

Torsion d'un cylindre élastofragile: stabilité de l'équilibre

B. FEDELICH (NOISY) et P. BEREST (PALAISEAU)

ON CONSIDÈRE le problème de la torsion d'un cylindre élastofragile: lorsque le cisaillement atteint une valeur maximale donnée, la résistance du matériau est ultérieurement réduite à zéro. On donne les équations locales d'évolution de la section lorsqu'on fait croître l'angle de torsion, puis on établit, par le calcul de l'énergie potentielle du système, que l'équilibre est instable; enfin, on montre que cette instabilité peut passer inaperçue dans un traitement numérique approché des équations du problème.

Rozważono zagadnienie skręcania cylindra sprężysto-kruchego w przypadku, gdy ścinanie osiąga daną wartość maksymalną. Wytrzymałość materiału jest uprzednio zredukowana do zera. Podano równania lokalne ewolucji przekroju w przypadku, gdy zwiększa się kąt skręcania, następnie ustala się, poprzez obliczenie energii potencjalnej układu, że równowaga jest niestabilna; wreszcie pokazuje się, że ta niestabilność może być niezauważalna w przybliżonych obliczeniach numerycznych problemu.

Рассмотрена задача скручивания упруго-хрупкого цилиндра: в случае, когда сдвиг достигает данное максимальное значение, прочность материала раньше сведена к нулю. Приведены локальные уравнения эволюции сечения в случае, когда увеличивается угол кручения, затем устанавливается, путем расчета потенциальной энергии системы, что равновесие неустойчиво, наконец показывается, что эта неустойчивость может быть незамеченной в приближенных численных расчетах задачи.

1. Introduction

ON CONSIDÈRE le problème de l'équilibre isotherme d'un cylindre de hauteur l , de génératrice parallèle à Oz , de section courante S simplement connexe, sous les conditions suivantes:

Les composantes du déplacement dans le repère cartésien sont notées ξ , η , ζ et le tenseur des contraintes est noté σ .

La surface latérale est non chargée.

La section inférieure est soumise aux conditions:

$$(1.1)_1 \quad \xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \sigma_{zz} = 0.$$

La section supérieure est soumise aux conditions:

$$(1.1)_2 \quad \xi = -\alpha y, \quad \eta = \alpha x, \quad \sigma_{zz} = 0,$$

αl est la rotation de la section S_1 , supposée petite, par rapport à la section S_0 ; on suppose $\alpha > 0$; α sera le paramètre de chargement de la structure.

Il s'agit du problème classique de la torsion d'un cylindre; comme il est usuel [7], on cherche dans toute la suite une solution dans laquelle les seules composantes non nulles du tenseur des contraintes sont σ_{xz} et σ_{yz} . Sous cette hypothèse, les solutions statiquement admissibles peuvent être définies au moyen d'une fonction inconnue unique soit $\Psi(x, y)$, telle que:

$$(1.1)_3 \quad \begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} & \sigma_{zy} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \text{ dans } S \\ \Psi = 0 & \text{sur } \partial S. \end{cases}$$

Le comportement du matériau est élastique fragile: le matériau est homogène, isotrope, élastique linéaire tant que le cisaillement maximal $|\tau|$ est inférieur à une certaine constante C caractéristique du matériau.

Lorsque la condition $|\tau| = C$ est atteinte, la résistance du matériau au cisaillement sera ultérieurement réduite à zéro, et la loi de comportement deviendra $|\tau| = 0$.

Pour le problème particulier considéré et sous l'hypothèse faite au sujet de la forme du tenseur des contraintes, le critère proposé pour le cisaillement, $|\tau| < C$, équivaut à un critère énergétique: si la densité d'énergie élastique $\frac{1}{2} \varepsilon L \varepsilon$ reste inférieure à une constante.

$w_c = C^2/2\mu$, μ coefficient élastique de Lamé, le matériau est sain; si le critère est atteint $w_c = \frac{1}{2} \varepsilon L \varepsilon$, l'élément de matériau est détruit. Sous cette dernière forme, le matériau est

à endommagement brutal au sens défini par H. D. BUI et A. EHRLACHER [1, 2, 3].

On va aborder ce problème par deux approches successives:

La première, de nature locale, utilise les équations de champ et les conditions aux limites, éventuellement transportées dans l'évolution du front d'endommagement.

La seconde, globale, utilise un principe de minimum portant sur la variable interne "forme de la zone saine" décrite par une transformation conforme. Elle s'inscrit dans le cadre de la théorie des matériaux à dissipation simple [4], qui permet de traiter les problèmes de stabilité et bifurcation rencontrés lors de la résolution des équations locales; cette méthode est à rapprocher de celle proposée par N. Q. SON [5-6], [9] pour les matériaux standards.

