Vierter Artikel.

Kongruenz und Bewegung

von Alfred Guarducci in Lodi.

§ 1. Die Euklidische Behandlung. Bei Euklid werden die Kongruenz (Gleichheit der Form) und Äquivalenz (Gleichheit der Größe) der geometrischen Figuren nicht getrennt; unter dem Namen Gleichheit betrachtet der Verfasser die Beziehung der Größe, indem er sich darauf beschränkt, daneben die Gleichheit der Strecken und diejenigen der Winkel festzustellen, die, wie im Falle der Vielecke bestätigt wird, dazu dienen, die Kongruenz zu charakterisieren.

Wollen wir bei Euklid denjenigen Teil der Lehre von der Gleichheit abtrennen, der sich auf die Kongruenz bezieht, so werden wir eine Prüfung des Inhalts der hauptsächlichsten Sätze des Buches I, welche die Dreiecke betreffen, vornehmen.[1]) Und wir werden (indem wir die beiläufigen Konstruktionen übergehen) zwei Gruppen von ihnen unterscheiden:

Die 1. Gruppe, deren Aufgabe wir erst später aufdecken werden, umfaßt die Sätze 1, 2 und 3.

Die 2. Gruppe besteht aus den Sätzen 4, 5, 6, 7, 8, 16 und 26.

Diesen beiden Gruppen von Sätzen kann man eine dritte hinzufügen, die von den Sätzen 11, 12, 13, 14, 17 gebildet wird, welche die Grundlagen für die Lehre von den Senkrechten enthalten.

In der zweiten Gruppe finden sich drei grundlegende Kennzeichen für die Kongruenz der Dreiecke:

Dreiecke, welche zwei Seiten bezüglich gleich und die eingeschlossenen Winkel gleich haben (Satz 4),

Dreiecke, welche die Seiten bezüglich gleich haben (Satz 8),

---

1) Wir haben den von Heiberg herausgegebenen Text im Auge. Leipzig 1883.

Dreiecke, welche zwei Winkel bezüglich gleich und eine Seite gleich haben (Satz 26).

Der Satz 4 wird bewiesen durch Zurückgehen auf die Deckung der beiden Figuren durch Bewegung.

In dem folgenden wird die Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck bewiesen. Wenn ABC (Fig 19) das Dreieck und $AB = AC$ ist, so nehme man auf der Verlängerung von AB einen beliebigen Punkt D und mache $AE = AD$ (s. Satz 3). Alsdann hat man Dreieck $CAD =$ Dreieck BAE, $DC = EB$, $\widehat{DCA} = \widehat{EBA}$, $\widehat{ADC} = \widehat{AEB}$, also auch Dreieck $DCB =$ Dreieck EBC, $\widehat{DCB} = \widehat{EBC}$, $\widehat{DBC} = \widehat{ECB}$. Und aus $\widehat{ABE} = \widehat{ACD}$, $\widehat{CBE} = \widehat{BCD}$ folgt durch Subtraktion $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

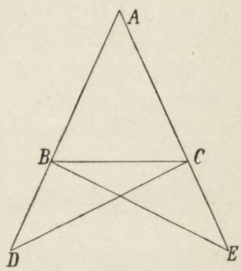

Fig. 19.

Der Satz 6 ist die Umkehrung des vorhergehenden und wird indirekt bewiesen. Wenn in dem Dreieck ABC (Fig. 20) $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ ist, so sei, wenn es möglich ist, z. B. $AB > AC$. Macht man dann (Satz 3) $BD = AC$, so würde das Dreieck ABC seinem Teile DCB gleich sein.

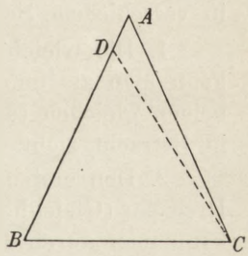

Fig. 20.

Als Folge der Gleichheit der Basiswinkel beweist man in Satz 7 indirekt, daß man über derselben Grundlinie und auf derselben Seite von ihr nicht zwei Dreiecke konstruieren kann, welche die beiden in dem einen und dem andern Endpunkt der gemeinsamen Grundlinie zusammenlaufenden Seiten bezüglich gleich haben.

