

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

АКАДЕМИК
П. А. ЧЕБЫШЕВ

*Т е о р и я
В е р о я т н о с т е й*

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА-ЛЕНИНГРАД

А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р

П. Л. ЧЕБЫШЕВ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Лекции, читанные в 1879—80 гг.

По записи А. М. Ляпунова

Изданы академиком А. Н. Крыловым

z Księgozbioru
PROF. DR TADEUSZA OLCZAKA

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА · 1936 · ЛЕНИНГРАД

Opis nr. 66 + 25



8.242

Напечатано по распоряжению Академии Наук СССР

Апрель 1936 г.

Непременный секретарь академик *Н. Горбунов*

Редактор издания А. Н. Крылов

Технический редактор С. А. Шабуневич. — Ученый корректор А. А. Мирошников

Начато набором 9 февраля 1936 г. — Подписано к печати 3 апреля 1936 г.

I—IV + 253 стр. (3 фиг.)

Формат бум. 72 × 110 см. — 16²/₈ печ. л. — 38570 тип. зн. в печ. л. — 15.67 уч. авт. л.

Тираж 5200

Ленгорлит № 5027. — АНИ № 1203. — Заказ № 361

Типография Академии Наук СССР. Ленинград, В. О., 9 линия, 12

ПРЕДИСЛОВИЕ

П. Л. Чебышев знаменит не только как математик-творец, но и как превосходный лектор, умевший соединять простоту, ясность и краткость изложения, поэтому его курсы при небольшом объеме отличались богатством содержания.

В 1879/1880 учебном году Чебышев читал теорию вероятностей, предполагая ей специальный курс определенных интегралов и теории конечных разностей. В это время в числе его слушателей был А. М. Ляпунов, который особенно тщательно записывал лекции Чебышева, а вечером в тот же день приводил свою запись в порядок и переписывал своим замечательным каллиграфическим почерком; а так как Ляпунов отличался не только своими познаниями, но и превосходной памятью, то его запись воспроизводит лекции Чебышева именно в том виде, как они прочитаны, со всеми тонкостями попутных замечаний, которыми Чебышев умел оживлять свои лекции.

В 1882 г. я, с согласия А. М. Ляпунова, переписал для себя эти лекции.

Академией Наук было постановлено издать эти лекции; поэтому я вновь переписал по новой орфографии свою старую рукопись, попутно проверив все выкладки, подлинная же рукопись самого А. М. Ляпунова хранится в Архиве Академии Наук.

По характеру изложения, лекции Чебышева, хотя и читались в Университете, представляют особенный интерес для техников и инженеров, ибо он не задавался целью сделать свой курс безукоризненно строгим, а довольствовался тою разумною строгостью, которая, избавляя от ошибок, сообщает непреложность выводам. Его цель была чисто практическая — научить своих слушателей в возможно сжатой и доступной форме сущности дела и важнейшим его приложениям; в предлагаемой книге читатель увидит, каким образом знаменитейший из наших математиков этой цели достигал.

20 августа 1935 г.

А. Крылов.

Определенные интегралы

Предварительные замечания и интегралы первой группы

Определенными интегралами мы будем называть только такие интегралы, пределы которых суть постоянные количества.

Так интегралы вида

$$\int_1^x \frac{dx}{x} = \log x$$

мы уже не будем считать определенными.

Многие из определенных интегралов могут быть выведены из неопределенных, но мы теперь будем заниматься только такими определенными интегралами, которые не могут быть найдены в неопределенном виде. Так, напр., интеграл

$$\int e^{-x^2} dx$$

не может быть найден, потому что представляет неизвестную нам трансцендентную функцию, а между тем мы можем найти его значение, если поставим пределы 0 и ∞ , а именно:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

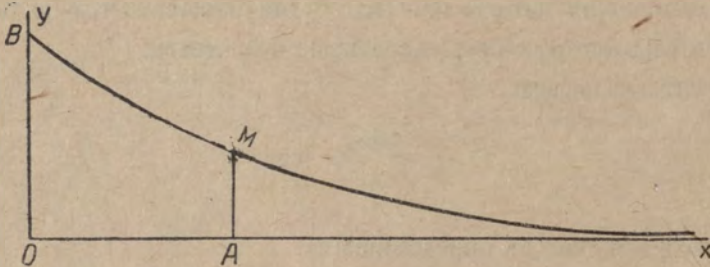
Это объясняется тем, что мы не имеем такой функции, которая показывает, как изменяется величина площади $OAMB$ в зависимости от изменения x , но это, очевидно, не исключает возможности узнать величину всей площади, ограниченной кривой

$$y = e^{-x^2}$$

Так как при подобных изысканиях прямым путем идти нельзя, то мы по необходимости должны идти косвенным. Отсюда происходит чрезвычайное разнообразие приемов и часто многочисленность их.

Определенные интегралы разбиваются на несколько групп, и для каждой группы существуют особые приемы. Кроме того, один и тот же интеграл различные ученые находят различными способами.

Наш способ будет состоять в следующем: мы будем брать известные двойные интегралы, и помощью их, изменяя порядок интегрирования, будем находить определенные интегралы. При этом мы не будем задаваться вопросом — найти значение такого-то определенного интеграла, а будем идти обратным путем: из данного двойного интеграла будем выводить всевозможные определенные интегралы.



Фиг. 1.

Таким образом возможность перемены порядка интегрирования будет лежать в основе всех наших выводов. Как известно, это возможно только тогда, когда интеграл может быть рассматриваем как предел суммы. Последнее же может иметь место только тогда, когда подынтегральная функция в пределах интегрирования не обращается в бесконечность.

Поэтому, напр., интеграл

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2} = -2$$

не может быть рассматриваем как предел суммы, потому что подынтегральная функция при $x = 0$ обращается в бесконечность. Это даже очевидно и из того, что при всяком значении x , лежащем в пределах интегрирования, подынтегральная функция принимает положительные значения и выше-написанное равенство невозможно.

То же замечание можно сделать и об интеграле

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = -\log(-1)$$

Значение этого интеграла можно представить в несколько ином виде.

Так как

$$e^{\theta \sqrt{-1}} = \cos \theta + \sqrt{-1} \sin \theta$$

то

$$\theta \sqrt{-1} = \log [\cos \theta + \sqrt{-1} \sin \theta]$$

Полагая здесь

$$\theta = (2n + 1) \pi$$

получаем

$$(2n + 1) \pi \sqrt{-1} = \log (-1)$$

Итак,

$$-\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = (2n + 1) \pi \sqrt{-1}$$

Таким образом этот интеграл имеет бесчисленное множество различных значений, и все эти значения мнимые. Это можно объяснить тем, что при интегрировании мы могли бы вести x через мнимые значения, а так как при этом представляется множество путей интегрирования, то это и объясняет неопределенность интеграла.

§ 1. Мы начнем с интеграла

$$\int_{y=\alpha}^{y=\beta} \int_{x=0}^{x=\infty} e^{-xy} dx dy$$

Для того чтобы подынтегральная функция оставалась здесь всегда конечною, необходимо, чтобы было

$$\alpha > 0 \quad \text{и} \quad \beta > 0$$

это условие и будет ограничивать наше исследование.

Мы имеем

$$\int e^{-xy} dx = -\frac{e^{-xy}}{y}$$

поэтому

$$\int_0^{\infty} e^{-xy} dx = \frac{1}{y}$$

далее

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dy}{y} = \log \frac{\beta}{\alpha} = \int_{\alpha}^{\beta} \int_0^{\infty} e^{-xy} dx dy = \int_0^{\infty} dx \int_{\alpha}^{\beta} e^{-xy} dy$$

но

$$\int_0^{\beta} e^{-xy} dy = \frac{e^{-\beta x}}{-x} - \frac{e^{-\alpha x}}{-x} = \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}$$

итак,

$$(1) \quad \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx = \log \frac{\beta}{\alpha}$$

Этот интеграл имеет едва ли не самое важное значение. Мы укажем на одно из его приложений.

Полагая $\beta = n$ и $\alpha = 1$, получим

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx = \log n$$

Давая здесь n различные значения от 1 до $n - 1$ и складывая полученные выражения, найдем

$$\log 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{(n-1)e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x} + e^{-2x} + \dots + e^{-(n-1)x}}{x} \right\} dx$$

или

$$\log 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) = \int_0^{\infty} \left[(n-1)e^{-x} - \frac{e^{-nx} - e^{-x}}{e^{-x} - 1} \right] \cdot \frac{dx}{x}$$

Таким образом этот интеграл дает возможность выразить логарифм от произведения натуральных чисел при помощи интеграла, что иногда бывает полезно сделать.

Интегралу (1) обыкновенно дают несколько иной вид.

Положим

$$x = \log \frac{1}{z} = -\log z$$

откуда:

$$dx = -\frac{dz}{z}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx = - \int_1^0 \frac{z^{\alpha} - z^{\beta}}{-\log z} \cdot \frac{dz}{z} = \log \frac{\beta}{\alpha}$$

откуда

$$(2) \quad \int_0^1 \frac{z^{\alpha-1} - z^{\beta-1}}{\log z} \cdot dz = \log \frac{\alpha}{\beta}$$

Мы получили этот вывод в предположении, что α и β суть положительные количества; в этом предположении заключалось уже, конечно, и то, что a и β суть вещественные количества.

Если мы допустим, что α и β есть мнимые количества, то из интеграла (1) можем получить некоторое понятие о значении интеграла

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin cx}{x} dx$$

Мы говорим «некоторое понятие» потому, что наше допущение влечет за собою нестрогий вывод, который, как и все подобные выводы, не дает нам, как мы сейчас увидим, желаемых результатов.

Положим

$$\alpha = -c\sqrt{-1} \quad \text{и} \quad \beta = +c\sqrt{-1}$$

где c — некоторое вещественное количество.

При этом мы находим

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{cx\sqrt{-1}} - e^{-cx\sqrt{-1}}}{x} dx = \log(-1)$$

а так как

$$\frac{e^{cx\sqrt{-1}} - e^{-cx\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin cx$$

то

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin cx}{x} \cdot 2\sqrt{-1} \cdot dx = \log(-1) = \pi\sqrt{-1}$$

откуда

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin cx}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Таким образом мы нашли значение этого интеграла, но уже одно то обстоятельство, что $\log(-1)$ есть количество неопределенное и вместо $\pi\sqrt{-1}$ нам следовало бы взять $(2n+1)\pi\sqrt{-1}$, уже одно это обстоятельство указывает, что результат получился сомнительный, потому что наш интеграл должен иметь одно вполне определенное значение.

Кроме того, полученное выражение не зависит от c , и потому найденное значение справедливо только для c положительного, а между тем, при выводе этого интеграла, мы предполагали только, что c есть вещественное количество.

Таким образом, строго говоря, мы не получили искомого результата.

§ 2. Рассмотрим теперь интеграл:

$$\int_0^{\beta} dy \int_0^{\infty} e^{-xy} \sin cx \cdot dx$$
$$\int e^{-xy} \sin cx \cdot dx = -\frac{e^{-xy} \sin cx}{y} - \int \frac{e^{-xy}}{-y} c \cdot \cos cx \cdot dx =$$
$$= \frac{e^{-xy} \sin cx}{-y} + \frac{c}{y} \int e^{-xy} \cos cx \cdot dx$$

поэтому

$$\int_0^{\infty} e^{-xy} \sin cx \cdot dx = \frac{c}{y} \int_0^{\infty} e^{-xy} \cos cx \cdot dx$$

Но

$$\int e^{-xy} \cos cx \cdot dx = \frac{e^{-xy} \cos cx}{-y} - \int \frac{e^{-xy}}{-y} \cdot (-c) \cdot \sin cx \cdot dx$$

и

$$\int_0^{\infty} e^{-xy} \cos cx \cdot dx = \frac{4}{y^2} - \frac{c}{y} \int_0^{\infty} e^{-xy} \sin cx \cdot dx$$

Итак,

$$\int_0^{\infty} e^{-xy} \sin cx \cdot dx = \frac{c}{y^2} - \frac{c^2}{y^2} \int_0^{\infty} e^{-xy} \sin cx \cdot dx$$

Откуда:

(a)
$$\int_0^{\infty} e^{-xy} \sin cx \cdot dx = \frac{c}{c^2 + y^2}$$

(b)
$$\int_0^{\infty} e^{-xy} \cos cx \cdot dx = \frac{y}{c^2 + y^2}$$

Эти интегралы имеют весьма большое значение, потому что дают возможность выразить алгебраические выражения

$$\frac{c}{c^2 + y^2} \quad \text{и} \quad \frac{y}{c^2 + y^2}$$

при помощи определенного интеграла; это очень часто упрощает решение многих задач, не относящихся к суммированию. Заметим, что интегралы (а) и (b) могут также быть найдены в неопределенном виде.

Если мы предположим, что в интегралах (а) и (б) y постепенно уменьшается, приближаясь к нулю, то в пределе найдем:

$$\int_0^{\infty} \sin cx \cdot dx = \frac{1}{c}$$

$$\int_0^{\infty} \cos cx \cdot dx = 0$$

Но легко видеть, что полученные интегралы не имеют прямого смысла, так как $\sin cx$ и $\cos cx$ не приближаются ни к какому определенному пределу при увеличении x до бесконечности, вследствие чего эти интегралы сами по себе суть величины неопределенные; но, несмотря на это, если их рассматривать как пределы интегралов (а) и (б), то они имеют вполне определенное значение, как мы это и нашли.

Нечто аналогичное этому мы встречаем в выражении $\frac{0}{0}$, которое, будучи существенно неопределенной величиной, если его рассматривать само по себе, получает вполне определенное значение, коль скоро мы его считаем пределом какой-нибудь функции при частном значении переменной.

Умножая теперь интеграл (а) на dy и интегрируя по y , получаем

$$\int_0^{\beta} \frac{c \, dy}{c^2 + y^2} = \text{arc tg } \frac{\beta}{c}$$

Изменяя теперь порядок интегрирования, получаем:

$$\int_0^{\beta} e^{-xy} \sin cx \cdot dy = \left(\frac{e^{-xy} \sin cx}{-x} \right)_0^{\beta} = \frac{\sin cx}{c} (1 - e^{-\beta x})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin cx}{c} (1 - e^{-\beta x}) dx = \text{arc tg } \frac{\beta}{c} = \int_0^{\beta} \frac{c \, dy}{c^2 + y^2}$$

Предполагая здесь β стремящимся к бесконечности, находим

$$(3) \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin cx}{x} dx = \pm \frac{\pi}{2}$$

где знак \pm соответствует c положительному, знак $-$ отрицательному c .

Это очевидно из того, что интеграл*

$$\int_0^{\infty} \frac{c \, dy}{c^2 + y^2}$$

равняется или $+\frac{\pi}{2}$, или $-\frac{\pi}{2}$, смотря по тому, положительное или отрицательное c .

Таким образом мы нашли, что интеграл (3) действительно имеет вполне определенное значение, потому что он получается из последнего интеграла, но мы не могли того же сказать при отыскании этого интеграла в предыдущем параграфе, так как там нам приходилось иметь дело с трансцендентным уравнением

$$e^{\theta\sqrt{-1}} = -1$$

которое имеет, как и все трансцендентные уравнения, бесчисленное множество решений, а между тем мы не имели средства узнать, который из его корней следует взять в данном случае.

Заметим, что на интеграл (3) возлагали прежде большие надежды, не оправдавшиеся впоследствии. Последнее можно было предвидеть уже и потому, что этот интеграл представляет функцию прерывную, внезапно изменяющую свое значение из $+\frac{\pi}{2}$ в $-\frac{\pi}{2}$ при переходе c через 0 от положительных значений к отрицательным. Функциями такого рода очень много занимался Лежен-Дирихле, который показал, что подобные интегралы могут быть часто употребляемы для упрощения различных задач.

Мы покажем одно из приложений этого интеграла.

Так как

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sin au \cos tu}{u} \cdot du &= \int_0^{\infty} \frac{1}{2} [\sin (au + tu) + \sin (au - tu)] \cdot \frac{du}{u} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin (a+t)u}{u} \cdot du + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin (a-t)u}{u} \cdot du \end{aligned}$$

то при $t > a$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin au \cos tu}{u} \cdot du = 0$$

* При возрастании $\tan \theta$ от 0 до ∞ соответствующая дуга может возрастать только от какого-нибудь значения $n\pi$ на $\frac{\pi}{2}$, т. е. до значения $n\pi + \frac{\pi}{2}$.

и при $t < a$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin au \cos tu}{u} \cdot du = \frac{\pi}{2}$$

Эти равенства можно представить еще в таком виде:

$$(4) \quad \left. \begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin au \cdot \cos tu}{u} \cdot du \} &= 0 \dots t > a \\ &= 1 \dots t < a \end{aligned} \right\}$$

Положим теперь, что требуется интеграл

$$\int_0^a F(x) dx$$

На основании (4) мы можем написать

$$\begin{aligned} \int_0^a F(x) dx &= \int_0^a F(x) \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin au \cos xu}{u} \cdot du \cdot dx \\ &+ \int_a^{\infty} F(x) \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin au \cos xu}{u} \cdot du \cdot dx \end{aligned}$$

Здесь в первом интеграле $x < a$, поэтому этот интеграл равен данному, второй же равен нулю, ибо в нем $x > a$. Таким образом мы нахождение данного интеграла свели на нахождение другого.

При помощи интеграла (4) можно также устранять затруднения в роде следующего: положим, что требуется найти интеграл

$$\int \int \int \dots \int x^{\lambda-1} \cdot y^{\mu-1} \cdot z^{\nu-1} \dots dx dy dz \dots$$

причем дано условие

$$(z) \quad 0 < x + y + z + \dots < a$$

Вместо этого интеграла мы можем искать такой:

$$\int \int \int \dots \int_0^{\infty} x^{\lambda-1} y^{\mu-1} z^{\nu-1} \dots \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin au \cos(x+y+z+\dots)u}{u} \cdot dx dy dz \dots du$$

причем мы можем теперь не обращать внимания на условие (z). При помощи этих интегралов Лежен-Дирихле нашел притяжение эллипсоида на точку, но эти работы его гораздо слабее других.

§ 3. Все найденные нами интегралы заключаются в одном общем интеграле

$$\int_0^{\infty} \frac{f(\beta x) - f(\alpha x)}{x} dx = \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_0^{\infty} f'(x \cdot y) dx$$

где $f(x \cdot y)$ — такая функция, которая удовлетворяет условию

$$f(+\infty) = 0$$

Найдем теперь значение этого интеграла, употребляя тот же способ, какой был употреблен нами и прежде:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f'(x \cdot y) dx &= \left(\frac{f(x \cdot y)}{y} \right)_0^{\infty} = -\frac{f(0)}{y} \\ &- \int_0^{\infty} \frac{f(0)}{y} \cdot dy = -f(0) \cdot \log \frac{\beta}{\alpha} \end{aligned}$$

Таким образом мы имеем

$$(5) \quad \int_0^{\infty} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx = f(0) \cdot \log \frac{\beta}{\alpha}$$

при условии $f(+\infty) = 0$.

Полагая здесь $f(x \cdot y) = e^{-xy}$, мы получаем интеграл (1). Из этой же формулы можно получить и различные другие интегралы. Напр., полагая

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{или} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

мы получаем интегралы:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1+\alpha^2 x^2} - \frac{1}{1+\beta^2 x^2} \right) \frac{dx}{x} &= \log \frac{\beta}{\alpha} \\ \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2 x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2 x^2}} \right) \frac{dx}{x} &= \log \frac{\beta}{\alpha} \end{aligned}$$

Этим мы и оканчиваем статью об интегралах первой группы.

Интегралы второй группы

§ 4. Интегралы второй группы характеризуются тем, что в их выражения входит множителем $\sqrt{\pi}$.

Метод наш при отыскании значений этих интегралов будет подобен предыдущему, но главнейшее его отличие от последнего будет в том, что доводя интегрирование в одном порядке до конца, мы в другом порядке интегрирования будем встречаться с произведением двух одинаковых интегралов, чем и объясняется характеристическая особенность интегралов этой группы.

Возьмем интеграл

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} e^{-(1+x^2)t^2} \cdot t dt$$

Интегрируя сначала по t , находим:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-(1+x^2)t^2} t \cdot dt &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-u-x^2u} \cdot du = \frac{1}{2} \left\{ \frac{e^{-(1+x^2)u}}{-(1+x^2)} \right\}_0^{\infty} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Интегрируя теперь сперва по x , получаем

$$\int_0^{\infty} e^{-(1+x^2)t^2} dx = e^{-t^2} \int_0^{\infty} e^{-x^2t^2} \cdot dx$$

полагая здесь $tx = s$, так что $dx = \frac{ds}{t}$, находим

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2t^2} \cdot dx = \frac{1}{t} \int_0^{\infty} e^{-s^2} ds$$

поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(1+x^2)t^2} dx \cdot t dt &= \int_0^{\infty} e^{-t^2} \int_0^{\infty} e^{-s^2} dt ds = \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt \cdot \int_0^{\infty} e^{-s^2} ds = \\ &= \left[\int_0^{\infty} e^{-s^2} ds \right]^2 \end{aligned}$$

Сравнивая оба эти результата, окончательно находим

$$\int_0^{\infty} e^{-s^2} ds = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

или

$$(6) \quad \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

Этот интеграл замечателен во многих отношениях преимущественно по тем следствиям, которые могут быть из него получены.

Делая различные преобразования, мы будем получать из этого интеграла различные другие интегралы.

Положив в нем

$$x = as$$

найдем

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 s^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$$

или

$$(7) \quad \int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$$

Полагая здесь $a^2 = c$, получим

$$\int_0^{\infty} e^{-cx^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot c^{-\frac{1}{2}}$$

Заметим, что здесь при \sqrt{c} следует брать знак $+$, потому что этот корень заменяет положительное количество a (все элементы интеграла положительные, вследствие чего подстановка $x = as$ возможна только тогда, когда a есть количество положительное).

Дифференцируя последний интеграл по параметру c , мы получим ряд следующих интегралов:

$$\int_0^{\infty} e^{-cx^2} \cdot x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot c^{-\frac{3}{2}}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-cx^2} \cdot x^4 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot c^{-\frac{5}{2}}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-cx^2} \cdot x^6 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3} c^{-\frac{7}{2}}$$

.....

и т. д.

Вообще, дифференцируя этот интеграл n раз, получаем

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^n e^{-cx^2}}{\partial c^n} \cdot dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\partial^n \left(c^{-\frac{1}{2}} \right)}{\partial c^n}$$

откуда

$$\int_0^{\infty} (-1)^n \cdot e^{-cx^2} \cdot x^{2n} \cdot dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot (-1)^n \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n} \cdot e^{-\frac{2n+1}{2}}$$

или

$$(8) \quad \int_0^{\infty} e^{-cx^2} \cdot x^{2n} \cdot dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n} \cdot e^{-\frac{2n+1}{2}}$$

Таким образом мы нашли интеграл от степенной функции e^{-cx^2} , умноженной на четную степень переменной. Если бы множителем была нечетная степень переменной, то такой интеграл, как нетрудно видеть, можно было бы взять в каких угодно пределах, поэтому мы можем вообще найти значения такого интеграла

$$\int_0^{\infty} \varphi(x) e^{-cx^2} dx$$

где $\varphi(x)$ есть некоторая целая функция.

Замечая далее, что под знаком интеграла (7) находится четная функция, мы можем написать

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a}$$

Введя сюда новую переменную y вместо x , так чтобы было

$$x = y + b$$

найдем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y+b)^2 a^2} \cdot dy = \frac{\sqrt{\pi}}{a}$$

или

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2(y^2 + 2by + b^2)} \cdot dy = e^{-a^2 b^2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 y^2 - 2a^2 by} \cdot dy = \frac{\sqrt{\pi}}{a}$$

откуда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 y^2 - 2a^2 by} \cdot dy = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \cdot e^{a^2 b^2}$$

или, полагая $2a^2b^2 = k$ затем $k^2 = m$:

$$(9) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2y^2 - ky} \cdot dy = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \cdot e^{a^2 \cdot \left(\frac{k}{2a^2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \cdot e^{+\frac{m}{4a^2}}$$

Из этой формулы мы можем вывести все интегралы, подобные заключающимся в общей формуле (8). Для этого стоит только разложить каждую часть равенства по степеням k и приравнять коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях k . Произведя эти действия, на самом деле находим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2y^2} \left[1 - \frac{ky}{1} + \frac{k^2y^2}{1 \cdot 2} - \frac{k^3y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \right] dy = \\ = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \left\{ 1 + \frac{k^2}{4a^2} + \frac{k^4}{1 \cdot 2 \cdot 16a^4} + \dots \right\} \end{aligned}$$

Отсюда:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2y^2} \cdot dy = \frac{\sqrt{\pi}}{a}; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2y^2} \cdot y \, dy = 0; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2y^2} \cdot \frac{y^2}{1 \cdot 2} = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \cdot \frac{1}{4a^2} \dots$$

Вообще все интегралы, содержащие нечетную степень y , будут здесь обращаться в 0, как интегралы от нечетной функции. Отсюда видно, что интеграл от произведения какой-либо целой функции на степенную будет проще в том случае, когда мы возьмем его в пределах $-\infty$ и $+\infty$, чем в том случае, когда мы его возьмем в пределах от 0 до $+\infty$: интегралы, содержащие нечетные степени y в первом случае, уничтожаются, и все выражения будут иметь общим множителем $\sqrt{\pi}$.

§ 5. Полагая в интеграле (9)

$$k = m \sqrt{-1}$$

получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2y^2 - my \sqrt{-1}} \cdot dy = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \cdot e^{\left(\frac{m \sqrt{-1}}{2a}\right)^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-\frac{m^2}{4a^2}}$$

Но мы имеем вообще

$$e^{-\theta \sqrt{-1}} = \cos \theta - \sqrt{-1} \sin \theta$$

поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2y^2} [\cos my - \sqrt{-1} \sin my] \, dy = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \cdot e^{-\frac{m^2}{4a^2}}$$

Разбивая этот интеграл на два и замечая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 y^2} \sin my \, dy = 0$$

находим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 y^2} \cos my \, dy = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-\frac{m^2}{4a^2}}$$

и отсюда

$$(10) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 y^2} \cos my \, dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{m^2}{4a^2}}$$

Этот интеграл замечателен в том отношении, что величина его весьма быстро уменьшается при увеличении m , между тем как элементы самого интеграла при этом периодически то уменьшаются, то увеличиваются, так что рассматривая этот интеграл как функцию параметра m и основываясь в своих суждениях на изменяемости величины его элементов, мы не могли бы прийти ни к какому заключению относительно изменяемости самого интеграла при увеличении m , а между тем найденное нами его значение решает этот вопрос вполне. Этот интеграл уменьшается с увеличением m не потому, что элементы его при этом уменьшаются, как это можно видеть во многих других случаях, но потому, что громадное число членов положительных уничтожается членами отрицательными, и в результате получается величина, весьма быстро уменьшающаяся с увеличением m .

§ 6. Перейдем теперь к дальнейшим следствиям интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 y^2} \cdot dy = \frac{\sqrt{\pi}}{a}$$

Положим здесь

$$y = z - \frac{n}{z}$$

причем будем предполагать $n > 0$. Мы имеем

$$dy = dz + \frac{n \, dz}{z^2}$$

поэтому будет

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 y^2} \, dy = \int_0^{\infty} e^{-a^2 \left(z - \frac{n}{z}\right)^2} \left(dz + \frac{n \, dz}{z^2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{a}$$

Отсюда

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 z^2 + 2a^2 n - \frac{a^2 n^2}{z^2}} \left(dz + \frac{n dz}{z^2} \right) = \int_0^{\infty} e^{2a^2 n} \cdot e^{-a^2 z^2 - \frac{a^2 n^2}{z^2}} \left(dz + \frac{n dz}{z^2} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{a}$$

Откуда

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 z^2 - \frac{a^2 n^2}{z^2}} dz + \int_0^{\infty} e^{-a^2 z^2 - \frac{a^2 n^2}{z^2}} \cdot \frac{n}{z^2} \cdot dz = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \cdot e^{-2a^2 n}$$

но, положив $z = \frac{n}{u}$, увидим, что второй интеграл равен первому, и мы получим

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 z^2 - \frac{a^2 n^2}{z^2}} \cdot dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-2a^2 n}$$

Положив здесь $an = b$, причем должно быть $b > 0$, окончательно находим

$$(11) \quad \int_0^{\infty} e^{-a^2 z^2 - \frac{b^2}{z^2}} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-2ab}$$

§ 7. Возьмем теперь двойной интеграл

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \cos nu \cdot e^{-v(p^2 + u^2)} du dv$$

Интегрируя сначала по букве v , получим:

$$\int_0^{\infty} e^{-v(p^2 + u^2)} dv = \left(\frac{e^{-v(p^2 + u^2)}}{-(p^2 + u^2)} \right)_0^{\infty} = \frac{1}{p^2 + u^2}$$

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \cos nu \cdot e^{-v(p^2 + u^2)} du dv = \int_0^{\infty} \frac{\cos nu \cdot du}{p^2 + u^2}$$

Интегрируя теперь в другом порядке, найдем на основании формулы (10):

$$\int_0^{\infty} \cos nu \cdot e^{-vu^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{v}} e^{-\frac{n^2}{4v}}$$

и затем

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \cos nu \cdot e^{-v(p^2 + u^2)} du dv = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{n^2}{4v} - vp^2} \cdot \frac{dv}{\sqrt{v}} = \frac{\sqrt{\pi}}{p} e^{-np}$$

что следует из формулы (11), если в ней положить $v = z^2$. Таким образом имеем

$$(12) \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos nu}{p^2 + u^2} du = \frac{\pi}{2p} e^{-np}$$

Этот интеграл замечателен в том же отношении, как и интеграл (10): его величина быстро уменьшается с увеличением n , между тем как подынтегральная функция при этом не приближается ни к какому определенному пределу.

§ 8. Дифференцируя интеграл (12) по букве n , получим

$$\int_0^{\infty} \frac{-u \sin nu}{p^2 + u^2} du = \frac{\pi}{2p} (-p) e^{-np}$$

откуда

$$(13) \quad \int_0^{\infty} \frac{u \sin nu}{p^2 + u^2} du = \frac{\pi}{2} e^{-np}$$

Интегрируя же этот интеграл по букве n в пределах 0 и m , найдем

$$\int_0^{\infty} \int_{n=0}^m \frac{\cos nu}{p^2 + u^2} du dn = \frac{\pi}{2p} \int_0^m e^{-np} dn$$

но

$$\int_0^m \cos nu du = \frac{\sin mu}{u}; \quad \int_0^m e^{-np} dn = \frac{e^{-mp}}{-p} - \frac{1}{-p} = \frac{1}{p} (1 - e^{-mp})$$

поэтому

$$(14) \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin mu}{u} \frac{du}{p^2 + u^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 - e^{-mp}}{p^2}$$

Если последний интеграл умножить на p^2 и сложить с интегралом (13), то получим уже известный нам интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin nu}{u} du = \frac{\pi}{2}$$

Дифференцируя интеграл (12) по букве p , мы получим ряд интегралов, замечательных преимущественно в теоретическом отношении, именно, они представляют тип целого ряда интегралов, которые могут быть заключены в одной общей формуле, подобно тому как интегралы первой группы могут быть заключены в общей формуле (5).

Для большего удобства дифференцирования положим

$$p = \sqrt{q}$$

и будем дифференцировать интеграл (12) по букве q , тогда найдем:

$$-\int_0^{\infty} \frac{\cos nu}{(q+n^2)^2} du = \frac{\pi}{2} \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{e^{-n\sqrt{q}}}{\sqrt{q}} \right)$$

$$2 \int_0^{\infty} \frac{\cos nu}{(q+n^2)^3} du = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial q^2} \left(\frac{e^{-n\sqrt{q}}}{\sqrt{q}} \right)$$

и т. д.

Отсюда видно, что мы вообще можем найти интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos nu}{(q+u^2)^\lambda} du$$

при каком угодно целом и положительном λ .

§ 9. Выведем теперь ту общую формулу, о которой было упомянуто в предыдущем параграфе. Но так как строгое доказательство этой формулы (которое можно найти у Коши) завело бы нас слишком далеко, то мы дадим здесь ее нестрогий вывод, который можно найти, напр., у Бертрана под названием формулы Абеля.

Так как

$$\cos nu = \frac{e^{nu\sqrt{-1}} + e^{-nu\sqrt{-1}}}{2}$$

то по формуле (12) имеем

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{nu\sqrt{-1}} + e^{-nu\sqrt{-1}}}{2} \frac{du}{p^2 + u^2} = \frac{\pi}{2p} e^{-np}$$

Подставляя сюда вместо n положительные числа

$$n_1, n_2, n_3, \dots$$

получим:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-n_1 u \sqrt{-1}} + e^{n_1 u \sqrt{-1}}}{2} \cdot \frac{du}{p^2 + u^2} = \frac{\pi}{2p} e^{-n_1 p}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-n_2 u \sqrt{-1}} + e^{n_2 u \sqrt{-1}}}{2} \cdot \frac{du}{p^2 + u^2} = \frac{\pi}{2p} \cdot e^{-n_2 p}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-n_3 u \sqrt{-1}} + e^{n_3 u \sqrt{-1}}}{2} \cdot \frac{du}{p^2 + u^2} = \frac{\pi}{2p} e^{-n_3 p}$$

.....

.....

Если мы умножим эти интегралы соответственно на множители

$$A_1, A_2, A_3, \dots$$

и сложим результаты, то найдем

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} (A_1 e^{-n_1 u \sqrt{-1}} + A_2 e^{-n_2 \sqrt{-1}} + A_3 e^{-n_3 u \sqrt{-1}} + \dots + A_1 e^{n_1 u \sqrt{-1}} + A_2 e^{n_2 u \sqrt{-1}} + \dots) \frac{du}{p^2 + u^2} = \frac{\pi}{2p} (A_1 e^{-n_1 p} + A_2 e^{-n_2 p} + A_3 e^{-n_3 p} + \dots)$$

Положим теперь, что

$$f(x) = A_1 e^{-n_1 x} + A_2 e^{-n_2 x} + A_3 e^{-n_3 x} + \dots$$

Вследствие этого последний интеграл примет такой вид:

$$(15) \quad \int_0^{\infty} \frac{f(u\sqrt{-1}) + f(-u\sqrt{-1})}{2} \cdot \frac{du}{p^2 + u^2} = \frac{\pi}{2p} f(p)$$

Таким образом мы вывели требуемую формулу.

Нестрогость этого вывода заключается в том, что эта формула справедлива только для таких функций, которые могут разлагаться в ряд

$$A_1 e^{-n_1 x} + A_2 e^{-n_2 x} + A_3 e^{-n_3 x} + \dots$$

где A_1, A_2, A_3 и т. д. суть некоторые постоянные коэффициенты, между тем как мы, не имея критерия для отличия функций, разлагающихся в такой ряд, от неразлагающихся, считаем эту формулу как бы справедливой для всяких функций.

Если положить

$$f(x) = A_1 e^{-\frac{n_1}{a} x} + A_2 e^{-\frac{n_2}{a} x} + A_3 e^{-\frac{n_3}{a} x} + \dots$$

то мы найдем

$$\int_0^{\infty} \frac{f(au\sqrt{-1}) + f(-au\sqrt{-1})}{2} \frac{du}{p^2 + u^2} = \frac{\pi}{2p} f(ap)$$

Дифференцируя это равенство по букве a , получим

$$\int_0^{\infty} \frac{f'(au\sqrt{-1}) - f'(-au\sqrt{-1})}{2} \frac{u\sqrt{-1}}{p^2 + u^2} du = \frac{\pi}{2} \cdot f'(ap)$$

Откуда

$$\int_0^{\infty} \frac{f'(au\sqrt{-1}) - f'(-au\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}} \frac{u du}{p^2 + u^2} = -\frac{\pi}{2} f'(ap)$$

Полагая здесь

$$f'(x) = \varphi(x)$$

получим

$$(16) \quad \int_0^{\infty} \frac{\varphi(au\sqrt{-1}) - \varphi(-au\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}} \cdot \frac{udu}{p^2 + u^2} = -\frac{\pi}{2} \varphi(ap)$$

Если положить

$$f(x) = \psi'(x)$$

то интеграл (15) дает

$$\int_0^{\infty} \frac{\psi'(au\sqrt{-1}) + \psi'(-au\sqrt{-1})}{2} \cdot \frac{du}{p^2 + u^2} = \frac{\pi}{2p} \psi'(ap)$$

Интегрируя это равенство по a в пределах от 0 до α , найдем

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\alpha} \frac{\psi'(au\sqrt{-1}) + \psi'(-au\sqrt{-1})}{2} \frac{du}{p^2 + u^2} = \frac{\pi}{2} \frac{\psi(\alpha p) - \psi(0)}{p^2}$$

но

$$\int_0^{\alpha} \psi'(au\sqrt{-1}) da = \frac{\psi(\alpha u\sqrt{-1}) - \psi(0)}{u\sqrt{-1}}$$

$$\int_0^{\alpha} \psi'(-au\sqrt{-1}) da = \frac{\psi(0) - \psi(-\alpha u\sqrt{-1})}{u\sqrt{-1}}$$

и мы получим

$$\int_0^{\infty} \frac{\psi(\alpha u\sqrt{-1}) - \psi(-\alpha u\sqrt{-1})}{2u\sqrt{-1}} \cdot \frac{du}{p^2 + u^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\psi(\alpha p) - \psi(0)}{p^2}$$

или

$$(17) \quad \int_0^{\infty} \frac{\psi(\alpha u\sqrt{-1}) - \psi(-\alpha u\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}} \cdot \frac{du}{u(p^2 + u^2)} = \frac{\pi}{2} \frac{\psi(\alpha p) - \psi(0)}{p^2}$$

Три интеграла (15), (16), (17), из которых один находится в сочинении Бертрана, находятся в сочинении Абея, хотя общая формула, о которой здесь идет речь, впервые была дана Коши.

Этим мы и оканчиваем рассмотрение интегралов второй группы.

Интегралы третьей группы

§ 10. Интегралы, к которым мы теперь переходим, содержат под своим знаком функции, которые могут с первого взгляда показаться алгебраическими, между тем как в сущности они представляют особые трансцендентные функции.

Эти интегралы будут вида

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\lambda}}{1+x^2} dx$$

где λ — какое угодно число. Поэтому скажем предварительно несколько слов вообще об алгебраических функциях.

Алгебраическими функциями мы называем только такие функции, которые служат корнями уравнению

$$A_0 y^n + A_1 y^{n-1} + A_2 y^{n-2} + \dots + A_{n-1} y + A_n = 0$$

где n есть целое положительное число, а коэффициенты

$$A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$$

суть некоторые целые функции от x . Все функции, которые не подходят под это определение, уже не представляют алгебраических функций, поэтому функция x^{λ} , которая не может удовлетворять нашему уравнению при каком угодно λ , есть функция трансцендентная, но она обращается в алгебраическую, коль скоро мы считаем λ соизмеримым числом.

Мы теперь и займемся нахождением значения интеграла

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\lambda}}{1+x^2} dx$$

при каком угодно λ . Но предварительно заметим, что этот интеграл будет иметь конечное значение только при λ , заключающемся между пределами $+1$ и -1 , ибо в противном случае произведение $x \cdot x^{\lambda} = x^{\lambda+1}$ при $\lambda > 1$ было бы степени выше 2 и интеграл был бы, в силу известной теоремы, бесконечным.

Когда $\lambda < -1$, то, положив

$$x = \frac{1}{z} \quad \text{и} \quad \lambda = -\mu \quad \text{и} \quad \mu > 1$$

получим

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\lambda} dx}{1+x^2} = \int_0^{\infty} \frac{z^{\mu} \cdot dz}{1+z^2}$$

т. е. интеграл был бы бесконечным.

Когда $\lambda = \pm 1$, то имеем:

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \left\{ \log(1+x^2) \right\}_0^{\infty} = \infty$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{-1} \cdot dx}{1+x^2} = \int_{\infty}^0 \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^{-1}}{1+\frac{1}{z^2}} \cdot \left(-\frac{dz}{z^2}\right) = \int_0^{\infty} \frac{z dz}{1+z^2} = \infty$$

Если

$$\lambda = \alpha + \beta \sqrt{-1}$$

то необходимо, чтобы α заключалось между пределами $+1$ и -1 .

Итак, мы будем теперь рассматривать интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\lambda}}{1+x^2} dx$$

предполагая $1 > \lambda > -1$.

§ 11. Мы имеем

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\lambda}}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{x^{\lambda}}{1+x^2} dx + \int_1^{\infty} \frac{x^{\lambda}}{1+x^2} dx$$

Но

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^{\lambda}}{1+x^2} dx &= \int_0^1 x^{\lambda} (1+x^2)^{-1} \cdot dx = \int_0^1 x^{\lambda} (1-x^2+x^4-x^6+x^8-x^{10}+\dots) dx \\ &= \int_0^1 x^{\lambda} dx - \int_0^1 x^{\lambda+2} dx + \int_0^1 x^{\lambda+4} dx - \int_0^1 x^{\lambda+6} dx + \dots \end{aligned}$$

но вообще

$$\int_0^1 x^{\lambda+m} dx = \left(\frac{x^{\lambda+m+1}}{\lambda+m+1} \right)_0^1 = \frac{1}{\lambda+m+1}$$

так как при сделанном условии относительно λ всегда

$$\lambda + m + 1 > 0$$

Если

$$\lambda = \alpha + \beta \sqrt{-1}$$

то

$$\lim (x^{\lambda+m+1})_{x=0} = \lim (x^{\alpha+m+1} \cdot x^{\beta\sqrt{-1}})_{x=0}$$

так как β может быть отрицательным, то с первого взгляда может показаться, что $x^{\beta\sqrt{-1}}$ может быть бесконечным, но нетрудно видеть, что этот множитель не может превзойти известного предела. В самом деле,

$$x^{\beta\sqrt{-1}} = e^{\beta \log x \cdot \sqrt{-1}} = \cos(\beta \log x) + \sqrt{-1} \sin(\beta \log x)$$

поэтому, во всяком случае,

$$\lim (x^{\lambda+m+1})_{x=0} = 0$$

если только α заключается между указанными пределами.

Итак,

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha}{1+x^2} dx = \frac{1}{\lambda+1} - \frac{1}{\lambda+3} + \frac{1}{\lambda+5} - \frac{1}{\lambda+7} + \dots$$

Возьмем теперь второй интеграл

$$\int_1^\infty \frac{x^\lambda}{1+x^2} dx = \int_1^0 \frac{z^{-\lambda}}{1+\frac{1}{z^2}} \left(-\frac{dz}{z^2}\right) = \int_0^1 \frac{z^{-\lambda}}{1+z^2} dz$$

Но по предыдущему

$$\int_0^1 \frac{z^{-\lambda}}{1+z^2} dz = \frac{1}{-\lambda+1} - \frac{1}{-\lambda+3} + \frac{1}{-\lambda+5} - \frac{1}{-\lambda+7} + \dots$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^\lambda}{1+x^2} dx &= \left(\frac{1}{1+\lambda} + \frac{1}{1-\lambda}\right) - \left(\frac{1}{3+\lambda} + \frac{1}{3-\lambda}\right) + \\ &+ \left(\frac{1}{5+\lambda} + \frac{1}{5-\lambda}\right) - \dots \end{aligned}$$

или

$$(18) \int_0^\infty \frac{x^\lambda}{1+x^2} dx = \frac{2 \cdot 1}{1^2 - \lambda^2} - \frac{2 \cdot 3}{3^2 - \lambda^2} + \frac{2 \cdot 5}{5^2 - \lambda^2} - \frac{2 \cdot 7}{7^2 - \lambda^2} + \dots$$

Таким образом мы выразили интеграл помощью ряда, который остается теперь просуммировать.

С первого взгляда бросается в глаза аналогия этого разложения с разложением рациональных дробей на частные. В самом деле, мы можем представить этот ряд в таком виде:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\lambda}}{1+x^2} dx = \frac{1}{\lambda+1} - \frac{1}{\lambda-1} + \frac{1}{\lambda+3} - \frac{1}{\lambda-3} + \frac{1}{\lambda+5} - \frac{1}{\lambda-5} - \dots$$

Но всякую рациональную дробь

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

где $F(x)$ не имеет кратных корней, можно представить под видом

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(x_1)}{F'(x_1)} \cdot \frac{1}{x-x_1} + \frac{f(x_2)}{F'(x_2)} \cdot \frac{1}{x-x_2} + \frac{f(x_3)}{F'(x_3)} \cdot \frac{1}{x-x_3} + \dots$$

так что в данном случае корнями функции $F(x)$ служат:

$$1, 3, 5, 7, 9, \dots \\ -1, -3, -5, -7, -9, \dots$$

причем

$$\frac{f(x)}{F'(x)} = 1$$

при всяком значении x , равном одному из корней функции $F(x)$.

Мы теперь и займемся нахождением функции $F(x)$, удовлетворяющей этим условиям.

§ 12. Возьмем функцию

$$F(x) = \cos(n \operatorname{arc} \cos x)$$

где n — какое угодно целое число. Легко показать, что $F(x)$ есть целая функция n -ой степени. В самом деле, полагая

$$\operatorname{arc} \cos x = \varphi$$

и замечая, что

$$\cos n\varphi = \frac{e^{n\varphi\sqrt{-1}} + e^{-n\varphi\sqrt{-1}}}{2}$$

найдем

$$F(\cos \varphi) = \cos n\varphi = \frac{e^{n\varphi\sqrt{-1}} + e^{-n\varphi\sqrt{-1}}}{2}$$

но

$$e^{\pm n\varphi\sqrt{-1}} = \cos n\varphi \pm \sqrt{-1} \sin n\varphi$$

поэтому

$$F(\cos \varphi) = \frac{[\cos n\varphi + \sqrt{-1} \sin n\varphi] + [\cos n\varphi - \sqrt{-1} \sin n\varphi]}{2}$$

или

$$F(\cos \varphi) = \frac{[\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi]^n + [\cos \varphi - \sqrt{-1} \sin \varphi]^n}{2}$$

Таким образом

$$(19) \quad F(x) = \cos(n \arccos x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n}{2}$$

Члены, содержащие нечетные степени $\sqrt{x^2 - 1}$, будут зависеть от этого радикала, но эти члены в окончательном результате, как нетрудно видеть, сократятся, вследствие чего мы получим для $F(x)$ целую рациональную функцию.

Так как

$$\sqrt{x^2 - 1} = x - \frac{1}{2} \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^3} - \dots$$

то

$$x - \sqrt{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^3} + \dots$$

так что член выражения (19)

$$(x - \sqrt{x^2 - 1})^n$$

содержит только отрицательные степени x , вследствие чего все эти члены в окончательном результате должны сократиться с членами, содержащими отрицательные степени выражения

$$(x + \sqrt{x^2 - 1})^n$$

и останется только целая часть этого выражения.

Употребляя знак E для означения целой части, мы можем этот результат выразить равенством

$$F(x) = E \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n}{2}$$

Работы, относящиеся до исследования функций этого рода, главным образом принадлежат Чебышеву, так что и выражение (19) носит название полинома Чебышева. Эти исследования в настоящее время входят в состав многих сочинений по интегральному исчислению;* так, напр., в Англии можно встретить их во многих курсах интегрального исчисления под именем работ Чебышева.

* См.: «Интегральное исчисление» Н. Алексеева.

Исследования Золотарева относятся к подобным же вопросам, но к вопросам, относящимся не к круговым, а к эллиптическим функциям, вследствие чего они гораздо сложнее, но и менее важны, чем работы Чебышева.

Положим теперь $n = 2m$, где m — целое число. Вследствие этого найдем

$$F(x) = \cos(2m \arccos x) = A_0 x^{2m} + A_1 x^{2m-1} + A_2 x^{2m-2} + \dots$$

Постараемся разложить на частные дроби функцию $\frac{1}{F(x)}$. Для этого найдем корни уравнения

$$F(x) = 0$$

или

$$\cos(2m \arccos x) = 0$$

и докажем, что все корни этого уравнения будут различны. Нетрудно видеть, что это уравнение удовлетворяется, если положить

$$\arccos x = \frac{(2k+1)\pi}{4m}$$

где k — какое угодно целое число. Давая k различные значения от 0 до $2m - 1$, получим следующие корни этого уравнения:

$$k = 0 \quad x_1 = \cos \frac{\pi}{4m}$$

$$k = 1 \quad x_2 = \cos \frac{3\pi}{4m}$$

$$k = 2 \quad x_3 = \cos \frac{5\pi}{4m}$$

.....

$$k = \mu \dots x_{\mu+1} = \cos \frac{(2\mu+1)\pi}{4m}$$

$$k = 2m - \mu - 1 \quad x_{2m-\mu} = \cos \frac{(4m-2\mu-1)\pi}{4m}$$

.....

$$k = 2m - 1 \quad x_{2m} = \cos \frac{(4m-1)\pi}{4m}$$

так как уравнение $F(x) = 0$ степени $2m$, то других корней оно иметь не может. Отсюда видно, что все корни этого уравнения будут различны и притом вещественны.

Вследствие этого наше разложение будет вида

$$\frac{1}{F(x)} = \frac{1}{F'(x_1)} \cdot \frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{F'(x_2)} \cdot \frac{1}{x-x_2} + \dots = \sum \frac{1}{F'(x_\mu)} \cdot \frac{1}{x-x_\mu}$$

Но мы имеем

$$F'(x) = 2m \frac{\sin(2m \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

поэтому

$$F'(x_\mu) = 2m \frac{\sin \left[2m \arccos \left(\cos \frac{2\mu-1}{4m} \pi \right) \right]}{\sin \frac{2\mu-1}{4m} \pi} = 2m \frac{\sin \frac{2\mu-1}{2} \pi}{\sin \frac{2\mu-1}{4m} \pi}$$

Но

$$\sin \frac{2\mu-1}{2} \cdot \pi = (-1)^{\mu-1}$$

поэтому

$$F'(x_\mu) = (-1)^{\mu-1} \frac{2m}{\sin \frac{2\mu-1}{4m} \pi}$$

Итак,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos(2m \arccos x)} &= \sum \frac{\sin \frac{2\mu-1}{4m} \pi}{2m \cdot (-1)^{\mu-1}} \cdot \frac{1}{x - \cos \frac{2\mu-1}{4m} \pi} = \\ &= \frac{1}{2m} \sum (-1)^{\mu-1} \frac{\sin \frac{2\mu-1}{4m} \pi}{x - \cos \frac{2\mu-1}{4m} \pi} \end{aligned}$$

где сумма должна быть взята для величин μ , последовательно равных

$$1, 2, 3, 4, \dots, 2m-1, 2m.$$

Из этого равенства мы найдем следующую замечательную формулу:

$$\frac{2m}{\cos(2m \arccos x)} = \sum (-1)^{\mu-1} \frac{\sin \frac{2\mu-1}{4m} \pi}{x - \cos \frac{2\mu-1}{4m} \pi}$$

Из этого равенства мы можем получить известную формулу

$$\cos 2\varphi = 2 \cos^2 \varphi - 1$$

если положить здесь

$$\arccos x = \varphi \quad \text{и} \quad m = 1$$

При $x = \cos \varphi$ мы находим

$$(20) \quad \frac{2m}{\cos 2m\varphi} = \sum (-1)^{\mu-1} \cdot \frac{\sin \frac{2\mu-1}{4m} \pi}{\cos \varphi - \cos \frac{2\mu-1}{4m} \pi}$$

Сличим теперь в этой формуле два члена для $\mu = k$ и для $\mu = 2m+1-k$.

Полагая вообще

$$\Phi(\mu) = (-1)^{\mu-1} \cdot \frac{\sin \frac{2\mu-1}{4m} \pi}{\cos \varphi - \cos \frac{2\mu-1}{4m} \pi}$$

мы имеем

$$\Phi(k) = (-1)^{k-1} \cdot \frac{\sin \frac{2k-1}{4m} \pi}{\cos \varphi - \cos \frac{2k-1}{4m} \pi}$$

и

$$\begin{aligned} \Phi(2m+1-k) &= (-1)^{2m-k} \frac{\sin \frac{4m+1-2k}{4m} \pi}{\cos \varphi - \cos \frac{4m+1-2k}{4m} \pi} = \\ &= (-1)^k \cdot \frac{\sin \frac{2k-1}{4m} \pi}{\cos \varphi + \cos \frac{2k-1}{4m} \pi} \end{aligned}$$

Отсюда видно, что в нашем разложении сумма членов, равноотстоящих от средины, представляет выражение

$$\begin{aligned} &\Phi(k) + \Phi(2m+1-k) = \\ &= (-1)^{k-1} \sin \frac{2k-1}{4m} \pi \left[\frac{1}{\cos \varphi - \cos \frac{2k-1}{4m} \pi} - \frac{1}{\cos \varphi + \cos \frac{2k-1}{4m} \pi} \right] = \\ &= (-1)^{k-1} \cdot \frac{\sin \frac{2k-1}{2m} \pi}{\cos^2 \varphi - \cos^2 \frac{2k-1}{4m} \pi} = (-1)^{k-1} \cdot \frac{\sin \frac{2k-1}{2m} \pi}{\sin^2 \frac{2k-1}{4m} \pi - \sin^2 \varphi} \end{aligned}$$

поэтому формула (20) принимает такой вид:

$$(20') \quad \frac{2m}{\cos 2m\varphi} = \sum (-1)^{k-1} \frac{\sin \frac{2k-1}{2m} \pi}{\sin^2 \frac{2k-1}{4m} \pi - \sin^2 \varphi}$$

где должно менять k от 1 до m включительно.

Положим теперь, что φ стремится к нулю, а m неопределенно увеличивается, причем произведение $2m\varphi$, которое мы обозначим через $\frac{\lambda\pi}{2}$, остается конечною величиною. Постараемся при этих условиях найти предел нашей суммы.

Мы имеем

$$2m = \frac{\lambda\pi}{2\varphi}$$

поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\lambda\pi}{2\varphi}}{\cos \frac{\lambda\pi}{2}} &= \sum (-1)^{k-1} \frac{\sin\left(\frac{2k-1}{\lambda\pi} 2\varphi\pi\right)}{\sin^2\left(\frac{2k-1}{2\lambda\pi} 2\varphi\pi\right) - \sin^2\varphi} = \\ &= \sum (-1)^{k-1} \frac{\sin 2\frac{2k-1}{\lambda}\varphi}{\sin^2 \frac{2k-1}{\lambda}\varphi - \sin^2\varphi} \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\pi}{2}}{\cos \frac{\lambda\pi}{2}} &= \sum (-1)^{k-1} \cdot \frac{\sin \frac{2k-1}{\lambda} 2\varphi}{\frac{\lambda}{\varphi} \sin^2 \frac{2k-1}{\lambda}\varphi - \frac{\lambda}{\varphi} \sin^2\varphi} = \\ &= \sum (-1)^{k-1} \cdot \frac{\sin 2\frac{2k-1}{\lambda}\varphi}{\frac{\varphi}{\lambda \left[\frac{\sin \frac{2k-1}{\lambda}\varphi}{\varphi} \right]^2 - \left(\frac{\sin \varphi}{\varphi} \right)^2}} \end{aligned}$$

а так как вообще

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \left(\frac{\sin N\varphi}{\varphi} \right) = N$$

то будет

$$\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{\cos \frac{\lambda\pi}{2}} \right)_{\varphi=0} = \sum (-1)^{k-1} \frac{2 \cdot \frac{2k-1}{\lambda}}{\lambda \left(\frac{2k-1}{\lambda} \right)^2 - 1} = \sum (-1)^{k-1} \frac{2(2k-1)}{(2k-1)^2 - \lambda^2}$$

Итак, мы находим следующее выражение:

$$(21) \quad \frac{\frac{\pi}{2}}{\cos \lambda \frac{\pi}{2}} = \sum (-1)^{k-1} \cdot \frac{2(2k-1)}{(2k-1)^2 - \lambda^2}$$

Здесь следует давать k все целые значения от 1 до ∞ . Так как при этом λ определяется из условия

$$\lambda = \left(\frac{4m\varphi}{\pi} \right)_{\substack{\varphi=0 \\ m=\infty}}$$

то очевидно, что λ может иметь всевозможные значения, включая сюда и значения несоизмеримые. Если λ имеет значение вида $\alpha + \beta \sqrt{-1}$, что

может быть только в том случае, если φ получает мнимые значения (так как m величина вещественная), то и для этого случая выведенная формула справедлива, потому что в этом случае, отыскивая предел суммы при $\varphi = 0$ и $m = \infty$ помощью приемов, которые излагаются в дифференциальном исчислении (прием, основанный на геометрических соображениях, который мы употребили в этом случае, очевидно не будет иметь места), мы пришли бы окончательно к тому же выражению.

§ 13. Выражение (21) можно представить в таком виде:

$$\frac{\frac{\pi}{2}}{\cos \frac{\lambda\pi}{2}} = \frac{2 \cdot 1}{1 - \lambda^2} - \frac{2 \cdot 3}{3^2 - \lambda^2} + \frac{2 \cdot 5}{5^2 - \lambda^2} - \frac{2 \cdot 7}{7^2 - \lambda^2} + \dots$$

Предполагая теперь, что λ заключается между пределами -1 и $+1$ и сравнивая это равенство с равенством (18), получим

$$(22) \quad \int_0^{\infty} \frac{x^\lambda}{1+x^2} dx = \frac{\frac{\pi}{2}}{\cos \frac{\lambda\pi}{2}} \quad (-1 < \lambda < +1)$$

Таким образом искомый интеграл найден.

Этому интегралу дают иногда несколько иной вид, полагая

$$x = e^z$$

В этом случае мы получим

$$\frac{\frac{1}{2} \pi}{\cos \frac{\lambda\pi}{2}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\lambda z}}{e^{-z} + e^z} dz = \int_{-\infty}^0 \frac{e^{\lambda z}}{e^{-z} + e^z} dz + \int_0^{\infty} \frac{e^{\lambda z}}{e^{-z} + e^z} dz$$

но мы имеем

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{\lambda z}}{e^{-z} + e^z} dz = \int_0^{-\infty} \frac{-e^{\lambda z}}{e^{-z} + e^z} dz = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda z}}{e^{-z} + e^z} dz$$

поэтому

$$(23) \quad \int_0^{\infty} \frac{e^{\lambda z} + e^{-\lambda z}}{e^z + e^{-z}} dz = \frac{1}{2} \pi \cdot \frac{1}{\cos \frac{\lambda\pi}{2}}$$

Полагая здесь $\lambda = \beta \sqrt{-1}$, получим

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{z\beta\sqrt{-1}} + e^{-z\beta\sqrt{-1}}}{e^z + e^{-z}} dz = \int_0^{\infty} \frac{2 \cos \beta z}{e^{-z} + e^z} dz = \frac{\frac{1}{2} \pi}{\cos \frac{\beta\sqrt{-1}\pi}{2}} = \frac{\pi}{e^{\beta\frac{\pi}{2}} + e^{-\beta\frac{\pi}{2}}}$$

Итак,

$$(24) \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos \beta z}{e^{-z} + e^z} dz = \frac{1}{2} \pi \cdot \frac{1}{e^{-\beta \frac{\pi}{2}} + e^{\beta \frac{\pi}{2}}}$$

Еще более замечателен другой вид, к которому приводится интеграл (22) и который можно получить, положив

$$x^2 = z$$

вследствие этого

$$dx = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} dz$$

а потому

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{\frac{\lambda}{2}}}{1+z} \cdot \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} dz = \frac{\frac{1}{2} \pi}{\cos \frac{\lambda \pi}{2}}$$

откуда

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2}}}{1+z} dz = \frac{\pi}{\cos \frac{\lambda \pi}{2}}$$

Полагая здесь

$$\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2} = n - 1$$

найдем

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{n-1}}{1+z} dz = \frac{\pi}{\cos \left(n - \frac{1}{2} \right) \pi} = \frac{\pi}{\cos \left(\frac{\pi}{2} - n\pi \right)} = \frac{\pi}{\sin n\pi}$$

Если положить здесь

$$z = \frac{x}{1-x}$$

то окончательно найдем

$$(25) \quad \int_0^1 x^{n-1} (1-x)^{-n} dx = \frac{\pi}{\sin n\pi} \quad (0 < n < 1)$$

Этот интеграл, представленный в таком виде, есть частный случай Эйлерова интеграла первого вида

$$\int_0^1 x^{\lambda-1} (1-x)^{\mu-1} dx$$

при $\lambda = n$ и $\mu = -n - 1$.

Мы теперь и переходим к рассмотрению этих интегралов.

Эйлеровы интегралы

§ 14. Эйлеровым интегралом второго вида называется интеграл

$$\int_0^{\infty} x^{\nu-1} \cdot e^{-x} \cdot dx$$

который обыкновенно обозначают как функцию от ν через $\Gamma(\nu)$.

Интегралом же первого вида, как уже было упомянуто, называется интеграл

$$\int x^{\lambda-1} (1-x)^{\mu-1} dx$$

Для этого интеграла не принято особого обозначения, впрочем некоторые обозначают его через (λ, μ) ; другие — через $B(\lambda, \mu)$; мы примем здесь первое обозначение, так что, заменив ν через n , λ через p и μ через q , будем иметь:

$$\begin{aligned} \text{I} & \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = (p, q) \\ \text{II} & \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = \Gamma(n) \end{aligned}$$

Чтобы эти интегралы можно было рассматривать как пределы сумм, необходимо, чтобы параметры n , p , q были положительными, потому что в противном случае подынтегральная функция как в том, так и в другом интеграле делается бесконечною при одном из пределов, так что мы будем предполагать:

$$n > 0; \quad p > 0; \quad q < 0$$

Правда, подынтегральная функция в интеграле I делается бесконечною при обоих пределах, и в интеграле II — при нижнем пределе, когда указанные параметры, будучи положительными, меньше 1; но можно доказать, что в этих случаях интегралы имеют конечные значения. В самом деле, имеем

$$\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{n-1} e^{-x} dx + \int_1^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

Предполагая теперь n положительною правильною дробью, найдем

$$\int_0^1 x^{n-1} e^{-x} dx < \int_0^1 x^{n-1} dx$$

или

$$\int_0^1 x^{n-1} e^{-x} dx < \frac{x^n}{n}$$

так что этот интеграл имеет конечное значение при всяком положительном n , а интеграл

$$\int_1^\infty x^{n-1} e^{-x} dx < \int_1^\infty e^{-x} dx$$

т. е.

$$\int_1^\infty x^{n-1} e^{-x} dx < \frac{1}{e}$$

Что же касается Эйлера интеграла первого вида, то он также будет иметь конечное значение при упомянутых значениях параметров p и q , что видно из того, что этот интеграл, как мы вскоре докажем, связан следующим замечательным уравнением с интегралом второго вида:

$$(26) \quad (p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Но прежде чем приступить к доказательству этого соотношения, покажем некоторые свойства интегралов первого и второго вида, причем начнем с последнего.

Интегрируя по частям, находим

$$\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = \left[\frac{x^n e^{-x}}{n} \right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{x^n}{n} e^{-x} dx = \frac{1}{n} \int_0^\infty x^n e^{-x} dx$$

т. е.

$$\Gamma(n) = \frac{1}{n} \Gamma(n+1)$$

Откуда

$$(27) \quad \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

Точно так же найдем:

$$\begin{aligned} \Gamma(n+2) &= (n+1)\Gamma(n+1) \\ \Gamma(n+3) &= (n+2)\Gamma(n+2) \\ &\dots \\ \Gamma(n+m) &= (n+m-1)\Gamma(n+m-1) \end{aligned}$$

Перемножив эти равенства, имеем

$$\Gamma(n+m) = n(n+1)(n+2) \dots (n+m-1)\Gamma(n)$$

Полагая здесь $n = 1$ и замечая, что

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$$

находим для всякого целого m следующее равенство:

$$(28) \quad \Gamma(m+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1)m$$

Из этого равенства видно, что

$$\Gamma(2) = 1 = \Gamma(1)$$

так что между 1 и 2 функция Γ должна иметь minimum [вторая производная $\Gamma(n)$ всегда положительная].

