1} W_{21}^T \frac{\partial\langle \omega_0 , W_{210}^T U_2^T B_{10}\omega_0\rangle}{\partial r}\right]\Bigg|_0 -$$

$$- B_{110}^{-1} W_{10}^T \left[\left.\frac{\partial U^T}{\partial r}\right|_0 \bullet W_{210}\omega_0 - \left.\frac{\partial(U_2 W_{210}\omega_0)^T}{\partial q}\right|_0\right] \left.\frac{\partial(B_1\omega_0)}{\partial p^T}\right|_0 ,$$

$$\text{(93)} \qquad G_{22} = B_{110}^{-1} W_{110}^T \left.\frac{\partial(\omega_0^T B_{11})}{\partial p}\right|_0 - B_{110}^{-1} \left.\frac{\partial(B_{11}\omega_0)}{\partial p^T}\right|_0 W_{110} - B_{110}^{-1} Q_{110} -$$

$$- B_{11}^{-1} W_{10}^T \left[\frac{\partial(U^T B_{10}\omega_0)}{\partial q^T} - \frac{\partial(U^T B_{10}\omega_0)^T}{\partial q}\right] W_{10} -$$

$$- B_{110}^{-1} W_{10}^T \left[\left.\frac{\partial U^T}{\partial r}\right|_0 \bullet W_{210}\omega_0 - \left.\frac{\partial(U_2 W_{210}\omega_0)^T}{\partial q}\right|_0\right] B_{10} ,$$

przy czym wprowadzono oznaczenie:

$$\text{(94)} \qquad \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial U^T}{\partial r_k} \dot{r}_k \Big|_0 = \frac{\partial U^T}{\partial r} \bullet \dot{r}\Big|_0 = \frac{\partial U^T}{\partial r} \bullet (W_{210}\omega_0) = \frac{\partial U^T}{\partial r} \bullet W_{210}\omega_0 .$$

Wprowadźmy dodatkowe oznaczenia dogodne do obliczeń:

(95) $$\alpha_1 = B_{11}\omega_0 \, , \quad \beta_1 = u_{11}^T B_{110}\omega_0 = u_{11}^T \alpha_{10} \, ,$$

$$a = \langle \omega_0 \, , \, B_{11}\omega_0 \rangle = \langle \omega_0 \, , \, \alpha_1 \rangle \, ,$$

$$\alpha_2 = B_{21}\omega_0 \, , \quad \beta_2 = u_{12}^T B_{110}\omega_0 = u_{12}^T \alpha_{10} \, ,$$

$$b = \langle \omega_0 \, , \, w_{210}^T u_{12}^T B_{110}\omega_0 \rangle = \langle \alpha_{40} , \beta_2 \rangle \, ,$$

$$\alpha_3 = W_{11}\omega_0 \, , \quad \beta_3 = u_{21}^T B_{210}\omega_0 = u_{21}^T \alpha_{20} \, ,$$

$$c = \langle \omega_0 \, , \, w_{210}^T u_{22}^T B_{210}\omega_0 \rangle = \langle \alpha_{40} , \beta_4 \rangle \, ,$$

$$\alpha_4 = W_{21}\omega_0 \, , \quad \beta_4 = u_{22}^T B_{210}\omega_0 = u_{22}^T \alpha_{20} \, ,$$

$$\alpha_5 = Q_{11}\omega_0 \, , \quad \beta_5 = u_{12} W_{210}\omega_0 = u_{12} \alpha_{40} \, ,$$

$$\beta_6 = u_{22} W_{210}\omega_0 = u_{22}\alpha_{40} \, ,$$

$$M = B_{11}^{-1} W_{11}^T \, , \qquad N = B_{11}^{-1} W_{21}^T \, .$$

Równania ruchu ustalonego (79) , (80) z oznaczeniami (95) będą miały postać:

(96) $$\alpha_{30} = 0 \, ,$$

(97) $$W_{110}^T \frac{\partial}{\partial p} \left[V - \frac{1}{2} a - b - c \right] \bigg|_0 + W_{110}^T \frac{\partial(\beta_1 + \beta_3)}{\partial r^T} \bigg|_0 \alpha_{40} +$$

$$+ W_{210}^T \left[\frac{\partial(\beta_2 + \beta_4)}{\partial r^T} \bigg|_0 - \frac{\partial(\beta_2 + \beta_4)^T}{\partial r} \bigg|_0 \right] \alpha_{40} = 0 \, .$$

