Zweiter Artikel.

Über die Lösung der geometrischen Aufgaben mit dem Zirkel

von Ermenegildo Daniele in Pavia.

Daß die alten Geometer die Konstruktionen, die sich allein mit dem Lineal und dem Zirkel oder, wie man zu sagen pflegt, nach Euklidischer Methode ausführen lassen, zu einem organischen Körper zusammenfaßten, das entsprach ohne Zweifel dem von ihnen gefühlten Bedürfnisse, von der übrigen ihnen bekannten geometrischen Wissenschaft einen Teil abzutrennen, der als das einfachste Kapitel der Geometrie betrachtet werden kann, als dasjenige Kapitel, das sich wie die natürliche Einleitung zu ihr verhalten soll. Und man braucht über die Vollkommenheit der von jenen Geometern vollbrachten Arbeit in keine Erörterung einzutreten; die Widerstandskraft, die Euklids Werk (das als eine Zusammenfassung aller jener Arbeit betrachtet werden muß) der Zeit und den beständigen Fortschritten der Wissenschaft gegenüber an den Tag gelegt hat, ist der augenscheinlichste Beweis dafür.

Die von Euklid zur Ausführung der elementaren Konstruktionen angewandte Methode gründet sich auf den Gebrauch zweier einfacher Instrumente, des Lineals und des Zirkels, und er setzt voraus, daß man diese Instrumente ohne jede Einschränkung benutzen kann; er nimmt also an, daß man in irgend einem Teile der Ebene der Zeichnung eine Gerade ziehen und daß man von irgend einem Punkte als Mittelpunkt aus und mit beliebigem Radius einen Kreis beschreiben kann. Diese graphischen Voraussetzungen bilden wesentliche Teile der Euklidischen Methode, und wenn die Natur der Linien, von denen man in ihr Gebrauch macht, ihr eine sehr große Einfachheit verleiht, so erkennt doch jeder, daß man sich in ihr auch einer ziemlich großen graphischen Freiheit erfreut; es ist daher nicht unangebracht zu fragen, ob dieselben Aufgaben nicht ebenso mit beschränkteren graphischen Hilfsmitteln gelöst werden können. Diese Frage muß bejaht werden;

es seien u. a. nur die vollständig gelungenen Versuche der italienischen Geometer des sechzehnten Jahrhunderts Ferrari, Tartaglia, Benedetti angeführt, die alle in den Büchern Euklids enthaltenen Aufgaben mit dem Lineal und einem Zirkel von konstanter Öffnung lösten; ferner die von Brianchon gefundene Lösung vieler Aufgaben ohne Zirkel; die von Poncelet und Steiner eingeführte Beschränkung in der Anwendung von Kreisen auf einen einzigen Kreis in der Ebene der Zeichnung von bekanntem Mittelpunkte (vgl. Art. III); in andrer Richtung die Beschränkung im Gebrauche von Zeicheninstrumenten auf den Zirkel allein, nach Lorenzo Mascheroni, bei vollständiger Vermeidung des Lineals.

Es ist nicht meine Aufgabe, von den Untersuchungen zu reden, deren Zweck darin besteht, das Schlagen von Kreisen auf das äußerste zu beschränken, da mit diesem Thema sich ein späterer Artikel zu beschäftigen haben wird; ich werde vielmehr bei dem Gegenstande verweilen, den man „Geometrie des Zirkels“ nennen kann, indem ich zeige, wie jede mit dem Lineal und dem Zirkel lösbare Aufgabe nur mit diesem, ohne das Lineal, gelöst werden kann. Alles zu diesem Nachweise Nötige ist in dem Buche von L. Mascheroni „*Geometria del compasso*“ enthalten; dieses Buch ist chronologisch die erste und die wichtigste Studie über allein mit Kreisen ausgeführte Konstruktionen. Im Jahre 1797 zu Pavia veröffentlicht, fand Mascheronis Werk bald viel Anklang, so daß im Jahre 1798 eine französische Übersetzung davon, von A. M. Carette, erschien; diese Übersetzung wurde 1828 neu aufgelegt, während fast gleichzeitig (1825) J. P. Gruson die deutsche Übersetzung der *Geometria del compasso* veröffentlichte. Ich möchte unter den verschiedenen Auszügen und Umarbeitungen des Buches von Mascheroni noch diejenigen von J. Frischauf (Graz 1869) und E. Hutt (Halle 1880) erwähnen und außerdem zweier neuer Abhandlungen gedenken, einer von E. Dubouis (*Journal de Math.* 22 (1897)) und einer von G. Cesaro (*Mémoires de la société royale des sciences de Liège* 1899), in denen die Verfasser, ohne von den früheren Arbeiten über diesen Gegenstand Kenntnis zu haben, mit Hilfe von Konstruktionen nach Mascheronischer Art die Möglichkeit wiederfinden, in allen elementaren Konstruktionen das Lineal durch den Zirkel zu ersetzen; der Erwähnung wert als Anwendung der Mascheronischen Methode ist ferner die allein mit dem Zirkel ausgeführte Siebzehnteilung des Kreises von L. Gérard (*Math. Ann.* 48 (1897)).

Die geometrischen Prozesse, von denen in den Arbeiten Mascheronis und der andern genannten Autoren Gebrauch gemacht wird, sind durchaus elementarer Natur. Ihnen gegenüber steht eine kurze

Arbeit von A. Adler (*Zur Theorie der Mascheronischen Konstruktionen*, Wiener Berichte 99, 1890), der aus dem eigentlich elementaren Gebiet herausgehend die Frage der Geometrie des Zirkels von einem höheren Gesichtspunkte aus untersucht und dabei zu dem Beweise der Lösbarkeit der Euklidischen Aufgaben allein mit dem Zirkel kommt, wobei er sich eines einzigen Prinzips, nämlich der Transformation durch reziproke Radien, bedient.

Wie man sieht, gibt es über Konstruktionen allein mit Kreisen zwar keine große, aber immerhin doch einige Literatur; jedoch kann man, wenn man von der Adlerschen Arbeit und einigen besonderen nach Mascheronischer Methode behandelten Aufgaben (unter denen die erwähnte von L. Gérard die bemerkenswerteste ist) absieht, nicht sagen, daß die von dem Autor der *Geometria del compasso* ausgeführten Untersuchungen den Geometern zu weiteren Studien über diesen Gegenstand Anlaß gegeben hätten. Das ist zu bedauern, da Untersuchungen dieser Art nicht nur zu Resultaten führen könnten, die als wissenschaftliche Merkwürdigkeit von Interesse sind, sondern auch auf didaktischem Gebiete guten Dienst leisten können.

§ 1. Einleitende Betrachtungen. Bei einer geometrischen Aufgabe lassen sich die Elemente, um deren Bestimmung auf Grund ihrer Beziehungen zu den gegebenen Elementen es sich handelt, im wesentlichen auf Punkte zurückführen, da man in dem Falle, daß die Aufgabe das Ziehen von Geraden und Kreisen verlangt, diese mit Hilfe des Lineals und des Zirkels konstruieren kann, wenn man zwei Punkte oder das Zentrum und die Länge des Radius (diese Länge ist ihrerseits wieder durch zwei Punkte bestimmt) kennt. Gesuchte Punkte aber werden immer durch den Schnitt von Geraden und Kreisen bestimmt. Nimmt man nun an, daß man sowohl das Lineal wie den Zirkel mit voller Freiheit gebrauchen kann, so können die folgenden Aufgaben ohne weiteres als gelöst betrachtet werden:

1. Es ist der gemeinsame Punkt zweier Geraden zu finden;
2. Es sind die gemeinsamen Punkte einer Geraden und eines Kreises zu finden;
3. Es sind die gemeinsamen Punkte zweier Kreise zu finden.

Stellt man dagegen die Bedingung auf, daß das Lineal nicht benutzt werden soll (in diesem Falle wird es in der Zeichnung noch vollständig beschriebene Kreise geben können, aber eine Gerade wird nur durch zwei ihrer Punkte angegeben sein), so wird von den vorstehenden Aufgaben nur die dritte unmittelbar gelöst sein, während man für die beiden ersten geeignete Konstruktionen, die in den

Büchern des Euklid sich nicht finden, erst wird angeben müssen. Will man also nachweisen, daß man die nach Euklidischer Methode lösbaren Aufgaben auch lösen kann, wenn man nur von dem Zirkel Gebrauch macht, so wird es schließlich nur darauf ankommen, die beiden Aufgaben 1 und 2 ohne Hilfe des Lineals zu lösen, wobei, wie ich wiederhole, jede Gerade als durch zwei ihrer Punkte dargestellt zu denken ist. Das soeben ausgesprochene Prinzip, von dem man ausgehen kann, um zu unserm Nachweis zu gelangen, ist dasjenige, auf welches Mascheronis Methode sich stützt.

