OM KONVERGENSEN AF DE POINCARÉ'SKA Θ-SERIERNA I HUFVUDCIRKELFALLET.

AF

SEVERIN JOHANSSON.

1. I sin afhandling: *Die eindeutigen automorphen Formen vom Geschlechte Null, eine Revision und Erweiterung der Poincaré'schen Sätze*, Math. Ann., Bd. 41, pag. 1, (1892), har *Ritter* uppställt satsen, *att de Poincaré'ska serierna af dimensionen* — 2 *icke längre äro absolut konvergenta, om polygonnätet har en eller oändligt många gränskurvor.* Vidare hafva *Ritter* och *Burnside*[1]) funnit satsen, *att vid de hufvudcirkelgrupper, hvilkas polygonnät öfvertäcker hela planet och hvilkas gränspunkter sålunda icke ligga öfverallt tätt på hufvudcirkelns periferi, de Poincaré'ska serierna af dimensionen* — 2 *konvergera absolut och likformigt i hela nätet.*

Är

$$S\eta = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

en substitution inom en hufvudcirkelgrupp uti η-planet, så handlar det i de nämnda satserna om serien

$$\sum \left|\frac{dS}{d\eta}\right| = \sum \frac{1}{|\gamma\eta + \delta|^2}, \tag{1}$$

där summan utsträckes öfver alla substitutioner i hufvudcirkelgruppen.

Vid frågan om denna series konvergens komma enligt de nämnda satserna hufvudcirkelgrupperna att uppdelas i två typer, allteftersom

[1]) Se § 12 i *Ritters* afhandling i Math. Ann., Bd. 41, och *Burnside: On a class of automorphic functions*, Proceedings of the London Math. Soc., Nov. 1891.

hufvudcirkeln är en gränscirkel, öfver hvars periferi gruppen icke kan fortsättas, eller icke; i det förra fallet divergerar serien (1), i det senare är serien konvergent.

Då i det senare fallet gruppen allt ännu på självfva periferin af hufvudcirkeln är egentligt diskontinuerlig, medan i det förra fallet den egentliga diskontinuiteten upphör på sagda periferi, kunna vi också uttrycka saken så, att vi säga: Serien (1) är konvergent eller divergent beroende på, om hufvudcirkelgruppen är egentligt diskontinuerlig på periferin af hufvudcirkeln eller icke.

2. Dessa satser äro alla riktiga, sålänge det handlar om grupper med ett ändligt antal alstrande substitutioner. Men om vi betrakta också grupper med oändligt många alstrande, så förlorar det ofvan angifna konvergenskriteriet sin betydelse. Jag skall nämligen här ge exempel på grupper, *som ha hufvudcirkeln till verklig gränscirkel och sålunda icke längre äro på dess periferi egentligt diskontinuerliga, men vid hvilka trots det summan*

$$\sum \frac{1}{|\gamma\eta + \delta|^2}$$

konvergerar. Dessa grupper ha då oändligt många alstrande [1]).

3. För att erhålla ett sådant exempel, konstruerar jag en hufvudcirkelgrupp på följande sätt.

Vi tänka oss på periferin af enhetscirkeln en sluten (*abgeschlossen*) ingenstädes tät punktmängd Π_0. Denna mängd består som bekant af ändpunkterna af en numrerbar (*abzählbar*) mängd cirkelbågar δ_ν af denna periferi, hvilka sakna gemensamma punkter, och dessa ändpunkters hopningsställen.

Vi rita nu öfver alla de nämnda, från punkter i mängden Π_0 fria cirkelbågarna δ_ν ortogonalcirklar till enhetscirkeln och bekomma på så sätt oändligt många cirkelbågstvåhörningar, af hvilka enhvar begränsas af en båge δ_ν och den tillhörande ortogonalcirkeln. Om vi aflägsna alla dessa tvåhörningar ur enhetscirkelns yta, så återstår ett kontinuum A_0, hvilket vi vilja kalla en cirkelbågspolygon.

δ_{ν_0} må vara en godtycklig cirkelbåge δ_ν. Om vi spegla i den öfver δ_{ν_0} lagda ortogonalcirkeln, så uppstår såsom bild af mängden Π_0 på

[1]) Se min afhandling: *Zur Theorie der Konvergenz der Poincaré'schen Reihen bei den Hauptkreisgruppen* i Öfversigt af Finska Vetenskapssocietetens Förhandlingar Bd. LIII 1909—1910 Afd. A. No. 15.

bågen $\mathfrak{d}_{\nu_0}$ en sluten, ingenstädes tät punktmängd Π_{ν_0}; mängden Π_{ν_0} har därvid ändpunkterna af bågen $\mathfrak{d}_{\nu_0}$ gemensamma med Π_0 och består i öfrigt af ändpunkterna af vissa längs $\mathfrak{d}_{\nu_0}$ liggande bågar $\mathfrak{d}_{\nu_0\nu}$ och deras hopningspunkter.

