OM EN AF DEN DANSKA SPRÅKFORSKAREN *KARL VERNER* ANGIFVEN MODIFIKATION AF FÖRFARANDET VID HARMONISK ANALYS AF PERIODISKA KURVOR.

AF

ERNST LINDELÖF.

DET synes vid detta tillfälle icke vara utan intresse att påpeka en af den på språkvetenskapens område vidtberömde dansken *Karl Verner* angifven metod att förenkla beräkningarna vid s. k. harmonisk analys. *Verner* har i största korthet beskrifvit sitt förfaringssätt i ett bref till Professor *H. Pipping* i Helsingfors [1]). En närmare diskussion visar att detta förfaringssätt medför afsevärda fördelar och därför är väl värdt att blifva allmännare kändt [2]).

1. Om den förelagda kurvans period antages $= 2\pi$ och abskissan betecknas med x, kan kurvans ordinata $f(x)$ representeras medels en Fourier'sk serie af formen

$$f(x) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x).$$

Vi antaga att kurvans ordinata uppmätts för ett jämnt antal n ekvidistanta argumentvärden

---

[1]) Detta och ett annat bref från *Verner* till *Pipping* blifva offentliggjorda i *Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Oversigter*, med indledende Bemærkninger af *Vilh. Thomsen* og *J. P. Gram*. I dessa bref redogör *Verner* ganska utförligt för sina fonetiska undersökningar och för den apparat han därvid använde.

[2]) Jag har lemnat en utförligare redogörelse för denna fråga till sammelverket *Handbuch der physiologischen Methodik, herausgegeben von R. Tigerstedt*, där densamma ingår i *J. Poirot's* artikel öfver fonetiken (s. 207—220).

$$(1) \qquad 0,\ \omega,\ 2\omega,\ \cdots,\ (n-1)\,\omega, \qquad \left(\omega = \frac{2\pi}{n}\right),$$

och att därvid erhållits värdena

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_{n-1}.$$

Under förutsättning att mätningarna vore exakta, hafva vi då relationerna

$$y_k = a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu k\omega + b_\nu \sin \nu k\omega), \quad (k = 0,\ 1,\ \cdots,\ n-1).$$

Om vi multiplicera med $\cos \nu k\omega$ resp. $\sin \nu k\omega$ och summera med afseende å k, från $k = 0$ till $k = n - 1$, samt i slutresultatet åt ν efterhand gifva värdena $0,\ 1,\ \cdots,\ \frac{n}{2}$, erhålla vi, enligt kända trigonometriska formler, följande likheter:

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} y_k = a_0 + a_n + a_{2n} + a_{3n} + \cdots, \\[2ex] \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k y_k = a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{3n}{2}} + a_{\frac{5n}{2}} + a_{\frac{7n}{2}} + \cdots, \\[2ex] \dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} y_k \cos \nu k\omega = a_\nu + a_{n-\nu} + a_{n+\nu} + a_{2n-\nu} + \cdots, \\[2ex] \dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} y_k \sin \nu k\omega = b_\nu - b_{n-\nu} + b_{n+\nu} - b_{2n-\nu} + \cdots, \\[2ex] \qquad\qquad \left(\nu = 1,\ 2,\ \cdots,\ \dfrac{n}{2} - 1\right). \end{cases}$$

Om alla de koefficienter a, b, hvilkas indices äro större än $\frac{n}{2}$ negligeras, gifva oss dessa likheter, för beräkningen af de n första koefficienterna

$$a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_{\frac{n}{2}},\ b_1,\ \cdots,\ b_{\frac{n}{2}-1},$$

de i den harmoniska analysen allmänt använda formlerna

$$(3)\quad \begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} y_k, \\ a_{\frac{n}{2}} = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k y_k, \\ a_\nu = \dfrac{2}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} y_k \cos \dfrac{2\nu k\pi}{n}, \\ b_\nu = \dfrac{2}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} y_k \sin \dfrac{2\nu k\pi}{n}. \end{cases} \quad \left(\nu = 1, 2, \cdots, \frac{n}{2} - 1\right).$$

2. Såsom af ofvanstående härledning framgår, äro värdena (3) icke noggranna om bland de koefficienter a, b, hvilkas indices äro större än $\frac{n}{2}$, finnas sådana som hafva märkbara belopp. För att minska dessa koefficienters inverkan, erbjuder sig utvägen att öka värdet af n. Man har då dels att uppmäta flere ordinator af den gifna kurvan, dels att i formlerna (3) uträkna och summera ett större antal termer. I regel representerar ordinatornas mätning ett ganska litet arbete i jämförelse med koefficienternas uträkning, och man kan därför, för ernående af ett noggrannare resultat, gerna underkasta sig mödan att göra ett större antal mätningar, blott beräkningsmetoden kan modifieras så att det praktiska räknearbetet icke väsentligt ökas.