Im § 2 dieses Artikels setze ich diejenigen Konstruktionen auseinander, die man der Lösung der beiden soeben genannten Fundamentalaufgaben voraufschicken muß; ich gehe dabei direkt auf das Ziel los, d. h. ich lasse alle diejenigen Aufgaben beiseite, welche, wenn auch sehr interessant und denen, die näher behandelt werden, verwandt, doch in dem folgenden § 3, der der Lösung der Aufgaben 1 und 2 gewidmet ist, keine Verwendung finden. Ich habe es jedoch für zweckmäßig gehalten, für einige Aufgaben neben den Lösungen Mascheronis diejenigen kurz anzugeben, welche E. Dubouis in dem erwähnten Aufsatze gegeben oder später gefunden und mir liebenswürdigerweise in einem Briefe mitgeteilt hat. Mit diesen beiden Paragraphen würde das erste Ziel meines Artikels erreicht sein. Man setze in der Tat voraus, daß man irgend eine Aufgabe der Elementargeometrie zu lösen habe; man nehme irgend eine der bekannten, mit Hilfe des Lineals und des Zirkels erlangten Lösungen und wende sie an, so wie sie ist; da das Lineal nur zur Lösung der Aufgaben 1 und 2 zur Anwendung kommt, so wird man es immer, wenn sich Gelegenheit von ihm Gebrauch zu machen darbietet, durch Konstruktionen des § 3 ersetzen können: die gestellte Aufgabe wird auf diese Weise allein mit dem Zirkel gelöst sein.

Es versteht sich, daß die soeben angedeutete Methode das Verfahren und die Figuren kompliziert, und es ist klar, daß eine Konstruktion, in der man mehrere Male die Aufgaben 1 und 2 anzuwenden hätte, alles andere als bequem werden würde. Dies erklärt, warum Mascheroni, der seine Methode möglichst praktisch machen wollte, sich nicht darauf beschränkt hat, jene beiden Fundamentalaufgaben zu lösen, sondern auch für einige andere Aufgaben neue, nur mit dem Zirkel auszuführende Lösungen gesucht hat, die, auch im Hinblick auf Einfachheit, an die Stelle der gemeinhin bekannten, in denen auch von dem Lineal Gebrauch gemacht wird, treten könnten. Würde ich meinesteils nicht einige dieser Beispiele erwähnen, so würde das heißen, daß ich Mascheronis Werk verstümmelt, nämlich ohne einen seiner interessantesten Teile darstellen wolle, und aus diesem Grunde habe ich die beiden folgenden Paragraphen der Darlegung der von Mascheroni für einige der gewöhnlichsten und charakteristischsten elementaren Aufgaben gegebenen Lösungen gewidmet. Wohl verstanden, ich habe nur wenige der Beispiele, an denen die *Geometria del compasso* überreich ist, herausgegriffen, indem ich diejenigen beiseite ließ, deren Lösung trivial oder allzu kompliziert ist.

Mascheroni widmet das letzte Kapitel seines Buches der approximativen Lösung mehrerer Aufgaben von höherem als zweitem Grade und transzendenter Aufgaben, wie der Vervielfältigung und Teilung des Würfels, der Rektifikation, der Quadratur des Kreises, der Kubatur der Kugel, usw. Auf diesen letzten Gegenstand wollte ich nicht im speziellen eingehen, um nicht in ein Gebiet, das andern Mitarbeitern vorbehalten ist, einzudringen; ich hielt es jedoch für angebracht im § 6 zu zeigen, wie Mascheroni die Verdoppelung des Würfels und die Rektifikation des Kreises erhält, indem er von Methoden Gebrauch macht, die auf der einen Seite durch ihre leichte Anwendbarkeit empfehlenswert sind und auf der andern eine für die Praxis mehr als genügende Annäherung ergeben.

Ich will noch bemerken, daß ich, wenn es sich darum handelte, unter mehreren von Mascheroni für eine und dieselbe Aufgabe gegebenen Lösungen eine Wahl zu treffen, immer Sorge trug die einfachste zu nehmen; um aber ein einziges Kriterium für die größere oder geringere Einfachheit einer Konstruktion zu haben, bediente ich mich der von Lemoine in seiner „*Géométrographie*“ dargelegten Methode, die der wirklichen Einfachheit der Konstruktion, nicht jener scheinbaren, aus der Kürze des sprachlichen Ausdrucks hervorgehenden Rechnung trägt und, wenn sie auch nichts Vollkommenes darstellt, doch die einzige Methode ist, die das Mittel, einen Vergleich dieser Art anzustellen, darbietet.

Nachdem ich in den ersten sechs Paragraphen angegeben habe, wie Mascheroni den Fundamentalsatz der Geometrie des Zirkels beweist und wie er auf einem neuen Wege die Lösung verschiedener Aufgaben erhält, ohne von dem Lineal Gebrauch zu machen, erscheint es natürlich zu zeigen, auf welche Weise man zu demselben Satze gelangt, wenn man, nach der Adlerschen Auffassung, das Prinzip der Inversion anwendet. Die Paragraphen 7 und 8 sind im besondern der gedrängten Darlegung des Adlerschen Beweises gewidmet, der zwar nicht so elementar wie der Mascheronische ist, aber den Vorteil größerer Kürze darbietet und im übrigen dazu dient, die Konstruktionen allein mit dem Zirkel in einem neuen Lichte zu zeigen, insofern er ihren Zusammenhang mit den Methoden der projektiven Geometrie aufweist.

Adler bringt in seinem Aufsatze keine Anwendungen auf elementare Aufgaben; ich habe jedoch, um zu zeigen, daß diese Methode zu eleganten und lehrreichen Konstruktionen führen kann, im § 9, der den Artikel schließt, auf einige sehr bekannte Aufgaben hingewiesen, die durch das Prinzip der reziproken Radien neue und nach einer und derselben Methode ausgeführte Lösungen erhalten. Übrigens versteht man wohl, daß es nicht so sehr darauf ankommt, bei den einzelnen Aufgaben mit Aufmerksamkeit zu verweilen, als die allgemeinen Gedanken der Methode, nach der ihre Lösungen gebildet sind, zu erfassen; die angeführten besonderen Beispiele haben hauptsächlich den Zweck, ein recht reiches Material für die Tätigkeit der Abstraktion darzubieten, aus der der wahre Geist der Methode hervorgehen soll; ist diese Arbeit getan, dann wird keine große Schwierigkeit mehr vorhanden sein, die Anwendungen dieser Methode nach eigenem Belieben zu vermehren.

§ 2. Grundlegende Konstruktionen. 1. Durch einen Punkt A ist die Parallele zu einer Geraden BC zu ziehen.

Es ist nur das Parallelogramm $ABCD$ zu bilden, indem man den Punkt D als Schnittpunkt der beiden Kreise $A(BC)$ und $C(AB)$[1] bestimmt: die Gerade AD ist parallel zu BC.

Diese Konstruktion ist übrigens eine der gewöhnlich angewandten.

2. Es ist eine gegebene Strecke OA zu verdoppeln, zu verdreifachen usw.

Von einem der beiden Endpunkte, z. B. von O, aus als Mittelpunkt beschreibe man mit dem Radius OA einen Kreis (Fig. 17); darauf bestimme man auf diesem die Punkte B, C, D, so daß

$$AB = BC = CD = OA;$$

dann wird der Punkt D dem Punkte A diametral entgegengesetzt, und daher die Strecke AD das Doppelte von OA sein.

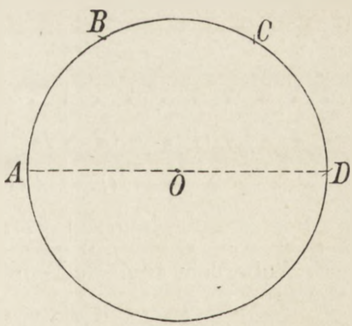

Fig. 17.

1) Ich schreibe „Kreis $A(BC)$“ für „Kreis, dessen Mittelpunkt A und dessen Radius gleich BC ist“; diese abkürzende Bezeichnung wird auch im folgenden gebraucht werden.

Wendet man diese Konstruktion wiederholt an, so kann man die Strecke OA verdreifachen, vervierfachen, . . . allgemein mit n (n eine ganze Zahl) multiplizieren.

3. Es ist der symmetrische Punkt zu einem Punkte C in bezug auf eine Gerade AB zu konstruieren.

Die beiden Kreise $A(AC)$ und $B(BC)$ schneiden sich das zweite Mal in dem verlangten Punkte.

4. Es ist ein Kreisbogen zu halbieren.

Es sei AB der gegebene Bogen, der zu einem Kreise vom Mittelpunkte O gehört (Fig. 18). Mit Hilfe der Kreise $A(OA)$, $B(OA)$ und $O(AB)$ bestimme man die Punkte C und D, so daß man die beiden Parallelogramme $ABOC$ und $ABDO$ erhält, die einander gleich sind und dieselbe Basis AB haben; nun beschreibe man von den Mittelpunkten C und D aus mit dem Radius $CB = DA$ zwei Kreise und betrachte von ihren Schnittpunkten einen, etwa E: nennt man dann F irgend einen der beiden Schnittpunkte der Kreise $C(OE)$ und $D(OE)$, so wird der Punkt F auf dem gegebenen Kreise liegen und einen der beiden Bogen AB halbieren.

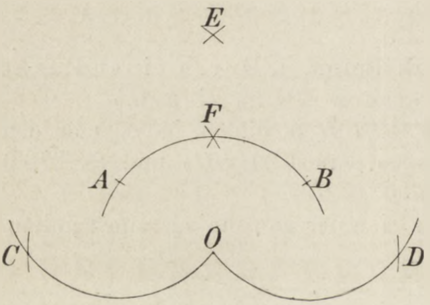

Fig. 18.