Jeśli ponadto spełniony jest warunek

(98) $$\mathbf{W}_{110}^{T} \frac{\partial(\beta_1+\beta_3)}{\partial \mathbf{r}^T}\Big|_0 \alpha_{40} + \mathbf{W}_{210}^{T}\left[\frac{\partial(\beta_2+\beta_4)}{\partial \mathbf{r}^T}\Big|_0 - \frac{\partial(\beta_2+\beta_4)^T}{\partial \mathbf{r}}\Big|_0\right]\alpha_{40} = 0,$$

to równania ruchu ustalonego będą miały postać:

(99) $$\alpha_{30} = 0 ;$$

(100) $$\mathbf{W}_{110}^{T} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{p}}\Big|_0 = 0 ;$$

gdzie

(101) $$\Phi = V - \frac{1}{2} a - b - c ;$$

Bloki macierzy $\mathbf{G}$ wyrażają się wzorami:

(102) $$\mathbf{G}_{11} = \frac{\partial \alpha_3}{\partial \mathbf{p}^T}\Big|_0 ,$$

(103) $$\mathbf{G}_{12} = \mathbf{W}_{110} ,$$

(104) $$\begin{aligned} \mathbf{G}_{21} = {} & \frac{1}{2} \mathbf{M}_0 \frac{\partial^2 a}{\partial \mathbf{p}^2}\Big|_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^T}\left[\mathbf{M} \frac{\partial a}{\partial \mathbf{p}}\Big|_0\right]\Big|_0 - \mathbf{B}_{110}^{-1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \mathbf{p}^T}\Big|_0 \frac{\partial \alpha_3}{\partial \mathbf{p}^T}\Big|_0 - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^T}\left(\mathbf{M}\frac{\partial V}{\partial \mathbf{p}}\right)\Big|_0 - \\ & - \mathbf{B}_{110}^{-1} \frac{\partial \alpha_5}{\partial \mathbf{p}^T}\Big|_0 - \mathbf{M}_0 \frac{\partial(\beta_1+\beta_3)}{\partial \mathbf{p}^T}\Big|_0 \frac{\partial \alpha_3}{\partial \mathbf{p}^T}\Big|_0 - \mathbf{N}_0 \frac{\partial(\beta_2+\beta_4)}{\partial \mathbf{p}^T}\Big|_0 \frac{\partial \alpha_3}{\partial \mathbf{p}^T}\Big|_0 - \\ & - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^T}\left[\left(\mathbf{M} \frac{\partial(\beta_1+\beta_3)}{\partial \mathbf{r}^T}\Big|_0 + \mathbf{N} \frac{\partial(\beta_2+\beta_4)}{\partial \mathbf{r}^T}\Big|_0\right)\alpha_{40}\right]\Big|_0 - \\ & - \mathbf{M}_0 \frac{\partial(\beta_1+\beta_3)}{\partial \mathbf{r}^T}\Big|_0 \frac{\partial \alpha_4}{\partial \mathbf{p}^T}\Big|_0 - \mathbf{N}_0 \frac{\partial(\beta_2+\beta_4)}{\partial \mathbf{r}^T}\Big|_0 \frac{\partial \alpha_4}{\partial \mathbf{p}^T}\Big|_0 - \\ & - \mathbf{M}_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^T}\left[\frac{\partial(\beta_1+\beta_3)}{\partial \mathbf{r}^T} \alpha_{40}\right]\Big|_0 - \mathbf{N}_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^T}\left[\frac{\partial(\beta_2+\beta_4)}{\partial \mathbf{r}^T} \alpha_{40}\right]\Big|_0 - \\ & - \mathbf{M}_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^T}\left[\left(\frac{\partial \mathbf{U}_{11}^T}{\partial \mathbf{r}}\Big|_0 \bullet \alpha_{40}\right)\alpha_1 + \left(\frac{\partial \mathbf{U}_{21}^T}{\partial \mathbf{r}}\Big|_0 \bullet \alpha_{40}\right)\alpha_2\right]\Big|_0 - \\ & - \mathbf{N}_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^T}\left[\left(\frac{\partial \mathbf{U}_{12}^T}{\partial \mathbf{r}}\Big|_0 \bullet \alpha_{40}\right)\alpha_1 + \left(\frac{\partial \mathbf{U}_{22}^T}{\partial \mathbf{r}}\Big|_0 \bullet \alpha_{40}\right)\alpha_2\right]\Big|_0 + \\ & + \mathbf{M}_0 \frac{\partial(\beta_1+\beta_3)^T}{\partial \mathbf{p}}\Big|_0 \frac{\partial \alpha_3}{\partial \mathbf{p}^T}\Big|_0 + \mathbf{N}_0 \frac{\partial(\beta_1+\beta_3)^T}{\partial \mathbf{r}}\Big|_0 \frac{\partial \alpha_3}{\partial \mathbf{p}^T}\Big|_0 + \\ & + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^T}\left[\mathbf{M} \frac{\partial(b+c)}{\partial \mathbf{p}}\Big|_0\right]\Big|_0 + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^T}\left[\mathbf{N} \frac{\partial(b+c)}{\partial \mathbf{r}}\Big|_0\right]\Big|_0 + \end{aligned}$$

