

4. — sterowanie automatyczne

**Dariusz Janecki**

**SYGNAŁY POBUDZAJĄCE**

**W**

**ADAPTACYJNYCH UKŁADACH STEROWANIA**

**PRACA HABILITACYJNA**

**13/1994**

**WARSZAWA 1994**

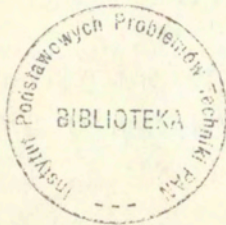
<http://rcin.org.pl>

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 28 lutego 1994 r.

(wersja I)

Praca habilitacyjna

recenzent - Doc.dr inż. Jerzy Pułaczewski



56636



---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 100 egz. Ark.wyd. 9,00 Ark.druk.11,2

Oddano do drukarni w kwietniu 1994 r.

---

Wydawnictwo Spółdzielcze sp. z o.o.

Warszawa, ul. Jasna 1

**Dariusz Janecki**

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Filia w Kielcach, Al. Tysiąclecia PP. 3, 25-314 Kielce

## Sygnały pobudzające w adaptacyjnych układach sterowania

### Streszczenie

W pracy omówiono własności wybranych adaptacyjnych układów sterowania oraz przedstawiono metody stosowane w analizie tych układów. Szczególny nacisk położony został na zagadnienia teoretyczne związane ze stabilnością, zbieżnością i odpornością układów adaptacyjnych, a zwłaszcza na znaczenie jakie dla wymienionych własności ma jednostajne pobudzenie sterowanego obiektu. Oprócz rezultatów znanych, które znalazły już sobie trwałe miejsce w teorii, przedstawione są również wyniki nowe, publikowane po raz pierwszy, dotyczące odporności układów adaptacyjnych. Jako uzupełnienie i ilustrację rozważań teoretycznych podany jest przykład zastosowania regulatorów adaptacyjnych do sterowania drganiami wirników elastycznych.

Praca składa się ze wstępu, ośmiu rozdziałów i dodatku. W rozdziale 1 przedstawione zostały główne pojęcia i metody stosowane w teorii adaptacyjnych układów sterowania oraz obecny stan wiedzy dotyczący własności układów adaptacyjnych. Rozdziały 2, 3 i 4 stanowią odrębną i zamkniętą całość i są próbą współczesnego ujęcia podstaw teorii adaptacyjnych układów sterowania. Rozdział 2 dotyczy zagadnień związanych z identyfikacją na bieżąco parametrów obiektów dynamicznych. Dokonano w nim przeglądu wybranych algorytmów identyfikacji oraz podano ich podstawowe własności. Omówiono również zagadnienie parametryzacji układów dynamicznych i zagadnienie identyfikacji z ograniczeniami. W rozdziale 3 opisano najbardziej znane rodzaje regulatorów adaptacyjnych oraz podano wyniki dotyczące stabilności adaptacyjnych układów sterowania. Rozdział 4 poświęcony jest własnościom i zastosowaniom sygnałów jednostajnie pobudzających. Zdefiniowano tu klasę jednostajnie pobudzających sygnałów skalarnych dla układów ciągłych i dyskretnych w czasie, podano warunki zbieżności wybranych algorytmów adaptacyjnych oraz przykłady

zastosowania sygnałów pobudzających do syntezy globalnie stabilnych adaptacyjnych algorytmów przesuwania biegunów. Dodatkowo omówiono zagadnienie jednostajnego pobudzenia w układach z zakłóceniami prawie okresowymi. Następne trzy rozdziały pracy poświęcone są zagadnieniom bardziej specjalistycznym. W rozdziale 5 przedstawiony został oryginalny dowód odporności adaptacyjnych układów sterowania wykorzystujący założenie o jednostajnym pobudzeniu sygnału sterującego. W rozdziale 6 omówione zostało zagadnienie identyfikacji na bieżąco przy słabym pobudzeniu obiektu. Dokonano tu klasyfikacji wybranych algorytmów identyfikacji pod kątem wpływu słabego pobudzenia obiektu na jakość identyfikacji oraz zaproponowano szereg metod poprawiających szybkość zbieżności w regulatorach adaptacyjnych. Rozdział 7 zawiera przykład zastosowania regulatorów adaptacyjnych do sterowania drganiami wirników elastycznych. W rozdziale 8 wskazano na możliwe kierunki prowadzenia dalszych badań związanych z tematyką pracy oraz na przewidywane ogólne tendencje w rozwoju adaptacyjnych układów sterowania.

# Spis treści

Wstęp	7
Cel i układ pracy	13
<b>1 Główne pojęcia i metody w teorii adaptacyjnych układów sterowania</b>	<b>16</b>
1.1 Niepewność w układach sterowania	17
1.2 Sterowanie odporne	18
1.3 Adaptacyjne układy sterowania z adaptacją parametryczną	21
Układy sterowania z modelem odniesienia	21
Regulatory z samonastrajaniem	25
Bezpośrednie i pośrednie adaptacyjne układy sterowania	26
Sterowanie adaptacyjne a sterowanie odporne	27
1.4 Nieparametryczne adaptacyjne układy sterowania	27
Układy sterowania z otwartym torem adaptacji	28
Regulatory PID z samonastrajaniem	28
Sterowanie dualne	30
Układy sterowania o zmiennej strukturze	32
Sieci neuronowe w układach sterowania	34
1.5 Własności adaptacyjnych układów sterowania	37
<b>2 Algorytmy identyfikacji na bieżąco</b>	<b>44</b>
2.1 Zagadnienie parametryzacji równań obiektu	44
2.2 Przegląd wybranych algorytmów identyfikacji na bieżąco	46
2.3 Własności algorytmów identyfikacji na bieżąco	51
2.4 Algorytmy identyfikacji z ograniczeniami	58
2.5 Algorytmy identyfikacji na bieżąco z czasem ciągłym	61
<b>3 Podstawy projektowania adaptacyjnych układów sterowania</b>	<b>63</b>
3.1 Adaptacyjny algorytm sterowania z przesuwaniami biegunów	64
3.2 Adaptacyjny algorytm regulacji z modelem odniesienia	67
3.3 Bezpośredni adaptacyjny algorytm sterowania z modelem odniesienia	69
3.4 Bezpośredni adaptacyjny algorytm sterowania z przesuwaniami biegunów	72

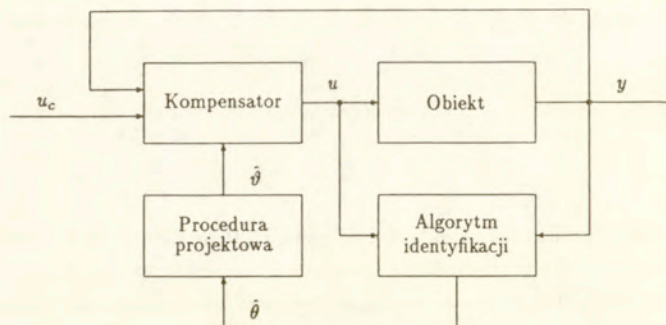
3.5	Adaptacyjny algorytm sterowania wykorzystujący operator delta . . . . .	75
<b>4</b>	<b>Własności i zastosowanie sygnałów pobudzających</b>	<b>83</b>
4.1	Własności sygnałów pobudzających—Czas dyskretny . . . . .	83
4.2	Własności sygnałów pobudzających—Czas ciągły . . . . .	87
4.3	Zbieżność adaptacyjnych algorytmów sterowania . . . . .	90
4.4	Odporność regulatorów adaptacyjnych . . . . .	93
4.5	Globalnie stabilne adaptacyjne algorytmy sterowania z przesuwaniem biegunów . . . . .	94
4.6	Jednostajne pobudzenie w układach z zakłóceniami prawie okresowymi . .	97
<b>5</b>	<b>Odporność regulatorów adaptacyjnych przy jednostajnym pobudzeniu sygnału sterującego</b>	<b>101</b>
5.1	Przykłady braku odporności regulatorów adaptacyjnych . . . . .	102
5.2	Odporność prostego regulatora adaptacyjnego dla obiektu pierwszego rzędu	107
5.3	Odporność regulatorów adaptacyjnych—Przypadek ogólny . . . . .	111
<b>6</b>	<b>Identyfikacja parametrów w warunkach słabego pobudzenia obiektu</b>	<b>126</b>
6.1	Wpływ stopnia pobudzenia obiektu na błąd identyfikacji . . . . .	127
6.2	Metody poprawy uwarunkowania algorytmów identyfikacji w regulatorach adaptacyjnych . . . . .	143
<b>7</b>	<b>Przykład zastosowania regulatorów adaptacyjnych do sterowania drganiami wirników elastycznych</b>	<b>147</b>
7.1	Zagadnienie sterowania drganiami wirników . . . . .	147
7.2	Matematyczny model wirnika . . . . .	148
7.3	Prawo sterowania dla prostego modelu wirnika . . . . .	150
7.4	Prawo sterowania dla ogólnego modelu wirnika . . . . .	158
7.5	Adaptacyjny układ sterowania drganiami wirnika . . . . .	160
7.6	Podsumowanie . . . . .	163
<b>8</b>	<b>Uwagi końcowe</b>	<b>165</b>
	<b>Dodatki</b>	<b>167</b>
A	Lemat o inwersji macierzy . . . . .	167
B	Macierz Sylwestera . . . . .	167
C	Lemat o stabilności układów liniowych . . . . .	168
	<b>Bibliografia</b>	<b>169</b>
	<b>Wykaz oznaczeń i symboli</b>	<b>178</b>

## Wstęp

Klasyczne metody projektowania układów sterowania – takie jak metody sterowania optymalnego, czy różne metody algebraiczne – wymagają znajomości modelu matematycznego obiektu i parametrów tego modelu. Jednak wyznaczenie dokładnego modelu obiektu wraz z oceną wartości jego parametrów jest często zadaniem bardzo trudnym, zwłaszcza wtedy, gdy własności obiektu zmieniają się w trakcie pracy. Zmiany te mogą być wywołane różnymi czynnikami, na przykład starzeniem się elementów, zmianą warunków zewnętrznych, zmianą punktu pracy obiektu itp. W związku z tym, stosowane w praktyce modele jedynie w przybliżeniu opisują własności obiektów. Dla podkreślenia tego faktu, modele te nazywamy *modelami z niepewnością*.

Już od pewnego czasu rozwijane są metody projektowania układów sterowania nie wymagające dokładnej znajomości modelu obiektu i uwzględniające w sposób jawny występowanie niepewności. Są dwa podstawowe podejścia do projektowania takich układów. W podejściu pierwszym najpierw na podstawie posiadanej wiedzy o obiekcie określa się dokładność posiadanego modelu. Przykładowo, jeżeli niepewność modelu wywołana jest zmianami parametrów obiektu, to dokładność modelu określa się za pomocą przewidywanego przedziału zmienności każdego z parametrów. Następnie projektuje się regulator liniowy ze stałymi parametrami tak, aby układ zamknięty pracował poprawnie dla każdego obiektu mieszczącego się w założonych granicach dokładności. Otrzymany w ten sposób regulator nosi nazwę *regulatora odpornego*. Zaletą regulatorów odpornych jest ich prostota i duża pewność działania. Wadą opisanego podejścia jest to, iż w przypadku występowania dużej niepewności modelu (np. spowodowanej dużymi zmianami parametrów obiektu w czasie pracy) liniowy i stacjonarny regulator zapewniający stabilność układu zamkniętego może w ogóle nie istnieć, a jeśli istnieje, może nie gwarantować wysokiej jakości regulacji.

Drugim alternatywnym podejściem do projektowania układów regulacji w warunkach niepewności jest *sterowanie adaptacyjne*. W podejściu tym regulator projektowany jest w taki sposób, by mógł samodzielnie modyfikować swoje własności przy zmieniających się warunkach pracy. Regulator na bieżąco analizuje odpowiedź obiektu na sygnał wejściowy i w zależności od zaobserwowanych zmian własności obiektu odpowiednio zmienia swoje parametry lub swoją strukturę. Dzięki temu, regulator może zapewnić wysoką jakość regulacji nawet przy znacznych zmianach parametrów obiektu. Największą popularność zyskały



Rys. 0.1. Schemat blokowy adaptacyjnego układu sterowania. Poszczególne symbole oznaczają:  $u_c$  – sygnał sterujący,  $u$  i  $y$  – wejście i wyjście obiektu,  $\hat{\theta}$  – bieżąca ocena parametrów obiektu,  $\hat{\vartheta}$  – parametry kompensatora.

tw. *regulatory adaptacyjne z adaptacją parametryczną*. Są to regulatory o stałej strukturze, w których wśród zmiennych stanu można wyodrębnić wektor będący oceną pewnych nieznanymi parametrów. Ogólny schemat układu sterowania z adaptacją parametryczną przedstawia rys. 0.1.

W układzie występują dwie pętle sprzężenia zwrotnego. Pętla wewnętrzna zapewnia regulację obiektu i obejmuje obiekt i regulator liniowy ze zmiennymi parametrami (zwany dalej *kompensatorem*). Pętla zewnętrzna służy do nastawiania parametrów kompensatora i składa się z algorytmu identyfikującego na bieżąco parametry obiektu oraz algorytmu przeliczającego oceny parametrów na parametry kompensatora na podstawie odpowiednio dobranej *procedury projektowej*.

Struktura układu sterowania przedstawiona na rys. 0.1 jest bardzo elastyczna. Zaprojektowanie konkretnego regulatora adaptacyjnego wymaga:

- doboru odpowiedniej dla postawionego zadania regulacji procedury projektowej,
- doboru odpowiedniego algorytmu identyfikacji na bieżąco,
- doboru odpowiedniej metody parametryzacji obiektu.

Procedura projektowa jest to metoda projektowania reglatorów dla obiektów ze znanymi parametrami. Określa ona odpowiednią strukturę kompensatora oraz definiuje funkcję przyporządkowującą parametrom obiektu parametry kompensatora. W adaptacyjnych układach sterowania najczęściej stosuje się: procedurę projektową zapewniającą dopasowanie transmitancji układu zamkniętego do transmitancji przyjętego modelu odniesienia, procedurę zapewniającą przesunięcie biegunów układu zamkniętego w zadane położenie oraz szereg procedur opracowanych na podstawie teorii sterowania optymalnego.



Parametry kompensatora wyznacza się na bieżąco na podstawie ocen wartości parametrów. Aby uzyskać zadane własności układu zamkniętego oceny parametrów powinny nadążać możliwie dokładnie za parametrami obiektu. Z tego powodu do identyfikacji obiektu stosuje się *algorytmy identyfikacji na bieżąco*. Są to algorytmy, w których uaktualnianie ocen dokonywane jest w czasie rzeczywistym na podstawie bieżących pomiarów wejścia i wyjścia obiektu. Większość algorytmów identyfikacji stosowanych w adaptacyjnych układach sterowania jest modyfikacją dobrze znanego rekurencyjnego algorytmu najmniejszej sumy kwadratów. Należy do nich na przykład algorytm z wykładniczym zapominaniem przeszłych danych, algorytm z odświeżaniem macierzy kowariancyjnej itp.

Kolejnym zagadnieniem, o którym należy zdecydować jest wybór odpowiedniej parametryzacji obiektu. Wszystkie dotychczas opracowane algorytmy identyfikacji na bieżąco wymagają, by równanie obiektu było przedstawione w postaci formy liniowej względem nieznanych parametrów. Sposób zdefiniowania wektora parametrów oraz sposób przedstawienia równania obiektu w postaci formy liniowej nazywany jest *parametryzacją obiektu*. W najprostszej metodzie parametryzacji za parametry obiektu przyjmuje się współczynniki jego transmitancji. Dla niektórych procedur projektowych istnieją również takie rodzaje parametryzacji obiektu, w których nieznanne parametry dokładnie pokrywają się z parametrami kompensatora. W takich przypadkach parametry kompensatora identyfikowane są bezpośrednio i nie jest potrzebna dodatkowa procedura przeliczania parametrów. Algorytmy adaptacyjne posiadające powyższą własność nazywane są *algorytmami bezpośrednimi*. Z kolei algorytmy, w których parametry obiektu nie pokrywają się z parametrami kompensatora nazywane są *algorytmami pośrednimi*.

Projektując regulator adaptacyjny musimy także zdecydować, czy będzie to układ ciągły, czy dyskretny w czasie. Ponieważ ze względu na swoją złożoność implementacja regulatorów adaptacyjnych dokonywana jest za pomocą układów cyfrowych (tzn. mikroprocesorów), często z góry projektujemy układ dyskretny w czasie. Wadą takiego podejścia są złe własności numeryczne algorytmu w przypadku zastosowania dużych częstotliwości próbkowania, a także możliwość pojawiania się w obiekcie dodatkowych zer, które mogą spowodować niestabilność układu. Drugie podejście polega na zaprojektowaniu układu ciągłego, a następnie zastosowaniu przybliżonej metody implementacji, w której operator różniczkowania zastąpiony zostaje odpowiednim ilorzem różnicowym, tzw. *operatorem delta*. Można również bezpośrednio projektować układ dyskretny przy użyciu operatora delta.

Metody projektowania adaptacyjnych układów sterowania opisane są szczegółowo w rozdziale 2 i 3 tej pracy.

Stabilność jest podstawowym wymaganiem stawianym układom sterowania. Analiza stabilności układów adaptacyjnych jest jednak dość trudna, głównie ze względu na nieliniowy charakter równań opisujących te układy. Z tego powodu w początkowym okresie

rozwoju teorii analizę stabilności adaptacyjnych układów sterowania przeprowadzano przy pewnych idealizujących założeniach dotyczących obiektu. Do założeń tych należą: założenie o braku zakłóceń wpływających na obiekt, założenia o liniowości i stacjonarności obiektu oraz założenie o skończonym rzędzie obiektu. Przypadek, w którym wszystkie wymienione założenia są spełnione nazywamy *przypadkiem idealnym*. Pierwsze rezultaty dotyczące stabilności układów adaptacyjnych w przypadku idealnym otrzymane zostały pod koniec lat siedemdziesiątych i obecnie zagadnienie to jest dobrze poznane. Okazuje się, że własności układów adaptacyjnych istotnie zależą od zastosowanej procedury projektowej. Najciekawsze rezultaty otrzymano dla układów zaprojektowanych na podstawie procedury zapewniającej dopasowanie do modelu odniesienia. Pokazano, że układy te są globalnie stabilne i że zapewniają one zanikanie do zera błędu pomiędzy wyjściem obiektu i wyjściem modelu odniesienia. Własności te zachodzą niezależnie od tego, czy oceny parametrów są zbieżne do parametrów obiektu, co stanowi istotną zaletę tego typu układów. Przy analizie stabilności układów opartych na innych procedurach projektowych, na przykład na procedurze zapewniającej przesunięcie biegunów w zadane położenie, natrafiono na trudności spowodowane tym, że dla pewnych wartości ocen parametrów nie istnieje kompensator zapewniający spełnienie celów sterowania. W tych przypadkach stabilność układu można zapewnić stosując pewne szczególne modyfikacje algorytmu adaptacji. Zastosowanie niektórych procedur prowadzi z kolei do układów, które nie są globalnie stabilne, a jedynie lokalnie stabilne. Szereg rezultatów dotyczących stabilności adaptacyjnych układów sterowania w przypadku idealnym zawiera rozdział 3.

Inne ważne zagadnienie związane z adaptacyjnymi układami sterowania dotyczy zbieżności ocen parametrów do parametrów obiektu. Zbieżność ocen jest szczególnie ważna w przypadku, gdy parametry obiektu są zmienne, gdyż wtedy zapewnia ona nadążanie ocen parametrów za parametrami obiektu. Ponadto, zbieżność ocen gwarantuje stabilność układu sterowania, co ma duże znaczenie w przypadku zastosowania procedur projektowych, przy których stabilność układu nie jest zapewniona automatycznie. Zbieżność ocen parametrów jest potrzebna także wtedy, gdy celem algorytmu adaptacyjnego jest dobranie parametrów kompensatora, który potem będzie pracował samodzielnie. Jest zrozumiałe, że zapewnienie zbieżności ocen do parametrów obiektu wymaga spełnienia pewnych warunków. Przykładowo, jeżeli wejście i wyjście obiektu są zerowe, to pomiar nie daje żadnej informacji o obiekcie i w takim przypadku niemożliwe jest zidentyfikowanie parametrów obiektu. Aby identyfikacja nieznanymi parametrami była możliwa, obiekt musi być odpowiednio pobudzany. Sposób pobudzenia zależy od liczby identyfikowanych parametrów. Sygnał wejściowy obiektu umożliwiający identyfikację  $m$  nieznanymi parametrami nazywamy *sygnałem pobudzającym rzędu  $m$* . Przykładem sygnału pobudzającego rzędu  $2n$  jest sygnał będący sumą  $n$  sygnałów sinusoidalnych o różnych częstotliwościach. Warunki zbieżności można również wyrazić w kategoriach sygnału sterującego. Przy pewnych

dotychczasowych założeniach pokazuje się, że oceny parametrów zbiegają wykładniczo do parametrów obiektu, jeżeli sygnał ten jest sygnałem jednostajnie pobudzającym o rzędzie nie mniejszym niż wymiar wektora parametrów. Wyczerpujące omówienie zagadnień zbieżności algorytmów adaptacji zawiera rozdział 4.

Adaptacyjne układy sterowania z modelem odniesienia (tzn. zaprojektowane na podstawie procedury zapewniającej dopasowanie do modelu odniesienia) są najbardziej popularnym rodzajem układów adaptacyjnych. Przypomnijmy, że układy te są globalnie stabilne i zapewniają nadążanie wyjścia obiektu za wyjściem modelu odniesienia niezależnie od tego, czy oceny dążą do parametrów obiektu. Jednak własność taka zachodzi tylko w przypadku idealnym. W przypadkach, gdy w obiekcie występują zakłócenia lub gdy parametry obiektu są zmienne, brak jednostajnego pobudzenia obiektu może wywołać w układzie tzw. *zjawisko wybuchania*. Zjawisko to polega na pojawianiu się co jakiś czas okresowej niestabilności układu wywołanej dużą wartością błędu oceny parametrów. Niestabilność układu jest chwilowa, gdyż powoduje silne pobudzenie obiektu i w konsekwencji zmniejszenie błędu identyfikacji. Z praktycznego punktu widzenia zjawisko wybuchania jest jednak niedopuszczalne.

Regulatory adaptacyjne powinny zapewniać prawidłową pracę układu sterowania także w przypadku nieidealnym. Własność taką nazywamy *odpornością układu*. Podstawową metodą zapewniającą odporność układów adaptacyjnych jest zastosowanie jednostajnie pobudzających sygnałów sterujących. Pobudzanie obiektu gwarantuje utrzymywanie ocen w pobliżu nieznanymi parametrów, co zapewnia prawidłową pracę układu również w przypadku nieidealnym. Pomimo, że powyższe uzasadnienie jest przekonujące, ścisła analiza odporności uwzględniająca również procesy przejściowe w układzie sterowania jest trudna i jak dotąd istnieje niewiele wyników teoretycznych dotyczących tego zagadnienia. Jednym z nich jest dowód odporności układów adaptacyjnych z modelem odniesienia dla szerokiej klasy obiektów przedstawiony w rozdziale 5.

Wadą stosowania jednostajnego pobudzenia obiektu jest fakt, iż często zadana trajektoria nie jest sygnałem pobudzającym. Z tego właśnie powodu podejmowane są liczne próby zagwarantowania odporności jedynie poprzez modyfikację algorytmów adaptacji. Autor jednak uważa, że stosowanie sygnałów pobudzających jest niezbędne i przyszłe badania powinny iść w kierunku poszukiwania takich metod, które pozwolą zmniejszyć wymaganą intensywność pobudzenia obiektu. Zagadnieniom tym poświęcony jest w całości rozdział 6 tej pracy.

Pomimo, że pierwsze prace badawcze dotyczące adaptacyjnych układów sterowania prowadzone były już w schyłku lat pięćdziesiątych, to przez długi czas zainteresowanie układami adaptacyjnymi było niewielkie. Przyczyną tego były trudności techniczne związane z realizacją takich układów. Sytuacja ta uległa zmianie wraz z rozwojem techniki cyfrowej. Szczególną rolę odegrało tu zaprojektowanie mikroprocesora, który umożliwił implemen-

tację złożonych algorytmów sterowania. W ostatnich latach zanotowano wiele pomyslnych zastosowań regulatorów adaptacyjnych do sterowania różnymi procesami technologicznymi, w tym w przemyśle chemicznym [119], przemyśle metalurgicznym [25], przemyśle cementowym [77], przemyśle papierniczym [18]. Szczególnie obiecujące są zastosowania regulatorów adaptacyjnych do sterowania robotami przemysłowymi [21, 121]. Na rynku dostępne są także gotowe pakiety oprogramowania wspomagające proces projektowania adaptacyjnych układów sterowania. Obszerne omówienie różnych praktycznych zastosowań adaptacyjnych układów sterowania wraz z bogatym wykazem literatury można znaleźć w pracach zbiorowych [14, 49, 109, 114] oraz w pracy przeglądowej [9]. Przykład zastosowania regulatorów adaptacyjnych zawarty jest także w rozdziale 7 tej pracy.

## Cel i układ pracy

Celem tej pracy jest omówienie własności wybranych adaptacyjnych układów sterowania oraz przedstawienie metod stosowanych w analizie tych układów. Szczególny nacisk położony został na zagadnienia teoretyczne związane ze stabilnością, zbieżnością i odpornością układów adaptacyjnych, a zwłaszcza na znaczenie jakie dla wymienionych własności ma jednostajne pobudzenie sterowanego obiektu. Oprócz rezultatów znanych, które znalazły już sobie trwałe miejsce w teorii, przedstawione są również wyniki nowe, publikowane po raz pierwszy, dotyczące odporności układów adaptacyjnych. Jako uzupełnienie i ilustrację rozważań teoretycznych w pracy podany jest przykład zastosowania regulatorów adaptacyjnych do sterowaniu drganiami wirników elastycznych.

Praca składa się ze wstępu, części omawiającej cel i układ pracy, ośmiu rozdziałów i dodatku. W rozdziale 1 spełniającym rolę wprowadzenia przedstawione zostały główne pojęcia i metody stosowane w teorii adaptacyjnych układów sterowania oraz omówiony został obecny stan wiedzy dotyczący własności układów adaptacyjnych. Rozdziały 2, 3 i 4 stanowią pewną odrębną i zamkniętą całość i są próbą współczesnego ujęcia podstaw teorii adaptacyjnych układów sterowania. Rozdział 2 dotyczy zagadnień związanych z identyfikacją na bieżąco parametrów obiektów dynamicznych. W rozdziale tym przedstawiono przegląd wybranych algorytmów identyfikacji oraz podano ich podstawowe własności. Omówiono również zagadnienie parametryzacji układów dynamicznych i zagadnienie identyfikacji z ograniczeniami. W rozdziale 3 opisano najbardziej znane rodzaje regulatorów adaptacyjnych oraz podano wyniki dotyczące stabilności adaptacyjnych układów sterowania. Rozważone zostały bezpośredni i pośredni adaptacyjny algorytm sterowania z modelem odniesienia, bezpośredni i pośredni adaptacyjny algorytm przesuwania biegunów i bezpośredni algorytm z modelem odniesienia wykorzystujący operator delta. Rozdział 4 poświęcony jest własnościom i zastosowaniom sygnałów jednostajnie pobudzających. Zdefiniowano tu klasę jednostajnie pobudzających sygnałów skalarnych dla układów ciągłych i dyskretnych w czasie, podano warunki zbieżności wybranych algorytmów adaptacyjnych oraz przykłady zastosowania sygnałów pobudzających do syntezy globalnie stabilnych adaptacyjnych algorytmów przesuwania biegunów. Dodatkowo omówiono zagadnienie jednostajnego pobudzenia w układach z zakłóceniami prawie okresowymi. Następne trzy rozdziały pracy poświęcone są zagadnieniom bardziej specjalistycznym. W rozdziale 5 przedstawiony został

oryginalny dowód odporności adaptacyjnych układów sterowania wykorzystujący założenie o jednostajnym pobudzeniu sygnału sterującego. Ponadto, przedstawiono tu przykłady braku odporności algorytmów adaptacyjnych w przypadku, gdy sygnał sterujący nie jest sygnałem jednostajnie pobudzającym. W rozdziale 6 omówione zostało zagadnienie identyfikacji na bieżąco przy słabym pobudzeniu obiektu. Dokonano tu klasyfikacji wybranych algorytmów identyfikacji pod kątem wpływu słabego pobudzenia obiektu na jakość identyfikacji oraz zaproponowano szereg metod poprawiających szybkość zbieżności w regulatorach adaptacyjnych. Rozdział 7 zawiera przykład zastosowania regulatorów adaptacyjnych do sterowania drganiami wirników elastycznych. W rozdziale 8 wskazano na możliwe kierunki prowadzenia dalszych badań związanych z tematyką pracy oraz na przewidywane ogólne tendencje w rozwoju adaptacyjnych układów sterowania.

Wyniki przedstawione w rozdziałach 1-4 stanowią dorobek wielu badaczy. Niektóre fragmenty tej części pracy oparte są również na publikacjach autora. W szczególności, fragmenty paragrafów 2.2 i 2.3, w których zaproponowano klasę algorytmów identyfikacji na bieżąco z kierunkowym zapominaniem przeszłych danych i podano własności tych algorytmów oparte są na pracy [63]. Fragment paragrafu 3.4 dotyczący analizy stabilności bezpośredniego układu sterowania z przesuwaniem biegunów oparty jest na pracy [65]. Paragraf 3.5 zawierający dowód stabilności adaptacyjnego układu sterowania z modelem odniesienia wykorzystującego operator delta oparty jest na pracy [62]. Paragraf 4.2, w którym zdefiniowano klasę sygnałów pobudzających z czasem ciągłym i w którym podano szereg własności tych sygnałów oparty jest na pracy [60]. Paragraf 4.5 omawiający metody syntezy globalnie stabilnych adaptacyjnych układów sterowania z przesuwaniem biegunów wykorzystujące własności sygnałów pobudzających oparty jest na pracach [58, 65]. Paragraf 4.6 dotyczący własności sygnałów pobudzających w układach z zakłóceniami prawie okresowymi oparty jest na pracach [61, 64, 69]. Rozdziały 5 i 6 dotyczące zagadnień związanych z odpornością układów adaptacyjnych stanowią (za wyjątkiem paragrafu 5.1) dorobek własny autora i są publikowane po raz pierwszy. Metody aktywnego sterowania drganiami wirników elastycznych przedstawione w rozdziale 7 opracowane zostały przez autora we współpracy z dr hab. Zdzisławem Gosiewskim [48, 70].

Istnieje wiele kierunków badań w teorii adaptacyjnych układach sterowania, które w tej pracy ze względu na szczupłość miejsca zostało pominiętych. Rozważania ograniczone zostały do obiektów o jednym wejściu i jednym wyjściu, gdyż w większości omawianych w pracy problemach wymiar wejścia i wyjścia nie odgrywa istotnej roli. Nowe zagadnienia, które pojawiają się w układach adaptacyjnych dla obiektów z wieloma wejściami i wyjściami dotyczą głównie metod parametryzacji obiektu. Zagadnienia te omówione są szczegółowo w pracach [30, 31, 32, 41, 71].

W pracy rozważane są jedynie obiekty deterministyczne. Istnieje również obszerna literatura poświęcona algorytmom sterowania dla obiektów z zakłóceniami stochastycznymi.

Do najciekawszych rezultatów teoretycznych otrzymanych w tej dziedzinie należą dowody stabilności układów adaptacyjnych z modelem odniesienia otrzymane przy zastosowaniu teorii martynałów [43, 85]. Należy jednak podkreślić, iż rezultaty te zostały otrzymane przy założeniu, że wzmocnienie algorytmu identyfikacji maleje do zera, gdy czas  $t \rightarrow \infty$ . Ze względu na możliwość zmian parametrów obiektu algorytmy takie nie są w praktyce stosowane.

W niniejszej pracy pominięto również zagadnienia związanymi z implementacją algorytmów adaptacyjnych w praktyce. Interesujące wprowadzenie do tej tematyki zawierają prace [6, 14, 145].

## Rozdział 1

# Główne pojęcia i metody w teorii adaptacyjnych układów sterowania

W tym rozdziale przedstawiamy główne pojęcia i metody stosowane w teorii adaptacyjnych układów sterowania. Na wstępie omawiamy zagadnienia niepewności w układach sterowania oraz przedstawiamy krótko podstawowe idee wykorzystywane przy projektowaniu regulatorów odpornych, które są główną alternatywą dla regulatorów adaptacyjnych. Następnie omawiamy podstawy parametrycznych i nieparametrycznych adaptacyjnych układów sterowania. Na zakończenie przedstawiamy obecny stan wiedzy dotyczącej takich własności adaptacyjnych układów sterowania, jak stabilność, zbieżność i odporność tych układów.

### Notacja i terminologia

Do zapisu równań układów liniowych ciągłych w czasie stosujemy operator różniczkowania  $s$ , a do zapisu równań układów dyskretnych operator przesunięcia  $z$  ( $zu(t) = u(t+1)$ ). Przykładowo, równanie różniczkowe  $\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2y = b_1\dot{u} + b_2u$  zapisujemy w postaci  $s^2y + a_1sy + a_2y = b_1su + b_2u$  lub w postaci wielomianowej  $A(s)y = B(s)u$ , gdzie  $A(s) = s^2 + a_1s + a_2$  i  $B(s) = b_1s + b_2$ . Podobnie równanie różnicowe  $y(t+2) + a_1y(t+1) + a_2y(t) = b_1u(t+1) + b_2u(t)$  zapisujemy symbolicznie  $A(z)y = B(z)u$ . W niektórych przypadkach do opisu układów stosujemy również przekształcenie Laplace'a i przekształcenie  $\mathcal{Z}$ . Dla prostoty zmienne przekształcenia Laplace'a i przekształcenia  $\mathcal{Z}$  również oznaczamy symbolami  $s$  i  $z$ . Należy pamiętać, że jeżeli  $G_f(s)$  jest funkcją wymierną zmiennej  $s$ , a sygnały  $\xi$  i  $\zeta$  są tożsamościowo sobie równe, to w ogólności  $G_f(s)\xi \neq G_f(s)\zeta$ , gdyż sygnały  $G_f(s)\xi$  i  $G_f(s)\zeta$  zależą również od wartości początkowych w odpowiednich równaniach różniczkowych. Jeżeli jednak funkcja  $G_f$  nie ma biegunów w prawej półpłaszczyźnie  $\Re[s] \geq 0$ , to sygnał  $G_f(s)\xi - G_f(s)\zeta$  zbiega wykładniczo do zera. W takich przypadkach będziemy pisać  $G_f(s)\xi = G_f(s)\zeta$  pamiętając jednak, że równość ta zachodzi jedynie z dokładnością do sygnałów zanikających wykładniczo.

Jedną z części regulatora adaptacyjnego jest regulator liniowy z nastawianymi parametrami. Dla uniknięcia nieporozumień w dalszej części pracy termin *regulator* zarezerwujemy



dla całości regulatora adaptacyjnego, natomiast jego część liniową będziemy nazywać *kompensatorem*.

Dla dowolnego sygnału ograniczonego  $\xi : T \rightarrow R^m$ ,  $m \geq 1$ , gdzie  $T$  jest zbiorem liczb naturalnych lub zbiorem liczb rzeczywistych dodatnich wielkości

$$\sup_{t \geq 0} \|\xi(t)\|$$

będziemy nazywać *amplitudą sygnału*  $\xi$ . Przykładowo, stosować będziemy pojęcia *amplituda zakłóceń*, *amplituda sygnału sterującego*, itp.

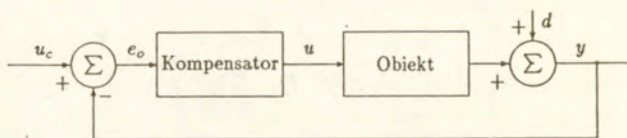
## 1.1 Niepewność w układach sterowania

Proces projektowania układów sterowania jest zwykle poprzedzony fazą modelowania, w której na podstawie wstępnej informacji o sterowanym obiekcie sformułowane zostają matematyczne równania opisujące w sposób ilościowy zachowanie się obiektu. Otrzymany model matematyczny stanowi zwykle tylko przybliżenie obiektu. Przyczyny tego są następujące.

- Informacja o obiekcie może być niekompletna. Nawet jeśli struktura obiektu jest ściśle określona za pomocą praw fizyki, to wartości liczbowe konkretnych parametrów znane są jedynie z ograniczoną dokładnością. Poza tym, w trakcie pracy układu wartości niektórych parametrów mogą się zmieniać, na przykład w wyniku starzenia się elementów.
- Niedokładność modelu może wynikać ze świadomego uproszczenia. Pomimo, że obiekt jest całkowicie znany, to w modelu celowo uwzględnia się jedynie zjawiska mające istotny wpływ na własności obiektu, a pomija zjawiska marginalne. Pozwala to uprościć strukturę kompensatora i uniknąć trudności obliczeniowych wywołanych dużą złożonością obiektu. Przykładowo, dynamika siłowników jest zwykle pomijana.
- Struktura modelu może być nieadekwatna w stosunku do struktury obiektu. Obiekt, który często jest obiektem nieliniowym może zostać przybliżony modelem liniowym, a zmiany parametrów modelu wynikające ze zmiany punktu pracy mogą zostać pominięte.

Modele, które jedynie w przybliżeniu opisują własności obiektu nazywamy *modelami z niepewnością* (ang. *model with uncertainties*). Rozróżnia się dwa rodzaje niepewności. Niepewność wynikająca z braku dokładnej znajomości wartości parametrów lub ze zmiany wartości parametrów w czasie nazywamy *niepewnością parametryczną* (ang. *parametric lub structured uncertainties*). Niepewność związaną z niedoskonałością struktury modelu, wywołaną zaniedbaniem szybkiej dynamiki czy opóźnienia występującego w obiekcie, a także powstałą w wyniku przybliżania obiektów nieliniowych modelami liniowymi nazywamy *niepewnością nieparametryczną* (ang. *nonparametric lub unstructured uncertainties*).

W celu zilustrowania dwóch wyżej wymienionych rodzajów niepewności rozważmy model o transmitancji  $G'(\theta, s)$ , gdzie  $\theta$  jest wektorem parametrów. Załóżmy, że transmitancja



Rys. 1.1. Układ ze sprzężeniem zwrotnym.

obiektu jest równa

$$G(s) = G'(\theta^*, s)(1 + L(s)).$$

Brak dokładnej wartości parametru  $\theta^*$  jest źródłem niepewności parametrycznej, natomiast pominięcie w modelu dynamiki  $L(s)$  wywołuje niepewność nieparametryczną.

## 1.2 Sterowanie odporne

Powszechnie wiadomo, że jedną z podstawowych zalet układów z ujemnym sprzężeniem zwrotnym jest mała wrażliwość układu zamkniętego na zmiany parametrów obiektu i występujące w obiekcie nieliniowości. Jednak w wielu algebraicznych metodach projektowania układów sterowania opracowanych w latach 60 i 70 związek pomiędzy założonymi celami sterowania (np. zadaniem położeniem zer i biegunów układu zamkniętego), a wrażliwością otrzymanego układu zamkniętego na niepewność modelu obiektu nie jest bezpośrednio widoczny. W metodach tych zakłada się zwykle, że model jest wystarczająco dokładny nie precyzując, co znaczy słowo *wystarczająco*. Równoległe do metod projektowania zakładających dokładną znajomość równań obiektu rozwijane więc były metody, w których w sposób jawny uwzględniana jest niepewność modelu. W tym paragrafie omówimy podstawowe idee wykorzystywane przy projektowaniu tzw. *odpornych układów sterowania*. Są to układy o strukturze przedstawionej na rysunku 1.1, w których kompensator jest układem liniowym i stacjonarnym.

Rozważmy układ ze sprzężeniem zwrotnym opisany równaniami

$$y = Gu + d, \quad (1.1)$$

$$u = K(u_c - y), \quad (1.2)$$

gdzie  $u$  i  $y$  są odpowiednio wejściem i wyjściem obiektu,  $d$  jest sygnałem zakłócającym,  $u_c$  jest sygnałem sterującym reprezentującym zadaną trajektorię obiektu i  $G$  i  $K$  są odpowiednio transmitancjami obiektu i kompensatora. Zadaniem regulacji jest zaprojektowanie kompensatora tak, aby zapewnić nadążanie sygnału wyjściowego  $y$  za sygnałem sterującym  $u_c$  w zadanym paśmie częstotliwości  $[0, \omega_g]$ . Zdefiniujmy błąd nadążania jako  $e_o = u_c - y$ . Proste przekształcenia pokazują, że

$$e_o = Su_c,$$

gdzie

$$S = \frac{1}{1 + GK}.$$

Zatem błąd nadążania jest tym mniejszy, im mniejsza jest wartość funkcji  $S$  w interesującym nas paśmie częstotliwości. Ponieważ przy  $u_c \equiv 0$  funkcja  $S$  określa nam wrażliwość układu zamkniętego na zakłócenia  $d$ , funkcja ta nazywana jest *funkcją wrażliwości* (ang. *sensitivity function*). W większości praktycznych zastosowań, transmitancja obiektu  $G$  nie jest dokładnie znana i proces projektowania kompensatora oparty jest na podstawie modelu obiektu o transmitancji nominalnej  $G_n$ . Podamy warunki, dla których układ zamknięty (1.1), (1.2) pozostanie stabilny, jeśli  $G \neq G_n$ . Najpierw rozważymy przypadek, gdy niepewność w modelu skupiona jest w paśmie niskich częstotliwości. Z niepewnością taką mamy najczęściej do czynienia w przypadku braku dokładnej znajomości parametrów obiektu, a więc w przypadku występowania niepewności parametrycznej.

Zdefiniujmy względną niepewność modelu przez

$$L_l = (G_n - G)/G.$$

Stosując wprowadzone oznaczenie transmitancję obiektu możemy zapisać w postaci

$$G = G_n \frac{1}{1 + L_l}.$$

Załóżmy, że kompensator  $K$  zaprojektowany został na podstawie transmitancji nominalnej tak, że nominalny układ zamknięty jest stabilny (tzn. transmitancja  $(1 + KG_n)^{-1}$  nie ma biegunów w prawej półpłaszczyźnie  $\Re[s] \geq 0$ ).

**Twierdzenie 1.1.** (Doyle [23]). *Jeżeli  $L_l$  nie ma biegunów w prawej półpłaszczyźnie i spełniony jest warunek*

$$|S_n(i\omega)L_l(i\omega)| < 1 \quad \forall \omega \in \mathbf{R}, \quad (1.3)$$

gdzie  $S_n$  jest nominalną funkcją wrażliwości

$$S_n = \frac{1}{1 + KG_n},$$

to układ zamknięty (1.1), (1.2) jest stabilny.

**DOWÓD.** Układ zamknięty (1.1), (1.2) jest stabilny, jeżeli transmitancja  $[1 + KG_n(1 + L_l)^{-1}]^{-1}$  nie ma biegunów w prawej półpłaszczyźnie  $\Re[s] \geq 0$ . Zauważmy, że  $[1 + KG_n(1 + L_l)^{-1}]^{-1} = (1 + L_l)(1 + KG_n)^{-1}(1 + S_n L_l)^{-1}$ . Z założenia  $L_l$  i  $(1 + KG_n)^{-1}$  są transmitancjami stabilnymi. Ponadto, ponieważ  $1 + S_n L_l$  jest funkcją analityczną w obszarze  $\Re[s] \geq 0$ , więc zgodnie z zasadą maksimum ([127], str. 228) mamy  $|(1 + S_n(s)L_l(s))^{-1}| \leq \max_{\omega} |(1 + S_n(i\omega)L_l(i\omega))^{-1}| \quad \forall s : \Re[s] \geq 0$ . Z warunku (1.3) wynika więc, że  $(1 + S_n(s)L_l(s))^{-1} \leq \infty \quad \forall s : \Re[s] \geq 0$ , czyli  $(1 + S_n L_l)^{-1}$  również jest transmitancją stabilną.  $\square$

Z udowodnionego twierdzenia wynika, że układ sterowania jest odporny na niepewność modelu zawartą w paśmie częstotliwości, w którym nominalna funkcja wrażliwości jest mała, a więc w paśmie niskich częstotliwości (przypominamy, że dla większości obiektów fizycznych zachodzi warunek  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} S(\omega) = 1$ ).

Jeżeli niepewność w modelu wywołana jest pominięciem występującej w obiekcie dynamiki wysokiej częstotliwości, to  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} L_l(i\omega) = \infty$ . W tym przypadku warunek (1.3) jest nieprzydatny i musimy zastosować inne rozumowanie. Oznaczmy  $L_h = (G - G_n)/G_n$  i przedstawmy transmitancję obiektu w postaci

$$G = G_n(1 + L_h).$$

Podobnie jak w twierdzeniu 1.1 zakładamy, że nominalny układ zamknięty jest stabilny.

**Twierdzenie 1.2.** (Kwakernaak [87]). *Jeżeli  $L_h$  nie ma biegunów w prawej półpłaszczyźnie i spełniony jest warunek*

$$|T_n(i\omega)L_h(i\omega)| < 1 \quad \forall \omega \in \mathbf{R}, \quad (1.4)$$

gdzie

$$T_n = \frac{KG_n}{1 + KG_n},$$

to układ zamknięty (1.1), (1.2) jest stabilny.

Dowód powyższego twierdzenia jest podobny do dowodu twierdzenia 1.1. Funkcja  $T_n$  jest transmitancją układu zamkniętego w przypadku, gdy  $L_h = 0$ . Ponadto, zachodzi tożsamość

$$S_n + T_n = 1 \quad (1.5)$$

i dlatego funkcja  $T_n$  nazywana jest *dopełnieniową funkcją wrażliwości* (ang. *complementary sensitivity function*). Ponieważ dla większości obiektów fizycznych zachodzi własność  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} T_n(i\omega) = 0$ , więc warunek (1.4) może być przydatny przy analizie odporności układów regulacji w przypadku, gdy niepewność modelu leży w paśmie wysokich częstotliwości.

Z warunku (1.4) wynika, że dopełnieniowa funkcja wrażliwości powinna być kształtowana w taki sposób, by jej wartości były małe w paśmie częstotliwości, w którym wartości części niemodelowanej  $L_h(i\omega)$  są duże. Z drugiej strony przypominamy, że dla zapewnienia odpowiedniej jakości nadążania i odporności układu na niepewność w paśmie niskich częstotliwości również wartości funkcji wrażliwości powinny być małe. Z tożsamości (1.5) wynika jednak, że  $S_n$  i  $T_n$  nie mogą być jednocześnie małe w tym samym paśmie częstotliwości. W praktyce musimy więc szukać rozwiązań kompromisowych. Jedną z nich jest scharakteryzowanie wymagań projektowych za pomocą wskaźnika jakości

$$\sup_{\omega} (|S_n(i\omega)V(i\omega)|^2 + |T_n(i\omega)W(i\omega)|^2) \quad (1.6)$$

lub

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (|S_n(i\omega)V(i\omega)|^2 + |T_n(i\omega)W(i\omega)|^2) d\omega, \quad (1.7)$$

gdzie  $V$  i  $W$  są funkcjami wagi i następnie poszukiwanie kompensatora, który zapewni stabilność układu zamkniętego i jednocześnie minimalizuje wybrany wskaźnik. Funkcje wagi dobierane są w taki sposób, by w pasmach częstotliwości, w których, odpowiednio,  $S_n$  i  $T_n$  mają być małe, funkcje  $V$  i  $W$  były duże. Inna metoda polega na oszacowaniu niepewności reprezentowanej przez  $L_l$  i  $L_h$  za pomocą funkcji dodatnich  $\tilde{L}_l$ ,  $\tilde{L}_h$  tak, by  $|L_l(i\omega)| \leq \tilde{L}_l(\omega)$ ,  $|L_h(i\omega)| \leq \tilde{L}_h(\omega)$  i przyjęciu  $V(i\omega) = \tilde{L}_l(\omega)$ ,  $W(i\omega) = \tilde{L}_h(\omega)$ .

Okazuje się, że zagadnienie znalezienia kompensatora minimalizującego wskaźnik (1.6) i (1.7) może być rozwiązane analitycznie bez odwoływania się do metod optymalizacji nieliniowej, Stain i Athans [136], Doyle i in. [24]. Ponieważ wskaźnik (1.6) reprezentuje normę wektora  $Z(i\omega) := [S(i\omega)V(i\omega) \ T(i\omega)W(i\omega)]^T$  w przestrzeni  $\mathcal{H}^\infty$ , a wskaźnik (1.7) normę tego wektora w przestrzeni  $\mathcal{H}^2$  (Rudin [127]) podejścia te nazywane są odpowiednio podejściem  $\mathcal{H}^\infty$  i  $\mathcal{H}^2$ .

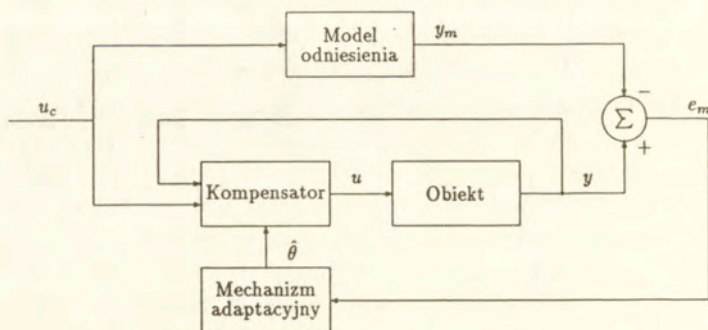
### 1.3 Adaptacyjne układy sterowania z adaptacją parametryczną

Układem sterowania z adaptacją parametryczną nazywamy nieliniowy układ ze sprzężeniem zwrotnym o ustalonej strukturze, w którym wśród zmiennych stanu możemy wyróżnić wektor  $\hat{\theta}$  spełniający rolę ocen pewnych nieznanymi parametrów. Układ sterowania zawiera mechanizm, który na podstawie analizy odpowiedzi obiektu na sygnał wejściowy generuje parametry  $\hat{\theta}$  tak, aby zapewnić żądane własności układu zamkniętego. W literaturze wyróżnia się dwa podstawowe rodzaje adaptacyjnych układów sterowania z adaptacją parametryczną. Są to *układy sterowania z modelem odniesienia* (ang. *model reference adaptive control systems*) i tzw. *regulatory z samonastrajającymi się parametrami* (ang. *self-tuning regulator*). Podział ten ma głównie podłoże historyczne, gdyż – jak się przekonamy – regulatory z modelem odniesienia można przy odpowiedniej interpretacji uznać za szczególny przypadek regulatorów z samonastrajającymi się parametrami.

#### Układy sterowania z modelem odniesienia

Jedną z popularnych metod formułowania zadania regulacji jest zdefiniowanie *modelu odniesienia* (ang. *reference model*) i zażądanie, by w układzie zamkniętym transmitancja pomiędzy sygnałem sterującym  $u_c$  a wyjściem obiektu  $y$  była równa transmitancji modelu odniesienia  $G_m$ . Model odniesienia dobiera się tak, aby uzyskać odpowiednią jakość regulacji w zadanym paśmie częstotliwości  $(0, \omega_g)$ . Ponadto, aby postawione zadanie miało rozwiązanie, względny stopień transmitancji przyjętego modelu odniesienia musi być nie mniejszy niż względny stopień transmitancji obiektu<sup>1</sup>. Przykładowo, jeśli względny stopień

<sup>1</sup>Względny stopniem transmitancji  $G$  nazywamy różnicę stopni mianownika i licznika  $G$ .



Rys. 1.2. Adaptacyjny układ sterowania z modelem odniesienia.

transmitancji obiektu jest równy 2, to często przyjmuje się  $G_m = \frac{1}{(s/\omega_g)^2 + 2\mu s/\omega_g + 1}$ , gdzie  $\omega_g$  i  $\mu$  są odpowiednio wymaganą częstotliwością graniczną i zadany tłumieniem układu zamkniętego.

Wyznaczenie kompensatora zapewniającego dopasowanie transmitancji układu zamkniętego do transmitancji modelu odniesienia wymaga znajomości parametrów obiektu. Gdy parametry te nie są znane można zaprojektować regulator adaptacyjny. Ogólny schemat adaptacyjnego układu sterowania z modelem odniesienia przedstawia rys. 1.2.

W układzie wyróżnić możemy typową pętlę sprzężenia zwrotnego złożoną z obiektu i kompensatora z parametrami  $\hat{\theta}$  oraz mechanizm (algorytm) adaptacyjny, który na podstawie błędu pomiędzy wyjściem obiektu i modelem odniesienia nastawia parametry kompensatora. W układzie istnieją więc dwie pętle sprzężenia zwrotnego: wewnętrzna generująca sygnał wejściowy obiektu oraz zewnętrzna generująca parametry kompensatora.

Przy projektowaniu układów z modelem odniesienia musimy zwracać uwagę na to, żeby przyjęta struktura kompensatora była w wystarczającym stopniu elastyczna. Wymaganie to ilustruje poniższy przykład.

PRZYKŁAD 1.1. Rozważmy obiekt pierwszego rzędu

$$\dot{y} + ay = bu, \quad b > 0, \quad (1.8)$$

gdzie  $y$  i  $u$  są odpowiednio wejściem i wyjściem obiektu. Załóżmy, że celem sterowania jest zapewnienie nadążania wyjścia obiektu za wyjściem modelu odniesienia

$$\dot{y}_m + a_m y_m = b_m u_c, \quad a_m > 0, \quad (1.9)$$

gdzie  $u_c$  jest sygnałem sterującym. Rozważmy kompensator postaci

$$u = \hat{r}y + \hat{k}u_c. \quad (1.10)$$

Łatwo sprawdzić, że jeżeli

$$\hat{r} = r := (a - a_m)/b; \quad \hat{k} = k := b_m/b, \quad (1.11)$$

to z dokładnością do sygnałów zanikających wykładniczo mamy  $y = y_m$ , tak jak tego żądaliśmy. Jeżeli rząd obiektu jest równy 2, to przy założonej strukturze kompensatora niemożliwe jest zapewnienie dokładnego nadążania. Jeżeli jednak jedna ze stałych czasowych obiektu jest dużo większa od drugiej, to można tak dobrać parametry kompensatora, by  $y \approx y_m$ , o ile szybkość zmian sygnału sterującego jest odpowiednio mała.  $\triangle$

Opracowano szereg metod projektowania algorytmów adaptacyjnych z modelem odniesienia. Poniżej omówimy kilka z nich.

1. *Gradientowe algorytmy adaptacji.* Zdefiniujmy błąd nadążania  $e_m = y - y_m$  oraz wskaźnik jakości  $J(\hat{\theta}) = \frac{1}{2}e_m^2$ . Minimalizację funkcji  $J$  możemy zapewnić stosując algorytm gradientowy

$$\frac{d}{dt}\hat{\theta} = -\gamma' \frac{\partial J}{\partial \hat{\theta}} = -\gamma' \frac{\partial e_m}{\partial \hat{\theta}} e_m$$

z  $\gamma' > 0$ . Odejmując stronami równania (1.8) i (1.9) i wykorzystując (1.10), (1.11) dostajemy

$$\begin{aligned} \dot{e}_m + a_m e_m &= (a_m - a) + b(ku_c + ry) - a_m u_c \\ &= b(\hat{r} - r)y + b(\hat{k} - k)u_c \\ &= b\varphi^T(\hat{\theta} - \theta^*), \end{aligned} \quad (1.12)$$

gdzie  $\hat{\theta} = [\hat{r} \ \hat{k}]^T$ ,  $\theta^* = [r \ k]^T$  i  $\varphi = [y \ u_c]^T$ . Zauważmy, że jeżeli parametr  $\gamma$  jest odpowiednio mały, to szybkość zmian parametru  $\hat{\theta}$  jest dużo mniejsza od szybkości zmian pozostałych sygnałów. Wykorzystując równanie (1.12) możemy wtedy przyjąć  $\frac{\partial \dot{e}_m}{\partial \hat{\theta}} = \frac{b}{s + a_m} \varphi$ . Stąd dostajemy ostatecznie następujący algorytm adaptacyjny

$$\frac{d}{dt}\hat{\theta} = -\gamma \left( \frac{1}{s + a_m} \varphi \right) e_m,$$

gdzie  $\gamma = \gamma' b$ .

Gradientowe algorytmy adaptacji po raz pierwszy zostały zastosowane w pracy Osburna i in. [122] i były rozwijane głównie w latach 60-tych. Główną ich wadą jest to, że pochodna cząstkowa  $\partial e_m / \partial \hat{\theta}$  zależy od parametrów sterowanego obiektu, które nie są znane. Zwykle więc stosuje się różne metody przybliżone, które jednak wymagają, by wartość początkowa wektora  $\hat{\theta}$  była bliska wartości  $\theta^*$ . Ponadto, współczynnik  $\gamma$  określający szybkość adaptacji musi być odpowiednio mały. Obecnie podejście gradientowe jest rzadziej stosowane.

2. *Algorytmy oparte na teorii stabilności Lapunowa.* Metoda projektowania algorytmów adaptacji przy użyciu teorii stabilności Lapunowa polega na skonstruowaniu odpowiedniej funkcji nieujemnej  $V$ , a następnie poszukiwaniu algorytmu generującego parametry  $\hat{\theta}$  w taki sposób, by spełniony był warunek  $\frac{d}{dt}V \leq 0$ . Rozważmy powtórnie układ ze sprzężeniem zwrotnym z przykładu 1.1. Zdefiniujmy funkcję Lapunowa

$$V(e, \hat{\theta}) = \frac{1}{2} \left( e_m^2 + \frac{1}{\gamma'} \|\hat{\theta} - \theta^*\|^2 \right).$$

Wykorzystując równanie dla błędu nadążania (1.12) dostajemy

$$\frac{d}{dt}V = -a_m e_m^2 + (\hat{\theta} - \theta^*)^T \left( \frac{1}{\gamma'} \frac{d\hat{\theta}}{dt} + b\varphi e_m \right).$$

Zatem funkcja  $V$  będzie maleć w czasie jeśli przyjmiemy

$$\frac{d}{dt}\hat{\theta} = -\gamma\varphi e_m,$$

gdzie  $\gamma = \gamma'b$ . Zwróćmy uwagę, że z własności funkcji Lapunowa wynika, iż  $e_m, \|\hat{\theta}\| \in L^\infty$  i  $e_m \in L^2$ . Jeżeli dodatkowo założymy, że  $u_c \in L^\infty$ , to z warunku  $e_m \in L^\infty$  wynika  $y \in L^\infty$ , a więc również  $\|\varphi\| \in L^\infty$ . Z równania (1.12) otrzymujemy więc  $\dot{e}_m \in L^\infty$ . Zatem ostatecznie  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_m = 0$ . Przedstawiony algorytm adaptacji zapewnia więc globalną stabilność układu sterowania (w sensie przynależności sygnałów do  $L^\infty$ ) i zapewnia zanikanie błędu nadążania. Powyższe podejście można uogólnić na układy wyższego rzędu, w których liczba biegunów jest dokładnie o 1 większa od liczby zer [116], natomiast dla układów, w których warunek ten nie jest spełniony nie znaleziono jak dotąd odpowiedniej funkcji Lapunowa. Przegląd różnych algorytmów adaptacyjnych zaprojektowanych przy pomocy teorii Lapunowa wraz z bogatą literaturą zawiera praca Narendra i Kudva [112].

3. *Podejście oparte na algorytmach identyfikacji.* Jeżeli poszukiwany wektor parametrów  $\theta^*$  spełnia równanie

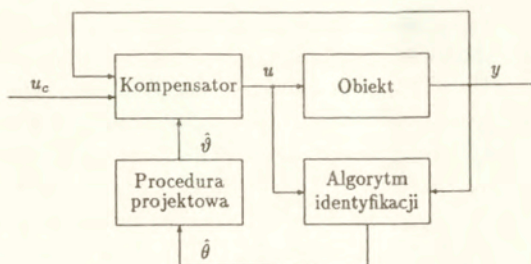
$$\nu = \varphi^T \theta^* \tag{1.13}$$

dla pewnych mierzonych sygnałów  $\nu$  i  $\varphi$ , to ocenę wektora  $\theta^*$  możemy wygenerować za pomocą jednego z wielu znanych algorytmów identyfikacji na bieżąco, na przykład za pomocą algorytmu typu gradientowego [105]

$$\frac{d}{dt}\hat{\theta} = \gamma\varphi e_m, \quad e_m = \nu - \varphi^T \hat{\theta}.$$

W celu zastosowania tego podejścia należy dla poszukiwanego wektora parametrów znaleźć model postaci (1.13). Rozważmy jeszcze raz zadanie sterowania opisane w przykładzie 1.1.





Rys. 1.3. Regulator z samonastrajaniem.

Zwróćmy uwagę, że mnożąc równanie obiektu przez  $\frac{b_m}{b(s+a_m)}$  i wykorzystując wzory (1.11) otrzymujemy

$$\frac{b_m}{s+a_m}u = k\frac{1}{a_m}y + r\frac{b_m}{s+a_m}y. \quad (1.14)$$

Zatem przyjmując  $v = \frac{b_m}{s+a_m}u$  i  $\varphi = \left[ \frac{1}{a_m}y \quad \frac{b_m}{s+a_m}y \right]^T$  dostajemy żadaną postać (1.13). Zauważmy, że obecnie do generowania parametrów kompensatora nie wykorzystujemy w sposób jawny błędu nadążania  $e_m$ .

### Regulatory z samonastrajaniem

Jeżeli obiekt sterowany jest całkowicie znany, to równania kompensatora możemy wyznaczyć na podstawie jednej z wielu opracowanych *procedur projektowych*. Przy zadanej strukturze obiektu i kompensatora procedurę projektową możemy traktować jako funkcję  $\mathcal{F}$  zdefiniowaną na pewnym zbiorze  $\mathcal{C}$  przyporządkowującą parametrom obiektu  $\theta$  parametry kompensatora  $\vartheta$ . W układzie sterowania opisanym w przykładzie 1.1 funkcja ta jest zdefiniowana za pomocą równań (1.11), a więc, przypomnijmy, ma postać

$$(r, k) = \mathcal{F}(a, b) = ((a - a_m)/b, b_m/b), \quad \mathcal{C} = \{(a, b) : b \neq 0\}. \quad (1.15)$$

Gdy parametry obiektu nie są znane, możemy na bieżąco identyfikować parametry obiektu i na bieżąco wyznaczać parametry kompensatora na podstawie aktualnych wartości ocen parametrów i przyjętej procedury projektowej. Regulator oparty na opisanej zasadzie nosi nazwę *regulatora z samonastrajaniem* (ang. *self-tuning regulator*). Ogólny schemat układu regulacji z samonastrajaniem przedstawiony jest na rys. 1.3.

W regulatorze z samonastrajaniem (podobnie jak w regulatorach z modelem odniesienia) możemy wyróżnić dwie pętle sprzężenia zwrotnego. Pętla wewnętrzna zapewnia regulację wyjścia  $y$  i obejmuje obiekt i kompensator. Pętla zewnętrzna służy do nastawiania parametrów kompensatora  $\vartheta$  i składa się z algorytmu identyfikacji na bieżąco parametrów obiektu  $\theta^*$  oraz procedury przeliczającej parametry obiektu na parametry kompensatora.

Struktura układu sterowania przedstawiona na rys. 1.3 jest bardzo elastyczna. Dobierając różne procedury projektowe i różne algorytmy identyfikacji otrzymujemy różne rodzaje regulatorów adaptacyjnych. Jak się za chwilę przekonamy, również regulatory z modelem odniesienia można traktować jako szczególny przypadek regulatorów z samonastrajaniem.

Przedstawimy prosty przykład regulatora zaprojektowanego na podstawie schematu blokowego na rys. 1.3. Rozważmy obiekt pierwszego rzędu  $\dot{y} + ay = bu$ ,  $b > 0$  oraz procedurę (1.15) zapewniającą dopasowanie układu zamkniętego do modelu odniesienia  $\dot{y}_m + a_m y_m = b_m u_c$ ,  $a_m > 0$  (por. przykład 1.1). Najpierw zaprojektujemy algorytm identyfikacji parametrów  $a$  i  $b$ . Spróbujemy przedstawić równanie obiektu w postaci formy liniowej względem parametrów

$$\nu = \varphi^T \theta^*,$$

gdzie  $\varphi$  i  $\nu$  są sygnałami mierzonymi i  $\theta^* = [a \ b]^T$ . Zauważmy, że nie możemy przyjąć  $\nu = \dot{y}$  i  $\varphi = [-y \ u]^T$ , gdyż wymaga to różniczkowania sygnału  $y$ , które jest w praktyce niewykonalne. W celu uniknięcia różniczkowania sygnałów, zastosujemy operację filtracji zmiennych. Niech  $F(s) = s + f$  będzie dowolnym wielomianem Hurwitza. Dzieląc równanie obiektu przez  $F(s)$  otrzymujemy żadaną postać

$$\nu = y - \frac{f}{F(s)}y = \left[ -\frac{1}{F(s)}y \quad \frac{1}{F(s)}u \right] \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}. \quad (1.16)$$

Zdefiniujmy błąd modelowania  $\varepsilon_m = \nu - \varphi^T \hat{\theta}$  oraz wskaźnik  $J(\hat{\theta}, t) = \frac{1}{2} \varepsilon_m^2$ . Ponieważ  $J(\theta^*, t) = 0$ , więc identyfikację parametrów  $a$  i  $b$  możemy interpretować jako minimalizację wskaźnika  $J$ . Do generacji ocen parametrów zastosujemy algorytm typu gradientowego

$$\frac{d}{dt} \hat{\theta} = -\gamma \frac{\partial J}{\partial \hat{\theta}} = \gamma \varphi \varepsilon_m. \quad (1.17)$$

Pozostało sformułować równanie kompensatora. Przyjmiemy

$$u = \hat{r}y + \hat{k}u_c, \quad [\hat{r} \ \hat{k}] = \mathcal{F}(\hat{a}, \hat{b}). \quad (1.18)$$

Całość regulatora adaptacyjnego opisana jest równaniami (1.15)–(1.18).

### Bezpośrednie i pośrednie adaptacyjne układy sterowania

Podział na adaptacyjne układy sterowania z modelem odniesienia i na regulatory z samonastrajaniem był powszechny w początkach rozwoju teorii sterowania adaptacyjnego. Na przełomie lat siedemdziesiątych i osiemdziesiątych zwrócono uwagę, że układy z modelem odniesienia można przy odpowiedniej interpretacji uznać za szczególny przypadek regulatorów z samonastrajaniem, Egardt [27], Landau [89]. Rozważmy jeszcze raz przykład 1.1. Przy zadanym modelu odniesienia (1.9) wartości parametrów obiektu  $a$  i  $b$  określają nam żądane parametry kompensatora  $r$  i  $k$ . Zachodzi również sytuacja odwrotna. Mając dane

parametry kompensatora zapewniające nadążanie wyjścia obiektu za wyjściem modelu odniesienia potrafimy określić jednoznacznie parametry obiektu. Adaptacyjny algorytm sterowania z modelem odniesienia możemy więc uznać za regulator z samonastrajaniem, w którym zastosowano specjalną parametryzację obiektu zapewniającą bezpośrednią identyfikację parametrów kompensatora. Zwróćmy na przykład uwagę na równanie (1.14). Równanie to można uznać za szczególną postać równania obiektu (1.8), w którym nieznanymi parametrami są parametry kompensatora  $k$  i  $r$ .

W związku z tym, w ostatnich latach coraz częściej stosowany jest inny podział adaptacyjnych układów sterowania. Algorytmy, w których parametry kompensatora identyfikowane są bezpośrednio noszą nazwę *bezpośrednich algorytmów sterowania* (ang. *direct adaptive control algorithms*), a algorytmy, w których konieczne jest przeliczanie ocen parametrów na parametry kompensatora noszą nazwę *algorytmów pośrednich* (ang. *indirect adaptive control algorithms*). Zgodnie z tą terminologią wszystkie algorytmy z modelem odniesienia opisane na początku tego rozdziału są algorytmami bezpośrednimi. Poza bezpośrednimi regulatorami z modelem odniesienia, zaprojektowano również bezpośrednie algorytmy sterowania oparte na procedurze przesuwania biegunów, Elliott [29].

## Sterowanie adaptacyjne a sterowanie odporne

W poprzednim i tym paragrafie omówiliśmy dwie podstawowe metody sterowania dla obiektów z niepewnością modelu. W pierwszej metodzie, w sterowaniu odpornym, możemy uwzględniać występowanie niepewności parametrycznej i niepewności nieparametrycznej. Jednak ze względu na to, że w metodzie tej stosowany jest kompensator ze stałymi parametrami, zakres dopuszczalnych zmian wartości parametrów obiektu nie może być zbyt duży. W przeciwnym razie może się okazać, że w ogóle nie istnieje kompensator zapewniający stabilność układu zamkniętego dla wszystkich możliwych wartości parametrów obiektu, a jeśli istnieje, to nie zapewnia on dobrej jakości regulacji. Dla regulatorów adaptacyjnych takie ograniczenie nie istnieje, ponieważ w tym przypadku parametry kompensatora są odpowiednio przestrajane w ślad za zmianami parametrów obiektu. Jednak obecnie dostępne algorytmy sterowania adaptacyjnego projektowane były głównie z myślą o niepewności parametrycznej i gorzej sobie radzą w przypadku występowania w modelu obiektu niepewności nieparametrycznej.

## 1.4 Nieparametryczne adaptacyjne układy sterowania

W tym paragrafie omówimy kilka rodzajów adaptacyjnych algorytmów sterowania z adaptacją nieparametryczną. Algorytmy te mają zastosowanie w pewnych szczególnych zagadnieniach sterowania.

## Układy sterowania z otwartym torem adaptacji

W wielu układach możliwy jest pomiar pewnych dodatkowych sygnałów, od których zależą własności dynamiczne sterowanego obiektu. Typowym przykładem są obiekty nieliniowe, w których parametry zlinearyzowanego modelu zależą od punktu pracy układu. W takich przypadkach można skompensować wpływ zmiennych warunków pracy obiektu zmieniając wartości parametrów regulatora w funkcji mierzonych sygnałów dodatkowych. Układy sterowania oparte na powyższej zasadzie noszą nazwę *układów z otwartym torem adaptacji* lub *układów z planowanymi parametrami* (ang. *systems with gain scheduling*).

Głównym problemem przy projektowaniu układów z otwartym torem adaptacji jest znalezienie odpowiednich zmiennych charakteryzujących zmienne warunki pracy obiektu. Zwykle dokonuje się tego na podstawie znajomości praw fizyki opisujących sterowany obiekt. Mając zdefiniowane zmienne dodatkowe wyznaczane są parametry regulatora dla szeregu wybranych wartości tych zmiennych. W trakcie pracy układu, bieżące parametry regulatora wyznaczane są na podstawie zmierzonych wartości zmiennych dodatkowych metodą aproksymacji.

Zaletą układów z otwartym torem adaptacji jest natychmiastowa zmiana parametrów regulatora w odpowiedzi na zmianę warunków pracy obiektu. Wadą jest konieczność wyznaczenia parametrów regulatora w wielu punktach pracy, co może być procesem pracochłonnym, wymagającym wielu studiów i symulacji. Drugą wadą jest to, że zmiany parametrów dokonywane są bez sprzężenia od obiektu. Metoda ta nie może być więc stosowana w przypadku, gdy posiadany model obiektu nie jest wystarczająco dokładny.

Układy z otwartym torem adaptacji znalazły praktyczne zastosowanie w autopilotach samolotów i statków, Stain [135], Meyer i in. [99], Källström i in. [75].

## Regulatory PID z samonastrajaniem

Znakomita większość regulatorów stosowanych w przemyśle to regulatory typu PID. Główną przyczyną dużej popularności regulatorów PID jest ich prawidłowa praca dla szerokiej klasy obiektów sterowania, duże doświadczenie w ich stosowaniu, niezawodność oraz niska cena. Dobór nastaw regulatorów PID dokonywany jest najczęściej ręcznie przez odpowiednio przeszkolony personel. Jednak, jak pokazuje praktyka, wiele pętli regulacji (zwłaszcza dla obiektów o dużych stałych czasowych) nie jest prawidłowo nastrojona. Z tego względu producenci regulatorów PID coraz częściej wyposażają je w procedury automatycznego doboru nastaw. Procedury te umożliwiają lepsze i szybsze nastrojenie układu regulacji, zmniejszają wymagania dotyczące kwalifikacji personelu, a także pozwalają na przestrojenie regulatorów w przypadku zmiany punktu pracy obiektu. Poniżej omówimy dwie metody samonastrajania regulatorów PID z powodzeniem stosowane w praktyce.

