NOGLE KLASSER AF HARMONISKE FUNKTIONER MED TRE VARIABLE.

AF

E. SCHOU.

VED en harmonisk Funktion forstaas et Integral til Laplace's Ligning:

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Denne Ligning spiller som bekendt en overordentlig stor Rolle for mange Grene af Fysiken, og den er derfor Genstand for mangfoldige Undersøgelser. De fleste af disse har det til fælles, at de Variable antages at være reelle, og at Integralerne søges saaledes bestemt, at visse Grænsebetingelser bliver opfyldt. Paa denne Maade har man faaet mange Oplysninger om Integralernes *kvantitative* Egenskaber, og man har i mange Tilfælde kunnet angive Former, under hvilke visse Integraler kan udvikles i Række.

I en mærkelig Modsætning til den store Mængde Resultater af almindelig Natur, man er naat til, staar den Omstændighed, at man i Virkeligheden kun kender et meget lille Antal *specielle* harmoniske Funktioner, kender dem i den Forstand, at man er i Stand til at angive deres analytiske Natur.

For Studiet af de harmoniske Funktioner er dette et Savn, hvilket indses, naar man erindrer den Nytte, man har haft af de simpleste analytiske Funktioner af 1 Variabel ved Udledelsen af de almindelige Sætninger om saadanne Funktioner. Ved Funktioner som de, der her er Tale om, med tre Variable, der hver for sig skal kunne variere i den komplekse Plan, maa man vente, at de analytiske Egenskaber f. Eks. Singulariteternes Natur, vil vise en overvældende Mangfoldighed, og det vil derfor være saa meget mere nyttigt at kunne disponere over omfattende Klasser af specielle Funktioner, hvis analytiske Bygning man er i Stand til at angive.

Jeg har stillet mig den Opgave at finde saadanne Klasser af Funktioner, idet jeg vilde forsøge at generalisere de plane, harmoniske Funktioner. Disse tilfredsstiller Laplaces Ligning i Planen:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Sættes:

$$\eta_1 = x + iy : \; \eta_2 = x - iy,$$

bliver Ligningen:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} = 0,$$

som giver:

$$u = f(\eta_1) + \psi(\eta_2),$$

hvor f og ψ er arbitrære Funktioner.

Man ser herved, at Laplace's Ligning i dette Tilfælde har den Egenskab, at der findes *saadanne Integraler, at enhver Funktion deraf atter er et Integral.* η_1 er et Integral, og det er, som man ser, ogsaa $f(\eta_1)$. Findes der Løsninger af denne Art til Laplace's Ligning i Rummet?

Lad η være en harmonisk Funktion og $F(\eta)$ en vilkaarlig Funktion af η. Man har da:

$$\Delta_2 (F(\eta)) = \left(\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)^2\right) F''(\eta) + F'(\eta) \cdot \Delta_2 \eta.$$

Hvis nu, foruden η, tillige $F(\eta)$ skal være harmonisk, maa følgende to Ligninger være tilfredsstillet:

$$\Delta_2(\eta) = 0, \quad \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)^2 = 0.$$

Ser vi paa den sidste Ligning og antager, at $u = c$ er et Integral, saa viser det sig, at Fladerne $u = c$ enten er Planer, der berører den uendelig fjærne, imaginære Cirkel — en saadan Plan kalder jeg en *Nulplan*, idet den almindelige Betegnelse Minimalplan synes mig uheldig — eller udfoldelige Flader, der indeholder den nævnte Cirkel. Saadanne udfoldelige Flader kaldes *Nulflader*. Tillige benyttes Betegnelsen *Nullinje* for en ret Linje, der skærer den uendelig fjærne Cirkel, og *Nulkurve* for en Kurve, hvis Tangenter er Nullinjer.

Man finder derpaa, at naar begge de anførte Ligninger skal være tilfredsstillet, maa Fladerne $\eta = c$ *være et System af Nulplaner*. Ligningen for et saadant System kan gives Formen:

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma,$$

hvor α, β, γ er Funktioner af η, og α og β tilfredsstiller Ligningen:

$$\alpha^2 + \beta^2 + 1 = 0.$$

Bestemmer man altsaa η som Funktion af x, y, z ved en vilkaarlig Ligning af denne Form, vil η være en harmonisk Funktion med den Egenskab, at enhver Funktion af den atter er harmonisk.

Bestemmer man ved to Ligninger af denne Form to saadanne harmoniske Funktioner η_1 og η_2, vil

$$\rho = f(\eta_1) + \psi(\eta_2),$$

hvor f og ψ er arbitrære Funktioner, være harmonisk. Herved er vi kommet til en temmelig omfattende Klasse af harmoniske Funktioner, der, mærkelig nok, ikke synes at være undersøgt i sin Almindelighed.

De to harmoniske Funktioner η_1 og η_2 ses at have den Egenskab, at der iblandt Funktionerne af dem findes uendelig mange, som atter er harmoniske. Herved ledes man til at stille den almindelige Opgave *at bestemme alle Par af harmoniske Funktioner* ρ_1 *og* ρ_2 *med den Egenskab, at der iblandt Funktionerne af dem:* $F(\rho_1, \rho_2)$ *findes uendelig mange, som atter er harmoniske.*

Denne Opgave kan løses, idet man er i Stand til at angive alle Klasser af saadanne Funktioner. For de fleste Klassers Vedkommende kan man give Udtryk for de harmoniske Funktioner; kun ved *en* Klasse er dette ikke muligt, her kan man vel give Udtryk for uendelig mange af de harmoniske Funktioner; men den almindelige Løsning afhænger af en lineær, partiel Differentialligning af anden Orden, som kun i specielle Tilfælde synes at kunne integreres fuldstændigt ved bekendte Methoder.

