Siebenter Artikel.

Lehre von den Proportionen

von Giovanni Vailati.[1])

I. Die Proportionen nach Euklid.

§ 1. Definitionen. Die Lehre von den Proportionen, wie sie sich in den Büchern V und VII Euklids auseinandergesetzt findet, geht von folgenden zwei Definitionen aus:

1. Zwei Größen A, B, sagt man, stehen in demselben Verhältnis, wie zwei andere C, D (*ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἶναι*), wenn man für ein beliebiges Paar ganzer Zahlen m, n, für die man $mA \lesseqgtr nB$ hat, beziehungsweise auch $mC \lesseqgtr nD$ hat.

2. Zwei Größen A, B, sagt man, haben zueinander ein größeres Verhältnis (*μείζονα λόγον ἔχειν*) als zwei andere C, D, wenn es möglich ist, zwei ganze Zahlen m, n so zu bestimmen, daß man

$$mA > nB$$

hat, ohne daß man zu gleicher Zeit

$$mC > nD$$

hat.

Es ist zweckmäßig, diese beiden Definitionen in Vergleich zu stellen mit der der Proportionen zwischen ganzen Zahlen, die von Euklid selbst (Buch VII, Def. 20) gegeben wird und die darin besteht, daß man sagt, vier Zahlen stehen in Proportion (*ἀνὰ λόγον*), wenn man die erste und die dritte von ihnen beziehungsweise aus der

1) Der Verfasser dieses ausdrücklich für die deutsche Übersetzung dieses Bandes geschriebenen Artikels hatte sich vorbehalten, während der Drucklegung noch einige Ergänzungen hinzuzufügen. Leider ist er im Jahre 1909 gestorben. Indem wir nun diese nachgelassene Abhandlung unseres Mitarbeiters und Freundes veröffentlichen, erschien es uns weder notwendig noch zweckmäßig, sie abzuändern, in der Überzeugung, daß sie auch in der gegenwärtigen Gestalt sehr gut dem Programm entspricht, das wir zusammen mit ihm für sie in bezug auf diesen Band der „Fragen“ festgelegt hatten.

zweiten und der vierten durch Multiplikation mit derselben ganzen Zahl oder durch Division durch dieselbe ganze Zahl erhält, oder indem man das eine und das andere macht (*ὅταν ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου καὶ ὁ τρίτος τοῦ τετάρτου ἢ ἰσάκις πολλαπλάσιος ἢ τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη ὦσιν*). Sie unterscheiden sich von dieser vor allem durch die Absicht, die Euklid gehabt zu haben scheint, bei ihnen jedes Zurückgehen auf die Zerlegung der von ihm behandelten Größen in gleiche Teile zu vermeiden.

Für diese Absicht kann man leicht den Grund begreifen, wenn man auf die Tatsache achtet, daß sich unter den betrachteten Größen der Geometrie solche, wie z. B. die Winkel, darbieten, für die die Zerlegung in gleiche Teile nicht immer allein durch Verwendung von Lineal und Zirkel ausgeführt werden kann, während es eine von Euklid stetig befolgte Regel ist, nicht irgendeine Figur oder geometrisches Gebilde in die Betrachtung einzuführen, von dem er nicht vorher allein unter Benutzung der genannten Instrumente eine Art von Konstruktion angegeben hat.

Diesem Übelstande, der sich der Übertragung der von Euklid für ganze Zahlen angenommenen Definition auf jede Art der in der Geometrie betrachteten Größen in den Weg stellt, würde man indessen leicht allein durch Einführung einer unbedeutenden Abänderung begegnen können.

In der Tat unterscheidet sich die Aussage, daß vier Zahlen a, b, c, d (oder vier Größen, die einer Zerlegung in gleiche Teile fähig sind) eine Proportion bilden, wenn es ein Paar ganzer Zahlen m, n von der Eigenschaft gibt, daß man zu gleicher Zeit

$$a = \frac{n}{m} c, \quad b = \frac{n}{m} d$$

hat, nur in der Form von der Aussage, daß die genannten Zahlen oder die genannten Größen eine Proportion bilden, wenn es ein solches Zahlenpaar gibt, daß man zu derselben Zeit

$$ma = nc, \quad mb = nd$$

hat.

Aber wenn dies genügt, eins der Hindernisse zu überwinden, die sich dem Aufbau einer allgemeinen Lehre von den Proportionen entgegenstellen, so bleibt ein anderes und wohl wichtigeres, das von der Tatsache abhängt, daß es unter den von der Geometrie betrachteten Größen deren solche gibt, die untereinander inkommensurabel sind, derartige nämlich, daß kein Vielfaches der einen sich irgendeinem Vielfachen der anderen als gleich ergibt.

Die Tatsache, daß zwei Größen, z. B. zwei Strecken a, b, inkommensurabel sind, hindert nicht, an ihnen und an einer beliebigen dritten Strecke diejenigen Operationen auszuführen, die in dem Falle, wo sie kommensurabel sind, zur Bestimmung einer vierten Strecke führen, die mit den drei gegebenen im Sinne der oben angegebenen Definition (2) eine Proportion bildet.

Und da die Gruppen von vier in dieser Weise erhaltenen Strecken wegen der Tatsache der Inkommensurabilität nicht aufhören, geometrische Eigenschaften zu besitzen, die mit denen kommensurabeler Strecken, die im Sinne der oben genannten Definition eine Proportion bilden, vollständig zusammenfallen, so stellt sich unvermeidlich das Bedürfnis nach einer neuen und allgemeineren Definition heraus, von der diese nicht ausgeschlossen sind.

Dieser Forderung genügen die beiden Definitionen, die, wie wir sahen, Euklid seiner allgemeinen Behandlungsweise zugrunde legt.

Ihre Einführung scheint Eudoxus von Knidos zu verdanken zu sein, dem die Tradition auch die Schöpfung eines großen Teils des Buches V, außer der Entdeckung der sog. Methode der „Exhaustion", zuschreibt.

Die Definition des Eudoxus in der einfacheren Form, die sie annimmt, wenn man auf die andere Forderung, die sich Euklid auferlegt hat, nämlich diejenige, die sich auf die Teilbarkeit in gleiche Teile bezieht, nicht Rücksicht nimmt, unterscheidet sich nicht sehr von derjenigen, die, in moderner Sprache ausgedrückt, besagt, daß vier Größen A, B, C, D eine Proportion bilden, wenn es nicht irgendeine rationale Zahl x gibt, die der einen oder der anderen der drei Bedingungen $A \gtreqless xB$ genügt, ohne daß man für sie beziehungsweise $C \gtreqless xD$ hat; oder mit anderen Worten, ohne daß die Klassen der rationalen Zahlen, die beziehungsweise durch die beiden Bedingungen $A > xB$, $A < xB$ bestimmt werden, mit den beiden Klassen zusammenfallen, die beziehungsweise durch die Bedingungen $C > xD$, $C < xD$ bestimmt werden (denn in einem solchen Falle könnte auch der Bedingung $A = xB$, vorausgesetzt, daß sie für irgendeine rationale Zahl erfüllt würde, nur von Zahlen genügt werden, die gleichzeitig auch der Bedingung $C = xD$ genügen).

§ 2. Über das sogenannte Postulat des Archimedes. Nachdem in dieser Weise die Definition der Proportion von irgendwelcher Beschränkung bezüglich der Kommensurabilität der Größen unabhängig gemacht ist, wird die einzige Bedingung, die zu fordern bleibt, damit die Definition für eine gegebene Kategorie von Größen einen Sinn hat, wenn vier von ihnen also eine Proportion bilden sollen, sein, daß von diesen vier Größen sowohl die beiden ersten wie die beiden letzten von der Eigenschaft sind, daß sie wirklich Vielfache zulassen, die den in der Definition in Betracht gezogenen Bedingungen genügen.

Diese Forderung findet sich gerade bei Euklid unter der Form einer Definition (4. des Buches VI) ausgesprochen: „Zwei Größen, sagt man, haben ein Verhältnis zueinander, wenn jede, eine hinreichende Anzahl mal genommen, die andere übertreffen kann“ (*λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν*).

Diese Definition hat, wie gerade die besseren Kommentare bemerken, nur die Aufgabe, zu erklären, daß man jedesmal, wenn man von Gleichheit oder Ungleichheit von Verhältnissen spricht, damit als vorausgesetzt annimmt, daß die Paare von Größen, die als Glieder eines jeden der behandelten Verhältnisse auftreten, dem genügen, was man jetzt „Postulat des Archimedes“ nennt, ein Postulat, das sich übrigens, wie wir sehen werden, auch von Euklid (im Beweise von Satz 8) unter der Form ausgesprochen findet, die es gewöhnlich in den modernen Darstellungen annimmt.

§ 3. Erste Gruppe von Sätzen. Wir kommen nun dazu, auf Grund der oben angegebenen Prämissen in der von Euklid bei der Entwicklung befolgten Reihenfolge einen kurzen Abriß der allgemeinen Lehre von den Proportionen zu geben. Der erste Satz, den er direkt aus der von ihm aufgestellten Definition ableitet, ist der folgende:

Wenn vier Größen A, B, C, D eine Proportion bilden, so bilden eine Proportion auch die vier Größen, die man erhält, wenn man beziehungsweise die Größen A, C und die Größen B, D mit zwei beliebigen ganzen Zahlen multipliziert (Satz 4, Buch V).

Diesem folgt eine Gruppe von vier Sätzen, von denen die beiden ersten (7, 8) aussagen, daß, wenn A eine Größe ist, die gleich oder größer als B ist, man immer, welches auch die Größe C sein mag, beziehungsweise

$$\frac{A}{C} \geqq \frac{B}{C}$$

und außerdem

$$\frac{C}{A} \leqq \frac{C}{B}$$

hat.

Die anderen beiden (9, 10) sind Umkehrungen von diesen.

Auch diese Sätze sind bei Euklid direkt von den oben schon wiederholt angeführten Definitionen der Gleichheit und Ungleichheit zweier Verhältnisse abgeleitet.

Von einem einzigen unter ihnen, von 8, werde ich hier den Beweis ausführlich wiedergeben, da er ein besonderes Interesse durch die Tatsache darbietet, daß er der einzige ist, in dem ausdrücklich auf das Postulat verwiesen wird, das, wie wir schon sahen, von Euklid durch die Definition 4 ausgedrückt wird.

Es seien A und B zwei verschiedene Größen und es sei $A > B$. Es handelt sich darum, zu beweisen, daß man, wenn C eine dritte Größe ist, auch

$$\frac{C}{B} > \frac{C}{A}$$

hat.

Zu diesem Zweck bestimme man eine ganze Zahl n von der Eigenschaft, daß man, wenn man mit ihr die kleinste der beiden Größen B und $B - A$ multipliziert, eine Größe erhält, die größer als C ist.

Man hat alsdann

$$(1) \qquad nB > C \quad \text{und} \quad (2) \quad n(A - B) > C.$$

Nun bestimme man das kleinste der Vielfachen von C, das größer als nB ist. Bezeichnet man dies mit kC, so können wir schreiben

$$(3) \qquad (k-1)C \leqq nB < kC,$$

wo k infolge von (1) größer als 1 sein muß.

Aus (3) folgert man

$$kC < nB + C,$$

und da man andererseits nach (2)

$$nA > nB + C$$

hat, so wird man

$$kC < nA$$

haben.

Es gibt also zwei ganze Zahlen k, n von der Eigenschaft, daß sie der Bedingung

$$kC > nB$$

genügen, ohne daß sie der anderen

$$kC > nA$$

genügen, was nach der Definition mit der Aussage

$$\frac{C}{B} > \frac{C}{A}$$

gleichbedeutend ist.

§ 4. Zweite Gruppe von Sätzen. Unabhängig von den soeben behandelten Sätzen geht Euklid, indem er auch die Definitionen von der Gleichheit und Ungleichheit der Verhältnisse zum Ausgangspunkte nimmt, zum Beweise der folgenden Sätze über:

Wenn zwei Verhältnisse einem dritten Verhältnis gleich sind, so sind sie auch unter sich gleich (Satz 11).

Wenn von zwei Verhältnissen das eine einem dritten gleich und das andere größer als dies ist, so ist das zweite auch größer als das erste (Satz 13).

Von dem zweiten dieser Sätze leitet er mit Hilfe der vorhergehenden Sätze 8 und 10 die folgenden beiden Sätze ab:

Wenn vier Größen eine Proportion bilden und die erste von ihnen größer als die dritte ist, so ist auch die zweite größer als die vierte (Satz 14).

Irgend zwei Größen haben dasselbe Verhältnis wie zwei beliebige Gleichvielfache von ihnen (Satz 15).

Von diesen Sätzen leitet er unter Benutzung von Satz 7 und 11 den Satz ab, der ausspricht, daß es in einer Proportion erlaubt ist, die Reihenfolge der Mittelglieder zu ändern.

Es ist darauf hinzuweisen, daß dieser Beweis von ihm auch mit Hilfe eines anderen Satzes geliefert wird, der von ihm vorher bewiesen wird, nämlich daß, wenn vier Größen a, b, c, d eine Proportion bilden, dies auch für a, b, $a + c$, $b + d$ der Fall ist (Satz 12).

Mit diesem letzten Satze stehen die anderen, die sich auf die bekannten Operationen des Zusammensetzens und Zerlegens (korrespondierende Addition und Subtraktion) beziehen, im Zusammenhang, nämlich die beiden folgenden Sätze:

„Wenn die Proportion

$$a:b = c:d$$

besteht, so bestehen auch die beiden weiteren

$$(a - b):b = (c - d):d \tag{17}$$

$$(a + b):b = (c + d):d, \tag{18}$$

ebenso der andere Satz, den man aus derselben Proportion

$$a:b = c:d$$

ableitet:

$$a:b = (a - c):(b - d).“$$

§ 5. Dritte Gruppe von Sätzen. Die letzte Gruppe von Sätzen, die im Buch V enthalten sind, wird von denen gebildet, die sich auf Folgerungen über zwei Proportionen beziehen, welche die Vorder- (oder Hinter-)glieder oder auch die Außen- (oder die Innen-) glieder gemeinsam haben.

