

19 / 1980

Vu Van The, H. Stolarski

DUŻE UGIĘCIA
OBROTOWO-SYMETRYCZNEJ POWŁOKI
UDERZONEJ SZTYWNYM
OBROTOWYM CIAŁEM

P. 269



WARSZAWA 1980

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 28 maja 1980 r.

Zarejestrowana pod nr 19/1980



57154



N a p r a w a c h r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 150 egz. Ark.wyd. 1,1. Ark. druk.1,75
Oddano do drukarni w czerwcu 1980 r.
Nr zamówienia 422/0/80

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

Vu Van The
Henryk Stolarski
Zakład Teorii Konstrukcji
IPPT PAN

DUŻE UGIĘCIA OBROTOWO-SYMETRYCZNEJ POWŁOKI
UDERZONEJ SZTYWNYM, OBROTOWYM CIAŁEM

1. Wstęp

Wymagania praktyczne doprowadziły ostatnio do stałego wzrostu zainteresowania zagadnieniami dynamiki ciał i konstrukcji niesprężystych.

Stosunkowo najbardziej rozwijane są metody dynamicznej analizy sprężysto-plastycznej i sprężysto-lepko/plastycznej. W obu tych przypadkach istnieje bowiem możliwość adaptowania znanych algorytmów, opracowanych dla potrzeb analizy sprężystej. Uzyskiwane w ten sposób rozwiązania charakteryzują się wysokim stopniem ogólności i dokładności, wymagają jednak stosunkowo dużego nakładu pracy.

Sformułowanie problemów dynamicznych sztywno-plastyczności jest zupełnie odmienne. Wiąże się to z możliwością powstania stref sztywnych.

Wymaga ono pewnych, czynionych "a priori" założeń typu kinematycznego lub statycznego. W ogólności utrudnia to analizę rozpatrywanego problemu, jednakże w wielu konkretnych sytuacjach założenia takie wynikają w sposób zupełnie naturalny i pozwalają na łatwe uzyskanie rozwiązania, charakteryzującego się często wysokim stopniem dokładności. W ramach przyjętego mode-

lu sztywno-plastycznego rozwiązanie tak otrzymane jest czasami rozwiązaniem dokładnym.

Szpecially wyraźne korzyści ze stosowania modelu sztywno-plastycznego związane są z analizą geometrycznie liniową. Stąd też w tej dziedzinie istnieje już szereg rozwiązań problemów szczegółowych [1,2,3,5,6,7,9,10,13] i szereg ogólnych twierdzeń [3,15,16,17,22,23,25]. Rozwiązania te, jak również stosowane metody, mają jednak ograniczony zakres stosowalności, nie biorą bowiem pod uwagę występujących w praktyce, skończonych ugięć konstrukcji. Jednocześnie, właśnie w problemach charakteryzujących się dużymi deformacjami, stosowanie sztywno-plastycznego modelu ciała jest szpecially uzasadnione.

Mimo dodatkowych trudności jakie związane są z połączeniem sztywno-plastycznego modelu ciała i geometrycznej nieliniowości, również w zakresie analizy nieliniowej istnieje już szereg wyników [4,8,11,13,20,21,26]. Uzyskane rozwiązania wskazują, że i w tym zakresie stosowanie sztywno-plastycznego modelu ciała prowadzi do przydatnych praktycznie rozwiązań, choć z reguły są to rozwiązania przybliżone. Przede wszystkim, przybliżenie to polega na przyjmowaniu określonego typu nieliniowości, charakteryzowanego stosunkiem przewidywanych przemieszczeń do grubości powłoki. Ponadto, w ramach tak zdefiniowanego problemu nieliniowego, wprowadza się uproszczenia warunku plastyczności i - jak zwykle w sztywno-plastyczności - hipotezy kinematyczne lub statyczne, umożliwiające sformułowanie i rozwiązanie problemu.

W niniejszej pracy zostanie przedstawiona prosta metoda numeryczna szacowania dużych przemieszczeń, spowodowanych uderzeniem sztywnego, obrotowego ciała w dowolną osiowosymetryczną, sztywno-plastyczną powłokę wypukłą. W odróżnieniu od większości metod stosowanych w nieliniowej analizie, dopuszcza ona możliwość powstania dowolnie dużych przemieszczeń i nie nakłada żadnych ograniczeń na stosunek tych przemieszczeń do grubości ścianki powłoki.

Metoda ta polega na zakładaniu określonych, kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości i całkowaniu tych pól względem czasu. Przyjęto ponadto, że deformacja ma charakter lokalny, w związku z czym w rozwiązaniu nie ingeruje sposób podparcia powłoki.

W przypadku skoncentrowanych obciążeń powłok założenia te potwierdzone są w badaniach doświadczalnych [4,24].

Szczególny przypadek przedstawionego wyżej problemu rozważany był w pracy [20]. Założono tam, że uderzającym ciałem jest cylinder oraz, że uderza on w czasie kulistą o małej wyniosłości. Pierwsze z tych założeń powodowało, że strefa kontaktu ciała z powłoką nie zmieniała się w czasie, natomiast drugie umożliwiało odpowiednie uproszczenie równań i otrzymanie wyniku w zamkniętej postaci. Celem niniejszej pracy jest przedstawienie algorytmu numerycznego, pozwalającego otrzymać rozwiązanie nie obwarowane powyższymi ograniczeniami. W szczególności uwzględnia on kształt uderzającego ciała i zmienność strefy kontaktu tego ciała z powłoką.