Hieraus leitet man dann auf indirektem Wege in dem folgenden Satze, indem man auch hier auf die Deckung der beiden Figuren durch Bewegung zurückgeht, das zweite Kennzeichen für Kongruenz der Dreiecke (Gleichheit der drei Seiten) ab.

Das dritte Kennzeichen (Gleichheit zweier Winkel und einer Seite) ist in seiner ganzen Allgemeinheit in Satz 26 enthalten, der den Fall behandelt, in dem die bezüglich gleichen Winkel der gleichen Seite anliegen, und denjenigen, in dem von diesen Winkeln der eine der genannten Seite an-, der andere gegenüberliegt.

Wäre in dem ersten Fall (Fig. 21), in dem $BC = EF$, $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$, $\widehat{ACB} = \widehat{DFE}$ vorausgesetzt ist, z. B. $AB > DE$, so könnte man (Satz 3) $BH = ED$ machen und würde (Satz 4) finden: Dreieck

HBC = Dreieck DEF, $\widehat{HCB} = \widehat{DFE}$, mithin $\widehat{ACB}$ gleich seinem Teile $\widehat{HCB}$. Es folgt also $AB = DE$ und hieraus die Gleichheit der gegebenen Dreiecke.

In dem zweiten Falle, in dem $BC = EF$, $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$, $\widehat{BAC}$ $\widehat{EDF}$ vorausgesetzt ist, geht man in analoger Weise vor; nimmt man an, es wäre $AB > DE$, so folgt $\widehat{BHC} = \widehat{BAC}$, und dies widerspricht Satz 16.

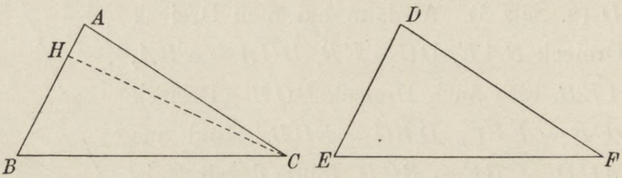

Fig. 21.

Die angeführten Entwicklungen geben, wenn wir von den Prinzipien, die wir später prüfen werden, absehen, zu einigen Bemerkungen Anlaß, die uns zu erkennen gestatten, wie in dem Euklidischen Kreise von Ideen sich andere Gestaltungen der Lehre von der Kongruenz, die in verschiedene Schulbücher aufgenommen sind, als möglich erweisen.

1. Die Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck kann man als unmittelbaren Zusatz zu Satz 4 geben, indem man die beiden gleichen (aufeinandergelegten) Dreiecke BAC, CAB (Fig. 19) in Betracht zieht.

2. Den ersten Teil des dritten Kennzeichens für Kongruenz der Dreiecke (Gleichheit einer Seite und der beiden anliegenden Winkel) kann man durch Deckung beweisen und hieraus den Satz 6 ableiten.

3. Das zweite Kennzeichen (Satz 8) kann man (auf direktem Wege) aus der in Satz 24 gegebenen Ungleichheit ableiten, wenn man die Übertragung des Winkels zuläßt, die Euklid in Satz 23 durch Konstruktion ausführt.

In bezug auf die Prinzipien, die im Euklidischen Text benutzt werden, bemerke man:

1. Das Prinzip des Aufeinanderlegens wird nur beim Beweise der ersten beiden Kennzeichen für die Gleichheit der Dreiecke (Buch I, Satz 4 und 8) angewandt und zum Beweise der Gleichheit zweier ähnlichen Kreisbogen, die über gleichen geradlinigen Strecken liegen (Buch III, Satz 24). Auf dies Prinzip müßte man aber auch in Satz XV zurückgehen, wenn man die Gleichheit der rechten Winkel, die von Euklid als Postulat angenommen wird, nachweisen wollte.

2. Die Sätze 1, 2, 3 des Buches I enthüllen einen nicht vollständig geglückten Versuch, sich von der Bewegung unabhängig zu machen, indem man die Beziehung der Gleichheit zweier Strecken auf den Fall zurückführt, in dem sie einen Endpunkt gemeinsam haben, und an die Stelle der Fortbewegung die Konstruktion vermittels Schnittes von Geraden und Kreisen setzt.