Sowohl im ersten Fall, d. h. in dem der beiden Proportionen

$$a:b = d:e, \; b:c = e:f$$

als auch im zweiten, d. h. in dem der beiden Proportionen

$$a:b = e:f, \; b:c = d:e$$

beweist Euklid zunächst (Satz 20, 21), daß man für $a \gtreqless c$ auch beziehungsweise $d \gtreqless f$ hat.

Hieraus folgert er, daß jedes der genannten Paare von Proportionen zu der folgenden führt:

$$a:c = d:f \text{ (Satz 22, 23).}$$

Vermittels des vorgenannten Satzes 22, und mit Hilfe des Satzes über die Vertauschbarkeit der Mittelglieder (Satz 16) wird schließlich der weitere Satz (24) bewiesen, daß aus den beiden Proportionen:

$$a:b = d:e, \; c:b = f:e$$

die weitere

$$(a + c):b = (d + f):e$$

folgt.

Das Buch schließt mit dem Beweise des Satzes:

„Wenn vier Größen eine Proportion bilden, so ist die Summe der größten und der kleinsten von ihnen größer als die Summe der beiden anderen.“

§ 6. Proportionen von Strecken und Flächen. Mit der Anwendung der bis jetzt skizzierten allgemeinen Theorie auf die Geometrie und insbesondere auf Strecken, ebene Flächen, auf geradlinige und kreisförmige Umfänge beschäftigt sich Euklid in dem folgenden Buch VI.

Indem er sich auf die von ihm, wie wir sahen, im vorangehenden Buche aufgestellte Definition der Gleichheit der Verhältnisse stützt, beginnt er damit, zu beweisen, daß „die Flächen zweier Dreiecke (oder Parallelogramme), die gleiche Höhe haben, zueinander ein Verhältnis haben, das dem ihrer Höhen gleich ist“ (Satz 1).

Aus diesem Satze werden die Sätze über die Proportionalität der Seiten von Dreiecken, welche die Winkel bezüglich gleich haben, hergeleitet, indem er vom Nachweise der Proportionalität der Strecken ausgeht, die auf zwei Seiten eines Dreiecks durch eine Parallele zu der dritten Seite bestimmt werden (Satz 2).

Diese wird in der Tat durch Betrachtung der beiden Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe (Fig. 56) nachgewiesen, die zwischen der genannten Schneidenden und der Seite liegen, der jene parallel ist, nämlich indem man den vorangehenden Satz auf die beiden Paare von Dreiecken mit gleicher Höhe anwendet, die beziehungsweise aus einem dieser Dreiecke und dem bestehen, das von der Schneidenden und den beiden von ihr getroffenen Seiten gebildet wird. Man erhält so zwei Proportionen, die ein Verhältnis gemeinsam haben (nämlich das zwischen den Flächen der oben angegebenen Dreiecke), aus denen man auf Grund des schon vorher in der allgemeinen Lehre bewiesenen Satzes, der die Gleichheit zweier Verhältnisse, die einem dritten gleich sind, aussagt, die Gleichheit der beiden übrig bleibenden Verhältnisse folgert; diese sind gerade diejenigen, die zwischen den Strecken bestehen, die von der Schneidenden auf den Seiten des Dreiecks bestimmt werden.

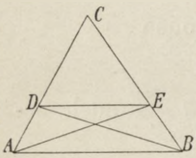

Fig. 56.

Vermittels desselben Satzes 1 und ebenso mit Hilfe des oben angeführten Lehrsatzes, der aussagt, daß zwei Verhältnisse, die einem dritten gleich sind, untereinander gleich sind, wird dann der folgende Satz und seine Umkehrung abgeleitet:

„Wenn zwei Parallelogramme (oder Dreiecke) äquivalent sind und ein Winkel des einen einem Winkel des anderen gleich ist, so bilden die beiden Paare von Seiten, welche die beiden Winkel einschließen, beziehungsweise die mittleren und die äußeren Glieder einer Proportion." (Satz 14, 15, 16).

Vermittels dieser letzten Sätze und gerade vermittels des Satzes, der die Äquivalenz der beiden Dreiecke aussagt, die einen Winkel gemeinsam haben, während die einschließenden Seitenpaare beziehungsweise die mittleren und die äußeren Glieder derselben Proportion bilden, beweist man, immer mit Hilfe von Satz 1, den von Euklid in der Weise ausgesprochenen Lehrsatz, daß „die Flächen zweier ähnlichen Dreiecke zu einander im quadratischen Verhältnis von dem ihrer entsprechenden Seiten stehen" (Satz 19).

Hierbei ist zu beachten, daß der Ausdruck „diese beiden Größen stehen im quadratischen Verhältnis von dem zweier anderen Größen", z. B. von dem von $a:b$, bei Euklid einfach verwendet wird, um anzugeben, daß die beiden ersten Größen ein Verhältnis haben, das gleich dem von a zu einer dritten Größe c ist, die folgender Bedingung: $a:b = b:c$ genügt. Allgemeiner sagt man, wenn man eine Reihe von n Größen hat, von denen jede die mittlere Proportionale zwischen den beiden benachbarten ist, daß die beiden äußersten von ihnen in dem $(n-1)$-fachen Verhältnis stehen von dem einer jeden von ihnen zur nachfolgenden (1).

Die in Satz 19 für ähnliche Dreiecke ausgesprochene Eigenschaft wird dann auf den Fall zweier beliebigen ähnlichen Vielecke ausgedehnt (Satz 20), und in gleicher Weise zeigt man vermittels des Satzes 19, daß, wenn vier Strecken eine Proportion bilden, dies auch für die Flächen der vier beziehungsweise über ihnen als homologen Seiten konstruierten ähnlichen Vielecke der Fall ist.

Was diesen Satz und seine Umkehrung betrifft, so erscheinen sie als Folgerungen des anderen, daß die quadratischen Verhältnisse gleicher Verhältnisse gleich sind, der seinerseits unmittelbar aus dem bald nachher angeführten Satze 22 des Buches V folgt.[1])

§ 7. Weitere Entwicklungen. Zusammengesetztes Verhältnis. Auf die vorangehende Gruppe von Sätzen stützt sich die Lösung der Aufgabe, eine Figur von gegebenem Flächeninhalt zu konstruieren, die einer gegebenen (vieleckigen) Figur ähnlich ist.

Sie wird ausgeführt, indem man zwei Rechtecke konstruiert, das eine der gegebenen Figur äquivalent mit einer ihrer Seiten als Grundlinie und das andere so, daß es dieselbe Höhe wie dieses und den gegebenen Flächeninhalt besitzt. Die mittlere Proportionale der Grundlinien dieser Rechtecke bildet die Seite, die in der gesuchten Figur der Seite der gegebenen Figur homolog ist, welche als Grundlinie des ersten Rechtecks gewählt ist.

Besondere Beachtung verdient der Satz:

„Die Flächen zweier Parallelogramme, welche die Winkel beziehungsweise gleich haben, stehen im zusammengesetzten Verhältnis von denen ihrer Seiten."

---

1) Wenn in der Tat die Proportion

$$a:b=c:d \tag{1}$$

besteht und x, y zwei Größen sind, die beziehungsweise den folgenden beiden Bedingungen genügen:

$$a:b=b:x \tag{2}$$

$$c:d=d:y \tag{3}$$

so wird man

$$b:x=d:y \tag{4}$$

haben, und aus (1) und (4) folgt unter Anwendung des schon angeführten Satzes 22 des Buches V

$$a:x=c:y.$$

Wenn man sagt, zwei Größen S, S' stehen zueinander in einem Verhältnis, das aus zwei Verhältnissen, z. B. aus den beiden Verhältnissen $a:b$ und $c:d$ zusammengesetzt ist, so bedeutet dies nach Euklid nichts anderes, als daß es eine dritte Größe S'' gibt (d. h. man bestimmen oder konstruieren kann) von der Art, daß man gleichzeitig hat:

$$a : b = S : S'', \tag{1}$$

$$c : d = S'' : S'. \tag{2}$$

Zu beachten ist, daß in dem Falle, wo die beiden gegebenen Verhältnisse $a : b$ und $c : d$ untereinander gleich sind, ihr zusammengesetztes Verhältnis nichts anderes als das „quadratische" Verhältnis ist, von dem schon im Vorhergehenden gesprochen worden ist; alsdann folgert man in der Tat aus (1) und (2)

$$S : S'' = S'' : S'.$$

Daß Verhältnisse, die aus beziehungsweise gleichen Verhältnissen zusammengesetzt sind, gleich sind, folgt unmittelbar aus dem schon mehrfach angewandten Satze (11, V), daß zwei Verhältnisse, die demselben dritten gleich sind, untereinander gleich sind. In der Tat, wenn man

$$a : b = a' : b',$$

$$c : d = c' : d'$$

hat, so erlauben die beiden Proportionen

$$a : b = S : S'',$$

$$c : d = S'' : S'$$

unmittelbar zu schließen:

$$a' : b' = S : S'',$$

$$c' : d' = S'' : S'.$$

Es ist oft zweckmäßig, die beiden Verhältnisse, deren zusammengesetztes Verhältnis man betrachtet, allein vermittels dreier Größen anzugeben, indem man nämlich das eine oder das andere, z. B. das Verhältnis $c : d$ durch das Verhältnis von b zu einer Größe x ersetzt, die durch die Bedingung

$$c : d = b : x$$

bestimmt ist.

(1) und (2) werden alsdann

$$a : b = S : S',$$

$$b : x = S' : S'',$$

woraus auf Grund des schon mehrfach angeführten Satzes 22 des Buches V

$$a : x = S : S''$$

folgt; dies kann man ausdrücken, indem man sagt, daß das Verhältnis der beiden Größen aus dem Verhältnis der ersten von ihnen zu einer beliebigen dritten Größe und aus dem Verhältnis dieser letzten zur zweiten zusammengesetzt ist.

Dieselbe Betrachtung ist unmittelbar auf den Fall von Verhältnissen anwendbar, die aus einer beliebigen Zahl anderer Verhältnisse zusammengesetzt sind.

§ 8. Anwendungen auf Aufgaben 2. Grades. Eine der wichtigsten geometrischen Anwendungen seiner allgemeinen Lehre von den Proportionen bietet uns Euklid in den folgenden Sätzen; diese beziehen sich auf die Erörterung und Lösung der Aufgabe:

Ein Parallelogramm zu konstruieren, von dem man die Fläche, die Winkel und das Verhältnis zwischen einer seiner Seiten und der Differenz zwischen der anderen Seite und einer gegebenen Strecke kennt.

Er unterscheidet zunächst die beiden Fälle, die auftreten können, nämlich den, in dem man eine solche zweite Seite des gesuchten Parallelogramms voraussetzt, die kleiner (ἐλλείπειν) als die gegebene Strecke sein soll, und den, in dem man umgekehrt voraussetzt, daß sie diese übertreffen (ὑπερβάλλειν) soll.

Der Lösung des ersten Falls ist ein Satz vorausgeschickt, der sich auf die Bedingungen bezieht, denen die gegebene Aufgabe genügen muß, damit sie lösbar ist.

Dieser Satz, der in moderne Sprache übertragen eine noch etwas verwickeltere Form als im Original annimmt, ist folgender:

Unter allen Parallelogrammen, die gleiche Winkel haben und von denen das Verhältnis einer der Seiten zu der Strecke gegeben ist, die übrig bleibt, wenn man die andere Seite von einer gegebenen Strecke subtrahiert, ist dasjenige von der größten Fläche, in dem die andere Seite der Hälfte der gegebenen Strecke gleich ist (Satz 27).

Der Beweis dieses Satzes (wie auch der der anderen der Gruppe, von der wir jetzt sprechen) stützt sich im wesentlichen auf die Betrachtung der beiden ähnlichen Parallelogramme, die man erhält, wenn man durch einen Punkt der Diagonale des Parallelogramms zu seinen Seiten die Parallelen zieht (Satz 24, 26); sein Gang ist der folgende.

Man konstruiert zunächst über der Hälfte AM der gegebenen Strecke AB das Parallelogramm $AMNC$ (Fig. 57); von diesem hat man zu beweisen, daß es von größerer Fläche ist als irgendein anderes, das den auferlegten Bedingungen genügt. Man verbindet die A gegenüberliegende Ecke N mit dem anderen Endpunkt B der gegebenen Strecke, und erkennt, daß NB der Ort der A gegenüberliegenden Ecken von allen Parallelogrammen ist, die den oben angegebenen Bedingungen genügen.

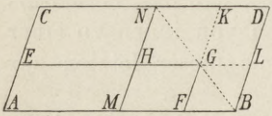

Fig. 57.

Man nimmt nun ein beliebiges von ihnen, z. B. $AEFG$, und es seien beziehungsweise H, L, K die Schnittpunkte der Seite EG mit MN, CD und der Seite GF mit ND. Die beiden Parallelogramme $MHGF$, $KGLD$ sind äquivalent, deshalb sind es auch die beiden anderen $MHLB$, $FBDK$, die man erhält, wenn man zu jenen bezüglich das Parallelogramm $FGLB$ hinzugefügt. Aber das Parallelogramm $MHLB$ ist gleich $AEHM$. Also ist dies letzte mit $FBKD$ äquivalent. Wenn man nun zu jedem dieser beiden das Parallelogramm $MHGF$ hinzufügt, so sieht man, daß das Parallelogramm $AFGE$ der Summe von $FBDK$ und $MHGF$ gleich und deshalb kleiner als $MNDB$ ist, d. h. als $AMNC$, wie man beweisen wollte.

