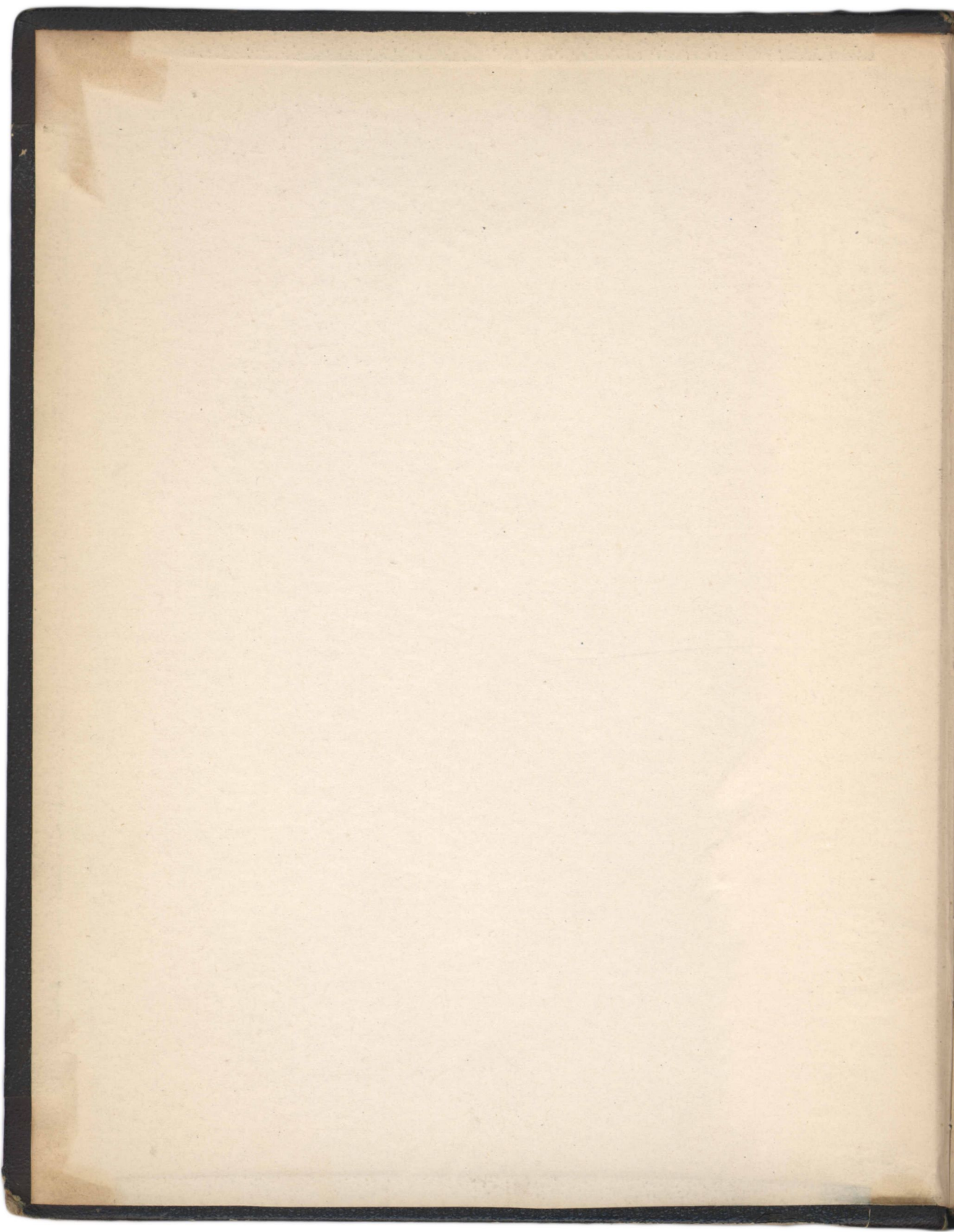


KLEIN,

Diff. I.

1890 - 91



S. Warkot

G.M. II 469

zun

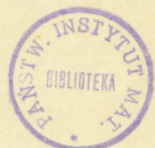
Kat

Ausgewählte Kapitel aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen
zweiter Ordnung.

I.
Vorlesung
von F. Klein.

gehalten während des Wintersemesters 1890-91.

Göttingen 1891.



4449/T

~~TOWARZYSTWO NAUKOWE WARSZAWSKIE~~

~~GABINET MATEMATYCZNY
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego~~

~~L. inw. 449~~

opis nr: 46805

Vorbemerkung.

Der nachfolgenden Ausarbeitung der von mir im Wintersemester 1890-91 gehaltenen Specialvorlesung wünsche ich die Bemerkung vorauszuschicken, dass genannte Vorlesung die Fortsetzung einer allgemeinen gehaltenen einleitenden Vorlesung des Sommersemesters 1890 war, in welcher ich die Grundigenschaften der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung insbesondere an dem Beispiele der hypergeometrischen Differentialgleichung darlegte, und namentlich auch die Integration der letzteren durch bestimmte Integrale untersuchte. Auf diese Sommervorlesung wird weiterhin verschiedentlich Bezug genommen; es sind aber die jedesmal in Betracht kommenden Verhältnisse dann so ausführlich recapitulirt oder anderweitig so bekannt, dass sich auch solche Leser, welche die Sommervorlesung nicht kennen, leicht zurecht finden werden. In der That schien eine autographische Reproduction der Sommervorlesung, die von verschiedenen Seiten gewünscht wurde, aus anderweitigen Gründen unthunlich. Ich bin an die autographische Vervielfältigung der vorliegenden Ausarbeitung auch nur nach längerem Bedenken herangegangen. Die Vorlesung ist in derselben mit all' den Unvollkommenheiten wiedergegeben, wie sie wirklich gehalten wurde. Indem ich darauf ausging, in eine Zukunft in den Kreis derjenigen Anschauungsführer zu führen, deren weiterer Verfolg mir aussichtsreich scheint, habe ich zahlreiche neue Probleme mehr begonnen als beendet. Ich bitte den Leser die einzelnen Ansätze dementsprechend kritisch zu strengen Kritik unterwerfen zu wollen. Ist doch auch

diese autographische Reproduction nicht für die Öffentlichkeit
schlechtweg, sondern nur für den engeren Kreis meiner Schü-
ler bestimmt. Uebrigens hoffe ich, um dieselbe im kommenden
Sommersemester anknüpfen und ihr dann vielleicht eine Fort-
setzung folgen lassen zu können.

F. Klein.

Göttingen, im März 1891.

~~TOWARZYSTWO BANKI WE WARSZAWSKIE~~

Die Vorlesung, welche ich heute beginne, schliesst sich als Fortsetzung an die Vorlesung über Differentialgleichungen, die ich im vorigen Semester gab, und greift zugleich auf die Entwicklungen zur Nicht-Euklidischen Geometrie zurück, die ich in den beiden vorigen Semestern vorgebracht habe.

Den Hauptgegenstand der genannten Vorlesung bildete die Theorie der hypergeometrischen Function, derselben, welche Riemann in seiner grundlegenden Arbeit von 1857 mit P bezeichnet. Indem wir uns im Allgemeinen an Riemann anschliessen, haben wir doch eine Reihe von Hülfsmitteln benützt, welche bei Riemann noch nicht vorkommen oder jedenfalls nicht ausgiebig benützt werden. Es sind dies:

1) Die conforme Abbildung der Ebene x auf die Ebene η (wo $\eta = \frac{y}{y'}$ der Quotient irgend zweier Zweige der hypergeometrischen Function). Sobald die Exponentendifferenzen λ, μ, ν reell waren, entsprach der positiven oder negativen Halbebene x in der η -Ebene dabei ein Kreisbogendreieck. (Schwarz im 7. 5. Bande des Journals, 1872).

2) Indem wir dieses Dreieck durch stereographische Projection auf eine Kugelfläche (Riemann'sche Kugelfläche, η -Kugel) übertragen, wurde es möglich zwecks seiner Untersuchung die projective Maassbestimmung heranzuziehen, welche man im Raume auf die Kugelfläche als Fundamentalfäche gründen kann, also Anschluss an die Nicht-Euklidische Geometrie zu nehmen.

3) Es erwies sich vielfach als nützlich, $x = \frac{x_1}{x_2}$ zu setzen und statt des einen Variablen x die zwei Variablen x_1, x_2 (homogene Variablen) neben einander zu betrachten. Man hat dann nicht

"Functionen" $f(x) = f\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$, sondern homogene Functionen von x , und x_2 : $F(x_1, x_2)$, sogenannte Formen zu untersuchen.

4) Die gewöhnliche Behandlung der bestimmten Integrale leidet an dem Uebelstande, dass starkes Unendlichwerden der zu integrierenden Function in den Grenzen der Integration die Bedeutung des Integrals illusorisch macht. Deshhalb empfiehlt es sich überhaupt nicht mit Integralen zu operiren, die von Gränze zu Gränze genommen werden, sondern mit Integralen, die auf der zum Integranden gehörigen Riemann'schen Fläche über einen geschlossenen Weg erstreckt werden. Im Falle der hypergeometrischen Integrale werden die einfachsten deraartigen Wege durch sog. Doppelumläufe geliefert, die wir daher unserer Betrachtung ausschliesslich zu Grunde legen.

5.) Die Verbindung von 3) und 4) gestattet uns, die P-function auch als Function der Verzweigungswerte, wie der Exponenten selbst anzusehen, also die sogenannten Constanten der P-function neben dem x als Variable anzusehen, was bei der Untersuchung der Functionen immer ein Fortschritt ist.*)

Nun haben wir aber diese Punkte 1)...5), wie die Riemann'schen Überlegungen selbst, im vorigen Semester nur allmählich entwickelt und zur Geltung gebracht. Es wird daher nicht überflüssig sein, jetzt, als Einleitung zu der neuen Vorlesung, die Theorie der P-function unter gleichförmiger Benützung aller bezeichneten Gesichtspuncte noch einmal in systematischer Entwicklung vorzuführen. Wir ordnen den Stoff dabei genau umgekehrt wie damals, indem wir jetzt

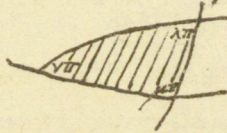
*) Wegen der Punkte 3), 4), 5) und der weiter unten betreffs derselben gegebenen Ausführungen vergl. die neuerdings in Bd. 38 der Annalen erschienene Arbeit: Ueber Normirung der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

die conforme Abbildung durch die η -Function, mit der wir dannals aufhören, als Definition der η -Function voraussetzen.

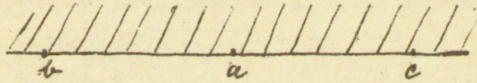
Definition der η -Function.

Nach Riemann's Dissertation kann man jeden einfach zusammenhängenden Bereich der η -Ebene derart conform auf die Halbebene x abbilden, dass drei Punkte der Contour drei beliebige, in demselben Sinne liegende Punkte der Begrenzung der Halbebene, d. h. der realen x -Axe, entsprechen.

Nehmen wir nun als Bereich in der η -Ebene ein Kreisbogen-dreieck mit den Winkeln $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$



dessen Ecken wir den Punkten a, b, c der realen x -Axe (die wir zumvorst nach $0, \infty, 1$ verlegen) zuweisen wollen. Die Abbildung, welche dann entsteht, hört in den Punkten a, b, c natürlich



auf, conform zu sein. Durch diese Abbildung wird jedem Punkte der Halbebene x ein ganz bestimmtes η im Dreiecke zugewiesen, es wird also für die Punkte der Halbebene eine Function η , oder vielmehr ein Zweig einer solchen Function, in unzuweifelhafter Weise festgelegt. Die Function gilt uns hiernach als definiert, und wir müssen zusehen, wie wir aus der somit gegebenen Function weitere Eigenschaften derselben ableiten.

Indem wir beim Dreiecke nur auf die Winkel $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$, nicht aber auf die sonstigen Besonderheiten der Figur Gewicht legen, bezeichnen wir unsere Function mit $\eta\left(\begin{smallmatrix} a & b & c \\ \lambda & \mu & \nu \end{smallmatrix} x\right)$.

Hier entsteht vor allen Dingen die Frage, wie weit ein Kreisbogendreieck durch Angabe der Zahlen λ, μ, ν , die den in bestimmter Reihenfolge genommenen Winkeln entsprechen sollen, bestimmt ist?

Es ist allgemein bekannt, dass ein Kreisbogendreieck (λ, μ, ν) bei jeder Kreisverwandtschaft in ein ebensolechtes Dreieck übergeht; die Aufeinanderfolge der Winkel bleibt allerdings nur bei der directen Kreisverwandtschaft gewahrt, während sie bei der indirecten Kreisverwandtschaft (Spiegelung etc.) umgekehrt wird. — Aber wir lernten im vorigen Semester auf functionentheoretischem Wege, dass auch umgekehrt zwei Dreiecke, welche dieselben λ, μ, ν in derselben Reihenfolge darbieten, direct-kreisverwandt sind.* Hierin liegt die volle Antwort auf unsere Frage. Wie wird man diese Antwort auf elementar geometrischem Wege erzielen? Wir müssen nun weiter als bekannt voraussetzen, dass zwei Ebenen η, η' , die in der Beziehung der directen Kreisverwandtschaft stehen, durch eine lineare Substitution $\eta' = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}$ verbunden sind, und umgekehrt. Unser Funktionszweig $\eta(\begin{smallmatrix} abc \\ \lambda \mu \nu \end{smallmatrix} x)$ ist daher durch blosse Angabe der $a, b, c, \lambda, \mu, \nu$ nur erst abgesehen von einer beliebigen linearen Substitution bestimmt; das Zeichen $\eta(\begin{smallmatrix} abc \\ \lambda \mu \nu \end{smallmatrix} x)$ legt an sich nicht einen bestimmten Funktionsweg sondern eine ganze lineare Schaar von Zweigen fest, die sich aus einem beliebigen derselben η_0 in der Gestalt $\frac{\alpha\eta_0 + \beta}{\gamma\eta_0 + \delta}$ ergibt, wo die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ willkürlich sind.

Ehe wir uns nun mit der η -Funktion ausgiebiger beschäftigen, schicken wir

*Vergl. wegen der sämmtlichen auf Kreisbogendreiecke bezüglichen geometrischen Angaben die inzwischen in Bd. 37 der math. Annalen erschienene Abhandlung; Hebel die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe.

Geometrische Bemerkungen zur Theorie des Kreisbogendreiecks

voraus.

Erstlich erinnere ich an einen Satz, den ich im vorigen Semester ableitete und den ich hier voranstelle, weil er noch keinerlei Eingehen auf bekannte Arten des Messens verlangt also gewissermassen der Analysis situs angehört. Es handelt sich um die Frage, wie oft sich die einzelne Kreisbogenseite unseres Dreiecks überschlägt, wenn λ, μ, ν irgendwelche (beliebig grosse) positive Zahlen sind?

Wir fanden, dass die Anzahl dieser „Überschlagungen“; - die Anzahl von Malen, dass die Kreisbogenseite die sie tragende Kreisperipherie vollständig umspannt und beispielweise für die Seite, welche dem Winkel λ gegenüberliegt: $E \left(\frac{\lambda - \mu - \nu + 1}{2} \right)$ beträgt, unter E die grösste ganze positive Zahl verstanden, welche von dem zugesetzten Argumente überschritten wird. Dieser Satz vervollständigt, wie ausdrücklich hervorgehoben sei, die gewöhnlichen, sogleich zu besprechenden trigonometrischen Formeln. Denn letztere beziehen sich nur auf die trigonometrischen Linien der Winkel, auf Sinus und Cosinus, nicht aber auf die absoluten Grössen der Winkel. Wir haben hier also eine Ergänzung der gewöhnlichen Trigonometrie von übrigens ganz elementarem Charakter.

Wir ziehen nun ferner im Sinne von 2) der pag. 3 die Nicht-Euklidische Geometrie heran.

Vor allen Dingen übertragen wir zu dem Zwecke das η -Dreieck aus der γ -Ebene, die wir bisher zu Grunde legten, durch stereographische Projection auf die η -Spiegel. Das dort entstehende Dreieck wird wieder von drei Kreisbogen, d. h., im Raume genommen, von drei Ebenen begrenzt, und diese

drei Ebenen bilden im Raume ein Dreieck. Den Ecken und Seiten unseres Dreiecks entsprechen die Kanten und Seiten dieses Dreiecks.

Fetzt lernten wir im Sommer, dass den linearen Substitutionen $\eta' = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma + \delta}$ (der Gesamtheit der direkten Kreisverwandtschaften der η -Ebene) auf der Kugel gerade die Gesamtheit derjenigen Umänderungen entspricht, welche durch die Bewegungen der auf die Kugel zu gründenden projectiven Maassbestimmung vorgestellt werden. Daher der Satz:

Wollen wir bei unserem Dreiecke gerade diejenigen Eigenschaften ins Auge fassen, welche bei beliebiger linearer Substitution $\eta' = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma + \delta}$ ungeändert bleiben, so brauchen wir nur auf die Maassverhältnisse zu achten, welche das genannte Dreieck im Sinne der zur Kugel gehörigen Nicht-Euklidischen Geometrie besitzt.

Diese Maassverhältnisse des Dreiecks reduciren sich aber auf seine Kantenwinkel und Seitenwinkel. Die Kantenwinkel stimmen ersichtlich mit den Eckenwinkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ des ursprünglichen Kreisbogendreiecks überein.

Die Seitenwinkel, die wir $l\pi$, $m\pi$, $n\pi$ nennen wollen, entsprechen den Seiten des Kreisbogendreiecks, wir kommen so dazu, den letzteren ganz bestimmte Maasszahlen $l\pi$, $m\pi$, $n\pi$ beizulegen. Die absoluten Beträge der l , m , n , λ , μ , ν sind dabei durch den vorausgenannten Satz der „Analysis situs“ an einander gebunden, den wir hier so schreiben können:

$$\mathcal{E}\left(\frac{\rho}{2}\right) = \mathcal{E}(\lambda - \mu - \nu + 1).$$

Ausserdem aber bestehen zwischen den Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$, $l\pi$, $m\pi$, $n\pi$ die Formeln der sphärischen Trigonometrie. In der That

gelten ja letztere beim Dreieck ebensowohl in der Euklidischen wie in der Nicht-Euklidischen Geometrie.

Wir können dabei noch eine Fallunterscheidung eintreten lassen, je nachdem $\lambda + \mu + \nu \begin{cases} \geq \\ < \end{cases} 1$.

1) Ist $\lambda + \mu + \nu > 1$ so ist nichts Besonderes zu bemerken. Wir haben dann nämlich mit einem Dreieck zu thun, dessen Spitze im Inneren der Kugel liegt, und bei einem solchen Dreieck gestalten sich die Nicht-Euklidischen Maassverhältnisse genau so wie die uns geläufigen Euklidischen.

2) Ist aber $\lambda + \mu + \nu < 1$, liegt also die Spitze des Dreiecks außerhalb der Kugel, so werden die Nicht-Euklidischen l, m, n rein imaginär. Wir setzen dann $l = iL, m = iM, n = iN$, worauf wir zwischen $\lambda, \mu, \nu; L, M, N$ die Formeln der sog. pseudosphärischen Trigonometrie haben.

3.) Ist endlich $\lambda + \mu + \nu = 0$, so liegt die Spitze des Dreiecks auf der Kugel. Es werden dann die Nicht-Euklidischen l, m, n unendlich klein. Führen wir mit ϵ eine unendlich kleine Grösse bezeichnen setzen wir dann etwa:

$$l = \epsilon a, m = \epsilon b, n = \epsilon c$$

und haben dann zwischen $\lambda, \mu, \nu; a, b, c$ die Formeln der gewöhnlichen (Euklidischen) ebenen Trigonometrie.

(Vergleiche überall die Somervorlesung über Nicht-Euklidische Geometrie, oder auch ältere Abhandlungen, z. B. diejenige über binäre Formen mit linearen Transformationen in sich in Bd. 9 der math. Annalen, 1875.)

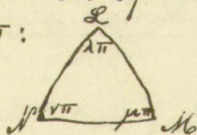
Ich möchte nun einige allgemeine Bemerkungen über die Formeln der sphärischen Trigonometrie einschalten.

1) In den Formeln der sph. Trigonometrie werden die

12 Grössen $\frac{\sin}{\cos} |\lambda\pi|, \dots, \frac{\sin}{\cos} |\nu\pi|$ in mannigfaltigster Weise verbunden. Es ist wünschenswerth diese Abhängigkeiten in Form einer übersichtlichen geometrischen Construction vor Augen zu haben. Ich schlage vor, dies folgendermassen zu machen. Da für einen beliebigen Winkel φ $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$, so mögen wir die Curve $\xi^2 + \eta^2 = 1$ in Betracht zu ziehen, d. h. seinen auf ein Polardreieck bezogenen eintheiligen Kegelschnitt. Jedem Wirthssystem $\frac{\sin}{\cos} |\varphi|$ wird auf diesem Kegelschnitt ein Punkt entsprechen. So erhalten wir unseren sechs Winkelgrössen $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi, \iota\pi, m\pi, n\pi$ correspondirend 6 Punkte unseres Kegelschnittes. Aufgabe: die Abhängigkeit, welche diese 6 Punkte gegen einander, beziehungsweise gegen das zu Grunde gelegte Polardreieck haben, durch möglichst einfache geometrische Construction auszudrücken. Vielleicht beschäftigt sich einer der Herren mit dieser Aufgabe.

2) Ich werde nun eine besondere Methode angeben, vermöge deren Hamilton die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie abgeleitet hat^{*)}.

Sei in der Figur $L M N$ ein sphärisches Dreieck mit den Winkeln $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$:

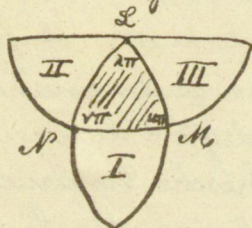


Hamilton's Satz ist dann folgender: Drehe ich die Kugel, welche das Dreieck trägt, zunächst um den in L endigenden Durchmesser durch den Winkel $\lambda\pi$, dann um den in M endigenden Durchmesser durch den Winkel $\mu\pi$, endlich

^{*)} Lectures on Quaternions (1853), art. 344. — Vergl. auch Möbius' Werke, t. II, p. 65.

um den in N endigenden Durchmesser durch den Winkel $\sphericalangle \pi$, so kommt sie in ihre Anfangslage zurück. — Also in leicht verständlicher Symbolik $S_{\nu\nu} \cdot S_{\nu\mu} \cdot S_{\nu\lambda}$ (Kugel) = (Kugel).

Wir müssen solche symbolische Formeln immer von rechts nach links lesen; zuerst wird auf das in Betracht kommende Object (die Kugel) die zumeist nach rechts stehende Operation angewandt, also $S_{\nu\lambda}$, dann $S_{\nu\mu}$, dann $S_{\nu\nu}$. Wir könnten genauer schreiben: $S_{\nu\nu} \cdot \{S_{\nu\mu} \cdot [S_{\nu\lambda} \text{ (Kugel)}]\} = \text{(Kugel)}$. Um den Hamilton'schen Satz zu beweisen, umgeben wir unser Dreieck auf der Kugel mit seinem drei symmetrischen Nebendreiecken:



die wir so, wie sie L , M , N gegenüberliegen, mit I , II , III bezeichnen wollen. Offenbar genügt es für den beabsichtigten Beweis, wenn wir die Richtigkeit des Hamilton'schen Satzes nicht direct für die Gesamtkugel, sondern für irgend ein Stück der Kugelfläche darthun. Als solches wollen wir das Dreieck II wählen. Dann wird in der That der ganze Satz selbstverständlich. Es ist nämlich, wie aus der Figur ersichtlich (vergl. die beige setzten Pfeile):

$$S_{\nu\lambda}(\text{II}) = (\text{III})$$

$$S_{\nu\mu}(\text{III}) = (\text{I})$$

$$S_{\nu\nu}(\text{I}) = (\text{II}),$$

daher $S_{\nu\nu} S_{\nu\mu} S_{\nu\lambda}(\text{II}) = \text{II}$, was zu beweisen war!

Es ist nun die Frage, wie wir aus dem Hamilton'schen Satze Formeln für unser sphärisches Dreieck ableiten können. Hierzu

muß ich auf Entwicklungen zurückgehen, die ich im vorigen Sommersemester gegeben habe.

Wir legen damals einer Drehung der Kugel um den Punkt ξ, η, ζ durch den Winkel φ die Parameter bei:

$$a = \cos \varphi/2$$

$$b = \sin \varphi/2 \cdot \frac{\xi}{r} \quad (\text{wo } r \text{ der Kugelradius})$$

$$c = \sin \varphi/2 \cdot \frac{\eta}{r} \quad \text{„Euler'sche Parameter“}$$

$$d = \sin \varphi/2 \cdot \frac{\zeta}{r}$$

und lernten, dass zwei Drehungen S, S' mit den Parametern a, b, c, d und a', b', c', d' sich so zu einer neuen S'' zusammensetzen, dass deren Parameter die Gestalt haben:

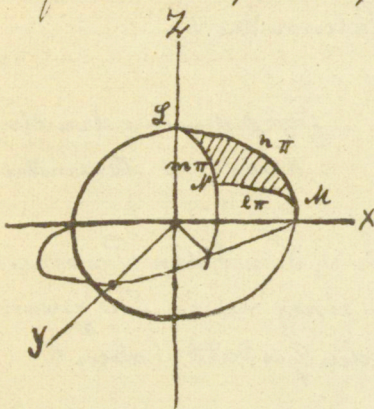
$$\left. \begin{aligned} A &= aa' - bb' - cc' - dd' \\ B &= (ab' + a'b) \pm (cd' - c'd) \\ C &= (ac' + a'c) \pm (db' - d'b) \\ D &= (ad' + a'd) \pm (bc' - b'c) \end{aligned} \right\} \quad (\text{Formeln von Rodrigues})$$

Es sind dies dieselben Formeln, welche Hamilton der Multiplication seiner Quaternionen zu Grunde legt und dementsprechend so schreibt:

$$(A + iB + jC + kD) = (a' + ib' + jc' + kd')(a + ib + jc + kd).$$

Um hiervon jetzt auf unseren Fall Anwendung zu machen, legen wir den Rotationen $S_{2\lambda}, S_{2\mu}, S_{2\nu}$ beziehungsweise die Parameter $a, b, c, d, a', b', c', d', a'', b'', c'', d''$ bei. Bemerken wir dann noch, dass die „Identität“ als Drehung der Kugel durch den Winkel 0 (um irgend einen Durchmesser) die Parameter 1, 0, 0, 0 hat, so liefert uns der Hamilton'sche Satz: $(a'' + ib'' + jc'' + kd'')(a' + ib' + jc' + kd')(a + ib + jc + kd) = 1$. In dieser einen Formel ist die ganze sphärische Trigonometrie enthalten.

Wir bekommen aus ihm die gewöhnlichen trigonometrischen Formeln, wenn wir unser Dreieck nicht beliebig gegen das Coordinatensystem der ξ, η, ζ gelegen denken, sondern in besonders einfacher Weise, etwa so, wie die nachstehende Figur aufweist:



wo sich als Coordinaten Dreiecks-
eckten ergeben:

für die Ecke L: $\xi, \eta, \zeta = 0, 0, 1$

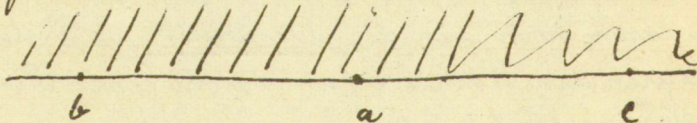
" " " M: $\xi, \eta, \zeta = \sin n\pi, 0, \cos n\pi$

" " " N: $\xi, \eta, \zeta = \sin m\pi \cos l\pi,$

$\sin m\pi \sin l\pi, \cos m\pi$. ($l\pi, m\pi, n\pi$
sind dabei wieder die Längen der Drei-
ecksseiten). —

Nach diesem geometrischen Exerzisse fahren wir mit dem Studium der η -Function fort. Wir wollen dabei bis auf Weiteres unsere Dreiecke wieder in der Ebene zeichnen, wo dann Symmetrie in Bezug auf einen Kreis soviel heisst als Inversion oder Transformation durch reciproke Radien an diesem Kreise.

Wir hatten das vorige Mal einen ersten Zweig der Function η für die Punkte der positiven Halbebene x definiert, indem wir verlangten, dieser Zweig solle die positive Halbebene x , auf deren Rand wir drei Punkte a, b, c markiren:



derart auf das Kreisbogendreieck der η -Ebene, welches wir irgend wie annehmen:



abbilden, dass L, M, N die Bilder von a, b, c sind. —
 Wir insistiren darauf, dass dies unsere Definition der η . Function ist. Schon vor Riemann hat man die conforme Abbildung vielfach herangezogen, um Eigenschaften complexer Functionen zu erläutern; das Spezifische an Riemann's eigenem Ansatz ist, dass wir umgekehrt die conforme Abbildung als das Gegebene betrachten und aus ihr die Eigenschaften der Functionen ableiten. —

In diesem Sinne schliessen wir für unseren Functionenzweig $\eta(x)$ vor allen Dingen:

In der Umgebung einer beliebigen Stelle x_0 , der positiven Halbebene lässt sich unser η in der Form entwickeln:

$$\eta - \eta_0 = (x - x_0) \cdot \mathcal{F}(x - x_0),$$

wo \mathcal{F} eine nach ganzen positiven Potenzen fortschreitende Reihe ist, deren Anfangsglied nicht verschwindet, —

oder für $x = a, b, c$ treten Entwicklungen folgender Form auf:

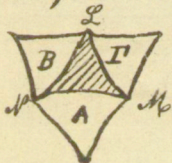
$$\begin{cases} \eta - L = (x - a)^\lambda \cdot \mathcal{F}(x - a), \\ \eta - M = (x - b)^\mu \cdot \mathcal{F}(x - b), \\ \eta - N = (x - c)^\nu \cdot \mathcal{F}(x - c). \end{cases}$$

(Sollte x_0 oder η_0 unendlich sein, so hat man in diesen Formeln in bekannter Weise unter $x - x_0$, beziehungsweise $\eta - \eta_0$ die reziproken Werthe $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{\eta}$ zu verstehen!) wie aber ist es mit der analytischen Fortsetzung unseres Functionenzweiges? Offenbar sind $x = a, b, c$ Verzweigungspunkte unserer Function. Welche Werthe nimmt η für die negative Halbebene x an, wenn man von der positiven Halbebene aus einmal über das Segment bc , dann über das Segment ca , dann über ab in die negative Halbebene hinüberwandert? Welche Werthe wieder für die positive Halbebene, wenn man von der negativen

Halbebene aus auf irgend einem Wege dorthin zurückkehrt?
 Diese Frage nach den Werten der Function η verwandeln
 wir natürlich in diejenige nach den Abbildungen, welche
 η abwechselnd von der positiven oder negativen Halbebe-
 ne X entwirft. Welches Abbild der negativen Halbebene erreicht
man, wenn man mit dem ursprünglichen Bilde der posi-
tiven Halbebene beginnend in die negative Halbebene sei
es über bc oder ca oder ab hinüberwandert? Welche neuen
Bilder der positiven Halbebene reihen sich hier wieder an?

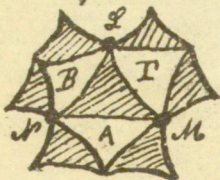
In dieser Form wird die Frage in elegantester Weise durch
 das von Herrn Schwarz aufgestellte Princip der Symmetrie
 beantwortet.

Wir umgeben unser anfängliches Dreieck (das wir nach
 wie vor schraffieren) mit seinen drei symmetrischen Dreie-
 cken, die wir A, B, I nennen:



Diese Dreiecke A, B, I sind dann gerade die
 drei Bilder der negativen Halbebene X , die
 wir erhalten, wenn wir beziehungsweise über
 bc, ca, ab hinüber in die negative Halbebe-

ne hineinwandern. Denn diesen Strecken bc, ca, ab der
 X -Axe entsprechen gerade die Seiten M, N, L, M , längs
 deren sich unsere neuen Dreiecke an das Ausgangsdreieck
 anlagern. Und nun gehen wir weiter, indem wir die Drei-
 ecke A, B, I ihrerseits wieder mit symmetrischen Dreiecken
 umlagern, die wir der Deutlichkeit halber schraffieren:

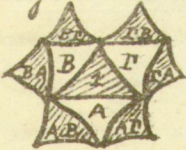


Die sind dann wieder Bilder der positi-
 ven Halbebene, und so weiter fort!.

An der Hand des Symmetriepincips
construieren wir in der η -Ebene eine

unbegrenzte Reihe von Dreiecken, die mir abwechselnd schraffieren, resp. nicht schraffieren. — Jedes schraffierte Dreieck ist ein Bild der positiven Halbebene X , jedes andere Dreieck ein Bild der negativen Halbebene. — Die Function $\eta(x)$, d. h. der Inbegriff aller der Zweige $\eta(x)$, die sich aus dem anfänglichsten Zweige $\eta(x)$ durch analytische Fortsetzung ergeben, wird solchergestalt eine ausserordentlich vieldeutige Function von x , sogar im allgemeinen Falle, wenn λ, μ, ν nicht ganz besondere Werthe haben, eine unendlich vieldeutige.

Aber studiren wir das Dreiecksaggregat der η -Ebene zunächst wieder unter geometrischen Gesichtspunkten! Indem wir das Ausgangsdreieck mit Δ bezeichnen, sollen jetzt A, B, I die drei Spiegelungen bezeichnen, durch welche die Seitendreiecke (die wir eben deshalb A, B, I nennen) aus Δ hervorgehen, — wie wir denn überhaupt jedes Dreieck unserer Figur nach der Operation benennen, durch welches dasselbe aus Δ hervorgeht. So erhalten beispielsweise die Dreiecke der auf der vorigen Seite gezeichneten Figur folgende Benennungen:



Ersichtlich haben wir:

Ein jedes schraffierte Dreieck bekommt eine Benennung, welche eine gerade Anzahl von Symbolen A, B, I enthält,

ein jedes nicht schraffierte Dreieck eine Benennung, welche eine ungerade Zahl von Symbolen enthält.

Aber A, B, I sind Spiegelungen, das heisst indirecte Kreisverwandtschaften. Daher:

Alle schraffirten Dreiecke sind mit dem Ausgangsdreieck direct, alle nicht schraffirten Dreiecke indirect kreisverwandt.

Wir können diese Sache auch unter dem Gesichtspunkte der Gruppentheorie sehen. Insofern A, B, I Spiegelungen sind, haben wir für sie die Relationen: $A^2=1, B^2=1, I^2=1$. Frgend welche Operation A^α lässt sich also, je nachdem α gerade oder ungerade ist, immer auf 1 oder auf A selbst reduciren. Man erhält also die allgemeinste Operation, die sich aus den A, B, I durch Combination der Wiederholung zusammensetzt, indem man lauter einfache Factoren A, B, I in irgendwelcher Reihenfolge hinter einander schreibt: $ATBTAB\dots$. Aber für jede solche Reihenfolge finden wir ein und nur ein Dreieck in unserer Figur. Daher:

Unsere Figur gibt uns in ihren verschiedenen Dreiecken ein vollständiges Bild der Gruppe, die aus den drei Operationen A, B, I erzeugt wird.

Sie sehen, wie hier die Gruppentheorie in die Functionentheorie eingreift. Unsere A, B, I sind endliche Operationen; sie erzeugen eine discontinuirliche Gruppe. Das bezeichnet den Unterschied gegen die Untersuchungen von Lie, der continuirliche Gruppen hat, welche aus infinitesimalen Operationen erzeugt werden. Lie gebraucht diese continuirlichen Gruppen, um die Functionselemente von Functionen mehrerer Variabler zu classificiren; wir gebrauchten die discontinuirlichen Gruppen, um die analytischen Fortsetzungen der Functionen zu untersuchen. Dabei haben wir schon bei Functionen nur einer Variablen so viel zu thun, dass wir für's Erste gar nicht zu Functionen mehrerer Variablen kommen.

Wir haben auf pag. 20-21 zumal die geometrischen Eigenschaften So. 1. Nov. betrachtet, welche die aus unserem Ausgangsdrei-

ech entspringende Figur darbietet. Welche functionentheoretischen Schlüsse sollen wir jetzt daraus ableiten? Wir erinnern in dieser Hinsicht zuerst daran, dass directe Kreisverwandtschaft zweier Figuren durch eine gewöhnliche lineare Substitution vermittelt wird:

$$\eta' = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}$$

Dagegen ist, wie man leicht nachweist, indirecte Kreisverwandtschaft jeweils durch eine Formel folgender Art gegeben:

$$\eta' = \frac{\alpha\bar{\eta} + \beta}{\gamma\bar{\eta} + \delta}, \text{ oder, was dasselbe bedeutet: } \bar{\eta}' = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta},$$

unter $\bar{\eta}$, $\bar{\eta}'$ denjenigen Werth verstanden, der zu η , bez. η' conjugirt imaginär ist.

Mit Rücksicht hierauf können wir sofort den Satz aussprechen:

Die vieldeutige Function $\eta(x)$, welche aus unserem anfänglichen Functionszweige $\eta_0(x)$ durch analytische Fortsetzung entsteht, hat die Eigenschaft, dass alle die verschiedenen Zweige $\eta_n(x)$, welche der positiven Halbebene x zugehören, mit $\eta_0(x)$ durch gewöhnliche lineare Substitutionen verbunden sind:

$$(1) \quad \eta_n(x) = \frac{\alpha_n \eta_0 + \beta_n}{\gamma_n \eta_0 + \delta_n}$$

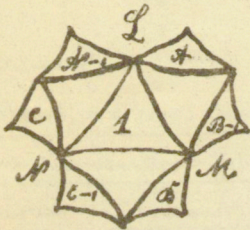
während die ~~die~~ verschiedenen Werthe $\eta_n(\bar{x})$, welche der negativen Halbebene zugehören, durch Formeln folgender Art geliefert werden:

$$(2) \quad \bar{\eta}_n(\bar{x}) = \frac{\alpha_n \eta_0 + \beta_n}{\gamma_n \eta_0 + \delta_n}$$

Die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ dieser Formeln ergeben sich dabei aus der Figur. Insbesondere müssen sich alle die Substitutionen (1), (2) durch Combination aus denjenigen 3 Substitutionen (2) ergeben, welche die Spiegelungen A, B, I vorstellen. Die Substitutionen (1), (2) bilden hiernach eine Gruppe. Ebenso bilden die Substitutionen (1) (auf deren Betrachtung man sich

gewöhnlich beschränkt) für sich genommen, eine Gruppe.

Wir wollen jetzt in der That auch nur von den Substitutionen (1), bez. von den directen Kreisverwandtschaften reden, die ihnen entsprechen. Ich bezeichne die drei einfachsten dieser Kreisverwandtschaften, nämlich diejenigen, welche sich nichteuclidisch als Drehungen der Kugel um die Ecken des Ausgangsdreiecks durch die Winkel $2\lambda\pi$, $2\mu\pi$, $2\nu\pi$ darstellen, mit A , B , C . Unsere frühere Figur wird sich dann etwa so darstellen:



(wo jetzt nur diejenigen Dreiecke, die früher schraffirt waren, eine Bezeichnung erhalten haben). Evident sind A , B , C die erzeugenden Operationen der hier in Betracht kommenden Gruppe. Andererseits belehrt uns der Hamilton'sche Satz,

dass zwischen diesen erzeugenden Operationen die Relation $CBA = 1$ bestehen muss. Es ergibt sich diese Beziehung übrigens sofort, wenn wir auf die Erzeugung der A , B , C aus den Spiegelungen A , B , I zurückgehen. Indem wir die gerade gegebene Figur mit derjenigen der Seite 20 vergleichen, haben wir: $A = IB$, $B = AI$, $C = BA$.

Daher $CBA = BAAITB$, was wegen $A^2 = 1$, $I^2 = 1$ auf B^2 , d. h. auf 1 zurückkommt. —

Wenn wir jetzt in der gerade gegebenen Figur von irgend einem Punkte des Dreiecks 1 zu dem äquivalenten Punkte irgend eines der anderen Dreiecke A , B , ... hinwandern, so muss dem jedesmal ein Weg in der x -Ebene entsprechen, der, von irgend einem Punkte der positiven Halbebene x beginnend,

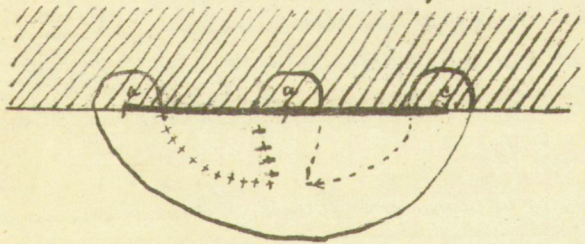
irgendwie um die Verzweigungsstellen a, b, c herumlaufend, schliesslich in seinem Ausgangspuncte endigt. Umgekehrt wird sich jeder solche Weg der x -Ebene, d. h. überhaupt jeder geschlossener Weg der x -Ebene, in der η -Ebene auf einen Weg zwischen zwei äquivalenten Punkten übertragen. Es ist für alles Weitere fundamental, dass wir uns gewöhnen, diese Übertragung hinwärts oder rückwärts leicht auszuführen. In dieser Hinsicht haben wir z. B.

Der positiven Umlenkung von a (oder b , resp. c) entspricht in der η -Ebene die Substitution A (oder B , resp. C).

Und hieraus:

Der Relation $CBA = 1$ entspricht der wohlbekannte Funktionentheoretische Satz, dass successive Umlenkung der Punkte a, b, c der x -Ebene (je im positiven Sinne) zur Anfangswertstelle von η zurückführt.

In der That, wenn ich zuerst um a , dann um b , endlich um c in positivem Sinne herumlaufe:



so geht dabei der Zweig η_0 , mit dem ich beginne, successive in $A(\eta_0)$, $BA(\eta_0)$, $CBA(\eta_0)$ über.

Wollen wir auch das bisher von der η -Function Gesagte mit den ersten Entwicklungen Riemann's betreffend die P_0 -function

vergleichen. Riemann's P-funktion bezeichnet nach den Erläuterungen des vorigen Semesters im Grunde eine ganze binäre Schaar von Funktionszweigen $\alpha P_1 + \beta P_2$; wir werden seine Entwicklungen auf unsere η -Funktion übertragen, wenn wir jetzt unter η den Quotienten irgend zweier Zweige der P-funktion verstehen wollen. Beispielsweise: P_1, P_2 erleiden bei Riemann eine binäre lineare Substitution, sobald x um a oder b oder c läuft; unser η erleidet dabei eine gebrochene lineare Substitution, etc. etc.

Ich möchte nun insbesondere Nr. 3 der Riemann'schen Arbeit heranziehen. Indem ich gleich die Übertragung auf η mache, kann ich über den Inhalt dieser Nr. 3 folgendermassen referiren:

1) Under η schlechweg, oder der ganzen Schaar zusammengehöriger η -Funktionen soll die Gesamtheit aller Funktionszweige verstanden werden, die sich aus einem beliebigen Ausgangszweige η_0 in der Gestalt $\frac{\alpha \eta_0 + \beta}{\delta \eta_0 + \epsilon}$ ergibt; wobei man bemerken mag dass die Zweige $\frac{\alpha_n \eta_0 + \beta_n}{\delta_n \eta_0 + \epsilon_n}$, welche wir aus η_0 durch analytische Fortsetzung erhalten haben, selbstverständlich alle in dieser Schaar enthalten sind, aber dies elbe keineswegs erschöpfen.

2) Läuft x um a, b, c in positivem Sinne herum, so möge η_0 beziehungsweise in $A(\eta_0), B(\eta_0), C(\eta_0)$ übergehen.

3) Von diesen Substitutionen A, B, C weiss man vor allen Dingen folgendes: Hatte man statt η_0 für a, b, c je einen besonderen zweckmässig gewählten Zweig η_a, η_b, η_c eingeführt, so hätten A, B, C die "kanonischen Formen" angenommen:

$$\eta'_a = e^{2i\pi\lambda} \cdot \eta_a, \quad \eta'_b = e^{2i\pi\mu} \cdot \eta_b, \quad \eta'_c = e^{2i\pi\nu} \cdot \eta_c.$$

4) Ferner weiss man, dass $CBA = 1$ sein muss.

5) Und hieraus (nämlich aus 3 und 4) entwickelt nun Poincaré, dass die A , B , C durch Angabe der λ , μ , ν bereits im Wesentlichen bestimmt sind, das heisst so weit bestimmt sind, als es bei der Willkür, die bei der Auswahl des Ausgangszweiges η_0 bleibt, überhaupt möglich ist.

Wenn wir diese Entwicklung 1) . . . 5) nun genau überlegen und mit unseren eigenen früheren Betrachtungen (der vorigen Stunde) vergleichen, so bemerken wir, dass dieselben ganz der Art und Weise entsprechen, vermöge deren wir nach Hamilton die Formeln der sphärischen Trigonometrie abgeleitet haben. In der That können wir unsere früheren Betrachtungen unter folgende 5 Punkte rubriciren:

1) Wir haben zunächst die η -Kugel. Statt dieselbe auf ein bestimmtes Coordinatensystem zu beziehen können wir sie auf jedes andere Coordinatensystem beziehen, welches aus dem ersten durch eine Nicht-Euklidische Bewegung hervorgeht. Oder, präciser ausgedrückt: Statt eine erste Art zu betrachten, die Werthe einer complexen Grösse η_0 über die Kugel auszubreiten, können wir ebensowohl diejenige Ausbreitung complexer Werthe in Betracht ziehen, welche durch irgendwelche lineare Function $\frac{\alpha\eta_0 + \beta}{\gamma\eta_0 + \delta}$ bezeichnet wird.

2) Unsere Kugel wird nun drei Nicht-Euklidischen Bewegungen unterworfen, die A , B , C heissen sollen.

3) Die erste dieser Bewegungen soll eine Drehung der Kugel um eine Axe durch einen Winkel $2\mu\pi$, die dritte eine Drehung um eine Axe durch einen Winkel $2\nu\pi$.

4) Ausserdem soll $CB A = 1$ sein.

5) Dann schliessen wir, dass die 3 Axen ein Dreieck

Die α sind,
zweite eine
gleichem
sch einem
Kugel

bilden, welches durch die Winkel $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$ im Wesentlichen bestimmt ist, nämlich bestimmt ist, was seine Nicht-Euklidischen Dimensionen angeht, aber unbestimmt bleibt, was seine Lage gegen das zufälligerweise gewählte Coordinatensystem betrifft.

Wir haben mit dieser Aufzählung unsere früheren Entwicklungen allerdings in einem Punkte modificirt. Wir hatten früher von vorneherein angenommen, dass die drei Substitutionsocen in einem Punkte zusammenlaufen sollen, während wir dies jetzt aus $C B A = 1$ ableiten. Sehen wir hiervon ab, so handelt es sich ad 5) gerade darum, die Seitenwinkel $l\pi, m\pi, n\pi$ unseres Dreiecks aus den Eckenwinkeln $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$ abzuleiten, d. h. um die Ableitung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie, wie sie von Hamilton gegeben wurde. In diesem Sinne können wir also sagen: Hamilton's Ableitung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie und Riemann's Entwicklungen in Nr. 3 seiner Abhandlung entsprechen sich genau.

Wir werden hierauf später wiederholt zurückkommen; einstweilen geben wir unserer Entwicklung eine auf analytische Formeln ausgehende Föhrung. Wir handeln nämlich von der Differentialgleichung dritter Ordnung, der unsere η -Function genügt.

Von der Differentialgleichung dritter Ordnung der η -Function.

Die sämmtlichen Zweige $\eta \left(\begin{smallmatrix} a & b & c \\ \lambda & \mu & \nu \end{smallmatrix} x \right)$, welche es gibt, hängen, wie wir wissen, mit einem beliebig gewählten Anfangszweige η_0 durch eine lineare Substitution $\eta = \frac{\alpha \eta_0 + \beta}{\gamma \eta_0 + \delta}$ zusammen. Nun bilde man sich die Differentialquotienten η', η'', η''' . Es wird jedenfalls gelingen, zwischen ihnen und η die drei Verhältnissgrößen $\alpha: \beta: \gamma: \delta$ zu eliminiren. Wir

erhalten also einen Differentialausdruck dritter Ordnung, welcher für sämtliche Zweige η denselben Werth hat und also, ausser von x , nur noch von $a, b, c, \lambda, \mu, \nu$ abhängt. Indem wir ihn als Function dieser 6 Grössen berechnen, haben wir eine Differentialgleichung dritter Ordnung, der η genügt. Die Coefficienten dieser Differentialgleichung müssen von den vorkommenden Grössen eindeutig abhängen.

Doch um bestimmter zu reden: Diejenige Verbindung der $\eta, \eta', \eta'', \eta'''$, welche bei linearer Substitution des η ungeschädigt bleibt, ist, wie man leicht nachrechnet, der Schwarz'sche Differentialparameter:

$$[\eta]_x = \frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2} \left(\frac{\eta''}{\eta'} \right)^2.$$

Wir machen zunächst einige Bemerkungen über die Eigenschaften dieses merkwürdigen Ausdrucks. Derselbe zeigt nicht nur gegenüber linearen Substitutionen von η , sondern auch gegenüber linearen Substitutionen von x ein sehr einfaches Verhalten. Schreibt man nämlich überhaupt $x = f(t)$, so kommt:

$$[\eta]_x = [\eta]_t - (t'_x)^2 + [t]_x,$$

und wählt man hier insbesondere

$$t = \frac{ax+b}{cx+d},$$

so wird

$$[\eta]_x = [\eta]_t \cdot \frac{(ad-bc)^2}{(cx+d)^2}.$$

Wir sagen: $[\eta]_x$ ist in doppeltem Sinne Differentialinvariante, nämlich sowohl gegenüber linearer Substitution von η , wie gegenüber linearer Substitution von x .

Was nämlich ist die allgemeine Definition einer Differen-

Differentialinvariant? Wir denken uns irgendwelche abhängige Veränderliche η_1, η_2, \dots ; wir denken uns daneben irgendwelche unabhängige Veränderliche x, x_2, \dots ; wir denken uns endlich irgendwelche Gruppe von Umänderungen gegeben, die die η oder die x oder auch beide zusammen betrifft und nicht gerade notwendig linear zu sein braucht (Transformationsgruppe); eine Differentialinvariante wird dann jeder Ausdruck der $\eta, x, \eta', \eta'' \dots$ sein, welcher bei diesen Umänderungen ungedändert bleibt oder sich doch nur um einen Factor ändert. ~ Über die allgemeine hiermit bezeichnete Theorie haben im Laufe der letzten 15 Jahre insbesondere gearbeitet Lie, Hulphsen, Sylvester, Forsyth. Es ist so eine grosse Theorie entstanden, über die gelegentlich zu berichten sein wird. —

Wir haben das vorige Mal die Invarianten natur des Ausdrucks $\frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2} \left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 = [\eta]_x$ festgestellt. Welches aber ist seine individuelle Bedeutung? Um eine solche zu finden, betrachten wir Doppelverhältnisse von 4 Punkten der η -Ebene und ebenso Doppelverhältnisse von 4 Punkten der x -Ebene, d. h. geometrische Grössen, welche sich bei linearer Substitution des η , bez. des x nicht ändern. Folgendermassen. Es seien p, q, r, s vier consecutive Punkte der X -Axe.

$$\frac{p \quad q \quad r \quad s}{\quad \quad \quad \quad \quad}$$

mit den Coordinaten

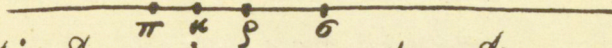
$$x-h, x, x+h, x+n h$$

(wo n , damit die Reihenfolge der Punkte so ist, wie in der Figur, > 1 aber $< +\infty$ zu nehmen sein wird). Aus ihnen bilden wir uns irgend ein Doppelverhältnis, z. B.

24.

$$D' = \frac{(pr)(qs)}{(ps)(qr)} = \frac{2n}{n+1}.$$

Für die bei uns in Betracht kommenden Werte von n haben wir offenbar $1 < D < 2$. Nun seien $\pi, \kappa, \rho, \sigma$ die entsprechenden Punkte der η -Achse:



deren Coordinaten wir uns aus den Argumenten der p, q, r, s berechnen, indem wir höhere Potenzen von h wegwurfen. Wir haben also nach dem Taylorschen Lehrsatz: für den Punkt $\kappa: \eta(x) = \eta$,

für den Punkt $\pi: \eta(x-h) = \eta - \frac{h}{1} \eta' + \frac{h^2}{2} \eta'' - \frac{h^3}{6} \eta'''$, für $\rho: \eta(x+h) = \eta + \frac{h}{1} \eta' + \frac{h^2}{2} \eta'' + \frac{h^3}{6} \eta'''$,

für den Punkt $\sigma: \eta(x+nh) = \eta + \frac{nh}{1} \eta' + \frac{n^2 h^2}{2} \eta'' + \frac{n^3 h^3}{6} \eta'''$.

Hieraus berechnet sich nun für dasjenige Doppelverhältnis Δ der vier Punkte $\pi, \kappa, \rho, \sigma$, welches dem gerade betrachteten Doppelverhältnisse D entspricht, nämlich $\Delta = \frac{(\pi\rho)(\kappa\sigma)}{(\pi\sigma)(\kappa\rho)}$

~ der folgende Werth: $\Delta = \frac{2n}{n+1} \left\{ 1 + \frac{n-1}{6} \cdot h^2 \cdot [\eta]''_x \right\}$, so dass also, wenn wir höhere Potenzen von h vernachlässigen $\frac{\Delta}{D} = 1 + \frac{n-1}{6} \cdot h^2 \cdot [\eta]''_x$ wird. Wir sagen:

Der Differentialparameter $[\eta]''_x$ misst die Abweichung, welche das Doppelverhältnis der 4 consecutiven Punkte $\pi, \kappa, \rho, \sigma$ gegenüber dem Doppelverhältnisse der 4 consecutiven Punkte p, q, r, s darbietet.

Insbesondere sehen wir, dass im Falle unserer Figuren, weil $n > 1$ genommen wurde, der Satz gilt:

Δ ist kleiner oder grösser als D , je nach dem $[\eta]''_x < 0$ oder $[\eta]''_x > 0$. Wir können dementsprechend auch sagen: Ist $[\eta]''_x < 0$ so erscheint die Aufeinanderfolge $\pi, \kappa, \rho, \sigma$ der Aufeinanderfolge p, q, r, s gegenüber zusammen-

gedrängt; ist $[\eta]_x > 0$, so auseinandergezogen.

Wir bringen jetzt $[\eta]_x$ bei unserer speciellen η -Function in Anwendung. Alle Zweige dieser Function ergaben sich aus einem beliebigen Anfangszweige η_0 durch bestimmte lineare Substitutionen, also etwa in der Form $\frac{\alpha x \eta_0 + \beta}{\delta x \eta_0 + \epsilon}$. Da aber $[\eta]_x$ nicht wechselt, wenn man η linear substituirt, so wird für alle diese Zweige $[\eta]_x$ denselben Werth haben, es wird also eine eindeutige Function von x sein müssen. Aber mehr: Unser Anfangszweig η_0 ist bestimmt gewesen durch Angabe der 3 Stellen a, b, c , der x -Ebene, welche den Dreiecksecken entsprechen sollen, durch Angabe der 3 Grössen λ, μ, ν , welche die Grösse der Dreieckswinkel festlegen, endlich durch die besondere Lage, die wir dem Dreiecke mit den Winkeln $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$ in der η -Ebene ertheilt haben. Hätten wir diese Lage anders gewählt, so wäre an Stelle von η_0 irgend ein $\frac{\alpha \eta_0 + \beta}{\delta \eta_0 + \epsilon}$ getreten (wo die $\alpha, \beta, \delta, \epsilon$ ganz beliebig sind). Aber auf unser $[\eta]_x$ ist das wieder ohne Einfluss. Daher schliessen wir: Der Werth von $[\eta]_x$ hängt von der besonderen Lage des Ausgangsdreiecks durchaus nicht ab, er hängt, ausser von x , nur noch von $a, b, c, \lambda, \mu, \nu$, und zwar auch von diesen Grössen eindeutig ab. Schreiben wir hiernach $[\eta]_x = \text{Eind. Funct.}(x; a, b, c, \lambda, \mu, \nu)$, so haben wir damit die allgemeine Form jener Differentialgleichung dritter Ordnung, welche wir für die η -Function aufstellen wollten.

Es wird nun darauf ankommen, die rechter Hand auftretende eindeutige Function festzulegen. Wir werden das in der Weise thun, dass wir vor allen Dingen ihr Verhalten in

der Umgebung aller möglichen Stellen x_0 der x Ebene feststellen. Ich werde, um Weitläufigkeiten zu vermeiden, a, b, c endlich voraussetzen. Dann haben wir dreierlei Stellen x_0 zu unterscheiden:

- 1) x_0 sei endlich, aber von a, b, c verschieden,
- 2) x_0 sei gleich a oder b oder c ,
- 3) x_0 sei unendlich.

Da $[y]_x$ ungeändert bleibt, wenn wir statt η irgend ein $\frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma + \delta}$ setzen, so wird es keine wesentliche Beschränkung sein, wenn wir bei den folgenden Rechnungen annehmen, das x_0 zugehörige η_0 sei endlich. Wir haben dann für η in den drei Fällen in der Umgebung des jedesmaligen x_0 Potenzreihen der folgenden Art:

$$\begin{aligned} 1) \eta - \eta_0 &= \alpha(x-x_0) + \beta(x-x_0)^2 + \gamma(x-x_0)^3 + \dots \\ 2) \eta - \eta_0 &= (x-x_0)^\lambda \cdot \{ \alpha + \beta(x-x_0) + \gamma(x-x_0)^2 + \dots \}, \\ 3) \eta - \eta_0 &= \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x^3} + \dots, \end{aligned}$$

wo α , wohlverstanden, allemal $\neq 0$ ist.

Wir berechnen nun zuerst im Falle 1):

$$\eta' = \alpha + 2\beta(x-x_0) + 3\gamma(x-x_0)^2 + \dots$$

$$\eta'' = 2\beta + 6\gamma(x-x_0) + \dots$$

$$\frac{\eta''}{\eta'} = \frac{2\beta}{\alpha} + \frac{6\gamma - \beta^2}{\alpha^2}(x-x_0) + \dots$$

$d\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right): dx = \frac{\eta'''}{\eta'} - \left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 = \frac{6\alpha\gamma - 4\beta^2}{\alpha^2} + \text{Glieder mit ansteigenden Potenzen.} - \frac{1}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 = \dots = -\frac{2\beta^2}{\alpha^2} + \dots;$
daher: $[\eta]_x = \frac{6(\alpha\gamma - \beta^2)}{\alpha^2} + \text{Glieder mit ansteigenden ganzen Potenzen von } (x-x_0).$ Unser Differentialausdruck verhält sich also in der Umgebung von x_0 wie eine eindeutige analytische Function, die bei $x=x_0$ endlich bleibt.

So im Falle 1). Ganz anders im Falle 2). Wir berechnen:

$$[\eta]_x = \frac{1-\lambda^2}{(x-a)^2} + \frac{(\lambda^2-1)\beta}{\lambda\alpha} \cdot \frac{\beta}{x-a} + \text{Glieder mit ansteigenden ganzen Potenzen von } (x-a).$$

$[\eta]$ verhält sich also in der Umgebung von $x=a$ wie eine eindeutige analytische Function, die bei $x=a$ doppelt unendlich wird und zwar in erster Annäherung unendlich wird wie $\frac{1-\lambda^2}{(x-a)^2}$. {Uebrigens stimmt dies Resultat mit dem ad 1) angegebenen insofern überein als 1) aus 2) hervorgeht, wenn man $\lambda=1$ nimmt, und in der That die beiden Glieder unserer neuen Reihe, welche deren Unendlichwerden veranlassen, für $\lambda=1$ in Wegfall kommen.}
Im Falle (3) endlich berechnet sich:

$$[\eta]_x = \frac{6(\alpha\beta - \beta^2)}{\alpha^2 x^3} + \text{Glieder mit fallenden ganzen Potenzen von } x.$$

In der Umgebung der Stelle $x=\infty$ verhält sich $[\eta]_x$ wie eine eindeutige analytische Function, die bei $x=\infty$ vierfach verschwindet.

Und nun erinnere man sich des fundamentalen Satzes der Functionentheorie, dass eine eindeutige Function von x , welche überall in der Ebene x den Charakter einer analytischen Function hat und nur eine endliche Zahl von Unendlichkeitsstellen aufweist, die alle von endlicher Ordnung sind, eine rationale Function ist. Wir schliessen, dass die rechte Seite unserer Differentialgleichung dritter Ordnung eine rationale Function von x ist. Und nun ist es leicht, eine rationale Function von x zu bilden, die bei $x=a, b, c$ in der That so unendlich wird, wie wir es von $[\eta]_x$ wissen und überdies bei $x=\infty$ einfach verschwindet. Diese rationale Function, die durch die genannten Angaben vollständig bestimmt ist, lautet folgendermassen:

$$R(x) = \frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)} \cdot \left\{ \frac{(1-\lambda^2)(a-b)(a-c)}{x-a} + \frac{(1-\mu^2)(b-c)(b-a)}{x-b} + \frac{(1-\nu^2)(c-a)(c-b)}{x-c} \right\}^{x'}$$

^{x'} Sie hier gebrauchte Schreibweise findet sich zuerst *Ann. XI, p. 130, 1877.*

Deshalb wird endlich unsere Differentialgleichung dritter Ordnung lauten: $\mathcal{D}[\eta]_x = R(x)$;

wobei es eine Bestätigung unseres früheren Ansatzes ist, dass $R(x)$ von den $a, b, c, \lambda, \mu, \nu$ in der That eindeutig abhängt.

Hiermit nun haben wir einen ersten Anschluss an die Entwicklungen des Sommerers erreicht. In der That sind wir jetzt, indem wir $\eta(x)$ durch die conforme Abbildung definieren, gerade bis zu der Differentialgleichung 3ter Ordnung vorgedrungen, welche damals unser Ausgangspunkt war, von dem aus wir die conforme Abbildung entwickelten.

Hierzu nun noch drei oder vier Bemerkungen:

Erste Bemerkung: Liegen a, b, c , wie es ja für viele Betrachtungen bequem ist, in $0, \infty, 1$, so kann man den ganzen Ansatz p. 34-36 wiederholen und findet:

$$\text{II.}) [\eta]_x = \frac{1-\lambda^2}{x^2} + \frac{1-\nu^2}{(x-1)^2} + \frac{\lambda^2 - \mu^2 + \nu^2 - 1}{x(x-1)}, \quad \left\{ \text{so dass also } [\eta]_x \right.$$

bei $x = \infty$ jetzt verschwindet wie $\frac{1-\lambda^2}{x} + \frac{1-\nu^2}{x} + \frac{\lambda^2 - \mu^2 + \nu^2 - 1}{x}$

d. h. wie $\frac{1-\mu^2}{x} : x^2$. - Man kann dieses Resultat nat-

ürlich auch aus der Formel der vorigen Seite ableiten, am besten, wenn man in sie homogene Variable ein-

führt, d. h. für x, a, b, c beziehungsweise $\frac{x_1}{x_2}, \frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}, \frac{c_1}{c_2}$

schreibt. Under $(x a), (x b), \dots$ die Determinanten $(x_1, a_2 - x_2 a_1), (x_1, b_2 - x_2 b_1), \dots$

verstanden, erhält man dann nämlich die allgemeine Gleichung:

$$\text{III.}) \frac{1}{x^2} [\eta]_x = \frac{1}{(x a)(x b)(x c)} \left\{ \frac{1-\lambda^2}{x} \frac{(a b)(a c)}{(x a)} + \frac{1-\mu^2}{x} \frac{(b c)(b a)}{(x b)} + \frac{1-\nu^2}{x} \frac{(c a)(c b)}{(x c)} \right\}$$

und aus dieser unsere specielle, sobald man

$$a_1 = 0, a_2 = 1;$$

$$b_1 = 1, b_2 = 0;$$

$$c_1 = 1, c_2 = 1$$

setzt (und natürlich für $\frac{x_1}{x_2}$ wieder x schreibt).

