

Ecrouissages — Schémas thermomécaniques et a variables internes: Méthode de définition utilisant le concept d'hystérésis pure

D. FAVIER, P. GUELIN, A. TOURABI, B. WACK (GRENOBLE)
et P. PEGON (ISPRA)

ON MONTRE comment le schéma de comportement d'hystérésis pure, par définition dénué d'écrouissage, peut néanmoins être utile pour poser des principes, choisir des méthodes et obtenir des résultats en matière de théorie phénoménologique de l'écrouissage. L'idéalisation d'hystérésis pure isotrope monotherme est tout d'abord étendue au cas à température variable. Le nouveau schéma thermomécanique est ensuite utilisé pour aborder le cas d'une dépendance des propriétés vis-à-vis de paramètres qui sont des fonctions et/ou des fonctionnelles soit de variables "externes" usuelles du continu, soit de variables de structures internes spécifiques; le premier de ces deux cas retient spécialement l'attention, en liaison avec des résultats expérimentaux.

Pokazano w jaki sposób schemat konstytutywny z czystą histerezą, który z definicji jest pozbawiony wzmocnienia, może być użyteczny w celu ustalenia zasad, wyboru metod i otrzymania wyników w zakresie fenomenologicznej teorii wzmocnienia. Idealizacja czystej izotropowej histerezy izotermicznej jest rozszerzona najpierw na przypadek zmiennej temperatury. Nowy schemat termomechaniczny jest następnie użyty w celu otrzymania przypadku zależności własności względem parametrów, które są funkcjami i (lub) funkcjonalami lub też zmiennymi „zewnątrznymi” ośrodka ciągłego, lub też zmiennymi właściwej struktury wewnętrznej. Zwrócono szczególną uwagę na pierwszy z tych przypadków, w powiązaniu z wynikami doświadczalnymi.

Показано каким образом определяющая схема с чистым гистерезисом, которая по определению не содержит упрочнения, может быть полезной с целью установления принципов, выбора методов и получения результатов в области феноменологической теории упрочнения. Идеализация чистого изотропного изотермического гистерезиса расширена сначала на случай переменной температуры. Новая термомеханическая схема затем используется с целью получения зависимости свойств по отношению к параметрам, которые являются функциями и (или) функционалами или тоже „внешними” переменными сплошной среды или же переменными правильной внутренней структуры. Обращено особенное внимание на первый из этих случаев в связи с экспериментальными результатами.

Notations

- $(0, e_\alpha)$ repère absolu orthonormé ($\alpha = 1, 2, 3$),
- t temps absolu,
- $^\circ$ ou $\partial/\partial t$ dérivation partielle par rapport à t ,
- M particule matérielle,
- $OP(M, 0)$ vecteur position de M , dans $(0, e_\alpha)$, à $t = 0$,
- $Op(M, t)$ vecteur position de M , dans $(0, e_\alpha)$, à $t > 0$,
- $Z^\alpha(M, 0)$ composantes de OP dans $(0, e_\alpha)$,
- $z^\alpha(M, t)$ composantes de Op dans $(0, e^\alpha)$,
- $V(M, t)$ vecteur vitesse de M , défini dans $(0, e_\alpha)$ $\left(V^\alpha e_\alpha = \frac{\partial z^\alpha}{\partial t} e_\alpha = \frac{\partial Op}{\partial t} \right)$,
- x^i coordonnées matérielles entrainées (pour M donné, les x^i sont constants),
- G_i, g_i vecteurs de base initiaux ($t = 0$) et actuels ($t > 0$) du champ des repères

entraînés notés (M, g_i, g_j) ou (M, g^i, g^j)

\mathcal{G} tenseur métrique,

g_{ij} composantes covariantes de \mathcal{G} (dans (M, g^i, g^j)),

g déterminant des $g_{ij} = g_i \cdot g_j$ (le point note ici le produit scalaire),

$\partial/\partial x^i$ dérivation partielle par rapport à x^i ,

∇_k symbole de la dérivation covariante,

$\mathcal{L}_v^*, \mathcal{L}_{v^*}, \mathcal{L}_{v^*}, \mathcal{L}_{v^*}$ symboles de dérivation de Lie dans la direction V ,

v^i, v_i composantes de V exprimé dans (M, g_i, g_j) ou (M, g^i, g^j) ,

$\overset{t}{R}\mathcal{G}$ tenseur de Cauchy transporté de t_R à t ,

$\Delta_R^t \epsilon$ tenseur d'Almansi-Euler des variations de \mathcal{G} sur $]t_R, t]$,

\mathbf{D} tenseur vitesse de déformation $\mathcal{L}_{v^*} \Delta_R^t \epsilon = 1/2(\nabla_j v_i + \nabla_i v_j) g_i \otimes g_j$,

σ tenseur relatif de Cauchy de poids 1,

$\overset{t}{k}\sigma$ tenseur de contrainte de Cauchy transporté de t_R à t ,

$\Delta_R^t \sigma$ tenseur fondamental des variations de σ sur $]t_R, t]$,

ρ masse spécifique ($\mathcal{R} = \rho \sqrt{g} = \text{cste}$),

$\mathcal{P}_{\text{int}}, P_{\text{int}}, p_{\text{int}}$ puissance des efforts intérieurs par unité d'étendue, de volume, de masse:
 $\mathcal{P} = P \sqrt{g} = \rho p \sqrt{g}$,

$\Pi, P_{\text{rev}}, p_{\text{rev}}$ puissance reversible,

Φ dissipation intrinsèque ($-\mathcal{P}_{\text{int}} - \Pi$),

\mathcal{E}, E, e énergie interne ($\mathcal{E} = E \sqrt{g} = \rho e \sqrt{g}$; poids de $\mathcal{E} = 1$),

\mathcal{Q}, Q, q chaleur,

\mathcal{S}_a, I_a, i_a dissipation intrinsèque sous forme non calorifique relative à l'hystérésis pure,

\mathcal{K}, K, k énergie cinétique, ($\mathcal{K} = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}} = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \mathcal{Q} - \mathcal{E}$),

λ, μ scalaires relatifs associés aux paramètres de Lamé $\tilde{\lambda}$ et $\tilde{\mu}$ par

$$\lambda = \tilde{\lambda} \sqrt{g}; \mu = \tilde{\mu} \sqrt{g},$$

S_0 scalaire relatif associé à une limite en cisaillement \tilde{S}_0 par $S_0 = \tilde{S}_0 \sqrt{g}$,

$\delta, \mathbf{1}$ symbole de Kronecker, tenseur unité,

def égalité de définition,

symb égalité symbolique (correspondance fonctionnelle),

Rémarques introductives

i) ON RÉSUME ici des recherches récentes qui constituent une introduction à de futurs efforts de développements théoriques et expérimentaux, concernant le comportement thermomécanique des solides réels. Bien qu'elle soit loin d'être achevée, l'étude trouve une place naturelle dans un symposium dont la tradition, à l'origine, n'incitait pas au discours définitif [1].

ii) Dans cet esprit, il semble utile, à l'aide de quelques remarques, de situer le travail présenté dans le domaine de la mécanique du continu où se tiennent les questions de thermoplasticité. Ceci doit être fait aussi bien sur le plan des méthodes qu'au niveau des principes et des ruptures conceptuelles. Les éléments d'un tel repérage, éparpillés dans nombre de publications, sont donc regroupés dans une courte annexe qui assure à la présente rédaction une relative autonomie (cf. annexe 1 et [2] à [32]).

iii) Il est également possible de se situer à l'aide d'une description imagée et intuitive, dont le principal avantage est de bien faire ressortir le rôle important joué par la notion de mémoire discrète. Cette description prend comme point de départ le phénomène de

mémoire de forme (cf. annexe 2 et [33, 34, 35]). Soient H et HP les courbes symbolisant respectivement une évolution hyperélastique et une évolution d'hystérésis pure dans les espaces associés à (ϵ, σ_{rev}) et à (ϵ, σ_a) (cf. Fig. 1). A la superposition:

$$\sigma = \sigma_{rev} + \sigma_a$$

correspond une courbe MF de l'espace associé à (ϵ, σ) , courbe qui symbolise des évolutions du genre de celles observées.

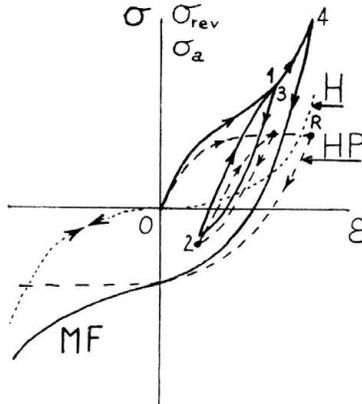


FIG. 1. Graphe symbolique (MF) du schéma monotherme d'élastohystérésis pure obtenu par superposition de contrainte hyperélastique (H) et d'hystérésis pure (HP).

Cette représentation suffit pour suggérer l'importance du rôle joué par la notion de mémoire discrète (trajet 2, 3, 4 par exemple). Les schémas associés à H et HP seront donc rappelés brièvement (§ 1). Mais on imagine facilement qu'il est possible d'obtenir, à l'aide de "variations" simples des proportions relatives et des formes de H et HP , des allures

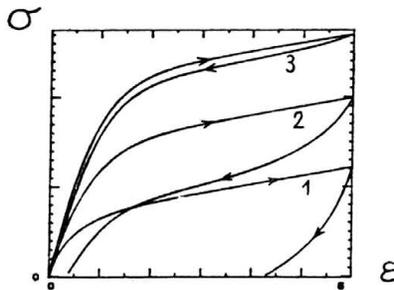


FIG. 2. Aspect de graphes MF (cf. Fig. 1) souvent observés à température "froide" (1), intermédiaire (2) ou "chaude" (3), en matière d'effet de mémoire de forme.

de MF vraiment tout à fait semblables à celles observées à froid et à chaud (cf. Fig. 2 où les graphes 1, 2, 3 correspondent à des températures croissantes).

Dès lors, le problème est de définir un schéma HP capable de prendre en compte la dépendance des propriétés vis à vis d'un paramètre T continu, borné, tel que la température; bien entendu, une extension à plusieurs paramètres devra être envisagée dans le cas de l'écroissage des matériaux réels. En conséquence, il faut ajouter aux deux schémas

essentiels évoqués ci-dessus (les schémas associés à H et HP), un ingrédient complémentaire généralisant la notion d'hystérésis pure au cas de la dépendance vis à vis de T (§ 2 et 3). La construction est symbolisée par la Figure 3: on peut dire que, par produit direct de T et de l'espace associé à une représentation de référence (E, Σ) de type HP , on introduit

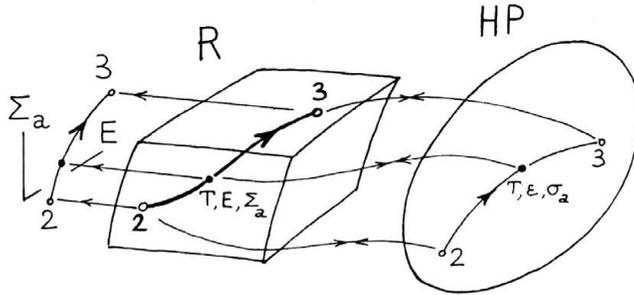


FIG. 3. Schéma illustrant la correspondance entre l'espace réel HP et l'espace de référence R ainsi que la projection de l'espace de référence.

d'abord une représentation R feuilletée par $dT = 0$; il s'agit ensuite de définir un difféomorphisme de R à HP . Cette construction peut être immédiatement appliquée au cas de l'écroutissage isotherme (§ 4). Dans cette étude préliminaire, des hypothèses simplicatrices ont bien entendu été mises en oeuvre. L'expérience montre qu'elles ne sont cependant pas excessivement restrictives (§ 5). Trois remarques sont faites en guise de conclusion (§ 6).

1. Rappel des idéalizations d'hyperélasticité et d'hystérésis pure

1.1. Un champ de tenseur de déformation entre l'instant de référence t_R et l'instant actuel $t > t_R$ est défini par:

$$(1.1) \quad \Delta_R^t \epsilon(x^k, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} (g_{ij}(t) - {}^t_R g_{ij}) g^i(x^k, t) \otimes g^j(x^k, t)$$

définition qui exprime la comparaison de la métrique actuelle covariante avec l'information métrique concernant l'état à t_R , laquelle est mémorisée à t_R et transportée intacte de t_R à t ,

$$\mathcal{L}_v \bullet \bullet {}^t_R g_{ij} = 0, \quad {}^t_R g_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} g_{ij}(t_R) \forall x^k$$

lors de l'évolution à la vitesse D .

Si $t_R = 0$, ${}^t_0 \mathcal{G}$ est le tenseur de déformation de Cauchy usuel et $\Delta_0^t \epsilon$ le tenseur d'Almansi usuel. La variation $\Delta_R^t \sigma$ du tenseur relatif de contrainte de Cauchy, de poids 1, peut être défini de même par:

$$(1.2) \quad \Delta_R^t \sigma \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(t) - {}^t_R \sigma, \quad \mathcal{L}_v \bullet \bullet {}^t_R \sigma \stackrel{\text{symb}}{=} 0, \quad {}^t_R \sigma \stackrel{\text{symb}}{=} \sigma(t_R).$$

Les égalités symboliques reflètent le fait qu'il reste encore à choisir l'un des trois types de transports possibles (mixte, co- ou contravariant).