Firma Foxboro opracowała adaptacyjny regulator PID zwany EXACT (od ang. *EXpert Adaptive Controller Tuning*). Regulator oparty jest na analizie odpowiedzi układu zamkniętego na skokową zmianę sygnału zakłócającego lub sygnału zadanego. Proces adaptacji rozpoczyna się od chwili, w której błąd regulacji przekroczy pewien ustalony próg. Algorytm zaczyna śledzić sygnał błędu regulacji i zapamiętuje kolejne wartości szczytowe  $e_{o1}$ ,  $e_{o2}$  i  $e_{o3}$  oraz okres  $T_d$  (patrz rys. 1.4). Następnie wyznaczany jest współczynnik tłumienia

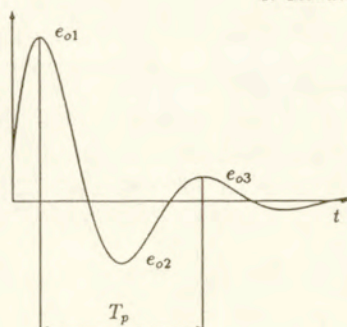
$$\mu = \frac{e_{o3} - e_{o2}}{e_{o1} - e_{o2}}$$

oraz przeregulowanie

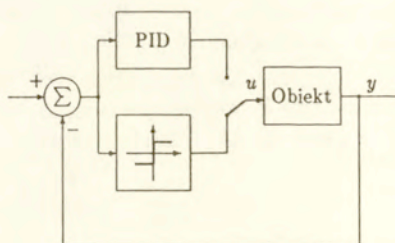
$$o = -\frac{e_{o2}}{e_{o1}}$$

Na podstawie otrzymanych wartości oraz na podstawie maksymalnych dopuszczalnych wartości przeregulowania i tłumienia określonych przez użytkownika algorytm wyznacza nowe wartości nastaw regulatora. Nastawy te pozostają niezmienione aż do wystąpienia w obiekcie nowych sygnałów zakłócających. Procedura nastawiania wymaga wpisania początkowych wartości nastaw regulatorów, amplitudy szumów pomiarowych oraz maksymalnego czasu oczekiwania w procedurze identyfikacji wartości szczytowych błędu. Ponadto, użytkownik może określić maksymalne dopuszczalne tłumienie i przeregulowanie, współczynnik zmniejszenia stałej różniczkowania oraz ograniczenia na parametry regulatora. W przypadku braku wystarczającej informacji o obiekcie, parametry wymagane w procesie adaptacji mogą zostać ustawione automatycznie w trybie zwanym *wstępny nastawianiem*. W trybie tym obiekt będący wcześniej w stanie ustalonym poddawany jest wymuszeniom skokowym o zadanej przez operatora wielkości skoku. Mierząc odpowiedź obiektu wyznaczany jest najpierw czas zwłoki oraz maksymalne nachylenie przebiegu wyjścia, a następnie na ich podstawie parametry wymagane w procesie adaptacji. Regulator EXACT firmy Foxboro opisany jest w artykule Krausa i Myrona [78].

Inne podejście zaproponowano w pracach Åströma i Höglunga [11, 12]. Polega ono na zastosowaniu prostej metody identyfikacji punktu krytycznego na krzywej Nyquista transmitancji obiektu, a następnie wyznaczeniu nastaw regulatora na podstawie znanego kryterium Zieglera-Nicholsa. W klasycznej wersji metody Zieglera-Nicholsa wzmocnienie krytyczne  $k_c$  oraz częstotliwość krytyczna  $\omega_c$  są określane za pomocą następującego postępowania. Obiekt zostaje włączony w pętlę sprzężenia zwrotnego z regulatorem proporcjonalnym. Wzmocnienie regulatora jest stopniowo zwiększane aż do wystąpienia w układzie oscylacji. Wzmocnienie, przy którym wystąpiły oscylacje jest wzmocnieniem krytycznym, a częstotliwość oscylacji częstotliwością krytyczną. Powyższą procedurę trudno jest zautomatyzować, głównie ze względu na trudności z utrzymaniem pod kontrolą amplitudy oscylacji. Zaproponowano więc nowy sposób identyfikacji punktu krytycznego. Wykorzystuje on fakt, że wiele spotykanych w praktyce obiektów sterowania włączonych w układ regulacji dwustawnej drga z częstotliwością zbliżoną do  $\omega_c$ . W celu określenia



Rys. 1.4. Wykres błędów regulacji w układzie zamkniętym.



Rys. 1.5. Regulator PID z samonastrajaniem wykorzystujący układ regulacji dwustawnej.

punktu krytycznego obiekt zostaje włączony w pętlę sprzężenia zwrotnego z elementem przekąźnikowym jak na rys. 1.4. Jeśli przez  $A_r$  oznaczmy amplitudę elementu przekąźnikowego, to amplituda pierwszej harmonicznej sygnału wejściowego obiektu będzie równa  $4A_r/\pi$ . Przyjmując, że obiekt tłumi wyższe harmoniczne sygnału wejściowego w stopniu znacznie większym niż pierwszą harmoniczną dostajemy w przybliżeniu

$$k_c = \frac{4A_r}{\pi a},$$

gdzie  $a$  jest amplitudą sygnału wyjściowego. Zatem mierząc okres i amplitudę drgań powstałych w układzie sterowania dwustawnego potrafimy określić parametry punktu krytycznego transmitancji obiektu, a mając je możemy wyznaczyć nastawy regulatora PID zapewniające zadany zapas fazy i amplitudy.

Algorytmy samonastrajania wykorzystujące pomiar oscylacji w układzie sterowania dwustawnego zastosowano w regulatorach firm SaftControl i Fisher Control. W regulatorach tych proces samonastrajania jest dokonywany na życzenie po naciśnięciu odpowiedniego przycisku. Następuje wtedy przełączenie sterowania obiektu na sterowanie dwustawne, pomiar parametrów drgań, obliczenie nastaw regulatorów na podstawie reguły podobnej do reguły Zieglera-Nicholsa i powrót do sterowania ciągłego za pomocą regulatora PID. Zaletą zastosowanego rozwiązania jest brak jakichkolwiek parametrów, które muszą być wstępnie ustawiane przez użytkownika.

## Sterowanie dualne

Jednym z często stosowanych sposobów formułowania zadania sterowania jest zdefiniowanie wskaźnika jakości sterowania  $J$  będącego funkcją wejścia i wyjścia (lub stanu) obiektu

i zażądanie, by poszukiwane prawo sterowania minimalizowało wartość  $J$ . Tak postawione zadanie sterowania nosi nazwę *zadania sterowania optymalnego*. Metody sterowania optymalnego stanowią obecnie samodzielną i dojrzałą gałąź teorii sterowania. Zadanie minimalizacji wskaźnika jakości może być również postawione w przypadku, gdy parametry obiektu nie są całkowicie znane. Optymalne prawo sterowania jest wówczas wynikiem kompromisu pomiędzy żądaniem minimalizacji wskaźnika jakości, a potrzebą identyfikacji obiektu wymagającą pewnego pobudzenia obiektu. Dla podkreślenia podwójnej roli sygnałów sterujących zadanie sterowania optymalnego w przypadku braku znajomości obiektu nosi nazwę *zadania sterowania dualnego*. Poniżej sformułujemy zadanie sterowania dualnego dla prostego obiektu dyskretnego pierwszego rzędu.

Rozważmy obiekt

$$y(t+1) + ay(t) = bu(t) + d(t), \quad y(0) = 0,$$

gdzie  $d$  jest sygnałem zakłócającym. Niech  $\{y_m(t)\}_{t=1, \dots, N}$  będzie zadaną trajektorią obiektu. Jako wskaźnik jakości moglibyśmy przyjąć sumę  $\sum_{t=1}^N (y(t) - y_m(t))^2$ . Jednak w tym przypadku zadanie sterowania nie byłoby prawidłowo postawione, gdyż wartość zdefiniowanego wskaźnika, a więc i sterowanie optymalne zależałoby od konkretnej realizacji zakłóceń  $\{d(t)\}$  i od wartości parametrów  $a$  i  $b$ , które nie są znane. Najczęściej zakłada się więc, że zakłócenia oraz parametry obiektu są zmiennymi losowymi o znanych rozkładach prawdopodobieństwa, a jako wskaźnik jakości przyjmuje się wartość średnią sumy  $\sum_{t=1}^N (y(t) - y_m(t))^2$ . Poniżej przedstawimy inne podejście nie wymagające wprowadzenia pojęć z rachunku prawdopodobieństwa.

Załóżmy, że spełnione są warunki

$$d(t) \in \mathcal{D}, \quad t = 0, \dots, N-1, \quad (a, b) \in \mathcal{P},$$

gdzie  $\mathcal{D}$  i  $\mathcal{P}$  są znanymi zwartymi podzbiorami  $\mathbf{R}$  i  $\mathbf{R}^2$ , przy czym  $\mathcal{P}$  nie zawiera punktów prostej  $b = 0$  (przykładowo, możemy przyjąć  $\mathcal{D} = \{d : |d| \leq \bar{d}\}$  i  $\mathcal{P} = \{(a, b) : a \in [\underline{a}, \bar{a}], b \in [\underline{b}, \bar{b}]\}$  z  $\underline{b} > 0$ ). Zdefiniujemy wskaźnik jakości przez

$$J = \max_{(a,b) \in \mathcal{P}; d(0), \dots, d(N-1) \in \mathcal{D}} \sum_{t=1}^N (y(t) - y_m(t))^2. \quad (1.19)$$

Naszym celem jest znalezienie prawa sterowania minimalizującego wskaźnik (1.19) o tej własności, że do generowania sterowania  $u(t)$  wykorzystywana jest cała informacja o obiekcie dostępna w chwili  $t$ . Zauważmy przede wszystkim, że kolejne pomiary odpowiedzi obiektu na sygnał wejściowy pozwalają nam znaleźć coraz dokładniejszą ocenę parametrów obiektu. Jeżeli  $\mathcal{P}_t$  oznacza zbiór możliwych wartości parametrów obiektu w chwili  $t$ , to  $\mathcal{P}_t$  spełnia zależność rekurencyjną

$$\mathcal{P}_{t+1} = \{(\hat{a}, \hat{b}) \in \mathcal{P}_t : y(t+1) + \hat{a}y(t) = \hat{b}u(t) + d, d \in \mathcal{D}\}, \quad \mathcal{P}_0 = \mathcal{P}.$$

Z powyższej definicji wynika, że  $\mathcal{P}_t \subseteq \mathcal{P}_{t-1} \subseteq \dots \subseteq \mathcal{P}_0$ , co jest równoważne temu, że informacja o obiekcie jest z czasem coraz dokładniejsza. Łatwo się przekonać, że sterowanie optymalne w chwili  $t$  będzie funkcją stanu obiektu  $y(t)$  i bieżącej informacji o obiekcie  $\mathcal{P}_t$ . Parę  $(y(t), \mathcal{P}_t)$  nazywamy *hiperstanem* obiektu. Oznaczmy minimalną wartość wskaźnika jakości

$$J(t) = \max_{(a,b) \in \mathcal{P}_t; d(t), \dots, d(N-1) \in \mathcal{D}} \sum_{i=t+1}^N (y(i) - y_m(i))^2$$

przez  $V(y(t), \mathcal{P}_t, t)$ . Zgodnie z zasadą optymalności, sterowanie  $u(t-1)$  minimalizujące wskaźnik  $J(t)$  spełnia *równanie Belmana*

$$V(y(t), \mathcal{P}_t, t) = \min_{u(t-1)} \left\{ \max_{(a,b) \in \mathcal{P}_t; d(t), \dots, d(N-1) \in \mathcal{D}} \left( (y(t) - y_m(t))^2 + V(y(t+1), \mathcal{P}_{t+1}, t+2) \right) \right\}. \quad (1.20)$$

Ze względu na swoją złożoność powyższe równanie może być rozwiązane jedynie numerycznie. Sposób rozwiązania determinuje iteracyjna postać równania (1.20). Przykładowo, w celu wyznaczenia optymalnej wartości  $u(0)$  najpierw rozwiązujemy równanie (1.20) dla  $t = N$  i wyznaczamy funkcję  $V(y(N), \mathcal{P}_N, N)$ . Następnie kolejno dla  $t = N-1, \dots, 1$  wyznaczamy funkcje  $V(y(t), \mathcal{P}_t, t)$ . Wreszcie minimalizując prawą stronę (1.20) dla  $t = 0$  dostajemy żadaną wartość  $u(0)$ . Nawet dla prostych problemów sterowania dualnego powyższy algorytm wymaga ogromnego nakładu obliczeń i trudno jest go zastosować w praktyce.

Własności rozwiązania optymalnego są jednak interesujące z teoretycznego punktu widzenia, gdyż mogą stanowić wskazówkę przy projektowaniu innych rodzajów adaptacyjnych układów sterowania. Łatwo przewidzieć, że dla dużych wartości  $N$  w procesie sterowania można wyróżnić dwa okresy. W początkowym okresie podstawowym zadaniem sygnału wejściowego jest uzyskanie dokładnej oceny parametrów obiektu (tzn. odpowiednio małej średnicy zbioru  $\mathcal{P}_t$ ). W drugiej fazie sterowania sygnał wejściowy minimalizuje wskaźnik jakości wykorzystując zidentyfikowane wcześniej parametry obiektu.

Zadanie sterowania dualnego sformułował Feldbaum w roku 1960 [33]. Prosty przykład numeryczny ilustrujący własności sterowania optymalnego można znaleźć w książce Åströma i Wittenmarka [14]. Istnieje szereg prac proponujących różne rozwiązania suboptymalne zagadnienia sterowania dualnego, na przykład [107, 141, 142, 143].

## Układy sterowania o zmiennej strukturze

Zasada działania układów sterowania o zmiennej strukturze polega na stosowaniu różnych parametrów regulatora w różnych obszarach w przestrzeni stanu obiektu. Granice obszarów, będące jednocześnie powierzchniami przełączeń parametrów regulatora dobierane są w taki sposób, by wymusić przemieszczanie się stanu obiektu po odpowiednio zadanej



powierzchni, zwanej *powierzchnią ślizgu* (ang. *sliding surface*). Dzięki temu zapewniona zostaje żądana dynamika układu zamkniętego bez względu na wartości parametrów obiektu i występujące w obiekcie nieliniowości, Gosiewski [46], Utkin [139]. Przez długi czas podstawową wadą układów sterowania o zmiennej strukturze była konieczność znajomości całkowitego stanu obiektu. Ostatnio jednak wykorzystując szereg idei z teorii sterowania adaptacyjnego Hsu i Costa [51] oraz Hsu [50] zaprojektowali regulatory o zmiennej strukturze, w których wymagany jest jedynie pomiar wejścia i wyjścia obiektu. Poniżej przedstawiamy algorytm z pracy [51] dla prostego obiektu pierwszego rzędu.

Rozważmy zadanie sterowania sformułowane w przykładzie 1.1. Dla obiektu  $\dot{y} + ay = bu$ ,  $b > 0$  definiujemy model odniesienia  $\dot{y}_m + a_m y_m = b_m u_c$ ,  $a_m > 0$  reprezentujący żądaną dynamikę układu zamkniętego. Nadążanie wyjścia obiektu za wyjściem modelu zostanie zapewnione przez zastosowanie kompensatora  $u = ry + ku_c$ , gdzie  $r = (a - a_m)/b$ ,  $k = b_m/b$ . Załóżmy, że parametry obiektu nie są znane i w związku z tym stosujemy kompensator

$$u = \hat{r}y + \hat{k}u_c,$$

w którym  $\hat{r}$  i  $\hat{k}$  są pewnymi funkcjami  $y$ ,  $y$  i  $u_c$ . Odejmując równanie obiektu od równania modelu i wykorzystując równanie kompensatora dostajemy (porównaj (1.12))

$$\dot{e}_m + a_m e_m = b[(\hat{r} - r)y + (\hat{k} - k)u_c].$$

W poprzednim paragrafie przedstawiliśmy szereg adaptacyjnych algorytmów sterowania generujących parametry  $\hat{r}$  i  $\hat{k}$ . Obecnie zaprojektujemy regulator o zmiennej strukturze. Zdefiniujemy funkcję  $V(e_m) = \frac{1}{2}e_m^2$ . Z równania błędu otrzymujemy

$$\frac{d}{dt}V = -a_m e_m^2 + b e_m [(\hat{r} - r)y + (\hat{k} - k)u_c]. \quad (1.21)$$

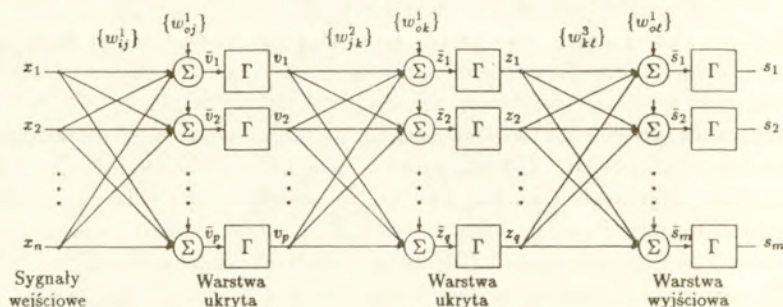
Zwróćmy uwagę, że  $V$  będzie funkcją Lapunowa, jeżeli drugi składnik po lewej stronie tożsamości (1.21) będzie zawsze ujemny. Możemy to zapewnić przyjmując

$$\dot{\hat{r}} = -\bar{r} \operatorname{sgn}(e_m y),$$

$$\dot{\hat{k}} = -\bar{k} \operatorname{sgn}(e_m u_c),$$

gdzie  $\bar{r}$  i  $\bar{k}$  są znanymi ograniczeniami z góry parametrów  $r^*$  i  $k^*$ , zaś  $\operatorname{sgn}(a) = 1$  dla  $a > 0$ ,  $-1$  dla  $a < 0$  oraz  $0$  dla  $a = 0$ . Przy tak dobranych parametrach kompensatora dostajemy  $dV/dt < -a_m e_m^2$ , a zatem błąd nadążania maleje co najmniej wykładniczo. Zwróćmy uwagę, że w powyższych rozważaniach nie wykorzystywany jest fakt, że obiekt jest stacjonarny. Wartości parametrów obiektu mogą się więc zmieniać w dowolny sposób, byleby zachodziły warunki  $\bar{r} \geq |r(t)|$  i  $\bar{k} \geq |k(t)|$ .

Działanie układu jest następujące. Jeżeli w chwili początkowej błąd nadążania  $e_m$  jest różny od zera, to w zależności od znaków sygnałów stosowany jest kompensator  $u = \hat{r}y + \hat{k}u_c$



Rys. 1.6. Trójwarstwowa sieć neuronowa.

lub  $u = -\bar{r}y - \bar{k}u_c$ , w wyniku czego następuje szybki zanik błędu nadążania. Z chwilą osiągnięcia przez sygnał  $e_m$  wartości 0 rozpoczyna się proces ciągłego przełączania z jednego kompensatora na drugi, co zapewnia utrzymanie zerowej wartości błędu. Teoretycznie, częstotliwość przełączeń jest nieskończona. W praktyce jednak ze względu na zawsze występujące opóźnienie częstotliwość ta będzie skończona, a w układzie wystąpią oscylacje. Stanowi to wadę układów sterowania ze zmienną strukturą.

Opisany wyżej algorytm daje się łatwo uogólnić na obiekty, w których różnica pomiędzy mianownikiem i licznikiem transmitancji jest równa  $n^* = 1$  [51]. Przypadek dowolnego  $n^*$  jest już dużo bardziej złożony [50]. Szereg przykładów praktycznych zastosowań układów sterowania ze zmienną strukturą zawiera praca Utkina [140].

## Sieci neuronowe w układach sterowania

W ostatnich latach można zaobserwować wzrost liczby publikacji poświęconych zagadnieniom związanym z sieciami neuronowymi. Zainteresowanie to wynika z dużych możliwości zastosowania sieci neuronowych w różnych dziedzinach wiedzy i techniki, w tym w modelowaniu systemów biologicznych [137], diagnostyce [133], optymalizacji [103], itp. Podejmowane są również próby zastosowania sieci neuronowych w identyfikacji i sterowaniu obiektami nieliniowymi.

*Sieć neuronowa* jest to system z wieloma wejściami i wyjściami złożony z wielu prostych, jednakowych elementów zwanych *neuronami*. Struktura sieci neuronowej zależy od postaci neuronów i sposobu w jaki neurony są wzajemnie ze sobą połączone. Każdy neuron ma szereg parametrów charakteryzujących jego własności zwanych *wagami*. Zmiana wartości wag powoduje zmianę właściwości poszczególnych neuronów, a tym samym zmianę właściwości całej sieci. Celem jest dobór wartości wag tak, aby uzyskać zadaną zależność pomiędzy sygnałami wejściowymi i wyjściowymi sieci. Proces taki ma zwykle charakter iteracyjny i jest nazywany *uczeniem sieci*.

Na rys. 1.6 przedstawiona jest przykładowa sieć neuronowa. Składa się ona z trzech warstw: warstwy ukrytej z wejściami  $x_i$ , wyjściami  $v_j$  i wagami  $w_{ij}^1$ , warstwy ukrytej z wejściami  $v_j$ , wyjściami  $z_k$  i wagami  $w_{jk}^2$  oraz warstwy wyjściowej z wejściami  $z_k$ , wyjściami  $s_l$  i wagami  $w_{kl}^3$  (indeksy  $i, j, k, l$  przebiegają odpowiednio w granicach  $[1, n]$ ,  $[1, p]$ ,  $[1, q]$  i  $[1, m]$ ). Sygnały  $x_i$  i  $s_l$  są jednocześnie sygnałami wejściowymi i wyjściowymi całej sieci. Przykładowo,  $j$ -ty neuron w pierwszej warstwie opisany jest równaniem

$$v_j = \Gamma(\bar{v}_j), \quad \bar{v}_j = w_{0j}^1 + \sum_{i=1}^n w_{ij}^1 u_i.$$

Funkcja  $\Gamma$  jest funkcją nieliniową postaci

$$\Gamma(a) := (1 - e^{-a}) / (1 + e^{-a}).$$

Charakterystyczną cechą sieci neuronowej jest to, że przy odpowiednim doborze wartości wag może ona aproksymować dowolną funkcję nieliniową

$$s = F(x), \quad x \in \Omega, \quad -1 < s_l < 1, \quad l \in [1, m],$$

gdzie  $\Omega$  jest zwartym podzbiorem  $\mathbb{R}^n$ . Mówiąc ściśle, można pokazać, że sieć złożona z dwóch warstw może aproksymować z dowolną dokładnością zadaną ciągłą funkcję  $F$ , jeżeli liczba neuronów w pierwszej warstwie będzie odpowiednio duża. Idea dowodu tej własności jest następująca. Każdy neuron z warstwy pierwszej może zapewnić liniową aproksymację funkcji  $F$  w wybranym małym kawalku obszaru  $\Omega$ . Warstwa wyjściowa skleja te kawalki ze sobą, tworząc aproksymację funkcji  $F$  w całym obszarze  $\Omega$ . Pomimo, że teoretycznie zawsze wystarczą dwie warstwy sieci do zapewnienia dokładnej aproksymacji w praktyce zazwyczaj lepsze efekty otrzymuje się stosując sieci o większej liczbie warstw.

Do uczenia sieci stosuje się algorytm typu gradientowego. Jeżeli przez  $x(t)$ ,  $t = 1, 2, \dots$  oznaczymy kolejne realizacje sygnałów wejściowych, a przez  $s(t)$  odpowiadające im wartości wyjściowe sieci, to algorytm uczenia będzie miał postać

$$\hat{w}(t+1) = \hat{w}(t) - \gamma \nabla_{\hat{w}} J \Big|_{\hat{w}=\hat{w}(t)},$$

gdzie  $J$  wskaźnikiem błędu zdefiniowanym przez  $J = (F(x(t)) - s(t))^2$ . Okazuje się, że powyższy algorytm zapisany w postaci jawnej można przedstawić w postaci sieci przypominającej sieć neuronową, w której pochodne cząstkowe błędu liczone są od tyłu począwszy od parametrów warstwy wyjściowej, a skończywszy na parametrach warstwy pierwszej. Z tego powodu w literaturze anglojęzycznej algorytm uczenia nosi nazwę *back propagation*.

W teorii sterowania własności aproksymacyjne sieci neuronowej predystynują ją do modelowania zjawisk nieliniowych. Rozważmy prosty obiekt nieliniowy pierwszego rzędu

$$y(t+1) = f(y(t), u(t)), \quad u(t) \in \mathcal{U}, \quad \mathcal{U} - \text{zwarty.}$$

Załóżmy, że funkcja  $f$  jest całkowicie nieznaną, a naszym zadaniem jest zbudowanie modelu obiektu na podstawie obserwacji wejścia  $u$  i wyjścia  $y$ . W tym celu możemy zdefiniować wielowarstwową sieć neuronową o dwóch wejściach i jednym wyjściu, a następnie uczyć ją tak, aby sygnał  $[y(t), u(t)]$  podawany na wejście sieci dawał na wyjściu sygnał o wartościach możliwie bliskich  $y(t+1)$ . Otrzymana w procesie uczenia sieć może posłużyć do stworzenia modelu obiektu. Liczba warstw i liczba neuronów w warstwach ukrytych zależy od złożoności funkcji  $f$ . W najprostszym przypadku, gdy funkcja  $f$  jest liniowa wystarczy zastosować sieć z dokładnie dwoma neuronami (ukrytym i wyjściowym)

Jeżeli celem jest sterowanie obiektem tak, aby zapewnić nadążanie wyjścia obiektu za wyjściem modelu odniesienia  $y_m(t+1) + a_m y(t) = u_c(t)$  bardziej korzystne jest identyfikowanie odwrotności funkcji  $f$ . Przedstawmy równanie obiektu w postaci

$$g(y(t+1), y(t)) = u(t),$$

gdzie  $g$  jest odwrotnością funkcji  $f$  (jeżeli funkcja  $f$  jest różnowartościowa, to  $g$  oznacza jedną z możliwych odwrotności  $f$ ). Zwróćmy uwagę, że jeżeli  $g$  jest funkcją znaną, to do sterowania obiektem możemy zastosować prawo sterowania

$$u(t) = g(y_m(t+1), y(t)).$$

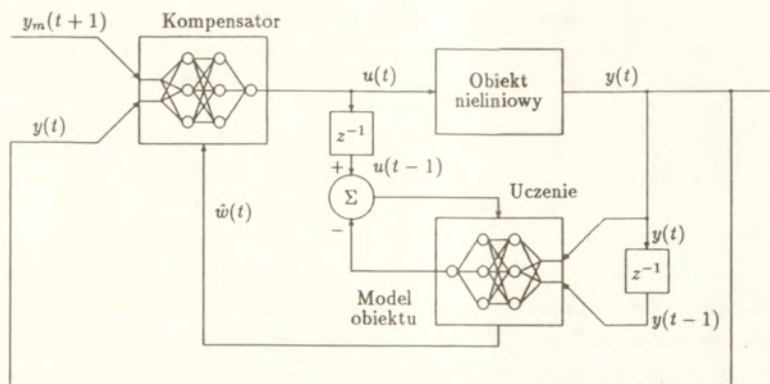
Jeżeli funkcja  $g$  jest nieznaną, możemy postąpić następująco. Definiujemy sieć neuronową o dwóch wejściach i jednym wyjściu i uczymy ją tak, aby aproksymowała ona funkcję  $g$ . Do sterowania stosujemy kompensator

$$u(t) = \hat{g}(y_m(t+1), y(t)), \quad (1.22)$$

gdzie  $\hat{g}$  jest oceną  $g$ .

Proces uczenia sieci zwykle przeprowadza się na podstawie wcześniej zarejestrowanych odpowiednio długich przebiegów wejścia i wyjścia przy użyciu symulacji komputerowej. Możliwe jest również zbudowanie układu adaptacyjnego, w którym identyfikacja funkcji  $g$  dokonywana jest na bieżąco i w którym do generacji sygnału wejściowego stosowany jest z kompensator z bieżącymi wartościami parametrów sieci. Schemat takiego układu przedstawiono na rys. 1.7. Należy jednak pamiętać, że nawet w umiarkowanie złożonych sieciach neuronowych liczba parametrów sieci sięga od kilkudziesięciu do kilkuset, zaś liczba iteracji wymagana w procesie uczenia sieci do kilkuset tysięcy. Proces uczenia sieci jest więc procesem stosunkowo wolnym.

Szereg struktur możliwych do zastosowania w procesach identyfikacji i sterowania przy użyciu sieci neuronowych wraz z bogatą literaturą przedmiotu zawarto w pracach przeglądowych Hunta i in. [52] oraz Narendra i Parthasarathy [115]. Nguyen i Widrow [117] przedstawili interesujący przykład zastosowania sieci neuronowych do sterowania procesem podjeżdżania ciężarówki z przyczepą do rampy załadowniczej. Porównanie regulatorów neuronowych i adaptacyjnych zawiera praca Yabuta i Yamata [146].



Rys. 1.7. Adaptacyjny układ sterowania wykorzystujący sieci neuronowe.

## 1.5 Własności adaptacyjnych układów sterowania

Główne zagadnienia teoretyczne dotyczące własności adaptacyjnych układów sterowania koncentrują się wokół stabilności, zbieżności i odporności tych układów. Na wstępie zdefiniujemy te pojęcia.

**DEFINICJA 1.1.** Powiemy, że adaptacyjny układ sterowania jest *globalnie stabilny*, jeśli dla dowolnych wartości początkowych układu i dla dowolnego ograniczonego sygnału sterującego  $u_c$  całkowity stan układu jest funkcją ograniczoną. Jeżeli stanu układu jest ograniczony jedynie dla pewnego zbioru wartości początkowych i pewnej klasy sygnałów sterujących mówimy, że układ sterowania jest *lokalnie stabilny*.

**DEFINICJA 1.2.** Powiemy, że algorytm adaptacji jest *wykładniczo zbieżny*, jeżeli oceny dążą wykładniczo do parametrów obiektu, tzn. jeżeli  $\|\hat{\theta}(t) - \theta^*\| \leq C\beta^t$  dla  $C > 0$  i  $0 < \beta < 1$ .

Wprowadzenie następnej definicji musimy poprzedzić pewnymi uwagami. Oczywiście z samej zasady działania regulatorów adaptacyjnych wynika, że ich zastosowanie nie wymaga znajomości parametrów obiektu. Zatem można uznać, że układy te są odporne na brak informacji o parametrach obiektu. Przy analizie stabilności i zbieżności układów adaptacyjnych w początkach rozwoju teorii zakładano, że obiekt jest liniowy, stacjonarny, wolny od zakłóceń, itp. Przypadek taki nazywamy *przypadkiem idealnym*. Jednak w praktyce wymienione idealizujące założenia nigdy nie są całkowicie spełnione. W związku z tym przyjmujemy następującą definicję odporności

DEFINICJA 1.3. Powiemy, że adaptacyjny układ sterowania jest *odporny* (ang. *robust*), jeśli układ ten jest stabilny w przypadku nieidealnym, kiedy występują pewne odstępstwa równań obiektu od założonego liniowego, stacjonarnego i wolnego od zakłóceń modelu.

W zależności od tego, czy stabilność układu jest globalna, czy lokalna mówimy o globalnej lub lokalnej odporności układu.

### Stabilność

Stabilność jest bez wątpienia podstawowym wymaganiem stawianym układom regulacji w praktyce. Z tego powodu, w początkach rozwoju teorii układów adaptacyjnych wysiłki badaczy zmierzały głównie do zaprojektowania regulatorów adaptacyjnych, które zapewniłyby globalną stabilność układu zamkniętego. Podstawową wadą gradientowych algorytmów adaptacji rozwijanych w latach sześćdziesiątych było to, iż dla zapewnienia stabilności tych układów wartości początkowe ocen  $\hat{\theta}$  musiały być bliska wartościom  $\theta^*$ . Z kolei algorytmy zaprojektowane na podstawie teorii stabilności Lapunowa wymagały znajomości stanu obiektu, co stanowiło istotne ograniczenie możliwości ich zastosowania w praktyce. Adaptacyjne algorytmy regulacji zapewniające dopasowanie do modelu odniesienia i wykorzystujące sprzężenie jedynie od wyjścia obiektu zostały zaprojektowane niezależnie w pracy Åströma i Wittenmarka [13] w roku 1973 i w pracy Monopoli [104] w roku 1974. Problem znalezienia dowodu stabilności tych algorytmów pozostawał jednak przez długi czas nierozwiązany. Przyczyną tego był fakt, iż adaptacyjne układy sterowania są układami silnie nieliniowymi i do ich analizy należało opracować całkiem nowe metody. Znaczącego postępu dokonano na przełomie lat siedemdziesiątych i osiemdziesiątych i dzisiaj układy z modelem odniesienia należą z pewnością do najlepiej zbadanych adaptacyjnych układów regulacji. Dowody stabilności bezpośrednich układów sterowania z czasem ciągłym zawierają między innymi prace [26, 113, 106], bezpośrednich układów sterowania z czasem dyskretnym prace [26, 42, 35, 62] i pośrednich układów sterowania z czasem dyskretnym prace [68, 39].

Przy analizie stabilności adaptacyjnych układów sterowania zaprojektowanych na podstawie innych procedur projektowych, na przykład na podstawie procedury zapewniającej przesunięcie biegunów, wystąpiły innego rodzaju trudności. W pracach [44, 92, 129] analizowane są algorytmy adaptacji, w których procedura projektowa  $\mathcal{F} : \mathcal{C} \ni \theta \mapsto \mathcal{F}(\theta)$  spełnia następujący warunek:

$$\left. \begin{array}{l} \forall \theta \in \mathcal{C} \text{ układ zamknięty składający się z obiektu o parametrach } \theta \text{ i} \\ \text{ kompensatora o parametrach } \mathcal{F}(\theta) \text{ jest asymptotycznie stabilny,} \end{array} \right\} \quad (1.23)$$

gdzie  $\mathcal{C}$  oznacza dziedzinę procedury projektowej. Pokazano, że w tego typu układach wszystkie sygnały są ograniczone jeżeli spełniona jest hipoteza:  $\hat{\theta}(t) \in \hat{\mathcal{C}}$  dla pewnego domkniętego podzbioru  $\hat{\mathcal{C}}$  zbioru  $\mathcal{C}$  i każdego  $t$ . Do tej pory nie wiadomo czy zawsze powyższa

hipoteza jest spełniona, a jeśli nie, to przy jakich założeniach. Dalsze badania skoncentrowały się więc na znalezieniu takich modyfikacji algorytmu adaptacji, które automatycznie zagwarantowałyby spełnienie warunku  $\hat{\theta}(t) \in \hat{C}$  dla odpowiednio dobranego domkniętego zbioru  $\hat{C} \subset C$ . W przypadku, gdy zbiór  $\hat{C}$  jest wypukły można zastosować prostą modyfikację algorytmu identyfikacji polegającą na projekcji ocen parametrów na zbiór  $\hat{C}$ , Goodwin i Sin [44], Kreisselmeier [79]. Ze względu jednak na zwykle złożoną postać zbioru  $C$  znalezienie odpowiedniego wypukłego  $\hat{C}$  zawierającego  $\theta^*$  wiąże się z koniecznością posiadania dość dokładnej informacji o obiekcie. Inna metoda opracowana przez Larminata [93] oraz Lozano-Leal i Goodwina [97] polega na zastosowaniu w chwilach, gdy  $\hat{\theta}(t) \notin \hat{C}$  specjalnej procedury przeszukującej przestrzeń ocen parametrów w celu znalezienia nowej oceny zawartej w  $\hat{C}$  i zgodnej z dotychczasowymi danymi pomiarowymi. Następny sposób wykorzystuje własność zbieżności ocen parametrów w przypadku odpowiedniego pobudzeniu obiektu, Anderson i Johnstone [5], Elliott i in. [28], Goodwin i Teoh [45], Janecki [58]. Polega on na zastosowaniu pobudzającego sygnału sterującego w chwilach, gdy ocena  $\hat{\theta}$  opuści zbiór  $\hat{C}$  i jednoczesnym wstrzymaniu uaktualniania parametrów kompensatora.

W przypadku, gdy procedura projektowa nie spełnia warunku (1.23) (i nie jest procedurą zapewniającą dopasowanie do modelu odniesienia) adaptacyjny układ sterowania zwykle nie jest globalnie, a jedynie lokalnie stabilny. Obszar stabilności zależy w tym przypadku od własności samej procedury projektowej.

### Zbieżność

Analizując prosty algorytm z modelem odniesienia dla obiektu pierwszego rzędu zaprojektowany na podstawie teorii stabilności Lapunowa (str. 24) pokazaliśmy, że algorytm ten zapewnia zbieżność błędu nadążania do zera. Nie oznacza to jednak, że oceny parametrów  $\hat{\theta}$  dążą do wartości  $\theta^*$ . Możemy się o tym przekonać rozważając następujący prosty przykład. Jeżeli wartości początkowe obiektu (1.8) i modelu (1.9) są zerowe oraz sygnał sterujący jest zerowy, to  $y \equiv 0$ ,  $y_m \equiv 0$  i  $\hat{\theta} = \text{const}$ , a więc  $e_m \equiv 0$  pomimo, że w ogólności  $\hat{\theta} \neq \theta^*$ . Własność zanikania błędu nadążania niezależnie od tego, czy oceny  $\hat{\theta}$  dążą do parametrów obiektu jest charakterystyczną cechą adaptacyjnych algorytmów sterowania z modelem odniesienia.

Opisana własność nie zachodzi, gdy parametry obiektu są zmienne. W tym przypadku, aby zapewnić poprawną pracę układu sterowania oceny powinny nadążać za parametrami obiektu. Można pokazać, że jest to równoważne wymaganiu, by w przypadku idealnym, w którym parametry  $\theta^*$  są stałe, oceny dążyły wykładniczo do  $\theta^*$ .

Zbieżność ocen parametrów w adaptacyjnych algorytmach sterowania może być pożądana także wtedy, gdy parametry obiektu są stałe. Przykładem są algorytmy oparte na procedurach projektowych, które nie zapewniają globalnej stabilności układu sterowania, a także algorytmy mające na celu jedynie dobranie parametrów kompensatora, który potem

będzie pracował samodzielnie.

Załóżmy, że poszukiwany wektor parametrów  $\theta^*$  spełnia równanie

$$\nu = \varphi^T \theta^*, \quad \varphi, \theta^* \in \mathbb{R}^m \quad (1.24)$$

dla pewnych mierzonych sygnałów  $\nu$  i  $\varphi$ . Jednym z najprostszych algorytmów identyfikujących parametry  $\theta^*$  jest algorytm typu gradientowego, który dla modelu (1.24) z czasem ciągłym ma postać [105]

$$\frac{d}{dt} \hat{\theta} = \gamma \varphi (\nu - \varphi^T \hat{\theta}), \quad \gamma > 0,$$

a dla modelu z czasem dyskretnym postać [42]

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \frac{\gamma \varphi(t) (\nu(t) - \varphi^T(t) \hat{\theta}(t-1))}{1 + \varphi^T(t) \varphi(t)}, \quad 2 > \gamma > 0.$$

Własność zbieżności algorytmu identyfikacji zależy od postaci sygnału  $\varphi$ . Podamy przykłady, w których algorytm identyfikacji na pewno nie jest zbieżny. Jeżeli  $\varphi = 0$ , to  $\hat{\theta} = \text{const}$ , a więc w ogólności  $\hat{\theta} \neq \theta^*$ . Jeżeli dla każdego  $t$   $\varphi(t) \in \mathcal{X}$ , gdzie  $\mathcal{X}$  jest pewną podprzestrzenią liniową  $\mathbb{R}^m$ , to dla każdego wektora  $\hat{\theta}(0)$  postaci  $\theta^* + h$ , gdzie  $h$  jest dowolnym wektorem ortogonalnym do  $\mathcal{X}$ , mamy  $\nu = \varphi^T \hat{\theta}(0)$ . Zatem również w tym przypadku  $\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(0) = \text{const}$ . Z powyższego przykładu wynika, iż warunkiem zbieżności algorytmu identyfikacji jest to, by przestrzeń rozpostarta na wektorach  $\varphi$  pokrywała się z  $\mathbb{R}^m$ . Ścisłe sformułowanie warunku zbieżności wykładniczej algorytmów identyfikacji jest następujące: istnieją liczby rzeczywiste dodatnie  $t_0$ ,  $\varrho$ , takie, że

$$\int_j^{j+T} \varphi(t) \varphi^T(t) dt \geq \varrho I \quad \forall j \geq t_0$$

w układach ciągłych i

$$\sum_{t=j}^{j+T-1} \varphi(t) \varphi^T(t) \geq \varrho I \quad \forall j \geq t_0$$

w układach dyskretnych. Sygnał  $\varphi \in \mathbb{R}^m$  spełniający powyższy warunek nosi nazwę *sygnału jednostajnie pobudzającego z okresem pobudzenia  $T$*  (piszemy krótko  $\varphi \in \mathcal{V}(m)$ ). (W literaturze anglojęzycznej dla pojęcia *jednostajnie pobudzający* stosuje się termin *persistently exciting*). Dowody zbieżności różnego rodzaju algorytmów identyfikacji znaleźć można w wielu pracach, w tym [28, 56, 57, 63, 73].

Zwróćmy uwagę, że nie mamy możliwości swobodnego kształtowania wektora  $\varphi$ , gdyż jego postać wynika z równań opisujących całość adaptacyjnego układu sterowania. Dlatego z praktycznego punktu widzenia bardziej interesujące jest wyrażenie warunku zbieżności w kategoriach sygnału sterującego  $u_c$ . Dla układów dyskretnych warunek taki podano w pracy Andersona i Johnstona [3] i ma on postać

$$\sum_{t=j}^{j+T-1} \begin{bmatrix} u_c(t+m-1) \\ \vdots \\ u_c(t) \end{bmatrix} [u_c(t+m-1) \dots u_c(t)] \geq \varrho I > 0 \quad \forall j \geq t_0,$$



gdzie  $m$  oznacza liczbę zidentyfikowanych parametrów. Sygnał  $u_c$  spełniający powyższy warunek nosi nazwę *skalarnego sygnału jednostajnie pobudzającego rzędu  $m$  z okresem pobudzenia  $T$*  (piszemy krótko  $u_c \in \mathcal{S}(m)$ ). Jedną z własności sygnałów pobudzających jest fakt, iż w układzie liniowym stacjonarnym i sterowalnym o wymiarze przestrzeni stanu  $m$  jednostajne pobudzenie sygnału wejściowego rzędu  $m$  zapewnia jednostajne pobudzenie stanu obiektu. Podjęto również próby scharakteryzowania klasy skalnych sygnałów pobudzających z czasem ciągłym. Dasgupta i in. [22] pokazali, że  $u_c \in \mathcal{S}(m)$ , jeżeli wektor

$$\left[ \frac{u_c}{s+a} \frac{u_c}{(s+a)^2} \dots \frac{u_c}{(s+a)^m} \right], \quad a > 0$$

należy do  $\mathcal{V}(m)$ . Boyd i Sastry [16] zastosowali podejście częstotliwościowe. Dla klasy sygnałów mających tzw. *linie spektralne* pokazali, że sygnał skalarne  $u_c \in \mathcal{S}(m)$ , jeżeli sygnał ten ma  $m$  różnych linii spektralnych. Z kolei w pracach Janeckiego [60] i Shimkina i Feuer [131] jednostajne pobudzenie  $u_c$  definiuje się za pomocą całek  $i$ -tego rzędu sygnału  $u_c$  ( $i = 1, \dots, m$ ). Ważną cechą tej ostatniej definicji jest to, że pozwala ona zdefiniować pojęcie okresu pobudzenia charakteryzujące dany sygnał pobudzający oraz że dopuszcza sygnały nieograniczone.

Początkowo przy analizie zbieżności adaptacyjnych układów sterowania wykorzystywano założenie o ograniczoności sygnałów. Później zwrócono uwagę, że dla pewnej klasy algorytmów identyfikacji (obejmującej np. znany algorytm z wykładniczym zapominaniem przeszłych danych) założenie to nie jest konieczne. Własność tą wykorzystano do projektowania globalnie stabilnych adaptacyjnych układów sterowania, Anderson i Johnstone [5], Elliott i in. [28], Goodwin i Teoh [45], Janecki [58]. Cechą charakterystycznych zaprojektowanych układów jest wprowadzenie modyfikacji polegającej na czasowym wstrzymywaniu procesu uaktualniania parametrów kompensatora i jednoczesnym stosowaniu sygnałów pobudzających obiekt.

Do bardziej specjalistycznych zagadnień należy analiza zbieżności w układach z zakłóceniami prawie okresowymi postaci  $\sum_{i=1}^n d_i \sin(\omega_i + \alpha_i)$ , Goodwin i in. [45], Janecki [61]. Okazuje się, że w takich układach rząd pobudzenia sygnału  $u_c$  zapewniający wykładniczą zbieżność ocen parametrów może być mniejszy od liczby zidentyfikowanych parametrów, gdyż zakłócenia zapewniają dodatkowe wewnętrzne pobudzenie obiektu.

## Odporność

W dowodach stabilności adaptacyjnych układów sterowania otrzymanych na przelomie lat siedemdziesiątych i osiemdziesiątych zakładano, że obiekt jest liniowy, stacjonarny, wolny od zakłóceń oraz, że rząd obiektu jest znany i skończony. Wiemy jednak, że w praktyce założenie takie nigdy nie jest całkowicie spełnione. Rzeczywiste obiekty sterowania są nieliniowe, są poddawane działaniu sygnałów zakłócających, pomiary są obciążone błędem

wynikającym z istnienia szumu pomiarowego, a część zjawisk występujących w obiektach jest niemodelowana. Zwykle nie jest także spełnione założenie o stacjonarności obiektu, gdyż zmienność parametrów obiektu jest jedną z głównych przyczyn stosowania regulatorów adaptacyjnych. W związku z powyższym, następnym krokiem w badaniu własności układów adaptacyjnych stało się poszukiwanie odpowiedzi na pytanie – jak regulatory adaptacyjne działają w bardziej realistycznych warunkach, gdy istnieją pewne, choćby nawet niewielkie, odstępstwa przyjętego modelu od obiektu.

Już w roku 1979 Egardt [26] podał przykład analityczny pokazujący, że w przypadku występowania ograniczonych zakłóceń działających na obiekt adaptacyjny układ sterowania z modelem odniesienia może być niestabilny. W przykładzie tym sygnał sterujący  $u_c$  i zakłócenie działające na obiekt  $d$  były równe

$$u_c(t) = \left( \sqrt{t(t-1)} - (t-1) \right) \left( 1 - \frac{1}{t-1} \right), \quad d(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{t-1}} + u_c(t).$$

I chociaż jest mało prawdopodobne, by w praktyce sygnały te miały dokładnie wyżej wymienioną postać, to ważny był sam fakt możliwości wystąpienia niestabilności układu. W następnych latach znaleziono szereg dalszych przykładów analitycznych i symulacyjnych ilustrujących brak odporności regulatorów adaptacyjnych w przypadku, gdy obiekt poddawany jest zakłóceniom i gdy występuje w nim część niemodelowana [5, 53, 126]. Proste wyjaśnienie przyczyn braku odporności regulatorów adaptacyjnych w przypadku występowania w obiekcie zakłóceń podał Åström [7, 8] wykorzystując technikę uśredniania sygnałów. Okazało się, że dla pewnej klasy sygnałów zakłócających i sygnałów sterujących punkt równowagi równania opisującego algorytm identyfikacji może być bardzo odległy od wartości parametrów obiektu  $\theta^*$ . W takim przypadku w układzie pojawia się pełzanie ocen parametrów w kierunku punktu równowagi, co z kolei może wywołać tzw. *zjawisko wybuchania* (ang. *bursting phenomenon*) polegające na pojawianiu się okresowej niestabilności układu sterowania. Wykorzystując podobną technikę Riedle i Kokotovic [125] pokazali, że układy adaptacyjne, w których występuje niemodelowana dynamika mogą być niestabilne, jeśli widmo sygnału sterującego zawarte jest w paśmie, w którym charakterystyki częstotliwościowe obiektu i modelu znacznie się różnią. Ścisłe i wyczerpujące przedstawienie zastosowania metody uśredniania do analizy odporności adaptacyjnych układów sterowania zawiera monografia Andersona i in. [2].

Od czasu uświadomienia sobie, że układy adaptacyjne mogą być niestabilne nawet przy niewielkich odstępstwach modelu od obiektu, wiele wysiłku poświęcono na znalezienie takich modyfikacji algorytmów adaptacji, które gwarantowałyby stabilność układu również w przypadku nieidealnym. Egardt [26] już w roku 1979 pokazał, że stabilność układów, w których występują zakłócenia działające na obiekt może zostać zagwarantowana poprzez zapewnienie ograniczonej ocen parametrów. Podobny rezultat otrzymali Kreisselmeier i Narendra [84]. Następnie Prały [124] zwrócił uwagę, że jeżeli wprowadzimy odpowiednie

unormowanie sygnałów stosowanych w algorytmie identyfikacji, to metodę analizy stabilności układów z zakłóceniami można po niewielkich modyfikacjach zastosować również w układach z niemodelowaną dynamiką. Od tej pory opublikowano szereg prac analizujących odporność regulatorów adaptacyjnych, w których zastosowano dwie wyżej wymienione idee, a więc unormowanie sygnałów i modyfikację algorytmu identyfikacji zapewniającą ograniczoną ocen [40, 54, 55, 80, 83, 101, 111, 138, 38, 37]. Warto jednak zaznaczyć, że udowodniona w tych pracach ograniczoność sygnałów występujących w układzie sterowania ma głównie znaczenie teoretyczne i często wcale nie oznacza poprawnej pracy układu z praktycznego punktu widzenia. W szczególności zaproponowane modyfikacje algorytmów adaptacji nie zapobiegają pelzaniu ocen parametrów i zjawisku wybuchania.

Alternatywnym sposobem zapewnienia odporności regulatorów adaptacyjnych jest zastosowanie jednostajnie pobudzającego sygnału sterującego. Wspomnieliśmy, że pobudzenie wektora  $\varphi$  zapewnia wykładniczą zbieżność ocen parametrów. Z wykładniczej stabilności równań opisujących błąd identyfikacji  $\tilde{\theta}$  wynika ograniczoność wszystkich sygnałów w układzie sterowania również w przypadku nieidealnym, o ile odstępstwa obiektu od przyjętego modelu i wartość początkowa błędu  $\tilde{\theta}(0)$  są wystarczająco małe. Wykorzystując powyższe podejście możemy jednak udowodnić jedynie lokalną stabilność układu sterowania, Anderson [1], Anderson i Johnstone [4]. Pierwszy rezultat mający charakter globalny uzyskany został przez Narendrę i Annaswamy [110] dla pewnej wąskiej klasy układów sterowania z czasem ciągłym. Klasa ta obejmuje układy z modelem odniesienia dla obiektów poddanych działaniu ograniczonych zakłóceń, w których różnica  $n^*$  pomiędzy stopniem mianownika i stopniem licznika transmitancji obiektu jest równa 1. Powyższy rezultat został następnie przeniesiony przez Lee i Narendrę [94] na układy dyskretnie w czasie, w których wartość  $n^*$  może być dowolna oraz przez Janeckiego [67, 66] na układy niestacjonarne, w których może występować niemodelowana dynamika. Rezultaty dwóch ostatnich cytowanych prac stanowią temat rozdziału 5.

Wadą stosowania sygnałów pobudzających dla zapewnienia odporności układów sterowania jest fakt, iż często zadana trajektoria obiektu nie spełnia warunku pobudzenia. Stąd wynikają liczne próby osiągnięcia odporności jedynie poprzez modyfikację algorytmów adaptacji. Autor jednak przychylił się do zdania, że stosowanie sygnałów pobudzających jest niezbędne i przyszłe badania powinny iść w kierunku poszukiwania metod, które pozwolą zmniejszyć stopień pobudzenia sygnału sterującego. Wyniki zawarte w rozdziale 6 tej pracy stanowią pełną próbę spełnienia powyższego postulatu.

## Algorytmy identyfikacji na bieżąco

Jednym elementów adaptacyjnego układu sterowania jest algorytm identyfikujący parametry obiektu. Ponieważ parametry obiektu mogą się zmieniać w czasie, a proces identyfikacji przeprowadzany jest na podstawie pomiarów wykonywanych na bieżąco, algorytm identyfikacji ma zwykle postać rekurencyjną. Rekurencyjny algorytm identyfikacji, nazywany również *algorytmem identyfikacji na bieżąco* lub *algorytmem identyfikacji w czasie rzeczywistym*, to algorytm, w którym ocena parametrów w chwili  $t$  jest wyznaczana na podstawie bieżących pomiarów i oceny parametrów w chwili  $t - 1$  (oraz być może dodatkowych zmiennych generowanych na podstawie pomiarów). Celem niniejszego rozdziału jest dokonanie przeglądu kilku wybranych algorytmów identyfikacji na bieżąco i podanie ich podstawowych własności.

### 2.1 Zagadnienie parametryzacji równań obiektu

Na wstępie omówimy zagadnienie parametryzacji równań identyfikowanego obiektu. Przez parametryzację obiektu rozumiemy wybór odpowiedniego modelu obiektu i parametrów opisujących ten model. Wyjaśnimy to na prostym przykładzie. Rozważmy obiekt opisany równaniem różnicowym pierwszego rzędu

$$y(t) = -ay(t-1) + bu(t-1). \quad (2.1)$$

Model (2.1) z parametrami  $a$  i  $b$  stanowi najbardziej naturalną metodę parametryzacji obiektu. Równanie obiektu możemy również zapisać w jednej z trzech następujących postaci

$$y(t) = b(cy(t-1) + u(t-1)), \quad c = -a/b, \quad (2.2)$$

$$y(t) = -ay(t-1) - a'y(t-2) + bu(t-1) + b'u(t-2), \quad a' = b' = 0, \quad (2.3)$$

$$y(t) = a^2y(t-2) + bu(t-1) - abu(t-2). \quad (2.4)$$

Każde z równań (2.1)–(2.4) może zostać przyjęte za model obiektu. W równaniu (2.2) parametrami modelu będą parametry  $b$  i  $c$ , w równaniu (2.3) parametry  $a$ ,  $a'$ ,  $b$ ,  $b'$ , zaś

w równaniu (2.4) parametry  $a^2$ ,  $b$  i  $ab$ . Każdy z rozważanych modeli charakteryzuje się pewnymi szczególnymi cechami. Przykładowo, zwróćmy uwagę, że każde z równań (2.1), (2.3) i (2.4) może być zapisane w postaci

$$\nu(t) = \varphi^T(t)\theta^*, \quad (2.5)$$

gdzie  $\theta^*$  jest wektorem parametrów, zaś  $\nu$  i  $\varphi$  są zmiennymi zależącymi w sposób znany od wejścia i wyjścia obiektu. Modele, które mogą być przedstawione w postaci (2.5) nazywamy *modelami liniowymi względem parametrów*. Zgodnie z tą definicją, model (2.2) jest modelem nieliniowym względem parametrów. Dla modeli nieliniowych nie opracowano jak dotąd prostych rekurencyjnych algorytmów identyfikacji. Model typu (2.3) nazywamy *modelem niejednoznaczny*, gdyż jak się za chwilę przekonamy istnieje wiele czwórek parametrów  $(a, a', b, b')$  spełniających równanie (2.3). Z niejednoznaczną parametryzacją mamy do czynienia w przypadku, gdy rząd modelu jest wyższy od rzędu obiektu. Z kolei model (2.4) jest jednoznaczny, lecz *nieminimalny*. Parametryzacje nieminimalne są charakterystyczne dla tzw. bezpośrednich adaptacyjnych algorytmów sterowania.

Podamy obecnie jeden ze sposobów parametryzacji obiektu dynamicznego opisanego równaniem różnicowym

$$A(z)y(t) = B(z)u(t), \quad (2.6)$$

gdzie  $A(z)$  i  $B(z)$  są wielomianami postaci

$$A(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0, \quad (2.7)$$

$$B(z) = b_{n-1}z^{n-1} + \dots + b_0. \quad (2.8)$$

Niech  $F(z)$  będzie dowolnym wielomianem Hurwitza rzędu  $n$ . Zdefiniujmy zmienne prze-filtrowane

$$y_f(t) = \frac{1}{F(z)}y(t), \quad u_f(t) = \frac{1}{F(z)}u(t). \quad (2.9)$$

Wykorzystując zmienne  $u_f$  i  $y_f$  możemy równanie obiektu zapisać w postaci

$$A(z)y_f(t) = B(z)u_f(t). \quad (2.10)$$

(Mówiąc ściślej, równanie (2.10) zachodzi z dokładnością do sygnałów zanikających wykładniczo). Wprowadzając oznaczenia

$$\nu(t) = z^n y_f(t), \quad (2.11)$$

$$\theta^* = [a_{n-1} \dots a_0 \ b_{n-1} \dots b_0]^T, \quad (2.12)$$

$$\varphi(t) = [-z^{n-1}y_f(t) \dots -y_f(t) \ z^{n-1}u_f(t) \dots u_f(t)]^T \quad (2.13)$$

dostajemy żadaną postać (2.5).

W identyczny sposób można przeprowadzić parametryzację obiektu opisanego równaniem różniczkowym, tzn. równaniem (2.6), w którym w miejsce operatora  $z$  występuje operator różniczkowania  $s$ . W przypadku, gdy obiekt jest dyskretny najprościej jest przyjąć  $F(z) = z^n$ . Otrzymujemy wtedy

$$\nu(t) = y(t), \quad \dot{\varphi}(t) = [-y(t-1) \dots - y(t-n) u(t-1) \dots u(t-n)]^T.$$

Pokażemy, że przypadku, gdy rząd obiektu jest mniejszy niż  $n$ , to opisana wyżej parametryzacja jest niejednoznaczna. Przyjmijmy, że  $a_0 = a_1 = \dots = a_{n'-1} = b_0 = \dots = b_{n'-1} = 0$ . Zauważmy, że  $H\varphi(t) = 0$ , gdzie  $H$  jest macierzą o wymiarach  $2n \times n'$  postaci

$$H = \begin{bmatrix} 1 & a_{n-1} & \dots & a_{n'} & 0 & \dots & 0 & b_{n'} & \dots & b_{n'} \\ & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & a_{n-1} & \dots & a_{n'} & 0 & \dots & 0 & b_{n-1} & \dots & b_{n'} \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Zbiór wszystkich wektorów  $\varphi$  spełniających równanie  $H\varphi = 0$  oznaczmy przez  $\mathcal{X}$ . Zbiór  $\mathcal{X}$  jest podprzestrzenią liniową przestrzeni  $\mathbb{R}^{2n}$  o wymiarze  $n'$ . Zdefiniujmy zbiór

$$\Theta = \{\theta \in \mathbb{R}^{2n} : (\theta - \theta^*) \in \mathcal{X}^\perp\}, \quad (2.15)$$

gdzie  $\mathcal{X}^\perp$  oznacza podprzestrzeń ortogonalną do  $\mathcal{X}$ . Dla każdego  $\theta \in \Theta$  mamy

$$\nu(t) - \varphi^T(t)\theta = \varphi^T(t)(\theta^* - \theta) = 0. \quad (2.16)$$

Zatem zbiór  $\Theta$  jest zbiorem wszystkich wektorów parametrów, dla których spełnione jest równanie (2.5). Zbiór  $\Theta$  jest rozmaitością liniową o wymiarze  $n - n'$  przechodzącą przez punkt  $\theta^*$ .

## 2.2 Przegląd wybranych algorytmów identyfikacji na bieżąco

Istnieje duża różnorodność algorytmów identyfikacji na bieżąco stosowanych w adaptacyjnych układach sterowania. Często poszczególni badacze proponują własne oryginalne rozwiązania. Duża część stosowanych algorytmów wywodzi się z klasycznej metody najmniejszych kwadratów. Metodę tą omówimy więc na pierwszym miejscu. Zakładamy, że wektor identyfikowanych parametrów  $\theta^* = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_m]^T$  spełnia zależność (2.5) dla  $t = 1, 2, \dots$ , gdzie sygnał skalarny  $\nu$  i wektorowy  $\varphi$  zależą w znany sposób od wielkości mierzonych. Algorytmy identyfikacji dla modeli ciągłych w czasie omawiamy w paragrafie (2.5).

### Algorytm najmniejszej sumy kwadratów

Rekurencyjny algorytm najmniejszej sumy kwadratów opisany jest równaniami ([118], str. 110)

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \frac{\Gamma(t-1)\varphi(t)\varepsilon_m(t)}{1 + \varphi^T(t)\Gamma(t-1)\varphi(t)}, \quad \hat{\theta}(0) = \hat{\theta}_0, \quad (2.17)$$

$$\varepsilon_m(t) = \nu(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}(t-1), \quad (2.18)$$

$$P(t) = \Gamma(t-1) - \frac{\Gamma(t-1)\varphi(t)\varphi^T(t)\Gamma(t-1)}{1 + \varphi^T(t)\Gamma(t-1)\varphi(t)}, \quad \Gamma(0) = \Gamma_0 \quad (2.19)$$

$$\Gamma(t) = P(t). \quad (2.20)$$

Nazwa *algorytm najmniejszej sumy kwadratów* pochodzi stąd, że ocena  $\hat{\theta}(t)$  w każdej chwili czasu  $t$  minimalizuje funkcję

$$J(\theta, t) = \sum_{i=1}^t (\nu(i) - \varphi^T(i)\theta)^2 + (\theta_0 - \theta)^T \Gamma_0^{-1} (\theta_0 - \theta). \quad (2.21)$$

Ostatni składnik funkcji  $J(\theta, t)$  został wprowadzony po to, żeby zadanie minimalizacji funkcji  $J$  miało rozwiązanie dla wszystkich wartości  $t$ . W tradycyjnej nierekurencyjnej metodzie najmniejszej sumy kwadratów składnik ten nie występuje.

Algorytm najmniejszej sumy kwadratów jest często rozważany w pracach teoretycznych dotyczących sterowania adaptacyjnego obiektami z zakłóceniami stochastycznymi [86, 96, 132]. W praktyce jednak algorytm ten ma niewielkie zastosowanie. Zwróćmy uwagę, że ocena  $\hat{\theta}(t)$  generowana za pomocą równań (2.17)–(2.20) zależy od wszystkich dotychczasowych pomiarów uwzględnianych z jednakową wagą. Wobec tego wpływ kolejnych pomiarów na wartość  $\hat{\theta}(t)$  jest z czasem coraz mniejszy. Zjawisko to jest niekorzystne w przypadku, gdy parametry obiektu  $\theta^*$  zmieniają się w czasie, nawet gdyby zmiany te były bardzo niewielkie.

Poniżej omówimy kilka algorytmów, które mogą być również zastosowane do identyfikacji obiektów o zmiennych parametrach. Algorytmy te różnią się między sobą sposobem generowania macierzy  $\Gamma$ . Jednym z nich jest rekurencyjny algorytm najmniejszych kwadratów z wykładniczym zapominaniem przeszłych danych.

### Algorytm z wykładniczym zapominaniem przeszłych danych

Algorytm ten otrzymujemy stosując w miejsce funkcji (2.21) funkcję

$$J(\theta, t) = \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} (\nu(i) - \varphi^T(i)\theta)^2 + \lambda^t (\theta_0 - \theta)^T \Gamma_0^{-1} (\theta_0 - \theta), \quad (2.22)$$

gdzie  $\lambda$  jest parametrem spełniającym nierówność  $0 < \lambda < 1$ . W kryterium (2.22) składniki zależące od starszych pomiarów mnożone są przez czynnik  $\lambda^{t-i}$ , co oznacza, że przy wyznaczaniu oceny  $\hat{\theta}$  starsze pomiary uwzględniane są z mniejszą wagą niż pomiary bieżące. Parametr  $\lambda$  nosi nazwę *współczynnika zapominania* (ang. *forgetting factor*).

Ciąg ocen minimalizujący wskaźnik (2.22) otrzymujemy stosując w miejsce (2.20) wzór

$$\Gamma(t) = \frac{1}{\lambda} P(t). \quad (2.23)$$

W praktyce aby zapewnić odpowiednie tłumienie zakłóceń wpływających na obiekt parametru  $\lambda$  dobiera się najczęściej tak, by  $0,95 \leq \lambda \leq 0,99$ .

Wadą algorytmu jest to, że zapominanie przeszłych danych zachodzi również wtedy, gdy na przykład  $\varphi = 0$ , a więc wtedy, gdy nie napływają żadne informacje o obiekcie. Zauważmy, że z warunku  $\varphi(t) = 0$  wynika  $\Gamma(t) = \frac{1}{\lambda}\Gamma(t-1)$ . Zatem brak informacji o obiekcie wywołuje wykładnicze narastanie macierzy  $\Gamma$ . Jednak nadmierny wzrost wartości własnych macierzy  $\Gamma$  jest niekorzystny, gdyż może spowodować duży, przypadkowy skok wartości ocen parametrów i w konsekwencji niestabilność układu sterowania. Więcej szczegółów na temat tego zjawiska można znaleźć w pracach Wittenmarka i Åströma [144, 145].

Do wad algorytmu z wykładniczym zapominaniem przeszłych danych możemy zaliczyć również to, że algorytm ten nie może być stosowany w przypadku, gdy parametryzacja (2.5) jest niejednoznaczna. Wykorzystując lemat o inwersji macierzy (dodatek A) równanie (2.19) zapiszmy w postaci

$$P^{-1}(t) = \Gamma^{-1}(t) + \varphi(t)\varphi^T(t). \quad (2.24)$$

Załóżmy, że parametryzacja (2.5) jest niejednoznaczna, tzn.  $\varphi^T(t)h \equiv 0$  dla pewnego  $h \in \mathbb{R}^m$ . Z równań (2.23) i (2.24) dostajemy wtedy

$$h^T \Gamma^{-1} h = \lambda h^T \Gamma^{-1} h. \quad (2.25)$$

Zatem norma macierzy  $\Gamma(t)$  rośnie wykładniczo, gdy  $t \rightarrow \infty$ , co uniemożliwia praktyczną implementację algorytmu.

Wyeliminowanie wyżej wymienionych wad wymaga wprowadzenia do algorytmu takich modyfikacji, które automatycznie, tzn. dla dowolnego ciągu danych  $\{\varphi(t)\}$  zapewniają ograniczoność macierzy  $\Gamma$ . Możliwość taką daje zastosowanie zmiennego współczynnika zapominania.

### Algorytm ze zmiennym współczynnikiem zapominania

Załóżmy, że w miejsce (2.24) stosujemy procedurę

$$\Gamma(t) = \frac{1}{\lambda(t)} P(t), \quad (2.26)$$

gdzie  $\lambda(t)$  jest zmiennym współczynnikiem zapominania. Współczynnik  $\lambda(t)$  powinien być dobierany w taki sposób, by zapewnić zapominanie przeszłych danych, a jednocześnie zagwarantować spełnienie warunku

$$\Gamma(t) \leq Q \quad \forall t > 0, \quad (2.27)$$

dla pewnej macierzy symetrycznej dodatniej  $Q$ . Jednym z możliwych sposobów generowania współczynnika zapominania jest algorytm

$$\lambda(t) = \text{Tr}(P(t)Q^{-1}) \quad (2.28)$$



gdzie  $\text{Tr}(\cdot)$  oznacza ślad macierzy. Rzeczywiście, mamy  $\text{Tr}(\Gamma(t)Q^{-1}) = \frac{1}{\lambda(t)} \text{Tr}(P(t)Q^{-1}) = 1$ . Wobec tego  $\Gamma(t) \leq Q$ . Opisany powyżej algorytm nosi nazwę *algorytmu ze stałym śladem macierzy*  $\Gamma$  i po raz pierwszy był zastosowany przez Fortesque i in. [34].

Zwróćmy uwagę, że  $\lambda(t) = 1$ , gdy  $\varphi(t) = 0$ . Zatem w przypadku, gdy nie napływają żadne informacje o obiekcie zapominanie przeszłych danych zostaje wstrzymane. Pomimo tego zastosowanie algorytmu ze zmiennym współczynnikiem zapominania jest również ograniczone do przypadku, gdy parametryzacja obiektu jest jednoznaczna. Zauważmy bowiem, że jeżeli  $\varphi^T(t)h \equiv 0 \forall t$  i pewnego  $h \in R^m$ , to (porównaj (2.25))

$$h^T \Gamma^{-1}(t)h = \lambda(t)h^T \Gamma^{-1}(t-1)h = \lambda(t)\lambda(t-1) \dots \lambda(1)h^T \Gamma^{-1}(t-1)h.$$

Macierz  $\Gamma(t)$  jest więc ograniczona tylko wtedy, gdy  $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = 1$ . Zatem w przypadku, gdy parametryzacja (2.5) jest niejednoznaczna, asymptotyczne własności algorytmu ze zmiennym współczynnikiem zapominania są zbliżone do własności algorytmu najmniejszej sumy kwadratów.

Poniżej przedstawimy szeroką klasę algorytmów zachowujących korzystne cechy algorytmu z wykładniczym zapominaniem, a jednocześnie zapewniające ograniczoność macierzy  $\Gamma$ , Janecki [63].

### Algorytmy z kierunkowym zapominaniem przeszłych danych

Niech  $f : R^+ \rightarrow R^+$  będzie funkcją, którą zdefiniujemy później i niech  $Q = Q^T$  będzie macierzą symetryczną dodatnią reprezentującą największą dopuszczalną wartość macierzy  $\Gamma$ . Załóżmy, że

$$\Gamma_0 = Q, \quad (2.29)$$

$$\Gamma(t) = Q^{1/2} f(Q^{-1/2} P(t) Q^{-1/2}) Q^{1/2}. \quad (2.30)$$

(Przyjmujemy  $f(P) = \Lambda^T \text{diag}[f(p_i)] \Lambda$ , gdzie  $P = \Lambda^T \text{diag}[p_i] \Lambda$ ,  $\Lambda^T \Lambda = I$ ). Dobierając w różny sposób funkcję  $f$  możemy otrzymać różne rodzaje algorytmów identyfikacji. Przykładowo, dla  $f(w) = w/\lambda$  z  $0 < \lambda < 1$  dostajemy algorytm z wykładniczym zapominaniem przeszłych danych. Algorytm ten, jak stwierdziliśmy, nie zapewnia jednak ograniczoności macierzy  $\Gamma$ . Naszym celem będzie dobranie funkcji  $f$  w taki sposób, żeby  $\Gamma(t) \leq Q \forall t$ . W tym celu załóżmy, że funkcja  $f$  spełnia następujące warunki:

(a) 
$$f(w) \leq 1 \quad \text{dla} \quad 0 < w \leq 1 \quad (2.31)$$

(b) 
$$f(w) \geq w \quad \text{dla} \quad 0 < w \leq 1 \quad (2.32)$$

(c) Istnieją stałe dodatnie  $\kappa$  i  $\tilde{\lambda}$ , gdzie  $\tilde{\lambda} < 1$  takie, że

$$f(w) \geq w/\tilde{\lambda} \quad \text{dla} \quad 0 < w \leq \kappa \quad (2.33)$$

Znaczenie powyższych warunków jest następujące. Warunek (a) wraz z założeniem (2.29) zapewnia, że  $\Gamma(t) \leq Q \forall t$ . Warunek (b) jest konieczny dla zapewnienia takich własności algorytmu jak ograniczoność ciągu ocen  $\{\hat{\theta}(t)\}$ , zbieżność różnicy  $\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(t-1)$  do zera, itp. (patrz twierdzenie 2.1 w dalszej części tego rozdziału). Warunek (c) zapobiega zanikaniu macierzy  $\Gamma(t)$ , gdy  $t \rightarrow \infty$ . W szczególności warunek ten wyklucza z rozważań algorytm najmniejszej sumy kwadratów. Ponadto, ze względów praktycznych istotne jest, by wyznaczanie macierzy  $\Gamma(t)$  ze wzoru (2.30) nie wymagało zbyt dużego nakładu obliczeń. Z tego względu funkcja  $f$  powinna być w zasadzie wielomianem, lub co najwyżej funkcją wymierną.

Istnieje wiele przykładów wielomianów spełniających warunki (a)-(c). Na początek zażądajmy dodatkowo, by

$$f(w) = w/\lambda \quad \text{dla małych } w, \quad (2.34)$$

gdzie  $0 < \lambda < 1$ . Powyższy warunek zapewnia, że macierz  $\Gamma(t)$  jest bliska wartości  $\frac{1}{\lambda}P(t)$ , gdy  $P(t) \ll Q$ . Parametr  $\lambda$  odgrywa więc obecnie podobną rolę co współczynnik zapominania w algorytmie z wykładniczym zapominaniem przeszłych danych.

W przypadku, gdy  $\lambda \geq \frac{1}{2}$  najprostszym, a przez to i najważniejszym przykładem wielomianu  $f$  spełniającego wymagania (2.31)-(2.34) jest wielomian

$$f(w) = \frac{1}{\lambda}[w - (1 - \lambda)w^2]. \quad (2.35)$$

W tym przypadku, zależność (2.30) przyjmuje postać

$$\Gamma(t) = \frac{1}{\lambda} [P(t) - (1 - \lambda)P(t)Q^{-1}P(t)]. \quad (2.36)$$

Dokładniejsze przybliżenie funkcji  $w/\lambda$  w zakresie  $0 \leq w < \lambda$  można uzyskać dobierając wielomiany wyższych rzędów. Przykładowo, gdy  $\lambda \geq 2/3$ , możemy przyjąć

$$f(w) = \frac{1}{\lambda} [w - (1 - \lambda)w^3]. \quad (2.37)$$

Stosując wielomiany wyższych rzędów możemy również osłabić ograniczenie na dopuszczalną wartość współczynnika  $\lambda$ . Na przykład, wielomian

$$f(w) = \frac{1}{\lambda} [w + (3\lambda - 2)w^2 - (2\lambda - 1)w^3] \quad (2.38)$$

spełnia warunki (2.31)-(2.33) dla  $\lambda \geq 1/3$ . Interesujący algorytm otrzymujemy przyjmując

$$f(w) = \frac{w}{\lambda + (1 - \lambda)w}, \quad (2.39)$$

co po zastosowaniu lematu o inwersji macierzy daje

$$\Gamma^{-1}(t) = \lambda P^{-1}(t) + (1 - \lambda)Q^{-1}. \quad (2.40)$$

Algorytm ten dość często rozważany jest w literaturze, Åström[6], Larminat [92]. Jego wadą jest konieczność odwracania macierzy  $\Gamma$ .

Gdy zrezygnujemy z warunku (2.34), najprościej jest przyjąć

$$f(w) = \varepsilon + (1 - \varepsilon)w, \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \quad (2.41)$$

W tym przypadku, zależność (2.30) przyjmuje postać

$$\Gamma(t) = (1 - \varepsilon)P(t) + \varepsilon Q. \quad (2.42)$$

Najlepsze efekty otrzymujemy przyjmując  $\varepsilon \simeq 0,01$ .

