

- 1.1. — metody analityczne
i półanalityczne
- 1.3. — metody różnic skończonych
- 5.3. — plastyczność i lepkoplastyczność
- 5.10. — mechanika skał i górotworu
- 5.11. — mechanika pękania
- 5.15. — stateczność, wyboczenie,
stan powyboczeniowy

PRACA DOKTORSKA

Maciej Kowalczyk

ANALIZA STANÓW POKRYTYCZNYCH
W UKŁADACH
SPRĘŻYSTYCH I NIESPRĘŻYSTYCH

1/1994

P. 269a



1.1. -- metody analityczne
i porównawcze
1.2. -- metody różnic skończonych
2.1. -- plastyczność i lepkoplastyczność
2.10. -- mechanika skal i górotworu
2.11. -- mechanika pękania
2.12. -- stateczność wydrążenia

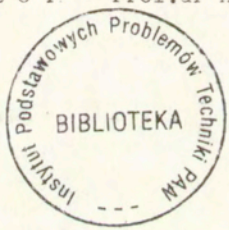
ISSN 0206-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 5 stycznia 1994 r.

P r a c a d o k t o r s k a

recenzent - Prof.dr hab.Michał Kleiber
Prof.dr hab.Zenon Waszczyszyn

P r o m o t o r - Prof.dr hab.Zenon Mróz



56648



Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 100 egz. Ark.druk.10,0 Ark.wyd. 8,0
Oddano do drukarni w styczniu 1994

Wydawnictwo Spółdzielcze sp. z o.o.
Warszawa, ul.Jasna 1

| | |
|---|----|
| Ważniejsze oznaczenia. | 5 |
| Streszczenie | 7 |
| Wstęp. | 8 |
| 1 Przegląd literatury. | 10 |
| 1.1 Stateczność i jednoznaczność ścieżki obciążenia. | 10 |
| 1.2 Opis cech i modeli materiałów kruchych. | 13 |
| 1.3 Prace dotyczące omawianych dalej przykładów. | 21 |
| 1.4 Numeryczna analiza stanów pokrywicznych. | 24 |
| 1.5 Wnioski. | 26 |
| 2 Analiza pęknięcia i kruszenia materiału. | 27 |
| 2.1 Założenia wstępne. | 27 |
| 2.2 Rozwój strefy spękanej bez kruszenia. | 31 |
| 2.3 Pęknięcie i kruszenie materiału. | 34 |
| 2.3.1 Rozwiązanie dla strefy sprężystej i spękanej. | 34 |
| 2.3.2 Rozwiązanie dla strefy skruszonej. | 35 |
| 2.4 Omówienie wyników obliczeń. | 42 |
| 2.5 Wnioski. | 46 |
| 3 Niszczenie materiału krucho-plastycznego pod stemplem. | 48 |
| 3.1 Obserwacje i założenia upraszczające. | 48 |
| 3.2 Degradacja materiału w fazie przedkrytycznej. | 50 |
| 3.3 Cykliczne obciążenie stempla w p.s.o. | 51 |
| 3.4 Cykliczne obciążenie stempla w p.s.n. | 52 |
| 3.5 Omówienie wyników obliczeń. | 55 |
| 3.6 Wnioski. | 59 |
| 4 Sprężysto-plastyczna analiza tarcz kołowych. | 60 |
| 4.1 Rozwiązanie ogólne dla stanów sprężystych i sprężysto-plastycznych. | 60 |
| 4.1.1 Rozwiązanie sprężyste. | 60 |
| 4.1.2 Rozwiązanie sprężysto-plastyczne. | 61 |
| 4.1.3 Strefa dekohezyjna. | 64 |
| 4.2 Rozwiązanie ze strefą dekohezyjną. | 66 |
| 4.2.1 Rozwiązanie sprężyste ze strefą dekohezyjną. | 66 |
| 4.2.2 Rozwiązanie sprężysto-plastyczne ze strefą dekohezyjną. | 67 |
| 4.2.3 Rozwiązanie numeryczne problemu sprężysto-plastycznego. | 68 |
| 4.3 Ostateczne zniszczenie tarczy. | 68 |
| 4.4 Przykłady. | 69 |
| 4.5 Uwagi końcowe. | 76 |
| 5 Podstawy analityczne metod kontynuacji. | 78 |
| 5.1 Interpretacja geometryczna stanów równowagi. | 79 |
| 5.1.1 Wektor wodzący w przestrzeni stanu. | 79 |
| 5.1.2 Interpretacja geometryczna układu równań. | 80 |
| 5.1.3 Parametryzacja ścieżki obciążenia. | 80 |
| 5.2 Problem wyboru zmiennej sterującej. | 81 |
| 5.2.1 Proste przykłady z nieliniowością materiałową. | 81 |
| 5.2.2 Przykład nieliniowej analizy układu sprężystego. | 83 |
| 5.3 Problemy perturbacyjne. | 86 |
| 5.4 Rozwiązanie problemu I-go rzędu. | 88 |
| 5.5 Rozwiązanie problemu II-go rzędu. | 90 |
| 5.6 Uwagi końcowe. | 91 |

| | | |
|-------|--|-----|
| 6 | Bifurkacja ścieżki równowagi. | 93 |
| 6.1 | Przegląd metod wyboru ścieżek obciążenia. | 93 |
| 6.2 | Pary kierunków sprzężonych. | 95 |
| 6.3 | Pierwotna i wtórna ścieżka obciążenia. | 98 |
| 6.4 | Uwagi końcowe. | 100 |
| 7 | Badanie rzędu macierzy w analizie modeli konstytutywnych. | 102 |
| 7.1 | Opis modelu materiału za pomocą układu jednorodnego. | 103 |
| 7.2 | Model materiału a rząd macierzy układu. | 105 |
| 7.3 | Dopuszczalne parametry sterujące. | 107 |
| 7.3.1 | Sterowanie naprężeniami. | 108 |
| 7.3.2 | Sterowanie odkształceniami. | 108 |
| 7.4 | Kryterium bifurkacji w zagadnieniach wieloparametrycznych. | 110 |
| 7.5 | Uwagi końcowe. | 112 |
| 8 | Analiza rzędu macierzy jako element metody kontynuacji. | 113 |
| 8.1 | Transformacja macierzy prostokątnej do postaci trapezoidalnej. | 113 |
| 8.2 | Predictor Eulera z wyborem sterowania. | 115 |
| 8.3 | Procedury korekcyjne. | 116 |
| 8.3.1 | Metoda z wyborem zmiennej sterującej. | 117 |
| 8.3.2 | Metoda ortogonalna. | 118 |
| 8.3.3 | Metoda stałej długości łuku. | 119 |
| 8.3.4 | Metoda płaszczyzny ortogonalnej. | 121 |
| 8.3.5 | Ogólny schemat metod korekcyjnych. | 122 |
| 8.4 | Analiza konstrukcji sprężysto-plastycznych. | 122 |
| 8.4.1 | Tworzenie układu równań przyrostowych. | 122 |
| 8.4.2 | Rozwiązywanie układu równań przyrostowych. | 126 |
| 8.4.3 | Element kontaktowy. | 129 |
| 8.5 | Uwagi końcowe. | 133 |
| 9 | Przykłady obliczeniowe. | 135 |
| 9.1 | Sprężyste układy prętowe. | 135 |
| 9.1.1 | Wybór współrzędnych uogólnionych. | 136 |
| 9.1.2 | Przykład z punktami granicznymi. | 138 |
| 9.1.3 | Przykład problemu z bifurkacją. | 140 |
| 9.2 | Dekohezja plastyczna w tarczy prostokątnej. | 143 |
| 9.3 | Uwagi końcowe. | 147 |
| 10 | Podsumowanie i wnioski końcowe. | 148 |
| | Dodatki. | 150 |
| | A. Uzupełnienie rozdziału 2. | 150 |
| | B. Uzupełnienie rozdziału 4. | 150 |
| | C. Wybrane elementy algebry liniowej. | 152 |
| | D. Twierdzenie o funkcjach uwikłanych. | 154 |
| | E. Wyprowadzenie wzorów 8.58 ₁ i 8.59. | 155 |
| | Literatura. | 156 |

Ważniejsze oznaczenia.

| | |
|--|--|
| k | – numer iteracji; |
| r | – rząd macierzy G ; |
| s | – długość ścieżki obciążenia; |
| K | – liczba parametrów sterujących (składowych wektora $\dot{\mathbf{p}}$); |
| N | – liczba składowych wektora $\dot{\mathbf{r}}$; |
| M | – liczba równań układu jednorodnego; |
| κ | – współczynnik określony przez długość wektora $\dot{\mathbf{r}}^*$; |
| λ | – parametr obciążenia proporcjonalnego; |
| ν | – numer punktu równowagi; |
| Γ_i | – funkcje opisujące równania równowagi; |
| Ψ_i | – funkcje opisujące równania więzów; |
| $\mathbf{a}_{(m)}$ | – wektor utworzony z liniowo niezależnych współczynników m -tej kolumny macierzy G ; |
| $\mathbf{b}^{[k]}$ | – błąd w spełnieniu równań równowagi i równań więzów po k -tej iteracji; |
| $\hat{\mathbf{b}}^{[k]}$ | – wektor prawej strony korekcyjnego układu równań; |
| \mathbf{c} | – wektor określający współczynniki N -tego równania układu korekcyjnego; |
| $\mathbf{c}_{(m)}$ | – wektor \mathbf{c} po odrzuceniu składowej c_m ; |
| \mathbf{d} | – przemieszczenia uogólnione; |
| \mathbf{f} | – wektor prawej strony układu niejednorodnego; |
| $g_{(i)}$ | – wiersz macierzy G wyznaczający gradient powierzchni równowagi Γ_i lub powierzchni określającej więzy Ψ_i ; |
| q | – współrzędne uogólnione; |
| \mathbf{r} | – wektor o składowych (q, λ) ; |
| $\mathbf{r}_b, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_r$ | – odpowiednio punkty: bifurkacji, graniczny i regularny; |
| $\mathbf{r}_{[\nu]}$ | – wektor \mathbf{r} po wyznaczeniu ν -tego punktu równowagi; |
| $\mathbf{r}^{[k]}$ | – k -te przybliżenie kolejnego punktu równowagi; |
| $\mathbf{u}_{(m)}$ | – wektor \mathbf{r} po odrzuceniu składowej r_m ; |
| \mathbf{w} | – wektor przemieszczeń węzłów w MES; |
| \mathbf{x} | – wektor o składowych (q, λ) ; |
| $\dot{\mathbf{p}}$ | – wektor złożony z niezależnych składowych wektora $\dot{\mathbf{r}}$; |
| $\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}$ | – pierwsza i druga pochodna wektora \mathbf{r} względem parametru s ; |
| $\dot{\mathbf{r}}^*, \dot{\mathbf{p}}^*, \dot{\mathbf{u}}^*$ | – pomocniczy wektor styczny i jego niezależna i zależna część; |
| $\dot{\mathbf{u}}$ | – wektor złożony z zależnych składowych wektora $\dot{\mathbf{r}}$; |
| C | – macierz podatności; |
| $C^{[k]}$ | – macierz układu korekcyjnego; |
| D, \hat{D} | – macierz sztywności; |
| G | – macierz prostokątna układu jednorodnego; |
| $G^{(m,m)}$ | – macierz utworzona z macierzy G przez odrzucenie kolumny m -tej oraz $(M - r)$ wierszy liniowo zależnych (przy założeniu $r = N - 1$, patrz także wzory 5.14); |

| | |
|----------------------------|---|
| F | - wektor obciążenia zewnętrznego (w tym reakcji podpór); |
| F_{int} | - wektor sił wewnętrznych; |
| K | - macierz kwadratowa układu niejednorodnego; |
| P | - macierz złożona z K kolumn macierzy G nienależących do macierzy U ; |
| P_c | - macierz P otrzymana po utworzeniu macierzy U_c ; |
| U | - macierz złożona z r kolumn macierzy G ; |
| U_c | - macierz U spełniająca warunek $dimC(U) = dimC(G)$; |
| ε | - tensor (wektor) odkształceń całkowitych; |
| ε^e | - tensor (wektor) odkształceń sprężystych; |
| ε^p | - tensor (wektor) odkształceń plastycznych; |
| λ | - parametry podstawowe, tj. uogólnione siły, odkształcenia plastyczne, sztywności, itd. (patrz rozdział piąty); |
| χ | - stałe obciążenie odniesienia; |
| ξ | - prawy wektor własny; |
| σ | - tensor (wektor) naprężenia; |
| ψ | - lewy wektor własny; |
| $\Delta\Theta$ | - wektor sił relaksacyjnych; |
| $dimC(\cdot), dimN(\cdot)$ | - wymiary przestrzeni $C(\cdot)$ oraz $N(\cdot)$; |
| $C(\cdot)$ | - przestrzeń kolumnowa macierzy (\cdot) ; |
| $N(\cdot)$ | - przestrzeń zerowa macierzy (\cdot) ; |
| R^N | - N wymiarowa przestrzeń euklidesowa. |

Maciej Kowalczyk
IPPT PAN

ANALIZA STANÓW POKRYTYCZNYCH W UKŁADACH SPRĘŻYSTYCH I NIESPRĘŻYSTYCH

Streszczenie.

W rozprawie podjęto szeroki zakres zagadnień, dla których wspólnym mianownikiem jest analiza stanów pokrytycznych w układach sprężystych i niesprężystych. Praca składa się z dwóch zasadniczych części, przy czym w pierwszej główny nacisk położono na zagadnienia modelowania stanów pokrytycznych, natomiast w drugiej na analizę metod numerycznych (tzw. metod kontynuacji) stosowanych w rozwiązywaniu zagadnień nieliniowych. Jako oryginalne elementy modelowania stanów pokrytycznych można wymienić połączenie teorii plastyczności z energetycznym warunkiem pęknięcia, uwzględnienie zmienności i cykliczności form zniszczenia materiału kruchego pod stemplem oraz połączenie teorii plastyczności z uproszczonym opisem zjawiska lokalizacji wzdłuż linii nieciągłości. Przedstawiono rozwiązania analityczne trzech zagadnień nieliniowych dla układów wykonanych z materiałów sprężysto-kruchoplastycznych i sprężysto-idealnie plastycznych. Dalej przedstawiono podstawy analityczne metod kontynuacji, w tym przeanalizowano znaczenie parametryzacji zagadnień nieliniowych, podano metodę wyboru parametrów sterujących opartą o analizę rzędu prostokątnej macierzy jednorodnego układu równań przyrostowych i nową metodę wyboru ścieżki równowagi wychodzącej z punktu bifurkacji. Podano ogólny schemat metod kontynuacji oparty o analizę rzędu macierzy korekcyjnego układu równań. Rozważania teoretyczne uzupełniono rozwiązaniami numerycznymi problemów nieliniowych dla układów prętowych oraz zagadnienia dekohezji plastycznej tarczy prostokątnej z karbem.

Wstęp.

Od dawna wiadomo, że każda próba bardziej wnikliwej analizy otaczających nas zjawisk prowadzi do formułowania problemów "nieliniowych" zarówno w sensie geometrycznym jak i materiałowym. Jednym z ważniejszych elementów nieliniowej analizy, na którym obecnie koncentruje się wysiłek wielu badaczy, jest problem związany z istnieniem tzw. stanów pokrytycznych.

W uproszczeniu stan pokrytyczny można zdefiniować jako sytuację, w której nośność obciążonej konstrukcji ulega obniżeniu, a zmiany w układzie mogą następować w sposób niekontrolowany. Przyczynami pojawiania się stanów pokrytycznych są zmiany geometryczne zachodzące w konfiguracji układu, zmiany własności (osłabienie) materiału, lub oba wymienione czynniki równocześnie. Osłabienie materiału może być spowodowane rozwojem odkształceń plastycznych, bądź rozwojem mikro- i makroszczelin. Często obserwujemy, że przekroczenie stanu krytycznego łączy się z pojawieniem się silnej, lokalnej koncentracji efektów geometrycznych lub materiałowych, przy stosunkowo niewielkich zmianach w pozostałej części układu. Okazuje się, że w stanie pokrytycznym zdolność konstrukcji do przenoszenia obciążenia, nawet w przypadku lokalnego zniszczenia, w określonych sytuacjach może ponownie wzrastać. Z tego powodu, jeżeli chcemy projektować konstrukcje lżejsze, bardziej wytrzymałe i bezpieczniejsze, analiza w zakresie stanów pokrytycznych nabiera szczególnego znaczenia.

Ze względu na różnorodność podjętych problemów temat pracy został sformułowany w sposób bardzo szeroki. Początkowo celem autora było opanowanie umiejętności modelowania cech materiału znajdującego się w stanie pokrytycznym. Analizowane przykłady dotyczyły układów sprężystych, plastycznych i kruchych. Złożoność problemu widoczna jest w szczególności w przypadku materiałów kruchych. Duże zróżnicowanie form zniszczenia powoduje, że ciągle jeszcze w literaturze odczuwa się brak rozwiązań wielu podstawowych problemów (np. zagadnienia wciskania stempla). W trakcie pracy stwierdzono jednak, że równie istotnym problemem jak modelowanie jest opanowanie metody rozwiązywania otrzymanych z modelowania równań. Kierując się przekonaniem o ważności tego drugiego problemu, autor skupił ostatecznie swoje zainteresowania na problemie sterowania przebiegiem procesów quasistatycznych.

Przesunięcie zainteresowań od problemów modelowania do zagadnień numerycznych widoczne jest w układzie chronologicznym pracy. Zasadniczo pracę można podzielić na dwie części. W pierwszej przedstawione są rozwiązania analityczne zagadnień, w których stany pokrytyczne są efektem rozwoju uszkodzenia konstrukcji. W drugiej części przedstawiono problemy związane z numerycznym rozwiązywaniem problemów nieliniowych. Odpowiednio do tego podziału przedstawiony został także przegląd literatury.

Pierwszym przykładem rozwiązaniem analitycznym jest zagadnienie osiowosymetryczne rozwoju stref pękania i kruszenia w rurze grubościenniej poddanej ciśnieniu wewnętrznemu. Przedstawiona analiza ma bezpośrednie zastosowanie do oceny stanu naprężenia i deformacji górotworu wokół otworu poddanego ciśnieniu. W szczególności może mieć zastosowanie do identyfikacji parametrów materiałowych lub do analizy procesu hydraulicznego szczelnienia. Następnie przedstawiono proste rozwiązanie zagadnienia wciskania sztywnego

stempla w materiał kruchoplastyczny. Prezentowane rozwiązanie jest próbą uwzględnienia różnorodności form niszczenia materiałów kruchych (pęknięcie, kruszenie, wyłamywanie, łuszczenie, itd.) oraz cykliczności zmian obciążenia (powtarzające się kolejno wzrost i spadek siły). Znaczenie praktyczne omawianego zagadnienia wynika z prostoty w przeprowadzeniu eksperymentu — próba wciskania stempla stanowi jedną z ważniejszych metod określania własności wytrzymałościowych materiałów kruchych. Kolejny przykład rozwiązany analitycznie dotyczy uplastycznienia tarczy wykonanej z materiału Treski lub Hubera-Misesa. W analizie sprężysto-plastycznej tarcz kołowych w zakresie teorii małych odkształceń spotykamy sytuacje, w których nie istnieje ciągle rozwiązanie opisujące zmiany przemieszczeń. Wynikające stąd trudności pokonano zakładając dodatkowy związek pomiędzy skokiem przemieszczeń a naprężeniami na linii nieciągłości. Ścisłe rozwiązanie analityczne uzyskano dla osiowosymetrycznej tarczy do etapu, w którym tarcza osiąga nośność graniczną. Można przyjąć, że w ostatniej fazie zniszczenia rozwój promieniowych stref dekohezyjnych powoduje całkowite osłabienie tarczy. W drugiej części pracy, rozpoczynającej się od rozdziału piątego, podjęto przygotowania do numerycznego rozwiązania tego problemu.

Drugą część rozpoczyna interpretacja geometryczna równań opisujących problemy nieliniowe oraz analiza znaczenia parametru sterującego. Na tej podstawie sformułowano problemy perturbacyjne pierwszego i drugiego rzędu i omówiono warunki istnienia rozwiązań tych problemów. Przedstawiona w rozdziale piątym propozycja formułowania przyrostowego układu równań w postaci jednorodnej i stosowania analizy rzędu macierzy takiego układu ma podstawowe znaczenie dla dalszych rozważań. Wynika stąd metoda wyboru zmiennej sterującej procesem obliczeniowym. W kolejnych rozdziałach omówiono znaczenie analizy rzędu macierzy układu jednorodnego w punktach bifurkacji, przy wyprowadzaniu związków konstytutywnych oraz w metodzie kontynuacji. W rozdziale poświęconym metodzie kontynuacji jako przykład przedstawiono jej zastosowanie do analizy problemów z nieliniowością materiałową. Przedstawiono opis elementu kontaktowego modelującego proces dekohezji plastycznej. Ogólne rozważania zilustrowano przykładami omówionymi w rozdziale dziewiątym. Ostatni rozdział zawiera wnioski, które zdaniem autora mają ogólne znaczenie dla analizy stanów pokrytycznych.

Rozważania ograniczają się do zakresu małych przemieszczeń i odkształceń. Zasadniczo stosowany jest zapis rachunku wektorowego i macierzowego. Gdy mowa jest o tensorach np. odkształcenia lub naprężenia, ma to związek jedynie z symetrią składowych. W efekcie bez zmiany oznaczeń tensory odkształcenia i naprężenia we wzorach traktowane są jak wektory o sześciu niezależnych składowych. Uzasadnienie takiego podejścia przedstawione jest w rozdziale piątym.

Rozdział 1.

Przegląd literatury.

Materiały wykazujące kruche właściwości są powszechnie spotykane. Do tej klasy należą np. granit, marmur, szkło, lód, ceramika. Zainteresowanie badaczy materiałami kruchymi wynika z ich znaczenia praktycznego (np. w przemyśle wydobywczym, w budownictwie, itd.). Tylko stosunkowo niewielka liczba modeli konstytutywnych pozwala z dobrym przybliżeniem prowadzić analizę deformacji w ośrodkach kruchych. W literaturze spotkać można opinie wskazujące zasadniczo na dwie tego przyczyny. Po pierwsze ciągle nie ma pełnej zgodności co do samego mechanizmu zniszczenia. Taką opinię można znaleźć np. w pracach [5, 8, 38, 73]. Po drugie, w procesie obliczeniowym natrafiamy na znaczne trudności z ustaleniem odpowiedniego algorytmu, w szczególności gdy w grę wchodzi osłabienie (patrz np. [73]). Szersze wyjaśnienie przyczyn, dla których napotykałyśmy na tak znaczne trudności wynika z prezentowanego niżej przeglądu literatury.

Przegląd rozpoczyna się od ogólnego określenia stanu pokrytycznego. Następnie omówiono zasadnicze cechy materiałów kruchych i sposoby ich modelowania. Dalej omówiono prace związane z przykładami analitycznymi prezentowanymi w pracy. W kolejnej części przedstawiono metodę kontynuacji stosowaną w obliczeniach numerycznych. Całość przeglądu podsumowano w postaci odpowiednich wniosków.

1.1 Stateczność i jednoznaczność ścieżki obciążenia.

W literaturze nie ma zgody co do sposobu zdefiniowania stateczności procesu. Ogólnie można powiedzieć, że stateczność układów mechanicznych oznacza, że niewielkie zaburzenie konfiguracji układu nie powoduje utraty równowagi statycznej układu. Utrata stateczności może mieć charakter lokalny lub globalny (całej konstrukcji). Stan związany z utratą stateczności określa tzw. punkt graniczny. Z utratą stateczności wiąże się też często utrata jednoznaczności stanu równowagi, czyli tzw. punkt bifurkacji. Punkty graniczne i punkty bifurkacji określa się mianem punktów krytycznych.

Oznaczmy przez ϵ oraz σ tensory odkształcenia całkowitego i naprężenia. Zakładając, że obciążenie zewnętrzne jest stałe, warunek lokalnej stateczności można przedstawić za pomocą nierówności

$$\sigma^T \dot{\epsilon} > 0 \quad (1.1)$$

natomiast warunek stateczności globalnej określony jest następująco

$$\int_V \dot{\sigma}^T \dot{\epsilon} dV > 0 \quad (1.2)$$

(kropki oznaczają różniczkowanie względem pewnego czasopodobnego parametru). Podane warunki muszą zachodzić dla wszystkich kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości $\dot{\epsilon}$ i słuszne są dla dowolnych układów — sprężystych i niesprężystych. Warunki stateczności podane zostały po raz pierwszy przez Hilla, a następnie dyskutowane były między innymi w pracach [7, 15, 68]. Dla materiałów kruchych odpowiednią dyskusję przedstawiono w pracy [52]. Przy zmieniającym się obciążeniu zewnętrznym równowaga statyczna może być zachowana nawet w przypadku, gdy warunki 1.1 i 1.2 nie będą spełnione. Dla skupienia uwagi dalej będziemy jednak korzystać z definicji Hilla.

Czynniki fizyczne wpływające na utratę stateczności.

Od strony fizycznej przyczyny niestateczności można podzielić na dwie kategorie:

- związane ze zmianą geometrii konstrukcji, oraz
- związane ze zmianą cech materiałowych.

Niestateczność materiałowa towarzyszy procesom nieodwracalnym. W pracy [6] wykazano na przykładzie jednoosiowego stanu naprężenia, że przyczyną niestateczności układu może być osłabienie materiału. Osłabienie materiału prowadzi do pojawienia się lokalizacji zniszczenia i spadku nośności konstrukcji. Ponieważ przez osłabienie rozumie się przypadek, gdy w jednoosiowym stanie krzywa naprężenie-odkształcenie ma ujemne nachylenie, stąd spełnienie nierówności $\dot{\sigma} \dot{\epsilon} < 0$ jest niejako oczywiste. Gdy jednak dominującym mechanizmem przenoszenia obciążenia jest tarcie (np. w piasku, skałach, spękanym betonie) to niestateczność może pojawić się nawet przy wzroście obciążenia. Przyczyną niestateczności w takim przypadku jest brak symetrii w relacji pomiędzy tensorem prędkości naprężenia i tensorem prędkości odkształcenia (patrz uwagi na ten temat [7, 15]). W związku z tym spotyka się w literaturze dalszy podział wynikający z charakteru obserwowanych zmian (patrz np. [15]) — wyróżnia się niestateczność powstającą na skutek:

- osłabienia i dekohezji (np. w skałach, betonie), oraz
- poślizgu (np. w metalach, skałach, piasku).

Macierz sztywności materiału a stateczność.

Zakładając, że związek pomiędzy tensorami $\dot{\sigma}$ i $\dot{\epsilon}$ dany jest w postaci

$$\dot{\sigma} = D \dot{\epsilon} \quad (1.3)$$

gdzie D oznacza styczną macierz sztywności materiału, warunek 1.1 zapiszemy w następujący sposób

$$\dot{\epsilon}^T D \dot{\epsilon} = \frac{1}{2} \dot{\epsilon}^T (D + D^T) \dot{\epsilon} > 0 \quad (1.4)$$

Z powyższego wynika, że warunkiem lokalnej stateczności jest dodatnia określoność macierzy sztywności. Początek lokalnej utraty stateczności może nastąpić z chwilą, gdy część symetryczna macierzy D staje się osobliwa

$$\det(D + D^T) = 0 \quad (1.5)$$

Niestateczność lokalna może spowodować niestateczność globalną. Najczęściej praktyczne znaczenie ma analiza stateczności konstrukcji przeprowadzana po dyskretyzacji układu ciągłego. Postępując podobnie wprowadzimy następujące oznaczenia. Przez \mathbf{d} oznaczymy prędkości przemieszczeń węzłów modelu dyskretnego, a przez B macierz określającą związek pomiędzy prędkościami $\dot{\epsilon}$ i \mathbf{d} , czyli

$$\dot{\epsilon} = B\mathbf{d} \quad (1.6)$$

Dalej przez K oznaczymy styczną macierz sztywności konstrukcji

$$K = \int_V B^T DB dV \quad (1.7)$$

Przy powyższych oznaczeniach warunek konieczny globalnej utraty stateczności zapiszemy w postaci

$$\det(K + K^T) = 0 \quad (1.8)$$

Wynika stąd, że początek globalnej utraty stateczności może nastąpić z chwilą, gdy część symetryczna macierzy K staje się osobliwa. W przypadku niesymetrycznej macierzy sztywności utrata stateczności może nastąpić, gdy wektor obciążenia zewnętrznego δf jest ortogonalny do wektora δd (patrz [7], str.671), czyli

$$\delta d^T \delta f = 0 \quad (1.9)$$

Ponieważ z założenia spełniona ma być równość $K\delta d = \delta f$, więc także musi zachodzić warunek

$$\delta d^T K \delta d = 0 \quad (1.10)$$

Ostatnia równość oznacza, że utrata stateczności może nastąpić, gdy niesymetryczna macierz sztywności jest osobliwa, czyli

$$\det(K) = 0 \quad (1.11)$$

Warunki 1.8 i 1.11 pokrywają się w przypadku macierzy symetrycznych. Gdy spełnione są warunki 1.9 i 1.11 mamy także do czynienia z niejednoznacznością — bifurkacją ścieżki równowagi.

Drucker i Hill wykazali, że warunkiem koniecznym utraty stateczności, jednoznaczności i bifurkacji dowolnego rozwiązania jest utrata dodatniej określoności pracy drugiego rzędu. W ostatnim okresie warunkami niejednoznaczności zajmowano się np. w pracach [1, 10, 11, 12, 58]. Ze względu na rodzaj ścieżki pobifurkacyjnej wprowadzono rozróżnienie na bifurkację dyfuzyjną i bifurkację nieciągłą. W pierwszym przypadku możemy mieć np. do czynienia z powstawaniem szyjki w sposób gładki (rozwoj zapoczątkowany w punkcie lub

na pewnej powierzchni). W przypadku drugim bifurkacja powoduje powstanie pasma, w którym występuje nieciągłość tensora prędkości odkształceń.

1.2 Opis cech i modeli materiałów kruchych.

Doświadczenia wykazują, że zniszczenie materiału kruchego następuje już przy niewielkich obciążeniach. Jako przyczynę podaje się propagację makroszczelin oraz ich dominujący wpływ na nośność konstrukcji. Oprócz makroszczelin w procesie zniszczenia możemy obserwować także efekty takie jak kruszenie, wylamywanie, łuszczenie, itd.. Istotne jest to, że różne formy zniszczenia pojawiają się w trakcie procesu niejednocześnie. Obok zmian form uszkodzenia obserwuje się cykliczność procesu — powtarzający się wzrost i spadek obciążenia. Kolejną ważną cechą jest też tzw. efekt skali, związany z obserwowanym spadkiem obciążenia niszczącego wraz ze wzrostem wymiarów niszczonego obiektu. Wymienione tu cechy opisywane są niemal w każdej cytowanej poniżej pozycji literatury.

Z szeregu badań wynika, że przebieg niszczenia próbek wykonanych z tego samego materiału i o tych samych wymiarach zależy od relacji pomiędzy głównymi składowymi tensora naprężenia oraz od historii obciążenia (patrz np. [26]). Istnieje także cały szereg innych czynników, takich jak wielkość ziarn, temperatura, wilgotność, mających wpływ na wytrzymałość. Przykładowo wpływ wielkości ziarn kruszywa w betonie omawiany jest w pracach [38, 67, 83]. Stwierdzono, że mniejsze ziarna powodują bardziej kruche zachowanie materiału. Zasadniczym zadaniem mechaniki jest jednak opis procesu zniszczenia przy pomocy odpowiedniej relacji pomiędzy naprężeniami i odkształceniami z pominięciem innych czynników.

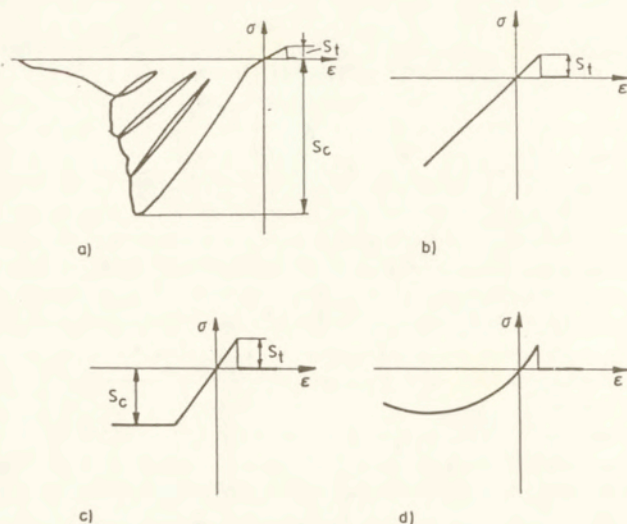
Rodzaje modeli materiałów kruchych.

Przyjmuje się, że zniszczenie następuje gdy stan naprężenia osiąga pewną fikcyjną powierzchnię, zwaną powierzchnią stanu granicznego. Powierzchnia stanów granicznych jest ekstrapolacją skończonej liczby punktów reprezentujących charakterystyczne cechy materiału, wyznaczone na podstawie badań doświadczalnych. Szerszy przegląd warunków stanu krytycznego dla materiałów kruchych można znaleźć np. w pracach [5, 38]. Ogólnie warunek ten może być opisany równaniem

$$\mathcal{F}(\sigma, \alpha) = 0 \quad (1.12)$$

gdzie α oznacza pewien wektor parametrów stanu. Stany sprężyste reprezentowane są przez punkty znajdujące się wewnątrz obszaru ograniczonego powierzchnią $\mathcal{F} = 0$. Osiągnięcie stanu granicznego i rozwój uszkodzenia może powodować zmianę rozmiarów i kształtu powierzchni granicznej. Zachodzące zmiany muszą być wówczas opisane równaniami ewolucji parametrów stanu (wzmocnienie lub osłabienie materiału).

Na rysunku 1.1a przedstawiono przykładowo krzywą jednoosiowego ściskania i rozciągania dla marmuru. Krzywe odciążania świadczą tutaj, że w procesie deformacji rozwijają się odkształcenia odwracalne (sprężyste) i nieodwracalne. Dla teoretycznych rozważań w pracy [24] proponowane są uproszczone modele: sprężysto-kruchy, sprężysto-krucho-idealnie plastyczny oraz sprężysto-krucho-plastyczny ze wzmocnieniem i osłabieniem (Rys. 1.1b,c,d). Poniżej omówimy stosowane w literaturze niektóre modele po kolei dla: zachowania sprężystego,



Rys. 1.1

Krzywe jednoosiowego stanu naprężenia: a) dla marmuru oraz dla modeli teoretycznych ciała; b) sprężysto-kruchoego, c) sprężysto-krucho-plastycznego, d) sprężysto-krucho-plastycznego ze wzmocnieniem i osłabieniem.

stanu granicznego oraz zmian własności materiału w procesie nieodwracalnym. Nieco bardziej szczegółowo omówimy model szczelin rozmytych.

Stan sprężysty materiału kruchoego.

Przyjmuje się, że w stanie sprężystym związek pomiędzy naprężeniami i odkształceniami dla materiałów kruchoych z dobrym przybliżeniem może być traktowany jako związek liniowy. Zasadniczo materiały kruchoe (np. skały, ze względu na istniejące w nich naturalne mikrosprękania o różnej orientacji, należy traktować jako materiały anizotropowe. W mechanice skał duże znaczenie ma anizotropia o trzech wzajemnie prostopadłych płaszczyznach symetrii — ortotropia ([24, 38, 73]). Przyjmując model ortotropowy z osiami wyznaczonymi przez wersory \hat{i}_n , \hat{i}_s , \hat{i}_t , związek pomiędzy naprężeniami σ i odkształceniami ϵ otrzymamy w postaci

$$\sigma = D\epsilon \quad (1.13)$$

gdzie macierz sprężystości dana jest następująco

$$D = \begin{bmatrix} E_{nn} & E_{ns} & E_{nt} & 0 & 0 & 0 \\ E_{ns} & E_{ss} & E_{st} & 0 & 0 & 0 \\ E_{nt} & E_{st} & E_{tt} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{ns} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{st} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{nt} \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

Przy takim modelu mamy 9 stałych sprężystych: sześć modułów sprężystości podłużnej E_{nn} , E_{ss} , E_{tt} , E_{ns} , E_{st} i E_{nt} oraz trzy moduły sprężystości postaciowej G_{ns} , G_{st} i G_{nt} . Material nieuszkodzony najczęściej bywa jednak w uproszczeniu traktowany jako izotropowy i opisywany jest zwykłym prawem Hooke'a z dwoma stałymi sprężystości.

Plastyczność i rodzaje spękań.

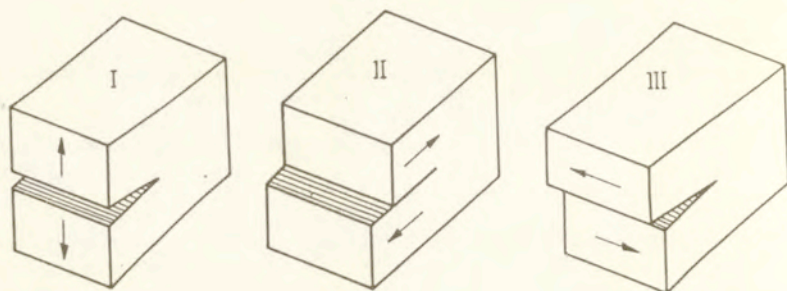
Jedną z wielkości charakteryzujących skały jest jej wytrzymałość na ściskanie. W rzeczywistości wytrzymałość na ściskanie osiągnięta zostaje, gdy nastąpi zniszczenie elementów, które pod przyłożonym obciążeniem pracują na rozciąganie, albo tych, które pracują na ścinanie. Materiały kruche rzadko cechuje zdolność do płynięcia plastycznego. Zjawisko takie może towarzyszyć tworzeniu się mikrospekkań, bądź powstawać dopiero przy znacznych ciśnieniach hydrostatycznych ([24, 38]). Jako trwale odkształcenia traktuje się raczej efekt wzajemnego przemieszczania się większych fragmentów materiału spękanego, natomiast płynięcie plastyczne może wystąpić, gdy na skutek rozwoju mikro- i makroszczelin materiał ulegnie rozdrobnieniu. Tak zmieniony materiał doznaje trwałych deformacji przenosząc obciążenia ściskające.

Zaawansowany rozwój mikroszczelin powoduje ich łączenie i zależnie od panującego w materiale stanu naprężenia obserwuje się ([26]) powstawanie makroszczelin ("splitting fracture") lub pasm ścinania ("shear fracture"). Oba te rodzaje pęknięć dość istotnie różnią się od siebie. W pierwszym przypadku mamy do czynienia ze zlokalizowanym pokonywaniem spójności materiału wzdłuż pewnej powierzchni. Natomiast przy ścinaniu tworzenie się szczelin wiąże się z pokonywaniem tarcia wewnętrznego i zachodzi w pasmach o charakterystycznej szerokości (rzędu kilku wielkości ziaren). We wcześniejszej fazie rozwoju uszkodzenia możliwe są dwa rodzaje rozwoju spękań:

- propagacja pojedynczych szczelin,
- rozwój szczelin rozłożonych w sposób ciągły.

Przy modelowaniu pojedynczych szczelin korzysta się z trzech podstawowych modeli mechaniki pęknięcia (patrz Rys. 1.2). Najważniejszą konsekwencją tego typu podejścia jest możliwość przewidywania efektu skali ([28, 38]). Założenie o ciągłym rozkładzie szczelin stosowane jest w teorii szczelin rozmytych ([13, 14, 16, 17, 18, 73]). Szersze omówienie rodzajów spękań podane jest np. w pracy [38].

Obserwacje skał doprowadziły do przekonania, że materiałom kruchym można przypisać właściwości tarcia wewnętrznego i spójności. Olbrzymie znaczenie tarcia obserwuje się na poziomie mikro (pomiędzy ziarnami na powierzchni szczelin) i makro (pomiędzy powierzchniami szczelin i bloków skalnych). To powoduje, że do opisu plastycznego zachowania często



Rys. 1.2
Trzy podstawowe typy pęknięcia.

przyjmuje się warunek Coulomba. Warunek ten z dobrym przybliżeniem opisuje niektóre próby wytrzymałościowe materiałów kruchych. W kontekście omawianego dalej przykładu można tu wymienić np. pracę Tokara ([94]), który badał przebieg niszczenia skal pod wpływem ciśnienia działającego na wewnętrzną powierzchnię wydrążonego otworu. Podczas eksperymentu obserwowano rozwój linii poślizgu dobrze odpowiadających przewidywaniom teoretycznym, uzyskanych przy wykorzystaniu warunku Coulomba.

Dla uwzględnienia zjawiska pęknięcia stosuje się warunek Coulomba w zmodyfikowanej formie, łącząc go z warunkiem maksymalnego naprężenia rozciągającego. Zwykle do obliczeń przyjmuje się jako graniczną wartość S_t wytrzymałości na rozciąganie w jednoosiowym stanie naprężenia. Tak jest np. przy stosowaniu teorii szczelin rozmytych. Jednak z eksperymentów wiadomo (patrz np. [26]), że w trójosiowym stanie naprężenia warunek maksymalnego naprężenia rozciągającego może być niewystarczający. Ponadto pęknięcie może być spowodowane ścinaniem wzdłuż linii poślizgu. Złożony stan naprężenia przy pęknięciu uwzględnia warunek Griffitha, bądź jego modyfikacje zaproponowane przez McClintocka i Walsh ([38]).

Problemmowi modelowania powierzchni stanu krytycznego poświęcona jest olbrzymia literatura (np. Bangash [5] wymienia około stu pozycji, pomimo że nie jest to centralny problem w jego książce). Podejmowane są dalsze próby dla określenia powierzchni stanów granicznych (np. w pracy [101] przedstawiono propozycję, aby warunek stanu granicznego zapisać w przestrzeni odkształceń plastycznych). Nie wydaje się, aby temat ten mógł być wyczerpany w najbliższym czasie.

Lokalizacja odkształceń.

Dodatkowe utrudnienie przy modelowaniu stanu krytycznego wynika z konieczności uwzględnienia zjawiska lokalizacji. Problem lokalizacji w oczywisty sposób dotyczy nie tylko materiałów kruchych. Istnieje obszerna literatura, w której prace teoretyczne znajdują konkretne zastosowania praktyczne (np. [2, 61, 65, 80]). Wydaje się, że można ogólnie dokonać podziału na prace, w których lokalizację starano się opisać za pomocą:

- równań konstytutywnych bądź
- odpowiednich metod numerycznych.

W dalszej części przedstawione jest rozwiązanie problemu dekohezji tarczy, które można zaliczyć do pierwszej grupy prac.

Opis osłabienia.

Osobnym problemem, znacznie słabiej opisanym, jest zagadnienie modelowania osłabienia i zmian własności materiałowych powstających na skutek spękań. Najprostszym z możliwych rozwiązań jest przyjęcie założenia, że na skutek pęknięcia odpowiednie moduły sprężystości w macierzy D przyjmują wartość zero. Jest to jednak grube przybliżenie rzeczywistości, ponieważ wiadomo, że także materiał spękany może przetrwać obciążenie w wyniku wzajemnego tarcia i blokowania się spękanych powierzchni. Ponadto tak gwałtowna zmiana własności prowadzi do znacznych kłopotów obliczeniowych wynikających z powstania silnych nieciągłości ([73]). Lepszym rozwiązaniem jest więc założenie o stopniowej redukcji modułów sprężystości.

Można wyróżnić dwa zasadnicze podejścia makroskopowe do problemu modelowania osłabienia:

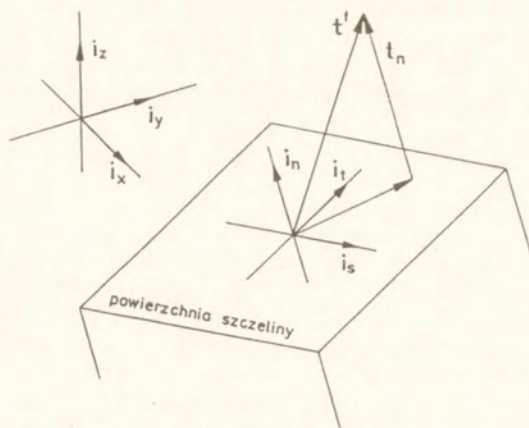
- Określenie związku naprężenie-odkształcenie (stosowane np. w pracy [64]).
- Określenie związku naprężenie-przemieszczenie (stosowane przy modelowaniu pękania metali i wprowadzone w pracy [35] także dla betonu).

Drugi sposób wykorzystuje znane z mechaniki pękania założenie o równowadze uwalnianej energii potencjalnej i energii powierzchniowej G_c potrzebnej do utworzenia jednostkowej powierzchni kruchej szczeliny. Powszechnie przyjmuje się, że energia G_c określa jedną ze stałych materiałowych. Propozycja Hillerborga zbliżona jest do modelu Barenblatta, tj. przyjmuje się, że w okolicy wierzchołka szczeliny istnieje pewna niewielka strefa, w której wartości naprężenia spadają wraz z otwieraniem się szczeliny. Zakłada się, że inicjacja pękania następuje z chwilą osiągnięcia na wierzchołku szczeliny wytrzymałości na rozciąganie.

Propozycja Hillerborga zastosowana była w metodzie elementów skończonych do analizy rozwoju tzw. dyskretnych szczelin. W koncepcji szczelin dyskretnych osłabienie wprowadza się na granicy pomiędzy elementami, a w związku z tym kierunek propagacji szczelin zależy od sposobu dyskretyzacji modelu konstrukcji. W późniejszym czasie propozycja Hillerborga znalazła zastosowanie także w połączeniu z teorią szczelin rozmytych. W tym podejściu rozwój szczelin modelowany jest w sposób ciągły. Pomimo pewnych ograniczeń w stosowalności teorii szczelin rozmytych, daje ona ciekawe i jak się wydaje dość realistyczne rezultaty. Powodzenie w stosowaniu szczelin rozmytych stało się przyczyną, dla której metoda szczelin dyskretnych stopniowo została wyparta z użycia. Wydaje się, że warto poświęcić nieco więcej uwagi wymienianej już kilkakrotnie koncepcji szczelin rozmytych.

Model szczelin rozmytych.

Obecnie skoncentrujemy uwagę na przedstwienu metody wyznaczania związku między prędkościami naprężeń i całkowitych odkształceń. Prezentowane niżej wzory obejmują model



Rys. 1.3

Lokalny układ współrzędnych związany z powierzchnią szczeliny.

zachowania sprężystego, warunek stanu granicznego oraz model osłabienia, a więc niejako stanowią formę podsumowania tej części przeglądu literatury. Do tak sformułowanych potrzeb wystarczy, gdy rozważania ograniczymy do koncepcji szczelin o stałej orientacji w układzie odniesienia. Szereg ważnych zagadnień (np. tzw. szczeliny rotujące), niżej pominiętych, w bardzo przejrzysty sposób opisano w pracy [73] i w pracach [13, 14, 16, 17, 18].

Oznaczmy przez i_x , i_y , i_z wersory globalnego układu współrzędnych, a przez i_n , i_s , i_t wersory układu lokalnego. Układ lokalny związany jest z nowo tworzoną szczeliną w taki sposób, że oś i_n wyznacza kierunek normalny do powierzchni szczeliny, a i_s , i_t określają kierunki styczne (Rys. 1.3). Koncepcja szczelin o stałej orientacji oznacza, że transformację układu globalnego do lokalnego określać będzie stała macierz obrotu

$$Q = \begin{bmatrix} i_{n_x} & i_{n_y} & i_{n_z} \\ i_{s_x} & i_{s_y} & i_{s_z} \\ i_{t_x} & i_{t_y} & i_{t_z} \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

Zakres stosowności teorii szczelin rozmytych w prezentowanym kształcie określają następujące podstawowe założenia:

- Materiał nieuszkodzony jest materiałem sprężystym izotropowym.
- Materiał spękany jest materiałem sprężystym ortotropowym o zmieniających się modułach sztywności.
- Przyłożone obciążenie powoduje rozciąganie, bądź rozciąganie i ścinanie.
- Pęknięcie następuje pod wpływem naprężeń rozciągających, a nie w skutek tworzenia się pasm ścinania.

Ponadto zakładamy, że odkształcenia ϵ możemy rozłożyć na część sprężystą ϵ^e i część modelującą rozwarcie szczelin ϵ^f

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^f \quad (1.16)$$

Odształcenia zapisane w lokalnym układzie oznaczają będziemy odpowiednio przez ϵ , ϵ^e oraz ϵ^f .

Można zauważyć, że w lokalnym układzie dla części ϵ^f , sens fizyczny posiadają jedynie składowe ϵ_{nn}^f , ϵ_{ns}^f oraz ϵ_{nt}^f , reprezentujące trzy podstawowe typy pęknięcia (Rys. 1.2). Pomiedzy tensorami odkształcenia w lokalnym i globalnym układzie istnieje związek

$$\epsilon^f = Q^T \epsilon^f Q \quad (1.17)$$

Wykorzystując równość $\epsilon_{ss}^f = \epsilon_{tt}^f = \epsilon_{st}^f = 0$, odkształcenia ϵ^f wygodniej jednak będzie przedstawić w postaci wektorowej

$$\epsilon^f = N e^f \quad (1.18)$$

gdzie $e^f = [\epsilon_{nn}^f, \epsilon_{ns}^f, \epsilon_{nt}^f]^T$, oraz N oznacza macierz

$$N = \begin{bmatrix} i_{nx}^2 & i_{nx}i_{sx} & i_{nx}i_{tx} \\ i_{ny}^2 & i_{ny}i_{sy} & i_{ny}i_{ty} \\ i_{nz}^2 & i_{nz}i_{sz} & i_{nz}i_{tz} \\ 2i_{nx}i_{ny} & i_{nx}i_{sy} + i_{ny}i_{sx} & i_{nx}i_{ty} + i_{ny}i_{tx} \\ 2i_{ny}i_{nz} & i_{ny}i_{sz} + i_{nz}i_{sy} & i_{ny}i_{tz} + i_{nz}i_{ty} \\ 2i_{nx}i_{nz} & i_{nx}i_{sz} + i_{nz}i_{sx} & i_{nx}i_{tz} + i_{nz}i_{tx} \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

Tę samą macierz N możemy wykorzystać do wyznaczenia wektora t^f lokalnych sił powierzchniowych, odpowiadającego wektorowi e^f . Otrzymamy

$$t^f = N^T \sigma \quad (1.20)$$

Wektor t^f określa słabnące siły wzajemnego oddziaływania powierzchni tworzonej szczeliny.

Naprężenia i odkształcenia sprężyste związane są ze sobą równaniami

$$\sigma = D^e \epsilon^e \quad (1.21)$$

gdzie D^e oznacza stałą macierz sztywności o wymiarach (6×6) jak dla materiału nieuszkodzonego. Dla części modelującej rozwarcie szczelin, z uwagi na zmienny charakter wiązań w szczelinie, odpowiedni związek definiowany jest w układzie lokalnym w postaci

$$t^f = D^f e^f \quad (1.22)$$

gdzie $D^f = D^f(e^f)$ jest macierzą o wymiarach (3×3) uwzględniającą chwilowe sztywności trzech typów pęknięcia.

Na podstawie powyższych równań możemy określić związki pomiędzy prędkościami naprężeń i odkształceń całkowitych. W tym celu związki 1.16, 1.18, 1.20 i 1.21 sprowadzimy do postaci

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^f \quad \dot{\epsilon}^f = N\dot{\epsilon}^I \quad \dot{t}^f = N^T \dot{\sigma} \quad \dot{\sigma} = D^e \dot{\epsilon}^e \quad (1.23)$$

Wstawiając związki 1.23₁, 1.23₂ i 1.23₄ do 1.23₃ otrzymamy

$$\dot{t}^f = N^T D^e (\dot{\epsilon} - N\dot{\epsilon}^f) \quad (1.24)$$

Dalej porównując lewe strony równań 1.22 i 1.24 możemy wyznaczyć $\dot{\epsilon}^f$ w funkcji prędkości całkowitych odkształceń. Otrzymamy

$$\dot{\epsilon}^f = (D^f + N^T D^e N)^{-1} N^T D^e \dot{\epsilon} \quad (1.25)$$

Stąd i ze związku 1.23₂ wyznaczmy prędkości $\dot{\epsilon}^f$ w układzie globalnym w funkcji prędkości całkowitych odkształceń. Dalej ze związku 1.23₁ otrzymamy prędkości $\dot{\epsilon}^e$. Na koniec korzystając z równania 1.23₄, poszukiwany związek pomiędzy prędkościami naprężeń i całkowitych odkształceń otrzymamy w postaci

$$\dot{\sigma} = [D^e - D^e N (D^f + N^T D^e N)^{-1} N^T D^e] \dot{\epsilon} \quad (1.26)$$

Wyrażenie w nawiasach kwadratowych określa macierz sztywności stycznej pękającego materiału.

Jeżeli macierz D^f jest nieliniową funkcją rozwarcia szczeliny, wówczas pierwszy krok procedury przyrostowej pozwala określić jedynie przybliżenie kolejnego stanu równowagi. Dla uzyskania lepszego przybliżenia konieczne jest stosowanie procedur korekcyjnych, w których poprawkom podlegać będą także wartości współczynników macierzy D^f . Na podstawie eksperymentów numerycznych stwierdzono ([13, 73]), że zbieżność obliczeń zależy od charakteru osłabienia — w niektórych przypadkach, szczególnie przy bardzo stromym spadku naprężeń, napotymano na bardzo istotne trudności.

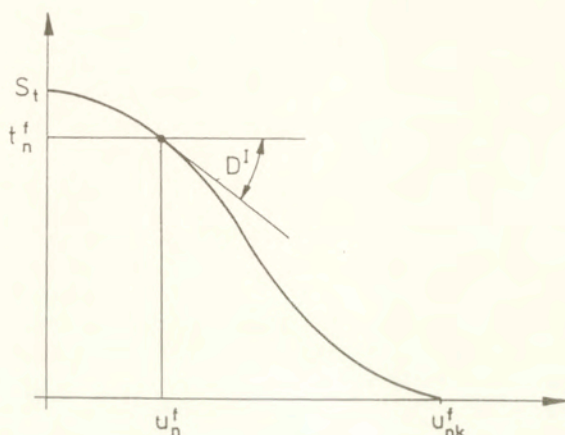
Przy modelowaniu osłabienia w teorii szczelin rozmytych przyjmuje się, że macierz D^f jest diagonalna

$$D^f = \begin{bmatrix} D^I & 0 & 0 \\ 0 & D^{II} & 0 \\ 0 & 0 & D^{III} \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

Z takiego założenia wynika brak bezpośredniego sprzężenia pomiędzy różnymi typami pękania. Obecnie brak jest jednoznacznych danych eksperymentalnych, które uzasadniałyby konieczność innego postępowania. Zaniedbuje się też różnicę pomiędzy I i II typem pękania.

Krzywa modelująca przebieg osłabienia może być określona jedynie przez skończoną liczbę parametrów wytrzymałościowych materiału. Dla szczeliny typu I parametrami są wytrzymałość na rozciąganie S_t oraz energia powierzchniowa G_c , a krzywa osłabienia przedstawia zależność $t_n^I(u_n^I)$ (Rys. 1.4). Tutaj $u_n^I = h\epsilon_{nn}^I$, oraz h oznacza charakterystyczny wymiar pozwalający uniezależnić wielkość obszaru pękającego od wielkości użytych elementów skończonych. Zakładając kształt krzywej osłabienia otrzymamy

$$G_c = \int_0^{u_n^{I,k}} t_n^I(u_n^I) du_n^I \quad (1.28)$$



Rys. 1.4

Krzywa osłabienia na płaszczyźnie $t_n^f - u_n^f$ dla szczeliny typu I.

Jak widać energia powierzchniowa określa pole pod krzywą osłabienia, a więc ogranicza swobodę wyboru tej krzywej. Z założonego związku $t_n^f(u_n^f)$ możemy wyznaczyć chwilowe moduły osłabienia $D^I(u_n^f)$. Koniec pęknięcia następuje w chwili, gdy rozwarcie szczeliny osiąga wartość u_{nk}^f wynikającą ze związku 1.28.

Opisany sposób wyznaczania wartości D^I jest w znacznej mierze uproszczony z powodu braku większej liczby danych eksperymentalnych. Jeszcze mniej danych mamy dla wyznaczenia modułów D^{II} , stąd też opis pęknięcia typu II opiera się jedynie na obserwacjach jakościowych. Z eksperymentów wiadomo, że wzajemne blokowanie się spękanych powierzchni maleje wraz z otwieraniem się szczelin. Stąd jedna z propozycji jest następująca

$$D^{II} = G \frac{\left(1 - h \frac{e_{nn}^f}{u_{nk}^f}\right)^p}{1 - \left(1 - h \frac{e_{nn}^f}{u_{nk}^f}\right)^p} \quad (1.29)$$

gdzie G jest modułem odkształcenia postaciowego, p jest stałym wykładnikiem (np. $p = 1$).

1.3 Prace dotyczące omawianych dalej przykładów.

W celu określenia własności materiałów kruchych bardzo często badania przeprowadzane są na próbkach w kształcie rury grubościennej. Inną formą przeprowadzania doświadczeń, o dużym znaczeniu ze względu na swoją prostotę, jest próba wciskania stempla. W prezentowanej pracy podano m. in. rozwiązania analityczne problemów związanych z wymienionymi tu próbami wytrzymałościowymi. Obecnie omówimy prace, w których zajmowano się problemami zbliżonymi do prezentowanych dalej przykładów analitycznych.

Analiza pęknięcia i kruszenia rury grubościennej.

Przedmiotem analizy w rozdziale drugim jest przebieg procesu niszczenia rury grubościennej na skutek rozwoju strefy spękań i strefy kruszenia, zachodzącego pod wpływem obciążenia przyłożonego do jej wewnętrznej powierzchni (Rys. 2.1). Proces niszczenia rury pod działaniem obciążenia przyłożonego do zewnętrznej powierzchni rozpatrywano w pracy [56]. Znaczenie rozwiązania tego typu problemów wynika z możliwości jego praktycznych zastosowań ([38]). Rura o nieskończonej wielkim promieniu zewnętrznym może być wykorzystana do modelowania wyrobiska w górotworze. W otoczeniu otworów wiertniczych, w których nastąpiło odpalenie ładunku wybuchowego, obserwuje się strefy materiału skruszonego, spękanego i sprężystego. Przy wydobywaniu ropy naftowej często stosuje się metodę hydraulicznego szczelinowania, opartą na wywoływaniu spękań wokół otworu wiertniczego za pomocą wtłaczanego płynu. Zagadnienie szczelinowania hydraulicznego badano np. w pracy [60].

W formie przykładów, analiza rozwoju strefy spękaną w rurze obciążonej od wewnątrz była prezentowana w pracach [23, 32]. Nie uwzględniono w nich jednak ograniczonej wytrzymałości na ściskanie i możliwości tworzenia się strefy skruszonej. Pierwszą próbą uwzględnienia tego faktu była analiza tarczy o nieskończonym promieniu zewnętrznym przedstawiona w pracy [47]. W pracy tej przyjęto do rozważań wytrzymałościowe kryterium pęknięcia. Zwiększanie zasięgu stref skruszonej i spękaną w tarczy nieograniczonej wymaga ciągłego zwiększania obciążenia — proces przebiega w sposób stateczny. W pracy [23] wykazano, że dla tarcz o skończonych wymiarach proces początkowo stateczny, po osiągnięciu krytycznej długości szczelin, przechodzi w fazę niestateczną. Dalej rozwój strefy spękaną następuje pomimo zmniejszania przyłożonego obciążenia.

W ostatnim okresie została złożona do druku praca Bażanta, Lina i Lippmanna ([8]), w której przedstawiono nowe rozwiązanie problemu niszczenia materiału kruchego wokół otworu w obszarze nieskończonym. Założono, że wzrastające obciążenie powoduje utworzenie wokół otworu eliptycznej strefy równoległe spękanego materiału. Tak spękany materiał tworzy belki o jednakowym przekroju poprzecznym, które przy dalszym wzroście obciążenia ulegają w pewnym momencie wyboczeniu. Wymiary poprzeczne belek wyznaczono na podstawie minimum energii potrzebnej do utworzenia szczelin. Z otrzymanych związków wynika, że obciążenie potrzebne do zniszczenia powinno maleć wraz ze wzrostem średnicy otworu. Jest to rezultat zgodny z obserwowanym eksperymentalnie efektem skali. Wydaje się, że praca Bażanta, Lina i Lippmanna wnosi dzięki temu istotnie nowe podejście do problemu, bowiem do tej pory efektu skali nie dawały żadne inne rozwiązania.

Niszczenie materiału krucho-plastycznego pod stemplem.

W rozdziale trzecim przedstawiono uproszczony opis procesu wciskania doskonale sztywnego, płaskiego stempla w materiał krucho-plastyczny. Znaczenie rozwiązania tego zagadnienia wynika z prostoty przeprowadzania doświadczeń służących określeniu własności materiału. W przypadku lodu zagadnieniu temu poświęcone były przykładowo prace [25, 53, 84, 99], natomiast problem wciskania stempla w materiał skalny analizowano w pracach [20, 49, 62, 63, 85, 96, 100]. Zastępując model materiału kruchego modelem idealnie plastycznym możemy skorzystać z teorii nośności granicznej, jednak otrzymane tą drogą wartości obciążenia niszczonego znacznie przekraczają wartości doświadczalne ([84]). Z tego powodu bezpośrednie stosowanie metod nośności granicznej w przypadku kruchych materiałów okazuje się

niewłaściwe. Cały szereg prac poświęconych zagadnieniu wciskania stempla nie uwzględnia zmienności form zniszczenia i cykliczności procesu ([20, 96, 100]). W pracy Panga, Goldsmitha i Hooda ([62]) opisano model cyklicznego procesu wciskania stempla w półprzestrzeni z materiału skalnego. Mankamentem tej pracy jest jednak zastosowanie metody nośności granicznej i pominięcie zjawiska pęknięcia. W kolejnej pracy Panga i Goldsmitha ([63]) pęknięcie uwzględniono stosując kryterium maksymalnego odkształcenia. W tym z kolei przypadku zadowalających wyników nie uzyskano przy próbie oceny wielkości strefy skruszonej.

Sprężysto-plastyczna analiza tarcz kołowych.

Zwykle kruche pęknięcie definiowane jest w sposób opisowy. W pracy [38] pojęcie to używane jest do określenia zjawiska całkowitej utraty spójności materiału wzdłuż pewnej powierzchni. Zasadniczą cechą kruchego pęknięcia jest bardzo gwałtowny rozwój uszkodzenia. Ponadto stan naprężenia w chwili inicjacji kruchego pęknięcia znajduje się wewnątrz obszaru ograniczonego powierzchnią plastyczności. Nichols ([59]) zwraca jednak uwagę, że takie określenie pojęcia kruchości jest nieprecyzyjne. Powszechnie wiadomo, że te same materiały mogą wykazywać cechy kruche lub ciągliwe, w zależności od stanu naprężenia. Pewne paradoksy występujące przy opisie deformacji materiałów ciągliwych wiązane są właśnie ze zjawiskiem kruchego pęknięcia.

Przy rozwiązywaniu problemów brzegowych dla sprężysto-idealnie plastycznych tarcz kołowych spotykamy się z różnymi stanami naprężenia: eliptycznym, hiperbolicznym lub parabolicznym. W przypadku eliptycznego stanu naprężenia w tarczy nie istnieją rzeczywiste charakterystyki, natomiast dla parabolicznego i hiperbolicznego stanu mamy jedną lub dwie rodziny charakterystyk pola naprężeń i prędkości. Jako część rozwiązania mogą występować nieciągłości w polu prędkości wzdłuż charakterystyk. Oznaczmy przez (n, t) lokalny układ współrzędnych związany z linią nieciągłości S_v i następnie przez Δv_n i Δv_t nieciągłość składowych normalnej i stycznej prędkości oraz przez V_n składową normalną prędkości, z którą porusza się element materialny. Nieciągłość składowych odkształcenia można wyrazić następująco:

$$\Delta \varepsilon_{nn} = \frac{\Delta v_n}{V_n} \quad \Delta \gamma_{nt} = \frac{\Delta v_t}{V_n} \quad \Delta \varepsilon_{tt} = 0 \quad (1.30)$$

Z równania 1.30 wynika, że w przypadku linii nieciągłości poruszającej się z cząstką ($V_n = 0$), nieciągłość odkształceń dąży do nieskończoności. Taka sytuacja występuje w osiowo-symetrycznej tarczy o skokowo zmieniającej się grubości lub w przypadku tarczy ze sztywno podpartą jedną krawędzią. Dla modelu sztywno-plastycznego składowa normalna nieciągłości prędkości występuje w kierunku obwodowym (patrz [48], [77]) a w przypadku modelu sprężysto-plastycznego obserwujemy skok przemieszczenia w kierunku promieniowym. Oczywiście skokowa zmiana przemieszczeń lub nieskończenie wielkie odkształcenia mogą budzić wątpliwości co do fizycznej poprawności rozwiązania.

Szuwalski i Życzkowski w szeregu artykułach ([87]–[92], [102]), wprowadzili koncepcję nośności dekohezyjnej przyjmując, że nieciągłość przemieszczenia na stacjonarnej linii lub powierzchni materialnej jest równoważna z lokalnym kruchym pęknięciem. Stwierdzili, że krucha dekoheza występuje niezależnie od grubości tarczy, gdy stan naprężenia osiąga punkt paraboliczny na powierzchni plastyczności. Stwierdzili także, że pomijając niewielką strefę pierwotnego uplastycznienia, procesowi dekohezyji towarzyszy sprężysty stan naprężenia, a

proces deformacji sprężysto-plastycznej przebiega dopiero po całkowitym oddzieleniu tarczy od trzpienia. Przedstawiona niżej analiza prowadzi do innych wniosków.