1.2. L'hyperélasticité est définie à partir d'un état initial neutre de sorte que $t_R = 0$ et que l'on considère $\Delta_0^t \epsilon$ et $\Delta_0^t \sigma$ [25, 36 et 37]. La conservation de l'énergie s'exprime par :

$$(1.3) \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \Delta_0^t \sigma_{rev}^i D^j_i.$$

De plus, il est utile de rendre e et donc \mathcal{E} (puisque $\rho \sqrt{g}$ est constant par conservation de la masse) fonction non pas des invariants classiques mais du jeu :

$$(1.4) \quad V = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g(0)}}, \quad Q_{\Delta e} = \sqrt{2 \overline{\Pi}_{\Delta e}}, \quad \varphi_{\Delta e} = \frac{1}{3} \arccos \left\{ \frac{3 \sqrt{6} \overline{\text{III}}_{\Delta e}}{Q_{\Delta e}^3} \right\}$$

avec :

$$2 \overline{\Pi}_{\Delta e} = \overline{\Delta \epsilon}^i_j \overline{\Delta \epsilon}^j_i, \quad 3 \overline{\text{III}}_{\Delta e} = \overline{\Delta \epsilon}^i_j \overline{\Delta \epsilon}^j_k \overline{\Delta \epsilon}^k_i.$$

Par identification on obtient d'une part une définition tensorielle :

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \Delta_0^t \sigma_{rev}^i_j &= \alpha_0 \delta^i_j + \alpha_1 \Delta_0^t \epsilon^i_j + \alpha_2 \Delta_0^t \epsilon^i_k \Delta_0^t \epsilon^k_j, \\ \dot{I}_{\Delta_0^t \epsilon} &= \frac{\dot{V}}{V} - 2 \Delta_0^t \epsilon^i_k D^k_i, \end{aligned}$$

faisant intervenir une équation différentielle scalaire portant sur la trace de $\Delta_0^t \epsilon$. On obtient d'autre part, par contraction de (1.5), une correspondance entre trajets dans l'espace des invariants de déformation et de contrainte :

$$(1.6) \quad \begin{aligned} I_{\Delta_0^t \sigma} &= 3V \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial V} - 2Q_{\Delta e} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial Q_{\Delta e}}, \\ Q_{\Delta_0^t \sigma}^2 &= e_0 \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial Q_{\Delta e}} \right)^2 + \frac{e_1}{Q_{\Delta e}} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial Q_{\Delta e}} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varphi_{\Delta e}} + \frac{e_2}{Q_{\Delta e}^2} \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varphi_{\Delta e}} \right)^2, \\ \frac{1}{\sqrt{6}} Q_{\Delta_0^t \sigma}^3 \cos 3\varphi_{\Delta e} &= f_0 \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial Q_{\Delta e}} \right)^3 - 3 \frac{f_1}{Q_{\Delta e}} \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial Q_{\Delta e}} \right)^2 \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varphi_{\Delta e}} \right) \\ &\quad - 3 \left(\frac{f_2}{Q_{\Delta e}^2} \right) \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial Q_{\Delta e}} \right) \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varphi_{\Delta e}} \right)^2 + \frac{f_3}{Q_{\Delta e}^3} \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varphi_{\Delta e}} \right)^3. \end{aligned}$$

Les fonctions scalaires $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, e_0, e_1, e_2, f_0, f_1, f_2, f_3$ peuvent dépendre de $V, Q_{\Delta e}, \varphi_{\Delta e}$, et de $I_{\Delta e}$. Par exemple :

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= C_Q \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial Q_{\Delta e}} + C_\varphi \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varphi_{\Delta e}}, \quad C_Q = \left(\frac{3 + 2I_{\Delta e}}{3Q_{\Delta e}} \right), \\ C_\varphi Q_{\Delta e}^3 \sin 3\varphi_{\Delta e} &= Q_{\Delta e} \cos 3\varphi_{\Delta e} \left(1 + \frac{2I_{\Delta e}}{3} \right) + \sqrt{6} \frac{Q_{\Delta e}^2}{3} - 4\sqrt{6} \frac{I_{\Delta e}^2}{9} + 2\sqrt{6} \frac{I_{\Delta e}}{3}. \end{aligned}$$

D'autre part, si J note $1 - \frac{2I_{\Delta e}}{3}$, on a les formules remarquables :

$$(1.8) \quad \begin{aligned} e_0 &= J^2 + 2Q_{\Delta e}^2/3 - 4JQ_{\Delta e} \cos 3\varphi_e/\sqrt{6}; \quad e_1 = 8JQ_{\Delta e} \sin 3\varphi_e/\sqrt{6}, \\ e_2 &= J^2 + 2Q_{\Delta e}^2/3 + 4JQ_{\Delta e} \cos 3\varphi_e/\sqrt{6}, \\ f_0 &= J^3 \cos 3\varphi_e/\sqrt{6} - Q_{\Delta e} J^2 + 2Q_{\Delta e}^2 J \cos 3\varphi_e/\sqrt{6} - 2Q_{\Delta e}^3 \cos 6\varphi_e/9, \\ f_1 &= J^3 \sin 3\varphi_e/\sqrt{6} + 2Q_{\Delta e}^2 J \sin 3\varphi_e/3 \sqrt{6} - 2Q_{\Delta e}^3 \sin 6\varphi_e/9, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1.8) \quad & f_2 = J^3 \cos 3\varphi_e / \sqrt{6} + Q_{\Delta e} J^2 / 3 - 2Q_{\Delta e}^2 J \cos 3\varphi_e / 3 \sqrt{6} - 2Q_{\Delta e}^3 \cos 6\varphi_e / 9, \\
 \text{[cont.]} \quad & f_3 = J^3 \sin 3\varphi_e / \sqrt{6} - 2Q_{\Delta e}^2 J \sin 3\varphi_e / \sqrt{6} - 2Q_{\Delta e}^3 \sin 6\varphi_e / 9.
 \end{aligned}$$

Les formes (1.5), (1.7) et (1.6), (1.8) sont toutes les deux utiles mais la première est utilisée systématiquement, sous forme différentielle, pour obtenir les schémas de super-élasticité (élasto-hystérésis pure) et de mémoire de forme selon le processus de superposition de contrainte (cf. Fig. 1):

$$(1.9) \quad \sigma = \sigma_a + \sigma_{rev}$$

où σ_a note la contribution d'hystérésis pure dont la structure va maintenant être décrite.

1.3. Le schéma d'hystérésis pure (HP) est défini par branches (ou arcs de branches) successives des graphes d'hystérésis de sorte que l'on doit considérer $t_R \geq 0$, utiliser les fonctionnelles tensorielles $\Delta_R^t \sigma$ et faire jouer un rôle essentiel aux affixes remarquables tels que R (cf. Fig. 1). Ce rôle est déterminé par un processus de mémorisation discrète défini par critère et algorithme thermomécaniques (cf. par exemple [17]). Les schémas constitutifs sont donc formés par la réunion (syndéomie) de plusieurs (cinq) types de définitions qu'il est commode de rappeler brièvement.

Puisque l'on utilise (1.1) et (1.2) avec $t_R \geq 0$, il est naturel d'envisager des définitions du taux de contrainte de type de Zaremba:

$$\mathcal{L} \Delta_R^t \sigma + \Delta_R^t \sigma \stackrel{\text{symb}}{=} \mathcal{L} \Delta_R^t \epsilon + \Delta_R^t \epsilon.$$

Mais on a vu, à propos de (1.2), que l'essentiel est alors de choisir la variance du transport. Celle mixte s'avère la plus intéressante lors de l'étude de schémas où le terme en $\Delta_R^t \epsilon$ est supprimé (cf. [24]). En conséquence, la syndéomie rassemble d'abord les définitions de mémoire discrète:

$$(1.10) \quad \mathcal{L}_{v \cdot} \cdot \Delta_R^t \mathcal{G} = 0, \quad \mathcal{L}_{v \cdot} \cdot \dot{\sigma}_j^1 = 0, \quad \mathcal{L}_{v \cdot} \cdot \dot{\sigma}_j^2 = 0.$$

Elle rassemble ensuite les définitions du taux de $\sigma = \frac{1}{2} (\dot{\sigma} + \ddot{\sigma})$ et des taux associés à l'hystérésis pure Π_m , $\dot{\Delta}_{ii}$ (interne intrinsèque), $\dot{\mathcal{E}}, \dot{\mathcal{J}} (\dot{\mathcal{J}} = -\dot{\Delta}_{ii} + \bar{\Phi})$ en fonction des taux fondamentaux $\mathbf{D}, \mathcal{P}_i, \bar{\Phi}_m$ et \mathcal{E} :

$$(1.11) \quad \begin{aligned}
 \frac{\partial \dot{\sigma}_j^1}{\partial t} &= a_0 \delta_j^i + a_1 D_j^i + a_2 \Delta_R^t \dot{\sigma}_j^1, & \dot{\sigma}_j^1 &= \dot{\sigma}_j^2, \\
 \frac{\partial \dot{\sigma}_i^2}{\partial t} &= a_0 \delta_i^j + a_1 D_i^j + a_2 \Delta_R^t \dot{\sigma}_i^2,
 \end{aligned}$$

$$(1.12) \quad \begin{bmatrix} \Pi_m \\ -\dot{\Delta}_{ii} \\ \dot{\mathcal{E}} \\ \dot{\mathcal{J}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\omega} & \frac{1}{\omega} \\ -1 & -\frac{1}{\omega} & \frac{1}{\omega} \\ 0 & \frac{\omega-1}{\omega} & \frac{1}{\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{P}_i \\ \bar{\Phi}_m \\ \mathcal{E} \end{bmatrix}$$

avec, par exemple:

$$(1.13) \quad a_0 = \sqrt{g} \tilde{\lambda} D^i, \quad a_1 = 2 \sqrt{g} \tilde{\mu}, \quad a_2 = \frac{-\sqrt{g} \tilde{\mu} \bar{\Phi}_m}{(\omega \sqrt{g} \tilde{S}_0)^2} = b_4 \bar{\Phi}_m$$

et:

$$(1.14) \quad \bar{\Phi}_m = \bar{\Phi} + \bar{b} = \Delta^i_R \bar{\sigma}^j D^j + \bar{b}, \quad \bar{\mathcal{E}} = \Delta^i_j \Delta \sigma^j \frac{\dot{\bar{\Pi}}_{\Delta \sigma} + a_1 (\bar{\Phi}_m - \bar{\Phi})}{2 \bar{\Pi}_{\Delta \sigma}}.$$

Elle rassemble enfin la définition du critère d'inversion (basé sur $\bar{\Phi}_m$), celle de l'algorithme (basé sur l'intégration par branche de $\bar{\Phi}_m$) et celle d'une condition initiale non restrictive (cf. par exemple [17]).

On a noté qu'il reste à préciser \bar{b} dans (1.14). Le définition de ce terme fait intervenir les caractéristiques du milieu continu et peut être effectuée en suivant une méthode déjà décrite dans le cas particulier d'un milieu dont la limite de plasticité est du genre de Mises [25]. Cette méthode se généralise au cas d'une limite de plasticité de type de Coulomb [38].

Les évolutions irrotationnelles sont alors décrites, du point de vue déviatoire, par des équations différentielles à retard de la forme:

$$(1.15) \quad \frac{\partial \bar{\sigma}^i_j}{\partial t} - b_4 c \cot g 3 \varphi_{\Delta \sigma} \left(\frac{\dot{\bar{\Pi}}_{\Delta \sigma}}{2 \bar{\Pi}_{\Delta \sigma}} \right) - \frac{\dot{\bar{\Pi}}_{\Delta \sigma}}{3 \bar{\Pi}_{\Delta \sigma}} \Delta \sigma^i_j = a_1 \bar{D}^i_j + b_4 \bar{\Phi}_m \Delta \sigma^i_j,$$

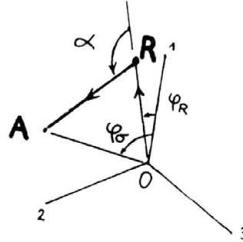


FIG. 4. Définition de la différence de phase alpha au point actuel A de la branche RA.

