ZIEMBIŃSKI — SKŁADNIA WYKREŚLNA

SKŁADNIA WYKREŚLNA

(GEOMETRYJA POŁOŻENIA).

SKŁADNIA WYKREŚLNA

(GEOMETRYJA POŁOŻENIA)

podług

T. Reye'go

opracował

STANISŁAW ZIEMBIŃSKI,
Inżynijer-Mechanik,
Dyrektor c. k. Instytutu Techniczno-Przemysłowego w Krakowie.

CZĘŚĆ I.

Lwów 1877

Księgarnia Polska. — Druk I. Związkowej drukarni.

PRZEDMOWA.

Nauka stanowiąca treść niniejszej książki nie jest bynajmniej nową. Niektóre jej zasady znajdują się już w geometrycznych dziełach Euklidesa (285 lat przed Nar. Chr.), później zaś, pomijając już kilku starożytnych uczonych, pracowali w tym kierunku: Pascal, de la Hire, Newton, Maclaurin, Lambert, — lecz dopiero Carnot, Brianchon, Poncelet, Möbius, Steiner, Chasles, Staudt i t. d. zaczęli naukę tę wyłączać z ogólnej nauki geometryi i nadawać jej różne nazwy. W końcu przyjęto prawie ogólnie nazwę: Géométrie de position, Geometrie der Lage, czyli tłómacząc dosłownie: „Geometryja położenia". Ciż sami jednak autorowie, którzy używają tej nazwy przyznają, że nauka ta nie jest właściwie geometryją, gdyż nie zajmuje się bynajmniej mierzeniem, owszem, miara jest z niej zupełnie wyłączona i występuje dopiero w jej zastosowaniach do geometryi lub do „statyki wykreślnej".

Oprócz powyższych nazw, nadawano dziełom w tym przedmiocie pisanym inne jeszcze nazwy; tak n. p. Steiner nazwał swoje dzieło: „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander" (Berlin 1832); — Poncelet zaś dał swemu dziełu tytuł: „Traité des propriétés projectives des figures" (Paris 1822 i 1865); te dwa tytuły dają dosyć jasne pojęcie o zadaniu tej nauki, którą zresztą nazywano także geometryją nową, rzutową, syntetyczną i t. p.

Ponieważ wszystkie te określenia są albo zbyt długie, a ztąd niewygodne do użycia, albo też niezgodne z treścią nauki, która nie zajmuje się m i e r z e n i e m, przeto zdawało mi się rzeczą stosowną nadać jej nazwę zupełnie nową, a mianowicie nazwę *„Składni wykreślnej"*, sądząc, że ta nazwa wyda się zupełnie stosowną na oznaczenie nauki przeważnie syntetycznej i wykreślnej, a więc niejako „S y n t e z y wykreśnej", przyczém wyraz „synteza" zastąpiłem wyrazem „składnia"

Jak już wspomniałem, nauka o której mowa nie może się nazwać zupełnie nową, owszem, zajmowano się nią od dawna, lecz dopiero od czasu gdy Culmann oparł na niej swoją „Statykę wykreślną", nabrała znaczenia praktycznego, i odtąd też zaczęto się nią zajmować więcej ogólnie *), a były docent Politechniki Curychskiej T. Reye, wydał pod tytułem: „Geometrie der Lage", swoje wykłady szczególnie jako przygotowanie do Statyki wykreślnej opracowane, które to dziełko przyjąłem za podstawę do niniejszej pracy.

Oddając tę pracę na użytek publiczny, mam tylko zamiar, zrobić pierwszy krok na tej nowej u nas drodze, zachęcić do pracy w tym kierunku, pracy bez wątpienia bardzo wdzięcznej, bo i wiele jest jeszcze na tém polu do zrobienia — i zdolności nasze do tego właśnie rodzaju nauk, są też podobno znakomite.

Zajmując się tym przedmiotem tylko jako amator, w chwilach wolnych od zajęć na innóm zupełnie polu, mało z nim wspólnego mającem, nie miałem bynajmniej pretensyi zrobienia czegoś nowego dla samej nauki; — chodziło mi powtarzam, tylko o zwrócenie uwagi na ten przedmiot i zachęcenie innych do pracy na tem polu, — o wprowadzenie tej nauki do naszej literatury, tak jak wprowadziłem ją do Akademii technicznej we Lwowie, gdzie tylko dla tego obok

*) Co do historycznych dat, krytycznego poglądu na ważność tych nauk, oraz co do ich literatury ob. „Ueber die graphische Statik" v. J. Weyrauch, Leipzig 1874 i „Eléménts de Géométrie projective" p. Cremona (tłóm. z włoskiego E. Dewulf).

moich właściwych wykładów — wykłady „Składni wykreślnej“ przez lat dwa (w semestrach zimowych) podejmowałem, — iż wprowadzenie tych wykładów na Wydziale Inżynieryi uważałem prawie za niezbędne, a innego prelegenta wówczas nie było.

Słownictwo, jakiego używam w tej książce, jest zupełnie nowém — tak jak nowym u nas jest sam przedmiot. — Wprawdzie znajdują się w Geometryi Niewęgłowskiego niektóre wyrażenia odnoszące się do tego przedmiotu, lecz tych nie mogłem użyć (przynajmniej nie w tém samém znaczeniu), a to z różnych powodów.

Tak n. p. wyrażenie: „jednokreślność“ musiałem zostawić dla oznaczenia tego co francuzi nazywają „collinéation“, — zamiast „inwolucyjność“ używam: „dwuwtórność“ (tam gdzie n. p. dwa punkta odpowiadają sobie dwojako, czyli „dwojako sobie wtórzą)“ i t. d., a w ogóle starałem się dobierać wyrażeń o ile możności jak najwyraźniej przedstawiających pojęcie o które chodzi.

Trzymając się co do rzeczy samej prawie ściśle wybornego dzieła Reye'go, starałem się jednak w niektórych miejscach dopełniać i wyjaśniać co uważałem za potrzebne, a żałuję mocno że inne zajęcia nie pozwoliły mi więcej w tej mierze uczynić.

Kraków dnia 29. listopada 1876.

Stanisław Ziembiński.

Zasady ogólne.

Punkt, prosta (linija prosta) i płaszczyzna są pierwiastkami wykreślnemi, z których powstają zestawy wykreślne.

Punkt jest niepodzielną cząstką przestrzeni.

Każdy z nas ma pojęcie linii prostej. Dwie proste mogą się przeciąć najwięcej w jednym punkcie, a każda linija, o której wiemy że z dowolną prostą może się przeciąć w jednym tylko punkcie, musi być prostą.

Płaszczyzna, jestto powierzchnia przecinająca się z każdą dowolną prostą w jednym tylko punkcie. Dwie płaszczyzny mogą się przeciąć w jednej tylko prostej, a każda powierzchnia, o której wiemy, że z dowolną płaszczyzną może się przeciąć w jednej tylko prostej, musi być płaszczyzną.

Prostą i płaszczyznę uważać będziemy zawsze za nieograniczone.

Własnością prostej jest jej kierunek, własnością płaszczyzny — jej położenie. Prosta i płaszczyzna mogą się przesuwać w przestrzeni t. j. mogą zmieniać swoje stanowisko, bez zmiany kierunku lub położenia. (To odróżnienie „stanowiska“ od „położenia“ jest koniecznem; w dalszym ciągu będziemy używali tych wyrażeń tylko w powyższem znaczeniu).

Wymienione pierwiastki wykreślne, mogą się znajdować w skończonéj albo w nieskończenie wielkiéj odległości. Ponieważ nieskończoność leży po za granicami naszego pojęcia, przeto pierwiastki nieskończenie odległe nazywać będziemy domniemanemi, pierwiastki zaś w skończonéj przestrzeni zawarte, rzeczywistemi pierwiastkami.

Dwie proste leżące w jednéj płaszczyźnie, przecinają się zawsze w jednym punkcie — rzeczywistym albo domniemanym (nieskończenie odległym). W tym ostatnim przypadku mówi się zwykle, że proste są równoległe.

Jak w rachunku dla każdéj ilości zmiennéj jedną tylko możemy przyjąć wartość nieskończenie wielką i nie mamy żadnego przejścia od ilości skończonych do nieskończonych, tak też i w składni wykreślnéj, nie mamy żadnego przejścia od prostych nachylonych do równoległych, od rzeczywistych do nieskończenie odległych punktów ich przecięcia, i jeden tylko (domniemany) punkt przecięcia dwóch (lub ilukolwiek) prostych równoległych przyjąć możemy.

Zdawałoby się na pozór, iż przyjmując, że dwie proste równoległe przecinają w P_∞ (punkcie nieskończenie odległym), powinnibyśmy również przyjąć że istnieją dwa takie P_∞, a mianowicie, w każdém przedłużeniu tych prostych (do nieskończoności), jeden P_∞; aby lepiéj tę rzecz wyrozumieć, uważmy co następuje:

Niech będzie dowolna prosta a (fig. 1) i zewnątrz niéj leżący punkt A. Poprowadźmy przez ten punkt inną prostą p, przecinającą prostą a w punkcie P i obracajmy ją około punktu A (w płaszczyznie wyznaczonéj przez prostą a i punkt A). Punkt przecięcia P będzie się przesuwał po prostéj a coraz daléj, a gdy prosta p przyjmie kierunek p', równoległy względem a, to punkt ten stanie się P_∞. Jeżeli daléj jeszcze obracać będziemy prostą p, to punkt przecięcia zjawi się w drugiém przedłużeniu prostéj a i przy dalszym obrocie zbliżać się będzie do pierwotnego swego stanowiska, aż w końcu do niego powróci. Prosta więc a może być uważana jako utworzona biegiem punktu P, który opisuje ją całą, raz tylko przechodząc przez nieskończoność. Każde stanowisko ruchomego punktu P wyznacza jeden kierunek ruchoméj prostéj p. P_∞ w prostéj a, wyznacza kierunek p', równoległy do a. Jeden jest tylko kierunek *p'*, a więc dla nas istnieje jeden tylko P∞ w prostéj *a* i w tym punkcie przecinają się także wszystkie proste mające ten kierunek *p'*, t. j. do *a* równoległe.

Biorąc rzeczy **w tém znaczeniu,** możemy powiedzieć że: Każda prosta ma tylko jeden punkt nieskończenie odległy, w którym się zchodzą oba jéj przedłużenia, a więc jest liniją zamkniętą.

Dla usunięcia wszelkiej wątpliwości nadmienić wypada, że ponieważ ów P∞, służyć nam może tylko, jak w powyższym przykładzie, tak i we wszystkich dalszych roztrząsaniach, do wyznaczenia kierunków równoległych, przeto powyższe pojęcie prostéj, nie może nigdy doprowadzić do błędnych wypadków. Jednak z drugiéj strony, powyższe określenie należy uważać tylko za umowę matematyczną, za pomocą któréj przekraczamy granicę dzielącą nas od nieskończoności, i która znosząc niejako różnicę między prostemi równoległemi i nachylonemi, między punktami w skończonéj i w nieskończenie wielkiéj odległości leżącemi, pozwala nam otrzymywać wypadki daleko ogólniejsze i prostszéj postaci.

Dalszym ciągiem powyższéj umowy są następujące wnioski:

Ponieważ w każdéj prostéj danego kierunku znajduje się jeden P∞, (w którym się przecinają wszystkie proste mające ten kierunek), przeto każdy kierunek wyznacza jeden P∞ i odwrotnie, każdy P∞, wyznacza jeden kierunek.

Wszystkie P∞ jednéj płaszczyzny, możemy sobie wyobrazić jako leżące w jednéj (domniemanéj) linii, która ponieważ z dowolną prostą może się przeciąć tylko w jednym punkcie, a więc jest linią prostą. W każdéj więc płaszczyznie znajduje się jedna prosta nieskończenie odległa (domniemana).

Do tego samego wniosku dojdziemy za pomocą następującego roztrząsania:

Dowolne dwie płaszczyzny przecinają się zawsze w jednéj prostéj, rzeczywistéj lub nieskończenie odległéj.

W tym ostatnim przypadku mówi się zwykle, że płaszczyzny są równoległe, lub że mają jedno położenie.

Dla tych samych przyczyn, dla jakich przyjęliśmy, że proste równoległe przecinają się w jednym tylko P∞, i że każda prosta danego kierunku ma tylko jeden P∞, musimy również przyjąć że płaszczyzny równoległe przecinają się w jednéj tylko prostéj nieskończenie odległéj, i że każda płaszczyzna zawiera tylko jedną prostą nieskończenie odległą.

Każde więc położenie wyznacza jedną prostą nieskończenie odległą i odwrotnie, każda prosta nieskończenie odległa wyznacza jedno położenie.

Nakoniec wszystkie P∞ w przestrzeni możemy sobie wyobrazić jako leżące w jednéj (domniemanéj) powierzchni, która, ponieważ z dowolną prostą może się przeciąć w jednym tylko punkcie, a z dowolną płaszczyzną w jednéj tylko prostéj, a więc jest płaszczyzną.

Cały ten szereg wniosków, polegających na wspomnianéj umowie i stanowiących tylko dalszy jéj ciąg, da się usprawiedliwić podobnie jak jéj początek. Pojęcia w nich wyrażone, nazwano dla odróżniania ich od zwykłych geometrycznych perspektywicznemi, gdyż podobnie jak nauka perspektywy, polegają na zasadach rzutów środkowych (centralnych), które tu po krótce rozbierzemy, wprowadzając w ten rozbiór, pierwiastki nieskończenie odległe.

O rzutach środkowych.

Jeżeli jakikolwiek zestaw wykreślny rzucamy z pewnego punktu stałego (środka rzutów), to każdy punkt tego zestawu rzucany jest przez jedną prostą (promień), a każda prosta przez jedną płaszczyznę.

Wszystkie punkta leżące w jednéj prostéj, rzucane są przez promienie leżące w jednéj płaszczyźnie. (Możemy także rzucać zestaw punktów z danéj prostéj, wtedy każdy punkt rzucany jest przez jedną płaszczyznę, przechodzącą przez ten punkt i przez prostą daną).

Zbiór pierwiastków, rzucających dany zestaw *s*, z punktu stałego *P*, nazywać będziemy rzutnią zestawu *s*, a punkt P (środek rzutów) środkiem rzutni.

Przecięcie rzutni zestawu *s* z płaszczyzną α lub prostą *a*, daje rzut zestawu *s* (na płaszczyźnie α lub prostéj *a*).

Jeżeli środek rzutów jest punktem nieskończenie odległym, to rzutnia składa się z pierwiastków równoległych, tak jak w zwykłéj geometryi wykreślnéj.

Jeżeli środek rzutni jest punktem rzeczywistym, to wszystkie pierwiastki rzutni są rzeczywiste; punkta i proste nieskończenie odległe, rzucane są przez promienie i płaszczyzny rzeczywiste. Rzuty zaś pierwiastków rzeczywistych mogą być domniemane i odwrotnie — rzuty pierwiastków domniemanych mogą być rzeczywiste. N. p. wyobraźmy sobie dwie płaszczyzny α i α' przecinające się z sobą w prostéj rzeczywistéj (nie równoległe). Rzucając z punktu stałego *P*, zewnątrz tych płaszczyzn leżącego, punkta nieskończenie odległe płaszczyzny α na płaszczyznę α' (za pomocą promieni równoległych do płaszczyzny α), otrzymujemy rzeczywiste przecięcia tych promieni z płaszczyzną α' czyli rzuty rzeczywiste, wszystkie zaś rzeczywiste punkta płaszczyzny α, leżące w promieniach równoległych do α', przecinają się z tą płaszczyzną w $P\infty$, a więc dają rzuty domniemane.

Zestawy zasadnicze 1. rzędu.

Szereg punktów leżących w jednéj prostéj nazwijmy zestawem prostym, a tę prostą tłem zastawu prostego.

Zbiór prostych (promieni) przechodzących przez jeden punkt *R* i leżących w jednéj płaszczyźnie ν, nazywać będziemy roztoczą promieni. Za tło roztoczy promieni możemy uważać płaszczyznę ν i punkt *R* (środek roztoczy).

Zbiór płaszczyzn przechodzących przez jedną prostą *a* nazywać będziemy roztoczą płaszczyzn, prostą zaś *a*, tłem albo osią téj roztoczy.

Zestaw prosty, roztocz promieni i roztocz płaszczyzn, są zestawami zasadniczemi 1. rzędu *). Pierwiastki tworzące te zestawy, będziemy zawsze uważali jako ułożone w pewnym stałym porządku, który się nie zmienia, chociażby zestaw został w przestrzeni przesunięty.

Części promienia rozchodzące się od środka roztoczy, na obie strony, nazywać będziemy półpromieniami, części zaś płaszczyzny rozchodzące się na obie strony od osi roztoczy płaszczyzn, półpłaszczyznami. W pewnych szczególnych przypadkach, uważać będziemy roztocze, jako utworzone przez półpromienie i półpłaszczyzny.

Jeżeli środek albo oś roztoczy są nieskończenie odległe, to pierwiastki je tworzące (promienie albo płaszczyzny) są równoległe.

Zestawy zasadnicze 1. rzędu mogą powstawać jeden z drugiego, za pomocą rzutów albo przecięć. I tak: zestaw prosty możemy otrzymać przecinając roztocz promieni prostą lub płaszczyzną nie przechodzącą przez środek téj roztoczy, albo przecinając roztocz płaszczyzn prostą nie przecinającą osi. Roztocz promieni możemy otrzymać, przecinając roztocz płaszczyzn, płaszczyzną nie przechodzącą przez oś, albo rzucając zestaw prosty z punktu zewnątrz niego leżącego. Roztocz płaszczyzn otrzymujemy, rzucając roztocz promieni z punktu nie leżącego z nią w jednéj płaszczyźnie (przyczem każdy promień rzuca się przez jedną płaszczyznę, a wszystkie płaszczyzny rzucające przechodzą przez prostą, łączącą środek roztoczy promieni ze śrzodkiem rzutów); albo rzucając zestaw prosty z prostéj nie przecinającéj zestawu prostego (czyli raczéj jego tła).

Część zestawu prostego (jako ciągłego, nieprzerwanego szeregu punktów, tworzącego prostą) ograniczona dwoma punktami danemi, nazywa się odcinkiem prostym. Dwa punkta rzeczywiste jednéj prostéj dzielą ją na dwa odcinki, jeden rzeczywisty, drugi przechodzący przez $P\infty$. Jeżeli jeden

*) Z powodu, że każdy z tych zestawów składa się z pierwiastków jednego tylko rodzaju, przeto nazywają także te zestawy jednolitemi zestawami zasadniczemi.

z tych punktów jest nieskończenie odległy, to oba odcinki są jednakowe, mające jeden koniec rzeczywisty, drugi domniemany). Każdy z takich dwóch odcinków nazywa się dopełnieniem drugiego.

Między czterema punktami jednéj prostéj (zestawu prostego) znajdują się tylko dwie pary punktów przedzielonych. To znaccy, że jeżeli mamy 4 po sobie następujące punkta A, B, C, D jednéj prostéj, to tylko A, i C są przedzielone przez B i D; punkta zaś A i D nie są przedzielone przez żaden z pozostałych punktów, gdyż można przejść od A do D przechodząc przez nieskończoność, a nie przechodząc przez B lub C.

Część roztoczy promieni, ograniczona dwoma jéj promieniami nazywa się kątem płaskim zupełnym; część zawarta między dwoma różnemi półpromieniami, kątem płaskim niezupełnym albo półkątem. Każdy zatem kąt zupełny składa się z dwóch kątów niezupełnych (wierzchołkiem przeciwległych).

Każde dwa promienie jednéj roztoczy, dzielą tę roztocz na dwa zupełne kąty płaskie przyległe, z których każdy nazywa się dopełnieniem drugiego.

Część roztoczy płaszczyzn, ograniczona dwiema jéj płaszczyznami, nazywa się zupełnym kątem dwuściennym. Część zaś ograniczona dwoma półpłaszczyznami, niezupełnym kątem dwuściennym. Każde dwie płaszczyzny roztoczy dzielą ją na dwa zupełne kąty dwuścienne przyległe, z których jeden jest dopełnieniem drugiego; każdy kąt zupełny składa się z dwóch niezupełnych.

Między czterema pierwiastkami roztoczy, znajdują się dwie pary pierwiastków przedzielonych.

Zestawy zasadnicze 2. rzędu.

Zbiór prostych (promieni) i płaszczyzn prechodzących przez jeden punkt w przestrzeni nazywa się wiązką (promieni i płaszczyzn), zbiór zaś prostych i puntów, leżących w jednéj płaszczyznie, zestawem płaskim. Wiązka i zestaw płaski są zestawami zasadniczemi drugiego rzędu.

Tłem wiązki jest punkt, przez który przechodzą wszystkie promienie i płaszczyzny (środek wiązki), tłem zestawu płaskiego, płaszczyzna, w któréj leżą wszystkie proste i pukta.

W każdym zestawie zasadniczym drugiego rzędu, zawierać się może nieskończenie wiele zestawów pierwszego rzędu, gdyż w zestawie płaskim każdy szereg punktów jednéj prostéj jest zestawem prostym, a każdy układ prostych przechodzących przez jeden punkt, roztoczą promieni. W wiązce zawierać się może nieskończenie wiele roztoczy płaszczyzn i roztoczy promieni.

Zestawy zasadnicze drugiego rzędu mogą być utworzone jeden z drugiego, gdyż rzucając zestaw płaski z punktu nie leżącego w jego płaszczyznie otrzymujemy wiązkę, przyczem każdy punkt zestawu płaskiego zostaje rzucany przez jeden promień, każda prosta przez jedną płaszczyznę wiązki; odwrotnie przecinając wiązkę płaszczyzną nie przechodzącą przez jéj środek otrzymujemy zestaw płaski.

Zestawy zespolone.

Jeżeli między dwoma jakiemikolwiek zestawami zachodzi tego rodzaju zależność, że każdemu pierwiastkowi jednego z nich, odpowiada jeden stale oznaczony pierwiastek drugiego, to mówimy że te dwa zestawy są ze sobą zespolone. Każde dwa pierwiastki, z których jeden drugiemu odpowiada nazywają się odpowiedniemi.

Dwa zestawy, z których każdy jest zespolony z trzecim, są względem siebie zespolone.

Rodzajów zespolenia może być bardzo wiele. Jeżeli jeden z zestawów jest przecięciem albo rzutnią drugiego, zespolenie ich jest najbardziéj widoczném. Tak n. p. jeżeli powiemy, że zestaw prosty *u* (A B C D....) (fig. 2) jest przecięciem roztoczy promieni R (a b c d....), to znaczy, że punktowi A odpowiada promień *a*, punktowi B promień *b*, i t. d., a tym sposobem każdemu punktowi zestawu *u* odpowiada jeden stale wyznaczony promień roztoczy R i zestaw u jest zespolony z roztoczą R. Dwa jednoimienne zestawy są zespolone, jeżeli są przecięciami lub rzutniami jakiegokolwiek trzeciego zestawu. N. p. Dwa zestawy proste: u (A, B, C, D....) i u_1 (A_1, B_1, C_1, D_1....), są zespolone (fig. 2). W ogóle dwa zestawy są zespolone, gdy ich pierwiastki są ułożone wedle jakiegolwiek prawa, ściśle wyznaczającego pary odpowiednich pierwiastków. Jeżeli dwa pierwiastki odpowiednie zlewają się w jeden, to ten nazywa się odpowiednio wspólnym, jak n. p. punkt E czyli E_1 w powyższych dwóch zestawach u i u_1 (fig. 2).

Prawo odwrotności.

Już w zwykłéj geometryi daje się często spostrzegać, że w przestrzeni punkt i płaszczyzna, w płaszczyznie zaś punkt i prosta, występują jako pierwiastki odwrotnych własności, tak, często zamieniwszy w jakiemś twierdzeniu geometryi płaskiéj wyraz punkt, na wyraz: prosta, i odwrotnie; w twierdzeniach zaś odnoszących się do przestrzeni, zamieniwszy punkt na płaszczyznę i odwrotnie, otrzymujemy nowe twierdzenia, niejako odwrotne, będące dopełnieniem twierdzeń pierwotnych. W składni wykreślnéj; oswobodzonéj z wielu więzów krępujących geometryję, prawo to występuje daleko ogólniéj i wyraźniéj, tak, że każde niemal twierdzenie znajduje dopełnienie w twierdzeniu, odwrotném. W przestrzeni są pojęciami odwrotnemi: punkt i płaszczyzna, a ztąd: zestaw prosty i roztocz płaszczyzn, odcinek linijny i kąt dwuścienny i t. d. Prosta jest odwrotnością względem siebie saméj. I tak n. p.:

Dwa punkta A i B wyznaczają prostą AB, która jest ich wspólném tłem (t. j. w któréj leżą).	Dwie płaszczyzny α i β, wyznaczają prostą $\alpha\beta$, która jest jest ich wspólném tłem (t. j. w ktoréj się przecinają).
Prosta a i nieleżący w niéj punkt B, wyznaczają płaszczyznę aB.	Prosta a i nie przechodząca przez nią płaszczyzna β, wyznaczają punkt $\alpha\beta$.

Trzy punkta A, B, C, nie leżące w jednéj prostéj, wyznaczają płaszczyznę ABC.

Dwie proste a i b mając jeden punkt wspólny, leżą w jednéj płaszczyznie ab.

i t. d.

Trzy płaszczyzny α, β, δ, nie przechodzące przez jedną prostą, wyznaczają punkt $(\alpha\ \beta\ \delta)$.

Dwie proste a i b leżące w jednéj płaszczyznie, mają jeden punkt wspólny (ab)

i t. d.

W płaszczyźnie są względem siebie odwrotne: punkt i prosta, zestaw prosty i roztocz promieni, odcinek linijny i kąt linijny, etc. n. p.

Dwa punkta jednéj płaszczyzny, wyznaczają jedną prostą.

Dwie proste jednéj płaszczyzny, wyznaczają jeden punkt.

Zestaw płaski i wiązka, są również względem siebie odwrotnemi, gdyż ich tła (płaszczyzna i punkt) oraz ich pierwiastki, są odwrotnemi, a mianowicie:

w zestawie płaskim:

Punkt, zestaw prosty, promień jako połączenie punktów etc.

w wiązce:

Płaszczyzna, roztocz płaszczyzn, promień jako przecięcie płaszczyzn etc.

Następujące twierdzenia, dają przykład odwrotności w tych zestawach:

Jeżeli dwa zestawy płaskie są z sobą zespolone w skutek tego, że są uważane za przecięcia jednéj wiązki, to każde dwa pierwiastki odpowiednie (proste lub punkta) leżą na jednym pierwiastku wiązki (płaszczyźnie albo promieniu). Prosta w któréj się oba zestawy płaskie przecinają, odpowiada sama sobie, czyli jest **odpowiednio wspólną**. Toż samo można powiedzieć o każdym punkcie w niéj leżącym. Oba więc ze-

Jeżeli dwie wiązki są ze sobą zespolone w skutek tego, że są uważane za rzutnie jednego zestawu płaskiego, to każde dwa pierwiastki, odpowiednie (promienie lub płaszczyzny) rzucają jeden pierwiastek zestawu płaskiego (punkt albo prostą). Promień łączący środki wiązek jest **odpowiednio-wspólnym**; toż samo da się powiedzieć o każdéj płaszczyźnie przez niego przechodzącéj. Obie więc wiązki mają jedną roztocz płaszczyzn

stawy mają jeden zestaw prosty odpowiednio wspólny.	odpowiednio wspólną.

W wiązce są w odwrotności: promień i płaszczyzna, roztocz promieni i roztocz płaszczyzn, etc. N. p.

Każde dwa promienie wiązki wyznaczają jedną płaszczyznę. Powierzchia stożkowa może być utworzoną przez wszystkie w niéj leżące promienie.	Każde dwie płaszczyzny wiązki wyznaczają jeden promień. Powierzchnia stożkowa może być utworzoną przez wszystkie otaczające ją płaszczyzny (styczne).

Temu ostatniemu twierdzeniu opowiada twierdzenie o zestawach płaskich.

Jakakolwiek krzywa płaska może być utworzoną:

przez wszystkie w niéj leżące punkta.	przez wszystkie otaczające ją proste (styczne).

Z każdych prawie dwóch twierdzeń odwrotnych odnoszących się do wiązki, możemy, jak powyższy przykład okazuje, wyprowadzić dwa twierdzenia odwrotne odnoszące się do zestawów płaskich, wystawiwszy sobie, że te zestawy są przecięciami wiązek. Również wystawiwszy sobie, że dwie wiązki są rzutniami zestawów płaskich, możemy z twierdzeń, odnoszących się do tychże zestawów, wyprowadzać twierdzenia odnoszące się do wiązek.

O wielokątach i wielobokach płaskich, wielogranach i wielościanach wiązkowych i t. d.

W geometryi, trójkąt, czworokąt, pięciokąt i w ogóle *n*-kąt; czyli trójbok, czworobok, pięciobok i w ogóle *n*-bok, oznacza część płaszczyzny ograniczoną przez 3, 4, 5 albo w ogóle przez *n* boków, przecinających się w *n* wierzchołkach.

W składni wykreślnéj rzecz się ma nieco inaczéj. I tak: niezupełnym *n*-kątem płaskim nazywamy zestaw *n* punktów jednéj płaszczyzny i *n* nieograniczonych prostych (boków), z których każda łączy dwa po sobie następujące punkta (wierzchołki), przyczem przyjmuje się, że te punkta następują po sobie w pewnym oznaczonym porządku, i że żadne trzy po sobie następujące, nie leżą w jednéj prostéj.

Niezupełny n-bok płaski jestto zestaw n prostych jednéj płaszczyzny i n punktów (wierzchołków), w których przecinają się po dwa boki po sobie następujące (N. B. boki nieograniczone). Jakkolwiek taki n-bok i n-kąt nie różnią się w niczem od siebie, to jednak są względem siebie odwrotne, gdyż boki pierwszego są w odwrotności do wierzchołków drugiego, równie jak wierzchołki pierwszego do boków drugiego i punkta przecięcia boków po sobie nie następujących pierwszego, do prostych łączących wierzchołki po sobie nie następujących drugiego.

Zupełnym n-kątem płaskim, nazywamy zestaw n punktów wraz ze wszystkiemi prostemi łączącemi te punkta po dwa, czyli n-kąt niezupełny wraz ze wszystkiemi przekątnemi. Przytem przyjmuje się, żadne 3 wierzchołki n-kąta nie leżą w jednéj prostéj.

Zupełnym n-bokiem płaskim nazywamy zestaw n prostych jednéj płaszczyzny, wraz ze wszystkiemi punktami przecięcia się tych prostych, czyli n-bok niezupełny wraz ze wszystkiemi punktami przecięcia się boków po sobie nie następujących. Przy tém przyjmuje się, że żadne trzy proste (boki) nie zchodzą się w jednym punkcie. W zupełnym n-kącie wszystkie proste łączące n wierzchołków nazywają się bokami. W zupełnym zaś n boku, wszystkie przecięcia n boków nazywają się wierzchołkami.

W każdym wierzchołku zupełnego n-kąta płaskiego, przecina się n-1 boków; wierzchołków jest n, każde dwa wierzchołki łączy jeden bok, a więc liczba boków jest $\frac{n(n-1)}{2}$.

W każdym boku zupełnego n-boku płaskiego, leży n-1 wierzchołków; boków jest n każde dwa boki przecinają się w jednym wierzchołku, a więc liczba wierzchołków jest $\frac{n(n-1)}{2}$

Jeżeli n jest większe od trzech, to n-kąt lub n-bok zupełny składa się z wielu n kątów lub n-boków niezupełnych.

Zupełny czworokąt płaski *ABCD* zawiera 6 boków. Każde dwa boki nie przechodzące przez jeden wierzchołek nazwijmy przeciwległemi. Otrzymamy 3 pary boków przeciwległych: *AB* i *CD*, *AC* i *BD*, *AD* i *BC*. Każde dwie pary boków przeciwległych dają nam jeden czworokąt niezupełny. Zupełny zatem czworokąt zawiera 3 czworokąty niezupełne: *ABCD*, *ACDB* i *ADBC*.

Zupełny czworobok płaski *abcd* zawiera 6 wierzchołków. Każde dwa wierzchołki nie leżące w jednym boku nazwijmy przeciwległemi. Otrzymamy 3 pary wierzchołków przeciwległych (*ab*) i (*cd*), (*ac*) i (*bd*), (*ad*) i (*bc*). Każde dwie pary wierzchołków przeciwległych dają nam jeden czworobok niezupełny. Zupełny zatem czworobok zawiera 3 czworoboki niezupełne: *abcd*, *acbd* i *adbc*.

Rzucając n kąt i n-bok z punktów nie leżących w ich płaszczyznach, otrzymujemy odpowiednie im zestawy w wiązce (zestawy wiązkowe) n-gran i n-ścian wiązkowy.

Zupełny n-gran wiązkowy, jestto zestaw n promieni wiązki (n-krawędzi), ze wszystkiemi płaszczyznami łączącemi te promienie (ścianami). Przytém przyjmuje się, że żadne 3 promienie nie leżą w jednéj płaszczyźnie.

Zupełny n-ścian wiązkowy jestto zestaw n płaszczyzn wiązki (ścian), ze wszystkiemi ich przecięciami (krawędziami). Przytém przyjmuje się, że żadne 3 ściany nie przecinają się w jednéj krawędzi.

Liczba krawędzi i ścian jest taka, jak w odpowiednich zestawach płaskich liczba wierzchołków i boków.

W przestrzeni mamy również dwa zestawy odpowiednie powyżéj wymienionym zestawom płaskim i wiązkowym.

Zupełny n-kąt przestrzenny składa się z n punktów (wierzchołków), z których żadne 4 nie leżą w jednéj płaszczyźnie, wraz ze wszystkiemi prostemi (krawędziami), z których każda łączy dwa wierzchołki i z wszy-

Zupełny n-ścian przestrzenny składa się z n płaszczyzn, z których żadne 4 nie przechodzą przez jeden punkt, wraz ze wszystkiemi ich przecięciami (wierzchołkami i krawędziami).

stkich płaszczyzn (ścian), z których każda łączy 3 wierzchołki.

W każdym z *n* wierzchołków zchodzi się *n*—1 krawędzi, każda krawędź łączy 2 wierzchołki a więc liczba krawędzi jest $\frac{n(n-1)}{2}$.

W każdéj z tych $\frac{n(n-1)}{2}$ krawędzi zchodzi się *n*—*2* ścian, każda ściana łączy 3 krawędzie, a więc liczba ścian jest: $\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}$

Liczba krawędzi jest: $\frac{n(n-1)}{2}$

Liczba wierzchołków jest: $\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}$

Jak w płaszczyźnie trójbok nie różni się od trójkąta, tak w przestrzeni nie różni się: 4° ścian i 4° kąt, ale występują jako zestawy odwrotne n. p.:

4 wierzchołki i 6 krawędzi czworokąta przestrzennego, zostają rzucane z każdego punktu nie leżącego w żadnéj ze ścian, przez 4 krawędzie i 6 ścian zupełnego 4° granu wiązkowego.

4 ściany i 6 krawędzi czworościanu przestrzennego przecinają się z każdą płaszczyzną nie przechodzącą przez żaden z wierzchołków, w 4 bokach i 6 wierzchołkach, zupełnego 4° boku płaskiego.

Tutaj możemy zauważyć, że w przestrzeni, zupełny czworogran wiązkowy i zupełny czworobok płaski są zestawami odwrotnemi, tak jak ich tła (punkt i płaszczyzna) oraz ich pierwiastki (4 krawędzie i 6 ścian z jednéj strony, a 4 boki i 6 wierzchołków z drugiéj strony) są odwrotnemi. Toż samo stosuje się w ogóle do *n*-granów i *n*-boków, równie jak do *n*-ścianów wiązkowych i *n*-kątów płaskich, jak tego zaraz będziemy mieli przykład:

Jeżeli dwa trójkąty leżące w różnych płaszczyznach, są

Jeżeli dwa trójściany wiązkowe nie mające wspólnego środw ten sposób ułożone, że każdy z boków jednego trójkąta przecina się (w linii przecięcia się obu płaszczyzn) z jednym bokiem drugiego trójkąta, to te dwa trójkąty są przecięciami jednego trójgranu wiązkowego.

Każde bowiem dwa boki przecinające się z sobą (nazwijmy je odpowiedniemi) leżą w jednéj płaszczyźnie (ponieważ się przecinają). Trzy płaszczyzny łączące 3 pary boków odpowiednich muszą się przeciąć w jednym punkcie, a więc wyznaczają trójgran, którego te trójkąty są przecięciami i którego krawędzie łączą wierzchołki odpowiednie, (tj. te, w których się zchodzą boki odpowiednie) obu trójkątów.

Jeżeli dwa zupełne czworokąty płaskie: A B C D i A_1 B_1 C_1 D_1 (fig. 3), leżą w dwóch różnych płaszczyznach, których przecięcie (prosta n) nie przechodzi przez żaden z wierzchołków, a pięć par boków odpowiednich *) a i a_1, b i b_1, c i c_1, d i d_1, e i e_1, przecinają się w jednéj prostéj (w prostéj n), to te dwa czworokąty są przecięciami jednego

ka, są w ten sposób ułożone, że każda krawędź jednego z nich przecina się z jedną krawędzią drugiego (nazwijmy takie dwie krawędzie odpowiedniemi), to oba trójściany są rzutniami jednego trójboku płaskiego.

Każda bowiem para krawędzi odpowiednich przecinając się, wyznacza jeden punkt. Trzy punkta w ten sposób wyznaczone muszą leżeć w jednéj płaszczyźnie i wyznaczają trójbok, którego oba trójgrany są rzutniami i w którego każdym boku, przecinają się ściany odpowiednie (tj. te, w których leżą boki odpowiednie obu trójgranów.

Jeżeli dwa zupełne czworościany wiązkowe mają różne środki, których połączenie (prosta a) nie leży w żadnéj ze ścian, a pięć par krawędzi odpowiednich przecina się w punktach leżących w jednéj płaszczyźnie, to te dwa czworościany są rzutniami jednego zupełnego czworoboku, a więc i szósta para krawędzi odpowiednich musi się przeci-

*) Pierwiastki oznaczone jednakowemi głoskami nazwijmy odpowiedniemi. Wierzchołki odpowiednie będą: A i A_1, B i B_1, itd. Boki odpowiednie muszą łączyć odpowiednie wierzchołki, jeżeli n. p. bok a łączy A z B, to odpowiedni mu bok a_1 łączy A_1 z B_1. itd.

zupełnego czworogranu, a więc i szósta para boków odpowiednich: f i f_1 przecina się (w prostéj *n*).

W czworokątach bowiem danych, znajdziemy zawsze dwie pary trójkątów które podług poprzedzającego twierdzenia, muszą być przecięciami jednego trójgranu. Na fig. 3 są to trójkąty A B D i A_1 B_1 D_1 oraz B D C i B_1 D_1 C_1; ztąd wypada, że proste AA_1 BB_1 i DD_1, oraz proste BB_1, DD_1, i CC_1, spotykają się w jednym punkcie, czyli, że proste AA_1 i CC_1, przecinają się, a więc proste f i f_1, leżące w płaszczyźnie wyznaczonéj przez AA_1 i CC_1, muszą się także przeciąć (oczywiście w prostéj *n*).

nać w płaszczyźnie czworoboku.

W czworościanach bowiem danych, znajdziemy zawsze dwie pary trójścianów, które podług poprzedzającego twierdzenia muszą być rzutniami jednego trójkąta. Dwa trójkąty w ten sposób wyznaczone, będą miały po dwa boki leżące w jednéj płaszczyźnie; ztąd wypada, że oba trójkąty, a więc i ich trzecie boki leżą w jednéj płaszczyźnie, i przecinają się, w punkcie przecięcia szóstéj pary krawędzi odpowiednich, danych czworościanów.

Zestawy harmoniczne.

Z powyższych twierdzeń, przytoczonych jako przykłady odwrotności i jako ćwiczenia, ważném jest dla nas ostatnie prawo z lewej strony. Stanowi ono ogólnie:

Jeżeli pięć par boków odpowiednich, dwóch zupełnych czworokątów płaskich, przecina się w jednéj linii prostéj *u*, to i szósta para boków także się w téj prostéj przecina.

Wprawdzie, dowiedliśmy tego twierdzenia dla dwóch czworokątów leżących w różnych płaszczyznach, lecz oczywistą jest rzeczą, że stosuje się ono również do czworokątów leżących w jednéj płaszczyźnie, bo obracając jeden z tych czworokątów około linii *u*, otrzymujemy czworokąty leżące w różnych płaszczyznach, nie zmieniając stanowiska punktów przecięcia z prostą *u*, która pozostaje stałą.

(Jeżeli prosta *u* jest nieskończenie odległą, to prawo powyższe może być także i w następujący sposób wyrażone:

Jeżeli dwa zupełne czworokąty (płaskie), mają pięć par boków odpowiednich równoległych, to i szósta para musi być także równoległą).

Uważmy teraz następujące wykreślenie:

Niech będą A, B, C, (fig. 4) trzy punkta jednéj prostéj *u*; wykreślmy dowolny czworokąt K L M N w ten sposób, aby dwa jego boki przeciwległe *) przechodziły przez A, jedna przekątna przez B, a dwa drugie boki przeciwległe przez C. Druga przekątna wyznaczy nam w prostéj *u* punkt D. Łatwo jest dowieść, że jakkolwiek byśmy wykreślili czworokąt KLMN, czyli innemi słowy, ilekolwiek byśmy nowych czworokątów K, L, M, N, wykreślili, otrzymamy zawsze ten sam punkt D. Każdy bowiem z czworokątów wykreślonych w ten sposób jak pierwszy, t. j. że dwa boki przeciwległe przechodzą przez A, dwa drugie przez C, a piąty przez B, będzie podlegał względem pierwszego powyżéj dowiedzionemu prawu: pięć par boków odpowiednich tych dwóch czworokątów przecina się w prostéj *u*, a więc i szósta para w téjże prostéj musi się przecinać (oczywiście w punkcie D).

W powyższy sposób, za pomocą dowolnego czworokąta, wyznaczony punkt D, ma zatem względem punktów, A, B, C, pewne stałe i niezmienne stanowisko. Punkt ten nazywamy 4tym h a r m o n i c z n y m względem punktów A, B, C, — punkta zaś A, B, C, D, — c z t e r e m a p u n k t a m i h a r m o n i c z n e m i.

P u n k t a B i D l e ż ą c e n a p r z e k ą t n y c h, s ą z a w s z e p r z e z d w a d r u g i e A i C p r z e d z i e l o n e (h a r m o n i c z n i e p r z e d z i e l o n e).

---

*) Należy pamiętać, że kształt czworokąta jest zupełnie dowolny. Bokami przeciwległemi czworokąta są te, które się nie schodzą w jednym wierzchołku. Przekątne niezupełnego 4° kąta K L M N, są piątym i szóstym bokiem zupełnego czworokąta.

Rzucając powyższy zestaw płaski (czworokąt wraz z wyznaczonemi przez niego czterema punktami harmonicznemi) z punktu nie leżącego w jego płaszczyźnie, otrzymujemy czworogran i cztery **promienie harmoniczne** (rzucające punkta harmoniczne), mające tę własność, że każda płaszczyzna nie przechodząca przez ich środek, przecina je w czterech punktach harmonicznych A_1, B_1, C_1 i D_1. Gdyż ta płaszczyzna przecinając jednocześnie rzucający czworogran, daje czworokąt, którego dwa boki przeciwległe przechodzą przez punkt A_1, jedna przekątna przez B_1, drugie dwa boki przeciwległe przez C_1, a druga przekątna przez D_1.

Rzucając cztery harmoniczne punkta z prostéj nie leżącéj z niemi w jednéj płaszczyźnie, otrzymujemy **cztery harmoniczne płaszczyzny**, które z każdą płaszczyzną zawierającą te cztery punkta harmoniczne, przecinają się według czterech promieni harmonicznych. Toż samo stosuje się i do każdéj innéj płaszczyzny nie przechodzącéj przez oś roztoczy płaszczyzn. Każda bowiem taka płaszczyzna, przecina pierwsze cztery promienie w czterech punktach harmonicznych, przez które przechodzą promienie będące jéj przecięciem z czterema harmonicznemi płaszczyznami, a więc te promienie zą harmoniczne. Ztąd wypływa: że cztery płaszczyzny harmoniczne przecinają się z każdą prostą nie przechodzącą przez jej oś, w czterech punktach harmonicznych, i że każde cztery harmoniczne promienie zostają rzucane z punktu nie leżacego w ich płaszczyźnie, przez cztery harmoniczne płaszczyzny.