1.4 Numeryczna analiza stanów pokrytycznych.

W większości przypadków zagadnień nieliniowych (nie tylko w mechanice) uzyskanie rozwiązania możliwe jest wyłącznie przy użyciu metod numerycznych. Wysiłek wielu badaczy doprowadził do opracowania szeregu metod, znanych pod wspólną nazwą metod kontynuacji. Przyczyną zainteresowania autora tymi metodami jest ich skuteczność w analizie nieliniowej. W dalszej części pracy, po wprowadzeniu odpowiednich oznaczeń oraz oryginalnej koncepcji zastosowania analizy rzędu macierzy, postaramy się przedstawić jednolity schemat dla różnych wariantów metod kontynuacji, natomiast obecnie ograniczymy się do ogólnikowego omówienia możliwości ich zastosowań.

Podstawą metod kontynuacji jest lokalna lub globalna parametryzacja ścieżki równowagi. Z kolei możliwość parametryzacji wynika z twierdzenia o funkcjach uwikłanych, cytowanego w dodatku na końcu pracy. Ogólnie można powiedzieć, że metody kontynuacji należą do metod typu predictor-corrector. Przy wyznaczaniu kolejnego punktu na ścieżce równowagi, w pierwszym etapie (predictor) wyznacza się wstępne przybliżenie, które następnie w procesie iteracyjnym (corrector) jest poprawiane, aż do uzyskania wymaganej dokładności. Obszerny przegląd literatury dotyczącej metod kontynuacji przedstawiony jest przez Allgowera i Georga ([3]), Seydela ([76]), a także w pracy Crisfielda i Shi ([22]). W języku polskim metody kontynuacji opisane są np. w pracy Kleibera ([40]).

W mechanice początkowo metody te stosowane były do zagadnień z nieliniowością geometryczną — wydaje się, że w tym zakresie obecnie nie ma już żadnych poważniejszych problemów. Następnie zaczęto je wykorzystywać do analizy zagadnień z nieliniowością materiałową. Tutaj trudności na jakie obecnie napotykamy dotyczą analizy stanów pokrytycznych wywołanych przez osłabienie materiału i lokalizację. Do analizy zniszczenia w materiałach kruchych metody kontynuacji stosowane były między innymi w pracach [13, 14, 16, 17, 18, 27, 73].

Pierwsze przybliżenie rozwiązania.

W kroku predictorowym Fried ([29]) wykorzystywał najprostszą metodę liniowej ekstrapolacji opartej na dwóch znanych punktach równowagi. Lepsze pierwsze przybliżenie można uzyskać stosując liniowy predictor oparty na kierunku wektora stycznego do ścieżki równowagi ([70], [31]), lub predictor kwadratowy ([95]). Z doświadczeń numerycznych wiadomo, że najlepsze wyniki uzyskuje się z predictorów liniowych (patrz [22]).

Osobnym zagadnieniem jest problem wyznaczenia pierwszego przybliżenia punktu znajdującego się na ścieżce obciążenia wychodzącej z punktu bifurkacji. Znane z literatury metody służące do tego celu wymagają zastosowania specjalnych algorytmów ([39], [43], [71], [97]). Wydaje się, że wszystkie związane są z koniecznością wyznaczenia wektorów i wartości własnych.¹⁾ Z zagadnieniem przełączania ścieżek łączy się także problem wyznaczenia położenia punktu bifurkacji, bowiem w praktyce raczej mało prawdopodobne jest

¹⁾ Wyjątek stanowią sytuacje, w których wykorzystuje się specyficzne cechy rozwiązywanego problemu (patrz [76]).

bezpośrednie natrafienie na punkt bifurkacji. Jedną z metod opiera się na badaniu zmiany znaku wyznacznika macierzy sztywności układu. Szereg innych propozycji opisano w pracy [76].

Korekcja rozwiązania przybliżonego.

Wiele uwagi poświęcono w literaturze zagadnieniu korekcji przybliżonego rozwiązania. Wydaje się, że najczęściej stosowane są metoda Riksa ([71]) i zbliżona do niej metoda Crisfielda ([21]). W metodzie Riksa punkty określające kolejne przybliżenia leżą w płaszczyźnie ortogonalnej do wektora stycznego do ścieżki obciążenia, wyznaczonego w ostatnim wyznaczonym punkcie równowagi. W metodzie Crisfielda na kolejne przybliżenia punktu równowagi narzucony jest warunek stałej normy $\|\Delta \mathbf{d}\| = \Delta s_v$ (gdzie \mathbf{d} oznacza wektor przemieszczeń węzłowych, Δs_v jest zadaną odległością w przestrzeni przemieszczeń pomiędzy kolejnymi punktami równowagi). Pomimo dużej skuteczności tych metod istnieją jednak sytuacje, w których mogą wystąpić problemy z przechodzeniem przez punkty krytyczne. Odpowiednie przykłady przedstawione zostały przez Frieda ([29]).

Poddając krytycznej ocenie metody Crisfielda i Riksa, Fried przedstawił równocześnie metodę skuteczną w tych samych sytuacjach, gdy zawodzi metoda stałej długości łuku. Metoda Frieda zwana jest metodą ortogonalną. W metodzie tej procedura iteracyjna nie wymaga znajomości punktu równowagi. Wcześniej wyznaczony punkt na ścieżce obciążenia wykorzystywany jest jedynie do wyznaczenia pierwszego przybliżenia następnego punktu.

Problem przechodzenia punktów granicznych może być także rozwiązany innymi metodami. Najprostsza jak się wydaje metoda oparta jest na wyborze zmiennej sterującej odpowiadającej największej składowej wektora stycznego do ścieżki obciążenia ([30, 31, 70]). Po dokonaniu wyboru sterowania i wyznaczeniu pierwszego przybliżenia, proces korekcyjny nie wykorzystuje wcześniej wyznaczonego punktu równowagi — podobnie jak w metodzie ortogonalnej.

Metoda kontynuacji i model szczelin rozmytych.

W przypadku zastosowania metod Crisfielda i Riksa do teorii szczelin rozmytych mogą wystąpić dodatkowo następujące problemy:

- kinematycznie niepoprawny schemat;
- zawyżanie wartości naprężeń;
- problemy ze zbieżnością w przypadku silnego osłabienia.

Wydaje się, że pierwsze dwa problemy pozostają nadal bez rozwiązania. Do rozwiązania trzeciego de Borst ([13]) zaproponował, aby przy wyznaczaniu normy $\|\Delta \mathbf{d}\|$ przyjmować przyrosty przemieszczeń tylko niektórych węzłów. Największa skuteczność uzyskiwana była gdy przyjmowano do kontroli węzły znajdujące się w pobliżu miejsca lokalizacji. Warto w tym miejscu podkreślić, że de Borst porównywał wyniki swych obliczeń z wynikami otrzymanymi eksperymentalnie i stwierdził, że przez niewielką modyfikację metody rozwiązywania i bez zmian modelu otrzymał wyniki znacznie lepsze od swych poprzedników i bardzo zbliżone do wyników eksperymentalnych. Pomimo to ocenił swoją propozycję jako pozbawioną "elegancji" i "ogólności" (ze względu na trudności z automatyzacją wyboru węzłów).

Wydaje się, że do tej pory nie próbowano zastosować metody z wyborem zmiennej sterującej, bądź metody ortogonalnej, do analizy układów niesprężystych. Chyba najbardziej zbliżoną do pierwszej z tych koncepcji jest praca Chena i Schreyera ([19]). Zgodnie z propozycją podaną w tej pracy stan pokrytyczny wywołany osłabieniem można kontrolować za pomocą parametrów uszkodzenia i ograniczeń nałożonych na zmianę macierzy sieczonej układu. Uzyskano dzięki temu bardzo dużą skuteczność procesu iteracyjnego.

1.5 Wnioski.

Na podstawie dokonanego przeglądu literatury można wyciągnąć następujące wnioski:

- Przy modelowaniu procesu deformacji w stanach pokrytycznych mamy do czynienia zasadniczo z dwoma zagadnieniami:
 - Problem modelowania konstytutywnego, w tym
 - zachowania sprężystego (izotropia, anizotropia);
 - stanu granicznego (plastyczność, pękanie);
 - zmian własności materiału w procesie nieodwracalnym (wzmocnienie, osłabienie).
 - Problem wyboru sterowania (zmiennej niezależnej) przy rozwiązywaniu układu równań opisujących przebieg procesu.

Pierwsze zagadnienie dotyczy określenia równań rządzących modelem procesu, natomiast drugie wiąże się z metodą rozwiązywania tych równań. W oczywisty sposób oba zagadnienia są ze sobą związane.

- Ocena poprawności modelu w istotny sposób zależy od umiejętności rozwiązania odpowiedniego układu równań. Obserwacje doświadczalne dowodzą, że przebieg procesu w stanach pokrytycznych jest naogół bardzo złożony, stąd wynikają trudności w ich zrozumieniu i budowaniu poprawnych modeli.
- Pomimo znacznych sukcesów uzyskiwanych dzięki metodom kontynuacji, nadal nie można jednak stwierdzić, że są to metody w pełni skuteczne. W szczególności dotyczy to stanów pokrytycznych w układach dysypatywnych.
- Na istotę problemu sterowania wskazują tylko niektóre wymienione wyżej pozycje literatury ([19, 31, 30, 70]). Pośrednio wskazuje na to także praca [13]. Z prac [13, 19] można wnioskować, że metoda oparta na wyborze odpowiedniej zmiennej sterującej może mieć szczególnie istotne znaczenie w przypadku stanów pokrytycznych związanych z osłabieniem.

Proponowana dalej metoda wyboru zmiennej sterującej związana jest z wyznaczeniem wektora stycznego jako rozwiązania jednorodnego, liniowego układu równań z prostokątną macierzą współczynników oraz z badaniem rzędu macierzy układu. Należy więc wspomnieć na koniec, że Rheinboldt ([70]) wyraźnie zaznaczył, że wyznaczając składowe wektora stycznego ogranicza swe rozważania do przypadku, gdy rząd macierzy układu jest o jeden mniejszy od liczby składowych wektora stycznego. Zgodnie z najlepszą wiedzą autora wydaje się, że jest to pierwsza praca, w której wskazuje się związek pomiędzy rzędem macierzy układu i możliwością wyznaczenia wektora stycznego, ponadto ten aspekt metody kontynuacji dotychczas nie był analizowany.

Rozdział 2.

Analiza pękania i kruszenia materiału.

Zajmiemy się analizą rozwoju strefy pęknięć oraz strefy kruszenia zachodzącego w rurze grubościenniej poddanej ciśnieniu wewnętrznemu (Rys. 2.1). Szerzej problem prezentowany był w pracy [44]. Na początek porównano tam energetyczne i wytrzymałościowe kryterium pęknięcia dla modelu sprężysto-kruchoego. Wykazano w ten sposób, że kryterium wytrzymałościowe prowadzi do zawyżenia obciążenia niezbędnego do całkowitego zniszczenia rury. Dalej analizowano model materiału sprężysto-krucho-plastycznego. Zbadano dwa przypadki obciążenia, w tym działające na powierzchni propagujących szczelin. Z tego rodzaju obciążeniem spotykamy się w procesie szczelinowania hydraulicznego. Na koniec przedstawiono rozwiązanie dla otworu w obszarze nieskończonym.

Prezentowane niżej rozwiązanie ogranicza się do przypadku rury wykonanej z materiału sprężysto-krucho-plastycznego. Do analizy pęknięcia przyjmować będziemy kryterium energetyczne, natomiast do analizy zachowania plastycznego będziemy korzystać z klasycznych metod teorii plastyczności. Połączenie podejścia energetyczne z teorią plastyczności stanowi tutaj elementem nowości.

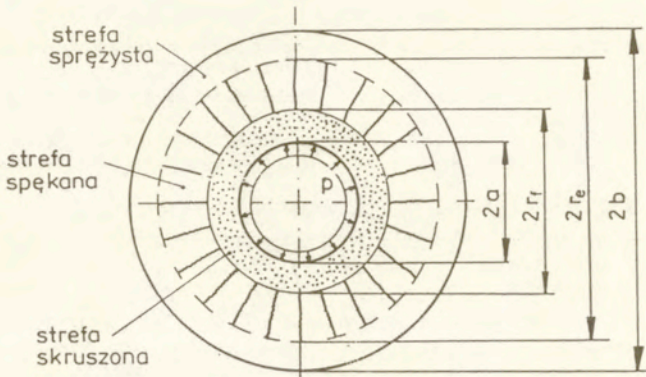
2.1 Założenia wstępne.

Rozważać będziemy nieskończenie długą rurę o przekroju w kształcie pierścienia kołowego i promieniach wewnętrznym i zewnętrznym oznaczonych odpowiednio literami a i b (Rys. 2.1). Zakładamy, że ciśnienie p działające na wewnętrzną powierzchnię jest równomiernie rozłożone. Rozwiązanie określone będzie w zakresie małych przemieszczeń. Zakładamy, że proces przebiega w sposób quasistatyczny i zachowane są warunki osiowej symetrii. Przez r i t oznaczymy współrzędne biegunowego układu współrzędnych.

Konsekwencją osiowej symetrii jest zgodność kierunków naprężeń głównych z kierunkami promieniowym i obwodowym. Związek pomiędzy naprężeniami σ_r i σ_t określa równanie równowagi wewnętrznej

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = 0 \quad (2.1)$$

Z założenia o długości rury wynika, że zachowane są warunki płaskiego stanu odkształcenia. Przyjmować będziemy, że nieuszkodzony materiał zachowuje się jak ciało liniowo-sprężyste, a więc związek pomiędzy odkształceniami sprężystymi ε_r^e , ε_t^e i naprężeniami określa prawo Hooke'a



Rys. 2.1
Strefy materiału w niszczonej rurze grubościennej.

$$\varepsilon_r^e = \frac{1+\nu}{E} ((1-\nu)\sigma_r - \nu\sigma_t) \quad \varepsilon_t^e = \frac{1+\nu}{E} ((1-\nu)\sigma_t - \nu\sigma_r) \quad (2.2)$$

W sprężystej części rury odkształcenia sprężyste są równe odkształceniom całkowitym ε_r , ε_t . Ze związków geometrycznych wynika, że odkształcenia związane są z przemieszczeniem u w kierunku promieniowym równaniami

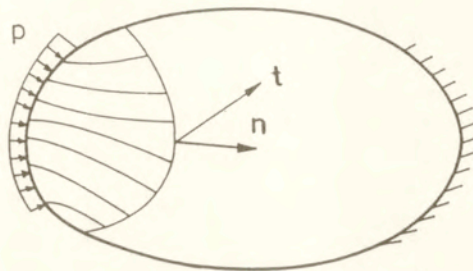
$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad \varepsilon_t = \frac{u}{r} \quad (2.3)$$

Zakładamy, że rozwój pęknięcia zaczyna się, gdy jedno z głównych naprężeń osiąga wartość S_t wytrzymałości na rozciąganie. Z rodzaju obciążenia wynika, że w sprężystej rurze naprężenie rozciągające działa w kierunku obwodowym ($\sigma_r < 0$ i $\sigma_t > 0$), a więc rozwój makroszczelin przebiega w kierunku promieniowym. Na skutek pęknięcia naprężenie rozciągające spada do zera. Przyjmujemy, że propagacja szczelin nie narusza osiowej symetrii, tj. w strefie spękanej nie da się wyróżnić głównej szczeliny. Strefę spękaną traktować będziemy jako obszar wypełniony w sposób ciągły materiałem ortotropowym o zerowej sztywności w kierunku obwodowym. Związki 2.3 obowiązują także dla materiału spękanego. Zakładac będziemy dalej, że odkształcenia całkowite są sumą odkształceń sprężystych i odkształceń niesprężystych ε_r^f , ε_t^f , modelujących rozwarście szczelin

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r^e + \varepsilon_r^f \quad \varepsilon_t = \varepsilon_t^e + \varepsilon_t^f \quad (2.4)$$

Odształcenia sprężyste związane są z naprężeniami prawem Hooke'a, tak jak w materiale niespękanym. Z uwagi na kierunek rozchodzenia się szczelin w strefie spękaney mamy

$$\varepsilon_r^f = 0 \quad \sigma_t = 0 \quad (2.5)$$



Rys. 2.2
Zmiany położenia frontu zniszczenia ciała obciążonego.

Dla określenia energetycznego kryterium pęknięcia korzystać będziemy z założenia Griffitha i zależności wykazanej w pracy [23]. Zgodnie z założeniem Griffitha obliczona na jednostkę powierzchni gęstość energii zużywanej przy infitezymalnym rozprzestrzenianiu się kruchej szczeliny jest stała i określona przez opór zniszczenia G_c (lub intensywność naprężeń K_{Ic}). Oznaczmy przez r_e zasięg strefy spękanej. Jeżeli przyjmiemy, że w strefie spękanej istnieje równocześnie n szczelin, wówczas ilość uwolnionej energii potencjalnej przypadającej na jednostkę objętości można obliczyć następująco

$$U^c = \frac{n}{2\pi r_e} G_c = \frac{n}{2\pi r_e} \frac{(1 - \nu^2)}{E} K_{Ic}^2 \quad (2.6)$$

Z drugiej strony stwierdzono ([23]), że uwolnioną energię potencjalną U^c , związaną z zmianą położenia powierzchni rozgraniczającej materiał nieuszkodzony od materiału uszkodzonego, można wyrazić poprzez nieciągłość jednostkowej energii sprężystej U oraz gradientu przemieszczeń \mathbf{u} , wyznaczonego w kierunku wektora normalnego \mathbf{n}

$$U^c = [U] - \mathbf{t} [\mathbf{u}, \mathbf{n}] \quad (2.7)$$

gdzie \mathbf{t} jest wektorem sił powierzchniowych (Rys. 2.2). Nawias kwadratowy oznacza tutaj nieciągłość $[\phi] = \phi - \mathcal{I}\phi$, gdzie ϕ , $\mathcal{I}\phi$ są to wartości wyznaczone odpowiednio w strefie nieuszkodzonej i uszkodzonej. Granicę pomiędzy materiałem nieuszkodzonym i uszkodzonym wyznaczają w rozpatrywanym zagadnieniu wierzchołki szczelin. Korzystając z równania 2.7 otrzymamy

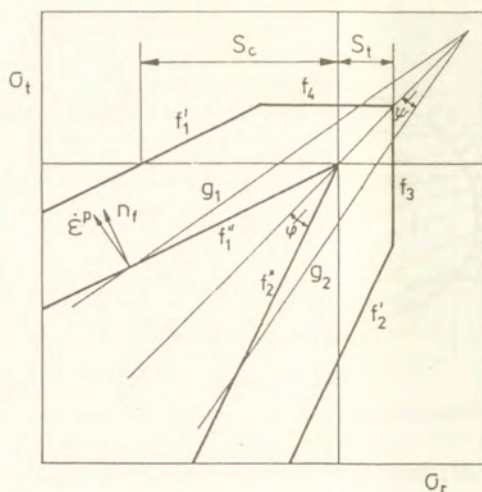
$$U^c = \frac{1}{2} [\sigma_r(r_e) \varepsilon_r^e(r_e) + \sigma_t(r_e) \varepsilon_t^e(r_e)] - \sigma_r(r_e) [\varepsilon_r(r_e)] \quad (2.8)$$

Wykorzystując związki 2.2, 2.4 i 2.5₁ otrzymamy ostatecznie

$$U^c = \frac{1 - \nu^2}{2E} \left[\sigma_t^2(r_e) \right] \quad (2.9)$$

Z porównania związków 2.6 i 2.9 otrzymujemy

$$n K_{Ic}^2 = \pi r_e \left[\sigma_t^2(r_e) \right] \quad (2.10)$$



Rys. 2.3
Zmodyfikowany warunek Coulomba.

Równanie 2.10 określa warunek energetyczny rozwoju strefy spękania.

Pod wpływem naprężeń ściskających następuje rozwój mikrospeknał — z chwilą osiągnięcia krytycznego stanu naprężenia, materiał ulega osłabieniu i dalej zachowuje się jak materiał idealnie plastyczny o wytrzymałości resztkowej. Zakładamy, że stan krytyczny określony jest zmodyfikowanym warunkiem Coulomba

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \sigma_t - \sigma_r + (\sigma_r + \sigma_t) \sin \varphi - 2C \cos \varphi = 0 \\ f_2 &= \sigma_r - \sigma_t + (\sigma_r + \sigma_t) \sin \varphi - 2C \cos \varphi = 0 \\ f_3 &= \sigma_r - S_t = 0 \\ f_4 &= \sigma_t - S_t = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

gdzie C określa spójność materiału, φ jest kątem tarcia wewnętrznego (Rys. 2.3). Osiągnięcie stanu naprężenia odpowiadającego powierzchniom f_1 lub f_2 wiąże się z kruszeniem materiału, natomiast w stanie naprężenia przedstawionym za pomocą powierzchni f_3 lub f_4 pojawiają się lokalne makropęknięcia. Początkową spójność materiału oznaczymy przez C_0 (powierzchnie f_1' i f_2' , Rys. 2.3). Dalej przyjmować będziemy, że po skruszeniu materiału powierzchnia plastyczności posiada formę identyczną z powierzchnią stanu krytycznego, jednak materiał traci całkowicie odporność na czyste ścinanie ($C = 0$) (powierzchnie f_1'' i f_2'' , Rys. 2.3). Dla materiału skruszonego zakładamy model ciała sprężysto-idealnie plastycznego.

Przyjmujemy, że w strefie skruszonej odkształcenia całkowite są sumą odkształceń sprężystych i odkształceń plastycznych $\epsilon_r^e, \epsilon_t^e$

$$\epsilon_r = \epsilon_r^e + \epsilon_r^p \quad \epsilon_t = \epsilon_t^e + \epsilon_t^p \quad (2.12)$$

Odształcenia sprężyste związane są z naprężeniami prawem Hooke'a. Odształcenia plastyczne, powstające w procesie bez odciążania, możemy wyznaczyć dokonując całkowania prędkości płynięcia plastycznego

$$\varepsilon_r^p = \int \dot{\varepsilon}_r^p d\tau \quad \varepsilon_t^p = \int \dot{\varepsilon}_t^p d\tau \quad (2.13)$$

Zakładamy przy tym, że prędkości odształceń plastycznych $\dot{\varepsilon}_r^p$, $\dot{\varepsilon}_t^p$ są proporcjonalne do gradientu potencjału plastycznego

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= \sigma_t - \sigma_r + (\sigma_r + \sigma_t) \sin \psi - 2D \cos \psi = 0 \\ g_2 &= \sigma_r - \sigma_t + (\sigma_r + \sigma_t) \sin \psi - 2D \cos \psi = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

gdzie D jest stałym parametrem, ψ jest kątem dylatacji ($\psi \in (0, \varphi)$). Skorzystamy z prawa płynięcia zapisanego w następującej postaci

$$\dot{\varepsilon}_r^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \sigma_r} \quad \dot{\varepsilon}_t^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \sigma_t} \quad (2.15)$$

gdzie $\dot{\lambda} > 0$ jest współczynnikiem proporcjonalności. W oparciu o przedstawione wyżej założenia i równania 2.1–2.15 można przystąpić do rozwiązania postawionego problemu.

Prezentowany niżej przebieg zniszczenia składa się z ośmiu faz (Rys. 2.4).¹⁾ Omawianie rozwiązań opisujących poszczególne fazy podzielono na dwie części: pierwsza obejmuje przebieg procesu do momentu rozpoczęcia kruszenia, druga do całkowitego zniszczenia rury. Ponieważ w strefie spękaną panuje jednoosiowy stan naprężenia, więc kruszenie wystąpi z chwilą, gdy ciśnienie p przekroczy wytrzymałość na ściskanie S_c .

2.2 Rozwój strefy spękaną bez kruszenia.

W początkowej fazie strefa sprężysta obejmuje swym zasięgiem całą rurę (Rys. 2.4a). Dalej przez p_e oznaczać będziemy ciśnienie wywierane na strefę sprężystą. W pierwszej fazie mamy $r_e = a$, $p_e = p$. Rozkład naprężeń, odształceń i przemieszczeń opisany jest układem równań 2.1–2.3, którego rozwiązaniem są znane wzory Lamego

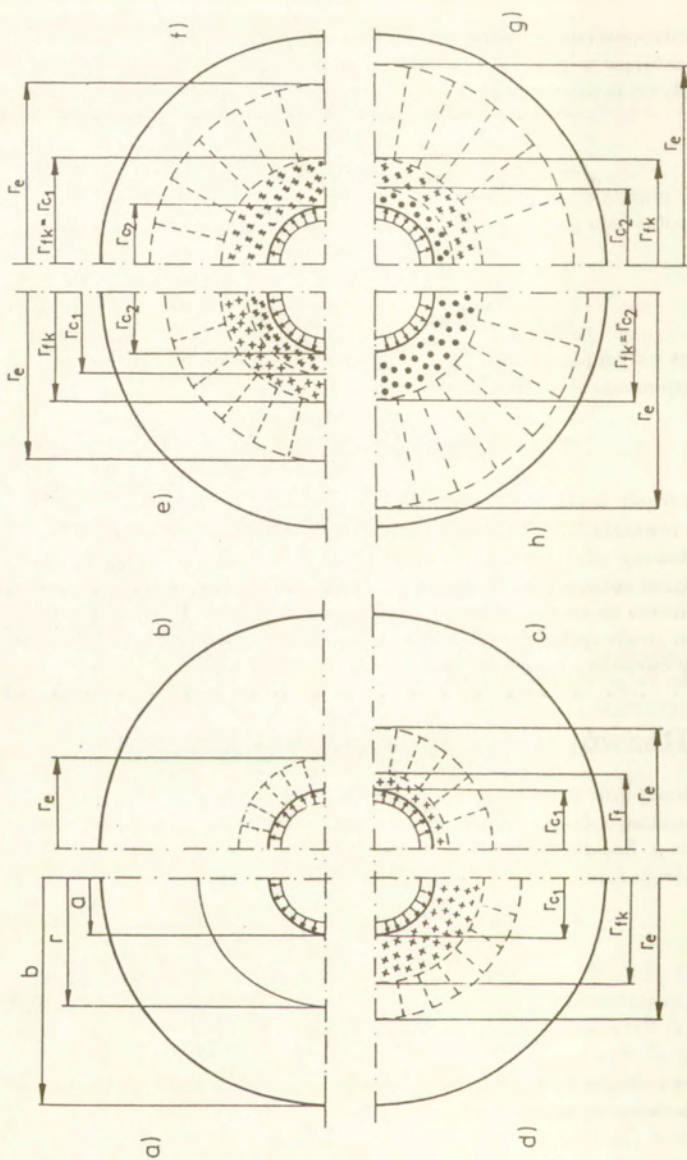
$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1 + \nu}{E} \frac{p_e r_e^2}{b^2 - r_e^2} \left[(1 - 2\nu)r + \frac{b^2}{r} \right] \\ \sigma_r &= \frac{p_e r_e^2}{b^2 - r_e^2} \left[1 - \frac{b^2}{r^2} \right] \quad \sigma_t = \frac{p_e r_e^2}{b^2 - r_e^2} \left[1 + \frac{b^2}{r^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Na podstawie wzoru 2.16₃ możemy wyznaczyć graniczną wartość ciśnienia $p = p_{gr}$, przy której rozpoczyna się rozwój strefy spękaną

$$p_{gr} = S_t \frac{(b^2 - a^2)}{(b^2 + a^2)} \quad (2.17)$$

Po przekroczeniu wartości p_{gr} rozpoczyna się druga faza procesu, podczas której istnieją dwie strefy — sprężysta oraz spękaną ($r_e > a$, Rys. 2.4b). W strefie sprężystej nadal rozkład

¹⁾ Sekwencja wydarzeń zależy od parametrów geometrycznych i materiałowych rury (patrz [44]).



Rys. 2.4

Fazy procesu zniszczenia rury grubościenniej.

przemieszczeń i naprężeń opisują wzory 2.16. Chwilowo nieznaną wartość p_e wyznaczymy z warunku pęknięcia 2.10 po określeniu rozkładu przemieszczeń i naprężeń w pozostałej części rury.

Na podstawie równania równowagi 2.1 oraz równania 2.5₂ otrzymujemy

$$\sigma_r = \frac{A_1}{r} \quad (2.18)$$

gdzie A_1 oznacza stałą całkowania. Wykorzystując związki 2.2₁, 2.3₁, 2.4₁, 2.5 i 2.18 otrzymamy

$$u = \frac{1 - \nu^2}{E} A_1 \ln r + A_2 \quad (2.19)$$

gdzie A_2 jest stałą całkowania.

Dalej przez r_f oznaczać będziemy promień wewnętrznej powierzchni strefy spękanej, a przez p_f działające na nią ciśnienie — w drugiej fazie procesu mamy $r_f = a$, $p_f = p$. Ze względu na konieczność zachowania równowagi sił oraz ciągłości przemieszczeń na granicy pomiędzy strefami, spełnione muszą być następujące warunki brzegowe

$$\epsilon_{\sigma_r}(r_e) = \int \sigma_r(r_e) \quad \epsilon_u(r_e) = \int u(r_e) \quad (2.20)$$

gdzie ϵ_{σ_r} , ϵ_u , $\int \sigma_r$, $\int u$ oznaczają wartości naprężeń i przemieszczeń na granicy r_e , odpowiednio w strefie sprężystej i spękanej. Dodatkowo na powierzchni wewnętrznej mamy

$$\int \sigma_r(r_f) = -p_f \quad (2.21)$$

Wzory 2.20, 2.21 stanowią układ równań, z którego można wyznaczyć ciśnienie zewnętrzne p oraz stałe całkowania A_1 i A_2 , w funkcji dwóch zmiennych — zadanej wartości r_e oraz ciśnienia wewnętrznego p_e . Otrzymujemy stąd

$$\left. \begin{aligned} p_f &= p_e \frac{r_e}{r_f} & A_1 &= -p_e r_e \\ A_2 &= \frac{1 + \nu}{E} p_e r_e \left[(1 - \nu) \ln r_e + \frac{b^2 + (1 - 2\nu)r_e^2}{b^2 - r_1^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

Na koniec z warunku energetycznego 2.10 wyznaczymy związek pomiędzy zasięgiem strefy spękanej i ciśnieniem p_e . Otrzymamy

$$p_e = K_I \sqrt{\frac{n}{\pi r_e} \frac{(b^2 - r_e^2)}{(b^2 + r_e^2)}} \quad (2.23)$$

Ponieważ w chwili inicjacji pęknięcia mamy $r_e = a$, $p_e = p_{gr}$, stąd porównując wzory 2.17 i 2.23 otrzymujemy związek

$$S_t = K_I \sqrt{\frac{n}{\pi a}} \quad (2.24)$$

Ostatecznie po wstawieniu 2.24 do 2.23 otrzymamy

$$p_e = S_t \sqrt{\frac{r_f}{r_e} \frac{(b^2 - r_e^2)}{(b^2 + r_e^2)}} \quad (2.25)$$

Z chwilą znalezienia ciśnienia p_c rozwiązanie zagadnienia w drugiej fazie procesu jest w pełni określone. W strefie sprężystej przemieszczenia i naprężenia określone są wzorami 2.16 oraz 2.25. W strefie spękaną przemieszczenia i naprężenia dane są wzorami 2.5₂, 2.18, 2.19, 2.25, przy czym stałe całkowania A_1 i A_2 określają wzory 2.22₂ i 2.22₃. Obciążenie wewnętrznej powierzchni rury w funkcji aktualnej długości szczeliny wynosi

$$p = S_t \sqrt{\frac{r_c}{a}} \frac{(b^2 - r_c^2)}{(b^2 + r_c^2)} \quad (2.26)$$

Z badania związku $p(r_c)$ wynika, że istnieje krytyczna długość szczeliny r_{ek} , powyżej której proces przebiega w sposób niestacyczny. Może zaistnieć wręcz sytuacja, w której $r_{ek} < a$ i wówczas od chwili inicjacji pęknięcia proces zniszczenia przebiega w sposób niestacyczny. Krytyczna długość szczeliny oraz odpowiadające jej ciśnienie wynoszą

$$r_{ek} = b \sqrt{\sqrt{17} - 4} \quad p_k = 0.4625 S_t \sqrt{\frac{b}{a}} \quad (2.27)$$

Jeżeli $p_k > S_c$, to po osiągnięciu wartości $p = S_c$ rozpoczyna się kruszenie materiału i trzecia faza procesu.

2.3 Pękanie i kruszenie materiału.

Dalej analizować będziemy przebieg procesu, w którym pękanie i kruszenie materiału zachodzą równocześnie, czyli istnieją trzy strefy materiału: sprężysta, spękana i skruszona (patrz Rys. 2.4c-h). Analizę możemy rozdzielić na dwie części:

- dotyczącą strefy sprężystej i spękaną oraz
- dotyczącą strefy skruszonej.

Uzyskane wyżej rozwiązania ogólne dla stref sprężystej i spękaną nadal obowiązują, więc w pierwszej części pozostają do wyznaczenia jedynie stałe całkowania. Rozwiązanie szczególne dla strefy spękaną wraz z warunkami brzegowymi dla powierzchni r_f posłuży w drugiej części do wyznaczenia stałych całkowania w rozwiązaniu dla strefy skruszonej. Na koniec z rozwiązania szczególnego dla strefy skruszonej wyznaczmy obciążenie wewnętrznej powierzchni rury w funkcji zasięgu strefy spękaną. Promień r_f wyznaczać będzie teraz granicę pomiędzy strefą spękaną i skruszoną.

2.3.1 Rozwiązanie dla strefy sprężystej i spękaną.

Po rozpoczęciu kruszenia, w dalszej części procesu obciążenie powierzchni r_f określone jest utrzymującym się krytycznym stanem naprężenia

$$p_f = S_c \quad (2.28)$$

Przy stałej wartości p_f wzrost długości szczeliny wynika ze wzrostu zasięgu strefy skruszonej (Rys. 2.4c).

Dla procesu z rozwojem kruszenia ciśnienie p_c , stałe całkowania A_1 , A_2 oraz zasięg strefy skruszonej r_f wynikają z warunku energetycznego 2.10, warunków brzegowych 2.20, 2.21 oraz z równości 2.28. Otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} p_e &= S_c \frac{r_f}{r_e} & A_1 &= -S_c r_f \\ A_2 &= \frac{1+\nu}{E} S_c r_f \left[(1-\nu) \ln r + \frac{b^2 + (1-2\nu)r_e^2}{b^2 - r_e^2} \right] \\ r_f &= \frac{S_t}{S_c} \sqrt{ar_e} \frac{(b^2 - r_e^2)}{(b^2 + r_e^2)} \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

Z badania funkcji $r_f(r_e)$ wynika, że dla promienia $r_e = r_{ek}$ określonego związkiem 2.27₁, promień r_f osiąga maksimum

$$r_{fk} = 0.4625 \frac{S_t}{S_c} \sqrt{ab} \quad (2.30)$$

Wynika stąd, że rozwój kruszenia jest ograniczony i w końcowych fazach rozwój strefy spękanej następuje przy ustalonym zasięgu strefy skruszonej $r_f = r_{fk}$ (Rys. 2.4d-h). Dla $r_e = r_{ek}$ maksimum osiąga także ciśnienie p_e .

Dla wartości $r_e > r_{ek}$ dotychczasowe rozwiązanie traci swój sens fizyczny. Nowe stałe całkowania oraz ciśnienie p_f wynikają z warunków 2.20 i 2.21. Wartości A_1 i A_2 dane są wzorami 2.22₂ i 2.22₃, oraz

$$p_f = S_t \sqrt{\frac{r_e}{r_{fk}}} \frac{(b^2 - r_e^2)}{(b^2 + r_e^2)} \quad (2.31)$$

2.3.2 Rozwiązanie dla strefy skruszonej.

Dla opisu dalszego przebiegu procesu potrzebne jest rozwiązanie ogólne dla strefy skruszonej. Rozkład naprężeń wynika z równań 2.1 i 2.11₂ (dla $C = 0$). Otrzymamy

$$\sigma_r = A_3 r^{\alpha_1 - 1} \quad \sigma_t = \alpha_1 A_3 r^{\alpha_1 - 1} \quad (2.32)$$

gdzie A_3 jest stałą całkowania oraz

$$\alpha_1 = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \quad (2.33)$$

Rozkład przemieszczeń w strefie skruszonej wyznaczmy korzystając z teorii płynięcia plastycznego. Dalej wykorzystamy równanie zgodności odkształceń

$$\varepsilon_r^e + \varepsilon_r^p = \frac{\partial}{\partial r} [r(\varepsilon_t^e + \varepsilon_t^p)] \quad (2.34)$$

Wstawiając do prawa Hooke'a zależności 2.32 otrzymujemy odkształcenia sprężyste w postaci

$$\varepsilon_r^e = \frac{1+\nu}{E} [1 - \nu - \nu \alpha_1] A_3 r^{\alpha_1 - 1} \quad \varepsilon_t^e = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\alpha_1 - \nu] A_3 r^{\alpha_1 - 1} \quad (2.35)$$

Zakładając, że stan naprężenia pozostaje na powierzchni krytycznej f_1'' i wykorzystując związki 2.14₂, 2.15 i 2.13, otrzymujemy

$$\varepsilon_r^p = -\lambda(1 - \sin \psi) \quad \varepsilon_t^p = \lambda(1 + \sin \psi) \quad (2.36)$$

gdzie $\lambda = \int \lambda d\tau$ jest funkcją położenia i zależy od historii deformacji. Pomiędzy składowymi odkształceniami plastycznymi zachodzi związek

$$\varepsilon_r^p = -\alpha_2 \varepsilon_t^p \quad (2.37)$$

gdzie

$$\alpha_2 = \frac{1 - \sin \psi}{1 + \sin \psi} \quad (2.38)$$

Wstawiając 2.35, 2.37 do 2.34 otrzymujemy równanie różniczkowe określające rozkład obwodowych odkształceń plastycznych wzdłuż promienia

$$r \frac{\partial \varepsilon_t^p}{\partial r} + (\alpha_2 + 1) \varepsilon_t^p = \frac{1 - \nu^2}{E} (1 - \alpha_1^2) A_3 r^{\alpha_1 - 1} \quad (2.39)$$

Rozwiązaniem powyższego równania jest funkcja

$$\varepsilon_t^p = \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{1 - \alpha_1^2}{\alpha_1 + \alpha_2} A_3 r^{\alpha_1 - 1} + A_4 r^{-(\alpha_2 + 1)} \quad (2.40)$$

gdzie A_4 jest stałą całkowania. Z równań 2.12₂, 2.35₂, 2.40 wynika rozkład odkształceń obwodowych. Na ich podstawie i z wykorzystaniem związku 2.3₂, otrzymujemy rozkład przemieszczeń w strefie skruszonej

$$u = \frac{1 + \nu}{E} \left((1 - \nu) \frac{1 + \alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} - \nu \right) A_3 r^{\alpha_1} + A_4 r^{-\alpha_2} \quad (2.41)$$

W dalszej części pracy r_{c_1} oznaczać będzie promień wewnętrznej powierzchni strefy skruszonej w stanie naprężenia pozostającym na powierzchni f_1'' . Działające na powierzchnię r_{c_1} ciśnienie oznaczmy przez p_{c_1} . W trzeciej fazie procesu mamy $r_f > a$, $r_{c_1} = a$, $p_{c_1} = p$ (Rys. 2.4c).

Ciśnienie p_{c_1} oraz stałe całkowania A_3 i A_4 wyznaczmy z warunków równowagi sił oraz ciągłości przemieszczeń na granicy pomiędzy strefami spękaną i skruszoną. Spełnione muszą być następujące warunki brzegowe

$${}^f \sigma_r(r_f) = {}^{c_1} \sigma_r(r_f) \quad {}^f u(r_f) = {}^{c_1} u(r_f) \quad (2.42)$$

gdzie ${}^f \sigma_r$, ${}^f u$, ${}^{c_1} \sigma_r$, ${}^{c_1} u$ oznaczają wartości naprężeń i przemieszczeń odpowiednio w strefie spękaną i skruszonej. Dodatkowo na powierzchni wewnętrznej mamy

$${}^{c_1} \sigma_r(r_{c_1}) = -p_{c_1} \quad (2.43)$$

Z rozwiązania układu równań 2.42, 2.43 otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} p_{c_1} &= S_c \left(\frac{r_f}{r_{c_1}} \right)^{1 - \alpha_1} & A_3 &= -S_c r_f^{1 - \alpha_1} \\ A_4 &= \frac{1 + \nu}{E} S_c r_2^{\alpha_2 + 1} \left[(1 - \nu) \ln \frac{r_e}{r_f} + \frac{b^2 + (1 - 2\nu)r_e^2}{b^2 - r_e^2} + \right. \\ & \quad \left. + (1 - \nu) \frac{1 + \alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} - \nu \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.44)$$

przy czym promień $r_f(r_e)$ określony jest wzorem 2.29.

Przy wartości $r_f = r_{fk}$ kruszenie jest zatrzymane i zaczyna się czwarta faza (Rys. 2.4d). Także ciśnienie $p = p_{c1}$ osiąga wartość maksymalną i w dalszym ciągu proces przebiega w sposób niestacyczny. W strefie skruszonej pod działaniem przyłożonego obciążenia nadal utrzymywać się będzie krytyczny stan naprężenia określony wzorami 2.32. Prędkości płynięcia plastycznego nie zmieniają znaku — stąd funkcja opisująca odkształcenia plastyczne w kierunku obwodowym dana jest wzorem 2.40, a rozwiązanie ogólne określające przemieszczenia w strefie skruszonej dane jest równaniem 2.41. Z rozwiązania układu równań utworzonego przez warunki brzegowe 2.42 i 2.43 otrzymujemy ciśnienie $p = p_{c1}$ oraz stałe całkowania A_3 i A_4 w następującej postaci

$$\left. \begin{aligned} p_{c1} &= S_t \frac{\sqrt{ar_e} b^2 - r_e^2}{r_{fk} b^2 + r_e^2} \left(\frac{r_{fk}}{r_{c1}} \right)^{1-\alpha_1} & A_{3,} &= -p_{c1} r_{fk}^{1-\alpha_1} \\ A_4 &= \frac{1+\nu}{E} S_c r_e^{\alpha_2+1} \left[(1-\nu) \ln \frac{r_e}{r_f} + \frac{b^2 + (1-2\nu)r_e^2}{b^2 - r_e^2} + \right. & & \\ & \left. + (1-\nu) \frac{1+\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2} - \nu \right] & & \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

Cechą charakterystyczną czwartej fazy jest wzrost dodatnich wartości odkształceń plastycznych w kierunku obwodowym ($\dot{\epsilon}_t^p > 0$) pomimo spadku przyłożonego obciążenia $p = p_{c1}$. Badając zmiany odkształceń ϵ_t^p w funkcji długości szczeliny i przy ustalonych wartościach promienia r , można stwierdzić, że istnieje wartość $r_e = r_{ep}(r)$, przy której odkształcenia osiągną maksimum. Dla $r_e > r_{ep}$ funkcja $\epsilon_t^p(r_e)$ staje się funkcją malejącą, co jest sprzeczne z założonym znakiem prędkości płynięcia plastycznego $\dot{\epsilon}_t^p$. Wynika stąd, że dotychczasowe rozwiązanie traci swój sens fizyczny. Początkowo sens fizyczny traci rozwiązanie dla $r_e = r_{ep}(a)$ — oznacza to początek piątej fazy (Rys. 2.4e).

W fazie piątej strefa skruszona przechodzi ze stanu krytycznego w stan sprężystego odciążania. Dla części strefy skruszonej, w której nadal stan naprężenia jest stanem krytycznym, rozwiązanie ogólne określone jest wzorami 2.32, 2.41. Stałe całkowania A_3, A_4 oraz ciśnienie p_{c1} dane są wzorami 2.45 i zależą od promieni r_e i r_{c1} . Dla ustalonej wartości r przejście w stan sprężystego odciążania następuje, gdy odkształcenia $\epsilon_t^p(r, r_e)$ osiągną maksimum. Dalej maksymalne wartości odkształceń, osiągnięte na powierzchni f_t'' , oznaczać będziemy przez $\epsilon_{t1}^p(r)$.

Zmieniający się promień r_{c1} możemy wyznaczyć z warunku

$$\frac{\partial \epsilon_{t1}^p}{\partial r_e} = 0 \quad (2.46)$$

Po wykonaniu różniczkowania otrzymujemy równanie w postaci uwikłanej

$$F[r_{c1}, r_{ep}(r_{c1})] = 0 \quad (2.47)$$

Analityczne rozwiązanie tego równania jest bardzo kłopotliwe, a ponadto nawet w przypadku określenia analitycznej postaci funkcji $r_{c1}(r_e)$ prowadziłyby to w dalszej części do znacznych komplikacji przy wyprowadzaniu kolejnych zależności. Tymczasem rozwiązując równanie 2.47 metodami numerycznymi dla kolejnych wartości r_{ej} ($j = 1, 2, \dots, J$), poszukiwaną zależność możemy przedstawić za pomocą wielomianu aproksymacyjnego

$$r_{c_1} = \sum_{k=1}^K R_k r_e^{k-1} \quad (2.48)$$

gdzie współczynniki R_k wyznaczone są na podstawie dyskretnej wartości $(r_{e_j}, r_{c_{1j}})$. Równocześnie w analogiczny sposób możemy wyznaczyć funkcję $\varepsilon_{t_1}^p$

$$\varepsilon_{t_1}^p = \sum_{i=1}^K w_i^p r_{c_1}^{i-1} \quad (2.49)$$

gdzie współczynniki w_i^p wyznaczone są na podstawie dyskretnej wartości $(r_{c_{1j}}, \varepsilon_{t_{1j}}^p)$. Odkształcenia promieniowe $\varepsilon_{r_1}^p$ w części odciążanej, wynikają ze związku 2.37. Otrzymamy

$$\varepsilon_{r_1}^p = -\alpha_2 \varepsilon_{t_1}^p \quad (2.50)$$

Znając zasięg strefy odciążanej oraz panujące w niej trwałe odkształcenia $\varepsilon_{r_1}^p$, $\varepsilon_{t_1}^p$, możemy poszukiwać rozkładu przemieszczeń i naprężeń.

Nowy rodzaj stanu naprężenia wymaga określenia nowego rozwiązania ogólnego. Z prawa Hooke'a i równania równowagi wynika związek

$$\frac{\partial \varepsilon_r^c}{\partial r} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial \varepsilon_t^c}{\partial r} + \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{\varepsilon_r^c - \varepsilon_t^c}{r} = 0 \quad (2.51)$$

Wykorzystując następnie równania 2.12 (gdzie $\varepsilon_r^p = \varepsilon_{r_1}^p$, $\varepsilon_t^p = \varepsilon_{t_1}^p$) oraz związku 2.3, otrzymujemy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} = \sum_{i=1}^{\ell} \xi_i w_i^p r^{i-2} \quad (2.52)$$

Wzory określające współczynniki ξ_i podano na końcu pracy. Równanie różniczkowe 2.52 określa rozkład przemieszczeń w strefie skruszonej w stanie sprężystego odciążania, a jego rozwiązaniem jest funkcja

$$u = \frac{1+\nu}{E} \left((1-2\nu)A_5 r + \frac{A_6}{r} \right) + w_0^u (2 \ln r - 1) + \sum_{i=1}^{\ell} w_i^u r^i \quad (2.53)$$

gdzie A_5 i A_6 są stałymi całkowania. Wzory określające współczynniki w_i^u podano na końcu pracy. Korzystając ponownie ze związków 2.3, 2.12, możemy teraz wyznaczyć rozkład odkształceń sprężystych

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r^c &= \frac{1+\nu}{E} \left((1-2\nu)A_5 - \frac{A_6}{r^2} \right) + \left(\frac{\xi_1}{4} (2 \ln r + 1) + \alpha_2 \right) w_1^p + \\ &\quad + \sum_{i=2}^{\ell} \left(\frac{i \xi_i}{i^2 - 1} + \alpha_2 \right) w_i^p r^{i-1} \\ \varepsilon_t^c &= \frac{1+\nu}{E} \left((1-2\nu)A_5 + \frac{A_6}{r^2} \right) + \left(\frac{\xi_1}{4} (2 \ln r - 1) - 1 \right) w_1^p + \\ &\quad + \sum_{i=2}^{\ell} \left(\frac{\xi_i}{i^2 - 1} - 1 \right) w_i^p r^{i-1} \end{aligned} \right\} \quad (2.54)$$

Na koniec, z prawa Hooke'a i na podstawie znanych już odkształceń sprężystych, wyznaczmy rozkład naprężeń

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= A_5 - \frac{A_6}{r^2} + w_0^r \ln r + \sum_{i=1}^{\ell} w_i^r r^{i-1} \\ \sigma_t &= A_5 + \frac{A_6}{r^2} + w_0^t \ln r + \sum_{i=1}^{\ell} w_i^t r^{i-1} \end{aligned} \right\} \quad (2.55)$$

Wzory określające współczynniki w_i^r i w_i^t podano na końcu pracy.

Dla wyznaczenia stałych całkowania A_5 i A_6 skorzystamy z warunków równowagi i ciągłości przemieszczeń na granicy r_{c_1} . Z warunków tych wynikają równania

$${}^{c_1}\sigma_r(r_{c_1}) = {}^c\sigma_r(r_{c_1}) \quad {}^{c_1}u(r_{c_1}) = {}^cu(r_{c_1}) \quad (2.56)$$

gdzie ${}^{c_1}\sigma_r$, ${}^{c_1}u$, ${}^c\sigma_r$, cu oznaczają wartości naprężeń i przemieszczeń w strefie skruszonej znajdującej się odpowiednio w krytycznym stanie naprężenia i w stanie odciążania sprężystego. Z rozwiązania układ równań 2.56, otrzymamy

$$A_5 = E \frac{{}^{c_1}u(r_{c_1}) - \Omega_1}{2r_{c_1}(1-\nu^2)} - \frac{\Omega_2 + p_{c_1}}{2(1-\nu)} \quad A_6 = r_{c_1}^2 [A_5 + \Omega_2 + p_{c_1}] \quad (2.57)$$

Dodatkowe oznaczenia Ω_1 i Ω_2 określają wyrażenia, których postać podano na końcu pracy, natomiast ciśnienie p_{c_1} określa wzór 2.45₁. Dodatkowo na wewnętrznej powierzchni mamy

$${}^c\sigma_r(a) = -p \quad (2.58)$$

Ponieważ promień r_{c_1} jest funkcją zasięgu strefy spękanej, więc także stałe całkowania A_5 , A_6 , ciśnienie p_{c_1} i obciążenie zewnętrzne p są w funkcjami promienia r_e .

Z chwilą przejścia całej strefy skruszonej w stan sprężystego odciążania, tj. spełnienia warunku $r_{c_1} = r_{fk}$, kończy się piąta faza procesu. W fazie szóstej w istnieją trzy strefy materiału: sprężysta, spękana i skruszona w stanie sprężystego odciążania. Rozwiązanie ogólne opisujące rozkład przemieszczeń i naprężeń w tej ostatniej dane jest wzorami 2.53, 2.55. Ze względu na konieczność zachowania równowagi sił oraz ciągłości przemieszczeń na granicy r_{fk} muszą być spełnione następujące warunki brzegowe

$${}^f\sigma_r(r_{fk}) = {}^c\sigma_r(r_{fk}) \quad {}^f u(r_{fk}) = {}^c u(r_{fk}) \quad (2.59)$$

Wobec równości $r_{fk} = r_{c_1}$, rozwiązaniem układu 2.59 są stałe całkowania dane wzorami 2.57. Po wyznaczeniu stałych całkowania, ze znanego rozkładu naprężeń w strefie skruszonej, możemy określić obciążenie zewnętrzne. Mamy

$${}^c\sigma_r(a) = -p \quad (2.60)$$

Z przeprowadzonych obliczeń przykładowych wynika, że w czasie trwania szóstej fazy następuje stopniowa reorientacja relacji pomiędzy wartościami naprężeń σ_r w sąsiadujących ze sobą warstwach materiału strefy skruszonej. Efektem tego jest spadek ciśnienia p poniżej wartości ciśnienia p_f . Równocześnie wzrastają bezwzględne wartości naprężeń obwodowych σ_t . Faza szósta kończy się z chwilą, gdy dla $r = a$ osiągnięty zostaje stan krytyczny f_2'' .

Podczas siódmej fazy procesu, tak jak w fazie piątej, ponownie istnieją cztery strefy materiału: sprężysta, spękana, skruszona w stanie sprężystego odciążania oraz skruszona powtórnie w krytycznym stanie naprężenia. W miarę dalszego wzrostu zasięgu strefy spękanej, kolejne warstwy strefy skruszonej osiągają krytyczny stan naprężenia. Zmieniający się promień granicy między wyróżnionymi tu dwiema strefami skruszonymi oznaczymy przez r_{c2} .

Rozwiązanie opisujące rozkład przemieszczeń i naprężeń w strefie skruszonej w stanie odciążania sprężystego dane jest wzorami 2.53, 2.55, przy czym wartości stałych całkowania A_5 i A_6 w funkcji zadanej wartości zasięgu strefy spękanej określają wzory 2.57. Na granicy r_{c2} naprężenia σ_r i σ_t spełniają warunek określający krytyczny stan naprężenia f_2'' . Wartość promienia r_{c2} i ciśnienie p_{c2} możemy wyznaczyć z równania 2.11₂ w sposób przybliżony.

Dalej należy określić rozwiązanie dla drugiej części strefy skruszonej. Rozkład naprężeń znajdziemy z równania powierzchni 2.11₂ (dla $C = 0$) oraz równania równowagi 2.1. Otrzymujemy stąd

$$\sigma_r = A_7 r^{\alpha_3 - 1} \quad \sigma_t = \alpha_3 A_7 r^{\alpha_3 - 1} \quad (2.61)$$

gdzie A_7 jest stałą całkowania, oraz

$$\alpha_3 = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} = \frac{1}{\alpha_1} \quad (2.62)$$

Wstawiając zależności 2.61 do prawa Hooke'a otrzymujemy

$$\varepsilon_r^e = \frac{1 + \nu}{E} [1 - \nu - \nu \alpha_3] A_7 r^{\alpha_3 - 1} \quad \varepsilon_t^e = \frac{1 + \nu}{E} [(1 - \nu) \alpha_3 - \nu] A_7 r^{\alpha_3 - 1} \quad (2.63)$$

Odształcenia plastyczne są sumą odształceń $\varepsilon_{r_1}^p$, $\varepsilon_{t_1}^p$ (określonych wzorami 2.49, 2.50), oraz odształceń $\varepsilon_{r_2}^p$, $\varepsilon_{t_2}^p$, powstających na skutek powtórnego uplastycznienia. Stąd równania 2.12 zapiszemy w postaci

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r^e + \varepsilon_{r_1}^p + \varepsilon_{r_2}^p \quad \varepsilon_t = \varepsilon_t^e + \varepsilon_{t_1}^p + \varepsilon_{t_2}^p \quad (2.64)$$

Zakładając, że stan naprężenia pozostaje na powierzchni f_2'' otrzymamy, że odształcenia $\varepsilon_{r_2}^p$ i $\varepsilon_{t_2}^p$ określają następujące związki

$$\varepsilon_{r_2}^p = \lambda(1 + \sin \psi) \quad \varepsilon_{t_2}^p = -\lambda(1 - \sin \psi) \quad (2.65)$$

Z powyższego wynika zależność

$$\varepsilon_{r_2}^p = -\alpha_4 \varepsilon_{t_2}^p \quad (2.66)$$

gdzie współczynnik α_4 dany jest wzorem

$$\alpha_4 = \frac{1 + \sin \psi}{1 - \sin \psi} = \frac{1}{\alpha_2} \quad (2.67)$$

Postępując dalej analogicznie jak w przypadku pierwszego uplastycznienia, otrzymamy równanie różniczkowe określające rozkład odształceń $\varepsilon_{t_2}^p$ wzdłuż promienia r

$$r \frac{\partial \varepsilon_{t_2}^p}{\partial r} + 1 + \alpha_4 = \frac{1 - \nu^2}{E} l - \alpha_3^2 A_7 r^{\alpha_3 - 1} - \sum_{i=1}^{\ell} (i + \alpha_2) w_i^p r^{i-1} \quad (2.68)$$

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja

$$\varepsilon_{t_2}^p = \frac{1-\nu^2}{E} \frac{1-\alpha_3^2}{\alpha_3+\alpha_4} A_7 r^{-(\alpha_3-1)} + A_8 r^{-(\alpha_4+1)} - \sum_{i=1}^{\ell} \frac{i+\alpha_2}{i+\alpha_4} w_i^p r^{i-1} \quad (2.69)$$

Dalej z rozkładu odkształceń obwodowych możemy określić przemieszczenia

$$u = \frac{1+\nu}{E} \left((1-\nu) \frac{1+\alpha_3\alpha_4}{\alpha_3+\alpha_4} - \nu \right) A_7 r^{\alpha_3} + A_8 r^{-\alpha_4} + \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\alpha_4-\alpha_2}{\alpha_4+i} w_i^p r^i \quad (2.70)$$

Wykorzystując warunki brzegowe, wynikające z równowagi sił i ciągłości przemieszczeń na granicy r_{c_2} , mamy

$${}^c\sigma_r(r_{c_2}) = {}^c\sigma_r(r_{c_2}) \quad {}^c u(r_{c_2}) = {}^c u(r_{c_2}) \quad (2.71)$$

gdzie ${}^c\sigma_r$, ${}^c u$, ${}^c\sigma_r$, ${}^c u$ oznaczają wartości naprężeń i przemieszczeń w strefach skruszonych znajdujących się w stanie odpowiednio sprężystego odciążenia i krytycznym. Z rozwiązania otrzymanego układu równań możemy wyznaczyć stałe całkowania A_7 , A_8 w postaci

$$\left. \begin{aligned} A_7 &= -p_{c_2} r_{c_2}^{1-\alpha_3} \\ A_8 &= r_{c_2}^{\alpha_4} \left[{}^c u(r_{c_2}) + \frac{1+\nu}{E} \left((1-\nu) \frac{1+\alpha_3\alpha_4}{\alpha_3+\alpha_4} - \nu \right) p_{c_2} r_{c_2} - \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\alpha_4-\alpha_2}{\alpha_4+i} w_i^p r^i \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.72)$$

Po wyznaczeniu rozkładu naprężeń σ_r , korzystając z warunku

$${}^c\sigma_r(a) = -p \quad (2.73)$$

otrzymamy obciążenie zewnętrzne. Z chwilą osiągnięcia krytycznego stanu naprężenia przez wszystkie warstwy materiału strefy skruszonej ($r_{c_2} = r_{jk}$) rozpoczyna się ostatnia faza procesu niszczenia rury grubościenniej.

W końcowej fazie procesu istnieją trzy strefy materiału: sprężysta, spękana i skruszona w krytycznym stanie naprężenia określonym warunkiem 2.11₂ (dla $C = 0$). Rozwiązanie ogólne określające przemieszczenia i naprężenia strefy skruszonej określone jest wzorami 2.61, 2.70. Na granicy r_{jk} pomiędzy strefą spękaną i skruszoną muszą być spełnione następujące warunki brzegowe

$${}^I\sigma_r(r_{jk}) = {}^c\sigma_r(r_{jk}) \quad {}^I u(r_{jk}) = {}^c u(r_{jk}) \quad (2.74)$$

Z utworzonego w ten sposób układu równań otrzymujemy, że stałe całkowania A_7 , A_8 dane są wzorami 2.72, w których $p_{c_2} = p_f$, $r_{c_2} = r_{jk}$ oraz ${}^c u(r_{c_2}) = {}^I u(r_{jk})$. Na podstawie znanego już rozkładu naprężeń, z warunku 2.73 otrzymujemy ciśnienie p wywierane na wewnętrzną powierzchnię. Uwzględniając wzory 2.22₂, 2.25 otrzymujemy

$$p = S_t \sqrt{\frac{r_e}{r_{jk}} \frac{b^2 - r_e^2}{b^2 + r_e^2}} \left(\frac{a}{r_{jk}} \right)^{\alpha_3-1} \quad (2.75)$$

Koniec procesu zniszczenia oznacza równość $r_e = b$ i następuje przy spadku obciążenia do zera.

2.4 Omówienie wyników obliczeń.

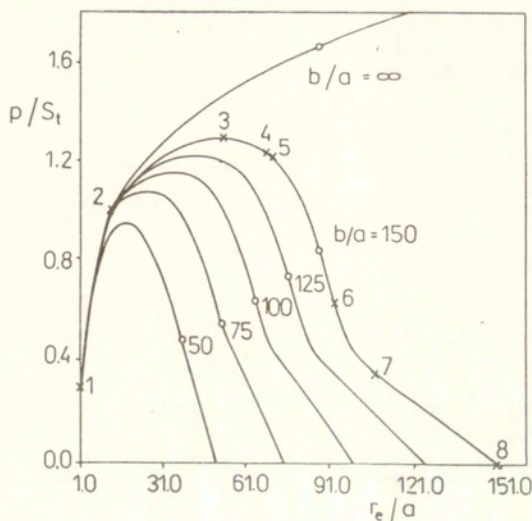
Na podstawie przedstawionego wyżej rozwiązania przeprowadzono szereg przykładowych obliczeń dla różnych stosunków promieni b/a . Do obliczeń przyjęto następujące dane materiałowe

$$\frac{S_t}{E} = 0.001 \quad \frac{C_0}{E} = 0.0012 \quad \nu = 0.3 \quad \varphi = \psi = 20^\circ$$

Rysunki 2.5 i 2.6 przedstawiają zależność ciśnienia p od zasięgu strefy spękanej r_e i przemieszczeń $u(a)$. Jak widać w przypadku rury o mniejszych wymiarach (tutaj dla $b/a = 50$) zniszczenie przebiega bez zjawiska kruszenia — cały proces składa się z dwóch faz, czyli tak jak dla materiału sprężysto-kruchej. Dla większych stosunków b/a ($= 75, 100, 125, 150$), na skutek kruszenia przebieg procesu jest znacznie bardziej złożony. Dla lepszego wyjaśnienia zjawiska dalej zostaną omówione wyniki dla przypadku $b/a = 150$. Będziemy porównywać położenie punktów rozgraniczających kolejne fazy na krzywej obciążenie-przemieszczenie powierzchni obciążonej z ich odpowiednikami na płaszczyźnie naprężeń. Punkty te oznaczono na rysunkach 2.5–2.10 kolejnymi cyframi 1, 2, ... Dla rozróżnienia wewnętrznej i zewnętrznej powierzchni rury, na płaszczyźnie naprężeń oznaczenia uzupełniono odpowiednio indeksami "i" oraz "e".

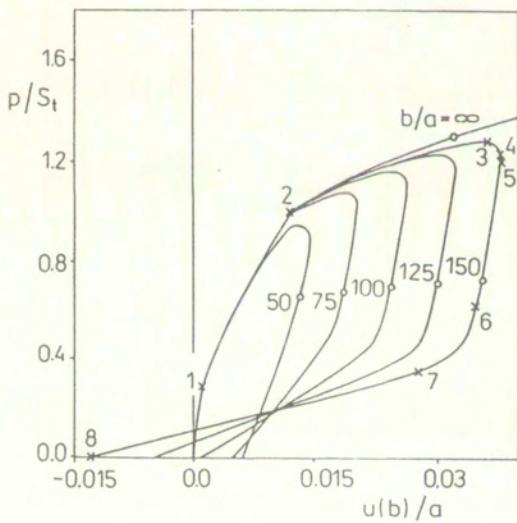
W pierwszej fazie na płaszczyźnie $\sigma_r - \sigma_t$ rozkład naprężeń tworzy odcinek o końcach w punktach 1_i, 1_e — istnieje tylko strefa sprężysta (Rys. 2.4a). Z chwilą osiągnięcia ciśnienia p_{gr} rozpoczyna się pęknięcie (Rys. 2.4b). Koniec pierwszej fazy na rysunkach 2.5 i 2.6 wyznacza punkt 1. Strefa spękana reprezentowana jest na płaszczyźnie $\sigma_r - \sigma_t$ przez odcinek pokrywający się z osią σ_r . Wzrost obciążenia powoduje stopniowe zbliżanie się punktu "i" do powierzchni f_1' . Punkt 2_i reprezentuje na rysunku 2.7 stan krytyczny na powierzchni wewnętrznej rury. Osiągnięcie stanu krytycznego oznacza zakończenie drugiej fazy procesu (punkt 2 na rysunkach 2.5 i 2.6) i pojawienie się w strefie kruszenia (Rys. 2.4c). Na granicy pomiędzy strefą sprężystą i spękaną widoczna jest nieciągłość naprężeń σ_t . Podobna nieciągłość pojawia się dalej na granicy pomiędzy strefą spękaną i skruszoną. Po rozpoczęciu kruszenia, na skutek osłabienia materiału kruszonego punkt "i" w trakcie fazy trzeciej przesuwa się po powierzchni f_1'' . Faza trzecia jest ostatnią fazą w statecznej części procesu — kończy się z chwilą osiągnięcia maksymalnej wartości ciśnienia (punkt 3 na rysunkach 2.5 i 2.6).