$$+ M_0 \frac{\partial(\beta_2+\beta_4)^T}{\partial p}\Big|_0 \frac{\partial \alpha_4}{\partial p^T}\Big|_0 + N_0 \frac{\partial(\beta_2+\beta_4)}{\partial r}\Big|_0 \frac{\partial \alpha_4}{\partial p^T}\Big|_0 +$$

$$+ M_0 \frac{\partial^2(b+c)}{\partial p^2}\Big|_0 + N_0 \frac{\partial^2(b+c)}{\partial p^T \partial r}\Big|_0 -$$

$$- M_0\left(\frac{\partial \beta_5^T}{\partial p}\Big|_0 \frac{\partial \alpha_1}{\partial p^T}\Big|_0 + \frac{\partial \beta_6^T}{\partial p}\Big|_0 \frac{\partial \alpha_2}{\partial p^T}\Big|_0\right) -$$

$$- N_0\left(\frac{\partial \beta_5^T}{\partial r}\Big|_0 \frac{\partial \alpha_1}{\partial p^T}\Big|_0 + \frac{\partial \beta_6^T}{\partial r}\Big|_0 \frac{\partial \alpha_2}{\partial p^T}\Big|_0\right),$$

(105) $$G_{22} = M_0 \frac{\partial \alpha_1^T}{\partial p}\Big|_0 - B_{110}^{-1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial p^T}\Big|_0 W_{110} - B_{110}^{-1} Q_{110} -$$

$$- M_0 \frac{\partial(\beta_1+\beta_3)}{\partial p^T}\Big|_0 W_{110} - N_0 \frac{\partial(\beta_2+\beta_4)}{\partial p^T}\Big|_0 W_{110} - M_0 \frac{\partial(\beta_1+\beta_3)}{\partial r^T}\Big|_0 W_{210} -$$

$$- N_0 \frac{\partial(\beta_2+\beta_4)}{\partial r^T}\Big|_0 W_{210} - M_0\left[\frac{\partial(U_1^T B_{10})}{\partial r^T}\Big|_0 \bullet \alpha_{40}\right] - N_0\left[\frac{\partial(U_2^T B_{10})}{\partial r^T}\Big|_0 \bullet \alpha_{40}\right] +$$

$$+ M_0 \frac{\partial(\beta_1+\beta_3)^T}{\partial p}\Big|_0 W_{110} + N_0 \frac{\partial(\beta_1+\beta_3)^T}{\partial r}\Big|_0 W_{110} + M_0 \frac{\partial(\beta_2+\beta_4)^T}{\partial p}\Big|_0 W_{210} +$$

$$+ N_0 \frac{\partial(\beta_2+\beta_4)^T}{\partial r}\Big|_0 W_{210} + M \frac{\partial \beta_5^T}{\partial p}\Big|_0 B_{110} + N_0 \frac{\partial \beta_5^T}{\partial r}\Big|_0 B_{110} +$$

$$+ M_0 \frac{\partial \beta_6^T}{\partial p}\Big|_0 B_{210} + N_0 \frac{\partial \beta_6^T}{\partial r}\Big|_0 B_{210}.$$