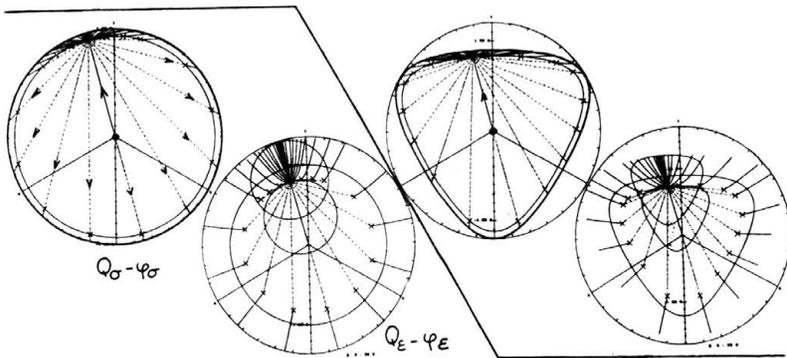


FIG. 5. Correspondance déviatoire contrainte-déformation dans le cas de Mises et de "Coulomb généralisé".

avec $c = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha \overline{\Pi}_{\Delta \sigma}}{a_1}$, si α note l'orientation de phase ($\varphi_{\Delta \sigma} - \varphi_R$) dans le plan déviatoire (cf. Fig. 4 et [25, 38]). Les propriétés du schéma de Zaremba "orienté" ainsi obtenu ont déjà été illustrées en particulier par des études de correspondances entre trajets cycliques de contraintes imposées et trajets de déformation (cf. Fig. 5 pour les cas du genre de Mises et de Coulomb).

2. Du schéma d'hystérésis pure aux schémas d'écroutissements

On se propose de suggérer comment la notion d'hystérésis pure peut jouer un rôle heuristique pour obtenir la définition d'une direction de recherche qui sera explorée au paragraphe suivant.

2.1. Compte tenu de la forme à retard des équations (1.15), il est tout d'abord utile de noter que les méthodes utilisées en matière de fluide [39] à propriétés dépendantes d'un paramètre (tel que la température), ne peuvent sans doute pas être transposées au cas étudié ici. Cette remarque est valable pour le schéma *HP* et donc aussi pour les schémas basés sur la superposition (1.9).

2.2. Les modèles symboliques à ressorts et frotteurs jouent un rôle heuristique remarquable en vue de la définition du schéma *HP* monotherme. On peut donc être tenté de définir une sorte de généralisation de ces modèles au cas où les propriétés de leurs constituants dépendraient d'un paramètre. Malheureusement, il n'est pas possible de généraliser efficacement la notion de frotteur. Cette difficulté est une expression physique de la difficulté mathématique précédente (point 2.1).

2.3. Il reste à envisager l'étude de schémas scalaires élastoplastiques très simples et très particuliers du genre de Prager, par exemple:

$$y = S_0(T) \operatorname{th} \left(\frac{x}{\varepsilon_0(T)} \right), \quad \varepsilon_0(T) = \frac{S_0(T)}{\mu(T)}$$

schémas qui sont suggérés par les résultats expérimentaux obtenus dans des conditions où l'on provoque de fortes variations des propriétés mécaniques en contrôlant un paramètre, typiquement la température. Puisque l'on recherche un schéma à mémoire discrète, un soin particulier doit présider aux définitions des fonctions y et x et de leurs taux.

Durant un "premier" chargement, effectué à partir d'un état initial supposé neutre, on a:

$$(2.1) \quad \Delta_R^t \sigma \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \sigma - {}^t_0 \sigma, \quad {}^t_0 \sigma = \sigma(0) = 0.$$

D'autre part, on peut convenir de noter (1.1):

$$(2.2) \quad \Delta_0^t \varepsilon \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} e - {}^t_0 e, \quad {}^t_0 e = e(0)$$

où les scalaires e et ${}^t_0 e$ ont des rôles qui ne peuvent être assimilés, sans prudence, à ceux des tenseurs $1/2 \mathcal{E}$ et $1/2 {}^t_0 \mathcal{E}$ respectivement. Nous allons voir que ces rôles sont cependant heuristiques d'une façon qui va être précisée au terme de l'étude du taux de $\Delta_0^t \varepsilon$.

En supposant qu'il soit possible de définir une inversion, on doit s'attendre à introduire :

$$(2.3) \quad \Delta_R^t \sigma = \sigma - {}_R^t \sigma, \quad \Delta_R^t \varepsilon = \varepsilon - {}_R^t \varepsilon$$

pour traiter l'évolution postérieure à cette inversion.

Posons alors :

$$(2.4) \quad \Sigma = \frac{\sigma}{S_0}, \quad {}_R^t \Sigma = \frac{{}_R^t \sigma}{S_0}, \quad \Delta_R^t \Sigma = \Sigma - {}_R^t \Sigma,$$

$$E = \frac{e}{\varepsilon_0}, \quad {}_R^t E = \frac{{}_R^t e}{\varepsilon_0}, \quad \Delta_R^t E = E - {}_R^t E$$

et introduisons la condition de mémoire discrète sous la forme :

$$(2.5) \quad \frac{d}{dt} {}_R^t \Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt} {}_R^t E = 0.$$

Lors de la première charge :

$$\dot{\Sigma} = (1 - \Sigma^2) \dot{E}$$

et postérieurement à l'inversion :

$$(2.6) \quad \dot{\Sigma} \stackrel{\text{def}}{=} \left(1 - \frac{\Delta_R^t \Sigma^2}{\omega^2} \right) \dot{E}.$$

D'autre part, si ${}_R^t \sigma$ et ${}_R^t e$ sont fonctions de t par l'intermédiaire de T exclusivement, on a :

$${}_R^t \dot{\sigma} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial {}_R^t \sigma}{\partial T} \dot{T}, \quad {}_R^t \dot{e} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial {}_R^t e}{\partial T} \dot{T}.$$

Alors (2.5) entraîne :

$$(2.7) \quad \frac{\partial}{\partial T} {}_R^t \sigma = \frac{1}{S_0} {}_R^t \sigma \frac{\partial S_0}{\partial T}; \quad \frac{\partial}{\partial T} {}_R^t e = \frac{1}{\varepsilon_0} {}_R^t e \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial T}.$$

Le produit scalaire $\Delta_R^t \Sigma \cdot \dot{E}$ permet de définir les instants d'inversion de l'évolution "réduite", parcourue dans l'espace (Σ, E) où s'appliquent toutes les évolutions "réelles" de même suite discrète "réduite".

Enfin, le taux de E est une somme de deux taux :

$$\dot{E} = \frac{D}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon_0^2} \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial T} \dot{T} e$$

de sorte qu'en tenant compte de (2.3) et (2.2) on a :

$$\dot{E} = \frac{D}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon_0^2} \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial T} \dot{T} (\Delta_R^t \varepsilon + {}_R^t \varepsilon)$$

ou bien :

$$\dot{E} = \frac{D}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon_0^2} \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial T} \dot{T} (\Delta_0^t \varepsilon + {}_0^t \varepsilon).$$

Ces formules scalaires peuvent être heuristiques pour effectuer l'extension tensorielle si elles sont interprétées avec prudence. On note d'abord que si plusieurs types de paramètres interviennent, l'usage de la première formule doit certainement conduire à des difficultés inextricables puisque deux fonctionnelles interviennent. Pour aborder sur des bases assez simples l'étude de cas aussi typique que celui de l'écroutissage à température variable, on est donc amené à considérer la seconde forme :

$$(2.8) \quad \dot{E} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{D}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon_0^2} \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial T} \dot{T} (\Delta_0^t \varepsilon + {}_0^t \varepsilon).$$

D'autre part, si l'on envisage des schémas dont la partie isotrope est réversible, l'analyse s'applique essentiellement à la partie déviatoire et ${}_0^t \varepsilon$ doit être considéré comme nul, de sorte que la forme scalaire heuristique est :

$$(2.9) \quad \dot{\bar{E}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\bar{D}}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon_0^2} \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial T} \dot{T} \Delta_0^t \bar{\varepsilon}$$

où les notations "déviatoires" sont symboliques.

Le schéma thermomécanique esquissé ci-dessus suggère immédiatement ceux à plusieurs variables "externes" et ceux à variables de structures internes spécifiques. Dans le premier cas, les fonctions $S_0(T)$ et $\mu(T)$ sont remplacées par des fonctions $S_0(T, "D", "\eta")$ de variables du genre "externes": température T , invariants "D" de vitesse de déformation, invariants " η " associés à la contrainte et à la déformation. Dans les deux cas, on a encore (2.6) et les relations (2.7) prennent la forme :

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \frac{\partial_R^t \sigma}{\partial \alpha_i} &= \frac{1}{S_0} \frac{\partial S_0}{\partial \alpha_i} {}_R^t \sigma, \\ \frac{\partial_R^t \varepsilon}{\partial \alpha_i} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \alpha_i} {}_R^t \varepsilon, \quad 0 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

si $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ notent l'ensemble des variables externes et internes. Notons de plus que le taux réduit $\dot{Q}(R)$ défini dans (Σ, E) par :

$$(2.11) \quad -\omega \dot{Q}(R) = \Delta_R^t \Sigma \dot{E} - \dot{\Sigma} \Delta_R^t E$$

est relié de façon simple au taux de chaleur interne intrinsèque dégagé :

$$(2.12) \quad -\omega \dot{\mathcal{Q}}_{it} = \Delta_R^t \sigma \dot{\varepsilon}|_{\dot{\alpha}=0} - \dot{\sigma}|_{\dot{\alpha}=0} \Delta_R^t \varepsilon \equiv -\omega Q(R) S_0 \varepsilon_0$$

c'est-à-dire qu'il s'exprime sous la forme monotherme et à l'aide de taux partiels éliminant ceux dûs à la dépendance des variables d'écroutissage [29].

L'évolution dans l'espace (Σ, E) étant du genre d'hystérésis pure, il est à présent clair que ce schéma monotherme dénué d'écroutissage, joue un rôle important pour définir ceux incluant des effets d'écroutissage et de température.

Dans le cadre de cette étude introductive, nous allons examiner un cas à trois variables T, η_1, η_2 et consacrer relativement plus de place à l'examen de situations monothermes.

3. Du modèle symbolique scalaire aux schémas tensoriels thermomécaniques avec écouissage

3.1. Bien que les fonctions S_0 et ε_0 soient scalaires, l'extension tensorielle de (2.4) n'est pas immédiate puisqu'il est nécessaire de faire jouer un rôle essentiel aux taux $\dot{\Sigma}$ et \dot{E} (cf. (2.5), (2.8) ou (2.9)). Il faut donc préciser les repères de définition. Cela ne peut être fait, soit en ignorant les différences de nature entre champs cinématiques et champs de contrainte, soit indépendamment du choix des repères de définition des contributions essentielles σ_a et σ_{rev} (cf. (1.9)).

On pose en principe que l'extension recherchée est de nature constitutive et doit privilégier au mieux le rôle du schéma d'hystérésis pure qu'elle est destinée à compléter.

Pour pouvoir distinguer ultérieurement les effets du choix des repères privilégiés de définition de σ_a (ce qui aide à discriminer les ingrédients de la théorie), on suppose provisoirement que le repère privilégié est simplement le repère fixe (repère où sera donc exprimé, si nécessaire, le taux de σ_{rev} , sachant que σ_{rev} , est défini dans (M, g_i, g_j)). La condition (2.5) devient:

$$\frac{\partial^t_R \Sigma_{\alpha\beta}}{\partial t} = \frac{1}{S_0} \left[\frac{\partial^t_R \sigma_{\alpha\beta}}{\partial t} - \frac{1}{S_0} \left(\sum_{i=0}^n \frac{\partial S_0}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i \right) {}^t_R \sigma_{\alpha\beta} \right] \stackrel{\text{déf}}{=} 0.$$

D'autre part, le taux de $\Sigma_{\alpha\beta} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\sigma_{\alpha\beta}}{S_0}$ est de la forme:

$$\dot{\Sigma}_{\alpha\beta} = \frac{\dot{\sigma}_{\alpha\beta}}{S_0} - \frac{1}{S_0} \left(\sum_{i=0}^n \frac{\partial S_0}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i \right) \Sigma_{\alpha\beta}.$$

En conséquence, on envisage la relation opératoire:

$$(3.1) \quad \dot{\sigma}_{\alpha\beta} \stackrel{\text{déf}}{=} S_0 \dot{\Sigma}_{\alpha\beta} + \left(\sum_{i=0}^n \frac{\partial S_0}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i \right) \Sigma_{\alpha\beta}$$

ou bien une forme déviatoire analogue.

En ce qui concerne les taux \dot{E} et \mathbf{D} , il est naturel de considérer dans (M, g_i, g_j) :

$$(3.2) \quad \dot{E}_{ij} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{\varepsilon_0} D_{ij} - \frac{1}{\varepsilon_0^2} \left(\sum_{i=0}^n \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i \right) A'_0 \varepsilon_{ij}.$$

A ce choix est associée la seconde condition de mémoire discrète:

$$\frac{\partial^t_R E_{ij}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0} \left[\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} {}^t_R g_{ij} - \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\sum_{i=0}^n \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i \right) \frac{1}{2} {}^t_R g_{ij} \right] \stackrel{\text{déf}}{=} 0$$

qui se réduit à l'invariance de ${}^t_R g_{ij}$ dans le cas monotherme sans écouissage. Le taux $\dot{E}_{\alpha\beta}$ est déduit de (3.2) par simple changement de coordonnées. Enfin, pour que (3.1), (3.2) et une équation:

$$(3.3) \quad \dot{\Sigma}_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta\gamma\delta} \dot{E}_{\gamma\delta}$$

de type différentielle à retard (analogue à (1.15)), constituent la base d'un schéma opératoire, il suffit de préciser les variables α_i et les fonctions S_0 et ε_0 . Notons cependant, dès maintenant, que dans le cas très particulier associé aux idéalizations de Mises et Prager, (3.3) ne contient (presque) plus de paramètres spécifiques d'un continu particulier, car on peut supposer, par exemple, que dans l'espace de projection (Σ, E) , $3\lambda + 2\mu$ est nul et que μ et S_0 valent l'unité; en revanche, ces paramètres figurent, comme prévu, dans (3.1) et (3.2). On note alors que, comme prévu, la méthode fait bien ressortir l'essentiel du schéma d'hystérésis pure, à savoir la notion de mémoire discrète, concrétisée par les affixes privilégiées: dans l'espace (Σ, E) la forme du trajet monotone entre deux affixes n'a (presque) plus d'importance. Il est bien évident que ces indications ne doivent pas être considérées comme l'amorce d'une orientation visant à placer la totalité des aspects constitutifs dans la définition du difféomorphisme entre R et HP .