Schließlich wollen wir hier noch auf ein anderes Kennzeichen für Kongruenz der Dreiecke hinweisen, das, wenigstens in seiner Allgemeinheit, nicht im Euklidischen Text aufgeführt ist:

„Zwei Dreiecke, die zwei Seiten und den der größeren von ihnen gegenüberliegenden Winkel bezüglich gleich haben, sind gleich."

Den Satz beweist man leicht indirekt, indem man ihn auf das erste Kennzeichen zurückführt und sich auf die Eigenschaft des Außenwinkels des Dreiecks stützt, größer zu sein als jeder der gegenüberliegenden Innenwinkel (Satz 15, Buch I). Aus ihm leitet man bald folgende Zusätze ab:

1. Zwei rechtwinklige Dreiecke, welche die Hypotenuse und eine Kathete bezüglich gleich haben, sind gleich.[1]

2. Zwei stumpfwinklige Dreiecke, welche die stumpfen Winkel, die diesen Winkeln gegenüberliegenden Seiten und zwei andere Seiten gleich haben, sind gleich.

Nicht richtig ist im allgemeinen der entsprechende Satz für den Fall, daß die als gleich vorausgesetzten Winkel in den beiden Dreiecken spitz sind; es genügt aber, eine einschränkende Bedingung für die dem zweiten Paar gleicher Seiten gegenüberliegenden Winkel hinzuzufügen, um einen anderen allgemeinen Satz zu erhalten, dessen Beweis dem des vorigen analog ist und der auch für spitzwinklige Dreiecke gilt. Man beweist nämlich, daß, „wenn zwei Dreiecke zwei Seiten und den der ersten von ihnen gegenüberliegenden Winkel bezüglich gleich haben, sie gleich sind, wofern der der zweiten Seite gegenüberliegende Winkel in beiden Dreiecken gleichzeitig entweder ein spitzer, ein rechter oder ein stumpfer ist."

§ 2. Der Sinn der Kongruenz. Der Versuch, den wir oben bezüglich der Sätze 1, 2, 3 des Buches I erwähnt haben, offenbart bei dem Verfasser der Elemente das Bewußtsein, daß das Zurückgehen auf das Aufeinanderlegen der Figuren durch Bewegung einen

1) Im Beweise des Satzes 14 im Buche III hat Euklid Gelegenheit, diesen Satz zu geben und die Gleichheit der beiden andern Katheten vermittels der Lehre von der Gleichheit (Äquivalenz) nachzuweisen.

Mangel bedeutet; und dieser Mangel mußte ihm um so mehr hervorzutreten scheinen, als der Begriff der Gleichheit von Euklid (ohne Erklärung) als eine einfache den der Größenkategorie angehörigen Objekten innewohnende, logische Beziehung angesehen wird, die sich in der konkreten Anwendung mit einer physikalischen Operation verkettet.

Hinzugefügt sei, daß eine derartige physikalische Operation (die Fortbewegung) aus dem Kreise derjenigen elementaren Konstruktionen heraustritt, die durch die einfachsten Instrumente gegeben sind, welche die Griechen als Grundlage für die Existenz der Figuren postulierten.[1])

In der auf Euklid folgenden kritischen Entwicklung der Geometrie traten, nachdem die klare Unterscheidung zwischen Gleichheit der Gestalt (Kongruenz) und Gleichheit der Größe (Äquivalenz) bemerkt worden war, rücksichtlich der Kongruenz zwei grundsätzliche Tendenzen hervor, die, jede nach einer Seite hin, mit den Euklidischen Anschauungen in Verbindung gesetzt werden können:

Einerseits betrachtet man die Gleichheit (Kongruenz) wie ein rein logisches Verhältnis, andererseits sieht man sie wie eine physikalische Beziehung an, die von der Bewegung starrer Körper hergenommen ist.

Die erste Richtung hat ihren reinsten Ausdruck in der Ansicht erhalten, welche die Gleichheit mit der Identität zusammenwirft, der gemäß „zwei geometrische Figuren gleich sind, wenn man von der einen alles sagen kann, was man von der zweiten sagt".