Возьмем теперь интеграл

$$(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} \cdot dx$$

в котором будем предполагать p каким угодно положительным числом, а q целым и положительным числом, большим 1. Интегрируя по частям, найдем

$$\int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \left[\frac{x^p}{p} (1-x)^{q-1} \right]_0^1 + \frac{1}{p} \int_0^1 x^p \cdot (q-1) (1-x)^{q-2} \cdot dx$$

откуда

$$(p, q) = \frac{q-1}{p} (p+1, q-1)$$

Отсюда находим:

$$(p+1, q-1) = \frac{q-2}{p+1} (p+2, q-2)$$

$$(p+2, q-2) = \frac{q-3}{p+2} (p+3, q-3)$$

$$(p+3, q-3) = \frac{q-4}{p+3} (p+4, q-4)$$

$$\dots$$

$$(p+k, q-k) = \frac{q-k-1}{p+k} \cdot (p+k+1, q-k-1)$$

если только допустить неравенство

$$q - k > 1$$

Перемножая эти равенства, получаем

$$(p, q) = \frac{(q-1)(q-2)(q-3) \dots (q-k-1)}{p(p+1)(p+2) \dots (p+q)} \cdot (p+k+1, q-k-1)$$

Если положить здесь $q - k = 2$, то мы найдем

$$(p, q) = \frac{(q-1)(q-2)(q-3) \dots (2 \cdot 1)}{p \cdot (p+1)(p+2) \dots (p+q-2)} \cdot (p-q-1, 1)$$

Это равенство будет справедливо для каких угодно положительных p и для целого положительного q . Но

$$(p+q-1, 1) = \int_0^1 x^{p+q-2} \cdot dx = \frac{1}{p+q-1}$$

Поэтому для таких значений p и q получаем

$$(29) \quad (p, q) = \frac{q-1}{p} \cdot \frac{q-2}{p+1} \cdot \frac{q-3}{p+2} \dots \frac{1}{p+q-1} \cdot \frac{1}{p+q-1}$$

Если предположить теперь, что p есть также целое число, то отсюда находим

$$(p, q) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (q-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (p-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p-1) p (p+1) (p+2) \dots (p+q-1)} = \frac{\Gamma(q) \Gamma(p)}{\Gamma(p+q)}$$

Итак, уравнение (26) для целых p и q доказано.

§ 15. Чтобы доказать справедливость уравнения (26) в общем случае, рассмотрим двойной интеграл

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-xy} y^{p+q-1} e^{-y} dx dy$$

интегрируя сначала по x , а потом по y , положив $xy = z$, имеем

$$\int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-xy} \cdot dx = \frac{1}{y^p} \int_0^{\infty} z^{p-1} e^{-z} dz = \frac{\Gamma(p)}{y^p}$$

затем получаем

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-xy} y^{p+q-1} e^{-y} dx dy = \int_0^{\infty} \frac{y^{p+q-1}}{y^p} \cdot \Gamma(p) e^{-y} \cdot dy = \Gamma(p) \Gamma(q)$$

Интегрируя в другом порядке, причем полагаем

$$y(x+1) = u$$

находим

$$\int_0^{\infty} y^{p+q-1} \cdot e^{-y(x+1)} dy = \frac{1}{(x+1)^{p+q}} \cdot \int_0^{\infty} u^{p+q-1} e^{-u} du = \frac{1}{(x+1)^{p+q}} \cdot \Gamma(p+q)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{(x+1)^{p+q}} \cdot \Gamma(p+q) \cdot dx = \Gamma(p+q) \cdot \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{(x+1)^{p+q}} \cdot dx$$

Откуда

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} \cdot dx}{(x+1)^{p+q}} = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Пологая здесь $p+q=1$ и пользуясь формулой (25), мы можем отсюда вывести попутно следующую замечательную формулу:

$$(30) \quad \Gamma(p) \cdot \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

которая имеет весьма важное значение в практическом отношении при составлении таблиц значений функции Γ , потому что показывает, что в пределах 0 и 1 эти значения достаточно вычислить только для аргумента, не превосходящего $\frac{1}{2}$, так как остальные найдутся по формуле (30).

Вернемся теперь к интегралу

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} \cdot dx}{(1+x)^{p+q}}$$

полагая здесь

$$x = \frac{z}{z-1}$$

откуда

$$\frac{1}{1+x} = 1-z \quad \text{и} \quad dx = \frac{dz}{(1-z)^2}$$

получаем

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1} \cdot dx}{(1+x)^{p+q}} = \int_0^1 \frac{z^{p-1}}{(1-z)^{p-1}} \cdot (1-z)^{p+q} \cdot \frac{dz}{(1-z)^2} =$$

$$= \int_0^1 z^{p-1} \cdot (1-z)^{q-1} \cdot dz = (p, q)$$

поэтому

$$(26) \quad (p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Из этого уравнения видно, что (p, q) есть симметричная функция p и q , что легко доказать и непосредственно, положив $z = 1 - y$, и мы найдем

$$\begin{aligned} (p, q) &= \int_0^1 z^{p-1} (1-z)^{q-1} \cdot dz = - \int_1^0 (1-y)^{p-1} \cdot y^{q-1} \cdot dy = \\ &= \int_0^1 y^{q-1} (1-y)^{p-1} \cdot dy = (q, p) \end{aligned}$$

Итак, справедливость уравнения (26) доказана для всех значений p и q , для которых двойной интеграл, принятый нами в основание доказательства, может быть рассматриваем как предел суммы; последнее же будет иметь место для всех положительных p и q , потому что, интегрируя в первом порядке, мы приводим этот интеграл к произведению $\Gamma(p)\Gamma(q)$ и по доказанному каждый из этих множителей имеет конечное значение для всех положительных p и q .

§ 16. Полагая в равенстве (30) $p = \frac{1}{2}$, получаем

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Но мы нашли, что $\sqrt{\pi} = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$, поэтому

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

К этому результату придем и непосредственно, полагая в этом интеграле $x^2 = z$; в самом деле, тогда имеем

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{\infty} e^{-z} \cdot \frac{1}{2} \cdot z^{-\frac{1}{2}} \cdot dz = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} z^{\frac{1}{2}-1} \cdot e^{-z} \cdot dz = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

§ 17. Из уравнения (26) можем получить замечательное уравнение, связывающее функции гамма; полагая в (26) $p = q$, имеем

$$(p, p) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(p)}{\Gamma(2p)}$$

Преобразовывая первую часть этого равенства, находим

$$\begin{aligned} (p, p) &= \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{p-1} \cdot dx = \int_0^1 [x(1-x)]^{p-1} \cdot dx = \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \right]^{p-1} \cdot dx = \left(\frac{1}{4}\right)^{p-1} \int_0^1 [1 - (2x-1)^2]^{p-1} \cdot dx \end{aligned}$$

полагая здесь $2x - 1 = z$, находим

$$(p, p) = \frac{1}{4^{p-1}} \int_{-1}^{+1} (1-z^2)^{p-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot dz = \frac{4}{4^{p-1}} \int_0^1 (1-z^2)^{p-1} \cdot dz$$

так как интеграл содержит под своим знаком четную функцию. Полагая здесь $z^2 = u$, получим

$$\begin{aligned} (p, p) &= \frac{1}{4^{p-1}} \int_0^1 (1-u)^{p-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot u^{-\frac{1}{2}} \cdot du = \\ &= \frac{1}{2^{2p-1}} \int_0^1 u^{\frac{1}{2}-1} (1-u)^{p-1} \cdot du = \frac{1}{2^{2p-1}} \left(\frac{1}{2}, p\right) \end{aligned}$$

Итак,

$$\frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(p)}{\Gamma(2p)} = \frac{1}{2^{2p-1}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma(p)}{\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)}$$

откуда замечая, что

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

находим

$$(31) \quad \Gamma(p) \cdot \Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}} \cdot \Gamma(2p)$$

Эта замечательная формула была найдена в первый раз Лежандром.

§ 18. Перейдем теперь к интегралам, выражающимся при помощи логарифма от гаммы. В § 1 для всякого целого и положительного n мы нашли

$$\log 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-2)(n-1) = \int_0^{\infty} \frac{(n-1)e^{-x} - \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{1 - e^{-x}}}{x} dx$$

поэтому, на основании формулы (28), имеем

$$\int_0^{\infty} \frac{(n-1) e^{-x} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{1-x}}{x} \cdot dx = \log \Gamma(n)$$

Мы докажем теперь, что эта формула справедлива для всяких значений n , для которых может быть взята функция $\Gamma(n)$. Мы имеем вообще:

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

Дифференцируя это равенство по n , находим

$$\frac{d\Gamma(n)}{dn} = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} \log x dx$$

Но, на основании формулы (1), мы имеем

$$\log x = \int_0^{\infty} \frac{e^{-z} - e^{-xz}}{z} \cdot dz$$

Поэтому

$$\frac{d\Gamma(n)}{dn} = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} \int_0^{\infty} \frac{e^{-z} - e^{-xz}}{z} dz \cdot dx = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} \cdot \frac{e^{-z} - e^{-xz}}{z} dz dx$$

Производя здесь интегрирование по x , находим

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} (e^{-z} - e^{-xz}) dx = e^{-z} \int_0^{\infty} x^{n-1} \cdot e^{-x} dx - \int_0^{\infty} e^{-x(1+z)} x^{n-1} \cdot dx$$

если положить $x(1+z) = t$, то получим

$$\int_0^{\infty} e^{-x(1+z)} x^{n-1} \cdot dx = \frac{1}{(1+z)^n} \cdot \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n-1} \cdot dt = \frac{\Gamma(n)}{(1+z)^n}$$

поэтому будет

$$\frac{d\Gamma(n)}{dn} = \int_0^{\infty} [e^{-z} - (1+z)^{-n}] \Gamma(n) \cdot \frac{dz}{z}$$

Отсюда находим

$$\frac{d\Gamma(n)}{dn} \cdot \frac{1}{\Gamma(n)} = \frac{d \log \Gamma(n)}{dn} = \int_0^{\infty} [e^{-z} - (1+z)^{-n}] \frac{dz}{z}$$

следовательно будет:

$$\int_1^n d \log \Gamma(n) = \log \Gamma(n) = \int_0^\infty \int_1^n [e^{-z} - (1+z)^{-n}] \frac{dz}{z} \cdot dn$$

$$\log \Gamma(n) = \int_0^\infty (n-1) e^{-z} \cdot \frac{dz}{z} - \int_0^\infty \left[\frac{(1+z)^{-n}}{-\log(1+z)} \right]_1^n \frac{dz}{z}$$

итак,

$$\log \Gamma(n) = \int_0^\infty \left[(n-1) e^{-z} + \frac{(1+z)^{-n} - (1+z)^{-1}}{\log(1+z)} \right] \frac{dz}{z}$$

Замечая теперь, что $\Gamma(2) = 1$, находим

$$0 = \int_0^\infty \left[e^{-z} + \frac{(1+z)^{-2} - (1+z)^{-1}}{\log(1+z)} \right] \cdot \frac{dz}{z}$$

и следовательно,

$$\int_0^\infty \left[(n-1) e^{-z} + (n-1) \frac{(1+z)^{-2} - (1+z)^{-1}}{\log(1+z)} \right] \frac{dz}{z} = 0$$

Вычитая это равенство из предыдущего, получим

$$\log \Gamma(n) = \int_0^\infty \frac{(1+z)^{-n} - (1+z)^{-1} + (n-1) [(1+z)^{-1} - (1+z)^{-2}]}{\log(1+z)} \cdot \frac{dz}{z}$$

полагая здесь

$$\log(1+z) = x$$

находим

$$\log \Gamma(n) = \int_0^\infty [e^{-nx} - e^{-x} + (n-1) e^{-x} (1 - e^{-x})] \cdot \frac{e^x}{e^x - 1} \cdot \frac{dx}{x}$$

Откуда получаем окончательно:

$$(32) \quad \int_0^\infty \left[(n-1) e^{-x} - \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{1 - e^{-x}} \right] \frac{dx}{x} = \log \Gamma(n)$$

§ 19. Если в формуле (32) заменить n на $n+1$, то получим

$$(*) \quad \log \Gamma(n+1) = \int_0^\infty \left[n e^{-x} - \frac{e^{-x} - e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}} \right] \frac{dx}{x}$$

Эта формула имеет весьма большое значение в математике и в особенности в теории вероятностей, где она употребляется при целом n для

весьма больших значений его, и так как вообще из нее можно вывести замечательные следствия, то мы теперь на ней и остановимся.

Если n есть число весьма большое, то удобнее представить эту формулу в таком виде, чтобы вторая часть ее состояла из двух частей, из которых одна содержала бы все конечные и очень большие члены, а другая служила бы дополнительным членом, содержа только очень малые члены и обращаясь в нуль при $n = \infty$. В этом встречается необходимость, напр., при вычислении $\log \Gamma(n+1)$ для весьма больших значений n . Мы и займемся выводом этого выражения $\log \Gamma(n+1)$.

Подъинтегральная функция в формуле (*) может быть представлена в таком виде:

$$\left[ne^{-x} - \frac{e^{-x} - e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}} \right] \cdot \frac{1}{x} = \left[ne^{-x} - \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} + \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \cdot e^{-nx} \right] \frac{1}{x}$$

но

$$\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{1 - x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots}{x - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \dots} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \varphi(x)$$

где $\varphi(x)$ означает сумму всех остальных членов разложения. Нетрудно видеть, что $\varphi(x)$ содержит только положительные степени x , так как ее член, содержащий x в низшей степени, есть $\frac{1}{12}x$, а потому $\frac{\varphi(x)}{x}$ при $x = 0$ будет иметь конечный предел. Таким образом имеем

$$\left[ne^{-x} - \frac{e^{-x} - e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}} \right] \cdot \frac{1}{x} = \left[ne^{-x} - \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right) e^{-nx} \right] \frac{1}{x} + \frac{\varphi(x)}{x} e^{-nx}$$

но

$$\varphi(x) = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{x} = \frac{2e^{-x} + 1 - e^{-x}}{2(1 - e^{-x})} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}} - \frac{2}{x} \right)$$

поэтому

$$\begin{aligned} \log \Gamma(n+1) &= \int_0^{\infty} \left[ne^{-x} - \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right) e^{-nx} \right] \frac{dx}{x} + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(\frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}} - \frac{2}{x} \right) e^{-nx} \cdot \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

Или полагая здесь

$$F(n) = \int_0^{\infty} \left[ne^{-x} - \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right) e^{-nx} \right] \frac{dx}{x}$$

$$\Psi(n) = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \left[\frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}} - \frac{2}{x} \right] e^{-nx} \cdot \frac{dx}{x}$$

имеем

$$\log \Gamma(n+1) = F(n) + \Psi(n)$$

Таким образом мы привели наше выражение к желательному виду, потому что функция $\Psi(n)$ выражается при помощи интеграла от функции, принимающей конечные значения для всех значений x , заключающихся между пределами интегрирования (включая и самые пределы), и притом при n весьма большом — значения весьма малые, и обладает именно теми свойствами, которыми, по нашему предположению, должна обладать вторая часть искомого выражения.

Теперь остается только определить вид функций $F(n)$ и $\Psi(n)$.

Для определения $F(n)$ продифференцируем $F(n)$ по n , тогда получим

$$F'(n) = \int_0^{\infty} \left[e^{-x} - x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right) e^{-nx} \right] \frac{dx}{x} = \int_0^{\infty} \left[e^{-x} - e^{-nx} + \frac{x}{2} e^{-nx} \right] \frac{dx}{x}$$

Откуда следует

$$F'(n) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} \cdot dx + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-nx} dx = \log n + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$$

и

$$F(n) = \int \log n \, dn + \frac{1}{2} \int \frac{dn}{n} = n \log n - n + \frac{1}{2} \log n + C$$

где C — постоянное, которое оставляем пока неопределенным. Итак,

$$F(n) = C + n \log n - n + \frac{1}{2} \log n.$$

Здесь следует заметить, что примененное нами дифференцирование уничтожило постоянную C , в определении которой в данном случае и заключается все затруднение, так что причина того, что мы нашли без труда функцию $F(n)$ в таком неопределенном виде, и заключается именно в этом дифференцировании.

Обратимся теперь к исследованию функции $\Psi(n)$. В этом случае нельзя довести интегрирование до конца и эту функцию приходится выражать в виде ряда.

Мы имеем

$$\frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}$$

так что подынтегральная функция примет такой вид:

$$\frac{1}{2} \left[\frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} - \frac{2}{x} \right] \cdot \frac{1}{x} e^{-nx}$$

Здесь произведение первых двух множителей представляет четную функцию, и потому а priori можно сказать, что разложение ее по степеням x будет вида

$$A_1 + A_2 x^2 + A_3 x^4 + A_4 x^6 + \dots$$

Мы имеем:

$$e^{\frac{x}{2}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \dots$$

$$e^{-\frac{x}{2}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{1}{1 \cdot 2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \dots$$

откуда:

$$e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} = 2 \left[1 + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \dots \right]$$

$$e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} = 2 \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \dots \right]$$

следовательно

$$\frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} = \frac{1 + \frac{x^2}{8} + \dots}{\frac{x}{2} + \frac{x^3}{48} + \dots} = \frac{2}{x} + \frac{x}{6} \dots$$

а поэтому

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}} - \frac{2}{x} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{x} + \frac{x}{6} + \dots - \frac{2}{x} \right] = \frac{x}{12} + \dots$$

Итак,

$$A_1 = \frac{1}{12}$$

Употребляя большее число членов в числителе и знаменателе и производя деление, мы получим таким же путем A_2, A_3, \dots и т. д. Числа, которыми выражаются эти коэффициенты, имеют очень близкое соотношение с числами Бернулли; в настоящее время исследованием этих чисел занимаются очень многие математики.

Таким образом мы имеем

$$\begin{aligned} \Psi(n) &= \int_0^{\infty} [A_1 x + A_2 x^3 + A_3 x^5 + A_4 x^7 + \dots] \cdot e^{-nx} \cdot \frac{dx}{x} \\ &= A_1 \int_0^{\infty} e^{-nx} dx + A_2 \int_0^{\infty} x^2 e^{-nx} dx + A_3 \int_0^{\infty} x^4 \cdot e^{-nx} \cdot dx + \dots \end{aligned}$$

Замечая, что вообще

$$\int_0^{\infty} x^{l-1} e^{-nx} \cdot dx = \int_0^{\infty} \frac{z^{l-1}}{n^{l-1}} e^{-z} \cdot \frac{dz}{n} = \frac{1}{n^l} \int_0^{\infty} z^{l-1} \cdot e^{-z} \cdot dz = \frac{\Gamma(l)}{n^l}$$

и что

$$\Gamma(l) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (l-1)$$

при всяком целом и положительном l находим

$$(33) \quad \Psi(n) = \frac{1}{n} A_1 + \frac{1 \cdot 2}{n^3} A_2 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{n^5} A_3 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{n^7} A_4 + \dots$$

Таким образом мы выразили $\Psi(n)$ при помощи ряда, зависящего от коэффициентов A_1, A_2, A_3, \dots , поэтому, чтобы можно было сказать что-нибудь общее об этом выражении, необходимо знать закон составления этих коэффициентов; последнего же не дает тот способ вычисления их, который был применен выше. Вследствие этого мы теперь выведем выражения для этих коэффициентов, хотя и неудобные для их вычисления, но весьма удобные для нашей настоящей цели.

§ 20. Мы имеем, положив $\frac{x}{2} = \theta \sqrt{-1}$:

$$\frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} = \frac{e^{\theta \sqrt{-1}} + e^{-\theta \sqrt{-1}}}{e^{\theta \sqrt{-1}} - e^{-\theta \sqrt{-1}}} = \frac{2 \cos \theta}{2 \sqrt{-1} \sin \theta} = \frac{\cotg \theta}{\sqrt{-1}}$$

но мы имеем вообще:

$$\sin \theta = \theta \left(1 - \frac{\theta^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{\theta^2}{(2\pi)^2}\right) \left(1 - \frac{\theta^2}{(3\pi)^2}\right) \dots$$

откуда

$$\log \sin \theta = \log \theta + \log \left(1 - \frac{\theta^2}{\pi^2}\right) + \log \left(1 - \frac{\theta^2}{(2\pi)^2}\right) + \log \left(1 - \frac{\theta^2}{(3\pi)^2}\right) + \dots$$

Дифференцируя это равенство, получаем

$$\cotg \theta = \frac{1}{\theta} - \frac{2\theta}{\pi^2 - \theta^2} - \frac{2\theta}{(2\pi)^2 - \theta^2} - \frac{2\theta}{(3\pi)^2 - \theta^2} - \dots$$

так что

$$\frac{1}{2} \left(\cotg \theta - \frac{1}{\theta} \right) = -\frac{\theta}{\pi^2 - \theta^2} - \frac{\theta}{(2\pi)^2 - \theta^2} - \frac{\theta}{(3\pi)^2 - \theta^2} - \dots$$

но вообще

$$\frac{1}{1 - \alpha} = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \dots + \alpha^l + \frac{\alpha^{l+1}}{1 - \alpha}$$

а так как

$$\frac{1}{(m\pi)^2 - \theta^2} = \frac{1}{(m\pi)^2} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{m\pi}\right)^2}$$

то

$$\frac{(m\pi)^2}{(m\pi)^2 - \theta^2} = 1 + \frac{\theta^2}{(m\pi)^2} + \frac{\theta^4}{(m\pi)^4} + \dots + \frac{\theta^{2l}}{(m\pi)^{2l}} + \frac{\theta^{2l+2}}{(m\pi)^{2l+2}} \cdot \frac{(m\pi)^2}{(m\pi)^2 - \theta^2}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{(m\pi)^2 - \theta^2} &= \frac{\theta}{(m\pi)^2} + \frac{\theta^3}{(m\pi)^4} + \frac{\theta^5}{(m\pi)^6} + \dots + \frac{\theta^{2l+1}}{(m\pi)^{2l+2}} + \\ &+ \frac{\theta^{2l+3}}{(m\pi)^{2l+4}} + \frac{1}{(m\pi)^2 - \theta^2} \end{aligned}$$

Давая здесь m различные значения, начиная от 1, и складывая полученные таким образом равенства, найдем

$$\begin{aligned} &\frac{\theta}{\pi^2 - \theta^2} + \frac{\theta}{(2\pi)^2 - \theta^2} + \frac{\theta}{(3\pi)^2 - \theta^2} + \frac{\theta}{(4\pi)^2 - \theta^2} + \dots = \\ &= \frac{\theta}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right) + \frac{\theta^3}{\pi^4} \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots \right) + \dots + \\ &+ \frac{\theta^{2l+1}}{\pi^{2l+2}} \left(1 + \frac{1}{2^{2l+2}} + \frac{1}{3^{2l+2}} + \dots \right) + \\ &+ \frac{\theta^{2l+3}}{\pi^{2l+4}} \left[\frac{1}{\pi^2 - \theta^2} + \frac{1}{2^{2l+2}} \frac{1}{(2\pi)^2 - \theta^2} + \frac{1}{3^{2l+2}} \frac{1}{(3\pi)^2 - \theta^2} + \dots \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \left[\cotg \theta - \frac{1}{\theta} \right] \end{aligned}$$

Но

$$\theta = \frac{x}{2\sqrt{-1}} = -\frac{x}{2} \cdot \sqrt{-1}$$

ПОЭТОМУ

$$\frac{1}{2} \left[\frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} - \frac{2}{x} \right] \cdot \sqrt{-1} =$$

$$= -\frac{S_2}{\pi^2} \left(-\frac{x}{2} \sqrt{-1} \right) - \frac{S_4}{\pi^4} \cdot \left(-\frac{x}{2} \sqrt{-1} \right)^3 - \frac{S_6}{\pi^6} \left(-x \sqrt{-1} \right)^5 \dots$$

$$\dots - \frac{1}{\pi^{2l+2}} \left[\frac{1}{\pi^2 + \frac{x^2}{4}} + \frac{1}{2^{2l+2}} \cdot \frac{1}{(2\pi)^2 + \frac{x^2}{4}} + \dots \right] \left(-\frac{x}{2} \sqrt{-1} \right)^{2l+3}$$

при очевидном обозначении. Отсюда следует

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}} - \frac{2}{x} \right] =$$

$$\frac{S_2}{(2\pi)^2} x - \frac{S_4}{2^3 \pi^4} x^3 + \frac{S_6}{2^5 \pi^6} x^5 - \dots + (-1)^l \cdot \frac{S_{2l+2}}{2^{2l+1} \cdot \pi^{2l+2}} x^{2l+1} +$$

$$+ \frac{(-1)^{l+1}}{2^{2l+3} \pi^{2l+2}} \left[\frac{1}{\pi^2 + \frac{x^2}{4}} + \frac{1}{2^{2l+2}} \cdot \frac{1}{2\pi^2 + \frac{x^2}{4}} + \dots \right] x^{2l+3}$$

Отсюда видно, что

$$A_1 = \frac{1}{2\pi^2} S_2 + \frac{1}{2\pi^2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right)$$

$$A_2 = -\frac{1}{2^3 \pi^4} \cdot S_4 = \frac{1}{2^3 \pi^4} \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots \right)$$

$$A_3 = \frac{1}{2^5 \pi^6} S_6 = \frac{1}{2^5 \pi^6} \left(1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \dots \right)$$

и вообще

$$A_{l+1} = \frac{(-1)^l}{2^{2l+1} \pi^{2l+2}} \cdot S_{2l+2} = \frac{(-1)^l}{2^{2l+1} \pi^{2l+2}} \left[1 + \frac{1}{2^{2l+2}} + \frac{1}{3^{2l+2}} + \dots \right]$$

Таким образом мы имеем

$$\Psi(n) = \int_0^{\infty} \left[A_1 x + A_2 x^3 + A_3 x^5 + \dots + A_{l+1} \cdot x^{2l+1} - \right.$$

$$\left. - \frac{(-1)^l}{2^{2l+3} \pi^{2l+2}} \left(\frac{1}{\pi^2 + \frac{x^2}{4}} + \frac{1}{2^{2l+2}} \cdot \frac{1}{(2\pi)^2 + \frac{x^2}{4}} + \dots \right) x^{2l+3} \right] \frac{e^{-nx} dx}{x}$$

Откуда, принимая во внимание равенство (33),

$$\Psi(n) = \frac{A_1}{n} + \frac{A_2 \Gamma(3)}{n^3} + A_3 \frac{\Gamma(5)}{n^5} + \dots + A_{l+1} \frac{\Gamma(2l+1)}{n^{2l+1}} -$$

$$- \frac{(-1)^l}{2^{2l+3} \pi^{2l+2}} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{\pi^2 + \frac{x^2}{4}} + \dots \right] e^{-nx} \cdot x^{2l+2} \cdot dx$$

Итак, мы выразим $\Psi(n)$ при помощи ряда, члены которого то положительны, то отрицательны и дополнительный член которого имеет знак, противный знаку предшествующего ему члена. Такие ряды называются *предельными* (limitatives). Эти ряды обладают тем замечательным свойством, что дополнительный член их всегда менее по численному значению члена следующего за тем, на котором мы остановились. В самом деле, возьмем ряд

$$X = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 \dots \pm u_n \mp R_n$$

так что

$$X = u_1 - R_1$$

$$X = u_1 - u_2 + R_2$$

$$X = u_1 - u_2 + u_3 - R_3$$

.....

Отсюда видно, что

$$R_1 < u_2$$

$$R_2 < u_3$$

$$R_3 < u_4$$

.....

.....

$$R_n < u_{n+1}$$

Таким образом рассматриваемые ряды всегда дают возможность определить ошибку, происходящую при вычислении их сумм, и в этом заключается их преимущество перед другими рядами. Но они обладают и важным недостатком: они не дают возможности определить, на каком члене следует остановиться, чтобы получить наиболее точное значение суммы. Это следует из того, что в таких рядах каждый член может быть как более, так и менее предшествующего ему, так что, останавливаясь на каком-нибудь члене $\pm u_k$, мы замечаем, что в одном случае прибавление нового члена $\mp u_{k+1}$ может уменьшить, а в другом увеличить степень приближения. Вообще, как видно из сказанного об этих рядах, для получения наиболее точного результата следует остановиться на таком члене u_l , чтобы следующий за ним член $-u_{l+1}$ имел наименьшую величину; полученная таким образом сумма будет отличаться от истинной на величину меньшую u_{l+1} .

Из формулы (33) видно, что члены ряда, которым выражается $\Psi(n)$, сначала уменьшаются, но начиная с некоторого члена начинают возрастать,

поэтому, чтобы в данном случае определить член, на котором следует остановиться, мы должны положить

$$u_l > u_{l-1} \quad \text{или} \quad \frac{u_l}{u_{l-1}} > 1$$

и определить наименьшее значение l , удовлетворяющее этому неравенству.

Мы скажем, каким образом при помощи этого неравенства мы можем приобрести некоторое понятие о низшем пределе l .

Мы имеем

$$u_l = \frac{A_l \Gamma(2l-1)}{n^{2l-1}} \quad \text{и} \quad u_{l-1} = \frac{A_{l-1} \Gamma(2l-3)}{n^{2l-3}}$$

так что

$$\frac{u_l}{u_{l-1}} = \frac{A_l}{A_{l-1}} \cdot \frac{\Gamma(2l-1)}{\Gamma(2l-3)} \cdot \frac{n^{2l-3}}{n^{2l-1}} = \frac{A_l}{A_{l-1}} \cdot (2l-2)(2l-3) \frac{1}{n^2}$$

причем мы берем только числовые значения A_l и A_{l-1} .

Итак, мы будем иметь условное неравенство

$$\frac{A_l}{A_{l-1}} (2l-2)(2l-3) > n^2$$

или

$$(a) \quad \frac{1}{2^2 \pi^2} \cdot \frac{1 + \frac{1}{2^{2l}} + \frac{1}{3^{2l}} + \dots}{1 + \frac{1}{2^{2l-2}} + \frac{1}{3^{2l-2}} + \dots} (2l-2)(2l-3) > n^2$$

Из этого неравенства можем заключить о существовании неравенства

$$(2l-2)(2l-3) > 2^2 \pi^2 n^2$$

откуда:

$$(2l)^2 > (2n\pi)^2$$

$$(b) \quad 2l > 2n\pi \quad \text{или} \quad l > n\pi$$

Таким образом мы видим, что l должно быть не менее $n\pi$. Но из способа, которым мы получили этот низший предел, не видно, будет ли действительно u_l наименьшим при $l > n\pi$ и имеющим наименьшее значение, удовлетворяющее этому неравенству, потому что если мы перешли от неравенства (a) к неравенству (b), то обратного перехода мы, очевидно, не имели права сделать. Отсюда видно, что $n\pi$ дает только приблизительное понятие о том, как велико должно быть l .

Выше мы заметили, что коэффициенты A_1, A_2, A_3, \dots имеют очень близкую связь с числами Бернулли B_1, B_2, B_3, \dots . Зависимость между этими числами выражается уравнением

$$A_l = (-1)^{l-1} \cdot \frac{B_l}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2l}$$

так что

$$A_1 = \frac{B_1}{2}; \quad A_2 = -\frac{B_2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}; \quad A_3 = \frac{B_3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}, \text{ и т. д.}$$

Числа Бернулли играют довольно важную роль в математике, так что существует очень много трактатов, специально посвященных исследованию их свойств.

§ 21. Перейдем теперь к определению постоянного C в выражении

$$F(n) = C + n \log n - n + \frac{1}{2} \log n$$

Формула Лежандра [ур-ние (3)]

$$(31) \quad \Gamma(n) \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}} \Gamma(2n)$$

по логарифмированию дает

$$\log \Gamma(n) + \log \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \log \sqrt{\pi} + \log \Gamma(2n) - (2n - 1) \log 2$$

но мы имеем

$$\log \Gamma(n + 1) = C + n \log n - n + \frac{1}{2} \log n + \Psi(n)$$

поэтому будет

$$\begin{aligned} \log \Gamma(n) &= C + (n - 1) \log(n - 1) - n + 1 + \frac{1}{2} \log(n - 1) + \Psi(n - 1) \\ \log \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= C + \left(n - \frac{1}{2}\right) \log\left(n - \frac{1}{2}\right) - n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log\left(n - \frac{1}{2}\right) + \Psi\left(n - \frac{1}{2}\right) \\ \log \Gamma(2n) &= C + (2n - 1) \log(2n - 1) - 2n + 1 + \frac{1}{2} \log(2n - 1) + \Psi(2n - 1) \end{aligned}$$

Вследствие этого мы получаем такое уравнение:

$$\begin{aligned} 2C + \left(n - \frac{1}{2}\right) \log(n - 1) + n \log\left(n - \frac{1}{2}\right) - 2n + \frac{3}{2} + \Psi(n - 1) + \Psi\left(n - \frac{1}{2}\right) = \\ = \log \sqrt{\pi} + C + \left(2n - \frac{1}{2}\right) \log(2n - 1) + 1 - 2n + \Psi(2n - 1) - (2n - 1) \log 2 \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} C = \log \sqrt{\pi} + \left(2n - \frac{1}{2}\right) \log(2n - 1) - \left(n - \frac{1}{2}\right) \log(n - 1) - n \log\left(n - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \\ - (2n - 1) \log 2 - \Psi(n - 1) - \Psi\left(n - \frac{1}{2}\right) + \Psi(2n - 1) \end{aligned}$$

Но мы имеем вообще:

$$\log(x - 1) = \log x \left(1 - \frac{1}{x}\right) = \log x + \log\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \log x - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2} - \dots$$

поэтому

$$\log(2n-1) = \log 2n - \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} - \dots$$

$$\log(n-1) = \log n - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \dots$$

$$\log\left(n - \frac{1}{2}\right) = \log(2n-1) - \log 2 = \log n - \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} - \dots$$

Итак,

$$C = \log \sqrt{\pi} + \left(2n - \frac{1}{2}\right) \left[\log n + \log 2 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} \right] - \left(n - \frac{1}{2}\right) \left[\log n - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \dots \right] - n \left[\log n - \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} \right] - \frac{1}{2} - (2n-1) \log 2 + \Psi(2n-1) - \Psi(n-1) - \Psi\left(n - \frac{1}{2}\right)$$

или

$$C = \log \sqrt{\pi} + \frac{1}{2} \log 2 - \frac{2n - \frac{1}{2}}{2n} + \frac{n - \frac{1}{2}}{n} - \frac{2n - \frac{1}{2}}{8n^2} + \frac{n - \frac{1}{2}}{2n^2} + \dots + \Psi(2n-1) - \Psi(n-1) - \Psi\left(n - \frac{1}{2}\right).$$

Полагая в этом уравнении или тождестве (так как оно должно иметь место для всех значений n) $n = \infty$ и замечая, что $\Psi(\infty) = 0$, находим

$$C = \log \sqrt{\pi} + \frac{1}{2} \log 2 = \log \sqrt{2\pi}$$

Итак, будет

$$\log \Gamma(n+1) = \log \sqrt{2\pi} + n \log n + \frac{1}{2} \log n - n + \Psi(n)$$

откуда

$$\Gamma(n+1) = \sqrt{2\pi} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n+\Psi(n)}$$

но

$$e^{\Psi(n)} = e^{\frac{1}{12n} + \dots} = 1 + \frac{1}{12n}$$

поэтому мы получим окончательно:

$$(34) \quad \Gamma(n+1) = \sqrt{2\pi} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \left(1 + \frac{1}{12n} + \dots\right)$$

Если n есть целое число, то мы отсюда найдем

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = \sqrt{2\pi} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \left(1 + \frac{1}{12n} + \dots\right)$$

Эта формула, дающая возможность вычислять приближенное значение произведения натуральных чисел, была дана Стирлингом.

§ 22. В заключение статьи об Эйлеровых интегралах выведем знаменитое уравнение Гаусса, связывающее гаммы.

Мы всегда имеем право положить

$$\Gamma(n)\Gamma\left(n+\frac{1}{m}\right)\cdot\Gamma\left(n+\frac{2}{m}\right)\dots\Gamma\left(n+\frac{m-1}{m}\right)=F(n,m)\Gamma(n,m)$$

постараемся теперь определить функцию $F(n, m)$

Мы имеем

$$\frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma\left(a+\frac{1}{m}\right)\cdot\Gamma\left(a+\frac{2}{m}\right)\dots\Gamma\left(a+\frac{m-1}{m}\right)}{\Gamma(am)}=F(a,m)$$

полагая здесь $a+1$ вместо a и замечая, что вообще

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$$

найдем

$$\frac{a\Gamma(a)\cdot\left(a+\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(a+\frac{1}{m}\right)\cdot\left(a+\frac{2}{m}\right)\Gamma\left(a+\frac{2}{m}\right)\dots\left(a+\frac{m-1}{m}\right)\Gamma\left(a+\frac{m-1}{m}\right)}{\Gamma(am+m)}=$$

$$=F(a+1,m)$$

или

$$\frac{a\left(a+\frac{1}{m}\right)\left(a+\frac{2}{m}\right)\dots\left(a+\frac{m-1}{m}\right)}{(ma+m-1)(ma+m-2)\dots ma}\Gamma(am)\cdot\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{m}\right)\dots\Gamma\left(a+\frac{m-1}{m}\right)=$$

$$=F(a+1,m)$$

или

$$\frac{\frac{ma}{m}\cdot\frac{ma+1}{m}\cdot\frac{ma+2}{m}\dots\frac{ma+m-1}{m}}{(ma+m-1)(ma+m-2)\dots ma}\cdot F(a,m)=F(a+1,m)$$

откуда

$$\frac{F(a+1,m)}{F(a,m)}=m^{-m}=\frac{m^{-(a+1)m}}{m^{-am}}$$

следовательно

$$\frac{F(a+1,m)}{m^{-(a+1)m}}=\frac{F(a,m)}{m^{-am}}$$

Поэтому, полагая вообще

$$m^{km}F(km)=\theta(k)$$

находим

$$\theta(a)=\theta(a+1)$$

Отсюда нетрудно заключить, что

$$\theta(a)=\theta(\infty)$$

Итак, мы имеем

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{m}\right)\cdot\Gamma\left(a+\frac{2}{m}\right)\dots\Gamma\left(a+\frac{m-1}{m}\right)}{\Gamma(am)} = m^{-am} \lim_{x \rightarrow \infty} [\theta(x)]$$

где

$$\theta(x) = \frac{\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{m}\right)\dots\Gamma\left(x+\frac{m-1}{m}\right)}{\Gamma(mx)\cdot m^{-mx}}$$

Отсюда находим

$$\log \theta(x) = \log \Gamma(x) + \log \Gamma\left(x+\frac{1}{m}\right) + \dots + \log \Gamma\left(x+\frac{m-1}{m}\right) + mx \log m - \log \Gamma(mx)$$

но мы имели

$$\log \Gamma(n+1) = \log \sqrt{2\pi} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n - n + \Psi(n)$$

поэтому будет

$$\begin{aligned} \log \theta(x) &= \log \sqrt{2\pi} + \left(x - \frac{1}{2}\right) \log(x-1) - x + 1 + \Psi(x-1) + \\ &+ \log \sqrt{2\pi} + \left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{m}\right) \log\left(x-1 + \frac{1}{m}\right) - x + 1 - \frac{1}{m} + \Psi\left(x-1 + \frac{1}{m}\right) + \\ &+ \log \sqrt{2\pi} + \left(x - \frac{1}{2} + \frac{2}{m}\right) \log\left(x-1 + \frac{2}{m}\right) - x + 1 - \frac{2}{m} + \Psi\left(x-1 + \frac{2}{m}\right) + \\ &\dots \dots \dots \\ &+ \log \sqrt{2\pi} + \left(x + \frac{1}{2} + \frac{m-1}{m}\right) \log\left(x-1 + \frac{m-1}{m}\right) - x + 1 - \frac{m-1}{m} + \Psi\left(x-1 + \frac{m-1}{m}\right) - \\ &- \log \sqrt{2\pi} - \left(mx - \frac{1}{2}\right) \log(mx-1) + mx - 1 + mx \log m - \Psi(mx-1) \end{aligned}$$

Но замечая, что вообще

$$\log(x-r) = \log x \left(1 - \frac{r}{x}\right) = \log x + \log\left(1 - \frac{r}{x}\right) = \log x - \frac{r}{x} - \dots$$

находим

$$\begin{aligned} \log \theta(x) &= (m-1) \log \sqrt{2\pi} + \left(x - \frac{1}{2}\right) \left[\log x - \frac{1}{x} + \dots \right] + \Psi(x-1) + \\ &+ \left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{m}\right) \left[\log x - \frac{1 - \frac{1}{m}}{x} \right] + \Psi\left(x-1 + \frac{1}{m}\right) + \\ &+ \left(x - \frac{1}{2} + \frac{2}{m}\right) \left[\log x - \frac{1 - \frac{2}{m}}{x} \right] + \Psi\left(x-1 + \frac{2}{m}\right) + \\ &\dots \dots \dots \\ &+ \left(x - \frac{1}{2} + \frac{m-1}{m}\right) \left[\log x - \frac{1 - \frac{m-1}{m}}{x} \right] + \Psi\left(x-1 + \frac{m-1}{m}\right) + \\ &+ mx \log m + (m-1) \frac{1+2+3+\dots+(m-1)}{m} - \\ &- \left(mx - \frac{1}{2}\right) \left[\log mx - \frac{1}{mx} \dots \right] - \Psi(mx-1) \end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned} \log \theta(x) &= (m-1) \log \sqrt{2\pi} + mx \log x + mx \log m - mx \log mx + m-1 + 1 + \\ &+ \frac{1}{2} \log mx - \frac{1+2+3 \dots + m-1}{m} - \frac{1}{2} m \log x - m + \frac{1+2+3 \dots + m-1}{m} + \\ &+ \frac{1+2+3 \dots + m-1}{m} \log x + \dots + \Psi(x-1) + \Psi\left(x-1 + \frac{1}{m}\right) + \dots \\ &\dots + \Psi\left(x-1 + \frac{m-1}{m}\right) - \Psi(mx-1) \end{aligned}$$

Откуда

$$\log \theta(x) = (m-1) \log \sqrt{2\pi} + \frac{1}{2} \log m + \dots$$

Мы здесь удержали только два члена, потому что все остальные при $x = \infty$ обращаются в нуль. Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [\log \theta(x)] = (m-1) \log \sqrt{2\pi} + \log \sqrt{m}$$

значит

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [\theta(x)] = m^{\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{m-1}{2}}$$

следовательно

$$F(a, m) = m^{-am + \frac{1}{2}} \cdot 2\pi^{\frac{m-1}{2}}$$

и

$$\frac{\Gamma(a) \Gamma\left(a + \frac{1}{m}\right) \dots \Gamma\left(a + \frac{m-1}{m}\right)}{\Gamma(ma)} = m^{-am + \frac{1}{2}} \cdot (2\pi)^{\frac{m-1}{2}}$$

Итак, мы имеем

$$\begin{aligned} (35) \quad \Gamma(\lambda) \cdot \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{m}\right) \cdot \Gamma\left(\lambda + \frac{2}{m}\right) \dots \Gamma\left(\lambda + \frac{m-1}{m}\right) &= \\ &= m^{-\lambda m - \frac{1}{2}} \cdot (2\pi)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \Gamma(m\lambda) \end{aligned}$$

Это уравнение, имеющее место при всяком λ и при всяком целом и положительном m , представляет обобщение уравнения (31).

Полагая здесь $\lambda = 1$ и предполагая n целым положительным числом, получим

$$\begin{aligned} \Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \Gamma\left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdot \Gamma\left(1 + \frac{3}{n}\right) \dots \Gamma\left(1 + \frac{n-1}{n}\right) &= \\ &= n^{-n + \frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \Gamma(n) \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}{n^{n-1}} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{3}{n}\right) \dots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \\ = n^{-n+\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \Gamma(n)$$

что, вследствие равенства (28), дает

$$(36) \quad \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{3}{n}\right) \dots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \cdot n^{-\frac{1}{2}}$$

§ 23. Мы определили $\Gamma(\lambda)$ как значение определенного интеграла

$$\int_0^{\infty} x^{\lambda-1} e^{-x} dx$$

вследствие чего мы по необходимости могли рассматривать функцию гамма только для тех значений λ , при которых этот интеграл имеет смысл, т. е. представляет предел некоторой суммы; эти значения λ заключаются, как мы видели, между 0 и ∞ . Но существует другое более общее определение гаммы, причем значение этой функции распространяется и на случаи, когда переменная имеет и отрицательные значения.

Последнее обстоятельство именно и послужило поводом к этому новому определению, так как прежнее определение не распространялось на все значения переменной.

Чтобы перейти к этому новому определению от данного нами выше, заметим, что

$$\Gamma(\lambda) = \left[\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot \Gamma(\lambda) \cdot n^\lambda}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot n(n+1) \dots (n+\lambda-1)} \right]_{n=\infty}$$

при всяком целом и положительном λ , но это равенство можно представить в таком виде:

$$\Gamma(\lambda) = \left[\frac{\Gamma(n) \Gamma(\lambda) \cdot n^\lambda}{\Gamma(n+\lambda)} \right]_{n=\infty}$$

или

$$\Gamma(\lambda) = \left[\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot \Gamma(\lambda) \cdot n^\lambda}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (\lambda-1) \cdot \lambda \cdot (\lambda+1) \dots (\lambda+n-1)} \right]_{n=\infty}$$

или

$$(37) \quad \Gamma(\lambda) = \left[\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) n^\lambda}{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2) \dots (\lambda+n-1)} \right]_{n=\infty}$$

Это последнее равенство и принимается за определение гаммы, причем его распространяют также на случай дробных и отрицательных значений λ .

§ 24. Мы переходим теперь к интегралам, имеющим очень близкую связь с Эйлеровыми и которые обыкновенно выводят из последних, давая x мнимые значения. Но мы для того, чтобы следовать вполне строгому пути, выведем эти интегралы независимо от Эйлеровых, причем мы будем рассматривать интеграл

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-z} \cos(xz) \cdot x^{\mu-1} \cdot dx \cdot dz$$

Интегрируя сначала по x , а потом по z , находим, полагая $xz = y$:

$$\int_0^{\infty} \cos(xz) x^{\mu-1} \cdot dx = \int_0^{\infty} \cos y \left(\frac{y}{z}\right)^{\mu-1} \cdot \frac{dy}{z} = z^{-\mu} \int_0^{\infty} y^{\mu-1} \cos y \cdot dy$$

так что

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-z} \cos(xz) x^{\mu-1} dx dz &= \int_0^{\infty} y^{\mu-1} \cos y dy \int_0^{\infty} z^{-\mu} e^{-z} dz = \\ &= \Gamma(1 - \mu) \int_0^{\infty} y^{\mu-1} \cos y dy \end{aligned}$$

причем μ предполагается положительным и меньшим 1.

Интегрируя теперь в другом порядке, получаем

$$\int_0^{\infty} e^{-z} \cos(xz) dz = \frac{1}{1+x^2}$$

по формуле (b) § 2. Отсюда, по формуле (22), имеем

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-z} \cos xz \cdot x^{\mu-1} \cdot dx \cdot dz = \int_0^{\infty} \frac{x^{\mu-1}}{1+x^2} \cdot dx = \frac{\pi}{2 \cos(\mu-1) \frac{\pi}{2}}$$

поэтому будет

$$\int_0^{\infty} y^{\mu-1} \cos y dy = \frac{\pi}{2\Gamma(1-\mu) \cos(\mu-1) \frac{\pi}{2}}$$

Предполагая здесь μ положительным и пользуясь формулой (30), находим

$$\int_0^{\infty} y^{\mu-1} \cos y \cdot dy = \frac{\Gamma(\mu) \sin \mu \frac{\pi}{2}}{2 \cos(\mu-1) \frac{\pi}{2}} = \frac{2\Gamma(\mu) \cdot \sin \frac{\mu \pi}{2} \cdot \cos \frac{\mu \pi}{2}}{2 \cos(\mu-1) \frac{\pi}{2}} = \Gamma(\mu) \cdot \cos \mu \frac{\pi}{2}$$

Интегрируя это равенство по частям, получим аналогичную формулу, содержащую синус:

$$\int_0^{\infty} y^{\mu-1} \cos y \cdot dy = [y^{\mu-1} \sin y]_0^{\infty} - (\mu - 1) \int_0^{\infty} y^{\mu-2} \sin y \cdot dy =$$

$$= (1 - \mu) \int_0^{\infty} y^{\mu-2} \cdot \sin y \cdot dy$$

откуда

$$\int_0^{\infty} y^{\mu-2} \sin y dy = \frac{\Gamma(\mu)}{1-\mu} \cos \mu \frac{\pi}{2}$$

Полагая здесь $\mu - 2 = \lambda - 1$, находим

$$\int_0^{\infty} y^{\lambda-1} \cdot \sin y \cdot dy = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{-\lambda} \cos(\lambda+1) \frac{\pi}{2} = \Gamma(\lambda) \cdot \sin \frac{\lambda\pi}{2}$$

Мы заменили здесь $\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\lambda}$ через $\Gamma(\lambda)$; но в данном случае, так как μ заключается между пределами 0 и 1, то λ заключается между пределами -1 и 0, между тем как формула

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

была доказана только для положительных значений n , что следует из определения гаммы, которое лежало в основании этого доказательства.

Чтобы устранить это затруднение, мы можем доказать эту формулу и для отрицательных значений n , причем нам придется уже воспользоваться определением гаммы, заключающимся в равенстве (37).

Замечая, что

$$\lim \left(\frac{n}{n+\lambda} \right)_{n=\infty} = 1$$

мы можем положить

$$\left[\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot n^{\lambda}}{\lambda(\lambda+1) \dots (\lambda+n-1)} \right]_{n=\infty} = \left[\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot n^{\lambda+1}}{\lambda(\lambda+1) \dots (\lambda+n-1)(\lambda+n)} \right]_{n=\infty}$$

и вследствие этого

$$\Gamma(\lambda) = \left[\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) n^{\lambda+1}}{\lambda(\lambda+1) \dots (\lambda+1+n-1)} \right]_{n=\infty}$$

отсюда следует

$$\lambda\Gamma(\lambda) = \Gamma(\lambda+1)$$

Итак, мы имеем право написать

$$\int_0^{\infty} y^{\lambda-1} \sin y dy = \Gamma(\lambda) \sin \lambda \frac{\pi}{2}$$

Мы получили эту формулу для отрицательных значений λ , но она будет справедлива и для положительных, так как ее можно вывести таким же путем, как и формулу, содержащую косинус.

Таким образом мы имеем формулы:

$$(38) \quad \begin{aligned} 0 < \mu < 1 & \quad \int_0^{\infty} x^{\mu-1} \cos x dx = \Gamma(\mu) \cdot \cos \mu \frac{\pi}{2} \\ -1 < \mu < 1 & \quad \int_0^{\infty} x^{\mu-1} \sin x dx = \Gamma(\mu) \cdot \sin \mu \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Этим и закончим статью об Эйлеровых интегралах.

Интегралы четвертой группы

§ 25. Теперь мы переходим к интегралам, характеристическою особенностью которых служит то, что пределы их представляют величины, имеющие особые значения для углов, напр. $0, \frac{\pi}{2}, \pi, 2\pi$ и т. д.

Мы начнем с рассмотрения интеграла

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{m\varphi\sqrt{-1}} \cdot e^{-n\varphi\sqrt{-1}} d\varphi$$

и докажем, что значение его равно 0 или 2π , смотря по тому, будут ли m и n различны или равны между собой. Предполагая неравенство m и n и интегрируя, находим

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{(m-n)\varphi\sqrt{-1}} &= \left[\frac{e^{(m-n)\varphi\sqrt{-1}}}{(m-n)\sqrt{-1}} \right]_{-\pi}^{+\pi} = \frac{e^{(m-n)\pi\sqrt{-1}} - e^{-(m-n)\pi\sqrt{-1}}}{(m-n)\sqrt{-1}} = \\ &= \frac{2\sqrt{-1} \sin(m-n)\pi}{(m-n)\sqrt{-1}} = 2 \frac{\sin(m-n)\pi}{m-n} \end{aligned}$$

Отсюда видно, что если m и n суть числа целые и притом различные, то рассматриваемый интеграл равен 0. Если $m = n$, то эта формула принимает неопределенный вид $\frac{0}{0}$. Определив по правилам дифференциального

исчисления его истинную величину, получим 2π . Этот же результат можно получить и непосредственно, именно, в этом случае рассматриваемый интеграл будет

$$\int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi = 2\pi$$

Итак, мы имеем

$$(39) \quad \left. \int_{-\pi}^{+\pi} e^{m\varphi\sqrt{-1}} \cdot e^{-n\varphi\sqrt{-1}} d\varphi \right\} \begin{array}{l} = 0 \quad \dots \quad m \geq n \\ = 2\pi \quad \dots \quad m = n \end{array}$$

Интегралами этого вида занимались и в настоящее время занимаются очень многие.

Их значение в анализе основывается на том, что при помощи свойства их, заключающегося в равенствах подобных (39), можно всякую функцию разложить по степеням одного из множителей, находящихся под знаком интеграла.

Так, напр., пользуясь равенством (39), мы можем разложить $F(e^{\varphi\sqrt{-1}})$ по степеням $e^{\varphi\sqrt{-1}}$. Заметим, что то же мы можем достигнуть и при помощи дифференциального исчисления, и повидимому, казалось бы, что последний способ предпочтительнее, так как при дифференцировании мы не можем встретить затруднений, но на самом деле это не так, потому что дифференцирование не представляет затруднений только в том случае, когда мы отыскиваем производные известных порядков, выражающихся числами, и представляет такие же затруднения, как и интегрирование, коль скоро мы желаем определить выражение n -ой производной.

Кроме того, нам очень часто весьма важно узнать, на каком члене разложения следует остановиться, что сводится к вопросу о том, как изменяется общий член разложения при увеличении его значка, а в изысканиях этого рода члены, выражающиеся интегралами, даже и тогда, когда последние не могут быть найдены, представляют неоспоримое преимущество перед выражениями, зависящими от производных известного порядка.

В этом и заключается то важное значение интегралов рассматриваемого вида, которое они имеют в анализе.

Очевидно, что пользуясь свойствами этих интегралов, мы можем решать и обратные вопросы: по данному разложению определить значение интеграла, которым дан общий член этого разложения.

В самом деле, положим

$$F(e^{\varphi\sqrt{-1}}) = A_0 e^{0\varphi\sqrt{-1}} + A_1 e^{\varphi\sqrt{-1}} + A_2 e^{2\varphi\sqrt{-1}} + \dots + A_n e^{n\varphi\sqrt{-1}} + \dots$$

Отсюда, умножая обе части равенства на $e^{-n\varphi\sqrt{-1}}$ и интегрируя в пределах от $-\pi$ до $+\pi$, пользуясь равенством (39), находим

$$\int_{-\pi}^{+\pi} F(e^{\varphi\sqrt{-1}}) e^{-n\varphi\sqrt{-1}} \cdot d\varphi = A_n \cdot 2\pi$$

откуда

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(e^{\varphi\sqrt{-1}}) \cdot e^{-n\varphi\sqrt{-1}} \cdot d\varphi$$

Таким образом мы получаем формулу, дающую возможность как находить общий член разложения, так и интеграл по данному разложению. Мы можем коэффициент общего члена разложения представить еще таким образом:

$$A_n = \frac{F^n(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}$$

Положим теперь

$$F(x) = f(\lambda x)$$

так что будем иметь

$$F(e^{\varphi\sqrt{-1}}) = f(\lambda e^{\varphi\sqrt{-1}})$$

Мы имеем:

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{df(\lambda x)}{d(\lambda x)} = f'(\lambda x) \cdot \lambda$$

$$F''(x) = \frac{d^2 F(x)}{dx^2} = \lambda \frac{df'(\lambda x)}{d(\lambda x)} = \lambda^2 f''(\lambda x) \dots \text{и т. д.}$$

$$F^n(x) = \lambda^n f^{(n)}(\lambda x)$$

а потому

$$A_n = \frac{\lambda^n f^{(n)}(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}$$

Таким образом мы получим формулу

$$(40) \quad \int_{-\pi}^{+\pi} f(\lambda e^{\varphi\sqrt{-1}}) \cdot e^{-n\varphi\sqrt{-1}} \cdot d\varphi = \frac{2\pi}{1 \cdot 2 \dots n} \cdot f^{(n)}(0) \cdot \lambda^n$$

Мы можем эту формулу несколько обобщить, полагая

$$f(z) = \theta(a + z)$$

вследствие чего

$$f^{(n)}(z) = \theta^{(n)}(a + z)$$

Таким образом найдем

$$(41) \quad \int_{-\pi}^{+\pi} \theta(a + \lambda e^{\varphi\sqrt{-1}}) e^{-n\varphi\sqrt{-1}} \cdot d\varphi = \frac{2\pi}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \cdot \theta^{(n)}(a) \cdot \lambda^n$$

§ 26. Положим теперь, что

$$f(\lambda x) = \log(1 - \lambda x)$$

так что

$$f(\lambda x) = -\lambda x - \frac{\lambda^2 x^2}{2} - \frac{\lambda^3 x^3}{3} - \dots$$

и

$$f(\lambda e^{\varphi\sqrt{-1}}) = -\lambda e^{\varphi\sqrt{-1}} - \frac{\lambda^2}{2} e^{2\varphi\sqrt{-1}} - \frac{\lambda^3}{3} e^{3\varphi\sqrt{-1}} - \dots$$

или

$$f(\lambda e^{\varphi\sqrt{-1}}) = -\frac{\lambda}{1} (\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi) - \frac{\lambda^2}{2} (\cos 2\varphi + \sqrt{-1} \sin 2\varphi) - \dots$$

Отсюда видно, что мы должны здесь считать $\lambda < 1$, потому что только при этом условии этот ряд будет всегда сходящимся; так как ряд коэффициентов его

$$-\frac{\lambda}{1}, -\frac{\lambda^2}{2}, -\frac{\lambda^3}{3}, -\frac{\lambda^4}{4}, \dots$$

только при значении λ , абсолютно меньшем 1, будет всегда сходящимся, потому что при этом ряд

$$\lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \lambda^4 + \dots$$

представляет бесконечно убывающую геометрическую прогрессию.

Итак, предполагая $\lambda < 1$ и пользуясь формулой (40), находим

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \log(1 - \lambda e^{\varphi\sqrt{-1}}) \cdot d\varphi = 0$$

Преобразуя теперь этот интеграл, мы имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{+\pi} \log(1 - \lambda e^{\varphi\sqrt{-1}}) d\varphi &= \int_{-\pi}^{+\pi} \log(1 - \lambda e^{\varphi\sqrt{-1}}) d\varphi + \\ &+ \int_0^{\pi} \log(1 - \lambda e^{\varphi\sqrt{-1}}) d\varphi \end{aligned}$$

полагая $\varphi = -\psi$, найдем

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^0 \log(1 - \lambda e^{\varphi \sqrt{-1}}) d\varphi &= - \int_{\pi}^0 \log(1 - \lambda e^{-\psi \sqrt{-1}}) d\psi = \\ &= \int_0^{\pi} \log(1 - \lambda e^{-\varphi \sqrt{-1}}) d\varphi \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{+\pi} \log(1 - \lambda e^{\varphi \sqrt{-1}}) d\varphi &= \\ &= \int_0^{\pi} \log(1 - \lambda e^{\varphi \sqrt{-1}}) d\varphi + \int_0^{\pi} \log(1 - \lambda e^{-\varphi \sqrt{-1}}) d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi} \log(1 - \lambda e^{\varphi \sqrt{-1}}) (1 - \lambda e^{-\varphi \sqrt{-1}}) d\varphi \end{aligned}$$

а потому получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \log[1 - \lambda(e^{\varphi \sqrt{-1}} + e^{-\varphi \sqrt{-1}}) + \lambda^2] d\varphi &= \\ = \int_0^{\pi} \log(1 - 2\lambda \cos \varphi + \lambda^2) d\varphi \leq 0 & \quad (\lambda < 1) \end{aligned}$$

Если положить

$$\lambda = \frac{1}{R}$$

где $R > 1$, то найдем

$$\int_0^{\pi} \log(1 - 2R \cos \varphi + R^2) d\varphi = \log R^2 \cdot \int_0^{\pi} d\varphi = \pi \log R^2$$

Здесь мы не замечаем $\log R^2$ через $2 \log R$, потому что R может быть отрицательным, вследствие чего вторая формула дала бы неопределенный результат, между тем как он должен быть совершенно определенным.

Итак, мы приходим к такому интегралу

$$(42) \quad \int_0^{\pi} \log(\rho^2 - 2\rho \cos \varphi + 1) d\varphi = \begin{cases} = 0 & \dots \rho < 1 \\ = \pi \log \rho^2 & \dots \rho > 1 \end{cases}$$

который обыкновенно приписывают Пуассону.

§ 27. Из интеграла (42) мы можем вывести несколько замечательных интегралов.

Полагая $\rho = 1$, найдем

$$\int_0^{\pi} \log(2 - 2 \cos \varphi) d\varphi = 0.$$

Мы имеем право допустить это равенство как предельное, потому что каждая из формул (42) приводит при $\rho = 1$ к нему.

Итак,

$$\int_0^{\pi} \log \left(2 \sin \frac{\varphi}{2} \right)^2 d\varphi = 0$$

$$\int_0^{\pi} \log \left(2 \sin \frac{\varphi}{2} \right) d\varphi = 0$$

Откуда

$$\int_0^{\pi} \log \sin \frac{\varphi}{2} \cdot d\varphi = - \int_0^{\pi} \log 2 \cdot d\varphi = - \pi \log 2$$

полагая здесь $\varphi = 2\psi$, получим

$$(43) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin \psi d\psi = - \frac{\pi}{2} \log 2$$

Если положить $\sin \psi = x$, откуда

$$d\psi = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

то эта формула дает следующую:

$$(44) \quad \int_0^1 \frac{\log x dx}{\sqrt{1-x^2}} = - \frac{\pi \log 2}{2}$$

Интегрируя выражение (43) по частям, получим

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin \psi d\psi = [\psi \log \sin \psi]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\psi}{\sin \psi} \cos \psi d\psi = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\psi d\psi}{\text{tang } \psi}$$

так как

$$\lim (\psi \log \sin \psi)_{\psi=0} = 0$$

поэтому

$$(45) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\psi d\psi}{\text{tang } \psi} = \frac{\pi \log 2}{2}$$

§ 28. Мы покажем теперь приложение формулы (41) к нахождению высших пределов производных, но предварительно скажем, в каких случаях эта формула может быть употребляема без всяких опасений попасть в противоречие.

Вывод формулы (41) основывался на возможности разложения функции $F(e^{\varphi\sqrt{-1}})$ по степеням $e^{\varphi\sqrt{-1}}$, но, как известно, не всякая функция может быть разложена в ряд по степеням независимой переменной, другими словами, не всегда полученный ряд будет сходящимся.

Отсюда видно, что условием справедливости формулы (41) мы должны поставить сходямость ряда

$$A_0 + A_1 e^{\varphi\sqrt{-1}} + A_2 e^{2\varphi\sqrt{-1}} + A_3 e^{3\varphi\sqrt{-1}} + \dots$$

которым, по нашему предположению, выражается функция $F(e^{\varphi\sqrt{-1}})$.