Zweite Bemerkung: Wir haben aber die homogen gemachte Gleichung III auch um ihrer selbst willen aufgestellt. Dieselbe enthält nämlich rechter Hand eine Covariante der drei Linearformen $(x a), (x b), (x c)$. Wir schliessen, dass dementsprechend der Ausdruck linker Hand noch einfachere Eigenschaften besitzen muss, als $[\eta]_x$ selbst, dass es also im Grunde wichtiger sein wird, nicht $[\eta]_x$, sondern $\frac{1}{x^2} [\eta]_x$ als den eigentlichen Differentialparameter zu betrachten.

Sei in der That $t = \begin{cases} a x_1 + b x_2 \\ c x_1 + d x_2 \end{cases}$ also $t = \frac{a x + b}{c x + d}$.

So fanden wir auf p. 30 $[\eta]_x = [\eta]_t \cdot \frac{(ad-bc)^2}{(cx+d)^4}$.

wir können dies jetzt so schreiben:

$$[\eta]_x - [\eta]_t \cdot \frac{(ad-bc)^2 \cdot x_2^4}{(cx_1 + dx_2)^4} = [\eta]_t \cdot \frac{(ad-bc)^2 \cdot x_2^4}{t_2^4}$$

Somit ist:

$$\frac{1}{x_2^4} [\eta]_x = \frac{1}{t_2^4} \cdot [\eta]_t \cdot (ad-bc)^2.$$

Unser neuer Differentialparameter hat die Eigenschaft, bei linearer Substitution des x sich nur um einen constanten Factor, nämlich das Quadrat der Substitutionsdeterminante zu ändern. — Eben darum kann er einer Covariante der drei Linearformen $(x a), (x b), (x c)$ gleich sein.

Dritte Bemerkung. Wir wollen einen Specialfall unserer η -Function betrachten, demjenigen, in welchem $\lambda = \mu = \nu$. Dieser Fall ist um so interessanter, als er für $\lambda = \mu = \nu = 0$ den Fall der elliptischen Modulfunctionen, $w = \eta(0, 0, 0, x)$ einschliesst. Diffe-

rentialgleichung III wird dann:

$$\frac{1}{x_1^2} [\eta] = \frac{1-\lambda^2}{\lambda} \cdot \left\{ \frac{1}{(xa)(xb)(xc)} \left\{ \frac{(ab)(ac)}{(xa)} + \frac{(bc)(ba)}{(xb)} + \frac{(ca)(cb)}{(xc)} \right\} \right\}$$

$$! \quad \frac{1-\lambda^2}{2} \cdot \frac{\varphi}{f^2},$$

unter f die cubische Form $(xa)(xb)(xc)$ verstanden. Hier ist φ eine quadratische Form, welche von den Linearfactoren des f invariant und symmetrisch abhängt. Wir schließen, dass φ eine rationale Covariante von f sein muss. Dann

aber kann es, nach bekannten Eigenschaften der cubischen binären Formen, von der Hesse'schen Form $H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}$ nur um einen constanten Factor verschieden sein. Um dies zu verificiren und den betr.

constanten Factor zu bestimmen, knüpfen wir an Gleich. II an. Indem wir in ihr $\frac{x_1}{x_2}$ für x schreiben und $\lambda = \mu = \nu$ nehmen, haben wir: $\frac{1}{x_1^2} [\eta]_x = \frac{1-\lambda^2}{\lambda} \frac{x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2}{(x_1 x_2 (x_1 - x_2))^2}$. Aber es wird für $f = x_1 x_2 (x_1 - x_2)$ die Hesse'sche Form $H = -4(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2)$. Daher wird in diesem speciellen Falle:

$$IV) \quad \frac{1}{x_1^2} [\eta]_x = \frac{\lambda^2 - 1}{8} \cdot \frac{H}{f^2}.$$

Aber der hier betrachtete Fall ist, sofern wir einmal an der Annahme $\lambda = \mu = \nu$ festhalten wollen, nur durch die Wahl des Coordinatensystems specialisirt (dadurch specialisirt, dass wir a, b, c nach $0, \infty, 1$ gelegt haben). Von einer Aenderung des Coordinatensystems aber werden, wie wir pag. 38 berechneten, die beiden Seiten von IV ganz gleichförmig betroffen. Daher gilt Gleichung IV für den hier betrachteten Falle $\lambda = \mu = \nu$ ganz allgemein!

Insbesondere erhalten wir für das α des elliptischen Modul-
function die elegante Gleichung $\frac{1}{x^2} [\omega]_x = -\frac{H_6}{8f^2}$
(Hier ist $\omega =$ dem Quotienten $\frac{h'}{h}$ der beiden Perioden des el-
liptischen Integrals erster Gattung; x ist $= h^2$, gleich dem Qua-
drat des gewöhnlichen Moduls).

L. 8 Nov. 91

Von der Spaltung des η in Zähler und Nenner (y_1 , resp. y_2).

Indem wir den Gedankengang der Sommervorlesung rück-
wärts verfolgen, greifen wir heute eine neue Fragestellung
auf; bei geschlossenen Werten des x erlitt unser η zugehö-
rige lineare Substitutionen der allgemeinsten Form, $\eta' =$
 $\frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}$; wird es möglich sein, η so in Zähler und Nenner
zu spalten: $\eta = \frac{y_1}{y_2}$, dass y_1, y_2 bei geschlossenen Umläu-
fen des x homogene ganze (binäre) lineare Substitutio-
nen erleiden, also Substitutionen der Form $\begin{cases} y_1' = \alpha y_1 + \beta y_2 \\ y_2' = \gamma y_1 + \delta y_2 \end{cases}$?
Offenbar können wir diese Frage auf zweierlei Weisen
zu beantworten suchen. Entweder nämlich:

- 1) wir denken uns y_1, y_2 selber als Functionen von x , oder:
- 2) wir denken uns y_1, y_2 als Formen von x_1, x_2 .

Die Fragestellung 2) kommt natürlich auf die 1) zurück,
wenn wir den Grad der Formen gleich Null nehmen. —
Im Uebrigen bemerken wir vorweg, dass hier nur die
Stelle gegeben ist, an der Riemann's P. function eingreift.
indem wir unternemen, die Fragestellung 1) in einfach-
ster Weise durchzuführen, werden wir genau zu Riemann's
P. function kommen.

Stellen wir gleich folgenden Satz an die Spitze: Wenn η in
 $\frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}$ übergeht, so substituieren sich (1) $y_1 = \frac{\alpha}{\gamma}$, $y_2 = \frac{\beta}{\delta}$

binär. — In der That ist zu der Differentialquotient von $\frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}$ gleich $(\alpha \delta - \beta \gamma) \cdot \frac{1}{(\gamma y + \delta)^2}$; es gehen also y_1, y_2 in $\frac{\alpha y_1 + \beta y_2}{\gamma y_1 + \delta y_2}$ über. Die Determinante dieser binären Substitution ist besonders einfach, nämlich gleich 1.

Aber die so gewonnenen y_1, y_2 werden nicht die einzigen Functionspaare sein, die unserer Fragestellung 1) genügen.

Dasselbe wird vielmehr allgemein von folgenden Functionen gelten 2)
$$\begin{cases} Y_1 = \frac{1}{\sqrt{\eta}} (x-a)^{\beta} (x-b)^{\gamma} (x-c)^{\tau} F(x), \\ Y_2 = \frac{1}{\sqrt{\eta}} (x-a)^{\beta} (x-b)^{\gamma} (x-c)^{\tau} F(x), \end{cases}$$

oder, wie wir abkürzend schreiben wollen

$$(x') \quad Y_1 = \frac{1}{\sqrt{\eta}} \Phi(x), \quad Y_2 = \frac{1}{\sqrt{\eta}} \Phi(x);$$

β, γ, τ sollen dabei irgend welche Zahlen bedeuten, $F(x)$ eine eindeutige Function von x . In der That werden sich auch diese Y_1, Y_2 binär substituieren, sobald x um a oder b oder c einen Umlauf macht.

Überzeugen wir uns jetzt zunächst, dass die so gewonnenen y_1, y_2 beziehungsweise Y_1, Y_2 einer einfachen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen.

Wir machen die Rechnung zunächst für y_1, y_2 . Sei $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, so haben wir jedenfalls:

$$\begin{vmatrix} y'' & y_1' & y_2' \\ y_1'' & y_1' & y_1' \\ y_2'' & y_2' & y_2' \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{oder } y'' + y_1' \frac{y_2 y_1'' - y_2' y_1''}{y_1' y_2 - y_2' y_1} + y_2' \frac{y_1'' y_2' - y_2'' y_1'}{y_1' y_2 - y_2' y_1} = 0$$

Hier sind die Coefficienten von $y'; y$ jedenfalls eindeutige Functionen von x , denn sie ändern sich bei irgendwelchen Umläufen des x , wegen der binären Umsetzungen, welche y_1, y_2 dabei erleiden, überhaupt nicht. Es ist aber auch leicht, diese Coefficienten durch den uns gegebenen Werth von $[\eta]_x$ auszudrücken. Wir erhalten durch directe Rechnung:

$$y' = \sqrt{y} - \frac{1}{2} \frac{y y''}{\sqrt{y^3}}, \quad y'' = -\frac{1}{4} \frac{y y'''}{\sqrt{y^3}} + \frac{3}{4} \frac{y' y''^2}{\sqrt{y^3}}, \text{ sowie:}$$

$$y_1' = -\frac{1}{2} \frac{y''}{\sqrt{y^3}}, \quad y_2'' = -\frac{1}{2} \frac{y'''}{\sqrt{y^3}} + \frac{3}{4} \frac{y''^2}{\sqrt{y^3}}. \text{ Daher wird unsere}$$

Gleichung: $y'' \quad y' \quad y$

$$\begin{vmatrix} 0 & \sqrt{y} & 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{y'''}{\sqrt{y^3}} + \frac{3}{4} \frac{y''^2}{\sqrt{y^3}} & \frac{1}{2} \frac{y''}{\sqrt{y^3}} & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder einfach:}$$

$$y'' + \frac{[y]_x}{x} y = 0.$$

Heißt also die Differentialgleichung dritter Ordnung $[y]_x = P(x)$, so heißt die Differentialgleichung zweiter

Ordnung für y_1, y_2 :

(3) $y'' + \frac{P}{x} \cdot y = 0$. Von hier aus erhalten wir die Differentialgleichung für die $y_1, y_2(x)$, in dem wir für y einfach $Y: \Phi$ einführen. Solcherweise kommt: (4) $Y'' + p Y' + q Y = 0$, wo

$$p = -\frac{2\Phi'}{\Phi}, \quad q = \frac{P}{x} + x \frac{\Phi''}{\Phi^2} - \frac{\Phi'''}{\Phi}.$$

Wir können auch schrei-

ben $\Phi = e^{-\frac{1}{2} \int p dx}$
 $P = xq - \frac{p^2}{4} - \frac{d^2 p}{dx^2}$, und haben damit die Formeln wieder gewonnen, durch die wir ursprünglich, im vorigen Sommer, von (4) aus zur Differentialgleichung dritter Ordnung für η gekommen sind. Bedenken wir nur, dass alle diese Differentialgleichungen für uns, der in der heutigen Literatur herrschenden Darstellung entgegen, nur eine beiläufige Bedeutung haben: sie sind für uns nicht die Definition der von uns zu betrachtenden Funktionen, sondern Folgerungen, die sich aus dem Grundverhalten der Funktionen, dem Verhalten bei geschlossenen Umläufen des x , nebenbei ergeben. — Es ist dies die ursprüngliche Riemann'sche Auffassung. —

Welches unter all' den Funktionspaaren (1), (2) ist für uns nun das einfachste? Man möchte zuerst glauben, dies seien

$y_1 = \frac{y}{\sqrt{y_1}}$, $y_2 = \frac{1}{\sqrt{y_1}}$ selbst. Inzwischen überzeugt man sich leicht, dass diese y_1, y_2 nicht nur $x=a, b, c$ sondern auch $x=\infty$ als singulären Punkt haben. Man überzeugt sich davon sofort, indem man statt x den reciproken Werth $\frac{1}{x}$ als neue Veränderliche einführt. Noch übersichtlicher wird es, wenn wir statt x homogen x_1/x_2 schreiben, und gleichzeitig uns η irgendwie in zwei Formen n ten Grades von x_1, x_2 gespalten denken: $\eta = \frac{H_1(x_1, x_2)}{H_2(x_1, x_2)}$, wo n beliebig. Sei für einen Augenblick $H_1(x_1, x_2) = Z_1$, $H_2(x_1, x_2) = Z_2$.

$$\left. \begin{aligned} H_1(x_1, x_2) &= Z_1 \\ H_2(x_1, x_2) &= Z_2 \end{aligned} \right\} \eta = \frac{Z_1}{Z_2} \quad \text{So haben wir } y_1 = \frac{Z_1}{\sqrt{Z_2 Z_1' - Z_1' Z_2'}}, \\ y_2 = \frac{Z_2}{\sqrt{Z_2 Z_1' - Z_1' Z_2'}}.$$

Hierfür können wir nun setzen:

$$y_1 = \frac{H_1}{\sqrt{x_2(H_2 \frac{\partial H_1}{\partial x_1} - H_1 \frac{\partial H_2}{\partial x_1})}}, \quad y_2 = \frac{H_2}{\sqrt{x_2(H_2 \frac{\partial H_1}{\partial x_1} - H_1 \frac{\partial H_2}{\partial x_1})}}$$

Nun aber ist nach dem Euler'schen Theoreme:

$$n H_1 = x_1 \frac{\partial H_1}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial H_1}{\partial x_2}, \quad n H_2 = x_1 \frac{\partial H_2}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial H_2}{\partial x_2}.$$

$$\text{Daher kommt: } y_1 = \frac{H_1 \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{x_2 \cdot (\frac{\partial H_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x_2})}} \quad \text{etc.}$$

oder, wenn wir die Functional-determinante der Formen H_1, H_2 mit (H_1, H_2) bezeichnen: $y_1 = \frac{\sqrt{n}}{x_2} \cdot \frac{H_1}{\sqrt{(H_1, H_2)}}$, $y_2 = \frac{\sqrt{n}}{x_2} \cdot \frac{H_2}{\sqrt{(H_1, H_2)}}$ wo nun das im Nenner befindliche x_2 zeigt, dass wir in der That bei $x=\infty$ einen singulären Punkt haben. —

Neben den so bestimmten y_1, y_2 haben wir nun bereits *Abh. 12. N. 24* in (2), p. 41, die allgemeineren Y_1, Y_2 in Ansatz gebracht:

$$Y_1 = \frac{y}{\sqrt{y_1}} \cdot (x-a)^p (x-b)^q (x-c)^r \cdot F(x)$$

$$Y_2 = \frac{1}{\sqrt{y_1}} \cdot (x-a)^p (x-b)^q (x-c)^r \cdot F(x).$$

Wollen wir zusehen, dass wir unter ihnen solche Y_1, Y_2 her-

ausgreifen, die nur bei $x = a, b, c$ singular sind. Zu dem Zwecke werden wir $F(x)$ ohne jeden singulären Punkt voraussetzen, d. h. = Constanten wählen. Uebrigens aber werden wir homogen machen, in dem wir an die letzten Formeln der vorigen Stunde anknüpfen und $a = \frac{a_1}{a_2}$, $b = \frac{b_1}{b_2}$, $c = \frac{c_1}{c_2}$ nehmen. Solcherweise kommt (unter (xa) die Determinante $x, a_2 - x, a_1$ verstanden):

$$y_i = \frac{\sqrt{n}}{x_2} \cdot \frac{H_i}{\sqrt{(H_1, H_2)}} \cdot \frac{(xa)^\rho (xb)^\sigma (xc)^\tau}{x_2^{\rho+\sigma+\tau} a_2^\rho b_2^\sigma c_2^\tau} \cdot C, \text{ etc.}$$

Hier setzen wir jetzt der Einfachheit halber

$$C = a_2^\rho b_2^\sigma c_2^\tau : \sqrt{n}. \text{ So haben wir}$$

$$(1) \begin{cases} y_1 = \frac{H_1}{\sqrt{(H_1, H_2)}} \cdot \frac{(xa)^\rho (xb)^\sigma (xc)^\tau}{x_2^{\rho+\sigma+\tau+1}} \\ y_2 = \frac{H_2}{\sqrt{(H_1, H_2)}} \cdot \frac{(xa)^\rho (xb)^\sigma (xc)^\tau}{x_2^{\rho+\sigma+\tau+1}} \end{cases}$$

Diese Ausdrücke entsprechen offenbar unseren Anforderungen, sobald wir Sorge tragen, dass der Nenner $x_2^{\rho+\sigma+\tau+1}$ in Wegfall kommt. Mit anderen Worten: Um die von uns gesuchten y_1, y_2 zu haben, müssen wir einfach in (1) $\rho+\sigma+\tau = -1$ nehmen.

Und nun sage ich, dass wir hiermit geradezu zur Riemann'schen \mathcal{F} -function geführt worden sind. Fügen wir nämlich die beiden y_1, y_2 der Formel (1) binär zusammen: $(2) c, y_1 + c_2 y_2$ so haben wir eine binäre Schaar von Functionszweigen, von der wir sehen werden, dass sie alle die Eigenschaften besitzt, vermöge deren wir im vorigen Semester die Functionsschaar $\mathcal{P}(a, b, c, x)$ definiert haben.

Erstlich ist klar, dass unsere Functionszweige (c) nur bei

$x = a, b, c$ singular sind und bei Umläufen der x um die a, b, c in solche neue Functionszweige übergehen, die selbst der Schaar (x) angehören.

Es ist also nur noch nöthig zuzusehen, ob innerhalb (x) bei $x = a, b, c$ je zwei Zweige existiren, die zu bestimmten "Exponenten" gehören, und dann, wenn dies der Fall ist, diese Exponenten zu berechnen.

Wir thun dies am einfachsten, indem wir die Schaar (x) unkomplex schreiben:

$(x') \frac{c_0 y + c_1}{\sqrt{y}} (x-a)^{\rho} (x-b)^{\sigma} (x-c)^{\tau}$ [mit $\rho + \sigma + \tau = -1$] und nun folgendermassen raisonniren:

Werde irgend ein Functionszweig η bei $x = a$ zu η_a , so ist $\frac{\eta - \eta_a}{\sqrt{\eta}}$ $(x-a)^{\rho} (x-b)^{\sigma} (x-c)^{\tau}$ ein in (x') enthaltenes

weiter Functionszweig, der sich folgendermassen entwickelt: a) Wir haben von früher her: $y - y_a = (x-a)^{\lambda} \cdot \mathcal{F}(x-a)$, wo \mathcal{F} , wie in allen folgenden Formeln eine Potenzreihe bedeuten soll, deren constantes Glied nicht verschwindet.

b) Hiernach hat y' die Form $= (x-a)^{\lambda-1} \cdot \mathcal{F}(x-a)$.

c) Folglich kommt für unseren Functionszweig $(x-a)^{\frac{\lambda+1}{2} + \rho} \cdot \mathcal{F}(x-a)$; er gehört in der That zu einem bestimmten Exponenten, nämlich zu dem Exponenten $\frac{\lambda+1}{2} + \rho$.

Ein fernerer in (x') enthaltenes Functionszweig ist: $\frac{1}{\sqrt{y}}$ $(x-a)^{\rho} (x-b)^{\sigma} (x-c)^{\tau}$. Bei ihm gibt die analoge Rechnung eine Entwicklung der Form $(x-a)^{-\frac{\lambda+1}{2} + \rho} \cdot \mathcal{F}(x-a)$; er gehört also zum Exponenten $-\frac{\lambda+1}{2} + \rho$.

Wir haben also in (x') oder (x) eine Functionsschaar mit den Exponenten

$$\begin{array}{l} \frac{\pm \lambda + 1}{2} + \rho \text{ bei } x = a \\ \frac{\pm \mu + 1}{2} + \sigma \text{ bei } x = b \\ \frac{\pm \nu + 1}{2} + \tau \text{ bei } x = c \end{array}$$

und constatiren nun noch, dass die Summe dieser 6 Exponenten wegen $\rho + \sigma + \tau = -1$ in der That $= +1$ ist, wie wir dies seiner Zeit bei der Definition der P. function verlangt hatten.

Hiernach haben wir in der Schaar (x) in der That eine P. function vor uns und zwar diejenige, die wir nach Riemann so bezeichnen werden:

$$P \left| \begin{array}{ccc} \rho + \frac{\alpha}{1-\lambda} & \sigma + \frac{\beta + \mu}{x} & \tau + \frac{\gamma + \nu}{x} \\ \rho + \frac{1-\lambda}{x} & \sigma + \frac{1-\mu}{x} & \tau + \frac{1-\nu}{x} \end{array} \right|.$$

Es ist dies augenscheinlich die allgemeinste P. function, welche zu unserem $\eta(\lambda, \mu, \nu, x)$ gehört, d. h. die allgemeinste P. function, welche die Exponentendifferenzen λ, μ, ν aufweist. —

Wir haben damit der Riemann'schen P. function in unseren Entwicklungen, die von dem η aus beginnen, eine ganz bestimmte Stelle angewiesen. Aber zugleich ergibt sich von selbst ein allgemeinerer Ansatz. Wir hatten:

$$y_1 = \frac{H_1}{\sqrt{(H_1, H_2)}} \cdot (xa)^\rho (xb)^\sigma (xc)^\tau,$$

$$y_2 = \frac{H_2}{\sqrt{(H_1, H_2)}} (xa)^\rho (xb)^\sigma (xc)^\tau,$$

mit $\rho + \sigma + \tau = -1$, und $y = \frac{y_1}{y_2}$. Nun hat aber der Ansatz $\eta = \frac{y_1}{y_2}$ mit der Bedingung $\rho + \sigma + \tau = -1$ gar nichts zu thun: letztere ist vielmehr nur, wie man sofort sieht, der Ausdruck dafür, dass y_1, y_2 von x_1, x_2 im nullten Grade abhängen, d. h. Functionen von x selbst sind. Entschiessen wir uns, darauf zu verzichten, so werden ρ, σ, τ in (3) als durchaus beliebige Grössen angesehen werden können, gleichzeitig erscheinen dann y_1, y_2 als Formen von x_1, x_2 vom Grade $\rho + \sigma + \tau + 1$! Aus den so verallgemeinerten y_1, y_2 bilden wir uns nun

wieder eine Binärschaar (4) $c_1 y_1 + c_2 y_2$, die wir um an das Riemann'sche \mathcal{P} zu erinnern, mit dem Zeichen Π bezeichnen wollen. Wir können diese Schaar natürlich ganz ähnlich durch ihre Eigenschaften definiren, wie es Riemann mit seinem \mathcal{P} thut. Insbesondere werden wir Π ausführlicher durch folgendes Schema be-

$$(5) \quad \Pi \left| \begin{array}{ccc} a_1, a_2 & b_1, b_2 & + c_1, c_2 \\ \varrho + \frac{1+\lambda}{x} & \delta + \frac{1+\mu}{x} & \tau + \frac{1+\nu}{x} \quad x_1, x_2 \\ \varrho + \frac{1-\lambda}{x} & \delta + \frac{1-\mu}{x} & \tau + \frac{1-\nu}{x} \end{array} \right|,$$

welches sich hauptsächlich dadurch vom Riemann'schen Schema unterscheidet, dass hier die Summe der Exponenten nicht mehr gleich Eins zu sein braucht. Macht man sie gleich Eins, was immer freiesteht, so fallen wir natürlich auf das Riemann'sche \mathcal{P} zurück.

Die grössere Beweglichkeit, welche wir mit diesem Π dem Riemann'schen Ansätze gegenüber gewonnen haben, gestattet uns, unter allen Π , die zu demselben η gehören, besonders einfache Π als Normalfälle herauszugreifen. Ich möchte hier insbesondere zwei Fälle herausgreifen.

1) Wir setzen $\varrho = \delta = \tau = -\frac{1}{2}$. Wir haben dann statt (5) die speciellern Formeln

$$(6) \quad \begin{cases} y_1 = \frac{H_1}{\sqrt{(H_1, H_2)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(xa)(xb)(xc)}}, \\ y_2 = \frac{H_2}{\sqrt{(H_1, H_2)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(xa)(xb)(xc)}}. \end{cases}$$

und als Symbol der zugehörigen Schaar

$$\Pi \left| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ \pm \frac{\lambda}{2} & \pm \frac{\mu}{2} & \pm \frac{\nu}{2} \end{array} \right| x_j. \text{ Ich werde das so bestimmte } \Pi \text{ als } \underline{\text{Normal. } \Pi \text{ erster Art}} \text{ bezeichnen. In den}$$

x_1, x_2 ist dasselbe von der Dimension $-\frac{1}{2}$.

2.) Daneben tritt nun ein Normal. Π zweiter Art. Es seien

λ, μ, ν . (was uns frei steht) positiv angenommen. So nehme ich $\rho = \frac{\lambda-1}{\lambda}$, ..., setze also

$$(8) \begin{cases} Y_1 = \frac{H_1}{\sqrt{(H_1, H_2)}} \cdot (xa)^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} (xb)^{\frac{\mu-1}{\mu}} (xc)^{\frac{\nu-1}{\nu}}, \\ Y_2 = \frac{H_2}{\sqrt{(H_1, H_2)}} \cdot (xa)^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} (xb)^{\frac{\mu-1}{\mu}} (xc)^{\frac{\nu-1}{\nu}}. \end{cases}$$

Wir erhalten dann die lineäre Schaar: $(9) \Pi \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda & \mu & \nu \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} x$; der Grad in den x_1, x_2 ist hier $\frac{\lambda + \mu + \nu - 1}{2}$.

Selbstverständlich können wir eine analoge Normierung auch durchführen, wenn wir nicht gerade verlangen, λ, μ, ν sollten positiv sein. Wir coordinieren dann jedem η ($\lambda \mu \nu x$) überhaupt 8 Schaaeren Π der folgenden Art:

$$(10) \Pi \begin{vmatrix} a & b & c \\ \pm \lambda & \pm \mu & \pm \nu \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} x, \quad \text{beziehungsweise vom Grade } \frac{\pm \lambda \pm \mu \pm \nu - 1}{2}$$

in x_1, x_2 . Diese 8 verschiedenen Π entsprechen genau den 8 verschiedenen bestimmenden Integralen (hypergeometrischen Integralen), mit denen wir im vorigen Semester die Theorie der P -function in Verbindung gesetzt haben (Diffgl. I, pg. 216). Wir werden auf die Integraldarstellung zum Schluß der Untersuchungen über die hypergeometrische Function kurz zurückkommen. Jetzt beginnen wir einen andern Gedankengang, der sich an die Figuren, mit denen wir unsere Entwicklungen begannen, besonders einfach anschließt. Über diejenigen automorphen Functionen, welche aus der Umkehr der η -Function entspringen.

Wir nennen $f(\eta)$ eine automorphe Function von η , — genauer eine linear automorphe Function von η , — wenn es sich gegenüber irgendwelchen linearen Substitutionen von η : $\eta' = \frac{\alpha \eta + \beta \kappa}{\delta \eta + \epsilon \kappa}$ ungeändert reproducirt:

$$(1) \quad f\left(\frac{\alpha_k \gamma + \beta_k}{\delta_k \gamma + \delta_k}\right) = f(\gamma).$$

Insbesondere bezeichnen wir so die eindeutigen Functionen, welche diese Eigenschaft haben.

Nun ist an sich klar, dass allgemein unser x betrachtet als Function von η die durch (1) bezeichnete Eigenschaft hat. Verlangen wir aber, wie wir es jetzt in der That thun wollen, Eindeutigkeit, so werden wir dadurch, wie wir schon im vorigen Semester ausführten (Vorlesungsheft p. 377), auf die Fälle $\lambda = \frac{1}{l}$, $\mu = \frac{1}{m}$, $\nu = \frac{1}{n}$ beschränkt, wo die l, m, n irgendwelche ganze Zahlen sind, die auch ∞ werden dürfen.

Wir scheiden diese Fälle, wie wir schon wiederholt ausführten, in drei Kategorien, je nachdem $\lambda + \mu + \nu \geq 1$:

I.) Ist $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} > 1$, so erhalten wir bei der Uebertragung des η -Dreiecks auf die Kugel ein solches Dreieck, dessen Begrenzungs Ebenen sich im Inneren der Kugel schneiden. Wir können den Schnittpunkt gern in den Mittelpunkt der Kugel verlegen und erhalten dann gerade diejenigen Zerlegungen der Kugel in eine endliche Anzahl von Dreiecken, welche in der Theorie der regulären Körper auftreten. In der That hat die disjunctische Gleichung $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} > 1$ eine endliche Zahl von Lösungen, welche einzeln den regulären Körpern zugeordnet sind, wie folgende Tabelle aufweist:

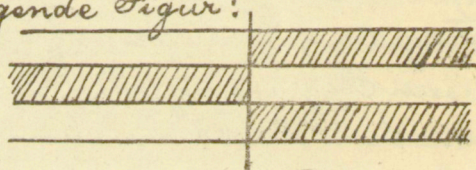
l	m	n	
2	2	n	Dieder
2	3	3	Tetraeder
2	3	4	Oktaeder (und Würfel)
2	3	5	Icosaeder (und Pentagondodekaeder)

weil es sich in jedem dieser Fälle um eine endliche Zahl von η -Dreiecken handelt, in welche die Kugel eingetheilt wird, erweist sich $x(\eta)$ nicht nur als eine eindeutige, sondern als eine rationale Function. (Vergl. meine „Vorlesungen über das Fkosaeder“, so wie in den „Vorl. über elliptische Modulfunctionen“ p. 103-106, am letzteren Orte sind bezügliche Figuren gegeben.)

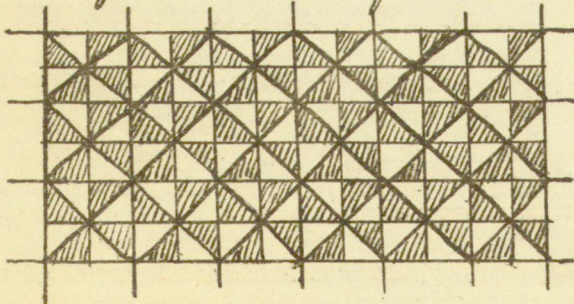
II) Für $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$ erhalten wir ein Kugeldreieck, dessen Begrenzungs Ebenen sich in einem Punkte der Kugel selbst schneiden von dort aus stereographisch projectirt ergeben diese Dreiecke ebene Dreiecke mit geradlinigen Seiten. Auch von solchen Dreiecken haben wir nur eine endliche Zahl von Fällen zu unterscheiden:

l	m	n
2	2	∞
2	3	6
2	4	4
3	3	3

Der erste Fall ergibt folgende Figur:



bei welchem eine Zerlegung der Ebene in Parallelstreifen hervortritt. Die anderen Fälle schliessen sich an Zerlegungen der Ebene in Parallelogramme an.
B. z. B. entsteht für $l, m, n = 2, 4, 4$ die Figur:



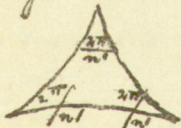
(siehe auch „Modull.“ p. 106, 107). In Folge dessen wird x in diesen Fällen eine einfachperiodische bez. doppelperiodische Function von η . Die linearen Substitutionen

von η , durch welche x in sich übergeht, haben alle die Gestalt $\eta' = \alpha \eta + \beta$, unter α immer eine Einheitswurzel verstanden.

III). Für $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1$ erhalten wir Dreiecke, deren Kreisbogenseiten einen gemeinsamen Orthogonalkreis haben. Dieser Orthogonalkreis ist bei der wiederholten symmetrischen Reproduktion des Dreiecks eine Gränze, der man immer mehr zustrebt, ohne sie je zu erreichen. $x(\eta)$ ist also eine automorphe Function von einer Art, wie sie früher in der Analysis nicht betrachtet wurde: eine Function mit einer natürlichen Gränzcurve. Es gibt unendlich viele hier in Betracht kommende Wertesysteme der l, m, n . Unter ihnen werden wir insbesondere die folgenden in Betracht ziehen:

l	m	n
2	3	n'
$\frac{n'}{2}$	$\frac{n'}{2}$	$\frac{n'}{2}$

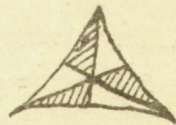
(von denen natürlich das zweite nur dann zu einer eindeutigen Function Anlass gibt, wenn n' eine gerade ganze Zahl ist). Diese Fälle stehen zu einander (vergl. die Sommervorlesung) in der Beziehung der rationalen Transformation. Gehört zu $n'/2, n'/2, n'/2$ folgendes Dreieck:



so gehören zu $2, 3, n'$ die kleinen Dreiecke, welche entstehen, wenn man das gerade gezeichnete Dreieck durch

seine Höhen in 6 Theile zerlegt:

Ist $\eta = \eta\left(\frac{2}{n'}, \frac{2}{n'}, \frac{2}{n'}, x\right)$ gesetzt, so ist dasselbe zugleich $\eta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{n'}, x(x)\right)$ unter x eine geeignete Function 6ten Grades verstanden.



Wird das grosse Dreieck auf die Halbebene x abgebildet, so erweist sich das kleine Dreieck auf die Halbebene

der rationalen Function x abgebildet.

Unter den so bezeichneten Fällen interessiren uns dann ganz besonders, wegen ihrer Beziehung zu den elliptischen Modulfunctionen, diejenigen mit $n' = \infty$. Man nennt dann gewöhnlich $\eta = w$ („Periodenverhältniss des Integrals erster Gattung“)

$$x = k^2 \text{ („Quadrat des Legendre'schen Moduls“)}$$

$$x(x) = J \text{ („absolute Invariante“ } = \frac{g_2^3}{\Delta} \text{)}.$$

Vergl. zu diesen sämtlichen Fällen die Zeichnungen auf p. 108-113, sowie auf p. 276 der Modulfunctionen.

Es ist nun die Frage, wie man die zu diesen Fällen I, II, III gehörigen automorphen Functionen $x = f(\eta)$ wirklich bildet. Da stellt sich II etwas anders als I und III.

Im Falle II haben nämlich, wie wir bemerkten, sämtliche Substitutionen des η (bei geschickter Wahl des Coordinatensystems) die Gestalt ganzer Substitutionen $\eta' = \alpha \eta + \beta$. In Folge dessen subsumirt sich das hier in Betracht kommende Bildungsgesetz von $f(\eta)$ unter die seit langer Zeit feststehenden Bildungsgesetze der periodischen Functionen. Bei I und III aber haben wir gebrochene lineare Substitutionen der η : $\eta' = \frac{\alpha \eta + \beta}{\gamma \eta + \delta}$: da bedürfen wir neuer Principien.

Diese neuen Principien erblicken wir nun eben in der Einführung homogener Variabler. Wir werden x in $\frac{x_1}{x_2}$, η in $\frac{y_1}{y_2}$ spalten, so zwar, dass die binären Substitutionen $y_1' = \alpha y_1 + \beta y_2$
 $y_2' = \gamma y_1 + \delta y_2$ den früher betrachteten η Substitutionen entsprechen, und nun werden wir nicht direct darauf ausgehen, x als automorphe Function von η

darzustellen, sondern darauf, x_1, x_2 als automorphe Formen von η_1, η_2 zu bilden!

Wir überschreiben also unsere folgenden Entwicklungen:

Von den automorphen Formen der Fälle I und III.

S. 15. N. 90.

Wir müssen hier eine Bemerkung vorausschicken, die immer wesentlich in Betracht kommt, so oft man mit homogenen Variablen zu thun hat. Es sei x_1, x_2 oder η_1, η_2 ein Paar homogener Variabler. So werden wir unter den Werthsystemen, welche x_1, x_2 oder η_1, η_2 annehmen können, von vornherein gewisse Werthsysteme, die wir unerlaubte Werthsysteme nennen, ausschließen. Es sind dies die Fälle

- 1) dass beide Variablen gleichzeitig Null werden,
- 2) dass beide Variablen, oder auch nur eine derselben unendlich wird. Schreiben wir also: $x_1 = f_1(\eta_1, \eta_2)$,

$$(1) \quad x_2 = f_2(\eta_1, \eta_2), \quad (\text{wo}$$

die f_1, f_2 zwei Formen der η_1, η_2 von irgend welchem positiven oder negativen aber gleichen Grade sein sollen), so meinen wir, dass vermöge dieser Formel erlaubten Werthsystemen der η_1, η_2 nur erlaubte Werthsysteme der x_1, x_2 entsprechen sollen, so dass also f_1, f_2 für erlaubte Werthe der η_1, η_2 nie simultan verschwinden und f_1 wie f_2 für erlaubte Werthe der η_1, η_2 nie unendlich wird. Rückwärts werden dann von selbst erlaubten Werthen der x_1, x_2 nur erlaubte Werthe der η_1, η_2 entsprechen. Denn setzen wir $\eta_1 = \eta_2 = 0$, so werden f_1, f_2 gleichzeitig Null oder Unendlich (je nach dem ihr Grad in η_1, η_2 ein positiver oder negativer ist), führen also zu erlaubten Werthsystemen der x_1, x_2 ; das Entsprechende

tritt ein, wenn wir auch nur eines der η_1, η_2 unendlich gross nehmen.

Fest haben wir in den vergangenen Stunden π in mannigfaltiger Weise in Zähler und Nenner Y_1, Y_2 gespalten. Es ist die Frage, ob unter all' diesen Spaltungen auch nur eine ist, welche der hiermit formulirten Bedingung genügt und also zu einem Formelsystem (1) Anlass gibt ($\eta_1 = Y_1, \eta_2 = Y_2$ gesetzt). Unsere Y_1, Y_2 , die wir allgemein durch die Formel definiert hatten:

$$c_1 Y_1 + c_2 Y_2 = \pi \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda' & \mu' & \nu' \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' \end{vmatrix} x$$

bleiben gewiss endlich und verschwinden auch nicht simultan (bleiben also im erlaubten Gebiete) so lange $(xa) \geq 0, (xb) \geq 0, (xc) \geq 0$. Aber wie ist es bei $(xa) = 0$ etc.? Da gibt es einen Zweig $c_1 Y_1 + c_2 Y_2$, der sich in erster Annäherung wie $(xa)^\lambda$, einen anderen, der sich wie $(xa)^\lambda''$ verhält. Ist also von den Zahlen λ', λ'' auch nur eine negativ, so werden wir zu unendlich grossen Werten geführt, sind beide positiv, so werden Y_1, Y_2 gleichzeitig zu Null. Von allen Zerlegungen Y_1, Y_2 ist daher für die jetzt ins Auge gefassten Zwecke nur die eine brauchbar, welche für den einzelnen singulären Punkt a, b, c je einen positiven und einen verschwindenden Exponenten aufweist, d. h. diejenige Zerlegung, welche

$$\text{sich an } \pi \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda & \mu & \nu \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{ anschliesst [wo } \lambda, \mu, \nu \text{ positiv sind],}$$

d. h. an dasjenige π , welche wie

neulich das Normal- π zweier Art nannten.

Eben diese Y_1, Y_2 werden wir jetzt $= \eta_1, \eta_2$ setzen. Wir haben dann also nach den früheren Formeln:

$$c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2 = \frac{c_1 H_1 + c_2 H_2}{\sqrt{6 H_1, H_2}} (xa)^{\frac{\lambda-1}{2}} (xb)^{\frac{\mu-1}{2}} (xc)^{\frac{\nu-1}{2}},$$

oder, wenn wir unhomogen schreiben wollen (indem wir $a_2, b_2, c_2 \dots$ mit c_1, c_2 zu neuen Constanten c'_1, c'_2 verschmelzen):

$$= \frac{c'_1 \eta_1 + c'_2 \eta_2}{\sqrt{\eta_1}} \cdot (xa)^{\frac{\lambda-1}{2}} (xb)^{\frac{\mu-1}{2}} (xc)^{\frac{\nu-1}{2}} x^2 \frac{\lambda + \mu + \nu - 1}{2}. \text{ Man sieht:}$$

Unsere η_1, η_2 sind in x_1, x_2 vom Grade $\frac{\lambda + \mu + \nu - 1}{2}$. Die x_1, x_2

sind daher in den η_1, η_2 vom Grade $\frac{x}{\lambda + \mu + \nu - 1}$, womit wir den Grad der beiden in (1) eingehenden Formen f_1, f_2 festgelegt haben. Setzen wir noch $\lambda = \frac{1}{l}, \mu = \frac{1}{m}, \nu = \frac{1}{n}$, wie wir ja thun sollten, so wird dieser Grad der x_1, x_2 in η_1, η_2 : (3) $\frac{x \cdot lmn}{mn + nl + lm - lmn}$.
 Uebrigens werden wir weiterhin nicht nur x_1, x_2 als Formen der η_1, η_2 darzustellen suchen, sondern ganz wesentlich folgende Wurzeln: $\sqrt[l]{(xa)}, \sqrt[m]{(xb)}, \sqrt[n]{(xc)}$. Wir setzen (5) $\sqrt[l]{(xa)} = \Phi(\eta_1, \eta_2), \sqrt[m]{(xb)} = \Psi(\eta_1, \eta_2), \sqrt[n]{(xc)} = X(\eta_1, \eta_2)$ und bezeichnen den Grad dieser Formen in η_1, η_2 beziehungsweise mit L, M, N , wo dann: (4) $L = \frac{P}{l} = \frac{xmn}{mn + nl + lm - lmn}, M = \frac{P}{m}, N = \frac{P}{n}$. Insbesondere wollen wir doch gleich bemerken, dass der Grad der Form (5) $\frac{P}{K_1 x_1 - K_2 x_2} \sqrt[l]{(xa)} \cdot \sqrt[m]{(xb)} \cdot \sqrt[n]{(xc)}$ allemal $-x$, derjenige der Form (6) $\frac{(xa)^{\frac{e-x}{l}} (xb)^{\frac{m-x}{m}} (xc)^{\frac{n-x}{n}}}{K_1 x_1 - K_2 x_2}$ gleich -4 ist.

Wir wollen jetzt zuerst für die Zahlen (x), (4) eine kleine Tabelle mittheilen.

	l	m	n	L	M	N		P	L	M	N
I	2, 2, 2	2	2	2	2	2					
	2, 3, 3	12	6	4	4	4					
	2, 3, 4	24	12	8	6	6					
	2, 3, 5	60	30	20	12	12					
III	2, 3, 7	-84	-42	-28	-12			P	L	M	N
	2, 3, 8	-48	-24	-16	-6	4, 4, 4	-8	-2	-2	-2	
	2, 3, 9	-36	-18	-12	-4						
	2, 3, 10	-30	-15	-10	-3	5, 5, 5	-5	-1	-1	-1	
	2, 3, 11	$-\frac{132}{5}$	$-\frac{66}{5}$	$-\frac{44}{5}$	$-\frac{12}{5}$						
	2, 3, 12	-24	-12	-8	-2	6, 6, 6	-4	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	
	2, 3, 13	$-\frac{156}{7}$	$-\frac{78}{7}$	$-\frac{52}{7}$	$-\frac{12}{7}$						
2, 3, ∞	-12	-6	-4	0=log	∞, ∞, ∞	-2	0	0	0	0	
Fall der Modul. f. (w)						Fall der Modul. f. f. (w)					

Diese 4 Fälle beziehen sich auf die „grossen“ Dreiecke, welche dem nebenstehenden „Kleinere“ Dreiecken entsprechen.

[Die Bezeichnung $0 = \log$ ist in der letzten Zeile eingetragen, um anzudeuten, dass eine „unendlich hohe“ Wurzel aus (xa) etc. als Logarithmus von (xa) aufzufassen ist.]

Man erkennt: Die Gerade P, L, M, N sind im Falle III immer negativ. Zugleich repräsentieren dieselben im Allgemeinen gebrochene Zahlen. Nur bei kleinen Werten von l, m, n erhält man ganze Zahlen: Diese Fälle sind fast alle in die Tabelle aufgenommen.

Fügen wir noch folgende drei Bemerkungen hinzu:

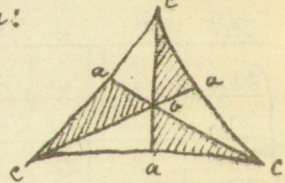
1) Entsprechend der Identität

$$(xa)(bc) + (xb)(ca) + (xc)(ab) \equiv 0$$

muss zwischen den Φ, Ψ, X jedesmal eine Identität bestehen der Form: $(\frac{1}{2}) C \Phi^2 + C' \Psi^m + C'' X^n \equiv 0$.

2) In der η -Ebene mögen wir, den Punkten a, b, c der x -Ebene entsprechend, dreierlei Dreiecksecken unterscheiden (die wir selbst generell mit a, b, c bezeichnen): Ecken der 1ten, 2ten, 3ten Art. Im Falle einer Dreieckseinteilung $(2, 3, 4)$ z. B. liegen diese Ecken so gegen einander:

In den Ecken a stoßen immer 2, in den Ecken b 3, in den Ecken c 4 Dreiecke zusammen: die Hälfte schraffierte, die Hälfte nicht schraffierte Dreiecke. Da haben wir nun offenbar:



Die Formen $\Phi(\eta, \eta_1), \Psi(\eta, \eta_2), X(\eta, \eta_3)$ verschwinden nirgends sonst in dem mit Dreiecken bedeckten Gebiete als Beziehungsweise in den Ecken a, b, c , und zwar verschwindet Φ in den a , Ψ in den b , X in den c je einfach.

3) In den Fällen I bedeutet $2\pi(\lambda + \mu + \nu - 1)$ den „Excess“ des zugehörigen „sphärischen“ Dreiecks. In Folge dessen stimmt die Zahl P jeweils mit der Gesamtzahl der

schräffelten, resp. nicht schräffelten Dreiecke überein, die sich in dem Falle auf der Kugel finden lassen. Dies Letztere ist natürlich in keiner Weise mehr bei III der Fall. Denn einerseits wird im Falle III P negativ (bedeutet also überhaupt keine Anzahl mehr), andererseits wird die Zahl der Dreiecke bei III unendlich gross.

Hierzu folgende historische Bemerkungen:

1) Die Φ, Ψ, X des Falles I sind zuerst von Schwarz in seiner zu Anfang der Vorlesung genannten Arbeit über die hypergeometrische Reihe (Journal 75, 1874) in nicht homogener Form aufgestellt worden. In homogener Form, als binäre algebraische Formen wurden dieselben zuerst von mir betrachtet in der Erlanger Berichten von 1874 und den Math. Annalen 9. 1875. Weitere Literaturangaben siehe Vorlesungen über des Fuchs saeder p. 113 ff.

2) Die Φ, Ψ, X des Falles III sind, was elliptische Modulfunctionen angeht, seit lange, insbesondere aus Weierstrass' Theorie der elliptischen Functionen, bekannt. Im Falle $(2, 3, \infty)$ nämlich coincidiren die Φ, Ψ, X beziehungsweise mit den „Invarianten“ $g_2, g_3, \log \Delta$, die in w_1, w_2 in der That die Grade $-6, -4, 0 = \log$ besitzen. Im Falle (∞, ∞, ∞) aber coincidiren die Φ, Ψ, X bez. mit $\log(e_2 - e_1), \log(e_3 - e_1), \log(e_1 - e_2)$; gleichzeitig weifs man, dass $e_2 - e_1$ in w_1, w_2 vom Grade -2 ist.

Für den allgemeinen Fall III hat die Formen Φ, Ψ, X zuerst Kalphen aufgestellt (Comptes Rendus) 2, 1881 (1); Sur les fonctions qui proviennent de la série de Gauss; ich nenne dieselben daher ganz die Kalphen'schen Formen. Kalphen

schreibt dieselben unhomogen. Die homogene Form wird zum ersten Male in dieser Vorlesung eingeführt. Ich lege auf dieselbe in der That wesentlichen Werth, weil sie die gedankliche Auffassung, die man haben muß, klarer hervorbringen läßt, als die nicht homogene Schreibweise.

Ich mache nunmehr speciellere Angaben über die Φ, Ψ, X des Falles I. Zunächst constatiren wir, dass die Grundzahlen L, M, N der Φ, Ψ, X direct mit der Zahl der Verschwindungsstellen der Φ, Ψ, X auf der Kugel, d. h. mit der Zahl der Dreiecksecken erster, zweiter, dritter Art auf der Kugel übereinstimmt. Dem entsprechend erweisen sich die Φ, Ψ, X als rational, ganze Formen der η_1, η_2 . In den Vorlesungen über das Ikosaeder p. 47 ff. gebe ich die Φ, Ψ, X der einzelnen hier in Betracht kommenden Fälle, beziehungsweise die zwischen ihnen bestehenden Identitäten folgendermassen an:

Dieder: $\Phi = \frac{\eta_1^n + \eta_2^n}{2}, \Psi = \frac{\eta_1^n - \eta_2^n}{2}, X = \eta_1 \eta_2;$
 $\Phi^2 - \Psi^2 - X^n = 0.$

Tetraeder: $\Phi = \eta_1 \eta_2 (\eta_1^n - \eta_2^n)$ { i. e. Oktaeder der Tetraederconfiguration }
 $\Psi = \eta_1^n + 2\sqrt{-3} \eta_1^2 \eta_2^n + \eta_2^n$ { Eigentliches Tetraeder }
 $X = \eta_1^n - 2\sqrt{-3} \eta_1^2 \eta_2^n + \eta_2^n$ { Gegentetraeder }

mit der Relation: $12\sqrt{-3} \Phi^2 - \Psi^3 + X^{3n} = 0.$

Oktaeder: $\Phi = \eta_1^n - 33 \eta_1^8 \eta_2^n - 33 \eta_1^2 \eta_2^8 + \eta_2^n$
 $\Psi = \eta_1^8 + 14 \eta_1^n \eta_2^n + \eta_2^8$ (Würfel)
 $X = \eta_1 \eta_2 (\eta_1^n - \eta_2^n)$ (Oktaeder).

Relation: $\Phi^2 - \Psi^3 + 108 X^n = 0.$

Ikosaeder: $\Phi = (\eta_1^{30} + \eta_2^{30}) + 542 (\eta_1^{25} \eta_2^5 - \eta_1^5 \eta_2^{25}) - 10005 (\eta_1^{20} \eta_2^{10} + \eta_2^{20} \eta_1^{10})$
 $\Psi = -(\eta_1^{20} + \eta_2^{20}) + 228 (\eta_1^{15} \eta_2^5 - \eta_1^5 \eta_2^{15}) - 494 \eta_1^{10} \eta_2^{10}$ (Pentagonododekaeder)
 $X = \eta_1 \eta_2 (\eta_1^{10} + 11 \eta_1^5 \eta_2^5 - \eta_2^{10})$ — (Ikosaeder),

mit der Relation: $\Phi^2 + \Psi^3 - 1220 X^5 = 0$. —

Eine besonders interessante Frage knüpft sich noch an das Verhalten der Φ, Ψ, X gegenüber den binären Substitutionen der η_1, η_2 . Wir haben zunächst noch zu sagen, wie wir diese binären Substitutionen den von vorher herein allein bekannten Substitutionen von $\eta: \eta' = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}$ gegenüber fixieren wollen. Wir werden dies, sofern nichts Anderes ausdrücklich verabredet wird, immer so thun, dass wir die Determinante der binären Substitution = 1 machen, dass wir also mit „unimodularen“ Substitutionen zu thun haben. Der einzelnen Substitution von η entsprechend haben wir also immer die zwei binären Substitutionen: $\eta'_1 = \frac{\alpha\eta_1 + \beta\eta_2}{\pm\sqrt{\alpha\delta - \beta\gamma}}$, $\eta'_2 = \frac{\gamma\eta_1 + \delta\eta_2}{\pm\sqrt{\alpha\delta - \beta\gamma}}$,

und bei Dieder, Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder beziehungsweise $4n, 4n, 48, 120$ homogene Substitutionen. Bei diesen Substitutionen können Φ, Ψ, X nun vielleicht völlig ungeändert bleiben, — wir bezeichnen sie dann als eigentlich automorphe Formen —, vielleicht aber auch sich um Factoren ändern ~ uneigentlich automorphe Formen. Diese Factoren müssen dann selbstverständlich so beschaffen sein, dass $\Phi^L: \Psi^m$ oder $\Phi^L: X^n$ als Function von η direct automorph ist. Um hierüber Klarheit zu erlangen, stellen wir folgende Ueberlegung an. Bei $x = a$ verhält sich ein Zweig von $c, \eta_1 + c, \eta_2$ — wir wollen ihn direct η_1 nennen — wie $(x-a)^L$, ein anderer, — er möge η_2 heißen —, wie Const. Lläuft jetzt x um a , so haben wir die Substitution (1) $\eta'_1 = e^{\frac{2i\pi}{L}} \cdot \eta_1, \eta'_2 = \eta_2$, d. h. eine binäre Substitution von der Determinante $e^{\frac{2i\pi}{L}}$. Gleichzeitig erhalten $\Phi = \sqrt{L}(x-a), \Psi = \sqrt{L}(x-b), X = \sqrt{L}(x-c)$ die Factoren $e^{\frac{2i\pi}{L}}, 1, 1$. Nun werden wir, um doch eine Substitution der Determinante +1 zu haben, auf

(1) jetzt noch folgende Substitution folgen lassen

(2) $\eta''_1 = \pm e^{-\frac{i\pi}{2}} \cdot \eta'_1$, $\eta''_2 = \pm e^{-\frac{i\pi}{2}} \cdot \eta'_2$ (eine Substitution, bei der η'_1, η'_2 völlig ungedändert bleibt). Dabei erhalten Φ, Ψ, X als Formen L ten Grades natürlich die Factoren $(\pm 1) \cdot e^{-\frac{L i \pi}{2}}$, $(\pm 1) \cdot e^{-\frac{M i \pi}{2}}$, $(\pm 1) \cdot e^{-\frac{N i \pi}{2}}$.

Alles in Allem unterscheiden sich also $\Phi(\eta''_1, \eta''_2)$, $\Psi(\eta''_1, \eta''_2)$, $X(\eta''_1, \eta''_2)$ von den ursprünglichen Φ, Ψ, X durch die Factoren: $(\pm 1) \cdot e^{\frac{i\pi}{2}(2-L)}$, $(\pm 1) \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}M}$, $(\pm 1) \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}N}$. Berechnen wir diese Factoren ebenso für eine Umlaufung von $x = b$ und $x = c$, so erhalten wir beispielsweise beim Fkosaeder:

Die Fkosaederformen Φ, Ψ, X sind alle drei eigentlich automorphe Formen. Dagegen erhalten Φ, Ψ, X im Tetraederfalle bez. folgende Factoren:

	Φ	Ψ	X
Umlaufung von a	1	1	1
" " b	1	$e^{-\frac{2i\pi}{3}}$	$e^{+\frac{2i\pi}{3}}$
" " c	1	$e^{+\frac{2i\pi}{3}}$	$e^{-\frac{2i\pi}{3}}$

Die Tetraederformen Φ, Ψ, X sind also uneigentlich-automorphe Formen.

Wir wenden uns jetzt zur Betrachtung der Φ, Ψ, X des Falles III. Mi. 19. Nov.
 Zu dem Zwecke wollen wir vor allen Dingen verabreden, dass der Gränzkreis der η -Ebene (der in allen Fällen III vorhanden ist, wie wir wissen) mit der X -Axe zusammenfallen soll und die durch diese Axe begränzte positive Halbebene derjenige Bereich sein soll, innerhalb dessen wir η zu betrachten haben. — wir können das auf alle Fälle erreichen, indem wir nöthigenfalls den anfänglichen Bereich der η -Ebene durch geeignete reciproke Stadien umformen. Dieser Verabredung entsprechend werden die von uns in Betracht zu ziehenden Substitutionen $\eta' = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}$ durchaus reelle Verhältnisse

$\alpha : \beta : \gamma : \delta$ aufweisen. Aber ich sage, dass zugleich die Determinante $(\alpha\delta - \beta\gamma)$ der reell vorausgesetzten Größen positiv sein muss. Es handelt sich ja in der That bei uns um solche Substitutionen, welche aus der positiven Halbebene x wieder die positive Halbebene machen, so dass z. B. der Werth, welcher vermöge der einzelnen Substitution aus i hervorgeht, selbst wieder einen positiven imaginären Bestandtheil haben muss. Es ist aber $\frac{\alpha i + \beta}{\gamma i + \delta} = \frac{(\alpha\gamma + \beta\delta) + i(\alpha\delta - \beta\gamma)}{\gamma^2 + \delta^2}$, so dass $(\alpha\delta - \beta\gamma)$ in der That > 0 , w. z. b. w. Nun wollen wir doch fernerhin die Substitution $\eta' = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}$ durch die binären Substitutionen (1) $\eta'_1 = \frac{\alpha\eta_1 + \beta\eta_2}{\pm\sqrt{\alpha\delta - \beta\gamma}}$, $\eta'_2 = \frac{\gamma\eta_1 + \delta\eta_2}{\pm\sqrt{\alpha\delta - \beta\gamma}}$ ersetzen. Wir sehen, auf Grund

des gerade geübten Nachweises, dass auch diese unimodularen Substitutionen vermöge der bei uns vorliegenden Verhältnisse durchaus reelle Coefficienten haben.

Was nun die Formen von η_1, η_2 angeht, die wir in Betracht ziehen wollen, so sind dies in erster Linie selbstverständlich $\Phi(\eta_1, \eta_2) = \sqrt{x(a)}$, $\Psi(\eta_1, \eta_2) = \sqrt{x(b)}$, $\chi(\eta_1, \eta_2) = \sqrt{x(c)}$ selbst dann aber alle $F(\eta_1, \eta_2)$ von der Form:

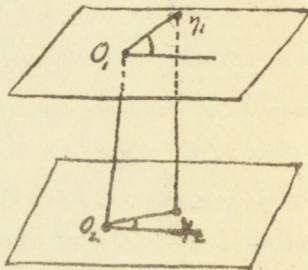
(2) $F(\eta_1, \eta_2) = \Phi^\alpha \Psi^\beta \chi^\gamma \cdot f(x_1, x_2)$, wo f irgend eine rationale (nicht notwendig ganze) Form von x_1, x_2 sein mag. Den Grad eines solchen F bezeichnen wir mit R . Zu diesen F gehören dann insbesondere die beiden Formen vom Grade 2 und -4 , die wir auf p. 61 unter (5) und (6) aufgeführt haben.

Es kommt nun darauf an, dass wir uns über die functionentheoretische Abhängigkeit dieser F von η_1, η_2 ein möglichst deutliches Bild machen. Es kommt dabei der Grundsatz zur Geltung, dass eine Function, welche in einem mehrfach zusammenhängenden Gebiete studirt werden soll,

innerhalb dieses Gebietes sehr wohl gleichzeitig unverzweigt und doch mehrdeutig sein kann. Ich sage nämlich:

Unsere $F(\eta_1, \eta_2)$ sind im Gebiete der homogenen Variablen η_1, η_2 sämmtlich unverzweigt, aber nur diejenigen unter ihnen sind eindeutig, deren Grad R in η_1, η_2 eine ganze Zahl ist. Um dies richtig zu verstehen, denken wir η_1, η_2 in zwei parallel gestellten Ebenen:

ziehen die Mittellinie O_1, O_2 und übrigen die Verbindungsline η_1, η_2 . Diese Verbindungsgerade (η_1, η_2) wird uns dann in einfacher Weise des Werthsystems (η_1, η_2) versinnlichen.



Wir haben früher die Fälle, in denen η_1 oder η_2 (oder η_1 und η_2 gleichzeitig) unendlich sind, so wie den Fall, dass η_1 und η_2 simultan verschwinden, als verbotene Fälle bezeichnet. Offenbar kommt dies jetzt darauf hinaus, dass wir unserer Raumgeraden alle möglichen sonstigen Lagen gestatten, nicht aber, dass sie zu den beiden Ebenen (η_1, η_2) parallel wird, oder mit der Mittellinie O_1, O_2 zusammenfällt. In dem besonderen von uns in Betracht zu ziehenden Falle kommt aber noch hinzu, dass wir nur solche Werthsysteme η_1, η_2 zulassen sollen, deren Quotient η_1/η_2 einen positiv imaginären Theil hat. Setzen wir $\eta_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $\eta_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, $\eta = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$ so erkennt man leicht, dass wir einfach mit denjenigen Raumgeraden zu thun haben, welche gegen die Mittellinie rechts herum gewunden sind. Es bilden diese Raumgeraden eine vierfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, welche einerseits begränzt ist von der dreifachen Mannigfaltigkeit der horizontalen Raumgeraden (d. h. der Raumgeraden, die zu unseren Ebenen parallel laufen) anderer-

seits von der dreifachen Mannigfaltigkeit der Raumgeraden welche unsere Mittellinie schneiden. Augenscheinlich hat hiernach das bei uns in Betracht kommende Gebiet (η_1, η_2) um die Mittellinie herum ringförmigen Zusammenhang und darin liegt, wie wir bereits sagten, die Möglichkeit dass unsere F unverzweigt und trotzdem mehrdeutig sein können. Solche mehrdeutigen F werden nämlich um eine Einheitswurzel wachsen, wenn man die repräsentierende Linie (η_1, η_2) um die Centrellinie herum einen geschlossenen Weg machen lässt: das ist keine Verzweigung, weil die Centrellinie selbst dem in Betracht kommenden Gebiete (η_1, η_2) nicht angehört. Um die in Rede stehende Eigenschaft der F jetzt in möglichst elementarer Weise einzusehen, schreiben wir $F(\eta_1, \eta_2) = \eta_2^R \cdot \Phi(\eta_1, 1) \cdot \Psi(\eta_1, 1) \cdot X(\eta_1, 1) \cdot f(\eta_1, 1)$ und verlegen die Betrachtung einerseits (was den Factor η_2^R angeht) in die η_2 -Ebene, andererseits (was die sämtlichen übrigen Factoren angeht) in die Halbebene η_1 . Da ist nun zunächst klar, dass wir in der η_2 -Ebene die Punkte 0 und ∞ als nicht zu unserem Gebiete gehörig anzusehen haben. In dem so begrenzten Gebiete ist dann in der That η_2^R immer unverzweigt, aber mehrdeutig, so lange R keine ganze Zahl ist. Die anderen Factoren aber sind alle in a η_1 Halbebene unverzweigt, ~ denn wir haben ja schon bemerkt, dass Φ, Ψ, X in den Punkten a, b , der Halbebene, den einzigen, in denen sie möglicherweise verzweigt sein könnten, gerade einfach zu Null werden. Ferner ist die η_1 Halbebene ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Deshalb ist $F(\eta_1, 1)$ innerhalb dieses Gebietes nicht bla

unverzweigt, sondern auch eindeutig. Und dies wieder heisst, da die Halbebene η doch selbstverständlich keinen Theil der η -Ebene mehrfach überdeckt, dass $F(\eta, 1)$ in η , soweit es überhaupt existirt, auch eindeutig ist. —

Nachdem wir so den functionentheoretischen Charakter der $F(\eta, \eta_2)$ festgelegt haben, fragen wir, wie sich die F bei den unimodularen Substitutionen (1), p. 69, verhalten. Ich will dabei der Einfachheit halber hier und in der Folge $\alpha\delta - \beta\gamma$ von Hause aus = 1 setzen, so dass die unimodularen Substitutionen so lauten:

$$(1) \quad \eta'_1 = \pm(\alpha\eta_1 + \beta\eta_2), \quad \eta'_2 = \pm(\gamma\eta_1 + \delta\eta_2).$$

Die Aufgabe wird sein, in folgender Gleichung:

(3) $F(\alpha\eta_1 + \beta\eta_2, \gamma\eta_1 + \delta\eta_2) = C \cdot F(\eta_1, \eta_2)$ den constanten Factor C zu bestimmen. Ist dabei F eindeutig, so haben wir eine durchaus bestimmte Frage vor uns, wir werden insbesondere wissen wollen, ob C bei allen Substitutionen = 1 oder nicht bei allen Substitutionen = 1 ist, ob wir es also mit einer eigentlich-automorphen Form oder einer uneigentlich automorphen Form F zu thun haben. Ist F mehrdeutig, so müssen wir die in (3) vorliegende Frage zunächst noch präcisiren. Es ist ja in (3) zunächst noch gar nicht gesagt, welcher der verschiedenen Werthe, deren die linke Seite fähig ist, mit einem bestimmten Werthe des rechter Hand stehenden $F(\eta_1, \eta_2)$ verglichen werden soll. Um hierüber Verabredung zu treffen, schreiben wir statt (3) etwa: $(\gamma\eta_1 + \delta\eta_2)^R \cdot F(\frac{\alpha\eta_1 + \beta}{\gamma\eta_1 + \delta}, 1) = C \cdot \eta_2^R \cdot F(\eta_1, \eta_2)$ oder (4) $F(\frac{\alpha\eta_1 + \beta}{\gamma\eta_1 + \delta}, 1) = \frac{C}{(\gamma\eta_1 + \delta)^R} \cdot F(\eta_1, 1)$ und bestimmen hier (wo nur noch η allein vorkommt), dass $(\gamma\eta + \delta)^R$ diejenige R te Potenz von $\gamma\eta + \delta$ sein soll, deren „Amplitude“ zwischen 0 und $R\pi$ liegt. Eine solche Bestimmung ist ja in der

That auch bei variablen η festgehalten, indem $\gamma + \delta = 0, \infty$ beide auf der Gränze unserer Halbebene gelegen sind. In der That bedient man sich der durch (4) präcisirten Fragestellung in der Theorie der elliptischen Modulfunctionen, indem man F bald gleich $\log \Delta(\epsilon_0 - \epsilon_n)$ wählt (vergl. Riemann's Werke, p. 427 ff. nebst den Erläuterungen von Dedekind auf p. 438 ff. daselbst), oder auch $F = \sqrt[2\eta]{\Delta}$, resp. $= \sqrt[3]{\epsilon_0 - \epsilon_n}$; vergleiche die Citate auf p. 628 der Modulfunctionen.