Mit anderen Worten würde die Gleichheit zweier Figuren A, A' darin bestehen, daß alle Eigenschaften von A auch A' zukommen und umgekehrt; aber, wie schon z. B. Stolz bemerkt hat, haben geometrisch kongruente Figuren verschiedene Eigenschaften in bezug auf ihre verschiedene Lage in dem Raume, in dem man sie als enthalten ansieht (verglichen mit einer und derselben Figur).

Die vorhergehende Definition würde übrigens auch nicht Geltung behalten, wenn man sie auf die Identität der inneren Eigenschaften der beiden Figuren beschränken wollte. In diesem Falle würde man in Wahrheit nicht wissen, wie man die Gleichheit von der Kongruenz unterscheiden sollte.

Der Mangel der Definitionen, die der Kongruenz den Charakter eines rein logischen Verhältnisses beilegen, entspringt übrigens aus

1) Vgl. H. G. Zeuthen, „*Die geometrischen Konstruktionen als Existenzbeweis in der antiken Geometrie*". Mathematische Annalen 1896.

der Notwendigkeit, in der wir uns in jedem Falle befinden, der verlangten logischen Definition einen Begriff von irgend einem bestimmten Charakter hinzuzufügen, der es erlaubt, in bestimmter Weise die Gleichheit der Figuren zu erkennen.

Die vorhergehenden Bemerkungen werden durch die neuere logische Kritik, die sich auf die allgemeine Bedeutung der Beziehungen der Gleichheit erstrecken, vervollständigt.

Es ergibt sich aus dieser Kritik, daß eine Gleichheit zwischen zwei Objekten A, B die Bedeutung hat, daß diese in eine Klasse (A, B) vereinigt wurden, aus der dann der abstrakte Begriff 0 ($= A$ oder B) konstruiert worden ist; A gleich B sein, bedeutet gerade „die Ersetzbarkeit von A durch B in bezug auf 0".[1])

So hat die Gleichheit immer einen Sinn, der sich auf eine Assoziation und Abstraktion bezieht, die man als ausgeführt voraussetzt; z. B. sagt man: Titius = Caius, insofern sie Menschen sind, oder auch Mensch = Hund, insofern sie lebende Wesen sind usw.

Hieraus folgt, daß jede Gleichheit eine Beziehung ist, die gewissen formalen Eigenschaften (denjenigen, die Peano reflexive, symmetrische und transitive Eigenschaften nennt) genügt und eine physikalische Bedeutung hat; diese wird bestimmt, wenn man die Bedingungen angibt, unter denen die Objekte, die man als gleich nimmt, vereinigt werden.

Die geometrische Gleichheit im besonderen hat einen physikalischen Sinn, der aus der Ähnlichkeit der Empfindungen hervorgeht, die gewisse Objekte in bezug auf die verschiedenen möglichen Stellungen des Beobachters hervorrufen; mit anderen Worten, sie wird physikalisch bestimmt vermittels der Unveränderlichkeit bei der Bewegung starrer Körper. Diese Ansicht, die der zweiten der oben erwähnten Richtungen entspricht, hat in Helmholtz ihren berühmten Vertreter gefunden.

---

1) Dieser Sinn der Gleichheit ergibt sich indirekt aus der Analyse der sogenannten Definitionen durch Abstraktion von Graßmann, Helmholtz, Peano, Vailati, nach denen man einen abstrakten Begriff (z. B. die Temperatur, die Richtung, den Wert usw.) bestimmt, indem man festsetzt, welche Objekte in bezug auf ihn als gleich anzusehen sind (indem man nämlich die Worte definiert: gleich warme Körper, Geraden gleicher Richtung, gleichwertige Waren usw.). Ein Studium der logisch-psychologischen Fragen, die mit dem Begriff der Gleichheit (und insbesondere mit dem Verhältnis zwischen seinen formalen Eigenschaften und den logischen Prinzipien und Axiomen) in Zusammenhang stehen, wird man im 3. Kap. eines Werkes von F. Enriques über Probleme der Erkenntnis finden, das bald veröffentlicht werden wird.