Począwszy od fazy czwartej zasięg strefy skruszonej jest ustalony (Rys. 2.4d). Dalej punkt "i" przesuwa się w kierunku dodatniego zwrotu osi σ_r . Wiąże się to ze spadkiem przyłożonego do rury obciążenia. Do chwili zakończenia czwartej fazy (punkt 4 na rysunkach 2.5 i 2.6) strefa skruszona reprezentowana jest na płaszczyźnie naprężeń przez odcinek pokrywający się z powierzchnią f_1'' (Rys. 2.8). W czasie trwania fazy piątej istnieją cztery strefy materiału (Rys. 2.4e). Kolejne punkty reprezentujące stany naprężeń w strefie skruszonej, w wyniku stopniowego wzrostu zasięgu odciążanej sprężystości strefy skruszonej, przesuwa się do środka obszaru ograniczonego powierzchniami f_1'' i f_2'' . Proces ten kończy się z chwilą, gdy cała strefa skruszona znajduje się w stanie odciążania sprężystego. Od tego momentu ponownie istnieją trzy strefy (Rys. 2.4f). Koniec fazy piątej zaznaczony jest na rysunkach 2.5 i 2.6 przez punkt 5. W trakcie kolejnej (szóstej) fazy procesu, na płaszczyźnie $\sigma_r - \sigma_t$ profil naprężeń dla strefy skruszonej ma kształt zakrzywiony. Wynika to z trwałych odkształceń istniejących w tej strefie. Zmiany zachodzące w tym profilu pokazane są na rysunku 2.9. Pod koniec fazy szóstej (punkt 6 na rysunkach 2.5 i 2.6) naprężenia



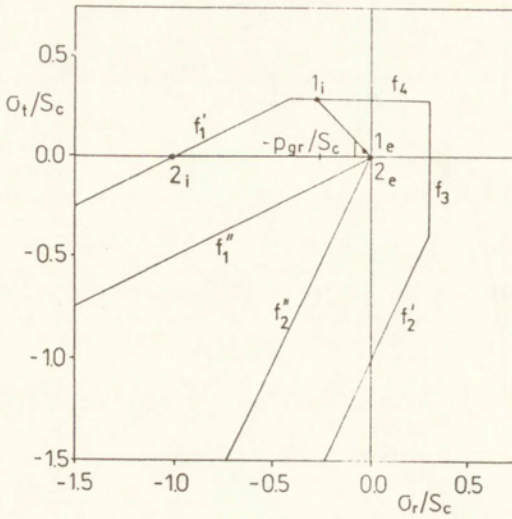
Rys. 2.5

Obciążenie w funkcji zasięgu strefy spękanej w materiale sprężysto-krucho-plastycznym wg kryterium energetycznego.



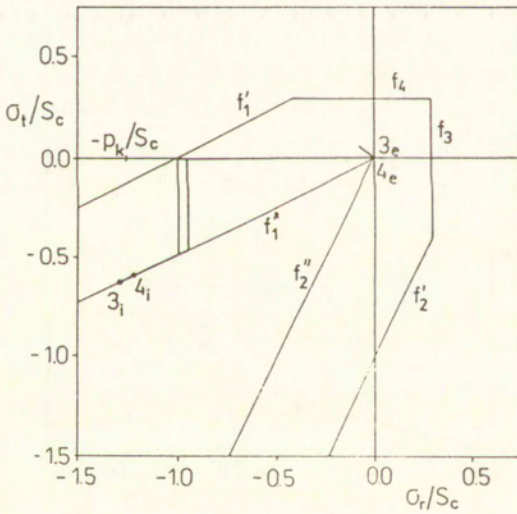
Rys. 2.6

Obciążenie w funkcji przemieszczenia powierzchni obciążonej w materiale sprężysto-krucho-plastycznym wg kryterium energetycznego.



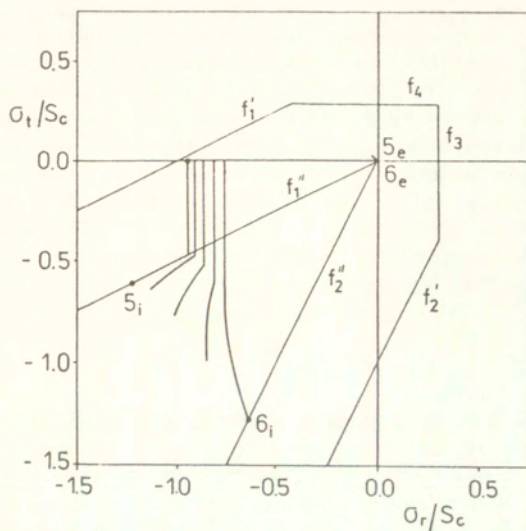
Rys. 2.7

Rozkład naprężeń pod koniec fazy pierwszej ($1i - 1e$) oraz fazy drugiej ($2i - 2e$) dla rury o stosunku promieni $b/a = 150$.



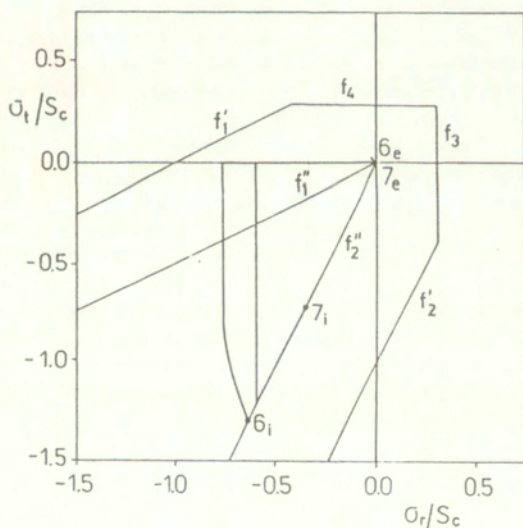
Rys. 2.8

Rozkład naprężeń pod koniec fazy trzeciej ($3i - 3e$) oraz fazy czwartej ($4i - 4e$) dla rury o stosunku promieni $b/a = 150$.



Rys. 2.9

Rozkład naprężeń pod koniec fazy piątej (5i – 5e) oraz w kolejnych etapach fazy szóstej dla rury o stosunku promieni $b/a = 150$.



Rys. 2.10

Rozkład naprężeń pod koniec fazy szóstej (6i – 6e) i fazy siódmej (7i – 7e) dla rury o stosunku promieni $b/a = 150$.

na wewnętrznej powierzchni osiągają stan krytyczny f_2'' . W tym momencie rozpoczyna się proces stopniowego przechodzenia strefy skruszonej w stan powtórnego uplastycznienia. Ponownie mamy cztery strefy (Rys. 2.4g). Na płaszczyźnie $\sigma_r - \sigma_t$ profil rozkładu naprężeń w strefie skruszonej stopniowo przesuwa się z obszaru ograniczonego powierzchniami f_1'' i f_2'' na powierzchnię f_2'' . W ostatniej fazie procesu (rozpoczynającej się na rysunkach 2.5 i 2.6 w punkcie 7) jeszcze raz istnieją tylko trzy strefy materiału (Rys. 2.4h). Cała strefa skruszona reprezentowana jest przez odcinek, który tym razem pokrywa się z powierzchnią f_2'' . W chwili zakończenia procesu obciążenie spada do zera — stan naprężenia w całej zniszczonej reprezentuje punkt pokrywający się z początkiem układu $\sigma_r - \sigma_t$. Widoczne na rysunku 2.6 ujemne wartości przemieszczeń powierzchni obciążonej w końcowym etapie procesu wynikają ze wzrostu objętości materiału skruszonego.

2.5 Wnioski.

Z omówionego rozwiązania wynika, że zniszczenia rury o skończonym promieniu zewnętrznym przebiega w sposób stateczny do chwili osiągnięcia krytycznej długości szczelin, po czym dalszy rozwój pęknięcia wiąże się z niestatecznością procesu. Jeżeli w części statecznej przekroczona zostanie wytrzymałość na ściskanie, wówczas rosnące obciążenie spowoduje kruszenie materiału. Rozwój strefy skruszonej zatrzymuje się, gdy rozpoczyna się proces niestateczny. Podczas spadku obciążenia, w strefie skruszonej zachodzi złożone zjawisko redystrybucji naprężeń — materiał przechodzi ze stanu krytycznego w stan odciążania sprężystego i ponownie w stan krytyczny. Tak złożone zjawisko nie występuje przy małym stosunku b/a oraz w przypadku otworu w obszarze nieskończonym. Dla stosunku b/a , przy którym krytyczna długość szczelin jest mniejsza od wewnętrznego promienia a , cały proces pęknięcia jest niestateczny i przebiega bez kruszenia. W obszarze nieograniczonym szczeliny propagują wyłącznie w sposób stateczny wraz z ciągłym rozwojem strefy skruszonej.

Wystąpienie opisanego wyżej przebiegu procesu zależy od parametrów geometrycznych i materiałowych rury. Możliwy jest wariant, w którym pęknięcie nie wystąpi, bowiem wcześniej rozpocznie się kruszenie. Podobne zagadnienie rozpatrywane było w pracy [56]. Łatwo można sobie także wyobrazić, że przy odpowiednich parametrach wystąpią w materiale skruszonym trzy obszary: strefa w stanie krytycznym na powierzchni f_1'' , strefa w stanie sprężystego odciążania oraz strefa w stanie krytycznym na powierzchni f_2'' . Niezależnie jednak od przebiegu zjawiska fizycznego istotnym jest tu problem doboru równań opisujących zagadnienie i sposobu ich rozwiązania.

Metoda łączenia podejścia energetycznego, opisującego rozwój kruche go pęknięcia, z klasycznymi metodami teorii plastyczności, ma znaczenie bardziej ogólne. Pozwała bowiem na bardziej realistyczne ujmowanie przebiegu zjawisk zachodzących w materiałach sprężysto-kruchoplastycznych. Tego typu podejście może być zastosowane także przy rozwiązywaniu innych, bardziej skomplikowanych problemów.

Problem niestateczności wiąże się z koniecznością wyboru odpowiedniej zmiennej sterującej, służącej jako argument do opisu zmian innych wielkości. Zauważmy, że proces zniszczenia rury może być kontrolowany za pomocą obciążenia jedynie w części statecznej. Przy małych stosunkach promieni zmienną sterującą może być przemieszczenie obciążanej powierzchni (gdy w całym procesie $\dot{u}(a) > 0$). Jednak w miarę zwiększania wartości b/a proces niestateczny, początkowo sterowalny, zmienia się w proces niesterowalny ($\dot{p} < 0$, $\dot{u}(a) < 0$). Aby możliwe było rozwiązanie zagadnienia należało wybrać do jego opisu taką zmienną sterującą,

o której wiadomo, że prędkość jej zmian zachowuje stały znak. Taką zmienną jest zasięg strefy spękanej ($\dot{r}_e > 0$). W przedstawionym wyżej rozwiązaniu wszystkie wielkości są jednowartościowymi funkcjami promienia r_e w całym procesie niszczenia.

Rozdział 3.

Niszczenie materiału krucho-plastycznego pod stemplem.

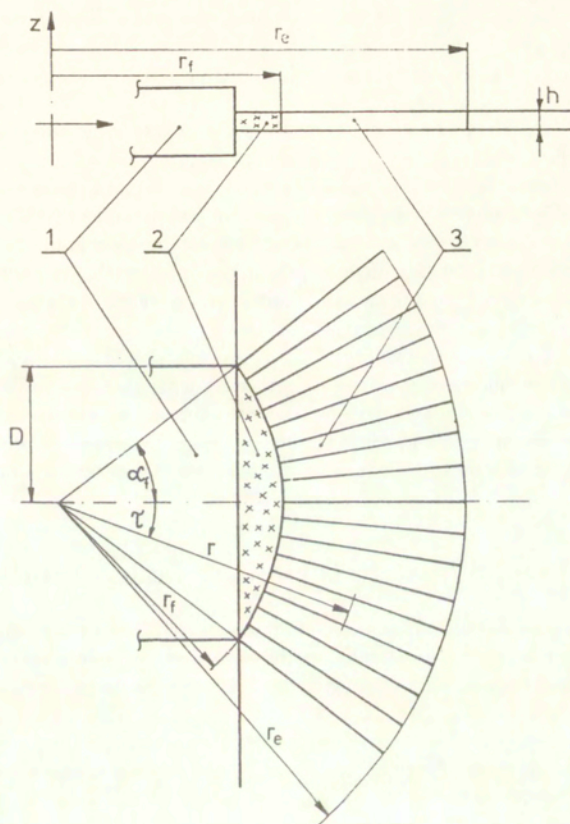
Zajmiemy się opisem procesu wciskania doskonale sztywnego, płaskiego stempla w materiał krucho-plastyczny. Analizę przeprowadzimy dla płaskiego stanu odkształcenia (stempel nieskończenie długi działający na półprzestrzeń) oraz dla płaskiego stanu naprężenia (stempel wciskany w cienką płytę). Z obserwacji wiadomo, że przebieg procesu zależy od relacji pomiędzy wymiarami stempla i materiału obciążonego, stąd dla obu przypadków przyjęto inne założenia dotyczące fazy pokrytycznej. Rozwiązanie dla p.s.o. i dla p.s.n. omówione jest oddzielnie.

Istota i zarazem podstawowy cel analizy sprowadza się do próby opisu cyklicznych zmian obciążenia i uwzględnienia różnych form zniszczenia obserwowanych w doświadczeniach. Każdy cykl związany jest z całkowitym zniszczeniem kolejnego fragmentu materiału. Prostota otrzymanego modelu skłania do jego analizy pomimo, że nie można na jego podstawie określić związku pomiędzy obciążeniem stempla a liczbą szczelin oraz wielkością kąta rozwarcia strefy materiału zniszczonego. W przedstawianych na koniec przykładowych obliczeniach zarówno liczba szczelin jak i rozwarcie strefy spękań potraktowane zostały jako parametry rozwiązywania.

3.1 Obserwacje i założenia upraszczające.

W materiale sprężystym obciążonym płaskim stemplem, na skutek powstających koncentracji naprężeń, już przy małych obciążeniach przekraczana jest wytrzymałość materiału. Prowadzi to do lokalnego zniszczenia i utworzenia wstępnej strefy materiału skruszonego. Doświadczenia wskazują, że w strefie tej z dobrym przybliżeniem można założyć hydrostatyczny stan naprężeń ([20, 49]). Przenoszone w ten sposób obciążenie działa na pozostałą część materiału w postaci równomiernie rozłożonego ciśnienia. Z uwagi na niewielkie wymiary tej strefy, można ponadto przyjąć, że jest ona ograniczona powierzchnią o kształcie łuku okręgu.

W obu analizowanych przypadkach zakłada się podobny przebieg zniszczenia w początkowej fazie każdego cyklu: pod działaniem stempla zwiększa się zakres materiału spękanego. Na tym etapie strefa kruszenia ogranicza się wyłącznie do obszaru bezpośrednio pod stemplem. Z doświadczeń wynika, że granica rozgraniczająca strefę spękaną od materiału nieuszkodzonego może być opisana łukiem okręgu i taki właśnie kształt przyjmuje się w literaturze



- 1 - stempel
- 2 - strefa skruszona
- 3 - strefa spękana

Rys. 3.1
Strefy materiału w niszczonego pod stemplem.

([84]). Ponadto w stanie przedkrytycznym kierunek propagacji szczelin jest niemal prostoliniowy. Mamy więc, że rozwój strefy spękanej zachodzi w wycinku pierścienia kołowego (Rys. 3.1). To z kolei uzasadnia wykorzystanie rozwiązania osiowosymetrycznego problemu przedstawionego w rozdziale drugim (Rys. 2.1). Wzrost obciążenia może spowodować także rozwój strefy kruszenia, jednak dla uproszczenia nie będziemy tutaj analizować takiej sytuacji.

Różnica pomiędzy przebiegiem procesu w p.s.o. oraz w p.s.n. polega na różnym przebiegu zjawiska w fazie pokrytycznej. W przypadku stempla nieskończenie długiego każdy cykl kończy się wyrzuceniem na boki kawałków materiału. Wyjaśnieniem przyczyny wypychania materiału na boki może być dylatacja materiału pod stemplem ([85]). Krytyczną wartość obciążenia w p.s.o. wyznaczmy korzystając z metody nośności granicznej (Rys. 3.2) jednak z uwzględnieniem faktu, że szczeliny obniżają spójność materiału. W przypadku cienkiej płyty materiał pomiędzy szczelinami tworzy zbieżne belki poddane obciążeniu ściskającemu. Stąd za krytyczne obciążenie można przyjąć obciążenie powodujące wyoboczenie belek. Analizując stan powyoboczeniowy, model sprężysty zastąpimy modelem sztywnym prętów utwierdzonych do podłoża za pomocą zastępczych przegubów o znanej charakterystyce wytrzymałościowej (Rys. 3.3). Na skutek zginania następuje wzrost naprężeń we włóknach rozciąganych, prowadzący w konsekwencji do wyłamywania belek. Chociaż rzeczywisty proces może przebiegać w nieco odmienny sposób, to jednak proste obserwacje potwierdzają dominujący charakter wymienionych wyżej form zniszczenia pod stemplem.

3.2 Degradacja materiału w fazie przedkrytycznej.

Wykorzystując wyżej podane założenia pojawia się uproszczona analogia propagacji szczelin pod stemplem i propagacji szczelin wokół otworu w obszarze nieskończonym (Rys. 2.1). Dalej korzystając będziemy z tych samych oznaczeń co w rozdziale drugim. Wobec pominięcia rozwoju strefy kruszenia mamy $r_f = a$ w całym procesie. Wykorzystując rozwiązanie zagadnienia dla obszaru nieskończonego przedstawione w pracy [44], należy zmodyfikować warunek energetyczny pęknięcia. Potrzeba taka wynika z uwagi na ograniczenie strefy pęknięcia do wycinka pierścienia kołowego.

Przy wyprowadzeniu energetycznego warunku pęknięcia zakładaliśmy, że liczba szczelin i kąt rozwarcia strefy spękanej są stałe. W przypadku otworu w obszarze nieskończonym takie założenie jest uzasadnione co najmniej w stosunku do kąta $\alpha_f (= \pi)$. Wykorzystując do analizy propagacji szczelin pod stemplem analogię do rozwiązania osiowosymetrycznego, kąt α_f i liczba szczelin n są nieznanne. Ponadto założenie o ich stałości nie musi być prawdziwe. W szczególności zmiany α_f oraz n mogą powodować, że energetyczny warunek pęknięcia przyjmować będzie postać pośrednią pomiędzy warunkiem wytrzymałościowym i warunkiem energetycznym z poprzedniego rozdziału. Z tych powodów warunek pęknięcia przyjmować będziemy teraz w postaci

$${}^e\sigma_t(r_c) = S_t \left(\frac{r_f}{r_c} \right)^\kappa \quad (3.1)$$

gdzie κ jest ustalonym wykładnikiem potęgi. Warunek powyższy w jednolity sposób ujmuje zarówno warunek wytrzymałościowy ($\kappa = 0$) jak i warunek energetyczny ($\kappa = \frac{1}{2}$) oraz umożliwia analizę form pośrednich.

Dla dalszych potrzeb istotne będą wartości naprężenia i przemieszczenia na powierzchni pomiędzy strefą spękaną i wstępną strefą skruszoną dla $r = r_f$. Wartości te otrzymamy ze związków 2.18 i 2.19. Stałe całkowania A_1 , A_2 wynikają z warunków brzegowych 2.20, łączących rozwiązanie dla strefy spękaną z rozwiązaniem 2.16 dla strefy sprężystej (przy czym tym razem $b \rightarrow \infty$). Ciśnienie p_e otrzymamy korzystając z warunku pęknięcia 3.1. Po wykonaniu odpowiednich przekształceń otrzymujemy

$$A_1 = -S_t r_e \left(\frac{r_f}{r_e} \right)^\kappa \quad A_2 = \frac{1 + \nu}{E} S_t r_e \left(\frac{r_f}{r_e} \right)^\kappa [1 + (1 - \nu) \ln(r_e)] \quad (3.2)$$

Wstawiając stałą A_1 do związku 2.18 i korzystając z warunku $p_f = -\sigma_r(r_f)$, otrzymamy ciśnienie pod stemplem w postaci

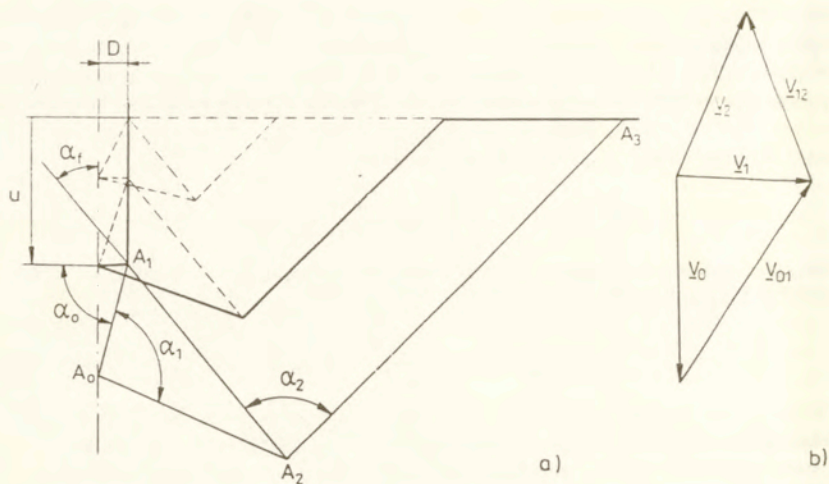
$$p_f = S_t \left(\frac{r_f}{r_e} \right)^{\kappa-1} \quad (3.3)$$

Jak wynika z powyższego związku, dla $\kappa < 1$ rozwój zasięgu strefy spękaną wokół otworu wymaga monotonicznego wzrostu obciążenia (dla $r_e \rightarrow \infty$ mamy $p_f \rightarrow \infty$). Oznacza to, że przy pewnej wartości $r_e = r_{ek}$ osiągną jest stan krytyczny i pojawia się dodatkowa forma niszczenia materiału. Obciążenie w stanie krytycznym i forma zniszczenia zależą od stanu naprężenia i odkształcenia w materiale.

3.3 Cykliczne obciążenie stempla w p.s.o.

W klasycznym podejściu do problemu wyznaczenia górnej oceny nośności granicznej zakłada się jednorodność materiału, tj. jednakową spójność wzdłuż wszystkich linii ścinania. Wyznaczana w ten sposób wartość obciążenia znacznie odbiega od wartości obserwowanych doświadczalnie. Wydaje się, że prostą metodą poprawienia wyniku jest uwzględnienie obniżonej spójności materiału w strefie spękaną. Na skutek obniżonej spójności wielkość energii dysypowanej przy ścinaniu jest mniejsza. Wychodząc z tego założenia skorzystamy z metody nośności granicznej dla wyznaczenia stanu krytycznego w przypadku obciążania półprzestrzeni płaskim, nieskończenie długim stemplem (p.s.o.). W tym celu zakładać będziemy prosty kinematycznie dopuszczalny mechanizm odkształcenia w postaci układu sztywnych bloków, ślizgających się po sobie wzdłuż ograniczających je powierzchni nieciągłości. Przy założeniu, że w trakcie fazy pokrytycznej spójność materiału spada do zera otrzymujemy luźne, sztywne bloki usuwane przez zagłębiający się stempel. Zagłębianie się stempla wynika z wielkości ścinanych bloków materiału. Proces pęknięcia, ścinania i wyrzucania materiału na boki jest powtarzany cyklicznie.

Na rysunku 3.2 pokazano po jednej stronie osi symetrii układu linie ścinania A_0A_1 , A_0A_2 , A_1A_2 , A_2A_3 i odpowiadający im hodograf prędkości w trzecim cyklu obciążenia. Przerywane linie ukazują linie ścienca w poprzednich dwóch cyklach. Linia A_1A_2 wyznacza granicę strefy materiału spękanego, a linie A_0A_1 , A_0A_2 biegną wewnątrz tej strefy. Możemy przyjąć, że na skutek spękań, dla zaistnienia ścinania, obciążenie zewnętrzne musi pokonać tarcie wewnętrzne wzdłuż linii A_0A_1 , A_0A_2 , A_1A_2 , A_2A_3 oraz spójność wyłącznie wzdłuż linii A_2A_3 biegnącej przez nienaruszony materiał. Przy tym założeniu wartość obciążenia wyznaczającego stan krytyczny możemy wyznaczyć metodą sił przedstawioną w pracy Mroza i Dreschera ([55]), bądź z bilansu energii



Rys. 3.2

Schemat kinematyki procesu wciskania stempla (p.s.o.): a) linie ścinania i b) hodograf prędkości w trzecim cyklu obciążenia.

$$2DpV_0 = 2Cl_2V_2 \cos \varphi \quad (3.4)$$

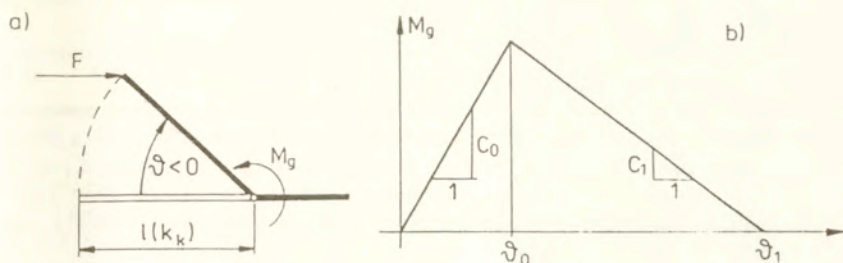
gdzie D oznacza połowę szerokości stempla, l_2 jest długością linii A_2A_3 , V_0 jest prędkością stempla, V_2 oznacza prędkość bloku nad linią $A_1A_2A_3$. Wykorzystując odpowiednie związki geometryczne otrzymamy

$$p = C \left(\frac{u_f}{D} + \frac{\sin \alpha_1 \cos \alpha_f}{\cos \alpha_0 \cos(\alpha_0 - \alpha_1 - \alpha_f)} \right) \frac{\cos(\alpha_0 - \varphi) \cos(\alpha_0 - \alpha_1 - \alpha_f + 2\varphi) \cos \varphi}{\sin(\alpha_1 - 2\varphi) \sin(\alpha_2 - 2\varphi) \cos(\alpha_2 - \alpha_f)} \quad (3.5)$$

gdzie kąty α_0 , α_1 , α_2 oraz przesunięcie u_f pokazano na rysunku 3.2. Ciśnienie krytyczne znajdujemy poszukując minimum funkcji $p(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$.

3.4 Cykliczne obciążenie stempla w p.s.n.

W przypadku płyty o grubości h , znajdującej się w p.s.n., spękane fragmenty materiału możemy traktować jako zbieżne pręty pryzmatyczne. Ich długość rośnie wraz ze wzrostem długości szczelin. Wraz ze wzrostem zasięgu strefy spękanej wzrasta obciążenie, a równocześnie maleje siła krytyczna potrzebna do wyoboczenia prętów. Równość obciążenia i siły powodującej wyoboczenie określa stan krytyczny, przy którym rozpoczyna się nowa (trzecia) faza procesu niszczenia płyty. Na skutek wzrostu ugięcia w stanie powyoboczeniowym następuje wzrost naprężeń we włóknach rozciąganych, prowadzący w konsekwencji do wylamywania prętów (czwartej fazy procesu). Wylamywaniu towarzyszy spadek obciążenia i



Rys. 3.3

Uproszczony model wylamywania: a) sztywny pręt z zastępczym przegubem i b) charakterystyka przegubu.

zagłębianie się stempla w głąb płyty na długość wylamywanych prętów. Proces pękania płyty, wybočenja i wylamywania prętów powtarza się cyklicznie.

Dalej wygodnie będzie przedstawić ciśnienie p_f oraz przemieszczenie $u_f = u(r_f)$ przy $\kappa = \frac{1}{2}$ jako funkcje zbieżności $k = r_f/r_e$. Rozwiązanie problemu osiowo-symetrycznego uzyskano przy założeniu p.s.o.. Dla ich wykorzystania w przypadku p.s.n., w miejsce stałych E i ν należy wstawić odpowiednio E_n i ν_n , gdzie $E_n = E(1+2\nu)/(1+\nu)^2$ oraz $\nu_n = \nu/(1+\nu)$. Otrzymamy

$$u_f = \frac{S_t r_f}{E_n \sqrt{k}} [(1+\nu) - \ln(k)] \quad p_f = \frac{S_t}{\sqrt{k}} \quad (3.6)$$

Oznaczmy przez b_f i b_e szerokości przekrojów poprzecznych pręta wyznaczonych odpowiednio promieniami r_f i r_e . Siłę oddziaływania stempla na pojedynczy pręt oznaczmy przez $F (= p_f h b_f)$, a długość pręta przez $l (= r_e - r_f)$. Wraz ze wzrostem długości prętów spada wartość k , a siła F zbliża się do wartości krytycznej. Ponieważ siłę F możemy traktować jako funkcję współczynnika zbieżności k , możemy też mówić o krytycznej wartości zbieżności k_k , przy której nastąpi wybočenje. W zależności od wymiarów poprzecznych wybočenje może nastąpić w płaszczyźnie lub z płaszczyzny zbieżności — odpowiednie krytyczne zbieżności oznaczmy przez k_t i k_z . O tym, która z form wybočenja wystąpi, decyduje równość $k_k = \max(k_t, k_z)$. Wzory określające siły krytyczne w funkcji zbieżności k_t i k_z podane zostały przez Życzkowskiego ([103]). Korzystając z tych wzorów dla modelu jednostronnie utwierdzonych prętów, wartości k_t i k_z wyznaczmy z rozwiązaniami następujących równań

$$\left. \begin{aligned} \frac{b_e(k_t)}{48l^2(k_t)} \theta_t(k_t) E_n h^3 - p_f(k_t) h b_f &= 0 \\ \frac{b_e(k_z)}{48l^2(k_z)} \theta_z(k_z) E_n h^3 - p_f(k_z) h b_f &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

gdzie θ_t i θ_z oznaczają współczynniki stateczności podane przez Życzkowskiego w postaci tabelarycznej. Wartości b_e i b_f w funkcji liczby szczelin wyznaczmy ze związków

$$b_e = b_f/k \quad b_f = \frac{2}{n-1} \alpha_f r_f \quad (3.8)$$

przy czym dla zadanych wartości szerokości stempla i promienia wstępnej strefy skruszonej mamy $\alpha_f = \arccos(D/r_f)$.

Analizę procesu powybozeniowego przeprowadzimy w sposób uproszczony zastępując model pręta sprężystego modelem sztywnym utwierdzonym do podłoża za pomocą zastępczego przegubu (Rys. 3.3a). Dalej przez ϑ oznaczać będziemy kąt wychylenia pręta w płaszczyźnie płyty. Zgodnie z rysunkiem przyjmować będziemy, że dodatni zwrot kąta ϑ jest przeciwny do ruchu wskazówek zegara oraz że w trakcie wybożenia dolne włókna pręta są rozciągane.

Zakładać będziemy, że moment gnący M_g w przegubie zmienia się w funkcji kąta ϑ zgodnie z charakterystyką wytrzymałościową daną w postaci (Rys. 3.3b)

$$M_g(\vartheta) = \begin{cases} C_0 \vartheta & \text{gdy } \vartheta \leq \vartheta_0 \\ C_0 \vartheta_0 - C_1(\vartheta - \vartheta_0) & \text{gdy } \vartheta_0 < \vartheta \leq \vartheta_1 \\ 0 & \text{gdy } \vartheta_1 < \vartheta \end{cases} \quad (3.9)$$

gdzie przez ϑ_0 i ϑ_1 oznaczono graniczne wartości kąta ϑ , przy których rozpoczyna się i kończy proces wylamywania. Współczynnik C_0 oznacza tutaj sztywność przegubu w stanie sprężystym, natomiast C_1 jest modulem osłabienia przegubu w trakcie wylamywania pręta. Sztywność C_0 wyznaczmy z równania równowagi momentów (przy $\vartheta \rightarrow 0$) — otrzymamy stąd $C_0 = F(k_k)l(k_k)$. Traktując sztywność C_1 jako parametr zbadamy jej wpływ na rozwiązanie. Wartość kąta ϑ_0 otrzymamy z warunku wytrzymałości włókien rozciąganych. Zwykle warunek ten zapisuje się w sposób uproszczony bez uwzględnienia ściskania, tj. w postaci

$$S_t = -6 \frac{F(k_k)l(k_k)\vartheta_0}{b_e h^2} \quad (3.10)$$

Uzyskana stąd wartość kąta ϑ_0 dla lodu jest rzędu 10^{-5} . Większe wartości wychylenia pręta w chwili początku wylamywania otrzymamy uwzględniając ściskanie prętów i korzystając z warunku

$$S_t = -\frac{F(k_k)}{b_e h^2} \vartheta_0 [h \text{ctg} \vartheta_0 + 6l(k_k)] \quad (3.11)$$

Wartość kąta ϑ_1 wynika z warunku $M_g(\vartheta_1) = 0$.

W stanie powybozeniowym przemieszczenie u_f i ciśnienie p_f otrzymamy w następującej postaci

$$u_f = \frac{S_t r_f}{E_n \sqrt{k}} [(1 + \nu) - \ln(k_k)] + l(k_k)(1 - \cos \vartheta) \quad p_f = \frac{M_g(\vartheta)}{l(k_k) h b_f \sin \vartheta} \quad (3.12)$$

Z chwilą, gdy w trakcie wylamywania kąt ϑ osiągnie wartość $\frac{1}{2}\pi$, przesuwały się stempel rozpoczyna obciążanie nieuszkodzonej części płyty, tj. kolejny cykl procesu. Jeżeli wylamywanie prętów kończy się przy $\vartheta_1 < \frac{1}{2}\pi$, wówczas dalsze przesuwanie się stempla

następuje przy zerowej wartości obciążenia, aż do ponownego kontaktu z nieuszkodzoną częścią płyty.

3.5 Omówienie wyników obliczeń.

W przykładowych obliczeniach wykorzystano dane materiałowe lodu podane w pracy Sundera i Connora ([84]) — przyjęto $S_t = 0.7 \text{ MPa}$, $S_c = 5 \text{ MPa}$, $E = 10 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$, $\varphi = 20^\circ$. Obliczenia przeprowadzono dla różnych wartości D , h , n , α_f i C_1 .

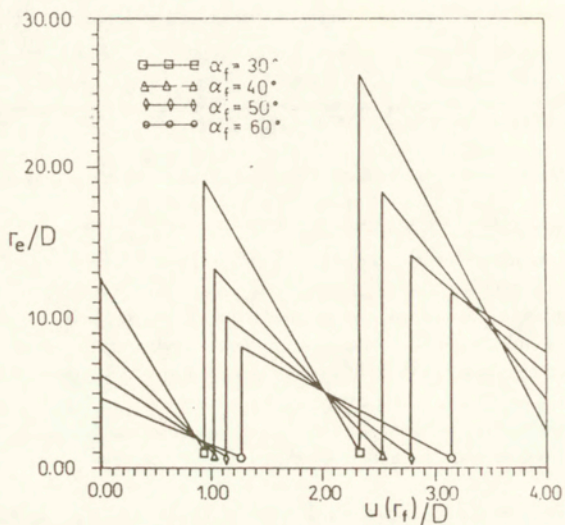
Z doświadczeń prowadzonych nad materiałami kruchymi wynika, że przy próbach wciskania stempla stosunek ciśnienia krytycznego do wytrzymałości na ściskanie jest rzędu $p/S_c = 4 - 14$ ([100]), natomiast obserwowany zasięg spękań jest rzędu $r_c/D = 2 - 8$ ([63]). Dla przypadku p.s.o. na rysunkach 3.4 i 3.5 pokazano zmiany zasięgu strefy spękań i obciążenia w funkcji zagłębienia stempla w trzech kolejnych cyklach procesu dla kilku wartości kąta α_f (do obliczeń przyjęto $\kappa = 0$). Jak widać otrzymane wartości mieszczą się w zakresie obserwowanym doświadczalnie. Przy ustalonej wartości kąta α_f wzrost zasięgu spękań i obciążenia w kolejnych cyklach procesu wynika za wzrostu długości linii ścicia w miarę zagłębienia się stempla.

Doświadczenia przeprowadzane z płytami lodowymi ([53]) wskazują, że przekroczeniu stanu krytycznego następuje przy stosunkowo niewielkich przemieszczeniach. Ponadto w stanie pokrytycznym znaczne zagłębienie stempla wynika z niszczenia płyty przy niewielkich wartościach siły. Taki sam charakter przebiegu procesu otrzymany został z przedstawionego wyżej modelu. Wyniki obliczeń dla przypadku p.s.n. pokazane zostały na rysunkach 3.6–3.9.

Wpływ parametrów n i α_f na formę wyboczenia pokazuje rysunek 3.6 — linie przerywane poprowadzone zostały przez punkty, w których spełniona jest równość $k_1 = k_2$. Dla ustalonej wartości stosunku h/D obszar znajdujący się nad linią przerywaną zawiera punkty, w których następuje wyboczenie z płaszczyzny płyty (obszar oznaczony literą Z), natomiast pod linią przerywaną znajduje się obszar odpowiadający wyboczeniu w płaszczyźnie (oznaczony literą W). W chwili rozpoczęcia procesu możemy przyjąć, że wielkość strefy skruszonej jest bardzo niewielka ($r_f \rightarrow \infty$) — stąd spękana strefa propaguje przy niewielkich wartościach kąta α_f . Równocześnie dla niewielkich kątów nawet przy niewielkiej liczbie szczelin zachodzi wyboczenie w płaszczyźnie. Można to interpretować jako czynnik sprzyjający tworzeniu się wstępnej strefy skruszonej. Ustalonej wartości kąta α_f odpowiada graniczna wartość liczby szczelin n , poniżej której następuje wyboczenie z płaszczyzny płyty. Wraz ze zwiększaniem się wstępnej strefy skruszonej (spadek promienia r_f) rośnie wartość kąta α_f i wzrasta graniczna liczba szczelin n , a więc zwiększa się możliwość wyboczenia z płaszczyzny.

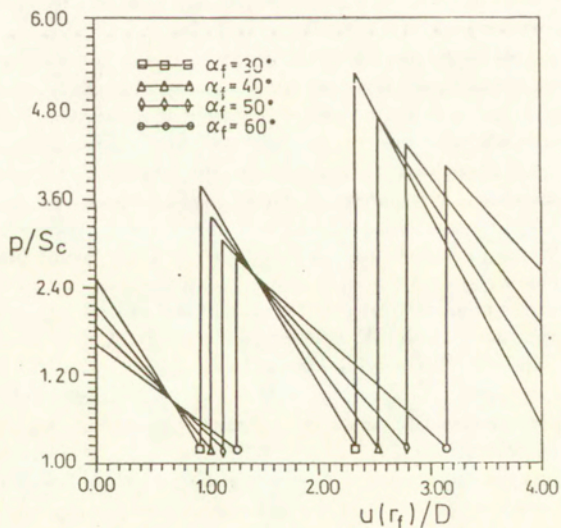
Na rysunku 3.7, dla $n = 20$ i różnych stosunków h/D , przedstawiono ciśnienie, przy którym następuje wyboczenie z płaszczyzny, w zależności od kąta α_f . Jak widać wzrost wartości α_f łączy się ze wzrostem ciśnienia krytycznego. Dla grubych płyt ciśnienie krytyczne przekracza wytrzymałość na ściskanie S_c (na rysunku zaznaczono linią przerywaną graniczną wartość $p = S_c$). W przypadku, gdy $p > S_c$, należy się spodziewać, że faza powyboczeniowa poprzedzona będzie dodatkową fazą, w której zachodzić będzie równoczesny rozwój strefy spękań i skruszonej — przedstawiona wyżej analiza nie obejmuje tego przypadku.

Rysunek 3.8 przedstawia zależność ciśnienie-przemieszczenie pod stemplem dla fragmentu jednego cyklu z zaznaczeniem granic rozdzielających kolejne fazy procesu. W fazie wyboczenia sprężystego obciążenie pręta utrzymuje się niemal na stałym poziomie. Na ry-



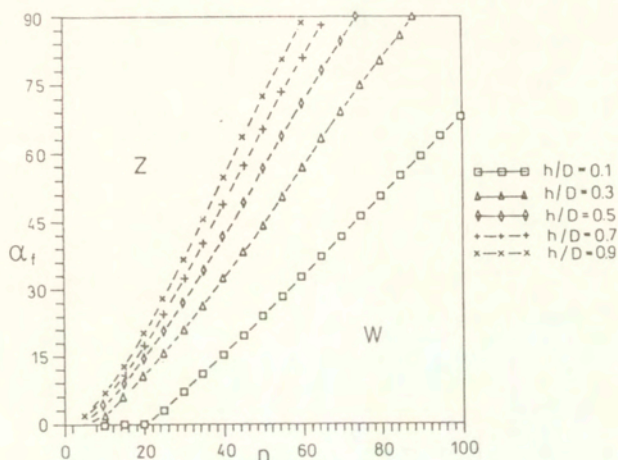
Rys. 3.4

Zmiany zasięgu strefy spękania w funkcji zagłębienia stempla w trzech kolejnych cyklach (p.s.o.).



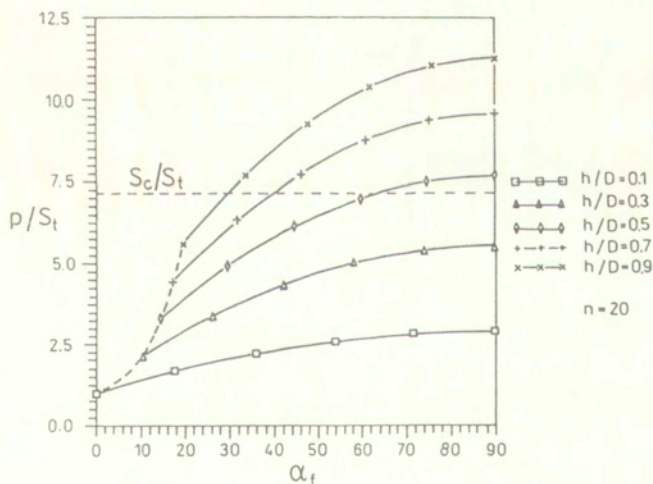
Rys. 3.5

Zmiany obciążenia w funkcji zagłębienia stempla w trzech kolejnych cyklach (p.s.o.).



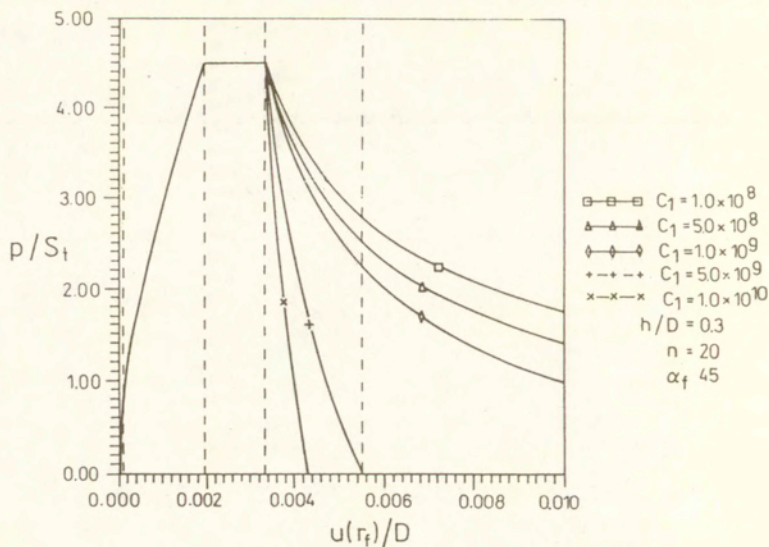
Rys. 3.6

Wpływ liczby szczelin n i kąta rozwarcia strefy spękań α_f na formę wybożenia.



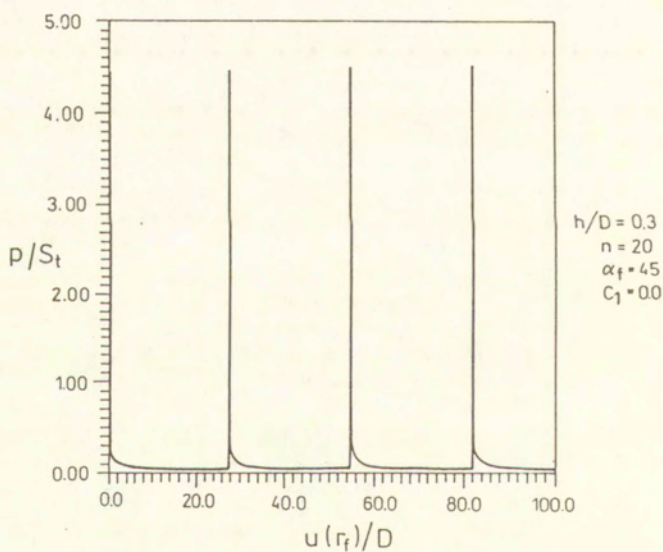
Rys. 3.7

Ciśnienie powodujące wybożenie z płaszczyzny w funkcji kąta α_f dla $n=20$ i różnych stosunków h/D .



Rys. 3.8

Zależność ciśnienie-przemieszczenie pod stemplem dla fragmentu jednego cyklu z zaznaczeniem granic rozdzielających kolejne fazy procesu.



Rys. 3.9

Zależność ciśnienie-przemieszczenie pod stemplem dla czterech cykli procesu przy założeniu zastępczego przegubu plastycznego.

sunku widoczny jest wpływ modułu osłabienia C_1 . Dla $C_1 = 0$ przegub zastępczy staje się idealnie plastyczny, natomiast dla $C_1 \rightarrow \infty$ otrzymujemy przegub idealnie kruchy. Dla przegubu idealnie plastycznego na rysunku 3.9 pokazano przebieg zależności ciśnienie-przemieszczenie w czterech kolejnych cyklach. Z chwilą rozpoczęcia wyłamywania proces staje się niestateczny i następuje bardzo szybki spadek obciążenia. Jak widać moduł osłabienia ma drugorzędne znaczenie przy wyznaczaniu nośności cienkiej płyty obciążonej stemplem. Rysunek 3.9 przedstawia zależność ciśnienie-przemieszczenie pod stemplem dla czterech cykli procesu przy założeniu zastępczego przegubu plastycznego.

3.6 Wnioski.

Prostota przedstawionego rozwiązania pozwala jedynie na przeprowadzenie analizy parametrycznej (parametrami są liczba szczelin, kąt rozwarcia strefy pękanej, moduł osłabienia przegubu zastępczego), pomimo to jednak z przykładu tego wynikają istotne wnioski. Porównanie doświadczeń z wynikami analizy potwierdza przypuszczenie, że przyczyn niewielkich wartości obciążenia niszczonego należy poszukiwać w zmienności form zniszczenia (kruszenie, pęknięcie, wyłamywanie, ścinanie) oraz ze zmianą geometrii (wyboczenie). W prosty sposób uwzględnić można także cykliczny charakter zmian obciążenia. Wydaje się, że skoncentrowanie uwagi na zmienności form zniszczenia i związanej z tym cykliczności obciążenia może wyznaczyć nową ideę w poszukiwaniu lepszych modeli dla materiałów kruchych. Wniosek ten potwierdzają wyniki prac [8, 62], w których prezentowano także uproszczone koncepcje, lecz zmierzające w tym samym kierunku.

Omówiony przykład świadczy także o istotnej roli zagadnienia wyboru zmiennej sterującej. W szczególności jest to widoczne w przypadku cienkiej płyty. Do momentu wyboczenia proces przebiega statecznie i wybór zmiennej sterującej nie stanowi problemu. W fazie pokrytycznej proces może być sterowany przemieszczeniowo. Trzeba jednak zauważyć, że w procesie wyłamywania z modulem osłabienia dążącym do nieskończoności otrzymujemy model idealnie kruchy i obciążenie jako funkcja przemieszczenia staje niejednoznaczne. W oczywisty sposób najlepszą zmienną sterującą w stanie pokrytycznym jest tutaj kąt ϑ wychYLENIA PRĘTÓW z płaszczyzny płyty. Taki wybór zmiennej sterującej oznacza różne sterowanie w stanie przed- i pokrytycznym.

Rozdział 4.

Sprężysto-plastyczna analiza tarcz kołowych.

Jako kolejny przykład analizy stanów pokrytycznych rozważmy kołową tarczę, obciążoną w sposób jednorodny wzdłuż zewnętrznej krawędzi $r = b$ i sztywno podpartą na krawędzi wewnętrznej $r = a$ (Rys. 4.1). Rozważać będziemy model ciała sprężysto-idealnie plastycznego i warunki plastyczności Treski oraz Hubera-Misesa. W trakcie procesu obciążania w miejscu utwierdzenia pojawia się linia nieciągłości. Wynikający stąd problem rozwiążemy przyjmując, że pomiędzy skokiem przemieszczenia na linii nieciągłości i odpowiednią siłą powierzchniową istnieje dodatkowy związek konstytutywny. Z drugiej strony, w obszarze z ciągłym rozwiązaniem obowiązują zwykle prawa płynięcia plastycznego.

4.1 Rozwiązanie ogólne dla stanów sprężystych i sprężysto-plastycznych.

Przed omówieniem poszczególnych faz procesu, najpierw przedstawimy rozwiązania ogólne dla stanów sprężystych i sprężysto-plastycznych z uwzględnieniem zlokalizowanej strefy dekohezyjnej.

4.1.1 Rozwiązanie sprężyste.

Oznaczmy przez $u(r, t)$ przemieszczenie promieniowe i przez $\dot{u} = \partial u / \partial \tau$ prędkość jego zmiany w trakcie procesu (τ oznacza pewien czasopodobny parametr). W zakresie teorii małych odkształceń obowiązują następujące związki

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad \varepsilon_t = \frac{u}{r} \quad (4.1)$$

Przy braku sił masowych równanie równowagi przyjmuje postać

$$\frac{\partial h \sigma_r}{\partial r} + h \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = 0 \quad (4.2)$$

gdzie $\sigma_r(r, t)$ i $\sigma_t(r, t)$ oznaczają naprężenia promieniowe i obwodowe. W równaniu 4.2 możemy zaniedbać zmiany grubości h tarczy przyjmując $h = H = \text{const}$. Analizę przeprowadzać będziemy dla cienkich tarcz ($\frac{1}{2}H \ll a$). W dalszej analizie zmiany grubości będą uwzględnione jedynie w wąskiej strefie dekohezyjnej w otoczeniu krawędzi $r = a$ oraz w ostatniej fazie procesu. Z prawa Hookea wynikają związki

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_t) \quad \varepsilon_t = \frac{1}{E}(\sigma_t - \nu\sigma_r) \quad (4.3)$$

gdzie E i ν są stałymi sprężystości. Z rozwiązania układu równań 4.1–4.3 otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= A_1 - A_2 \frac{1}{r^2} & \sigma_t &= A_1 + A_2 \frac{1}{r^2} \\ u &= \frac{1}{E} \left((1 - \nu)A_1 r + (1 + \nu)A_2 \frac{1}{r} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

gdzie A_1, A_2 oznaczają stałe całkowania.

4.1.2 Rozwiązanie sprężysto-plastyczne.

Rozważymy dwa warunki plastyczności, warunek Treski (T) oraz warunek Hubera-Misesa (HM), i w obu przypadkach rozwiązanie omówimy niezależnie.

Warunek plastyczności Treski.

Można zauważyć, że stan naprężenia $\sigma_r = \sigma_0, \sigma_t < \sigma_r$ reprezentowany przez bok AB na rysunku 4.2 nie może istnieć ze względu na brak możliwości spełnienia warunku równowagi. Dlatego też stany sprężysto-plastyczne powinny odpowiadać punktom na boku BC warunku Treski, dla którego $\sigma_t = \sigma_0, \sigma_r < \sigma_t$ (Rys. 4.2). Stąd rozwiązanie równania równowagi 4.2 otrzymamy w postaci

$$\sigma_r = \sigma_0 - A_3 \frac{1}{r} \quad \sigma_t = \sigma_0 \quad (4.5)$$

gdzie A_3 oznacza stałą całkowania. Następnie ze stowarzyszonego prawa płynięcia mamy

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_r &= \dot{\varepsilon}_r^e = \frac{1}{E}(\dot{\sigma}_r - \nu\dot{\sigma}_t) \\ \dot{\varepsilon}_t &= \dot{\varepsilon}_t^e + \dot{\varepsilon}_t^p = \frac{1}{E}(\dot{\sigma}_t - \nu\dot{\sigma}_r) + \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_t} = \frac{1}{E}(\dot{\sigma}_t - \nu\dot{\sigma}_r) + \dot{\lambda} \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

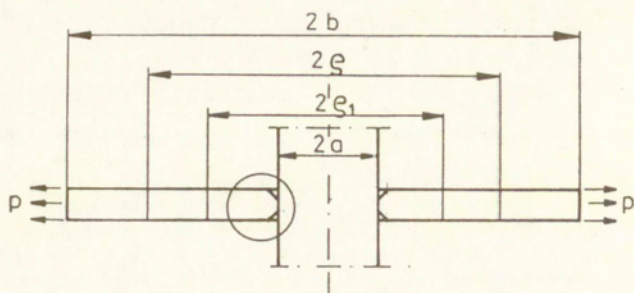
W wyniku całkowania równań 4.6 przy założeniu progresywnego rozwoju uplastycznienia, otrzymamy

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r^e \quad \varepsilon_t = \varepsilon_t^e + \lambda \quad \lambda = \varepsilon_t^p \quad (4.7)$$

a wobec związków 4.3 i 4.5 mamy

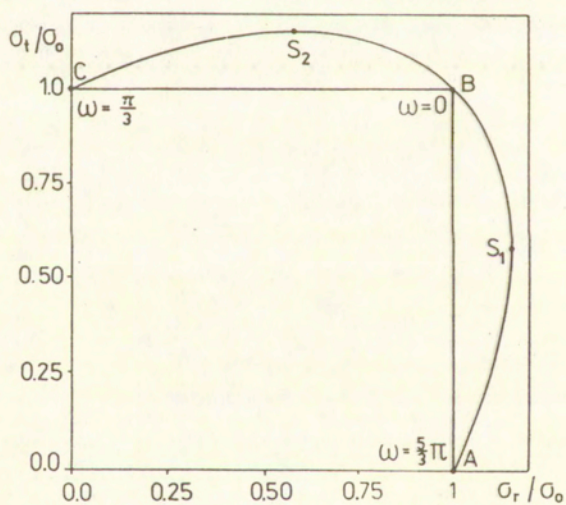
$$u = \frac{1}{E} \left((1 - \nu)\sigma_0 r + A_3(\ln r - \nu) + A_4 \right) \quad (4.8)$$

gdzie A_4 oznacza nową stałą całkowania.



Rys. 4.1

Podział tarczy sprężysto-idealnie plastycznej na strefy.



Rys. 4.2

Powierzchnie warunków plastyczności Treski i Hubera-Misesa.

Warunek plastyczności Hubera-Misesa.

Warunek plastyczności Hubera-Misesa jest tożsamościowo spełniony, gdy naprężenia przedstawimy w postaci

$$\sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_0 \cos\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right) \quad \sigma_t = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_0 \cos\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right) \quad (4.9)$$

gdzie ω oznacza parametr określający stan naprężenia na elipsie Hubera-Misesa (Rys. 4.2)

$$f = \sigma_r^2 + \sigma_t^2 - \sigma_r \sigma_t - \sigma_0^2 = 0 \quad (4.10)$$

Przy takiej reprezentacji pole naprężeń określa funkcja $\omega = \omega(r, t)$. Z równań 4.2 i 4.9, otrzymujemy

$$r = A_3(e^{\sqrt{3}\omega} \sin \omega)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.11)$$

gdzie stała całkowania A_3 będzie określona z warunków brzegowych. Tak określony stan naprężenia istnieje w pierwotnej strefie plastycznej, powstającej od wewnętrznej krawędzi tarczy zanim rozpocznie się proces dekohezji. Proces odrywania rozpoczyna się, gdy ścieżka naprężeń osiągnie punkt paraboliczny S_1 (Rys. 4.2). Zasięg pierwotnej strefy uplastycznienia jest niewielki (porównaj [88]). Dlatego też korzystając z deformacyjnej teorii Hencky-Ilyushina w pracy [88] rozważano rozwój wtórnej strefy uplastycznienia, pojawiającej się po dekohezji, pomijając równocześnie pierwotną strefę uplastycznienia.

Przeanalizujemy krótko rozwiązanie wynikające z teorii deformacyjnej z uwzględnieniem związku 4.11. Mamy

$$\frac{\varepsilon_r - \varepsilon_m}{\varepsilon_t - \varepsilon_m} = \frac{2\sigma_r - \sigma_t}{2\sigma_t - \sigma_r} \quad \varepsilon_m = \frac{\sigma_r + \sigma_t}{9K} \quad (4.12)$$

gdzie $K = E/3(1 - 2\nu)$ jest modulem ścisłości oraz ε_m oznacza średnie odkształcenie objętościowe. Korzystając z warunku zgodności

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\varepsilon_t) = \varepsilon_r \quad (4.13)$$

oraz z równań 4.9, 4.12 i 4.13 otrzymamy następujące równanie różniczkowe

$$\frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \omega} - \sqrt{3}\varepsilon_t = \frac{2\sigma_0}{3K\sqrt{3}} \cos \omega \quad (4.14)$$

Rozwiązaniem powyższego równania jest funkcja

$$\varepsilon_t = \frac{\sigma_0}{3K\sqrt{3}} \cos\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right) + A_4 e^{\sqrt{3}\omega} \quad (4.15)$$

Z równań 4.11 i 4.15 otrzymamy pole przemieszczeń w postaci

$$u = \frac{A_3\sigma_0}{3K\sqrt{3}} \cos\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right) (e^{\sqrt{3}\omega} \sin \omega)^{-\frac{1}{2}} + A_3 A_4 \left(\frac{e^{\sqrt{3}\omega}}{\sin \omega}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.16)$$

Występujące tu stałe całkowania A_3, A_4 wyznaczać będziemy z odpowiednich warunków brzegowych lub warunków ciągłości.

W przypadku korzystania ze stowarzyszonego prawa płynięcia, naprężenia i prędkości odkształceń związane są następująco

$$\left(\dot{\varepsilon}_r - \frac{1}{E}(\dot{\sigma}_r - \nu\dot{\sigma}_t)\right)(2\sigma_t - \sigma_r) = \left(\dot{\varepsilon}_t - \frac{1}{E}(\dot{\sigma}_t - \nu\dot{\sigma}_r)\right)(2\sigma_r - \sigma_t) \quad (4.17)$$

Stąd wynika następujące równanie określające $\dot{\varepsilon}_t$

$$\frac{\partial \dot{\varepsilon}_t}{\partial \omega} - \sqrt{3}\dot{\varepsilon}_t = \frac{2\sigma_0\dot{\omega}}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{4G \sin \omega} + \frac{\sin \omega}{3K} \right) \quad (4.18)$$

gdzie $G = E/2(1 + \nu)$ jest modułem ścinania. Rozwiązanie tego równania otrzymamy na drodze numerycznej. Na podstawie 4.11, związek 4.18 może być także przedstawiony w postaci

$$\frac{\partial \dot{\varepsilon}_t}{\partial r} = - \left[\frac{2\sigma_0\dot{\omega}}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{4G} + \frac{\sin^2 \omega}{3K} \right) + \sqrt{3}\dot{\varepsilon} \sin \omega \right] \left[r \cos \left(\omega - \frac{\pi}{6} \right) \right]^{-1} \quad (4.19)$$

4.1.3 Strefa dekohezyjna.

Przyjmując, że tarcza wykonana jest z materiału Treski pierwsze uplastycznienie dla $r = a$ następuje na boku AB warunku plastyczności. Można zauważyć, że nie istnieje rozwiązanie sprężysto-plastyczne spełniające warunek $u = 0$ dla $r = a$, w którym stan naprężenia reprezentowałyby punkty boku AB . Wynika to z warunku równowagi, który na tym boku prowadzi do równości $\sigma_r = \sigma_t = \sigma_0$ dla $r = a$, a więc rozwój strefy plastycznej nie jest możliwy. Proces rozwoju strefy plastycznej musi być reprezentowany przez punkty boku BC , dla których $f_2 = \sigma_t - \sigma_0 = 0$. Rozwiązanie sprężysto-plastyczne można uzyskać jedynie przy założeniu nieciągłości przemieszczenia $u = u_d$ dla $r = a$.

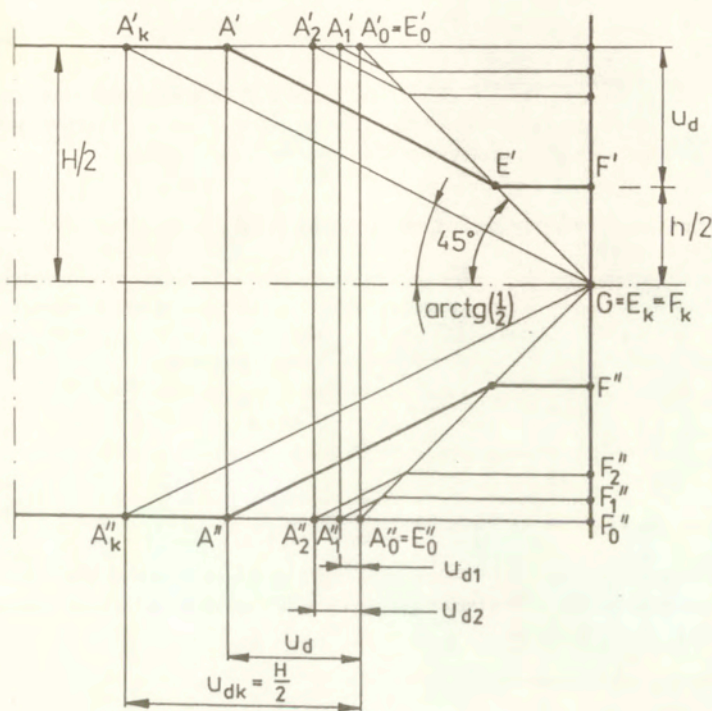
Z drugiej strony, dla materiału ściśliwego ($\nu < \frac{1}{2}$) spełniającego warunek Hubera-Misesa możemy otrzymać ciągle rozwiązanie sprężysto-plastyczne i spełniające warunek $u = 0$ dla $r = a$. Rozwój strefy plastycznej rozpocznie się od wewnętrznej krawędzi tarczy $r = a$ i odbywać się będzie w pierwotnej strefie plastycznej. Gdy punkt reprezentujący dla $r = a$ stan naprężenia na płaszczyźnie $\sigma_r - \sigma_t$ zbliżać się będzie do punktu parabolicznego S_1 (Rys. 4.2), odkształcenia promieniowe $\varepsilon_r(a)$ gwałtownie wzrastają, dążąc do nieskończoności gdy $\sigma_t(a) = \frac{1}{2}\sigma_r(a)$. Oznacza to, że dalej nie istnieje już ciągle (regularne) rozwiązanie sprężysto-plastyczne. W przypadku $\nu = \frac{1}{2}$, punkt paraboliczny jest osiągnięty bezpośrednio ze stanu sprężystego (porównaj [88]).

Można się spodziewać, że w okolicy krawędzi $r = a$ wystąpi zlokalizowana strefa płynięcia plastycznego (lub strefa dekohezyjna). Oznaczmy przez $\sigma_r^*(a)$ i $\sigma_t^*(a)$ naprężenie dla $r = a$, przy którym rozpoczyna się dekohezyja tarczy. Dalsza analiza wynika z uproszczonego opisu strefy dekohezyjnej opartego na następujących założeniach.

Dla uproszczenia przyjmijmy, że osiowosymetryczny stan naprężenia może być przybliżony w płaszczyźnie $r - z$ przez płaski stan odkształcenia. Ponadto założmy, że lokalizacja następuje w strefie $a \leq r \leq a + \frac{1}{2}H$. Przyjmujemy, że stan naprężenia w tej strefie jest jednorodny. ¹⁾

Strefa zlokalizowanych deformacji plastycznych oznaczona została na rysunku 4.1 kółkiem. Rysunek 4.3 przedstawia kinematykę procesu deformacji w tej strefie. Powierzchnie

¹⁾ To założenie jest przedyskutowane w dodatku umieszczonym na końcu pracy.



Rys. 4.3

Zlokalizowana deformacja plastyczna w strefie dekohezyjnej.

poślizgu GE' i GE'' są nachylone pod kątem $\pi/4$ w stosunku do środkowej płaszczyzny tarczy. Dwa sztywne bloki materiału $GE'F'$ i $GE''F''$ ślizgają się w kierunku płaszczyzny środkowej powodując lokalnie pocienienie tarczy. W efekcie przekrój $A'A''$ o stałej grubości przemieszcza się o u_d . Można zauważyć, że wartość przemieszczenia u_d związana jest ze zmienioną grubością $h = H - 2u_d$. Stan naprężenia $\sigma_r^*(a), \sigma_t^*(a)$ jest jednorodny w strefie dekohezyjnej, a więc naprężenia w przekrojach $F'F''$ i $E'E''$ są jednakowe, natomiast naprężenia promieniowe w przekroju $A'A''$ wynikają z warunku równowagi sił w kierunku promieniowym. Stąd

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r(A'A'') &= \sigma_r^*(a) \left(1 - \frac{2u_d}{H}\right) & \text{gdym } u_d < \frac{1}{2}H \\ \sigma_r(A'A'') &= 0 & \text{gdym } u_d \geq \frac{1}{2}H \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

Ponadto zakładamy, że ze względu na niezmienną grubość, przekrój $A'A''$ można traktować jako wewnętrzną krawędź dla pozostałej części tarczy. Z założenia tego wynikają warunki

brzegowe potrzebne do wyznaczenia ciągłego rozwiązania w części tarczy poza strefą dekohezyjną.

$$\sigma_r(a) = \sigma_r(A' A'') \quad u(a) = u_d \quad (4.21)$$

Jak wynika z równania 4.20, naprężenia promieniowe 4.21 na wewnętrznej krawędzi tarczy maleją wraz z rozwojem procesu dekohezji. Zlokalizowane płynięcie plastyczne powoduje osłabienie zamocowania wewnętrznej krawędzi i stopniowe jej odciążenie.