Doch kehren wir zu den eindeutigen Formen $F(\eta_1, \eta_2)$ zurück. Um zu entscheiden, ob eine solche Form eigentlich automorph ist oder nicht, bedienen wir uns derselben Methode, wie im Falle I, p. 67. Wir verwandeln erstlich η_1, η_2 in $-\eta_1, -\eta_2$ und sehen, dass F nur dann eigentlich automorph sein kann, wenn R eine gerade Zahl ist. Wir umkreisen dann in der x -Ebene den Punkt a und verwandeln hinterher, damit wir eine unimodulare Substitution von η_1, η_2 haben, η_1, η_2 bez. in $e^{-\frac{l\pi}{2}}\eta_1, e^{-\frac{m\pi}{2}}\eta_2$. Dann erhält F im Ganzen den Faktor $e^{\frac{2il\pi x}{2}} = \frac{Ril\pi}{2}$. Soll F eigentlich automorph sein, so muß hiernach $2l - R$ durch $2l$ theilbar sein, und ebenso natürlich $2, 5 - R$ durch $2m$, $2l - R$ durch $2n$ theilbar sein.

Beispielsweise ergibt sich so, dass für $(l, m, n) = (2, 3, 7)$ sowohl Φ , als Ψ , als X eigentlich automorph ist, dass dagegen für $(l, m, n) = (5, 5, 5)$ nicht nur Φ, Ψ, X , sondern auch Φ^5, Ψ^5, X^5 uneigentlich automorph sind. Im Falle der Modulfunctionen (l, m, n) sind $\Phi = g_3, \Psi = g_2$ (die allein in Betracht kommen, da $X = \log \Delta$ vieldeutig ist) eigentlich automorph. Aber was wichtiger ist: in allen Fällen sind die Formen (5), (6) der p. 61, insbesondere also die Form $(xa)^{\frac{l-3}{2}} (xb)^{\frac{m-3}{m}} (xc)^{\frac{n-3}{n}}$ eigentlich automorph.

Mit diesen vorläufigen Erläuterungen sind wir jetzt so weit gediehen, dass wir die wirkliche Bildung der Formen $F(\eta_1, \eta_2)$, insbesondere der $\Phi(\eta, \eta_2)$, $\Psi(\eta, \eta_2)$, $\Delta(\eta, \eta_2)$, in Untersuchung ziehen können. Das ist natürlich eine wesentlich complicirtere Sache, als im Falle I. Denn unsere F sind jetzt transcendente Formen der η_1, η_2 , und es wird sich also nicht nur darum handeln, Ausdrücke in η_1, η_2 in Gestalt unendlicher Reihen oder Producte aufzustellen, welche formal automorph sind, sondern wir müssen überdies verlangen, dass diese Ausdrücke absolut, d. h. unabhängig von der Reihenfolge ihrer Glieder convergiren. Es ist die Leistung von Poincaré, wenigstens für die eindeutigen, eigentlich automorphen F geeignete Bildungsgesetze gefunden zu haben. Doch berichden wir vorab über das, was in dieser Hinsicht bei den elliptischen Modulfunctionen bekannt ist! Wir haben in $g_3, g_2, \log \Delta$, beziehungsweise $\log(e_2 - e_1), \log(e_2 - e_3), \log(e_1 - e_2)$ in Betracht zu ziehen. Da notiren wir zunächst für g_3, g_2 die Eisensteinischen Reihen: (1) $g_3 = 140 \sum' \frac{1}{(m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2)^3}$, $g_2 = 60 \sum' \frac{1}{(m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2)^2}$ (vergl. Modulfunctionen p. 151, oder auch Eisenstein in Crelle 35 (1847)) Diese Reihen sind besonders schön. Hat man nämlich erst einmal nachgewiesen, dass dieselben absolut convergiren, so sieht man ihnen ohne Weiteres an, dass sie eigentlich automorphe Formen vorstellen, nämlich hier im Falle der Modulfunctionen solche Formen, welche bei sämtlichen ganzzahligen linearen Substitutionen $\omega'_1 = a\omega_1 + b\omega_2$, $\omega'_2 = c\omega_1 + d\omega_2$ von der Determinante 1 un geändert bleiben.

Für die Rechnung mit g_3, g_2 ist es wünschenswerth, S. 22. N. 9 die Eisensteinischen Reihen in Potenzreihen einer Grösse umzusetzen. Dies geschieht durch folgende Formeln:

(Mod. p. 153):

$$(3) \begin{cases} g_3 = 140 \sum' \frac{1}{(m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2)^6} = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^6 \left\{ \frac{1}{216} - \frac{1}{3} \sum \frac{m^5 x^m}{1-x^m} \right\}, \\ g_2 = 60 \sum' \frac{1}{(m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2)^4} = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^4 \left\{ \frac{1}{12} + 20 \sum \frac{m^3 x^m}{1-x^m} \right\}, \end{cases}$$

$\omega_2 x = e^{2i\pi \omega_1 / \omega_2}$

Formeln, die man gewöhnlich aus der Theorie der doppeltperiodischen Functionen ableitet, aber auch direct durch Umformung der Reihen (1) gewinnen kann (Hurwitz, Math. Annalen 18, Grundlagen einer independenten Theorie der Modulfunctionen, 1881). Letzteres Verfahren ist für uns besonders beachtenswerth, weil man hoffen darf, dasselbe auf unsere η_1, η_2 auszu dehnen, während die Theorie der doppeltperiodischen Functionen, deren Benutzung im Falle der ω_1, ω_2 ja so bequem ist, im allgemeinen Falle der η_1, η_2 kein einfaches Analogon hat. Im Gebiete der ω_1, ω_2 ist man in der That nun auch in der Lage, für $\log \Delta, \log(x_2 - \epsilon_2)$, etc. geschlossene Formeln anzugeben. Dieselben resultiren unmittelbar aus folgenden Productentwickelungen:

$$(3) \begin{cases} \Delta = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^{12} x \prod (1-x^m)^{24} & (\text{Mod. p. 154}), \\ x_2 - \epsilon_2 = \left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^2 \cdot 16 \cdot x^{1/2} \cdot \prod (1-x^m)^4 (1+x^m)^8 \\ x_3 - \epsilon_1 = \left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^2 \cdot \prod (1-x^m)^4 (1+x^{2m+1})^8 \\ \epsilon_1 - \epsilon_2 = \left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^2 \prod (1-x^m)^4 (1-x^{2m+1})^8 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{(Schwarz, Formel-} \\ \text{sammlung p. 37)}$$

Auch diese Formeln kann man nach Hurwitz l.c. aus der Theorie der Modulfunctionen allein ableiten. Hurwitz benutzt zu dem Zwecke die Summe $\sum \frac{1}{(m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2)^2}$, die nicht mehr absolut convergirt, und kommt eben dadurch zur Formel (3), zu nächst für Δ , dass er die Wertänderungen studirt, welche diese Summe bei Umordnung ihrer Glieder erleidet.

Neben diesen Formeln (1), (2), (3), die seit lange gekannt sind,

hat Kronecker neuerdings eine bemerkenswerthe andere gestellt, die wir gleichfalls kennen lernen müssen, da ja nicht ausgeschlossen ist, dass vielleicht gerade ihr Bildungsgesetz für die Theorie der $\Phi(\eta, \eta_2), \Psi, X$ nützlich sein möchte. Bemerken wir zuerst, dass $\frac{(m_1 w_1 + m_2 w_2)^v}{w_1^v} = \frac{1}{w_1^v}$.

$(m_1 w_1 + m_2 w_2)^v$ für beliebig ganzzahlige m_1, m_2 in der Halbebene w , mit der wir uns zu beschäftigen haben, auch dann eindeutig definiert werden kann, wenn v eine gebrochene Zahl sein sollte. In der That liegen ja die Verzweigungspunkte, welche $(m_1 w_1 + m_2 w_2)^v$ besitzt, bei $m_1 w_1 + m_2 w_2 = 0$, d. h. auf der Gränze der Halbebene; wir haben also nie Anlass, um dieselben herum zu laufen. Wir können z. B. $m_1 w_1 + m_2 w_2 = \rho e^{i\varphi}$ setzen und hier ρ auf das Intervall zwischen 0 und π einschränken und dann $(m_1 w_1 + m_2 w_2)^v$

unzweideutig als $\rho^v \cdot e^{i\varphi v}$ definieren. — Dies ist ein erster Gedanke, den Kronecker benutzt. Ein zweiter Gedanke von ihm ist, zwei Grössenpaare $w_1, w_2; w'_1, w'_2$ neben einander zu betrachten, welche simultan den Substitutionen $a w_1 + b w_2 / c w_1 + d w_2$ unterworfen werden, von denen aber das eine ($w'_1 / w'_2 = w_1 / w_2$) ebenso auf Werte w' der negativen Halbebene beschränkt bleibt, wie das andere auf Werte w der positiven Halbebene. — Kronecker betrachtet nun Summen folgender Art: (4) $\sum \frac{(w_1 w'_2 - w_2 w'_1)^v}{(m_1 w_1 + m_2 w_2)(m_1 w'_1 + m_2 w'_2)}$.

Setzen wir hier $(m_1 w_1 + m_2 w_2)(m_1 w'_1 + m_2 w'_2) = a m_1^2 + b m_1 m_2 + c m_2^2$, so können wir die Summe auch so schreiben:

$\sum \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a m_1^2 + b m_1 m_2 + c m_2^2} \right)^v$ und sehen, dass es sich eben um eine solche Summe handelt, wie Dirichlet sie in die Zahlentheorie eingeführt hat, nur dass bei Dirichlet die a, b, c reell sind, Kronecker sie aber complex nimmt (mit der einzigen Einschränkung, die über die Wurzeln w, w' der Gleichung $aw^2 +$

bw + c = 0 bereits gemacht wurde). In der That betrachtet Kronecker nun insbesondere, mit Dirichlet, den Fall $\nu = 1 + \rho$ und findet eine Formel folgender Art:

(5) $\Sigma \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac} \cdot i}{am^2 + b m + cm^2} \right)^{1+\rho} = \frac{1}{\rho} + A + B\rho + C\rho^2 + \dots$,
 wo die A, B, C, \dots Modulfunctionen sind, die simultan von den w, w' abhängen, und für die man also eben in dieser Formel (5) ein Bildungsgesetz hat. Hier sind nun die B, C, \dots bislang noch nicht untersucht, für A aber giebt Kronecker den Werth: (6) $A = c - \log \left((w_1, w_2 - w_2, w_1) \sqrt{\Delta(w, w_2)} \right) / \sqrt{\Delta(w_1, w_2)}$ (wo c numerisch) und hat also damit ein direktes Bildungsgesetz für $\log \Delta(w, w_2)$.

Nach diesem Vorberichte über die Bildungsgesetze, die man bis jetzt in der Theorie der elliptischen Modulfunctionen entdeckt hat, können wir das, was Poincaré für den allgemeinen Fall der η_1, η_2 geleistet hat, dahin bezeichnen: Er hat für die eindeutigen, eigentlich automorphen $F(\eta_1, \eta_2)$ Reihen aufgestellt, die den Eisenstein'schen Reihen für g_3, g_2 analog sind.

Wir bemerken gleich, was nun noch darüber hinaus anzustreben bleibt: Erstlich wird man versuchen, die Poincaré'schen Reihen in einfach unendliche Reihen umzuwandeln, welche nach $\left(\frac{\eta_1 \eta_a}{\eta_1 \eta_b}\right)^l$ resp. $\left(\frac{\eta_1 \eta_a}{\eta_1 \eta_b}\right)^m$ oder $\left(\frac{\eta_1 \eta_c}{\eta_1 \eta_c}\right)^n$ fortschreiten. dies würde dem Uebergang von den Formeln (7) zu den Formeln (2) entsprechen [pag. 77].

Zweitens muß man doch anstreben, allgemein die Fundamentalformen $\Phi(\eta, \eta_2), \Psi(\eta, \eta_2), X(\eta, \eta_2)$ selbst zu bilden. Wird da Hurwitz' Gebrauch solcher Reihen, die nicht absolut convergiren, oder Kronecker's Ansatz zum Ziele führen?

Doch referiren wir jetzt über Poincarés eigene Entwicklungen, wie er dieselben zuerst in den Comptes Rendus von 1881, dann im 19^{ten} Bande der Annales (1881) und endlich in fünf ausgeführten Abhandlungen in den Acta Mathematica bekannt gemacht hat [Bd. I (zwei Abh.) 1882, 83, Bd. III (1. Abh.) 1883, Bd. IV (1. Abh.) 1884, Bd. V (1. Abh.) 1884]. Poincaré behandelt dort die allgemeinsten linear automorphen Functionen einer Variablen. In dieser Hinsicht werden wir ihm hier natürlich nicht nachgehen, es bleibt das für die nächsten Semester vorbehalten. Wir beschränken uns vielmehr hier ausschliesslich auf Dreiecksfunctionen. Dabei ertheilen wir dem Repetate eine durchaus freie Form. wir kommen später noch auf den genaueren Vergleich mit Poincarés Schreibweise und Terminologie zurück, und bemerken in dieser Hinsicht zuvörderst nur, dass Poincaré keine "homogenen" Variablen η_1, η_2 , also auch keine "Formen" $F(\eta_1, \eta_2)$ hat, wodurch er Manches viel umständlicher bezeichnen muss, als wir es thun. Vor allen diesen Dingen ist zu nennen:

Der fundamentale Convergenzsatz,

dem wir folgende Form geben:

Möge die Substitutionsgruppe $\eta' = \frac{\alpha\eta + \beta\eta^k}{\delta\eta + \epsilon\eta^k}$ vorliegen. Wir bezeichnen die verschiedenen "äquivalenten" Punkte, welche durch dieselbe aus η hervorgehen, beziehungsweise mit η^k . Wir nehmen ferner an, $\alpha\delta - \beta\epsilon$ sei bereits = 1. Sei dann ζ irgend ein Punkt der η -Ebene, welcher weder mit einem der Punkte η^k zusammenfällt, noch auf dem Gränzkreise der η -Ebene liegt. Mit (η^k, ζ) bezeichnen wir die

Determinante $(\eta_1^k z_1 - \eta_2^k z_2) = (\alpha_k \eta_1 + \beta_k \eta_2) z_1 - (\gamma_k \eta_1 + \delta_k \eta_2) z_2$.

Dann hat man den Satz:

Die Reihe (1) $\sum^n \frac{1}{(\eta_k, z)^4}$ convergiert absolut.

Beim Beweise benutzen wir mit Poincaré die geometrische Anschauung (wie denn einmal nachdrücklich ausgesprochen sei, dass in der ganzen Theorie der automorphen Functionen ohne geometrische Anschauung kein Schritt gemacht werden kann). Wir werfen zunächst den Punkt z durch eine geeigneten Möbiustransformation nach $z = \infty$ setzen also $z_1 = 0, z_2 = 1$. In der neuen Figur ist dann der Gränzkreis der η -Ebene notwendig ein eigentlicher Kreis (keine gerade Linie); denn z sollte ja nicht auf dem Gränzkreis liegen. Dabei haben wir die doppelte Möglichkeit, dass die Dreieckstheilung der η -Ebene, auf die wir zu achten haben, im Inneren des Gränzkreises liegt oder im Aeusseren. Im letzteren Falle wird nur eine endliche Zahl verschiedener Dreiecke sich ins Unendliche erstrecken und die Gesamtheit der Punkte η^k im Endlichen liegen. Die Reihe aber, deren Convergenz darzutun ist, lautet

folgt: (2) $\sum^n \frac{1}{(\alpha^k \eta_1 + \beta^k \eta_2)^4}$. Wir werden die Convergenz (und sogar die „absolute“ Convergenz) derselben darzutun haben, sobald wir die Convergenz der Reihe der absoluten Beiträge $\sum^n \frac{1}{|\alpha^k \eta_1 + \beta^k \eta_2|^4}$ sicher gestellt haben. Diese letztere Reihe schreiben wir vorerst noch so

(3) $\frac{1}{|\eta_2^k|} \sum^n \frac{1}{|\alpha^k \eta_1 + \beta^k \eta_2|^4}$ und stellen nun folgende geometrische Überlegung an:

Wir beschreiben nun den Punkt η ein kleines Oberflächenelement $d\sigma$, und um alle äquivalenten Punkte η_k äquivalente $d\sigma_k$. Die Summe $\sum d\sigma_k$ wird dann, wie die Figur zeigt, jedenfalls endlich sein, und sogar unendlich klein wie $d\sigma$ im Vergleich zu dem endlichen Raume, der von den η -Dreiecken ein-



genommen wird, die sich nicht ins Unendliche ziehen.

Wir setzen dementsprechend $\sum d\sigma_n = C \cdot d\sigma$, wo C eine endliche Constante*. Nun folgt aber aus der Formel $\eta_n = \frac{\alpha^n \eta + \beta^n}{\gamma^n \eta + \delta^n}$ durch Differentiation $d\eta_n = \frac{d\eta}{(\delta_n \eta + \delta_n)^2}$, also für correspondirende Bogenelemente, die von η, η_n aufbauen: $ds_n = \frac{ds}{|(\delta_n \eta + \delta_n)^2|}$, und hieraus für unsere Oberflächenelemente $d\sigma, d\sigma_n$: $d\sigma_n = \frac{d\sigma}{|(\delta_n \eta + \delta_n)^4|}$. Daher $\sum d\sigma_n = C \cdot d\sigma = d\sigma \cdot \sum \frac{1}{|(\delta_n \eta + \delta_n)^4|}$ oder $\sum \frac{1}{|(\delta_n \eta + \delta_n)^4|} = C$, was zu beweisen war.

Die Reihe der absoluten Beträge convergirt, weil sie geometrisch durch die Summe der äquivalenten Flächenelemente $d\sigma_n$ veranschaulicht wird, welche aus $d\sigma$ vermöge der η -Substitutionen entstehen.

Ist hiermit die absolute Convergenz der Reihe (1) auf p. 83 bewiesen: (1) $\sum \frac{1}{(\eta_n, 3)^4}$, so folgert man leicht, dass man auch folgende Reihen convergiren (4) $\sum \frac{1}{(\eta_n, 3)^{2\varphi}}$, wo $\varphi \geq 2$, (5) $\sum \frac{1}{\psi_{\varphi}(\eta_n, \eta_n)}$, wo $\varphi \geq 2$, (6) $\sum \frac{1}{\psi_{\varphi}(\eta_n, \eta_n)}$, " " "

wo φ, ψ gewöhnliche rationale, ganze binäre Formen von η_1, η_2 von den trigonometrischen Graden sind und ψ der Bedingung genügen muß, weder für einen der Punkte η^n , noch für einen Punkt des Gränzkreises zu verschwinden.

Wegen ihrer absoluten Convergenz sind nun ersichtlich alle diese Summen (4), (5), (6) sind eindeutige, eigentlich automorphe Formen von η_1, η_2 , sofern wir noch sicher sein dürfen, dass dieselben nicht etwa identisch verschwinden. Hierüber werden wir jetzt nähere Ueberlegungen anzustellen haben.

Wir unterscheiden die Reihen (6), je nachdem sie im Bereiche Nr. 24/90 η überall den Charakter einer ganzen Function haben, oder
*) Genauer über die Abschätzung dieses C vgl. bei Poincaré in *Stud. I* (Zweite Abhandlung)

nicht, in holotypische und merotypische. Eine holotypische Reihe wird man sicher erhalten, wenn man Ψ_{v+2g} so wählt, dass es im Innern des Gränzkreises nirgendwo verschwindet (dass also die $v+2g$ Stellen $\Psi(\eta, \eta_2) = 0$ alle ausserhalb des Gränzkreises oder auf seiner Gränze liegen). Hat dagegen Ψ_{v+2g} im Innern des Gränzkreises Nullstellen, so werden diese, ebenso wie sämtliche mit ihnen äquivalente Stellen, allgemein zu reden, Unendlichkeitsstellen der Poincaréschen Reihe sein. Es ist allerdings der Fall denkbar, dass von den Nullstellen von Ψ_{v+2g} zwei oder mehrere von Hause aus mit einander äquivalent sind und sich dann bei der Summation (6) die in diese Stellen fallenden Unendlichkeitsstellen wechselseitig compensiren. Um dieser Möglichkeit zu entgehen, wollen wir festsetzen, dass die sämtlichen innerhalb des Gränzkreises gelegenen Nullstellen von Ψ_{v+2g} immer innerhalb des Ausgangsraumes gelegen sein sollen, d. h. innerhalb desjenigen Vierecks der η -Ebene, welches aus dem ersten schraffirten Dreiecke und einem seiner nicht schraffirten Nebendreiecke gebildet wird. Die zugehörige Summe (6) hat dann sicher merotypischen Charakter und verschwindet ben deshalb nicht identisch.

Dagegen tritt identisches Verschwinden bei holotypischen Reihen in zahlreichen Fällen notwendig ein, wie wir jetzt sehen wollen. Die allgemeine Gestalt einer eigentlich automorphen Form in x_1, x_2 ist im holotypischen Falle diese:

(1) $\sum C(x_a)^{\frac{\alpha}{2}} (x_b)^{\frac{\beta}{m}} (x_c)^{\frac{\gamma}{n}} f_{\delta}(x_1, x_2)$, wo die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nicht negative ganze Zahlen sind, die mit dem Grad R der Form in η, η_2 durch folgende Formeln verbunden sind:

$$(2) \begin{cases} \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{m} + \frac{\gamma}{n} + \delta = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1} \\ 2\alpha - R \equiv 0 \pmod{2l}, \\ 2\beta - R \equiv 0 \pmod{2m}, \\ 2\gamma - R \equiv 0 \pmod{2n}. \end{cases}$$

Soll nun eine solche Form durch die Summe (6), p. 86, dargestellt sein, so ist $K = -2g$ zu setzen; wir erhalten also:

$$(3) \begin{cases} \frac{\alpha + \delta}{e} + \frac{\beta + \delta}{m} + \frac{\gamma + \delta}{n} + (\delta - \delta) = 0, \\ \alpha + \delta \equiv 0 \pmod{e}, \\ \beta + \delta \equiv 0 \pmod{m}, \\ \gamma + \delta \equiv 0 \pmod{n}, \end{cases}$$

wodurch $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, wie man sieht (insofern doch $\alpha < e, \beta < m, \gamma < n$ vorausgesetzt werden kann) völlig bestimmt sind, so dass das Summenzeichen in (1) weggelassen werden kann. Wenn dieses Gleichungssystem für einen gegebenen Werte von g nach geeigneter Annahme der α, β, γ einen negativen Werth von δ liefert, muss jede holotypische Reihe vom Grade $-2g$ in η, η^2 identisch verschwinden.

Nehmen wir etwa das Beispiel $l, m, n = 2, 3, 7$. Wir erhalten aus (3): $21\alpha + 14\beta + 6\gamma + 42\delta = g$,

$$\alpha + \delta \equiv 0 \pmod{2},$$

$$\beta + \delta \equiv 0 \pmod{3},$$

$$\gamma + \delta \equiv 0 \pmod{7}.$$

Der kleinste ganzzahlige Werth von g , der hier ein brauchbares Lösungssystem gibt, ist offenbar $g = 6$, worauf $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 1, \delta = 0$ wird (es folgt weiter $g = 12$ mit $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 2, \delta = 0$; dann $g = 14$ mit $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 0, \delta = 0$ etc. etc.) Wir haben also beispielsweise: Alle holotypischen Reihen $\sum \frac{\eta^k}{\sqrt{v+2g}}$ für welche $2g = 4, 6, 8, 10$ ist, verschwinden im Falle $(2, 3, 7)$ identisch; ist aber $2g = 12$, so hat man es mit einer Form zu thun die von $(x\epsilon)^{1/2}$ nur um einen constanten Factor verschieden ist (wobei natürlich nicht ausgeschlossen ist, dass dieser constante Factor gegebenenfalls auch verschwindet, sogar gefragt werden kann, ob derselbe nicht möglicherweise immer verschwindet!)

Ohne hier auf den Zweifel einzugehen, der in den letzten Worten enthalten ist, werden wir nun folgendermassen weiter raisonnieren: Sind irgend zwei holotypische Reihen mit $4g = 12$ (immer im Falle 2, 3, 4) vorgelegt, so wird die eine etwa $\Sigma' = C'(x, c)^{1/2}$, die andere $\Sigma'' = C''(x, c)^{1/2}$ ergeben. Es ist dann $C''\Sigma' - C'\Sigma''$ notwendig = 0. Die entsprechende Ueberlegung, auf den allgemeinen Fall holotypischer Reihen angewandt, ergibt ersichtlich den Satz: Zwischen je $S+2$ holotypischen Summen vom Grade $-2g$ besteht notwendig eine lineare Relation. In der That enthält ja $f^S(x, x_1)$ nur $S+1$ linear unabhängige Glieder. — Es giebt also unendlich viele Verbindungen derartiger holotypischer Reihen, welche identisch null sind; wer garantiert uns dafür, dass nicht irgendwelche vorgelegte Reihe selbst zu den identisch verschwindenden gehört? Ob es überhaupt Reihen des Grades $-2g$ gibt, die nicht identisch verschwinden, — Es lässt sich das wohl nur beantworten, indem man die Poincaré'schen Reihen entsprechend der Umsetzung der Eisenstein'schen Reihen in solche nach $x = e^{2i\pi w}$ in Potenzreihen umsetzt, die nach irgendwelcher Grösse $\left(\frac{\eta}{\eta'}\right)$ fortschreiten; wir haben oben schon solche Umsetzungen postuliert (p. 21). So lange aber derartige Umsetzungen oder andere äquivalente Maassregeln nicht durchgeführt sind, ist mit den holotypischen Reihen offenbar wenig anzufangen.

Wir wenden uns also zum Falle der merotypischen Reihen. Und da ist das Schöne, dass wir eine einfachste Reihe hinschreiben können, die wir als Funktion der x_1, x_2 vollständig auszuwerten vermögen. Es sei ζ irgend ein Punkt im Inneren des η -Gebietes, $\eta_2(\eta, \eta_2)$ aber

η_2 soll derjenige Punkt sein, der zu ζ in Bezug auf den Grenzreis symmetrisch liegt.

eine cubische Form, welche wir einzig der Bedingung un-
 derwerfen, im Inneren des η -Gebietes überall $\neq 0$ zu sein
 (so dass also die 3 Nullstellen von ψ ausserhalb des η -Gebie-
 tes liegen). Dann ist die merodische Form, die wir betrach-
 ten wollen, diese: (4) $F(\eta, \eta_2) = \sum x \frac{\psi_3(3_1, 3_2)}{(\eta^x, 3) \cdot \psi_3(\eta^x, \eta_2^x)}$.

Der Factor $\psi_3(3_1, 3_2)$ [der sicher von 0 verschoben ist] wur-
 de dabei rechter Hand nur zugefügt, damit F auch von
 $3_1, 3_2$ in einfacher Weise abhängt; wir werden das erst
 weiter unten entwickeln.

Für $\eta = 3$ wird F offenbar unendlich wie $\frac{1}{(\eta, 3)}$. Daher
 verschwindet es jedenfalls nicht identisch. Um jetzt sei-
 ne Abhängigkeit von x_1, x_2 zu bestimmen, setzen wir
 ganz ähnlich wie auf p. 88. $F = \frac{(xa)^{\frac{x}{l}} (xb)^{\frac{x}{m}} (xc)^{\frac{x}{n}} \psi(x_1, x_2)}{(\eta^x, 3) \cdot \psi_3(\eta^x, \eta_2^x)}$,
 wo wir rechter Hand, um den Unendlichkeitsstellen
 von F gerecht zu werden, gleich die Determinante (x_2)
 in den Nenner gesetzt haben. Wir haben dann den
 Formeln (3) entsprechend das Gleichungssystem:
 $\frac{\alpha+x}{l} + \frac{\beta+x}{m} + \frac{\gamma+x}{n} + \delta = 3; \alpha+x \equiv 0 \pmod{l}, \beta+x \equiv 0$
 $\pmod{m}, \gamma+x \equiv 0 \pmod{n}$, und dieses führt unmittel-
 bar zu dem Lösungssystem: $\alpha = l-x, \beta = m-x, \gamma = n-x, \delta = 0$.
 Wir finden so die Formel:

(5) $F(\eta, \eta_2) = C \cdot \frac{(xa)^{\frac{l-x}{l}} (xb)^{\frac{m-x}{m}} (xc)^{\frac{n-x}{n}}}{(\eta^x, 3) \cdot \psi_3(\eta^x, \eta_2^x)}$, unter C eine
nicht verschwindende Grösse verstanden, deren Abhän-
gigkeit von den Coefficienten des ψ und den $3_1, 3_2$ zu un-
tersuchen bleibt.

Wir beweisen jetzt den einfachen Satz: C ist von den Coef-
ficienten des ψ überhaupt unabhängig.

Bilde man nämlich die Summe F erstlich mit ψ , dann
 eine analoge Summe F' mit Hülfe von ψ' , so wird F
 $: F' = C : C'$ von η unabhängig sein. Wir dürfen also,

um diesen Quotienten zu bestimmen, dem η irgendwelchen speciellen Werth (innerhalb des Gränzkreises) beilegen. Nehmen wir aber $\eta = 3$, so wird F unendlich wie $\frac{1}{(\eta 3)}$, F' ebenfalls wie $\frac{1}{(\eta, 3)}$, der Quotient $F:F'$ ist dann also gleich 1. Deshalb ist er allgemein = 1.

Ein nicht minder schönes Resultat kommt, wenn wir jetzt die Abhängigkeit des ξ , resp. des F von z_1, z_2 in Betracht ziehen. Ich will der grösseren Deutlichkeit halber F jetzt als Form sowohl der η_1, η_2 , wie der z_1, z_2 bezeichnen, wobei ich beidemal den Grad des F anmerke; wir haben so die Bezeichnung: $F\left(\frac{-4}{\eta_1, \eta_2}; \frac{+2}{z_1, z_2}\right)$.

Ich sage nunmehr: F ist eine eigentlich automorphe Form nicht nur von η, η_2 , sondern auch von z_1, z_2 .

Um dies einzusehen, bezeichnen wir mit $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ irgendwelche Substitution unserer Gruppe. Wenn wir dann in (4) für η_1^k, η_2^k überall schreiben: $\begin{cases} \alpha \eta_1^k + \beta \eta_2^k \\ \gamma \eta_1^k + \delta \eta_2^k \end{cases}$, so haben wir damit den Werth von F nicht geändert, denn es bedeutet das nur eine Umordnung der einzelnen Summenglieder. Wir dürfen also schreiben:

$$F(\eta_1, \eta_2; z_1, z_2) = \sum \frac{\Psi_3(z_1, z_2)}{\begin{vmatrix} \alpha \eta_1^k + \beta \eta_2^k & z_1 \\ \gamma \eta_1^k + \delta \eta_2^k & z_2 \end{vmatrix} \cdot \Psi_3(\alpha \eta_1^k + \beta \eta_2^k, \gamma \eta_1^k + \delta \eta_2^k)}$$

Jetzt ersetzen wir in dieser Formel z_1, z_2 auch ihrerseits durch $\begin{cases} \alpha z_1 + \beta z_2 \\ \gamma z_1 + \delta z_2 \end{cases}$. So kommt:

$$F(\eta_1, \eta_2; \alpha z_1 + \beta z_2, \gamma z_1 + \delta z_2) = \sum \frac{\Psi_3(\alpha z_1 + \beta z_2, \gamma z_1 + \delta z_2)}{\begin{vmatrix} \eta_1^k z_1 \\ \eta_2^k z_2 \end{vmatrix} \cdot \Psi_3(\alpha \eta_1^k + \beta \eta_2^k, \gamma \eta_1^k + \delta \eta_2^k)}$$

denn aus der Determinante im Nenner hebt sich jetzt $\alpha \delta - \beta \gamma = 1$ als Factor heraus. Aber die rechts stehende Summe unterscheidet sich nur dadurch von der ursprünglichen Summe, durch die wir in (4) das F definiert hatten, dass an Stelle der cubischen Form $\Psi_3(y_1, y_2)$ die andere Ψ_3

$(\alpha \eta_1 + \beta \eta_2, \gamma \eta_1 + \delta \eta_2)$ getreten ist, die ebensowenig wie ψ_3 von (η_1, η_2) selbst im Inneren des Gränzkreises verschwindet, da sie aus $\psi_3(\eta_1, \eta_2)$ durch eine Substitution unserer Gruppe hervorgeht. Aber eine solche Änderung des ψ_3 ist wie wir wissen, auf den Werth von F ohne Einfluss. Deshalb ist: (b) $F(\eta_1, \eta_2; \alpha \zeta_1 + \beta \zeta_2, \gamma \zeta_1 + \delta \zeta_2) = F(\eta_1, \eta_2; \zeta_1, \zeta_2)$, was zu beweisen war.

Wir werden jetzt $C = (za)^{\frac{\alpha}{2}} (zb)^{\frac{\beta}{m}} (zc)^{\frac{\gamma}{n}} \cdot f_{\delta}(z_1, z_2)$ setzen dürfen, und die nicht negativen ganzen Zahlen $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ wieder aus einem System von Bedingungen bestimmen, das dem auf p. 92 betrachteten analog ist. Dasselbe lautet jetzt:

$$\frac{\alpha' - 1}{2} + \frac{\beta' - 1}{m} + \frac{\gamma' - 1}{n} + \delta' = 0,$$

$$\alpha' - 1 \equiv 0 \pmod{2},$$

$$\beta' - 1 \equiv 0 \pmod{m},$$

$$\gamma' - 1 \equiv 0 \pmod{n}, \quad \text{und liefert einfach:}$$

$$\alpha' = 1, \beta' = 1, \gamma' = 1, \delta' = 0. \quad \text{---}$$

Damit ist also die Abhängigkeit des C von z, z_2 vollkommen bestimmt, und wir haben, unter C eine unnumerische Constante verstanden, die schöne Erdformel:

$$(4) F(\eta_1, \eta_2; \zeta_1, \zeta_2) = C' \cdot \frac{(xa)^{\frac{\alpha-1}{2}} (xb)^{\frac{\beta-1}{m}} (xc)^{\frac{\gamma-1}{n}} (za)^{\frac{1}{2}} (zb)^{\frac{1}{m}} (zc)^{\frac{1}{n}}}{(xz)}$$

in welcher die beiden automorphen Formen vom Grade -4 und $+2$, auf die wir, als die einfachsten, bereits oben die Aufmerksamkeit lenkten, sozusagen mit einander verschmolzen erscheinen. — Wir sind auf Grund derselben offenbar in der Lage, beliebige rationale Functionen von x oder von z eindeutig in η , bez. ζ auszudrücken, d. h. die allgemeinsten automorphen Functionen von η oder ζ zu bilden; denn jede solche Func-

tion setzt sich doch zusammen, indem man im Zähler und Nenner eine Anzahl von Factoren (x, z) mit einander multiplicirt.

Dies etwa ist der Punkt, bis zu welchem Poincaré - Do. 27. 1. 1900 die Theorie der Dreiecksfunctionen gefördert hat (nur dass bei ihm alle diese Entwicklungen in viel allgemeinere, aber darum auch unbestimmtere Ansätze eingeschlossen sind). Wir besprechen im Anschluss daran noch drei besondere Punkte.

1. Ueber das Verhältniss der Poincaréschen Reihen zu den Eisenstein'schen. Wenn wir uns auf diejenigen Poincaréschen Reihen beschränken, welche auf p. 86 unter (4) mitgetheilt sind, nämlich

(1) $\sum \frac{1}{(2k, 2)} z^k$, $\rho \geq 2$ so sind die den Eisenstein'schen Reihen (2) $\sum \frac{1}{(m_1 w_1 + m_2 w_2)^2 \rho}$, $\rho \geq 2$ ja in der That sehr analog. Trotzdem bestehen wesentliche Unterschiede, die wir hier hervorheben wollen.

Die bei (2) in Betracht kommenden Modulsubstitutionen lauten

(3) $\begin{cases} w_1' = a w_1 + b w_2 \\ w_2' = c w_1 + d w_2 \end{cases}$ } Zahlen der Determinante 1; wollten wir dementsprechend eine Reihe (1) aufstellen, so sollten wir schreiben: (4) $\sum \frac{1}{(c w_1 + d w_2)^2 \rho}$, wo die c, d alle Paare relativ primen Zahlen zu durchlaufen haben. Aber jeder dieser Paare sollte zugleich so oft in (4) auftreten, als es an einer Substitution (3) participirt. Letzteres geschieht nun in jedem Falle unendlich oft, denn ist $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ eine Modulsubstitution, so ist auch $\begin{vmatrix} a+Kc & b+Kd \\ c & d \end{vmatrix}$ bei beliebigem ganzzahligem K eine solche. Es müsste also in (4) jedes Glied unendlich oft geschrieben werden, so dass (4) jedenfalls nicht convergirt. Eine unmittelbare

Uebertragung des Bildungsgesetzes (1) auf den Fall der Modulfunctionen ist also jedenfalls unstatthaft. Diese Nicht-Convergenz von (4) widerspricht übrigens auch gar nicht dem, was wir früher über die Convergenz von (1) behauptet hatten, denn in der w -Ebene haben wir eine gerade Linie als Gränzcurve, während wir bei der Aufstellung von (1) ausdrücklich voraussetzen, die Gränzcurve sei ein eigentlicher Kreis. — Natürlich können wir jetzt hinterher die Reihe (4) sehr leicht zu einer convergenten machen (die dann eine automorphe Form von w_1, w_2 , d. h. eine Modulform vorstellt), indem wir festsetzen, bei (4) solle jedes Zahlenpaar c, d nur einmal vorkommen. Und mit der so verstandenen Reihe (4) steht nun Eisenstein's Reihe (2) in einfacher Beziehung. Wir können nämlich die Glieder von (2) nach dem grössten gemeinsamen Theiler ordnen, δ , den m_1 und m_2 mit einander gemein haben mögen. Wir finden so: (5) $\sum' \frac{1}{(m_1 w_1 + m_2 w_2)^\delta} = \sum \frac{1}{\delta^2 \delta} \cdot \sum' \frac{1}{(c w_1 + d w_2)^{\delta \delta}}$, die Eisenstein'sche Reihe unterscheidet sich also von der modificirten Reihe (4) nur durch den constanten Factor $\sum \frac{1}{\delta^2 \delta}$. [Vergl. auch Fraussenberger in Fed. 20 der math. Annalen].

2. Ueber Poincaré's eigene Bezeichnungsweise.

Poincaré bringt alle seine Entwicklungen in nicht homogener Form, was wenig zweckmässig scheint. Um seine Bezeichnung zu erhalten, schreiben wir etwa der Reihe nach: (1)
$$F(\eta_1, \eta_2) = \sum \frac{F_v(\eta_1^k, \eta_2^k)}{v_{v+2\delta}(\eta_1^k, \eta_2^k)}$$

$$= \sum \frac{F_v(\eta_1^k, \eta_2^k) \cdot (\delta^k \eta_1 + \delta^k \eta_2)^{2\delta}}{v_{v+2\delta}(\eta_1^k, \eta_2^k)} \cdot \frac{1}{(\delta^k \eta_1 + \delta^k \eta_2)^{2\delta}}$$

$$= \sum H(\eta^k) \cdot \frac{1}{(\delta^k \eta_1 + \delta^k \eta_2)^{2\delta}},$$
 und H irgendwelche rationale Function verstanden, $= \frac{1}{\eta_2^{2\delta}} \cdot \theta(\eta)$, wo $\theta(\eta)$ (Poincaré's Thetafunction) durch die $\frac{1}{\eta_2^{2\delta}}$ Summe definiert ist:

$$(2) \theta(\eta) = \sum \mathcal{H} \left(\frac{\alpha \eta + \beta}{\gamma \eta + \delta} \right) \cdot \frac{1}{(\gamma \eta + \delta)^2} \cdot \eta. \text{ Nun ist}$$

$$(3) \mathcal{F}(\alpha \eta_1 + \beta \eta_2, \gamma \eta_1 + \delta \eta_2) = \mathcal{F}(\eta_1, \eta_2) \text{ und}$$

$$\mathcal{F}(\alpha \eta_1 + \beta \eta_2, \gamma \eta_1 + \delta \eta_2) = \frac{1}{(\gamma \eta_1 + \delta \eta_2)^2} \cdot \theta \left(\frac{\alpha \eta_1 + \beta}{\gamma \eta_1 + \delta} \right).$$

Daher kommt für das θ als Functionalgleichung:

$$(4) \theta \left(\frac{\alpha \eta + \beta}{\gamma \eta + \delta} \right) = (\gamma \eta + \delta)^2 \cdot \theta(\eta). \text{ Eben dieser Gleichung}$$

halber, die gewissermassen an das Verhalten der Theta-Reihen in der Theorie der mehrfach periodischen Functionen erinnert, hat Poincaré den Buchstaben θ für die Reihen (4) gewählt.

3. Bezugnahme auf die Theorie der Abel'schen Functionen.

So schön die Formel (7) auf p. 95 sein mag, so wird man doch an der Forderung festhalten, für $\mathcal{F}(\eta_1, \eta_2)$, $\mathcal{V}(\eta_1, \eta_2)$, $\mathcal{K}(\eta_1, \eta_2) = \mathcal{V}(x_a)$, $\mathcal{V}(x_b)$, $\mathcal{V}(x_c)$ directe Bildungsgesetze zu verlangen.

In der Theorie der elliptischen Modulfunctionen hat man bez. Bildungsgesetze, wie wir schon bemerkten, zovörderst

aus der Theorie der doppelperiodischen Functionen gezogen. Man kann diese Beziehung folgendermassen dar-

stellen: Die w_1, w_2 der ell. Modulfunctionen sind die Perioden des elliptischen Integrals erster Gattung

$$u = \int \frac{(z dz)}{\sqrt{z_1(z_1 - z_2) z_2(z_1 - \kappa^2 z_2)}}; \text{ die Theorie der doppelperi-}$$

odischen Functionen ent-

steht, wenn man nicht nur die Perioden, sondern beliebige Werthe dieses Integrals u in Betracht zieht und dementsprechend nicht nur κ^2 als Function von w_1, w_2 , sondern z und κ^2 als Functionen von $u; w_1, w_2$ in Betracht zieht.

In dieser Theorie der doppelperiodischen Functionen hat man sodann als vorzügliches Mittel der analytischen Darstellung Jacobis Theta-Reihen, aus ihnen erwachsen historisch genommen alle die Formeln, die man in der The-

orie der reinen Modulfunctionen gebraucht, sozusagen als Nebenproduct. Es ist, als wenn man die Verhältnisse einer ebenen Figur dadurch der Anschauung näher rückt, dass man dieselbe als Projection einer Raumfigur ansieht. Einen ganz ähnlichen Ansatz kann man nun im allgemeinen Falle unserer η, η_2 machen. In der That wissen wir, dass unsere $\eta_1(\lambda, \mu, \nu, x), \eta_2(\lambda, \mu, \nu, x)$ gerade als Perioden des folgenden Integrals definiert werden können:

$$\int (z a)^{\frac{-1+\lambda-\mu-\nu}{2}} (z b)^{\frac{-1+\mu-\nu+\lambda}{2}} (z c)^{\frac{-1+\nu-\lambda-\mu}{2}} (z x)^{\frac{-1+\lambda+\mu+\nu}{2}} (z d_1 z_2)$$

und wenn wir hier $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{m}, \nu = \frac{1}{n}, \lambda + \mu + \nu < 1$ setzen, so ist dies ein Abel'sches Integral erster Gattung. Man entwickle jetzt die Theorie der zugehörigen Abel'schen Functionen und stelle insbesondere die bezüglichen Theta-Reihen auf. Es ist zu erwarten, dass man die Formeln erhält, die specialisirt in der That $\Phi(\eta, \eta_2), \Psi(\eta, \eta_2), \chi(\eta, \eta_2)$ ergeben. Beim Versuche der Durchführung wird man sich natürlich zunächst auf solche Fälle Abel'scher Integrale beschränken, deren Theorie bereits hinreichend bearbeitet ist, also etwa auf die Fälle $p = 2, 3$. Beispielsweise wird $p = 2$ für $\lambda = \frac{1}{3}, \mu = 0, \nu = 0$.

Weitere Bildungsgesetze: Homomorphe Formen.

Mi. 3. 12. 9

Wie wir schon im vorigen Semester lernten, ist nicht nur x , oder eine beliebige rationale Function $v(x)$ eindeutig in $\eta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{m}, \frac{1}{n}, x\right)$, sondern auch jede η -Function der Form $\eta\left(\frac{x}{2}, \frac{s}{m}, \frac{t}{n}, x\right)$, unter x, s, t ganze Zahlen verstanden. Indem wir α in seiner Ebene irgend welchen geschlossenen Weg durchlaufen lassen, möge das ursprüngliche η in $\frac{\alpha}{\beta} \frac{\eta+\beta}{\eta+\delta}$ übergehen; das neue η , das wir der Kürze halber η' nennen wollen, geht dann seinerseits etwa in $\frac{\alpha'}{\beta'} \frac{\eta'+\beta'}{\eta'+\delta'}$ über. Offenbar ist das Sachverhältniss hier dies, dass jeder Substitution $\left(\frac{\alpha}{\beta} \frac{\eta+\beta}{\eta+\delta}\right)$ des η eine bestimm-

to Substitution $\begin{vmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{vmatrix}$ des η' entspricht (was aber keineswegs umkehrbar ist), und dass der Aufeinanderfolge zweier Substitutionen von η die Aufeinanderfolge der entsprechenden Substitutionen des η' correspondirt. Wir wollen dementsprechend η' eine (eindeutige) homomorphe Function von η nennen, auch von den beiden Gruppen sagen: sie seien homomorph einander zugeordnet. Für das in Rede stehende Verhältniss zweier Gruppen hat zwar C. Jordan eine andere Ausdrucksweise eingeführt: er nennt sie isomorph, auch wenn jedem $\begin{vmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{vmatrix}$ unendlich viele $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ zugehören sollten, es scheint mir aber besser, den Ausdruck Isomorphismus, wenigstens in der Hauptsache, auf den Fall einzuschränken, wo sich die $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ und $\begin{vmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{vmatrix}$ wechselseitig eindeutig entsprechen (was C. Jordan „holodrischen Isomorphismus“ nennt), und im allgemeineren Falle von Homomorphismus zu reden. Natürlich haben wir gegenwärtig mit einem Homomorphismus zu thun, der von der einen Seite eindeutig ist.

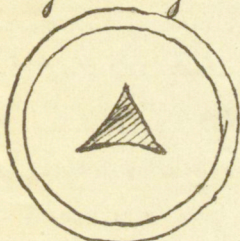
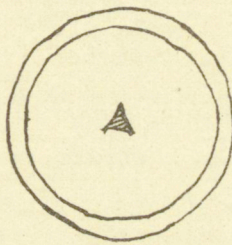
Es erhebt sich jetzt das naturgemässe Problem: überhaupt homomorphe Functionen zu bilden, und dann insbesondere η' durch η darzustellen. Mit dem allgemeinen Probleme beschäftigt sich Poincaré in Acta V, hat aber dabei, soviel ich sehe, einen wesentlichen Punkt ganz übersprungen, wie noch weiter hin genauer anzugeben sein wird. Indem wir seine Ideen aufnehmen, aber in selbständiger Form zur Geltung bringen, kommt es uns zunächst durchaus nicht auf Allgemeinheit, wohl aber auf möglichste Durchsichtigkeit und Deutlichkeit der Entwicklungen an. Wir beschränken uns daher nicht nur auf Dreiecksfunctionen son-

dem betrachten auch bei ihnen nur specielle Fälle. Insbesondere wollen wir gleich hier annehmen: l, m, n seien bez. durch r, s, t theilbar. Wir setzen: $l = r l', m = s m', n = t n'$ und erhalten so für unser η' die Bezeichnung $\eta'(\frac{1}{r l'}, \frac{1}{s m'}, \frac{1}{t n'}, x)$. Es hat dies zur Folge, dass wir auch in der η' -Ebene (wie in der η -Ebene) eine Schaar von Dreiecken haben, die sich bequem neben einander legen, so dass wir ihre Gesamtheit ohne weiteres überblicken können. - Ich will ferner annehmen, unsere η, η' seien beide von der dritten Art, es sei also nicht nur $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1$, sondern auch $\frac{1}{l'} + \frac{1}{m'} + \frac{1}{n'} < 1$.

Dieser Theil unserer Vereinbarung geschieht nur im Interesse der Darstellung; wir werden später gelegentlich davon absehen.

Wir wollen jetzt in der η und der η' -Ebene die beidenfünserer Annahme nach (vorhandenen) Gränzkreise mit dem um den Nullpunkt herum beschriebenen Einheitskreise zusammenfallen lassen, und die Substitutionen $\begin{vmatrix} x & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ so mit einem Index k nummeriren, dass ich das Dreieck um $\eta = 0$ als Ausgangsdreieck nehme, dann zuerst die Dreiecke betrachte, welche sich um das Ausgangsdreieck herumlegen, etc. etc. Ich behaupte dann: Die absoluten Werthe der $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \delta_k$ wachsen rascher mit zunehmendem k an, als die entsprechenden absoluten Werthe der $\alpha'_k, \beta'_k, \gamma'_k, \delta'_k$. Man erkennt dies sofort, wenn man beiderseits, in der η' - und in der η -Ebene, auf den Gränzkreis eine Nicht-euklidische Maassbestimmung gründet. Im Sinne dieser Maassbestimmung ist der Inhalt eines Dreiecks mit den Winkeln $\lambda \pi, \mu \pi, \nu \pi = \text{Const.} (-\lambda - \mu - \nu + 1)$, also

der Inhalt des Fundamentaldreiecks der η -Ebene C .
 $(1 - \frac{1}{r} - \frac{1}{m} - \frac{1}{n})$, des Fundamentaldreiecks der η' -Ebene
 $C(1 - \frac{1}{r'} - \frac{1}{m'} - \frac{1}{n'})$. Das Dreieck der η -Ebene ist also,
nicht euklidisch gesprochen, grösser als das der η' -Ebene.
 Jetzt zeichne man beiderseits um den Nullpunkt herum
 einen Kreis, dessen Radius nur wenig kleiner als 1 ist,
 der sich also vom Gränzkreise der jedesmaligen Ebene nur
 ganz wenig unterscheidet:

 η -Ebene η' -Ebene

Nur werden sofort sagen: Die Anzahl der Dreiecke linker
Hand, welche innerhalb dieses Hilfskreises liegen oder doch
von seiner Peripherie getroffen werden, ist wesentlich klei-
ner, als die Anzahl der Dreiecke derselben Eigenschaft rech-
ter Hand: und dies um so mehr, als nicht nur das einzel-
 ne Dreieck rechter Hand kleineren Flächeninhalt hat als
 das Dreieck linker Hand, sondern auch einer grösseren
 Anzahl von Dreiecken linker Hand immer nur dasselbe
 Dreieck rechter Hand entspricht. Hiernach können
 wir für einen gegebenen Hilfskreis K so gross nehmen,
 dass wir linker Hand ein Dreieck haben, welches ganz
 in den engen Raum zwischen Hilfskreis und Gränzkreis
 eingeschlossen ist, rechter Hand aber ein Dreieck, welches
 noch innerhalb des Hilfskreises liegt, bez. seiner Peripherie
 begegnet. Auf solche Weise überzeugen wir uns:
Bei wachsendem K werden die Dreiecke linker Hand für

Euklidische Maus.-bestimmung rascher & klein, als die
entsprechenden Dreiecke rechter Hand.

Wir gränzen jetzt links und rechts um den Nullpunkt
oder sonst um eine Stelle $\eta = \eta'$ herum dasselbe Flächen-
element $dO = dO'$ ab und unterwerfen es der Substitu-
tion $\left| \begin{smallmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ \gamma_k & \delta_k \end{smallmatrix} \right|$, beziehungsweise $\left| \begin{smallmatrix} \alpha'_k & \beta'_k \\ \gamma'_k & \delta'_k \end{smallmatrix} \right|$. Wir erhalten so
zwei neue Flächenelemente $dO''_k = \frac{dO}{|\gamma_k \eta + \delta_k|^{1/4}}$, $dO'_k = \frac{dO'}{|\gamma'_k \eta + \delta'_k|^{1/4}}$.
Hier wird $dO''_k < dO'_k$ sein müssen, weil überhaupt das Drei-
eck, von welchem dO''_k einen aliquoten Teil ausmacht, in
stärkerem Maasse verkleinert worden ist, als das Drei-
eck, in welchem dO'_k liegt. Daher ist also (1) $|\gamma_k \eta + \delta_k|^{1/4} >$
 $|\gamma'_k \eta' + \delta'_k|^{1/4}$ und wenn wir die vierte Wurzel ziehen und $\eta = \eta' = 0$
setzen: (2) $|\delta_k| > |\delta'_k|$, was die erste der zu beweisenden
Ungleichungen ist. - Die zweite bekommen wir, wenn
wir $\eta = \eta' = \infty$ nehmen. In der That bleibt ja die Ueber-
legung, durch die wir (1) bewiesen haben, auch richtig,
wenn wir mit Elementen dO''_k , dO'_k operiren, die aus-
serhalb der Gränzkreise liegen und dann bei wachsen-
dem k sich von aussen auf den Gränzkreis zu drängen.
Setzen wir aber in (1) $\eta = \eta' = \infty$, so kommt: (3) $|\gamma_k| > |\gamma'_k|$.
Man beachte jetzt, dass bei wachsendem k $\lim \frac{|\alpha_k \eta + \beta_k|}{|\gamma_k \eta + \delta_k|}$
sowohl wenn wir von $\eta = 0$, wie wenn wir von $\eta = \infty$ aus-
gehen, = 1 sein muss, indem wir ja beidemal mit wach-
sendem k dem Gränzkreise näher und näher kommen.
Also $\lim \alpha_k = \lim \gamma_k$, $\lim \beta_k = \lim \delta_k$.
In der Ebene η' aber wird der entsprechende Punkt, der aus
 $\eta' = 0$ hervorgeht, vielleicht nicht am Gränzkreise, doch je-
denfalls im Inneren desselben liegen, und ebenso der ent-
sprechende Punkt, der aus $\eta' = \infty$ entspringt, wenn nicht am
Gränzkreise, so jedenfalls in dessen Aussenem. Daher folgt:

$\lim |\alpha'_k| \leq \lim |\delta'_k|$, $\lim |\beta'_k| \leq \lim |\delta'_k|$. Vergleichen wir dies
 mit (2), so kommt jedenfalls: (4) $|\beta_k| > |\beta'_k|$. Um endlich die
 letzte Ungleichheit zu begründen: (5) $|\alpha_k| > |\alpha'_k|$, benutzt
 man wohl am einfachsten, dass die inverse Substitution
 zu $\frac{\alpha_k \eta + \beta_k}{\gamma_k \eta + \delta_k}$, also $\frac{-\delta_k \eta + \beta_k}{\gamma_k \eta - \alpha_k}$, die gleichen Eigenschaf-
 ten besitzen wird, wie diese selbst, so dass man der Gleich.
 (1) entsprechend für wachsende k erhält: (6) $|\delta_k \eta - \alpha_k| > |\delta'_k \eta - \alpha'_k|$,
 worauf man für $\eta = \eta' = 0$ das gewünschte Resultat erhält.

Nach diesen Vorbemerkungen greifen wir nun die Auf-
 gabe, η' durch η auszudrücken, so an, dass wir sie in's
Binäre übersetzen!

Wir müssen dabei mit einer gruppentheoretischen
 Untersuchung beginnen (und das ist eben der Punkt,
 den Poincaré überspringt). Der Gruppe $|\frac{\alpha}{\gamma} \frac{\beta}{\delta}|$ entspricht
 die Gruppe $|\frac{\alpha'}{\gamma'} \frac{\beta'}{\delta'}|$ nicht nur homomorph, sondern auch
eindeutig. Indem wir nun zu homogenen Variabe-
 len gehen, spaltet sich jede Substitution $\frac{\alpha \eta + \beta}{\gamma \eta + \delta}$ in zwei
 homogene Substitutionen $\left\{ \begin{array}{l} +(\alpha \eta_1 + \beta \eta_2) \\ +(\gamma \eta_1 + \delta \eta_2) \end{array} \right\}$ und $\left\{ \begin{array}{l} -(\alpha \eta_1 + \beta \eta_2) \\ -(\gamma \eta_1 + \delta \eta_2) \end{array} \right\}$,
 ebenso jede Substitution $\frac{\alpha' \eta + \beta'}{\gamma' \eta + \delta'}$ in zwei homogene. Die
 beiden solcherweise entstehenden homogenen Gruppen
 sind also doppelt so gross als die entsprechenden nicht
 homogenen. Wird es unter diesen Umständen nun doch
 möglich sein, die homogenen Gruppen in der Weise ho-
momorph auf einander zu beziehen, dass jeder homogenen
Operation $|\frac{\alpha}{\gamma} \frac{\beta}{\delta}|$ eine und nur eine homogene Operation
 $|\frac{\alpha'}{\gamma'} \frac{\beta'}{\delta'}|$ entspricht? Das ist die fundamentale Frage.

Zu ihrer Erledigung müssen wir auf die erzeugenden Ope-
 rationen der Gruppen, bez. auf die Relationen, welche
 zwischen diesen erzeugenden Operationen Statt haben,
 zurückgehen.

¹⁾ Wir haben dabei angenommen, dass von vornherein $(\alpha \delta - \beta \gamma) = 1$, $(\alpha' \delta' - \beta' \gamma')$
 $= 1$ genommen sei!

Seien in der η -Ebene η_a, η_b, η_c die drei Ecken des Ausgangsdreiecks, $\bar{\eta}_a, \bar{\eta}_b, \bar{\eta}_c$ seien die ihnen bezüglich des Gränzkreises zugeordneten Spiegelpunkte. Dann sind die erzeugenden Operationen der inhomogenen Gruppe $\frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}$ die folgenden gewesen:

$$(1) \begin{cases} (A) \frac{z-\eta_a}{z-\bar{\eta}_a} = e^{\frac{i\pi}{2}} \cdot \frac{\eta-\eta_a}{\eta-\bar{\eta}_a}, \\ (B) \frac{z-\eta_b}{z-\bar{\eta}_b} = e^{\frac{i\pi}{m}} \cdot \frac{\eta-\eta_b}{\eta-\bar{\eta}_b}, \\ (C) \frac{z-\eta_c}{z-\bar{\eta}_c} = e^{\frac{i\pi}{n}} \cdot \frac{\eta-\eta_c}{\eta-\bar{\eta}_c}, \end{cases}$$

und zwischen ihnen bestanden die Relationen $(A) CBA=1, A^2=1, B^m=1, C^n=1$. genau dieselben Relationen müssen natürlich zwischen den correspondirenden A', B', C' der Variablen η' bestehen, denn sonst könnten wir überhaupt die beiden Substitutionsgruppen nicht „homomorph und von der einen Seite eindeutig“ einander zuordnen. In der That ist ja auch von Hause aus $C'B'A'=1$; andererseits $A'^2=1, B'^m=1, C'^n=1$, was potenziert $A'^2=1, B'^m=1, C'^n=1$ gibt, wie es sein sollte.

Wir spalten jetzt die (A), (B), (C) in homogene Substitutionen, was auf 2 Weisen jedesmal geht, die wir durch \pm als Indese unterscheiden. Wir bekommen:

$$(3) \begin{cases} (A^\pm) \begin{cases} z_1 - \eta_a z_2 = \pm e^{\frac{i\pi}{2}} (\eta_1 - \eta_a \eta_2), \\ z_1 - \bar{\eta}_a z_2 = \pm e^{-\frac{i\pi}{2}} (\eta_1 - \bar{\eta}_a \eta_2); \end{cases} \\ (B^\pm) \begin{cases} z_1 - \eta_b z_2 = \pm e^{\frac{i\pi}{m}} (\eta_1 - \eta_b \eta_2), \\ z_1 - \bar{\eta}_b z_2 = \pm e^{-\frac{i\pi}{m}} (\eta_1 - \bar{\eta}_b \eta_2); \end{cases} \\ (C^\pm) \begin{cases} z_1 - \eta_c z_2 = \pm e^{\frac{i\pi}{n}} (\eta_1 - \eta_c \eta_2), \\ z_1 - \bar{\eta}_c z_2 = \pm e^{-\frac{i\pi}{n}} (\eta_1 - \bar{\eta}_c \eta_2); \end{cases} \end{cases}$$

und mögen jetzt etwa A^+, B^+, C^+ als erzeugende Operationen der homogenen Gruppe herausuchen. Welches sind die Relationen, die den Gln. (3) entsprechend zwischen ihnen bestehen? Wir bezeichnen abkürzend die Substitution:

(4) $\left\{ \begin{matrix} z_1 = -\eta_1 \\ z_2 = -\eta_2 \end{matrix} \right\}$ mit \underline{N} . So haben wir offenbar zunächst:

(5) $(A^+)^e = N, (B^+)^m = N, (C^+)^n = N$. Was aber ist

$C^+ B^+ A^+$? Man könnte zunächst zweifeln, ob es 1 oder N ist. Aus speziellen Fällen aber folgt, dass es nur $= N$ sein kann. Wir haben also: (6) $C^+ B^+ A^+ = N$. Betrachten wir jetzt die homogenen Substitutionen des η . Es wird kaum nötig sein, die Definitionen der $(A^{+\pm}), (B^{+\pm}), (C^{+\pm}), N'$ hinzuschreiben. Wir haben $(A^{+\pm})^e = N', (B^{+\pm})^m = N', (C^{+\pm})^n = N', (C^{+\pm})(B^{+\pm})(A^{+\pm}) = N'$. Mit I' bezeichne ich die Identität. Soll nun die Gruppe η' der Gruppe η „von der einen Seite eindeutig“ zugeordnet werden, so bieten sich von vorneherein verschiedene Möglichkeiten: 1) Sollen wir dem N das N' oder I' entsprechen lassen?