2. Zestawienie ważniejszych oznaczeń

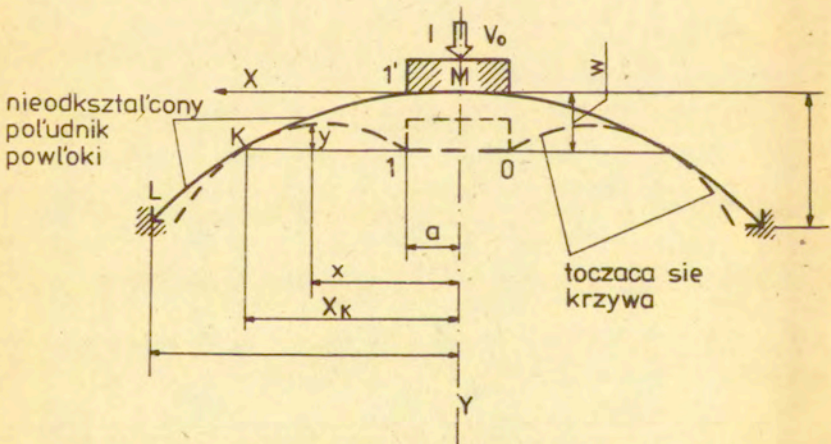
- σ_0 - granica plastyczności materiału,
- h - grubość powłoki,
- m - masa na jednostkę powierzchni powłoki,
- M - masa uderzającego ciała,
- v_0 - prędkość uderzenia,
- x, y - współrzędne punktów powłoki,
- ξ, η - współrzędne toczącej się krzywej w jej początkowym położeniu,
- W - przemieszczenie powłoki w punkcie leżącym na osi symetrii,
- \dot{W}, \ddot{W} - prędkość i przyspieszenie tego punktu,
- φ - kąt jaki styczna do aktualnego południka tworzy z osią x ,
- α - kąt jaki styczna do nieodkształconego południka tworzy z osią x ,
- ω - prędkość kątowna obrotu części plastycznej,
- $\dot{\omega}$ - przyspieszenie kątowne obrotu części plastycznej,
- x_K - współrzędna środka obrotu toczącej się krzywej,
- u, v - składowe prędkości punktów powłoki,
- a_x, a_y - składowe przyspieszenia punktów powłoki,
- $\dot{\epsilon}_\varphi, \dot{\epsilon}_\theta$ - prędkości membramowych odkształceń południkowych i równoleżnikowych,
- $\dot{\delta}_\varphi, \dot{\delta}_\theta$ - prędkości zmiany krzywizny południkowej i równoleżnikowej,

- N_φ, N_θ - południkowa i równoleżnikowa siła membranova,
 M_φ, M_θ - południkowy i równoleżnikowy moment zginający,
 $N_o = \bar{\sigma}_o h$
 $M_o = 0.25 \bar{\sigma}_o h^2$ } graniczne wartości powyższych sił.

3. Mechanizm deformacji

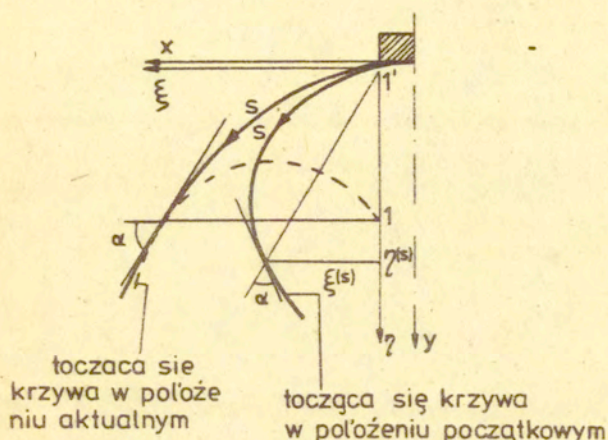
Zasada przyjmowania kinematycznie dopuszczalnego pola prędkości jest w niniejszym opracowaniu analogiczna jak w pracy [20]. Przedstawimy jednak w skrócie sposób określania tego pola oraz podstawowe równania jakie otrzymano w [20] wskazując następnie na modyfikacje, które będziemy wprowadzać w celu rozwiązania omówionego we wstępie problemu.

Rozważmy obrotowo-symetryczną powłokę, osiowo uderzoną sztywnym cylindrem. Jednostkowa masa jest równa m , jej grubość - h , natomiast granica plastyczności materiału - $\bar{\sigma}_o$. Cylinder o promieniu a i masie M uderza z prędkością v_o . Mechanizm przedstawiony w [20] jest toczeniem się pewnej szczególnej i ustalonej krzywej po nieodkształconym południku powłoki, Rys. 1. Krzywa ta opisana jest układem nieliniowych



Rys. 1. Mechanizm deformacji powłoki

równań różniczkowych, wynikającym z warunków geometrycznej zgodności, Rys. 2.



Rys. 2. Początkowe i aktualne położenie toczącej się krzywej

$$(1) \quad \begin{aligned} \xi^2 + \eta^2 &= d^2, & d &= x(s) - \sigma, \\ \xi \dot{\xi} + \eta \dot{\eta} &= d \cos \alpha, & \dot{\xi} &= \frac{d\xi}{ds}, & \dot{\eta} &= \frac{d\eta}{ds}, \\ \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 &= 1 \end{aligned}$$

W równaniach powyższych ξ i η są współrzędnymi punktów tej krzywej w układzie współrzędnych pokazanym na Rys. 2, s jest długością jej łuku natomiast d i α są znanymi funkcjami zależnymi od kształtu południka powłoki.

W szczególnym przypadku powłoki sferycznej i punktowego uderzenia krzywą tą jest koło, [20].

W zaawansowanym stadium deformacji, zgodnej z przedstawionym mechanizmem, Rys. 1, powłoka składa się ze sztywnych części O1 i KL oraz plastycznie odkształconej części 1-K. Kształt częś-

ci plastycznej jest identyczny z toczącą się krzywą, która obraca się z chwilową prędkością kątową

$$\omega = \frac{\dot{W}}{x_K - a}$$

i przyspieszeniem kątowym

$$\dot{\omega} = \dot{\omega} = \frac{\ddot{W}}{x_K - a} - \frac{\dot{W}^2}{(x_K - a)^2} \frac{dx_K}{dW}$$

przy czym W jest przemieszczeniem środka powłoki, kropka oznacza różniczkowanie po czasie natomiast x_K jest współrzędną chwilowego środka obrotu toczącej się krzywej.

Składowe liniowej prędkości i liniowego przyspieszenia w deformującej się plastycznie części są następujące

$$u = -\omega(W-y) = -\frac{\dot{W}(W-y)}{x_K - a}$$

$$v = \omega(x_K - x) = \frac{\dot{W}(x_K - x)}{x_K - a}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} a_x &= -\dot{\omega}(W-y) - \omega^2(x-a) = -\frac{\ddot{W}(W-y)}{x_K - a} + \frac{\dot{W}^2}{(x_K - a)^2} \left[\frac{dx_K}{dW}(W-y) + a - x \right] \\ a_y &= \ddot{W} - \dot{\omega}(x-a) + \omega^2(W-y) = \ddot{W} \frac{x_K - x}{x_K - a} + \frac{\dot{W}^2}{(x_K - a)^2} \left[\frac{dx_K}{dW}(r-a) + W - y \right] \end{aligned}$$

a związane z nimi prędkości odkształceń wyrazić można wzorami

$$(3a) \quad \begin{aligned} \dot{\epsilon}_\varphi &= 0 \\ \dot{\epsilon}_\theta &= \frac{y}{x} \\ \dot{\kappa}_\varphi &= 0 \quad (\text{poza pkt. 1 i K}). \\ \dot{\kappa}_\theta &= \frac{\omega \cos \varphi}{x} \end{aligned}$$

w których φ jest kątem jaki normalna do powłoki tworzy z osią powłoki.