4.2 Rozwiązanie ze strefą dekohezyjną.

Obecnie przedyskutujemy szczegóły rozwiązania sprężysto-plastycznego uwzględniającego przedstawiony wyżej nowy warunek brzegowy dla $r = a$ opisujący proces dekohezji.

Proces obciążania rozpoczyna stan sprężysty całej tarczy. Dla tej fazy stałe całkowania występujące w równaniach 4.4 wyznaczmy z warunków brzegowych

$$u(a) = 0 \quad \sigma_r(b) = p \quad (4.22)$$

Otrzymamy

$$A_1 = \frac{(1 + \nu)pb^2}{(1 + \nu)b^2 + (1 - \nu)a^2} \quad A_2 = \frac{-(1 - \nu)pa^2b^2}{(1 + \nu)b^2 + (1 - \nu)a^2} \quad (4.23)$$

Rozwiązanie sprężyste traci swoją ważność w chwili, gdy stan naprężeń dla $r = a$ osiąga powierzchnię plastyczności. Wartość obciążenia p odpowiadająca początkowi plastycznego płynięcia dana jest następująco

$$\left. \begin{array}{l} \text{– dla warunku Treski} \\ p_T = \frac{\sigma_0}{2b^2} \left((1 + \nu)b^2 + (1 - \nu)a^2 \right) \\ \text{– dla warunku Hubera-Misesa} \\ p_{HM} = \frac{\sigma_0}{2\sqrt{1 - \nu + \nu^2}b^2} \left((1 + \nu)b^2 + (1 - \nu)a^2 \right) \end{array} \right\} \quad (4.24)$$

4.2.1 Rozwiązanie sprężyste ze strefą dekohezyjną.

Dla warunku plastyczności Treski lub dla teorii deformacyjnej 4.12 zakładamy, że w chwili spełnienia warunku 4.24, uplastycznienie jest zlokalizowane w strefie dekohezyjnej w otoczeniu $r = a$, tak że nieciągłość przemieszczenia $u_d(a)$ spełnia warunek osłabienia 4.20. Przyjmując dla materiału Treski

$$\sigma_r^*(a) = \sigma_0 \quad (4.25)$$

oraz dla materiału Hubera-Misesa

$$\sigma_r^*(a) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{1 - \nu + \nu^2}} \quad (4.26)$$

stałe A_1, A_2 mogą być wyznaczone z równań 4.20, 4.21 i z warunku $\sigma_r(b) = p$. Otrzymujemy

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} \left(E \frac{u_d}{a} + (1 + \nu) \sigma_r^*(a) \left(1 - 2 \frac{u_d}{H} \right) \right) \\ A_2 &= \frac{a^2}{2} \left(E \frac{u_d}{a} - (1 - \nu) \sigma_r^*(a) \left(1 - 2 \frac{u_d}{H} \right) \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

W otoczeniu $r = a$ dla rosnących wartości u_d naprężenia promieniowe spadają, a naprężenia obwodowe rosną. Strefa plastyczna może powstać w otoczeniu wewnętrznej krawędzi przed zakończeniem procesu dekohezji, lecz także możliwa jest sytuacja, gdy najpierw kończy się dekohezja powodując całkowite rozdzielenie tarczy od trzpienia, na którym była początkowo zamocowana.

4.2.2 Rozwiązanie sprężysto-plastyczne ze strefą dekohezyjną.

Rozważmy przypadek, gdy strefa plastyczna zaczyna propagować przed zakończeniem procesu dekohezji. Stałe A_1, A_2, A_3, A_4 występujące w równaniach 4.4, 4.5, 4.8 lub 4.11, 4.16 oraz promień ρ strefy plastycznej określone są warunkami 4.20, 4.21, warunkiem $\sigma_r(b) = p$ i warunkami ciągłości dla $r = \rho$: ${}^e u(\rho) = {}^p u(\rho)$, ${}^e \sigma_r(\rho) = {}^p \sigma_r(\rho)$ gdzie e i p oznaczają odpowiednio rozwiązanie sprężyste i plastyczne. Ponadto warunek plastyczności powinien być spełniony przez rozwiązanie sprężyste dla $r = \rho$, czyli $\sigma_t^e(\rho) = \sigma_t^p(\rho)$. Dla warunku Treski stałe całkowania otrzymamy w postaci

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} \left(E \frac{{}^p u(\rho)}{\rho} + (1 + \nu) {}^p \sigma_r(\rho) \right) \\ A_2 &= \frac{\rho^2}{2} \left(E \frac{{}^p u(\rho)}{\rho} - (1 - \nu) {}^p \sigma_r(\rho) \right) \\ A_3 &= -2\sigma_0 \frac{a u_d}{H} \\ A_4 &= E u_d - (1 - \nu) \sigma_0 a + 2\sigma_0 \frac{a u_d}{H} (\ln a - \nu) \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

Koniec tej fazy procesu następuje z chwilą zakończenia procesu dekohezji ($u_d = \frac{1}{2}H$) lub gdy cała tarcza zostaje uplastyczniona.

Rozważmy obecnie przypadek, gdy tarcza zostaje uplastyczniona przed zakończeniem procesu dekohezji. W tym przypadku rozwiązanie określone jest jedynie przez dwie stałe całkowania A_3 i A_4 określone równaniami 4.20, 4.21 i warunkiem $\sigma_r(b) = p$. W przypadku materiału Treski otrzymujemy

$$\left. \begin{aligned} A_3 &= -2\sigma_0 \frac{a u_d}{H} \\ A_4 &= E u_d - (1 - \nu) \sigma_0 a + 2\sigma_0 \frac{a u_d}{H} (\ln a - \nu) \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

Proces kończy się w chwili całkowitego oderwania ($u_d = \frac{1}{2}H$) przejściem tarczy w stan graniczny.

Jak widać kolejność rozwoju poszczególnych faz procesu deformacji może być różna. Charakter przebiegu procesu zależy od parametrów geometrycznych tarczy, tj. od stosunków b/a i a/H .

4.2.3 Rozwiązanie numeryczne problemu sprężysto-plastycznego.

W przypadku warunku Hubera-Misesa i stowarzyszonego prawa płynięcia początek procesu uplastycznienia tarczy wiąże się z rozwojem w okolicy krawędzi $r = a$ pierwotnej strefy ($a \leq r \leq \rho_1$), dla której $\sigma_r > \sigma_t$, $\dot{\epsilon}_t^p < 0$. Dla rozwiązania problemu i wyznaczenia pól naprężeń i przemieszczeń będziemy całkować równanie 4.19. Zastosujemy numeryczną procedurę przyrostową przepisując to równanie w postaci

$$\frac{\partial(\Delta\epsilon_{ti})}{\partial r} = - \left[\frac{2\sigma_0(\Delta\omega_i)}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{4G} + \frac{\sin^2 \omega}{3K} \right) + \sqrt{3}(\Delta\epsilon_{ti}) \sin \omega \right] \left[r \cos \left(\omega - \frac{\pi}{6} \right) \right]^{-1} \quad (4.30)$$

gdzie $\Delta\epsilon_{ti}$ i $\Delta\omega_i$ oznaczają przyrosty ϵ_t i ω w kolejnych krokach całkowania. Powyższe równanie może być całkowane w strefie plastycznej $a \leq r \leq \rho_1$ z wykorzystaniem metody Eulera. Następnie możemy wyznaczyć przyrosty przemieszczeń Δu_i i odpowiednio uaktualnić rozwiązanie sprężyste w strefie dla $\rho_1 \leq r \leq b$. Duże wartości $\epsilon_t(a)$ wskazują na zbliżanie się do punktu parabolicznego S_1 i początek procesu dekohezji. Rozwój dekohezji powoduje odciążenie wewnętrznej krawędzi tarczy. Powtórnie płynięcie plastyczne rozwija się w strefie od krawędzi $r = a$ dla $\sigma_t > \sigma_r$, $\dot{\epsilon}_t^p > 0$. Jeżeli najpierw kończy się dekohezja obliczenia są kontynuowane aż do całkowitego uplastycznienia tarczy.

4.3 Ostateczne zniszczenie tarczy.

Przedstawione wyżej rozwiązanie doprowadza opis procesu zniszczenia do stanu nośności granicznej. Trudno jednak uznać ten stan za końcowy etap zniszczenia tarczy. Rzeczywista konstrukcja nie może doznawać nieskończenie wielkich odkształceń. Na podstawie obserwacji należy się spodziewać, że ostateczne zniszczenie nastąpi wskutek dodatkowego pęknięcia rozwijającego się w kierunku ortogonalnym do kierunku większego z naprężeń głównych. Jeżeli w trakcie tego etapu zachowana zostanie symetria procesu, większym naprężeniem będzie naprężenie obwodowe, a zatem rozwój szczelin nastąpi w kierunku promieniowym. Możemy przyjąć, że pęknięcie ponownie ma charakter dekohezji plastycznej. Pomimo tych uproszczeń problem nadal jest trudny do ścisłej analizy. Poniżej przedstawione są jedynie dwa oszacowania rozwiązania, przy czym w obu przypadkach przyjęty jest model materiału sprężysto-plastycznego. Celem oszacowania jest określenie zależności pomiędzy obciążeniem $p = \sigma_r(b)$ a przemieszczeniem promieniowym $u(b)$.

Pierwsze oszacowanie otrzymamy przy założeniu, że zniszczenie następuje wskutek równoczesnego rozwoju nieskończenie wielu szczelin promieniowych. Oznacza to równomierne na całym obwodzie pocienianie tarczy. Związki określające przemieszczenia promieniowe i zmiany grubości tarczy w funkcji promienia i parametru czasopodobnego otrzymamy ze związków kinematycznych

$$\dot{\epsilon}_r = 0 \quad \dot{\epsilon}_t = \frac{u}{r} \quad \dot{\epsilon}_z = \frac{\dot{h}}{H} \quad (4.31)$$

oraz z warunku nieściśliwości

$$\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_t + \dot{\epsilon}_z = 0 \quad (4.32)$$

Po scałkowaniu otrzymamy

$$u = u_0(r) + A_5 r \quad \frac{h}{H} = e^{-\frac{A_5 r}{r}} \quad (4.33)$$

Funkcja $u_0(r)$ opisuje rozkład przemieszczeń w chwili osiągnięcia stanu nośności granicznej. Dalej iloczyn stałej całkowania A_5 przez parametr r możemy wyeliminować korzystając ze związku 4.33₁. Wstawiając do równania 4.2 związek 4.33₂ oraz warunek $\sigma_t(r) = \sigma_0$, dokonując całkowania i wreszcie wykorzystując warunek brzegowy $\sigma_r(a) = 0$ otrzymamy

$$\sigma_r(r) = \frac{\sigma_0}{r e^{\mathcal{U}}} \int_a^r e^{\mathcal{U}} dr \quad (4.34)$$

(gdzie $\mathcal{U} = (u_0 - u)/r$). Szczegóły dotyczące wyznaczania całki w powyższym związku pominiemy. Wstawiając do wzoru 4.34 $r = b$ otrzymamy poszukiwaną zależność $p(u)$.

Drugie oszacowanie końcowego etapu zniszczenia otrzymamy przyjmując założenie, że wzdłuż średnicy tarczy powstają dwie strefy zlokalizowanego plynienia plastycznego i tworzone są niezależne półpierścienie. Z warunku równowagi półpierścieni wynika zależność $p = \sigma_t$, a stąd otrzymujemy równanie

$$p(u) = \sigma_0 \left(1 - 2 \frac{u}{H}\right) \left(1 - \frac{a}{b}\right) \quad (4.35)$$

4.4 Przykłady.

Przyjmując zarówno warunek Treski jak i warunek Hubera-Misesa oraz teorię deformacyjną i teorię plynienia przeliczono szereg przykładów. W tabelach zamieszczonych w dodatku na końcu pracy przedstawiono stałe materiałowe i wymiary geometryczne przyjęte do obliczeń oraz kolejność faz procesu w analizowanych tarczach. Przebieg procesu deformacji tarczy wygodniej jest jednak analizować porównując położenie punktów rozgraniczających kolejne fazy procesu na krzywej obciążenie-przemieszczenie zewnętrznej krawędzi tarczy z ich odpowiednikami na płaszczyźnie naprężeń. Punkty takie na rysunkach 4.4–4.9 oznaczono kolejnymi cyframi 1, 2, Dodatkowo na płaszczyźnie naprężeń oznaczenia uzupełniono indeksami "i" oraz "e" dla rozróżnienia odpowiednio wewnętrznej i zewnętrznej krawędzi tarczy. Poniższy opis rysunków odwołuje się także do oznaczeń literowych pokazanych na rysunku 4.2.

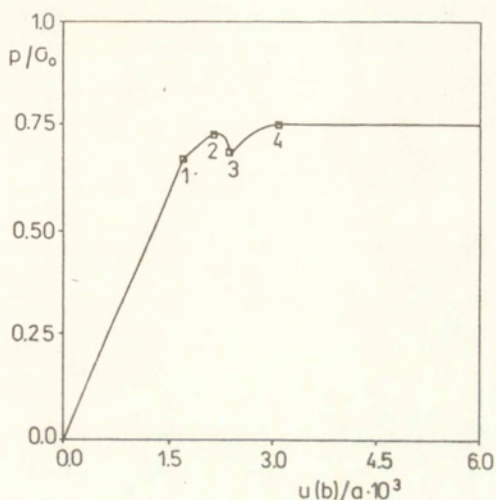
Na rysunku 4.4 pokazano związek pomiędzy zewnętrznym obciążeniem p/σ_0 a przemieszczeniem obciążonej krawędzi $r = b$ w przypadku $b/a = 4$, $a/H = 300$, $\nu = 0.3$, $\sigma_0/E = 0.001$. Prezentowane na tym rysunku wyniki uzyskano przyjmując warunek Treski i stowarzyszone prawo plynienia. Jak widać stan sprężysty z dekohezją (faza 1 – 2) przebiega w sposób stateczny. Jednak faza sprężysto-plastyczna z dekohezją (2 – 3) jest niestateczna i jej przebieg musi być kontrolowany za pomocą przemieszczeń. Po całkowitym oderwaniu ($\sigma_r(a) = 0$, $u_d > \frac{1}{2}H$), dalszy rozwój strefy plastycznej (faza 3 – 4) przebiega w sposób stateczny aż do osiągnięcia stanu granicznego w punkcie 4. Rysunek 4.5 przedstawia zmiany rozkładu naprężeń w tarczy w kolejnych fazach procesu. Najpierw powierzchnię plastyczności

na boku AB : $\sigma_r = \sigma_0$, $\sigma_t < \sigma_0$ osiąga wewnętrzna krawędź (stan naprężenia reprezentowany punktem z indeksem i). Rozpoczyna to rozwój dekohezji i sprężyste odciążenie w otoczeniu krawędzi $r = a$, po czym osiągnąony jest stan plastyczny reprezentowany przez bok BC : $\sigma_t = \sigma_0$, $\sigma_r < \sigma_0$. W trakcie procesu dekohezji punkt reprezentujący stan naprężenia na wewnętrznej krawędzi przesuwa się do punktu C . Koniec dekohezji następuje przy $\sigma_r(a) = 0$.

Rysunek 4.6 przedstawia krzywą obciążenie-przemieszczenie dla tych samych parametrów tarczy, lecz przy wykorzystaniu warunku Hubera-Misesa i teorii deformacyjnej. Podobnie jak w pracy [88], płynięcie plastyczne poprzedzające proces dekohezji zostało pominięte. W efekcie kolejność faz procesu jest taka sama jak na rysunku 4.5. Rysunek 4.7 pokazuje odpowiednie zmiany rozkładu naprężeń w przypadku warunku Hubera-Misesa i teorii deformacyjnej. Jak widać w obu przypadkach, przy warunku Treski ze stowarzyszonym prawem płynięcia i przy warunku Hubera-Misesa z wykorzystaniem teorii deformacyjnej, choć wartości liczbowe nieco się różnią to jednak przebieg procesu deformacji tarczy jest podobny.

Ponownie dla tych samych parametrów tarczy na rysunkach 4.8 i 4.9 przedstawiono rozwiązanie, tym razem uzyskane z wykorzystania warunku Hubera-Misesa i stowarzyszonego prawa płynięcia. W obliczeniach uwzględniono istnienie pierwotnej strefy plastycznej powstającej przed rozpoczęciem procesu dekohezji (faza 1 – 2) i dla podkreślenia tego, dodatkowo na 4.9 pokazano zmiany stanu naprężenia na krawędzi $r = \rho_1$ pomiędzy pierwotną strefą plastyczną i strefą sprężystą. W trakcie rozwoju pierwotnej strefy uplastycznienia na rysunku 4.9 stan naprężenia na wewnętrznej krawędzi przemieszcza się po powierzchni plastyczności od punktu 1i do punktu 2i. Gdy punkt "i" zbliża się do punktu parabolicznego S_1 , odkształcenia promieniowe dla $r = a$ gwałtownie wzrastają powodując, że rozpoczyna się proces dekohezji trającej aż do osiągnięcia stanu granicznego w punkcie 6. Proces dekohezji wymusza odciążenie w otoczeniu wewnętrznej krawędzi. W punkcie 3i stan naprężenia na wewnętrznej krawędzi tarczy ponownie osiąga powierzchnię plastyczności, przy czym należy zauważyć, że $\dot{\epsilon}_r^p(a) > 0$, $\dot{\epsilon}_t^p(a) > 0$, tj. punkt 3i odpowiada stanowi eliptycznemu. W trakcie fazy 3 – 4 rozwija się wtórna strefa plastyczna pokrywając się całkowicie z pierwotną strefą plastyczną w punkcie 4. Następnie stan naprężenia dla $r = a$ przekracza punkt paraboliczny S_2 i wchodzi w zakres stanów hiperbolicznych, dla których mamy $\dot{\epsilon}_r^p(a) < 0$, $\dot{\epsilon}_t^p(a) > 0$. Dalsza dekohezja powoduje, że punkt reprezentujący stan naprężenia na wewnętrznej krawędzi tarczy, przemieszcza się do punktu 5i i dalej do punktu 6i gdzie $\sigma_r(a) = 0$. W punkcie 5 cała tarcza jest uplastyczniona, a faza 5 – 6 odpowiada końcowej części procesu dekohezji. Zauważmy, że tym razem całkowite uplastycznienie tarczy następuje jeszcze przed zakończeniem procesu dekohezji, a więc kolejność faz procesu jest inna niż w przypadku wyżej omówionych przykładów. Jak widać krzywa obciążenie-przemieszczenie aż do całkowitego uplastycznienia tarczy w punkcie 5 nie zawiera odcinka niestatecznego, natomiast niestateczność procesu występuje tylko w końcowej fazie dekohezji 5 – 6.

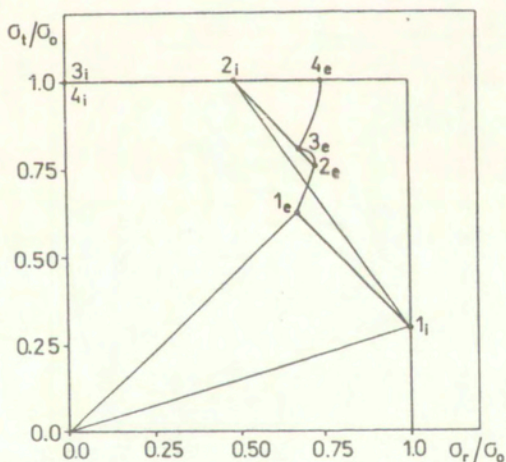
Rysunki 4.10–4.12 przedstawiają wpływ wymiarów geometrycznych na krzywą obciążenie-przemieszczenie, a rysunek 4.13 wpływ wartości współczynnika Poissona. Rysunki 4.10 i 4.11 pokazują wpływ grubości tarczy. Zgodnie z oczekiwaniem, grubsze tarcze wykazują bardziej miękkie zachowanie podczas gdy cienkie tarcze zachowują się w sposób kruchy. Wyniki uzyskane dla warunku Treski i dla warunku Hubera-Misesa z wykorzystaniem teorii deformacyjnej wskazują podobny przebieg procesu. Z rysunku 4.12 wynika, że wraz ze wzrostem stosunku b/a , krzywa ta zawiera nie tylko niestateczny odcinek (sterowalny przemierzaniem $\dot{p} < 0$, $\dot{u}(b) > 0$), lecz także może przebiegać w sposób niestateczny i nies-



Rys. 4.4

Związek pomiędzy obciążeniem p/σ_0 i przemieszczeniem krawędzi $r = b$ tarczy otrzymany przy wykorzystaniu warunku Treski i stowarzyszonego prawa płynięcia.

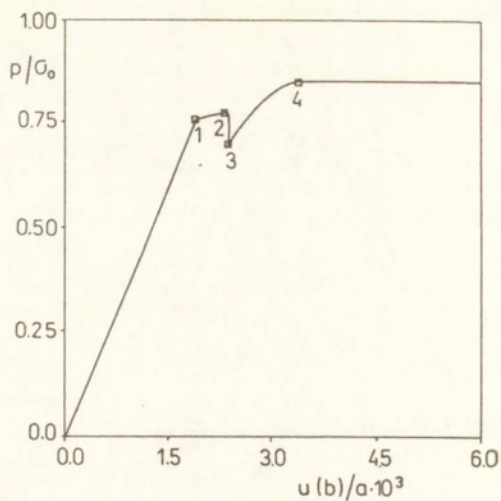
Parametry tarczy: $b/a = 4$, $a/H = 300$, $\nu = 0.3$, $\sigma_0/E = 0.001$



Rys. 4.5

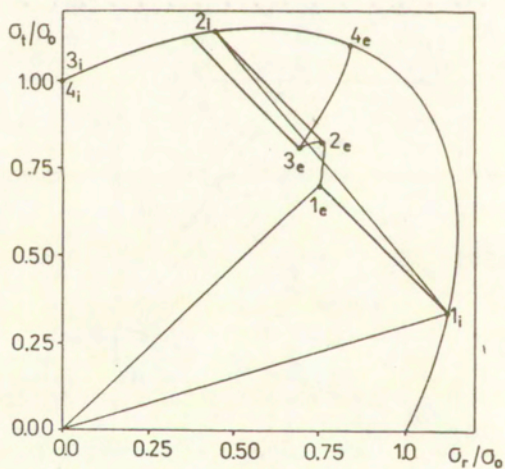
Zmiany rozkładu naprężeń w tarczy otrzymane przy wykorzystaniu warunku Treski i stowarzyszonego prawa płynięcia.

Parametry tarczy: $b/a = 4$, $a/H = 300$, $\nu = 0.3$, $\sigma_0/E = 0.001$



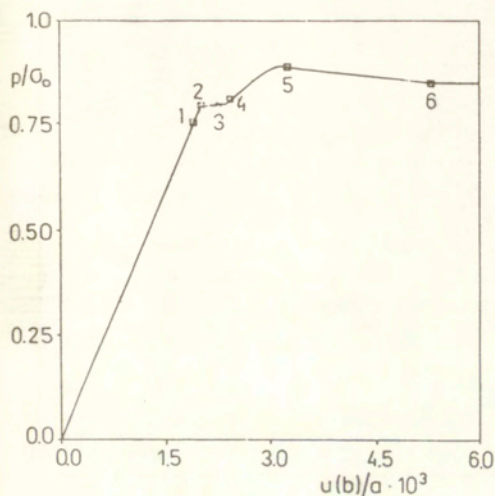
Rys. 4.6

Związek pomiędzy obciążeniem p/σ_0 i przemieszczeniem krawędzi $r = b$ tarczy otrzymany przy wykorzystaniu warunku Hubera-Misesa i teorii deformacyjnej.
 Parametry tarczy: $b/a = 4$, $a/H = 300$, $\nu = 0.3$, $\sigma_0/E = 0.001$



Rys. 4.7

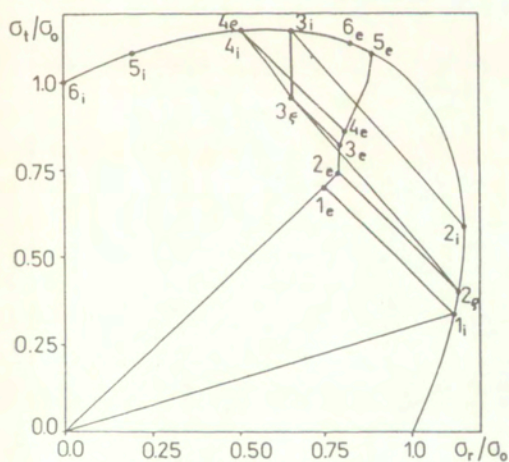
Zmiany rozkładu naprężeń w tarczy otrzymane przy wykorzystaniu warunku Hubera-Misesa i teorii deformacyjnej.
 Parametry tarczy: $b/a = 4$, $a/H = 300$, $\nu = 0.3$, $\sigma_0/E = 0.001$



Rys. 4.8

Związek pomiędzy obciążeniem p/σ_0 i przemieszczeniem krawędzi $r = b$ tarczy otrzymany przy wykorzystaniu warunku Hubera-Misesa i stowarzyszonego prawa płynięcia.

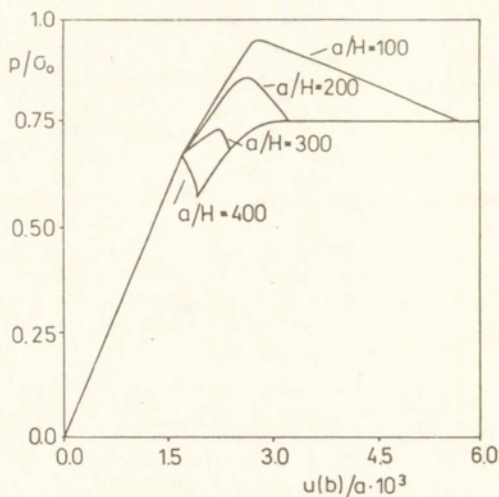
Parametry tarczy: $b/a = 4$, $a/H = 300$, $\nu = 0.3$, $\sigma_0/E = 0.001$



Rys. 4.9

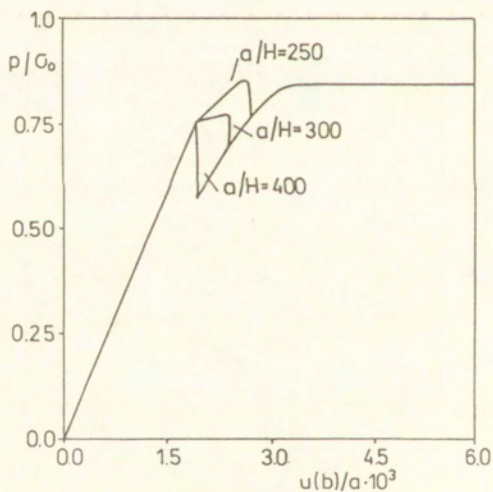
Zmiany rozkładu naprężeń w tarczy otrzymane przy wykorzystaniu warunku Hubera-Misesa i stowarzyszonego prawa płynięcia.

Parametry tarczy: $b/a = 4$, $a/H = 300$, $\nu = 0.3$, $\sigma_0/E = 0.001$



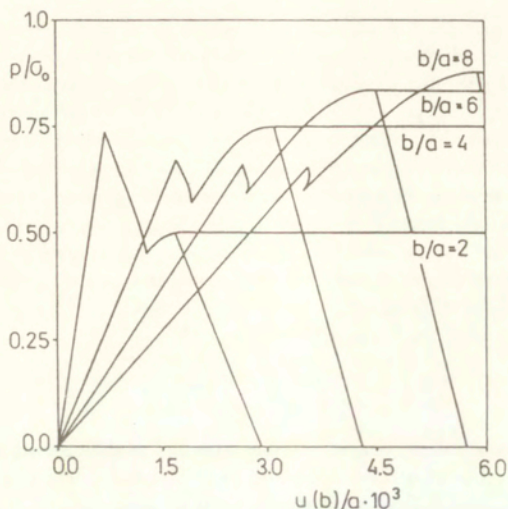
Rys. 4.10

Wpływ grubości tarczy na związek pomiędzy obciążeniem p/σ_0 i przemieszczeniem krawędzi $r = b$ tarczy w przypadku warunku Treski i stowarzyszonego prawa płynięcia. Parametry tarczy: $b/a = 4$, $\nu = 0.3$, $\sigma_0/E = 0.001$



Rys. 4.11

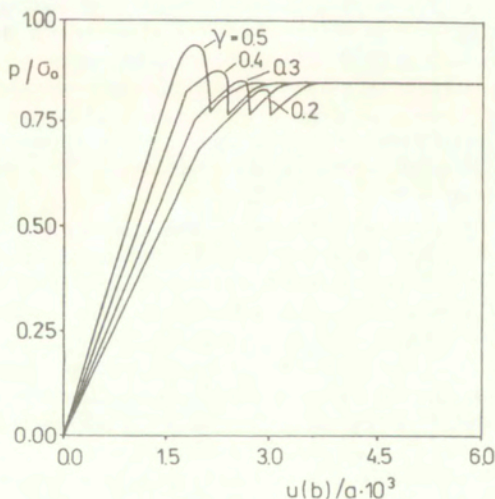
Wpływ grubości tarczy na związek pomiędzy obciążeniem p/σ_0 i przemieszczeniem krawędzi $r = b$ tarczy w przypadku warunku Hubera-Misesa i teorii deformacyjnej. Parametry tarczy: $b/a = 4$, $\nu = 0.3$, $\sigma_0/E = 0.001$



Rys. 4.12

Wpływ stosunku promieni b/a na związek pomiędzy obciążeniem p/σ_0 i przemieszczeniem krawędzi $r = b$ tarczy w przypadku warunku Treski i stowarzyszonego prawa płynięcia.

Parametry tarczy: $a/H = 400$, $\nu = 0.3$, $\sigma_0/E = 0.001$



Rys. 4.13

Wpływ liczby Poissona na związek pomiędzy obciążeniem p/σ_0 i przemieszczeniem krawędzi $r = b$ tarczy w przypadku warunku Hubera-Misesa i teorii deformacyjnej.

Parametry tarczy: $b/a = 4$, $a/H = 250$, $\sigma_0/E = 0.001$

terowalny ($\dot{p} < 0$, $\dot{u}(b) < 0$). Ponadto początek dekohezji nie musi odpowiadać maksymalnej wartości obciążenia — dla większych wartości stosunku b/a graniczne bciążenie jest wyższe od wartości początkujących odrywanie tarczy. Dla ostatniego etapu procesu rysunek 4.12 pokazuje po dwie zależności $p(u)$ dla każdej tarczy. W zakresie przemieszczeń pokazanym na rysunku krzywa otrzymana z oszacowania dla nieskończonej liczby szczelin promieniowych pokrywa się z wartościami uzyskanymi dla stanu nośności granicznej. Spadek obciążenia byłby widoczny dopiero przy znacznie większych przemieszczeniach. Przy oszacowaniu otrzymanym dla dwóch szczelin promieniowych widać, że obciążenie tarczy gwałtownie spada. Jak wynika z rysunku 4.13, wartość współczynnika Poissona ν nie wpływa na wartość obciążenia, a jedynie ma wpływ na wartość przemieszczenia krawędzi $r = b$ w chwili zakończenia dekohezji.

4.5 Uwagi końcowe.

Pomimo prostoty rozważanego przykładu, prezentowana metoda rozwiązywania problemów sprężysto-plastycznych prowadzi do możliwości uwzględnienia stanów pokrywających. Ponieważ duże deformacje są ograniczone do wąskiej strefy dekohezyjnej, ich wpływ na deformację całej konstrukcji może być opisany związkiem konstytutywnym uwzględniającym relację pomiędzy odpowiednią siłą powierzchniową i skokiem przemieszczeń. Przedstawiona analiza pokazuje złożony charakter procesu plastycznej deformacji. Niewielka pierwotna strefa uplastycznienia poprzedza odciążenie wywołane procesem dekohezji, po czym pojawia się wtórna strefa uplastycznienia by stopniowo ogarnąć całą tarczę.

Ponadto omówiona analiza wskazuje, że założenie kruchej dekohezji wykorzystywane w pracach [87]–[92], [102], nie musi być uzasadnione we wszystkich przypadkach. Autorzy wymienionych prac doszli do wniosku, że krucha dekohezja występuje niezależnie od grubości tarczy, gdy stan naprężenia osiąga punkt paraboliczny S_1 na powierzchni plastyczności. Ponadto stwierdzili, że pomijając niewielką strefę pierwotnego uplastycznienia, procesowi dekohezji towarzyszy sprężysty stan naprężenia, a proces deformacji sprężysto-plastycznej przebiega dopiero po całkowitym oddzieleniu tarczy od trzpienia. Przedstawiona wyżej analiza prowadzi do innych wniosków.

Podczas dekohezji w tarczy może panować stan sprężysty bądź sprężysto-plastyczny, zależnie od grubości tarczy. Rozmiary strefy uplastycznej wzrastają wraz z rosnącą grubością tarczy. Wartość współczynnika Poissona nie wpływa na wartość obciążenia, a jedynie na wartość przemieszczenia obciążonej krawędzi w chwili zakończenia dekohezji.

Ogólnie, po rozpoczęciu dekohezji proces może przebiegać statecznie bądź niestatecznie i określenie maksymalnego obciążenia tarczy wymaga przeprowadzenia całkowitej analizy sprężysto-plastycznej. Grubość tarczy ma bardzo istotne znaczenie w tej analizie, ponieważ podatność strefy dekohezyjnej wynikająca z równania 4.21 zależy w sposób jawny od H . Jak wynika z rysunków 4.10 i 4.11 krzywa obciążenia-przemieszczenia w istotny sposób zależy od stosunku a/H . Prezentowane wyżej rozważania mogą być uogólnione na bardziej złożone stany obciążenia dla przypadków nieosiowosymetrycznych z rozciąganiem i zginaniem. Dodatkowy związek pomiędzy naprężeniem i skokiem przemieszczeń wykorzystamy dalej przy budowaniu nowego elementu skończonego.

Na koniec zwrócić uwagę na problem sterowania. Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że nie istnieje jakakolwiek zmienna, która w sposób uniwersalny mogłaby służyć do sterowa-

nia przebiegiem całego procesu niszczenia tarczy. Podobnie jak w poprzednio omawianych przykładach tylko podczas fragmentów statecznych proces może być kontrolowany przez obciążenie. Możliwość sterowania przemieszczeniami krawędzi obciążonej także jest ograniczona. Z zamieszczonych rysunków wynika, że na etapie dekohezji charakter procesu (stateczny lub niestateczny) zależy od parametrów materiałowych i geometrycznych tarczy. W każdym jednak przypadku proces dekohezji może być kontrolowany przez rosnącą wartość parametru u_d . Uzyskane wyniki analityczne sugerują, że przy założeniu istnienia szczelin promieniowych przebieg procesu może być niezwykle skomplikowany, a co za tym idzie efektywne rozwiązanie problemu może być uzyskane jedynie na drodze numerycznej. Dodatkowo potrzebna jest jednak ogólna metoda wyboru parametru sterującego. W następnych rozdziałach opisana jest próba wypracowania takiej metody.

Rozdział 5.

Podstawy analityczne metod kontynuacji.

Celem analizy określonego procesu fizycznego jest znalezienie w jawnej postaci zależności zmiennych opisujących proces od tzw. zmiennej sterującej. Poszukiwany związek jest więc formą parametrycznego opisu procesu. Najczęściej spotykanym przykładem może tu być określenie zależności przemieszczeń od rosnącego obciążenia. Poszukiwana zależność zadana jest w postaci uwikłanej poprzez układ równań utworzony przez związki geometryczne, prawa fizyczne (np. równania równowagi, związki konstytutywne) i odpowiednie warunki brzegowe. Warunki istnienia i jednoznaczności rozwiązania analizowanego układu określa twierdzenie o funkcjach uwikłanych. Twierdzenie to pozwala też stwierdzić czy dokonany wybór zmiennej sterującej umożliwi parametryzację procesu. Ponieważ parametryzacja jest zasadniczym elementem działania metod kontynuacji, stąd za podstawy analityczne tych metod można traktować twierdzenie o funkcjach uwikłanych (patrz [69]).

W literaturze spotyka się opinie (np. [51]), że twierdzenie o funkcjach uwikłanych jest uogólnieniem twierdzeń algebry liniowej. Pomimo takiej opinii podstawy metod kontynuacji przedstawimy korzystając z pojęć i twierdzeń algebry liniowej. Uzasadnienie takiego podejścia wynika z treści dalszej części pracy. Twierdzenie o funkcjach uwikłanych oraz niektóre elementy algebry liniowej podane zostały w formie dodatku na końcu pracy.

Rozważania opierać będziemy na naturalnym założeniu, że jeżeli w układzie fizycznym zachodzą zmiany, to kolejnym stanom tego układu możemy przyporządkować monotonicznie rosnące wartości pewnego pomocniczego parametru. W pierwszej części rozdziału przedyskutujemy rolę jaką ten parametr odgrywa w procesie rozwiązywania problemów nieliniowych. Przyjmując za parametr jedną ze zmiennych opisujących dany problem, w miarę zbliżania się do punktu krytycznego tej zmiennej, pojawia się problem niejednoznaczności związku pomiędzy składowymi wektora stycznego do ścieżki równowagi. Pokażemy na przykładach, że wspomniana niejednoznaczność wiąże się z ograniczeniami swobody w wyborze parametru sterującego. Celem omawiania tych przykładów jest podkreślenie różnicy między globalnym i lokalnym opisem ścieżki obciążenia. Także jako przykład traktować będziemy ogólne rozważania dotyczące deformacji sprężystego układu o wielu stopniach swobody, poddanego obciążeniu proporcjonalnemu. Dodatkowo celem w tym wypadku będzie zwrócenie uwagi na związek pomiędzy istnieniem i jednoznacznością rozwiązywania problemów perturbacyjnych, a rzędem macierzy układu równań. Dalej wynikać stąd będzie prosta modyfikacja dotychczasowego podejścia do zagadnień analizy nieliniowej.

Przyjmując, że znany jest parametr monotonicznie rosnący w całym procesie (parametr globalny) sformułowane zostaną problemy perturbacyjne w najogólniejszej postaci. Dyskusję nad rozwiązaniem tych problemów ograniczymy do problemów pierwszego i drugiego

rzędu. W przypadku problemu I-go rzędu nowym elementem jest pozostawienie układu równań w postaci jednorodnej. Taka modyfikacja potrzebna jest dla określenia warunków istnienia oraz jednoznaczności rozwiązania w oparciu o badanie rzędu prostokątnej macierzy układu. Wynik badania rzędu macierzy układu równań, opisującego problem I-go rzędu, jest dalej wykorzystywany przy badaniu istnienia i jednoznaczności rozwiązania problemu II-go rzędu. Wiele uwagi poświęcono interpretacji geometrycznej przypisując temu zagadnieniu istotną rolę w zrozumieniu omawianych zagadnień.

5.1 Interpretacja geometryczna stanów równowagi.

Zakładając, że proces deformacji układu dyskretnego przebiega w sposób quasistatyczny, podstawą rozważań staje się energia potencjalna układu opisana funkcją

$$V = V(q_i, \lambda_j) \quad (5.1)$$

gdzie q_i ($i = 1, \dots, I$) oznacza współrzędne uogólnione, a λ_j ($j = 1, \dots, J$) wszelkie pozostałe wielkości zmieniające się w trakcie procesu (np. uogólnione siły, odkształcenia plastyczne, sztywności, itd). Tak ogólną interpretację zmiennych λ_j zaproponował Sewell ([75]). Zakładamy, że zmienne λ_j nie zależą w sposób jawny od współrzędnych q_i , a więc przy wprowadzaniu równań równowagi λ_j nie podlegają różniczkowaniu (dlatego λ_j zwane są parametrami podstawowymi). Z warunku zerowania się wariacji δV wywołanej przyrostami δq_k otrzymujemy równania równowagi statycznej w postaci

$$\Gamma_k(q_i, \lambda_j) = 0 \quad (5.2)$$

gdzie $k = 1, \dots, I$ oraz $\Gamma_k = \partial V / \partial q_k$. Na podstawie jednego tylko potencjału 5.1 możemy wyznaczyć równania równowagi dla układu sprężystego. W przypadku układu, w którym zachodzą trwale zmiany (pękanie, deformacja plastyczna), do wyznaczenia równań równowagi potrzebny jest jeszcze potencjał określający siły dysypatywne. Problemy, w których równania równowagi można otrzymać przez minimalizację odpowiedniego potencjału stanowią jednak ograniczoną klasę. Istnieje oprócz tego cały szereg problemów, w których nie da się określić potencjału (np. zagadnienia sił śledzących). Dlatego też dalej przyjmować będziemy, że punktem wyjściowym do rozważań są równania 5.2, w których funkcje Γ_k są znane. Do potencjału 5.1 będziemy się odwoływać jedynie w formie przykładów.

5.1.1 Wektor wodzący w przestrzeni stanu.

Oznaczmy przez R^N produkt kartezjański zbiorów wartości $\{q_i\} \times \{\lambda_j\}$ ($N = I + J$). Każdy punkt $P = (q_i, \lambda_j) \in R^N$ reprezentuje stan fizyczny całego układu, stąd Sewell nazywa R^N przestrzenią stanu zaznaczając przy tym, że ma ona inne znaczenie niż podobne pojęcie spotykane w dynamice. Położenie punktu $P \in R^N$ określać będziemy za pomocą wektora wodzącego \mathbf{r} . Wektor \mathbf{r} możemy rozłożyć na kierunki składowe za pomocą równości $\mathbf{r} = r_n \mathbf{e}_n$ ($n = 1, \dots, N$).¹⁾ Wersory \mathbf{e}_n określają fizyczne znaczenie składowych wektora \mathbf{r} , odpowiadające znaczeniu fizycznemu zmiennych q_i, λ_j , natomiast r_n określa bezwymiarowe wartości zmiennych q_i, λ_j . Przyjmując, że r_n są liczbami rzeczywistymi skończonymi, otrzymujemy że R^N jest N wymiarową przestrzenią Euklidesową.

¹⁾ Jeżeli nie będzie zaznaczone inaczej, powtarzające się indeksy oznaczają konwencję sumacyjną Einsteina.

5.1.2 Interpretacja geometryczna układu równań.

Każde z równań 5.2 reprezentuje $(N-1)$ wymiarową powierzchnię w przestrzeni R^N , określoną przez $(N-1)$ swobodnych zmiennych r_n . Stan równowagi statycznej reprezentowany jest przez punkt leżący równocześnie na I powierzchniach opisanych związkami 5.2. Zbiór wszystkich takich punktów wyznacza powierzchnię równowagi statycznej określoną przez J swobodnych zmiennych r_n (dalej oznaczać ją będziemy przez Γ).

Wyznaczenie położenia konkretnego punktu $P \in \Gamma$ wymaga ustalenia wartości J swobodnych zmiennych r_n . W jakikolwiek sposób dokonamy tego ustalenia, może to być interpretowane jako określenie funkcji

$$\Psi_m(\mathbf{r}) = 0 \quad (5.3)$$

(gdzie $m = 1, \dots, J$), reprezentujących dalsze powierzchnie $(N-1)$ wymiarowe. Jako przykład funkcji 5.3 może służyć przypadek obciążenia proporcjonalnego

$$\Psi_m(\mathbf{r}) = \lambda_m - \lambda \lambda_m^r = 0 \quad (5.4)$$

gdzie λ_m oznacza siły uogólnione; λ jest zmieniającym się współczynnikiem proporcjonalności traktowanym jako jedna ze składowych wektora \mathbf{r} ; $\lambda_m^r = const$ oznacza składową stałego wektora sił odniesienia \mathcal{X} (reference loading).

Jak wynika z dalszej analizy, w ogólnym przypadku liczba związków 5.3, zwanych dalej więzami, i liczba swobodnych zmiennych w równaniach równowagi nie muszą być równe. Dalej łączną liczbę równań równowagi i więzów oznaczmy przez M . Na skutek swobody w doborze więzów naogół nie możemy z góry stwierdzić czy określają one proces quasistatyczny. W dalszej części pracy podane zostaną ściśle warunki, jakie muszą być spełnione, aby proces przebiegał w sposób quasistatyczny, natomiast obecnie omówimy interpretację geometryczną sytuacji wynikających ze swobodnego doboru więzów.

Analogicznie do powierzchni Γ możemy mówić o powierzchni Ψ określonej przez część wspólna $(M-I)$ powierzchni danych równaniami 5.3.²⁾ Zakładamy, że wszystkie równania więzów spełnione są conajmniej w punkcie \mathbf{r}_0 reprezentującym stan początkowy układu. Gdy powierzchnie Γ i Ψ nie mają punktów wspólnych, to deformacja układu może przebiegać jedynie w sposób dynamiczny. Proces przebiegać będzie dynamicznie także wtedy, gdy powierzchnie Γ i Ψ mają ograniczoną liczbę odizolowanych punktów wspólnych. Dalej będziemy się zajmować przypadkiem, gdy część wspólna powierzchni więzów i powierzchni równowagi jest jednowymiarową krzywą, zwaną krzywą równowagi. Dowolny punkt na krzywej równowagi określony jest za pomocą jednej swobodnej zmiennej r_i .

5.1.3 Parametryzacja ścieżki obciążenia.

Krzywa równowagi reprezentuje wszystkie możliwe dla założonych więzów stany równowagi. Najczęściej analiza procesu ogranicza się jednak do wybranego fragmentu krzywej równowagi, zwanego dalej ścieżką obciążenia. Mówiąc o przebiegu procesu mamy na myśli uporządkowany ciąg punktów na ścieżce obciążenia, reprezentujących kolejne stany deformowanego układu. W ramach tego uporządkowania punktom ścieżki obciążenia możemy przyporządkować

²⁾ Gdy powierzchnie określone równaniami więzów nie mają punktu wspólnego to znaczy, że więzy są sprzeczne.

(na nieskończenie wiele sposobów) bezwymiarowe wartości η pewnego rosnącego, pomocniczego parametru. Wybierając jedną z form przyporządkowania η w naturalny sposób zakładamy, że położenie kolejnych punktów ścieżki obciążenia opisuje jednoznacznie N związków

$$r_n = \mathcal{R}_n(\eta) \quad (5.5)$$

takich, że funkcje $\mathcal{R}_n(\eta)$ spełniają tożsamościowo równania 5.2 i 5.3. W dalszych rozważaniach najważniejszym elementem założenia 5.5 jest monotoniczny wzrost parametru η (np. od stanu początkowego $\eta = \eta_a$, do stanu końcowego $\eta = \eta_b$). Często η nazywa się parametrem czasopodobnym.

Założenie istnienia związków 5.5 odgrywa pomocniczą rolę w analizie, natomiast celem analizy jest określenie bezpośrednich relacji między wybraną swobodną składową r_i , a pozostałymi składowymi wektora \mathbf{r} . Oznacza to, że szukamy $(N - 1)$ związków

$$r_n = \mathcal{S}_n(p) \quad (5.6)$$

takich, że funkcje $\mathcal{S}_n(p)$ spełniają tożsamościowo równania 5.2 i 5.3, oraz $p \equiv r_i$ i $n \neq i$. Parametr p zwany jest zmienną sterującą.

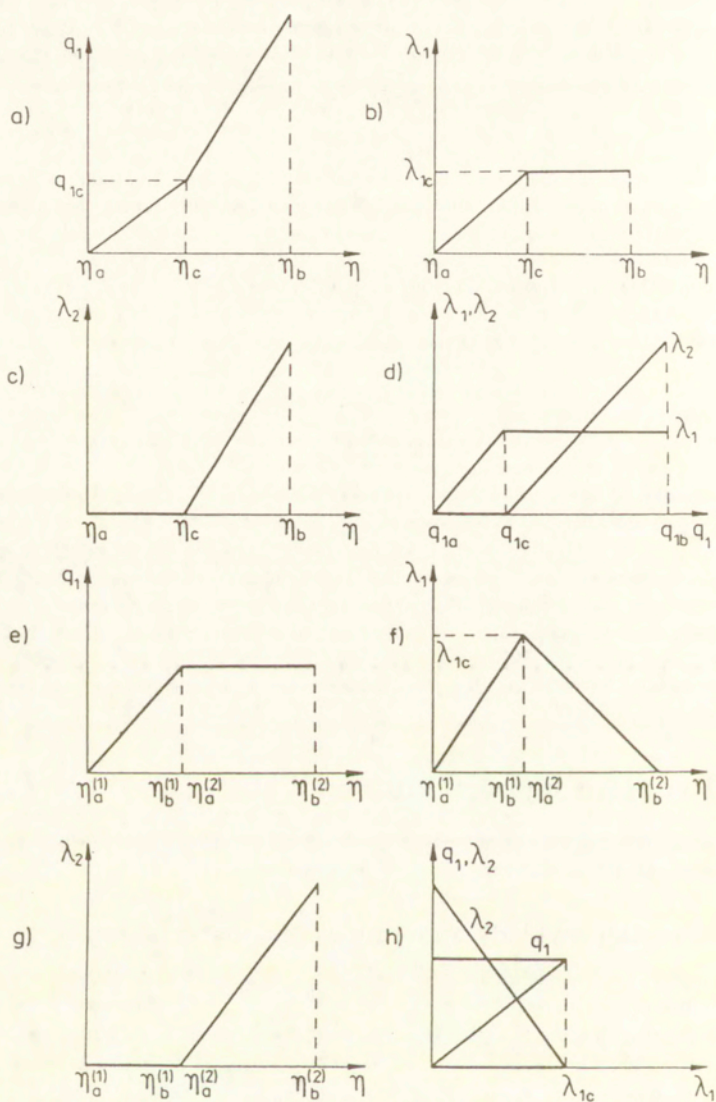
W przypadku $M = N - 1$ możliwość parametryzacji ścieżki obciążenia, wynika z twierdzenia o funkcjach uwikłanych. Wymienione formy parametryzacji 5.5 i 5.6 różnią się m.in. liczbą równań. W przypadku równań 5.5 dodatkowe równanie ustala relacje między η i składowymi wektora \mathbf{r} — definiuje parametr η (zauważmy, że w równaniach 5.2 i 5.3 zmienna η nie występuje w postaci jawnej). Rolę definicji η może pełnić każde z równań 5.5. Ogólnie definicję taką możemy przedstawić równaniem $\gamma(\mathbf{r}, \eta) = 0$, gdzie γ jest zadaną funkcją (np. $\gamma(\mathbf{r}, \eta) = r_i - \mathcal{R}_i(\eta) = 0$). Podstawowa różnica między związkami 5.5 i 5.6 polega jednak na tym, że związki 5.6 nie muszą być jednoznaczne, stąd wybór zmiennej sterującej podlega pewnym ograniczeniom.

5.2 Problem wyboru zmiennej sterującej.

Aby wyraźniej wskazać na konsekwencje wynikające z przyjętego sposobu parametryzacji ścieżki równowagi przeanalizujemy niżej podane przykłady.

5.2.1 Proste przykłady z nieliniowością materiałową.

Przyjmijmy chwilowo założenie, że równania 5.5 są znane i dla ustalonego wskaźnika i potraktujmy równanie $\gamma(\mathbf{r}, \eta) = r_i - \mathcal{R}_i(\eta) = 0$ jako definicję parametru η . Jeżeli istnieje funkcja odwrotna $\eta = \mathcal{R}_i^{-1}(r_i)$, to przyjmując $p \equiv r_i$ możemy otrzymać równania 5.6 w postaci $r_n = \mathcal{S}_n(p) = \mathcal{R}_n(\mathcal{R}_i^{-1}(r_i))$. Warunkiem istnienia funkcji odwrotnej $\mathcal{R}_i^{-1}(r_i)$ jest ścisła monotoniczność funkcji $\mathcal{R}_i(\eta)$ dla $\eta \in (\eta_a, \eta_b)$. Jeżeli żadna z funkcji $\mathcal{R}_i(\eta)$ (dla $i = 1, \dots, N$) nie spełnia tego warunku, wówczas nie istnieje jednoznaczny opis całej ścieżki obciążenia za pomocą równań 5.6. W takim wypadku parametr η wyeliminujemy, gdy przedział (η_a, η_b) podzielimy na podprzedziały $(\eta_a^{(\nu)}, \eta_b^{(\nu)})$ ($\nu = 1, 2, \dots$), w których wybrana funkcja $\mathcal{R}_i(\eta)$ jest ściśle monotoniczna. Prowadzi to do tzw. lokalnej parametryzacji równań 5.6 w każdym z podprzedziałów. Możliwe są przy tym sytuacje, w których nie da się opisać ścieżki obciążenia bez zmiany zmiennej sterującej. Wreszcie zauważmy, że spełnienie



Rys. 5.1

Przykłady sterowania w przypadku nieliniowości materiałowej: a)–d) układ sprężysto idealnie plastyczny; e)–h) układ sprężysto idealnie kruchy.

warunku ściślejszej monotoniczności funkcji $\mathcal{R}_1(\eta)$ wystarcza, aby zmienna r_1 mogła być zmienną sterującą niezależnie od interpretacji fizycznej tej zmiennej. Wynika stąd nieznaną dotychczas w literaturze możliwość sterowania za pomocą zmiennych dysypatywnych.

Powyższe uwagi zilustrujemy dwoma przykładami, w których stan układu o jednym stopniu swobody opisują zmienne q_1, λ_1 i λ_2 oznaczające uogólnioną współrzędną, siłę i zmienną dysypatywną. W przypadku prostego układu sprężysto idealnie plastycznego przebieg funkcji $q_1(\eta), \lambda_1(\eta)$ i $\lambda_2(\eta)$ przedstawiono na rysunku 5.1a-c (λ_2 oznacza wydłużenie plastyczne). Jak widać funkcja odwrotna może być określona tylko dla zmiennej q_1 — na rysunku 5.1d pokazano zależności $\lambda_1(q_1)$ i $\lambda_2(q_1)$. Na rysunku 5.1e-g pokazano zmiany $q_1(\eta), \lambda_1(\eta)$ oraz $\lambda_2(\eta)$ dla układu sprężysto idealnie kruchego (λ_2 określa rozwarcie kruchej szczeliny). Widać, że żadna z funkcji nie jest ściśle monotoniczna w całym przedziale (η_a, η_b) — konieczna jest lokalna parametryzacja ze zmianą definicji parametru η po osiągnięciu krytycznej wartości $\lambda_{1c} = \lambda_1(\eta_b^{(1)})$. W obu podprzedziałach $(\eta_a^{(1)}, \eta_b^{(1)})$ oraz $(\eta_a^{(2)}, \eta_b^{(2)})$ możemy przyjąć $p \equiv \lambda_1$. Na rysunku 5.1h pokazano zależności $q_1(\lambda_1)$ i $\lambda_2(\lambda_1)$, przy czym wykres podkreśla niezależności zmiennej sterującej λ_1 (zgodnie ze zwyczajem zmienna niezależna związana jest z osią poziomą). Na rysunku 5.1g widać, że w podprzedziale $(\eta_a^{(2)}, \eta_b^{(2)})$ można otrzymać też jednoznaczne związki $q_1(\lambda_2)$ i $\lambda_1(\lambda_2)$.

5.2.2 Przykład nieliniowej analizy układu sprężystego.

Rozmowianie powyższe oparte jest na założeniu, że równania 5.5 są znane. W rzeczywistości związki 5.5 należałoby najpierw wyznaczyć na podstawie zadanych równań 5.2, 5.3 i założonej definicji $\gamma(\boldsymbol{r}, \eta) = 0$. Tymczasem poszukiwane związki 5.6 można wyznaczyć bez znajomości związków 5.5, a jedynie na podstawie pochodnych $r'_n = dr_n/d\eta$. Odpowiednią procedurę omówimy najpierw na przykładzie układu sprężystego o wielu stopniach swobody. Prezentowane niżej rozważania są w pewnej mierze powtórzeniem odpowiedniego fragmentu pracy Riksa ([71]) i z tego powodu traktowane są obecnie jako przykład. Celem omawianego przykładu jest wykazanie znaczenia definicji parametru sterującego. Równocześnie podkreślimy związek pomiędzy istnieniem i jednoznacznością pochodnych r'_n , a rzadko wymienianym w mechanice pojęciem rzędu macierzy prostokątnej. Na koniec, w ramach omawianego zagadnienia sformułowane zostaną warunki konieczne dla zaistnienia punktów krytycznych. Warunki te często traktowane są jako podstawa do określenia typu punktu krytycznego.

Rozważmy układ sprężysty o I stopniach swobody. Przyjmujemy, że jego obciążenie zmienia się proporcjonalnie, a więc spełnia równania 5.4. Parametrami fundamentalnymi są obecnie siły uogólnione λ_j i współczynnik proporcjonalności λ , a składowe wektora $\boldsymbol{r} = r_n \boldsymbol{e}_n$ ($n = 1, \dots, N$) określone są następująco

$$r_n \equiv \begin{cases} q_i & \text{dla } n = i & \text{oraz } i = 1, \dots, I \\ \lambda_j & \text{dla } n = j + I & \text{oraz } j = 1, \dots, J - 1 \\ \lambda & \text{dla } n = N \end{cases} \quad (5.7)$$

Założenie proporcjonalności obciążenia oznacza, że mamy $M - I = J - 1$ równań więzów postaci 5.4. Z uwagi na ich prostotę, zmienne λ_j można wyeliminować z równań równowagi. Otrzymamy w ten sposób równania

$$f_i(\boldsymbol{x}) = 0 \quad (5.8)$$

dla $i = 1, \dots, I$. Wektor $\boldsymbol{x} = r_n \boldsymbol{e}_n$ ma $L (= I + 1)$ składowych danych następująco

$$x_n \equiv \begin{cases} q_i & \text{dla } n = i \text{ oraz } i = 1, \dots, l \\ \lambda & \text{dla } n = L \end{cases} \quad (5.9)$$

Skorzystamy z propozycji Riksa, aby ogólnie definicję parametru η zapisać w postaci

$$\gamma(\mathbf{r}, \eta) = g(\mathbf{x}) - \eta = 0 \quad (5.10)$$

gdzie $g(\mathbf{x})$ oznacza zadaną funkcję. Przykładami funkcji $g(\mathbf{x})$ o szczególnie prostej postaci są funkcje $g(\mathbf{x}) = \lambda$ lub $g(\mathbf{x}) = q_k$ (gdzie k — ustalony wskaźnik). Równania 5.8 i 5.10 stanowią punkt wyjściowy w rozważaniach Riksa.

Oznaczmy dalej przez $\mathbf{G} = [G_{ij}]_{l \times l}$ macierz o współczynnikach $G_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$ oraz przez \mathbf{x}' i \mathbf{n} wektory o składowych $x'_j = dx_j / d\eta$, $n_j = \partial g / \partial x_j$. Różniczkując względem parametru η równania 5.8 i 5.10 otrzymamy

$$\mathbf{G}\mathbf{x}' = 0 \quad (5.11)$$

oraz

$$\mathbf{n}\mathbf{x}' = 1 \quad (5.12)$$

Równania te tworzą układ niejednorodny, który możemy zapisać w zwartej postaci

$$\mathbf{F}\mathbf{x}' = \bar{\mathbf{i}} \quad (5.13)$$

gdzie $\mathbf{F}^T = [\mathbf{G}^T, \mathbf{n}]$ oznacza macierz kwadratową oraz $\bar{\mathbf{i}} = (0, 1)$. Analiza deformacji układu sprężystego sprowadza się teraz do rozwiązania układu 5.13 i całkowania związków określających pochodne x'_i . Należy zatem przeanalizować istnienie i jednoznaczność rozwiązania tego układu.

W tym celu przez $\alpha_{(\alpha)}$ oznaczmy kolumnę o numerze α macierzy \mathbf{G} . Z kolumn $\alpha_{(\alpha)}$ utworzymy macierze kwadratowe $\mathbf{G}^{(\alpha, \alpha)}$ i $\mathbf{G}^{(\alpha, \beta)}$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, l$; $\alpha \neq \beta$) w sposób następujący

$$\mathbf{G}^{(\alpha, \alpha)} = [\alpha_{(1)} \quad \dots \quad \alpha_{(\alpha-1)} \quad \alpha_{(\alpha+1)} \quad \dots \quad \alpha_{(L)}]_{l \times l} \quad (5.14)$$

$$\mathbf{G}^{(\alpha, \beta)} = [\alpha_{(1)} \quad \dots \quad \alpha_{(\alpha-1)} \quad \alpha_{(\alpha+1)} \quad \dots \quad \alpha_{(\beta-1)} \quad \alpha_{(\alpha)} \quad \alpha_{(\beta+1)} \quad \dots \quad \alpha_{(L)}]_{l \times l}$$

Jak widać macierz $\mathbf{G}^{(\alpha, \alpha)}$ powstaje z macierzy \mathbf{G} przez wykreślenie kolumny $\alpha_{(\alpha)}$, macierz $\mathbf{G}^{(\alpha, \beta)}$ powstaje przez wykreślenie w macierzy \mathbf{G} kolumny $\alpha_{(\beta)}$ i przestawienie w jej miejsce kolumny $\alpha_{(\alpha)}$. Zauważmy, że dla $\alpha = L$ macierz $\mathbf{G}^{(L, L)}$ określa styczną macierzą sztywności układu, bowiem jej współczynniki dane są następująco

$$G_{ij}^{(L, L)} = \frac{\partial f_i}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \quad (5.15)$$

Oznaczając dalej przez $\mathbf{x}'_{\{\alpha\}}$ wektor złożony z l zmiennych x'_β o wskaźnikach $\beta \neq \alpha$, układ równań 5.11 możemy zapisać w postaci

$$\mathbf{G}^{(\alpha, \alpha)} \mathbf{x}'_{\{\alpha\}} = -\alpha_{(\alpha)} x'_\alpha \quad (5.16)$$

Przy założeniu, że dla ustalonej wartości wskaźnika α mamy $\det(\mathbf{G}^{(\alpha, \alpha)}) \neq 0$, z wzorów Cramera otrzymamy

$$x'_\beta = -\frac{\det(G^{(\alpha,\beta)})}{\det(G^{(\alpha,\alpha)})} x'_\alpha \quad (5.17)$$

Z własności wyznaczników dotyczącej przestawiania kolumn³⁾ wynika związek

$$\det(G^{(\alpha,\beta)}) = (-1)^{\alpha+\beta-1} \det(G^{(\beta,\beta)}) \quad (5.18)$$

Dalej oznaczmy przez $\mathbf{w} = [w_1, \dots, w_L]$ wektor o składowych $w_\beta = (-1)^\beta \det(G^{(\beta,\beta)})$. Korzystając z własności 5.18, związek 5.17 możemy zapisać w postaci

$$\frac{x'_\beta}{w_\beta} = \frac{x'_\alpha}{w_\alpha} \quad (5.19)$$

Związki 5.17 (lub 5.19) wyrażają rozwiązanie układu jednorodnego 5.11. Układ ten posiada nieskończenie wiele rozwiązań niezerowych, zależnych od wartości swobodnej zmiennej x'_α — zmienna x_α jest zmienną sterującą. Ze związku 5.19 wynika dodatkowy wniosek. Zauważmy, że gdy $w_\beta = 0$, wówczas $x'_\beta = 0$ oraz $x_\beta(\eta) = \text{const}$, czyli x_β nie może być zmienną sterującą, jeżeli nie istnieje funkcja odwrotna $\eta(x_\beta)$. Identyczny wniosek przedstawiony był przy omawianiu prostych przykładów z nieliniowością materiałową.

Rozwiązanie układu 5.11 możemy wykorzystać do rozwiązania układu 5.13. Wstawiając związek 5.19 do równania 5.12 otrzymamy

$$(\mathbf{n}\mathbf{w}) \frac{x'_\alpha}{w_\alpha} = 1 \quad (5.20)$$

(nie sumować po α). Z powyższego wynika, że możliwe są następujące trzy sytuacje:

- Gdy iloczyn skalarny wektorów \mathbf{n} oraz \mathbf{w} spełnia warunek

$$\mathbf{n}\mathbf{w} \neq 0 \quad (5.21)$$

to istnieje wskaźnik α taki, że $w_\alpha \neq 0$. W tym przypadku z równania 5.20 jednoznacznie wynika wartość zmiennej x'_α , i dalej ze związków 5.17 wynikają jednoznaczne wartości zmiennych x'_β . Warunek 5.21 zapewnia więc istnienie i jednoznaczność rozwiązania układu 5.13. Zauważmy, że warunek ten jest równoznaczny z warunkiem nieosobliwości macierzy \mathbf{F} (można to sprawdzić dokonując rozwinięcia wyznacznika względem ostatniego wiersza), a więc rząd tej macierzy jest równy L . Także rząd macierzy rozszerzonej $\tilde{\mathbf{F}} = [\mathbf{F}, \mathbf{i}]$ jest równy L (do tego wystarczy, by choć jedna składowa w_α była niezerowa, bowiem tylko ostatnia składowa wektora \mathbf{i} jest różna od zera).