Ogólne zatem prawa co do zestawów harmonicznych są:

Cztery punkta harmoniczne (jednéj prostéj) są rzucane z każdéj prostéj przez 4 harmoniczne płaszczyzny, z każdego zaś punktu, przez 4 harmoniczne promienie.	Cztery płaszczyzny harmoniczne (jednéj roztoczy) przecinają się z każdą prostą w czterech harmonicznych punktach, z każdą płaszczyzną w czterech harmonicznych promieniach.

Cztery harmoniczne promienie są:

z każdego punktu rzucane przez cztery karmoniczne płaszczyzny.	przez każdą płaszczyznę przecinane w czterech harmonicznych punktach.

Trzy pierwiastki harmoniczne wyznaczają zatem jeden czwarty, jeżeli oprócz tego jest wiadomo, do którėj pary przedzielonych ten czwarty należy.

Z a g a d n i e n i e. Mając dane trzy pierwiastki jakiegokolkolwiek zestawu zasadniczego pierwszego rzędu, znaleść czwarty pierwiastek harmoniczny.

Z powyższych praw wynika:

Jeżeli trzy płaszczyzny α, β, δ, jednėj roztoczy, przetniemy przez ilekolwiek prostych i wyznaczymy na każdėj prostėj do trzech punktów przecięcia czwarty harmoniczny przedzielony od β *), to te wszystkie czwarte punkta leżą w jednėj płaszczyźnie (czwartėj harmonicznėj względem trzech danych).

Jeżeli trzy punkta A, B, C jednego zestawu prostego rzucamy z ilukolwiek osi, i przez każdą z tych osi przeprowadzimy do trzech rzucających czwartą harmoniczną płaszczyznę przedzieloną od B *), to te wszystkie płaszczyzny przechodzą przez jeden punt (czwarty harmoniczny do trzech danych).

Twierdzeniom tym odpowiadają w płaszczyźnie twierdzenia o roztoczy promieni, w wiązce zaś promieni mamy również dwa twierdzenia odpowiednie.

Jeżeli mówimy, że cztery punkta A, B, C, D są harmoniczne gdy przez pierwszy i trzeci przechodzą po dwa boki przeciwległe zupełnego czworokąta *KLMN*, a przez drugi i czwarty przechodzą przekątne tegoż czworokąta, to oczywiście możemy również powiedzieć, że punkta *CBAD*, również jak *ADCB* i *CDAB* są również harmoniczne. To znaczy, że dwa pierwiastki jednėj pary mogą być między sobą zamienione. Oprócz tego możemy łatwo dowieść, że znaczenie punktów, przez które przechodzą po dwa boki czworokąta, jest zupełnie takie same, jak punktów, przez które przechodzą przekątne. Uważmy bowiem: jeżeli punkt *Q*, w którym przecinają się przekątne, połączymy z *A* i *C*, to wyznaczymy punkta *S*, *T*, *U*, *W* fig. 5). Proste *TU* i *SW*, jako drugie przekątne czworokątów *QTLU* i *QSNW* muszą przechodzić przez punkt *D*, a proste zaś *TS*

*) t. j. od punktu przecięcia się z płaszczyzną β.

*) t. j. od płaszczyzny rzucającėj punkt B.

i *UW* przez punkt *B* jako przekątne czworokątów *QTKS* i *QUMW*. Że zaś proste *TU* i *SW* równie jak *TS* i *UW* są bokami przeciwległemi czworokąta *TUWS* i przechodzą przez *B* i *D*, przekątne zaś tego czworokąta przechodzą przez punkta *A* i *C*, więc widzimy, że znaczenie punktów *A* i *C* nie różni się od znaczenia punktów *B* i *D*. Możemy więc nietylko pierwiastki jednéj pary punktów harmonicznych przemieniać między sobą, ale i same pary między sobą zamienić. Jeżeli więc punkta A, B, C, D, są harmoniczne, to nietylko C, B, A D; A, D, C, B; ale i B, C, D, A; B, A, D, C; D, A, B, C i D, C, B, A są również harmoniczne.

Toż samo stosuje się do każdych czterech pierwiastków harmonicznych jednego zestawu. Pierwiastki te można dowolnie przestawiać, byleby tylko pary pierwiastków przedzielonych pozostały przedzielonemi.

Każda para pierwiastków przedzielonych jednego zestawu, mówimy, jest przez drugą parę tegoż zestawu, harmonicznie przedzielona. Przez skrócenie będziemy mówili, że dwa pierwiastki jednego zestawu są harmonicznie przedzielone przez dwa inne pierwiastki, do tego zestawu nie należące, jeżeli te dwa inne pierwiastki wyznaczają w pierwszym zestawie dwa pierwiastki od pierwszych harmonicznie przedzielone.

Takim sposobem możemy powiedzieć, że:

Dwie proste i jeden zewnątrz nich leżący punkt wyznaczają trzecią prostą, przechodzącą przez punkt przecięcia dwóch pierwszych i zawierającą punkt harmonicznie podzielony od punktu danego przez dwie proste dane.

W zupełnym czworokącie *KLMN*, każde dwa boki przeciwległe (n. p. KM i LN) są harmonicznie przedzielone przez dwa wierzchołki *A* i *C*, w któ-

Dwa punkta i nie przechodząca przez nie prosta wyznaczają trzeci punkt, leżący w prostéj łączącéj dwa pierwsze, i w prostéj harmonicznie przedzielonéj od prostéj danéj przez dwa punkta dane.

W zupełnym czworoboku *klmn*, każde dwa wierzchołki przeciwległe n. p. *A* i *C* są harmonicznie przedzielone przez dwa boki *o* i *p* łączące po dwa rych przecinają się po dwa pozostałe boki przeciwległe (fig. 5). | wierzchołki przeciwległe (fig. 5).

Zagadnienia. I. Mając dane dwie proste przecinające się w punkcie niedostępnym i punkt zewnątrz nich leżący, poprowadzić przez ten punkt prostą przechodzącą przez punkt przecięcia dwóch pierwszych.

II. Poprowadzić równoległą do niedostępnéj prostéj, któréj tylko dwa punkta są widzialne lecz również niedostępne. (Pierwsze zagadnienie można rozwiązać bez pomocy miary i linij równoległych. Dla rozwiązania drugiego trzeba użyć prowadzenia równoległych do prostych dostępnych).

Dodatek.

Stosunki metryczne zestawów harmonicznych.

Jeżeli dwa punkta A i C leżą w równéj odległości od punktu B, to czwarty harmoniczny jest nieskończenie odległy.

Jeżeli bowiem w jednéj płaszczyźnie z ABC (fig. 6.) obierzemy dwa punkta nieskończenie odległe K i M i połączymy te punkta z punktami A i C, to w czworokącie $KLMN$ przekątna KM jest nieskończenie odległą, przecina więc prostą AC w punkcie D_∞. Druga zaś przekątna LN dzieli AC na dwie części równe, gdyż AC i LN są przekątne równoległoboku $ALCN$.

Ponieważ promienie rzucające cztery punkta harmoniczne są również harmonicznemi, a więc jeżeli przez wierzchołek S dowolnego trójkąta ASC (fig. 7) poprowadzimy równoległą do jego podstawy i prostą dzielącą podstawę na dwie części równe, to te dwie proste harmonicznie podzielone przez ramiona trójkąta a i c.

Jeżeli trójkąt ASC jest równoramienny to b jest prostopadła do AC a więc i do d. Promienie b i d dzielą kąty przyległe utworzone przez a i c na dwie części równe. Ztąd wypada:

Dwusieczne dwóch kątów przyległych (utworzonych przez dwa nieograniczone promienie), są harmonicznie przedzielone przez ramiona tych kątów.

Jeżeli z czterech harmonicznych promieni, dwa przedzielone są do siebie prostopadłe, to dzielą kąty przyległe utworzone przez dwa drugie, na dwie części równe.

Jeżeli cztery harmoniczne promienie $a\,b\,c\,d$ przetniemy jakąkolwiek równoległą do jednego z promieni, to trzy pozostałe promienie wyznaczają na téj równoległéj dwa odcinki równe (wyznaczają trzy punkta harmoniczne z czwartym nieskończenie odległym).

Podobne prawa istnieją dla harmonicznych płaszczyzn.

Za pomocą powyższych wyników możemy łatwiéj niż za pomocą zupełnego czworokąta rozwiązywać zadanie:

Mając dane trzy punkta albo promienie, znaleść czwarty harmoniczny, jeżeli tylko możemy użyć prostych równoległych lub równych dcinków. Mając bowiem trzy promienie a, b, c (fig. 8) poprowadźmy sieczną u równoległą do a i odetnijmy $CD=BC$ a prosta d będzie czwartym promieniem harmonicznym względem a, b, c. Jeżeli mamy dane trzy punkta A, B, C, (fig. 9), to aby wynaleźć czwarty harmoniczny od B przedzielony poprowadźmy przez punkt B dowolną prostą u, odetnijmy od punktu B: $BA_1=BC_1$ połączmy A z A_1, i C z C_1 a z punktu S przecięcia się tych dwóch prostych, poprowadźmy równoległą do u, a ta wyznaczy czwarty harmoniczny punkt D

Jeżeli jest dany odcinek linijny AC (fig. 10) i jego środek B, możemy przez każdy punkt dany K poprowadzić równoległą do prostéj AC za pomocą linijnego wykreślenia:

Połączmy punkt K z A i C Dowolny punkt S prostéj AK połączmy z B i C a następnie punkt przecięcia T prostéj SB z prostą KC połączmy z punktem A i przedłużmy do spotkania z SC, przez ich punkt spotkania i przez punkt K poprowadźmy prostą, która będzie równoległą do AC.

Odwrotnie, mając dane dwie równoległe, można za pomocą wykreślenia linijnego podzielić odcinek AC jednéj z nich, na dwie części równe. Z dowolnego punktu S (fig. 10) poprowadźmy proste SA i SC, a przez punkt T, w którym się przecinają AU i CK, poprowadźmy prostą ST, która dzieli AC na dwie części równe.

Wielkości odcinków prostych rzeczywistych, ograniczonych przez cztery punkta harmoniczne, zostają w pewnéj stałéj proporcyi, któréj zawdzięczają swoją nazwę:

Uważmy bowiem cztery punkta harmoniczne A, B, C, D (fig. 9). Rzucając te punkta z dowolnego punktu S, otrzymamy cztery harmoniczne promienie a, b, c, d. Poprowadźmy przez B równoległą do d, to podług poprzedzającego musi być $A_1 B=C_1 B$. Trójkąty AA_1B i ASD oraz CC_1B i SCD są podobne, a więc:

$$\frac{AB}{AD}=\frac{A_1B}{SD} \text{ i } \frac{CB}{CD}=\frac{C_1B}{SD}$$

a ponieważ $A_1 B=C_1B$ więc:

$$\frac{AB}{AD}=\frac{CB}{CD}$$

Używając téj proporcyi w rachunku wykreślnym, trzeba zwrócić uwagę na to, że jeżeli długości AB, AD, CD, przyjmujemy za dodatnie, to długość CB, jako mająca odwrotny niejako kierunek, musimy uważać za odjemną, a więc musimy napisać:

$$\frac{AB}{AD} = -\frac{CB}{CD} \text{ czyli } \frac{AB}{CB} = -\frac{AB}{CD} \quad \dots . \quad (I)$$

w którym to kształcie, najczęściéj się téj formuły używa.

Proporcyję: $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{CD}$ możemy napisać inaczéj:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC - AB}{AD - AC}$$

czyli, że długości odcinków: AB, AC i AD wydają zawsze proporcyję: tak się ma pierwsza do trzeciéj, jak różnica dwóch pierwszych, do różnicy dwóch ostatnich.

Od téj to proporcyi, otrzymały swoją nazwę punkta harmoniczne gdyż proporcyje téj postaci nazwali Grecy harmonicznemi z następującéj przyczyny: Jeżeli długości trzech jednakowych i jednakowo napiętych strun, mają się do siebie jak $1 : {}^4/_5 : {}^2/_3$, i gdy pierwsza wprawiona w drganie wydaje ton *c*, to druga i trzecia wydają tony: *e* i *g* należące do akordu harmonicznego. Trzy zaś liczby 1, ${}^4/_5$ i ${}^2/_3$ dają proporcyję $1 : {}^2/_3 = 1 - {}^4/_5 : {}^4/_5 - {}^2/_3$.

Proporcyja: $\frac{AB}{AD} = \frac{CB}{CD}$ pokazuje, że jeżeli AB $>$ CB to i AD $>$ CD, czyli że punkt *D* leży na zewnątrz po stronie punkta *C*, jeżeli zaś przeciwnie AB $<$ CB, to i AD $<$ CD, czyli że punkt *D* leży po stronie punktu *A*.

Dla trzech kątów ograniczonych przez cztery harmoniczne promienie albo płaszczyzny, można wyprowadzić taką samą proporcyję, jak dla odcinków ograniczonych przez cztery harmoniczne punkta.

Zestawy jednolite rzutowo zespolone.

Jakiekolwiek zestawy zostające z sobą w takim związku, że zawsze jednemu pierwiastkowi jednego z nich, odpowiada stale jeden pierwiastek drugiego, nazwaliśmy ogólnie zespolonemi. Jednym z najprostszych sposobów zespolenia dwóch zestawów zasadniczych jest, uważać jeden z nich za przecięcie lub rzutnię drugiego, lub oba za przecięcia lub rzutnie trzeciego jakiegoś zestawu.

W ten sposób są zestawami zespolonemi:

1. Roztocz (promieni lub płaszczyzn) i zestaw prosty będący jéj przecięciem, przyczém każdemu punktowi zestawu pro-

stego odpowiada promień lub płaszczyzna przez ten punkt przechodząca.

2. Zestawy proste będące przecięciami jednéj roztoczy promieni.

3. Dwie roztocze promieni będące rzutniami jednego zestawu prostego albo przecięciami jednéj roztoczy płaszczyzn.

4. Dwie roztocze płaszczyzn będące rzutniami jednéj roztoczy promieni.

Zestawy zespolone w jeden z powyższych sposobów nazywają się zespolone perspektywicznie albo też mówimy, że leżą perspektywicznie, albo nareszcie, że są perspektywiczne względem siebie.

Dwa zestawy, z których każdy jest perspektywicznym względem trzeciego zestawu, są względem siebie zespolonemi ale najczęściéj nie leżą perspektywicznie i wtedy mówimy, że leżą ukośnie. Takie ukośne położenie możemy otrzymać po prostu w ten sposób, że jeden z perspektywicznych zestawów przesuwamy, nie zmieniając układu zawartych w nim pierwiastków i ich odpowiedniości względem pierwiastków drugiego zestawu. Takie dwa zestawy nazywają się zespolonemi rzutowo, albo krótko: rzutowémi względem siebie.

Oczywistą jest rzeczą, że w zestawach zespolonych perspektywicznie lub rzutowo, czterem pierwiastkom harmonicznym jednego z nich, odpowiadają zawsze cztery pierwiastki harmoniczne drugiego, gdyż są to rzuty lub przecięcia zestawów harmonicznych.

Dwa zatem rzutowo zespolone zestawy mogą być dane przez trzy pary pierwiastków odpowiednich, wszystkie zaś inne pary mogą być wyznaczone; n. p. jeżeli dane są trzy punkta A, B, C,, zestawu prostego u i trzy punkta odpowiednie A_1, B_1, C_1 zestawu prostego u_1, to wynajdując w zestawie u czwarty harmoniczny punkt D, a w zestawie u_1, czwarty harmoniczny punkt D_1, otrzymamy czwartą parę punktów odpowiednich D i D_1. Wyznaczając następnie do którychkolwiek trzech punktów, n. p. do B, C, D, i do B_1, C_1, D_1, czwarte punkta harmoniczne, otrzymamy nową parę punktów odpowiednich E i E_1 i t. d. aż do nieskończoności, a w ten sposób moglibyśmy wszystkie punkta zestawu u zespolić z punktami zestawu u_1. Ten sposób jednak zespolenia byłby niedogodny, i jak się daléj przekonamy, możemy zawsze do dowolnie obranych trzech par pierwiastków odpowiednich, wyznaczyć ilekolwiek nowych par za pomocą rzutów.

Zestawy perspektywiczne, różnią się od rzutowych tylko tem, że mają pewne szczególne położenie względém siebie.

Pod nazwą zestawów rzutowych będziemy rozumieli tylko takie, które nie mają tego szczególnego położenia względem siebie.

Z określenia zestawów rzutowych wypływa, że:

Jeżeli dwa zestawy są rzutowemi względem trzeciego, to są także względem siebie rzutowemi (mogą być także w szczególnych wypadkach perspektywicznemi).

Dwa jednoimienne zestawy rzutowe, mogą leżeć jeden w drugim (w jednóm wspólnóm tle). Tak n. p. dwa zestawy proste mogą leżeć w jednéj prostéj, dwie roztocze płaszczyzn mogą mieć wspólną oś, dwie roztocze promieni wspólny środek (współśrodkowe) i leżeć w jednéj płaszczyznie.

Ważną jest rzeczą zbadać, ile pierwiastków odpowiednio wspólnych mogą mieć dwa zestawy rzutowo zespolone, leżące jeden w drugim; t. j. ile pierwiastków, które wraz ze swoim odpowiednim, zchodzą się razem w jeden pierwiastek? Uważmy więc naprzód:

Jeżeli dwie roztocze promieni R_1 i R_2 (fig. 11) będące rzutniami jednego zestawu prostego u (a więc perspektywiczne) przetniemy prostą w, to otrzymamy w téj prostéj, dwa rzutowo zespolone zestawy proste u_1 i u_2, mające dwa punkta (przecięcia w z u i z R_1 R_2) odpowiednio wspólne. Te dwa punkta schodzą się w jeden, jeżeli R_1 R_2 przechodzi przez punkt (uw).

Jeżeli dwa zestawy proste u_1 i u_2 (fig. 12) będące przecięciami jednéj roztoczy promieni R (a więc perspektywiczne), rzucimy z punktu T w tejże płaszczyźnie leżącego, to otrzymamy dwie rzutowo zespolone roztocze promieni, których wspólnym środkiem będzie punkt T, mające dwa promienie (łączące T z R i z $(u_1\ u_2)$ odpowiednio-wspólne. Te dwa promienie zchodzą się w jeden, jeżeli $(u_1\ u_2)$ leży na $R\ T$.

Zdarza się téż, jak to późniéj zobaczymy, że dwa zestawy rzutowo zespolone nie mają żadnego pierwiastku odpowiednio wspólnego.

Co się tyczy większéj liczby pierwiastków odpowiednio wspólnych, to widoczną jest rzeczą, że:

Jeżeli dwa zestawy rzutowo zespolone, jeden w drugim leżące, mają trzy pierwiastki odpowiednio wspólne, to i wszystkie inne pierwiastki są odpowiednio wspólne, czyli, że takie dwa zestawy są identyczne.

Albowiem szukając do trzech danych pierwiastków (odpowiednio wspólnych) czwartego harmonicznego, otrzymujemy w obu zestawach jeden i ten sam punkt (a więc czwarty odpowiednio wspólny). Szukając coraz więcéj czwartych harmonicznych, do którychkolwiek trzech już wiadomych, otrzymamy coraz więcéj punktów odpowiednio wspólnych.

A więc dwa zestawy rzutowo zespolone, jeżeli nie są identyczne, mogą miéć najwięcéj dwa pierwiastki odpowiednio wspólne. Ztąd także wypada, że jeżeli zestaw prosty jest rzutowo wspólny z roztoczą promieni (albo roztocz promieni z roztoczą płaszczyzn), i trzy pierwiastki jednego leżą w trzech odpowiednich pierwiastkach drugiego, to pierwszy jest przecięciem drugiego. Albowiem z przecięciem tym, ma trzy pierwiastki odpowiednio wspólne, a więc jest identyczny z tém przecięciem.

Jeżeli dwie rzutowo zespolone roztocze promieni R i R_1 (fig. 13), leżące w jednéj płaszczyźnie ale nie współśrodkowo, mają promień łączący ich środki, odpowiednio wspólny (a czyli a_1), to są one rzutniami jednego zestawu prostego u, a więc leżą perspektywicznie. Gdyż jeżeli dwa punkta B i C, w których promienie b i c jednéj

Jeżeli dwa rzutowo zespolone zestawy proste u i u_1 (fig. 14) przecinające się lecz nie leżące jeden w drugim, mają punkt przecięcia się odpowiednio wspólny (A czyli A_1), to są one przecięciami jednéj roztoczy promieni R a więc leżą perspektywicznie. Gdyż jeżeli wyznaczymy punkt R, w którym się spotykają promienie b i c łączą-roztoczy przecinają się z odpowiednimi promieniami b_1 i c_1, drugiéj roztoczy, połączymy prostą BC czyli u, to przecięciami téj prostéj z roztoczami R, i R_1 będą dwa zestawy proste rzutowo zespolone i mające trzy punkta A, B, C, odpowiednio wspólne (identyczne); a więc każde dwa promienie odpowiednie przecinają się w jednym punkcie prostéj u, czyli, że obie roztocze są rzutniami jednego zestawu prostego u, a więc leżą perspektywicznie względem siebie.

ce punkta B i C, jednego zestawu z punktami B_1 i C_1 drugiego zestawu, to rzutniami tych dwóch zestawów z punktu R będą dwie rzutowo zespolone roztocze promieni, mające trzy promienie a, b, c, odpowiednio wspólne (identyczne), a więc każde dwa punkta odpowiednie leżą na jednym promieniu roztoczy R, czyli, są jéj przecięciami.

Tym twierdzeniom odpowiadają twierdzenia dla wiązki promieni.

Jeżeli dwie rzutowo zespolone roztocze płaszczyzn, których osie się przecinają, mają płaszczyznę łączącą te osie, odpowiednio wspólną, to te dwie roztocze są rzutniami jednéj roztoczy promieni. Gdyż jeżeli położymy płaszczyznę przez dwa którekolwiek promienie, w których się przecinają płaszczyzny odpowiednie, to przecięcie téj płaszczyzny z obiema roztoczami płaszczyzn wyda dwie rzutowo zespolone roztocze promieni mające trzy pierwiastki odpowiednio wspólne, a więc identyczne.

Jeżeli dwie rzutowo zespolone roztocze promieni (nie w jednéj płaszczyźnie), mające wspólny środek, mają promień, w którym się przecinają ich płaszczyzny, odpowiednio wspólny, to są one przecięciami jednéj roztoczy płaszczyzn. Albowiem rzucając obie roztocze promieni z prostéj w któréj się przecinają dwie jakiekolwiek płaszczyzny łączące po dwa promienie odpowiednie, otrzymamy dwie rzutowo zespolone roztocze płaszczyzn, mające trzy pierwiastki odpowiednio wspólne, a więc identyczne.

W podobny sposób otrzymujemy twierdzenia:

Jeżeli dwie rzutowo zespolone roztocze promieni R i R_1, mają różne środki, i trzy promienie a, b, c jednéj roztoczy przecinają się z trzema promieniami a_1, b_1, c_1, drugiéj roztoczy w trzech punktach A, B, C jednéj prostéj, to te dwie roztocze są rzutniami jednego zestawu prostego u, a więc leżą perspektywicznie i wszystkie punkta przecięcia promieni odpowiednich leżą w tejże prostéj u. Gdyż zestawy proste będące przecięciami prostéj u z roztoczami R i R_1 mają trzy punkta A, B, C, odpowiednio wspólne, a więc identyczne.

Jeżeli dwa rzutowo zespolone zestawy proste u i u_1, leżą w różnych prostych i trzy promienie a, b, c łączące punkta A, B, C jednéj roztoczy z odpowiednimi punktami A_1, B_1 C_1, drugiéj roztoczy spotykają się w jednym punkcie S, to te dwa zestawy są przecięciami jednéj roztoczy promieni, a więc leżą perspektywicznie i wszystkie promienie łączące punkta odpowiednie przechodzą przez punkt S. Gdyż roztocze rzucające zestawy u i u_1 z punktu S mają trzy promienie a, b, c, odpowiednio wspólne, a więc identyczne.

Z powyższego wypada, że jeżeli dwie rzutowo zespolone roztocze promieni leżą w jednéj płaszczyźnie ale nie perspektywicznie, to punkta przecięcia się promieni odpowiednich tworzą szereg punktów, który z dowolną prostą może mieć najwyżéj dwa punkta wspólne. Ten szereg punktów nazywamy l i n i j ą k r z y w ą d r u g i e g o s t o p n i a.

Jeżeli dwa rzutowo zespolone zestawy proste leżą w jednéj płaszczyźnie ale nie perspektywicznie, to promienie łączące ich punkta odpowiednie, tworzą zestaw promieni w którym przez jeden punkt przechodzi najwięcéj dwa promienie. Zestaw ten nazywa się r o z t o c z ą p r o m i e n i d r u g i e g o s t o p n i a dla odróżnienia go od zwykłéj roztoczy promieni nazywanéj także roztoczą pierwszego stopnia.

Określenie więc krzywych i roztoczy promieni drugiego stopnia jest:

Dwie rzutowe ale nie perspektywiczne roztocze promieni p r z e c i n a j ą s i ę w krzywéj drugiego stopnia, to jest, że

Dwa rzutowe ale nie perspektywiczne zestawy proste s ą r z u c a n e przez roztocz promieni drugiego stopnia, to jest w każdym punkcie téj krzywéj przecinają się dwa promienie odpowiednie tych roztoczy (fig. 15).

Żadna prosta nie przecina krzywéj drugiego stopnia więcéj jak w dwóch punktach.

że każdy promień tej roztoczy rzuca dwa punkta odpowiednie tych zestawów (fig. 16).

W żadnym punkcie roztoczy drugiego stopnia nie zchodzi się więcéj jak dwa promienie.

Że krzywe i roztocze promieni drugiego stopnia są zestawami ciągłemi, t. j. nie mającemi przerw, to zobaczymy z następujących badań:

Jeżeli dwa zestawy proste u i u_1 przecinające się, chcemy zespolić rzutowo w ten sposób, aby ich punkt przecięcia się A czyli A_1 był odpowiednio wspólnym i aby punktom B, C, jednego, odpowiadały punkta B_1, C_1, drugiego, to jeden zestaw musi być rzutem drugiego z punktu R, w którym się przecinają proste BB_1 i CC_1. Każdemu czwartemu punktowi D w jednym zestawie odpowiada w drugim zestawie punkt D_1, leżący w promieniu RD.

Jeżeli dwa zestawy proste u i u_1 leżące w jednej płaszczyźnie chcemy zespolić rzutowo w ten sposób, aby dowolne punkta A, B, C, jednego, odpowiadały punktom A_1, B_1, C_1 drugiego, to obieramy na któréjkolwiek prostéj łączącéj dwa punkta odpowiednie, n. p. na AA_1 punkt R i prowadzimy przez punkt A_1 dowolną prostą u_2 przecinającą prostą u. Rzucając z punktu R zestaw u na u_2, otrzymamy punkta A_2, B_2, C_2, a tym sposobem zagadnienie sprowadzoném zostanie do poprzedzającego, gdyż potrzebujemy tylko zespolić A, B, C, z A_2. B_2, C_2 (gdzie A czyli A_2 jest odpowiednio wspólne). Zestawy u i u_1, są więc rzutami zestawu U_2 z punktów R i R_1. Aby dla jakiegokolwiek punktu D zestawu u wynaleść odpowiedni punkt D_1 zestawu u_1, potrzeba najprzód odrzucić z punktu R punkt D na u_2, a otrzymany punkt D_2 odrzucić z punktu R_1 na u_1.

Jeżeli nakoniec dwa zestawy proste u i u_1 leżące w jednéj prostéj mamy zespolić rzutowo w ten sposób, aby punktom A, B, C, jednego, odpowiadały punkta A_1, B_1, C_1, drugiego, to sprowadzamy to zagadnienie do poprzedzającego odrzucając jeden z zestawów z dowolnego punktu na dowolną prostą u_2. Jeżeli którykolwiek z danych punktów A, B, C, upada razem ze swoim odpowiednim, to przeprowadzimy prostą u_2 przez ten punkt, sprowadzamy zagadnienie, od razu, do pierwszego przypadku.

Z tego się pokazuje, że jakiekolwiek dwa jednolite zestawy zasadnicze (gdyż to samo cośmy mówili o zestawie prostym, da się zastósować do innych zestawów) zespolone rzutowo, mogą być uważane jako pierwszy i ostatni w szeregu zestawów, z których drugi jest rzutem pierwszego, trzeci drugiego i t. d. aż do ostatniego. Każde dwa zestawy w tym szeregu obok siebie stojące, leżą perspektywicznie, pierwszy i ostatni zaś zowią się dlatego właśnie zespolonemi rzutowo, że można je otrzymać za pomocą rzutów.

Ponieważ zaś zestawy rzutowo zespolone otrzymują się za pomocą rzutów, a więc nieprzerwanemu szeregowi pierwiastków jednego zestawu musi odpowiadać nieprzerwany szereg pierwiastków drugiego. Ponieważ zaś każde dwa pierwiastki odpowiednie wyznaczają jeden nowy pierwiastek, przeto i ten szereg nowo wyznaczonych pierwiastków musi być nieprzerwanym czyli ciągłym i tworzy jak to powyżej powiedziano, linije krzywe lub roztocze ciągłe.

Jeżeli w zestawie prostym u, punkt P posuwa się w pewnym toku, to odpowiedni ma punkt P_1 zestawu rzutowo zespolonego u_1 także się w pewnym toku posuwa *). Jeżeli dwa zestawy proste rzutowo zespolone leżą w jednéj prostéj, to posuwanie się punktów odpowiednich może nastąpić w jednym i tym samym lub w odwrotnych tokach, w pierwszym razie nazywamy te dwa zestawy j e d n o t o c z n i e, w drugim r ó ż n o t o c z n i e r z u t o w o z e s p o l o n e m i.

Podobnież rozróżniamy dwie współśrodkowe roztocze promieni: jednotocznie lub przeciwtocznie rzutowe, stosownie do tego, czy roztocze opisane są w jednym toku lub w różnych tokach.

Oczywistą jest rzeczą, że zestawy r ó ż n o t o c z n i e r z u t o w o z e s p o l o n e, m u s z ą m i e ć d w a p i e r w i a s t k i o d-

---

*) To znaczy, że bierzemy pod uwagę następstwo punktów n. p. A, B, C,...... które uważamy za chwilowe stanowiska punktu P, i punktów A_1, B_1, C_1,... które uważamy za chwilowe stanowiska punktu P_1.

powiednio wspólne, przez które każde dwa inne odpowiednie są przedzielone. Jednotoczne rzutowe zestawy mają tylko wtenczas dwa pierwiastki odpowiednio wspólne, gdy jakaś część jednego (odcinek albo kąt) objętą jest odpowiednią częścią drugiego.

Albowiem jeżeli np. w danéj prostéj, dwa punkta P i P_1 (fig. 17), opisują dwa zestawy proste u i u_1 posuwając się w tokach przeciwnych, to w odcinku rzeczywistym PP_1 musi nastąpić jedno przejście tych punktów przez siebie, a drugie przejście w dopełnieniu tego odcinka; podobnież w dwóch roztoczach współśrodkowych jednotocznych, R i R_1 (fig. 18) gdy promień a, obraca się aż do b, promień a_1 obraca się do b_1, a więc w kącie I następuje jedno przejście promienia a_1 przez a. a podczas gdy promień b obraca się aż do a, promień b_1 obraca się do a_1 a więc w kącie II następuje przejście promienia b przez b. Jeżeli ten warunek nie jest dopełniony, to mają takie zestawy tylko jeden albo nie mają żadnego pierwiastka odpowiednio wspólnego.

Z powyższych ogólnych badań o zestawach rzutowych, rzutowych, możemy wyprowadzić wiele nowych wniosków, jako to:

Jeżeli boki $a_1, a_2, .. a_n$ zmiennego niezupełnego n-boku, obracają się, każdy około jednego ze stałych punktów: R_1, R_2 ... R_n, a $n—1$ wierzchołków: $(a_1\ a_2)$ $(a_2\ a_3)$..... $(a_{n-1}\ a_n)$, posuwa się każdy po jednéj ze stałych n—1 prostych: u_1, u_2... u_{n-1} to ostatni wierzchołek $a_n\ a_1$ i każdy inny punkt przecięcia boków n-kąta, opisuje krzywą drugiego stopnia albo linię prostą. Linię prostą np. wtedy, gdy punkta R_1, R_2... R_n leżą w jednéj prostéj. A to dla tego, że boki a_1, a_2.... a_n, obracając się około stałych pun-

Jeżeli wierzchołki A_1, A_2.... A_n zmiennego niezupełnego n-kąta posuwają się każdy w jednéj z n prostych u_1, u_2... u_n a $n-1$ boków: $A_1 A_2$, $A_2 A_3$... $A_{n-1}A_n$ obraca się, każdy koło jednego z $n-1$ punktów stałych R_1, R_2.... R_{n-1}, to ostatni bok $A_n\ A_1$ opisuje roztocz promieni drugiego lub pierwszego stopnia (obraca się koło stałego punktu). Pierwszego stopnia wtedy, gdy proste u_1 u_2... u_n zchodzą się w jednym punkcie. Albowiem wierzchołki: A_1, A_2... A_n opisują zestawy proste, z któ-

któw opisują roztocze promieni, z których każda jest perspektywiczną względem następnéj jako rzutnie jednego i tego samego zestawu prostego. Wszystkie więc te roztocze są rzutowo zespolone, a więc i pierwsza i ostatnia, których przecięcie daje krzywą drugiego stopnia, jeżeli nie leżą perspektywicznie, co następuje wtenczas gdy R_1 R_2.... R_n leżą w jednéj prostéj, gdyż przy obrocie n-kąta wszystkie boki zchodzą się, raz jeden w téj prostéj $R_1 R_n$ i dają jeden promień odpowiednio wspólny wszystkim roztoczom, a więc roztocze leżą perspektywicznie.

rych każdy jest perspektywicznym względem następnego jako przecięcie jednéj i téj saméj roztoczy promieni. Wszystkie te zestawy są zatem rzutowo zespolone, a więc i pierwszy i ostatni, które są rzucane przez roztocz promieni drugiego stopnia jeżeli nie leżą perspektywicznie, co następuje wtenczas np., gdy te zestawy przecinają się wszystkie w jednym punkcie P, gdyż przy posuwaniu się wierzchołków A_1, A_2.... A_n wszystkie one zchodzą się raz jeden w tym punkcie i ten punkt jest przeto odpowiednio wspólny wszystkim zestawom, a więc zestawy leżą perspektywicznie.

Na téj zasadzie możemy wyznaczyć ilekolwiek punktów krzywéj drugiego stopnia, albo promieni, roztoczy drugiego stopnia. Wykreślenie jest oczywiście najłatwiejsze, jeżeli n=3 t. j. za pomocą trójkąta.

Dodatek.

Stosunki geometryczne zestawów rzutowo zespolonych.

Uważmy dowolną roztocz promieni R (a, b, c, d,. ..) i perspektyczny z nią zestaw prosty u (A, B, C, D,....) (fig. 2).

Trójkąty utworzone przez dwa dowolne promienie i prostą u, mają wspólny wierzchołek R, czyli jednakową wysokość; ich powierzchnie przeto, mają się do siebie jak ich podstawy, n. p.:

$$\frac{\triangle \, ARB}{\triangle \, ARD} = \frac{AB}{AD} \quad \text{i} \quad \frac{\triangle \, CRB}{\triangle \, CRD} = \frac{CB}{CD}$$

Ponieważ powierzchnia trójkąta równa się połowie iloczynu z dwóch boków, pomnożonemu przez wstawę kąta między niemi zawartego, przeto z pierwszéj proporcyi otrzymamy:

$$\frac{\frac{1}{2}\ AR \cdot RB\,Sin\,(ab)}{\frac{1}{2}\ AR \cdot RD\,Sin\,(ad)} = \frac{AB}{AD}$$

czyli:
$$\frac{RB\ Sin\ (ab)}{RD\ Sin\ (ad)} = \frac{AB}{AD}$$

podobnież z 2. proporcyi:
$$\frac{RB\ Sin\ (cb)}{RD\ Sin\ (cd)} = \frac{CB}{CD}$$

Podzieliwszy pierwszą proporcyję przez drugą otrzymamy:

$$\frac{Sin\ (ab)}{Sin\ (ad)} \cdot \frac{Sin\ (cb)}{Sin\ (cd)} = \frac{AB}{AD} \cdot \frac{CB}{CD} \quad . \ . \ . \ . \ II$$

Każda strona tego równania jest stosunkiem dwóch stosunków czyli **stosunkiem podwójnym**, między wielkościami jednego i tegoż samego zestawu. W obu stronach widoczną jest stała symetryja, tak, że dla dowolnych czterech promieni i odpowiednich im odcinków, możemy takie zrównanie napisać, np.:

$$\frac{Sin\ (ac)}{Sin\ (af)} \cdot \frac{Sin\ (bc)}{Sin\ (bf)} = \frac{AC}{AF} \cdot \frac{BC}{BF}$$

Widzimy więc, że pomiędzy wielkościami odpowiednich kątów i odcinków, zachodzi w powyższych zestawach perspektywicznych charakterystyczna zależność. Bardzo łatwo zaś możemy dowieść téj zależności w zestawach rzutowych. Jakoż, oczywistą jest rzeczą, że jeżeli powyższą roztocz R przetniemy prostą u_1, to dowolny stosunek podwójny w tym zestawie, będzie równy odpowiedniemu stosunkowi w rozt. R, np.:

$$\frac{A_1B_1}{A_1D_1} \cdot \frac{C_1B_1}{C_1D_1} = \frac{Sin\ (ab)}{Sin\ (ad)} \cdot \frac{Sin\ (cb)}{Sin\ (cd)}$$

z tego, i z równania II, wypada:

$$\frac{A_1B_1}{A_1D_1} \cdot \frac{C_1B_1}{C_1D_1} = \frac{AB}{AD} \cdot \frac{CB}{CD}$$

Jeżeli teraz którykolwiek z zestawów prostych, np. u_1, rzucimy za pomocą dowolnéj roztoczy R_1 (a_1, b_1, c_1, d_1....), to oczywiście będzie:

$$\frac{A_1B_1}{A_1D_1} \cdot \frac{C_1B_1}{C_1D_1} = \frac{Sin\ (a_1b_1)}{Sin\ (a_1d_1)} \cdot \frac{Sin\ (c_1b_1)}{Sin\ (c_1d_1)}$$

z tego i z poprzedniego zrównania:

$$\frac{AB}{AD} \cdot \frac{CB}{CD} = \frac{Sin\ (a_1b_1)}{Sin\ (a_1d_1)} \cdot \frac{Sin\ (c_1b_1)}{Sin\ (c_1d_1)}$$

Z tego już widzimy, że stosunek podwójny między czterema dowolnemi pierwiastkami jednego z dwóch rzutowych zestawów jest równym odpowiedniemu stosunkowi podwójnemu w drugim zestawie. Widoczną zaś jest rzeczą że to cośmy tu dowiedli dla zestawu prostego i roztoczy promieni stosować się musi i do dowolnych dwóch zestawów jednolitych rzutowo zespolonych

Z równania II, możemy tu jeszcze wyprowadzić zależność zachodzącą między kątami utworzonemi przez 4 promienie harmoniczne. Wiemy bowiem, że jeżeli 4 punkta: A, B, C, D, są harmoniczne, to:

$$\frac{AB}{AD} = -\frac{CB}{CD}$$

a więc w równaniu II musi być:

$$\frac{\operatorname{Sin}(ab)}{\operatorname{Sin}(ad)} = -\frac{\operatorname{Sin}(cb)}{\operatorname{Sin}(cd)} \ldots \quad \text{III.}$$

gdzie a, b, c, d, są czterema promieniami harmonicznemi.

Wykreślanie krzywych i roztoczy promieni drugiego stopnia.

Dwie rzutowo zespolone roztocze promieni możemy otrzymać rzucając np. z dwóch dowolnych punktów R_1 i R_2 (fig. 15) dwa zestawy proste u_1 i u_2 będące przecięciami jednéj i téj saméj roztoczy R. (Roztocze R_1 i R_2, byłyby jak wiemy wtedy tylko perspektywicznemi, gdyby środki R_1 i R_2 leżały w jednéj prostéj z punktem u_1 u_2). Każdy promień roztoczy R wyznacza w zestawach prostych u_1 i u_2 dwa punkta odpowiednie, a te, rzucane z punktów R_1 i R_2 dają dwa odpowiednie promienie, których przecięcie jest punktem krzywej drugiego stopnia.

Również otrzymać można dwie rzutowo zespolone roztocze promieni jeżeli zestaw prosty u rzucimy z dwóch dowolnych punktów R_1 i R_2, i przesuniemy jedną z otrzymanych dwóch perspektywicznych roztoczy w ten sposób, aby promień łączący ich środki nie był odpowiednio wspólnym.

Dwa rzutowo zespolone zestawy proste możemy otrzymać rzucając jeden zestaw prosty u (fig. 16) z dwóch różnych puktów R_1 i R_2 i przecinając utworzone w ten sposób dwie perspektywiczne roztocze R_1 i R_2 dwiema prostemi u_1 i u_2. (Zestawy u_1 i u_2 byłyby jak wiemy wtedy tylko perspektywicznemi, gdyby ich punkt przecięcia upadł na promień odpowiednio wspólny R_1 R_2). Każdy punkt P prostéj u, wyznacza dwa promienie odpowiednie p_1 i p_2 roztoczy R_1 i R_2, a te promienie wyznaczają w zestawach u_1 i u_2, dwa punkta odpowiednie P_1 i P_2, przez które przechodzi jeden promień roztoczy drugiego stopnia.

Również otrzymać możemy dwa rzutowo zespolone zestawy proste, przecinając jedną roztocz promieni R, dwiema prostemi u_1 i u_2 i przesuwając w płaszczyźnie jeden z utworzonych perspektywicznych zestawów prostych w ten sposób, aby ich punkt przecięcia nie był odpowiednio wspólnym.

Powierzchnie stożkowe i roztocze płaszczyzn drugiego stopnia.

Znaleźliśmy, że w płaszczyźnie:

Dwie rzutowo zespolone roztocze promieni (nie współśrodkowe i nieperspektywiczne) przecinają się w krzywéj drugiego stopnia, która z dowolną prostą ma najwięcéj dwa punkta wspólne.

Dwa rzutowo zespolone zestawy proste (nie leżące w jednéj prostéj i nie perspektywiczne), rzucane są przez roztocz promieni drugiego stopnia, która z dowolną roztoczą pierwszego stopnia ma najwięcéj dwa promienie wspólne.

Wystawmy sobie teraz, że zestawy o których mowa w tych twierdzeniach, rzucamy z punktu R, zewnątrz płaszczyzny obranego, to łatwo dostrzeżemy, że:

Jeżeli dwie rzutowe roztocze płaszczyzn, których osie się przecinają nie leżą perspektywicznie, to przecięcia płaszczyzn odpowiednich tworzą **powierzchnię stożkową drugiego stopnia**, która z dowolną płaszczyzną może mieć najwięcéj dwa promienie wspólne. Punkt przecięcia obu osi, przez które przechodzą wszystkie promienie tworzące tę powierzchnię nazywa się środkiem téj powierzchni stożkowéj drugiego stopnia.

Jeżeli dwie rzutowe roztocze promieni, których płaszczyzny się przecinają, mają wspólny środek ale nie leżą perspektywicznie, to płaszczyzny łączące promienie odpowiednie tworzą **roztocz płaszczyzn drugiego stopnia**, która z dowolną roztoczą płaszczyzn pierwszego stopnia może mieć najwięcéj dwie płaszczyzny wspólne. Wspólny środek obu roztoczy promieni, przez który przechodzą wszystkie płaszczyzny, roztoczy płaszczyzn drugiego stopnia, nazywa się środkiem roztoczy płaszczyzn drugiego stopnia.