Так как мы заменяем эту функцию равною ей $f(\lambda e^{\varphi\sqrt{-1}})$, которая разлагается в ряд вида

$$A_0 + A_1 \lambda e^{\varphi\sqrt{-1}} + A_2 \lambda^2 e^{2\varphi\sqrt{-1}} + A_3 \lambda^3 e^{3\varphi\sqrt{-1}} + \dots$$

то для возможности существования формулы (41) необходима сходямость этого последнего ряда. Но этот ряд может быть представлен под видом суммы двух рядов, из которых один расположен по косинусам, а другой — по синусам кратных дуг, а отсюда следует, что он будет всегда сходящимся, если только ряд численных значений коэффициентов $A_0, A_1 \lambda, A_2 \lambda^2, A_3 \lambda^3, \dots$ и т. д. его членов есть ряд сходящийся.

О сходимости же этого ряда мы можем судить только при условии $\lambda < 1$, потому что при этом ряд будет, как нетрудно видеть, всегда сходящимся, если только A_k с увеличением k уменьшается или остается, по крайней мере, всегда конечным.

Таким образом мы видим, что формула (41) может быть принята только для таких функций, коэффициенты разложения которых по степеням переменной остаются всегда конечными для значений $\lambda < 1$.

После этих замечаний приступим к решению занимающего нас теперь вопроса.

Мы имеем вообще:

$$\text{мод}(k_1 + k_2 + k_3 + \dots) < \text{мод } k_1 + \text{мод } k_2 + \text{мод } k_3 + \dots$$

Отсюда, рассматривая интеграл как предел суммы, находим

$$\text{мод} \int \Phi(u) du < \int \text{мод} \Phi(u) du$$

Но из формулы (41) и из только что найденной мы имеем

$$\text{мод} \frac{2\pi f^{(n)}(a)\lambda^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} < \int_{-\pi}^{+\pi} \text{мод} f\left(a + \lambda e^{\varphi\sqrt{-1}}\right) \cdot e^{-n\varphi\sqrt{-1}} \cdot d\varphi$$

так как

$$\text{мод} \frac{2\pi f^{(n)}(a)\lambda^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} = \text{мод} \int_{-\pi}^{+\pi} f\left(a + \lambda e^{\varphi\sqrt{-1}}\right) \cdot e^{-n\varphi\sqrt{-1}} \cdot d\varphi$$

Но

$$\begin{aligned} \text{мод} f\left(a + \lambda e^{\varphi\sqrt{-1}}\right) \cdot e^{-n\varphi\sqrt{-1}} &= \text{мод} f\left(a + \lambda e^{\varphi\sqrt{-1}}\right) \cdot \text{мод} e^{-n\varphi\sqrt{-1}} = \\ &= \text{мод} f\left(a + \lambda e^{\varphi\sqrt{-1}}\right) \end{aligned}$$

ибо

$$\text{мод} e^{-n\varphi\sqrt{-1}} = 1.$$

Положим, что мы каким-либо способом нашли высший предел R модуля

$$\text{мод} f\left(a + \lambda e^{\varphi\sqrt{-1}}\right)$$

так что

$$\text{мод} f\left(a + \lambda e^{\varphi\sqrt{-1}}\right) \leq R$$

то мы получим

$$\text{мод} \frac{2\pi f^{(n)}(a)\lambda^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} < \int_{-\pi}^{+\pi} R d\varphi$$

т. е.

$$\text{мод} \frac{2\pi f^{(n)}(a)\lambda^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} < 2\pi R$$

откуда

$$\text{мод} f^{(n)}(a)\lambda^n < 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot R$$

Предполагая теперь функцию $f^{(n)}(a)$ и λ^n вещественными и условливаясь под этими выражениями разуметь только численные значения величин, которым они принадлежат, мы получаем такую формулу:

$$(46) \quad f^{(n)}(a) < \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{\lambda^n} \cdot R$$

где R определяется условием

$$\text{мод } f(a + \lambda e^{\varphi\sqrt{-1}}) \leq R$$

Для примера на употребление формулы (46) положим

$$F(e^{\varphi\sqrt{-1}}) = \frac{1}{k - e^{\varphi\sqrt{-1}}}$$

где будем предполагать $\text{мод } k > 1$.

Вследствие этого ряд

$$F(e^{\varphi\sqrt{-1}}) = \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} e^{\varphi\sqrt{-1}} + \frac{1}{k^3} e^{2\varphi\sqrt{-1}} + \frac{\lambda}{k^4} e^{3\varphi\sqrt{-1}} + \dots$$

будет сходящимся. Полагая $a = 0$, найдем

$$f(a + \lambda e^{\varphi\sqrt{-1}}) = \frac{1}{k - \lambda e^{\varphi\sqrt{-1}}}$$

где, по замеченному выше, мы должны предположить $\lambda < 1$.

Чтобы найти R , заметим, что вообще

$$\text{мод } (A + B\sqrt{-1}) = \sqrt{(A + B\sqrt{-1})(A - B\sqrt{-1})}$$

а потому

$$\begin{aligned} \left(\text{мод } \frac{1}{k - \lambda e^{\varphi\sqrt{-1}}} \right)^2 &= \frac{1}{k - \lambda e^{\varphi\sqrt{-1}}} \cdot \frac{1}{k - \lambda e^{-\varphi\sqrt{-1}}} = \\ &= \frac{1}{k^2 - k\lambda(e^{\varphi\sqrt{-1}} + e^{-\varphi\sqrt{-1}}) + \lambda^2} \end{aligned}$$

или

$$\left(\text{мод } \frac{1}{k - \lambda e^{\varphi\sqrt{-1}}} \right)^2 = \frac{1}{k^2 - 2k\lambda \cos \varphi + \lambda^2}$$

Отсюда видно, что наибольшее значение этого модуля будет иметь место при $\varphi = 0$, так что надо положить

$$R^2 = \frac{1}{k^2 - 2k\lambda + \lambda^2}$$

а так как $k > \lambda$, то будет

$$R = \frac{1}{k - \lambda}$$

Таким образом мы получаем

$$\left[\frac{d^n \frac{1}{k-x}}{dx^n} \right]_{x=0} < \frac{1}{k-\lambda} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{\lambda^n}$$

Итак, мы нашли высший предел n -ой производной от функции $\frac{1}{k-x}$ при $x=0$. Заметим, что нам выгодно иметь по возможности наименьшую величину высшего предела, как определяющую наиболее точным образом предел, которого не может превзойти исследуемая величина, а так как полученное нами неравенство имеет место для всяких значений λ , то нам следует найти такую величину последнего, которая делала бы полученный высший предел наименьшим, что сводится к определению maximum'a функции

$$(k-\lambda)\lambda^n = k\lambda^n - \lambda^{n+1}$$

Для определения этого значения имеем уравнение

$$nk\lambda^{n-1} - (n+1)\lambda^n = 0$$

или

$$nk - (n+1)\lambda = 0$$

откуда

$$\lambda = \frac{nk}{n+1}$$

Если определенная таким образом величина λ будет меньше 1, то мы можем ею воспользоваться, и тогда найдем

$$k\lambda^n - \lambda^{n+1} = \frac{n^n k^{n+1}}{(n+1)^n} - \frac{(n+1)^{n+1} \cdot k^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n k^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$$

так что если $k < 1 + \frac{1}{n}$, то мы будем иметь

$$\left[\frac{d^n \frac{1}{k-x}}{dx^n} \right]_{x=0} < \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot (n+1)^{n+1}}{n^n k^{n+1}}$$

Формулы Фурье

§ 29. Теперь мы переходим к кратным интегралам и выведем формулу Фурье, которой придавали прежде очень важное значение, но которая в последнее время все более и более его утрачивает. Это зависит от того, что при выводе этой формулы мы не можем дать условий, определяющих для каких функций она остается справедливою.

Возьмем интеграл

$$P_{\infty} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos [y(x - \alpha)] dx \cdot dy$$

Интегрируя по y , находим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos [y(x - \alpha)] dy = \left[\frac{\sin (x - \alpha) y}{x - \alpha} \right]_{-\infty}^{+\infty}$$

Отсюда видно, что величина этого интеграла неопределенная, а потому мы возьмем сначала вместо пределов $-\infty$ и $+\infty$ пределы $-A$ и $+A$, чтобы уже в окончательном результате положить $A = \infty$. Вследствие этого будем иметь

$$\int_{-A}^{+A} \cos [y(x - \alpha)] dy = \frac{2 \sin A (x - \alpha)}{x - \alpha}$$

и

$$P_A = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \frac{2 \sin A (x - \alpha)}{x - \alpha} \cdot dx$$

Полагая теперь

$$A(x - \alpha) = z$$

откуда

$$dx = \frac{dz}{A}$$

найдем

$$P_A = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\alpha + \frac{z}{A}\right) \cdot \frac{\sin z}{z} \cdot dz$$

Полагая здесь $A = \infty$, получим

$$P_{\infty} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) \frac{\sin z}{z} \cdot dz = f(\alpha) \cdot 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin z}{z} dz$$

и, на основании формулы (3), получаем

$$P_{\infty} = 2\pi \cdot f(\alpha)$$

Таким образом мы получаем знаменитую формулу Фурье

$$(47) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \cos [y(x - \alpha)] \cdot dx \cdot dy = 2\pi f(\alpha)$$

Нестрогость этого вывода заключается в том, что если из формулы

$$A(x - \alpha) = z$$

или

$$x = \alpha + \frac{z}{A}$$

мы получим для z пределы $-\infty$ и $+\infty$, зная, что эти величины служат пределами x , то обратное заключение мы, очевидно, не всегда имеем право сделать, потому что мы полагаем в результате $A = \infty$, так что от пределов $-\infty$ и $+\infty$ для z нельзя перейти к пределам $-\infty$ и $+\infty$ для x , значит обратным путем при выводе этой формулы мы не могли бы идти, т. е. от выражения $2\pi f(\alpha)$ перейти к интегралу.

Отсюда видно, что формула (47) будет справедлива вообще не для всякой функции.

Положим для примера

$$f(x) = e^{-x^2}$$

Пользуясь формулой (47), мы нашли бы

$$e^{-\alpha^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos[y(x - \alpha)] dx dy$$

Чтобы проверить этот результат, произведем интегрирование. Мы имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos[y(x - \alpha)] dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos y\alpha \cdot e^{-x^2} \cos(yx) dx + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \sin y\alpha \cdot e^{-x^2} \sin yx dx \end{aligned}$$

Здесь второй интеграл равен нулю, так как подынтегральная функция в нем нечетная, а первый интеграл, как интеграл от четной функции, равен удвоенному интегралу, взятому в пределах от 0 до ∞ . Итак,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos[y(x - \alpha)] dx = 2 \cos y\alpha \cdot \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(yx) dx = \sqrt{\pi} e^{-\frac{y^2}{4}} \cos(y\alpha)$$

на основании формулы (10). Затем, на основании той же формулы, имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos[y(x - \alpha)] dx dy = \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4}} \cos y\alpha \cdot dy = 2\pi e^{-\alpha^2}$$

Таким образом мы этим путем пришли к такому же результату, как и по формуле Фурье.

§ 30. Дадим теперь формуле (47) несколько иной вид. Мы имеем

$$\cos \varphi = e^{\varphi \sqrt{-1}} - \sqrt{-1} \sin \varphi$$

а потому

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos [y(x - \alpha)] dx dy = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{y(x-\alpha)\sqrt{-1}} dx dy - \sqrt{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin [y(x - \alpha)] dx dy \end{aligned}$$

Но второй интеграл здесь содержит функцию, нечетную относительно y , так что значение его равно 0, а потому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos [y(x - \alpha)] dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{y(x-\alpha)\sqrt{-1}} dx dy$$

Вследствие этого мы получим

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{yx\sqrt{-1}} \cdot e^{-\alpha y\sqrt{-1}} dx dy$$

или

$$(48) \quad f(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) e^{-\alpha y\sqrt{-1}} \cdot dy$$

где

$$\varphi(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{yx\sqrt{-1}} \cdot dx$$

Уравнение (48) решает частный случай такого вопроса: найти такую функцию, которая удовлетворяла бы уравнению

$$\int_A^B \varphi(y) F(\alpha, y) dy = f(\alpha)$$

Вопросами этого рода занимался между прочим Абель. Вообще надо заметить, что решение вопросов этого рода приводит к весьма замечательным результатам. До сих пор этот вопрос был решен вполне только для частного случая, когда

$$A = -\infty; \quad B = +\infty; \quad F(\alpha y) = e^{-\alpha y\sqrt{-1}}$$

§ 31. Теперь мы дадим уравнению (48) несколько иной вид, которым будем пользоваться при последующем изложении. Полагая

$$\alpha = u\sqrt{-1} \quad \text{и} \quad f(u\sqrt{-1}) = F(u)$$

откуда

$$f(u) = F(-u\sqrt{-1})$$

найдем:

$$f(u\sqrt{-1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) e^{uy} dy = F(u)$$

$$\varphi(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(-x\sqrt{-1}) e^{xy\sqrt{-1}} dx$$

Итак, мы будем теперь пользоваться следующими уравнениями:

$$(49) \quad \begin{cases} F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) e^{uy} dy \\ \varphi(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(-x\sqrt{-1}) e^{xy\sqrt{-1}} dy \end{cases}$$

При помощи этих уравнений, мы можем вывести формулу (15). В самом деле, на основании (12), мы имеем

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos mx dx}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{2a} e^{-am}$$

или

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{mx\sqrt{-1}} + e^{-mx\sqrt{-1}}}{2} \cdot \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{2a} e^{-am}$$

Полагая здесь

$$x = z, \quad m = ny$$

умножая обе части на $\varphi(y) dy$ и интегрируя по y от $-\infty$ до $+\infty$, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{mz\sqrt{-1}} + e^{-mz\sqrt{-1}}}{2} \cdot \varphi(y) dy dx = \frac{\pi}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-any} \varphi(y) dy$$

или

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{2} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{nyz\sqrt{-1}} \varphi(y) dy + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nyz\sqrt{-1}} \varphi(y) dy \right\} \frac{dz}{a^2 + z^2} = \frac{\pi}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-any} \varphi(y) dy$$

что, на основании (49), дает

$$\int_0^{\infty} \frac{F(nz\sqrt{-1}) + F(-nz\sqrt{-1})}{2} \cdot \frac{dz}{a^2 + z^2} = \frac{\pi}{2a} F(-an)$$

Теперь уже мы можем приступить к выводу знаменитой формулы Дирихле, относящейся к кратным интегралам.

Для этого заметим, что вообще

$$\int_0^{\infty} v^{\rho-1} e^{-\alpha v} \cdot dv = \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\rho-1} \cdot e^{-t} \cdot \frac{dt}{\alpha} = \frac{\Gamma(\rho)}{\alpha^{\rho}}$$

а потому

$$\begin{aligned} \overline{\int \int \dots \int_0^{\infty} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x} \cdot y^{\mu-1} e^{-\alpha y} \cdot z^{\nu-1} e^{\alpha z} \dots dx dy dz} &= \\ &= \int_0^{\infty} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x} dx \cdot \int_0^{\infty} y^{\mu-1} e^{-\alpha y} dy \dots = \\ &= \frac{\Gamma(\lambda)}{\alpha^{\lambda}} \cdot \frac{\Gamma(\mu)}{\alpha^{\mu}} \cdot \frac{\Gamma(\nu)}{\alpha^{\nu}} \dots = \frac{\Gamma(\lambda) \cdot \Gamma(\mu) \cdot \Gamma(\nu) \dots}{\alpha^{\lambda+\mu+\nu+\dots}} \end{aligned}$$

Далее мы имеем

$$\int_0^{\infty} s^{\lambda+\mu+\nu+\dots-1} \cdot e^{-\alpha s} \cdot ds = \frac{\Gamma(\lambda + \mu + \nu + \dots)}{\alpha^{\lambda+\mu+\nu+\dots}}$$

вследствие этого будет

$$\begin{aligned} \overline{\int \int \dots \int_0^{\infty} x^{\lambda-1} y^{\mu-1} \cdot z^{\nu-1} \dots e^{-\alpha(x+y+z+\dots)} dx dy dz} &= \\ &= \frac{\Gamma(\lambda) \cdot \Gamma(\mu) \cdot \Gamma(\nu) \dots}{\Gamma(\lambda + \mu + \nu + \dots)} \int_0^{\infty} s^{\lambda+\mu+\nu+\dots-1} e^{-\alpha s} \cdot ds \end{aligned}$$

Умножая обе части этого равенства на $\varphi(\alpha) d\alpha$ и интегрируя по α в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, получим

$$\begin{aligned} \overline{\int \int \int \dots \int_0^{\infty} x^{\lambda-1} \cdot y^{\mu-1} \cdot z^{\nu-1} \dots \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha) e^{-\alpha(x+y+z+\dots)} d\alpha \right\} dx dy dz \dots} &= \\ &= \frac{\Gamma(\lambda) \cdot \Gamma(\mu) \dots}{\Gamma(\lambda + \mu + \nu \dots)} \cdot \int_0^{\infty} s^{\lambda+\mu+\nu+\dots-1} ds \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha) e^{-\alpha s} d\alpha \end{aligned}$$

Откуда, на основании (49), получаем

$$\begin{aligned} \overline{\iint \dots \int_0^\infty x^{\lambda-1} \cdot y^{\mu-1} \cdot z^{\nu-1} \dots F[-(x+y+z \dots)] dx dy dz \dots} &= \\ &= \frac{\Gamma(\lambda) \cdot \Gamma(\mu) \cdot \Gamma(\nu) \dots}{\Gamma(\lambda + \mu + \nu \dots)} \cdot \int_0^\infty s^{\lambda+\mu+\nu+\dots-1} \cdot F(-s) ds \end{aligned}$$

Полагая здесь $F(-t) = f(t)$, мы и получим формулу Дирихле

$$(50) \quad \overline{\iiint \dots \int_0^\infty x^{\lambda-1} \cdot y^{\mu-1} \cdot z^{\nu-1} \dots f(x+y+z+\dots) dx dy dz \dots} = \\ = \frac{\Gamma(\lambda) \Gamma(\mu) \Gamma(\nu) \dots}{\Gamma(\lambda + \mu + \nu + \dots)} \cdot \int_0^\infty s^{\lambda+\mu+\nu+\dots-1} f(s) ds$$

§ 32. Формулу (50) можно несколько обобщить, вводя новые параметры, при частных значениях которых получалась бы формула (50). Положим:

$$x = au; \quad y = bv; \quad z = cw; \quad \dots$$

причем a, b, c, \dots будем предполагать положительными, вследствие чего пределы интегрирования останутся те же. Замечая, что вследствие этой подстановки в первой части равенства войдет постоянный множитель $a^\lambda b^\mu c^\nu \dots$, разделяя на него обе части равенства, получим

$$\begin{aligned} \overline{\iiint \dots \int_0^\infty u^{\lambda-1} v^{\mu-1} w^{\nu-1} \dots f(au + bv + cw \dots) du dv dw \dots} &= \\ &= \frac{\Gamma(\lambda) \Gamma(\mu) \Gamma(\nu) \dots}{a^\lambda b^\mu c^\nu \dots \Gamma(\lambda + \mu + \nu + \dots)} \int_0^\infty s^{\lambda+\mu+\nu+\dots-1} f(s) ds \end{aligned}$$

полагая теперь

$$u = x^m, \quad v = y^n, \quad w = z^p, \quad \dots$$

получим

$$\begin{aligned} \overline{\iiint \dots \int_0^\infty x^{m\lambda-m} y^{n\mu-n} \cdot z^{p\nu-p} \dots f(ax^m + by^n + cz^p + \dots) m x^{m-1} dx \times} & \\ \times n y^{n-1} dy \cdot p z^{p-1} \cdot dz \dots &= \\ = mnp \dots \overline{\iiint \dots \int_0^\infty x^{m\lambda-1} y^{n\mu-1} z^{p\nu-1} \dots f(ax^m + by^n + cz^p + \dots) \times} & \\ \times dx \cdot dy \cdot dz &= \frac{\Gamma(\lambda) \Gamma(\mu) \Gamma(\nu) \dots}{a^\lambda b^\mu c^\nu \dots \Gamma(\lambda + \mu + \nu + \dots)} \cdot \int_0^\infty s^{\lambda+\mu+\nu+\dots-1} f(s) ds \end{aligned}$$

Полагая наконец

$$m\lambda = \alpha; \quad n\mu = \beta; \quad p\nu = \gamma; \quad \dots$$

и разделяя обе части равенства на $mnp \dots$, получим

$$(51) \quad \frac{\int \int \dots \int_0^\infty x^{\alpha-1} y^{\beta-1} z^{\gamma-1} \dots f(ax^m + by^n + cz^p + \dots) dx dy dz =}{m \cdot n \cdot p \dots a^{\frac{\alpha}{m}} b^{\frac{\beta}{n}} c^{\frac{\gamma}{p}} \dots \Gamma\left(\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{p} + \dots\right)} \int_0^\infty s^{\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{p} - 1} f(s) \cdot ds$$

Здесь, конечно, параметры m, n, p, \dots предполагаются положительными, потому что в противном случае пределами нового интеграла не были бы 0 и ∞ .

Из формулы (51) можем, как частный случай, получить формулу (50), положив в первой:

$$a = b = c = \dots = 1; \quad m = n = p \dots = 1 \\ \alpha = \lambda, \quad \beta = \mu, \quad \gamma = \nu, \quad \dots$$

§ 33. Положим, что $f(t)$ есть функция, удовлетворяющая условиям:

$$f(t) = 1 \quad \text{при} \quad t \leq L \\ f(t) = 0 \quad \text{»} \quad t > L$$

в таком случае предполагая, что дано условие

$$ax^m + by^n + cz^p + \dots \leq L$$

и пользуясь формулой (51), мы нахождение интеграла

$$\int \int \int \dots \int x^{\alpha-1} y^{\beta-1} z^{\gamma-1} \dots dx dy dz$$

сведем на вычисление интеграла

$$\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{m}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\beta}{n}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\gamma}{p}\right) \dots}{m \cdot n \cdot p \dots a^{\frac{\alpha}{m}} b^{\frac{\beta}{n}} c^{\frac{\gamma}{p}} \dots \Gamma\left(\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{p} + \dots\right)} \int_0^L s^{\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{p} - 1} \cdot ds$$

так как в этом случае

$$\int_0^{\infty} s^{\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n} + \dots - 1} f(s) ds = \int_0^L s^{\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n} + \dots - 1} \cdot 1 \cdot ds + \int_L^{\infty} s^{\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n} + \dots - 1} \cdot 0 \cdot ds$$

но

$$\int_0^L s^{\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{p} + \dots - 1} ds = \frac{L^{\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{p} + \dots}}{\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{p} + \dots}$$

Замечая, вообще, что

$$g\Gamma(g) = \Gamma(g + 1)$$

найдем

$$(52) \quad \begin{aligned} & \iint \dots \int x^{\alpha-1} \cdot y^{\beta-1} \cdot z^{\gamma-1} \dots dx dy dz = \\ & = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{m}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\beta}{n}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\gamma}{p}\right) \dots L^{\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{p}}}{m \cdot n \cdot p \dots a^{\frac{\alpha}{m}} b^{\frac{\beta}{n}} c^{\frac{\gamma}{p}} \dots \Gamma\left(\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{p} + \dots + 1\right)} \end{aligned}$$

Таким образом формула (52) решает вопрос о нахождении интеграла

$$\iiint \dots \int x^{\alpha-1} y^{\beta-1} z^{\gamma-1} \dots dx dy dz \dots$$

распространенного на все положительные значения переменных $xyz \dots$, связанных условием

$$ax^m + by^n + cz^p + \dots \leq L$$

где L есть данная положительная величина.

§ 34. При помощи формулы (52) легко решаются вопросы о нахождении площадей и объемов, а также вопросы, касающиеся притяжения тел известной формы.

Для примера вычислим площадь эллипса, так что условие, связывающее переменные x и y , будут вида

$$ax^2 + by^2 \leq 1$$

где $a = \frac{1}{A^2}$ и $b = \frac{1}{B^2}$ и A и B — полуоси эллипса. В данном случае

$$m = n = 2, \alpha = \beta = 1$$

вследствие чего формула (52) дает

$$\iint dx dy = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot L}{4 \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}} \cdot \Gamma(2)}$$

где интеграл распространен на все положительные значения переменных x и y , подчиненных условию

$$ax^2 + by^2 \leq L$$

В нашем случае $L = 1$; но мы имеем

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad \text{и} \quad \Gamma(2) = 1$$

поэтому

$$\iint dx dy = \frac{\pi}{4\sqrt{ab}} = \frac{\pi}{4} \cdot A \cdot B$$

Таким образом получаем величину четверти площади эллипса, как и следовало ожидать, потому что только для четверти площади эллипса, определяемого уравнением

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

переменные x и y имеют положительные значения.

Рассмотрим еще тройной интеграл, который при

$$\alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 1$$

и условии вида

$$ax^m + by^n + cz^p \leq L$$

будет выражать некоторый объем. Положим еще

$$m = n = p = 2$$

вследствие чего формула (52) дает

$$\iiint dx dy dz = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot L^{\frac{3}{2}}}{8 \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}} \cdot c^{\frac{1}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}$$

Но мы имеем

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \sqrt{\pi}$$

а потому

$$\iiint dx dy dz = \frac{\pi}{6} \frac{L^3}{\sqrt{abc}}$$

Предполагая теперь, что уравнение

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = L$$

принадлежит трехосному эллипсоиду, отнесенному к центру и осям, и следовательно,

$$L = 1; \quad a = \frac{1}{A^2}; \quad b = \frac{1}{B^2}; \quad c = \frac{1}{C^2}$$

где A, B, C суть полуоси эллипсоида, получим для выражения $\frac{1}{8}$ его объема:

$$\iiint dx dy dz = \frac{1}{6} \pi ABC$$

§ 35. Мы вывели формулу Фурье в следующем виде:

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos [y(x - \alpha)] dx dy$$

Теперь мы дадим этой формуле более общий вид, принимая за пределы интегрирования по x некоторые количества L и M , причем будем предполагать $L < M$.

Чтобы перейти к этому случаю, мы могли бы поступить следующим образом; так как $f(x)$ есть совершенно произвольная функция (впрочем, с ограничениями, указанными при выводе этой формулы), которая может быть даже разрывною, то мы можем предположить, что

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 && \text{для} && -\infty < x < L \\ f(x) &= \varphi(x) && \text{»} && L < x < M \\ f(x) &= 0 && \text{»} && M < x < +\infty \end{aligned}$$

Вследствие этого мы будем иметь

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^L 0 \cdot \cos [y(x - \alpha)] dx dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_L^M \varphi(x) \cos [y(x - \alpha)] dx dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_M^{+\infty} 0 \cdot \cos [y(x - \alpha)] dx dy \right\}$$

или

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_L^M \varphi(x) \cos [y(x - \alpha)] dx dy$$

Здесь для α , заключающегося между $-\infty$ и L или между пределами M и $+\infty$, функция $f(\alpha) = 0$, следовательно и интеграл равен нулю, если же α заключается между пределами L и M , то интеграл равен $2\pi f(\alpha)$.

Мы выведем теперь эту формулу, руководствуясь соображениями, подобными тем, которыми мы пользовались при выводе формулы (47).

Для этого рассмотрим интеграл

$$\int_{y=-A}^{y=+A} \int_{x=L}^{x=M} f(x) \cos [y(x-\alpha)] dx dy$$

Интегрируя по y , получим

$$\int_{-A}^{+A} f(x) \cos [y(x-\alpha)] dy = 2f(x) \frac{\sin A(x-\alpha)}{x-\alpha}$$

Полагая теперь

$$A(x-\alpha) = z$$

и интегрируя по z , причем пределами для z будут

$$A(L-\alpha) \quad \text{и} \quad A(M-\alpha)$$

мы получим

$$\int_{-A}^{+A} \int_L^M f(x) \cos [y(x-\alpha)] dx dy = 2 \int_{A(L-\alpha)}^{A(M-\alpha)} f\left(\alpha + \frac{z}{A}\right) \cdot \frac{\sin z}{z} \cdot dz$$

следовательно

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_L^M f(x) \cos [y(x-\alpha)] dx dy = 2f(\alpha) \left\{ \int_{A(L-\alpha)}^{A(M-\alpha)} \frac{\sin z}{z} dz \right\}_{A=+\infty}$$

Чтобы определить значение последнего интеграла, надо рассмотреть два случая, каждый из которых разберем отдельно.

Если α заключается между пределами L и M , то при увеличении A до $+\infty$ нижний предел интегрирования будет стремиться к $-\infty$ и верхний к $+\infty$, так что в этом случае мы будем иметь

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_L^M f(x) \cos [y(x-\alpha)] dx dy = 2\pi \cdot f(\alpha)$$

Если же α не заключается между пределами L и M , то оба предела интегрирования будут приближаться к $+\infty$ (когда $L > \alpha$) или к $-\infty$ (когда $M < \alpha$), и в таком случае мы будем иметь

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_L^M f(x) \cos [y(x-\alpha)] dx dy = 2f(\alpha) \cdot \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{\sin z}{z} dz = 0$$

или

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_L^M f(x) \cos [y(x-\alpha)] dx dy = 2f(\alpha) \cdot \int_{-\infty}^{-\infty} \frac{\sin z}{z} dz = 0$$

Итак, мы приходим к результату, который можно выразить следующим образом:

$$(53) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_L^M f(x) \cos [y(x-\alpha)] dx dy = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha < L \\ f(\alpha) & \text{» } L < \alpha < M \\ 0 & \text{» } M < \alpha \end{cases}$$

т. е. к результату, тождественному полученному выше другим путем.

§ 36. В предыдущем параграфе, рассматривая случай, когда α не заключается между пределами L и M , мы пришли к интегралам

$$\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{\sin z}{z} dz \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{-\infty} \frac{\sin z}{z} dz$$

и, вследствие равенства верхнего и нижнего пределов интегрирования в том и другом случае, заключили о равенстве этих интегралов нулю, но мы, очевидно, не всегда имеем право делать подобное заключение, потому что интеграл, взятый между бесконечными пределами одного знака, есть вообще величина неопределенная, потому что он представляет площадь, заключенную между двумя ординатами, бесконечно удаленными от начала координат, которая, очевидно, не только не равна всегда 0, но может быть даже бесконечно большой.

Поэтому мы считаем теперь не лишним сказать несколько слов о том, когда рассматриваемые интегралы действительно имеют неопределенные значения и когда их должно считать равными нулю.

Для этого рассмотрим вообще интеграл

$$\int_S^T f(x) dx$$

в котором будем предполагать S и T стремящимися к бесконечности.

Нетрудно видеть, что если интеграл

$$\int_0^{\infty} f(x) dx$$

имеет конечное и определенное значение, то рассматриваемый интеграл всегда будет равен 0 при увеличении S и T до бесконечности. В самом деле, обозначая сказанное значение через C , мы имеем:

$$\lim_{T=\infty} \left\{ \int_0^T f(x) dx \right\} = C$$

и

$$\lim_{S=\infty} \left\{ \int_0^S f(x) dx \right\} = C$$

а потому

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(x) dx &= \lim_{\substack{T=\infty \\ S=\infty}} \left\{ \int_S^T f(x) dx \right\} = \\ &= \lim_{T=\infty; S=\infty} \left\{ \int_0^T f(x) dx - \int_0^S f(x) dx \right\} = C - C = 0 \end{aligned}$$

Если же интеграл

$$\int_0^{\infty} f(x) dx$$

имеет бесконечно большое или неопределенное значение, то и интеграл

$$\int_{\infty}^{\infty} f(x) dx$$

будет иметь неопределенное значение, так как оно выразится или разностью двух бесконечностей, или разностью двух неопределенных выражений.

Итак, мы видим, что необходимым условием, чтобы интеграл

$$\int_{\infty}^{\infty} f(x) dx$$

равнялся нулю, служит определенность и конечность значения интеграла

$$\int_0^{\infty} f(x) dx$$

а так как в случае предыдущего параграфа этот интеграл имеет конечное и определенное значение, ибо

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz = \frac{\pi}{2}$$

и

$$\int_0^{-\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin(-x)}{(-x)} (-dx) = - \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{\pi}{2}$$

то мы имеем право полагать

$$\int_{\infty}^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz = 0$$

и

$$\int_{-\infty}^{-\infty} \frac{\sin z}{z} dz = 0$$

Этим мы и оканчиваем наш курс.

Прибавление

В § 23 дано определение функции гамма

$$\Gamma(\lambda) = \left\{ \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) n^\lambda}{\lambda(\lambda+1) \dots (\lambda+n-1)} \right\}_{n=\infty}$$

справедливость которого очевидна лишь при λ целом и положительном. Докажем теперь его справедливость для всякого положительного λ .

Рассмотрим функцию

$$(1) \quad F(x, n) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) n^x}{x(x+1) \dots (x+n-1)}$$

где x — какое угодно, а n — целое и положительное число, и докажем, что $F(x, n)$ имеет предел для всякого нецелого x при $n = \infty$.

Очевидно,

$$F(0, n) = \infty; \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(\varepsilon, n) = +\infty; \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(-\varepsilon, n) = -\infty$$

$F(-k, n) = \pm \infty$ для всякого целого и положительного x , не большего $(n-1)$. Для доказательства нашего положения воспользуемся формулой

$$(2) \quad \frac{\beta \cdot (\beta+1) (\beta+2) \dots (\beta+n-1)}{\alpha \cdot (\alpha+1) (\alpha+2) \dots (\alpha+n-1)} = \theta \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha+n} \right)^{\alpha-\beta}$$

где

$$\beta > 0, \quad \alpha > 0, \quad \alpha > \beta, \quad 1 > \theta > 0$$

Эта формула может быть выведена так: имеем вообще

$$\varphi(a+h) = \varphi(a) + h\varphi'(a+\theta h)$$

так что при

$$\varphi(x) = x^{1+\mu}$$

будет

$$(1+h)^{1+\mu} = 1 + h(1+\mu)(1+\theta h)^\mu$$

если $h > 0$ и $\mu > 0$, то

$$(1+\theta h)^\mu < (1+h)^\mu$$

поэтому

$$(1+h)^{1+\mu} < 1 + h(1+\mu)(1+h)^\mu$$

или

$$(1-\mu h)(1+h)^\mu < 1, \text{ если } \mu h < 1.$$

По разделении на $1-\mu h$ получаем

$$(1+h)^\mu < \frac{1}{1-\mu h}, \text{ где } 0 < \mu < \frac{1}{h}$$

Положим теперь $h = \frac{1}{\alpha+m}$ и $\mu = \alpha - \beta$, где $\alpha > \beta > 0$, тогда будет

$$\left(\frac{\alpha+m+1}{\alpha+m}\right)^{\alpha-\beta} < \frac{\alpha+m}{\beta+m}$$

или

$$\frac{\beta+m}{\alpha+m} < \left(\frac{\alpha+m}{\alpha+m+1}\right)^{\alpha-\beta}$$

полагая теперь последовательно m равным

$$0, 1, 2, \dots, n-1$$

и перемножая полученные неравенства, будем иметь

$$0 < \frac{\beta \cdot (\beta+1) \dots (\beta+n-1)}{\alpha \cdot (\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)} < \left(\frac{\alpha}{\alpha+n}\right)^{\alpha-\beta}.$$

Вернемся к функции $F(x, n)$.

При $x > 0$ формулы (1) и (2) дают

$$F(x, n) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}{(x+1) \cdot (x+2) \dots (x+n-1)} n^x = \theta \cdot \left(\frac{n}{x+n}\right)^n \cdot \frac{(n+1)^x}{x}$$

Итак, при $x > 0$ функция $F(x, n)$ всегда менее $\frac{(x+1)^x}{x}$, а так как

$$\frac{F(x, n+1)}{F(x, n)} = \frac{n}{n+x} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^x$$

и это отношение приближается к пределу, равному 1, то $F(x, n)$ при $x > 0$ остается всегда положительным и приближается к конечному пределу.

Положим теперь

$$x = -y$$

и пусть

$$k - 1 < y < k$$

если положить

$$k - y = \lambda = k + x$$

то будет

$$1 > \lambda > 0$$

поэтому найдем

$$\begin{aligned} F(x, n) &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) n^{\lambda-k}}{x \cdot (x+1) \dots (x+k-1) (x+k) \dots (x+n-1)} = \\ &= \frac{1}{x(x+1) \dots (x+k)} \cdot u \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} u &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot n^{\lambda-k}}{(\lambda+1)(\lambda+2) \dots (\lambda+n-k-1)} = \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}{(\lambda+1)(\lambda+2) \dots (\lambda+n-1)} \cdot \frac{\lambda-n-k}{n} \cdot \frac{\lambda+n-k+1}{n} \dots \frac{\lambda+n-1}{n} \cdot n^{\lambda} \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned} &\frac{\lambda+n-k}{n} \cdot \frac{\lambda+n-k+1}{n} \dots \frac{\lambda+n-1}{n} = \\ &= \left(1 - \frac{k-\lambda}{n}\right) \left(1 - \frac{k-\lambda-1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{1-\lambda}{n}\right) < \left(1 - \frac{1-\lambda}{n}\right)^n \end{aligned}$$

и

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}{(\lambda+1)(\lambda+2) \dots (\lambda+n-1)} = \theta \cdot \left(\frac{\lambda+1}{\lambda+n}\right)^{\lambda}$$

следовательно

$$u = \theta \cdot (\lambda+1)^{\lambda} \cdot \left(\frac{n}{\lambda+n}\right) \cdot \left(1 - \frac{1-\lambda}{n}\right)^k$$

Отсюда видно, что

$$u < (1+\lambda)^{\lambda} = (1+k+x)^{k+x}$$

так что $F(x, n)$ не может быть бесконечно большим, а так как

$$\lim \left(\frac{F(x, n+1)}{F(x, n)} \right) = 1$$

то $F(x, n)$ имеет конечный предел, равный

$$\theta \cdot \frac{(1+k+x)^{k+x}}{x(x+1)\dots(x+k)}$$

Положим, что $x > 0$ и докажем, что

$$F(x, \infty) = \Gamma(x).$$

Взяв логарифмы обеих частей (1), получаем

$$\log F(x, n) = \log 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) + \\ + x \log n - [\log x + \log(x+1) + \dots + \log(x+n-1)]$$

Отсюда имеем

$$\frac{F'_x(x, n)}{F(x, n)} = \log n - \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \dots + \frac{1}{x+n-1} \right]$$

но

$$\log n = \int_0^{\infty} \frac{e^{-z} - e^{-nz}}{z} dz \quad \text{и} \quad \frac{1}{x-k} = \int_0^{\infty} e^{-(x+k)z} \cdot dz$$

поэтому

$$\frac{\partial \log F(x, n)}{\partial x} = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{e^{-z} - e^{-nz}}{z} - e^{-xz} (1 + e^{-z} + e^{-2z} + \dots + e^{-(n-1)z}) \right\} dz \\ = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{e^{-z} - e^{-nz}}{z} - e^{-xz} \cdot \frac{e^{-nz} - 1}{e^{-z} - 1} \right\} dz$$

По формуле (1) видно, что $F(1, n) = 1$, а потому, проинтегрировав предыдущее уравнение по x в пределах от 1 до x , получим

$$\log F(x, n) = \int_0^{\infty} \left\{ (x-1) (e^{-z} - e^{-nz}) - (e^{-xz} - e^{-z}) \cdot \frac{1 - e^{-nz}}{e^{-z} - 1} \right\} \frac{dz}{z}$$

При $n = \infty$ эта формула обращается в

$$\log F(x, \infty) = \int_0^{\infty} \left\{ (x-1) e^{-z} - \frac{e^{-xz} - e^{-z}}{e^{-z} - 1} \right\} \frac{dz}{z} = \log \Gamma(x)$$

следовательно

$$F(x, \infty) = \Gamma(x)$$

СОБРАНИЕ ФОРМУЛ, ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ В ЭТОМ КУРСЕ

$$(1) \quad \alpha > 0; \beta > 0 \quad \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx = \log \frac{\beta}{\alpha}$$

$$(2) \quad \int_0^{\infty} \left((n-1)e^{-x} - \frac{e^{-nx} - e^{-x}}{e^{-x} - 1} \right) \frac{dx}{x} = \log 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)$$

$$(3) \quad \alpha > 0; \beta > 0 \quad \int_0^1 \frac{z^{\alpha-1} - z^{\beta-1}}{\log z} \cdot dz = \log \frac{\alpha}{\beta}$$

$$(4) \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin cx}{x} dx = \begin{matrix} +1, & \text{если } c > 0 \\ -1 & \text{» } c < 0 \end{matrix}$$

$$(5) \quad a > 0 \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin ax \cos tx}{x} dx = \begin{matrix} 0, & \text{если } t > a \\ 1 & \text{» } t < a \end{matrix}$$

$$(6) \quad \alpha > 0; \beta > 0 \quad \int_0^{\infty} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx = f(0) \cdot \log \frac{\beta}{\alpha}$$

$$(7) \quad \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$(8) \quad a > 0 \quad \int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} \cdot dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$$

$$(9) \quad c > 0 \quad \int_0^{\infty} e^{-c^2 x^2} x^{2n} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n} \cdot c^{-\frac{2n+1}{2}}$$

$$(10) \quad a > 0 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 x^2 - bx} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \cdot e^{-\frac{b^2}{4a^2}}$$

$$(11) \quad a > 0 \quad \int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} \cos mx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{m^2}{4a^2}}$$

$$(12) \quad a > 0; b > 0 \quad \int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2 - \frac{b^2}{x^2}} \cdot dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-2ab}$$

$$(13) \quad n > 0, p > 0 \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos nx}{p^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2p} e^{-np}$$

$$(14) \quad n > 0, p > 0 \quad \int_0^{\infty} \frac{x \sin nx}{p^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-np}$$

$$(15) \quad m > 0, p > 0 \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin mx}{x} \frac{dx}{p^2 + x^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 - e^{-mp}}{p^2}$$

$$(16) \quad \int_0^{\infty} \frac{f(u\sqrt{-1}) - f(-u\sqrt{-1})}{2} \cdot \frac{du}{p^2 + u^2} = \frac{\pi}{2p} \cdot f(p)$$

$$(17) \quad \int_0^{\infty} \frac{\varphi(ax\sqrt{-1}) - \varphi(-ax\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}} \cdot \frac{x \cdot dx}{p^2 + x^2} = -\frac{\pi}{2} \varphi(ap)$$

$$(18) \quad \int_0^{\infty} \frac{f(ax\sqrt{-1}) - f(-ax\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}} \cdot \frac{dx}{x(p^2 + x^2)} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{f(ap) - f(0)}{p^2}$$

$$(19) \quad \int_0^{\infty} \frac{x^\lambda}{1+x^2} \cdot dx = \frac{2 \cdot 1}{1^2 - \lambda^2} - \frac{2 \cdot 3}{3^2 - \lambda^2} + \frac{2 \cdot 5}{5^2 - \lambda^2} - \dots = \frac{\frac{\pi}{2}}{\cos \lambda \frac{\pi}{2}}$$

$$(20) \quad \int_0^{\infty} \frac{e^{\lambda z} + e^{-\lambda z}}{e^z + e^{-z}} \cdot dz = \frac{\frac{\pi}{2}}{\cos\left(\lambda \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$(21) \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos \beta z}{e^{-z} + e^z} dz = \frac{\frac{\pi}{2}}{e^{-\beta \frac{\pi}{2}} + e^{\beta \frac{\pi}{2}}}$$

$$(22) \quad 0 < n < 1 \quad \int_0^{\infty} x^{n-1} (1-x)^{-n} \cdot dx = \frac{\pi}{\sin n\pi}$$

В следующих формулах λ , μ , ν суть какие угодно положительные числа, а m и n — целые положительные числа:

$$(23) \quad \int_0^{\infty} x^{\nu-1} e^{-x} \cdot dx = \Gamma(\nu)$$

$$(24) \quad \int_0^1 x^{\lambda-1} (1-x)^{\mu-1} \cdot dx = (\lambda, \mu)$$

$$(25) \quad \Gamma(v+1) = v\Gamma(v)$$

$$(26) \quad \Gamma(m+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m$$

$$(27) \quad (\lambda, \mu) = \frac{m-1}{\lambda} \cdot \frac{m-2}{\lambda+1} \cdot \frac{m-3}{\lambda+2} \dots \frac{1}{\lambda+m-2} \cdot \frac{1}{\lambda+m-1}$$

$$(28) \quad (\lambda, \mu) = \frac{\Gamma(\lambda) \cdot \Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda + \mu)}$$

$$(29) \quad 0 < \lambda < 1 \quad \Gamma(\lambda) \cdot \Gamma(1 - \lambda) = \frac{\pi}{\sin(\lambda\pi)}$$

$$(30) \quad \Gamma(\lambda) \cdot \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\lambda-1}} \Gamma(2\lambda)$$

$$(31) \quad \int_0^{\infty} \left[(v-1)e^{-x} - \frac{e^{-x} - e^{-vx}}{1 - e^{-x}} \right] \frac{dx}{x} = \log \Gamma(v)$$

$$(32) \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = \sqrt{2\pi} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \left(1 + \frac{1}{12n} + \dots \right)$$

$$(33) \quad \Gamma(\lambda) \cdot \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{m}\right) \dots \Gamma\left(\lambda + \frac{m-1}{m}\right) = m^{-\lambda m + \frac{1}{2}} \cdot (2\pi)^{\frac{m-1}{2}} \Gamma(m\lambda)$$

$$(34) \quad \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \dots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \cdot n^{-\frac{1}{2}}$$

При λ каком угодно

$$(35) \quad \Gamma(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot n^\lambda}{\lambda \cdot (\lambda+1) \cdot (\lambda+2) \dots (\lambda+n-1)} \right\}$$

$$(36) \quad \int_0^{\infty} x^{\mu-1} \cos x dx = \Gamma(\mu) \cos\left(\mu \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(37) \quad \int_0^{\infty} x^{\mu-1} \sin x dx = \Gamma(\mu) \sin\left(\mu \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(38) \quad \int_{-\pi}^{+\pi} e^{m\varphi\sqrt{-1}} \cdot e^{-n\varphi\sqrt{-1}} \cdot d\varphi = \begin{cases} 0, & \text{если } m \leq n \\ 2\pi & \text{» } m = n \end{cases}$$

$$(39) \quad \int_{-\pi}^{+\pi} f(re^{\varphi\sqrt{-1}}) e^{-n\varphi\sqrt{-1}} \cdot d\varphi = \frac{2\pi \cdot f^{(n)}(0) \cdot r^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}$$

$$(40) \quad \int_{-\pi}^{+\pi} f(a + re^{\varphi\sqrt{-1}}) e^{-n\varphi\sqrt{-1}} \cdot d\varphi = \frac{2\pi f^{(n)}(a) r^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}$$

$$(41) \quad \int_0^{\pi} \log(\rho^2 - 2\rho \cos \varphi + 1) d\varphi = \begin{cases} 0, & \text{если } \rho < 1 \\ \pi \log \rho^2 & \text{» } \rho > 1 \end{cases}$$

$$(42) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin \varphi d\varphi = -\frac{\pi}{2} \log 2$$

$$(43) \quad \int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{\pi}{2} \log 2$$

$$(44) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi \cdot d\varphi}{\operatorname{tang} \varphi} = \frac{\pi}{2} \log 2$$

$$(45) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos [y(x - \alpha)] dx dy = 2\pi f(\alpha)$$

$$(46) \quad f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) e^{xy\sqrt{-1}} \cdot dy$$

$$\varphi(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{yx\sqrt{-1}} \cdot dx$$

$$(47) \quad \overline{\int \int \dots \int_0^{\infty} x^{\lambda-1} \cdot y^{\mu-1} \cdot z^{\nu-1} \dots f(x+y+z \dots) dx dy dz} = \\ = \frac{\Gamma(\lambda) \cdot \Gamma(\mu) \cdot \Gamma(\nu) \dots}{\Gamma(\lambda + \mu + \nu + \dots)} \int_0^{\infty} t^{\lambda+\mu+\nu+\dots-1} f(t) dt$$

$$(48) \quad \overline{\int \int \dots \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \cdot y^{\beta-1} \dots f(ax^m + by^n + \dots) dx dx \dots} = \\ = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{m}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\beta}{n}\right) \dots}{m \cdot n \dots a^{\frac{\alpha}{m}} \cdot b^{\frac{\beta}{n}} \dots \Gamma\left(\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n} + \dots\right)} \int_0^{\infty} t^{\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n} + \dots - 1} f(t) \cdot dt$$

$$(49) \quad \iint \dots \int x^{\alpha-1} \cdot y^{\beta-1} \cdot z^{\gamma-1} \dots dx dy dz \dots =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{m}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\beta}{n}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\gamma}{p}\right) \dots L^{\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{p} + \dots}}{m \cdot n \cdot p \dots a^{\frac{\alpha}{m}} \cdot b^{\frac{\beta}{n}} \cdot c^{\frac{\gamma}{p}} \dots \Gamma\left(\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{p} + \dots + 1\right)}$$

где

$$ax^m + by^n + cz^p + \dots \leq L; \quad L > 0$$

$$(50) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_L^M f(x) \cos[y(x-\alpha)] dx dy = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha < L \\ f(\alpha) & \text{» } L < \alpha < M \\ 0 & \text{» } M < \alpha \end{cases}$$

Теория конечных разностей

Прямое исчисление разностей

§ 1. Возьмем некоторую функцию $f(x)$ и будем предполагать, что независимая переменная x получает равные конечные приращения Δx (так что независимая переменная предполагается здесь, как и в дифференциальном исчислении, изменяющейся равномерно). Соответствующие значения функции будем означать таким образом:

$$u_0 = f(x); \quad u_1 = f(x + \Delta x); \quad u_2 = f(x + 2\Delta x); \quad \dots \quad u_n = f(x + n\Delta x)$$

а приращения ее, соответствующие приращениям x , через:

$$\Delta u_0 = u_1 - u_0; \quad \Delta u_1 = u_2 - u_1; \quad \Delta u_2 = u_3 - u_2; \quad \dots \quad \Delta u_n = u_{n+1} - u_n$$

Таким образом из ряда функций

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \dots \quad u_n, \quad u_{n+1}$$

получаем ряд функций

$$\Delta u_0, \quad \Delta u_1, \quad \Delta u_2, \quad \dots \quad \Delta u_n$$

Рассматривая теперь этот ряд как ряд начальных функций и находя разность его смежных членов (причем всегда из члена, имеющего старший значок, будем вычитать член, имеющий младший значок), мы получим ряд новых функций

$$\Delta^2 u_0, \quad \Delta^2 u_1, \quad \Delta^2 u_2, \quad \dots \quad \Delta^2 u_n$$

где вообще

$$\Delta^2 u_n = \Delta(\Delta u_n) = \Delta u_{n+1} - \Delta u_n.$$

Рассуждая таким образом далее, мы будем каждый раз получать новый ряд функций; общий вид этих рядов будет:

$$\Delta^\lambda u_0; \quad \Delta^\lambda u_1; \quad \Delta^\lambda u_2; \quad \dots \quad \Delta^\lambda u_n$$
$$\Delta^{\lambda+1} u_0; \quad \Delta^{\lambda+1} u_1; \quad \Delta^{\lambda+1} u_2; \quad \dots \quad \Delta^{\lambda+1} u_n$$

где

$$\Delta^{\lambda+1} u_n = \Delta(\Delta^\lambda u_n) = \Delta^\lambda u_{n+1} - \Delta^\lambda u_n$$

Отсюда нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \Delta u_n \\ \Delta u_{n+1} &= \Delta u_n + \Delta^2 u_n \\ &\dots \dots \dots \\ \Delta^\lambda u_{n+1} &= \Delta^\lambda u_n + \Delta^{\lambda+1} u_n \end{aligned}$$

Таким образом мы получаем следующее практическое правило для нахождения разности какого угодно порядка: при составлении таблицы, в которой каждый из вертикальных столбцов заключает все функции, соответствующие одному и тому же приращению Δx переменной независимой, следует, для получения какой-нибудь функции, находящейся на пересечении какого-нибудь столбца и строки, взять функцию того же столбца, непосредственно над нею стоящую, и приложить к этой функции непосредственно за нею следующую функцию горизонтальной строки.

§ 2. Выведем теперь общие формулы, дающие возможность выражать разность какого угодно порядка в начальных функциях и обратно — начальные функции выражать в разностях различных порядков.

Мы имеем

$$\Delta u_n = u_{n+1} - u_n$$

отсюда, заменив n через $n + 1$,

$$\Delta u_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1}$$

поэтому

$$\begin{aligned} \Delta^2 u_n &= \Delta u_{n+1} - \Delta u_n = (u_{n+2} - u_{n+1}) - (u_{n+1} - u_n) = \\ &= u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n \end{aligned}$$

Отсюда

$$\Delta^2 u_{n+1} = u_{n+3} - 2u_{n+2} + u_{n+1}$$

а потому

$$\begin{aligned} \Delta^3 u_n &= \Delta^2 u_{n+1} - \Delta^2 u_n = (u_{n+3} - 2u_{n+2} + u_{n+1}) - (u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n) = \\ &= u_{n+3} - 3u_{n+2} + 3u_{n+1} - u_n \end{aligned}$$

Отсюда по аналогии можно заключить, что вообще

$$\begin{aligned} (1) \quad \Delta^\lambda u_n &= u_{n+\lambda} - \lambda u_{n+\lambda-1} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{1 \cdot 2} u_{n+\lambda-2} - \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} u_{n+\lambda-3} + \\ &+ \dots + (-1)^\mu \frac{\lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-\mu+1)}{1 \cdot 2 \dots \mu} u_{n+\lambda-\mu} \end{aligned}$$

Чтобы доказать справедливость этой формулы, докажем, что она будет справедлива для $\lambda + 1$, если допустить ее для λ .

Заменяя в (1) n через $n + 1$, получим

$$\Delta^\lambda u_{n+1} = u_{n+1+\lambda} - \lambda u_{n+\lambda} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{1 \cdot 2} u_{n+\lambda-1} - \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} u_{n+\lambda-2} + \dots + (-1)^{\mu+1} \frac{\lambda(\lambda-1) \dots \lambda-\mu}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (\mu+1)} u_{n+\lambda-\mu}$$

Отсюда

$$\Delta^{\lambda+1} u_n = \Delta^\lambda u_{n+1} - \Delta^\lambda u_n = u_{n+\lambda+1} - (\lambda+1) u_{n+\lambda} + \frac{(\lambda+1)\lambda}{1 \cdot 2} u_{n+\lambda-1} - \frac{(\lambda+1)\lambda(\lambda-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} u_{n+\lambda-2} \dots$$

Общий член будет

$$(-1)^{\mu+1} \frac{\lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-\mu+1)}{1 \cdot 2 \dots \mu} \left[\frac{\lambda-\mu}{\mu+1} - 1 \right] u_{n+\lambda-\mu} = (-1)^{\mu+1} \cdot \frac{(\lambda+1) \cdot \lambda(\lambda-1) \dots \lambda-\mu+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (\mu+1)} u_{n+\lambda-\mu}$$

Итак, справедливость формулы (1) доказана.

Теперь решим обратный вопрос: выведем формулу, дающую возможность начальные функции выражать в разностях различных порядков, соответствующих одному и тому же приращению переменной.

Мы имеем формулы:

$$\begin{aligned} \Delta u_n &= u_{n+1} - u_n \\ \Delta^2 u_n &= \Delta u_{n+1} - \Delta u_n \\ \Delta^3 u_n &= \Delta^2 u_{n+1} - \Delta^2 u_n \\ &\dots \\ &\dots \end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \Delta u_n \\ u_{n+2} &= u_{n+1} + \Delta u_{n+1} = (u_n + \Delta u_n) + (\Delta u_n + \Delta^2 u_n) = u_n + 2\Delta u_n + \Delta^2 u_n \\ u_{n+3} &= u_{n+1} + 2\Delta u_{n+1} + \Delta^2 u_{n+1} = (u_n + \Delta u_n) + 2(\Delta u_n + \Delta^2 u_n) + (\Delta^2 u_n + \Delta^3 u_n) = u_n + 3\Delta u_n + 3\Delta^2 u_n + \Delta^3 u_n \end{aligned}$$

Отсюда по аналогии полагаем

$$u_{n+\lambda} = u_n + \lambda \Delta u_n + \frac{\lambda(\lambda-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 u_n + \dots + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) \dots (\lambda-\mu+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \mu} \Delta^\mu u_n$$

Чтобы доказать справедливость этой формулы, примем $\Delta u_{n+\lambda}$ за начальную функцию, и по этой формуле будем иметь

$$\Delta u_{n+\lambda} = \Delta u_n + \frac{\lambda}{1} \Delta^2 u_n + \frac{\lambda(\lambda-1)}{1 \cdot 2} \Delta^3 u_n + \dots +$$

$$+ \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) \dots (\lambda-\mu+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \mu} \Delta^{\mu+1} u_n$$

Складывая эту формулу с предыдущей, получим:

$$u_{n+\lambda} + \Delta u_{n+\lambda} = u_n + \Delta u_n + \lambda \Delta u_n + \frac{\lambda(\lambda-1)}{1 \cdot 2} \cdot \Delta^2 u_n + \frac{\lambda}{1} \Delta^2 u_n + \dots +$$

$$+ \left\{ \frac{\lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-\mu)}{1 \cdot 2 \dots (\mu+1)} + \frac{\lambda(\lambda-1) \dots \lambda-\mu+1}{1 \cdot 2 \dots \mu} \right\} \Delta^{\mu+1} u_n + \dots$$

$$u_{n+\lambda+1} = u_n + (\lambda+1) \Delta u_n + \frac{(\lambda+1)\lambda}{1 \cdot 2} \cdot \Delta^2 u_n + \dots +$$

$$+ \frac{(\lambda+1)\lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-\mu+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \mu(\mu+1)} \Delta^{\mu+1} u_n + \dots$$

Итак, справедливость нашей формулы доказана. Полагая в ней $n=0$, мы получим формулу интерполирования Ньютона

$$(2) \quad u_\lambda = u_0 + \frac{\lambda}{1} \cdot \Delta u_0 + \frac{\lambda(\lambda-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 u_0 + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^3 u_0 + \dots$$

§ 3. Положим теперь:

$$u_0 = f(a); \quad \Delta x = h;$$

$$u_\lambda = f(a + \lambda h)$$

вследствие этого формула (2) примет такой вид:

$$f(a + \lambda h) = f(a) + \frac{\lambda}{1} \cdot \Delta f(a) + \frac{\lambda(\lambda-1)}{1 \cdot 2} \cdot \Delta^2 f(a) + \dots$$

полагая здесь

$$\lambda h = x$$

получим

$$f(a + x) = f(a) + \frac{x}{1} \cdot \frac{\Delta f(a)}{h} + \frac{x(x-h)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\Delta^2 f(a)}{h^2} +$$

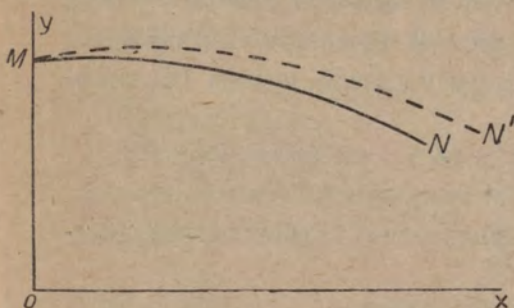
$$+ \frac{x(x-h)(x-2h)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{\Delta^3 f(a)}{h^3} + \dots$$

для всякого x , кратного h .

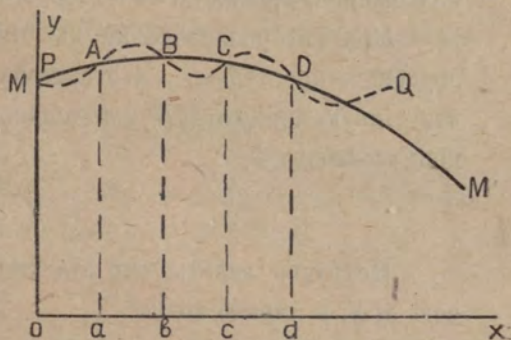
Отсюда нетрудно получить строку Тейлора, допустив, что h стремится к нулю, вследствие чего в пределе будет

$$f(a+x) = f(a) + \frac{x}{1} \frac{df(a)}{da} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2 f(a)}{da^2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{d^3 f(a)}{da^3} + \dots$$

где вообще $\frac{d^k f(a)}{dx^k}$ означает результат подстановки a в производную $\frac{d^k f(x)}{dx^k}$ вместо x .



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Положим

$$F(x) = f(a) + \frac{x}{1} \cdot \frac{\Delta f(a)}{h} + \frac{x(x-h)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\Delta^2 f(a)}{h^2} + \dots + \frac{x(x-h)(x-2h)\dots(x-kh+h)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} \cdot \frac{\Delta^k f(a)}{h^k}$$

положим точно так же

$$\Phi(x) = f(a) + \frac{x}{1} \frac{df(a)}{dx} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2 f(a)}{dx^2} + \dots + \frac{x^k}{1 \cdot 2 \dots k} \cdot \frac{d^k f(a)}{dx^k}$$

так что вообще

$$f(a+x) - \Phi(x) = A' x^{k+1} + B' x^{k+2} + C' x^{k+3} + \dots$$

допустим теперь, что

$$y = f(a+x)$$

есть уравнение кривой MN (фиг. 2 и 3); возьмем еще кривые MN' и $PABCDQ$, уравнения которых суть:

$$y = \Phi(x)$$

$$y = F(x)$$

Кривая MN' имеет общую точку с кривою MN при $x = 0$, и в этой точке эти кривые имеют соприкосновение k -го порядка, так что вообще вблизи этой точки кривая MN' очень мало отличается от кривой MN , и если разложение функции $f(a+x)$ по степеням x представляет ряд сходящийся, то при достаточно большом k кривую MN можно заменить кривою MN' , что мы и делаем всякий раз, когда вычисляем значения функции, пользуясь ее разложением в строку Тейлора и пренебрегая членами этого разложения, начиная с некоторого $(k+1)$ -го порядка.

При интерполировании мы точно так же заменяем данную функцию другою — простейшею, и эта замена имеет то геометрическое значение, что данную кривую MN мы заменяем «параболической» кривою PQ , имеющей уравнением

$$y = F(x)$$

Нетрудно видеть, что эта кривая имеет $(k+1)$ общих точек с кривою MN , а именно точки:

$$P, A, B, C, D, \dots$$

абсциссы которых суть:

$$0; 0a = h; 0b = 2h; 0c = 3h; \dots (k-1)h; kh$$

Если для h взято количество достаточно малое, то кривая PQ будет вообще весьма мало отличаться от кривой MN , а на этом-то и основано вычисление значений функции $f(a+x)$, соответствующих промежуточным между 0 и $(k-1)h$ значениям x , которое заменяется вычислением значений функции $F(x)$, соответствующих тем же значениям x .

Отсюда видно, что интерполирование имеет много общего с вычислением значений функции при помощи разложения в ряд по степеням переменной P . Различие заключается в том, что в одном случае данная кривая заменяется другою, известное число раз пересекающейся с нею в точках, абсциссы которых увеличиваются в арифметической прогрессии, а в другом — данная кривая заменяется кривою, имеющей с нею соприкосновение известного порядка и которая потом вообще от нее удаляется.

§ 4. В § 2 была выведена формула интерполирования Ньютона. Теперь мы выведем другую формулу, и для этого решим такой вопрос: найти простейший полином, который при различных данных значениях переменной x получал бы значения, тождественные с известными нам значениями, при тех же значениях x , неизвестной функции $f(x)$.

Пусть данные значения x суть:

$$x_1, x_2, x_3 \dots, x_{n-1}, x_n$$

и положим, что

$$f(x_1); f(x_2); f(x_3); \dots f(x_{n-1}); f(x_n)$$

суть известные нам значения $f(x)$, хотя вид этой функции может быть нам и неизвестным.