2. Solution élémentaire

2.1. Problème élastique

Notons F la fonctionnelle énergie complémentaire pour les champs de contraintes statiquement admissibles définis plus haut:

$$(2.1)_1 \quad F(S, \Psi^*, \alpha) = \frac{l}{2\mu} \int_S (\text{grad } \Psi^* - 4\alpha\mu\Psi^*) dS.$$

Pour une section S du cylindre et une rotation α fixés, la solution Ψ du problème élastique minimise cette fonctionnelle sur l'ensemble des fonctions Ψ^* statiquement admissibles, i.e. telles que $\Psi^* = 0$ sur ∂S . Un calcul classique fournit les équations locales:

$$(2.1)_2 \quad \begin{cases} \Delta \Psi + 2\mu\alpha = 0 & \text{dans } S, \\ \Psi = 0 & \text{sur } \partial S. \end{cases}$$

On notera $\Psi(S, \alpha)$ la solution de ce problème de Dirichlet et F la valeur correspondante de l'énergie complémentaire:

$$F(S, \alpha) = F(S, \Psi(S, \alpha), \alpha).$$

2.2. Problème élastofragile

La solution précédente convient tant que le cisaillement maximal reste inférieur à C , soit $|\tau| < C$. Le cisaillement maximal n'est autre que:

$$(2.2)_1 \quad |\tau| = \sqrt{\sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2} = |\vec{\text{grad}} \Psi|.$$

La fonction $\vec{\text{grad}} \Psi$ étant sous harmonique, atteint sa plus grande valeur sur le contour ∂S où

$$(2.2)_2 \quad |\vec{\text{grad}} \Psi| = -\vec{\text{grad}} \Psi \cdot \mathbf{n} = -\frac{\partial \Psi}{\partial n}.$$

\mathbf{n} désignant la normale extérieure au contour ∂S .

La solution du problème élastofragile, si elle existe, est donc caractérisée par le système:

$$(2.2)_3 \quad \begin{cases} \Delta \Psi + 2\mu\alpha = 0 & \text{dans } S, \\ \Psi = 0 & \text{sur } \partial S, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial n} + C \geq 0 & \text{sur } \partial S. \end{cases}$$

2.3. Evolution du front d'endommagement

Au cours d'une évolution dans laquelle α croît depuis la valeur zéro, un front d'endommagement séparant une partie saine de la section, $S = S(t)$, d'une partie endommagée (détruite), soit $S(0) - S(t)$, peut apparaître et se développer. On note $\boldsymbol{\varphi} = \varphi \mathbf{n}$ la vitesse normale de ce front; φ satisfait à la condition d'irréversibilité de l'endommagement si $\varphi \leq 0$.

Sur ce front la fonction de contrainte satisfait la condition $\Psi = 0$ et éventuellement sur une partie du front la condition $\partial \Psi / \partial n + C = 0$; sur cette partie, là où elle est mobile, les conditions de transport de ces relations s'écrivent:

$$(2.3)_1 \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \varphi \frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial n} + \varphi \frac{\partial^2 \Psi}{\partial n^2} = 0.$$

Il y a toutefois décharge si $\partial \Psi / \partial n + C = 0$ et $\partial^2 \Psi / \partial n \partial t > 0$; on a alors $\varphi = 0$.

Il est commode d'écrire les conditions de transport en remarquant que sur la frontière ∂S l'équation de champ $\Delta \Psi + 2\mu\alpha = 0$ peut être écrite comme suit:

$$(2.3)_2 \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial n^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial n} + 2\mu\alpha = 0,$$

où R est le rayon de courbure de ∂S au point considéré.

L'ensemble des relations permettant, en principe, de résoudre le problème en vitesses s'écrit alors:

$$(2.3)_3 \quad \text{a) } \Delta \Psi + 2\mu\alpha = 0 \quad \text{dans } S; \quad \Psi = 0 \quad \text{sur } \partial S; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial n} + C \geq 0 \quad \text{sur } \partial S;$$

$$\text{b) } \Delta \frac{\partial \Psi}{\partial t} + 2\mu\dot{\alpha} = 0 \quad \text{dans } S; \quad \text{et sur } \partial S:$$

$$\text{là où } \frac{\partial \Psi}{\partial n} + C > 0, \quad \varphi = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0,$$

$$\text{là où } \frac{\partial \Psi}{\partial n} + C = 0, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial n \partial t} = \left(\frac{2\mu\alpha}{C} - \frac{1}{R} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial t},$$

sous réserve que $\frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0$ si $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial n \partial t} > 0$.