Zgodnie z twierdzeniem o asymptotycznej stateczności rozwiązań układu równań różniczkowych liniowych ze stałą macierzą G rozwiązania układu (87) są asymptotycznie stateczne wtedy i tylko wtedy, gdy części rzeczywiste pierwiastków równania charakterystycznego

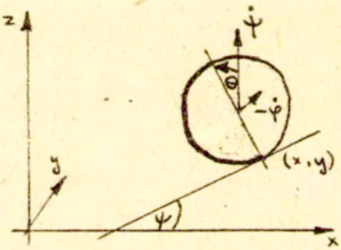
(106) $$\det(G - \lambda E) = 0$$

są ujemne. Każdemu punktowi rozmaitości ruchu ustalonego (79), (80) odpowiada zerowe rozwiązanie układu (87), przy czym macierz G zależy od wyboru tego punktu. Jednakże w przypadku układów nieholonomicznych zamiast izolowanych punktów należy badać asymptotyczną stateczność całej rozmaitości ruchu ustalonego. Jeśli więc rozmaitość ruchu ustalonego jest k-wymiarowa, to rów-

nanie (106) ma k zerowych pierwiastków, które nie wpływają na stateczność badanej rozmaitości.
Stąd rozmaitość ruchu ustalonego (79), (80) jest asymptotycznie stateczna wtedy i tylko wtedy, gdy równanie (106) ma $m+n-s-k$ pierwiastków o częściach rzeczywistych ujemnych i k pierwiastków zerowych.

Przykład

Rozważymy tarczę toczącą się bez poślizgu po płaszczyźnie poziomej



Położenie tarczy wyznaczone jest przez $n=5$ współrzędnych uogólnionych:

(107) $$q = [\theta, \psi, \varphi, x, y]^T;$$

Energia kinetyczna tarczy ma postać:

(108) $$T = \frac{1}{2} \langle \dot{q}, A\dot{q} \rangle ;$$

gdzie:

$$(109)\quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A + ma^2 & 0 & 0 & -ma\cos\theta\sin\psi & ma\cos\theta\cos\psi \\ 0 & A\cos^2\theta + (C+ma^2)\sin^2\theta & -C\sin\theta & -ma\sin\theta\cos\psi & -ma\sin\theta\sin\psi \\ 0 & -C\sin\theta & C & 0 & 0 \\ -ma\cos\theta\sin\psi & -ma\sin\theta\cos\psi & 0 & m & 0 \\ ma\cos\theta\cos\psi & -ma\sin\theta\sin\psi & 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

m - masa tarczy,

a - promień tarczy,

A, C - momenty bezwładności tarczy.

W rozważanym przypadku energię potencjalną można napisać w postaci:

$$(110)\qquad V = mga\cos\theta \, .$$

Niech rozpraszanie energii będzie reprezentowane przez funkcję Reyleigh\`a:

$$(111)\qquad F = \frac{1}{2}\langle \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{H}\dot{\mathbf{q}}\rangle$$

gdzie

$$(112)\qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Na tarczę nałożone są więzy nieholonomiczne

$$(113)\qquad \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{\Theta},$$

gdzie

$$(114)\qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a\cos\Psi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a\sin\Psi & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

W macierzy $\mathbf{A}$ występują jawnie dwie współrzędne uogólnione θ i ψ, w macierzy $\mathbf{D}$ - jedna współrzędna Ψ.

Jednakże dzięki odpowiedniemu doborowi macierzy $\mathbf{D}^*$ można wykazać, że współrzędna Θ jest pozycyjna, a pozostałe - cykliczne tzn $\mathbf{p} = [\Theta]$, $\mathbf{r} = [\psi, \varphi, x, y]^T$, $(m = 1)$.