Так как искомый полином должен получать n различных значений при n значениях переменной, то вообще он должен иметь n коэффициентов по крайней мере, так что вид его будет

$$\Phi(x) = A_n + A_{n-1}x + \dots + A_1x^{n-1}$$

Чтобы определить n коэффициентов $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$, стоило бы только подставить в это уравнение последовательно, вместо x ,

$$x_1, x_2, x_3, \dots x_n$$

и $\Phi(x_1), \Phi(x_2), \dots$ заменить через $f(x_1), f(x_2), \dots$, что и дало бы n уравнений, необходимых и вообще достаточных для определения искомых коэффициентов, но мы можем и прямо написать искомый полином. В самом деле, нетрудно видеть, что полином

$$\begin{aligned} \Phi(x) = & \frac{(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)} \cdot f(x_1) - \\ (3) \quad & + \frac{(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_n)} \cdot f(x_2) + \dots + \\ & + \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})} \cdot f(x_n) \end{aligned}$$

удовлетворяет требуемым условиям, и остается только показать, что он действительно простейший полином $(n-1)$ -ой степени, удовлетворяющий этим условиям.

В самом деле, если допустить, что $\psi(x)$ есть простейший полином $(n-1)$ -ой степени, удовлетворяющий требуемым условиям, то разность

$$\Phi(x) - \psi(x)$$

будет представлять полином не выше $(n-1)$ -ой степени (потому что эта разность может быть выше $(n-1)$ -ой степени, только если $\psi(x)$ выше $(n-1)$ -ой степени, а в таком случае $\psi(x)$ не был бы простейшим полиномом), но этот полином $\Phi(x) - \psi(x)$ обращается в нуль при n значениях x ,

а это возможно только в том случае, когда $\psi(x)$ тождественно равно $\Phi(x)$.
Итак, $\Phi(x)$ есть искомый полином.

Формула (3) носит название формулы интерполирования Лагранжа.
Для примера положим:

$$\begin{aligned}x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2 \\ f(x_1) = 0; \quad f(x_2) = 1; \quad f(x_3) = 8\end{aligned}$$

По формуле Лагранжа находим

$$\begin{aligned}\Phi(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} \cdot 0 + \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} \cdot 1 + \\ + \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} \cdot 8 = 3x^2 - 2x\end{aligned}$$

Чтобы решить ту же задачу по формуле Ньютона, заметим, что в данном случае:

$$\begin{aligned}u_0 = 0; \quad u_1 = 1; \quad u_2 = 8 \\ \Delta u_0 = 1; \quad \Delta u_1 = 7; \quad \Delta^2 u_0 = 6 \\ \Phi(x) = u_0 + \frac{x}{1} \cdot \Delta u_0 + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} \cdot \Delta^2 u_0\end{aligned}$$

так что

$$\Phi(x) = 0 + 1 \cdot x + 6 \cdot \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} = 3x^2 - 2x$$

§ 5. Существует еще способ интерполирования, основывающийся на замене неизвестной нам функции $f(x)$ наиболее к ней подходящей линейной функцией $A + Bx$.

Положим, что нам даны значения этой функции:

$$f(x_1); \quad f(x_2); \quad f(x_3); \quad \dots \quad f(x_n)$$

соответствующие данным значениям переменной x . Берем функцию

$$\begin{aligned}u = [f(x_1) - A - Bx_1]^2 + [f(x_2) - A - Bx_2]^2 + \dots + \\ + [f(x_n) - A - Bx_n]^2\end{aligned}$$

от двух переменных A и B и определяем эти последние по правилам дифференциального исчисления из условия minimum'a этой функции. Полученные значения A и B и будут делать функцию

$$A + Bx$$

наиболее подходящей к $f(x)$, по крайней мере в пределах наименьшего и наибольшего из количеств

$$x_1, \quad x_2, \quad \dots \quad x_n$$

Следующие разности будут тождественно равны нулю, как разности от постоянного.

На основании этого нетрудно вывести формулу Ньютона. Для этого допустим такое разложение:

$$f(a+x) = A_0 + A_1 x + A_2 x(x-h) + A_3 x(x-h)(x-2h) + \dots$$

полагая здесь

$$x = 0$$

получим

$$A_0 = f(a)$$

Отсюда мы имеем также:

$$\begin{aligned} \Delta f(a+x) &= A_1 h + 2A_2 hx + 3A_3 hx(x-h) + \dots \\ \Delta^2 f(a+x) &= 1 \cdot 2 \cdot A_2 h^2 + 2 \cdot 3 A_3 h^2 x + \dots \\ \Delta^3 f(a+x) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 A_3 h^3 + \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

полагая в этих равенствах $x = 0$, получим:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\Delta f(a)}{h} \\ A_2 &= \frac{\Delta^2 f(a)}{h^2} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2} \\ A_3 &= \frac{\Delta^3 f(a)}{h^3} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \end{aligned}$$

а отсюда и получаем формулу Ньютона

$$\begin{aligned} f(a+x) &= f(a) + \frac{x}{1} \cdot \frac{\Delta f(a)}{h} + \frac{x(x-h)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\Delta^2 f(a)}{h^2} + \\ &+ \frac{x(x-h)(x-2h)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{\Delta^3 f(a)}{h^3} + \dots \end{aligned}$$

Функции $\frac{1}{x^n}$ в теории конечных разностей соответствует функция

$$\frac{1}{x(x+h)(x+2h)\dots[x+(n-1)h]}$$

разность которой есть

$$\begin{aligned} &\Delta \frac{1}{x(x+h)\dots[x+(n-1)h]} = \\ (5) \quad &= \frac{1}{(x+h)(x+2h)\dots(x+nh)} - \frac{1}{x(x+h)(x+2h)\dots[x+(n-1)h]} = \\ &= \frac{x-x-nh}{x(x+h)(x+2h)\dots(x+nh)} = -nh \cdot \frac{1}{x(x+h)\dots(x+nh)} \end{aligned}$$

Эта формула аналогична формуле дифференциального исчисления

$$d \frac{1}{x^n} = -n dx \cdot \frac{1}{x^{n+1}}$$

Найдем теперь разность дроби, выраженную в разностях числителя и знаменателя:

$$\Delta \frac{u_n}{v_n} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} - \frac{u_n}{v_n} = \frac{(u_n + \Delta u_n)v_n - (v_n + \Delta v_n)u_n}{v \cdot v_{n+1}} = \frac{v_n \cdot \Delta u_n - u_n \Delta v_n}{v_n v_{n+1}}$$

итак,

$$(6) \quad \Delta \frac{u_n}{v_n} = \frac{v_n \Delta u_n - u_n \Delta v_n}{v_n \cdot v_{n+1}}$$

Эта формула, аналогичная с формулой

$$d \frac{u}{v} = \frac{v \cdot du - u dv}{v^2}$$

далеко не имеет такого важного в практическом отношении значения, как последняя.

Возьмем теперь функцию a^x . Мы имеем

$$(7) \quad \Delta a^x = a^{x+h} - a^x = a^x (a^h - 1) = a^x \cdot h \cdot \frac{a^h - 1}{h}$$

Чтобы перейти от этой последней формулы к формуле дифференциального исчисления, стоит только положить, что в ней h стремится к нулю, вследствие чего, замечая, что

$$\lim \left(\frac{a^h - 1}{h} \right)_{h \rightarrow 0} = \log a$$

мы и получим

$$da^x = a^x \log a \cdot dx$$

Из формулы (7) мы имеем

$$\Delta^2 a^x = (a^h - 1) \Delta a^x = a^x (a^h - 1)^2$$

и вообще

$$(8) \quad \Delta^m a^x = a^x \cdot (a^h - 1)^m$$

Возьмем теперь функцию $\sin x$:

$$\Delta \sin x = \sin(x+h) - \sin x = 2 \cos \left(x + \frac{h}{2} \right) \cdot \sin \frac{h}{2}$$

итак,

$$(9) \quad \Delta \sin x = 2 \cos \left(x + \frac{h}{2} \right) \cdot \sin \frac{h}{2}$$

Замечая, что

$$\Delta \sin x = \cos \left(x + \frac{h}{2} \right) \cdot \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot h$$

и предполагая, что h стремится к нулю, получим

$$d \sin x = \cos x \cdot dx$$

Перейдем теперь к функции $\cos x$:

$$\Delta \cos x = \cos (x + h) - \cos x = -2 \sin \frac{x+h}{2} \cdot \sin \frac{h}{2}$$

итак,

$$(10) \quad \Delta \cos x = -\sin \left(x + \frac{h}{2} \right) \cdot 2 \sin \frac{h}{2}$$

На основании формул (9) и (10) находим:

$$\begin{aligned} \Delta^2 \sin x &= \Delta \cos \left(x + \frac{h}{2} \right) \cdot 2 \sin \frac{h}{2} = -\sin (x + h) \cdot \left(2 \sin \frac{h}{2} \right)^2 \\ \Delta^3 \sin x &= -\Delta \sin (x + h) \cdot \left(2 \sin \frac{h}{2} \right)^3 = -\cos \left(x + \frac{3h}{2} \right) \cdot \left(2 \sin \frac{h}{2} \right)^3 \\ &\dots \end{aligned}$$

и вообще:

$$(11) \quad \Delta^n \sin x = \sin \left(x + n \frac{\pi + h}{2} \right) \cdot \left(2 \sin \frac{h}{2} \right)^n$$

$$(12) \quad \Delta^n \cos x = -\cos \left(x + n \frac{\pi + h}{2} \right) \cdot \left(2 \sin \frac{h}{2} \right)^n$$

В заключение этой статьи найдем разность произведения двух функций:

$$(13) \quad \Delta u_n v_n = u_{n+1} v_{n+1} - u_n v_n = (u_n + \Delta u_n) v_{n+1} - u_n v_n = u_n \Delta v_n + v_{n+1} \Delta u_n$$

Эта формула, как и формула (6), не имеет большого значения.

§ 7. Переходим теперь к рассмотрению нового отдела — нахождения зависимостей между конечными разностями и дифференциалами.

Полагая

$$u = f(x)$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta u = f(x + h) - f(x) &= \frac{h}{1} \cdot f'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \cdot f''(x) + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot f'''(x) = \\ &= \frac{h}{1} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} + \dots \end{aligned}$$

итак,

$$(14) \quad \Delta u = \frac{h}{1} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^3 u}{dx^3} + \dots$$

Отсюда

$$\Delta^2 u = \frac{h}{1} \Delta \frac{du}{dx} + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \cdot \Delta \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \Delta \frac{d^3 u}{dx^3} + \dots$$

Заменяя в формуле (14) u последовательно через $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2 u}{dx^2}$ и т. д., будем иметь:

$$\begin{aligned} \Delta \frac{du}{dx} &= \frac{h}{1} \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^3 u}{dx^3} + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^4 u}{dx^4} \\ \Delta \frac{d^2 u}{dx^2} &= \frac{h}{1} \cdot \frac{d^3 u}{dx^3} + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^4 u}{dx^4} + \dots \\ \Delta \frac{d^3 u}{dx^3} &= \frac{h}{1} \cdot \frac{d^4 u}{dx^4} + \dots \end{aligned}$$

а потому

$$\begin{aligned} \Delta^2 u &= \frac{h}{1} \left\{ \frac{h}{1} \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^3 u}{dx^3} + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^4 u}{dx^4} + \dots \right\} + \\ &+ \frac{h^2}{1 \cdot 2} \left(\frac{h}{1} \cdot \frac{d^3 u}{dx^3} + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^4 u}{dx^4} + \dots \right) + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(h \cdot \frac{d^4 u}{dx^4} + \dots \right) \\ &= h^2 \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} + h^3 \frac{d^3 u}{dx^3} + \frac{7}{12} h^4 \cdot \frac{d^4 u}{dx^4} + \dots = \\ &= A \frac{d^2 u}{dx^2} + B \frac{d^3 u}{dx^3} + C \frac{d^4 u}{dx^4} + \dots \end{aligned}$$

Отсюда видно, что вообще

$$\Delta^\lambda u = A_1 \frac{du}{dx} + A_2 \frac{d^2 u}{dx^2} + \dots + A_{\lambda-1} \frac{d^{\lambda-1} u}{dx^{\lambda-1}} + A_\lambda \frac{d^\lambda u}{dx^\lambda} + \dots$$

где A_1, A_2, A_3, \dots суть количества, не зависящие от вида функции $f(x) = u$.

Пользуясь этим, мы легко можем определить эти коэффициенты; так как $\Delta^\lambda u$ представляется линейной и однородной функцией от u ее производных, то стоит только выбрать функцию $f(x)$ таким образом, чтобы как ее конечные разности, так и производные имели наиболее простой вид, а такая функция, как мы видели, есть a^x .

Итак положим:

$$u = a^x; \quad \Delta^\lambda u = a^x (a^h - 1)^\lambda; \quad \frac{d^m u}{dx^m} = a^x (\log a)^m$$

Вследствие этого мы найдем

$$a^x (a^h - 1)^\lambda = A_1 a^x \log a + A_2 a^x (\log a)^2 + A_3 a^x (\log a)^3 + \dots + A_\lambda a^x (\log a)^\lambda + \dots$$

или

$$(a^h - 1)^\lambda = A_1 \log a + A_2 (\log a)^2 + A_3 (\log a)^3 + \dots$$

полагая здесь

$$\log a = s$$

и замечая, что

$$e^{hs} = 1 + \frac{hs}{1} + \frac{h^2 s^2}{1 \cdot 2} + \dots$$

будем иметь такое равенство:

$$\left(\frac{hs}{1} + \frac{h^2 s^2}{1 \cdot 2} + \frac{h^3 s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \right)^\lambda = A_1 s + A_2 s^2 + A_3 s^3 + \dots + A_\lambda s^\lambda + \dots$$

из которого и определим коэффициенты A_1, A_2, A_3, \dots по условиям его тождественности.

Из этого равенства нетрудно видеть, что

$$A_1 = A_2 = A_3 = \dots = A_{\lambda-1} = 0$$

так что мы будем иметь

$$\Delta^\lambda u = A_\lambda \frac{d^\lambda u}{dx^\lambda} + A_{\lambda+1} \frac{d^{\lambda+1} u}{dx^{\lambda+1}} + A_{\lambda+2} \frac{d^{\lambda+2} u}{dx^{\lambda+2}} + \dots$$

причем

$$(15) \quad \left(\frac{hs}{1} + \frac{h^2 s^2}{1 \cdot 2} + \frac{h^3 s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \right)^\lambda = A_\lambda s^\lambda + A_{\lambda+1} s^{\lambda+1} + A_{\lambda+2} s^{\lambda+2} + \dots$$

Отсюда нетрудно заключить, что если u есть целая функция степени, не превосходящей $\lambda - 1$, то как все ее производные порядка, начиная с λ , так и все ее разности, начиная с того же порядка, тождественно равны нулю.

Переходим теперь к решению обратного вопроса: выражению производной какого угодно порядка при помощи разностей.

Положим, что мы нашли:

$$\begin{aligned} \Delta u &= C_1 \frac{du}{dx} + C_2 \frac{d^2 u}{dx^2} + C_3 \frac{d^3 u}{dx^3} + C_4 \frac{d^4 u}{dx^4} + \dots \\ \Delta^2 u &= D_2 \frac{d^2 u}{dx^2} + D_3 \frac{d^3 u}{dx^3} + D_4 \frac{d^4 u}{dx^4} + \dots \\ \Delta^3 u &= E_3 \frac{d^3 u}{dx^3} + E_4 \frac{d^4 u}{dx^4} + \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

и т. д.

Отсюда:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{1}{C_1} \Delta u - \frac{C_2 d^2 u}{C_1 dx^2} - \frac{C_3 d^3 u}{C_1 dx^3} - \frac{C_4 d^4 u}{C_1 dx^4} - \dots \\ \frac{d^2 u}{dx^2} &= \frac{1}{D_2} \Delta^2 u - \frac{D_3 d^3 u}{D_2 dx^3} - \frac{D_4 d^4 u}{D_2 dx^4} - \dots \\ \frac{d^3 u}{dx^3} &= \frac{1}{E_3} \Delta^3 u - \frac{E_4 d^4 u}{E_3 dx^4} - \dots \end{aligned}$$

а отсюда видно, что вообще будет

$$\frac{d^\mu u}{dx^\mu} = N_\mu \Delta^\mu u + N_{\mu+1} \Delta^{\mu+1} u + N_{\mu+2} \Delta^{\mu+2} u + \dots$$

Чтобы определить коэффициенты этого ряда, положим

$$u = a^x$$

вследствие чего найдем

$$(\log a)^\mu = N_\mu (a^h - 1)^\mu + N_{\mu+1} (a^h - 1)^{\mu+1} + N_{\mu+2} (a^h - 1)^{\mu+2} + \dots$$

полагая здесь

$$a^h - 1 = s$$

и замечая, что

$$\log(1 + s) = \frac{s}{1} - \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3} - \frac{s^4}{4} + \dots$$

мы должны иметь такое тождество:

$$\frac{\Delta}{h^\mu} \left(\frac{s}{1} - \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3} - \frac{s^4}{4} \dots \right)^\mu = N_\mu s^\mu + N_{\mu+1} s^{\mu+1} + N_{\mu+2} s^{\mu+2} + \dots$$

из которого и определим коэффициенты N . Итак, мы имеем

$$(16) \quad \frac{d^\mu u}{dx^\mu} = N_\mu \Delta^\mu u + N_{\mu+1} \Delta^{\mu+1} u + N_{\mu+2} \Delta^{\mu+2} u + \dots$$

причем

$$(16) \quad \left\{ \frac{\log(1+s)}{h} \right\}^\mu = N_\mu s^\mu + N_{\mu+1} s^{\mu+1} + N_{\mu+2} s^{\mu+2} + \dots$$

Полагая в этой формуле $\mu = 1$, получим

$$\frac{s}{h} - \frac{s^2}{2h} + \frac{s^3}{3h} - \frac{s^4}{4h} + \dots = N_1 s + N_2 s^2 + N_3 s^3 + N_4 s^4 + \dots$$

откуда следует:

$$N_1 = \frac{1}{h}; \quad N_2 = -\frac{1}{2h}; \quad N_3 = \frac{1}{3h}; \quad N_4 = -\frac{1}{4h}; \quad \dots, \text{ и т. д.}$$

так что

$$(17) \quad \frac{du}{dx} = \frac{\Delta u}{h} - \frac{\Delta^2 u}{2h} + \frac{\Delta^3 u}{3h} - \frac{\Delta^4 u}{4h} + \dots$$

Формулы (16) и (15) можно представить символически, причем они легче запоминаются. Рассматривая в формуле (16) u как множитель и Δ как некоторое количество, мы можем написать их в таком виде:

$$\frac{d^\mu u}{dx^\mu} = (N_\mu \Delta^\mu + N_{\mu+1} \Delta^{\mu+1} + N_{\mu+2} \Delta^{\mu+2} + \dots) u$$

и

$$\left\{ \frac{\log(1 + \Delta)}{h} \right\}^\mu = N_\mu \Delta^\mu + N_{\mu+1} \Delta^{\mu+1} + N_{\mu+2} \Delta^{\mu+2} + \dots$$

откуда следует

$$(18) \quad \frac{d^\mu u}{dx^\mu} = \left\{ \frac{\log(1 + \Delta)}{h} \right\}^\mu u$$

Из этой формулы можно вывести символическим путем другую символическую формулу, заменяющую (15). Для этого будем рассматривать в формуле (18) u как множитель, μ — как степень, $\frac{d}{dx}$ — как количество, вследствие чего получим

$$\frac{d}{dx} = \frac{\log(1 + \Delta)}{h}$$

откуда

$$\Delta = e^{h \frac{d}{dx}} - 1$$

и

$$(19) \quad \Delta^\lambda u = \left(e^{h \frac{d}{dx}} - 1 \right)^\lambda u$$

Для того чтобы показать еще пример «символического» метода вывода символических формул, выведем из (19) формулу, дающую зависимость между разностью какого угодно порядка, соответствующею данному приращению независимой переменной, и разностями, соответствующими другому приращению.

Пусть

$$\Delta u = f(x + h) - f(x) \quad \text{и} \quad \Delta_1 u = f(x + H) - f(x)$$

Из формулы (18) мы имеем символически:

$$\frac{d}{dx} = \frac{\log(1 + \Delta)}{h}$$

точно так же из формулы

$$\Delta_1^\lambda u = \left(e^{H \frac{d}{dx}} - 1 \right)^\lambda u$$

найдем

$$\frac{d}{dx} = \frac{\log(1 + \Delta_1)}{H}$$

так что

$$(1 + \Delta)^{\frac{1}{h}} = (1 + \Delta_1)^{\frac{1}{H}}$$

откуда

$$\Delta_1 = (1 + \Delta)^{\frac{H}{h}} - 1$$

и

$$(20) \quad \Delta_1^\lambda u = \left[(1 + \Delta)^{\frac{H}{h}} - 1 \right]^\lambda u$$

Так, напр., полагая

$$\lambda = 2; \quad h = 1; \quad H = 2$$

найдем

$$(\alpha) \quad \Delta_1^2 u = [(1 + \Delta)^2 - 1]^2 u = \Delta^4 u + 4\Delta^3 u + 4\Delta^2 u$$

Положим, что для приращения $h = 1$ имеем такую табличку:

| u | Δu | $\Delta^2 u$ | $\Delta^3 u$ | $\Delta^4 u$ |
|-----|------------|--------------|--------------|--------------|
| 1 | 7 | 12 | 6 | 0 |
| 8 | 19 | 18 | 6 | |
| 27 | 37 | 24 | | |
| 64 | 61 | | | |
| 125 | | | | |

тогда для приращения $H = 2$ мы будем иметь такую табличку:

| u | $\Delta_1 u$ | $\Delta_1^2 u$ | $\Delta_1^3 u$ | $\Delta_1^4 u$ |
|-----|--------------|----------------|----------------|----------------|
| 1 | 26 | 72 | 48 | 0 |
| 27 | 98 | 120 | 48 | |
| 125 | 218 | 168 | | |
| 343 | 386 | | | |
| 729 | | | | |

и из уравнения (α) найдем

$$\Delta_1^2 u = 0 + 4.6 + 4.12 = 72$$

т. е. тот же результат, который дает вторая табличка. Если в формуле (20) H делается бесконечно малой величиной, то эта формула переходит в формулу (18):

$$\left(\frac{\Delta_1^\lambda u}{H^\lambda}\right)_{H=0} = \left[\frac{(1+\Delta)^{\frac{H}{h}} - 1}{H}\right]^\lambda u = \left\{\left[\frac{\frac{1}{h} \log(1+\Delta)(1+\Delta)^{\frac{H}{h}}}{1}\right]\right\}_{H=0}^\lambda u = \left(\frac{\log(1+\Delta)}{h}\right)^\lambda u$$

но

$$\lim_{H=0} \left\{\frac{\Delta_1^\lambda u}{H^\lambda}\right\} = \lim_{(\Delta x)^\lambda} \frac{\Delta^\lambda u}{(\Delta x)^\lambda} = \frac{d^\lambda u}{dx^\lambda}$$

а потому отсюда находим

$$\frac{d^\lambda u}{dx^\lambda} = \left\{\frac{\log(1+\Delta)}{h}\right\}^\lambda u = \left\{\frac{\log(1+\Delta_1)}{H}\right\}^\lambda u$$

Обратное исчисление конечных разностей

§ 8. Мы переходим к отделу теории разностей, аналогичному интегральному исчислению в учении о бесконечно малых, т. е. теперь мы будем определять функцию по данным ее разностям.

Положим

$$\Delta u_x = v_x$$

где значок при буквах u и v показывает, какому значению переменной соответствует значение функции, или проще

$$\Delta u = v$$

и покажем, что все функции, удовлетворяющие этому уравнению, могут различаться только на постоянное для тех промежутков, через которые берутся значения функции. В самом деле, положим, что некоторая функция w удовлетворяет этому уравнению, в таком случае

$$\Delta w = v$$

вследствие чего будем иметь

$$\Delta u - \Delta w = \Delta(u - w) = 0.$$

Но разность функции только тогда может равняться нулю, когда эта функция принимает одно и то же значение для всех значений переменной, следующих одно за другим через равные промежутки, принимаемые нами за постоянное приращение $h = \Delta x$ независимой переменной, т. е. тогда мы эту функцию можем рассматривать как постоянное; последнее следует из того, что в теории конечных разностей значения функции, соответствующие промежуточным значениям переменной, вовсе не принимаются во внимание. Итак, мы имеем

$$u - w = C$$

где C не должно рассматривать как «абсолютно» постоянное количество, потому что, на основании только что сказанного, C может зависеть от такой функции, которая принимает одно и то же значение для значений x , различающихся на постоянное $h = \Delta x$; так, если положить $h = 1$, то C может равняться $\sin 2\pi x$, $\cos 2\pi x$ и т. д., потому что вообще

$$\sin 2\pi x_0 = \sin 2\pi(x_0 + n)$$

где x_0 — начальное значение переменной и n — целое число, но так как для нас промежуточные значения не нужны, то мы будем теперь рассматривать C как постоянное.

Нетрудно теперь показать, что нашему уравнению удовлетворяет такая функция:

$$w_x = v_m + v_{m+1} + v_{m+2} + \dots + v_{x-1}$$

в самом деле,

$$\begin{aligned} \Delta w_x &= v_m + v_{m+1} + v_{m+2} + \dots + v_{x-1} + v_x \\ &\quad - (v_m + v_{m+1} + \dots + v_{x-1}) = v_x \end{aligned}$$

Сумму

$$v_m + v_{m+1} + v_{m+2} + \dots + v_{x-1}$$

будем обозначать таким образом:

$$\sum_m^x v$$

поэтому, если $\Delta u = v$, то

$$u = \sum_m^x v + C.$$

Если положить здесь $x = m$, то, замечая, что

$$\sum_m^m v = 0$$

найдем

$$u_m = C$$

вследствие чего

$$\sum_m^x v = u_x - u_m$$

Нетрудно видеть, что

$$\sum_m^x (v \pm w^1) = \sum_m^x v \pm \sum_m^x w^1$$

и

$$\sum_m^x Av = A \sum_m^x v$$

где A есть постоянное количество.

§ 9. Постараемся теперь найти суммы от некоторых простейших функций, при этом мы предполагаем $h = 1$.

а) Пусть

$$u = x(x-1)(x-2) \dots (x-l+1)$$

откуда

$$\Delta u = lx(x-1)(x-2) \dots (x-l+2)$$

а отсюда

$$\Delta = \frac{u}{l} = \frac{\Delta x(x-1)(x-2) \dots (x-l+1)}{l} = x(x-1) \dots (x-l+2)$$

Положим теперь $l-1 = n$, так что

$$\frac{\Delta x(x-1)(x-2) \dots (x-n)}{n+1} = x(x-1)(x-2) \dots (x-n+1)$$

а отсюда

$$\sum x(x-1) \dots (x-n+1) = \frac{x(x-1)(x-2) \dots (x-n)}{n+1} + C$$

так как вообще

$$\sum \Delta u = u + C$$

Отсюда мы имеем также:

$$(21) \quad \sum_m^x x(x-1)\dots(x-n+1) = \frac{x(x-1)\dots(x-n) - m(m-1)(m-2)\dots(m-n)}{n+1}$$

Полагая здесь $m = 0$, получим

$$(22) \quad \sum_0^x x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1) = \frac{x(x-1)\dots(x-n)}{n+1}$$

Эти формулы аналогичны таким формулам интегрального исчисления:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{и} \quad \int_0^x x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

б) Суммы вида

$$\sum x^m$$

выражаются при помощи очень сложных формул, а потому их вычисляют обыкновенно сводя вычисление $\sum x^m$ к вычислению $\sum x^{m-1}$. Прежде чем перейти к этим вычислениям, покажем другой способ вычисления, аналогичный интегрированию по приближению, причем вместо строки Тейлора, применяемой в интегральном исчислении, будем пользоваться интерполяционной формулой Ньютона, которая имеет вид

$$u = u_0 + \frac{x}{1} \Delta u_0 + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 u_0 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^3 u_0 + \dots$$

Найдем для примера по этой формуле сумму

$$\sum_0^x x^3$$

В данном случае имеем такую табличку:

| x | u | Δu | $\Delta^2 u$ | $\Delta^3 u$ | $\Delta^4 u$ |
|-----|-----|------------|--------------|--------------|--------------|
| 0 | 0 | 1 | 6 | 6 | 0 |
| 1 | 1 | 7 | 12 | 6 | |
| 2 | 8 | 19 | 18 | | |
| 3 | 27 | 37 | | | |
| 4 | 64 | | | | |

так что в данном случае

$$u_0 = 0; \Delta u_0 = 1; \Delta^2 u_0 = 6; \Delta^3 u_0 = 6; \Delta^4 u_0 = \Delta^5 u_0 = \dots = 0$$

а потому

$$x^3 = x + 3x(x-1) + x(x-1)(x-2)$$

а отсюда

$$\sum_0^x x^3 = \sum_0^x x + 3 \sum_0^x x(x-1) + \sum_0^x x(x-1)(x-2)$$

Но

$$\begin{aligned} \sum_0^x x &= \frac{x(x-1)}{2}; & \sum_0^x x(x-1) &= \frac{x(x-1)(x-2)}{3} \\ \sum_0^x x(x-1)(x-2) &= \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4} \end{aligned}$$

а потому

$$\begin{aligned} \sum_0^x x^3 &= \frac{x(x-1)}{2} + 3 \frac{x(x-1)(x-2)}{3} + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4} = \\ &= \frac{x(x-1)}{2} \cdot \frac{x(x-1)}{2} \end{aligned}$$

итак,

$$(23) \quad \sum_0^x x^3 = \left[\frac{x(x-1)}{2} \right]^2 = \left[\sum_0^x x \right]^2$$

Из этой замечательной формулы видно, что

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + N^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + N)^2$$

в) Переходим теперь к упомянутому выше способу вычисления сумм вида

$$\sum x^m$$

Мы имеем

$$\begin{aligned} \Delta x^m &= (x+1)^m - x^m = \frac{m}{1} x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} + \\ &+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{m-3} + \dots + mx + 1 \end{aligned}$$

откуда следует

$$\begin{aligned} x^m &= m \sum_0^x x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cdot \sum_0^x x^{m-2} + \\ &+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \sum_0^x x^{m-3} + \dots + m \sum_0^x x + x \end{aligned}$$

ибо $\Delta x = (x + 1) - x = 1$, а потому

$$\sum_0^x 1 = x$$

следовательно

$$m \sum_0^x x^{m-1} = x^m - \left\{ \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \sum_0^x x^{m-2} + \right. \\ \left. + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sum_0^x x^{m-3} + \dots + m \sum_0^x x + x \right\}$$

откуда

$$\sum_0^x x^{m-1} = \frac{x^m}{m} - \frac{m-1}{1 \cdot 2} \sum_0^x x^{m-2} - \\ - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sum_0^x x^{m-3} - \dots - \sum_0^x x - \frac{1}{m} x$$

полагая здесь $m = n + 1$, мы и получим искомую формулу

$$(24) \quad \sum_0^x x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{n}{1 \cdot 2} \sum_0^x x^{n-1} - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sum_0^x x^{n-2} - \\ - \dots - \sum_0^x x - \frac{1}{n+1} x$$

Полагая здесь $n = 1$, получим

$$\sum_0^x x = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_0^x 1 = \frac{x^2 - x}{2} = \frac{x(x-1)}{2}$$

при $n = 2$ найдем

$$\sum_0^x x^2 = \frac{x^3}{3} - \sum_0^x x - \frac{x}{3} = \frac{x^3}{3} - \frac{x(x-1)}{2} - \frac{x}{3} = \frac{x(2x^2 - 3x + 1)}{6}$$

При $n = 3$,

$$\sum_0^x x^3 = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2} \sum_0^x x^2 - \sum_0^x x - \frac{x}{4} = \frac{x^4}{4} - \frac{x(2x^2 - 3x + 1)}{4} - \\ - \frac{x(x-1)}{2} - \frac{x}{4} = \frac{x^4 - 2x^3 + x^2}{4} = \left[\frac{x(x-1)}{2} \right]^2$$

и т. д.

Таким образом формула (24) дает возможность последовательно вычислять суммы от степеней.

г) Положим теперь

$$u = \frac{1}{x(x+1)(x+2)\dots(x+l-1)}$$

Отсюда по формуле (5) имеем

$$\Delta u = -\frac{l}{x(x+1)(x+2)\dots(x+l)}$$

или

$$\Delta \left(-\frac{1}{lx(x+1)(x+2)\dots(x+l-1)} \right) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)\dots(x+l)}$$

полагая здесь $l = n - 1$, получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)} = \\ & = \Delta \left\{ -\frac{1}{(n-1)x(x+1)(x+2)\dots(x+n-2)} \right\} \end{aligned}$$

следовательно будет

$$\sum \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n-1)} = -\frac{1}{(n-1)x(x+1)\dots(x+n-2)} + C$$

отсюда

$$(25) \quad \sum_m^x \frac{1}{x(x+1)\dots(x+u-1)} = \frac{-1}{(n-1)x(x+1)\dots(x+n-2)} + \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{m(m+1)\dots(m+n-2)}$$

и

$$(26) \quad \sum_m^\infty \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n-1)} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{m(m+1)(m+2)\dots(m+n-2)}$$

Эти формулы аналогичны формулам интегрального исчисления:

$$\int \frac{dx}{x^n} = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + C \quad \text{и} \quad \int_m^\infty \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{m^{n-1}}$$

д) положим теперь

$$u = a^x$$

так что

$$\Delta u = a^x(a-1) \quad \text{и} \quad \Delta \left(\frac{u}{a-1} \right) = a^x$$

Отсюда

$$\sum a^x = \frac{a^x}{a-1} + C$$

и следовательно,

$$(27) \quad \sum_m^x a^x = \frac{a^x - a^m}{a-1}$$

Эта формула аналогична формуле интегрального исчисления:

$$\int_m^x a^x dx = \frac{a^x - a^m}{\log a}$$

е) Найдем еще суммы для тригонометрических функций

$\sin x$ и $\cos x$

Мы имеем

$$\Delta \cos x = -2 \sin \frac{h}{2} \cdot \sin \left(x + \frac{h}{2} \right)$$

откуда

$$\Delta \left(\frac{\cos x}{-2 \sin \frac{h}{2}} \right) = \sin \left(x + \frac{h}{2} \right)$$

Полагая здесь

$$x + \frac{h}{2} = z$$

получим

$$\Delta \left[-\frac{\cos \left(z - \frac{h}{2} \right)}{2 \sin \frac{h}{2}} \right] = \sin z$$

и, полагая здесь $z = a + by$, будем иметь

$$\Delta \left[-\frac{\cos \left(a + by - \frac{h}{2} \right)}{2 \sin \frac{h}{2}} \right] = \sin (a + by)$$

Принимая теперь $\Delta y = 1$, будем иметь

$$h = \Delta x = \Delta z = \Delta (a + by) = b \cdot \Delta y = b$$

а потому

$$\Delta \left[-\frac{\cos \left(a + by - \frac{b}{2} \right)}{2 \sin \frac{b}{2}} \right] = \sin (a + by)$$

откуда

$$(28) \quad \sum \sin(a + by) = -\frac{\cos\left(a + by - \frac{b}{2}\right)}{2 \sin \frac{b}{2}} + C$$

или

$$\sum \sin(a + by) \cdot 2 \sin \frac{b}{2} = -\cos\left(a + by - \frac{b}{2}\right) + C_1$$

Если положить здесь $by = x$ и, предполагая b уменьшающимся до нуля, увеличивать y до бесконечности так, чтобы x оставалось конечным, то эта формула обратится в известную формулу интегрального исчисления:

$$\int \sin(a + x) dx = -\cos(a + x) + C_1$$

так как будет

$$\left(2 \sin \frac{b}{2}\right)_{b=0} = (b)_{b=0} = [b(y+1) - by]_{b=0} = (b\Delta y)_{b=0} = dx$$

Из формулы (28) можно получить формулу для косинуса, положив

$$a = \frac{\pi}{2} + f$$

что приведет формулу (28) к такому виду:

$$(29) \quad \sum \cos(f + by) = \frac{\sin\left(f + by - \frac{b}{2}\right)}{2 \sin \frac{b}{2}} + C$$

§ 10. Суммирование, как и интегрирование, в большинстве случаев не может быть выполнено точно, поэтому необходимо иметь методы, дающие возможность суммировать по приближению. К изложению этих методов мы теперь и переходим.

Мы имеем формулу

$$\Delta u = h \frac{du}{dx} + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^3 u}{dx^3} + \dots$$

которая, как мы видели, заключается в следующей общей символической формуле:

$$\Delta^n u = \left(e^{h \frac{d}{dx}} - 1\right)^n u$$

Если положить $h = 1$, то мы будем иметь

$$\Delta u = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{2 \cdot 3} \frac{d^3 u}{dx^3} + \dots$$

отсюда

$$u = \sum \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \sum \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{2 \cdot 3} \sum \frac{d^3 u}{dx^3} + \dots + C'$$

где C' есть общее произвольное постоянное.

Положим теперь

$$\frac{du}{dx} = v$$

Вследствие этого наш ряд примет такой вид:

$$\int v dx = \sum v + \frac{1}{2} \sum \frac{du}{dx} + \frac{1}{2 \cdot 3} \sum \frac{d^2 v}{dx^2} + \dots + C'$$

откуда

$$(a) \quad \sum v = \int v dx - \frac{1}{2} \sum \frac{du}{dx} - \frac{1}{2 \cdot 3} \sum \frac{d^2 v}{dx^2} + \dots + C'$$

Заменяя здесь v через $\frac{dv}{dx}$, найдем

$$\sum \frac{du}{dx} = v - \frac{1}{2} \sum \frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \sum \frac{d^3 v}{dx^3} - \dots$$

Точно так же найдем:

$$\sum \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{dv}{dx} - \frac{1}{2} \sum \frac{d^3 v}{dx^3} - \frac{1}{2 \cdot 3} \sum \frac{d^4 v}{dx^4} - \dots$$

$$\sum \frac{d^3 v}{dx^3} = \frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{1}{2} \sum \frac{d^4 v}{dx^4} - \frac{1}{2 \cdot 3} \sum \frac{d^5 v}{dx^5} - \dots$$

и т. д.

Внося значения этих сумм в выражение (а), получим вообще:

$$\sum v = \int v dx + A_0 v + A_1 \frac{dv}{dx} + A_2 \frac{d^2 v}{dx^2} + A_3 \frac{d^3 v}{dx^3} + \dots + C$$

Чтобы определить коэффициенты, которые, как нетрудно видеть, не зависят от вида функции v , положим

$$v = a^x$$

вследствие чего имеем

$$\frac{a^x}{a-1} = \frac{a^x}{\log a} + A_0 a^x + A_1 a^x \log a + A_2 a^x (\log a)^2 + \dots$$

если за пределы суммирования и интегрирования возьмем $-\infty$ и x .

Отсюда имеем, положив $x = 0$:

$$\frac{1}{a-1} = \frac{1}{\log a} + A_0 + A_1 \log a + A_2 (\log a)^2 + \dots$$

полагая здесь $\log a = \alpha$, получим

$$\frac{1}{e^\alpha - 1} = \frac{1}{\alpha} + A_0 + A_1 \alpha + A_2 \alpha^2 + \dots + A_k \alpha^k + \dots$$

Это тождество и дает нам возможность определить коэффициенты $A_0, A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$.

Определим некоторые из них. Мы имеем

$$e^\alpha - 1 = \alpha + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} + \frac{\alpha^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

разделяя 1 на этот ряд, получим

$$\frac{1}{e^\alpha - 1} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \alpha + 0 \cdot \alpha^2 + \dots$$

таким образом имеем:

$$A_0 = -\frac{1}{2}, \quad A_1 = \frac{1}{12}; \quad A_2 = 0; \quad \dots$$

Легко показать, что

$$A_4 = A_6 \dots = A_{2(n+1)} = 0$$

В самом деле, мы имеем

$$\frac{1}{e^\alpha - 1} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2} + A_1 \alpha + A_2 \alpha^2 + A_3 \alpha^3 + \dots$$

поэтому

$$\frac{1}{e^{\frac{\alpha}{2}} - 1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{\alpha} + A_1 \alpha + A_2 \alpha^2 + A_3 \alpha^3 + \dots$$

Но

$$\frac{1}{e^{\frac{\alpha}{2}} - 1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{e^{\frac{\alpha}{2}} + 1}{e^{\frac{\alpha}{2}} - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{\frac{\alpha}{2}} + e^{-\frac{\alpha}{2}}}{e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}}}$$

так что

$$\frac{1}{2} \frac{e^{\frac{\alpha}{2}} + e^{-\frac{\alpha}{2}}}{e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}}} = \frac{1}{\alpha} + A_1 \alpha + A_2 \alpha^2 + A_3 \alpha^3 + \dots$$

Но первая часть этого равенства — нечетная функция α , вследствие чего и вторая должна быть нечетной функцией, а потому

$$A_2 \alpha^2 + A_4 \alpha^4 + \dots = 0$$

а так как это есть тождество, то

$$A_2 = 0; \quad A_4 = 0; \quad \dots, \quad \text{и вообще } A_{2(n+1)} = 0$$

Итак, мы имеем

$$(30) \quad \sum v = \int v dx - \frac{v}{2} + A_1 \frac{dv}{dx} + A_3 \frac{d^3 v}{dx^3} + A_5 \frac{d^5 v}{dx^5} + \dots + C$$

где коэффициенты определяются из равенства

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{e^{\frac{\alpha}{2}} + e^{-\frac{\alpha}{2}}}{e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}}} = \frac{1}{\alpha} + A_1 \alpha + A_3 \alpha^3 + A_5 \alpha^5 + \dots$$

или

$$\frac{1}{e^{\alpha} - 1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{\alpha} + A_1 \alpha + A_3 \alpha^3 + A_5 \alpha^5 + \dots$$

положим для примера

$$v = x$$

Мы имеем

$$\sum x = \int x dx - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} + C = \frac{x^2 - x}{2} + \frac{1}{12} + C$$

откуда

$$\sum_1^n x = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

Для другого примера положим

$$v = x^3$$

тогда найдем

$$\sum x^3 = \int x^3 dx - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{4} + 6A_3 + C = \frac{x^4 - 2x^3 + x^2}{4} + 6A_3 + C$$

откуда

$$\sum_1^n x^3 = \frac{n^4 - 2n^3 + n^2}{4} = \frac{n^2(n-1)^2}{4} = \left[\frac{n(n-1)}{2} \right]^2 = \left[\sum_1^n x \right]^2$$

§ 11. Положим теперь:

$$A_1 = \frac{B_1}{1 \cdot 2}; \quad A_3 = -\frac{B_2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}; \dots$$

и вообще

$$A_{2\lambda+1} = (-1)^\lambda \frac{B_{\lambda+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2(\lambda+1)}$$

числа B_1, B_2, \dots и т. д. называются числами Бернулли.

Мы займемся теперь выводом формулы для определения этих чисел, которая давала бы возможность сделать некоторые общие заключения относительно их.

Эти числа, как видно, должны удовлетворять равенству

$$\frac{1}{2} \frac{e^{\frac{\alpha}{2}} + e^{-\frac{\alpha}{2}}}{e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}}} = \frac{1}{\alpha} + \frac{B_1}{1 \cdot 2} \alpha - \frac{B_2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \alpha^3 + \frac{B_3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6} \alpha^5 + \dots + (-1)^\lambda \frac{B_{\lambda+1}}{1 \cdot 2 \dots 2(\lambda+1)} \alpha^{2\lambda+1}.$$

Но мы имеем вообще:

$$\sin \psi = \psi \left(1 - \frac{\psi^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{\psi^2}{2^2 \pi^2}\right) \left(1 - \frac{\psi^2}{3^2 \pi^2}\right) \dots$$

откуда

$$\log \sin \psi = \log \psi = \log \left(1 - \frac{\psi^2}{\pi^2}\right) + \log \left(1 - \frac{\psi^2}{2^2 \pi^2}\right) + \dots$$

Дифференцируя это равенство, получаем по упрощении:

$$\operatorname{cotg} \psi = \frac{1}{\psi} - \frac{2\psi}{\pi^2 - \psi^2} - \frac{2\psi}{2^2 \pi^2 - \psi^2} - \frac{2\psi}{3^2 \pi^2 - \psi^2} - \dots$$

Положим, для краткости, $\sqrt{-1} = i$, тогда будет

$$\operatorname{cotg} \psi = \frac{\cos \psi}{\sin \psi} = i \frac{e^{i\psi} + e^{-i\psi}}{e^{i\psi} - e^{-i\psi}}$$

так что, полагая $2\psi = \alpha i$, получим

$$i \frac{e^{\frac{\alpha}{2}} + e^{-\frac{\alpha}{2}}}{e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}}} = \frac{2}{\alpha i} - \alpha i \left[\frac{1}{\pi^2 + \frac{\alpha^2}{4}} + \frac{1}{2^2 \pi^2 + \frac{\alpha^2}{4}} + \frac{1}{3^2 \pi^2 + \frac{\alpha^2}{4}} + \dots \right]$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{e^{\frac{\alpha}{2}} + e^{-\frac{\alpha}{2}}}{e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}}} &= \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2} \alpha \left[\frac{1}{\pi^2 + \frac{\alpha^2}{4}} + \frac{1}{2^2 \pi^2 + \frac{\alpha^2}{4}} + \frac{1}{3^2 \pi^2 + \frac{\alpha^2}{4}} + \dots \right] = \\ &= \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{2} \left[\frac{\frac{1}{\pi^2}}{1 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\pi^2}} + \frac{\frac{1}{2^2 \pi^2}}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2^2 \pi^2}} + \frac{\frac{1}{3^2 \pi^2}}{1 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{3^2 \pi^2}} + \dots \right] \end{aligned}$$

но мы имеем вообще:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots$$

а потому

$$\frac{\frac{1}{\pi^2}}{1 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \pi^2} = \frac{1}{\pi^2} \left[1 - \frac{\alpha^2}{4\pi^2} + \frac{\alpha^4}{2^4 \pi^4} - \frac{\alpha^6}{2^6 \pi^6} + \dots + (-1)^n \frac{\alpha^{2n}}{2^{2n} \cdot \pi^{2n}} \right]$$

$$\frac{\frac{1}{2^2 \pi^2}}{1 + \frac{\alpha^2}{2^2} \cdot 2^2 \pi^2} = \frac{1}{2^2 \pi^2} \left[1 - \frac{\alpha^2}{2^2 \cdot 2^2 \pi^2} + \frac{\alpha^4}{2^4 \cdot 2^4 \pi^4} - \frac{\alpha^6}{2^6 \cdot 2^6 \pi^6} + \dots + \right. \\ \left. + (-1)^2 \frac{\alpha^{2n}}{2^{2n} \cdot 2^{2n} \pi^{2n}} + \dots \right]$$

$$\frac{\frac{1}{3^2 \pi^2}}{1 + \frac{\alpha^2}{2^2} \cdot 3^2 \pi^2} = \frac{1}{3^2 \pi^2} \left[1 - \frac{\alpha^2}{2^2 \cdot 3^2 \pi^2} + \frac{\alpha^4}{2^4 \cdot 3^4 \pi^4} - \frac{\alpha^6}{2^6 \cdot 3^6 \pi^6} + \dots + \right. \\ \left. + (+1)^n \cdot \frac{\alpha^{2n}}{2^{2n} \cdot 3^{2n} \pi^{2n}} + \dots \right]$$

Таким образом мы получим

$$\frac{1}{2} \frac{e^{\frac{\alpha}{2}} + e^{-\frac{\alpha}{2}}}{e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}}} = \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{2\pi^2} \left[1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right] \\ - \frac{\alpha^3}{2^3 \pi^4} \left[1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots \right] + \frac{\alpha^5}{2^5 \pi^6} \left[1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \dots \right] + \dots + \\ + (-1)^\lambda \cdot \frac{\alpha^{2\lambda+1}}{2^{2\lambda+1} \pi^{2\lambda+2}} \left[1 + \frac{1}{2^{2\lambda+2}} + \frac{1}{3^{2\lambda+2}} + \dots \right]$$

Сравнивая этот результат с предыдущим, получим для чисел Бернулли следующие выражения при помощи рядов:

$$B_1 = \frac{1 \cdot 2}{2\pi^2} \cdot S_2; \quad B_2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{2^3 \pi^4} \cdot S_4; \quad \dots \quad B_{\lambda+1} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2(\lambda+1)}{2^{\lambda+1} \pi^{2\lambda+2}} \cdot S_{2\lambda+2}$$

причем

$$S_{2\lambda+2} = 1 + \frac{1}{2^{2\lambda+2}} + \frac{1}{3^{2\lambda+2}} + \dots$$

Подробности об этих рядах можно найти в сочинении Остроградского — «Sur les quadratures définies».

§ 12. Мы имели дело с суммами, в которых за разность Δx принята 1; если бы мы пожелали ввести какую-нибудь разность h , то следовало бы только положить $x = \frac{z}{h}$, вследствие чего изменению x на h соответствовало бы изменение z на h ; таким образом мы получили бы

$$\sum v = \int v \frac{dz}{h} - \frac{1}{2}v + A_1 \frac{dv}{d\left(\frac{z}{h}\right)} + A_2 \frac{d^2 v}{d\left(\frac{z}{h}\right)^2} + \dots$$

или

$$(31) \quad \sum v = \frac{1}{h} \int v dz - \frac{1}{2}v + hA_1 \frac{dv}{dz} + h^2 A_2 \frac{d^2 v}{dz^2} + h^3 A_3 \frac{d^3 v}{dz^3} + \dots$$

Отсюда

$$\sum v = \sum vh - h \left[\frac{1}{2}v - hA_1 \frac{dv}{dz} - h^2 A_2 \frac{d^2 v}{dz^2} \dots \right]$$

Предполагая здесь h стремящимся к нулю, мы в пределе найдем

$$\lim \left\{ h \sum v \right\} = \lim \sum vh = \int v dz$$

т. е. что интеграл есть предел произведения суммы на приращение переменного независимого.

§ 13. Замечая, что

$$A_1 = \frac{1}{12}$$

мы будем иметь

$$\sum u = \int u dx - \frac{u}{2} + \frac{1}{12} \frac{du}{dx} + \dots + C$$

полагая здесь

$$u = \log x$$

и назначая для x пределы 1 и x , мы будем иметь

$$\sum_1^x \log x = C + \int \log x dx - \frac{1}{2} \log x + \frac{1}{12} \cdot \frac{d \log x}{dx} + \dots$$

или

$$\sum_1^x \log x = C + x \log x - x - \frac{1}{2} \log x + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{x} + \dots$$

где C имеет уже совершенно определенное значение, которое и постараемся теперь найти. Это равенство мы можем представить в таком виде:

$$\begin{aligned} & \log 1 + \log 2 + \log 3 + \dots + \log(x-1) = \\ & = C + x \log x - x - \frac{1}{2} \log x + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{x} + \dots \end{aligned}$$

Откуда

$$\log 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots x = C + x \log x - x + \frac{1}{2} \log x + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{x}$$

Но мы имеем

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \dots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} + \dots$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \lim \left\{ \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \dots (2n)^2}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \dots (2n+1)^2} \right\}_{n=\infty} = \lim \left\{ \frac{2^4 \cdot 4^4 \cdot 6^4 \dots (2n)^4}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \dots (2n)^2 \cdot (2n+1)^2} \right\}_{n=\infty} = \\ &= \lim \left\{ \frac{2^4 \cdot 1^4 \cdot 2^4 \cdot 2^4 \cdot 2^4 \cdot 3^4 \dots 2^4 \cdot n^4}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \dots (2n)^2 \cdot (2n+1)^2} \right\}_{n=\infty} = \\ &= \lim \left\{ \frac{2^{4n} (1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n)^4}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n)^2 (2n+1)^2} \right\}_{n=\infty} \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\log \frac{\pi}{2} = \lim \left\{ 4n \log 2 + 4 \log 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n - 2 \log 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n - \log (2n+1) \right\}_{n=\infty}$$

но мы нашли выше:

$$\log 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = C + n \log n - n + \frac{1}{2} \log n + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{n} + \dots$$

$$\log 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n = C + 2n \log 2n - 2n + \frac{1}{2} \log 2n + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2n} + \dots$$

причем далее следуют члены, содержащие высшие степени $\frac{1}{n}$. Таким образом имеем

$$\begin{aligned} \log \frac{\pi}{2} &= \lim \left[4n \log 2 + 4n + 4C + 4n \log n - 4n + 2 \log n + \right. \\ &\left. + \frac{1}{3n} + \dots - \log (2n+1) - 2C - 4n \log n - \log 2n - \frac{1}{12n} \right]_{n=\infty} \\ &= \lim \left[2C + \log n - \log 2 - \log (2n+1) + \frac{1}{4n} \right]_{n=\infty} \\ &= \lim \left[2C + \log \frac{n}{2(2n+1)} + \frac{1}{4n} \right]_{n=\infty} \end{aligned}$$

Итак, мы находим

$$\log \frac{\pi}{2} = 2C + \log \frac{1}{4}$$

откуда

$$C = \log \sqrt{2\pi}$$

и мы получаем следующее выражение:

$$\log 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots x = \log \sqrt{2\pi} + x \log x - x + \frac{1}{2} \log x + \frac{1}{12x} + \dots$$

или

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots x = \sqrt{2\pi} \cdot x^{x+\frac{1}{2}} \cdot e^{-x} \cdot e^{\frac{1}{12x} + \dots}$$

но

$$e^{\frac{1}{12x}} = 1 + \frac{1}{12x} + \dots$$

и потому

$$(32) \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots x = \sqrt{2\pi} x^{x+\frac{1}{2}} \cdot e^{-x} \left(1 + \frac{1}{12x} + \dots \right)$$

как мы уже это имели в курсе «Определенных интегралов».

§ 14. Теперь мы дадим другое доказательство этой формулы. Рассмотрим функцию

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots x}{x^{x+\frac{1}{2}} \cdot e^{-x}} = \varphi(x)$$

где x будем предполагать целым и положительным.

Отсюда

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (x-1)}{(x-1)^{x-\frac{1}{2}} \cdot e^{-x+1}} = \varphi(x-1)$$

а потому

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(x-1)} = x \frac{(x-1)^{x-\frac{1}{2}}}{x^{x+\frac{1}{2}}} \cdot e = \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{x-\frac{1}{2}} \cdot e$$

откуда

$$\log \varphi(x) - \log \varphi(x-1) = 1 + \left(x - \frac{1}{2} \right) \log \left(1 - \frac{1}{x} \right)$$

Разлагая $\log \left(1 - \frac{1}{x} \right)$ в ряд, получим

$$\begin{aligned} & \varphi(x) - \varphi(x-1) = \\ & 1 + \left(x - \frac{1}{2} \right) \left\{ -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} - \dots - \frac{1}{lx^l} - \frac{1}{(l+1)x^{l+1}} - \dots \right\} = \\ & = 1 - 1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{3x^2} \dots - \frac{1}{lx^{l-1}} - \frac{1}{(l+1)x^l} = \dots \\ & + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} \dots + \frac{1}{2lx^l} + \frac{1}{2(l+1)x^{l+1}} \dots = \\ & = -\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{x^3} - \dots - \frac{l-1}{2l(l+1)} \cdot \frac{1}{x^l} - \dots \end{aligned}$$

но

$$\frac{l-1}{2l(l+1)} < \frac{l}{2l(l+1)} \quad \text{или} \quad \frac{l-1}{2l(l+1)} < \frac{1}{2(l+1)}$$

что при $l = 5$ дает

$$\frac{l-1}{2l(l+1)} < \frac{1}{12}$$

а так как при $l = 4$ будет

$$\left(\frac{l-1}{2l(l+1)}\right)_{l=4} = \frac{3}{40}$$

и так как с увеличением l этот коэффициент уменьшается, то $\frac{1}{12}$ есть наибольший коэффициент в нашем ряду, а потому

$$\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{12x^3} + \dots + \frac{l-1}{2l(l+1)} \cdot \frac{1}{x^l} < \frac{1}{12} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots + \frac{1}{x^l} + \dots \right)$$

что приводит к равенству

$$\frac{1}{12x^2} + \frac{1}{12x^3} + \dots + \frac{l-1}{2l(l+1)} \cdot \frac{1}{x^l} = \frac{\theta}{12} \cdot \frac{1}{x(x-1)}$$

где θ — некоторая правильная дробь.

Итак,

$$(\alpha) \quad \log \varphi(x) - \log \varphi(x-1) = -\frac{\theta}{12} \cdot \frac{1}{x(x-1)}$$

Откуда видно, что

$$(\beta) \quad \log \varphi(x) - \log \varphi(x-1) < 0$$

$$(\gamma) \quad \log \varphi(x) - \log \varphi(x-1) > -\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{x(x-1)}$$

Неравенство (β) дает

$$\log \varphi(x) < \log \varphi(x-N)$$

где N — какое угодно целое число.

Неравенство (γ) может быть написано так:

$$\log \varphi(x) - \frac{1}{12x} > \log \varphi(x-1) - \frac{1}{12(x-1)}$$

откуда

$$\log \varphi(x) - \frac{1}{12x} > \log \varphi(x-N) - \frac{1}{12(x-N)}$$

Полагая теперь $x - N = z$, получим:

$$\log \varphi(N+z) < \log \varphi(z)$$

$$\log \varphi(N+z) > \log \varphi(z) - \frac{1}{12z} + \frac{1}{12(N+z)}$$

Отсюда, полагая

$$\lim \{ \log \varphi(N+z) \}_{N=\infty} = C$$

найдем, что

$$\log \varphi(z) > C > \log \varphi(z) - \frac{1}{12z}$$

так что

$$C = \log \varphi(z) - \frac{\theta}{12z}$$

и

$$\log \varphi(z) = C + \frac{\theta}{12z}$$

где θ — правильная дробь.

Но мы имеем

$$\log \varphi(x) = \log 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots x - \left(x + \frac{1}{2}\right) \log x + x$$

а потому

$$\log 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots x = \left(x + \frac{1}{2}\right) \log x - x + C + \frac{\theta}{12x}$$

что и требовалось вывести.

Этим мы и оканчиваем вопрос о суммировании и переходим к интегрированию уравнений в конечных разностях.

Интегрирование уравнений в конечных разностях

§ 15. Теперь мы переходим к отделу теории конечных разностей, аналогичному интегрированию дифференциальных уравнений.

Как и вообще вопросы теории конечных разностей гораздо труднее аналогичных вопросов теории бесконечно малых, так и интегрирование уравнений в конечных разностях представляет несравненно большие затруднения, чем интегрирование дифференциальных уравнений, причем если бы мы и свели вопрос на суммирование, что аналогично приведению вопроса к квадратурам, то и в этом сравнительно немного пользы, потому что мы можем брать суммы только от весьма небольшого числа функций — несравненно меньшего, чем число функций, которые мы можем интегрировать.

Поэтому понятно, что интегрирующий множитель, делающий первую часть уравнения полным дифференциалом или в нашем случае разностью, после чего решение вопроса свелось бы к суммированию, не может иметь значения в теории конечных разностей. Да и в теории дифференциальных уравнений разыскание множителя приводит к интегрированию уравнений с частными производными, т. е. к интегрированию, представляющему большие затруднения, так что этот множитель не имеет большого значения

в смысле одного из методов интегрирования,* а в теории конечных разностей при разыскании его мы встретили бы несравненно бóльшие трудности. Мы начнем с интегрирования линейных уравнений первого порядка, а затем перейдем к линейным уравнениям какого угодно порядка без последнего члена и с последним членом.

Методы интегрирования этих уравнений будут вполне аналогичны с методами интегрирования дифференциальных уравнений, за исключением того, что в настоящем случае мы не встретимся с интегрирующим множителем.

Вид уравнений в конечных разностях будет не вполне аналогичен с видом дифференциальных уравнений, потому что у нас в настоящем случае будет даваться зависимость не между разностями функции и независимой переменной, а зависимость между начальным и измененными значениями функции и независимого переменного, так что эти уравнения будут иметь такой вид:

$$f(y_{x+n}, y_{x+n-1}, y_{x+n-2} \dots y_{x+1}, y_x, x) = 0$$

где y_x есть начальное значение функции. Так как

$$y_{x+1} = y_x + \Delta y_x; \quad y_{x+2} = y_{x+1} + \Delta y_{x+1} = y_x + 2\Delta y_x + \Delta^2 y_x, \text{ и т. д.},$$

то это уравнение легко привести к виду, аналогичному с видом дифференциальных уравнений.

§ 16. Рассмотрим линейное уравнение первого порядка под видом

$$P y_{x+1} + Q y_x = V$$

где P , Q и V суть функции одного только x .

Полагаем

$$y_x = u_x v_x$$

откуда

$$y_{x+1} = (u_x + \Delta u_x) v_{x+1}$$

так что наше уравнение примет такой вид:

$$P(u_x v_{x+1} + \Delta u_x \cdot v_{x+1}) + Q v_x u_x = V$$

или

$$u_x (P v_{x+1} + Q v_x) + P \Delta u_x \cdot v_{x+1} = V$$

* Лагранж выразился об интегрирующем множителе так: «он хорош для различных теорем о нем, но не как один из методов интегрирования». В настоящее время эта мысль его все более и более подтверждается.

Вследствие произвольности функции v_x , полагаем

$$P \cdot v_{x+1} + Qv_x = 0$$

так что

$$P \cdot \Delta u_x \cdot v_{x+1} = V$$

Полагая

$$v_x = d^{w_x} \text{ и } v_{x+1} = e^{w_x} \cdot e^{\Delta w_x}$$

получим

$$Pe^{w_x} \cdot e^{\Delta w_x} + Qe^{w_x} = 0$$

откуда:

$$Pe^{\Delta w_x} + Q = 0$$

$$\Delta w_x = \log \left(-\frac{Q}{P} \right)$$

и

$$w_x = \sum \log \left(-\frac{Q}{P} \right)$$

нижнего предела мы назначать не будем, так как он должен оставаться произвольным. Итак,

$$v_x = e^{\sum \log \left(-\frac{Q}{P} \right)}$$

так что

$$\Delta u_x = \frac{V}{P} \cdot \frac{1}{v_{x+1}} = \frac{V}{P} \cdot \frac{1}{\sum_{x+1} \log \left(-\frac{Q}{P} \right)} = \frac{V}{P} e^{-\sum_{x+1} \log \left(-\frac{Q}{P} \right)}$$

откуда

$$u_x = \sum \frac{V}{P} e^{-\sum_{x+1} \log \left(-\frac{Q}{P} \right)} + C$$

и

$$y = e^{\sum \log \left(-\frac{Q}{P} \right)} \left\{ C + \sum \frac{V}{P} e^{-\sum_{x+1} \log \left(-\frac{Q}{P} \right)} \right\}$$

Для примера интегрируем такое уравнение:

$$xy_{x+1} - (x+1)y_x = 1$$

полагаем

$$y_x = u_x v_x$$

откуда

$$y_{x+1} = (u_x + \Delta u_x) v_{x+1} = u_x v_{x+1} + \Delta u_x \cdot v_{x+1}$$

так что

$$u_x [xv_{x+1} - (x+1)v_x] + x \cdot \Delta u_x \cdot v_{x+1} = 1$$

полагаем

$$xv_{x+1} - (x+1)v_x = 0$$

так что будет

$$\Delta u_x = \frac{1}{x} v_{x+1}^{-1}$$

Пусть $v_x = e^{v_x}$, так что $xe^{\Delta v_x} - (x+1) = 0$, откуда:

$$\Delta w_x = \log \frac{x+1}{x} = \log(x+1) - \log x = \Delta \log x$$

$$w_x = \sum \log = \frac{x+1}{x} = \log x; \quad v_x = e^{v_x} = x$$

$$\Delta u_x = \frac{1}{x(x+1)}, \quad u_x = \sum \frac{1}{x(x+1)} = -\frac{1}{x} + C$$

итак,

$$y_x = \left(C - \frac{1}{x} \right) x = Cx - 1$$

§ 17. Переходим к линейным уравнениям высшего порядка и рассмотрим сначала уравнение второго порядка:

$$(1) \quad y_{x+2} + Py_{x+1} + Qy_x = V$$

где P, Q, V суть некоторые функции от x . Покажем теперь, как найти интеграл этого уравнения, зная интеграл уравнения без последнего члена

$$y_{x+2} + Py_{x+1} + Qy_x = 0$$

положим, что этому уравнению удовлетворяют функции v_x и u_x , мы покажем, что ему будет удовлетворять и функция

$$Cu_x + C'v_x$$

В самом деле, если этому уравнению удовлетворяет функция u_x , то мы имеем

$$(*) \quad u_{x+2} + Pu_{x+1} + Qu_x = 0$$

Умножая это уравнение на постоянное C , получим

$$Cu_{x+2} + PCu_{x+1} + QCu_x = 0$$

т. е. Cu_x ему удовлетворяет. Точно так же найдем

$$C'v_{x+2} + PC'v_{x+1} + QC'v_x = 0$$

Складывая эти два равенства, получим

$$Cu_{x+2} + C'v_{x+2} + P(Cu_{x+1} + C'v_{x+1}) + Q(Cu_x + C'v_x) = 0$$

т. е.

$$Cu'_x + C'v_x$$

есть интеграл уравнения (*), содержащий две произвольные постоянные.