Till bågarna $\mathfrak{d}_{\nu_0\nu}$ drager jag åter ortogonalcirklar på samma sätt som till bågarna $\mathfrak{d}_\nu$. Det uppstår därigenom åter oändligt många cirkelbågstvåhörningar, hvilka alla tillhöra den af $\mathfrak{d}_{\nu_0}$ och dess ortogonalcirkel begränsade tvåhörningen. Om vi ur denna sistnämnda tvåhörning aflägsna alla dessa oändligt många nya tvåhörningar, så återstår en cirkelbågspolygon A_{ν_0}. A_{ν_0} är då tydligen spegelbilden af A_0 i den öfver $\mathfrak{d}_{\nu_0}$ dragna ortogonalcirkeln.

På samma sätt kunna vi nu i obegränsad följd åstadkomma nya spegelbilder, i det vi ständigt spegla vidare öfver »fria« ortogonalcirklar. Speglingsprocessen afvecklar sig fullkomligt lika som i det bekanta fallet, då A_0 begränsas af ett ändligt antal ortogonalcirklar till enhetscirkeln. Såsom slutresultat bekomma vi ett nät af cirkelbågspolygoner

$$A^{(0)} \equiv A_0,\ A^{(1)},\ A^{(2)},\ \cdots$$

och oändligt många slutna, ingenstädes täta punktmängder

$$\Pi^{(0)} \equiv \Pi_0,\ \Pi^{(1)},\ \Pi^{(2)},\ \cdots,$$

af hvilka två olika högst ha två punkter gemensamma.

Polygonen $A^{(\nu)}$ når i punkterna, tillhörande mängden $\Pi^{(\nu)}$, ut till periferin af enhetscirkeln, men består i öfrigt uteslutande af punkter tillhörande det inre af enhetscirkeln. Polygonerna $A^{(\nu)}$ lagra sig invid hvarandra och deras sammanfattning öfvertäcker enhetscirkelns inre fullständigt en gång.

4. Ur de härmed definierade speglingarna bilda vi härefter på det kända sättet en grupp af lineära substitutioner. Vi strecka fördenskull vår utgångspolygon A_0. De genom spegling öfver A_0:s ränder uppkomna polygonerna A_ν lemna vi ostreckade; därpå strecka vi åter de ur A_ν genom spegling öfver de fria ränderna uppkomna polygonerna o. s. v. På sådant sätt blir slutligen hela vårt polygonnät sammansatt af turvis streckade och ostreckade polygoner, hvarvid af två invid hvarandra liggande polygoner den ena alltid är streckad, den andra ostreckad.

Betrakta vi därpå de operationer, som öfverföra sammanfattningen af alla streckade eller alla ostreckade områden i sig, så bilda dessa operationer en grupp, Γ, af lineära substitutioner.

Om A_{ν_0} är en godtycklig af de invid A_0 liggande polygonerna, så bildar tydligen polygonen

$$A_0 = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_{\nu_0}$$

ett fundamentalområde för gruppen Γ. Genom förmedling af substitutionerna i Γ uppstå ur A_0 oändligt många polygoner

$$A^{(0)} \equiv A_0,\ A^{(1)},\ A^{(2)},\ \ldots\ldots,$$

hvilka öfvertäcka det inre af enhetscirkeln fullständigt en enda gång; hvarje $A^{(\nu)}$ består därvid af en streckad och en ostreckad polygon A.

Polygonen A_0 når ut till periferin af enhetscirkeln i alla punkter, tillhörande mängderna Π_0 och Π_{ν_0}, men består i öfrigt af punkter, tillhörande det inre af enhetscirkeln. Beteckna vi sammanfattningen af punktmängderna Π_0 och Π_{ν_0} med P_0, så är P_0 en ingenstädes tät sluten punktmängd. Ur P_0 uppstå genom förmedling af substitutionerna i gruppen Γ slutna, ingenstädes täta mängder

$$P^{(0)} \equiv P_0,\ P^{(1)},\ P^{(2)},\ \ldots\ldots,$$

af hvilka två olika högst ha två punkter gemensamma. Polygonen $A^{(\nu)}$ når i alla till $P^{(\nu)}$ hörande punkter ut till enhetscirkelns periferi, men består i öfrigt af idel till det inre af enhetscirkeln hörande punkter.

5. Punkterna på periferin af enhetscirkeln sönderfalla i två klasser: punkterna af första arten, som ligga under ändligt många ortogonalcirklar och punkterna af andra arten, hvilka ligga under oändligt många ortogonalcirklar. Punkterna af första arten äro helt enkelt de till någon af mängderna $P^{(0)}$, $P^{(1)}$, ... hörande punkterna.