Ostatnim algorytmem który omówimy jest *algorytm ze stałą macierzą  $\Gamma$* .

### Algorytm ze stałą macierzą $\Gamma$

Algorytm ten otrzymujemy przyjmując

$$\Gamma(t) = Q, \quad \forall t \geq 1 \quad (2.43)$$

dla pewnej macierzy symetrycznej dodatniej  $Q$ . W odróżnieniu od algorytmów omawianych dotychczas, w algorytmie (2.43) korekta oceny parametrów zależy jedynie od bieżącego pomiaru. Jakość identyfikacji za pomocą algorytmu ze stałą macierzą  $\Gamma$  jest znacznie niższa niż za pomocą algorytmów, w których macierz  $\Gamma$  generowana jest na podstawie pomiarów. Pomimo to, ze względu na swoją prostotę algorytm ten jest często rozważany w pracach teoretycznych dotyczących sterowania adaptacyjnego. Na zakończenie zauważmy, że wzór (2.43) otrzymujemy przyjmując w równaniu (2.30)  $f(w) = 1$ .

Szereg innych modyfikacji algorytmu najmniejszych kwadratów można znaleźć w pracach [28, 39, 82, 90, 128].

## 2.3 Własności algorytmów identyfikacji na bieżąco

Celem tego paragrafu jest omówienie asymptotycznych własności algorytmów identyfikacji na bieżąco. Na wstępie zajmiemy się własnościami, które nie zależą od danych pomiarowych. Tak jak dotychczas przyjmujemy, że oceny parametrów spełniają równanie

$$\nu(t) = \varphi^T(t)\theta^*, \quad \varphi(t), \theta^* \in R^m. \quad (2.44)$$

**Twierdzenie 2.1.** *Rozważmy algorytm (2.17)–(2.19), w którym macierz  $\Gamma$  jest wyznaczana za pomocą jednego ze sposobów omówionych w paragrafie 2.2. Wówczas:*

- (i) *ciąg ocen parametrów  $\{\hat{\theta}(t)\}$  jest ograniczony,*
- (ii)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{\theta}(t+1) - \hat{\theta}(t)\| = 0 \quad (2.45)$$

(iii)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_p(t) = 0, \quad \text{gdzie} \quad \varepsilon_p(t) = \nu(t) - \varphi^T(t) \hat{\theta}(t). \quad (2.46)$$

Dowód powyższego twierdzenia dla poszczególnych algorytmów identyfikacji znaleźć można w wielu publikacjach. Poniżej przedstawimy dowód z pracy [63] dla klasy algorytmów opisanych równaniami (2.17)–(2.19), (2.29) i (2.30), w których funkcja  $f$  spełnia warunki (2.31) i (2.32). Dowód ten obejmuje również przypadek  $f(w) = w$ , w którym otrzymujemy algorytm najmniejszej sumy kwadratów.

**DOWÓD.** Zdefiniujmy błąd identyfikacji przez  $\phi = \hat{\theta} - \theta^*$ . Z równań (2.5), (2.17)–(2.19) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \phi^T(t)P^{-1}(t)\phi(t) - \phi^T(t-1)P^{-1}(t-1)\phi(t-1) &= -\varepsilon_p^2(t)(1 + \varphi^T(t)\Gamma(t-1)\varphi(t)) \\ &\quad - \phi^T(t-1)(P^{-1}(t-1) - \Gamma^{-1}(t-1))\phi(t-1). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Ponadto, z warunku (2.31) wynika nierówność

$$P^{-1}(t) \geq \Gamma^{-1}(t). \quad (2.48)$$

Zatem

$$\phi^T(t)P^{-1}(t)\phi(t) \leq \phi^T(t-1)P^{-1}(t-1)\phi(t-1) \leq \dots \leq \phi_0^T Q^{-1} \phi_0 \quad (2.49)$$

i

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_p^2(t)(1 + \varphi^T(t)\Gamma(t-1)\varphi(t)) = 0, \quad (2.50)$$

gdzie  $\phi_0 = \hat{\theta}_0 - \theta^*$ . Ponieważ macierz  $P(t)$  jest ograniczona, więc z nierówności (2.49) wynika własność (i). Ponadto, z (2.50) wynika własność (iii). Pozostało udowodnić (ii). Z równań (2.19)–(2.17) i definicji zmiennej  $\varepsilon_p$  dostajemy tożsamość

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \Gamma(t-1)\varphi(t)\varepsilon_p(t), \quad (2.51)$$

skąd

$$(\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(t-1))^T \Gamma^{-1}(t-1) (\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(t-1)) = \varepsilon_p^2(t) \varphi^T(t) \Gamma(t-1) \varphi(t). \quad (2.52)$$

Zatem własność (ii) wynika z równań (2.50), (2.52) i nierówności  $\Gamma(t) \leq Q$ .  $\square$

Zauważmy, że udowodnione własności zachodzą dla dowolnego ciągu danych pomiarowych  $\{\varphi(t)\}$ . W dalszej części pracy pokażemy w jaki sposób własności te są wykorzystywane do analizy stabilności adaptacyjnych układów sterowania.

Jeżeli ciąg  $\{\varphi(t)\}$  jest ograniczony, to z własności (iii) wynika, że błąd pomiędzy wartością obserwowaną  $\nu(t)$  a wartością przewidywaną  $\hat{\nu}(t) := \varphi^T(t)\hat{\theta}(t-1)$  maleje do zera. Nie oznacza to jednak, że oceny dążą do parametrów  $\theta^*$ . Przykładowo, dla  $\varphi(t) \equiv 0$

mamy  $\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(0)$  i w ogólności  $\hat{\theta}(t) \neq \theta^*$  pomimo, że  $\nu(t) = \hat{\nu}(t)$ . Jednak dla zapewnienia odporności regulatorów adaptacyjnych pożądane jest, aby w przypadku idealnym, kiedy parametry obiektu są stałe, oceny  $\hat{\theta}$  dążyły wykładniczo do parametrów obiektu. W pozostałej części tego paragrafu podajemy warunki zapewniające taką własność.

Rozpatrywać będziemy przypadek ogólny, gdy parametryzacja (2.44) jest niejednoznaczna. Oznaczmy przez  $\Theta$  zbiór wszystkich wektorów spełniających równanie (2.44), a przez  $\mathcal{X}$  podprzestrzeń liniową  $\mathcal{X} = \{\varphi \in \mathbf{R}^m : \varphi^T(\theta - \theta^*) = 0 \forall \theta \in \Theta\}$ .

DEFINICJA 2.1. Powiemy, że algorytm identyfikacji jest *wykładniczo zbieżny*, jeżeli

$$\exists \theta \in \Theta, \beta < 1 : \|\hat{\theta}(t) - \theta\| \leq C\beta^t.$$

Parametr  $\beta$  nazywamy *szybkością zbieżności algorytmu*.

Poniżej podamy warunki zbieżności dla algorytmu, w którym macierz  $\Gamma$  wyznaczana jest ze wzoru (2.30), [63].

**Twierdzenie 2.2.** *Rozważmy algorytm (2.17)–(2.19), (2.29)–(2.30), w którym funkcja  $f$  spełnia warunki (2.32), (2.33). Załóżmy, że istnieje liczba naturalna  $T$  i liczba rzeczywista dodatnia  $\rho$ , że*

$$\sum_{t=j}^{j+T-1} h^T \varphi(t) \varphi^T(t) h \geq \rho h^T h \quad \forall h \in \mathcal{X}, j \geq 0. \quad (2.53)$$

*Jeżeli ciąg  $\{\varphi(t)\}$  jest ograniczony, to ciąg ocen  $\{\hat{\theta}(t)\}$  jest wykładniczo zbieżny i  $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\theta}(t) \in \Theta$ .*

Sygnal  $\varphi$  spełniający warunek (2.53) będziemy nazywali *sygnałem jednostajnie pobudzającym w podprzestrzeni  $\mathcal{X}$* , a gdy  $\mathcal{X} = \mathbf{R}^m$  krótko *sygnałem jednostajnie pobudzającym* (ang. *persistently exciting signal*).

DOWÓD. Na początku rozważymy przypadek  $\mathcal{X} = \mathbf{R}^m$ ,  $Q = I$ . Udowodnimy, że warunki (2.32) i (2.33) zapewniają istnienie liczby dodatniej  $\tilde{\varepsilon}$  takiej, że

$$\tilde{\varepsilon} I \leq P(t) \quad \forall t \geq 0. \quad (2.54)$$

Niech  $p_1(t), p_2(t), \dots, p_m(t)$  będą wartości własnymi macierzy  $P(t)$ . Wówczas  $\gamma_i(t) := f(p_i(t))$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) będą wartościami własnymi macierzy  $\Gamma(t)$ . Z warunku (2.32) wynika, że  $\gamma_i(t) \geq p_i(t)$ . Zatem

$$\gamma_i(t) \geq \kappa, \text{ jeśli } p_i(t) \geq \kappa. \quad (2.55)$$

Z drugiej strony, z warunku (2.33) wynika, że

$$\gamma_i(t) \geq p_i(t)/\bar{\lambda}, \text{ jeśli } p_i(t) \leq \kappa. \quad (2.56)$$

Wykorzystując powyższe własności dostajemy

$$\begin{aligned} \|\Gamma^{-1}(t)\| &= \max_t (\gamma_i^{-1}(t)) \leq \max(\kappa^{-1}, \bar{\lambda} \max_t (p_i^{-1}(t))) \\ &= \max(\kappa^{-1}, \bar{\lambda} \|P^{-1}(t)\|) \leq \kappa^{-1} + \bar{\lambda} \|P^{-1}(t)\|. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Dalej, z równania (2.24) wynika, że

$$\|P^{-1}(t+1)\| \leq \|\Gamma^{-1}(t)\| + M^2, \quad (2.58)$$

gdzie  $M = \sup_t \|\varphi(t)\|$ . Wstawiając (2.57) do (2.58) otrzymujemy

$$\|P^{-1}(t+1)\| \leq \kappa^{-1} + M^2 + \bar{\lambda} \|P^{-1}(t)\|. \quad (2.59)$$

Zatem własność (2.54) zachodzi dla  $\bar{\varepsilon} = (1 - \bar{\lambda})/(\kappa^{-1} + M^2)$ .

Wykorzystamy teraz własność pobudzenia (2.53). Podstawiając  $h = \phi(j)$  w (2.53) otrzymujemy

$$\sum_{t=j}^{j+T-1} (\varphi^T(t)\phi(j))^2 \geq \varrho \|\phi(j)\|^2. \quad (2.60)$$

W dalszej części dowodu wykorzystamy następujące własności

$$\phi(t) - \phi(j) = \sum_{i=j}^{t-1} \Gamma(i-1)\varphi(i)\varepsilon_p(i), \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} &\phi^T(j+T-1)P^{-1}(j+T)\phi(j+T-1) - \phi^T(j)P^{-1}(j)\phi(j) \\ &\leq - \sum_{t=j}^{j+T-1} \varepsilon_p^2(t)(1 + \varphi^T(t)\Gamma(t-1)\varphi(t)) \end{aligned} \quad (2.62)$$

Równanie (2.61) wynika z równania (2.17), a nierówność (2.62) z nierówności (2.47). Mamy

$$\begin{aligned} |\varphi^T(t)\phi(j)| &= |\varepsilon_p(t) - \varphi^T(t)(\phi(t) - \phi(j))| = \left| \varepsilon_p(t) + \varphi^T(t) \sum_{i=j}^{t-1} \Gamma(i-1)\varphi(i)\varepsilon_p(i) \right| \\ &\leq |\varepsilon_p(t)|(1 + \varphi^T(t)\Gamma(t-1)\varphi(t))^{1/2} + \|\varphi(t)\| \sum_{i=j}^{t-1} \|\Gamma^{1/2}(i-1)\| \|\Gamma^{1/2}(i-1)\varphi(i)\| |\varepsilon_p(i)| \\ &\leq M \sum_{i=j}^t |\varepsilon_p(i)|(1 + \varphi^T(i)\Gamma(i-1)\varphi(i))^{1/2} \end{aligned} \quad (2.63)$$

(przypominamy, że przyjęliśmy  $\Gamma(t) \leq I$ .) Zatem wykorzystując nierówność Cauchy'ego ([102], str. 36) dostajemy

$$\sum_{t=j}^{j+T-1} (\varphi^T(t)\phi(j))^2 \leq M^2 \sum_{t=j}^{j+T-1} \left( \sum_{i=j}^t |\varepsilon_p(i)|(1 + \varphi^T(i)\Gamma(i-1)\varphi(i))^{1/2} \right)^2$$

$$\begin{aligned} &\leq M^2 \sum_{t=j}^{j+T-1} (t+1-j) \sum_{i=j}^t \varepsilon_p^2(i) (1 + \varphi^T(i)\Gamma(i-1)\varphi(i)) \\ &\leq M^2 T^2 \sum_{t=j}^{j+T-1} \varepsilon_p^2(i) (1 + \varphi^T(i)\Gamma(i-1)\varphi(i)). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Wykorzystując teraz kolejno (2.64), (2.60) i (2.54) z nierówności (2.62) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \phi^T(j+T-1)P^{-1}(j+T-1)\phi(j+T-1) - \phi^T(j)P^{-1}(j)\phi(j) &\leq -\frac{1}{M^2 T^2} \sum_{t=j}^{j+T-1} (\varphi^T(t)\phi(j))^2 \\ &\leq -\frac{\varrho}{M^2 T^2} \|\phi(j)\|^2 \leq -\frac{\varrho \bar{\varepsilon}}{M^2 T^2} \phi^T(j)P^{-1}(j)\phi(j), \end{aligned}$$

skąd

$$\phi^T(j+T-1)P^{-1}(j+T-1)\phi(j+T-1) \leq \beta \phi^T(j)P^{-1}(j)\phi(j), \quad (2.65)$$

gdzie  $\beta = 1 - \varrho \bar{\varepsilon} / M^2 T^2$ . Zatem ciąg  $\{\phi(t)\}$  dąży wykładniczo do zera, gdy  $t \rightarrow \infty$ .

Obecnie rozpatrzmy przypadek ogólny, gdy parametryzacja (2.44) jest niejednoznaczna. Oznaczmy  $k = \dim \mathcal{X}$ . Niech  $l_1, l_2, \dots, l_k$  będzie dowolną bazą ortonormalną w przestrzeni  $Q^{1/2}\mathcal{X}$  i niech  $l_{k+1}, \dots, l_m$  będzie dowolną bazą ortonormalną w przestrzeni  $Q^{-1/2}\mathcal{X}^\perp$ . Zdefiniujemy macierz  $L = [l_1 \ l_2 \ \dots \ l_m]$ . Ponieważ przestrzenie  $Q^{1/2}\mathcal{X}$  i  $Q^{-1/2}\mathcal{X}^\perp$  są ortogonalne, więc wektory  $l_1, l_2, \dots, l_m$  tworzą bazę ortonormalną w  $\mathbb{R}^m$ . Ponieważ  $\Gamma_0 = Q$ , więc

$$L^T Q^{-1/2} \Gamma_0 Q^{-1/2} L = LL^T = I.$$

Ponadto zauważmy, że wektor  $L^T Q^{1/2} \varphi(t)$  ma postać  $[\tilde{\varphi}^T(t) \ 0]^T$ , gdzie  $\tilde{\varphi}(t) \in \mathbb{R}^k$ . Wykorzystując powyższe własności można pokazać za pomocą indukcji, że

$$L^T Q^{-1/2} \Gamma(t) Q^{1/2} L = \begin{bmatrix} \tilde{\Gamma}(t) & \\ & I \end{bmatrix} \begin{matrix} \} k \\ \} m-k \end{matrix},$$

gdzie

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}(t) &= f(\hat{P}(t)), \\ \hat{P}(t) &= \hat{\Gamma}(t-1) - \frac{\tilde{\Gamma}(t-1)\tilde{\varphi}(t)\tilde{\varphi}^T(t)\tilde{\Gamma}(t-1)}{1 + \tilde{\varphi}^T(t)\tilde{\Gamma}(t-1)\tilde{\varphi}(t)}, \quad \hat{\Gamma}_0 = I. \end{aligned}$$

Oznaczmy  $L^T Q^{-1/2} \phi(t) = \begin{bmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{bmatrix}$ , gdzie  $\phi_1(t) \in \mathbb{R}^k$  i  $\phi_2 \in \mathbb{R}^{m-k}$ . Z równań (2.44), (2.17) otrzymujemy

$$\phi_1(t) = \phi_1(t-1) - \frac{\tilde{\Gamma}(t-1)\tilde{\varphi}(t)\tilde{\varphi}^T(t)\phi_1(t-1)}{1 + \tilde{\varphi}^T(t)\tilde{\Gamma}(t-1)\tilde{\varphi}(t)}, \quad \phi_2(t) = \phi_2(t-1).$$

Z założenia (2.53) wynika, że  $\sum_{t=j}^{j+T-1} h^T \hat{\varphi}(t) \hat{\varphi}^T(t) h \geq \rho' h^T h \quad \forall h \in \mathbf{R}^k, j \geq 0$ , gdzie  $\rho' = \rho / \lambda_{\min}[Q]$ . Zatem z pierwszej części tego dowodu wynika, że ciąg  $\{\phi_1(t)\}$  dąży wykładniczo do zera. W rezultacie ciąg  $\{\phi(t)\}$  dąży wykładniczo do

$$Q^{1/2} L \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_2(0) \end{bmatrix} \in \mathcal{X}^\perp,$$

lub równoważnie, ciąg  $\{\hat{\theta}(t)\}$  dąży wykładniczo do

$$\theta^* + Q^{1/2} L \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_2(0) \end{bmatrix} \in \Theta.$$

□

W twierdzeniu 2.2 nie zakładaliśmy, że funkcja  $f$  spełnia warunek (2.31). Zatem twierdzenie to obejmuje również algorytm z wykładniczym zapominaniem przeszłych danych. Dowód zbieżności dla algorytmu ze stałym śladem macierzy  $\Gamma$  można znaleźć w pracy [57].

W adaptacyjnych układach sterowania zbieżność ocen do parametrów obiektu zapewnia stabilność układu. Jednak ze względu na to, że wśród założeń twierdzenia 2.2 występuje założenie o ograniczoności ciągu  $\{\varphi(t)\}$  zrozumiałe jest, że własność ta nie może być wykorzystana w analizie stabilności. Okazuje się, że założenie  $\{\|\varphi(t)\|\} \in l^\infty$  może być pominięte przy nieco mocniejszych założeniach dotyczących funkcji  $f$  niż (2.31)–(2.33), [63].

**Twierdzenie 2.3.** *Rozważmy algorytm (2.17)–(2.19), (2.29), (2.30), w którym funkcja  $f$  spełnia warunek*

$$\frac{w}{\lambda_2 + (1 - \lambda_2)w} \leq f(w) \leq \frac{w}{\lambda_1 + (1 - \lambda_1)w} \quad (2.66)$$

dla pewnych stałych  $\lambda_1, \lambda_2$  spełniających nierówność  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < 1$ . Jeżeli spełniony jest warunek pobudzenia (2.53) dla pewnej liczby naturalnej  $T$  i rzeczywistej dodatniej  $\rho$ , to ciąg  $\{\hat{\theta}(t)\}$  jest wykładniczo zbieżny i  $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\theta}(t) \in \Theta$ .

DOWÓD. Rozważymy jedynie przypadek  $\mathcal{X} = \mathbf{R}^m, Q = I$ . Oznaczmy

$$\psi(w) = \frac{1}{f(1/w)}, \quad \gamma(w) = \frac{1}{wf(1/w)} \quad \text{dla } w \geq 1.$$

Zwróćmy uwagę, że wykorzystując powyższe oznaczenia dostajemy  $\Gamma^{-1}(t) = \psi(P^{-1}(t)) = \gamma(P^{-1}(t))P^{-1}(t)$ . Z nierówności (2.66) wynika, że

$$\lambda_1 w + (1 - \lambda_1) \leq \psi(w) \leq \lambda_2 w + (1 - \lambda_2). \quad (2.67)$$

Wykorzystując równania (2.5) i (2.17)–(2.19) można pokazać, że

$$P^{-1}(t)\phi(t) = \Gamma^{-1}(t-1)\phi(t-1), \quad (2.68)$$



skąd

$$P^{-1}(t)\phi(t) = \gamma(P^{-1}(t-1))P^{-1}(t-1)\phi(t-1) = \gamma(P^{-1}(t-1)) \dots \gamma(P^{-1}(1))\Gamma_0^{-1}\phi_0. \quad (2.69)$$

Zatem

$$\|\phi(t)\| \leq \|\phi_0\| \prod_{i=1}^{t-1} \|\gamma(P^{-1}(i))\| \quad (2.70)$$

(wykorzystaliśmy tu własności  $P(t) \leq Q = I$ ,  $\Gamma_0 = I$ ). Niech  $h \in \mathbf{R}^m$  będzie dowolnym wektorem o długości 1. Z zależności (2.24), (2.67) i (2.53) otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} h^T P^{-1}(t)h &= h^T \Gamma^{-1}(t-1)h + (h^T \varphi(t))^2 = h^T \psi(P^{-1}(t-1))h + (h^T \varphi(t))^2 \\ &\geq \lambda_1 h^T P^{-1}(t-1)h + (1 - \lambda_1) + (h^T \varphi(t))^2 \\ &\geq \lambda_1^T h^T P^{-1}(t-T)h + (1 - \lambda_1) \sum_{i=1}^{T-1} \lambda_1^i + \sum_{i=t-T+1}^t (h^T \varphi(i))^2 \lambda_1^{t-i} \\ &\geq \lambda_1^T + (1 - \lambda_1) \frac{1 - \lambda_1^T}{1 - \lambda_1} + \lambda_1^{T-1} \sum_{i=t-T+1}^t (h^T \varphi(i))^2 \\ &\geq 1 + \lambda_1^{T-1} \varrho, \quad k \geq T. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Zatem

$$P^{-1}(t) \geq (1 + \lambda_1^T \varrho)I, \quad k \geq T. \quad (2.72)$$

Ponadto zauważmy, że  $\gamma(w) \leq \lambda_2 + (1 - \lambda_2)/w$ , czyli

$$\gamma(P^{-1}(t)) \leq \lambda_2 I + (1 - \lambda_2)P(t) \leq \left( \lambda_2 + \frac{1 - \lambda_2}{1 + \lambda_1^{T-1} \varrho} \right) I = \beta I, \quad t \geq T. \quad (2.73)$$

Stąd  $\|\gamma(P^{-1}(t))\| \leq \beta$ . Zwróćmy jeszcze uwagę, że  $\beta < 1$ . Zatem na mocy (2.70) ciąg  $\{\phi(t)\}$  dąży wykładniczo do zera gdy  $t \rightarrow \infty$ .  $\square$

Można pokazać, że również dla algorytmu z wykładniczym zapominaniem przeszłych danych i algorytmu ze stałym śladem macierzy  $\Gamma$  warunek o ograniczoności ciągu  $\varphi$  nie jest konieczny dla zapewnienia wykładniczej zbieżności.

Funkcja  $f$  zdefiniowana przez (2.39) spełnia warunek (2.66) dla  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ . W ogólności funkcja wymierna  $f$  spełnia warunek (2.66) jeśli

$$w < f(w) < 1 \quad \text{dla } 0 < w < 1,$$

i

$$0 < f'(1) < 1, \quad f(0) = 0,$$

gdzie  $f'$  oznacza pochodną funkcji  $f$ . Wykorzystując powyższą własność można sprawdzić, że funkcje (2.35), (2.37) i (2.38) spełniają warunek (2.66), gdy współczynnik  $\lambda$  jest większy odpowiednio od  $1/2$ ,  $2/3$  i  $1/3$ .

W przypadku, gdy parametry identyfikowanego obiektu są zmienne, warunek pobudzenia (2.53) zapewnia nadążanie ocen za parametrami obiektu. Załóżmy, że algorytmy opisane w paragrafie 2.2 zostały zastosowane do identyfikacji parametrów modelu

$$\nu(t) = \varphi^T(t)\theta^*(t), \text{ w którym } \|\theta^*(t+1) - \theta^*(t)\| \leq \epsilon, \mathcal{X} = \mathbf{R}^m \quad (2.74)$$

Zwróćmy uwagę, że błąd oceny  $\phi(t) = \theta^*(t) - \hat{\theta}(t)$  spełnia równanie

$$\phi(t) = \Lambda(t)\phi(t-1) + \Lambda(t)(\theta^*(t) - \theta^*(t-1)), \quad (2.75)$$

gdzie

$$\Lambda(t) = I - \frac{\Gamma(t-1)\varphi(t)\varphi^T(t)}{1 + \varphi^T(t)\Gamma(t-1)\varphi(t)}. \quad (2.76)$$

Jeżeli ciąg  $\{\varphi(t)\}$  jest ograniczony i spełnia warunek pobudzenia z  $\mathcal{X} = \mathbf{R}^m$ , to z rezultatów twierdzenia (2.2) wynika, że część jednorodna równania różnicowego (2.75) jest wykładniczo stabilna, czyli, że  $\|\Lambda(t+i-1)\Lambda(t+i-2)\dots\Lambda(t)\| \leq C\bar{\beta}^i \forall k, i$ , gdzie  $0 < \bar{\beta} < 1$ . W konsekwencji

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\phi(t)\| \leq \bar{C}\epsilon \quad (2.77)$$

dla pewnej stałej  $\bar{C}$ . Zatem jeżeli szybkość zmian parametrów obiektu jest niewielka, to również asymptotyczna wartość błędu oceny  $\phi$  jest niewielka. Bardziej szczegółową analizę własności algorytmów identyfikacji w przypadku zmiennych parametrów obiektu przedstawimy w rozdziale 6.

## 2.4 Algorytmy identyfikacji z ograniczeniami

Niech  $\hat{C}$  będzie domkniętym podzbiorem przestrzeni parametrów  $\mathbf{R}^m$  spełniającym warunek

$$\theta^* \in \text{int } \hat{C}, \quad (2.78)$$

gdzie  $\text{int } \hat{C}$  oznacza wnętrze zbioru  $\hat{C}$ . Przypuśćmy, że naszym celem jest zaprojektowanie algorytmu identyfikacji na bieżąco, który zapewnia

$$\hat{\theta}(t) \in \hat{C} \quad \forall t \geq 0. \quad (2.79)$$

Z wymaganiem takim możemy się spotkać w następujących dwóch przypadkach.

- Posiadamy pewną informację o parametrach obiektu, którą chcemy wykorzystać w procesie identyfikacji.
- Chcemy uniknąć sytuacji, w których procedura wyznaczająca parametry obiektu nie ma rozwiązania.

Załóżmy na przykład, że znane są ograniczenia z góry  $\bar{\theta}_i$  i z dołu  $\underline{\theta}_i$ , ( $i = 1, \dots, m$ ) poszczególnych elementów wektora  $\theta^*$ . W takim przypadku rozsądnie jest zażądać, by  $\hat{\theta}(t) \in \mathcal{C}$ , gdzie  $\hat{\mathcal{C}} = \{\theta \in \mathbf{R}^m : \bar{\theta}_i \geq \theta_i \geq \underline{\theta}_i\}$ . Z drugim wymienionym wyżej przypadkiem spotykamy się w adaptacyjnym algorytmie sterowania z przesuwaniem biegunów opisanym w paragrafie 3.1. Procedura projektowa zastosowana w tym algorytmie wymaga, by bieżące oceny wielomianów  $A(z)$  i  $B(z)$  były względnie pierwsze. Warunek taki zapewnimy przyjmując  $\hat{\mathcal{C}} = \{\theta \in \mathbf{R}^m : \mathcal{R}(A, B) \geq \varepsilon\}$ ,  $\varepsilon > 0$ , gdzie  $\mathcal{R}(A, B)$  jest rugownikiem pary wielomianów  $A$  i  $B$  (patrz dodatek B).

Jeśli zbiór  $\hat{\mathcal{C}}$  jest zbiorem wypukłym, to możemy zastosować prostą modyfikację algorytmu identyfikacji polegającą na zastąpieniu równania (2.17) przez

$$\hat{\theta}'(t) = \hat{\theta}(t-1) + \frac{\Gamma(t-1)\varphi(t)\varepsilon_m}{1 + \varphi^T(t)\Gamma(t-1)\varphi(t)}, \quad \hat{\theta}(0) = \hat{\theta}_0, \quad (2.80)$$

$$\hat{\theta}(t) = \pi(\hat{\theta}'_k, \Gamma(t), \hat{\mathcal{C}}), \quad (2.81)$$

gdzie  $\pi$  jest operacją rzutowania zdefiniowaną przez warunki

$$\pi(x, \Gamma, \hat{\mathcal{C}}) \in \hat{\mathcal{C}}, \quad \|x - \pi(x, \Gamma, \hat{\mathcal{C}})\|_{\Gamma^{-1}} \leq \|x - y\|_{\Gamma^{-1}} \quad \forall y \in \hat{\mathcal{C}}. \quad (2.82)$$

Metody tej nie możemy jednak stosować w przypadku, gdy zbiór  $\mathcal{C}$  nie jest wypukły, ponieważ wówczas własności (i)-(iii) w twierdzeniu 2.1 nie zachodzą.

**PRZYKŁAD 2.1.** Rozważmy obiekt (2.6) i parametryzację (2.11)–(2.13). Załóżmy, że algorytm identyfikacji parametrów  $\theta^*$  powinien zapewniać

$$\hat{b}_{n-1}(t) \neq 0 \quad \forall t \geq 0.$$

Z wymaganiem takim spotkamy się w pośrednim adaptacyjnym algorytmie sterowania z modelem odniesienia rozważanym w paragrafie 3.2. Załóżmy, że znak parametru  $b_{n-1}$  jest znany (powiedzmy +) i niech  $\beta$  będzie dowolną liczbą dodatnią taką, że  $b_{n-1} \geq \beta$ . Przyjmijmy

$$\hat{\mathcal{C}} = \{\theta \in \mathbf{R}^{2n} : b_{n-1} \geq \beta\}.$$

Można pokazać, że w tym przypadku równanie (2.81) przyjmie postać

$$\hat{\theta}(t) = \Gamma(t-1) \left( I - \frac{ee^T}{e^T \Gamma(t-1)e} \right) \hat{\theta}'(t),$$

gdzie  $e = \underbrace{[0 \dots 0]}_n \underbrace{[1 \ 0 \dots 0]}_n^T$ . △

Interesujący sposób modyfikacji algorytmu identyfikacji zapewniający spełnienie warunku (2.78) dla dowolnego  $\hat{\mathcal{C}}$  podany został w pracy Larminata [93] dla algorytmu najmniejszej sumy kwadratów i w pracy Lozano-Leal i Goodwina [97] dla algorytmu ze stałym śladem macierzy  $\Gamma$ . W modyfikacjach tych istotną rolę odgrywają pewne szczególne

własności tych algorytmów, w tym zbieżność ocen parametrów. Tym niemniej, pomysły zastosowane w pracach [93, 97] mogą być po niewielkich zmianach zastosowane również w innych rodzajach algorytmów identyfikacji.

Załóżmy, że wiemy z góry, iż parametr  $\theta^*$  należy do elipsoidy

$$\Omega_0 = \{\Pi_0 v + \hat{\psi}_0 : v \in \mathbb{R}^m, \|v\| \leq 1\}, \quad (2.83)$$

gdzie  $\Pi_0$  jest macierzą o rozmiarze  $m \times m$  i  $\hat{\psi}_0$  jest wektorem. Przykładowo, jeżeli  $\theta_n^*$  jest nominalną wartością parametru  $\theta^*$  i znamy ograniczenie z góry  $M$  normy błędu  $\theta_n^* - \theta^*$ , to  $\theta^* \in \Omega_0$  dla  $\Pi_0 = MI$  i  $\hat{\psi}_0 = \theta_n^*$ . Zbiór  $\Omega$  jest w tym przypadku kulą o promieniu  $M$  i środku w punkcie  $\theta_n^*$ .

Dla zadanego ciągu  $\{\varphi(t)\}$ , niech  $\Omega_t$  będzie zbiorem wszystkich możliwych wartości ocen parametrów w chwili  $t$  otrzymanych dla różnych wartości początkowych  $\hat{\theta}_0$  spełniających warunek  $\hat{\theta}_0 \in \Omega_0$ . Stosując metodę indukcji nietrudno pokazać, że

$$\Omega_t = \{\Pi(t)v + \hat{\psi}(t) : v \in \mathbb{R}^m, \|v\| \leq 1\}, \quad (2.84)$$

gdzie

$$\hat{\psi}(t) = \hat{\psi}(t-1) + \frac{\Gamma(t-1)\varphi(t)(\nu(t) - \varphi^T(t)\hat{\psi}(t-1))}{1 + \varphi^T(t)\Gamma(t-1)\varphi(t)}, \quad \hat{\psi}(0) = \hat{\psi}_0, \quad (2.85)$$

$$\Pi(t) = \Pi(t-1) - \frac{\Gamma(t-1)\varphi(t)\varphi^T(t)\Pi(t-1)}{1 + \varphi^T(t)\Gamma(t-1)\varphi(t)}, \quad \Pi(0) = \Pi_0. \quad (2.86)$$

Niech  $\hat{C}_1$  będzie zbiorem domkniętym takim, że  $\theta^* \in \text{int } \hat{C}_1$ ,  $\hat{C}_1 \subset \text{int } \hat{C}$ . Zbiór  $\hat{C}_1$  jest trochę węższy niż  $\hat{C}$ , lecz również zawiera w swoim wnętrzu wektor  $\theta^*$ . Zastosujmy następującą procedurę generowania ocen parametrów. Jeżeli  $\hat{\psi} \in \hat{C}$  dla  $t \in [0, T]$ , to przyjmujemy  $\hat{\theta}(t) = \hat{\psi}(t)$ . Jeżeli dla pewnego  $t'$ ,  $\hat{\psi}(t) \in \hat{C}$  dla  $t \in [0, t'-1]$ , zaś  $\hat{\psi}(t') \notin \hat{C}$ , to znajdujemy wektor  $v : \|v\| \leq 1$  taki, że  $\Pi(t')v + \hat{\psi}(t') \in \hat{C}_1$ . Wektor taki oczywiście istnieje, ponieważ zbiór  $\Omega_{t'}$  zawiera wektor  $\theta^*$ , a  $\theta^* \in \hat{C}_1$ . Przyjmujemy  $\hat{\theta}(t') = \Pi(t')v + \hat{\psi}(t')$  i dla  $t > t'$  ocenę  $\hat{\theta}(t)$  w dalszym ciągu wyznaczamy z równania

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \frac{\Gamma(t-1)\varphi(t)(\nu(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}(t-1))}{1 + \varphi^T(t)\Gamma(t-1)\varphi(t)}. \quad (2.87)$$

Jeżeli w pewnej kolejnej chwili  $t''$  ocena  $\hat{\theta}(t'')$  wyznaczona z zależności (2.87) nie należy do zbioru  $\hat{C}$ , powtórnie znajdujemy wektor  $v : \|v\| = 1$  taki, że  $\Pi(t'')v + \hat{\psi}(t'') \in \hat{C}_1$ , następnie przyjmujemy  $\hat{\theta}(t'') = \Pi(t'')v + \hat{\psi}(t'')$  i kontynuujemy wyznaczanie ocen parametrów z (2.87). Operacje poszukiwania wektora  $v$  i odpowiedniego korygowania ocen parametrów przeprowadzamy za każdym razem, gdy wartość  $\hat{\theta}(t)$  wyznaczona z (2.87) nie należy do  $\hat{C}$ .

Opisana wyżej modyfikacja algorytmu identyfikacji zachowuje własności (i), (iii) twierdzenia 2.1, natomiast w miejsce (ii) zachodzi własność

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \|\hat{\theta}(t+1) - \hat{\theta}(t)\| = 0.$$

W celu znalezienia wektora  $v$ :  $\|v\| < 1$ , który dla danych  $\Pi$  i  $\psi$  spełnia warunek  $\Pi v + \psi \in \hat{C}_1$  należy wcześniej dobrać zbiór wektorów  $\{v_1, v_2, \dots\}$  równomiernie i odpowiednio gęsto rozłożonych w kuli  $\|v\| \leq 1$  i kolejno sprawdzać, czy  $\Pi v_i + \psi \in \hat{C}_1$ . W niektórych jednak przypadkach problem ten można rozwiązać analitycznie

**PRZYKŁAD 2.2.** Załóżmy, że zbiór  $\hat{C}_1$  ma postać

$$\hat{C}_1 = \{\theta \in \mathbb{R}^{2n} : |b_{n-1}| \geq \beta\}, \quad (2.88)$$

gdzie  $\beta$  jest znanym dodatnim ograniczeniem z dołu modułu parametru  $b_{n-1}$  (patrz przykład 2.1). Jeżeli wartość parametru  $b_{n-1}$  jest większa niż  $\beta$ , to oczywiście  $\theta^* \in \hat{C}_1$ . Załóżmy, że macierz  $\Pi$  i wektor  $\psi$  są takie, że  $\theta^* \in \Omega = \{\Pi v + \psi : \|v\| \leq 1\}$ . Element  $n+1$  wektora  $\Pi v + \psi$  jest równy  $\Pi_{n+1}v + \psi_{n+1}$ , gdzie  $\Pi_{n+1}$  jest  $(n+1)$ -szym rzędem macierzy  $\Pi$  i  $\psi_{n+1}$  jest  $(n+1)$ -szym elementem wektora  $\psi$ . Zauważmy, że liczba  $\pi_{n+1}v + \psi_{n+1}$  przyjmuje wartości z przedziału  $[-\|\pi_{n+1}\| + \psi_{n+1}, \|\pi_{n+1}\| + \psi_{n+1}]$ . Z warunku  $\theta^* \in \Omega$  wynika więc, że co najmniej moduł jednej z liczb  $-\|\pi_{n+1}\| + \psi_{n+1}$  i  $\|\pi_{n+1}\| + \psi_{n+1}$  jest większy od  $\beta$ . Zatem dla co najmniej jednej z dwóch wartości wektora  $v$ :  $\pi_{n+1}^T / \|\pi_{n+1}\|$ ,  $-\pi_{n+1}^T / \|\pi_{n+1}\|$  wektor  $\hat{\theta} = \Pi v + \psi \in \hat{C}_1$ .  $\triangle$

Wadą opisaną metody, w odróżnieniu od metody polegającej na rzutowaniu ocen parametrów na zbiór wypukły  $C$  jest to, że nie może być ona zastosowana do identyfikacji modeli ze zmiennymi parametrami.

## 2.5 Algorytmy identyfikacji na bieżąco z czasem ciągłym

Dotychczas zakładaliśmy, że czas  $t$  jest dyskretny. W tym paragrafie podamy przykłady algorytmów identyfikacji na bieżąco dla modelu (2.44), w którym czas  $t$  jest ciągły.

Ogólny schemat algorytmu identyfikacji z czasem ciągłym ma postać

$$\frac{d}{dt} \hat{\theta}(t) = \Gamma(t) \varphi(t) \varepsilon_m(t), \quad \varepsilon_m(t) = \nu(t) - \varphi^T(t) \hat{\theta}(t). \quad (2.89)$$

Macierz  $\Gamma(t)$  może być zdefiniowana na wiele sposobów. Najprościej jest przyjąć  $\Gamma(t) = Q = \text{const}$  dla pewnej macierzy  $Q = Q^T > 0$ . Algorytm ze stałą macierzą  $\Gamma$  charakteryzuje się jednak dość wolną zbieżnością ocen do parameterów  $\theta^*$ . Odpowiednik algorytmu najmniejszej sumy kwadratów z wykładniczym zapominaniem przeszłych danych otrzymujemy przyjmując

$$\frac{d}{dt} \Gamma(t) = \alpha \Gamma(t) - \Gamma(t) \varphi(t) \varphi^T(t) \Gamma(t), \quad \Gamma(0) = \Gamma_0, \quad \alpha > 0. \quad (2.90)$$

Można pokazać, że ocena generowana za pomocą algorytmu (2.89)-(2.90) minimalizuje w każdej chwili czasu  $t$  funkcję

$$J(\theta, t) = \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} (\nu(\tau) - \varphi^T(\tau) \theta) d\tau + e^{-\alpha t} (\theta_0 - \theta)^T \Gamma_0 (\theta_0 - \theta).$$

Zauważmy, że gdy  $\varphi \equiv 0$ , to macierz  $\Gamma$  rośnie wykładniczo. Aby zabezpieczyć się przed nadmiernym wzrostem macierzy  $\Gamma$  możemy zmodyfikować równanie (2.90) następująco

$$\frac{d}{dt}\Gamma(t) = Q^{1/2}f(Q^{-1/2}\Gamma(t)Q^{-1/2})Q^{1/2} - \Gamma(t)\varphi(t)\varphi^T(t)\Gamma(t),$$

gdzie  $f$  jest wielomianem spełniającym warunki

$$f(1) = 0, \quad f(w) \geq 0 \quad \text{dla} \quad 0 \leq w \leq 1.$$

Na przykład, możemy przyjąć  $f(w) = \alpha(1 - w^2)$ .

Opisane algorytmy mają następujące własności [79, 81, 101]:

- (i) ocena  $\hat{\theta}$  jest ograniczona,
- (ii)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{\theta}(t + \tau) - \hat{\theta}(t)\| = 0 \quad \forall \tau \geq 0$ ,
- (iii)  $\int_0^\infty \epsilon_m^2 d\tau < \infty$ ,
- (iv) jeżeli sygnał  $\varphi$  jest ograniczony i spełnia warunek

$$\int_t^{t+T} h^T \varphi(\tau) \varphi^T(\tau) h d\tau \geq \rho h^T h, \quad \forall h \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^m \quad (2.91)$$

dla  $\rho > 0$ , to ocena  $\hat{\theta}$  jest wykładniczo zbieżna i  $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\theta}(t) \in \Theta$ .

## Rozdział 3

# Podstawy projektowania adaptacyjnych układów sterowania

Ogólny schemat adaptacyjnego układu sterowania z adaptacją parametryczną przedstawiony został na rys. 1.3. Dobierając różne procedury projektowe, różne sposoby parametryzacji obiektu i różne algorytmy identyfikacji otrzymuje się różne rodzaje regulatorów adaptacyjnych. W poprzednim rozdziale dokonaliśmy przeglądu kilku typowych algorytmów identyfikacji na bieżąco. Obecnie omówimy najczęściej stosowane procedury projektowe i związane z nimi metody parametryzacji obiektu. Przedstawimy również podstawowe własności adaptacyjnych układów sterowania w przypadku idealnym, gdy obiekt jest liniowy, stacjonarny, wolny od zakłóceń itp. Przedstawione rezultaty otrzymane zostały w pierwszej połowie lat osiemdziesiątych i obecnie w większości mają charakter klasyczny.

W rozdziale tym używamy następującej notacji. Niech  $F(t, z) = f_n(t)z^n + \dots f_0(t)$  i  $E(t, z) = g_n(t)z^n + \dots g_0(t)$  będą wielomianami zmiennej  $z$  o współczynnikach zależnych od czasu  $t$ . Oznaczmy

$$F(t, z) \cdot E(t, z) = \sum_{i,j} f_i(t)g_j(t)z^{i+j},$$

$$F(t, z)E(t, z) = \sum_{i,j} f_i(t)g_j(t+n-i)z^{i+j}.$$

Wyrażenie  $F \cdot E$  traktujemy więc jako iloczyn dwóch wielomianów, natomiast  $FE$  jako złożenie dwóch operatorów. Zauważmy, że jeżeli  $F(t+1, z) - F(t, z) \rightarrow 0$  i  $E(t+1, z) - E(t, z) \rightarrow 0$ , gdy  $t \rightarrow \infty$ , to  $F(t, z)E(t, z) - F(t, z) \cdot E(t, z) \rightarrow 0$ , gdy  $t \rightarrow \infty$ .

We wszystkich twierdzeniach podanych w tym rozdziale zakładamy, że zastosowane algorytmy identyfikacji na bieżąco spełniają warunki (i)–(iii) twierdzenia 2.1, tzn. przypomnijmy:

- (i) ciąg ocen  $\{\hat{\theta}(t)\}$  jest ograniczony,
- (ii)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(t-1)\| = 0$ ,
- (iii)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_p(t) = 0$ , gdzie  $\varepsilon_p(t) = \nu(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}(t)$ .

### 3.1 Adaptacyjny algorytm sterowania z przesuwaniem biegunów

Rozważmy obiekt opisany równaniem

$$A(z)y(t) = B(z)u(t), \quad (3.1)$$

gdzie  $y(t)$  i  $u(t)$  są odpowiednio wyjściem i wejściem obiektu,  $z$  jest operatorem przesunięcia, zaś  $A(z)$  i  $B(z)$  są wielomianami o stopniach równych odpowiednio  $n$  i  $n-1$ . Załóżmy, że spełnione są następujące warunki:

(A1) wielomiany  $A(z)$  i  $B(z)$  są względnie pierwsze,

(A2)  $B(1) \neq 0$ ,

(A3) rząd obiektu  $n$  jest znany.

Niech  $u_c$  będzie ograniczonym sygnałem sterującym. Naszym celem jest zaprojektowanie regulatora tak, aby bieguny transmitancji  $T(z)$  pomiędzy sygnałem sterującym, a wyjściem obiektu pokrywały się z zerami pewnego zadanego wielomianu Hurwitza  $C(z)$  rzędu  $n$ . Ponadto zażądamy, aby w układzie zamkniętym błąd statyczny pomiędzy wyjściem obiektu i sygnałem sterującym był równy zeru, tzn. aby  $T(1) = 1$ . Rozważmy na wstępie nieadaptacyjne prawo sterowania postaci

$$u(t) = R(z)y_f(t) + S(z)u_f(t) + ku_c(t), \quad (3.2)$$

$$u_f(t) = \frac{1}{F(z)}u(t), \quad y_f(t) = \frac{1}{F(z)}y(t), \quad (3.3)$$

gdzie  $F(z)$  jest pewnym wielomianem Hurwitza rzędu  $n$  i  $R(z)$  oraz  $S(z)$  są wielomianami rzędu  $n-1$ . W układzie zamkniętym (3.1), (3.2) transmitancja pomiędzy sygnałem  $u_c$  a wyjściem  $y$  jest równa  $T = \frac{kBF}{A(F-S)-BR}$ . Zatem cele sterowania zostaną spełnione, jeśli wielomiany  $R$  i  $S$  oraz współczynnik  $k$  wyznaczymy z równań<sup>1</sup>

$$A(z)S(z) + B(z)R(z) = F(z)(A(z) - C(z)), \quad (3.4)$$

$$k = C(1)/B(1). \quad (3.5)$$

Zauważmy, że wielomian  $F(z)$  ulega skróceniu w transmitancji  $T(z)$ . Bieguny układu zamkniętego związane z procesem filtracji (3.3) są więc odpowiednikami biegunów obserwatora w klasycznym układzie sterowania ze sprzężeniem zwrotnym od stanu.

Niech  $\theta^*$  będzie wektorem złożonym ze współczynników wielomianów  $A(z)$  i  $B(z)$ , a  $\vartheta^*$  wektorem parametrów kompensatora  $\vartheta^* := [r_{n-1} \dots r_0 \ s_{n-1} \dots s_0 \ k]^T$  odpowiadającym parametrom  $\theta^*$ . Równania (3.4), (3.5) definiują funkcję  $\mathcal{F} : \theta \rightarrow \vartheta$  określoną na zbiorze

<sup>1</sup>Zakładamy, że wielomiany  $A(z)$  i  $C(z)$  są wielomianami monicznymi.



$C = \{\theta \in \mathbf{R}^{2n} : \text{wielomiany } A(z) \text{ i } B(z) \text{ s\aa wzgl\u0119dnie pierwsze, } B(1) \neq 0\}$  przyporządkowując parametrom obiektu parametry kompensatora. Funkcję  $\mathcal{F}$  nazywamy *procedurą projektową*.

Parametry kompensatora możemy wyznaczyć z góry jedynie wtedy, gdy znamy wartości parametrów obiektu. Jeśli parametry te są nieznane możemy zastosować adaptacyjne prawo sterowania zdefiniowane za pomocą następującego algorytmu: dla każdego  $t > 0$

- za pomocą algorytmu identyfikacji z

$$v(t) = z^n y_f(t) \quad \text{i} \quad \varphi(t) = [-z^{n-1} y_f(t) \dots - y_f(t) \quad z^{n-1} u_f(t) \dots u_f(t)]^T$$

generujemy bieżącą ocenę parametrów obiektu

$$\hat{\theta}(t) = [\hat{a}_{n-1}(t) \dots \hat{a}_0(t) \quad \hat{b}_{n-1}(t) \dots \hat{b}_0(t)]^T,$$

- wyznaczamy wielomiany  $\hat{R}(t, z)$ ,  $\hat{S}(t, z)$  i współczynnik  $\hat{k}(t)$  z równań,

$$\hat{A}(t, z) \cdot \hat{S}(t, z) + \hat{B}(t, z) \cdot \hat{R}(t, z) = F(z) \cdot (\hat{A}(t, z) - C(z)), \quad \hat{k}(t) = C(1) / \hat{B}(t, 1), \quad (3.6)$$

- wyznaczamy wejście  $u(t)$  z równania

$$u(t) = \hat{R}(t, z) y_f(t) + \hat{S}(t, z) u_f(t) + \hat{k}(t) u_c(t). \quad (3.7)$$

Jeżeli z góry wiadomo, że obiekt ma biegun w punkcie  $z = 1$ , to przyjmujemy  $\hat{k}(t) \equiv 1$ . Podobnie postępujemy, gdy stosujemy kompensator z całkowaniem, w którym wielomiany  $R(z)$  i  $S(z)$  wyznaczane są z równania  $(z-1)A(z)S(z) + B(z)R(z) = F(z)((z-1)A(z) - C(z))$ .

Poniższe twierdzenie charakteryzuje własności opisanego adaptacyjnego układu sterowania.

**Twierdzenie 3.1.** *Rozważmy adaptacyjny układ sterowania (3.1), (3.6), (3.7). Jeżeli istnieje domknięty podzbiór  $\hat{C}$  zbioru  $C$  taki, że  $\hat{\theta}(t) \in \hat{C} \forall t$ , to sygnały wejściowy i wyjściowy obiektu są ograniczone oraz*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) - y_c(t) = 0, \quad (3.8)$$

gdzie  $y_c(t)$  jest sygnałem wyjściowym układu  $C(z)y_c(t) = \hat{k}(t)\hat{B}(t, z)u_c(t)$ .

Dowód stabilności adaptacyjnego układu sterowania z przesuwaniem biegunów po raz pierwszy podał Larminat [92]. Poniżej przedstawiamy dowód wzorowany na pracy Goodwina i Sin [44].

DOWÓD. W dowodzie twierdzenia wykorzystamy lemat C.1 o stabilności układów liniowych przedstawiony w dodatku C. Równanie  $\varepsilon_p(t) = \nu(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}(t)$  możemy przedstawić w postaci równoważnej

$$-\hat{A}(t, z)y_f(t) + \hat{B}(t, z)u_f(t) = \varepsilon_p(t). \quad (3.9)$$

Zapiszmy równania (3.3), (3.7) i (3.9) w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} 1 & -\hat{S}(t, z) & -\hat{R}(t, z) \\ -1 & \hat{B}(t, z) & -\hat{A}(t, z) \\ -1 & F(z) & F(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ y(t) \\ u_f(t) \\ y_f(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_c(t) \\ \varepsilon_p(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Oznaczmy macierz wielomianową występującą w powyższym równaniu przez  $P(t, z)$ . Łatwo sprawdzić, że dla ciągów  $(d_1, \dots, d_4)$  i  $(\bar{d}_1, \dots, \bar{d}_4)$  równych odpowiednio  $(0, 0, 0, 0)$  i  $(0, 0, n, n)$  spełniony jest warunek 1 lematu C.1. Warunki 2 i 3 wynikają z założenia  $\hat{\theta} \in \hat{C} \subset C$  i własności (i), (ii) algorytmu identyfikacji. Warunek 4 również jest spełniony, gdyż  $\det(P(t, z)) = C(z)F(z)$ . Ponadto,  $u_c, \varepsilon_p \in l^\infty$ . Zatem na mocy lematu C.1 również  $u, y \in l^\infty$ . Z równań (3.7) i (3.9) dostajemy po przekształceniach

$$C(z)y(t) = \hat{k}(t)\hat{B}(t, z)u_c(t) + \mu(t),$$

gdzie  $\mu = [(F - \hat{S}) \cdot \hat{A} - (F - \hat{S}) \hat{A}]y_f + [(F - \hat{S}) \cdot \hat{B} - \hat{B} \cdot (F - \hat{S})]u_f + [\hat{B} \cdot \hat{R} - \hat{B} \hat{R}]u_f + [\hat{B} \cdot \hat{k} - \hat{k} \hat{B}]u_c$ . Zwróćmy uwagę, że współczynniki wielomianów w nawiasach kwadratowych w definicji sygnału  $\mu$  dążą do zera, gdy  $t \rightarrow \infty$ . Wobec tego, ponieważ  $y_f, u_f, u_c \in l^\infty$ , więc  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t) = 0$ , czyli  $\lim_{t \rightarrow \infty} C(z)(y(t) - y_c(t)) = 0$ . Stąd dostajemy (3.8).  $\square$

Warunek (3.8) pokazuje, że asymptotyczne własności układu zamkniętego (3.1) i (3.7) są takie, jak tego żądaliśmy. Dla odpowiednio dużego  $t$  układ zamknięty zachowuje się tak, jak gdyby bieguny transmitancji pomiędzy sygnałem  $u_c$  i  $y$  były równe zerom wielomianu  $C(z)$ . Ponadto, dla  $u_c = \text{const}$  mamy  $y(t) \rightarrow u_c$ , gdy  $t \rightarrow \infty$ . Zwróćmy uwagę na to, że własności te zachodzą pomimo, iż w ogólności oceny nie dążą do parametrów obiektu. Spełnienie celów sterowania mimo braku zbieżności ocen parametrów jest charakterystyczną cechą adaptacyjnych układów sterowania.

Niech  $\theta_o$  będzie dowolnym wektorem parametrów, dla którego wielomiany  $A_o(z)$  i  $B_o(z)$  mają wspólny czynnik nie będący podzielnikiem wielomianu  $C(z)$ . Wówczas  $\|\mathcal{F}(\theta)\| \rightarrow \infty$ , gdy  $\theta \rightarrow \theta_o$ . Bardziej interesujący jest przypadek, gdy wspólny czynnik wielomianów  $A_o(z)$  i  $B_o(z)$  dzieli  $C(z)$ . Wówczas dla każdej liczby  $M$  istnieje ciąg wektorów  $\theta_i \in C$  taki, że  $\theta_i \rightarrow \theta_o$  i  $\|\mathcal{F}(\theta_i)\| \rightarrow M$  przy  $i \rightarrow \infty$ . Zbiór  $\mathcal{O}$  będący dopełnieniem zbioru  $C$  jest więc zbiorem punktów osobliwych procedury projektowej  $\mathcal{F}$ . W pobliżu zbioru  $\mathcal{O}$  parametry kompensatora mogą przyjmować bardzo duże i dość przypadkowe wartości. Ponieważ w

dowodzie twierdzenia 3.1 w istotny sposób wykorzystywany jest warunek ograniczoneści parametrów kompensatora  $\hat{\vartheta}$  i warunek  $\hat{\vartheta}(t) - \hat{\vartheta}(t-1) \rightarrow 0$ , gdy  $t \rightarrow \infty$ , więc konieczne było przyjęcie założenia, że  $\hat{\theta}(t) \in \hat{C} \forall t$  dla pewnego domkniętego podzbioru  $\hat{C}$  zbioru  $C$ . Istnieje wiele metod gwarantujących spełnienie tego warunku. Jedną z nich jest wprowadzenie do algorytmu identyfikacji takiej modyfikacji, która dla zadanego domkniętego  $\hat{C}$  zapewnia, że  $\hat{\theta}(t) \in \hat{C} \forall t$ . Metoda ta omówiona została szczegółowo w paragrafie (2.4). Inna metoda polega na wstrzymaniu uaktualnianiu parameterów regulatora, gdy  $\hat{\theta}$  opuści zbiór  $\hat{C}$  i odpowiednim pobudzeniu obiektu, tak aby oceny parametrów powróciły do  $\hat{C}$ . Sposób ten omówimy w paragrafie 3.5. Możliwe jest wreszcie poszukiwanie takich parametryzacji obiektu, dla których odpowiednia procedura projektowa w ogóle nie ma punktów osobliwych. Przykład takiej parametryzacji podamy w paragrafie 3.4.

### 3.2 Adaptacyjny algorytm regulacji z modelem odniesienia

Rozważmy obiekt opisany jest równaniem

$$A(z)y(t) = B(z)u(t), \quad (3.11)$$

w którym

(B1) wielomian  $B$  ma postać  $B(z) = b_m z^m + \dots + b_0$ , przy czym różnica  $n^*$  pomiędzy stopniami wielomianów  $A(z)$  i  $B(z)$  jest znana,

(B2) wielomian  $B(z)$  jest wielomianem Hurwitza,

(B3) rząd obiektu  $n$  jest znany.

Z założenia (B1) wynika, że obecnie współczynniki  $b_{n-1}, \dots, b_{m+1}$  wielomianu  $B$  są zerowe i w związku z tym możemy przyjąć

$$\begin{aligned} \nu(t) &= z^n y_f(t), \\ \varphi(t) &= [-z^{n-1} y_f(t) \dots - y_f(t) z^m u_f(t) \dots u_f(t)]^T, \\ \theta^* &= [a_{n-1} \dots a_0 \ b_m \dots b_0]^T. \end{aligned}$$

Żałómy dalej, że dany jest model odniesienia

$$A_m(z)y_m(t) = u_c(t), \quad (3.12)$$

gdzie  $A_m(z)$  jest wielomianem Hurwitza o stopniu  $n^*$ , który reprezentuje żądane własności dynamiczne układu zamkniętego. Celem sterowania jest zapewnienie warunku  $y(t) - y_m(t) \rightarrow 0$ , gdy  $t \rightarrow \infty$ . W przypadku, gdy parametry obiektu są znane, cel sterowania będzie spełniony, jeśli

$$u(t) = R(z)y_f(t) + S(z)u_f(t) + k u_c(t), \quad (3.13)$$

gdzie  $u_f$  i  $y_f$  są zmiennymi przefiltrowanymi zdefiniowanymi przez (3.3), a  $R(z)$  i  $S(z)$  są wielomianami stopnia  $n - 1$  spełniającymi warunki

$$A_m(z)F(z) = A(z)E(z) + H(z), \quad \deg E(z) = n^*, \quad \deg H(z) = n - 1, \quad (3.14)$$

$$S(z) = F(z) - kB(z)E(z) \quad (3.15)$$

$$R(z) = -kH(z). \quad (3.16)$$

Możemy się o tym przekonać wyznaczając transmitancję  $T$  pomiędzy sygnałem sterującym  $u_c$  i wyjściem  $y$  w układzie (3.11), (3.13). Mamy

$$T = \frac{kBF}{A(F - S) - BR} = \frac{kBF}{kABE - BR} = \frac{1}{A_m}.$$

Ponieważ  $A_m(z)$  jest wielomianem Hurwitza, więc  $y(t) - y_m(t) \rightarrow 0$ , gdy  $t \rightarrow \infty$ , tak jak tego żądaliśmy. Zwróćmy uwagę na to, że prawo sterowania (3.13) skraca wszystkie zera obiektu. Stąd wynika konieczność wprowadzenia założenia (B2). Algorytm z modelem odniesienia może być więc stosowany jedynie dla ograniczonej klasy obiektów. W literaturze dotyczącej sterowania adaptacyjnego przyjęto (nie całkiem ściśle) obiekty takie nazywać *obiettami minimalnofazowymi*. Zwróćmy też uwagę na fakt, że procedura projektowa  $\mathcal{F} : \theta \rightarrow \vartheta \in \mathbb{R}^{2n+1}$  zdefiniowana przez równania (3.14)–(3.16) określona jest na zbiorze  $\mathcal{C} = \{\theta \in \mathbb{R}^{n+m+1} : b_m \neq 0\}$ .

Algorytm adaptacyjny otrzymujemy stosując prawo sterowania

$$u(t) = \hat{R}(t, z)y_f(t) + \hat{S}(t, z)u_f(t) + \hat{k}(t)u_c(t), \quad (3.17)$$

w którym  $\hat{R}(t, z)$ ,  $\hat{S}(t, z)$  i  $\hat{k}(t)$  wyznaczone są z równań

$$\left. \begin{aligned} A_m(z)F(z) &= \hat{A}(t, z) \cdot \hat{E}(t, z) + \hat{H}(t, z), \\ \hat{S}(t, z) &= F(z) - \hat{k}(t)\hat{B}(t, z) \cdot \hat{E}(t, z), \\ \hat{R}(t, z) &= -\hat{k}(t)\hat{H}(t, z) \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

(porównaj (3.14)–(3.16)). Opisany algorytm sterowania ma następujące własności.

**Twierdzenie 3.2.** *Rozważmy układ adaptacyjnego sterowania (3.1), (3.17), (3.18). Jeżeli  $\hat{b}_m \neq 0 \forall t$ , to wejście i wyjście obiektu są ograniczone oraz*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) - y_m(t) = 0. \quad (3.19)$$

Dowód powyższego twierdzenia można znaleźć w pracach [39, 68].

Zwróćmy uwagę, że podobnie jak w algorytmie sterowania z przesuwaniem biegunów cele sterowania (w tym przypadku celem jest nadążanie za wyjściem modelu) są spełnione pomimo, iż w ogólności oceny nie dążą do parametrów obiektu.

Algorytm z modelem odniesienia ma kilka zalet w stosunku do algorytmu z przesuwaniami biegunów. Po pierwsze, wyznaczenie parametrów kompensatora z równań (3.14)–(3.16) jest znacznie mniej pracochłonne niż z równań (3.4)–(3.5). Zaleta ta jest istotna głównie dlatego, że parametry kompensatora wyznaczane są na bieżąco. Po drugie, algorytm z modelem odniesienia może być zastosowany również wtedy, gdy wielomiany  $A(z)$  i  $B(z)$  mają wspólny czynnik, tzn. gdy rząd obiektu jest niższy niż  $n$ . W algorytmie tym nie występuje też problem braku rozwiązań równań kompensatora, gdy oceny  $\hat{A}(t, z)$ ,  $\hat{B}(t, z)$  wielomianów  $A(z)$ ,  $B(z)$  nie są względnie pierwsze. Z drugiej jednak strony, algorytm z modelem odniesienia wymaga, by obiekt był minimalnofazowy. Dla algorytmu z przesuwaniami biegunów takiego ograniczenia nie ma.

Warunek  $\hat{b}_m(t) \neq 0 \forall t$  występujący w twierdzeniu 3.2 można zapewnić stosując jedną z modyfikacji algorytmu identyfikacji opisaną w przykładach w paragrafie (2.4). W tym celu musimy znać stałą  $\beta > 0$ , dla której  $|b_m| \geq \beta$ , a w przypadku modyfikacji polegającej na projekcji ocen parameterów również znaku parametru  $b_m$ .

Istnieje wiele innych procedur projektowych stosowanych w adaptacyjnych układach sterowania. Duża ich część oparta jest na teorii sterowania optymalnego. Przykładowo, możemy zażądać, aby w chwili  $t$  kompensator minimalizował funkcję strat (Clarke i in. [20])

$$\sum_{i=t+N_2}^{t+N_1} (P_1(z)y(i) - P_2(z)u_c(i))^2 + (P_3(z)u(i))^2,$$

gdzie  $P_1(z)$ ,  $P_2(z)$ ,  $P_3(z)$  są odpowiednio dobranymi wielomianami i  $N_1$ ,  $N_2$  są liczbami naturalnymi (dopuszczamy  $N_1 = \infty$ ). Łatwo sprawdzić, że dla  $N_1 = N_2 = n^*$ ,  $P_1(z) = A_m(z)$ ,  $P_2(z) = 1$  i  $P_3(z) = 0$  dostajemy algorytm z modelem odniesienia. Algorytmy adaptacyjne oparte na procedurze otrzymanej dla  $N_1 = N_2 = n^*$  i  $P_2(z) \neq 0$  rozważane są w pracach [19, 36], dla  $N_2 \leq N_1 < \infty$  w pracach [17, 95, 108] i dla  $N_1 = \infty$  w pracach [57, 123, 129]. Warto zaznaczyć, że procedury oparte na teorii sterowania optymalnego wymagają zazwyczaj większego nakładu obliczeń do wyznaczenia parametrów kompensatora, niż procedury opisane w dwóch ostatnich paragrafach.

### 3.3 Bezpośredni adaptacyjny algorytm sterowania z modelem odniesienia

Dotychczas stosowaliśmy najbardziej naturalny sposób parametryzacji obiektu – za nieznanne parametry przyjmowaliśmy współczynniki transmitancji obiektu. Parametryzacja taka jest minimalna, gdyż wymaga użycia możliwie najmniejszej liczby parametrów. W adaptacyjnych układach sterowania możemy stosować również inne metody parametryzacji, także nieminimalne. Stosowanie nieminimalnych parametryzacji ma zwykle na celu uproszczenie procedury wyznaczającej parametry kompensatora. Czasami można nawet

tak sparametryzować równanie obiektu, że nieznanne parametry pokrywają się z parametrami kompensatora. Adaptacyjne algorytmy sterowania, w których stosujemy taki sposób parametryzacji noszą nazwę *algorytmów bezpośrednich*, co podkreśla fakt, że w algorytmach tych parametry kompensatora identyfikowane są bezpośrednio. Z kolei algorytmy, w których konieczne jest przeliczanie ocen parametrów obiektu na parametry kompensatora nazywamy *algorytmami pośrednimi*. Zgodnie z tą terminologią oba przedstawione w poprzednich paragrafach regulatory adaptacyjne są regulatorami typu pośredniego.

W tym i następnym paragrafie omówimy dwa bezpośrednie adaptacyjne algorytmy sterowania będące odpowiednikami algorytmów omawianych w paragrafach 3.1 i 3.2.

Bezpośredni adaptacyjny algorytm sterowania z modelem odniesienia należy do najbardziej popularnych adaptacyjnych algorytmów sterowania. Jest interesujące, że algorytm ten został opracowany i przeanalizowany wcześniej, niż wydawałoby się koncepcyjnie prostszy algorytm bezpośredni. Nie od razu też uświadomiono sobie, że algorytmy bezpośrednie są to algorytmy, w których zastosowano specjalny sposób parametryzacji obiektu.

Zalóżmy, że obiekt opisany jest równaniem (3.11) i że spełnione są warunki (B1)–(B3). Nadażanie wyjścia obiektu za wyjściem modelu odniesienia zapewnia kompensator (3.13), w którym  $R(z)$ ,  $S(z)$  i  $k$  zdefiniowane są za pomocą równań (3.14)–(3.16). Działając operatorem  $E(z)$  na równanie obiektu (3.1) i wykorzystując zależności (3.14)–(3.16) otrzymujemy następującą nieminimalną postać równania obiektu

$$kA_m(z)F(z)y(t) = F(z)u(t) - R(z)y(t) - S(z)u(t). \quad (3.20)$$

W powyższym równaniu nieznanymi parametrami są współczynniki wielomianów  $R(z)$ ,  $S(z)$  oraz współczynnik  $k$ . Parametry te są jednocześnie współczynnikami żądanego prawa sterowania. Identyfikując parametry równania (3.20) identyfikujemy więc bezpośrednio parametry kompensatora.

Zdefiniujmy zmienne  $\bar{u}_f$  i  $\bar{y}_f$  następująco

$$\bar{u}_f(t) = \frac{1}{A_m(z)F(z)}u(t), \quad \bar{y}_f(t) = \frac{1}{A_m(z)F(z)}y(t). \quad (3.21)$$

Z równania (3.20) wynika, że

$$ky(t) = F(z)\bar{u}_f(t) - R(z)\bar{y}_f(t) - S(z)\bar{u}_f(t). \quad (3.22)$$

Równanie to możemy przedstawić w postaci

$$\nu(t) = \varphi^T(t)\theta^*. \quad (3.23)$$

przyjmując

$$\nu(t) = F(z)\bar{u}_f(t), \quad (3.24)$$

$$\theta^* = [r_{n-1} \dots r_0 \quad s_{n-1} \dots s_0 \quad k]^T, \quad (3.25)$$

$$\varphi(t) = [z^{n-1}\bar{y}_f(t) \dots \bar{y}_f \quad z^{n-1}\bar{u}_f(t) \dots \bar{u}_f \quad y(t)]^T. \quad (3.26)$$

Adaptacyjny algorytm sterowania otrzymujemy identyfikując na bieżąco parametry  $\theta^*$  z równania (3.23) i stosując kompensator (3.17) z parametrami  $\hat{\theta}(t)$ .

Dowód globalnej stabilności bezpośredniego algorytmu sterowania z modelem odniesienia można znaleźć w wielu pracach, w tym w [26, 106, 113] dla obiektu ciągłego w czasie i w [26, 35, 42] dla obiektu dyskretnego. Dowód przedstawiony poniżej wykorzystuje pomysły rozwinięte w pracach [39, 44]

**Twierdzenie 3.3.** *Rozważmy adaptacyjny układ sterowania (3.11), (3.17), w którym parametry kompensatora identyfikowane są z równań (3.23)–(3.26). Jeżeli istnieje liczba dodatnia  $\kappa$  taka, że  $|\hat{k}(t)| \geq \kappa \forall t$ , to wyjście i wejście obiektu są ograniczone oraz*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) - y_m(t) = 0.$$

DOWÓD. Równanie  $\varepsilon_p(t) = \nu(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}(t)$  zapiszmy w postaci

$$\hat{k}(t)y(t) = F(z)\hat{u}_f(t) - \hat{R}(t, z)\hat{y}_f(t) - \hat{S}(t, z)\hat{u}_f(t) + \varepsilon_p(t). \quad (3.27)$$

Działając operatorem  $A_m(z)$  na równanie (3.27) i wykorzystując równanie kompensatora (3.17) dostajemy (dla przejrzystości pomijamy argumenty  $t$  i  $z$ )

$$\begin{aligned} A_m \cdot \hat{k}y &= u - \hat{R}y_f - \hat{S}u_f + A_m\varepsilon_p - (\hat{R}A_m - A_m \cdot \hat{R})\hat{y}_f - (\hat{S}A_m - A_m \cdot \hat{S})\hat{u}_f \\ &= \hat{k}u_c + A_m\varepsilon_p - (\hat{R}A_m - A_m \cdot \hat{R})\hat{y}_f - (\hat{S}A_m - A_m \cdot \hat{S})\hat{u}_f. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Powyższe równanie, równanie obiektu oraz równania (3.21) przedstawmy w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} A_m \cdot \hat{k} & & [\hat{R}A_m - A_m \cdot \hat{R}] & [\hat{S}A_m - A_m \cdot \hat{S}] \\ A & -B & & \\ -1 & & FA_m & \\ & -1 & & FA_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \\ y_f \\ u_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{k}u_c + A_m\varepsilon_p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

Oznaczmy macierz wielomianową występującą w równaniu (3.29) przez  $P(t, z)$ . Pokażemy, że macierz  $P(t, z)$  spełnia warunki 1–4 lematu C.1. Dla ciągów  $(d_1, \dots, d_4)$  i  $(\bar{d}_1, \dots, \bar{d}_4)$  równych odpowiednio  $(0, n - n^*, 0, 0)$  i  $(n^*, 0, n + n^*, n + n^*)$  dostajemy

$$\text{diag}\{z^{-d_1}\}P(t, z)\text{diag}\{z^{d_1}\}\Big|_{z^{-1}=0} = \begin{bmatrix} \hat{k} & & & \\ 1 & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Powyższa macierz jest jednostajnie nieosobliwa, ponieważ  $|\hat{k}(t)| \geq \kappa \forall t$ . Dalej, mamy  $\det(P) \rightarrow -\hat{k}BF^2A_m^3$ , gdy  $t \rightarrow \infty$ . Spełniony jest więc warunek 2. Z własności (i) i (ii) algorytmu identyfikacji wynikają własności 3 i 4. Wobec tego, ponieważ wektor występujący po prawej stronie równania (3.29) jest ograniczony, więc również  $u, y \in l^\infty$ . Na koniec zauważmy, że  $\hat{k}A_m(y - y_m) = A_m\varepsilon_p - (\hat{S}A_m - A_m \cdot \hat{S})\hat{u}_f - (\hat{R}A_m - A_m \cdot \hat{R})\hat{y}_f + (\hat{k}A_m - A_m \cdot \hat{k})y \rightarrow 0$ , gdy  $t \rightarrow \infty$ . Zatem  $\lim_{t \rightarrow \infty} y - y_m = 0$ .  $\square$

Warunek  $\hat{k}(t) \neq 0 \forall t$  występujący w twierdzeniu 3.3 można zapewnić stosując jedną z modyfikacji algorytmu identyfikacji opisaną w paragrafie (2.4). W tym celu musimy znać stałą dodatnią  $\kappa$ , dla której  $|k| \geq \kappa$ , a w przypadku modyfikacji polegającej na projekcji ocen parameterów również znak parametru  $k$ .