3.2. On s'intéresse à présent à la définition des variables scalaires α du genre "externe" (écrouissage strict).

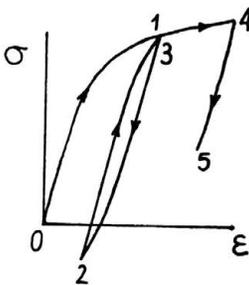
i) On pose d'abord en principe que les variables d'écrouissage sont définies à partir de variables de l'espace R .

ii) On restreint ensuite l'étude en convenant de négliger les phénomènes du genre vieillissement et/ou endommagement dont la description risque d'exiger la définition précise d'un processus de création du continu, l'introduction associée d'un instant initial "absolu" et l'usage d'un "temps" absolu. Pour cela, on s'intéresse seulement aux phénomènes d'écrouissage pouvant être effacés par cyclage fondamental, au moins au premier ordre (écrouissage élémentaire).

L'évolution d'un continu doté de cette propriété d'écrouissage "élémentaire strict" peut donc être considérée comme la suite indéfinie, mais bornée, de séquences sollicitation-cyclage fondamental. L'étude essentielle concerne une séquence et l'on peut convenir de prendre son début comme origine du "temps".

iii) Un des choix les plus simples est le suivant. On utilise deux variables η_1 et η_2 ayant la forme de variations $\Delta\eta$. Si l'on note:

$$d\tilde{\eta} = \frac{2}{\omega^2} \bar{\Phi}_a dt; \quad \bar{\Phi}_a = S_0(\eta_1, \eta_2, T) \text{trace}(\overline{\Delta}_R^T \Sigma \overline{\mathbf{D}})$$



$t \in] ,]$	σ	ω	η_1	η_2
0,1	0	1	$\int_0^t d\tilde{\eta}$	$\int_0^t d\tilde{\eta}$
1,2	1	2	$\int_1^t d\tilde{\eta}$	$\int_0^1 d\tilde{\eta}$
2,3	2	2	$\int_2^t d\tilde{\eta}$	$\int_1^2 d\tilde{\eta}$
3,4	0	1	$\int_0^1 d\tilde{\eta} + \int_3^t d\tilde{\eta}$	$\int_0^1 d\tilde{\eta} + \int_3^t d\tilde{\eta}$
4,5	4	2	$\int_4^t d\tilde{\eta}$	$\int_0^1 d\tilde{\eta} + \int_3^4 d\tilde{\eta}$

FIG. 6. Définition des fonctionnelles $\int_R \sigma$, ω , η_1 et η_2 .

on introduit les variations par branche :

$$(3.4) \quad \Delta\eta_i = \int_{(\text{branche de rang } i)} d\tilde{\eta}_i.$$

Lè schéma est ainsi intimement lié à celui d’hystérésis pure. D’une part, la première variable η_1 caractérise l’avancement depuis la création de la branche support actuelle. D’autre part, η_2 est la variation sur les arcs de support algorithmique antérieur (si $\omega = 2$) ou actuel (si $\omega = 1$) (cf. Figure 6 illustrative de cette règle). La conséquence opératoire de cette règle est :

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \eta_1 = \eta_2 = \Delta\eta_1 & \quad \text{et} \quad d\eta_1 = d\eta_2 = d\tilde{\eta} & \quad \text{si} \quad \omega = 1, \\ \eta_1 = \Delta\eta_k, \quad \eta_2 = \Delta\eta_{k-1} & \quad \text{et} \quad d\eta_1 = d\tilde{\eta}, \quad d\eta_2 = 0 & \quad \text{si} \quad \omega = 2. \end{aligned}$$

Si les variables sont T , η_1 et η_2 , il suffit donc de définir les dérivées partielles relativement à T et $\tilde{\eta}$.

3.3. Soient, par exemple, deux fonctions scalaires décroissantes de la température $S_{00}(T)$ et $S_{0g}(T)$ affines ($S_{00} = kS_{0g}$) et de la forme :

$$(3.6) \quad S_{00}(T) = kS_{0g} = S_{0m} - \Delta S_0 \operatorname{th} \left(\frac{T - T_c}{\Delta S_0} \mu_T \right).$$

On pose :

$$(3.7) \quad S_0(\eta_1, \eta_2, T) = S_{00}(T) + S_{0g}(T)x_{0g}(\eta_1, \eta_2, T)$$

avec :

$$(3.8) \quad \begin{aligned} 0 & \leq x_{0g} \leq 1, \\ x_{0g}(0, 0, T) & = 0 \quad \forall T, \\ \lim_{\tilde{\eta} \rightarrow \infty} x_{0g}(\eta_1 \equiv \tilde{\eta}, \eta_2 \equiv \tilde{\eta}, T = \text{cte}) & = 1 \quad (\omega = 1), \\ \lim x_{0g}(\eta_1, \eta_2 = \text{cte}, T = \text{cte}) & = 1 - \exp \left(- \frac{\eta_2}{\eta_{20}(T)} \right), \end{aligned}$$

où la dernière condition concerne bien entendu un cyclage “fixe” (à $\omega = 2$). Les taux partiels sont définis par des équations à retard :

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \frac{\partial x_{0g}}{\partial T} & = \frac{\partial x_{0g \text{ lim}}}{\partial T} \operatorname{th}(b_1 \eta_1) + \frac{\partial b_1}{\partial T} (x_{0g \text{ lim}} - x_{0g}) \eta_1 (1 - \operatorname{th}^2(b_1 \eta_1)), \\ \frac{\partial x_{0g}}{\partial \tilde{\eta}} & = \frac{\partial x_{0g \text{ lim}}}{\partial \tilde{\eta}} \operatorname{th}(b_1 \eta_1) + b_1 (x_{0g \text{ lim}} - x_{0g}) (1 - \operatorname{th}^2(b_1 \eta_1)), \end{aligned}$$

avec :

$$(3.10) \quad x_{0g \text{ lim}} = 1 - \exp \left(- \frac{\eta_2}{\eta_{20}(T)} \right).$$

Dans les études préliminaires telles que celle-ci, il est important de se restreindre au cas où les paramètres b_1 et η_{20} ne varient pas avec la température :

$$(3.11) \quad \frac{\partial b_1}{\partial T} = \frac{\partial \eta_{20}}{\partial T} = 0$$

On note enfin que, dans le cas monotherme, l'évolution de S_0 est très semblable à celle proposée antérieurement pour décrire l'érouissage de deux alliages particuliers [40]. La description d'un phénomène de durcissement seul dans un cas et de la combinaison d'un durcissement et d'un adoucissement dans l'autre cas avait déjà mis en évidence la nécessité d'utiliser une schématisation à propriétés discrètes, liées au schéma d'hystérésis pure, pour décrire des situations réelles variées.

Le choix effectué ici de régler l'évolution de S_0 vers son "attracteur" par une équation différentielle à retard, dont la forme est assez intuitive si l'on part des choix de η_1 et de η_2 , a permis de simplifier les définitions, en supprimant en particulier l'introduction de certaines variables d'origine. Il ne faut cependant pas considérer ce choix simple comme définitif, celui-ci devant évoluer au vu de résultats expérimentaux variés.

4. Illustration des propriétés du schéma d'érouissage dans le cas monotherme

4.1. L'étude est faite en cinématique homogène associée à la transformation:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} z^n &= (1+k_n)Z^n, & n &= 1 \text{ ou } 3, \\ z^2 &= (1+k_2)Z^2 + 2\tau Z^3, & n &= 2. \end{aligned}$$

Le schéma d'hystérésis pure est purement déviatoire du genre Prager ou étendu à des cas plus réalistes en envisageant une extension de (1.13) selon:

$$(4.2) \quad a_2 = \frac{-\sqrt{g} \tilde{\mu} \bar{\Phi}_m}{(\omega \sqrt{g} \bar{S}_0)^c \Pi_{\Delta \bar{\sigma}_a}^{\frac{2-c}{2}}}.$$

Le schéma classique de Prager est obtenu pour $c = 2$ [30]. Le schéma d'hystérésis pure est complété conformément à (1.9) par une contribution réversible associée au potentiel élastique:

$$(4.3) \quad \mathcal{E} = E\sqrt{g}, \quad E = \frac{k_r}{6} \ln^2 V + \frac{Q_{0r}^2}{2\mu_r} \ln \left(\text{ch} \frac{2Q_{\Delta e} \mu_r}{Q_{0r}} \right) + \mu_{\infty} Q_{\Delta e}^2$$

avec $k_r = 100\,000$ MPa.

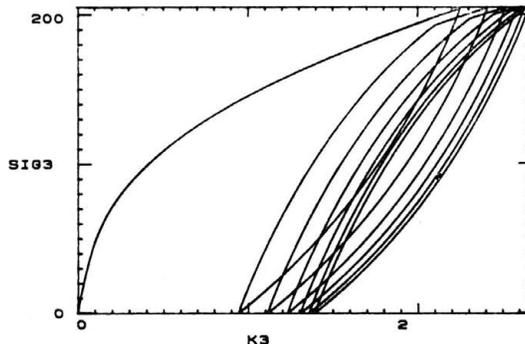


FIG. 7. Effet d'érouissage de "reptation" obtenue en traction simple pour des cycles effectués entre une force nulle et une force F .

La fonction S_0 est défini par (3.6) à (3.11) avec:

$$T = T_c; \quad S_{0m} = 65\text{MPa}; \quad k = 1 \quad (S_{0g} = S_{0o}).$$

On étudie par exemple le cas où $\mu = \text{cte} = 12\,500\text{ MPa}$ et l'on considère tout d'abord une cinématique irrotationnelle du genre traction cyclique contrôlée en force axiale entre 0 et une force F constante (cf. Fig. 7). On envisage une contribution d'hystérésis du type Prager généralisée ($c = 0.5$), à vitesse d'écroissage importante ($b_1 = 10^{-6}\text{ Pa}^{-1}$, $\eta_{20} = 10\text{ MPa}$) et une partie réversible complétée par:

$$Q_{or} = 25\text{ MPa}, \quad \mu_r = 12500\text{ MPa}, \quad \mu_\infty = 550\text{ MPa}$$

Ce choix permet d'obtenir, lors des cycles entre 0 et F , des boucles d'hystérésis relativement ouvertes, s'accompagnant d'une reptation qui tend pour un nombre de cycles plus important (de l'ordre de 10 ici) à s'annuler; on obtient alors une boucle d'hystérésis stable entre $k_3 = 1.45\%$ et $k_3 = 2.8\%$.

4.2. La seconde série d'étude concerne le cas où le schéma d'hystérésis est du type de Prager purement déviatoire ($c = 2$), à vitesse d'écroissage plus faible ($b_1 = 2 \cdot 10^{-8}\text{ Pa}^{-1}$, $\eta_{20} = 1\text{ MPa}$). Il est complété par une partie réversible isotrope ($Q_{or} = \mu_\infty = 0$). On considère des évolutions cycliques à contraintes latérales nulles, irrotationnelles contrôlées en déformation axiale variable (cf. Fig. 8) ou rotationnelles contrôlées en déformation de cisaillement τ variable sous contrainte axiale constante (cf. Fig. 9).

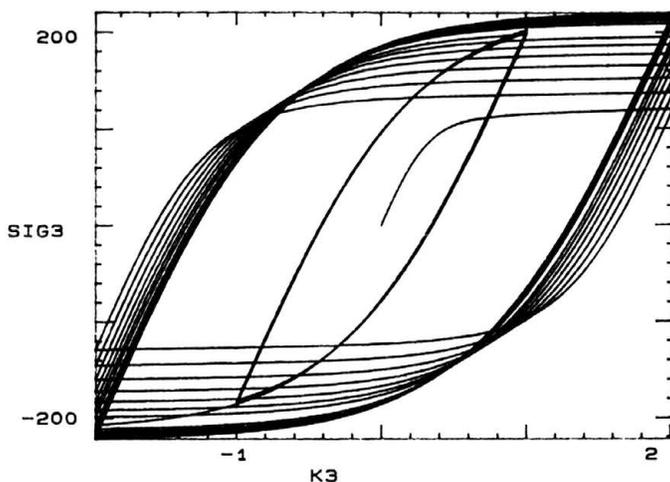


FIG. 8. Effet d'écroissage sous déformation cyclique imposée en traction simple.