In der Tat liegen infolge der ausgeführten Konstruktionen die Punkte C, O, D in derselben Parallelen zu AB. Da außerdem in dem Parallelogramme $ABOC$ die Diagonale AO den Seiten AC und BO gleich ist, so hat man:

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2 &= \overline{CO}^2 + \overline{BO}^2 + 2\overline{CO} \cdot \text{Proj. von } \overline{OB} \text{ auf } OC \\ &= \overline{CO}^2 + \overline{AO}^2 + \overline{CO} \cdot 2\,\text{Proj. von } \overline{OB} \text{ auf } AB \\ &= \overline{AO}^2 + 2\overline{CO}^2. \qquad (1)\end{aligned}$$

Außerdem sind die Winkel EOC und DOE Rechte, und daher ist

$$\overline{CE}^2 = \overline{CB}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OE}^2,$$

und da $\overline{OE} = \overline{CF}$, so ist

$$\overline{CB}^2 = \overline{CO}^2 + \overline{CF}^2; \qquad (2)$$

aus dem Vergleiche von (1) und (2) ergibt sich $\overline{CF}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{CO}^2$. Da nun ferner der Winkel FOC offenbar ein Rechter ist, so erhält man $\overline{CF}^2 = \overline{CO}^2 + \overline{OF}^2$; aus dieser und der vorhergehenden Gleichung folgt $OA = OF$, und dies besagt, daß der Punkt F auf dem Kreise $O(OA)$ liegt. Wenn man ferner von den gleichen Winkeln FOC und DOF die ebenfalls gleichen Winkel AOC und DOB wegnimmt, so bleibt übrig

$$\sphericalangle FOA = \sphericalangle BOF.$$

Dies beweist, daß der Punkt F den Bogen AFB halbiert.

5. Es ist die vierte proportionale Strecke zu drei gegebenen Strecken m, n, p zu konstruieren.

Wir beschreiben, wenn O irgend ein Punkt der Ebene ist, die Kreise $O(m)$ und $O(n)$ (Fig. 19) und nehmen auf dem ersten zwei Punkte A und B so an, daß die Sehne AB gleich p ist; nun schneide man von A und B als Mittelpunkten aus mit demselben willkürlichen Radius den Kreis $O(n)$ in den beiden Punkten A' und B': dann wird $A'B'$ die gesuchte Strecke sein.

In der Tat sind die beiden Dreiecke OAA' und OBB', da ihre Seiten der Reihe nach gleich sind, kongruent, also ist

$$\sphericalangle AOA' = \sphericalangle BOB';$$

wenn man von diesen Winkeln den gemeinsamen Winkel BOA' fortnimmt (oder ihn ihnen hinzufügt, je nach dem Fall), so erhält man $\sphericalangle AOB = \sphericalangle A'OB'$. Daraus folgt, daß die Dreiecke AOB und $A'OB'$ einander ähnlich sind; also besteht zwischen ihren Seiten die Proportion:

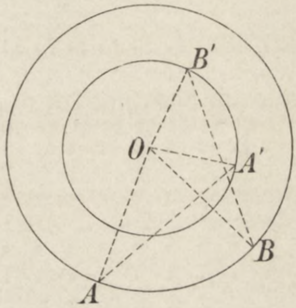

Fig. 19.

$$OA : OA' = AB : A'B',$$

und wenn man sich nun erinnert, daß

$$OA = m, \quad OA' = n, \quad AB = p$$

ist, so schließt man, daß $A'B'$ die vierte Proportionale zu m, n und p ist.

Wenn $p > 2m$ ist, so ist es unmöglich, in den ersten Kreis die Sehne $AB = p$ einzuzeichnen; gleichwohl kann man die angegebene Konstruktion noch anwenden, wenn man nämlich an Stelle der Strecken m und n die doppelten Strecken oder, wenn das nicht genügt, die dreifachen Strecken usw. nimmt; denn es ist immer, was auch k für eine Zahl ist,

$$km : kn = m : n.$$

Dieselbe Aufgabe ist von E. Dubouis in folgender Weise gelöst worden.

Um einen beliebigen Punkt O als Mittelpunkt beschreibe man einen Kreis vom Radius m (Fig. 20) und auf diesem nehme man die Punkte M, N, P so an, daß $MN = n$, $MP = p$ ist; bezeichnet man mit Q den Punkt, der zu M in bezug auf NP symmetrisch liegt, so folgt, daß $\sphericalangle MON = 2\sphericalangle MPN = \sphericalangle MPQ$ ist und also die gleichschenkligen Dreiecke NOM und QPM ähnlich sind. Daher verhält sich

$$OM : MN = PM : MQ,$$

d. h.

$$m : n = p : MQ;$$

also ist MQ die verlangte vierte Proportionale.

Um diese Konstruktion anwenden zu können, muß gleichzeitig $n < 2m$ und $p < 2m$ sein; sind diese Bedingungen nicht beide erfüllt, dann ist nur der Kreis $O(m)$ durch einen andern Kreis $O(km)$ zu ersetzen, wenn k eine ganze, passend gewählte Zahl bezeichnet. Die Strecke, die man dann als vierte Proportionale erhält, wird der k-te Teil der gesuchten sein, und zu dieser selbst wird man also gelangen, wenn man die erhaltene mit k multipliziert.

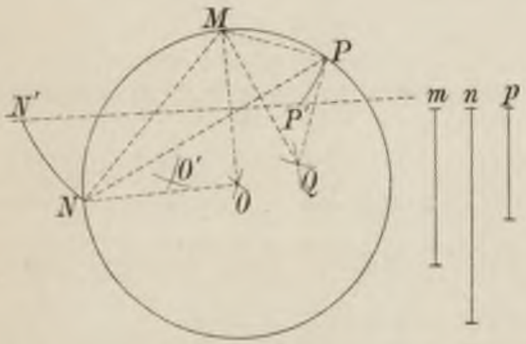

Fig. 20.

Aus der Analysis dieser Aufgabe geht ferner folgender Satz hervor: Wenn MNP ein in einen Kreis einbeschriebenes Dreieck ist und Q der zu M in bezug auf die Seite NP symmetrisch liegende Punkt, so ist die Strecke MQ die vierte Proportionale zu dem Radius des Kreises und den übrigen Seiten MN und MP.

Die Aufgabe, die vierte Proportionale zu finden, bietet in den beiden hier gegebenen Konstruktionen eines der charakteristischsten Beispiele elementarer Aufgaben dar, welche mit dem Zirkel allein zu einer Lösung führen, die einfacher ist als die bekannten, bei denen auch das Lineal benutzt wird; jedoch geht freilich diese größere Einfachheit bei der vorliegenden Aufgabe verloren, wenn nicht gewisse Bedingungen der Ungleichheit zwischen m, n und p erfüllt sind, da dann auch die zweite Aufgabe dieses Paragraphen (das k-fache einer Strecke zu finden) zu erledigen ist.

§ 3. Die Fundamentalaufgaben der Mascheronischen Methode. 1a. Es sind die gemeinsamen Punkte eines Kreises und einer nicht durch seinen Mittelpunkt gehenden Geraden zu finden.

Es sei O der Mittelpunkt des Kreises und AB die gegebene Gerade. Ich konstruiere den zu O in bezug auf die Gerade AB symmetrischen Punkt P; sind alsdann C und D die (als existierend vorausgesetzten) gemeinsamen Punkte des Kreises und der Geraden AB, so sind die Seiten des Vierecks $OCPD$ offenbar sämtlich einander gleich. Man hat daher, um C und D zu erhalten, den gegebenen Kreis nur mit dem Kreise $P(OC)$ zu schneiden.

1b. Es sind die gemeinsamen Punkte eines Kreises und einer durch seinen Mittelpunkt gehenden Geraden zu finden.

Ist A ein Punkt der Geraden, der vom Mittelpunkte O des Kreises verschieden ist, so beschreibe man von A aus als Mittelpunkt mit einem beliebigen Radius einen Kreis, der den gegebenen Kreis in zwei Punkten B und C schneiden mag; halbiert man dann die beiden durch die Punkte B und C auf dem Kreise bestimmten Bogen, so werden die Halbierungspunkte die verlangten Punkte sein.

2a. Es ist der gemeinsame Punkt zweier nicht zu einander senkrechter Geraden zu bestimmen.

Es seien AB und CD die beiden gegebenen Geraden (Fig. 21). Wir konstruieren die Punkte C'' und D', die zu C und D in bezug auf die Gerade AB symmetrisch sind, und bestimmen darauf auf CC'' den Punkt E so, daß das Viereck $C''D'DE$ ein Parallelogramm ist. Es ist klar, daß durch den gemeinsamen Punkt H von AB und CD auch die Gerade $C''D'$ hindurchgeht. Nun hat man die folgende Proportion:

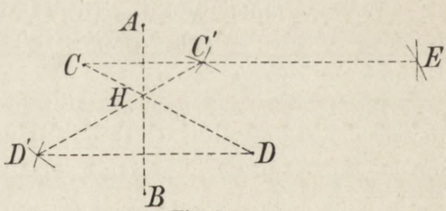

Fig. 21.

$$CE : CC'' = CD : CH$$

und in dieser sind die drei ersten Glieder Strecken von bekannter Länge. Wir können also mit Hilfe der letzten Konstruktion des vorhergehenden Paragraphen (S. 35) die Länge der Strecke CH und damit die Lage des Punktes H als eines der gemeinsamen Punkte der beiden Kreise $C(CH)$ und $C''(CH)$ bestimmen.