### 3.4 Bezpośredni adaptacyjny algorytm sterowania z przesuwaniami biegunów

Przedstawiony w tym paragrafie algorytm adaptacyjny opracowany został przez Elliotta [29]. Przypominamy, że bieguny transmitancji pomiędzy sygnałem sterującym  $u_c$  a wyjściem obiektu pokrywają się z zerami zadanego wielomianu Hurwitza  $C(z)$ , gdy

$$u(t) = R(z)y_f(t) + S(z)u_f(t) + u_c(t), \quad (3.30)$$

gdzie  $R(z)$  i  $S(z)$  są wielomianami stopnia  $n - 1$  spełniającymi równanie

$$A(z)S(z) + B(z)R(z) = F(z)(A(z) - C(z)) \quad (3.31)$$

i  $y_f, u_f$  oznaczają zmienne przefiltrowane wyznaczone z (3.3) (dla prostoty zakładamy, że nie interesuje nas błąd statyczny układu zamkniętego i dlatego przyjmujemy  $k = 1$  w (3.2)). Rozważmy równanie pomocnicze

$$A(z)W(z) + B(z)V(z) = 1, \quad (3.32)$$

gdzie  $W(z)$  i  $V(z)$  są wielomianami stopnia  $n - 1$ . Z (3.31) i (3.32) otrzymujemy równanie

$$A(z)S(z) + B(z)R(z) = F(z)A(z) - F(z)C(z)(A(z)W(z) + B(z)V(z)) \quad (3.33)$$

Zauważmy, że również odwrotnie z (3.33) wynikają równania (3.31) i (3.32). Istotnie, gdyby  $A(z)W(z) + B(z)V(z) \neq 1$ , to stopień wielomianu występującego po prawej stronie (3.33) byłby większy od  $2n - 1$ , a więc większy od stopnia wielomianu  $A(z)S(z) + B(z)R(z)$ . Równanie obiektu możemy zapisać w następującej równoważnej postaci

$$A(z)\xi(t) = u(t), \quad (3.34)$$

$$y(t) = B(z)\xi(t), \quad (3.35)$$

gdzie  $\xi$  jest stanem wewnętrznym obiektu. Mnożąc równanie (3.33) przez  $\xi(t)$  i wykorzystując (3.34) i (3.35) dostajemy następującą nieminimalną postać obiektu

$$R(z)y(t) + S(z)u(t) = F(z)u(t) - F(z)C(z)(V(z)y(t) + W(z)u(t)). \quad (3.36)$$

W powyższym równaniu nieznanymi parametrami są współczynniki wielomianów  $R(z)$ ,  $S(z)$ ,  $V(z)$  i  $W(z)$ . Współczynniki wielomianów  $R(z)$  i  $S(z)$  są jednocześnie współczynnikami żądanego prawa sterowania. Równanie (3.26) przedstawiamy w postaci

$$v(t) = \varphi^T(t)\theta^* \quad (3.37)$$



przyjmując

$$\nu(t) = F(z)\bar{u}_f(t), \quad (3.38)$$

$$\theta^* = [r_{n-1} \dots r_0 \ s_{n-1} \dots s_0 \ v_{n-1} \dots v_0 \ w_{n-1} \dots w_0]^T, \quad (3.39)$$

$$\varphi(t) = [z^{n-1}\bar{y}_f(t) \dots \bar{y}_f(t) \ z^{n-1}\bar{u}_f(t) \dots \bar{u}_f(t) \\ z^{n-1}\bar{y}_f(t) \dots \bar{y}_f(t) \ z^{n-1}\bar{u}_f(t) \dots \bar{u}_f(t)]^T, \quad (3.40)$$

$$\bar{u}_f(t) = \frac{1}{F(z)C(z)}u(t), \quad \bar{y}(t) = \frac{1}{F(z)C(z)}y(t). \quad (3.41)$$

Adaptacyjny algorytm sterowania otrzymujemy identyfikując na bieżąco parametry  $\theta^*$  i stosując kompensator

$$u(t) = \hat{R}(t, z)y_f(t) + \hat{S}(t, z)u_f(t) + u_c(t), \quad (3.42)$$

w którym współczynniki wielomianów  $\hat{R}$  i  $\hat{S}$  są równe odpowiednim elementom wektora  $\hat{\theta}(t)$ . Zwróćmy uwagę na to, że w opisanym algorytmie oprócz parametrów kompensatora musimy dodatkowo identyfikować współczynniki wielomianów  $V(z)$  i  $W(z)$ , które nie są wykorzystywane do wyznaczania sterowania  $u(t)$ .

Stabilność bezpośredniego adaptacyjnego algorytmu sterowania z przesuwaniem biegunów przeanalizowana została w pracy Janecki [65], skąd pochodzi następujący rezultat.

**Twierdzenie 3.4.** *Rozważmy układ sterowania adaptacyjnego (3.1), (3.38)–(3.42). Jeżeli dla wszystkich wystarczająco dużych  $t$  oceny parametrów leżą ściśle wewnątrz zbioru*

$$C = \{\hat{\theta} = [\hat{r}_{n-1} \dots \hat{w}_0]^T : \text{wielomiany} \\ \hat{C}_1(z) = A(z)(F(z) - \hat{S}(z)) - B(z)\hat{R}(z), \\ \hat{C}_2(z) = A(z)\hat{W}(z) + B(z)\hat{V}(z) \\ \text{nie mają wspólnych zer w obszarze } |z| > 1\}, \quad (3.43)$$

to wejście i wyjście obiektu są ograniczone.

Zwróćmy uwagę, że we wszystkich dotychczas podanych twierdzeniach, jednym z warunków stabilności adaptacyjnych układów sterowania jest to, by oceny parametrów leżały ściśle wewnątrz pewnego zbioru parametrów  $C$ . W algorytmach typu bezpośredniego warunek ten jest *normalnie* spełniony nawet jeśli nie stosuje się żadnych specjalnych modyfikacji algorytmu identyfikacji, które ograniczają zbiór dopuszczalnych wartości ocen parametrów. Własność taka zachodzi dlatego, ponieważ w algorytmach bezpośrednich dopełnienie zbioru  $C$  jest zbiorem punktów osobliwych procedury projektowej. Zbliżanie się ocen parametrów do punktów osobliwych powoduje gwałtowny przypadkowy wzrost wartości parametrów kompensatora i sygnału wejściowego, co z kolei zapewnia szybką zbieżność ocen do parametrów obiektu (oczywiście można dyskutować, czy w praktyce gwałtowny i przypadkowy

wzrost sygnału wejściowego jest w ogóle dopuszczalny). W algorytmach bezpośrednich mechanizm taki nie występuje. W związku z tym możemy postawić pytanie, czy w algorytmach bezpośrednich, a w szczególności interesuje nas algorytm opisany w tym paragrafie, fakt niespełnienia warunku „ $\hat{\theta}$  jest zawarte ściśle wewnątrz  $C$ ” ma charakter wyjątkowy, czy raczej jest regułą. Odpowiedź na postawione pytanie daje nam następujący przykład [65]

PRZYKŁAD 3.1. Rozważmy obiekt pierwszego rzędu

$$y(t+1) + ay(t) = bu(t), \quad b > 0 \quad (3.44)$$

i przyjmijmy  $C(z) = z$ . Cel sterowania będzie spełniony, jeśli zastosujemy kompensator  $u(t) = ry(t)$  z  $r = a/b$ . Zapiszmy obiekt w postaci

$$ry(t) + vy(t+1) = u(t), \quad (3.45)$$

gdzie  $v = 1/b$  (porównaj (3.36)) i rozważmy następujący algorytm sterowania

$$u(t) = \hat{r}(t)y(t), \quad (3.46)$$

$$\epsilon_m(t) = u(t) - \hat{r}(t-1)y(t-1) - \hat{v}(t-1)y(t), \quad (3.47)$$

$$\hat{r}(t) = \hat{r}(t-1) + \frac{y(t-1)\epsilon_m(t)}{1 + y^2(t) + y^2(t-1)}, \quad (3.48)$$

$$\hat{v}(t) = \hat{v}(t-1) + \frac{y(t)\epsilon_m(t)}{1 + y^2(t) + y^2(t-1)}. \quad (3.49)$$

Zbiór  $C$ , o którym jest mowa w twierdzeniu 3.4 ma obecnie postać  $C = \{[r \ v]^T : v = 0, |rb - a| \geq 1\}$ . Wykorzystując równania (3.44)–(3.45) otrzymujemy po drobnych przekształceniach

$$\hat{r}(t) = \hat{r}(t-1) + \frac{ry^2(t)\hat{v}(t-1)}{(r - \hat{r}(t-1))(1 + y^2(t) + y^2(t+1))}, \quad (3.50)$$

$$\hat{v}(t) = \hat{v}(t-1) - \frac{y^2(t)\hat{v}(t-1)}{1 + y^2(t) + y^2(t+1)}. \quad (3.51)$$

Z powyższych równań wynika, że

$$\begin{aligned} &\text{jeśli } \hat{v}(t) < 0 \text{ i } \hat{r}(t) > r \text{ (lub } \hat{r}(t) < r), \\ &\text{to } \hat{v}(t+1) < 0 \text{ i } \hat{r}(t+1) > \hat{r}(t) \text{ (lub } \hat{r}(t+1) < \hat{r}(t)). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Zalóżmy teraz, że wartości początkowe algorytmu są tak dobrane, iż  $\hat{r}(0)b - a > 1$  i  $\hat{v}(0) < 0$ . Wówczas  $\hat{r}(0) \geq (1+a)/b = r + 1/b > r$  (przypominamy, że  $b > 0$ ). Z własności (3.52) dostajemy  $\hat{r}(t) > \hat{r}(0) \forall t$ . Wobec tego  $\hat{r}(t)b - a \geq \hat{r}(0)b - a \forall t$ . Ponadto, z (3.44) i (3.46) dostajemy  $y(t+1) = (\hat{r}(t)b - a) \times \dots \times (\hat{r}(0)b - a)y(0)$ . Stąd  $|y(t)| \geq (\hat{r}(0)b - a)^t |y(0)|$ . Oznacza to, że wyjście obiektu jest nieograniczone. Podobnie można pokazać, że  $y$  jest nieograniczone, gdy  $\hat{v}(0) < 0$  i  $\hat{r}(0)b - a < -1$ . W obu przypadkach  $v(t) \rightarrow 0$ , gdy  $t \rightarrow \infty$ , co oznacza, iż warunek „ $\hat{\theta}$  leży ściśle wewnątrz zbioru  $C$ ” nie jest spełniony.  $\triangle$

Powyższy przykład pokazuje, że pomimo, iż zbiór  $\mathcal{O} = \mathbf{R}^2 - \mathcal{C}$  jest zbiorem miary zero, to zbiór wartości początkowych algorytmu (3.44)–(3.47), dla których wyjście  $y$  jest nieograniczone nie jest zbiorem miary zero. Nie możemy więc uznać, iż warunki twierdzenia 3.4 są *normalnie* spełnione. Podobna do wyżej opisanej sytuacja zachodzi również dla bezpośredniego algorytmu z modelem odniesienia, dla którego zbiór  $\mathcal{C}$  ma postać  $\mathcal{C} = \{\theta : |k| = 0\}$ . W tym przypadku nie ma to jednak tak istotnego znaczenia, gdyż warunek  $|\hat{k}(t)| \geq \kappa$  może być zagwarantowany przez prostą modyfikację algorytmu identyfikacji. Zastosowanie takiej modyfikacji w bezpośrednim algorytmie przesuwania biegów nie jest możliwe, ponieważ zbiór  $\mathcal{C}$  zdefiniowany w twierdzeniu 3.4 zależy od współczynników wielomianów  $A(z)$  i  $B(z)$ , które nie są znane. W następnym rozdziale pokażemy, że wprowadzenie odpowiedniej modyfikacji algorytmu adaptacji jest możliwe, jeśli zastosujemy dodatkowy algorytm do identyfikacji współczynników wielomianów  $A(z)$  i  $B(z)$ . Z twierdzenia 3.4 oraz własności (2.49) algorytmu identyfikacji wynika natomiast następująca własność lokalnej stabilności bezpośredniego algorytmu z przesuwaniem biegunów.

*Jeżeli wartości początkowe  $\hat{\theta}_0$ ,  $\Gamma_0$  algorytmu identyfikacji spełniają warunek  $\hat{\theta} \in \mathcal{C} \forall \hat{\theta} : \|\theta^* - \hat{\theta}\|_{\Gamma_0^{-1}} \leq \|\theta^* - \hat{\theta}_0\|_{\Gamma_0^{-1}}$ , to wejście i wyjście obiektu są ograniczone.*

### 3.5 Adaptacyjny algorytm sterowania wykorzystujący operator delta

Algorytm z modelem odniesienia należy niewątpliwie do najbardziej popularnych i najlepiej zbadanych adaptacyjnych algorytmów sterowania. Wiemy już, iż może on być stosowany w przypadkach, w których licznik transmitancji obiektu jest wielomianem Hurwitza. Pomimo, że w układach ciągłych w czasie warunek ten jest spełniony dość często, to w układach dyskretnych otrzymanych w wyniku próbkowania układów ciągłych warunek ten jest spełniony jedynie w wyjątkowych przypadkach. Przykładowo, można pokazać, że jeżeli różnica  $n^*$  pomiędzy rzędami wielomianów  $A$  i  $B$  w obiekcie z czasem ciągłym jest większa niż dwa, to w modelu dyskretnym obiektu zawsze występują zera leżące poza okręgiem jednostkowym, jeśli tylko okres próbkowania jest wystarczająco mały. W takim przypadku zastosowanie algorytmu regulacji z modelem odniesienia wywoła niestabilność układu sterowania. Jest to dość zaskakujące, gdyż na pierwszy rzut oka wydawałoby się, że jeżeli układ sterowania z czasem ciągłym jest globalnie stabilny, to przy odpowiednio małym okresie próbkowania jego wersja dyskretna też będzie stabilna. Przez długi czas nie potrafiono poradzić sobie z opisaną trudnością. Z jednej strony, implementacja złożonych algorytmów adaptacyjnych wymaga zastosowania sterowania cyfrowego, z drugiej zaś, modele dyskretnie obiektów z czasem ciągłym najczęściej nie są modelami minimalnofazowymi. Zadowalające rozwiązanie znalezione zostało dopiero przez Goodwina i współpracowników

w pracy [40]. Rozwiązanie to polega na zastosowaniu do opisu modelu obiektu i kompensatora w miejsce zwykłego operatora przesunięcia z operatora przyrostowego  $(z-1)/\Delta$ , gdzie  $\Delta$  jest okresem próbkowania, zwanego dalej *operatorem delta*. Zastosowanie operatora  $\delta$  umożliwia łatwe wyodrębnienie w modelu obiektu części odpowiedzialnej za powstanie zer leżących poza okręgiem jednostkowym, a następnie jej pominięcie.

Zastosowanie operatora  $\delta$  w miejsce operatora  $z$  ma szereg innych zalet, a w szczególności zapewnia:

- lepszą dokładność reprezentacji współczynników obiektu i kompensatora przy zadanej długości słowa procesora,
- mniejsze błędy zaokrągleń,
- lepsze uwarunkowanie procedury wyznaczania parametrów kompensatora,
- zbieżność współczynników modelu dyskretnego do współczynników modelu ciągłego, gdy okres próbkowania dąży do zera.

Szczegółowe uzasadnienie wyżej wymienionych własności można znaleźć w interesującej pracy Middletona i Goodwina [100].

W tym rozdziale opiszemy i przeanalizujemy bezpośredni adaptacyjny algorytm sterowania z modelem odniesienia wykorzystujący operator delta. Większość przedstawionego materiału pochodzi z pracy Janeckiego [62].

### Modele dyskretne obiektów ciągłych w czasie

Rozważmy obiekt ciągły opisany równaniem różniczkowym

$$A'(s)y(t) = B'(s)u(t), \quad (3.53)$$

gdzie  $s$  oznacza operator różniczkowania, zaś  $A'(s)$  i  $B'(s)$  są wielomianami postaci

$$A'(s) = s^n + a'_{n-1}s^{n-1} + \dots + a'_0, \quad (3.54)$$

$$B'(s) = b'_m s^m + \dots + b'_0. \quad (3.55)$$

Załóżmy, że obiekt jest próbkowany z okresem  $\Delta$ , a sygnał sterujący podawany jest na wejście poprzez ekstrapolator zerowego rzędu. Związek pomiędzy dyskretnym wejściem  $\{u(\ell\Delta)\}$ , a dyskretnym wyjściem obiektu  $\{y(\ell\Delta)\}$  ma postać

$$\bar{A}(z)y(\ell\Delta) = \bar{B}(z)u(\ell\Delta), \quad (3.56)$$

gdzie  $\bar{A}(z)$  i  $\bar{B}(z)$  są wielomianami o stopniach równych odpowiednio  $n$  i  $n-1$ . Niech  $p_1, \dots, p_n$  będą zerami wielomianu  $\bar{A}(s)$ . Wówczas  $e^{p_i\Delta}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) są zerami wielomianu  $\bar{A}(z)$ . Zatem zakładając, że  $\bar{A}(z)$  jest wielomianem monicznym

$$\bar{A}(z) = \prod_{i=1}^n (z - e^{p_i\Delta}). \quad (3.57)$$

Zależność pomiędzy współczynnikami wielomianu  $\bar{B}(z)$  a parametrami obiektu (3.53) jest dużo bardziej złożona. Łatwo natomiast można znaleźć wzory przybliżone w przypadku, gdy okres próbkowania jest mały. Niech  $z_1, \dots, z_m$  oznaczają zera wielomianu  $B'(s)$ . W pracy Åströma i in. [10] pokazano, że wielomian  $\bar{B}(z)$  może być przedstawiony w postaci

$$\bar{B}(z) = \bar{B}_1(z)\bar{B}_2(z), \quad \bar{B}_2(1) = 1, \quad (3.58)$$

gdzie<sup>2</sup>

$$\bar{B}_1(z) = (b'_m \Delta^{n-m} + O(\Delta^{n-m+1})) \prod_{i=1}^m (z - e^{z_i \Delta} + O(\Delta^2)) \quad (3.59)$$

Współczynniki  $\bar{B}_2(z)$  dążą do współczynników pewnego wielomianu  $\bar{D}(z)$  o stopniu  $n - m$ , gdy  $\Delta \rightarrow 0$ . Wielomian  $\bar{D}(z)$  nie zależy od parametrów obiektu, a jedynie od różnicy  $n - m$ . Odpowiednie wzory dla współczynników  $\bar{D}(z)$  można znaleźć w [10].

Z zależności (3.59) wynika, że jeżeli zera  $B'(s)$  leżą w lewej półpłaszczyźnie  $\Re[s] < 0$ , to dla małych wartości  $\Delta$  zera  $\bar{B}_1(z)$  leżą wewnątrz koła jednostkowego  $|z| < 1$ . Z kolei wśród zer wielomianu  $\bar{D}(z)$  istnieją takie, które leżą w obszarze  $|z| \geq 1$ ,  $z \neq 1$ , jeśli tylko  $n - m \geq 2$  (np.  $\bar{D}(z) = z + 1$  dla  $n - m = 2$ ). Zatem przy małych wartościach  $\Delta$  kompensator, który skraca wszystkie zera obiektu nie może być stosowany.

Obecnie sformułujemy równania obiektu wykorzystując do tego celu operator  $\delta := (z - 1)/\Delta$ . Podstawiając  $z = 1 + \delta\Delta$  w (3.56) i oznaczając  $A(\delta) = \Delta^{-n}\bar{A}(1 + \delta\Delta)$ ,  $B(\delta) = \Delta^{-n}\bar{B}(1 + \delta\Delta)$  dostajemy

$$A(\delta)y(\ell\Delta) = B(\delta)u(\ell\Delta). \quad (3.60)$$

Zauważmy, że  $A(\delta)$  jest wielomianem monicznym oraz, że stopnie  $A(\delta)$  i  $B(\delta)$  są równe odpowiednio  $n$  i  $n - 1$ . Ponadto, z (3.57)–(3.59) wynika, iż

$$a_i = a'_i + O(\Delta), \quad i = 0, 1, \dots, n - 1, \quad (3.61)$$

$$b_i = b'_i + O(\Delta), \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad (3.62)$$

$$b_{i+m} = b'_m c_i \Delta^i + O(\Delta^{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, n - m - 1, \quad (3.63)$$

przy czym współczynniki  $c_i$  są zdefiniowane za pomocą równania  $c_{n-m-1}\delta^{n-m-1} + \dots + c_1\delta + 1 = \bar{D}(1 + \delta)$ . Zwróćmy uwagę, że współczynniki wielomianów  $A(\delta)$  i  $B(\delta)$  dążą do odpowiednich współczynników wielomianów  $A'(s)$  i  $B'(s)$ , gdy  $\Delta \rightarrow 0$ .

### Procedura projektowa

Załóżmy, że dany jest model odniesienia

$$A'_m(s)y_m(t) = u_c(t), \quad (3.64)$$

<sup>2</sup> $O(\Delta)$  oznacza małą rzędu  $\Delta$ . Piszemy więc  $\alpha(\Delta) = \beta(\Delta) + O(\Delta)$ , gdy istnieje stała dodatnia  $C$  taka, że  $\|\alpha(\Delta) - \beta(\Delta)\| < C\Delta$  dla wszystkich wystarczająco małych  $\Delta$

gdzie  $A'_m(s)$  jest wielomianem Hurwitza stopnia  $n^* := n - m$  i niech  $F'(s)$  będzie dowolnym wielomianem Hurwitza stopnia  $n$ . Zdefiniujmy wielomian  $F$  zmiennej  $\delta$

$$F(\delta) = f'_n \prod_{i=1}^n \left( \delta - \frac{e^{z_i \Delta} - 1}{\Delta} \right), \quad (3.65)$$

gdzie  $f'_n$  jest współczynnikiem  $F'(s)$  stojącym przy  $s^n$ , a  $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$  są zerami  $F'(s)$ . W analogiczny sposób zdefiniujmy wielomian  $A_m(\delta)$ . Mamy  $(A_m, F) \rightarrow (A'_m, F')$ , gdy  $\Delta \rightarrow 0$ . Rozważmy równania

$$A_m(\delta)F(\delta) = A(\delta)E(\delta) + H(\delta), \quad \deg E = n^*, \quad \deg H = n - 1, \quad (3.66)$$

$$S(\delta) = F(\delta) - kB(\delta)E(\delta), \quad (3.67)$$

$$R(\delta) = \delta kH(\delta), \quad (3.68)$$

$$S_D(\delta) + \delta^{n+1}S_\epsilon(\delta) = S(\delta), \quad \deg S_D = n - 1, \quad \deg S_\epsilon = n^* - 2, \quad (3.69)$$

(porównaj równania (3.14)–(3.16)). Dzięki założonym stopniom wielomianów  $E$ ,  $H$ ,  $S_D$  i  $S_\epsilon$  równania (3.66)–(3.69) mają jednoznaczne rozwiązanie względem  $E$ ,  $H$ ,  $S_D$ ,  $S_\epsilon$  i  $k$ . Ponadto, mamy  $(R, S) \rightarrow (R', S')$ , gdy  $\Delta \rightarrow 0$  dla pewnych wielomianów  $R'$  i  $S'$  o stopniach  $n - 1$ . W szczególności wynika stąd, że  $S_\epsilon \rightarrow 0$ , gdy  $\Delta \rightarrow 0$ . Dokładne oszacowanie szybkości zanikania współczynników wielomianu  $S_\epsilon(\delta)$  możemy uzyskać z własności (3.61)–(3.63). Porównując współczynniki stojące przy jednakowych potęgach  $\delta$  w równaniu (3.67) i wykorzystując własności symbolu  $O(\cdot)$  (np.  $O(\Delta) + O(\Delta^2) = O(\Delta)$ ) dostajemy

$$s_{n+i} = c_i \Delta^i + O(\Delta^{i+1}) \quad i = 1, \dots, n^* - 1. \quad (3.70)$$

W paragrafie 3.2 pokazaliśmy, że prawo sterowania

$$u(t) = R'(s)y_f(t) + S'(s)u_f(t) + ku_c(t) \quad (3.71)$$

zastosowane do obiektu (3.53) zapewnia ograniczonosc sygnałów  $y$  i  $u$  oraz gwarantuje spełnienie warunku  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) - y_m(t) = 0$ . Dyskretnym odpowiednikiem równania (3.71) może być

$$u(\ell\Delta) = R(\delta)y_f(\ell\Delta) + S_D(\delta)u_f(\ell\Delta) + ku_c(\ell\Delta), \quad (3.72)$$

gdzie obecnie

$$y_f(\ell\Delta) = \frac{1}{F(\delta)}y(\ell\Delta), \quad u_f(\ell\Delta) = \frac{1}{F(\delta)}u(\ell\Delta).$$

Zwróćmy uwagę na to, że w równaniu kompensatora wykorzystujemy jedynie dominującą część wielomianu  $S(\delta)$ , a pomijamy część zanikającą dla  $\Delta \rightarrow 0$ .

## Adaptacyjny układ sterowania

Załóżmy, że spełnione są warunki (B1)–(B3) podane na stronie 67 (z z wymienionym na s). Z równań (3.53), (3.66)–(3.69) otrzymujemy (porównaj (3.22))

$$ky(\ell\Delta) = F(\delta)\bar{u}_f(\ell\Delta) - R(\delta)\bar{y}_f(\ell\Delta) - S(\delta)\bar{u}_f(\ell\Delta), \quad (3.73)$$

gdzie

$$\bar{y}_f(\ell\Delta) = \frac{1}{A_m(\delta)F(\delta)}y(\ell\Delta), \quad \bar{u}_f(\ell\Delta) = \frac{1}{A_m(\delta)F(\delta)}u(\ell\Delta).$$

Otrzymane równanie przedstawiamy w postaci

$$\nu(\ell) = \varphi^T(\ell)\theta^* \quad (3.74)$$

przyjmując

$$\nu(\ell) = F(\delta)\bar{u}_f(\ell\Delta), \quad (3.75)$$

$$\theta^* = [r_{n-1} \dots r_0 \ s_{n-1} \dots s_0 \ k \ \Delta^{-n^*+1} s_{n+n^*-1} \dots \Delta^{-1} s_{n+1}]^T \quad (3.76)$$

$$\varphi(\ell) = [\delta^{n-1}\bar{y}_f(\ell\Delta) \dots \bar{y}_f(\ell\Delta) \ \delta^{n-1}\bar{u}_f(\ell\Delta) \dots \bar{u}_f(\ell\Delta) \ y(\ell\Delta) \ \delta^{n+n^*-1}\Delta^{n^*-1}\bar{u}_f(\ell\Delta) \dots \delta^{n-1}\Delta\bar{u}_f(\ell\Delta)]^T. \quad (3.77)$$

Adaptacyjny algorytm sterowania otrzymujemy identyfikując na bieżąco parametry  $\theta^*$  z równania (3.74) na przykład za pomocą algorytmu

$$\delta\hat{\theta}(\ell) = \frac{\Gamma\varphi(\ell)(\nu(\ell) - \varphi^T(\ell)\hat{\theta}(\ell-1))}{1 + \varphi^T(\ell)\Gamma\varphi(\ell)}, \quad \Gamma = \Gamma^T > 0 \quad (3.78)$$

i stosując kompensator

$$u(\ell\Delta) = \hat{R}(\ell, \delta)y_f(\ell\Delta) + \hat{S}_D(\ell, \delta)u_f(\ell\Delta) + \hat{k}(\ell)u_c(\ell\Delta) \quad (3.79)$$

z parametrami  $\hat{\theta}(\ell)$ .

**Twierdzenie 3.5.** *Rozważmy adaptacyjny układ sterowania (3.53), (3.75)–(3.79). Dla dowolnych wartości początkowych układu sterowania istnieje liczba  $\Delta^*$  taka, że dla każdego  $\Delta < \Delta^*$  jeżeli  $|\hat{k}(\ell)| \geq \kappa \forall \ell$ , to wejście i wyjście obiektu są ograniczone oraz spełniony jest warunek*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |y(\ell\Delta) - y_m(\ell\Delta)| \leq C_1 \Delta \sup_t |u_c(t)| \quad (3.80)$$

dla pewnej liczby dodatniej  $C_1$  niezależnej od  $\Delta$ .

Zwróćmy uwagę na to, że twierdzenie 3.5 mówi jedynie o stabilności lokalnej układu sterowania. Dla zadanego wystarczająco małego  $\Delta$  istnieje liczba  $M(\Delta)$  taka, że wejście i wyjście obiektu są ograniczone, o ile wartości początkowe układu sterowania zawierają się

w kuli o promieniu  $M$  (stan układu obejmuje stan obiektu, stan algorytmu identyfikacji i stan związany z procesem filtracji zmiennych  $u$  i  $y$ ). Gdy  $\Delta \rightarrow 0$ , to  $M(\Delta) \rightarrow \infty$ . Oznacza to, że dla wystarczająco małych wartości okresu próbkowania zbiór wartości początkowych, dla których układ pozostaje stabilny może być dowolnie rozległy. Można więc uznać, że dla małych wartości  $\Delta$  układ sterowania jest *prawie globalnie stabilny*. Można również pokazać, że globalnej stabilności układu uzyska się stosując algorytm identyfikacji, w którym zbiór dopuszczalnych wartości ocen parametrów jest ograniczony.

### Analiza stabilności

W dowodzie twierdzenia 3.5 wykorzystamy następującą wersję lematu C.1 podanego w dodatku C.

**Lemat 3.1.** *Rozważmy układ*

$$P(\ell, \delta)w(\ell\Delta) = Q(\ell, \delta)v(\ell\Delta) + \mu(\ell\Delta), \quad w(\ell\Delta), \mu(\ell\Delta) \in \mathbf{R}^m, \quad v(\ell\Delta) \in \mathbf{R}^k,$$

gdzie  $P$  i  $Q$  są macierzami wielomianowymi zmiennej  $\delta$  o współczynnikach zależnych od  $\ell$ . Załóżmy, że spełnione są warunki 1 i 2 lematu C.1 (z  $t$  i z wymienionym odpowiednio na  $\ell$  i  $\delta$ ) oraz, że

3. współczynniki macierzy  $P$  i  $Q$  są ograniczone jednostajnie względem  $\ell$  i  $\Delta$ ,
4. zera wielomianu  $\det(P(\ell, \delta))$  leżą w obszarze  $|1 + \Delta\delta| \leq 1 - \varepsilon\Delta$  dla pewnego  $\varepsilon > 0$  i wszystkich wystarczająco dużych  $\ell$ ,
5. dla każdego ustalonego  $\ell$  transmitancja  $P^{-1}(\ell, \delta)Q(\ell, \delta)$  jest właściwa,
6.  $\mu(\ell\Delta) \rightarrow 0$ , gdy  $\ell \rightarrow \infty$ .

Wówczas istnieje stała  $C$  niezależna od okresu próbkowania  $\Delta$  taka, że

$$\limsup_{\ell \rightarrow \infty} \|w(\ell\Delta)\| \leq C \limsup_{\ell \rightarrow \infty} \|v(\ell\Delta)\| \quad (3.81)$$

Zwróćmy uwagę na założenie 5, które nie występuje w lemacie C.1. Obecnie założenie to jest potrzebne po to, by stała  $C$  we własności (3.81) nie zależała od  $\Delta$ .

Zastosujemy technikę podobną do tej, którą stosowaliśmy w dowodach twierdzeń 3.1 i 3.3. Równanie  $\varepsilon_p(\ell) = \nu(\ell) - \varphi^T(\ell)\hat{\theta}(\ell)$  zapisujemy w postaci

$$\hat{k}y = F\hat{u}_f - \hat{S}\hat{u}_f - \hat{R}\hat{y}_f - \varepsilon_p. \quad (3.82)$$

Z (3.79) i (3.82) otrzymujemy po przekształceniach

$$\hat{k}A_m y + \hat{S}_c u_f = \hat{k}u_c + \mu_1 + \hat{T}_1 \hat{y}_f + \hat{T}_2 \hat{u}_f, \quad (3.83)$$

gdzie  $\hat{T}_1 = A_m \cdot \hat{R} - A_m \hat{R} + A_m \cdot \hat{g}A_m F - A_m \hat{g}A_m F$ ,  $\hat{T}_2 = A_m \cdot \hat{S} - A_m \hat{S}$ ,  $\mu_1 = -A_m \varepsilon$ . Z własności (i) i (ii) algorytmu identyfikacji wynika, że  $\hat{T}_1 \rightarrow 0$  i  $\hat{T}_2 \rightarrow 0$ ,  $\mu_1 \rightarrow 0$ , gdy  $\ell \rightarrow \infty$ .



W dalszym ciągu przez  $\hat{T}_i(\ell, \delta)$ , ( $i = 3, 4, \dots$ ) oznaczać będziemy wielomiany, których współczynniki dążą do zera, gdy  $\ell \rightarrow \infty$ , i które powstają przy zamianie operatorów tak, jak w równaniu (3.83). Z równań (3.83) i (3.60) otrzymujemy

$$(BA_m F + g^{-1} \hat{S}_\varepsilon A)y = BFu_c + \mu_2 + \hat{T}_3 \hat{y}_f + \hat{T}_4 \hat{u}_f, \quad (3.84)$$

gdzie  $\mu_2 \rightarrow 0$ , gdy  $\ell \rightarrow \infty$ . Podobnie z równań (3.83) i (3.79) otrzymujemy po przekształceniach

$$(A_m A_m F - \hat{S}_D A_m F - \hat{g}^{-1} \hat{S}_\varepsilon \hat{R})y = (A_m - \hat{S})Fr + \mu_3 + \hat{T}_3 \hat{y}_f + \hat{T}_6 \hat{u}_f, \quad (3.85)$$

gdzie  $\mu_3 \rightarrow 0$ , gdy  $\ell \rightarrow \infty$ . Wykorzystamy obecnie następujący lemat (Janecki [65]).

**Lemat 3.2.** *Istnieje odwzorowanie  $\mathcal{M}_d : (V_1(\delta), V_2(\delta)) \mapsto (V_3(\delta), W_1(\delta), W_2(\delta))$ , gdzie  $d$  jest liczbą naturalną i  $V_1, V_2, V_3, W_1, W_2$  są wielomianami o stopniach równych odpowiednio  $d, d-1, 2d, d, d-1$  takie, że*

1. dziedziną odwzorowania  $\mathcal{M}_d$  są pary wielomianów nie mających wspólnych zer w obszarze  $|1 + \Delta\delta| > 1$ ,
2.  $V_3 = V_1 W_1 + V_2 W_2$ ,
3. zera wielomianu  $V_3$  leżą w obszarze  $|1 + \Delta\delta| < 1$ ,
4. odwzorowanie  $\mathcal{M}_d$  jest ciągłe (w tym znaczeniu, że zależność pomiędzy współczynnikami  $V_3, W_1, W_2$  a  $V_1, V_2$  jest ciągła).

Zdefiniujmy

$$\hat{V}_1 = A_m A_m F - \hat{S}_D F + \hat{k}^{-1} \hat{S}_\varepsilon \hat{R}, \quad (3.86)$$

$$\hat{V}_2 = BA_m F + \hat{k}^{-1} \hat{S}_\varepsilon A. \quad (3.87)$$

Zauważmy, że  $\hat{V}_2$  dąży do wielomianu  $B'A'_m F'$ , gdy  $\Delta \rightarrow 0$ , przy czym stopień wielomianu  $\hat{V}_2$  jest równy  $2n + n^*$ , a wielomianu  $B'A'_m F'$  równy  $2n$ . Zatem  $2n$  zer wielomianu  $V_2$  dąży do zer wielomianu  $B'A'_m F'$ , zaś pozostałe  $n^*$  zer dąży do nieskończoności jednostajnie względem  $\ell$ , gdy  $\Delta \rightarrow 0$ . Z drugiej strony, ponieważ współczynniki  $V_1$  są ograniczone, a współczynnik stojący przy najwyższej potędze  $\delta$  w  $V_1$  jest stały, więc zera  $V_1$  są ograniczone jednostajnie względem  $\ell$  i  $\Delta$ . Zatem istnieje  $\Delta^* > 0$  (zależne od wartości początkowych układu) takie, że dla każdego  $\Delta < \Delta^*$  wielomiany  $V_1$  i  $V_2$  nie mają wspólnych zer w obszarze  $|1 + \Delta\delta| \geq 1$ . Załóżmy, że  $\Delta < \Delta^*$ . Niech

$$(\hat{V}_3, \hat{W}_1, \hat{W}_2) = \mathcal{M}_{2n+n^*}(\hat{V}_1, \hat{V}_2). \quad (3.88)$$

Działając operatorami  $W_1$  i  $W_2$  odpowiednio na (3.85) i (3.84) i dodając otrzymane równania dostajemy

$$\hat{V}_3 y = \hat{Z}_1 r + \mu_4 + \hat{T}_6 \hat{y}_f + \hat{T}_7 \hat{u}_f, \quad (3.89)$$

gdzie  $\mu_4 \rightarrow 0$ , gdy  $\ell \rightarrow \infty$  i  $\hat{Z}_1 = \hat{W}_1(A_m - \hat{S})F + W_2BF$ . W podobny sposób można pokazać, że

$$\hat{V}_3 u = \hat{Z}_2 r + \mu_5 + \hat{T}_8 \bar{y}_f + \hat{T}_9 \bar{u}_f, \quad (3.90)$$

gdzie  $\mu_5 \rightarrow 0$ , gdy  $\ell \rightarrow \infty$  i  $\hat{Z}_2 = -\hat{W}_1 \hat{R}F + \hat{W}_2 AF$ . Otrzymane równania zapiszemy w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} \hat{V}_3 & \hat{T}_6 & \hat{T}_7 \\ \hat{V}_3 & \hat{T}_8 & \hat{T}_9 \\ -1 & FA_m & \\ & -1 & FA_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \\ \bar{y}_f \\ \bar{u}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{Z}_1 \\ \hat{Z}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_c + \begin{bmatrix} \mu_4 \\ \mu_5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.91)$$

Stosując lemat 3.1 do układu (3.91) otrzymujemy (sprawdzenie założeń 1-5 przeprowadzamy w podobny sposób jak w dowodach twierdzeń 3.1 i 3.3)

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \|[y(\ell\Delta) \ u(\ell\Delta) \ \bar{y}_f(\ell\Delta) \ \bar{u}_f(\ell\Delta)]^T\| \leq CU, \quad (3.92)$$

gdzie  $U = \sup_{t \geq 0} |u_c(t)|$ . Pozostało nam udowodnić własność (3.80). Z równania  $A'_m(s)y_m(t) = u_c(t)$  wynika, że

$$A_m(\delta)y_m(\ell\Delta) = (1 + X_\epsilon(\delta))u_c(\ell\Delta), \quad (3.93)$$

gdzie  $X_\epsilon(\delta)$  jest pewnym wielomianem stopnia  $n - 1$ . Zgodnie z omówionymi wcześniej własnościami obiektów dyskretnych współczynniki wielomianu  $X_\epsilon(\delta)$  dążą do zera, gdy  $\Delta \rightarrow 0$  nie wolniej niż tak jak  $\Delta$ . Dzieląc równanie (3.83) przez  $\hat{k}$ , a następnie odejmując od niego (3.93) dostajemy

$$A_m(y - y_m) = -\hat{k}^{-1} \hat{S}_\epsilon A_m \bar{u}_f - X_\epsilon u_c + \mu_6,$$

gdzie  $\mu_6 \rightarrow 0$ , gdy  $\ell \rightarrow \infty$ . Stąd otrzymujemy (3.80) (przypominamy, że również współczynniki  $\hat{S}_\epsilon$  maleją do zera, gdy  $\Delta \rightarrow 0$  nie wolniej niż tak jak  $\Delta$ ).

## Rozdział 4

# Własności i zastosowanie sygnałów pobudzających

W rozdziale 2 pokazaliśmy, że warunkiem wykładniczej zbieżności algorytmów identyfikacji na bieżąco jest jednostajne pobudzenie sygnału  $\varphi$  występującego w równaniach algorytmu. W przypadku identyfikacji parametrów obiektu dynamicznego, bardziej celowe jest wyrażenie warunków zbieżności algorytmu w kategoriach sygnału wejściowego  $u$  lub, gdy obiekt pracuje w układzie ze sprzężeniem zwrotnym, sygnału sterującego  $u_c$ . Dla pewnych szczególnych postaci sygnałów jest to stosunkowo proste. Załóżmy przykładowo, że sygnał wejściowy obiektu ma postać  $u(t) = \sum_{i=1}^m u_i \sin(\omega_i t + \alpha_i)$ , gdzie  $u_i \neq 0$ ,  $\omega_i \neq 0$  dla  $i = 1, \dots, m$  i  $\omega_i \neq \omega_j$ , gdy  $i \neq j$ . Analiza odpowiedzi obiektu na sygnał  $u$  umożliwiła zidentyfikowanie  $m$  punktów charakterystyki amplitudowo-fazowej obiektu odpowiadających częstotliwościom  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ . Ponieważ znajomość  $m$  różnych punktów charakterystyki obiektu pozwala sformułować  $2m$  równań wiążących parametry obiektu, a do opisu transmitancji obiektu o rzędzie  $n$  potrzeba  $2n$  parametrów, więc identyfikacja wszystkich parametrów obiektu będzie możliwa, gdy  $m \geq n$ .

W tym rozdziale podamy warunki zbieżności algorytmów identyfikacji dla ogólnej postaci sygnałów wejściowych. Przedyskutujemy wstępnie znaczenie zbieżności parametrów dla odporności regulatorów adaptacyjnych i podamy przykłady zastosowania sygnałów pobudzających do syntezy globalnie stabilnych algorytmów adaptacji. Na zakończenie omówimy krótko własności sygnałów pobudzających w układach z zakłóceniami prawie okresowymi.

### 4.1 Własności sygnałów pobudzających—Czas dyskretny

Na wstępie przypomnimy definicję wektorowych sygnałów pobudzających.

**DEFINICJA 4.1.** Powiemy, że sygnał wektorowy  $\varphi : \varphi(t) \in \mathbf{R}^m$  jest sygnałem *jednostajnie pobudzającym z okresem pobudzenia  $T$* , jeżeli istnieje liczba rzeczywista dodatnia  $\varrho$  taka, że dla wszystkich wystarczająco dużych  $j$

$$\sum_{t=j}^{j+T-1} \varphi(t)\varphi^T(t) \geq \varrho I. \quad (4.1)$$

Klasę wszystkich sygnałów  $\varphi : \varphi(t) \in \mathbf{R}^m$  jednostajnie pobudzających z okresem pobudzenia  $T$  oznaczymy przez  $\bar{\mathcal{V}}(m, T)$ , a klasę wszystkich sygnałów jednostajnie pobudzających z dowolnym okresem pobudzenia przez  $\mathcal{V}(m)$ .

Zachodzą następujące dwie proste własności.

**Lemat 4.1.** *Jeżeli  $\varphi \in \bar{\mathcal{V}}(m, T)$  i  $H$  jest nieosobliwą macierzą kwadratową, to  $\psi : \psi(t) = H\varphi(t)$  również należy do  $\bar{\mathcal{V}}(m, T)$ .*

**Lemat 4.2.** *Jeżeli  $\varphi \in \bar{\mathcal{V}}(m, T)$  i  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t) - \psi(t)\| = 0$ , to  $\psi \in \bar{\mathcal{V}}(m, T)$ .*

Następna własność jest mniej oczywista.

**Lemat 4.3.** *Niech  $C(z)$  będzie dowolnym wielomianem niezerowym stopnia  $n_c$  i niech  $C(z)\psi(t) = \varphi(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $\varphi(t) \in \mathbf{R}^m$ . Jeżeli spełniony jest warunek pobudzenia (4.1), to*

$$\sum_{t=j}^{j+T+n_c-1} \psi(t)\psi^T(t) \geq \varrho' I \quad (4.2)$$

dla pewnej stałej dodatniej  $\varrho'$ .

**DOWÓD.** Przyjmijmy  $C(z) = \sum_{i=0}^{n_c} c_i z^i$ . Dla dowolnego wektora  $h \in \mathbf{R}^m$  mamy

$$(h^T \varphi(t))^2 = \left( \sum_{i=0}^{n_c} c_i h^T \psi(t+i) \right)^2 \leq \sum_{i=0}^{n_c} c_i^2 \cdot \sum_{i=0}^{n_c} (h^T \psi(t+i))^2.$$

(Zastosowaliśmy tu nierówność Cauchy'ego [102]). Wobec tego, z warunku (4.1) otrzymujemy

$$\varrho \|h\|^2 \leq \sum_{t=j}^{j+T-1} (h^T \varphi(t))^2 \leq (n_c + 1) \sum_{i=0}^{n_c} c_i^2 \cdot \sum_{t=j}^{j+T+n_c-1} (h^T \psi(t))^2.$$

Zatem warunek (4.2) jest spełniony dla  $\varrho' = \varrho / (n_c + 1) \sum_{i=0}^{n_c} c_i^2$ . □

Z lematu 4.3 wynika natychmiast, że jeżeli  $\varphi \in \bar{\mathcal{V}}(m, T)$ , to  $\psi \in \bar{\mathcal{V}}(m, T + n_c)$ .

Obecnie odpowiemy na pytanie, jakie warunki muszą być spełnione, by stan układu dynamicznego  $\varphi(t+1) = F\varphi(t) + g\xi(t)$  był sygnałem pobudzającym.

**Lemat 4.4.** *Rozważmy układ dynamiczny*

$$\varphi(t+1) = F\varphi(t) + g\xi(t), \quad (4.3)$$

gdzie  $F \in \mathbf{R}^{m \times m}$ ,  $g \in \mathbf{R}^m$  i założmy, że para  $(F, g)$  jest sterowalna. Jeżeli sygnał skalarny  $\xi$  spełnia warunek

$$\sum_{t=j}^{j+T-1} \begin{bmatrix} \xi(t+m-1) \\ \vdots \\ \xi(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t+m-1) & \dots & \xi(t) \end{bmatrix} \geq \varrho I \quad (4.4)$$

dla pewnej stałej dodatniej  $\varrho$ , to

$$\sum_{t=j}^{j+T+m-1} \varphi(t)\varphi^T(t) \geq \varrho' I \quad (4.5)$$

dla pewnej stałej dodatniej  $\varrho'$ .

DOWÓD. Niech  $H \in \mathbb{R}^{m \times m}$  będzie macierzą zdefiniowaną przez równanie

$$\text{adj}(zI - F)g = H[z^{m-1} \dots z 1]^T. \quad (4.6)$$

Z założenia o sterowalności pary  $(F, g)$  wynika, że macierz  $H$  jest nieosobliwa ([74], twierdzenie 2.1(3b)). Mnożąc równanie  $(zI - F)\varphi(t) = g\xi(t)$  prawostronnie przez macierz  $\text{adj}(zI - F)$  i wykorzystując (4.6) dostajemy

$$\det(zI - F)\varphi(t) = H \begin{bmatrix} \xi(t + m - 1) \\ \vdots \\ \xi(t) \end{bmatrix}.$$

Stosując teraz kolejno lemat 4.1 i lemat 4.3 otrzymujemy (4.5).  $\square$

**DEFINICJA 4.2.** Powiemy, że sygnał skalarny  $\xi$  jest sygnałem *jednostajnie pobudzającym* rzędu  $m$  z okresem pobudzenia  $T$  jeżeli dla pewnego dodatniego  $\varrho$  i wszystkich wystarczająco dużych  $j$  spełniony jest warunek (4.4).

Klasę wszystkich sygnałów skalarnych  $\xi$  jednostajnie pobudzających z okresem pobudzenia  $T$  oznaczmy przez  $\mathcal{S}(m, T)$ , a klasę wszystkich sygnałów skalarnych jednostajnie pobudzających z dowolnym okresem pobudzenia przez  $\mathcal{S}(m)$ .

Z lematu 4.4 wynika, że sygnał  $\varphi$  spełniający równanie (4.3), w którym para  $(F, g)$  jest sterowalna jest sygnałem jednostajnie pobudzającym jeżeli  $\xi \in \mathcal{S}(m)$ . Jeżeli dodatkowo założymy, że macierz  $F$  jest macierzą ściśle stabilną, to warunek  $\xi \in \mathcal{S}(m)$  jest warunkiem koniecznym dla zapewnienia jednostajnego pobudzenia  $\varphi$  [60]. W ogólności można pokazać, że jeżeli  $\xi$  jest sygnałem jednostajnie pobudzającym rzędu  $\text{rank}[F^{m-1}g \dots Fg g]$ , to  $\varphi$  jest sygnałem jednostajnie pobudzającym w podprzestrzeni  $[F^{m-1}g \dots Fg g]\mathbb{R}^m$ .

Przykładem sygnału skalarnego jednostajnie pobudzającego rzędu  $2n$  jest sygnał  $\xi(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i \sin(\omega_i t + \alpha_i)$ , w którym  $\xi_i \neq 0$ ,  $0 < \omega_i < \pi$ ,  $\omega_i \neq \omega_j$  dla  $i \neq j$ .

Rozważymy obecnie ponownie zagadnienie identyfikacji na bieżąco parametrów obiektu

$$A(z)y(t) = B(z)u(t),$$

w którym wielomiany  $A(z)$  i  $B(z)$  są względnie pierwsze. Równanie obiektu przedstawiamy w postaci  $\nu(t) = \varphi^T(t)\theta^*$ , gdzie

$$\varphi(t) = [-y_f(t + n - 1) \dots - y_f(t) \ u_f(t + n - 1) \dots u_f(t)]^T$$

i gdzie  $F(z)u(t) = u_f(t)$ ,  $F(z)y(t) = y_f(t)$ ,  $F(z) = z^n + f_1 z^{n-1} + \dots + f_n$  (porównaj (2.13)). Znajdziemy warunki, dla których wektor  $\varphi \in \mathcal{V}(2n)$ , a więc dla których zapewniona jest wykładnicza zbieżność ocen parametrów do  $\theta^*$ . W tym celu zauważmy, że wektor  $\varphi$  spełnia równanie

$$\varphi(t+1) = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -a_1 & \dots & -a_n & b_1 & \dots & b_n \\ 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & 0 & & \\ \hline & & & -f_1 & \dots & -f_n \\ \hline & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 & 0 \end{array} \right] \varphi(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \xi(t) := \tilde{F}\varphi(t) + \tilde{g}\xi(t), \quad (4.7)$$

Pokażemy, że para  $(\tilde{F}, \tilde{g})$  jest sterowalna. Oznaczmy przez  $\tilde{E}$  macierz powstałą z macierzy  $\tilde{F}$  przez zastąpienie współczynników  $f_1, \dots, f_n$  zerami. Ponieważ  $\tilde{F} = \tilde{E} + \tilde{f}^T \tilde{g}$  dla  $\tilde{f} = [0 \dots 0 -f_1 \dots -f_n]^T$ , więc wystarczy pokazać, że para  $(\tilde{E}, \tilde{g})$  jest sterowalna. Bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że

$$\text{adj}(zI - \tilde{E})\tilde{g} = \Upsilon(A(z), B(z)) \begin{bmatrix} z^{2n-1} \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

gdzie  $\Upsilon(A, B)$  jest macierzą Sylwestera dla pary wielomianów  $A$  i  $B$  (dodatek B). Ponieważ  $A$  i  $B$  są względnie pierwsze, więc  $\Upsilon(A, B)$  jest macierzą nieosobliwą. Zatem para  $(\tilde{E}, \tilde{g})$  jest sterowalna. Z lematu 4.4 wynika więc natychmiast, że  $\varphi \in \mathcal{V}(2n)$ , jeśli wejście obiektu  $u \in \mathcal{S}(2n)$ .

Ostatnia własność dotycząca sygnałów pobudzających, którą podamy może być przydatna przy analizie pobudzenia w układach ze sprzężeniem zwrotnym.

**Lemat 4.5.** *Rozważmy układ skalarny*

$$\begin{aligned} \psi(t+1) &= F\psi(t) + g\xi(t), \\ \zeta(t) &= h^T\psi(t). \end{aligned} \quad (4.8)$$

*Jeżeli wejście układu  $\xi \in \mathcal{S}(m)$ , to wyjście układu  $\zeta \in \mathcal{S}(m - n_z)$ , gdzie  $n_z$  jest liczbą zer układu leżących poza i na okręgu jednostkowym. Jeżeli dodatkowo założymy, że sygnał  $\xi$  jest ograniczony, to  $\zeta \in \mathcal{S}(m - \bar{n}_z)$ , gdzie  $\bar{n}_z$  jest liczbą zer leżących dokładnie na okręgu jednostkowym.*

Dowód lematu 4.5 można znaleźć w pracy [57].

## 4.2 Własności sygnałów pobudzających—Czas ciągły

Celem tego paragrafu jest scharakteryzowanie klasy skalarnych sygnałów jednostajnie pobudzających w układach ciągłych. Przedstawiony materiał oparty jest głównie na pracy autora [60]. Inne stosowane podejścia do rozważanego problemu omówimy krótko pod koniec paragrafu.

Przypominamy, że warunkiem zbieżności algorytmów identyfikacji na bieżąco z czasem ciągłym jest spełnienie nierówności

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \varphi(t)\varphi^T(t) dt \geq \varrho I \quad (4.9)$$

dla pewnych stałych dodatnich  $T$  i  $\varrho$  i wszystkich wystarczająco dużych  $t_0$ . W algorytmie identyfikacji na bieżąco parametrów obiektu  $A(s)y(t) = B(s)u(t)$  opisanym w paragrafie 2.1 wektor  $\varphi$  spełnia równanie różniczkowe

$$\dot{\varphi}(t) = \tilde{F}\varphi(t) + \tilde{g}u(t), \quad (4.10)$$

gdzie  $\tilde{F}$  i  $\tilde{g}$  są zdefiniowane za pomocą równania (4.6). Jeśli wielomiany  $A(s)$  i  $B(s)$  są względnie pierwsze, to para  $(\tilde{F}, \tilde{g})$  jest sterowalna. Poniżej scharakteryzujemy klasę sygnałów wejściowych, dla których spełniony jest warunek (4.9). Wykorzystamy następujący ważny lemat.

**Lemat 4.6.** Niech  $(F_1, g_1), (F_2, g_2) \in \mathbb{R}^{m \times m} \times \mathbb{R}^m$  będą dowolnymi parami sterowalnymi. Załóżmy, że istnieje dodatnia stała  $\varrho_1$  taka, że dla każdego wektora  $\varphi_0 \in \mathbb{R}^m$  trajektoria  $\varphi[t_0, t_0 + T]$ , ( $T > 0$ ) układu

$$\dot{\varphi}(t) = F_1\varphi(t) + g_1\xi(t) \quad (4.11)$$

z warunkiem początkowym  $\varphi(t_0) = \varphi_0$  spełnia warunek

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \varphi(t)\varphi^T(t) dt \geq \varrho_1 I. \quad (4.12)$$

Wówczas istnieje stała dodatnia  $\varrho_2$  niezależna od  $t_0$  taka, że dla każdego wektora  $\psi_0 \in \mathbb{R}^m$  trajektoria  $\psi[t_0, t_0 + T]$  układu

$$\dot{\psi}(t) = F_2\psi(t) + g_2\xi(t) \quad (4.13)$$

z warunkiem początkowym  $\psi(t_0) = \psi_0$  spełnia warunek

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \psi(t)\psi^T(t) dt \geq \varrho_2 I. \quad (4.14)$$

**DOWÓD.** Niech macierze  $H_1, H_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  będą zdefiniowane za pomocą równań

$$\text{adj}(sI - F_i)g_i = H_i[s^{m-1} \dots s \ 1]^T, \quad i = 1, 2. \quad (4.15)$$

Z założenia o sterowalności  $(F_1, g_1)$  i  $(F_2, g_2)$  wynika, że macierze  $H_1, H_2$  są nieosobliwe. Zdefiniujmy zbiór

$$\mathcal{H} = \{h \in \mathbf{R}^m : \|h\| = 1, \text{ para } (h^T H_2 H_1^{-1}, F_1) \text{ jest obserwowalna}\}. \quad (4.16)$$

Niech  $h$  będzie dowolnym elementem  $\mathcal{H}$ . Oznaczmy

$$\delta(t) = h^T \psi(t), \quad \sigma(t) = h^T H_2 H_1^{-1} \varphi(t). \quad (4.17)$$

Dokonując transformaty Laplace'a równań (4.11), (4.13) i (4.17) otrzymujemy po prostych przekształceniach

$$\begin{aligned} \sigma(s) &= \frac{\det(sI - F_2)}{\det(sI - F_1)} \delta(s) + h^T H_2 H_1^{-1} (sI - F_1)^{-1} \varphi_0 - h^T \frac{\text{adj}(sI - F_2)}{\det(sI - F_1)} \psi_0 \\ &= \frac{\det(sI - F_2)}{\det(sI - F_1)} \delta(s) + \frac{[s^{m-1} \dots s \ 1]}{\det(sI - F_1)} (Q_1 \varphi_0 - Q_2 \psi_0), \end{aligned} \quad (4.18)$$

gdzie macierze  $Q_1, Q_2 \in \mathbf{R}^{m \times m}$  są zdefiniowane przez równania

$$h^T H_2 H_1^{-1} \text{adj}(sI - F_1) = [s^{m-1} \dots s \ 1] Q_1, \quad (4.19)$$

$$h^T \text{adj}(sI - F_2) = [s^{m-1} \dots s \ 1] Q_2. \quad (4.20)$$

Ponieważ para  $(h^T H_2 H_1^{-1}, F_2)$  jest obserwowalna, więc macierz  $Q_1$  jest nieosobliwa. Z założenia, nierówność (4.15) zachodzi dla dowolnego  $\varphi_0 \in \mathbf{R}^m$ . Zatem w szczególności zachodzi dla  $\varphi_0 = Q_1^{-1} Q_2 \psi_0$ . Dla tej wartości wektora  $\varphi_0$  równanie (4.18) przyjmuje postać

$$\sigma(s) = \frac{\det(sI - F_2)}{\det(sI - F_1)} \delta(s), \quad (4.21)$$

skąd

$$\sigma(t) = \delta(t) + \int_{t_0}^t r(t - \tau) \delta(\tau) d\tau, \quad (4.22)$$

gdzie  $r$  oznacza odpowiedź impulsową transmitancji  $\det(sI - F_2) / \det(sI - F_1) - 1$ . Stosując nierówność Cauchy'ego do (4.22) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+T} \sigma^2(t) dt &\leq 2 \int_{t_0}^{t_0+T} \delta^2(t) dt + 2 \int_{t_0}^{t_0+T} \left( \int_{t_0}^t r(t - \tau) d\tau \right)^2 dt \\ &\leq 2 \int_{t_0}^{t_0+T} \delta^2(t) dt + 2 \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{t_0}^t r^2(t - \tau) d\tau \int_{t_0}^t \delta^2(\tau) d\tau \\ &\leq 2(1 + T\gamma) \int_{t_0}^{t_0+T} \delta^2 dt, \quad \text{gdzie } \gamma = \int_0^T r^2(t) dt. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Ale na mocy (4.12),

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \sigma^2(t) dt = \int_{t_0}^{t_0+T} \|h^T H_2 H_1^{-1} \varphi(t)\|^2 dt \geq \varrho_1 \|H_2 H_1^{-1}\|^2.$$



Zatem

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \delta^2(t) dt = \int_{t_0}^{t_0+T} \|h^T \psi(t)\|^2 dt \geq \frac{\varrho_1 \|H_2 H_1^{-1}\|^2}{2(1+T\gamma)} > 0 \quad \forall h \in \mathcal{H}. \quad (4.24)$$

Na koniec zauważmy, że  $\forall h_1, h_2 \in \mathbf{R}^m : \|h_1\|, \|h_2\| = 1$  mamy

$$\left\| \int_{t_0}^{t_0+T} (h_1^T \psi(t))^2 dt - \int_{t_0}^{t_0+T} (h_2^T \psi(t))^2 dt \right\| \leq 2\|h_1 - h_2\| \int_{t_0}^{t_0+T} \|\psi(t)\|^2 dt. \quad (4.25)$$

Wykorzystując własność (4.25) oraz fakt, że zbiór  $\mathcal{H}$  jest gęsty w  $\mathbf{R}^m$  łatwo można teraz pokazać, że nierówność (4.24) zachodzi dla każdego  $h \in \mathbf{R}^m : \|h\| = 1$ .  $\square$

Niech  $(F, g)$  będzie dowolną parą sterowalną. Z lematu 4.6 wynika, że sygnał skalarny  $\xi$  możemy uznać za sygnał jednostajnie pobudzający rzędu  $m$  o okresie pobudzenia  $T$  jeżeli dla pewnego dodatniego  $\varrho$  i każdego  $\varphi_0 \in \mathbf{R}^m$  trajektoria  $\varphi[t_0, t_0 + T]$  układu  $\dot{\varphi}(t) = F\varphi(t) + g\xi(t)$  z warunkiem początkowym  $\varphi(0) = \varphi_0$  spełnia warunek

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \varphi(t)\varphi^T(t) dt \geq \varrho I.$$

Z lematu 4.6 wynika, że para  $(F, g)$  może zostać dobrana dowolnie. W szczególności przyjmując

$$(F, g) = \left( \left[ \begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline I_{m-1} & 0 \end{array} \right], [1 \ 0 \dots 0]^T \right),$$

dostajemy następującą definicję.

**DEFINICJA 4.3.** Powiemy, że sygnał  $\xi$  jest sygnałem *jednostajnie pobudzającym rzędu  $m$  z okresem pobudzenia  $T$*  jeśli istnieje liczba rzeczywista  $\varrho > 0$  taka, że dla dowolnego wielomianu  $Q(t)$  o stopniu  $m-1$  i dowolnego wektora  $h \in \mathbf{R}^m : \|h\| = 1$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} (Q(t) - [\zeta_1(t) \dots \zeta_m(t)]h)^2 dt \geq \varrho$$

dla wszystkich wystarczająco dużych  $t_0$ , gdzie

$$\zeta_i(t) = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_1} \dots \int_{t_0}^{t_{i-1}} \xi(t_i) dt_i \dots dt_2 dt_1, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

(tzn.  $\zeta_i = \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(\xi)/s^i)$ , gdzie  $\mathcal{L}$  jest przekształceniem Laplace'a zdefiniowanym przez  $\xi(s) = \int_{t_0}^{\infty} e^{-st} \xi(t) dt$ )

Podobnie jak w układach dyskretnych, dla odpowiednich klas sygnałów pobudzających przyjmiemy oznaczenia  $\bar{\mathcal{V}}(m, T)$ ,  $\mathcal{V}(m)$ ,  $\bar{\mathcal{S}}(m, T)$  i  $\mathcal{S}(m)$ .

Wykorzystując przyjętą definicję można pokazać, że

- sygnał  $\xi(t) = \sum_{i=1}^m \xi_i \sin(\omega_i t + \alpha_i)$ , w którym  $\omega_i \neq \omega_j$  dla  $i \neq j$  należy do klasy  $\bar{\mathcal{V}}(m, T)$  dla dowolnego  $T > 0$ ,

- fala prostokątna

$$\xi(t) = \begin{cases} -1, & \text{gdy } t \in [2i\tilde{T}, (2i+1)\tilde{T}] \\ 1 & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

należy do  $\tilde{\mathcal{V}}(m, T)$  dla dowolnego  $m$  i  $T > \tilde{T}$ .

Istnieją inne alternatywne definicje klasy skalarnych sygnałów pobudzających. Jedną z nich jest następująca: sygnał ograniczony  $\xi: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$  nazywamy sygnałem jednostajnie pobudzającym rzędu  $m$  jeśli dla pewnej pary sterowalnej  $(F, g) \in \mathbf{R}^{m \times m} \times \mathbf{R}^m$  takiej, że  $F$  jest macierzą ściśle stabilną trajektoria układu  $\dot{\varphi}(t) = F\varphi(t) + g\xi(t)$  należy do  $\mathcal{V}(m)$ . Powyższa definicja dla różnych szczególnych postaci pary  $(F, g)$  proponowana była przez wielu autorów, w tym przez Dasgupta i in. [22] oraz Johnstone i in. [73]. Można jednak pokazać, że definicja ta nie pozwala zdefiniować okresu pobudzenia, ponieważ długość przedziału całkowania w warunku pobudzenia dla sygnału  $\varphi$  zależy w tym przypadku od pary  $(F, g)$ . Ponadto, definicja ta jest poprawna jedynie dla sygnałów ograniczonych.

Istnieje również interesujące podejście częstotliwościowe do analizy pobudzenia w algorytmach identyfikacji i adaptacji. Podejście to zostało po raz pierwszy zastosowane przez Boyd i Sastry [16] i było następnie rozwijane w pracach [15, 120]. W podejściu tym przyjmuje się, że sygnał skalarny jest jednostajnie pobudzającym rzędu  $m$ , jeśli ma  $m$  odrębnych linii spektralnych. Przyjmuje się, że funkcja  $\xi$  ma linię spektralną dla częstotliwości  $\omega$ , jeżeli

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \xi(t) e^{-i\omega t} dt$$

dąży do  $\hat{\xi}(\omega) \in \mathbf{C}^1$ ,  $\hat{\xi}(\omega) \neq 0$  jednostajnie względem  $t_0$ , gdy  $T \rightarrow \infty$ . W podejściu częstotliwościowym również nie definiuje się pojęcia okresu pobudzenia.

Na zakończenie warto może dodać, że nie wszystkie próby zdefiniowania klasy sygnałów pobudzających z czasem ciągłym były poprawne. Na przykład, w pracy [98] przyjęto, że sygnał skalarny  $\xi$  jest jednostajnie pobudzający rzędu  $m$  wtedy, gdy  $[\xi \ \xi^{(1)} \dots \xi^{(m-1)}]^T \in \mathcal{V}(m)$ , gdzie  $\xi^{(i)}$  jest  $i$ -tą pochodną  $\xi$ . Zauważmy, że zgodnie z tą definicją, sygnał  $\xi(t) = \cos(2^i \pi t)$ ,  $t \in [i-1, i]$ ,  $i = 1, 2, \dots$  byłby sygnałem pobudzającym rzędu 2. Pomimo tego  $\xi$  nie jest nawet sygnałem pobudzającym rzędu 1, gdyż dla dowolnej stałej  $F < 0$  odpowiedź układu  $\dot{\varphi}(t) = F\varphi(t) + \xi(t)$  spełnia warunek  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$ .

### 4.3 Zbieżność adaptacyjnych algorytmów sterowania

W tym paragrafie podamy warunki wykładniczej zbieżności ocen  $\hat{\theta}$  do parametrów  $\theta^*$  dla dwóch wybranych dyskretnych adaptacyjnych algorytmów sterowania. Przyjmiemy, że zastosowany algorytm identyfikacji spełnia warunki (patrz twierdzenia 2.1 i 2.2)

- ciąg  $\{\hat{\theta}(t)\}$  jest ograniczony,
- $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(t-1)\| = 0$ .

(iii)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_p(t) = 0$ , gdzie  $\varepsilon_p(t) = \nu(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}(t)$ ,

(iv) jeżeli  $\|\varphi\| \in l^\infty$  i  $\varphi \in \mathcal{V}(m)$ , to ciąg  $\{\hat{\theta}(t)\}$  dąży wykładniczo do  $\theta^*$ , gdy  $t \rightarrow \infty$ .

Na wstępie rozważymy pośredni algorytm sterowania z przesuwaniem biegunów opisany w paragrafie 3.1. Założmy, że spełnione są warunki (A1)–(A3) podane na stronie 64. Pokazaliśmy, że wektor  $\varphi = [z^{n-1}y_f \dots y_f z^{n-1}u_f \dots u_f]^T$  spełnia równanie

$$\varphi(t+1) = \bar{F}\varphi(t) + \bar{g}u(t), \quad (4.26)$$

gdzie  $(\bar{F}, \bar{g})$  jest parą sterowalną. Zapiszmy prawo sterowania (3.7) w postaci

$$u(t) = \hat{\vartheta}_1^T(t)\varphi(t) + \hat{k}(t)u_c(t), \quad (4.27)$$

gdzie  $\hat{\vartheta}_1(t) = [\hat{r}_1(t) \dots \hat{r}_n(t) \hat{s}_1(t) \dots \hat{s}_n(t)]^T$ . Podstawiając (4.27) do (4.26) otrzymujemy

$$\varphi(t+1) = (\bar{F} + \bar{g}\hat{\vartheta}_1^T(t))\varphi(t) + \bar{g}\hat{k}(t)u_c(t). \quad (4.28)$$

Niech  $\hat{\vartheta}(t) := [\hat{\vartheta}_1^T(t) \hat{k}(t)]^T = \mathcal{F}(\hat{\theta}(t))$ , gdzie  $\mathcal{F}: \theta \in \mathcal{C} \mapsto [\vartheta_1^T k]^T \in \mathbf{R}^{2n+1}$  jest procedurą projektową zdefiniowaną za pomocą równań (3.4), (3.5) i  $\mathcal{C} = \{\theta \in \mathbf{R}^{2n} : A(z), B(z) \text{ są względnie pierwsze}, B(1) \neq 0\}$ .

**Twierdzenie 4.1.** *Założmy, że ciąg  $\{\hat{\theta}(t)\}$  spełnia warunek  $\hat{\theta}(t) \in \hat{\mathcal{C}} \forall t$ , gdzie  $\hat{\mathcal{C}}$  jest pewnym domkniętym podzbiorem  $\mathcal{C}$ . Jeżeli  $u_c \in \mathcal{S}(2n)$ , to oceny  $\hat{\theta}$  dążą wykładniczo do  $\theta^*$*

**DOWÓD.** Z twierdzenia 3.1 i przyjętych założeń wynika, że wejście i wyjście obiektu są ograniczone. Ponieważ procedura  $\mathcal{F}$  jest ciągła na  $\mathcal{C}$ , więc z warunków (i) i (ii) wynika, że

$$\left. \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{\vartheta}(t+1) - \hat{\vartheta}(t)\| &= 0, \\ \text{ciąg } \{\hat{\vartheta}(t)\} &\text{ jest ograniczony} \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

Dla danego wektora  $\vartheta = [\vartheta_1^T k]^T$  zdefiniujmy ciąg  $\{\bar{\varphi}(t)\} : \bar{\varphi}(t+1) = (\bar{F} + \bar{g}\vartheta_1^T)\bar{\varphi}(t) + \bar{g}ku_c(t)$ . Na mocy lematu 4.4, ciąg  $\{\bar{\varphi}(t)\} \in \mathcal{V}(2n)$  dla każdego  $\vartheta \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$ , tzn.  $\sum_{j=t}^{j+T-1} \bar{\varphi}(t)\bar{\varphi}^T(t) \geq \bar{\rho}I, \forall j \geq t_0$ . Ponadto, z lematu 4.4 wynika, że parametr  $\bar{\rho}$  jest ciągłą funkcją  $\vartheta \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$  oraz, że  $t_0$  nie zależy od  $\vartheta$ . Zatem

$$\sum_{t=j}^{j+T-1} \bar{\varphi}(t)\bar{\varphi}^T(t) \geq \bar{\rho}I, \forall j \geq t_0, \theta \in \mathcal{C}, \quad (4.30)$$

gdzie  $\bar{\rho} = \inf_{\mathcal{F}(\hat{\mathcal{C}})} \bar{\rho}$ . Niech  $\bar{\varphi}_j[j, j+T-1]$  będzie trajektorią układu

$$\bar{\varphi}_j(t+1) = (\bar{F} + \bar{g}\hat{\vartheta}(j))\bar{\varphi}_j(t) + \bar{g}\hat{k}(j)u_c(t), \quad \bar{\varphi}_j(j) = \varphi(j)$$

w przedziale  $[j, j+T-1]$ . Ponieważ  $[\hat{\vartheta}^T(j) \hat{k}(j)]^T \in \hat{\mathcal{C}}$ , więc na mocy (4.30)  $\sum_{t=j}^{j+T-1} \bar{\varphi}_j(t)\bar{\varphi}_j^T(t) \geq \bar{\rho}I \forall j \geq t_0$ . Z własności (4.29) i faktu, że  $\varphi$  jest ograniczone wynika, iż  $\bar{\varphi}_j(j+i) - \varphi(j+i) \rightarrow 0$ , gdy  $j \rightarrow \infty$  dla każdego  $i \in [0, T-1]$ . Zatem ciąg  $\varphi \in \mathcal{V}(2n)$  i w konsekwencji  $\hat{\theta}$  dąży wykładniczo do  $\theta^*$ , gdy  $t \rightarrow \infty$   $\square$

Drugim algorytmem, który rozpatrzymy jest bezpośredni algorytm sterowania z modelem odniesienia opisany w paragrafie 3.3

**Twierdzenie 4.2.** *Rozważmy układ adaptacyjnego sterowania (3.11), (3.17), w którym parametry kompensatora identyfikowane są z równań (3.23)–(3.26). Jeżeli  $|\hat{k}(t)| \geq \kappa \forall t$  i  $u_c \in \mathcal{S}(2n+1-n')$ , gdzie  $n'$  jest stopniem największego wspólnego dzielnika wielomianów  $A(z)$  i  $B(z)$ , to ciąg ocen  $\{\hat{\theta}(t)\}$  jest zbieżny wykładniczo*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\theta}(t) \in \Theta,$$

gdzie  $\Theta$  jest rozmaitością liniową o wymiarze  $n'$  przechodzącą przez punkt  $\theta^*$ .