³⁾ Korzystając z wprowadzonych oznaczeń mamy:

$$\det(G^{(\alpha,\alpha+1)}) = \det(G^{(\alpha+1,\alpha+1)}) \quad \det(G^{(\alpha,\alpha+2)}) = -\det(G^{(\alpha+2,\alpha+2)})$$

$$\det(G^{(\alpha,\alpha+3)}) = \det(G^{(\alpha+3,\alpha+3)}) \quad \det(G^{(\alpha,\alpha+4)}) = -\det(G^{(\alpha+4,\alpha+4)})$$

- Gdy wektor \mathbf{w} jest zerowy to warunek 5.21 nie jest spełniony. Nie możemy też stosować w tym wypadku wzorów 5.17, lub inaczej nie możemy określić jednoznacznego rozwiązania układu 5.11 za pomocą jednej swobodnej zmiennej. Wynikająca stąd niejednoznaczność wektora \mathbf{x}' oznacza bifurkację ścieżki obciążenia. Wobec $w_\alpha = 0$ dla $\alpha = 1, \dots, L$ i w tym przypadku rzędy macierzy \mathbf{F} i $\tilde{\mathbf{F}}$ są równe, lecz ulegają obniżeniu.
- Gdy wektor \mathbf{w} nie jest zerowy i warunek 5.21 nie jest spełniony, to wektory \mathbf{n} i \mathbf{w} są ortogonalne oraz rozwiązanie układu 5.13 jest nieokreślone. Przy założeniu, że wartości składowych w_α są ograniczone, z równania 5.20 wynika, że dla $n\mathbf{w} \rightarrow 0$ otrzymamy $\mathbf{x}'_\alpha \rightarrow \infty$. Trzeba jednak zauważyć, że w tym przypadku rzędy macierzy \mathbf{F} i $\tilde{\mathbf{F}}$ są różne i układ staje się sprzeczny. Przyczyną sprzeczności jest określony wybór definicji parametru η , a więc dla znalezienia wektora \mathbf{x}' wystarczy odpowiednio zmienić związek 5.10.

Z powyższych uwag wynika klasyfikacja punktów na ścieżce obciążenia (porównaj [71]):

- $\mathbf{x} = \mathbf{x}_r$ jest punktem regularnym, gdy $w_\alpha(\mathbf{x}_r) \neq 0$ dla $\alpha = 1, \dots, L$;
- $\mathbf{x} = \mathbf{x}_l$ jest punktem granicznym, gdy $w_\alpha(\mathbf{x}_l) = 0$ oraz $\det[\mathbf{F}(\mathbf{x}_l)] \neq 0$;
- $\mathbf{x} = \mathbf{x}_b$ jest punktem bifurkacji, gdy $w_\alpha(\mathbf{x}_b) = 0$ dla $\alpha = 1, \dots, L$.

Gdy $1 \leq \alpha \leq I$ to \mathbf{x}_l określa punkt graniczny współrzędnej q_α , natomiast gdy $\alpha = L$ to \mathbf{x}_l określa punkt graniczny obciążenia.

Z omówionego przykładu wynika także ważny wniosek dotyczący znaczenia definicji parametru η . Zauważmy, że rozwiązując układ 5.11 otrzymujemy nieskończenie wiele wektorów \mathbf{x}' , których długość $|\mathbf{x}'| = \sqrt{x'_j x'_j}$ zmienia się w przedziale $(0, \infty)$. Przyjmując określoną definicję parametru η ustalamy długość wektora \mathbf{x}' w taki sposób, aby spełnić równanie 5.12. Wynika stąd, że definicja parametru η służy jedynie jako kryterium wyboru jednego spośród nieskończenie wielu rozwiązań układu jednorodnego 5.11.

5.3 Problemy perturbacyjne.

Zalóżmy dalej, że znany jest parametr η , zwany parametrem globalnym, nie wymagający zmiany definicji $\gamma(\mathbf{r}, \eta) = 0$. Dla podkreślenia tego założenia, dalej różniczkowanie względem η oznaczać będziemy kropką ($\dot{r}_i = dr_i/d\eta$). Przed przystąpieniem do dalszej analizy wprowadzimy krótkie uzupełnienie interpretacji geometrycznej procesu. Oznaczmy przez \tilde{R}^N przestrzeń N wymiarową wyznaczoną przez produkt kartezjański zbiorów wartości $\{\dot{q}_i\} \times \{\dot{\lambda}_j\}$. Wprowadzając kartezjański układ o wersorach $\tilde{\mathbf{e}}_n$, położenie punktu $P \in \tilde{R}^N$ wyznaczać będziemy za pomocą wektora $\tilde{\mathbf{r}} = \dot{r}_n \tilde{\mathbf{e}}_n$ ($n = 1, \dots, N$). Różnica między R^N oraz \tilde{R}^N wynika z różnic w znaczeniu fizycznym zmiennych q_i, λ_j oraz $\dot{q}_i, \dot{\lambda}_j$. Zmienne \dot{r}_n określają prędkości zmian zachodzących w stanie fizycznym układu wzdłuż ścieżki obciążenia. Stan układu oraz prędkość zachodzących w nim zmian reprezentuje punkt $P \in R^{2N} = (R^N \times \tilde{R}^N)$. Przestrzeń R^{2N} stanowi pewnego rodzaju analogię do przestrzeni fazowej wykorzystywanej w dynamice.

Podobnie możemy określić pochodne $\tilde{r}_n = d\dot{r}_n/d\eta$, przestrzeń \tilde{R}^N , wersory $\tilde{\mathbf{e}}_n$ oraz wektor $\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{r}_n \tilde{\mathbf{e}}_n$. Z uwagi na różnicę w znaczeniu fizycznym żaden z wersorów $\mathbf{e}_n, \dot{\mathbf{e}}_n$ i $\tilde{\mathbf{e}}_n$ nie może być otrzymany w wyniku liniowej kombinacji pozostałych wersorów. W tym sensie możemy mówić, że $\mathbf{e}_n, \dot{\mathbf{e}}_n$ i $\tilde{\mathbf{e}}_n$ stanowią wzajemnie ortogonalne bazy wektorów $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$ i $\tilde{\mathbf{r}}$.

Wobec założenia, że znany jest parametr η służący do parametryzacji 5.5 całej ścieżki obciążenia, funkcje Γ_k oraz Ψ_m są funkcjami złożonymi postaci

$$\Gamma_k[\mathbf{r}(\eta)] = 0 \quad \Psi_m[\mathbf{r}(\eta)] = 0 \quad (5.22)$$

Jeżeli dla $\eta = \eta_0$ funkcje 5.22 są klasy C_ν , to prawdziwe są związki

$$\left(\frac{d^v}{d\eta^v} \Gamma_k[\mathbf{r}(\eta)] \right)_{\eta=\eta_0} = 0 \quad \left(\frac{d^v}{d\eta^v} \Psi_m[\mathbf{r}(\eta)] \right)_{\eta=\eta_0} = 0 \quad (5.23)$$

dla $v = 0, \dots, \nu$. Związki 5.23 wyznaczają problemy perturbacyjne v -tego rzędu w najogólniejszej postaci, ponieważ parametrom fundamentalnym możemy przypisać dowolną interpretację (porównaj [75]).

Problem zerowego rzędu oznacza, że punkt określony przez $\eta = \eta_0$ znajduje się na powierzchni równowagi statycznej Γ i powierzchni więzów Ψ . Problem perturbacyjny I-go rzędu możemy przedstawić w postaci

$$\frac{\partial \Gamma_k}{\partial r_n} \dot{r}_n = 0 \quad \frac{\partial \Psi_m}{\partial r_n} \dot{r}_n = 0 \quad (5.24)$$

lub korzystając z oznaczeń energii potencjalnej i zmiennych q_i i λ_j , w formie równoważnej

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_k} \dot{q}_i + \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda_j \partial q_k} \dot{\lambda}_j = 0 \quad \frac{\partial \Psi_m}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \Psi_m}{\partial \lambda_j} \dot{\lambda}_j = 0 \quad (5.25)$$

Będzie wygodniej, gdy równania 5.24 zapiszemy w postaci macierzowej

$$\mathbf{G}\dot{\mathbf{r}} = 0 \quad (5.26)$$

gdzie $\mathbf{G} = [G_{mn}]_{M \times N}$ oznacza macierz prostokątną, przy czym $G_{mn} = \partial \Gamma_k / \partial r_n$ dla $1 \leq m \leq I$, $k = m$ oraz $G_{mn} = \partial \Psi_l / \partial r_n$ dla $l < m \leq M$, $l = m - I$. Można zauważyć, że współczynniki G_{mn} wyznaczają składowe wektorów gradientów $\mathbf{g}_{(m)}$ powierzchni 5.2 i 5.3. Z definicji iloczynu skalarnego oraz związków 5.24 wynika, że kierunki składowych wektorów $\mathbf{g}_{(m)}$ są zgodne z wersorami $\dot{\mathbf{e}}_n$, stąd $\mathbf{g}_{(m)} = G_{mn} \dot{\mathbf{e}}_n$. Ponieważ dowolny punkt powierzchni 5.2 i 5.3 wyznaczony jest przez odpowiedni wektor \mathbf{r} o składowych w kierunkach wersorów \mathbf{e}_n , więc rozkład wektora $\mathbf{g}_{(m)}$ na kierunki o wersorach $\dot{\mathbf{e}}_n$ (zgodnie z oczekiwaniem) zapewnia normalność wektorów $\mathbf{g}_{(m)}$ do powierzchni 5.2 i 5.3. Ze związków 5.24 wynika, że wektor $\dot{\mathbf{r}}$ musi być ortogonalny do wektorów $\mathbf{g}_{(m)}$, wobec tego $\dot{\mathbf{r}}$ jest wektorem stycznym do ścieżki obciążenia.

Problem II-go rzędu dany jest równaniami

$$\frac{\partial \Gamma_k}{\partial r_n} \ddot{r}_n + \frac{\partial^2 \Gamma_k}{\partial r_l \partial r_n} \dot{r}_l \dot{r}_n = 0 \quad \frac{\partial \Psi_m}{\partial r_n} \ddot{r}_n + \frac{\partial^2 \Psi_m}{\partial r_l \partial r_n} \dot{r}_l \dot{r}_n = 0 \quad (5.27)$$

lub ponownie korzystając z oznaczeń energii potencjalnej i zmiennych q_i i λ_j

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_k} \ddot{q}_i + \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda_j \partial q_k} \ddot{\lambda}_j + \frac{\partial^3 V}{\partial q_i \partial q_j \partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{\partial^3 V}{\partial q_i \partial \lambda_j \partial q_k} \dot{q}_i \dot{\lambda}_j + \frac{\partial^3 V}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j \partial q_k} \dot{\lambda}_i \dot{\lambda}_j = 0 \quad (5.28)$$

$$\frac{\partial \Psi_m}{\partial q_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial \Psi_m}{\partial \lambda_j} \ddot{\lambda}_j + \frac{\partial^2 \Psi_m}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \Psi_m}{\partial q_i \partial \lambda_j} \dot{q}_i \dot{\lambda}_j + \frac{\partial^2 \Psi_m}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \dot{\lambda}_i \dot{\lambda}_j = 0$$

Równania 5.27 możemy zapisać także w postaci macierzowej

$$G\ddot{r} + \dot{a} = 0 \quad (5.29)$$

gdzie \dot{a} oznacza wektor

$$\dot{a} = \dot{G}\dot{r} \quad (5.30)$$

oraz współczynniki macierzy \dot{G} dane są następująco

$$\dot{G}_{mn} = \begin{cases} \frac{\partial^2 \Gamma_m}{\partial r_i \partial r_n} \dot{r}_i & \text{dla } 1 \leq m \leq I \\ \frac{\partial^2 \Psi_m}{\partial r_i \partial r_n} \dot{r}_i & \text{dla } I < m \leq M \end{cases} \quad (5.31)$$

W analogiczny sposób możemy otrzymać odpowiednie równania dla problemów wyższych rzędów. W dalszej części pracy zajmiemy się szczegółowo rozwiązaniem problemu pierwszego rzędu oraz krótko omówimy problem drugiego rzędu.

5.4 Rozwiązanie problemu I-go rzędu.

W problemie perturbacyjnym I-go rzędu poszukiwanym rozwiązaniem jest wektor \dot{r} . Pozostawienie jednorodnej postaci układu 5.26 ma zasadnicze znaczenie dla prezentowanego sposobu spojrzenia na zagadnienie.

Przed dalszymi rozważaniami musimy uczynić kilka uwag. Po pierwsze zauważmy, że macierz układu 5.26 jest macierzą funkcyjną $G(\eta)$. Dla ustalonego parametru $\eta = \eta^*$ układ 5.26 może być jednak traktowany jak jednorodny, liniowy układ równań algebraicznych. Wynika stąd, że wektor \dot{r} jest elementem przestrzeni zerowej $\mathcal{N}(G)$, tj. $\dot{r} \in \mathcal{N}(G)$.

Po drugie, jeżeli istnieje rozwiązanie niezerowe, to może być ono określone jedynie z dokładnością do pewnej stałej $\kappa \neq 0$. Zauważmy bowiem, że jeżeli niezerowy wektor \dot{r} jest rozwiązaniem układu 5.26, to rozwiązaniem jest także wektor \dot{r}^* spełniający równość

$$\dot{r}^* = \kappa \dot{r} \quad (5.32)$$

Wektory \dot{r}^* i \dot{r} różnią się długością gdy $|\kappa| \neq 1$ i zwrotem gdy $\kappa < 0$. Wobec powyższego dalej zakładając będziemy, że poszukiwany wektor \dot{r} ma jednostkową długość, tj.

$$|\dot{r}| = \sqrt{\dot{r}_j \dot{r}_j} = 1 \quad (5.33)$$

Omawiając wyżej zagadnienie nieliniowej analizy układu sprężystego pokazaliśmy, że definicja parametru η potrzebna jest dla ustalenia długości wektora stycznego do ścieżki obciążenia. Tutaj patrząc na problem parametryzacji z odwrotnej strony, możemy posłużyć się założeniem 5.33 dla określenia definicji parametru. Ponieważ wektor $\dot{\mathbf{r}}$ jest styczny do ścieżki obciążenia, więc w naturalny sposób otrzymany

$$\gamma(\mathbf{r}, \eta) = \eta - \int_0^s \sqrt{\dot{\mathbf{r}}_j \dot{\mathbf{r}}_j} d\eta = \eta - s = 0 \quad (5.34)$$

Z powyższej definicji wynika, że parametr globalny η jest tożsamościowo równy długości s ścieżki obciążenia. Dla podkreślenia dokonanego wyboru parametru globalnego dalej będziemy pisać $\mathbf{G}(s)$, $\mathbf{r}(s)$, $\dot{\mathbf{r}}(s)$, itp..

Uwaga najważniejsza — z podstawowego twierdzenia algebry liniowej wynika, że istnienie i jednoznaczność rozwiązania jednorodnego układu liniowego uzależnione są od relacji pomiędzy liczbą zmiennych N oraz rzędem r macierzy układu. Ponieważ macierz \mathbf{G} zależy od wektora $\mathbf{r}(s)$, więc mamy też zależność $r(s) = \dim \mathcal{C}(\mathbf{G}(s))$. W niniejszym rozdziale przyjmujemy, że w każdym punkcie $\mathbf{r}(s)$ wartość $r(s)$ jest znana. Sposób wyznaczania rzędu macierzy zostanie omówiony w rozdziale poświęconym numerycznej realizacji prezentowanej metody.

Niezależnie od liczby równań tworzących układ 5.26, z liczby kolumn macierzy \mathbf{G} wynika nierówność $r \leq N$. Gdy zachodzi równość $r = N$, wówczas jedynym rozwiązaniem układu jest rozwiązanie trywialne $\dot{\mathbf{r}} = 0$. Zauważmy, że przypadek taki zachodzi, gdy równania 5.2 i 5.3 są sprzeczne lub wyznaczają odizolowane punkty równowagi. Dalej rozważania ograniczymy do przypadku $r \leq N - 1$.

Oznaczmy przez $\mathbf{a}_{(\alpha)}$ kolumnę o numerze α macierzy \mathbf{G} i dalej przez \mathbf{U} macierz złożoną z dowolnie wybranych r kolumn $\mathbf{a}_{(\alpha)}$. Przez \mathbf{P} oznaczmy macierz złożoną z pozostałych $K = N - r$ kolumn macierzy \mathbf{G} . Jeżeli kolumny tworzące macierz \mathbf{U} są liniowo niezależne to powiemy, że podział macierzy \mathbf{G} jest właściwy i w takim przypadku podmacierze \mathbf{U} i \mathbf{P} oznaczmy dodatkowo znacznikiem "c". Macierz \mathbf{U}_c spełnia więc warunek

$$\dim \mathcal{C}(\mathbf{G}) = \dim \mathcal{C}(\mathbf{U}_c) = r \quad (5.35)$$

Jak pokażemy w dalszej części pracy zawsze możemy utworzyć macierz \mathbf{U}_c na podstawie badania rzędu macierzy.

W iloczyn $\mathbf{G}\dot{\mathbf{r}}$ kolumny $\mathbf{a}_{(\alpha)}$ mnożone są przez odpowiadające im składowe \dot{r}_α , więc wektor $\dot{\mathbf{r}}$ możemy podzielić na wektory $\dot{\mathbf{u}}$ i $\dot{\mathbf{p}}$ o r oraz K składowych odpowiadających kolumnom macierzy \mathbf{U}_c i \mathbf{P}_c . Ponieważ z równania 5.26 wynika, że kolumny macierzy \mathbf{P}_c są liniowo zależne od kolumn macierzy \mathbf{U}_c , mamy więc $(-\mathbf{P}_c \dot{\mathbf{p}}) \in \mathcal{C}(\mathbf{U}_c)$. Jeżeli dodatkowo w dowolny sposób ustalone zostaną wartości składowych wektora $\dot{\mathbf{p}}$, to spełnione będą wszystkie warunki (patrz Tw.2 w dodatku), aby układ równań

$$\mathbf{U}_c \dot{\mathbf{u}} = -\mathbf{P}_c \dot{\mathbf{p}} \quad (5.36)$$

w jednoznaczny sposób określał wektor $\dot{\mathbf{u}}$. Wektor $\dot{\mathbf{u}}$ wyznaczony z układu 5.36 i niezzerowy wektor $\dot{\mathbf{p}}$ określają nietrywialne rozwiązanie $\dot{\mathbf{r}}^*$ układu 5.26. Wektor jednostkowy $\dot{\mathbf{r}}$ otrzymamy przyjmując $\kappa = |\dot{\mathbf{r}}^*|$ i korzystając ze związku 5.32.

Dla rozwiązania układu 5.36 należy wybrać równania liniowo niezależne i utworzyć układ postaci

$$\mathbf{K}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f} \quad (5.37)$$

gdzie K jest nieosobliwą macierzą kwadratową o wymiarach $r \times r$, f jest wektorem utworzonym z r odpowiednich składowych wektora $(-P_c \dot{p})$. Odpowiedź na pytanie, które z równań układu 5.36 są liniowo niezależne także wynika z badania rzędu macierzy G .

W ogólnym przypadku tworzenie układu 5.37 może być jednak niejednoznaczne, bowiem spośród $\mathcal{L} = \binom{N}{r}$ macierzy U_l (dla $l = 1, \dots, \mathcal{L}$) może istnieć $\mathcal{L}_c (\leq \mathcal{L})$ macierzy $(U_c)_l$ (dla $l = 1, \dots, \mathcal{L}_c$) spełniających warunek 5.35. Przykładowo dla $r = N - 1$ mamy $\mathcal{L} = N$ macierzy U_l oraz dla $\mathcal{L}_c = N$ mamy $(U_c)_l \equiv U_l$, czyli każdy podział macierzy G jest właściwy. W przypadku $\mathcal{L}_c > 1$ mamy niejednoznaczność wyboru zmiennych sterujących (np. dla $r = N - 1$ i $\mathcal{L}_c = N$ dowolna zmienna \dot{r}_n może być zmienną sterującą). Z każdej macierzy $(U_c)_l$ można z kolei utworzyć $\mathcal{M} = \binom{M}{r}$ macierzy kwadratowych K_{lm} (dla $l = 1, \dots, \mathcal{L}_c$; $m = 1, \dots, \mathcal{M}$), przy czym $\mathcal{M}_c (\leq \mathcal{M})$ macierzy będzie nieosobliwych. Łatwo jednak wykazać, że rozwiązanie układu jednorodnego nie zależy od wyboru zmiennych sterujących oraz równań układu 5.37. W efekcie różnych wartości wyznaczników $\det(K_{lm})$, dokonywany wybór ma wpływ jedynie na dokładność numeryczną rozwiązania.

Podsumowując dotychczasowe rozważania możemy stwierdzić, że dla $r \leq N - 1$ nietrywialne rozwiązanie układu 5.26 zawsze istnieje i zależy od niezerowego wektora \dot{p} o K składowych. Składowymi wektora \dot{p} są zmienne sterujące \dot{r}_{n_k} (gdzie $1 \leq n_k \leq N$ dla $k = 1, \dots, K$). Wniosek jest zgodny ze znanym twierdzeniem algebry liniowej o rozwiązaniu liniowego układu jednorodnego. Dla $r = N - 1$ kierunki wektorów \dot{p} i \dot{r} są określone jednoznacznie przez jedną zmienną sterującą. W przypadku $r < N - 1$ kierunek wektora \dot{p} wyznaczony jest przez liniową kombinację kierunków $K (> 1)$ zmiennych sterujących. W efekcie rozwiązanie układu 5.26 jest niejednoznaczne — zachodzi bifurkacja ścieżki obciążenia. Z powyższego wynika następująca klasyfikacja punktów na ścieżce obciążenia:

- $r = r_r$ jest punktem regularnym, gdy $r = N - 1$ oraz $\mathcal{L}_c = N$;
- $r = r_l$ jest punktem granicznym, gdy $r = N - 1$ oraz $\mathcal{L}_c < N$;
- $r = r_b$ jest punktem bifurkacji, gdy $r < N - 1$.

W dalszej części pracy omówimy dokładniej przypadek $r = N - 2$.

Warunek 5.35 nakłada ograniczenia na swobodę wyboru wektora \dot{p} . Wzdłuż ścieżki obciążenia położenie kolumn, z których można utworzyć macierze $(U_c)_l$, może się zmieniać. W efekcie możliwa jest też zmiana ograniczeń nałożonych na swobodę wyboru zmiennych sterujących. Z tego punktu widzenia badanie rzędu macierzy nabiera szczególnie istotnego znaczenia.

5.5 Rozwiązanie problemu II-go rzędu.

W problemie perturbacyjnym II-go rzędu szukanym rozwiązaniem jest wektor \ddot{r} . Wektor ten musi spełniać układ 5.29 i wynikający z różniczkowania związku 5.33 dodatkowy warunek ortogonalności postaci

$$\dot{r}\ddot{r} = 0 \quad (5.38)$$

Układ złożony z równań 5.29 i 5.38 możemy zapisać w postaci

$$H\bar{r} = h \quad (5.39)$$

gdzie $H^T = [G^T, \bar{r}]_{N \times M+1}$, $h = (-\bar{a}, 0)$. Jeżeli znany jest wektor \bar{r} , czyli gdy rozwiązany jest problem I-go rzędu, wówczas składowe wektora h możemy wyznaczyć na podstawie związków 5.30 i 5.31. Dla ustalonej wartości $s = s^*$ układ 5.39 jest układem liniowym zawierającym $(M+1)$ równań i N niewiadomych składowych wektora \bar{r} . Wobec tego badanie istnienia i jednoznaczności rozwiązania układu 5.39 sprowadza się do badania rzędu macierzy H oraz spełnienia warunku $h \in C(H)$.

Równość $\dim C(H) = r+1$ wynika natychmiast z definicji macierzy H i równania 5.26, a więc z $\bar{r} \in \mathcal{N}(G)$. Można to wykazać także w następujący sposób. Ponieważ macierz H utworzona jest z macierzy G i wektora \bar{r} , więc gdyby spełniony był warunek $\bar{r} \in C(G^T)$ to $\dim C(H) = r$, natomiast jeżeli $\bar{r} \notin C(G^T)$ to $\dim C(H) = r+1$. W obu wypadkach o rzędzie macierzy H decyduje wartość r . Stąd bez zmniejszenia ogólności rozważań możemy przyjąć założenie uproszczające $r = N-1$ i badać spełnienie warunku $\bar{r} \in C(U_r^T)$, gdzie U_r oznacza macierz prostokątną złożoną z r liniowo niezależnych wierszy macierzy G (tj. $\dim C(U_r) = r$). Warunek $\bar{r} \in C(U_r^T)$ będzie spełniony, gdy $\det(H_r) = 0$, gdzie $H_r^T = [U_r^T, \bar{r}]_{N \times N}$. Dla określenia wartości $\det(H_r)$ oznaczmy przez $a_{(\alpha)}$ kolumnę o numerze α macierzy U_r , a przez $G^{(\alpha,\beta)}$ i $G^{(\alpha,\alpha)}$ (dla $\alpha, \beta = 1, \dots, N$; $\alpha \neq \beta$) macierze utworzone z kolumn $a_{(\alpha)}$ w sposób określony związkiem 5.14. Wobec założenia $r = N-1$, rozwiązanie problemu I rzędu sprowadza się do rozwiązania układu 5.37 z parametrem nietrywialnego rozwiązania $\bar{p} \equiv \bar{r}_\alpha$ oraz $K = G^{(\alpha,\alpha)}$. Z wzorów Cramera otrzymamy

$$\bar{r}_\beta = -\frac{\det(G^{(\alpha,\beta)})}{\det(G^{(\alpha,\alpha)})} \bar{r}_\alpha \quad (5.40)$$

Rozwijając wyznacznik $\det(H_r)$ względem N -tego wiersza i wykorzystując związki 5.18 i 5.40, otrzymamy

$$\det(H_r) = (-1)^\alpha \frac{\bar{r}_\alpha}{\det(G^{(\alpha,\alpha)})} \sum_{\beta=1}^N [\det(G^{(\beta,\beta)})]^2 \neq 0 \quad (5.41)$$

czyli $\bar{r} \notin C(U_r^T)$, a stąd $\dim C(H_r) = \dim C(H) = r+1$.

Warunek $h \in C(H)$ jest spełniony, ponieważ równanie 5.29 jest prawdziwe w dowolnym punkcie r , stąd $\bar{a} \in C(G)$.

Sposób rozwiązania układu 5.39 zależy od postaci wektora h wynikającej z relacji wektora \bar{r} w stosunku do przestrzeni zerowej $\mathcal{N}(\tilde{G})$. Z wzoru 5.30 wynika, że gdy $\bar{r} \in \mathcal{N}(\tilde{G})$, to $h = 0$, a więc układ 5.39 jest jednorodny i $\bar{r} \in \mathcal{N}(H)$. W takim przypadku procedura rozwiązania układu 5.39 jest taka sama jak w przypadku układu 5.26. Ponadto gdy $\bar{r} \in \mathcal{N}(\tilde{G})$ to $\bar{r} \neq 0$ tylko dla $\dim C(H) < N$, tj. $r < N-1$. Gdy $\bar{r} \notin \mathcal{N}(\tilde{G})$, wówczas $h \neq 0$ i układ 5.39 jest niejednorodny.

5.6 Uwagi końcowe.

Wydaje się, że dotychczas problem parametryzacji opisu procesu nie został w pełni przeanalizowany. Najczęściej parametr (zmienna niezależna) utożsamiany jest ze zmienną występującą w opisie problemu (np. z przemieszczeniem, obciążeniem). Istnieją także bardziej ogólne sposoby definiowania parametru (patrz np. Riks [71] lub Seydel [76]). Podstawą większości

prac jest założenie, że przyjęta definicja określa parametr o charakterze lokalnym, a ewentualna sprzeczność przyrostowego układu równań może być usunięta przez zmianę definicji. Założenie takie wykorzystywane jest w analizie zagadnień związanych ze stabilnością i bifurkacją ścieżki obciążenia (patrz np. Huseiyn [36, 37], Thompson, Hunt, [93]). Z przeprowadzonych wyżej rozważań wynika, że rola definicji parametru sprowadza się jedynie do ustalenia długości poszukiwanego wektora stycznego. Na przykładach pokazano przyczyny powstawania ograniczeń w swobodzie wyboru nowego parametru lokalnego — zmienna mająca pełnić rolę parametru lokalnego, będąc funkcją parametru globalnego, musi posiadać funkcję odwrotną. Parametr globalny odgrywa pośrednią rolę przy wyznaczaniu związków pomiędzy zmiennymi fizycznymi, jednak jego znaczenie ma charakter podstawowy dla przedstawionej wyżej analizy.

Rozważania oparto na założeniu, że istnieje pewien pomocniczy parametr, nie wymagający zmiany w trakcie analizy procesu. Początkowo nie definiowano czym jest zmienna niezależna, a jedynie założono, że istnieje jednoznaczna, globalna parametryzacja procesu wzdłuż ścieżki obciążenia. Założenie to potrzebne było do sformułowania problemów perturbacyjnych w najogólniejszej postaci. Pokazano, że rozwiązanie problemu I-go rzędu można sprowadzić do rozwiązywania jednorodnego układu równań. Układ ten spełnia nieskończenie wiele wektorów o tym samym kierunku stycznym i różnych długościach. Wybierając spośród tych wektorów wektor jednostkowy, parametrem globalnym staje się długość ścieżki obciążenia.

Nowością prezentowanej idei jest pozostawienie równań opisujących problem perturbacyjny I-go rzędu w postaci układu jednorodnego. Podana procedura rozwiązywania tego układu znana jest z algebry liniowej i wymaga przeprowadzenia analizy rzędu macierzy. Wyniki tej analizy mają podstawowe znaczenie dla wyznaczania poszukiwanego wektora stycznego. Po pierwsze służą dla określenia liczby niezależnych parametrów niezerowego rozwiązania. Analiza rzędu macierzy układu niezbędna jest dla utworzenia dwóch macierzy odpowiadających podziałowi wektora stycznego na składowe zależne i niezależne. Na koniec służy do dokonania wyboru liniowo niezależnych równań i utworzenia niejednorodnego układu równań z nieosobliwą macierzą. Wynik analizy rzędu macierzy i rozwiązanie problemu I-go rzędu pozwalają dalej na rozwiązanie problemu II-go rzędu.

Rozdział 6.

Bifurkacja ścieżki równowagi.

Opisana w poprzednim rozdziale metoda wyznaczania kierunku wektora stycznego do ścieżki obciążenia może być szczególnie przydatna w analizie zjawiska bifurkacji. Obecnie bardziej szczegółowo zajmiemy się omówieniem tego problemu, ograniczając jednak rozważania do szczególnego przypadku $r = N - 2$, tj. gdy w punkcie bifurkacji przecinają się dwie ścieżki równowagi. Dla porównania na początek dokonamy krótkiego przeglądu znanych z dotychczasowej literatury metod wyboru gałęzi ścieżki równowagi. Prezentując dalej metodę opartą o analizę rzędu macierzy zakładać będziemy, że znany jest jeden z właściwych podziałów macierzy G na macierze U_c i P_c oraz wektora \dot{r} na wektory \dot{u} i \dot{p} .

6.1 Przegląd metod wyboru ścieżek obciążenia.

Najważniejszą ze znanych procedur wydaje się procedura, w której wyznacza się wektory styczne do ścieżek wychodzących z punktu bifurkacji. Po wyznaczeniu kierunków stycznych dalsza procedura — predictor, korektor — przebiega zgodnie z opisem zamieszczonym w dalszej części pracy.

Chwilowo ograniczymy rozważania do przypadku układu sprężystego, poddanego obciążeniu proporcjonalnemu. Dzięki temu będziemy mogli korzystać z oznaczeń stosowanych w części 5.2.2. Z matematycznego punktu widzenia ogólny schemat omawianej procedury jest identyczny dla wszystkich typów konstrukcji, tj. nie zależy od cech materiałowych (porównaj z pracą [13], w której omówiono przypadek układów wykazujących osłabienie). Wprowadzone ograniczenie podyktowane jest więc jedynie dążeniem do zmniejszenia liczby komentarzy i oznaczeń niezbędnych przy bardziej ogólnych rozważaniach.

Poniższe rozważania prowadzą do wyrażenia, w którym wektor $\dot{q} = [\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l]^T$ jest przedstawiony za pomocą dwóch innych różnych wektorów. Z równania 5.16 wynika, że wektor kolumnowy $\alpha_{(\alpha)}$ jest liniową kombinacją kolumn macierzy $G^{(\alpha, \alpha)}$. Mówimy, że wektor $\alpha_{(\alpha)}$ należy do przestrzeni kolumnowej macierzy $G^{(\alpha, \alpha)}$. Oznaczmy przez $\xi_{(\alpha)} = [\xi_{(\alpha)1}, \dots, \xi_{(\alpha)l}]^T$ oraz $\psi_{(\alpha)} = [\psi_{(\alpha)1}, \dots, \psi_{(\alpha)l}]$ dwa wektory, które spełniają równania

$$G^{(\alpha, \alpha)} \xi_{(\alpha)} = 0 \quad (6.1)$$

oraz

$$\psi_{(\alpha)} G^{(\alpha, \alpha)} = 0 \quad (6.2)$$

Zauważmy, że wektor $\xi_{(\alpha)}$ jest prawym wektorem własnym związanym z zerową wartością własną macierzy $G^{(\alpha, \alpha)}$ i podobnie $\psi_{(\alpha)}$ jest lewym wektorem własnym. Dla macierzy symetrycznej $G^{(L, L)}$ wektory te oczywiście pokrywają się.

Z równania 6.2 wynika, że ze zbioru wektorów, złożonego z I wierszy macierzy $G^{(\alpha, \alpha)}$ i wektora $\psi_{(\alpha)}$, możemy wybrać I liniowo niezależnych wektorów. W związku z tym istnieje tylko jeden wektor $\zeta_{(\alpha)} = [\zeta_{(\alpha)1}, \dots, \zeta_{(\alpha)I}]^T$ spełniający warunki

$$\begin{aligned} G^{(\alpha, \alpha)} \zeta_{(\alpha)} + \alpha_{(\alpha)} &= 0 \\ \psi_{(\alpha)} \zeta_{(\alpha)} &= 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

Z równań 5.11, 6.1 i 6.3 wynikają następujące równości

$$\dot{x}_{(L)} = \dot{q} = \alpha_{\zeta} \zeta_{(L)} + \alpha_{\xi} \xi_{(L)} \quad \dot{x}_L = \dot{\lambda} = \alpha_{\zeta} \quad (6.4)$$

gdzie α_{ζ} i α_{ξ} oznaczają stałe współczynniki. Mnożąc skalarnie wektory \dot{q} oraz $\psi_{(L)}$ i zakładając równość $\psi_{(L)} \xi_{(L)} = 1$ otrzymujemy $\alpha_{\xi} = \psi_{(L)} \dot{q}$.

Zauważmy, że dla różnych par współczynników α_{ζ} i α_{ξ} mamy nieskończenie wiele wektorów leżących w płaszczyźnie wyznaczonej przez wektory $\xi_{(L)}$ i $\zeta_{(L)}$. Aby wyznaczyć kierunki styczne do dwóch przecinających się w punkcie bifurkacji ścieżek równowagi należy zatem określić właściwe wartości stałych α_{ζ} i α_{ξ} . W tym celu zróżniczkujemy względem s równanie 5.11. Otrzymamy

$$G \bar{a} + \bar{a} = 0 \quad (6.5)$$

gdzie $\bar{a} = [\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_I]^T$ oznacza wektor o składowych

$$\bar{a}_k = \frac{\partial^2 f_k}{\partial q_i \partial q_n} \dot{q}_i \dot{q}_n + 2 \frac{\partial^2 f_k}{\partial q_i \partial \lambda} \dot{q}_i \dot{\lambda} + \frac{\partial^2 f_k}{\partial \lambda \partial \lambda} \dot{\lambda}^2 \quad (6.6)$$

Z równania 6.5 wynika, że wektor \bar{a} należy do przestrzeni kolumnowej macierzy $G^{(\alpha, \alpha)}$, a więc musi spełniać warunek ortogonalności

$$\psi_{(\alpha)} \bar{a} = 0 \quad (6.7)$$

Ze związków 6.4, 6.6 i 6.7 wynika równanie kwadratowe

$$a \alpha_{\zeta}^2 + 2b \alpha_{\zeta} \alpha_{\xi} + c \alpha_{\xi}^2 = 0 \quad (6.8)$$

gdzie współczynniki a, b, c zdefiniowane są następująco

$$\begin{aligned} a &= \psi_{(L)k} \frac{\partial^2 f_k}{\partial q_i \partial q_n} \xi_{(L)i} \xi_{(L)n} \\ b &= \psi_{(L)k} \left(\frac{\partial^2 f_k}{\partial q_i \partial q_n} \zeta_{(L)n} + \frac{\partial^2 f_k}{\partial q_i \partial \lambda} \right) \xi_{(L)i} \\ c &= \psi_{(L)k} \left(\frac{\partial^2 f_k}{\partial q_i \partial q_n} \zeta_{(L)i} \zeta_{(L)n} + 2 \frac{\partial^2 f_k}{\partial q_i \partial \lambda} \zeta_{(L)i} + \frac{\partial^2 f_k}{\partial \lambda \partial \lambda} \right) \end{aligned} \quad (6.9)$$

Jeżeli wyróżnik tego równania $\Delta = 4(b^2 - ac)$ jest dodatni, to istnieją dwie różne pary współczynników α_{ζ} i α_{ξ} spełniających równanie 6.8. Istnieją więc także dwa różne wektory

styczne do ścieżek równowagi wychodzących z punktu bifurkacji. Powyższa procedura wyznaczenia kierunków stycznych została podana przez Kellera ([39]). Istotną wadą takiego postępowania jest wysoki koszt wyznaczania drugich pochodnych i rozwiązywania zagadnienia własnego.

Inne możliwości opisane przez Seydela ([76]) pozwalają uniknąć wyznaczania drugich pochodnych. Z tego powodu wydaje się, że warto poświęcić im kilka uwag. Pierwsza z metod wykorzystuje fakt, że wektory styczne do przecinających się ścieżek równowagi wyznaczają płaszczyznę styczną. Dla dwóch punktów \mathbf{x}^A i \mathbf{x}^B , usytuowanych na dwóch różnych ścieżkach (patrz Rys. 6.1a), kierunek łączący te punkty jest niemal równoległy do płaszczyzny stycznej. Załóżmy, że ten kierunek jest wyznaczony przez wektor jednostkowy $\hat{\mathbf{x}}_{sw}$. Gdyby kierunek wektora $\hat{\mathbf{x}}_{sw}$ był znany, wówczas dla zmiany ścieżki równowagi należałoby wyznaczyć jedynie właściwą odległość κ pomiędzy punktami \mathbf{x}^A i \mathbf{x}^B . Załóżmy, że wektor $\hat{\mathbf{x}}_{sw}$ jest prostopadły do osi λ . Można zauważyć, że w otoczeniu punktu bifurkacji tę samą cechę ma także wektor własny $\xi_{(L)}$, stąd możemy przyjąć $\hat{\mathbf{x}}_{sw} \cong \xi_{(L)}$. Na tym etapie pozostaje jedynie określić wartość κ . Seydel zaproponował, aby problem ten rozwiązać za pomocą procedury korekcyjnej zamieniając rolami zmienne κ oraz λ .

Inne metody służące do przechodzenia pomiędzy ścieżkami równowagi wykorzystują specyficzne własności równań opisujących dane zagadnienie, bądź wybrane własności procedur korekcyjnych (patrz Rys. 6.1b). Ponieważ nie mają one charakteru ogólnego, więc nie będziemy się nimi zajmować odsyłając zainteresowanych do pracy [76] i cytowanych tam pozycji literatury. Tutaj należy jedynie wspomnieć, że wadą tych metod jest zwykle podwojenie liczby równań, które należy rozwiązać, co dla większej liczby niewiadomych jest nie do przyjęcia.

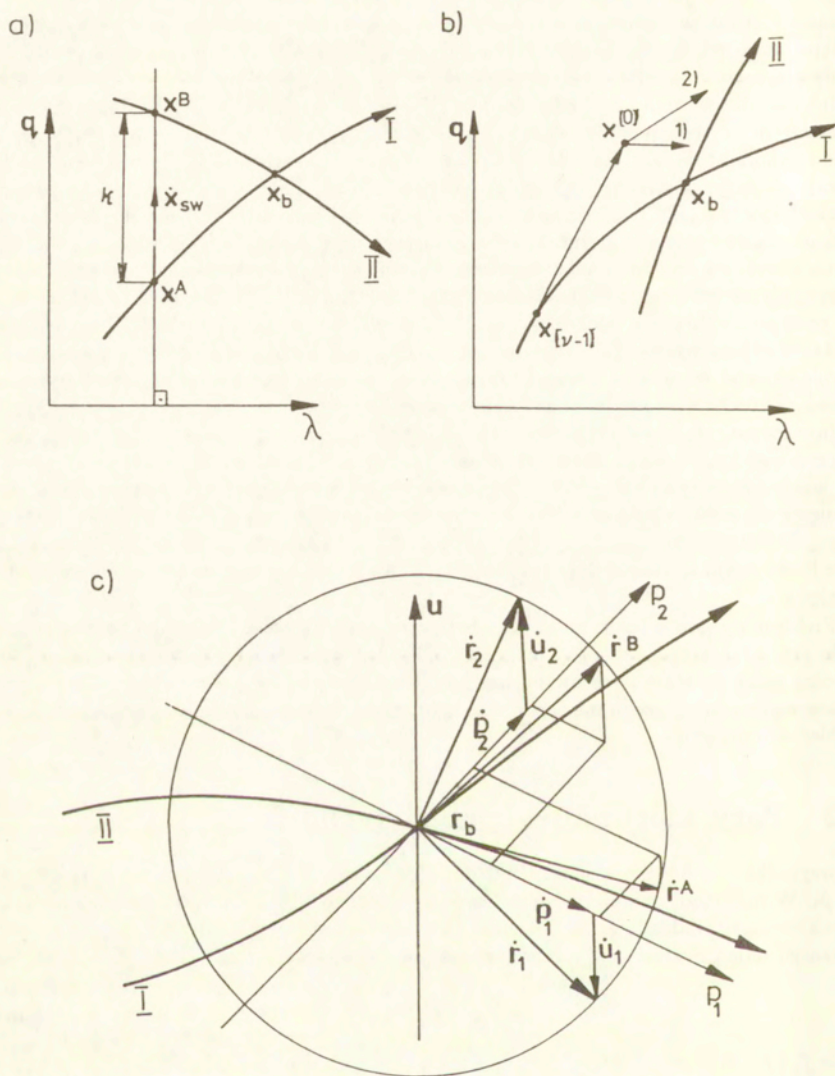
Problem wyboru ścieżek rozważany był przez wielu autorów i napisano na ten temat wiele prac (patrz np. [9], [43], [54], [71], [97]). W uproszczeniu można powiedzieć, że wspólną cechą opracowanych metod jest konieczność rozwiązywania zagadnienia własnego. Zastosowanie analizy rzędu macierzy układu prowadzi do nowego, odmiennego podejścia do problemu bifurkacji.

6.2 Pary kierunków sprzężonych.

W przypadku $r = N - 2$ rozwiązanie układu jednorodnego 5.26 zależy od dwóch parametrów \hat{p}_1 i \hat{p}_2 . Wynika stąd, że możemy wyznaczyć nieskończenie wiele wektorów stycznych spełniających ten układ. Zakładając, że dokonaliśmy właściwego podziału macierzy układu i wektora stycznego, układ równań 5.37 możemy przedstawić w postaci

$$K\hat{\mathbf{u}} = -\mathbf{f}_1\hat{p}_1 - \mathbf{f}_2\hat{p}_2 \quad (6.10)$$

gdzie \mathbf{f}_1 i \mathbf{f}_2 oznaczają wektory złożone z r współczynników odpowiednio pierwszej i drugiej kolumny macierzy \mathbf{P}_c ; K oznacza nieosobliwą macierz o wymiarach $(N - 2) \times (N - 2)$. Przyjmując dwa szczególne wektory parametrów $\hat{\mathbf{p}}_1^* = [\hat{p}_1^*, 0]$ i $\hat{\mathbf{p}}_2^* = [0, \hat{p}_2^*]$ (gdzie $\hat{p}_1^* \neq 0$ i $\hat{p}_2^* \neq 0$ oznaczają ustalone i ograniczone wartości) z układu 6.10 możemy jednoznacznie wyznaczyć odpowiednie wektory $\hat{\mathbf{u}}_1^*$ i $\hat{\mathbf{u}}_2^*$. Pary wektorów $(\hat{\mathbf{u}}_1^*, \hat{\mathbf{p}}_1^*)$ oraz $(\hat{\mathbf{u}}_2^*, \hat{\mathbf{p}}_2^*)$ określają dwa szczególne wektory styczne $\hat{\mathbf{r}}_1^*$ i $\hat{\mathbf{r}}_2^*$ spełniające układ jednorodny 5.26, lecz nie konieczne spełniające warunek jednostkowej długości 5.33. Na ich podstawie możemy wyznaczyć dwa szczególne wektory jednostkowe $\hat{\mathbf{r}}_1$ i $\hat{\mathbf{r}}_2$.



Rys. 6.1

Metody wyboru gałęzi równowagi: a), b) opisane przez Seydela ([76]); c) oparta o badanie rzędu macierzy.

Składowe wektorów \hat{u}_1^* i \hat{u}_2^* oznaczymy odpowiednio przez \hat{u}_{1i}^* i \hat{u}_{2i}^* . Korzystając z wzorów Cramera mamy

$$\hat{u}_{1i}^* = \xi_{1i} \hat{p}_1^* \quad \hat{u}_{2i}^* = \xi_{2i} \hat{p}_2^* \quad (6.11)$$

gdzie

$$\xi_{1i} = -\frac{\det(\mathbf{K}^{(1i)})}{\det(\mathbf{K})} \quad \xi_{2i} = -\frac{\det(\mathbf{K}^{(2i)})}{\det(\mathbf{K})} \quad (6.12)$$

oraz $\mathbf{K}^{(1i)}$, $\mathbf{K}^{(2i)}$ oznaczają macierze otrzymane w wyniku zastąpienia i -tej kolumny w macierzy \mathbf{K} odpowiednio przez wektory f_1 i f_2 . Oznaczając przez κ_1 i κ_2 współczynniki dane wzorami

$$\kappa_1 = \hat{p}_1^* \sqrt{\omega_{1i} \omega_{1i}} \quad \kappa_2 = \hat{p}_2^* \sqrt{\omega_{2i} \omega_{2i}} \quad (6.13)$$

gdzie

$$\omega_{1i} = \begin{cases} \xi_{1i} \\ 1 \\ 0 \end{cases} \quad \text{gdy} \quad \hat{r}_{1i}^* \equiv \begin{cases} \hat{u}_{1i}^* \\ \hat{p}_1^* \\ \hat{p}_2^* \end{cases} \quad \omega_{2i} = \begin{cases} \xi_{2i} \\ 0 \\ 1 \end{cases} \quad \text{gdy} \quad \hat{r}_{2i}^* \equiv \begin{cases} \hat{u}_{2i}^* \\ \hat{p}_1^* \\ \hat{p}_2^* \end{cases} \quad (6.14)$$

i korzystając z wzoru 5.32 otrzymamy współrzędne wektorów \hat{r}_1 i \hat{r}_2 w postaci

$$\hat{r}_{1i} = \frac{\omega_{1i}}{\sqrt{\omega_{1i} \omega_{1i}}} \quad \hat{r}_{2i} = \frac{\omega_{2i}}{\sqrt{\omega_{2i} \omega_{2i}}} \quad (6.15)$$

Ze związków 6.12, 6.14 i 6.15 wynika, że składowe \hat{r}_{1i} i \hat{r}_{2i} zależą od wartości składowych wektora \hat{r} i nie zależą od wartości \hat{p}_1^* i \hat{p}_2^* .

Każdy z wektorów spełniających układ 5.26 możemy teraz otrzymać korzystając z liniowej kombinacji

$$\hat{r}^A = \alpha_1 \hat{r}_1 - \alpha_2 \hat{r}_2 \quad (6.16)$$

gdzie współczynniki α_1 oraz α_2 są tak dobrane, aby spełniony był warunek 5.33. Wstawiając do warunku 5.33 związek 6.16 otrzymamy

$$\alpha_1^2 - 2C\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2 - 1 = 0 \quad (6.17)$$

gdzie

$$C = \frac{\omega_{1i}}{\sqrt{\omega_{1i} \omega_{1i}}} \frac{\omega_{2i}}{\sqrt{\omega_{2i} \omega_{2i}}} \quad (6.18)$$

Jeżeli przez ω oznaczymy kąt między wektorami \hat{r}_1 i \hat{r}_2 , to zauważyć można, że $0 \leq |C| < 1$ (ponieważ $C = \cos \omega$ oraz $\omega \neq 0$). Gdy zachodzi związek $C = 0$, wówczas wektory \hat{r}_1 i \hat{r}_2 są ortogonalne.

Dokonując obrotu osi układu α_1 - α_2 o kąt $\pi/4$ równanie 6.17 możemy zapisać w postaci

$$(1 - C)\beta_1^2 + (1 + C)\beta_2^2 - 1 = 0 \quad (6.19)$$

gdzie β_1, β_2 oznaczają współrzędne układu obróconego. Obrót układu α_1 - α_2 o kąt $-\pi/4$ prowadzi także do równania 6.19. Odpowiada to zamianie współczynników α_1 i α_2 w równaniu 6.16 przy równoczesnej zmianie znaku jednego z nich. W wyniku otrzymujemy sprzężone z równaniem 6.16 równanie

$$\dot{\mathbf{r}}^B = \alpha_2 \dot{\mathbf{r}}_1 + \alpha_1 \dot{\mathbf{r}}_2 \quad (6.20)$$

Wektory $\dot{\mathbf{r}}$ określone związkami 6.16 i 6.20 stanowią parę wektorów sprzężonych. Iloczyn skalarny wektorów sprzężonych dany jest wzorem

$$\dot{\mathbf{r}}^A \dot{\mathbf{r}}^B = (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)C \quad (6.21)$$

Wynika stąd, że tylko w szczególnym wypadku (gdy $C = 0$ lub gdy $\alpha_1 = \pm\alpha_2$) wektory te są do siebie prostopadłe.

6.3 Pierwotna i wtórna ścieżka obciążenia.

Z równania 6.19 wynika, że związek pomiędzy współczynnikami α_1 i α_2 przedstawia elipsę (Rys. 6.2), której główne osie mają długości $\beta_{10} = 1/\sqrt{1-C}$ i $\beta_{20} = 1/\sqrt{1+C}$. W szczególności, gdy $C = 0$, równanie 6.17 staje się równaniem okręgu. Zauważmy, że w granicy dla $|C| \rightarrow 1$ długość jednej z osi głównych dąży do nieskończoności i równanie 6.19 przedstawia dwie proste: $\beta_1 = \pm 1/\sqrt{2}$ dla $C \rightarrow -1$ oraz $\beta_2 = \pm 1/\sqrt{2}$ dla $C \rightarrow 1$. Jest to sytuacja, gdy wektory $\dot{\mathbf{r}}_1$ i $\dot{\mathbf{r}}_2$ zbliżają się do tego samego kierunku — wyznaczenie na ich podstawie innego rozwiązania układu jednorodnego staje się niemożliwe.

Przyjmując α_1 jako zmienną niezależną, rzeczywiste pierwiastki $\alpha_2(\alpha_1)$ równania 6.17 otrzymamy w postaci

$$\alpha_2 = C\alpha_1 \pm \sqrt{1 - (1 - C^2)\alpha_1^2} \quad (6.22)$$

gdy spełniony jest warunek

$$(1 - C^2)\alpha_1^2 - 1 \leq 0 \quad (6.23)$$

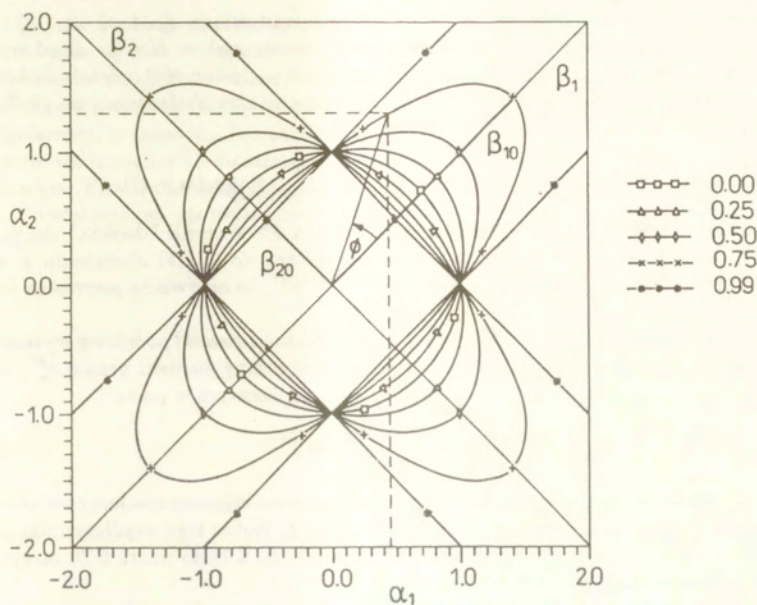
Warunek ten jest spełniony dla wartości $\alpha_1 \in \langle -\chi, \chi \rangle$ (gdzie $\chi = \beta_{10}\beta_{20}$). Przedział $\langle -\chi, \chi \rangle$ wyznaczony jest przez proste prostopadłe do osi α_1 i styczne do elipsy. Na krańcach przedziału $\langle -\chi, \chi \rangle$ mamy po jednym podwójnym pierwiastku $\alpha_2(\pm\chi) = \pm C\chi$, natomiast wewnątrz przedziału każdej wartości α_1 odpowiadają dwie rzeczywiste wartości α_2 . Ze wzoru 6.16 otrzymamy istotnie różne kierunki wektorów $\dot{\mathbf{r}}$, gdy wartości α_1 oraz α_2 wyznaczymy korzystając z trygonometrycznej reprezentacji

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} [\beta_{10} \cos \phi - \beta_{20} \sin \phi] \quad \alpha_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} [\beta_{10} \cos \phi + \beta_{20} \sin \phi] \quad (6.24)$$

przyjmując, że parametr ϕ należy do przedziału $(0, \pi)$. Dla $\phi \in \langle \pi, 2\pi \rangle$ otrzymamy wektory o tych samych kierunkach, lecz o przeciwnych zwrotach.

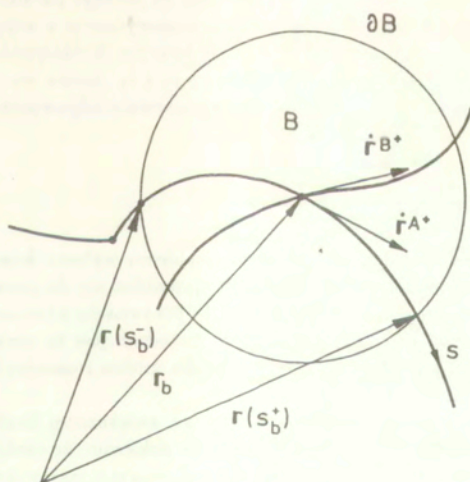
Istotne praktyczne znaczenie ma problem, w którym należy w punkcie bifurkacji $\mathbf{r}_s = \mathbf{r}(s_b)$ wyznaczyć wektor $\dot{\mathbf{r}}^B$ sprzężony ze znanym wektorem $\dot{\mathbf{r}}^A$. Wektory $\dot{\mathbf{r}}^A$ i $\dot{\mathbf{r}}^B$ określają kierunki styczne do tzw. pierwotnej i wtórnej gałęzi ścieżki równowagi.

Dla wyznaczenia wektora $\dot{\mathbf{r}}^B$ oznaczmy przez $\mathcal{B}(\mathbf{r}_s, \rho) \subset R^N$ kulę N wymiarową o środku w punkcie \mathbf{r}_s i promieniu ρ (patrz Rys. 6.3). Załóżmy, że brzeg $\partial\mathcal{B}$ kuli \mathcal{B} i pierwotna ścieżka



Rys. 6.2

Zależność pomiędzy współczynnikami liniowej kombinacji rozwiązań układu jednorodnego.



Rys. 6.3

Para sprzężonych wektorów stycznych do gładkich gałęzi krzywej równowagi.

obciążenia mają tylko dwa punkty wspólne określone wartościami $s_b^- < s_b$ oraz $s_b^+ > s_b$. Dalej przyjmijmy, że dla $s \in (s_b^-, s_b)$ i $s \in (s_b, s_b^+)$ mamy $r(s) = N - 1$. Stąd wynika, że w przedziałach tych istnieją jednoznacznie określone pochodne $\dot{r}(s)$. Jeżeli dodatkowo założymy, że dla $s \in (s_b^-, s_b)$ i $s \in (s_b, s_b^+)$ pierwotna ścieżka obciążenia jest gładka, to istnieją granice

$$\dot{r}_n^{A-} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\dot{r}_n(s_b - \varepsilon)) \quad \dot{r}_n^{A+} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\dot{r}_n(s_b + \varepsilon)) \quad (6.25)$$

Wektor $\dot{r}^{A-} = \dot{r}_n^{A-} \dot{e}_n$ określa znany kierunek wektora \dot{r}^A w chwili "dojścia" do punktu bifurkacji, wektor $\dot{r}^{A+} = \dot{r}_n^{A+} \dot{e}_n$ określa kierunek styczny do ścieżki obciążenia w chwili "wyjścia" z punktu r_b . Jeżeli zachodzi równość $\dot{r}^{A-} = \dot{r}^{A+}$, to oczywiście pierwotna ścieżka obciążenia jest gładka w każdym punkcie $r(s) \in B$.

Założenie gładkości ścieżki obciążenia w punkcie bifurkacji stanowi podstawę wyznaczenia wektora stycznego do wtórnej ścieżki obciążenia. Jeżeli znamy wartości granic \dot{r}_n^{A-} , to korzystając ze związków 6.15 i 6.16 otrzymamy N równań liniowych w postaci

$$\frac{\alpha_1 \omega_{1i}}{\sqrt{\omega_{1i} \omega_{1i}}} - \frac{\alpha_2 \omega_{2i}}{\sqrt{\omega_{2i} \omega_{2i}}} = \dot{r}_i^{A-} \quad (6.26)$$

w których niewiadomymi są współczynniki α_1 i α_2 . Ponieważ kolumny macierzy układu są od siebie niezależne, więc rząd macierzy układu jest równy 2. Wobec tego współczynniki α_1 i α_2 określone są jednoznacznie. Wstawiając rozwiązanie układu 6.26 do wzoru 6.20 otrzymamy poszukiwany wektor \dot{r}^{B+} .

Jak widać podstawowym warunkiem skuteczności proponowanej metody jest wyznaczenie kierunku wektora \dot{r}^A , stycznego do pierwotnej ścieżki obciążenia oraz dwóch niewspółosiowych wektorów \dot{r}_1 , \dot{r}_2 , leżących w płaszczyźnie stycznej do przecinających się ścieżek równowagi. Wyznaczenie pierwszego z tych trzech wektorów uzależnione jest od spełnienia założeń, że w otoczeniu punktu bifurkacji kierunek styczny zależy od jednego parametru sterującego i że pierwotna ścieżka jest krzywą gładką. W procesie numerycznym w miejsce wektora \dot{r}^A można przyjąć wektor styczny wyznaczony w punkcie leżącym dostatecznie blisko punktu r_b , bądź wektor sieczny $\Delta r = r(s_b^+) - r(s_b^-)$. Wektory \dot{r}_1 i \dot{r}_2 można wyznaczyć na podstawie analizy rzędu macierzy układu jednorodnego i wyznaczeniu odpowiednich parametrów sterujących \dot{p}_1 i \dot{p}_2 .

6.4 Uwagi końcowe.

Wyżej przedstawiona nowa metoda rozwiązywania problemu wyboru ścieżek równowagi, przechodzących przez tzw. prosty punkt bifurkacji, sprowadza się do rozwiązania niejednorodnego układu liniowego z dwiema niewiadomymi. W porównaniu z koniecznością rozwiązywania zagadnienia własnego w dotychczas znanych metodach jest to niewątpliwą zaletą. Wydaje się, że przedstawioną tu metodę w łatwy sposób można rozszerzyć na punkty bifurkacji wyższych rzędów.

Także przedstawione kryterium bifurkacji, oparte na zwiększonej liczbie parametrów sterujących, jest bardzo proste. W poprzednim rozdziale pokazano, że osobliwość macierzy układu niejednorodnego jest niewystarczająca do stwierdzenia czy mamy do czynienia z bifurkacją, czy tylko z punktem granicznym. W związku z tym często w formie dodatkowego kryterium korzysta się z badania liczby rzeczywistych pierwiastków równania kwadratowego 6.8. Wyznaczenie współczynników tego równania jest jednak kosztowne pod względem

numerycznym. Problem dodatkowo się komplikuje w przypadku zagadnień wieloparametrycznych. Do tej klasy zagadnień należą między innymi problemy obciążeń nieproporcjonalnych oraz zagadnienie analizy modeli konstytutywnych. W pracy Huseyina ([37]) wykazano, że w przypadku obciążenia wieloparametrycznego ten sam punkt może być punktem regularnym, granicznym lub punktem bifurkacji. W następnym rozdziale przedstawimy zastosowanie analizy rzędu macierzy układu jednorodnego do analizy modelu sprężysto-plastycznego. Przy omawianiu tego zagadnienia powrócimy do problemu warunku koniecznego i dostatecznego dla wystąpienia bifurkacji w przypadku sterowania wieloparametrycznego.

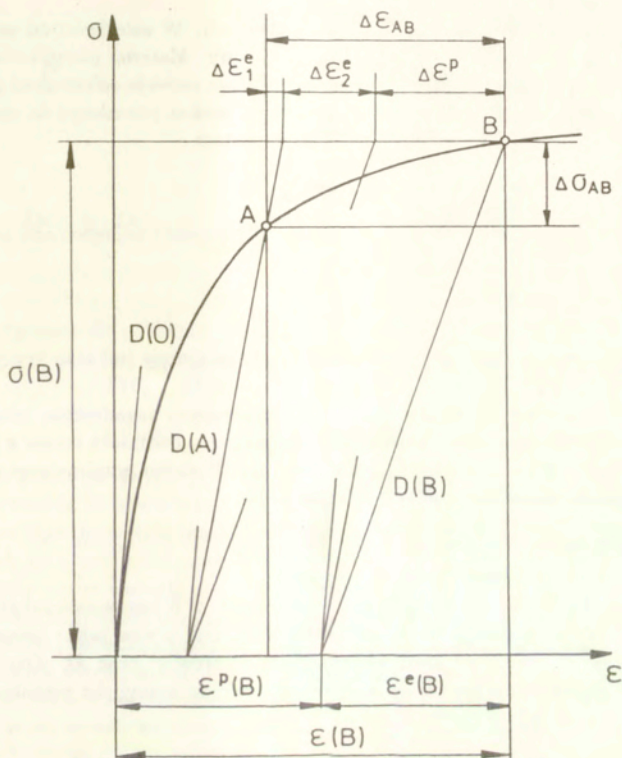
Rozdział 7.

Badanie rzędu macierzy w analizie modeli konstytutywnych.

W poprzednich dwóch rozdziałach omówiono sformułowanie problemów perturbacyjnych oraz sposób ich rozwiązywania. Ogólne rozważania poparte zostały w formie przykładów jedynie elementarnymi modelami układów dysypatywnych oraz przeanalizowaniem związków opisujących układy sprężyste. W oczywisty sposób układy dysypatywne wymagają dodatkowego omówienia. Przez układ dysypatywny określamy tu dowolną konstrukcję, w której proces deformacji wiąże się z pękaniem, kruszeniem, uplastycznieniem, itp. Może temu towarzyszyć wzmocnienie lub osłabienie materiału. Analizą konstrukcji zajmiemy się w dalszej części pracy, natomiast obecnie zajmiemy się analizą równań opisujących model konstytutywny.

Ważną rolę w tworzeniu układu równań odgrywa wyznaczenie macierzy sztywności bądź macierzy podatności materiału sprężysto-plastycznego. Macierze te otrzymywane są poprzez wyeliminowanie na drodze analitycznej takich wielkości jak prędkości tensorów odkształceń sprężystych oraz plastycznych i wyprowadzenie związku pomiędzy prędkościami tensorów naprężenia i odkształcenia całkowitego. Przykład takiego wyprowadzenia podany został w pierwszym rozdziale dla modelu szczelin rozmytych. Wykorzystywanie w obliczeniach macierzy sztywności (bądź podatności) sprężysto-plastycznej oznacza dokonanie z góry określonego wyboru sterowania. W konsekwencji możemy natrafić na sytuacje, gdy macierz rozwiązywanego układu równań jest macierzą osobliwą. Obecnie pokażemy, że w przyrostowym opisie materiału możemy uniknąć osobliwości zapisując układ równań w postaci jednorodnej i stosując analizę rzędu macierzy prostokątnej tego układu.

Zajmiemy się ogólnym modelem materiału sprężysto-plastycznego ze wzmocnieniem, osłabieniem oraz sprzężeniem rozwoju procesu dysypatywnego ze zmianami własności sprężystych. Przedstawianie pełnej analizy byłoby tutaj zbędnym powtarzaniem znanych w większości wniosków. W szczególności model, którym się będziemy zajmować, był analizowany w pracy Maiera i Hueckla [52]). Prezentowane niżej rozważania trzeba zatem traktować raczej jako przykład zastosowania analizy rzędu macierzy układu jednorodnego. Celem jest tutaj pokazanie prostoty z jaką możemy uzyskać warunki konieczne, jakie muszą być spełnione przy założonym rodzaju sterowania. Ukazane są także nowe aspekty związane z problemem sterowania. Analiza modelu konstytutywnego należy do zagadnień wieloparametrycznych. Pokażemy więc, że i w tego typu problemach warunkiem koniecznym i dostatecznym bifurkacji jest obniżenie rzędu macierzy układu jednorodnego.



Rys. 7.1

Material sprężysto-plastyczny z uszkodzeniem.