Die eben angegebene Konstruktion läßt sich nicht mehr anwenden, wenn die Geraden AB und CD aufeinander senkrecht stehen, wie man leicht erkennt. Um die Aufgabe auch in diesem besonderen Falle zu lösen, schicken wir die Lösung der folgenden Aufgabe voraus, die als eine Anwendung der vorhergehenden sich darstellt.

Es ist der Mittelpunkt einer Strecke AB zu finden.

Wird mit C der zu A in bezug auf B symmetrische Punkt bezeichnet, so konstruiere man die Strecke, deren Länge m die „dritte Proportionale" zu AC und AB ist (d. h. der Gleichung $AC : AB = AB : m$ genügt); dann beschreibe man den Kreis $A(m)$ und bestimme seinen zwischen A und B auf der Geraden AB liegenden Punkt: dieser wird der Mittelpunkt der Strecke AB sein. Nun können wir die Aufgabe lösen:

2b. Es ist der gemeinsame Punkt zweier aufeinander normal stehender Geraden AB und CD finden.

Man suche den Punkt C', der zu C in bezug auf die Gerade AB symmetrisch ist; der verlangte Punkt ist kein andrer als der Mittelpunkt der Strecke CC'.

In dieser Konstruktion ist von dem Punkte D kein Gebrauch gemacht worden; das ist natürlich, da die Linie CD bereits durch die Bedingungen, durch C zu gehen und auf AB senkrecht zu stehen, bestimmt ist. Man könnte die Aufgabe auch so aussprechen: Es ist der Fußpunkt der von einem Punkte auf eine Gerade gefällten Normalen zu bestimmen.

Den gemeinsamen Punkt zweier Geraden kann man auch, nach Dubouis, auf folgende Weise konstruieren.

Wir beginnen mit der Bestimmung des Mittelpunktes des Kreises, der durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte M, N', P' geht.

Bezeichnen wir den zu M in bezug auf die Gerade $N'P'$ symmetrischen Punkt mit O (Fig. 20) und mit r den Radius des Kreises durch M, N' und P', so folgt aus dem am Ende des vorhergehenden Paragraphen ausgesprochenen Satze die Proportion:

$$r : MN' = MP' : MO$$

oder

$$MO : MN' = MP' : r. \tag{A}$$

Man wird also nach der von Dubouis angegebenen Konstruktion der vierten Proportionalen die Strecke r erhalten, wenn man den Kreis $O(OM)$ beschreibt, ihn in N und P mit den Kreisen $M(MN')$ und $M(MP')$ schneidet und darauf den zu M in bezug auf die Gerade NP symmetrischen Punkt Q konstruiert: es wird $MQ = r$ sein. In der Tat haben wir $MO : MN = MP : MQ$, und da $MN = MN'$ und $MP = MP'$ ist, so folgt, wenn man mit (A) vergleicht: $MQ = r$.

Der Mittelpunkt des Kreises durch M, N' und P' wird dann einer der gemeinsamen Punkte der Kreise $M(MQ)$ und $N'(MQ)$ sein.

Man will nun den Schnittpunkt zweier Geraden AB und CD finden. Nimmt man in der Ebene einen willkürlichen Punkt M an, so konstruiere man die zu ihm in bezug auf die Geraden AB und CD symmetrisch liegenden Punkte M' und M'': der Schnittpunkt der beiden Geraden ist der Mittelpunkt des durch die Punkte M, M', M'' gehenden Kreises.

Diese Konstruktion des gemeinsamen Punktes zweier Geraden hat vor der Mascheronischen in theoretischer Hinsicht den Vorzug, daß sie auch dann, wenn die gegebenen Geraden aufeinander senkrecht stehen, Anwendung findet. Jedoch versteht es sich, daß in diesem letzten Falle die bereits auseinandergesetzte Konstruktion praktisch vorzuziehen ist, um so mehr dann, wenn man den Mittelpunkt einer Strecke nach der Methode bestimmt, die im § 4 angegeben werden wird.

§ 4. Lösung einiger Aufgaben über Strecken und Winkel. Für den Mittelpunkt einer Strecke ist bereits eine Konstruktion angegeben worden, die als Folge der vorher gelösten Aufgaben sich ergab. Diese ist jedoch nicht die kürzeste, und wenn ihr trotzdem der Vorzug gegeben worden ist, so geschah dies nur, um die grundlegenden Konstruktionen auf eine möglichst kleine Zahl zu bringen. In der Praxis wird jedoch die folgende Konstruktion vorzuziehen sein, die ganz für sich steht.

1. Neue Konstruktion des Mittelpunktes einer Strecke.

Es sei AB die gegebene Strecke (Fig. 22). Wir beschreiben von A als Zentrum aus den Halbkreis $BCDE$ und dann den Kreis $B(BE)$; auf diesem bestimmen wir die Punkte P und Q derartig, daß $EP = EQ = EC$; darauf beschreiben wir die Kreise $P(EC)$ und $Q(EC)$. Diese schneiden sich in zwei Punkten der Geraden BE; ich behaupte, daß einer von ihnen, M, der Mittelpunkt von AB ist.

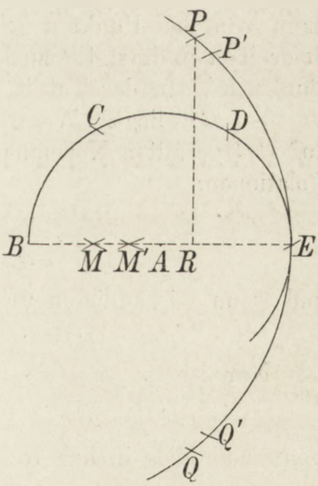

Fig. 22.

In der Tat ergibt das Dreieck BPE (das gleichschenklig ist und also bei E einen spitzen Winkel hat):

$$\overline{BP}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{PE}^2 - 2\overline{BE}\cdot \text{Proj. von } \overline{PE} \text{ auf } \overline{BE},$$

oder da $\overline{BP} = \overline{BE}$,

$$\overline{PE}^2 = \overline{BE} \cdot 2 \text{ Proj. von } \overline{PE} \text{ auf } \overline{BE}.$$

Nun ist $\overline{PM} = \overline{PE}$, also

$$2 \text{ Proj. von } \overline{PE} \text{ auf } \overline{BE} = \overline{EM},$$

daher

$$\overline{PE}^2 = \overline{BE} \cdot \overline{EM} = 2\overline{AB} \cdot \overline{EM}.$$

Nun ist aber

$$\overline{PE} = \overline{EC} = \overline{AB}\sqrt{3};$$

also wird die letzte Gleichung:

$$3\overline{AB}^2 = 2\overline{AB} \cdot \overline{EM},$$

woraus folgt

$$3\overline{AB} = 2\overline{EM},$$

und wenn man auf beiden Seiten $2\overline{AB}$ abzieht:

$$\overline{AB} = 2\overline{AM},$$

und dies sagt, daß M der Mittelpunkt von AB ist.

Wenn wir uns der soeben ausgeführten Konstruktion bedienen, so können wir weitergehen und den Mittelpunkt M' der Strecke AM und dann den Mittelpunkt M'' der Strecke AM' finden, usf. Um den Punkt M' zu erhalten, hat man nur auf dem Kreise $B(BE)$ die Punkte P' und Q' derart anzugeben, daß $EP' = EQ' = AP$ ist, und dann von den Punkten P' und Q' als Mittelpunkten aus Kreise mit demselben Radius AP zu beschreiben: diese bestimmen den gesuchten Punkt M'. In der Tat ist zunächst klar, daß der Punkt M' auf der Geraden BE liegt. Wenn wir dann mit R den Fußpunkt der von P auf BE gefällten Normalen bezeichnen, so ergeben sich die folgenden Relationen:

$$\overline{BP}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AP}^2 + 2\overline{AB} \cdot \overline{AR}$$

$$\overline{PE}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AP}^2 - 2\overline{AE} \cdot \overline{AR}$$

und wenn wir addieren und beachten, daß $AB = AE$ ist:

$$\overline{BP}^2 + \overline{PE}^2 = 2\overline{AB}^2 + 2\overline{AP}^2.$$

Nun ist

$$\overline{BP} = \overline{BE} = 2\overline{AB}, \quad \overline{PE} = \overline{CE} = \overline{AB} \cdot \sqrt{3};$$

wenn man dies in der vorhergehenden Gleichung einsetzt, so folgt:

$$7\overline{AB}^2 = 2\overline{AB}^2 + 2\overline{AP}^2$$

oder

$$\tfrac{5}{2}\overline{AB}^2 = \overline{AP}^2 = \overline{EP'}^2.$$

Ferner folgt aus den gleichschenkligen und ähnlichen Dreiecken $BP'E$ und $P'M'E$:

$$\overline{EP'}^2 = \overline{BE} \cdot \overline{M'E},$$

daher:

$$\tfrac{5}{2}\overline{AB}^2 = 2\overline{AB} \cdot \overline{M'E},$$

also

$$\tfrac{5}{4}\overline{AB} = \overline{M'E},$$

und, wenn man AB auf beiden Seiten subtrahiert:

$$\tfrac{1}{4}\overline{AB} = \overline{AM'}.$$

Also ist M' der Mittelpunkt der Strecke AM.