Lad os antage, at der foreligger to harmoniske Funktioner med den angivne Egenskab: ρ_1 og ρ_2. Ved Ligningerne $\rho_1 = c_1$, $\rho_2 = c_2$ bestemmes der en Kongruens af Kurver, og enhver Flade, hvis Ligning kan gives Formen $f(\rho_1, \rho_2) = c$, siges at høre til Kongruensen. Kongruensen skal nu altsaa være saaledes, at der iblandt de tilhørende Fladesystemer findes uendelig mange harmoniske ɔ: saadanne, hvis Ligning har Formen $F = c$, hvor F er en harmonisk Funktion.

Det viser sig nu, at der *til en saadan Kongruens tillige maa høre et eller to Systemer af Nulflader*, enten Nulplaner eller udfoldelige Nulflader.

Denne Sætning danner Grundlaget for Løsningen og tillader simple, geometriske Definitioner af Kongruenserne.

Først betragtes det Tilfælde, hvor der til Kongruensen hører *to* Systemer af Nulflader; der gives da følgende Arter.

a) *Begge Systemer er Planer.*

Lad deres Ligninger være:

$$z = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 \quad \text{med } \alpha_1^2 + \beta_1^2 + 1 = 0$$

og

$$z = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 \quad \text{med } \alpha_2^2 + \beta_2^2 + 1 = 0,$$

idet $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ er Funktioner af η_1, $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ Funktioner af η_2. De harmoniske Funktioner har Formen:

$$\rho = f(\eta_1) + \psi(\eta_2).$$

Det er dette Tilfælde, vi har betragtet ovenfor.

De to Systemer af Nulflader indhyller hver sin udfoldelige Nulflade, og Kongruensens Kurver kan defineres som Nulfladernes Fællestangenter.

Specielt kan de to Nulflader falde sammen til en, og Kongruenslinjerne bliver da Dobbelttangenterne til denne. Hvis saaledes Nulfladen er en Kegle, vil Kongruensen bestaa af alle rette Linjer igennem Toppunktet. Fjærner Toppunktet sig i det uendelige langs en Linje, som ikke skærer den uendelig fjærne Cirkel, vil Kongruenslinjerne alle komme til at staa vinkelret paa samme Plan, og vi kommer da tilbage til de plane, harmoniske Funktioner.

b) *Kun det ene System af Nulflader er Planer.*

Det viser sig, at Planerne maa være parallele, medens det andet System af Nulflader dannes af Kegler med Toppunkter paa en vilkaarlig Kurve.

c) *Intet af Systemerne er Planer.*

Hvis det ene System bestaar af Kegler, maa det samme være Tilfældet med det andet. Keglernes Toppunkter ligger paa en ret Linje, og Kongruenskurverne er Cirkler, hvis Centrer ligger paa denne rette Linje, og hvis Planer staar vinkelret derpaa. Til denne Klasse hører alle Potentialer, hvis Niveauflader er Omdrejningsflader. En mere almindelig Klasse af Funktioner faas, naar man antager, at intet af de to Systemer af Nulflader bestaar af Kegler. For at faa en geometrisk Definition af de udfoldelige Nulflader, som da optræder, kan man gaa ud fra deres Rebroussementskanter, der jo er Nulkurver. Det viser sig, at disse Rebroussementskanter er Nulkurver paa visse Flader af anden Orden. Disse Flader, der er Kegler eller Cylindre af speciel Art, har den Egenskab, at de to Systemer af Nulkurver, som findes paa dem ligesom paa enhver anden Flade, kan adskilles analytisk. Rebroussementskanterne til de udfoldelige Flader, som hører til Kongruensen, vil danne det ene System, medens det andet i Almindelighed giver en anden Kongruens.

Dette Tilfælde er det sværeste at behandle; de harmoniske Funktioner tilfredsstiller en lineær, partiel Differentialligning af anden Orden med to Variable. De Flader af anden Orden, der kan blive Tale om som Bærere af Rebroussementskanterne er Omdrejningskegler, Omdrejningscylindre eller parabolske Cylindre, hvis Frembringere er Nullinjer.

Hermed er alle Tilfælde nævnt, hvor der til Kongruensen hører to Systemer af Nulflader. Tilbage staar altsaa de Tilfælde, hvor der kun findes *et* saadant System.

Først nævnes et Grænsetilfælde, hvor dette ene System kan betragtes som dannet af to sammenfaldende Systemer af Nulflader. Systemet bestaar af Nulplaner, der kan defineres som Tangentplaner til en vilkaarlig valgt udfoldelig Nulflade. Kongruenslinjerne vil være Nullinjerne i disse Planer. Til denne Klasse af Funktioner hører Newtons Potential.

Hvis der endelig virkelig kun findes *et* System af Nulflader, hørende til Kongruensen, maa det bestaa af Kegler, hvis Toppunkter ligger paa en Kurve, der kan vælges vilkaarligt.

Hermed er nævnt alle de forskellige Tilfælde, der kan forekomme. De harmoniske Funktioner, som svarer dertil, kan enten bestemmes explicit, eller ogsaa tilfredsstiller de lineære partielle Differentialligninger af anden Orden med to Variable. Funktionerne indeholder, ligesom i det plane Tilfælde af Laplace's Ligning, to arbitrære Funktioner, hver med 1 Variabel, og desuden indgaar der i visse Tilfælde arbitrære Konstanter i Kongruensens Bestemmelse.

Ud fra disse Funktioner, som i Almindelighed vil være imaginære, kan man ved Addition danne uendelig mange andre, reelle eller imaginære, harmoniske Funktioner.