Чтобы по этому интегралу найти интеграл предложенного полного уравнения, мы применим способ Лагранжа — изменения произвольных постоянных.

Переходя к этому полному уравнению, мы должны предположить, что C и C' суть некоторые функции от x , так что общий интеграл полного уравнения будет иметь такой вид:

$$y_x = C_x u_x + C'_x v_x$$

Функции C_x и C'_x мы и постараемся теперь определить. Мы имеем

$$y_{x+1} = C_{x+1} u_{x+1} + C'_{x+1} v_{x+1} = (C_x + \Delta C_x) u_{x+1} + (C'_x + \Delta C'_x) v_{x+1}$$

Полагаем теперь:

$$\Delta C_x \cdot u_{x+1} + \Delta C'_x \cdot v_{x+1} = 0$$

так что будет

$$(a) \quad y_{x+1} = C_x u_{x+1} + C'_x v_{x+1}$$

Отсюда

$$y_{x+2} = C_{x+2} u_{x+2} + C'_{x+2} v_{x+2} = (C_x + \Delta C_x) u_{x+2} + (C'_x + \Delta C'_x) v_{x+2}$$

подставляя вместо y_{x+2} , y_{x+1} , y_x их значение в уравнение (1), получим

$$C_x [u_{x+2} + Pu_{x+1} + Qu_x] + C'(v_{x+2} + Pv_{x+1} + Qv_x) + \Delta C_x u_{x+2} + \Delta C'_x v_{x+2} = V$$

но

$$u_{x+2} + Pu_{x+1} + Qu_x = v_{x+2} + Pv_{x+1} + Qv_x = 0$$

ибо функции u_x и v_x по условию удовлетворяют уравнению

$$y_{x+2} + Py_{x+1} + Qy_x = 0$$

а потому мы находим

$$(b) \quad \Delta C_x \cdot u_{x+2} + \Delta C'_x \cdot v_{x+2} = V$$

присоединяя к этому уравнению уравнение (a)

$$(a) \quad \Delta C_x \cdot u_{x+1} + \Delta C'_x \cdot v_{x+1} = 0$$

и решая относительно ΔC_x и $\Delta C'_x$, получим:

$$\Delta C_x = \varphi_0(x); \quad \Delta C'_x = \varphi_1(x)$$

откуда

$$C_x = \sum \varphi_0(x) + C_0$$

$$C'_x = \sum \varphi_1(x) + C_1$$

так что будет

$$y_x = C_0 u_x + C_1 v_x + u_x \cdot \sum \varphi_0(x) + v_x \sum \varphi_1(x)$$

Таким образом мы интегрирование уравнения

$$y_{x+2} + P y_{x+1} + Q y_x = V$$

свели к интегрированию уравнения

$$y_{x+2} + P y_{x+1} + Q y_x = 0$$

Что же касается до интегрирования этого последнего уравнения, то оно вообще не может быть выполнено, так как математика в настоящем своем состоянии не имеет приемов для его интегрирования.

Для примера возьмем уравнение

$$y_{x+2} - 5y_{x+1} + 6y_x = x$$

Уравнение

$$y_{x+2} - 5y_{x+1} + 6y_x = 0$$

имеет решения 2^x и 3^x , поэтому полагаем

$$y_x = C_x \cdot 2^x + C'_x \cdot 3^x$$

откуда

$$y_{x+1} = C_x \cdot 2^{x+1} + C'_x \cdot 3^{x+1} + \Delta C_x \cdot 2^{x+1} + \Delta C'_x \cdot 3^{x+1}$$

полагая

$$(*) \quad \Delta C_x \cdot 2^{x+1} + \Delta C'_x \cdot 3^{x+1} = 0$$

получим

$$y_{x+1} = C_x \cdot 2^{x+1} + C'_x \cdot 3^{x+1}$$

откуда

$$y_{x+1} = C_x 2^{x+2} + C'_x \cdot 3^{x+2} + \Delta C_x \cdot 2^{x+2} + \Delta C'_x \cdot 3^{x+2}$$

и затем

$$\Delta C_x \cdot 2^{x+2} + \Delta C'_x \cdot 3^{x+2} = x$$

Решая это уравнение вместе с уравнением (*), находим

$$\Delta C_x = -\frac{x}{2^{x+1}}, \quad \Delta C'_x = \frac{x}{3^{x+1}}$$

откуда

$$C_x = -\frac{1}{2} \sum x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + C_0 \quad \text{и} \quad C'_x = \frac{1}{3} \sum x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + C_1$$

Чтобы найти значения этих сумм, выведем формулу «суммирования по частям». Возьмем какие-нибудь две функции S_x и K_x , мы имеем

$$\Delta(S_x K_x) = (S_x + \Delta S_x) K_{x+1} - S_x K_x = S_x (K_x + \Delta K_x) + K_{x+1} \cdot \Delta S_x - S_x K_x$$

т. е.

$$\Delta(S_x K_x) = S_x \Delta K_x + K_{x+1} \cdot \Delta S_x$$

откуда

$$S_x K_x = \sum S_x \cdot \Delta K_x + \sum K_{x+1} \cdot \Delta S_x$$

положим теперь

$$\Delta K_x = T_x$$

откуда

$$K_x = \sum T_x \quad \text{и} \quad K_{x+1} = \sum T_x$$

так что будет

$$S_x \sum T_x = \sum S_x T_x + \sum \Delta S_x \cdot \sum T_x$$

а отсюда

$$(33) \quad \sum S_x T_x = S_x \sum T_x - \sum \Delta S_x \cdot \sum T_x$$

Пользуясь этой формулой, аналогичной с формулой интегрального исчисления

$$\int S_x T_x dx = S \int T_x dx - \int \left\{ \frac{dS_x}{dx} \cdot \int T_x dx \right\} dx$$

получим:

$$\sum x \left(\frac{1}{2}\right)^x = x \sum \left(\frac{1}{2}\right)^x - \sum \Delta x \cdot \sum \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$\sum x \left(\frac{1}{3}\right)^x = x \sum \left(\frac{1}{2}\right)^x - \sum \Delta x \cdot \sum \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

Но мы имеем вообще:

$$\sum a^x = \frac{a^x}{a-1}$$

так что:

$$\begin{aligned} \sum \left(\frac{1}{2}\right)^x &= -2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x; & \sum \left(\frac{1}{3}\right)^x &= -\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x; \\ \sum \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} &= 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = -2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x; & \sum \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} &= -\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} = \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^x; & \sum -2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} &= 2 \left(\frac{1}{2}\right)^x; & \sum -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^x &= \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x \end{aligned}$$

а потому

$$\sum x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = -2x \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^x = -2 \left(\frac{1}{2}\right)^x (x+1)$$

и

$$\sum x \left(\frac{1}{3}\right)^x = -\frac{3}{2}x \left(\frac{1}{3}\right)^x - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^x = -3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)$$

Итак,

$$C_x = \left(\frac{1}{2}\right)^x (x+1) + C_0 \quad \text{и} \quad C_x' = -\left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) C_1$$

откуда

$$\begin{aligned} y &= C_0 \cdot 2^x + C_1 \cdot 3^x + (x+1) \frac{1}{2^x} \cdot 2^x - \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) 3^x = \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} + C_0 \cdot 2^x + C_1 \cdot 3^x \end{aligned}$$

Это и есть общий интеграл предложенного уравнения.

§ 18. Применим теперь тот же метод к уравнениям третьего порядка, которые рассмотрим под видом

$$(a) \quad y_{x+3} + Py_{x+2} + Qy_{x+1} + Ry_x = V$$

Пусть уравнению

$$(b) \quad y_{x+3} + Py_{x+2} + Qy_{x+1} + Ry_x = 0$$

удовлетворяют три таких функции u_x, v_x, w_x , из которых можно составить общий интеграл его; для чего необходимо, чтобы определитель

$$(c) \quad \begin{vmatrix} u_{x+1} & v_{x+1} & w_{x+1} \\ u_{x+2} & v_{x+2} & w_{x+2} \\ u_{x+3} & v_{x+3} & w_{x+3} \end{vmatrix}$$

не равнялся нулю, потому что в противном случае между этими тремя функциями существовала бы такая зависимость, при которой уравнение (b) (после подстановки в него этих трех функций и решения его относительно $1, P, Q$) давало бы для P и Q или неопределенные, или бесконечные, значения (вообще это должны быть три линейно независимых между собою функции).

В таком случае уравнению (b) будет удовлетворять функция

$$y_x = C u_x + C' v_x + C'' w_x$$

Чтобы функция такого же вида удовлетворяла уравнению (а), мы должны здесь заменить C, C', C'' через C_x, C_x', C_x'' и рассматривать их как функции от x . Итак, пусть уравнению (а) удовлетворяет функция

$$y_x = C_x u_x + C_x' v_x + C_x'' w_x$$

Отсюда

$$y_{x+1} = C_x u_{x+1} + C_x' v_{x+1} + C_x'' w_{x+1} + \Delta C_x \cdot u_{x+1} + \Delta C_x' \cdot v_{x+1} + \Delta C_x'' \cdot w_{x+1}$$

пусть

$$(I) \quad \Delta C_x \cdot u_{x+1} + \Delta C_x' \cdot v_{x+1} + \Delta C_x'' \cdot w_{x+1} = 0$$

так что будет

$$y_{x+1} = C_x' u_{x+1} + C_x' v_{x+1} + C_x'' w_{x+1}$$

Откуда

$$y_{x+2} = C_x u_{x+2} + C_x' v_{x+2} + C_x'' w_{x+2} + \Delta C_x \cdot u_{x+2} + \Delta C_x' \cdot v_{x+2} + \Delta C_x'' \cdot w_{x+2}$$

полагаем теперь

$$(II) \quad \Delta C_x \cdot u_{x+2} + \Delta C_x' v_{x+2} + \Delta C_x'' \cdot w_{x+2} = 0$$

вследствие чего будет

$$y_{x+2} = C_x u_{x+2} + C_x' v_{x+2} + C_x'' w_{x+2}$$

откуда

$$y_{x+3} = C_x u_{x+3} + C_x' v_{x+3} + C_x'' w_{x+3} + \Delta C_x \cdot u_{x+3} + \Delta C_x' \cdot v_{x+3} + \Delta C_x'' \cdot w_{x+3}$$

подставляя теперь выражения

$$y_{x+3}, \quad y_{x+2}, \quad y_{x+1}, \quad y_x$$

в уравнение (а) и замечая, что

$$u_{x+3} + P u_{x+2} + Q u_{x+1} + R u_x = 0$$

$$v_{x+3} + P v_{x+2} + Q v_{x+1} + R v_x = 0$$

$$w_{x+3} + P w_{x+2} + Q w_{x+1} + R w_x = 0$$

ибо u_x, v_x, w_x суть решения уравнения (b), получим

$$(III) \quad \Delta C_x \cdot u_{x+3} + \Delta C_x' v_{x+3} + \Delta C_x'' \cdot w_{x+3} = V$$

Решая теперь уравнения (I), (II), (III) относительно $\Delta C_x, \Delta C_x', \Delta C_x''$, мы получим для них конечные и определенные значения, так как определитель (с) не равен нулю. Итак, мы найдем:

$$\Delta C_x = \varphi_0(x); \quad \Delta C_x' = \varphi_1(x); \quad \Delta C_x'' = \varphi_2(x)$$

откуда:

$$C_x = \sum \varphi_0(x) + A_0; \quad C'_x = \sum \varphi_1(x) + A_1; \quad C''_x = \sum \varphi_2(x) + A_2$$

таким образом общий интеграл уравнения (а) будет

$$y_x = A_0 u_x + A_1 v_x + A_2 w_x + u_x \sum \varphi_0(x) + v_x \sum \varphi_1(x) + w_x \sum \varphi_2(x)$$

Итак, интегрирование уравнения (а) мы свели на интегрирование более простого уравнения (б). Заметим, что из выражения общего интеграла уравнения (а) видно, что он состоит из двух частей: общего интеграла уравнения (б) и некоторой функции x . Отсюда следует, что если мы подставим в уравнение (а) выражение y_x , то эта функция удовлетворит отдельно этому уравнению, потому что первая часть его обращает в нуль первую часть уравнения (а).

Таким образом, чтобы найти общий интеграл уравнения (а), стоит только найти какую-нибудь функцию, ему удовлетворяющую, сумма этой функции и общего интеграла уравнения (б) и будет общим интегралом уравнения (а).

§ 19. Распространим теперь доказанное нами в предыдущих параграфах на уравнения какого угодно порядка. Возьмем уравнение

$$(a) \quad y_{x+n} + P y_{x+n-1} + \dots + R y_{x+2} + S y_{x+1} + T y_x = V$$

где P, \dots, R, S, T, V суть функции одного только x , и положим, что уравнению

$$(b) \quad y_{x+n} + P y_{x+n-1} + \dots + R y_{x+2} + S y_{x+1} + T y_x = 0$$

удовлетворяют n функций:

$$u_x, v_x, w_x, \dots, \omega_x$$

так что общий интеграл его есть

$$y_x = C' u_x + C'' v_x + C''' w_x + \dots + C^n \omega_x$$

Допустим, что общий интеграл уравнения (а) (с последним членом) есть

$$y_x = C'_x u_x + C''_x v_x + C'''_x w_x + \dots + C^n_x \omega_x$$

и положим:

$$(c) \quad \begin{cases} \Delta C'_x u_{x+1} + \Delta C''_x v_{x+1} + \dots + \Delta C^n_x \omega_{x+1} = 0 \\ \Delta C'_x u_{x+2} + \Delta C''_x v_{x+2} + \dots + \Delta C^n_x \omega_{x+2} = 0 \\ \dots \\ \Delta C'_x u_{x+n-1} + \Delta C''_x v_{x+n-1} + \dots + \Delta C^n_x \omega_{x+n-1} = 0 \end{cases}$$

Для этого рассмотрим уравнение

$$\Delta^4 y_x = 0$$

так как четвертая разность y_x равна нулю, то y_x может быть всякою целой функцией степени, не превосходящей трех. Итак полагаем:

$$u_x = 1; \quad v_x = x; \quad w_x = x(x-1); \quad \omega_x = x(x-1)(x-2)$$

легко удостовериться, что эти функции удовлетворяют уравнению

$$y_{x+4} - 4y_{x+3} + 6y_{x+2} - 4y_{x+1} + y_x = 0$$

Полагаем, что для данного полного уравнения будет

$$y_x = C_x^I + C_x^{II} \cdot x + C_x^{III} \cdot x(x-1) + C_x^{IV} \cdot x(x-1)(x-2)$$

полагая затем

$$\begin{aligned} \Delta C_x^I + \Delta C_x^{II} (x+1) + \Delta C_x^{III} (x+1)x + \Delta C_x^{IV} (x+1)x(x-1) &= 0 \\ \Delta C_x^I + \Delta C_x^{II} (x+2) + \Delta C_x^{III} (x+2)(x+1) + \Delta C_x^{IV} (x+2)(x+1)x &= 0 \\ \Delta C_x^I + \Delta C_x^{II} (x+3) + \Delta C_x^{III} (x+3)(x+2) + \\ + \Delta C_x^{IV} (x+3)(x+2)(x+1) &= 0 \end{aligned}$$

получим:

$$\begin{aligned} y_{x+1} &= C_x^I + C_x^{II} (x+1) + C_x^{III} (x+1)x + C_x^{IV} \cdot (x+1)x(x-1) \\ y_{x+2} &= C_x^I + C_x^{II} (x+2) + C_x^{III} (x+2)(x+1) + C_x^{IV} (x+2)(x+1)x \\ y_{x+3} &= C_x^I + C_x^{II} (x+3) + C_x^{III} (x+3)(x+2) + C_x^{IV} (x+3)(x+2)(x+1) \\ y_{x+4} &= C_x^I + C_x^{II} (x+4) + C_x^{III} (x+4)(x+3) + C_x^{IV} (x+4)(x+3)(x+2) + \\ + \Delta C_x^I + \Delta C_x^{II} (x+4) + \Delta C_x^{III} (x+4)(x+3) + \Delta C_x^{IV} (x+4)(x+3)(x+2) \end{aligned}$$

Внося эти выражения вместо $y_x, y_{x+1}, \dots, y_{x+4}$ в наше уравнение, получим

$$\begin{aligned} \Delta C_x^I + \Delta C_x^{II} \cdot (x+4) + \Delta C_x^{III} \cdot (x+4)(x+3) + \\ + \Delta C_x^{IV} \cdot (x+4)(x+3)(x+2) = V \end{aligned}$$

Таким образом для определения

$$\Delta C_x^I, \quad \Delta C_x^{II}, \quad \Delta C_x^{III} \quad \text{и} \quad \Delta C_x^{IV}$$

мы получим четыре уравнения. Для решения их поступим следующим образом: вычтем первое уравнение из второго, второе из третьего и т. д., тогда получим:

$$\begin{aligned} \Delta C_x^{II} + 2(x+1)\Delta C_x^{III} + 3(x+1)x\Delta C_x^{IV} &= 0 \\ \Delta C_x^{III} + 2(x+2)\Delta C_x^{IV} + 3(x+2)(x+1)\Delta C_x^{IV} &= 0 \\ \Delta C_x^{IV} + 2(x+3)\Delta C_x^{IV} + 3(x+3)(x+2)\Delta C_x^{IV} &= V \end{aligned}$$

Из этих уравнений точно так же найдем:

$$2\Delta C_x^{\text{III}} + 6(x+1)\Delta C_x^{\text{IV}} = 0$$

$$2\Delta C_x^{\text{III}} + 6(x+2)\Delta C_x^{\text{IV}} = V$$

откуда:

$$\Delta C_x^{\text{IV}} = \frac{1}{6} V$$

$$2\Delta C_x^{\text{II}} + (x+1)V = 0$$

откуда:

$$\Delta C_x^{\text{II}} = -\frac{1}{2}(x+1)V$$

$$\Delta C_x^{\text{I}} + (x+1)^2 V + \frac{1}{2}(x+1)xV = 0$$

откуда

$$\Delta C_x^{\text{I}} = \frac{1}{2}(x+2)(x+1)V$$

и

$$\Delta C_x^{\text{I}} + \frac{1}{2}(x+2)(x+1)^2 \cdot V - \frac{1}{2}(x+1)^2 xV + \frac{1}{6}(x+1)x(x-1) = 0$$

откуда

$$\Delta C_x^{\text{I}} = -\frac{1}{6}(x+1)(x^2 + 5x + 6)V = -\frac{1}{6}(x+3)(x+2)(x+1)V$$

Отсюда имеем

$$C_x^{\text{I}} = -\frac{1}{6} \sum (x+3)(x+2)(x+1)V + A_1$$

$$C_x^{\text{II}} = \frac{1}{2} \sum (x+2)(x+1)V + A_2$$

$$C_x^{\text{III}} = -\frac{1}{2} \sum (x+1)V + A_3$$

$$C_x^{\text{IV}} = \frac{1}{6} \sum V + A_4$$

Итак, мы находим:

$$\begin{aligned} y &= A_1 + A_2 x + A_3 x(x-1) + A_4 x(x-1)(x-2) \\ &- \frac{1}{6} \sum (x+3)(x+2)(x+1)V + \frac{1}{2} x \sum (x+2)(x+1)V \\ &- \frac{1}{2} x(x-1) \sum (x+1)V + \frac{1}{6} x(x-1)(x-2) \sum V \end{aligned}$$

Таким образом общий интеграл выразился при помощи суммы некоторой функции, удовлетворяющей уравнению

$$\Delta^4 y_x = V$$

и произвольной целой функции степени на 1 ниже порядка уравнения. Существование последней части общего интеграла можно было предвидеть, потому что вообще разность n -го порядка от целой функции $(n - 1)$ -й степени равна нулю.

Так как рассматриваемое уравнение приводится к виду

$$\Delta^4 y = V$$

то его общий интеграл должен иметь такой вид:

$$y_x = \sum \sum \sum \sum V + A_1 + A_2 x + A_3 x(x-1) + A_4 x(x-1)(x-2)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \sum \sum \sum \sum V &= -\frac{1}{6} \sum (x+3)(x+2)(x-1)V + \\ &+ \frac{1}{2} x \sum (x+2)(x+1)V \\ (34) \quad -\frac{1}{2} x(x-1) \sum (x+1)V &+ \frac{1}{6} x(x-1)(x-2) \sum V \end{aligned}$$

Таким образом мы четверную сумму свели на простые суммы.

Идя таким же путем, мы могли бы n -кратную сумму свести на простые суммы, но мы можем для этого идти и по другому пути, пользуясь формулой преобразования двойной суммы, которую легко вывести из уравнения

$$\sum S_x T_x = S_x \sum T_x - \sum \Delta S_x \sum^{x+1} T_x$$

полагая

$$T_x = 1 \quad \text{и} \quad S_x = \sum V$$

найдем:

$$\sum T_x = x; \quad \sum^{x+1} T_x = x+1, \quad \text{и} \quad \Delta S_x = V$$

так что мы получим

$$\sum \sum V = x \sum V - \sum (x+1) V$$

Отсюда

$$\sum \sum \sum V = \sum x \sum V - \sum \sum (x+1) V$$

но по предыдущей формуле

$$\sum \sum (x+1) V = x \sum (x+1) V - \sum (x+1)^2 V$$

полагая

$$S_x = \sum V \quad \text{и} \quad T_x = x$$

и замечая, что

$$\sum x = \frac{(x-1)x}{2}; \quad \sum_{x+1} x = \frac{x(x+1)}{2}$$

получим

$$\sum x \sum V = \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} \sum V - \sum \frac{x(x+1)}{1 \cdot 1} V$$

так что

$$\begin{aligned} \sum \sum \sum V &= \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} \sum V - \sum \frac{x(x+1)}{1 \cdot 2} V + \\ &\quad + \sum (x+1)^2 V - x \sum (x+1) V = \\ &= \frac{1}{2} \sum (x+2)(x+1) V - x \sum (x+1) V + \frac{1}{2} x(x-1) \sum V \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \sum \sum \sum \sum V &= \frac{1}{2} \sum \sum (x+2)(x+1) V - \sum x \sum (x+1) V + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum x(x-1) \sum V \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned} \sum \sum (x+2)(x+1) V &= x \sum (x+2)(x+1) V - \sum (x+2)(x+1)^2 V \\ \sum x \sum (x+1) V &= \frac{1}{2} x(x-1) \sum (x+1) V - \sum \frac{x(x+1)}{2} V \\ \sum x(x-1) \sum V &= \frac{x(x-1)(x-2)}{3} \sum V - \sum \frac{(x+1)x(x-1)}{3} V \end{aligned}$$

а потому будет

$$\begin{aligned} \sum \sum \sum \sum V &= \frac{1}{2} x \sum (x+2)(x+1) V - \frac{1}{2} \sum (x+2)(x+1)^2 V - \\ &\quad - \frac{1}{2} x(x-1) \sum (x+1) V \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum x(x+1)^2 V + \frac{1}{6} x(x-1)(x-2) \sum V \\ &\quad - \frac{1}{6} \sum (x+1)x(x-1) V = -\frac{1}{6} \sum (x+3)(x+2)(x+1) + \\ &\quad + \frac{1}{2} x \sum (x+2)(x+1) V - \frac{1}{2} x(x-1) \sum (x+1) V \\ &\quad + \frac{1}{6} x(x-1)(x-2) \sum V \end{aligned}$$

Поступая таким же образом далее, мы сведем n -кратную сумму на простые, так что вообще будет

$$\underbrace{\sum_a^x \sum_a^x \dots \sum_a^x}_n V = \\ = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)} \sum_{z=a}^{z=x} (x-z-1)(x-z-2) \dots (x-z-n+1) V_z$$

§ 20. Переходим теперь к интегрированию линейных уравнений без последнего члена.

Эти уравнения будут иметь вид

$$(2) \quad y_{x+n} + P y_{x+n-1} + Q y_{x+n-2} + \dots + S y_{x+1} + T \cdot y_x = 0$$

Если коэффициенты $P, Q, \dots T$ не постоянные, а функции от x , то интегрирование этого уравнения вообще не может быть выполнено при настоящем состоянии математического анализа. Оно легко интегрируется, как мы уже видели, в случае первого порядка, и кроме этого случая, известно еще, что уравнения второго порядка вида

$$(a) \quad (x - \alpha)(x - \beta) y_{x+2} - (\alpha x + \beta) y_{x+1} + A y_x = 0$$

могут быть проинтегрированы. Кроме же этих случаев, нам почти ничего не известно об интегрировании этих уравнений.

Если же коэффициенты $P, Q, \dots T$ постоянные, то это уравнение всегда может быть проинтегрировано. Мы теперь и рассмотрим этот довольно общий случай.

Пусть $y = k^x$, где k есть пока неизвестное число; внося это значение в наше уравнение, получим

$$k^{x+n} + P k^{x+n-1} + Q k^{x+n-2} + \dots + S \cdot k^{x+1} + T k^x = 0$$

Сокращая это равенство на k^x , получаем уравнение n -ой степени для определения k :

$$k^n + P k^{n-1} + Q k^{n-2} + \dots + S k + T = 0$$

Рассмотрим сначала случай, когда это уравнение не имеет равных корней.

Пусть корни его суть

$$k_1, k_2, k_3, \dots k_n$$

тогда функции

$$k_1^x, k_2^x, k_3^x, \dots k_n^x \text{ и т. д.}$$

будут все различны между собой и каждая из них будет удовлетворять уравнению (α), а потому общий интеграл его будет

$$y_x = C_1 k_1^x + C_2 k_2^x + \dots + C_n k_n^x$$

Для примера возьмем уравнение

$$y_{x+2} - 5y_{x+1} + 6y_x = 0$$

полагая $y_x = k^x$, получим для определения k квадратное уравнение

$$k^2 - 5k + 6 = 0$$

Откуда

$$k_1 = 3 \quad \text{и} \quad k_2 = 2$$

поэтому общий интеграл будет

$$y_x = C_1 \cdot 3^x + C_2 \cdot 2^x$$

§ 21. Рассмотрим теперь случай, когда некоторые из корней уравнения

$$k^n + Pk^{n-1} + Qk^{n-2} + \dots + S \cdot k + T = 0$$

равны между собою.

Этот случай обыкновенно рассматривается в зависимости от предыдущего: изменяют бесконечно мало коэффициенты этого уравнения и потом, находя по предыдущему способу интеграл, полагают эти изменения равными нулю; но мы будем рассматривать этот случай отдельно.

Пусть

$$(\alpha) \quad k^x [k^n + Pk^{n-1} + Qk^{n-2} + \dots + Sk + T] = k^x \cdot f(k)$$

Если $f(k) = 0$, то y^k будет удовлетворять уравнению

$$(\beta) \quad y_{x+n} + Py_{x+n-1} + Qy_{x+n-2} + \dots + Sy_{x+1} + Ty_x = 0$$

Продифференцируем тождество (α) по k :

$$(x+n)k^{x+n-1} + P(x+n-1)k^{x+n-2} + (x+n-2)Qk^{x+n-3} + \dots + (x+1)Sk^x + xTk^{x-1} = x \cdot k^{x-1} f(k) + k^x f'(k)$$

Если допустим, что

$$f(k) = 0 \quad \text{и} \quad f'(k) = 0$$

то k будет двукратным корнем уравнения $f(k) = 0$, а потому, умножая полученное равенство на k , получим

$$(x+n)k^{x+n} + (x+n-1)Pk^{x+n-1} + \dots + (x+1)S \cdot k^{x+1} + xTk^x = 0$$

Отсюда видно, что уравнению (β) удовлетворяет величина

$$y_x = xk^x$$

Итак, если k_1 есть двукратный корень, то уравнению (β) будут удовлетворять две функции k_1^x и xk_1^x , соответствующие этому корню.

Продифференцируем теперь по букве k равенство

$$(x+n)k^{x+n} + (x+n-1)Pk^{x+n-1} + \dots + (x+1)Sk^{x+1} + T x k^x = \\ = xk^x f(k) + k^{x+1} f'(k)$$

мы будем иметь

$$(x+n)^2 k^{x+n-1} + (x+n-1)^2 P \cdot k^{x+n-2} + \dots + (x+1)^2 S \cdot k^x + \\ + x^2 T \cdot k^{x-1} = x^2 f(k) \cdot k^{x-1} + f''(k) k^{x+1} + (2x+1)k^x \cdot f'(k)$$

Если k есть трехкратный корень, то

$$f(k) = 0; \quad f'(k) = 0; \quad f''(k) = 0$$

и потому, умножая предыдущее равенство на k , получим

$$(x+n)^2 k^{x+n} + P(x+n-1)^2 k^{x+n-1} + \dots + S(x+1)^2 k^{x+1} + T x^2 k^x = 0$$

отсюда видно, что $x^2 k^x$ есть решение уравнения (β).

Итак, если k_1 есть трехкратный корень, то уравнению (β) будут удовлетворять три функции k_1^x , xk_1^x , $x^2 k_1^x$, соответствующие этому корню. Отсюда видно, что если k_1 есть m -кратный корень, то уравнению (β) будут удовлетворять m функций

$$k_1^x, xk_1^x, x^2 k_1^x, \dots, x^{m-1} k_1^x$$

Для примера возьмем уравнение

$$y_{x+4} - 4y_{x+3} + 6y_{x+2} - 4y_{x+1} + y_x = 0$$

полагая

$$y_x = k^x$$

получим для определения k уравнение 4-ой степени

$$k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 4k + 1 = 0$$

приводящееся к виду

$$(k - 1)^4 = 0$$

и, следовательно, имеющее четыре корня равных 1, поэтому общий интеграл этого уравнения есть

$$y_x = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3$$

Возьмем еще уравнение

$$y_{x+4} - 2y_{x+2} + y_x = 0$$

полагая $y_x = k^x$, получим для определения k уравнение

$$k^4 - 2k^2 + 1 = (k^2 - 1)^2 = (k + 1)^2 (k - 1)^2$$

имеющее два корня равных 1 и два корня равных -1 , поэтому уравнению

$$y_{x+4} - 2y_{x+2} + y_x$$

удовлетворяют четыре функции

$$1^x; \quad x1^x; \quad (-1)^x, \quad \text{и} \quad x(-1)^x$$

и общий интеграл его будет

$$y_x = C_1 + C_2 x + C_3 (-1)^x + C_4 x (-1)^x$$

§ 22. Предполагая теперь, что все коэффициенты уравнения

$$k^n + Pk^{n-1} + Qk^{n-2} + \dots + Sk + T = 0$$

суть действительные числа, допустим, что некоторые из корней его суть мнимые количества. В этом случае общий интеграл уравнения

$$y_{x+n} + Py_{x+n-1} + Qy_{x+n-2} + \dots + Sy_{x+1} + Ty_x = 0$$

можно привести к такому виду, что он не будет содержать мнимых величин. В самом деле, полагая

$$k_1 = p + q\sqrt{-1}$$

мы должны заключить (так как коэффициенты уравнения вещественные), что существует некоторый другой корень

$$k_2 = p - q\sqrt{-1}$$

Сумма членов общего интеграла, соответствующих этим двум корням, будет

$$C_1 (p + q\sqrt{-1})^x + C_2 (p - q\sqrt{-1})^x$$

полагая здесь

$$p + q\sqrt{-1} = re^{\theta\sqrt{-1}} \quad \text{и} \quad p - q\sqrt{-1} = re^{-\theta\sqrt{-1}}$$

и полагая, кроме того,

$$2C_1 = Ae^{B\sqrt{-1}} \quad \text{и} \quad 2C_2 = Ae^{-B\sqrt{-1}}$$

получим

$$C_1 k_1^x + C_2 k_2^x = \frac{A}{2} r^x [e^{(B+\theta x)\sqrt{-1}} + e^{-(B+\theta x)\sqrt{-1}}] = Ar^x \cos(B + \theta x)$$

Это выражение можно представить также в другом виде: мы имеем

$$Ar^x \cos(B + \theta x) = Ar^x [\cos B \cdot \cos \theta x - \sin B \cdot \sin \theta x]$$

полагая здесь

$$A \cos B = c_0; \quad -A \sin B = c_1$$

получим

$$C_1 k_1^x + C_2 k_2^x = Ar^x \cos(B + \theta x) = c_0 r^x \cos \theta x + c_1 r^x \sin \theta x.$$

Таким образом преобразуем и другие члены общего интеграла, соответствующие мнимым корням. Если бы k_1 , следовательно и k_2 , были бы двукратными корнями, то, как нетрудно видеть, члены общего интеграла, им соответствующие, привелись бы к такому виду:

$$C_1 k_1^x + C_2 x k_1^x + C_3 k_2^x + C_4 x k_2^x = r^x [A_1 \cos(B_1 + \theta x) + + A_2 x \cos(B_2 + \theta x)]$$

Для примера возьмем уравнение

$$y_{x+2} + y_x = 0$$

В данном случае для определения k получаем

$$k^2 + 1 = 0$$

дающее:

$$k_1 = \sqrt{-1}; \quad k_2 = -\sqrt{-1}$$

так что общий интеграл будет

$$y_x = C_1 (\sqrt{-1})^x + C_2 (-\sqrt{-1})^x$$

полагая

$$\begin{aligned} \sqrt{-1} &= r e^{\theta \sqrt{-1}} = r \cos \theta + \sqrt{-1} \sin \theta \\ -\sqrt{-1} &= r e^{\theta \sqrt{-1}} = r \cos \theta - \sqrt{-1} \sin \theta \end{aligned}$$

найдем:

$$r = 1; \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

а потому общий интеграл будет

$$y_x = A \cos\left(B + \frac{\pi}{2} x\right) = c_0 \cos \frac{\pi}{2} x + c_1 \sin \frac{\pi}{2} x.$$

§ 23. В заключение приведем решение одной задачи, не имеющей, повидимому, ничего общего с интегрированием уравнений в конечных разностях, но решение которой сводится на последнее.

Задача эта заключается в следующем: определить высший предел числа делений при отыскании общего наибольшего делителя двух чисел A и B .

Пусть $A < B$, положим, что при делении B на A получилось частное q_1 и остаток R_1 , при делении A на R_1 — частное q_2 и остаток R_2 , при делении R_1 на R_2 — частное q_3 и остаток R_3 и т. д., и пусть последний остаток есть R_{n+1} . Как известно, R_{n+1} есть или 0 или 1. Таким образом мы получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} B &= Aq_1 + R_1 \\ A &= R_1q_2 + R_2 \\ R_1 &= R_2q_3 + R_3 \\ &\dots \\ &\dots \\ R_\lambda &= R_{\lambda+1}q_{\lambda+2} + R_{\lambda+2} \\ &\dots \\ R_{n-1} &= R_nq_{n+1} + R_{n+1} \end{aligned}$$

из которых видно, что нам придется произвести, таким образом, $(n+1)$ деление. При этом мы получаем числа

$$R_{n+1}, R_n, R_{n-1}, \dots, R_\lambda, \dots, R_2, R_1, R_0$$

идущие в возрастающем порядке, причем R_0 поставлено вместо A . Здесь R_n не может быть меньше 2, а потому

$$R_n \geq 2$$

точно так же R_{n-1} , очевидно, не может быть меньше трех, так что

$$R_{n-1} \geq 3$$

Возьмем теперь ряд величин

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \dots, y_{n-1}, y_n$$

идущих в возрастающем порядке и удовлетворяющих неравенству

$$(*) \quad y_x \text{ не } > R_{n-x}$$

причем

$$y_0 = 2 \quad \text{и} \quad y_1 = 3$$

Легко видеть, что условие $(*)$ будет удовлетворено, если вообще

$$y_{x+2} = y_{x+1} + y_x$$

в самом деле, предполагая, что

$$y_{x+1} \text{ не } > R_{n-x-1} \quad \text{и} \quad y_x \text{ не } > R_{n-x}$$

мы будем иметь

$$y_{x+2} \text{ не } > R_{n-x-1} + R_{n-x}$$

Но мы имеем

$$R_{n-x-2} = R_{n-x-1} y_{n-x} + R_{n-x}$$

а потому

$$R_{n-x-2} > R_{n-x-1} + R_{n-x}$$

и следовательно,

$$y_{x+2} \text{ не } > R_{n-x-2}$$

но мы имеем

$$y_0 \text{ не } > R_n \quad \text{и} \quad y_1 \text{ не } > R_{n-1}$$

и следовательно, вообще

$$y_x \text{ не } > R_{n-x}$$

Но, интегрируя уравнение

$$y_{x+2} - y_{x+1} - y_x = 0$$

мы получим

$$y_x = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^x + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^x$$

причем произвольные постоянные C_1 и C_2 определяются из условий

$$y_0 = 2 \quad \text{и} \quad y_1 = 3$$

которые дают такие уравнения:

$$C_1 + C_2 = 2$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} C_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} C_2 = 3$$

откуда следует:

$$C_1 = \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}}; \quad C_2 = \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}}$$

Таким образом находим

$$y_x = \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^x + \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^x$$

а потому

$$\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^x + \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^x \text{ не } > R_{n-x}$$

полагая здесь $n = x$ и замечая, что $R_0 = A$, получим

$$\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \text{ не } > A$$

но

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} < 0.7 \text{ и } \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n < 0.7$$

и

$$\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n < 0.7 \cdot \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}} < 0.08$$

а потому

$$\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - 0.08 < A$$

откуда

$$\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} < (A + 0.08) \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

а так как A не < 2 и, следовательно,

$$A + 0.08 = A \left(1 + \frac{0.08}{A}\right) < A \cdot 1.04$$

то

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} < A \cdot 1.04 \cdot \frac{(1+\sqrt{5})\sqrt{5}}{2(\sqrt{5}+2)} = A \cdot 0.52 \cdot \frac{(1+\sqrt{5})\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$$

логарифмируя получим

$$(n+1) < \frac{\log A + \log 0.52 + \log(1+\sqrt{5}) + \log\sqrt{5} - \log(2+\sqrt{5})}{\log(1+\sqrt{5}) - \log 2}$$

$$(n+1) < \frac{1}{\log \frac{1+\sqrt{5}}{2}} \left\{ \log A - \log \frac{2+\sqrt{5}}{0.52 \cdot (1+\sqrt{5})\sqrt{5}} \right\}$$

но

$$\frac{2+\sqrt{5}}{0.52(1+\sqrt{5})\sqrt{5}} > \frac{4}{0.52(\sqrt{5}+5)} = \frac{1}{0.13(7+\alpha)}$$

где α — правильная дробь; так как $\sqrt{5} < 2.24$, то $\alpha < 0.24$, и следовательно,

$$\alpha < \frac{1}{4}$$

итак,

$$\frac{2+\sqrt{5}}{0.52(1+\sqrt{5})\sqrt{5}} > \frac{1}{0.13\left(7+\frac{1}{4}\right)} = \frac{100}{91+3\frac{1}{4}} > 1$$

а потому

$$n+1 < \frac{\log A}{\log \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

но $\sqrt{5} > 2.236$, так что

$$\log \frac{1+\sqrt{5}}{2} > \log 1.618 = 0.2090$$

и потому

$$\log \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0.2 = \frac{1}{5}$$

Итак, мы находим

$$n + 1 < 5 \log A$$

называя же через N — число цифр числа A , мы будем иметь

$$\log A < N$$

а потому

$$n + 1 < 5N$$

Таким образом мы приходим к заключению, что при отыскании общего наибольшего делителя чисел A и B , причем $A < B$, придется произвести число делений, во всяком случае меньшее упятеренного числа цифр в меньшем из чисел A .

Этим мы и окончим теорию конечных разностей.

Теория вероятностей

Законы вероятностей

§ 1. Теория вероятностей имеет целью определить шансы для совершения известного события, причем под словом «событие» разумеется вообще все то, чего вероятность определяется.

Таким образом слово «вероятность» служит в математике для означения некоторой величины, подлежащей измерению.

Очевидно, что вероятность зависит от двух только величин: от числа случаев, благоприятствующих событию, и от числа всех равно возможных случаев, так что называя вероятность какого-либо события через E , первое число через m , второе через n , мы будем иметь

$$E = F(m, n) = F\left(n \cdot \frac{m}{n}, n\right) = \varphi\left(\frac{m}{n}, n\right)$$

где φ есть такая функция, которая увеличивается с увеличением m и уменьшается с увеличением n ; но нетрудно согласиться с тем, что вероятность не должна меняться при увеличении чисел всех возможных и благоприятствующих событию случаев в одном и том же отношении; это принимается в теории вероятностей за *аксиому*. Вследствие этого функция φ не должна меняться, если мы в ней заменим m и n через λm и λn , где λ — произвольный множитель; отсюда следует, что

$$\varphi\left(\frac{m}{n}, n\right) = \varphi\left(\frac{\lambda m}{\lambda n}, \lambda n\right)$$

Это равенство показывает, что функция φ не зависит от n . Итак,

$$E = f\left(\frac{m}{n}\right)$$

т. е. вероятность есть функция от отношения числа благоприятствующих случаев к числу всех равно возможных случаев, причем эта функция, если

упомянутое соотношение принять за независимую переменную, должна быть функцией возрастающей. Что же касается того, каков вид этой функции, то это нам неизвестно, и потому для означения вероятности мы можем по произволу взять какую угодно возрастающую функцию отношения $\frac{m}{n}$.

В математике и принимают само это отношение, как самую простую функцию, за выражение вероятности.

Отношение $\frac{m}{n}$, которое мы будем теперь означать через p , и принимается в математике обыкновенно как *определение* вероятности в смысле величины, подлежащей измерению.

Если $p = 0$, то вероятность обращается в несомненность того, что событие не случится, точно так же если $p = 1$, то вероятность обращается в несомненность того, что событие случится.

Эти два крайние случая, выходящие из области вероятности, мы, как и везде в математике, рассматриваем как предельные случаи общего, и в этом смысле мы рассматриваем вероятности, равные нулю или единице.

Выше мы определили слово «событие» как один из терминов, встречающихся в теории вероятностей; теперь мы прибавим, что событиями *несовместными* мы будем называть такие события, которые не могут иметь места при одном и том же случае. Так, напр., вынуть из колоды карт трефовую карту и туза суть события совместные, вынуть же (вынимая только одну карту) трефовую карту и чтобы это был червонный туз — события несовместные.

Рассмотрим теперь основные свойства вероятностей, выражая их в виде теорем.

§ 2. Теорема 1. *Вероятность того, что случится одно из двух несовместных событий, равна сумме их вероятностей.*

Положим, что E и E_1 суть два несовместные события и пусть $p = \frac{m}{n}$ есть вероятность первого из них и $p_1 = \frac{m_1}{n}$ есть вероятность второго.

Так как события E и E_1 несовместны, то случай, благоприятный для первого, не будет благоприятным для второго, и обратно; поэтому число случаев, благоприятных событию (E или E_1), есть $m + m_1$, число же всех равновозможных случаев остается прежним, равным n , а потому вероятность P того, что случится одно из этих событий, есть

$$P = \frac{m + m_1}{n} = p + p_1$$

Это теорему легко распространить и на какое угодно число несовместных событий. В самом деле, пусть E, E_1, E_2, \dots и т. д. суть несовместные события, вероятности которых

$$p = \frac{m}{n}; p_1 = \frac{m_1}{n}; p_2 = \frac{m_2}{n}; \dots$$

Вероятность того, что случится одно из двух событий E и E_1 , или вероятность события (E или E_1) есть

$$\frac{m + m_1}{n}$$

Отсюда следует, что вероятность события (E, E_1 или E_2) есть

$$\frac{(m + m_1) + m_2}{n}$$

Рассуждая таким образом далее, мы вообще найдем, что вероятность P события (E, E_1, E_2, \dots или E_k) есть

$$P = \frac{m + m_1 + m_2 + \dots + m_k}{n} = p + p_1 + p_2 + \dots + p_k$$

Заметим, что если в формуле

$$P = p + p_1$$

мы положим $P = 1$, то события E и E_1 , вероятности которых суть p и p_1 , называются в этом случае *прямо-противоположными*. Таким образом для прямо-противоположных событий вероятность одного есть дополнение до единицы вероятности другого.

Так как вероятность того, что какое-нибудь событие случится или не случится, есть всегда 1, то зная вероятность p того, что событие случится, мы найдем вероятность p_1 того, что событие не случится, по формуле

$$p_1 = 1 - p$$

Теорему, доказанную в этом параграфе, можно высказать еще так: *если одно и то же событие имеет несколько различных несовместных видов, то вероятность его равна сумме вероятностей его видов. Если вероятность одинакова для всех видов, то вероятность события пропорциональна вероятности каждого отдельного вида и пропорциональна числу видов.*

§ 3. Теорема 2. *Если вероятность события E есть p и вероятность случиться событию F после того, как случилось событие E , есть q , то произведение pq есть вероятность совместности этих событий (случиться E и после него F).*

Пусть

$$C_1, C_2, C_3, \dots, C_m, \dots, C_\mu, C_{\mu+1}, \dots, C_{n-1}, C_n$$

представляют равновозможные случаи, и μ из них, взятых в том порядке как они написаны, — случаи, благоприятные для события E , положим далее, что m из этих последних случаев благоприятствует событию F . Вследствие этого

$$p = \frac{\mu}{n} \quad \text{и} \quad q = \frac{m}{\mu}$$

так как при определении q мы должны за число всех возможных случаев брать μ .

Отсюда следует

$$pq = \frac{m}{n}$$

но m есть число случаев, благоприятных как первому, так и второму событию, а n есть число всех равновозможных случаев как для первого, так и для второго события, а потому $\frac{m}{n}$ есть вероятность того, что оба они случатся одновременно.

Если r есть вероятность события G после того, как событие F имело место, то qr будет вероятность того, что события F и G случатся одновременно, а pqr есть вероятность совместного появления трех событий E , F , G . Рассуждая таким образом далее, мы распространим эту теорему на какое угодно число событий.

В частном случае, если вероятность события E_1 после того как случилось E есть q_1 , вероятность события E_2 после того как случилось E_1 есть q_2 и т. д. и, наконец, вероятность события E_k после того как случилось E_{k-1} есть q_k и если

$$q_1 = q_2 = \dots = q_k = p$$

где p есть вероятность события E , то вероятность совместности этих $k+1$ событий будет

$$p \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \dots \cdot q_k = p^{k+1}$$

§ 4. Для примера решим такую задачу: положим, что мы имеем сосуд, содержащий в себе белые и черные шары, и положим, что мы вынимаем из него один из шаров, кладем его обратно в сосуд, снова вынимаем шар из этого сосуда и повторяем эту операцию l раз. Спрашивается, какова вероятность при этих l «испытаниях» вынуть черный шар.

Под словом «испытание» мы будем разуметь такое стечение обстоятельств, при котором событие может иметь место.

Пусть вероятность при одном испытании вынуть черный шар есть p , тогда $1 - p$ есть вероятность того, что это событие при одном испытании не случится. Вероятность того, что событие не случится и при втором испытании, также будет $1 - p$, потому что шансы событию случиться остаются прежними.

Итак, при двух испытаниях вероятность того, что это событие не случится, есть $(1 - p)^2$, при трех она равна $(1 - p)^3 \dots$, при l она равна $(1 - p)^l$, а потому вероятность того, что событие случится, т. е. будет вынут черный шар, есть

$$P = 1 - (1 - p)^l.$$

Если p есть весьма малая дробь, то в разложении

$$\log(1 - p)^l = l \cdot \log(1 - p) = l \cdot \left[-p - \frac{p^2}{2} - \frac{p^3}{3} \dots \right]$$

можно остановиться на первом члене, вследствие чего мы будем иметь

$$(1 - p)^l = e^{-lp}$$

а потому

$$P = 1 - e^{-lp}.$$

§ 5. Для другого примера постараемся решить такой вопрос. Определить вероятность того, что наугад взятая дробь сократима.

Пусть $\frac{A}{B}$ есть наугад взятая дробь, и пусть P есть вероятность того, что эта дробь несократима. Легко видеть, что эта вероятность «сложная» из вероятностей $p_2, p_3, p_5, p_7, \dots, p_m$ (где m есть какое угодно простое число) того, что дробь $\frac{A}{B}$ не сократима на 2, на 3, на 5, на 7, \dots на m . Поэтому

$$P = p_2 \cdot p_3 \cdot p_5 \cdot \dots \cdot p_m$$

Определим теперь p_m .

Вероятность того, что дробь несократима на число m , найдется, если мы найдем вероятность того, что числа A и B не делятся на m .

Положим теперь, что мы делим A на m , при этом в остатке могут получиться только числа:

$$0, 1, 2, 3, 4, \dots, m - 1$$

Отсюда видно, что вероятность того, что A делится на m , есть $\frac{1}{m}$. Точно так же вероятность делимости числа B на m есть $\frac{1}{m}$, а потому $\frac{1}{m^2}$ есть вероятность совпадения этих событий, т. е. вероятность того, что дробь $\frac{A}{B}$ сократима на m , а потому

$$p_m = 1 - \frac{1}{m^2}$$

Итак,

$$P = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{5^2}\right) \left(1 - \frac{1}{7^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{m^2}\right)$$

где m есть число простое.

Отсюда

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3^2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5^2}} \dots = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots$$

сумма же этого ряда, как показано в § 20 курса «Определенных интегралов», есть $\frac{\pi^2}{6}$.

Этот результат нетрудно вывести и непосредственно. Известно разложение

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2 \pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{3^2 \pi^2}\right) \dots$$

но мы имеем

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{120} - \dots$$

а потому

$$\log \left[1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} \dots \right] = \log \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2} \right) + \log \left(1 - \frac{x^2}{2^2 \pi^2} \right) + \dots + \log \left(1 - \frac{x^2}{3^2 \pi^2} \right) + \dots$$

или

$$-\frac{x^2}{6} + \dots = -\frac{x^2}{\pi^2} \dots - \frac{x^2}{2^2 \pi^2} \dots - \frac{x^2}{3^2 \pi^2} \dots$$

Отсюда, приравнявая коэффициенты в обеих частях равенства при одинаковых степенях x , будем, между прочим, иметь равенство

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

так что

$$\frac{1}{P} = \frac{\pi^2}{6}$$

а потому $P = \frac{6}{\pi^2}$, т. е. около $\frac{6}{10}$.

Если же через Q назовем вероятность сократимости дроби, то получим

$$Q = 1 - \frac{6}{\pi^2}$$

Называя теперь через P_0 — вероятность того, что какая-нибудь дробь несократима, когда уже известна ее несократимость на 2, 3, 5, получим

$$P = P_0 \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{5^2}\right)$$

откуда

$$P_0 = \frac{6}{\pi^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2^2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3^2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5^2}} = \frac{6}{\pi^2} \cdot \frac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{(2^2 - 1)(3^2 - 1)(5^2 - 1)} = \frac{75}{8\pi^2}$$

но $8\pi^2 = 8 \cdot 9.87 = 78.97$, получим

$$P_0 = \frac{75}{79}$$

откуда

$$1 - P_0 = \frac{4}{79}$$

так что

$$\frac{1}{19} > 1 - P_0 > \frac{1}{20}$$

таким образом, если известно, что дробь $\frac{A}{B}$ несократима на 2, 3, 5, то вероятность того, что она несократима и на другие числа, заключается между $\frac{1}{19}$ и $\frac{1}{20}$.

§ 6. До сих пор мы занимались законами, дающими возможность определять вероятности «a priori», теперь мы перейдем к законам, относящимся к вероятностям, известным под названием вероятностей «a posteriori», и при этом заметим, что эти законы уже далеко не отличаются тою строгостью, которою обладают два изложенных нами, так что на них скорее следует смотреть как на гипотезы, а не как на законы.

Теорема 3. Зная, что событие E случилось и что оно могло случиться с событиями F_1, F_2, \dots, F_i , вероятности которых суть P_1, P_2, \dots, P_i и

которые не зависимы одно от другого, мы найдем, что вероятность Q_j того, что событие E случилось вместе с событием F_j , выражается таким образом:

$$Q_j = \frac{P_i p_i}{P_1 p_1 + P_2 p_2 + \dots + P_j p_j}$$

где p_i есть вероятность события E после того как случилось событие F_i .

Пусть n есть число всех равновозможных случаев для событий F_1, F_2, \dots, F_i и m_j — число случаев, благоприятных событию F_j . Так как события F_1, F_2, \dots и т. д. не зависимы друг от друга, то в числе этих m_j случаев нет случаев, благоприятных для других событий. Таким образом

$$P_j = \frac{m_j}{n}$$

Положим теперь, что в числе этих m_j , благоприятных для события F_j , заключается λ_j случаев, благоприятных событию E , тогда

$$p_j = \frac{\lambda_j}{m_j}$$

и мы получаем

$$Q_j = \frac{\lambda_j}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_j + \dots + \lambda_i}$$

а подставляя сюда вместо $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ их значения, получаем

$$Q_j = \frac{p_j m_j}{p_1 m_1 + p_2 m_2 + \dots + p_i m_i} = \frac{P_j p_j}{P_1 p_1 + P_2 p_2 + \dots + P_i p_i}$$

Положим для примера, что мы имеем две группы карт A и B , и пусть группа A состоит из двух кучек, в каждой из которых находится по две красных и одной черной карте, а группа B — из одной кучки, содержащей только три красных карты.

Положим, что мы вынимаем n раз под ряд красную карту. Спрашивается, какова вероятность того, что вынутая карта принадлежит группе A . При этом предполагается: 1) что наложив руку на какую-нибудь группу, мы все выемы делаем из этой группы; 2) что после каждого выема карта возвращается в ту кучку, из которой она была взята.

В данном случае событием F_1 служит выемка карты из группы A , а событием F_2 — выемка карты из группы B ; P_1 есть вероятность того, что выемка производится из группы A ; P_2 есть вероятность того, что выемка производится из группы B , а так как группа A заключает две кучки,

а группа B — одну, и мы считаем равновозможным, что под руку попадается любая кучка, то будет:

$$P_1 = \frac{2}{3}; \quad P_2 = \frac{1}{3}$$

Вероятность вынуть красную карту из группы A есть $\frac{2}{3}$, а потому вынуть n раз под ряд красную карту из этой группы есть $\left(\frac{2}{3}\right)^n$, вероятность же вынимать красную карту из группы B есть 1, таким образом

$$p_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^n; \quad p_2 = 1$$

поэтому вероятность того, что n раз вынутая красная карта принадлежит группе A , есть

$$Q = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{2}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot 1} = \frac{2^{n+1}}{2^{n+1} + 3^n} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n}$$

Отсюда видно, что с увеличением n до бесконечности эта вероятность приближается к 0; вероятность же

$$1 - Q = \frac{1}{2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}$$

того, что вынутая карта принадлежит к группе B , приближается к единице.

Для другого примера определим вероятность того, что экзаменуемый, хорошо ответивший на l билетов, ответит хорошо и на остальные.

Пусть N есть число билетов.

Экзаменатор предполагает, что экзаменуемый может хорошо ответить на

$$0, 1, 2, \dots, x, \dots, N$$

билетов, и все эти события (число которых $N + 1$) считает *равновозможными*. Вероятность каждого из них есть $\frac{1}{N + 1}$, так что

$$p_1 = P_2 = \dots = P_{N+1} = \frac{1}{N + 1}$$

В данном случае p_x означает вероятность того, что экзаменуемый, вынимая l билетов, ответит на них, если известно, что он может ответить на x билетов. Чтобы найти эту вероятность, заметим, что $\frac{x}{N}$ есть вероятность того, что экзаменуемый, при сделанном условии, ответит на 1 билет.

Но после того как этот билет вынут, остается еще $N - 1$ билетов, из которых он может ответить на $x - 1$, из этих $N - 1$ билетов ему под руку может попасться любой, значит вероятность того, что ему попадет билет, на который он может ответить, есть $\frac{x-1}{N-1}$, таким образом вероятность того, что экзаменующийся ответит на два билета, есть

$$\frac{x}{N} \cdot \frac{x-1}{N-1}$$

Продолжая рассуждать таким образом, найдем, что

$$p_x = \frac{x(x-1)(x-2) \dots (x-l+1)}{N \cdot N-1 \cdot N-2 \dots N-l+1}$$

Поэтому, называя через Q_x — вероятность того, что экзаменующийся ответит на x билетов, получим

$$Q_x = \frac{\frac{x}{N} \cdot \frac{x-1}{N-1} \cdot \frac{x-2}{N-2} \dots \frac{x-l+1}{N-l+1} \cdot \frac{1}{N+1}}{\sum_0^{N+1} \frac{x(x-1) \dots (x-l+1)}{N \cdot (N-1) \dots (N-l+1)} \cdot \frac{1}{N+1}}$$

Замечая, что

$$\sum_0^{N+1} x(x-1) \dots (x-l+1) = \frac{(N+1) \cdot N \cdot (N-1) \dots (N-l+1)}{l+1}$$

находим

$$Q_x = \frac{x(x-1)(x-2) \dots (x-l+1) \cdot (l+1)}{(N+1) \cdot N \cdot (N-1) \dots (N-l+1)}$$

а потому

$$Q_l = \frac{l+1}{N+1}$$

§ 7. Переходим теперь к четвертому закону, на который можно посмотреть как на следствие предшествующих. Этот закон можно формулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 4. Вероятность H события G после того как случилось событие E , появление которого возможно только вместе с одним из событий F_1, F_2, F_3, \dots и т. д., независимых между собою, если событие G также возможно только в том случае, когда имело место одно из событий F_1, F_2, \dots , определяется по формуле

$$H = \frac{P_1 p_1 q_1 + P_2 p_2 q_2 + \dots}{P_1 p_1 + P_2 p_2 + \dots} = \frac{\sum P_x p_x q_x}{\sum P_x p_x}$$

где P_x и p_x имеют те же значения, как в теореме 3-й, а q_x есть вероятность события G в гипотезе F_x , т. е. вероятность этого события после того как событие F_x имело место.

Положим, что событие E имело место. Вероятность того, что это событие имело место вместе с событием F_x , по предыдущей теореме будет

$$\frac{P_x \cdot p_x}{P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3 + \dots}$$

Отсюда вероятность того, что событие G случится в этой гипотезе, будет

$$\frac{P_x p_x q_x}{P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3 + \dots}$$

Но событие G может только случиться или с событием F_1 , или с событием F_2 и т. д., а потому вероятность того, что оно случится вообще, есть

$$H = \frac{P_1 p_1 q_1 + P_2 p_2 q_2 + P_3 p_3 q_3 + \dots}{P_1 q_1 + P_2 q_2 + P_3 q_3 + \dots} = \frac{\sum P_x p_x q_x}{\sum P_x p_x}$$

Рассмотрим такой пример: экзаменующийся вынимает l билетов и отвечает на них удовлетворительно. Спрашивается, какова вероятность, что и на следующий вынутый билет он ответит удовлетворительно.

Пусть N есть число билетов. Событие E есть вынутие l удачных билетов. События или, лучше сказать, гипотезы F_1, F_2, \dots суть предположения, что экзаменующийся может отвечать на

$$0, 1, 2, 3, \dots, x, \dots, N$$

билетов. Предполагается, что все эти гипотезы имеют одинаковую вероятность, так что

$$P_0 = P_1 = P_2 = \dots = P_x = \dots = P_N = \frac{1}{N+1}$$

(конечно это предположение не правильно).

Вероятность p_x того, что экзаменующийся, будучи в состоянии ответить на x билетов и вынимая l билетов, отвечает на них удовлетворительно, выражается формулой

$$p_x = \frac{x}{N} \cdot \frac{x-1}{N-1} \cdot \frac{x-2}{N-2} \cdots \frac{x-l+1}{N-l+1}$$

Событие G состоит в том, что экзаменующийся может ответить удовлетворительно на $(l+1)$ -ый билет. Вероятность этого события в гипотезе F_x есть

$$q_x = \frac{x-l}{N-l}$$

Вследствие этого искомая вероятность H найдется по формуле

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{\sum_0^{N+1} \frac{1}{N+1} \cdot \frac{x}{N} \cdot \frac{x-1}{N-1} \cdots \frac{x-l+1}{N-l+1} \cdot \frac{x-l}{N-l}}{\sum_0^{N+1} \frac{1}{N+1} \cdot \frac{x}{N} \cdot \frac{x-1}{N-1} \cdots \frac{x-l+1}{N-l+1}} = \\
 &= \frac{1}{N-l} \cdot \frac{\sum_0^{N+1} x(x-1) \dots (x-l)}{\sum_0^{N+1} x(x-1) \dots (x-l+1)}
 \end{aligned}$$

Но мы имеем:

$$\begin{aligned}
 \sum_0^{N+1} x(x-1) \dots (x-l) &= \frac{(N+1)N \cdot (N-1) \dots (N-l)}{l+2} \\
 \sum_0^{N+1} x(x-1) \dots (x-l+1) &= \frac{(N+1) \cdot N \cdot (N-1) \dots (N-l+1)}{l+1}
 \end{aligned}$$

а потому

$$H = \frac{1}{N-l} \cdot \frac{(N+1) \cdot N \cdot (N-1) \dots (N-l+1)(N-l)}{(N+1) \cdot N \cdot (N-1) \dots N-l+1} \cdot \frac{l+1}{l+2} = \frac{l+1}{l+2}$$

Заметим, что вероятность, определяемая при помощи четвертого закона, на столько же мало согласуется с действительностью (т. е. с нашим внутренним убеждением), как и вероятность, определяемая при помощи третьего закона.

Этим мы закончим изложение законов вероятностей и перейдем к их приложениям, причем мы начнем с вероятностей а priori, т. е. с приложений первых двух законов.

О математическом ожидании

§ 8. Мы будем теперь иметь дело с величиной, называемой *математическим ожиданием*. Эта величина, как и математическая вероятность, представляется в том случае, когда мы определяем шансы для известного события, но она имеет большее значение на практике, чем самая вероятность, потому что на основании ее у нас составляется суждение о том, что мы можем ожидать перед появлением известного события.