La partie du front sur laquelle il y a décharge $\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial n \partial t} > 0 \right)$ n'est évidemment pas connue a priori, de sorte que le système précédent définit un problème pour lequel l'existence ou l'unicité des solutions ne sont pas acquises a priori.

2.4. Cas du cercle

On considère le cas d'un cylindre dont la section S dans l'état actuel est un cercle de rayon R ; on adopte les coordonnées polaire r, θ dont l'origine est au centre du cercle. On a alors:

$$(2.4)_1 \quad \Psi = -\frac{\mu\alpha}{2} (r^2 - R^2).$$

Le critère d'endommagement est atteint si α atteint la valeur définie par $\mu\alpha R = C$. L'équation de champ indique que $\partial \Psi / \partial t$ a la forme suivante:

$$(2.4)_2 \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\mu\dot{\alpha}}{2} r^2 + \mu\dot{\alpha} R^2 \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^j (\beta_j \cos j\theta + \gamma_j \sin j\theta).$$

On cherche une solution dans laquelle aucun point du contour n'est en décharge, c'est-à-dire qu'en tout point du contour on ait:

$$(2.4)_3 \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial n \partial t} = \frac{\mu\alpha}{C} \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

Il vient alors:

$$(2.4)_4 \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\mu\dot{\alpha}}{2} (r^2 - R^2) + \mu\dot{\alpha} R r (\beta_1 \cos \theta + \gamma_1 \sin \theta).$$

La condition d'irréversibilité $\varphi \leq 0$ implique que β_1 et γ_1 doivent être choisis tels que $\beta_1^2 + \gamma_1^2 \leq 1$. A cette réserve près, β_1 et γ_1 restent indéterminés, ce qui établit la possibilité d'une bifurcation. On notera que la solution en vitesse obtenue coïncide à l'instant considéré avec celle d'une évolution conservant la symétrie circulaire avec translation du centre du cercle composée avec une homothétie de rapport supérieur à 1; on ne peut en conclure que telle sera la solution effective du problème.

3. Approche globale

Dans cette partie, le problème de la torsion d'un cylindre élastofragile sera considéré du point de vue de la théorie des matériaux à dissipation simple.

3.1. Systèmes à dissipation simple

Un système pour lequel l'énergie totale dissipée pour conduire à l'état actuel ne dépend que des valeurs des variables d'état à l'instant considéré et à l'instant initial sera appelé "à dissipation simple". Dans le problème de la torsion envisagé précédemment, le processus d'endommagement fait passer la densité locale d'énergie élastique $\frac{1}{2} \varepsilon L \varepsilon$ de la valeur $w = C^2/2\mu$ à la valeur zéro; l'énergie dissipée dans le processus d'endommagement ne dépend donc que des valeurs, initiale et actuelle, de la section du cylindre:

$$(3.1)_1 \quad D = lw_c \left\{ \int_{S_0} dS - \int_S dS \right\} = D(S).$$

3.2. Principe d'extremum pour l'évolution des systèmes à dissipation simple

On désignera par λ le paramètre de chargement, par Ω une variable d'état caractérisant l'état global, ou local, du système, par u le champ de déplacement; dans le problème particulier de la torsion, $\lambda = \alpha$ et $\Omega = S$. On notera $E(\lambda, \Omega, u)$ la fonctionnelle énergie potentielle totale du système pour un état (Ω, u) et pour le chargement λ . C'est la somme de l'énergie élastique et du potentiel des efforts extérieurs. Soit $U(\Omega)$ l'ensemble des déplacements cinématiquement admissibles (dans le problème de la torsion, tels que $\Psi = 0$ sur $\partial\Omega$) et $K_0(\Omega)$ l'ensemble des états admissibles pour la variable Ω (dans le problème de la torsion, l'ensemble des sections S' telles que $S' \subset S$).

3.3. Fonctionnelle "énergie totale"

L'équilibre élastique de la structure est obtenu pour le champ de déplacement u qui minimise la fonctionnelle énergie potentielle totale E parmi les champs u^* cinématiquement admissibles:

$$(3.3)_1 \quad E(\Omega, u, \lambda) = \min_{u^* \in U(\Omega)} E(\Omega, u^*, \lambda).$$

Dans le cas où l'équilibre élastique est stable (i.e., si la forme quadratique $v \cdot E''_{uu} \cdot v$ est définie positive), cette condition définit au moins implicitement u en fonction des variables Ω et du chargement λ ; on notera $E(\Omega, \lambda)$ la valeur de E à l'équilibre élastique

$$E(\Omega, \lambda) = E(\Omega, u(\Omega, \lambda), \lambda).$$

On sait que l'approche en contraintes conduit, symétriquement, à minimiser la fonctionnelle énergie complémentaire dont la valeur à l'équilibre élastique, notée $F(\Omega, \lambda)$, est égale à l'opposé de $E(\Omega, \lambda)$; cette approche est parfois plus commode, par exemple dans le problème de la torsion.