Såväl punkterna af första arten som de af andra arten ligga öfverallt tätt på enhetscirkelns periferi. Punktmängden $P^{(0)}$ har därvid den egenskapen, att hvarje punkt af första arten är eqvivalent med en punkt i $P^{(0)}$. Punktmängden $P^{(0)}$ spelar sålunda för gruppen Γ en analog roll på periferin af enhetscirkeln som fundamentalområdet i det tvådimensionala gebitet. Man kunde fördenskull möjligen kalla $P^{(0)}$ gruppen Γ:s *fundamentalmängd*.

Gruppen Γ *har tydligen enhetscirkeln till verklig gränscirkel.* Detta framgår helt enkelt däraf, att hvarje system i afseende å Γ eqvivalenta punkter i det inre af enhetscirkeln hopar sig mot hvarje punkt af andra arten och således öfverhufvudtaget mot hvarje punkt af enhetscirkelns periferi.

6. Punktmängden $P^{(0)}$ består af ändpunkterna af oändligt många cirkelbågar d_ν och deras hopningspunkter. Emedan cirkelbågarna d_ν sakna gemensamma punkter, så är

$$\sum_\nu d_\nu \leqq 2\pi.$$

Vi ha således att särskilja mellan två möjligheter. Antingen är

$$\sum_\nu d_\nu = 2\pi$$

eller

$$\sum_\nu d_\nu < 2\pi.$$

Vi kalla dessa fall det *paraboliska* och det *hyperboliska* fallet.

Uttrycket

$$I^{(0)} = 2\pi - \sum_\nu d_\nu$$

vilja vi kalla det längs enhetscirkelns periferi uppmätta *innehållet* af punktmängden $P^{(0)}$. De båda fallen skilja sig då så från hvarandra, att i det paraboliska fallet fundamentalmängden $P^{(0)}$ är utan innehåll d. v. s. har innehållet noll, medan i det hyperboliska fallet fundamentalmängden $P^{(0)}$ har ett från noll skildt innehåll.

7. I det jag förbehåller mig att senare återkomma till det paraboliska fallet, bevisar jag här följande sats[1]:

Vid alla hufvudcirkelgrupper af hyperbolisk typ konvergera de Poincaré'ska serierna af dimensionen — 2.

Γ må alltså vara en grupp af hyperbolisk typ; dess substitutioner må vara $S^{(\mu)}\eta$. Emedan $S^{(\mu)}\eta$ betyder en förskjutning af enhetscirkeln i sig, så har $S^{(\mu)}\eta$ formen

$$S^{(\mu)}\eta = \frac{\overline{\delta}^{(\mu)}\eta + \overline{\gamma}^{(\mu)}}{\gamma^{(\mu)}\eta + \delta^{(\mu)}},$$

där $\overline{\delta}^{(\mu)}$ och $\overline{\gamma}^{(\mu)}$ äro de konjugerade talen till $\delta^{(\mu)}$ och $\gamma^{(\mu)}$; därvid är

$$|\delta^{(\mu)}|^2 - |\gamma^{(\mu)}|^2 = 1.$$

[1]) Denna sats innesluter i sig den af *Ritter* och *Burnside* funna satsen, ty vid de af dem betraktade grupperna innehåller $P^{(0)}$ ett ändligt antal kontinua (cirkelbågar) och har följaktligen ett från noll skildt innehåll.

Det gäller att bevisa, att serien

$$\sum_{\mu} \frac{1}{|\gamma^{(\mu)}\eta + \delta^{(\mu)}|^2} \tag{2}$$

konvergerar.

Nu är

$$S^{(\mu)}\left(-\frac{\delta^{(\mu)}}{\gamma^{(\mu)}}\right) = \infty$$

eller alltså

$$-\frac{\delta^{(\mu)}}{\gamma^{(\mu)}} = S^{(\mu)^{-1}}(\infty).$$

Punkterna

$$-\frac{\delta^{(\mu)}}{\gamma^{(\mu)}}$$

äro följaktligen eqvivalenta med den oändligt aflägsna punkten och ligga alltså utom enhetscirkelns periferi. Då vidare alla dessa punkter ligga i det ändliga, kan man med nollpunkten såsom medelpunkt slå en så stor cirkel, att de alla ligga inom denna cirkel; dess radie må vara R. Vidare må $r < 1$. Då är för $|\eta| \leqq r$

$$R + r > \left|\eta + \frac{\delta^{(\mu)}}{\gamma^{(\mu)}}\right| > 1 - r$$

eller

$$\frac{1}{(1-r)^2} \cdot \frac{1}{|\gamma^{(\mu)}|^2} > \frac{1}{|\gamma^{(\mu)}\eta + \delta^{(\mu)}|^2} > \frac{1}{(R+r)^2} \cdot \frac{1}{|\gamma^{(\mu)}|^2} \tag{3}$$

Följaktligen konvergerar eller divergerar serien

$$\sum_{\mu} \frac{1}{|\gamma^{(\mu)}\eta + \delta^{(\mu)}|^2}$$

för alla punkter i det inre af enhetscirkeln samtidigt med serien

$$\sum_{\mu} \frac{1}{|\gamma'^{(\mu)}|^2}. \tag{4}$$

Vår uppgift är numera att ådagalägga, att sistnämnda serie konvergerar i det hyperboliska fallet.