7.1 Opis modelu materiału za pomocą układu jednorodnego.

Rozważmy model materiału sprężysto-plastycznego, którego zasadnicze cechy schematycznie pokazano na rysunku 7.1. Przyjmować będziemy, że parametrami stanu są odkształcenia plastyczne. Przy tym założeniu w funkcji odkształceń plastycznych opisywać będziemy zmienny warunek plastyczności

$$\mathcal{F}(\sigma, \varepsilon^p) = 0 \quad (7.1)$$

oraz zmiany własności sprężystych materiału. Przyjmujemy, że macierz sztywności sprężystej D opisana jest następująco

$$D - \mathcal{D}^e = 0 \quad (7.2)$$

gdzie $\mathcal{D}^e = [D_{ij}^e(\varepsilon^p)]$ oznacza macierz funkcyjną o współczynnikach określonych przez zadane

ciągłe i różniczkowalne funkcje odkształceń plastycznych. W zależności od postaci funkcji $D_{ij}^e(\epsilon^p)$ materiał może być izotropowy lub anizotropowy. Materiał początkowo izotropowy może także stać się materiałem anizotropowym w wyniku rozwoju odkształceń plastycznych.

Zakładamy, że całkowite odkształcenia ϵ są małe i można je rozłożyć na część sprężystą ϵ^e i część plastyczną ϵ^p . Założenie to zapiszemy w postaci

$$\epsilon^e + \epsilon^p - \epsilon = 0 \quad (7.3)$$

Dalej przyjmujemy, że pomiędzy odkształceniami sprężystymi i naprężeniami zachodzi związek

$$D\epsilon^e - \sigma = 0 \quad (7.4)$$

Rozwój odkształceń plastycznych może nastąpić, gdy osiągnięty jest stan krytyczny, tj. gdy spełnione jest równanie 7.1.

Aby określić wymiar przestrzeni, w której rozpatrujemy zagadnienie, musimy określić cechy poszczególnych tensorów. Wobec założenia małych odkształceń tensor ϵ jest symetryczny. Zakładamy także symetrię tensora naprężenia. Ponadto przyjmujemy niestowarzyszone prawo płynięcia, które zapiszemy w postaci

$$\dot{\epsilon}^p - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \sigma} \dot{\lambda}^p = 0 \quad (7.5)$$

gdzie $\mathcal{P}(\sigma) = 0$ oznacza potencjał plastyczny oraz $\dot{\lambda}^p > 0$ jest współczynnikiem proporcjonalności. Przy założeniu 7.5 tensor $\dot{\epsilon}^p$ jest symetryczny, a więc także tensor $\epsilon^p = \int \dot{\epsilon}^p ds$ jest symetryczny. Z tego wynika dalej symetria tensorów ϵ^e oraz D . Oznaczając przez $\lambda^p = \int \dot{\lambda}^p ds$ pomocniczy współczynnik, ostatecznie otrzymamy, że rozpatrywany model określony jest w przestrzeni R^{46} zmiennych:

D — współczynniki sztywności sprężyste (21);

ϵ^e — odkształcenia sprężyste (6);

ϵ^p — odkształcenia plastyczne (6);

ϵ — odkształcenia całkowite (6);

σ — naprężenia (6);

λ^p — pomocniczy współczynnik (1).

W nawiasach podano liczby niezależnych składowych. Z powyższego wynika, że w procesie przyrostowym będziemy poszukiwali wektora o 46 składowych D , ϵ^e , ϵ^p , ϵ , σ , λ^p . Do wyznaczenia tego wektora należy utworzyć układ równań przyrostowych.

Potrzebny układ otrzymamy z równań 7.5 i zróżniczkowanych względem parametru s równań 7.1–7.4. Zapisanie równań przyrostowych w postaci iloczynu odpowiedniej macierzy przez poszukiwany wektor wymagałoby wprowadzenia nowych oznaczeń, ustalania zgodności wskaźników przy współczynnikach macierzy i składowych wektora stycznego, itd. Zamiast tego, korzystając z dotychczasowych oznaczeń, ograniczymy się jedynie do zapisania równań w takiej postaci, by odpowiednie składowe wektora stycznego tworzyły kolumny. Wynik zapiszemy w następującej jednorodnej postaci

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{D} & - \frac{\partial D}{\partial \varepsilon^p} \dot{\varepsilon}^p & = 0 \\
 \dot{\varepsilon}^e & + \dot{\varepsilon}^p & - \dot{\varepsilon} & = 0 \\
 & \dot{\varepsilon}^p & - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \sigma} \dot{\lambda}^p & = 0 \\
 \dot{D}\varepsilon^e + D\dot{\varepsilon}^e & - \dot{\sigma} & = 0 \\
 & \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varepsilon^p} \dot{\varepsilon}^p + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \dot{\sigma} & = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

Warunki początkowe dla problemu przyrostowego możemy przyjąć w postaci

$$\left. \begin{aligned}
 D(0) = D^e(0) & \quad \varepsilon^e(0) = 0 & \quad \varepsilon^p(0) = 0 \\
 \varepsilon(0) = 0 & \quad \sigma(0) = 0 & \quad \lambda^p(0) = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

Powróćmy ponownie do interpretacji geometrycznej. Równania 7.1–7.4 można zinterpretować jako równania 34 powierzchni w przestrzeni R^{46} . Przy takiej interpretacji w dowolnej chwili procesu stan materiału musi być reprezentowany przez punkt leżący równocześnie na wszystkich tych powierzchniach. Na powierzchniach tych musi znajdować się także punkt określony przez warunki początkowe. Z liczby powierzchni i wymiaru przestrzeni wynika, że zbiór wszystkich punktów reprezentujących dopuszczalne stany materiału wyznacza powierzchnię określoną przez 12 swobodnych zmiennych. W rozdziale piątym współczynniki kolejnych wierszy macierzy układu jednorodnego interpretowane były jako składowe gradientów do powierzchni określonych przez równania problemu zerowego rzędu. Interpretując w identyczny sposób współczynniki układu 7.6 natychmiast trzeba zauważyć, że prawo płynięcia plastycznego nie ma swego odpowiednika wśród równań 7.1–7.4. Fakt ten ma dalsze konsekwencje w procesie obliczeń numerycznych. Problem ten omówiony zostanie w następnym rozdziale.

7.2 Model materiału a rząd macierzy układu.

Dla zadanego stanu materiału układ 7.6 jest układem liniowym i jednorodnym. Analiza tego układu uprości się, gdy przekształcimy go do postaci

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{D} & - & \frac{\partial D}{\partial \varepsilon^p} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \sigma} \dot{\lambda}^p & = 0 \\
 \dot{\varepsilon}^e & - \dot{\varepsilon} + & \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \sigma} \dot{\lambda}^p & = 0 \\
 \dot{\varepsilon}^p & - & \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \sigma} \dot{\lambda}^p & = 0 \\
 \dot{\sigma} - D\dot{\varepsilon} - & \left(\frac{\partial D}{\partial \varepsilon^p} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \sigma} \varepsilon^e - D \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \sigma} \right) \dot{\lambda}^p & = 0 \\
 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \dot{\sigma} & + & \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varepsilon^p} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \sigma} \dot{\lambda}^p & = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

Można teraz zauważyć, że z pierwszych czterech równań układu wynika minimalny rząd macierzy $r_{\min} = 39$, natomiast maksymalny rząd określony jest przez liczbę równań i wynosi $r_{\max} = 40$. Wobec 46-ciu zmiennych możemy stwierdzić, że niezerowe rozwiązanie układu 7.8, traktowanego jako układ algebraiczny, zawsze istnieje i zależy od $K = 6$ lub 7 zmiennych sterujących. Dalej mówiąc o jednoznaczności rozwiązania układu jednorodnego będziemy rozumieć przypadek wymagający ustalenia minimalnej liczby parametrów sterujących. Ponadto nadal obowiązuje założenie, że poszukiwany wektor ma jednostkową długość. Fizyczne znaczenie możliwych do uzyskania rozwiązań zależy dodatkowo od spełnienia warunku $\dot{\lambda}^p > 0$.

Wyboru sterowania możemy ponownie dokonać w oparciu o analizę rzędu macierzy układu. Zauważmy, że na zmianę rzędu nie mają wpływu współczynniki pierwszych trzech równań. Analizę można więc ograniczyć do badania współczynników równań 7.8₄ i 7.8₅. Równania te tworzą układ, który możemy przedstawić w postaci 5.26, przy czym składowe wektora \dot{r} określone są tym razem przez 13 składowych $\dot{\epsilon}$, $\dot{\sigma}$, $\dot{\lambda}^p$, natomiast macierz G ma wymiary (7×13) i dana jest następująco

$$G = \begin{bmatrix} I & -D & -h \\ \frac{\partial F}{\partial \sigma} & O & -H \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

gdzie I oznacza macierz jednostkową, przez O oznaczono wektor zerowy, h oznacza wektor określony wzorem

$$h = \frac{\partial D}{\partial \epsilon^p} \frac{\partial P}{\partial \sigma} \epsilon^p - D \frac{\partial P}{\partial \sigma} \quad (7.10)$$

natomiast H jest tzw. modulem wzmocnienia plastycznego

$$H = -\frac{\partial F}{\partial \epsilon^p} \frac{\partial P}{\partial \sigma} \quad (7.11)$$

Macierz I ma wymiary (6×6) , wektory O i h mają po sześć składowych. Krótko przeanalizujemy wpływ gradientów $\partial F/\partial \sigma$, $\partial F/\partial \epsilon^p$, $\partial P/\partial \sigma$, $\partial D/\partial \epsilon^p$ oraz macierzy D na rząd macierzy G .

Wpływ gradientów $\partial F/\partial \sigma$ i $\partial F/\partial \epsilon^p$ możemy rozpatrywać łącznie. Wobec założenia 7.1 możemy wyróżnić trzy zasadnicze sytuacje¹⁾:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial \sigma} \neq 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \epsilon^p} \neq 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial \sigma} \neq 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \epsilon^p} = 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial \sigma} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \epsilon^p} \neq 0 \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

Przypadek 7.12₂ zwany jest idealną plastycznością, natomiast analogiczna sytuacja 7.12₃, pomimo, że z matematycznego punktu widzenia możliwa, w pracy Maiera i Hueckla nie była rozpatrywana. W takiej sytuacji zmiany warunku stanu krytycznego są niezależne od naprężeń.

W przypadku gradientu potencjału plastycznego jedynym możliwym jest założenie $\partial P/\partial \sigma \neq 0$. Wpływ tego gradientu na rząd macierzy może się jednak objawiać poprzez modul wzmocnienia plastycznego H . Dla materiału idealnie plastycznego mamy $H = 0$, przy materiale

¹⁾ Przypadek $(\partial F/\partial \sigma = 0$ i $\partial F/\partial \epsilon^p = 0)$ jest sprzeczny z założeniem 7.1.

ulegającym wzmocnieniu $H > 0$, a dla materiału z osłabieniem $H < 0$. Z definicji modułu wzmocnienia plastycznego wynika, że równość $H = 0$ zachodzi także w przypadku ortogonalności gradientów $\partial F / \partial \epsilon^p$ i $\partial P / \partial \sigma$.

Analiza wpływu gradientu $\partial D^f / \partial \epsilon^p$ łączy się ze znaczeniem samej macierzy D . Gdy składowe gradientu $\partial D^f / \partial \epsilon^p$ są ujemne, materiał staje się bardziej podatny. Gdy materiał staje się idealnie podatny, macierz sztywności D jest osobliwa. Oznacza to, że conajmniej jedna z wartości głównych macierzy D jest równa zero, a w kierunku określonym przez odpowiedni wektor własny materiał uległ całkowitemu uszkodzeniu. Przy spełnieniu równości $\partial D^f / \partial \epsilon^p = 0$ sztywność materiału nie ulega zmianie. Wreszcie, gdy składowe gradientu $\partial D^f / \partial \epsilon^p$ są dodatnie, materiał staje się bardziej sztywny. Macierz podatności sprężystej $C = D^{-1}$ staje się osobliwa, gdy materiał jest idealnie sztywny. Porównując dwie sytuacje: gdy $\det(D) = 0$ i gdy $\det(C) = 0$, zauważmy, że model idealnie sztywny jest wygodny przy czysto teoretycznych rozważaniach, podczas gdy model idealnie podatny posiada ważne znaczenie praktyczne. Powyższe uwagi uzasadniają potrzebę analizowania dwóch przypadków: gdy $\det(D) \neq 0$ oraz gdy $\det(D) = 0$, natomiast analizę przypadku $\det(C) = 0$ można pominąć.

7.3 Dopuszczalne parametry sterujące.

Podobnie jak w poprzednich rozdziałach oznaczymy przez \hat{p} i \hat{u} wektory utworzone w wyniku podziału wektora \hat{r} na wektor o składowych określonych przez parametry sterujące i wektor o składowych zależnych. W zależności od rodzaju wybranych zmiennych mamy do czynienia ze sterowaniem odkształceniowym (gdy $\hat{p} \equiv \hat{\epsilon}$), naprężeniowym (gdy $\hat{p} \equiv \hat{\sigma}$) bądź mieszanym. Trzeba podkreślić, że wybór sterowania nie ma żadnego związku z tym, w jakiej przestrzeni sformułowane zostały związki fizyczne. Przykładowo warunek stanu krytycznego może być przedstawiony w przestrzeni naprężeń bądź odkształceń, natomiast całkiem niezależnie w obu przypadkach możemy wybrać sterowanie np. naprężeniowe (o ile spełnione są omawiane niżej warunki). Problem ten szczegółowo omawiano w pracy Klisińskiego, Mroza i Runessona ([42]). Istotę problemu sterowania wskazuje także prezentowany tu sposób analizy równań opisujących model materiału.

Aby wyznaczyć składowe wektora \hat{u} należy z jednorodnego układu równań utworzyć układ niejednorodny postaci

$$K\hat{u} = f(\hat{p}) \quad (7.13)$$

gdzie wymiary macierzy kwadratowej K i wektora f zależą od rzędu macierzy G . Warunek $\det(K) \neq 0$ jest jedynym koniecznym warunkiem, który musi być spełniony przy tworzeniu układu 7.13. Spełnienie tego warunku zapewnia dla ustalonych wartości liczbowych \hat{p}_i istnienie i jednoznaczność wektora \hat{u} , nie musi jednak oznaczać poprawności fizycznej uzyskanego rozwiązania. Do tego musi być jeszcze spełniona nierówność $\lambda^p > 0$. Ten dodatkowy warunek nie wpływa na możliwość wyznaczenia związku pomiędzy składowymi wektora \hat{r} , a jedynie ogranicza swobodę wyboru wartości liczbowych parametrów sterujących.

Wydaje się, że warunek płynięcia plastycznego można by spełnić stosując sterowanie mieszane i przyjmując za jeden z parametrów sterujących składową λ^p . W takim przypadku, z samej definicji parametru sterującego mamy możliwość wyboru pomiędzy procesem sprężystym i niesprężystym. Do tej pory taka możliwość w literaturze nie była badana. Zastosowanie tego typu sterowania w analizie konstrukcji wymaga oddzielnych studiów. Poza tą

jedną uwagą propozycja zastosowania analizy rzędu macierzy układu jednorodnego nie wnosi nic nowego do problemu doboru wartości parametrów sterujących. Rozwijanie tego tematu prowadziłoby jedynie do powtarzania znanych z literatury wniosków (patrz np. [42, 52]).

Dalej będziemy się zajmować jedynie poprawnością tworzenia układu 7.13. Jako przykład prostoty jaką zapewnia proponowana metoda omówimy sterowanie naprężeniowe i odkształceniowe. Zupełnie podobnie można by zbadać sterowanie mieszane, jednak dla uniknięcia konieczności wprowadzania dalszych oznaczeń pominiemy omawianie tego przypadku.

7.3.1 Sterowanie naprężeniami.

Przy założeniu, że parametrami sterującymi są naprężenia mamy $\dot{\mathbf{p}} \equiv \dot{\boldsymbol{\sigma}}$ oraz $\dot{\mathbf{u}} \equiv [\dot{\boldsymbol{\epsilon}}, \dot{\lambda}^p]^T$. Równania 7.8₄ i 7.8₅ zapiszemy w postaci

$$\left. \begin{aligned} D\dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \mathbf{h}\dot{\lambda}^p &= \dot{\boldsymbol{\sigma}} \\ H\dot{\lambda}^p &= \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \end{aligned} \right\} \quad (7.14)$$

Jak widać macierz \mathbf{K} powstaje z drugiej i trzeciej kolumny macierzy \mathbf{G} (porównaj z wzorem 7.9). Wyznacznik macierzy układu równy jest iloczynowi $H \det(D)$. Stąd wynika, że sterowanie naprężeniami jest dopuszczalne gdy

$$\det(D) \neq 0 \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^p} \neq 0 \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^p} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \neq 0 \quad (7.15)$$

Warunek 7.15₁ oznacza, że w każdym kierunku materiał musi mieć pewną niezerową sztywność sprężystą. Warunki 7.15₂ i 7.15₃ oznaczają, że moduł wzmocnienia plastycznego ma być różny od zera (materiał musi się wzmacniać).

Jeżeli macierz układu 7.14 jest nieosobliwa, to jego rozwiązanie istnieje i jest jednoznaczne. Współczynnik $\dot{\lambda}^p$ możemy wyznaczyć korzystając z wzorów Cramera, lub bezpośrednio z równania 7.14₂. Otrzymamy

$$\dot{\lambda}^p = \frac{1}{H} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (7.16)$$

Podobnie składowe $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ możemy wyznaczyć korzystając z wzorów Cramera, lub z równań 7.14₁ z uwzględnieniem związku na $\dot{\lambda}^p$. Otrzymamy

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{C}(\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{h}\dot{\lambda}^p) \quad (7.17)$$

Macierz układu 7.14 staje się osobliwa i sterowanie naprężeniami jest nieprawidłowe, gdy którykolwiek z warunków 7.15 nie jest spełniony. W tym przypadku mamy do czynienia ze stanem granicznym naprężeń. Powoduje to konieczność poszukiwania innych sposobów sterowania.

7.3.2 Sterowanie odkształceniami.

Przy założeniu, że parametrami sterującymi są składowe odkształcenia mamy $\dot{\mathbf{p}} \equiv \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ oraz $\dot{\mathbf{u}} \equiv [\dot{\boldsymbol{\sigma}}, \dot{\lambda}^p]^T$. Równania 7.8₄ i 7.8₅ zapiszemy w postaci

$$\left. \begin{aligned} \dot{\sigma} - h\dot{\lambda}^p &= D\dot{\epsilon} \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \dot{\sigma} - H\dot{\lambda}^p &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.18)$$

Tym razem macierz K powstaje z pierwszej i trzeciej kolumny macierzy G (porównaj z wzorem 7.9). Rozwijając wyznacznik tej macierzy względem ostatniego wiersza, warunek konieczny sterowania odkształceniami można przedstawić w postaci

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} h - H \neq 0 \quad (7.19)$$

Jeżeli warunek ten jest spełniony, to istnieje jednoznaczne rozwiązanie układu 7.18. Składową $\dot{\lambda}^p$ otrzymamy korzystając z wzorów Cramera

$$\dot{\lambda}^p = \frac{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} D\dot{\epsilon}}{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} h - H} \quad (7.20)$$

po czym z równań 7.18₁ możemy wyznaczyć prędkości naprężeń

$$\dot{\sigma} = D\dot{\epsilon} + h\dot{\lambda}^p \quad (7.21)$$

Warunek 7.19 stanowi dla rozpatrywanego modelu materiału najogólniejszą postać warunku koniecznego istnienia rozwiązania przy sterowaniu odkształceniami. Możemy z niego otrzymać szereg szczególnych przypadków. Przykładowo dla modelu idealnie plastycznego bez zmian własności sprężystych (tj. gdy $\partial \mathcal{F} / \partial \epsilon^p = 0$ oraz $\partial D / \partial \epsilon^p = 0$) warunek 7.19 przyjmuje postać

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} D \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \sigma} \neq 0 \quad (7.22)$$

Jako drugi przypadek założymy z kolei, że macierz D jest osobliwa, natomiast związek odkształceń plastycznych z naprężeniami może być dowolny (wzmocnienie, osłabienie lub idealna plastyczność). Zakładamy, że pomimo osobliwości macierzy D , warunek 7.19 jest spełniony, czyli że sterowanie odkształceniowe nadal jest możliwe. Przypadek taki może być traktowany np. jako model próby pęknięcia kontrolowanej przez pomiar rozwarcia szczeliny. Oznaczmy przez δ_ϵ wektor własny odpowiadający zerowej wartości własnej macierzy D . Zależnie od wartości parametrów sterujących możemy wyróżnić dwie różne sytuacje: gdy kierunek wynikający z wartości $\dot{\epsilon}$ jest różny od kierunku wektora δ_ϵ oraz, gdy kierunki te pokrywają się (tj. $\dot{\epsilon} = \kappa \delta_\epsilon$, gdzie κ jest pewną stałą). Odpowiednio do tego mamy $D\dot{\epsilon} \neq 0$ lub $D\dot{\epsilon} = 0$. Z wzorów 7.20 i 7.21 wynika, że w drugim przypadku mamy $\dot{\lambda}^p = 0$ oraz $\dot{\sigma} = 0$, i dalej z układu 7.8 mamy $\dot{D} = 0$, $\dot{\epsilon}^p = 0$ oraz $\dot{\epsilon}^e = \dot{\epsilon}$. Tak więc w kierunku $\dot{\epsilon} = \kappa \delta_\epsilon$ odkształcenie przebiega w sposób odwracalny, bez dysypacji energii. Zmiana odkształceń wynika z otwierania się, bądź zamykania szczeliny. Jeżeli po obu stronach szczeliny istnieje niezerowy stan naprężeń to nie ulega on zmianie. Przyrost odkształceń różny od kierunku δ_ϵ będzie powodować rozwój odkształceń plastycznych, bądź odciążanie sprężyste, zależnie od spełnienia nierówności $\dot{\lambda}^p > 0$.

Podobnie jak w przypadku sterowania naprężeniami, osobliwość macierzy układu 7.18 oznacza jedynie utratę możliwości sterowania odkształceniami. Oznacza także stan graniczny dla odkształceń.

7.4 Kryterium bifurkacji w zagadnieniach wieloparametrycznych.

Poniżej wykażemy, że obniżenie rzędu macierzy układu jednorodnego jest warunkiem koniecznym i dostatecznym bifurkacji także w przypadku zagadnień wieloparametrycznych. Równania 7.8₄-7.8₅ służą tu w formie przykładu jedynie dla skupienia uwagi. Równie dobrze można by rozważać cały układ 7.8, bądź po uzupełnieniu o równania równowagi i po dyskretyzacji, układ opisujący zachowanie całej konstrukcji sprężysto-plastycznej. Różnica sprowadza się jedynie do liczby równań i składowych wektora stycznego.

Oznaczmy przez P i U macierze utworzone z kolumn macierzy G odpowiadających składowym wektorów \dot{p} i \dot{u} . Załóżmy chwilowo, że wektor \dot{p} ma $K = 6$ składowych. Przy tym założeniu mamy $K \equiv U$ oraz $f(\dot{p}) \equiv -P\dot{p}$. Na podstawie równań 7.14 i 7.18 można łatwo wydedukować przykłady macierzy U i P , oraz wektora f w przypadku sterowania naprężeniami i odkształceniami.

Aby rozważyć problem istnienia i jednoznaczności rozwiązania układu 7.13 musimy przyjąć, że ustalony jest kierunek wektora f . Z kolei ustalenie kierunku wektora f wynika z ustalenia kierunku wektora \dot{p} . Długości obu tych wektorów chwilowo nie możemy określić ze względu na konieczność zachowania zgodności z założeniem o jednostkowej długości wektora \dot{r} . Podobnie jak w poprzednich rozdziałach, procedura rozwiązywania musi się opierać na przyjęciu pewnego niezerowego wektora \dot{p}^* i rozwiązaniu układu

$$K\dot{u}^* = f(\dot{p}^*) \quad (7.23)$$

Składowe wektorów \dot{p}^* i \dot{u}^* określają wektor \dot{r}^* spełniający układ jednorodny i pozwalają na wyznaczenie wektora jednostkowego \dot{r} .

Uwzględniając powyższe uwagi skorzystajmy ze znanej z literatury metody, stosowanej do badania warunków niejednoznaczności rozwiązania układu 7.13. Przyjmijmy założenie, że przy zadanym kierunku wektora f istnieją dwa wektory \dot{u}^a i \dot{u}^b , będące równocześnie rozwiązaniami układu 7.13. Odejmując stronami równości

$$K\dot{u}^a = f \quad K\dot{u}^b = f \quad (7.24)$$

otrzymamy

$$K(\dot{u}^a - \dot{u}^b) = 0 \quad (7.25)$$

Wynika stąd, że warunkiem koniecznym istnienia dwóch różnych rozwiązań (tj. $\dot{u}^a \neq \dot{u}^b$) jest osobliwość macierzy K . Nie jest to jednak warunek dostateczny. Dla określenia warunku dostatecznego bifurkacji należy zbadać ograniczenia jakie musi spełniać wektor prawej strony układu.

Oznaczmy przez ψ oraz ξ odpowiednio lewy i prawy wektor własny odpowiadający zerowej wartości własnej macierzy K . Wektory te spełniają równania

$$\psi K = 0 \quad K\xi = 0 \quad (7.26)$$

Powyższe związki wyrażają warunki liniowej zależności wierszy i kolumn macierzy osobliwej. Współczynniki liniowej zależności pomiędzy składowymi dowolnie wybranej kolumny macierzy K wyznaczone są przez składowe wektora ψ .

Ograniczenia w doborze wektora f wynikają ze związku 7.26₁. Zauważmy, że warunkiem koniecznym istnienia rozwiązania niejednorodnego układu liniowego jest równość $\dim C(\mathbf{K}) = \dim C(\tilde{\mathbf{K}})$, gdzie $\tilde{\mathbf{K}} = [\mathbf{K}, \mathbf{f}]$ oznacza macierz rozszerzoną układu. Inaczej mówiąc rozwiązanie układu 7.13 istnieje, gdy wektor f jest liniową kombinacją kolumn macierzy \mathbf{K} . Wynika stąd, że w przypadku macierzy osobliwej warunkiem istnienia rozwiązania układu 7.13 jest także liniowa zależność pomiędzy składowymi f_i (dla $i = 1, \dots, 7$) wektora prawej strony. Zatem warunek konieczny bifurkacji możemy zapisać w postaci równości

$$\psi \mathbf{K} = 0 \quad \psi \mathbf{f} = 0 \quad (7.27)$$

Z drugiej strony wektor f powstaje w wyniku liniowej kombinacji kolumn macierzy \mathbf{P} , przy czym współczynnikami liniowej kombinacji są w tym wypadku wartości parametrów sterujących. Warunek 7.27₂ możemy zatem przedstawić w postaci

$$\mathbf{a}^\psi \mathbf{p} = 0 \quad (7.28)$$

gdzie wektor \mathbf{a}^ψ dany jest następująco

$$\mathbf{a}^\psi = \psi \mathbf{P} \quad (7.29)$$

Możemy rozważyć teraz dwie sytuacje: gdy $\mathbf{a}^\psi = 0$ oraz, gdy $\mathbf{a}^\psi \neq 0$.

W pierwszym przypadku, tj. gdy $\mathbf{a}^\psi = 0$, warunki konieczne dla wystąpienia bifurkacji spełnione są niezależnie od przyjętych wartości parametrów sterujących. W tym przypadku warunek konieczny bifurkacji możemy zapisać w postaci

$$\psi \mathbf{G} = 0 \quad (7.30)$$

Otrzymany warunek oznacza jednak liniową zależność wierszy macierzy \mathbf{G} , a więc obniżenie rzędu tej macierzy.

W drugim przypadku, tj. gdy $\mathbf{a}^\psi \neq 0$, ze związku 7.28 wynika liniowa zależność przyjętych parametrów sterujących. Zatem spośród przyjętych do sterowania zmiennych, w dowolny sposób możemy przyjąć jedynie pięć wartości składowych wektora \mathbf{p}^* . Równocześnie z warunku $\mathbf{a}^\psi \neq 0$ i z równości 7.29 wynika, że w macierzy \mathbf{P} istnieje conajmniej jedna kolumna liniowo niezależna od kolumn macierzy \mathbf{U} , a zatem $r = \dim C(\mathbf{G}) = 7$. Wynika stąd dalszy wniosek, że wektor \mathbf{r} można podzielić na wektory $\mathbf{p} = [\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_6]^T$ oraz $\mathbf{u} = [\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_7]^T$ w taki sposób, że ustalenie sześciu składowych wektora \mathbf{p} jednoznacznie określa także składowe wektora \mathbf{u} .

Z powyższych rozważań wynika, że warunek 7.30 stanowi jednoznaczne kryterium bifurkacji. Jeżeli warunek 7.30 nie jest spełniony, a dokonany wybór parametrów sterujących nie zapewnia jednoznaczności wektora stycznego, wówczas mamy do czynienia ze złym wyborem sterowania, powodującym sprzeczność układu niejednorodnego 7.13.

Najprostszym przykładem bifurkacji jest przypadek 7.12₃. Chociaż jak się wydaje wśród znanych warunków plastyczności sytuacja taka nie występuje, z matematycznego punktu widzenia jest jednak możliwa. Aby zachodziło płynięcie plastyczne konieczne jest spełnienie warunku $\lambda^p > 0$, a zatem spełnienie równania 7.8₅ wraz z założeniem 7.12₃ wymaga też spełnienia równości $H = 0$. Powoduje to, że ostatni wiersz macierzy \mathbf{G} jest złożony z samych zer, a więc rząd tej macierzy ulega obniżeniu i zachodzi warunek 7.30. Moduł wzmacnienia plastycznego będzie równy zeru, gdy gradienty $\partial F / \partial \epsilon^p$ i $\partial P / \partial \sigma$ będą do siebie

ortogonalne. Można zauważyć, że omawiany typ bifurkacji możliwy jest jedynie przy niestowarzyszonym prawie płynięcia (przy prawie stowarzyszonym warunek 7.12₃ prowadzi do sprzeczności $\partial P / \partial \sigma = 0$).

7.5 Uwagi końcowe.

Przedstawione wyżej rozważania pokazują, że analizując model materiału opisany za pomocą jednorodnego, przyrostowego układu równań, możemy kontrolować poprawność dowolnego rodzaju sterowania. W formie przykładu omówiono warunki ograniczające sterowanie naprężeniami i odkształceniami. Nowością jest tutaj oczywiście jedynie sposób podejścia do zagadnienia i jak się wydaje jego prostota. Poza tym, uzyskanym efektem jest nowe kryterium klasyfikacji punktów krytycznych. Znane dotychczas kryterium bifurkacji 7.27 jest równoważne ze zmianą rzędu tylko w szczególnych przypadkach. W zagadnieniach wieloparametrycznych może to być warunek niewystarczający.

Zauważmy, że w analizie modelu konstytutywnego wektor prawej strony układu niejednorodnego jest wynikiem kombinacji liniowej sześciu kolumn macierzy układu jednorodnego. W tym przypadku, zgodnie z własną wolą, możemy zawsze utworzyć taką kombinację, że warunek 7.27 będzie lub nie będzie spełniony. Tymczasem warunek 7.30 określa jednoznaczne kryterium, niezależne od typu zagadnienia. Z warunku 7.30 istotny jest jedynie wniosek dotyczący zmiany rzędu macierzy, co nie oznacza konieczności wyznaczania wektorów własnych.

Podany na koniec przykład bifurkacji opiera się na założeniu, które nie jest spełnione w przypadku znanych warunków plastyczności. Wychodząc jednak z matematycznego punktu widzenia, tj. z definicji wektora gradientu do powierzchni określonej w rozszerzonej przestrzeni, a nie tylko w przestrzeni naprężeń, bądź przestrzeni odkształceń plastycznych, omawiana w przykładzie sytuacja jest możliwa. Opierając analizę na elementach algebry liniowej nie uwzględniono strony fizycznej zagadnienia. W szczególności brak jest rozważań dotyczących zjawiska lokalizacji zachodzącej w materiałach niesprężystych.

Na koniec tego rozdziału zwróćmy uwagę na związek między prezentowaną ideą badania rzędu macierzy, a problemami o których wspomnieliśmy w trakcie przeglądu literatury. W pracach [13, 73] wskazywano na problemy z uzyskaniem zbieżności w metodzie stałej długości łuku wykorzystywanej do analizy szczelin rozmytych. Zwróćmy jednak uwagę na postać związku 1.26. Współczynniki macierzy sprężysto-plastycznej wyznaczane są w postaci sumy, w której jeden ze składników wyznaczany jest na podstawie macierzy odwrotnej do macierzy ($D^J + N^T D^N$). Sygnalizowane kłopoty występowały tylko przy silnym osłabieniu, zatem można się spodziewać, że przyczyną trudności było złe uwarunkowanie odwracanej macierzy. Z drugiej strony podczas rozwiązywania zagadnień sprężysto-plastycznych obserwowano poprawę skuteczności procedur numerycznych przy odpowiedniej zmianie sterowania ([13, 19]).

Rozdział 8.

Analiza rzędu macierzy jako element metody kontynuacji.

Z rozważań przedstawionych w poprzednich rozdziałach wynika, że analiza rzędu prostokątnej macierzy układu jednorodnego może mieć bardzo istotne znaczenie. Obecnie zajmijmy się wykorzystaniem idei badania rzędu macierzy w metodach kontynuacji. Na początek przedstawiony zostanie prosty sposób badania rzędu. Dalej omówimy problem wyznaczania pierwszego przybliżenia poszukiwanego rozwiązania (predictor), a następnie sposoby iteracyjnego wyznaczania kolejnych przybliżeń (korektor). Pokażemy, że analiza rzędu macierzy może mieć praktyczne znaczenie w obu etapach metody kontynuacji. Na koniec omówimy problem analizy numerycznej konstrukcji sprężysto-plastycznych. Rozważania ograniczają się do zakresu małych przemieszczeń i odkształceń i stanowią podstawę opracowanego programu metody elementów skończonych. Omówimy wyprowadzenie przyrostowego układu równań, przy czym na tym etapie nie będziemy zajmować się konkretnym modelem materiału, ani też konkretnym typem elementu skończonego. Wynika to z zamiaru przedstawienia w dalszej części pewnych uwag na temat procedur korekcyjnych w zagadnieniach z nieliniowością materiałową. Przed tym jednak omówimy problem warunków brzegowych i składania całego układu równań przyrostowych. Na koniec — po omówieniu procedury korekcyjnej — przedstawiony zostanie nowy element kontaktowy, oparty na wprowadzonym w rozdziale czwartym związku modelującym osłabienie dekohezyjne.

8.1 Transformacja macierzy prostokątnej do postaci trapezoidalnej.

Dla wyznaczenia rzędu macierzy skorzystamy ze znanej z algebry liniowej własności (patrz np. [81], [82]), która mówi że każdą macierz prostokątną można przetransformować do postaci trapezoidalnej. Oznaczmy przez $G = [G_{ij}]_{M \times N}$ analizowaną macierz oraz przez $T = [T_{ij}]_{M \times N}$ macierz po transformacji. Wykonywane przy transformacji działania możemy zapisać następująco

$$\Pi G = LT \quad (8.1)$$

gdzie $\Pi = [\Pi_{ij}]_{M \times M}$ oznacza macierz permutacji zmieniającą kolejność wierszy, $L = [L_{ij}]_{M \times M}$ oznacza dolną trójkątną macierz. Na rysunku 8.1 przedstawiono schematycznie przykład

a)

$$G = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = \begin{bmatrix} \dot{r}_1 \\ \dot{r}_2 \\ \dot{r}_3 \\ \dot{r}_4 \\ \dot{r}_5 \\ \dot{r}_6 \end{bmatrix}$$

b)

$$T = \begin{bmatrix} \bullet & * & * & * & * & * \\ 0 & \bullet & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \bullet & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{u}_4 \\ \dot{u}_5 \end{bmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} r = 5 \\ K = 1 \end{array} \right)$$

c)

$$T = \begin{bmatrix} \bullet & * & * & * & * & * \\ 0 & \bullet & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \bullet & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{u}_4 \end{bmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} r = 4 \\ K = 2 \end{array} \right)$$

Rys. 8.1

Schemat transformacji macierzy prostokątnej w szczególnym przypadku macierzy o wymiarach 5×6 ("•" — pierwszy w wierszu niezerowy współczynnik; "*" — współczynnik o dowolnej wartości; "o" — współczynnik zerowy).

macierzy przed i po transformacji w przypadku, gdy rząd macierzy jest maksymalny oraz gdy rząd ulega obniżeniu.

Wartość rzędu macierzy G i podział wektora \dot{r} na wektory \dot{u} i \dot{p} wynikają z postaci macierzy T . Współczynniki ostatnich $(M - r)$ wierszy macierzy po transformacji są zerami. Wartość r jest równa liczbie niezerowych wierszy macierzy T . Składowe zależne (tj. wektor \dot{u}) odpowiadają kolumnom zawierającym symbol "•" na schemacie 8.1. Także macierz kwadratową K układu niejednorodnego otrzymamy na podstawie analizy macierzy T — jest ona wyznaczona przez wiersze i kolumny, które po transformacji zawierają symbol "•". W ogólnym przypadku macierz K będzie niesymetryczna.

Musimy zauważyć, że rząd macierzy G nie zmieni się, gdy dokonamy w niej przedstawienia kolumn i wierszy. Od kolejności kolumn zależy jednak postać macierzy T , a więc także podział wektora \dot{r} na wektory \dot{u} i \dot{p} . Wynika stąd, że podział na wektory \dot{u} i \dot{p} jedynie w szczególnym przypadku jest jednoznaczny. Potrzebne jest więc dodatkowe kryterium wyboru zmiennych sterujących. Kryterium takie otrzymamy dążąc do uzyskania maksymalnej dokładności numerycznej rozwiązania. Zauważmy, że konkretny wybór podziału wektora \dot{r} implikuje postać macierzy K , a zatem i wartość wyznacznika $\det(K)$. Dokonywany wybór wpływa więc na dokładność rozwiązania układu jednorodnego. Wynika stąd, że ze względów numerycznych wybór zmiennych sterujących powinien zapewnić maksymalną wartość wyznacznika macierzy K . Najprostszą metodą osiągnięcia tego celu jest stosowanie metody

eliminacji Gaussa z pełnym wyborem największych współczynników.

Na koniec tej części zwróćmy uwagę na możliwość uzyskania pewnego rodzaju elastyczności w przeprowadzaniu analizy. Badając rząd macierzy układu jednorodnego, możemy łatwo stwierdzić czy analizowany problem posiada rozwiązanie i czy jest ono jednoznaczne. W przypadku niejednoznaczności — przy braku dostatecznej liczby równań liniowo niezależnych — mamy do czynienia z analizą wieloparametryczną. Możemy stwierdzić, które ze zmiennych mogą pełnić rolę parametrów i następnie określić ich wartości dobierając odpowiednie związki w taki sposób, aby nie spowodować sprzeczności całego układu równań. Z kolei przy nadmiarze równań możemy wybrać w prawidłowy sposób równania niezbędne do dalszej analizy i odrzucić dodatkowe, niepotrzebne równania. Właśnie dla podkreślenia wskazanych tu zalet nie wprowadzono dotychczas ograniczeń na liczbę równań więzów, a analizowana macierz układu jednorodnego jest macierzą prostokątną o wymiarach $M \times N$.

8.2 Predictor Eulera z wyborem sterowania.

W dalszej części rozdziału stosować będziemy następujące oznaczenia. Przez $r_{[\nu]}$ oznaczać będziemy punkt o numerze ν znajdujący się z zadaną dokładnością w pobliżu ścieżki obciążenia. Założymy, że dla pewnej wartości wskaźnika $\nu > 0$ punkty $r_{[0]}, r_{[1]}, \dots, r_{[\nu-1]}$ zostały wyznaczone. Przez $r^{[k]}$ oznaczać będziemy k -te przybliżenie kolejnego punktu $r_{[\nu]}$.

Pierwsze przybliżenie punktu $r_{[\nu]}$ może być wyznaczone z równania

$$r^{[0]} = r_{[\nu-1]} + \Delta s_{\nu} \dot{r}_{[\nu-1]} \quad (8.2)$$

gdzie $\Delta s_{\nu} > 0$ oznacza przyjętą wartość kroku całkowania. Jak widać wcześniej należy wyznaczyć jednostkowy wektor styczny $\dot{r}_{[\nu-1]}$ jako rozwiązanie układu równań 5.26 z macierzą $G(r_{[\nu-1]})$.

Jeżeli punkt równowagi nie pokrywa się z punktem bifurkacji, wówczas $r = N - 1$ i rozwiązanie układu jednorodnego zależy od $K = 1$ parametrów (patrz Rys. 8.1b). Przez $G^{(m,m)}$ oznaczamy macierz kwadratową, utworzoną z macierzy G przez odrzucenie m -tej kolumny i $(M - r)$ liniowo zależnych wierszy. Wektor $\dot{r}_{[\nu-1]}$ posiada jedną składową $\dot{r}_{[\nu-1]i} = \dot{r}_{[\nu-1]m}$, która odpowiada macierzy $G^{(m,m)}$ wybranej tak, że $\det(G^{(m,m)}) = \max\{\det(G^{(n,n)})\}$ dla $n \in \{1, N\}$. Dalej mamy $K \equiv G^{(m,m)}$ oraz $f = -a_{(m)} \dot{r}_{[\nu-1]m}$. Nie możemy bezpośrednio wyznaczyć składowych wektora $\dot{r}_{[\nu-1]}$, ponieważ nieznaną jest wartość parametru $\dot{r}_{[\nu-1]i}$, dla której wektor styczny ma jednostkową długość. Dla rozwiązania tego problemu możemy jednak skorzystać z niejednoznaczności rozwiązania układu jednorodnego (patrz 5.32). Przyjmując arbitralnie wartość parametru kontrolnego $\dot{r}_{[\nu-1]i}^* \neq 0$ i rozwiązując równanie 5.37 możemy najpierw wyznaczyć składowe wektora $\dot{r}_{[\nu-1]}^*$. W tym momencie znane są wszystkie składowe wektora $\dot{r}_{[\nu-1]}^*$ i przyjmując $\kappa = \pm \sqrt{\dot{r}_{[\nu-1]i}^* \dot{r}_{[\nu-1]i}^*}$, z równania 5.32 otrzymujemy dwa jednostkowe wektory styczne, różniące się orientacją. Właściwy zwrot ustalimy na podstawie warunku $\dot{r}_{[\nu-2]}^T \dot{r}_{[\nu-1]}^* > 0$. Oznacza to, że przyjmujemy orientację, która gwarantuje minimum kąta pomiędzy wektorami stycznymi wyznaczonymi w dwóch kolejnych punktach równowagi.

W punkcie bifurkacji rząd macierzy ulega obniżeniu ($r < N - 1$), liczba niezależnych składowych wektora $\dot{r}_{[\nu-1]}$ wzrasta ($K > 1$). Oznacza to, że przez dany punkt przechodzi więcej niż jedna ścieżka równowagi. Przykładowo, gdy $r = N - 2$ wówczas w punkcie

bifurkacji przecinają się dwie niezależne ścieżki równowagi. Schemat na Rys. 8.1c pokazuje przykładowy wynik transformacji macierzy $G = [G_{ij}]_{5 \times 6}$ wyznaczonej w punkcie bifurkacji. Kierunek wektora $\dot{r}_{[\nu-1]}$ zależy tym razem od dwóch parametrów $\dot{p}_{[\nu-1]_1}$ i $\dot{p}_{[\nu-1]_2}$. Sposób wyznaczenia jednostkowego wektora stycznego w punkcie bifurkacji przedstawiony został w rozdziale szóstym.

8.3 Procedury korekcyjne.

Kolejne przybliżenia punktu równowagi otrzymamy w procesie iteracyjnym

$$r^{[k+1]} = r^{[k]} + \delta r^{[k]} \quad (8.3)$$

gdzie $\delta r^{[k]}$ oznacza wektor poprawek w k -tym kroku iteracyjnym. Dla wyznaczenia wektora $\delta r^{[k]}$ dokonamy rozwinięcia w szereg funkcji 5.22 w otoczeniu punktu $r^{[k]}$

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_i(r^{[k+1]}) &= \Gamma_i(r^{[k]}) + \frac{\partial \Gamma_i(r^{[k]})}{\partial r_j} \delta r_j^{[k]} + \theta_i(r^{[k]}) \\ \Psi_m(r^{[k+1]}) &= \Psi_m(r^{[k]}) + \frac{\partial \Psi_m(r^{[k]})}{\partial r_j} \delta r_j^{[k]} + \theta_m(r^{[k]}) \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

Możemy zauważyć, że pochodne cząstkowe $\partial \Gamma_i / \partial r_j$ (dla $i = 1, \dots, I$) oraz $\partial \Psi_m / \partial r_j$ (dla $m = 1, \dots, M - I$) określają współczynniki macierzy prostokątnej G , tym razem wyznaczonej w punkcie $r^{[k]}$. Przyjmując, że punkt $r^{[k+1]}$ jest poszukiwanym punktem równowagi, oraz że $\theta_i \cong 0$, otrzymamy liniowy, niejednorodny układ równań, który możemy zapisać w postaci

$$G \delta r^{[k]} = b^{[k]} \quad (8.5)$$

Wektor $b^{[k]} = [b_1^{[k]}, \dots, b_M^{[k]}]^T$ określa błąd spełnienia układu 5.22 (mamy $b_i^{[k]} = -\Gamma_i(r^{[k]})$ dla $i = 1, \dots, I$ oraz $b_m^{[k]} = -\Psi_m(r^{[k]})$ dla $m = 1, \dots, M - I$ oraz $i = m + I$). Zakładamy, że rząd macierzy $G(r^{[k]})$ jest równy $(N - 1)$ (założenie to zostanie przedyskutowane na końcu tego rozdziału). Przy tym założeniu układ 8.5 zawiera $(N - 1)$ liniowo niezależnych równań oraz N niewiadomych $\delta r_j^{[k]}$. W celu wyznaczenia wektora $\delta r^{[k]}$ potrzebne jest dodatkowe $(N$ -te) liniowo niezależne równanie. Nie ma żadnych fizycznych przesłanek, które określałyby sposób doboru tego równania, stąd przy jego wyborze mamy pełną swobodę. W konsekwencji w literaturze możemy znaleźć opisy wielu procedur korekcyjnych. Przedyskutujemy niektóre spośród możliwych przypadków doboru dodatkowego równania.

Dalej przyjmować będziemy założenie, że brakujące dodatkowe równanie może być ogólnie przedstawione w postaci

$$c \delta r^{[k]} = 0 \quad (8.6)$$

gdzie postać niezerowego wektora $c = [c_1, \dots, c_N]$ zależy od rodzaju metody korekcyjnej. Przy tym założeniu rozszerzony układ równań zapiszemy następująco

$$C^{[k]} \delta r^{[k]} = \tilde{b}^{[k]} \quad (8.7)$$

gdzie $C^{[k]} = [G, c]^T$ oraz $\tilde{b}^{[k]} = [b^{[k]}, 0]^T$.

Powstaje pytanie w jaki sposób dobrać odpowiedni wektor c . Zauważmy, że wyznaczenie wektora poprawek jest możliwe pod warunkiem

$$\dim C(C^{[k]}) = \dim C(\tilde{C}^{[k]}) = N \tag{8.8}$$

gdzie $\tilde{C}^{[k]} = [C^{[k]}, \tilde{b}]$ jest macierzą rozszerzoną układu 8.7. Jest to jedyny warunek jaki może być sformułowany, stanowiący zarazem kryterium poprawności rozszerzonego układu 8.7.

Dla uzasadnienia przyjętej postaci dodatkowego równania 8.6 zauważmy, że wobec założenia $r = N - 1$, właściwie dobrany wektor c powoduje $\dim C(C^{[k]}) = N$. Równocześnie zero po prawej stronie dodatkowego równania nie powoduje wzrostu rzędu macierzy rozszerzonej. Dalej możemy zatem przyjąć, że w wyniku zastosowania analizy rzędu macierzy, z układu 8.5 odrzucone zostały równania liniowo zależne. Dla uniknięcia wprowadzania nowych oznaczeń przyjmujemy, że G i $b^{[k]}$ oznaczają teraz macierz i wektor prawej strony układu złożonego z $(N - 1)$ liniowo niezależnych równań. Wprowadzimy natomiast następujące dodatkowe oznaczenia

$$\left. \begin{aligned} c_{(m)} &= [c_1, \dots, c_{m-1}, c_{m+1}, \dots, c_N] \\ u_{(m)} &= [r_1, \dots, r_{m-1}, r_{m+1}, \dots, r_N]^T \end{aligned} \right\} \tag{8.9}$$

Ponadto przez $\alpha_{(m)}$ oznaczmy wektor $(N - 1)$ wymiarowy, utworzony z liniowo niezależnych współczynników m -tej kolumny macierzy G . Dalej będziemy korzystać z równania 8.5 zapisanego w postaci

$$G^{(m,m)} \delta u_{(m)}^{[k]} = b^{[k]} - \alpha_{(m)} \delta r_m^{[k]} \tag{8.10}$$

Omawiając procedury korekcyjne będziemy się odwoływać w formie przykładu do omawianej w rozdziale piątym analizy układu sprężystego. Korekcja rozwiązania w przypadku układów dysypatywnych wymaga oddzielnego komentarza, który przedstawiony jest w dalszej części tego rozdziału.

8.3.1 Metoda z wyborem zmiennej sterującej.

Jako pierwszą rozważmy metodę, w której zakłada się, że w procesie korekcyjnym m -ta składowa wektora $r^{[k]}$ jest stała (porównaj np. [76], str.112). W tym przypadku równanie 8.6 ma następującą formę

$$\delta r_m^{[k]} = 0 \tag{8.11}$$

co jest równoznaczne z przyjęciem równości

$$c_{(m)} = 0 \quad c_m = 1 \tag{8.12}$$

Uwzględniając równanie 8.11, pozostałe składowe wektora $\delta r^{[k]}$ otrzymamy ze związku

$$\delta u_{(m)}^{[k]} = (G^{(m,m)})^{-1} b^{[k]} \tag{8.13}$$

Przykładowo dla układu sprężystego, przyjmując $m = L$ mamy $c = [0, 1]$, $\delta u_{(m)}^{[k]} = \delta q^{[k]}$, $\delta \lambda^{[k]} = 0$. Ten sposób korekcji znany jest w literaturze jako metoda Newtona-Raphsona.

Widać, że ustalenie wartości parametru $\delta\lambda^{[k]}$ jest tu niejako wyborem zmiennej sterującej. Przechodząc przez punkt graniczny parametru obciążenia mamy $\det(G^{(L,L)}) \cong 0$. Jeżeli istnieje macierz $G^{(m,m)}$ taka, że $\det(G^{(m,m)}) > \det(G^{(L,L)})$, to przyjmując w miejsce $\delta\lambda^{[k]}$ składową $\delta q_m^{[k]}$ jako parametr sterujący, powinniśmy otrzymać lepszą dokładność metody. Tak więc ze względów numerycznych wybór składowej $\delta r_m^{[k]}$ w równaniu 8.11 powinien gwarantować wybór macierzy $G^{(m,m)}$ o maksymalnym wyznaczniku. Z tego punktu widzenia efektywną metodę wyboru zaproponował Rheinboldt ([70]), a później Fujii ([31]).

8.3.2 Metoda ortogonalna.

Dla określenia drugiej metody korekcyjnej zauważmy, że spełnienie warunku 8.8 oznacza liniową niezależność wektora c od wektorów $g_{(i)} = [C_{i1}^{[k]}, \dots, C_{iN}^{[k]}]$ (dla $i = 1, \dots, M$). Wynika stąd, że wektor c powinien być ortogonalny do wektorów $g_{(i)}$. Warunek ten możemy zapisać w postaci jednorodnego, liniowego układu równań

$$Gc^T = 0 \quad (8.14)$$

gdzie wektor c jest poszukiwanym rozwiązaniem. Rozwiązanie tego układu może być otrzymane w ten sam sposób jak rozwiązanie układu 5.26, tj. w oparciu o transformację 8.1 macierzy G . Zgodnie z założeniem mamy $r = N - 1$, a więc dla pewnej wartości wskaźnika m spełniony jest warunek $\det(G^{(m,m)}) \neq 0$ i niezerowe rozwiązanie układu zależy od jednego parametru kontrolnego. Możemy przyjąć, że parametrem kontrolnym jest składowa c_m , a pozostałe $(N - 1)$ składowych tworzą poszukiwany wektor $c_{(m)}$. Przyjmując dodatkowo $c_m = 1$, po rozwiązaniu równania 8.14 otrzymamy

$$c_{(m)}^T = - (G^{(m,m)})^{-1} a_{(m)} \quad c_m = 1 \quad (8.15)$$

Powyższa definicja wektora c zapewnia spełnienie warunku 8.8, a tym samym zapewnia jednoznaczność rozwiązania układu 8.7.

Przyjmijmy, że analizowana konstrukcja tworzy układ sprężysty poddany obciążeniu proporcjonalnemu. Łącząc równania 8.6 i 8.15 dla $m = L$ otrzymamy, że rozwiązanie układu 8.7 jest następujące

$$\left. \begin{aligned} \delta\lambda^{[k]} &= \frac{\alpha_{(L)}^T (G^{(L,L)})^{-1} (G^{(L,L)})^{-1} b^{[k]}}{1 + \alpha_{(L)}^T (G^{(L,L)})^{-1} (G^{(L,L)})^{-1} \alpha_{(L)}} \\ \delta q_m^{[k]} &= (G^{(L,L)})^{-1} (b^{[k]} - \alpha_{(L)} \delta\lambda^{[k]}) \end{aligned} \right\} \quad (8.16)$$

Otrzymane przy tym związki 8.16 mają istotną zaletę — macierz $G^{(L,L)}$ jest symetryczna, co pozwala na wykorzystanie standardowych procedur dla tego typu macierzy. Związki takie przedstawione zostały przez Frieda ([29]). Przechodząc przez punkt graniczny parametru obciążenia, podobnie jak w przypadku wyżej omawianej metody, możemy poprawić dokładność metody korzystając z innego parametru sterującego c_m z odpowiednią nieosobliwą macierzą $G^{(m,m)}$. Współczynniki dodatkowego równania wyznaczymy ze związku 8.15, a następnie wektor korekcyjny ze związku 8.7. Ponieważ powyższa procedura oparta jest na warunku ortogonalności, więc zwana jest metodą ortogonalną.

8.3.3 Metoda stałej długości łuku.

Metoda stałej długości łuku w wersji zaproponowanej przez Crisfielda ([21]) może być otrzymana z następującego założenia

$$c_{(m)} = (\Delta u_{(m)}^{[k]} + \Delta u_{(m)}^{[k+1]})^T \quad c_m = 0 \quad (8.17)$$

gdzie $\Delta u_{(m)}^{[k]} = u_{(m)}^{[k]} - u_{(m)[\nu-1]}$. Po niewielkim przekształceniu wektora $c_{(m)}$ równanie 8.6 możemy teraz zapisać w postaci

$$(2\Delta u_{(m)}^{[k]} + \delta u_{(m)}^{[k]})^T \delta u_{(m)}^{[k]} = 0 \quad (8.18)$$

Dodając do obu stron iloczyn skalarny $(\Delta u_{(m)}^{[k]})^T \Delta u_{(m)}^{[k]}$, po dalszych przekształceniach otrzymamy

$$(\Delta u_{(m)}^{[k+1]})^T \Delta u_{(m)}^{[k+1]} = (\Delta u_{(m)}^{[k]})^T \Delta u_{(m)}^{[k]} \quad (8.19)$$

Z powyższego związku wynika uzasadnienie nazwy metody — zapewnia ona, że w kolejnych iteracjach pomiędzy punktami $r_{[\nu-1]}$ i $r^{[k]}$ zachowana jest stała odległość w $(N-1)$ wymiarowej podprzestrzeni wyznaczonej przez składowe wektora $u_{(m)}$. Odległość ta wynosi

$$|\Delta u_{(m)}| = \sqrt{\Delta s_\nu^2 - (\Delta r_m^{[0]})^2} \quad (8.20)$$

Na rysunku 8.2 pokazano dla $N = 3$ najistotniejsze elementy określające omawiany proces korekcyjny.

Z założenia 8.17 wynika, że wektor c zależy od poszukiwanego wektora poprawek $\delta r^{[k]}$, a więc tym razem układ 8.7 nie jest układem liniowym. Należy więc najpierw wyznaczyć wektor $\delta u_{(m)}^{[k]}$ w funkcji wybranego parametru $\delta r_m^{[k]}$, a następnie korzystając z równania 8.18 wyznaczyć odpowiednią wartość samego parametru $\delta r_m^{[k]}$. W tym celu skorzystamy z równania 8.10. Przy założeniu, że wskaźnik m określa macierz nieosobliwą, rozwiązaniem tego układu jest wektor

$$\delta u_{(m)}^{[k]} = (G^{(m,m)})^{-1} (b^{[k]} - a_{(m)} \delta r_m^{[k]}) \quad (8.21)$$

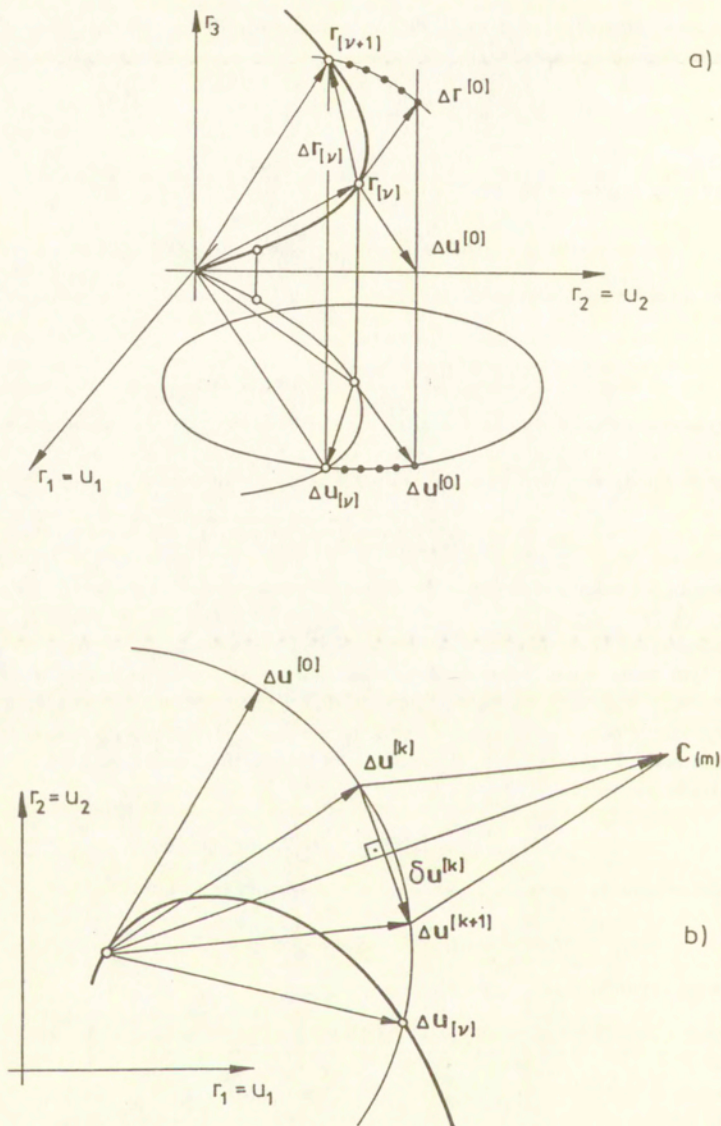
Po podstawieniu do równania 8.18 otrzymamy równanie kwadratowe postaci

$$\alpha_1 (\delta r_m^{[k]})^2 - 2\alpha_2 \delta r_m^{[k]} + \alpha_3 = 0 \quad (8.22)$$

gdzie współczynniki $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ określone są wzorami

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= a_{(m)}^T (G^{(m,m)})^{-T} (G^{(m,m)})^{-1} a_{(m)} \\ \alpha_2 &= \left\{ (G^{(m,m)})^{-1} b^{[k]} + \Delta u_{(m)}^{[k]} \right\}^T (G^{(m,m)})^{-1} a_{(m)} \\ \alpha_3 &= \left\{ (G^{(m,m)})^{-1} b^{[k]} + 2\Delta u_{(m)}^{[k]} \right\}^T (G^{(m,m)})^{-1} b^{[k]} \end{aligned} \right\} \quad (8.23)$$

W przypadku, gdy istnieją dwa pierwiastki równania 8.22, otrzymamy też dwa wektory poprawek. Do wyznaczenia kolejnego przybliżenia $r^{[k+1]}$ wybierany jest ten, który spełnia



Rys. 8.2

Proces korekcyjny w przypadku $N = 3$: a) ścieżka obciążenia, b) warunek stałej długości łuku.

warunek $(\Delta \mathbf{u}_{(m)}^{[k]})^T \Delta \mathbf{u}_{(m)}^{[k+1]} > 0$. Gdy oba wektory poprawek spełniają ten warunek, wówczas wybierany jest ten, dla którego $\delta r_m^{[k]}$ jest bliższe liniowej zależności $\delta r_m^{[k]} = \alpha_3/\alpha_2$.

Trzeba podkreślić, że skuteczność metody zależy między innymi od istnienia rozwiązania równania kwadratowego 8.22. W szczególności problemy z uzyskaniem rozwiązania mogą powstać, gdy w okolicy punktu granicznego parametru obciążenia λ macierz sztywności konstrukcji jest słabo uwarunkowana ($\det(\mathbf{G}^{(L,L)}) \cong 0$). W pracy [22] wymieniono wiele pozycji literatury dotyczącej metod pokonywania związanych z tym trudności. Z przedstawionych wyżej rozważań można jednak wysnuć wniosek, że powodem kłopotów jest w tym wypadku arbitralny wybór parametru $\delta r_m^{[k]} = \delta \lambda^{[k]}$, podyktowany dążeniem do wykorzystania symetrii macierzy sztywności. Jest to oczywiście bardzo ważne ze względu na obniżenie czasu obliczeń, jednak w świetle prezentowanych wyżej rozważań należałoby zbadać, czy w pewnych sytuacjach nie dałoby się uzyskać większych korzyści rezygnując z symetrii macierzy.

Uogólnienie metody otrzymamy gdy zmienimy wymiar podprzestrzeni, w której narzucony jest warunek stałej długości łuku. Oznacza to przyjęcie składowych wektora c w postaci

$$c_{n_i} = \begin{cases} \Delta r_{n_i}^{[k]} + \Delta r_{n_i}^{[k+1]} & \text{dla } i < \alpha \\ 0 & \text{dla } i \geq \alpha \end{cases} \quad (8.24)$$

gdzie $n_i \in \{1, N\}$, $i = 1, \dots, N$ oraz $1 \leq \alpha \leq N$. Przy $\alpha = N$ powyższa definicja oznacza stałą w procesie iteracji długość wektora $|\Delta r^{[k]}| = \Delta s_{\nu}$. Jednak już Crisfield zauważył ([21]), że większą skuteczność procedury otrzymuje się po przyjęciu $\alpha = N - 1$. Dalsze zmniejszenie liczby niezerowych składowych wektora c okazało się korzystne w przypadku analizy materiału z osłabieniem (patrz de Borst [13]).

8.3.4 Metoda płaszczyzny ortogonalnej.

Pod nazwą metody płaszczyzny ortogonalnej w literaturze znana jest metoda wynikająca z linearyzacji równania 8.18, tj. z założenia

$$2\Delta \mathbf{u}_{(m)}^{[k]} + \delta \mathbf{u}_{(m)}^{[k]} \cong 2\Delta \mathbf{u}_{(m)}^{[k]} \quad (8.25)$$

Powyższe założenie równie dobrze może być jednak traktowane jako zdefiniowanie wektora c w postaci

$$c_{(m)} = (\Delta \mathbf{u}_{(m)}^{[k]})^T \quad c_m = 0 \quad (8.26)$$

Stąd równanie 8.6 przyjmie postać

$$(\Delta \mathbf{u}_{(m)}^{[k]})^T \delta \mathbf{u}_{(m)}^{[k]} = 0 \quad (8.27)$$

Wykorzystanie powyższego równania ma tę przewagę nad stosowaniem równania 8.18, że układ 8.7 jest nadal układem liniowym. Równanie 8.27 narzuca warunek, aby poszukiwany wektor poprawek znajdował się w płaszczyźnie ortogonalnej do wektora $\Delta \mathbf{u}_{(m)}^{[k]}$, stąd też wynika nazwa metody. Położenie płaszczyzny ulega zmianie po każdej wykonanej iteracji. W związku z tym często stosowana jest modyfikacja metody, w której przyjmuje się stały wektor $c_{(m)} = (\Delta \mathbf{u}_{(m)}^{[0]})^T$. Analogicznie do definicji 8.24 (z pominięciem członu $\Delta r_{n_i}^{[k+1]}$) możemy tworzyć dalsze warianty tej metody. Szczególnym przypadkiem takich poszukiwań jest omówiona na początku metoda z wyborem zmiennej sterującej (wówczas mamy $\alpha = 1$).