Powierzchnię bowiem stożkową drugiego stopnia i roztocz płaszczyzn drugiego stopnia otrzymujemy, rzucając z dowolnego punktu R krzywą drugiego stopnia i roztocz promieni drugiego stopnia. Dwie rzutowo zespolone roztocze promieni tworzące krzywą drugiego stopnia, są rzucane z tego samego punktu R przez dwie rzutowo zespolone roztocze płaszczyzn, których osie przecinają się w tymże punkcie. Dwa rzutowo zespolone zestawy proste, tworzące roztocz promieni drugiego stopnia, są rzucane przez dwie rzutowo zespolone roztocze promieni mające wspólny środek R. Własności powierzchni stożkowéj i roztoczy płaszczyzn drugiego stopnia łatwo wyprowadzić, porównywając je z zestawami, których są rzutami. Możemy powiedzieć ogólnie:

Rzutnią krzywéj lub roztoczy promieni, drugiego stopnia jest powierzchnia stożkowa albo roztocz płaszczyzn drugiego stopnia.

Przecięciem powierzchni stożkowéj lub roztoczy płaszczyzn, drugiego stopnia, jest krzywa lub roztocz promieni drugiego stopnia.

Uwagi nad wykreśleniami krzywych i roztoczy promieni drugiego stopnia.

Krzywa k (fig. 15) drugiego stopnia, utworzona przez dwie rzutowo zespolone roztocze promieni R_1 i R_2, przechodzi przez środki R_1 i R_2. Albowiem ponieważ te roztocze nie leżą perspektywicznie, czyli, że prom. R_1 R_2 nie jest odpowiednio wspólnym, więc promieniowi R_1 R_2 czyli p_1 roztoczy R_1 odpowiada inny promień (p_2) roztoczy R_2 (nie przechodzący przez punkt R_1) i przecinający się z promieniem p_1 w punkcie R_2. Promieniowi zaś R_1 R_2 czyli q_2, roztoczy R_2, odpowiada inny jakiś pro-

Roztocz promieni k (fig. 16) drugiego stopnia utworzona przez dwa rzutowo zespolone zestawy proste u_1 i u_2 zawiera także i te dwie proste u_1 i u_2. Albowiem ponieważ te zestawy nie leżą perspektywicznie, przeto ich punkt przecięcia (u_1 u_2) nie jest odpowiednio wspólnym, a więc punktowi u_1 u_2 czyli P_1 zestawu u_1 odpowiada w zestawie u_2 inny jakiś punkt P_2 połączony z nim przez prostą u_2. Punktowi zaś u_1 u_2 czyli Q_2 zestawu u_2 odpowiada w zestawie u_1 inny jakiś punkt Q_1, mień q_1 roztoczy R_1 (nie przechodzący przez punkt R_2) i przecinający promień q_2 w punkcie R_1. A więc punkta R_1 i R_2 są przecięciami promieni odpowiednich i tém samém należą do krzywéj.

połączony z nim przez prostą u_1. A więc proste u_1 i u_2, jako łączące punkta odpowiednie, należą do roztoczy k.

Możemy łatwo zauważyć, że wspomniany w twierdzeniu z lewéj strony promień p_2 ma tylko jeden punkt (R_2) wspólny z krzywą, jest przeto stycznym do krzywéj. Każdy inny promień roztoczy R_2 ma z krzywą dwa punkta wspólne. Podobnież w twierdzeniu z prawéj strony, punkt P_2 jest jedynym punktem zestawu u_2, przez który przechodzi tylko jeden promień roztoczy k. Punkt ten nazywamy punktem styczności tej roztoczy w promieniu u_2. A więc:

Wspólnemu promieniowi dwóch rzutowo zespolonych roztoczy promieni, odpowiada w każdéj roztoczy jeden promień styczny do krzywéj drugiego stopnia, utworzonéj przez te roztocze.

Wspólnemu punktowi dwóch rzutowo zespolonych zestawów prostych, odpowiada w każdym zestawie, jeden punkt styczności, roztoczy drugiego stopnia, utworzonéj przez te zestawy.

Wiemy, że dwa rzutowo zespolone zestawy są w zupełności wyznaczone, jeżeli dane są trzy pary pierwiastków odpowiednich. Mając więc dwie rzutowo zespolone roztocze promieni R_1 i R_2 i trzy punkta A, B, C, przecięcia promieni odpowiednich, a więc i trzy pary promieni odpowiednich, możemy wykreślić ilekolwiek nowych par promieni odpowiednich i ilekolwiek nowych punktów krzywéj k, która musi przechodzić przez punkta A, B, C, R_1 i R_2.

Jeżeli jeden z danych punktów A, B, C, upada w punkcie R_1 (lub R_2), to aby krzywa K była wyznaczoną, musi być dany promień styczny do krzywéj w punkcie R_1 (lub R_2).

Podobnież, jeżeli są dane dwa rzutowo zespolone zestawy proste u_1 i u_2 i trzy promienie (roztoczy 2go stopnia) a, b, c, łączące punkta odpowiednie (a więc i trzy pary punktów odpowiednich), to te zestawy są wyznaczone i możemy wyznaczyć ilekolwiek nowych par punktów odpowiednich i ilekolwiek nowych promieni roztoczy. Jeżeli jeden z promieni a, b, c, upada w prostą u_1, (lub u_2), to aby roztocz była wyznaczoną, musi być dany w téj prostéj punkt styczności roztoczy w promieniu u_1, (lub u_2).

Zadania więc:

Mając dane w płaszczyźnie: pięć punktów, albo cztery punkta i styczną w jednym z nich, albo trzy punkta i dwie styczne w dwóch z pomiędzy nich, wykreślić krzywą drugiego stopnia,

Mając dane w płaszczyźnie: pięć promieni, albo cztery promienie i jeden punkt styczności w jednym z nich, albo trzy promienie i dwa punkta w dwóch z pomiędzy nich, wykreślić roztocz promieni drugiego stopnia,

Sprowadzają się do zagadnień:

Mając dane trzy pary promieni odpowiednich dwóch rzutowo zespolonych roztoczy promieni R_1 i R_2, wykreślić te roztocze i ich przecięcie.

Mając dane trzy pary punktów odpowiednich dwóch rzutowo zespolonych zestawów prostych u_1 i u_2, wykreślić te zestawy i ich wzajemną rzutnię.

Te zaś ostatnie zagadnienia możemy bez trudności rozwiązać podanymi powyżéj sposobami, a mianowicie:

Przez którykolwiek punkt przecięcia $(a_1\ a_2)$ (Fig. 15.) dwóch promieni odpowiednich a_1 i a_2, wykreślmy dwie dowolne proste u_1 i u_2. Prosta u_1 przetnie roztocz R_1 w zestawie prostym u_1 $(A_1, B_1, C_1 \ldots)$, prosta zaś u_2 roztocz R_2 w zestawie prostym u_2 $(A_2, B_2, C_2 \ldots)$ Oba zestawy proste, jako przecięcia zestawów rzutowo zespolonych, są rzutowo zespolone a nawet leżą perspektywicznie, ponieważ ich punkt przecięcia jest odpowiednio wspólnym, są więc przecięciami jednéj rozto-

W któréjkolwiek prostéj $A_1\ A_2$ (Fig. 16.) łączącéj dwa punkta odpowiednie A_1 i A_2, obierzmy dwa punkta R_1 i R_2 jako środki dwóch roztoczy promieni. Rzutnią zestawu u_1 z punktu R_1 jest roztocz R_1 $(a_1, b_1, c_1, \ldots)$ rzutnią zestawu u_2 z punktu R_2 — roztocz R_2 $(a_2, b_2, c_2, \ldots)$. Obie roztocze, rzucające zestawy rzutowo zespolone, są rzutowo zespolone a nawet leżą perspektywicznie, gdyż mają promień a_1 lub a_2 łączący ich środki R_1 i R_2 odpowiednio wspólny, czy promieni R, której środek leży na przecięciu promieni $B_1 B_2$ i $C_1 C_2$. Prowadząc z R ilekolwiek nowych promieni, otrzymujemy tyleż nowych par punktów odpowiednich zestawów u_1 i u_2 tyleż nowych par promieni roztoczy R_1 i R_2 i tyleż nowych punktów krzywéj drugiego stopnia.

a więc są rzutniami jednego zestawu prostego u, który przechodzi przez punta przecięcia promieni odpowiednich $(b_1\ b_2)$ i $(c_1\ c_2)$. Rzucając ilekolwiek nowych punktów zestawu u ze środków R_1 i R_2, otrzymujemy tyleż nowych par promieni odpowiednich roztoczy R_1 i R_2, tyleż nowych par punktów odpowiednich zestawów u_1 i u_2 i tyleż nowych promieni roztoczy drugiego stopnia.

Tém samém rozwiązane są następujące zagadnienia:

Na dowolnym promieniu jednéj z dwóch rzutowo zespolonych roztoczy R_1 (lub R_2), znaleść drugi (nie R_1 lub R_2) jego punkt przecięcia się z krzywą drugiego stopnia.

Przez środki dwóch rzutowo zespolonych roztoczy R_1 i R_2, poprowadzić styczne do krzywéj k. Styczne szukane są promieniami odpowiedniemi, wspólnemu promieniowi, $R_1\ R_2$.

Przez dowolny punkt jednego z dwóch rzutowo zespolonych zestawów prostych u_1 (lub u_2), poprowadzić drugi (nie u_1 lub u_2) promień roztoczy drugiego stopnia.

W dwóch rzutowo zespolonych zestawach prostych u_1 i u_2, wyznaczyć punkta styczności roztoczy k. Punkta szukane są punktami odpowiedniemi, wspólnemu punktowi $(u_1\ u_2)$.

Uważamy teraz, że jeżeli w wykreśleniu Fig. 15. poprowadzimy promień $R_1\ R$ roztoczy R_1, przecinający u_1 i u_2 w punktach M_1 i M_2, to temu promieniowi odpowiada w roztoczy R_2 promień $R_2\ M_2$ — a więc punkt M_2, jest drugim punktem przecięcia prostej u_2 z krzywą k. — Tak samo też, drugi punkt przecięcia prostéj u, z krzywą k leży na promieniu $R\ R_2$. Ponieważ proste u_1 i u_2 obraliśmy zupełnie dowolnie, z tym tylko warunkiem, aby się przecinały w punkcie A lub A_1 należącym do krzywéj, przeto uwagi te posłużą nam do znalezienia drugiego punktu przecięcia dowolnéj prostéj przechodzącéj przez dany punkt krzywéj drugiego stopnia danéj przez 5 punktów naprzykład.

W wykreśleniu Fig. 16. uważamy co następuje:

Jeżeli połączymy punkt u u_1 czyli M_1 z punktem R_2 prostą M_1 R_2, to na téj prostéj leży punkt M_2 zestawu u_2 odpowiadający punktowi M_1 zestawu u_1, a więc M_1 R_2 jest drugim promieniem roztoczy K przechodzącym przez R_2. Podobnież prosta R_1 L_2 łącząca R_1 z u_2 u jest drugim promieniem roztoczy K przechodzącym przez R_1. — Środki R_2 i R_1 obraliśmy dowolnie na jednym z promieni roztoczy K. To nam daje możność rozwiązania drugiego zagadnienia odpowiedniego poprzednio wymienionemu.

Zagadnienia te są:

Na danéj prostéj u, przecinającéj krzywą drugiego stopnia w punkcie danym A, znaleść drugi punkt przecięcia z krzywą (daną przez 5 jéj pierwiastków).

Przez dany punkt R, leżący na promieniu a roztoczy promieni drugiego stopnia (danéj przez 5 jéj pierwiastków) poprowadzić drugi promień przechodzący przez R.

Prawa Pascal'a i Brianchon'a.

Na podstawie praw powyżéj dowiedzionych, możemy teraz dowieść następujących:

Boki przeciwległe sześciokąta wpisanego w krzywą drugiego stopnia przecinają się w trzech punktach jednéj prostéj.

Główne przekątne sześcioboku utworzonego przez sześć promieni roztoczy promieni drugiego stopnia przecinają się w jednym punkcie *).

Dla dowiedzenia tych praw, przypuśćmy że obrawszy dowolnych pięć punktów krzywéj drugiego stopnia, R_1 R_2 A

*) Prawa te znane są w geometryi pod nazwą praw Pascal'a i Brianchon'a; to drugie jednak inaczéj tu jest wyrażone, i dopiero wtenczas będziemy je mogli wypowiedzieć tak jak ono jest wypowiedziane w geometryi, gdy dowiedziemy że roztocz promieni drugiego stopnia jest zbiorem stycznych do krzywéj drugiego stopnia.

L_1 M_2 (Fig. 15.), wyznaczamy jakikolwiek szósty punkt téj krzywéj, sposobem powyżéj podanym, z tą tylko różnicą że proste u_1 i u_2, prowadzimy przez A, L_1 i A, M_2; wyznaczywszy następnie środek roztoczy R, sposobem powyżéj podanym, poprowadźmy dowolny promień dający punkta odpowiednie D_1 i D_2, przez które poprowadźmy promienie odpowiednie d_1 i d_2, których przecięcie wyda szósty punkt krzywéj, D. Ponieważ w tém wykreśleniu punkta D_1, D_2 i R (leżące w jednéj prostéj) są przecięciami boków przeciwległych sześciokąta A L_1 R_2 D R_1 M_2, wpisanego w krzywą 2 stp. (D_1 = przecięcie AL_1 z R_1 D, D_2 = przecięcie AM_2 z DR_2, R = przecięcie L_1 R_2 z M_2 R_1) i ponieważ w ten sposób nieskończoną liczbę sześciokątów wpisanych wykreślić by można, przeto twierdzenie Pascal'a byłoby dowiedzioném; ale ponieważ w powyższém wykreśleniu wierzchołki R_1 i R_2 były zarazem środkami roztoczy tworzących krzywą, przeto musimy jeszcze dowieść, że pomimo to, punkta te nie grają tu żadnéj szczególnéj roli — i że którekolwiek z punktów A, L_1, M_2 mogły być wzięte za środki roztoczy.

Aby tego dowieść, przypuśćmy, że punkta R_1 D R_2 M_2 i L_1 są stałe, a punkt A posuwa się po krzywéj. Prosta AL_1 (czyli u_1) obraca się około punktu L_1, prosta zaś AM_2 czyli u_2 około punktu M_2, przyczem, tak jak w pierwszém wykreśleniu, punkt D_2 (przecięcie R_2 D czyli d_2 z u_2) i punkt D_1 (przecięcie R_1 D czyli d_1 z u_1) muszą leżeć w jednéj prostej z R (przecięcie R_1 M_2 z R_2 L_1). Ale ponieważ proste d_1 i d_2 są stałe, więc punkta D_1 i D_2 posuwają się po nich i opisują dwa zestawy proste d_1 i d_2, które, ponieważ mogą być uważane za przecięcia roztoczy R, przeto są perspektywiczne. Proste zaś u_1 i u_2 obracają się około punktów L_1 i M_2, opisują dwie roztocze promieni, które możemy uważać za rzutnie zestawów d_1 i d_2, a więc za zestawy rzutowe względem siebie. Ruchomy punkt A opisujący krzywą k jest przecięciem promieni odpowiednich tych roztoczy — a więc ta krzywa k może być uważana jako przecięcie tych roztoczy L_1 i M_2, przyczém punkta R_1 i R_2 mają tylko takie znaczenie, jak każdy inny punkt krzywéj k.

Aby dowieść twierdzenia z prawej strony, przypuśćmy, że mając danych 5 promieni roztoczy drugiego stopnia, u_1, u_2, a, l_1, m_2 (fig. 16.), wyznaczamy jakikolwiek szósty promień, sposobem powyżéj podanym, z tą tylko różnicą, że punkta R_1 i R_2 obieramy na przecięciu a z l_1 i a z m_2; wyznaczywszy następnie prostą u sposobem powyżéj podanym, poprowadźmy przez dowolny jej punkt D, promienie d_1 i d_2, które wyznaczą punkta D_1 i D_2, przez które przechodzi szósty promień roztoczy, d. Ponieważ w tém wykreśleniu proste u, d_1 i d_2 (zchodzące się w jednym punkcie) są głównemi przekątnemi sześcioboku u_1 m_2 a l_1 u_2 d, utworzonego przez 6 promieni roztoczy 2. st., i ponieważ w ten sposób, nieskończoną liczbę sześcioboków wykreślić by można, przeto twierdzenie Brianchon'a byłoby dowiedzionem, — ale ponieważ w powyższém wykreśleniu, promienie u_1 i u_2 były zarazem tłami zestawów prostych tworzących roztocz 2. stop., przeto musimy jeszcze dowieść, że pomimo to, promienie te nie grają tu żadnéj szczególnéj roli — i że którekolwiek z promieni: a, l_1, m_2, mogły być wzięte za tła zestawów prostych.

Aby tego dowieść, przypuśćmy że promienie u_1, u_2, l_1, m_2, są stałe, a promień R_1 R_2 zmienia miejsce nie przestając należeć do roztoczy k. — Punkt R_2 posuwa się po promieniu RM_2 czyli m_2; punkt R_1 po promieniu R_1 L_1 czyli l_1. Proste $R_1 D_1$ i $R_2 D_2$ przecinają się zawsze w prostéj u, tworząc zestaw prosty u, względem którego oba zestawy l_1 i m_2 są perspektywiczne (jako przecięcia roztoczy D_1 i D_2, perspektywicznych względem u), a więc względem siebie są rzutowe. Roztocz więc k może być utworzoną za pomocą dwóch zestawów prostych l_1 i m_2, zupełnie dowolnie obranych.

Ponieważ z powyższych roztrząsań okazuje się, że dowolne dwa punkta krzywéj drugiego stopnia, mogą być obrane za środki dwóch rzutowo zespolonych roztoczy, których przecięcie (t. j. przecięcie promieni odpowiednich) tworzy krzywą drugiego stopnia, — a więc, innemi słowy powiedziawszy, rzucając wszystkie punkta tej krzywej z dwóch dowolnych jej punktów, i przyjmując w tak utworzonych roztoczach promienie rzucające jeden i ten sam punkt krzywéj za odpowiednie, — otrzymamy dwie roztocze rzutowo zespolone.

Ponieważ dalej, każde dwa promienie roztoczy drugiego stopnia mogą być obrane za tła dwóch rzutowo zespolonych zestawów prostych tworzących roztocz, (przyczem punktami odpowiedniemi są te, przez które przechodzi jeden i tenże sam promień roztoczy), przeto innemi słowy powiedziawszy, przecinając roztocz drugiego stopnia dwoma dowolnemi jéj promieniami, i nazywając w tak utworzonych zestawach prostych punktami odpowiedniemi te, które są przecięciami jednego promienia, — otrzymamy dwa zestawy proste rzutowo zespolone.

A więc dowiedliśmy, że:

Krzywa drugiego stopnia, zostaje z każdych dwóch punktów na niéj leżących, rzucaną przez dwie rzutowo zespolone roztocze promieni, w których promienie odpowiednie rzucają jeden i tenże sam punkt.

Roztocz promieni drugiego stopnia, zostaje przeciętą przez każde dwa promienie do niéj należące, w dwóch rzutowo zespolonych zestawach prostych, w których punkta odpowiednie leżą w jednym i tymże samym promieniu.

Z tego wypada że:

Dwie krzywe 2. st. zlewają się w jedną, jeżeli mają 5 punktów wspólnych, albo 4 punkta i jedną styczną, albo 3 punkta i 2 styczne w dwóch z pomiędzy tych punktów — wspólne.

Dwie roztocze promieni 2 st. zlewają się w jedną, jeżeli mają 5 promieni wspólnych, albo 4 promienie i w jednym z nich jeden punkt styczności, albo 3 promienie i w dwóch z pomiędzy nich, 2 punkta styczności — wspólne.

Albowiem przyjąwszy którekolwiek dwa dane punkta za środki dwóch rzutowo zespolonych roztoczy promieni two-

Albowiem przyjąwszy którekolwiek dwa promienie za tła dwóch rzutowo zespolonych zestawów prostych tworzących

rzących tę krzywą, pozostałe dane wyznaczają trzy pary promieni odpowiednich, a więc i obie roztocze będą zupełnie wyznaczone przez te trzy pary. Mogą być tylko dwie roztocze mające trzy pary dane — a więc tylko jedna krzywa.

roztocz drugiego stopnia, pozostałe dane wyznaczą w tych promieniach trzy pary punktów odpowiednich a więc i oba zestawy będą całkowicie wyznaczone; — ale dwa tylko zestawy są możebne a więc jedna roztocz przez nie utworzona.

Z przedostatniego twierdzenia wypływa:

Jeżeli 4 punkta A, B, C, D, krzywéj drugiego stopnia rzucane są z jakiegokolwiek 5go punktu krzywéj przez 4 promienie harmoniczne, to z każdego dowolnego punktu krzywéj będą rzucane również przez 4 harmoniczne promienie.

Takie 4 punkta nazywamy 4ma **punktami harmonicznemi krzywéj 2. st.**

Jeżeli 4 promienie a, b, c, d, roztoczy 2. st. przecinają się z jakimkolwiek piątym promieniem tej roztoczy w 4ch punktach harmonicznych, to z każdym dowolnym promieniem tejże roztoczy będą się przecinały również w 4ch punktach harmonicznych.

Takie 4 promienie nazywamy 4ma **promieniami harmonicznemi roztoczy 2.st.**

Oczywistą jest rzeczą że:

Trzy punkta jednéj krzywéj drugiego stopnia, lub trzy promienie jednéj roztoczy drugiego stopnia wyznaczają jeden czwarty harmoniczny, jeżeli tylko wiadomo, do któréj pary przedzielonych, ten czwarty należy.

Wiemy, że każde dwa punkta krzywéj drugiego stopnia mogą być obrane za środki dwóch rzutowo zespolonych roztoczy promieni tworzących tę krzywą i w każdéj roztoczy, promień odpowiadający wspólnemu promieniowi jest styczny do krzywéj; — z drugiej strony zaś wiemy, że każde dwa promienie roztoczy drugiego stopnia mogą być obrane za tła dwóch rzutowo zespolonych zestawów prostych tworzących roztocz, a w każdym zestawie, punktowi ich wspólnemu odpowiada jeden punkt styczności, przeto:

W każdym punkcie krzywéj drugiego stopnia można poprowadzić jednę styczną.

W każdym promieniu roztoczy drugiego stopnia, można wyznaczyć jeden punkt styczności.

Zbiór stycznych, otaczających krzywą drugiego stopnia stanowi, jak się później przekonamy, roztocz promieni drugiego stopnia; — zbiór zaś punktów styczności roztoczy promieni drugiego stopnia, stanowi krzywą drugiego stopnia.

Uogólnienie praw Pascal'a i Brianchon'a.

Prawa te dadzą się bardzo łatwo rozciągnąć na pięciokąty, czworokąty i trójkąty. W tym celu uważmy naprzód co następuje:

Jeżeli dowolna prosta *u*, przecinająca krzywą drugiego stopnia w dwóch punktach, obracać się będzie około jednego z punktów przecięcia tak, aby drugi punkt ciągle się zbliżał do pierwszego, to nareszcie oba te punkta zleją się w jeden, a prosta *u* (sieczna), stanie się styczną. — Jak wiemy, w każdym punkcie krzywéj 2 st. można poprowadzić jedną tylko styczną,— styczna więc, jest granicą do któréj zbliża się sieczna, podczas gdy oba punkta przecięcia nieskończenie się do siebie zbliżają.

Podobnież, w roztoczy promieni drugiego stopnia, nazwaliśmy punktem styczności w danym promieniu, taki punkt, przez który jeden tylko promień przechodzi. Jeżeli jeden z dwóch dowolnych promieni posuwa się w ten sposób że się ciągle zbliża do drugiego, to nareszcie oba promienie zleją się razem, a ich punkt przecięcia *P* stanie się punktem styczności. W każdym promieniu może być, jak wiadomo z powyższego, tylko jeden punkt styczności i jest on granicą do któréj się zbliża punkt przecięcia dwóch dowolnych promieni zbliżających się do siebie nieskończenie.

Jeżeli więc dwa wierzchołki sześciokąta wpisanego w krzywą drugiego stopnia zbliżają się do siebie nieskończenie, to ostatecznie bok łączący te dwa wierzchołki staje się styczną, nie przestając podlegać prawom pierwotnym, chociaż sześciobok zmienia się na pięciokąt.

Jeżeli w sześciokącie utworzonym przez sześć promieni jednéj roztoczy drugiego stopnia, dwa promienie nieskończenie się do siebie zbliżają, to nareszcie wierzchołek w którym się przecinały te dwa promienie, zamienia się na punkt styczności, nie przestając podlegać prawom pierwotnym, chociaż sześciobok zamienia się na pięciobok.

Jeżeli w podobny sposób zlewa się w jedno, druga i trzecia para kątów lub boków pierwotnego sześciokąta lub sześcioboku, to otrzymujemy czworokąt lub trójkąt wraz ze stycznemi lub punktami styczności przy zlaniu się kątów lub boków powstałemi.

Oczywistą więc jest rzeczą, że:

Dwie pary po sobie nienastępujących boków pięciokąta wpisanego w krzywą drugiego stopnia, przecinają się w dwóch punktach linii prostéj przechodzącéj przez punkt przecięcia, pozostałego boku ze styczną w wierzchołku jemu przeciwległym poprowadzoną.

Przekątne łączące dwie pary wierzchołków po sobie nie następujących pięcioboku utworzonego przez pięć promieni roztoczy drugiego stopnia, przecinają się w jednym punkcie przez który przechodzi prosta łącząca pozostały wierzchołek z punktem styczności boku przeciwległego.

Na zasadzie tych praw możemy rozwiązać następujące zagadnienie za pomocą wykreśleń prostolinijnych.

Mając danych pięć punktów krzywéj drugiego stopnia, wykreślić w tych punktach styczne do téj krzywéj.

Mając danych pięć promieni roztoczy drugiego stopnia, wyznaczyć w nich punkta styczności.

Dla czworokąta i trójkąta otrzymamy następujące prawa:

Boki przeciwległe czworokąta wpisanego w krzywą drugiego stopnia i styczne w wierzchołkach przeciwległych wy-

Przekątne czworoboku utworzonego przez cztery promienie roztoczy drugiego stopnia oraz proste łączące punkta stycznokreślone, przecinają się w czterech punktach jednéj prostej.

Boki trójkąta wpisanego w krzywą drugiego stopnia, spotykają się ze stycznemi, w wierzchołkach przeciwległych wykreślonemi, w trzech punktach jednéj prostéj.

ści promieni przeciwległych, spotykają się w jednym punkcie.

Proste łączące wierzchołki trójkąta utworzonego przez trzy promienie roztoczy drugiego stopnia z punktami styczności promieni przeciwległych, przecinają się w jednym punkcie.

Prawa o czworokątach możemy wyprowadzić bezpośrednio z pierwotnych wykreśleń, za pomocą których, mając danych pięć pierwiastków, otrzymaliśmy krzywą i roztocz promieni drugiego stopnia.

Uważmy bowiem naprzód w pierwszym wykreśleniu:

Aby w dwóch rzutowo zespolonych roztoczach promieni R_1 i R_2 (fig. 15.) danych przez trzy pary promieni odpowiednich, wynaleść w jednej z nich, promień odpowiedni któremukolwiek czwartemu promieniowi drugiej roztoczy, użyliśmy trzeciej roztoczy promieni R leżącéj perspektywicznie względem każdéj z dwóch pierwszych. — Roztocz tę wyznaczyliśmy w ten sposób, że przeciąwszy R_1 i R_2 dwoma prostemi u_1 i u_2, przechodzącemi przez przecięcie A jednéj pary promieni odpowiednich a_1 i a_2, otrzymaliśmy dwa zestawy proste u_1 i u_2. Ponieważ otrzymane w ten sposób zestawy proste u_1 i u_2 leżą perspektywicznie, przeto łatwo jest wynaleść roztocz R, której oba zestawy proste są przecięciami. Ponieważ proste u_1 i u_2, mogą być dowolnie przez punkt A poprowadzone, a więc możemy je poprowadzić w ten sposób, że u_1 zlewa się z a_2, u_2 zaś z a_1 (fig. 19.) W tym razie punkta a_1 b_2 i a_2 b_1 (czyli B_1 i B_2) równie jak a_1c_2 i a_2c_1 (czyli C_1 i C_2) i t. d., t. j. punkta, w których promienie odpowiednie a_1 i a_2 przecinają n a p r z e m i a n (naprzemian, znaczy: że a_1 przecina b_2 — a a_2 przecina b_1) promienie b_1 i b_2 albo c_1 i c_2 i t. d. — leżą zawsze w jednéj prostéj z punktem stałym R. Jeżeli więc poprowadzimy przez R dowolną prostą D_1 D_2, przecinającą proste a_2 i a_1 w punktach D_1 i D_2, to promienie R_1D_1 i R_2D_2 będą promieniami odpowiedniemi. Jeżeli D_1 upada w R_2, to punkt D_2 upada w Q_2, promień zatem R_2D_2 upada na R_2R czyli q_2. Ponieważ promień q_2 odpowiada promieniowi q_1 czyli R_1R_2, a więc jest stycznym do krzywéj w punkcie R_2, Podobnież RR_1 czyli p_1 jest styczną w punkcie R_1. A więc R leży na przecięciu stycznych w R_1 i R_2 t. j. tych promieni roztoczy tworzących krzywą, które odpowiadają wspólnemu promieniowi R_1R_2. Oczywiście więc otrzymaliśmy ten sam punkt R gdybyśmy za tła zestawów u_1 i u_2 obrali którekolwiek inne dwa promienie odpowiednie, (b_1 i b_2, lub c_1 i c_2). A więc: Każda prosta łącząca punkta, w których się przecinają naprzemian promienie dwóch par odpowiednich promieni n. p. b i b_1, c i c_1, przechodzi przez R.

Podobneż uwagi możemy poczynić nad wykresem odnoszącym się do roztoczy promieni drugiego stopnia:

Aby w zestawach prostych u_1 i u_2 danych przez trzy pary punktów odpowiednich, do każdego czwartego punktu jednego z nich wyznaczyć odpowiedni mu czwarty punkt w drugim, wyznaczyliśmy trzeci zestaw prosty u, leżący perspektywicznie względem każdego z nich, — a to w ten sposób, że obrawszy na prostéj łączącéj dwa punkta odpowiednie danych zestawów, środki R_1 i R_2 (fig. 16.) dwóch roztoczy rzucających te zestawy, otrzymaliśmy dwie roztocze mające promień R_1R_2 odpowiednio wspólny (perspektywiczne), a więc łatwo wyznaczyć zestaw u, którego są rzutniami i w którym przecinają się proste łączące punkta odpowiednie A_1 i A_2, B_1 i B_2, C_1 i C_2 i t. d. — Ponieważ środki R_1 i R_2 mogą być dowolnie obrane, przeto obierzmy je w punktach A_1 i A_2 (fig. 20.), wyznaczmy zestaw u i promień D_1 D_2. — Jeżeli zwrócimy uwagę, jak punkta odpowiednie P, P_1 i P_2 posuwają się w zestawach u, u_1 i u_2, to łatwo spostrzeżemy, że przecięcia prostéj u z u_1 i u_2 odpowiadają wspólnemu punktowi prostych u_1 i u_2, a więc prosta u przechodzi przez punkta styczności promieni u_1 i u_2. Tę samą prostą musielibyśmy zatem otrzymać, gdybyśmy nie A_1 i A_2 ale inne dowolne punkta odpowiednie, n. p. B_1 i B_2 obrali za środki roztoczy R_1 i R_2. Ztąd widzimy że:

Każde przecięcie dwóch promieni łączących na przemian dwie pary punktów odpowiednich zestawów u_1 i u_2, leży w prostéj u.

Tym sposobem otrzymujemy następujące prawa:

Dwa punkta przecięcia a_1 b_2 i b_1 a_2, w których się przecinają naprzemian dowolne dwie pary promieni, dwóch rzutowo zespolonych roztoczy promieni, leżą w jednéj prostéj z przecięciem tych promieni obu roztoczy, które odpowiadają ich promieniowi wspólnemu.

Dwa promienie $A_1 B_2$ i $A_2 B_1$ łączące naprzemian dowolne dwie pary punktów odpowiednich, dwóch rzutowo zespolonych zestawów prostych, przecinają się w jednym punkcie z prostą łączącą te punkta obu zestawów, które odpowiadają ich punktowi wspólnemu.

Jeżeli teraz zauważymy, że:

W krzywéj drugiego stopnia utworzonéj przez przecięcie dwóch rzutowo zespolonych roztoczy promieni R_1 i R_2 punkta R_1, $a_1 a_2$, R_2 i $b_1 b_2$ stanowią wierzchołki czworokąta wpisanego, którego bokami przeciwległemi są a_1 i b_2, b_1 i a_2, — R_1 i R_2 zaś są wierzchołkami przeciwległemi, w których poprowadzone styczne przecinają się w punkcie u,

W roztoczy drugiego stopnia, utworzonéj przez dwa rzutowo zespolone zestawy proste u_1 i u_2, promienie u_1, $A_1 A_2$, u_2 i $B_1 B_2$ stanowią boki czworokąta, którego wierzchołkami przeciwległemi są: A_1 i B_2 — A_2 i B_1, u_1 i u_2 zaś, są bokami przeciwległemi, których punkta styczności leżą w prostéj u,

to spostrzeżemy, że prawa powyższe są twierdzeniami o czworokącie w krzywéj lub w roztoczy drugiego stopnia *).

---

*) *NB.* W wykreśleniu, które nas doprowadziło do twierdzenia z lewéj strony, obrawszy za środki roztoczy punkta A i B (zamiast R_1 i R_2), możemy udowodnić, że otrzymane w tych punktach styczne, przecinają się także w jednym punkcie z prostą B_1B_2. W prostéj więc łączącéj punkta przecięcia boków prze-

Za pomocą dwóch przedostatnich praw, najłatwiéj jest wyznaczać w dwóch rzutowo zespolonych jednorodnych zestawach zasadniczych — pary odpowiednich pierwiastków — albowiem, jeżeli n. p. są dane trzy pary odpowiednich punktów, dwóch zestawów prostych u_1 i u_2, to bardzo łatwo jest wyznaczyć pomocniczy zestaw u a następnie i dowolną liczbę par odpowiednich pierwiastków.

Powyżéj udowodnione prawa o czworobokach mogą być wypowiedziane daleko ogólniej jak następuje:

Jeżeli cztery punkta K, L, M, N, krzywéj drugiego stopnia s, stanowią wierzchołki zupełnego czworokąta, a cztery styczne w tych punktach k, l, m, n, stanowią boki zupełnego czworoboku, to w każdéj z trzech prostych łączących punkta X, Y, Z, w których przecinają się boki przeciwległe czworokąta, leżą po dwa wierzchołki przeciwległe czworoboku. (fig. 21.)

Jeżeli cztery promienie k, l, m, n roztoczy drugiego stopnia S, stanowią boki zupełnego czworoboku, a ich punkta styczności K, L, M, N, stanowią wierzchołki zupełnego czworokąta, to w każdéj z trzech prostych łączących dwa wierzchołki przeciwległe czworoboku leżą po dwa z trzech punktów X, Y, Z, w których się przecinają po dwa boki przeciwległe czworokąta. (fig. 21.)

Albowiem zupełny czworokąt lub czworobok składa się z trzech niezupełnych, a do każdego z tych ostatnich stosują się powyżéj wyprowadzone prawa.

W dwóch ostatnich twierdzeniach, trójkąt XYZ, którego boki łączą wierzchołki przeciwległe czworoboku zupełnego, jest identyczny z trójkątem XYZ, w którego wierzchołkach przecinają się po dwa boki, przeciwległe zupełnego czworokąta. —

---

ciwległych, leżą dwa punkta przecięcia się stycznych, w wierzchołkach przeciwległych poprowadzonych.

Podobnież w twierdzeniu z lewej strony, dwie przekątne czworoboku zchodzą się w jednym punkcie z dwiema prostemi łączącemi punkta styczności boków przeciwległych.

Jeżeli więc dowolny czworokąt i dowolny czworobok zupełny znajdują się w powyżéj wymienionym związku, to za pomocą nich, możemy otrzymać zarówno krzywą drugiego stopnia *s* styczną do k, l, m, n, w punktach K, L, M, N, jak i roztocz promieni drugiego stopnia *S*, która w promieniach *k*, *l*, *m*, *n*, ma punkta styczności *K*, *L*, *M*, *N*. Albowiem każdy nowy punkt krzywéj *s* i styczna w nim poprowadzona dadzą nowy punkt styczności i promień roztoczy *S*, albo odwrotnie, każdy nowy promień roztoczy *S* i jego punkt styczności, dadzą styczną i jeden punkt krzywej *s*. Krzywa więc drugiego stopnia przechodząca przez trzy punkta styczności *K*, *L*, *M*, roztoczy drugiego stopnia i mająca za styczne dwa promienie *k* i *l* w punktach *K* i *L* przechodzi przez każdy czwarty punkt styczności *N* roztoczy i ma za styczną w tym punkcie promień roztoczy *n*.

Odwrotnie, roztocz promieni drugiego stopnia zawierająca trzy styczne krzywéj drugiego stopnia i dwa jéj punkta za punkta styczności, zawiera także każdą czwartą styczną téj krzywéj.

Tym sposobem przychodzimy do następujących praw:

Zbiór stycznych do krzywéj drugiego stopnia, tworzy roztocz promieni drugiego stopnia, otaczającą tę krzywą.	Zbiór punktów styczności, roztoczy promieni drugiego stopnia, tworzy krzywą drugiego stopnia, otoczoną przez tę roztocz.

Tych samych praw dowieść możemy w inny jeszcze sposób, poznając przytem nowe własności krzywych drugiego stopnia:

Przypuśćmy, że w powyższym czworokącie wpisanym w krzywą drugiego stopnia, wierzchołek *K* posuwa się wraz z odpowiednią mu styczną *k*, po krzywéj, — a pozostałe wierzchołki *L*, *M*, *N*, wraz ze stycznemi *l*, *m*, *n*, pozostają w miejscu. Przecięcia *A* i *E* stycznej *k* ze stycznemi *l* i *n* posuwają się w tych ostatnich tworząc dwa zestawy proste *l* i n. — Te zestawy są rzutowo zespolone gdyż promienie *EB* i *AD*, jako przekątne czworoboku $k\,l\,m\,n$, przecinają zawsze w ruchomym punkcie Y, prostéj LN, opisując około punktów B i D dwie perspektywiczne roztocze promieni, których zestawy proste n i l są przecięciami. A że styczna k w ciągu całego ruchu, łączy zawsze dwa punkta odpowiednie tych zestawów prostych, a więc tworzy roztocz promieni drugiego stopnia. W ten sposób dowiedliśmy twierdzenia z lewéj strony i w podobny zupełnie sposób moglibyśmy dowieść twierdzenia z prawéj strony.

Musimy jeszcze zauważyć, że podczas ruchu punktu K, prosta $M\,K$ przechodzi zawsze przez ruchomy punkt Y opisując na około punktu M roztocz promieni, która leży perspektywicznie względem roztoczy utworzonéj ruchem prostéj EB (przechodzącéj także przez ruchomy punkt Y), na około punktu B; — a więc ta roztocz M jest rzutowo zespoloną z zestawem prostym n utworzonym przez przesuwanie się punktu E. Jeżeli więc K przebiega wszystkie punkta krzywéj, to otrzymamy prawo:

Jeżeli dany jest dowolny punkt stały M krzywéj drugiego stopnia i dowolna jej styczna stała n, i jeżeli każdemu promieniowi roztoczy M, rzucającemu dowolny punkt K należący do krzywéj, przyznamy za odpowiedni ten punkt stycznéj n w którym ją przecina styczna k w punkcie K, — to roztocz M i zestaw n będą rzutowo zespolone.

Z tąd wynika:

Styczne w czterech punktach harmonicznych krzywéj drugiego stopnia poprowadzone, przecinają się z każdą piątą styczną w czterech punktach harmonicznych (czyli, stanowią 4 promienie harm. roztoczy drugiego stopnia).

Owe bowiem 4 punkta przecięcia z piątą styczną z jednéj strony, a 4 prom. rzucające punkta styczności z dowolnego punktu krzywéj — z drugiej strony, należą do dwóch rzutowo zespolonych zestawów; a ponieważ te ostatnie są czterema prom. harmonicznemi, więc owe 4 punkta przecięcia, muszą być również czterema punktami harmonicznemi.

Z tego powodu, cztery styczne powyższe, nazywamy stycznemi harmonicznemi.

Niektóre z dawniéj wyprowadzonych praw możemy teraz wyrazić nieco odmiennie, a mianowicie:

Zestaw stycznych otaczających krzywą drugiego stopnia, przecina się z dwoma dowolnemi jej stycznemi, w dwóch rzutowo zespolonych zestawach prostych.

Prawo Brianchon'a. Główne przekątne sześciokąta opisanego na krzywéj drugiego stopnia, przecinają się w jednym punkcie.

Powyżéj wprowadzone prawa, odnoszące się do zestawów płaskich, możemy przenieść na rzutnie tych zestawów:

Zbiór płaszczyzn, stycznych do powierzchni stożkowéj drugiego stopnia, tworzy roztocz płaszczyzn drugiego stopnia.	Zbiór promieni styczności, roztoczy płaszczyzn drugiego stopnia, tworzy powierzchnię stożkową drugiego stopnia.
Wszystkie promienie powierzchni stożkowéj są rzucane z dowolnych dwóch jéj promieni przez dwie rzutowo zespolone roztocze płaszczyzn.	Wszystkie płaszczyzny roztoczy płaszczyzn drugiego stopnia przecinają się z dowolnemi dwiema jéj płaszczyznami w dwóch rzutowo zespolonych roztoczach promieni.
Cztery promienie powierzchni stożkowéj drugiego stopnia nazywają się harmonicznemi, jeżeli z dowolnego promienia téj powierzchni a zatém z każdego promienia powierzchni stożkowéj, są rzucane przez cztery harmoniczne płaszczyzny.	Cztery płaszczyzny styczne do powierzchni stożkowéj drugiego stopnia nazywają się harmonicznemi, jeżeli z dowolną piątą płaszczyzną styczną, a zatém z każdą płaszczyzną do niej styczną, przecinają się w czterech promieniach harmonicznych.
Ściany przeciwległe sześciogranu wpisanego w powierz-	Główne przekątne sześcianu wiązkowego, opisanego na po-

chnię stożkową drugiego stopnia, przecinają się w trzech promieniach jednej płaszczyzny.	wierzchni stożkowéj drugiego stopnia, przecinają się w jednéj prostéj.

Różne rodzaje krzywych i powierzchni stożkowych drugiego stopnia.

Wiemy, że krzywa drugiego stopnia może mieć z dowolną prostą najwięcéj dwa punkta wspólne. Z prostą nieskończenie odległą może mieć taka krzywa jeden punkt wspólny (w którym się z nią styka), albo dwa punkta wspólne (w których się z nią przecina), albo nareszcie, może nie mieć żadnego punktu wspólnego, czyli że wszystkie jej punkta i styczne są rzeczywistemi punktami i stycznemi. W pierwszym razie, dwie odnogi krzywéj idą w nieskończoność, dążąc do P∞ w którym krzywa się styka z Pr∞ i nazywa się p a r a b o l ą. — W drugim razie krzywa składa się z dwóch połów, z których każda ma dwie odnogi dążące do dwóch P∞ w których się przecina z Pr∞. Obie połowy krzywéj łączą się w tych dwóch P∞ tak że krzywa ta jest także liniją zamkniętą i nazywa się h y p e r b o l ą Ponieważ (jedyna w płaszczyźnie krzywéj) Pr∞, przecina hyperbolę, więc wszystkie styczne są prostemi rzeczywistemi, a więc i styczne w dwóch w dwóch P∞ są także rzeczywistemi. Te styczne, do których hyperbola ciągle się zbliża i w PP∞ dotyka, nazywają się a s y m p t o t a m i.

W trzecim razie nakoniec, linija krzywa leży cała w skończonéj odległości i nazywa się e l i p s ą.

Te same trzy rodzaje krzywych, możemy otrzymać przez przecięcie powierzchni stożkowéj drugiego stopnia której środek nie jest P∞, płaszczyzną nie przechodzącą przez jej środek.