Nachdem Euklid diesen Beweis vorausgeschickt hat, geht er, unter der Voraussetzung, daß die gegebenen Stücke der behandelten Aufgabe der für sie festgestellten Einschränkung genügen, zur Lösung der oben angegebenen Aufgabe über, die man, wie folgt, aussprechen kann:

„Über einem Teil AX einer gegebenen Strecke AB ein Parallelogramm von gegebener Fläche derart zu konstruieren, daß das Parallelogramm, das 'fehlt' (um die Figur zu einem Parallelogramm mit der ganzen Strecke AB als Grundlinie zu vervollständigen) einem gegebenen Parallelogramm ähnlich ist."

Zu diesem Zweck konstruiert er über der Hälfte MB der gegebenen Strecke AB ein Parallelogramm $MNCB$, das dem gegebenen Parallelogramm ähnlich ist. Dann konstruiert er mit der Ecke N und mit zwei Seiten, die beziehungsweise auf den Seiten NC, NM des Parallelogramms $MNCB$ liegen, ein zweites Parallelogramm $TNRL$, das auch dem gegebenen ähnlich ist (und von dem deshalb die N gegenüberliegende Ecke L auf die Diagonale BN des zuerst konstruierten Parallelogramms fallen wird) und als Fläche die Differenz zwischen der gegebenen Fläche und

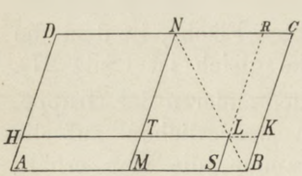

Fig. 58.

der des Parallelogramms $MNCB$ hat. Verlängert man nun die Seite RL, bis sie AB in S schneidet, und die Seite TL, bis sie AD in H schneidet, so wird man in $ASLH$ das gesuchte Parallelogramm haben.

Es besteht in der Tat aus zwei Parallelogrammen ($AMTH$, $MSLT$), die beziehungsweise zwei Parallelogrammen ($MBKT$, $LRCK$) äquivalent sind; diese machen zusammen das aus, was vom Parallelogramme $MNCB$ übrig bleibt, wenn man von ihm das Parallelogramm $TNRL$ wegnimmt, das nach Konstruktion gerade den Überschuß seiner Fläche über die gegebene Fläche darstellt.

In völlig analoger Weise verfährt Euklid, um die Aufgabe in dem anderen von uns schon angegebenen Falle zu lösen, in dem Falle nämlich, wo die Seite des gesuchten Parallelogramms, anstatt ein Teil der gegebenen Strecke zu sein, sie übertreffen (ὑπερβάλλειν) soll; in diesem Falle ist nicht mehr irgendeine Einschränkung für die gegebenen Stücke der Aufgabe notwendig (Satz 29).

Die allgemeine Lösung dieser letzten Aufgabe wird von ihm unmittelbar auf den wichtigen besonderen Fall angewandt, in dem die gegebene Fläche die des über der gegebenen Strecke konstruierten Quadrats und außerdem das gegebene Parallelogramm ein Quadrat ist.

Die Aufgabe kommt dann auf die hinaus, ein Rechteck zu konstruieren, dessen Fläche derjenigen des über einer gegebenen Strecke a konstruierten Quadrats gleich ist, während seine Höhe x dem Überschuß seiner Grundlinie über die gegebene Strecke gleich ist, mit anderen Worten auf die Aufgabe, die durch die Gleichung:

$$a^2 = x(a + x)$$

ausgedrückt ist; diese fällt mit der Aufgabe zusammen, eine Strecke im mittleren und äußeren Verhältnis (ἄκρον καὶ μέσον λόγον) zu teilen, einer Aufgabe, die sich bei Euklid auch unabhängig von der Lehre der Proportionen gelöst findet, allein durch Zurückgehen auf Betrachtungen der Äquivalenz (Buch II, Satz 11).

Dasselbe ist auch für die Aufgabe zu bemerken, die allgemeiner als diese letzte ist; diese ergibt sich, wenn man voraussetzt, daß das Parallelogramm, das unter den gegebenen Stücken der beiden vorhergehenden Aufgaben auftritt, ein Rechteck ist, nämlich die Aufgabe, die Seiten eines Rechtecks zu bestimmen, von dem man die Fläche und die Summe oder die Differenz der Seiten kennt. Diese beiden Aufgaben finden sich auch unabhängig von dem Zurückgehen auf Proportionen gelöst in dem Werke Euklids, das den Titel „Daten“ (Δεδόμενα) führt, in den Sätzen 84 und 85.

Die Verallgemeinerung, die Euklid, wie wir sahen, von ihnen vermittels der Verwendung der Proportionen erhält, besitzt in der Geschichte der Geometrie große Wichtigkeit, insofern sie in der Folge für Apollonius die Grundlage für seine Behandlung der Kegelschnitte geliefert hat. Die Namen selbst (ὑπερβολή, ἔλλειψις, παραβολή), die diese von ihm in Ersatz für diejenigen erhielten, die sie (wie man z. B. bei Archimedes sieht) vorher bezeichneten, bewahren noch heute eine Spur von dieser Art der Betrachtungen.[1])

§ 9. Volumen. Die Anwendungen der Lehre von den Proportionen zum Vergleich der Volumen von Prismen und Parallelepipeden finden sich, wie bekannt ist, im Buch XI der Elemente auseinandergesetzt.

Der Beweis der betreffenden Sätze bietet kein besonderes Interesse dar, da er in völlig analoger Weise zu dem vorgeht, der in dem Falle der in Buch VI betrachteten Figuren durchgeführt ist.

Von größerer Wichtigkeit sind die Anwendungen, die man im Buch XII von der sogenannten Methode der Exhaustion zur Bestimmung des Verhältnisses der Flächen zweier Kreise gemacht findet (Satz 2).

§ 10. Kritiken und Varianten des Textes. Die Lehre von den Proportionen, deren Darlegung in den grundlegenden Zügen wir nun schließen, ist mit Recht als einer der theoretisch-vollkommensten Teile der Elemente Euklids angesehen worden. Es seien die Worte eines der berühmtesten unter den Geometern angeführt, die dazu beigetragen haben, deren Geist ins richtige Licht zu setzen und sie gegen falsche Auslegungen zu schützen, die Worte von Barrow: There is nothing in the whole body of the Elements of a more subtile invention, nothing more solidly established and more accurately handled than the theorie of proportionals. (Barrow Lect. math. S. 336.)

Die kritischen Einwendungen, die gegen sie schon seit dem ersten Wiederaufleben der geometrischen Spekulationen in den neueren Zeiten erhoben worden sind, haben, soweit sie nicht durch grundlegende Mißverständnisse bezüglich der Aufgabe und des Zweckes verschuldet sind, die ihr in dem System der Euklidischen Darstellung zugewiesen waren, sämtlich die Eigenschaft gemeinsam, daß ihnen durch Abänderungen leicht begegnet werden kann, ohne daß es nötig ist, den inneren Zusammenhang der ganzen Lehre im geringsten zu schädigen.

---

1) Vgl. F. Schur, *Lehrbuch der analyt. Geometrie,* Einleitung. Leipzig 1898, auch Bertini, *Euclide Libro quinto*, Turino 1884.

Mehr als zu einer Erkennung von Mängeln führt uns der größte Teil von ihnen dazu, Schädigungen (Verstümmelungen, Erweiterungen, Vereinfachungen, Zusätze usw.) zu argwöhnen, welche die ursprüngliche Darstellung in den aufeinanderfolgenden Redaktionen und Übersetzungen bis zu denen hindurch, die bis zu uns reichen, über sich ergehen lassen mußte; zugleich geben sie uns die Art und Weise an, wie diese Schädigungen zu beseitigen sind.

Von diesen Verstümmelungen sind uns in mehr als einem Falle Spuren zurückgeblieben; diese gehen in klarer Weise hervor aus dem Vergleich des griechischen Textes, den wir, wie man glaubt, nach der Redaktion des Alexandriners Theon besitzen, mit den ersten lateinischen Übersetzungen, insbesondere mit der, die von Campanus (13. Jahrhundert) mit Hilfe arabischer Manuskripte hergestellt ist.

Ein charakteristisches Beispiel für die Tatsache wird uns von den Einwänden geliefert, die schon seit Clavius (1580) gegen den Beweis des Satzes 18 (über die Operation der Zusammensetzung der Glieder einer Proportion, nämlich den Übergang der Proportion $a : b = c : d$ zu der weiteren $(a + b) : b = (c + d) : d$) erhoben wurden.

Man hat bemerkt, daß er sich, wie man es im Originaltext dargelegt findet, auf eine Voraussetzung stützt, von der Euklid in keinem anderen Teile seiner Behandlung Gebrauch macht, und die auch in keiner Gestalt unter seinen Postulaten von ihm ausgesprochen erscheint.

Diese Voraussetzung ist die, daß, wenn drei Größen a, b, c gegeben sind (von denen man annimmt, daß die beiden ersten dem Postulat von Archimedes genügen), es immer eine vierte Größe d von der Eigenschaft gibt, daß man

$$a : b = c : d$$

hat.

Der Beweis, den Euklid von diesem Satze gibt, hat in der Tat die Form eines indirekten Beweises, indem er erkennen läßt, daß die vierte Proportionale zu den drei Größen: $a + b$, b, $c + d$, ihre Existenz vorausgesetzt, weder größer noch kleiner als d sein kann.

Von einigen Kommentatoren der Elemente (von Clavius z. B) wird es deshalb für notwendig gehalten, die ausdrückliche Angabe der vorgenannten Voraussetzung zwischen die grundlegenden Sätze (Definitionen, Postulate), die im Anfange von Buch V stehen, einzuschieben.

Hierdurch wurden andere nicht zufriedengestellt, da sie meinten, daß die Angabe nicht verdiene, als ein augenscheinlich klarer Satz angesehen zu werden, für den ein Beweis nicht notwendig und nicht möglich sei.

Zu diesen gehört Saccheri; nachdem dieser jene Angabe als ein wenig schönes (parum decorum) Postulat bezeichnet und von der Notwendigkeit gesprochen, von der Euklidischen Behandlungsweise wie von einem anderen „Makel" zurückzukommen, der dem gleichzustellen sei, der in der Zulassung des Parallelenpostulats besteht, schlägt er vor, die Angabe durch folgenden anderen Satz zu ersetzen, von dem er glaubt, daß es ihm gelungen sei, ihn zu beweisen.

„Das Verhältnis zweier beliebigen Größen ist immer (in dem von Euklid definierten Sinne) gleich, größer oder kleiner als das zweier beliebigen anderen Größen".

Andere endlich, unter diesen Robert Simpson in seiner Note zu den Elementen Euklids (Edinburg 1781, S. 332), tragen kein Bedenken zu erklären, der oben angeführte Beweis des Satzes 18 sei unecht und rühre von einer Interpolation Theons oder irgendeines anderen Autors her. Diese Ansicht wurde um so wahrscheinlicher gemacht durch die Tatsache, daß in der soeben angeführten lateinischen Ausgabe der Elemente, die von Campanus unter Benutzung der arabischen Übersetzung (die auf eine griechische Redaktion zurückgeht, die älter als die Theons war) veranstaltet wurde, ein anderer Beweis des Satzes (18) auftritt, in welchem man, anstatt auf das vorher angegebene indirekte Beweisverfahren zurückzugehen, einen analogen Weg zu dem einzuschlagen sucht, der von Euklid im Beweise des vorhergehenden Satzes (17) eingeschlagen worden ist, in dem ein Zurückgehen auf das Postulat von der Existenz der vierten Proportionale nicht notwendig ist.

Dieser von Campanus gebrachte Beweis, der zwar unvollständig und an sich, wie wir sehen werden, nicht schlüssig ist, braucht indes nur mit einer Einschränkung und Erweiterung versehen zu werden, um zu einem vollständig korrekten Beweise zu führen, der von jeder Voraussetzung, die nicht unter den von Euklid ausdrücklich ausgesprochenen enthalten wäre, unabhängig ist.

Er besteht in der Tat in der Bemerkung, daß auf Grund der Definition der Proportion selbst die vier Größen a, b, c, d, welche die betrachtete Proportion bilden, derartig sein müssen, daß man, wenn man irgendwie zwei Zahlen m, n wählt (von denen die erste stillschweigend größer als die zweite vorausgesetzt wird), immer

$$(m-n)c \gtreqless nd$$

hat, je nachdem man beziehungsweise

$$(m-n)a \gtreqless nb$$

hat.

Gleichbedeutend hiermit ist die Aussage, daß man

$$mc \gtreqless n(c+d)$$

haben muß, je nachdem man

$$ma \gtreqless n(a+b)$$

hat.

Um jedoch hieraus, wie es im Text des Campanus geschieht, schließen zu können, daß die vier Größen a, $a+b$, c, $c+d$ der Euklidischen Definition der Proposition genügen, bleibt noch zu prüfen, ob die obengenannte Bedingung außer für ein beliebiges Paar von Zahlen m, n, von denen die erste größer als die zweite ist, auch für die Fälle richtig bleibt, in denen man umgekehrt $m \leqq n$ hat.

Dies folgt unmittelbar allein aus der Bemerkung, daß man immer gleichzeitig $ma < n(a+b)$ und $mc < n(c+d)$ hat.

Es ist übrigens nicht unwahrscheinlich, daß dieser Zusatz, der genügt, um den von Campanus gebrachten Beweis zu einem völlig ausreichenden zu machen, von ihm (wie von anderen, die ihn auch weglassen, wie z. B. Tartaglia) als zu einfach angesehen worden ist, um ihn ausdrücklich anzugeben.

Es ist dies auch nicht der einzige Fall, in dem die Varianten, welche die von Campanus benutzten Texte darbieten, das wiederherzustellen gestatten, was mit aller Wahrscheinlichkeit einer echteren Euklidischen Darstellung entspricht, als es die des auf uns gekommenen griechischen Textes ist.