Положим, что

$$p_1, p_2, \dots, p_i$$

суть вероятности несовместных событий

$$E_1, E_2, \dots, E_i$$

и что мы ожидаем появления одного из них. Положим теперь, что

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_i$$

суть величины, измеряющие эти события (так, напр., если события представляют известные выигрыши, то a_1, a_2, \dots, a_i представляют величины этих выигрышей), в таком случае величину

$$a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_i p_i = \sum a_j p_j$$

мы будем называть математическим ожиданием того, что одно из этих событий будет иметь место.

Эту величину будем просто называть математическим ожиданием количеств a_1, a_2, \dots, a_i .

Если у нас имеется только одно событие E_1 , то математическим ожиданием его будет $a_1 p_1$; эта величина и представляет то, что обыкновенно называют математическим ожиданием количества a_1 .

Мы теперь обратимся к решению такой задачи: 'положим, что мы имеем количества x, y, z, \dots , из которых первое может иметь только одно из следующих значений:

$$x_1, x_2, \dots, x_\lambda$$

второе — одно из следующих:

$$y_1, y_2, \dots, y_\mu$$

третье —

$$z_1, z_2, \dots, z_\nu \text{ и т. д.}$$

причем число количеств $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots, z_1, z_2, \dots$ может быть неопределенно велико. Положим еще, что вероятность того, что x имеет значение x_λ , есть p_λ , что y имеет значение y_μ , есть q_μ , что z имеет значение z_ν , есть r_ν и т. д. На основании этого постараемся найти вероятность P того, что сумма

$$x_\lambda + y_\mu + z_\nu + \dots$$

заключается между известными пределами L и M (эти пределы, как мы увидим далее, не будут совершенно произвольными).

Назовем соответственно через a, b, c, \dots — математическое ожидание величин x, y, z и т. д., так что

$$a = \sum x_\lambda p_\lambda; \quad b = \sum y_\mu q_\mu; \quad c = \sum z_\nu r_\nu; \quad \dots$$

Назовем еще через a_1, b_1, c_1, \dots — математическое ожидание квадратов величин x, y, z, \dots , так что

$$a_1 = \sum x_\lambda^2 p_\lambda; \quad b_1 = \sum y_\mu^2 q_\mu; \quad c_1 = \sum z_\nu^2 r_\nu; \quad \dots$$

так как, по нашему предположению, x непременно должно иметь одно из значений x_1, x_2, \dots, x_i, y — одно из значений y_1, y_2, \dots , то

$$\sum p_\lambda = 1; \quad \sum q_\mu = 1; \quad \sum r_\nu = 1; \quad \dots$$

Рассмотрим теперь сумму

$$S = \sum [x_\lambda + y_\mu + z_\nu + \dots - a - b - c \dots]^2 p_\lambda q_\mu r_\nu \dots$$

распространенную на все указанные выше значения $x, y, z \dots$

Полагая

$$U = z_\mu + y_\nu + \dots - b - c - \dots$$

мы будем иметь

$$S = \sum (x_\lambda - a + U)^2 p_\lambda q_\mu r_\nu \dots$$

или

$$S = \sum (x - a)^2 p_\lambda q_\mu r_\nu + 2 \sum (x_\lambda - a) U p_\lambda q_\mu r_\nu \dots + \sum U^2 p_\lambda q_\mu r_\nu \dots$$

но

$$\begin{aligned} \sum (x - a)^2 p_\lambda q_\mu r_\nu &= \sum (x - a)^2 p_\lambda \sum q_\mu \cdot \sum r_\nu \dots = \\ &= \sum (x_\lambda - a)^2 p_\lambda = \sum x_\lambda^2 p_\lambda - 2a \sum x_\lambda p_\lambda + a^2 \sum p_\lambda = a_1 - a^2 \\ \sum (x - a) \cdot U \cdot p_\lambda q_\mu r_\nu \dots &= \sum (x_\lambda - a) p_\lambda \cdot \sum U \cdot q_\mu r_\nu \dots \end{aligned}$$

ибо U не зависит от λ . Но

$$\sum (x_\lambda - a) p_\lambda = \sum x_\lambda p_\lambda - a \sum p_\lambda = 0$$

и наконец,

$$\sum U^2 p_\lambda q_\mu r_\nu = \sum p_\lambda \cdot \sum U^2 q_\mu r_\nu \dots = \sum U^2 q_\mu r_\nu \dots$$

Итак, мы имеем

$$S = a_1 - a^2 + \sum U^2 q_\mu r_\nu \dots$$

т. е.

$$\begin{aligned} \sum (x_\lambda + y_\mu + z_\nu \dots - a - b - c)^2 p_\lambda q_\mu r_\nu &= \\ &= a_1 - a^2 + \sum (y_\mu + z_\nu \dots - b - c \dots)^2 q_\mu r_\nu \dots \end{aligned}$$

Отсюда нетрудно заключить, что

$$S = a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + c_1 - c^2 + \dots$$

Полагая теперь

$$\frac{x_\lambda + y_\mu + z_\nu \dots - a - b - c \dots}{t \sqrt{a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + c_1 - c^2 \dots}} = V$$

где t — совершенно произвольное количество, мы будем иметь

$$\sum V^2 p_\lambda q_\mu r_\nu \dots = \frac{1}{t^2}$$

где сумма распространена на все указанные значения: x, y, z .

Разобьем теперь эту сумму на три таких, чтобы первая, которую обозначим через \sum_1 , была распространена на все значения этих переменных, для которых

$$-\infty < V < -1$$

вторая \sum_2 — на те значения x, y, z , для которых

$$-1 < V < +1$$

и \sum_3 — на все те значения, для которых

$$1 < V < \infty$$

вследствие этого мы будем иметь

$$\sum_1 V^2 p_\lambda q_\mu r_\nu \dots + \sum_2 V^2 p_\lambda q_\mu r_\nu \dots + \sum_3 V^2 p_\lambda q_\mu r_\nu \dots = \frac{1}{t^2}$$

Так как в первой и третьей сумме V^2 больше 1, а во второй больше нуля, то, замечая, что все слагаемые положительные, будем иметь

$$\sum_1 V^2 p_\lambda q_\mu r_\nu + \sum_2 V^2 p_\lambda q_\mu r_\nu + \sum_3 V^2 p_\lambda q_\mu r_\nu > \sum_1 p_\lambda q_\mu r_\nu + \sum_3 p_\lambda q_\mu r_\nu \dots$$

вследствие чего найдем

$$\sum_1 p_\lambda q_\mu r_\nu + \sum_3 p_\lambda q_\mu r_\nu < \frac{1}{t^2}$$

но $p_\lambda \cdot q_\mu \cdot r_\nu \dots$ есть вероятность суммы

$$x_\lambda + y_\mu + z_\nu + \dots$$

а потому

$$\sum p_\lambda q_\mu r_\nu$$

распространенная на все «возможные» значения переменных $x, y, z \dots$ есть вероятность того, что мы будем иметь одну из таких сумм, а эта вероятность равна 1. Итак,

$$\sum q_\lambda q_\mu r_\nu \dots + \sum_2 p_\lambda q_\mu r_\nu \dots + \sum_3 p_\lambda q_\mu r_\nu \dots = 1$$

Вычитая отсюда полученное выше неравенство, мы имеем

$$\sum_2 q_\lambda q_\mu r_\nu \dots > 1 - \frac{1}{t^2}$$

Но $\sum_2 q_\lambda q_\mu r_\nu \dots$ есть вероятность того, что имеется одна из сумм

$$x_\lambda + y_\mu + z_\nu + \dots$$

в которые входят только величины x, y, z и т. д., удовлетворяющие неравенствам

$$-1 < V < +1$$

другими словами, это есть вероятность P того, что сумма

$$x + y + z + \dots$$

имеет одно из тех значений, которые дают ей величины x, y, z, \dots , делающие V заключающимся между пределами -1 и $+1$. Итак, мы имеем

$$1 > P > 1 - \frac{1}{t^2}$$

Но неравенства

$$-1 < V < +1$$

дают

$$\begin{aligned} & -t \sqrt{a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + \dots} \\ & < x_\lambda + y_\mu + z_\nu - a - b - c \dots < \\ & +t \sqrt{a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + \dots} \end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned} a + b + c \dots - t \sqrt{a_1 - a^2 + b_1 - b^2 \dots} \\ & < x_\lambda + y_\mu + z_\nu + \dots < \\ a + b + c \dots + t \sqrt{a_1 - a^2 + b_1 - b^2 \dots} \end{aligned}$$

Отсюда полагая

$$L = a + b + c \dots - t \sqrt{a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + c_1 - c^2 \dots}$$

$$M = a + b + c \dots + t \sqrt{a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + c_1 - c^2 \dots}$$

мы приходим к такому заключению: *вероятность P того, что сумма*

$$x + y + z + \dots$$

содержится между пределами L и M, определяется равенством

$$P = 1 - \frac{\theta}{t^2}$$

где θ — некоторая положительная правильная дробь.

§ 9. Положим теперь, что число величин x, y, z, \dots есть n , так что

$$\frac{x + y + z + \dots}{n}$$

есть среднее арифметическое из этих величин. На основании предыдущего заключаем, что P есть вероятность того, что эта величина содержится между пределами

$$\frac{a + b + c \dots}{n} + \frac{t}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + c_1 - c^2 \dots}{n}}$$

и

$$\frac{a + b + c \dots}{n} - \frac{t}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + c_1 - c^2 \dots}{n}}$$

Если мы допустим, что x, y, z, \dots суть повторения одного и того же события, то мы будем иметь:

$$a = b = c \dots; \quad a_1 = b_1 = c_1 \dots$$

и вследствие этого найдем, что вероятность P того, что имеют место неравенства

$$a - \frac{t}{\sqrt{n}} \sqrt{a_1 - a^2} < \frac{x + y + z \dots}{n} < a + \frac{t}{\sqrt{n}} \sqrt{a_1 - a^2}$$

определяется формулой

$$P = 1 - \frac{\theta}{t^2}$$

Отсюда видно, что выбором t мы можем сделать P сколь угодно близкой к 1, а с другой стороны, при всяком t и при $n = \infty$ пределы, между которыми заключается

$$\frac{x + y + z + \dots}{n}$$

сливаются, обращаясь в a . Так, напр., если мы положим

$$t = \frac{1}{\alpha n^{\frac{1}{3}}}$$

то будем иметь следующее: вероятность P того, что

$$\frac{x + y + z + \dots}{n}$$

заклучается между пределами

$$a - \frac{1}{\alpha n^{\frac{1}{3}}} \sqrt{a_1 - a^2} \quad \text{и} \quad a + \frac{1}{\alpha n^{\frac{1}{3}}} \sqrt{a_1 - a^2}$$

выражается формулой

$$P = 1 - \frac{\alpha^2 \theta}{n^{\frac{1}{3}}}$$

Вследствие произвольности t , мы в праве предположить α некоторым постоянным количеством, не зависящим от n , а потому будем иметь

$$\lim (P)_{n=\infty} = 1$$

где $\lim (P)_{n=\infty}$ есть вероятность того, что

$$\lim \left(\frac{x + y + z + \dots}{n} \right)_{n=\infty} = a$$

Так как эта вероятность равна 1, то мы и заключаем, что предел средней арифметической из величин x, y, z, \dots , при увеличении числа их до бесконечности, есть a .

Здесь мы встречаемся с новым понятием о пределе, потому что к доказанному случаю уже нельзя применить то определение предела, которое обыкновенно встречается в математике и по которому предел есть такая постоянная величина, разность между которой с переменною может быть сделана менее всякой данной величины: на самом деле мы здесь не можем этого утверждать с достоверностью, а можем только сказать, что *вероятность того*, что разность между постоянной и переменной величиною

может быть сделана менее всякой данной величины, имеет пределом 1, причем в последнем случае слову «предел» приписывается его обычное значение. Мы теперь примем это новое определение предела, по которому мы заключаем о пределе какой-нибудь величины по ее вероятности, имеющей пределом 1.

На основании этого определения, мы можем полученные в этом параграфе выводы проформулировать в виде такой теоремы.

Теорема. Среднее арифметическое весьма большого числа величин, имеющих одинаковые математические ожидания, имеет своим пределом это математическое ожидание.

§ 10. Перейдем теперь к другим следствиям из полученного нами в § 8. Особенно замечателен случай, когда все зависит от того, случится или не случится некоторое событие. В этом случае мы рассматриваем x, y, z, \dots как величины таких событий, из которых каждое имеет два вида: 1) событие не имеет места и 2) событие имеет место; мы условимся приписывать этим величинам значения, равные нулю в первом случае и равные 1 — во втором, так что будет:

$$x_1 = 0, x_2 = 1; y_1 = 0, y_2 = 1; z_1 = 0; z_2 = 1, \text{ и т. д.}$$

В этом случае p_1, q_1, r_1, \dots суть вероятности того, что первое, второе, третье, ... событие не имеют места, а p_2, q_2, r_2, \dots — вероятности того, что эти события имеют место, и так как в данном случае величины x, y, z, \dots получают только значения 0 и 1, то будет:

$$a = 0 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 = p_2; a_1 = 0^2 \cdot p_1 + 1^2 \cdot p_2 = p_2 \\ b = 0 \cdot q_1 + 1 \cdot q_2 = q_2; b_1 = 0^2 \cdot q_1 + 1^2 \cdot q_2 = q_2 \text{ и т. д.}$$

или означая p_2, q_2, r_2, \dots через p, q, r и т. д., мы имеем:

$$a = a_1 = p; b = b_1 = q; c = c_1 = r, \text{ и т. д.}$$

Вследствие этого мы находим, что

$$P = 1 - \frac{\theta}{t^2}$$

есть вероятность того, что

$$\frac{p+q+r+\dots}{n} - \frac{t}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{p-p^2+q-q^2+\dots}{n}} < \frac{x+y+z+\dots}{n} < \\ < \frac{p+q+r+\dots}{n} + \frac{t}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{p-p^2+q-q^2+\dots}{n}}$$

но нетрудно видеть, что

$$\frac{x + y + z + \dots}{n} = \frac{m}{n}$$

где m есть число тех случаев, когда событие имело место, а потому, как в предыдущем параграфе, заключаем, что

$$\lim \frac{m}{n} = \frac{p + q + r + \dots}{n}$$

Это равенство выражает такую теорему.

Теорема. *Предел отношения числа повторений события к числу испытаний равняется средней арифметической из вероятностей событий.*

Этот закон был открыт Пуассоном и представляет обобщение закона Бернулли, который получается из предыдущего в предположении

$$p = q = r = \dots$$

так что может быть выражен равенством

$$\lim \frac{m}{n} = p$$

которое показывает, что при весьма большом числе испытаний над каким-нибудь событием, причем вероятность случиться событию при каждом испытании остается одною и тою же, предел отношения числа повторений события к числу испытаний равен вероятности события.

О повторении событий

§ 11. Положим, что производится n испытаний над каким-нибудь событием E , и допустим сначала, что при каждом определенном испытании вероятности этого события различны, так что p_i есть вероятность случиться событию E при i -ом испытании. Постараемся теперь определить вероятность $P_{m,n}$ того, что при упомянутых n испытаниях событие повторилось m раз. Замечая, что это может произойти весьма различными способами, смотря по тому, в каком порядке следуют испытания, в которых событие имеет место, и испытания, в которых событие не имеет места, мы определим вероятность повторения события m раз в известном определенном порядке и возьмем сумму таких вероятностей, которая и будет искомою вероятностью $P_{m,n}$.

Каждый из членов этой суммы составит из количеств p_1, p_2, \dots, p_n следующим образом: если событие E случится m раз в m первых испытаниях и в остальные испытания не повторится, то это представит один

из способов, каким вообще событие E может повториться m раз при n испытаниях.

Этот способ повторения события может быть рассматриваем как событие сложное, потому что представляет совместное появление нескольких событий, а именно: событие E имеет место при первом испытании, событие E имеет место при втором испытании, . . . событие E имеет место при m -ом испытании, событие E не имеет места при $(m+1)$ -ом испытании . . . , событие E не имеет места при n -ом испытании, поэтому вероятность этой комбинации выразится так:

$$p_1 p_2 p_3 \dots p_m \cdot (1 - p_{m+1}) \cdot (1 - p_{m+2}) \dots (1 - p_n)$$

Таким образом находятся вероятности других комбинаций, и сумма вероятностей всех различных комбинаций, число которых будет

$$\frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1)m} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-m)}$$

и представит, как указано выше, искомую вероятность $P_{n,m}$.

Отсюда нетрудно видеть, что $P_{m,n}$ есть коэффициент при t^m в разложении выражения

$$(p_1 t + 1 - p_1)(p_2 t + 1 - p_2)(p_3 t + 1 - p_3) \dots (p_n t + 1 - p_n) = \sum P_{n,k} t^k$$

Этот способ определения вероятности, как коэффициента в некотором разложении, был предложен Лапласом, при этом функция, определяющая своим разложением величины $P_{n,k}$, называется «производящей» (fonction génératrice).

Для того случая, когда при всех испытаниях событие имеет одну и ту же вероятность p , будет

$$p_1 = p_2 = p_3 = \dots = p_n = p$$

и «производящая» функция примет такой вид:

$$(pt + 1 - p)^n$$

так что для этого случая будет

$$P_{n,m} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-m)} \cdot p^m (1-p)^{n-m}$$

Замечая, что в этом выражении множитель $p^m (1-p)^{n-m}$ представляет вероятность того, что событие E повторится m раз при n испытаниях в известном определенном порядке, а другой множитель есть число этих

порядков, можно было бы в этом частном случае найти вероятность $P_{n,m}$ и прямым способом.

§ 12. Найдем теперь вероятность $P_{n,m}$ по третьему способу, который укажет нам на весьма распространенный и во многих случаях полезный метод нахождения вероятностей. Этот метод состоит в составлении и интегрировании уравнения в конечных разностях, которому должна удовлетворять искомая вероятность.

Для составления такого уравнения в рассматриваемом случае, заметим, что событие E может повториться m раз при n испытаниях только двумя способами: или имея место при n -ом испытании, или не имея в нем места. В первом случае искомая вероятность обращается в $P_{n-1, m-1}$, т. е. в вероятность, что событие E повторится $m-1$ раз при $(n-1)$ первых испытаниях, во втором случае искомая вероятность есть $P_{n-1, m}$, т. е. что событие случится m раз при $(n-1)$ испытаниях.

Предполагая теперь вероятность события E при каждом испытании одинаковой, мы найдем, что вероятность первого предположения есть p , вероятность же второго, как прямо противоположного, есть $1-p$. Таким образом имеем уравнение

$$P_{n,m} = pP_{n-1, m-1} + (1-p)P_{n-1, m}$$

Это уравнение содержит две переменных независимых n и m , так что не принадлежит к числу рассмотренных в курсе теории конечных разностей; вообще интегрирование таких уравнений представляет большие трудности, но рассматриваемое уравнение может быть интегрировано при помощи «производящих» функций, что мы сейчас и сделаем, но предварительно заметим следующее: при интегрировании каждого уравнения получаются произвольные постоянные, определение которых в каждом частном случае иногда очень затруднительно. В теории вероятностей это определение не представляет никаких затруднений потому, что некоторые частные случаи по самой сущности вопросов не могут иметь места. Так, напр., в выражении $P_{n,m}$ m не может быть больше n , а потому $P_{n,m} = 0$ при $m > n$ по невозможности такого события; по той же причине $P_{0,m} = 0$ и $P_{n,0} = 0$; так же $P_{n,m} = 0$ при m или n отрицательном. Это, между прочим, показывает, что в теории вероятностей нет необходимости обращать внимание на то, возможна или нет некоторая гипотеза, так как невозможность гипотезы повлечет за собою равенство нулю ее вероятности, и окончательный результат будет иметь такой вид, как будто мы пользовались только возможными гипотезами.

После этих замечаний перейдем к интегрированию нашего уравнения. Умножая это уравнение на t^m , где t — величина произвольная, получим

$$P_{n,m} t^m = P_{n-1,m-1} \cdot p t^m + P_{n-1,m} (1-p) t^m$$

Суммируя по m обе части этого равенства для всех возможных значений m , т. е. от 0 до n включительно, будем иметь

$$\sum_{m=0}^{m=n+1} P_{n,m} t^m = \sum_{m=0}^{m=n+1} P_{n-1,m-1} p t^m + \sum_{m=0}^{m=n+1} P_{n-1,m} (1-p) t^m$$

полагая теперь

$$U_\lambda = \sum_{m=0}^{m=\lambda+1} P_{\lambda,m} t^m$$

имеем

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{m=n+1} P_{n,m} t^m &= U_n \\ \sum_{m=0}^{m=n+1} P_{n-1,m-1} p t^m &= p t \sum_{m=0}^{m=n+1} P_{n-1,m-1} t^{m-1} = p t \sum_{m=1}^{m=n} P_{n-1,m} t^m = \\ &= p t \left\{ P_{n-1,-1} \cdot t^{-1} + \sum_{m=0}^{m=n} P_{n-1,m} t^m \right\}^* \end{aligned}$$

Но, как мы видели,

$$P_{n-1,-1} = 0$$

а потому

$$\sum_{m=0}^{m=n+1} P_{n-1,m-1} p t^m = p t \cdot U_{n-1}$$

Далее мы имеем

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{m=n+1} P_{n-1,m} (1-p) t^m &= (1-p) \left\{ \sum_{m=0}^{m=n} P_{n-1,m} t^m + P_{n-1,n} t^n \right\} = \\ &= (1-p) \sum_{m=0}^{m=n} P_{n-1,m} t^m \end{aligned}$$

ибо

$$P_{n-1,n} = 0$$

* Величину pt выносим за знак суммы, ибо эта величина не зависит от переменной m , по которой производится суммирование, так как p есть постоянная, а t — произвольная величина, которую также полагаем не зависящей от m .

Итак, будет

$$\sum_{m=0}^{m=n+1} P_{n-1,m} (1-p) t^m = (1-p) U_{m-1}$$

вследствие чего наше уравнение принимает вид

$$U_n = pt U_{n-1} + (1-p) U_{n-1}$$

Таким образом мы получаем следующее линейное уравнение:

$$U_n - (pt + 1 - p) U_{n-1} = 0$$

интеграл которого, как нетрудно видеть, есть

$$U_n = C(pt + 1 - p)^n$$

где C — произвольная постоянная, которую мы определим. Замечая, что из этого уравнения следует

$$U_1 = C(pt + 1 - p)$$

вместе с тем

$$U_1 = \sum_{m=0}^{m=2} P_{1,m} t^m = P_{1,0} t^0 + P_{1,1} t$$

Но $P_{1,0}$ есть вероятность того, что при одном испытании событие не случится, а $P_{1,1}$ — что оно случится, вследствие чего

$$P_{1,0} = 1 - p; \quad P_{1,1} = p$$

откуда видно, что $C = 1$.

Итак, имеем формулу

$$(1) \quad \sum_{m=0}^{m=n+1} P_{n,m} t^m = (pt + 1 - p)^n$$

Здесь t совершенно произвольно, коэффициенты при одинаковых степенях t в обеих частях равенства должны быть равны, и разлагая правую часть по биному Ньютона, имеем

$$(2) \quad P_{n,m} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m \cdot 1 \cdot 2 \dots (n-m)} \cdot p^m \cdot (1-p)^{n-m}$$

Заметим, что последнее выражение не следует принимать буквально в предельных случаях $m = 0$ и $m = n$: в этих случаях коэффициент при

$$p^m (1-p)^{n-m}$$

как то следует из разложения, надо считать равным 1, так что будет:

$$P_{n,0} = 1 - p; \quad P_{n,n} = p^n.$$

§ 13. Выведем теперь закон Бернулли, основываясь на уравнении (1). Дифференцируя это уравнение по t , находим:

$$\sum_{m=0}^{m=n+1} m P_{n,m} t^{m-1} = n(pt+1-p)^{n-1} \cdot p$$

$$\sum_{m=0}^{m=n+1} m(m-1) P_{n,m} t^{m-2} = n(n-1)(pt+1-p)^{n-2} \cdot p^2$$

Полагая в уравнении (1) и в этих двух $t = 1$, получим:

$$\sum_{m=0}^{m=n+1} P_{n,m} = 1$$

$$\sum_{m=0}^{m=n+1} m P_{n,m} = np$$

$$\sum_{m=0}^{m=n+1} m(m-1) P_{n,m} = n(n-1)p^2 = n^2 p^2 - np^2$$

Из двух последних уравнений мы находим

$$\sum_{m=0}^{m=n+1} m^2 P_{n,m} = n^2 p^2 + n(1-p)p$$

поэтому

$$\sum_{m=0}^{m=n+1} (m-np)^2 P_{n,m} = \sum_{m=0}^{m=n+1} m^2 P_{n,m} - 2pn \sum_{m=0}^{m=n+1} m P_{n,m} +$$

$$+ p^2 n^2 \sum_{m=0}^{m=n+1} P_{n,m} = n(1-p)p$$

откуда

$$\sum_{m=0}^{m=n+1} P_{n,m} \cdot \left[\frac{m-np}{s \sqrt{n(1-p)p}} \right]^2 = \frac{1}{s^2}$$

где s есть произвольное число. Отсюда

$$\sum_{m=0}^{m=n+1} (m-np)^2 P_{n,m} = \sum_{m=0}^{m=n+1} m^2 P_{n,m} - 2pn \sum_{m=0}^{m=n+1} m P_{n,m} +$$

$$+ p^2 n^2 \sum_{m=0}^{m=n+1} P_{n,m} = n(1-p)p$$

откуда

$$\sum_{m=0}^{m=n+1} \left[\frac{m-np}{s \sqrt{n(1-p)p}} \right]^2 \cdot P_{n,m} = \frac{1}{s^2}$$

где s есть произвольное число. Отсюда следует

$$\sum_{m=0}^{m=\mu+1} \left[\frac{m-np}{s\sqrt{n(1-p)p}} \right]^2 P_{n,m} + \sum_{m=\mu+1}^{m=\nu+1} \left[\frac{m-np}{s\sqrt{n(1-p)p}} \right]^2 P_{n,m} + \sum_{m=\nu+1}^{m=n+1} \left[\frac{m-np}{s\sqrt{n(1-p)p}} \right]^2 P_{nm} = \frac{1}{s^2}$$

Обозначим возвышаемое под знаком суммы количество через A и положим, что:

$$\begin{aligned} \text{для} \quad & 0 \leq m < \mu + 1 & -\infty < A < -1 \\ \text{»} \quad & \mu + 1 \leq m < \nu + 1 & -1 < A < +1 \\ \text{»} \quad & \nu + 1 \leq m \leq n + 1 & 1 < A < +\infty \end{aligned}$$

вследствие этого будем иметь

$$\sum_{m=0}^{m=\mu+1} P_{n,m} + \sum_{m=\nu+1}^{m=n+1} P_{n,m} < \frac{1}{s^2}$$

Но мы имеем

$$\sum_{m=0}^{m=\mu+1} P_{nm} + \sum_{m=\mu+1}^{m=\nu+1} P_{n,m} + \sum_{m=\nu+1}^{m=n+1} P_{n,m} = 1$$

Из этого равенства и предыдущего неравенства находим

$$\sum_{m=\mu+1}^{m=\nu+1} P_{n,m} > 1 - \frac{1}{s^2}$$

Первая часть этого неравенства есть вероятность того, что при n -испытаниях число повторений события заключается между пределами

$$\mu + 1 \text{ и } \nu + 1$$

и, следовательно, вероятность того, что

$$(a) \quad -1 < \frac{m-np}{s\sqrt{n(1-p)p}} < 1$$

Называя эту вероятность через Π , мы будем иметь

$$1 > \Pi > 1 - \frac{1}{s^2}$$

неравенство (а) дает

$$pn - s\sqrt{p(1-p)n} < m < pn + s\sqrt{p(1-p)n}$$

откуда

$$p - \frac{s}{\sqrt{n}} \sqrt{p(1-p)} < \frac{m}{n} < p + \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{p(1-p)}$$

Отсюда видно, что пределы, между которыми заключается $\frac{m}{n}$, при $n = \infty$ сливаются и обращаются в p , а вероятность, что $\frac{m}{n}$ заключается между этими пределами, представляется формулой

$$\Pi = 1 - \frac{\theta}{s^2}$$

где θ — правильная дробь и s — произвольное число, откуда видно, что эту вероятность можно сделать сколь угодно близкой к 1, поэтому мы приходим к заключению, что

$$\left(\lim \frac{m}{n}\right)_{n=\infty} = p$$

причем в этом случае предел имеет то особенное значение, о котором сказано выше.

Таким образом мы пришли к закону Бернулли. Наш вывод основывался на значении суммы

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{m=n+1} (n - mp)^2 P_{n,m} = \\ & = \sum_{m=0}^{m=n+1} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-m)} \cdot p^m (1-p)^{n-m} (m-np)^2 \end{aligned}$$

Заметим, что эту сумму можно найти и другим путем. Положим в уравнении (1) $t = e^\alpha$; умножая обе части на $e^{-\alpha p n}$, получим

$$\sum_{m=0}^{m=n+1} P_{nm} \cdot e^{\alpha(m-np)} = [pe^{\alpha(1-p)} + e^{-\alpha p}(1-p)]^n$$

но вообще

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \dots$$

поэтому

$$e^{\alpha(m-np)} = 1 + \frac{\alpha}{1} \cdot (m-np) + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} \cdot (m-np)^2 + \dots$$

$$e^{\alpha(1-p)} = 1 + \frac{\alpha}{1} \cdot (1-p) + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} \cdot (1-p)^2 + \dots$$

$$e^{-\alpha p} = 1 - \frac{\alpha}{1} \cdot p + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} \cdot p^2 - \dots$$

Вследствие этого мы находим

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{m=n+1} P_{n,m} + \alpha \sum_{m=0}^{m=n+1} P_{n,m} (m - np) + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} \sum_{m=0}^{m=n+1} P_{n,m} (m - np)^2 + \dots = \\ = \left\{ \left[p + \frac{\alpha}{1} \cdot p(1-p) + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} p(1-p)^2 + \dots \right] + \right. \\ \left. + \left[(1-p) - \frac{\alpha}{1} \cdot p(1-p) + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} p^2(1-p) + \dots \right] \right\}^n = \\ = \left[1 + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} p(1-p) + \dots \right]^n \end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{m=n+1} P_{n,m} &= 1 \\ \sum_{m=0}^{m=n+1} P_{n,m} (m - np) &= 0 \\ \sum_{m=0}^{m=n+1} P_{n,m} (m - np)^2 &= p(1-p) \cdot n \end{aligned}$$

и т. д.

§ 14. Перейдем теперь к другому вопросу. Постараемся найти самое вероятное число повторений события при определенном числе испытаний.

Этот вопрос сводится на нахождение значения m , делающего $P_{n,m}$ максимум при данных n и p .

Пусть μ есть искомое значение m ; чтобы $P_{n,\mu}$ было максимум, необходимо условия:

$$\begin{aligned} P_{n,\mu-1} &\text{ не } > P_{n,\mu} \\ P_{n,\mu+1} &> P_{n,\mu} \end{aligned}$$

Но мы имеем:

$$P_{n,\mu-1} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (\mu-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n + \mu + 1} \cdot p^{\mu-1} (1-p)^{n-\mu+1}$$

$$P_{n,\mu} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \mu \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-\mu)} \cdot p^\mu (1-p)^{n-\mu}$$

$$P_{n,\mu+1} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (\mu+1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-\mu+1)} \cdot p^{\mu+1} (1-p)^{n-\mu-1}$$

Вследствие этого наши условия принимают вид:

$$\frac{1-p}{n-\mu+1} \text{ не } > \frac{p}{\mu}$$

$$\frac{p}{\mu+1} \text{ не } > \frac{1-p}{n-\mu}$$

или

$$\frac{1-p}{n-\mu+1} \leq \frac{p}{\mu} \text{ и } \frac{p}{\mu+1} \leq \frac{1-p}{n-\mu}$$

откуда следует:

$$(1-p)\mu \leq p(n-\mu+1) \text{ и } p(n-\mu) \leq (1-p)(\mu+1)$$

$$\mu \leq p(n+1) \text{ и } p(n+1)-1 \leq \mu$$

Теперь следует разобрать два случая: 1) $p(n+1)$ — число дробное и 2) $p(n+1)$ — число целое.

В первом случае знаков равенства быть не может, и из неравенств

$$p(n+1)-1 < \mu < p(n+1)$$

мы получим

$$\mu = E[p(n+1)]$$

Во втором случае будем иметь:

$$\mu \leq p(n+1) \text{ и } \mu > p(n+1)-1$$

$$\mu \geq p(n+1)-1 \text{ и } \mu < p(n+1)$$

так что получается два решения:

$$\mu_1 = p(n+1)-1 \text{ и } \mu_2 = p(n+1)$$

так что как $P_{n,\mu} = P_{n,\mu_1}$, так и $P_{n,\mu} = P_{n,\mu_2}$ будут максимумы.

Заметим, что если $n, m, n-m$ — числа весьма большие, то мы приблизительно за значения, делающие $P_{n,m}$ максимумом, можем принять np . Мы будем далее делать приближенные выводы, и потому за наибольшее значение $P_{n,m}$ будем принимать $P_{n,np}$.

§ 15. Пользуясь формулой Стирлинга, мы можем написать такое приближенное равенство:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (x-1) \cdot x = \sqrt{2\pi} \cdot x^{x+\frac{1}{2}} \cdot e^{-x}$$

вследствие чего получим

$$P_{n,m} = \frac{\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n} \cdot p^m \cdot (1-p)^{n-m}}{\sqrt{2\pi} m^{m+\frac{1}{2}} \cdot e^{-m} \cdot \sqrt{2\pi} (n-m)^{n-m+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n+m}}$$

что после сокращений представится в таком виде:

$$P_{n,m} = \sqrt{\frac{n}{2\pi \cdot m(n-m)}} \cdot \frac{n^n \cdot p^m (1-p)^{n-m}}{m^m (n-m)^{n-m}}$$

или

$$(3) \quad P_{n,m} = \sqrt{\frac{n}{2\pi m(n-m)}} \cdot \left[\frac{np}{m}\right]^m \cdot \left(\frac{n(1-p)}{n-m}\right)^{n-m}$$

Так как для максимума мы приблизительно имеем

$$m = np \quad \text{и} \quad n - m = (1 - p)n$$

то отсюда получается максимум $P_{n,m}$:

$$(4) \quad P_{n,np} = \frac{1}{\sqrt{2\pi p(1-p)n}}$$

Найдем теперь наивероятнейшее число m , пользуясь формулой (3). Так как эта формула представляет приближенное выражение $P_{n,m}$ при n , m , $n - m$ весьма больших, причем мы пренебрегаем правильными дробями относительно этих чисел, то мы можем рассматривать m как величину, изменяющуюся непрерывным образом и, следовательно, могущую принимать дробные значения, потому что давая m какое-нибудь целое весьма большое значение и прибавляя к этому целому числу какую-либо правильную дробь и вычисляя по формуле (3) для обоих случаев вероятность $P_{n,m}$, мы получим результаты, весьма мало отличающиеся один от другого, если только m отличается от np на конечную величину или бесконечно большую порядка ниже 1 относительно n .

Вследствие этого, для нахождения наивероятнейшего числа m , обращающего $P_{n,m}$ в максимум, мы можем поступать по правилам дифференциального исчисления.

Из уравнения (3) имеем

$$\log P_{n,m} = \frac{1}{2} \log n - \frac{1}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \log m - \frac{1}{2} \log (n-m) +$$

$$+ m \log np - m \log m + (n-m) \log n(1-p) - (n-m) \log (n-m)$$

откуда

$$\frac{1}{P_{n,m}} \cdot \frac{dP_{n,m}}{dm} = -\frac{1}{2m} + \frac{1}{2(n-m)} + \\ + \log np - \log m - 1 - \log n(1-p) + \log(n-m) + 1$$

а потому, для определения наивероятнейшего m , мы получаем уравнение

$$(5) \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{n-2m}{m(n-m)} + \log \frac{m}{n-m} = \log \frac{p}{1-p}$$

Это уравнение точно решить нельзя, а потому мы будем его решать по приближению, тем более, что в данном случае точное решение его для нас не имеет значения, так как само уравнение (3) может дать лишь приближенное значение m .

Замечая, что при n , m , $n-m$ весьма больших (одинакового порядка) величина $\frac{n-2m}{m(n-m)}$ делается весьма малою (так как числитель ее — первого, а знаменатель — второго порядка относительно этих чисел), мы можем для первого приближения этою величиною пренебречь, и тогда получим

$$\log \frac{m}{n-m} = \log \frac{p}{1-p}$$

откуда

$$m = np$$

Отсюда видно, что в первом приближении получается для m величина, которую мы нашли раньше из точной формулы

$$m = E[p(n+1)] = np + \theta$$

где θ есть положительная или отрицательная правильная дробь.

Для второго приближения внесем в уравнение (5), в член, не находящийся под знаком логарифма, вместо m только что найденное его значение, это нам дает такое уравнение

$$\frac{n-2np}{2np(1-p)n} + \log \frac{m}{n-m} = \log \frac{p}{1-p}$$

или

$$\frac{1-2p}{2p(1-p)n} + \log \frac{m}{n-m} = \log \frac{p}{1-p}$$

Откуда

$$\frac{m}{n-m} = \frac{p}{1-p} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{1-2p}{p(1-p)n}}$$

отсюда

$$m = np \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{1-2p}{p(1-p)n}}}{1 - p + pe^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{1-2p}{p(1-p)n}}} = np \cdot \frac{1}{p + (1-p)e^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1-2p}{p(1-p)n}}}$$

Пренебрегая высшими степенями выражения

$$\frac{1-2p}{p(1-p)n}$$

начиная со второй, мы можем положить

$$e^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1-2p}{p(1-p)n}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1-2p}{p(1-p)n}$$

вследствие чего получим

$$m = np \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1-2p}{p(1-p)n}} = np \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1-2p}{np} \right]^{-1}$$

откуда находим приближенно:

$$m = np - \frac{1}{2} \cdot (1-2p)$$

§ 16. Теперь, пользуясь формулой (3), будем искать вероятность того, что при n весьма большом m весьма мало отклоняется от np . Положим

$$(a) \quad m = np + z$$

Так как формула (3) была выведена в предположении, что m , n , $n - m$ числа весьма большие, то при ее применении надо и z считать весьма большим числом, если его рассматривать отдельно и само по себе, но оно может быть весьма мало по сравнению с n . Мы будем предполагать z одного порядка с \sqrt{n} , тогда z и будет обладать теми свойствами, которые указаны выше.

Пользуясь выражением (a), будем иметь

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi \cdot m \cdot (n - m)} &= \sqrt{2\pi \cdot (np + z)(n - np - z)} = \\ &= \sqrt{2\pi n^2 \left(p + \frac{z}{n} \right) \left(1 - p - \frac{z}{n} \right)} \end{aligned}$$

пренебрегая весьма малою величиною $\frac{z}{n}$, получим

$$\sqrt{2\pi m(n - m)} = \sqrt{2\pi \cdot n^2 \cdot p(1 - p)}$$

так что

$$\sqrt{\frac{n}{2\pi m(m - n)}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi p(1 - p)n}}$$

Далее мы имеем

$$\left(\frac{np}{m}\right)^m = \left(\frac{np}{np+z}\right)^{np+z} = \left(\frac{1}{1+\frac{z}{np}}\right)^{np+z}$$

откуда

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{np}{m}\right)^m &= -(np+z)\log\left(1+\frac{z}{np}\right) = \\ &= -(np+z)\left(\frac{z}{np} - \frac{z^2}{2n^2p^2} + \frac{z^3}{3n^3p^3} - \dots\right) = \\ &= -z + \frac{z^2}{2np} - \frac{z^2}{np} - \frac{z^3}{3n^2p^2} + \frac{z^3}{2n^2p^2} + \dots \end{aligned}$$

Но член $\frac{z^3}{n^2p^2}$ и следующие за ним суть величины весьма малые, так как положив

$$z = a\sqrt{n}$$

имеем

$$\frac{z^\mu}{(np)^{\mu-1}} \cdot \frac{n^{\frac{\mu}{2}}}{n^{\mu-1}} = \frac{\alpha^\mu}{p^{\mu-1}} \cdot \frac{1}{n^{\frac{\mu}{2}-1}}$$

Откуда видно, что при $\mu > 2$ отношение $\frac{z^\mu}{(np)^{\mu-1}}$ есть величина весьма малая (при $\mu = 2$ это есть величина конечная). Поэтому, пренебрегая этими малыми членами, получаем

$$\log\left(\frac{np}{m}\right)^m = -z - \frac{z^2}{2np}$$

Поступая таким же образом с другим множителем формулы (3), будем иметь:

$$\begin{aligned} \left[\frac{n(1-p)}{n-m}\right]^{n-m} &= \left[\frac{1}{1-\frac{z}{n(1-p)}}\right]^{n(1-p)-z} \\ \log\left[\frac{n(1-p)}{n-m}\right]^{n-m} &= -(n(1-p)-z)\log\left(1-\frac{z}{n(1-p)}\right) = \\ &= -(n(1-p)-z)\left(-\frac{1}{n(1-p)} - \frac{z^2}{2n^2(1-p)^2} - \dots\right) \\ \log\left(\frac{n(1-p)}{n-m}\right)^{n-m} &= z + \frac{z^2}{2n(1-p)} - \frac{z^2}{n(1-p)} = z - \frac{z^2}{2n(1-p)} \end{aligned}$$

поэтому

$$(6) \quad \log\left[\left(\frac{np}{m}\right)^m \cdot \left(\frac{n(1-p)}{n-m}\right)^{n-m}\right] = -\frac{z^2}{2np} - \frac{z^2}{2n(1-p)} = -\frac{z^2}{2p(1-p)n}$$

откуда

$$\left(\frac{np}{m}\right)^m \cdot \left(\frac{n(1-p)}{n-m}\right)^{n-m} = e^{-\frac{z^2}{2p(1-p)n}} = e^{-\frac{(m-np)^2}{2p(1-p)n}}$$

вследствие чего будет

$$P_{n,m} = \frac{1}{\sqrt{2\pi p(1-p)n}} \cdot e^{-\frac{(m-np)^2}{2p(1-p)n}}$$

Будем теперь искать вероятность того, что z заключается в известных пределах, что равносильно с разысканием вероятности того, что m заключается в известных пределах. Называя эти пределы через L и M , а искомую вероятность — через \prod_L^M и предполагая, что m изменяется до верхнего предела не включительно, мы будем иметь

$$\prod_L^M = P_{n,L} + P_{n,L+1} + P_{n,L+2} + \dots + P_{n,M-1}$$

а потому

$$\prod_L^M = \sum_{m=L}^{m=M} \frac{1}{\sqrt{2\pi p(1-p)n}} \cdot e^{-\frac{(m-np)^2}{2p(1-p)n}}$$

Но мы имеем вообще:

$$\sum v = \int v dx - \frac{1}{2}v + A_1 \frac{dv}{dx} + A_2 \frac{d^2 v}{dx^2} + \dots$$

что в рассматриваемом случае примет такой вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi p(1-p)n}} \cdot \sum_{m=L}^{m=M} e^{-\frac{(m-np)^2}{2p(1-p)n}} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi p(1-p)n}} \cdot \int_L^M e^{-\frac{(m-np)^2}{2p(1-p)n}} \cdot dm \\ &- \left\{ \frac{1}{2\sqrt{2\pi p(1-p)n}} \cdot e^{-\frac{(m-np)^2}{2p(1-p)n}} + \right. \\ &\left. + A_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi p(1-p)n}} \cdot \frac{m-np}{p(1-p)n} e^{-\frac{(m-np)^2}{2p(1-p)n}} + \dots \right\}_L^M \end{aligned}$$

Но при n весьма большом количества

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi p(1-p)n}}; \frac{m-np}{p(1-p)n}; \left(\frac{m-np}{p(1-p)n}\right)^2; \dots$$

суть величины весьма малые, тогда как при этом

$$e^{-\frac{(m-np)^2}{2p(1-p)n}}$$

есть величина всегда конечная, как и произведение интеграла от этой величины на $\frac{1}{\sqrt{2\pi p(1-p)n}}$, что мы увидим в дальнейшем, а потому, пренебрегая членами, состоящими из произведения упомянутых величин на $e^{-\frac{(m-np)^2}{2p(1-p)n}}$, мы получим

$$\prod_L^M = \frac{1}{\sqrt{2\pi p(1-p)n}} \cdot \int_L^M e^{-\frac{(m-np)^2}{2p(1-p)n}} \cdot dm$$

Полагая теперь

$$\frac{m-np}{\sqrt{2p(1-p)n}} = t$$

мы получим

$$\prod_L^M = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^{t_1} e^{-t^2} dt$$

где

$$t_0 = \frac{L-np}{\sqrt{2p(1-p)n}}; \quad t_1 = \frac{M-np}{\sqrt{2p(1-p)n}}$$

откуда

$$L = np + t_0 \sqrt{2p(1-p)n} \quad \text{и} \quad M = np + t_1 \sqrt{2p(1-p)n}$$

Итак, вероятность того, что m заключается в пределах

$$np + t_0 \sqrt{2p(1-p)n} \quad \text{и} \quad np + t_1 \sqrt{2p(1-p)n}$$

определяется такой формулой

$$(7) \quad \prod_{np+t_0\sqrt{2p(1-p)n}}^{np+t_1\sqrt{2p(1-p)n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^{t_1} e^{-t^2} \cdot dt$$

Особенно замечателен тот случай, когда

$$t_0 = -u; \quad t_1 = +u$$

В этом случае

$$(8) \quad \prod_{np-u\sqrt{2p(1-p)n}}^{np+u\sqrt{2p(1-p)n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-u}^{+u} e^{-t^2} \cdot dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-t^2} \cdot dt$$

есть вероятность того, что m заключается между пределами

$$np - u \sqrt{2p(1-p)n} \quad \text{и} \quad np + u \sqrt{2p(1-p)n}$$

или что $\frac{m}{n} - p$ заключается между пределами

$$-u \sqrt{\frac{2p(1-p)}{n}} \quad \text{и} \quad +u \sqrt{\frac{2p(1-p)}{n}}$$

Но мы имеем

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} \cdot dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

а потому $\prod_{np-u}^{np+u} \sqrt{\frac{2p(1-p)}{n}}$, с увеличением u до бесконечности, приближается к 1; но, каково бы u ни было, пределы, между которыми заключается $\frac{m}{n} - p$, при увеличении n сближаются, и при $n = \infty$ делаются равными нулю. Отсюда мы заключаем, как делали и раньше, что

$$\lim \frac{m}{n} = p$$

§ 17. Займемся теперь вычислением интеграла

$$\int_0^u e^{-t^2} \cdot dt$$

с целью показать, насколько быстро значение его приближается к $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ с увеличением u . Мы имеем

$$e^{-t^2} = 1 - \frac{t^2}{1} + \frac{t^4}{1 \cdot 2} - \frac{t^6}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

откуда

$$(9) \quad \int_0^u e^{-t^2} \cdot dt = u - \frac{u^3}{1 \cdot 3} + \frac{u^5}{1 \cdot 2 \cdot 5} - \frac{u^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7} + \frac{u^9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 9} - \dots$$

Таким образом мы выразили этот интеграл при помощи ряда, весьма быстро сходящегося при малом u и потому для таких значений u весьма удобного для вычислений; но для нас особенно важен тот случай, когда u велико, а между тем для больших значений u этот ряд делается весьма медленно сходящимся, поэтому мы должны обратиться к другому способу вычисления этого интеграла.

Замечаем, что

$$\int_0^u e^{-t^2} \cdot dt = \int_0^\infty e^{-t^2} \cdot dt - \int_u^\infty e^{-t^2} \cdot dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_u^\infty e^{-t^2} \cdot dt$$

вследствие чего

$$(10) \quad \prod_{\substack{np+u\sqrt{2p(1-p)n} \\ np-u\sqrt{2p(1-p)n}}}^\infty = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_u^\infty e^{-t^2} \cdot dt$$

Мы теперь и обратимся к вычислению интеграла

$$\int_0^\infty e^{-t^2} \cdot dt$$

Но мы имеем

$$\begin{aligned} \int_u^\infty e^{-t^2} \cdot dt &= -\frac{1}{2} \int_u^\infty (-2t) e^{-t^2} \cdot dt \cdot \frac{1}{t} = \left(\frac{e^{-t^2}}{t} \right)_u^\infty + \\ &+ \int_u^\infty (e^{-t^2}) \cdot \frac{1}{2} t^{-2} \cdot dt = \frac{e^{-u^2}}{2u} - \frac{1}{2} \int_u^\infty e^{-t^2} \cdot t^{-2} \cdot dt \end{aligned}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \int_u^\infty e^{-t^2} \cdot t^{-2} \cdot dt &= \frac{1}{2} - \int_u^\infty -2te^{-t^2} \cdot dt \cdot t^{-3} = \\ &= \left\{ \frac{e^{-t^2}}{2} \cdot t^{-3} \right\}_u^\infty - \frac{3}{2} \int_u^\infty e^{-t^2} \cdot t^{-4} \cdot dt = \frac{e^{-u^2}}{2u^3} - \frac{3}{2} \int_u^\infty e^{-t^2} \cdot t^{-4} \cdot dt \end{aligned}$$

вследствие чего

$$\int_u^\infty e^{-t^2} \cdot dt = \frac{e^{-u^2}}{2u} - \frac{e^{-u^2}}{2^2 u^3} + \frac{3}{2^2} \cdot \int_u^\infty e^{-t^2} \cdot t^4 \cdot dt$$

Так как здесь u и интегралы суть величины положительные, то мы отсюда заключаем, что

$$\frac{e^{-u^2}}{2u} > \int_u^\infty e^{-t^2} \cdot dt > \frac{e^{-u^2}}{2u} - \frac{e^{-u^2}}{2^2 u^3}$$

поэтому мы можем получить

$$\int_u^\infty e^{-t^2} \cdot dt = \theta \cdot \frac{e^{-u^2}}{2u}$$

где θ есть некоторая правильная дробь. Вследствие этого найдем

$$\prod_{\frac{np-u\sqrt{2p(1-p)}}{np-u\sqrt{2p(1-p)}}}^{np+u\sqrt{2p(1-p)}} = 1 - \frac{\theta}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{e^{-u^2}}{u}$$

Из последних двух неравенств мы можем получить и более точную формулу, потому что из них следует, что

$$\int_u^{\infty} e^{-t^2} \cdot dt = \frac{e^{-u^2}}{2u} - \frac{\theta}{2^2} \cdot \frac{e^{-u^2}}{u^3}$$

Это выражение дает

$$\prod_{\frac{np-u\sqrt{2p(1-p)}}{np-u\sqrt{2p(1-p)}}}^{np+u\sqrt{2p(1-p)}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{e^{-u^2}}{u} \left[1 - \frac{\theta}{2u^2} \right]$$

Отсюда мы видим, что рассматриваемая вероятность весьма быстро приближается к 1 с увеличением u .

§ 18. Найдем теперь тот предельный ряд, при помощи которого может быть выражен интеграл

$$\int_u^{\infty} e^{-t^2} \cdot dt$$

Интегрируя по частям, имеем

$$\int_u^{\infty} e^{-t^2} \cdot t^{-2n} \cdot dt = \frac{u^{-2n-1}}{2} \cdot e^{-u^2} - \frac{2n-1}{2} \cdot \int_u^{\infty} e^{-t^2} \cdot t^{-2n-2} \cdot dt$$

отсюда имеем последовательно:

$$\begin{aligned} \int_u^{\infty} e^{-t^2} \cdot dt &= \frac{u^{-1}}{2} \cdot e^{-u^2} - \frac{1}{2} \int_u^{\infty} t^{-2} \cdot e^{-t^2} \cdot dt \\ \int_u^{\infty} t^{-2} \cdot e^{-t^2} \cdot dt &= \frac{u^{-3}}{2} \cdot e^{-u^2} - \frac{3}{2} \int_0^{\infty} t^{-4} \cdot e^{-t^2} \cdot dt \\ \int_u^{\infty} t^{-4} \cdot e^{-t^2} \cdot dt &= \frac{u^{-5}}{2} \cdot e^{-u^2} - \frac{5}{2} \int_0^{\infty} t^{-6} \cdot e^{-t^2} \cdot dt \end{aligned}$$

откуда

$$\int_u^{\infty} e^{-t^2} \cdot dt = \frac{u^{-1}}{2} \cdot e^{-u^2} - \frac{u^{-3}}{2^2} \cdot e^{-u^2} + \frac{1 \cdot 3}{2^3} \cdot e^{-u^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4} \cdot \int_0^{\infty} t^{-6} \cdot e^{-t^2} \cdot dt$$

Отсюда, по аналогии, можно заключить, что

$$(11) \quad \int_u^\infty e^{-t^2} \cdot dt = \frac{u^{-1}}{2} \cdot e^{-u^2} - \frac{u^{-3}}{2^2} \cdot e^{-u^2} +$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot u^{-5}}{2^3} \cdot e^{-u^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4} \cdot u^{-7} \cdot e^{-u^2} +$$

$$+ \dots + (-1)^n \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1)}{2^{n+1}} \cdot u^{-2n-1} \cdot e^{-u^2} + \dots$$

Докажем справедливость этой формулы, полагая

$$v_{n+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^{n+1}} \cdot u^{-2n-1} \cdot e^{-u^2}$$

и называя остаток ряда (11) после члена v_{n+1} через R_{n+1} , мы будем иметь

$$R_{n+1} = - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) \cdot (2n+1) (-1)^n}{2^{n+1}} \cdot \int_u^\infty t^{-2n-2} \cdot e^{-t^2} \cdot dt =$$

$$= \frac{-(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}{2^{n+2}} \cdot u^{-2n-3} \cdot e^{-u^2} +$$

$$+ (-1)^n \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)(2n+3)}{2^{n+2}} \cdot \int_u^\infty t^{-2n-4} \cdot e^{-t^2} \cdot dt = v_{n+2} + R_{n+2}$$

что и доказывает справедливость ряда (11).

§ 19. До сих пор, зная вероятность случиться событию в одно испытание, мы определили вероятность известного числа повторений этого события в известное число испытаний. Теперь мы переходим к решению обратного вопроса: зная, что в известное число испытаний событие повторилось известное число раз, мы будем определять вероятность случиться этому событию в одно испытание (вероятность *a posteriori*) или точнее — наивероятнейшие пределы, между которыми должна заключаться эта вероятность. При этом нам придется сделать допущение, что все гипотезы, которые можно сделать относительно этой вероятности, одинаково вероятны. Положим, что число этих гипотез есть N и что вероятность событию случиться в одно испытание в этих гипотезах суть:

$$\frac{0}{N}, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, \frac{\lambda}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}$$

в этом случае мы будем иметь

$$P_1 = P_2 = P_3 = \dots = P_N = \frac{1}{N}$$

называя через m — число повторений события в n испытаниях (замеченное из опыта), получим

$$p_\lambda = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-m)} \cdot \left(\frac{\lambda}{N}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{n-m}$$

Называя теперь через Q_λ — вероятность того, что замеченное событие имело место в гипотезе λ , мы по теореме 3 будем иметь

$$Q_\lambda = \frac{\frac{p_\lambda}{N}}{\sum_{\lambda=0}^{\lambda=N} \frac{p_\lambda}{N}} = \frac{\left(\frac{\lambda}{N}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{n-m} \cdot \frac{1}{N}}{\sum_{\lambda=0}^{\lambda=N} \left(\frac{\lambda}{N}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{n-m} \cdot \frac{1}{N}}$$

Называя через p — искомую вероятность случиться событию в одно испытание, будем искать вероятность $\int_{p_0}^{p_1}$ того, что p заключается между пределами

$$p_0 = \frac{\mu}{N} \quad \text{и} \quad p_1 = \frac{\mu_1 - 1}{N}$$

так как

$$\int_{p_0}^{p_1} Q_\lambda$$

мы получим

$$(12) \quad \int_{p_0}^{p_1} Q_\lambda = \frac{\sum_{\lambda=\mu_0}^{\lambda=\mu_1} \left(\frac{\lambda}{N}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{n-m} \cdot \frac{1}{N}}{\sum_{\lambda=0}^{\lambda=N} \left(\frac{\lambda}{N}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{n-m} \cdot \frac{1}{N}}$$

Наиболее замечателен тот случай, когда p_λ может принимать всевозможные значения. Мы и перейдем теперь к этому случаю, для чего мы должны предполагать $N = \infty$.

Вследствие этого равенство (12) обратится в следующее:

$$(13) \quad \int_{p_0}^{p_1} Q_\lambda = \frac{\int_{p_0}^{p_1} x^m (1-x)^{n-m} \cdot dx}{\int_0^1 x^m (1-x)^{n-m} \cdot dx}$$

Для примера положим, что событие в три испытания случилось один раз, и будем искать вероятность того, что p заключается между пределами 0 и $\frac{1}{2}$. В этом случае мы получим

$$\sum_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\int_0^{\frac{1}{2}} x(1-x)^2 \cdot dx}{\int_0^1 x(1-x)^2 \cdot dx} = \frac{11}{16}$$

Итак, искомая вероятность есть $\frac{11}{16}$; можно было предвидеть заранее, что она будет больше $\frac{1}{2}$.

Формуле (13) можно дать несколько иной вид. Для этого заметим, что

$$\int_0^1 x^{\lambda-1} (1-x)^{\mu-1} \cdot dx = \frac{\Gamma(\lambda) \cdot \Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda + \mu)}$$

но при λ и μ целых мы имеем:

$$\Gamma(\lambda) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (\lambda - 1)$$

$$\Gamma(\mu) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (\mu - 1)$$

а потому

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^m (1-x)^{m-n} \cdot dx &= \frac{\Gamma(m+1) \Gamma(m-n+1)}{\Gamma(n+2)} = \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-m)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n+1)} \end{aligned}$$

Вследствие этого равенство (13) может быть представлено в таком виде:

$$(14) \quad \sum_{p_0}^{p_1} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-m)} \cdot \int_{p_0}^{p_1} x^m (1-x)^{n-m} dx$$

§ 20. Мы будем теперь предполагать разность $p_1 - p_0$ весьма малою данной величиной, и при этом условии будем искать то место, где следует взять этот промежуток, чтобы вероятность $\sum_{p_0}^{p_1}$ имела наибольшую величину.

Полагая

$$p_1 - p_0 = 2\omega \quad \text{и} \quad \frac{p_1 + p_0}{2} = \rho$$

причем ω предполагается весьма малым, получим:

$$p_1 = \rho + \omega; \quad p_0 = \rho - \omega$$

$$\mathbf{S}_{\rho-\omega}^{\rho+\omega} = \frac{\int_1^{\rho+\omega} x^m (1-x)^{n-m} \cdot dx}{\int_0^{\rho-\omega} x^m (1-x)^{n-m} \cdot dx}$$

Замечая теперь, что если $[AB]$ означает некоторую среднюю между A и B величину, то вообще

$$\int_A^B f(x) dx = (B - A) f([A, B])$$

и замечая, что

$$[\rho - \omega, \rho + \omega] = \rho \pm \theta\omega$$

где θ означает некоторую правильную дробь, мы получим

$$\mathbf{S}_{\rho-\omega}^{\rho+\omega} = \frac{2\omega (\rho \pm \theta\omega)^m (1 - \rho \mp \theta\omega)^{n-m}}{\int_0^1 x^m (1-x)^{n-m} \cdot dx}$$

Отсюда

$$\frac{1}{2\omega} \mathbf{S}_{\rho-\omega}^{\rho+\omega} = \frac{(\rho \pm \theta\omega)^m (1 - \rho \mp \theta\omega)^{n-m}}{\int_0^1 x^m (1-x)^{n-m} \cdot dx}$$

Переходя теперь к пределу, когда $\omega = 0$, мы получим

$$\lim \left(\frac{1}{2\omega} \mathbf{S}_{\rho-\omega}^{\rho+\omega} \right)_{\omega=0} = \frac{\rho^m (1 - \rho)^{n-m}}{\int_0^1 x^m (1-x)^{n-m} \cdot dx}$$

Найдем теперь максимум этого выражения. Мы будем иметь уравнение

$$m\rho^{m-1}(1-\rho)^{n-m} - (n-m)\rho^m(1-\rho)^{n-m-1} = 0$$

приводящееся к виду

$$(m - n\rho)\rho^{m-1}(1 - \rho)^{n-m-1} = 0$$

Это уравнение имеет корни

$$0, 1, \frac{m}{n}$$

Первые два корня обращают выражение $\rho^m(1 - \rho)^{n-m}$ в нуль, а так как это выражение положительно для всякого ρ , то корень $\frac{m}{n}$ обратит его в максимум, а потому обратит в минимум и выражение

$$\frac{1}{2\omega} \sum_{\rho=\omega}^{\rho+\omega}$$

Итак, искомые наивероятнейшие пределы искомой вероятности суть:

$$p_0 = \frac{m}{n} - \omega; \quad p_1 = \frac{m}{n} + \omega$$

§ 21. Теперь мы будем искать вероятность того, что p заключается в пределах p_0 и p_1 , весьма мало отличающихся от $\frac{m}{n}$. Пусть

$$p_0 = \frac{m}{n} + z_0; \quad p_1 = \frac{m}{n} + z_1$$

где z_0 и z_1 суть положительные или отрицательные величины настолько малые, что можно пренебречь их вторыми степенями. При этом мы будем предполагать $m, n, n - m$ весьма большими числами.

Пользуясь формулой Стирлинга, получим:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n &= \sqrt{2\pi n} n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n} \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m &= \sqrt{2\pi m} m^{m+\frac{1}{2}} \cdot e^{-m} \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n - m) &= \sqrt{2\pi} \cdot (n - m)^{n-m+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n+m} \end{aligned}$$

Вследствие этого формула (14) дает

$$\sum_{p_0}^{p_1} S = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}(n+1)}{\sqrt{2\pi m} m^{m+\frac{1}{2}}(n-m)^{n-m+\frac{1}{2}}} \cdot \int_{p_0}^1 x^m (1-x)^{n-m} \cdot dx$$

Замечая теперь, что

$$n + 1 = n \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

и пренебрегая весьма малою величиною $\frac{1}{n}$, получим

$$S_{p_0}^{p_1} = \frac{n^{\frac{n+3}{2}}}{\sqrt{2\pi m}^{\frac{m+1}{2}} (n-m)^{\frac{n-m+1}{2}}} \cdot \int_{p_0}^{p_1} x^m (1-x)^{n-m} \cdot dx$$

или, полагая $x = \frac{m}{n} + z$:

$$S_{p_0}^{p_1} = \frac{n^{\frac{n+3}{2}}}{\sqrt{2\pi m}^{\frac{m+1}{2}} \cdot (n-m)^{\frac{n-m+1}{2}}} \cdot \int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{m}{n} + z\right)^m \left(1 - \frac{m}{n} - z\right)^{n-m} \cdot dz$$

или

$$S_{p_0}^{p_1} = \frac{n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi} \cdot m^{\frac{1}{2}} (n-m)^{\frac{1}{2}}} \cdot \int_{z_0}^{z_1} \left(1 + \frac{nz}{m}\right)^m \left(1 - \frac{nz}{n-m}\right)^{n-m} \cdot dz$$

Но мы имеем

$$\begin{aligned} & \log \left(1 + \frac{nz}{m}\right) \left(1 - \frac{nz}{n-m}\right)^{n-m} = \\ & = m \log \left(1 + \frac{nz}{m}\right) + (n-m) \log \left(1 - \frac{nz}{n-m}\right) = \\ & = m \left[\frac{nz}{m} - \frac{1}{2} \frac{n^2 z^2}{m^2} + \dots \right] + (n-m) \left[-\frac{nz}{n-m} - \frac{1}{2} \left(\frac{nz}{n-m}\right)^2 - \dots \right] = \\ & = -\frac{1}{2} \frac{n^2 z^2}{m} - \frac{1}{2} \frac{n^2 z^2}{n-m} + \dots = -\frac{n^3}{2m(n-m)} z^2 + \dots \end{aligned}$$

Поэтому, пренебрегая членами с высшими степенями z , получим

$$S_{\frac{m}{n}+z_0}^{\frac{m}{n}+z_1} = \frac{n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi} m^{\frac{1}{2}} (n-m)^{\frac{1}{2}}} \cdot \int_{z_0}^{z_1} e^{-\frac{n^3}{2m(n-m)} z^2} \cdot dz$$

полагая

$$\frac{n^3}{2m(n-m)} z^2 = t^2$$

мы приведем это выражение к виду

$$S_{\frac{m}{n}+z_0}^{\frac{m}{n}+z_1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^{t_1} e^{-t^2} \cdot dt$$

где

$$t_0 = \frac{n^{\frac{3}{2}} \cdot z_0}{\sqrt{2} m^{\frac{1}{2}} (n-m)^{\frac{1}{2}}}; \quad t_1 = \frac{n^{\frac{3}{2}} z_1}{\sqrt{2} m^{\frac{1}{2}} (n-m)^{\frac{1}{2}}}$$

Итак, вероятность того, что p заключается между пределами

$$\frac{m}{n} + t_0 \sqrt{\frac{2m(n-m)}{n^3}} \quad \text{и} \quad \frac{m}{n} + t_1 \sqrt{\frac{2m(n-m)}{n^3}}$$

определится по формуле

$$(15) \quad S_{\frac{m}{n}+t_0 \sqrt{\frac{2m(n-m)}{n^3}}}^{\frac{m}{n}+t_1 \sqrt{\frac{2m(n-m)}{n^3}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^{t_1} e^{-t^2} \cdot dt$$

Если

$$t_0 = -u \quad \text{и} \quad t_1 = +u,$$

то это равенство обратится в такое:

$$(16) \quad S_{\frac{m}{n}-u \sqrt{\frac{2m(n-m)}{n^3}}}^{\frac{m}{n}+u \sqrt{\frac{2m(n-m)}{n^3}}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-t^2} \cdot dt$$

При u сколь-нибудь значительном (напр. большем 2) значение интеграла, входящего в равенство (16), будет весьма близко к $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, поэтому вероятность будет весьма близка к 1. Но, с другой стороны, при n весьма большом пределы, между которыми заключается p , будут весьма близки между собою, весьма мало отличаясь от $\frac{m}{n}$, а потому мы можем сказать, что при $n = \infty$ предел p есть $\frac{m}{n}$.