Prędkość obrotu w pierścieniowym przegubie plastycznym wynosi $-\omega$ w punkcie K i $+\omega$ w punkcie 1.

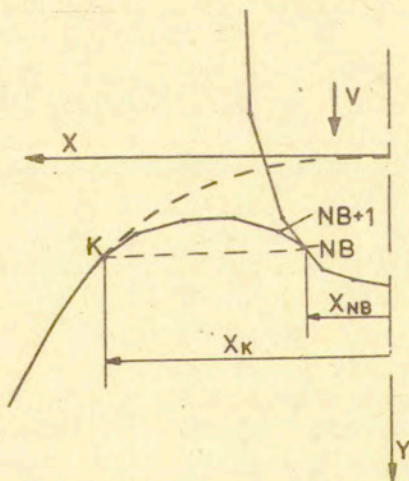
Z określonymi w ten sposób prędkościami odkształceń stwarzamy odpowiednie pole sił wewnętrznych. Następnie, posługując się zasadą prac przygotowanych /uwzględniającą siły bezwładności/ dochodzimy do równania różniczkowego, opisującego ruch powłoki w ramach przyjętego mechanizmu. Równanie to jest jednak skomplikowane, tym bardziej, że występujące w nim współczynniki zależne są od rozwiązania nieliniowego układu równań (1)

Stąd też analityczne rozwiązanie problemu możliwe było w [20] jedynie dla małowyniosłej powłoki kulistej i dla punktowego uderzenia.

Ten sam model może być jednak stosowany w ramach pewnego algorytmu numerycznego w taki sposób by:

- 1/ Uwzględniać powłoki o dowolnej wyniosłości,
- 2/ Uwzględniać dokładniej wpływ rozwiązania układu (1) na ruch rozpatrywanego mechanizmu,
- 3/ Brać pod uwagę dowolny kształt obrotowej, wypukłej powłoki i dowolny profil uderzającego, wypukłego ciała. Łączy się to z koniecznością uwzględnienia zmiany strefy kontaktu powłoki i ciała w czasie.

W tym celu zarówno południk powłoki jak i południk ciała aproksymowany jest linią łamaną przechodzącą przez określony zbiór punktów węzłowych. Odległości pomiędzy tymi punktami należy przyjąć zależnie od wymaganego stopnia dokładności rozwiązania. W chwili początkowej stykają się jedynie te punkty powłoki i ciała, które leżą na osi obrotu; mają one wówczas prędkość v_0 - równą prędkości uderzenia. Dalszy proces deformacji, oglądany w przekroju powłoki, polega na "obwijaniu" się aktualnego południ-



Rys. 3. Deformacja powłoki uderzonej ciałem o określonym kształcie

ka wokół uderzającego ciała przy jednoczesnym zginaniu tego południka w punkcie K , leżącym na poziomie granicy strefy kontaktu, Rys. 3. Mechanizm ten pomija więc możliwość ponownej separacji stykających się punktów powłoki i ciała.

Na Rys. 3 przedstawiono sytuację odpowiadającą pewnej chwili t . Załóżmy, że punkt NB jest ostatnim węzłem powłoki stykającym się z uderzającym ciałem i że porusza się on z prędkością v . Jeżeli poziomą współrzędną tego punktu - X_{NB} , potraktujemy chwilowo jak promień cylindra a , występujący w przedstawionym wyżej sformułowaniu pracy [20], możemy powtórzyć cały tok rozumowania zawarty w tej pracy: Przyjmujemy zatem, że w rozpatrywanej chwili, deformacji podlega jedynie część NB-K powłoki i że deformacja ta wynika z obrotu NB-K wokół punktu K , leżącego na poziomie punktu NB. Określamy dalej prędkość i przyspieszenie liniowe, prędkości odkształceń i stowarzyszone pole sił wewnętrznych; stosujemy zasadę prac przygotowanych otrzymując w rezultacie równanie ruchu, obowiązujące w rozpatrywanej chwili. Z równania tego określamy przyspieszenie punktu NB /a zarazem całego ciała/. Całkując je w przedziale czasu $/t, t+\Delta t/$ określamy nowe położenie poruszających się punktów powłoki i nową prędkość uderzającego ciała. Pozwala to powtórzyć proces obliczeń w ramach następnego kroku analizy.

Dla zapewnienia odpowiedniej dokładności rozwiązania długość przedziału Δt musi być ograniczona od góry. Niezależnie od tego na każdym kroku analizy określa się przyrost czasu Δt_1 , po którym punkt NB+1 zetknie się z powierzchnią uderzającego ciała /aprosymowaną linią łamaną/. Jeżeli $\Delta t_1 < \Delta t$ przyspieszenia całkuje się w przedziale czasu $(t, t + \Delta t_1)$ zapamiętując jednocześnie, że ostatnim punktem powłoki stykającym się z tym ciałem jest, od chwili $t + \Delta t_1$, punkt NB+1.

Może się zdarzyć, że kolejny punkt styczności ciała z powłoką tj. punkt NB+1 będzie w chwili $t + \Delta t_1$ leżał powyżej środka obrotu w chwili t , a więc powyżej punktu K . Oznacza to, że w takiej sytuacji, która zależy od kształtów powłoki i uderzającego ciała, kolejne środki chwilowego obrotu nie muszą leżeć na nieodkształtowanym południku. Nie możemy zatem zbudować

wówczas układu równań, analogicznego do (1).