2) Sollen wir dem $(A^+), (B^+), (C^+)$ das (A'^+) oder das (A'^-) , das (B'^+) oder das (B'^-) , das (C'^+) oder das (C'^-) coordinieren?

Um eine alle Fälle umfassende Bezeichnung zu haben, Mi. 12/90.
erinnern wir, dass $(A'^-) = (A^+)^+ \cdot N', (B'^-) = (B^+)^+ \cdot N', (C'^-) = (C^+)^+ \cdot N'$, und setzen nun

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} N \text{ dem } N'^{\epsilon_0} \\ A^+ \text{ dem } A'^+ \cdot N'^{\epsilon_1} \\ B^+ \text{ dem } B'^+ \cdot N'^{\epsilon_2} \\ C^+ \text{ dem } C'^+ \cdot N'^{\epsilon_3} \end{array} \right.$$

entsprechend, unter $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ vier Zahlen verstanden, welche 0 oder 1 sind. Nun ist jede Gruppe charakterisiert durch die identischen Relationen, welche zwischen ihren erzeugenden Operationen bestehen. Soll daher die Gruppe der $\left| \begin{smallmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{smallmatrix} \right|$ der Gruppe der $\left| \begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix} \right|$ im bewussten Sinne eindeutig homomorph sein, so ist dazu die notwendige und hinreichende Bedingung, dass zwischen den Substitutionen,

die wir dem Schema (7) entsprechend den Operationen A, A^+, B^+, C^+ zuordnen, eben die Relationen (5), (6) ~~stehen~~ haben, die wir soeben für die A, A^+, B^+, C^+ aufstellten.

Nehmen wir zuerst (6): $C^+ B^+ A^+ = A$ und ersetzen die C, B, A, A durch die entsprechenden Operationen (7), so kommt offenbar $N^{1^{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}} = N^{1^{\varepsilon_0 - 1}}$, oder

(8) $\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \equiv 1 \pmod{2}$; die Summe der 4 Zahlen ε muss ungerade sein.

Indem wir ferner (5) und (7) kombinieren, folgt: $(A^+ N^{1^{\varepsilon_1}})^{o_1 t} = N^{1^{\varepsilon_0}}$, $(B^+ N^{1^{\varepsilon_2}})^{m s} = N^{1^{\varepsilon_0}}$, $(C^+ N^{1^{\varepsilon_3}})^{n t} = N^{1^{\varepsilon_0}}$. oder

(9)
$$\begin{cases} r(1+\varepsilon_1, l) \equiv \varepsilon_0 \\ s(1+\varepsilon_2, m) \equiv \varepsilon_0 \\ t(1+\varepsilon_3, n) \equiv \varepsilon_0 \end{cases} \pmod{2}.$$

Homomorphe Zuordnung unserer beiden Gruppen ist in der gewollten Art hier- nach dann und nur dann möglich, wenn die Gleichungen (8) und (9) erfüllt sind. Es gilt dies des Näheren folgende 8 Möglichkeiten:

ε_0	ε_1	ε_2	ε_3	Bedingung
0	1	1	1	$r+l, s+m, t+n$ sollen gerade sein.
0	1	0	0	$r+l, s, t$ sollen gerade sein.
0	0	1	0	$r, s+m, t$ " " " "
0	0	0	1	$r, s, t+n$ " " " "
1	0	0	0	r, s, t sollen ungerade sein.
1	0	1	1	$r, s+m, t+n$ sollen ungerade sein.
1	1	0	1	$r+l, s, t+n$ " " " "
1	1	1	0	$r+l, s+m, t$ " " " "

Nun lassen sich aber sehr wohl Zahlen l, m, n, r, s, t an- geben, bei denen keines dieser acht Bedingungs-systeme

befriedigt ist; in allen solchen Fällen ist daher die gesuchte homomorphe Zuordnung unmöglich. Wir werden diese Fälle hier einstweilen bei Seite schieben und erst später auf sie zurückkommen. In den anderen Fällen ist eventuell die homomorphe Zuordnung auf verschiedene Weisen möglich: wir discutiren dies hier nicht im Detail, nehmen vielmehr jetzt an, jedem $|\alpha \beta|$ sei in der That in homomorpher Weise ein bestimmtes $|\alpha' \beta'|$ zugeordnet. Es ist dann unsere Frage, wie wir aus den Variablen η_1, η_2 Formen η_1, η_2 bilden mögen, derart, dass die η_1, η_2 jeweils die zugehörige Substitution $|\alpha' \beta'|$ erleiden, wenn man die η_1, η_2 der Operation $|\alpha \beta|$ unterwirft. Eben solche η_1, η_2 benennen wir als homomorphe Formen der η_1, η_2 .

Es handelt sich in dieser Hinsicht zunächst um einen formalen Ansatz, den ich in Bd. XV der Annalen, p. 453 ff. (1879) nicht nur für binäre, sondern für beliebig zahlreiche Variable gegeben habe¹⁾. Seien v_1, v_2 die contragredienten Variablen zu η_1, η_2 , d. h. Variable, die sich so bei linearen Substitutionen der η_1, η_2 umsetzen, dass immer $v_1' y_1' + v_2' y_2' = v_1 y_1 + v_2 y_2$ (also, im binären Falle, Linienkoordinaten, unter den y Punktekoordinaten verstanden). Erleiden die η_1, η_2 die Substitution $|\alpha' \beta'|$, so gehen diese v_1, v_2 , sofern $\alpha' \beta' - \beta' \alpha$, wie wir immer annehmen, = 1 ist, in $\left\{ \begin{array}{l} \beta_1' v_1 - \alpha_1' v_2 \\ -\beta_2' v_1 + \alpha_2' v_2 \end{array} \right\}$ über. Sei nun der Kürze halber gesetzt:

$$(1) \quad \begin{array}{l} \eta_1^k = \alpha_k \eta_1 + \beta_k \eta_2, \\ \eta_2^k = \gamma_k \eta_1 + \delta_k \eta_2, \end{array} \quad \text{und entsprechend (2)} \quad \begin{array}{l} v_1^k = \delta_k' v_1 - \gamma_k' v_2, \\ v_2^k = -\beta_k' v_1 + \alpha_k' v_2. \end{array}$$

Wir bilden uns jetzt das Product einer beliebigen Linearform der v_1, v_2 : $p_1 v_1 + p_2 v_2$ und irgendwelcher Form der η_1, η_2 : $f_{\alpha}(\eta_1, \eta_2)$, also $(p_1 v_1 + p_2 v_2) \cdot f_{\alpha}(\eta_1, \eta_2)$. Indem wir hier die Substitution (1), (2) simultan eintreten lassen und über

¹⁾ über die Auflösung gewisser Gleichungen vom 7^{ten} und 8^{ten} Grade.

alle n summieren, erhalten wir die Summe

(3) $\sum^n (p_1 v_1^k + p_2 v_2^k) \cdot f_d(\eta_1^k, \eta_2^k)$, die offenbar formelunge-
ändert bleibt, wenn ich die v, η simultanen irgend welchem
Paare zusammengehöriger Substitutionen unterwerfe.

[In Ann. XV hatte ich nur endliche Gruppen betrachtet,
da genügt also das in Rede stehende formale Verhalten
von Σ ; im Falle unendlicher Gruppen, den Poincaré
zuerst betrachtete, wird man auch noch Sorge tra-
gen müssen, dass Σ absolut convergirt; darüber so-
gleich.] Wir ordnen jetzt Σ nach v_1, v_2 und schreiben dem-
entsprechend: (4) $\Sigma = v_1 y_1 + v_2 y_2 = v_1 \sum (\rho_1 \delta_k^1 - \rho_2 \beta_k^1) f_d(\eta_1^k, \eta_2^k)$
 $+ v_2 \sum (-\rho_1 \delta_k^2 + \rho_2 \alpha_k^2) f_d(\eta_1^k, \eta_2^k)$.

Dann sind die so eingeführten y_1, y_2 Grössen, wie wir
sie suchen. Denn wenn Σ bei irgendwelchem Paare
simultaner Substitutionen (1), (2) in sich übergeht, so
folgt eben daraus, dass y_1, y_2 dabei die zu (2) contra-
gradiente Substitution, d. h. die Substitution

$$\begin{cases} \eta_1^k = \alpha_k^1 \eta_1 + \beta_k^1 \eta_2 \\ \eta_2^k = \delta_k^1 \eta_1 + \delta_k^2 \eta_2 \end{cases} \text{ erleiden. —}$$

Bei diesem ganzen Ansatz ist nur eine Voraussetzung
gemacht: dass die durch (4) eingeführten Grössen y_1, y_2 nicht
identisch verschwinden sollen. Möge der Operation \mathcal{A}
zunächst die Identität η_1, η_2 correspondiren. Dann wer-
den wir, wollen wir identisches Verschwinden der y_1, y_2
vermeiden, den Grad d von f jedenfalls gerade nehmen
müssen. Umgekehrt müssen wir ihn jedenfalls ungera-
de wählen, wenn wir den \mathcal{A} entsprechend \mathcal{A}' haben. Ich
werde beide Fälle wieder so zusammenfassen, dass ich
 $\mathcal{A} \sim \mathcal{A}' \varepsilon_0$ setze und nun (6) $d = \varepsilon_0 - 2\mathcal{P}$ wähle.
In Formel (6) ist schon berücksichtigt, dass wir jetzt,

um den Fall der bei uns vorliegenden unendlichen Gruppen behandeln zu können, ρ negativ wählen werden. Wir werden nämlich setzen $(\frac{2}{3}) f(\eta, \eta_2) = \frac{P_r(\eta, \eta_2)}{\psi_{r+2g} - \epsilon_0(\eta, \eta_2)}$ und also folgende Summen als y_1, y_2 einführen:

$$y_1 = \sum (\rho_1 \delta'_k - \rho_2 \beta'_k) \cdot \frac{P_r(\eta_1^k, \eta_2^k)}{\psi_{r+2g} - \epsilon_0(\eta_1^k, \eta_2^k)}$$

$$y_2 = \sum (-\rho_1 \delta'_k + \rho_2 \beta'_k) \cdot \frac{P_r(\eta_1^k, \eta_2^k)}{\psi_{r+2g} - \epsilon_0(\eta_1^k, \eta_2^k)}$$

Wann werden dieselben absolut convergieren und also für uns brauchbar sein? Wir lernten, dass die $\alpha'_k, \beta'_k, \delta'_k$ langsamer anwachsen, als die $\alpha_k, \beta_k, \delta_k$. Andererseits erinnern wir uns der früher für die automorphen Reihen aufgestellten Convergenzregeln. Wir schließen daraus, dass bei den Reihen (8) absolute Convergenz eintritt, sobald $\rho \geq 3$, was wir daher in Zukunft annehmen wollen.

Die somit definirten homomorphen Formen y_1, y_2 werden wir nun wieder in holotypische und in merotypische Formen einteilen, von deren erstere z. B. entstehen, wenn wir die sämtlichen Wurzeln von $\psi(\eta, \eta_2) = 0$ in dasjenige Gebiet der η -Ebene verlegen, welches nicht von unseren Dreiecken überdeckt wird, letztere aber z. B., wenn wir einige Wurzeln von $\psi = 0$ in das überdeckte Gebiet, nämlich in den von den beiden ersten η -Dreiecken gebildeten Ausgangsraum verlegen. Die holotypischen Formen würden an sich die interessanteren sein, nur besitzen wir ein zweites kein Mittel, um uns endgültig zu überzeugen, dass irgendwelche vorgelegte holotypische Form nicht identisch verschwindet. So nehmen

wie denn schliesslich zu den merotypischen Formen unsere Zuflucht.

Immer wollen wir zuerst für holotypische y_1, y_2 einige Betrachtungen anstellen (indem wir eben annehmen, dass die betreffenden y_1, y_2 nicht identisch verschwinden sollen). Wir betrachten die Binärschaar $c_1 y_1 + c_2 y_2$. Da y_1, y_2 beim Umläufen des x um die Punkte a, b, c bestimmte lineare Substitutionen erleiden, sonst aber unverzweigt sind, wird sich diese Binärschaar jedenfalls folgendermassen schreiben lassen müssen:

(9) $c_1 y_1 + c_2 y_2 = R_g(x_1, x_2) \cdot \Pi \left| \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{matrix} x_1, x_2 \right|$, unter R_g irgendwelche rationale Function von x_1, x_2 verstanden. Nun sind aber y_1, y_2 nach Voraussetzung nirgends unendlich. Es folgt, dass R_g eine ganze Function der x_1, x_2 sein muss (eine rationale ganze Form der x_1, x_2), während gleichzeitig die $\alpha', \alpha'', \beta', \beta'', \gamma', \gamma''$ positive (oder doch nicht negative) ganze Zahlen sind. Als Grad der rechten Seite von (9) ergibt sich $2g + \alpha' + \alpha'' + \dots$.

Andererseits folgt aus (8), dass die y_1, y_2 in den x_1, x_2 vom Grade $(2g - \epsilon_0) \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{m}\right)$ sind. Daher bekommen wir die Gleichung:

(10) $2g + \alpha' + \alpha'' + \beta' + \beta'' + \gamma' + \gamma'' - 1 = (2g - \epsilon_0) \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)$. Weitere Bestimmungen für die hier auftretenden Zahlen $g, \alpha', \alpha'', \dots$ erhalten wir jetzt durch folgende Betrachtungen.

1) Der Quotient y_1/y_2 ist eine η -Function $= \eta(\alpha' - \alpha'', \beta' - \beta'', \gamma' - \gamma'', x)$, von der wir wissen, dass sie mit $\eta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{m}, \frac{1}{n}, x\right)$ gleichänderig ist. Solche η -Functionen benannt wir im Sommer als verwandte η -Functionen, und wir lernen, dass sich ihre Exponenten nur um ganze Zahlen unterscheiden, deren Summe gerade ist. Wir setzen daher, unter A, B, C noch unbekannt ganze Zahlen verstanden:

$$(11) \begin{cases} \alpha' - \alpha'' = A + \frac{1}{2}, \\ \beta' - \beta'' = B + \frac{1}{m}, \\ \gamma' - \gamma'' = C + \frac{1}{n}, \end{cases} \quad \text{mit der Bedingung: } A + B + C \equiv 0 \pmod{4}.$$

2) Wir bestimmen die Determinante der binären Substitution, welche y_1, y_2 beim Umlauf des x um a erleiden, und zwar auf doppelte Weise. Erstlich sagen wir, dass η, η_2 beim genannten Umlauf des x eine Substitution der Determinante $e^{\frac{2i\pi}{2}}$ erleiden: das können wir aber so auffassen, als erleiden sie eine unimodulare Substitution und würden hinterher simultan mit $e^{\frac{i\pi}{2}}$ multiplicirt. Drei unimodularen Substitution der η, η_2 erleiden aber auch die η, η_2 eine Substitution von der Determinante Eins; denn so haben wir sie gebildet. Andererseits bekommen die y, y_2 , wenn wir η, η_2 simultan mit $e^{\frac{i\pi}{2}}$ multipliciren, als Functionen $(\epsilon_0 - 2s)$ 2ten Grades der η, η_2 gemeinsam den Factor $e^{\frac{i\pi}{2}} (\epsilon_0 - 2s)$. Nehmen wir Beides zusammen, so haben wir dem Umlauf des x entsprechend eine Substitution von der Determinante $e^{\frac{2i\pi}{2}} (\epsilon_0 - 2s)$.

Andererseits aber muss nach Formel (9) diese Determinante $e^{2i\pi(\alpha' + \alpha'')}$ sein. Daher haben wir, unter A, B, C neue ganze Zahlen verstanden:

$$(12) \begin{cases} \alpha' + \alpha'' = \frac{A + \epsilon_0 - 2s}{2}, \\ \beta' + \beta'' = \frac{B + \epsilon_0 - 2s}{2m}, \\ \gamma' + \gamma'' = \frac{C + \epsilon_0 - 2s}{2n}. \end{cases} \quad \text{Aus (11) und (12) gemeinsam schliessen}$$

wir jetzt

$$(13) \begin{cases} \alpha' = \frac{A+A}{2} + \frac{1}{2} \alpha' + \frac{\epsilon_0 - 2s}{2}, & \alpha'' = \frac{A-A}{2} - \frac{1}{2} \alpha' + \frac{\epsilon_0 - 2s}{2}, \\ \beta' = \frac{B+B}{2} + \frac{1}{2m} + \frac{\epsilon_0 - 2s}{2m}, & \beta'' = \frac{B-B}{2} - \frac{1}{2m} + \frac{\epsilon_0 - 2s}{2m}, \\ \gamma' = \frac{C+C}{2} + \frac{1}{2n} + \frac{\epsilon_0 - 2s}{2n}, & \gamma'' = \frac{C-C}{2} - \frac{1}{2n} + \frac{\epsilon_0 - 2s}{2n}. \end{cases}$$

3) Werden nun in diesen Formeln $\frac{A \pm A}{2}$ etc. ganze oder halbe Zahlen sein? Ich behaupte, dass dies von den Werten der $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ abhängt, derart, dass ich setzen kann,

unter A', A'', B', \dots ganze Zahlen verstanden:

$$(14) \begin{cases} \alpha' = A' + \frac{\epsilon_1}{2} + \frac{1}{2\ell'} + \frac{\epsilon_0 - 2\varrho}{2\ell}, & \alpha'' = A'' + \frac{\epsilon_1}{2} - \frac{1}{2\ell''} + \frac{\epsilon_0 - 2\varrho}{2\ell} \\ \beta' = B' + \frac{\epsilon_2}{2} + \frac{1}{2m'} + \frac{\epsilon_0 - 2\varrho}{2m}, & \beta'' = B'' + \frac{\epsilon_2}{2} - \frac{1}{2m''} + \frac{\epsilon_0 - 2\varrho}{2m} \\ \gamma' = C' + \frac{\epsilon_3}{2} + \frac{1}{2n'} + \frac{\epsilon_0 - 2\varrho}{2n}, & \gamma'' = C'' + \frac{\epsilon_3}{2} - \frac{1}{2n''} + \frac{\epsilon_0 - 2\varrho}{2n} \end{cases}$$

(wobei dann $A' + A'' + B' + B'' + C' + C''$ noch gerade sein muss).

Um dies einzusehen, hat man die binäre Substitution, welche η_1, η_2 , bez. γ_1, γ_2 , beim Umlauf des x um a erleiden, ins Einzelne zu betrachten. Bezeichnen wir zu dem Zwecke die zu $x = a$ gehörigen Fundamentalzweige der Schaar $c, \eta + c_1 \eta_1$ mit $\eta_1, -\eta_1 \eta_2$ und $\eta_1, -\bar{\eta}_1 \eta_2$; ebenso die Fundamentalzweige der Schaar $c, \gamma + c_2 \gamma_2$ mit $\gamma_1, -\gamma_1 \gamma_2$ und $\gamma_1, -\bar{\gamma}_1 \gamma_2$. Erstere werden beim Umlauf des x um a beziehungsweise mit $e^{\frac{i\pi}{\ell}}$, \pm multiplicirt; sie erleiden also erstlich die unimodulare Substitution, die wir früher mit A^+ bezeichneten (sie gehen in $e^{\frac{i\pi}{\ell}} (\gamma_1, -\eta_1 \eta_2)$ und $e^{-\frac{i\pi}{\ell}} (\eta_1, -\bar{\eta}_1 \eta_2)$ über) und werden dann simultan mit $e^{\frac{i\pi}{\ell}}$ multiplicirt. Setzt sollte aber dem A^+ laut Verabredung das $A^+ N^{\epsilon_1}$ entsprechen. Andererseits wissen wir aber schon, dass simultane Multiplication der γ_1, γ_2 mit $e^{\frac{i\pi}{\ell}}$ eine simultane Multiplication der γ_1, γ_2 mit $e^{\frac{i\pi}{\ell}(\epsilon_0 - 2\varrho)}$ entspricht. Daher verwandeln sich die genannten Fundamentalzweige der γ -Schaar beim Umlauf des x um a bez. in: $e^{\frac{i\pi}{\ell} + \epsilon_1} e^{\frac{i\pi}{\ell}(\epsilon_0 - 2\varrho)} (\gamma_1, -\eta_1 \eta_2)$ und $e^{-\frac{i\pi}{\ell} + \epsilon_1} e^{\frac{i\pi}{\ell}(\epsilon_0 - 2\varrho)} (\gamma_1, -\bar{\eta}_1 \eta_2)$.

Dieselben Factoren sind aber nach Formel (9) $= e^{2i\pi\alpha'}$, $e^{2i\pi\alpha''}$; daher in der That die Formeln (14) folgen. —

Tragen wir die Formeln (14) jetzt in (9) ein, so haben wir:

$$(15) c, \gamma_1 + c_2 \gamma_2 = F(x, x_2) \cdot \Pi \left/ \begin{matrix} A' + \frac{\epsilon_1}{2} + \frac{1}{2\ell'} + \frac{\epsilon_0 - 2\varrho}{2\ell} & \frac{b}{c} \\ A'' + \frac{\epsilon_1}{2} - \frac{1}{2\ell''} + \frac{\epsilon_0 - 2\varrho}{2\ell} & - \end{matrix} \right. \frac{c}{x, x_2}$$

mit folgenden Bedingungen für die ganzen Zahlen A', A'', B', \dots :

- (16) $\left\{ \begin{array}{l} 1) \rho \geq 0, \\ 2) \text{ Die 6 Exponenten von } \Pi \text{ sind alle } \geq 0, \\ 3) \frac{2\varrho + A' + A'' + B' + B'' + C' + C'' + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - 1}{2} = 2\varrho - \epsilon_0 \end{array} \right.$ (aus Formel (10)).

Dass $A' + A'' + B' + B'' + C' + C''$ gerade sein soll, wie wir gleichfalls verlangten, ist eine Folge dieser letzten Formel, denn $\epsilon_0 + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$ sollte ja ungerade sein.

Wir knüpfen hier an folgende Sätze:

Lassen sich bei gegebenen $\rho, \epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ keine ganzen Zahlen S, A', A'', \dots finden, welche den Bedingungen (15) genügen, so verschwinden unsere y identisch.

Lässt sich dagegen gerade ein System ganzer Zahlen S, A', A'', \dots finden, und ist $S = 0$, ist man überdies auf anderem Wege davon überzeugt, dass die y nicht identisch verschwinden können, so hat man in (15), (16) die volle Bestimmung der y_1, y_2 durch die x_1, x_2 .

Der hier verlangte Nachweis, dass in irgend welchem speziellen Falle unsere holotypischen y nicht identisch verschwinden, lässt sich freilich bei dem jetzigen Standpunkte der Theorie noch nicht erbringen. Wir verlassen also die holotypischen Fälle und wenden uns zu den merotypischen.

Merotypische y_1, y_2 .

Wir werden uns hier auf den Fall beschränken, der uns im Falle der automorphen Functionen gute Dienste geleistet hatte, dass nämlich der in den Reihen auftretende Nenner $\Psi_{v+2\rho-\epsilon_0}$ gerade eine Nullstelle ($\eta = \zeta$) in dem von unseren Dreiecken überdeckten η -Gebiete hat, sonst aber nur ausserhalb des η -Gebietes verschwindet. Wir schreiben dementsprechend jetzt

$$(1) \begin{cases} y_1 = \sum (p_1 \alpha'_k - p_2 \beta'_k) \cdot \frac{\Psi_v(\eta_1^k, \eta_2^k)}{(\eta^k, \zeta) \cdot \Psi_{v+2\rho-\epsilon_0-1}(\eta_1^k, \eta_2^k)} \\ y_2 = \sum (-p_1 \gamma'_k + p_2 \alpha'_k) \cdot \frac{\Psi_v(\eta_1^k, \eta_2^k)}{(\eta^k, \zeta) \cdot \Psi_{v+2\rho-\epsilon_0-1}(\eta_1^k, \eta_2^k)} \end{cases}$$

und haben dann statt der Formel (15) der vorigen

Setze folgenden Ansatz:

$$(2) c_1 y_1 + c_2 y_2 = \frac{F_{\rho}(x_1, x_2)}{(x_2)} \cdot \Pi \left| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ A' + \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{1}{4\varepsilon_1} + \frac{\varepsilon_0 - 2\rho}{4\varepsilon_1} & & \\ A' + \frac{\varepsilon_1}{2} - \frac{1}{4\varepsilon_1} + \frac{\varepsilon_0 - 2\rho}{4\varepsilon_1} & & \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} x_1, x_2 \end{array} \right|.$$

wobei die Bedingungen 1), 2) von (16) bestehen bleiben, an Stelle von 3) aber folgende Gleichung tritt:

$$(3) 2S + A' + A'' + B' + B'' + C' + C'' + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - 3 = 2\rho - \varepsilon_0.$$

Ich habe mir einen Fall herausgesucht, in welchem diese Bedingungen genügen um die Formel (2) vollständig festzulegen. Sei nämlich:

$$r = 1, s = 1, t = 3,$$

$$k = 2, m = 2, n = 3n',$$

(so dass also die Aufgabe, von der wir ausgehen, die ist, $\eta'(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{n'})$ durch $\eta(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{n'})$ auszudrücken). Wir können dann, da $k+r, m+s, t$ sämtlich ungerade sind, $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 1, \varepsilon_3 = 0, \varepsilon_0 = 1$ wählen, wodurch die Formeln (2), (3) in folgende übergehen:

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 = \frac{F_{\rho}(x_1, x_2)}{(x_2)} \left| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ A' + 1 - \frac{1}{2}\rho & B' + 1 - \frac{1}{2}\rho & C' + \frac{2}{3n'} - \frac{\rho}{3n'} \\ A'' + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\rho & B'' + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\rho & C'' - \frac{1}{3n'} - \frac{\rho}{3n'} \end{array} \right| x_1, x_2,$$

$$2S + A' + A'' + B' + B'' + C' + C'' = 2\rho.$$

Nehmen wir nun noch, was angeht, $\rho = 3$, so folgt notwendig: $S = 0, A' = A'' = B' = B'' = C' = C'' = 1$.

Wir haben also die Endformel

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 = \frac{1}{(x_2)} \cdot \Pi \left| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3n' - 1}{3n'} \\ 0 & 0 & \frac{3n' - n}{3n'} \end{array} \right| x_1, x_2.$$

Vermöge derselben wird offenbar einfach:

$$\frac{y_1}{y_2} = \eta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{n'}, x\right) = \eta'.$$

wir haben also im vorliegenden Falle unsere eigentliche Aufgabe durch Bildung der η, y_2 direct gelöst. Ebenso stellen wir irgendwelche η', η_2' dar, in die man η'

spalten mag. Wählen wir z. B.

$$c'_1 \eta'_1 + c'_2 \eta'_2 = \Pi \left| \begin{array}{ccc|c} a & b & c & \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{n} & x_1, x_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \end{array} \right|$$

(gleich dem zu unserem η' gehörigen Normal- Π zweiter Art), so haben wir offenbar zu setzen:

$$c'_1 \eta'_1 + c'_2 \eta'_2 = \frac{(x_1 x_2)}{(x_1 x_2)^{\frac{2n-1}{2}} - \frac{1}{2n}} (c_1 y_1 + c_2 y_2)$$

(wo die Beziehung der c'_1, c'_2 zu den c_1, c_2 noch durch besondere Verabredung festzulegen ist).

So einfach verläuft die Rechnung natürlich nicht immer. — Sind $A', A'' \dots$ durch unsere Relationen nicht völlig bestimmt, wird insbesondere $S > 0$, so dass die Coefficienten von $F_p(x_1, x_2)$ als neue Unbekannte auftreten, so wird man eingehendere Betrachtung der η -Reihen gebrauchen, um die Formel (2) endgültig festzulegen. Man entwickle jetzt eine zweite Formel derselben Art für zwei andere homomorphe Y_1, Y_2 (der merodypischen Art). Man wird dann zwecks Darstellung der η'_1, η'_2 setzen dürfen:

$$c'_1 \eta'_1 + c'_2 \eta'_2 = \alpha(x_1, x_2)(c_1 y_1 + c_2 y_2) + \beta(x_1, x_2)(c_3 y_1 + c_4 y_2),$$

wo die Functionen α, β der x_1, x_2 durch die „relationes inter congruas“ werden festgelegt werden müssen. —

Untersuchung des Falles, dass eine eindeutige homomorphe Zuordnung der homogenen Gruppen $|\frac{\alpha \beta}{\gamma \delta}|$ und $|\frac{\alpha' \beta'}{\gamma' \delta'}|$ nicht möglich ist.

Voraussetzung der letzten Entwicklungen war durchaus die Möglichkeit der eindeutigen homomorphen Zuordnung der beiden homogenen Gruppen. Wie nun, wenn diese nicht möglich ist, indem keiner der 8 Fälle p. 114 zutrifft? Wenn also beispielsweise α und δ gerade, β und γ beide ungerade sind?

Genau die Schwierigkeit, die hier vorliegt, hat sich

schon in der Theorie der algebraischen Gleichungen, bei der Auflösung der Gleichungen fünften Grades, dargeboten. Die 60 „geraden“ Vertauschungen von fünf Grössen x_0, \dots, x_4 , bilden eine Gruppe, welche mit den 60 Skosaedersubstitutionen einer Variablen η holoëdrisch isomorph ist (wechselseitig eindeutig homomorph ist). Daher ist das centrale Problem in der Theorie der Gleichungen fünften Grades (nach der Auffassung, die ich in meinen Vorlesungen über das Skosae-der dargelegt habe): Aus den x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 eine rationale Function η zu bilden, welche die Skosae-der Substitutionen erkeidet, sobald man die x auf gerade Weise permutirt. Aber diese Aufgabe übersetzt sich sofort ins Binäre: Man soll aus den x_0, \dots, x_n zwei Formen η_1, η_2 bilden, die bei den 60 geraden Vertauschungen der x die homogenen Skosaedersubstitutionen erfahren. Und hier nun stossen wir ganz auf dieselbe Schwierigkeit, die wir gerade erwähnten. Die Zahl der homogenen Skosaedersubstitutionen ist 120, nicht 60; es ist auch unmöglich, unter ihnen 60 herauszugreifen, die für sich eine Untergruppe bilden. Es geht daher nicht an, den 60 Vertauschungen der x die homogenen Skosaedersubstitutionen eindeutig zu zuordnen. — Wie hat man sich da nun geholfen? Indem man statt der η_1, η_2 deren quadratische Verbindungen in Betracht zog und die ternären Substitutionen, welche diese Verbindungen erleiden. Folgendermassen. Man setze etwa (um mit der Bezeichnung der Vorlesungen über das Skosae-der in Uebereinstimmung zu bleiben):
 (1) $\eta_1, \eta_2 = -A_0, \eta_1^2 = A_1, \eta_2^2 = -A_2$. Dann hat man drei

Größen A_0, A_1, A_2 , welche bei den 120 homogenen Substitutionen von η, η_1, η_2 selbst nur 60 ternäre Substitutionen erleiden: Bei diesen 60 Substitutionen bleibt natürlich $A_0^2 + A_1^2 + A_2^2$, welches vermöge (1) verschwindet, ungeändert. Wollen wir $A_0 : A_1 : A_2$ als Punkt der Ebene deuten, so ist hiernach (2) $A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 = 0$ ein invariander Kegelschnitt. Auf ihm fungirt vermöge (1) das η_1/η_2 als ein Parameter; man kann für einen Kegelschnittpunkt vermöge (1) setzen: (3) $\eta = \frac{A_1}{A_0} = -\frac{A_2}{A_1}$, und hat dann in η einen Ausdruck, der die 60 unihomogenen Frosaedersubstitutionen erleidet, wenn man die A den 60 ternären Substitutionen unterwirft. Mit Rücksicht hierauf entwirft man den Plan: erstlich dem Wertssysteme der x_0, x_1, \dots, x_n überhaupt einen Punkt der Ebene A_0, A_1, A_2 eindeutig homomorph zuzuordnen,
zweitens die Sache so einzurichten, dass dieser Punkt auf den Kegelschnitt (2) zu liegen kommt. Ersteres kann man in mäßigfacher Weise durch unseren formalen Prozess (p. 113) erreichen. Seien A'_0, A'_1, A'_2 und A''_0, A''_1, A''_2 zwei Punkte, die wir derart dem Wertsysteme x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 zuordnen. Wir setzen dann (4) $A_0 = A'_0 + \lambda A''_0, A_1 = A'_1 + \lambda A''_1, A_2 = A'_2 + \lambda A''_2$, und suchen nun λ so zu bestimmen, dass dieser Punkt A auf dem Kegelschnitt (2) liegt [geometrisch: wir suchen einen Schnittpunkt der Geraden $A'A''$ mit dem Kegelschnitt]: Wir erhalten so für λ die quadratische Gleichung: (5) $(A_0'^2 + A_1'^2 + A_2'^2) + \lambda(2A'_0A''_0 + A_1'A''_1 + A_2'A''_2) + \lambda^2(A_0''^2 + A_1''^2 + A_2''^2) = 0$, deren einzelne Coefficienten automorphe Formen der x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 sind. Diese quadratische Gleichung müssen wir lösen, — was eine sogenannte

accessorische Quadratwurzel mit sich bringt - und indem wir eine ihrer Wurzeln in (4) und schliesslich in (3) einsetzen, haben wir eine Grösse η der gewollten Art gefunden.

Alles dieses überträgt sich nun leicht auf den Fall der bei Nr. 15/12, 90 uns vorliegenden Aufgabe, nur dass wir unendliche Gruppen $|\alpha\beta|$ und $|\alpha'\beta'|$ in Beziehung zu setzen haben, so dass unser „formaler Prozess“ allein nicht genügt, sondern immer auch nach der Convergenz der gerade aufgestellten Summen zu fragen ist. Wir führen dies nicht mehr ins Einzelne aus, sondern fügen nur noch folgende einzelne Bemerkungen hinzu:

1) Es wäre in der That sehr wünschenswert, dass die hier skizzierte Bildung homomorpher Functionen weiter verfolgt würde. Insbesondere ist ein Desideratum, allgemein $\eta(\lambda, \mu, \nu, x)$ durch das elliptische $\eta(0, 0, 0, x)$, oder doch $\eta'(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \nu, x)$ durch das elliptische $\eta(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0, x)$ darzustellen. Hierauf bezügliche explicite Formeln müssten einen principiellen Fortschritt in der Theorie der η -Functionen und damit überhaupt in der Theorie der hypergeometrischen Functionen begründen.

2) Ich kann nun auch genau angeben, worin der Fehler Poincaré's betr. Bildung homomorpher Formen nach meinem Dafürhalten (das ich zu controliren bitte) besteht. Poincaré betrachtet nur die Gruppe des η , d. h. $|\alpha'\beta'|$, als homogene Gruppe, die Gruppe der η verwendet er in unhomogener Form. Und nun nimmt er stillschweigend an, dass man jeder Operation der letzteren Gruppe eine bestimmte Operation der homogenen Gruppe $|\alpha\beta|$ zuweisen könne. Das ist aber augenscheinlich nur möglich, wenn zwischen den beiden

homogenen Gruppen ein solcher Homomorphismus besteht, dass den Operationen I und Λ (die η betreffen) beim η' gleichförmig die identische Operation entspricht. Ein solches Entsprechen fand aber bei uns in den Fällen 1, 2, 3, 4 statt, nicht in den Fällen 5, 6, 7, 8 und noch weniger natürlich in den weiteren Fällen, die dem Vorkommen bei den Gleichungen 5^{ten} Grades analog sind. Poincaré's Entwicklungen haben also, so wie sie vorliegen, nur für die Fälle 1, 2, 3, 4 Bedeutung.

3) Mit dem Problem ad 1) hat sich neuerdings (Math. Ann. 34. 1889) Hr. Papperitz beschäftigt, ist aber zu keinem rechten Endresultat gekommen.

4) Einige der ad 1) zu behandelnden Fälle finden in der Theorie der elliptischen Functionen ihre indirecte Erledigung, nämlich aus der Theorie der α -Functionen, specieller aus der Theorie der „elliptischen Normalcurven“, welche Hr. Fricke im zweiten Bande der Modulfunctionen ausführlich behandeln wird. Es sind dies die Fälle $\eta'(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $\eta'(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4})$, $\eta'(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5})$, d. h. Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder. Ich gebe hier nur die Formeln für das Ikosaeder an. Man findet $\eta'(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}) = \frac{\Delta^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{w_1}} \mathcal{I}_1(\frac{2\pi}{5}, x^{\frac{1}{5}})$, $\eta'(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}) = \frac{\Delta^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{w_2}} \mathcal{I}_2(\frac{2\pi}{5}, x^{\frac{1}{5}})$, wobei man insbesondere beachten mag, dass die Dimension der Ausdrücke rechter Hand in w_1, w_2 gleich -5 ist, d. h. ebenso gross, als die Dimension der niedrigsten Reihen η, η_2 , die überhaupt convergiren. Es ist dabei natürlich dem Λ (der Operation $[-\frac{w_1}{w_2}]$) das Λ' (die Operation $[-\frac{\eta_1'}{\eta_2'}]$) entsprechend gesetzt. Diese \mathcal{I} -Formeln

wird man sich bei der Behandlung der allgemeinen ad 1) gestellten Aufgabe sozusagen als Modell vor Augen halten müssen. —

Wir schliessen hiermit unseren ersten Exkurs über die Theorie der automorphen, wie der homomorphen Functionen und beginnen ein neues Kapitel aus der Theorie der Π -Function oder η -Function:

Verallgemeinerung der bisherigen Entwicklungen dieses Semesters auf den Fall complexer Exponenten λ, μ, ν .

Indem wir an die Spitze unserer bisherigen Entwicklungen die conforme Abbildung des Dreiecks ($\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$) auf die Halbebene x gestellt hatten, haben wir in der That eine wesentliche Beschränkung eingeführt, wir haben stillschweigend die Annahme gemacht, λ, μ, ν seien reell. Andererseits wissen wir aus der Differentialgleichung dritter Ordnung für η (oder aus Fuchs), dass dies durchaus keine notwendige Annahme ist. Wir werden also die Betrachtung complexer λ, μ, ν jetzt nachtragen, indem wir dabei den inductiven Weg verfolgen, nämlich zunächst fragen:

1) Wenn wir $\eta(\lambda, \mu, \nu, x)$ für den Fall complexer λ, μ, ν etwa durch die Differentialgleichung dritter Ordnung definiren, welches conforme Abbild der x -Ebene entwirft uns dasselbe? und dann erst die Sache umkehren und untersuchen:

2) Kann ich nun umgekehrt dieses conforme Abbild an die Spitze stellen und aus seiner Betrachtung die allgemeine Definition des $\eta(\lambda, \mu, \nu, x)$ — für beliebige reelle oder complexer λ, μ, ν — ableiten?

Ich erinnere hier kurz an die Benennungen: ellip-

Fische, hyperbolische, loxodramische und parabolische Substitution (Modulfunktionen I, p. 163 ff.) und untersuchte jetzt zunächst unter den Gesichtspunkten (λ, μ) die Function $\eta = x^\lambda$, oder allgemeiner $\eta = \frac{\alpha x^\lambda + \beta}{\delta x^\lambda + \sigma}$. Ist hier λ reell, so denkt man sich zum Studium der conformen Abbildung die x -Ebene gewöhnlich längs der reellen Axe in zwei Halbebenen zerschneiden, und findet dann, dass jede dieser Halbebenen auf eine Sichel der η -Ebene von der Winkelöffnung $\lambda\pi$ abgebildet wird.

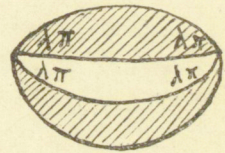
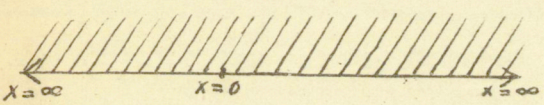


Fig. 1

Aus der ersten solchen Sichel folgt die zweite danebenliegende nach dem Symmetrieprinzip, aus dieser wieder eine dritte (die als Bild der positiven Halbebene x wiederum zu schraffieren ist), und so weiter fort. ~ Wir wollen nun aber für unsere Zwecke die x Ebene jetzt nur mit einem Einschnitte, nicht mit einem Querschnitte versehen, einem Einschnitte, der von 0 nach ∞ läuft, d. h. von dem einen singulären Punkte nach dem anderen, und längs der negativen reellen Axe gerichtet sein mag:



Fig. 2

der so unzertheilten x -Ebene entspricht dann in der η -Ebene eine Doppelsichel (von der Winkelöffnung $2\lambda\pi$):

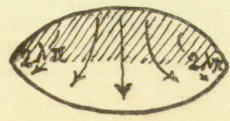
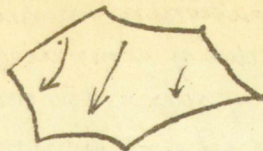


Fig. 3.

deren beide Randcurven den beiden Ufern des in der x -Ebene gezogenen Einschnitts entsprechen und daher punctweise zusammengehören. Diese Zusammenordnung der Randcurven wird offenbar durch eine elliptische Substitution besorgt, welche die beiden Spitzen der Fichel zu Fixpuncten hat¹⁾. Zugleich ergibt diese elliptische Substitution, auf die ganze Doppelsichel beliebig oft (eine positive oder negative Anzahl von Malen) angewandt, aus dieser die ganze Reihenfolge von Doppelsicheln, welche als conforme Abbildungen der Ebene x in Betracht kommen, sobald man dem x gestattet, den Einschnitt $0 - \infty$ beliebig oft zu überschreiten. Wir wollen diese sämtlichen Doppelsicheln als analytische Fortsetzungen der ursprünglichen conformen Abbildung bezeichnen.

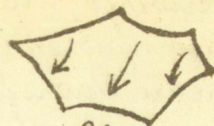
An diesem einfachsten Falle kann ich nun bereits eine wesentliche Auffassung klar machen, die ich seiner Zeit meinen „Neuen Beiträgen zur Riemann'schen Functionentheorie“ zu Grunde legte (Math. Ann. 41, 1884) und die zur Verallgemeinerung sowohl der Aufgabe, benachbarte Bereiche auf einander conform abzubilden, als insbesondere des Schwarz'schen Symmetrieprinzips, hinführt. Indem wir in Fig. 2 und 3 uns die correspondirenden Randpuncte vereinigt denken, stellt jede der beiden Figuren eine geschlossene Mannigfaltigkeit vor, und diese beiden geschlossenen Mannigfaltigkeiten sind dann durch die Function $\eta = \frac{\alpha x^2 + \beta}{\delta x^2 + \delta}$ eindeutig auf einander bezogen. Da bietet sich also die Idee, geschlossene Mannigfaltigkeiten überhaupt dadurch zu definieren, dass man die Randpuncte irgendwelcher Bereiche der x - oder η -Ebene einander zuweist:

^{x)} Wir haben diese elliptische Substitution in Figur 3 durch die beigesezten Pfeilspitzen angedeutet.



x - Ebene

Fig. 4



η - Ebene

und nun zu fragen, ob sich η so als Function von x definiren lässt, dass die eine Mannigfaltigkeit der anderen ein-eindeutig zugewiesen ist. Dies ist, wie wir schon andeuteten, eine Verallgemeinerung derjenigen ein-eindeutigen Beziehung berandeter Bereiche auf einander, welche die gewöhnliche Theorie der conformen Abbildung studirt: in der That kann man einen solchen berandeten Bereich, indem man seine Oberseite und seine Unterseite getrennt betrachtet und längs der Randcurven mit einander vereinigt denkt, immer als die Hälfte einer geschlossenen Mannigfaltigkeit besonderer Art, einer sogenannten symmetrischen Mannigfaltigkeit, ansehen.

Aber wie ist es mit der analytischen Fortsetzung der so gewonnenen Function $\eta(x)$? Sehr einfach. Man reproducire die ganzen Bereiche der x , bez. η -Ebene der Figur (4) durch die Transformationen, welche die eine Randcurve (oder ein Stück derselben) in die correspondirende Randcurve verwandeln. So entstehen zwei neue Bereiche, und diese werden dann gerade durch die geeignete analytische Fortsetzung der Function $\eta(x)$ einander zugewiesen sein. Dies ist das Prinzip der analytischen Fortsetzung; wie ich es in Bd. 21 formulirte. Mögen die Zuordnungen der Randcurven in der x -Ebene, wie in der η -Ebene (wie in Figur 3) insbe-

sondere durch lineare Transformationen vermittelt werden. Unterwirft man dann x oder y einer dieser linearen Transformationen, so erleidet y oder x die correspondierende lineare Transformation: x ist eine homomorphe Function von y (oder y von x , womit indeß keineswegs gesagt sein soll, dass x in y oder y in x eindeutig sei). Sind gar die linearen Transformationen, welche die Randcurven der x -Ebene zusammenordnen, wie in Fig. 2 identische Transformationen, so wird x eine automorphe Function von y sein. Das Schwarz'sche Princip der Symmetrie ordnet sich als specieller Fall unter diese Anwendungen des Principes der analytischen Fortsetzung unter. — Man hat nämlich nur anzunehmen, dass die beiden in Fig. 4 neben einander gestellten Bereiche jeder in zwei von lauter Kreisbögen begrenzte zu einander längs eines Kreisbogens symmetrische Hälften zerfällt (und dass natürlich die Zusammenordnung der Randpunkte beiderseits in Uebereinstimmung hiermit eine symmetrische ist), dann gehen unsere letzten Behauptungen von selbst in diejenigen über, die man aus dem Symmetriepincip erhält. —

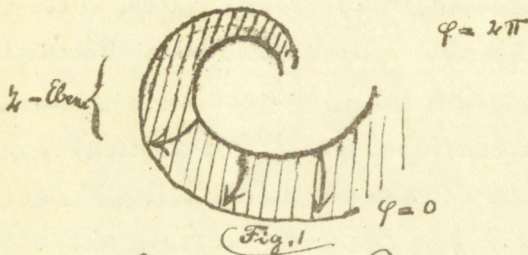
Ich habe diese allgemeinen Auffassungen gleich hier bei der ersten Gelegenheit, die sich dazu bot, gerne zur Sprache gebracht, da wir hinfort immerzu mit ihnen arbeiten müssen, wie es denn eine Hauptaufgabe dieses und der nächstfolgenden Specialvorlesungen sein soll, jetzt endlich, nach achtjährigen Zwischenraume, an die Ideen von Bd. 21 anzuknüpfen. —

Sei jetzt wieder $z = x^2$ und λ complex $= x + iy$. Wir setzen $x = r e^{i\varphi}$, Do. 16. 12.

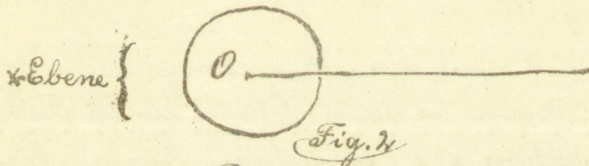
$z = R e^{i\Phi}$ und haben dann $\log R = \alpha \log r - \beta \varphi$,
 $\Phi = \beta \log r + \alpha \varphi$,

also für $\varphi = 0$: $\beta \log R = \alpha \Phi$

und für $\varphi = 2\pi$: $\beta \log R = \alpha \Phi - 2\pi(\alpha + \beta)$. Es sind dies die Gleichungen zweier congruenter Spiralen



die einen Streifen der z -Ebene zwischen sich einschliessen, den wir als conforme Abbildung der durch den Halbstrahl $\varphi = 0$ zerschnittenen x -Ebene anzusehen haben:



Correspondirende Punkte der beiden Ufer desselben in der x -Ebene geführten Schnittes haben dasselbe r , während $\varphi = 0$, resp. $= 2\pi$ ist. Dieselben erhalten daher in der z -Ebene Coordinaten R, Φ , welche durch die Formeln zusammenhängen: $R = R' + 2\beta\pi$, $\Phi = \Phi' - 2\alpha\pi$ oder (1) $z = z' \cdot e^{-2i\pi(\alpha + i\beta)}$. Dies ist eine loxodromische Substitution, durch sie werden die beiden Spiralen unserer Figur zusammengeordnet (vergl. die der Figur beigelegten Pfeile) und dadurch der zwischen ihnen verlaufende Bereich in einen Fundamentbereich verwandelt. Im Uebrigen beachte man: So ein-

fach, wie in Fig. 1, erscheint die Figur nur, wenn $\beta/2$ eine verhältnissmässig kleine Zahl ist. Ist $\frac{\beta}{2} = \infty$, so sind die Spiralen concentrische Kreise geworden und der zwischen ihnen eingeschlossene Bereich hat die Gestalt eines beiderseits unendlich weiterlaufenden Bandes (wir erwähnten dies schon bei Gelegenheit im Sommersemester). Aber auch wenn $\beta/2$ nur sehr gross ist, wird der zwischen den Spiralen herlaufende Bereich sich zum Theil immer wieder erneuert selbst überdecken. Endlich findet auch in dem Falle, wo der Bereich sich nicht selbst überdeckt, bei fortgesetzter Reproduktion desselben durch die loxadromische Substitution (1) schliesslich eine unendlichfache Ueberdeckung der x -Ebene statt. Die Function $x(x)$ ist sicher unendlich vieldeutig, so lange nicht $\beta=0$.

Die Figur (1) ist nun aber keineswegs die einfachste Figur, durch welche man in der x -Ebene einen Fundamentalbereich der Function $x(x)$ bezeichnen kann. Niemand zwingt uns, den Schnitt in der x -Ebene, der natürlich von $x=0$ bis $x=\infty$ laufen muss, durchaus geradlinig zu führen. Nimmt man für ihn eine logarithmische Spirale der Schaar

$$\beta \log r = -\alpha \varphi + \text{Const.}$$

Fig. 3. x Ebene {



so bekommt man in der x -Ebene einfach zwei unter dem Winkel $2\alpha\pi$ von 0 auslaufende Gerade, die nun

ihre~~seits~~ durch die loxadromische Substitution (1) auf einander bezogen sind:

x -Ebene

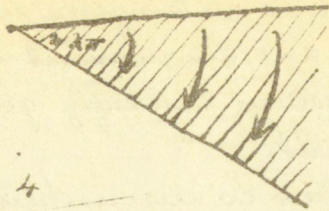
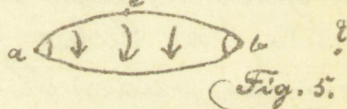


Fig. 4

Der zwischen ihnen liegende schraffierte Bereich: eine Sichel (Doppelsichel) von der Winkelöffnung 2π , mit loxadromisch auf einander bezogenen Rändern ist jetzt der neue Fundamentbereich?

Können wir nun umgekehrt eine solche Sichel als Fundamentbereich einer Funktion $x(x)$ beliebig annehmen und geradezu als Definition einer solchen Funktion betrachten? Also z. B. diese:

Man sieht sofort, dass das in der That gestattet ist,



nur dass $x(x)$ erst definiert sein wird, wenn man noch erst die 3 Werte von x , welche den beiden Spitzen a, b und irgend welchem 3 ten Punkte c entsprechen, beliebig vorschreibt. Nennen wir sie selbst a, b, c , so bekommen wir in der x -Ebene folgende Ferschneldung (von der Fig. 5 ein spezieller Fall ist):

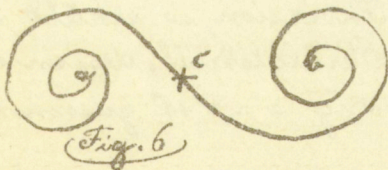


Fig. 6

Feh sage aber mehr: auch die verschiedenen Ausardungen,

*) Nur wenn $\alpha = 0$ wird die neue Figur bedeutungslos: sie würde dann eine Sichel von der Öffnung 0 vorstellen, die durch eine hyperbolische Substitution zur geschlossenen Fig. gemacht wird! Die entsprechende Ausardung der Fig. 3 entsteht, in dem man der Odaschheit aufsteigenden Spirale eine unendlich kleine Steighöhe ertheilt, sodass die x -Ebene in ein unendlich kleines Stück zerfällt.

die man aus Fig: 5 entstehen lassen kann, definieren immer, als Fundamentalbereiche angesehen, Functionen $x(z)$.

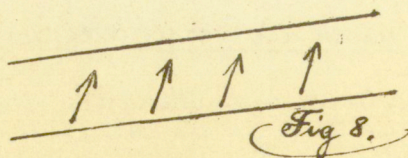
Wir führen dies etwas ins Einzelne aus:

Von der Ausartung $\alpha = 0$, die zunächst unvernünftig scheint, haben wir schon oben beiläufig gesprochen und ihre Bedeutung entwickelt.

Ebenso wenig ist $\alpha = \infty$ auszuschliessen. Da bleibt von den beiden Kreisbogen der Fig: 5 allerdings nur der eine übrig, in dessen Ecken dann Windungspunkte hoher Ordnung liegen; der andere Kreisbogen ist verloren gegangen. Eine derartige Abbildung wird beispielsweise durch $z = e^{kx}$ vermittelt (oder durch jede Function, die aus $z = e^{kx}$ durch lineare Transformation von $z = x$ hervorgeht).

Aber 5) kann auch so ausarten, dass die beiden Endpunkte a, b der Fichel zusammenfallen:

Insofern die beiden Kreisbogen in 5) selbstverständlich durch eine solche herodramatische Substitution zusammengeordnet sind, deren Fixpunkte in a , resp. b fallen, so sind die Kreisbogen dieses neuen Falles durch eine solche parabolische Substitution zusammengeordnet, deren doppelzählender Fixpunkt $a = b$ ist. Ich werde eine solche Fichel eine Fichel mit parabolischen Tipfeln nennen: Nimmt man $a = b$ zum Centrum einer Inversion, so erhält man aus \mathcal{F} den wohlbekannten Paralleldreif, dessen Ränder durch eine Parallelverschiebung $z = z' + c$ zusammengeordnet sind:



Hier sieht man denn auch sofort, dass wirklich eine Function existirt, deren Fundamentbereich hiermit gegeben ist, es ist (im Falle von Fig. 8) die Function $z = \frac{c}{4i\pi} \log x$, also $x = e \frac{2i\pi z}{c}$.

Haben sich so alle Ausardungen der Lichel (8) als Fundamentbereiche erwiesen, so wird es interessant, eine Figur zu betrachten, welche der Figur (2) sehr nahe steht, ohne doch eine Ausardung von (2) zu sein. Wir bemerken, dass wir die beiden Ränder einer Lichel von der Winkelöffnung O nicht nur durch eine parabolische sondern auch durch eine hyperbolische Substitution zusammenordnen können, sofern wir ~~nur~~ deren einen Fixepunct O' in der Doppelspitze der Lichel annehmen, während der andere O irgendwo, z. B. ausserhalb der Lichel, liegen kann:

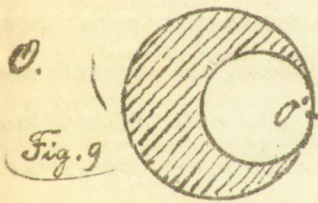


Fig. 9

Um diese Möglichkeit bequem zu übersetzen, empfiehlt es sich wieder, von O' aus eine Inversion zu machen, worauf folgende Figur entsteht (in der O' ins

Unendliche gerückt ist):

Wie lassen sich nun in der That die beiden Ränder der Figur in einfacher Weise durch eine von O ausgehende Ähnlichkeits-Transformation auf einander beziehen, jedesmal solche zwei Randpunkte

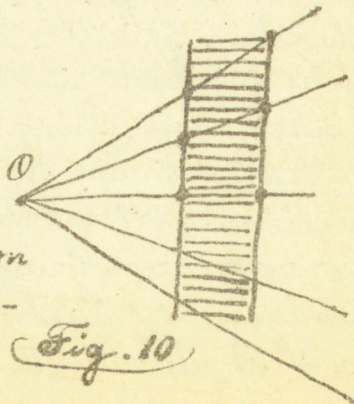


Fig. 10

gehören dabei zusammen, welche auf derselben durch O laufenden geraden Linie liegen (eine Construction, die man leicht auf die „Meridiane“ der Figur (9) überträgt).

Ich werde eine solche Lichel eine Lichel mit hyperbolischen Spitzeln nennen, und behaupte nun, dass sie mit
nichten als Fundamentbereich einer Function $x(x)$ dienen kann. Es ist dies, wie wir bald sehen werden, ein Hauptsatz in der Theorie der Fundamentbereiche.

Wir beweisen dies nach einer gelegentlichen mündlichen Mittheilung von Prof. Schwarz (von 1883 oder 84) folgendermassen: S. 14/15

Möge das gesuchte $x(x)$, wie wir jederzeit (ohne wesentliche Beschränkung) annehmen dürfen in dem Streifen der Figur. 10 nach oben hin den Werth 1, nach unten hin den Werth 0 annehmen, während es in irgendwelchem Punkte ∞ des Streifens ∞ werde. Wir reproduciren jetzt den Streifen durch unbegrenzte Wiederholung unseres Ähnlichkeits-Transformation nach links wie nach rechts hin. So wird schliesslich die ganze Halbebene rechts von der durch O gehenden Geraden durch Wiederholungen unseres Streifens überdeckt, und in allen diesen Streifen muss $x(x)$ nach dem „Princip der analytischen Fortsetzung“ an entsprechenden Stellen jedesmal dieselben Werthe aufweisen. Jetzt entstehen alle Punkte der durch O laufenden verticalen Geraden, die oberhalb liegen, aus demjenigen ∞ fernen Punkte unseres Streifens, in welchem $x = 1$ ist, alle Punkte unterhalb O aus demjenigen ∞

fernen Punkte, in welchem $x=0$ ist: alle anderen Punkte unseres Streifens ziehen sich einerseits in O , andererseits in $O'=\infty$ zusammen. Um das Sachverhältniss noch klarer zu bezeichnen, gehen wir einen Augenblick zur Figur 9 zurück. Wir erhalten da eine Function $x(x)$ welche in dem durch O und O' gehende Kreise

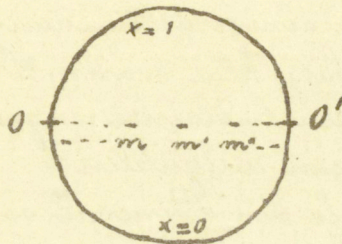


Fig. 11

überall sonst ausser in den Punkten m, m', m'', \dots (in denen einfache Pole liegen) stetig ist, in O, O' selbst wesentlich singuläre Punkte hat und längs der oberen Kreishälfte constant $=1$, längs der unteren constant $=0$ ist. Eine solche Function aber existirt nicht (eine analytische Function kann überhaupt nicht längs einer Curvenstücker constant sein).

Offenbar lässt sich dieselbe Betrachtung bei einer allgemeineren Figur wiederholen. Wir denken uns, dass nicht eine Sichel, sondern irgend ein Kreisbogenpolygon gegeben sei, das an bestimmter Stelle in seinen Gipfel auslaufe. Mögen nun die in diesen Gipfel einmündenden Kreisbogen hyperbolisch auf einander bezogen sein! Wenn wir den Gipfel dann vermöge dieser hyperbolischen Transformation in der geeigneten Richtung unbegrenzt reproduciren, so erhal-

den wir als natürliche Gränze einen Kreisbogen, dessen sämtliche Punkte (sozusagen) aus der Spitze des Tiffels hervorgehen. Wirken auf diese Weise:
Ein Polygon, welches hyperbolische Tiffel besitzt,
kann niemals als Fundamentbereich einer Function
 $x(x)$ gelten.⁴

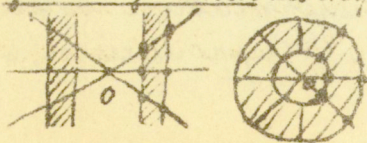
Es hat ursprünglich einige Zeit gedauert, bis Poincaré und ich über diesen Satz klar waren. Die einzelnen Momente der bezüglichen Entwicklungen lassen sich etwa folgendermassen aufzählen:

1) In einem Briefe an Poincaré vom Juni oder Juli 1884 entwickle ich die allgemeine Idee der Fundamentbereiche, ohne aber in Einzelheiten einzugehen oder die Zulässigkeit irgend welcher bestimmter Formen von Bereichen ausdrücklich zu behaupten.

2) Poincaré verstand diesen Brief so, als betrachte ich die Zulässigkeit beliebiger Bereiche als bewiesen, schloss also, dass auch zu Polygonen mit hyperbolischen Tiffeln automorphe Functionen gehören und fand bei diesen die merkwürdigsten Eigenschaften (vergl. Comptes Rendus 1884, II. pag 522 u. 1040; Mathematische Annalen 19, p. 558 u. 560).

In den Acta ist, nachdem Poincaré inzwischen das Fortschämliche dieser Entwicklungen eingesehen, davon nicht weiter die Rede; nur Acta V, p. 211 nimmt er die-

⁴ Dies schließt nicht aus, dass zwei Parallelstreifen von der Art der Fig. (10) einen Fundamentbereich ausmachen können, insofern wir dieselben zusammen genommen als Figuräquivalent eines Ringgebietes gelten lassen:



Da sind dann aber auch die Streifen als beiderseits offene Figuren anzusehen, die vermöge ihrer Tiffel unter einander zu sammenhängen.

selben ausdrücklich zurück („par une fausse interprétation d'un théorème de Mr. Klein, dont je ne connaissais pas la démonstration“).

3) Poincaré hat weder in den Comptes Rendus noch in den Annales erwähnt, dass er sich dabei auf mein „Theorem“ stütze. Ich verliess mich daher, als ich meine Abhandlung in Bd. 21 schrieb, umgekehrt wieder auf sein Resultat, nahm dabei aber glücklicherweise die Wendung (p. 181 l. c.), dass ich die Functionen, deren Fundamentalpolygone hyperbolische Gipfel enthalten, zur Seite schob und mich auf die anderen beschränkte. Weiterhin stelle ich l. c. Condititätsbetrachtungen an, um dasjenige Theorem zu beweisen, welches ich als Fundamentaltheorem der automorphen Functionen ansehe (p. 206). Der Fundamentalbereich der zu betrachtenden Functionen wird dabei beliebig variirt, wobei unter Umständen Gipfel entstehen. Ich betrachtete dann aber diese Gipfel immer als parabolische, nicht als hyperbolische Gipfel, und hatte dazu, wie ich denke, gutes Recht, insofern wir ja eben bei der Pichel sahen, dass der Fall hyperbolischer Zuordnung kein Gränzfall der allgemeinen loxodromischen Zuordnung ist.

4) Poincaré hat dann in Acta IV die gleichen Condititätsbetrachtungen ausführlicher entwickelt, behauptet aber (p. 236 dasselbst), dass mein Beweis eine principielle Lücke enthalte, weil ich gewisse hyperbolische Gränzfälle, die sich nothwendig einstellen, übersehen habe [et. il y a là une difficulté dont on ne peut triompher en écrivant quelques lignes.] Ich verstehe noch

nicht ganz, um was es sich bei diesem Einwurfe handelt. Ich kann kaum glauben, dass es schlechtweg die eben besprochenen hyperbolischen Gipfel sein sollten, die meines Erachtens in dieser ganzen Theorie keine Rolle spielen können; vielleicht handelt es sich um solche Grenzfälle, wie deren die Lichel von der Winkelöffnung Null bei getrennten Spitzen oben darbot. Wir werden die Sache weiterhin genauer untersuchen müssen.

5. Wie aber entscheidet man nun über Zulässigkeit oder Unzulässigkeit eines Bereiches als Fundamentbereich? Ich habe die Sache implicite in Bd. 21 gesagt, aber freilich nicht recht herausgearbeitet. Immer hat Poincaré, wie er mir Ostern 1897 erzählte, von dort aus die Sache richtig verstanden und dann gerade vermöge der vorstehend auf p. 144. 145 gegebenen Hilfsbetrachtung gesehen, dass hyperbolische Gipfel unzulässig sind.