8.3.5 Ogólny schemat metod korekcyjnych.

Nawiązując do nazwy ostatniej z omawianych tu metod zauważmy, że wszystkie poprzednie sprowadzają się do podobnej sytuacji. Z przyjętej postaci równania 8.6 wynika, że wektor $\delta r^{[k]}$ ma być zawarty w płaszczyźnie ortogonalnej do wektora c . Zatem niezależnie od wyboru wektora c (lecz przy założeniu, że wektor ten jest niezależny od wektora poprawek $\delta r^{[k]}$) poszukiwane rozwiązanie uzyskamy w następujących etapach:

- Korzystając z analizy rzędu macierzy G należy określić wektor c tak, aby spełniony był warunek 8.8. Równocześnie należy wybrać nieosobliwą macierz $G^{(m,m)}$ i odpowiadający jej parametr $\delta r_m^{[k]}$.
- Rozwiązanie układu 8.10, wyrażone w formie liniowej zależności od parametru $\delta r_m^{[k]}$, wstawić do równania 8.6. Z rozwiązania uzyskanego równania otrzymamy

$$\delta r_m^{[k]} = \frac{c_{(m)} \left(G^{(m,m)} \right)^{-1} b^{[k]}}{c_{(m)} \left(G^{(m,m)} \right)^{-1} a_{(m)} - c_m} \quad (8.28)$$

- Wyznaczyć pozostałe składowe wektora poprawek ze związku

$$\delta u_{(m)}^{[k]} = \left(G^{(m,m)} \right)^{-1} \left\{ b^{[k]} - a_{(m)} \frac{c_{(m)} \left(G^{(m,m)} \right)^{-1} b^{[k]}}{c_{(m)} \left(G^{(m,m)} \right)^{-1} a_{(m)} - c_m} \right\} \quad (8.29)$$

Przedstawiony schemat obejmuje wiele ze znanych z literatury metod korekcyjnych. Podobnie jak przy wyznaczaniu predictorów, w pierwszym etapie mamy swobodę wyboru macierzy $G^{(m,m)}$ i zmiennej niezależnej $\delta r_m^{[k]}$. Przy niejednoznaczności wyboru trzeba przyjąć dodatkowe kryteria (np. symetria macierzy, wartość maksymalna wyznacznika $\det(G^{(m,m)})$, itp.). Swobodę mamy także w doborze wektora c . Ilustruje to dokonany wyżej przegląd kilku znanych metod korekcyjnych (porównaj definicje 8.12, 8.15, 8.17, 8.26 dla $m = L$ oraz 8.24). Najistotniejszą zaletą zastosowania analizy rzędu macierzy jest możliwość znalezienia nieosobliwej macierzy $G^{(m,m)}$ i odpowiedniego wektora c . Po ich prawidłowym wyznaczeniu wzory 8.28 i 8.29 zapewniają istnienie i jednoznaczność wektora poprawek. Nie jest to jednak równoznaczne z uzyskaniem zbieżności metody. Ten problem wiąże się z doбором długości kroku całkowania.

8.4 Analiza konstrukcji sprężysto-plastycznych.

Zajmiemy się obecnie analizą zagadnień z nieliniowością materiałową i omówimy kolejno budowę układu równań w metodzie elementów skończonych, procedurę ich rozwiązywania oraz nowy element typu kontaktowego.

8.4.1 Tworzenie układu równań przyrostowych.

Przyjmijmy, że analizowana konstrukcja określona jest przez punkty x należące do pewnego obszaru V i brzegu $S = \partial V$. Oznaczmy przez τ parametr czasopodobny. Zakładamy, że w chwili τ stan konstrukcji określony jest przez pole przemieszczeń $d(x)$, pole obciążeń

objętościowych $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in V$) oraz pole obciążeń powierzchniowych $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in S$), $\{\tau : \mathbf{d}, \mathbf{t}, \mathbf{f}\}$.
 Odpowiednio w chwili $\tau + \Delta\tau$ mamy $\{\tau + \Delta\tau : \mathbf{d} + \Delta\mathbf{d}, \mathbf{t} + \Delta\mathbf{t}, \mathbf{f} + \Delta\mathbf{f}\}$.

Pole odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ wyznaczmy wykorzystując związek

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{d} \tag{8.30}$$

gdzie \mathbf{L} oznacza operator różniczkowy. Dla określenia naprężeń $\boldsymbol{\sigma}$ przyjmujemy, że są one funkcją $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon})$. Niezależnie od postaci tej funkcji możemy symbolicznie przedstawić ją w postaci szeregu Taylora. Stosując rozwinięcie w otoczeniu stanu panującego w chwili τ otrzymamy

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon})\Delta\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\theta} \tag{8.31}$$

gdzie $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon})$ oznacza sumę wyrazów wyższego rzędu. Zakładamy dalej, że styczną macierz sztywności $\bar{\mathbf{D}}$ znamy z modelu konstytutywnego materiału

$$\bar{\mathbf{D}}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{8.32}$$

W liniowym procesie deformacji $\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D}$ oznacza macierz sprężystości, natomiast w nieliniiowym procesie $\bar{\mathbf{D}}$ oznacza styczną macierz sprężysto-plastyczną. W drugim przypadku mamy $\boldsymbol{\theta} \neq 0$.

Przyrostowe równania równowagi.

Dla wyznaczenia przyrostowych związków równowagi skorzystamy z zasady prac wirtualnych. Dla chwili τ przedstawia ją równanie

$$\int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) dV - \int_S \delta\mathbf{d}^T \mathbf{t} dS - \int_V \delta\mathbf{d}^T \mathbf{f} dV = 0 \tag{8.33}$$

gdzie $\delta\mathbf{d}$ oznacza wariację pola przemieszczeń, oraz $\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\delta\mathbf{d}$. Wobec założenia małych przemieszczeń i odkształceń zmiany konfiguracji układu (a więc zmiany obszarów całkowania) można pominąć. Stąd zasadę prac wirtualnych dla chwili $\tau + \Delta\tau$ otrzymamy w postaci

$$\int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}) dV - \int_S \delta\mathbf{d}^T (\mathbf{t} + \Delta\mathbf{t}) dS - \int_V \delta\mathbf{d}^T (\mathbf{f} + \Delta\mathbf{f}) dV = 0 \tag{8.34}$$

Z równań 8.30–8.34 otrzymamy przyrostowe równania równowagi zdyskretyzowanej konstrukcji zastępując całkowanie po całym obszarze konstrukcji sumą całek po elementach skończonych. Dalej stosować będziemy konwencję oznaczeń, zgodnie z którą górny indeks $\{e\}$ wskazuje wielkości związane z pojedynczym elementem, natomiast brak tego indeksu oznacza wielkości związane z numeracją globalną. Przykładowo przez $\mathbf{d}_{\{w\}}^{(e)}$ oznaczamy przemieszczenia węzła o numerze globalnym w , natomiast przez $\mathbf{d}_{\{w\}}^{(e)}$ oznaczymy przemieszczenia węzła z lokalnym numerem w w elemencie. Przez $\mathbf{w}^{(e)} = [\mathbf{d}_{\{w\}}^{(e)}]^T$ oznaczymy wektor przemieszczeń węzłowych elementu ($w = 1, 2, \dots, w_e$, gdzie w_e oznacza liczbę węzłów), natomiast przez $\mathbf{w} = [\mathbf{d}_{\{w\}}]^T$ oznaczymy wektor przemieszczeń węzłowych modelu ($w = 1, 2, \dots, w_m$, gdzie w_m oznacza liczbę wszystkich węzłów).

Dla uproszczenia dalszego opisu chwilowo ograniczymy rozważania do pojedynczego elementu. Zakładamy, że pole przemieszczeń $\mathbf{d}(\mathbf{x})$ może być aproksymowane za pomocą związku

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{w}^{(e)} \quad (8.35)$$

gdzie $\mathbf{N}^{(e)} = [\mathbf{N}_{(w)}(\mathbf{x})]$ oznaczają tzw. funkcje kształtu specyficzne dla każdego typu elementu skończonego. Wstawiając powyższą zależność do związku 8.30 otrzymamy

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{w}^{(e)} \quad (8.36)$$

gdzie $\mathbf{B}^{(e)} = \mathbf{L}\mathbf{N}^{(e)}$. Poprzez związek 8.36 naprężenia i macierz sztywności materiału wewnątrz elementu stają się funkcjami przemieszczeń węzłowych. Dla podkreślenia tej zależności dalej oznaczać je będziemy przez $\boldsymbol{\sigma}^{(e)}$ i $\check{\mathbf{D}}^{(e)}$. Korzystając z wprowadzonej aproksymacji i z rozwinięcia 8.31 równania 8.33 i 8.34 zapiszemy w postaci

$$\begin{aligned} (\delta \mathbf{w}^{(e)})^T \left\{ \int_{V_e} (\mathbf{B}^{(e)})^T \boldsymbol{\sigma}^{(e)} dV_e - \int_{S_e} (\mathbf{B}^{(e)})^T \mathbf{t} dS_e - \int_{V_e} (\mathbf{B}^{(e)})^T \mathbf{f} dV_e \right\} &= 0 \\ (\delta \mathbf{w}^{(e)})^T \left\{ \int_{V_e} (\mathbf{B}^{(e)})^T \left(\boldsymbol{\sigma}^{(e)} + \check{\mathbf{D}}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} \Delta \mathbf{w}^{(e)} + \boldsymbol{\theta}^{(e)} \right) dV_e - \right. \\ \left. \int_{S_e} (\mathbf{B}^{(e)})^T (\mathbf{t} + \Delta \mathbf{t}) dS_e - \int_{V_e} (\mathbf{B}^{(e)})^T (\mathbf{f} + \Delta \mathbf{f}) dV_e \right\} &= 0 \end{aligned} \quad (8.37)$$

gdzie V_e i S_e oznaczają obszar i brzeg elementu. Zasada prac wirtualnych obowiązuje dla dowolnych wirtualnych przemieszczeń $\delta \mathbf{w}^{(e)}$, a zatem muszą zachodzić związki

$$\begin{aligned} \int_{V_e} (\mathbf{B}^{(e)})^T \boldsymbol{\sigma}^{(e)} dV_e - \int_{S_e} (\mathbf{B}^{(e)})^T \mathbf{t} dS_e - \int_{V_e} (\mathbf{B}^{(e)})^T \mathbf{f} dV_e &= 0 \\ \int_{V_e} (\mathbf{B}^{(e)})^T \left(\boldsymbol{\sigma}^{(e)} + \check{\mathbf{D}}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} \Delta \mathbf{w}^{(e)} + \boldsymbol{\theta}^{(e)} \right) dV_e - \\ \int_{S_e} (\mathbf{B}^{(e)})^T (\mathbf{t} + \Delta \mathbf{t}) dS_e - \int_{V_e} (\mathbf{B}^{(e)})^T (\mathbf{f} + \Delta \mathbf{f}) dV_e &= 0 \end{aligned} \quad (8.38)$$

Po odjęciu stronami otrzymamy przyrostowe równania równowagi w postaci

$$\mathbf{K}^{(e)} \Delta \mathbf{w}^{(e)} + \Delta \boldsymbol{\theta}^{(e)} + \Delta \mathbf{F}^{(e)} = 0 \quad (8.39)$$

Przez $\mathbf{K}^{(e)}$ oraz $\mathbf{F}^{(e)}$ oznaczono tutaj macierz sztywności elementu oraz wektor sił węzłowych, które określone są w następujący sposób

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(e)} &= \int_{V_e} (\mathbf{B}^{(e)})^T \check{\mathbf{D}}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} dV_e \\ \mathbf{F}^{(e)} &= - \int_{S_e} (\mathbf{B}^{(e)})^T \mathbf{t} dS_e - \int_{V_e} (\mathbf{B}^{(e)})^T \mathbf{f} dV_e \end{aligned} \quad (8.40)$$

Przez $\Delta \boldsymbol{\theta}^{(e)}$ oznaczono tzw. siły relaksacyjne w elemencie określone wzorem

$$\Delta \boldsymbol{\theta}^{(e)} = \int_{V_e} (\mathbf{B}^{(e)})^T \boldsymbol{\theta}^{(e)} dV_e \quad (8.41)$$

Analogicznie do równania 8.39 przyrostowe równania równowagi dla całego modelu konstrukcji zapiszemy w postaci

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{w} + \Delta \boldsymbol{\theta} + \Delta \mathbf{F} = 0 \quad (8.42)$$

gdzie \mathbf{K} , \mathbf{F} i $\Delta \boldsymbol{\theta}$ oznaczają macierz sztywności, obciążenia zewnętrzne i siły relaksacyjne modelu wyznaczone w wyniku sumowania odpowiednich wielkości elementowych.

Komplet równań przyrostowych dla problemu brzegowego.

Dalej będziemy rozpatrywać obciążenie proporcjonalne. Uwzględniając dyskretyzację możemy przyjąć, że wektor \mathbf{r} jest teraz określony przez przemieszczenia i siły węzłowe oraz parametr obciążenia, czyli $\mathbf{r} = [\mathbf{w}, \mathbf{F}, \lambda]^T$. W poprzednich rozdziałach równania równowagi zapisywane były w postaci $\Gamma(\mathbf{r}) = 0$, równania określające więzy w postaci $\Psi(\mathbf{r}) = 0$. Postać funkcji Γ wynika z równania 8.38₁. Obecnie zajmiemy się równaniami więzów i wynikającymi z nich związkami przyrostowymi. Jawne wypisanie tych związków ma na celu wyraźne rozgraniczenie procesu tworzenia układu równań od jego rozwiązywania.

Opis ograniczymy do przypadków, które mogą być analizowane przy użyciu opracowanego programu MES. Dla zdefiniowania funkcji Ψ wprowadzimy dodatkowe oznaczenia. Powierzchnię S podzielimy na dwie części: S_u — związaną z podporami i S_T — związaną z zewnętrznym obciążeniem powierzchniowym. Odpowiednio do tego podziału z wektorów \mathbf{w} i \mathbf{F} możemy wydzielić składowe w_u i F_u w węzłach leżących na brzegu S_u i składowe w_T i F_T w węzłach leżących na brzegu S_T . Analogicznie przez w_V i F_V oznaczamy przemieszczenia i siły w węzłach znajdujących się wewnątrz obszaru V . Indeksy ${}^n_{V,u,T}$ oznaczają tutaj numery składowych w_V, w_u, w_T oraz F_V, F_u, F_T w wektorach \mathbf{w} i \mathbf{F} . Dalej przez $w_V, w_u, w_T, F_V, F_u, F_T$ oznaczmy wektory utworzone z odpowiednich składowych w_V, w_u, w_T oraz F_V, F_u, F_T . Zgodnie z tym mamy $\mathbf{r} = [w_V, w_u, w_T, F_V, F_u, F_T, \lambda]^T$.

Analizę ograniczymy wyłącznie do obciążenia od sił powierzchniowych, tj. do założenia $f(\mathbf{x}) = 0$. W oczywisty sposób oznacza to odpowiednią liczbę równań typu

$$\Psi_V(\mathbf{r}) = F_V = 0 \tag{8.43}$$

Zakładamy, że przemieszczenia na brzegu S_u i obciążenia na brzegu S_T zmieniają się proporcjonalnie do zadanych wartości w_u^r, F_T^r . Stąd otrzymamy

$$\Psi(\mathbf{r}) = w_u + \lambda w_u^r = 0 \quad \Psi(\mathbf{r}) = F_T + \lambda F_T^r = 0 \tag{8.44}$$

Zależnie od wartości w_u^r, F_T^r będziemy mieli wymuszenie kinematyczne ($w_u^r \neq 0, F_T^r = 0$), siłowe ($w_u^r = 0, F_T^r \neq 0$), lub mieszane ($w_u^r \neq 0, F_T^r \neq 0$).

Warunki 8.43 i 8.44 determinują postać odpowiednich związków przyrostowych

$$\Delta F_V = 0 \quad \Delta w_u + \Delta \lambda w_u^r = 0 \quad \Delta F_T + \Delta \lambda F_T^r = 0 \tag{8.45}$$

Na koniec z równań 8.42 i równań 8.45 możemy utworzyć kompletny układ równań przyrostowych opisujących problem brzegowy

$$G\Delta\mathbf{r} = \mathbf{b} \tag{8.46}$$

gdzie macierz G dana jest następująco

$$G = \begin{bmatrix} K_{VV} & K_{Vu} & K_{VT} & I_V & O_u & O_T & 0 \\ K_{uV} & K_{uu} & K_{uT} & O_V & I_u & O_T & 0 \\ K_{TV} & K_{Tu} & K_{TT} & O_V & O_u & I_T & 0 \\ O_V & O_u & O_T & I_V & O_u & O_T & 0 \\ O_V & I_u & O_T & O_V & O_u & O_T & w_u^r \\ O_V & O_u & O_T & O_V & O_u & I_T & F_T^r \end{bmatrix} \tag{8.47}$$

Indeksy "v, u, T" symbolizują zgodność liczby wierszy i kolumn podmacierzy z liczbą odpowiednich składowych wektora \mathbf{r} . Symbole $\mathbf{I}_i, \mathbf{O}_i$ (dla $i = v, u, T$) oznaczają macierze jednostkowe i macierze zerowe. Analogicznie wektor prawej strony równania 8.46 można przedstawić w postaci $\mathbf{b} = [-\Delta\Theta_v, -\Delta\Theta_u, -\Delta\Theta_T, 0, 0, 0]^T$.

Przedstawiony tok postępowania w ewidentny sposób może być zastosowany także do zadanych nieliniowych funkcji $\Psi(\mathbf{r})$. Na podstawie rozwinięcia tych funkcji w szereg Taylora wokół stanu \mathbf{r} wyznaczmy warunek jaki musi być spełniony w stanie $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$. Dalej możemy otrzymać przyrostowe równania więzów postępując podobnie jak przy wyznaczaniu przyrostowych równań równowagi 8.42. Przy nieliniowych równaniach więzów trzy ostatnie wiersze macierzy \mathbf{G} będą mieć więcej niezerowych współczynników niż to wynika z równań 8.45. Także trzy ostatnie składowe wektora prawej strony będą niezerowe.

Prostota równań 8.45 pozwala na bezpośrednie wyeliminowanie znanych wielkości z równań 8.42. Ze względu na oszczędność pamięci i czasu komputera jest to wręcz pożądane. Jest to jednak zadanie dla procedury rozwiązującej układ równań, bądź inaczej jest to problem wewnętrznej organizacji programu.

8.4.2 Rozwiązywanie układu równań przyrostowych.

Układ 8.46 ma charakter ścisłego związku w tym sensie, że jedynym uproszczeniem do tej pory było zastosowanie aproksymacji 8.35. Człony nieliniowe nie zostały pominięte, lecz utworzono z nich wektor prawej strony. Prawa strona układu 8.46 jest nieznaną w punkcie określonym przez wektor $\mathbf{r}_{[\nu-1]}$, zatem dla wyznaczenia wektora siecznego $\Delta\mathbf{r}_{[\nu]} = \mathbf{r}_{[\nu]} - \mathbf{r}_{[\nu-1]}$ niezbędna jest procedura iteracyjna.

W miejsce wektora $\Delta\mathbf{r}_{[\nu]}$ przyjmujemy wektor $\Delta\mathbf{r}^{[k]}$ określony wzorem

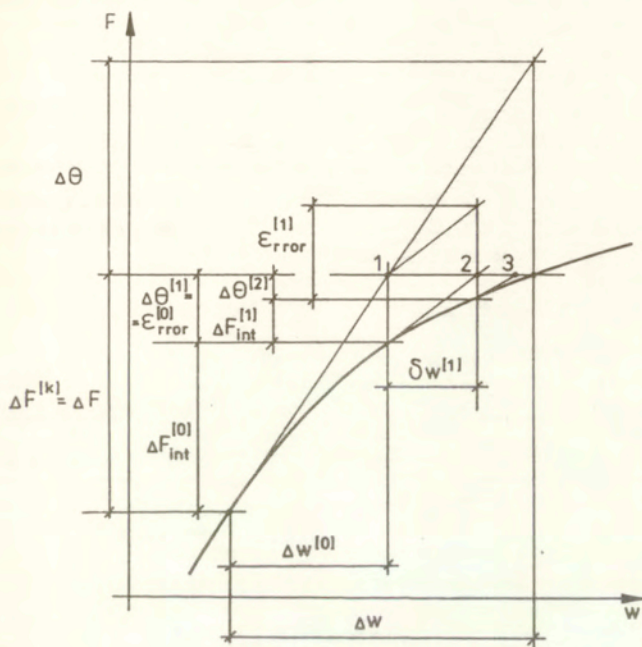
$$\Delta\mathbf{r}^{[k]} = \sum_{i=0}^k \delta\mathbf{r}^{[i]} \quad (8.48)$$

lub inaczej

$$\Delta\mathbf{w}^{[k]} = \sum_{i=0}^k \delta\mathbf{w}^{[i]} \quad \Delta\mathbf{F}^{[k]} = \sum_{i=0}^k \delta\mathbf{F}^{[i]} \quad \Delta\lambda^{[k]} = \sum_{i=0}^k \delta\lambda^{[i]} \quad (8.49)$$

Prowadzi to do przyjęcia kolejnych przybliżeń zgodnie z wzorem 8.3. Kolejne poprawki $\delta\mathbf{r}^{[k]}$ wyznaczmy przyjmując w miejsce wektora \mathbf{b} jego przybliżenie $\mathbf{b}^{[k]}$ i rozwiązując układ zapisany równaniem 8.5. Dalej procedura iteracyjna przebiega zgodnie z podanym wyżej opisem. Dla pierwszego przybliżenia (predictor) zakładamy $\mathbf{b}^{[0]} = \mathbf{0}$ i dla rozwiązania otrzymanego układu jednorodnego przyjmujemy niezerową wartość dla jednej ze składowych wektora $\delta\mathbf{r}^{[0]}$. Dla $k > 0$ w kolejnych iteracjach (corrector) mamy $\mathbf{b}^{[k]} \neq \mathbf{0}$ i układ 8.5 nie jest już układem jednorodnym. Dla wyznaczenia wektora $\delta\mathbf{r}^{[k]}$ niezbędne jest dodatkowe równanie, aby uzyskać nieosobliwą macierz kwadratową układu. Opisywane dalej testy przeprowadzone zostały w oparciu o metodę wyboru zmienianej sterującej, przy czym wybór dokonywany był wyłącznie spośród przemieszczeń węzłowych.

Zgodnie z przedstawionym tu opisem kluczowym problemem w procesie iteracyjnym staje się wyznaczanie wektorów $\mathbf{b}^{[k]}$. Ich składowe wykorzystywane są także do badania zbieżności



Rys. 8.3
Schemat procedury korekcyjnej Newtona.

procesu iteracyjnego. Jako podstawowe kryterium osiągnięcia żądanej dokładności przyjmowano warunek spełnienia nierówności $|b_{max}| < \varepsilon$, gdzie b_{max} oznacza wartość maksymalnej składowej wektora $b^{[k+1]}$, a ε zadany współczynnik. Dla skutecznego działania programu niezbędne były jeszcze dodatkowe kryteria — ich dyskusję pominiemy, gdyż zabrałaby zbyt wiele miejsca.

Wyznaczanie sił relaksacyjnych.

Dalej zajmiemy się problemem wyznaczania sił relaksacyjnych. Opisaną procedurę dla przypadku metody Newtona zilustrowano na rysunku 8.3. Przyjmijmy, że po k -tej iteracji znane są wektory $r^{[k-1]}$ i $\delta r^{[k]}$. Poprawka $\delta r^{[k]}$ wyznaczona została w oparciu o przybliżone wartości sił $\Delta \Theta^{(e)[k]}$. Wartości $\Delta \Theta^{(e)[k+1]}$ dla kolejnej iteracji otrzymamy z warunku równowagi 8.38₁. Wyznaczony stan spełnia ten warunek z dokładnością do pewnego nieznanego błędu $\varepsilon_{error}^{(e)[k]}$. Równanie 8.38₁ dla pojedynczego elementu możemy zapisać w postaci

$$\int_{V_e} (B^{(e)})^T \sigma^{(e)[k]} dV_e - \int_{S_e} (B^{(e)})^T t^{[k]} dS_e = \varepsilon_{error}^{(e)[k]} \quad (8.50)$$

Korzystając z rozwinięcia 8.31 dokonanego wokół stanu $\tau^{[k-1]}$ powyższe równanie możemy także zapisać w postaci

$$\int_{V_e} (\mathbf{B}^{(e)})^T \left(\boldsymbol{\sigma}^{(e)[k-1]} + \check{\mathbf{D}}^{(e)[k-1]} \mathbf{B}^{(e)} \delta \mathbf{w}^{(e)[k]} + \boldsymbol{\theta}^{(e)[k]} \right) dV_e - \int_{S_e} (\mathbf{B}^{(e)})^T \mathbf{t}^{[k]} dS_e = \mathcal{E}_{\text{rros}}^{(e)[k]} \quad (8.51)$$

Składową $\boldsymbol{\theta}^{(e)[k]}$ możemy rozłożyć na część $\boldsymbol{\theta}^{(e)[k-1]}$, która po scałkowaniu zgodnie z wzorem 8.41 daje wartość $\Delta \boldsymbol{\Theta}^{(e)[k-1]}$, oraz nieznaną część $\delta \boldsymbol{\theta}^{(e)[k-1]}$ związaną z niedokładnością przybliżenia sił $\Delta \boldsymbol{\Theta}^{(e)[k-1]}$. Oznaczając przez $\delta \boldsymbol{\sigma}^{(e)[k]}$ sumę

$$\delta \boldsymbol{\sigma}^{(e)[k]} = \check{\mathbf{D}}^{(e)[k-1]} \mathbf{B}^{(e)} \delta \mathbf{w}^{(e)[k]} + \delta \boldsymbol{\theta}^{(e)[k-1]} \quad (8.52)$$

równanie 8.51 możemy jeszcze raz przepisać w postaci

$$\int_{V_e} (\mathbf{B}^{(e)})^T \left(\boldsymbol{\sigma}^{(e)[k-1]} + \delta \boldsymbol{\sigma}^{(e)[k]} + \boldsymbol{\theta}^{(e)[k-1]} \right) dV_e - \int_{S_e} (\mathbf{B}^{(e)})^T \mathbf{t}^{[k]} dS_e = \mathcal{E}_{\text{rros}}^{(e)[k]} \quad (8.53)$$

Niezbędne do dalszych obliczeń przybliżenie sił relaksacyjnych otrzymamy z następującej zależności

$$\Delta \boldsymbol{\Theta}^{(e)[k+1]} = \mathcal{E}_{\text{rros}}^{(e)[k]} - \Delta \boldsymbol{\Theta}^{(e)[k]} = \mathbf{F}_{\text{int}}^{(e)[k]} + \mathbf{F}^{(e)[k]} \quad (8.54)$$

gdzie $\mathbf{F}_{\text{int}}^{(e)[k]}$ oznacza siły wewnętrzne w elemencie. Siły te dane są wzorem

$$\mathbf{F}_{\text{int}}^{(e)[k]} = \int_{V_e} (\mathbf{B}^{(e)})^T \left(\boldsymbol{\sigma}^{(e)[k-1]} + \delta \boldsymbol{\sigma}^{(e)[k]} \right) dV_e \quad (8.55)$$

Z wzoru 8.54 wynika, że dla określenia sił relaksacyjnych $\Delta \boldsymbol{\Theta}^{(e)[k+1]}$ nie musimy znać wartości błędu $\mathcal{E}_{\text{rros}}^{(e)[k]}$ jeżeli wyznaczymy siły wewnętrzne $\mathbf{F}_{\text{int}}^{(e)[k]}$. Z kolei siły wewnętrzne są uzależnione od poprawki stanu naprężenia $\delta \boldsymbol{\sigma}^{(e)[k]}$, której nie możemy wyznaczyć z wzoru 8.52 z uwagi na nieznaną wartość $\delta \boldsymbol{\theta}^{(e)[k-1]}$.

Korekcja naprężeń w układach dysypatywnych.

Aby omówić problem wyznaczania przyrostów naprężeń odwołamy się do związków konstytutywnych, opisywanych w poprzednim rozdziale. Wcześniej zwróćmy jednak uwagę na ogólną zasadę wykorzystywaną do tej pory.

Wyżej omawiane procedury korekcyjne wywodzą się z rozwinięcia w szereg Taylora funkcji Γ oraz Ψ . Nie jest przy tym istotne jaka jest interpretacja fizyczna tych funkcji, natomiast ważne jest, żeby liczba równań była o jeden mniejsza od liczby zmiennych. W efekcie, aby utworzyć układ niejednorodny z kwadratową i niesobliwą macierzą, potrzebne jest jedno dodatkowe równanie dla wyznaczenia wszystkich składowych wektora poprawek. Przez analogię traktując związki 7.1–7.4 jako podstawę procedury korekcyjnej, przy wyznaczaniu przyrostów naprężeń brakuje nam więcej równań. Przyczyną tego jest brak odpowiednika dla prawa płynięcia wśród równań 7.1–7.4. Skutkiem tego nie możemy skorzystać z rozwinięcia odpowiedniej funkcji w szereg Taylora.

Na zasadzie analogii do prawa płynięcia plastycznego dodatkowe równania można przyjąć w postaci

$$\delta \epsilon^{p[k]} - \frac{\partial P}{\partial \sigma^{[k]}} \delta \lambda^{p[k]} = 0 \quad (8.56)$$

Przy tym założeniu i korzystając z rozwinięcia w szereg Taylora funkcji określających równania 7.1–7.4 mamy dostateczną liczbę dla wyznaczenia wszystkich niezbędnych poprawek. Poprawki modułów sprężystości $\delta D^{[k]}$ i poprawki odkształceń sprężystych $\delta \epsilon^{e[k]}$ otrzymamy w postaci

$$\left. \begin{aligned} \delta D^{[k]} &= \frac{\partial D}{\partial \epsilon^{p[k]}} \frac{\partial P}{\partial \sigma^{[k]}} \delta \lambda^{p[k]} + D^{e[k]} - D^{[k]} \\ \delta \epsilon^{e[k]} &= \delta \epsilon^{[k]} - \frac{\partial P}{\partial \sigma^{[k]}} \delta \lambda^{p[k]} - \epsilon^{e[k]} - \epsilon^{p[k]} + \epsilon^{[k]} \end{aligned} \right\} \quad (8.57)$$

przy czym $D^{e[k]}$ oznacza wartość funkcji $D[\epsilon^p]$ policzoną dla k -tego przybliżenia odkształceń plastycznych. Związki 8.57 odpowiadają równaniom 7.8₁ i 7.8₂. Równaniom 7.8₄ i 7.8₅ odpowiadają następujące zależności

$$\left. \begin{aligned} D^{[k]} \delta \epsilon^{[k]} - \delta \sigma^{[k]} + h^{[k]} \delta \lambda^{p[k]} &= b_D^{[k]} \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma^{[k]}} \delta \sigma^{[k]} - H^{[k]} \delta \lambda^{p[k]} &= -\mathcal{F}(\sigma^{[k]}, \epsilon^{p[k]}) \end{aligned} \right\} \quad (8.58)$$

Przez $H^{[k]}$ oznaczono k -te przybliżenie modułu wzmocnienia plastycznego, natomiast wektor $h^{[k]}$ oznacza k -te przybliżenie wektora h danego wzorem 7.10. Wektor $b_D^{[k]}$ dany jest wzorem

$$b_D^{[k]} = \sigma^{[k]} - D^{[k]}(\epsilon^{[k]} - \epsilon^{e[k]} - \epsilon^{p[k]}) - D^{e[k]} \epsilon^{e[k]} \quad (8.59)$$

Ponieważ poprawki $\delta \epsilon^{[k]}$ możemy wyznaczyć na podstawie poprawek przemieszczeń węzłowych i związku 8.30, zatem z równań 8.58 możemy wyznaczyć także poprawkę $\delta \lambda^{p[k]}$ oraz poszukiwaną wartość $\delta \sigma^{[k]}$.

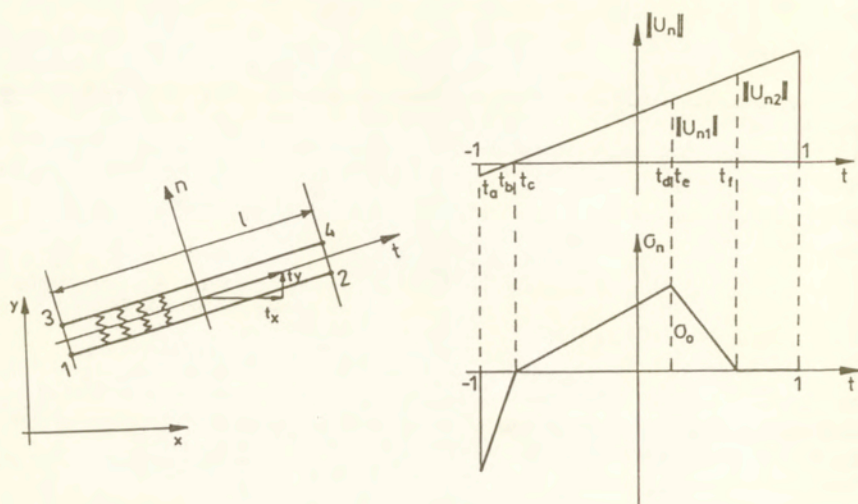
W literaturze znana jest też procedura oparta na dalej idącym uproszczeniu. Przez analogię do wzoru 7.20 przyjmuje się

$$\delta \lambda^{p[k]} = \frac{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma^{[k]}} D^{[k]} \delta \epsilon^{[k]}}{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma^{[k]}} h^{[k]} - H^{[k]}} \quad (8.60)$$

Dalej zastępując prędkości odpowiednimi poprawkami z równań 7.8₁–7.8₄ możemy wyznaczyć poprawki $\delta D^{[k]}$, $\delta \epsilon^{e[k]}$, $\delta \epsilon^{p[k]}$, $\delta \sigma^{[k]}$.

8.4.3 Element kontaktowy.

Poniżej przedstawiony jest krótki opis elementu kontaktowego i zestawienie równań służących do modelowania zlokalizowanego płynięcia plastycznego w płaskim stanie naprężenia. Omawiany element schematycznie pokazano na rysunku 8.4.



Rys. 8.4

Element kontaktowy służący do modelowania dekohezji plastycznej: a) lokalna numeracja węzłów, b) związek między przemieszczeniami i naprężeniami.

Podstawowe oznaczenia.

Ponieważ dalej opis dotyczy wyłącznie pojedynczego elementu, więc dla uproszczenia oznaczeń będziemy pomijać górny indeks $\{e\}$. Dolny indeks nadal oznacza numer węzła.

- (t_x, t_y) — składowe wektora osi t lokalnego układu współrzędnych (n, t) w układzie globalnym (x, y) ;
- $(x_{(i)}, y_{(i)})$ — współrzędne węzła w układzie globalnym;
- $(t_{(i)}, n_{(i)})$ — współrzędne węzła w układzie lokalnym;
- l — połowa długości elementu;

Przemieszczenia punktów elementu kontaktowego.

Występujące we wzorze 8.35 symbole d , N oraz w w przypadku elementu kontaktowego określone są w następujący sposób

$$\left. \begin{aligned} d &= \begin{bmatrix} u_t \\ u_n \end{bmatrix} & N &= [N_{(1)}, N_{(2)}, N_{(3)}, N_{(4)}] \\ w &= [u_{t(1)}, u_{n(1)}, u_{t(2)}, u_{n(2)}, u_{t(3)}, u_{n(3)}, u_{t(4)}, u_{n(4)}]^T \end{aligned} \right\} \quad (8.61)$$

Dodatkowo korzystamy tutaj z następujących oznaczeń

$$N_{\{i\}} = \begin{bmatrix} N_{\{i\}} & 0 \\ 0 & N_{\{i\}} \end{bmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} N_{\{1\}} = \frac{1}{4}(1 - t - n + nt) \\ N_{\{2\}} = \frac{1}{4}(1 + t - n - nt) \\ N_{\{3\}} = \frac{1}{4}(1 - t + n - nt) \\ N_{\{4\}} = \frac{1}{4}(1 + t + n + nt) \end{array} \right\} \quad (8.62)$$

Odształcenia i naprężenia w elemencie kontaktowym.

Odształcenia i naprężenia w elemencie tworzą wektory

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} [[u_t]] \\ [[u_n]] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_t(1, 0) - u_t(-1, 0) \\ u_n(t, 1) - u_n(t, -1) \end{bmatrix} \quad \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_t \\ \sigma_n \end{bmatrix} \quad (8.63)$$

Związek odształceń z przemieszczeniami węzłów określa macierz B dana następująco

$$B = [B_{\{1\}}, B_{\{2\}}, B_{\{3\}}, B_{\{4\}}] \quad (8.64)$$

gdzie

$$B_{\{i\}} = \begin{bmatrix} B_{t\{i\}} & 0 \\ 0 & B_{n\{i\}} \end{bmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} B_{t\{1\}} = -\frac{1}{2} \quad B_{n\{1\}} = \frac{1}{2}(t - 1) \\ B_{t\{2\}} = \frac{1}{2} \quad B_{n\{2\}} = -\frac{1}{2}(t + 1) \\ B_{t\{3\}} = -\frac{1}{2} \quad B_{n\{3\}} = -\frac{1}{2}(t - 1) \\ B_{t\{4\}} = \frac{1}{2} \quad B_{n\{4\}} = \frac{1}{2}(t + 1) \end{array} \right\} \quad (8.65)$$

Styczna macierz sztywności materiału.

Związek pomiędzy przyrostami naprężeń i odształceń określa macierz styczna

$$\tilde{D} = \begin{bmatrix} \tilde{D}_t & 0 \\ 0 & \tilde{D}_n \end{bmatrix} \quad (8.66)$$

Przyjęto, że element ma zerową sztywność $\tilde{D}_t = 0$. Sztywność \tilde{D}_n zależy od przemieszczeń węzłów elementu i jest funkcją współrzędnej t .

Do granicy plastyczności przy rozciąganiu sprężyste zachowanie materiału określają fikcyjne sztywności: D_{n0} przy ściskaniu i D_{n1} przy rozciąganiu. Skończona sztywność przy rozciąganiu służy do określenia początku procesu dekohezji plastycznej. Powoduje jednak, że przy niesymetrycznym obciążeniu, dla zrównoważenia momentu część elementu może być ściskana. Przy ściskaniu powstaje niepożądane zjawisko wzajemnego przenikania elementów połączonych z elementem kontaktowym. Dla zminimalizowania tego efektu przyjęto dużą sztywność na ściskanie.

Sprężysto-plastyczne zachowanie opisane zostało według modelu szeregowego. Dla członu plastycznego związek pomiędzy skokiem przemieszczeń a naprężeniami w kierunku osi t dany jest wzorem 4.20. Stąd wynikają graniczne wartości skoku przemieszczeń i moduł osłabienia

$$\llbracket u_{n1} \rrbracket = \frac{\sigma_0}{D_{n1}} \quad \llbracket u_{n2} \rrbracket = \frac{1}{2}H \quad D_{n2} = -\frac{2}{H}\sigma_0 \quad (8.67)$$

Ostatecznie sztywność \tilde{D}_n dana jest następująco

$$\tilde{D}_n = \begin{cases} D_{n0} & \text{gdy } \llbracket u_n(t) \rrbracket \leq 0 \\ D_{n1} & \text{gdy } \begin{cases} \llbracket u_n(t) \rrbracket \leq \llbracket u_{n1} \rrbracket \\ \mathcal{F} < 0 \text{ lub } \mathcal{F} = 0, \Delta \llbracket u_n(t) \rrbracket \leq 0 \end{cases} \\ \frac{D_{n1}D_{n2}}{D_{n1} + D_{n2}} & \text{gdy } \begin{cases} \llbracket u_{n1} \rrbracket < \llbracket u_n(t) \rrbracket \leq \llbracket u_{n2} \rrbracket \\ \mathcal{F} = 0, \Delta \llbracket u_n(t) \rrbracket > 0 \end{cases} \\ 0 & \text{gdy } \llbracket u_{n2} \rrbracket < \llbracket u_n(t) \rrbracket \end{cases} \quad (8.68)$$

gdzie $\mathcal{F} = 0$ jest równaniem stanu granicznego określonym przez funkcję

$$\mathcal{F} = \sigma_n - \frac{D_{n1}D_{n2}}{D_{n1} + D_{n2}}(\llbracket u_n \rrbracket - \llbracket u_{n1} \rrbracket) - \sigma_0 \quad (8.69)$$

Na rysunku 8.4b pokazano przykładowy rozkład skoku przemieszczeń i wynikający stąd rozkład naprężeń.

Macierz sztywności elementu kontaktowego.

Wstawiając macierze B i \tilde{D} do wzoru 8.40₁ otrzymamy

$$K = \frac{l}{2} \int_{-1}^1 k dt \quad (8.70)$$

gdzie macierz k dana jest wzorem

$$k = B^T \tilde{D} B = \begin{bmatrix} k_{12} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{22} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{32} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{42} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \quad (8.71)$$

oraz podmacierze k_{ij} określa wzór

$$k_{ij} = B_{(i)}^T \tilde{D} B_{(j)} \quad (8.72)$$

Wyznaczenie współczynników macierzy K wymaga policzenia całek typu

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 B_{n(i)} \tilde{D}_n (\llbracket u_n \rrbracket) B_{n(j)} dt &= D_{n0} \int_{t_a}^{t_b} B_{n(i)} B_{n(j)} dt + \\ &+ D_{n1} \int_{t_c}^{t_d} B_{n(i)} B_{n(j)} dt + \frac{D_{n1}D_{n2}}{D_{n1} + D_{n2}} \int_{t_e}^{t_f} B_{n(i)} B_{n(j)} dt \end{aligned} \quad (8.73)$$

przy czym granice całkowania (t_a, t_b), (t_c, t_d) i (t_e, t_f) zależą od stanu przemieszczeń węzłów elementu i wyznaczone są tak by zachodziły nierówności $t_a \leq t_b$, $t_c \leq t_d$ i $t_e \leq t_f$. Wszystkie całki występujące przy wyznaczaniu macierzy sztywności dają się wyznaczyć analitycznie w elementarny sposób — sprowadzają się do jednego z trzech podstawowych typów.

Transformacja macierzy sztywności z układu lokalnego do układu globalnego.

W przypadku, gdy osie układu lokalnego nie są równoległe do osi układu globalnego (tj. gdy $t_x \neq 1$) należy dokonać transformacji macierzy sztywności elementu

$$K_g = QKQ^T \tag{8.74}$$

gdzie indeks 'g' wskazuje macierz sztywności elementu w układzie globalnym, natomiast macierz obrotu Q dana jest w postaci

$$Q = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} t_x & -t_y \\ t_y & t_x \end{bmatrix} \tag{8.75}$$

Wyznaczanie sił relaksacyjnych.

Wektor sił relaksacyjnych w układzie lokalnym $\Delta\Theta^{[k]}$ wyznaczmy wstawiając do wzoru 8.54 siły

$$F_{int}^{[k]} = [F_{t(1),int}^{[k]}, F_{n(1),int}^{[k]}, F_{t(2),int}^{[k]}, F_{n(2),int}^{[k]}, F_{t(3),int}^{[k]}, F_{n(3),int}^{[k]}, F_{t(4),int}^{[k]}, F_{n(4),int}^{[k]}]^T \tag{8.76}$$

oraz

$$F^{[k]} = [F_{t(1)}^{[k]}, F_{n(1)}^{[k]}, F_{t(2)}^{[k]}, F_{n(2)}^{[k]}, F_{t(3)}^{[k]}, F_{n(3)}^{[k]}, F_{t(4)}^{[k]}, F_{n(4)}^{[k]}]^T \tag{8.77}$$

Wobec przyjętej zerowej sztywności w kierunku t mamy $F_{t(i),int}^{[k]} = 0$, natomiast składowe $F_{n(i),int}^{[k]}$ otrzymamy licząc całki typu

$$\int_{-1}^1 B_{n(i)} \sigma_n^{[k]} dt = D_{n0} \int_{t_a}^{t_b} B_{n(i)} dt + D_{n1} \int_{t_c}^{t_d} B_{n(i)} dt + \int_{t_e}^{t_f} B_{n(i)} \left[\frac{D_{n1} D_{n2}}{D_{n1} + D_{n2}} (||u_n^{[k]}|| - ||u_{n1}||) + \sigma_0 \right] dt \tag{8.78}$$

przy czym granice całkowania (t_a, t_b) , (t_c, t_d) i (t_e, t_f) wyznaczane są tak jak w przy wyznaczaniu macierzy sztywności.

8.5 Uwagi końcowe.

W prezentowanej pracy pominięto omawianie wielu ważnych zagadnień numerycznych, takich jak wybór kroku całkowania, kryteria zbieżności i wyznaczanie punktów bifurkacji. Pominięto także omawianie metod modyfikowanych, w których macierz układu korekcyjnego wyznaczana jest tylko w pierwszym kroku. Problemy te są dobrze opisane w literaturze i w tym zakresie obecna praca niczego nowego nie wnosi. Celem dokonanego wyżej przeglądu było jedynie pokazanie, w jaki sposób proponowana idea badania rzędu macierzy może łączyć wiele znanych wariantów metody kontynuacji. Wydaje się, że na koniec warto kilka uwag poświęcić przewidywanym dalszym możliwościom rozwoju tej idei.

Zauważmy, że budowa pewnie działającego algorytmu powinna zabezpieczać jego poprawną pracę w każdej sytuacji. Z tego punktu widzenia możemy przedyskutować wcześniej przyjęte założenie, że w procesie korekcyjnym rząd macierzy G wyznaczonej w punkcie $\mathbf{r}^{(k)}$ jest równy $(N-1)$. Takie założenie jest usprawiedliwione tylko na bazie doświadczeń znanych z literatury. Dotychczas nie obserwowano (lub nie opublikowano) przypadku, aby w trakcie obliczeń macierz układu była osobliwa. Nie jest to jednak satysfakcjonujący dowód, że taka sytuacja nie może zaistnieć. Wydaje się, że ścisły dowód byłby nawet trudny do przeprowadzenia. W przypadku osobliwej macierzy $C^{(k)}$ układu korekcyjnego analiza rzędu macierzy może dostarczyć odpowiedź w jaki sposób otrzymać macierz nieosobliwą. W ogólnym przypadku liczba dodatkowych równań potrzebnych w procesie korekcyjnym wynosi $K = N - r$, gdzie r oznacza tym razem rząd macierzy $G(\mathbf{r}^{(k)})$.

Dla potrzeb prezentowanej pracy wykorzystano metodę Gaussa z pełnym wyborem największego współczynnika. Należy się spodziewać, że koszty z tym związane można będzie obniżyć przez zastosowanie innych metod. Można znaleźć w literaturze prace, w których zajmowano się rozkładem macierzy podobnym do transformacji 8.1. Poprawność numeryczną różnych metod analizowano np. w pracy [33]. Rozkład macierzy prostokątnych jest też podstawą metody SVD ("Singular Value Decomposition", patrz [46, 66]). Trzeba będzie przeprowadzić badania w celu wykorzystania istniejących, poprawnych numerycznie i efektywnych algorytmów, pod kątem ich zastosowania do wyboru zmiennych sterujących. Ponadto wydaje się, że znaczne obniżenie kosztów obliczeń można będzie osiągnąć wykorzystując cechy macierzy wynikające z fizycznego charakteru analizowanego problemu.

Traktując wszystkie zmieniające się w procesie wielkości jako składowe wektora \mathbf{r} otrzymujemy układ równań z charakterystyczną rzadką macierzą G . Podział tej macierzy na podmacierze blokowe i badanie wyróżnionych w ten sposób macierzy niezerowych może znacznie ułatwić analizę (patrz np. [4]). Przykładowo dla układów prętowych macierzy G można tak przedstawić, aby wyróżnić w niej blokowe podmacierze niezerowe charakteryzujące materiał i położenie prętów. Można też wyróżnić macierze określające wzajemne powiązania prętów w układzie. Rząd macierzy powiązań jest znany z teorii grafów.

Rozdział 9.

Przykłady obliczeniowe.

Możliwość zastosowania w metodzie kontynuacji analizy rzędu macierzy początkowo testowano na szeregu sprężystych układach prętowych. Dwa z tych przykładów omówiono w pierwszej części rozdziału: pierwszy prezentuje szereg punktów granicznych dla przemieszczeń i sił, drugi dotyczy problemu bifurkacji. W drugiej części rozdziału przedstawiono analizę tarcz prostokątnych z karbem w miejscu utwierdzenia, poddanych równomiernemu rozciąganiu. Na skutek koncentracji naprężeń w okolicy karbu rozpoczyna się dekohezja plastyczna i tarcza ulega oderwaniu. Analizę tarcz wykonano przy użyciu programu MES2S zaczerpniętego z pracy [41] i dostosowanego do zagadnień nieliniowych. Program łączy elementy kontaktowe opisane w poprzednim rozdziale z elementami trójkątnymi o liniowej aproksymacji przemieszczeń.

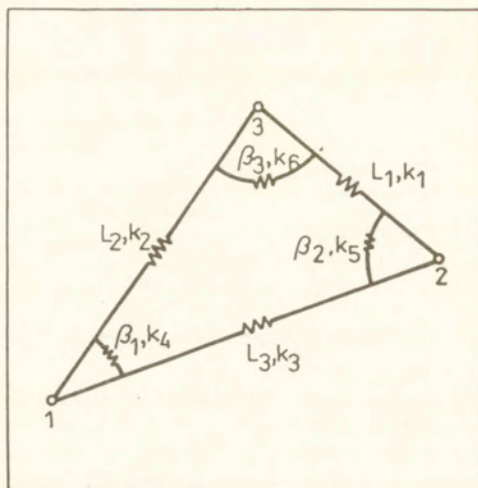
9.1 Sprężyste układy prętowe.

W obu omawianych niżej przykładach analizowana konstrukcja jest szczególnym przypadkiem układu złożonego z trzech prętów połączonych na kształt trójkąta oraz trzech sprężyn kątowych umieszczonych w węzłach 1,2,3 (patrz Rys. 9.1). Przyjmujemy następujące oznaczenia

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= [l_1, l_2, l_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3]^T && \text{– współrzędne uogólnione;} \\ \mathbf{X} &= [\lambda_{x1}^r, \lambda_{x2}^r, \lambda_{x3}^r, \lambda_{y1}^r, \lambda_{y2}^r, \lambda_{y3}^r]^T && \text{– siły odniesienia;} \\ \mathbf{d} &= [d_{x1}, d_{x2}, d_{x3}, d_{y1}, d_{y2}, d_{y3}]^T && \text{– uogólnione przemieszczenia.} \end{aligned} \quad (9.1)$$

Na rysunku 9.1 oznaczono składowe wektora \mathbf{q} i sztywności k_j ($j = 1, \dots, 6$) elementów układu. Należy zaznaczyć, że składowe l_i ($i = 1, 2, 3$) nie mają charakteru długości, bowiem jako współrzędne mogą być dodatnie lub ujemne, a ich znak zależy od zgodności składowych l_i ze zwrotem jednostkowych wektorów \mathbf{e}_i (patrz Rys. 9.2). Wobec przyjętych współrzędnych energia odkształcenia wyraża się prostym wzorem

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} [k_1(l_1 - l_{10})^2 + k_2(l_2 - l_{20})^2 + k_3(l_3 - l_{30})^2] \\ &+ \frac{1}{2} [k_4(\beta_1 - \beta_{10})^2 + k_5(\beta_2 - \beta_{20})^2 + k_6(\beta_3 - \beta_{30})^2] \end{aligned} \quad (9.2)$$



Rys. 9.1

Uogólnione współrzędne l_i , β_i ($i = 1, 2, 3$) oraz sztywności k_j ($j = 1, \dots, 6$) elementów.

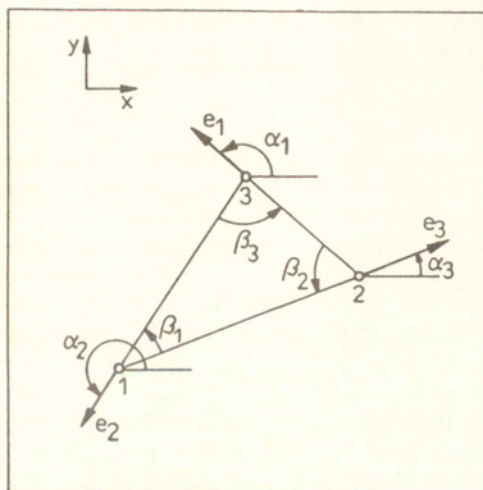
Dodatknie zwroty składowych wektorów \mathcal{X} i d pokazano na rysunku 9.3.

9.1.1 Wybór współrzędnych uogólnionych.

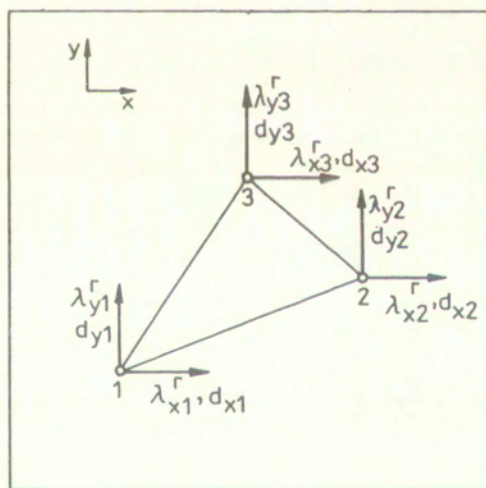
Związki pomiędzy uogólnionymi współrzędnymi i przemieszczeniami są następujące

$$\begin{aligned}
 -d_{x2} + d_{x3} &= l_1 \cos \alpha_1 - l_{10} \cos \alpha_{10} \\
 d_{x1} \quad \quad -d_{x3} &= l_2 \cos \alpha_2 - l_{20} \cos \alpha_{20} \\
 -d_{x1} + d_{x2} &= l_3 \cos \alpha_3 - l_{30} \cos \alpha_{30} \\
 -d_{y2} + d_{y3} &= l_1 \sin \alpha_1 - l_{10} \sin \alpha_{10} \\
 d_{y1} \quad \quad -d_{y3} &= l_2 \sin \alpha_2 - l_{20} \sin \alpha_{20} \\
 -d_{y1} + d_{y2} &= l_3 \sin \alpha_3 - l_{30} \sin \alpha_{30} \\
 -\alpha_2 + \alpha_3 &= -\pi - \beta_1 \\
 \alpha_1 \quad \quad -\alpha_3 &= \pi - \beta_2 \\
 -\alpha_1 + \alpha_2 &= \pi - \beta_3
 \end{aligned} \tag{9.3}$$

gdzie kąty α_i ($i = 1, 2, 3$) oznaczone zostały na rysunku 9.2. Powyższe równania określają trzy układy równań z osobliwymi macierzami. Dla rozwiązania tych układów należy poczynić dodatkowe założenia wynikające w sposób oczywisty z warunków podparcia w kartezjańskim układzie współrzędnych x - y . Jest także oczywiste, że składowe wektora q spełniają warunki zgodności wynikające z relacji pomiędzy uogólnionymi współrzędnymi i przemieszczeniami. Zakładając przykładowo, że $\alpha_3 = \alpha_{30} = 0$, $d_{x1} = d_{y1} = 0$ otrzymujemy



Rys. 9.2
Wektory jednostkowe e_i oraz kąty α_i ($i = 1, 2, 3$).



Rys. 9.3
Uogólnione siły λ_{xi} , λ_{yi} i przemieszczenia d_{xi} , d_{yi} ($i = 1, 2, 3$).

$$\begin{aligned}
 l_1 \cos \beta_2 - l_{10} \cos \beta_{20} + l_2 \cos \beta_1 - l_{20} \cos \beta_{10} - l_3 + l_{30} &= 0 \\
 l_1 \sin \beta_2 - l_{10} \sin \beta_{20} - l_2 \sin \beta_1 + l_{20} \sin \beta_{10} &= 0 \\
 \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - \pi &= 0
 \end{aligned}
 \tag{9.4}$$

W rezultacie tylko trzy współrzędne mogą być swobodnie zmieniane, natomiast pozostałe składowe wektora q wynikają z rozwiązania powyższych równań zgodności. Wspominamy o tych prostych faktach, ponieważ wynika z nich konieczność wyboru swobodnych współrzędnych. Warunki podparcia są cechą charakterystyczną konstrukcji, jednak nie ma żadnych przesłanek wskazujących, które ze współrzędnych powinny stanowić swobodne zmienne — zwykle wybór zależy od naszej wygody. Ponieważ ten arbitralny wybór może w pewnych sytuacjach powodować osobliwości rozwiązań, więc w opinii autora ma on do pewnego stopnia podobne znaczenie jak problem wyboru zmiennej sterującej w metodzie kontynuacji. Że tak jest w istocie pokażemy dalej na przykładzie. Pamiętając o tym przyjmować będziemy, że omawiane przykłady opisane są w przestrzeni 4-wymiarowej x , przy czym składowe x_i dla $i = 1, 2, 3$ reprezentować będą swobodne zmienne q_j oraz $x_4 = \lambda$. Ponadto zamiast rozwiązywać równania zgodności 9.4 skorzystamy z bezpośrednich związków geometrycznych pomiędzy składowymi wektora q . Przykładowo składową l_3 możemy przedstawić jako funkcję swobodnych zmiennych l_1, l_2, β_3 w następujący sposób

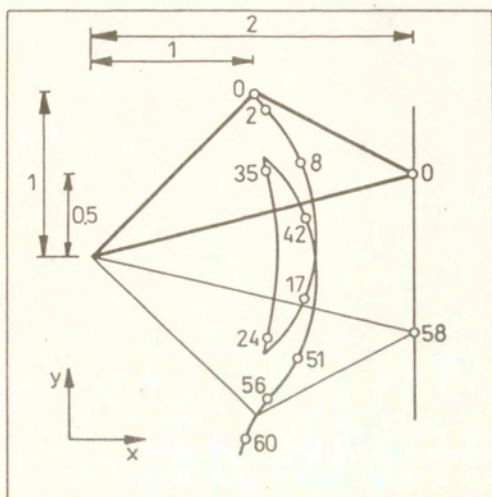
$$l_3 = \sigma \sqrt{l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos \beta_3} \tag{9.5}$$

gdzie $\sigma = 1$ dla $\beta_3 \geq 0$ i $\sigma = -1$ dla $\beta_3 \leq 0$.

9.1.2 Przykład z punktami granicznymi.

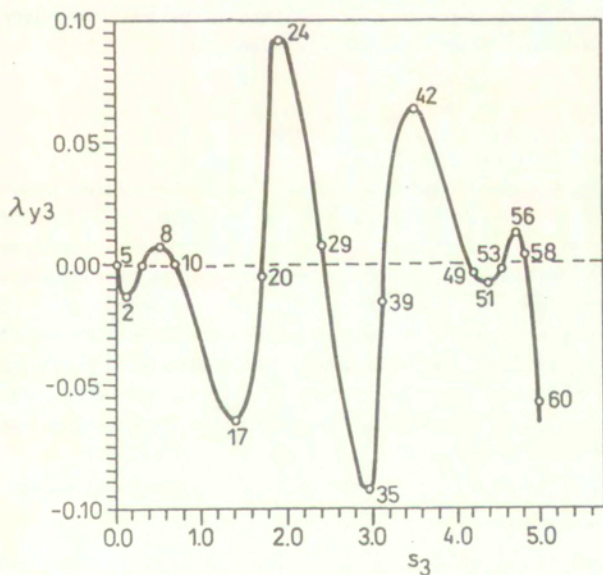
Pierwszy przykład związany jest z pokonywaniem punktów granicznych. Zakładamy, że konstrukcja jest sprężysta i że charakteryzują ją następujące sztywności oraz warunki podparcia: $k_1 = k_2 = k_3 = 1$, $k_4 = k_5 = k_6 = 0$, $d_{x1} = d_{y1} = d_{x2} = 0$ — brak sprężyn kątowych, węzeł 1 zamocowany w sposób uniemożliwiający przesunięcia, węzeł 2 może ślizgać się po pionowej linii prostej. Przyjęte wymiary początkowej konfiguracji układu pokazane zostały na rysunku 9.4. Deformację powoduje obciążenie λ_{y3} przyłożone do węzła 3 i działające w kierunku pionowym. Przyjęto, że w początkowej fazie procesu obciążenie powoduje ściskanie prętów.

Zmiany obciążenia w funkcji długości drogi przebytej przez węzeł 3 pokazano na rysunku 9.5 ($s_3 = \int_0^s \sqrt{d_{x3}^2 + d_{y3}^2} ds$). Dla ułatwienia analizy procesu na rysunku 9.4 pokazano, drogę po której porusza się węzeł 3, a na rysunku 9.6 zmiany konfiguracji. Zaznaczone na rysunkach numery oznaczają liczbę kroków obliczeniowych potrzebnych do wyznaczenia kolejnych punktów na szkieście obciążenia (numerację węzłów pominięto). Cały proces składa się zasadniczo z dwóch faz. Obie fazy rozdziela od siebie stan wolny od naprężeń wyznaczony przez konfigurację będącą lustrzanym odbiciem konfiguracji początkowej (okolice punktu 58). W trakcie pierwszej fazy obciążenie kilkakrotnie przekracza punkty graniczne, natomiast w drugiej fazie proces przebiega przy monotonicznym wzroście obciążenia do nieskończoności. Także pętla, po której porusza się węzeł 3, wynika z przekraczania punktów granicznych



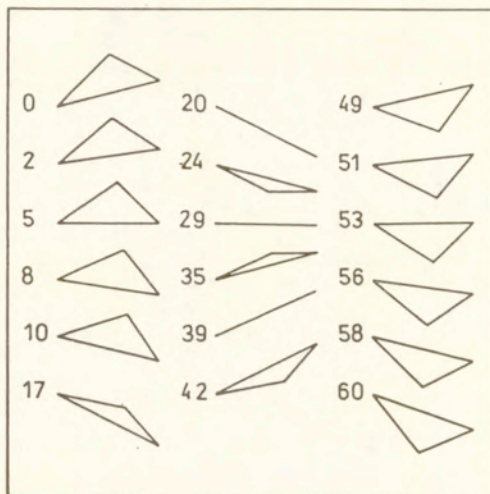
Rys. 9.4

Układ prętowy z szeregiem punktów granicznych na ścieżce obciążenia wywołanej siłą λ_{y3} .



Rys. 9.5

Zmiany obciążenia w funkcji drogi przebytej przez obciążony węzeł.



Rys. 9.6
Zmiany konfiguracji.

przemieszczeń. Pomimo prostoty konstrukcji omawiany przykład jest interesujący z uwagi na stosunkowo złożony charakter przebiegu procesu deformacji.

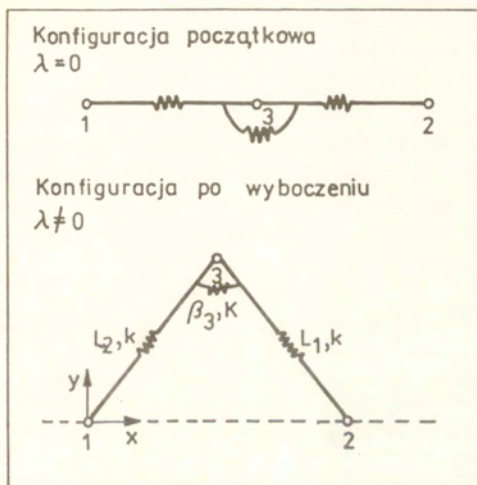
9.1.3 Przykład problemu z bifurkacją.

Jako przykład, w którym występuje bifurkacja ścieżki równowagi, rozważmy problem statycznej równowagi układu złożonego z dwóch prętów i sprężyny kątowej (patrz Rys. 9.7). Układ ten otrzymamy jako szczególny przypadek układu z rysunku 9.1 przyjmując $k_1 = k_2 = k$, $k_3 = k_4 = k_5 = 0$, $k_6 = K$. Warunki podparcia są następujące $d_{x1} = d_{y1} = d_{y2} = 0$. Zakładając ścisłowanie prętów ($\lambda^r = [1, -1, 0, 0, 0, 0]^T$). Jako swobodne współrzędne przyjmować będziemy l_1, l_2 i β_3 , stąd $\mathbf{x} = [l_1, l_2, \beta_3, \lambda]^T$. Przykład ten był analizowany przez Frieda ([29]), przy czym wówczas liczba zmiennych była zmniejszona w wyniku wykorzystania symetrii układu. Tutaj nie będziemy korzystać z tej własności z powodów, które przedstawione zostaną pod koniec omawiania problemu.

W tym szczególnym przypadku energia potencjalna układu wyraża się wzorem

$$V = \frac{1}{2}k(l_1 - l_{10})^2 + \frac{1}{2}k(l_2 - l_{20})^2 + \frac{1}{2}K(\beta_3 - \pi)^2 - \lambda(l_3(l_1, l_2, \beta_3) - l_{30}) \quad (9.6)$$

Stąd równania równowagi przyjmują postać



Rys. 9.7

Układ prętowy z punktem bifurkacji na ścieżce obciążenia wywołanej siłą λx_2 .