Przyjmijmy macierz $\mathbf{D}^*$ w następującej postaci:

(115)
$$\mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\Theta & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Oznaczmy przy tym

(116)
$$\boldsymbol{\omega} = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]^T.$$

Macierz przekształcenia prędkości uogólnionych na quasiprędkości przyjmie postać:

(117)
$$\mathbf{U} = \left[\begin{array}{c:c} U_{11} & U_{12}(\mathbf{p}) \\ \hdashline 0 & U_{22}(\mathbf{r}) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\Theta & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & -a\cos\psi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a\sin\psi & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Macierz odwrotna przekształcenia:

(118)
$$\mathbf{W} = \left[\begin{array}{c:c} W_{11} & 0 \\ \hdashline W_{21}(\mathbf{p},\mathbf{r}) & W_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\Theta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a\sin\Theta\cos\psi & a\cos\psi & 1 & 0 \\ 0 & a\sin\Theta\sin\psi & a\sin\psi & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Na podstawie (60) wyznaczamy macierz $\mathbf{B}_1$:

(119)
$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} B_{11}(\mathbf{p}) \\ B_{21}(\mathbf{p},\mathbf{r}) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} A + ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & A\cos^2\Theta & 0 \\ 0 & 0 & C + ma^2 \\ \hdashline -ma\cos\Theta\sin\psi & 0 & ma\cos\psi \\ ma\cos\Theta\cos\psi & 0 & ma\sin\psi \end{array}\right],$$

a na podstawie (62) macierz $\mathbf{Q}_{11}$:

$$\mathbf{Q}_{11} = \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{120}$$

Warunki (45) , (66) , (67) , (68) są spełnione. Również założenie (69) jest spełnione, gdyż

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -(C+ma^2)\omega_2\cos\theta \\ -ma^2\cos\theta(\omega_3+\omega_2\sin\theta) & 0 & -(C+ma^2)\omega_1\cos\theta - ma^2\omega_2\sin\theta \\ 0 & 0 & -ma^2\omega_2 \end{bmatrix}$$

Wobec tego rzeczywiście m=1 i wektor współrzędnych pozycyjnych jest:

$$\mathbf{p} = [\theta],$$

a cyklicznych

$$\mathbf{r} = [\psi, \varphi, x, y]^T ;$$

Ze wzorów (95) wyznaczymy wektory $\boldsymbol{\alpha}_i$ (i=1...5) i $\boldsymbol{\beta}_i$ (i=1,..6) oraz iloczyny skalarne a,b,c, i macierze **M** i **N**

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} (A+ma^2)\omega_{10} \\ A\cos^2\theta\,\omega_{20} \\ (C+ma^2)\omega_{30} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} -ma\cos\theta\sin\psi\,\omega_{10} + ma\cos\psi\,\omega_{30} \\ ma\cos\theta\cos\psi\,\omega_{10} + ma\sin\psi\,\omega_{30} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = [\omega_{10}],$$

$$\boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{bmatrix} \omega_{20} \\ \omega_{20}\sin\theta + \omega_{30} \\ \omega_{20}a\sin\theta\cos\psi + \omega_{30}a\cos\psi \\ \omega_{20}a\sin\theta\sin\psi + \omega_{30}a\sin\psi \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_5 = \begin{bmatrix} h\omega_{10} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

(121)

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \left[(A+ma^2)\omega_{10}\right], \quad \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{bmatrix} \omega_{20}A\cos^2\theta_0 - \omega_{30}((C+ma^2)\sin\theta \\ (C+ma^2)\omega_{30} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\beta_3 = \left[0\right], \quad \beta_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ ma^2\left[\omega_{10}\cos\theta_0 \sin(\psi_0-\psi) - \omega_{30}\cos(\psi_0-\psi)\right] \\ -ma\cos\theta_0\sin\psi_0\,\omega_{10} + ma\cos\psi_0\,\omega_{30} \\ ma\cos\theta_0\cos\psi_0\,\omega_{10} + ma\sin\psi_0\,\omega_{30} \end{bmatrix},$$

$$\beta_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{20} \\ \omega_{20}(\sin\theta_0 - \sin\theta) + \omega_{30} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\beta_6 = \begin{bmatrix} \omega_{20}a\sin\theta_0\left(\cos\psi_0 - \cos\psi\right) + \omega_{30}a\left(\cos\psi_0 - \cos\psi\right) \\ \omega_{20}a\sin\theta_0\left(\sin\psi_0 - \sin\psi\right) + \omega_{30}a\left(\sin\psi_0 - \sin\psi\right) \end{bmatrix}$$

$$a = \left(A + ma^2\right)\omega_{10}^2 + A\cos^2\theta\,\omega_{20}^2 + \left(C + ma^2\right)\omega_{30}^2 \quad ;$$