Um die hier in Betracht kommende Theorie richtig darzustellen, habe ich daran zu erinnern, wie Schwarz und Neumann für geschlossene Riemann'sche Flächen die Existenz zugehöriger Functionen bewiesen haben (vergl. die Darstellung in Bd. I der Modulfunctiven, p. 508 ff.) Sie denken sich die Fläche in ihren verschiedenen Blättern durch eine endliche Anzahl von "Kreisscheiben" dachziegelartig überdeckt, und brauchen dann, um zum gewünschten Ende zu gelangen, nur für den einzelnen Kreis die bekannte Lösung der auf ihn bezüglichen Randwerthaufgabe und für je zwei übereinander greifende Kreise die sog. Combinationsmethode heranzuziehen.

Nun stellt mir doch ein beliebiger Bereich der Z -Ebe-

ne, dessen Kränder auf einander paarweise bezogen sind, in ideellem Sinne eine geschlossene Mannigfaltigkeit dar. Ich werde also das Schwarz-Kleinmann'sche Verfahren genau übertragen können, sobald ich meinen Bereich (wohlverstanden unter Berücksichtigung der Zusammengehörigkeit seiner Kränder) mit Theilbereichen „dachziegelartig“ überdecken kann, für deren jeden ich die Randwerthaufgabe lösen kann, oder, was auf dasselbe hinaus kommt, deren jeden ich (ev. unter Berücksichtigung der Zusammengehörigkeit der an dem Bereiche Theilnehmenden Kränder) auf eine Kreisfläche conform abbilden kann. ~ Umgekehrt, wenn ich meinen Bereich irgend mit Theilbereichen dachziegelartig überdecke, und es zeigt sich, dass auch nur einer derselben sich nicht conform auf eine Kreisfläche übertragen lässt, so ist unser Bereich als Fundamentalbereich unbrauchbar. ~ So wie wir also einmal wissen, dass eine Sichel mit hyperbolischen Spitzen keinen Fundamentalbereich abbildet, so ist damit schon entschieden, dass wir überhaupt kein Polygon mit hyperbolischen Spitzen als Fundamentalbereich brauchen können.

Wir haben jetzt alle Vorbereitungen erledigt, die S. 101/102 vorweg genommen werden mussten, ehe wir uns zu der conformen Abbildung hinwenden konnten, welche $\eta(\alpha, \beta, \gamma, x)$ im Falle complexer Exponenten λ, μ, ν von der x -Ebene entwirft. Sehen wir, indem wir jetzt in eine Discussion dieser Frage eintreten, der Kürze halber von den Fällen ab, wo irgend einer der Exponenten rein imaginär ist; wir haben von solchen Fäl-

len schon am Schluss des Sommersemesters gehandelt (vergl. auch die bez. Angaben bei Schwarz in Bd. 75 des Journals). Ueberdiess erleichtern wir uns die Aufgabe noch dadurch, dass wir alle Figuren nur schematisch und dabei möglichst symmetrisch zeichnen.

Wir werden jetzt zwecks der conformen Abbildung die x -Ebene nicht mehr in zwei Stücke (zwei Halbebenen) zerschneiden, sondern nur noch mit gewissen Querschnitten versehen, die nach a, b, c bezüglich hinlaufen. Ich ziehe diese Querschnitte von einem „Hilfspuncte“ O aus, den ich in der Figur der Einfachheit halber ins Unendliche werfen will. Die drei in O zusammenstossenden zwischen den Querschnitten einbegriffenen Winkelräume nenne ich $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \sigma_\gamma$. Ausserdem ertheile ich den Querschnitten, indem sie auf a, b, c zulaufen, eine solche spiralige Gestalt, dass die Abbilder ihrer beiden Ufer in der η -Ebene Kreisbogen sind; dass dies immer möglich sein muss, wird erst an einer späteren Stelle zu überlegen sein^{*)}. So entsteht folgende Figur:



Fig. 14

Wir haben so einen „Zweig“ η isolirt, für den nun die früher betrachteten Substitutionen A, B, C (die der positiven Umlaufung der a, b, c entsprechen) folgende Bedeutung haben: $F, S, T(\eta)$ der Werth, den unser Zweig in einem beliebige

^{*)} In der That soll sich ja η in nächster Nähe von $x = a, b, c$ wie ein complectee Potenz x^λ oder x^μ , resp. x^ν verhalten.

Puncte des negativen Ufers des ersten, zweiten, dritten Querschnitts annimmt, so ist $A(\eta^-)$, resp. $B(\eta^-)$ der Werth, den es an der entsprechenden Stelle des positiven Ufers annimmt. Uebrigens wolle man sich der Relation $CBA = 1$ erinnern. Wie bildet nun der so isolirte η -Zweig die zerschnittene x -Ebene ab? Offenbar auf ein Kreisbogensechseck, dessen Ecken alternirend den Punkten a, b, c und den Winkelräumen O_1, O_2, O_3 entsprechen:

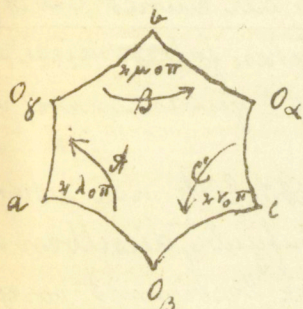


Fig. 13

In diesem Sechseck erscheinen die Winkel O_1, O_2, O_3 in ihrer anfinglichen Grösse wieder, die Winkel bei a, b, c betragen $2\lambda_0\pi, 2\mu_0\pi, 2\nu_0\pi$ ($\lambda = \lambda_0 + i\lambda$, etc. gesetzt).

Ausserdem sind die von a auslaufenden Kanten im Sinne des der Figur beigedruckten Pfeiles durch die loxodromische Substitution A zusammengeknüpft, die von b auslaufenden Kanten

durch B , die von c auslaufenden Kanten durch C .

Der Punkt O , den wir in der x -Ebene willkürlich annehmen, ist natürlich für die Abbildung in keiner Weise singular. Um dies zu sehen, verfolge man die analytische Fortsetzung unserer Figur, wie sie einerseits durch die Substitution A^{-1} , andererseits durch C^{+1} geliefert wird. Es giebt dies zwei neue Sechsecke, die vom Punkte O_3 nach links unten und rechts unten liegen, und deren abwärts gehende Kanten sich in O_3 jedenfalls berühren, da die Winkelsumme $O_3 + O_2 + O_1 = 2\pi$ ist:

Aber ich sage, dass diese beiden von O_3 nach abwärts gehenden Kanten mit ihren zusammengehörigen Punkten geradezu zusammen-

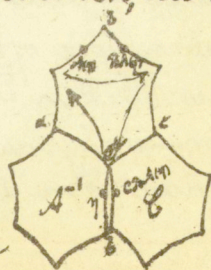


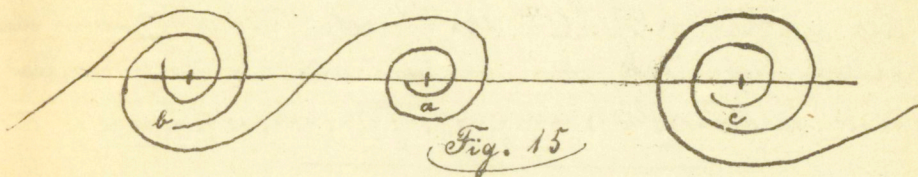
Fig. 14

fallen (so dass also die drei Sechsecke $1, C, A^{-1}$ sich um den Punkt η lückenlos herum gruppieren). In der That, der Punkt η , den wir auf der betreffenden Kante des Sechsecks A^{-1} markirten, hat im Sechseck 1 den gleichfalls markirten Punkt $A(\eta)$ zum entsprechenden.

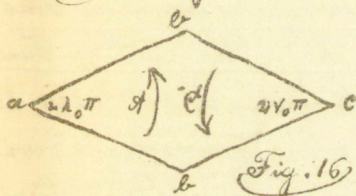
Dieser aber gehört vermöge B mit dem Punkte $B A(\eta)$ zusammen. Aus letzterem entsteht dann beim Uebergange zum Sechseck C der Punkt $C B A(\eta)$. Dem Punkte η der Kante von A^{-1} entspricht also der Punkt $C B A(\eta)$ des Sechsecks C . Aber $C B A$ ist $= 1$. Daher fallen diese beiden genannten Punkte in der That zusammen, w. z. b. w. —

Diese Figuren 12, 13, 16 haben natürlich nur schematische Bedeutung. Es entsteht die Aufgabe, dieselben durch genaue Figuren zu ersetzen, welche bestimmt vorgegebenen Werthen der λ, μ, ν wirklich entsprechen. Hier wird erstlich eine Verallgemeinerung der sphärischen Trigonometrie Platz greifen, indem wir fragen was es auf der η -Kugel, bei Zugrundelegung der Nichteuclidischen Maassbestimmung, bedeutet, dass für drei loxodromische Substitutionen $C B A = 1$. Ferner wird zu zeigen sein, dass man das in Betracht kommende Sechseck des η -Gebietes wirklich immer durch Kreisbogen begränzen kann. Dann wird es sich um Uebertragung jener Betrachtungen handeln, durch welche wir früher, im Falle reeller λ, μ, ν , bestimmt haben, wie oft sich die einzelne Seite des damals betrachteten Kreisbogendreiecks überschlägt, etc. etc. Um übrigens die Beziehung zwischen dem gerade genannten Kreisbogendreieck und der allgemeineren

Figur, die complexen λ, μ, ν entspricht, gut zu verstehen, empfiehlt es sich, die Zerschneidung der x -Ebene in anderer (minder symmetrischer Weise) zu bewerkstelligen, nämlich durch einen Schnitt von a nach b und von dort nach c , dem wir natürlich in der Nähe von a, b, c spiraligen Verlauf geben:



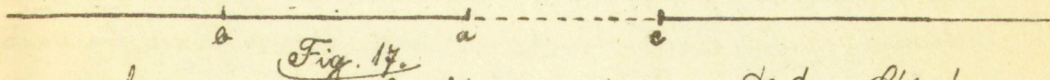
Die Abbildung liefert dann in der η -Ebene ein Kreisbogenviereck



dessen Ecken beziehungsweise durch die Substitutionen A, C (vom Exponenten $\lambda_0 + i\mu_0$, resp. $\nu_0 + i\nu_1$) zusammengeschlossen sind.

Die Figur dieses Vierecks ist so

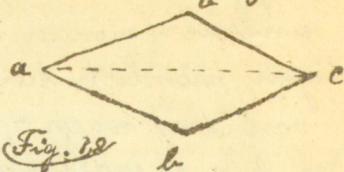
zu construiren, dass $C^{-1}A^{-1} = B$ eine Substitution vom Exponenten $\mu_0 + i\mu_1$ wird. Hier ist nun in der That leicht zu sehen, was geschieht, wenn die λ, μ, ν reell werden. Erstlich ziehen sich dann die Querschnitte der Fig. 15 auf Stücke des durch a, b, c gehenden Kreises (also in der Figur der reellen x -Ebe) zusammen:



worauf man durch Einfügung des punctirten Stückes ac die alte Zerschneidung der x -Ebene in 2 Halbebenen erhält. Zweitens werden jetzt die drei Substitution A, B, C elliptisch und darum das Viereck der Fig. 16

durch die punctirte Linie, welche dem Stücke ac entspricht, und die sich als Kreisbogen erweist, in zwei symmetrische Hälften zerlegt:

die Zusammenkoppelung der beiden hier von a , resp. c auslaufenden ist selbst in Bezug auf



die punctirte Linie symmetrisch. Da haben wir denn in der einzelnen Hälfte des Vierecks (Figur 18) eben das Kreisbogendreieck, von welchem wir im Falle reeller λ, μ, ν ursprünglich ausgegangen sind.

Dies wäre die conforme Abbildung durch eine sonstwie vorgegebene η -Function mit complexen λ, μ, ν . Können wir nun aber die Sache umkehren und das Sechseck der Figur 13 geradezu als Definition der η -Function an die Spitze stellen? Dann könnten wir also die allgemeine Theorie der η -Function ganz ähnlich entwickeln, wie dies zu Anfang des jetzigen Semesters für den Fall reeller λ, μ, ν geschah, nämlich so, dass wir mit der geometrischen Figur beginnen und aus ihr erst die einzelnen analytischen Eigenschaften der η -Function entstehen lassen.

Ich sage nun, dass das in der That gelingt. Offenbar ist nur zu zeigen, dass jedes Sechseck von der in Fig. 13 betrachteten Art als Fundamentbereich einer Function $x(\eta)$ angesehen werden darf. Um dies zu beweisen, werden wir nach der allgemeinen p. ¹¹²/₁₁₃ gegebenen Erläuterung versuchen müssen, das Sechseck dachziegelartig so mit einer endlichen Zahl von Bereichen zu überdecken, dass ein jeder Bereich (unter Berücksicht-

Figung der Zusammengehörigkeit seiner Kanten, so-
fern solche vorhanden sein sollten) conform auf eine
Kreisfläche übertragen werden kann. Dies aber gelingt
 leicht folgendermassen:

1) Wir gränzen zunächst um a, b, c drei Sichelstücke
 ab, die bez. an die anstossenden Ecken des Sechsecks ge-
 rade heranreichen und durch geeignete Stücke von lo-
 garithmischen Spiralen (die um a , resp. b, c herumge-
 legt sind) begränzt werden:

A, B, C Die betr. logarithmischen
 Spiralen werden wohl am
 Kürzesten als Flahnecurven
 der Substitutionen A, B, C be-
 zeichnet!

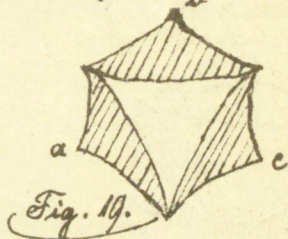


Fig. 19.

Ein jedes dieser Sichelstücke kann durch eine comple-
 xte Potenz in der That auf eine Kreisfläche abgebildet
 werden, z. B. das von a auslaufende Sichelstück durch
 $\xi = (\eta - a)^{1/2}$. Die betreffende Kreisfläche ist dann den
 beiden von a auslaufenden Kanten entsprechend (die
 bei der Abbildung zu einer einzigen Curve verei-
 nigt werden) von einer logarithmischen Spirale durch-
 setzt:

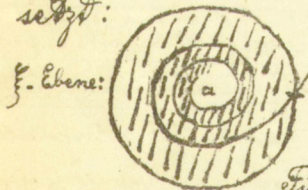


Fig. 20

2) Wir gränzen um O_3 in
 Fig. 14 geradezu einen Kreis
 ab und übertragen denselben
 auf die Umgebungen O_1, O_2 ,

O_3 unseres anfänglichen Sechsecks:

3) Durch 1) und 2) zusammen ist jetzt
 schon ein grosser Teil des durch unser
 Sechseck vorgestellten geschlossenen

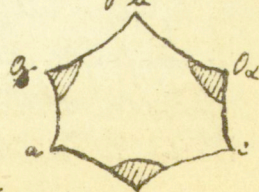


Fig. 21. O3

Bereiches in der gewünschten Weise bedeckt. Wir werden volle Ueberdeckung erreichen, wenn wir jetzt noch eine hinreichend grosse Kreis-scheibe hinzufügen, die ~~am~~ den Mittelpunkt unseres Sechsecks herumgelegt ist:

In der That haben wir, wenn wir Fig. 19, 20, 21 zusammennehmen, die folgende Gesamtüberdeckung, die allen Anforderungen unseres Beweisganges genügt:

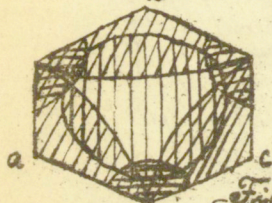
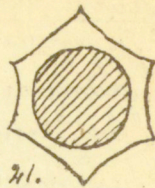


Fig. 22.

Hiermit sind wir am Schlusse unserer diesmaligen Betrachtungen über die η -Function und wir fügen nur, um einen richtigen Ueberblick über das Gesamtgebiet zu haben, noch Bemerkungen über die bestimmten Integrale des Poincaré ~~und~~ meisters hinzu. Ich will dabei annehmen, dass wir vom $\eta / \lambda^{\mu\nu} x^c$ durch die früher geschilderten Prozesse (p. 40 ff.) bereits zum zugehörigen Π , vielleicht zum Normal- Π zweiter Art: $\Pi / \lambda^{\mu\nu} x^c$ aufgestiegen seien. Ich sage, dass die so gewonnene Definition dieses Π , ebenso wie die in der Riemann'schen Abhandlung gebrauchte Definition, oder auch die gewöhnlich benutzte Definition, die von der Differentialgleichung ausgeht, noch wesentlich unvollständig ist. Wir haben Π nämlich nur in seiner Abhängigkeit von x definiert, während wir $a, b, c, \lambda, \mu, \nu$ als Constante betrachteten. Eine richtige (erschöpfende) Definition irgendwelcher von mehreren Grössen abhängigen Function hat aber diese sämtliche Grössen als Variable anzusehen. Jedenfalls liegt

in der hiermit angedeuteten Erweiterung der Auffassung immer ein Fortschritt (derselbe Fortschritt, der vorliegt, wenn wir neben den gewöhnlichen elliptischen Functionen Modulfunctionen betrachten). Wollten wir unsere bisherige Definition des Π als endgültig betrachten, so würde jedes Product $\Phi(a, b, c, \lambda, \mu, \nu) \cdot \Pi$, unter Φ eine willkürliche Function der $a, b, c, \lambda, \mu, \nu$ verstanden, ebenfalls ein Π sein. Die Frage muß sein, ob wir nicht dieses Φ so festlegen können, dass das entstehende Π auch in Bezug auf $a, b, c, \lambda, \mu, \nu$ Functionaleigenschaften charakteristischer Einfachheit hat? Und diese Frage wird nun eben in befriedigendster Weise beantwortet, indem wir die verschiedenen Zweige der binären Schaar Π mit Hilfe bloss unnumerischer Factoren aus denjenigen Ausdrücken zusammensetzen, welche durch die Doppelumläufe des im Sommersemester betrachteten bestimmten Integrals geliefert werden:

$$\int (x, a) \frac{-1+\lambda-\mu-\nu}{x} \cdot (x, b) \frac{-1+\mu-\nu-\lambda}{x} \cdot (x, c) \frac{-1+\lambda-\mu-\nu}{x} \cdot (x, d) \frac{-1+\lambda+\mu+\nu}{x} \cdot (x, dx)$$

In der That, indem wir $\Pi = \frac{a}{\lambda} \frac{b}{\mu} \frac{c}{\nu} \frac{x}{\dots}$ geradezu durch dieses bestimmte Integral definiren, erhält es folgende schöne Eigenschaften: 1) es wird eine Covariante der vier Paare „cogredienter homogener Variabler“: $a_1/a_2, b_1/b_2, c_1/c_2, x_1/x_2$, 2) es wird eine ganze Function der λ, μ, ν .

Wir haben Beides im Sommersemester näher ausgeführt. Natürlich entsteht hier die Frage, wie wir ohne Benutzung der Formel des bestimmten Integrals die Möglichkeit einer solchen Festlegung unseres Π als Function der $a, b, c, \lambda, \mu, \nu$, a priori einsetzen können? und weshalb diese Festlegung dann gerade durch das Integral ihren einfachsten Ausdruck finden muß? ~

Jugleich erkennen wir, dass alle die Untersuchungen über Functionen von x , die wir nach Weihnachten an verallgemeinerte geometrische Figuren, oder an verallgemeinerte Differentialgleichungen anknüpfen werden, ihrerseits auch wieder einer nachherigen Ergänzung bedürfen, indem man bei ihnen hinterher auch wieder sämtliche vorkommenden Parameter und Exponenten als variabel ansehen soll. — Dies sind natürlich weit ausblickende Perspektiven. Jedenfalls erscheint es darum als eine der wichtigsten Aufgaben, dass Jemand eine Gesamtableitung aller wesentlichen Eigenschaften, die wir jetzt beim II. kennen, von der Integraldarstellung aus unternimmt.

(Weihnachts-Ferien 90-91).

Nr. 7/1.

Nachfolgende Verallgemeinerungen der Functionen η , P. II.

13. Wir nehmen bei allen jetzt folgenden Verallgemeinerungen nur das x als Variable, und lassen also alle diejenigen Gesichtspunkte bei Seite, die in der letzten Stunde vor Weihnachten entwickelt wurden!

Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten.

1) Statt dreier singularer Punkte a, b, c nehmen wir deren n , von denen zunächst keiner ins Unendliche gelegen sein soll. Sind dann die zugehörigen Exponentenpaare $\left. \begin{matrix} x^1 \\ x^2 \end{matrix} \right\} \left. \begin{matrix} x^3 \\ x^4 \end{matrix} \right\} \dots$, so lautet die Differentialgleichung

* Immer will ich auf die Frage hinweisen, ob es möglich ist die weiter zu besprechenden verallgemeinerten Functionen in ähnlicher Weise durch bestimmte Integrale darzustellen wie die hypergeometrischen Functionen? Ich glaube, dass man die Unmöglichkeit nachzuweisen kann.

(vergl die Sommer-Vorlesung):

$$(1) P'' + \left(\frac{1-\lambda'-\lambda''}{x-a} + \dots \right) P' + \left(\frac{\lambda' \lambda'' (a-b) \dots (a-n)}{x-a} + \dots + G_{n-2}(x) \right) \frac{P}{(x-a)(x-b) \dots (x-n)} = 0$$

wobei indess $\lambda', \lambda'', \mu', \mu'', \dots = n-2$ vorauszusetzen ist, damit $x = \infty$ wirklich nicht singular sei. Neu ist hier für uns im Vergleich zur Differentialgleichung der hypergeometrischen Function das Auftreten der rationalen ganzen Function $G_{n-2}(x) = A x^{n-2} + B x^{n-3} + \dots$, deren $(n-3)$ Coefficienten A, B, C, \dots neben den „Verzweigungsparametern“ a, b, c, \dots als „accessorische Parameter“ bezeichnet werden sollen. Wir werden dementsprechend das durch (1) definierte Pauch so bezeichnen können:

$$P \left| \begin{array}{c} a \quad b \quad c \\ \lambda' \quad \mu' \\ \lambda'' \quad \mu'' \\ \vdots \end{array} \right. \dots A, B, \dots; x \left| \begin{array}{l} \text{Für das zugehörige } \eta \text{ ergibt sich wie wir ebenfalls} \end{array} \right.$$

falls bereits im Sommer fanden, die Differentialgleichung: (2) $[\eta] = \left(\frac{1-\lambda'}{x} \cdot \frac{(a-b) \dots (a-n)}{x-a} + \dots + \lambda G_{n-2}(x) \right) \cdot \frac{\eta}{(x-a) \dots (x-n)}$

Es ist auch leicht, die Modificationen anzugeben, welche die Gleich. (1), (2) erleiden, wenn einer der n Verzweigungspunkte ins Unendliche rückt. Mögen ρ', ρ'' die bezüglichen Exponenten sein, so haben wir statt (1):

$$(3) 0 = \underbrace{P'' + \left(\frac{1-\lambda'-\lambda''}{x-a} + \dots \right) P'}_{(n-1) \text{ Summanden}} + \underbrace{\left(\frac{\lambda' \lambda'' (a-b) \dots}{x-a} + \dots + \rho' \rho'' x^{n-2} + G_{n-2}(x) \right)}_{(n-1) \text{ Summanden}} \cdot \underbrace{\frac{P}{(x-a) \dots (x-n)}}_{(n-1) \text{ Factoren}}$$

wobei $\lambda' + \lambda'' + \mu' + \mu'' + \dots + \rho' + \rho'' = n-2$. An Stelle von (2) aber kommt die Gleichung:

$$(4) [\eta] = \left(\frac{1-\lambda'}{x} \cdot \frac{(a-b)(a-c) \dots}{x-a} + \dots + \frac{1-\rho'}{x} x^{n-2} + \lambda G_{n-2}(x) \right) \cdot \frac{\eta}{(x-a)(x-b) \dots}$$

(n-1) Summanden (n-1) Factoren

Man begreift (2) und (4) leicht unter dieselbe Formel, indem man für x homogenmachend $\frac{1}{x_2}$ schreibt.

*) Indem wir wieder alle Verzweigungspunkte im Endlichen nehmen, erhalten wir aus dem durch (x) definierten η das zu (1) gehörige P in der Gestalt:

$$(1) P = \frac{C_0 + C_1}{\sqrt{\eta^1}} \cdot (x-a)^{\frac{\lambda' + \lambda'' - 1}{2}} \cdot (x-b)^{\frac{\mu' + \mu'' - 1}{2}} \dots (x-r)^{\frac{r' + r'' - 1}{2}} \text{ wo die } C_0, C_1 \text{ willkürliche Const.}$$

Hierbei sind $\lambda', \lambda'', \dots$ natürlich an die Bedingung geknüpft, dass nicht nur $\lambda' - \lambda'' = \lambda, \dots$ sein soll, sondern dass auch $\lambda' + \lambda'' + \mu' + \dots = n - 2$ ist. Inzwischen können wir von dieser Bedingung abstrahiren, wenn wir uns entschließen, statt der Functionen P Formen Π einzuführen. Indem wir nicht nur x in $\frac{a_1}{a_2}$, sondern auch a, b, \dots in $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}, \dots$ spalten, werden wir

$\Pi \left| \begin{array}{c} a_1/a_2 \\ \lambda' \\ \lambda'' \end{array} \right. \begin{array}{c} b_1/b_2 \\ \mu' \\ \mu'' \end{array} \dots A, B, C, \dots; x_1, x_2 \left| \text{ durch die Formel definiren:}$

$$(1) \Pi = \left(\frac{C_0 + C_1}{\sqrt{\eta^1}} x_2 \right) \cdot (x a)^{\frac{\lambda' + \lambda'' - 1}{2}} \cdot (x b)^{\frac{\mu' + \mu'' - 1}{2}} \dots$$

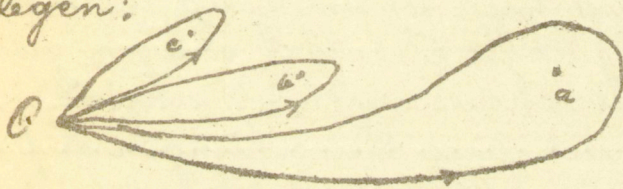
Alle diese zu demselben η gehörigen Π bezeichnen wir als zusammengehörig. Unter den zusammengehörigen Π können wir auf verschiedene Weisen normirte Π aussuchen, die nur von den Exponentendifferenzen λ, μ, \dots abhängen. So werden wir als Normal. Π der ersten Art das folgende bezeichnen:

$$(2) \Pi \left| \begin{array}{c} a_1/a_2 \\ + \lambda/2 \\ - \lambda/2 \end{array} \right. \begin{array}{c} b_1/b_2 \\ + \mu/2 \\ - \mu/2 \end{array} \dots A, B, C, \dots; x_1, x_2 \left| \right. \\ = \left(\frac{C_0 + C_1}{\sqrt{\eta^1}} x_2 \right) \cdot (x a)^{-1/2} (x b)^{-1/2} \dots; \text{ bekommen als Normal. } \Pi \text{ der zweiten Art aber dieses:}$$

$$(3) \Pi \left| \begin{array}{c} a_1/a_2 \\ \lambda \\ 0 \end{array} \right. \begin{array}{c} b_1/b_2 \\ \mu \\ 0 \end{array} \dots A, B, \dots; x_1, x_2 \left| \right. \\ = \left(\frac{C_0 + C_1}{\sqrt{\eta^1}} x_2 \right) \cdot (x a)^{\frac{\lambda-1}{2}} (x b)^{\frac{\mu-1}{2}} \dots$$

Das allgemeine $\Pi(b)$ ist in den x, x_n vom Grade $\frac{\lambda + \lambda' + \mu + \mu' + \dots + 2n + 2}{2}$, das Normal- Π erster Art vom Grade $-\frac{n+2}{2}$, das Normal- Π zweiter Art vom Grade $\frac{\lambda + \mu + \dots - n + 2}{2}$. Da in der Definition des η nur die λ^2, μ^2, \dots vorkommen, so kann man λ, μ, \dots beliebig in $\pm \lambda, \pm \mu, \dots$ verwandeln; es gibt dementsprechend 2^n verschiedene Normal- Π der zweiten Art. Unter ihnen werden wir dasjenige später bevorzugen, dessen Exponenten λ, μ, \dots alle positiv sind, aber doch, wenn sie complex sind, einen positiv reellen Teil haben (den Fall rein imaginärer λ, μ, \dots werden wir zurmeist bei Seite lassen).

3. Indem wir jetzt in der x Ebene von irgend einem Punkte beginnend um die Verzweigungstellen a, b, c, \dots im positiven Sinne Schleifen herum legen:



bekommen wir für das durch (2) definierte η lineare Substitutionen:

(9) $\underbrace{\eta' = \mathcal{A}(\eta)}_{\mathcal{A}}, \underbrace{\eta' = \mathcal{B}(\eta)}_{\mathcal{B}}, \dots$ Die sich beziehungsweise in die kanonische Form setzen lassen müssen:

(9bis) $\eta' = e^{2i\pi\lambda} \eta, \eta' = e^{2i\pi\mu} \eta, \dots$ und zwischen denen die Identität besteht:

(10) $\mathcal{A} \mathcal{B} \mathcal{C} \dots \mathcal{N} = 1$. Die Gesamtzahl der wesentlichen Constanten, welche in diesen linearen Substitutionen enthalten sind, ist genau ebenso gross, wie die Zahl der wesentlichen Constanten, die in den algebraischen Parametern, nämlich den Verzweigungswerten

den Wörtern λ, μ, ν, \dots

Man a, b, c, \dots und den accessorischen Parametern

A, B, \dots stecken, nämlich $3n - 6$ ($n - 3$ accessorische Parameter) ^{in λ, μ, ν, \dots} und $n - 3$ unabhängige Doppelverhältnisse der

a, b, c, \dots . Aber während die erstgenannten transcendenten Parameter durch die algebraischen Parameter im Wesentlichen bestimmt sind, ist das Umgekehrte keineswegs der Fall.

Es gibt noch unendlich viele Differentialgleichungen (x), welche zu den nämlichen Substitutionen (η) Anlass geben [wir nennen die betr. η verwandte η -Functtionen]. Unser besonderes Augenmerk muß darauf gerichtet sein, weiterhin zu entwickeln, was denn zu den Coëfficiënten der Substitutionen (η) noch hinzukommen muß, damit das einzelne η vollkommen bestimmt sei:

in dieser Hinsicht hoffe ich im Laufe dieser Vorlesungen ein endgültiges Resultat vorlegen zu können, das mir besonders wertvoll scheint.

Natürlich lassen sich diese Bemerkungen auf die zum η gehörigen \mathcal{P}, Π übertragen, nur dass dann von binären linearen Substitutionen zweier Zweige $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ oder Π_1, Π_2 die Rede sein wird.

Diese Substitutionen haben dann Determinanten $\pm 2^{n(n-1)}$. Inbesondere sind sie beim Normal- Π erster Art alle unimodular.

4. Wir betrachten jetzt die conforme Abbildung der x -Ebene auf die η -Ebene.

Hier ist der Fall besonders einfach, dass sämtliche algebraische Parameter, sowohl die a, b, c, \dots als die λ, μ, ν, \dots und die A, B, \dots reell sind. Wir zerschneiden dann die x -Ebene durch ihre reelle

Axe in zwei Halbebenen

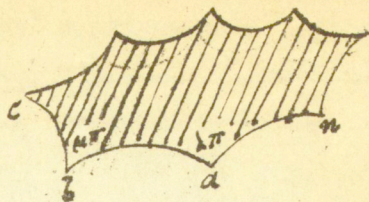
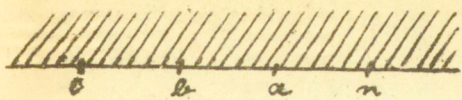
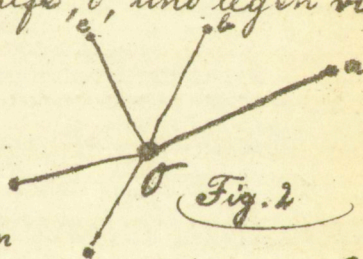


Fig. 1

und haben als Bild beispielsweise der positiven Halbebene ein Kreisbogenpolygon dessen n aufeinander folgende Winkel beziehungsweise $\lambda\pi, \mu\pi, \dots$ sind. Von einem ersten solchen Kreisbogenpolygon aus geschieht die analytische Fortsetzung der Abbildung durch das Princip der Symmetrie.

Seien nun zweitens die λ, μ, ν, \dots nach wie vor reell, aber die a, b, c, \dots und auch die A, B, \dots irgendwie complexe. Wir nehmen dann in der x -Ebene irgend welchen Hilfspunkt zu Hilfe, O , und legen von ihm Schnitte nach a, b, \dots



Sondern wir die beiden Ufer eines solchen Schnittes als Ränder der x -Ebene ansehen, ist uns die x -Ebene in ein Polygon von $2n$ Seiten verwandelt, von welchem n Eckpunkte (nämlich a, b, c, \dots) die Winkel $\lambda\pi$ aufweisen, während die dazwischen liegenden Eckpunkte alle nach O fallen und erst zusammen genommen als Winkelsumme $\lambda\pi$ ergeben. In die η -Ebene übertragen gibt dieses Polygon ein solches, wie es hier skizziert ist:



Fig. 3

Die Winkel an den Ecken a, b, c, \dots sind hier beziehungsweise $\lambda\pi, \mu\pi, \dots$

... verwandelt, während die ursprünglich in O zusammensichsenden Winkel ungeändert übertragen sind, dabei sind die aufeinander folgenden Seiten des neuen Polygons paarweise durch die Substitutionen A, B, \dots zusammengekoppelt, d. h. durch elliptische Substitutionen von der Amplitude $2\pi\lambda, 2\pi\mu, \text{etc.}$

Wie aber ist es, wenn die λ, μ, ν, \dots selber complex werden? Wir können dann ganz das bisherige Resultat beibehalten, nur dass wir die von O auslaufenden Schmitte auf a, b, c, \dots in geeigneter Weise spiralig zulaufen lassen müssen, worauf die Substitutionen A, B, \dots der η -Ebene nicht mehr elliptisch, sondern loxodromisch sein werden. Ausgeschlossen bleibt hier nur der Fall, den wir der Kürze halber bei Seite lassen, dass nämlich λ , oder μ, \dots rein imaginär wird und also hyperbolische Substitutionen in Betracht zu ziehen sind. Das Wichtige ist nun aber, dass die solcherweise in der η -Ebene entstehenden Figuren geometrisch willkürlich construirt werden können und dann rückwärts jedesmal zu einem bestimmten $x(\eta)$, bez. zu einer bestimmten Differentialgleichung (x) führen. In der That, das Polygon der Fig. 1 wird immer auf eine Halbebene abgebildet werden können, das Polygon der Fig. 3 immer als Fundamentalbereich einer Variablen x angesehen werden können. Die geometrischen Bestimmungsstücke der Polygone (1), (3) müssen also gerade solche transcendente Parameter abgeben, wie wir

sie auf p. 167 oben suchten, - Transcendente Parameter, durch welche die algebraischen Parameter eindeutig bestimmt sind!

5.) Beziehungen zur Lehre von den Lamé'schen Functionen.

Ich habe hier zunächst über die allgemeinen Resultate der Winternovlesung 89/90 Bericht zu erstatten (wobei indeß selbstverständlich alle Bezugnahme auf physikalische Anwendungen wegzubleiben hat):

Lamé'sche Functionen im allgemeinen Sinne des Wortes sind unsere η, P, Π , sobald die sämtlichen Exponentendifferenzen $\lambda, \mu, \dots = \frac{1}{2}$ sind.

Sind dann noch die a, b, \dots und A, B, \dots alle reell (wie man dies in den Anwendungen durchweg voraussetzt), so wird in der η -Ebene ein Spitzbogenpolygon mit lauter rechten Winkeln entstehen.

Für den Fall $\lambda = \mu = \dots = \frac{1}{2}$ nimmt übrigens die Differentialgleichung 3.ter Ordnung des η , indem wir $f = (x-a)(x-b)\dots(x-n)$ setzen, die folgende einfache Form an: $(\mathcal{U}[\eta])^2 = \frac{1}{8} \mathcal{L}(f) / f^2 + \frac{1}{4} \varphi_{n-4}(x)$, unter \mathcal{L} die Lesse'sche Form von f verstanden.

Was die Differentialgleichung zweiter Ordnung angeht, so nimmt dieselbe bei homogener Schreibweise eine besonders einfache Gestalt für das Normal- Π der zweiten Art an (dessen Zweige ich darum in 1889/90 insbesondere als Lamé'sche Functionen bezeichnete); man findet:

$$(2) (\Pi, f)_2 = \varphi_{n-4} \cdot \Pi^2, \text{ unter } \Pi \text{ eine Form vom}$$

$\varphi(\Pi, f)_2$ ist hier die 2te Überschiebung von Π und f d. h. der Differentialausdruck: $\Pi_{xx} f_{xx} - 2\Pi_x f_{x^2} + \Pi_{x^2} f_{xx}$, der bekanntlich eine Covariante von Π und f vorstellt.

Grade $\frac{4-n}{4}$ in den x_1, x_2 verstanden.

Uebrigens kann man auch der nicht homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung hier eine besonders einfache Gestalt ertheilen.

Um Letzteres zu erreichen, werfen wir einen P -Punkt y der n singulären Punkte nach $x = \infty$ und betrachten die folgende P -function:

$$P \left| \begin{array}{cccc} a & b & \infty & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & \frac{n-2}{4} \\ 0 & 0 & \dots & \frac{n-4}{4} \end{array} \right. A, B, C, \dots ; x \left| .$$

Die Differentialgleichung wird zunächst:

$$0 = P'' + \frac{1}{x} (\dots) P' + \left(\frac{(n-2)(n-4)}{16} x^{n-3} + Ax^{n-4} + \dots \right) \frac{P}{(x-a)(x-b)}$$

Hier führen wir jetzt das hyperelliptische Integral $t = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b) \dots}}$ als neue Variable ein.

Dann kommt als einfaches Resultat:

$$(3) \frac{d^2 P}{dt^2} = - \left(\frac{(n-2)(n-4)}{16} x^{n-3} + Ax^{n-4} + \dots \right) \cdot P.$$

Setzt insbesondere $n=4$, so wird dies: $\frac{d^2 P}{dt^2} = -A P$, was für $A \neq 0$ sofort liefert: $P = \alpha \cdot e^{t\sqrt{A}} + \beta \cdot e^{-t\sqrt{A}}$, während für $A=0$ kommt: $P = \alpha \cdot t + \beta \cdot 1$ (wobei α, β die Integrationsconstanten verstanden).

Das überall endliche elliptische Integral t erscheint hier neben der Constanten 1 als Specialfall der Laméschen Functionen. Der Quotient η kann dann natürlich gleichfalls = t genommen werden.

Letzteres stimmt damit, dass t die Halbebene x auf ein Kreisbogenviereck mit lauter rechten Winkeln, nämlich auf ein geradliniges Rechteck abbildet. Das Kreisbogenviereck ist hier augenscheinlich dadurch specialisirt, dass seine

Seiten einen Punkt (den wir dann nach ∞ werfen) gemein haben. Ich hebe dies hervor, um darauf vorzubereiten, dass gewisse Entwicklungen für den Fall von 4 Verzweigungspunkten, bei denen das t eine principielle Rolle spielt (vergl. weiter unten die Hermite'schen Entwicklungen) nicht dadurch auf grössere Zahl der Verzweigungspunkte zu übertragen sind, dass man hyperelliptische Integrale herannimmt, sondern dadurch dass man ein besonderes Lamé'sches η statt des t zu Hilfe nimmt. Es ist dies ein η , welches die Halbebene x auf ein Kreisbogen- n -Eck abbildet dessen sämtliche Seiten auf einem festen Kreise senkrecht stehen.

In der That heisst ja dies im Räume, dass die Ebenen, durch welche besagte Kreisbogen aus der Kugel ausgeschnitten werden, alle durch einen festen Raumpunct hindurchlaufen, — gerade wie es beim t ist, nur dass beim t dieser Raumpunct der Kugelfläche selbst angehört. —

Die Theorie der Lamé'schen Functionen gewinnt nun über das Gesagte hinaus dadurch eine erhöhte Bedeutung, dass man unter Aufrechterhaltung der Formeln (1), (2), (3) von den Wurzeln von f zwei oder mehrere zusammenhängen lassen kann. Sei beispielsweise $x = a$ eine Doppelwurzel von f , so findet man, von (2) ausgehend, für $x = a$ nicht etwa mehr die Exponenten $\frac{1}{2}$ und 0 sondern die entgegengesetzt gleichen:

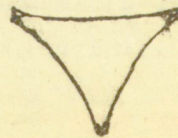
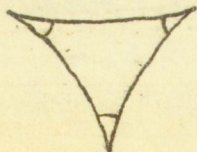
$$(4) \left. \begin{matrix} \lambda' \\ \lambda'' \end{matrix} \right\} = \pm \sqrt{\frac{2 \varphi(a)}{(n+1)(n+2) \varphi'(a)}} - \frac{n-1}{2(n+1)}$$

deren absoluter Werth jede beliebige Zahl sein kann.
 Nun kann also beliebige Π -Functionen erster Art mit
 m Verzweigungspuncten auffassen als Gränzfälle
der Laméschen Formen mit $2m$ Verzweigungspunc-
ten. Aber mehr als das. Gestatten wir dem dreifache, vierfache, ... Wurzeln zu bekommen, so könn-
 en wir Differentialgleichungen 2ter Ordnung mit
 beliebigen singulären Puncten erzeugen, wobei
 dann von den accessorischen Parametern immer
 gerade noch so viele willkürlich bleiben, als mit
 der jedesmal in Betracht kommenden Art der Dif-
 ferentialgleichung verträglich ist: Alle Functionen,
welche durch Differentialgleichungen zweiter Ordnung
mit rationalen Coefficienten definiert werden, kön-
nen als Gränzfälle der Laméschen Functionen ange-
sehen werden.

So erscheint also z. B. das Π erster Art mit 3 Verzwei-
 gungspuncten $\Pi \left| \pm \frac{a}{x} \pm \frac{b}{x} \pm \frac{c}{x} \right| x_1 x_2$ als Granzfall der
 Laméschen Formen für $n = 6$. Insbesondere wird dann
 die Differentialgleichung (2):

$$(5) \left[\Pi, (xa)^2 (xb)^2 (xc)^2 \right]_2 = \frac{50}{8} \Pi, \quad \left\{ \begin{array}{l} (8x^2+1)(ab)(ac)(xb)(xc) \\ +(8x^2+1)(bc)(ba)(xc)(xa) \\ +(8x^2+1)(ca)(cb)(xa)(xb) \end{array} \right\}$$

Geometrisch kommt diese Auffassung darauf hinaus,
 dass wir ein Kreisbogendreieck mit beliebigen Win-
 keln als Gränze eines durchaus rechtwinkligen
 Kreisbogensechsecks ansehen können, vergl. die Fi-
 guren:



In der mathematischen Physik (vergl. Heine's Handbuch der Sphäroidfunktionen) haben vor allen Dingen diejenigen Laméschen Functionen Interesse gefunden, bei denen $n = 5$ ist und mindestens zwei der Verzweigungspunkte (die man dann ins Unendliche wirft) zusammenfallen. Ist wieder t das überall endliche elliptische Integral $\int \frac{dx}{\sqrt{x-a, x-b, x-c}}$, so erhält man für das betreffende P , das bei $x = a, b, c$ die Exponenten $\frac{1}{2}$ und 0 darbietet, die Differentialgleichung

$$(6) \frac{d^2 P}{dt^2} = (A x + B) \cdot P, \text{ wo } A \text{ beliebig, die beiden zu } x = \infty \text{ gehörigen Exponenten berechnen sich dabei aus } \rho' + \rho'' = \frac{1}{2}, \rho' \rho'' = A. \text{ Dies ist } \underline{\text{Lamés ursprüngliche Differentialgleichung}}, \text{ von der wir in der Folge noch mannigfach handeln müssen. Auf beliebiges } n \text{ verallgemeinert wird dieselbe so lauten:}$$

(7) $\frac{d^2 P}{dt^2} = (A x^{n-1} + B x^{n-2} + \dots) P$, man hat dann für ρ' und ρ'' : $\rho' + \rho'' = \frac{n-1}{2}, \rho' \rho'' = A$. Uebrigens erhält man vermöge des auf p. 127/4 berührten Continuitätsgedankens die folgende schöne Uebersicht über die in der Potentialtheorie gewöhnlich gebrauchten Functionen:

- 1) Lamésche Functionen (in dem hier festzuhaltenden engeren Sinne) ∞
- 2) Sphäroidfunktionen ∞
- 3) Functionen des elliptischen Cylinders ∞
- 4) F. des Rotationscylinders (parabolisch) ∞
- 5) F. des parabolischen Cylinders ∞

wozu dann noch 6) Functionen treten: ∞, die durch eine Gleichung $\frac{d^2 P}{dx^2} = (A x + B) P$ definiert sind und keinen besonderen Namen haben.

Hier wird denn auch ganz klar, worüber man sich sonst wundern kann, weshalb in der mathematischen Physik der allgemeine Fall der hypergeometrischen Function (der in der Astronomie so vielfach vorkommt) gar nicht auftritt. Die allgemeine hypergeometr. Function entsteht aus der Laméschen Function für $n=6$, die aber tritt noch nicht in der Potentialtheorie des \mathbb{R}_3 , sondern erst in derjenigen des \mathbb{R}_4 auf. Lebten wir in einem Räume von vier Dimensionen, dann erst würde sich die mathematische Physik mit der allgemeinen hypergeometrischen Function zu beschäftigen haben.

Von der Möglichkeit, die η , P , Π in besonderen Fällen auf niedrigere Functionen zurückzuführen.

Wir fragen in dieser Hinsicht zunächst (indem wir übrigens an die sinterendenden Betrachtungen der Sommervorlesung 1890 anknüpfen), wann alle Zweige von P oder Π algebraisch sind, und daher auch der Quotient η algebraisch wird?

Dann ferner, wann wenigstens ein Zweig von P oder Π algebraisch ist?

Drittens werden wir, was andere Fälle der Reducirbarkeit angeht, insbesondere auf den Hermite'schen Fall der Laméschen Gleichung eingehen, wo die Integration durch elliptische Functionen geleistet wird.

1. Sämmtliche P , Π sind algebraisch.

Ich verweise dies bezüglich auf die Darstellung, welche ich hiervon in den Vorlesungen über das Skosaeder, S. 115-123 gegeben habe, und deute hier nur die Hauptphasen der historischen Entwicklung an:

a) Schwarz (in den Berichten der Schweizer Naturforsch. Gesellschaft, Zürich, August 1871; später in Crelle 75, 1872) erledigt das Problem für die hypergeometrische Fläche. Der Fall algebraischer η liegt dann und nur dann vor, wenn das Kreisbogendreieck auf der Kugel entweder so gewählt werden kann, dass es von den Symmetrieebenen eines regulären Körpers begrenzt wird, oder aber in eine Sichel ausgeartet ist.

deren Winkelöffnung mit 2π commensurabel ist. { Es ist nicht nötig, dass es sich gerade um ein Elementardreieck der regulären Körper dabei handelt, oder, wie in vorstehender Figur, um eine Elementarsichel; in Folge dessen ist die Zahl der hier in Betracht kommenden Fälle tatsächlich ∞ gross }.



b) Klein in den Erlanger Berichten vom Juli 1874; später ausgeführt in den math. Annalen 9, 1875.

Ohne seinen Zusammenhang mit der Theorie der Differentialgleichungen damals zu ahnen (ich hatte auch die Schwarz'sche Arbeit noch nicht bemerkt) bestimmte ich damals die Gesamtheit der endlichen Gruppen, welche man aus gebrochenen linearen Substitutionen $\eta = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}$ bilden kann, wodurch ich dann von mir aus zur Theorie der regulären Körper kam. Ich fand, dass es solcher Gruppen im Ganzen nur fünf Arten gibt:

- 1) Gruppen vom Kreisheilungstypus. Normalform $\eta = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}$. n Subst.
- 2) Gruppen vom Diederstypus. $2n$ Subst.
- 3) Tetraedergruppe. 12 Subst.
- 4) Oktaedergruppe. 24 "
- 5) Ikosaedergruppe. 60 " "

Ich darf hier folgende Einzelheiten hinzufügen:

a) Bei jeder dieser Gruppen bleiben gewisse Formen der η_1, η_2 bis auf Factor ungeändert (verhalten sich automorph); die einfachsten Formen dieser Art, aus denen sich alle anderen zusammensetzen, sind bei 1) η_1 und η_2 selbst, bei 2) ...

3) die früher besprochenen Φ, Ψ, X (die beispielsweise im Falle des Fhosaeders vom Grad 30, 20, 12 in η_1, η_2 sind).

b) Aus diesen Formen lässt sich dann immer eine niederste automorphe rationale Function bilden, die ich hier $F(\eta)$ nennen will: alle anderen automorphen rationalen Functionen sind in diesem Fielder rational. (Bei 1) ist $F = \eta_1^2$; bei 3) Φ^2, X^2 oder Ψ^2, X^2 .) Uebrigens führe ich im historischen Berichte fort und nenne:

c) Fuchs in den Götting. Nachrichten vom August 1845, später im Journal f. M. Bd. 81, 1845.

Fuchs nimmt dort die allgemeine Frage, wann eine Diff. gln. mit rationalen Coefficienten $y'' + p y' + q y = 0$ durchaus algebraisch integrierbar sei, in einer sehr bemerkenswerthen Weise in Angriff. Er bemerkt, dass Formen $\Phi(\eta_1, \eta_2)$ existiren müssen, die sich beim Umlauf des x in einem solchen Falle bis auf constanten Factor reproduciren, und bezeichnet die niedrigsten derartigen Formen, aus denen sich alle anderen rational und ganz zusammensetzen, als Primformen. Durch invariandentheoretische Schlüsse, die ich hier nicht wiedergeben kann, beweist er, dass es solcher Primformen nur eine endliche Zahl unterschiedener Typen geben kann, und ist dadurch schliesslich

in der Lage, die Frage, ob eine vorgelegte Differentialgleichung $y'' + p y' + q y = 0$ durchaus algebraische Integrale besitze, in jedem Falle durch eine endliche Zahl von Schritten zu entscheiden.

Hieran knüpft nun

d) Klein in den Erlanger Berichten vom Juni 1876 (später abgedruckt in Math. Annalen 11).

Ich bemerke dort, dass das Fuchs'sche Problem auf das Engste mit den endlichen Gruppen b) zusammenhängt und bin dadurch in der Lage, alle Differentialgleichungen der gesuchten Eigenschaft explizite hinzuschreiben. Es ist am leichtesten dies für die Differentialgleichung dritter Ordnung zu begründen, welcher η genügt. Ist η algebraisch, so wird's beim Umlauf des x um die singulären Punkte notwendig eine der 5 endlichen Gruppen b) erleiden; daher ist das bezügliche $F(\eta)$ notwendig rational in x und (1) $F(\eta) = \frac{P}{Q}(x)$ die Form der hier in Betracht kommenden Integralgleichung. Aber umgekehrt wird auch jede derartige Gleichung zu einer Diff. glch. der hier gewollten Art hinführen. Schreibt man nämlich zunächst (2) $F(\eta) = \xi$ (wo durch wir das Elementardreieck η auf Halbebene ξ abbilden), so haben wir nach Schwarz:

$$(3) [\eta]_{\xi} = \frac{1}{\xi(1-\xi)} \left\{ \frac{1-\lambda^2}{\lambda\xi} + \frac{1-\nu^2}{\lambda(1-\xi)} + \frac{1-\mu^2}{\lambda} \right\}, \text{ wo nun für } \lambda, \mu, \nu$$

in den fünf Fällen beziehungsweise eingebracht ist: $\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, 1$; $\frac{1}{k}, \frac{1}{2}, \frac{1}{n}$; $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$; $\frac{1}{k}, \frac{1}{3}, \frac{1}{n}$; $\frac{1}{k}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$.
Aber nun hat, wie man sofort nachrechnet:

$$(4) [\eta]_x = [\xi]_x + \xi^2 [\eta]_{\xi}. \text{ Daher hat man für (1) die Differentialgleichung}$$

3. Ordnung:

$$(5) [\eta]_x = [\xi]_x + \frac{\xi^2}{\xi(\xi-R)} \left\{ \frac{1-\lambda^2}{2R} + \frac{1-\nu^2}{2(\xi-R)} + \frac{1-\mu^2}{2} \right\}.$$

Von hier aus ist dann leicht zu der allgemeinsten zugehörigen Diffglch. 2^{ter} Ordnung $\eta'' + p\eta' + q\eta = 0$ aufzutreten, wobei sich zeigt, dass die Primformen von Fuchs gerade jene einfachsten automorphen Formen sind, von denen auf p. 179 unter b) die Rede war. Näher ausgeführt ist dies Alles in einer Arbeit in Bd. III. der Math. Annalen, 1877; vergl. auch Fuchs im Journal Bd. 85, 1878.

Wegen der weiteren Entwicklung der Theorie verweise ich auf die bereits genannte Darstellung in den Vorlesungen über das Ikosaeder. Ich habe dort auch angedeutet, dass man die entsprechenden Fragen für lineare Diff. glch. dritter und vierter Ordnung bereits in Angriff genommen hat. Es wird immer darauf ankommen, dass man zuerst die endlichen Gruppen studirt, die sich aus linearen Transformationen bilden lassen. Solche Gruppen für $n=4$ hat in neuester Zeit insbesondere Hr. Maschke in den mathematischen Annalen untersucht.

Wir wenden uns zu einer neuen Fragestellung: Functionenschaaren \mathcal{P}, Π , in denen eine einzelne algebraische Function eingeschlossen ist.

Indem wir die Exponenten, die zu den singulären Punkten a, b, \dots gehören, wieder λ, λ'' etc. nennen, schliessen wir der Kürze halber ganzzahlige Exponentendifferenzen $\lambda - \lambda' - \lambda''$ etc. aus.

Möge nun in der Höhe der Stelle a :

$$\text{Alg}_1(x) = A'(x-a)^{\lambda'} \cdot \mathcal{F}'(x-a) + A''(x-a)^{\lambda''} \cdot \mathcal{F}''(x-a)$$

sein, so sage ich, dass eine der beiden Constanten

A', A'' notwendig verschwindet. Lassen wir näm-
lich x um a einen Umlauf machen, so erhalten

$$\text{Alg}_2(x) = e^{2i\pi\lambda'} \cdot A'(x-a)^{\lambda'} \mathcal{F}'(x-a) + e^{2i\pi\lambda''} \cdot A''(x-a)^{\lambda''} \mathcal{F}''(x-a)$$

Sind A', A'' beide $\neq 0$, so ist dieser neue Zweig, we-
gen $e^{2i\pi\lambda'} \neq e^{2i\pi\lambda''}$, vom ersten linear unabhän-
gig; d. h. es setzen sich dann alle Zweige unseres

\mathcal{P} aus Alg_1 und Alg_2 linear zusammen; wir ha-
ben ein \mathcal{P} mit durchaus algebraischen Integra-
len, was wir aber hier ausschliessen, weil der

Fall ja bereits erledigt wurde. Unsere algebra-
ische Function gehört daher, nothwendig einem
der beiden Exponenten λ', λ'' ausschliesslich zu.

Ist es λ' , so muss λ' natürlich reell und rational
sein, wie wir nicht weiter ausführen.

Wir beschränken uns jetzt vorab auf den einfach-
sten Fall, den Fall dreier Verzweigungspunkte,
i. e. den gewöhnlichen hypergeometrischen Fall.

Für ihn hat Schwarz in Stelle 75 die hier vorliegen-
de Frage völlig erledigt. von einer anderen Sei-
te ist später Markhoff (Annalen 28, 29, 1887) da-
rauf zurückgekommen. Wir geben hier die Grund-
linien einer neuen Behandlungsweise, die sich durch
ihre Übersichtlichkeit empfehlen möchte.

Wir wollen dabei gleich an das Normal- Π zweiter Art
anknüpfen: $(1) \Pi \left| \begin{array}{ccc|c} a & b & c & \\ \lambda & \mu & \nu & x, x_2 \\ 0 & 0 & 0 & \end{array} \right|$, welches wir so
auswählen (in-

dem wir den Fall rein imaginärer λ, μ, ν bei Seite lassen), dass wir die reellen Theile von λ, μ, ν positiv voraussetzen. Es hat das den Vortheil, wie wir wissen, dass die sämmtlichen Zweige der Schaar Π überall endlich sind. Uebrigens handelt es sich dabei um Formen von x, x_2 vom Grade:

(2) $\lambda + \mu + \nu - 1$. Wir verlangen nun, dass irgend eine der 2 Formenschaaeren (3) $(x a)^\lambda (x b)^\mu (x c)^\nu$ Π eine algebraische Form enthalte.

Hierzu ist mit Rücksicht auf den Satz der p. 183 offenbar notwendig und hinreichend, dass unter der Normalschaaer Π der Formel (1) eine Form enthalten sei von der Gestalt

(4) $\Pi_1 = (x a)^{\varepsilon \lambda} (x b)^{\varepsilon' \mu} (x c)^{\varepsilon'' \nu} \cdot \varphi_k(x_1, x_2)$. Hier sind $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ Null oder Eins; φ_k aber bezeichnet eine rationale ganze Form der x, x_2 . Indem wir uns vorbehalten, gegebenenfalls λ, μ, ν zu vertauschen, haben wir nach den Wörthen der $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ offenbar folgende 4 Fälle auseinanderzuhalten:

$$(5) \begin{cases} \alpha) \Pi_1 = \varphi_k(x, x_2), \\ \beta) \Pi_1 = (x a)^\lambda \cdot \varphi_k(x, x_2), \\ \gamma) \Pi_1 = (x b)^\mu (x c)^\nu \cdot \varphi_k(x, x_2), \\ \delta) \Pi_1 = (x a)^\lambda (x b)^\mu (x c)^\nu \cdot \varphi_k(x, x_2). \end{cases}$$

Da ist nun k wegen (2) beziehungsweise gleich:

$$\lambda + \mu + \nu - 1, \quad -\lambda + \mu + \nu - 1, \quad +\lambda - \mu - \nu - 1, \quad -\lambda - \mu - \nu - 1,$$

Aber k muss notwendig eine ganze Zahl ≥ 0 sein.

Daher folgt: Der Fall $\delta)$ existirt nicht. Im Falle

$\alpha), \beta), \gamma)$ müssen beziehungsweise $\lambda + \mu + \nu, -\lambda + \mu + \nu, \lambda - \mu - \nu$ eine positive ungerade ganze Zahl vorstellen. Das Schöne ist nun, dass diese Bedingungen für die

Fälle α, β, γ nicht nur notwendig sondern auch ausreichend sind. Man ist nämlich in der Lage, das zugehörige $\Pi, (4)$ jedesmal mit Hilfe einer im Endlichen abbrechenden hypergeometrischen Reihe wirklich anzugeben. Ich führe dies hier nur für den Fall $\alpha)$ aus. Wir verlegen a, b, c nach $0, \infty, 1$ und haben dann

$q_k(x, x_2)$ als denjenigen Zweig der Schaar $\Pi \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \lambda & \mu & \nu \end{smallmatrix} ; x, x_2 \right)$, der bei $x=0$ zum Exponenten Null gehört. — Dann ist aber $q_k(x, x_2) \cdot x_2^{-k}$ derjenige Zweig der Schaar $\Pi \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ \lambda & \mu - k \end{smallmatrix} ; x \right)$, der bei $x=0$ zum Exponenten Null gehört.

Dies aber ist, wie wir wissen, $(b) F(-k, \mu-k, 1-\nu, x)$, und dies ist eine „im Endlichen abbrechende“ hypergeometrische Reihe, weil ihr erstes Element eine „negative ganze Zahl“ ist.

Damit ist in der That die Existenz des rationalen ganzen $q_k(x, x_2)$ in diesem Falle sicher gestellt.

Dieser Satz, dass $q_k(x, x_2)$ in jedem einzelnen der Fälle $\alpha), \beta), \gamma)$ eindeutig bestimmt werden kann, lässt die grosse Einfachheit der hier vorliegenden Fragestellung erkennen, ~ im Vergleich zu den viel schwierigeren Fragen, die wir bei der Aufsuchung der algebraischen Particularlösungen baldigst im Gebiete der Laméschen Functionen antreffen werden.

Wir könnten hier bereits mit dem Falle $n=3$ abbrechen, wenn es ~~uns~~ nur darauf ankäme, die Fälle, in denen eine einzelne algebraische Function auftritt, ausserlich aufzuzählen. Aber wir wollen eine

innere Einsicht in die Natur dieser Fälle anstreben.
Wir fragen also zunächst:

Welche Eigenschaften hat das zugehörige η ?

Wir haben früher, vom η ausgehend, einen Zweig Π des zugehörigen Normal- Π zweiter Art durch die Formel definiert:

$$(7) \quad \Pi_1 = \frac{x_2}{\sqrt{\eta}} (xa)^{\lambda-1} (xb)^{\mu-1} (xc)^{\nu-1} \left\{ \begin{array}{l} \text{wo } \eta = \frac{d\eta}{dx} \\ = x^2 \cdot \frac{d\eta}{dx} \end{array} \right.$$

Indem wir diese Formel umkehren, können wir schreiben:

$$(8) \quad \eta = \frac{\int (xa)^{\lambda-1} (xb)^{\mu-1} (xc)^{\nu-1} (x dx)}{\Pi^2}$$

Hat nun Π_1 eine der drei Formen (5) so wird dieses η bezüglich:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{bei } \alpha: \eta = \frac{\int (xa)^{\lambda-1} (xb)^{\mu-1} (xc)^{\nu-1} (x dx)}{\varphi_K(x_1, x_2)^2} \\ \text{bei } \beta: \eta = \frac{\int (xa)^{-\lambda-1} (xb)^{\mu-1} (xc)^{\nu-1} (x dx)}{\varphi_K(x_1, x_2)^2} \\ \text{bei } \gamma: \eta = \frac{\int (xa)^{\lambda-1} (xb)^{-\mu-1} (xc)^{-\nu-1} (x dx)}{\varphi_K(x_1, x_2)^2} \end{array} \right.$$

Unser η ist also in diesen Fällen durch ein einfaches unbestimmtes Integral darstellbar.

Umgekehrt werden wir, sobald wir η in Gestalt eines solchen Integrals voraussetzen, durch Formel (7) zu einem algebraischen Π , zurückgeführt; die Integralform des η ist also für unsere Fälle charakteristisch.

Bemerken wir noch, dass das Integral $\alpha)$ überall endlich ist, während das Integral $\beta)$ bei $x = a$, und das Integral $\gamma)$ bei $x = b$ und $x = c$ unendlich wird, - abgesehen von den Unendlichkeitspunkten die jeweils in die Stellen $\varphi_K(x_1, x_2) = 0$ fallen. Weil φ_K

einer linearen homogenen Differentialgleichung genügt, werden die Wurzeln von $\varphi_n = 0$ alle einfach (und natürlich von a, b, c verschieden) sein müssen. Der Gleichung $\varphi_n = 0$ entsprechend haben wir also bei unserem Integral jedesmal k einfach-algebraische Unstetigkeitspunkte.

Von der Gruppe des η (im besonderen Falle).

Hat unser η eine der drei Formen (9), so erleidet dasselbe bei Umläufen der x um die Punkte a, b, c offenbar keine allgemeinen linearen Substitutionen, sondern nur Substitutionen der Form (10) $\eta' = \alpha\eta + \beta$. Umgekehrt, wenn wir wissen, dass irgendwelcher Zweig unserer allgemeinen η -Function bei Umläufen der x nur Substitutionen (10) erleidet, so wird man für diesen Zweig auf die Form (9) schließen können. Denn

$\frac{d\eta}{dx}$ verhält sich dann bei Umläufen der x rein multiplicativ: $\left(\frac{d\eta}{dx}\right)' = \alpha \cdot \left(\frac{d\eta}{dx}\right)$, woraus sich für $\frac{d\eta}{dx}$ leicht die Form $\frac{dx}{\varphi_n(x, x_0)^{\lambda-1} (x-b)^{\mu-1} (x-c)^{\nu-1} x^2}$ erschliessen lässt.