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \frac{\partial V}{\partial l_1} = k(l_1 - l_{10}) - \lambda \frac{l_1 - l_2 \cos \beta_3}{l_3} = 0 \\ \Gamma_2 &= \frac{\partial V}{\partial l_2} = k(l_2 - l_{20}) - \lambda \frac{l_2 - l_1 \cos \beta_3}{l_3} = 0 \\ \Gamma_3 &= \frac{\partial V}{\partial \beta_3} = K(\beta_3 - \pi) - \lambda \frac{l_1 l_2 \sin \beta_3}{l_3} = 0\end{aligned}\quad (9.7)$$

Przyjmując $l_{10} = l_{20} = l_0 = 1$ mamy dwa rozwiązania równań równowagi: dla $\beta_3 = \pi$ i dla $\beta_3 \in (-\pi, \pi)$. W pierwszym przypadku mamy $l_1 = l_2 = l$ i $\lambda = k(l - l_0)$. Wprowadzając dodatkowe oznaczenia

$$\omega = \frac{-\sin \beta_3}{(1 - \cos \beta_3)(\beta_3 - \pi)} \quad \vartheta = K/k \quad (9.8)$$

drugie rozwiązanie wyrażone w funkcji kąta β_3 przyjmuje postać dla $\beta_3 \neq 0$

$$l_1 = l_2 = \frac{1}{2} \left(l_0 \pm \sqrt{l_0^2 - 4 \frac{\vartheta}{\omega}} \right) \quad \lambda = \frac{-k\sigma}{\sqrt{2(1 - \cos \beta_3)}} \left(l_0 \mp \sqrt{l_0^2 - 4 \frac{\vartheta}{\omega}} \right) \quad (9.9)$$

oraz dla $\beta_3 \rightarrow 0$

$$\lim_{\beta_3 \rightarrow 0} l = \frac{1}{2}(l_0 \pm l_0) \quad \lim_{\beta_3 \rightarrow 0} \lambda = \begin{cases} -\frac{\pi k \vartheta}{l_0} & (l = l_0) \\ -\sigma \infty & (l = 0) \end{cases} \quad (9.10)$$

W obu przypadkach l_3 wyraża się następująco

$$l_3 = \frac{\sigma}{2} \left(l_0 \pm \sqrt{l_0^2 - 4 \frac{\vartheta}{\omega}} \right) \sqrt{2(1 - \cos \beta_3)} \quad (9.11)$$

($\sigma = 1$ dla $\beta_3 \geq 0$ oraz $\sigma = -1$ dla $\beta_3 \leq 0$). Zgodnie z wcześniejszymi uwagami należy zauważyć, że konieczność wyznaczania granic jest konsekwencją naszego wyboru swobodnych zmiennych. Chociaż problem osobliwości możemy w tym przypadku rozwiązać analitycznie, to jednak przy poszukiwaniu numerycznego rozwiązania należy podjąć specjalne środki ostrożności w celu uniknięcia możliwych trudności obliczeniowych. Punkt bifurkacji wynika z następujących granic

$$\begin{aligned} \lim_{\beta_3 \rightarrow \pi} l &= \frac{1}{2} \left(l_0 \pm \sqrt{l_0^2 - 8\vartheta} \right) & \lim_{\beta_3 \rightarrow \pi} \lambda &= -\frac{k}{2} \left(l_0 \mp \sqrt{l_0^2 - 8\vartheta} \right) \\ \lim_{\beta_3 \rightarrow \pi} l_3 &= l_0 \pm \sqrt{l_0^2 - 8\vartheta} \end{aligned} \quad (9.12)$$

i wreszcie koniec procesu określony jest następująco

$$\lim_{\beta_3 \rightarrow -\pi} l = \pm\infty \quad \lim_{\beta_3 \rightarrow -\pi} \lambda = \mp\infty \quad \lim_{\beta_3 \rightarrow -\pi} l_3 = \mp\infty \quad (9.13)$$

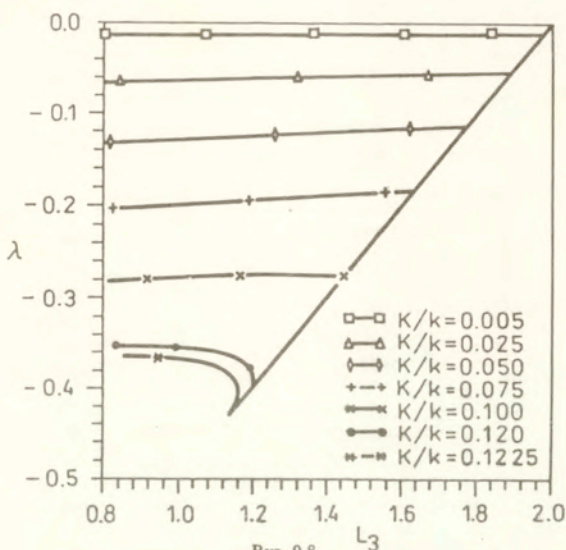
Przy numerycznym rozwiązywaniu zagadnienia, w każdym kroku obliczeniowym należy rozwiązać jednorodny układ równań z prostokątną macierzą postaci

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Gamma_1}{\partial l_1} & \frac{\partial \Gamma_1}{\partial l_2} & \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \beta_3} & \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \Gamma_2}{\partial l_1} & \frac{\partial \Gamma_2}{\partial l_2} & \frac{\partial \Gamma_2}{\partial \beta_3} & \frac{\partial \Gamma_2}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \Gamma_3}{\partial l_1} & \frac{\partial \Gamma_3}{\partial l_2} & \frac{\partial \Gamma_3}{\partial \beta_3} & \frac{\partial \Gamma_3}{\partial \lambda} \end{bmatrix} \quad (9.14)$$

lub po uwzględnieniu postaci równań równowagi

$$G = \frac{1}{l_3^3} \begin{bmatrix} -\lambda l_2^2 \sin^2 \beta_3 + k l_3^3 & -\lambda l_1 l_2 \sin^2 \beta_3 \\ -\lambda l_1 l_2 \sin^2 \beta_3 & -\lambda l_1^2 \sin^2 \beta_3 + k l_3^3 \\ -\lambda(l_2 - l_1 \cos \beta_3) l_2^2 \sin \beta_3 & -\lambda(l_1 - l_2 \cos \beta_3) l_1^2 \sin \beta_3 \\ -\lambda(l_2 - l_1 \cos \beta_3) l_2^2 \sin \beta_3 & -(l_1 - l_2 \cos \beta_3) l_3^2 \\ -\lambda(l_1 - l_2 \cos \beta_3) l_1^2 \sin \beta_3 & -(l_2 - l_1 \cos \beta_3) l_3^2 \\ -\lambda l_1 l_2 [(l_1^2 + l_2^2) \cos \beta_3 - l_1 l_2 (\cos^2 \beta_3 + 1)] + K l_3^3 & -l_1 l_2 l_3^2 \sin \beta_3 \end{bmatrix} \quad (9.15)$$

W punkcie bifurkacji trzeci wiersz macierzy G zawiera wyłącznie zera, a więc $r = 2$. Można zauważyć, że niezależne składowe wektora stycznego odpowiadają zmiennej β_3 i jednej z pozostałych zmiennych (np. λ). Pierwsze przybliżenie kolejnego punktu równowagi może być znalezione przyjmując $\hat{x}_{(\nu-1)}^* = [l_{(\nu-1)}^*, l_{(\nu-1)}^*, 0, 1]^T$ lub $\hat{x}_{(\nu-1)}^* = [l_{(\nu-1)}^*, l_{(\nu-1)}^*, 1, 0]^T$. Z przeprowadzonych eksperymentów numerycznych wynika, że po dalszej korekcie rozwiązania

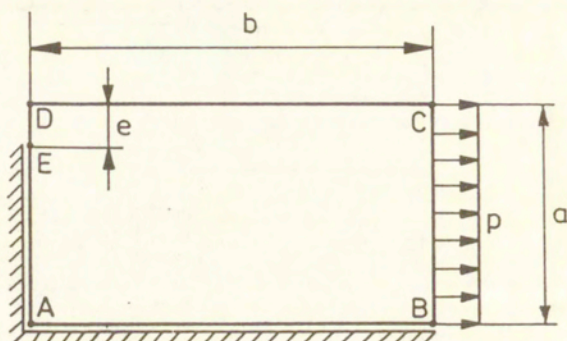
Zmiany parametru obciążenia λ w funkcji zmiennej l_3 .

oba kierunki wektora stycznego prowadzą do punktów na dwu różnych gałęziach równowagi. W otoczeniu punktu bifurkacji mamy $r = 3$ i kontynuowanie obliczeń wymaga dokonania wyboru tylko jednej zmiennej sterującej. W stanie powybozczeniowym zmienną sterującą jest kąt β_3 . Porównując rozwiązanie numeryczne z analitycznym stwierdzono bardzo dobrą dokładność obliczeń. Zmiany parametru obciążenia w funkcji zmiennej l_3 pokazano na rysunku 9.8.

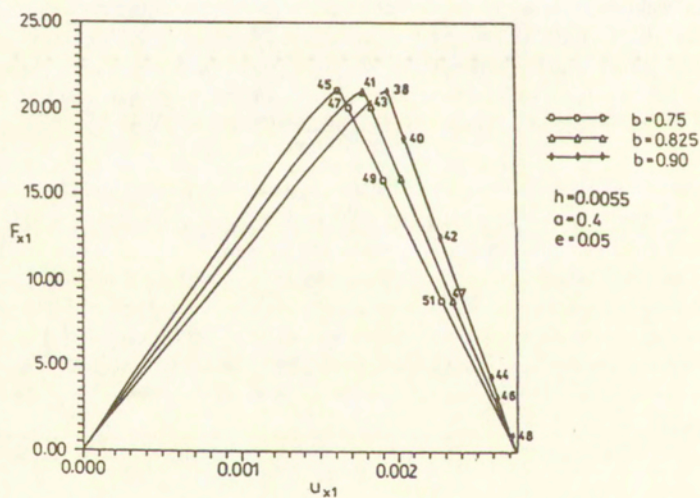
Omawiany przykład dodatkowo wykazuje jeszcze jedną ważną cechę metody kontynuacji. W trakcie obliczeń w sposób automatyczny dobierany był krok obliczeniowy w taki sposób, aby zapewnić zbieżność procesu korekcyjnego. Już po przekroczeniu punktu krytycznego, w znacznej od niego odległości, proces obliczeniowy zatrzymywał się z uwagi na stopniową redukcję do zera wielkości kroku obliczeniowego. Problem ten nie występował, gdy podobnie jak Fried wykorzystywano symetrię analizowanego układu. Rheinboldt ([70]) pokazał, że takie numeryczne niestabilności mogą występować, gdy krzywizna funkcji $\alpha(s)$ nie maleje. Wydaje się, że w literaturze nie ma odpowiedzi na pytanie jak kontynuować obliczenia w takiej sytuacji.

9.2 Dekohezja plastyczna w tarczy prostokątnej.

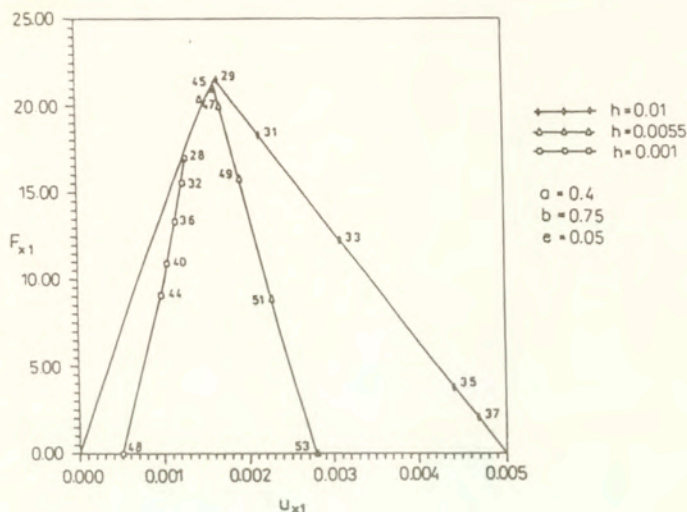
Omówimy obecnie wyniki analizy procesu obciążania płaskiej tarczy pokazanej na rysunku 9.9. Ze względu na niewielką grubość h w stosunku do wymiarów a , b , w tarczy panuje płaski stan naprężenia. Tarcza podparta jest przesuwnie wzdłuż krawędzi AB oraz AE (punkt A jest całkowicie unieruchomiony). Krawędzie CD i DE są swobodne i wolne od



Rys. 9.9
Sposób podparcia i obciążenia płaskiej tarczy.



Rys. 9.10
Wpływ długości tarczy na przebieg procesu zniszczenia.

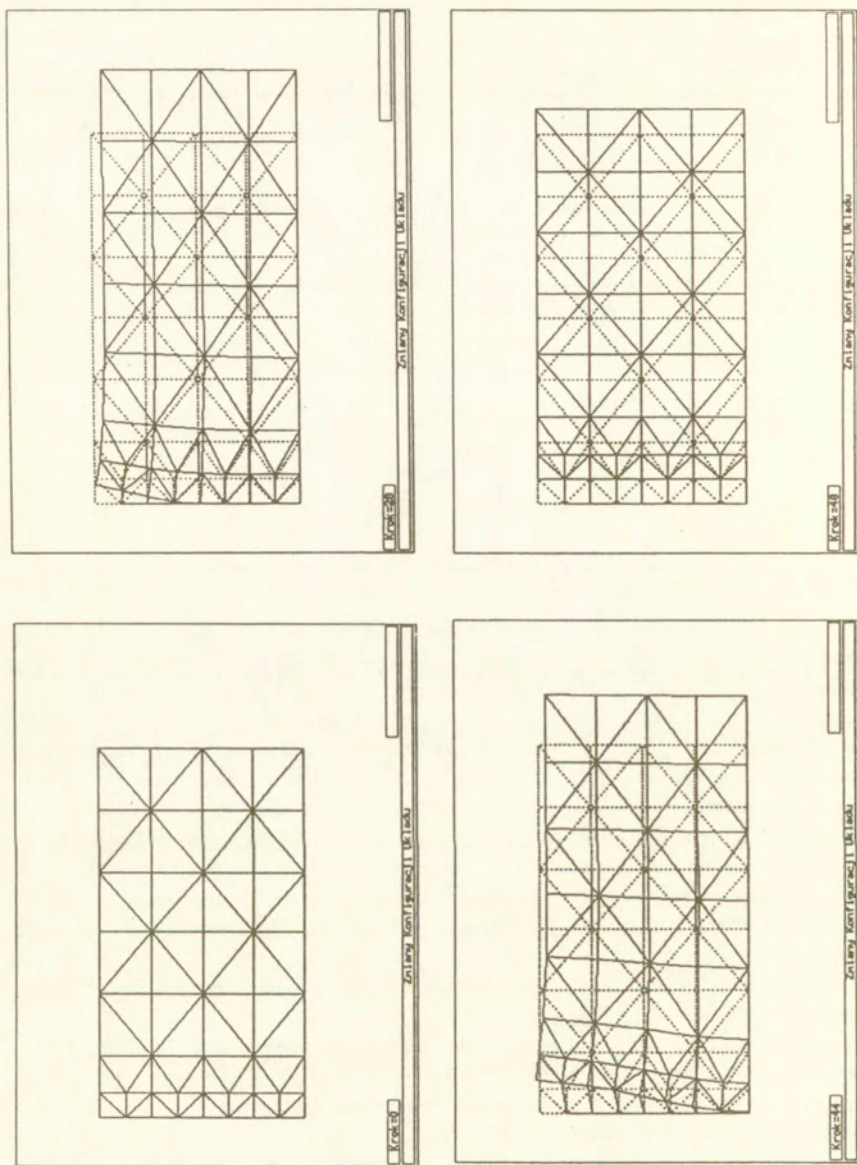


Rys. 9.11

Wpływ grubości tarczy na przebieg procesu zniszczenia.

obciążeń. Obciążenie zewnętrzne stanowi równomiernie rozłożone ciśnienie p przyłożone do krawędzi BC i powodujące rozciąganie tarczy. Do obliczeń przyjęto następujące dane materiałowe: moduł Younga $2.1 \cdot 10^5 [MPa]$, granica plastyczności $500.0 [MPa]$, współczynnik Poissona 0.3 . W miejsce ciśnienia p dane do obliczeń zawierały obciążenie w formie węzłowych sił odniesienia $F_x^{(e)} = 1.0 [MN/m]$. Siatka elementów skończonych była jednakowa dla wszystkich omawianych przypadków, a wymiary elementów zmieniane były proporcjonalnie do wymiaru b . Podział tarczy na elementy skończone widoczny jest na rysunku 9.12. Model składa się z 75 elementów (w tym 7 elementów kontaktowych) i 56 węzłów. Elementy kontaktowe rozmieszczono wzdłuż przewidywanej krawędzi zniszczenia, tj. odcinka AE . Przyjmowane do obliczeń wymiary (w metrach) podane są na rysunkach 9.10 i 9.11 obok wykresów zależności $u_{x1} - F_{x1}$. Przez u_{x1} i F_{x1} oznaczono przemieszczenie i obciążenia węgła pokrywającego się z punktem B .

Przeprowadzone testy umożliwiają dokonanie oceny opracowanego elementu kontaktowego. Przebieg zależności $F_{x1}(u_{x1})$ jest zgodny z oczekiwaniami. Dla tarcz dłuższych maksimum obciążenia występuje przy większych wartościach przemieszczeń. Zmiany grubości wpływają na wartość maksymalnego obciążenia oraz na przebieg procesu w stanie pokrytycznym — przy mniejszych grubościach obserwujemy kruche zachowanie się tarczy. Wobec braku rozwiązania analitycznego o poprawności obliczeń może świadczyć jedynie wartość przemieszczenia w chwili zakończenia procesu dekohezji. Zgodnie z oczekiwaniem przemieszczenie to jest równe połowie grubości tarczy. Zaletą elementu kontaktowego jest możliwość modelowania zlokalizowanego efektu osłabienia, natomiast wadą jest zastosowana liniowa aproksymacja rozkładu naprężeń. Skutkiem tej aproksymacji jest nieliniowy charakter procesu deformacji od samego początku obliczeń i konieczność stosowania iteracji zanim pow-



Rys. 9.12

Stan deformacji siatki elementów skończonych dla kolejnych kroków całkowania (tarcza o grubości $h = 0.001$).

stanie pierwsze zjawisko uplastycznienia. Nieliniowość jest wynikiem opisanego wcześniej ściskania części elementu przy niesymetrycznym obciążeniu elementu.

Uzyskane rezultaty świadczą też o skuteczności metody opartej o analizę rzędu macierzy i wybór zmiennej sterującej. Wydaje się, że jest to szczególnie widoczne w przypadku cienkiej tarczy. Na rysunkach 9.10 i 9.11 widać, że dla grubości $h = 0.001$ funkcje $u_{x1}(F_{x1})$ oraz $F_{x1}(u_{x1})$ są dwuwartościowe. Rysunek 9.12 pokazuje kształt zdeformowanej siatki dla wybranych czterech kroków całkowania. Dodatkowo dla ułatwienia oceny skuteczności programu na rysunkach 9.10 i 9.11, pokazano numery i pozycje niektórych punktów obliczeniowych w stanie pokrytycznym.

9.3 Uwagi końcowe.

Prezentowana praca stanowi pierwszą próbę wykorzystania nowego podejścia. Na tym etapie badań problemem było czy w praktyce metoda będzie skuteczna tak jak by to wynikało z rozważań teoretycznych. Z tego względu nie zajmowano się opracowywaniem najbardziej efektywnego algorytmu. Pomimo to na podstawie uzyskanych rezultatów można wyciągnąć już pewne wnioski, a także należy określić oczekiwania związane z dalszym rozwojem przedstawionej metody.

Przede wszystkim, analiza rzędu macierzy jako element metody kontynuacji ujednocila algorytm obliczeń i upraszcza budowę programu komputerowego. W dowolnym punkcie ścieżki równowagi obliczenia wykonywane są z równą łatwością, niezależnie od tego czy jest to punkt regularny, czy krytyczny. Wynika stąd najważniejsza cecha algorytmu, tj. możliwość wyboru gałęzi równowagi wychodzącej z punktu bifurkacji bez konieczności stosowania dodatkowego algorytmu. W tym zakresie należy także oczekiwać największych zysków w kosztach obliczeń, z uwagi na możliwości rozwiązania problemów bifurkacji bez potrzeby kosztownego rozwiązywania zagadnienia własnego i wyznaczania drugich pochodnych.

Problem efektywności algorytmu na obecnym etapie nie może być dostatecznie szczegółowo omówiony. Można jedynie wspomnieć, że efektywność procedury była badana w oparciu o przykład testowy zaproponowany przez Crisfielda i opisany przez Fujii. W tym przypadku liczba iteracji niezbędnych do osiągnięcia zadanej dokładności obliczeń była taka sama jak podana przez Fujii. W przypadku bifurkacji, do osiągnięcia zbieżności w okolicy następnego punktu równowagi liczba iteracji wynosiła 6-10. Trzeba jednak przyznać, że nie są jasne wszystkie aspekty z tym związane i wymaga to dalszych badań. Dla prezentowanych przykładów dekohezji tarczy, czas potrzebny na wykonanie obliczeń na komputerze 486 z zegarem 50MHz wynosił średnio około jednej godziny. Uzyskiwana dokładność równowagi sił wężłowych była rzędu 10^{-10} przy średnio trzech iteracjach w procesie korekcyjnym.

Otrzymane dotychczas rezultaty zachęcają do dalszych badań. Przede wszystkim należy opracować efektywną metodę wyznaczania rzędu macierzy z uwagi na decydujący udział tego fragmentu algorytmu w kosztach obliczeń. Dalsza praca konieczna jest także nad rozwojem elementu kontaktowego. Wydaje się, że najprostszym zadaniem jest zastosowanie przedstawionego wyżej modelu dekohezji plastycznej w połączeniu z innym rodzajem aproksymacji przemieszczeń i naprężeń. Następnie należy także uwzględnić udział naprężeń stycznych w przenoszonym przez element obciążeniu.

Rozdział 10.

Podsumowanie i wnioski końcowe.

Na początku przeglądu literatury podane zostały dwie przyczyny trudności na jakie natrafiamy przy modelowaniu zniszczenia w materiałach kruchych: brak jasnego obrazu mechanizmu zniszczenia oraz brak jednoznacznie skutecznych algorytmów obliczeniowych. Wydaje się, że kolejne rozdziały pracy wnoszą pewne nowe idee na drodze do pokonania obu tych problemów. Szczegółowe wnioski dotyczące poszczególnych zagadnień zamieszczono na końcu każdego z rozdziałów. Podsumowując całą pracę zwróćmy uwagę na aspekty, które zdaniem autora mają ważniejsze i bardziej ogólne znaczenie dla analizy stanów pokrytycznych.

Najistotniejsze elementy rozwiązanych analitycznie przykładów dotyczą modelowania stanów pokrytycznych. W analizie rury grubościennej wykorzystano połączenie warunku energetycznego dla zjawiska pęknięcia i warunku wytrzymałościowego dla kruszenia materiału. Metoda łączenia podejścia energetycznego z klasycznymi metodami teorii plastyczności może być zastosowana także przy rozwiązywaniu innych, bardziej skomplikowanych problemów. Wydaje się, że dzięki temu powinniśmy uzyskać bardziej realistyczne ujmowanie przebiegu zjawisk zachodzących w materiałach sprężysto-kruchoplastycznych. Wskazuje na to także drugi przykład — analiza wciskania stempla. Pomimo prostoty przyjętego modelu uzyskano efekty obserwowane w doświadczeniach (cykliczność zmian obciążenia oraz różnorodność form zniszczenia — pęknięcie, wylamywanie). Trzeci przykład analityczny sugeruje, że przy modelowaniu quasistatycznych procesów nieliniowych należy poszukiwać funkcji, które opisują zjawiska w sposób ciągły (niekoniecznie gładki). Ponadto wydaje się, że opracowując model materiału, o ile to możliwe należy unikać nieciągłego opisu zmienności cech materiału. Nieciągłości tego rodzaju są kłopotliwe szczególnie przy stosowaniu metod numerycznych. Przyjmując model ciągłych zmian własności, nawet w najprostszej liniowej postaci, możemy chociaż częściowo zredukować problem ewentualnych osobliwości.

Poczynając od rozdziału piątego, druga część pracy poświęcona jest mówiąc ogólnie problemom sterowania. W tej sprawie autor spotykał się już z pewnymi opiniami, stąd wydaje się, że niezbędny jest następujący komentarz. Wykonując eksperyment w maszynie wytrzymałościowej nie możemy dowolnie zmieniać sterowania — zmiennymi sterującymi mogą być jedynie obciążenia przyłożone do badanej próbki. Może się zatem wydawać, że proponowana wyżej metoda, oparta na zmiennym wyborze sterowania, kłóci się z eksperymentem. Zdaniem autora jest to sprzeczność pozorna, wynikająca z identyfikowania ze sobą dwóch zasadniczo odmiennych problemów — problemu wyznaczania relacji przemieszczenie-obciążenie i problemu oceny poprawności obliczeń. Mówiąc obrazowo, w procesie obliczeniowym metoda obliczeń stanowi swego rodzaju "czarną skrzynkę". Użytkownik tej "skrzynki" przygotowuje układ równań, który jego zdaniem najlepiej opisuje zjawisko zachodzące

w eksperymencie. Sposób rozwiązania tych równań, w tym wybór zmiennych niezależnych, jest sprawą metody stanowiącej wewnątrz "skrzynki". Ważne jest natomiast by uzyskane wyniki obliczeń były maksymalnie zbliżone do wyników eksperymentalnych. To jednak nie może zależeć od metody rozwiązywania, a jedynie od rozwiązywanych równań. Zatem sposób sterowania w trakcie eksperymentu nie musi narzucać sposobu sterowania w obliczeniach. W obliczeniach wszystkie zmieniające się wielkości powinny być traktowane w sposób równorzędny. Wynika stąd dodatkowe uzasadnienie celowości analizowania układu jednorodnego.

Z przedstawionych w pracy rozważań wynika, że badanie rzędu macierzy może odgrywać ważną rolę w analizie nieliniowej. W kolejnych rozdziałach starano się wykazać znaczenie tego problemu przy wyborze sterowania, w analizie problemu bifurkacji, w analizie modeli konstytutywnych, w zagadnieniach numerycznych. W oczywisty sposób tak wiele poruszanych zagadnień nie mogło być w pełni wyczerpane. W szczególności dotyczy to problemów bifurkacji. Przykładowo należy określić jednoznaczny związek między proponowaną metodą wyznaczania kierunków ścieżek wychodzących z punktu bifurkacji a metodą Kellera. Zaproponowana metoda może być stosowana przy założeniu gładkiej ścieżki obciążenia. Dla układów dysypatywnych to założenie nie musi obowiązywać. W analizie modeli konstytutywnych podane kryterium bifurkacji pokrywa się z kryterium tzw. ogólnej bifurkacji. Nie wynika stąd jednak fizyczna interpretacja, według której punkty bifurkacji dzieli się na dyfuzyjne i nieciągłe. Do tej pory w literaturze pojęcie rzędu macierzy nie miało istotnego praktycznego znaczenia. Świadczyć może o tym ewidentny brak prac zajmujących się opracowaniem efektywnych metod wyznaczania rzędu macierzy. Pomimo więc wymienionych mankamentów wydaje się, że warto dalej zająć się badaniem możliwości wynikających z zastosowania analizy rzędu macierzy układu jednorodnego.

Dodatki.

A. Uzupełnienie rozdziału 2.

Poniższe wzory określają wyrażenia używane w rozdziale drugim:

$$\xi_i = (i-1) \left(\frac{\nu}{1-\nu} - \alpha_2 \right) - \frac{1-2\nu}{1-\nu} (\alpha_2 + 1)$$

$$w_0^u = \frac{1}{4} \xi_1 w_1^p \quad w_1^u = 0 \quad w_i^u = \frac{1}{i^2-1} \xi_i w_i^p \quad i = 2, \dots, \ell$$

$$\left. \begin{aligned} w_0^r = w_0^t &= \frac{E \xi_1 w_1^p}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \\ w_1^r &= E w_1^p \left(\frac{\xi_1}{4(1+\nu)} + \frac{(1-nu)\alpha_2 - \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right) \\ w_1^t &= -E w_1^p \left(\frac{\xi_1}{4(1+\nu)} + \frac{(1-nu) - \nu\alpha_2}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right) \\ w_i^r &= \frac{E \xi_1 w_i^p}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\frac{\xi_i}{i^2-1} [i - \nu(i-1)] + (1-\nu)\alpha_2 - \nu \right) \\ w_i^t &= \frac{E \xi_1 w_i^p}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\frac{\xi_i}{i^2-1} [i + \nu(i-1)] - (1-\nu) + \nu\alpha_2 \right) \\ & \quad i = 2, 3, \dots, \ell \end{aligned} \right\}$$

$$\Omega_1 = w_0^u r_{c_1} (2 \ln r_{c_1} - 1) + \sum_{i=1}^{\ell} w_i^u r_{c_1}^i \quad \Omega_2 = w_0^r \ln r_{c_1} + \sum_{i=1}^{\ell} w_i^r r_{c_1}^{i-1}$$

B. Uzupełnienie rozdziału 4.

Zamieszczone niżej uwagi mają na celu oszacowanie błędów popełnianego w analizie tarcz kołowych. Błąd ten wynika z założenia jednorodności stanu naprężenia w okolicy krawędzi $r = a$. Z równań 4.4 i 4.23 wynika, że w stanie sprężystym mamy

$$\frac{\sigma_r \left(a + \frac{H}{2} \right)}{\sigma_r(a)} = \frac{1}{2} \left[1 + \nu + (1 - \nu) \frac{a^2}{\left(a + \frac{H}{2} \right)^2} \right]$$

$$\frac{\sigma_t \left(a + \frac{H}{2} \right)}{\sigma_t(a)} = \frac{1}{2\nu} \left[1 + \nu - (1 - \nu) \frac{a^2}{\left(a + \frac{H}{2} \right)^2} \right]$$

a ponieważ $H \ll a$, więc mamy $\sigma_r(a + \frac{1}{2}H) \approx \sigma_r(a)$ i $\sigma_t(a + \frac{1}{2}H) \approx \sigma_t(a)$. W omówionych przykładach odstępstwo od założenia stanu jednorodnego nie przekroczyło 0.5%.

W przypadku istnienia pierwotnej strefy uplastycznienia przed rozpoczęciem dekohezji, zależnie od wartości ν i H , strefa dekohezyjna może całkowicie lub tylko częściowo znajdować się w strefie uplastycznienia. Przyjmując, że dla dostatecznie cienkiej tarczy strefa dekohezyjna całkowicie leży w strefie pierwotnego uplastycznienia mamy, że rozkład stanów naprężeń w okolicy $r = a$ będzie leżał na powierzchni plastyczności pomiędzy punktami A i S_1 (patrz Rys.2). Stąd maksymalna różnica pomiędzy $\sigma_r(a + \frac{1}{2}H)$ i $\sigma_r(a)$ nie przekracza 17%.

Wyprowadzenie związku 4.20 wynika z założenia płaskiego stanu odkształcenia. Dla przypadku osiowosymetrycznego powierzchni poślizgu nie będą proste (patrz [86]). Błąd przybliżenia jest jednak nieznaczny dla stosunkowo cienkich tarcz (niewielkich wartości H/a). Ponadto, bez jakichkolwiek trudności koncepcyjnych możliwe jest wykorzystanie dowolnego innego związku pomiędzy $\sigma_r(A'A'')$ i u_d .

Poniżej zamieszczone tabele zawierają dane wykorzystywane w przeprowadzonych obliczeniach (Tabela 1), oraz ukazują wpływ wykorzystanej teorii i warunku plastyczności na przebieg procesu (Tabela 2).

Tabela 1

| Dane | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|-------|-------|-------|
| σ_0/E | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.0015 | 0.001 | 0.001 | 0.001 |
| ν | 0.3 | 0.3 | 0.3 | 0.3 | 0.3 | 0.3 | 0.4 | 0.3 | 0.3 | 0.3 | 0.3 |
| b/a | 4.0 | 4.0 | 4.0 | 4.0 | 4.0 | 4.0 | 0.4 | 4.0 | 2.0 | 6.0 | 8.0 |
| a/H | 400.0 | 300.0 | 250.0 | 200.0 | 100.0 | 250.0 | 250.0 | 250.0 | 400.0 | 400.0 | 400.0 |

Tabela 2

| Dane | | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | |
|------|---|-----|-----|-----|-----|----------------------------------|-----|----------------------------------|-----|
| | | T | HM | T | HM | HM | HM | HM | T |
| | | PR | HI | PR | HI | PR | HI | PR | |
| F | 1 | E | E | E | E | E | E | E | E |
| | 2 | DE | DE | DE | DE | P ₁ E | DE | DE | DE |
| | 3 | DPE | DPE | DPE | DPE | DP ₁ E | → | DPE | DPE |
| | 4 | PE | PE | PE | PE | DP ₂ P ₁ E | → | PE | DP |
| | 5 | P | → | P | → | P | → | DP ₁ P ₂ E | → |
| | 6 | | | | | DP ₁ P ₂ | | | |
| | 7 | | | | | P ₁ P ₂ | → | | |
| Dane | | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | |
| | | T | HM | HM | HM | T | T | T | |
| | | PR | HI | HI | HI | PR | PR | PR | |
| F | 1 | E | E | E | E | E | E | E | E |
| | 2 | DE | DE | DE | DE | DE | DE | DE | DE |
| | 3 | DPE | DPE | DPE | DPE | DPE | DPE | DPE | DPE |
| | 4 | DP | PE | PE | PE | PE | PE | PE | PE |
| | 5 | P | → | P | → | P | → | P | → |

Użyte w tabeli 2 oznaczenia określają:

- wykorzystywaną teorię:

PR – teoria płynięcia;

HI – teoria deformacyjna;

- wykorzystywany warunek plastyczności:
 - T - warunek Treski;
 - HM - warunek Hubera-Misesa;
- występujące w procesie strefy:
 - E - strefa sprężysta;
 - D - strefa dekohezyjna;
 - P - strefa plastyczna (P_1, P_2 - pierwotne i wtórne uplastycznienie);
- charakter przebiegu procesu:
 - \nearrow - proces stateczny;
 - \searrow - proces niestateczny sterowalny przemieszczeniowo;
 - \swarrow - proces niestateczny niesterowalny;
 - \rightarrow - stan nośności granicznej.

C. Wybrane elementy algebry liniowej.

Poniższy paragraf zawiera wybrane elementy algebry liniowej, istotne dla prezentowanego tekstu. W oczywisty sposób dokonany wybór nie może być kompletny i szerszego omówienia należy szukać w podręcznikach algebry liniowej (np. [81]). Ponieważ w algebrze liniowej pewne pojęcia zaczerpnięte są z geometrii, na ten właśnie aspekt zwracamy szczególną uwagę.

Zapis $\mathbf{a} \in R^N$ oznacza, że \mathbf{a} jest wektorem w N wymiarowej przestrzeni euklidesowej, tj. można dokonać rozkładu $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i}_1 + \dots + a_N \mathbf{i}_N = a_n \mathbf{i}_n$ w taki sposób, że długości i zwroty składowych określone będą przez liczby rzeczywiste a_n , a kierunki składowych będą zgodne z kierunkami osi wybranego kartezjańskiego układu, zadanego przez jednostkowe wektory \mathbf{i}_n (wartości a_n zależą od wyboru wektorów \mathbf{i}_n).

Definicja 1:

Wektory $\mathbf{a} \in R^N$ oraz $\mathbf{b} \in R^N$ są ortogonalne, gdy ich iloczyn skalarny jest równy zeru, tj. gdy $\mathbf{a}\mathbf{b} = a_n b_n = 0$.

Niech G oznacza macierz o wymiarach $M \times N$ i współczynnikach G_{mn} ($G = [G_{mn}]_{M \times N}$). Zauważmy, że współczynniki wierszy i kolumn macierzy G możemy traktować jako wartości składowych odpowiednio M wektorów w przestrzeni R^N i N wektorów w przestrzeni R^M . Dalej m -ty wiersz macierzy zapisywać będziemy jako $\mathbf{g}_{(m)} = G_{mn} \mathbf{j}_n$, a n -tą kolumnę w postaci $\alpha_{(n)} = G_{mn} \mathbf{i}_m$. Przez G^T oznaczać będziemy macierz otrzymaną z transpozycji macierzy G .

Definicja 2:

Dla $n = 1, \dots, N$ wektory $\alpha_{(n)} \in R^M$ są liniowo niezależne, gdy równość $G\mathbf{r} = 0$ (gdzie $\mathbf{r} \in R^N$) zachodzi tylko dla $\mathbf{r} = 0$. W przeciwnym przypadku wektory $\alpha_{(n)}$ są liniowo zależne.

Definicja 3:

Mówimy, że wektor $\mathbf{b} \in R^M$ jest elementem przestrzeni kolumnowej $\mathcal{C}(G)$ macierzy G , tj. $\mathbf{b} \in \mathcal{C}(G) \subset R^M$, gdy N wektorów $\alpha_{(n)}$ i wektor \mathbf{b} są liniowo zależne.

Definicja 4:

Mówimy, że wektor $\mathbf{r} \in R^N$ jest elementem przestrzeni zerowej $\mathcal{N}(\mathbf{G})$ macierzy \mathbf{G} , tj. $\mathbf{r} \in \mathcal{N}(\mathbf{G}) \subset R^N$, gdy wektor \mathbf{r} spełnia równanie $\mathbf{G}\mathbf{r} = \mathbf{0}$.

Definicja 5:

Przestrzeń kolumnową $\mathcal{C}(\mathbf{G}^T)$ macierzy \mathbf{G}^T nazywamy przestrzenią wierszową macierzy \mathbf{G} ($\mathcal{C}(\mathbf{G}^T) \subset R^N$).

Definicja 6:

Przestrzeń zerową $\mathcal{N}(\mathbf{G}^T)$ macierzy \mathbf{G}^T nazywamy lewą przestrzenią zerową macierzy \mathbf{G} ($\mathcal{N}(\mathbf{G}^T) \subset R^M$).

Definicja 7:

Liczby liniowo niezależnych wektorów przestrzeni $\mathcal{C}(\mathbf{G})$, $\mathcal{N}(\mathbf{G})$, $\mathcal{C}(\mathbf{G}^T)$ oraz $\mathcal{N}(\mathbf{G}^T)$ oznaczamy odpowiednio przez $\dim\mathcal{C}(\mathbf{G})$, $\dim\mathcal{N}(\mathbf{G})$, $\dim\mathcal{C}(\mathbf{G}^T)$, $\dim\mathcal{N}(\mathbf{G}^T)$ i nazywamy wymiarami tych przestrzeni.

Twierdzenie 1:

Dla dowolnego wektora $\mathbf{r} \in R^N$ mamy $(\mathbf{G}\mathbf{r}) \in \mathcal{C}(\mathbf{G})$.

Rozwiązanie układu $\mathbf{G}\mathbf{r} = \mathbf{b}$ istnieje tylko wtedy, gdy $\mathbf{b} \in \mathcal{C}(\mathbf{G})$.

Twierdzenie 2:

Jeżeli kolumny macierzy \mathbf{G} są liniowo niezależne to:

- przestrzeń zerowa zawiera tylko $\mathbf{r} = \mathbf{0}$;
- rozwiązanie układu $\mathbf{G}\mathbf{r} = \mathbf{b}$ jest jedyne gdy $\mathbf{b} \in \mathcal{C}(\mathbf{G})$;
- $\dim\mathcal{C}(\mathbf{G}) = N$.

Twierdzenie 3:

Przestrzenie $\mathcal{C}(\mathbf{G})$ i $\mathcal{C}(\mathbf{G}^T)$ mają ten sam wymiar $\dim\mathcal{C}(\mathbf{G}) = \dim\mathcal{C}(\mathbf{G}^T) = r$.

Przestrzenie $\mathcal{N}(\mathbf{G})$ i $\mathcal{C}(\mathbf{G}^T)$ są ortogonalne oraz $\dim\mathcal{N}(\mathbf{G}) = N - r$.

Przestrzenie $\mathcal{C}(\mathbf{G})$ i $\mathcal{N}(\mathbf{G}^T)$ są ortogonalne oraz $\dim\mathcal{N}(\mathbf{G}^T) = M - r$.

Ortogonalność przestrzeni oznacza ortogonalność wektorów tych przestrzeni. Ostatnie twierdzenie zwane jest podstawowym twierdzeniem algebry liniowej, a liczba r rzędem macierzy \mathbf{G} . Wartość r wyznacza wymiar największej nieosobliwej podmacierzy kwadratowej, utworzonej z macierzy prostokątnej przez wykreślenie odpowiedniej liczby wierszy i kolumn. Wynika to z własności wyznaczników:

Twierdzenie 4:

Gdy kolumny macierzy kwadratowej są liniowo zależne, to wyznacznik tej macierzy jest równy zeru.

D. Twierdzenie o funkcjach uwikłanych.

Możliwość parametryzacji ścieżki obciążenia wynika z niżej podanego twierdzenia cytowanego w wielu książkach (np. [3, 34, 76, 78]).

Niech $\{j_1, \dots, j_L\}$ oraz $\{i_1, \dots, i_K\}$ oznaczają ciągi różnych liczb naturalnych $\leq K + L$. Oznaczmy przez $\mathbf{r} \in R^{K+L}$ wektor o składowych (r_1, \dots, r_{K+L}) , przez $\mathbf{u} \in R^L$ wektor o składowych $(r_{j_1}, \dots, r_{j_L})$, a przez $\mathbf{p} \in R^K$ wektor o składowych $(r_{i_1}, \dots, r_{i_K})$. Ponadto przez $W_l(\mathbf{r})$ ($l = 1, \dots, L$) oznaczmy funkcje rzeczywiste określone w podzbiorniku $G \subset R^{K+L}$, oraz przez $\mathbf{W}(\mathbf{r})$ pole wektorowe określone przez wartości funkcji W_l .

Twierdzenie 5:

Jeżeli dla $\mathbf{r}_0 = (\mathbf{u}_0, \mathbf{p}_0) \in G$ spełnione są warunki:

a) $W_l(\mathbf{u}, \mathbf{p}) \in C_\nu$ dla $(\mathbf{u}, \mathbf{p}) \in G$, $l = 1, \dots, L$;

b) $\mathbf{W}(\mathbf{u}_0, \mathbf{p}_0) = 0$;

c) $\det \begin{vmatrix} W_{1,j_1} & \dots & W_{1,j_L} \\ \vdots & & \vdots \\ W_{L,j_1} & \dots & W_{L,j_L} \end{vmatrix} \neq 0$ (gdzie $W_{l,j_n} = \frac{\partial W_l}{\partial r_{j_n}}$, $l = 1, \dots, L$),

to istnieje podzbiór $G_p \subset R^K$ taki, że dla $\mathbf{p} \in G_p$ istnieje pole wektorowe $\mathbf{V}(\mathbf{p})$, określone przez wartości funkcji $V_{j_l}(\mathbf{p})$, $l = 1, \dots, L$, takie że

a) $V_{j_l}(\mathbf{p}) \in C_\nu$, dla $\mathbf{p} \in G_p$, $l = 1, \dots, L$;

b) $\mathbf{u}_0 = \mathbf{V}(\mathbf{p}_0)$;

c) $\mathbf{W}(\mathbf{V}(\mathbf{p}), \mathbf{p}) = 0$;

d) $V_{j_r, i_s} = \frac{\partial V_{j_r}}{\partial r_{i_s}} = \frac{\det \begin{vmatrix} W_{1,j_1} & \dots & W_{1,j_{r-1}} & W_{1,i_s} & W_{1,j_{r+1}} & \dots & W_{1,j_L} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ W_{L,j_1} & \dots & W_{L,j_{r-1}} & W_{L,i_s} & W_{L,j_{r+1}} & \dots & W_{L,j_L} \end{vmatrix}}{\det \begin{vmatrix} W_{1,j_1} & \dots & W_{1,j_L} \\ \vdots & & \vdots \\ W_{L,j_1} & \dots & W_{L,j_L} \end{vmatrix}}$

Dowód powyższego twierdzenia można znaleźć np. w [34, 78].

E. Wyprowadzenie wzorów 8.58₁ i 8.59.

Równanie 8.58₁ oraz oznaczenie $b_D^{[k]}$ wynikają z korekcy związków 7.4. Przyjmując, że lewa strona określa funkcje Ψ zmiennych $\mathbf{r} \equiv [D, \varepsilon^e, \varepsilon^p, \varepsilon, \sigma, \lambda^p]$, korekcja wykonywana jest w oparciu o rozwinięcie w szereg Taylora

$$\Psi(\mathbf{r}^{[k+1]}) = \Psi(\mathbf{r}^{[k]}) + \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}^{[k]})}{\partial \mathbf{r}} \delta \mathbf{r}^{[k]} + \theta(\mathbf{r}^{[k]})$$

gdzie θ oznacza sumy wyrazów wyższego rzędu. Odrzucając wyrazy nieliniowe otrzymamy

$$D^{[k]} \varepsilon^{e[k]} - \sigma^{[k]} + \delta D^{[k]} \varepsilon^{e[k]} + D^{[k]} \delta \varepsilon^{e[k]} - \delta \sigma^{[k]} = 0 \quad (\text{a})$$

Korzystając z analogicznego rozwinięcia wzoru 7.3, tj.

$$\varepsilon^{e[k]} + \varepsilon^{p[k]} - \varepsilon^{[k]} + \delta \varepsilon^{e[k]} + \delta \varepsilon^{p[k]} - \delta \varepsilon^{[k]} = 0$$

a następnie z rozwinięcia wzoru 7.2, tj.

$$D^{[k]} - D^{e[k]} + \delta D^{[k]} - \frac{\partial D^e}{\partial \varepsilon^{p[k]}} \delta \varepsilon^{p[k]} = 0$$

wzór (a) możemy przekształcić do postaci

$$(D^{[k]} + \delta D^{[k]}) \varepsilon^{e[k]} - \sigma^{[k]} + D^{[k]} (\varepsilon^{[k]} - \varepsilon^{e[k]} - \varepsilon^{p[k]} + \delta \varepsilon^{[k]} - \delta \varepsilon^{p[k]}) - \delta \sigma^{[k]} = 0$$

i dalej

$$\begin{aligned} & \left(D^{e[k]} + \frac{\partial D^e}{\partial \varepsilon^{p[k]}} \delta \varepsilon^{p[k]} \right) \varepsilon^{e[k]} - \sigma^{[k]} + D^{[k]} (\varepsilon^{[k]} - \varepsilon^{e[k]} - \varepsilon^{p[k]}) + \\ & + D^{[k]} \delta \varepsilon^{[k]} - D^{[k]} \delta \varepsilon^{p[k]} - \delta \sigma^{[k]} = 0 \end{aligned} \quad (\text{b})$$

Wykorzystując złożenie 8.56 po dalszych przekształceniach wzoru (b) otrzymamy

$$\begin{aligned} & D^{[k]} \delta \varepsilon^{[k]} - \delta \sigma^{[k]} + \left(\frac{\partial D^e}{\partial \varepsilon^{p[k]}} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \sigma^{[k]}} \varepsilon^{e[k]} - D^{[k]} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \sigma^{[k]}} \right) \delta \lambda^{p[k]} = \\ & = \sigma^{[k]} - D^{[k]} (\varepsilon^{[k]} - \varepsilon^{e[k]} - \varepsilon^{p[k]}) - D^{e[k]} \varepsilon^{e[k]} \end{aligned} \quad (\text{c})$$

Z powyższego wyniku wzór 8.59. Dalej przez analogię do wzoru 7.10 możemy wprowadzić także oznaczenie

$$h^{[k]} = \frac{\partial D^e}{\partial \varepsilon^{p[k]}} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \sigma^{[k]}} \varepsilon^{e[k]} - D^{[k]} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \sigma^{[k]}}$$

Ostatecznie wzór (c) możemy zapisać w poszukiwanej postaci 8.58₁.

Literatura.

- [1] T. Adachi, F. Oka, A. Yashima, "A Finite Element Analysis of Strain Localization for Soft Rock Using a Constitutive Equation With Strain Softening", *Applied Mechanics*, Vol. 61 (1991), 183-191.
- [2] G. Adjedj, D. Aubry, "Adaptive Creation of Kinematical Discontinuities", *Numerical Methods in Geomechanics*, Innsbruck, 1988, Balkema.
- [3] E. L. Allgower, K. Georg, "Numerical Continuation Methods. An Introduction", *Springer Series in Computational Mathematics*, Springer-Verlag, 1990.
- [4] M. Arioli, I. S. Duff, "Experiments in Tearing Large Sparse Systems.", in "*Reliable Numerical Computation.*" (edited by M. G. Cox, S. Hammarling), Oxford Science Publications, 1990.
- [5] M. Y. H. Bangash, "Concrete and Concrete Structures: Numerical Modeling and Applications.", Elsevier Applied Science, 1989.
- [6] Z. P. Bažant, "Instability, Ductility, and Size Effect in Strain-Softening Concrete", *Proc. ASCE, EM2* (1976), 331-344.
- [7] Z. P. Bažant, L. Cedolin, "Stability of Structures. Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories", Oxford University Press, 1991.
- [8] Z. P. Bažant, F. B. Lin, H. Lippmann, "Fracture Energy Release and Size Effect in Borehole Breakout.", *praca złożona do druku.*
- [9] F. Brezzi, J. Rappaz, P.-A. Raviart, "Finite Dimensional Approximation of Nonlinear Problems", Part III: Simple Bifurcation Points, *Numer. Math.*, Vol. 38 (1981), 1-30.
- [10] D. Bigoni, T. Hueckel, "Uniqueness and Localization — I. Associative and NonAssociative Elastoplasticity.", *Int. J. Solids Structures*, Vol. 28 (1991), No. 2, 197-213.
- [11] D. Bigoni, T. Hueckel, "Uniqueness and Localization — II. Coupled Elastoplasticity.", *Int. J. Solids Structures*, Vol. 28 (1991), No. 2, 215-224.
- [12] D. Bigoni, D. Zaccaria, "Loss of Strong Ellipticity in Nonassociative Elastoplasticity", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 40 (1992), No. 6, 1313-1331.
- [13] R. de Borst, "Computation of Post-Bifurcation and Post-Failure Behavior of Strain-Softening Solids.", *Computers & Structures*, Vol. 25 (1987), No. 2, 221-224.
- [14] R. de Borst, "Smeared Cracking, Plasticity, Creep and Thermal Loading — a Unified Approach.", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. 62 (1987), 89-110.

- [15] R. de Borst, H. B. Mühlhaus, J. Pamin, L. J. Sluys, "Computational Modeling of Localisation of Deformation", in *Computational Plasticity. Fundamentals and Applications.*, (edited by D. R. J. Owen, E. Oñate, E. Hinton), Pineridge Press, 1992.
- [16] R. de Borst, P. Nauta, "Non-Orthogonal Cracks in a Smeared Finite Element Model.", *Engng. Comput.*, Vol. 2 (1985, March), 35-46.
- [17] R. de Borst, P. P. J. M. Peeters, "Analysis of Concrete Structures Under Thermal Loading.", *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. 77 (1989), 293-310.
- [18] R. de Borst, J. G. Rots, "Occurrence of Spurious Mechanisms in Computations of Strain-Softening Solids.", *Engng. Comput.*, Vol. 6 (1989, December), No., 272-280.
- [19] Z. Chen, H. L. Schreyer, "Secant Structural Solution Strategies Under Element Constraint for Incremental Damage.", *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. 90 (1991), 869-884.
- [20] N. G. W. Cook, M. Hood, F. Tsai, "Observations of Crack Growth in Hard Rock Loaded by an Indenter.", *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, Vol. 21 (1984), No. 2, 97-107.
- [21] M. A. Crisfield, "A Fast Incremental-Iterative Solution Procedure that Handles Snap-Through.", *Computers & Structures*, Vol. 13 (1981), 55-62.
- [22] M. A. Crisfield, J. Shi, "A Review of Solution Procedures and Path-Following Techniques in Relation to the Non-Linear Finite Element Analysis of Structures.", in *Nonlinear Computational Mechanics. State of the Art.* (edited by P. Wriggers, W. Wagner), Springer-Verlag, 1991.
- [23] K. Dems, Z. Mróz, "Stability Conditions for Brittle-Plastic Structures with Propagating Damage Surfaces.", *J. Struct. Mech.*, Vol. 13 (1985), No. 95.
- [24] W. Derski, R. Izbicki, I. Kisiel, Z. Mróz, "Mechanika Skal i Gruntów.", PWN, Warszawa, 1982.
- [25] A. G. Evans, A. C. Palmer, D. J. Goodman, M. F. Ashby, J. W. Hutchinson, A. R. S. Ponter, G. J. Williams, "Indentation Spalling of Edge-Loaded Ice Sheets.", Report to British Petroleum.
- [26] R. T. Ewy, N. G. Cook, "Cylindrical Opening in Rock.", *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, Vol. 27 (1990), No. 5.
- [27] S. Foster, "An Application of the Arc Length Method Involving Concrete Cracking", *Int. J. Numer. Methods Engng.*, Vol. 33 (1992), 269-285.
- [28] A. M. Freudenthal, "Teoria Zniszczenia.", *Prace IPPT*, 51/74.
- [29] I. Fried, "Orthogonal Trajectory Accession to the Nonlinear Equilibrium Curve.", *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. 47 (1984), 283-297.

- [30] F. Fujii, B. C. Perez, K. K. Choong, "Selection of the Control Parameter in Displacement Incrementation", *Computers & Structures*, Vol. 42 (1992), No. 2, 167-174.
- [31] F. Fujii, "Variable Displacement Control to Overcome Turning Points of Nonlinear Elastic Frames.", *Second World Congress on Computational Mechanics*, Stuttgart, FRG (1990), 303-306.
- [32] K. Hellan, "An Asymptotic Study of Slow Radial Cracking.", *Int. J. Fracture*, Vol. 26 (1984), 17-30.
- [33] N. J. Higham, "Analysis of the Cholesky Decomposition of a Semi-Definite Matrix.", in *"Reliable Numerical Computation."* (edited by M. G. Cox, S. Hammarling), Oxford Science Publications, 1990.
- [34] T. H. Hildebrandt, L. M. Graves, "Implicit Functions and their Differentials in General Analysis.", *A. M. S. Transactions*, Vol. 29, 1927, 127-153.
- [35] A. Hillerborg, M. Modeer, P. E. Petersson, "Analysis of Crack and Crack Growth in Concrete by Means of Fracture Mechanics and Finite Elements" *Cement and Concrete Research.*, Vol. 6 (1976), 773-782.
- [36] K. Huseyin, "Nonlinear Theory of Elastic Stability", Noordhoff International Publishing, Leyden, 1975.
- [37] K. Huseyin, "Multiple Parameter Stability Theory and its Applications. Bifurcations, Catastrophes, Instabilities,...", Clarendon Press, Oxford, 1986.
- [38] J. C. Jaeger, N. G. W. Cook, "Fundamentals of Rock Mechanics.", John Wiley & Sons, New York, 1976.
- [39] H. B. Keller, "Numerical Solution of Bifurcation and Nonlinear Eigenvalue Problems.", in *"Application of Bifurcation Theory"* (edited by P. H. Rabinowitz), 359-384, Academic Press, 1977.
- [40] M. Kleiber, "Numeryczna Analiza Statycznych i Dynamicznych Zagadnień Stateczności Konstrukcji" *Politechnika Poznańska*, 1987.
- [41] M. Kleiber, "Wprowadzenie Do Metody Elementów Skończonych", PAN IPPT, PWN Warszawa-Poznań 1989.
- [42] M. Klisiński, Z. Mróz, K. Runesson, "Structure of Constitutive Equations in Plasticity for Different Choices of State and Control Variables" *Int. J. Plasticity*, Vol. 8 (1992), 221-243.
- [43] R. Kouhia, M. Mikkola, "Tracing the Equilibrium Path Beyond Simple Critical Points.", *Int. J. Numer. Methods Engng.*, Vol. 28 (1989), 2923-2931.
- [44] M. Kowalczyk, Z. Mróz, "Analiza Mechanizmu Pęknięcia i Kruszenia Materiału Kruchego Wokół Otworu.", *Archiwum Górnictwa*, Vol. 33 (1988), No. 4, 403-439.

- [45] M. Kowalczyk, "Rank Analysis of Rectangular Matrix as an Element of Continuation Method.", Engng. Comput., praca przyjęta do druku.
- [46] P. Kunkel, "Augmented Systems for Generalized Turning Points", Int. Series Numer. Math., Vol. 97 (1991), 231-236.
- [47] B. Ladanyi, "Expansion of Cavities in Brittle Media.", Int. J. Rock Mech. Min. Sci., Vol. 4 (1967), 301-328.
- [48] J. Lenard, J. B. Haddow, "Plastic Collapse Speeds for Rotating Cylinder.", Int. J. Mech. Sci., Vol. 14 (1972), 285-292.
- [49] P. Lindqvist, Lai Hai-Hui, "Behaviour of the Crushed Zone in Rock Indentation.", Rock Mech. Rock Engng., Vol. 16 (1983), 199-207.
- [50] T. Lodygowski, "Numeryczna Analiza Stanów Pobifurkacyjnych Układów z Materiałów Podlegających Osłabieniu", Rozpr. Inż., Vol. 38 (1990), No. 2, 239-257.
- [51] D. G. Luenberger, "Introduction to Linear and Nonlinear Programming.", Addison Wesley, 1973.
- [52] G. Maier, T. Hueckel, "Nonassociated and Coupled Flow Rules of Elastoplasticity for Rock-Like Materials", Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., Vol. 16 (1979), 77-92.
- [53] B. Michel, N. Toussaint, "Mechanisms and Theory of Indentation of Ice Plates.", J. Glaciology, Vol. 19 (1977), No. 81, 285-300.
- [54] G. Moore, "The Numerical Treatment of Non-trivial Bifurcation Points.", Numer. Funct. Anal. and Optimiz., Vol. 2 (1980), No. 6, 441-472.
- [55] Z. Mróz, A. Drescher, "Limit Plasticity Approach to Some Cases of Flow of Bulk Solids.", Transactions of the ASME, (1968), 1-8.
- [56] Z. Mróz, S. Kruciński, "Sprężysto-Plastyczna Analiza Stanu Naprężenia i Przemieszczenia w Sąsiedztwie Wytrobiska Kołowego z Uwzględnieniem Osłabienia Materiału Skalnego.", Archiwum Górnictwa, Vol. 29 (1984), 205-229.
- [57] Z. Mróz, M. Kowalczyk, "Elasto-Plastic Post-Critical Analysis of Disks Under Tension", Arch. Mech., Vol. 41 (1989), No. 4, 461-480.
- [58] M. K. Neilsen, H. L. Schreyer, "Bifurcations in Elastic-Plastic Materials", Int. J. Solids Structures, Vol. 30 (1993), No. 4, 521-544.
- [59] F. A. Nichols, "How Brittle Is Brittle Fracture.", Engng. Fracture Mechanics, Vol. 12 (1979), 307-316.
- [60] R. H. Nilson, "An Integral Method for Predicting Hydraulic Fracture Propagation Driven by Gases or Liquids.", Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech., Vol. 10 (1986), 191-211.
- [61] M. Ortiz, "An Analytical Study of the Localized Failure Modes of Concrete.", Mechanics of Materials, Vol. 6 (1987), 159-174.

- [62] S. S. Pang, W. Goldsmith, M. Hood, "A Force-Indentation Model for Brittle Rocks.", *Rock Mech. and Rock Engng.*, Vol. 22 (1989), 127-148.
- [63] S. S. Pang, W. Goldsmith, "Investigation of Crack Formation During Loading of Brittle Rock.", *Rock Mech. and Rock Engng.*, Vol. 23, (1990), 53-63.
- [64] S. Pietruszczak, Z. Mróz, "Finite Element Analysis of Deformation of Strain-Softening Materials.", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 17 (1981), 327-334.
- [65] G. Pijaudier-Cabot, Z. P. Bažant, "Comparison of Various Models for Strain Softening.", *Engng. Comput.* Vol. 5 (1988), 141-150.
- [66] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, "Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing.", Cambridge University Press.
- [67] B. A. Radovani, "Grain Size of Adopted Aggregate Influence on Strain-Softening of Concrete.", *Engng. Fracture Mechanics*, Vol. 35 (1990), No. 4-5, 709-718.
- [68] B. Raniecki, O. T. Bruhns, "Bounds to Bifurcation Stresses in Solids with Nonassociated Plastic Flow at Finite Strain.", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 29 (1981), No. 2, 153-172.
- [69] W. C. Rheinboldt, "Solution Fields of Nonlinear Equations and Continuation Methods.", *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 17 (1980), No. 2, 221-237.
- [70] W. C. Rheinboldt, "Numerical Analysis of Continuation Methods for Nonlinear Structural Problems.", *Computers & Structures*, Vol. 13 (1981), 103-113.
- [71] E. Riks, "Some Computational Aspects of the Stability Analysis of Nonlinear Structures.", *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. 47 (1984), 219-259.
- [72] D. P. Rooke, I. N. Sneddon, "The Crack Energy and the Stress Intensity Factor for A Cruciform Crack Deformed by Internal Pressure.", *Int. J. Engng. Sci.*, Vol. 7 (1969), 1079-1089.
- [73] J. G. Rots "Computational Modeling of Concrete Fracture.", Technische Universiteit Delft, 1988.
- [74] H. L. Schreyer, Z. Chen, "One-Dimensional Softening with Localization", *J. of Applied Mechanics*, Vol. 53 (1986), 791-797.
- [75] M. J. Sewell, "On the Connexion Between Stability and the Shape of the Equilibrium Surface.", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 14 (1966), 203-230.
- [76] R. Seydel, "From Equilibrium to Chaos. Practical Bifurcation and Stability Analysis.", Elsevier, 1988.
- [77] E. M. Shoemaker, "Some Paradoxes with Elastic-Plastic Limit Load Analysis.", *Arch. Mech. Stos.*, Vol. 20 (1968), No. 4, 473-483.
- [78] R. Sikorski, "Rachunek Różniczkowy I Całkowy, Funkcje Wielu Zmiennych.", PWN, 1977.

- [79] M. P. Stallybrass, "A Pressurized Crack in the Form of a Cross.", *Q. J. Mech. Applied Math.*, Vol. 23 (1970), 35-48.
- [80] P. Steinmann, K. Willam, "Performance of Enhanced Finite Element Formulation in Localized Failure Computations", *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. 90 (1991), 845-867.
- [81] G. Strang, "Linear Algebra and Its Applications.", Academic Press, 1976.
- [82] G. Strang, "Introduction to Applied Mathematics.", Wellesley-Cambridge Press, 1986.
- [83] P. Stroeven, "Some Observations on Microcracking in Concrete Subjected to Various Loading Regimes.", *Engng. Fracture Mechanics*, Vol. 35 (1990), No. 4-5, 775-782.
- [84] S. S. Sunder, J. J. Connor, "Numerical Modeling of Ice-Structure Interaction".
- [85] M. V. Swain, B. R. Lawn, "Indentation Fracture in Brittle Rocks and Glasses.", *Int. J. Rock. Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, Vol. 13 (1976), 311-319.
- [86] W. Szczepiński, "Wstęp Do Analizy Procesów Obróbki.", PWN, Warszawa 1967.
- [87] K. Szuwalski, M. Życzkowski, "On the Phenomenon of Decohesion in Perfect Plasticity.", *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 9 (1973), No. 1, 85-98.
- [88] K. Szuwalski, "Nośność Rozdzielcza Pierścieniowej Tarczy Kołowo-Symetrycznej ze Sztywną Inkluzją.", *Mech. Teor. Stos.*, Tom 17 (1979), Zeszyt 4, 589-602.
- [89] K. Szuwalski, "Idealnie-Sprężysto-Plastyczna Tarcza o Profilu Hiperbolicznym.", *Mech. Teor. Stos.*, Vol. 22, No. 3-4 (1984), 539-547.
- [90] K. Szuwalski, "Wpływ Charakterystyk Materiałowych na Nośność Rozdzielczą Nieograniczonej Tarczy z Kołową Sztywną Inkluzją.", *Rozpr. Inż.*, Vol. 33 (1985), No. 1-2, 55-69.
- [91] K. Szuwalski, "Nośność Graniczna i Rozdzielcza Skokowo Niejednorodnych Tarcz Wirujących.", *Arch. Bud. Masz.*, Tom XXXII (1985), Zeszyt 1-2, 53-66.
- [92] K. Szuwalski, M. Życzkowski, "A Concave Interaction Curve Corresponding to Decohesive Carrying Capacity Under Thermal Loading.", *J. Thermal Stres.*, Vol. 7 (1984), 121-134.
- [93] J. M. T. Thompson, G. W. Hunt, "Elastic Instability Phenomena", John Wiley and Sons, 1984.
- [94] G. Tokar, "Experimental Analysis of the Elasto-Plastic Zone Surrounding a Borehole in a Specimen of Rock-Like Material Under Multiaxial Pressure.", *Engng. Fracture Mechanics*, Vol. 35 (1990), No. 4-5, 879-887.
- [95] W. Wagner, "A Path-Following Algorithm with Quadratic Predictor.", *Computers & Structures*, Vol. 39 (1991), 339-348.

- [96] H. Wagner, E. H. R. Schumann, "The Stamp-Load Bearing Strength of Rock an Experimental and Theoretical Investigation.", *Rock Mechanics*, Vol. 3 (1971), 185-207.
- [97] W. Wagner, P. Wriggers, "A Simple Method for the Calculation of Postcritical Branches.", *Engng. Comput.*, Vol. 5 (1988), 103-109.
- [98] R. A. Westmann, "Pressurized Star Crack.", *J. Math. Physics*, Vol. 43 (1964), 191-198.
- [99] T. Wierzbicki, P. Xirouchakis, S. K. Choi, "Flexural Failure of Softening Ice Sheets.", 5th International Symposium on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, OMAE (1986), Tokyo, Japan.
- [100] G. Wijk, "The Stamp Test for Rock Drillability Classification.", *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, Vol. 26 (1989), No. 1, 37-44.
- [101] Li Zhangming, "A New Approach to Rock Failure: Criterion of Failure in Plastic Strain Space.", *Engng. Fracture Mechanics*, Vol. 35 (1990), No. 4-5, 739-742.
- [102] M. Życzkowski, K. Szuwalski, "On the Termination of the Process of Finite Plastic Deformations.", *J. de Méc.*, (1982), 175-186.
- [103] M. Życzkowski, "Obliczanie Sił Krytycznych dla Sprężystych Prętów Niepryzmatycznych Metodą Interpolacji Częściowej.", *Rozpr. Inż.*, Tom IV (1956), Zeszyt 3, 367-412.