**DOWÓD.** Z lematu 4.5 wynika, że wyjście modelu odniesienia  $y_m$  jest sygnałem pobudzającym rzędu  $2n+1-n'$ . Ale na mocy twierdzenia 3.3  $y(t) - y_m(t) \rightarrow 0$ , gdy  $t \rightarrow \infty$ . Zatem również wyjście obiektu  $y \in \mathcal{S}(2n+1-n')$ . Załóżmy, że  $A(z) = \bar{A}(z)L(z)$ ,  $B(z) = \bar{B}(z)L(z)$  dla pewnego wielomianu  $L(z)$  rzędu  $n'$ . Mamy

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} z^{n-1} \bar{y}_f(t) \\ \vdots \\ \bar{y}_f(t) \\ z^{n-1} \bar{u}_f(t) \\ \vdots \\ \bar{u}_f(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{FA_m \bar{B}} \begin{bmatrix} z^{n-1} \bar{B} \\ \vdots \\ B \\ z^{n-1} \bar{A} \\ \vdots \\ \bar{A} \\ FA_m(z) \bar{B} \end{bmatrix} y(t) = \Upsilon \frac{1}{FA_m \bar{B}} \begin{bmatrix} z^{2n+1-n'} \\ z^{2n-n'} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} y(t),$$

gdzie  $\Upsilon$  jest macierzą o rozmiarze  $(2n+1) \times (2n+1-n')$ . Zatem ciąg  $\varphi$  jest jednostajnie pobudzający w  $\mathcal{X}$ , gdzie  $\mathcal{X} = \{h \in \mathbf{R}^{2n+1} : h^T \Upsilon = 0\}$ . Na mocy twierdzenia 2.2, ciąg  $\{\hat{\theta}(t)\}$  dąży wykładniczo do pewnego elementu rozmaitości  $\Theta := \{\theta \in \mathbf{R}^{2n+1} : \theta = \theta^* + x, x \in \mathcal{X}\}$ . Pozostało pokazać, że  $\dim \Theta = n'$ . Niech  $\Upsilon'$  będzie macierzą złożoną z  $2n-n'$  pierwszych kolejnych wierszy macierzy  $\Upsilon$  i z jej wiersza ostatniego. Równanie  $h^T \Upsilon' = 0$ , gdzie  $h = [h_1 \dots h_{2n+1-n'}]$  możemy zapisać w postaci

$$h_{2n+1-n'} FA_m \bar{B} = H_1 \bar{B} + z^{n'} H_2 \bar{A}, \quad (4.31)$$

gdzie  $H_1(z) = -h_1 z^{n-1} - \dots - h_n$ ,  $H_2(z) = -h_{n+1} z^{n-n'-1} - \dots - h_{2n-n'}$ . Lewa strona równania (4.31) jest wielomianem rzędu nie większego niż  $2n-n'-1$ . Ponieważ rząd wielomianu  $FA_m \bar{B}$  jest równy dokładnie  $2n-n'$ , więc  $h_{2n+1-n'} = 0$ . Stąd  $H_1 \bar{B} + z^{n'} H_2 \bar{A} = 0$ . Wykorzystując fakt, że wielomiany  $\bar{A}$  i  $\bar{B}$  są względnie pierwsze dostajemy  $H_1 = H_2 = 0$  (patrz dodatek B). Zatem macierz  $\Upsilon$  jest macierzą pełnego rzędu i  $\dim \mathcal{X} = n'$ .  $\square$

Analizę zbieżności pozostałych algorytmów rozważanych w rozdziale 3 można znaleźć w pracy Janeckiego [64].

## 4.4 Odporność regulatorów adaptacyjnych

Zbieżność ocen do parametrów gwarantuje oczywiście spełnienie celów sterowania. Jednostajne pobudzenie wektora  $\varphi$  ma także ogromne znaczenie dla zapewnienia odporności adaptacyjnych układów sterowania. Problemowi temu poświęcimy cały następny rozdział. W tym paragrafie podamy rezultat prostszy i znacznie słabszy od tego, który udowodnimy później, zachodzący jednak dla znacznie szerszej klasy algorytmów sterowania.

Rozważmy następujący adaptacyjny układ sterowania dla obiektu ze zmiennymi parametrami:

$$y(t) = \varphi^T(t)\theta^*(t), \quad (4.32)$$

$$\varphi(t) = [-y(t-1) \dots -y(t-n) u(t-1) \dots u(t-n)]^T, \quad (4.33)$$

$$\theta^*(t) = [a_{n-1}(t) \dots a_0(t) b_{n-1}(t) \dots b_0(t)]^T, \quad (4.34)$$

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \frac{\varphi(t)\varepsilon_m(t)}{1 + \varphi^T(t)\varphi(t)}, \quad \varepsilon_m(t) = y(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}(t-1) \quad (4.35)$$

$$u(t) = \hat{R}(t, z)y(t-n) + \hat{S}(t, z)u(t-n) + \hat{k}(t)u_c(t), \quad (4.36)$$

$$\hat{R}(t, z) = r_{n-1}(t)z^{n-1} + \dots + r_0(t), \quad \hat{S}(t, z) = s_{n-1}(t)z^{n-1} + \dots + s_0(t), \quad (4.37)$$

$$\hat{\vartheta}(t) := [\hat{r}_{n-1}(t) \dots \hat{r}_0(t) \hat{s}_{n-1}(t) \dots \hat{s}_0(t) \hat{k}(t)]^T = \mathcal{F}(\hat{\theta}(t)), \quad (4.38)$$

$$\mathcal{F} : \mathbf{R}^{2n} \supset \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{R}^{2n+1}. \quad (4.39)$$

W powyższych równaniach (4.32)–(4.34) są równaniami obiektu, (4.35) jest algorytmem identyfikacji, (4.36) jest równaniem kompensatora, (4.38) jest równaniem, na podstawie którego wyznaczane są parametry kompensatora i  $\mathcal{F}$  jest procedurą projektową określoną na pewnym otwartym podzbiore  $\mathcal{C}$  zbioru  $\mathbf{R}^{2n}$ . W rozpatrywanym algorytmie zastosowaliśmy najbardziej naturalny sposób parametryzacji obiektu i jeden z najprostszych algorytmów identyfikacji. Podany poniżej rezultat zachodzi jednak również dla innych sposobów parametryzacji i innych rodzajów algorytmów identyfikacji.

Załóżmy, że parametry obiektu spełniają warunki

$$\|\hat{\theta}^*(t) - \theta^*(t-1)\| \leq \epsilon, \quad (4.40)$$

$$\theta^*(t) \in \Omega \quad \forall t \geq 0 \quad (4.41)$$

dla pewnej małej dodatniej liczby rzeczywistej  $\epsilon$  i pewnego domkniętego i ograniczonego podzbioru  $\Omega$  zbioru  $\mathbf{R}^{2n}$ . Zwróćmy uwagę, że założenie (4.40) oznacza, iż parametry obiektu są wolnozmiennie.

Załóżmy dalej, że procedura projektowa  $\mathcal{F}$  spełnia następujące warunki:

1.  $\Omega \subset \mathcal{C}$ ,
2.  $\forall \theta \in \mathcal{C}$  zera wielomianu

$$A(z) - A(z)S(z) - B(z)R(z)$$

- leżą wewnątrz koła jednostkowego  $|z| < 1$ , gdzie  $A(z)$  i  $B(z)$  oraz  $S(z)$  i  $R(z)$  oznaczają wielomiany o współczynnikach równych odpowiednim elementom wektorów  $\theta$  i  $\mathcal{F}(\theta)$ ,
- $\forall \theta \in \mathcal{C}$  zachodzi warunek  $|k| > 0$ , gdzie  $k$  jest ostatnim elementem wektora  $\mathcal{F}(\theta)$ ,
  - istnieje stała dodatnia  $L$  taka, że

$$\|\mathcal{F}(\theta_1) - \mathcal{F}(\theta_2)\| \leq L\|\theta_1 - \theta_2\| \quad \forall \theta_1, \theta_2 \in \Omega.$$

**Twierdzenie 4.3.** *Zułożmy, że sygnał sterujący  $u_c$  jest ograniczony i spełnia warunek*

$$\sum_{t=j}^{j+T-1} \begin{bmatrix} u_c(t+2n-1) \\ \vdots \\ u_c(t) \end{bmatrix} [u_c(t+2n-1) \dots u_c(t)] \geq \rho I \quad \forall j \geq 0$$

dla pewnej stałej dodatniej  $\rho$  i pewnej liczby naturalnej  $T$ . Wówczas istnieją liczby dodatnie  $\epsilon^*$ ,  $m$ ,  $M$  i  $C$  takie, że dla każdego  $\epsilon < \epsilon^*$ , jeżeli

$$\|\hat{\theta}(0) - \theta^*(0)\| \leq m,$$

$$|u(i)| \leq M, \quad |y(i)| \leq M \quad \text{dla } i = 0, -1, \dots, -n+1,$$

to

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\hat{\theta}(t) - \theta^*(t)\| \leq C\epsilon \quad \text{dla } u, y \in l^\infty.$$

Dowód powyższego twierdzenia opiera się na następującym rozumowaniu, Anderson i Johnstone [4]. Jeżeli liczba  $\epsilon$  i początkowy błąd identyfikacji  $\hat{\theta}(0) - \theta^*(0)$  są małe, to błąd  $\hat{\theta}(t) - \theta^*(t)$  pozostanie mały dla  $0 \leq t \leq T + 2n - 1$ . Wykorzystując lemat 4.4 pokazuje się, że dzięki temu zapewnione jest pobudzenie wektora  $\varphi$  w przedziale  $[0, T + 2n - 1]$ . To z kolei gwarantuje, że norma błędu identyfikacji nie może wzrosnąć ponad  $C\epsilon$  dla pewnego dodatniego  $C$ .

W następnym rozdziale udowodnimy znacznie silniejszy rezultat dla bezpośredniego algorytmu sterowania z modelem odniesienia.

## 4.5 Globalnie stabilne adaptacyjne algorytmy sterowania z przesuwaniem biegunów

W rozdziale 3.1 pokazaliśmy, że pośredni adaptacyjny algorytm sterowania z przesuwaniem biegunów zapewnia stabilność układu regulacji, jeżeli spełniony jest warunek:  $\hat{\theta}(t) \in \hat{C} \quad \forall t$  dla pewnego domkniętego podzbioru  $\hat{C}$  zbioru  $\mathcal{C} = \{\theta \in \mathbf{R}^{2n} : A(z) \text{ i } B(z) \text{ są względnie pierwsze, } B(1) \neq 0\}$ . Jedną z metod gwarantujących spełnienie tego warunku jest odpowiednia modyfikacja algorytmu identyfikacji. Poniżej opiszemy inną alternatywną metodę wykorzystującą własności sygnałów pobudzających. Przedstawione w tym paragrafie idee rozwijane były w wielu pracach, w tym [5, 28, 45, 58].

Rozważmy procedurę projektową  $\mathcal{F} : \theta \in \mathcal{C} \mapsto [r_{n-1} \dots r_0 \ s_{n-1} \dots s_0 \ k]^T \in \mathbf{R}^{2n}$  zdefiniowaną za pomocą równań (3.4), (3.5) oraz prawo sterowania

$$u(t) = \hat{R}(t, z)y_f(t) + \hat{S}(t, z)u_f(t) + \hat{k}(t)(u_c(t) + \chi(t)), \quad (4.42)$$

gdzie  $\chi(t)$  jest pewnym sygnałem pomocniczym. Załóżmy, że do identyfikacji parametrów obiektu zastosowano algorytm identyfikacji, który oprócz warunków (i)-(iv) podanych w rozdziale 4.3 spełnia dodatkowo warunek:

(v) jeżeli  $\sum_{j=t}^{t+T-1} \varphi(t)\varphi^T(t) \geq \varrho I > 0$ , dla nieskończenie wielu  $j$ , to  $\hat{\theta}(t) \rightarrow \theta^*$ , gdy  $t \rightarrow \infty$  niezależnie od tego, czy ciąg  $\{\varphi(t)\}$  jest ograniczony.

Przykładem algorytmu mającego powyższą własność jest algorytm ze stałym śladem macierzy  $\Gamma(t)$  oraz algorytm (2.17)–(2.20), (2.29), (2.30), w którym funkcja  $f$  spełnia warunek (2.66). Poniżej podajemy sposób generowania parametrów kompensatora  $\hat{\vartheta} = [\hat{r}_{n-1} \dots \hat{r}_0 \ \hat{s}_{n-1} \dots \hat{s}_0 \ \hat{k}]$  oraz sygnału pomocniczego  $\chi$  zapewniający globalną stabilność układu regulacji, [58].

**Twierdzenie 4.4.** Niech  $\hat{\mathcal{C}}$  będzie dowolnym podzbiorem domkniętym zbioru  $\mathcal{C}$  spełniającym warunek  $\theta^* \in \hat{\mathcal{C}}$  (np. możemy przyjąć  $\hat{\mathcal{C}} = \{\theta \in \mathbf{R}^{2n} : \mathcal{R}(A, B) \geq \varepsilon\}$  dla odpowiednio małej liczby dodatniej  $\varepsilon$ ). Zdefiniujemy ciąg  $\{J(t)\}$  w sposób następujący:

$$J(0) = 0, \quad J(t) = \begin{cases} J(t-1) + 1, & \text{gdy } \hat{\theta} \notin \hat{\mathcal{C}} \text{ lub } 1 \leq J(t-1) \leq T + 2n \\ 0 & \text{w przypadku przeciwnym,} \end{cases}$$

gdzie  $T$  jest pewną liczbą naturalną  $\geq 2n$  i przyjmijmy, że parametry kompensatora wyznaczone są z zależności

$$\hat{\vartheta}(t) = \begin{cases} \mathcal{F}(\hat{\theta}(t)), & \text{gdy } J(t) = 0 \\ \hat{\vartheta}(t-1) & \text{w przypadku przeciwnym.} \end{cases}$$

Na koniec przyjmijmy, że sygnał pomocniczy jest równy zeru, gdy  $J(t) = 0$ , natomiast gdy  $J(t) \neq 0$  sygnał ten generowany jest w taki sposób, by spełniony był warunek: jeżeli  $J(t) \neq 0 \forall k \in [j, j+T+2n-1]$ , to

$$\sum_{t=j}^{j+T-1} \begin{bmatrix} \xi(t+2n-1) \\ \vdots \\ \xi(t) \end{bmatrix} [\xi(t+2n-1) \dots \xi(t)] \geq \varrho I > 0, \quad \text{gdzie } \xi(t) := u_c(t) + \chi(t).$$

Wówczas wejście i wyjście obiektu są ograniczone oraz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) - y_c(t) = 0, \quad (4.43)$$

gdzie  $y_c$  jest sygnałem wyjściowym układu  $C(z)y_c(t) = \hat{k}(t)\hat{B}(t, z)u_c(t)$  (porównaj twierdzenie 3.1).

Innymi słowy, jeżeli  $\hat{\theta}(\tau) \in \hat{C}$  dla  $\tau \in [0, t]$ , to w chwili  $t$  stosujemy kompensator (4.42) z parametrami  $\hat{\nu}(t) = \mathcal{F}(\hat{\theta}(t))$  i  $\chi(t) = 0$ . Jeżeli w pewnej chwili  $t$  oceny parametrów opuszczają obszar  $\hat{C}$ , to wstrzymujemy uaktualnianie parametrów kompensatora (tzn. stosujemy kompensator ze stałymi parametrami) i generujemy sygnał  $\chi$  tak, aby  $u_c + \chi$  był sygnałem pobudzającym rzędu  $2n$  z okresem pobudzenia  $T$ . Strategię tę stosujemy aż do chwili, gdy oceny parametrów powrócą do  $\hat{C}$ , nie krócej jednak niż przez kolejne  $T + 2n$  kroków, po czym powtórnie stosujemy kompensator (4.42) z parametrami  $\mathcal{F}(\hat{\theta}(t))$  i  $\chi = 0$ , itd.

DOWÓD. Udowodnimy przez sprowadzenie do sprzeczności, że  $\hat{\theta}(t) \in \hat{C}$  dla wszystkich wystarczająco dużych  $t$ . Załóżmy, że istnieje nieskończenie wiele chwil  $t_i$  takich, że  $J(t) > 0$  dla  $t \in [t_i, t_i + T + 2n - 1]$ . Z warunku pobudzenia sygnału  $u_c + \chi$  w przedziale  $[t_i, t_i + T + 2n - 1]$  i lematu 4.4 wynika, że

$$\sum_{t=t_i}^{t_i+T+2n-1} \varphi(t)\varphi^T(t) \geq \rho' I > 0,$$

gdzie  $\rho'$  zależy w sposób ciągły od  $\hat{\nu}(t_i)$ . Niech  $M = \sup_t \|\hat{\theta}(t)\|$ . Dla każdego  $t$  mamy  $\hat{\nu}(t) \in \mathcal{P} := \mathcal{F}(\hat{C} \cap \{\theta : \|\theta\| \leq M\})$ . Ponieważ zbiór  $\mathcal{P}$  jest zwarty, więc  $\rho := \sup_{\mathcal{P}} \rho' > 0$ . Zatem sygnał  $\varphi$  jest pobudzający w przedziałach  $[t_i, t_i + T - 1]$  jednostajnie względem  $i$ . Wobec tego  $\hat{\theta}(t) \rightarrow \theta^*$ , gdy  $t \rightarrow \infty$ , co przeczy przyjętemu założeniu. Zatem  $\hat{\theta}(t) \in \hat{C}$  dla wszystkich wystarczająco dużych  $t$  i na mocy twierdzenia 3.2 wejście  $u$  i wyjście  $y$  są ograniczone oraz spełniony jest warunek (3.8).  $\square$

Powróćmy obecnie do bezpośredniego adaptacyjnego algorytmu sterowania z przesuwaniem biegunów opisanego w rozdziale 3.4. Przypomnijmy, że w algorytmie tym identyfikujemy parametry następującej nieminimalnej postaci równań obiektu

$$R(z)y(t) + S(z)u(t) = F(z)u(t) - F(z)C(z)(V(z)y(t) + W(z)u(t)),$$

przy czym współczynniki wielomianów  $S(z)$  i  $R(z)$  są jednocześnie parametrami żądanego prawa sterowania. Dzieląc powyższe równanie przez  $F(z)C(z)$  możemy je zapisać w postaci  $\nu_1(t) = \varphi_1^T(t)\theta_1^*$ , gdzie  $\nu_1$ ,  $\varphi_1$ ,  $\theta_1^*$  są zdefiniowane odpowiednio przez (3.38)–(3.40) (w równaniach tych zmienne  $\nu_1$ ,  $\varphi_1$ ,  $\theta_1^*$  występują bez indeksu 1). Z twierdzenia 3.4 wynika, że bezpośredni algorytm sterowania z przesuwaniem biegunów zapewnia ograniczoność wejścia i wyjścia obiektu jeżeli  $\hat{\theta}_1(t) \in \hat{C}$  dla wystarczająco dużych  $t$  i pewnego domkniętego podzbioru  $\hat{C}$  zbioru  $\hat{C}$  (patrz (3.43), str. 73). Zwróćmy uwagę na to, że obecnie zbiór  $\hat{C}$  zależy od parametrów obiektu, które nie są znane. Nie jesteśmy więc w stanie określić jawnie domkniętego podzbioru zbioru  $\hat{C}$  zawierającego wektor  $\theta_1^*$ , tak jak tego wymaga modyfikacja algorytmu sterowania wprowadzona w twierdzeniu 4.3. W celu uniezależnienia warunków



stabilności układu sterowania od parametrów obiektu zastosujemy dodatkowy algorytm identyfikujący bezpośrednio parametry równania  $A(z)y(t) = B(z)u(t)$ . Przedstawmy równanie obiektu w postaci  $\nu_2(t) = \varphi_2^T(t)\theta_2^*$ , gdzie  $\nu_2$ ,  $\varphi_2$ ,  $\theta_2^*$  są zdefiniowane odpowiednio przez (3.38)–(3.40) (w równaniach tych zmienne  $\nu_2$ ,  $\varphi_2$ ,  $\theta_2^*$  występują bez indeksu 2).

**Twierdzenie 4.5.** (Janecki [65]). Niech  $\{\hat{\theta}_1(t)\}$  i  $\{\hat{\theta}_2(t)\}$  będą ciągami ocen wektorów parametrów  $\theta_1^*$  i  $\theta_2^*$  spełniającymi warunki (i)–(iii) (str. 90). Jeżeli wektor  $[\hat{\theta}_1^T(t) \hat{\theta}_2^T(t)]^T$  leży ściśle na zewnątrz zbioru

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = \{ & [\hat{\theta}_1^T \hat{\theta}_2^T]^T : \text{wielomiany} \\ & \hat{C}_1(z) = \hat{A}(z)(F(z) - \hat{S}(z)) - \hat{B}(z)\hat{R}(z), \\ & \hat{C}_2(z) = \hat{A}(z)\hat{W}(z) + \hat{B}(z)\hat{V}(z) \\ & \text{nie mają wspólnych zer w obszarze } |z| > 1 \}, \end{aligned} \quad (4.44)$$

dla wszystkich wystarczająco dużych  $t$ , to wejście i wyjście obiektu są ograniczone.

Zbiór  $\mathcal{D}$  nie zależy już od parametrów obiektu i możemy zastosować strategię podobną do wprowadzonej w twierdzeniu 4.3. W tym celu założymy, że do identyfikacji parametrów  $\theta_1^*$  i  $\theta_2^*$  zastosowany został algorytm spełniający warunek (v). Niech  $\hat{\mathcal{D}}$  będzie dowolnym domkniętym podzbiorem zbioru  $\mathcal{D}$  spełniającym warunek  $[\theta_1^{*T} \theta_2^{*T}]^T \in \hat{\mathcal{D}}$ , a  $T$  będzie dowolną liczbą dodatnią większą od  $4n$ . Jeżeli  $[\hat{\theta}_1^T(t) \hat{\theta}_2^T(t)]^T \in \hat{\mathcal{D}}$  dla  $t = 1, 2, \dots, j$ , to w przedziale  $[0, j]$  stosujemy kompensator (4.42) z parametrami  $\hat{v}(t)$  równymi odpowiednim elementom wektora  $\hat{\theta}_1(t)$  (dla prostoty przyjmujemy obecnie  $\hat{k} \equiv 1$  w (4.42)). Jeżeli w pewnej chwili  $t$  wektor  $[\hat{\theta}_1^T(t) \hat{\theta}_2^T(t)]^T$  opuści obszar  $\mathcal{D}$ , to wstrzymujemy uaktualnianie parametrów kompensatora i generujemy sygnał  $\chi$  tak, aby  $u_c + \chi$  był sygnałem pobudzającym rzędu  $4n$  z okresem pobudzenia  $T + 4n$ . Strategię tę stosujemy aż do chwili, gdy wektor  $[\hat{\theta}_1^T(t) \hat{\theta}_2^T(t)]^T$  powróci do  $\mathcal{D}$ , nie krócej jednak niż przez kolejne  $T + 4n$  kroków.

## 4.6 Jednostajne pobudzenie w układach z zakłóceniami prawie okresowymi

Rozważmy układ

$$\tilde{A}(z)y(t) = \tilde{B}(z)u(t) + d(t), \quad (4.45)$$

gdzie  $d(t)$  jest sygnałem zakłócającym postaci

$$d(t) = g_0 + \sum_{i=1}^m d_i \sin(\omega_i t + \alpha_i). \quad (4.46)$$

Przykładem obiektu z zakłóceniami prawie okresowymi jest rozpatrywany w rozdziale 7 model wirnika elastycznego. W modelu tym sygnał zakłócający wywołany jest niewyważeniem wirnika. Zauważmy, że w przypadku, gdy czas jest dyskretny każdy sygnał okresowy może być przedstawiony w postaci (4.46).

Niech  $D(z)$  będzie wielomianem najniższego możliwie rzędu takim, że

$$D(z)d(t) \equiv 0. \quad (4.47)$$

Na przykład, jeżeli  $d$  jest sygnałem okresowym o okresie  $N$ , to  $D(z) = z^N - 1$ . Mnożąc równanie obiektu (4.45) przez  $D(z)$  dostajemy

$$A(z)y(t) = B(z)u(t), \quad (4.48)$$

gdzie  $A(z) = \tilde{A}(z)D(z)$ ,  $B(z) = \tilde{B}(z)D(z)$ .

Zalóżmy teraz, że parametry wielomianów  $A$  i  $B$  są nieznanne i do ich identyfikacji zastosowano jeden z algorytmów opisanych w paragrafie 2.2 z  $\varphi$  i  $\nu$  zdefiniowanymi odpowiednio przez (2.13) i (2.11). Znajdziemy warunki przy których sygnał  $\varphi$  jest sygnałem jednostajnie pobudzającym. Przyjmijmy, że  $\tilde{n}$  jest rzędem obiektu (4.45),  $n_d$  jest rzędem wielomianu  $D(z)$  i  $n = \tilde{n} + n_d$ . Do analizy pobudzenia w układach z zakłóceniami prawie okresowymi wykorzystamy następujący lemat, Janecki [61].

**Lemat 4.7.** *Rozważmy ciąg wektorów  $\varphi(t) = [d(t + n_d) \dots d(t + 1) |\psi^T(t)]^T$ , gdzie  $\psi(t) \in \mathbb{R}^m$ . Jeżeli ciąg  $\{\psi(t)\}$  jest ograniczony i  $D(z)\psi \in \mathcal{V}(m)$ , to  $\varphi \in \mathcal{V}(m + n_d)$ .*

**DOWÓD.** Zalóżmy, że pomimo spełnienia założeń lematu ciąg  $\varphi \notin \mathcal{V}(m + n_d)$ . Wówczas z definicji 4.1 wynika, że dla każdego  $T > 0$  istnieje rosnący ciąg liczb naturalnych  $\{j_i\}$  i ciąg wektorów  $h_i \in \mathbb{R}^{m+n_d} : \|h_i\| = 1$  taki, że

$$\lim_{i \rightarrow \infty} h_i^T \varphi(j_i + t) = 0 \quad \forall t \in [0, T - 1]. \quad (4.49)$$

Oznaczmy  $h_i = [h_{1i}^T, h_{2i}^T]^T$ , gdzie  $h_{1i} \in \mathbb{R}^{n_d}$ ,  $h_{2i} \in \mathbb{R}^m$ . Zauważmy, że  $D(z)h_{1i}^T \varphi(t) = h_{2i}^T D(z)\psi(t)$ . Wobec tego  $\lim_{i \rightarrow \infty} h_{2i}^T D(z)\psi(j_i + t) = 0 \quad \forall t \in [0, T - n_d - 1]$ . Ale  $D(z)\psi \in \mathcal{V}(m)$ . Zatem

$$\lim_{i \rightarrow \infty} h_{2i} = 0, \quad (4.50)$$

jeśli liczba  $T$  jest wystarczająco duża. Z własności (4.49), (4.50) i założenia  $\psi \in l^\infty$  wynika, że

$$0 = \lim_{i \rightarrow \infty} h_i^T \varphi(j_i + t) = \lim_{i \rightarrow \infty} \left( [d(j_i + n_d + t) \dots d(j_i + t + 1)] h_{1i} + h_{2i}^T \psi(j_i + t) \right) = \\ \lim_{i \rightarrow \infty} [d(j_i + n_d + t) \dots d(j_i + t + 1)] h_{1i}, \quad \forall t \in [0, T - n_d - 1].$$

Powyższa własność nie może jednak zachodzić, gdyż  $d \in \mathcal{S}(n_d)$ . Wobec tego  $\varphi \in \mathcal{V}(m + n_d)$ .  $\square$

**Twierdzenie 4.6.** *Rozważmy obiekt (4.45), (4.47), w którym wielomiany  $\tilde{A}(z)$  i  $\tilde{B}(z)$  są względnie pierwsze. Jeżeli  $D(z)u \in \mathcal{S}(2n - n_d)$  i  $u, y \in l^\infty$ , to ciąg wektorów  $\varphi(t) = [y_f(t + n - 1) \dots y_f(t) u_f(t + n - 1) \dots u_f(t)]$  należy do  $\mathcal{V}(2n)$*

DOWÓD. Niech  $\bar{\varphi}(t) = [y_f(t+n-n_d-1) \dots y_f(t) u_f(t+n-1) \dots u_f(t)]^T$ . Zauważmy, że wykorzystując równanie  $\hat{A}y_f(i) = \hat{B}u_f(i) + d_f(i)$ , gdzie  $Fd_f = d$  kolejno dla  $i = t+n-1, \dots, t+n-n_d$ , każdy z  $n_d$  pierwszych elementów wektora  $\varphi(t)$  może być wyrażony w funkcji zakłóceń  $d_f(t+n-1), \dots, d_f(t+n-n_d)$  i elementów wektora  $\bar{\varphi}(t)$ . Zatem

$$\varphi(t) = \left[ \begin{array}{c|c} K_1 & K_2 \\ \hline & I \end{array} \right] \begin{bmatrix} d_f(t+n-1) \\ \vdots \\ d_f(t+n-n_d) \\ \bar{\varphi}(t) \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

dla pewnych macierzy  $K_1 \in \mathbb{R}^{n_d \times n_d}$  i  $K_2 \in \mathbb{R}^{n_d \times (2n-n_d)}$ . Łatwo sprawdzić, że  $K_1$  jest macierzą górną lewą trójkątną z jedykami na przekątnej. Zatem macierz występująca we wzorze (4.51) jest nieosobliwa. Ponadto, mamy

$$\tilde{A}DF\bar{\varphi}(t) = \begin{bmatrix} z^{n-n_d-1}\tilde{B} \\ \vdots \\ \tilde{B} \\ z^{n-1}\tilde{A} \\ \vdots \\ \tilde{A} \end{bmatrix} Du(t) = \Upsilon \begin{bmatrix} Du(t+n+n_d-1) \\ Du(t+n+n_d-2) \\ \vdots \\ \vdots \\ Du(t) \end{bmatrix}, \quad (4.52)$$

gdzie  $\Upsilon$  jest macierzą Sylwestera dla pary wielomianów  $z^{n_d}\tilde{A}(z)$  i  $\tilde{B}(z)$ . Ponieważ wielomiany  $z^{n_d}\tilde{A}(z)$  i  $\tilde{B}(z)$  są względnie pierwsze, więc macierz  $\Upsilon$  jest nieosobliwa. Wykorzystując teraz założenie  $D(z)u \in \mathcal{S}(2n-n_d)$  i kolejno lemat 4.1, lemat 4.3, lemat 4.7 i powtórnie lemat 4.1 dostajemy kolejno  $\tilde{A}DF\bar{\varphi} \in \mathcal{V}(2n-n_d)$ ,  $\bar{\varphi} \in \mathcal{V}(2n-n_d)$ ,  $\{[d(t+n-1) \dots (t+n-n_d)|\bar{\varphi}^T(t)]^T\} \in \mathcal{V}(2n)$  i ostatecznie  $\varphi \in \mathcal{V}(2n)$ .  $\square$

Z twierdzenia 4.6 wynika, że rząd pobudzenia sygnału  $D(z)u$  jest co najwyżej o  $n_d$  niższy od rzędu pobudzenia sygnału  $u$ . Zatem jeżeli  $u \in \mathcal{S}(2n)$ , to zawsze  $\varphi \in \mathcal{V}(2n)$ . Zwykle jednak do zapewnienia jednostajnego pobudzenia sygnału  $\varphi$  wystarcza, by  $u \in \mathcal{S}(2n-n_d)$ . Mówiąc ściśle, jeżeli  $u$  składa się z  $\lfloor (2n-n_d+1)/2 \rfloor$  sygnałów sinusoidalnych z losowo wybranymi częstotliwościami  $\omega_i$ , to rząd pobudzenia sygnału  $D(z)u$  jest nie mniejszy od  $2n-n_d$  z prawdopodobieństwem jeden. W tym przypadku dodatkowe pobudzenie wektora  $\varphi$  zapewnia sygnał zakłócający  $d$ .

Występujące w twierdzeniu 4.6 z założenie o ograniczoności wejścia i wyjścia obiektu w ogólności nie może być pominięte. Jeżeli jednak wiemy, że wielomiany  $\tilde{A}(z)$  i  $D(z)$  są względnie pierwsze, to można zrezygnować z założenia  $y \in l^\infty$ . Prawdziwe jest również następujące uogólnienie twierdzenia 4.6, [61].

**Twierdzenie 4.7.** *Załóżmy, że sygnał wejściowy  $u$  generowany jest za pomocą następującego prawa sterowania*

$$u(t) = R(z)y_f(t) + S(z)u_f(t) + ku_c(t), \quad k \neq 0.$$

Jeżeli  $y, u, u_c \in l^\infty$  i  $D(z)u_c \in \mathcal{S}(2n - n_d)$ , to  $\varphi \in \mathcal{V}(2n)$ . Jeżeli dodatkowo wielomiany  $D(z)$  i  $C(z) := \tilde{A}(z)F(z) - \tilde{A}(z)S(z) - \tilde{B}(z)R(z)$  są względnie pierwsze, to  $\varphi \in \mathcal{V}(2n)$  także wtedy, gdy  $y, u \notin l^\infty$ .

Zauważmy, że postać równania obiektu z zakłóceniami (4.48) jest taka sama jak postać równania obiektu bez zakłóceń. Do sterowania obiektem (4.48) można zatem bez żadnych zmian zastosować adaptacyjne algorytmy z modelem odniesienia opisane w rozdziale 2. Algorytmy te, podobnie jak dla obiektu wolnego od zakłóceń zapewniają  $y, u \in l^\infty$  i  $\lim_{t \rightarrow \infty} y - y_m = 0$ . Zatem rząd pobudzenia sygnału  $y$  jest taki sam jak rząd pobudzenia sygnału  $u_c$ . Wykorzystując ten fakt i metodę analizy podobną do zastosowanej w dowodzie twierdzenia 4.6 można pokazać, że w algorytmie pośrednim oceny dążą do parametrów obiektu, jeśli  $D(z)u_c \in \mathcal{S}(2n - n^* - n_d + 1)$ , zaś w algorytmie bezpośrednim, jeśli  $D(z)u_c \in \mathcal{S}(2n - n_d)$ . Dowody tych własności można znaleźć w pracach [64, 69], gdzie dodatkowo rozważony jest przypadek, w którym  $\tilde{A}(z)$  i  $\tilde{B}(z)$  mogą mieć wspólne zera i w którym niektóre z częstotliwości  $\omega_i$  sygnału zakłócającego są znane. Ponadto, w pracach tych przeanalizowano zbieżność bezpośredniego algorytmu sterowania z przesuwaniem biegunów dla obiektów z zakłóceniami typu (4.46) zaproponowanego wcześniej w [50].

## Rozdział 5

# Odporność regulatorów adaptacyjnych przy jednostajnym pobudzeniu sygnału sterującego

Jedną z metod zapewniającą odporność regulatorów adaptacyjnych jest zastosowanie jednostajnie pobudzającego sygnału sterującego. W rozdziale 3 pokazaliśmy, że jednostajne pobudzenie wektora  $\varphi$  zapewnia wykładniczą zbieżność ocen  $\hat{\theta}$  do parametrów  $\theta^*$ . Z wykładniczej stabilności równań opisujących błąd identyfikacji  $\tilde{\theta}$  wynika ograniczoność wszystkich sygnałów w układzie sterowania również w przypadku nieidealnym, o ile odstępstwa obiektu od przyjętego modelu i wartość początkowa błędu  $\tilde{\theta}(0)$  są wystarczająco małe. Wykorzystując powyższe podejście możemy jednak udowodnić jedynie lokalną stabilność układu sterowania, Anderson [1], Anderson i Johnstone [4]. Pierwszy rezultat mający charakter globalny uzyskany został przez Narendrę i Annaswamy [110] dla pewnej wąskiej klasy układów sterowania ciągłych w czasie. Klasa ta obejmuje układy z modelem odniesienia dla obiektów z ograniczonymi zakłóceniami, w których różnica pomiędzy stopniem mianownika i stopniem licznika transmitancji obiektu  $n^*$  jest równa 1. Powyższy rezultat został następnie przeniesiony na układy dyskretne w czasie, w których wartość  $n^*$  może być dowolna przez Lee i Narendrę [94]. Charakterystyczną cechą rozważanego w tej pracy układu sterowania jest zastosowanie hybrydowego algorytmu identyfikacji, tzn. algorytmu w którym oceny parametrów uaktualniane są jedynie co pewien ściśle określony okres czasu. Długość tego okresu zależy od okresu sumowania  $T$  w warunkach pobudzenia dla sygnału sterującego. Oznacza to, że okres  $T$  musi być znany, co stanowi pewną wadę algorytmu.

W tym rozdziale przedstawimy dowód stabilności dla szerokiej klasy dyskretnych adaptacyjnych algorytmów sterowania wykorzystujący założenie o jednostajnym pobudzeniu obiektu. Otrzymany rezultat jest rozszerzeniem wyników uzyskanych w pracy Lee i Narendry [94] w następujących dwóch kierunkach. Po pierwsze, dowód przeprowadzony jest dla znacznie szerszej klasy sterowanych obiektów niż w [94]. Zakładamy, że oprócz ograniczonych zakłóceń działających na obiekt, może w nim występować niemodelowana dynamika oraz jego parametry mogą być zmienne w czasie. Po drugie, w miejsce algorytmu hybrydowego stosujemy typowy algorytm identyfikacji, w którym oceny parametrów uaktualniane

są w każdej chwili czasu  $t$ . Dzięki temu okres pobudzenia sygnału sterującego  $u_c$  nie musi być znany. Chcemy wyraźnie podkreślić, że sam fakt korzystnego wpływu jednostajnego pobudzenia na odporność adaptacyjnych układów sterowania jest powszechnie znany i uznawany, a głównym wkładem tego rozdziału jest sama metoda analizy pozwalająca udowodnić stabilność układu sterowania dla szerokiej klasy obiektów.

## 5.1 Przykłady braku odporności regulatorów adaptacyjnych

Rozważmy model obiektu

$$\dot{y} + ay = bu \quad (5.1)$$

oraz następujący regulator adaptacyjny

$$u_f = \frac{1}{F(s)}u, \quad y_f = \frac{1}{F(s)}y, \quad F(s) = sf^{-1} + 1, \quad f > 0, \quad (5.2)$$

$$\epsilon_m = \dot{y}_f + \hat{a}y_f - \hat{b}u_f, \quad (5.3)$$

$$\dot{\hat{a}} = -\gamma y_f \epsilon_m, \quad (5.4)$$

$$\dot{\hat{b}} = \gamma u_f \epsilon_m, \quad (5.5)$$

$$u = \hat{r}y + \hat{k}u_c, \quad \hat{r} = (\hat{a} - a_m)/\hat{b}, \quad \hat{k} = a_m/\hat{b}. \quad (5.6)$$

Równania (5.2)-(5.5) opisują algorytm identyfikacji parametrów  $a$  i  $b$ , zaś równanie (5.6) jest równaniem kompensatora. W przypadku, gdy  $\hat{a} = a$  i  $\hat{b} = b$  transmitancja pomiędzy wyjściem modelu obiektu  $y$  a sygnałem sterującym  $u_c$  jest równa  $a_m/(s + a_m)$ , co oznacza, że  $y$  nadąża za  $u_c$  ze stałą czasową  $1/a_m$ .

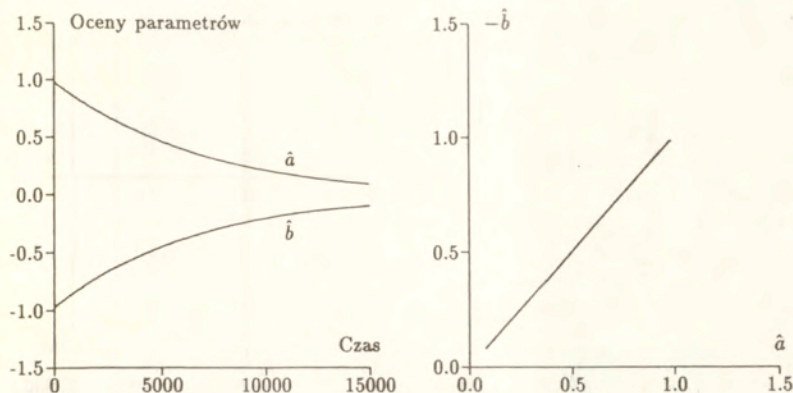
W przypadku idealnym opisany adaptacyjny algorytm sterowania zapewnia ograniczoną sygnałów  $u$ ,  $y$  i ocen  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$  oraz własność  $\lim_{t \rightarrow \infty} y - y_m = 0$ , gdzie  $(sa_m^{-1} + 1)y_m = u_c$ . Ponadto, jeżeli sygnał  $u_c$  jest sygnałem sinusoidalnym, to oceny dążą wykładniczo do parametrów obiektu. Natomiast jeżeli  $u_c \equiv \text{const}$ , to oceny dążą do jednego z punktów równowagi ( $a^*$ ,  $b^*$ ), w którym  $\epsilon_m = \dot{y}_f + a^*y_f - b^*u_f = 0$ . Łatwo sprawdzić, że zbiór punktów równowagi jest prostą o równaniu  $ab^* = a^*b$ . W szczególności, gdy  $a = 1$  i  $b = -1$ , to zbiór ten jest prostą  $a^* + b^* = 0$ .

W tym paragrafie przedstawimy wyniki symulacji komputerowej ilustrujące działanie rozważanego układu sterowania w przypadku, gdy równania obiektu odbiegają od równania modelu (5.1). We wszystkich symulacjach przyjmujemy następujące wartości początkowe zmiennych

$$y(0) = y_f(0) = u_f(0) = 0, \quad \hat{a}(0) = a, \quad \hat{b}(0) = b$$

oraz następujące wartości parametrów

$$a = 1, \quad b = -1, \quad a_m = 3, \quad f = 10, \quad \gamma = 0,1.$$



Rys. 5.1. Zjawisko pelzania ocen parametrów: wykres parametrów w funkcji czasu i trajektoria w przestrzeni parametrów.

Zwróćmy uwagę na to, że w przypadku idealnym przy tak dobranych wartościach początkowych otrzymujemy

$$\hat{a}(t) = a, \quad \hat{b}(t) = b \quad \forall t \geq 0.$$

Na początek rozważymy przypadek występowania szumu pomiarowego.

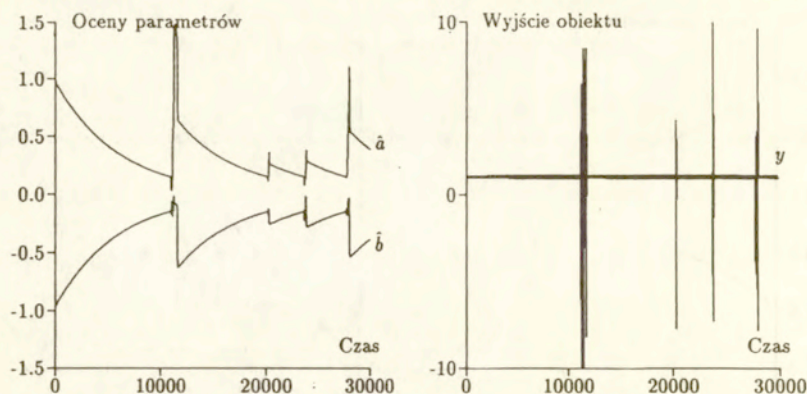
**PRZYKŁAD 5.1.** Szum pomiarowy. Załóżmy, że równania obiektu mają postać

$$\dot{x} + ax = bu, \quad y = x + \epsilon \sin \omega t, \quad \epsilon \neq 0, \quad (5.7)$$

gdzie  $\epsilon \sin \omega t$  jest szumem pomiarowym. Na rys. 5.1 przedstawiono przebiegi ocen parametrów w przypadku, gdy sygnał sterujący jest stały,  $\epsilon = 0,1$  i  $\omega = 10$ . Widzimy, że oceny pelzają wzdłuż prostej punktów równowagi  $\hat{a} + \hat{b} = 1$  w kierunku punktu  $\hat{a} = \hat{b} = 0$ . Zjawisko to występuje pomimo tego, że wartości początkowe ocen są równe parametrom obiektu. Ponadto, pelzanie ocen w kierunku punktu  $\hat{a} = \hat{b} = 0$  ma miejsce dla dowolnych wartości parametru  $\epsilon$ , choć dla mniejszych wartości  $\epsilon$  pelzanie to jest odpowiednio wolniejsze. Zwróćmy też uwagę na to, że gdy  $\hat{b} \rightarrow 0$ , to wzmocnienie kompensatora  $\hat{r}$  rośnie do nieskończoności. Oznacza to, że w przypadku występowania w obiekcie dodatkowej niemodelowanej dynamiki charakteryzującej się nawet bardzo małymi wartościami stałych czasowych może nastąpić rozstabilizowanie układu sterowania. Na rys. 5.2. przedstawiono wyniki symulacji układu, w którym obiekt ma transmitancję równą

$$\frac{b}{(s+a)(0,1s+1)^2}$$

Widzimy, że układ sterowania staje się niestabilny, gdy parametr  $\hat{b}$  osiąga małą wartość. Niestabilność układu powoduje silne pobudzenie obiektu, w wyniku czego następuje szybkie



Rys. 5.2. Zjawisko wybuchania.

odejście ocen parametrów od punktu  $(0, 0)$  i ustabilizowanie się układu. Sytuacja taka powtarza się co jakiś czas. Zjawisko powtarzającej się okresowej niestabilności układu adaptacyjnego nosi nazwę *zjawiska wybuchania* (ang. *bursting phenomenon*).  $\triangle$

Ścisła analiza równań (5.1)-(5.6), mająca na celu wyjaśnienie przyczyny pełzania ocen parametrów jest trudna głównie ze względu na nieliniowy charakter tych równań. Zastosujemy więc przybliżoną metodę analizy. Zauważmy, że przy małych wartościach parametru  $\gamma$  występującego w równaniach (5.4) i (5.5) szybkość zmian sygnałów  $u$  i  $y$  jest znacznie większa niż szybkość zmian ocen. Uwzględniając ten fakt, zastąpimy równania algorytmu identyfikacji równaniami przybliżonymi

$$\begin{aligned}\dot{\hat{a}} &= -\gamma \text{avg}\{y_f \varepsilon_m\}, \\ \dot{\hat{b}} &= \gamma \text{avg}\{u_f \varepsilon_m\},\end{aligned}\quad (5.8)$$

w których symbol  $\text{avg}\{\cdot\}$  oznacza wartość średnią sygnału wyznaczoną przy założeniu stałych parametrów  $\hat{a}$  i  $\hat{b}$ , a więc na przykład

$$\text{avg}\{y_f \varepsilon_m\} = 2\pi\omega \int_0^{1/2\pi\omega} y_f(t) \varepsilon_m(t) dt \Big|_{\hat{a}=\text{const}, \hat{b}=\text{const}}.$$

Powyższa metoda nosi nazwę *metody uśredniania* i została zastosowana do analiza adaptacyjnych układów sterowania przez Åströma [7, 8]. Wykorzystując równania uśrednione (5.8) dostajemy po dość żmudnych przekształceniach

$$\frac{d}{dt}(\hat{a} + \hat{b}) = -\frac{2\gamma a_m^2 (\hat{a} + \hat{b})}{[a_m - (\hat{a} + \hat{b})]^2} + O(\varepsilon^2), \quad (5.9)$$



$$\frac{d}{dt}(\hat{a} - \hat{b}) = \gamma \left| \frac{A(i\omega)}{F(i\omega)\hat{A}(i\omega)} \right|^2 \epsilon^2 a_m^2 \hat{b}, \quad (5.10)$$

gdzie  $\hat{A}(s)$  jest wielomianem charakterystycznym układu zamkniętego (5.1)-(5.6) równym  $\hat{A}(s) = s + a_m - (\hat{a} + \hat{b})$ , zaś symbol  $O(\epsilon^2)$  oznacza małą stałą rzędu  $\epsilon^2$ .

Z otrzymanych równań wynika, że dla małych wartości  $\epsilon$  oceny  $(\hat{a}, \hat{b})$  dążą do prostej  $\hat{a} + \hat{b} = 0$  ze stałą czasową równą w przybliżeniu  $1/2\gamma$ , a następnie wolno pełzają wzdłuż tej prostej do punktu  $(0, 0)$  ze stałą czasową

$$1/2\gamma \left| \frac{A(i\omega)}{F(i\omega)A_m(i\omega)} \right|^2 \epsilon^2 a_m^2, \text{ gdzie } A_m(s) = s + a_m.$$

Obecnie rozpatrzmy przypadek zmiennych parametrów obiektu. Jest zrozumiałe, że jeżeli sygnał  $u_c$  nie jest sygnałem pobudzającym rzędu 2 (np.  $u_c \equiv 0$ ), to nawet bardzo wolna zmiana parametrów obiektu w pewnym ustalonym kierunku może spowodować, że błąd identyfikacji będzie się zwiększał. Mniej oczywisty jest fakt, że własność taka może mieć również miejsce, gdy parametry obiektu oscylują z niewielką amplitudą wokół swoich nominalnych wartości.

**PRZYKŁAD 5.2.** *Zmienne parametry obiektu.* Załóżmy, że równania obiektu mają postać

$$\dot{y} + ay = \bar{b}u, \quad \bar{b} = b + \epsilon \sin(\omega t), \quad \epsilon \neq 0. \quad (5.11)$$

Na rys. 5.3 przedstawione są przebiegi ocen parametrów dla  $u_c = \text{const}$ ,  $\epsilon = 0, 1$  i  $\omega = 10$ . Widzimy, że podobnie jak w przypadku występowania szumu pomiarowego oceny pełzają wzdłuż prostej  $\hat{a} + \hat{b} = 0$  do punktu  $(0, 0)$ . Staje się to zrozumiałe, jeśli zauważymy, że składnik  $\epsilon u(t) \sin \omega t$  możemy traktować jako okresowy sygnał zakłócający działający addytywnie na obiekt.  $\triangle$

Na zakończenie rozpatrzmy przypadek występowania w obiekcie dodatkowych niemodelowanych modów wysokiej częstotliwości.

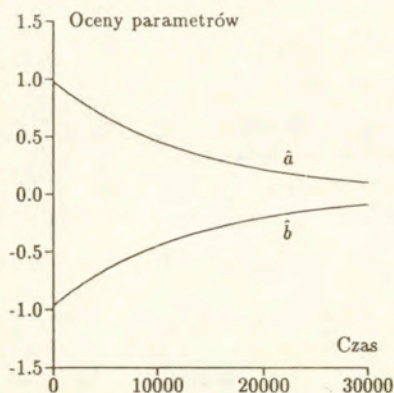
**PRZYKŁAD 5.3.** *Niemodelowana dynamika.* Załóżmy, że równania obiektu mają postać

$$\dot{x} + ax = bu, \quad \epsilon \dot{y} + y = x, \quad \epsilon \neq 0. \quad (5.12)$$

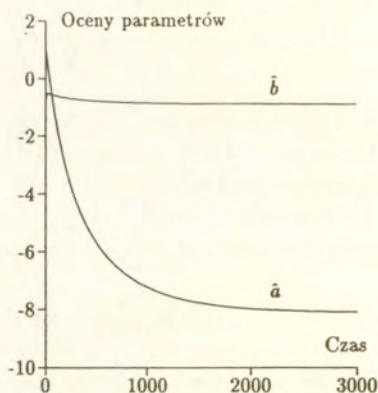
Obecnie transmitancja obiektu jest równa

$$\frac{b}{(s+a)(\epsilon s+1)}.$$

Widzimy, że obiekt ma dodatkowy niemodelowany biegun w punkcie  $s = -1/\epsilon$ . Przyjmijmy, że  $u_c = \sin \omega t$ . W odróżnieniu od dotychczas rozpatrzonych przypadków, obecnie



Rys. 5.3. Pelzanie parametrów w układzie ze zmiennymi parametrami.



Rys. 5.4. Pelzanie parametrów w układzie z niemodelowaną dynamiką.

sygnał  $u_c$  jest sygnałem jednostajnie pobudzającym rzędu 2, co zapewnia spełnienie warunku  $\varphi = [y_f \ u_f]^T \in \mathcal{V}(2)$ . Pomimo tego, różnica pomiędzy ocenami a parametrami  $\theta^*$  może być bardzo duża. Na rys. 5.4 pokazane są przebiegi ocen dla  $\epsilon = 0,1$  i  $\omega = 10$ . Widzimy, że w stanie ustalonym ocena parametru  $a$  osiąga w przybliżeniu wartość 8, która bardzo znacznie różni się od wartości nominalnej  $a = 1$ .  $\triangle$

Spróbujemy znaleźć analityczną formułę dla punktu równowagi uśrednionych równań algorytmu identyfikacji (5.8) w przypadku, gdy obiekt ma postać (5.12), a sygnał  $u_c$  jest falą sinusoidalną o częstotliwości  $\omega$ . Zauważmy, że przy ustalonym  $\hat{r}$  i  $\hat{k}$  sygnały  $u_f$  i  $y_f = [b/(s+a)(\epsilon s+1)]u_f$  są liniowo niezależne nad ciałem liczb rzeczywistych. Stąd łatwo wywnioskować, że punkt  $(a^*, b^*)$  będzie punktem równowagi, wtedy i tylko wtedy, gdy dla  $\hat{a} = a^*$  i  $\hat{b} = b^*$  jest  $\epsilon_m \equiv 0$ . Warunek ten jest spełniony, gdy

$$a^* = \frac{-\epsilon\omega^2 + a}{1 + \epsilon a}, \quad b^* = \frac{b}{a + \epsilon a}.$$

Z powyższych zależności wynika, że w stanie ustalonym  $\hat{b} \simeq b$ , natomiast ocena  $\hat{a}$  może bardzo znacznie odbiegać od  $a$ , jeśli częstotliwość sygnału sterującego jest wystarczająco duża. Zauważmy, że dla  $a = 1$ ,  $\epsilon = 0,1$  i  $\omega = 10$  otrzymujemy  $a^* = 8,18$ , co pokrywa się z wartością ustaloną  $\hat{a}$  otrzymaną w wyniku symulacji komputerowej układu sterowania.

Z przedstawionego przykładu możemy wyciągnąć następujący wniosek. Punkt równowagi algorytmu identyfikacji będzie leżał w pobliżu parametrów nominalnych obiektu jeżeli widmo sygnału sterującego zawarte będzie w paśmie, w którym charakterystyki częstotliwościowe obiektu i przyjętego modelu w przybliżeniu pokrywają się.

Podsumujmy krótko wyniki uzyskane w tym paragrafie. Stwierdziliśmy, że istnieje wiele przyczyn braku odporności regulatorów adaptacyjnych. W przypadku, gdy sygnał sterujący nie jest sygnałem pobudzającym, przyczyną może być pelzanie ocen wywołane zakłóceniami lub zmianą parametrów obiektu, a w przypadku, gdy w obiekcie występuje szybka niemodelowana dynamika występowanie w sygnale sterującym składowych o wysokiej częstotliwości.

## 5.2 Odporność prostego regulatora adaptacyjnego dla obiektu pierwszego rzędu

Ścisły i ogólny dowód odporności regulatorów adaptacyjnych z modelem odniesienia wykorzystujący założenie o jednostajnym pobudzeniu sygnału  $u_c$  jest długi i skomplikowany. Z tego względu główne etapy analizy prześledzimy najpierw na przypadku szczególnym, w którym rząd sterowanego obiektu jest równy 1. Przypadek ten jest również interesujący z tego względu, iż wynik otrzymany w następnym paragrafie jest nieco słabszy od wyniku przedstawionego poniżej.

Rozważmy obiekt pierwszego rzędu opisany równaniem

$$y(t+1) + f(y(t), t) = u(t), \quad (5.13)$$

gdzie  $f$  jest funkcją spełniającą warunek

$$(f(y, t) - ay)^2 \leq \epsilon(y^2 + 1) \quad \forall y, t \in \mathbf{R} \quad (5.14)$$

dla pewnego nieznanego parametru  $a$  i małej liczby  $\epsilon$ . Równanie obiektu możemy zapisać w postaci

$$y(t+1) + ay(t) = u(t) + \eta(t), \quad (5.15)$$

gdzie

$$\eta^2(t) \leq \epsilon(y^2(t) + 1). \quad (5.16)$$

Składnik  $\eta$  występujący w powyższym równaniu możemy traktować jako błąd modelowania. Błąd ten może wynikiem istnienia niewielkiej nieliniowości równań obiektu lub występowania drobnych zmian parametrów obiektu liniowego wokół wartości nominalnej  $a$  lub też obecności sygnałów zakłócających o amplitudzie nie przekraczającej  $\epsilon$ . Do sterowania obiektem zastosujemy następujący regulator adaptacyjny

$$\hat{r}(t) = \hat{r}(t-1) + \frac{y(t-1)\epsilon_m(t)}{1 + y^2(t-1)}, \quad (5.17)$$

$$\epsilon_m(t) = u(t-1) - y(t) - a_my(t-1) - \hat{r}(t-1)y(t-1), \quad (5.18)$$

$$u(t) = \hat{r}(t)y(t) + u_c(t), \quad (5.19)$$

gdzie  $-1 < a_m < 1$ . Powyższy algorytm jest szczególnym przypadkiem algorytmu rozpartrywanego w paragrafie 3.2. Zapewnia on nadążanie wyjścia obiektu za wyjściem modelu odniesienia

$$y_m(t+1) + a_m y_m(t) = u_c(t). \quad (5.20)$$

Pokażemy, że jeżeli sygnał sterujący  $u_c$  jest sygnałem pobudzającym rzędu 1, to opisany algorytm sterowania jest układem odpornym.

**Twierdzenie 5.1.** *Jeżeli  $u_c \in \mathcal{S}(1)$  i  $u_c \in l^\infty$ , to istnieje liczba dodatnia  $\epsilon^*$  taka, że  $\forall \epsilon < \epsilon^*$  wejście  $u$ , wyjście  $y$  i ocena  $\hat{r}$  są ograniczone. Ponadto, istnieje stała  $C$  taka, że dla wszystkich wystarczająco małych  $\epsilon$  mamy*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |e_m(t)| \leq C\epsilon, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} |\phi(t)| \leq C\epsilon, \quad (5.21)$$

gdzie  $e_m$  i  $\phi$  są odpowiednio błędem nadążania i błędem identyfikacji zdefiniowanymi przez

$$e_m(t) = y(t) - y_m(t), \quad (5.22)$$

$$\phi(t) = \hat{r}(t) - r, \quad r = a - a_m. \quad (5.23)$$

**Dowód.** Dla większej czytelności dowód twierdzenia 5.1 podzielimy na kilka części.

*Część 1: Sformułowanie równań błędu.* Podstawiając (5.19) do (5.15) i odejmując od otrzymanego równania (5.20) dostajemy następujące równanie dla błędu nadążania

$$e_m(t+1) + a_m e_m(t) = \phi(t)y(t) + \eta(t). \quad (5.24)$$

Z kolei z (5.17) otrzymujemy równanie dla błędu identyfikacji

$$\phi(t+1) = \phi(t) - \frac{y(t)\epsilon_m(t+1)}{1 + y^2(t)}. \quad (5.25)$$

*Część 2: Funkcja Lapunowa dla równań błędu.* Zauważmy, że równanie (5.18) jest równoważne równaniu

$$\epsilon_m(t+1) = \phi(t)y(t) + \eta(t). \quad (5.26)$$

Zatem z (5.24) dostajemy

$$\begin{aligned} e_m^2(t+1) - e_m^2(t) &= (\epsilon_m(t+1) - a_m e_m(t))^2 - e_m^2(t) \\ &= -(1 - a_m^2)e_m(t) + \epsilon_m^2(t+1) - 2a_m \epsilon_m(t+1)e_m(t). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Wykorzystując nierówność  $2\epsilon_m(t+1)e_m(t) \leq \gamma e_m^2(t) + \epsilon_m^2(t+1)/\gamma$  z  $\gamma = (1 - a_m^2)/2a_m$  otrzymujemy

$$e_m^2(t+1) - e_m^2(t) \leq -C_1 e_m^2(t) + \gamma_1 \epsilon_m(t+1), \quad (5.28)$$

gdzie  $C_1 = (1 - a_m^2)/2$ ,  $\gamma_1 = 1 + a_m/C_1$ . Dalej, z równań (5.25), (5.26) i nierówności (5.15) wynika, że

$$\begin{aligned} \phi^2(t+1) - \phi^2(t) &= -\frac{2\phi(t)y(t)\epsilon_m(t+1)}{1+y^2(t)} + \frac{y^2(t)\epsilon_m^2(t+1)}{(1+y^2(t))^2} \\ &\leq -\frac{2(\epsilon_m(t+1) - \eta(t))\epsilon_m(t+1)}{1+y^2(t)} + \frac{\epsilon_m^2(t+1)}{1+y^2(t)} \\ &\leq -\frac{\epsilon_m^2(t+1)}{1+y^2(t)} + 2\sqrt{\epsilon} \frac{\epsilon_m(t+1)}{\sqrt{1+y^2(t)}} \leq -\frac{1}{2} \frac{\epsilon_m^2(t+1)}{1+y^2(t)} + 4\epsilon. \end{aligned} \quad (5.29)$$

W ostatnim oszacowaniu wykorzystaliśmy nierówność  $-x^2 + 2x\sqrt{\epsilon} \leq -\frac{1}{2}x^2 + 4\epsilon$ . W dalszej części dowodu potrzebna nam będzie własność

$$\frac{1+y^2(t)}{1+e_m^2(t)} \leq C_V \quad (5.30)$$

dla pewnej stałej dodatniej  $C_V$ . Możemy ją udowodnić następująco:  $1+y^2(t) = 1+(e_m(t)+y_m(t))^2 \leq 1+2e_m^2(t)+2y_m^2(t) \leq 1+2M^2+2e_m^2(t)$ , gdzie  $M$  oznacza amplitudę sygnału  $y_m$ . Zatem (5.30) zachodzi dla  $C_V = 2+2M^2$ . Wykorzystując (5.30) oraz nierówność  $\ln(1+x) \leq x$  dostajemy z (5.28)

$$\begin{aligned} \ln(1+e_m^2(t+1)) - \ln(1+e_m^2(t)) &= \ln\left(1 + \frac{e_m^2(t+1) - e_m^2(t)}{1+e_m^2(t)}\right) \\ &\leq -C_1 \frac{e_m^2(t)}{1+e_m^2(t)} + C_V \gamma_1 \frac{\epsilon_m^2(t+1)}{1+y^2(t)}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Zdefiniujmy funkcję

$$W(t) = \ln(1+e_m^2(t)) + \alpha\phi^2(t) \quad (5.32)$$

z  $\alpha = 2C_V\gamma_1$ . Z własności (5.29) i (5.31) otrzymujemy

$$W(t+1) - W(t) \leq -C_1 \frac{e_m^2(t)}{1+e_m^2(t)} + C_2\epsilon \quad (5.33)$$

dla  $C_2 = 4\alpha$ . Zauważmy, że  $W(t)$  jest funkcją Lapunowa dla układu równań (5.15)–(5.19) w przypadku, gdy  $\epsilon = 0$ .

W dalszej części dowodu pokażemy, że jeżeli  $\epsilon$  jest dostatecznie małe, to przy dużych wartościach funkcji  $W$  funkcja ta maleje w czasie. W przypadku, gdy błąd nadążania  $e_m$  jest duży, to własność ta wynika bezpośrednio z nierówności (5.33), a w przypadku gdy błąd ten jest mały, z założenia o pobudzeniu sygnału  $u_c$ .

*Część 3: Wpływ pobudzenia sygnału  $u_c$  na błąd identyfikacji.* Założyliśmy, że  $u_c \in \mathcal{S}(1)$ . Zatem z lematu 4.3 wynika, że  $y_m \in \mathcal{V}(1)$ . W celu uproszczenia dalszych rozważań przyjmujemy, że  $y_m$  jest sygnałem pobudzającym z okresem pobudzenia 1. Zatem  $y_m^2(t) \geq \varrho \forall t$

i pewnej stałej dodatniej  $\varrho$ . Wobec tego  $y^2(t) = (e_m(t) - y_m(t))^2 \geq y_m^2(t)/2 - e_m^2(t) \geq \varrho/2 - e_m^2(t)$ . Zauważmy, że

$$\frac{y^2(t)}{1+y^2(t)} = y^2(t) \left( \frac{1+y^2(t)}{1+e_m^2(t)} \right)^{-1} - \frac{y^2(t)}{1+y^2(t)} e_m^2(t).$$

Zatem na podstawie (5.30) mamy

$$\frac{y^2(t)}{1+y^2(t)} \geq \varrho/2C_V - (1+1/C_V)e_m^2(t). \quad (5.34)$$

Z własności (5.29), (5.26), (5.34) i (5.16) otrzymujemy teraz kolejno

$$\begin{aligned} \phi^2(t+1) - \phi^2(t) &\leq -\frac{1}{2} \frac{(\phi(t)y(t) + \eta(t))^2}{1+y^2(t)} + 4\epsilon \\ &\leq -\frac{1}{4} \frac{\phi^2(t)y^2(t)}{1+y^2(t)} + \frac{1}{2} \frac{\eta^2(t)}{1+y^2(t)} + 4\epsilon \\ &\leq -\frac{1}{4} \left( \varrho/2C_V - (1+1/C_V)e_m^2(t) \right) \phi^2(t) + 4,5\epsilon \end{aligned}$$

Zatem ostatecznie

$$\phi^2(t+1) \leq (1 - C_3\varrho + C_4e_m^2(t)) \phi^2(t) + C_5\epsilon \quad (5.35)$$

dla  $C_3 = 1/8C_V$ ,  $C_4 = (1+1/C_V)/2$ ,  $C_5 = 4,5$ .

Zwróćmy uwagę na następującą konsekwencję otrzymanej nierówności (5.35). Jeżeli  $\|\phi\| \gg \epsilon$ , to błąd identyfikacji maleje w czasie, o ile błąd nadążania jest wystarczająco mały. Możemy to wyjaśnić następująco. Jeżeli błąd nadążania  $e_m$  jest mały, to  $y \simeq y_m$ . Ponieważ wyjście modelu odniesienia jest sygnałem pobudzającym, zatem na mocy lematu 4.2 wyjście obiektu również jest sygnałem pobudzającym. Własność ta zapewnia zbieżność ocen do parametrów obiektu, a więc zanikanie błędu identyfikacji (porównaj dowód twierdzenia 4.2).

W ostatniej części dowodu udowodnimy ograniczonosc ciągu  $\{W(t)\}$

Część 4: *Ograniczonosc ciągu  $\{W(t)\}$* . Z warunku (5.33) wynika, że  $W(t+2) \leq W(t) - \epsilon$ , jeśli  $e_m^2(t) \geq h(\epsilon)$  lub  $e_m^2(t+1) \geq h(\epsilon)$ , gdzie  $h(\epsilon) = \epsilon(2C_2+1)/(C_1 - \epsilon(2C_2+1))$ . Załozymy więc, że  $e_m^2(t)$  i  $e_m^2(t+1)$  są mniejsze od  $h(\epsilon)$ . Z własności (5.33) i (5.35) otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} W(t+2) &\leq W(t+1) + C_2\epsilon \\ &= \ln(1 + e_m^2(t+1)) + \alpha\phi^2(t+1) + C_2\epsilon \\ &\leq h(\epsilon) + \alpha(1 - C_3\varrho + C_4h(\epsilon))\phi^2(t) + (C_2 + C_5)\epsilon \\ &\leq (1 - C_3\varrho + C_4h(\epsilon))W(t) + h(\epsilon) + (C_2 + C_5)\epsilon. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Niech stała  $\epsilon^*$  będzie zdefiniowana przez równanie  $1 - C_3\varrho + C_4h(\epsilon^*) = 1$  (stała taka istnieje, gdyż  $h(0) = 0$  i  $h(\epsilon)$  rośnie wraz ze wzrostem  $\epsilon$  tak, że  $h(\epsilon) \rightarrow \infty$  dla  $\epsilon \rightarrow C_1/(2C_2 + 1)$ ). Z nierówności (5.36) wynika, że dla dowolnego  $\epsilon < \epsilon^*$  mamy

$$W(t+2) \leq W(t) - \epsilon \quad \text{jeżeli} \quad W(t) \geq H(\epsilon), \quad (5.37)$$

gdzie  $H(\epsilon) = (h(\epsilon) + (C_2 + C_5 + 1)\epsilon)/(C_3\varrho - C_4h(\epsilon))$ . Zatem  $W(t) \leq H(\epsilon) + 2C_2\epsilon$  dla wszystkich wystarczająco dużych  $t$ . Istotnie, z (5.37) wynika, że istnieje chwila czasu  $t_0$  taka, że  $W(t_0) < H(\epsilon)$ . Na mocy (5.33) i (5.37), funkcja  $W$  nie może przyjąć większych wartości niż  $H(\epsilon) + 2C_2\epsilon$  dla  $t_0 > t$ . Z ograniczoności funkcji  $W$  natychmiast wynika, że  $u, y, \hat{r} \in l^\infty$ . Na zakończenie zauważmy, że dla małych wartości  $\epsilon$  jest  $H(\epsilon) + 2C_2\epsilon \simeq \epsilon(3C_2 + C_5 + 2)/(C_3\varrho + 2C_2)$ . Stąd dostajemy warunek (5.21).  $\square$

Przypomnijmy główne etapy przeprowadzonego dowodu. Na wstępie sformułowaliśmy równania opisujące błąd nadążania  $e_m$  i błąd identyfikacji  $\phi$ . Następnie skonstruowaliśmy odpowiednią funkcję  $W$ , która w przypadku idealnym jest funkcją Lapunowa dla równań błędów. Naszym celem było pokazanie, że jeżeli wartości funkcji  $W$  są odpowiednio duże, to funkcja ta maleje w czasie. Rozpatrzyliśmy dwa przypadki, gdy błąd nadążania jest duży i gdy jest on mały. W pierwszym przypadku powyższa własność wynika z nierówności (5.33), zaś w drugim z pobudzenia wyjścia obiektu.

### 5.3 Odporność regulatorów adaptacyjnych—Przypadek ogólny

W tym paragrafie rozważymy bezpośredni adaptacyjny układ sterowania z modelem odniesienia w przypadku, gdy równania obiektu odbiegają od przyjmowanego dotychczas modelu

$$A(z)y(t) = B(z)u(t). \quad (5.38)$$

Przyjmujemy, że w obiekcie mogą występować zakłócenia, że parametry obiektu mogą zmieniać się w czasie i że rząd obiektu może być wyższy od rzędu modelu (5.38). Pokażemy, że jeżeli sygnał sterujący jest sygnałem jednostajnie pobudzającym, to zachowana zostanie własność ograniczoności sygnałów  $y, u$  i ocen  $\hat{\theta}$  oraz własność nadążania wyjścia obiektu za wyjściem modelu odniesienia.

#### Założenia

Rozważmy bezpośredni adaptacyjny algorytm sterowania z modelem odniesienia opisany w paragrafie 3.2 przy następujących dwóch założeniach upraszczających:

- wielomiany  $F(z)$  i  $A_m(z)$  są równe odpowiednio  $z^n$  i  $z^{n^*}$ ,
- współczynnik  $b_m$  stojący przy najwyższej potędze operatora  $z$  w wielomianie  $B(z)$  jest znany (przypominamy, że  $m = n - n^*$ ).

Zwróćmy uwagę, że równanie (3.23) przyjmie postać

$$ky(t) = u(t - n^*) - R(z)y(t - n^* - n) - S(z)u(t - n^* - n), \quad (5.39)$$

gdzie  $k = 1/b_m$ . Ponieważ założyliśmy, że parametr  $b_m$  jest znany, więc obecnie jedynie współczynniki wielomianów  $R(z)$  i  $S(z)$  muszą być zidentyfikowane. Zatem możemy przyjąć

$$\nu(t) = u(t - n^*) - ky(t), \quad (5.40)$$

$$\theta^* = [r_{n-1} \dots r_0 \ s_{n-1} \dots s_0]^T, \quad (5.41)$$

$$\varphi(t) = [y(t - n^* - 1) \dots y(t - n^* - n) \ u(t - n - 1) \dots u(t - n^* - n)]^T \quad (5.42)$$

(porównaj równania (3.24)–(3.26)). Zwróćmy uwagę, że w przypadku nieadaptacyjnym, prawo sterowania  $u(t) = R(z)y(t - n) + S(z)u(t - n) + ku_c(t)$  – które może być obecnie zapisane w postaci skróconej  $u(t) = \varphi^T(t + n^*)\theta^*$  – zapewnia  $y(t) = u_c(t - n^*) = y_m(t)$ , tzn. zapewnia idealne nadążanie wyjścia obiektu za wyjściem modelu odniesienia.

Przyjmijmy, że równania obiektu są następujące

$$\begin{aligned} y(t) + a_{n-1}(t)y(t-1) + \dots + a_0(t)y(t-n) \\ = b_m(t)u(t-n^*) + \dots + b_0(t)u(t-n) + \eta(t), \end{aligned} \quad (5.43)$$

gdzie  $a_{n-1}, \dots, a_0, b_m, \dots, b_0$  są zmiennymi parametrami obiektu, zaś  $\eta$  jest pewną składową niemodelowaną.

Załóżmy, że:

(A1) dla każdego  $t$  wektor parametrów obiektu  $\vartheta^*(t) = [a_{n-1}(t) \dots a_0(t) \ b_m(t) \dots b_0(t)]^T$  należy do  $\Omega$  dla pewnego domkniętego i ograniczonego podzbioru  $\Omega$  zbioru  $\mathbf{R}^{n+m+1}$  spełniającego następujące warunki:  $\forall \vartheta = [a_{n-1} \dots a_0 \ b_m \dots b_0]^T \in \Omega$

(a) wielomian  $B(z) = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0$  nie ma zer położonych na zewnątrz koła jednostkowego  $|z| < 1$ ,

(b)  $|b_m(t)| \geq \beta$  dla pewnej liczby dodatniej  $\beta$ ,

(c) wielomiany  $A(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$  i  $B(z) = b_m z^m + \dots + b_0$  są względnie pierwsze,

(A2) parametry obiektu oraz składowa niemodelowana spełniają następujący warunek: istnieje stała dodatnia  $K$  oraz mała liczba dodatnia  $\epsilon$  takie, że  $\forall j, \ell \geq 0$

$$\sum_{t=j}^{j+\ell-1} \|\vartheta^*(t) - \vartheta^*(t-1)\| \leq K + \epsilon t, \quad j \geq -n^* + 1, \quad (5.44)$$

$$\sum_{t=j}^{j+\ell-1} \frac{\eta^2(t)}{U^2 + m(t)} \leq K + \epsilon t, \quad j \geq -n^* + 1, \quad (5.45)$$



gdzie ciąg  $\{m(t)\}$  jest zdefiniowany przez

$$m(t+1) = \sigma m(t) + \|\varphi(t+n^*+1)\|^2, \quad m(-n^*+1) \geq 0, \quad (5.46)$$

zaś  $U$  oznacza amplitudę sygnału sterującego, tzn.

$$U = \sup_{t \geq 0} |u_c(t)|. \quad (5.47)$$

Założenia (A1a i b) są odpowiednikami założeń (B1) i B(2) przyjmowanych w przypadku idealnym (patrz str. 67). Założenie (A1c) nie było dotychczas wymagane. Obecnie jest ono potrzebne po to, by możliwe było zapewnienie jednostajne pobudzenie wektora  $\varphi$ . Założenie (A2) definiuje klasę obiektów sterowania (5.38). Zwróćmy uwagę na kilka interesujących szczególnych przypadków.