§ 3. Logische Analyse des Begriffs der Bewegung. Es bleibt noch zu untersuchen, in welcher Weise die vorhergehenden Bemerkungen für eine strenge Behandlung der geometrischen Lehre von der Kongruenz benutzt werden können. Einige berühmte Geometer (Houël, De Paolis...) haben, sich auf die Autorität von Helmholtz stützend, es für angemessen erklärt, als gleich oder kongruent die Figuren zu definieren, die durch Bewegung zur Deckung gebracht werden können, indem sie ausdrücklich postulierten, daß „man die geometrischen Figuren so bewegen kann, daß man einen Punkt, eine Gerade durch den Punkt usw. in eine vorher bestimmte Lage bringt.

Diese Art der Darstellung, die didaktisch sehr einfach ist, kann, so genommen, nicht als den Forderungen einer logischen Gestaltung der Geometrie entsprechend angesehen werden. In der Tat kann die Idee der geometrischen Bewegung, in solcher Weise als eine ursprüngliche eingeführt, streng genommen nicht unter die Postulate aufgenommen werden, wenn sie nicht in ihre Elemente zerlegt wird in der Weise, daß die Hypothesen, die für sie angenommen werden, einen formalen Sinn haben, der brauchbar ist, ohne daß man in den Schlußfolgerungen auf die mehr oder weniger versteckte Auslegung von wirklichen oder idealisierten physikalischen Erfahrungen zurückzugehen hat.

Übrigens hat diese schon von Helmholtz selbst begonnene und von S. Lie fortgeführte Analyse des Bewegungsbegriffs zu einer klaren Einsicht in den logischen Inhalt der Postulate geführt, die sich auf sie beziehen. Wir führen nur die Ergebnisse an:

Wenn man sich eine ideal ausgedehnte Figur denkt, so bestimmt die Bewegung von ihr, wenn sie als starr angesehen wird, im Raume (oder in einem Gebiet des Raumes) eine punktförmige gegenseitig eindeutige Transformation oder Korrespondenz. Die verschiedenen möglichen Bewegungen bilden ein System von Transformationen, das die folgenden grundlegenden Eigenschaften besitzt, nach denen man sie eine Gruppe nennt:

1. Führt man nacheinander zwei Bewegungstransformationen aus, so erhält man eine Bewegungstransformation (Zusammensetzung der beiden ersten oder deren Produkt).

2. Zugleich mit jeder Bewegungstransformation existiert auch die umgekehrte Transformation.

Es bleibt also nur der Grad der Freiheit zu postulieren, der den Bewegungen in den Transformationen der Figuren zugebilligt wird. Helmholtz und Lie tun dies unabhängig von den Begriffen der Geraden und der Ebene, die so erst bestimmt werden[1]), und es gelingt ihnen, indem sie auf die Entwicklungen der höheren Analysis zurückgehen, die Möglichkeit nachzuweisen, daß man auf ihren Voraussetzungen den ganzen Bau der Geometrie errichten kann.

Wenn man die Begriffe der Geraden und der Ebene als gegeben annimmt, so ist die Sache leicht in elementarer Weise durchführbar. Die zuzulassenden Postulate sind dann die folgenden:

1. Die Bewegungen des Raumes sind Punkttransformationen, die eine Gruppe bilden.

2. In einer Bewegung transformiert sich jede Gerade in eine Gerade (und demgemäß jede Ebene in eine Ebene).

3. Durch eine Bewegung kann man einem Punkte A einen beliebig angegebenen Punkt A', einer von A ausgehenden Halbgeraden a eine von A' ausgehende Halbgerade a' und einer von a begrenzten Halbebene α eine von a' begrenzte Halbebene α' entsprechen lassen.

4. Wenn in einer Bewegung drei nicht in einer Geraden liegende Punkte fest bleiben, so bleiben alle Punkte fest (d. h. die Bewegung ist Null, oder mit anderen Worten, sie reduziert sich auf die identische Transformation).

Es ist klar, daß diese Postulate die gesuchten Prämissen der Euklidischen Lehre von der Gleichheit enthalten, wofern man die folgende Definition annimmt. Zwei Figuren sind kongruent oder gleich, wenn die eine in die andere vermittels einer Bewegung transformiert werden kann.

Bemerkung. In allem, was vorangeht, haben wir die Euklidische Lehre von der Kongruenz im Auge gehabt, unabhängig von dem Parallelenpostulat (Art. 8).