Płaszczyzna α, przechodząca przez środek powierzchni stożkowéj ma z nią albo tylko ten jeden punkt wspólny, albo styka się z nią w promieniu s, albo przecina ją w dwóch promieniach p i q. Każda płaszczyzna α_1, równoległa do płaszczyzny α, przecina w pierwszym razie wszystkie promienie powierzchni stożkowéj w punktach rzeczywistych — a powierzchnię stożkową w elipsie. — W drugim razie krzywa jest parabolą, ponieważ promień s przecina płaszczyznę α_1, w P∞, a Pr∞ w której się przecinają α i α_1, jest nieskończenie odległą styczną paraboli. — W trzecim razie nakoniec, krzywa jest hyperbolą; promienie p i q przecinają się z nią w punktach nieskończenie odległych. — Płaszczyzny styczne do powierzchni stożkowej w promieniach p i q przecinają płaszczyznę α_1, w asymptotach hyperboli, a hyperbola składa się z dwóch połów, bo obie połowy powierzchni stożkowéj przecinają się z płaszczyzną α_1.

Dwie rzutowo zespolone roztocze promieni leżące w jednéj płaszczyźnie tworzą elipsę, parabolę albo hyperbolę stosownie do tego, czy żadna para promieni odpowiednich nie jest równoległą, albo jedna para, albo nakoniec dwie pary są równoległe. Jeżeli te roztocze przesuniemy w płaszczyznie w ten sposób, że kierunek ich promieni nie zmieni się a środki ich zleją zię z sobą, to albo żadna para promieni albo jedna, albo dwie pary zlewają się w jeden lub dwa promienie, czyli, że roztocze te niemają żadnego, albo mają jeden lub dwa promienie odpowiednio wspólne.

Ostatni wypadek następuje mianowicie wtenczas, jeżeli roztocze są różnotoczne. Jeżeli roztocze są jednotoczne, to jak wiemy, każdy z tych przypadków jest możliwy; zwykle jednak następuje pierwszy lub trzeci, co zwykle daje się rozpoznać według tego co wyżéj (str. 31) o tém powiedziano. Roztocze odpowiadające d r u g i e m u przypadkowi (wydające parabolę), można otrzymać wykreśliwszy dwie roztocze współśrodkowe mające jeden promień odpowiednio wspólny (str. 25) i rozsunąwszy je bez zmiany kierunku promieni. — Inny sposób, przy pomocy m i a r y, podamy w zamieszczonych poniżéj zastosowaniach geometrycznych.

Ponieważ, jak się późniéj przekonamy, mając danych pięć punktów krzywéj 2 st., możemy znaleźć jej punkta wspólne z dowolną prostą, przeto stosując to do prostéj nieskończenie odległej, możemy oznaczyć rodzaj krzywej, znajdując, że dana przez 5 punktów krzywa ma jeden, dwa, lub też niema żadnego punktu wspólnego z prostą nieskończenie odległą.

Trudniejszem jest to rozpoznanie, jeżeli krzywa daną jest przez pięć stycznych, albo przez dwa rzutowo zespolone zestawy proste. Jednakże możemy łatwo dostrzedz, że tylko wtenczas dwa rzutowo zespolone zestawy proste jednotoczne wydają roztocz otaczającą parabolę, jeżeli ich PP∞ odpowiadają sobie, gdyż tylko wtedy Pr∞ jest styczną krzywéj otoczonéj przez roztocz.

Dwa rzutowo zespolone zestawy proste, których PP∞ są odpowiedniemi, nazywają się rzutowo podobne. Jeżeli dwa takie zestawy przesuniemy w ten sposób, aby którekolwiek dwa punkta odpowiednie A i A_1 zlały się z sobą, czyli gdy je uczyniemy perspektywicznie podobnemi, to przedstawią się one jako przecięcie jednej roztoczy promieni równoległych, albowiem środek roztoczy rzucającéj te zestawy, leżący w promieniu nieskończenie odległym, musi być P∞.

Możemy teraz łatwo wyprowadzić następujące wnioski:

I. Jeżeli wierzchołki A, A_1, A_2, (fig. 22.) dowolnego trójkąta (zmiennego), posuwają się po trzech prostych u, u_1, u_2, leżących w jego płaszczyźnie, przyczém dwa boki a_1 i a_2 nie zmieniają swego kierunku, to trzeci bok a, opisuje roztocz promieni równoległych albo roztocz otaczającą parabolę. Albowiem za pomocą dwóch roztoczy promieni równoległych utworzonych przez boki a_1 i a_2, powstają w prostych u_2 i u_1 dwa zestawy proste perspektywiczne podobnie względem zestawu prostego u, a więc rzutowo podobne względem siebie. (Co do wspomnianéj roztoczy, promieni równoległych obacz str. 31).

II. Jeżeli zestaw prosty u i roztocz promieni R leżą w jednéj płaszczyźnie i są rzutowo zespolone, i przez każdy punkt zestawu prostego przeprowadzimy równoległą do promienia odpowiedniego temu punktowi, to te równoległe przecinają się w jednym punkcie albo otaczają parabolę. Albowiem jeżeli roztocz R przetniemy przez prostą nieskończenie odległą, to otrzymamy zestaw prosty $u\infty$ rzutowo zespolony z zestawem u. Jeżeli zestaw u_∞ nie leży perspektywicznie względem u to tworzy z nim roztocz promieni drugiego stopnia zawierającą także promień u_∞ a więc otaczającą parabolę; perspektywicznie zaś oczywiście leży u_∞ względem u, jeżeli promień roztoczy R, odpowiedni punktowi nieskończenie odległemu zestawu u, jest do u równoległy.

Powierzchnie stożkowe, których środek jest P_∞ zowią się powierzchniami walcowemi.

Rzutnią krzywej drugiego stopnia z P_∞ jest powierzchnia walcowa drugiego stopnia (szczególny rodzaj powierzchni stożkowéj). Dwie rzutowo zespolone roztocze płaszczyzn, których osie są równoległe, przecinają się w roztoczy promieni równoległych albo w powierzchni walcowej drugiego stopnia. Odróżniamy powierzchnie walcowe eliptyczne, paraboliczne i hyperboliczne, stósownie do tego, jakiego rodzaju krzywą daje przecięcie powierzchni z płaszczyzną nie przechodzącą przez jej nieskończenie odległy środek — i czy powierzchnia walcowa niema żadnego lub ma jeden albo dwa promienie nieskończenie odległe.

Zastosowania geometryczne.

Widzieliśmy, że przecięcie dwóch różnotocznych roztoczy promieni daje hyperbolę. Jednotoczne roztocze mogą wydać parabolę, elipsę, albo koło, które w czystéj składni nie może być odróżnione od elipsy, ponieważ jego określenie zawiera pojęcie miary. Jeżeli jednak przejdziemy na pole geometryi, to łatwo spostrzeżemy, że dwie roztocze promieni R_1 i R_2 wtedy tylko wydają koło, jeżeli ich promienie odpowiednie przecinają się pod jednakowym kątem, gdyż ramiona kąta utworzonego przez każde dwa promienie odpowiednie, przechodzą przez stałe dwa punkta R_1 i R_2, które jak wiemy należą do koła, a wierzchołek jest także punktem koła, a więc jest to kąt wpisany w koło i obejmujący stały łuk koła między punktami R_1 i R_2 (trzeba tu zważać na kąty i łuki spełniające się).

Dwie takie rzutowo zespolone roztocze promieni możemy otrzymać w ten sposób, że wykreśliwszy dwie zupełnie jednakowe roztocze, t. j., którychby promienie odpowiednie miały jednakowy kierunek, czyli dwie roztocze rzucające prostą nieskończenie odległą, wykręcimy jedną z tych roztoczy o pewien kąt.

Wyznaczanie dowolnéj liczby punktów krzywych drugiego stopnia za pomocą składni wykreślnéj daje się doskonale zastosować w praktyce przy wykreśleniu sklepień i łuków na drogach żelaznych (obacz: Romberg's Zeitschrift für praktische Baukunst" 1874, 2 i 3 zeszyt).

Niech R_1 i R_2 (fig. 23) będą punktami podpory a punkt A szczytem sklepienia. Obierzmy R_1 i R_2 za środki roztoczy, których przecięciem ma być krzywa sklepienia. — a_2 i a_1 są promienie odpowiednie które obieramy za tła dwóch zestawów prostych perspektywicznych u_1 i u_2 Te dwa zestawy perspektywiczne mają dopiero jeden punkt odpowiednio wspólny A wyznaczony. Środek zatem roztoczy R, któréj oba zestawy mają być przecięciami moglibyśmy obrać dowolnie, i prowadząc ilekolwiek promieni z tego punktu, wyznaczać pary punktów odpowiednich B_1, B_2 — C_1, C_2, i t. d a następnie prowadząc przez te punkta promienie odpowiednie b_1, b_2 — c_1, c_2, i t. d. otrzymalibyśmy w ich przecięciu punkta krzywéj drugiego stopnia przechodzącéj jak wiadomo przez R_1, R_2 i A, przyczem proste RR_1 i RR_2 są jak wiemy stycznemi w punktach R_1 i R_2. Jeżeli zaś te styczne naprzód już są dane, punkt R nie może być dowolnie obrany, gdyż styczne go wyznaczają. Kierunek tych stycznych albo jest dany, a wtedy linija sklepienia wyznaczona przez trzy punkta i dwie styczne będzie zwykle elipsą, a tylko w szczególnych przypadkach parabolą lub kołem, albo też postawiony jest warunek, że linija sklepienia ma być parabolą lub kołem a wtedy te styczne albo bezpośrednio punkt R, trzeba odpowiednio wyznaczyć.

Przyjmując, że sklepienie ma być symetryczne i na oporach równej wysokości oparte, wiemy, że styczne w R_1 i R_2 przetną się w linii AS, prostopadłéj ze środka R_1 R_2 wyprowadzonej. Jeżeli sklepienie ma być paraboliczne, to A będzie wierzchołkiem paraboli, a styczne w R_1 i R_2 przetną prostą AS w odległości $AR = AS$.

Jeżeli sklepienie ma być łukiem koła, to wtedy najłatwiéj wyznaczyć punkt R w ten sposób: Poprowadźmy przez R_1 i R_2 (fig. 24) proste e_1 i e_2, prostopadłe do a_1 i a_2. Oczywistą jest rzeczą, że proste e_1 i e_2 przetną się w czwartym punkcie koła przechodzącego przez R_1 i R_2 i to w punkcie diametralnym względem A. A zatem proste e_1 i e_2, będące promieniami odpowiedniemi roztoczy R_1 i R_2 przechodzą przez punkta odpowiednie E_1 i E_2 zestawów u_1 i u_2. W prostej E_1 i E_2 musi leżeć środek R, a ponieważ ma on leżeć i w prostéj AS, a więc leży w punkcie ich przecięcia. Jeżeli dany jest środek koła O, to łatwiéj można wyznaczyć punkt R prowadząc w punktach R_1 i R_2 styczne prostopadłe do promieni R_1 O i R_2 O. Nie mogąc tu dłużéj zajmować się tym przedmiotem, odsyłam czytelnika po bliższe szczegóły do powyżéj wzmiankowanego źródła.

Bieguny i (linije) biegunowe.

Wiemy, że jeżeli dowolny czworokąt niezupełny jest wpisany w krzywą 2go stopnia, to przecięcia boków jego przeciwległych i przecięcia stycznych w wierzchołkach przeciwległych poprowadzonych, leżą w jednéj prostéj.

Jeżeli więc obierzemy w płaszczyźnie, dowolną krzywą 2go stopnia i dowolny punkt *U* (fig. 25 i 26), nie leżący na krzywej, — poprowadzimy przez *U* dwie sieczne AC i BD, a przyjąwszy je za przekątne, wykreślimy czworokąt niezupełny ABCD to przecięcia boków AB i CD, AD i CB, i stycznych (w wierzchołkach przeciwległych) *a* i *c* oraz *b* i *d*, muszą leżyć w jednej prostej *u*. — Łatwo zauważyć, że punkta przecięcia tej prostéj z siecznemi AC i BD, t. j. punkta X i Z, są harmonicznie przedzielone od punktu U, przez punkta krzywéj, a mianowicie punkt X przez punkta A i C, punkt zaś Z, przez punkta B i D, gdyż n. p. w punktach A i C, przecinają się po dwa boki przeciwległe czworokąta PBQD, — a przez punkta U i X przechodzą jego przekątne. Widoczną jest więc rzeczą, że prostą *u* możemy wyznaczyć zapomocą jednéj tylko siecznéj, np. AC, — a to: wyznaczywszy w téj siecznéj punkt X, harmonicznie przedzielony od punktu U przez punkta A i C — i poprowadziwszy styczne *a* i *c* przecinające się w punkcie T. Punkta X i T wyznaczą stale prostą *u*.

Jakkolwiek więc poprowadzilibyśmy drugą sieczną BD, zawsze punkt przecięcia stycznych *b* i *d*, oraz punkt Z (czwarty harmoniczny względem D, U, B) muszą się znaleźć w tej prostéj. W tejże prostéj muszą się także spotykać boki przeciwległe niezupełnego czworokąta ABCD.

W ten sposób, za pomocą jakiejkolwiek lub ilukolwiek dowolnych siecznych stale wyznaczona prosta *u* nazywa się biegunową punktu *U* (względem krzywéj danej); punkt *U* zaś, nazywa się biegunem prostéj *u*.

Mając dane w płaszczyźnie: krzywą *k* i dowolną prostą *u*, możemy wyznaczyć jej biegun U. W tym celu, poprowadźmy z dowolnych dwóch jej punktów, dwie pary stycznych do *k*, n. p. z punktów T i R, (fig. 25 i 26) styczne a i e, oraz b i d. Według prawa o czworobokach opisanych na krzywéj drugiego stopnia, przekątne czworoboku a b c d, oraz proste AC i BD, łączące punkta styczności boków odpowiednich, przecinają się w jednym punkcie *U*. Łatwo zauważyć, że prosta RU jest harmonicznie przedzielona od prostej *u* przez styczne *b* i *d*, a prosta TU przez styczne *a* i *c*, gdyż punkt U jest harmonicznie przedzielony od X przez punkta A i C, a od Z przez punkta B i D.

Punkt *U* zatém, możemy stale wyznaczyć za pomocą jednego tylko punktu prostéj *u*, — a za pomocą każdego innego punktu tej prostéj (z którego możemy poprowadzić dwie styczne do krzywej *k*) musimy dójść tą samą drogą do tego samego punktu U.

Jeżeli biegunowa *u* przecina krzywą *k*, to proste przechodzące przez biegun U i przez punkta przecięcia, są styczne do krzywéj. Gdyż wszelka sieczna BD przecina krzywą *k* w dwóch punktach B i D, harmonicznie przedzielonych przez punkta U i X, a gdy sieczna zbliża się do stycznéj, punkta B, X, D, zbliżają się do siebie coraz bardziéj, aż nareszcie zlewają się w jeden punkt — styczności. To może nam posłużyć do wyznaczania biegunów i biegunowych.

Powyżéj dowiedzione prawa dadza się streścić w następujących dwóch twierdzeniach:

Jeżeli przez dowolny punkt U, w płaszczyźnie danéj krzywéj 2go stop. ale nie na krzywéj leżący, poprowadzimy ilekolwiek dowolnych siecznych i wyznaczymy:

1) przecięcia boków przeciwległych w każdym czworokącie wpisanym w krzywą, którego przekątnemi są którekolwiek dwie sieczne,

Jeżeli z ilukolwiek dowolnych punktów dowolnej prostej *u*, leżącéj w płaszczyźnie danej krzywéj 2go stop. ale nie stycznéj, poprowadzimy z każdego po dwie styczne i wyznaczymy:

1) przekątne w każdym czworoboku utworzonym przez dowolne dwie pary stycznych stanowiących boki przeciwległe,

2) na każdéj siecznéj punkt harmonicznie przedzielony od U, przez przecięcia siecznéj z krzywą,

3) punkta przecięcia stycznych, poprowadzonych przez punkta wyznaczone w krzywéj przez każdą sieczną,

4) punkta styczności, stycznych z punktu U poprowadzonych (jeżeli te są możliwe), — to wszystkie te punkta leżą w jednéj prostéj *u*, która się nazywa biegunową punktu *U* (względem tej danej krzywej).

2) dla każdego punktu prostéj *u*, przez który poprowadzono dwie styczne, prostą harmonicznie przedzieloną przez te styczne od prostej *u*,

3) proste łączące punkta styczności każdéj pary stycznych,

4) styczne w punktach przecięcia się prostéj *u* z krzywą (jeżeli *u* przecina krzywą), — to wszystkie te proste przechodzą przez jeden punkt *U*, który nazywa się biegunem prostéj *u* (względem danej krzywej).

Ponieważ krzywe 2go stopnia są linijami zamkniętemi, a zatem każda z nich dzieli płaszczyznę w któréj leży, na dwie części: jedną wewnątrz, drugą zewnątrz krzywéj. Każdy punkt który nie leży n a k r z y w é j, musi leżeć z e w n ą t r z lub w e w n ą t r z krzywéj. Punkta leżące zewnątrz, są od punktów leżących wewnątrz krzywéj, przez krzywą p r z e d z i e l o n e. Jeżeli prosta łącząca dwa punkta A i B przecina się z krzywą w dwóch punktach harmonicznie przez dwa pierwsze przedzielonych, to mówimy przez skrócenie, że punkta A i B są przez krzywą harmonicznie przedzielone. Tak samo, jeżeli się mówi, że pewien punkt A, jest przez krzywą harmonicznie przedzielony od pewnéj prostéj, — to znaczy, że ta prosta przechodzi przez wszystkie punkta harmonicznie przedzielone przez krzywą od punktu A — (czyli że jest biegunową punktu A). —

Jeżeli biegun leży wewnątrz krzywéj, to jego biegunowa leży zewnątrz krzywéj, i każdy jej punkt jest od bieguna harmonicznie przedzielony przez krzywą. Jeżeli zaś biegun leży zewnątrz krzywéj, to jego biegunowa krzywą przecina, a więc w tym razie tylko część tej biegunowej, zawarta w krzywej, jest przez krzywą, od bieguna harmonicznie przedzielona. Jeżeli biegun leży na k r z y w é j, to jego biegunowa, jak to łatwo spostrzedz, będzie styczną w tym punkcie do krzywéj; a więc przechodzi przez swój biegun.

Teoryja biegunowości opiera się głównie na następującém prawie:

B i e g u n o w e w s z y s t k i c h p u n k t ó w j e d n é j p r o s t é j u, p r z e c h o d z ą p r z e z b i e g u n U t e j ż e p r o s t é j.

Albowiem, każdy punkt tej prostéj, leżący wewnątrz krzywéj, jest przez krzywą harmonicznie przedzielony od U, a więc jego biegunowa musi przechodzić przez U. Biegunowa każdego punktu leżącego zewnątrz krzywéj, jest prostą łączącą punkta styczności, stycznych z tego punktu poprowadzonych — a więc musi przechodzić przez U; nakoniec jeżeli punkt leży na krzywéj, to jego biegunowa jest styczną w tym punkcie i przechodzi również przez U.

B i e g u n y w s z y s t k i c h p r o m i e n i j e d n e g o p u n k t u U l e ż ą w b i e g u n o w é j u t e g o ż p u n k t u.

Albowiem, jeżeli dany promień przecina krzywą, to jego biegun leży na przecięciu stycznych w punktach przecięcia poprowadzonych, a więc w prostéj u; jeżeli dany promień krzywéj nie przecina, to jego biegun wewnątrz krzywéj leżący, musi być harmonicznie przedzielony przez krzywą, od każdego punktu tegoż promienia a więc i od U, a zatem musi leżeć w prostéj u zawierającej wszystkie punkta od U przez krzywą harmonicznie przedzielone. Jeżeli nakoniec promień jest styczny do krzywéj, to jego biegun jest punktem styczności, który musi leżéć w prostéj u.

(Biegun prostéj, przechodzącéj przez dwa punkta dane, leży na przecięciu biegunowych tych punktów, a biegunowa p. przecięcia dwóch prostych danych, jest prostą łączącą bieguny prostych danych).

Za pomocą teoryi biegunowości możemy już z zupełną dokładnością stosować prawo odwrotności, szczególniéj dla twierdzeń odnoszących się do zestawów płaskich, gdyż za pomocą dowolnéj krzywéj 2go stopnia możemy każdy zestaw płaski zamienić na inny, biegunowy względem pierwszego, w którym zamiast punktów występują proste, zamiast prostych — punkta etc. a własności tego nowego zestawu dadzą się wyprowadzić z własności pierwszego. Tak n. p. Brianchon wyprowadził swoje prawo z prawa Pascal'a, uważając że: styczne w wierzchołkach sześciokąta wpisanego w krzywą 2go stop., (stanowiące boki 6cio-kąta opisanego na krzywéj), są biegunowemi tychże wierzchołków: punkta przecięcia tych stycznych, są biegunami odpowiednich boków; — główne przekątne tego 6cio-kąta są biegunowemi punktów przecięcia boków przeciwległych 6cio-kąta wpisanego; a ponieważ podług prawa Pascal'a, przecięcia tych boków przeciwległych leżą w jednéj prostéj *u*, przeto przekątne 6cio-kąta opisanego, jako ich biegunowe, muszą się przecinać w jednym punkcie, a mianowicie w biegunie prostéj *u*.

Dowiedliśmy powyżej, że biegunowe wszystkich punktów jednéj prostéj *u* przechodzą przez jéj biegun *U*. A zatém zestawowi prostemu *u*, odpowiada roztocz promieni *U*. Łatwo dowieść, że te dwa zestawy są względem siebie rzutowemi, gdy każdemu punktowi odpowiada jego biegunowa. Jeżeli bowiem cztery punkta: A, B, C, D, tej prostej, są czterema p nktami harmonicznemi to ich biegunowe *a*, *b*, *c*, *d*, muszą być 4ma promieniami harmonicznemi, gdyż wykreśliwszy czworokąt KLMN, którego dwa boki przeciwległe przechodzą przez A, dwa drugie przez C, jedna przekątna przez B, a druga przez D, to temu czworokątowi odpowiada czworobok k l m n, którego dwa wierzchołki przeciwległe upadną w *a*, dwa drugie w *c*, jedno przecięcie boków przeciwległych w *b*, a drugie w *d*, a więc te cztery promienie są harmoniczne, a to na zasadzie dowiedzionego wyżej prawa, że proste łączące po dwa wierzchołki przeciwległe czworoboku, są harmonicznie przedzielone przez przecięcia się boków przeciwległych czworoboku (czyli przez 5ty i 6ty wierzchołek czworoboku zupełnego).

Dowiedliśmy więc, że:

Jeżeli dowolny punkt *P* opisuje zestaw prosty *u*, to jego biegunowa *p* opisuje roztocz promieni U, rzutową względem *u*.

To prawo, określa bliżej zależność zestawów biegunowych. Z tegoż prawa wyprowadzamy następujące:

Jeżeli dane są w płaszczyźnie, dwie krzywe 2go stop. — i wyznaczymy dla każdego punktu jednej z nich, biegunową względem drugiej, to wszystkie te biegunowe otaczają trzecią krzywą 2go stop. (stanowią roztocz 2go stop.)

Gdyż jeżeli wyobrazimy sobie pierwszą krzywą, jako utworzoną przez dwie rzutowo zespolone roztocze promieni R_1 i R_2, to tym roztoczom, odpowiadają w zestawie biegunowym, dwa rzutowo zespolone zestawy proste r_1 i r_2, a punktom krzywéj, czyli punktom przecięcia się promieni odpowiednich, roztoczy R_1 i R_2, odpowiadają promienie łączące punkta odpowiednie zestawów r_1 i r_2, które jak wiemy stanowią roztocz 2go stop.

W każdéj płaszczyźnie, za pomocą danéj krzywej 2go st. możemy dla każdego punktu wyznaczyć odpowiednią mu biegunową a dla każdéj prostéj odpowiedni jej biegun.

Tu wprowadzimy następujące określenie:

Dwa punkta jednéj płaszczyzny nazywają się sprzężonemi, jeżeli jeden leży w biegunowéj drugiego.

Dwie proste nazywają się sprzężonemi, jeżeli jedna przechodzi przez biegun drugiej.

Dowolny więc punkt jest sprzężonym z każdym punktem jego biegunowej, — a dowolna prosta jest sprzężoną z każdą prostą przechodzącą przez jej biegun.

Każdy punkt krzywéj, jest sam z sobą sprężonym, gdyż leży na swojej biegunowéj — a każda styczna jest sama z sobą sprzężoną, gdyż przechodzi przez swój biegun.

Jeżeli prosta łącząca dwa punkta sprzężone: A i B, przecina krzywą, to punkta prze-

Jeżeli z punktu przecięcia dwóch prostych sprzężonych: *a* i *b*, można poprowadzić dwie cięcia są harmonicznie przedzielone przez A i B.

Gdyż biegunowa punktu A przechodzi przez B i zawiera wszystkie punkta, od A przez krzywą harmonicznie przedzielone; a wiec i punkt B leżący w biegunowej jest harmonicznie przedzielony.

styczne do krzywéj, to te są harmonicznie przedzielone przez *a* i *b*.

Gdyż biegun prostej *a* leży na *b* i przez niego przechodzą wszystkie proste, od *b* przez dwie styczne krzywéj, harmonicznie przedzielone; a więc i prosta *b*, przechodząca przez biegun, jest harmonicznie przedzielona.

Z określenia prostych i punktów sprzężonych wypływa:

Jeżeli każdy z dwóch punktów A i B jest sprzężonym z trzecim C, to prosta AB jest biegunową punktu C, — gdyż ta biegunowa musi przechodzić przez A i przez B.

Jeżeli każda z dwóch prostych *a* i *b* jest sprzężoną z trzecią *c*, to ich punkt przecięcia *ab*, jest biegunem prostej *c*, — gdyż ten biegun musi leżeć na *a* i na *b*.

Z pierwszego ogólnego twierdzenia określającego własności biegunów i biegunowych wypływa:

Jeżeli dowolny czworokąt zupełny, wpisanym jest w krzywą 2go stop. to z trzech punktów w których się przecinają boki przeciwległe, każde dwa są z sobą sprzężone.

Jeżeli dowolny czworobok zupełny, jest opisanym na krzywej 2go stop., to z trzech prostych łączących wierzchołki przeciwległe, każde dwie są z sobą sprzężone.

Jeżeli *u* i *w* są dwie proste leżące w płaszczyźnie danéj krzywéj, nie sprzężone, a zespolone z sobą w ten sposób, że każdemu punktowi P, prostéj *u*, ma odpowiadać w prostéj *w* punkt P_1, z nim sprzężony, to utworzone przez to dwa zestawy proste *u* i *w* są zespolone rzutowo. Albowiem zestaw *w* jest przecięciem prostej *w* z roztoczą promieni *U*, utworzoną przez wszystkie biegunowe punktów zestawu *u*, i z tym zestawem rzutowo zespolonej (ob. wyżéj). Wszystkie promienie zatem, łączące punkta odpowiednie zestawów *u* i *w*, należą do jednéj roztoczy, 1go albo 2go stop., wedle tego, czy punkt *uw* jest odpowiedniowspólny lub nie, t. j. czy jest sam z sobą sprzężonym (leży na danéj krzywéj) lub nie.

Ponieważ każdy punkt P jest sprzężony z punktami P_1 i U, a więc prosta P_1 U jest biegunową punktu P, a prosta P_1P, jest sprzężoną z P_1U.

Powyższą zatém roztocz promieni, 1go lub 2go stop. możemy otrzymać prowadząc przez każdy punkt P_1, prostą sprzężoną z P_1 U. To samo można wyrazić w inny jeszcze sposób, a mianowicie: Jeżeli dowolną roztocz prom. U, przetniemy dowolną, ale nie biegunową punktu U, prostą *w*, i w każdym punkcie przecięcia, wykreślimy sprzężoną z promieniem przez ten punkt przechodzącym to wszystkie te sprzężone będą promieniami jednej roztoczy 1go lub 2go stopnia, stosownie do tego, czy biegunowa punktu U, przecina daną krzywą w tym samym punkcie co i prosta *w*, lub nie.

Jeżeli dwa punkta U i W, niesprzężone, leżące w jednéj płaszczyźnie z daną krzywą 2go stopnia, obierzemy za środki dwóch roztoczy promieni. zespolonych z sobą w ten sposób, że każdemu promieniowi p_1, roztoczy W, ma odpowiadać promień z nim sprzężony *p*, roztoczy U, to te dwie roztocze będą zespolone rzutowo. Albowiem roztocz U, jest rzutnią zestawu prostego *w*, utworzonego przez bieguny wszystkich promieni roztoczy W, i rzutowo zespolonego z tą roztoczą W. Przecięcia zatém promieni odpowiednich, roztoczy U i W, leżą w jednym zestawie prostym albo krzywéj 2go stopnia, stosownie do tego czy promień U W jest odpowiedniowspólnym czy nie, t. j., czy jest sam z sobą sprzężony (styczny do danéj krzywej) czy nie.

Ponieważ każdy promień p_1 jest sprzężonym z *p* i *w*, przeto punkt p w, jest biegunem prostej p_1, a punkt p_1 p, jest sprzężonym z punktem p w. Powyższy więc zestaw prosty lub krzywą 2go stopnia możemy otrzymać, wyznaczając w każdym promieniu p, punkt sprzężony z punktem *p w*.

To samo można wyrazić w następujący sposób: Jeżeli dowolny zestaw prosty *w*, rzucamy z dowolnego punktu *U*, (który nie jest jej biegunem) i w każdym promieniu rzucającym, wyznaczymy punkt sprzężony z punktem rzucanym, to wszystkie te punkta sprzężone utworzą zestaw prosty lub krzywą 2go st., stosownie do tego, czy biegun prostej *w* leży ze środkiem roztoczy *U*, w jednej stycznej do danej krzywej, — czy nie.

Otrzymujemy zatem następujące prawa:

Jeżeli w płaszczyźnie danej krzywej 2go stop. dany jest dowolny punkt U, i dowolna, ale nie przechodząca przez niego, ani téż jego biegunowa, prosta *w*,

— i w każdym promieniu roztoczy U, wyznaczymy punkt sprzężony z punktem przecięcia tego promienia z prostą *w*, to wszystkie te punkta leżą w jednéj krzywej 2go stopnia.

Krzywa ta musi przechodzić przez biegun W, prostej *w*, przez punkt *U*, i przez punkta styczności dwóch stycznych z U do danej krzywéj poprowadzone (jeżeli te styczne są możliwe) — gdyż każdy z tych punktów jest sprzężony w punktem przecięcia stycznéj z prostą *w*.

Tylko wtedy zamiast krzywéj 2go stopnia otrzymujemy prostą, gdy prosta *w*, przechodzi przez jeden z tych punktów styczności, t. j. gdy prosta UW jest styczną do danej krzywej.

(Jeżeli prosta *w* przechodzi przez taki punkt styczności, to jej biegun leży w stycznéj — w tej samej co i punkt U, powyżéj zaś dowiedziono, że je-

— i w każdym punkcie prostéj *w*, wykreślimy prostą sprzężoną z promieniem roztoczy *U*, przez ten punkt przechodzącym, to wszystkie te proste należą do jednéj roztoczy 2go stop.

Roztocz ta zawiera biegunową *u*, punktu U, prostą *w*, i dwie styczne w punktach przecięcia prostéj *w* z krzywą danà (jeżeli to przecięcie ma miejsce), — gdyż każda z tych stycznych jest sprzężoną z promieniem roztoczy *U* przechodzącym przez ten punkt przecięcia.

Tylko wtenczas zamiast roztoczy 2go stopnia otrzymujemy roztocz 1go stopnia, gdy punkt U leży na jednéj z tych stycznych, t. j. gdy punkt *uw* leży na krzywéj.

(Jeżeli punkt *U* leży na jednéj z tych stycznych, to jego biegunowa przechodzi przez punkt styczności, — przez ten sam, przez który przechodzi żeli prosta U W jest styczną, to otrzymujemy zamiast krzywéj liniję prostą *).

prosta *w*. Powyżéj zaś dowiedziono, że jeżeli punkt *uw* leży na krzywéj, to otrzymujemy roztocz 1go stop.).

Jeżeli więc w płaszczyźnie danej krzywej 2go stopnia zatrzymamy tylko stały punkt U, to dla każdego punktu téj płaszczyzny możemy wyznaczyć jeden tylko punkt, z nim sprzężony i leżący w jednym promieniu punktu U. Nazwawszy każde takie dwa punkta sprzężone — odpowiedniemi, otrzymamy nowy rodzaj zespolenia, nazwany zespoleniem drugiego stopnia. W tym zespoleniu, odpowiada daléj: każdéj prostéj, — jedna krzywa 2go stopnia (w niektórych tylko przypadkach prosta).

Zespolenia 2go stopnia dokonywamy także, jeżeli w płaszczyźnie danéj krzywéj 2go stopnia, obieramy tylko stałą prostą *w*, nazywając promieniem odpowiednim dowolnéj prostéj,— promień sprzężony z tą prostą, przecinający się z nią w jednym punkcie prostej *w*. Każdéj roztoczy promieni 1go stopnia odpowiada tu w ogóle roztocz 2go stop. (w niektórych tylko przypadkach roztocz 1go stopnia).

Na podstawie dowiedzionych powyżéj praw, o zestawach rzutowo zespolonych, utworzonych z elementów sprzężonych, dowieść możemy co następuje:

Jeżeli trójkąt A M B_1, jest wpisanym w krzywą 2go stop, to każda prosta, sprzężona z jednym z jego boków przecina dwa drugie w dwoch punktach sprzężonych.

Jeżeli trójkąt U T W, jest opisanym na krzywéj 2go stop., to każdy punkt sprzężony z jednym z jego wierzchołków, rzucanym jest z dwóch drugich, przez dwa promienie sprzężone.

*) Szczególnym przypadkiem tego twierdzenia jest: Środki wszystkich cięciw danej krzywej 2go stopnia zchodzących się w jednym punkcie, leżą w innej krzywej 2go stopnia.

W tym przypadku, prosta *w* jest nieskończenie odległą. Jej punkta są od środków cięciw przez krzywą harmonicznie przedzielone, a więc z niemi sprzężone.

Albowiem, w twierdzeniu z lewéj strony: (fig. 27).

Zestawy proste AM czyli u i B_1M czyli u_1 będą zespolone perspektywicznie, jeżeli każdemu punktowi jednego zestawu, przyznamy za odpowiedni, punkt z nim sprzężony w drugim zestawie. Oba więc zestawy muszą być przecięciami jednej roztoczy promieni, której środek leży na przecięciu którychkolwiek dwóch promieni łączących po dwa punkta odpowiednie. Punktowi A odpowiada punkt A_1 (leżący w biegunowéj punktu A t. j. w stycznéj a), punktowi zaś B_1 odpowiada punkt B (leżący w stycznéj b).

Wszystkie inne promienie, łączące po dwa punkta odpowiednie zestawów u i u_1, muszą przechodzić przez punkt R, w którym się przecinają promienie a i b; a że punkt R jest biegunem boku AB_1, a więc wszystkie promienie sprzężone z bokiem AB_1 przechodzą przez ten punkt R i każdy z nich przecina dwa drugie boki w dwóch punktach sprzężonych.

Uważmy teraz w twierdzeniu z prawéj strony: (fig. 28).

Jeżeli każdemu promieniowi punktu U, przyznamy za odpowiedni, sprzężony z nim promień punktu T, to otrzymamy dwie perspektywiczne roztocze promieni: U i T. Obie te roztocze muszą być rzutniami jednego zestawu prostego, który wyznaczymy, łącząc którekolwiek dwa przecięcia promieni odpowiednich (sprzężonych). Takiemi promieniami odpowiedniemi są a i a_1, równie jak b i b_1, prosta więc w, będzie tłem zestawu prostego, którego każdy punkt musi być przecięciem dwóch promieni odpowiednich, roztoczy U i T. Że zaś prosta w, jest biegunową punktu W, — a więc każdy jej punkt jest z punktem W sprzężonym, a jak dowiedziono jest rzucanym z punktów U i T, przez dwa promienie sprzężone p i p_1.

Jeżeli dowolną krzywą 2go stopnia przetniemy dwoma promieniami sprzężonemi: AC i BD (fig. 29), to punkta A, B, C D, będą czterema punktami harmonicznemi, a więc i styczne a, b, c, d, czterema stycznemi harmonicznemi.

Jeżeli z dwóch punktów sprzężonych poprowadzimy do krzywej 2 stop. styczne a i c, oraz b i d, to te cztery styczne będą harmonicznemi, a więc i punkta styczności, — czterema punktami harmonicznemi.

Albowiem, uważmy w twierdzeniu z lewéj strony:

Ponieważ promień AC jest sprzężonym z BD, więc biegun promienie BD leży na AC, w punkcie przecięcia się stycznych *b* i *d*, t. j. w punkcie S. Podobnież, biegunem promienia AC jest punkt R. Punkta R, B, P, D, są jak wiadomo harmonicznemi, a więc promienie c, CB, CP, CD, są również harmonicznemi. Punkta więc C, B, A, D, są rzucane z punktu C, a więc i z każdego innego punktu krzywéj, przez 4 promienie harmoniczne — czyli, że same są harmoniczne, (Promieniem rzucającym punkt C, z tegoż samego punktu C, jest styczna *c*.) — Twierdzenie z prawéj strony dowodzi się zupełnie podobnie — a zresztą, wypływa z prawa odwrotności.

Wszystkie powyżéj dowiedzione prawa o krzywych 2 st., dadzą się przenieść na powierzchnie stożkowe 2go stop. za pomocą rzutów. Biegun zamienia się na promień biegunowy, — biegunowa, na płaszczyznę biegunową.

To zastosowanie teoryi biegunowości, do powierzchni stożkowych i w ogóle do wiązki, zbyt jest łatwém aby je tutaj rozwijać. —

Własności metryczne krzywych 2go stopnia i zestawów rzutowo podobnych.

Z teoryi biegunowości możemy łatwo wyprowadzić cały szereg praw znanych zkąd inąd w geometryi. A mianowicie:

Środki cięciw równoległych krzywej 2go stopnia leżą w jednéj prostéj, którą nazywamy średnicą tej krzywej. Albowiem środki te, są przez krzywą harmonicznie przedzielone od $P\infty$ a więc leżą wszystkie w biegunowéj tego punktu. Możemy więc również powiedzieć że:

Biegunowe punktów nieskończenie odległych są średnicami krzywéj 2go stopnia.

Na średnicy leżą punkta styczności stycznych równoległych do cięciw, które średnica dzieli na dwie części równe, — gdyż są to styczne przechodzące przez biegun tej średnicy.

Styczne w końcach którejkolwiek z tych cięciw poprowadzone, przecinają się na średnicy.

Każda z tych cięciw jest sprzężoną z średnicą dzielącą ją na dwie części równe.

Ponieważ biegunowe punktów leżących w jednéj prostéj, przecinają się w jednym punkcie, przeto:

Wszystkie średnice przecinają się w jednym punkcie.

Punkt ten jest biegunem prostej nieskończenie odległej i nazywa się **środkiem** krzywej.

Tylko elipsa i hyperbola mają rzeczywisty środek, ponieważ nie są styczne do prostej niesk. odl.

Każda cięciwa przechodząca przez środek jest średnicą i zostaje przez niego podzielona na dwie części równe. — gdyż środek jest harmonicznie przedzielony przez krzywą od $P\infty$ leżącego w kierunku średnicy.

Jeżeli dwie cięciwy przecinając się, dzielą się na dwie części równe, to punkt ich przecięcia jest biegunem prostéj nieskończenie odległym czyli środkiem, cięciwy zaś są średnicami.

Parabola jest styczną do prostéj niesk. odległéj, a więc biegunem tej prostej jest jej punkt styczności (niesk. odległy). Parabola więc niema środka rzeczywistego. Wszystkie średnice paraboli są równoległe gdyż przecinają się w biegunie prostej nieskończenie odległéj, który jest $P\infty$; nie możemy jednak tego punktu nazwać środkiem, ponieważ średnice nie dzielą się w nim na dwie równe części.

Ponieważ styczne w końcach biegunowej poprowadzone, przecinają się w biegunie, przeto:

W środku hyperboli przecinają się asymptoty.

Widocznèm jest, że środek hyperboli leży zewnątrz, środek elipsy — wewnątrz krzywéj.

Dla każdéj średnicy elipsy lub hyperboli, istnieje średnica sprzężona, tak że każda z tych dwóch średnic, przechodzi przez nieskończenie odległy biegun drugiej. Każda z nich, dzieli cięciwy równoległe do drugiéj, na dwie części równe.

Jeżeli jedna z dwóch średnic sprzężonych przecina krzywą, to styczne w jej końcach poprowadzone, są do drugiej równoległe; ztąd:

Przekątne równoległoboku wpisanego lub opisanego na krzywéj 2go stopnia są średnicami sprzężonemi. Albowiem, przecięcie tych przekątnych jest biegunem prostéj przechodzącéj przez punkta przecięcia boków przeciwległych, która to prosta jest w tym razie nieskończenie odległą. Przecięcie to jest więc środkiem, a przekątne średnicami; łatwo zaś dostrzedz, że każda z nich przechodzi przez biegun drugiej, są więc średnicami sprzężonemi.

Z ostatniego twierdzenia wypływa:

Cięciwy łączące dowolny punkt krzywéj z końcami dowolnéj średnicy, są równoległe do dwóch średnic sprzężonych.

Jeżeli dane są dwie pary średnic sprzężonych, środek i jeden punkt krzywéj 2go stopnia, to krzywa jest wyznaczoną; — albowiem poprowadziwszy przez punkt dany P, średnicę i wyznaczywszy drugi na niéj leżący punkt krzywéj, Q (za pomocą tego prawa, że PQ podzielone jest przez środek na dwie części równe) i wykreśliwszy na PQ jako na przekątnéj, dwa równoległoboki, prowadząc boki równolegle do każdéj pary danych średnic sprzężonych, otrzymamy w wierzchołkach tych równoległoboków, 6 punktów krzywéj.

Podobnież, krzywa 2go stop. jest wyznaczoną przez dwie pary średnic sprzężonych i jedną styczną.

Jeżeli krzywa ma dwie pary średnic sprzężonych prostopadłych, to jest kołem; gdyż wykreślając powyższe równoległoboki otrzymamy prostokąty, których wszystkie przekątne (średnice tej krzywej) są równe, co ma miejsce tylko w kole. — A więc:

Krzywa mająca więcéj jak jedną parę średnic sprzężonych prostopadłych jest kołem.

Średnice sprzężone prostopadłe do siebie nazywamy o s i a m i, a ich przecięcia z krzywą w i e r z c h o ł k a m i.

W kole każda para średnic sprzężonych jest parą osi. Elipsa ma jedną parę osi i cztery wierzchołki; hyperbola, — jedną parę osi i dwa wierzchołki; parabola, — jedną tylko oś rzeczywistą (dzielącą cięciwy do niéj prostopadłe, na dwie części równe) — i jeden tylko wierzchołek rzeczywisty.

Wiemy że dwie proste sprzężone są harmonicznie przedzielone przez styczne z punktu ich przecięcia do krzywéj poprowadzone, — a więc:

Dwie średnice sprzężone hyperboli są harmonicznie przedzielone przez jej asymptoty, — a zatem z dwóch jej średnic sprzężonych, jedna średnica przecina hyperbolę, druga jej nie przecina.

Osie hyperboli dzielą kąty utworzone przez asymptoty, — na dwie części równe (ob. str. 21).

Na każdéj prostéj równoległéj do jednéj ze średnic sprzężonych hyperboli, wyznaczają asymptoty odcinek rzeczywisty, którego środek leży na drugiéj średnicy; a ponieważ środek odcinka tejże prostéj równoległéj, wyznaczony przez krzywą (t. j. środek cięciwy), także się w téj drugiéj średnicy, t. j. w tym samym punkcie znajduje, przeto:

Części dowolnéj siecznéj, zawarte między krzywą i asymptotami, są sobie równe i: części stycznéj między punktem styczności i asymptotami są sobie równe.