Was aber ist die eigentliche Bedeutung der Formel (10)? Es handelt sich bei ihr um solche Substitutionen, welche den Punkt $\eta = \infty$ festlassen. Wählen wir also statt des durch (9) gegebenen η irgend einen anderen Zweig η (der aus dem Integral (9) durch irgendwelche lineare Substitution entsteht), so werden wir mit einer solchen Gruppe linearer Substitutionen zu thun haben, die irgend welchen bestimmten Punkt der neuen η -Ebene festlassen, wie man

nen also umgekehrt sagen: So oft bei den linearen Substitutionen, die irgend welcher Zweig η bei den Umläufen des x erfährt, ein bestimmter Punkt der betreffenden η -Ebene fest bleibt, so oft liegt der hier von uns betrachtete specielle Fall vor (dass sich unter den Zweigen dieser zweckmässig gewählten zugehörigen P -function eine particuläre algebraische Lösung befindet).

Wir untersuchen ferner:

Die zu unserem speciellen Falle gehörige conforme Abbildung. Die Gleichung $\pm \lambda \pm \mu \pm \nu = 2k+1$ kann sowohl erfüllt sein, wenn die λ, μ, ν einzeln reell sind, als wenn sie imaginäre Bestandteile haben. 1) Im ersteren Falle werden wir die x -Ebene natürlich längs der reellen Axe in zwei Halbebenen zerschneiden und nun die Kreisbogendreiecke studiren, auf welche diese Halbebenen abgebildet werden. Indem wir das einzelne Dreieck an seinen Seiten nach dem Symmetrieprincip vervielfältigen erwächst in der früher geschilderten Weise die „Gruppe“ des zugehörigen η . Nun soll bei dieser Gruppe, wie wir gerade sahen, ein bestimmter Punkt der η -Ebene festbleiben. Wir schliessen, dass die drei Seiten des Dreiecks alle durch diesen Punkt laufen müssen. Umgekehrt, wenn die drei Dreiecksseiten alle durch einen gemeinsamen Punkt laufen, so wird der Punkt bei der zugehörigen Gruppe linearer Substitutionen fest bleiben, also gerade der uns interessirende Fall vorliegen. Wir werfen

jetzt den festen Punkt insbesondere nach $\eta = \infty$.
 Dann ist unser Dreieck geradlinig geworden, unser
 spezieller Fall ist also (im Falle reeller λ, μ, ν) da-
 durch charakterisiert, dass man dem zugehörigen
 Kreisbogendreieck die Gestalt eines geradlinigen
 Dreiecks ertheilen kann.

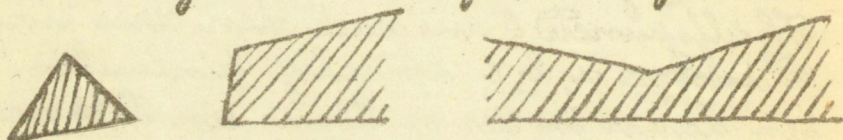
2) Sind die λ, μ, ν nicht durchweg reell (aber auch
 keines von ihnen rein imaginär; wir hatten das
 schon oben ausgeschlossen), so werden wir, wie wir
 vor Weihnachten schilderten, die K -Ebene durch drei
 Schnitte zerschneiden, welche von irgend welchem
 Hilfspunkte O aus nach den drei singulären
 Punkten a, b, c spiralförmig hinlaufen. Wir erhal-
 ten dann in der η -Ebene ein Sechseck, dessen
 aufeinanderfolgende Seiten durch bestimmte
 lineare Substitutionen an einander gekoppelt
 sind:



Wir werden weiter unten sehen,
 dass wir die Seiten dieses Sechs-
 ecks im vorliegenden speziellen
 Falle immer geradlinig wählen
 können. Ohne hierauf einzuge-
 hen, betonen wir hier nur, dass
 die Substitutionen, durch welche die Seiten
 an einander gekoppelt erscheinen, die Gestalt $\eta =$
 $\alpha \eta + \beta$ haben und also geometrisch Drehungen der
 Ebene im elementaren Sinne, verbunden mit
Ähnlichkeits-Transformationen vorstellen (ist $\beta =$
 $\cos \varphi + i \sin \varphi$, so liegt bloße Drehung vor; die Ähn-
 lichkeits-Transformation tritt erst hinzu, wenn der

absoluten Betrag von $\alpha \geq 1$ wird). Durch diese besonders einfache geometrische Bedeutung seiner Substitutionen wird der vorliegende Specialfall dann wieder charakterisiert sein.

Es ist leicht zu sehen, wie sich dabei, möge 1) oder 2) vorliegen, die Fälle α, β, γ unterscheiden. Im Falle α liegt keine Ecke unseres Dreiecks (kein Scheitel unseres Sechsecks) im Unendlichen, im Falle β thut dies eine Ecke (ein Scheitel), im Falle γ thut es zwei. Vergleiche etwa folgende drei schematische Figuren dreier geradliniger Dreiecke:



Näheres Studium der conformen Abbildung.

Wir wollen die so im Allgemeinen charakterisirt conforme Abbildung nun noch mehr ins Einzelne betrachten, einmal, weil die Resultate, welche dabei entstehen, an sich interessant sind, dann auch, um uns so in geometrischen Betrachtungen zu üben, die wir später in allgemeinerer Form gebrauchen werden. Der Kürze halber beschränken wir uns dabei auf den Fall α): $\lambda + \mu + \nu = 2K + 1$ und betrachten zuerst wieder die Annahme durchaus reeller λ, μ, ν . Es ist bei letzterer Annahme $\varphi_n(x, x_2)$ selber reell, und nun ist es natürlich zu fragen: wie viele reelle Wurz-

zeln hat $\varphi_k = 0$ in den drei Intervallen des
 x -Axe von b re, c - a, a, b? wie viele imagi-
 näre Wurzeln hat es?

Ich will diese Zahlen beziehungsweise l, m, n, p nennen,
 wobei natürlich $l + m + n + p = k = \frac{\lambda + \mu + \nu + 1}{2}$. Augen-
 scheinlich prägen sich diese l, m, n, p in der Gestalt
 des Dreiecks leicht erkennbar aus:

l gibt an, wie oft diejenige Dreiecksseite, welche dem
 Winkel $\lambda\pi$ gegenüberliegt, durch's Unendliche zieht;
 m, n geben die gleiche Zahl für die beiden ande-
 ren Dreiecksseiten.

p gibt die Anzahl von Malen, dass die eigentliche
 Fläche des Dreiecks (die Membran, die wir uns zwi-
 schen den Seiten ausgespannt denken mögen)
 den Unendlichkeitspunkt überdeckt.

Gelingt es uns also, uns eine klare Vorstellung
 zu machen, wie ein geradliniges Dreieck mit den
 Winkeln $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$ gestaltet ist, so können wir
 die Werte der l, m, n, p unmittelbar ablesen.
 Im Princip sind diese Werte schon von Poincaré
 und Hilbert bestimmt worden, welche die
 mit endlicher Gliederzahl abbrechende hyper-
 geometrische Reihe durch algebraische Mittel
 untersuchen (Comptes Rendus, Bd. 100. 1885,
 bez. Stelle t. 103, 1887). Es muß interessant sein,
 ihre Angaben mit den hier abzuleitenden
 zu vergleichen.

Die nunmehr zu entwickelnde Methode
 ist im Princip dieselbe, welche ich im vori-
 gen Sommer, bez. in meiner neuerdings in

den Annalen veröffentlichten Note (Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe) gebraucht. Von irgendwelchen λ, μ, ν ausgehend werden wir uns durch einen bestimmten arithmetischen Ansatz „reducirte“ λ, μ, ν herstellen. Wir construiren uns dann das „reducirte“ Dreieck mit den Winkeln $\lambda, \pi, \mu, \pi, \nu, \pi$, dessen Gestalt leicht zu übersetzen sein wird, und steigen von ihm durch bestimmte geometrische Operationen, die der Rückwärtsdurchlaufung des arithmetischen Reductionsprocesses entsprechen, zum allgemeinen Dreieck λ, μ, ν auf. —

Arithmetische Reduction

(immer nur für den Fall α).

Wir setzen $\lambda = E(\lambda) + (\lambda)$ } wo die $(\lambda), (\mu), (\nu)$ echte Brüche
 $\mu = E(\mu) + (\mu)$ } sein werden (die bei uns nicht
 $\nu = E(\nu) + (\nu)$ } Null sein können, weil wir
 den Fall ganzzahliger λ, μ, ν
 ausdrücklich ausgeschlossen hatten).

Offenbar ist $(\lambda) + (\mu) + (\nu)$, — weil $\lambda + \mu + \nu$ ganzzahlig, — entweder gleich 1 oder $= 2$. Dies ist unser erster Unterscheidungsmerkmal. Ist $(\lambda) + (\mu) + (\nu) = 1$, so ist $E(\lambda) + E(\mu) + E(\nu) = 2k$, d. h. eine gerade Zahl; anderenfalls ist $E(\lambda) + E(\mu) + E(\nu)$ ungerade.

Wir ordnen jetzt (was keine Beschränkung bedeutend soll), die λ, μ, ν so, dass $E(\lambda) \geq E(\mu) \geq E(\nu)$ und unterscheiden nun zweitens, ob

$$E(\lambda) \leq E(\mu) + E(\nu)$$

oder ob

$$E(\lambda) \geq E(\mu) + E(\nu). *$$

Durch Combination der beiden Unterscheidungs-

*/k. Ob ich $E(\lambda) = E(\mu) + E(\nu)$ zu dem einen oder anderen Falle rechnen will, bleibt gleichgültig.

140.

merkmale erhalten wir für unser α) vier Unterarten:

	$\alpha) + (\mu) + (\nu) = 1$	$(\lambda) + (\mu) + (\nu) = 2$
$E(\lambda) \cong E(\mu) + E(\nu)$	α_{11}	α_{21}
$E(\lambda) \cong E(\mu) + E(\nu)$	α_{12}	α_{22}

die wir jetzt einzeln behandeln.

Reduction des Falles α_{11} :

Ich setze $E(\lambda) = b + c$, $E(\mu) = c + a$, $E(\nu) = a + b$,

wo a, b, c drei ganze, nicht negative Zahlen. Ich nehme ferner $\lambda_0 = (\lambda)$, $\mu_0 = (\mu)$, $\nu_0 = (\nu)$, und setze also später von den reducirten λ_0, μ_0, ν_0 zu den allgemeinen λ, μ, ν durch die Formeln auf:

$$\lambda = \lambda_0 + b + c, \mu = \mu_0 + c + a, \nu = \nu_0 + a + b.$$

Reduction des Falles α_{12} :

Ich setze $E(\mu) = c$, $E(\nu) = b$, und $E(\lambda) - E(\mu) - E(\nu)$, welches eine gerade Zahl ist, $= 2A$. Ich nehme ferner λ_0, μ_0, ν_0 wieder $= (\lambda), (\mu), (\nu)$ und habe also später die Formeln in Betracht zu ziehen:

$$\lambda = \lambda_0 + 2A + b + c, \mu = \mu_0 + c, \nu = \nu_0 + b.$$

Reduction des Falles α_{21} :

Da $E(\lambda) + E(\mu) + E(\nu)$ ungerade und $E(\lambda) \cong E(\mu) \cong E(\nu)$ genommen wurde, werde ich drei ganze Zahlen a, b, c , welche ≥ 0 sind, durch die Formeln definieren können:

$$E(\lambda) = b + c + 1,$$

$$E(\mu) = c + a + 0,$$

$$E(\nu) = a + b + 0.$$

Ich setze jetzt: $\lambda_0 = (\lambda) + 1$, $\mu_0 = (\mu)$, $\nu_0 = (\nu)$, also $\lambda_0 + \mu_0 + \nu_0 = 3$, und habe dann: (wie bei α_{11}):


$$\lambda = \lambda_0 + b + c, \mu = \mu_0 + c + a, \nu = \nu_0 + a + b.$$

Reduction des Falles α_{22} .


Hier setze ich: $\mathcal{E}(\lambda) = b + c + 2A + 1$; $\mathcal{E}(\mu) = c$, $\mathcal{E}(\nu) = b$.

$\lambda_0 = (\lambda) + 1$, $\mu_0 = (\mu)$, $\nu_0 = (\nu)$, worauf,
wie im Falle α_{12} : $\lambda = \lambda_0 + 2A + b + c$, $\mu = \mu_0 + c$, $\nu = \nu_0 + b$.

Geometrische Construction.

In den Fällen α_{11} , α_{12} ist beim reducirten Dreiecke $\lambda_0 + \mu_0 + \nu_0 = 1$, das reducirte Dreieck ist also ein solches geradliniges Dreieck, wie es die elementare Geometrie betrachtet:  Fig. 1.

Sein Winkel ist überstumpft (d. h. $> \pi$).

In den Fällen α_{21} , α_{22} dagegen ist $\lambda_0 + \mu_0 + \nu_0 = 3$, zugleich ist λ_0 , aber auch λ_0 allein, überstumpft. Die Figur ist folgende:  Fig. 2.


Offenbar haben wir Figur (1) entsprechend:

(1) $\lambda_0 = 0$, $\mu_0 = 0$, $\nu_0 = 0$, $\rho_0 = 0$; $k_0 = 0$; dagegen der Figur (2) entsprechend: (2) $\lambda_0 = 1$, $\mu_0 = 0$, $\nu_0 = 0$, $\rho_0 = 0$; $k_0 = 1$.

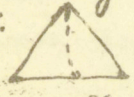
Es wird nun darauf ankommen, diese reducirten Dreiecke gemessen geometrischen Operationen beziehungsweise a -mal, b -mal c -mal, oder A -mal, zu unterwerfen.

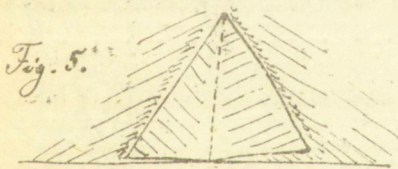
Die erste Art der Operation ist die laterale Anhängung einer Halbebene, die andere Art Operation die polare Anhängung einer Halbebene.

Wenn wir z. B. an die horizontale Seite von Fig. (1) eine Halbebene anhängen, so entsteht:

Fig. 3 ; die horizontale Seite hat sich dabei in ihr „Complement“ verwandelt, μ_0 und

ν , sind je um eine Einheit gewachsen. l hat sich in l verwandelt. Wiederholen wir die Operation, so treten jetzt in den beiden unteren Ecken einfache Windungspunkte ein. Unser Dreieck ist einfach um die Ganz-Ebene vermehrt worden. Indem die horizontale Seite wieder die alte geworden ist, ist l wieder auf 0 herabgesunken, jetzt aber ist $p=1$ geworden. —

Bei der anderen Operation denken wir uns von der einen Dreiecksspitze aus zur gegenüberliegenden Seite irgend wie eine Verbindungslinie gezogen:  und heften nun längs dieser Linie eine volle Halbebene (die durch die horizontale Gerade, auf welcher die untere Dreiecksseite liegt, begränzt wird) an unser Dreieck an. So entsteht:



Der Winkel λ ist $= \lambda_0 + 2\pi$ geworden, l hat sich in l verwandelt.

Wir haben das vorige Mi. $\frac{21}{4}$ $\frac{1}{4}$.


Mal zwei Arten reducirter Dreiecke benutzt, indem wir $\lambda_0 + \mu_0 + \nu_0$ entweder = 1 oder 3 nahmen. Dann sind wir von ihnen auf zwei Weisen zu allgemeinen Dreiecken aufgediegen, indem wir entweder $\lambda = \lambda_0 + b + c$, $\mu = \mu_0 + c + a$, $\nu = \nu_0 + a + b$ nahmen oder aber $\lambda = \lambda_0 + b + c + 2\pi$, $\mu = \mu_0 + c$, $\nu = \nu_0 + b$. Die geometrische Bedeutung der letzteren Formeln ist ganz klar:

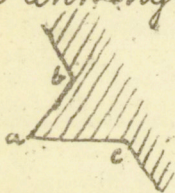
Wir gehen vom reducirten Dreiecke zum allge-

152

(indem wir entweder an die 3 Seiten des reducirten Dreiecks
meinen Dreiecks a , bez. b , resp. c Halbebenen
abhängen, oder nur an zwei der Seiten b , bez. c
Halbebenen anfügen, dafür aber an den ein-
geschlossenen Winkel nach A Halbebenen po-
lar anhängen.)

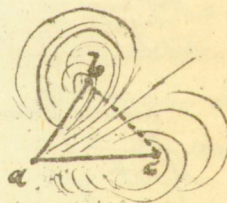
Es ist nun die Frage (von der wir oben, p. 103
ausgingen), wie oft sich das so erweiterte Drei-
eck mit seinen Seiten, bez. mit seiner Fläche
durch's Unendliche zieht? Betrachten wir etwa
ein reducirtes Dreieck $\lambda_0 + \mu_0 + \nu_0 = 1$:

Bei ihm ist $l = 0, m = 0, n = 0, p = 0$. 
Indem wir jetzt an die erste Seite eine Halb-
ebene anhängen:



ist offenbar $l = 1, m = 0, n = 0, p = 0$.
Fügen wir noch eine zweite Halb-
ebene längs derselben Seite an,
so haben wir folgende Figur:

(mit Wendungspunkten in den
Ecken b, c); l ist wieder $= 0, m = 0,$
 $n = 0$, aber p ist jetzt $= 1$. Solcherwei-
se sieht man:



Set $a = \lambda a' + \epsilon_1, b = \lambda b' + \epsilon_2, c = \lambda c' + \epsilon_3$, wo die $\epsilon_i = 0$ oder
 1 , so wird $l = \epsilon_1, m = \epsilon_2, n = \epsilon_3, p = a' + b' + c'$ geworden sein.
Ebenso einfach ist es, den Effect zu beurtheilen, den die
 A -malige Anhängung einer Halbebene an die
Ecke a hat: der Erfolg ist, dass sich die gegenü-
berliegende Seite A mal durch's Unendliche zieht.
Indem wir Beides zusammennehmen, bekom-
men wir für unsere vier Fälle die folgende Ta-

belle, die mit den Resultaten von Picardes und Hilbert stimmen muss:

$\alpha) l = \varepsilon_1, m = \varepsilon_2, n = \varepsilon_3$ $p = a' + b' + c'$	$\alpha_2) l = 1 - \varepsilon_1, m = 2\varepsilon_2, n = \varepsilon_3$ $p = a' + b' + c' + \varepsilon_1$
$\beta) l = \varepsilon_1, m = \varepsilon_2, n = \varepsilon_3$ $p = b' + c'$	$\beta_2) l = 1 + \varepsilon_1, m = \varepsilon_2, n = \varepsilon_3$ $p = b' + c'$

Natürlich lassen die Fälle β und γ (d. h. $\mu + \nu = \lambda + 2k + 1$, bez. $\lambda = \mu + \nu + 2k + 1$) eine ganz analoge Behandlung zu: das Resultat ist sogar noch einfacher, weil weniger Unterarten zu unterscheiden sind, ich gehe darauf nur deshalb nicht ein, um Zeit zu sparen. Auch da haben wir die Angaben von Picardes und Hilbert zum Vergleich. Ich möchte nun aber zu zeigen, dass unsere Methode der conformen Abbildung weiter reicht als die genannten Angaben. Zu dem Zwecke gehe ich jetzt auf die Fälle ein, wo $\lambda + \mu + \nu$ (oder $-\lambda + \mu + \nu$, resp. $\lambda - \mu - \nu$) zwar nach wie vor noch $\leq k + 1$ ist, aber die λ, μ, ν nicht mehr einzeln reell sind. Hinsichtlich der Wurzeln von $\varphi_k(x, x_2) = 0$ wird da allerdings kein Satz zu erreichen sein: die k Wurzeln werden im Allgemeinen complex sein. Aber wir können unabhängig davon verlangen, uns das conforme Bild, welches die x -Ebene in der η -Ebene findet, deutlich zu machen, so dass wir klar vor Augen sehen weshalb sich dasselbe k -mal durch's Unendliche zieht. Ich möchte solchen qualitativen Betrachtungen über conforme Abbildungen einen grossen Werth beimessen. Ist $\eta = f(x)$ und sind η, x beide reell,

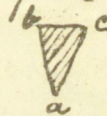
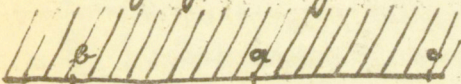
so ist es doch naturgemäss, zuerst betreff des Verlaufs der Curve $\eta = f(x)$ gewisse qualitative Fragen zu stellen: Wo liegen singuläre Punkte? Wo Maxima oder Minima? Gibt es unendliche Feste? u. dergl. mehr. Analog interessieren wir uns dafür, wenn $\eta = f(x)$, und η, x complexee Variable sind, welches das Gesamtbild der conformen Abbildung ist, die η von x entwirft. Ohne Zweifel gewinnen wir so eine sehr viel bessere Einsicht in das Wesen der Function f , als ohne dies Hilfsmittel möglich ist. In der That wird uns die bezeichnete Methode später in höheren Fällen noch ganz besondere Dienste leisten. Um so mehr müssen wir uns üben, die niederen Fälle nach allen Richtungen genau durchzuarbeiten.

Complexee Exponenten λ, μ, ν .

Wir haben vor Weihnachten bereits kurz besprochen, wie sich im Falle complexeer λ, μ, ν die zweckmässigste conforme Abbildung der x -Ebene gestaltet. Eine Zerschneidung der x -Ebene in zwei Halbebenen können wir jetzt nicht mehr gebrauchen, wir zogen darum bereits vor, nur solche Schnitte anzuwenden, welche die x -Ebene nicht zersücken, also z. B. drei Schnitte, die von einem beliebigen Hilfspunkte O der x -Ebene nach den singulären Punkten a, b, c hinlaufen. Das entsprechende Bild in der η -Ebene ist dann ein Sechseck mit den Ecken O_a, O_b, O_c , dessen bez. von a, b, c auslaufende Seiten jedesmal durch eine lineare Substitution zusam-

menge kuppelt sind. Um nun die hier stattfindenden Verhältnisse gut zu übersetzen, wollen wir zunächst noch einmal zum Falle reeller λ, μ, ν zurückgehen und versuchen, wie sich bei ihnen die in Fiedre stehende Abbildung auf das Sechseck gestaltet. Ich setze dabei immer $\lambda + \mu + \nu = 2k + 1$ voraus.

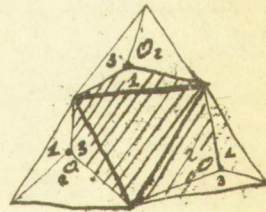
Wir beginnen mit einem reducirten Falle $\lambda_0 + \mu_0 + \nu_0 = 1$ und zeichnen uns die x -Ebene in früherer Weise geschnitten und das der positiven Halbebene zugehörige Dreieck der y -Ebene.



Dieses Dreieck der y -Ebene umgeben wir nun nach dem Symmetrieprinzip mit drei Bildern der negativen Halbebene (die wir von der positiven Halbebene x aus erreichen, indem wir je nachdem über das Intervall bc , oder das Intervall ca , oder das Intervall ab in die negative Halbebene hinüberdrehen).

In dem einen dieser Sechsendreiecke nehmen wir einen Hilfspunkt O und verbinden ihn geradlinig mit den betreffenden Dreiecksseiten a, b, c wodurch das Dreieck in 3 Stücke zerlegt wird, die wir 1, 2, 3 nennen.

Die gleiche Zerlegung bringen wir an den



(Fig. 2.)

beiden anderen Seitendriegen an. Endlich übertragen wir die drei von O auslaufenden Geradenstücke Oa , Ob , Oc in die x -Ebene, wodurch wir dort folgende Figur haben (in die ich auch die Zahlen 1, 2, 3 eingeschrieben habe):

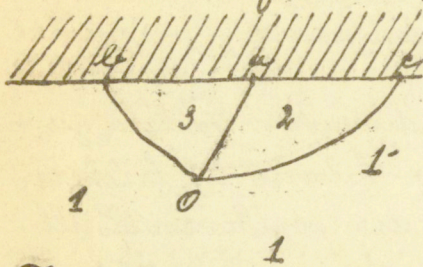


Fig. 3

Wenn ich nun jetzt hier, statt längs der reellen Axe, die x -Ebene längs der Linienstücke Oa , Ob , Oc zerschneide, was wird die conforme Abbildung der so zerschnittener Ebene sein? Offenbar das Sechseck, welches den Kern von Fig. 2 ausmacht und das wir hier noch einmal hersetzen:

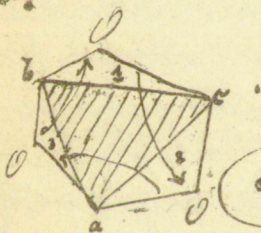


Fig. 4.

und dessen Seiten, wie in der Figur angedeutet, durch Drehungen der Ebene um die Punkte a , b , c beziehungsweise zusammengekröpelt sind. die Amplitude dieser Drehungen beträgt $2\lambda\pi$, $2\mu\pi$, $2\nu\pi$. Von dieser allgemeinen Art der Abbildung werden wir übrigens zum meist einen Specialfall betrachten, nämlich denjenigen, wo O in die Ecke a seines Dreiecks hineingerückt ist und wir daher (indem die Gebietsdeile 2 und 3 verschwinden) einfach ein Viereck vor uns haben:

Dieses Viereck ist einfach das Ab-

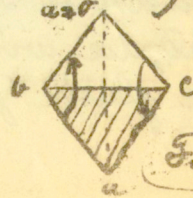


Fig. 5.

bild der x -Ebene, die wir von b nach c über a geradlinig (also längs zweier Stücke der reellen Axe) zerschneiden haben:

Das wäre die Abbildung im reducirten Falle $\lambda_0 + \mu_0 + \nu_0 = 1$. —

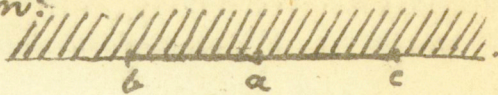
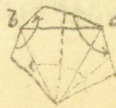


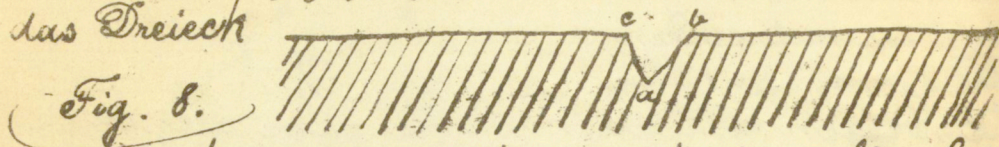
Fig. 6.

Wie steigen wir nun von ihr zum allgemeinen Falle λ, μ, ν auf? Mit anderen Worten: Was wird bei der neuen Abbildung aus den früheren Operationen der lateralen und der polaren Anhängung einer Halbebene? Natürlich die Anhängung einer Ganzebene (Vollebene). Und in der That hat es zunächst gar keine Schwierigkeit, uns vorzustellen, dass man bei Figur 4 oder 5 längs einer der Strecken bc , ca , ab eine Vollebene anhängt: die Strecke wird, wenn sie nicht gerade an der Peripherie der Figur liegt, als ein Verzweigungsschnitt zu benutzen sein, der die beiden Verzweigungspuncte verbindet, die in den Ecken liegen. Aber auch die polare Anhängung einer Vollebene ist leicht zu verstehen, wenigstens wenn wir (sofern die Ecke a ausgezeichnet werden soll) an der Figur 5 festhalten. Da ist einfach von a zu a eine Diagonale zu ziehen (die in Fig. 5 bereits punctirte Linie) und an sie als an einen von a nach a reichenden Verzweigungsschnitt die Vollebene anzukleffen. [In Fig. 4 werde ich am besten von a aus nach zwei zusammengehörigen Banden punctirte Linien ziehen:

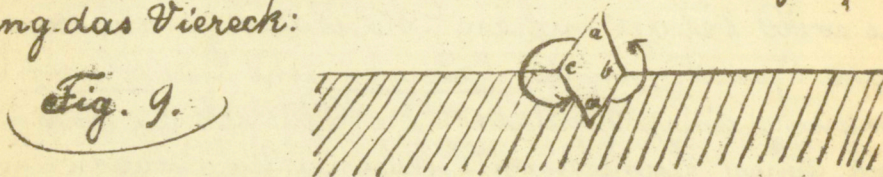
Fig. 7.



und an jede derselben eine Halbebene anhängen! -
Diese sämtlichen Verhältnisse lassen sich jetzt
leicht auf den Fall übertragen, wo für das reducir-
te Dreieck $\lambda_0 + \mu_0 + \nu_0 = 3$ ist. Wir haben da etwa
das Dreieck



und machen uns aus ihm durch einmalige Spie-
gelung das Viereck:



(dessen „Fläche“ sich einfach durch's Unendliche
zieht). Da können wir dann ebensowohl Voll-
ebenen anhängen, wie vortin, nur dass wir bei-
spielsweise die punctirte Diagonale (die wir in Fig. 5
benutzten, die also die beiden Punkte a der Figur
verbinden soll) jetzt durch's Unendliche laufen lassen
müssen. —

Nach dieser Vorbedeutung gehen wir nun
wirklich zu complexen Exponenten: $\lambda = \lambda' + i\lambda''$,
 $\mu = \mu' + i\mu''$, $\nu = \nu' + i\nu''$. Die maassgebende Idee,
die wir da fassen, ist die, dass Alles, was bisher
mit den reellen Exponenten gemacht wurde,
jetzt mit den reellen Theilen derselben gemacht
werden soll. Wir schliessen also ganzzahlige oder
verschwindende λ' , μ' , ν' von der Betrachtung aus
und setzen $\lambda' = \varepsilon(\lambda') + (\lambda')$, $\mu' = \varepsilon(\mu') + (\mu')$, $\nu' = \varepsilon(\nu') + (\nu')$.
Da kann dann $(\lambda') + (\mu') + (\nu') = 1$ oder 2 sein. Im
ersteren Falle nehmen wir $\lambda'_0 = (\lambda')$, $\mu'_0 = (\mu')$, $\nu'_0 = (\nu')$.

im zweiten Falle $\lambda'_0 = (\lambda') + 1$, $\mu'_0 = (\mu')$, $\nu'_0 = (\nu')$ { Da = bei habe ich noch vorausgesetzt, was keine wesentliche Einschränkung, sondern nur eine Vereinbarung ist dass $\varepsilon(\lambda') \geq \varepsilon(\mu') \geq \varepsilon(\nu')$ sei }. Unsere Aufgabe ist jetzt, vor allen Dingen für die reducirten Fälle: $\lambda = \lambda'_0 + i\lambda''$, $\mu = \mu'_0 + i\mu''$, $\nu = \nu'_0 + i\nu''$ eine geeignete Abbildung der λ -Ebene zu entwickeln, von ihr werden wir dann leicht durch Anhängung von Vollenbenen zu den Fällen allgemeiner λ, μ, ν aufsteigen.

Sei zunächst $\lambda_0 + \mu_0 + \nu_0 = 1$.

Wir wollen uns dann in der η -Ebene ein geradliniges Viereck construiren, welches die Verallgemeinerung des in Fig. 5 gegebenen ist (nur dass die Unterabtheilung in symmetrische Dreiecke jetzt fortfällt):

Die Winkel bei b und c sind

beziehungsweise $2\mu'_0\pi$, $2\nu'_0\pi$,

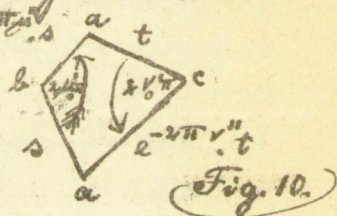
die beiden von b und c auslaufenden Seiten sind aber nicht

gleich lang, sondern zeigen das Grössenverhältniss $s : s e^{-2\pi\mu''}$, resp. $t : t e^{-2\pi\nu''}$ wie in der Figur näher angegeben. In der That sollen diese zwei

Seiten hier durch eine loxodromische Substitution von der Gestalt $(\eta' - b) = e^{2i\pi(\mu'_0 + i\mu'')} (\eta - b)$,
resp. $(\eta' - c) = e^{2i\pi(\nu'_0 + i\nu'')} (\eta - c)$,

zusammengekoppelt sein, d. h. durch Drehung um $2\pi\mu'_0$ ($2\pi\nu'_0$), verbunden mit Ähnlichkeits-Transformation vom Modul $e^{-2\mu''\pi}$ ($e^{-2\nu''\pi}$).

Ich behaupte nun:



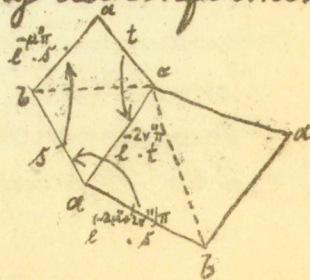
Das so gezeichnete Viereck ist gerade die gesuchte Abbildung, die entsteht, wenn wir die x -Ebene von b nach c über a hin in geeigneter Weise (spiralig) zerschneiden.

Beweis: Vor allen Dingen ist aus den vor Weithachten gegebenen Erläuterungen klar, dass unser Viereck als Fundamentalebene einer Variablen x . (als Bild einer Vallebene x) betrachtet werden darf. Die dadurch definierte η -Funktion $\eta(a, b, c, x)$ hat ferner bei b und c , wie wir aus der Figur ablesen, sicher die Exponenten μ, ν . Es handelt sich also nur noch darum, einzusehen, dass dieselbe bei $x = a$ den Exponenten $\lambda = \lambda' + i\lambda''$ hat. Da $\lambda + \mu + \nu = 1$, so ist $\lambda' + \mu' + \nu' = 1$, $\lambda'' + \mu'' + \nu'' = 0$. wir haben also bei $x = a$ den Exponenten $\lambda = (1 - \mu' - \nu') + i(-\mu'' - \nu'')$ nachzuweisen: Zwei von a auslaufende zusammengehörige Linien sollen durch eine losodromische Substitution zusammengeordnet sein, die den Drehwinkel $2\pi(1 - \mu' - \nu')$ und den Ähnlichkeitsmodul $e^{2\pi(\mu'' + \nu'')}$ besitzt! Dies ist nun folgendermassen in der Figur zu erkennen:

Wir legen neben unser Viereck vermöge der einen zugehörigen losodromischen Substitution ein zweites (welches für das gefundene $\eta(x)$ jedenfalls eine „analytische Fortsetzung“ der conformen Abbildung vorstellt):

Indem wir hier die beiden fundamentalen Linien bs, cb ein-

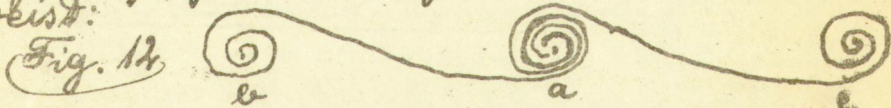
(Fig. 11)



fügen, können wir das neue Viereck, welches von ihnen und den beiden durch einen Querstrich gekennzeichneten Linien ab begrenzt wird, als neues Abbild der X -Ebene in Anspruch nehmen: die Ferschneidung der X -Ebene hat dann nur gewechselt, es ist ein Schnitt eingeführt worden, der von a über b nach c läuft.

Da liegt nun richtig zwischen den beiden von a auslaufenden Händen ein Winkel, der so gross ist, wie die beiden Winkel zusammen, die in dem ursprünglichen Viereck an der unteren und der oberen Ecke a liegen, doch (weil die Winkelsumme im geradlinigen Viereck überhaupt 2π) der gleich $2\pi(1-\mu'_0-\nu'_0)$ ist. Ferner laufen von a aus zwei Seiten (vergl. die Figuren), welche die Längen s und $s \cdot e^{-2\pi(\mu''+\nu'')}$ haben, was den niedrigen Ähnlichkeitsmodul $e^{\pi(\mu''+\nu'')}$ ergibt. —

Unsere Figur (10) ist also in der That ein durch unser $\eta \begin{pmatrix} a & b & c \\ \lambda_0 & \mu_0 & \nu_0 \end{pmatrix} x$ entworfenes Abbild der X -Ebene, es wird interessant sein, nun hinterher die Ferschneidung der X -Ebene zu bestimmen, die diesem (geradlinig begränzten) Abbild entspricht und die jedenfalls folgenden allgemeinen Charakter aufweist:



Wäre $\lambda_0 + \mu_0 + \nu_0 = 3$ gewesen, so hätten wir natürlich, entsprechend Figur (9) statt des Vierecks der Figur (10) ein Viereck bekommen, welches sich einmal über den unendlich fernen Punkt hinüber-

zieht:

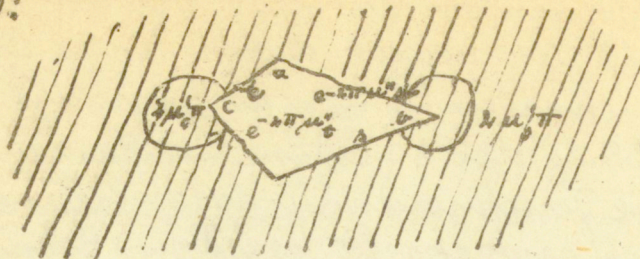


Fig. 13.

Und nun hat es gar keine Schwierigkeit, sich vorzustellen, dass man an diese Vierecke, Fig. 10 und Fig. 13, a, b, c oder auch A, B, C Vollkugeln anhängt ~ lateral oder polar, wie es gerade sein soll ~, wobei ganz selbst verständlich ist, dass bei Fig. 10 der Unendlichkeitspunkt $(a+b+c)$ mal, bez. $(A+B+C)$ mal überdeckt wird, bei Fig. 13 aber $(a+b+c+1)$ mal, bez. $(A+B+C+1)$ mal. Diese Zahlen sind aber allemal gleich $\frac{\lambda+\mu+\nu-1}{2} = k$, wir haben also in der That die Existenz der k Wurzeln der Gleichung $\mathcal{F}_k(x, x_2) = 0$ unmittelbar vor Augen. Die ganze Betrachtung complexer λ, μ, ν ist viel einfacher geworden, als man vielleicht von Hause aus hat erwarten mögen. —

Lamésche Gleichungen mit einer algebraischen Particularlösung.

Die gleiche Frage, welche wir jetzt im hypergeometrischen Falle erledigt haben, untersuchen wir jetzt bei der Laméschen Gleichung.

Nehmen wir zunächst eine ganz allgemeine Lamésche Gleichung, in dem Sinne, der oben entwickelt wurde, also eine Gleichung

mit n singulären Punkten, bei denen allen als Exponentendifferenz $\frac{1}{2}$ vorgeschrieben ist. Eine solche Gleichung hat $n-3$ accessorische Parameter. Wird es möglich sein, die letzteren so zu specialisiren, dass unter den Integralen der Differentialgleichung insbesondere eine algebraische Function enthalten ist?

Wir überzeugen uns leicht, dass dies (von besonderen Annahmen betr. die Lage der Verzweigungspunkte abgesehen) unmöglich ist. Zu dem Zwecke betrachten wir die Gruppe der linearen Substitutionen, welche das zugehörige η erleidet. Die Gruppe wird erzeugt aus n linearen Substitutionen A, B, I, \dots ; dies gibt zunächst $3n$ Constante. Aber zwischen A, B, I, \dots besteht die Relation $A B I \dots = 1$, so dass nur $3n-3$ Constanten bleiben, von denen wir noch 3 auf das Coordinatensystem der η -Ebene rechnen können, macht $3n-6$ wesentliche Constante. Von ihnen sind, weil uns in allen singulären Punkten als Exponentendifferenz $\frac{1}{2}$ gegeben ist, n a priori festgelegt, wir behalten $2n-6$ wesentliche Constante zu unserer freien Verfügung.

Nehmen wir nun an, es gäbe für unsere Lamé'sche Gleich. ein particuläres algebraisches Integral. Dann muss die Gruppe der η -Substitutionen, wie wir oben lernten, einen einzelnen Punkt der η -Ebene festlassen, den wir natürlich nach ∞ werfen. Alle erzeugenden Substitutionen

A, B, \dots erhalten so die Gestalt $\eta' = \alpha \eta + \beta$ und enthalten zusammen $2n$ Constante. Von diesen sind wegen $A B T \dots = 1$ zwei durch die anderen bestimmt, zwei weitere kommen auf die noch vorhandene Willkürlichkeit des Coordinatensystems. Insofern die sämtlichen Exponentendifferenzen gegeben sind, verbleiben uns noch $n-4$ wesentliche Constante zur freien Verfügung. Das sind $n-2$ weniger als im allgemeinen Falle. Daher:

Soll der allgemeine Fall in den speciellen übergehen, so sind $n-2$ Bedingungen zu erfüllen.

Nun haben wir aber in unserer Differentialgleichung an accessorischen Parametern nur $n-3$ zur Verfügung:

Es ist daher im Allgemeinen (so lange nicht besondere Lagen der Verzweigungspunkte gegeben sind) unmöglich, durch Annahme der accessorischen Parameter den speciellen Fall herbeizuführen.

Um letzteren erreichbar zu machen, müssen wir also an irgend welcher Stelle von den ursprünglichen Bedingungen nachlassen. Wir wählen dies, dass wir beim letzten (dem n ten) Verzweigungspunkte die Exponentendifferenz, welche ξ heissen mag, vorab unbestimmt lassen.

Dann haben wir allerdings bei der allgemeinen Gruppe $2n-5$, bei der speciellen $n-3$ Parameter in Betracht zu ziehen, die Differenz der

so dass also im Sinne von p. 173 ein Specialfall der Lamé'schen Gleichn. mit $(n+1)$ Verzweigungsstellen vorliegt.

beiden Zahlen ist nach wie vor $n-2$, - aber dafür haben wir jetzt auch $n-2$ Grössen zu beliebiger Verfügung, nämlich die $n-3$ accessori-schen Parameter und die Exponentendiffe-renz ρ . Unter diesen Umständen nun durch geschickte Annahme der $n-2$ Grössen den speciellen Fall herbeizuführen, das ist gerade das hi-storisch gegebene Problem, wie es Lamé für $n=4$ und Keine für beliebiges n behandelt haben.

Bemerken wir hierzu nur noch, dass unsere ganze Abzählung ungeändert bleibt, wenn wir bei den $n-1$ ersten singulären Stellen die Exponenten-differenzen nicht gerade $= \frac{1}{2}$ geben, sondern nur überhaupt geben. Es ist damit eine Verallgemei-nerung der Untersuchung angedeutet, auf die wir wiederholt zurückkommen werden.

Historisches über die Laméschen Polynome.

Um unsere Aufgabe in Angriff zu nehmen, verlegen wir den auszuzeichnenden Verzwei-gungspunct nach ∞ und bezeichnen die ande-ren mit e_1, e_2, \dots, e_{n-1} . Sei dann $f = (x-e_1)(x-e_2) \dots (x-e_{n-1})$ und $t = \int \frac{dx}{\sqrt{f}}$. Der zugehörigen Laméschen Gleichung können wir dann die Form ertheilen: $(\frac{d^2 \xi}{dt^2}) = (Ax^{n-3} + Bx^{n-4} + \dots) \cdot \xi$, wo den e_1, e_2, \dots, e_{n-1} je die Exponenten $\frac{1}{2}$ und 0 zukommen, während wir für ∞ zwei Exe-ponenten ρ', ρ'' haben, für welche $\rho' + \rho'' = \frac{n-3}{2}$, $\rho' \rho'' = -A$ ist; die B, \dots sind die accessori-schen Parameter.

Soll diese Gleichung nun ein algebraisches In-

Integral besitzen, so muß dasselbe, nach unseren früheren Erläuterungen, bei e_1, e_2, \dots, e_{n-1} , je zu einem der beiden Exponenten zugehören, entweder zum Exponenten $\frac{1}{2}$ oder 0; Dies gibt 2^{n-1} Möglichkeiten, die wir beispielsweise bei $n=4$ so aufzählen:

$$(1) \quad \mathcal{E} = \sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)} \cdot \Phi(x)$$

$$(2) \quad \left. \begin{array}{l} (3) \\ (4) \end{array} \right\} \mathcal{E} = \sqrt{(x-e_1)(x-e_2)} \cdot \Phi(x) \text{ etc.}$$

$$(5) \quad \left. \begin{array}{l} (6) \\ (7) \end{array} \right\} \mathcal{E} = \sqrt{(x-e_1)} \cdot \Phi(x) \text{ etc.}$$

$$(8) \quad \mathcal{E} = \Phi(x).$$

Hier bedeutet $\Phi(x)$ eine algebraische Function von x , welche nirgendwo verzweigt ist, als bei $x = \infty$, nirgendwo unendlich wird, als bei $x = \infty$, und bei e_1, e_2, e_3 einen von Null verschiedenen Werth hat. Eine algebraische Function, die höchstens bei $x = \infty$ verzweigt ist, ist überhaupt nicht verzweigt. sie ist eine rationale Function. Insofern dieselbe nur bei $x = \infty$ unendlich werden kann, nennen wir sie eine rationale ganze Function. Indem sie ferner bei e_1, e_2, \dots nicht verschwindet, wissen wir sicher, dass sie durch $x-e_1, x-e_2, \dots$ nicht theilbar ist. Wir bezeichnen die rationalen ganzen $\Phi(x)$, auf die wir hier geführt werden, als Lamésche Polynome. In der That ist die Bestimmung dieser Φ , unter Beschränkung auf $n=4$, die eigentliche Leistung Lamés; vergl.

dessen erste Abhandlung in Bd. 4 der Liouville'schen Journals (1839): Sur l'équilibre de température dans un ellipsoïde à trois axes inégaux.

{ Die physikalische Problemstellung, von der Lamé da ausgeht, und von der ich ausführlich im Winter 89/90 handelte, lassen wir hier wieder zur Seite }. Die allgemeine Bestimmung für beliebiges n hat Heine zuerst in den Berliner Monatsberichten von 1867 gegeben; vergl. das Schlusskapitel des 1. Bandes der neuen Auflage (1878) des „Handbuchs der Sphärischen Funktionen.“

Wir bezeichnen den Grad des Polynoms φ jetzt mit k , und setzen (3) $E = (x - e_1)^{\frac{1}{2} \varepsilon_1} (x - e_2)^{\frac{1}{2} \varepsilon_2} \dots (x - e_{n-1})^{\frac{1}{2} \varepsilon_{n-1}}$ $\varphi_k(x)$, wo die $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ die „Art“ der Lamé'schen Function festlegen, die wir gerade betrachten wollen, also $= 0$ oder 1 zu nehmen sind, je nachdem. Setzen wir $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{n-1} + k = N$, so ist $\varphi' = -N$ also $\varphi'' = N + \frac{n-3}{x}$,

daher das φ der Differentialgleichung (1) gleich

(4) $N(N + \frac{n-3}{x})$ zu nehmen. Lamé und Heine fanden nur, dass es bei gegebenen ε für jedes k eine bestimmte Zahl von Polynomen φ_k gibt.

Diese Zahl ist bei $n=4$ nach Lamé $k+1$, bei beliebigem n nach Heine: (5) $\frac{(k+1)(k+2) \dots (k+n-3)}{n-3}$. Man kann natürlich auch fragen, wie viele Polynome φ_k im Ganzen es bei gegebenen N gibt? Sei $n=4$. So haben wir

1) bei ganzzahligem N offenbar folgende Möglichkeiten:

	ε_1	ε_2	ε_3	k	Zahl $k+1$
	0	0	0	N	$N+1$
	0	1	1	$N-1$	N
	1	0	1	$N-1$	N
	1	1	0	$N-1$	N

zusammen also $4N+1$ Möglichkeiten;

2) bei halbzahligem N dagegen die Tabelle:

ε_1	ε_2	ε_3	K	Zahl $k+1$
1	0	0	$N - \frac{1}{2}$	$N + \frac{1}{2}$
0	1	0	$N - \frac{1}{2}$	$N + \frac{1}{2}$
0	0	1	$N - \frac{1}{2}$	$N + \frac{1}{2}$
1	1	1	$N - \frac{1}{2}$	$N - \frac{1}{2}$

zusammen wieder $4N+1$ Möglichkeiten.

Auch bei grösserem n ist diese Anzahl, wie Heine bemerkt, davon unabhängig, ob wir N ganzzahlig oder halbzahlig voraussetzen. dieselbe wird: $(6) \frac{(2N+1)(2N+2)\dots(2N+n-3)}{1 \cdot 2 \dots (n-3)} + \frac{(2N)(2N+1)\dots(2N+n-4)}{1 \cdot 2 \dots (n-3)}$

Wie werden wir diese Angaben nun bewiesen?
Wir werden den Beweis für alle möglichen Annahmen der ε gleichzeitig geführt haben, wenn wir mit Heine den Hilfssatz bewiesen, dass bei irgendwie gegebenen Exponentendifferenzen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ sich die $n-3$ in der Functionsschaar

$$P \left| \begin{array}{ccc|c} \varepsilon_1, \varepsilon_2 & & \varepsilon_{n-1} & \infty \\ \lambda_1, \lambda_2 & & \lambda_{n-1} & \xi \\ 0 & 0 & 0 & \eta \end{array} \right| x$$

vorkommenden $n-3$ accessorischen Parameter jedesmal auf $\frac{(K+1)(K+2)\dots(K+n-3)}{1 \cdot 2 \dots (n-3)}$ Weisen

so bestimmen lassen, dass eine rationale ganze Function $q_K(x)$ in der Schaar P enthalten ist. In der That: ist dieser allgemeine Satz erwiesen, so ist damit die Zahl der La-

mischen Polynome nicht nur für den Fall gefunden, dass alle $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$ verschwinden. Sei beispielsweise $\varepsilon_1 = 1$, alle anderen ε noch gleich Null. So sollen wir, unserer ursprünglichen Fragestellung gemäss, nachweisen, dass bei geschickter Annahme der accessorischen Parameter und des ρ in der Schaar

$$P \left| \begin{array}{cccc} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & & \varepsilon_{n-1} & \infty \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & \rho' & x \\ 0 & 0 & & 0 & \rho'' & \end{array} \right|$$

Polynome der Form $(x - \varepsilon_1)^{1/2} P_n(x)$ aufzudecken können. Aber die ganze Schaar lässt sich so schreiben:

$$(x - \varepsilon_1)^{1/2} P' \left| \begin{array}{cccc} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & & & \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & & x \\ 0 & 0 & & & \end{array} \right|$$

und unser Nachweis wird offenbar geführt sein, sobald wir jetzt zeigen, wie wir innerhalb P' Polynome der Form $P_n(x)$ finden. Es handelt sich also in der That auch hier nur um eine Anwendung des Heine'schen Hilfssatzes.

Beweis des Heine'schen Hilfssatzes.

Die Gleichung (1) der Lamé'schen Functionen ist mit folgender äquivalent:

$$(2) f \cdot \frac{d^2 \varepsilon}{dx^2} + \frac{1}{2} f' \cdot \frac{d \varepsilon}{dx} - (\alpha x^{n-3} + \beta x^{n-4} + \dots) \varepsilon = 0;$$

wir können dieselbe Gleichung auf den allgemeinen von Heine vorausgesetzten Fall anwenden, sofern wir nur unter f' nicht gerade den Differentialquotienten von f verstre-

hen, sondern ein beliebiges Polynom $(n-2)$ ten Grades. Sei von $f = x^{n-1} + c_1 x^{n-2} + c_2 x^{n-3} + \dots$,

$$\frac{1}{2} f' = c_0' x^{n-2} + c_1' x^{n-3} + \dots$$

$$\Phi_k = g_0 x^k + g_1 x^{k-1} + g_2 x^{k-2} + \dots$$

Wir substituieren diese Werte geradezu in (3) und sehen zu, welches Gleichungssystem wir zur Bestimmung der g_0, g_1, g_2, \dots , wie der A, B, n bekommen. Offenbar erhalten wir linker Seite eine ganze Function $(k+n-3)$ ten Grades von folgender Bauart:

$$\begin{aligned} & x^{k+n-3} \{ g_0 (k \cdot k-1 + k \cdot c_0' - A) \} \\ & + x^{k+n-4} \{ g_0 [A, B, C, \dots]_{1,0} + g_1 [A, B, C, \dots]_{1,1} \} \\ & + x^{k+n-5} \{ g_0 [A, B, C, \dots]_{2,0} + g_1 [A, B, C, \dots]_{2,1} + g_2 [A, B, C, \dots]_{2,2} \} \\ & + x^0 \{ g_0 [\quad]_{k+n-3,0} + g_1 [\quad]_{k+n-3,1} + \dots + g_k [\quad]_{k+n-3,k} \} \end{aligned}$$

wo die mit eckigen Klammern bezeichneten Glieder lineare Functionen der A, B, C, \dots bedeuten, die wir nicht ausführlicher hinzuschreiben brauchen. Die Coefficienten der einzelnen Potenzen von x werden wir jetzt Null setzen. Aus dem Coefficienten von x^{k+n-3} bestimmt sich zuvörderst das A (in Uebereinstimmung mit Gleich. (4) oben). Aus den übrigen $k+n-3$ Gleichungen werden wir zunächst die linear und homogen vorkommenden g_0, g_1, \dots, g_k eliminieren. Wir erhalten so zur Festlegung der noch unbestimmten $(n-3)$ Grössen B, C, \dots eine Matrix von $k+1$ Columnnen und $k+n-3$ Horizontalreihen, deren einzelne Elemente in den B, C linear sind:

171.

$$\left| \begin{array}{cccc} []_{0,0} & []_{0,1} & \dots & \dots \\ []_{1,0} & []_{1,1} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ []_{k+n-3,0} & []_{k+n-3,1} & \dots & []_{k+n-3,k} \end{array} \right| = 0.$$

Nun haben sich mit derartigen Matrix-Gleichungen die Geometer viel beschäftigt, am ausführlichsten Plücker in Crelle 67, 1867; vergleiche die Darstellung in Salomon-Fiedler's Raumgeometrie (das Kapitel von der allgemeinen Theorie der algebraischen Flächen). Man findet da, dass eine Matrixgleichung in der That immer dann ein bestimmtes Problem vorstellt, wenn die Zahl der Unbekannten um 1 grösser ist als die Differenz zwischen der Zahl der Verticalreihen und der Horizontalreihen. Und was die Zahl der Lösungen angeht, so wird dieselbe in dem hier vorliegenden besonders einfachen Falle, dass alle Glieder $[]$ der Matrix in den Unbekannten linear sind, geradezu gleich der Heine'schen Zahl $\frac{(k+1) \cdot 1 \cdot (k+n-3)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-3)}$.

Natürlich wäre es möglich, dass in dem besonderen hier vorliegenden Falle oder doch im Lamé'schen Falle, die allgemeine Abzählung versagt, in dem vielleicht einige Lösungssysteme unendliche Werthe der B, C, \dots liefern und also für uns verloren gehen, oder auch die Lösungssysteme geradezu unbestimmt werden. Dass Beides „im Allgemeinen“ bei uns nicht eintritt, kann

man mit Heine dadurch zeigen, dass man einen geeigneten speciellen Fall heranzieht, bei welchem die Zahl $\frac{(k+1) \dots (k+n-3)}{1 \cdot 2 \dots (n-3)}$ gedrehter Lösungssysteme unmittelbar hervordritt. Wir gehen hier darauf nicht ein, da wir später direktere Mittel kennen lernen werden, um die Richtigkeit der Heine'schen Zahl einzusehen. Wohl aber bleibt es nun ein Problem, nach speciellen Fällen zu suchen, in denen die Heine'schen Abzählung versagt. Wie müssen beispielweise die e_1, \dots, e_{n-1} liegen, damit es unendlich viele zugehörige Wertesysteme der B, C, \dots gibt? Oder auch, damit es bei bestimmten B, C, \dots unendlich viele q_k gibt und wir also eine Differentialgleichung haben, deren sämmtliche Integrale algebraisch sind? —

Heute lernen wir die merkwürdigen 28.1.9
Realitätstheoreme kennen, die man betreffs der Lamé'schen Polynome $q_k(x)$ gefunden hat für den Fall, dass die e_1, e_2, \dots, e_{n-1} alle reell ist. Wir wollen der Bestimmtheit halber annehmen $e_1 < e_2 < \dots < e_{n-1}$.

Zuerst fanden Lamé und Heine resp. für die von ihnen betrachteten Fälle, dass unter der genannten Voraussetzung sämmtliche $\frac{(k+1) \dots (k+n-3)}{1 \cdot 2 \dots (n-3)}$ Polynome q_k reell sind und dass jedes einzelne k reelle Wurzeln liefert, die zwischen e_1 und e_{n-1} eingeschlossen sind (und von denen natürlich keine in eine der singulären Stellen e_1, e_2, \dots hineinfällt).

Dann fand ich selbst in Annalen 18 (1881), dass man Näheres über die Lage der k Wurzeln der verschiedenen Gleichungen $\varphi_k = 0$ aussagen kann. Die Zahl $\frac{(k+1) \cdot \dots \cdot (k+n-3)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-3)}$ stimmt genau mit der Anzahl der Möglichkeiten überein, die sich rein combinato-
risch für die Verteilung von k Punkten auf die $(n-2)$ Intervalle: $l_1 \sim l_2, l_2 \sim l_3, \dots, l_{n-2} \sim l_{n-1}$ ergeben.

Ich fand, dass von den verschiedenen φ_k , die es gibt, jedesmal eines vermöge seiner reellen Wurzeln die einzelne hier vorliegende Möglichkeit realisiert. —

Endlich hat Stieltjes 1884 in Acta VI dieses Theorem auf die allgemeineren Polynome φ_k übertragen, die wir eben beim „Heinrichschen Hilfssatze“ betrachtet haben, unter der beschränckenden Voraussetzung, dass die Differenzen $1-\lambda_1, 1-\lambda_2, \dots, 1-\lambda_{n-1}$ sämtlich positiv seien. Diese Voraussetzung trifft ja für die Laméchen φ_k zu, welche Art der φ_k wir auch betrachten mögen, denn da sind die $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ bez. gleich $\pm \frac{1}{2}$ zu setzen. Der Satz von Stieltjes schliesst also den meinen als Corollar ein. —

Was die Beweise angeht, so sei Folgendes hervorgehoben: 1) Lamé und Heine benutzen das Auftreten der φ_k in der mathematischen Physik, bez. gewisse daraus folgende Integralsätze. Das bleibt hier ausserhalb unseres Interesses; ich kann übrigens auf meine Specialvorlesung von Winter 89/90 verweisen.

2) Ich selbst habe in Bd. 18 der Annalen zwei-
erlei Beweise gegeben, die beide darauf hin-

auskommen, die Parameter des Problems als continuirlich veränderlich zu betrachten.

Das erste Mal (l. c. "Zur Theorie der Laméschen Functionen") variire ich die e_1, \dots, e_{n-1} , zeige, dass die Vertheilungsweise der Wurzeln von $\mathcal{P}_n = 0$ dabei keine Aenderung erleiden kann, und bestimme diese Vertheilungsweise für einen speciellen Fall, in welchem $n-2$ der e unendlich nahe zusammengedrückt sind.

Das zweite Mal, über Körper, die von conformalen Flächen 2. ten Grades begrenzt sind, ebenda) halte ich die l fest und variire die accessoirischen Parameter A, B, C, \dots der Laméschen Differentialgleichung, Ich untersuche also nicht direct die Wurzeln der Laméschen Polynome \mathcal{P}_n , sondern ganz allgemein den Verlauf der Laméschen Functionen E . Dies bringt mich dahin, ein Oscillationstheorem aufzustellen, vermöge dessen die A, B, C, \dots durch die Oscillationen, welche die E in verschiedenen Intervallen ausführen, geradezu bestimmt werden. Hiervon sind dann die Sätze über die Wurzeln der \mathcal{P}_n schliesslich blosse Corollarie. Ich muss mich hier mit dieser Andeutung begnügen, da ich erst im weiteren Verlaufe dieser Vorlesung auf das genannte Oscillationstheorem, dem ich eine allgemeine Bedeutung für die Theorie der lin. Diff. glch. zweiter Ordnung beimesse, werde eingehen können. (Vergl. indef. Specialvorlesung 89/90).

3) Der Beweis von Biotjes ist so einfach und dabei so schön, dass wir ihn hier ohne besondere Vorbereitung reproducieren können:

Wir denken uns n Punkte x_1, \dots, x_n irgendwie auf die $(n-2)$ Intervalle $e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-2} - e_{n-1}$ vertheilt. Wir versehen sie je mit der Masse 1 , die e_1, e_2, \dots aber mit Massen $\frac{1-\lambda_1}{2}, \frac{1-\lambda_2}{2}, \dots$. Die x sollen jetzt als beweglich, die e als fest gelten, und nun soll es sich darum handeln, eine Gleichgewichtslage des Systems unter der Voraussetzung ausfindig zu machen, dass sich die einzelnen Punkte proportional mit dem Producte ihrer Massen nach dem Gesetze des logarithmischen Potentials abtossen.

Das Potential des Systems, welches hiernach zu einem Maximum (oder Minimum) zu machen ist, ist: $v = -c \left\{ \sum \sum \log(x_\beta - e_\alpha) \cdot \frac{(1-\lambda_\alpha)}{2} + \sum \sum \log(x_\beta - x_\alpha) \right\}$. Offenbar wird dieses $v = \infty$, sobald zwei x unter einander oder ein x mit einem e zusammenfallen. Daher muß es mindestens eine Anordnung der x geben, bei welcher die x weder untereinander noch mit einem der e zusammenfallen, und bei deren Endstehung daher die Vertheilung der x auf die $(n-2)$ Intervalle der e die anfängliche bleibt, vermöge deren Gleichgewicht realisiert wird. Die so geordneten x_1, x_2, \dots, x_n sind dann, behauptet Biotjes, gerade die Nullstellen eines Heineschen Polynoms φ_n . In der That haben wir für die Gleichgewichtslage $\frac{\partial v}{\partial x_\beta} = 0$, das heisst $\sum \frac{1-\lambda_\alpha}{2} \cdot \frac{1}{x_\beta - e_\alpha} + \sum \frac{1}{x_\beta - x_\alpha} = 0$

für alle x_3 . Schreiben wir $\varphi(x)$ für $\prod (x - x_k)$, so ist die zweite hier auftretende Summe = $\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)_{x=x_3}$. Andererseits bezeichnen wir die erste der bei $x=x_3$ den Summen mit $\frac{1}{4} \frac{f'}{f}$, entsprechend der auf p. 220 221 benutzten Schreibweise. hier ist f' ein Polynom $(n-2)$ ten Grades, welches keineswegs der Differentialquotient von f zu sein braucht. Solcherweise heissen die Gleichgewichtsbedingungen: $\left\{ \frac{1}{4} \frac{f'}{f} + \frac{\varphi''}{\varphi'} \right\}_{x=x_3} = 0$ oder $\left\{ f \varphi'' + \frac{1}{4} f' \varphi' \right\}_{x=x_3} = 0$.