*Obiekt z addytywnymi zakłóceniami.* Rozważmy obiekt o równaniu

$$A(z)y = B(z)u + d,$$

gdzie  $d$  jest sygnałem zakłócającym. Założenie (A2) jest spełnione, gdy wartość średnia sygnału  $d$  jest mała w stosunku do amplitudy sygnału sterującego. W szczególności, założenie to jest spełnione, gdy  $|d| \leq \sqrt{\epsilon}U$ .

*Obiekt z niemodelowaną dynamiką.* Załóżmy, że obiekt jest liniowy i ma transmitancję równą

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}(1 + \epsilon_1 L(z)).$$

Równania obiektu można zapisać w postaci (5.43) przyjmując  $\eta = \epsilon_1 B(z)L(z)u$ . Założenie (A2) będzie spełnione wtedy, gdy:  $z^{-n^*}L(z)$  jest transmitancją ściśle właściwą, bieguny transmitancji  $L$  leżą ściśle wewnątrz koła jednostkowego  $|\sigma z| < 1$  i  $\epsilon_1$  jest odpowiednio małą liczbą. Zwróćmy uwagę na to, że pomimo przyjęcia założenia (A1a) obiekt może mieć zera położone na zewnątrz koła jednostkowego  $|z| < 1$ , a więc w istocie może być obiektem nieminimalnofazowym. Jako przykład możemy wziąć obiekt

$$y(t) + ay(t-1) = bu(t-2) + \eta(t), \quad \eta(t) = cu(t-1), \quad \epsilon < b.$$

Obiekt ten ma zero w obszarze  $|z| \geq 1$ , ale mimo to spełnia założenia (A1) i (A2).

*Obiekt niestacjonarny.* Warunek (5.44) jest spełniony, gdy parametry obiektu spełniają nierówność  $\|\vartheta^*(t) - \vartheta^*(t-1)\| \leq \epsilon \forall t$ , tzn. gdy zmiany parametrów w czasie są wolne. Warunek (5.44) dopuszcza również duże skokowe zmiany parametrów, o ile występują one wystarczająco rzadko.

Założenie (A3) zostało przez nas wprowadzone jedynie dla uproszczenia rozważań. W szczególności, dzięki niemu nie musimy się martwić o spełnienie warunku  $\hat{k}(t) \neq 0$  (porównaj twierdzenie 3.3). Analiza układu sterowania w przypadku, gdy parametr  $b_m(t)$  jest nieznany przedstawiona jest w pracy [67].

Wiemy już, że równanie obiektu (5.38) możemy zapisać w postaci (5.39) lub w postaci równoważnej

$$\nu(t) = \varphi^T(t)\theta^*.$$

Dla zaakcentowania, że parametry  $\theta^*$  są funkcją parametrów obiektu  $\vartheta^*$  przyjmiemy oznaczenie  $\theta^* = \theta(\vartheta^*)$ . Jeśli parametry obiektu zmieniają się w czasie i  $\eta \neq 0$ , to równanie obiektu możemy (5.43) zapisać w postaci

$$\nu(t) = \varphi^T(t)\theta^*(t) + \bar{\eta}(t), \quad (5.48)$$

gdzie  $\nu(t) = u(t-n^*) - k(t)y(t)$ ,  $k(t) = 1/b_m(t)$  i  $\theta^*(t) = \theta(\vartheta^*(t))$ . Wyznaczając analityczne formuły dla funkcji  $\theta(\cdot)$  i zmiennej  $\bar{\eta}$  oraz wykorzystując założenie (A2) i założenie  $\|\vartheta^*\| \in l^\infty$  łatwo można pokazać, że

$$\sum_{t=j}^{j+\ell-1} \|\theta^*(t) - \theta^*(t-1)\| \leq C(K + \ell t), \quad (5.49)$$

$$\sum_{t=j}^{j+\ell-1} \frac{\bar{\eta}^2(t)}{U^2 + m(t)} \leq C(K + \ell t), \quad (5.50)$$

dla pewnej stałej dodatniej  $C$  i  $\forall j, \ell > 0$ . Parametr  $C$  zależy jedynie od postaci zbioru  $\Omega$  występującego w założeniu (A1).

Rozważmy następujący algorytm sterowania adaptacyjnego:

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \frac{\bar{\varphi}(t)\varepsilon_m(t)}{1 + \bar{\varphi}^T(t)\bar{\varphi}(t)}, \quad (5.51)$$

$$\varepsilon_m(t) = \bar{\nu}(t) - \bar{\varphi}^T(t)\hat{\theta}(t-1) \quad (5.52)$$

$$\bar{\varphi}(t) = \frac{\varphi(t)}{\sqrt{U^2 + m(t)}}, \quad \bar{\nu}(t) = \frac{\nu(t)}{\sqrt{U^2 + m(t)}}, \quad (5.53)$$

$$u(t) = \varphi^T(t+n^*)\hat{\theta}(t) + k(t)u_c(t) \quad \text{dla } t \geq 0. \quad (5.54)$$

Unormowanie zmiennych (5.53) zapewnia ograniczenie wpływu składowej niemodelowanej na proces identyfikacji parametrów obiektu i zostało po raz pierwszy zastosowane przez Praly [124]. Wprowadzenie stałej  $U$  we wzorach (5.53) ma na celu uniezależnienie własności asymptotycznych układu sterowania od amplitudy sygnału sterującego. Na zakończenie zwróćmy uwagę, że zbiór wartości początkowych układu sterowania (5.43), (5.51)–(5.54) jest następujący:  $\hat{\theta}(0)$ ,  $u(0)$ ,  $u(-1)$ , ...,  $u(-n^* - n + 1)$ ,  $y(-n^*)$ , ...,  $y(-n^* - n + 1)$ ,  $m(-n^* + 1)$ .

## Równanie błędu

W tym punkcie wyprowadzimy równanie błędu będące odpowiednikiem równania (5.24). Zauważmy, że wektor  $\varphi(t)$  zależy od wartości sygnałów w chwilach wcześniejszych od  $t - n^*$ . Z tego względu przyjmijmy następujące oznaczenie

$$\varphi(t + n^*) = \omega(t). \quad (5.55)$$

Wektor  $\omega$  spełnia następujące równanie stanu

$$\omega(t + 1) = A_p(\vartheta^*(t))\omega(t) + b_p u(t) + c_p \eta(t), \quad (5.56)$$

gdzie

$$A_p(\vartheta) = \left[ \begin{array}{cccc|cc} 0 & \dots & 0 & & & \vartheta^T \\ \hline 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & 0 & & \\ \hline & & & \mathbf{0} & & \\ \hline & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 & 0 \end{array} \right], \quad b_p = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c_p = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Podstawiając (5.54) do (5.56) i uwzględniając oznaczenie (5.55) dostajemy

$$\omega(t + 1) = A_m(\vartheta^*(t))\omega(t) + b_p [\phi^T(t)\omega(t) + k(t)u_c(t)] + c_p \eta(t), \quad (5.57)$$

gdzie

$$A_m(\vartheta) = A_p(\vartheta) + b_p \theta^T(\vartheta), \quad (5.58)$$

$$\phi(t) = \hat{\theta}(t) - \theta^*(t). \quad (5.59)$$

Zwróćmy uwagę, że macierz  $A_m(\vartheta)$  jest macierzą opisującą układ zamknięty (5.54), (5.56) w przypadku nieadaptacyjnym i stacjonarnym, tzn. gdy  $\vartheta^*(t) = \vartheta = \text{const}$  i  $\hat{\theta}(t) = \theta^*(\vartheta)$ . Zatem macierz  $A_m$  jest ściśle stabilna dla każdego  $\vartheta \in \Omega$ . Ponadto, ponieważ  $(A_p(\vartheta), b_p)$  jest parą sterowalną (patrz str. 86), więc również  $(A_m(\vartheta), b_p)$  jest parą sterowalną. Wreszcie łatwo sprawdzić, że odwzorowanie  $\vartheta \rightarrow A_m(\vartheta)$  jest różniczkowalne dla  $\forall \vartheta \in \Omega$ , a zatem

$$\|A_m(\vartheta_1) - A_m(\vartheta_2)\| \leq L_m \|\vartheta_1 - \vartheta_2\| \quad \forall \vartheta_1, \vartheta_2 \in \Omega.$$

dla pewnej stałej dodatniej  $L_m$ . Zdefiniujmy ciąg  $\{\omega^*(t)\}$  przez

$$\omega^*(t + 1) = A_m(\vartheta^*(t))\omega^*(t) + b_p k(t)u_c(t), \quad \omega^*(0) = 0. \quad (5.60)$$

Ponieważ  $A_m(\vartheta)$  jest ściśle stabilna  $\forall \vartheta \in \Omega$ , a zbiór  $\Omega$  jest domknięty i ograniczony, więc z warunku (5.44) wynika, że istnieje stała  $\epsilon_0^*$  taka, że dla każdego  $\epsilon < \epsilon_0^*$  część jednorodna

równania (5.60) jest wykładniczo stabilna. Zatem jeśli liczba  $\epsilon$  będzie wystarczająco mała, to

$$\|\omega^*(t)\| \leq C_\omega U \quad \forall t \geq 0, \quad (5.61)$$

dla pewnej stałej  $C_\omega$  zależnej jedynie od  $\Omega$ . Dowód powyższej własności można znaleźć na przykład w pracy Giri i in. [37]. W dalszym tego rozdziału będziemy zakładać, że stała  $\epsilon$  jest na tyle mała, że zachodzi nierówność (5.61).

Zauważmy, że w przypadku, gdy  $\hat{\theta} \equiv \theta^*$  i  $\eta \equiv 0$  zmienna  $\omega$  dąży wykładniczo do  $\omega^*$ . Ciąg  $\{\omega^*(t)\}$  może być więc uznany za żadaną trajektorię wektora  $\omega$ . Odejmując stronami równania (5.57) i (5.60) dostajemy następujące równanie dla błędu  $e(t) = \omega(t) - \omega^*(t)$

$$e(t+1) = A_m(\vartheta^*(t))e(t) + b_p \phi^T(t)\omega(t) + c_p \eta(t). \quad (5.62)$$

Powyższe równanie jest odpowiednikiem równania (5.24) otrzymanego dla prostego układu sterowania rozpatrywanego w poprzednim paragrafie.

### Jednostajne pobudzenie

Decydującym czynnikiem zapewniającym odporność rozpatrywanego układu sterowania jest jednostajne pobudzenie sygnału  $u_c$ . Przyjmijmy, że spełniony jest warunek

$$\frac{1}{T'} \sum_{t=j}^{j+T'-1} \begin{bmatrix} u_c(t+2n-1) \\ \vdots \\ u_c(t) \end{bmatrix} [u_c(t+2n-1) \dots u_c(t)] \geq \delta_r U \quad \forall j \geq 0. \quad (5.63)$$

Warunek (5.63) jest nieco mocniejszy niż warunek  $u_c \in \hat{\mathcal{S}}(2n, T)$ , ponieważ obecnie zakładamy, że nierówność (5.63) zachodzi dla każdego  $j \geq 0$ , a nie jak w definicji 4.2 dla wszystkich wystarczająco dużych  $j$ . Takie wzmocnienie warunku pobudzenia jest potrzebne dlatego, że udowodniona w następnym punkcie stabilność układu sterowania to stabilność lokalna. Zauważmy, że parametr  $\delta_r$  występujący w warunku (5.63) możemy uznać za miarę intensywności pobudzenia przy zadanej amplitudzie sygnału  $u_c$ .

W paragrafie 4.1 pokazaliśmy, że jeżeli spełniony jest warunek (5.63), to stan układu  $\omega^*(t+1) = A_m \omega^*(t) + b_p u_c(t)$ , w którym para  $(A_m, b_p)$  jest sterowalna należy do  $\hat{\mathcal{V}}(2n, T+2n)$ , gdzie  $2n$  jest rozmiarem wektora  $\omega^*$ . W tym paragrafie potrzebne będzie nam następujące uogólnienie tej własności.

**Lemat 5.1.** *Rozważmy układ (5.60) i przyjmijmy, że spełnione są założenia (A1) i (A2). Jeżeli zachodzi warunek (5.63), to istnieją stałe dodatnie  $\epsilon_1^*$ ,  $\rho$  i liczba naturalna  $T^*$  takie, że dla każdego  $\epsilon < \epsilon_1^*$*

$$\sum_{t=j}^{j+T-1} \omega^*(t) \omega^{*T}(t) \geq \rho I. \quad (5.64)$$

Dowód lematu 5.1 zawarty jest w pracy [67].

### Analiza stabilności

Dowód stabilności rozważanego adaptacyjnego układu sterowania oparty jest na dwóch lematach, których dowody podane są w pracy [67]. Pierwszy lemat definiuje odpowiednią funkcję dla układu (5.43), (5.51)–(5.54), która w przypadku idealnym jest funkcją Lapunowa. Będziemy potrzebowali następującego oznaczenia

$$Q(\vartheta) = \sum_{i=0}^{\infty} (A_m^T(\vartheta))^i (A_m(\vartheta))^i, \quad \vartheta \in \Omega.$$

Zauważmy, że ze względu na stabilność  $A_m(\vartheta)$  macierz  $Q(\vartheta)$  jest dobrze zdefiniowana.

Od tej pory będziemy przyjmowali bez straty ogólności, że  $U = 1$ .

**Lemat 5.2.** *Istnieją stałe dodatnie  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  niezależne od  $\epsilon$  takie, że funkcja  $W$  zdefiniowana przez równania*

$$W(t) = \frac{1}{(1 + \mu(t + n^*))^{2n^*+1}} \ln(1 + V(t)) + \frac{\alpha_1}{1 + \mu(t + n^*)} \sum_{i=1}^{n^*} \|\phi(t + i)\|^2, \quad (5.65)$$

$$V(t) = e^T(t)Q(\vartheta^*(t-1))e(t) + \alpha_2 \bar{m}(t), \quad (5.66)$$

$$\bar{m}(t+1) = \sigma \bar{m}(t) + \|e(t+1)\|^2, \quad \bar{m}(-n^*+1) = m(-n^*+1), \quad (5.67)$$

$$\mu(t) = \sup_{-1 \leq i \leq t} \|\phi(i)\| \quad (5.68)$$

spełnia wzdłuż trajektorii układu (5.43), (5.51)–(5.54) nierówność

$$W(t+1) - W(t) \leq -\frac{C_1}{(1 + \mu(t + n^*))^{2n^*+1}} \cdot \frac{V(t)}{1 + V(t)} + C_2 \sum_{i=0}^{n^*} \xi(t+i) \quad (5.69)$$

dla pewnych stałych dodatnich  $C_1$  i  $C_2$ , gdzie

$$\xi(t) = \sup_i \left( \|\vartheta^*(t) - \vartheta^*(t-1)\|, \|\theta^*(t) - \theta^*(t-1)\|, \frac{\bar{\eta}^2(t)}{1 + m(t)}, \frac{\bar{\eta}^2(t)}{1 + m(t)} \right). \quad (5.70)$$

Drugi lemat pokazuje wpływ pobudzenia sygnału sterującego  $u_c$  na błąd identyfikacji.

**Lemat 5.3.** *Załóżmy, że sygnał  $\omega^*$  spełnia warunek pobudzenia (5.64) dla każdego  $j \geq 0$  i pewnych  $T$  i  $\rho > 0$ . Wówczas istnieją liczby rzeczywiste dodatnie  $C_3$ ,  $C_4$  i  $C_5$  takie, że  $\forall t \geq 0$*

$$\begin{aligned} \|\phi(t+T)\|^2 \leq & \left(1 - C_3\rho + C_4 \max_{t-n^* \leq i \leq t+T-1} V(i)\right) \|\phi(t)\|^2 \\ & + C_5(1 + \mu(t+T-1)) \sum_{i=0}^{T-1} \xi(t+i). \end{aligned} \quad (5.71)$$

Na wstępie zobaczymy jakie są konsekwencje lematów 5.2 i 5.3 w przypadku idealnym, gdy  $\xi \equiv 0$ . Z nierówności (5.69) wynika, że wtedy  $W(t+1) - W(t) \leq 0$ , a zatem funkcja  $W$  jest dla rozważanego układu funkcją Lapunowa. Stąd  $W \in l^\infty$  i  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 0$ , czyli  $y, u, \|\hat{\theta}\| \in l^\infty$  i  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ . Pomysł polegający na zastosowaniu do analizy stabilności adaptacyjnych układów sterowania funkcji Lapunowa typu (5.65) pochodzi od Johanssona [72]. Z kolei z własności (5.71) i własności  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 0$  wynika, że  $\phi(t)$  dąży wykładniczo do zera, gdy  $t \rightarrow \infty$ . Zauważmy, że identyczne rezultaty uzyskaliśmy w paragrafach 3.3 i 4.3 stosując nieco inne podejścia.

Obecnie zajmiemy się analizą stabilności rozważanego układu sterowania w przypadku nieidealnym. Na początku udowodnimy rezultat słabszy (ale przez to łatwiejszy do pokazania), w którym wykorzystamy dodatkowe założenie o ograniczoności ciągu ocen  $\{\hat{\theta}(t)\}$ . Później przekonamy się, że w istocie założenie to nie jest konieczne.

**Twierdzenie 5.2.** *Załóżmy, że  $\|\phi(t)\| \leq \mu \quad \forall t \geq 0$  i pewnej stałej dodatniej  $\mu$ . Wówczas istnieje stała  $\epsilon^*$  (zależna od  $\mu$ ) taka, że dla każdego  $\epsilon < \epsilon^*$  spełniony jest warunek  $u, y \in l^\infty$ . Jeżeli ponadto sygnał sterujący  $u_c$  spełnia warunek pobudzenia (5.63), to dla wszystkich wystarczająco małych  $\epsilon$  i wszystkich wystarczająco dużych  $j$  zachodzą nierówności*

$$\sum_{t=j}^{j+\ell-1} \|\phi(t)\|^2 \leq C_6(K + \epsilon\ell), \quad (5.72)$$

$$\sum_{t=j}^{j+\ell-1} \|e(t)\|^2 \leq C_6(K + \epsilon\ell) \quad (5.73)$$

dla każdego  $\ell$  i pewnego  $C_6 > 0$ . W szczególności, gdy w założeniu (A2) jest  $K = 0$ , to

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\phi(t)\|^2 \leq O(\epsilon), \quad (5.74)$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\|^2 \leq O(\epsilon). \quad (5.75)$$

DOWÓD. Dla prostoty rozważymy jedynie przypadek  $K = 0$ . Przypadek ogólny analizuje się podobnie, chociaż dochodzą dodatkowe szczegóły techniczne. Jeśli  $K = 0$ , to z warunków (5.44), (5.45) (5.49) i (5.50) otrzymujemy  $\xi(t) \leq \max(1, C)\epsilon$ . Zatem z nierówności (5.69) i (5.71) wynika, że

$$W(t+1) - W(t) \leq -\tilde{C}_1 \frac{V(t)}{1 + V(t)} + \tilde{C}_2 \epsilon, \quad (5.76)$$

$$\|\phi(t+T)\| \leq \left(1 - C_3 \rho + C_4 \max_{t-n^*+1 \leq i \leq t+T-1} V(i)\right) \|\phi(t)\|^2 + \tilde{C}_5 \epsilon \quad (5.77)$$

gdzie  $\tilde{C}_1 = -C_1/(1 + \mu)^{2n^*+1}$ ,  $\tilde{C}_2 = C_2(n^* + 1) \max(1, C)$  i  $\tilde{C}_5 = C_5(1 + \mu)T \max(1, C)$ . Wykorzystując nierówność (5.76) udowodnimy, że  $W \in l^\infty$ . Załóżmy, że  $\epsilon < \epsilon^* := \tilde{C}_1/(1 +$

$\tilde{C}_2$ ). Zwróćmy uwagę, że jeżeli  $V(t) \geq H(\epsilon)$ , gdzie  $H(\epsilon) = (1 + \tilde{C}_2)\epsilon / (\tilde{C}_1 - (1 + \tilde{C}_2)\epsilon)$ , to  $W(t+1) - W(t) \leq -\epsilon$ . Ale  $V(t) \geq H(\epsilon)$ , gdy

$$W(t) \geq \frac{1}{(1 + \mu)^{2n^*+1}} \ln(1 + H(\epsilon)) + \alpha_1 \frac{\mu^2}{1 + \mu}. \quad (5.78)$$

Tym samym pokazaliśmy, że jeżeli wartość  $W(t)$  jest wystarczająco duża, to funkcja  $W$  maleje. Ponieważ funkcja  $W$  może w danej chwili wzrosnąć co najwyżej o  $\tilde{C}_2\epsilon$ , więc  $W \in l^\infty$ , czyli  $y, u \in l^\infty$ . Udowodnimy teraz własności (5.74) i (5.75). Niech  $\bar{W} = \sup_t W(t)$  i  $\bar{V} = \sup_t V(t)$ . Z nierówności (5.76) otrzymujemy

$$\begin{aligned} W(t + \ell) - W(t) &\leq -\tilde{C}_1 \sum_{i=t}^{t+\ell-1} \frac{V(i)}{1 + V(i)} + \tilde{C}_2 \ell \epsilon \\ &\leq -\frac{\tilde{C}_1}{1 + \bar{V}} \sum_{i=t}^{t+\ell-1} V(i) + \tilde{C}_2 \ell \epsilon. \end{aligned}$$

Stąd

$$\frac{1}{\ell} \sum_{i=t}^{t+\ell-1} V(i) \leq \frac{c}{\ell} + O(\epsilon), \quad (5.79)$$

gdzie  $c = \bar{W}(1 + \bar{V})/\tilde{C}_1$ . Zatem, jeżeli stała  $\epsilon$  jest mała, to również średnia wartość funkcji  $V$  na długim odcinku czasu jest mała. Wykorzystamy tę własność do analizy nierówności (5.77). Rozważmy ciąg  $\{\tilde{\mu}_k\}$ :  $\tilde{\mu}_k = \|\phi(j + kT)\|^2$  dla pewnego ustalonego  $j$ . Nierówność (5.77) możemy zapisać w postaci

$$\tilde{\mu}_{k+1} \leq a_k \tilde{\mu}_k + O(\epsilon), \quad (5.80)$$

gdzie  $a_k = \left(1 - C_3\varrho + C_4 \max_{i \in [j+kT-n^*+1, j+(k+1)T-1]} V(i)\right)$ . Z nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną a geometryczną oraz z (5.79) otrzymujemy

$$\begin{aligned} a_{k+\ell-1} \dots a_{k+1} a_k &\leq \left(\frac{a_k + a_{k+1} + \dots + a_{k+\ell-1}}{\ell}\right)^\ell \\ &\leq \left(1 - C_3\varrho + \frac{2C_4}{\ell} \sum_{i=j+kT-n^*+1}^{j+(k+\ell)T-1} V(i)\right)^\ell \\ &\leq \left(1 - C_3\varrho + \frac{2C_4 c}{\ell} + O(\epsilon)\right)^\ell. \end{aligned}$$

Zatem, jeżeli stała  $\epsilon$  jest wystarczająco mała to iloczyn  $a_{k+\ell} \dots a_{k+1} a_k$  dąży wykładniczo do zera jednostajnie względem  $k$ , gdy  $\ell \rightarrow \infty$ . Stąd  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \tilde{\mu}_k \leq O(\epsilon)$ , co jest równoważne nierówności (5.74). Własność (5.75) udowodnimy wykorzystując równanie błędu (5.62). Można pokazać (szczegóły pomijamy), że z równania (5.62), definicji funkcji  $V$  oraz własności (5.74) wynika nierówność

$$V(t+1) \leq (1 - c_1 + O(\epsilon))V(t) + O(\epsilon).$$

Zatem dla wystarczająco małej stałej  $\epsilon$  mamy  $\limsup_{t \rightarrow \infty} V(t) \leq O(\epsilon)$ , co jest równoważne własności (5.75)  $\square$

Zwróćmy uwagę, że założenie  $\|\hat{\theta}\| \in l^\infty$  zapewnia  $y, u \in l^\infty$  niezależnie od tego, czy sygnał sterujący jest sygnałem pobudzającym. Ponadto, z nierówności (5.79) wynika, że niezależnie od postaci sygnału sterującego wartość średnia błędu nadążania na długim odcinku czasu jest rzędu  $O(\epsilon)$ , a więc jest mała. Nie oznacza to jednak, że w układzie nie występuje pelzanie ocen parametrów i wywołany przez niego okresowy wzrost wartości błędu  $e$ . Z praktycznego punktu widzenia regulator nie jest więc układem odpornym, gdy  $u_c$  nie jest sygnałem pobudzającym. Własność asymptotycznego nadążania ocen za parametrami  $\theta^*$  i wyjścia obiektu za wyjściem modelu zachodzi tylko wtedy, gdy  $u_c \in S(2n)$ . W przypadku, gdy  $K \gg \epsilon$  okresowy wzrost wartości  $\phi$  i  $e$  jest oczywiście możliwy w chwilach występowania skokowych zmian parametrów obiektu.

Poniższe twierdzenie kończy analizę stabilności rozważanego adaptacyjnego układu sterowania pokazując, że jednostajne pobudzenie sygnału  $u_c$  rzędu  $2n$  zapewnia ograniczonosc ciągu ocen.

**Twierdzenie 5.3.**  *Załóżmy, że sygnał sterujący  $u_c$  spełnia warunek pobudzenia (5.63). Wówczas dla dowolnej stałej dodatniej  $M$  istnieje stała dodatnia  $\epsilon^*$  taka, że dla każdego  $\epsilon < \epsilon^*$  i dla dowolnych wartości początkowych układu sterowania  $\hat{\theta}(0)$ ,  $m(-n^* + 1)$ ,  $u(0), \dots, u(-n^* - n + 1)$ ,  $y(-n^* + 1), \dots, y(-n^* - n + 1)$  spełniających ograniczenia*

$$\|\hat{\theta}(0) - \theta^*(0)\| \leq M, \quad m(-n^* + 1) \leq M^2, \quad |u(i)| \leq M, \quad |y(j)| \leq M \quad (5.81)$$

dla  $i = 0, \dots, -n - n^* + 1$ ,  $j = -n^* + 1, \dots, -n - n^* + 1$  zachodzi własność  $y, u, \|\hat{\theta}\| \in l^\infty$ . Ponadto, dla wszystkich wystarczająco małych wartości  $\epsilon$  spełnione są nierówności (5.74) i (5.75).

**DOWÓD.** Z lematu 5.1 wynika, że istnieją liczby dodatnie  $\epsilon_1^*$ ,  $T$  i  $\rho$  takie, że dla każdego  $j \geq 0$  i każdego  $\epsilon < \epsilon_1^*$  spełniony jest warunek pobudzenia (5.64). Przyjmijmy więc, że  $\epsilon < \epsilon_1^*$ . Rozważymy dwa wykluczające się przypadki: gdy  $V(t)$  jest małe w pewnym przedziale czasu o długości  $2n^* + T$  i gdy  $V(t)$  jest duże. Na początek założymy, że

$$V(j) \leq C_3 \rho / 2C_4 \quad \text{dla } j \in [t, t + 2n^* + T - 1]$$

Wówczas na mocy lematu 5.3 mamy

$$\|\phi(j+T)\|^2 \leq (1 - C_3 \rho / 2) \|\phi(j)\|^2 + C_5 (1 + \mu(j+T-1)) \sum_{i=j}^{j+T-1} \xi(i) \quad (5.82)$$

dla każdego  $j \in [t + n^*, t + 2n^*]$ . Stąd

$$\sum_{i=1}^{n^*} \|\phi(t + n^* + T + i)\|^2 \leq (1 - C_3 \rho / 2) \sum_{i=1}^{n^*} \|\phi(t + n^* + i)\|^2$$



$$+ C_5 n^* (1 + \mu(t + 2n^* + T - 1)) \sum_{i=n^*+1}^{2n^*+T-1} \xi(t+i).$$

Ponadto, z nierówności (5.69) otrzymujemy

$$W(t+1) \leq W(t) + C_2 \sum_{i=0}^{n^*} \xi(t+i), \quad (5.83)$$

skąd

$$W(t+T+2n^*) \leq W(t+T+n^*) + C_2 n^* \sum_{i=n^*+T}^{3n^*+T-1} \xi(t+i). \quad (5.84)$$

Wykorzystamy teraz definicję funkcji  $W$  oraz kolejno nierówności (5.84), (5.69), (5.71) i powtórnie (5.84). Mamy

$$\begin{aligned} W(t+T+2n^*) &\leq V(t+T+n^*) + \frac{\alpha_1}{1+\mu(t+T+2n^*)} \sum_{i=1}^{n^*} \|\phi(t+T+n^*+i)\|^2 + C_2 n^* \sum_{i=n^*+T}^{3n^*+T-1} \xi(t+i) \\ &\leq V(t+T+n^*) + \frac{\alpha_1(1-C_3\varrho/2)}{1+\mu(t+2n^*)} \sum_{i=1}^{n^*} \|\phi(t+n^*+i)\|^2 + (C_2+C_5)n^* \sum_{i=n^*+T}^{3n^*+T-1} \xi(t+i) \\ &\leq V(t+T+n^*) + \frac{\alpha_1(1-C_3\varrho/2)}{1+\mu(t+2n^*)} \sum_{i=1}^{n^*} \|\phi(t+n^*+i)\|^2 + (C_2+C_5)n^* \sum_{i=n^*+T}^{3n^*+T-1} \xi(t+i) \\ &\leq C_3\varrho/2C_4 + (1-C_3\varrho/2)W(t+n^*) + (C_2+C_5)n^* \sum_{i=n^*+T}^{3n^*+T-1} \xi(t+i) \\ &\leq C_3\varrho/2C_4 + (1-C_3\varrho/2)W(t) + (2C_2+C_5)n^* \sum_{i=0}^{3n^*+T-1} \xi(t+i). \end{aligned}$$

Zatem pokazaliśmy, że jeżeli  $V(j) \leq C_3\varrho/2C_4$  dla  $j \in [t+n^*+T-1, t]$ , to

$$W(t+T+2n^*) \leq C_3\varrho/2C_4 + (1-C_3\varrho/2)W(t) + 2(C_2+C_5)n^* \sum_{i=0}^{3n^*+T-1} \xi(t+i). \quad (5.85)$$

Z drugiej strony, jeżeli  $V(j) \geq C_3\varrho/2C_4$  dla pewnego  $j \in [t, t+n^*+T-1]$ , to na mocy (5.69)

$$W(t+T+2n^*) \leq W(t) \cdot \frac{C_1}{(1+\mu(t+T+2n^*))^{2n^*+1}} \cdot \frac{C_3\varrho}{C_3\varrho+2C_4} + C_2 n^* \sum_{i=0}^{3n^*+T-1} \xi(t+i). \quad (5.86)$$

Pokazaliśmy więc, że bez względu na wartości funkcji  $V$  w przedziale  $[t, t+2n^*+T-1]$  zachodzi jedna z nierówności (5.85) lub (5.86). Oznaczmy

$$D(\mu) = \frac{C_1}{(1+\mu)^{2n^*+1}} \cdot \frac{C_3\varrho}{C_3\varrho+2C_4}, \quad E(\mu) = \frac{1}{C_4} + \frac{2D(\mu)}{C_3\varrho}.$$

Zauważmy, że jeżeli  $W \geq E(\mu)$ , to  $(1 - C_3\rho/2) + C_3\rho/2C_4 \geq W - D(\mu)$ . Zatem z nierówności (5.85) i (5.86) dostajemy

$$W(t + T + 2n^*) \leq W(t) - D(\mu(t + T + 2n^*)) + C_6 \sum_{i=0}^{3n^*+T-1} \xi(t+i), \quad (5.87)$$

gdzie  $W(t) \geq E(\mu(t + T + 2n^*))$ , gdzie  $C_6 = (2C_2 + C_5)n^*$ . Rozważmy ciąg chwil  $\{t_i\} : t_i = i(2n^* + T)$ ,  $i = 0, 1, \dots$  i niech  $j$  będzie pewną ustaloną liczbą naturalną. Przez  $j'$  oznaczymy największą liczbę naturalną należącą do przedziału  $[0, j-1]$  taką, że  $W(t_{j'}) \leq E(\mu(t_{j'+1}))$ , a gdy taka liczba nie istnieje  $j' = 0$ . Zauważmy, że

$$W(t_{j'}) \leq W(0) + E(\mu(t_{j'+1})) \leq W(0) + E(0),$$

ponieważ funkcja  $\mu \rightarrow E(\mu)$  jest funkcją malejącą, a  $\mu(t) \geq 0$ . Teraz wykorzystamy nierówność (5.87) dla  $t = t_{j'}, t_{j'+1}, \dots, t_{j-1}$  i założenie (A2). Mamy

$$\begin{aligned} W(t_j) &\leq W(t_{j'}) - (j - j')D(\mu(t_j)) + 2C_6 \sum_{i=t_{j'}}^{t_j+n^*-1} \xi(i) \\ &\leq W(0) + E(0) - (j - j')D(\mu(t_j)) + C_6[K + \epsilon(j - j')(2n^* + T) + \epsilon n^*]. \end{aligned} \quad (5.88)$$

Ponadto, z nierówności (5.84) i założenia (A2) mamy dla  $t \in [t_j, t_{j+1} - 1]$

$$W(t) \leq W(t_j) + C_2 n^* \sum_{i=t_j}^{t+n^*-1} \xi(i) \leq W(t_j) + C_2 n^* [K + (2n^* + T)\epsilon]. \quad (5.89)$$

Porównując (5.88) i (5.89) dostajemy  $\forall t \geq 0$

$$\begin{aligned} W(t) &\leq W(0) + E(0) - (j - j') [D(\mu(t_j)) - 2C_6(2n^* + T)\epsilon] \\ &\quad + 2C_6(K + n^*\epsilon) + C_2 n^* [K + (2n^* + T)\epsilon] \\ &\leq W(0) - (j - j') [D(\mu(t)) - C_7\epsilon] + C_8, \end{aligned}$$

gdzie  $C_7 = 2C_6(2n^* + T)$ ,  $C_8 = 2C_6(K + n^*\epsilon) + C_2 n^* [K + (2n^* + T)\epsilon] + E(0)$ . Zatem dla każdego  $t \geq 0$

$$W(t) \leq W(0) + C_8 \text{ jeśli } \epsilon \leq D(\mu(t))/C_7.$$

Udowodnimy, że jeżeli

$$\epsilon < D \left( 1 + \frac{W(0) + C_8}{\alpha_1} \right) / C_7, \quad (5.90)$$

to dla każdego  $t \geq 0$

$$W(t) \leq W(0) + C_7. \quad (5.91)$$

Zastosujemy metodę indukcji. Widzimy, że (5.91) zachodzi dla  $t = 0$ . Załóżmy, że (5.91) zachodzi dla  $t = 0, 1, \dots, j$ . Wówczas  $\sup_{0 \leq t \leq j} W(t) \leq W(0) + C_8$ . Ale z drugiej strony

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq j} W(t) &\geq \sup_{0 \leq t \leq j} \frac{\alpha_1}{1 + \mu(t + n^*)} \sum_{i=1}^{n^*} \|\phi(t + i)\|^2 \\ &\geq \frac{\alpha_1 \mu^2(j + n^*)}{1 + \mu(j + n^*)} \geq \alpha_1(\mu(j + n^*) - 1) \geq \alpha_1(\mu(j + 1) - 1). \end{aligned} \quad (5.92)$$

Stąd  $\mu(j + 1) \leq 1 + (W(0) + C_8)/\alpha_1$ . W rezultacie

$$D(\mu(j + 1))/C_7 \geq D\left(1 + \frac{W(0) + C_8}{\alpha_1}\right)/C_7 > \epsilon.$$

Zatem nierówność (5.91) zachodzi również dla  $t = j + 1$ . Zgodnie z zasadą indukcji nierówność (5.91) jest prawdziwa dla każdego  $t \geq 0$ . Niech  $\bar{W}$  oznacza supremum  $W(0)$  wzięte po wszystkich wartościach początkowych układu sterowania spełniających ograniczenia (5.81). Ponieważ zależność  $\bar{W}$  od wartości początkowych jest ciągła, więc  $\bar{W} < \infty$ . Zatem teza twierdzenia 5.3 jest prawdziwa dla

$$\epsilon^* = \sup\{\min\{\epsilon_1^*, \epsilon_2^*\}\}, \quad \epsilon_2^* = D\left(1 + \frac{\bar{W} + C_8}{\alpha_1}\right)/C_7,$$

gdzie supremum jest wzięte po wszystkich trójkach  $(\epsilon_1^*, \rho, T)$  dla których zachodzi lemat 5.1 □

### Podsumowanie

Udowodniona w poprzednim punkcie stabilność układu sterowania to stabilność lokalna, gdyż parametr  $\epsilon^*$  zależy od wartości początkowych obiektu. Nazwa *lokalna* nie oznacza jednak, że wartości początkowe algorytmu muszą leżeć blisko pewnego ustalonego punktu w przestrzeni wartości początkowych, a więc na przykład, że wartość początkowa błędu identyfikacji musi być mała. Przeciwnie, jeśli wartość parametru  $\epsilon$  w założeniu (A2) jest odpowiednio mała, to zbiór wartości początkowych, dla których układ sterowania będzie stabilny może być dowolnie obszerny. Ponieważ rozważany model obiektu i tak stanowi pewną idealizację obiektów występujących w praktyce – na przykład, nie uwzględniono w nim nasycenia sygnału wejściowego  $u$ , które w praktyce zawsze występuje – więc z praktycznego punktu widzenia rezultat otrzymany w twierdzeniu 5.3 jest równie dobry jak rezultat globalny. Tym niemniej interesujące jest z teoretycznego punktu widzenia, czy przy pewnych bardziej rygorystycznych założeniach dotyczących obiektu można udowodnić globalną stabilność układu sterowania. W pracy [66] pokazano, że istotnie jest to możliwe jeśli dodatkowo założymy, że

(a) parametry obiektu są stałe w czasie,

- (b) parametr  $b_m$  stojący przy najwyższej potędze operatora  $z$  w  $B(z)$  jest znany<sup>1</sup>  
 (c) składowa niemodelowana  $\eta$  spełnia warunek

$$\sum_{t=j}^{j+\ell-1} \frac{\eta^2(t)}{U^2 + m(t+n^*)} \leq K + \epsilon \ell \quad \forall j, \ell \geq 0.$$

Łatwo sprawdzić, że dla obiektu liniowego stacjonarnego i mającego skończony rząd założenie (c) jest spełnione wtedy, gdy różnica pomiędzy stopniem licznika i mianownika transmitancji obiektu jest dokładnie równa  $n^*$  (tzn. gdy różnica ta jest taka sama jak w przyjętym modelu obiektu). Zauważmy też, że rozważany w poprzednim paragrafie obiekt pierwszego rzędu spełnia założenia (a)–(c) i udowodniona tam stabilność układu to stabilność globalna.

Śledząc dowód twierdzenia 5.3 możemy się przekonać, że parametr  $\epsilon^*$  zależy od wartości początkowych układu i intensywności pobudzenia sygnału sterującego  $\delta_r$  – co możemy podkreślić pisząc  $\epsilon^* = \epsilon^*(\delta_r, \phi(0), m(-n^* + 1), u(0), u(-1), \dots)$  – przy czym  $\epsilon^*$  rośnie wraz ze wzrostem  $\delta_r$  i maleje wraz ze wzrostem wartości początkowych. W dowodzie twierdzenia 5.3 przyjeśliśmy dla prostoty, że amplituda sygnału sterującego jest równa 1. W przypadku dowolnej amplitudy  $U$  warunek stabilności układu przybierze postać

$$\epsilon < \epsilon^* \left( \delta_r, \phi(0), \frac{m(-n^* + 1)}{U^2}, \frac{u(0)}{U}, \frac{u(-1)}{U}, \dots \right).$$

Istotnie, przypadek dowolnego  $U$  może być sprowadzony do przypadku  $U = 1$  przez odpowiednie przeskalowanie zmiennych  $u$ ,  $y$ ,  $\omega^*$  i  $m$ . Widzimy, że zakres dopuszczalnych wartości  $\epsilon$ , a tym samym odporność regulatora, możemy zwiększyć poprzez wzrost intensywności pobudzenia oraz wzrost amplitudy sygnału sterującego. Ponadto, jeśli  $\eta$  jest ograniczonym sygnałem zakłócającym, to wzrost wartości  $U$  powoduje proporcjonalny wzrost dopuszczalnej amplitudy zakłóceń. Zauważmy też, że w przypadku szczególnym, gdy obiekt jest wolny od zakłóceń i wartości początkowe  $m(-n^* + 1)$ ,  $u(0)$ ,  $u(-1)$ ... są równe zeru, odporność układu nie zależy od  $U$ . Na zakończenie warto zwrócić uwagę, że intensywność pobudzenia sygnału sterującego nie może być dowolnie duża. Na przykład, od razu widać, że  $\delta_r \leq 1$ . Można też pokazać, że gdy  $T = 2n$ , to  $\delta_r \leq 1/2n$  [66].

Wśród założeń twierdzeń 5.2 i 5.3 nie ma założeń ograniczających widmo sygnału sterującego. Wydawałoby się, że jest to sprzeczne z wynikami paragrafu 5.1, w którym pokazaliśmy, że w obiekcie z niemodelowaną dynamiką błąd identyfikacji może osiągnąć duże wartości, jeśli częstotliwość sygnału sterującego jest wystarczająco duża. Sprzeczność ta jest jednak pozorna, gdyż w układach dyskretnych w czasie widmo sygnałów jest w naturalny sposób ograniczone częstotliwością próbkowania. Tym niemniej powyższe wyjaśnienie sugeruje, że w przypadku zastosowania dużych częstotliwości próbkowania założenie

<sup>1</sup>W tym paragrafie również zakładaliśmy, że parametr  $b_m$  jest znany, tym niemniej założenie to nie było tu konieczne i zostało wprowadzone jedynie w celu uproszczenia analizy.

dotyczące dopuszczelnej wielkości niemodelowanej dynamiki jest bardzo restrykcyjne. Z tego względu interesujące byłoby przeniesienie otrzymanych w tym paragrafie wyników na układy ciągłe w czasie lub układy dyskretne, w których równania identyfikowanego modelu obiektu zapisane są przy użyciu operatora delta  $(z - 1)/\Delta$  (patrz paragraf 3.5).

Pomimo, że w paragrafie tym przeanalizowaliśmy tylko odporność regulatora adaptacyjnego z modelem odniesienia typu bezpośredniego, to podobne rezultaty można uzyskać również dla obu pośrednich algorytmów sterowania opisanych w rozdziale 3. Natomiast dla bezpośredniego algorytmu przesuwania biegunów własności analogiczne do uzyskanych w twierdzeniach 5.2 i 5.3 z pewnością nie zachodzą. Główną tego przyczyną jest fakt, że algorytm ten nie ma własności podobnej do tej, o której mówi lemat 5.2.

## Rozdział 6

# Identyfikacja parametrów w warunkach słabego pobudzenia obiektu

W poprzednim rozdziale pokazaliśmy, że jednostajne pobudzanie obiektu zapewnia odporność regulatorów adaptacyjnych w przypadku, gdy równania obiektu różnią się od równań modelu. I chociaż konieczność pobudzenia obiektu w przypadku występowania w nim zakłóceń i niemodelowanej dynamiki nie jest oczywista i wzbudza pewne kontrowersje wśród badaczy, to jednostajne pobudzanie obiektu jest z pewnością niezbędne dla poprawnej pracy układu sterowania, jeśli parametry obiektu są zmienne w czasie. Jednak w wielu praktycznych zastosowaniach żądana trajektoria obiektu nie jest sygnałem pobudzającym, czego przykładem może być zadanie stabilizacji wyjścia obiektu wokół pewnej zadanej wartości  $u_c = \text{const}$ . W takich przypadkach mamy do czynienia z wyraźną sprzecznością celów. Z jednej strony, celem sterowania jest zapewnienie możliwie dokładnego nadążania wyjścia obiektu za sygnałem zadaniem, który nie musi być sygnałem pobudzającym. Z drugiej zaś, chcąc zagwarantować nadążanie ocen za parametrami obiektu należy zapewnić odpowiednie pobudzanie obiektu. W praktyce musimy więc stosować rozwiązanie kompromisowe. Niech  $u_c$  będzie zadaną trajekcją obiektu. Przyjmijmy

$$u'_c(t) = u_c(t) + \chi(t),$$

gdzie  $u'_c$  jest sygnałem sterującym stosowanym w kompensatorze w miejsce sygnału  $u_c$ , zaś  $\chi$  jest sygnałem pomocniczym zapewniającym odpowiednie pobudzenie obiektu. Aby zapewnić dobrą jakość nadążania wyjścia obiektu za sygnałem zadaniem  $u_c$ , amplituda sygnału pomocniczego powinna być możliwie mała, na tyle jednak duża, by zapewnić dobrą jakość nadążania ocen za parametrami obiektu. Zadanie zapewnienia wysokiej dokładności nadążania wyjścia obiektu za zadaną trajekcją w naturalny więc sposób prowadzi do sytuacji, w której musimy identyfikować parametry *słabo pobudzanego* obiektu, lub innymi słowy do sytuacji, w której algorytm identyfikacji jest *źle uwarunkowany*. Celem tego rozdziału jest porównanie kilku wybranych algorytmów identyfikacji pod kątem wpływu intensywności pobudzenia obiektu na błąd identyfikacji. Na zakończenie omówimy metody

poprawy uwarunkowania algorytmów identyfikacji w adaptacyjnych układach sterowania. Wszystkie wyniki przedstawione w tym rozdziale publikowane są po raz pierwszy.

## 6.1 Wpływ stopnia pobudzenia obiektu na błąd identyfikacji

Rozważmy model obiektu dyskretnego w czasie zapisany w postaci formy liniowej względem nieznanych parametrów

$$\nu(t) = \varphi^T(t)\theta^*(t), \nu(t) \in \mathbf{R}^1, \varphi(t), \theta^*(t) \in \mathbf{R}^m, \quad (6.1)$$

gdzie  $\nu$  i  $\varphi$  są sygnałami mierzonymi lub sygnałami zależącymi w sposób znany od pewnych wielkości mierzonych, zaś  $\theta^*$  są parametrami obiektu. Załóżmy, że parametry  $\theta^*$  spełniają warunek

$$\|\theta^*(t) - \theta^*(t-1)\| \leq \epsilon \quad \forall t \quad (6.2)$$

dla pewnej liczby dodatniej  $\epsilon$ . Załóżmy dalej, że dla pewnego ustalonego  $T$  sygnał  $\varphi$  spełnia warunek jednostajnego pobudzenia

$$\frac{1}{T} \sum_{t=j}^{j+T-1} \varphi(t)\varphi^T(t) \geq \delta_r a_\varphi^2 I, \quad (6.3)$$

gdzie  $\delta_r > 0$  i  $a_\varphi$  jest amplitudą sygnału  $\varphi$ , tzn.  $a_\varphi = \sup_t \|\varphi(t)\|$ . Jeżeli parametr  $\delta_r$  występujący w nierówności (6.3) jest największy z możliwych, to określa nam on intensywność pobudzenia danego sygnału  $\varphi$ . Przy małych wartościach  $\delta_r$  powiemy, że sygnał  $\varphi$  jest *slabo jednostajnie pobudzający*.

**PRZYKŁAD 6.1.** Rozważmy obiekt  $y(t+1) = bu(t)$ , gdzie  $b \neq 0$ ,  $u(t) = u_c + \chi(t)$  i  $\chi(t) = (-1)^t a_\chi$ . Proste obliczenia pokazują, że sygnał  $\varphi(t) = [y(t) \ u(t)]^T$  jest jednostajnie pobudzający w stopniu

$$\delta_r = \frac{b^2 a_\chi^2}{u_c^2 + a_\chi^2}.$$

Stopień pobudzenia  $\varphi$  jest więc tym większy, im większy jest stosunek amplitudy sygnału pomocniczego  $\chi$  do amplitudy sygnału zadanego  $u_c$ .  $\triangle$

Przyjmijmy, że parametry modelu (6.1) są nieznanne i do ich identyfikacji zastosowany został algorytm o następującej ogólnej postaci

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(t) &= \hat{\theta}(t-1) + \frac{\Gamma(t-1)\varphi(t)\varepsilon_m(t)}{1 + \varphi^T(t)\Gamma(t-1)\varphi(t)}, \quad \hat{\theta}(0) = \hat{\theta}_0, \\ \varepsilon_m(t) &= \nu(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}(t-1), \end{aligned} \quad (6.4)$$

W paragrafie 2.3 pokazaliśmy, że założenie o jednostajnym pobudzeniu wektora  $\varphi$  zapewnia spełnienie warunku

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\hat{\theta}(t) - \theta^*(t)\| \leq C\epsilon \quad (6.5)$$

dla pewnej stałej  $C$  niezależnej od  $\epsilon$ . Załóżmy, że stała  $C$  występująca w powyższej nierówności jest najmniejsza z możliwych<sup>1</sup>. Stała  $C$  zależy od stopnia pobudzenia sygnału  $\varphi$  i rośnie, gdy  $\delta_r \rightarrow 0$ . W tym paragrafie zbadamy dla kilku wybranych algorytmów identyfikacji jak szybko wzrasta stała  $C$  wraz ze zmniejszaniem się stopnia pobudzenia  $\delta_r$ . Przyjmiemy następującą definicję.

**DEFINICJA 6.1.** Powiemy, że algorytm identyfikacji (6.4) należy do klasy  $\mathcal{I}_p$ , jeśli z warunków (6.2) i (6.3) wynika, że

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\hat{\theta}(t) - \theta^*(t)\| \leq \frac{c\epsilon}{(\delta_r)^p} \quad (6.6)$$

dla pewnej stałej dodatniej  $c$  niezależnej od  $\delta_r, \epsilon$  i jeżeli parametr  $p$  w powyższej nierówności nie może być zastąpiony liczbą mniejszą.

Innymi słowy, algorytm identyfikacji (6.4) należy do  $\mathcal{I}_p$ , jeżeli stała  $C$  rośnie jak  $1/(\delta_r)^p$ , gdy  $\delta_r \rightarrow 0$ . Zauważmy, że im większa jest wartość wykładnika  $p$  w nierówności (6.6), tym bardziej algorytm identyfikacji jest wrażliwy na słabe pobudzenie sygnału  $\varphi$ . Parametr  $p$  będziemy więc nazywali *stopniem uwrażliwienia algorytmu identyfikacji*. Na początek pokażemy, że stopień uwrażliwienia każdego każdego algorytmu postaci (6.4) jest nie mniejszy od  $1/2$

**Twierdzenie 6.1.** *Jeżeli algorytm (6.4) należy do  $\mathcal{I}_p$  dla pewnego  $p > 0$ , to  $p \geq 1/2$ .*

**DOWÓD.** Rozpatrzmy następujący przykład. Niech  $\varphi_p$  i  $\varphi_n \in \mathbb{R}^2$  będą dowolnymi wektorami o długości 1. Łatwo sprawdzić wykonując bezpośrednie obliczenia, że

$$\lambda_{\min}[\varphi_p \varphi_p^T + \varphi_n \varphi_n^T] = 1 - \cos \alpha, \quad (6.7)$$

$$\|\varphi_p - \varphi_n\| = \sqrt{2(1 - \cos \alpha)}, \quad (6.8)$$

gdzie  $\alpha$  jest kątem pomiędzy wektorami  $\varphi_p$  i  $\varphi_n$ . Rozważmy model (6.1) z  $m = 2$ ,  $\varphi(t) = \varphi_p$ ,  $\theta^*(t) = \epsilon \varphi_p^\perp / \sqrt{2(1 - \cos \alpha)}$  dla  $t$  parzystych i  $\varphi(t) = \varphi_n$ ,  $\theta^*(t) = \epsilon \varphi_n^\perp / \sqrt{2(1 - \cos \alpha)}$  dla  $t$  nieparzystych, gdzie  $\varphi_p^\perp$  i  $\varphi_n^\perp$  oznaczają wektory ortogonalne do  $\varphi_p$  i  $\varphi_n$  o długości 1. Zauważmy, że ciąg  $\{\varphi(t)\}$  spełnia warunek (6.3) z  $T = 2$  i  $\delta_r = (1 - \cos \alpha)/2$ , zaś ciąg  $\{\theta^*(t)\}$  warunek (6.2). Ponadto zauważmy, że  $\nu(t) = 0 \quad \forall t$ . Zatem jeżeli  $\hat{\theta}_0 = 0$ , to  $\|\hat{\theta}(t) - \theta^*(t)\| = \|\theta^*(t)\| = \epsilon/2(\delta_r)^{1/2}$ . W rezultacie, jeżeli algorytm (6.4) należy do  $\mathcal{I}_p$ , to  $p \geq 1/2$ .  $\square$

Obecnie zbadamy stopień uwrażliwienia wszystkich algorytmów identyfikacji opisanych w paragrafie 2.2.

<sup>1</sup>Mówiąc ściślej, załóżmy, że dla danego algorytmu identyfikacji

$$C = \epsilon^{-1} \sup \left( \limsup_{t \rightarrow \infty} \|\hat{\theta}(t) - \theta^*(t)\| \right),$$

gdzie supremum jest wzięte po wszystkich ciągach  $\{\theta^*(t)\}$  i  $\{\varphi(t)\}$  spełniających warunki (6.2), (6.3).



## Algorytm z wykładniczym zapominaniem przeszłych danych

Przypominamy, że algorytm ten otrzymujemy przyjmując

$$\Gamma(t) = \frac{1}{\lambda} \left( \Gamma(t-1) - \frac{\Gamma(t-1)\varphi(t)\varphi^T(t)\Gamma(t-1)}{1 + \varphi^T(t)\Gamma(t-1)\varphi(t)} \right), \quad \Gamma(0) = \Gamma_0 \quad (6.9)$$

lub równoważnie

$$\Gamma^{-1}(t) = \lambda(\Gamma^{-1}(t-1) + \varphi(t)\varphi^T(t)), \quad (6.10)$$

gdzie  $\Gamma_0 = \Gamma_0^T > 0$ . Na wstępie rozważymy prosty przykład, w którym asymptotyczną wartość błędu identyfikacji można wyznaczyć analitycznie.

**PRZYKŁAD 6.2.** Rozważmy model (6.1), w którym  $m = 2$ ,  $\varphi(t) = \varphi_p$  dla parzystych  $t$  i  $\varphi(t) = \varphi_n$  dla nieparzystych  $t$ , gdzie  $\varphi_p, \varphi_n \in \mathbb{R}^2$  są pewnymi wektorami o długości 1. Przyjmijmy, że

$$\theta^*(t) - \theta^*(t-1) = \epsilon \quad \forall t \text{ i pewnego } \epsilon \in \mathbb{R}^2. \quad (6.11)$$

Zalóżmy, że do identyfikacji parametrów zastosowano algorytm (6.4), (6.9). Oznaczmy błąd identyfikacji przez  $\phi(t) = \hat{\theta}(t) - \theta^*(t)$ . Łatwo sprawdzić, że  $\phi(2i) \rightarrow \phi_p$ ,  $\Gamma(2i) \rightarrow \Gamma_p$ ,  $\phi(2i+1) \rightarrow \phi_n$  i  $\Gamma(2i+1) \rightarrow \Gamma_n$ , gdy  $i \rightarrow \infty$  dla pewnych  $\phi_p, \phi_n, \Gamma_p$  i  $\Gamma_n$ . Z równań (6.4), (6.10) i (6.11) otrzymujemy

$$\phi_p = \phi_n - \frac{\Gamma_n \varphi_p \varphi_p^T (\hat{\theta}_n + \epsilon)}{1 + \varphi_p^T \Gamma_n \varphi_p} + \epsilon, \quad \Gamma_p^{-1} = \lambda(\Gamma_n^{-1} + \varphi_p \varphi_p^T). \quad (6.12)$$

Kolejne dwa równania dostajemy zamieniając w (6.12) wskaźnik  $n$  na  $p$  i  $p$  na  $n$ . Z czterech wymienionych równań otrzymujemy po dość żmudnych przekształceniach

$$\phi_p = \left( \frac{1}{1 - \lambda^2} \begin{bmatrix} 2\lambda^2 & \\ & \lambda^2 + 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{(\varphi_{1p}\varphi_{2n} - \varphi_{1n}\varphi_{2p})} \begin{bmatrix} -\varphi_{1n}\varphi_{2p} & -\varphi_{2p}\varphi_{2n} \\ \varphi_{1p}\varphi_{1n} & \varphi_{2n}\varphi_{1n} \end{bmatrix} \right) \epsilon, \quad (6.13)$$

gdzie  $[\varphi_{1p} \ \varphi_{2p}]^T = \varphi_p$  i  $[\varphi_{1n} \ \varphi_{2n}]^T = \varphi_n$ . Zauważmy, że  $\varphi_{1p}\varphi_{2n} - \varphi_{1n}\varphi_{2p} = \sin \alpha$ , gdzie  $\alpha$  jest kątem pomiędzy wektorami  $\varphi_p$  i  $\varphi_n$ . Ponadto, ciąg  $\{\varphi(t)\}$  spełnia (6.3) z  $T = 2$  i  $\delta_r = 1 - \cos \alpha$ . Gdy kąt  $\alpha$  jest mały, to  $1 - \cos \alpha \approx \alpha^2/2$  oraz  $\sin \alpha \approx \alpha$ . Zatem błąd identyfikacji  $\phi_p$  rośnie jak  $1/(\delta_r)^{1/2}$ , gdy  $\delta_r \rightarrow 0$ .  $\triangle$

Analogiczna własność zachodzi również w przypadku ogólnym.

**Twierdzenie 6.2.** Rozważmy model (6.1), dla którego spełnione są warunki (6.2) i (6.3). Istnieje stała  $c_1$  (niezależna od  $\lambda, \delta_r$  i  $\epsilon$ ) taka, że dla  $\lambda \geq \bar{\lambda} > 0$  mamy

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\hat{\theta}(t) - \theta^*(t)\| \leq \frac{c_1 \epsilon}{(1 - \lambda)(\delta_r)^{1/2}}, \quad (6.14)$$

Powyższe oszacowanie w ogólności nie może zostać polepszone.

DOWÓD. Od tej chwili będziemy przyjmować dla uproszczenia, że amplituda sygnału  $\varphi$  jest równa 1.

Na wstępie wyprowadzimy odpowiednią formułę dla błędu identyfikacji  $\phi$ . Z równań (6.1) i (6.4) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\varphi^T(t)\phi(t) &= \varphi^T(t)\hat{\theta}(t) - \nu(t) = -\varepsilon_m(t) + \phi^T(t)(\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(t-1)) \\ &= -\varepsilon_m(t) + \frac{\varphi^T(t)\Gamma(t-1)\varphi(t)\varepsilon_m(t)}{1 + \varphi^T(t)\Gamma(t-1)\varphi(t)} = -\frac{\varepsilon_m(t)}{1 + \varphi^T(t)\Gamma(t-1)\varphi(t)}.\end{aligned}\quad (6.15)$$

Wobec tego równanie (6.4) możemy zapisać w postaci

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) - \Gamma(t-1)\varphi(t)\varphi^T(t)\phi(t)\quad (6.16)$$

lub w postaci równoważnej

$$\phi(t) = \phi(t-1) - \Gamma(t-1)\varphi(t)\varphi^T(t)\phi(t) - (\theta^*(t) - \theta^*(t-1)).\quad (6.17)$$

Wykorzystując powyższą zależność i równanie (6.10) otrzymujemy

$$\Gamma^{-1}(t)\phi(t) = \lambda\Gamma^{-1}(t-1)\phi(t-1) - \lambda\Gamma^{-1}(t-1)(\theta^*(t) - \theta^*(t-1)),$$

skąd

$$\phi(t) = \lambda^t\Gamma(t)\Gamma_0^{-1}\phi_0 - \sum_{i=1}^t \lambda^i\Gamma(t)\Gamma^{-1}(t-i)(\theta^*(t-i+1) - \theta^*(t-i)),\quad (6.18)$$

przy czym zauważmy, że

$$\Gamma^{-1}(t) = \lambda^t\Gamma_0^{-1} + \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i+1}\varphi(i)\varphi^T(i).\quad (6.19)$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$\Phi(t) = [\lambda^{t/2}\Gamma_0^{t/2} \mid \lambda^{t/2}\varphi(1) \mid \lambda^{(t-1)/2}\varphi(2) \mid \dots \mid \lambda^{1/2}\varphi(t)].$$

Macierz  $\Gamma^{-1}(t)$  możemy przedstawić w postaci

$$\Gamma^{-1}(t) = \Phi(t)\Phi^T(t).$$

Ponadto,

$$\lambda^i\Gamma^{-1}(t-i) = \Phi(t)J_{i,t}\Phi^T(t),$$

gdzie  $J_{i,t}$  jest macierzą kwadratową o rozmiarze  $(t+m) \times (t+m)$  postaci

$$J_{i,t} = \left[ \begin{array}{c|c} I_{t+m-i} & \\ \hline & 0 \end{array} \right]$$

(przez  $I_i$  oznaczamy macierz jednostkową o rozmiarze  $i \times i$ , zaś  $m$  jest rozmiarem wektora  $\theta^*$ ). Oszacujemy normę  $\|\lambda^i \Gamma(t) \Gamma^{-1}(t-i)\|$ . Mamy

$$\|\lambda^i \Gamma(t) \Gamma^{-1}(t-i)\| = \|(\Phi(t) \Phi^T(t))^{-1} \Phi(t) J_{i,t} \Phi^T(t)\| \leq \|(\Phi(t) \Phi^T(t))^{-1} \Phi(t)\| \cdot \|J_{i,t} \Phi^T(t)\|. \quad (6.20)$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \|(\Phi(t) \Phi^T(t))^{-1} \Phi(t)\| &= \sqrt{\lambda_{\max}[\Phi^T(t)(\Phi(t) \Phi^T(t))^{-2} \Phi(t)]} \leq \sqrt{\text{Tr}(\Phi^T(t)(\Phi(t) \Phi^T(t))^{-2} \Phi(t))} \\ &= \sqrt{\text{Tr}(\Phi(t) \Phi^T(t)(\Phi(t) \Phi^T(t))^{-2})} = \sqrt{\text{Tr}((\Phi(t) \Phi^T(t))^{-1})} \\ &\leq \sqrt{\text{Tr}(\Gamma(t))} \leq \sqrt{m \lambda_{\max}[\Gamma(t)]}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Z warunku pobudzenia (6.3) otrzymujemy oszacowanie

$$\begin{aligned} \Gamma^{-1}(t) &= \lambda^t \Gamma_0^{-1} + \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i+1} \varphi(i) \varphi^T(i) \geq \sum_{j=0}^{\mathcal{E}(t/T)-1} \lambda^{(\mathcal{E}(t/T)-j)T} \sum_{i=jT+1}^{(j+1)T} \varphi(i) \varphi^T(i) \\ &\geq \sum_{j=1}^{\mathcal{E}(t/T)} \lambda^{jT} T \delta_r I = \frac{\lambda^T T \delta_r (1 - \lambda^{\mathcal{E}(t/T)})}{1 - \lambda^T} I, \end{aligned} \quad (6.22)$$

gdzie  $\mathcal{E}(x)$  oznacza największą liczbę naturalną nie większą niż  $x$ . Stąd

$$\|(\Phi(t) \Phi^T(t))^{-1} \Phi(t)\| \leq \sqrt{\frac{m(1 - \lambda^T)}{\lambda^T T \delta_r (1 - \lambda^{\mathcal{E}(t/T)})}}. \quad (6.23)$$

Pozostało oszacować normę  $\|J_{i,t} \Phi^T(t)\|$ . Z założenia  $\|\varphi\| \leq 1$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|J_{i,t} \Phi^T(t)\| &= \sqrt{\|\Phi(t) J_{i,t} \Phi^T(t)\|} = \sqrt{\lambda^i \Gamma^{-1}(t-i)} \\ &= \sqrt{\sum_{j=i}^{t-1} \lambda^{j+1} \varphi(t-j) \varphi^T(t-j)} \leq \sqrt{\sum_{j=i}^{t-1} \lambda^{j+1}} \leq \sqrt{\frac{\lambda^{i+1}}{1 - \lambda}}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Wykorzystując teraz oszacowania (6.23), (6.24) oraz nierówność  $(1 - \lambda^T)/T(1 - \lambda) < 1$  dostajemy z (6.20)

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\lambda^i \Gamma(t) \Gamma^{-1}(t-i)\| \leq \sqrt{\frac{m \lambda^{i+1-T}}{\delta_r}}.$$

Zatem ze wzoru (6.18) otrzymujemy ostatecznie

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\phi(t)\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\frac{m \lambda^{i+1-T}}{\delta_r}} \epsilon \leq \frac{c_1 \epsilon}{(1 - \lambda)(\delta_r)^{1/2}}$$

dla  $c_1 = \sqrt{m \lambda^2 (1 + \lambda) / \lambda^T}$ . Drugą część twierdzenia 6.2 udowodnimy później.  $\square$

Z dotychczas udowodnionych własności wynika, iż stopień uwrażliwienia algorytmu z wykładniczym zapominaniem przeszłych danych jest najmniejszy z możliwych. Otrzymane

oszacowanie pokazuje również, że błąd identyfikacji rośnie wraz ze zmniejszaniem szybkości zapominania przeszłych danych. Ponieważ błąd identyfikacji jest proporcjonalny do iloczynu  $\frac{1}{1-\lambda} \cdot \frac{1}{(\delta_r)^{1/2}}$ , więc przy małej szybkości zapominania i słabym pobudzeniu obiektu należy się spodziewać występowania dużych wartości błędu identyfikacji. Warto tu przypomnieć, że w praktyce w celu zapewnienia dobrego tłumienia szumu pomiarowego najczęściej przyjmuje się  $0,95 \leq \lambda \leq 0,99$ , co oznacza, że parametr  $\lambda$  nieznacznie tylko jest mniejszy od jedności. W związku z powyższym spostrzeżeniem uzasadnione jest pytanie, czy istnieją przypadki, w których oszacowanie (6.14) może być istotnie wzmocnione. Zwróćmy uwagę, że w przypadku rozważanym w przykładzie 6.3 błąd identyfikacji jest proporcjonalny jedynie do sumy  $\frac{1}{1-\lambda} + \frac{1}{(\delta_r)^{1/2}}$ . Okazuje się, że taka własność zachodzi zawsze, gdy sygnał  $\varphi$  jest sygnałem prawie okresowym.

**Twierdzenie 6.3.** *Załóżmy, że sygnał  $\varphi$  ma postać*

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i \sin(\omega_i t + \alpha_i), \quad \varphi_i \in \mathbb{R}^n, \quad n \leq \infty. \quad (6.25)$$

*Wówczas istnieje stała  $c_2$  niezależna od  $\lambda$  i  $\delta_r$ , taka, że dla  $\lambda \geq \bar{\lambda} \geq 0$*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\hat{\theta}(t) - \theta^*(t)\| \leq \left( \frac{1}{1-\lambda} + \frac{c_2}{(\delta_r)^{1/2}} \right) \epsilon. \quad (6.26)$$

**DOWÓD.** Wykorzystując wzory uzależniające funkcje trygonometryczne od wykładniczych możemy sygnał  $\varphi$  zapisać w postaci

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{\bar{n}} \tilde{\varphi}_i e^{i\tilde{\omega}_i t}, \quad \tilde{\varphi}_i \in \mathbb{C}^m, \quad -\pi < \tilde{\omega}_i \leq \pi, \quad \tilde{\omega}_i \neq \tilde{\omega}_j \text{ dla } i \neq j.$$

Ponieważ  $\varphi$  przyjmuje wartości rzeczywiste, więc dla każdego  $\tilde{\omega}_i$  istnieje  $\tilde{\omega}_j$  takie, że  $\tilde{\omega}_i = -\tilde{\omega}_j$ . Z równania (6.18) wynika, że

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\phi(t)\| = \limsup_{t \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i=1}^{\bar{n}} \lambda^i \tilde{\Gamma}(t) \tilde{\Gamma}^{-1}(t-i) \right\| \epsilon, \quad (6.27)$$

gdzie  $\tilde{\Gamma}^{-1}(t) = \sum_{i=1}^{\bar{n}} \lambda^{i+1} \varphi(i) \varphi^T(i)$ . (Istotnie,  $\tilde{\Gamma}^{-1}(t) - \Gamma^{-1}(t) \rightarrow 0$ , gdy  $t \rightarrow \infty$ , porównaj (6.19)). Mamy

$$\varphi(t) \varphi^T(t) = \sum_{i,j=1}^{\bar{n}} \tilde{\varphi}_i \tilde{\varphi}_j^T e^{i(\tilde{\omega}_i + \tilde{\omega}_j)t},$$

skąd wykorzystując tożsamość  $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^{i+1} e^{i\omega(t-i)} = \lambda e^{i\omega t} / (1 - \lambda e^{i\omega})$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}^{-1}(t) &= \sum_{i,j=1}^{\bar{n}} \tilde{\varphi}_i \tilde{\varphi}_j^T \frac{\lambda e^{i(\tilde{\omega}_i + \tilde{\omega}_j)t}}{1 - \lambda e^{i(\tilde{\omega}_i + \tilde{\omega}_j)t}} \\ &= \lambda \sum_{(i,j) \in \mathcal{J}} \tilde{\varphi}_i \tilde{\varphi}_j^T \frac{e^{i(\tilde{\omega}_i + \tilde{\omega}_j)t}}{1 - \lambda e^{i(\tilde{\omega}_i + \tilde{\omega}_j)t}} + \frac{\lambda}{1-\lambda} \sum_{(i,j) \notin \mathcal{J}} \tilde{\varphi}_i \tilde{\varphi}_j^T, \end{aligned}$$

gdzie  $\mathcal{J}$  jest zbiorem par  $(i, j)$  takich, że:  $i, j \in [1, \bar{n}]$ ,  $\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j \neq 0$  i  $\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j \neq 2\pi$ . Oznaczmy przez  $\Psi(t)$  pierwszy składnik otrzymanej wyżej sumy, a przez  $\Pi$  drugi jej składnik. Widzimy, że macierz  $\Pi$  różnie jak  $1/(1-\lambda)$ , gdy  $\lambda \rightarrow 1$ . Poniższe oszacowanie pokazuje, że w odróżnieniu od  $\Pi$  macierz  $\Psi$  jest ograniczona z góry jednostajnie względem  $\lambda$

$$\begin{aligned} \|\Psi(t)\| &\leq \sum_{(i,j) \in \mathcal{J}} \|\bar{\varphi}_i \bar{\varphi}_j^T\| \left| \frac{e^{i(\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j)t}}{1 - \lambda e^{i(\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j)}} \right| \leq \sum_{(i,j) \in \mathcal{J}} \|\bar{\varphi}_i \bar{\varphi}_j^T\| \left| \frac{1}{1 - \lambda e^{i(\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j)}} \right| \\ &\leq \sum_{(i,j) \in \mathcal{J}} \|\bar{\varphi}_i \bar{\varphi}_j^T\| \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos(\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j)}} \\ &\leq \sum_{(i,j) \in \mathcal{J}} \|\bar{\varphi}_i \bar{\varphi}_j^T\| \frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos(\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j))}} := M. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Ponieważ z definicji zbioru  $\mathcal{J}$  mamy  $\cos(\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j) \neq 0 \forall (i, j) \in \mathcal{J}$ , więc  $M < \infty$ . Z otrzymanego oszacowania wynika, że

$$\|\tilde{\Gamma}^{-1}(t) - \tilde{\Gamma}^{-1}(t-i)\| = \|\Psi(t) - \Psi(t-i)\| \leq 2M.$$

Zatem

$$\|\tilde{\Gamma}(t)\tilde{\Gamma}^{-1}(t-i)\| = \|I - \tilde{\Gamma}(t)(\tilde{\Gamma}^{-1}(t) - \tilde{\Gamma}^{-1}(t-i))\| \leq 1 + 2M\|\tilde{\Gamma}(t)\|.$$

Z warunku pobudzenia sygnału  $\varphi$  mamy (por. (6.22))

$$\tilde{\Gamma}^{-1}(t) \geq \frac{\lambda^T T \delta_r}{1 - \lambda^T} \geq \frac{\bar{\lambda}^T \delta_r}{1 - \lambda}.$$

Wobec tego  $\|\tilde{\Gamma}(t)\tilde{\Gamma}^{-1}(t-i)\| \leq 1 + M_1(1-\lambda)$ , gdzie  $M_1 = 2M/\bar{\lambda}^T \delta_r$ . Wykorzystując teraz wzór (6.27) dostajemy

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\phi(t)\| \leq \left( \frac{\lambda}{1-\lambda} + \lambda M_1 \right) \epsilon \leq \left( \frac{1}{1-\lambda} + M_1 \right) \epsilon.$$

Z drugiej strony, z twierdzenia 6.2 wynika, że przy ustalonym  $\lambda$  błąd identyfikacji wzrasta jak  $1/(\delta_r)^{1/2}$  przy  $\delta_r \rightarrow 0$ . Zatem  $M_1 \leq c_2/(\delta_r)^{1/2}$  dla pewnej stałej dodatniej  $c_2$ .  $\square$

Z twierdzenia 6.3 wynika, że jeżeli  $\varphi$  jest sygnałem prawie okresowym, to przy  $\lambda \rightarrow 1$  i  $\delta_r \rightarrow 0$  błąd identyfikacji rośnie jak  $\frac{1}{1-\lambda} + \frac{1}{(\delta_r)^{1/2}}$ . Ponieważ zwykle  $0,95 \leq \lambda \leq 0,99$ , więc zastosowanie prawie okresowego sygnału  $\varphi$  w miejsce sygnału, który nie jest okresowy może w pewnych przypadkach zmniejszyć błąd identyfikacji nawet o dwa rzędy wielkości. Jeżeli model (6.1) opisuje układ dynamiczny, to sygnał  $\varphi$  zależy także od parametrów  $\theta^*$  i w związku z tym nie jest możliwe doprowadzenie do sytuacji, w której ciąg  $\{\varphi(t)\}$  byłby dokładnie ciągiem prawie okresowym. Tym niemniej, również w tym przypadku

zastosowanie prawie okresowego sygnału wejściowego (a w regulatorach adaptacyjnych, prawie okresowego sygnału sterującego) może zmniejszyć błąd identyfikacji.