On introduit alors la fonctionnelle "énergie totale" Φ , somme de l'énergie potentielle totale et de l'énergie dissipée dans l'endommagement

$$(3.3)_2 \quad \Phi(\Omega, \lambda) = E(\Omega, \lambda) + D(\Omega) = -F(\Omega, \lambda) + D(\Omega).$$

Un équilibre Ω, λ sera stable si une évolution spontanée est impossible, i.e. si en l'absence de modification de λ , soit $\Delta\lambda = 0$, on a $\Delta\Omega = 0$ (Δ désigne ici un écart entre deux valeurs du paramètre, sans ambiguïté avec l'opérateur laplacien). Un bilan énergétique montre

[4] que, λ étant fixé, l'état (Ω, λ) est stable au moins si Ω réalise un minimum strict local de Φ sur l'ensemble des états $K_0(\Omega)$ admissibles. De plus, si on impose une modification $\Delta\lambda$ du chargement, l'évolution $\Delta\Omega$ du système satisfait à:

$$(3.3)_3 \quad \Phi(\Omega + \Delta\Omega, \lambda + \Delta\lambda) = \min_{\Omega + \Delta\Omega^* \in K_0(\Omega)} \Phi(\Omega + \Delta\Omega^*, \lambda + \Delta\lambda).$$

3.4. Calcul des vitesses d'évolution

En particulier, si on impose à partir de l'état (Ω, τ) un chargement $\lambda(\tau)$ sous la forme d'un développement en série à droite de $\tau = 0$ [6]

$$(3.4)_1 \quad \lambda(\tau) = \lambda + \dot{\lambda}\tau + \frac{1}{2} \ddot{\lambda}\tau^2 + \dots$$

L'évolution $\Omega(\tau)$, caractérisée par le développement:

$$(3.4)_2 \quad \Omega(\tau) = \Omega + \dot{\Omega}\tau + \frac{1}{2} \ddot{\Omega}\tau^2 + \dots$$

satisfait à la relation:

$$(3.4)_3 \quad \Phi[\Omega(\tau), \lambda(\tau)] = \min_{\Omega^*(\tau) \in K_0(\Omega)} \Phi[\Omega^*(\tau), \lambda(\tau)].$$

Avec:

$$\Omega^*(\tau) = \Omega^* + \dot{\Omega}^*\tau + \frac{1}{2} \ddot{\Omega}^*\tau^2 + \dots$$

En développant Φ au voisinage de $\tau = 0$ au premier ordre, on trouve une condition nécessaire de stabilité:

$$(3.4)_4 \quad \Phi'_\Omega \cdot \dot{\Omega}^* \geq 0 \quad \forall \dot{\Omega}^* \in K_1(\Omega),$$

$K_1(\Omega)$ étant le cône tangent à $K_0(\Omega)$ au point Ω .

Au minimum, on a nécessairement $\Phi'_\Omega \cdot \dot{\Omega} = 0$ puisque le vecteur nul appartient à $K_1(\Omega)$. Si $H(\Omega, \lambda)$ est l'hyperplan de normale Φ'_Ω , le critère d'évolution de l'endommagement sera atteint pour la première valeur λ_c du changement telle que:

$$(3.4)_5 \quad H(\Omega, \lambda_c) \cap K_1(\Omega) \neq \{0\}.$$

La minimisation du terme du second ordre en τ^2 permet en général le calcul des vitesses en résolvant un problème d'optimisation quadratique avec contraintes:

$$(3.4)_6 \quad \Phi''_{\Omega_2} \dot{\Omega}^2 + 2\Phi''_{\Omega\lambda} \dot{\Omega} \dot{\lambda} = \min_{\Omega^* \in H \cap K_1} [\Phi''_{\Omega_2} \dot{\Omega}^{*2} + 2\Phi''_{\Omega\lambda} \dot{\Omega}^* \dot{\lambda}].$$

Si la forme quadratique Φ''_{Ω_2} est définie positive sur $H(\Omega, \lambda_c)$, il y a existence et unicité d'une solution; si elle est simplement définie positive sur $H \cap K_1$, il y a existence de solution sans qu'on soit assuré de leur unicité: c'est une condition suffisante de stabilité.