Dasselbe bestätigt sich auch für den Einwurf, der von Peletarius (Pelletier 1557) gegen den Beweis des Satzes 5 erhoben wurde, wegen der Tatsache, daß man in ihm stillschweigend die Teilbarkeit der einen der betrachteten Größen in eine beliebige Zahl gleicher Teile voraussetzt.

Und auch hier führt der Vergleich mit der Übersetzung des Campanus aus dem arabischen Text, in der dieser Mangel vermieden ist, zur Bekräftigung der schon an und für sich hinreichend wahrscheinlichen Annahme, daß die obengenannte Kritik viel mehr als Euklid irgendeinem seiner Verbesserer oder Vereinfacher, die Theon vorausgingen, entgegengehalten werden muß.

Ein anderer unvollkommener Beweis ist der des Satzes 10; dessen Fehler besteht, wie Simpson in seinem Verbesserungsvorschlag bemerkt, darin, ohne Beweis vorauszusetzen, daß ein Verhältnis nicht zur selben Zeit größer und kleiner als ein anderes sein kann.

Derselbe Simpson weist auch auf das Fehlen anderer Sätze hin, deren übrigens leicht zu erhaltende Beweise in den folgenden Sätzen vorausgesetzt werden, und schreibt mit Recht solche Auslassungen dem Umstande zu, daß sie von den Redakteuren des Euklidischen Textes für zu evident angesehen wurden, wenn man dem Worte Verhältnis den nur auf den kommensurabeler Größen anwendbaren arithmetischen Sinn zuschreibt.

§ 11. Fragen der Reihenfolge. Geht man von den oben genannten Bemerkungen bezüglich der allgemeinen Behandlungsweise der Proportionen (Buch V) zu denen über, die sich auf die geometrischen Anwendungen beziehen, so bietet sich eine dar, die sich auf einen Punkt bezieht, der nicht so sehr die Rechtmäßigkeit und Brauchbarkeit irgendwelcher besonderer Beweise, als vielmehr die Anordnung und die Beziehungen der Abhängigkeit zwischen den verschiedenen Teilen der Theorie betrifft.

Der Satz von Thales über die Proportionalität der Strecken, die auf zwei Seiten eines Dreiecks durch eine Parallele zur dritten bestimmt werden, ist, wie wir gesehen haben, von Euklid durch Zurückgehen auf Betrachtungen der Äquivalenz von Dreiecken bewiesen worden. Der direkte Beweis durch unmittelbares Zurückgehen auf die Definition proportionaler Größen (in analoger Weise zu der, die Euklid z. B. in dem Beweise der Proportionalität der Flächen zu den Grundlinien in Dreiecken von gleicher Höhe befolgt) macht eine Anordnung möglich, die zwar zur Euklidischen nicht wesentlich im Widerspruch steht, aber doch die Zusammenhänge der Abhängigkeit zwischen den verschiedenen in Buch VI bewiesenen Sätzen besser hervortreten läßt.[1])

Einer ersten Gruppe können die Sätze zugeteilt werden, die direkt aus der Definition der Gleichheit der Verhältnisse abgeleitet werden können, und dann die beziehungsweise von ihnen abhängenden Folgerungen, nämlich (indem wir uns der Kürze wegen auf die ebene Geometrie beschränken):

1. Der Satz des Thales und die damit zusammenhängenden Proportionen bezüglich gleichwinkliger Dreiecke, denen man die Proportion zwischen den durch das Schneiden zweier Sehnen eines Kreises bestimmten Strecken hinzufügen könnte,

1) Von diesen Anordnungen, die in viele moderne Texte aufgenommen sind, haben wir den Ursprung nicht feststellen können.

2. die Proportionalität der Dreiecke und Parallelogramme gleicher Höhe zu ihren Grundlinien, aus der man dann (indem man noch von der Eigenschaft der Transitivität der Gleichheit von Verhältnissen Gebrauch macht) die Proportion ableitet, zu der zwei äquivalente Dreiecke oder Parallelogramme mit einem gleichen Winkel Anlaß geben,

3. die Proportionalität der Bogen zu den Mittelpunktswinkeln im Kreise.

Die Vereinigung dieser Sätze in eine einzige Gruppe hat den Vorteil, die Tatsache klarzustellen, daß im Beweise der grundlegenden Sätze 1., 2., 3. (und der entsprechenden Sätze in der räumlichen Geometrie) ein und dasselbe Verfahren angewendet wird, das in allgemeinen Ausdrücken in folgender Weise formuliert werden kann.

Man hat zwei Klassen von Größen $A, B, C\ldots, A', B', C'$ von der Art, daß zwischen ihnen eine eindeutige und umkehrbare Beziehung hergestellt werden kann, welche die Eigenschaft besitzt, daß der Summe $A+B$ zweier Größen der einen die Summe $A'+B'$ der den Größen A, B beziehungsweise entsprechenden Größen A', B' entspricht.

Alsdann wird man erhalten, daß man für zwei beliebige Größen A, B der ersten Klasse und die entsprechenden A', B' der zweiten

$$A \gtreqless B$$

haben wird, je nachdem man

$$A' \gtreqless B'$$

hat.

Außerdem wird einem beliebigen Vielfachen einer Größe der ersten Klasse in der zweiten das Gleichvielfache der entsprechenden Größe entsprechen.

Dies genügt zu der Folgerung, daß, wenn A und B zwei Größen der ersten Klasse und A', B' die beiden entsprechenden der zweiten sind, die Proportion

$$A:B = A':B'$$

besteht.

Der Gruppe der Sätze, die in dieser Weise aus der Definition der Proportionalität abgeleitet werden können, läßt man eine andere folgen, die aus den Umkehrungen besteht.

Sie haben miteinander gemein, daß ihre Beweise sich in der Form indirekter Schlußfolgerungen darbieten, in denen man unter Benutzung der transitiven Eigenschaft der Proportionen zeigt, daß die Annahme der Unrichtigkeit des zu beweisenden Satzes dazu führen würde, die Existenz zweier verschiedener Größen zuzulassen, die beide vierte Proportionalen von drei gegebenen Größen sind.[1])

Endlich würde die Gruppe der Sätze kommen, die sich auf den Vergleich der Flächen von Dreiecken beziehen, die einen Winkel gemeinsam haben, oder von ähnlichen Vielecken, die Gruppe von Sätzen nämlich, die mit dem Begriff des zusammengesetzten Verhältnisses zusammenhängen.

Für diesen Zweck ist zu bemerken, daß die allgemeine Bestimmung dieses Begriffs, wenn sie sich bei Euklid auch nur in dem besonderen Falle der oben angeführten geometrischen Anwendungen ausgeführt findet, auch ihre natürlichste Stelle in der von jeder Anwendung in der Geometrie unabhängig entwickelten allgemeinen Darstellung finden würde.

II. Weitere Entwicklungen der Lehre.

§ 12. Über das Bestreben der griechischen Geometrie, sich von den Proportionen zu befreien. Die vorangehende Übersicht über den Inhalt des Buches VI der Elemente Euklids hat uns mehr als ein Beispiel von geometrischen Sätzen geboten, die von ihm, obwohl sie ihrem Wortlaut nach von jedem Begriff der Proportion und des Verhältnisses in dem von Euklid diesem Worte beigelegten Sinne unabhängig sind, dennoch durch Zurückgehen auf Betrachtungen, die auf Eigenschaften proportionaler Größen beruhen, bewiesen werden.

Unter diesen Sätzen finden sich sogar solche, die in den Büchern Euklids, die den von uns besprochenen vorangehen, auf einem durchaus verschiedenen Wege bewiesen werden, welcher den Gebrauch der in Buch V entwickelten Theorie nicht einschließt.

Es ist dies der Fall z. B. für den Satz des Pythagoras, von dem Euklid zunächst in Buch I den bekannten Beweis, dessen Entdeckung ihm zugeschrieben wird, und dann später, wie wir sahen, in Buch VI einen andern Beweis gibt, der mit dem Vorzug größerer Einfachheit auch den weiteren verbindet, unmittelbar zu einer Folgerung von viel allgemeinerer Tragweite zu führen.

Dasselbe gilt auch von dem Beweise für die Konstruktion der Seite des regelmäßigen Zehnecks, der zuerst (Buch II) durch alleiniges Zurückgehen auf Betrachtungen der Äquivalenz von Rechtecken ge-

1) Es ist bemerkenswert, daß der Satz des Thales zwei Umkehrungen zuläßt; diejenige, die bedeutungsvoller ist, leitet man von der anderen durch die Operation des „Zusammensetzens“ (korresp. Addition) ab, aber man kann sie auch unabhängig beweisen, indem man sich darauf stützt, daß es nur eine einzige Zerlegung einer Größe in Teile gibt, die zwei gegebenen proportional sind.

führt wird und in der Folge, wie wir sahen (Buch VI), als besonderer Fall eines anderen erscheint, der im wesentlichen auf den Eigenschaften ähnlicher Dreiecke beruht.

Es fehlen auch nicht Fälle von Sätzen, die, obwohl sie sehr viel leichter und direkter durch Anwendung der Lehre von den Proportionen beweisbar sind, von Euklid nicht durch Zurückgehen auf diese erhalten werden, sondern auf einem sehr viel längeren und mühevolleren Wege, auf dem ein solches Zurückgehen vermieden wird.

Ein charakteristisches Beispiel hierfür bildet der Satz über die Äquivalenz der Rechtecke, die aus den durch Schneiden zweier Sehnen eines Kreises bestimmten Strecken bestimmt werden, ein Satz, den Euklid von dem Satze des Pythagoras ableitet.

Es ist nicht unwahrscheinlich, daß die Bevorzugung, die Euklid in diesen Fällen den vom Begriff der Proportion unabhängigen Beweisen zuteil werden läßt, wie Zeuthen behauptet, eine Spur oder ein teilweises Weiterleben von Beweisverfahren darstellt, auf welche die griechischen Geometer zurückzugehen gezwungen waren, bevor die Einführung der allgemeinen Lehre von den Proportionen, die, wie wir sahen, den unmittelbaren Vorgängern Euklids zu verdanken ist, die Beschränkungen beseitigte, die den Begriff des Verhältnisses auch auf den Fall inkommensurabeler Größen auszudehnen hinderten.

Von der besonderen Ausbildung, welcher die Lehre der Äquivalenz von den griechischen Geometern unterworfen worden war gerade auf Grund der für sie bestehenden Notwendigkeit, sie auf die Lösung von Fragen anwenden zu müssen, die später allein durch Zurückgehen auf Betrachtungen von Verhältnissen und Proportionen behandelt werden konnten, sind übrigens auch in den Schriften anderer Schriftsteller wie Apollonius und Pappus bemerkenswerte Züge zurückgeblieben, wie wir später festzustellen Gelegenheit haben werden.

§ 13. Giordano Vitale da Bitonto. Die Untersuchungen, die darauf gerichtet waren, in den geometrischen Beweisen soweit als möglich die Betrachtungen zu benutzen, die sich auf Flächenvergleichung beziehen, in Bevorzugung vor denen, die den Begriff des Verhältnisses oder der Proportion einschließen, mußten den größten Teil ihres Interesses mit dem Verschwinden des Beweggrundes, der sie hervorgerufen hatte, verlieren.

Es ist ein ganz anderer Beweggrund, unter dem mit dem Wiederaufleben der geometrischen Spekulationen das Bestreben wieder auftritt, an die Stelle der Verfahrungsweisen, vermittels deren Euklid seine allgemeine Lehre von den Proportionen auf den Beweis von geometrischen Sätzen anwendet, andere Verfahrungsweisen zu setzen, in denen diese letzteren in einer Weise erhalten werden können, die direkter ist und weniger den Einwürfen unterworfen ist, welche gegen die allgemeine Theorie oder gegen irgend welche ihrer Teile erhoben werden können.

Zu einem ersten Versuch nach dieser Richtung scheint der Wunsch geführt zu haben, der zweifelsohne unechten (sie fehlt in der Tat im Text des *Campanus* und ist übrigens von Euklid in keinem Beweise verwendet worden) Definition des „zusammengesetzten Verhältnisses“ einen Sinn zu geben, die sich am Anfange von Buch VI findet. In ihr ist gesagt, daß man unter einem „aus zwei anderen zusammengesetzten“ Verhältnis das Verhältnis verstehen soll, das sich aus der Multiplikation ihrer bezüglichen Werte (*πηλικότητες*) ergibt. In dem Bestreben zu bestimmen, was man unter dem Produkt zweier Verhältnisse in dem Falle verstehen müsse, wo die Größen, zwischen denen sie bestehen, nicht kommensurabel sind, wurde Vitale Giordano da Bitonto[1]) darauf geführt, sich zu fragen, ob es nicht möglich wäre, wenigstens für den Fall der Strecken den Worten „Verhältnis“ und „Produkt“ einen Sinn zu geben, der auf rein geometrischen Betrachtungen beruht, unabhängig also von irgend welcher Annahme über die Kommensurabilität oder Inkommensurabilität der in Frage kommenden Strecken.

Zu dem Zweck schlägt er in seinem Euclide restituto vor, als „Produkt“ zweier Strecken a, b die Strecke x zu definieren, die durch folgende Bedingung bestimmt ist:

$$x : a = b : 1$$

(wo 1 eine beliebige als Einheit festgelegte Strecke bedeutet), und als „Quotient“ zweier Strecken a, b, die Strecke, die durch die Bedingung:

$$a : b = y : 1$$

bestimmt ist.

Die Produkte und Quotienten zweier beliebigen Strecken können in dieser Weise als andere Strecken definiert werden, die, falls die ersten gegeben sind, durch Zurückgehen auf den Satz des Thales konstruierbar sind (dadurch nämlich, daß man die als Einheit gewählte Strecke und die beiden gegebenen Strecken in geeigneter Weise auf den beiden Schenkeln eines Winkels vom Scheitelpunkte aus abträgt und durch einen der so erhaltenen Punkte eine Parallele zu der Verbindungslinie der beiden anderen zieht).