La dernière série d'illustration est relative à un cas "hors-phase", proche des conditions expérimentales assez souvent mises en oeuvre ces dernières années [42]. Après une traction simple contrôlée en déformation axiale, on impose un trajet circulaire dans l'espace "cinématique" (k_3, τ), sous contraintes latérales nulles. On s'intéresse alors à la réponse associée dans les représentations des composantes axiales (k_3 noté $K3$, σ_{33} noté $S3$), ou de cisaillement (τ noté TO , σ_{23} noté $S4$) (cf. Fig. 10).

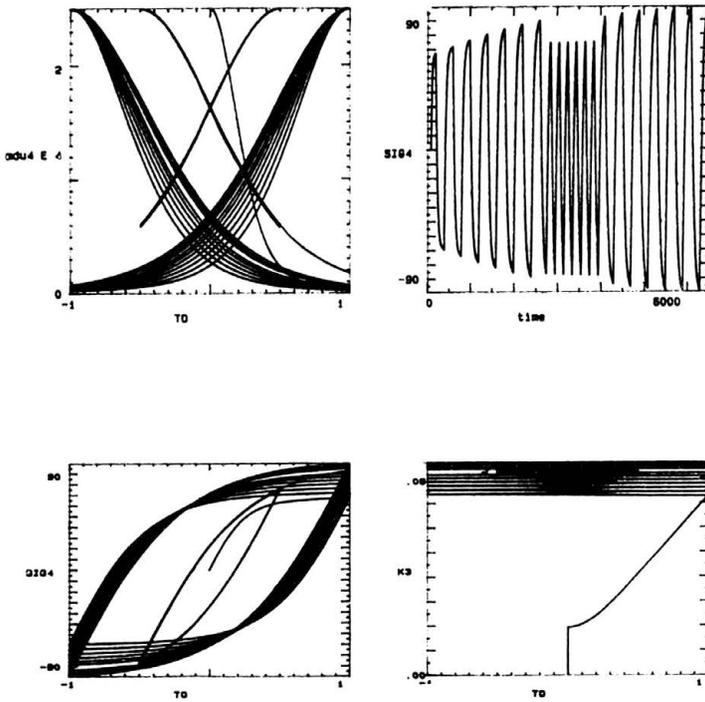


FIG. 9. Effet d'écroissage sous déformation cyclique imposée en "torsion": déformation angulaire τ variable sous contraintes latérales nulles et contrainte axiale constante: effets principaux ($TO = \tau$, $SIG4 = \sigma_{23}$), $\left(TO = \tau, md4 = \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial \tau} \right)$ et effet du second ordre de rochet axial.

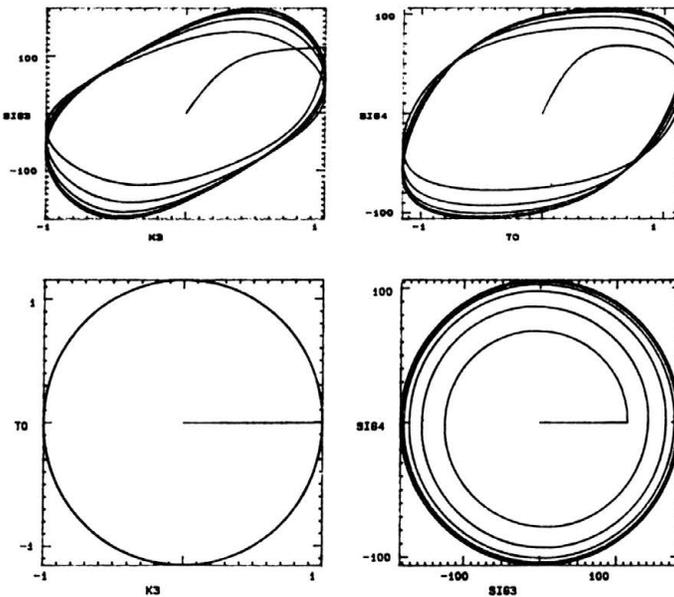


FIG. 10. Effet d'écroissage sous déformation imposée en traction simple puis circulaire dans l'espace ($K3 = k_3$, $TO = \tau$) sous contraintes latérales nulles: effet de durcissement dans l'espace ($SIG3 = \sigma_{33}$, $SIG4 = \sigma_{23}$), et représentation ($K3, SIG3$), ($TO, SIG4$).

5. Résultats expérimentaux

Des résultats expérimentaux obtenus avec plusieurs alliages indiquent que la notion d'écroissage élémentaire, c'est-à-dire effaçable dans nos conditions expérimentales, est une notion très réaliste, tout en n'étant pas évidemment une propriété absolue.

Un bon exemple est celui représenté par un laiton du commerce dont les composants chimiques principaux sont: Cu($\approx 58\%$), Zn($\approx 39\%$), Pb($\approx 3\%$). Des essais cycliques et symétriques de traction-compression et de torsion alternée ont été effectués avec des éprouvettes tubulaires.

L'essai de torsion simple a été effectué avec trois amplitudes de déformation croissantes ($\pm 0,8$; $\pm 1,2$ et $\pm 1,6\%$) (Fig. 11), puis décroissantes ($\pm 1,2$ et $\pm 0,8\%$) (Fig. 12); il s'est terminé par de grands cycles à $\pm 1,6\%$ suivi d'un cyclage fondamental et d'une recharge à $\pm 1,6\%$. Au cours de cette sollicitation, l'évolution de l'écroissage peut se caractériser

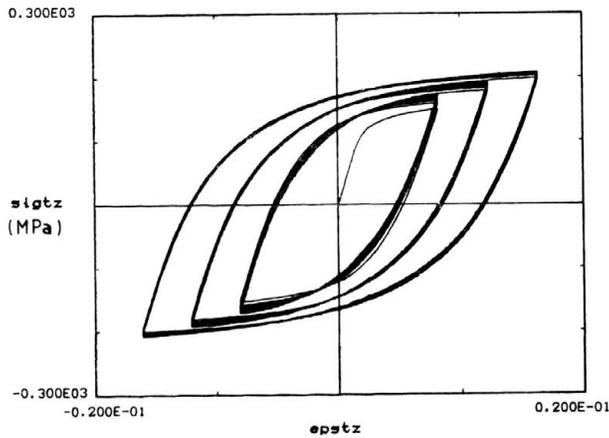


FIG. 11. Essai de torsion alternée. Amplitudes croissantes. Laiton.

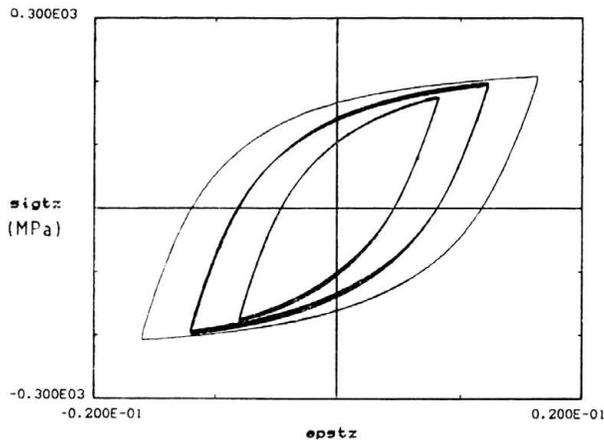


FIG. 12. Essai de torsion alternée. Amplitudes décroissantes. Laiton.

par la variation de la contrainte S_i en fin de branche en fonction du nombre de branches N (Fig. 13). On vérifie bien que pour chaque amplitude de déformation, le nombre de cycles effectué est suffisant pour définir l'état de saturation correspondant à une précision relative meilleure que 1%, alors que l'écroûissage total est de 55 MPa, représentant environ

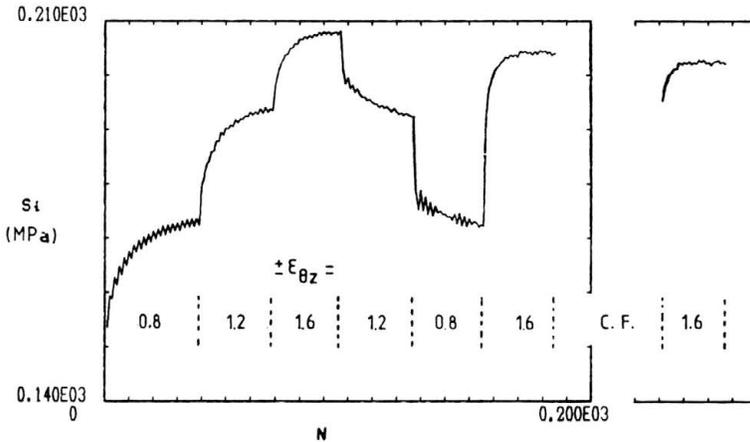


FIG. 13. Essai de torsion alternée. Evolution de la contrainte à l'inversion. Laiton.

35% de la valeur initiale. On constate, pour les amplitudes de déformation de $\pm 0,8\%$ et de $\pm 1,2\%$, que le niveau de contrainte atteint est le même indépendamment de l'ordre croissant ou décroissant des déformations. Par contre, pour l'amplitude $\pm 1,6\%$, il existe un décalage entre les trois niveaux atteints, les deuxième et troisième niveaux étant respectivement inférieurs de 3,5 et de 5,6 MPa.

L'essai de traction-compression simple a été effectué avec un nombre de cycles limité en raison du risque d'instabilités dues à la déformation circonférentielle non négligeable propre à ce type d'essai. Deux amplitudes de déformation ont été effectuées à $\pm 1,0$ et $\pm 1,5\%$ (Fig. 14), valeurs qui correspondent approximativement aux deux premières

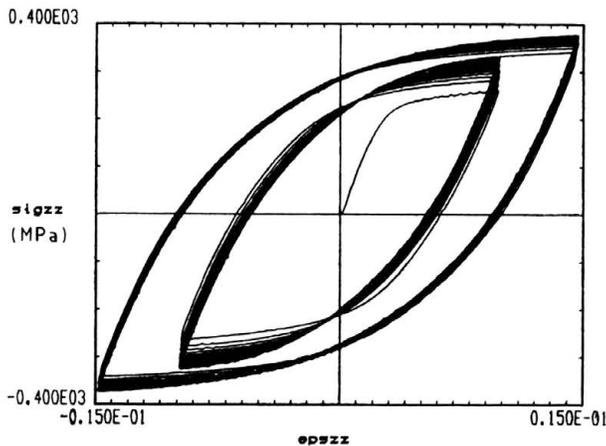


FIG. 14. Essai de traction-compression. Amplitudes croissantes. Laiton.

amplitudes de l'essai de torsion. La diagramme $S_i - N$ indique que le niveau de saturation en contrainte pour l'amplitude de $\pm 1\%$ est défini avec une moins bonne précision; malgré tout on constate, de même que précédemment, que le niveau de contrainte de saturation, atteint pour les deux amplitudes de déformation, est indépendant de l'ordre des cycles de déformation (Fig. 15).

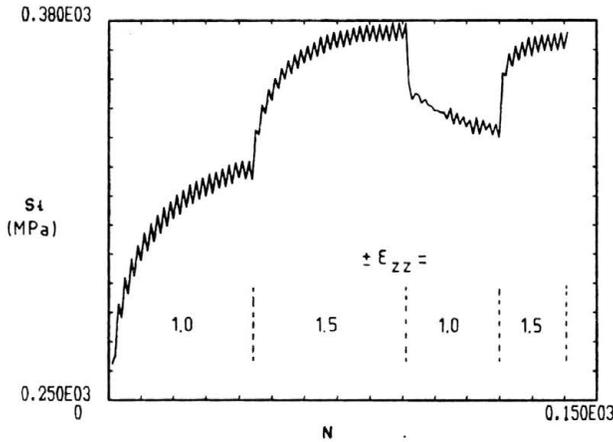


FIG. 15. Essai de traction-compression. Evolution de la contrainte à l'inversion en fonction du nombre de beaches. Laiton.