§ 22. Перейдем теперь к решению нового вопроса, относящегося к повторению событий. Положим, что событие при n испытаниях повторилось m раз, требуется вывести заключение о вероятности того, что это событие при k испытаниях повторится l раз. Решение этого вопроса основывается на теореме 4-й.

Предположим, что вероятность p случиться событию в одно испытание может иметь только величины:

$$\frac{0}{N}, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, \frac{\lambda}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}$$

это и будут различные гипотезы, в которых рассматриваемое событие может иметь место.

Мы допустим теперь, что все эти гипотезы имеют одинаковые вероятности (допущение, не имеющее никакого основания), а так как число их N и которая-нибудь из гипотез непременно должна иметь место, то вероятность какой-либо из них будет $\frac{1}{N}$. Итак,

$$P_0 = P_1 = P_2 \dots = P_{N-1} = \frac{1}{N}$$

и

$$p_\lambda = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-m)} \cdot \left(\frac{\lambda}{N}\right)^m \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{n-m}$$

точно так же

$$q_\lambda = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (k-1)k}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots l \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (k-l)} \cdot \left(\frac{\lambda}{N}\right)^l \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{k-l}$$

Вследствие этого, называя через $H_{k,l}$ — искомую вероятность, что событие при k испытаниях повторится l раз, мы будем иметь

$$\begin{aligned} H_{k,l} &= \frac{\sum_{\lambda=0}^{\lambda=N} p_\lambda \cdot q_\lambda \cdot \frac{1}{N}}{\sum_{\lambda=0}^{\lambda=N} p_\lambda \cdot \frac{1}{N}} = \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (k-1)k}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots l \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (k-l)} \cdot \frac{\sum_{\lambda=0}^{\lambda=N} \left(\frac{\lambda}{N}\right)^{m+l} \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{n+m+k-l} \cdot \frac{1}{N}}{\sum_{\lambda=0}^{\lambda=N} \left(\frac{\lambda}{N}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{n-m} \cdot \frac{1}{N}} \end{aligned}$$

Предполагая теперь, что p может иметь все возможные значения от 0 до 1, для чего должно положить $N = \infty$, мы получим

$$(17) H_{kl} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (k-1) \cdot k}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots l \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (k-l)} \cdot \frac{\int_0^1 x^{m+k} (1-x)^{n-m+k-l} \cdot dx}{\int_0^1 x^m (1-x)^{n-m} \cdot dx}$$

Для примера решим такую задачу: событие в n испытаний постоянно повторялось, найти вероятность того, что оно повторится и в $(n+1)$ -ое испытание.

В этом случае мы должны положить:

$$m = n; \quad k = l = 1$$

вследствие чего будет

$$H_{1,1} = \frac{\int_0^1 x^{m+1} \cdot dx}{\int_0^1 x^m \cdot dx} = \frac{m+1}{m+2}$$

Формуле (17) можно дать несколько иной вид, замечая что

$$\int_0^1 x^{\lambda-1} (1-x)^{\mu-1} \cdot dx = \frac{\Gamma(\lambda) \Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda + \mu)}$$

и что при n целом

$$\Gamma(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)$$

Вследствие этого мы получим:

$$\int_0^1 x^{m+l} (1-x)^{n-m+k-l} \cdot dx = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m+l) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-m+k-l)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n+k+1)}$$

$$\int_0^1 x^m (1-x)^{n-m} \cdot dx = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-m)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n+1)}$$

а потому

$$(18) H_{kl} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m+l) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-m+k-l) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots l \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (k-l) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n+k+1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-m)}$$

§ 23. Найдем теперь то значение l , которая делает наибольшей вероятностью H_{kl} . Называя это значение через λ , мы должны иметь

$$\begin{aligned} & H_{k,\lambda} \text{ не } < H_{k,\lambda-1} \text{ и } H_{k,\lambda} \text{ не } < H_{k,\lambda+1} \\ \text{или} & \\ (a) & \frac{H_{k,\lambda}}{H_{k,\lambda-1}} \text{ не } < 1 \text{ и } \frac{H_{k,\lambda}}{H_{k,\lambda+1}} \text{ не } < 1 \end{aligned}$$

Если бы одно из этих условий удовлетворялось знаком равенства, то мы получили бы для l два значения: λ и $\lambda + 1$ или $\lambda - 1$ и λ .

Пользуясь формулой (18), мы будем иметь

$$\frac{H_{k,\lambda}}{H_{k,\lambda-1}} = \frac{(m-\lambda)(k-\lambda-1)}{\lambda(n-m+k-\lambda+1)} \quad \text{и} \quad \frac{H_{k,\lambda}}{H_{k,\lambda+1}} = \frac{(\lambda+1)(n-m+k-\lambda)}{(m+\lambda+1)(k-\lambda)}$$

вследствие чего условия (a) примут такой вид:

$$\begin{aligned} & (m+\lambda)(k-\lambda+1) \text{ не } < \lambda(n-m+k-\lambda+1) \\ \text{и} & \\ & (\lambda+1)(n-m+k-\lambda) \text{ не } < (m+\lambda+1)(k-\lambda) \end{aligned}$$

откуда следует

$$\lambda \text{ не } > \frac{m(k+1)}{n} \quad \text{и} \quad \lambda \text{ не } < \frac{m(k+1)}{n} - 1$$

поэтому если

$$\frac{m}{n} \cdot (k+1)$$

есть дробь, то мы получаем одно решение

$$\lambda = \sum \frac{m}{n} (k+1)$$

если же $\frac{m}{n}(k+1)$ есть число целое, то мы получаем два решения:

$$\lambda_1 = \frac{m}{n} (k+1)$$

$$\lambda_2 = \frac{m}{n} (k+1) - 1$$

Отсюда видно, что вообще

$$\lambda = \frac{m}{n} k + \frac{m}{n} - \theta = \frac{m}{n} k \pm \theta_1$$

где θ и θ_1 суть правильные дроби, поэтому, предполагая m , n и k числами весьма большими, можно сказать с точностью до 1, что наивероятнейшее число повторений события есть $\frac{m}{n} \cdot k$.

§ 24. Мы теперь будем предполагать m, n, k и $l, n - m, k - l$ числами весьма большими, и в этом предположении найдем вероятность $H_{k,l}$ наименее вероятного числа повторений события в k испытаний, на основании известного нам числа m повторений в n испытаний. Для этого мы воспользуемся формулой (18), которую преобразуем по формуле Стирлинга

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots x = \sqrt{2\pi x} \cdot x^x \cdot e^{-x}$$

Мы имеем:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k = \sqrt{2\pi k} \cdot k^k \cdot e^{-k}$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m+l) = \sqrt{2\pi(m+l)} \cdot (m+l)^{m+l} \cdot e^{-(m+l)}$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-m+k-l) = \sqrt{2\pi(n-m+k-l)} \times \\ \times (n-m+k-l)^{n-m+k-l} \cdot e^{-(n-m+k-l)}$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n(n+1) = \sqrt{2\pi(n+1)} \cdot (n+1)^{n+1} \cdot e^{-(n+1)} = \\ = \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-(n+1)} \cdot (n+1)$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots l = \sqrt{2\pi \cdot l} \cdot l^l \cdot e^{-l}$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (k-l) = \sqrt{2\pi(k-l)} \cdot (k-l)^{k-l} \cdot e^{-l}$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n+k)(n+k+1) = \sqrt{2\pi(n+k)} \cdot (n+k)^{n+k} \cdot e^{-(n+k)} \times \\ \times (n+k+1)$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m = \sqrt{2\pi m} \cdot m^m \cdot e^{-m}$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-m) = \sqrt{2\pi(n-m)} \cdot (n-m)^{n-m} \cdot e^{-n+m}$$

Вследствие этого мы получим

$$H_{kl} = \sqrt{\frac{n \cdot (m+l)(n-m+k-l) \cdot n}{2\pi \cdot l(k-l)(n+k)m(n-m)}} \cdot \frac{n+1}{n+k+1} \times \\ \times \frac{k^k \cdot (m+l)^{m+l} \cdot (n-m+k-l)^{n-m+k-l} \cdot n^n}{l^l (k-l)^{k-l} \cdot (n+k)^{n+k} \cdot m^m \cdot (n-m)^{n-m}}$$

Замечая, что

$$k = l + (k-l) \quad \text{и} \quad n = m + (n-m)$$

и что n и k весьма большие, так что вместо $\frac{n+1}{n+k+1}$ можно брать $\frac{n}{n+k}$, мы получим

$$H_{kl} = \sqrt{\frac{n^3(m+l)k(n-m+k-l)}{2\pi \cdot l \cdot (k-l)(n+k)^3 \cdot m \cdot (n-m)}} \cdot \left(\frac{m+l}{n+k}\right)^{m+l} \times \\ \times \left(\frac{n-m+k-l}{n+k}\right)^{n-m+k-l} \cdot \left(\frac{k}{l}\right)^l \cdot \left(\frac{k}{k-l}\right)^{k-l} \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^m \cdot \left(\frac{n}{n-m}\right)^{n-m}$$

В этой формуле мы можем приписывать l не только целые, но и дробные значения, а потому, вставляя в нее вместо l найденное выше наивероятнейшее число $\frac{m}{n} \cdot k$, мы и получим искомую вероятность $H_{k,\lambda}$. Но мы имеем:

$$\begin{aligned} \left(\frac{m+l}{n+l}\right)^{n+l} &= \left(\frac{m+\frac{m}{n}k}{n+l}\right)^{m+\frac{m}{n}k} = \left(\frac{m}{n}\right)^{m \cdot \frac{n+k}{n}} \\ \left(\frac{n-m+l-k-l}{n+l}\right)^{-n+m+k-l} &= \left(\frac{n-m+l-k-\frac{m}{n} \cdot k}{n+l}\right)^{n-m+k-\frac{m}{n}l} = \\ &= \left(\frac{n-m}{n}\right)^{(n-m) \cdot \frac{n+k}{n}} \\ \left(\frac{k}{\lambda}\right)^\lambda &= \left(\frac{k}{\frac{m}{n}k}\right)^{\frac{m}{n}k} = \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{m \cdot k}{n}} \\ \left(\frac{k}{k-\lambda}\right)^{k-\lambda} \left(\frac{k}{k-\frac{m}{n}k}\right)^{k-\frac{m}{n}k} &= \left(\frac{n}{n-m}\right)^{(n-m) \cdot \frac{k}{n}} \end{aligned}$$

а потому

$$H_{k,\lambda} = \sqrt{\frac{n^3 \left(m + \frac{m}{n}k\right) \cdot k \cdot \left(n - m + k - \frac{m}{n}k\right)}{2\pi \frac{m}{n} \cdot k \left(k - \frac{m}{n}k\right) \cdot (n+k)^3 \cdot m \cdot (n-m)}}$$

или

$$H_{k,\lambda} = \sqrt{\frac{n^3}{2\pi \cdot k \cdot (n+k) \cdot m \cdot n - m}}$$

Числитель этого выражения относительно букв n, k, m, l — степени $\frac{3}{2}$, а знаменатель — степени 2, а потому при n, k, m, l весьма больших рассматриваемая вероятность весьма мала.

§ 25. Теперь мы будем искать вероятность того, что l весьма мало отличается от $\lambda = \frac{m}{n}k$.

Пусть

$$l = \frac{m}{n} \cdot k + \varepsilon$$

где z будем предполагать весьма малым по сравнению с числами m , n , k и λ , так что им можно пренебрегать перед самими этими числами.

Положим еще:

$$\frac{m}{n} = \rho; \quad \frac{k}{n} = \nu$$

так что будем иметь:

$$\begin{aligned} m &= n\rho; & l &= \rho n\nu + z; & n - m &= n(1 - \rho); & k - l &= n\nu(1 - \rho) - z \\ m + l &= n\rho(1 + \nu) + z; & n + k &= n(1 + \nu); & n - m + k - l &= \\ & & & & &= n(1 + \nu)(1 - \rho) - z \end{aligned}$$

Вследствие этого будет

$$\begin{aligned} &\sqrt{\frac{k(m+l)(n-m+k-l) \cdot n^3}{2\pi \cdot l \cdot (k-l) \cdot m \cdot (n-m)(n+k)^3}} = \\ &= \sqrt{\frac{\nu [n\rho(1+\nu) + z] \cdot [n(1+\nu)(1-\rho) - z]}{2\pi (n\rho\nu + z) \cdot [n\nu(1-\rho) - z] \rho(1-\rho)(1+\nu)^2 \cdot n}} \end{aligned}$$

Замечая теперь, что z весьма мало сравнительно с n , мы можем пренебречь им во множителях, находящихся под знаком радикала этого выражения, вследствие чего после сокращений оно обратится в

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\nu\rho(1-\rho)n(1+\nu)}}$$

Называя через K — другой множитель, входящий в выражение $H_{k,l}$ будем иметь

$$H_{k,l} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu\rho(1-\rho)n(1+\nu)}} \cdot K$$

причем

$$\begin{aligned} K &= \left(\frac{n\nu}{\rho n\nu + z}\right)^{\rho n\nu + z} \cdot \left(\frac{n\nu}{n\nu(1-\rho) - z}\right)^{n\nu(1-\rho) - z} \cdot \left(\frac{n\rho(1+\nu) + z}{n(1+\nu)}\right)^{n\rho(1+\nu) + z} \times \\ &\quad \times \left(\frac{n(1-\rho)(1+\nu) - z}{n(1+\nu)}\right)^{n(1-\rho)(1+\nu) - z} \cdot \frac{1}{\rho^{n\rho}(1-\rho)^{n(1-\rho)}} = \\ &= \left(\frac{1}{\rho + \frac{z}{n\nu}}\right)^{n\rho\nu + z} \cdot \left(\frac{1}{1 - \rho - \frac{z}{n\nu}}\right)^{n\nu(1-\rho) - z} \cdot \left(\rho + \frac{z}{n(1+\nu)}\right)^{n\rho(1+\nu) + z} \times \\ &\quad \times \left(1 - \rho - \frac{z}{n(1+\nu)}\right)^{n(1-\rho)(1+\nu) - z} \cdot \frac{1}{(\rho)^{n\rho}(1-\rho)^{n(1-\rho)}} = \\ &= \frac{\rho^{n\rho(1+\nu) + z} \cdot \left(1 + \frac{z}{n\rho(1+\nu)}\right)^{n\rho(1+\nu) + z} \cdot (1-\rho)^{n(1-\rho)(1-\nu) - z} \cdot \left(1 - \frac{z}{n(1-\rho)(1+\nu)}\right)^{n(1-\rho)(1+\nu) - z}}{\rho^{n\rho} \cdot (1-\rho)^{n(1-\rho)} \cdot \rho^{n\rho\nu + z} \cdot \left(1 + \frac{z}{n\rho\nu}\right)^{n\rho\nu + z} \cdot (1-\rho)^{n(1-\rho)\nu - z} \cdot \left(1 - \frac{z}{n(1-\rho)\nu}\right)^{n(1-\rho)\nu - z}} \end{aligned}$$

Итак, мы находим

$$K = \frac{\left[1 + \frac{z}{n\rho(1+\nu)}\right]^{n\rho(1+\nu)+z} \cdot \left[1 - \frac{z}{n(1-\rho)(1+\nu)}\right]^{n(1-\rho)(1+\nu)-z}}{\left[1 + \frac{z}{n\rho\nu}\right]^{n\rho\nu+z} \cdot \left[1 - \frac{z}{n(1-\rho)\nu}\right]^{n(1-\rho)\nu-z}}$$

но мы имеем далее:

$$\begin{aligned} \log(\text{знам.}) &= (n\rho\nu + z) \left[\frac{z}{n\rho\nu} - \frac{z^2}{2n^2\rho^2\nu^2} + \dots \right] + \\ &+ [n(1-\rho)\nu - z] \cdot \left[\frac{z}{n(1-\rho)\nu} - \frac{z^2}{2n^2(1-\rho)\nu^2} - \dots \right] = \\ &= z + z^2 \left[\frac{1}{n\rho\nu} - \frac{1}{2n\rho\nu} + \dots \right] - z + z^2 \left[\frac{1}{n(1-\rho)\nu} - \frac{1}{2n(1-\rho)\nu} \right] + \\ &+ \dots = \frac{z^2}{2n\nu\rho(1-\rho)} \end{aligned}$$

точно так же будет

$$\log(\text{числ.}) = \frac{z^2}{2n(1+\nu)\rho(1-\rho)}$$

поэтому, пренебрегая остальными членами, которые, когда z порядка не выше \sqrt{n} , весьма малы, мы получим

$$K = e^{-\frac{z^2}{2n\nu(1+\nu)\rho(1-\rho)}}$$

и, следовательно,

$$H_{k,l} = \frac{e^{-\frac{z^2}{2n\nu(1+\nu)\rho(1-\rho)}}}{\sqrt{2\pi n\nu(1+\nu)\rho(1-\rho)}}$$

Вероятность того, что l заключается между известными пределами L и M , выразится посредством суммы от $H_{k,l}$ между пределами L и M . Поступая так же, как это было сделано в § 16, мы найдем, что эта сумма может быть заменена интегралом (при той степени точности, с которою все наши вычисления производятся).

Таким образом, обозначая через \prod_L^M — вероятность того, что l заключается между пределами L и M , мы получим

$$\prod_L^M = \int_L^M \frac{e^{-\frac{z^2}{2n\nu(1+\nu)\rho(1-\rho)}}}{\sqrt{2\pi n\nu(1+\nu)\rho(1-\rho)}} \cdot dl$$

полагая теперь

$$\frac{z}{\sqrt{2n\nu(1+\nu)\rho(1-\rho)}} = \frac{l - \frac{m}{n}k}{\sqrt{2n\nu(1+\nu)\rho(1-\rho)}} = u$$

мы будем иметь

$$(20) \quad \prod_L^M = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{u_0}^{u_1} e^{-u^2} du$$

где

$$u_0 = \frac{L - \frac{m}{n}k}{\sqrt{2nv(1+v)\rho(1-\rho)}} \quad \text{и} \quad u_1 = \frac{M - \frac{m}{n}k}{\sqrt{2nv(1+v)\rho(1-\rho)}}$$

Отсюда, внося вместо v и ρ их значения, мы получим:

$$L = \frac{m}{n}k + u_0 \sqrt{\frac{2m(n-m)k(n+k)}{n^3}}; \quad M = \frac{m}{n}k + u_1 \sqrt{\frac{2m(n-m)k(n+k)}{n^3}}$$

Самый замечательный случай есть тот, когда $u_0 = -t$ и $u_1 = +t$, тогда полагая

$$\sqrt{\frac{2m(n-m)k(n+k)}{n^3}} = c$$

получим

$$(21) \quad \prod_{\frac{m}{n}k-tc}^{\frac{m}{n}k+tc} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^t e^{-c^2 \cdot dt}$$

При t сколь-нибудь значительном вторая часть этого равенства весьма отличается от 1, а потому весьма вероятно, что l заключается между пределами.

$$\frac{m}{n}k + t \sqrt{\frac{2m(n-m)k(n+k)}{n^3}} \quad \text{и} \quad \frac{m}{n}k - t \sqrt{\frac{2m(n-m)k(n+k)}{n^3}}$$

Этот вывод можно выразить в виде такой теоремы:

Теорема. *Формула (21) определяет вероятность существования неравенства*

$$(22) \quad \begin{aligned} & \frac{m}{n} - t \sqrt{2 \frac{m}{n} \left(1 - \frac{m}{n}\right) \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{k}\right)} < \frac{1}{k} < \\ & < \frac{m}{n} + t \sqrt{2 \frac{m}{n} \left(1 - \frac{m}{n}\right) \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{k}\right)} \end{aligned}$$

Отсюда мы можем прийти к результатам, полученным нами уже раньше и которые заключаются в (22) как частные случаи.

Предполагая $n = \infty$ и замечая, что

$$\lim \frac{m}{n} = p$$

мы найдем

$$p - t \sqrt{2p(1-p) \frac{1}{k}} < \frac{1}{k} < p + t \sqrt{2p(1-p) \frac{1}{k}}$$

таким образом мы приходим к выводу, полученному в § 16. Полагая $k = \infty$, мы найдем

$$\frac{m}{n} - t \sqrt{\frac{2}{n} \cdot \frac{m}{n} \left(1 - \frac{m}{n}\right)} < p < \frac{m}{n} + t \sqrt{\frac{2}{n} \cdot \frac{m}{n} \left(1 - \frac{m}{n}\right)}$$

т. е. результат, полученный в § 21.

§ 26. Теперь мы перейдем к рассмотрению того случая, когда вероятность p событию случиться в одно испытание различна для различных испытаний.

Положим, что

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$$

суть вероятности событию случиться в первое, второе, ... n -ое испытание. В таком случае, как мы видели, вероятность $P_{n,m}$ того, что событие случится m раз в n испытаний, будет коэффициентом при t^m разложения

$$(p_1 t + 1 - p_1)(p_2 t + 1 - p_2)(p_3 t + 1 - p_3) \dots (p_n t + 1 - p_n)$$

что можно выразить таким уравнением

$$\begin{aligned} (p_1 t + 1 - p_1)(p_2 t + 1 - p_2)(p_3 t + 1 - p_3) \dots (p_n t + 1 - p_n) = \\ = \sum_{m=0}^{m=n+1} P_{n,m} t^m \end{aligned}$$

На основании этого уравнения, мы можем выразить вероятность $P_{n,m}$ при помощи определенного интеграла. В самом деле, мы знаем из курса «Определенных Интегралов», что если функция $f(x)$ разлагается в ряд

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_m x^m + \dots$$

то коэффициент A_m разложения определяется по формуле

$$A_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{\varphi\sqrt{-1}}) e^{m\varphi\sqrt{-1}} \cdot d\varphi$$

поэтому, полагая $m = n + 1$,

$$f(t) = \sum_{m=0}^{m=n+1} P_{n,m} t^m$$

найдем

$$(23) \quad P_{n,m} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} (p_1 e^{\varphi\sqrt{-1}} + 1 - p_1)(p_2 e^{\varphi\sqrt{-1}} + 1 - p_2) \dots (p_n e^{\varphi\sqrt{-1}} + 1 - p_n) \cdot d\varphi$$

Мы покажем теперь, что произведение, стоящее под знаком этого интеграла, имеет величину сколь-нибудь заметную только при φ , близком к нулю. Для этого заметим, что

$$p_1 e^{\varphi\sqrt{-1}} + 1 - p_1 = p_1 \cos \varphi + 1 - p_1 + \sqrt{-1} p_1 \sin \varphi$$

откуда

$$\begin{aligned} [\text{Мод}(p_1 e^{\varphi\sqrt{-1}} + 1 - p_1)]^2 &= [p_1 \cos \varphi + 1 - p_1]^2 + p_1 \sin^2 \varphi = \\ &= p_1^2 + (1 - p_1)^2 + 2p_1(1 - p_1) - 2p_1(1 - p_1) + 2p_1(1 - p_1) \cos \varphi = \\ &= 1 - 2p_1(1 - p_1)(1 - \cos \varphi) \end{aligned}$$

отсюда видно, что

$$\{\text{Мод}[p_1 e^{\varphi\sqrt{-1}} + 1 - p_1]\}^2 \leq 1$$

причем знак равенства соответствует значению $\varphi = 0$.

Число n предполагается весьма большим, следовательно только те элементы интеграла через который выражается $P_{n,m}$, будут иметь влияние, для которых модуль весьма близок к единице, т. е. которые соответствуют значениям φ , близким к нулю. Вследствие этого, при приближенном вычислении вероятности $P_{n,m}$, мы в разложениях по степеням φ будем пренебрегать степенями выше второй.

Но мы имеем

$$\begin{aligned} \log [p_1 e^{\varphi\sqrt{-1}} + 1 - p_1] &= \log \left[p_1 \left(1 + \varphi \sqrt{-1} - \frac{\varphi^2}{1 \cdot 2} \dots \right) + 1 - p_1 \right] = \\ &= \log \left[1 + p_1 \varphi \sqrt{-1} - p_1 \frac{\varphi^2}{1 \cdot 2} + \dots \right] = \\ &= p_1 \varphi \sqrt{-1} - p_1 \frac{\varphi^2}{2} - \frac{(p_1 \varphi \sqrt{-1} + p_1 \frac{\varphi^2}{1 \cdot 2})^2}{2} = \\ &= p_1 \varphi \sqrt{-1} - \frac{p_1}{2} (1 - p_1) \varphi^2 + \dots \end{aligned}$$

вследствие этого полагая

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = nq$$

$$p_1(1 - p_1) + p_2(1 - p_2) + \dots + p_n(1 - p_n) = nQ$$

мы можем формулу (23) заменить такою приближенной:

$$P_{n,m} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{nq\varphi\sqrt{-1} - \frac{nQ}{2}\varphi^2 - m\varphi\sqrt{-1}} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-\frac{nQ}{2}\varphi^2} [\cos(nq - m)\varphi + \sqrt{-1} \sin(nq - m)\varphi] \cdot d\varphi$$

а так как

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-\frac{nQ}{2}\varphi^2} \sin(nq - m)\varphi \cdot d\varphi = 0$$

то будет

$$P_{n,m} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-\frac{nQ}{2}\varphi^2} \cos(nq - m)\varphi \cdot d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-\frac{nQ}{2}\varphi^2} \cos(nq - m)\varphi \cdot d\varphi$$

так как n предположено весьма большим, то пренебрегая вследствие этого величиною интеграла

$$\int_{\pi}^{\infty} e^{-\frac{nQ}{2}\varphi^2} \cos(nq - m)\varphi \cdot d\varphi$$

мы будем иметь

$$P_{n,m} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{nQ}{2}\varphi^2} \cos(nq - m)\varphi \cdot d\varphi$$

Но мы имеем

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx \cdot dx = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}$$

а потому

$$P_{n,m} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{nQ}} e^{-\frac{(nq-m)^2}{2nQ}}$$

или

(23')

$$P_{n,m} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{nQ}} e^{-\frac{(nq-m)^2}{2nQ}}$$

Отсюда видно, что maximum вероятности соответствует случаю, когда

$$\frac{m}{n} = q = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n}{n}$$

Называя через \prod_L^M — вероятность того, что m заключается между пределами $L \cdot M$, и предполагая числа $n, m, n - m$ весьма большими, мы получим такую приближенную формулу:

$$\prod_L^M = \int_L^M \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{nQ}} \cdot e^{-\frac{(m-nq)^2}{2nQ}} \cdot dm$$

полагая теперь

$$\frac{m-nq}{\sqrt{2nQ}} = t; \quad \frac{L-nq}{\sqrt{2nQ}} = t_0; \quad \frac{M-nq}{\sqrt{2nQ}} = t_1$$

мы дадим этой формуле такой вид:

$$(24) \quad \prod_{nq+t_0\sqrt{2nQ}}^{nq+t_1\sqrt{2nQ}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^{t_1} e^{-t^2} \cdot dt$$

Отсюда при

$$p_1 = p_2 = p_3 \dots = p_n = q$$

получаются, как частный случай, формулы (7).

Когда

$$t_0 = -u; \quad t_1 = +u$$

то формула (24) обращается в такую:

$$(25) \quad \prod_{nq-u\sqrt{2nQ}}^{nq+u\sqrt{2nQ}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-t^2} \cdot dt$$

Это есть вероятность существования неравенств

$$q + u \sqrt{\frac{2Q}{n}} > \frac{m}{n} > q - u \sqrt{\frac{2Q}{n}}$$

Так как вероятность этих неравенств при u сколь-нибудь значительном весьма близка к 1, а с другой стороны, при n весьма большом пределы, между которыми заключается $\frac{m}{n}$, весьма мало отличаются от q и при $n = \infty$ делаются равными q , то мы можем сказать, что

$$\lim \left(\frac{m}{n} \right)_{n=\infty} = q = \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{n}$$

В этом заключается закон больших чисел, в первый раз доказанный и сформулированный Пуассоном.

§ 27. Перейдем теперь к вопросу о повторении нескольких событий.

Пусть A_1, A_2, \dots, A_l суть различные события, из которых в каждое испытание одно непременно должно иметь место. Вследствие этого, называя вероятности этих событий соответственно через

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$$

мы будем иметь

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$$

При этом мы предполагаем, что в одно и то же испытание два различные события не могут иметь места и что вероятности этих событий одинаковы для всех испытаний, так что как в первом испытании вероятность события A_i есть p_i , так и в любом K -ом испытании эта вероятность есть p_i .

Положим, что в n испытаниях событие A_i случилось m_i раз, тогда

$$m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_l = n$$

Будем искать вероятность

$$P_{m_1 m_2 \dots m_l}$$

того, что в n испытаний событие A_1 случилось m_1 раз,

$$A_2 m_2 \text{ раз} \dots A_l m_l \text{ раз.}$$

Искомую вероятность можно рассматривать как вероятность события имеющего несколько несовместных видов, и потому она равна сумме вероятностей каждого из этих видов.

Один из этих видов заключается в следующем: в первые m_1 испытаний событие A_1 повторилось m_1 раз, но не имели места события

$$A_2, A_3, \dots, A_l$$

в следующие m_2 испытаний событие A_2 повторялось m_2 раз, но не имели места события A_1, A_3, \dots, A_l и т. д., наконец в последние m_l испытаний событие A_l повторилось m_l раз, но не имели места события

$$A_1, A_2, \dots, A_{l-1}$$

Так как мы предполагаем вероятности p_1, p_2, \dots, p_l постоянными, то вероятность рассматриваемого вида будет

$$p_1^{m_1} p_2^{m_2} p_3^{m_3} \dots p_l^{m_l}$$

Но вследствие постоянства вероятностей p_1, p_2, \dots, p_l , это будет также и вероятностью каждого из остальных видов. Всех же видов будет столько, сколько можно сделать различных перестановок из n элементов, содержащих l групп одинаковых элементов, из которых в одной группе m_1 , в другой m_2, \dots и т. д. элементов.

Вследствие этого искомая вероятность выразится следующим образом:

$$(26) P_{m_1 m_2 \dots m_l} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot n}{1 \cdot 2 \dots m_1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m_2 \dots 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m_l} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_l^{m_l}$$

Нетрудно также убедиться, что искомую вероятность можно определить как коэффициент при

$$t_1^{m_1} t_2^{m_2} \dots t_l^{m_l}$$

в разложении выражения

$$(p_1 t_1 + p_2 t_2 + \dots + p_l t_l)^n$$

так что можно положить

$$(27) (p_1 t_1 + p_2 t_2 + \dots + p_l t_l)^n = \sum P_{m_1 m_2 \dots m_l} \cdot t_1^{m_1} t_2^{m_2} \dots t_l^{m_l}$$

а из этого равенства мы также получим выражение (26) искомой вероятности.

Если события A_1, A_2, \dots, A_l определяются какими-либо числовыми величинами, так что событие A_i определяется, напр., величиною функции $\theta(i)$, то формула (27) может служить для решения вопроса о вероятности того, что в n испытаний сумма этих числовых величин будет иметь наперед заданную величину S (так, напр., если событие A_i состоит в вынутии карты, на которой стоит номер i , то может быть вопрос о вероятности того, что сумма номеров на вынутых в n испытаниях картах равна S).

Для решения этого вопроса мы полагаем

$$t_i = t^{(i)}$$

вследствие чего формула (27) обращается в следующую:

$$\sum P_{m_1 m_2 \dots m_l} t^{m_1 \theta(1) + m_2 \theta(2) + \dots + m_l \theta(l)} = [p_1 t^{(1)} + p_2 t^{(2)} + \dots + p_l t^{(l)}]^n$$

Так как искомая равна сумме всех вероятностей

$$P_{m_1 m_2 \dots m_l}$$

для которых $m_1 m_2 \dots m_l$ удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 + \dots + m_l &= n \\ m_1 \theta(1) + m_2 \theta(2) + \dots + m_l \theta(l) &= S \end{aligned}$$

то из предыдущего равенства видно, что искомая вероятность есть коэффициент при t^s в разложении выражения

$$[p_1 t^{\ell(1)} + p_2 t^{\ell(2)} + \dots + p_l t^{\ell(l)}]^n$$

Здесь особенно замечателен частный случай, когда $\theta(x) = x$ и когда, следовательно, искомая вероятность того, что

$$m_1 \cdot 1 + m_2 \cdot 2 + \dots + m_l \cdot l = s$$

определяется как коэффициент при t^s в разложении выражения

$$(p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3 + \dots + p_l t^l)^n$$

Если мы назовем через P_s — рассматриваемую вероятность, то в общем случае будем иметь

$$(28) \quad \sum P_s t^s = [p_1 t^{\ell(1)} + p_2 t^{\ell(2)} + \dots + p_l t^{\ell(l)}]^n$$

в указанном же частном случае эта формула примет вид

$$\sum P_s t^s = (p_1 t + p_2 t^2 + \dots + p_l t^l)^n$$

Положим теперь, что события A_1, A_2, \dots, A_l одинаково вероятны, т. е.

$$p_1 = p_2 = \dots = p_i = \dots = p_l$$

Вследствие этого будет

$$p_i = \frac{1}{l}$$

при всяком i . Для этого случая выведенная формула принимает такой вид:

$$(29) \quad \sum P_s t^s = \frac{t^n}{l^n} (1 + t + t^2 + \dots + t^{l-1})^n = \left(\frac{t}{l}\right)^n \cdot \left(\frac{t^l - 1}{t - 1}\right)^n$$

Из формулы (29) мы и можем найти вероятность P_s того, что сумма величин, определяющих случившиеся в n испытаниях события (в данном случае сумма значков, соответствующих случившимся в n испытаниях событиям), равна данной величине s .

§ 28. Мы покажем теперь, каким образом, основываясь на формуле (29), можно получить выражение вероятности P_s под видом некоторого ряда.

Мы имеем

$$\sum P_s t^s = \frac{1}{l^n} \cdot t^n (t^l - 1)^n (t - 1)^{-n}$$

так что вопрос сводится к нахождению коэффициента при t^{s-n} в разложении выражения

$$(t^l - 1)^n (t - 1)^{-n}$$

по степеням t . Но мы имеем:

$$(t^l - 1)^n = t^{ln} - \frac{n}{1} \cdot t^{l(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot t^{l(n-2)} - \\ - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} t^{l(n-3)} + \dots \\ (t-1)^{-n} = t^{-n} + \frac{n}{1} t^{-n-1} + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} t^{-n-2} + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} t^{-n-3} + \\ + \dots + \frac{n(n+1)(n+2) \dots (n+\lambda-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \lambda} t^{-n-\lambda}$$

Полагая

$$l(n-i) - (n+\lambda) = s - n$$

получим

$$\lambda = l(n-i) - s$$

Вставляя это значение λ в выражении общего члена второго ряда и делая последовательно i равным $0, 1, 2, \dots$, мы будем получать в этом разложении все возможные члены, которые, будучи умножены соответственно на первый, второй, третий, \dots и т. д. члены первого ряда, дадут члены, содержащие t^{s-n} [при этом член со значком i второго разложения мы умножаем на $(i+1)$ -ый член первого].

Отсюда видно, что сумма членов произведения

$$(t^l - 1)^n (t - 1)^{-n}$$

содержащих t^{s-n} , будет иметь такой вид:

$$t^{s-n} \cdot \sum (-1)^i \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-i+1)}{1 \cdot 2 \dots i} \cdot \frac{n(n+1) \dots [n+l(n-i)-s-1]}{1 \cdot 2 \dots [l(n-i)-s]}$$

где i должно давать все значения от 0 до n включительно, с тем, однако, условием, чтобы множитель

$$\frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-i+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i}$$

при $i = 0$ был заменяем 1 и множитель

$$\frac{n(n+1) \dots [n+l(n-i)-s-1]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots [l(n-i)-s]}$$

при $i = \frac{nl-s}{l}$ был заменен единицей, а при $i > \frac{nl-s}{l}$ — нулем. При этом следует заметить, что ln есть наибольшее значение, которое может иметь s (это следует из того, что сумма значков не может превышать наибольшего значка, взятого столько раз, сколько было испытаний).

На основании сказанного мы заключаем, что искомая вероятность P_s может быть представлена таким образом:

$$(30) \quad P_s = \frac{1}{l^n} \sum_{i=0}^{i=K} (-1)^i \frac{n(n-1) \dots (n-i+1)}{1 \cdot 2 \dots i} \times \\ \times \frac{n(n+1) \dots [n+l(n-i)-s-1]}{1 \cdot 2 \dots [l(n-i)-s]}$$

причем

$$K = E \left[\frac{ln-s}{l} \right] + 1$$

Отсюда мы находим такое выражение для вероятности P_s в виде ряда:

$$P_s = \frac{1}{l^n} \left\{ \frac{n(n+1) \dots [n+nl-s-1]}{1 \cdot 2 \dots n-s} - \frac{n}{1} \cdot \frac{n(n+1) \dots [n+l(n-1)-s-1]}{1 \cdot 2 \dots [l(n-1)-s]} + \right. \\ \left. + \frac{n(-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{n(n+1) \dots [n+l(n-1)-s-1]}{1 \cdot 2 \dots [l(n-2)-s]} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{n(n+1) \dots [n+l(n-3)-s-1]}{1 \cdot 2 \dots [l(n-3)-s]} + \dots \right\}$$

и этот ряд прекращается, коль скоро мы дойдем до члена, равного 1 или 0.

Для примера применим этот вывод к игре в кости. Эта игра состоит в бросании шести костей, имеющих вид кубиков; на сторонах кубика выставляются номера 1, 2, 3, 4, 5, 6, и выигрыш или проигрыш, смотря по условию игры, зависит от суммы выпавших номеров.

Так как все равно, бросать ли шесть раз одну кость, или же бросать один раз шесть одинаковых костей, то мы можем рассматривать бросание каждой кости как одно испытание, а потому в рассматриваемом случае $n = 6$.

Номер же, находящийся на верхней грани упавшего кубика, мы можем считать за величину, измеряющую событие, имевшее место в известном испытании, откуда видно, что в рассматриваемом случае $l = 6$.

Определим теперь вероятность P_s того, что сумма выпавших номеров есть s . Формула (30) в рассматриваемом случае принимает такой вид:

$$(a) \quad P_s = \frac{1}{6^6} \cdot \sum_{i=0}^{i=K} (-1)^i \cdot \frac{6 \cdot 5 \dots (7-i)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i} \cdot \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \dots (41-6i-s)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (36-6i-s)}$$

причем

$$K = E \left[\frac{36-s}{6} \right] + 1$$

Величина s не может быть больше 36.

Определим по формуле (α) величины $P_{36}, P_{35}, P_{34}, P_{33}, \dots$, получим

$$P_{36} = \frac{1}{6^6} = \frac{1}{46656}$$

при $s = 35: K = 1$ и будет

$$P_{35} = \frac{1}{6^6} \cdot 6 = \frac{1}{7776}$$

при $s = 34: K = 1$ и будет

$$P_{34} = \frac{6 \cdot 7}{6^6 \cdot 2} = \frac{7}{7776 \cdot 2} = \frac{7}{15552}$$

Точно так же найдем:

$$P_{33} = \frac{7 \cdot 8}{15552 \cdot 2} = \frac{7}{5832}; \quad P_{32} = \frac{7 \cdot 9}{5832 \cdot 4} = \frac{7}{2592}$$

$$P_{31} = \frac{7 \cdot 10}{2 \cdot 92 \cdot 5} = \frac{7}{1296}; \dots$$

Полагая теперь $s = 30$, получим

$$K = E \frac{36-30}{6} + 1 = 2$$

имеем

$$P_{30} = \frac{7 \cdot 11}{1296 \cdot 6} - \frac{6}{6^6} = \frac{1}{7776} \{ 77 - 1 \} = \frac{19}{1944} \text{ и т. д.}$$

Таким образом мы видим, что величина s с $s = 36$, с уменьшением s , вероятность P_s увеличивается, нетрудно убедиться, что

$$(\beta) \quad P_{36} = P_6; \quad P_{35} = P_7; \quad P_{34} = P_8; \quad P_{33} = P_9, \text{ и т. д.}$$

поэтому вероятность P_s , начиная с $s = 6$, увеличивается с увеличением значка, и это увеличение продолжается до тех пор, пока s не получит среднего между 6 и 36 значения, т. е. до $s = 21$. Итак, P_{21} есть максимум P_s .

При $s = 21$ будет

$$K = E \frac{36-21}{6} + 1 = 2 + 1 = 3$$

поэтому

$$\begin{aligned} P_{21} &= \frac{1}{6^6} \sum_{i=0}^{i=3} (-1)^i \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot (7-i)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i} \cdot \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \dots (20-6i)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 15-6i} = \\ &= \frac{1}{6^6} \left\{ \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15} \right. \\ &\quad \left. - 6 \cdot \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right\} = \\ &= \frac{3 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 19 - 6 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 14 + 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8}{6^6} = \frac{4332}{6^6} = \frac{361}{2592}. \end{aligned}$$

Мы написали равенства (β) как очевидные; докажем их аналитически, для чего представим формулу, выражающую P_s в несколько ином виде.

Мы имеем формулу

$$\sum P_s t^s = \frac{t^n}{l^n} \left[\frac{t^l - 1}{t - 1} \right]^n$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \sum P_s \cdot t^s &= \frac{1}{l^n} \cdot t^n (1 - t^l)(1 - t)^{-n} = \frac{1}{l^n} \cdot t^n \left[1 - \frac{n}{1} \cdot t^l + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} t^{2l} - \right. \\ &\quad \left. - \dots + (-1)^i \frac{n(n-1) \dots (n-i+1)}{1 \cdot 2 \dots i} t^{il} + \dots \right] \cdot \left[1 + nt + \right. \\ &\quad \left. \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} t^2 + \dots + \frac{n(n+1) \dots (n+\lambda-1)}{1 \cdot 2 \dots \lambda} \cdot t^\lambda + \dots \right] \end{aligned}$$

полагая теперь

$$\lambda + il = s - n$$

откуда

$$\lambda = s - n - il$$

мы получим такое выражение для общего члена коэффициента при t^{s-n}

$$(-1)^i \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-i+1)}{1 \cdot 2 \dots i} \cdot \frac{n(n+1) \dots s-il-1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (s-il-n)}$$

а отсюда получим и самый коэффициент, взяв сумму подобных выражений, в которых i имеет все значения от 0 до такого значения не включительно при котором $s - n - il$ делается отрицательным, т. е. до

$$i = E \left[\frac{s-n}{l} \right] + 1 = H$$

при этом множитель

$$\frac{n(n-1) \dots (n-i+1)}{1 \cdot 2 \dots i}$$

при $i = 0$ и множитель

$$\frac{n(n+1) \dots (s-il-1)}{1 \cdot 2 \dots (s-il-n)}$$

при $s - il - n = 0$ должно заменять через 1.

При таком условии мы находим

$$(31) P_s = \frac{1}{l^n} \cdot \sum_{i=0}^{i=H} (-1)^i \cdot \frac{n(n-1) \dots n-i+1}{1 \cdot 2 \dots i} \cdot \frac{n(n+1) \dots (s-il-1)}{1 \cdot 2 \dots (s-il-n)}$$

Применяя эту формулу к игре в кости, мы приведем ее к такому виду:

$$(γ) \quad P_s = \frac{1}{6^6} \cdot \sum_{i=0}^G (-1)^i \cdot \frac{6 \cdot 5 \dots (7-i)}{1 \cdot 2 \dots i} \cdot \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \dots (s-6i-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (s-6i-6)}$$

причем

$$G = E \left[\frac{s-6}{6} \right] + 1$$

Полагая теперь $s = 36 - k$ в формуле (α), получим

$$P_{36-k} = \frac{1}{6^6} \sum_{i=0}^{E \frac{k}{6} + 1} (-1)^i \cdot \frac{6 \cdot 5 \dots (7-i)}{1 \cdot 2 \dots i} \cdot \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \dots (5+k-6i)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (k-6i)}$$

Если же в формуле (β) положить $s = 6 + k$, то получим

$$P_{6+k} = \frac{1}{6^6} \sum_{i=0}^{E \frac{k}{6} + 1} (-1)^i \cdot \frac{6 \cdot 5 \dots (7-i)}{1 \cdot 2 \dots i} \cdot \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \dots 5+k-6i}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (k-6i)}$$

Отсюда и видно, что

$$P_{36-k} = P_{6+k}$$

что и требовалось доказать.

Впрочем, это есть частный случай общей теоремы, потому что, основываясь на формулах (30) и (31), нетрудно доказать, что вообще

$$P_{ln-k} = P_{n+k}$$

Итак, мы нашли:

$$\begin{aligned} P_6 = P_{36} &= \frac{1}{6^6} = \frac{1}{46656}; & P_7 = P_{35} &= \frac{6}{6^6} = \frac{1}{7776}; \\ P_8 = P_{34} &= \frac{21}{6^6} = \frac{7}{15552}; & P_9 = P_{33} &= \frac{56}{6^6} = \frac{7}{5832}; & \dots \\ & \dots & P_{21} &= \frac{361}{2592} \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь несколько планов лотерей, в которых известные выигрыши зависят от выбрасывания известной суммы номеров шестью костями.

Мы имеем приблизительно:

$$P_6 = P_{36} = \frac{1}{46656}; \quad P_7 = P_{35} = \frac{1}{7776}; \quad P_8 = P_{34} = \frac{1}{2222}, \text{ и т. д.}$$

Положим теперь, что лотерея устроена таким образом, что суммам номеров 6 и 36 соответствует выигрыш 46 656, суммам 7 и 35 — выигрыш 7776; суммам 8 и 34 — выигрыш 2222; остальным суммам не соответствует никаких выигрышей, так что устройство этих лотерей можно выразить следующей таблицей:

| Вероятность выигрышей | Выигрыши | Матем. ожидание |
|----------------------------|----------|-----------------|
| $P_6 = \frac{1}{46656}$ | 46656 | 1 |
| $P_7 = \frac{1}{7776}$ | 7776 | 1 |
| $P_8 = \frac{1}{2222}$ | 2222 | 1 |
| . | 0 | 0 |
| . | 0 | 0 |
| . | 0 | 0 |
| $P_{34} = \frac{1}{2222}$ | 2222 | 1 |
| $P_{35} = \frac{1}{7776}$ | 7776 | 1 |
| $P_{36} = \frac{1}{46656}$ | 46656 | 1 |

Отсюда видно, что математическое ожидание этой лотереи есть 6, а потому, если желательно, чтобы лотерея была устроена безобидно, необходимо, чтобы ставка была равна 6. Обыкновенно ставка делается в 10 коп., а потому для безобидности лотереи необходимо, чтобы выигрыши, соответствующие суммам номеров 6 и 36, 7 и 35, 8 и 34, соответственно равнялись:

$$\frac{46656}{600} \cdot 10 = 777.6 \text{ руб.}; \quad \frac{7776}{6} \cdot 10 = 129.6 \text{ руб.}$$

и

$$\frac{2222}{600} \cdot 10 = 37.0 \text{ руб.}$$

или кругло

$$780 \text{ руб.} \quad 130 \text{ руб.} \quad 40 \text{ руб.}$$

В действительности же откупщик лотереи назначал выигрыши гораздо меньшие, вследствие чего лотерея была ему выгодна и весьма невыгодна ставщикам; вместо 780, 130 и 40 руб., напр., назначалось 78 руб.; 13 руб.; 4 руб.; так что $\frac{9}{10}$ ставки шло в пользу откупщика; поэтому такие лотереи во всех государствах упразднены.

Сравним теперь три лотереи, из которых одна составлена по только что рассмотренному плану, другая включает 4 выигрыша: 2—по 46 656 руб.

и 2 — по 7776, и третья заключает два выигрыша по 46 656 руб.; при этом предполагается, что лотереи устроены безобидно. Математическое ожидание первой лотереи, как мы видели, есть 6, математическое ожидание второй есть 4; математическое ожидание третьей есть 2; предполагая, что ставка одна и та же и равна 1 руб., мы получим такую сравнительную таблицу этих лотерей:

| Вероятность выигрыша | Выигрыши | | |
|----------------------------|------------|-------------|-------------|
| | 1-я лот. | 2-я лот. | 3-я лот. |
| P_6 и P_{36} | 7 776 руб. | 11 664 руб. | 23 328 руб. |
| P_7 и P_{35} | 1 296 » | 1 944 » | 0 |
| P_8 и P_{34} | 370.3 » | 0 | 0 |
| | 0 | 0 | 0 |

Таким образом мы видим, что выигрыши в этих лотереях значительно разнятся между собою; самые крупные находятся в лотерее, имеющей наименьшее число выигрышей, и хотя вероятность выиграть хотя что-нибудь для каждой лотереи различна, но несмотря на это все три лотереи одинаково безобидны, потому что математические ожидания их одинаковы и равны ставкам.

§ 29. Перейдем теперь к рассмотрению того случая, когда l в формуле (29) делается весьма большим и наконец обращается в бесконечность, т. е. того случая, когда дело идет об определении вероятности того, что сумма весьма большого или бесконечного числа величин, имеющих одинаковые вероятности, имеет данное значение.

Мы имеем

$$\sum P_s t^s = \frac{t^n}{l^n} \cdot \frac{(t^l - 1)^n}{(t - 1)^n}$$

Но мы знаем, что если функция $f(t)$ разлагается в ряд

$$A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \dots + A_N t^N + \dots$$

то

$$A_N = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{\varphi\sqrt{-1}}) e^{-N\varphi\sqrt{-1}} \cdot d\varphi$$

Поэтому, полагая

$$f(t) = \frac{t^n}{l^n} \cdot \frac{(t^l - 1)^n}{(t - 1)^n}$$

найдем

$$l^n \cdot P_N = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{n\varphi\sqrt{-1}} \cdot (e^{l\varphi\sqrt{-1}} - 1)^n}{(e^{\varphi\sqrt{-1}} - 1)^n} \cdot d\varphi$$

Замечая теперь, что

$$\left(\frac{e^{i\varphi\sqrt{l-1}} - 1}{e^{\varphi\sqrt{l-1}} - 1} \right)^n = e^{\frac{n}{2}(l+1)\varphi\sqrt{l-1}} \left(\frac{\sin \frac{l\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \right)^n$$

найдем

$$P_N = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{(n \frac{l+1}{2} - N)\varphi\sqrt{l-1}} \left(\frac{\sin \frac{l\varphi}{2}}{l \sin \frac{\varphi}{2}} \right)^n \cdot d\varphi$$

но

$$e^{(n \frac{l+1}{2} - N)\varphi\sqrt{l-1}} = \cos \left(n \frac{l+1}{2} - N \right) \varphi + \sqrt{l-1} \sin \left(n \frac{l+1}{2} - N \right) \varphi$$

а потому

$$P_N = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \cos \left(n \frac{l+1}{2} - N \right) \varphi \cdot \left(\frac{\sin \frac{l\varphi}{2}}{l \sin \frac{\varphi}{2}} \right)^n \cdot d\varphi$$

Если же положить $\frac{l\varphi}{2} = \theta$, то будет

$$(32) \quad P_N = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{i\pi}{2}} \cos \left(n \frac{l+1}{1} - N \right) \frac{2\theta}{l} \cdot \left[\frac{\sin \theta}{l \sin \frac{\theta}{l}} \right]^n \cdot \frac{2}{l} \cdot d\theta$$

Таким образом вероятность P_N выражена определенным интегралом. Сопоставляя формулу (32) с формулами (30) и (31), мы можем найти значение интеграла

$$\int_0^{\frac{i\pi}{2}} \cos \left(n \frac{l+1}{2} - N \right) \frac{2\theta}{l} \cdot \left[\frac{\sin \theta}{\sin \frac{\theta}{l}} \right]^n d\theta$$

Будем теперь искать вероятность того, что N заключается между пределами N_1 и N_2 . Называя эту вероятность через $\prod_{N_1}^{N_2}$, получим

$$\prod_{N_1}^{N_2} = \sum_{N_1}^{N_2} P_N = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{i\pi}{2}} \sum_{N_1}^{N_2} \cos \left(n \frac{l+1}{2} - N \right) \frac{2\theta}{l} \left[\frac{\sin \theta}{l \sin \frac{\theta}{2}} \right]^n \cdot \frac{2}{l} \cdot d\theta$$

Это есть точное выражение искомой вероятности. Теперь мы выведем приближенное выражение этой вероятности для того случая, когда l и n весьма велики. Мы имеем

$$P_N = \frac{2}{\pi l} \cdot \int_0^{\frac{l\pi}{2}} \cos \left(n \frac{l+1}{l} - \frac{2N}{l} \right) \theta \cdot \left[\frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \frac{\frac{\theta}{l}}{\sin \frac{\theta}{l}} \right]^n \cdot d\theta$$

Отсюда видно, что при l весьма большом можно приблизительно положить

$$P_N = \frac{2}{\pi l} \int_0^{\frac{l\pi}{2}} \cos \left(n - \frac{2N}{l} \right) \theta \cdot \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^n \cdot d\theta$$

ибо при n весьма большом лишь те элементы интеграла влияют на его величину, для которых θ весьма малое; в самом деле, рассматривая здесь интеграл как предел суммы, в которой переменная θ изменяется от 0 до $\frac{l\pi}{2}$, мы видим, что при n весьма большом те члены этой суммы, в которых θ имеет величину значительную, будут весьма малы, потому что множитель $\left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^n$ будет весьма мал, значит на величину интеграла будут влиять лишь те члены, где θ весьма мало.

Основываясь на этом, мы при приближенном нахождении вероятности P_N можем считать θ весьма малым, а в таком случае, замечая, что

$$\frac{\sin \theta}{\theta} = 1 - \frac{\theta^2}{6} + \dots$$

и

$$\log \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^n = n \log \left(1 - \frac{n\theta^2}{6} \right) = -\frac{n\theta^2}{6} - \dots$$

откуда

$$\left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^n = e^{-\frac{n\theta^2}{6}}$$

следовательно будет

$$P_N = \frac{2}{\pi l} \int_0^{\frac{l\pi}{2}} \cdot e^{-\frac{n\theta^2}{6}} \cdot \cos \left(n - \frac{2N}{l} \right) \theta \cdot d\theta$$

пренебрегая теперь величиною интеграла

$$\int_{\frac{l\pi}{2}}^{\infty} \cdot e^{-\frac{n\theta^2}{6}} \cos \left(n - \frac{2N}{l} \right) \theta \cdot d\theta$$

получим

$$P_N = \frac{2}{\pi l} \cdot \int_0^{\infty} e^{-\frac{n^2 x^2}{6}} \cos \left(n - \frac{2N}{l} \right) x \cdot dx$$

мы, на основании формулы

$$\int_0^{\infty} \cos ax \cdot e^{-bx^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{b}} e^{-\frac{a^2}{4b}}$$

найдем

$$P_N = \frac{\sqrt{6}}{l\sqrt{n\pi}} e^{-\frac{6\left(\frac{ln}{2} - N\right)^2}{n^2}}$$

Отсюда

$$\prod_{N_1}^{N_2} = \sum_{N_1}^{N_2} \frac{\sqrt{6}}{l\sqrt{n\pi}} e^{-\frac{6\left(\frac{ln}{2} - N\right)^2}{n^2}}$$

Выражая эту сумму при помощи интеграла, как это мы делали и раньше, и замечая, что при n весьма большом все члены, кроме интеграла, будут весьма малы, можем положить

$$\prod_{N_1}^{N_2} = \frac{\sqrt{6}}{l\sqrt{n\pi}} \int_{N_1}^{N_2} e^{-\frac{6\left(N - \frac{ln}{2}\right)^2}{n^2}} \cdot dN$$

Полагая теперь

$$\frac{\sqrt{6}}{l\sqrt{n}} \left(N - \frac{ln}{2} \right) = t$$

получим

$$\prod_{N_1}^{N_2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} \cdot dt$$

где

$$t_1 = \frac{\sqrt{6}}{l\sqrt{n}} \left(N_1 - \frac{ln}{2} \right) \quad \text{и} \quad t_2 = \frac{\sqrt{6}}{l\sqrt{n}} \left(N_2 - \frac{ln}{2} \right)$$

Таким образом мы имеем

$$(33) \quad \prod_{\frac{\frac{ln}{2} + \frac{l\sqrt{n}}{\sqrt{6}} t_1}{\frac{ln}{2} + \frac{l\sqrt{n}}{\sqrt{6}} t_2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} \cdot dt$$

Особенно замечателен тот случай, когда

$$t_1 = -u \quad \text{и} \quad t_2 = +u$$

так что будет

$$(34) \quad \frac{\frac{\ln}{2} + \frac{l\sqrt{n}}{\sqrt{6}}u}{\frac{\ln}{2} - \frac{l\sqrt{n}}{\sqrt{6}}u} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-t^2} \cdot dt$$

Отсюда видно, что весьма вероятно, что N удовлетворяет неравенствам

$$\frac{\ln}{2} + \frac{l\sqrt{n}}{\sqrt{6}}u > N > \frac{\ln}{2} - \frac{l\sqrt{n}}{\sqrt{6}}u$$

или

$$(a) \quad \frac{l}{2} + \frac{lu}{\sqrt{6n}} > \frac{N}{n} > \frac{l}{2} - \frac{lu}{\sqrt{6n}}$$

Здесь N есть сумма величин всех событий, случившихся в n испытаний, и мы знаем, что в каждое отдельное испытание может иметь место только одно из рассматриваемых событий и что, с другой стороны, в каждое испытание одно из рассматриваемых событий непременно должно иметь место.

Поэтому формула (34) определяет вероятность того, что средняя арифметическая из весьма большого числа величин, имеющих одинаковую вероятность «случившихся» в весьма большое число испытаний, заключается между пределами

$$\frac{l}{2} + \frac{lu}{\sqrt{6n}} \quad \text{и} \quad \frac{l}{2} - \frac{lu}{\sqrt{6n}}$$

Так как эту вероятность можно сделать на сколько угодно близкой к 1, то можно сказать

$$\lim \left(\frac{N}{n} \right)_{n \rightarrow \infty} = \frac{l}{2}$$

т. е. средняя арифметическая весьма большого числа величин, имеющих одинаковые вероятности, при увеличении число испытаний до бесконечности, стремится к пределу, равному половине числа всех величин, иначе — половине наибольшей из них.

На выводе, к которому мы пришли, основываются в некоторых физико-математических изысканиях, когда желают решить вопрос о том, случайно ли известное явление, или же его следует приписать некоторым причинам.

Положим, что событие A_i измеряется величиною ih , так что рассматриваемые события имеют величины:

$$h, 2h, 3h, \dots lh$$

причем lh есть наибольшая из этих величин, которую назовем через a . Умножая неравенство (а) на h , получим

$$\frac{a}{2} + \frac{ah}{\sqrt{6n}} > \frac{hN}{n} > \frac{a}{2} - \frac{ah}{\sqrt{6n}}$$

Отсюда видно, что при $n = \infty$ средняя арифметическая из всех рассматриваемых величин $\left(\frac{hN}{n}\right)$ имеет пределом половину наибольшей из них $\left(\frac{a}{2}\right)$.

Приложим этот результат к одному вопросу астрономии. Если бы наклонность плоскостей планетных орбит к плоскости эклиптики была совершенно случайна, другими словами, если бы вероятность того, что наклонность θ не зависит от θ , то мы нашли бы, что средняя арифметическая из всех наклонностей равнялась бы приблизительно 90° (половине наибольшей из них 180°), т. е. средняя плоскость планетных орбит была бы перпендикулярна к плоскости эклиптики. Но на самом деле оказывается, что плоскости планетных орбит составляют весьма малые углы с плоскостью эклиптики, вследствие чего средняя арифметическая из всех наклонностей весьма мало отличается от нуля. На основании этого заключают, что наклонность плоскостей планетных орбит не случайна, а существовали некоторые причины, которые сообщили плоскостям орбит всех планет приблизительно одинаковую малую наклонность.

§ 30. Перейдем теперь к новому и последнему вопросу теории вероятностей. Хотя этот вопрос и не относится к повторению событий, но мы его помещаем в этом отделе, потому что он имеет очень близкую связь с вопросом, разобранным в предыдущем параграфе.

Итак, мы переходим к определению вероятности того, что сумма величин, изменяющихся от случайных причин, заключается в данных пределах.

Положим, что мы имеем несколько величин x, y, z и т. д., и положим, что x может иметь только значения:

$$(\alpha) \quad x_1, x_2, x_3, \dots$$

y — только значения:

$$(\beta) \quad y_1, y_2, y_3, \dots$$

z — только значения:

$$(\gamma) \quad z_1, z_2, z_3, \dots$$

Назовем вероятности того, что x имеет значение x_i , через p_i , что y имеет значение y_i — через q_i , что z имеет значение z_i — через r_i и т. д.; предполагается, что x непременно имеет одно из значений (α), y — одно из значений (β), z — одно из значений (γ); так что будет:

$$(A) \quad \begin{aligned} p_1 + p_2 + p_3 + \dots &= 1; & q_1 + q_2 + q_3 + \dots &= 1 \\ r_1 + r_2 + r_3 + \dots &= 1 \end{aligned}$$

положим еще:

$$(B) \quad \begin{aligned} p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \dots &= a \\ q_1 y_1 + q_2 y_2 + q_3 y_3 + \dots &= b; & r_1 z_1 + r_2 z_2 + \dots &= c \\ p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + p_3 x_3^2 + \dots &= a_1; \\ q_1 y_1^2 + q_2 y_2^2 + q_3 y_3^2 + \dots &= b_1; & r_1 z_1^2 + r_2 z_2^2 + \dots &= c_1 \end{aligned}$$

так что a, b, c, \dots суть математические ожидания величин, a_1, b_1, c_1, \dots суть математические ожидания их квадратов.