---

1) *Euclide restituto* (Roma 1680).

Die Strecken, die man in dieser Weise als Produkte und Quotienten gegebener Strecken erhält, können dann ihrerseits von neuem der Operation des „Produkts" und der „Division" (in dem oben angegebenen Sinne) unterworfen werden, wobei sie zu neuen Strecken führen und insbesondere zu Strecken, die sich als Produkte von Quotienten (oder von Verhältnissen) anderer Strecken ergeben.

Von den so definierten Operationen beweist Vitale Giordano eine gewisse Zahl von Eigenschaften, indem er sich dabei auf Eigenschaften stützt, die von Euklid im Buch V für Größen im allgemeinen bewiesen werden.

Unter diesen Eigenschaften sei auf die folgenden hingewiesen:

1. Wenn man zwei Strecken a, b mit ein und derselben Strecke c multipliziert, so genügen die beiden Strecken p, q, die man erhält, der Bedingung:

$$a : b = p : q.$$

2. Wenn die Proportion $a : b = c : d$ besteht, so ist das Produkt der Strecken a, d (für eine beliebige Einheit) gleich dem der beiden Strecken b, c (für dieselbe Einheit).

Es folgt ein Satz, der aussagt, was man in moderner Sprache ausdrücken würde, wenn man sagt, daß das oben definierte Produkt von Strecken die „assoziative" Eigenschaft besitzt.

3. Wenn man drei Strecken a, b, c hat, so ist das Produkt aus a und der Produktstrecke von b und c eine Strecke gleich der, die man erhält, wenn man umgekehrt a mit b multipliziert und dann das Produkt aus der so erhaltenen Strecke und aus der Strecke c bildet.

4. Das Produkt des „Quotienten" der beiden Strecken a, b mit der Strecke b ist der Strecke a gleich.

Nachdem er dies vorausgeschickt, geht er, d. h. indem er immer auf die von Euklid im 5. Buche bewiesenen Lehrsätze zurückgeht, dazu über, zu beweisen, daß, wenn man eine beliebige Zahl von Strecken hat, das Produkt der Quotienten, die man erhält, wenn man jede von ihnen durch die auf sie folgende dividiert, dem Quotienten aus der ersten von ihnen durch die letzte gleich ist.

Der Beweis, den er in dem besonderen Falle, daß nur drei Strecken gegeben sind, von diesem Satze gibt, reduziert sich im wesentlichen auf folgendes:

Wenn a, b, c die gegebenen drei Strecken sind, so werden die Quotienten der ersten durch die zweite und der zweiten durch die dritte beziehungsweise die beiden Strecken x, y sein, die durch die folgenden beiden Bedingungen bestimmt sind:

$$a : b = x : 1, \tag{1}$$

$$b : c = y : 1, \tag{2}$$

und das Produkt von x und y wird nach der Definition die Strecke z sein, die durch die Bedingung

$$z : x = y : 1 \tag{3}$$

bestimmt ist.

Man bezeichne nun mit z' den Quotienten von a durch c, d. h. die Strecke, die durch die Bedingung

$$a : c = z' : 1 \tag{4}$$

bestimmt ist.

Der Vergleich der beiden Proportionen (2), (4) gibt unmittelbar

$$a : b = z' : y.$$

Hieraus und aus (1) folgert man unmittelbar

$$z' : y = x : 1,$$

d. h.

$$z' : x = y : 1.$$

Dies gibt mit (3)

$$z' : x = z : x,$$

woraus

$$z = z'$$

folgt; und das sagt gerade aus, daß das Produkt z der beiden Quotienten von a durch b und von b durch c eine Strecke ist, die z', dem Quotienten von a durch c, gleich ist.

In ganz analoger Weise geht der Beweis in dem besonderen Falle vor, in welchem die gegebenen Strecken $a, b, c \ldots$ eine fortlaufende Proportion bilden, in dem Falle nämlich, in dem die zu multiplizierenden Verhältnisse gleich sind („verdoppeltes", „verdreifachtes" Verhältnis usw.).[1])

§ 14. Hermann Graßmann. Während die oben dargelegten Betrachtungen von Vitale Giordano nicht irgendwelche Verwandt-

1) Interessant von historischer Seite sind die Worte, die Giordano Vitale den oben auseinandergesetzten Betrachtungen vorausschickt: „Prima d'inoltrarmi nella compositione delle proporzioni dottrina piu difficile a essere intesa quanto che nasce da principio non dimostrato sino ad ora nè da Euclide nè, che io sappia, da alcun altra persona." (Euclide restituto S. 261.)

schaft mit denen der griechischen Geometer darbieten, die wir hinterher als solche angeführt haben, die den Zweck hatten, besondere gegebene Sätze der Geometrie von der allgemeinen Proportionslehre unabhängig zu machen[1]), berühren sie sich dagegen in mehr als in einem interessanten Punkte mit den späteren Forschungen, mit denen wir uns nun beschäftigen wollen; diese bezwecken, unabhängig von der Definition Euklids und den in sie eingeschlossenen Voraussetzungen (Postulat des Archimedes) eine geometrische Theorie herzustellen, die geeignet ist, die im 5. Buche Euklids entwickelte ganz zu ersetzen, wenigstens soweit sie ihre Anwendungen auf den Fall der Strecken betrifft.

Es ist die *Ausdehnungslehre* von Graßmann (1844), in der diese Idee ihre erste Verwirklichung gefunden zu haben scheint. Graßmann beginnt mit der Bemerkung, daß sich unter den charakteristischen geometrischen Eigenschaften proportionaler Strecken zwei darbieten, die gleich geeignet sind, zum Kennzeichen oder zur Grundlage für eine Definition der Proportionalität von Strecken zu dienen.

Die eine ist diejenige, die in der Äquivalenz der Rechtecke (oder der Parallelogramme mit beziehungsweise gleichen Winkeln) besteht, welche beziehungsweise die erste und die vierte, die zweite und die dritte der gegebenen Strecken zu Seiten haben.

Die andere ist die im Satz von Thales ausgesprochene; sie besteht in dem Parallelismus der beiden Geraden, die den ersten und dritten, den zweiten und vierten der Punkte verbinden, die man erhält, wenn man auf den Schenkeln eines Winkels vom Scheitel aus die vier fraglichen Strecken der Reihe nach abträgt, die ersten beiden auf dem einen Schenkel, die anderen beiden auf dem anderen.

Die beiden Definitionen der „Proportion" zwischen Strecken, die Graßmann der einen oder der anderen oben ausgesprochenen Eigenschaften entsprechend annimmt, beziehen sich nicht nur auf die Länge, sondern auch auf die Richtung der betreffenden Strecken.

Sie sind folgende:

1. Vier Strecken, von denen die ersten beiden und die letzten beiden unter sich parallel sind, die ersten beiden den letzten beiden aber nicht parallel sind, bilden, sagt man, eine Proportion, wenn die Parallelogramme, deren Seiten zur ersten und vierten, zur zweiten und dritten der Strecken parallel und gleich sind, gleiche Fläche haben.

2. Vier Strecken, die denselben angegebenen Bedingungen genügen, bilden, sagt man, eine Proportion, wenn in zwei Dreiecken, in denen

1) Hingewiesen sei hier noch auf die veränderte Gestalt (vollständige Arithmetisierung), die die Proportionslehre unter dem Einfluß von Legendre erhielt.

zwei Seiten der ersten und dritten, beziehungsweise der zweiten und vierten Strecke gleich und parallel sind, auch die dritten Seiten einander parallel sind.

Von den Bedingungen, die durch diese beiden Definitionen ausgedrückt werden, ist von Graßmann mit Hilfe seiner symbolischen Bezeichnungen nachgewiesen worden, daß sie auseinander unmittelbar abgeleitet werden können.

Um zu sehen, wie er das ausführt, genügt es, daran zu erinnern, daß er Summe zweier Strecken a, b die Strecke OC nennt, die man erhält, wenn man durch einen Punkt O eine Strecke OA gleich und parallel der ersten und durch den Punkt A eine Strecke AC gleich und parallel der zweiten zieht und O mit C verbindet, und daß er Produkt zweier Strecken a, b die Fläche des Parallelogramms nennt, das mit ihnen gleiche und parallele Seiten hat.

Aus dieser letzten Definition folgt als die notwendige und ausreichende Bedingung für Parallelsein zweier Strecken, daß ihr Produkt Null ist. Man kann also die Tatsache, daß die Bedingung, die in der Definition 2 liegt, für vier Strecken a, b, c, d erfüllt ist, ausdrücken, indem man schreibt:

$$(a + c)(b + d) = 0.$$

Und da die oben als „Produkt“ definierte Operation für die als „Summe“ definierte die distributive Eigenschaft besitzt, so wird man, wenn man die in der genannten Formel angedeuteten Operationen ausführt und in Rechnung zieht, daß man (auf Grund des vorausgesetzten Parallelismus von a, b und c, d) $ab = 0$ und $cd = 0$ hat, $ad + cb = 0$ oder (nach den von Graßmann gegebenen Vorzeichenregeln) $ad = bc$ erhalten, was gerade die Äquivalenz der in der Definition (1) betrachteten beiden Parallelogramme ausdrückt.

Nachdem in solcher Weise die Identität der beiden in den von ihm vorgeschlagenen Definitionen in Betracht kommenden Bedingungen erkannt ist, geht er von der zweiten von ihnen aus, die man auch, wie folgt, aussprechen kann:

„Wenn zwei Dreiecke die drei Seiten bezüglich parallel haben, so bilden zwei Seiten des einen und die entsprechenden Seiten des anderen eine Proportion.“

Um auf Grund dieser Definition zu beweisen, daß, wenn die beiden Proportionen

(1) $$a : b = c : d,$$

(2) $$a : b = e : f$$

bestehen, auch die weitere

$$c : d = e : f$$

besteht, verfährt er in folgender Weise:

Man trägt auf einer Geraden, welche die Richtung der beiden parallelen Strecken a, b hat, von einem Punkte O aus zwei Strecken OA, OB ab, die beziehungsweise gleich a, b sind. Durch A, B zieht man zwei Strecken AC, BD beziehungsweise gleich und parallel mit c, d. Da die beiden Verbindungslinien OC, OD wegen des Bestehens der Proportion (1) parallel werden müssen, werden die drei Punkte O, C, D in einer geraden Linie liegen.

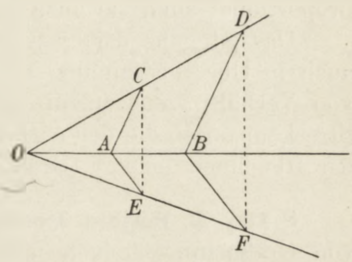

Fig. 59.

Wenn man nun durch A, B zwei andere Strecken AE, BF zieht, die mit e, f gleich und parallel sind, so werden auch deren Endpunkte E, F infolge der Proportion (2) mit O in einer geraden Linie liegen. Da die beiden Dreiecke ACE, BDF also zwei Paare von Seiten parallel haben und derart sind, daß die drei Verbindungslinien der Paare homologer Ecken in O zusammenlaufen, so werden sie auch die dritten Seiten CE, DF parallel haben, was mit der Aussage, daß die Proportion

$$AC : BD = AE : BF$$

d. h.

$$c : d = e : f$$

besteht, gleichbedeutend ist.

Der zu beweisende Satz erscheint in dieser Weise als eine unmittelbare Folge des Satzes von Desargues.

Ein Fall, der noch zu betrachten bleibt, und in dem die als Kennzeichen der Proportionalität gewählte Konstruktion aufhört, direkt anwendbar zu sein, ist der, in dem die vier Strecken alle vier (und nicht nur die ersten beiden unter sich und ebenso die letzten beiden) untereinander parallel sind.

Um zu bestimmen, was man auch in diesem Falle unter Proportionalität der in Frage stehenden Strecken verstehen muß, geht Graßmann in folgender Weise vor:

Er bemerkt vor allem, daß man infolge des vorher bewiesenen Satzes, wenn zwei Paare von Strecken, die eine Proportion bilden, gegeben sind, immer ein weiteres dazu bestimmen kann, das mit jedem von ihnen eine Proportion bildet.

Man hat also in dieser Eigenschaft ein neues Kennzeichen, um zu beurteilen, ob zwei Paare von Strecken eine Proportion bilden, und da dies neue Kennzeichen nicht aufhört, auch in dem Falle, daß die beiden fraglichen konstituierenden Paare sämtlich untereinander parallel sind, einen Sinn zu haben, so ist es angebracht, dies neue Kennzeichen als Grundlage für eine neue Definition der Proportionalität zu nehmen, welche die erste als besonderen Fall mit umfaßt.

Auch für diese neue Definition gilt die hinterher bewiesene Eigenschaft, daß, wenn zwei Paare von Strecken ein und demselben Paar proportional sind, sie auch untereinander proportional sind.

Das ist ganz das, was man verlangt, wenn es erlaubt sein soll, auch in Übereinstimmung mit ihr eine Proportion als eine „Gleichung von Verhältnissen" aufzufassen, nämlich als eine Beziehung zwischen Streckenpaaren, die den charakteristischen Eigenschaften der Beziehung der Gleichheit genügt (Graßmann, Ausdehnungslehre 1844, § 78).

§ 15. L. Rajola Pescarini. Die obengenannten Betrachtungen von Graßmann scheinen nicht unmittelbar irgendeine Wirkung ausgeübt zu haben, um die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf die Fragen zu lenken, die sie einschlossen oder an die Hand gaben.

Ganz unabhängig von ihnen in der Tat treten ein Vierteljahrhundert später die ersten Versuche auf, auf Grund rein geometrischer Definitionen eine Theorie aufzubauen, die geeignet ist, wenigstens für den Fall der Strecken diejenige, die Euklid auf seine Definition der Proportionalität stützt, zu ersetzen.