4. Podstawowe związki i równania.

Posługując się zależnościami (2) i (3) otrzymujemy następujące wyrażenia, określające prędkość uogólnionych odkształceń w dowolnym punkcie i deformującej się części NB - K

$$(4) \quad \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{\varphi i} &= 0, \\ \dot{\epsilon}_{\theta i} &= \frac{u_i}{x_i}, \\ \dot{\kappa}_{\varphi i} &= 0, \\ \dot{\kappa}_{\theta i} &= \frac{\omega \cos \psi_i}{x_i}. \end{aligned}$$

Z uwagi na zerowanie się odkształceń w kierunku południowym przyjmujemy poniższą postać warunku plastyczności

$$f_1(m_{\theta i}, n_{\theta i}) = m_{\theta i} - 1 + n_{\theta i}^2 = 0$$

$$f_2(m_{\theta i}, n_{\theta i}) = -m_{\theta i} - 1 + n_{\theta i}^2 = 0$$

gdzie

$$m_{\theta i} = \frac{M_{\theta i}}{M_0}, \quad n_{\theta i} = \frac{N_{\theta i}}{N_0}$$

są odpowiednio bezwymiarowym momentem zginającym i bezwymiarową siłą membramową. Biorąc pod uwagę fakt, że w deformującej się plastycznie strefie

$$\dot{\epsilon}_{\theta i} = - \frac{\omega (w - y_i)}{x_i} < 0$$

$$\dot{\kappa}_{\theta i} = \frac{\omega \cos \psi_i}{x_i} > 0$$

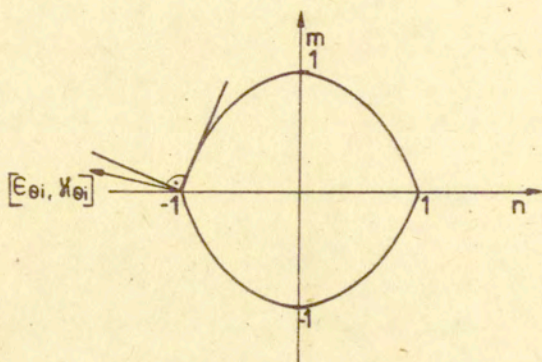
oraz uwzględniając, że dla $w - y_i \gg h$

$$\frac{|\dot{\kappa}_{\theta i}|}{|\dot{\epsilon}_{\theta i}|} = \frac{\cos \psi_i}{w - y_i} \ll \frac{1}{w - y_i} \ll \frac{1}{h}$$

stwierdzamy, że w wewnętrznych punktach tej strefy

$$(5) \quad M_{\theta i} = 0, \quad N_{\theta i} = -N_0$$

gdyż odległości międzywęzłowe w powłoce są z reguły wielokrotnie większe niż jej grubość. Warunek plastyczności i położenia wektora prędkości odkształceń plastycznych przedstawiono na Rys. 4.



Rys. 4. Warunek plastyczności wewnątrz deformującego się obszaru.

Na granicy strefy plastycznej, tj. w punktach NB i K, prędkości odkształceń określone są w sposób następujący

$$(6) \quad \begin{aligned} \dot{\kappa}_{\varphi NB} &= \frac{\omega}{l_{NB}} , & \dot{\kappa}_{\varphi K} &= \frac{-\omega}{l_{K-1}} , \\ \dot{\kappa}_{\theta NB} &= \frac{\omega \cos \varphi_{NB}}{x_{NB}} , & \dot{\kappa}_{\theta K} &= \frac{\omega \cos \varphi_K}{x_K} , \\ \dot{\epsilon}_{\theta NB} &= \dot{\epsilon}_{\varphi NB} = 0 , & \dot{\epsilon}_{\theta K} &= \dot{\epsilon}_{\varphi K} = 0 , \end{aligned}$$

gdzie l_i jest długością odcinka $(i, i+1)$. W tym przypadku warunek plastyczności przyjęto w postaci

$$|m_{\theta}| = 1, \quad |m_{\varphi}| = 1, \quad |m_{\varphi} - m_{\theta}| = 1.$$

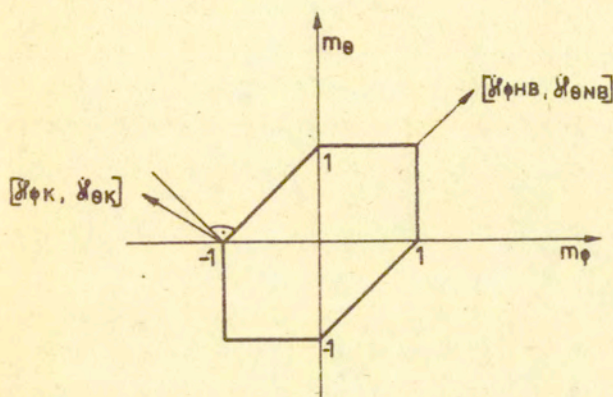
Z (6) wynika, że

$$\begin{aligned} \dot{\kappa}_{\varphi K} < 0, \quad \dot{\kappa}_{\theta K} > 0, \quad |\dot{\kappa}_{\varphi K}| > |\dot{\kappa}_{\theta K}|, \\ \dot{\kappa}_{\varphi 1} > 0, \quad \dot{\kappa}_{\theta 1} > 0. \end{aligned}$$

Wykorzystanie stowarzyszonego prawa płynięcia prowadzi zatem do wniosku

$$(7) \quad \begin{aligned} M_{\varphi 1} &= M_{\theta 1} = M_0, \\ M_{\varphi K} &= -M_0, \quad M_{\theta K} = 0. \end{aligned}$$

Warunek plastyczności i położenie wektorów prędkości odkształceń plastycznych w brzegowych punktach deformującej się części powłoki pokazano na Rys. 5.



Rys. 5. Warunek plastyczności na brzegu deformującej się części powłoki.

Dla określenia chwilowej wartości $A = \sigma_{y_{NB}}$ przyspieszenie uderzającego ciała i stykającej się z nim części powłoki wykorzystywana jest zasada prac przygotowanych

$$(8) \quad 2\pi \sum_{i=NB+1}^{K-1} \int_{l_i} (N_\theta \dot{\epsilon}_\theta + N_\varphi \dot{\epsilon}_\varphi + M_\theta \dot{\kappa}_\theta + M_\varphi \dot{\kappa}_\varphi) x \, dl = -2\pi m \sum_{i=NB}^{K-1} \int_{l_i} (\sigma_x u + \sigma_y v) x \, dl - A(M + M_p) v_{y_{NB}}$$

gdzie M_p jest masą wspomnianej części powłoki. Wyrażenie określające przyspieszenie A ma zatem postać

$$(9) \quad A = - \frac{2\pi}{M_{eff} \cdot v_{y_{NB}}} \left\{ \sum_{i=NB}^{K-1} \int_{l_i} (N_\theta \dot{\epsilon}_\theta + N_\varphi \dot{\epsilon}_\varphi + M_\varphi \dot{\kappa}_\varphi + M_\theta \dot{\kappa}_\theta) x \, dl + \sum_{i=h}^{K-1} \int_{l_i} (\bar{\sigma}_x u + \bar{\sigma}_y v) x \, dl \right\}$$

przy czym wprowadzone dodatkowo symbole

$$(10) \quad M_{eff} = M + M_p + m \sum_{i=NB}^{K-1} \int_{l_i} \frac{(y_K - y)^2 + (x_K - x)^2}{(x_K - x_{NB})^2} x \, dl$$

$$\bar{\sigma}_x = \omega^2 \left[(y_K - y) \frac{dx_K}{dw} + x_{NB} - x \right]$$

$$\bar{a}_y = \omega^2 \left[(x - x_{NB}) \frac{dx_K}{dW} + y_K - y \right],$$

wynikają ze wzorów (2) określających przyspieszenie punktów deformującej się części powłoki.