Будем теперь искать вероятность того, что

$$x + y + z + \dots = s$$

Нетрудно видеть, что если P_s есть искомая вероятность, то

$$(35) \quad \begin{aligned} \sum P_s t^s &= [p_1 t^{x_1} + p_2 t^{x_2} + p_3 t^{x_3} + \dots] \times \\ &\times [q_1 t^{y_1} + q_2 t^{y_2} + q_3 t^{y_3} + \dots] \cdot [r_1 t^{z_1} + r_2 t^{z_2} + r_3 t^{z_3} + \dots] \end{aligned}$$

Теперь, чтобы упростить выводы, мы будем предполагать, что x, y, z , и т. д. могут иметь только целые значения; это ограничение впоследствии можно будет устранить, предполагая, что x, y, z будут выражены в весьма малых долях той единицы, в которых мы их предполагаем выраженными во время наших выводов. Конечно, такое рассмотрение предполагает, что x, y, z, \dots суть величины рациональные, тогда как при общем решении вопроса мы должны их предполагать какими угодно, но, несмотря на это, мы примем это предположение, потому что будем разыскивать лишь приближенное значение вероятности P_s .

При сделанных ограничениях найдем

$$P_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [p_1 e^{x_1 \varphi \sqrt{-1}} + p_2 e^{x_2 \varphi \sqrt{-1}} + \dots] \cdot [q_1 e^{y_1 \varphi \sqrt{-1}} + q_2 e^{y_2 \varphi \sqrt{-1}} + \dots] \times \\ \times [r_1 e^{z_1 \varphi \sqrt{-1}} + r_2 e^{z_2 \varphi \sqrt{-1}} + \dots] \dots e^{-s \varphi \sqrt{-1}} \cdot d\varphi$$

мы будем теперь делать приближенные выводы, основываясь на том, что число величин x, y, z, \dots весьма велико. Руководствуясь соображениями, развитыми в § 26, мы можем при приближенном нахождении этого интеграла пренебрегать степенями φ выше второй.

Вследствие этого, замечая, что

$$p_1 e^{x_1 \varphi \sqrt{-1}} + p_2 e^{x_2 \varphi \sqrt{-1}} + \dots = p_1 \left(1 + \frac{x_1 \varphi \sqrt{-1}}{1} - \frac{x_1^2 \varphi^2}{1 \cdot 2} + \dots \right) +$$

$$+ p_2 \left(1 + \frac{x_2 \varphi \sqrt{-1}}{1} - \frac{x_2^2 \varphi^2}{1 \cdot 2} + \dots \right) + \dots$$

мы получим, на основании равенств (B),

$$P_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left[1 + a\varphi \sqrt{-1} - \frac{a_1 \varphi^2}{2} \right] \cdot \left[1 + b\varphi \sqrt{-1} - \frac{b_1 \varphi^2}{2} \right] \times$$

$$\times \left[1 + c\varphi \sqrt{-1} - \frac{c_1 \varphi^2}{2} \right] \dots e^{-s\varphi \sqrt{-1}} \cdot d\varphi$$

Но мы имеем

$$\log \left[1 + a\varphi \sqrt{-1} - \frac{a_1 \varphi^2}{2} \right] \cdot \left[1 + b\varphi \sqrt{-1} - \frac{b_1 \varphi^2}{2} \right] \dots =$$

$$= a\varphi \sqrt{-1} - \frac{a_1 \varphi^2}{2} - \frac{1}{2} \left[a\varphi \sqrt{-1} - \frac{a_1 \varphi^2}{2} \right]^2 + \dots$$

$$+ b\varphi \sqrt{-1} - \frac{b_1 \varphi^2}{2} - \frac{1}{2} \left[b\varphi \sqrt{-1} - \frac{b_1 \varphi^2}{2} \right]^2 + \dots$$

$$+ c\varphi \sqrt{-1} - \frac{c_1 \varphi^2}{2} - \frac{1}{2} \left[c\varphi \sqrt{-1} - \frac{c_1 \varphi^2}{2} \right]^2 + \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$= (a + b + c + \dots) \varphi \sqrt{-1} + [a^2 - a_1 + b^2 - b_1 + c^2 - c_1 + \dots] \frac{\varphi^2}{2}$$

$$= A\varphi \sqrt{-1} - B \frac{\varphi^2}{2}$$

причем положено:

$$a + b + c + \dots = A; \quad a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + c_1 - c^2 + \dots = B$$

Таким образом получим

$$P_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-\frac{B\varphi^2}{2}} \cdot e^{A\varphi \sqrt{-1}} \cdot e^{-s\varphi \sqrt{-1}} \cdot d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{-\frac{B\varphi^2}{2}} \cos(A - s)\varphi \cdot d\varphi$$

пренебрегая величиной интеграла

$$(36) \quad \int_{\pi}^{\infty} e^{-\frac{B\varphi^2}{2}} \cdot \cos(A - s)\varphi \cdot d\varphi$$

что позволительно при B , достаточно большом и положительном, имеем

$$(37) \quad P_s = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{B\varphi^2}{2}} \cdot \cos(A - s)\varphi \cdot d\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi B}} \cdot e^{-\frac{(A-s)^2}{2B}}$$

Чтобы оправдать сделанное нами отбрасывание величины (*), надо доказать, что $B > 0$ и что с увеличением числа величин $x, y, z, \dots B$ также возрастает.

Для этого достаточно доказать, что $a_1 - a^2, a_1 - b^2, \dots$ все положительные.

Возьмем одну из этих разностей, и что будет сказано о ней, то же относится и до остальных. Мы имеем

$$\begin{aligned} a_1 - a^2 &= a_1 - 2a \cdot a + a^2 \cdot 1 \\ &= p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \dots - 2a(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots) + \\ &+ a^2(p_1 + \dots) = p_1(x_1^2 - 2ax_1 + a^2) + p_2(x_2^2 - 2ax_2 + a^2) + \dots = \\ &= p_1(x_1 - a)^2 + p_2(x_2 - a)^2 + \dots \end{aligned}$$

это показывает, что величина $a_1 - a^2$ есть величина всегда положительная.

Обращаемся теперь к формуле (37), определяющей вероятность P_s , что сумма $x + y + z + \dots$ имеет данное значение s . Называя через $\prod_{s_0}^{s_1}$ — вероятность того, что s заключается между пределами s_0 и s_1 , и замечая, что, в силу нашего предположения, B весьма велико, вследствие чего сумма без чувствительной погрешности может быть заменена интегралом, мы получим

$$\prod_{s_0}^{s_1} = \int_{s_0}^{s_1} \frac{e^{-\frac{(A-s)^2}{2B}}}{\sqrt{2\pi B}} \cdot ds$$

Рассматривая эту формулу, мы замечаем, что вероятность $\prod_{s_0}^{s_1}$ определяется ею в виде однородной функции нулевого измерения относительно величин x, y, z, \dots , а потому она не изменится, если мы изменим единицу, в которой выражены эти величины; вследствие этого, сделанное относительно величин $x_1, x_2, \dots y_1, y_2, \dots$ и т. д. ограничение может быть отброшено. Итак, мы будем теперь в выше найденной формуле считать s каким угодно (это уже следует из замены суммы интегралом, вследствие чего введен ds , предполагая s изменяющимся непрерывно).

Полагая теперь

$$\frac{s-A}{\sqrt{2B}} = t; \quad s_0 = A + t_0 \sqrt{2B}; \quad s_1 = A + t_1 \sqrt{2B}$$

получим

$$\prod_{A+t_0 \sqrt{2B}}^{A+t_1 \sqrt{2B}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^{t_1} e^{-t^2} \cdot dt$$

Если взять

$$t_0 = -u; \quad t_1 = +u$$

то получится

$$(38) \quad \prod_{A-u \sqrt{2B}}^{A+u \sqrt{2B}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-t^2} dt$$

По этой формуле и определится вероятность того, что

$$A + u \sqrt{2B} > s > A - u \sqrt{2B}$$

причем

$$A = a + b + c + \dots$$

$$B = a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + c_1 - c^2 \dots$$

С увеличением u эта вероятность будет приближаться к 1, но зато пределы для s будут делаться шире. Эти пределы зависят также от величины B , которая, в свою очередь, зависит от числа величин x, y, z, \dots . Если мы это число назовем через n , то найдем, что формула (38) определяет вероятность того, что

$$\frac{A}{n} - \frac{u}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{2B}{n}} < \frac{S}{n} < \frac{A}{n} + \frac{u}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{2B}{n}}$$

Эти неравенства и их вероятность мы имели уже в §§ 8 и 9, где было показано, что*

$$\prod_{A-u \sqrt{2B}}^{A+u \sqrt{2B}} = 1 - \frac{\theta}{2u^2}$$

где θ есть правильная дробь, причем эта последняя формула была доказана совершенно строго. Поэтому в теоретических изысканиях следует пользоваться этой формулой, хотя она и не дает возможности вычислить вероятность

$$\prod_{A-u \sqrt{2B}}^{A+u \sqrt{2B}}$$

* Эта формула получится, положив $t = u \sqrt{2}$ в окончательной формуле § 8.

Формула же (38), дающая эту вероятность, выведена не строгим путем. Нестрогость вывода заключается в том, что мы делали различные предположения, не показав предела происходящих от этих погрешностей.

*Этого же предела не может дать сколь-нибудь удовлетворительным образом математический анализ в настоящем своем состоянии.**

Несмотря на это, мы будем пользоваться формулой (38) при изложении способа наименьших квадратов, к которому теперь и переходим.

Приложения теории вероятностей к обработке наблюдений

§ 31. При дальнейшем изложении мы будем основываться на формуле (38), определяющей вероятность того, что сумма $x + y + z + \dots$ величин, изменяющихся от случайных обстоятельств, заключается между пределами

$$A + u\sqrt{2B} \quad \text{и} \quad A - u\sqrt{2B}$$

при этом мы выберем для u такую величину, чтобы упомянутая вероятность, определяемая формулой

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-t^2} dt$$

равнялась $\frac{1}{2}$. Это значение u будет приблизительно равно 0.48.

Пределы $A - u\sqrt{2B}$ и $A + u\sqrt{2B}$ мы будем в этом случае называть *вероятными*, так что «вероятными» пределами для суммы $x + y + z + \dots$ будут такие пределы, что эта сумма с одинаковою вероятностью заключается в них и вне их.

«Ширина» этих пределов равна приблизительно

$$2 \cdot 0.48 \sqrt{2B} = 0.96 \cdot \sqrt{2B}$$

Но мы знаем, что величина $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-t^2} \cdot dt$ при u сколь-нибудь значи-

* В статье «Nouvelle forme du théorème sur la limite de probabilité» (Mém. Acad. Sci., 1906) А. М. Ляпунов дал вполне строгое и общее доказательство этой так называемой «пределной теоремы теории вероятностей». Возможно, что эти слова его знаменитого учителя и побудили Ляпунова заняться этим вопросом. А. К.

тельном, напр. $u = 3$, весьма близка к 1,* поэтому если мы «ширину» вероятных пределов увеличим в 6 или 7 раз, то получим уже такие пределы, для которых можем сказать с весьма большою вероятностью, что сумма $x + y + z + \dots$ заключается внутри их.

Когда мы будем говорить об ошибках наблюдений, то «вероятными» ошибками будем называть ошибки, заключающиеся в вероятных пределах, т. е. в пределах

$$A - 0.48 \sqrt{2B} \quad \text{и} \quad A + 0.48 \sqrt{2B}$$

и при дальнейшем изложении будем везде предполагать $u = 0.48$.

Прежде чем идти далее, мы условимся еще в одном термине: мы будем говорить, что наблюдения не заключают в себе «постоянной ошибки», если ошибки положительные и отрицательные одинаково вероятны, т. е. если математическое ожидание ошибок равно нулю.

При дальнейшем изложении мы будем предполагать это условие выполненным, т. е. будем считать математическое ожидание ошибок равным нулю; если же нам придется анализировать наблюдения, имеющие постоянные ошибки, то мы будем делать соответствующую оговорку.

Следует заметить, что при этом одинаково вероятными предполагают ошибки, имеющие одинаковые численные величины.

§ 32. Положим, что дело идет об определении некоторой величины V и что наблюдения дают нам для нее такие значения:

$$L_1, L_2, L_3, \dots, L_n$$

* Для наглядности приводим краткую табличку значений этого интеграла.

| u | $\int_0^u e^{-t^2} \cdot dt$ | u | $\int_0^u e^{-t^2} \cdot dt$ | u | $\int_0^u e^{-t^2} \cdot dt$ |
|-----|------------------------------|-----|------------------------------|-----|------------------------------|
| 0.0 | 0.000 000 | 0.8 | 0.742 101 | 2.5 | 0.999 598 |
| 0.1 | 0.112 463 | 0.9 | 0.746 908 | 3.0 | 0.9 999 779 |
| 0.2 | 0.222 703 | 1.0 | 0.842 701 | 3.5 | 0.999 999 257 |
| 0.3 | 0.328 627 | 1.2 | 0.910 314 | 4.0 | 0.9 999 999 846 |
| 0.4 | 0.428 392 | 1.4 | 0.952 285 | 4.5 | 0.99 999 999 981 |
| 0.5 | 0.520 500 | 1.6 | 0.976 348 | | |
| 0.6 | 0.603 856 | 1.8 | 0.989 091 | | |
| 0.7 | 0.677 801 | 2.0 | 0.995 322 | | |

A. K.

в этом случае за величину V обыкновенно принимают среднее арифметическое из этих значений, т. е.

$$\frac{L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n}{n}$$

и притом чем больше число наблюдений n , тем мы считаем это значение ближе к V . Мы покажем теперь, на чем основываются подобные суждения.

Пусть

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_n$$

суть ошибки первого, второго, третьего, . . . n -ого наблюдения. При этом положительными ошибками будем считать такие ошибки, которые увеличивают, а отрицательными — такие, которые уменьшают истинную величину V .

При этих условиях будем иметь:

$$V = L_1 - \varepsilon_1$$

$$V = L_2 - \varepsilon_2$$

$$\dots$$

$$V = L_n - \varepsilon_n$$

откуда

$$nV = (L_1 + L_2 + \dots + L_n) - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_n + \dots)$$

и

$$V = \frac{L_1 + L_2 + \dots + L_n}{n} - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_n}{n}$$

Отсюда видно, что, принимая за V среднее арифметическое из наблюдаемых значений, мы делаем ошибку

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n}{n}$$

Найдем теперь вероятные пределы этой ошибки.

Применяя к данному случаю формулу (38), положим:

$$x = \frac{\varepsilon_1}{n}; \quad y = \frac{\varepsilon_2}{n}; \quad z = \frac{\varepsilon_3}{n}; \quad \dots$$

в таком случае

$$a = \sum \frac{\varepsilon_1^{(i)}}{n} p_i = 0; \quad b = \sum \frac{\varepsilon_2^{(i)}}{n} \cdot q_i = 0; \quad c = \sum \frac{\varepsilon_3^{(i)}}{n} r_i = 0, \text{ и т. д.,}$$

где $\varepsilon_1^{(i)}$ есть одна из возможных ошибок первого наблюдения и p_i — вероятность ее; $\varepsilon_2^{(i)}$ — одна из возможных ошибок второго наблюдения и q_i — вероятность ее и т. д.

Вследствие этого мы будем иметь

$$A = a + b + c + \dots = 0$$

Далее мы имеем

$$a_1 = \sum \left(\frac{\varepsilon_1^{(i)}}{n} \right)^2 \cdot p_i = \frac{1}{n^2} \sum (\varepsilon_1^{(i)})^2 p_i = \frac{k}{n^2}$$

причем положено

$$k = \sum (\varepsilon_1^{(i)})^2 \cdot p_i$$

Величина k зависит от качества наблюдений, и нетрудно видеть, что чем меньше k , тем лучше наблюдения, потому что k тогда только может быть малым, когда ошибки малые по абсолютной величине.

Если все наблюдения одинаково хороши, то k для всех наблюдений одно и то же, и мы будем иметь

$$a_1 = b_1 = c_1 = \dots = \frac{k}{n^2}$$

вследствие чего будет

$$B = a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + c_1 - c^2 + \dots = n \frac{k}{n^2} = \frac{k}{n}$$

Таким образом мы видим, что вероятными пределами для ε будут служить величины

$$-u \sqrt{\frac{2k}{n}} \quad \text{и} \quad +u \sqrt{\frac{2k}{n}}$$

показывающие, что «ширина» вероятных пределов уменьшается с увеличением числа наблюдений, если только все наблюдения одинаково хороши; это и служит основанием к увеличению числа наблюдений, когда желают по средней арифметической из наблюденных величин «более точным образом» определить искомую величину.

Перейдем теперь к другому вопросу.

§ 33. Положим, что дело идет опять об определении величины V , для которой наблюдения дают значения:

$$L_1, L_2, L_2, \dots, L_n$$

и требуется найти такую комбинацию из этих наблюдений, которая давала бы наиболее вероятное значение для V .

Этот вопрос может быть поставлен или таким образом: а) из всех возможных комбинаций требуется найти наилучшую, или таким: б) из всех комбинаций данного вида требуется найти наилучшую.

В первой форме этот вопрос, конечно, гораздо общее, но решить его в такой форме мы можем только при помощи закона гипотез, а все выводы, сделанные на основании этого закона, не имеют надлежащей строгости; поэтому мы решим этот вопрос во второй его форме и выберем следующий вид комбинаций:

$$\frac{\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \dots + \lambda_n L_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}$$

Здесь мы постараемся определить $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ сообразно с условием, чтобы эта комбинация наилучшим образом выражала V , т. е. чтобы вероятные пределы ошибки были наиболее тесные.

Заметим, что средняя арифметическая есть частный случай этой комбинации, именно — когда

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \dots = \lambda_n$$

Мы имеем равенства:

$$V = L_1 - \varepsilon_1$$

$$V = L_2 - \varepsilon_2$$

• • • • •

$$V = L_n - \varepsilon_n$$

отсюда:

$$\begin{aligned} & V(\lambda_1 + \lambda_2 \dots + \lambda_n) = \\ & = (\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \dots + \lambda_n L_n) - (\varepsilon_1 \lambda_1 + \varepsilon_2 \lambda_2 + \dots + \varepsilon_n \lambda_n) \\ & V = \frac{L_1 \lambda_1 + L_2 \lambda_2 + \dots + L_n \lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n} - \frac{\varepsilon_1 \lambda_1 + \varepsilon_2 \lambda_2 + \dots + \varepsilon_n \lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n} \end{aligned}$$

так что, принимая за V величину

$$\frac{L_1 \lambda_1 + L_2 \lambda_2 + \dots + L_n \lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}$$

мы делаем ошибку

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1 \lambda_1 + \varepsilon_2 \lambda_2 + \dots + \varepsilon_n \lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}$$

Найдем теперь вероятные пределы для этой ошибки.

Пусть

$$x = \frac{\varepsilon_1 \cdot \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}; \quad y = \frac{\varepsilon_2 \cdot \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n};$$

$$z = \frac{\varepsilon_3 \cdot \lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}; \quad \dots \text{ и т. д.}$$

В таком случае будем иметь

$$a = \sum \frac{\varepsilon_1^{(i)} \cdot \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n} \cdot p_i = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n} \cdot \sum \varepsilon_1^{(i)} \cdot p_i = 0$$

таким образом будет

$$a = b = c = \dots = 0$$

значит и

$$A = 0$$

Далее мы имеем

$$a_1 = \sum \frac{\varepsilon_1^2 \cdot \lambda_1^2}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)^2} \cdot p_i = \frac{\lambda_1^2}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)^2} \cdot \sum \varepsilon_1^2 p_i =$$

$$= k \cdot \frac{\lambda_1^2}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)^2}$$

Предполагая, что все наблюдения одинаково хороши, будем совершенно так же иметь:

$$b_1 = k \cdot \frac{\lambda_2^2}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)^2}; \quad c_1 = k \cdot \frac{\lambda_3^2}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)^2}, \quad \text{и т. д.}$$

поэтому найдем

$$B = k \cdot \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)^2}$$

Итак, вероятные пределы будут

$$-u \sqrt{2k \cdot \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)^2}}$$

и

$$+u \sqrt{2k \cdot \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)^2}}$$

Как уже сказано, наилучшей комбинацией будет та, при которой «ширина» пределов наименьшая, так что вопрос сводится на определение $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ из условия minimum'a выражения

$$W = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)^2}$$

Но легко видеть, что в таком виде эта задача неопределенная, ибо из условий minimum'a сами величины $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ не определяются, а определяются лишь отношения между ними; поэтому мы можем между этими величинами поставить какое угодно условие, выраженное одним уравнением между ними. Наиболее простой результат получится, положив

$$(\alpha) \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$$

так что будет

$$W = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2$$

Условия minimum'a W дают уравнения:

$$\begin{aligned} \lambda_1 d\lambda_1 + \lambda_2 d\lambda_2 + \dots + \lambda_n d\lambda_n &= 0 \\ d\lambda_1 + d\lambda_2 + \dots + d\lambda_n &= 0 \end{aligned}$$

Умножив второе уравнение на неопределенный множитель ρ и вычитая из первого и уравнивая затем нулю коэффициенты при $d\lambda_1, d\lambda_2, \dots, \dots, d\lambda_n$, получаем:

$$\lambda_1 = \rho; \quad \lambda_2 = \rho; \quad \lambda_3 = \rho; \quad \dots \quad \lambda_n = \rho$$

эти уравнения вместе с уравнением α дают

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$$

Таким образом мы видим, что minimum W имеет место при равенстве количеств $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Считаем не лишним теперь вывести это другим, элементарным, путем: положим

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = s$$

но мы имеем

$$\begin{aligned} & \left(\lambda_1 - \frac{s}{n}\right)^2 + \left(\lambda_2 - \frac{s}{n}\right)^2 + \dots + \left(\lambda_n - \frac{s}{n}\right)^2 = \\ & = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2 - 2 \frac{s}{n} (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) + n \frac{s^2}{n^2} \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} & \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2 = \\ & = \frac{s^2}{n} + \frac{\left(\lambda_1 - \frac{s}{n}\right)^2 + \left(\lambda_2 - \frac{s}{n}\right)^2 + \dots + \left(\lambda_n - \frac{s}{n}\right)^2}{s^2} \cdot s^2 \end{aligned}$$

а потому

$$W = \frac{1}{n} + \frac{\left(\lambda_1 - \frac{s}{n}\right)^2 + \left(\lambda_2 - \frac{s}{n}\right)^2 + \dots + \left(\lambda_n - \frac{s}{n}\right)^2}{s^2}$$

Так как второй член правой части этого равенства всегда положительный, то отсюда видно, что minimum W будет иметь место только в том случае, когда этот второй член равен нулю, т. е. когда

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \dots = \lambda_n = \frac{s}{n}$$

т. е. при условии равенства величин $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

Итак, мы приходим к заключению, что за V следует взять

$$\frac{L_1 + L_2 + \dots + L_n}{n}$$

т. е. среднюю арифметическую из наблюдаемых величин.

§ 34. Показав, что из всех комбинаций вида

$$\frac{\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \dots + \lambda_n L_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}$$

наилучшая есть средняя арифметическая наблюдаемых величин, мы покажем теперь, на чем должно основываться разыскание наилучшей из всех возможных комбинаций.

Положим, что нам известна функция $\varphi(\varepsilon)$, определяющая вероятность того, что погрешность имеет величину ε . В таком случае мы легко можем определить наилучшую комбинацию наблюдений.

В самом деле, положим, что V может иметь значения:

$$V_0, V_1, V_2, \dots, V_\lambda$$

(величины $V_0, V_1, \dots, V_\lambda$ могут быть сколь угодно близки друг к другу).

Для определения величины V , мы произвели n наблюдений, которые дали нам следующие значения:

$$L_1, L_2, \dots, L_n$$

Это представляет событие E .

Различные гипотезы, в которых это событие могло случиться, суть:

$$V = V_0; V = V_1; V = V_2; \dots V = V_\lambda; \dots \text{ и т. д.}$$

Не зная ничего о вероятности этих гипотез, мы предполагаем их равными между собою. Назовем через P —общую величину этих вероятностей, тогда

$$P_0 = P_1 = P_2 = \dots = P_\lambda = \dots = P$$

Это допущение является произвольным, вследствие чего дальнейшие выводы не являются строгими.

Вероятность события E в гипотезе, что $V = V_\lambda$, т. е. вероятность того, что, определяя из наблюдений известную величину V_λ , мы получим для нее значения

$$L_1, L_2, \dots, L_n$$

есть

$$p_\lambda = \varphi(L_1 - V_\lambda) \cdot \varphi(L_2 - V_\lambda) \dots \varphi(L_n - V_\lambda)$$

и потому вероятность того, что событие E случилось в гипотезе

$$V = V_\lambda$$

выразится таким образом:

$$\begin{aligned} \frac{P_\lambda \cdot p_\lambda}{\sum P_\lambda \cdot p_\lambda} &= \frac{\varphi(L_1 - V_\lambda) \varphi(L_2 - V_\lambda) \dots \varphi(L_n - V_\lambda) \cdot P}{\sum \varphi(L_1 - V_\lambda) \varphi(L_2 - V_\lambda) \dots \varphi(L_n - V_\lambda) \cdot P} = \\ &= \frac{\varphi(L_1 - V_\lambda) \varphi(L_2 - V_\lambda) \dots \varphi(L_n - V_\lambda)}{\sum \varphi(L_1 - V_\lambda) \varphi(L_2 - V_\lambda) \dots \varphi(L_n - V_\lambda)} \end{aligned}$$

где сумма распространена на все значения λ и, следовательно, есть величина постоянная.

Таким образом разыскание maximum'a этой вероятности сводится на разыскание maximum'a выражения

$$W = \varphi(L_1 - V_\lambda) \cdot \varphi(L_2 - V_\lambda) \dots \varphi(L_n - V_\lambda)$$

что в том случае, когда функция $\varphi(z)$ нам известна, и даст уравнение для определения V_λ в функции наблюдаемых величин L_1, L_2, \dots, L_n . Эта последняя функция и будет наилучшею комбинацией наблюдений, потому что вероятность того, что V_λ равно этой комбинации, — наибольшая.

Итак, мы видим, что все дело заключается в определении вида функции $\varphi(z)$.

Некоторые теоретические соображения, о которых будет сказано ниже, приводят к заключению, что

$$\varphi(z) = F \cdot e^{-gz^2}$$

где F и g суть некоторые постоянные количества.

Эту формулу пробовали проверять опытным путем и нашли, что она довольно хорошо выражает закон вероятности погрешности в зависимости от изменения величины этой погрешности.

Принимая за $\varphi(z)$ — приведенную выше функцию, мы найдем

$$W = F^n e^{-gt^2}$$

причем

$$t^2 = (L_1 - V_\lambda)^2 + (L_2 - V_\lambda)^2 + \dots + (L_n - V_\lambda)^2$$

Отсюда видно, что maximum W будет иметь место при maximum'e выражения

$$(L_1 - V_\lambda)^2 + (L_2 - V_\lambda)^2 + \dots + (L_n - V_\lambda)^2$$

в котором V_λ рассматривается как независимая переменная.

Значение V_λ , делающее предыдущее выражение maximum'ом, определяется из уравнения

$$-2(L_1 - V_\lambda) - 2(L_2 - V_\lambda) \dots - 2(L_n - V_\lambda) = 0$$

что дает

$$V_\lambda = \frac{L_1 + L_2 + \dots + L_n}{n}$$

Таким образом предположение, что

$$\varphi(z) = F \cdot e^{-az^2}$$

приводит к заключению, что наилучшая из всех возможных комбинаций есть среднее арифметическое из наблюдаемых величин.

§ 35. Теперь мы покажем, на каких теоретических соображениях основывается нахождение вида функции $\varphi(z)$.

Заметим, что если имеются два наблюдения, то можно принять за несомненное, что наилучшей комбинацией их будет среднее арифметическое, потому что в этом случае ничто не дает нам права предпочитать одну из наблюдаемых величин другой, вследствие чего мы и должны остановиться на величине, которая была бы на столько же удалена от одной из наблюдаемых величин, как и от другой.

Но нельзя того же сказать о трех или о большем числе наблюдений. В самом деле, положим, что мы сделали три наблюдения и что два из них дали одно и то же значение для искомой величины V . В таком случае мы должны дать преимущество величине, повторившейся два раза, но должно ли это преимущество выразиться в том, что мы от величины, повторившейся два раза, берем $\frac{2}{3}$, от величины, случившейся один раз — $\frac{1}{3}$ и сумму последних принимаем за величину V_1 ? Очевидно, мы не имеем права утверждать это.

Теперь мы покажем, что если за наилучшую комбинацию трех наблюдений принять среднюю арифметическую, то можно найти вид функции $\varphi(z)$.

Мы видели, что наилучшая комбинация находится из условия maximum'a выражения

$$W = \varphi(L_1 - V_\lambda) \cdot \varphi(L_2 - V_\lambda) \cdot \dots \cdot \varphi(L_n - V_\lambda)$$

Для трех наблюдений это выражение будет

$$W = \varphi(L_1 - V_\lambda) \cdot \varphi(L_2 - V_\lambda) \cdot \varphi(L_3 - V_\lambda)$$

Разыскание maximum'a его приводит к уравнению

$$\frac{\varphi'(L_1 - V_\lambda)}{\varphi(L_1 - V_\lambda)} + \frac{\varphi'(L_2 - V_\lambda)}{\varphi(L_2 - V_\lambda)} + \frac{\varphi'(L_3 - V_\lambda)}{\varphi(L_3 - V_\lambda)} = 0$$

Положим

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \psi(z)$$

тогда это уравнение примет вид

$$\psi(L_1 - V_\lambda) + \psi(L_2 - V_\lambda) + \psi(L_3 - V_\lambda) = 0$$

Мы должны теперь выразить, это что уравнение удовлетворяется при

$$V_\lambda = \frac{L_1 + L_2 + L_3}{3}$$

очевидно, что при этом значении будет

$$(L_1 - V_\lambda) + (L_2 - V_\lambda) + (L_3 - V_\lambda) = 0$$

поэтому, положив $L_1 - V_\lambda = y$; $L_2 - V_\lambda = y_1$, имеем

$$L_3 - V_\lambda = -(y + y_1)$$

следовательно, мы должны иметь равенство

$$(a) \quad \psi(y) + \psi(y_1) + \psi(-y - y_1) = 0$$

справедливое для всяких y и y_1 , а потому мы можем его рассматривать как уравнение, определяющее функцию $\psi(y)$.

Здесь мы встречаемся с новым вопросом математики: функция определяется не дифференциальным уравнением и не уравнением в конечных разностях, а уравнением, связывающим значения искомой функции, соответствующие различным значениям переменной независимой, известным образом связанным между собою. Такие уравнения называются функциональными. Решением таких уравнений занимались (между прочим Абель) и теперь занимаются некоторые математики. Однако до сих пор не существует общих приемов для их решения; существующие же приемы сводятся на то, чтобы по данному функциональному уравнению составить дифференциальное при помощи дифференцирования и исключения неизвестных величин. Мы покажем один из этих приемов на рассматриваемом частном случае.

Дифференцируя уравнение (а) по y , находим

$$\psi'(y) - \psi'(-y - y_1) = 0$$

Дифференцируя это уравнение по y_1 , находим

$$\psi''(-y - y_1) = 0$$

Полагая

$$-y - y_1 = z$$

найдем

$$\psi''(z) = 0$$

откуда

$$\psi(z) = Cz + C_1$$

Пользуясь теперь найденным видом функции $\psi(z)$, мы приведем уравнение (а) к виду

$$Cy + C_1 + Cy_1 + C_1 - C(-y - y_1) + C_1 = 0$$

откуда

$$C_1 = 0$$

значит будет

$$\psi(z) = Cz = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$$

Отсюда:

$$\log \frac{\varphi(z)}{F} = \frac{C}{2} z^2$$

$$\varphi(z) = F \cdot e^{\frac{c}{2} z^2}$$

а потому

$$W = F^3 \cdot e^{\frac{c}{2} [(L_1 - V_\lambda)^2 + (L_2 - V_\lambda)^2 + (L_3 - V_\lambda)^2]}$$

отсюда:

$$\frac{dW}{dV_\lambda} = CW \cdot [-(L_1 - V_\lambda) - (L_2 - V_\lambda) - (L_3 - V_\lambda)]$$

$$\frac{d^2 W}{dV_\lambda^2} = C \cdot \frac{dW}{dV_\lambda} [-(L_1 - V_\lambda) - (L_2 - V_\lambda) - (L_3 - V_\lambda)] + 3CW$$

полагая здесь $3V = L_1 + L_2 + L_3$, найдем

$$\frac{d^2 W}{dV_\lambda^2} = 3CW$$

Так как W , при рассматриваемом значении V_λ , должно быть максимум, то полученное выражение для $\frac{d^2 W}{dV_\lambda^2}$ должно быть отрицательным; а так как W положительное (ибо W есть произведение трех положительных множителей), то C — отрицательное.

Поэтому, полагая $C = -2g$, получим

$$\varphi(z) = F \cdot e^{-gz^2}$$

где F и g суть некоторые положительные количества.

Таким образом, допустив, что наилучшею комбинацией трех наблюдений служит среднее арифметическое, мы нашли вид функции $\varphi(z)$, но, как мы уже сказали, это допущение является произвольным, и оно не вызывалось необходимостью.

Заметим, что для двух наблюдений допущение, что наилучшей комбинацией служит среднее арифметическое, есть необходимое, но оно недостаточно для определения вида функции $\varphi(z)$.

В самом деле, в этом случае уравнение, определяющее наилучшую комбинацию, будет

$$\frac{\varphi'(L_1 - V_\lambda)}{\varphi(L_1 - V_\lambda)} + \frac{\varphi'(L_2 - V_\lambda)}{\varphi(L_2 - V_\lambda)} = 0$$

полагая попрежнему

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \psi(z)$$

приведем его к виду

$$\psi(L_1 - V_\lambda) + \psi(L_2 - V_\lambda) = 0$$

Этому уравнению должно удовлетворять

$$V_\lambda = \frac{L_1 + L_2}{2}$$

Выражая это и полагая $L_1 - L_2 = 2y$, получим

$$\psi(y) + \psi(-y) = 0$$

а это уравнение не определяет функции $\psi(y)$, ибо всякая нечетная функция ему удовлетворяет.

Если мы допустим, что действительно

$$(b) \quad \varphi(x) = F \cdot e^{-gx^2}$$

то легко придем к способу наименьших квадратов. Для этого положим, что x_i есть погрешность i -го наблюдения. Но мы видели, что вероятность известной совокупности погрешностей определяется таким образом:

$$\frac{\varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2) \cdot \varphi(x_3) \dots \varphi(x_n)}{\sum \varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2) \cdot \varphi(x_3) \dots \varphi(x_n)}$$

а потому погрешностям мы должны приписать такие величины, при которых выражение

$$(c) \quad \phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_m)$$

имеет минимум, ибо знаменатель в предыдущем выражении есть величина постоянная. Но выражение (c), при существовании уравнения (b), будет

$$F^n \cdot e^{-\sigma(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2)}$$

и следовательно, мы должны погрешностям приписать такие значения, при которых выражение

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2$$

есть minimum, т. е. для нахождения наивероятнейших погрешностей мы должны найти minimum суммы их квадратов.

§ 36. Весьма часто наблюдения дают не прямо искомую величину V , а величины, связанные с нею некоторыми уравнениями.

Мы рассмотрим тот случай, когда наблюдения дают величины:

$$\alpha_1 V, \alpha_2 V, \alpha_3 V, \dots \alpha_n V$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ суть известные числа и где $\alpha_i V$ есть величина, определяемая из i -го наблюдения.

Положим, что для этих величин мы нашли в n наблюдениях такие значения:

$$L_1, L_2, L_3, \dots L_n$$

Вопрос состоит в том, чтобы найти самую благонадежную величину для V . Решая этот вопрос, мы не будем разыскивать наилучшую из всех возможных комбинацию наблюдений, потому что, как показано на более простом случае, это не может быть сделано строгим путем, а найдем самую благоприятную из всех комбинаций вида

$$\frac{\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \dots + \lambda_n L_n}{\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_n \alpha_n}$$

Называя через ϵ_i — погрешность i -его наблюдения, мы будем иметь:

$$\begin{aligned} \alpha_1 V &= L_1 - \epsilon_1 \\ \alpha_2 V &= L_2 - \epsilon_2 \\ &\dots \dots \dots \\ &\dots \dots \dots \\ \alpha_n V &= L_n - \epsilon_n \end{aligned}$$

Умножая эти уравнения соответственно на $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ и складывая результаты, получим

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n) V = \\ & = (\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \dots + \lambda_n L_n) - (\lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n) \end{aligned}$$

откуда

$$V = \frac{\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \dots + \lambda_n L_n}{\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n} - \frac{\lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n}{\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n}$$

Отсюда видно, что, принимая за V величину

$$V_1 = \frac{\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \dots + \lambda_n L_n}{\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n}$$

мы делаем погрешность

$$\varepsilon = \frac{\lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n}{\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n}$$

Мы будем теперь искать вероятные пределы для ε , и из того условия, что эти пределы наиболее близки между собою, мы определим

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

Но если мы не поставим никакого условия между этими величинами, то вопрос будет неопределенный, а потому будем предполагать

$$\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n = 1$$

отчего, конечно, нисколько не пострадает общность решения.

Итак, мы имеем

$$V_1 = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \dots + \lambda_n L_n \quad \text{и} \quad \varepsilon = \lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n$$

Находя вероятные пределы для ε , будем пользоваться формулой (38). Для этого мы положим:

$$x = \lambda_1 \varepsilon_1; \quad y = \lambda_2 \varepsilon_2; \quad z = \lambda_3 \varepsilon_3; \quad \dots \quad \text{и т. д.}$$

и будем под $\varepsilon_1^{(i)}$ разумеать одно из возможных значений ε_1 , т. е. одну из возможных погрешностей первого наблюдения, под $\varepsilon_2^{(i)}$ — одну из возможных величин ε_2 и т. д.

Предполагая, что наблюдения не имеют постоянных ошибок, мы будем иметь:

$$a = \sum \lambda_1 \varepsilon_1^{(i)} p_i = \lambda_1 \sum \varepsilon_1^{(i)} p_i = 0; \quad b = 0; \quad c = 0; \quad \dots$$

Предполагая, кроме того, все наблюдения одинаково доброкачественными, мы получим

$$a_1 = \sum (\lambda_1 \varepsilon_i^{(1)})^2 p_i = \lambda_1^2 \sum \varepsilon_i^2 p_i = \lambda_1^2 k$$

и точно так же:

$$b_1 = \lambda_2^2 k; \quad c_1 = \lambda_3^2 k; \quad \dots$$

Итак мы находим

$$A = 0; \quad B = k(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \dots + \lambda_n^2)$$

Поэтому вероятные пределы для ε будут

$$-u \sqrt{2k(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2)} \quad \text{и} \quad +u \sqrt{2k(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2)}$$

Вследствие этого вопрос теперь сводится к определению minimum'a

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \dots + \lambda_n^2$$

при условии

$$(*) \quad \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n = 1$$

Для этого находим уравнение

$$(\lambda_1 - \alpha_1 \rho) d\lambda_1 + (\lambda_2 - \alpha_2 \rho) d\lambda_2 + \dots + (\lambda_n - \alpha_n \rho) d\lambda_n = 0$$

откуда следует:

$$\lambda_1 = \alpha_1 \rho; \quad \lambda_2 = \alpha_2 \rho; \quad \lambda_3 = \alpha_3 \rho; \quad \dots \quad \lambda_n = \alpha_n \rho$$

и затем из уравнения (*):

$$\rho = \frac{1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2}$$

так что

$$\lambda_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2}; \quad \lambda_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2}; \quad \dots$$

$$\dots \quad \lambda_n = \frac{\alpha_n}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2}$$

Следовательно, самую благонадежною комбинацией будет

$$V_1 = \frac{\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \dots + \alpha_n L_n}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2}$$

Если $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — числа целые, то о полученном выражении V можно сказать следующее: положим, что мы, сделавши α_i^2 наблюдений, при каждом наблюдении получали для V величину $\frac{L_i}{\alpha_i}$, и положим, что всех наблюдений было сделано $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2$; в таком случае наилучшею комбинацией

Найдем комбинации, при помощи которых U и V определяются с наименьшими погрешностями. При этом, как и прежде, будем рассматривать только линейные комбинации (относительно L_1, L_2, \dots). Для этого мы должны поступать следующим образом: умножив каждое из уравнений (α) на некоторый неопределенный множитель λ_i , складываем результаты, — это нам даст одно из уравнений для определения U и V , а именно:

$$(\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n) U + (\beta_1 \lambda_1 + \beta_2 \lambda_2 + \dots + \beta_n \lambda_n) V = \\ = (L_1 \lambda_1 + L_2 \lambda_2 + \dots + L_n \lambda_n) - (\varepsilon_1 \lambda_1 + \varepsilon_2 \lambda_2 + \dots + \varepsilon_n \lambda_n)$$

и подчиняем множители $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ условиям:

$$(2) \quad \begin{aligned} \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n &= 1 \\ \beta_1 \lambda_1 + \beta_2 \lambda_2 + \dots + \beta_n \lambda_n &= 0 \end{aligned}$$

Вследствие этого мы прямо получим для U выражение

$$U = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \dots + \lambda_n L_n - (\lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n)$$

Не зная ничего о величине погрешностей, мы принимаем за U выражение

$$(3) \quad U = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \dots + \lambda_n L_n$$

причем делаем погрешность

$$(4) \quad \varepsilon = \lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n$$

Если бы мы подчинили множители $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ условиям

$$(5) \quad \begin{aligned} \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n &= 0 \\ \beta_1 \lambda_1 + \beta_2 \lambda_2 + \dots + \beta_n \lambda_n &= 1 \end{aligned}$$

то мы получили бы выражение для V .

Отсюда видно, что, найдя окончательное выражение для U , мы можем прямо написать и окончательное выражение для V , заменив буквы α_i через β_i и обратно; поэтому мы будем теперь говорить только об определении U , и все о нем сказанное будет относиться и к определению V .

Итак, теперь вопрос сведен к определению наилучшей из всех комбинаций вида

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \dots + \lambda_n L_n$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ удовлетворяют условиям (1), и эту наилучшую комбинацию мы и примем за U . Найдем для этого вероятные пределы для погрешности

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \lambda_1 + \varepsilon_2 \lambda_2 + \dots + \varepsilon_n \lambda_n$$

Полагая

$$(6) \quad k = \sum (\varepsilon_1^{(i)})^2 \cdot p_i$$

и предполагая все наблюдения одинаково доброкачественными, найдем, как и раньше, что вероятные пределы погрешности будут

$$-u \sqrt{2k(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2)} \quad \text{и} \quad +u \sqrt{2k(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2)}$$

вследствие чего все сводится к нахождению minimum'a выражения

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2$$

при условиях (1). Для этого имеем уравнения:

$$\lambda_1 d\lambda_1 + \lambda_2 d\lambda_2 + \dots + \lambda_n d\lambda_n = 0$$

$$\alpha_1 d\lambda_1 + \alpha_2 d\lambda_2 + \dots + \alpha_n d\lambda_n = 0$$

$$\beta_1 d\lambda_1 + \beta_2 d\lambda_2 + \dots + \beta_n d\lambda_n = 0$$

Умножая второе из этих уравнений на $-\rho$, третье на $-\sigma$, складывая полученные результаты с первым уравнением и приравнявая нулю коэффициенты при $d\lambda_1, d\lambda_2, \dots, d\lambda_n$, получим уравнения вида

$$(7) \quad \lambda_i = \alpha_i \rho + \beta_i \sigma \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

и на основании уравнений (1) будем иметь для определения ρ и σ уравнения:

$$(8) \quad \begin{aligned} \alpha_1(\alpha_1 \rho + \beta_1 \sigma) + \alpha_2(\alpha_2 \rho + \beta_2 \sigma) + \dots + \alpha_n(\alpha_n \rho + \beta_n \sigma) &= 1 \\ \beta_1(\alpha_1 \rho + \beta_1 \sigma) + \beta_2(\alpha_2 \rho + \beta_2 \sigma) + \dots + \beta_n(\alpha_n \rho + \beta_n \sigma) &= 0 \end{aligned}$$

иначе

$$(9) \quad \begin{aligned} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2)\rho + (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_n\beta_n)\sigma &= 1 \\ (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_n\beta_n)\rho + (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_n^2)\sigma &= 0 \end{aligned}$$

Определив из этих уравнений ρ и σ , мы по уравнениям (7) найдем $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, а следовательно, и U_1 и величины вероятных пределов погрешности ε , если только будем знать величину k , которая определяется, как о том сказано ниже.

Теперь мы покажем, что найденное таким образом значение для U тождественно с тем, которое получается из условия minimum'a суммы квадратов погрешностей.

Мы имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= L_1 - \alpha_1 U - \beta_1 V \\ \varepsilon_2 &= L_2 - \alpha_2 U - \beta_2 V \\ &\dots \dots \dots \\ \varepsilon_n &= L_n - \alpha_n U - \beta_n V \end{aligned}$$

Если здесь принять за U и V — истинные их значения, то $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ будут величинами постоянными; мы же будем считать $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ переменными величинами, приписывая U и V не их истинные значения, нам неизвестные, а всевозможные переменные значения, и будем между ними искать такие, которые дают сумму

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2$$

наименьшей.

Мы имеем

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2 = \\ &(L_1 - \alpha_1 U - \beta_1 V)^2 + (L_2 - \alpha_2 U - \beta_2 V)^2 + \dots + (L_n - \alpha_n U - \beta_n V)^2 \end{aligned}$$

Условия minimum'a этой суммы дают уравнения:

$$\begin{aligned} &\alpha_1(L - \alpha_1 U - \beta_1 V) + \alpha_2(L_2 - \alpha_2 U - \beta_2 V) + \dots + \\ &\quad + \alpha_n(L_n - \alpha_n U - \beta_n V) = 0 \\ &\beta_1(L - \alpha_1 U - \beta_1 V) + \beta_2(L_2 - \alpha_2 U - \beta_2 V) + \dots + \\ &\quad + \beta_n(L_n - \alpha_n U - \beta_n V) = 0 \end{aligned}$$

которые приводятся к виду:

$$\begin{aligned} &(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2) U + (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_n \beta_n) V = \\ &\quad = \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \dots + \alpha_n L_n \\ &(\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_n \beta_n) U + (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_n^2) V = \\ &\quad = \beta_1 L_1 + \beta_2 L_2 + \dots + \beta_n L_n \end{aligned}$$

Умножая первое из этих уравнений на ρ , второе на σ и складывая результаты, получим

$$\begin{aligned} &U[(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2)\rho + (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_n \beta_n)\sigma] + \\ &+ V[(\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_n \beta_n)\rho + (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_n^2)\sigma] = \\ &\quad = L_1(\alpha_1 \rho + \beta_1 \sigma) + L_2(\alpha_2 \rho + \beta_2 \sigma) + \dots + L_n(\alpha_n \rho + \beta_n \sigma) \end{aligned}$$

Предполагая теперь, что ρ и σ удовлетворяют уравнениям (9), найдем

$$U = L_1(\alpha_1 \rho + \beta_1 \sigma) + L_2(\alpha_2 \rho + \beta_2 \sigma) + \dots + L_n(\alpha_n \rho + \beta_n \sigma)$$

Чтобы найти вероятные пределы этой погрешности, мы попережнему допустим, что все n наблюдений одинаково доброкачественны, и положив

$$(5) \quad k = \sum (\varepsilon_1^{(i)})^2 \cdot p_i$$

получим вероятные пределы

$$(6) \quad -u \sqrt{2k(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2)} \quad \text{и} \quad +u \sqrt{2k(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2)}$$

Наивероятнейшая комбинация для U будет та, при которой сумма

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2$$

есть minimum.

На основании условий (2) для определения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ имеем уравнения:

$$(7) \quad \begin{cases} \lambda_1 d\lambda_1 + \lambda_2 d\lambda_2 + \dots + \lambda_n d\lambda_n = 0 \\ \alpha_1 d\lambda_1 + \alpha_2 d\lambda_2 + \dots + \alpha_n d\lambda_n = 0 \\ \beta_1 d\lambda_1 + \beta_2 d\lambda_2 + \dots + \beta_n d\lambda_n = 0 \\ \gamma_1 d\lambda_1 + \gamma_2 d\lambda_2 + \dots + \gamma_n d\lambda_n = 0 \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

из которых по известной методе находим выражения вида

$$(8) \quad \lambda_i = \alpha_i \rho + \beta_i \sigma + \gamma_i \tau + \dots \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

причем величины $\rho, \sigma, \tau, \dots$ определяются из уравнений:

$$(9) \quad \begin{cases} \sum \alpha_i (\alpha_i \rho + \beta_i \sigma + \gamma_i \tau + \dots) = 1 \\ \sum \beta_i (\alpha_i \rho + \beta_i \sigma + \gamma_i \tau + \dots) = 0 \\ \sum \gamma_i (\alpha_i \rho + \beta_i \sigma + \gamma_i \tau + \dots) = 0 \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Эти уравнения можно представить в таком виде:

$$(10) \quad \begin{cases} \rho \sum \alpha_i^2 + \sigma \sum \alpha_i \beta_i + \tau \sum \alpha_i \gamma_i + \dots = 1 \\ \rho \sum \alpha_i \beta_i + \sigma \sum \beta_i^2 + \tau \sum \beta_i \gamma_i + \dots = 0 \\ \rho \sum \alpha_i \gamma_i + \sigma \sum \beta_i \gamma_i + \tau \sum \gamma_i^2 + \dots = 0 \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Положим, что требуется определить три величины U , V , W , и мы сделали четыре наблюдения, которые дали соответственно величины: 14, 10, 9, 17 для выражений:

$$3U + 5V + 7W$$

$$4U + 11V - 2W$$

$$5U + 13V - 7W$$

$$4U - 11V - 13W$$

Ищем U , V , W под условием minimum'a выражения

$$(3U + 5V + 7W - 14)^2 + (4U + 11V - 2W - 10)^2 + \\ + (5U + 13V - 7W - 9)^2 + (4U - 11V - 13W - 17)^2$$

которое нам дает уравнения:

$$66U + 80V - 74W = 195$$

$$80U + 436V + 65W = 110$$

$$74U + 65V + 271W = -206$$

Из этих уравнений и найдем U , V , W ; на производстве же численных выкладок останавливаться не будем.

Заметим, что метод изложения способа наименьших квадратов, показанный в последних параграфах, предполагает, что число n наблюдений весьма большое, потому что только при этом условии можно пользоваться формулой (38).

§ 39. Теперь остается только показать, каким образом определяется величина k .

Допуская, что все наблюдения заслуживают одинакового доверия, мы будем иметь

$$k = \sum (\epsilon_1^{(i)})^2 p_i = \sum (\epsilon_1^{(i)})^2 q_i = \dots$$

Применим к рассматриваемому случаю формулу (38), принимая за x — величину $(\epsilon_1)^2$, за y — величину $(\epsilon_2)^2$ и т. д. В таком случае эта формула представит вероятность того, что сумма

$$\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \dots + \epsilon_n^2$$

(предполагая число наблюдений попрежнему равным n) заключается между пределами

$$A + u\sqrt{2}B \quad \text{и} \quad A - u\sqrt{2}B$$

В рассматриваемом случае

$$A = a + b + c + \dots = \sum (\varepsilon_1^{(i)})^2 p_i + \sum (\varepsilon_2^{(i)})^2 q_i + \dots = nk$$

$$B = a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + \dots = \sum (\varepsilon_1^{(i)})^4 p_i - k^3 + \sum (\varepsilon_2^{(i)})^4 q_i - k^3 + \dots$$

Поэтому, полагая

$$\sum (\varepsilon_1^{(i)})^4 p_i = \sum (\varepsilon_2^{(i)})^4 q_i = \dots = k_1,$$

получим

$$B = n(k_1 - k^3)$$

Итак, формула (38) будет определять вероятность того, что имеет место неравенство

$$nk - u \sqrt{2n(k_1 - k^3)} < \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2 < nk + u \sqrt{2n(k_1 - k^3)}$$

или

$$k - u \sqrt{2 \frac{k_1 - k^3}{n}} < \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2}{n} < k + u \sqrt{2 \frac{k_1 - k^3}{n}}$$

Отсюда видно, что

$$k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2}{n} \right)$$

а потому при весьма большом числе наблюдений мы можем принять

$$(39) \quad k = \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2}{n}$$

Что касается величин входящих сюда погрешностей наблюдений $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, то они могут быть получены из ряда наблюдений над известными величинами, сравнивая истинные их значения с наблюдаемыми. Но не всегда бывает возможно производить такого рода специальные наблюдения, предназначенные исключительно для определения k , поэтому обыкновенно k определяется из тех же наблюдений, из которых мы находим неизвестные U, V, W, \dots . В этом случае вместо неизвестных нам истинных погрешностей мы берем те, которые получаются после определения U, V, W, \dots по способу наименьших квадратов из сравнения результатов вычислений с результатами наблюдений.

Другими словами, в этом случае мы, рассматривая $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ как переменные величины, определяем их из условия minimum'a суммы

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \dots + \varepsilon_n^2$$

и полученные таким образом для них значения принимаем за величины погрешностей, входящих в выражение k . Оправданием этому служит то что если мы назовем через $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ — неизвестные нам истинные погрешности и через $\epsilon_1 + \eta_1, \epsilon_2 + \eta_2, \dots, \epsilon_n + \eta_n$ — величины, полученные по способу наименьших квадратов, то $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ будут весьма малы по отношению к $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$, или, по крайней мере, мы должны их считать таковыми, ибо способ наименьших квадратов дает наиболее вероятный результат; поэтому мы можем величинами $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ пренебречь.

Таким образом находится величина k , определяющая достоинство наблюдений. Чем меньше эта величина, тем наблюдения лучше; поэтому мерою достоинства наблюдений может служить величина $\frac{1}{k}$, которая называется *весом* наблюдений. Ниже будет сказано, чем оправдывается такой термин, а теперь заметим, что в последнее время некоторые стали принимать за k выражение

$$(*) \quad \frac{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \dots + \epsilon_n^2}{n - l}$$

где n есть число наблюдений, а l — число определяемых величин U, V, W, \dots . В пользу этого выражения приводили, что когда число наблюдений равно числу определяемых величин, то условным уравнениям мы можем удовлетворить точно, вследствие чего по этим уравнениям окажется, что

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 \dots = \epsilon_n = 0$$

(здесь $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ — погрешности вычисляемые, а не истинные), и потому мы получили бы по прежней формуле $k = 0$; это не может быть допущено, ибо это показывало бы, что наблюдения совершенно точны, тогда как формула (*) дает в этом случае для k неопределенное выражение $\frac{0}{0}$.

Но дело в том, что когда $n = l$, то мы не можем пользоваться теми соображениями, на которых основывалось нахождение k , потому что мы предполагаем n числом весьма большим, между тем как число неизвестных l всегда предполагается ограниченным, а потому случай, когда $n = l$, мы должны исключить.

Если же предполагать n значительно больше l , то все равно, какой формулой для определения k пользоваться, потому что в выражении

$$\frac{1}{n - l} = \frac{1}{n} + \frac{l}{n^2} + \frac{l^2}{n^3} \dots$$

мы можем пренебречь членами, начиная с $\frac{l}{n^2}$.

Заметим, что способ Гаусса, основывающийся на законе гипотез, не требует того, чтобы n непременно было весьма велико, и принимая его в основание, мы можем рассматривать и тот случай, когда $n = l$, а следовательно, тогда удобнее определять k по формуле (*). Но, как мы видели, этот способ не заслуживает большого доверия, и для определения k предпочтительнее пользоваться формулой (39).

§ 40. В заключение покажем влияние k на определяемую величину, предполагая для большей общности k различным для различных наблюдений.

Мы имели уравнения:

$$U = L_1 - \varepsilon_1; \quad U = L_2 - \varepsilon_2; \quad U = L_3 - \varepsilon_3; \quad \dots \quad U = L_n - \varepsilon_n$$

принимая за U комбинацию

$$U = L_1 \lambda_1 + L_2 \lambda_2 + \dots + L_n \lambda_n$$

при условии

$$(1) \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$$

мы делаем погрешность

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \lambda_1 + \varepsilon_2 \lambda_2 + \dots + \varepsilon_n \lambda_n$$

вероятными пределами которой в общем случае служат величины

$$+ u \sqrt{2 \left[\sum (\varepsilon_1^{(i)})^2 p_i \right] \lambda_1^2 + 2 \left[\sum (\varepsilon_2^{(i)})^2 q_i \right] \lambda_2^2 + \dots}$$

$$- u \sqrt{2 \left[\sum (\varepsilon_1^{(i)})^2 p_i \right] \lambda_1^2 + 2 \left[\sum (\varepsilon_2^{(i)})^2 q_i \right] \lambda_2^2 + \dots}$$

Полагая

$$\sum (\varepsilon_1^{(i)})^2 p_i = k_1; \quad \sum (\varepsilon_2^{(i)})^2 q_i = k_2; \quad \dots, \quad \text{и т. д.}$$

мы придадим вероятным пределам такой вид:

$$+ u \sqrt{2 (k_1 \lambda_1^2 + k_2 \lambda_2^2 + \dots + k_n \lambda_n^2)}$$

$$- u \sqrt{2 (k_1 \lambda_1^2 + k_2 \lambda_2^2 + \dots + k_n \lambda_n^2)}$$

поэтому вопрос сводится на определение $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ из условия minimum'a выражения

$$k_1 \lambda_1^2 + k_2 \lambda_2^2 + \dots + k_n \lambda_n^2.$$

и мы получаем уравнения:

$$k_1 \lambda_1 d\lambda_2 + k_2 \lambda_2 d\lambda_2 + \dots + k_n \lambda_n d\lambda_n = 0$$

$$d\lambda_1 + d\lambda_1 + \dots + d\lambda_n = 0$$

из которых вместе с уравнением (1) следует:

$$k_1 \lambda_1 = \rho; \quad k_2 \lambda_2 = \rho; \quad \dots \quad k_n \lambda_n = \rho$$

$$\frac{\rho}{k_1} + \frac{\rho}{k_2} + \dots + \frac{\rho}{k_n} = 1$$

так что будет

$$\lambda_i = \frac{\frac{1}{k_i}}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n}}$$

и

$$U = \frac{\frac{1}{k_1} L_1 + \frac{1}{k_2} L_2 + \dots + \frac{1}{k_n} L_n}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n}}$$

Эта формула имеет замечательную аналогию с формулой, служащей для определения одной из координат центра тяжести, если величины $\frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}, \dots$ уподобить весам материальных точек, а L_1, L_2, \dots, L_n — их координатам. В этом и заключается причина того, что $\frac{1}{k}$ называют весом наблюдения.

Нетрудно убедиться, что полученное выражение для U тождественно с тем, которое получается из условия minimum'a суммы

$$\frac{\epsilon_1^2}{k_1} + \frac{\epsilon_2^2}{k_2} + \dots + \frac{\epsilon_n^2}{k_n} = \frac{1}{k_1} (U - L_1)^2 + \frac{1}{k_2} (U - L_2)^2 + \dots +$$

$$+ \frac{1}{k_n} (U - L_n)^2$$

потому что значение U , обращающее эту сумму в minimum, определяется из уравнения

$$\frac{1}{k_1} (U - L_1) + \frac{1}{k_2} (U - L_2) + \dots + \frac{1}{k_n} (U - L_n) = 0$$

Можно показать, что то же будет и в общем случае, когда определяются из наблюдений величины U, V, W, \dots , т. е. что и в этом случае для них получаются величины, делающие minimum'ом сумму

$$\frac{1}{k_1} \varepsilon_1^2 + \frac{1}{k_2} \varepsilon_2^2 + \dots + \frac{1}{k_n} \varepsilon_n^2$$

так что всегда наиболее вероятные величины получаются из условия minimum'a суммы квадратов погрешностей, умноженных на веса соответственных наблюдений. Это представляет обобщение способа наименьших квадратов.

Показанный в последних параграфах метод изложения способа наименьших квадратов принадлежит Лапласу.



СОДЕРЖАНИЕ

| | Стр. |
|---|------------|
| Предисловие | I |
| Определенные интегралы | 1 |
| Предварительные замечания и интегралы первой группы | — |
| Интегралы второй группы | 11 |
| Интегралы третьей группы | 21 |
| Эйлеровы интегралы | 32 |
| Интегралы четвертой группы | 57 |
| Формулы Фурье | 66 |
| Собрание формул, встречающихся в этом курсе | 84 |
| Теория конечных разностей | 69 |
| Прямое исчисление разностей | — |
| Обратное исчисление конечных разностей | 106 |
| Интегрирование уравнений в конечных разностях | 124 |
| Теория вероятностей | 148 |
| Законы вероятностей | — |
| О математическом ожидании | 159 |
| О повторении событий | 167 |
| Приложение теории вероятностей к обработке наблюдений | 224 |

ИМЕЮТСЯ В ПРОДАЖЕ:

- Крылов, А. Н., акад. — Лекции о приближенных вычислениях. Научно-техническая литература. Изд. 3-е, переработанное и значительно дополненное. 1935. 541 стр. 76 фиг. Ц. 15 р.
- Крылов, А. Н., акад. — Леонард Эйлер. Доклад, прочитанный на торжественном заседании Академии Наук 5 X 1933 г. Изд. 2-е. 1933. 39 стр. 1 портр. Ц. 75 к.
- Крылов, А. Н., акад. — Ньютонова теория астрономической рефракции. 1935. 69 стр. 2 фиг. Ц. 3 р.
- Крылов, А. Н., акад. — Об определении критических скоростей вращающегося вала. Научно-техническая литература. 1932. 31 стр. 3 фиг. Ц. 75 к.
- Крылов, А. Н., акад., и Крутков, Ю. А. — Общая теория гироскопов и некоторых технических их применений. Научно-техническая литература. 1932. 394 стр. 111 фиг. Ц. 7 р. 50 к.
- Крылов, А. Н., акад. — О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в технических вопросах. Научно-техническая литература. Изд. 3-е. Одобрено и рекомендовано Всесоюзным комитетом по высшему техническому образованию при ЦИК СССР как учебное пособие для преподавателей и студентов. 1933. 472 стр. 68 фиг. Ц. 9 р.
- Крылов, А. Н., акад. — О расчете балок, лежащих на упругом основании. Справочно-техническая литература. Изд. 3-е. 1931. 154 стр. 10 фиг. Ц. 2 р. 25 к.
- Крылов, А. Н., акад. — О численном решении уравнения, которым в технических вопросах определяются частоты малых колебаний материальных систем. 1932. 49 стр. Ц. 1 р.
- Крылов, А. Н., акад., и Бронников, Д. В. — Постановка кессона моста им. Володарского в Ленинграде. Научно-техническая литература. 1934. 66 стр. 7 табл. 21 фиг. Ц. 2 р.

ПРИЕМ ЗАКАЗОВ И ПОДПИСКИ

на все издания Академии Наук СССР производится: 1) в Отделе распространения Издательства Академии Наук СССР, Москва, проезд Художественного театра, 2. Тел. 48-33; 2) в Ленинградском отделе Издательства. Ленинград, 104. В. О., Менделеевская линия, 1. Тел. 592-62. Заказы высылаются наложенным платежом.

2086 4/12

13p

KA-1

240
4/11/12/13/18/19

THE
UNIVERSITY OF CHICAGO
PRESS