Unter diesen Versuchen, die sich nicht mehr wie die von Graßmann auf Strecken, die nach Größe und Richtung betrachtet werden, sondern einfach auf Strecken, die rücksichtlich ihrer Größe betrachtet werden, beziehen, sind die folgenden drei, die unabhängig einander in kurzem Abstande folgten, zu beachten:

1. Diejenige von Luigi Rajola Pescarini, die in einem kleinen Werke dargelegt ist, das im Jahre 1876 unter dem Titel: *„Studio sulla proporzionalità grafica e sue applicazioni alla similitudine e alla omotetia"* in Neapel veröffentlicht wurde;

2. diejenige von R. Hoppe, die in einem Artikel enthalten ist, der im Jahre 1878 in dem von ihm redigierten Archiv für Mathematik und Physik unter dem Titel: *„Rein geometrische Proportionslehre"* erschien;

3. diejenige von G. Biasi, die von diesem in einem Lehrgange über die Lehre von den Proportionen, den er seinen Zöglingen am Istituto tecnico in Sassari gegeben hat, dargelegt und von diesen in autographierten Blättern reproduziert worden ist (Sassari 1882).

Als Ziel, das Rajola Pescarini sich in seinem Schriftchen setzt, wird von ihm angegeben: „Die jungen Leute in den Stand zu setzen, die wichtigsten Eigenschaften, die in der Lehre von der Ähnlichkeit, der ähnlichen Lage und anderen Dingen ähnlicher Art enthalten sind, zu studieren, und zwar unabhängig von dem 5. Buche Euklids und von der Arithmetik.

Von einem bestimmten Winkel ausgehend, auf dessen einem Schenkel vom Scheitel O aus zwei Strecken OA, OB abgetragen seien, definiert er als „proportional“ zu OA, OB das Streckenpaar OC, OD, das man erhalten kann, wenn man von A, B zwei untereinander parallele Geraden zieht bis zu den Schnittpunkten C, D mit dem anderen Schenkel.

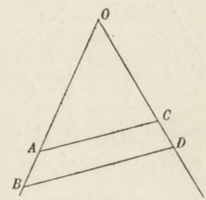

Fig. 60.

Um auf Grund dieser Definition den Satz zu beweisen, daß das Rechteck aus den beiden Strecken, die als Außenglieder einer Proportion auftreten, dem Rechteck aus den mittleren Gliedern äquivalent ist, geht er auf den Satz über die Äquivalenz der Rechtecke zurück, die aus den durch das Schneiden zweier Sehnen eines Kreises bestimmten Strecken konstruiert werden können, einen Satz, den, wie wir schon gesehen haben, Euklid allein durch Anwendung des Pythagoreischen Lehrsatzes beweist.

Es genügt hierzu die Bemerkung, daß, wenn man in der obenangegebenen Figur auf dem Schenkel OD eine Strecke OB' gleich OB und auf dem Schenkel OA eine Strecke OD' gleich OD abträgt, man ein Viereck $AB'CD'$ erhält, in dem $D'\widehat{A}C = D'\widehat{B'}C$ ist, dessen Ecken sich deshalb auf einem und demselben Kreise befinden.

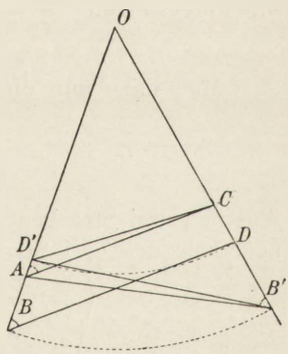

Fig. 61.

Dieser Satz gestattet ihm unmittelbar zu schließen, daß, wenn vier Strecken für einen bestimmten Winkel die von ihm für die Definition der Proportionalität angenommene Bedingung erfüllen, sie ihr auch für einen beliebigen anderen Winkel genügen; mit anderen Worten: Wenn zwei Dreiecke ähnlich sind, so werden es auch zwei beliebige andere sein, die man erhalten kann, wenn man auf den beiden Schenkeln zweier gleicher Winkel zwei beliebige Paare ihrer homologen Seiten in geordneter Weise abträgt.

Eine andere unmittelbare Folge des obengenannten Satzes ist die der Vertauschbarkeit der mittleren und der äußeren Glieder.

Um aber zu beweisen, daß zwei Paare, die ein und demselben dritten Paare proportional sind, unter sich proportional sind, schickt Rajola den Satz voraus:

Wenn die drei Paare von Strecken a, a', b, b', c, c', die von den Seiten zweier Dreiecke gebildet werden, untereinander proportional sind, so haben die beiden Dreiecke die entsprechenden Winkel bezüglich gleich.

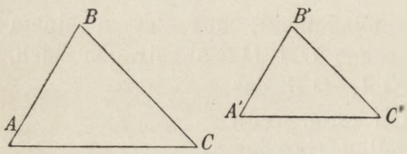

Fig. 62.

Man konstruiere in Wirklichkeit ein Dreieck, in dem die Winkel bezüglich denen von ABC gleich sind, und das die zu AC entsprechende Seite gleich $A'C'$ hat. Wenn man mit x und y seine beiden anderen Seiten bezeichnet, wird man haben:

$$a : x = b : b',$$
$$c : y = b : b';$$

hieraus zieht man auf Grund des Bestehens der beiden Proportionen

$$a : a' = b : b',$$
$$c : c' = b : b'$$

die Folgerungen

$$x = a', \; y = c'.$$

Man habe nun die beiden Proportionen

$$a : b = c : d,$$
$$c : d = e : f.$$

Aus den drei Strecken a, c, e konstruiere man ein Dreieck und ebenso auch aus den drei Strecken b, d, f. Nach dem vorangehenden Satze werden die beiden Dreiecke die entsprechenden Winkel bezüglich gleich haben. Hieraus folgert man, daß man sie in der Weise wird aufeinander legen können, daß der Winkel $\widehat{ae}$ des ersten mit dem Winkel $\widehat{bf}$ des zweiten zusammenfällt, und daß die Seiten c, d untereinander parallel werden. Daraus schließt man, daß auch die Proportion

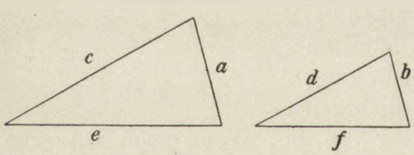

Fig. 63.

$$a : b = e : f$$

richtig ist.

Dieser Beweis wird in dem Falle, daß die Gruppen der je drei betrachteten Strecken a, c, e und b, d, f der zwischen den Seiten eines Dreiecks bestehenden Ungleichung nicht genügen, hinfällig.

Es sei indes darauf hingewiesen, daß man an seine Stelle leicht einen anderen setzen kann, der statt dessen auf der Betrachtung zweier Kreise beruht; diese sind durch die Punkte A, B, C, D und C, D, E, F bestimmt, die man erhalten würde, wenn man in geeigneter Weise auf den Schenkeln eines Winkels vom Scheitel aus die Strecken a, b, c, d, e, f abträgt.

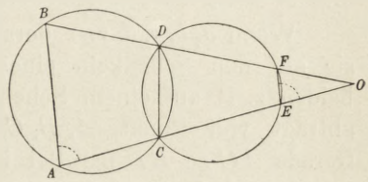

Fig. 64.

In der Tat, da die Geraden AB, EF mit AE gleiche Winkel bilden (weil jeder dem Winkel CDF gleich ist), werden die beiden Dreiecke OAB, OEF ähnlich und die beiden Paare OA, OE; OB, OF proportional sein. Man wird also haben, daß das Rechteck mit den Seiten a, f dem mit den Seiten b, e äquivalent ist, d. h. daß das Streckenpaar a, b dem Paar e, f proportional sein wird, wie man beweisen wollte.[1])

§ 16. R. Hoppe. Die Arbeit von Hoppe zerfällt in zwei Teile, von denen der erste der Entwicklung einer Proportionslehre auf Grund einer Definition gewidmet ist, die der kurz zuvor betrachteten analog ist, der andere dagegen dem Aufbau einer Theorie von einer Definition aus, die auf der anderen charakteristischen Eigenschaft proportionaler Strecken beruht, nämlich auf der, die sich auf die Äquivalenz der Rechtecke bezieht.

Der ersten dieser beiden Behandlungsweisen legt Hoppe den folgenden Satz zugrunde, den er durch Zurückgehen auf eine Konstruktion im Raume (mit der in ungeeigneter Weise Infinitesimalbetrachtungen vermischt sind) beweist; diese fällt im wesentlichen mit dem Satze von Desargues über homothetische (ähnlich liegende) Dreiecke zusammen.

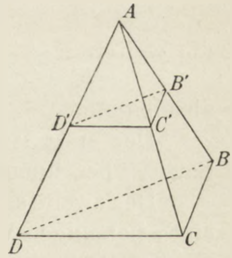

Fig. 65.

Wenn die Winkel, die eine Seite AB eines Vierecks mit den beiden anliegenden Seiten AD, BC und den beiden Diagonalen AC, BD bildet, beziehungsweise den Winkeln gleich sind, die eine Seite $A'B'$ eines andern Vierecks mit den ihr anliegenden Seiten $A'D'$, $B'C'$ und mit den Diagonalen $A'C'$, $B'D'$

1) G. Vailati. *Di un modo di riattacare la teoria della proporzioni tra segmenti a quella dell' equivalenza.* S. *Atti del II. Congresso dell' associazione Mathesis* (Livorno 1902).

bildet, dann werden auch die Winkel, welche die Seite CD des ersten Vierecks mit denselben obengenannten Geraden AD, BC, AC, BD macht, beziehungsweise den Winkeln gleich sein, welche die Seite $C'D'$ des zweiten Vierecks mit $A'D'$, $B'C'$, $A'C'$, $B'D'$ macht.

Von diesem Satze leitet er unmittelbar den weiteren (der von diesem übrigens nur ein besonderer Fall ist) ab:

Wenn a, b, c, d vier derartige Strecken sind, daß sie, sobald man sie auf den Schenkeln eines Winkels vom Scheitel aus, die ersten beiden z. B. auf einem Schenkel, die beiden anderen auf dem andern, abträgt, vier Punkte A, B, C, D von der Eigenschaft geben, daß die Gerade AC zu BD parallel ist, alsdann werden sie, wenn sie in derselben Ordnung auf den Schenkeln eines beliebigen anderen Winkels abgetragen werden, auch dieselbe Bedingung erfüllen (sie werden also vier Punkte A', B', C', D' liefern, die auf zwei Parallelen liegen).

Dieser Satz dient ihm als Rechtfertigung für folgende Definition proportionaler Strecken:

„Zwei Strecken a, b, wird man sagen, sind zwei anderen c, d proportional, wenn die ersten beiden und die letzten beiden als entsprechende Seiten in zwei ähnlichen Dreiecken auftreten."

Auf Grund dieser Definition beweist er unmittelbar den Satz der Transitivität für die Gleichheit von Verhältnissen und den weiteren, den wir den des zusammengesetzten Verhältnisses nennen werden, der erlaubt, aus den beiden Proportionen:

$$a:b = c:d,$$

$$b:e = d:f$$

die weitere

$$a:e = c:f$$

abzuleiten.

Der erste ist in der Tat eine direkte Folge des Desarguesschen Satzes über homothetische (ähnlich liegende) Dreiecke.

Der zweite sagt einfach folgendes aus: „Wenn man auf den Schenkeln eines beliebigen Winkels vom Scheitel aus sechs Strecken a, e, b, c, d, f, und zwar die ersten drei auf einem Schenkel als OA, OE, OB und die anderen drei auf dem zweiten als OC, OD, OF, abträgt und sie derart sind, daß AC parallel BD und BD parallel EF ist, so sind sie auch derart, daß die Verbindungslinien von A mit C und von E mit F untereinander parallel sind.

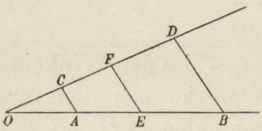

Fig. 66.

Das fällt also mit der Behauptung zusammen, daß zwei Geraden, die einer dritten parallel sind, untereinander parallel sind, d. h. daß zwei Geraden, die sich schneiden, nicht einer und derselben Geraden parallel sein können (Postulat V von Euklid).

Um dann auf Grund der oben genannten Definition zu beweisen, daß für zwei Strecken a, b, die zwei anderen c, d proportional sind, das Rechteck, das die erste und letzte von ihnen zu Seiten hat, dem Rechteck, das die zweite und dritte zu Seiten hat, äquivalent ist, trägt Hoppe die beiden ersten a, b und die beiden letzten c, d von ihnen auf den Schenkeln eines rechten Winkels beziehungsweise als OA, OB, OC, OD ab. Da die beiden Dreiecke ACB, ACD gleiche Grundlinie haben und zwischen Parallelen liegen, also äquivalent sind, so ergeben sich auch die beiden Dreiecke OBC, OAD, die man durch Hinzufügung des Dreiecks OAC erhält, als äquivalent.

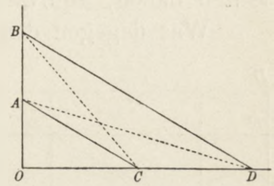

Fig. 67.

Aus dem oben dargelegten Satze folgert Hoppe leicht die gewöhnlichen Sätze über Proportionen zwischen Strecken und über die Eigenschaften der ähnlichen Dreiecke.

§ 17. Zweite Behandlungsweise Hoppes. G. Biasi. Dieser Behandlungsweise läßt Hoppe eine andere folgen, in der er umgekehrt als Definition der Proportionalität zweier Paare von Strecken a, b und c, d die Gleichheit der Rechtecke annimmt, die beziehungsweise a, d und b, c zu Seiten haben. Es liegt ihm dann ob, den Satz zu beweisen, daß je zwei Paare homologer Seiten zweier ähnlichen (gleichwinkligen) Dreiecke proportional sind.