3.5. Solution élastique du problème de la torsion

On associe à ∂S la transformation conforme $\omega(t)$ qui applique l'intérieur C du cercle unité ∂C sur l'intérieur S de la zone saine:

$$z = \omega(t, \zeta), \quad \zeta \in C, \quad z \in S.$$

La fonction de contraintes Ψ solution du problème se met sous la forme:

$$(3.5)_1 \quad \Psi = \operatorname{Re}X(\zeta) - \frac{\mu\alpha}{2} |\omega(\zeta)|^2$$

où $X(\zeta)$ est une fonction holomorphe de ζ dans \mathbf{C} et vérifiant sur $\partial\mathbf{C}$:

$$(3.5)_2 \quad \operatorname{Re}X(\sigma) = \frac{\mu\alpha}{2} |\omega(\sigma)|^2, \quad \sigma = e^{i\theta}.$$

A l'aide d'intégrale de Cauchy, on peut calculer $X(\zeta)$ ([8]):

$$(3.5)_3 \quad X(\zeta) = \frac{\mu\alpha}{2\pi i} \int_{\partial\mathbf{C}} \frac{|\omega(\sigma)|^2}{\sigma - \zeta} d\sigma - \frac{\mu\alpha}{4\pi i} \int_{\partial\mathbf{C}} \frac{|\omega(\sigma)|^2}{\sigma} d\sigma.$$

On obtient ainsi la solution explicite $\Psi = \Psi(\omega, \alpha)$ du problème élastique, ce qui permet de calculer la valeur de la fonctionnelle énergie complémentaire $F(\omega, \alpha)$ à l'équilibre:

$$(3.5)_4 \quad F(S, \alpha) = \frac{l}{2\mu} \int_S (\operatorname{grad}\Psi - 4\alpha\mu\Psi) dS = -l\alpha \int_S \Psi dS.$$

En utilisant la transformation conforme ω , on explicite Φ sous forme d'intégrales portant sur l'intérieur du disque unité, soit:

$$(3.5)_5 \quad \Phi(\omega, \alpha) = l\alpha \int_{\mathbf{C}} \left[\operatorname{Re}X(\zeta) - \frac{\mu\alpha}{2} |\omega(\zeta)|^2 \right] |\omega'(\zeta)|^2 ds - w_c l \int_{\mathbf{C}} |\omega'(\zeta)|^2 ds.$$

3.6. Le problème d'évolution

La forme quadratique Φ''_{ω^2} se particularise ici en:

$$(3.6)_1 \quad \begin{aligned} \Phi''_{\omega^2} \delta\omega^2 = l\alpha \int_{\mathbf{C}} \operatorname{Re}(X''_{\omega^2} \delta\omega^2 - \mu\alpha \delta\omega \delta\bar{\omega}) |\omega'|^2 ds \\ + 4l\alpha \int_{\mathbf{C}} \operatorname{Re}(X'_{\omega} \delta\omega - \mu\alpha \delta\omega \bar{\omega}) \operatorname{Re}(\delta\omega' \bar{\omega}') ds \\ + 2l\alpha \int_{\mathbf{C}} \operatorname{Re}X - \frac{\mu\alpha}{2} |\omega|^2 |\delta\omega'|^2 ds - w_c |\delta\omega|^2 ds. \end{aligned}$$

La discussion du caractère défini positif de cette forme est difficile dans le cas général. On peut développer ω en série entière dans le cercle unité:

$$(3.6)_2 \quad \begin{cases} \omega(t, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \zeta^n, & a_n = a'_n + ia''_n, \\ \delta\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \delta a_n \zeta^n, & \delta a_n = \delta a'_n + i \delta a''_n. \end{cases}$$

3.7. Exemple du cercle

Dans le cas d'une géométrie initialement circulaire, la forme quadratique $\Phi''_{\omega} \delta\omega^2$ s'écrit (lorsque le critère est atteint):

$$(3.7)_1 \quad \Phi''_{a_n} \delta a_n^2 = 2\pi w_c l \left\{ 2|\delta a_1|^2 + \sum_{n=2}^{\infty} (2-n)|\delta a_n|^2 \right\}.$$

Le cône tangent $K_1(\omega)$ est ici défini par:

$$(3.7)_2 \quad \varphi \leq 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \delta a_i \cos(i-1)\theta - \delta a_i' \sin(i-1)\theta \leq 0 \quad \forall \theta.$$

La forme quadratique $\Phi''_{a_n} \delta a_n^2$ n'admet pas de minimum sur $K_1(\omega)$ (considérer par exemple les vecteurs $\delta\omega = \lambda(\zeta + \zeta^5)$; $\lambda < 0$ ou $\delta\omega = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \zeta^n$; $\lambda < 0$, ce dernier vecteur correspond à un champ de vitesses normales nul partout sur ∂S , sauf en un point $\zeta = 1$).