8. För alla punkter af enhetscirkeln och således också för punkterna på periferin gäller enligt (3) olikheten

(5) $$\frac{1}{|\gamma^{(\mu)}\eta + \delta^{(\mu)}|^2} > \frac{1}{(R+1)^2} \cdot \frac{1}{|\gamma^{(\mu)}|^2}.$$

Är då $m^{(\mu)}$ det minsta värdet af

$$\frac{1}{|\gamma^{(\mu)}\eta + \delta^{(\mu)}|^2}$$

på periferin af enhetscirkeln, så gäller olikheten

(6) $$m^{(\mu)} > \frac{1}{(R+1)^2} \cdot \frac{1}{|\gamma^{(\mu)}|^2}.$$

Numera betrakta vi på periferin af enhetscirkeln punktmängderna $P^{(0)}$ och $P^{(\mu)}$, som uppkommer ur $P^{(0)}$ genom förmedling af $S^{(\mu)}$.

Till mängden $P^{(0)}$ höra cirkelbågarna

$$d_1,\ d_2,\ \ldots.$$

och till mängden $P^{(\mu)}$ på alldeles samma sätt bågarna

$$d_1^{(\mu)},\ d_2^{(\mu)},\ \ldots.$$

Är $I^{(0)}$ innehållet af $P^{(0)}$ och $I^{(\mu)}$ innehållet af $P^{(\mu)}$, så är

$$I^{(0)} = 2\pi - \sum_\nu d_\nu$$

och

$$I^{(\mu)} = 2\pi - \sum_\nu d_\nu^{(\mu)}.$$

Cirkelbågarna $d_\nu^{(\mu)}$ uppstå ur cirkelbågarna d_ν genom förmedling af substitutionen $S^{(\mu)}$. Vi kunna tänka oss de båda serierna af cirkelbågar så ordnade, att $d_\nu^{(\mu)}$ är afbilden af d_ν.

Är nu n ett godtyckligt positivt helt tal, så framställer uttrycket

$$2\pi - \sum_{\nu=1}^{\nu=n} d_\nu$$

totallängden af vissa på enhetscirkelns periferi liggande bågar. Om vi på dessa bågar använda substitutionen $S^{(\mu)}$, så uppkomma bågar, hvilkas totallängd är

$$2\pi - \sum_{\nu=1}^{\nu=n} d_\nu^{(\mu)}.$$

Då består olikheten

$$2\pi - \sum_{\nu=1}^{\nu=n} d_\nu^{(\mu)} > m^{(\mu)} \cdot \left(2\pi - \sum_{\nu=1}^{\nu=n} d_\nu\right).$$

Då denna olikhet gäller för alla värden på n, så framgår härur, att

(7) $$I^{(\mu)} > m_\mu \cdot I^{(0)}.$$

9. Om N är ett godtyckligt positivt helt tal, så är föreningsmängden af mängderna

$$P^{(0)},\ P^{(1)},\ \ldots,\ P^{(N)}$$

åter en sluten ingenstädes tät mängd af punkter på enhetscirkelns periferi. Denna mängd tillkommer alltså på samma sätt som de enskilda punktmängderna $P^{(\mu)}$ ett bestämdt längs periferin uppmätt innehåll. Då emellertid de ofvan angifna mängderna ha högst två punkter parvis gemensamma, så är detta innehåll lika med

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=N} I^{(\mu)}.$$

Då å andra sidan det betraktade innehållet är mindre än 2π, så följer, att

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=N} I^{(\mu)} < 2\pi.$$

Då denna olikhet gäller för alla värden på N, så följer härur, att serien

(8) $$\sum_{\mu} I^{(\mu)}$$

konvergerar.

Ur konvergensen af (8) sluta vi emellertid med tillhjälp af (7), att serien

$$\sum_{\mu} m^{(\mu)}$$

konvergerar. Följaktligen konvergerar enligt (6) också serien

$$\sum_{\mu} \frac{1}{|\gamma^{(\mu)}|^2}.$$

Men detta innebär enligt (3), *att den Poincaré'ska serien af dimensionen* — 2

$$\sum_{\mu} \frac{1}{|\gamma^{(\mu)}\eta + \delta^{(\mu)}|^2}$$

konvergerar för $|\eta| < 1$. Härmed är satsen bevisad.