Den Mittelpunkt M'' von AM' würde man erhalten, wenn man auf dem Kreise $B(BE)$ die Punkte P'' und Q'' so annähme, daß $EP'' = EQ'' = AP'$ ist, und darauf die Kreise $P''(AP')$ und $Q''(AP')$ beschriebe; der Beweis wird analog dem vorhergehenden geführt.

2. Die dritte Proportionale zu zwei Strecken m und n konstruiert man nach der allgemeinen Methode, nach der man die vierte Proportionale zu drei Strecken findet (§ 2, 5); wenn jedoch $n < 2m$ ist, so kann man jene Lösung zweckmäßigerweise durch die folgende ersetzen, die wegen ihrer Eleganz sehr bemerkenswert ist.

Es seien (Fig. 23) A und B die Endpunkte einer Strecke gleich m. Man beschreibe die Kreise $A(AB)$ und $B(n)$, die sich in zwei Punkten C und D schneiden werden; wenn dann C' der zu C in bezug auf B symmetrisch liegende Punkt ist, dann wird $C'D$ die dritte Proportionale zu m und n sein.

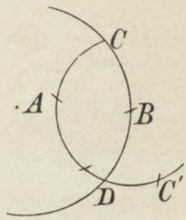

Fig. 23.

In der Tat ist der Winkel $C'DC$ ein Rechter, daher sind die Geraden AB und DC' parallel und die Winkel ABD und $C'DB$ gleich; dann sind die beiden gleichschenkligen Dreiecke ADB und BDC' ähnlich, und zwischen ihren Seiten besteht die Proportion

$$AB : BD = BD : DC',$$

d. h. DC' ist die dritte Proportionale zu m und n.

3. Die Konstruktion einer Strecke, die dem n-ten Teile einer gegebenen Strecke gleich ist, wird im allgemeinen ausgeführt, indem man eine Strecke herstellt, die dem n-fachen der gegebenen Strecke gleich ist, und dann die dritte Proportionale zu der neuen und zu der ersten Strecke sucht. Praktisch bietet sich dazu sehr gut die soeben angegebene Konstruktion der dritten Proportionale dar.

Setzen wir z. B. voraus, daß man den dritten Teil einer Strecke AB konstruieren will. Wir beginnen (Fig. 24) mit der Konstruktion der Strecke AD, des Dreifachen der Strecke AB, und konstruieren dann die Strecke $L'M$ als dritte Proportionale zu AD und AB, so wird $L'M$ dem dritten Teile von AB gleich sein. Wenn man dann den Punkt N, in welchem die Kreise $M(AB)$ und $A(L'M)$ sich schneiden, bestimmt, so wird N einer der Punkte sein, durch welche die Strecke AB in drei gleiche Teile geteilt wird.

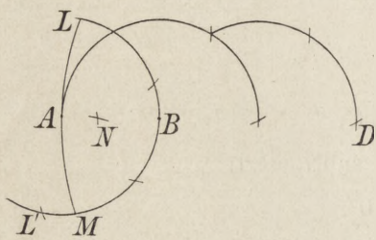

Fig. 24.

Einen Winkel können wir uns durch den Scheitel und zwei Punkte gegeben denken, von denen jeder zusammen mit dem Scheitel einen Schenkel bestimmt. Es ergeben sich alsdann die allein mit dem Zirkel auszuführenden Lösungen der fundamentalen, von Winkeln handelnden Aufgaben von selbst.

4. Es ist der Winkel BAC zu verdoppeln, zu verdreifachen usw.

anM beschreibe (Fig. 25) den Kreis $A(AC)$; dieser wird von dem Kreise $B(BC)$ in einem Punkte D geschnitten, und der Winkel DAC ist das Doppelte des gegebenen. Beschreibt man dann den Kreis $A(AB)$ und schneidet ihn in E mit dem Kreise $D(DB)$, so erhält man in dem Winkel EAC das Dreifache von BAC usw.

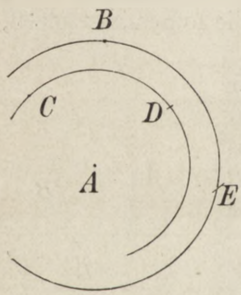

Fig. 25.

5 Es ist die Halbierungslinie des Winkels BAC zu konstruieren.

Man beschreibe den Kreis $A(AB)$ und bestimme seinen Schnittpunkt D mit dem Schenkel AC; dann beschreibe man von B und D als Zentren aus mit demselben willkürlichen Radius zwei Kreise, die sich in einem Punkte M schneiden. Es wird AM die verlangte Halbierungslinie sein.

6. An eine Gerade $A'B'$ ist im Punkte A' ein Winkel anzutragen, der einem gegebenen Winkel BAC gleich ist.

Man suche die vierte Proportionale zu den Strecken AB, $A'B'$, AC und beschreibe mit dieser Strecke als Radius von A' aus einen Kreis; und von B' aus und mit einem Radius, der der vierten Proportionale zu AB, $A'B'$, BC gleich ist, beschreibe man einen zweiten Kreis. Diese beiden Kreise werden sich in zwei Punkten schneiden, die in bezug auf $A'B'$ auf entgegengesetzter Seite liegen: nennt man C'' einen davon, so wird der Winkel $B'A'C''$ dem gegebenen Winkel BAC gleich sein.

7. Es ist eine Strecke nach dem goldenen Schnitt zu teilen.

Es sei OA die gegebene Strecke (Fig. 26), und man will auf OA den Punkt Y so bestimmen, daß $\overline{OY}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{AY}$ ist. Man schlage den Kreis $O(OA)$ und bestimme auf ihm die Punkte B, C, D, E so, daß $AB = BC = CD = DE = OA$ ist; man bestimme ferner den Punkt X als Schnittpunkt der Kreise $A(AC)$ und $D(AC)$ und den Punkt Y als Schnittpunkt von $C(OX)$ und $E(OX)$. Der Punkt Y liegt dann offenbar auf der Geraden OA. Wollen wir beweisen, daß OY der größere Abschnitt der nach dem goldenen Schnitt geteilten Strecke OA ist, so beginnen wir mit der Bemerkung, daß in dem rechtwinkligen Dreiecke AOX, wenn man der Einfachheit wegen $OA = 1$ setzt, $AX = \sqrt{3}$, also $OX = \sqrt{2}$ ist.

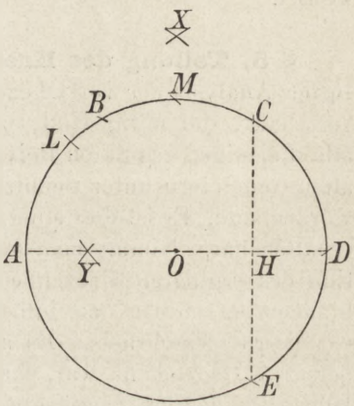

Fig. 26.

Denkt man nun die Geraden AOD, CY und CE und nennt H den Schnittpunkt von CE und AD, so ist:

$$CY = OX = \sqrt{2}, \quad CH = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

daher in dem rechtwinkligen Dreiecke CHY:

$$HY = \frac{\sqrt{5}}{2};$$

also ist

$$OY = HY - OH = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

d. h. OY ist der größere Abschnitt des nach dem goldenen Schnitt geteilten Radius.

Anmerkung. Aus derselben Figur 26 geht auch hervor:

$$DY = DO + OY = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$DY \cdot OY = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1,$$

daher

$$\overline{DY} \cdot \overline{OY} = \overline{OD}^2,$$

d. h. OD ist der größere Abschnitt der nach dem goldenen Schnitte geteilten Strecke DY. Also dient dieselbe Konstruktion auch zur Lösung der Aufgabe:

8. Es ist eine Strecke zu konstruieren, deren größeren Abschnitt bei der Teilung nach dem goldenen Schnitt man kennt.

§ 5. Teilung des Kreises in 3, 4, 5, 6, 8, 10 gleiche Teile. In der Analysis der vorstehenden Aufgabe haben wir uns alle Elemente verschafft, die nötig sind, um allein mit dem Zirkel in einen Kreis alle diejenigen regulären Polygone einzubeschreiben, die schon von den alten Geometern unter Benutzung auch noch des Lineals einbeschrieben worden sind. Es ist dies eines der schönsten Resultate, die Mascheroni erhalten hat. Nimmt man noch die von Gérard gefundene Konstruktion des regulären Siebzehnecks (auf die wir im Anfange des Artikels hindeuteten) hinzu, so bildet es eines der elegantesten Kapitel der Geometrie des Zirkels. Es sei bemerkt, daß gerade die Kreisteilung der erste Gegenstand war, den Mascheroni in Angriff nahm, und der Umstand, daß er damit gut vorwärts kam, gab ihm den Mut, die Theorie der Konstruktionen mit dem Zirkel allein in allgemeiner Weise aufzustellen.