L'équilibre est donc instable dès que le critère est atteint.

On vérifie sur ce cas particulier que l'existence de solutions en vitesses trouvées par le calcul élémentaire ne garantit pas la stabilité de l'équilibre. Le résultat, qui semble paradoxal, plaide en faveur d'une approche de type énergétique par rapport à une approche locale. Dans le cas général d'une géométrie non circulaire, on va décrire un mode opératoire pour simuler numériquement une évolution approchée de la zone endomagée.

4. Le problème approché

4.1. Principe d'approximation

Considérons les troncatures à l'ordre N du développement en série de ω :

$$(4.1)_1 \quad \omega \simeq \tilde{\omega} = \sum_{i=1}^N a_n(t) \zeta^n;$$

on introduit la fonction $\tilde{\Phi}$ correspondante:

$$(4.1)_2 \quad \tilde{\Phi}(a_n, \alpha) = \Phi(\tilde{\omega}, \alpha).$$

L'ensemble $\tilde{K}_1(a_n)$ des vitesses d'évolution autorisées par la condition d'irréversibilité est un cône convexe de sommet l'origine, défini par:

$$(4.1)_3 \quad \tilde{K}_1(a_n) = \left\{ \dot{a}_n, \sum_{i=1}^N \dot{a}_i A_i(\theta) + \dot{a}_i' A_{i+N}(\theta) \leq 0 \quad \forall \theta \right\}$$

où:

$$A_i(\theta) = \sum_{j=1}^{N-1} j(a_j' \cos(i-j)\theta + a_j \sin(i-j)\theta),$$

$$A_{i+N}(\theta) = \sum_{i=1}^{N-1} j(a_j' \cos(i-j)\theta - a_j \sin(i-j)\theta).$$

La minimisation de $\tilde{\Phi}(a + \dot{a}_n^* \tau)$ au premier ordre en τ sur $\tilde{K}_1(a_n)$ conduit à :

$$(4.1)_4 \quad \dot{a}_n \in \tilde{H}(a_n, \alpha) \quad \text{où} \quad \tilde{H}(a_n, \alpha) = \{\dot{a}_n^*, \tilde{\Phi}_{a_n \dot{a}_n^*}^1 = 0\}.$$

La première valeur de α donnant lieu à $\tilde{H} \cap \tilde{K} \neq \{0\}$ définit ainsi un nouveau critère d'évolution dit "global", car portant sur des grandeurs caractérisant la forme de la section dans son ensemble, par opposition au critère précédent qui faisant intervenir la densité locale d'énergie élastique. Le calcul explicite des vitesses se fait identiquement en minimisant sur $\tilde{H} \cap \tilde{K}$ le terme du second ordre :

$$(4.1)_5 \quad \frac{1}{2} \tilde{\Phi}_{a_n \dot{a}_n^*}^2 \dot{a}_n^{*2} + \tilde{\Phi}_{a_n \alpha}^1 \dot{a}_n^* \dot{\alpha}.$$

Pour apprécier la différence entre les deux lois d'endommagement et les conséquences d'une discrétisation de point de vue de la stabilité, on va étudier complètement un cas à deux paramètres.

4.2. Exemple d'évolution approchée dans un espace à deux paramètres

On considère des géométries à deux paramètres réels, symétriques par rapport à l'axe $x'ox$.

$$\omega = a_1 \zeta + a_2 \zeta^2,$$

a_1 et a_2 sont réels et $\left| \frac{a_1}{2a_2} \right| < 1$ car $\omega' \neq 0$ dans C .

Le cône $\tilde{K}_1(a_1, a_2)$ est alors défini par :

$$(4.2)_1 \quad \tilde{K}_1(a_1, a_2) = \{(\dot{a}_1^*, \dot{a}_2^*), a_1^* + a_2^* \leq 0, a_1^* - a_2^* \geq 0\}.$$

La fonction $\tilde{\Phi}$ se particularise ici en :

$$(4.2)_2 \quad \tilde{\Phi}(a_1, a_2, \alpha) = \frac{l\alpha^2}{2} J(a_1, a_2) - \pi l w_c (a_1^2 + 2a_2^2),$$

$$J(a_1, a_2) = \pi \mu \left\{ \frac{a_1^4}{2} + 2a_1^2 a_2^2 + a_2^4 \right\}.$$

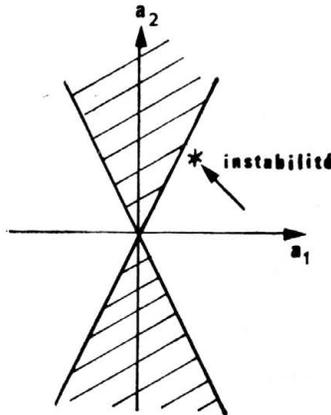


FIG. 1. Trajet du point représentatif de (a_1, a_2) (\dot{a}_1, \dot{a}_2) , $(-\tilde{\Phi}_{a_1}^1, \tilde{\Phi}_{a_2}^1)$ respectivement lorsqu'on fait croître le chargement α par a_2 ($t = 0$) ≥ 0 .