Verner når detta mål på följande sätt. Han förskjuter den gifna kurvan parallellt med abskissaxeln, åt höger och åt venster, om ett stycke $\Delta = \frac{\omega}{2} = \frac{\pi}{n}$, summerar de sålunda erhållna kurvornas ordinator till det fördubblade värdet af den gifna kurvans ordinata, och dividerar summan med 4. Han erhåller sålunda en kurva hvars ordinata representeras af funktionen

$$F(x) = \frac{f(x - \Delta) + 2f(x) + f(x + \Delta)}{4}.$$

Om man af den gifna kurvan $y = f(x)$ uppmätt $2n$ ekvidistanta ordinator, svarande mot argumentvärdena

$$0, \Delta, 2\Delta, \cdots, (2n - 1)\Delta, \quad \left(\Delta = \frac{\pi}{n}\right),$$

och betecknar de erhållna värdena med

(4) $$y'_0,\ y'_1,\ y'_2,\ \cdots,\ y'_{2n-1},$$

blifva de ordinator af kurvan $y = F(x)$, som svara mot argumentvärdena (1), i ordning lika med

(5) $$\begin{cases} \bar{y}_0 = \dfrac{y'_{2n-1} + 2y'_0 + y'_1}{4}, \quad \bar{y}_1 = \dfrac{y'_1 + 2y'_2 + y'_3}{4}, \quad \cdots, \\ \qquad\qquad \bar{y}_{n-1} = \dfrac{y'_{2n-3} + 2y'_{2n-2} + y'_{2n-1}}{4}, \end{cases}$$

(om $f(x)$ är strängt periodisk och således $f(-\Delta) = f((2n-1)\Delta)$). Dessa värden (5) erhållas alldeles enkelt genom bildandet af successiva medeltal.

Den Fourier'ska utvecklingen af funktionen $F(x)$ har den enkla formen

$$F(x) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) \cos^2 \frac{\nu\Delta}{2}.$$

Om vi på kurvan $y = F(x)$ tillämpa formlerna (2), samt dividera den andra af dessa med $\frac{1}{2}$ och de två sista med $\cos^2 \frac{\nu\Delta}{2}$, erhållas således följande likheter:

(2′) $$\begin{cases} \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \bar{y}_k = a_0 + a_{2n} + a_{4n} + a_{6n} + \cdots, \\ \dfrac{2}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \bar{y}_k = a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{3n}{2}} + a_{\frac{5n}{2}} + a_{\frac{7n}{2}} + \cdots, \\ \dfrac{1}{\cos^2 \frac{\nu\Delta}{2}} \cdot \dfrac{2}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \bar{y}_k \cos \nu k\omega = a_\nu + a_{2n-\nu} + a_{2n+\nu} + a_{4n-\nu} + a_{4n+\nu} + \cdots \\ \qquad + \tan^2 \dfrac{\nu\Delta}{2} (a_{n-\nu} + a_{n+\nu} + a_{3n-\nu} + a_{3n+\nu} + \cdots), \\ \dfrac{1}{\cos^2 \frac{\nu\Delta}{2}} \cdot \dfrac{2}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \bar{y}_k \sin \nu k\omega = b_\nu - b_{2n-\nu} + b_{2n+\nu} - b_{4n-\nu} + b_{4n+\nu} - \cdots \\ \qquad - \tan^2 \dfrac{\nu\Delta}{2} (b_{n-\nu} - b_{n+\nu} + b_{3n-\nu} - b_{3n+\nu} + \cdots). \end{cases}$$

Faktorn $\operatorname{tang}^2 \frac{\nu\Delta}{2} = \operatorname{tang}^2 \frac{\nu\pi}{2n}$ är för små värden ν mycket liten; för $\nu = \frac{n}{4}$ är dess värde ännu blott 0, 17 .... och växer långsamt mot 1 då ν växer mot $\frac{n}{2}$. En jämförelse mellan likheterna (2) och (2′) visar således, att man väsentligen reducerar inverkan af de koefficienter a, b hvilkas indices äro större än $\frac{n}{2}$, och följaktligen för de öfriga koefficienterna, och särskildt för dem med lägre indices, erhåller väsentligt noggrannare värden, om man i stället för (3) använder följande formler (uttrycket för $a_{\frac{n}{2}}$ är identiskt med det tidigare):

$$(3') \quad \left\{ \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \overline{y}_k, \\ a_{\frac{n}{2}} &= \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \overline{y}_k, \\ a_\nu &= \frac{1}{\cos^2 \frac{\nu\pi}{2n}} \cdot \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \overline{y}_k \cos \frac{2\nu k\pi}{n}, \\ b_\nu &= \frac{1}{\cos^2 \frac{\nu\pi}{2n}} \cdot \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \overline{y}_k \sin \frac{2\nu k\pi}{n}. \end{aligned} \right. \quad \left(\nu = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1\right),$$