a) Die Konstruktion des regulären Sechsecks und daher auch des regulären Dreiecks wurde in der vorstehenden Aufgabe durch Konstruktion der Punkte A, B, C, D, E (Fig. 26) erhalten.

b) Schneidet man den Kreis $O(OA)$ mit dem Kreise $A(OX)$ in dem Punkte M, so ist AM die Seite des einbeschriebenen Quadrates, da $AM = OX$ und $OX = \sqrt{2}$ gefunden worden ist.

c) Die Seite des Achtecks erhält man, wenn man den Bogen AM halbiert; zu diesem Ende braucht man jedoch nicht von der im § 2 angegebenen Konstruktion Gebrauch zu machen. Wenn man nämlich den Kreis $O(OA)$ mit dem Kreise $X(OA)$ im Punkte L schneidet, so ist in dem Dreieck OLX:

$$OL = LX = 1, \quad OX = \sqrt{2}.$$

Also ist der Winkel OLX ein Rechter und der Winkel XOL ein halber Rechter, und daraus folgt, daß L der Mittelpunkt des Bogens AM und die Strecke AL die Seite des einbeschriebenen regulären Achtecks ist.

d) Die Seite des regulären Zehnecks ist gleich OY, weil OY der größere Abschnitt des nach dem goldenen Schnitt geteilten Radius ist. Man erhält auch auf diese Weise die Kreisteilung in fünf gleiche Teile; die Seite des regulären Fünfecks würde nichts anderes als MY sein, weil dies die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks MOY ist, dessen Katheten der Radius und dessen größerer Abschnitt beim goldenen Schnitt sind.

In bezug auf die Eleganz der Konstruktionen sei bemerkt, daß zur Bestimmung der Seitenlänge aller dieser dem Einheitskreise einzubeschreibenden regulären Polygone nur drei Zirkelöffnungen, gleich $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, nötig sind.

§ 6. Durch Annäherung gelöste Aufgaben: Die Rektifikation des Kreises, die Verdoppelung des Würfels. Es sei O der Mittelpunkt eines Kreises (Fig. 27), auf dem die Bogen von einem Punkte A aus gerechnet werden mögen, und zwar positiv im angegebenen Sinne des Pfeiles. Es sei P irgend ein Punkt des Kreises, und wir setzen, um eine bestimmte Vorstellung zu haben, voraus, daß der Bogen AP einem der beiden ersten Quadranten angehört; wir wollen dann mit Q den zu P in bezug auf den Durchmesser OA symmetrisch liegenden Punkt bezeichnen. Ist dann der Punkt X wie auf S. 43 konstruiert worden, so folgt aus dem Dreiecke OPX:

$$\begin{aligned}\overline{PX}^2 &= \overline{OP}^2 + \overline{OX}^2 - \overline{OX} \cdot 2 \text{ Proj. von } \overline{OP} \text{ auf } OX \\ &= \overline{OA}^2 + \overline{OX}^2 - \overline{OX} \cdot \overline{PQ} \\ &= AX^2 - OX \cdot PQ.\end{aligned}$$

Setzt man nun $OA = 1$ und den Bogen $AP = \alpha$ (in Graden), so ist:

$$AX = \sqrt{3},$$
$$OX = \sqrt{2},$$
$$PQ = 2 \sin \alpha,$$

und wenn man mit b die Länge der Strecke PX bezeichnet, so schreibt sich die letzte Formel:

$$b^2 = 3 - 2\sqrt{2} \cdot \sin \alpha. \qquad (1)$$

Dies ist die Formel, die wir zur Lösung der beiden oben genannten Aufgaben benutzen werden.

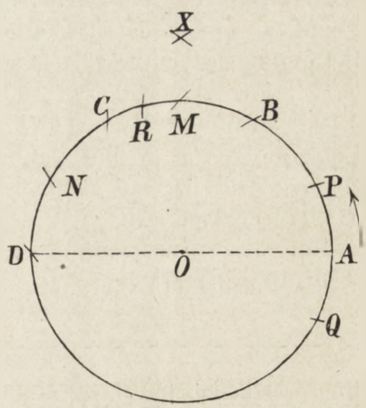

Fig. 27.

1. Annähernde Rektifikation des Kreises.

Es sei $O(OA)$ der zu rektifizierende Kreis, dann konstruiere man den Punkt X wie auf S. 43, beschreibe darauf den Kreis $B(BX)$ und nenne R seinen auf dem Bogen BCD gelegenen Schnittpunkt mit dem Kreise $O(OA)$. Der Fehler, den man begeht, wenn man die Strecke AR als Maß des vierten Teils des Kreises nimmt, beträgt ungefähr 0,0004 im positiven Sinne.

In der Tat, wenn man in der Gleichung (1) $\alpha = AB = 60^0$ setzt, so erhält man

$$b = BX = \sqrt{3 - \sqrt{6}}.$$

Zu diesem $BX = BR$ als Sehne des Kreises $O(OA)$ gehört nun der Bogen BR, der sich nach der bekannten Formel

$$\frac{\text{Sehne}}{2} = \sin\left(\frac{\text{Bogen}}{2}\right) \tag{2}$$

berechnet zu $43^0\, 33\frac{286}{2005}'$. Also ist der Bogen $AR = 103^0\, 33\frac{286}{2005}'$, und hieraus berechnet sich nach (2) wieder die Länge seiner Sehne:

$$AR = 1{,}5711996.$$

Andrerseits beträgt das Maß des vierten Teiles des Kreisumfanges 1,5707963, und diese Zahl ist um ungefähr 0,0004 kleiner als die für die Sehne AR gefundene.

2. Annähernde Verdoppelung des Würfels.

Es sei $OA = 1$ die Kante eines Würfels (Fig. 27), und es soll die Kante des Würfels, dessen Inhalt doppelt so groß als der des ersten ist, bestimmt werden. Hat man den Kreis $O(OA)$ beschrieben, den Punkt X wie in den vorhergehenden Aufgaben und den Punkt M als Eckpunkt des einbeschriebenen Quadrates, von dem ein andrer Eckpunkt A ist, konstruiert (§ 5, b), so schlage man den Kreis $M(MO)$: dieser wird den Bogen CD in einem Punkte N schneiden, dessen Entfernung von X die Kante des Würfels, der doppelt so groß als der gegebene ist, mit einem Fehler im negativen Sinne von noch nicht 0,0007 repräsentiert.

In der Tat beträgt der Bogen AN 150^0. Setzt man diesen Wert in die Formel (1) für α ein, so erhält man

$$b = NX = \sqrt{3 - \sqrt{2}} = 1{,}2592800.$$

Andrerseits ist $\sqrt[3]{2} = 1{,}2599209$, und diese Zahl übertrifft den für NX gefundenen Wert um ungefähr 0,00064.

§ 7. Die Transformationen durch reziproke Radien und die Konstruktionen allein mit dem Zirkel. Fundamentale Aufgaben. Um den Beweis, den A. Adler von dem Fundamentalsatze der Geometrie des Zirkels gibt, darzulegen, muß die allein mit dem Zirkel ausgeführte Lösung einiger Aufgaben vorausgeschickt werden, und diese wollen wir jetzt angeben. Von den bereits von Mascheroni gelösten Aufgaben bedarf es hier nur der zweiten und der dritten des § 2; dann können wir zu den folgenden übergehen:

Es sei in einer Ebene ein Kreis k um O vom Radius r gegeben; man soll allein mit dem Zirkel zu einem Punkte M den inversen Punkt in bezug auf k konstruieren, d. h. man soll auf der Geraden OM den Punkt M' bestimmen, der definiert ist durch die Bedingung:

$$OM \cdot OM' = r^2.$$

a) Es sei zunächst $OM > \frac{r}{2}$. Der Kreis $M(MO)$ schneidet k in zwei Punkten A und B (Fig. 28), und die Kreise $A(r)$ und $B(r)$ schneiden sich auf der Geraden OM in dem verlangten Punkte M'. In der Tat, bezeichnet man mit X den gemeinsamen Punkt beider Kreise, der mit M auf derselben Seite von O liegt, so folgt aus den beiden ähnlichen Dreiecken MOA und AOX:

$$OM \cdot OX = \overline{OA}^2 = r^2.$$

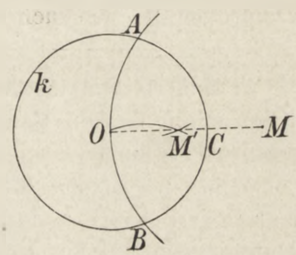

Fig. 28.

Dies besagt, daß der Punkt X mit dem Punkte M' zusammenfällt.

b) Es sei nun $OM < \frac{r}{2}$. Da der Kreis $M(MO)$ nicht mehr wie bei a) den Kreis k schneidet, so konstruiere man die Strecke $ON = n \cdot OM$, wobei n eine Zahl von genügender Größe bezeichnet, damit $ON > \frac{r}{2}$ sei; dann kann man nach der vorstehenden Konstruktion den zu N inversen Punkt N' finden, und dann wird der Punkt M' durch die Relation $OM' = n \cdot ON'$ definiert sein.

Wir können also allein mit dem Zirkel den inversen Punkt in bezug auf k zu irgend einem Punkte der Ebene konstruieren.