La minimisation du terme du premier ordre en τ de $\tilde{\Phi}$ au voisinage de (a_1, a_2) conduit à :

$$(4.2)_3 \quad \tilde{\Phi}'_{a_1} \dot{a}_1 + \tilde{\Phi}'_{a_2} \dot{a}_2 = 0.$$

On fait croître, à partir de 0, l'angle de rotation imposé α . L'endommagement du cylindre survient lorsque $\alpha = \alpha_c$ tel que :

$$(4.2)_4 \quad \tilde{\Phi}'_{a_1} = \tilde{\Phi}'_{a_2} \quad (\text{cf. igs. 1, 2 et 3}).$$

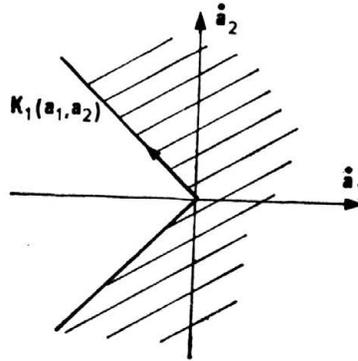


FIG. 2. Trajet du point représentatif de $(a_1, a_2)(\dot{a}_1, \dot{a}_2)$, $(-\tilde{\Phi}'_{a_1}, \tilde{\Phi}'_{a_2})$ respectivement lorsqu'on fait croître le chargement α pur a_2 ($t = 0$) ≥ 0 .

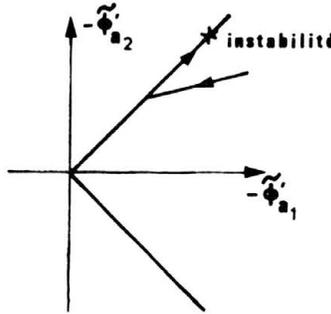


FIG. 3. Trajet du point représentatif de $(a_1, a_2)(\dot{a}_1, \dot{a}_2)$, $(-\tilde{\Phi}'_{a_1}, \tilde{\Phi}'_{a_2})$ respectivement lorsqu'on fait croître le chargement α pur a_2 ($t = 0$) ≥ 0 .

Deux solutions sont possibles :

1) $a_2 \neq 0$

Le cône des évolutions possibles se restreint à la demi-droite :

$$(4.2)_5 \quad \dot{B} = \dot{a}_1 = -\dot{a}_2 \leq 0,$$

la minimisation au second ordre permet le calcul effectif des vitesses :

$$(4.2)_6 \quad \dot{B} = \frac{-(\tilde{\Phi}'_{a_1\alpha} - \tilde{\Phi}''_{a_2\alpha}) \dot{\alpha}}{\tilde{\Phi}''_{a_1^2} + \tilde{\Phi}''_{a_2^2} - 2\tilde{\Phi}''_{a_1 a_2}} \leq 0.$$

Ceci jusqu'à perte de stabilité obtenue lorsque

$$(4.2)_7 \quad \tilde{\Phi}''_{a_1} + \tilde{\Phi}''_{a_2} - 2\tilde{\Phi}''_{a_1 a_2} = 0.$$

Remarquons qu'on tend vers la formation d'une cardioïde, ce qui correspond à l'initiation d'une quasi-fissure (voir Fig. 4). Numériquement, on observe que l'instabilité survient lorsque la courbure change de signe.

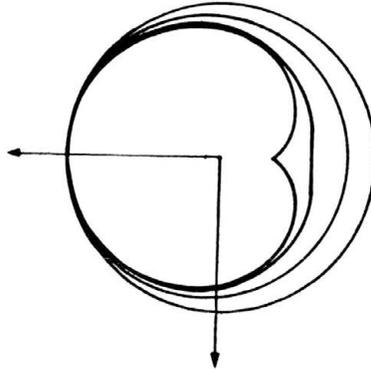


FIG. 4. Evolution de la frontière dans la solution approchée.