Zu diesem Zwecke geht er von neuem auf den Satz von Desargues (und deshalb stillschweigend auf stereometrische Betrachtungen, deren er sich bei seinem Beweise bedient) zurück.

Er geht in folgender Weise vor: Nachdem er die beiden in Frage kommenden ähnlichen Dreiecke so gelegt hat, daß sie die beiden Paare homologer Seiten, von denen man die Proportionalität beweisen will, gemeinsam haben, und also in der Weise, daß sie die dritten Seiten parallel haben, zieht er durch den gemeinsamen Scheitel eine Gerade OX senkrecht zu einer der Seiten, z. B. zu OA. Auf dieser trägt er von O aus zwei Strecken OB, OB' ab, die bezüglich gleich OC, OC' sind. Da dann auch die Geraden BC, $B'C'$ parallel sind, werden es nach dem Satz von Desargues auch AB, $A'B'$ sein.

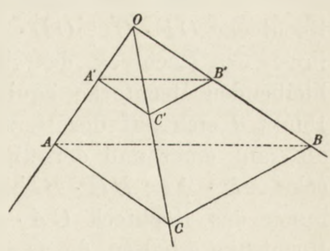

Fig. 68.

Hiermit führt er den Fall auf den andern bald nachher betrachteten über zwei ähnliche rechtwinklige Dreiecke zurück und schließt, indem er das schon behandelte Verfahren verfolgt, daß die beiden Rechtecke, die beziehungsweise OA, OB' und OA', OB zu Seiten haben, äquivalent sind.

Was dagegen den Beweis des Satzes betrifft, daß zwei Paare von Strecken, die einem dritten proportional sind, unter sich proportional sind, so verfährt er in nachstehender Weise, indem er auf den sogenannten Satz vom Gnomon zurückgeht.

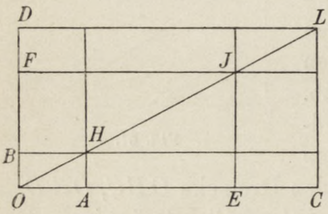

Fig. 69.

Man trage auf den Schenkeln eines rechten Winkels vom Scheitel O aus die Strecken OA, OE, OC, OB, OF, OD, die ersten drei auf einem Schenkel, die anderen drei auf dem anderen, ab beziehungsweise gleich den Strecken a, e, c, b, f, d, zwischen denen nach Voraussetzung die beiden Proportionen

$$a:b = c:d,$$
$$e:f = c:d$$

bestehen, und vervollständige die Rechtecke, die beziehungsweise OA, OB; OC, OD; OB, OC; OA, OD zu Seiten haben. Es seien H, L die beiden O gegenüberliegenden Ecken.

Auf Grund der Äquivalenz der beiden Rechtecke $OA \cdot OD$ und $OB \cdot OC$ werden auch die beiden Rechtecke äquivalent sein, die man erhält, wenn man von jedem von ihnen $OA \cdot OB$ wegnimmt. Hieraus folgt auf Grund des Satzes vom Gnomon, daß der Punkt H auf der Diagonale OL liegen wird.

Man vervollständige nun das Rechteck $OE \cdot OF$ und es sei J die Ecke von ihm, die C gegenüberliegt. Auf Grund der Äquivalenz der Rechtecke $OF \cdot OC$, $OD \cdot OE$ werden auch, wenn man von jedem von ihnen das Rechteck, das sie gemeinsam haben, subtrahiert, die übrig bleibenden Rechtecke äquivalent sein, und wird demgemäß auch der Punkt J sich auf der Geraden OL befinden. Da die Punkte O, H, J also auf einer und derselben Geraden liegen, werden auch die Rechtecke $AH \cdot AE$, $BH \cdot BF$ äquivalent sein; wenn man zu jedem von ihnen das Rechteck $OA \cdot OB$ hinzufügt, wird man zwei äquivalente Rechtecke erhalten, die $OA \cdot OF$, $OB \cdot OE$ sind. Hieraus schließt man, daß die Proportion

$$a:b = e:f$$

gilt, wie man beweisen wollte.

In analoger Weise mit dieser zweiten Behandlungsweise Hoppes geht auch die von Biasi vor, die sich auch auf die Betrachtung von Rechtecken stützt.

Anstatt indessen hierbei auf den Satz von Desargues zurückzugehen, um die Proportionalität homologer Seiten ähnlicher Dreiecke zu beweisen, macht er von dem Satze über die Sehnen Gebrauch, indem er das umgekehrte Verfahren von dem einschlägt, das, wie wir sahen, von Rajola Pescarini angewandt wurde, um den umgekehrten Satz zu beweisen.

§ 18. Die von Betrachtungen der Äquivalenz unabhängige geometrische Theorie der Proportionen. Ein unterscheidender Charakter der Behandlungsweisen der Streckenproportionalität, in denen man auf Betrachtungen der Äquivalenz zurückgeht, gegenüber denen, in denen solche Betrachtungen vermieden werden, besteht darin, daß in den ersten die Vertauschbarkeit der mittleren (oder der äußeren) Glieder einer Proportion sich als unmittelbare Folge der Definition ergibt, während sie in der zweiten als ein Satz erscheint, der einen besonderen Beweis erfordert, und den man, wie folgt, aussprechen kann:

Wenn die vier Strecken a, b, c, d derart sind, daß sie, auf den Schenkeln eines gegebenen Winkels vom Scheitel O aus als OA, OB, OC, OD, die ersten beiden auf einem Schenkel, die andern beiden auf dem andern, abgetragen, zu zwei parallelen Geraden AC, BD führen, so werden sie auch, wenn man diese Strecken auf den Schenkeln desselben oder eines anderen Winkels in der Weise abträgt, daß sich die erste und die dritte von ihnen auf dem einen Schenkel, die zweite und die vierte auf dem andern befinden, zu zwei Parallelen $A'B'$, $C'D'$ führen.

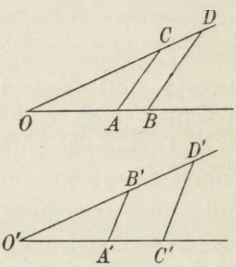

Fig. 70.

Es sei darauf hingewiesen, daß die Vertauschbarkeit der Mittelglieder genügt, um unmittelbar aus der transitiven Eigenschaft der Gleichheit der Verhältnisse den weiteren Satz abzuleiten, den wir den vom zusammengesetzten Verhältnis genannt haben.

Hieraus folgt, daß, wenn man das Zurückgehen auf die Lehre von der Äquivalenz zuläßt, die beiden oben genannten Sätze (transitive Eigenschaft und zusammengesetztes Verhältnis) als unmittelbare Folgerungen auseinander erscheinen, während sie, wenn man ein solches Zurückgehen vermeiden will, wie wir bald sehen werden, als Ausdruck zweier durchaus verschiedenen geometrischen Tatsachen angesehen werden müssen, nämlich der eine als Satz von Desargues, der andere als Parallelenpostulat.

Ein anderer Satz, der sich in dem Falle, daß man das Zurückgehen auf Betrachtungen der Äquivalenz zugibt, als direkte Folge der Definition der Proportionalität darbietet, ist der sogenannte Satz von der gestörten (perturbierten) Proportion, der nämlich, der von den beiden Proportionen

$$a:b=c:d,$$
$$b:e=f:c,$$

welche die mittleren oder die äußeren Glieder gemeinsam haben, zu einer dritten zwischen den übrig bleibenden Gliedern überzugehen gestattet:

$$a:e=f:d.$$

In der Tat drückt er alsdann nur die Tatsache aus, daß zwei Rechtecke, die einem dritten äquivalent sind, untereinander äquivalent sind.

Wenn dieser Satz dagegen für die andere Definition proportionaler Strecken als homologer Seiten ähnlicher Dreiecke interpretiert wird,

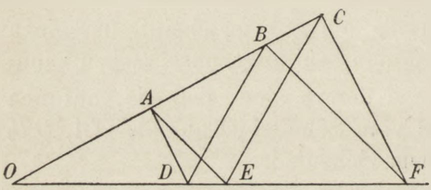

Fig. 71.

so wird er mit folgendem Satze zusammenfallen: „Wenn man auf zwei Schenkeln eines Winkels vom Scheitel aus die Strecken a, b, c, d, e, f, die ersten drei auf einem Schenkel und die andern drei auf dem andern, abträgt, und wenn die so erhaltenen Punkte A, B, C, D, E, F derart sind, daß die Geraden AE, BF und BD, EC untereinander parallel sind, so werden auch die Geraden AD, CF parallel sein.

Dieser Satz, der nichts anderes als ein besonderer Fall des Satzes von Paskal über das einem Kegelschnitt einbeschriebene Rechteck ist, war den griechischen Mathematikern bekannt; man findet von ihm sogar einen eleganten Beweis in den Kollektaneen von Pappus[1]), der sich aber auf Betrachtungen der Äquivalenz stützt und deshalb für unsern Zweck, der gerade einen von diesen unabhängigen Beweis verlangt, nicht verwendbar ist.

Beweise dieses Satzes, die von einem Zurückgehen auf die Lehre von der Äquivalenz oder auf Konstruktion außerhalb der Ebene unabhängig sind, sind deren einige gegeben worden.

Zwei von ihnen bringt Hilbert in seinem schon angeführten Werke über die Grundlagen der Geometrie. Ein anderer viel einfacherer und eleganterer wurde von F. Schur (*Mathematische Annalen*

1) Deshalb ist er den italienischen Mathematikern unter dem Namen Satz des Pappus bekannt.

Bd. 57) gegeben, der sich auf den Satz stützt, daß die drei Höhen eines Dreiecks durch einen Punkt gehen.[1])

In diesem letzten wird indes allein der Fall in Betracht gezogen, in dem der Winkel, auf dessen Schenkeln man die fraglichen Strecken abträgt, ein rechter ist.

Er geht in folgender Weise vor:

Es seien OX, OY die genannten beiden Geraden und $A'B'C'$, ABC die beiden Tripel von Punkten, die auf ihnen beziehungsweise so angeordnet sind, daß $A'B$ parallel AB' und $B'C$ parallel BC' ist. Man ziehe durch B die Senkrechte auf $A'C$, bis sie OX in D' trifft. Der Punkt C wird dann der Schnittpunkt zweier Höhen des Dreiecks $BA'D'$ sein; deshalb wird die Gerade $D'C$ auf BA' und daher AB' senkrecht sein. Daraus folgt, daß C auch der Schnittpunkt zweier Höhen des Dreiecks $AD'B'$ sein wird, und deshalb, daß AD' auf $B'C$ und daher auf BC' senkrecht sein wird. Hieraus ergibt sich, daß B der Schnittpunkt zweier Höhen des Dreiecks $AC'D'$ und deshalb BD' senkrecht auf AC' ist. Da also AC' und $A'C$ auf einer und derselben Geraden senkrecht stehen, werden sie untereinander parallel sein.

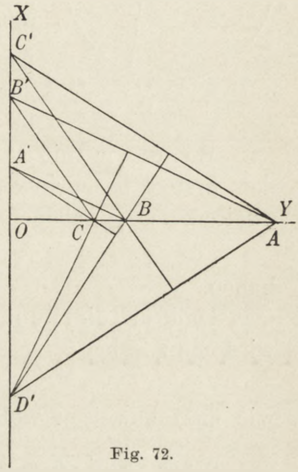

Fig. 72.

Für den Fall eines beliebigen Winkels wendet man dafür den folgenden anderen Beweis an, der von Mollerup (Mathematische Annalen 1903) gegeben worden ist; dieser stützt sich auf die Betrachtung zweier Kreise, die beziehungsweise durch die beiden Gruppen von je vier Punkten A, B, E, F und B, C, D, E gehen, die man erhält, wenn man in der von der Figur (73) angegebenen Art auf den Scheiteln eines beliebigen Winkels vom Scheitel aus die Strecken abträgt, die in den beiden Proportionen:

$$a : b = e : f,$$
$$b : c = d : e$$

auftreten.

1) Vgl. K. Kupfer, *Die Darstellung einiger Kapitel der Elementargeometrie*, Dorpat 1893. Kupfer benutzt wie schon vor ihm Weierstraß für den Beweis des Satzes von der Vertauschbarkeit der Mittelglieder den Satz vom Peripheriewinkel in Kreise. Sein Beweis war der erste, der vom Archimedischen Postulat unabhängig war; die Benutzung der Äquivalenz schließt ein weiteres Postulat ein. Vgl. hierüber F. Schur, Grundlagen der Geometrie, Leipzig 1909, S. 136.

Ist XOY ein beliebiger Winkel, so trage man beziehungsweise auf OX, OY die beiden Strecken a, b von O aus als OA, OB ab und auf ihren Verlängerungen immer von O aus die Strecken f, e als OF, OE. Die Punkte A, B, F, E werden auf einem und demselben Kreise liegen. Nun beschreibe man um O als Mittelpunkt mit dem Radius c einen anderen Kreis. Es sei C einer der Punkte, in denen die genannten beiden Kreise sich schneiden (daß die beiden Kreise sich schneiden, kann man immer erreichen, wenn man diejenige der beiden gegebenen Proportionen, die man zur Konstruktion des ersten von ihnen verwendet, in geeigneter Weise auswählt).

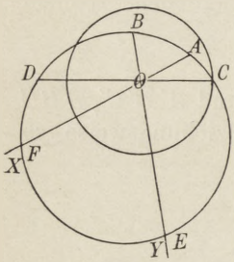

Fig. 73.

Wenn wir mit D den Punkt bezeichnen, in dem die Gerade OC den ersten beschriebenen Kreis trifft, so wird man auf Grund der zweiten der gegebenen Proportionen

$$d = OD$$

haben.

Und da die Punkte A, D, F, C auf demselben Kreise liegen, so wird man haben:

$$a : c = d : f,$$

wie man beweisen wollte.