$$b = A\cos^2\theta_0\,\omega_{20}^2 + \left(C + ma^2\right)\omega_{20}\,\omega_{30}\left(\sin\theta_0 - \sin\theta\right) + \left(C + ma^2\right)\omega_{30}^2 ,$$

$$\begin{aligned} c = ma^2\Big\{ & \omega_{10}\,\omega_{20}\sin\theta_0\cos\theta_0\sin\left(\psi_0 - \psi\right) + \\ & + \omega_{20}\,\omega_{30}\sin\theta_0\left[1 - \cos(\psi_0 - \psi)\right] + \\ & + \omega_{10}\,\omega_{30}\cos\theta_0\sin\left(\psi_0 - \psi\right) + \\ & + \omega_{30}^2\left[1 - \cos(\psi_0 - \psi)\right]\Big\}. \end{aligned}$$

$$M = \begin{bmatrix} \dfrac{A}{A + ma^2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{A\cos^2\theta} & \dfrac{\sin\theta}{A\cos^2\theta} & \dfrac{a\sin\theta\cos\psi}{A\cos^2\theta} & \dfrac{a\sin\theta\sin\psi}{A\cos^2\theta} \\ 0 & \dfrac{1}{C + ma^2} & \dfrac{a\cos\psi}{C + ma^2} & \dfrac{a\sin\psi}{C + ma^2} \end{bmatrix}$$

W rozpatrywanym przykładzie spełniony jest warunek (98), więc równania ruchu ustalowego mają postać (99) , (100) , gdzie

(122)
$$\begin{aligned}\Phi = {} & mga\cos\theta - \tfrac{1}{2}(A+ma^2)\omega_{10}^2 - \tfrac{1}{2}A\cos^2\theta\,\omega_{20}^2 - \tfrac{3}{2}(C+ma^2)\omega_{30}^2 - \\ & - A\cos^2\theta_0\,\omega_{20}^2 - (C+ma^2)\omega_{20}\omega_{30}(\sin\theta_0 - \sin\theta) - \\ & - ma^2\{\omega_{10}\omega_{20}\sin\theta_0\cos\theta_0\sin(\psi_0-\psi) + \\ & \quad + \omega_{20}\omega_{30}\sin\theta_0[1-\cos(\psi_0-\psi)] + \\ & \quad + \omega_{10}\omega_{30}\cos\theta_0\sin(\psi_0-\psi) + \\ & \quad + \omega_{30}^2[1-\cos(\psi_0-\psi)]\}.\end{aligned}$$

Układowi równań wektorowych (99) , (100) odpowiadają 4 równania algebraiczne, z czego tylko dwa nie są tożsamościowo równe zero. Otrzymujemy więc następujące równania ruchu ustalonego:

(123)
$$\omega_{10} = 0 ;$$

(124)
$$- mga\sin\theta_0 + \tfrac{1}{2}A\sin 2\theta_0\,\omega_{20}^2 + (C + ma^2)\,\omega_{20}\omega_{30}\cos\theta_0 = 0.$$

Wyznaczymy teraz zlinearyzowane równania ruchu w otoczeniu rozmaitości ruchu ustalonego. W tym celu wykorzystamy własności wektorów α_i (i=1...5) , β_i (i=1...6) , macierzy **U**, **W**, **M**, **N** oraz a, b i c charakterystyczne dla rozpatrywanego przykładu:

$U_{11} = [\mathrm{const}]$;	$W_{11} = [\mathrm{const}]$;
$U_{12} = U_{12}(p)$;	$W_{12} = 0$;
$U_{21} = 0$;	$W_{21} = W_{21}(p,r)$;
$U_{22} = U_{22}(r)$;	$W_{22} = [\mathrm{const}]$