Anmerkung. Wenn der Punkt M von der Art ist, daß $OM = \mu r$ ist (unter μ irgend eine ganze Zahl verstanden), so folgt $OM' = \frac{r}{\mu}$. Auf diese Weise erhält man die folgende Konstruktion des n-ten Teiles einer Strecke: Ist OC die gegebene Strecke (Fig. 28), so konstruiere man auf der Geraden OC den Punkt M derart, daß $OM = \mu \cdot OC$ ist; bezeichnet man dann mit M' den zu M in bezug auf den Kreis $O(OC)$ inversen Punkt, so ist

$$OM' = \frac{1}{\mu} OC.$$

Wenn man diese Konstruktion mit der für dieselbe Aufgabe im § 4 angegebenen vergleicht, so erkennt man, daß die zuletzt auseinandergesetzte nur die etwas einfacher und symmetrischer gemachte erste ist, so daß sie in der Praxis bequemer ist. Allgemeiner gesprochen, löst die oben angegebene Konstruktion die Aufgabe: „Es ist die dritte Proportionale zu zwei gegebenen Strecken zu konstruieren", und dann bringt sie sofort die entsprechende Konstruktion des § 4 in Erinnerung, die sie an Einfachheit etwas übertrifft. Was schließlich die Teilung einer Strecke in gleiche Teile betrifft, so findet sich die gegenwärtige Konstruktion bereits in dem Buche Mascheronis für den Fall $\mu = 2$ auseinandergesetzt; jedoch deutet er das Prinzip der reziproken Radien auch nicht von fern an.

Erinnern wir uns der folgenden Eigenschaften der durch einen Kreis k um O vom Radius r hervorgebrachten Transformation durch reziproke Radien:

Eine nicht durch O gehende Gerade wird in einen durch O gehenden Kreis transformiert, dessen durch O hindurchgehender Durchmesser auf der Geraden senkrecht steht, und umgekehrt.

Ein nicht durch O gehender Kreis wird in einen Kreis transformiert, der dem ersten in einer Homothetie vom Mittelpunkte O entspricht.

Eine durch O gehende Gerade wird in sich selbst transformiert.

Es soll nun in einer Inversion in bezug auf k der Mittelpunkt des Kreises konstruiert werden, der der gegebenen, nicht durch O gehenden Geraden RS entspricht.

Es sei M (Fig. 29) der zu O in bezug auf die Gerade RS symmetrisch liegende Punkt, und M' sei der inverse Punkt zu M in bezug auf k; wenn wir dann mit H den gemeinsamen Punkt der Geraden OM und RS bezeichnen und mit H' den dazu inversen Punkt, so wird OH' ein Durchmesser des Kreises sein, der der Geraden RS entspricht, daher wird der Kreis selbst den zwischen O und H' in der Mitte gelegenen Punkt zum Mittelpunkte haben. Da aber $OM = 2 \cdot OH$ ist, so wird $OM' = \frac{1}{2} \cdot OH'$ sein. Also ist M' der Mittelpunkt der Strecke OH' und also der verlangte Mittelpunkt.

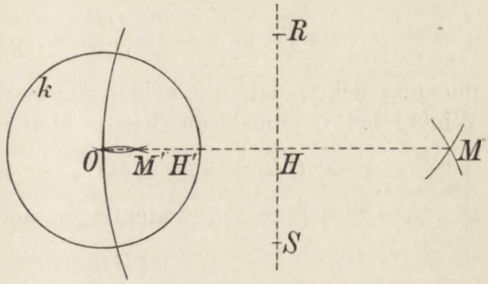

Fig. 29.

Es ist in der Inversion in bezug auf k der Mittelpunkt des Kreises γ' zu konstruieren, der dem gegebenen, nicht durch O gehenden Kreise γ entspricht.

Wenn M der inverse Punkt zu O in bezug auf γ und M' der inverse Punkt zu M in bezug auf k ist, so wird M' der verlangte Mittelpunkt sein. In der Tat, wenn wir die Kreise γ und γ' als konstruiert voraussetzen (Fig. 30), so wollen wir Ω und M' ihre Mittelpunkte nennen und den inversen Punkt M zu M' in bezug auf k konstruieren. Von O aus ziehen wir dann eine Gerade, die γ in zwei Punkten R und R_1 trifft, und mit R' wollen wir denjenigen der beiden Punkte, in denen sie γ' trifft, bezeichnen, welcher dem Punkte R in der Inversion in bezug auf k entspricht; das heißt alsdann, daß R' dem Punkte R_1 in der Homothetie vom Zentrum O entspricht, in welcher γ' dem Kreise γ entspricht.

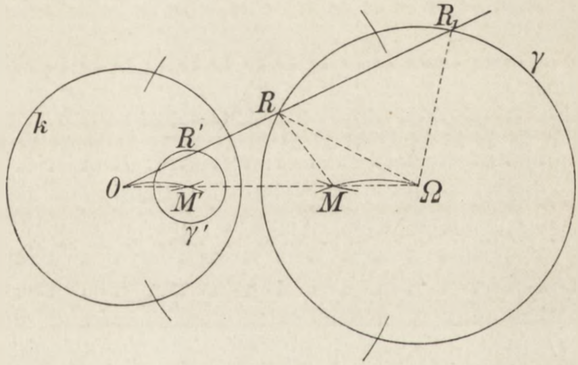

Fig. 30.

So haben wir die folgenden Relationen:

$$\frac{OR_1}{OR'} = \frac{O\Omega}{OM'} \text{ (infolge der genannten Homothetie)} \qquad (1)$$

und

$$OR \cdot OR' = OM \cdot OM' \text{ (infolge der Inversion in bezug auf } k\text{)}$$

d. h.

$$\frac{OR}{OM} = \frac{OM'}{OR'}. \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$\frac{OR}{OM} = \frac{O\Omega}{OR_1},$$

und dies zeigt, daß die beiden Dreiecke ORM und $O\Omega R_1$, die den Winkel bei O gemeinsam haben, ähnlich sind; daher ist:

$$\sphericalangle\, OR_1\Omega = \sphericalangle\, RMO, \quad \sphericalangle\, R_1\Omega O = \sphericalangle\, ORM.$$

Aus diesen beiden Gleichungen und der Gleichung

$$\sphericalangle\, \Omega RR_1 = \sphericalangle\, RR_1\Omega$$

folgen ferner diese anderen:

$$\sphericalangle\, OR\Omega = \sphericalangle\, \Omega MR, \quad \sphericalangle\, \Omega OR = \sphericalangle\, MR\Omega;$$

aber dann sind die beiden Dreiecke $OR\Omega$ und $RM\Omega$ gleichwinklig und daher ähnlich, und zwischen ihren Seiten besteht die Relation:

$$\frac{\Omega O}{\Omega R} = \frac{\Omega R}{\Omega M}$$

oder:

$$\Omega O \cdot \Omega M = \Omega R^2,$$

und dies beweist, daß die Punkte O und M in bezug auf den Kreis γ invers sind. Damit ist die Richtigkeit der für den Mittelpunkt von γ' angegebenen Konstruktion dargetan.[1])

Anmerkung. Den Kreis, der einer Geraden in der Inversion entspricht, kann man ohne weiteres beschreiben, wenn man seinen Mittelpunkt konstruiert hat, weil man außerdem weiß, daß er durch O hindurchgehen muß. Dagegen genügt die Kenntnis des Mittelpunktes im allgemeinen nicht, um den Kreis γ' zu beschreiben, der aus einem andern Kreise γ durch Inversion entsteht, sondern man muß noch die Inversion zu irgend einem Punkte von γ bestimmen; diese letzte Operation wird nur dann unnötig, wenn γ den Fundamentalkreis der Transformation schneidet, weil dessen Punkte sich selbst entsprechen.

§ 8. Mit Hilfe der Inversion geführter Beweis, daß die elementaren Aufgaben allein mit dem Zirkel lösbar sind. Es sei in der Ebene eine Aufgabe P zu lösen, in der nicht andere

1) Der von Adler für diese Konstruktion gegebene Beweis ist nicht der von uns dargelegte; er ist viel kürzer, versagt aber in allen denjenigen Fällen, in welchen man nicht von O aus an γ und γ' Tangenten ziehen kann; der unserige ist zwar weniger einfach, hat aber den Vorzug, in jedem Falle gültig zu sein.

Linien als Gerade und Kreise vorkommen, und es werde mit F die Figur bezeichnet, die entsteht, wenn man alle Punkte und alle Linien, die in der Aufgabe erscheinen, betrachtet, auch wenn sie dort nur als Hilfselemente der Konstruktion auftreten. Man beschreibe dann einen Kreis k, dessen Mittelpunkt O auf keiner dieser Linien liegt, und konstruiere die Figur F', die zu F in bezug auf k invers ist: infolge der auf Seite 48 angegebenen Eigenschaften der Inversion wird die Figur F' ausschließlich aus Kreisen bestehen, und diese wird man aus den Linien von F allein mit dem Zirkel mit Hilfe der eleganten Konstruktionen des § 7 erhalten können. Also wird die Aufgabe P, die darin besteht, daß eine gewisse Anzahl von Geraden zu ziehen und eine gewisse Anzahl von Kreisen zu schlagen ist, in eine andere Aufgabe P' umgewandelt, deren Lösung nur die Konstruktion von Kreisen erfordert. Die Punkte, die die Lösung der Aufgabe P' bilden, sind nichts anderes als die Inversionen (in bezug auf k) der Punkte, welche die Lösung der Aufgabe P ergeben; also kann man von jenen zu diesen durch die nämliche Inversion übergehen. Und da alle diese Transformationen keine anderen Instrumente als den Zirkel erfordern, so schließt man, daß jede Aufgabe, die mit dem Lineal und dem Zirkel lösbar ist, auch mit diesem allein gelöst werden kann.