§ 19. Vereinfachungen für den Satz von der Vertauschbarkeit der mittleren Glieder. Von der Eigenschaft proportionaler Strecken, die, wie wir sahen, durch den Satz des Pappus ausgedrückt wird, stellt die der Vertauschbarkeit der mittleren Glieder nur einen besonderen Fall dar.

Wenden wir in der Tat den ersten auf die beiden Proportionen

$$a : b = c : d,$$
$$b : c = b : c$$

an, so folgt daraus ohne weiteres

$$a : c = b : d.$$

Die besondere Wichtigkeit dieses Falles indessen, der schon für sich genügt, die Entwicklung der Teile der Lehre von den Proportionen zu gestatten, auf die man in den elementaren geometrischen Darstellungen zurückgehen muß, macht es interessant, auf die Tatsache, die von B. Levi (Periodico di Matematica) aufgedeckt worden ist, hinzuweisen, daß er direkt bewiesen werden kann. Das erhält man durch Vergleich der beiden Figuren, die entstehen, wenn man die durch die beiden Proportionen

$$a : b = c : d,$$
$$a : c = b : d$$

gelieferten Paare von ähnlichen Dreiecken in der Weise anordnet, daß sie einen Winkel gemeinsam haben, während die übrigbleibenden Ecken auf einem Kreise liegen.

Es ist in der Tat klar, daß die Figur, die man erhält, wenn man in solcher Weise die beiden Dreiecke OAC, OBD aufeinanderlegt, dieselbe ist wie die, die man erhalten würde, wenn man statt dessen die beiden Dreiecke OAB, OCD in dieser Weise aufeinanderlegt, falls der zwischen den Seiten a, c und b, d enthaltene Winkel der ersten

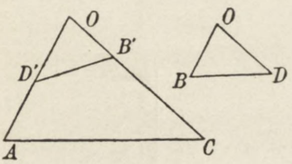

Fig. 74 a.

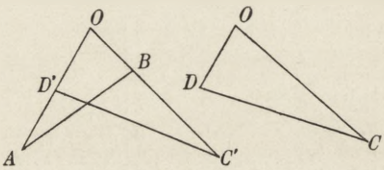

Fig. 74 b.

beiden Dreiecke dem zwischen den Seiten a, b und c, d der beiden anderen Dreiecke gleich ist, wobei auch diese letzten beiden Dreiecke untereinander ähnlich sein müssen.

Hiermit gilt der Satz von der Vertauschbarkeit der mittleren Glieder noch nicht als nachgewiesen für die Definition proportionaler Strecken als homologer Seiten ähnlicher Dreiecke, die einen beliebigen Winkel enthalten.

Hierzu ist der Beweis erforderlich, daß, wenn zwei Paar Strecken homologe Seiten in zwei besonderen ähnlichen Dreiecken (z. B. homologe Katheten zweier ähnlichen rechtwinkligen Dreiecke) sind, auch die mit diesen Strecken und einem beliebigen Winkel konstruierten Dreiecke sich als ähnlich ergeben.

Zu dem Ende genügt der Nachweis, daß, „wenn die angegebene Beziehung zwischen den vier Strecken für einen gewissen Winkel besteht, sie auch für einen rechten besteht“, insofern der Nachweis dieser selben Beziehung für einen rechten Winkel die vierte Strecke zu einer durch die drei gegebenen Strecken bestimmten macht und deshalb aus der oben zum Ausdruck gebrachten Eigenschaft die umgekehrte folgt.

Das vorher angegebene Ziel war schon stillschweigend von Hilbert (Grundlagen der Geometrie, 2. Aufl., S. 36) durch einen eleganten Beweis erreicht worden, der auf der Betrachtung der drei Paar Dreiecke beruht, die durch die Winkelhalbierenden der fraglichen ähnlichen Dreiecke bestimmt sind (die zu Grundlinien beziehungsweise die Seiten der gegebenen Dreiecke und zu Höhen die Radien der ihnen einbeschriebenen Kreise haben).

Die Entwicklung des oben angeführten Beweises von Hilbert stützt sich auf drei Hilfssätze, die von Levi angeführt sind, der indes die Sache in einfacherer Weise zu Ende führt.

Diese drei Hilfssätze sind die folgenden:

1. Hilfssatz. Wenn a, a'; b, b' homologe Katheten von ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken sind, so sind alsdann auch die rechtwinkligen Dreiecke, die beziehungsweise $a + a'$, a und $b + b'$, b zu homologen Seiten haben, ähnlich.

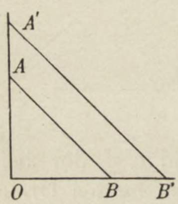

Fig. 75.

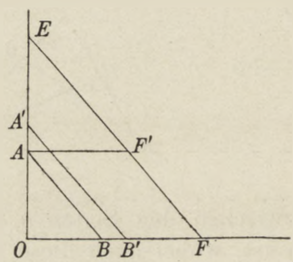

Fig. 76.

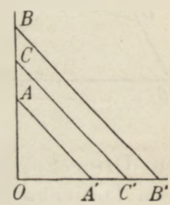

Fig. 77.

Sind in der Tat die beiden rechtwinkligen Dreiecke, welche die Katheten a, b; a', b' haben, in der Weise aufeinandergelegt, daß sie den rechten Winkel in O gemeinsam haben und daß die beiden Hypotenusen AB, $A'B'$ parallel sind, so trage man von A aus auf OA eine Strecke $AE = a'$ ab. Es wird dann $OE = a + a'$ sein. Durch E ziehe man die Parallele zu AB, die in F die Seite OB treffe, und durch A die Parallele zu OF, die in F' die Gerade EF schneide. Die Dreiecke AEF', $OA'B'$ sind kongruent; hieraus folgt, daß $AF' = OB'$ ist.

Aber in dem Parallelogramm $ABFF'$ ist $AF' = BF$, also $BF = OB'$ und deshalb $OF = b + b'$. Hieraus ergibt sich, daß $b, b + b'$ und $a, a + a'$ homologe Katheten ähnlicher rechtwinkliger Dreiecke sind.

2. Hilfssatz. Wenn a, a' und c, c' homologe Katheten ähnlicher rechtwinkliger Dreiecke sind und b, b'; c, c' auch, so werden es auch die Strecken $a + b$, $a' + b'$ und c, c' sein.

Man leitet dies aus dem ersten Hilfssatze ab.

In der Tat, wenn es a, a' und c, c' sind, so werden es auch a, c und a', c' sein nach dem, was hinterher bewiesen wird, und in gleicher Weise aus demselben Grunde b, c und b', c'; daraus schließt man, daß es auch a, b und a', b' sein werden.

Aber nach dem vorher bewiesenen Satze folgt hieraus, daß es auch die Strecken $a + b$, a und $a' + b'$, a' sind.

Aus der Tatsache, daß es, wie wir schon sahen, die Strecken c, a und c', a' sind, folgert man endlich, daß es auch die Strecken $a + b$, a und $a' + b'$, a' sind, wie man beweisen wollte.

3. Hilfssatz. (Unmittelbare Folge von Hilfssatz 2.)

In zwei ähnlichen Dreiecken sind zwei homologe Seiten und die entsprechenden Höhen Strecken, die geeignet sind, homologe Seiten ähnlicher rechtwinkliger Dreiecke zu bilden.

Wenn wir mit Levi die Strecken OA, OB, OC, OD betrachten, die von zwei parallelen Geraden auf den Schenkeln eines beliebigen Winkels bestimmt werden, und bei ihnen die beziehungsweise den Seiten OB und OD entsprechenden Höhen AE, CF ziehen, so werden nach dem vorhergehenden Satze die Strecken OB, OD, AE, CF homologe Katheten zweier ähnlichen rechtwinkligen Dreiecke sein.

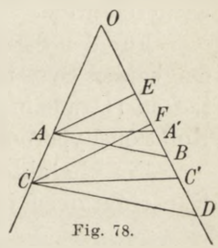

Fig. 78.

Wenn man nun auf dem Schenkel, auf dem die Punkte B, D sich befinden, von O aus zwei Strecken OA', OC' abträgt, die beziehungsweise gleich OA, OC sind, so wird man dasselbe auch von den Grundlinien und den Höhen der gleichschenkligen Dreiecke OAA', OCC' sagen können, d. h. von den Strecken OA', OC' und AE, CF.

Hieraus folgt nach dem schon vielfach angewandten Satze, daß auch OA, OB, OC, OD homologe Katheten ähnlicher rechtwinkliger Dreiecke sein werden, wie wir beweisen wollten.[1])

§ 20. Gebrauch stereometrischer Betrachtungen. Wir haben gesehen, daß die grundlegenden Eigenschaften der (vermittels des Parallelismus definierten) Streckenproportionen in folgender Weise mit gewissen Sätzen über Konfigurationen im Zusammenhange stehen.

1) Zum Schluß sei noch besonders hingewiesen auf die wertvolle Abhandlung von K. Kommerell, *Rein geometrische Begründung der Lehre von den Proportionen und des Flächeninhalts*, Math. Ann. 66 (1909), S. 558—574. Kommerell gibt eine rein geometrische von jeder Streckenrechnung freie Begründung der Proportionen- und Ähnlichkeitslehre; allerdings ist der Beweis seines Fundamentalsatzes nicht einfach.

1. Die Transitivität der Gleichheit von Verhältnissen und der Satz über die Zusammensetzung von Verhältnissen entsprechen dem Parallelenpostulat (Transitivität des Parallelismus) und dem Satz von Desargues (über homothetische [ähnlich liegende] Dreiecke).

2. Der Satz von dem gestörten (perturbierten) Verhältnis (von dem man als besonderen Fall die Vertauschbarkeit der Mittelglieder hat) entspricht dem Satz von Pappus (über das dem Geradenpaar einbeschriebene Sechseck).

Die Beweise dieser Sätze können von gewissen Gesichtspunkten aus durch den Gebrauch stereometrischer Betrachtungen vereinfacht werden. Den größten Vorteil hat man hiervon insbesondere für den Satz des Desargues; z. B. können zwei homothetische Dreiecke als Schnitte zweier dreiseitigen Ecken, deren Ebenen parallel sind, mit einer Ebene angesehen werden; ihr Ähnlichkeitspunkt wird dann auf der Ebene von der Verbindungslinie der Scheitel der beiden dreiseitigen Ecken ausgeschnitten.

Für den Satz des Pappus kann man vermittels der Eigenschaften der beiden Systeme von Erzeugenden eines Hyperboloids einen Beweis liefern (Dandelin), und als Hyperboloid kann man insbesondere das Rotationshyperboloid wählen (Schur[1]).

Ein charakteristisches Beispiel für den Vorteil, den man aus den Konstruktionen im Raume und insbesondere von dem Satze des Desargues für die Beweise der Sätze, die man in der gewöhnlichen Behandlungsweise von der Proportionslehre abhängen läßt, ziehen kann, liefert uns die von De Paolis angegebene Lösung der Aufgabe, ein regelmäßiges Zehneck zu konstruieren.

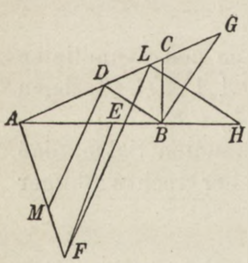

Fig. 79.

Man konstruiert ein rechtwinkliges Dreieck, in dem die Kathete AB doppelt so groß ist wie die Kathete BC, und nimmt auf CA die Strecke CD gleich CB und auf AB die Strecke AE gleich AD an; dann handelt es sich darum, zu beweisen, daß in dem gleichschenkligen Dreieck AEF, das man über AE als Basis und mit den Schenkeln AF, EF gleich AB konstruieren kann, der Winkel EFA gleich dem fünften Teil von zwei Rechten ist.

1) *Mathem. Annalen*, Bd. 51, 1899. Wenn man von Betrachtungen der Äquivalenz Gebrauch macht, kann man die Transitivität der Gleichheit der Verhältnisse aus der Vergleichung zweier Parallelepipeda folgern, die aus den Strecken in geeigneter Weise konstruiert sind.

Nimmt man auf der Verlängerung von DC die Strecke CG gleich CD und demgemäß gleich CB an, so wird man in GBD einen rechten Winkel haben. Hieraus folgt

$$G\widehat{B}C = D\widehat{B}A,$$

daher

$$C\widehat{G}B = D\widehat{B}A.$$

Konstruiert man dann innerhalb des Winkels $B\widehat{A}C$ das Dreieck ALH kongruent zu ABG, so erhält man

$$L\widehat{H}A = D\widehat{B}A;$$

deshalb werden die Geraden LH, DB parallel sein.

Nimmt man $AM = AE$, so werden die gleichschenkligen Dreiecke MDA, FLA, die den Winkel an der Spitze gemeinsam haben, die Winkel an der Basis gleich haben; deshalb werden auch die Geraden MD, FL parallel sein. Alsdann werden nach dem Satze von den homothetischen Dreiecken, angewandt auf MBD, FHL, auch die Seiten MB, FH parallel sein.

Man betrachte nun die gleichschenkligen Dreiecke AEF, AFH, welche die Winkel an der Spitze beide gleich $A\widehat{B}M$ haben (wie sich aus der Kongruenz von ABM, AEF und aus der Parallelität von MB, FH ergibt). Da auch das Dreieck FHE gleichschenklig ist mit der Grundlinie FH (weil man einerseits $AG = AH$, $AD = AE$, $DG = EH$ und andererseits $DG = 2BC = AB$, $EH = AB = EF$ hat), so folgt, daß $A\widehat{H}F$ gleich der Hälfte von $A\widehat{F}H$ ist, und daß deshalb in dem gleichschenkligen Dreieck AEF der Winkel $E\widehat{F}A$, da er die Hälfte von dem an der Grundlinie ist, gleich dem fünften Teil von zwei Rechten ist, wie man beweisen wollte.