3. Vi hafva i det föregående icke beaktat mätningsfelen. En noggrannare undersökning visar att äfven dessas inverkan väsentligen reduceras vid användande af formlerna (3′). Om medelfelet har samma värde ε vid mätningen af de olika ordinatorna (hvilken förutsättning visserligen endast närmelsevis kan vara uppfylld, då mätningens osäkerhet i någon mån måste ökas med kurvans stigning), finner man att medelfelet för koefficienterna

$$a_0, \ a_\nu, \ b_\nu$$

enligt formlerna (3) är lika med

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, \ \varepsilon\sqrt{\frac{2}{n}}, \ \varepsilon\sqrt{\frac{2}{n}},$$

enligt formlerna (3′) lika med

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{2n}},\ \rho_\nu\varepsilon\sqrt{\frac{2}{n}},\ \rho_\nu\varepsilon\sqrt{\frac{2}{n}},$$

där

$$\rho_\nu = \frac{\sqrt{1 + \cos^2\frac{\nu\pi}{n}}}{1 + \cos\frac{\nu\pi}{n}}.$$

Värdet af denna faktor ρ_ν är för $\nu < \frac{n}{4}$ mycket nära $\frac{1}{\sqrt{2}}$, och växer långsamt mot 1 då ν växer mot $\frac{n}{2}$.

4. *Verner* använde jämväl andra förfaringssätt än det ofvan beskrifna. Exempelvis bildade han ur den gifna kurvan $y = f(x)$, genom parallellförskjutning och addition, den nya kurva hvars ordinata representeras af funktionen

$$\tfrac{1}{8}(f(x - 2\Delta) + 2f(x - \Delta) + 2f(x) + 2f(x + \Delta) + f(x + 2\Delta)),$$

där $\Delta = \frac{\pi}{n}$, och tillämpade på denna kurva de vanliga formlerna, utgående från dess mot argumentvärdena $0,\ 5\Delta,\ 10\Delta, \cdots$ svarande ordinator, hvilka lätt beräknas ur den gifna kurvans $2n$ uppmätta ordinator (4). Talet n antages härvid divisibelt med 5.

Det är emellertid i alla afseenden lämpligare att, i stället för denna nya metod, två gånger å rad tillämpa *Verner's* första förfaringssätt. Man har då att uppmäta $4n$ ordinator af den gifna kurvan $y = f(x)$, samt att ur denna bilda den kurva som representeras af funktionen

$$f_1(x) = \frac{f(x - \Delta') + 2f(x) + f(x + \Delta')}{4} \quad \left(\Delta' = \frac{\Delta}{2} = \frac{\pi}{2n}\right),$$

samt härur den kurva hvars ordinata har till uttryck

$$F(x) = \frac{f_1(x - \Delta) + 2f_1(x) + f_1(x + \Delta)}{4}.$$

Om man med $\overline{\overline{y}}_0, \overline{\overline{y}}_1, \cdots, \overline{\overline{y}}_{n-1}$ betecknar de ordinator af denna sistnämnda kurva som svara mot argumentvärdena (1), och hvilka enkelt bildas ur den gifna kurvans $4n$ uppmätta ordinator, erhåller man på denna väg följande nya formler för koefficienternas bestämmande:

$$
(3'') \left\{
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \overline{\overline{y}}_k, \\
a_{\frac{n}{2}} &= \frac{2}{\cos^2 \dfrac{\pi}{8}} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \overline{\overline{y}}_k, \\
a_\nu &= \frac{1}{\cos^2 \dfrac{\nu\pi}{2n} \cos^2 \dfrac{\nu\pi}{4n}} \cdot \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \overline{\overline{y}}_k \cos \frac{2\nu k\pi}{n}, \\
b_\nu &= \frac{1}{\cos^2 \dfrac{\nu\pi}{2n} \cos^2 \dfrac{\nu\pi}{4n}} \cdot \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \overline{\overline{y}}_k \sin \frac{2\nu k\pi}{n}.
\end{aligned}
\right. \quad \left(\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ \frac{n}{2} - 1\right),
$$

Här är inverkan såväl af de negligerade koefficienterna som af mätningsfelen reducerad i ännu mycket högre grad än i formlerna (3′).