Pozostało nam jeszcze pokazać, że w ogólności oszacowanie (6.14) jest najlepsze z możliwych. W tym celu rozważymy następujący przykład.

**PRZYKŁAD 6.3.** Przyjmijmy, że algorytm (6.4), (6.9) działa od chwili  $t = -\infty$ . Załóżmy, że  $m = 2$  oraz, że

$$\left. \begin{aligned} \varphi(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} && \text{dla wszystkich parzystych } t \\ \varphi(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ \epsilon \end{bmatrix} && \text{dla wszystkich nieparzystych } t < 0 \\ \varphi(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ -\epsilon \end{bmatrix} && \text{dla wszystkich nieparzystych } t > 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.29)$$

Zwróćmy uwagę, że sygnał  $\varphi$  jest okresowy zarówno dla ujemnych jak i dodatnich  $t$  z tym, że w chwili  $t = 0$  zmienia się w niewielkim stopniu styl sygnału. Bezpośrednie obliczenia pokazują, że sygnał  $\varphi$  spełnia warunek pobudzenia (6.3) z  $T = 2$  i  $\delta_r = O(\epsilon^2)$ . Załóżmy dalej, że

$$\theta^*(t) - \theta^*(t-1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \epsilon \quad \forall t.$$

Wyznamy analityczną formułę na składową  $\phi_2(t)$  wektora  $\phi(t)$  dla parzystych i dodatnich  $t$ . Z zależności (6.18) otrzymujemy

$$\phi(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i \Gamma(t) \Gamma^{-1}(t-i) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \epsilon = \Gamma(t) \Pi(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \epsilon,$$

gdzie  $\Pi(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i \Gamma^{-1}(t-i)$ . Proste, choć żmudne obliczenia pokazują, że

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= \frac{1 - \lambda^2}{\lambda^2(1 + 4\lambda^{t+1} - 4\lambda^{2t+1})\epsilon^2} \begin{bmatrix} \lambda\epsilon^2 & \lambda(1 - 2\lambda^t)\epsilon \\ \lambda(1 - 2\lambda^t)\epsilon & 1 + \lambda \end{bmatrix}, \\ \Pi(t) &= \frac{2\lambda^2}{(1 - \lambda^2)^2} \begin{bmatrix} 1 + \lambda & -\lambda(1 - 2\lambda^t)\epsilon \\ -\lambda(1 - 2\lambda^t)\epsilon & \epsilon^2 \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{\lambda}{1 - \lambda^2} \begin{bmatrix} 1 & (-1 + 2(t+1)\lambda^t)\epsilon \\ (-1 + 2(t+1)\lambda^t)\epsilon & \epsilon^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Stąd

$$\phi_2(t) = [0 \ 1] \Gamma(t) \Pi(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \epsilon = \frac{(2(t+1)\lambda^t + 2t\lambda^{t+1} - 1)\epsilon}{\lambda(1 + 4\lambda^{t+1} - 4\lambda^{2t+1})\epsilon}.$$

Rozważmy ciąg  $\{a(t)\} : a(t) = t\lambda^t$ . Mamy  $a(t+1)/a(t) = (t+1)\lambda/t$ . Zatem ciąg  $\{a(t)\}$  rośnie, gdy  $t \leq \lambda/(1-\lambda)$  i maleje, gdy  $t \geq \lambda/(1-\lambda)$ . Dla  $t \approx \lambda/(1-\lambda)$  mamy

$$a(t) = \frac{\lambda}{1-\lambda} \lambda^{t-\frac{\lambda}{1-\lambda}} = \frac{\lambda}{1-\lambda} \left(1 - \frac{1}{1-\lambda}\right)^{t-\frac{\lambda}{1-\lambda}} \rightarrow \frac{e^{-1}}{1-\lambda}$$

gdy  $\lambda \rightarrow 1$ , gdzie  $e$  jest podstawą logarytmów naturalnych. Wykorzystując powyższą własność otrzymujemy ostatecznie

$$\phi_2(t) \approx \frac{4e^{-1}}{1 + 4e^{-1} - 4e^{-2}} \cdot \frac{\epsilon}{(1 - \lambda)\epsilon} \quad \text{dla } t \approx \frac{\lambda}{1 - \lambda}.$$

Wobec tego oszacowanie (6.14) istotnie jest najlepsze z możliwych.  $\triangle$

Zwróćmy uwagę, że wzrost wartości błędu  $\phi_2$  nastąpił po zmianie stylu sygnału  $\varphi$ . Wynika stąd, że algorytm z wykładniczym zapominaniem przeszłych danych jest szczególnie wrażliwy na zmianę stylu sygnału mierzonego.

### Algorytmy ze zmiennym współczynnikiem zapominania

Podstawową wadą algorytmu z wykładniczym zapominaniem przeszłych danych jest wykładniczy wzrost normy macierzy  $\Gamma$  w przypadku, gdy sygnał  $\varphi$  nie jest jednostajnie pobudzający. Z tego względu często stosuje się algorytmy, w których automatycznie zapewniona jest ograniczoność macierzy  $\Gamma$ . Jednym ze sposobów zapewnienia ograniczoności  $\Gamma$  jest zastosowanie zmiennego w czasie współczynnika zapominania  $\lambda$ . Rozpatrzmy przypadek, w którym macierz  $\Gamma$  jest generowana za pomocą algorytmu

$$\Gamma^{-1}(t) = \lambda(t)(\Gamma^{-1}(t-1) + \varphi(t)\varphi^T(t)), \quad (6.31)$$

ze współczynnikiem  $\lambda(t) \leq 1$  dobieganym na bieżąco, tak aby spełnione były warunki

$$g \leq \lambda_{\max}[\Gamma(t)] \leq G \quad \forall t \quad (6.32)$$

dla pewnych stałych dodatnich  $g$  i  $G$ . Warunek  $\lambda_{\max}[\Gamma(t)] \geq g$  gwarantuje nam, że macierz  $\Gamma(t)$  nie zanika, gdy  $t \rightarrow \infty$ . W szczególności warunek ten wyklucza z rozważań algorytm najmniejszej sumy kwadratów. Przykładem algorytmu spełniającego warunki (6.32) jest algorytm, w którym

$$\lambda(t) = \text{Tr} \left( (\Gamma^{-1}(t-1) + \varphi(t)\varphi^T(t))^{-1} Q^{-1} \right) \quad (6.33)$$

dla pewnej macierzy symetrycznej dodatniej  $Q$ .

Na wstępie rozpatrzmy następujący przykład.

**PRZYKŁAD 6.4.** Rozważmy algorytm, w którym macierz  $\Gamma$  generowana jest za pomocą równań (6.31) i (6.33) z  $Q = I$ . Przyjmijmy podobnie jak w przykładzie 6.2, że  $m = 2$ ,  $\varphi(t) = \varphi_p$  dla parzystych  $t$  i  $\varphi(t) = \varphi_n$  dla nieparzystych  $t$ , gdzie  $\varphi_p, \varphi_n \in \mathbf{R}^2$ ,  $\|\varphi_p\| = \|\varphi_n\| = 1$  oraz  $\theta^*(t) - \theta^*(t-1) = \epsilon \forall t$ . Niech  $\lambda$  będzie pewną ustaloną wartością parametru  $\lambda(t)$ . Z warunku (6.33) wynika, że  $\text{Tr}(\Gamma(t)) = 1$ . Z drugiej strony, można pokazać, że

$$\text{Tr}(\Gamma(t)) = \frac{(1 + \lambda)(1 - \lambda^2)}{\lambda^2 \sin^2 \alpha},$$

gdzie  $\alpha$  jest kątem pomiędzy wektorami  $\varphi_p$  i  $\varphi_n$ . Zatem dla małych wartości kąta  $\alpha$  jest

$$\frac{1}{1-\lambda^2} \approx \frac{2}{\sin^2 \alpha}.$$

Z zależności (6.13) wynika więc, że

$$\phi_p \approx \left( \frac{4}{\sin^2 \alpha} I + \frac{1}{\sin \alpha} \begin{bmatrix} -\varphi_{1n}\varphi_{2p} & -\varphi_{2p}\varphi_{2n} \\ \varphi_{1p}\varphi_{1n} & \varphi_{2p}\varphi_{1n} \end{bmatrix} \right) \epsilon.$$

△

Zatem w rozważanym przykładzie błąd identyfikacji rośnie jak  $1/\delta_r$ , gdy  $\delta_r \rightarrow 0$ . W ogólności jednak zachodzi słabszy rezultat.

**Twierdzenie 6.4.** *Algorytm identyfikacji, w którym macierz  $\Gamma$  generowana jest za pomocą równania (6.31) tak, że spełnione są warunki (6.32) należy do klasy  $\mathcal{I}_{3/2}$*

**Dowód.** Z równań (6.1), (6.4) i (6.31) otrzymujemy

$$\phi(t) = \tilde{\lambda}(t, 1)\Gamma_0^{-1}\phi(0) - \sum_{i=1}^t \tilde{\lambda}(t, t-i+1)\Gamma(t)\Gamma^{-1}(t-i)(\theta^*(t-i+1) - \theta^*(t-i)), \quad (6.34)$$

gdzie  $\tilde{\lambda}(t, i) = \lambda(t)\lambda(t-1)\dots\lambda(i)$  (porównaj (6.18)). Najpierw oszacujemy normę  $\Gamma(t)\Gamma^{-1}(t-i)$ . W tym celu, podobnie jak w dowodzie twierdzenia 6.2, wprowadzimy oznaczenie

$$\Phi(t) = [\tilde{\lambda}^{1/2}(t, 1)\Gamma_0^{1/2} \mid \tilde{\lambda}^{1/2}(t, 1)\varphi(1) \dots \tilde{\lambda}^{1/2}(t, t)\varphi(t)].$$

Zauważmy, że

$$\Gamma^{-1}(t) = \Phi(t)\Phi^T(t), \quad \tilde{\lambda}(t, t-i+1)\Gamma^{-1}(t-i) = \Phi(t)J_{i,t}\Phi^T(t),$$

skąd

$$\|\Gamma(t)\Gamma^{-1}(t-i)\| \leq \tilde{\lambda}^{-1}(t, t-i+1)\|(\Phi(t)\Phi^T(t))^{-1}\Phi(t)\| \cdot \|J_{i,t}\Phi^T(t)\|$$

(porównaj (6.20)). Wykorzystując nierówność (6.21) i warunek (6.32) dostajemy

$$\|(\Phi(t)\Phi^T(t))^{-1}\Phi(t)\| \leq \sqrt{m\lambda_{\max}[\Gamma(t)]} \leq \sqrt{mG}.$$

Ponadto,

$$\tilde{\lambda}(t, t-i+1)\|J_{i,t}\Phi^T(t)\| = \sqrt{\|\Phi(t)J_{i,t}\Phi^T(t)\|} = \sqrt{\tilde{\lambda}(t, t-i+1)\|\Gamma^{-1}(t-i)\|}.$$

Zatem

$$\|\Gamma(t)\Gamma^{-1}(t-i)\|^2 \leq mG\tilde{\lambda}^{-1}(t, t-i+1)\|\Gamma^{-1}(t-i)\|. \quad (6.35)$$



Wykorzystamy teraz warunek pobudzenia (6.3). Mamy

$$\begin{aligned}\Gamma^{-1}(t) &= \bar{\lambda}(t, 1)\Gamma_0^{-1} + \sum_{i=1}^t \bar{\lambda}(t, i)\varphi(i)\varphi^T(i) \\ &\geq \sum_{j=0}^{\varepsilon(t/T)-1} \bar{\lambda}(t, jT+1) \sum_{i=jT+1}^{(j+1)T} \varphi(i)\varphi^T(i) \geq \delta_r T \sum_{j=0}^{\varepsilon(t/T)-1} \bar{\lambda}(t, jT+1).\end{aligned}\quad (6.36)$$

Ale  $\lambda_{\min}[\Gamma^{-1}(t)] \leq g^{-1}I$ . Zatem

$$\sum_{j=0}^{\varepsilon(t/T)-1} \bar{\lambda}(t, jT+1) \leq \frac{1}{g\delta_r T} \quad \forall t \geq 0.$$

Niech  $\tau(t)$  będzie największą liczbą  $\leq t$  i podzielą przez  $T$ . Mamy

$$\sum_{i=1}^t \bar{\lambda}(t, i) \leq \sum_{i=\tau(t)+1}^t \bar{\lambda}(t, i) + \sum_{i=1}^{\tau(t)} \bar{\lambda}(\tau(t), i) \leq T + T \sum_{j=0}^{\tau(t)/T-1} \bar{\lambda}(\tau(t), jT+1) \leq T + \frac{1}{g\delta_r}. \quad (6.37)$$

Z powyższego oszacowania wynika między innymi, że  $\bar{\lambda}(t, i) \rightarrow 0$ , gdy  $t \rightarrow \infty \forall i$ . Zatem

$$\begin{aligned}\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\Gamma^{-1}(t)\| &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i=1}^t \bar{\lambda}(t, i)\varphi(i)\varphi^T(i) \right\| \\ &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^t \bar{\lambda}(t, i) \leq T + \frac{1}{g\delta_r}.\end{aligned}\quad (6.38)$$

Wykorzystamy teraz wzór na błąd identyfikacji (6.34) i nierówność Cauchy'ego  $\sum a_i b_i \leq \sqrt{\sum a_i^2} \sqrt{\sum b_i^2}$  z  $a_i = \bar{\lambda}^{1/2}(t, t-i+1)$  i  $b_i = \bar{\lambda}^{1/2}(t, t-i+1) \|\Gamma(t)\Gamma^{-1}(t-i)\|$ . Mamy

$$\begin{aligned}\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\phi(t)\| &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^t \bar{\lambda}(t, t-i+1) \|\Gamma(t)\Gamma^{-1}(t-i)\| \varepsilon \\ &\leq \varepsilon \sqrt{\sum_{i=1}^t \bar{\lambda}(t, t-i+1)} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^t \bar{\lambda}(t, t-i+1) \|\Gamma(t)\Gamma^{-1}(t-i)\|^2}.\end{aligned}$$

Ostatecznie z nierówności (6.35)-(6.38) otrzymujemy

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\phi(t)\| \leq \sqrt{mG} \left( T + \frac{1}{g\delta_r} \right)^{3/2} \leq \frac{c}{(\delta_r)^{3/2}},$$

gdzie  $c = \sqrt{mG}(1 + Tg)^{3/2}$  (wykorzystaliśmy to oczywistą nierówność  $\delta_r \leq 1$ ).

Aby pokazać, że powyższe oszacowanie jest najlepsze z możliwych rozważymy jeszcze raz przykład 6.3, w którym przyjmiemy  $\lambda = 1 - \varepsilon^2$ . Pokazaliśmy, że norma błędu identyfikacji może osiągać wartości rzędu  $1/(1-\lambda)\varepsilon$ , a więc w naszym przypadku rzędu  $1/(\delta_r)^{3/2}$ , gdyż  $\delta_r = O(\varepsilon^2)$ . Pozostaje sprawdzić, czy dla tak zdefiniowanego współczynnika zapominania spełnione są warunki (6.32) jednostajnie względem  $\varepsilon$  w otoczeniu punktu  $\varepsilon = 0$ . Mamy dla parzystych i dodatnich  $t$

$$\text{Tr}(\Gamma(t)) = \frac{(1-\lambda^2)(1+\lambda+\lambda\varepsilon^2)}{\lambda^2(1+4\lambda^{t+1}-4\lambda^{2t+1})\varepsilon^2} = \frac{1+2\lambda-\lambda^2}{\lambda^2(1+4\lambda^{t+1}-4\lambda^{2t+1})}$$

oraz dla parzystych i ujemnych  $t$

$$\text{Tr}(\Gamma(t)) = \frac{1 + 2\lambda - \lambda^2}{\lambda^2}.$$

Zauważmy, że dla wszystkich parzystych  $t$  jest

$$\frac{1}{5} \leq \text{Tr}(\Gamma(t)) \leq \frac{3}{\lambda^2}.$$

Zatem

$$\frac{1}{10} \leq \lambda_{\max}[\Gamma(t)] \leq \frac{3}{\lambda^2}.$$

Analogiczna nierówność zachodzi również dla nieparzystych  $t$ . Zatem warunek (6.32) jest spełniony dla wszystkich  $\epsilon$  w otoczeniu punktu  $\epsilon = 0$ . Wynika stąd, że wykładnik  $3/2$  w otrzymanym oszacowaniu nie może być zastąpiony liczbą mniejszą.  $\square$

Widzimy, że algorytm ze zmiennym współczynnikiem zapominania jest znacznie bardziej wrażliwy na słabe pobudzenie sygnału  $\varphi$  niż algorytm ze stałym współczynnikiem zapominania. Dużego wzrostu błędu identyfikacji należy oczekiwać zwłaszcza w chwilach zmiany stylu sygnału  $\varphi$ . Jednak w przypadku szczególnym, gdy zarówno  $\varphi$  i  $\lambda$  są okresowe błąd nadążania oceny za parametrami obiektu jest mniejszy.

**Twierdzenie 6.5.** *Jeżeli ciągi  $\{\varphi(t)\}$  i  $\{\lambda(t)\}$  są ciągami okresowymi (lub asymptotycznie okresowymi), to istnieje stała  $c_3$  taka, że*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\hat{\theta}(t) - \theta^*(t)\| \leq \frac{c_3 \epsilon}{\delta_r}. \quad (6.39)$$

DOWÓD. Załóżmy, że  $\varphi(t+p) = \varphi(t)$  i  $\lambda(t+p) = \lambda(t)$  dla pewnego  $p > 0$ . Niech  $\tilde{\Gamma}(t) = \limsup_{i \rightarrow \infty} \Gamma(t+ip)$ . Z równania (6.34) wynika, że

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\phi(t)\| \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^t \tilde{\lambda}(t, t-i+1) \|\tilde{\Gamma}(t) \tilde{\Gamma}^{-1}(t-i)\| \epsilon. \quad (6.40)$$

Pokazaliśmy, że  $\sum_{i=1}^t \tilde{\lambda}(t, i) \leq T + 1/g\delta_r \leq (Tg+1)/\delta_r$ . Aby udowodnić (6.39) wystarczy więc pokazać, że norma  $\|\tilde{\Gamma}(t) \tilde{\Gamma}^{-1}(t-i)\|$  jest ograniczona jednostajnie względem  $t$  i  $i$ . Zauważmy, że

$$\tilde{\Gamma}^{-1}(t) = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{\lambda(t) \dots \lambda(t-j+1)}{1 - \lambda(1) \dots \lambda(p)} \varphi(t-j) \varphi^T(t-j).$$

Zatem różnica macierzy  $\tilde{\Gamma}^{-1}(t) - \tilde{\Gamma}^{-1}(t-i)$  ma postać

$$\tilde{\Gamma}^{-1}(t) - \tilde{\Gamma}^{-1}(t-i) = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{\lambda(t) \dots \lambda(t-j+1) - \lambda(t-i) \dots \lambda(t-i-k_j)}{1 - \lambda(1) \dots \lambda(p)} \varphi(t-j) \varphi^T(t-j)$$

dla pewnych naturalnych  $k_j$  mniejszych lub równych  $p$ . Z okresowości  $\lambda$  wynika, że  $\lambda(t-i) \dots \lambda(t-i-k) \leq \lambda(1) \dots \lambda(p)$  jeśli  $k \leq p$ . Zatem

$$\left| \frac{\lambda(t) \dots \lambda(t-j+1) - \lambda(t-i) \dots \lambda(t-i-k_j)}{1 - \lambda(1) \dots \lambda(p)} \right| \leq \left| \frac{1 - \lambda(t) \dots \lambda(t-j+1)}{1 - \lambda(1) \dots \lambda(p)} \right| + \left| \frac{1 - \lambda(t-i) \dots \lambda(t-i-k_j)}{1 - \lambda(1) \dots \lambda(p)} \right| \leq 2.$$

Ponieważ  $|\varphi(t)| \leq 1$ , więc  $\|\tilde{\Gamma}^{-1}(t) - \tilde{\Gamma}^{-1}(t-i)\| \leq 2p$ . Stąd

$$\|\tilde{\Gamma}(t)\tilde{\Gamma}^{-1}(t-i)\| = \|I - \tilde{\Gamma}(t)(\tilde{\Gamma}^{-1}(t) - \tilde{\Gamma}^{-1}(t-i))\| \leq 1 + 2pG.$$

□

Na zakończenie rozpatrzmy klasę algorytmów z kierunkowym zapominaniem przeszłych danych.

### Algorytmy identyfikacji z kierunkowym zapominaniem

Rozważmy algorytm identyfikacji (6.4), w którym macierz  $\Gamma$  wyznaczana jest z zależności

$$\Gamma(t) = Q^{1/2}f(Q^{-1/2}P(t)Q^{-1/2})Q^{1/2}, \quad \Gamma(0) = Q, \quad (6.41)$$

$$P^{-1}(t) = \Gamma^{-1}(t-1) + \varphi(t)\varphi^T(t), \quad (6.42)$$

gdzie  $Q$  jest pewną macierzą symetryczną dodatnią i  $f$  jest funkcją spełniającą warunki

$$w \leq f(w) \leq 1 \quad \text{dla } 0 \leq w \leq 1, \quad (6.43)$$

$$f(w) \geq w/\bar{\lambda} \quad \text{dla } 0 \leq w \leq \kappa \quad (6.44)$$

dla pewnych stałych dodatnich  $\bar{\lambda} \leq 1$ ,  $\kappa$ . Znaczenie powyższych warunków i szereg przykładów funkcji spełniających podane wyżej ograniczenia oraz własności algorytmu w przypadku idealnym przedstawiliśmy w rozdziale 2. Tu zbadamy jak szybko wzrasta błąd identyfikacji, wraz ze spadkiem stopnia pobudzenia  $\varphi$  w przypadku, gdy parametry obiektu są zmienne.

**Twierdzenie 6.6.** *Algorytm identyfikacji, w którym macierz  $\Gamma$  generowana jest za pomocą równań (6.41), (6.42) z funkcją  $f$  spełniającą warunki (6.43), (6.44) należy do klasy  $\mathcal{I}_1$*

**DOWÓD.** Wykorzystamy szereg własności algorytmu otrzymanych w paragrafie 2.3. Z równań (6.1) i (6.2) wynika następujące równanie dla błędu identyfikacji

$$\phi(t) = \Lambda(t)\phi(t-1) + \Lambda(t)(\theta^*(t) - \theta^*(t-1)), \quad (6.45)$$

gdzie  $\Lambda(t) = I - \Gamma(t-1)\varphi(t)\varphi^T(t)/(1 + \varphi^T(t)\Gamma(t-1)\varphi(t))$ . W dowodzie twierdzenia 2.2 pokazaliśmy, że jeżeli  $\theta^* = \text{const}$ , to  $\phi^T(t+T)P^{-1}(t+T)\phi(t+T) \leq \beta\phi^T(t)P^{-1}(t)\phi(t)$ , tzn.

$$\phi^T(t)\Lambda^T(t+1)\dots\Lambda^T(t+T)P^{-1}(t+T)\Lambda(t+T)\dots\Lambda(t+1)\phi(t) \leq \beta\phi^T(t)P^{-1}(t)\phi(t),$$

gdzie  $\beta = 1 - \delta_r\bar{\varepsilon}/T$ ,  $\bar{\varepsilon} = (1 - \bar{\lambda})/2$  (patrz (2.65)). Ponieważ macierze  $P$  i  $\Lambda$  zależą jedynie od  $\Gamma_0$  i  $\varphi$ , więc

$$\Lambda^T(t+1)\dots\Lambda^T(t+T)P^{-1}(t+T)\Lambda(t+T)\dots\Lambda(t+1) \leq \beta P^{-1}(t)$$

bez względu na to, czy parametry  $\theta^*$  są stałe, czy nie. Wykorzystując nierówność  $\bar{\varepsilon}I \leq P(t) \leq Q$  (patrz (2.54)) dostajemy

$$\Lambda^T(t+1)\dots\Lambda^T(t+T)\Lambda(t+T)\dots\Lambda(t+1) \leq \beta\lambda_{\max}[Q]\bar{\varepsilon}^{-1}I$$

czyli

$$\|\Lambda(t+T)\dots\Lambda(t+1)\| \leq C\beta$$

dla  $C = (\beta\lambda_{\max}[Q]\bar{\varepsilon}^{-1})^{1/2}$ . Ponieważ  $\Gamma(t) \leq Q \forall t \geq 0$ , więc również macierz  $\Lambda$  jest ograniczona jednostajnie względem  $\delta_r$ . Zatem istnieje stała  $\tilde{C}$  niezależna od  $\delta_r$  taka, że

$$\|\Lambda(t+j)\dots\Lambda(t)\| \leq \tilde{C}\beta^{j/T} \quad \forall j, t.$$

Z zależności (6.45) otrzymujemy więc

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \|\phi(t)\| &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \left\| \sum_{j=1}^t \Lambda(t)\Lambda(t-1)\dots\Lambda(j)(\theta^*(j) - \theta^*(j-1)) \right\| \\ &\leq \tilde{C} \sum_{i=0}^{\infty} \beta^{i/T} = \frac{\tilde{C}}{1 - \beta^{1/T}} = \frac{\tilde{C}(1 + \beta^{1/T} + \dots + \beta^{(T-1)/T})}{1 - \beta} \leq \frac{\tilde{C}T^2}{\delta_r\bar{\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Drugą część dowodu pokazującą, że współczynnik  $p = 1$  w powyższym oszacowaniu nie może być zastąpiony liczbą mniejszą pomijamy.  $\square$

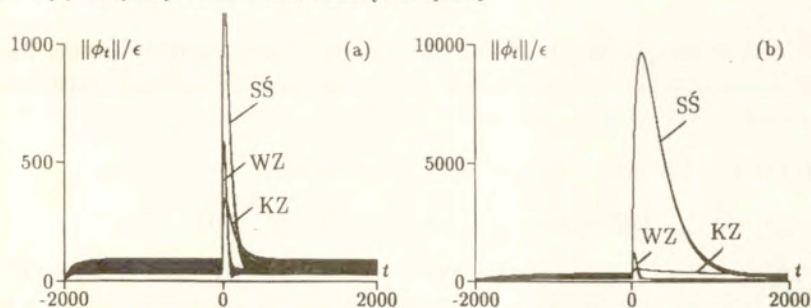
### Wyniki symulacji komputerowej

Na wstępie przedstawimy wyniki symulacji dla prostego zadania identyfikacji opisanego w przykładzie 6.3.

PRZYKŁAD 6.5. Rozważmy obiekt statyczny

$$\nu(t) = \varphi^T(t)\theta^*(t), \quad \varphi(t), \theta^*(t) \in \mathbf{R}^2,$$

w którym sygnał  $\varphi$  ma postać (6.29) i  $\theta^*(t) - \theta^*(t-1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \varepsilon$ . Sygnał  $\varphi$  jest sygnałem pobudzającym w stopniu  $\delta_r = \varepsilon^2/2 + O(\varepsilon^3)$ . Ponadto, zarówno dla dodatnich jak i



Rys. 6.1. Przebiegi normy błędu identyfikacji dla (a)  $\epsilon = 0,02$  i (b)  $\epsilon = 0,01$

ujemnych  $t$  sygnał  $\varphi$  jest sygnałem okresowym. W chwili  $t = 0$  następuje jednak niewielka zmiana stylu sygnału  $\varphi$ . Na rysunku 6.1 przedstawione są przebiegi normy błędu  $\phi$  dla trzech różnych algorytmów identyfikacji: dla algorytmu z wykładniczym zapominaniem przeszłych danych (WZ), dla algorytmu ze stałym śladem macierzy  $\Gamma$  (SŚ) i dla algorytmu z kierunkowym zapominaniem przeszłych danych z funkcją  $f$  zdefiniowaną przez (2.35) (KZ). Rozpatrzyliśmy dwa przypadki:  $\epsilon = 0,02$  (rys. 6.1a) i  $\epsilon = 0,01$  (rys. 6.1b) i przyjmujemy następujące parametry algorytmów:  $\lambda = 0,95$ ;  $Q = 100I$ . Na wykresach oś  $Y$  wyskalowana jest w wielokrotnościach liczby  $\epsilon$ .

Widzimy, że dla  $t < 0$  błąd identyfikacji jest niewielki. Wynika to z faktu, że w tym czasie  $\varphi$  jest sygnałem okresowym. Z chwilą zmiany stylu sygnału  $\varphi$  następuje gwałtowny wzrost błędów  $\phi$ . Błąd ten jest największy dla algorytmu ze stałym śladem macierzy  $\Gamma$  i silnie zależy od stopnia pobudzenia sygnału  $\varphi$  (patrz rys. 6.1a i b). Jest to zgodne z rezultatami teoretycznymi udowodnionymi w poprzednim punkcie.  $\triangle$

Zwróćmy uwagę na następujące cechy rozważanego w przykładzie 6.5 zadania identyfikacji:

- stopień pobudzenia sygnału  $\varphi$  jest mały,
- po odpowiednio długim przebiegu algorytmu identyfikacji, w czasie którego sygnał  $\varphi$  jest okresowy następuje niewielka zmiana stylu  $\varphi$  (przy dużej zmianie kierunku wektora  $\varphi$  nastąpi chwilowy, ale znaczny wzrost stopnia pobudzenia  $\varphi$ , w wyniku czego błąd identyfikacji zmaleje, a nie wzrośnie),
- składowa wektora zmian parametrów  $\theta^*(t) - \theta^*(t-1)$  równoległa do kierunku wektora  $\varphi$  jest niezerowa.

Można się przekonać przeprowadzając odpowiednie symulacje, że każdy z powyższych warunków jest niezbędny do tego, by wystąpił tak znaczny wzrost błędów identyfikacji jak w przykładzie 6.5. Można by więc przypuszczać, że zjawisko polegające na gwałtownym

wzroście błędu identyfikacji przy zmianie stylu sygnału  $\varphi$  ma charakter wyjątkowy. Następnym przykładem przekonamy nas, że tak nie jest. Rozważymy bardziej realistyczne zagadnienie identyfikacji parametrów obiektu dynamicznego.

**PRZYKŁAD 6.6.** Rozważmy obiekt dyskretny drugiego rzędu

$$y(t) + a_1(t)y(t-1) + a_2(t)y(t-2) = bu(t-1)$$

i przyjmijmy  $\nu(t) = y(t)$ ,  $\theta^*(t) = [a_1(t) \ a_2(t) \ b]^T$ ,  $\varphi(t) = [-y(t-1) \ -y(t-2) \ u(t-1)]^T$ . Załóżmy, że w przedziale czasu (1000, 6000) parametry  $a_1$  i  $a_2$  zmieniają się liniowo, a w przedziałach (0, 1000) i (6000, 10000) są stałe i równe odpowiednio  $a_1 = -1,7$ ;  $a_2 = 0,7$  oraz  $a_1 = -1,6$ ;  $a_2 = 0,8$ . Zatem w przedziale (1000, 6000) parametry obiektu w każdej chwili zmieniają się o wartość  $\epsilon := \|\theta^*(t) - \theta^*(t-1)\| = 0,1 \cdot \sqrt{2}/5000$ . Sygnał wejściowy generowany jest za pomocą kompensatora

$$u(t) = ku_r'(t) + r_1y(t) + r_2y(t-1), \quad u_r'(t) = 1 + \chi(t),$$

gdzie  $r_i = a_i(0) - c_i$  i  $c_2 = 0,8^2$ ,  $k = (1 + c_1 + c_2)/b$  z  $c_1 = -2\sqrt{2} \cdot 0,8$ . Zauważmy, że w początkowym okresie symulacji kompensator zapewnia przesunięcie biegunów układu zamkniętego w położenie zdefiniowane przez wielomian  $z^2 + c_1z + c_2$  oraz zapewnia nadążanie wyjścia obiektu za sygnałem zadany  $u_c(t) = 1$ . Sygnał pomocniczy  $\chi$  jest falą prostokątną o okresie 10 i amplitudzie  $\epsilon = 0,005$ . Na rys. 6.2 przedstawiono przebiegi normy błędu identyfikacji dla algorytmów WZ, SŚ i KZ.

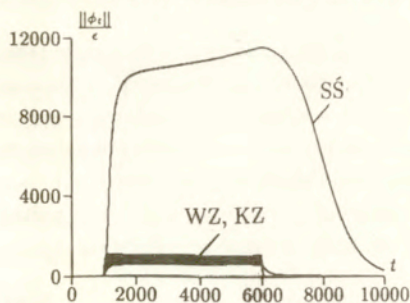
Widzimy, że podobnie jak w przykładzie 6.5 błąd identyfikacji jest o kilka rzędów wielkości większy niż  $\epsilon$  i jak wcześniej najgorsze rezultaty otrzymano dla algorytmu ze stałym śladem macierzy  $\Gamma$ . Tak duży wzrost błędu identyfikacji wywołany jest tym, że w wyniku zmian parametrów obiektu sygnał  $\varphi$  nie jest sygnałem okresowym. Jest interesujące, że zarówno przy dużo mniejszej jak i dużo większej szybkości zmian parametrów obiektu, błąd identyfikacji mierzony w jednostkach  $\epsilon$  jest mniejszy. W pierwszym przypadku własność ta wynika z szybszej zmiany kierunku wektora  $\varphi$ , która oznacza lepsze pobudzenie obiektu. W drugim wynika z faktu, że sygnał  $\varphi$  mniej odbiega od sygnału okresowego.  $\triangle$

Na zakończenie rozważymy układ sterowania adaptacyjnego.

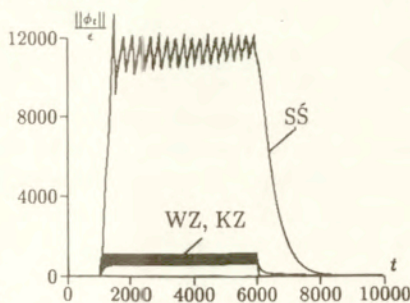
**PRZYKŁAD 6.7.** Rozważmy układ sterowania z przykładu 6.6, w którym w miejsce kompensatora ze stałymi parametrami zastosowano kompensator adaptacyjnyjny

$$u(t) = \hat{k}(t)u_r'(t) + \hat{r}_1(t)y(t) + \hat{r}_2(t)y(t-1),$$

z  $\hat{r}_i(t) = \hat{a}_i(t) - c_i$  i  $\hat{k}(t) = (1 + c_1 + c_2)/\hat{b}(t)$ , gdzie  $\hat{a}_1(t)$ ,  $\hat{a}_2(t)$  i  $\hat{b}(t)$  oznaczają oceny parametrów  $a_1$ ,  $a_2$  i  $b$ . Na rys. 4 przedstawiono przebiegi normy błędu identyfikacji dla algorytmów WZ, SŚ i KZ.



Rys. 6.2. Przebiegi modułu błędu identyfikacji dla układu dynamicznego.



Rys. 6.3. Przebiegi modułu błędu identyfikacji w adaptacyjnym układzie sterowania.

Wyniki symulacji dla algorytmów WZ i SŚ są podobne do wyników z przykładu 6.6. Natomiast dla algorytmu ST obserwujemy zjawisko okresowego (o okresie 300) wzrostu i spadku wartości błędu  $\|\phi\|$ . Jest ono związane z tym, że duży wzrost błędu identyfikacji powoduje okresową niestabilność układu zamkniętego, która z kolei zwiększa stopień pobudzenia  $\varphi$  i w konsekwencji powoduje spadek wartości błędu. Podobne zjawisko zaobserwowaliśmy w paragrafie 5.1 w przypadku występowania szumu pomiarowego.  $\triangle$

## Podsumowanie

W tym paragrafie przeanalizowaliśmy kilka wybranych algorytmów identyfikacji pod kątem wpływu słabego pobudzenia obiektu na wartość błędu identyfikacji  $\phi$ . Pokazaliśmy, że w algorytmie z wykładniczym zapominaniem przeszłych danych błąd identyfikacji jest najmniejszy, co oznacza, że algorytm ten jest najmniej wrażliwy na słabe pobudzenie obiektu. Spośród rozważanych algorytmów największy błąd identyfikacji występuje w algorytmie ze stałym śladem macierzy  $\Gamma$ . Pokazaliśmy również, że jakość identyfikacji jest znacznie lepsza, jeśli sygnał  $\varphi$  jest prawie okresowy. Jednak w tym przypadku nawet niewielka zmiana stylu sygnału  $\varphi$  może spowodować bardzo duży wzrost błędu  $\phi$ .

## 6.2 Metody poprawy uwarunkowania algorytmów identyfikacji w regulatorach adaptacyjnych

Rozważmy regulator adaptacyjny, w którym sygnał sterujący ma postać

$$u_c'(t) = u_c(t) + \chi(t),$$

gdzie  $u_c$  jest sygnałem zadaniem i  $\chi$  jest sygnałem pomocniczym zapewniającym odpowiednie pobudzenie obiektu. Przyczyną złego uwarunkowania zadania identyfikacji może być

mała wartość amplitudy sygnału wymuszającego  $\chi$  w stosunku do amplitudy sygnału zadanego  $u_c$ . Zatem poprawę uwarunkowania zadania identyfikacji można osiągnąć zwiększając amplitudę sygnału pomocniczego. Nastąpi to jednak kosztem jakości nadążania wyjścia obiektu za sygnałem zadaniem. W tym paragrafie omówimy inne podejście polegające na odpowiedniej filtracji sygnałów wchodzących do równań algorytmu identyfikacji.

Zalóżmy tak jak dotychczas, że identyfikowany model przedstawiony jest w postaci (6.1). Rozważmy filtr o transmitancji  $G_f(s)$  i zdefiniujmy zmienne przefiltrowane

$$\nu_f(t) = G_f(s)\nu(t), \quad \varphi_f(t) = G_f(s)\varphi(t). \quad (6.46)$$

Zmienne przefiltrowane spełniają zależność

$$\nu_f(t) = \varphi_f^T(t)\theta^*. \quad (6.47)$$

Przyjmujemy, że identyfikacja parametrów  $\theta^*$  przeprowadzana jest na podstawie modelu (6.47). Zwróćmy uwagę, że sygnały  $\nu_f$  i  $\varphi_f$  są pewną funkcją przefiltrowanego sygnału sterującego  $G_f(s)(u_c(t) + \chi(t))$ . Zatem poprawę stopnia uwarunkowania zadania identyfikacji można osiągnąć dobierając filtr  $G_f(s)$  w taki sposób, by zwiększyć stosunek amplitudy sygnału  $G_f(s)\chi$  do amplitudy sygnału  $G_f(s)u_c$ . Rozważymy kilka szczególnych przypadków.

Na wstępie założymy, że sygnał zadany jest stały. Zadaniem regulacji jest więc stabilizacja wyjścia obiektu wokół zadanej wartości  $u_c$ . Przyjmijmy

$$G_f(s) = \frac{s}{s + \mu} \quad (6.48)$$

dla pewnej małej liczby  $\mu$ . W stanie ustalonym zaproponowany filtr całkowicie odfiltrowuje z sygnałów  $\varphi$  i  $\nu$  składowe zależące od sygnału zadanego, a zachowuje składowe zależne od sygnału wymuszającego. Dzięki temu sygnał  $\varphi_f$  jest sygnałem silnie pobudzającym, co zapewnia dobrą jakość nadążania oceny za parametrami obiektu. W przypadku, gdy sygnał zadany jest sygnałem sinusoidalnym o częstotliwości  $\omega$ , filtr spełniający podobne zadanie ma postać

$$G_f(s) = \frac{s^2 + \omega^2}{s^2 + \mu s + \omega^2}. \quad (6.49)$$

Zauważmy, że im mniejsza jest wartość parametru  $\mu$ , tym węższe jest pasmo sygnałów odfiltrowanych. Później pokażemy jednak, że wartość  $\mu$  nie może być zbyt mała. W przypadku ogólnym, gdy sygnał zadany jest sumą pewnej liczby sinusoid o znanych częstotliwościach, filtr  $G_f(s)$  powinien się składać z kilku filtrów postaci (6.49) połączonych szeregowo o odpowiednich wartościach parametru  $\omega$ .

Zaproponowana metoda poprawy uwarunkowania zadania identyfikacji ma pewne wady. Po pierwsze, może być ona zastosowana tylko wtedy, gdy sygnał zadany jest stały lub sinusoidalny o znanej częstotliwości  $\omega$ , lub gdy jest sumą sygnałów o takiej postaci. Po



drugie, zastosowanie filtracji zmiennych za pomocą filtrów postaci (6.48) lub (6.49) powoduje utratę bardzo cennej własności adaptacyjnych układów sterowania polegającej na tym, że cele sterowania – na przykład, nadążanie wyjścia obiektu za wyjściem modelu odniesienia, globalna stabilność układu sterowania – są spełnione niezależnie od tego czy oceny dążą do parametrów obiektu. Rozważmy układ z modelem odniesienia, w którym  $u_c = \text{const}$  i w którym zastosowano filtrację zmiennych za pomocą filtru (6.48). Ponieważ sygnały stałe zostają odfiltrowane, więc błąd modelowania

$$\epsilon_m(t) = \nu_f(t) - \varphi_f^T(t)\hat{\theta}(t-1)$$

jest zawsze równy zeru, gdy sygnał wejściowy i wyjściowy obiektu jest stały. Wobec tego, w stanie ustalonym zerowanie się błędu modelowania nie nie pociąga za sobą zerowania błędu nadążania. W ogólności można pokazać, że w adaptacyjnym układzie sterowania z modelem odniesienia, w którym zastosowano filtrację zmiennych (6.46) w miejsce własności (3.19) zachodzi własność

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G_f(s)(y(t) - y_m(t)) = 0.$$

Zatem błąd nadążania dąży do zera, jeśli wszystkie zera filtru  $G_f$  leżą w lewej półpłaszczyźnie  $\Re(s) < 0$ . Jeśli warunek ten nie jest spełniony, to układ sterowania może być niestabilny. Są dwa sposoby pozwalające wyeliminować powyższą wadę. Pierwszy polega na zastąpieniu filtru (6.49) przez filtr

$$G_f(s) = \frac{s^2 + \mu_1 s + \omega^2}{s^2 + \mu s + \omega^2}, \quad (6.50)$$

w którym  $0 < \mu_1 < \mu$ . Filtr taki nie odfiltrowuje całkowicie sygnałów o szóstotliwościści  $\omega$ , a jedynie odpowiednio je tłumi. Jednak dzięki wprowadzeniu członu  $\mu_1$  transmitancja  $G_f(s)$  nie ma już zer w półpłaszczyźnie  $\Re(s) \geq 0$ . Drugi sposób polega na odpowiednim poszerzeniu dynamiki kompensatora, tak aby wszystkie zera  $G_f(s)$  leżące w prawej półpłaszczyźnie były jednocześnie biegunami transmitancji układu otwartego. Odpowiedni sposób postępowania prześledzimy na przykładzie filtru (6.49). Mnożąc równanie obiektu przez operator  $s^2 + \omega^2$  dostajemy

$$(s^2 + \omega^2)A(s)y(t) = B(s)\bar{u}(t), \quad (6.51)$$

gdzie  $\bar{u}(t) = (s^2 + \omega^2)u(t)$ . Dla obiektu (6.51), w którym  $\bar{u}$  traktujemy jako wejście i  $y$  jako wyjście znajdujemy kompensator

$$\bar{u}(t) = K_1(s)y(t) + K_2(s)u_c(t). \quad (6.52)$$

Zwróćmy uwagę, że obecnie transmitancja układu otwartego ma postać  $BK_1/(s^2 + \omega^2)A$  tak, jak tego żądaliśmy. W szczególności, dla filtru postaci (6.48) dostajemy w ten sposób

kompenstator z czynnikiem całkującym. Wadą tej metody jest wzrost wartości dopełniowej funkcji wrażliwości w paśmie wysokich częstotliwości. W praktyce powoduje to konieczność ograniczenia pasma przenoszenia układu zamkniętego. Tym niemniej powyższa metoda jest godna polecenia zwłaszcza w przypadku stosowania filtra (6.48), gdyż w tym przypadku wzrost dopełniowej funkcji wrażliwości jest stosunkowo niewielki. Warto też pamiętać, że w przypadku, gdy sam obiekt ma charakter całkujący, wprowadzania dodatkowego bieguna  $s = 0$  nie jest konieczne.

Dotychczas omówione metody polegały na odpowiednim tłumieniu składowych sygnałów  $\varphi$  i  $\nu$  pochodzących od sygnału zadanego. Można jednak zastosować odmienne podejście polegające na wzmacnianiu składowych pochodzących od sygnału wymuszającego  $\chi$ . Załóżmy, że sygnał wymuszający jest sinusoidą o częstotliwości  $\bar{\omega}$ . W celu zwiększenia stosunku amplitudy  $G_f(s)\chi$  do amplitudy  $G_f(s)u_c$  możemy zastosować filtr rezonansowy

$$G_f(s) = \frac{s^2 + \mu_1 s + \bar{\omega}^2}{s^2 + \mu s + \bar{\omega}^2}, \quad (6.53)$$

w którym  $0 < \mu < \mu_1$ . Filtr ten zapewni  $\mu_1/\mu$ -krotny wzrost amplitudy sygnałów o częstotliwości  $\bar{\omega}$ . Powyższa metoda jest skuteczna wtedy, gdy sygnał  $u_c$  nie zawiera składowych o częstotliwościach bliskich  $\bar{\omega}$ . Jeżeli sygnał wymuszający jest sumą kilku składowych sinusoidalnych, to zastosowany filtr powinien się składać z kilku filtrów postaci (6.53) połączonych równolegle.

Zauważmy, że im mniejsza jest wartość  $\mu$  w (6.51), tym większe jest wzmocnienie sygnału wymuszającego. Jednak mała wartość parametru  $\mu$  powoduje, że wartość sygnału przefiltrowanego  $\varphi_f(t_0)$  zależy od wartości sygnału  $\varphi$  w odpowiednio długim okresie czasu poprzedzającym chwilę  $t_0$ . Własność ta jest niekorzystna w przypadku, gdy parametry identyfikowanego modelu zmieniają się w czasie, ponieważ wtedy jedynie bieżące wartości  $\varphi$  zawierają dokładną informację o obiekcie. Wobec tego wartość parametru  $\mu$  w (6.53) (a także w (6.48), (6.49), i (6.50)) nie powinna być zbyt mała. W praktyce przy danej szybkości zmian parametrów obiektu istnieje pewna wartość optymalna  $\mu^*$ , która zapewni minimalną wartość błędu identyfikacji.

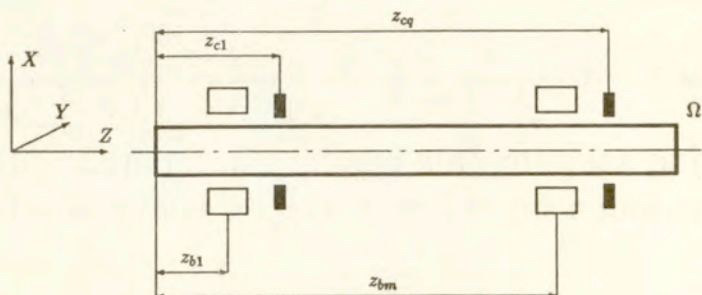
## Rozdział 7

# Przykład zastosowania regulatorów adaptacyjnych do sterowania drganiami wirników elastycznych

Metody projektowania regulatorów adaptacyjnych omówione w rozdziałach 2–4 mają zastosowanie w przypadku, gdy obiekt jest liniowy, skalarny i ma skończony rząd. Rzeczywiste obiekty sterowania są jednak zwykle bardziej złożone – często mają więcej niż jedno wejście i wyjście, mogą mieć parametry rozłożone i mogą być nieliniowe. Jak dotychczas, jedynie dla obiektów wielowymiarowych zbudowano spójną teorię sterowania adaptacyjnego [41, 30, 32, 31, 71]. Jednak i w tym przypadku, zaprojektowane algorytmy wymagają znajomości pewnych istotnych informacji o obiekcie nie mających bezpośredniej interpretacji fizycznej, takich jak macierz strukturalna obiektu, indeksy sterowalności czy indeksy obserwowalności. Inną wadą tych algorytmów jest konieczność identyfikowania dużej liczby parametrów, nawet jeśli liczba nieznanych parametrów opisujących konkretne fizyczne własności obiektu jest niewielka. Z tego powodu przy projektowaniu złożonych adaptacyjnych układów sterowania wykorzystuje się zwykle informację o strukturze i własnościach obiektu oraz o wartościach niektórych jego parametrów. Często stosuje się oryginalne rozwiązania charakterystyczne dla danego zastosowania, traktując przy tym klasyczną teorię sterowania adaptacyjnego jedynie jako punkt wyjścia i źródło inspiracji. Przykładem takiego postępowania jest opisane w tym rozdziale zastosowanie regulatorów adaptacyjnych do sterowania drganiami wirników giętkich. Przedstawione wyniki stanowią podsumowanie badań prowadzonych przez autora we współpracy z dr hab. Zdzisławem Gosiewskim [48, 70].

### 7.1 Zagadnienie sterowania drganiami wirników

Rozwój współczesnych maszyn wirnikowych zmierza w kierunku zwiększenia mocy i prędkości obrotowych wirników. W szybkoobrotowych maszynach zagadnienie zmniejszenia do minimum drgań elementów odgrywa podstawową rolę, gdyż drgania te mogą uniemożliwić osiągnięcie wysokich prędkości obrotowych wirnika, a także mogą być przyczyną poważnych awarii. Istnieją dwie główne przyczyny powstawania drgań wirników. Pierwszą z nich są siły bezwładności wywołane niepokrywaniem się osi wirowania z osią bezwładności



Rys. 7.1. Konfiguracja wirnika.

wirnika, a więc siły związane z niewyważeniem wirnika. Drugą przyczyną tkwi w elastycznych odkształceniach wirnika. Przy dużych prędkościach obrotowych wirników, siła tarcia wywołana tłumieniem wewnętrznym ma kierunek prostopadły do ruchu wirnika i może powodować powstanie drgań samowzbudnych. Zadaniem układu sterowania będzie więc generowanie sił działających na wirnik zapewniających kompensację niewyważenia i stabilizację drgań samowzbudnych. Przyjmijmy, że elementem generującym siły są łożyska magnetyczne zainstalowane na wale. Łożyska te mogą być wykorzystane jedynie do sterowania drganiami wirnika osadzonego w klasycznych łożyskach albo mogą służyć do podpierania wirnika i jednocześnie sterowania jego drganiami. Elementami pomiarowymi są czujniki mierzące drgania w wybranych płaszczyznach pomiarowych na długości wirnika. Przyjmujemy, że w każdej płaszczyźnie są dwa czujniki mierzące prędkości i przemieszczenia wału w dwóch kierunkach prostopadłych do siebie i do osi wirnika.

## 7.2 Matematyczny model wirnika

Ruch wirnika opiszemy w inercyjnym układzie współrzędnych prostokątnych OXYZ, w którym oś Z pokrywa się z osią łożysk magnetycznych, rys. 7.1. Załóżmy, że wał wirnika ma przekrój kołowy, przy czym pole powierzchni  $A$  i gęstość wału  $\rho$  może się zmieniać wzdłuż osi Z. Ponadto, wirnik charakteryzują następujące parametry:  $b$  – współczynnik tłumienia zewnętrznego,  $h$  – współczynnik tłumienia wewnętrznego,  $\Omega$  – prędkość kątowa wirnika,  $EJ$  – sztywność wirnika,  $l$  – długość wirnika. Przyjmijmy, że współrzędne punktów przyłożenia sił sterujących  $f_i$  generowanych przez łożyska są równe  $z_{bi}$  dla  $i = 1, 2, \dots, m$ , zaś współrzędne czujników pomiarowych mierzących odkształcenia i prędkości wału  $z_{ci}$  dla  $i = 1, 2, \dots, q$ . W modelu dla uproszczenia pomijamy efekt groskopowy (nie wpływa on na ostateczną postać równań wirnika) oraz wpływ sił ciężkości. Ugięcie wirnika opisane

jest zmienną  $p(z, t)$ , a niewyważenie wirnika określone jest krzywą ekscentryczności środka masy  $a(z)$ . Zmienne te oraz siły sterujące są wielkościami zespolonymi, tzn.

$$p(z, t) = p_x(z, t) + i p_y(z, t),$$

$$a(z) = a_x(z) + i a_y(z),$$

$$f_{bi} = f_{bix} + i f_{biy}.$$

Ruch wirnika opisany jest następującym cząstkowym równaniem różniczkowym [47]

$$A\rho \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + (b+h) \frac{\partial p}{\partial t} - i h \Omega p + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( EJ \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) = A\rho a \Omega^2 e^{i\Omega t} + \sum_{i=1}^m f_{bi} \delta(z - z_{bi}), \quad (7.1)$$

gdzie  $\delta(z)$  oznacza funkcję delta Diraca. Aby odseparować zmienne przestrzenne i zmienne czasowe i przekształcić cząstkowe równanie różniczkowe cząstkowe w nieskończony zbiór równań różniczkowych zwyczajnych, wprowadzimy funkcje kształtu  $\psi_k(z)$ ,  $i = 1, 2, \dots$  spełniające następujące warunki ortogonalności

$$\int_0^l A\rho \psi_k(z) \psi_i(z) dz = Z_i \delta_{ki},$$

$$\int_0^l EJ \psi_k''(z) \psi_i''(z) dz = \omega_k^2 Z_k \delta_{ki},$$

gdzie  $\omega_k$  jest częstością naturalną  $k$ -tej postaci drgań,  $Z_k$  jest stałą normalizującą  $k$ -tą postać, a  $\delta_{ki}$  jest symbolem Kroneckera. Wykorzystując funkcje  $\psi_k$  możemy ugięcie wału rozłożyć w szereg

$$p(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t) \psi_k(z). \quad (7.2)$$

Wprowadzając szereg (7.2) do równań ruchu (7.1), mnożąc otrzymane równanie przez  $\psi_i(z)$  i całkując względem  $z$  w przedziale  $0 \leq z \leq l$  dostajemy układ zwyczajnych równań różniczkowych opisujących ruch wirnika

$$\ddot{p}_k + 2 \sum_{i=1}^{\infty} (\mu_{ki} + \kappa_{ki}) \dot{p}_k - 2i\Omega \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_{ki} p_k + \omega_k^2 p_k = a_k \Omega^2 e^{i\Omega t} + \sum_{i=1}^m \frac{1}{Z_k} \psi_k(z_{bi}) f_i, \quad k = 1, 2, \dots \quad (7.3)$$

gdzie

$$\mu_{ki} = \frac{1}{2Z_k} \int_0^l b \psi_k(z) \psi_i(z) dz, \quad \kappa_{ki} = \frac{1}{2Z_k} \int_0^l h \psi_k(z) \psi_i(z) dz, \quad a_k = \frac{1}{2Z_k} \int_0^l A\rho a \psi_k(z) dz.$$

Współczynniki  $\mu_k$  i  $\kappa_k$  są odpowiednio modalnymi współczynnikami tłumienia zewnętrznego i wewnętrznego, natomiast  $a_k$  jest  $k$ -tą składową modalną ekscentryczności masy.

Z równań (7.3) wynika, że w przypadku ogólnym tłumienie sprzęga równania drgań powodując, że postacie drgań są krzywymi przestrzennymi. W wielu jednak przypadkach

można przyjąć, że współczynniki tłumienia są liniową kombinacją współczynników mas i współczynników sprężystości, a wówczas

$$\mu_{ki} = \begin{cases} 0 & \text{dla } k \neq i \\ \mu_k & \text{dla } k = i, \end{cases} \quad \kappa_{ki} = \begin{cases} 0 & \text{dla } k \neq i \\ \kappa_k & \text{dla } k = i, \end{cases} \quad (7.4)$$

gdzie  $\mu_k = \mu_{kk}$ ,  $\kappa_k = \kappa_{kk}$ .

Ze względu na występujące tłumienie postacie drgań, dla których naturalna częstotliwość jest dużo większa od prędkości obrotowej  $\Omega$  nie mają istotnego wpływu na ruch wirnika. Z tego powodu przy projektowaniu układu sterowania będziemy brali pod uwagę jedynie pierwszych  $n$  postaci drgań. Postacie te będziemy nazywali *postaciami sterowanymi* (ang. *controlled modes*), zaś pozostałe *postaciami niesterowanymi* (ang. *noncontrolled modes*). Dla sterowanych postaci drgań równanie (7.3) może być zapisane w postaci macierzowej

$$\bar{p} + D\bar{p} + M\dot{p} = Bu + a\Omega^2 e^{i\Omega t}, \quad (7.5)$$

gdzie  $D \in R^{n \times n}$  jest macierzą tłumienia,  $M \in C^{n \times n}$  jest macierzą sztywności,  $a = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]^T$  jest wektorem zakłóceń,  $p = [p_1 \ \dots \ p_n]^T$  jest wektorem przemieszczeń,  $u = [f_1 \ \dots \ f_n]^T$  jest sygnałem wejściowym i  $B = [\psi_k(z_{ki})/Z_k]_{n \times m}$  jest macierzą wejściową (w równaniu (7.5) pomineliśmy składniki związane z niesterowanymi postaciami drgań występujące, gdy nie są spełnione warunki (7.4)).

Czujniki mierzące przemieszczenia i prędkości wału wirnika są rozmieszczone w płaszczyznach o współrzędnych  $z_{ci}$  dla  $i = 1, 2, \dots, q$ . Oznaczmy  $y_i(t) = p(z_{ci}, t)$ . Z równania (7.2) wynika, że

$$y_i = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(z_{ci}) p_k, \quad \dot{y}_i = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(z_{ci}) \dot{p}_k.$$

Przyjmując  $y = [y_1 \ \dots \ y_q]^T$ ,  $\dot{y} = [\dot{y}_1 \ \dots \ \dot{y}_q]^T$  i  $C = [\psi_k(z_{ci})]_{q \times n}$  równania wyjść możemy zapisać w postaci

$$y = Cp + \eta_1, \quad \dot{y} = C\dot{p} + \eta_2, \quad (7.6)$$

gdzie  $\eta_{1i} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \psi_k(z_{ci}) p_k$ ,  $\eta_{2i} = \dot{\eta}_{1i}$ .

Na zakończenie zwróćmy uwagę na następujące cechy charakterystyczne rozważanego modelu wirnika:

- wirnik jest obiektem o parametrach rozłożonych,
- wirnik jest obiektem wielowymiarowym,
- stałe czasowe modelu wirnika są małe,
- wirnik poddawany jest zewnętrznym wymuszeniom okresowym.

### 7.3 Prawo sterowania dla prostego modelu wirnika

W tym paragrafie wyprowadzimy prawo sterowania dla modelu wirnika opisanego równaniami (7.5), (7.6) przy następujących założeniach upraszczających:

- (A1) parametry modelu są znane,  
 (A2) liczba sterowanych postaci drgań jest równa liczbie sygnałów wejściowych i wyjściowych modelu, tzn.  $n = m = l$ ,  
 (A3) współczynniki tłumienia wewnętrznego i zewnętrznego są liniową kombinacją współczynników masy i sprężystości tak, że  $\mu_{ki} = 0$ ,  $\kappa_{ki} = 0$  dla  $k \neq i$ ,  
 (A4) macierze  $B$  i  $C$  są nieosobliwe.

Założenie (A4) będzie spełnione wtedy, gdy punkty pomiarowe i punkty przyłożenia sił sterujących nie pokrywają się z punktami modalnymi sterowanych postaci drgań.

Przy wyżej wprowadzonych założeniach, równanie wirnika przyjmuje następującą postać

$$\ddot{p}_k + 2(\mu_k + \kappa_k)\dot{p}_k - 2i\Omega\kappa_k p_k + \omega_k^2 p_k = v_k + a_k \Omega^2 e^{i\Omega t}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (7.7)$$

$$v = Bu, \quad v(t), u(t) \in C^m, \quad (7.8)$$

$$y = Cp + \eta_1, \quad \dot{y} = C\dot{p} + \eta_2. \quad (7.9)$$

Zwróćmy uwagę, że dzięki założeniu (A2) równania opisujące kolejne postacie drgań nie są ze sobą sprzężone.

Siła  $2\Omega\kappa_k p_k$  występująca w równaniu (7.7) jest ortogonalna do chwilowego kierunku ruchu wirnika i może być przyczyną niestabilności wirnika. Istotnie, bieguny związane z  $k$ -tą postacią drgań są następujące

$$s_i = -(\mu_k + \kappa_k) \mp \sqrt{\frac{1}{2}(\omega_k^2 - (\mu_k + \kappa_k)^2 + \sqrt{\Delta_k})} \mp \sqrt{\frac{1}{2}(\omega_k^2 - (\mu_k + \kappa_k)^2 + \sqrt{\Delta_k})}$$

dla  $i = j + 4(k-1)$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , gdzie  $\Delta_k = (\omega_k^2 - (\mu_k + \kappa_k)^2) + (2\Omega\kappa_k)^2$ . Wykorzystując powyższy wzór można pokazać, że  $k$ -ta postać drgań jest stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Omega \leq \omega_k \frac{\mu_k + \kappa_k}{\kappa_k}.$$

Wobec tego przy odpowiednio wysokiej prędkości obrotowej  $\Omega$  wirnik będzie niestabilny. Przyjmijmy więc, że celem sterowania jest stabilizacja wirnika i zwiększenie tłumienia sterowanych drgań. Ponadto chcemy, by zastosowany regulator kompensował wpływ niewyważenia wirnika. Na wstępie zaprojektujemy regulator ciągły w czasie, a następnie znajdziemy jego dyskretny odpowiednik.

### Regulator z czasem ciągłym

Załóżmy chwilowo, że zmienne  $p_k$  i  $\dot{p}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) są mierzone bezpośrednio. Łatwo zauważyć, że wszystkie założone cele sterowania będą spełnione, jeśli

$$v_k = 2(\mu_k + \kappa_k - \mu_{zk})\dot{p}_k - 2i\Omega\kappa_k p_k - \Omega^2 a_k e^{i\Omega t}, \quad (7.10)$$

gdzie  $\mu_{zk}$  jest żądanym współczynnikiem tłumienia dla  $k$ -tej postaci drgań w układzie zamkniętym. Rzeczywiście, wstawiając (7.10) do (7.7) dostajemy

$$\ddot{p}_k + 2\mu_{zk}\dot{p}_k + \omega_k^2 p_k = 0. \quad (7.11)$$

Zwróćmy uwagę, że równaniu (7.10) składnik  $-\Omega^2 a_k e^{i\Omega t}$  przeciwdziała siłom bezwładności wynikającym z niewyważenia wirnika, składnik  $-2i\Omega\kappa_k p_k$  kompensuje siłę wywołującą niestabilność wirnika, a składnik  $2(\mu_k + \kappa_k - \mu_{zk})\dot{p}_k$  zapewnia odpowiedni wzrost tłumienia ruchu dla  $k$ -tej postaci drgań.

Aby zrealizować prawo sterowania (7.10), musimy znać wartość parametru  $a_k$  i kąt obrotu  $\Omega t$ . Określenie  $a_k$  wymaga jednak dokładnej znajomości rozkładu niewyważenia na długości wirnika. Z tego względu wyprowadzimy prawo sterowania, które nie wymaga znajomości rozkładu niewyważenia i wartości kąta obrotu, i w którym wszystkie składowe sygnały sterującego generowane są za pomocą sprzężenia zwrotnego.

Zauważmy, że wielkość  $e^{i\Omega t}$  spełnia następujące równanie różniczkowe  $(s - i\Omega)e^{i\Omega t} = 0$ , gdzie, przypomnijmy,  $s$  jest operatorem różniczkowania. Zatem mnożąc (7.7) przez operator  $s - i\Omega$  otrzymujemy

$$(s - i\Omega)A_k(s)p_k = \bar{v}_k, \quad (7.12)$$

gdzie  $A_k(s) = s^2 + (\mu_k + \kappa_k)s - 2i\Omega\kappa_k + \omega_k^2$  i  $\bar{v}_k = (s - i\Omega)v_k$ . Zażądajmy, by dla obiektu (7.12) ze zmienną  $\bar{v}$  traktowaną jako wejście równanie charakterystyczne układu zamkniętego miało postać

$$(s + \mu - i\Omega)C_k(s), \quad (7.13)$$

gdzie  $\mu > 0$  i  $C_k(s) = s^2 + 2\mu_{zk}s + \omega_k^2$  (porównaj (7.11)). Dodatkowy biegun  $s = -\mu + i\Omega$  możemy traktować jako biegun obserwatora estymującego niewyważenie wirnika. Żądaną dynamikę układu zamkniętego otrzymamy stosując prawo sterowania

$$\bar{v}_k = (\bar{r}_{1k}s^2 + \bar{r}_{2k}s + \bar{r}_{3k})p_k, \quad (7.14)$$

gdzie wielomian  $\bar{R}_k(s) = \bar{r}_{1k}s^2 + \bar{r}_{2k}s + \bar{r}_{3k}$  spełnia równanie

$$(s + \mu - i\Omega)C_k(s) = (s - i\Omega)A_k(s) - \bar{R}_k(s). \quad (7.15)$$

Prawo sterowania (7.14) może być również przedstawione w następującej równoważnej postaci

$$v_k = \left( r_{1k}s + r_{2k} + \frac{r_{3k}}{s - i\Omega} \right) p_k, \quad (7.16)$$

gdzie współczynniki  $r_{1k}$ ,  $r_{2k}$  i  $r_{3k}$  są zdefiniowane przez równanie  $\bar{R}_k(s) = (r_{1k}s + r_{2k})(s - i\Omega) + r_{3k}$ .

Zwróćmy uwagę na podobieństwo otrzymanego prawa sterowania do standardowego regulatora PID. Zastąpienie operatora całkowania przez operator  $1/(s - i\Omega)$  gwarantuje, że



w miejsce kompensacji uchybu statycznego zapewniona jest kompensacja sygnałów postaci  $e^{\omega t}$ .

W praktyce równania (7.16) nie możemy jednak zastosować bezpośrednio, gdyż zmienne  $p$  i  $\dot{p}$  nie są mierzone. Wartość tych zmiennych może być jedynie oszacowana w przybliżeniu z równań

$$p \approx p_a = C^{-1}y, \quad \dot{p} \approx \dot{p}_a = C^{-1}\dot{y}. \quad (7.17)$$

Powstaje jednak pytanie, czy zastosowania prawa sterowania (7.16), w którym w miejsce  $p$  i  $\dot{p}$  użyto  $p_a$  i  $\dot{p}_a$  gwarantuje stabilność układu zamkniętego. Okazuje się, że nie. W pracy [48] pokazano, że zastosowanie kompensatora (7.16) z  $p$  wymienionym na  $p_a$  może spowodować niestabilność teoretycznie każdej niesterowanej postaci drgań. (W praktyce, ze względu na dodatkowe tłumienie występujące w układach pomiarowych i łożyskach magnetycznych rozstabilizowaniu mogą ulec jedynie niższe niesterowane postacie drgań). Zatem zaprojektowane prawo sterowania wymaga wprowadzenia pewnych korekt. Do tego celu, wykorzystamy znany rezultat z teorii sterowania odpornego.

Dla ustalonego  $k$  niech  $G_n(s) = 1/A_k(s)$ . Zwróćmy uwagę, że  $G_n(s)$  jest transmitancją pomiędzy  $v_k$  a  $p_{ak}$  w przypadku, gdy pominiemy wpływ niesterowanych postaci drgań. Rzeczywisty związek pomiędzy  $v_k$  i  $p_{ak}$  może być zapisany w postaci

$$p_{ak} = G_n(s)(1 + L(s))v_k. \quad (7.18)$$

Transmitancję  $G_n(s)$  możemy uznać za nominalną transmitancję obiektu, zaś transmitancję  $L(s)$  za transmitancję związaną z pominiętą dynamiką. Załóżmy, że zastosowaliśmy prawo sterowania postaci

$$v_k = -K(s)p_{ak}, \quad (7.19)$$

gdzie  $K(s)$  jest kompensatorem zaprojektowanym w taki sposób, by nominalny układ zamknięty był stabilny (tzn. by transmitancja  $(1 + KG_n)^{-1}$  nie miała biegunów w półpłaszczyźnie  $\Re[s] > 0$ ). W rozdziale 1 pokazaliśmy, że układ (7.18)–(7.19) jest stabilny, jeśli dopełnieniowa funkcja wrażliwości  $T_n = KG_n(1 + KG_n)^{-1}$  spełnia warunek

$$\|T_n(i\omega)L(i\omega)\| < 1 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (7.20)$$

Powyższy warunek wskazuje, że dopełnieniowa funkcja wrażliwości  $T_n$  powinna być kształtowana w taki sposób, by wartości  $T_n(i\omega)$  były małe w paśmie częstotliwości, w którym wartości  $L(i\omega)$  są duże. W naszym przypadku transmitancja  $L$  jest związana z dynamiką niesterowanych postaci drgań i  $L(i\omega)$  przyjmuje duże wartości w pobliżu częstotliwości własnych niesterowanych postaci drgań  $\omega_{n+1}, \omega_{n+1}, \dots$ . Wobec tego wystarczy zapewnić, aby  $T_n(i\omega)$  było małe w paśmie częstotliwości  $(\omega_{n+1}, \infty)$ . Uzyskamy to poprzez odpowiednie poszerzenia dynamiki kompensatora.

Niech  $1/F(s)$  będzie dolnoprzepustowym filtrem Butterwortha o rzędzie  $n_f$  i częstotliwości odcięcia  $\omega_f < \omega_{n+1}$  (np. dla  $n_f = 2$  jest  $F(s) = (s/\omega_f)^2 + 1,414s/\omega_f + 1$ ). Zatem

Parametry modelu wirnika						
$l$ [m]	$\Omega$ [1/s]	$EJ$ [Nm <sup>2</sup> ]	$A\rho$ [kg/m]	$b$ [Ns/m <sup>2</sup> ]	$h$ [Ns/m <sup>2</sup> ]	$a_0$ [m]
2	565	25886	10,81	200	70	0,0001

Rozmieszczenie			
$z_{c1}$	$z_{c2}$	$z_{b1}$	$z_{b2}$
0,75	1,25	0,5	1,5

Tabela 7.1.

wartości  $1/F(\omega)$  są małe dla  $\omega \geq \omega_{n+1}$ . Aby spełnić warunek (7.20), zaprojektujemy kompensator w taki sposób, aby filtr  $1/F(s)$  był częścią dopełnieniowej funkcji wrażliwości dla każdej sterowanej postaci drgań. W tym celu zażądajmy, żeby wielomian charakterystyczny układu zamkniętego dla  $k$ -tej postaci drgań był równy  $(s + \mu - i\Omega)C_k(s)F(s)$ . W ten sposób dochodzimy do następujących ostatecznych równań kompensatora

$$S_k(s)v_k = r_{1k}\dot{p}_{ak} + r_{2k}p_{ak} + r_{3k}e_k, \quad (7.21)$$

$$(s - i\Omega)e_k = p_{ak}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (7.22)$$

$$u = B^{-1}v, \quad p_a = C^{-1}y, \quad \dot{p}_a = C^{-1}\dot{y}, \quad (7.23)$$

gdzie wielomian  $S_k(s)$  i współczynniki  $r_{1k}$ ,  $r_{2k}$ ,  $r_{3k}$  są rozwiązaniami równania

$$(s - \mu - i\Omega)C_k(s)F(s) = (s - i\Omega)(A_k(s)S_k(s) - r_{1k}s - r_{2k}) - r_{3k}. \quad (7.24)$$

Zwróćmy uwagę, że obecnie dopełnieniowa funkcja wrażliwości dla  $k$ -tej postaci drgań jest równa

$$T_n(s) = \frac{(r_{1k}s + r_{2kk})(s - i\Omega) + r_{3k}}{(s + \mu - i\Omega)C_k(s)F(s)}.$$

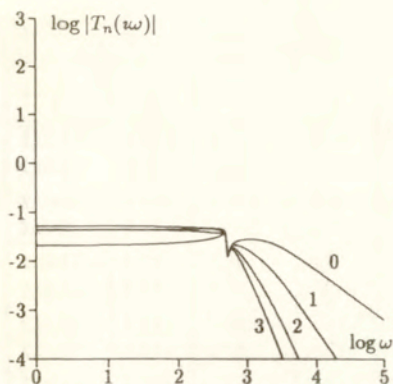
### Przykład numeryczny

Załóżmy, że wirnik jest pryzmatycznym stalowym wałem podpartym po obu stronach przy pomocy sztywnych podpór łożyskowych. Pomijając efekty giroskopowe opiszemy ruch wału w funkcji współrzędnej zespolonej  $p$

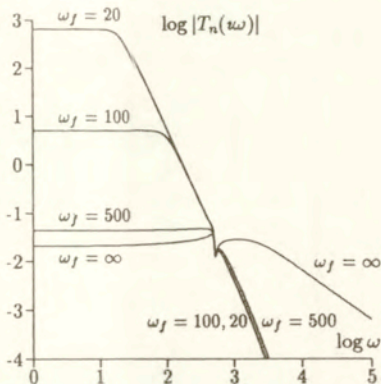
$$A\rho \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + (b + h) \frac{\partial p}{\partial t} + i h \Omega p + EJ \frac{\partial^4 p}{\partial z^4} = A\rho a \Omega^2 e^{i\Omega t} + \sum_{i=1}^n f_i \delta(z - z_{bi}).$$

Przyjmijmy, że mimośrodowość masy wirnika  $a(z)$  leży w płaszczyźnie  $XZ$  i zmienia się liniowo zgodnie ze wzorem  $a(z) = 2a_0(1 - z/l)e^{i\alpha}$ .