Opierając się na pierwszéj części ostatniego prawa, możemy z wielką łatwością wyznaczyć dowolną liczbę punktów hyperboli, mając dane asymptoty i jeden punkt do niéj należący, a to, prowadząc przez punkt dany dowolną liczbę siecznych i wyznaczając w każdej z nich, drugi punkt do krzywej należący.

Hyperbola nazywa się równoramienną, jeżeli jej asymptoty są prostopadłe. Wtedy, kąty utworzone przez dowolne dwie średnice sprzężone, są przez asymptoty podzielone na dwie części równe (str. 21). Jeżeli więc jedna ze średnic sprzężonych obraca się na około środka, to druga obraca się w przeciwnym toku o ten sam kąt, tak że powstają dwie jednakowe lecz w przeciwnych tokach opisane roztocze. Roztocze (rzutowo zespolone) rzucające hyperbolę równoramienną z końców jej osi (z wierzchołków), są również jednakowe (i przeciwtoczne), gdyż każde dwa promienie odpowiednie, t. j. rzucające jeden punkt hyperboli, są równoległe do dwóch średnic sprzężonych (str. 72), które jakeśmy dopiero co widzieli tworzą roztocze jednakowe. (Dawniéj dowiedziono, że dwie jednakowe i jednotoczne roztocze wydają koło). W paraboli, prosta łącząca środek C, dowolnéj cięciwy AB, z punktem D, przecięcia się stycznych w A i B poprowadzonych, jest średnicą paraboli, — gdyż jej biegunem jest $P\infty$ prostéj AB. — Ponieważ zaś punkt D jest biegunem prostéj AB, a więc powinien być od punktu C, przez krzywą harmonicznie przedzielony, a że drugi punkt przecięcia średnicy DC z krzywą jest $P\infty$, przeto parabola dzieli CD na dwie części równe, czyli że:

Odcinek prosty, łączący punkt przecięcia dwóch stycznych paraboli, ze środkiem cięciwy łączącéj punkta styczności, zostaje podzielony przez parabolę na dwie części równe.

Wiele jeszcze własności krzywych 2go stopnia możemy wyprowadzić ze sposobu ich powstawania. W tym celu zauważmy najprzód:

Jeżeli *u* (ABCD....) i u_1 (A_1 B_1 C_1 D_1 ....) są zestawami rzutowemi, to jak wiadomo:

$$\frac{AB}{AD} : \frac{CB}{CD} = \frac{A_1 B_1}{A_1 D_1} : \frac{C_1 B_1}{C_1 D_1} \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

Jeżeli jeden z uważanych tu punktów n. p. C, jest nieskończenie odległy, to stosunek zawierający C, równa się jedności

gdyż: $$\frac{CB}{CD} = \frac{CD - BD}{CD} = 1 - \frac{BD}{CD}$$

a ponieważ: $CD = \infty$, przeto: $\frac{CB}{CD} = 1 - 0 = 1$

Tak samo, jeżeli C_1 jest nieskończenie odległem, to:

$$\frac{C_1 B_1}{C_1 D_1} = 1$$

Jeżeli C i C_1 są nieskończenie odległe to powyższe zestawy są rzutowo podobne, a równanie I, zamieni się na:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{A_1\ B_1}{A_1\ D_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II)$$

czyli w ogóle: Dwa odcinki jednego zestawu, są proporcyjonalne do odpowiednich odcinków drugiego zestawu. *)

Przejdźmy teraz do krzywych 2go stopnia:

Wiemy, że dowolne dwie styczne u i u_1, przecinają wszystkie inne w dwóch rzutowych zestawach pr. — i że punktowi przecięcia tych stycznych u i u_1 odpowiada w każdéj z nich punkt styczności.

Zastosujmy to do hyperboli: Nazwijmy: C i A_1 dwa nieskończenie odległe punkta styczności assymptot u i u_1. Punkt przecięcia assymptot będzie punktem C_1 czyli A. Jeżeli poprowadzimy dowolne dwie styczne b i d, przecinające u i u_1 w punktach B, D i B_1, D_1, to, pamiętając o tém, że C i A_1 są nieskończenie odległe, będziemy mieli według I:

$$\frac{AB}{AD} = I : \frac{C_1\ B_1}{C_1\ D_1} \text{ czyli : } AB\,.\,C_1\ B_1 = AD\,.\,C_1\ D_1$$

pomnożywszy obie strony równania przez wstawę kąta zawartego między asymptotami, otrzymamy z jednéj strony powierzchnię trójkątów utworzonych przez asymptoty i styczne b (z jednéj strony) i d (z drugiej strony). A więc:

Powierzchnie trójkątów utworzonych przez dwie asymptoty hyperboli i dowolne styczne, są równoważne.

Jeżeli P jest punktem styczności stycznej BB_1, to tak wiemy: $BP = B_1P$. Poprowadziwszy przez P prostą PQ, równoległą do u_1 i gdy Q oznacza punkt przecięcia się téj prostéj PQ z prostą u, wtedy będzie:

$$PQ = \tfrac{1}{2}\ C_1\ B_1 \quad \text{i} \quad AQ = \tfrac{1}{2}\ AB,$$

jeżeli asymptoty przyjmiemy za osie współrzędnych to możemy napisać dla punktu P:

$$y = \tfrac{1}{2}\ C_1\ B_1 \quad \text{i} \quad x = \tfrac{1}{2}\ AB,$$

a ponieważ, jak dowiedziono, $AB \times C_1\ B_1$ jest ilością stałą, więc też dla każdego dowolnego punktu P otrzymamy:

$$xy = \text{Const}$$

t. j. równanie hyporboli, odniesionéj do asymptot.

---

*) Z przyczyny téj to własności nazwano takie dwa zestawy proste podobnemi (rzutowo).

Jeżeli u i u_1 są dwie równoległe styczne elipsy lub hyperboli (dla paraboli jest to niemożliwém), a A i C_1 ich punkta styczności, to (uważając jak poprzednio) ich nieskończenie odległy punkt przecięcia będzie punktem A_1 czyli C. Poprowadziwszy styczne BB_1 i DD_1, będziemy mieli:

$$\frac{CB}{CD} = 1 \quad \text{i} \quad \frac{A_1 B_1}{A_1 D_1} = 1 \text{ a ztąd:}$$

$$AB . C_1 B_1 = AD . C_1 D_1$$

czyli:

$$AB : AD = C_1 D_1 : C_1 B_1$$

Oba ostatnie równania łatwo wyrazić słowami.

Roztocze i powierzchnie skośne.

Zapomocą jednorodnych zestawów zasadniczych, rzutowo zespolonych, lężących w jednéj płaszczyźnie lub w jednéj wiązce, otrzymaliśmy krzywe, roztocze i powierzchnie stożkowe 2go stopnia. Zobaczmy teraz, czy zestawy zasadnicze, dowolnie w przestrzeni leżące, nie wydają innych jeszcze zestawów 2go stopnia.

Najprzód możemy zauważyć, że:

Roztocz promieni R i rzutowo z nią zespolony zestaw prosty u, — wydają tę samą roztocz płaszczyzn 1go lub 2go stopnia, która by została utworzoną przez roztocz R i roztocz R_1, rzucająca zestaw u ze środka R. Gdyż każde dwa promienie odpowiednie roztoczy R i R_1, są rzucane przez tę samą płaszczyznę, która rzuca odpowiednie pierwiastki roztoczy R i zestawu u.

Roztocz promieni R i rzuto wo z nią zespolona roztocz płaszczyzn u, — wydają tę samą prostą lub krzywą 2go stopnia, któraby została utworzoną przez roztocz R i roztocz R_1, będącą przecięciem roztoczy u z płaszczyzną roztoczy R. Gdyż każde dwa promienie odpowiednie roztoczy R i R_1 przecinają się w tym samym punkcie, w którym się przecinają odpowiednie pierwiastki roztoczy R i roztoczy u.

Dwie rzutowo zespolone roztocze promieni, leżące dowolnie w przestrzeni, nie dają zwykle (przynajmniéj bezpośrednio) żadnego nowego zestawu, gdyż odpowiednie promienie nie przecinając się, nie wyznaczają żadnego pierwiastku. Tak samo też, roztocz płaszczyzn i rzutowo z nią zespolony zestaw prosty, nie dają nowych zestawów.

Tylko dwa rzutowo zespolone zestawy proste lub dwie roztocze płaszczyzn, dowolnie w przestrzeni leżące, mogą wydać nowe zestawy. A mianowicie:

Łącząc punkta odpowiednie dwóch rzutowo zespolonych zestawów prostych, nie leżących w jednéj płaszczyźnie, otrzymujemy roztocz skośną (promieni). Powierzchnia wypełniona przez promienie roztoczy skośnéj, nazywa się powierzchnią skośną. Przez skrócenie mówić będziemy, że oba powyższe zestawy proste, są rzucane przez roztocz skośną — (któréj każdy promień rzuca dwa punkta odpowiednie). Powierzchnia skośna jest tłem roztoczy skośnej.

Widoczném jest, że żadne dwa promienie jednéj roztoczy skośnéj, nie leżą w jednéj płaszczyźnie.

Powierzchnia skośna wypełniona przez roztocz skośną U, jest także wypełnioną przez drugą roztocz skośną W, któréj każdy promień przecina wszystkie promienie pierwszéj roztoczy *U*, a nie przecina żadnego — w téj saméj roztoczy W.

Uważmy bowiem: Niech będą u, u_1, u_2 trzy dowolne promienie pierwszéj roztoczy, z których każdy łączy dwa punkta odpowiednie zestawów prostych w i w_1 (rzutowo zespolonych). Możemy zawsze poprowadzić prostą w_2, która przecina wszystkie trzy promienie: u, u_1 u_2. Rzucając z prostéj w_2, zeztawy proste w i w_1, otrzymujemy dwie rzutowo zespolone roztocze płaszczyzn, mające trzy płaszczyzny: $w_2 u$, $w_2 u_1$, $w_2 u_2$, odpowiednio wspólne, a więc i wszystkie płaszczyzny odpowiednio-wspólne, to znaczy, że każde dwa punkta odpowiednie zestawów w i w_1, leżą w jednéj płaszczyźnie z prostą w_2, a ztąd, prosta w_2, przecina się z każdym promieniem roztoczy U. Tożsamo stosuje się do każdéj prostéj, przecinającéj trzy promienie roztoczy U, a więc:

Roztocz *W* składa się z wszystkich promieni, przecinających trzy dowolne (a więc i wszystkie) promienie roztoczy *U*. Odwrotnie zaś, roztocz U składa się z wszystkich promieni przecinających trzy dowolne (a więc i wszystkie) promienie roztoczy W.

Każdy promień jednej z tych dwóch roztoczy nazywa się kierującym promieniem drugiej roztoczy; każda z tych dwóch roztoczy nazywa się kierującą drugiej roztoczy.

Powierzchnia skośna może być zatem utworzona w dwojaki sposób, posuwaniem się prostej, po trzech stałych prostych z których żadne dwie nie leżą w jednéj płaszczyźnie. Trzy proste stałe, są promieniami kierującemi roztoczy skośnej, opisanéj przez prostą ruchomą.

Przez każdy punkt promienia kierującego przechodzi raz jeden, prosta ruchoma. Prosta ruchoma upada raz jeden w każdą dowolną płaszczyznę poprowadzoną przez promień kierujący, gdyż każda taka płaszczyzna przecina dwa inne promienie kierujące, a prosta ruchoma przechodzi przez te punkta przecięcia. Ztąd wypada:

Każdy punkt leżący w jednym promieniu jednej roztoczy, leży także w jednym promieniu drugiej roztoczy, tworzącej tę samą powierzchnię skośną.

Każda płaszczyzna przechodząca przez jeden promień jednéj roztoczy, przechodzi także przez jeden promień drugiej roztoczy, tworzącej tę samą powierzchnię skośną.

Roztocze skośne, tworzą się także przy przecięciu się dwóch rzutowo zespolonych roztoczy płaszczyzn, których osie się nie przecinają — ale roztocz skośna, utworzona przez przecięcie roztoczy płaszczyzn u i u_1 jest tą samą roztoczą jaką otrzymujemy, łącząc punkta odpowiednie zestawów prostych u i u_1, powstałych przez przecięcie osi u z roztoczą płaszczyzn u_1 i osi u_1 z roztoczą płaszczyzn u. Każdy bowiem promień łączący dwa punkta odpowiednie tych zestawów, jest zarazem przecięciem dwóch płaszczyzn odpowiednich, roztoczy płaszczyzn u i u_1.

Przecięcia roztoczy skośnéj przez dowolne dwa promienie kierujące, stanowią dwa zestawy proste rzutowo zespolone.

Rzutnie roztoczy skośnej z dowolnych dwóch promieni kierujących, stanowią dwie roztocze płaszczyzn 1go stopnia rzutowo zespolone.

Jeżeli bowiem w, w_1, w_2, są dowolne trzy promienie kierujące roztoczy U, to wszystkie promienie tej roztoczy, możemy wyznaczyć; prowadząc przez w_2 dowolne płaszczyzny, wynajdując punkta przecięcia tych płaszczyzn z w i w_1 i łącząc każde dwa punkta jednym promieniem, — a wtedy każde dwa punkta odpowiednie zestawów w i w_1 leżą w jednéj płaszczyźnie roztoczy płaszczyzn w_2, — czyli że zestawy w i w_1 są perspektywiczne względem roztoczy w_2, a rzutowe względem siebie; każde zaś dwa punkta odpowiednie są przecięciami jednego i tego samego promienia roztoczy U z prostemi w i w_1; — albo też możemy wyznaczyć wszystkie promienie roztoczy U; rzucając dowolne punkta prostéj w_2, z prostych w i w^1, a przecięcie każdych dwóch płaszczyzn rzucających, da jeden promień roztoczy U. — Wszystkie zaś płaszczyzny rzucające, utworzą dwie roztocze płaszczyzn, perspektywiczne względem zestawu w_2 a więc rzutowe wzgądem siebie; — każde zaś dwie płaszczyzny odpowiednie będą rzucały jeden i ten sam promień roztoczy U.

Cztery promienie roztoczy skośnéj, przecinające się z dowolnym (a więc i z każdym) promieniem kierującym w 4ch punktach harmonicznych, — nazywamy p r o m i e n i a m i h a r m o n i c z n e m i r o z t o c z y s k o ś n e j. Takie cztery promienie, rzucane są z każdego promienia kierującego, przez 4 płaszczyzny harmoniczne, — gdyż te cztery płaszczyzny przechodzą przez cztery punkta harmoniczne wyznaczone przez inny dowolny promień kierujący w owych 4ch promieniach.

Trzy dowolne promienie: a, b, c, z których żadne dwa nie leżą w jednéj płaszczyźnie, wyznaczają stale, jeden 4ty promień *d*, harmonicznie od jednego z nich np. od *b*, przedzielony.

Jeżeli mianowicie, w każdej prostej, przecinającej trzy dane promienie, wyznaczymy do trzech punktów przecięcia: A, B, C, — czwarty harmoniczny — od B przedzielony, to każdy taki czwarty punkt będzie należał do owego czwartego harmonicznego promienia *d*, należącego do jednéj roztoczy skośnéj z promieniami *a*, *b*, i *c*.

Prosta mająca z roztoczą skośną więcej jak dwa punkta wspólne, leży całkowicie w powierzchni skośnej, gdyż przecinając więcej jak dwa promienie tej roztoczy, przecina wszystkie, a więc jest jednym z promieni kierujących.

Płaszczyzna przechodząca przez dowolny promień roztoczy skośnej — przechodzić musi jak wiemy, również i przez jeden promień kierujący, ale po za temi promieniami *u* i *w* nie może mieć żadnego punktu wspólnego z powierzchnią skośną. Gdyby bowiem istniał taki punkt wspólny P, to wszelka prosta płaszczyzny, przez ten punkt przechodząca a przecinająca promienie *u* i *w*, miałaby z powierzchnią skośną 3 punkta wspólne, a więc całkowicie by w niej leżała — czyli że powierzchnia skośna byłaby płaską, co być nie może,

Każda więc inna prosta płaszczyzny przechodzącej przez dwa promienie *u* i *w*, ma z powierzchnią skośną jeden tylko punkt *uw* wspólny — dlatego, każdą taką prostą nazywamy styczną do powierzchni skośnéj, — a także płaszczyznę przechodzącą przez dwa promienie *u* i *w*, płaszczyzną styczną w punkcie przecięcia się tych promieni.

Każda prosta, musi mieć z powierzchnią skośną tyle punktów wspólnych, ile płaszczyzn stycznych przez nią do tejże powierzchni można poprowadzić.

Każda bowiem taka płaszczyzna styczna, zawiera jeden promień jednéj roztoczy skośnéj wypełniającéj powierzchnię skośną. Wspomniona zaś prosta, znajdując się z takim promieniem w jednéj płaszczyźnie, musi mieć z nim, a zatém i z powierzchnią jeden punkt wspólny. Żadne dwa takie punkta wspólne nie mogą się zlać w jeden, gdyż żadne dwa promienie jednéj roztoczy skośnéj, nie leżą w jednéj płaszczyźnie. — (W każdéj płaszczyźnie stycznéj znajduje się oprócz tego, jeden promień drugiej roztoczy wypełniającéj tę samą powierzchnię skośną. Jeżeli ten promień przecina się z powyższą prostą, w tym samym punkcie co i pierwszy promień, to przez tę prostą jedną tylko można poprowadzić styczną płaszczyznę — w przeciwnym zaś razie, prosta ma ten drugi punkt przecięcia wspólny z powierzchnią i dwie płaszczyzny styczne są możliwe).

Z powyższego wypada, że każda prosta w któréj się zchodzi więcéj jak 2 płaszczyzn stycznych, należy całkowicie do roztoczy skośnéj — gdyż ma więcéj jak dwa punkta wspólne z powierzchnią skośną.

Roztocz skośna przecina się z każdą płaszczyzną nie zawierającą żadnego jej promienia, w krzywéj 2go stopnia K.

Roztocz skośna jest rzucaną z każdego punktu nie leżącego w żadnym jej promieniu, przez roztocz płaszczyzn 2go stopnia k.

Aby dowieść twierdzenia z lewej strony, wyobraźmy sobie roztocz skośną utworzoną przez dwie roztocze płaszczyzn (rzutowo zespolone); płaszczyzna przecinająca roztocz skośną, przecina roztocze płasczyzn w dwóch rzutowo zespolonych roztoczach promieni, których promienie odpowiednie przecinają się w tych samych punktach w których promienie roztoczy skośnéj przecinają się z ich płaszczyzną — te więc ostatnie punkta przecięcia stanowią krzywą drugiego stopnia.

Aby dowieść twierdzenia z prawej strony, wyobraźmy sobie roztocz skośną jako utworzoną za pomocą dwóch zestawów prostych (rzutowo zespolonych). Rzucając te dwa zestawy z dowolnego punktu S, otrzymujemy dwie współśrodkowe i rzutowo zespolone roztocze promieni a każda płaszczyzna łącząca dwa promienie odpowiednie (t. j. należąca do roztoczy płaszczyzn 2go stopnia), zawiera jeden promień roztoczy skośnéj, a więc rzucając wszystkie promienie roztoczy skośnéj z punktu S (zewnątrz roztoczy leżącego), otrzymujemy roztocz płaszczyzn 2go stopnia.

Uważmy teraz co następuje:

Jeżeli w dowolnych trzech punktach krzywej K (twierdzenie z lewej strony) poprowadzimy trzy płaszczyzny styczne do powierzchni skośnéj, to te przetną płaszczyznę krzywéj K w trzech promieniach stycznych do K, gdyż każdy z tych promieni, leżąc w płaszczyźnie stycznej i przechodząc przez punkt styczności, ma tylko ten jeden punkt wspólny z powierzchnią skośną — a więc i z krzywą K.

Z punktu przecięcia się trzech powyższych płaszczyzn stycznych, poprowadźmy wszystkie płaszczyzny styczne do powierzchni skośnéj. Przez każdy promień roztoczy skośnej przechodzi jedna płaszczyzna styczna, a więc ten zbiór płaszczyzn, rzucający roztocz skośną z punktu zewnątrz leżącego, stanowić będzie roztocz płaszczyzn 2go stopnia, która się przetnie z płaszczyzną krzywéj K, w roztoczy promieni 2go stopnia. Ta ostatnia roztocz jest identyczną z roztoczą otaczającą krzywą K, gdyż ma z nią 3 promienie i 3 punkta styczności wspólne. Każda więc płaszczyzna powyższéj roztoczy płaszczyzn 2go stopnia, będzie tak samo jak trzy pierwsze płaszczyzny styczne, — styczną do powierzchni skośnéj, w jednym punkcie krzywej K.

Podobnież, jeżeli przez trzy dowolne punkta, w których trzy płaszczyzny roztoczy k (w twierdzeniu z prawéj strony) stykają się z powierzchnią skośną, poprowadzimy płaszczyznę α, to ta przetnie roztocz k w roztoczy promieni 2go stopnia otaczającéj krzywą 2go stopnia, przechodzącą przez trzy powyższe punkta i mającą za styczne w tych punktach, trzy proste w których trzy powyższe płaszczyzny przecinają płaszczyznę α, przechodzącą przez ich trzy punkta styczności. Ale ta krzywa jest identyczną z krzywą w której płaszczyzna α przecina powierzchnię skośną, gdyż ma z nią trzy punkta i trzy styczne wspólne. Każde więc przecięcie płaszczyzny α z jedną płaszczyzną roztoczy k, będzie styczną do krzywéj przecięcia —

czyli wszystkie punkta styczności płaszczyzn roztoczy k, będą równie jak trzy pierwsze, należały do krzywéj 2go stopnia.

Z tych roztrząsań otrzymujemy następujące dopełnienie dwóch ostatnich twierdzeń:

Wszystkie płaszczyzny styczne do powierzchni skośnej w punktach krzywéj k, stanowią roztocz płaszczyzn 2go stopnia.

Wszystkie punkta, w których płaszczyzny roztoczy k, stykają się z powierzchnią skośną, należą do jednéj krzywéj 2go stopnia.

Powierzchnia skośna nie zawierająca żadnéj prostéj nieskończenie odległéj, nazywa się h y p e r b o l o j d ą s k o ś n ą.

Ponieważ płaszczyzna nieskończenie odległa nie zawiera żadnego jej promienia, przeto przecina ją w krzywéj 2go stopnia. — Jeżeli zaś powierzchnia skośna przecina się z płaszczyzną nieskończenie odległą w jednym promieniu jednej roztoczy, — a zatem i w jednym promieniu drugiéj roztoczy wypełniającéj tę powierzchnię skośną, to wtedy nazywamy ją h y p e r b o l i c z n ą p a r a b o l o j d ą. Każda z roztoczy skośnych tej powierzchni, przecina się z dwoma dowolnemi promieniami kierującemi w dwóch zestawach prostych rzutowo - podobnych (t. j. których punkta nieskończenie odległe odpowiadają sobie).

Parabolojda hyperboliczna, może być także otrzymana przez posuwanie się prostéj po dwóch prostych stałych, — równolegle od stałéj płaszczyzny nie zawierającéj kierunku żadnéj z dwóch prostych stałych; albowiem, prosta ruchoma przecina ciągle, nietylko dwie dane proste stałe, ale i nieskończenie odległą prostą danéj płaszczyzny. Tworzy więc powierzchnię skośną, mającą jeden (a zatem i drugi) promień nieskończenie odległy, — a więc jestto parabolojda hyperboliczna. Ta powierzchnia przecina się z każdą płaszczyzną nie zawierającą żadnego jej promienia w hyperboli, — a tylko przy pewnym szczególnym położeniu płaszczyzny siecznéj, — w paraboli. Płaszczyzna bowiem sieczna przecina dwa nieskończenie odległe promienie tej powierzchni w dwóch punktach nieskończenie odległych, które tylko wtedy zchodzą się w jeden, gdy płaszczyzna sieczna przechodzi przez punkt przecięcia się, promieni nieskończenie odległych.

Hyperbolojdy skośnej, płaszczyzna nieskończenie odległa nie dotyka ale ją przecina w krzywej 2go stopnia.

Wszystkie płaszczyzny styczne do hyperbolojdy w punktach tej nieskończenie odległej krzywej 2go stopnia przecinają się w jednym punkcie, tworząc roztocz płaszczyzn 2go stopnia otaczającą powierzchnię stożkową. Ta powierzchnia stożkowa styka się z hyperbolojdą w krzywej nieskończenie odległéj i nazywa się stożkiem asymptotycznym hyperbolojdy.

Każdy jego promień jest równoległy do jednego promienia każdej roztoczy wypełniającéj hyperbolojdę, gdyż przez każdy punkt nieskończenie odległy w którym promień stożka styka się z parabolojdą, przechodzą dwa promienie (po jednym z każdéj z dwóch roztoczy skośnych).

Dowolna płaszczyzna nie zawierająca żadnego promienia hyperbolojdy, przecina ją w hyperboli, paraboli albo elipsie, podług tego, czy ta płaszczyzna przecina nieskończenie odległą krzywą hyperbolojdy, — w dwóch, w jednym lub w żadnym punkcie jej nie przecina. To znaczy, czy jest równoległą do dwóch promieni stożka asymptotycznego, do jednego, lub do żadnego nie jest równoległą.

Z powyższego, wypływa następujący wniosek:

Jeżeli do każdego promienia roztoczy skośnéj, przez dowolny punkt stały (zewnątrz roztoczy znajdujący się) — poprowadzimy promień równoległy, to wszystkie te promienie równoległe, utworzą jedną płaszczyznę — lub powierzchnię stożkową, stosownie do tego, czy roztocz skośna należy do hyperbolicznéj parabolojdy lub do hyperbolojdy — t. j. czy te promienie rzucają nieskończenie odległą prostą lub krzywą 2go stopnia w któréj powierzchnia skośna przecina płaszczyznę nieskończenie odległą.

Zestawy pierwotne rzutowo zespolone.

Zestawy zasadnicze 1go rzędu, jakoto: zestaw prosty, roztocz promieni (1go stopnia) i roztocz płaszczyzn (1go stopnia), oraz zestawy przez nie utworzone, a mianowicie:

Roztocz promieni 2go stop., roztocz płaszczyzn 2go stop., krzywa 2go stop., powierzchnia stożkowa 2go stopnia i roztocz skośna (promieni) nazywają się ogólnie zestawami pierwotnemi.

Zestawy pierwotne możemy zespalać rzutowo jedne z drugiemi, tak jak zestawy zasadnicze, przez co otrzymamy nowe zestawy i wyprowadzimy nowe prawa dla zestawów 2go stopnia.

Cechą zespolenia rzutowego jest: 4m pierw. harm. jednego zestawu, odpowiadają 4 harm. pierw. drugiego zestawu.

Dla przypomnienia, co nazywamy 4ma pierw. harm. zestawów drugiego stopnia przytoczymy następujące dawniej dowiedzione twierdzenia:

Cztery punkta harmoniczne krzywej 2go stopnia, są rzucane z każdego punktu tejże krzywej przez cztery promienie harmoniczne

Cztery harmoniczne promienie powierzchni stożkowej 2go stopnia, są rzucane z każdego promienia tejże powierzchni, przez 4ry harmoniczne płaszczyzny.

Cztery harmoniczne płaszczyzny roztoczy płaszczyzn 2go st. przecinają się z każdą płaszczyzną tejże roztoczy w 4ch promieniach harmonicznych,

Cztery promienie harmoniczne jednej roztoczy 2go stop. przecinają się z każdym promieniem tejże roztoczy, w czterech harmonicznych punktach.

Cztery harmoniczne promienie jednej roztoczy skośnej, są rzucane z każdego promienia kierującego przez cztery harmoniczne płaszczyzny, a przecinają się z każdym promieniem kierującym w czterech harmonicznych punktach — Określenia rzutowości i perspektywiczności, jakie przyjęliśmy dla zestawów zasadniczych, możemy także zastosować do wszystkich zestawów pierwotnych; a mianowicie:

Dwa zestawy pierwotne są zespolone rzutowo, jeżeli czterem harmonicznym pierwiastkom jednego, — odpowiadają cztery pierwiastki harmoniczne drugiego zestawu.

Dwa zestawy pierwotne z których każdy jest rzutowym względem trzeciego, — są względem siebie rzutowe.

Dwa zestawy pierwotne są względem siebie perspektywicznemi, jeżeli pierwiastki jednego, leżą w odpowiednich pierwiastkach drugiego zestawu.

Krzywa 2go stopnia naprzykład, jest perspektywiczną względem przechodzącej przez nią powierzchni stożkowej, jeżeli każdemu punktowi krzywej, odpowiada promień powierzchni przez niego przechodzący.

Krzywa 2go stopnia jest również perspektywiczną względem roztoczy promieni rzucającej ją z jednego jej punktu.

Tak samo też, są względem siebie perspektywicznemi:

Roztocz promieni 2go stopnia i zestaw prosty utworzony przez przecięcie jej przez którykolwiek z promieni; — roztocz skośna i zestaw prosty utworzony przez przecięcie jej przez którykolwiek promień kierujący; — krzywa 2go stopnia i roztocz promieni ją otaczająca. (W każdym jednak razie, przyjmując, że pierwiastki jednego zeztawu odpowiadają tym pierwiastkom drugiego zestawu, przez które przechodzą, jak n. p. w ostatnich dwóch zestawach, jeżeli przyjmiemy że każdy promień roztoczy 2go stopnia odpowiada punktowi krzywej w którym się z nią styka).

Dwie krzywe 2go stopnia będą zespolone rzutowo, jeżeli otaczające je roztocze promieni 2go stopnia zostaną rzutowo zespolone.

Dwa zestawy 2go stopnia możemy zespolić rzutowo, zespalając rzutowo dwa zestawy zasadnicze 1go rzędu, z których każdy jest perspektywicznym względem jednego z dwóch danych zestawów 2go stopnia.

Tak n. p. zespoliwszy rzutowo dwie roztocze promieni, rzucające dwie krzywe 2go stopnia (każdą krzywą z jednego jej punktu), — dokonamy zespolenia rzutowego tychże krzywych.

— Dwa zatem rzutowe zestawy pierwotne, mogą być uważane jako pierwszy i ostatni w szeregu zespolonych zestawów, w którym każde dwa po sobie następujące są względem siebie perspektywicznemi.

Jeżeli dane są trzy pary pierwiastków odpowiednich, dwóch rzutowych zestawów pierwotnych, to dla każdego nowego pierwiastku jednego zestawu, wyznaczyć możemy jeden stale oznaczony pierwiastek drugiego. W tém znaczeniu, mówimy, że mając dane 3 pary pierwiastków odpowiednich, możemy tylko w jeden sposób zespolić dwa zestawy rzutowo.

Ponieważ dwa zestawy pierwotne, rzutowo zespolone, mające trzy pierwiastki odpowiedniowspólne, muszą mieć także każdy czwarty harmoniczny pierwiastek odpowiednio-wspólny, przeto:

Jeżeli dwa rzutowe zestawy pierwotne, n. p. dwie krzywe 2go stop. leżą jeden w drugim, to mają najwięcej dwa, albo też wszystkie pierwiastki odpowiedniowspólne.

Dwie krzywe 2go stopnia, leżące w jednej płaszczyźnie i mające jeden punkt S wspólny, będą rzutowo zespolone, jeżeli przyjmiemy za odpowiednie każde ich dwa punkta, leżące w jednym promieniu z punktem S.; — gdyż każda z tych dwóch krzywych, będzie perspektywiczną z roztoczą promieni S.

Z wyjątkiem punktu S, każdy inny punkt wspólny będzie odpowiednio-wspólnym; punkt S zaś będzie odpowiedniowspólnym tylko wtenczas, je-

Dwie krzywe 2go stopnia leżące w jednej płaszczyźnie i mające jedną wspólną styczną *s*, będą rzutowe zespolone, jeżeli przyjmiemy za odpowiednie, każde dwa ich punkta, w których styczne przecinają się w jednym punkcie stycznej *s*, — gdyż każda z roztoczy otaczających krzywe, będzie perspektywiczną względem zestawu prostego *s*.

Z wyjątkiem stycznej *s*, każda inna styczna wspólna będzie odpowiedniowspólną; styczna zaś *s* będzie odpowiedniowspólną tylko wtenczas, jeżeli

żeli obie krzywe mają wnim jedną wspólną styczną, t. j. jeżeli krzywe stykają się w tym punkcie z sobą.

dotyka obu krzywych w jednym i tym samym punkcie (wspólnym) t. j. gdy krzywe stykają się w tym punkcie.

Dwie krzywe 2go stopnia, zespolone rzutowo w sposób podany w twierdzeniu z lewej strony, mogą mieć najwięcej 3 punkta odpowiedniowspólne, jeżeli nie są identyczne. Gdyby bowiem miały 4 punkta odpowiedniowspólne, to punkt S byłby piątym wspólnym, a więc obie krzywe zlałyby się w jedną. W tym szczególnym wypadku, gdy obie krzywe mają w punkcie S, jedną wspólną styczną, — mogą one mieć najwięcej 2 punkta odpowiednio wspólne — ponieważ oprócz tych dwóch punktów wspólnych, mają jeszcze jeden punkt i jedną styczną wspólną.

Podobnież, dwie krzywe w twierdzeniu z prawej strony mogą mieć najwięcej 3 (w przypadku szczególnym zaś, najwięcej dwie) styczne odpowiednio wspólne, jeżeli nie są identyczne.

Dwie krzywe 2go stopnia rzutowo-zespolone, mające cztery punkta: A, B, C, S, odpowiednio-wspólne są w każdym razie identyczne.

Dwie krzywe 2go stopnia rzutowo zespolone, mające cztery styczne: *a*, *b*, *c*, *s*, odpowiednio-wspólne, są w każdym razie identyczne.

Aby dowieść twierdzenia z lewej strony, uważmy:

Dwie krzywe 2go stopnia mogą być tylko w jeden sposób, tak zespolone rzutowo, aby punktom A, B, C, jednej, odpowiadały punkta A, B, C, drugiej krzywej. To zespolenie ma miejsce, jeżeli obie krzywe zespolemy perspektywicznie z roztoczą promieni S Ponieważ zaś punkt S, ma być także odpowiedniowspólnym, przeto obie krzywe muszą w tym punkcie mieć jedną wspólną styczną — a zatem, muszą być identyczne.

Twierdzenia z prawej strony dowieść można w podobny zupełnie sposób — a zresztą, wypływa ono bezpośrednio z prawa odwrotności.

Rzucając powyższe krzywe z dowolnych punktów zewnątrz ich płaszczyzny leżących, otrzymujemy powierzchnie stożkowe, do których dają się zastosować prawa odpowiadające zupełnie powyższym. W następstwie otrzymujemy nowe prawa:

Jeżeli dowolna krzywa 2go stopnia jest rzutowo zespoloną z powierzchnią stożkową albo roztoczą skośną, a dowolne 4 jej punkta leżą w promieniach odpowiednich, to ta krzywa jest perspektywiczną względem powierzchni lub roztoczy, gdyż ma z ich przecięciami 4 punkta odpowiedniowspólne, jest więc z temi przecięciami identyczną.

Podobnież, roztocz płaszczyzn 2go stopnia jest perspektywiczną względem roztoczy promieni 2go stopnia lub roztoczy skośnej, jeżeli więcej jak 3 jej płaszczyzn, przechodzi przez odpowiednie promienie.

Dwie powierzchnie stożkowe 2go stopnia niewspółśrodkowe, styczne w prostéj *s* (łączącéj ich środki), do jednej wspólnéj płaszczyzny, przecinają się w krzywéj 2go stopnia.

Jeżeli bowiem obie te powierzchnie zespolimy perspektywicznie z roztoczą płaszczyzn *s*, a więc rzutowo względem siebie, to promień *s* będzie odpowiedniowspólnym, a każde dwa promienie odpowiednie, jako leżące w jednéj płaszczyźnie, będą miały jeden punkt wspólny.

Płaszczyzna poprowadzona przez którekolwiek trzy takie punkta wspólne, przecina obie powierzchnie stożkowe w krzy-

Dwie krzywe 2go stopnia leżące w różnych płaszczyznach, styczne do prostéj *s* (przecięcia się tych płaszczyzn), w jednym i tym samym punkcie, są przecięciami jednej powierzchni stożkowéj 2go stopnia.

Jeżeli bowiem obie roztocze promieni 2go stopnia, otaczające te krzywe, zespolimy perspektywicznie z zestawem prostym *s*, a więc rzutowo względem siebie, to promień *s* będzie odpowiedniowspólnym, a każde dwa promienie odpowiednie, jako przecinające się w jednym punkcie zestawu *s* będą leżały w jednéj płaszczyźnie.

Z punktu przecięcia się dowolnych trzech takich płaszczyzn rzucając obie roztocze promieni 2go stopnia otrzymawych 2go stopnia, które jednak zlewają się w jedną, ponieważ mają oprócz owych trzech punktów odpowiedniowspólnych, także i punkt przecięcia ich płaszczyzny z prostą s, — odpowiedniowspólny.

my roztocze płaszczyzn 2go st., które jednak są identyczne, ponieważ mają oprócz owych trzech płaszczyzn odpowiedniowspólnych. — także i płaszczyznę rzucającą promień s, — odpowiedniowspólną

Twierdzenia z lewej strony, można dowieść jeszcze łatwiéj w ten sposób:

Płaszczyzna α, poprowadzona przez dowolne 3 punkta wspólne obu powierzchni, przecina każdą z nich w krzywej 2go stopnia. Te krzywe są identyczne, gdyż mają owe trzy punkta wspólne, a oprocz tego, jeden punkt i jedną styczną wspólną, — a mianowicie, punkt i prostą, w których płaszczyzna α, przecina wspólny obu powierzchniom promień s i wspólną ich płaszczyznę styczną.

W podobnyż sposób można dowieść i twierdzenia z prawéj strony.

Twierdzenie z prawéj strony, pokazuje także, iż krzywe 2go stopnia, któreśmy poznali, są rzeczywiście niczem innem, jak tylko znanemi w geometryi — przecięciami stożka mającego za podstawę koło. Jakoż, kołu i dowolnéj krzywéj 2go stopnia możemy nadać nieskończenie wiele takich położeń, aby się stykały ze sobą w jednym punkcie — a w skutek tego, aby leżały w jednéj powierzchni stożkowéj 2go stopnia.

Jeżeli roztocz promieni S i krzywa 2go stopnia s, leżą w jednéj płaszczyźnie i są rzutowo ale nie perspektywicznie zespolone, to najmniéj jeden a najwięcéj 3 punkta krzywéj, są rzucane z punktu S przez odpowiedni promień roztoczy. — (Punkt S leży we wszystkich promieniach, ale przez jeden tylko (styczny) jest rzucany).

Jeżeli zestaw prosty i roztocz promieni 2go stopnia leżą w jednéj płaszczyźnie i są rzutowo ale nie perspektywicznie zespolone, to niemniej jeden, a najwięcej 3 punkta zestawu prostego, leżą w promieniach odpowiednich roztoczy.

Każda bowiem roztocz promieni S_1, perspektywiczna względem krzywej s, a więc rzutowa względem roztoczy S, tworzy z tą ostatnią, drugą krzywą drugiego stopnia s_1, (która przechodząc przez punkt S_1, ma już ten punkt **wspólny** z krzywą s).

Każdy punkt krzywej s, leżący na swoim promieniu odpowiednim roztoczy S, musi być także punktem wspólnym obu krzywych; gdyby więc takich punktów było więcéj jak 3, to obie krzywe, mając oprócz S_1, cztery punkta wspólne, byłyby identyczne, czyli że roztocz S byłaby względem krzywej s, perspektywiczną. Krzywe s i s_1 mogą mieć albo tylko jeden punkt S_1 wspólny, t. j. są styczne, albo przecinają się najmniej w jednym jeszcze punkcie P. W pierwszym wypadku, promieniowi SS_1, odpowiada (wspólna) styczna w punkcie S_1, t. j. że punkt S_1, krzywej s, rzucanym jest przez odpowiedni promień SS_1. — W drugim razie, promieniami odpowiedniemi są SP i S_1P. — a więc także jeden punkt (P) leży na odpowiednim mu promieniu (SP). *)

Twierdzenie z prawéj strony jest bezpośrednim wynikiem twierdzenia z lewej strony, a to na mocy prawa odwrotności, gdyż roztocz promieni S i krzywa s zamieniają się na zestawy biegunowe: zestaw prosty i roztocz promieni 2go stopnia.

Odpowiednie powyższym, prawa istnieją dla zestawów 1go i 2go stopnia, w wiązce. Z tego wypada że:

Jeżeli zestaw zasadniczy 1go rzędu jest rzutowym względem zestawu 2go stopnia i więcéj jak 3 pierwiastki jednego z nich, przechodzą przez

---

*) Może tu wprawdzie nastąpić ten wypadek, że roztocz S i S_1, będą względem siebie perspektywiczne — i wydadzą nie krzywą 2go stopnia, ale linię prostą — ale i wtedy, jak to łatwo dostrzedz, da się w każdym razie dowieść tego twierdzenia. — (Promień SS_1 jest wtedy odpowiednio wspólnym, nazwijmy go p vel p_1. — p_1 odpowiada P, p_1 odpowiada p — a więc p odpowiada P. Prosta przecina krzywą najwięcej w dwóch punktach — te tylko punkta leżą w promieniach odpowiednich roztoczy S).

pierwiastki odpowiednie, drugiego zestawu, to te dwa zestawy są perspektywiczne, czyli że każdy pierwiastek przechodzi przez swój odpowiedni.

Jeżeli powyższy zestaw 2go stopnia, jest roztoczą skośną — a więc zestaw 1go stopnia zestawem prostym lub roztoczą płaszczyzn 1go stopnia, — to wtedy już możemy poznać, że położenie jest perspektywiczne, skoro 3 pierwiastki przechodzą przez swoje odpowiednie, gdyż w takim razie, tło zestawu prostego lub oś roztoczy płaszczyzn jest jednym z promieni kierujących. **)

Ważność powyższego prawa okaże się z następującego:

Jeżeli zestaw prosty *u* i rzutowa względem niego krzywa 2go stopnia *k*, leżą w jednéj płaszczyźnie, ale nie są persp. względem jedn. R. prom 1go stopnia, to zbiór promieni łączących punkta odpowiednie, stanowi r o z t o c z p r o m i e n i 3go s t o p n i a, mający z każdą roztoczą promieni 1go stopnia, tejże płaszczyzny, najmniéj jeden, a najwięcéj 3 promienie wspólne, jeżeli ta roztocz 1go stopnia nie stanowi części roztoczy 3go stopnia.

Jeżeli roztocz promieni 1go stopnia i rzutowa względem niej roztocz promieni 2go stopnia leżą w jednej płaszczyźnie, to szereg punktów, przecięcia się promieni odpowiednich, stanowi k r z y w ą 3go stopnia, mającą z każdą prostą tejże płaszczyzny, najmniéj jeden, a najwięcej 3 punkta wspólne, jeżeli ta prosta nie stanowi części krzywej 3go stopnia.

Jeżeli bowiem dowolną roztocz promieni 1go stopnia S, uważać będziemy za perspektywiczną względem zestawu *u* (w twierdzeniu z lewéj strony) — a więc rzutową względem krzywej *k*, to najwięcéj 3, a najmniéj jeden promień roztoczy S, przechodzi przez odpowiedni mu punkt krzywéj *k*, jeżeli roztocz S, nie jest względem krzywéj *k*, perspektywiczną.

**) Podobnież krzywa 2go stopnia i roztocz promieni 1go stopnia są, jak wiemy, perspektywicznemi, gdy 3 punkta krzywéj, leżą w 3ch odpowiednich promieniach roztoczy.

Jeżeli krzywa k i zestaw u, mają jeden punkt odpowiedniowspólny, to każda prosta, przechodząca przez ten punkt, może być uważana za promień łączący dwa punkta odpowiednie (które się zlały w jeden) — a więc roztocz 3go stopnia, zawiera w tym razie roztocz 1go stopnia.

W twierdzeniu z prawéj strony, krzywa 3go stopnia jest zestawem biegunowym roztoczy promieni 3go stopnia — i twierdzenie to wypływa z prawa odwrotności.