Całki występujące w równaniach (8) - (10) określane były przy założeniu liniowej aproksymacji wielkości, występujących w wyrażeniach podcałkowych

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_\varphi &= \dot{\epsilon}_{\varphi i} + (\dot{\epsilon}_{\varphi i+1} - \dot{\epsilon}_{\varphi i}) \frac{t}{t_i}, \\ \dots \\ \bar{a}_y &= \bar{a}_{y i} + (\bar{a}_{y i+1} - \bar{a}_{y i}) \frac{t}{t_i}, \\ v &= v_{y i} + (v_{y i+1} - v_{y i}) \frac{t}{t_i}, \end{aligned}$$

przy czym węzłowe wartości tych wielkości określano zgodnie ze wzorami (2), (4) - (7) oraz (10).

Nowe położenie uderzającego ciała oraz nową jego prędkość określono zgodnie z następującym schematem całkowania po czasie

$$(11) \quad \begin{aligned} v(t + \Delta t) &= v(t) + A \Delta t, \\ W(t + \Delta t) &= W(t) + 0,5(v(t) + v(t + \Delta t)) \Delta t. \end{aligned}$$

W analogiczny sposób określono także nowe współrzędne punktów powłoki oraz prędkości tych punktów

$$\begin{aligned} u_i(t + \Delta t) &= u_i(t) + a_x \Delta t \\ v_i(t + \Delta t) &= v_i(t) + a_y \Delta t \\ x_i(t + \Delta t) &= x_i(t) + 0,5(u_i(t) + u_i(t + \Delta t)) \Delta t \\ y_i(t + \Delta t) &= y_i(t) + 0,5(v_i(t) + v_i(t + \Delta t)) \Delta t \end{aligned}$$

przy czym przyrost czasu Δt dobrano tak by w wyniku deformacji punkt NB+1 nie przekraczał powierzchni uderzającego ciała /por. roz. 3/.

Po określeniu aktualnego położenia powłoki i ciała, oraz po ustaleniu numeru NB, z równania $y_K(t + \Delta t) = y_{NB}(t + \Delta t)$ określano współrzędne nowego środka obrotu strefy podlegającej uplastycznieniu i powtarzano ponownie proces obliczeń. Analizę kontynuowano do chwili w której

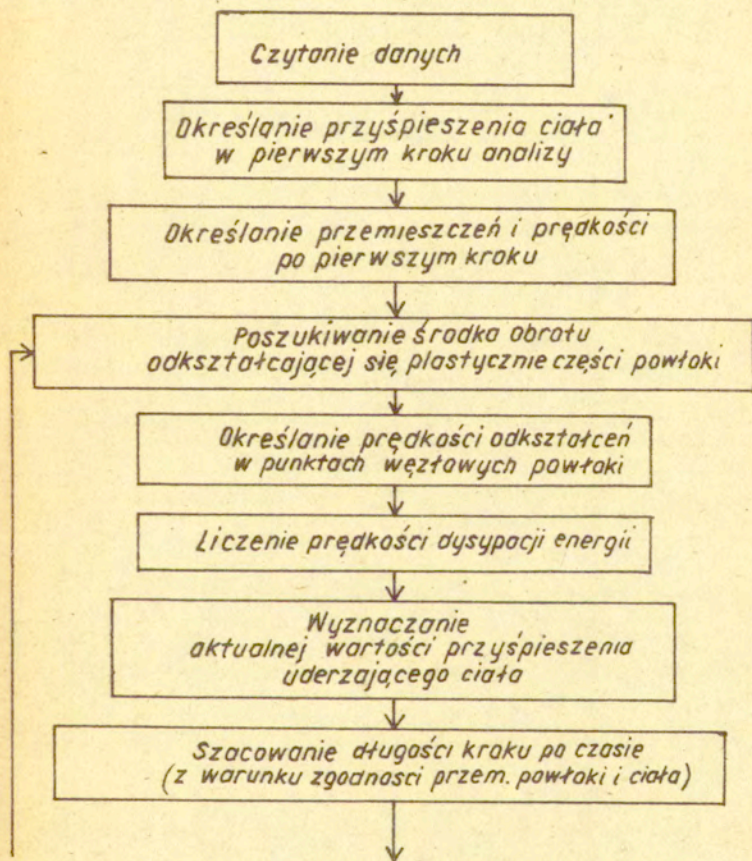
$$(12) \quad v(t+\Delta t) \leq 0.$$

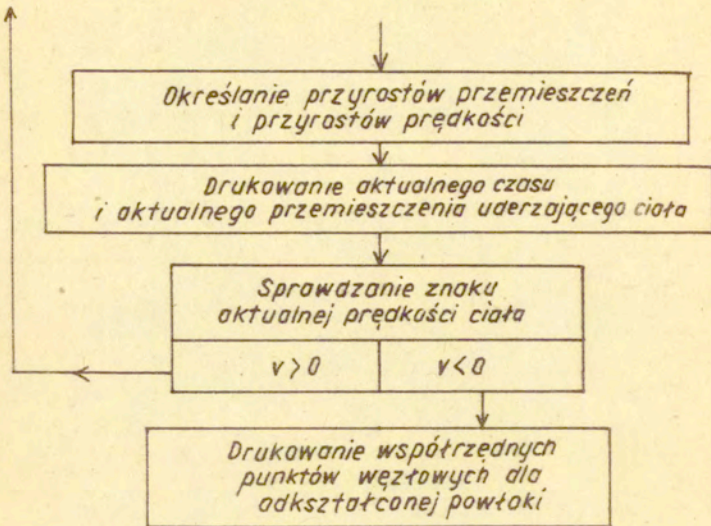
Przemieszczenie

$$(13) \quad w(t+\Delta t) = W_{max}$$

określa maksymalne zagłębienie się uderzającego ciała w powłocę.