La comparaison des deux types de résultats indique une petite anisotropie du matériau due très probablement au procédé d'extrusion utilisé pour obtenir la barre dans laquelle ont été usinées les éprouvettes. Les résistances en traction et compression après saturation notées \hat{S}_{zz} ont la même valeur (Fig. 14) à une précision relative de l'ordre de $\pm 1,2\%$, alors que la résistance équivalente en torsion au sens de Mises notée $\hat{S}_{\theta z}$ est inférieure

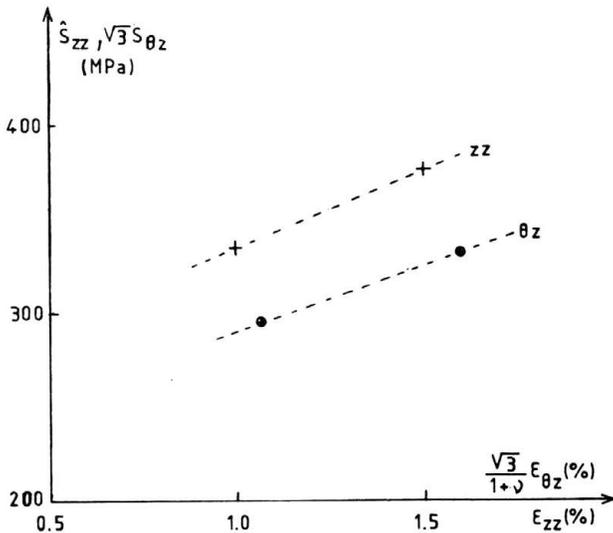


FIG. 16. Comparaison des contraintes à saturation. Mise en évidence d'une petite anisotropie. Laiton.

d'environ 13% (Fig. 16). Ces résultats s'intègrent mieux avec les propriétés d'un matériau anisotrope qu'avec les propriétés d'un matériau isotrope à seuil de trace non circulaire dans le plan déviatoire.

La réalité de la notion d'érouissage effaçable est confirmée par le cyclage fondamental constitué de cycles quasi symétriques, d'amplitude légèrement décroissantes, effectués à partir du plus grand cycle atteint au cours des sollicitations antérieures (Fig. 17): le

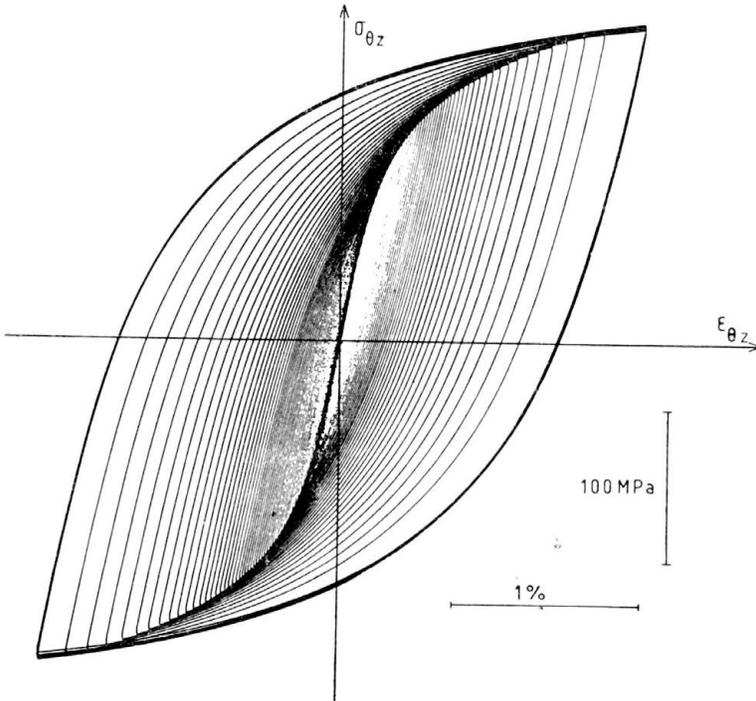


FIG. 17. Cycle fondamental en torsion alternée. Laiton.

cyclage fondamental permet d'effacer la mémoire discrète des instants d'inversion et de retrouver l'état neutre des solides à hystérésis. Dans le cas d'un comportement d'hystérésis pure, les branches du cyclage fondamental sont une partie du début de l'homothétique de rapport deux de la courbe de première charge. Pour le laiton, on constate que les branches sont bien, au début du cyclage fondamental, une partie de la courbe de saturation, mais au fur et à mesure qu'elles diminuent de longueur, les branches s'éloignent de la courbe de saturation pour se rapprocher de l'homothétique de la courbe de première charge avant érouissage. Le cyclage fondamental a donc aussi tendance à effacer l'érouissage antérieur.

L'essai de torsion a lieu à force axiale nulle; il montre l'existence d'un allongement axial (Fig. 18). Pour les cycles d'amplitude $\pm 0,8\%$, ce rochet semble s'arrêter après une vingtaine de cycles, par contre, pour les autres amplitudes, le rochet par cycle après avoir diminué, se stabilise à un taux constant (figure 19). La valeur du rochet axial par cycle rapportée à l'amplitude de déformation de cisaillement, est de $1,2 \cdot 10^{-3}$ pour les cycles

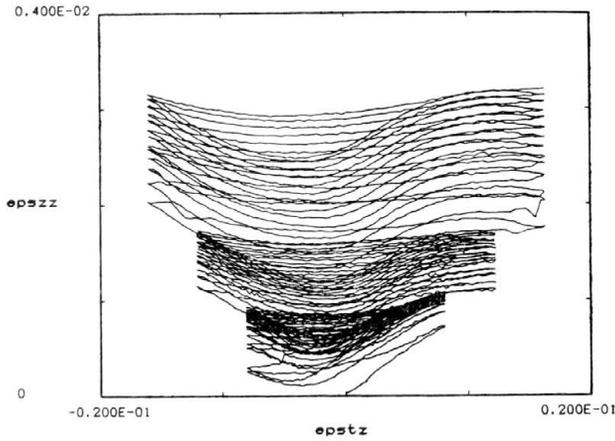


FIG. 18. Déformation axiale (ou rochet) accompagnant la torsion à force axiale nulle. Laiton.

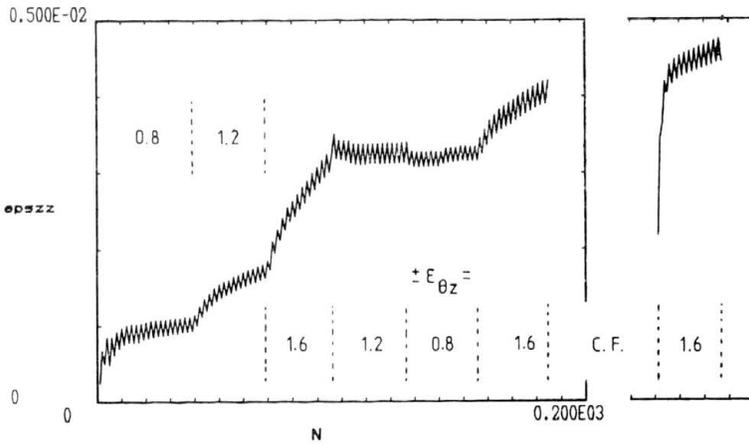


FIG. 19. Rochet axial de la torsion à force axiale nulle. Evolution en fonction du nombre de branches. Laiton.

$\pm 1,2\%$ et de $2,4 \cdot 10^{-3}$ pour les cycles $\pm 1,6\%$. Lorsque l'amplitude des cycles diminue, le rochet axial s'arrête. Une augmentation ultérieure de l'amplitude produit à nouveau un rochet axial positif, mais de valeur plus faible (Fig. 19).

Des résultats expérimentaux obtenus précédemment avec l'acier inoxydable 17-12 SPH [40, 41, 43] indiquent que l'écroissage n'est pas entièrement effaçable pour ce matériau: il apparaît qu'environ 50% de l'écroissage est acquis définitivement quelle que soit l'amplitude de déformation des cycles ultérieurs. Des résultats récents obtenus avec un duraluminium du commerce semblent aussi indiquer que le durcissement, obtenu au cours d'une sollicitation par cycles d'amplitude de déformation croissante, s'efface en grande partie pour les cycles ultérieurs d'amplitude décroissante [44]. Comme pour l'acier inoxydable, il apparaît que pour le duraluminium, l'effacement n'est pas total.

En résumé, il apparaît que l'écroissage des métaux est effaçable par diminution de l'amplitude de la sollicitation; suivant le type de métal ou d'alliage, l'effacement peut être total ou partiel.

6. Remarques finales

6.1. Les variables d'écroissage η_1 et η_2 sont des fonctionnelles: comme celui d'hystérésis pure, le schéma est à mémoire discrète. Ce schéma simple est donné à titre d'illustration et doit être encore étudié en tenant compte de résultats théoriques et expérimentaux qui sont sur le point d'être obtenus. Il s'agit, d'une part, de résultats concernant les problèmes de définition des repères privilégiés d'hystérésis pure et de couplage isotrope-déviatoire, d'autre part de résultats expérimentaux concernant les effets du second ordre.

6.2. L'étude introductive du cas particulier de l'écroissage élémentaire strict à deux variables est donc largement incomplète. Elle est également affectée par des restrictions que l'on peut ranger en deux catégories. D'une part la forme scalaire de Prager utilisée comme origine heuristique est très particulière. D'autre part la nature des variables η_1 et η_2 l'est aussi en ce sens que des variables telles que les invariants de déformation et de vitesse de déformation sont écartées de cette étude préliminaire. Cependant, les principes et les définitions mises en oeuvre ainsi que les résultats immédiatement obtenus dans le cas monotherme (§ 4) et à température variable (cf. annexe 2) suggèrent l'étendue de la classe de schémas à variables externes qui peut être explorés en tenant compte de résultats expérimentaux fins et en consacrant une attention particulière à des problèmes fondamentaux à peine évoqués ici (tel celui de la définition d'une configuration de référence lors d'une évolution à température variable).

6.3. Parallèlement, un développement continu, organisé et bien fondé des schémas à variables internes dépend largement de résultats synthétiques obtenus aux termes d'études expérimentales délicates menées à plusieurs échelles. De telles études, déjà peu commodes [1] dans les situations où sont réputés opératoires les concepts de potentiel et de diffusion, doivent en effet porter ici sur des phénomènes marqués d'un "caractère hystérique violent" [45]. Le risque existe alors d'être renvoyé aux difficultés conceptuelles associées [46] et de devoir, en conséquence, afficher le degré d'objectivité [47] que l'on accorde à la notion de mémoire discrète.

Annexe 1. L'hystérésis mécanique: principes, méthodes et résultats [36].

i) L'hystérésis est un phénomène universel, et peut donc, en tant que tel, susciter la mise en jeu d'éléments conceptuels importants. Le phénomène d'hystérésis [2] est observé dans des domaines très variés de la physique: les temps caractéristiques des hystérésis de filtration et des hystérésis par bi-stabilité optique sont, respectivement, de l'ordre de 10^3 s et de 10^{-11} s. En mécanique des continus, l'hystérésis s'observe non seulement pour des solides tels que les alliages métalliques, mais aussi pour des corps tels que les graisses

et les matériaux pulvérulents. En résumé, les résultats obtenus depuis deux décennies à l'aide des moyens expérimentaux modernes, suggèrent que la notion de transformation irréversible renversible [2], lorsqu'elle est reconnue comme irréductible [3], doit jouer, en matière de schématisation du réel, un rôle d'une importance comparable aux rôles tenus par le concept d'onde, la notion de potentiel et les irréversibilités du genre de diffusion.

ii) En matière d'hystérésis mécanique, la situation ne se présente pas favorablement, qu'il s'agisse des principes, des méthodes ou des résultats. Quelques études combinent des techniques de statistique, de discontinuité et de réversibilité pour suggérer la possibilité de réduire les schémas de l'hystérésis aux schémas dynamiques classiques [4, 5]: la situation conceptuelle n'est pas simple et évoque celle apparue naguère en théorie des systèmes à la VAN DER POL [3, 6]. Quelques études apportent des contributions spécifiques bien fondées [2, 3, 7, 8]. Pour se présenter sous forme thermomécanique, la plupart des travaux se poursuivent en utilisant un formalisme thermodynamique classique bien qu'il soit parfaitement connu que ni l'équation fondamentale de Gibbs, ni le principe associé dit "de l'équilibre local", ni l'inégalité associée de CLAUSIUS-DUHEM [9] ne sont adaptés au traitement des irréversibilités d'hystérésis. La situation, en quelque sorte étonnante sur le plan conceptuel, tient bien entendu au fait que, dans son état actuel, la théorie des milieux continus n'est pas indépendante des positions positivistes adoptées en Physique sur la base de la doctrine hamiltonienne [10]: les nombreux modèles proposés recèlent des difficultés de fond et la situation actuelle de la mécanique du continu relève encore de la célèbre analyse de RIVLIN [11]. Cette situation nécessite aussi le rappel [12] de l'importance, trop longtemps oubliée, de la géométrie différentielle et des conditions générales d'invariance des théories [13]. Elle pousse ODEN et BATHE [14] à formuler des observations critiques en matière d'applications: les aspects opératoires sont soulignés au dépend de l'analyse des concepts qui en constituent les bases. Il n'est donc pas surprenant qu'il soit encore possible d'adopter actuellement un point de vue présenté en 1972 par ZIEGLER [15] en matière de résultats pratiques: l'essentiel des résultats fiables obtenus en plasticité appliquée, est basé sur l'analyse limite mise en oeuvre dans des conditions de chargement monotone (de sorte que le concept de base, qui est celui de potentiel, est, en la circonstance, et par définition, d'un usage sans intérêt conceptuel et que les succès évoqués indiquent seulement l'éventuelle pertinence de la notion de plasticité).