§ 9. Hinweis auf die Anwendung der Inversion zur Lösung einiger elementarer Aufgaben. Über die systematische Anwendung des Prinzips der Inversion zur Lösung der elementaren Aufgaben allein mit dem Zirkel bietet sich dieselbe Bemerkung dar, die von Anfang an im Hinblick auf die Mascheronische Methode gemacht worden ist: die eine wie die andere Methode, ohne weiteres auf irgend eine Aufgabe angewandt, kompliziert im allgemeinen die graphische Lösung. Aber wie ein näheres Studium der Mascheronischen Methode uns gezeigt hat (vgl. §§ 4, 5, 6), daß sie in einigen Fragen über besondere Kunstgriffe verfügt, die ihr vor den andern bekannteren Methoden einen Vorzug verleihen, so liegt der Gedanke nahe, daß eine analoge Tatsache auch bei der Adlerschen Methode eintreten könnte. Wenn nun auch die Nützlichkeit eines vollständigen Nachweises der verschiedenen Aufgabenkategorien, auf welche die Inversion mit Vorteil angewandt wird, nicht zu bezweifeln ist, so gedenke ich doch eine solche Untersuchung hier nicht zu unternehmen, sondern ich will nur bemerken, daß man bei Anwendung der Methode auf zwei Dinge seine Aufmerksamkeit richten muß: erstens darauf, so viel als möglich die Eigenschaften der Inversion sich zu nutze zu machen, und dann darauf, den fundamentalen Transformationskreis jedesmal mit Sorgfalt zu wählen.

Um ein Beispiel beizubringen, will ich annehmen, daß folgende Aufgabe, von der eine elementare Lösung schon im § 3 gegeben worden ist, gelöst werden soll.

Es ist der Mittelpunkt des Kreises zu konstruieren, der durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte A, B, C geht.

Man wird in folgender Weise vorgehen können. Man schlägt den Kreis $k \equiv A(AB)$ und konstruiert in der durch ihn gegebenen Inversion den Punkt C' als den dem Punkte C entsprechenden Punkt: die Gerade BC' bildet dann offenbar die Transformation des gesuchten Kreises durch A, B, C in derselben Inversion. Wenn man dann zu A den symmetrischen Punkt (M') in bezug auf die Gerade BC' aufsucht und zu M' den inversen Punkt (M) in bezug auf k, so wird man in M den verlangten Mittelpunkt erhalten.

Diese Konstruktion ist, wenn man berücksichtigt, daß man nur mit dem Zirkel arbeitet, hinreichend einfach und nicht ohne Eleganz, und ihre Einfachheit wurde durch eine geeignete Wahl des Kreises k erhalten.

Es existiert aber eine ganze Klasse von Aufgaben, für welche die Methode der Inversion besonders angezeigt erscheint: das sind die Konstruktionen, die man innerhalb des Blattes der Zeichnung in bezug auf unerreichbare Elemente auszuführen hat. Es ist in der Tat klar, daß, wenn man die gegebene vorliegende Figur durch eine geeignete Inversion transformiert, man dadurch immer die außerhalb des Blattes liegenden Elemente durch andere, innerhalb der Grenzen der Zeichnung enthaltene ersetzen kann, und damit ist die vollständige Lösung einer solchen Aufgabe, wenn auch nicht direkt, gegeben.

Wir wollen an einer besonderen Aufgabe, von der schon unzählige Lösungen bekannt sind, zeigen, wie man den oben ausgesprochenen Gedanken verwirklicht. Es soll die Gerade angegeben werden, die einen Punkt P mit dem auf dem Zeichenblatte nicht erreichbaren Schnittpunkte Q zweier gegebener Geraden AB und CD verbindet. Man schlage um P als Mittelpunkt einen Kreis k und konstruiere die Kreise, die in der durch k gegebenen Inversion den beiden gegebenen Geraden entsprechen; diese beiden Kreise gehen beide durch P und schneiden sich darum in einem zweiten Punkte, der nichts andres ist, als der zu Q inverse Punkt Q'. Da die Punkte P, Q und Q' in einer Geraden liegen, so ist PQ' die verlangte Gerade.

Wenn in derselben Aufgabe an Stelle der beiden Geraden, die den Punkt Q angeben, zwei Kreise träten, so könnte man noch eine analoge Konstruktion ausführen; nur wäre der Vereinfachung wegen zu beachten, daß es in diesem Falle zweckmäßig ist, den Kreis k so zu schlagen, daß er die beiden gegebenen Kreise schneidet, und zwar auf Grund der Bemerkung, mit der der § 7 schließt.

Noch ein Beispiel: Man will einen Kreis um einen gegebenen Punkt O als Mittelpunkt beschreiben, der durch einen unerreichbaren Punkt P geht, der zwei Kreisen α und β von den Mittelpunkten A und B gemeinsam ist. Wir bemerken sogleich einen Fall, in dem die Aufgabe unmittelbar, ohne daß die Inversion zu Hilfe zu nehmen ist, eine Lösung hat: es ist dies der Fall, in dem die Punkte A und B, ferner der Punkt P_1, in dem die Kreise α und β sich, abgesehen von P, schneiden, und der Punkt O_1, der zu O in bezug auf die Gerade AB symmetrisch ist, auf das Zeichenblatt fallen. In der Tat ist dann $OP = O_1 P_1$, und daher ist $O(O_1 P_1)$ der verlangte Kreis. Man sieht überdies, daß man von einem der beiden Punkte A, B absehen kann, da, wenn man z. B. nur den Punkt B auf dem Blatte hat, irgend ein Kreis vom Mittelpunkte B den Kreis α in zwei in bezug auf die Gerade AB symmetrischen Punkten R und S schneidet und daher irgend zwei gleiche Kreise mit den Mittelpunkten R und S sich in zwei Punkten der Geraden AB schneiden; man kann daher auch, wenn der Punkt A fehlt, andere Punkte der Geraden AB finden.

Nimmt man dagegen an, daß sich auf dem Zeichenblatte zwar die Punkte A und B befinden, aber nicht O_1 (das Vorhandensein von P_1 hat jetzt kein Interesse mehr), so wird die Aufgabe leicht mit Hilfe der Inversion gelöst. In der Tat schneiden sich die Kreise α' und β', die zu α und β in bezug auf einen Kreis k um O invers sind, in zwei Punkten P' und P_1', die zu P und P_1 invers sind; dann wird der Kreis $O(OP')$ die inverse Figur des verlangten Kreises sein, und wenn man daher auf ihm einen Punkt M' annimmt und den dazu inversen Punkt M sucht (wobei man Sorge trägt, M' so zu wählen, daß M nicht außerhalb des Blattes fällt), so wird $O(OM)$ der verlangte Kreis sein.

Auch hier wird man einige Ersparnis in der Konstruktion erhalten, wenn man den Kreis k so schlägt, daß er sowohl α als β schneidet.

Ersetzt man in dieser Aufgabe die Kreise α und β durch zwei Gerade, so erhält man mit Hilfe der Inversion ebenfalls eine leichte Lösung.

bis zu ihnen zurückgelegt hat, und es bleibt ihnen ihre innigere Berührung mit der Form, in der die praktischen Aufgaben gewöhnlich auftreten. Daher wollen wir von dem, was die alten Geometer uns gelehrt haben, nichts beiseite legen und wenden uns an eine breitere und höhere wissenschaftliche Ausbildung nur, um uns die Verhältnisse jener elementaren Geometrie klar zu machen, deren bewundernswerte Einzelheiten sehr wohl dem Glanze der modernen allgemeinen Begriffe entsprechen.

Berichtigungen.

S. 42, Z. 21 v. o. statt anM lies Man
S. 98, Z. 16 v. u. statt ; lies :
S. 112, Z. 3 v. u. und S. 113, Z. 3 v. o. statt $\frac{O}{O}\frac{M}{E}$ lies $\frac{OM}{OE}$
S. 113, Z. 11 v. o. statt $\frac{X'}{O'}\frac{E'}{E'}$ lies $\frac{X'E'}{O'E'}$
S. 117, Z. 15 v. o. statt $\frac{O'}{O'}\frac{M_x}{E_x}$ lies $\frac{OM_x}{OE_x}$
S. 120, Z. 1 v. u. statt Beziehnng lies Beziehung
S. 140, Z. 3 v. o. statt im § 9 lies in den §§ 8—10
S. 181, Z. 5 v. u. statt mit der Abszisse lies von der Abszisse
S. 270, Z. 8 v. u. statt arithmetich lies arithmetisch
S. 308, Z. 14 v. o. statt algebraischen lies algebraischer
S. 319, Z. 11 v. u. statt $\gamma_{n-1}{}^{(n-1)!} + \cdots + \gamma_1{}^{1!}$ lies $\gamma_{n-1}(n-1)! + \cdots + \gamma_1 1!$