$$
(125)\qquad
\begin{array}{ll}
\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1(\mathbf{p})\ ; & \boldsymbol{\beta}_1 = [\mathrm{const}]\ ; \\
\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2(\mathbf{p},\mathbf{r})\ ; & \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\beta}_2(\mathbf{p})\ ; \\
\boldsymbol{\alpha}_3 = [\mathrm{const}]; & \boldsymbol{\beta}_3 = \mathbf{0} \\
\boldsymbol{\alpha}_4 = \boldsymbol{\alpha}_4(\mathbf{p},\mathbf{r})\ ; & \boldsymbol{\beta}_4 = \boldsymbol{\beta}_4(\mathbf{r})\ ; \\
\boldsymbol{\alpha}_5 = [\mathrm{const}]; & \boldsymbol{\beta}_5 = \boldsymbol{\beta}_5(\mathbf{p})\ ; \\
 & \boldsymbol{\beta}_6 = \boldsymbol{\beta}_6(\mathbf{r})\ ;
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
a &= a(\mathbf{p})\ ; \\
b &= b(\mathbf{p})\ ; \\
c &= c(\mathbf{r})\ ; \\
\mathbf{M} &= [\mathrm{const}] \\
\mathbf{N} &= \mathbf{N}(\mathbf{p},\mathbf{r})
\end{aligned}
$$

Poszczególne bloki macierzy **G** przyjmą więc na podstawie (102 ÷ 105) następującą postać:

$$ (126)\qquad \mathbf{G}_{11} = \mathbf{0}; $$

$$ (127)\qquad \mathbf{G}_{12} = \mathbf{W}_{110}; $$

$$
(128)\qquad
\begin{aligned}
\mathbf{G}_{21} = {} & \frac{1}{2}\mathbf{M}_0 \frac{\partial^2 a}{\partial \mathbf{p}^2}\Big|_0 - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^T}\left(\mathbf{M}\frac{\partial V}{\partial \mathbf{p}}\right)\Big|_0 - \\
& - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^T}\left(\mathbf{N}\frac{\partial \boldsymbol{\beta}_4}{\partial \mathbf{r}^T}\Big|_0 \boldsymbol{\alpha}_{40}\right)\Big|_0 - \mathbf{N}_0 \frac{\partial \boldsymbol{\beta}_4}{\partial \mathbf{r}^T}\Big|_0 \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}_4}{\partial \mathbf{p}^T}\Big|_0 - \\
& - \mathbf{N}_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^T}\left[\left(\frac{\partial \mathbf{u}_{22}^T}{\partial \mathbf{r}}\Big|_0 \bullet \boldsymbol{\alpha}_{40}\right)\boldsymbol{\alpha}_2\right]\Big|_0 + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^T}\left[\mathbf{N}\frac{\partial c}{\partial \mathbf{r}}\Big|_0\right]\Big|_0 + \\
& + \mathbf{M}_0 \frac{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T}{\partial \mathbf{p}}\Big|_0 \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}_4}{\partial \mathbf{p}^T}\Big|_0 + \mathbf{N}_0 \frac{\partial \boldsymbol{\beta}_4^T}{\partial \mathbf{r}}\Big|_0 \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}_4}{\partial \mathbf{p}^T}\Big|_0 + \mathbf{M}_0 \frac{\partial^2 b}{\partial \mathbf{p}^2}\Big|_0 - \\
& - \mathbf{M}_0 \frac{\partial \boldsymbol{\beta}_5^T}{\partial \mathbf{p}}\Big|_0 \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}_1}{\partial \mathbf{p}^T}\Big|_0 - \mathbf{N}_0 \frac{\partial \boldsymbol{\beta}_6^T}{\partial \mathbf{r}}\Big|_0 \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}_2}{\partial \mathbf{p}^T}\Big|_0 ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G_{22} = {} & M_0 \frac{\partial \alpha_1^T}{\partial p}\Big|_0 - B_{110}^{-1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial p^T}\Big|_0 W_{110} - B_{110}^{-1} Q_{110} - \\
& - N_0 \frac{\partial \beta_2}{\partial p^T}\Big|_0 W_{110} - N_0 \frac{\partial \beta_4}{\partial r^T}\Big|_0 W_{210} - \\
& - N_0 \frac{\partial (u_{22}^T B_{210})}{\partial r^T}\Big|_0 \bullet \alpha_{40} + M_0 \frac{\partial \beta_2^T}{\partial p}\Big|_0 W_{210} + N_0 \frac{\partial \beta_4^T}{\partial r}\Big|_0 W_{240} + \\
& + M_0 \frac{\partial \beta_5^T}{\partial p}\Big|_0 B_{110} + N_0 \frac{\partial \beta_6^T}{\partial r}\Big|_0 B_{210} .
\end{aligned}
\tag{129}
$$