iii) Le calcul des structures ainsi que les recherches expérimentales macroscopiques et microscopiques font apparaître des questions essentielles qui mettent en cause le bien fondé des modèles existants alors même qu'il est devenu peu commode non seulement d'améliorer ces modèles, mais aussi d'en changer. D'une part, des résultats pratiques doivent être obtenus sous sollicitations cycliques. D'autre part, les moyens d'essais permettent de déceler des effets secondaires et des processus microstructuraux difficiles à décrire et qui mettent en cause les bases des modèles existants. Enfin, les recherches menées durant les trois dernières décennies en vue d'améliorer les modèles intégraux et à variables internes procurent des succès limités au prix d'efforts considérables.

iv) Cette situation bloquée peut être analysée dans le cadre de la théorie des systèmes dynamiques. Classiquement, il est postulé qu'il n'existe pas de systèmes dont la description n'est possible que si l'on connaît déjà toute l'évolution. Ce déterminisme strict est conforme par excès à l'esprit du déterminisme au sens large que représente le principe de détermina-

tion [3] et qui implique “seulement” l’idée du progrès indéfini des prévisions “responsables” [16]. Il conduit à poser que les seuls schémas “a priori” admissibles appartiennent nécessairement à la classe des systèmes dynamiques classiques ou conduisent à des systèmes de cette classe. En conséquence, tout usage de la notion de mémoire ne peut être envisagé autrement que sous la forme d’un artifice provisoire reflétant le caractère incomplet du choix des variables d’état. Enfin, tout schéma irréductible est à rejeter définitivement comme non déterministe au sens strict. Les schémas possibles sont donc contenus dans des limites précises qui peuvent nous apparaître aujourd’hui comme excessivement étroites. Mais il ne faut pas perdre de vue l’extraordinaire capacité opératoire des schémas dynamiques classiques et se souvenir de la raison essentielle pour laquelle un principe aussi strict a pu être longtemps tenu pour indispensable. Il a en effet pour rôle, d’écarter du champ de la physique le concept de mémoire. Ce concept devait être écarté dans la mesure où il semblait impliquer définitivement l’intervention d’actions à distance instantanées et équivalait donc à une négation du caractère opératoire du principe de causalité. Bien entendu, l’argument des actions instantanées a aujourd’hui perdu toute force du fait des résultats d’observations à échelle fine, observations qui font apparaître comment la matière peut être envisagée comme support de mémoire.

v) Cette première analyse explique les raisons de l’intense effort de développement des théories à variables internes, théories fondées sur l’hypothèse selon laquelle les lois véritablement importantes sont celles dites “simples”, c’est-à-dire hamiltoniennes, mises en jeu à échelle fine. C’est la considération de ces échelles qui permet de décréter une simplicité du réel, qui n’est pas impliquée dans l’idée du déterminisme au sens large: si les échelles intéressantes ne peuvent être considérées, l’ensemble conceptuel devient non falsifiable et sort donc du champ scientifique [16]. Le fait est qu’il a été procédé à la mise en oeuvre d’un nombre fini de variables scalaires puis tensorielles. Les problèmes ont alors été ceux d’objectivité, de nature physique et de nombres des variables (2 au moins, en cyclique, selon les idées actuelles). On a enfin constaté qu’il était délicat de mesurer les variables internes et ce sont ces dernières difficultés, lourdes de conséquences sur le plan opératoire, qui ont suscité d’intenses recherches interdisciplinaires finalement fructueuses pour la raison suivante: l’importance des notions de configurations de dislocations et d’immobilisation de dislocations a été reconnue. La doctrine relative aux échelles fines essentielles est donc en cause.

vi) L’état des affaires peut aussi être étudié du point de vue thermomécanique. Les limites de validité de l’équation de Gibbs ont été précisées par Gibbs lui-même. Elles touchent à des questions microstructurales d’une extrême importance en ce sens qu’elles garantissent la compatibilité de l’équation de Gibbs avec la doctrine des lois “simples” à échelle fine, doctrine déjà évoquée au point v): en d’autres termes, l’équation de Gibbs et le principe associé dit de l’équilibre local valent lorsqu’il s’agit de schématiser les irréversibilités par “forces retardatrices”. Les théories à variables internes sont donc d’autant plus efficaces que la température relative est plus élevée, que les immobilisations de dislocations jouent un rôle décroissant, que les irréversibilités, mises en jeu à l’échelle de l’élément, sont du genre de viscosité ou de diffusion. Inversement, on doit s’attendre à rencontrer des difficultés, lorsque des “forces inhibitrices” sont prépondérantes: Gibbs donne d’ailleurs la plasticité comme exemple. Dans de tels cas, glissement et frottement sont les processus

à échelle fine (10 μm par exemple) qui font des agrégats solides des continus très différents des fluides. Cette distinction marquée par Gibbs a été également soulignée par FER [2] en 1970. Malgré cela, l'amalgame des deux genres d'irréversibilités se poursuit en mécanique à travers un nombre considérable de "modèles viscoplastiques".

vii) Enfin, lorsqu'il s'agit d'examiner l'état des principes et des méthodes sous l'angle mathématique du formalisme tensoriel, le cadre naturel est celui de la géométrie différentielle. La notion essentielle est celle de transport, notion mise en jeu pour définir la notion de déformation de Cauchy et seulement interprétable en faisant intervenir le concept de mémoire discrète dont on a vu l'incompatibilité avec le point de vue le plus classique (cf. [17] à [25]). Compte tenu des exigences d'invariance générale et d'objectivité naturelle, on est conduit à envisager l'usage de la méthode de Van Dantzig, une définition abstraite du tenseur contrainte de Cauchy et l'usage d'un tenseur de contrainte transporté ("contrainte de référence") jouant un rôle analogue au tenseur de déformation (transporté) de Cauchy et permettant d'obtenir une équation analogue à celle de Gibbs mais valable pour l'hystérésis.

viii) Les trois analyses (systèmes dynamiques, thermodynamiques, mathématiques) sont convergentes. Renoncer à l'usage des schémas irréductibles ne permet pas d'aller au-delà des limites indiquées par Gibbs alors que les résultats d'observations microstructurales incitent à les dépasser, que la géométrie différentielle en procure les moyens, que, de toute façon, la notion de déformation implique déjà une rupture radicale entre mécanique du continu et dynamique classique et qu'enfin les notions de transport et de mémoire discrète qui sont à l'origine de cette rupture méritent à présent une attention particulière compte tenu des observations à échelle fine. Les origines des choix théoriques proposés peuvent donc être résumées ainsi: abandon de la doctrine des lois simples aux échelles accessibles dans le cadre des descriptions continues et recours éventuel aux schémas irréductibles à mémoire discrète; abandon des tentatives à variables internes aussi longtemps que l'étude des schémas à variables externes: déformation, contrainte, densité de masse, n'est pas très approfondie au sens du programme ci-dessous; abandon de la mise en oeuvre de l'inégalité de Clausius Duhem et recherche d'une extension de Gibbs, éventuellement à mémoire discrète; abandon des tentatives de schématisation relatives aux cas où se trouvent amalgamées les diverses irréversibilités (théories de viscoplasticité) mais examen prioritaire du phénomène d'hystérésis pure; abandon des invariances et objectivité par rotation mais formulation respectant l'invariance générale et l'objectivité naturelle par l'usage de coordonnées entraînées; abandon des tentatives de décomposition du seul tenseur (cinématique) bien défini, à savoir le tenseur vitesse de déformation, mais introduction du formalisme de transport pour la déformation et la contrainte, ce qui revient à admettre l'usage du concept de mémoire discrète et le recours aux schémas irréductibles. Le programme des travaux prioritaires peut donc être résumé en disant qu'il s'agit d'abord de proposer des schémas; compatibles avec l'ensemble des phénomènes d'hystérésis; prenant en compte les situations où le rôle de la mémoire discrète est essentiel; décrivant les aspects thermomécaniques et non simplement mécaniques; n'incluant pas nécessairement l'usage de la notion de réversibilité; permettant l'extension au cas non monotherme, au cas non isotrope et aux divers cas d'écrouissages; permettant de définir les liens entre le concept de mémoire, l'hystérésis et la notion de stabilité.

ix) Le seul point de départ intéressant est constitué par des modèles symboliques à ressorts et frotteurs [17 à 20] et [26 à 32]. Ces modèles essentiellement unidimensionnels n'indiquent pas immédiatement la voie d'une extension tensorielle unique. Mais ils peuvent devenir heuristiques au terme d'études unidimensionnelles complètes car il respectent les choix indiqués à savoir: pas de simplicité à échelle fine (frottement); pas de variables internes (la force dans chaque élément et la position de son frotteur peuvent être calculées à chaque stade de l'évolution); pas de recours à la notion d'entropie (frottement mis en jeu immédiatement); pas d'amalgame de divers types d'irréversibilités (frottement de Coulomb); pas d'usage nécessaire de la notion de domaine élastique (loi de distribution du frottement); pas de restriction nécessaire aux aspects purement mécaniques en ce sens qu'il est possible d'étudier les taux de chaleur (dûs au frottement).

Annexe 2. Illustration du schéma dans le cas de la température variable: application aux alliages à mémoire de forme

i) Les alliages à mémoire de forme sont des matériaux présentant une évolution très rapide de leurs comportements mécaniques isothermes pour une gamme de température de l'ordre de quelques dizaines de Kelvin. Cette dépendance est associée à une transformation structurale thermoélastique de type martensitique [33 à 35]. On a vu (cf introduction) que les différents comportements isothermes pouvaient être schématisés en envisageant une forte variation des formes et des proportions relatives des deux contributions σ_a et σ_{rev} en fonction de la température. De plus, ce schéma permet de rendre compte de l'acquisition des propriétés de mémoire de forme en température après un traitement thermomécani-

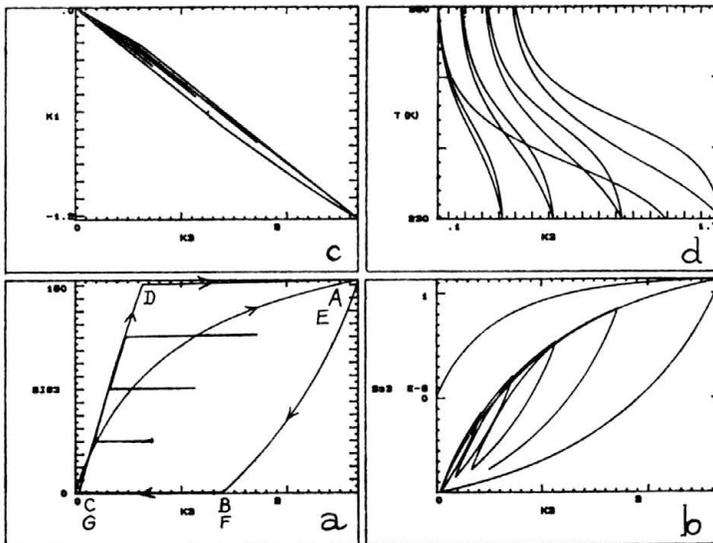


FIG. 20. Effet de mémoire de forme en traction simple en l'absence d'écroutissage. Evolution dans les espaces $(K3 = k_3, SIG3 = \sigma_{33})$, $(K3, SA3 = \Sigma_{33})$, $(K1, K3)$ lors de l'éducation ("training"), et effet de mémoire de forme en température $(K3, T)$ sous différentes charges.

que convenable, appelé "training". On s'intéresse ici à un training particulier, en traction simple, que l'on peut décomposer en six étapes (cf. Fig. 20a): OAB — à température "froide" T_1 , cyclages entre les charges 0 et F_{\max} ; BC — sous charge nulle, élévation de la température jusqu'à la température "chaude" T_2 ; CD — à température T_2 , cyclage entre 0 et F_{\max} ; DE — sous charge constante F_{\max} , chute de la température de T_2 à T_1 ; EF — décharge à température T_1 ; FG — sous charge nulle, élévation de la température de T_1 à T_2 .

Après ce training, sous différentes charges constantes, appliquées à la température T_2 , on simule les variations de l'allongement axial lors de cycles en température, mettant ainsi en évidence l'acquisition des propriétés de mémoire de forme réversible "two ways".

ii) Un premier schéma idéalisé où les contributions σ_a et σ_{rev} dépendent du seul paramètre T est envisagé. La contribution réversible est définie par un potentiel de la forme (4.3), celle d'hystérésis par (1.11) à (1.15) et (4.2), avec ici $c = 0.5$. La dépendance en fonction de la température est donnée par les simples variations:

$$Q_{or} = 150 + 145 \operatorname{th} \left(\frac{T - 245}{10} \right) \text{ (MPa),}$$

$$S_0 = 35 - 30 \operatorname{th} \left(\frac{T - 245}{10} \right) \text{ (MPa).}$$

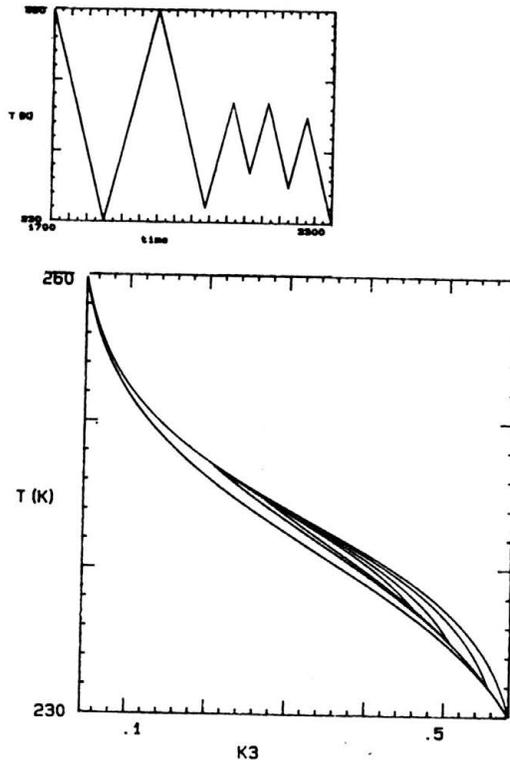


FIG. 21. Effet de mémoire de forme ($K3$, T), après le "training" de la Fig. 20.