Opisane wyżej czynności realizowane były według następującego schematu:





5. Przykłady obliczeń. Dyskusja wyników.

Obliczenia wykonano dla powłoki sferycznej o promieniu $R = 1450\text{cm}$ oraz dla powłoki eipsoidalnej o dłuższej półosi równej R i o krótszej półosi, pokrywającej się z osią symetrii, równej $R/\sqrt{2}$. Dla obu powłok przyjęto grubość ścianki $h = 1\text{cm}$, granicę plastyczności materiału $\sigma_0 = 2000\text{ kg/cm}^2$ oraz gęstość masy $\rho = 7.85\text{ g/cm}^3$ ($\mu = 7.85\text{ g/cm}^3$).

Dla porównania wyniku obliczeń numerycznych z rozwiązaniem analitycznym [20] /uzyskanym przy założeniu małej wyniosłości.

powłoki/ rozpatrzono najpierw powłokę sferyczną uderzoną cylindrem o promieniu $a = 50 \text{ cm}$. Rezultaty przedstawiono na Rys. 6. Biorąc pod uwagę założenia upraszczające, czynione w [20], rozbieżność obu wyników należy uznać za małą.

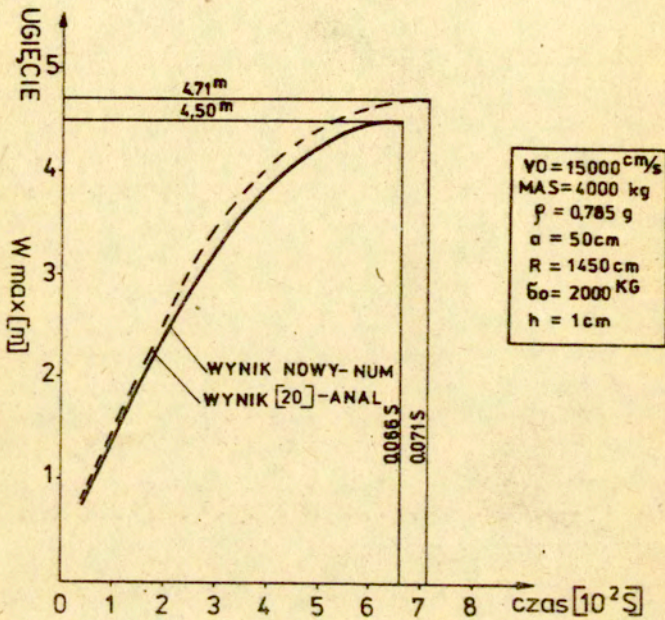
Wpływ spłaszczenia powłoki elipsoidalnej, w stosunku do powłoki sferycznej, na wielkość maksymalnych przemieszczeń, spowodowanych uderzeniem cylindra, przedstawiono na Rys. 7. W tym przypadku różnica okazała się niewielka. Należy jednak pamiętać, że dotyczy ona jedynie przemieszczeń punktów, leżących na osi obrotu obu powłok. Inne parametry związane z deformacją różnią się bardziej. Na przykład, promienie stref plastycznych wynoszą $1050,7 \text{ cm}$ - dla powłoki sferycznej i $1204,6$ - dla powłoki elipsoidalnej.

Na Rys. 8 przedstawiono maksymalne przemieszczenie środkowego punktu powłoki sferycznej, uderzonej sztywnym ciałem kulistym. Przy ustalonej masie ciała $M = 4000 \text{ kg}$ oraz prędkości uderzenia $v_0 = 15000 \text{ m/s}$. zmieniano wymiary uderzającej kuli. Okazało się, że wraz ze wzrostem promienia tej kuli maksymalne przemieszczenie rośnie. Wynika to stąd, że deformacja powłoki, która w przyjętym mechanizmie jest zawsze izometryczna w kierunku południkowym /por. rów. (3)/, jest wówczas coraz bliższa izometrii w kierunku równoleżnikowym. Mniejsze są wtedy odkształcenia obwodowe w powłoce i mniejsza związana z nimi dysypacja energii. To z kolei powoduje wzrost maksymalnych przemieszczeń powłoki.

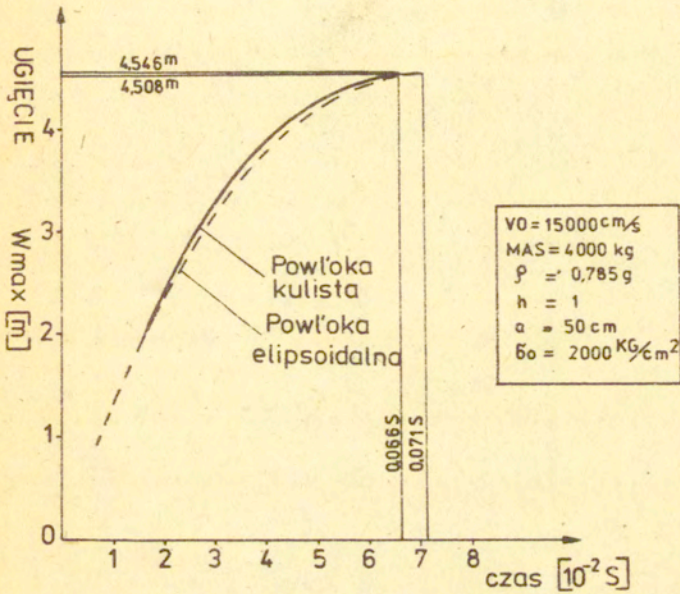
Powyższe wyjaśnienie odnosi się także do Rys. 9 i 10. Na Rys. 9, dla różnych promieni uderzających kuli, przedstawiono zależność maksymalnego przemieszczenia od energii uderzenia, natomiast na Rys. 10 pokazany jest kształt zdeformowanej powłoki. Pogrubiona część centralna oznacza ostateczną strefę kontaktu uderzającego ciała kulistego z powłoką.

Wpływ masy powłoki na ostateczne przemieszczenia i na czas trwania ruchu powłoki ilustrowany jest na Rys. 11. Okazuje się, że w ramach analizowanego mechanizmu, maksymalne przemieszczenia nie zależą od masy powłoki natomiast wyraźny jest wpływ tej masy na czas trwania ruchu.