2) $a_2 = 0$

C'est le cas du cercle, dans ce cas:

$$(4.2)_8 \quad \tilde{\Phi}'_{a_1} = \tilde{\Phi}'_{a_2} = 0$$

lorsque le critère est atteint: toutes les évolutions du cône $\tilde{K}_1(a_1, a_2)$ restent possibles au premier ordre et la minimisation au second ordre conduit à:

$$(4.2)_9 \quad \tilde{\Phi}''_{a_1 a_2} = \tilde{\Phi}''_{a_2^2} = 0, \quad \tilde{\Phi}''_{a_1^2} > 0, \quad \dot{a}_1 = -a_1 \frac{\dot{\alpha}}{\alpha},$$

\dot{a}_2 reste indéterminé: il y a stabilité, mais non unicité en vitesses (cf. la solution élémentaire).

En développant $\tilde{\Phi}$ au quatrième ordre en τ et en minimisant les termes successifs obtenus, on peut effectivement calculer la valeur de $\dot{a}_2 = \pm a_1 \dot{\alpha}/\alpha$: il y a réellement bifurcation et l'étude du cas $a_2 \neq 0$ montre que ce champ de vitesses entraîne une perte de la symétrie circulaire du problème.

REMARQUES

Dans l'espace de ce qu'on pourrait appeler des "forces thermodynamiques généralisées" — $\Phi'_\Omega = -E'_\Omega - D'_\Omega$, on peut toujours définir un cône convexe $\Lambda(\Omega)$ dual de $K_1(\Omega)$ par la relation:

$$\Lambda(\Omega) = \{V, V \cdot \dot{\Omega}^* \leq 0 \quad \forall \dot{\Omega}^* \in K_1(\Omega)\}$$

en notant $G = -\Phi'_\Omega$, la condition $\dot{\Omega} \in K_1 \cap H$ se réécrit:

$$(4.2)_{10} \quad (G - V) \cdot \Omega \geq 0 \quad \forall V \in \Lambda(\Omega).$$

On retrouve donc un cas particulier de loi de comportement type matériau standard avec un convexe correspondant au domaine des forces thermodynamiques généralisées admissibles.

Une évolution décrite dans un espace à un paramètre $a \neq 0$, c'est-à-dire supposant la conservation de la symétrie circulaire de la géométrie, conduit à un rétrécissement du rayon du cylindre jusqu'à destruction totale sans instabilité, puisque $\Phi''_{a_2}(a_2 = 0) > 0$.

Conclusion

La démarche qui a été suivie ici est généralisable à plusieurs types de problèmes d'endommagement brutal; le problème analogue du décollement d'une membrane [10], délaminage, croissance de cavités, fissuration. De même que l'approche par l'extérieur, classique en calcul à la rupture, la méthode précédente conduit toujours à des estimations optimistes du chargement, que ce soit en ce qui concerne le critère ou l'apparition d'instabilité. Une discrétisation abusive du problème physique peut ainsi conduire à ignorer les mécanismes réels de ruine de la structure.

Bibliographie

1. H. D. BUI, A. EHRLACHER, *Propagation dynamique d'une zone endommagée dans un solide élastique-fragile en mode III et en régime permanent*, C.R. Acad. Sci., t. 290, série I, 273-276, 1980.
2. A. EHRLACHER, *Vitesse de propagation d'une zone endommagée dans un solide élastique-fragile en mode III*, C.R. Acad. Sci., t. 293, série II, 95-98, 1981.
3. H. D. BUI, K. DANG VAN, C. STOLZ, *Formulations variationnelles du problème en vitesse pour le solide élastique-fragile avec zone endommagée*, C.R. Acad. Sci., t. 292, série II, 251-254, 1981.
4. A. EHRLACHER, 7ème Congrès Français de Mécanique, Bordeaux, Septembre, 1985, A4B.
5. N. Q. SON, *Stabilité et bifurcation en rupture et en plasticité*, C.R. Acad. Sci., t. 292, série II, 817-820, 1981.
6. N. Q. SON, *Bifurcation et analyse post-critique en rupture fragile et en plasticité*. C.R. Acad. Sci., t. 300, série II, 158-161, 1981.
7. J. MANDEL, *Cours de mécanique des milieux continus*, tome II, 519-521, 1966.
8. N. J. MUSKELISHVILI, *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*, Gröningen 1933.
9. N. Q. SON, *J. de Mécanique Théorique et Appliquée*, 3, 1, 41-61, 1984.
10. P. BEREST, *Stabilité d'un système à comportement irréversible (décollement d'une membrane)*, C.R. Acad. Sci., t. 305, série II, 747-750, 1987.

CENTRE D'ENSEIGNEMENT ET DE RECHERCHE EN ANALYSE DES MATERIAUX
 ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES, NOISY LE GRAND

et
 LABORATOIRE DE MECANIQUE DES SOLIDES
 ECOLE POLYTECHNIQUE, PALAISEAU, FRANCE.

Received March 24, 1988.