Następujące twierdzenie jest tylko szczególnym przypadkiem powyższego:

Jeżeli zestaw prosty u i rzutowa względem niego krzywa 2go stopnia k, mają dwa punkta A i B odpowiedniowspólne, — to wydają roztocz promieni 1go stopnia.	Jeżeli roztocz promieni 1go stopnia i rzutowa względem niej roztocz promieni 2go stopnia, mają dwa promienie odpowiedniowspólne, to wydają zestaw prosty.

Jeżeli bowiem obierzemy dowolne dwa punkta odpowiednie C i C_1, (w twierdzeniu z lewej strony) zestawu u i krzywej k i poprowadzimy promień CC_1 przecinający krzywą w drugim punkcie S, to z roztoczą S, możemy zespolić perspektywicznie krzywą k i zestaw u. Tym sposobem, te dwa ostatnie zestawy będą zespolone rzutowo tak, że punktom A, B, C, zestawu prostego będą odpowiadały punkta A, B, C_1, krzywéj. Rzucając z punktu S, wszystkie inne punkta krzywéj, i przecinając roztocz S, prostą u otrzymamy zestaw prosty identyczny z danym zestawem prostym u gdyż ma z nim 3 punkta A, B, C, odpowiedniowspólne; a więc każdy promień roztoczy S, łączy dwa punkta odpowiednie, danego zestawu u i krzywej k.

Oczywistą jest rzeczą, że i wtedy zestaw u i krzywa k, wydają roztocz 1go stopnia, kiedy niemając nawet żadnego punktu odpowiedniowspólnego, są perspektywiczne względem jednej roztoczy promieni 1go stopnia — gdyż wyznaczają tę samą właśnie roztocz.

Krzywa 2go stopnia i dwie proste *a* i *b*, z których każda ma z krzywą jeden punkt wspólny, ale żadna nie leży z drugą, ani też z krzywą w jednej płaszczyźnie, wyznaczają roztocz skośną, perspektywiczną względem krzywej i mającą promienie *a* i *b* za kierujące; — a mianowicie, roztocz skośną, utworzoną przez dwie roztocze płaszczyzn, *a* i *b*, perspektywiczne względem krzywej.

Roztocz płaszczyzn 2go stopnia i dwie proste *a* i *b*, z których każda leży w jednej płaszczyźnie roztoczy, ale nie przechodzi przez jej środek i z drugą prostą się nie przecina, wyznaczają roztocz skośną, perspektywiczną względem roztoczy płaszczyzn i mającą promienie *a* i *b* za kierujące; — a mianowicie, roztocz skośną, utworzoną przez dwa zestawy proste *a* i *b*, perspektywiczne względem roztoczy płaszczyzn.

Roztocz kierująca powyższej roztoczy skośnej, zawiera promienie *a* i *b* i jest również perspektywiczną względem krzywej (albo roztoczy płaszczyzn 2go stopnia).

Jeżeli krzywa 2go stopnia i zestaw prosty są rzutowe i mają jeden punkt A odpowiednio-wspólny, ale nie leżą w jednej płaszczyźnie, to wyznaczają roztocz skośną, względem nich perspektywiczną.

Jeżeli bowiem, punktom krzywej: A, B, C, odpowiadają punkta zestawu prostego: A, B_1, C_1, — to roztocz skośna, perspektywiczna względem krzywej, zawierająca promienie BB_1 i CC_1 będzie także perspektywiczną względem zestawu prostego, gdyż 3 promienie przechodzą przez punkta odpowiednie.

Jeżeli roztocz płaszczyzn 2go i roztocz płaszczyzn 1go stopnia są rzutowe i mają jedną płaszczyznę odpowiednio-wspólną ale oś ostatniej zoztoczy nie przechodzi przez środek pierwszej, to wyznaczają one roztocz skośną, względem nich perspektywiczną.

Dowodzenie tego twierdzenia, zupełnie podobne do dowodzenia z lewej strony.

Wiemy że rzucając krzywą 2go stopnia z punktu zewnątrz jej płaszczyzny leżącego, otrzymujemy powierzchnię stożkową 2go stopnia, a rzucając roztocz skośną z dowolnego punktu; otrzymujemy roztocz płaszczyzn 1go lub 2go stopnia, stosownie do tego, czy ten dowolny punkt leży na jednym z promieni, roztoczy skośnej, — czy nie; — wiemy także, że roztocz płaszczyzn 2go stopnia, przecina się z płaszczyzną nie przechodzącą przez jej środek, w roztoczy promieni 2go stopnia, — roztocz skośna zaś, przecina się z dowolną płaszczyzną w zestawie prostym lub krzywej 2go stopnia. — Wprowadzając do powyższych dwóch twierdzeń odpowiednie rzutnie lub przecięcia, otrzymamy twierdzenia następujące:

Jeżeli zestaw prosty i powierzchnia stożkowa 2go stopnia są rzutowe i jeden punkt zestawu leży w promieniu odpowiednim powierzchni, — to wyznaczają one roztocz płaszczyzn 2go lub 1go stopnia, względem nich perspektywiczną.

Jeżeli roztocz płaszczyzn 1go stopnia i roztocz promieni 2go stopnia są rzutowe i jeden promień leży w odpowiedniej mu płaszczyźnie, to wyznaczają one krzywą 2go stopnia względem nich perspektywiczną lub perspektywiczny zestaw prosty.

Ztąd zaś wypływa bezpośrednio, skoro tylko zauważymy, że krzywa 2go stopnia może być uważana za przecięcie powierzchni stożkowej 2go stopnia:

Jeżeli zestaw prosty i krzywa 2go stopnia, leżące w jednej płaszczyźnie, są rzutowo zespolone i mają jeden punkt odpowiedniowspólny, — to wyznaczają roztocz promieni 1go lub 2go stopnia, względem nich perspektywiczną.

Jeżeli roztocz promieni 1go stopnia i roztocz promieni 2go stopnia, leżące w jednej płaszczyźnie, są rzutowo zespolone i mają jeden promień odpowiedniowspólny, — to wyznaczają perspektywiczny względem nich zestaw prosty lub perspektywiczną krzywą 2go st.

Dwie rzutowe roztocze skośne, z których jedna jest kierującą względem drugiej (leżące w jednej powierzchi skośnej), wyznaczają perspektywiczną względem nich krzywą 2go stopnia i równocześnie, perspektywiczną względem nich roztocz płaszczyzn 2go stopnia.

Jeżeli bowiem a, b, c, i a_1, b_1, c_1, są promienie odpowiednie powyższych roztoczy skośnych, to te roztocze mogą być tylko raz jeden, a to n. p. w ten sposób ze sobą zespolone rzutowo, że przyjmiemy za odpowiednie każde dwa promienie przecinające w jednym punkcie, płaszczyznę α, przechodzącą przez 3 punkta przecięcia: aa_1, bb_1, cc_1, — albo też, przyjmując za odpowiednie, każde dwa promienie, rzucane przez jedną płaszczyznę z punktu S, przecięcia się trzech płaszczyzn: aa_1, bb_1, cc_1. W pierwszym razie, płaszczyzna α, przecina powierzchnię skośną w jednej krzywej 2go stopnia, a więc każde dwa promienie odpowiednie przecinające się w jednym punkcie płaszczyzny α, przecinają się właściwie w jednym punkcie owej krzywej, która tym sposobem jest perspektywiczną względem obu roztoczy skośnych. — W drugim razie, płaszczyzny rzucające z punktu S, po dwa promienie odpowiednie, jako płaszczyzny styczne do powierzchni skośnej; tworzą jak wiemy roztocz płaszczyzn 2go stopnia, która oczywiście jest perspektywiczną względem obu roztoczy skośnych.

Dwie rzutowe krzywe 2go stopnia, leżące jedna na drugiéj, wyznaczają perspektywiczną względem nich roztocz promieni 2go stopnia, albo też proste łączące punkta odpowiednie, zchodzą się wszystkie w jednym punkcie (nie leżącym na krzywych).	Dwie rzutowe roztocze promieni 2go stopnia leżące jedna na drugiéj, wyznaczają perspektywiczną względem nich krzywą 2go stopnia, albo punkta przecięcia się promieni odpowiednich, leżą wszystkie w jednéj prostéj (nie należącéj do roztoczy).

Jeżeli bowiem wyobrazimy sobie obie krzywe, jako leżące w jednéj powierzchni skośnéj, to jedną z roztoczy skośnych wypełniających tę powierzchnią, możemy przyjąć za perspektywiczną względem jednej krzywej, drugą — względem drugiej; — obie roztocze skośne wyznaczają roztocz płaszczyzn 2go stopnia, perspektywiczną względem obu roztoczy i obu krzywych. Stosownie do tego, czy środek tej roztoczy płaszczyzn leży na płaszczyźnie krzywych lub nie, następuje drugi lub pierwszy przypadek wymieniony w twierdzeniu z lewej strony.

Jeżeli 3 proste łączące punkta odpowiednie powyższych krzywych, zchodzą się w jednym punkcie, to i wszystkie inne w tym punkcie się zchodzą

Dwie rzutowe krzywe 2go stopnia, $ABCD$ i ABC_1D_1, mające dwa punkta odpowiedniowspólne, ale nie leżące w jednej płaszczyźnie, wyznaczają perspektywiczną względem nich roztocz skośną albo perspektywiczną powierzchnię stożkową 2go stopnia.

Dwie rzutowe roztocze płaszczyzn 2go stopnia mające dwie płaszczyzny odpowiedniowspólne ale nie współśrodkowe, wyznaczają perspektywiczną względem nich roztocz skośną albo perspektywiczną roztocz promieni 2go stopnia

Roztocz bowiem skośna, albo powierzchnia stożkowa, perspektywiczna względem krzywéj ABCD i zawierająca dwa promienie: CC_1 i DD_1, jest perspektywiczną względem drugiej krzywej: ABC_1D_1, gdyż cztery punkta tej ostatniej leżą w promieniach odpowiednich.

Powyższe krzywe wyznaczają powierzchnię stożkową wtedy, gdy styczne w punktach odpowiednich C i C_1, przecinają prostą AB w jednym punkcie; gdybyśmy bowiem przypuścili, że w tym ostatnim razie powstaje roztocz skośna, to płaszczyzna poprowadzona przez powyższe dwie styczne, a więc zawierająca jeden promień roztoczy skośnej, CC_1, musiałaby także zawierać jeden promień roztoczy kierującéj, i tém samém przynajmniéj jeden jeszcze punkt, jednej przynajmniej krzywej, a mianowicie, punkt krzywéj znajdujący się w tym promieniu kierującym, — co być nie może, gdyż ta płaszczyzna, przechodząc przez obie styczne do krzywych, może mieć z każdą z nich tylko jeden punkt wspólny. — (Obie styczne już dla tego nie mogą być promieniami kierującemi że się przecinają).

Dwie powyższe krzywe, możemy w każdym razie zespolić rzutowo, za pomocą roztoczy płaszczyzn, perspektywicznej względem każdej z krzywych, której oś stanowi promień dany, CC_1. Jeżeli, jak to powyżej nadmieniono, styczne w C i C_1, przecinają się w jednym punkcie prostéj AB, to płaszczyzna przez nie poprowadzona jest styczną do wyznaczonej przez obie krzywe powierzchni stożkowéj. Każda inna płaszczyzna styczna do powierzchni stożkowéj, (w promieniu przechodzącym przez dwa punkta odpowiednie obu krzywych), przecina płaszczyzny krzywych, w prostych, stycznych do krzywych, które oczywiście przecinają się w jednym punkcie prostéj AB.

Uważmy teraz, że dwie krzywe s i s_1 leżące w różnych płaszczyznach, a obejmujące jeden i ten sam odcinek AB, prostéj w której się przecinają ich płaszczyzny, są przez tę prostą podzielone, każda na dwie części, które oznaczymy przez I i II. Otóż te dwie krzywe mogą być za pomocą stycznych przecinających się w punktach prostéj AB, w dwojaki sposób zespolone rzutowo, a mianowicie: możemy zespolić część I. krzywej s, z częścią II. albo z częścią I. krzywéj s_1 a każde zespolenie wyznaczy jeden stożek. W twierdzeniu z prawéj strony możemy podobne poczynić uwagi.

Otrzymamy więc:

Jeżeli dwie krzywe 2go stopnia leżą w różnych płaszczyznach i obie obejmują jeden odcinek prostéj w któréj się przecinają ich płaszczyzny, to wyznaczają dwie powierzchnie stożkowe, przez nie przechodzące.	Jeżeli dwie powierzchnie stożkowe 2go stopnia niewspółśrodkowe, są wpisane w jeden kąt dwuścienny, to przecinają się w dwóch krzywych 2go stopnia.

Możemy teraz dowieść następującego twierdzenia:

Jeżeli krzywa 2go stopnia i roztocz (promieni lub płaszczyzn) 2go st., albo powierzchnia stożkowa 2go st. i roztocz płaszczyzn 2go st., — są rzutowo zespolone, a pięć pierwiastków jednego zestawu, przechodzi przez odpowiednie pięć pierwiastków drugiego zestawu, — to te zestawy są perspektywiczne.

Przypuśćmy, że daną jest krzywa drugiego stopnia u, i roztocz płaszczyzn drugiego stopnia S. (do tego przypadku dadzą się inne, powyżéj wymienione, w każdym razie sprowadzić).

Potrzebujemy tylko dowieść, że możemy zawsze wyznaczyć taki zestaw promieni, który będzie perspektywicznym względem krzywéj i względem roztoczy płaszczyzn, gdyż tem samem dowiedziemy, że każdy punkt krzywéj leży na odpowiedniéj mu płaszczyźnie. — Niech będą punkta krzywéj: A, B, C, D, E, leżące w płaszczyznach odpowiednich α, β, γ, δ, ε, roztoczy płaszczyzn S. — Jeżeli płaszczyzna π, krzywej 2go stopnia należy do roztoczy, to przecina tę roztocz w roztoczy promieni π $(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)$ (środek w punkcie S), perspektywicznej względem krzywej, gdyż więcéj jak 3 jej promienie, przechodzą przez odpowiednie punkta krzywéj, — środek zatem obu roztoczy, leży na krzywéj. — Jeżeli odwrotnie, środek S, roztoczy płaszczyzn, leży na danéj krzywéj, to rzucając z tego punktu krzywą, otrzymamy roztocz promieni: S (ABCDE), perspektywiczną względem roztoczy płaszczyzn S $(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)$, gdyż więcej jak 3 promienie leżą w płaszczyznach odpowiednich, — płaszczyzna zatém π należy do roztoczy płaszczyzn — (gdyż w niej leży roztocz promieni S, perspektywiczna względem roztoczy płaszczyn S).

Jeżeli nakoniec, środek S, nie leży na krzywéj, a tém samém, płaszczyzna krzywéj nie należy do roztoczy S, to uważmy: Niech będzie A_1, punkt krzywéj w którym ją przecina drugi raz płaszczyzna α, przechodząca przez punkt A (jeżeli α jest styczną w A, to A_1 zlewa się z A). Poprowadziwszy przez punkt A_1, w płaszczyźnie α, dowolną prostą g, nie leżącą w płaszczyźnie π, rzucajmy z tej prostéj krzywą u. Otrzymamy roztocz płaszczyzn 1go stopnia: g (ABCDE) perspektywiczną względem krzywéj, a rzutową względem roztoczy płaszczyzn S, i mającą z tą ostatnią, płaszczyznę α odpowiedniowspólną. Roztocze płaszczyzn: S i g, tworzą jak wiemy perspektywiczną względem nich roztocz skośną, która musi być także perspektywiczną względem krzywéj u, gdyż cztery jej promienie przechodzą przez odpowiednie cztery punkta krzywej.

Jeżeli krzywa 2go stopnia: ABCDE i roztocz skośna abcde, są względem siebie rzutowe ale nie perspektywiczne i dwa punkta krzywéj A i B leżą w promieniach odpowiednich a i b, to te dwa zestawy wyznaczają perspektywiczną względem nich roztocz płaszczyzn 1go lub 2go stopnia.

Jeżeli roztocz płaszczyzn 2go stopnia i roztocz skośna, są względem siebie rzutowe ale nie perspektywiczne i dwie płaszczyzny pierwszej roztoczy, przechodzą przez odpowiednie im, dwa promienie drugiéj roztoczy, — to te dwie roztocze wyznaczają perspektywiczny względem nich zestaw prosty lub perspektywiczną krzywą 2go stopnia.

Trzy bowiem płaszczyzny: Cc, Dd, Ee, łączące punkta krzywej z odpowiedniemi promieniami roztoczy skośnéj, przecinają się w jednéj prostéj (t. j. w promieniu roztoczy skośnéj) albo w jednym punkcie; roztocz zaś płaszczyzn, rzucająca wszystkie promienie roztoczy skośnéj, z owej prostéj lub owego punktu przecięcia, jest zarazem perspektywiczną względem krzywéj ABCDE.

Dwie rzutowe krzywe 2go stopnia leżące w jednéj płaszczyźnie i mające dwa punkta odpowiedniowspólne, wyznaczają perspektywiczną względem nich roztocz promieni 1go lub 2go stopnia, — albo też, wszystkie promienie łączące punkta odpowiednie przecinają się w jednym punkcie, nie leżącym na żadnéj z krzywych danych.

Dwie rzutowe roztocze promieni 2go stopnia, mające dwa promienie odpowiedniowspólne, wyznaczają perspektywiczny względem nich zestaw prosty lub perspektywiczną krzywą 2go stopnia, — albo też wszystkie punkta przecięcia się promieni odpowiednich, leżą w jednéj prostéj nie należącéj do żadnéj z roztoczy danych.

Każda bowiem roztocz skośna, perspektywiczna względem jednéj krzywéj, wyznacza z drugą, roztocz płaszczyzn 1go lub 2go stopnia, która się przecina z płaszczyzną krzywych w roztoczy promieni 1go lub 2go stopnia, a tylko w tedy gdy środek tej ostatniej roztoczy 2go stopnia leży w płaszczyźnie krzywych, — następuje ten ostatni wypadek, w twierdzeniu z lewej strony wspomniany.

Jeżeli dwie rzutowe krzywe 2go stopnia leżące w jednéj płaszczyźnie, nie mają punktów odpowiedniowspólnych, to wyznaczają roztocz promieni wyższego stopnia, w któréj przez każdy punkt przechodzą więcéj jak dwa promienie, — a w ogóle najwyżéj 4 promienie. Mogą się w nich jednakże zawierać pojedyncze punkta, przez które przechodzi więcéj jak 4 promienie ale zarazem nieskończenie wiele promieni tejże saméj roztoczy; jeżeli bowiem roztocz płaszczyzn 2go stopnia ma za środek taki punkt przecięcia się pięciu promieni, (przechodzących przez punkta odpowiednie obu krzywych) i jest perspektywiczną względem jednéj krzywéj (n. p. jest rzutnią roztoczy skośnéj perspektywicznej względem tej krzywéj), — to jest zarazem perspektywiczną względem drugiéj krzywéj (któréj 5 punktów leży w odpowiednich płaszczyznach). — Podobnież, dwie rzutowe roztocze promieni 2 stopnia wyznaczają krzywą wyższego stopnia, która z dowolną prostą niema zwykle więcej jak 4 punkta wspólne. — Później zajmiemy się zbadaniem tych nowych zestawów wyższego stopnia.

Zestawy dwuwtórne (inwolucyjne).

Jeżeli dwa jednorodne zestawy pierwotne u i u_1, są rzutowo zespolone i leżą jeden na drugim (n. p. dwa zestawy proste w jednéj prostej), to każdy pierwiastek P, może być uważany jako należący do jednego lub do drugiego zestawu, może być zatem brany dwukrotnie i mieć dwa odpowiednie mu pierwiastki. Tak n. p. w dwóch zestawach prostych u i u_1 (fig. 30.), gdzie punktom P, Q, R, odpowiadają punkta P_1, Q_1, R_1, punktowi P (czyli Q_1) odpowiadają punkta P_1 i Q.

Te dwa ostatnie punkta mogą się zlać w jeden jak n. p. w zestawach na fig. 31. gdzie punkta Q i P_1 stanowią jeden punkt, tak że punkta P i P_1 odpowiadają sobie w dwojaki sposób.

Jeżeli dwa rzutowe zestawy pierwotne u i u_1 nie mają wszystkich pierwiastków odpowiedniowspólnych, ale każdy pierwiastek ich, odpowiada drugiemu w dwojaki sposób, to mówimy że te zestawy są zespolone dwuwtórnie albo że są w inwolucyi, — są inwolucyjne, — są położone inwolucyjnie).

Dwa niejednorodne zestawy nazywają się także dwuwtórnie zespolonemi, jeżeli jeden z nich jest zespolonym dwuwtórnie, z rzutem lub przecięciem drugiego zestawu.

Tak n. p. zestaw prosty u i roztocz promieni 1go stopnia U, będą zespolone dwuwtórnie, jeżeli: podczas gdy dowolnemu punktowi P, zestawu u, odpowiada promień roztoczy przechodzący przez punkt P_1, to jednocześnie punktowi P_1 odpowiada promień, przechodzący przez punkt P. Wtedy bowiem, przecięcie roztoczy U, prostą u daje zestaw prosty u_1, zespolony dwuwtórnie z zestawem u.

Dwie rzutowe krzywe 2go stopnia, leżące jedna na drugiéj, są zespolone dwuwtórnie, jeżeli trzy, a zatem i wszystkie (str. 95) promienie łączące punkta odpowiednie, zchodzą się w jednym punkcie (fig. 32 i 33). Jeżeli zaś te krzywe wyznaczają perspektywiczną względem nich roztocz promieni 2go stopnia, to nie są dwuwtórnie zespolone.

Dwie rzutowe krzywe 2go stopnia, leżące jedna na drugiéj, są zespolone dwuwtórnie, jeżeli jeden dowolny ich punkt A odpowiada drugiemu: A_1, w dwojaki sposób.

Niech będą B i B_1, (fig. 32 i 33) dowolne dwa inne punkta odpowiednie obu krzywych, tak, że punktom A, A_1, B, jednéj krzywéj, odpowiadają punkta A_1, A, B_1, drugiej krzywéj. Wyznaczmy biegunową u, punktu U, w którym się przecinają proste AA_1 i BB_1. Roztocze promieni: B_1 $(AA_1B...)$ i B $(A_1AB_1...)$ rzucające obie krzywe z punktów B_1 i B, są względem siebie rzutowe ale zarazem i perspektywiczne, gdyż promień łączący ich środki jest odpowiedniowspólnym; obie więc roztocze muszą być rzutniami jednego zestawu prostego, w którym się przecinają promienie odpowiednie B_1A_1 i BA, oraz B_1A i BA_1, — a tym zestawem jest właśnie zestaw *u*, leżący w biegunowéj punktu *U*. Każde więc dwa punkta krzywych, leżące w jednéj prostéj z punktem *U*, muszą podobnie jak punkta A i A_1, odpowiadać sobie podwójnie, gdyż przez nie przechodzą dwukrotnie, promienie odpowiednie roztoczy B i B_1, a zatém, obie krzywe są zespolone dwuwtórnie.

Widzimy więc, że jeżeli dwie krzywe 2go stopnia zespolone są dwuwtórnie, to proste łączące punkta odpowiednie zchodzą się w jednym punkcie *U*, a styczne w punktach odpowiednich, przecinają się w punktach jednéj prostéj *u*, biegunowéj punktu U.

Punkt U nazywa się środkiem dwuwtórności (środkiem inwolucyi), prosta zaś *u*, osią dwuwtórności, obu krzywych.

Roztocze promieni 2go stopnia otaczające dwie dwuwtórne krzywe, są także zespolone dwuwtórnie, gdyż styczne w odpowiednich punktach dwojako sobie odpowiadają. Takie dwie roztocze, przecinają się z każdym do nich należącym promieniem w dwóch zestawach prostych dwuwtórnie zespolonych.

Dwie dwuwtórnie zespolone krzywe 2go stopnia są rzucane z każdego ich punktu przez dwie dwuwtórnie zespolone roztocze promieni, a z każdego punktu leżącego zewnątrz ich płaszczyzny, przez dwie dwuwtórnie zespolone powierzchnie stożkowe. Roztocz skośna perspektywiczna względem jednéj krzywéj, — jest względem drugiéj zespoloną dwuwtórnie; — toż samo stosuje się do roztoczy płaszczyzn i t. d.

W ogóle, możemy zatem powiedzieć:

Dwa rzutowe zestawy pierwotne jednorodne, są zespolone dwuwtórnie, jeżeli leżą jeden na drugim i jakiekolwiek ich dwa pierwiastki, odpowiadają sobie dwukrotnie.

Jeżeli bowiem temi zestawami są zestawy promieni, to możemy wyznaczyć dwie rzutowe, na sobie leżące, krzywe 2go stopnia, perspektywiczne względem nich i mające dwa punkta odpowiadające sobie dwukrotnie — a więc zespolone dwuwtórnie, co dowodzi, że i oba zestawy promieni muszą być zespolone dwuwtórnie. Jeżeli zaś te zestawy są roztoczami płaszczyzn, lub zestawami prostemi, to możemy wyznaczyć dwa perspektywiczne względem nich zestawy promieni, leżące jeden na drugim i mające jedną parę promieni odpowiadających sobie dwukrotnie, a zatem podług powyższego, zespolone dwuwtórnie.

Dwa zestawy dwuwtórnie zespolone, mogą być uważane jako jeden zestaw, którego pierwiastki są ułożone w pary dwuwtórne, czyli ułożone dwuwtórnie (inwolucyjnie). Taki zestaw będziemy nazywali dwuwtórnym.

I tak możemy powiedzieć:

W dwuwtórnéj krzywéj 2go stopnia, każda para punktów leży w jednéj prostéj z punktem stałym U, nie leżącym na krzywéj, a każda para stycznych przecina się w jednym punkcie biegunowéj u, punktu U, — (względem tejże krzywéj).

W dwuwtórnéj powierzchni stożkowéj 2go stopnia każda para promieni, leży w jednéj płaszczyźnie ze stałym promieniem p, nie leżącym w powierzchni, a każda para płaszczyzn stycznych przecina się w jednym promieniu płaszczyzny biegunowéj promienia p,— (względem tejże powierzchni).

Twierdzenia z lewéj strony dowiedliśmy już powyżéj, twierdzenie zaś z prawéj strony otrzymujemy bezpośrednio, skoro uwzględnimy, że w nim występuje tylko rzutnia zestawu o którym mowa w twierdzeniu z lewéj strony.

Chcąc ułożyć dwuwtórnie, dowolny zestaw pierwotny, można dwie pary pierwiastków A, A_1, i B, B_1, obrać dowolnie, wszystkie inne pary są przez to stale wyznaczone.

Każdy bowiem zestaw dwuwtórny, składa się właściwie z dwóch zestawów rzutowych, których trzy pary pierwiastków: AA_1, A_1A, BB_1, mogą być obrane dowolnie, a przez to inne są stale wyznaczone.

Jeżeli mamy ułożyć dwuwtórnie, punkta danéj krzywéj 2go stopnia, to możemy to uskuteczić albo zapomocą środka dwuwtórności U, (w którym się przecinają promienie AA_1 i BB_1), a to prowadząc przez *U* dowolne promienie CC_1, DD_1 i t. d., — albo też za pomocą osi dwuwtórności *u*, (biegunowéj punktu U), prowadząc z dowolnych punktów téj osi, po dwie styczne do krzywéj a punkta styczności będą stanowiły pary dwuwtórne.

Podobnież ma się rzecz z powierzchnią stożkową.

Jeżeli mamy ułożyć dwuwtórnie, promienie danéj roztoczy skośnéj, to potrzebujemy tylko uczynić to z dowolną krzywą, stanowiącą przecięcie roztoczy skośnéj. Promienie roztoczy 1go stopnia możemy również ułożyć dwuwtórnie za pomocą perspektywicznéj względem niej krzywéj 2go stopnia, n. p. za pomocą koła przechodzącego przez środek tej roztoczy.

Pierwiastki jakiegokolwiek zestawu zasadniczego, mogą być zresztą ułożone dwuwtórnie, bez pomocy zestawów 2go stopnia a to w ten sposób, że uważając taki zestaw za złożony z dwóch rzutowych, zespalamy te dwa ostatnie podług zwykłych prawideł.

Dwa jednorodne zestawy rzutowe, składające zestaw dwuwtórny, n. p. dwie krzywe 2go stopnia AA_1B i A_1AB_1 (fig. 32 i 33), mogą być jednotoczne albo różnotoczne. W pierwszym przypadku dwa pierwiastki jednéj pary: AA_1 są zawsze przez piewiastki każdéj innéj pary przedzielone, i nie mogą się nigdy zlać w jeden pierwiastek. W drugim razie, pierwiastki jednéj pary nie są nigdy przez pierwiastki drugiéj pary przedzielone, a posuwając się w odwrotnych tokach, muszą się zlać z sobą dwa razy i tworzą dwa pierwiastki odpowiedniowspólne obu zestawów rzutowych. Te dwa pierwiastki nazwiemy rdzennemi, gdyż każdy z nich stanowi niejako środek, albo rdzeń, po obu stronach którego, ułożone są w pary dwuwtórne, wszystkie pierwiastki zestawu.

Z powyższego wypada:

Dwuwtórny zestaw pierwotny, ma dwa pierwiastki rdzenne albo niema żadnego, stosownie do tego, czy dwa pierwiastki jednéj pary, nie są przedzielone przez pierwiastki drugiéj pary, lub są przedzielone. Każdy pierwiastek rdzenny, powstaje przez zlanie się w jeden, dwóch pierwiastków jednéj pary.

Jeżeli środek dwuwtórności, dowolnéj krzywéj 2go stopnia leży zewnątrz krzywéj, to ta krzywa ma dwa punkta rdzenne, w których się z nią stykają dwa promienie punktu U, i w których ją przecina oś dwuwtórności, *u*.

Pierwiastki rdzenne, M i N, dowolnego zestawu, są harmonicznie przedzielone przez każde dwa pierwiastki jednéj pary, A i A_1.

Potrzebujemy dowieść tego twierdzenia tylko dla krzywéj 2go stopnia, gdyż każdy inny przypadek da się do tego sprowadzić.

Wiemy że w krzywéj 2go stopnia, mającéj dwa punkta rdzenne M i N, (fig. 32), każde dwa punkta jednéj pary, n. p. A i A_1, leżą na promieniu, przechodzącym przez biegun U, prostéj MN, czyli że proste AA_1, i MN są sprężone, powyżéj zaś dowiedliśmy, że dwie proste sprężone (AA_1 i MN) wyznaczają w krzywéj cztery punkta harmoniczne AMA_1N.

Aby więc ułożyć dwuwtórnie pierwiastki dowolnego zestawu pierwotnego, możemy obrać dowolnie dwa pierwiastki rdzenne M i N, albo jeden pierwiastek rdzenny M, i jedną parę dwuwtórną AA_1, — przez co wszystkie inne pary będą stale wyznaczone. W pierwszym bowiem przypadku, każde dwa pierwiastki harmonicznie przez M i N przedzielone, będą stanowiły jedną parę, a w drugim przypadku, drugi pierwiastek rdzenny N, może być łatwo wyznaczony, ponieważ jest przez A i A_1 od M harmonicznie przedzielony.

Powyższych praw o zestawach dwuwtórnych możemy dowieść innym jeszcze sposobem, więcéj elementarnym, przyczém będziemy mogli wyprowadzić niektóre nowe prawa.

Wprowadźmy najprzód następujące określenie:

Dowolne dwie grupy pierwiastków: A, B, C, D, E,.... i A_1, B_1, C_1, D_1, E_1,.... należących do dwóch zestawów pierwotnych u i u_1, będziemy nazywali rzutowemi, jeżeli zestawy u i u_1 mogą być zespolone rzutowo w ten sposób, że pierwiastkom A, B, C, D,.. jednego, odpowiadać będą pierwiastki A_1, B_1, C_1, D_1,.... drugiego zestawu *).

Jeżeli n. p u i u_1 są zestawami prostemi leżącemi w jednéj płaszczyźnie lecz nie w jednéj prostéj, to grupy powyższe tylko wtedy mogą być rzutowemi, gdy proste AA_1, BB_1, CC_1,.... zchodzą się w jednym punkcie albo też, gdy są stycznemi do jednéj krzywéj 2go stopnia, przyczém u i u_1, są także styczne do tejże krzywéj.

Grupa ABCD — czterech pierwiastków jednego zestawu pierwotnego jest rzutową względem każdéj permutacyi z tychże pierwiastków ułożonéj, byleby pierwiastki przedzielone (A i C, albo B i D), pozostały przedzielonemi, czyli:

ABCD rz. **) BADC rz. CDAB rz. DCBA....

Dowiedziemy tego dla zestawów prostych, gdyż do tego przypadku dadzą się inne sprowadzić.

Przypuśćmy że mamy dowieść iż ABCD jest rz. względem CDAB. Odrzućmy ABCD z dowolnego punktu R (fig. 34) na dowolną prostą przechodzącą przez A. Na tej prostéj otrzymamy rzuty: A, E, F, G. Nazwijmy głoską T punkt przecięcia, ED z RC i uważmy:

AEFG	jest	rzutem	ABCD	z punktu	R
CTFR	„	„	AEFG	„	D
CDAB	„	„	CTFR	„	E

a więc ABCD rz. CDAB, co było do okazania.

W podobny sposób moglibyśmy dowieść rzutowości innych permutacyj.

---

*) Do takich grup rzutowych stosują się wyżéj wyprowadzone prawa co do stosunków metrycznych. N. p. jeżeli to są zestawy proste to: $\frac{AB}{AD} : \frac{CB}{CD} = \frac{A_1B_1}{A_1D_1} : \frac{C_1B_1}{C_1D_1}$.

**) Znak *rz.* wyraża: „jest rzutowe względem:“

Z powyższego wypada, że:

Jeżeli *abcd* rz. ABCD, to i *abcd* rz. BADC rz. CDAB rz. DCBA....

Ztąd też wynika wyżéj dowiedzione prawo, że dwa rzutowe zestawy pierwotne, leżące jeden na drugim są zespolone dwuwtórnie, jeżeli dowolne dwa ich pierwiastki A i A_1 odpowiadają sobie dwukrotnie. Gdyż jakiekolwiek będą dwa inne pierwiastki odpowiednie B i B_1, tak że pierwiastkom A, A_1, B, jednego zestawu odpowiadają pierw. A_1, A, B_1, drugiego zestawu, możemy podług powyższego, uważając AA_1BB_1 za grupę należącą do jednego zestawu, — napisać:

$$AA_1BB_1 \text{ rz. } A_1AB_1B,$$

co dowodzi, że B i B_1 odpowiadają sobie dwukrotnie, a co także stosuje się do każdych innych dwóch pierwiastków od powiednich.

Z prawa któreśmy dopiero co powtórnie dowiedli wynika:

Zestaw prosty *u* i rzutowo z nim zespolona roztocz promieni R, są zespolone dwuwtórnie, jeżeli środek zoztoczy leży zewnątrz *u* i z dwóch punktów P i P_1, zestawu *u*, każdy leży w promieniu odpowiednim drugiemu. — Zestaw bowiem *u*, musi być zespolonym dwuwtórnie z przecięciem roztoczy R przez prostą *u*, jako mający z tym przecięciem dwa punkta P i P_1, odpowiadające sobie dwukrotnie. (W podobnyż sposób można poznać, kiedy roztocz płaszczyzn jest zespoloną dwuwtórnie z zestawem prostym lub roztoczą promieni).

Jeżeli w płaszczyźnie danéj krzywéj 2go stopnia obierzemy dowolną prostą *u*, nie styczną do krzywéj, i dla każdego jej punktu wyznaczymy biegunową, to te biegunowe utworzą roztocz prom. U, zespoloną dwuwtórnie z zestawem *u*. Jeżeli więc w zestawie *u* każde dwa punkta sprzężone — a w roztoczy każde dwa sprzężone promienie nazwiemy jedną p a r ą, to zestaw *u* i roztocz U będą ułożone w pary dwuwtórne.

W szczególności, wszystkie pary średnie sprzężonych krzywéj 2go stopnia — tworzą dwuwtórną roztocz promieni.

Prawo, że w zestawach dwuwtórnych, każde dwa pierwiastki jednéj pary, AA_1, są harmonicznie przedzielone przez pierwiastki rdzenne M i N (jeżeli te istnieją) może być również dowiedzione sposobem elementarnym: Przypuśćmy, że te cztery pierwiastki: A, A_1, M, N, są punktami zestawu prostego (fig. 35), który powstał z dwóch rzutowych zestawów, ułożonych dwówtórnie. W tych zestawach, punktom $MANA_1$, jednego zestawu odpowiadają punkta MA_1NA, drugiego zestawu (gdyż M i N są odpowiednio wspólne).

Mamy więc: $MANA_1$ rz. MA_1NA. Rzucając $MANA_1$ z dowolnego punktu S na prostą przechodzącą przez M, otrzymamy: MRKT rz. $MANA_1$, a więc i MA_1NA rz. MRKT; ale ponieważ te zestawy mają punkt przecięcia odpowiedniowspólny (M), przeto muszą być perspektywiczne, t. j. że linije A_1R, NK i AT muszą się przeciąć w jednym punkcie (O). Tym sposobem otrzymujemy czworokąt OTSR, wyznaczający 4 punkta, harmoniczne $MANA_1$.

Grupę trzech par pierwiastków AA_1, BB_1, CC_1, jednego zestawu dwuwtórnego będziemy nazywali inwolucyją lub dwuszóstką *).

Pierwiastki jednéj dwuszóstki, jako należące do zestawu dwuwtórnego, muszą być w pewnéj zależności, — a mianowicie musi być: AA_1BC rz. $A_1AB_1C_1$, $ABCC_1$ rz. $A_1B_1C_1C$,.... i w ogóle każde dwie grupy symetryczne z tych sześciu pierwiastków ułożone, muszą być rzutowemi względem siebie.

Odwrotnie, jeżeli np. AA_1BC rz. $A_1AB_1C_1$, to $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1$ tworzą dwuszóstkę, gdyż A i A_1 odpowiadają sobie podwójnie a więc i B i B_1, C i C_1.... muszą sobie podwójnie odpowiadać.

Dwie pary pierwiastków jednéj dwuszóstki mogą być oczywiście obrane dowolnie, a dwa pierwiastki pozostałe muszą być odpowiednio wyznaczone.

Pierwiastek rdzenny zestawu dwuwtórnego, może w dwuszóstce zastąpić miejsce jednéj pary. Np. $M \cdot AA_1 \cdot BB_1$ jest

---

*) Zamiast obcego wyrazu „inwolucyja" wolę używać swojskiéj nazwy „dwuszóstka" (sześć pierwiastków dwuwtórnych).

dwuszóstką, jeżeli tylko: MAA_1B rz. MA_1AB_1. Również $M \cdot N \cdot AA_1$ jest dwuszóstką jeżeli $MANA_1$ jest zestawem harmonicznym, a więc rzutowym względem harmonicznemu zestawu MA_1NA.

Sześć boków zupełnego czworokąta płaskiego O R S T, przecina się z każdą prostą leżącą w jego płaszczyźnie, lecz nie przechodzącą przez żaden z jego wierzchołków — w sześciu punktach tworzących dwuszóstkę, przyczém każde dwa boki przeciwległe wyznaczają jedną parę dwuwtórną.

Sześć wierzchołków zupełnego czworoboku płaskiego, są rzucane z każdego punktu leżącego w jego płaszczyźnie, lecz nie leżącego w żadnym z jego boków — przez sześć promieni stanowiących dwuszóstkę, przyczém każde dwa wierzchołki przeciwległe wyznaczają jedną parę dwuwtórną.

Dostateczném będzie dowieść twierdzenia z lewéj strony. W tym celu uważmy: A T P R (fig. 36) jest rzutem $A C A_1 B_1$ z punktu O, a rzutem $A B A_1 C_1$ z punktu S, a więc: ACA_1B_1 rz. A T P R rz. $A B A_1 C_1$, a ponieważ (str. 106): $A B A_1 C_1$ rz. $A_1 C_1 A B$, a więc: $A C A_1 B_1$ rz. $A_1 C_1 AB$, to znaczy, że $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1$ stanowi dwuszóstkę, gdyż A i A_1 odpowiadają sobie podwójnie, a B i C odpowiadają B_1 i C_1 (przyczém muszą sobie odpowiadać podwójnie), a zatém $A A_1$, $B B_1$, $C C_1$, stanowią trzy pary zestawu dwuwtórnego.

Mając dane dwie pary pierwiastków: AA_1 i BB_1 jednego dwuwtórnego zestawu prostego *u*, możemy dla każdego piątego punktu C wyznaczyć punkt odpowiedni, wykreślając czworokąt, którego dwa boki przeciwległe przechodzą przez punkta jednéj pary, jedna przekątna przez C, a dwa drugie boki przeciwległe przez punkta drugiéj pary. Druga przekątna wyznaczy punkt C_1, odpowiedni punktowi C. Stanowisko punktu C_1 względem pięciu punktów danych, jest stałe i niezmienne, gdyż ilekolwiek byśmy wykreślili czworokątów, zawsze szóste boki przecinają się z prostą *u* w tym samym punkcie (str. 16).

(Oczywistą jest rzeczą, że jeżeli zamiast jednéj lub dwóch par punktów dane są jeden lub dwa punkta rdzenne, to wykreślając czworokąt, prowadzimy przez te punkta po dwa boki przeciwległe czworokąta).

Jeżeli dwa punkta M i N prostéj u są harmonicznie przedzielone przez A i A_1 oraz przez B i B_1, czyli przez dwie pary boków przeciwległych dowolnego czworokąta (str. 20), to są one punktami rdzennemi, a więc muszą być także harmonicznie przedzielone i przez C i C_1, czyli przez przekątne tegoż czworokąta.

Jeżeli czworokąt niezupełny KLMN (fig. 37) wpisany jest w krzywą 2° st. to punkta przecięcia boków tego czworokąta i krzywéj — z dowolną prostą u, nie przechodzącą przez żaden z 4ch wierzchołków dają dwuszóstkę $AA_1 \cdot BB_1 \cdot PP_1$, w któréj punkta jednéj pary są przecięciami boków przeciwległych lub przecięciami krzywéj z prostą u.

Albowiem, rzucając punkta krzywéj P, L, P_1, N, z punktów K i M i przecinając promienie rzucające prostą u, otrzymamy: PBP_1A rz. $PA_1P_1B_1$; a ponieważ $PA_1P_1B_1$ rz $P_1B_1PA_1$ (str. 106) więc; $PB\ P_1A$ rz. $P_2B_1\ PA_1$, czyli że $PP_1 . AA_1 . BB_1$ stanowi dwuszóstkę.

(Podobne do powyższego prawo odwrotne, możemy wyprowadzić dla czworokąta opisanego na krzywéj 2° st.).

Ponieważ każda krzywa 2° st. opisana na powyższym czworokącie KLMN, przecina prostą u w dwóch punktach stanowiących z punktami A, A_1, i B. B_1 — dwuszóstkę, a te ostatnie 4 punkta (dwie pary) wyznaczają w zupełności zestaw dwuwtórny u, przeto każda krzywa opisana na czworokącie KLMN, przecina u w dwócb punktach należących do jednéj pary dwuwtórnéj. Jeżeli te dwa punkta zchodzą się w jeden czyli, jeżeli krzywa jest styczną do u, to otrzymujemy punkt rdzenny.

Podobne uwagi możemy porobić co do nadmienionego powyżéj prawa (odwrotowego) o czworokącie opisanym na krzywéj. Ztąd wypada:

Wszystkie krzywe 2^0 st. opisane na jednym czworokącie (płaskim) przecinają się z dowolną prostą u nie przechodzącą przez żaden wierzchołek czworokąta w zestawie dwuwtórnym, przyczém każda krzywa wyznacza jedną parę dwuwtórną albo punkt rdzenny (jeżeli jest styczną do u).

Wszystkie krzywe 2^0 st. wpisane w jeden czworobok, wydają z dowolnym punktem U, nie leżącym w żadnym z boków czworoboku, dwuwtórną roztocz promieni — jeżeli do każdéj krzywéj poprowadzimy z U dwie styczne i przyjmiemy je za promienie jednéj pary dwuwtórnéj. Jeżeli krzywa przechodzi przez U, to styczna do niéj w tym punkcie stanowi promień rdzenny.