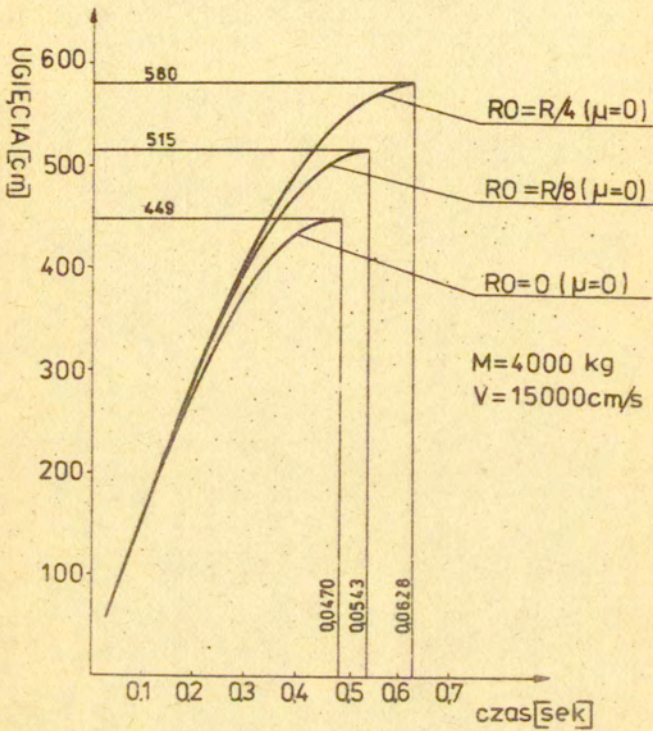
Wyjaśnienie jest następujące: Z uwagi na fakt, że rozpatrywany



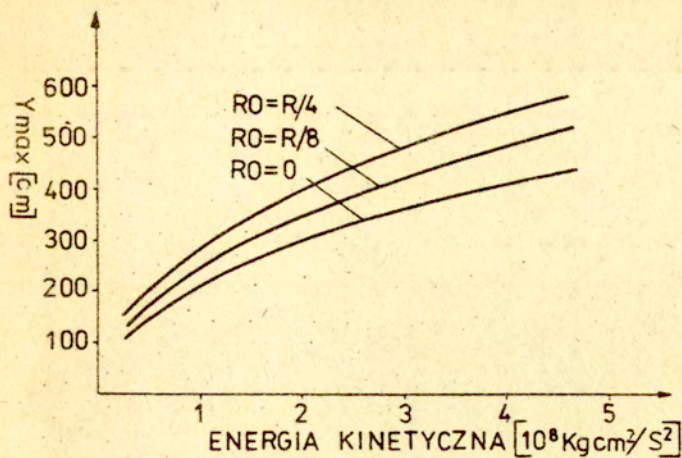
Rys. 6. Rozwiązanie analityczne i numeryczne dla powłoki sferycznej uderzonej sztywnym cylindrem.



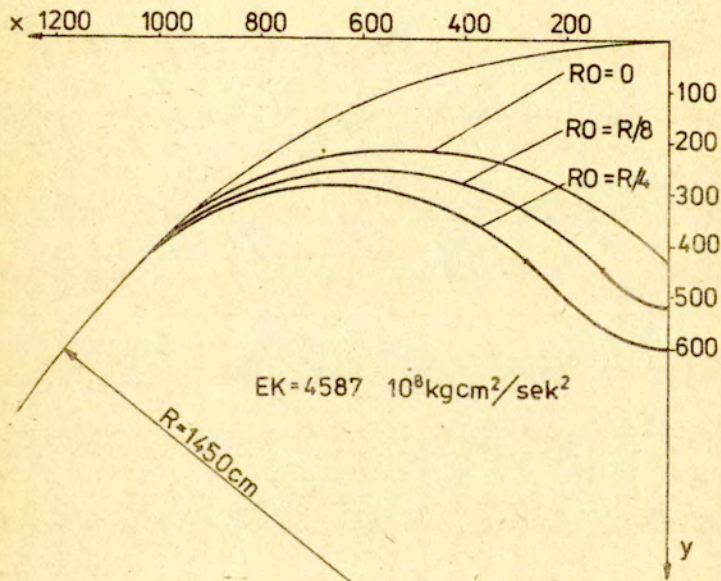
Rys. 7. Przemieszczenie maksymalne w powłoce sferycznej i elipsoidalnej wywołane uderzeniem sztywnego walca.



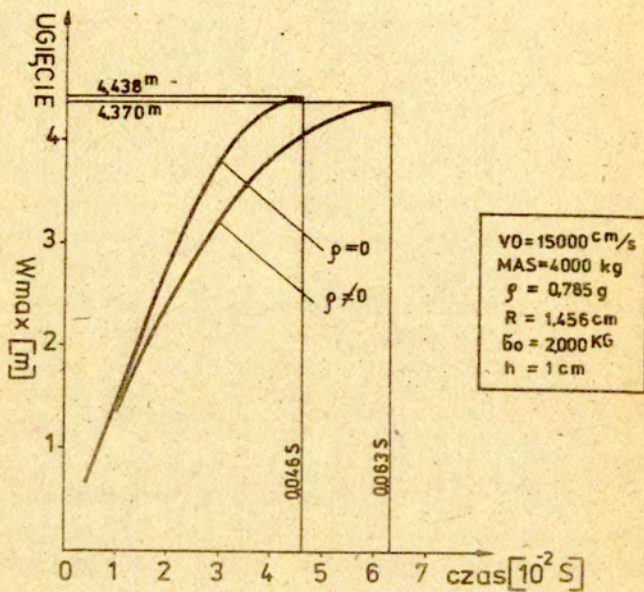
Rys. 8. Maksymalne ugięcie powłoki sferycznej dla różnych wielkości uderzającego ciała.



Rys. 9. Maksymalne ugięcie powłoki jako funkcja energii uderzenia.



Rys. 10. Kształt zdeformowanej powłoki sferycznej dla różnej wielkości uderzającego ciała.



Rys. 11. Wpływ masy powłoki na wielkość przemieszczeń i czas trwania ruchu.

mechanizm opisywany jest jedną współzrzedną uogólnioną oraz, że prędkość deformacji ma stały znak, energia dysypowana w procesie jest jednoznaczna funkcją tej współzrzednej. Jednocześnie, niezależnie od wielkości masy powłoki, końcowe przemieszczenie musi być takie by energia dysypowana była równa energii uderzenia. Wynika stąd niezależność końcowych przemieszczeń od masy powłoki. Z drugiej zaś strony, niezerowa masa powłoki wiąże się z koniecznością jej przyspieszania, a następnie opóźniania; wydłuża to czas trwania ruchu.