Parametry wirnika oraz rozmieszczenie płaszczyzn pomiarowych i sterujących podane są w tabelicy 7.1. Dla tych parametrów dostajemy:  $\mu_k = 10$ ,  $\kappa_k = 3.5$  dla wszystkich  $k$  oraz  $\omega_1 = 127$ ,  $\omega_2 = 507$ ,  $\omega_3 = 1140$ ,  $\omega_4 = 2028$ ,  $\omega_5 = 3169$ ,  $\omega_6 = 4564$  itd.



Rys. 7.2. Wykresy dopelnieniowej funkcji wrażliwości dla  $\omega_f = 500$  i  $n_f = 0, 1, 2, 3$ .



Rys. 7.3. Wykresy dopelnieniowej funkcji wrażliwości dla  $n_f = 3$  i  $\omega_f = 20, 100, 500, \infty$ .

Dwie pierwsze postacie drgań przyjmujemy jako postacie sterowane, a w obliczeniach uwzględnimy dodatkowo cztery dalsze postacie drgań. Z pierwszą postacią drgań związane są bieguny o wartościach:  $2,11 - i127,06$ ;  $-29,66 + i127,06$ , a z drugą bieguny o wartościach:  $-9,80 - i507,08$ ;  $-17,75 + i507,08$ . Widzimy, że pierwsza postać jest niestabilna. Aby zapewnić stabilność i odpowiedni poziom tłumienia sterowanych postaci drgań założymy, że  $\mu_{zk} = 30$ ,  $k = 1, 2$  i  $\mu = 30$ . Ta ostatnia wartość ma zapewnić odpowiedni poziom tłumienia drgań wymuszonych przez siły bezwładności pochodzące od niewyważenia.

Na rysunkach 7.2 i 7.3 przedstawiono, odpowiednio, wykresy modułu dopelnieniowej funkcji wrażliwości dla różnych wartości rzędu filtru Butterwortha i ustalonej częstotliwości odcięcia  $\omega_f = 500$  oraz dla różnych wartości częstotliwości odcięcia i ustalonego rzędu filtru  $n_f = 3$ . Widzimy, że im wyższy rząd filtru, tym mniejsza jest wartość  $T_n(i\omega)$  w zakresie wysokich częstotliwości. Z rysunku 7.3 wynika, że zależność  $T_n(i\omega)$  od  $\omega_f$  dla  $\omega_f \leq \Omega$  jest niewielka, natomiast  $T_n(i\omega)$  wyraźnie wzrasta wraz ze zmniejszeniem się  $\omega_f$  w zakresie niskich częstotliwości. Ta druga własność jest niekorzystna, gdyż powoduje wzrost wrażliwości układu sterowania na dokładność określenia parametrów sterowanych postaci drgań modelu wirnika. Sugeruje to, że częstotliwość odcięcia  $\omega_f$  nie powinna być mniejsza, niż  $\Omega$ . Wydaje się, że rozsądnie jest przyjąć  $\omega_f \approx \omega_n$ , gdzie  $\omega_n$  jest naturalną częstotścią najwyższej sterowanej postaci drgań. Ponadto, rząd filtru powinien być na tyle duży, aby kompensator nie wpływał istotnie na bieguny niesterowanych postaci drgań.

Tabela 7.2 zawiera bieguny układu zamkniętego dla różnych wartości rzędu filtru Butterwortha (kolumna II dla  $n_f = 0$ , kolumna III dla  $n_f = 1$  i kolumna IV dla  $n_f = 3$ ) oraz dla porównania bieguny układu zamkniętego przy założeniu, że zmienne  $p_1$  i  $p_2$  są

Bieguny układu zamkniętego									
A	B	I		II		III		IV	
		$\Re$	$\Im$	$\Re$	$\Im$	$\Re$	$\Im$	$\Re$	$\Im$
1	1	-30,0	-123,2	-30,0	-123,2	-30,0	-123,2	-30,0	-123,2
	2	-30,0	123,2	-30,0	123,1	-30,0	123,2	-30,0	123,1
2	3	-30,0	-506,2	-30,0	-506,2	-30,0	-506,2	-30,0	-506,2
	4	-30,0	506,2	-30,0	506,2	-30,0	506,1	-30,0	506,1
3	5	-15,5	-1140,8	-5,5	-1141,1	-16,0	-1136,1	-15,1	-1141,2
	6	-12,0	1140,8	7,5	1141,9	-2,7	1136,4	-12,0	1139,1
4	7	-14,8	-2028,2	-14,8	-2028,2	-14,8	-2028,2	-14,8	-2028,2
	8	-12,8	2028,2	-12,8	2028,2	-12,8	2028,2	-12,9	2028,2
5	9	-14,4	-3169,1	-26,1	-3169,0	-13,6	-3171,1	-14,4	-3169,1
	10	-13,1	3169,1	-27,7	3169,0	-15,1	3171,1	-13,1	3169,1
6	11	-14,2	-4563,5	14,8	-4563,7	-15,7	-4560,1	-14,2	-4563,5
	12	-13,3	4563,5	20,3	4563,8	-10,2	4560,2	-13,4	4563,5
	13	-30,0	565,0	-33,4	564,3	-33,6	564,5	-34,2	565,1
	14	-30,0	565,0	-30,1	564,9	-30,1	564,9	-30,1	564,9

Tabela 7.2.

mierzone bezpośrednio (kolumna I). Bieguny związane z modelem zaburzeń podane są w dolnej części kolumn. Bieguny związane z filtrem zostały pominięte. Zwróćmy uwagę, że we wszystkich przypadkach części rzeczywiste biegunów sterowanych postaci drgań są równe żądanym wartościom  $\mu_{zk}$  oraz części rzeczywiste biegunów związanych z modelem zaburzeń są równe żądanej wartości  $\mu$ . Tym niemniej, w przypadku, gdy  $n_f = 0$  (brak filtru) układ sterowania jest niestabilny, gdyż niestabilne są trzecia i szósta postać drgań. Dla filtru pierwszego rzędu układ zamknięty jest wprawdzie stabilny, lecz jeden z biegunów części niesterowanej leży zbyt blisko osi urojonej. W przypadku, gdy  $n_f = 3$ , wpływ kompensatora na niesterowane postacie drgań jest pomijalnie mały.

### Dyskretne prawo sterowania

Ze względu na swoją złożoność, adaptacyjne układy sterowania realizowane są zwykle przy użyciu układów komputerowych. Dlatego obecnie wyprowadzimy dyskretną wersję prawa sterowania (7.21)–(7.24). Do opisu układów dyskretnych zastosujemy wprowadzony w paragrafie 3.5 operator delta  $\delta = (z - 1)/\Delta$ , gdzie  $z$  jest operatorem przesunięcia i  $\Delta$  jest okresem próbkowania.

Załóżmy, że sygnały mierzone  $y$  i  $\hat{y}$  są próbkowane z okresem  $\Delta$ , a sygnał sterujący jest podawany poprzez ekstrapolator zerowego rzędu. Dla zapewnienia dobrej jakości sterow-

nia, częstotliwość próbkowania powinna być co najmniej kilka razy większa, niż częstotać własna najwyższej ze sterowanych postaci drgań  $\omega_n$ . Nasze rozważania rozpoczniemy od przedstawienia różnicowych równań ruchu wirnika. Zapišmy równania (7.7) w postaci macierzowej

$$\dot{x}_k = Hx_k + g_k(v_k + \Omega^2 a_k e^{i\Omega t}), \quad (7.25)$$

gdzie  $x_k = [p_k \dot{p}_k]^T$ , a postać macierzy  $H_k$  i wektora  $g_k$  wynika z porównania równań (7.7) i (7.25). Z równania (7.25) otrzymujemy następującą dyskretną wersję równania ruchu wirnika:

$$\delta x_k(\ell\Delta) = \tilde{H}_k x_k(\ell\Delta) + \tilde{g}_k v_k(\ell\Delta) + \Omega^2 \tilde{a}_k e^{i\Omega \ell\Delta}, \quad (7.26)$$

gdzie

$$\tilde{H}_k = (e^{H_k \Delta} - I)/\Delta, \quad \tilde{g}_k = H_k^{-1}(e^{H_k \Delta} - I)g_k/\Delta.$$

Zauważmy, że dla  $\Delta \rightarrow 0$  mamy  $(\tilde{H}_k, \tilde{g}_k) \rightarrow (H_k, g_k)$ .

Obecnie wyprowadzimy dyskretną wersję kompensatora (7.21)–(7.23). Przyjmijmy następującą notację. Niech  $C(s) = c_0(s - s_1) \dots (s - s_j)$  będzie dowolnym wielomianem zmiennej  $s$ . Przez  $\mathcal{D}_C(\delta)$  oznaczajmy będziemy wielomian zmiennej  $\delta$  równy

$$\mathcal{D}_C(\delta) = c_0 \left( \delta + \frac{1 - e^{s_1 \Delta}}{\Delta} \right) \dots \left( \delta + \frac{1 - e^{s_j \Delta}}{\Delta} \right).$$

Zauważmy, że jeżeli  $s = s_i$  jest biegunem obiektu ciągłego w czasie, to  $\delta = -(1 - e^{s_i \Delta})/\Delta$  jest biegunem obiektu dyskretnego, otrzymanego z w wyniku próbkowania sygnału wyjściowego i zastosowania ekstrapolatora. Zatem jeżeli  $s_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  są żądanymi biegunami układu zamkniętego ciągłego w czasie, to rozsądnie jest założyć, by w wersji dyskretniej bieguny układu zamkniętego były równe  $-(1 - e^{s_i \Delta})/\Delta$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Zažadajmy więc, by w przypadku dyskretnym wielomian charakterystyczny układu zamkniętego dla  $k$ -tej postaci drgań był równy  $(\delta + (1 - e^{(-\mu + i\Omega)\Delta})/\Delta) \mathcal{D}_{C_k F}(\delta)$ . W ten sposób dochodzimy do następujących równań kompensatora

$$\tilde{S}_k(\delta) v_k(\ell\Delta) = \tilde{r}_{1k} \dot{p}_{ak}(\ell\Delta) + \tilde{r}_{2k} p_{ak}(\ell\Delta) + \tilde{r}_{3k} e_k(\ell\Delta), \quad (7.27)$$

$$\left( \delta + (1 - e^{i\Omega\Delta})/\Delta \right) e_k(\ell\Delta) = p_{ak}(\ell\Delta), \quad (7.28)$$

gdzie  $\tilde{Q}_k$ ,  $\tilde{r}_{1k}$ ,  $\tilde{r}_{2k}$  i  $\tilde{r}_{3k}$  są rozwiązaniami równania

$$\left( \delta + (1 - e^{(-\mu + i\Omega)\Delta})/\Delta \right) \mathcal{D}_{C_k F}(\delta) = \left( \delta + (1 - e^{i\Omega\Delta})/\Delta \right)$$

$$\times \left( \det(I\delta - \tilde{H}_k) \tilde{Q}_k(\delta) - [\tilde{r}_{1k} \ \tilde{r}_{2k}] \text{adj}(I\delta - \tilde{H}_k) \tilde{g}_k \right) - [0 \ \tilde{r}_{3k}] \text{adj}(I\delta - \tilde{H}_k) \tilde{g}_k. \quad (7.29)$$

Łatwo się przekonać, że dla  $\omega_k \ll \Delta^{-1}$  jest  $\tilde{Q}_k \approx Q_k$  i  $\tilde{r}_{ik} \approx r_{ik}$  dla  $i = 1, 2, 3$ . Zatem dla niższych postaci drgań parametry kompensatora mogą być wyznaczone z dobrą dokładnością za pomocą równania (7.24).

## 7.4 Prawo sterowania dla ogólnego modelu wirnika

Ze względów ekonomicznych i technicznych liczba elementów wykonawczych (tzn. łożysk magnetycznych) jest zwykle mniejsza od liczby sterowanych postaci drgań. Dlatego w tym paragrafie zajmiemy się metodą sterowania drganiami wirnika w przypadku, gdy  $m < n$ . Ponadto, rozpatrzmy bardziej ogólny przypadek wirnika, w którym współczynniki tłumienia  $\mu_{ij}$ ,  $\kappa_{ij}$ ,  $i \neq j$  nie muszą być równe zero. Zajmiemy się jedynie prawem sterowania ciągłym w czasie, gdyż jego dyskretny odpowiednik otrzymuje się w ten sam sposób, jak pokazano w poprzednim paragrafie.

Rozpatrzmy następujący model ruchu wirnika

$$\ddot{p}_a + D\dot{p}_a + Mp_a = Bu + a\Omega^2 e^{i\Omega t} \quad (7.30)$$

otrzymany z (7.5) przez podstawienie  $p = p_a$  (dla uproszczenia pomijamy składniki związane z niesterowanymi postaciami drgań). Jest oczywiste, że przypadku  $m < n$  nie jest możliwe zapewnienie kompensacji niewyważenia dla wszystkich sterowanych postaci drgań. Zastosujemy więc obecnie inne podejście. Założmy, że jesteśmy zainteresowani w kompensacji drgań wywołanych niewyważeniem w  $m$  ściśle określonych punktach na długości wału o współrzędnych równych  $z_{s1}, \dots, z_{sm}$ . Amplituda drgań w tych punktach wynosi  $w = Qp_a$ , gdzie  $Q = [\psi_k(z_{sj})]_{n \times m}$ . Założmy, że

$$\text{rank}[Is^2 + Ds + M|B] = n \quad \forall s \in C, \quad (7.31)$$

$$\text{rank } Q(Is^2 + Ds + M)^{-1}B = m \quad \text{dla } s = i\Omega. \quad (7.32)$$

Pierwsze z powyższych założeń oznacza, że model wirnika (7.30) jest sterowalny. W przypadku, gdy macierze  $D$  i  $M$  są diagonalne i wszystkie bieguny wirnika są parami różne, to układ (7.30) jest sterowalny jeśli wszystkie wiersze macierzy  $B$  są niezerowe. Drugie założenie jest spełnione, gdy macierze  $Q$  i  $B$  są macierzami pełnego rzędu i macierz transmitancji pomiędzy  $u$  a  $w$  nie ma zer w punkcie  $s = i\Omega$ .

Założmy, że sygnał sterujący jest sumą dwóch składowych

$$u = u_1 + u_2, \quad (7.33)$$

z których pierwsza  $u_1$  ma na celu stabilizację wirnika i zwiększenie tłumienia drgań, natomiast druga  $u_2$  ma kompensować niewyważenie w wybranych punktach wirnika. Założmy najpierw, że  $u_2 = 0$ . Przez analogię do przypadku rozpatrywanego w poprzednim paragrafie zażądajmy, by kompensator generujący sygnał  $u_1$  zapewniał przesunięcie biegunów modelu wirnika w położenie określone przez zera wielomianów  $s^2 + 2s\mu_{zi} + \omega_i^2$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Wiadomo jednak, że zagadnienie przesuwania biegunów nie ma jednoznacznego rozwiązania w przypadku, gdy liczba wejść jest większa od 1. Okazuje się, że dla rozpatrywanego modelu

wirnika, niektóre z możliwych rozwiązań charakteryzują się bardzo dużymi wartościami współczynników kompensatora, co w praktyce prowadzi do nasycenia sygnałów sterujących. Przykładowo, wśród rozwiązań istnieją takie, które dla  $k = 1, 2, \dots, n$  zapewniają przesunięcie bigunów związanych z  $k$ -tą postacią drgań w położenie określone przez zera  $s^2 + 2s\mu_{zk} + \omega_k^2$  (i właśnie takie rozwiązania nas interesują), ale istnieją również takie, które przesuwają bieguny, powiedzmy, pierwszej postaci drgań w położenie określone przez zera  $s^2 + 2s\mu_{zn} + \omega_n^2$  i odwrotnie. Aby ominąć te trudności założymy, że

$$u_1 = d^T u', \quad (7.34)$$

gdzie  $u'(t) \in C^1$  i  $d \in C^m$ . W ten sposób dostajemy układ z jednym wejściem, dla którego istnieje jednoznaczne rozwiązanie problemu przesunięcia biegunów. Wektor  $d$  powinien być tak dobrany, by zapewnić dobrą sterowalność modelu wirnika z wejścia  $u'$ . W praktyce sprowadza się to do tego, by wartości bezwzględne współczynników wektora  $Bd$  były istotnie większe od zera. Dla układu (7.30), (7.33), (7.34) z  $u'$  traktowanym jako wejście zażądajmy, by bieguny układu zamkniętego były równe  $F(s) \prod_{i=1}^n (s^2 + 2s\mu_{zi} + \omega_i^2)$ . Podobnie jak w poprzednim paragrafie, wielomian  $F(s)$  jest mianownikiem dolnoprzepustowego filtra Butterwortha rzędu  $n_f$  i jego celem jest zabezpieczenie przed rozstabilizowaniem niesterowanych postaci drgań. Rozważmy następujące prawo sterowania

$$S(s)u' = r_1^T p_a + r_2^T p_a, \quad (7.35)$$

gdzie  $S$  jest wielomianem i  $r_1, r_2 \in C^m$ . Porównując wielomian charakterystyczny układu (7.30), (7.33)-(7.35) z wielomianem  $F(s) \prod_{i=1}^n (s^2 + 2s\mu_{zi} + \omega_i^2)$  dostajemy następujące równania dla  $S, r_1$  i  $r_2$

$$F(s) \prod_{i=1}^n (s^2 + 2s\mu_{zi} + \omega_i^2) = S(s) \det(s^2 I + sD + M) - (r_1 s + r_2) \text{adj}(s^2 I + sD + M) B d, \quad \text{deg } S = n_f. \quad (7.36)$$

Wyprowadzimy teraz prawo generujące sygnał  $u_2$ . Chcemy by sygnał  $u_2$  kompensował wpływ niewyważenia na wyjście  $w$  i jednocześnie, by nie przesuwiał biegunów układu zamkniętego (7.30), (7.33)-(7.35) (łącznie z biegunami części niesterowanej). Aby zmniejszyć wpływ sygnału  $u_2$  na niesterowane postacie drgań, przyjmijmy, że każda składowa sygnału  $u_2$  jest przepuszczana przez filtr  $1/F(s)$ . Zatem

$$F(s)u_2 = u_{2f}. \quad (7.37)$$

Założmy najpierw, że

$$u_{2f} = h \Omega^2 e^{i\Omega t}, \quad h \in C^m. \quad (7.38)$$

W stanie ustalonym wyjście  $w$  będzie równe

$$w = Q E^{-1}(i\Omega) (B F^{-1}(i\Omega) h + a) \Omega^2 e^{i\Omega t}, \quad (7.39)$$

gdzie  $E(s) = Is^2 + Ds + M - S^{-1}(s)Bd(r_1s + r_2)$ . Wobec tego całkowita kompensacja niewyważenia wirnika na wyjściu  $w$  zostanie zapewniona jeśli przyjmiemy

$$h = -(QE^{-1}(i\Omega)B)^{-1}QE^{-1}(i\Omega)F(i\Omega)a. \quad (7.40)$$

Sygnal  $u_2$  mógłby więc być generowany za pomocą równań (7.37) i (7.38) z wektorem  $h$  zdefiniowanym przez (7.40). Jednakże pokazaliśmy już wcześniej, że wymagałoby to całkowitej znajomości wektora  $a$  oraz kąta obrotu  $\Omega t$ . Aby tego uniknąć, do rekonstrukcji sygnału niewyważenia  $a\Omega^2 e^{i\Omega t}$  stosujemy odpowiednio zaprojektowany obserwator. Dzieląc równania modelu wirnika (7.30) przez operator  $1/(s + \mu - i\Omega)$  z  $\mu > 0$  dostajemy

$$a\Omega^2 e^{i\Omega t} = \frac{\mu}{s + \mu - i\Omega} [(Is^2 + Ds + M)p_a - Bu]. \quad (7.41)$$

Podstawiając (7.40) i (7.41) do (7.38) dostajemy na koniec

$$(s + \mu - i\Omega)u_{2f} = \mu F(i\Omega)u - \mu(QE^{-1}(i\Omega)B)^{-1}QE^{-1}(i\Omega)F(i\Omega)(Is^2 + Ds + M)p_a. \quad (7.42)$$

Całość prawa sterowania drganiami wirnika w przypadku  $m < n$  tworzą równania (7.33)–(7.37), (7.42).

## 7.5 Adaptacyjny układ sterowania drganiami wirnika

W czasie pracy wirnika pewne jego parametry mogą się zmieniać w trudny do przewidzenia sposób. W takich wypadkach możemy zastosować adaptacyjną wersję wyprowadzonego prawa sterowania, w której parametry modelu wirnika identyfikowane są na bieżąco.

W tym paragrafie proponujemy adaptacyjny algorytm sterowania drganiami wirnika w przypadku, gdy macierze  $B$  i  $C$  występujące w modelu wirnika są stałe i znane z góry. Z przypadkiem takim mamy do czynienia, gdy funkcje kształtu  $\psi_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  są znane i niezmiennie w czasie. Przypadek, w którym  $B$  i  $C$  nie są znane przedyskutowany zostanie krótko pod koniec tego rozdziału.

Łatwo się przekonać, że model wirnika z czasem ciągłym jest znacznie prostszy niż model wirnika z czasem dyskretnym. Rzeczywiście, w modelu dyskretnym wyprowadzonym w paragrafie 7.3 istnieje dwanaście nieznanymi parametrów, wchodzących liniowo do równania (7.26) (wszystkie składowe macierzy  $\tilde{H}_k$  i wektora  $\tilde{g}_k$  są zespolone i nieznanne), podczas gdy w modelu ciągłym (7.7) istnieją tylko trzy takie parametry  $\mu_k$ ,  $\kappa_k$  i  $\omega_k$ . Z tego powodu do identyfikacji parametrów wirnika wykorzystamy model z czasem ciągłym.

Przyjmując  $p_k = p_{ak}$  w równaniu (7.3) i pomijając wszystkie składniki związane z niesterowanymi postaciami drgań dostajemy

$$s^2 p_{ak} + 2 \sum_{i=1}^n (\mu_{ki}s + \kappa_{ki}s - i\Omega \kappa_{ki}) p_{ak} + \omega_k^2 p_{ak} = v_k + a_k \Omega^2 e^{i\Omega t}. \quad (7.43)$$



Zapiszemy równanie (7.43) w postaci  $\nu_k = \varphi_k^T \theta_k^*$ , w której  $\theta_k^*$  jest wektorem parametrów związanych z  $k$ -tą postacią drgań, natomiast  $\nu_k$  i  $\varphi_k$  są zmiennymi, które mogą być wyznaczone na podstawie sygnałów mierzonych. Zdefiniujmy zmienne przefiltrowane jako

$$\bar{p}_{ak} = \frac{1}{F_1(s)} p_{ak}, \quad \dot{\bar{p}}_{ak} = \frac{1}{F_1(s)} \dot{p}_{ak}, \quad \bar{v}_k = \frac{1}{F_1(s)} v_k, \quad (7.44)$$

gdzie  $1/F_1(s)$  jest filtrem o transmitancji  $(s/\omega' + 1)^{-1}$  i częstotliwości odcięcia równej w przybliżeniu częstości własnej najwyższej sterowanej postaci drgań  $\omega_n$ . Działając operatorem  $1/F_1(s)$  na obie strony równania (7.43) i uwzględniając (7.44) dostajemy

$$\bar{v}_k = \bar{\varphi}_k^T \theta_k^* - \frac{a_k \Omega^2}{F_1(i\Omega)} e^{i\Omega t}, \quad (7.45)$$

gdzie

$$\bar{v}_k = \bar{v}_k - \omega'(\dot{\bar{p}}_{ak} - \dot{\bar{p}}_{ak}), \quad (7.46)$$

$$\theta_k^* = [\mu_{k1} + \kappa_{k1} \dots \mu_{kn} + \kappa_{kn} \quad \kappa_{k1} \dots \kappa_{kn} \quad \omega_k^2]^T, \quad (7.47)$$

$$\bar{\varphi}_k = [2\dot{\bar{p}}_{a1} \dots 2\dot{\bar{p}}_{an} \quad -2t\Omega\bar{p}_{a1} \dots -2t\Omega\bar{p}_{an} \quad \bar{p}_{ak}]^T. \quad (7.48)$$

Filtracja zmiennych  $v_k$ ,  $p_{ak}$  i  $\dot{p}_{ak}$  miała na celu uniezależnienie zmiennych  $\bar{v}_k$  i  $\bar{\varphi}_k$  od sygnału  $\dot{p}_k$ , który nie jest mierzony. Załóżmy obecnie, że zmienne  $\bar{v}_k$ ,  $\bar{p}_{ak}$  i  $\dot{\bar{p}}_{ak}$  są próbkowane z okresem  $\Delta$ . Z równania (7.45) mamy

$$\bar{v}_k(\ell\Delta) = \bar{\varphi}_k^T(\ell\Delta) \theta_k^* - \frac{a_k \Omega^2}{F_1(i\Omega)} e^{i\Omega \ell \Delta}. \quad (7.49)$$

Odfiltrujemy z równania (7.49) składnik  $e^{i\Omega \ell \Delta}$ . Do tego celu zastosujemy filtr dyskretny

$$\frac{\delta + (1 - e^{i\Omega \Delta})/\Delta}{F_2(\delta)}, \quad (7.50)$$

gdzie  $F_2(\delta)$  jest wielomianem stabilnym rzędu 1. Działając operatorem (7.50) na obie strony równania (7.49) otrzymujemy ostatecznie

$$\nu_k(\ell\Delta) = \varphi_k^T(\ell\Delta) \theta_k^*, \quad (7.51)$$

gdzie

$$\nu_k(\ell\Delta) = \frac{\delta + (1 - e^{i\Omega \Delta})/\Delta}{F_2(\delta)} \bar{v}_k(\ell\Delta), \quad \varphi_k(\ell\Delta) = \frac{\delta + (1 - e^{i\Omega \Delta})/\Delta}{F_2(\delta)} \bar{\varphi}_k(\ell\Delta). \quad (7.52)$$

Filtr (7.45) został tak dobrany, by można było odfiltrować sygnał  $e^{i\Omega \ell \Delta}$ . Filtr ten powinien jednak jednocześnie przepuszczać sygnały o innych częstotliwościach. Dlatego przyjmujemy

$$F_2(\delta) = \delta + (1 - e^{(-\mu_1 + i\Omega)\Delta})/\Delta \quad (7.53)$$

dla pewnej małej stałej dodatniej  $\mu_1$ .

Obecnie opiszemy rekurencyjny algorytm do identyfikacji parametrów modelu wirnika. Przy wyprowadzaniu tego algorytmu musimy uwzględnić dwa zagadnienia. Po pierwsze, istnieje niska szansa, że wszystkie obliczenia niezbędne do wykonania jednej iteracji algorytmu identyfikacji i wyznaczenia parametrów kompensatora uda się przeprowadzić w czasie krótszym niż okres próbkowania. Istotnie, częstotliwość próbkowania powinna być kilkakrotnie większa, niż częstotliwość własna najwyższej sterowanej postaci drgań, a więc w praktyce może przyjmować wartości rzędu od 0,1 do 1 ms (patrz przykład numeryczny w paragrafie 7.3). Po drugie, szybkość zmian amplitudy drgań, która zależy głównie od współczynników tłumienia  $\mu_{kk}$  i  $\kappa_{kk}$  jest zwykle mała w stosunku do okresu próbkowania. Oznacza to, że jedynie dane pomiarowe zebrane w okresie dużo dłuższym niż  $\Delta$  zawierają istotną informację o współczynnikach tłumienia. Biorąc pod uwagę dwa powyższe czynniki możemy stwierdzić, że zwykle nie jest ani możliwe ani rozsądne uaktualniać oceny parametrów co każdy okres próbkowania. Przyjmijmy więc, że jedną iterację algorytmu adaptacji wykonywać będziemy co  $N$  okresów próbkowania dla odpowiednio dobranej liczby naturalnej  $N$ . Do identyfikacji parametrów  $\theta_k^*$  zastosujemy nieco zmodyfikowany algorytm najmniejszej sumy kwadratów. Założmy mianowicie, że oceny  $\hat{\theta}_k(j)$  otrzymane na podstawie danych zebranych do chwili czasu  $jN\Delta - 1$  są wybrane w taki sposób by spełnić warunek (poniżej dla większej czytelności pomijamy indeks  $k$  oznaczający numer postaci drgań)

$$\hat{\theta}(j) = \arg \min_{\theta \in \mathbb{R}^{2n+1}} \left\{ (\hat{\theta}(j-1) - \theta)^T \Gamma^{-1} (\hat{\theta}(j-1) - \theta) + \sum_{\ell=(j-1)N\Delta}^{jN\Delta-1} \|\nu(\ell\Delta) - \varphi^T(\ell\Delta)\theta\|^2 \right\}, \quad (7.54)$$

gdzie  $\Gamma$  jest pewną macierzą symetryczną dodatnią. Powyższy warunek prowadzi do następującego algorytmu

$$\hat{\theta}(j) = \left( I + \Gamma \sum_{\ell=(j-1)N\Delta}^{jN\Delta-1} \Re[\nu(\ell\Delta)\nu^*(\ell\Delta)] \right)^{-1} \left( \hat{\theta}(j-1) + \Gamma \sum_{\ell=(j-1)N\Delta}^{jN\Delta-1} \Re[\varphi(\ell\Delta)\varphi^*(\ell\Delta)] \right), \quad (7.55)$$

gdzie  $(\cdot)^*$  oznacza operację sprzężenia i transpozycji.

Przyjmijmy teraz, że sygnał wejściowy  $u$  ma postać

$$u(\ell\Delta) = u'(\ell\Delta) + \chi(\ell\Delta),$$

gdzie  $u'$  jest sygnałem generowanym za pomocą kompensatora opisanego w paragrafie 7.3 lub 7.4 z parametrami wyznaczanymi na bieżąco na podstawie ostatniej oceny wektora  $\theta_k^*$ , zaś  $\chi$  jest sygnałem pomocniczym. Zadaniem sygnału  $\chi$  jest pobudzenie sterowanych postaci drgań, tak aby zapewnić nadążanie ocen za parametrami wirnika. Przykładowo,

składowe sygnału  $\chi$  mogą być wzajemnie nieskorelowanymi pseudolosowymi szerokopasmowymi szumami, które – aby nie pobudzać niesterowanych postaci drgań – zostały prze-filtrowane przez dolnoprzepustowy filtr o częstotliwości granicznej równej w przybliżeniu  $\omega_n$ . Ponieważ sygnał  $\chi$  powoduje dodatkowe (obok niewyważenia) wymuszenie drgań wirnika, to jego amplituda powinna być możliwie mała, na tyle jednak duża by można było zarejestrować odpowiedź układu na ten sygnał. Gdy oceny parametrów osiągną stan ustalony, to proces identyfikacji i generowanie sygnału pomocniczego może być zawieszony do momentu, aż nastąpi znacząca zmiana parametrów wirnika.

## 7.6 Podsumowanie

Na zakończenie zwróćmy uwagę na następujące charakterystyczne cechy zaprojektowanego algorytmu sterowania.

- W algorytmie ograniczamy się do sterowania jedynie tymi postaciami drgań, dla których częstości własne są mniejsze lub niewiele większe od prędkości obrotowej wirnika.
- Dynamika kompensatora została w odpowiedni sposób poszerzona, tak aby ograniczyć wpływ sygnałów sterujących na niesterowane postacie drgań.
- Algorytm sterowania jest układem hybrydowym. Część algorytmu jest dyskretna w czasie i może być zaimplementowana przy pomocy układów komputerowych, jednak wygenerowanie zmiennych  $\bar{p}_{ak}$  i  $\bar{p}_{ak}^*$  wymaga zastosowania filtrów analogowych.<sup>1</sup>
- Zastosowana metoda parametryzacji wykorzystuje informację o znajomości niektórych parametrów obiektu.
- Uaktualnianie ocen parametrów i parametrów kompensatora odbywa się co pewien okres czasu, który jest dłuższy od okresu próbkowania.

Jednym z głównych ograniczeń algorytmu jest założenie o znajomości macierzy  $B$  i  $C$ . Zwróćmy jednak uwagę na to, że w przypadku, gdy macierz  $B$  jest nieznana możemy wektor ocen związanych z  $k$ -tą postacią drgań  $\theta_k^*$  poszerzyć o  $k$ -ty wiersz macierzy  $B$ . Większy kłopot sprawia nieznajomość macierzy  $C$ . W tym przypadku, uzyskaniu odpowiedniej parametryzacji może pomóc wykorzystanie pewnych charakterystycznych własności sterowanego obiektu. Dla szerokiej klasy wirników zachodzi warunek  $\mu_{ik}, \kappa_{ik} \ll \omega_k$ . Oznacza to, że wirnik jest układem silnie rezonansowym i widmo sygnału przemieszczenia wału  $p(z, t)$  skupione jest w pobliżu częstości własnych wirnika. Niech  $G_{fk}(s)$ ,  $k = 1, \dots, n$  będzie filtrem środkowo-przepustowym o paśmie przenoszenia obejmującym otoczenie częstotliwości

<sup>1</sup>Ponieważ sygnał wejściowy  $v_k$  podawany jest poprzez ekstrapolator zerowego rzędu, więc jest stały dla  $t \in [n\Delta, (n+1)\Delta]$ , a zatem  $\bar{v}_k(n\Delta) = \frac{1}{1-\alpha} v_k(n\Delta)$  dla  $\alpha = (1 - e^{-\omega'\Delta})/\Delta$ . Oznacza to, że zmienna  $\bar{v}_k(n\Delta)$  może być generowana za pomocą filtru cyfrowego.

$\omega_k$  i niech  $\hat{C}$  będzie oceną (niekoniecznie dokładną) macierzy  $C$ . Zdefiniujmy zmienne

$$p'_a = \text{diag}[G_{fk}(s)]\hat{C}^{-1}Cp.$$

Ponieważ widmo  $p_i$  jest skupione wokół  $\omega_i$ , a filtr  $G_{fk}(s)$  przepuszcza jedynie sygnały częstotliwościach zbliżonych do  $\omega_k$ , więc  $G_{fk}(s)p_i \approx 0$  dla  $i \neq k$ . Zatem

$$p'_{ak} \approx G_{fk}(s)\hat{c}_k p_k,$$

gdzie  $\hat{c}_k$  jest  $k$ -tym elementem na przekątnej macierzy  $\hat{C}^{-1}C$ . (Zakładamy, że ocena  $\hat{C}$  jest na tyle dobra, że  $\hat{c}_k \neq 0$ ). Przybliżone równanie wiążące zmienne  $p'_{ak}$  i sygnał sterujący będzie więc równe

$$\dot{p}'_{ak} + (\mu_k + \kappa_k)p'_{ak} - \tau\Omega p'_{ak} + \omega_k^2 p'_{ak} = \hat{c}_k^{-1}b_k G_{fk}(s)u + \tilde{a}_k \Omega e^{i\Omega t}, \quad (7.56)$$

gdzie  $b_k$  jest  $k$ -tym wierszem macierzy  $B$ . Zatem własności układu z wejściem  $u$  i wyjściem  $p'_a$  nie zależą w istotny sposób od elementów macierzy  $\hat{C}^{-1}C$  leżących poza główną przekątną. Do sterowania drganiami wirnika stosujemy kompensator

$$u = -K(s)p'_a$$

zaprojektowany na podstawie modelu (7.56) na przykład przy wykorzystaniu metody przesuwania biegunów. Algorytm adaptacyjny otrzymujemy identyfikując na bieżąco parametry  $\mu_k$ ,  $\kappa_k$ ,  $\omega_k^2$  i elementy wektora  $\hat{c}_k^{-1}b_k$  dla  $k = 1, \dots, n$  i na bieżąco uaktualniając parametry kompensatora  $K(s)$ .

## Rozdział 8

### Uwagi końcowe

W tym rozdziale zastanowimy się nad perspektywami rozwoju teorii adaptacyjnych układów sterowania. Na wstępie wskażemy możliwe kierunki dalszych badań w dziedzinie ściśle związanej z tematyką pracy. Następnie omówimy krótko ogólne trendy rozwojowe teorii oraz podamy kilka zagadnień dotychczas nierozwiązanych.

Z pewnością największą zaletą jednostajnego pobudzenia obiektu w adaptacyjnych układach sterowania jest zapewnienie odporności układu na zmianę parametrów obiektu oraz występujące w obiekcie zakłócenia i niemodelowaną dynamikę. Dowód odpornej stabilności dyskretnego adaptacyjnego algorytmu sterowania z modelem odniesienia przedstawiliśmy w rozdziale 5. Wadą otrzymanego rezultatu jest to, iż przy dużej częstotliwości próbkowania założenia dotyczące dopuszczalnej wartości amplitudy zakłóceń, szybkości zmian parametrów obiektu i wielkości niemodelowanej dynamiki są bardzo restrykcyjne. Przyczyną tego jest fakt, że rozważany algorytm sterowania nie wykorzystuje pewnych szczególnych własności układów próbkowanych. Z tego względu, celowe jest uogólnienie otrzymanych rezultatów na układy ciągłe w czasie lub na układy dyskretne opisane za pomocą operatora delta. Innym pożądanym kierunkiem badań jest poszukiwanie analogicznych rezultatów dla algorytmów zaprojektowanych na podstawie innych procedur projektowych, w tym na podstawie procedury przesuwania biegunów.

Odporność układu zależy oczywiście nie tylko od stopnia pobudzenia obiektu, ale również od rodzaju i parametrów zastosowanego algorytmu adaptacji. Przyszłe badania powinny więc iść również w kierunku poszukiwania metod poprawy odporności poprzez odpowiednie zaprojektowanie układu sterowania. Pewne wyniki badań należące do tego kierunku przedstawiliśmy w rozdziale 6. Zbadaliśmy wpływ stopnia pobudzenia obiektu ze zmiennymi parametrami na błąd identyfikacji w kilku wybranych algorytmach identyfikacji na bieżąco. Rezultaty te mogą posłużyć jako jedno z kryteriów doboru algorytmów identyfikacji przy projektowaniu regulatorów adaptacyjnych. Interesujące byłoby również przeprowadzenie analogicznych badań dla innych rodzajów algorytmów identyfikacji na bieżąco (w tym algorytmów z czasem ciągłym) oraz dla innych rodzajów identyfikowanych obiektów, a w szczególności obiektów z ograniczonymi zakłóceniami.

Pomimo, że w pracy rozważaliśmy jedynie układy jednowymiarowe, większość otrzymanych teoretycznych rezultatów można łatwo uogólnić na układy wielowymiarowe. Przy przechodzeniu od układów jednowymiarowych do układów wielowymiarowych pojawiają się pewne trudności natury praktycznej. Proces projektowania jednowymiarowych układów adaptacyjnych wymaga znajomości rzędu obiektu i względnego stopnia transmitancji obiektu. W przypadku wielowymiarowym należy znać indeksy sterowalności lub indeksy obserwowalności i tzw. macierz interakcji obiektu. Wielkości te nie mają zwykle bezpośredniej interpretacji fizycznej i są trudne do uzyskania w praktyce. Poza tym, obecnie dostępne metody parametryzacji obiektów wielowymiarowych wymagają często olbrzymiej liczby parametrów nawet jeśli liczba nieznanych fizycznych parametrów opisujących obiekt jest niewielka. Stąd wylania się następnym możliwym kierunkiem badań, polegający na poszukiwanie nowych metod parametryzacji obiektów wielowymiarowych, a w szczególności takich metod, które wykorzystywałyby fizyczne własności obiektów.

Przyszłe badania będą zapewne szły również w kierunku uogólnienie opracowanych metod sterowania adaptacyjnego na objekty nieliniowe i objekty z nieznanym opóźnieniem. Pierwsze prace dotyczące tej tematyki są już dostępne [130, 76, 134] i świadczą o możliwościach uzyskania dalszych interesujących rezultatów.

Ostanio podejmowane są próby wykorzystania przy projektowaniu regulatorów adaptacyjnych pomysłów pochodzących z teorii sterowania odpornego [88]. W nowych algorytmach sterowania oprócz parametrów obiektu identyfikowane są również charakterystyki częstotliwościowe niemodelowanej dynamiki. Przy wyznaczaniu sterowania wykorzystywane są zarówno oceny parametrów obiektu i oceny charakteru niemodelowanej dynamiki.

Innym ciekawym zagadnieniem jest opracowanie algorytmów identyfikacji na bieżąco dla innych rodzajów parametryzacji obiektu. Przykładowo, interesujące byłoby zaprojektowanie algorytmu identyfikacji parametrów modelu biliniowego postaci  $\nu = \varphi^T \theta_1^* + \theta_2^{*T} \Phi \theta_3^*$ .

## Dodatki

### A Lemat o inwersji macierzy

Rozważmy macierz nieosobliwą  $E$  podzieloną na podmacierze w następujący sposób  $E = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ . Jeżeli macierze  $A$  i  $D$  są kwadratowe i nieosobliwe, to można sprawdzić, że

$$\begin{aligned} E^{-1} &= \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & -(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Porównując poszczególne wyrazy dwóch postaci macierzy  $E^{-1}$  otrzymujemy własność

$$(A - BD^{-1}C)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$$

zwaną *lematem o inwersji macierzy*.

Lemat o inwersji macierzy pozwala zapisać równanie

$$P = (\Gamma^{-1} + \varphi\varphi^T)^{-1}, \text{ gdzie } \Gamma = \Gamma^T \text{ i } \varphi \text{ jest wektorem}$$

w postaci, w której nie występują odwrotności macierzy. Przyjmując  $A = \Gamma^{-1}$ ,  $B = \varphi$ ,  $C = \varphi^T$  i  $D = -1$  dostajemy (porównaj (2.19), (2.24))

$$P = \Gamma - \frac{\Gamma\varphi\varphi^T\Gamma}{1 + \varphi^T\Gamma\varphi}.$$

### B Macierz Sylwestera i wyróżnik wielomianów

Rozważmy parę wielomianów  $A(z) = a_1z^n + \dots + a_{n+1}$ ,  $B(z) = b_1z^m + \dots + b_{m+1}$ , w których co najmniej jeden ze współczynników  $a_1$  i  $b_1$  jest różny od zera. *Macierzą Sylwestera* dla pary wielomianów  $A, B$  nazywamy macierz

$$\Upsilon(A, B) = \left[ \begin{array}{cccc} a_1 & \cdots & a_n & \\ & \ddots & & \\ & & a_1 & \cdots & a_n \\ b_1 & \cdots & b_m & & \\ & \ddots & & & \\ & & b_1 & \cdots & b_m \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \vphantom{\begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_1 \\ b_1 \end{matrix}} \right\} m \\ \vphantom{\begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_1 \\ b_1 \end{matrix}} \right\} n \end{array}$$

Jeżeli wielomiany  $A$  i  $B$  są względnie pierwsze, to macierz  $\Upsilon(A, B)$  jest nieosobliwa [91]. Fakt ten jest równoważny twierdzeniu, że dla dowolnych wielomianów niezerowych  $C$  i  $D$  o stopniach  $\deg C < m$ ,  $\deg D < n$  wielomian

$$A(z)C(z) + B(z)D(z) \quad (*)$$

jest niezerowy. Istotnie, zwróćmy uwagę, że powyższe równanie możemy zapisać w postaci  $[z^{n+m-1} \dots 1] \Upsilon^T(A, B)h$ , gdzie  $h = [c_1 \dots c_m \ d_1 \dots d_n]$ . Ponieważ macierz  $\Upsilon(A, B)$  jest nieosobliwa, więc dla dowolnego niezerowego wektora  $h$  wielomian  $(*)$  jest niezerowy.

Wyznacznik macierzy Sylwestera nazywamy *rugownikami dwóch wielomianów* i oznaczamy przez  $\mathcal{R}(A, B)$ .

### C Lemat o stabilności układów liniowych

W analizie stabilności adaptacyjnych układów sterowania w rozdziale 3 wykorzystujemy następujący lemat, [40].

**Lemat C.1.** *Rozważmy układ dyskretny*

$$P(t, z)w(t) = Q(t, z)v(t), \quad w(t) \in \mathbf{R}^m, \quad v(t) \in \mathbf{R}^k,$$

gdzie  $P(t, z)$  i  $Q(t, z)$  są macierzmi wielomianowymi zmiennej  $z$  o współczynnikami zależnych od  $t$ . Załóżmy, że

1. istnieją liczby naturalne  $d_1, \dots, d_m, \bar{d}_1, \dots, \bar{d}_m$  takie, że

$$\text{diag}[z^{-d_1}]P(t, z) \text{diag}[z^{\bar{d}_1}] \Big|_{z=1} = \Phi(t)$$

dla pewnej jednostajnie nieosobliwej<sup>1</sup> macierzy  $\Phi(t)$ ,

2. współczynniki macierzy  $P(t, z)$  i  $Q(t, z)$  są jednostajnie ograniczone,
3. współczynniki macierzy  $P(t+1, z) - P(t, z)$  dążą do zera, gdy  $t \rightarrow \infty$ ,
4. zera wielomianu  $\det(P(t, z))$  leżą wewnątrz koła jednostkowego  $|z| < 1 - \varepsilon$  dla pewnego  $\varepsilon > 0$  i wszystkich wystarczająco dużych  $t$ .

Wówczas istnieje stała  $C$  taka, że

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|w(t)\| \leq C \limsup_{t \rightarrow \infty} \|v(t)\|$$

<sup>1</sup>Macierz kwadratową  $\Phi(t)$  nazywamy jednostajnie nieosobliwą, gdy  $\varepsilon \leq \Phi^T(t)\Phi(t) \leq M$  dla pewnych stałych dodatnich  $\varepsilon, M$  i każdego  $t$ .



## Bibliografia

- [1] B.D.O. Anderson. Exponential convergence and persistent excitation. In *Proc. 21st IEEE Conf. on Decision and Contr.*, pages 12–17, Athens, Greece, Dec. 1982.
- [2] B.D.O. Anderson, R.R. Bitmead, C.R. Johnson, P.V. Kokotovic, R. Kosut, I.M.Y. Mereels, L. Praly B.D. Riedle. *Stability of Adaptive System: Passivity and Averaging Analysis*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1986.
- [3] B.D.O. Anderson, C.R. Johnson. Exponential convergence of adaptive identification and control algorithms. *Automatica*, 18:1–13, Jan. 1982.
- [4] B.D.O. Anderson, R.M. Johnstone. Adaptive systems and time-varying plants. *Int. J. Contr.*, 37:367–377, 1983.
- [5] B.D.O. Anderson, R.M. Johnstone. Global adaptive pole positioning. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-30:11–22, Jan. 1985.
- [6] K.J. Åström. Design principles for self-tuning regulators. In *Methods and Application in Adaptive Control*, volume 24, pages 1–30, Berlin: Springer Verlag, 1980.
- [7] K.J. Åström. Analysis of Rohr's counterexample to adaptive control. In *Proc. 22nd IEEE Conf. on Decision and Contr.*, pages 982–987, San Antonio, Tex., 1983.
- [8] K.J. Åström. Interactions between excitation and unmodeled dynamics in adaptive control. In *Proc. 23rd IEEE Conf. on Decision and Contr.*, pages 1276–1281, Las Vegas, Nev., 1984.
- [9] K.J. Åström. Adaptive feedback control. *Proc. IEEE*, 75:185–217, 1987.
- [10] K.J. Åström, P. Hagander J. Sternby. Zeros of sampled systems. *Automatica*, 20:31–39, 1984.
- [11] K.J. Åström, T. Hägglund. Automatic tuning of simple regulators with specification on phase and amplitude margins. *Automatica*, 20(5):645–651, 1984.
- [12] K.J. Åström, T. Hägglund. Frequency domain approach to analysis and design of simple feedback loops. In *Proc. IFAC 9th World Congress*, Budapest, 1984.
- [13] K.J. Åström, B. Wittenmark. On self tuning regulators. *Automatica*, 9(2):185–199, Mar. 1973.
- [14] K.J. Åström, B. Wittenmark. *Adaptive Control*. Addison-Wesley, 1979.

- [15] E.W. Bay, S.S. Sastry. Persistency of excitation, sufficient richness and parameter convergence in discrete-time adaptive control. *Systems Contr. Lett.*, 6:153-163, 1985.
- [16] S. Boyd, S. Sastry. On parameter convergence in adaptive control. *Systems Contr. Lett.*, 3:311-319, Dec. 1983.
- [17] E.F. Camacho, J.M. Quero. Precomputation of generalized predictive self-tuning controllers. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 36(7):852-859, July 1991.
- [18] T. Cegrell, T. Hedqvist. Successful adaptive control of paper machines. *Automatica*, 11:53-59, 1975.
- [19] D.W. Clarke, P.J. Gawthrop. Self-tuning controller. *Proc. IEE-D*, 122:929-934, Sep. 1975.
- [20] D.W. Clarke, C. Mohtadi, P.S. Tuffs. Generalized predictive control, part 1: The basic algorithms, part 2: Extensions and interpretations. *Automatica*, 23(2):137-160, 1987.
- [21] J.J. Craig. *Adaptive Control of Mechanical Manipulators*. Adison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1988.
- [22] S. Dasgupta, B.D.O. Anderson, A.C. Tsoi. Input condition for continuous-time adaptive systems problem. In *Proc. 22nd IEEE Conf. on Decision and Contr.*, pages 211-216, San Antonio, Dec. 1983.
- [23] J.C. Doyle. Robustness of multiloop linear feedback systems. In *Proc. 17th IEEE Conf. on Decision and Contr.*, pages 12-18, 1979.
- [24] J.C. Doyle, K. Glover, P.P. Khargonekar, B.A. Francis. State-space solutions to standard  $\mathcal{H}^2$  and  $\mathcal{H}^\infty$  control problems. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-34(8):831-846, Aug. 1989.
- [25] G.A. Dumont, P.R. Belander. Self-tuning control of a titanium dioxide kiln. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-23:532-538, Aug. 1978.
- [26] B. Egardt. *Stability Analysis of Adaptive Controllers*, volume 20 of *Lecture Notes in Control and Information Science*. Springer Verlag, 1979.
- [27] B. Egardt. Unification of discrete-time adaptive control schemes. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-25:693-697, Aug. 1980.
- [28] H. Elliot, R. Cristi, M. Das. Global stability of adaptive pole placement algorithms. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-30:348-356, Apr. 1985.
- [29] H. Elliott. Direct adaptive pole placement with application to non-minimum phase systems. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-27:221-228, Mar. 1982.
- [30] H. Elliott, W.A. Wolovich. A parameter adaptive control structure for linear multivariable systems. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-27:240-352, Apr. 1982.
- [31] H. Elliott, W.A. Wolovich. Parameterization issues in multivariable adaptive control. *Automatica*, 20(5):533-545, 1984.

- [32] H. Elliott, W.A. Wolovich M. Das. Arbitrary adaptive pole placement for linear multivariable systems. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-29:221-228, Mar. 1984.
- [33] A.A. Feldbaum. Teoria dualnogo upravljenija—I—IV. *Avtomatica i Telemekhanika*, XXI(9,10) 1960, XXII(1), 1961.
- [34] T.R. Fortescue, L.S. Kershenbaum B.E. Ydsti. Implementation of self tuning regulators with variable forgetting factor. *Automatica*, 17:831-835, Dec. 1981.
- [35] J.-J.J. Fuchs. Discrete adaptive control: a sufficient condition for stability and application. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-25:940-946, Oct. 1980.
- [36] P.J. Gawthrop. Some interpretation of the self tuning controller. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 124:889-894, Oct. 1977.
- [37] F. Giri, M. M'Sadd, L. Dugard J.M. Dion. A cautious approach to robust adaptive regulation. *Int. J. Adaptive Contr. Signal Processing*, 2:273-290, 1988.
- [38] F. Giri, M. M'Sadd, L. Dugard J.M. Dion. Robust pole placement indirect adaptive control. *Int. J. Adaptive Contr. Signal Processing*, 2:33-47, 1988.
- [39] G.C. Goodwin, D.J. Hill M. Palaniswami. A perspective on convergence of adaptive control algorithms. *Automatica*, 20:519-531, Sep. 1984.
- [40] G.C. Goodwin, R. Lozano Leal, D.Q. Mayne R.H. Middleton. Rapprochement between continuous and discrete model reference adaptive control. *Automatica*, 22(2):199-207, Mar. 1986.
- [41] G.C. Goodwin, R.S. Long. Generalization of results on multivariable adaptive control. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-25:1241-1245, Dec. 1980.
- [42] G.C. Goodwin, P.J. Ramadge P.E. Caines. Discrete-time multivariable adaptive control. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-25:449-456, June 1980.
- [43] G.C. Goodwin, P.J. Ramadge P.E. Caines. Discrete-time stochastic adaptive control. *SIAM J. Contr. Optimiz.*, 19:829-853, 1981.
- [44] G.C. Goodwin, K.S. Sin. Adaptive control of nonminimum phase systems. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-26:449-456, June 1981.
- [45] G.C. Goodwin, E.K. Teoh. Persistency of excitation in the presence of possible unbounded signals. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-30:595-597, 1985.
- [46] A. Gosiewski. O aproksymacji krzywej przełączania w optymalnych serwomechanizmach przekaźnikowych. *Archiwum Automatyki i Telemekh.*, IV(1):3-22, 1961.
- [47] Z. Gosiewski. *Aktywne sterowanie drganiami wirników*. Wydawnictwo Uczelniane WSI w Koszalinie, 1989.
- [48] Z. Gosiewski, D. Janecki. An adaptive control method of flexible rotor vibration. In *Proc. 3rd ASME and JSME Symposium on Transport Phenomena and Dynamics in Rotating Machinery*, Honolulu, 1990.

- [49] C.J. Harris, S.A. Billings, editors. *Self-tuning and Adaptive Control: Theory and Applications*. London: Peter Peregrinus, 1981.
- [50] L. Hsu. Variable structure model-reference adaptive control (VS-MRAC) using only input and output measurement. The general case. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-35(11):1238–1243, Nov. 1990.
- [51] L. Hsu, R.R. Costa. Variable structure model-reference adaptive control (VS-MRAC) using only input and output measurement. *Int. J. Contr.*, 49(2), 1989.
- [52] K.J. Hunt, D. Sbarbaro, R. Żbikowski P.J. Gawthrop. Neural networks for control systems—a survey. *Automatica*, 28(6):1083–1112, Dec. 1992.
- [53] P.A. Ioannou, P.V. Kokotovic. *Adaptive Systems with Reduced Models*, volume 47 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Berlin: Springer Verlag, 1983.
- [54] P.A. Ioannou, P.V. Kokotovic. Instability analysis and improvement of robustness of adaptive control. *Automatica*, 20:583–594, Sep. 1984.
- [55] P.A. Ioannou, K.S. Tsakalis. A robust direct adaptive controller. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-20:1033–1053, Nov. 1986.
- [56] D. Janecki. On some generalization of Landau's theorem applicable to analysis of adaptive system. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-30(11), Nov. 1985.
- [57] D. Janecki. *Stabilność i zbieżność adaptacyjnych układów sterowania*. PhD thesis, Politechnika Warszawska, Warszawa, 1985.
- [58] D. Janecki. Globally stable and exponentially convergent adaptive control. *Int. J. Contr.*, 43(2):601–613, 1986.
- [59] D. Janecki. Direct adaptive pole placement for plants having purely deterministic disturbances. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-32(2):187–189, Feb. 1987.
- [60] D. Janecki. Persistency of excitation for continuous-time system—Time domain approach. *Systems Contr. Lett.*, 8:333–344, 1987.
- [61] D. Janecki. Remarks on persistency of excitation for nonminimal models of systems having purely deterministic disturbances. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-32:1123–1125, Dec. 1987.
- [62] D. Janecki. Model reference adaptive control using delta operator. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-33(8):771–775, Aug. 1988.
- [63] D. Janecki. New recursive parameter estimation algorithms with varying but bounded gain matrix. *Int. J. Contr.*, 47(1):75–84, 1988.
- [64] D. Janecki. Parameter convergence of adaptive control algorithms for plants with purely deterministic disturbances. *Control and Cybernetics*, 17(1):45–63, 1988.
- [65] D. Janecki. Stability analysis of Elliott's direct adaptive pole placement. *Systems Contr. Lett.*, 11:19–26, 1988.

- [66] D. Janecki. Robustness of adaptive control under persistent excitation assumption. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, przedłożone do druku, 1993.
- [67] D. Janecki. Local robust stability of MRAC under persistent excitation assumption. *Int. J. Adaptive Contr. Signal Processing*, 8(1), 1994.
- [68] D. Janecki, A. Gosiewski. Model matching adaptive controllers for minimum phase discrete time plants. *Control and Cybernetics*, 12(1):19-38, 1983.
- [69] D. Janecki, A. Gosiewski. On robustness and convergence of model reference adaptive control algorithms for plants with purely deterministic disturbances. In *Proc. 25th IEEE Conf. on Decision and Contr.*, pages 846-847, Athens, Greece, Dec. 86.
- [70] D. Janecki, Z. Gosiewski. Vibration control algorithms of flexible rotors. *J. of Sound and Vibration*, 156(2), July 1992.
- [71] R. Johansson. Parametric models of linear multivariable systems for adaptive control. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-32(4):303-313, Apr. 1987.
- [72] R. Johansson. Direct adaptive control. Global Lyapunov stability and exponential convergence. In *Proc. 25th IEEE Conf. on Decision and Contr.*, pages 846-847, Athens, Greece, Dec. 86.
- [73] R.M. Johnstone, C.R. Johnson, R.B. Bitmead B.D.O. Anderson. Exponential convergence of recursive least squares with exponential forgetting factor. *Systems Contr. Lett.*, 2:77-82, Aug. 1982.
- [74] T. Kaczorek. *Teoria wielowymiarowych układów dynamicznych*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1983.
- [75] C.G. Kallstrom, K.J. Åström N.E. Thorell, J. Eriksson L. Sten. Adaptive auto pilots for tankers. *Automatica*, 20:241-254, 1979.
- [76] I. Kanellakopoulos, P.V. Kokotovic A.S. Morse. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 36(11):1241-1253, Nov. 1991.
- [77] L. Keviczky, J. Hethessy, M. Hilger J. Kolostori. Self-tuning adaptive control of cement raw material blending. *Automatica*, 14:525-532, 1978.
- [78] T.W. Kraus, T.J. Myron. Self-tuning PID controller uses pattern recognition approach. *Control Engineering*, pages 106-111, June 1984.
- [79] G. Kreisselmeier. On adaptive state regulation. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-27:3-16, Feb. 1982.
- [80] G. Kreisselmeier. Adaptive control of a class of slowly time-varying plants. *Systems Contr. Lett.*, 8:97-103, 1986.
- [81] G. Kreisselmeier. An indirect adaptive controller with a self-excitation capability. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-34:524-528, 1989.

- [82] G. Kreisselmeier. Stabilized least-squares type adaptive identifiers. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-35(4):416-424, Apr. 1990.
- [83] G. Kreisselmeier, B.D.O. Anderson. Robust model reference adaptive control. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-31:127-133, Feb. 1986.
- [84] G. Kreisselmeier, K.S. Narendra. Stable model reference adaptive control in the presence of bounded disturbances. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-27:1169-1175, Dec. 1982.
- [85] P.R. Kumar. Convergence of adaptive control schemes using least-squares parameter estimates. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 35(4):416-424, Apr. 1990.
- [86] R. Kumar, J.B. Moore. Convergence of adaptive minimum variance algorithms via weighting coefficient selection. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-27(1):146-153, Feb. 1982.
- [87] H. Kwakernaak. Robust control and  $\mathcal{H}$ -optimization—tutorial paper. *Automatica*, 29(2):255-273, 1993.
- [88] R.O. Laimaire, L. Valavani, M. Athans G. Stain. A frequency-domain estimator for use in adaptive control systems. *Automatica*, 27(1):23-38, 1990.
- [89] I.D. Landau, R. Lozano. Unification of discrete time explicit model reference adaptive control design. *Automatica*, 17(4):593-611, 1981.
- [90] I.D. Landau, H.M. Silvera. A stability theorem with application to adaptive control. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-24:305-312, Apr. 1979.
- [91] S. Lang. *Algebra*. PWN, Warszawa, 1984.
- [92] Ph. De Larminat. Unconditional stabilizers for nonminimum phase system. *Systems Contr. Lett.*, 1:7-11, July 1981.
- [93] Ph. De Larminat. On the stability condition in adaptive control. *Automatica*, 20:425-431, July 1984.
- [94] T.H. Lee, K.S. Narendra. Robust adaptive control of discrete-time systems using persistent excitation. *Automatica*, 24(6):781-788, Dec. 1988.
- [95] M.A. Lelić, M.B. Zarrop. Generalized pole placement self-tuning controller. Part 1. Basic algorithm. *Int. J. Contr.*, 46(2):547-568, 1987.
- [96] L. Ljung. On positive real transfer functions and the convergence of some recursive schemes. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-22(4):539-551, Aug. 1977.
- [97] R. Lozano-Leal, G.C. Goodwin. A globally convergent adaptive pole placement algorithm without a persistency of excitation requirement. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-30:795-798, Aug. 1985.
- [98] I. Mareels. Sufficiency of excitation. *Systems Contr. Lett.*, 4:159-163, 1984.

- [99] G. Meyer, R. Su L.R. Hunt. Application of nonlinear transformations to automatic flight control. *Automatica*, 20:103-107, Feb. 1984.
- [100] R.H. Middleton, G.C. Goodwin. Improved finite word length characteristics in digital control using delta operators. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-31, Nov. 1986.
- [101] R.H. Middleton, G.C. Goodwin, D.J. Hill D.Q. Mayne. Design issues in adaptive control. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-33(1):50-57, Jan. 1988.
- [102] D.S. Mitrinović. *Elementarne nierówności*. PWN, Warszawa, 1972.
- [103] E. Mjolsness, C.D. Garrett W.L. Miranker. Multiscale optimization in neural nets. *IEEE Trans. on Neural Networks*, 2(2):163-270, Mar. 1991.
- [104] R.V. Monopoli. Model reference adaptive control with augmented error signal. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-19(5):474-484, Oct. 1974.
- [105] A.P. Morgan, K.S. Narendra. On the uniform asymptotic stability of certain linear non-autonomous differential equations. *SIAM J. Control Optimization*, 15:5-24, 1977.
- [106] A.S. Morse. Global stability of parameter - adaptive control systems. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-25:433-439, June 1980.
- [107] E. Mosca, S. Rocchi G. Zappa. A new dual adaptive control algorithm. In *Proc. 17th IEEE Conf. on Decision and Contr.*, pages 509-512, San Diego, Calif., 1978.
- [108] E. Moska, G. Zappa C. Manfredi. Multistep horizon self-tuning controller: the MUSMAR approach. In *Proc. IFAC 9th World Congress*, Budapest, Hungary, 1984.
- [109] K.S. Narendra, editor. *Adaptive and Learning Systems: Theory and Applications*. New York: Plenum Press, 1986.
- [110] K.S. Narendra, A.M. Annaswamy. Robust adaptive control in the presence of bounded disturbances. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-31:306-315, Apr. 1986.
- [111] K.S. Narendra, A.M. Annaswamy. A new adaptive law for robust adaptation without persistent excitation. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-32:134-145, Feb. 1987.
- [112] K.S. Narendra, P. Kudva. Stable adaptive schemes for system identification and control. *IEEE Trans. on Systems, Man and Cyber.*, SMC-4(6):542-560, Nov. 1974.
- [113] K.S. Narendra, Y.H. Lin L.S. Valavani. Stable adaptive controller design. Part II: proof of stability. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-25:440-448, June 1980.
- [114] K.S. Narendra, R.V. Monopoli, editors. *Applications of Adaptive Control*. New York: Academic Press, 1980.
- [115] K.S. Narendra, K. Parthasarathy. Identification and control of dynamical systems using neural networks. *IEEE Trans. Neural Networks*, 1(1):4-27, Mar. 1991.

- [116] K.S. Narendra, L.S. Valavani. Stable adaptive controller design—Direct control. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-23(4):570–583, Aug. 1978.
- [117] D.H. Nguyen, B. Widrow. Neural networks for self-learning control systems. *IEEE Control Systems Magazine*, pages 19–23, Apr. 1990.
- [118] A. Niederliński. *Systemy komputerowe automatyki przemysłowej, Tom 2 — Zastosowania*. Wydawnictwa Naukowo Techniczne, 1985.
- [119] A. Niederliński, J. Mościński, K. Arnold J. Kasprzyk. Self-tuning temperature control of an industrial PVC batch reactor. *Control and Cybernetics*, 13(4):361–373, 1984.
- [120] N. Nordström. Persistency of excitation in possible continuous-time systems, identification and indirect adaptive control. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 34(2):207–211, Feb. 1989.
- [121] R. Ortega, M.W. Spong. Adaptive motion control of rigid robots: a tutorial. *Automatica*, 25(6):877–888, 1989.
- [122] P.V. Osburn, H.P. Whitaker A. Kezer. New developments in the design of adaptive control systems. Paper No 61-39, Inst. Aeronautical Sciences, Feb. 1961.
- [123] K.A. Ossman, E.W. Kamen. Adaptive regulation of MIMO linear discrete-time systems without requiring a persistent excitation. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-32(5):397–404, May 1987.
- [124] L. Praly. Robust model reference adaptive control—Part 1: Stability analysis. In *Proc. 23rd IEEE Conf. on Decision and Contr.*, Las Vegas, Nev., 1984.
- [125] B.D. Riedle, P.V. Kokotovic. A stability-instability boundary for disturbances-free slow adaptation with unmodeled dynamics. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-30:1027–1030, Oct. 1985.
- [126] C.E. Rohrs, M. Athans, Valavani L G. Stain. Some design guidelines of discrete time adaptive controllers. *Automatica*, 20:653–660, Sep. 1984.
- [127] W. Rudin. *Analiza rzeczywista i zespolona*. PWN, 1986.
- [128] M.E. Salgado, G.C. Goodwin R.H. Middleton. Modified least-squares algorithm incorporating exponential resetting and forgetting. *Int. J. Contr.*, 47(2):477–491, 1988.
- [129] C. Samson, J.-J.J. Fuchs. Discrete adaptive regulation of nonnecessarily minimum phase systems. *Proc. IEE-D*, 128:102–108, Mar. 1981.
- [130] S.S. Sastry, A. Isidori. Adaptive control of linearizable systems. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 31(11):1123–1131, Nov. 1989.
- [131] N. Shimkin, A. Feuer. Persistency of excitation in continuous-time systems. *Systems Contr. Lett.*, 9:225–233, 1987.



- [132] K.S. Sin, G.C. Goodwin. Stochastic adaptive control using modified least squares algorithm. *Automatica*, 13:417-424, July 1982.
- [133] T. Sorsa, H.N. Koivo H. Koivisto. Neural networks in process fault diagnosis. *IEEE Trans. on Systems, Man and Cyber.*, 21(4):815-825, July 1991.
- [134] C. De Souza, G.C. Goodwin, D. Mayne M. Palaniswami. An adaptive control algorithm for lineal system having unknown time delay. *Automatica*, 24:327-342, 1988.
- [135] G. Stain. Adaptive flight control—A pragmatic view. In *Application of Adaptive Control*, eds. K.S. Narendra and R.V. Monopoli. New York: Academic Press, 1980.
- [136] G. Stain, M. Athans. The LQG/LTR procedure for multivariable feedback control design. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-32(2):105-114, Feb. 1987.
- [137] R. Tadeusiewicz. *Problemy biocyberetyki*. PWN, Warszawa, 1991.
- [138] K.S. Tsakalis, P.A. Ioannou. Adaptive control of linear time-varying plants. A new model reference controller's structure. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-34:697-705, Oct. 1989.
- [139] V.I. Utkin. Variable structure systems with sliding modes. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-22:212-222, 1977.
- [140] V.I. Utkin. Discontinues control systems. State of the art in theory and applications. In *Proc. 10th IFAC Word Congress*, Munich, Germany, 1987.
- [141] C.J. Wenk, Y. Bar-Shalom. A multiple model adaptive control algorithm for stochastic systems with unknown parameters. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-25:703-710, 1980.
- [142] J. Wieslander, B. Wittenmark. An approach to adaptive control using real time identification. *Automatica*, 7:211-217, 1971.
- [143] B. Wittenmark. An active suboptimal dual controller for systems with stochastic parameters. *Automatic Contr. Theory and App.*, 3:13-19, 1975.
- [144] B. Wittenmark, K.J. Åström. Simple self tuning controllers. In *Methods and Application in Adaptive Control*, volume 24, pages 21-30, Berlin: Springer Verlag, 1980.
- [145] B. Wittenmark, K.J. Åström. Practical issues in the implementation of self tuning controllers. *Automatica*, 20:595-606, Sep. 1984.
- [146] T. Yabuta, T. Yamada. Neural network controller characteristics with regard to adaptive control. *IEEE Trans. on Systems, Man and Cyber.*, 22(1):170-177, Jan. 1992.

## Wykaz oznaczeń i symboli

$s$	operator różniczkowania, zmienna przekształcenia Laplace'a, 16
$z$	operator przesunięcia, zmienna przekształcenia $Z$ , 16
$\delta$	operator delta - $\delta = (z - 1)/\Delta$ , 75
$\Delta$	okres próbkowania, 76
$G, G_n$	rzeczywista i nominalna transmitancja obiektu, 18, 19
$L, L_l, l_h$	transmitancja części niemodelowanej obiektu, 19, 20
$S, S_n$	rzeczywista i nominalna funkcja wrażliwości, 19, 19
$T, T_n$	rzeczywista i nominalna dopełnieniowa funkcja wrażliwości (transmitancja układu zamkniętego), 20, 64
$K$	transmitancja kompensatora, 18
$y, u$	wyjście i wejście obiektu, 18, 45
$A, B$	mianownik i licznik transmitancji obiektu, 45
$b_m$	współczynnik stojący przy najwyższej potędze zmiennej w wielomianie $B$ , 67, 112
$n$	rzęd obiektu, stopień wielomianu $A$ , 45
$n^*$	względny stopień transmitancji obiektu, różnica pomiędzy stopniami wielomianów $A$ i $B$ , 67
$d$	zakłócenie działające na obiekt, 18, 97
$u_c$	sygnał sterujący, sygnał zadany, 18
$U$	amplituda sygnału sterującego, 113
$e_o$	błąd regulacji, błąd nadążania wyjścia obiektu za sygnałem sterującym, 18
$1/A_m$	transmitancja modelu odniesienia, 67
$y_m$	wyjście modelu odniesienia, 22, 67
$e_m$	błąd nadążania wyjścia obiektu za wyjściem modelu odniesienia, 23
$\varphi$	wektor mierzony, wektor obserwacji, 24, 45
$\theta^*$	wektor nieznanych parametrów, 26, 45
$\Theta$	zbiór parametrów w przypadku niejednoznacznej parametryzacji obiektu, 46
$\hat{\theta}$	ocena parametrów, 22, 46
$\phi$	błąd identyfikacji, 52, 58
$\vartheta, \hat{\vartheta}$	wektor parametrów kompensatora, 25

$\varepsilon_m$	błąd modelowania przed wykonaniem iteracji algorytmu identyfikacji, 26, 64
$\varepsilon_p$	błąd modelowania po wykonaniu iteracji algorytmu identyfikacji, 52
$\mathcal{F}$	procedura projektowa, 25, 65
$C$	dziedzina procedury projektowej, 38, 65
$\lambda$	współczynnik zapominania, 47
$R, S, \hat{R}, \hat{S}$	wielomiany w równaniu kompensatora, 64, 65
$C$	żądany wielomian charakterystyczny układu zamkniętego, 64
$u_f, y_f, \bar{u}_f, \bar{y}_f$	zmienne przefiltrowane, 45, 70
$\mathcal{V}(m)$	klasa sygnałów wektorowych jednostajnie pobudzających, 84
$\mathcal{V}(m, T)$	klasa sygnałów wektorowych jednostajnie pobudzających z okresem pobudzenia $T$ , 84
$\mathcal{S}(m)$	klasa sygnałów skalarnych jednostajnie pobudzających rzędu $m$ , 85
$\mathcal{S}(m, T)$	klasa sygnałów skalarnych jednostajnie pobudzających rzędu $m$ z okresem pobudzenia $T$ , 85
$\chi$	sygnał pomocniczy, 95, 142
$\eta$	składowa niemodelowana, 107, 112
$m$	sygnał normujący 113
$\Re, \Im$	część rzeczywista i urojona liczby zespolonej
$\mathfrak{t}$	jednostka urojona
$L^2, L^\infty$	przestrzeń funkcji całkowalnych z kwadratem i przestrzeń funkcji ograniczonych
$l^2, l^\infty$	przestrzeń ciągów sumowalnych z kwadratem i przestrzeń ciągów ograniczonych
$R, C$	ciało liczb rzeczywistych i zespolonych
int	wnętrze zbioru
$O(\epsilon)$	mała rzędu $\epsilon$ , 77
adj( $D$ )	macierz dołączona do $D$
det( $D$ )	wyznacznik macierzy $D$
$\lambda_{\min}[D]$	najmniejsza wartość własna macierzy $D$
$\lambda_{\max}[D]$	największa wartość własna macierzy $D$
Tr( $D$ )	śląd macierzy $D$
rank $D$	rzęd macierzy $D$
$I$	macierz jednostkowa
$\mathcal{R}(\cdot, \cdot)$	rugownik pary wielomianów, 167
$\Upsilon(\cdot, \cdot)$	macierz Sylwestera dla pary wielomianów, 168
avg{ $\cdot$ }	wartość średnia sygnału, 104
deg	stopień wielomianu
dim	wymiar przestrzeni