Ponieważ każdy zestaw dwuwtórny ma dwa pierwiastki rdzenne, albo niema żadnego, przeto do powyższych twierdzeń możemy zrobić dodatki:

Mogą być dwie krzywe styczne do u albo niema żadnéj.

Mogą być dwie krzywe przechodzące przez U albo niema żadnéj.

Który zaś z tych dwóch przypadków następuje łatwo rozpoznać jeszcze przed wykreśleniem krzywych. Pierwszy przypadek następuje wtedy gdy n. p. A i A_1 (w twierdz. z lewéj strony) nie są przez B i B_1 przedzielone — drugi zaś przypadek, jeżeli są przedzielone (str. 104).

Wynalazłszy pierwiastki rdzenne zestawów u i U, wspomnianych w ostatnich dwóch prawach, możemy łatwo wykreślić krzywe w dodatku do tych praw wspomniane, t. j. krzywe przechodzące przez 5 punktów danych, (twierdz. z lewéj strony) albo styczne do 5 danych prostych (tw. z prawéj str.). O wyznaczeniu pierwiastków rdzennych będzie mowa w późniejszym rozdziale.

Do twierdzenia z lewéj strony możemy jeszcze następujący zrobić dodatek, przyjmując że u jest prostą nieskończenie odległą:

Przez 4 punkta dane w płaszczyźnie można poprowadzić dwie parabole albo nie można poprowadzić żadnéj.

Stosunki metryczne w zestawach dwuwtórnych.

Ogniska krzywych 2go stopnia.

Jeżeli AA_1, BB_1, CC_1, są trzy pary dwuwtórnego zestawu prostego, to jak wiemy:

$$AA_1BC_1 \text{ rz. } A_1AB_1C$$

a zatém:

$$\frac{AA_1}{AC_1} : \frac{BA_1}{BC_1} = \frac{A_1A}{A_1C} : \frac{B_1A}{B_1C}$$

czyli:

$$\frac{AA_1}{AC_1} : \frac{BA_1}{BC_1} = \frac{AA_1}{CA_1} : \frac{AB_1}{CB_1} \;{}^{*})$$

Znosząc mianowniki i wspólny czynnik AA_1 otrzymamy:

$$AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1 = AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{I}.$$

Tak samo ponieważ AA_1BC rz. $A_1AB_1C_1$ przeto:

$$AB_1 \cdot BC \cdot C_1A_1 = AC \cdot BA_1 \cdot C_1B_1 \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{I_a}.$$

I w ten sposób możemy układać inne podobne równania, zamieniając między sobą dowolne dwa punkta do jednéj pary należące.

(Podobne równanie możemy także układać dla wstaw kątów utworzonych przez promienie dwuwtórnéj roztoczy 1go stopnia).

Jeżeli jeden z sześciu punktów powyższych, n. p. C_1, staje się nieskończenie odległym, to jak wiadomo, stosunki zawierające C_1 — stają się $= 1$, n. p.:

$$\frac{BC_1}{AC_1} = 1, \quad \frac{C_1A_1}{C_1B_1} = 1 \quad \text{i t. d.},$$

a w skutek tego równania I i $\mathrm{I_a}$ zamienia się na równania:

$$AB_1 \cdot CA_1 = BA_1 \cdot CB_1$$
$$AB_1 \cdot BC = AC \cdot BA_1$$

Punkt C (odpowiedni punktowi P_∞) nazywa się **środkiem dwuwtórnego zestawu prostego**. Oznaczmy go głoską O i podzielmy przez siebie ostatnie dwa równania, a otrzymamy:

---

*) Wprawdzie $AA_1 = - A_1A$, $CA_1 = - A_1C$ etc. (str. 23). lecz oczywiście: $\dfrac{AA_1}{CA_1} = \dfrac{A_1A}{A_1C}$

$$\frac{OA_1}{BO} = \frac{OB_1}{AO}$$

czyli:

$$OA \cdot OA_1 = OB \cdot OB_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{II.}$$

To znaczy że:

Iloczyn z odcinków zawartych pomiędzy środkiem i dwoma dowolnemi punktami odpowiedniemi, dwuwtórnego zestawu prostego u, jest ilością stałą.

Jeżeli zestaw u ma dwa punkta rdzenne M i N, (powstałe przez zlanie się dwóch punktów jednéj pary), to oczywiście:

$$OA \cdot OA_1 = (OM)^2 = (ON)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{III.}$$

Ztąd wypada, że środek O dzieli na dwie równe części odcinek MN (między punktami rdzennemi).

Jeżeli zestaw u ma dwa punkta rdzenne, to O i C_1 nie są przez żadne dwa punkta jednéj pary przedzielone (str. 104) a więc np A i A_1 leżą po jednéj stronie punktu O, a iloczyn $OA \cdot OA_1$ jest dodatni (musi być zresztą dodatnym jako równy kwadratowi z OM i z ON). Jeżeli zaś zestaw u niema punktów rdzennych, to A i A_1 leżą po obu stronach punktu O, a więc iloczyn $OA \cdot OA_1$ jest odjemny.

Stosownie więc do tego, czy iloczyn z dowolnych dwóch odcinków wyznaczonych przez punkta jednéj pary ma wartość dodatnią lub odjemną, zestaw u ma dwa punkta rdzenne lub niema żadnego.

Jeżeli na każdym z odcinków AA_1, BB_1, CC_1, etc, dwuwtórnego zestawu prostego u (fig. 38 i 39) wykreślimy koła mające za średnicę ten odcinek, jeżeli oznaczymy przez r promień któregokolwiek z tych kół (n. p. koła opisanego na AA_1), a przez s odległość środka tego koła od punktu O (środka zestawu u), to otrzymamy:

$$OA_1 = OK + KA_1 = s + r$$

$$OA = OK - AK = s - r$$

ztąd:

$$OA \cdot OA_1 = (s-r)\,(s+r) = s^2 - r^2 = \text{Const.} \qquad \text{VI.}$$

Jeżeli zestaw u ma punkta rdzenne M i N, (fig. 39), to O leży zewnątrz koła, a $s^2 - r^2$ oznacza kwadrat z t, t. j. ze stycznéj z punktu O do tego koła poprowadzonej, gdyż t jest ramieniem kąta prostego w trójkącie prostokątnym, którego przeciwprostokątną stanowi s, a r — drugie ramie kąta prostego. Długość tej stycznej t jest jak to pokazuje równanie VI — ilością stałą, a jak pokazuje równanie III, — równą połowie MN. Jeżeli więc z punktu O zakreślimy koło przechodzące przez M i N, to to koło będzie przecinało prostopadle wszystkie powyżéj wspomniane koła, opisane na odcinkach ograniczonych przez punkta jednej pary. Łatwo też można dowieść, że wszystkie te koła przecinają się prostopadle z każdym kołem przechodzącem przez M i N.

Jeżeli zestaw *u* niema żadnego punktu rdzennego (fig 38), to punkt O leży wewnątrz koła opisanego na AA_1, a $s^2 - r^2$ jest ujemne (równie jak $OA \cdot OA_1$) Jeżeli wykreślimy cięciwę tego koła, przechodzącą przez O i prostopadłą do *u*, to:

$$s^2 + (OP)^2 = r^2$$
$$s^2 - r^2 = -(OP)^2 = -(OQ)^2$$

Ponieważ zaś długości OP i OQ są według równania VI ilościami stałemi dla wszystkich odcinków AA_1, BB_1, ... a więc i dla wszystkich kół opisanych na tych odcinkach, — przeto wszystkie te koła muszą przechodzić przez P i Q. Kąty więc APA_1, BPB_1, CPC_1 etc. są kątami prostemi, a zatem:

Jeżeli dwuwtórny zestaw prosty *u* niema punktów rdzennych, to w każdej płaszczyźnie przez *u* przechodzącej znajdują się dwa punkta P i Q, z których ten zestaw jest rzucany przez dwie dwuwtórne roztocze p r o s t o k ą t n e, (t. j. roztocze, w których każde dwa promienie jednéj pary są do siebie prostopadłe).

Że wszystkie koła opisane na wiadomych odcinkach muszą przechodzić przez punkta przecięcia się dwóch takich kół, — możemy to wnieść i z następującego prawa:

Jeżeli w dwuwtórnej roztoczy promieni, promienie dwóch par: a, a_1 i b, b_1 są do siebie prostopadłe, to każde dwa promienie odpowiednie (należące do jednéj pary) są do siebie prostopadłe.

Prawdziwość zaś tego ostatniego prawa wypływa ztąd, — że promienie tej roztoczy mogą być tylko w jeden sposób tak ułożone w pary dwuwtórne, aby promienie a i a_1, oraz b i b_1 odpowiadały sobie (tworzyły pary), a to mianowicie w ten sposób, że przyjmujemy za odpowiednie każde dwa promienie prostopadłe do siebie (tak jak w roztoczy dwuwtórnej utworzonej przez wszystkie średnice sprzężone koła).

Jeżeli w krzywą 2go stopnia wpiszemy ilekolwiek trójkątów prostokątnych tak, aby wierzchołek kąta prostego był dla wszystkich wspólny, to przeciwprostokątne przetną się w jednym punkcie.

Albowiem dwuwtórna roztocz, utworzona przez ramiona kąta prostego, wyznacza w krzywej dwuwtórne pary punktów, — proste zaś łączące punkta pojedynczych par, zchodzą się jak wiemy w jednym punkcie (środku dwuwtórności).

Jeżeli w płaszczyźnie danej krzywej 2go stopnia obierzemy dowolną roztocz promieni i nazwiemy odpowiedniemi każde dwa promienie sprzężone, to ta roztocz będzie jak wiemy ułożoną dwuwtórnie.

Jeżeli ta dwuwtórna roztocz jest prostokątną, to jej środek F ma pewne szczególne znaczenie i nazywa się ogniskiem krzywej.

Każde zatém ognisko krzywej 2go stopnia jest to punkt, którego każde dwa promienie do siebie prostopadłe są sprzężonemi względem tejże krzywej.

Ognisko nie może leżeć zewnątrz krzywej, gdyż roztocz promieni, której ognisko jest środkiem, miałaby w takim razie dwa promienie rdzenne (styczne do krzywej) a więc nie mogła by być prostokątną.

Średnica przechodząca przez ognisko jest osią — gdyż jest prostopadła do cięciwy z nią sprzężonej.

Każde więc ognisko leży na osi.

Prosta przechodząca przez dwa ogniska F i F_1, jest osią krzywej, gdyż jako sprzężona z dwoma cięciwami do niej prostopadłemi jest biegunową nieskończenie odległego punktu (przecięcia się tych dwóch cięciw), jest średnicą — a zarazem i osią, bo jest prostopadła do cięciw z nią sprzężonych.

W kole, — środek może być uważany za ognisko, gdyż przecinające się w tym środku proste sprzężone (średnice) są do siebie jak wiemy prostopadłe.

Że oprócz środka niema koło innego ogniska, to pokazuje się ztąd, że dwa promienie sprzężone względem koła są tylko wtedy do siebie prostopadłe jeżeli oba są średnicami, albo przynajmniéj jeden z nich jest średnicą.

W płaszczyźnie danej krzywej 2go stopnia, możemy dla każdej danej prostej p (fig. 40), wyznaczyć jedną prostą p_1 prostopadłą do p i z nią sprzężoną (t. j. prostopadłą do p z jej bieguna poprowadzoną). Jeżeli więc a jest osią krzywej 2go stopnia, którą przecinają proste p i p_1 w punktach P i P_1 i jeżeli będziemy uważali roztocze promieni P i P_1 w których każdemu promieniowi roztoczy P, odpowiada promień z nim sprzężony roztoczy P_1, — to najprzód, roztocze P i P_1 będą zespolone rzutowo (str. 66), a powtóre, każde dwa promienie odpowiednie będą do siebie prostopadłe, gdyż: oznaczywszy przez A nieskończenie odległy biegun prostej a, możemy zauważyć, że promienie a, PA i p, roztoczy P, muszą być prostopadłe do promieni PA, a i p_1, roztoczy P_1, a więc roztocze P i P_1 tworzą widocznie koło, którego średnicą jest odcinek PP_1.

Z powyższego wypływa pierwsza część następującego prawa:

W każdej osi a, krzywej 2go stopnia można dla każdego jej punktu P, wyznaczyć taki punkt P_1, że każde dwa promienie sprzężone przez te dwa punkta przechodzące, będą do siebie prostopadłe. Przyjąwszy każde takie dwa punkta za odpowiednie, otrzymamy w osi a zestaw dwuwtórny.

8*

Druga część tego prawa okazuje się z następujących uwag:

Jeżeli zespolimy rzutowo dwie roztocze promieni równoległych (t. j. roztocze których środki są nieskończenie odległe), z których jedna ma kierunek prostej p, a druga kierunek prostej p_1, — a to w ten sposób, że promienie sprzężone przyjmiemy za odpowiednie (str. 66), to prosta a przetnie się z temi roztoczami w dwóch zestawach prostych rzutowo zespolonych, a zarazem dwuwtórnych, gdyż każde dwa punkta odpowiednie, muszą równie jak P i P_1, odpowiadać sobie dwukrotnie.

Jeżeli ten dwuwtórny zestaw a ma dwa punkta rdzenne, to te są ogniskami krzywej, w przeciwnym zaś razie, każdy z dwóch punktów z których zestaw a jest rzucany przez dwie roztocze prostokątne (str. 114), — jest ogniskiem. (Albowiem, każde dwa promienie rzucające są sprzężone).

W tym ostatnim przypadku, ogniska leżą w drugiej osi tejże krzywej i stanowią punkta rdzenne zestawu w powyżej opisany sposób utworzonego.

Żadna krzywa 2go stopnia niema więcej jak dwa ogniska; gdyż, ponieważ każda prosta łącząca ogniska jest osią, przeto gdyby ognisk było więcej jak 2, to musiałaby krzywa mieć więcej jak dwie osie *), a tylko koło (o którym już wiemy że nie może mieć więcej jak jedno ognisko) — ma więcej jak dwie osie.

Oś elipsy albo hyperboli na której leżą ogniska nazywa się osią główną.

Osią główną hyperboli jest ta, która ją przecina, — ogniska bowiem, które muszą leżeć wewnątrz krzywej, nie mogą się znajdować na osi która hyperboli nie przecina.

Ogniska elipsy i hyperboli są równo oddalone od środka krzywej, gdyż w powyżej wspomnianym zestawie dwuwtórnym a, w którym ogniska są punktami rdzennemi, środkowi krzywej odpowiada $P\infty$, (bo druga oś jest sprzężoną ze wszystkiemi prostopadłemi do niej prostemi).

Ogniska są harmonicznie przedzielone przez każde dwie proste sprzężone i prostopadłe.

Jeżeli krzywa 2go stopnia jest parabolą, to wspomniane powyżej dwie roztocze promieni równoległych mają prostą nieskończenie odległą — odpowiedniowspólną, gdyż ta prosta jako styczna do paraboli jest sama z sobą sprzężona; — przeto w zestawie dwuwtórnym a, jeden z punktów rdzennych jest punktem nieskończenie odległym, który tym sposobem może być uważany za ognisko paraboli.

---

*) W jednej osi mogą leżeć najwięcej dwa ogniska, bo ogniska są jakeśmy dopiero co widzieli punktami rdzennemi.

Parabola więc, ma tylko jedno ognisko rzeczywiste, które dzieli odcinek między dowolnémi dwoma punktami odpowiedniemi (n. p. P i P_1, ob. wyżej) na dwie części równe, gdyż każde dwa punkta odpowiednie są harmonicznie przedzielone przez punkta rdzenne, z których jeden jest nieskończenie odległy.

Uważmy teraz co następuje:

Niech będą F i F_1 dwa ogniska krzywej 2go stopnia (z których jedno jest nieskończenie odległe — jeżeli krzywa jest parabolą). Każde dwie proste sprzężone SP i SP_1 (fig. 40) są przez te punkta — a więc i przez proste SF i SF_1 — harmonicznie przedzielone i dzielą kąty między temi ostatniemi zawarte na dwie części równe (str. 21). Jeżeli S, jest punktem krzywej, a jedna z prostych SP i SP_1 styczną (druga zaś normalną) w tym punkcie, to oczywiście ta styczna (i normalna) tworzy z prostemi SF i SF_1 kąty równe; — jeżeli zaś S leży zewnątrz krzywej, to SF i SF_1 dzielą na równe części kąty utworzone przez dwie styczne z tego punktu do krzywej poprowadzone, gdyż te dwie styczne są również przez SF i SF_1 harmonicznie przedzielone (str. 64 i 65). — A więc:

Każda styczna krzywej 2go stopnia tworzy kąty równe z prostemi łączącemi punkt styczności z ogniskami.

Jeżeli punkt przecięcia się dwóch stycznych do krzywej 2go stopnia połączymy z ogniskami, to kąt utworzony przez jedną z tych linij łączących, z jedną styczną, jest równy kątowi utworzonemu przez drugą linię z drugą styczną.

Nazwijmy biegunową f, ogniska F, — **kierownicą** krzywej 2go stopnia:

Odcinek dowolnej stycznej, zawarty między punktem styczności a kierownicą f, jest rzucany z ogniska F przez promienie do siebie prostopadłe; — gdyż te promienie są sprzężone, bo biegunową punktu przecięcia stycznej z kierownicą, jest prosta łącząca punkt styczności z ogniskiem F (str. 65).

Jeżeli TA i TB są dowolne dwie styczne krzywej 2go stopnia (fig. 41) a punkt T biegunem prostej AB, to punkt P, przecięcia AB z f, — jest biegunem prostej TF, a TF i PF są prostopadłe, jako sprzężone promienie punktu F; FA i FB są harmonicznie przedzielone przez FT i FP, (gdyż P jest biegunem prostej FT, a więc PACB są czterema punktami harmonicznemi); a zatém FT i FP dzielą kąty utworzone przez FA i FB na dwie części równe; — przeto:

Prosta łącząca rzeczywiste ognisko krzywej 2go stopnia z punktem przecięcia się dwóch dowolnych stycznych, — dzieli na dwie części równe kąt utworzony przez proste łączące ognisko z punktami styczności.

Jeżeli przez A i B poprowadzimy dwie równoległe do FT, przecinające kierownicę w punktach A_1 i B_1, to te punkta będą harmonicznie przedzielone przez P i FT (bo punkta $PA_1C_1B_1$ są rzutami punktów PACB). Proste przeto FT i FP dzielą kąty między FA_1 i FB_1 na dwie części równe, trójkąty więc AA_1F i BB_1F mają po trzy kąty równe i są podobne, a ztąd:

$$FA : AA_1 = FB : BB_1$$

poprowadziwszy z A i B prostopadłe do kierownicy otrzymamy trójkąty podobne AA_1A_2 i BB_1B_2, w których:

$$AA_1 : AA_2 = BB_1 : BB_2$$

z tych dwóch proporcyi wynika:

$$FA : AA_2 = FB : BB_2 = \text{Const.}$$

czyli:

Stosunek odległości dowolnego punktu krzywej 2go stopnia od ogniska i kierownicy, odpowiedniej temu ognisku — jest ilością stałą.

Dla paraboli wartość tego stosunku równa się jedności, gdyż wierzchołek paraboli jest równo oddalony od ogniska i od kierownicy jako przez nie harmonicznie przedzielony od punktu nieskończenie odległego paraboli.

Dla elipsy i hyperboli wartość tego stosunku jest różna od jedności, ale jest stałą dla wszystkich punktów krzywej i to względem każdego z dwóch ognisk i odpowiedniej kierownicy. — Krzywe te są zatém symetryczne względem obu osi. — Jeżeli nazwiemy przez r i r_1, odległości dowolnego punktu A od ognisk, a przez d i d_1 odległości od odpowiednich kierownic, to:

$$\frac{r}{d} = \frac{r_1}{d_1} = \text{Const.}$$

a ztąd:

$$\frac{r \pm r_1}{d \pm d_1} = \frac{r}{d} = \text{Const.}$$

Ponieważ elipsa leży między dwiema (równoległemi) kierownicami, każda zaś połowa hyperboli po jednej stronie obu kierownic, przeto oczywiście, dla elipsy jest $d + d_1$, dla hyperboli zaś $d - d_1$ — ilością stałą (równą odległości między kierownicami), a więc musi być także:

dla elipsy: $r + r_1 = \text{const.}$

dla hyperboli: $r - r_1 = \text{const.}$

co wyraża znajome z geometryi definicyje elipsy i hyperboli, przyczém widoczną jest rzeczą że ta stała suma lub różnica jest równą długości osi głównej — i że oś główna (wielka) elipsy jest dłuższą od drugiej osi (małej).

Spodki prostopadłych spuszczonych z dowolnego ogniska na styczne krzywej 2go stopnia, leżą na okręgu koła którego średnicą jest oś główna.

Aby dowieść tego twierdzenia uważmy najprzód elipsę, której ogniska są F i F_1 i AA_1 dowolna średnica (fig. 42). Czworokąt AFA_1F_1 jest równoległobokiem gdyż jego przekątne przechodząc przez środek elipsy dzielą się wzajemnie na dwie równe części; boki AF i AF_1 tworzą ze styczną w punkcie A kąty równe (str. 117); jeżeli więc N oznacza spodek prostopadłej do tej stycznej z F_1 poprowadzonej, a K punkt przecięcia stycznej z A_1F_1, — to trójkąt AF_1K jest równoramienny, a punkt N dzieli jego podstawę na dwie równe części. A ponieważ punkt M dzieli AA_1 na dwie równe części, przeto MN musi być równoległe do A_1K, a więc $MN = \frac{1}{2}A_1K$; — że zaś $F_1K = AF_1 = A_1F$, więc $A_1K = A_1F\ A_1F_1 \pm$ i $MN = \frac{1}{2}\ (A_1F \pm A_1F_1)$. — A więc odległość punktu N od środka elipsy jest stałą i, jak łatwo spostrzedz, równą połowie osi głównej, — co należało dowieść.

Dowodzenie dla hyperboli jest podobne jak powyższe.

Dla paraboli, koło którego średnicą jest oś główna, zamienia się na styczną w wierzchołku poprowadzoną. — Twierdzenie więc powyższe wyrazi się dokładniej:

Spodki prostopadłych poprowadzonych z ogniska paraboli do jej stycznych, leżą na stycznej w wierzchołku.

Aby tego dowieść uważmy punkt N (fig. 43) przecięcia dowolnej stycznej paraboli ze styczną w wierzchołku; — poprowadziwszy z tego punktu równoległą do osi głównej i połączywszy go z ogniskiem F, otrzymamy (str. 117.) kąty równe: FNA i F_1NS — (gdyż NF_1 łączy N z drugiem, nieskończenie odległem ogniskiem paraboli) — a że kąt F_1NS jest kątem prostym, więc kąt FNA jest także prostym, czyli że N jest spodkiem prostopadłej z F na styczną spuszczonej.

Na podstawie powyższych praw, możemy wyznaczać ogniska krzywych 2go stopnia. — Dla elipsy i hyperboli możemy także następującym sposobem wyznaczyć ogniska:

Wykreśla się dwie styczne w wierzchołkach i trzecią styczną dowolną, która przecina dwie pierwsze w punktach P i Q, rzucane z każdego punktu osi głównej przez dwa promienie sprzężone (str. 68). Aby znaleźć ogniska, (w których te promienie są do siebie prostopadłe), zakreślamy koło, którego średnicą jest PQ, i którego punkta przecięcia z osią główną, dadzą żądane ogniska.

Jeżeli dwie dowolne styczne TA i TB, krzywej 2go stopnia, przecinają się z trzecią styczną w punktach A_1 i B_1 (fig. 44) to promienie rzucające z ogniska — punkta styczności i punkta przecięcia A_1 i B_1 tworzą kąty (str. 117):

$$B_1FC = BFB_1 = \tfrac{1}{2}\ BFC,$$
$$CFA_1 = A_1FA = \tfrac{1}{2}\ CFA, \quad \text{przeto:}$$
$$B_1FC + CFA_1 = \tfrac{1}{2}\ (BFC + CFA) \quad \text{czyli:}$$
$$B_1FA_1 = BFT = TFA.$$

Jeżeli więc dwie pierwsze styczne pozostają stałe, a trzecia toczy się po krzywej, to kąt rzucający z ogniska odcinek tej stycznej zawarty między punktami jej przecięcia się ze stycznemi stałemi jest stały i niezmienny; ztąd wynika:

Zestawy proste powstające przez przecięcie wszystkich stycznych krzywej drugiego stopnia przez dowolne dwie styczne, są rzucane z ogniska krzywej przez dwie jednakowe i jednotoczne, rzutowo zespolone roztocze promieni.

Prawo to, stosuje się także do paraboli i nieskończenie odległego jej ogniska, oraz do koła i jego środka

Krzywa 2go stopnia jest przeto wyznaczoną, skoro dane są trzy styczne i jedno ognisko tej krzywej.

Zagadnienia 2go stopnia.

Zagadnienia które mają zwykle dwa rozwiązania i które trzeba zwykle rozwiązywać przy pomocy zestawów 2go stopnia, nazywają się zagadnieniami 2go stopnia.

Do takich zagadnień należą między innemi:

„Znaleźć punkta odpowiedniowspólne dwóch rzutowych zestawów prostych, leżących w jednej linii prostej.“

„Znaleźć pierwiastki rdzenne zestawu dwuwtórnego“ i t p.

Zagadnienia w tym rodzaju dają się sprowadzić do następującego:

„Znaleźć punkta odpowiedniowspólne dwóch rzutowych krzywych 2go stopnia k i k_1, leżących jedna na drugiej.“

To ostatnie zagadnienie rozwiązujemy w następujący sposób:

Obie krzywe mogą być dane przez trzy pary punktów odpowiednich t. j. przez punkta A, B, C, krzywej k, i A_1, B_1, C_1, krzywej k_1 (fig. 45).

Rzucając A_1, B_1, C_1, z punktu A, — a A, B, C, z punktu A_1, wyznaczymy dwie rzutowo zespolone roztocze promieni (rzucające obie rzutowe krzywe k i k_1), — a do tego perspektywiczne, gdyż promień AA_1 jest odpowiedniowspólny. Obie więc roztocze są rzutniami zestawu prostego, przechodzącego przez punkta przecięcia promieni odpowiednich: AB_1 z A_1B i AC_1 z A_1C, t. j. zestawu u. Oczywistą jest rzeczą, że punkta przecięcia prostej u z krzywą są punktami odpowiedniowspólnemi krzywych k i k_1. Tych punktów jest dwa, jeden, albo niema żadnego, gdy prosta u przecina krzywą, jest do niej styczną lub niema z nią żadnego punktu wspólnego.

Na mocy prawa Pascala, w prostej u leży także przecięcie promieni BC_1 i B_1C (jako trzeciej pary boków przeciwległych sześciokąta $AB_1CA_1BC_1$).

Tęż samą zatem prostą u możemy otrzymać rzucając k i k_1 z punktów B i B_1 lub w ogóle, z dowolnych dwóch punktów odpowiednich. Jeżeli krzywe k i k_1 leżą dwuwtórnie, to u jest osią dwuwtórności a punkta jej przecięcia z krzywą, — punktami rdzennemi. W tym przypadku, potrzebujemy jak wiadomo, znać tylko dwie pary punktów odpowiednich A, A_1 i B, B_1 — aby wyznaczyć prostą u, — gdyż poprowadziwszy AA_1 i BB_1 a z punktu ich przecięcia styczne do krzywej, otrzymamy punkta rdzenne przez które przechodzi u; z resztą u przechodzi przez punkta przecięcia AB_1 z A_1B i AB z A_1B_1.

Do powyższego zagadnienia dadzą się sprowadzić różne przypadki ogólnego zagadnienia:

„Znaleźć pierwiastki odpowiedniowspólne dwóch rzutowych zestawów pierwotnych, leżących jeden na drugim“.

I tak: Jeżeli dane są dwie powierzchnie stożkowe albo dwie roztocze skośne, to przeciąwszy je płaszczyzną możemy zawsze otrzymać dwie (rzutowe) krzywe 2go stopnia, z któremi postępujemy jak powyżej, — a znalazłszy punkta odpowiedniowspólne tych ostatnich, otrzymamy zarazem szukane pierwiastki pierwszych. — Jeżeli dane są roztocze promieni 2go stopnia, to bierzemy pod uwagę krzywe 2go stopnia przez nie otoczone; — jeżeli są dane dwie współśrodkowe roztocze promieni, to przecinając je krzywą 2go stopnia przechodzącą przez ich wspólny środek, otrzymamy w tej krzywej pary punktów, należących jak wyżej, do dwóch rzutowych krzywych k i k_1, przez których punkta odpowiedniowspólne przechodzą promienie odpowiedniowspólne danych roztoczy.

Jeżeli dane są dwa zestawy proste, to sprowadzamy ten przypadek do poprzedzającego, rzucając te zestawy z dowolnego punktu zewnątrz nich leżącego; — tak n. p. p i p_1 (fig. 46) są dane dwa zestawy proste; — obieramy dowolny punkt S — i wykreślamy w płaszczyźnie pS, przechodzącą przez niego dowolną krzywą 2go stopnia (n. p. koło); — na tę krzywą rzucamy dowolne trzy pary punktów odpowiednich, zestawów p i p_1, n. p. punkta A, B, C i A_1, B_1, C_1 i otrzymujemy punkta A', B', C' i A'_1, B'_1, C'_1, które uważamy za należące do dwóch rzutowych krzywych k i k_1; — poprowadziwszy przez punkta przecięcia A_1B z B_1A i C_1B z B_1C prostą u otrzymamy w punktach przecięcia się tej prostej z krzywą, punkta odpowiedniowspólne krzywych k i k_1; — promienie rzucające te punkta z punktu S, wyznaczają w prostej p punkta odpowiedniowspólne zestawów p i p_1; — (gdyby prosta u była styczną do krzywej k lub gdyby nie miała z nią żadnego punktu wspólnego, to zestawy p i p_1 miałyby jeden lub niemiałyby żadnego punktu odpowiedniowspólnego.

Na podstawie poprzedzających, możemy rozwiązywać następujące zagadnienia:

Znaleźć punkta wspólne danej prostej u, z krzywą 2go stopnia której tylko 5 punktów A, B, C, D, E, jest wiadomych.	Poprowadzić styczne z danego punktu U, do krzywej 2go stopnia, której 5 innych stycznych jest danych.

Roztocze promieni A(CDE...) i B(CDE...) są rzutowo zespolone; prosta u przecina te roztocze w dwóch rzutowo zespolonych zestawach, których punkta odpowiedniowspólne są punktami wspólnemi danej prostej z krzywą; — dowolne dwie z pięciu danych stycznych (zagadn. z prawej strony), przecinają trzy pozostałe w trzech parach punktów odpowiednich, należących do dwóch zestawów rzutowych, — te punkta rzucane z danego punktu U dają trzy pary promieni odpowiednich dwóch rzutowych roztoczy, których promienie odpowiedniowspólne są stycznemi do krzywej.

Przyjmując w zagadnieniu z lewej strony, że prosta *u* jest nieskończenie odległą, możemy rozwiązać następujące zagadnienie:

„Rozpoznać, czy dana przez pięć punktów krzywa 2go st. jest hyperbolą, parabolą lub elipsą“ (str. 54).

„W płaszczyznie, dane są dwa *n*-kąty niezupełne, — wykreślić trzeci *n* kąt opisany na jednym a wpisany w drugi z danych *n*-kątów. Albo, inaczej mówiąc: wykreślić *n*-kąt któregoby wierzchołki leżały na *n* danych prostych: u_1, u_2, $u_3 \ldots u_n$, a boki przechodziły przez *n* danych punktów: R_1, R_2, R_3, $\ldots R_n$.“

Trzy dowolne punkta prostej u_1 rzucamy z R_1 na u_2, — otrzymane rzuty, rzucamy z punktu R_2 na u_3 i t. d. aż nareszcie otrzymamy w prostej u_1, oprócz obranych, trzy punkta powstałe przez kolejne ich odrzucanie, — czyli trzy pary punktów odpowiednich, dwóch rzutowych zestawów prostych; każdy punkt odpowiedniowspólny tych zestawów jest jednym z wierzchołków szukanego *n* kąta — który następnie łatwo jest wykreślić.

W ogóle, zagadnienie to ma najwięcej dwa rozwiązania, lecz może się zdarzyć wypadek, że powyższe dwa zestawy proste (u_1) mają więcej jak dwa punkta odpowiedniowspólne, ale wtedy mają wszystkie punkta odpowiednio wspólne i dają nieskończenie wiele rozwiązań.

Należy tu zauważyć, że w powyższem zagadnieniu, *n*-kąty mogą nie być płaskie ale owszem mogą to być tak zwane s p a c z o n e *n*-kąty, byleby tylko wspomniane rzuty były możliwe, t. j. byleby u_1 i u_2 leżały w jednej płaszczyźnie z R_1, — u_2 i u_3 w jednej płaszczyźnie z R_2 i t. d.

„Znaleźć prostą przecinającą 4 proste dane *a*, *b*, *c*, *d*, z których żadne dwie nie leżą w jednej płaszczyźnie.“

Obrawszy na jednej z danych prostych, n. p na *c*, trzy dowolne punkta, rzucamy je z prostych *a* i *b*; — otrzymamy

3 pary płaszczyzn odpowiednich, rzutowych roztoczy *a* i *b*; te płaszczyzny przecinają prostą *d* w 3ch parach punktów odpowiednich, dwóch rzutowych zestawów prostych (*d*); przez każdy punkt odpowiedniowspólny tych dwóch zestawów przechodzi jedna prosta będąca przecięciem dwóch płaszczyzn odpowiednich roztoczy *a* i *b* t. j. płaszczyzn rzucających jeden punkt prostej *c*, a więc prosta przecinająca *a*, *b*, *c* i *d*.

Gdyby 4 dane proste należały do jednej roztoczy skośnej, to zagadnienie miałoby nieskończenie wiele rozwiązań, zwykle jednak ma najwięcej dwa rozwiązania.

Za pomocą poprzedzającego, możemy rozwiązać następujące zagadnienie:

„Mając dane 3 promienie jednej roztoczy skośnej, znaleźć punkta przecięcia powierzchni przez tę roztocz utworzonej z dowolną prostą daną *d*.“

Wyznaczywszy bowiem proste przecinające powyższe cztery proste, otrzymamy w punktach ich przecięcia z prostą *d*, punkta żądane.

Do najważniejszych zagadnień 2go stopnia należy następujące:

„Dane są dwa zestawy dwuwtórne (każdy złożony z dwóch dwuwtórnie zespolonych), leżące jeden na drugim, — wynaleźć pierwiastki które tak w jednym jak w drugim zestawie tworzą jedną parę dwuwtórną“.

Każde zagadnienie tego rodzaju możemy sprowadzić do zagadnienia w którém występują dwie krzywe 2go stopnia, — rozwiążemy więc ten ostatni tylko przypadek. Niech więc będą X, X_1, i Y, Y_1, (fig. 47), dwie pary należące do jednej krzywej, a A, A_1 i B, B_1 pary należące do drugiej krzywej dwuwtórnej. — Wyznaczywszy środki dwuwtórności U i W, poprowadźmy prostą UW, a punkta Z i Z_1 przecięcia się jej z krzywą będą tworzyły jedną parę tak w jednej jak w drugiej krzywej. — Jeżeli prosta UW jest styczną do krzywej, to zamiast szukanej pary otrzymujemy punkt rdzenny; jeżeli UW niema z krzywą żadnego punktu wspólnego, to widać że krzywe nie maią żadnej wspólnej pary. Ostatnie dwa wypadki mogą oczywiście nastąpić tylko wtedy, jeżeli oba środki dwuwtórności leżą zewnątrz krzywej, t. j. gdy obie krzywe mają po dwa punkta rdzenne. — Punkta rdzenne jednej krzywej muszą być przez tąkież punkta drugiej krzywej przedzielone, gdyż biegunowe punktów U i W wyznaczające te punkta, muszą się przecinać wewnątrz krzywej (w biegunie prostej UW).

Powyższe uwagi stosują się i do innych zestawów pierwotnych; — możemy więc powiedzieć ogólnie:

Jeżeli dwa dwuwtórne zestawy pierwotne leżą jeden na drugim, to muszą mieć jedną parą wspólną, chyba że każdy z nich jest różnotoczny (ob. str. 104) t. j. mający dwa pierwiastki rdzenne; — w tym ostatnim przypadku mogą mieć jedną parę, albo jeden pierwiastek rdzenny, albo nie mają ani jednego ani drugiego.

To nam posłuży do natępujących uwag geometrycznych:

Jeżeli mamy dowolną dwuwtórną roztocz prom. 1go st, to możemy zawsze wykreślić współśrodkową roztocz prostokątną (dwuwtórną) (ob. str. 115) leżącą w tejże płaszczyźnie. Ta druga roztocz (jako prostokątna) nie może mieć promieni rdzennych, musi więc mieć z pierwszą, — jedną parę wspólną, a więc ta druga musi mieć jedną parę promieni prostopadłych, czyli:

Każda dwuwtórna roztocz prom. 1go stopnia ma dwa promienie odpowiednie prostopadłe do siebie.

To dowodzi, że hyperbola i elipsa muszą mieć po dwie średnice do siebie prostopadłe czyli osie (str. 72).

Przy tej sposobności, rozwiążemy tu zagadnienie geometryczne:

„Mając dane dwie pary średnic sprzężonych krzywej 2go stopnia, wyznaczyć jej osie."

Wykreślamy dowolne koło (fig. 48), przechodzące przez środek krzywej S, a przecinające jedną parę danych średnic sprzężonych w punktach A i A_1, — drugą parę w punktach B i B_1. Te cztery punkta stanowią dwie pary zestawu dwuwtórnego w którym koło przecina roztocz utworzoną przez wszystkie pary średnic sprzężonych danej krzywej; środek dwuwtórności leży na przecięciu AA_1 z BB_1, w punkcie U. — Połączywszy U ze środkiem koła (C) otrzymamy dwa punkta odpowiednie X i X_1 rzucane z S przez dwie średnice sprzężone, które oczywiście są do siebie prostopadłe a więc są szukanemi osiami.

Jeżeli U leży zewnątrz koła, to to koło ma dwa punkta rdzenne M i N, przedzielające harmonicznie każde dwa punkta jednej pary dwuwtórnej; — promienie rzucające z S te dwa punkta M i N są harmonicznie przedzielone przez każdą parę średnic sprzężonych danej krzywej, a więc ta dana krzywa jest w tym razie hyperbolą, a proste SM i SN, — jej asymptotami (str. 72).

„W dwuwtórnej roztoczy promieni 1go stopnia, wyznaczyć parę promieni harmonicznie przedzielonych przez dwa dane punkta tejże płaszczyzny.“

(Zagadnienie to możemy rozwiązać wtedy, gdy dwa dane punkta M i N, nie leżą w jednej prostej ze środkiem R danej roztoczy i gdy żaden z promieni rdzennych tej roztoczy nie przechodzi przez punkt M lub N).

Wyznaczywszy dwuwtórny zestaw prosty, którego punktami rdzennemi są punkta M i N, rzucamy go ze środka S, para wspólna otrzymanej w ten sposób roztoczy i roztoczy danej jest parą szukaną

Zagadnienie powyższe, możemy rozciągnąć i na inne zestawy pierwotne; n. p. zamiast roztoczy S, może być dany dwuwtórny zestaw prosty leżący w prostej MN; a gdy przytém jeden z punktów M i N, — n. p. N jest nieskończenie odległy, to zagadnienie brzmi:

„W danym zestawie prostym dwuwtórnym, wyznaczyć parę punktów równoodległych od danego w tejże prostej punktu M.“

Dane są w jednej płaszczyźnie: trójkąt ABC i dwówtórna roztocz promieni F, której żaden promień rdzenny nie przechodzi przez żaden z wierzchoł-

Dane są w jednej płaszczyźnie: trójkąt i dwuwtórny zestaw prosty, którego żaden punkt rdzenny nie leży w żadnym boku trójkąta, — wpisać w ten ków trójkąta, opisać na tym trójkącie taką krzywą 2go st., aby względem niej każde dwa promienie odpowiednie roztoczy, były z sobą sprzężone

trójkąt taką krzywą 2go st., aby względem niej każde dwa punkta odpowiednie zestawu prostego, były z sobą sprzężone.

Zagadnienie z lewéj strony możemy rozwiązać, jeżeli żaden z wierzchołków trójkąta nie jest jednocześnie środkiem F, t. j. gdy przynajmniej dwa boki trójkąta n. p. AB i AC, przez ten punkt nie przechodzą (fig. 49); w każdym z tych boków, musi istnieć przynajmniej jeden punkt, którego biegunowa względem szukanej krzywej (jeżeli ta istnieje), przechodzi przez punkt F, a że ten punkt musi być przez krzywą od biegunowej harmonicznie przedzielony — i ponieważ każde dwa promienie odpowiednie roztoczy F są sprzężone względem szukanej krzywej, — przeto wyznaczymy go następującym sposobem: Wyznaczamy dwa promienie odpowiednie p i p_1, roztoczy F, harmonicznie przedzielone przez A i B, a dwa drugie q i q_1, harmonicznie przedzielone przez A i C; (jeżeli się okaże że te dwie pary promieni nie istnieją (ob. wyżej) co następuje wtedy gdy roztocz F ma dwa promienie rdzenne przez A i B albo A i C przedzielone (str. 125), to nie istnieje również szukana krzywa) Oznaczywszy przez P i P_1 punkta przecięcia się AB z p i p_1, — a przez Q i Q_1 punkta przecięcia się AC z q i q_1, musimy przypuścić że:

albo: P i Q są biegunami p_1 i q_1,
albo: P i Q_1 „ „ p_1 i q,
albo: P_1 i Q „ „ p i q_1,
albo: P_1 i Q_1 „ „ p i q.

Każde z tych czterech przypuszczeń prowadzi do jednego rozwiązania, powyższego zagadnienia.

Przyjąwszy pierwsze przypuszczenie jako możliwe, szukamy na prostej PC punktu C', harmonicznie przedzielonego od C, przez P i p_1, a na prostej QB — punktu B', harmonicznie przedzielonego od B, przez Q i q_1. — Krzywa 2go st. wyznaczona przez punkta ABCB'C' jest krzywą szukaną, gdyż jest opisaną na danym trójkącie a dwie pary punktów A, B i C, C' są harmonicznie przedzielone przez P i p_1, więc P jest biegunem p_1, a promień p jest sprzężony z p_1; tak samo promień q jest zprzężony z q_1, i każde dwa promienie odpowiednie roztoczy F są względem tej krzywej z sobą sprzężone.

Jeżeli roztocz F ma dwa promienie rdzenne, które muszą być styczne do wyznaczonej krzywej, to zagadnienie powyższe możemy wyrazić w następujący sposób:

Na danym trójkącie, opisać krzywą 2go stopnia styczną do dwóch prostych danych w tejże płaszczyźnie.	W dany trójkąt wpisać krzywą 2go stopnia przechodzącą przez dwa punkta dane w tejże płaszczyźnie *).

Powyższe wykreślenia okazują, iż to zagadnienie ma tylko wtedy 4 rozwiązania, jeżeli (z lewej strony) dwie dane proste nie przechodzą przez wierzchołki, — lub (z prawej strony) dwa dane punkta nie leżą na bokach danego trójkąta; — inaczéj, zagadnienie niema żadnego rozwiązania.

Jeżeli roztocz F niema promieni rdzennych, to poprzedzające zagadnienie ma 4 rozwiązania; tak n. p. jeżeli roztocz F jest prostokątną, — a więc F ogniskiem krzywej to to zagadnienie zamienia się na następujące:

„Wyznaczyć 4 krzywe 2go stopnia, opisane na danym trójkącie i mające punkt dany za ognisko.“

Na zakończenie, rozwiążemy tu jeszcze jedno zagadnienie pokrewne poprzedzającym:

Dane są w jednéj płaszczyźnie: dwuwtórny zestaw prosty u, i trójkąt ABC, którego żaden bok nie przechodzi przez punkt rdzenny zestawu u i którego żaden wierzchołek nie leży na prostej u, — opisać na	Dane są w jednéj płaszczyźnie: dwuwtórna roztocz promieni R i trójkąt, którego żaden wierzchołek nie leży w promieniu rdzennym roztoczy i którego żaden bok nie przechodzi przez środek R, — wpisać w ten

*) Tak to, jak i poprzedzające zagadnienie z prawej strony może być łatwo rozwiązane na podstawie prawa odwrotności.

tym trójkącie taką krzywą 2go stopnia, aby względem niej każde dwa punkta odpowiednie zestawu u były z sobą sprzężone.

trójkąt taką krzywą 2go stopnia, aby względem niej każde dwa promienie odpowiednie roztoczy R były z sobą sprzężone.