6. Uwagi końcowe

Przedstawiona metoda pozwala w prosty sposób ocenić wielkość przemieszczeń powłok obrotowych, spowodowanych uderzeniem ciała o określonym kształcie. Poza prezentowaniem algorytmu, w sposób numeryczny wykazano w pracy ogólną własność, że końcowe przemieszczenie sztywno-plastycznej konstrukcji, wywołane uderzeniem i otrzymywane w ramach mechanizmu o jednym stopniu swobody nie zależy od masy konstrukcji. Masa ta wpływa jedynie na czas trwania ruchu.

Zakres stosowalności przedstawionej metody, jak każdej metody przybliżonej, jest jednak ograniczony. Z jednej strony intensywność uderzenia musi być na tyle duża, by odkształcenie znacznie przekraczały zakres odkształceń sprężystych-jedynie wówczas stosowanie sztywno-plastycznego modelu ciała jest bowiem uzasadnione. Z drugiej zaś, nie może ona przekroczyć wielkości przy której następuje perforacja powłoki.

Ograniczanie górne intensywności uderzania zależne jest od kształtu uderzającego ciała - należy bowiem sądzić, że dla ciała o gładkim południku i o odpowiednio dużych rozmiarach perforacja nie wystąpi. W tych przypadkach, przedstawione rozważenia, poświęcone głównie uwzględnieniu kształtu uderzającego ciała w analizie procesu, mogą więc znaleźć szerokie zastosowanie.

Innym pomijanym w pracy a ważnym w analizie powłoki problemem jest problem stateczności. Z punktu widzenia koncepcji obliczeń stateczność może być jednak łatwiej analizowana w ramach sprężysto-plastycznej idealizacji materiału choć może się to

wiązać z trudnościami natury numerycznej. Z szeregu prac wynika ponadto [14, 19], że utrata stateczności związana jest z izometryczną deformacją powłoki. Ponieważ zbliżoną do izometrycznej deformację otrzymujemy w przypadku uderzenia gładkim ciałem o kształcie zbliżonym do kształtu powłoki i o dużych w stosunku do powłoki wymiarach /por. roz. 4/ zakres stosowalności przedstawionego sposobu jest wówczas najszerszy. Nawet dla dużych energii uderzenia nie występuje wtedy perforacja, ograniczona jest możliwość utraty stateczności a powstająca w procesie deformacja jest duża.

Literatura cytowana w tekście

- [1] G.AUGUSTI, Rigid-plastic structures subjected to dynamic loads, *Meccanica* V, 1970, 74.
- [2] G.EASON, R.T.SHIELD, Dynamic loading of rigid-plastic cylindrical shells, *J.Mech.Phys. Solids* 4, 1956, 53.
- [3] M.I.EPXOB, Teorija idealno-plastycznych tieł i konstrukcji Moskwa 1978.
- [4] D.F.HASKE, Large impact deformation response of spherical shells, *AIAA Journal* 12, 8, 1970, 2123.
- [5] P.G.HODGE, Impact pressure loading of rigid-plastic cylindrical shells, *J.Mech.Phys. Solids* 2, 1955, 176.
- [6] H.G.HOPKINS, W.PRAGER, On the dynamics of plastic circular plates, *ZAMP* 4, 2, 1954.
- [7] N.JONES, The influence of strain-hardening and strain rate sensitivity on the permanent deformations of impulsively loaded rigid-plastic beams, *Int.J.Mech.Sci.* 12, 2, 1967, 777.
- [8] N.JONES, Finite deflections of a simply supported rigid-plastic annular plate loaded dynamically, *Int.J. Solids Struct.* 6, 4, 1968, 593.
- [9] N.JONES, Impulsive loading of a simply supported rigid-plastic circular plate, *J.Appl.Mech.* 1, 35, 1968, 59.
- [10] N.JONES, The dynamic plastic behaviour of fully clamped rectangular plates, *Int.J. Solids Struct.* 6, 1970, 1499.
- [11] N.JONES, The influence of large deflections on the behaviour of rigid-plastic cylindrical shells loaded impulsively, *J.Appl.Mech.* 37, 1970, 416.
- [12] N.JONES, An approximate theoretical study of the dynamic plastic behaviour of shells, *Int.J.Non-Linear Mech.* 7, 1972, 255.
- [13] S.KALISZKY, Approximate solutions for impulsively loaded inelastic structures and continua, *Int. J. Non-Linear Mech.* 5, 1970, 143.
- [14] S.LUKASIEWICZ, W.SZYSZKOWSKI, Geometrical analysis of large elastic deflections of axially compressed cylindrical and conical shells, *Int.J.Non-Linear Mech.* 14, 1979, 273.
- [15] J.B.MARTIN, Impulsive loading theorems for rigid-plastic continua, *Proc.ASCE, J.Eng.Mech.Div.* vol. 90, EM5, 1964, 27.
- [16] J.B.MARTIN, P.S.SYMONDS, Mode approximations for impulsively loaded rigid-plastic structures, *Proc.ASCE, J.Eng.Mech.Div.* vol. 92, EM5, 1966, 43.

- [17] W.J.MORALES, G.E.NEVIL, Lower bound on deformations of dynamically loaded rigid-plastic continua, AIAA Journal, 11,8,1970,2043.
- [18] W.OLSZAK, P.PERZYNA, A.SAWCZUK, /współaut./, Teoria plastyczności, PWN, Warszawa 1965.
- [19] A.V.POGORELOV, Geometriczeskaja teorija ustojczivosti obojoczek, "Nauka" Moskwa 1966.
- [20] H.STOLARSKI, Assesment of large displacements of a rigid-plastic shell witholding a localized impact, Nucl.Eng. Design. 3,41,1977,327.
- [21] H.STOLARSKI, T.BELYTSCHKO, Large deformation, rigid-plastic dynamics by an extremum principle, Comp.Meth.Appl.Mech.Eng. 2,21,1980,217.
- [22] W.P.TAMUŻ, Ob odnom minimalnom principie w dinamikie żestko płaściczeskogo tieża, PMM,XXVI,1962,715.
- [23] M.TAYA, T.MURA, Dynamic plastic behaviour of structures under impact loading investigated by extended Hamilton principle, Int.J.Solids Struct. 10,1974,197.
- [24] D.P.UPDIKE, On the large deformation of a rigid-plastic spherical shell compressed by a rigid plate, Journal of Engineering for Industry, August 1972.
- [25] T.WIERZBICKI, Direct variational approach to dynamic plastic mode solutions, Bull.Ac.Pol.Sci., Ser.Sci.Tech. 6,22,1975,299.
- [26] T.WIERZBICKI, Bounds on large dynamic deformations of structures, Proc. ASCE, J.Eng.Mech.Div. vol.96, EM3, 1970, 267.