On envisage un schéma d'hystérésis pure à $\epsilon_0 = S_0/\mu$ constant = 0.28. Dans ce cas particulier, la "déformation" E de l'espace de référence est reliée de façon simple à la déformation réelle $\Delta_0^t \epsilon$ par $E = \Delta_0^t \epsilon / \epsilon_0$. La donnée du potentiel \mathcal{E} est complétée par $\mu_\infty = 550$ MPa; de plus, les coefficients k_r et μ_r sont tels qu'à toute température, les coefficients élastiques tangents à l'origine sont constants (module d'Young $E = 30\,000$ MPa, coefficient de Poisson $\nu = 1/3$). Enfin, le coefficient de dilatation thermique linéaire α est considéré comme constant sur cette gamme de température de quelques dizaines de Kelvin et égal à $18 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$.

On représente les évolutions dans les espaces $(\Delta_0^t \epsilon_{33}, \sigma_{33})$ (Fig. 20a), $(\Delta_0^t \epsilon_{33}, \Sigma_{33})$ (Fig. 20b), $(\Delta_0^t \epsilon_{33}, \Delta_0^t \epsilon_{11})$ (Fig. 20c), et les évolutions, après training, sous charge 0 , $F_{\max}/4$, $F_{\max}/2$, $3F_{\max}/4$ et F_{\max} dans l'espace $(\Delta_0^t \epsilon_{33}, T)$. Enfin, on envisage toujours après le training initial, une histoire de température sous charge constant $F_{\max}/4$ (Fig. 21).

iii) En fait, l'acquisition des propriétés de mémoire de forme nécessite plusieurs cycles de training avant l'apparition de propriétés stables. Le schéma à 3 paramètres T, η_1, η_2 du paragraphe 3 est envisagé. La contribution réversible est de la même forme qu'au paragraphe précédent avec:

$$Q_{or} = 150 + 145 \operatorname{th} \left(\frac{T - 245}{10} \right) \text{ (MPa); } \mu_\infty = 550 \text{ MPa,}$$

$$k_r = 100000 \text{ MPa, } \mu_r = 12500 \text{ MPa, } \alpha = 18 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}.$$

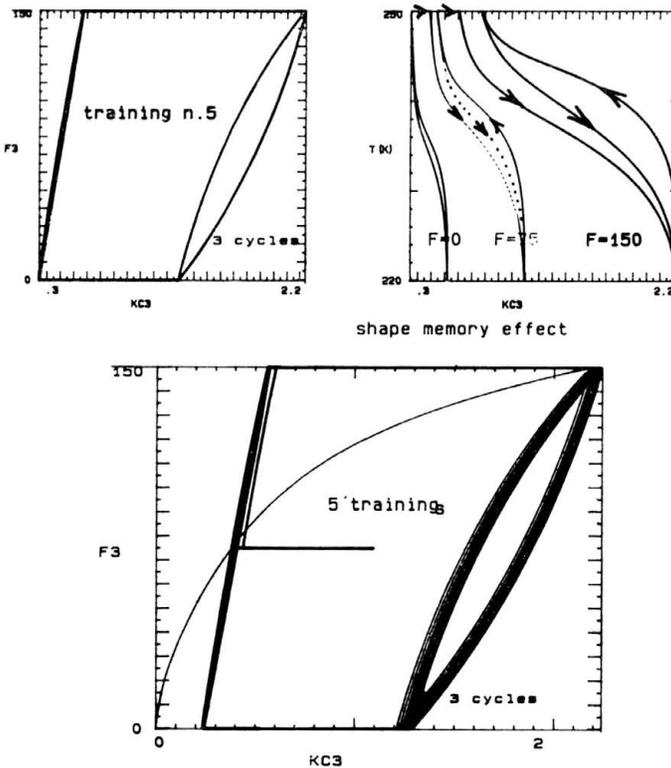


FIG. 22. Reprise de la Fig. 20 avec effet d'écrouissage.

La contribution d'hystérésis est donnée par:

$$S_{00} = 45 - 20 \operatorname{th} \left(\frac{T - 255}{10} \right) = S_{0g} \text{ (MPa)}.$$

On envisage un schéma où $\mu = \text{constante} = 12\,500 \text{ MPa}$, et les paramètres caractéristiques de l'écroutissage sont $\eta_{20} = 10 \text{ MPa}$ et $b_1 = 10^{-8} \text{ Pa}^{-1}$.

L'acquisition des propriétés est alors progressive lors des trainings successifs (cf. Fig. 22) mais conduit à un effet de mémoire de forme qualitativement semblable à celui du paragraphe précédent.

Références

1. J. KRAVTCHEKOV, D. RADENKOVIC, *De quelques tendances actuelles de la rhéologie des sols et des roches*, 1er Symposium Franco-Polonais, Varsovie 1971, édité dans "Problèmes de la Rhéologie", Série de Mécanique Appliquée, pp. 211–251.
2. F. FER, *Thermodynamique*, Gordon and Breach, 1970.
3. T. VOGEL, *Théorie des systèmes évolutifs*, Paris 1965.
4. F. PREISACH, *Über die magnetische Nachwirkung*, Zeitschrift für Physik, 94, pp. 277, 1935.
5. I. MULLER, *A model for a body with shape-memory*, Arch. Rational Mech. Anal., 67, pp. 61–77, 1978.
6. N. MINORSKY, *Théorie des oscillations* (chap. V, VI, VII), Gauthiers-Villars, Paris 1967.
7. V. VOLTERRA, *Sulle equazioni integro-differenziali della teoria dell'elasticità*, R.C. Lincei, 18, 5, pp. 295–301, 1909.
8. P. W. BRIDGMAN, *The thermodynamics of plastics deformation and generalized entropy*, Rev. Modern Physics, 22, 1, pp. 56–63, 1950.
9. P. GUELIN, J. M. BOISSERIE, *The heat supply trap lying at the origin of thermo-inelastic analysis*, Res. Mechanica Letters, 2, pp. 13–17, 1982.
10. F. FER, *L'irréversibilité fondement de la stabilité du monde physique*, Gauthiers-Villars, Paris 1977.
11. R. S. RIVLIN, *Red-herring and sundry unidentified fish in non-linear continuum mechanics, Inelastic behaviour of solids*, McGraw Hill, New York 1970.
12. J. E. MARSDEN, J. R. HUGUES, *Mathematical foundations of elasticity*, Prentice Hall, New Jersey 1983.
13. D. VAN DANTZIG, *The fundamental equation of electromagnetism, independent of metrical geometry*, Proc. Cambridge Phil. Soc., 30, pp. 421–427, 1934.
14. J. T. ODEN, K. J. BATHE, *A commentary on computational mechanics*, App. Mech. Rev., 31, 8, pp. 1053–1058, 1978.
15. H. ZIEGLER, *Thermomechanics*, Quart. of Appl. Math., 30, 1, pp. 91–107, 1972.
16. K. POPPER, *L'Univers irrésolu*, Hermann, Paris 1984.
17. P. GUELIN, *Remarques sur l'hystérésis mécanique*, J. de Méc., 19, 2, pp. 217–247, 1980.
18. D. FAVIER, Thèse, Grenoble 1981.
19. P. PEGON, Thèse, Grenoble 1983.
20. P. GUELIN, W. K. NOWACKI, *Remarques sur les ondes d'accélération dans un continu élastoplastique à hystérésis*, Arch. Mech., 36, 1984.
21. P. GUELIN, W. K. NOWACKI, P. PEGON, *Etude des schémas thermomécaniques à mémoire discrète: bases physiques et formalisme*, Arch. Mech., 37, 4–5, pp. 343–363, 1985.
22. P. GUELIN, *Notes on the Cauchy tensors ${}^R g_{ij} g^i \otimes g^j$ and ${}^R \sigma^{ij} g^i \otimes g^j$ expressing the discrete memory concept*. The Summer School on Two Phase Medium Mechanics, pp. 57–132, Gdańsk 1983.
23. P. PEGON, P. GUELIN, *Finite strain plasticity in convected frames*, Num. Meth. in Eng., 22, pp. 521–545, 1985.
24. P. PEGON, P. GUELIN, *On thermomechanical Zaremba schemes of hysteresis*, Res. Mechanica Letters, pp. 21–34, 1987.

25. D. FAVIER, P. GUELIN, W. K. NOWACKI, P. PEGON, *Theoretical schemes of thermomechanical coupling*, Thermomechanical Coupling in Solids édité par H. D. BUI et Q. S. NGUYEN, Elsevier Sci. Publ., North Holland, pp. 383–402, 1987.
26. C. DE CARBON, *Déformation des solides*, C.R. Acad. Sc., vol. 216, pp. 241–244, Paris 1942.
27. B. PERSOZ, *Modèles non linéaires*, La Réhologie, chap. III, Masson, pp. 45–72, Paris 1969.
28. J. M. BOISSERIE, P. GUELIN, Proc. 4th SMIRT, L 1/9, 1977.
29. J. M. BOISSERIE, P. GUELIN, Proc. 6th SMIRT, L 3/5, 1981.
30. B. WACK, J. M. TERRIEZ, P. GUELIN, Acta Mech., **50**, pp. 9–37, 1983.
31. J. M. BOISSERIE, P. GUELIN, J. M. TERRIEZ, B. WACK, JEMT, ASME, vol. 105, pp. 155–161, 1983.
32. D. FAVIER, P. GUELIN, *A discrete memory constitutive scheme for mild steel type material, theory and experiment*, Arch. Mech., **37**, 3, pp. 201–219, 1985.
33. H. VERGUTS, E. AERNOUDT, *Monitoring the response of shape memory alloys...*, Proc. 7th Int. Conf. on the Strength of Metals and Alloys pp. 563–568, August 12–16, Montreal 1985.
34. C. RODRIGUEZ, L. C. BROWN, *The mechanical properties of SME alloys, Shape memory effects in alloys*, ed. J. PERKINS, Plenum Press, pp. 29–58, New York 1975.
35. K. OTSUKA, K. SHIMIZU, *Pseudoelasticity and shape memory effects in alloys*, Int. Met. Rew., **31**, 3, pp. 93–114, 1986.
36. D. FAVIER, P. GUELIN, P. PEGON, *Schémas thermomécaniques de l'hystérésis et resultats recents en grandes déformations élastoplastiques*, CR 20 eme Coll. G.F.R., pp. 53–69, Paris, November 1985.
37. D. FAVIER, Thèse d'état, 1988.
38. P. PEGON, Thèse d'état, 1988.
39. R. MUKI, E. STERNBERG, *On transient thermal stresses in viscoelastic materials with temperature-dependent properties*, J. Appl. Mech., pp. 193–207, 1961.
40. S. HAN, B. WACK, *Discrete memory description of strain hardening and softening with application to stainless steel and superalloy*, Res. Mech., **20**, pp. 315–342, 1987.
41. S. HAN, B. WACK, *Détermination expérimentale du comportement élastique tangent à l'origine: application aux métaux*, CR 20ème Coll G.F.R., pp. 145–159, Paris, November 1985.
42. H. S. LAMBA, O. M. SIDEBOTTOM, *Cyclic plasticity for non proportional paths*, Trans. ASME, vol. 100, pp. 96–111, January 1978.
43. S. HAN, B. WACK, *Properties of the pure hysteresis behavior of solids: case of stainless steel and superalloy*, Arch. Mech., **38**, 4, pp. 439–462, 1986.
44. A. TOURABI, Thèse, 1988.
45. J. FRIEDEL, *Préface aux textes de l'Ecole d'été d'Yrivals "Dislocation et déformation plastique"*, édité par GROH KUBIN et MARTIN, Editions de Physique, 1979.
46. G. GILES, *Mathematical foundation of thermodynamics*, p. 126, Pergamon, 1964.
47. J. MONOD, *De la biologie moléculaire a l'éthique de la connaissance*, Leçon Inaugurale au Collège de France 1967, l'Age de la Science, Dunod, pp. 3–18, Paris 1968.

CNRS, GRENOBLE, FRANCE

et

APPLIED MECHANICS DIVISION, CCE, CCR, ISPRA, ITALY.

Received March, 24, 1988.