Aber hier steht linker Hand ein Polynom $n+k-3$ ten Grades. Soll dasselbe für alle x_3 , d. h. für alle Wurzeln von $\varphi=0$, verschwinden, so muß es durch φ theilbar sein, was einen Quotienten $(n-3)$ ten Grades ergibt; φ befriedigt also in der That eine Differentialgleichung der Form: $f_0 \varphi'' + \frac{1}{2} f_1 \varphi' = (A x^{n-3} + B x^{n-4} + \dots) \varphi$, w. z. b. w. Jetzt haben wir nur noch folgende ergänzende Bemerkungen hinzuzufügen:

- 1) Von Vorneherin können die x_1, \dots, x_k auf $\frac{(k+1) \dots (k+n-3)}{1 \dots (n-3)}$ Weisen auf die $n-2$ Faktoren v_1, v_2, \dots, v_{n-2} vertheilt werden.
- 2) Jede Vertheilungsweise liefert mindestens eine Gleichgewichtslage.
- 3) Jede Gleichgewichtslage ist Heine'sches Polynom.
- 4) Aber es gibt solcher Polynome im Ganzen nur

$$\frac{(k+1) \cdots (k+n-3)}{1 \cdot 2 \cdots (n-3)} \quad 177.$$

Daher entspricht jeder Verteilungsweise auch nur eine Gleichgewichtslage, — umgekehrt werden sämmtliche q_k durch die verschiedenen Gleichgewichtslagen geliefert, — womit der Beweis des Theorems offenbar geführt ist. Fügen wir hinzu, dass die einzelne Gleichgewichtslage, weil V in den Grenzlagen $= +\infty$ wird, notwendig einem Minimum von V entspricht und darum stabiles Gleichgewicht vorstellt, so haben wir damit für die verschiedenen q_k , die es gibt, eine merkwürdig schöne, anschauungsmässige Deutung gefunden. Der Beweis hat, wie man sieht, in der That an der Voraussetzung positiver $1-\lambda_k$ Kind darum der Satz selbst falsch werden, wenn einige $1-\lambda_k$ negativ werden sollten; oder in welchem Umfange bleibt er dann noch bestehen?

Wenn wir jetzt unsere Entwicklungen über Lamé'sche Functionen mit den vorangehenden über hypergeometrische Functionen vergleichen, so zeigt sich im Resultate eine gewisse Analogie, d. h. wir sind beidemal zu Realitätstheoremen gekommen. Nun haben wir dieselben im hypergeometrischen Falle auf andere Weiss, durch Betrachtung der in der η -Ebene gelegenen conformen Abbil-

dung, begründet. Wollen wir jetzt die Unterscheidung über Lamésche Polynome dadurch vervollständigen, dass wir auch bei ihnen die conforme Abbildung vermöge des zugehörigen η in Betracht ziehen! Wir haben $\zeta = (x - e_1)^{\epsilon_1/2} \dots (x - e_{n-1})^{\epsilon_{n-1}/2} \cdot \eta(x)$ gesetzt. Daraus ist leicht zu schliessen, dass sich ein zugehöriges η in Gestalt folgenden Integrals darstellt:

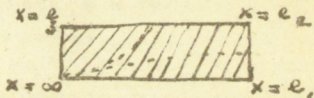
$$\eta = \int \frac{dx}{\eta(x)^2 (x - e_1)^{\epsilon_1 + 1/2} \dots (x - e_{n-1})^{\epsilon_{n-1} + 1/2}}$$

Für Allgemeinen bildet das Lamésche η , wie wir wissen, die Halbebene x auf ein Kreisbogen- n . Eck ab, dessen Ecken, soweit sie $x = e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$ entsprechen, rechte Winkel darbieten; die letzte Ecke, die zu $x = \infty$ gehört, wird den Winkel $(\rho' - \rho'')\pi$, also σ bei uns $(2K + \sum \epsilon_\alpha + \frac{n-2}{2})\pi$ aufweisen. Indem unser η jetzt einem unbestimmte Integral gleich gesetzt ist, ist dieses Kreisbogen- n . Eck geradlinig geworden. Kraft unserer Realitätstheoreme können wir nun Genaueres darüber aussagen, wie sich dieses geradlinige n . Eck durch's Unendliche zieht. Bemerken wir zuerst: Von den Ecken des Polygons liegt diejenige, welche $x = \infty$ entspricht, gewiss im Endlichen; ob die Ecke, welche zu $x = e_1, e_2, \dots$ gehört, im Endlichen oder Unendlichen liegt, hängt davon ab, ob das zugehörige $\epsilon = 0$ oder $= 1$ ist.

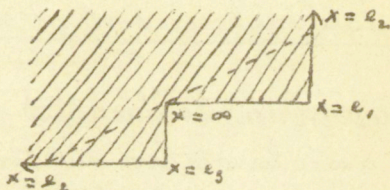
Hierüber hinaus haben wir dann, den Wurzeln von $\eta_n = 0$ entsprechend: Von den Kanten des Polygons verlaufen diejenigen beiden, die vom Punkte $x = \infty$ ausgehen, ganz im Endlichen, die anderen durchsetzen das Unendliche zusammengenommen gerade K mal. Die Vertheilung dieser Unendlichkeitsstellen auf die $(n-2)$ Kanten kann jede beliebige sein.

Es wird jetzt darauf ankommen, sich von den so charakterisirten Polygonen eine klare Anschauung zu bilden. Dies gelingt sehr leicht, sofern man sich zuerst reducirte Polygone zeichnet, d. h. solche, bei denen $K=0$ ist. An sie hat man, um die allgemeinen Polygone zu erhalten, einfach K Halbebenen von der Stelle $x = \infty$ aus polar anzuhängen, d. h. längs solcher Linien anzuhängen, welche vom Punkte $x = \infty$ nach den $(n-2)$ nicht ausstossenden Seiten hinlaufen. In den folgenden Figuren, welche reducirte Polygone vorstellen, haben wir diese Linien punctirt:

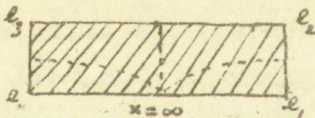
$n=4, \epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 0, K=0$



$n=4, \epsilon_2 = 1, \epsilon_1 = \epsilon_3 = 0, K=0$

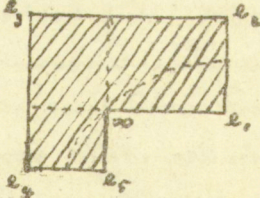


$n=5, \epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_4 = 0, K=0$



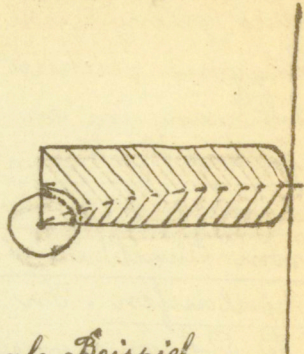
Winkel bei $x = \infty$:
= π

$n=6, \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_4 = \epsilon_5 = 0, K=0$



Hier ist nun in der That ohne Weiteres zu sehen: So oft wir an eine der punctirten Linien eine Halbebene anhängen (die von der Kante begrenzt wird, auf welche

die Linie aufstößt), so oft wächst der Winkel im Punkte $x = \infty$ um 2π , während gleichzeitig für die genannte Kante ein Unendlichkeitspunkt geschaffen wird



$n = 4, \epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 0, K = 1$ als Beispiel.

Beziehungen zur gewöhnlichen Theorie der elliptischen L. 31. 1. 9
Integrale, insbesondere zu deren Kettenbruchentwicklung

Wir bleiben der Einfachheit halber wieder bei $n = 4$ und $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 0$ und bemerken nur vorweg, dass sich die anderen Fälle in ganz entsprechender Weise behandeln lassen (wobei für $n > 4$ natürlich hyperelliptische Integrale in Betracht kommen). Wir haben also das Integral

$$\eta = \int \frac{dx}{\varphi(x) \sqrt{f(x)}} \quad (f(x) = x - \alpha_1 \cdot x - \alpha_2 \cdot x - \alpha_3)$$

vor uns. Um dasselbe in die gewöhnliche Theorie der elliptischen Integrale einzuführen, bestimmen wir seine Unendlichkeitspunkte. Dieselben liegen offenbar an den Stellen $\varphi(x) = 0$, und wird eine solche Stelle α genannt, so haben wir für η in der Nähe von $x = \alpha$ jedenfalls eine Darstellung folgender Form: $\frac{A}{x - \alpha} + B \cdot \log(x - \alpha) + C + D(x - \alpha) + \dots$ Ich behaupte: das logarithmische Glied fällt hier fort, das Integral hat lauter rein algebraische Unendlichkeitspunkte.

Zum Beweise genügt es daran zu erinnern, dass unser η doch im Hinblick auf die Differentialgleichung 3. Or

Ordnung, der es von Hause aus genügt, bei $x = \alpha$ keinen Verzweigungspunkt haben kann. Ebenso könnten wir das Fehlen des logarithmischen Terms aus der Gestalt unserer conformen Abbildung entnehmen, deren geradlinige Begrenzung bei $x = \alpha$ ungebrochen durch $\eta = \infty$ hindurchgeht. Immer ist es ja wünschenswert, dass wir den Satz direct algebraisch nachweisen. Nach den allgemeinen Regeln der Partialbruchzerlegung hat man:

$$\frac{1}{\varphi(x)^2} = \sum \left(\frac{1}{\varphi'(\alpha)^2 (x-\alpha)^2} - \frac{\varphi''(\alpha)}{\varphi'(\alpha)^3 (x-\alpha)} \right). \text{ Nun genügt}$$

aber $\varphi(x)$ der Laméschen Gleichung, es ist also $\varphi'' \cdot \varphi + \frac{1}{2} \varphi' \cdot \varphi' = 0$ ein Multiplicum von φ . Daher ist für $x = \alpha$: $\varphi''(\alpha) \cdot \varphi(\alpha) + \frac{1}{2} \varphi'(\alpha) \cdot \varphi'(\alpha) = 0$ oder $\frac{\varphi''(\alpha)}{\varphi'(\alpha)} = -\frac{\varphi'(\alpha)}{2\varphi(\alpha)}$. Indem wir dies eintragen, kommt:

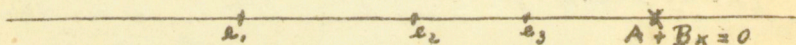
$$\eta = \sum \left\{ \frac{1}{\varphi'(\alpha)^2 \cdot \varphi(\alpha)} \int \frac{\varphi(\alpha)}{(x-\alpha)^2} + \frac{1}{2} \frac{\varphi'(\alpha)}{(x-\alpha)} \frac{d\alpha}{\varphi(\alpha)} \right\},$$

und hier ist nun in der That jeder einzelne Summand rechter Hand ein reines Integral zweiter Gattung mit dem Unstetigkeitspunkte $x = \alpha$. Wir können diesen Unstetigkeitspunkt, indem wir einen algebraischen Bestandtheil abtrennen, gerne nach $x = \infty$ werfen. Es geschieht dies durch die bekannte Formel $\int \frac{\sqrt{f(x)}}{(x-\alpha)^2} + \frac{1}{2} \frac{f'(x)}{(x-\alpha)} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \frac{\sqrt{f(x)}}{x-\alpha} + \int \frac{a+bx}{\sqrt{f(x)}} dx$ (wo ich a, b der Kürze halber unbestimmt lasse). Wir bekommen so, unter Einführung zweier neuer Constanten A, B : (1) $\eta = \sum \frac{\sqrt{f(x)}}{\varphi'(\alpha)^2 \cdot \varphi(\alpha) \cdot x-\alpha} + \int \frac{A+Bx}{\sqrt{f(x)}} dx$, was wir auch so schreiben können:

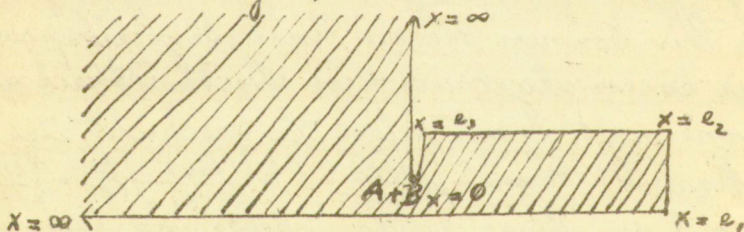
(2) $\eta = \frac{\sqrt{f(x)}}{\varphi(x)} \sqrt{f(x)} + \int \frac{A+Bx}{\sqrt{f(x)}} dx$. Diese Formel setzt uns in den Stand, für die conforme Abbildung, welche wir in vorigen Male nur qualitativ studirten, die quantitativen Verhältnisse festzulegen, d. h. die Dimensionen des bei der conformen Abbildung jeweils

betheiligten Rechtecks. In der That haben wir (da unser algebraischer Bestandtheil den Factor $\sqrt{f(x)}$ hat), aus unserer Formel: $[\eta]_{e_3}^{e_2} = \int_{e_3}^{e_2} \frac{A+Bx}{\sqrt{f(x)}} dx$, $[\eta]_{e_2}^{e_1} = \int_{e_2}^{e_1} \frac{A+Bx}{\sqrt{f(x)}} dx$

Um dies gut zu verstehen, müssen wir natürlich die conformen Abbildungen, welche η und $\int \frac{A+Bx}{\sqrt{f(x)}} dx$ von der positiven Halbebene x entwerfen, neben einander stellen: In beiden wird ein Rechteck hervortreten und diese beiden Rechtecke müssen congruent sein. Nehme man etwa für η die die Abbildung auf p. 180. an. Um die Abbildung durch $\int \frac{A+Bx}{\sqrt{f(x)}} dx$ zu haben, müssen wir wissen, wo der Punkt $A+Bx=0$ auf der x -Achse gelegen ist; nehmen wir etwa an, dies sei im Endintervalle $e_3 - \infty$:



Dann ist die Figur, um die es sich handelt, diese:



Es ist nun leicht, für $\int \frac{A+Bx}{\sqrt{f(x)}} dx$ vermöge der Regeln, die man gewöhnlich in der Theorie der elliptischen Functionen entwickelt, die Beträge $\int_{e_3}^{e_2}$, $\int_{e_2}^{e_1}$ numerisch zu berechnen: die Resultate übertrage man dann auf unser η . —

Wollen wir jetzt umgekehrt fragen: Sei in Formel (1), (2) das $\int \frac{A+Bx}{\sqrt{f(x)}} dx$ gegeben, wie komme ich von ihm aus zu unserem η ? Und dies geschieht nun, wie wir schon

einmal andeuten, durch Stettenbruchentwicklung.
Heine (Handbuch der Kugelfunctionen) und später
Heun (Göttinger Dissertation 1881, Mathemat. An-
 nalen 33, 1888) haben hierüber besonders gearbeitet.

Indem wir wegen der Einzelheiten z. B. auf Camille
Fordan, Cours d'analyse, I, p. 176 ff. verweisen, schi-
 cken wir folgende allgemeine Bemerkungen über
Stettenbruchentwicklung von Functionen voraus.

1) Ist $f(x)$ in der Umgebung von $x = \infty$ durch eine
 Potenz-Reihe gegeben: $f(x) = a_0(x) + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \dots$
 (wo a_0 ein Polynom sein kann), so ist damit eine
 successive Approximation des $f(x) - a_0(x)$ durch
 ganze Functionen von $\frac{1}{x}$ zum Ausdruck gebracht.

Die Stettenbruchentwicklung zielt viel mehr
 darauf ab $f(x) - a_0(x)$ durch rationale Functionen
 zu approximiren. Da man dabei einen Zähler und
 einen Nenner jeweils zur Verfügung hat, so ist es
 verständlich, dass man dabei bei jedem Schritte, all-
 gemein zu reden, dem $f(x)$ um ebensoviel näher
 kommt wie bei der Potenzentwicklung mit
 zwei Schritten. 2) Die Methode der Approxima-
 tion ist nun die: Wir setzen $\frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \dots = \frac{1}{A_1}$

und finden $A_1 = a_1(x) + \frac{\beta_1}{x} + \frac{\beta_2}{x^2} + \dots$, wo a_1 wieder
 ein Polynom. Dann setzen wir: $\frac{\beta_1}{x} + \frac{\beta_2}{x^2} + \dots = \frac{1}{A_2}$
 und finden $A_2 = a_2(x) + \frac{\gamma_1}{x} + \frac{\gamma_2}{x^2} + \dots$. So fortfahrend
 wird: $f(x) = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$ und hier sind nun

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{a_0}{1}, \quad \frac{P_1}{Q_1} = a_0 + \frac{1}{a_1}, \quad \frac{P_2}{Q_2} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}$$

Die einzelnen Näherungsfunctioren (Näherungsbrüche)

3) Sei μ_1, μ_2, \dots der Grad der Polynome a_1, a_2, \dots .
 Dann ist der Grad des n ten Näherungsnenners $\epsilon_n = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n$. Im Allgemeinen sind natürlich alle $\mu = 1$. Man nennt dann den Kettenbruch regulär. Wird aber ein $\mu > 1$, so nennt man den Kettenbruch an der betr. Stelle irregulär.

4) Der Grad der Annäherung, welche durch $\frac{P_n}{\epsilon_n}$ erreicht ist, bestimmt sich durch die Formel

$$R_n = f - \frac{R_n}{\epsilon_n} = \frac{\mathcal{F}\left(\frac{1}{x}\right)}{x^{2(\mu_1 + \dots + \mu_n) + \mu_{n+1}}}, \text{ unter } \mathcal{F} \text{ (wie$$

früher) eine Potenzreihe verstanden, in welcher das constante Glied nicht fehlt. Wir schreiben dies auch:

$R_n \sim \frac{1}{x^{2(\mu_1 + \dots + \mu_n) + \mu_{n+1} - 1}}$ und setzen übrigens: Ist der Kettenbruch überall regulär, so steigt die Annäherung mit jedem folgenden Näherungsbruche um zwei Einheiten, ist er aber beispielsweise an $(n+1)$ ter Stelle in der Art irregulär, dass $\mu_{n+1} = 2$ ist, so steigt die Annäherung im Allgemeinen auch immer um 2 Einheiten, nur an n ter und an $(n+1)$ ter Stelle beträgt der Zuwachs der Annäherung 3 Einheiten.

5) Und nun hat man folgenden schönen Satz: Ist $q(x)$ eine ganze Function vom ν ten Grade, und $f(x) - \frac{p(x)}{q(x)} \sim \frac{1}{x^{2\nu}}$, so ist $\frac{p}{q}$ einer der zu $f(x)$ gehörigen, bei der Kettenbruchentwicklung entstehenden Näherungsbrüche (vergl. den Beweis bei C. Fordan). Wir können sofort zufügen: Ist $f(x) - \frac{p}{q} \sim \frac{1}{x^{2\nu+1}}$, so ist $\frac{p}{q}$ nicht nur ein Näherungsbruch schlecht hin, sondern es ist dabei irgendwelche Irregularität im Spiele.

Betrachten wir nun unsere Formel (1), pag. 234, die wir hier so schreiben: $\frac{1}{\sqrt{f(x)}} \int \frac{A+Bx}{\sqrt{f(x)}} dx - \left(-\frac{\sqrt{f(x)-1}}{\sqrt{f(x)}} \right)$
 $= \frac{\eta}{\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{f(x)} \int \frac{dx}{P_n(x) \sqrt{f(x)}}$

Hier wird die rechte Seite für $x = \infty$ Null wie $\frac{1}{x^{2k+1}}$. Aber es ist von dem Integral linker Seite eine rationale Function $-\frac{\sqrt{f(x)-1}}{\sqrt{f(x)}}$ subtrahirt. Daher haben wir nach unserem letzten Hilfssatze:

$-\frac{\sqrt{f(x)-1}}{\sqrt{f(x)}}$ ist einer der Näherungsbrüche, welche bei der Kettenbruchentwicklung von $\frac{1}{\sqrt{f(x)}} \int \frac{A+Bx}{\sqrt{f(x)}} dx$ auftreten, unser η , dividirt durch $\sqrt{f(x)}$, ist der zugehörige Rest. Zugleich erkennen wir, dass eine Irregularität bei der betr. Kettenbruchentwicklung im Spiele sein muss.

Hierüber gibt Keine Folgendes an:

1) Sind A, B beliebige Constante, so wird die Kettenbruchentwicklung von $\frac{1}{\sqrt{f(x)}} \int \frac{A+Bx}{\sqrt{f(x)}} dx$ durchaus regulär verlaufen. Die Differenz $\frac{1}{\sqrt{f(x)}} \int \frac{A+B(x)}{\sqrt{f(x)}} dx - \frac{\eta}{\sqrt{f(x)}}$ lässt sich dann jedesmal vermöge der Theorie der elliptischen Integrale die Form geben: $\frac{1}{\sqrt{f(x)}} \int \frac{A_n + B_n x}{\sqrt{f(x)}} dx$, wo $B_n \geq 0$, (weil anderenfalls der Rest $\frac{\eta}{\sqrt{f(x)}}$ sein würde).

2) Sind aber A, B gerade die Constanten eines Laméschen Falles, so sind die ersten k Polynome a_1, a_2, \dots, a_k auch noch linear, a_{k+1} aber wird quadratisch. Ebendarum wird jetzt unser $\frac{\eta}{\sqrt{f(x)}}$ als Rest auftreten können. — Darüber hinaus ist dann der Kettenbruch nach Lenz (Ann. 93) wieder regulär.

3) Und nun findet Keine, dass die $A:B$ unseres Integrals, d. h. eines Integrals, welches mit seinem Laméschen Polynome P_k zusammenhängt,

geradezu durch die Forderung charakterisirt sind: der Kettenbruch soll an $(k+1)$ der Stelle irregulär werden.

Das Interesse dieser Sätze für uns liegt wohl besonders in dem Umstande, dass hier unser η in eine ganze Reihe elliptischer Integrale $\int \frac{A_1 + B_1 x}{a_1 \sqrt{f(x)}}$, $\int \frac{A_2 + B_2 x}{a_2 \sqrt{f(x)}} dx, \dots$ die durch einen bestimmten Algorithmus aus einander hervorgehen, eingeordnet ist. Da alle diese Integrale sich immer nur um einen algebraischen Bestandtheil unterscheiden, muss in den verschiedenen Abbildungen, welche sie von der Halbebene x entwerfen, jedesmal dasselbe Streckenstück hervordringen. Lässt möglich, sich von der Reihenfolge dieser Abbildungen eine einigermaßen klare Vorstellung zu machen? Dies wird nicht schwer sein, sobald es gelingt, zu zeigen, dass alle Theilnennner a_1, a_2, \dots gleich Null gesetzt lauter reelle Wurzeln ergeben, die in das Intervall $e_1 - e_3$ eingeschlossen sind. Koenig gibt in seiner Dissertation (Göttingen 1881, die Kugelfunctionen und Laméschen Functionen als Determinanten) Entwicklungen, welche in dieser Richtung, es ist aber nicht klar zu sehen, wie viel er da wirklich erreicht hat.^{*)}

Ueber Hermite's allgemeine Integration der Laméschen Gleichung durch elliptische Functionen.

Wir haben, seit wir uns mit den allgemeinen $P \left| \begin{matrix} a & b \\ u & v \end{matrix} \right| \dots A, B, \dots x$, bez. den zugehörigen η beschäftigt, zwei Fälle kennen lernen, in denen

*) Ich stelle das allgemeine Problem auf: alle die merkwürdigen Realitäts-Theoreme, welche die Kettenbruchentwicklung der Functionen geliefert hat, durch geeignete conforme Abbildungen zu erläutern, bez. zu begründen. <http://rcin.org.pl>

sich dieselben auf niedrigere Functionen reduciren:.. den Fall, in welchem sämmtliche P und also η algebraisch sind, und den Fall, wo ein P algebraisch ist und η also sich durch ein unbestimmtes Integral ausdrückt. Wir müssen jetzt noch einen dritten Fall der Reduction kennen lernen. Derselbe bezieht sich auf die Lamé'sche Gleichung $n=4$. p. 175. Indem wir $u = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}}$, $x = \wp(u)$ setzen, werden wir dieselbe folgendermassen anschreiben können: (1) $\frac{d^2 \epsilon}{du^2} = (A \wp(u) + B) \cdot \epsilon$. Bei Lamé wird nun, wie wir lernten, (um die Lamé'schen Polynome zu finden) $A = n(n+1)$ genommen, und n eine positive ganze Zahl verstanden, und dann B in zweckmässiger Weise bestimmt. Liernitz nimmt A ebenfalls $= n(n+1)$, lässt aber B beliebig, und findet unter dieser Voraussetzung, dass man die Lösungen ϵ_1, ϵ_2 unserer Gleichung immer als eindeutige elliptische Functionen von u darstellen kann. H. hat dies zuerst in den Feuilles lithographiés du cours de l'École Polytechnique vom Jahre 1872 mitgetheilt; ausführlicher entwickelt er die Theorie in der langen Reihe von Aufsätzen, die er 1877-82 in den Comptes Rendus t. 85-94 unter dem Titel: „Sur quelques applications des fonctions elliptiques“ publicirt hat (auch separat zu haben). Unter den zahlreicheren sonstigen Publicationen, die sich auf diesen Gegenstand beziehen, sei insbesondere die zusammenfassende und nach modernen Gesichtspunc-

*) Dabei werden wir weiterhin an der bisherigen Annahme $\epsilon_1 < \epsilon_2 < \epsilon_3$ festhalten, die ja allerdings nicht mit der von Weierstrass gemachten ($\epsilon_1 > \epsilon_2 > \epsilon_3$) übereinstimmt.

Den durchgearbeiteten Darstellung in Halphen Bd. II, p. 494 ff. genannt.

Die Gleichung (1) hat das Schema

$$\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + \alpha_1 \frac{d\varepsilon}{dt} + \alpha_2 \varepsilon = 0$$

indem wir ε ins Unendliche rücken lassen, erscheint als Grenzfall

d. i. der Fall derjenigen Functionen, welche Keine als Functionen des elliptischen Cylinders bezeichnete. Die zugehörige Differentialgleichung lautet ganz natürlich, wie (1), also etwa (2) $\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} = (\alpha x + \beta) \varepsilon$,

nur dass t jetzt das cyclometrische Integral vorstellt $t = \int \frac{dx}{\sqrt{x \cdot 1-x}}$. Der Punkt $x = \infty$ ist dabei ein wesentlich singularer (irregulärer) Punkt der Differentialgleichung geworden. Lindemann hat nun die Hermite'schen Entwicklungen in der Art auf die Glch.

(2) übertragen, dass er zeigte, wie man die Lösungen E_1, E_2 von (2) durch eindeutige trigonometrische Functionen von t darstellen kann (Math. Annalen Bd. 22, 1883).

Eben dieses ist auch der eigentliche Sinn der Arbeiten Gylden's über Gleichungen vom Typus (2) (Comp. des Rendus 1881, Bd. 92, 93 und sonst). Gylden betrachtet (2) geradezu als einen Grenzfall von (1), integriert (1) durch die Hermite'schen Formeln und führt dann in letztere die geeigneten Specialisirungen ein, die dem Uebergange von (1) in (2) entsprechen. Das sieht dann aus, als wenn es eine Verwendung der elliptischen Functionen wäre, ist aber nur eine verhüllte Einführung trigonometrischer Functionen. Gylden's Verfahren ist wohl nur unter der Annahme verständlich, dass ihm die Her-

mide'schen Formeln zwar sehr geläufig waren, nicht aber die einfache diesen Formeln zu Grunde liegende functionentheoretische Denkweise. Um letztere verständlich zu machen, wollen wir späteren Entwicklungen vorgreifend hier gleich den allgemeinen Gedanken bezeichnen, dass man P -Functionen nicht nur, wie bisher, in der schlichten x -Ebene sondern auf irgend welcher über der x -Ebene gegebenen Riemann'schen Fläche studieren kann. Das werden dann allgemein zu reden solche P -Functionen sein, die linearen Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten genügen. Von diesen allgemeinen Gedanken machen wir hier zuvörderst nur einen bescheidenen Gebrauch. Wir wollen an der Lamé'schen Gleich. (2) festhalten, oder auch dieselbe so verallgemeinern, dass wir $2p+1$ singuläre Punkte e_1, \dots, e_{2p+1} im Endlichen haben, so dass also die Gleichung vorgelegt ist:

$$(3) \frac{d^2 \xi}{du^2} = (A x^{2p-1} + B x^{2p-2} + \dots) \xi; \quad u = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-e_1) \dots (x-e_{2p+1})}}$$

und wollen nun deren Integrale ξ auf der zwei-blättrigen (hyperelliptischen) Fläche studieren, die zur Rationalität $y = \sqrt{(x-e_1) \dots (x-e_{2p+1})}$ gehört. Das "Geschlecht" dieser Fläche ist dann gerade $= p$, also im Hermiteschen Falle $= 1$.

Unsere ξ haben in den verschiedenen singulären Punkten der x -Ebene folgende Exponenten:

	e_1	e_2	e_{2p+1}	∞
(4)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{p}{2}$
	0	0	0	$\frac{2p+1}{2}$

Aber in eben denselben Punkten ist unsere Riemann'sche Fläche je einfach verzweigt; auf der Riemann'schen Fläche haben wir also als Exponenten:

$$(3) \quad \begin{array}{ccccccc} & e_1 & & e_2 & \dots & & e_{2p+1} & \dots & \infty \\ & 1 & & 1 & & & 1 & & -n \\ & & & & & & & & n+2p-1 \end{array}$$

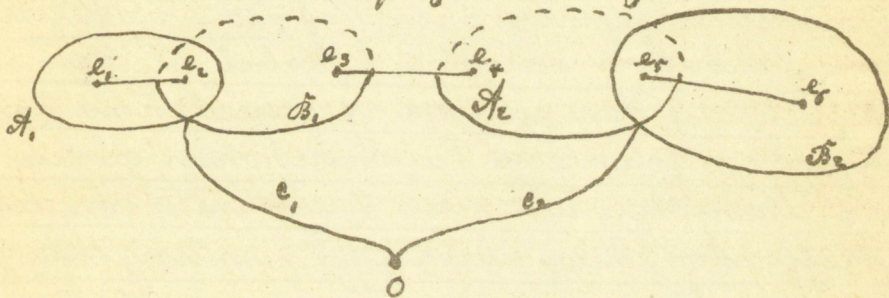
Wir sehen; unsere E sind auf der Riemann'schen Fläche unverzweigt; zugleich sind e_1, \dots, e_{2p+1} keine singulären Punkte mehr; nur die eine Stelle ∞ ist noch singulär.

Dieser einfache Satz bedeutet natürlich nicht, dass die E auf der Riemann'schen Fläche eindeutig wären (denn die Riemann'sche Fläche ist keine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit), vielmehr müssen wir jetzt untersuchen, wie sich die E_1, E_2 verhalten, wenn wir irgendwelche geschlossene Wege (Periodenwege) auf unserer Riemann'schen Fläche zurücklegen, die sich nicht auf einen Punkt zusammenziehen lassen. Es versteht sich von selbst, dass E_1, E_2 bei jedem solchen Wege eine lineare Substitution erleiden. Um die Gesamtheit dieser Substitutionen zu übersehen, werden wir eine sogenannte kanonische Zerschneidung der Fläche eintreten lassen, in ganz ähnlicher Weise, wie eine solche in der Theorie der Abel'schen Functionen üblich ist. (Vergl. zum Folgenden Math. Ann. 21, p. 183-185).

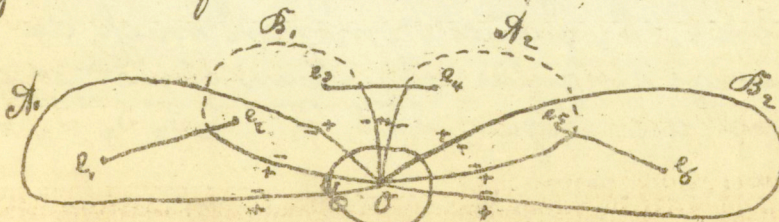
Im Falle $p=1$ handelt es sich dabei um zwei Querschnitte A, B , die sich in einem Punkte O durchsetzen



bei jedem unterscheiden wir ein positives und ein negatives Ufer. — Im Falle $p = 2$ werden wir zwei Querschnittspaare $A_1, B_1; A_2, B_2$ gebrauchen. Dieselben konstruirt man gewöhnlich so, wie in folgender Figur:



und heftet dieselben dann durch 2. Verbindungsstücke c_1, c_2 an einen „Hilfspunct“ O an; durch die $A_1, B_1; A_2, B_2; c_1, c_2$ ist dann die Fläche in der That eine einfach zusammenhängende zerschnitten. Inzwischen ist es für unsere Zwecke nützlich, diese Verbindungsstücke noch einzusparen und die A_1, B_1, A_2, B_2 also sämmtlich von O auslaufen zu lassen. Dies gibt etwa nachstehende Figur, in der wir wieder bei jedem Schnitt ein positives und ein negatives Ufer unterschieden haben:



Was ist nun der Zweck dieser Figuren? Innerhalb der zerschnittenen Fläche werden die irgendwie ausgewählten Particularlösungen E_1, E_2 unserer Differentialgleichung eindeutig sein, die E_1, E_2 aber, die für das positive Ufer irgend eines unserer Querschnitte gelten, werden mit dem E_1, E_2 des negativen Ufers durch eine bestimmte lineare Substitution zusammenhängen. Durchlaufen wir jetzt auf der unzerschnittenen Fläche irgendwelchen geschlossenen Weg, so wird die lineare Substitution, welche E_1, E_2 dabei erleiden, sich einfach aus den zu den verschiedenen Querschnitten gehörigen Substitutionen, genau in der Reihenfolge, wie diese Querschnitte von dem betreffenden Wege überkreuzt werden, zusammensetzen.

Ich nenne die Substitutionen, welche E_1, E_2 bei positiver Uberschreibung von A_1, B_1, A_2, B_2 erleiden, S_1, T_1, S_2, T_2 (so dass also an A_1 : $E_1^+, E_2^+ = S_1(E_1^-, E_2^-)$).

Diese S_1, T_1, S_2, T_2 sind dann einfach die erzeugenden Operationen derjenigen Gruppe linearer Substitutionen, welche die E_1, E_2 überhaupt erleiden. Zwischen ihnen besteht eine fundamentale Relation, die man erhält, indem man den Hilfspunct O einmal umkreist (wobei man doch zu dem ursprünglichen Wert von E_1, E_2 zurückkommen muss, da O keineswegs singular ist). Man findet so bei $p=2$ (vergl. die Figur): $S_1 T_1 S_1^{-1} T_1^{-1} S_2 T_2 S_2^{-1} T_2^{-1} = 1, (6)$

bei $p=1$ aber entsprechend $S, T, S^{-1}, T^{-1} = 1$, was sich sofort in einfache Form umsetzt: $S, T = T, S$. (7).

Man sieht: Bei $p=1$ sind die Substitutionen S, T und darum auch alle aus ihnen hervorgehenden Substitutionen mit einander vertauschbar, bei $p=2$ ist zu einem entsprechenden Satze gar kein Anlaß.

Wir haben damit den einfachen Grund dafür, weshalb sich die Hermite'sche Theorie nicht in der Art auf den Fall $p=2$ ausdehnen läßt, dass man statt des elliptischen Integrals erster Gattung u die beiden hyperelliptischen Integrale u_1, u_2 setzt *). Die Integrale u erleiden bei Ueberschreitung der Querschnitte A, B lineare Substitutionen der einfachsten Art; sie vermehren sich um Perioden. So wird für $p=1$ sein

$$u' = u + w_1$$

$$u' = u + w_2$$

und bei $p=2$:

$$u'_1 = u_1 + w_{11}$$

$$u'_2 = u_2 + w_{21}$$

$$u'_1 = u_1 + w_{12}$$

$$u'_2 = u_2 + w_{22}$$

$$u'_2 = u_2 + w_{21}$$

$$u'_2 = u_2 + w_{22}$$

Diese Substitutionen sind an sich immer paarweise vertauschbar. Sie erzeugen also eine Gruppe, welche nur im Falle $p=1$ der Gruppe der Holodrisch isomorph ist, (so dass jeder Substitution $u' = u + m_1 w_1 + m_2 w_2$ eine einzige Substitution der

*) vergl. Fuchs in den Göttinger Nachrichten von 1878, Appell in den Comptes Rendus 90, 91 (1880). Wegen der richtigen Art der Ausdehnung vergl. die ~~Erklärung~~ ^{Erklärung} oben auf p. 172, 173.

194.

E entspricht: $E', E_2' = S, T, T_m (E_1, E_2)$. für $p > 1$ ist die Gruppe der u viel kleiner als die Gruppe der E ; alle Periodenwege, welche die A_1, B_1, T_2, E_2 gleich oft im gleichen Sinne überschreiten, ergeben für die u_1, u_2 dieselbe Substitution, ganz unabhängig von der Reihenfolge, in welcher diese Überschreitungen ~~hau~~ haben, - keineswegs aber für die E_1, E_2 . Wenn also E_1, E_2 im Falle $p = 1$ sich nach Hermité als eindeutige Functionen von u erweisen, so ist ganz ausgeschlossen, dass sie für $p = 2$ in u_1, u_2 eindeutig sind.

Wir beschränken uns jetzt ausschliesslich auf S. ²¹/₂. 1891. $p = 1$. Dass hier E_1, E_2 in u wirklich eindeutig werden, erkennt man sofort in der conformen Abbildung. Die Riemannsche Fläche $p u, p' u$ wird ja durch Einführung des u ausnahmslos conform auf die u -Ebene übertragen, wobei die unendlich vielen Bilder der Fläche, die sich in der u -Ebene neben einander legen (die ∞ vielen Parallelogramme der u -Ebene) insgesamt eine einfach zusammenhängende Fläche bilden^{xx}. Auf dieser einfach zusammenhängenden Fläche sind die E_1, E_2 überall unverzweigt (wie sie es auf der Riemann'schen Fläche sind); also sind sie eindeutig. - Ich will mir das u insbesondere so gewählt denken, dass $u = 0$ zu $p = \infty$ gehört, und eine Ecke der Parallelogrammeinteilung in $u = 0$ hineinfällt. Dann sind E_1, E_2 in der

*Die im Text zu gebende Discussion überträgt sich mit kleinen Abänderungen auf die allgemeineren Differentialgleichungen mit doppelt periodischen Coefficienten, welche Picard zuerst behandelte (1890 Comptes Rendus, Crullés Journal Bd. 90).

Diese Fläche entspricht als der u -Ebene, wenn man den einen $p = \infty$ ausschließt

u -Ebene überall sonst endlich; nur in den Ecken des Parallelogrammnetzes werden sie ∞ , und zwar wie u^{-n} für $u=0$.

Es gilt jetzt die eindeutigen Functionen $E_1(u)$, $E_2(u)$ näher zu studiren. Sicher wird man Substitutionsformeln folgender Art haben:

$$S \begin{cases} E_1(u+w_1) = \alpha_{11} E_1 + \alpha_{12} E_2, \\ E_2(u+w_2) = \alpha_{21} E_1 + \alpha_{22} E_2; \end{cases} \quad T \begin{cases} E_1(u+w_1) = \beta_{11} E_1 + \beta_{12} E_2, \\ E_2(u+w_2) = \beta_{21} E_1 + \beta_{22} E_2. \end{cases}$$

Wir wissen bereits, dass diese S, T vertauschbar sind: $ST = TS$. Ausserdem ist leicht zu sehen, dass jede die Determinante 1 hat:

$|\alpha_{ik}| = 1, |\beta_{ik}| = 1$. Denn aus $E_1'' = (A\delta + B)E_1$, $E_2'' = (A\delta + B)E_2$ folgt $E_2 E_1'' - E_1 E_2'' = 0$ und also $E_2 E_1' - E_1 E_2' = \text{Const.}$, während andererseits doch klar ist, dass $E_2 E_1' - E_1 E_2'$ sich bei der Substitution S mit $|\alpha_{ik}|$, bei T mit $|\beta_{ik}|$ multiplicirt.

Mit Hermité bezeichnen wir jetzt als doppelt-periodische Functionen erster Gattung alle eindeutigen Functionen $f(u)$, die den Functionalgleich. genügen, $f(u+w_1) = \pm f(u)$, $f(u+w_2) = \pm f(u)$, dagegen als doppelt-periodische Function zweiter Gattung eine solche, für die $f(u+w_1) = \mu_1 f(u)$, $f(u+w_2) = \mu_2 f(u)$, wo μ_1, μ_2 zwei Constanten, von denen sicher eine von ± 1 verschieden. Endlich benennen wir, wenn $f(u+w_1) = f(u) + C_1$, $f(u+w_2) = f(u) + C_2$, $f(u)$ als ein Integral zweiter Gattung (mit irgendwelchen algebraischen Unstetigkeitspunkten).

Mit Hilfe dieser Terminologie lässt sich dann der Lamésche Ausnahmefall (der Fall der Lamé-

shen Polynome) so charakterisieren. Wir können dort $E_1 = (g(u - e_1))^{1/2} (g(u - e_2))^{1/2} (g(u - e_3))^{1/2} \Phi(g(u))$ wählen, und $\frac{E_2}{E_1} = \int \frac{dg}{E_1^2 \sqrt{g(u - e_1) \cdot g(u - e_2) \cdot g(u - e_3)}}$. Eine der

Lösungen wird also eine doppelperiodische Function erster Gattung, die andere berechnet sich mit Hilfe eines Integrals zweiter Gattung.

Liegt nun aber der Lamésche Ausnahmefall nicht vor, so behauptet Hermite: Wir können die Particularlösungen E_1, E_2 beide als doppelperiodische Functionen zweiter Gattung auswählen, so dass also S, T (in Anbetracht des Wertes der Determinanten $|\alpha_{ik}|, |\beta_{ik}|$) die Formen annehmen:

$$S \begin{cases} E_1(u + w_1) = \rho E_1(u), \\ E_2(u + w_2) = \frac{1}{\rho} E_2(u), \end{cases} \quad T \begin{cases} E_1(u + w_1) = \sigma E_1(u), \\ E_2(u + w_2) = \frac{1}{\sigma} E_2(u). \end{cases}$$

Beweis. Wir können jedenfalls Particularlösungen aufsuchen, welche sich bei S oder T multiplicativ verhalten. Das ist dieselbe Frage, die wir im vorigen Sommer betr. solcher S, T behandelt haben, die den Umgängen von x um einen singulären Punkt correspondiren. I. B. bekommen wir für die zu S gehörigen Multiplicatoren ρ die Gleichung: $\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \rho & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} - \rho \end{vmatrix} = 0$, d. h. $\rho^2 - (\alpha_{12} + \alpha_{21})\rho + 1 = 0$.

Hat diese Gleichung nicht gerade die Doppelwurzel $\rho = \pm 1$, so gibt es zwei verschiedene Particularlösungen E_1, E_2 der Hermiteschen Differentialgleichung, für welche S die Form annimmt:

$S: E_1(u + w_1) = \rho E_1(u), E_2(u + w_2) = \frac{1}{\rho} E_2(u)$. Analog wird es für T zwei Particularlösungen geben,

197.

welche die Gleich. $T: E_1(u+w_1) = \delta E_1(u), E_2(u+w_2) = \frac{1}{\delta} E_2(u)$ befriedigen, so lange $0^2 - (\beta_{11} + \beta_{22})\delta + 1 = 0$ nicht die Doppelwurzel $\delta = \pm 1$ liefert.

Aber weshalb sollen die E_1, E_2 dieser beiden Formeln gerade dieselben Particularlösungen sein? Ich behaupte, dass sie es in der That sind, so lange nicht δ und δ' (die Wurzeln der determinirenden Gleichungen) beide $= \pm 1$ sind. — Offenbar können wir unter Beiseitlassung dieses Falles annehmen, dass die δ von ± 1 verschieden sind, und also von der kanonischen Form des $S: E_1' = \delta E_1, E_2' = \frac{1}{\delta} E_2$ ausgehen. Wir beachten nun, dass T mit S vertauschbar sein soll. Schreiben wir allgemein

$$T: E_1'' = \beta_{11} E_1 + \beta_{12} E_2, \quad E_2'' = \beta_{21} E_1 + \beta_{22} E_2,$$

$$\text{so gibt dies: } \beta_{11} \delta E_1 + \frac{\beta_{12}}{\delta} E_2 = \delta (\beta_{11} E_1 + \beta_{12} E_2),$$

$$\beta_{21} \delta E_1 + \frac{\beta_{22}}{\delta} E_2 = \frac{1}{\delta} (\beta_{21} E_1 + \beta_{22} E_2),$$

d. h.

$$\beta_{12}(\delta^2 - 1) = 0, \quad \beta_{21}(\delta^2 - 1) = 0.$$

Die Coefficienten β_{12}, β_{21} müssen also verschwinden, und da $|\beta_{ik}| = 1$ folgt in der That, dass T die Gestalt $E_1'' = \delta E_1, E_2'' = \frac{1}{\delta} E_2$ haben wird, was zu beweisen war.

Ich sage jetzt, dass die bei Seite geschobene Annahme, dass gleichzeitig $\delta = \pm 1, \delta' = \pm 1$ sei, nothwendig zum Lamé'schen Ausnahmefalle hinführt. Sicher werden wir für S folgende kanonische Form wählen können: $E_1' = \pm E_1, E_2' = C_1 E_1 \pm E_2$. Hier werden wir $C_1 \neq 0$ voraussetzen können. Wäre $C_1 = 0$ so könnten wir ja mit der entsprechenden kanonischen Form

von \mathcal{T} beginnen: $\mathcal{E}'' = \pm \mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2'' = C_2 \mathcal{E}_1 \pm \mathcal{E}_2$, und wäre hier C_2 ebenfalls = 0, so hätten wir den ganz trivialen Fall (der sich natürlich unter den Laméschen Ausnahmefall subsumirt), dass sich sämmtliche \mathcal{E} bei \mathcal{S} und \mathcal{T}^2 ungeändert reproducirten, also sämmtliche \mathcal{E} doppelperiodische Functionen erster Art wären. — Wir setzen hiernach \mathcal{S} in der kanonischen Form voraus: $\mathcal{E}'_1 = \pm \mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}'_2 = C_1 \mathcal{E}_1 \pm \mathcal{E}_2$, und nehmen $C_1 \geq 0$. Indem wir dann die allgemeinste vertauschbare Operation \mathcal{T} suchen, welche die Determinante 1 hat, kommt mit Nothwendigkeit: $\mathcal{E}''_1 = \pm \mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}''_2 = C_2 \mathcal{E}_1 \pm \mathcal{E}_2$. \mathcal{E}_1 ist also doppelperiodische Function erster Gattung, wir haben den Laméschen Ausnahmefall. —

Fügen wir noch hinzu, dass im allgemeinen Falle $\mathcal{E}_1(-u) = \mathcal{E}_2(u)$, $\mathcal{E}_2(-u) = \mathcal{E}_1(u)$ genommen werden kann. In der That ist ja

$$\mathcal{E}_1(-u - w_1) = \frac{1}{\rho} \cdot \mathcal{E}_1(-u),$$

$\mathcal{E}_2(-u - w_2) = \rho \cdot \mathcal{E}_2(-u)$. Dagegen folgt, dass im speciellen Falle $\mathcal{E}_1(u) = \pm \mathcal{E}_1(-u)$ ist. Im allgemeinen Falle ist also $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$, im speciellen Falle \mathcal{E}_1^2 eine gerade Function von u , die sich bei Vermehrung von u um Perioden w_1, w_2 gar nicht ändert. Da die betr. Functionen nur in den Parallelogrammen unendlich werden, und zwar wie u^{2n} , so können wir sie einer ganzen rationalen Function n ten Grades von ρ gleichsetzen:

$$\left. \begin{matrix} \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \\ \mathcal{E}_1^2 \end{matrix} \right\} = \rho^n + a_1 \rho^{n-1} + \dots + a_{n-1} \rho + a_n = F(\rho).$$

Es fragt sich nun, wie wir E_1, E_2 in jedem Falle als Functionen von u wirklich berechnen können. Hermite hat hier für zwei Methoden gegeben, die Halphen l. c. p. 494 ff, und p. 498 ff., reproducirt. Die erste derselben (auf die wir hier nicht eingehen) geht davon aus, die allgemeinste doppelperiodische F zweiter Art zu bilden, welche bei $n=0$ wie u^{-n} unendlich wird, und sie in die ursprüngliche Gleichung $E'' = (A\varphi + B)E$ zu substituiren. Die andere geht davon aus, das eben eingeführte Polynom $F(\varphi)$ leicht berechnen können.

Aus der Form der Substitutionen S, T geht nämlich zunächst hervor, dass unter allen quadratischen Combinationen der E_1, E_2 :
 $\alpha_1 E_1^2 + 2\alpha_2 E_1 E_2 + \alpha_3 E_2^2$ jedesmal nur die eine — nämlich E_1, E_2 , oder denn E_1^2 — einem Polynom $F(\varphi)$ gleich ist. Andererseits ist klar, dass alle diese quadratischen Combinationen einer linearen Differentialgleichung dritter Ordnung mit rationalen Coefficienten genügen^{*)}. Um letztere zu berechnen sei: $x = E^2$.

Dann folgt:

$$x' = 2E E'$$

$$x'' = 2E E'' + 2E'^2 = 2E^2(A\varphi + B) + 2E'^2$$

$$x''' = 4E' E'' + 4E E'(A\varphi + B) + 2A\varphi' E^2$$

$$= 4x'(A\varphi + B) + 2A\varphi' x.$$

Die Differentialgleichung dritter Ordnung lautet also: $x''' - 4(A\varphi + B)x' - 2A\varphi' x = 0$, oder, wenn

^{*)} Denn sie substituiren sich darnach, wenn sich die E_1, E_2 binär substituiren.

wir g als unabhängige Veränderliche einführen und in üblicher Weise $4(g - e_1)(g - e_2)(g - e_3) = 4g^3 - g_2 g - g_3$ setzen: $(4g^3 - g_2 g - g_3) \frac{d^2 x}{dg^2} + 3(6g^2 - \frac{g_2}{2}) \frac{dx}{dg} - 4((n^2 + n - 3)g + \beta) \frac{dx}{dg} - 2n(n+1)x = 0$.
 Hier substituirt man jetzt $x = F(g) = g^{n+1} + a_1 g^n + \dots$,
 so müssen sich die a_1, a_2, \dots, a_n eindeutig be-
 stimmen.

Wie werden wir nun vom $F(g)$ aus zwischen dem allgemeinen Falle und dem Laméschen Ausnahmefalle unterscheiden und im ersteren Falle die E_1, E_2 berechnen? Wir setzen auf's geratewohl: $F(g) = E_1 E_2$ (ohne darum E_1, E_2 als noch-
 andererseits $E_1 E_2' - E_2 E_1' = C$. (wenig verschiedene Lösungen anzusehen),
 Man berechnet

dann leicht^{xx}: $C^2 = 4(Ag + \beta) F^2 - 2FF'^2 + F'^2$.
 Dass der hier rechter Hand stehende Ausdruck überhaupt eine Constante ist, ist eine merkwürdige Eigenschaft des Polynoms F : wird er insbesondere gleich Null, dann und nur dann haben wir den Laméschen Ausnahmefall. Es ist dann das Lamésche Polynom^{xy}.

$$E_1 = \sqrt{F(g)}$$

Anderenfalls berechnen wir (vergl. die Anmerkung¹⁾) $\frac{E_1'}{E_1} = \frac{F' - C}{2F}$, $\frac{E_2'}{E_2} = \frac{F' + C}{2F}$!

^{xx} Hier und im Folgenden weicht unsere Ausdrucksweise ein wenig von der früher verabredeten ab. Ist $\sqrt{F} = (g - e_1)^{\frac{1}{2}} (g - e_2)^{\frac{1}{2}} (g - e_3)^{\frac{1}{2}} \varphi(g)$, so haben wir früher den Factor $\varphi(g)$ für sich genommen als Lamésches Polynom bezeichnet.

^y Wir haben nämlich $E_1' E_2 + E_2' E_1 = F'$, also $\frac{E_1'}{E_1} = \frac{F' - C}{2F}$, woraus durch Differentiation $\frac{E_1''}{E_1} - \frac{E_1'^2}{E_1^2} = \frac{FF'' - g'^2 + CF'}{2F^2}$,
 also $\frac{E_1''}{E_1} = Ag + \beta = \frac{E_1' E_2'' + E_2' E_1''}{4F^2}$. Die F, \dots sind hier die nach u genommenen Differentialquotienten.

$$\text{also } E_1 = \sqrt{F} e^{-\int \frac{C' du}{2F}}, \quad E_2 = \sqrt{F} e^{+\int \frac{C' du}{2F}}$$

womit E_1, E_2 in der That als eindeutige Functionen von u dargestellt sind.

Der Werth von C auf der vorigen Seite nimmt eine besonders einfache Form an, wenn wir ^{für} irgend eine Wurzel α der Gleichung $F(\rho) = 0$ eintragen. Es wird dann einfach $\pm C = F'(\alpha)$, oder, wenn wir die Differentiation nach u durch eine solche nach ρ ersetzen: $\pm C = \left(\frac{\partial F}{\partial \rho} - \rho'\right)_{\rho = \alpha}$.

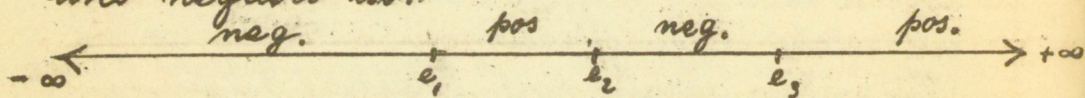
Wir ziehen daraus noch folgende Folgerung. Im Lamé'schen Ausnahmefall ist, wie wir wissen: $F = (\rho - e_1)^{e_1} (\rho - e_2)^{e_2} (\rho - e_3)^{e_3} \rho^2$. Alle Wurzeln von $F = 0$ also, die einfach bleiben, liegen bei e_1 , oder e_2 , oder e_3 , die übrigen Wurzeln sind zu Doppelwurzeln zusammengedrückt. Darum auch wird C , welche dieser Wurzeln wir auch wählen mögen, zu Null, wie es sein muß. Aber offenbar gestattet die Formel auch den umgekehrten Schluss:

Sobald eine Wurzel von $F(\rho) = 0$ in e_1 , oder e_2 , oder e_3 hineintrückt oder mit einer anderen Wurzel zusammenfällt, haben wir den Lamé'schen Ausnahmefall.

Ich wünsche diese Hermite'schen Sätze jetzt noch durch Realitäts Theoreme zu ergänzen. Wir hatten über die Realität und Lage der Wurzeln der Lamé'schen Polynome früher einfache Sätze kennen gelernt, wir fragen also zunächst, welche Behauptungen man über die Wurzeln von $F(\rho) = 0$ im allgemeinen Hermite'schen Falle aufstellen kann?

Zu dem Zwecke muß ich vorab auf gewisse einfache Betrachtungen zurückgreifen, welche ich seinerzeit in den math. Annalen 18 (1881) entwickelte (p. 407 ff: Ueber Körper, welche von confocalen Flächen zweiten Grades begrenzt sind). Bemerken wir zunächst, dass $du = \left(\frac{d\varrho}{\sqrt{(1-\varrho^2)(1-\varrho^2)(1-\varrho^2)}} \right)^2$

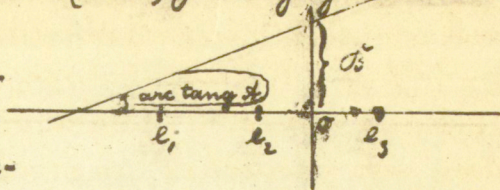
in den verschiedenen Intervallen der ϱ -Achse nach folgendem Schema abwechselnd positiv und negativ ist:



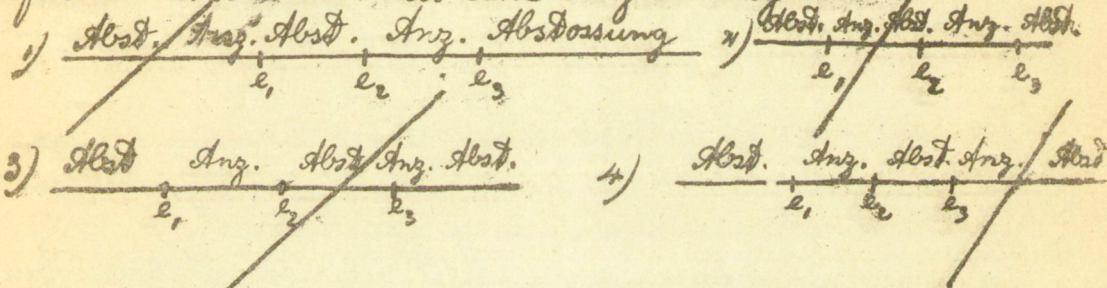
wir werden es also innerhalb $e_1, -e_2, e_3, +\infty$ gleich $+dt^2$ innerhalb $-\infty, -e_1, e_2, -e_3$ gleich $-dt^2$ setzen können. Vermöge der Hermite'schen Differentialgleichung wird nun $\frac{d^2 E}{dt^2} = E$ für die verschiedenen Werthe von ϱ vorgegeben. Was bedeutet es für den Verlauf der Function $E(\varrho)$, wenn dieser Werth positiv oder wenn er negativ ist? Deuten wir t als Zeit, E als Ordinate eines beweglichen Punktes so bedeutet es, dass der Punct von $E=0$ aus durch eine elastische Kraft abgestossen, bez. angezogen wird. Im ersteren Falle wird sich der Punct von $E=0$ immer weiter entfernen, im zweiten Falle wird der Punct um $E=0$ oscilliren, oder doch, wenn die Dauer der Zeit t (oder die Grösse der Anziehungskraft) dazu nicht ausreicht die Tendenz zur Oscillation zeigen. Diese Unterscheidung überträgt sich natürlich auf die Curve $E = E(\varrho)$, durch welche wir den Verlauf der Function E versinnlichen können.

Nun ist in der Hermite'schen Differentialgleichung $\frac{d^2 \xi}{dx^2} + \xi$ speziell $= (A \rho + B) = n(n+1) \rho + B$ gegeben. Die gerade Linie $E = A \rho + B$:

bezeichnen wir als Hilfsgerade. Ihre Richtung ist durch den angenommenen Werth von $A = n(n+1)$



von vornherein fixirt, ihre Lage hängt von der willkürlich anzunehmenden Constante B ab. Da ist es nun leicht, zuzusehen, in welchen Intervallen der ρ -Axe jeweils $A \rho + B$ positiv oder negativ ist, und in welchen Intervallen also (mit Rücksicht auf das Schema der Seite 261) „Anziehung“ oder „Abstoßung“ stattfindet. Wir geben hier eine Anzahl Figuren.



Man erinnere sich jetzt des näheren Verhältnisses der Lamé'schen Polynome. Für jedes n zerfallen dieselben in 4 Kategorien, z. B. bei geraden n in folgende:

$\frac{n+2}{2}$ Polynome der folgenden Art: $\frac{P_{\frac{n}{2}}(\rho)}{2}$
 $\frac{n}{2}$ " " " " " : $\sqrt{\rho - e_2} \cdot \rho - e_3 \cdot P_{\frac{n-2}{2}}(\rho)$
 $\frac{n}{2}$ " " " " " : $\sqrt{\rho - e_3} \cdot \rho - e_1 \cdot P_{\frac{n-2}{2}}(\rho)$
 $\frac{n}{2}$ " " " " " : $\sqrt{\rho - e_1} \cdot \rho - e_2 \cdot P_{\frac{n-2}{2}}(\rho)$

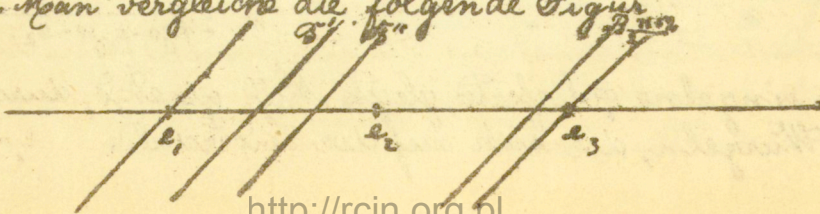
Jedes einzelne ρ liefert, gleich Null gesetzt, durchaus reelle Wurzeln, die sich auf die Intervalle e_1, e_2, e_3

vertheilen, und zwar unterscheiden sich die verschiedenen q_i , die es innerhalb derselben Kategorien gibt, gerade durch diese Vertheilungsweise. So hat man z. B. für die $\frac{n+2}{2}$ Polynome der ersten Kategorie die folgende Tabelle:

	Zahl der Nullstellen zwischen		Zugehöriger Werth von β
	$e_1 \sim e_2$	$e_2 \sim e_3$	
1)	0	$n/2$	β'
2)	1	$n-1/2$	β''
$\frac{n+2}{2}$)	$n/2$	0	$\beta^{\frac{n+2}{2}}$

Ich habe dieser Tabelle eine dritte Columne zugefügt, um für die β , die den einzelnen Polynomen zugehören, eine Benennung zu haben.

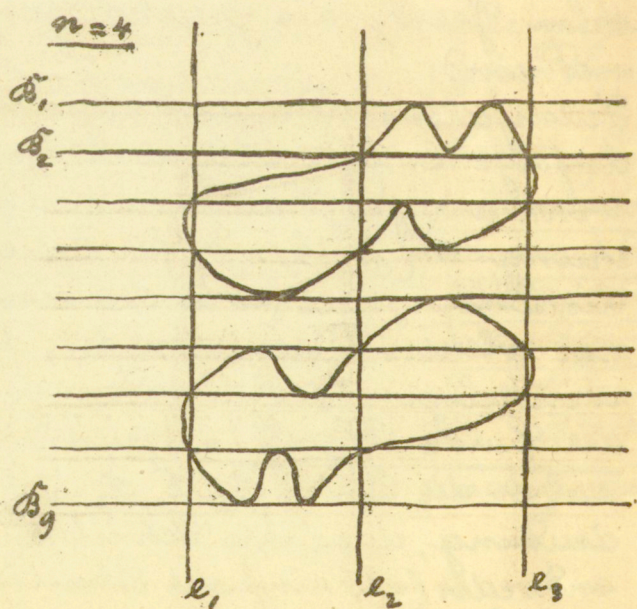
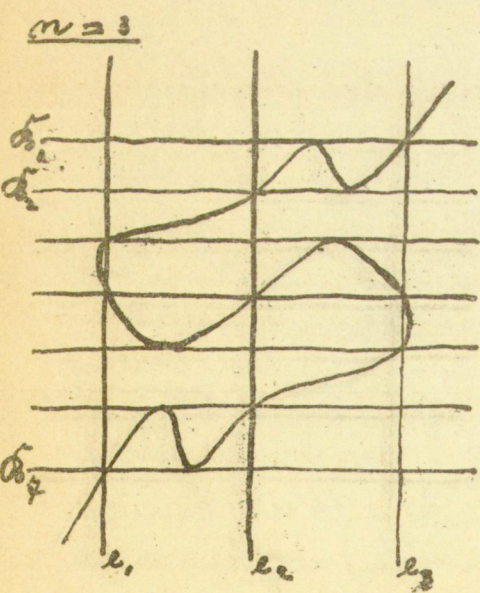
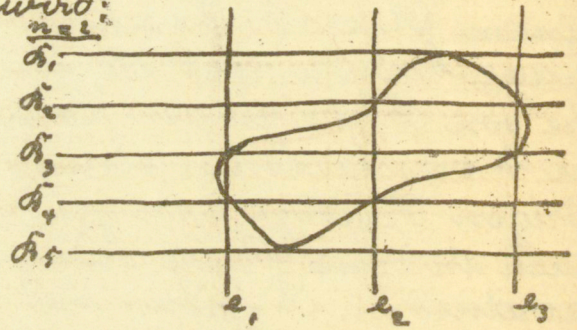
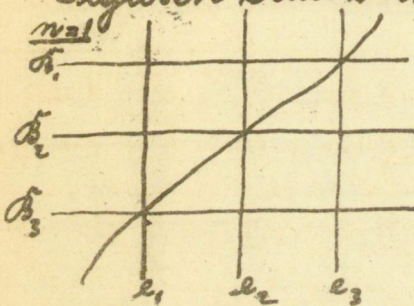
Da schliesst man denn leicht aus den Betrachtungen von Annalen 18: Sämmtliche zu den Laméischen Polynomen der vorstehenden Tabelle (oder der entsprechenden Tabelle irgend einer anderen Kategorie) gehörigen Hilfsgeraden liegen zwischen $\mathcal{E} = \mathcal{A}(e_2 - e_1)$ und $\mathcal{E} = \mathcal{A}(e_3 - e_2)$ und folgen innerhalb dieses Intervalls in der natürlichen Reihenfolge $\beta', \beta'', \dots, \beta^{\frac{n+2}{2}}$ (die β', β'', \dots bilden also eine abnehmende Grössenreihe). Man vergleiche die folgende Figur



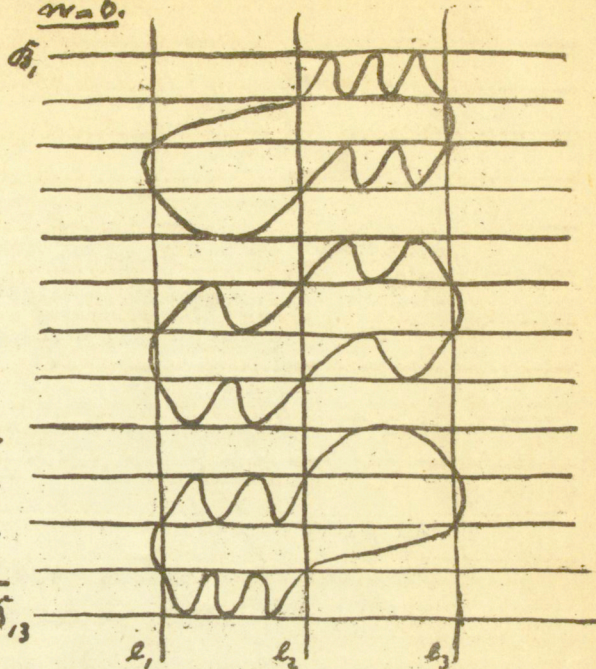
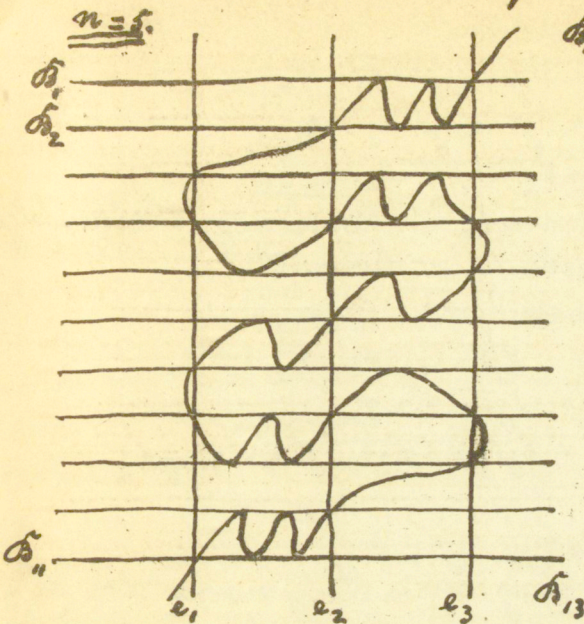
Explicite ist der so formulirte Satz zuerst aufgestellt worden in der Petersburger Magisterschrift von Liapunow: Über die Stabilität ellipsoidaler Gleichgewichtsfiguren einer rotirenden Flüssigkeit (1884); in der That braucht man diese Sätze bei den bezüglichen Stabilitätsuntersuchungen (vergl. auch Poincaré in Acta VII, 1885). Ich kenne die Schrift von Liapunow einzuweilen nur aus einem Referate. Es scheint nicht, dass dort die Frage beantwortet ist, wie sich die $2n+1$ Werthe von B , die zu den Laméschen Polynomen der 4 verschiedenen einem gegebenen n zugehörigen Kategorien gehören, ihrer Grösse nach in eine Reihe ordnen. Ich will die so geordneten B fortan mit $B_1, B_2, \dots, B_{2n+1}$ bezeichnen, wir werden bald sehen, nach welchem Gesetz die zugehörigen Polynome geordnet sind.