Po obliczeniach otrzymujemy /wykorzystując pierwsze z równań ruchu ustalonego $\omega_{10} = 0$ / macierz G w następującej postaci:

$$
G = \left[\begin{array}{c:c:c:c}
0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline
\begin{array}{l}\dfrac{(C+ma^2)\omega_{20}\omega_{30}\sin\theta_0}{A+ma^2} - \\ - \dfrac{A\omega_{20}^2\cos 2\theta_0 + mga\cos\theta_0}{A+ma^2}\end{array} & -\dfrac{h}{A+ma^2} & \begin{array}{l}-\dfrac{(C+ma^2)\omega_{30}\cos\theta_0}{A+ma^2} + \\ + \dfrac{A\omega_{20}\sin 2\theta_0}{A+ma^2}\end{array} & -\dfrac{(C+ma^2)\omega_{20}\cos\theta_0}{A+ma^2} \\ \hdashline
0 & \dfrac{2A\omega_{20}\sin\theta_0 + C\omega_{30}}{A\cos\theta_0} & 0 & 0 \\ \hdashline
0 & \dfrac{ma^2\omega_{20}\cos\theta_0}{C+ma^2} & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

Równanie charakterystyczne odpowiadające macierzy G ma postać:

$$
\lambda^2(\lambda^2 + a_1\lambda + a_0) = 0,
$$

gdzie

$$
a_1 = \frac{h}{A+ma^2},
$$

$$
\begin{aligned}
a_0 = {} & \frac{1}{A+ma^2}\Big\{A\omega_{20}^2(1+2\sin^2\theta_0) + ma^2\cos^2\theta_0\,\omega_{20}^2 + (3C+ma^2)\omega_{20}\omega_{30}\sin\theta_0 + \\
& + \frac{C}{A}\left(C+ma^2\right)\omega_{30}^2 - mga\cos\theta_0\Big\}.
\end{aligned}
$$

Ze względu na dwuwymiarową rozmaitość ruchu ustalonego dwa pierwiastki zerowe można odrzucić. Warunki asymptotycznej stateczności ruchu ustalonego będą miały postać nierówności:

$$h > 0,$$

$$A\omega_{20}^2(1+2\sin^2\theta_0) + ma^2\cos^2\theta_0\,\omega_{20}^2 + (3C + ma^2)\,\omega_{20}\omega_{30}\sin\theta_0 +$$

$$+ \frac{C}{A}(C + ma^2)\,\omega_{30}^2 - mga\cos\theta_0 > 0.$$

Otrzymane warunki zgodne są z wynikami otrzymanymi w [2] .

Podsumowanie.

W pracy przedstawiono próbę rozszerzenia pojęcia ruchu ustalonego dla układów mechanicznych z liniowymi więzami nieholonomicznymi. Wyprowadzone równania ruchu układu zostały zlinearyzowane w otoczeniu rozmaitości ruchu ustalonego. Otrzymano w ten sposób układ równań liniowych. Uzyskana postać macierzy tego układu równań pozwala na szybkie jej wyznaczenie dla konkretnego układu mechanicznego z zadaną energią kinetyczną, potencjalną i funkcją Rayleigh`a, którego ruch ograniczony jest danymi więzami nieholonomicznymi. Wyznaczenie macierzy układu równań liniowych jest istotne z punktu widzenia badania stateczności ruchu układu mechanicznego, gdyż o jego stateczności decyduje największa część rzeczywista wartości własnych otrzymanej macierzy. Macierz tę można również wykorzystać do optymalizacji parametrów układu z punktu widzenia stateczności ruchu.

Literatura

[1] GUTOWSKI R., Mechanika analityczna, Warszawa 1971 PWN.

[2] NEJMARK J., FUFAJEW N.A., Dynamika układów nieholonomicznych, Warszawa 1971 PWN.

[3] RUBINOWICZ W., KRÓLIKOWSKI W., Mechanika teoretyczna, Warszawa 1977 PWN.

[4] ГАУШУС Э.В., Исследование динамических систем методом точечных преобразований, Москва 1976 Наука.

[5] Карапетян А. В., Об устойчивости стационарных движений неголономных систем Чаплыгина, ПММ 1978, 42, 5.
[6] Савченко А.Я., Устойчивость стационарных движений механических систем, Киев 1977 Наукова думка.