Niech będą punkta K i M, (fig. 50) w których AB i BC przecinają u; — K_1 i M_1 ich punkta odpowiednie; K_2, punkt prostej AB, harmonicznie przedzielony od K przez punkta A i B (należące do szukanej krzywej); M_2, punkt prostej BC, harmonicznie przedzielony od M_1 przez punkta B i C (szukanej krzywej). — Prosta K_1K_2 jest względem szukanej krzywej biegunową punktu K, gdyż K_1 i K_2 są sprzężone z K; tak samo M_1 M_1 jest biegunową punktu M. — Jeżeli więc C' jest punktem harmonicznie przedzielonym od C przez K i K_1K_2, a A' punkt harmonicznie przedzielony od A przez M i M_1M_2, to punkta ABCA'C' wyznaczają szukaną krzywą.

Jeżeli zestaw u ma dwa punkta rdzenne, to przez nie musi przechodzić szukana krzywa a więc wyznaczywszy te punkta mamy krzywą odrazu przez 5 punktów wyznaczoną.

W każdym razie, zagadnienie to może mieć tylko jedno rozwiązanie, nie należy więc właściwie do zagadnień 2go stopnia.

SPIS RZECZY.

Ważniejsze pomyłki w druku.

Na str.	26	wiersz	20	od góry	zamiast	*wspólny*	ma być	*zespolony*
„ „	29	„	10	od dołu	„	U_2	„ „	u_2
„ „	60	„	1	od góry	„	e	„ „	c
„ „	89	„	7	od dołu	„	*niemniéj*	„ „	*najmniéj*
„ „	94	„	3	od góry	„	*punktu ;*	„ „	*punktu,*
„ „	107	„	18	od góry	„	*zoztoczy*	„ „	*roztoczy*
„ „	110	„	2	od dołu	„	*odwrotowego*	„ „	*odwrotnego*
„ „	114	„	2	od góry	„	*każdym*	„ „	*każdem*
„ „	115	„	9	od dołu	„	PA	„ „	P_1A
„ „	122	„	16	od góry	„	A_1BB_1A C_1BB_1C	„ „	$A_1'B'B_1'A'$ $C_1'B'B_1'C'$

FIG. 1.

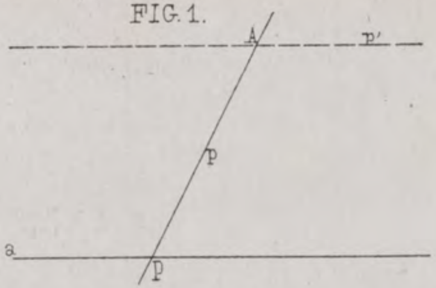


FIG. 2.

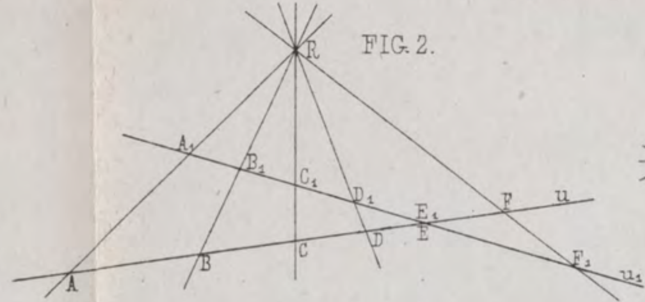


FIG. 6.

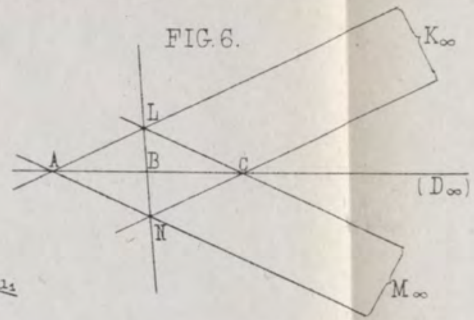


FIG. 11.

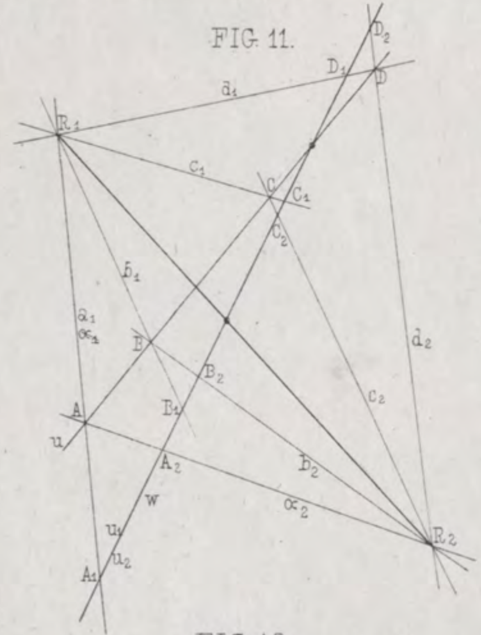


FIG. 7.

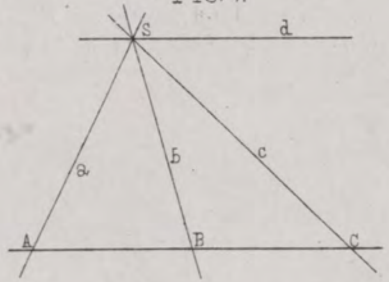


FIG. 8.

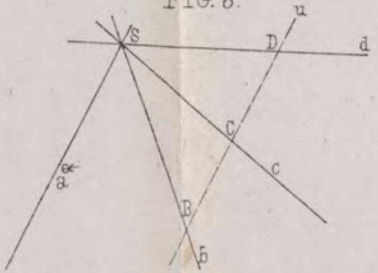


FIG. 9.

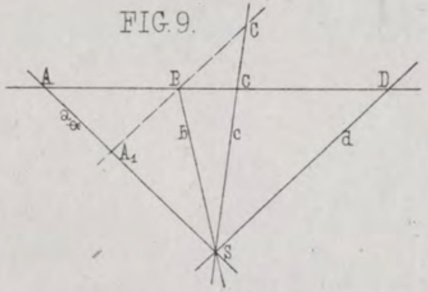


FIG. 10.

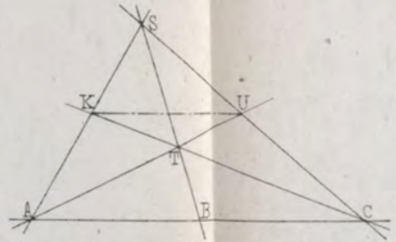


FIG. 3.

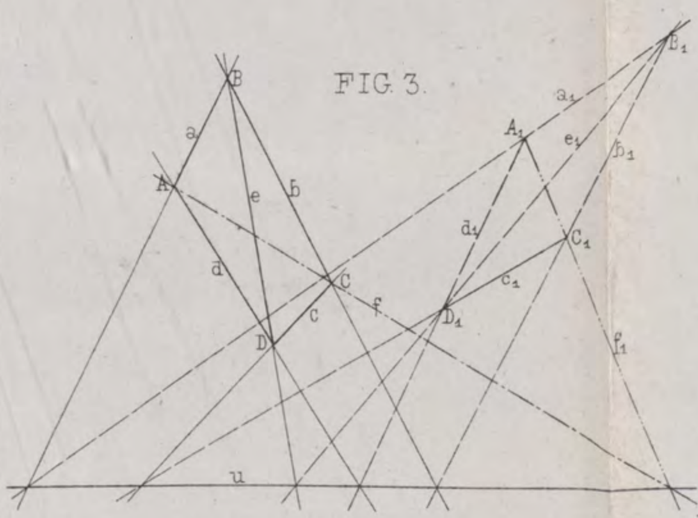


FIG. 4.

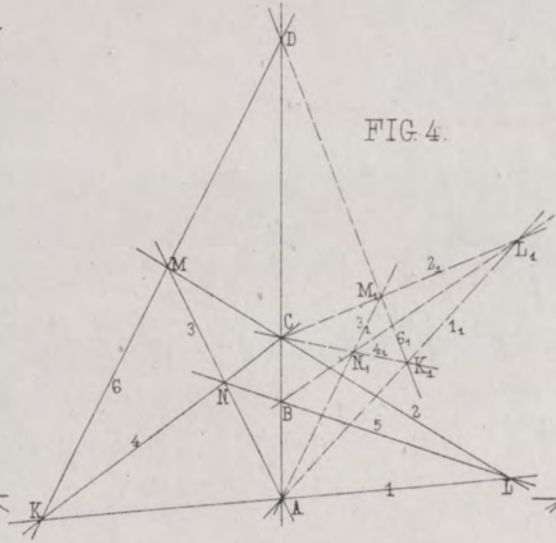


FIG. 5.

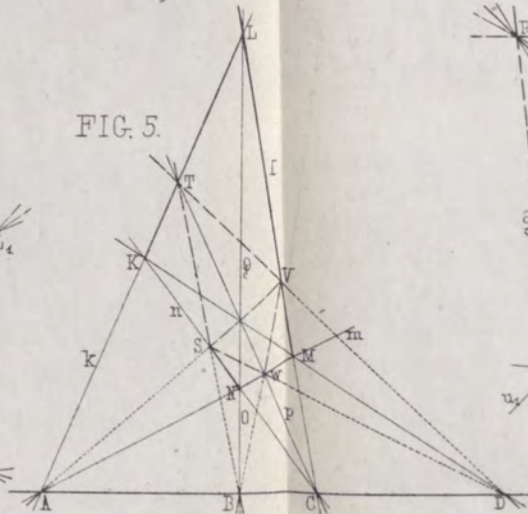
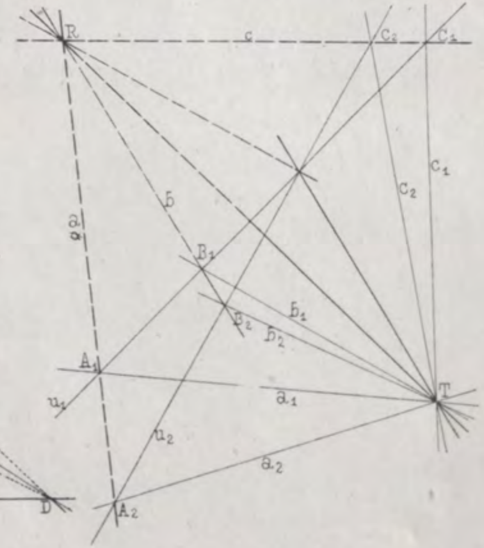


FIG. 12.



lit. Tow. przemysł. Lwów

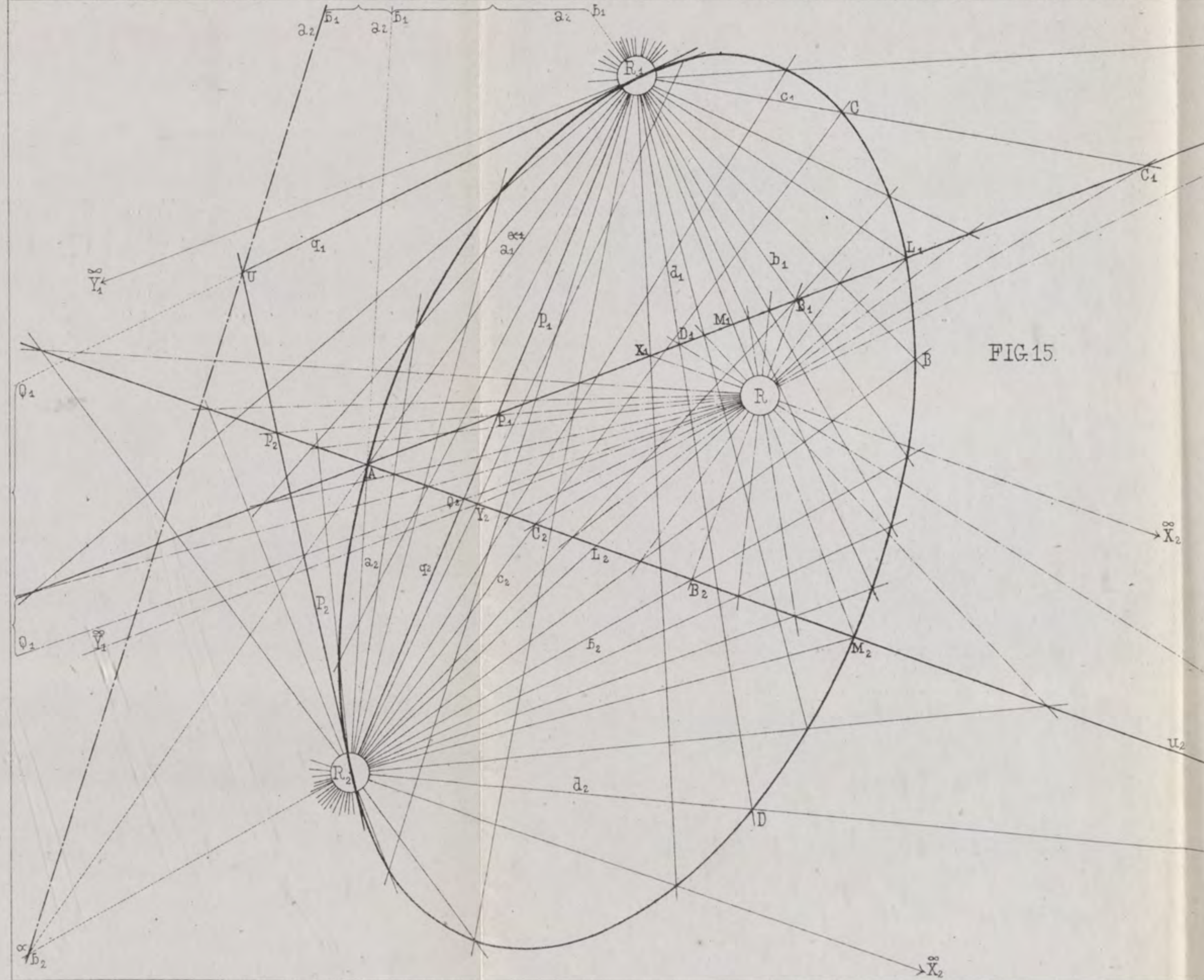


FIG. 15.

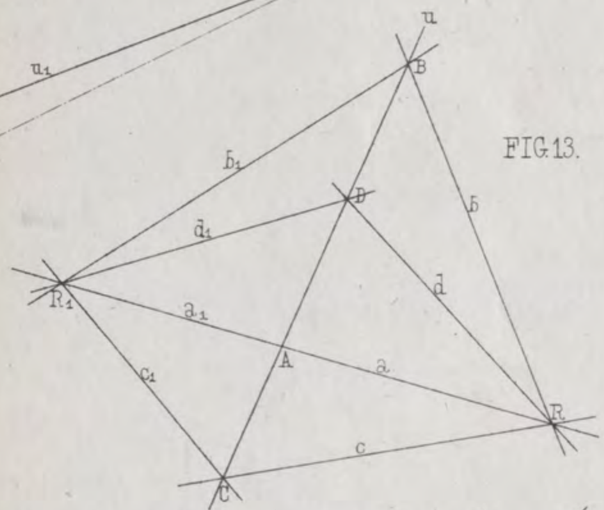


FIG. 13.

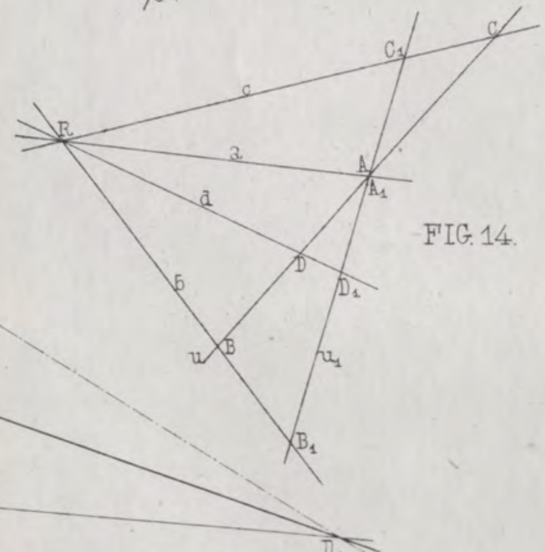


FIG. 14.

lit. Tow. przemysł. Lwów

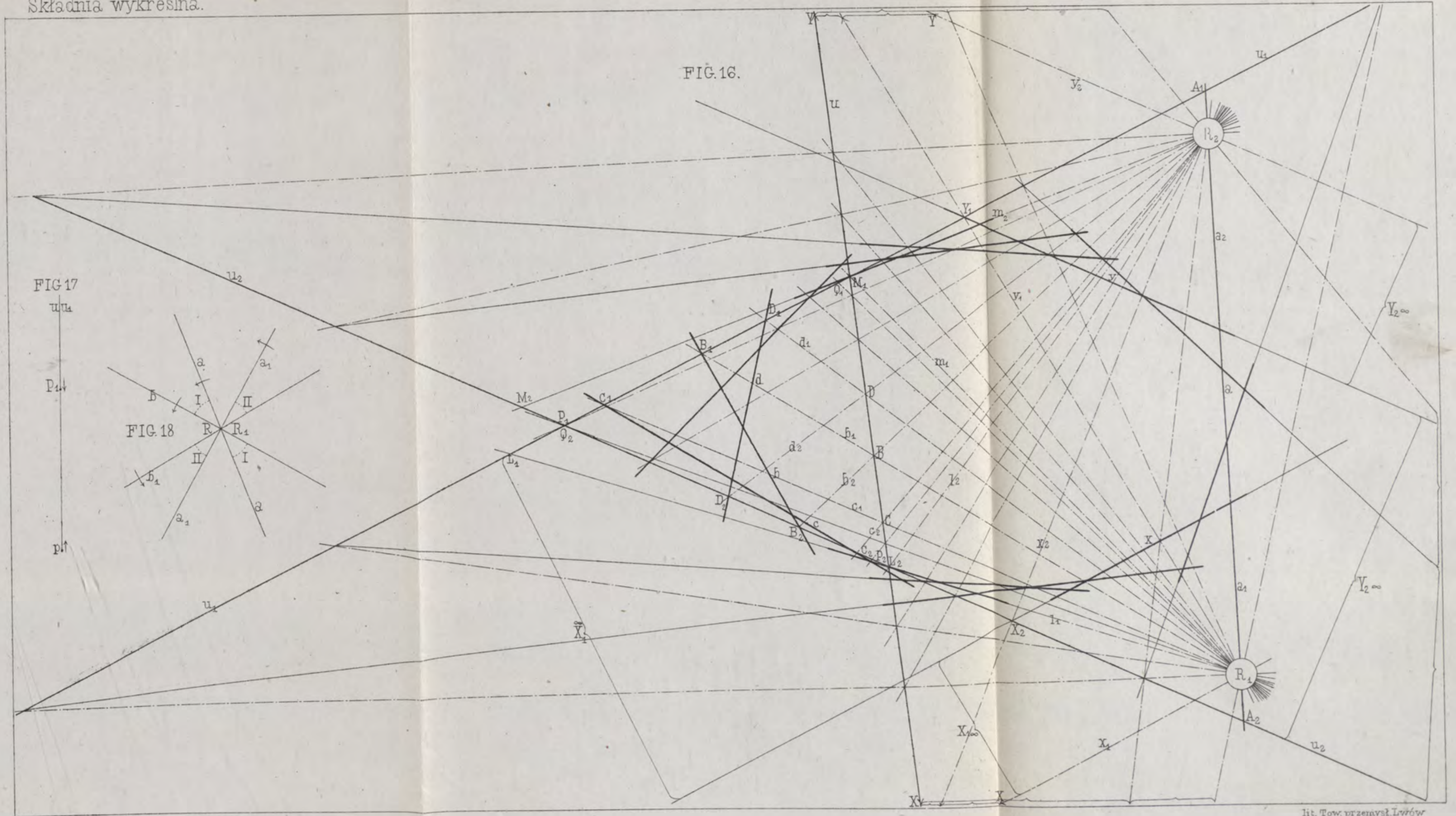


FIG.16.
FIG 17
FIG.18
u
u₁
u₂
R₁
R₂
A₁
A₂
a
a₁
a₂
b
b₁
b₂
c
c₁
c₂
d
d₁
d₂
m₁
m₂
M₁
M₂
X
X₁
X₂
Y
Y₁
Y₂
B
B₁
B₂
C
D
D₁
D₂
I
II
R
p
p₁

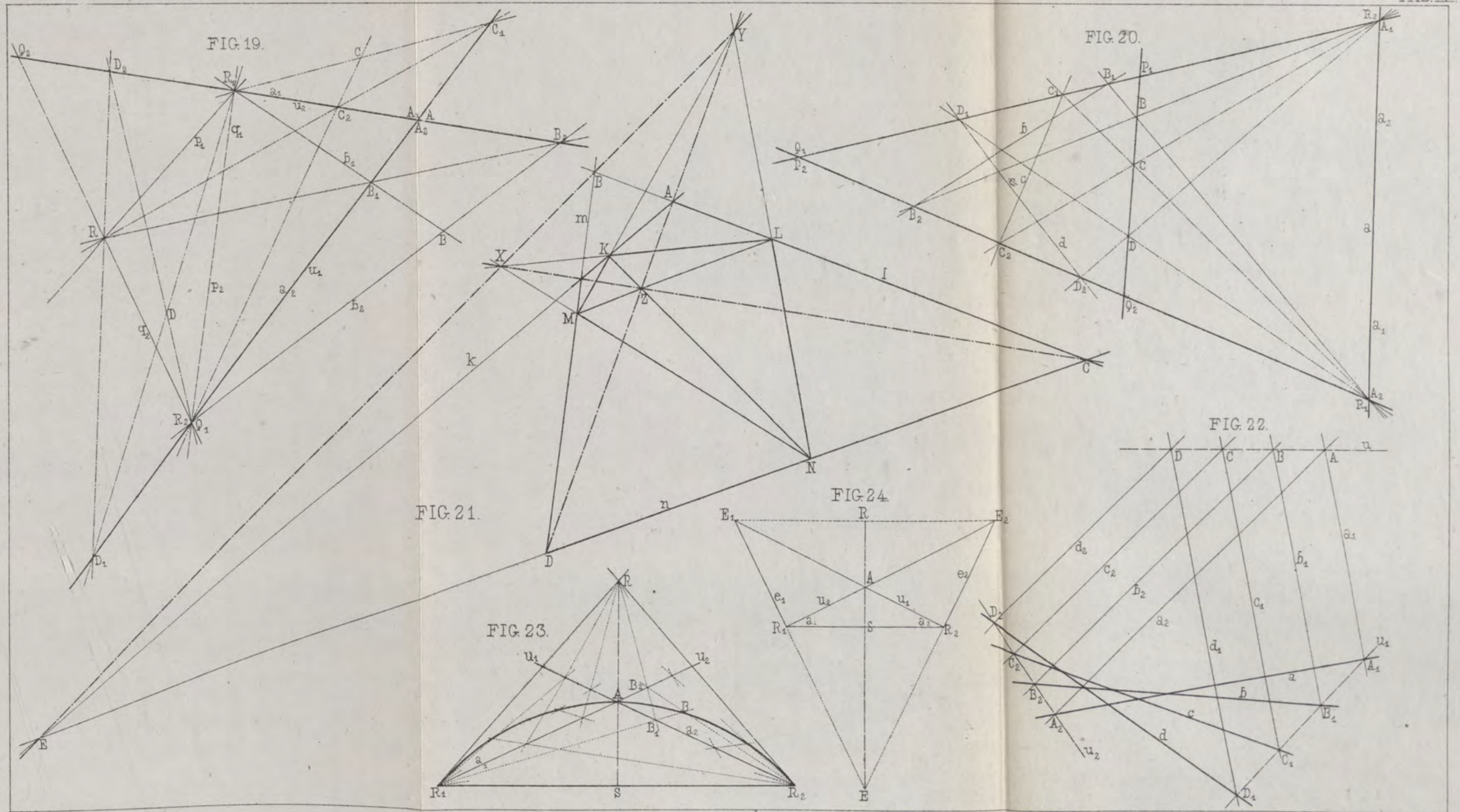


FIG. 19.

FIG. 20.

FIG. 21.

FIG. 22.

FIG. 23.

FIG. 24.

lit. Tow. przemysł. Lwów

FIG.25.

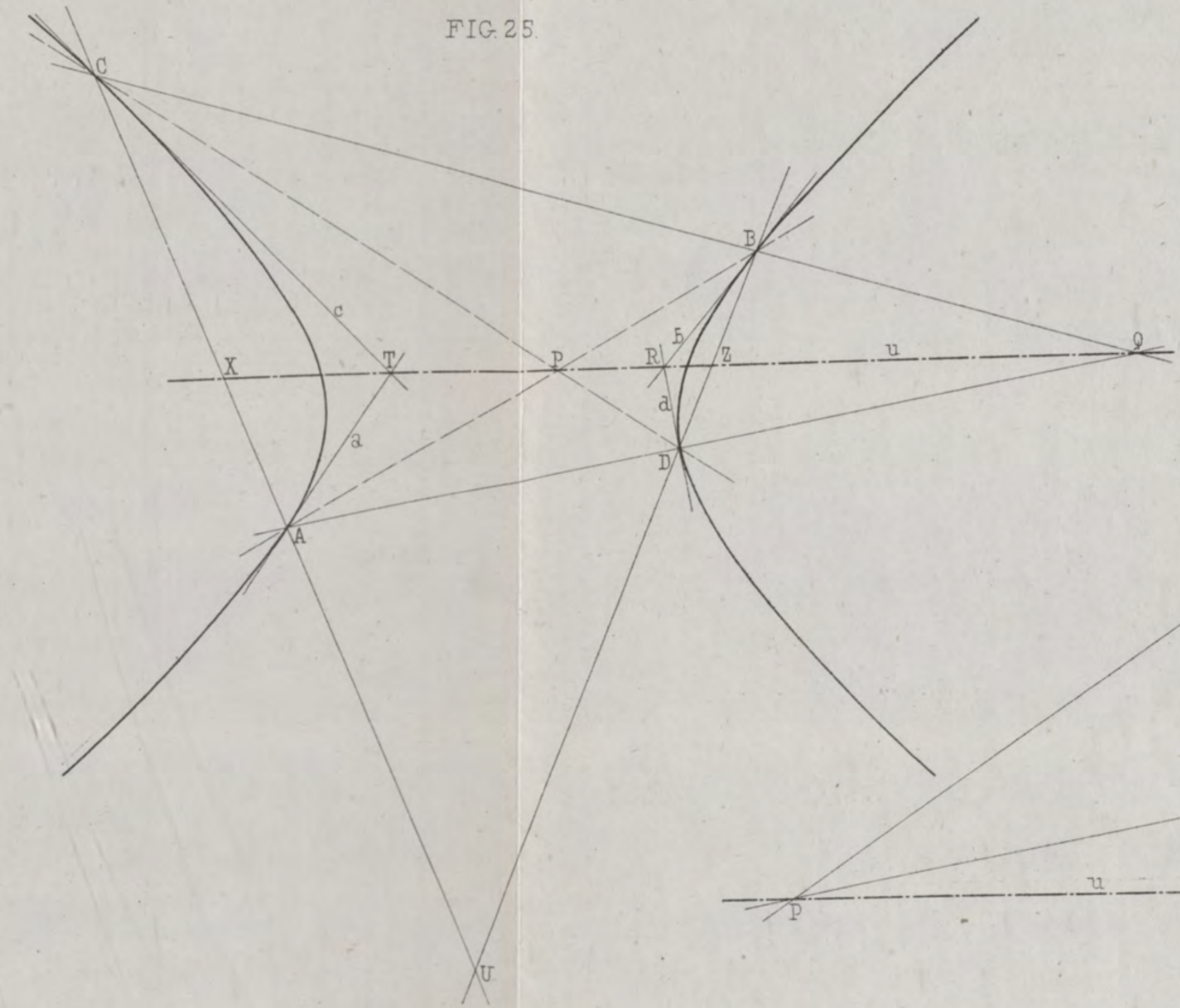
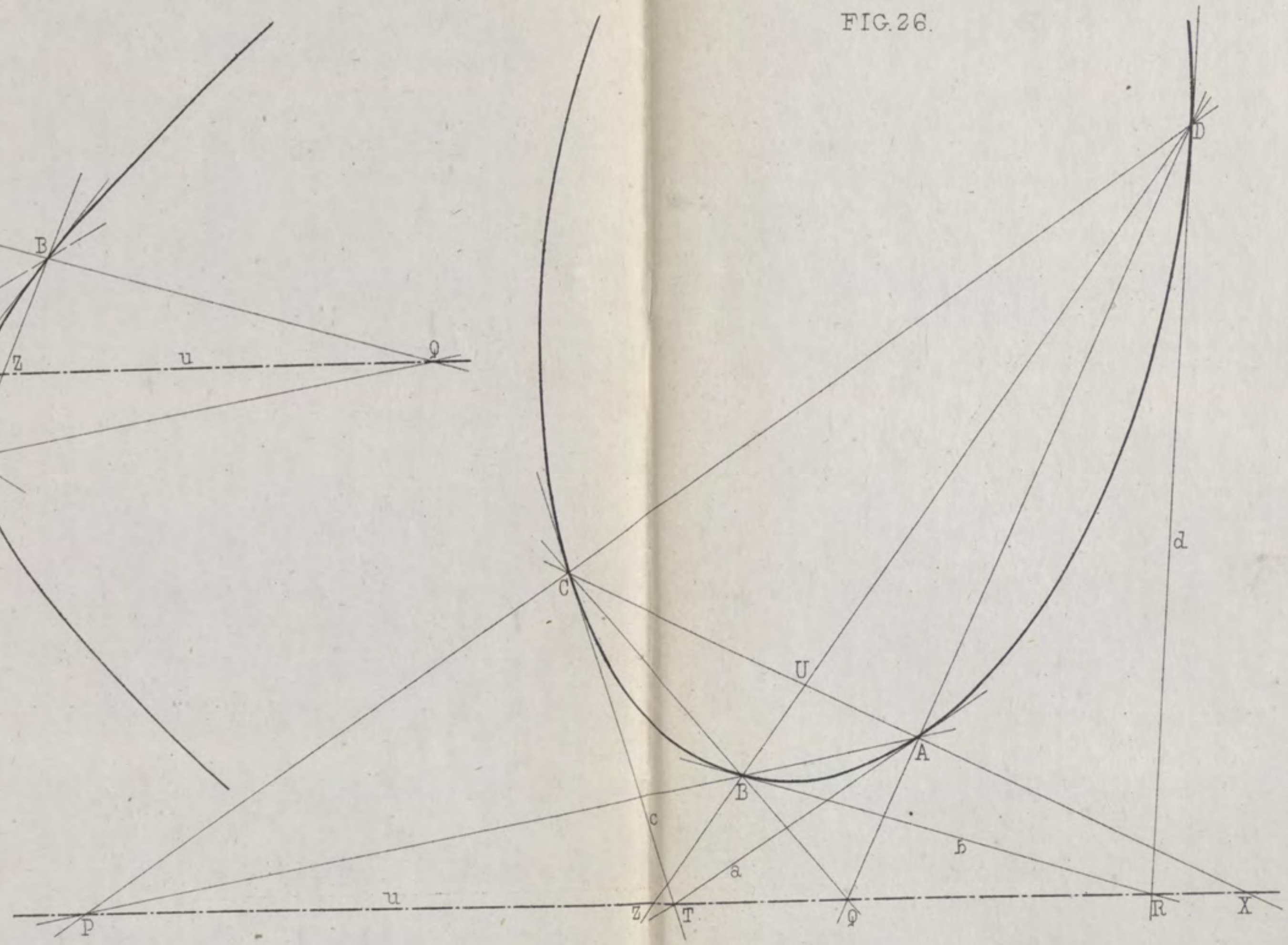
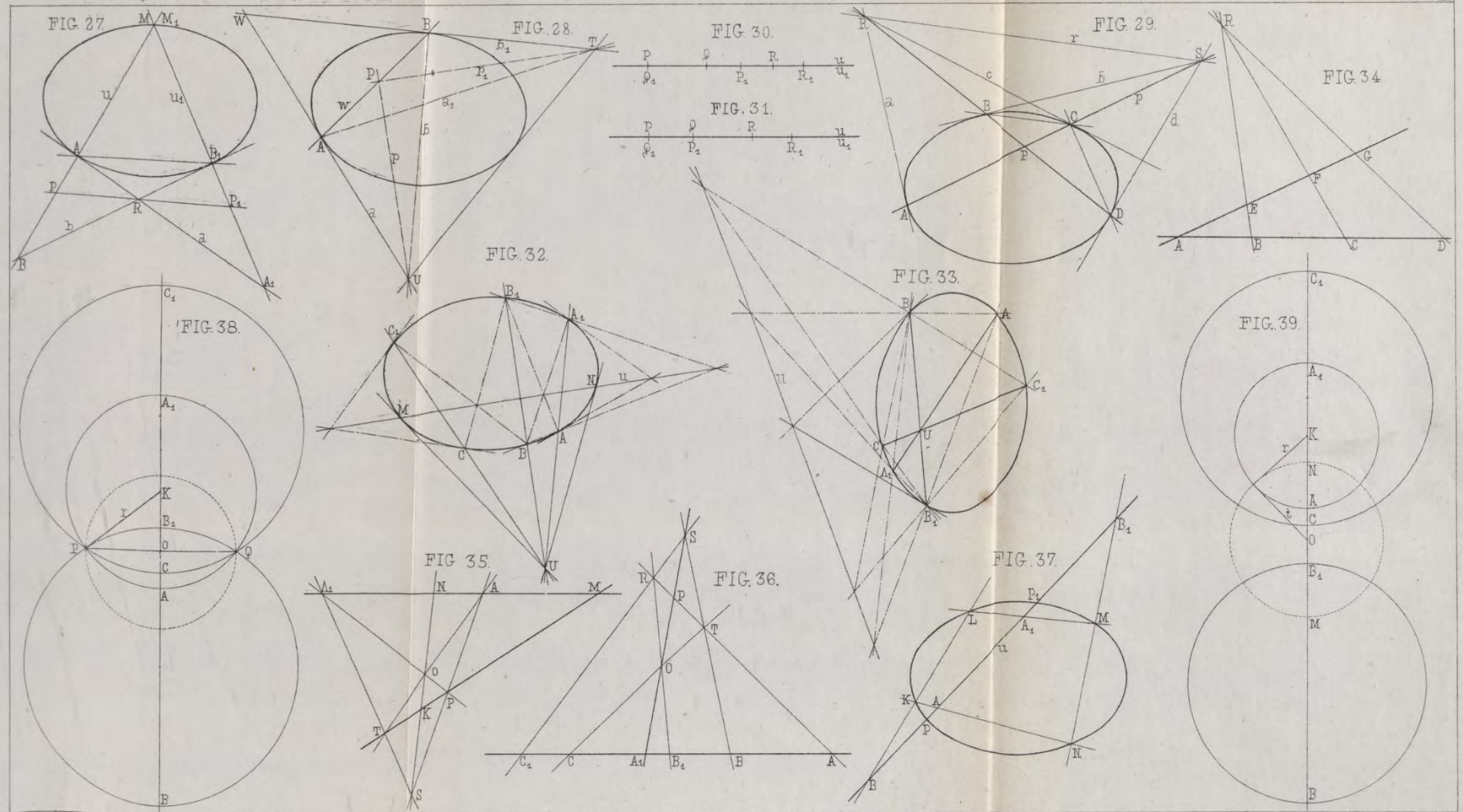


FIG.26.



lit. Tow. przemysł. Lwów



lit. Tow. przemysł. Lwów

FIG. 40.

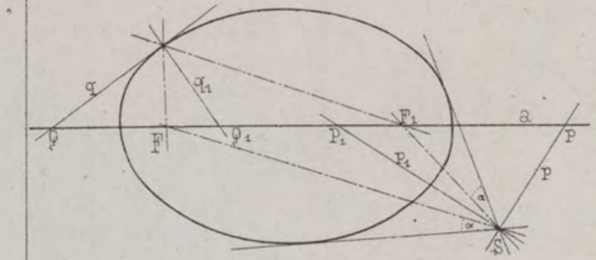


FIG. 44.

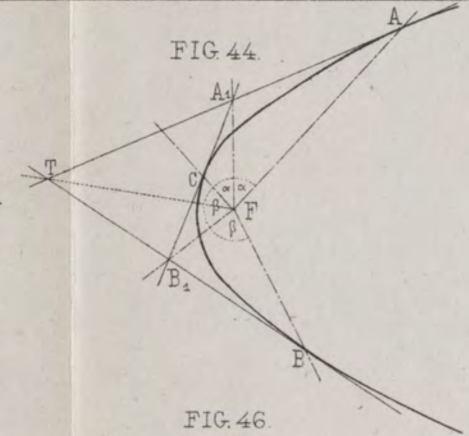


FIG. 43.

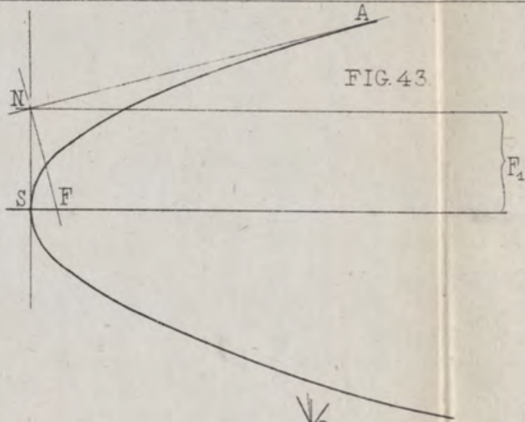


FIG. 42.

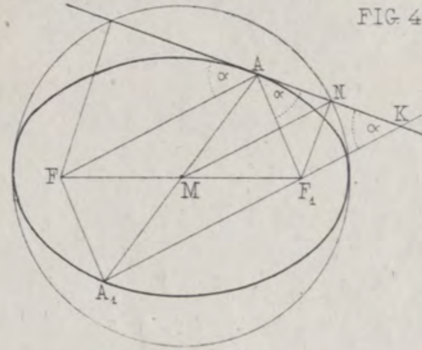


FIG. 41.

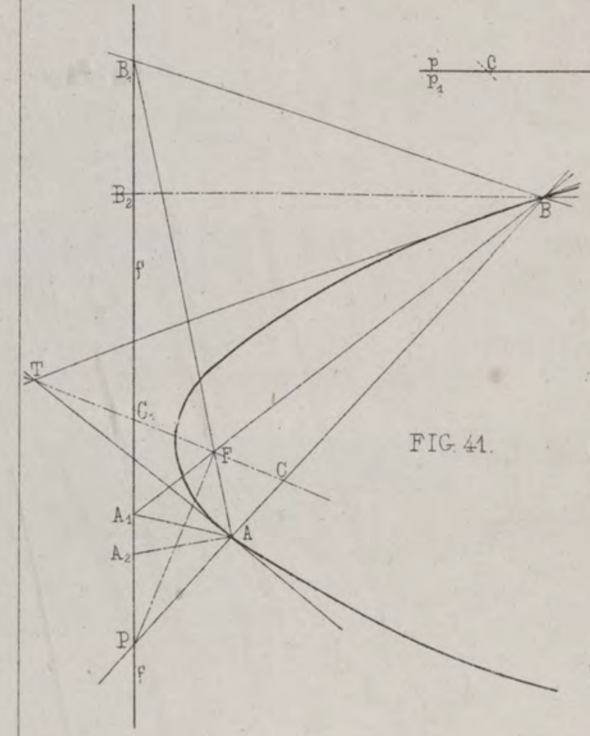


FIG. 46.

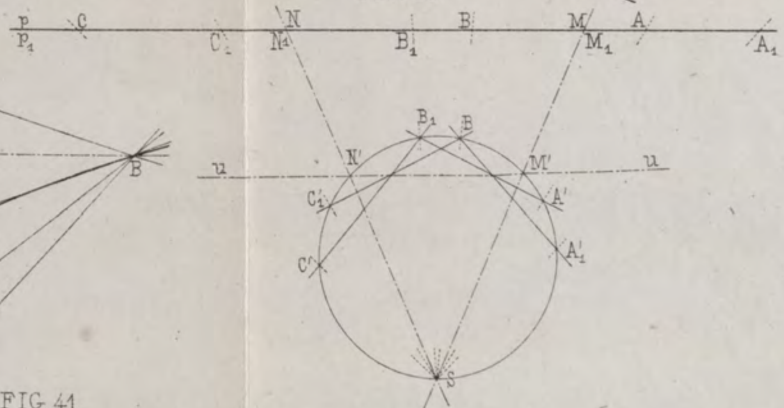


FIG. 49.

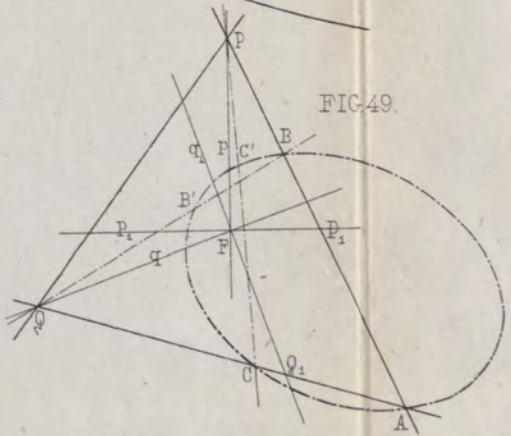


FIG. 50.

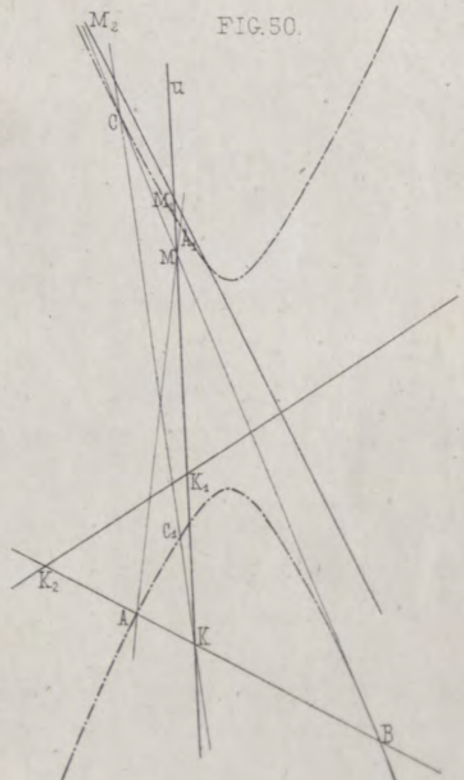


FIG. 48.

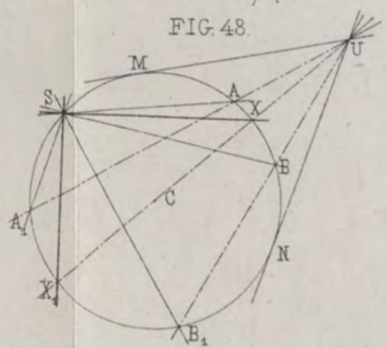


FIG. 45.

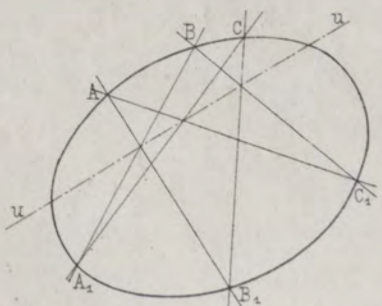
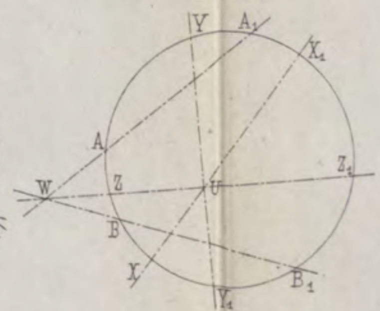


FIG. 47.



lit. Tow. przemysł. Lwów