Sedenfalls wird diese Frage nach der Aufeinanderfolge der betr. Polynome mit beantwortet sein, wenn wir jetzt allgemein die Wurzeln der Gleichung $F(\rho, B) = 0$ (für beliebige Werthe der B) discutiren, oder was das einfachste Mittel einer solchen Discussion ist, geradezu in rechtwinkeligem Coordinatensystem ρ, B den Verlauf der Curve $F(\rho, B) = 0$ zeichnen. Für diese Curve haben die Linien $B = B_1, B_2, \dots, B_{2n+1}$ die einfache Bedeutung, dass ihre Schnittpunkte mit der Curve entweder (als einfache Schnittpunkte) auf einer der drei Verticallinien $\rho = e_1, \rho = e_2, \rho = e_3$ liegen, oder

Berührungspunkte sind. Zugleich belehrt uns der Satz von p. 261, dass es auf unserer Curve keine anderen Punkte $p=e_1$, oder $p=e_2$ oder $p=e_3$, gibt, als die gerade bezeichnen, und dass die Curve ausser den angeführten auch keine weiteren horizontalen Tangenten hat. Hierdurch allein sind wir bereits in der Lage den qualitativen Verlauf der Curve zu erkennen, wie derselbe durch die nachstehenden Figuren erläutert wird:



207.

 $n=6$ 

Wir fügen diesen Figuren etwa folgende Bemerkungen hinzu: 1) Bei ungeradem n besteht die Curve aus einem Zug, bei geradem n aus $n/2$.

2) Die einzelne Curve kommt (qualitativ zu reden) mit sich selbst zur Deckung durch Drehung um 180° um den Mittelpunkt der jedesmaligen Figur.

3) Jedesmal nach 4 Horizontalen wiederholt sich der Curvenzug, nur so, dass jedesmal ein Gipfel aus dem Intervall rechts in das Intervall links hinübergeschoben erscheint.

Wir notiren noch im Hinblick auf die Figuren S. 28. 2. 91. folgende Regel: 4) Ist n gerade, so folgen die Larnéschen Polynome der verschiedenen Typen der Reihen $B_1, B_2, \dots, B_{2n+1}$ entsprechend folgendermassen auf einander:

zuerst der Typus $\varphi_{n/2}$,

dann " " $\sqrt{\rho - e_2} \rho - e_3 \cdot \varphi_{\frac{n-2}{2}}$,

dann " " $\sqrt{\rho - e_2, \rho - e_3} \cdot \varphi_{\frac{n-2}{2}}$,

dann " " $\sqrt{\rho - e_1, \rho - e_2} \cdot \varphi_{\frac{n-2}{2}}$,

und so weiter fort, immer in derselben Reihenfolge.
 Ist n hingegen ungerade, so kommt

zuerst der Typus $\sqrt{\rho - e_2} \cdot \varphi_{\frac{n-1}{2}}$,

dann " " $\sqrt{\rho - e_2} \cdot \varphi_{\frac{n-1}{2}}$,

dann " " $\sqrt{\rho - e_1} \cdot \varphi_{\frac{n-1}{2}}$,

endlich " " $\sqrt{\rho - e_1, \rho - e_2, \rho - e_3} \cdot \varphi_{\frac{n-1}{2}}$,

u. s. w. fort.

Ferner bemerken wir:

5) Die Wurzeln jedes einzelnen Polynoms der i -ten festen Werte von n entsprechenden Reihe, werden durch die Wurzeln des jedesmal vorangehenden Polynoms, wie diejenigen des nachfolgenden Polynoms separirt.

Alles das sind nur qualitative Sätze. Es wäre natürlich wünschenswerth, dieselben nach der quantitativen Seite zu ergänzen, d. h. bei gegebenen e_1, e_2, e_3, n Gränzen anzugeben, innerhalb deren sich die $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$ befinden müssen, und dann hin wiederum für das einzelne β Gränzen anzugeben, innerhalb deren die einzelnen Wurzeln des zugehörigen φ liegen.

Wir verificiren jetzt diese Angabe über die Curve $F(\beta, \rho) = 0$ und gewinnen zugleich die Grundlage für ein weiteres Studium der E , indem wir die conforme Abbildung untersuchen, welche der Quo-

Dient $\frac{E_2}{E_1} = \eta$ von der Halbebene \wp entwirft. Unseren allgemeinen Sätzen zufolge handelt es sich dabei um ein Kreisbogenviereck, welches den Werten $\wp = e_1, e_2, e_3, \infty$ entsprechend die Winkel $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{(2n+1)\pi}{2}$ darbietet.

Um die Figur eines solchen Vierecks klar zu erfassen, bemerken wir zuvörderst, dass die 4 Kreislinien, welche an seiner Begrenzung bedtheiligt sind, sich offenbar zu 2 und 2 rechtwinklig schneiden. Wie findet man in allgemeinsender Weise 4 Kreise, die in dieser geometrischen Beziehung zu einander stehen? Dies ist am einfachsten zu sehen, wenn wir von der η -Ebene zur η -Kugel übergehen. Man nehme auf dieser irgend zwei Kreise an, deren Ebenen sich in einer Raumgeraden L schneiden. Setzt man nun zu L , in Bezug auf die Kugel, die conjugirte Polare L' : Irgend zwei Kreise, die von Ebenen ausgeschnitten werden, welche L' enthalten, bilden dann mit den zwei zuerst angenommenen Kreisen eine Figur der gewollten Art. Offenbar sind da zwei Fälle zu untersuchen:

- 1) Der allgemeine Fall. L und L' schneiden sich nicht. Die eine der beiden Linien enthält zwei reelle Kugelpuncte, die andere nicht. Der Typus einer bez. Kreisfigur liegt vor, wenn man auf der Kugel irgend zwei Meridiane und zwei Breitenkreise zeichnet.
- 2) Der specielle Fall. L und L' schneiden sich (rechtwinklig), indem sie beide die Kugel in ihrem

Schnittpunkte berühren. Alle vier Kreise der zugehörigen Figur haben den betreffenden Punkt mit einander gemein. —

Indem wir jetzt in geeigneter Weise von der Kugel zur Ebene zurückgehen erhalten wir dort als kanonische Figuren der gesuchten Kreisquadrupel diese:

1) im allgemeinen Falle zwei durch O laufende gerade Linien und zwei um O concentrisch herumgelegte Kreise;

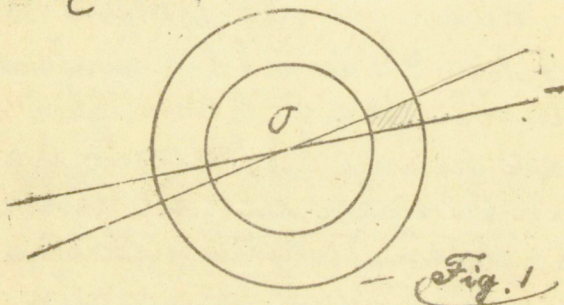


Fig. 1.

2) im speciellen Falle vier ein Rechteck einschliessende gerade Linien:

In diese Kreisquadrupel ist nun unser Kreisbogenviereck irgendwie eingespannt. Die analytische Fortsetzung der durch dieses Kreisbogenviereck vermittelten con-

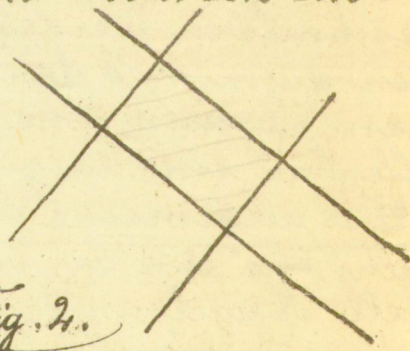


Fig. 2.

formen Abbildung erfolgt natürlich durch Spiegelung an den begrenzenden Kreislinien ist also durch die Fig. 1, 2 selbst ihrem analytischen Charakter nach bereits vollkom-

man festgelegt. Wir wollen insbesondere von den linearen Substitutionen sprechen, welche durch Combinationen zweier Spiegelungen entstehen. Offenbar haben dieselbe bei Figur 1 die Gestalt $\eta' = C\eta$, bei Figur 2 $\eta' = \eta + C$.

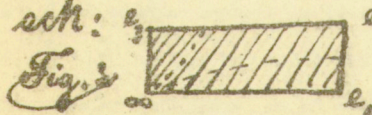
Umgekehrt, wenn uns die Substitutionen in der einen oder anderen Form gegeben sind, werden wir schliessen, dass die 4 das η -Viereck einschliessenden Kreisbogen gerade eine solche kanonische Figur bilden, wie sie Fig. 1 oder 2 vor Augen führt.

Dies ist nun für $\eta = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ gerade der Fall, wenn wir $\varepsilon_2, \varepsilon_1$ so heraussuchen, wie wir dies oben gethan haben (p. 253). In der That: in allgemeinen Hermite'schen Falle hatten wir $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ als doppelperiodische Functionen zweier Art herausgesucht, $\eta = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ verhält sich dann also bei beliebigen Umgängen des g multiplicativ. Andererseits war $\eta = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ bei dem von uns für den Lamé'schen Ausnahmefall gewählten Ansatz ein Integral zweier Gattung und verhielt sich also bei Umgängen des g additiv. Wir können sagen: Zum Hermite'schen Falle gehört gerade die kanonische Figur 1, zum Lamé'schen Falle die Fig. 2.

Wo finden sich nun auf diesen Kreisen die Bilder solcher reellen Punkte der g -Ebene, in denen $F(g)$ verschwindet? Da im Falle 1 $F = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2, \eta = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$, so liegen dieselben bei $\eta = 0$ oder bei $\eta = \infty$. Im Falle 2 dagegen, wo $F = \varepsilon_1^2$,

liegen sie alle bei $\eta = \infty$. Wir können daraus gleich abnehmen: Im allgemeinen Hermite'schen Falle liegen die reellen Wurzeln von $F(\rho) = 0$ notwendig in solchen 2 Intervallen der ρ Axe, die von einander getrennt sind, also entweder in e_1, e_2 und e_3, ∞ , oder in ∞, e_1 und e_2, e_3 . Denn von den 4 Kreisen der Fig. 1 gehen doch nur die beiden, welche sich als gerade Linien darstellen, durch σ , bez. ∞ hindurch.

Aber es gilt jetzt, sich von dem Kreisbogenviereck der η -Ebene in allen Fällen eine genaue Vorstellung zu machen. Wir werden dies zuerst für die Lamé'schen Ausnahmefälle durchführen, für die wir die betr. Discussion schon vor 4 Wochen begonnen haben. Wir sind damals von dem einen Kreisbogenviereck ausgegangen, welches im Falle $n = 0$ existirt, nämlich dem ebenen Rechteck:



und sind von ihm zum allgemeinen Falle $P_{n/2}(\rho)$ des geraden n aufgestiegen, indem wir an den mit ∞ bezeichneten Punkt längs der beiden nach e_1, e_2 , bez. e_2, e_3 hinüberlaufenden Transversalen im Ganzen $n/2$ von e_1, e_2 , bez. e_2, e_3 begränzte Halbebenen polar anhefteten. Aber damit haben wir unsere neue Frage eben nur für den Typus $P_{n/2}(\rho)$ der Lamé'schen Polynome erledigt. Wir müssen dasselbe jetzt nachträglich für

die anderen 7 Typen machen. Dabei leitet uns derselbe Ansatz: Wir werden für jeden dieser 7 Typen eine Figur zeichnen, die sich auf niederen zugehörigen Werth von n bezieht, und uns dann vorstellen, dass man an jede dieser Figuren von der Ecke $\rho = \infty$ aus die richtige Zahl von Halbelbernen in der richtigen Weise anheftet. Dementsprechend haben wir zuerst in Betracht zu ziehen:

Bei $n = 1$ die 3 Typen $\sqrt{\rho - e_3}$, $\sqrt{\rho - e_2}$, $\sqrt{\rho - e_1}$, sodann:

Bei $n = 2$ die 3 Typen $\sqrt{\rho - e_2 \cdot \rho - e_3}$, $\sqrt{\rho - e_1 \cdot \rho - e_2}$, $\sqrt{\rho - e_1 \cdot \rho - e_3}$, endlich:

Bei $n = 3$ den Typus $\sqrt{\rho - e_1 \cdot \rho - e_2 \cdot \rho - e_3}$.

Hier die Figuren:

$n = 1$

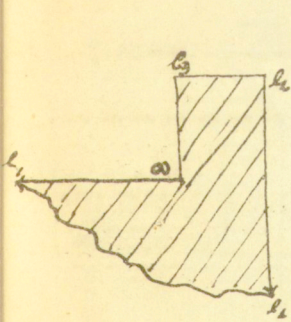


Fig. 4
Typus $\sqrt{\rho - e_2}$

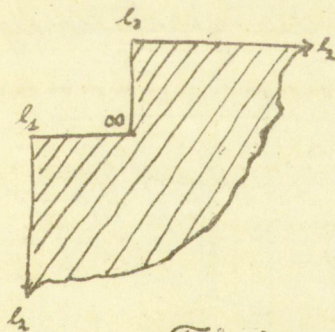


Fig. 5
Typus $\sqrt{\rho - e_1}$

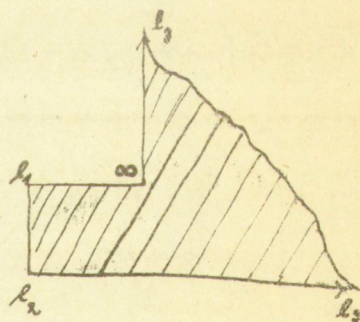


Fig. 6
Typus $\sqrt{\rho - e_3}$

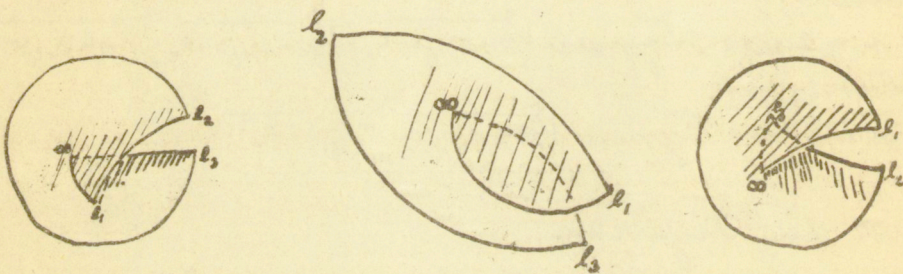
Ich gebe diese Figuren bereits Winter 89-90 in meinen „Laméschen Functionen“.

Die Figuren für $n=2$ werden vielleicht am leichtesten klar, wenn man statt der geradlinigen Begrenzungslinien zunächst solche Kreise benutzt, die in einem Punkt zusammenlaufen und dann die in diesen Punkt coincidirenden Ecken ein wenig voneinander entfernt zeichnet. Wir bekommen so für:

$$\sqrt{p-e_2 \cdot p-e_3}$$

$$\sqrt{p-e_1 \cdot p-e_3}$$

$$\sqrt{p-e_1 \cdot p-e_2}$$



beziehungsweise die geradlinigen Figuren:

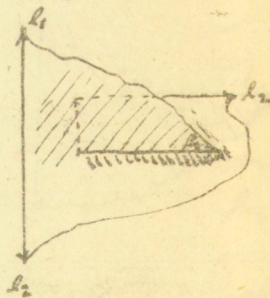
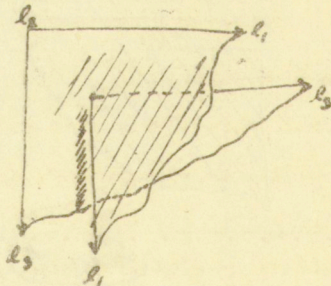
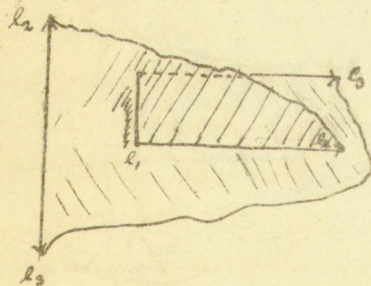


Fig. 7.

Fig. 8.

Fig. 9.

Wir finden entsprechend für den Typus $\sqrt{p-e_1 \cdot p-e_2 \cdot p-e_3}$

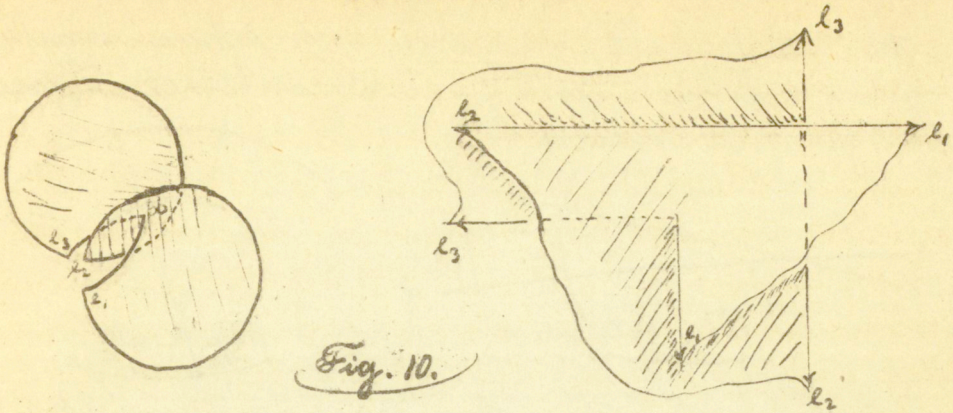


Fig. 10.

Wie man nun an diese Figuren in jedem Falle die erforderliche Anzahl von Halbebenen in richtiger Weise polar anheftet, braucht kaum noch erläutert zu werden, ich darf die allgemeinen Figuren, welche so entstehen, fortan als bekannt ansehen.

Nehmen wir jetzt irgend eine der in der *Mi.* 4./3. 91. vorigen Stunde construirten Figuren, etwa diejenige, die einem bestimmten Werthe von n und $B = B_1$ entspricht. Es ist dann leicht, zu sehen, wie die allgemeine Figur gestaltet ist, die demselben Werthe von n und einem Werthe von B entspricht, der um ein wenig kleiner oder grösser als B_1 ist. Wir haben einfach die vier geraden Linien, welche an der Figur für $B = B_1$ betheiligte sind:

in der einen oder anderen Weise (un-
der Aufrechterhaltung

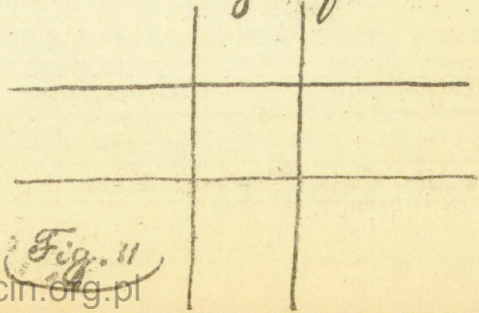
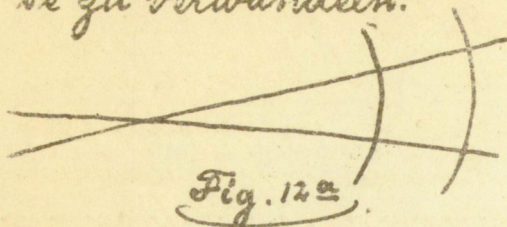


Fig. 11

der Stetigkeit) in zwei sich schneidende gerade Linien und zwei concentrische Kreise zu verwandeln:

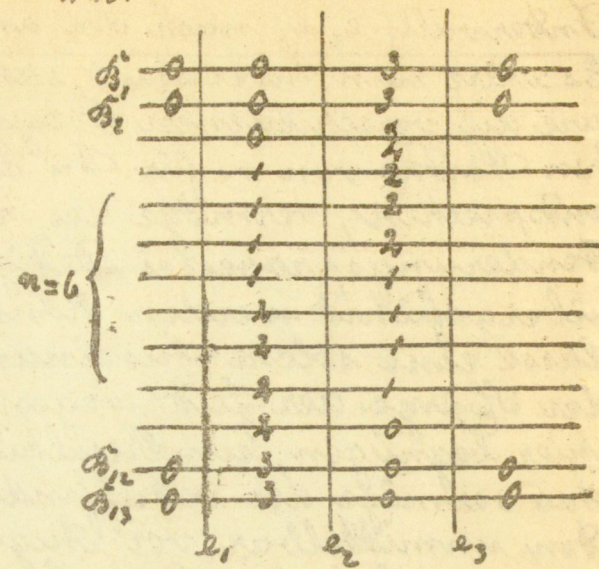
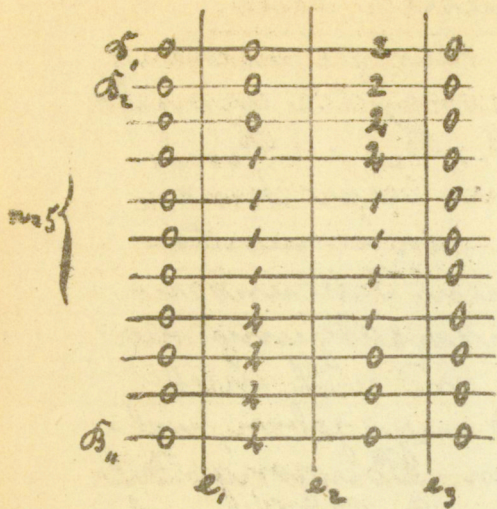


Möge das $B = B_1$ entsprechende Lamé'sche Polynom n' Wurzeln zwischen e_1 und e_2 und n'' Wurzeln zwischen e_2 und e_3 haben, die dann ebensoviele Doppelwurzeln des zugehörigen F sind. Dann zieht sich also die eine Seite des zugehörigen Polygons n' mal durch's Unendliche hindurch, die andere (angrenzende) Seite n'' mal. Indem wir nun zu den Figuren 12 übergehen, ist offenbar einer von 2 Fällen eingetreten: Entweder haben sich die n' Doppelwurzeln je in 2 reelle Wurzeln von F gespalten und die n'' Doppelwurzeln sind imaginär geworden, oder die n' sind imaginär geworden und die n'' haben sich gespalten (vergl. p. 273 oben). Wir verificiren so die oben gegebene Gestalt der Curve $F(p, B) = 0$. In der That heisst ja, das hiermit erhaltene Resultat: Von den n' Berührungspuncten, welche die Curve $F=0$ mit der Linie $B=B_1$ im Intervalle e_1, e_2 gemein hat, zieht sich die Curve nach der einen Seite, von den n'' Berührungspuncten der

Intervalls e_2, e_3 nach der anderen Seite.

Es wäre nun interessant, sich klar zu machen, wie die verschiedenen Polygone, die demselben Werte von n für $B = B_1, B_2, \dots, B_{2n+1}$ entsprechen, vermöge des hier besprochenen Änderungsprocesses stetig in einander übergeführt werden können. Ich unterlasse eine solche Auseinandersetzung nur der Kürze der Zeit wegen und will mich hier begnügen, ein Resultat anzugeben, welches vermöge der betreffenden Polygonegestalten unmittelbar vor Augen tritt. Wir wollen nämlich für $B_1 \equiv B \equiv B_{2n+1}$ die Charakteristiken χ bestimmen, welche den 4 Intervallen der p -Axe e_1, e_2, e_3, e_4 im Falle der Hermiteschen Gleichungen zukommen. Diese χ sind, wie wir vom Sommer her wissen, ganze Zahlen, die in der Abbildung sich als Zahl der Selbstüberschlagungen der in Betracht kommenden Polygoneseiten darstellen (vergl. den Aufsatz über die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe in Bd. 37 der math. Ann!). Für $B = B_1, B_2, \dots, B_{2n+1}$ lesen wir jetzt die χ unmittelbar aus den Figuren ab, die sich an Fig. 3 bis 10 anschliessen. Hier bezügliche Tabellen für $n=5, 6$, welche den Fall eines ungeraden n , bez. geraden n typisch erläutern:

^{*)} Abweichend von der im genannten Aufsätze festgehaltenen Darstellung zähle ich es bei den folgenden Tabellen als eine volle Selbstüberschlagung, wenn eine Kreisbogenseite unserer Polygone sich eben schließt.



Da sich nun die Polygone für $\beta_1 \leq \beta \leq \beta_{2n+1}$ mit β stetig ändern, so wird man für $\beta_1 < \beta < \beta_{2n+1}$ die zu β gehörigen Charakteristiken gleich angeben können: sie werden für jedes der Intervalle mit der kleineren der beiden Zahlen übereinstimmen, welche β_1 , bez. β_{2n+1} für das Intervall ergeben.

Etwas ausführlicher müssen wir den Fall $\beta_1 > \beta_{2n+1}$ (oder den gleichberechtigten $\beta < \beta_{2n+1}$) erörtern. Indem wir uns der schematischen Figur von p. 263 erinnern: ~~Abst.~~ Ang. ~~Abst.~~ Ang. ~~Abst.~~

sehen wir, dass jetzt zwischen ∞ und e_1 , und zwischen e_2 und e_3 , die Charakteristiken von ∞ verschieden sein können, wofür wir folgende Bezeichnung einführen wollen:

$\infty \quad e_1 \quad 0 \quad e_2 \quad \infty \quad e_3 \quad 0$

Zugleich ist klar, dass wir durch

zweckmässige Annahme des β erreichen können, dass x' einen beliebigen ganzzahligen Wert ≥ 0 , oder x'' einen solchen $\geq \frac{n}{2}$ (resp., wenn n ungerade ist, $\geq \frac{n-1}{2}$) annimmt. Wir bestätigen dies jetzt durch Betrachtung des Polygons der η -Ebene, finden dabei aber zugleich zwischen x' und x'' einen einfachen Zusammenhang.

Sei zuerst β nur wenig $> \beta_1$. Ich will ausserdem, der bestimmteren Zeichnung halber $n = 2$ setzen. Wir haben dann für das η -Polygon folgende Gestalt: entsprechend $x' = 0, x'' = 1$.

Da ist nun offenbar in der That die Möglichkeit gegeben, dass x' oder x'' beliebig anwächst.

Denn wir können das kleine Viereck, mit welchem unsere Figur (Fig. 13.) über sich selbst hinübergreift, beliebig wachsen lassen:

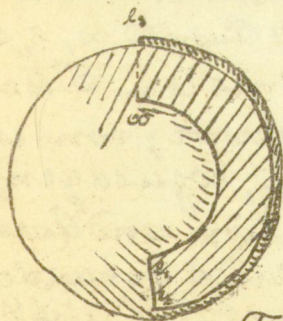
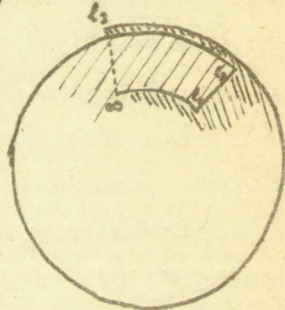


Fig. 14.

und sich schliesslich so oft überschlagen lassen, wie wir wollen (Das Polygon, welches für $\beta_{2m+1} \leq \beta \leq \beta_1$, eine Reihenfolge einzelner wohlbestimmter Metamorphosen durchmacht, wird für

$B > \bar{B}$, auf einmal in der bezeichneten Hinsicht frei entwickelungsfähig; ebenso für B_1 , B_{2n+1} !). Die Relation zwischen X' und X'' aber, welche dabei ersichtlich wird, drückt einfach aus, dass bei dieser Umänderung der Figur 13 der Vorsprung an Länge, den die Seite e_3, e_2 über die Seite ∞, e_1 einmal hat, dauernd erhalten bleibt. In Formeln: es ist bei geradem n : $X'' = X' + \frac{n}{2}$, und bei ungeradem n : $X'' = X' + \frac{n-1}{2}$.

Vergleichen wir nun noch, ehe wir dem Hermité-Laméschen Fall verlassen, dessen Theorie, soweit wir sie entwickelt haben, mit der früher gegebenen Theorie der hypergeometrischen Reihe! Bei letzterer hatten wir ein Kreisbogendreieck mit den beliebigen Winkel $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$ zu Grunde gelegt, bei ersterer ein Viereck, dessen Variabilität wir, was die Winkel anging, von vornherein beträchtlich eingeschränkt hatten. Dafür hatten wir bei dem Viereck zwei andere veränderliche Parameter: die Grösse B und das Doppelverhältniss $\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$ der 4 Punkte ∞, e_1, e_2, e_3 , der g Axe, letzteres trat in unseren Discussionen allerdings weniger hervor; von ihr hängt bei unseren Vierecken, sozusagen, das Verhältniss von Längendimension und Querdimension ab. — Dreieck und Viereck behandeln wir übrigens unter ähnlichen Gesichtspunkten, insbesondere fragten wir nach der

Zahl der Selbstüberschlagungen der einzelnen Seiten. Offenbar entsteht die Aufgabe (mit der wir uns im kommenden Sommersemester beschäftigen wollen) ähnliche Betrachtungen für Kreisbogenpolygone mit einer beliebigen Anzahl von Seiten durchzuführen.

Aber wir gewinnen durch diesen Vergleich zugleich noch neue Fragestellungen für die Hermit-Laméschen Gleichungen selbst:

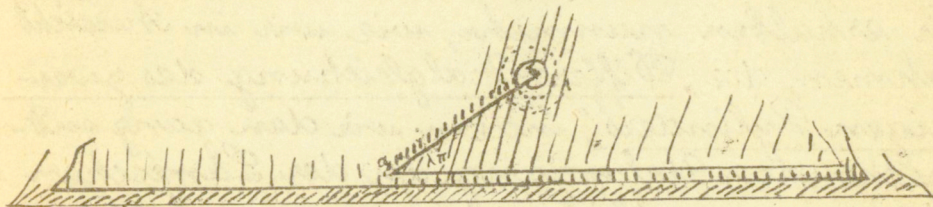
1) Wir haben im hypergeometrischen Falle die η -Figur auch für den Fall complexer λ, μ, ν betrachtet. Was wird aus unseren Kreisbogenvierecken, wenn β oder $\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$ complex werden? Eine bezügliche Untersuchung scheint mir um so interessanter, als sich dabei zeigen muß, wie sich die $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{2n+1}$ unter einander permutieren, wenn man $\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$ in seiner Ebene geschlossene Wege durchlaufen läßt. Man bestimmt die β_1, β_2, \dots bisher, wie wir wissen, als die Wurzeln von 4 algebraischen Gleichungen, deren Coefficienten rational in $\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$ sind. Durch die angedeutete Untersuchung muß sich entscheiden ob diese algebraische Gleichungen irreducibel sind oder nicht, beziehungsweise, welches ihre „Gruppe“ ist.

2) Wie überträgt sich die Theorie der *condiguæ*? Man wird solche η -Vierecke neben einander zu betrachten haben, welche von den nämlichen vier Kreislinien begrenzt sind, welche also, analytisch fortgesetzt, zu den nämlichen

Dreieck zeichnen können:



Von ihm aus werden wir zum Quotienten $\eta = \frac{I}{I_2}$ (x): $I - \lambda_2(x)$ übergehen, indem wir einfach längs der Linie bc an den Punkt b unendlich viele von der Geraden ac begrenzte Halbebene polar anhängen.



Dies gilt für die x -Achse die folgende Charakteristikverteilung: $0 \quad a \quad \infty \quad b = b \quad 0$

Natürlich ist dies nur die Figur für $\lambda < 1$. Es ist aber leicht, zu der allgemeinen Figur eines beliebigen λ aufzufinden. Sei $\lambda = \mathcal{E}(\lambda) + (\lambda)$. So werden wir einfach vorstehende Figur mit dem Winkel $(\lambda) \pi$ construiren, und an ihre Seite a b nach $\mathcal{E}(\lambda)$ Halbebenen (lateral) einfügen. Nebenbei bemerkt: diese allgemeinere Figur zieht sich erstens ∞ oft mit ihrer horizontalen Seite durch's Unendliche, zweitens, sobald $\mathcal{E}(\lambda)$ eine ungerade Zahl ist, einmal mit ihrer Seite ab , und ausserdem $\frac{\mathcal{E}(\lambda)}{2}$ oder $\frac{\mathcal{E}(\lambda)-1}{2}$ mal mit der Fläche des Dreiecks. Diese Angaben müssen mit denjenigen stimmen, welche

^{*)} Ausführlicher ist dies in der Dissertation von Oelbricht geschildert, Leipzig 1886.

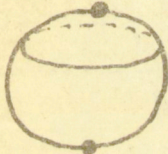
Hurwitz in Ann. 33 (1887-88) betreffs der Nullstellen der Bessel'schen Functionen gegeben hat. — Bemerken wir nur noch, dass durch die Annahme $\lambda > 1$, wie ebenfalls aus der so geschilderten Figur ersichtlich ist, die Charakteristiken der zwei zu unterscheidenden Intervalle der x -Achse in keiner Weise geändert werden.

Wir erhalten nunmehr, wie wir in Aussicht nehmen, die „Differentialgleichung des zweiasigen Cylinders“, indem wir den ganz entsprechenden Uebergang an der Laméschen Gleichung ausführen, die wir in früherer Weise schreiben wollen $\frac{d^2 \mathcal{E}}{dt^2} = (Ax + B) \mathcal{E}$, wot $t = \int \frac{dx}{\sqrt{x - e_1 \cdot x - e_2 \cdot x - e_3}}$, wobei wir aber die Gleichung $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ (welche Weierstrass bei seiner kanonischen Form voraussetzt) nicht weiter festhalten. Wir lassen jetzt e_3 und gleichzeitig A, B ins Unendliche wandern, so zwar dass $\frac{A}{e_3}, \frac{B}{e_3}$ sich endlichen Grenzen nähern. Ferner wollen wir, der Einfachheit halber, e_1 in $-1, e_2$ in $+1$ übergehen lassen. So entsteht: $\frac{d^2 \mathcal{E}}{d\varphi^2} = (ax + b) \mathcal{E}$, für $\varphi = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, oder, wenn wir die Integration bei $x = +1$ beginnen lassen: $\frac{d^2 \mathcal{E}}{d\varphi^2} = (a \cos \varphi + b) \mathcal{E}$, was die Normalform unserer neuen Differentialgleichung sein mag. Während das A der Laméschen Gleichung, um die Hermite'schen Theorie anwenden zu können, in der Gestalt $n(n+1)$ vorausgesetzt werden musste, ist hier a , vermöge des

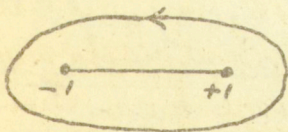
Gränzübergangs, eine kontinuierlich veränderliche Grösse, ebenso wie b .

Unsere neue Gleichung hat singuläre Punkte bei $x = \pm 1$ und bei $x = \infty$; bei $x = \pm 1$ hat sie als Exponenten je $\frac{1}{2}$ und 0 , bei ∞ hat sie eine wesentliche Singularität. S. 7. März 91.

Wir führen jetzt, zwecks näherer Untersuchung der durch dieselben definirten E , die zweiblättrige Riemann'sche Fläche $\sqrt{1-x^2}$ ein. Auf derselben haben die Punkte ± 1 ihren singulären Charakter verloren, dafür haben wir jetzt bei $x = \infty$ zwei singuläre Stellen. Unsere Fläche hat das Geschlecht $p=0$; wir können uns also ein schematisches Bild derselben machen, indem wir eine Kugel zeichnen und auf ihr zwei Punkte markieren:



Wir sehen da, dass es jetzt nur eine Art geschlossener Wege auf der Fläche gibt, auf der die E_1 , E_2 sich linear substituieren, das wird diejenigen die auf der Kugel z. B. durch einen Parallelkreis vorgest. werden in der x -Ebene aber durch einen Weg der folgenden Art:



Wir nennen die zugehörige Substitution der E_1 , $E_2 = S$:

$$S \begin{cases} E_1' = \alpha_{11} E_1 + \alpha_{12} E_2 \\ E_2' = \alpha_{21} E_1 + \alpha_{22} E_2 \end{cases}$$

Jedenfalls ist dieses S eine Substitution der Determinante 1. Wir fragen, welche Parti-

cularlösungen unserer Differentialgleichung sich dabei multiplicativ verhalten mögen. Die Gleichung für den Multiplikator ρ ist:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \rho & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} - \rho \end{vmatrix} = 0, \text{ d. h. } \rho^2 - (\alpha_{11} + \alpha_{22})\rho + 1 = 0.$$

Offenbar haben wir einen allgemeinen Fall, wo $\rho \neq 1$. Im allgemeinen Falle werden wir als kanonische Form von S diese wählen können: $S: E_1' = \rho E_1, E_2' = \frac{1}{\rho} E_2$, im speciellen Falle aber die andere: $S: E_1' = \pm E_1, E_2' = \pm E_2$. Hier ist, wie wir vorweg angeben wollen, der allgemeine Fall eben derjenige, den Lindemann zuerst behandelt hat, der specielle Fall aber derjenige, mit dem sich vorher Heine beschäftigt hatte (indem er die Theorie der Laméschen Polynome auf die Differentialgleichung des zweiaxigen Cylinders übertrug). Wir bezeichnen darum 2) weiterhin als den „Heine'schen Ausnahmefall“.

Betrachten wir jetzt den allgemeinsten in E_1, E_2 quadratischen Ausdruck: $a E_1^2 + b E_1 E_2 + c E_2^2 = z$, so sehen wir, dass wir in beiden Fällen a, b, c gerade auf eine Weise so bestimmen können, dass der Ausdruck bei S ungeändert bleibt: bei 1) führt die Forderung auf E_1, E_2 , bei 2) auf E_1^2 .

Daher wird die lineare Differentialgleichung dritter Ordnung, die man für z aufstellen kann:

$z''' = 4(a \cos \varphi + b) z' - 2a \sin \varphi \cdot z^2$ in beiden Fällen gerade ein Integral haben: $z = F(\cos \varphi)$, welches eine eindeutige ganze (natürlich transcendente) Function

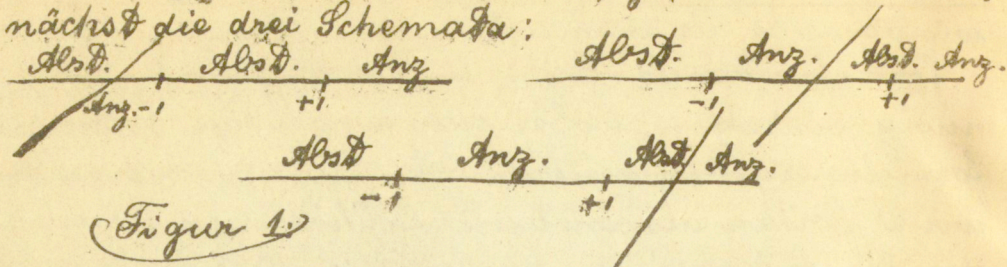
tion von $\cos \varphi$ ist. Wir bestimmen dieses F , indem wir dasselbe als unendliche nach Potenzen von $\cos \varphi$ fortschreitende Reihe in die Diff. gleich. 3. Ordnung einsetzen, wobei sich eindeutige Recursionsformeln ergeben müssen. Daraufhin betrachten wir F fortan als constant. — Ohne nun vorweg darüber entscheiden zu wollen, ob die nunmehr zu benutzenden E_1, E_2 verschieden oder identisch sein mögen, setzen wir jetzt: (1) $F = E_1, E_2$. Wir haben andererseits aus der Differentialgleichung für irgend zwei Particularlösungen: (2) $E_1 E_2' - E_2 E_1' = C$, wo C nur verschwindet, wenn E_1, E_2 identisch sind. Jetzt folgt aus (1) durch kurze Rechnung: (3) $C^2 = 4(a \cos \varphi + b) F^2 + F'^2 - 2 F F''$. Demnach also die hiermit bestimmte Constante $C \geq 0$ oder $= 0$ ist,

haben wir den allgemeinen Fall oder den Legendre'schen Ausnahmefall. Im ersteren Fall schließen wir jetzt aus (1) und (2): (4) $E_1 = \sqrt{F} \cdot e^{\int \frac{d\varphi}{F}}$, $E_2 = \sqrt{F} \cdot e^{-\int \frac{d\varphi}{F}}$, im zweiten Falle aber: (5) $E_1 = \sqrt{F}$, $E_2 = E_1 \int \frac{d\varphi}{F}$.

Dies ist die einfache analytische Theorie, welche, wie man sieht, unseren Betrachtungen betr. die Lamé'sche Gleichung Schritt für Schritt entspricht. Sehen wir jetzt zu, dass wir auch die früheren geometrischen Betrachtungen auf den jetzt vorliegenden Fall übertragen. Es wird gebührend sein, dabei nur die einzelnen Resultate anzuführen, ohne wieder auf die jeweilige Begründung einzugehen.

Indem wir $y = ax + b$ als „Hilfsgerade“ einführen und nun a als constant (im Beispiele als positiv),

b aber als variabel ansehen, zeichnen wir uns zunächst die drei Schemata:



Wir sehen aus denselben sofort: Im Intervalle $+1 - \infty$ werden die Particularlösungen unserer Differentialgleichung immer unendlich oscilliren.

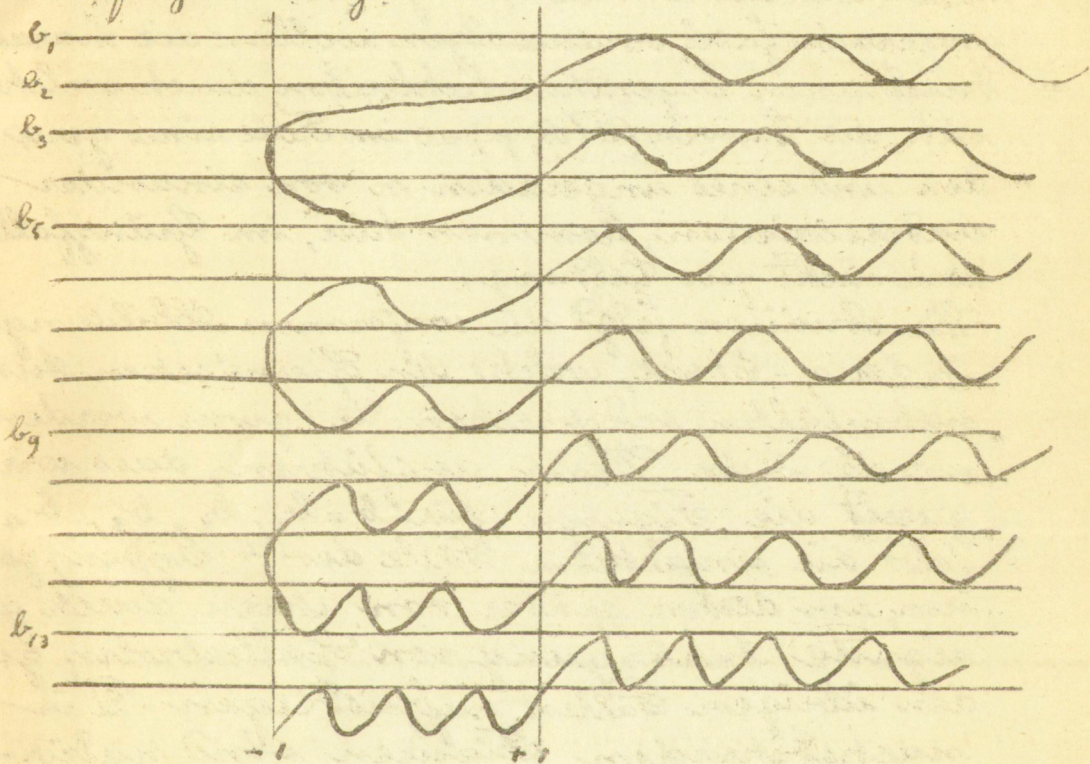
Wir betrachten jetzt specieller die Heine'schen Ausnahmefälle. In Uebereinstimmung mit Formel (5), p. 289, können wir da jedenfalls 4 Typen unterscheiden, je nachdem wir setzen:

$$\left. \begin{array}{l} \text{I. } E_1 = \varphi(x) \\ \text{II. } E_1 = \sqrt{x-1} \cdot \varphi(x) \\ \text{III. } E_1 = \sqrt{x+1} \cdot \varphi(x) \\ \text{IV. } E_1 = \sqrt{x^2-1} \cdot \varphi(x) \end{array} \right\} \text{unter } \varphi(x) \text{ jeweils eine nach} \\ \text{ganzen Potenzen von } x \text{ fortschreitende Reihe verstanden.}$$

Jeder dieser Typen wird unendlich viele Fälle enthalten, welche sich durch die Anzahl der Nullstellen unterscheiden: 0, 1, 2, 3, ..., welche E_1 zwischen -1 und $+1$ enthält. Die zugehörigen Hilfsgeraden liegen alle rechts von 1 und rücken um so mehr nach rechts, je mehr die Anzahl der Nullstellen wächst. Wir wollen die Gesamtheit der Werte b , welche zu diesen unendlich vielen Heine'schen Ausnahmefällen gehören, in absteigender Reihenfolge mit b_1, b_2, b_3, \dots bezeichnen, es gehören dann b_1, b_2, \dots zum Typus I, b_3, b_4, \dots zum

Typus II; b_3, b_2, \dots zum Typus III, b_4, b_3, \dots zum
Typus IV.

Die bezeichneten Verhältnisse werden besonders klar, wenn wir es unternehmen, geradezu den Verlauf der Curve $F(b, x) = 0$ zu zeichnen. Es gibt dies folgende Figur:

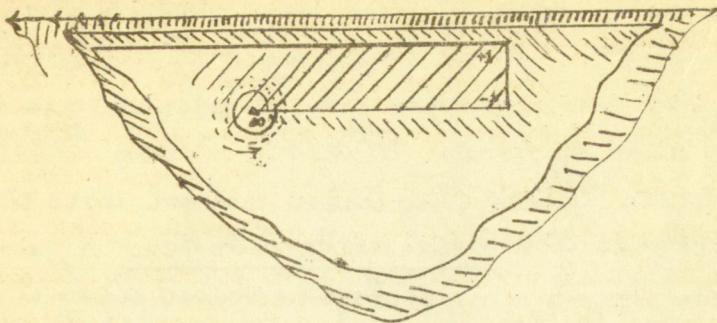
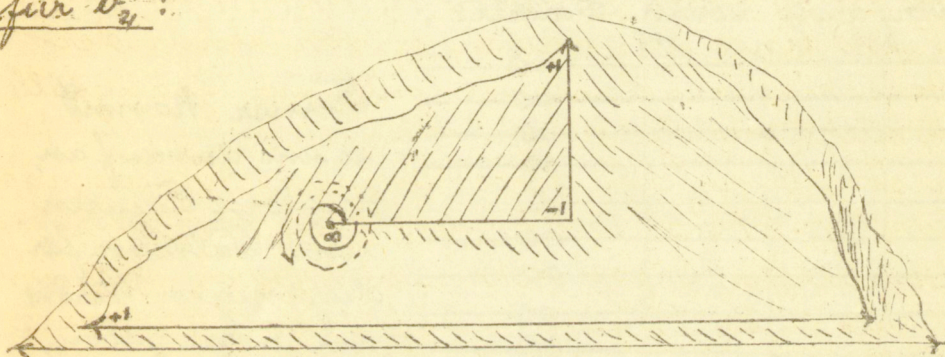
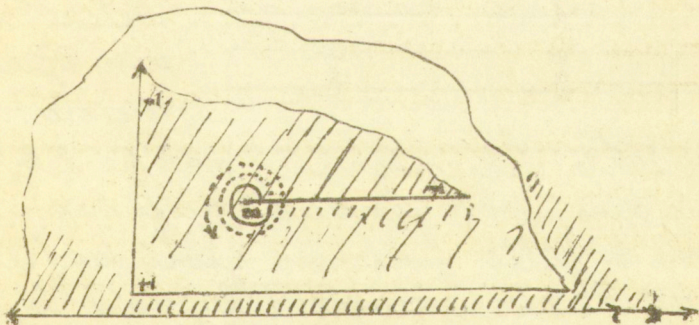
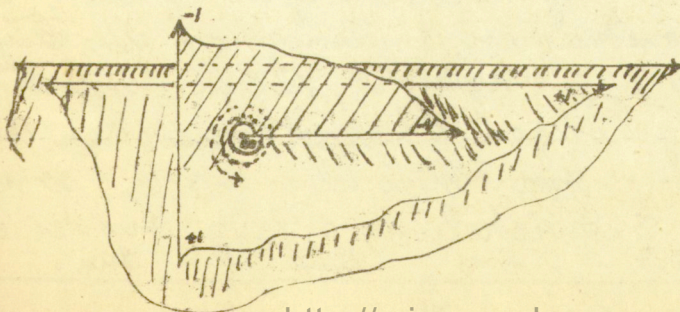


Die Curve besteht aus unendlich vielen Lücken, von denen jeder gegen den vorangehenden um $\frac{1}{4}$ Horizontallinien verschoben erscheint. Bei einer solchen Verschiebung tritt jedesmal links ein neuer Gipfel hervor, während die Oscillationen rechts immer steiler und steiler werden. Offenbar ist das von dieser Curve überdeckte

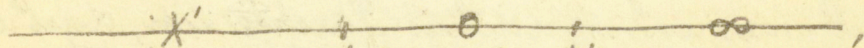
Teil der Ebene b, x als Gränzgestalt des Rechtecks anzusehen, welches im Hermite - Laméschen Falle zwischen den Horizontalen β_1 und β_{2n+1} , und den Verticalen e_1, e_2 , eingeschlossen war. Für diesen Vergleich ist es ganz einerlei, ob wir dabei das Hermite - Lamésche n als eine gerade oder als eine ungerade Zahl voraussetzen wollen: die charakteristischen Eigenthümlichkeiten, durch welche sich die Curven $(F(\beta, p) = 0$ im Falle eines geraden und eines ungeraden n von einander unterscheiden, kommen hier, im Gränzfalle, doch nicht zur Geltung.

Wir studiren jetzt die conformen Abbildungen in der η - Ebene, welche den Heine'schen Ausnahmefällen entsprechen. Und zwar werden wir das in der Weise ausführen, dass wir zuerst die Figuren für $b = b_1, b_2, b_3, b_4$ (also die einfachsten Fälle der 4 Typen) zeichnen, um dann später von ihren durch geeignete Anhängung von Halbebenen zu den übrigen Fällen aufzudeuten. Die nachstehenden Figuren sind natürlich so zu verstehen, als seien unendlich viele Blätter jedesmal übereinander gelagert und an der Stelle, die $x = \infty$ entspricht, mit einander cyclisch verzweigt.

Wir erhalten:

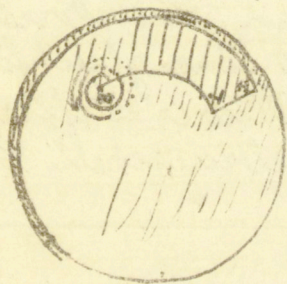
für b_1 :für b_2 :für b_3 :für b_4 :

sehen wir, dass jetzt zwischen -1 und $+1$ gewiss keine Oscillationen der E -Curven stattfinden, wohl aber solche links von -1 eintreten können. Wir haben dementsprechend als Schema der Charakteristiken:



und es ist klar, dass hier X' (wenn man nur b entsprechend wählt) jede beliebige Zahl ≥ 0 vorstellen kann. Wir bestätigen dies an der Figur der η -Ebene.

So lange $X' = 0$ hat dieselbe folgende Gestalt:



und man erkennt, dass auch hier die unbeschränkte Endwicklungsfähigkeit vorliegt, die einem beliebigen Anwachsen des X' entspricht.

So viel über die Functionen des elliptischen, resp. zweiasigen Cylinders. Man sollte glauben, wenn diese Functionen überhaupt in der Astronomie und sonst in den Anwendungen wichtig sind, dann müssten es auch die Realitätseigenschaften sein, die wir andeuten. —

Im Uebrigen aber werfen wir einen Blick auf die Aufgabe des nächsten Semesters. Wir haben in der diesmaligen Vorlesung wesentlich an historisch Gegebenes angeknüpft und sind dann nur jedesmal durch unsere geometrischen Betrachtungen ein Stück weit darüber hinaus

gegangen. Jetzt wird es darauf ankommen, die geometrischen Betrachtungen womöglich selbständig zu entwickeln und zur Grundlage einer allgemeinen Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu machen. Allerdings fürchte ich, dass wir dies im kommenden Semester nur erst in sehr bescheidenem Maasse werden ausführen können, und jedenfalls werden wir dabei an der bisherigen Beschränkung auf Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten festhalten müssen. Selbstverständlich aber muss der Zielpunct eine gleichförmige Behandlung sämtlicher Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten sein.

Berichtigungen.

- Seite 8 Zeile 7 von unten lies pag 4. statt pag. 3.
- " 13 " 13, 14, 15 von oben " - " ±
- " 18. " 7 " " " Combination oder st. Comb. der
- " 20 " 20 " " " Seite 17 statt Seite 20.
- " 25 " 9 von unten " $[\eta]_x = [\eta]_x \cdot (\frac{t}{t_x})^2 + [\xi]_x$ st. $[\eta]_x = [\eta]_x - (\frac{t}{t_x})^2 + [\xi]_x$.
- " 32 " 15 von oben " auf pag 25 statt auf pag 30.
- " 33 " 3 von unten " pag 32 " pag 38.
- " 37 " 4 " " " pag 35 " pag 41.
- " 50 " 4 von oben " Grade " Gerade
- " 53 " 15 " " " $4n, 24, 48$ " $4n, 2n, 48$.
- " 55 " 7 von unten lies pag 49 st. pag. 61.
- " 58 " 7 von oben " pag 55 " pag 69.
- " 59 " 12 " " " pag 53 " pag 67.
- " 60 " 13 von unten " $g_2 = 60 \cdot \sum \frac{1}{(m_1 + m_2)} +$ st. $g_2 = 60 \sum \frac{1}{(m_1 + m_2)^2}$
- " 63 " 6 " " " lies [pag. 61] statt [pag 77].
- " 65 " 7 " " " $\frac{1}{|\eta_2^4|}$ statt $\frac{1}{|\eta_2^k|}$.
- " 66 " 13 von oben " pag. 65 " pag 83.
- " 68 " 1 " " " " pag 66 " pag 86.
- " 69 " 9 von unten " pag 63 " pag 81.
- " 70 " 13 von oben " pag 67 " pag 88
- " 72 " 11 " " " " pag. 70 " pag 92.

- Seite 73 Zeile 12 von oben hier pag 66 statt pag 86.
- " 75 " 11 " " " pag 72 " pag 95.
- " 93 " 3 von unten " pag 87 " pag 112.
- " 95 " 12 " " " pag 85 " pag 113.
- " 116 " 13 " oben " 12, 13, 14 " 12, 13, 16.
- " 120 " 12 " unten " pag 34 ff. st. pag 40 ff.
- " 125 " 8 " oben " oder statt aber.
- " 129 " 4 " " " pag 126 " pag 167.
- " 133 " 13 " unten " pag 134/32 st. pag 179/4.
- " 137 " 5 " " " $\frac{1}{\xi(1-\xi)}$ st. $\frac{1}{\xi(1\xi)}$.
- " 137 " $\frac{3}{4}$ " " " einzutragen st. eingetragen.
- " 139 " 4 " oben " in der Nähe st. in der Höhe.
- " 140 " 10 " " " pag 139 statt pag 183.
- " 152 " 6 " " " pag 147 statt pag 193.
- " 164 " 2 " unten " pag 13 $\frac{1}{2}$ " pag 173.
- " 176 " 5 von oben " pag 169/70 statt pag 220, 221.
- " 185 " 4 " " " pag 181 " pag 234.
- " 193 " 4 " unten " pag 130 $\frac{1}{2}$ " pag 172, 173.
- " 195 " 12 " oben " $\mathcal{E}_2 = (A\beta + B) \cdot \mathcal{E}_2$ st. $\mathcal{E}_2 (A\beta + B) \mathcal{E}_2$.
- " 203 " 13 " " " pag 202 st. pag 261.
- " 206 " 2 " " " pag 204 st. " 261.
- " 216 " 8 von unten " pag 212 st. " 273.
- " 218 " 7 v. " " " pag 203 st. " 263.

II.

Functionentheoretisches Verhalten der allgemeinen Φ, Ψ, X im K_4 _____	p. 55
Verhalten der Formen $F(\eta_1, \eta_2)$ bei unimodularen Substitutionen _____	p. 58.
Von den Bildungsgesetzen der Modulfunctionen (Eisenstein, Hurwitz, Kronecker.) _____	p. 60.
Poincaré's Convergenzsatz und Reihenbildung	
Holotypische Fälle _____	p. 64.
Der einfachste merotypische Fall _____	p. 69.
Vergleich von Poincaré und Eisenstein. Verschiedene Bemerkungen _____	p. 73.
<u>Von der Bildung homomorpher Formen.</u>	
Problemstellung. Einschränkung auf einen besonders anschaulichen Fall _____	p. 76
Convergenzsatz _____	p. 78
Von dem Homomorphismus der homogenen Gruppen _____	p. 81
Vorwegnahme der einfachen Fälle. Formeller Ansatz _____	p. 85
Herstellung zugehöriger convergender Reihen _____	p. 87
Gesonderte Betrachtung der holotypischen Reihen _____	p. 88
Merotypische Reihen _____	p. 91
Die complicirteren Fälle, in denen directe homomorphe Beziehung der homogenen Gruppen unmöglich (Ereignis über Gleichungen fünften Grades) _____	p. 93.
Desideranda _____	p. 96
Geometrisches zum η mit complexen Exponenten λ, μ, ν .	
Conforme Abbildung der x Ebene durch x^α . Fall des Fundamentalbereichs _____	p. 99.
Abbildung durch $x^{\alpha+i\beta}$. _____	p. 102

III.

- Von der Kugel mit hyperbolischen Lipfeln ——— p. 107
Regel für die Zulässigkeit eines Fundamentallbereichs p. 112
Abbildung durch $\eta(\lambda + i\lambda, \mu_0 + i\mu_1, \nu_0 + i\nu_1, x)$ ——— p. 113.
Bestimmung des η aus der Abbildung ——— p. 118.

Schlussbemerkung

Von der Bedeutung der bestimmten Integrale des
Sommermeisters für den Gesamtabschluss der Theorie — p. 120.

(Weihnachtsferien.)

Zweiter Theil: Einfachste Verallgemeinerungen der hypergeometrischen Function. p. 122 = 234

Allgemeiner Ansatz.

Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten =
den Umgänge, conforme Abbildung ——— p. 122

Beziehungen zur allgemeinen Lehre von
den Laméschen Functionen ——— p. 129

Frage der Reducirbarkeit ——— p. 134

Erster Fall der Reducirbarkeit: Lineare Differentialgleichungen mit durchaus algebraischen Lösungen.

Historischer Bericht ——— p. 134

Zweiter Fall der Reducirbarkeit: Nur eine algebraische Particularlösung.

Fall der hypergeometrischen Function ——— p. 138.

Realitätstheoreme für reelle λ, μ, ν ——— p. 146

Complexer Exponenten ——— p. 153

Stellung der Laméschen Gleichung ——— p. 162

Historisches über Lamésche Polynome ——— p. 165

IV

Realitätstheoreme, Beweis von Heilbrunn's ——— p 172
 Zugehörige conforme Abbildung ——— p 177.
 Excurs über Kettenbruchentwicklung ellipti-
 scher Integrale ——— p 180.

Dritter Fall der Reducirbarkeit: der Hermi-
 te'sche Fall der Laméschen Gleichung.

Benutzung Riemann'scher Flächen statt der $x+y-$
 Ebene ——— p 186
 Besonderheiten den Falles $p = 1$ ——— p 194
 Berechnung der C_1, C_2 im Hermite'schen
 Falle ——— p. 198

Elementare Realitätstheoreme ——— p 201

Die Curve $F(x, p) = 0$ ——— p 205

Die Abbildung in der η -Ebene, insbes.
 für die Laméschen Ausnahmefälle ——— p. 208

Folgerungen hieraus: die Charakteristi-
 ken χ der verschiedenen F -Werte der x -Achse — p. 217

Vergleich der hypergeometrischen und der
 Laméschen Functionen ——— p 220

Die Functionen des zweiasigen Cylinders
 ders als Grenzfall! ——— p 224-23

Berichtigungen.

*
~~GABINET MATEMATYCZNY
 Towarzystwa Naukowego Warszawskiego~~



TOWARZYSTWO NAUKOWE WARSZAWSKIE