Wenn man von Anfang an dies Postulat hinzunimmt, so hat man innerhalb der Gruppe der Bewegungen die Untergruppe der Translationen (Verschiebungen), die durch die Vertauschbarkeit charakterisiert wird; diese gestattet es leicht, die Gerade zu definieren und das Gebäude der Geometrie zu begründen.

§ 4. Die Kongruenz, als Grundbegriff genommen. Außer der Richtung, die von der logischen Analyse des Begriffs der Bewegung ausgeht, bietet sich für die Begründung der Lehre von der geometrischen Kongruenz eine andere gleich berechtigte Richtung dar. Sie besteht darin, daß man den Begriff der Kongruenz zwischen Figuren

1) In einer Ideenreihe, die man mit der von Lobatschefskij, Bolyai (Vgl. Art. 3) im Zusammenhang bringen könnte.

im allgemeinen oder zwischen einigen elementaren Figuren selbst (ohne Definition) als ursprünglich annimmt; man drückt vermittels geeigneter Postulate analytisch die Eigenschaften aus, die (von dem physikalischen Sinne her) der Beziehung selbst zukommen und außerdem dazu dienen, ihn in Rücksicht auf die geometrische Behandlung zu charakterisieren. Dieser Art von Ideen gehören die drei Behandlungsweisen an, von denen wir hier Rechenschaft geben wollen, diejenige von Pasch[1]), diejenige von Veronese[2]) und diejenige von Hilbert.[3])

§ 5. Das System der Postulate von Pasch. Pasch sieht den Begriff der Kongruenz oder der Gleichheit für beliebige, aus einer endlichen Zahl von Punkten $A, B, C \ldots A', B', C' \ldots$ zusammengesetzte Figuren als gegeben an. Diese Beziehung zwischen den beiden Figuren kann man durch die Bezeichnung

$$ABC \ldots\ldots \equiv A'B'C' \ldots\ldots$$

andeuten.

Abgesehen von der Reihenfolge und einigen unbedeutenden Abänderungen der Form geben die folgenden Postulate den wesentlichen Inhalt derjenigen von Pasch wieder:

1. Eine Figur ist sich selbst kongruent.

2. Wenn eine Figur einer anderen kongruent ist, so ist auch die zweite der ersten kongruent.

3. Zwei Figuren, die einer dritten kongruent sind, sind untereinander kongruent.

4. Die Figuren AB und BA sind kongruent.

5. Wenn $AB \equiv AC$ ist, so sind die Figuren ABC und CAB kongruent.

6. Wenn A, B, C drei derartige Punkte sind, daß C der geradlinigen Strecke AB angehört, und wenn die Figuren ABC und $A'B'C'$ kongruent sind, so gehört auch C' der geradlinigen Strecke $A'B'$ an.

7. Wenn zwei Figuren $ABCD \ldots\ldots, A'B'C'D' \ldots\ldots$ kongruent sind, so kann man sich zwischen ihren Punkten eine Beziehung denken, in der die von Gruppen entsprechender Punkte gebildeten Figuren kongruent sind.

---

1) Pasch, Vorlesungen über neuere Geometrie (Leipzig 1882).

2) Veronese, Fondamenti di Geometria — Padova 1891 und Elementi di Geometria. Ebenda 1897, 1904.

3) Hilbert, Grundlagen der Geometrie. Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauß-Weber-Denkmals in Göttingen. Leipzig 1899.

8. Sind zwei kongruente Figuren F, F' gegeben und fügt man zu einer von ihnen einen Punkt P hinzu, so kann man auch zur zweiten einen Punkt P' in der Weise hinzufügen, daß die beiden neuen Figuren sich auch als kongruent ergeben, insbesondere:

9. Kann man auf einer Geraden a' und auf einer Seite eines Punktes A' einen und nur einen Punkt B' so bestimmen, daß $A'B' \equiv AB$ ist.

10. Ist ein Tripel von Punkten A, B, C, die nicht in einer Geraden liegen, gegeben und ein Paar von Punkten A', B' derart, daß $A'B' \equiv AB$ ist, so kann man in jeder Ebene durch die Gerade $A'B'$ und auf einer Seite von ihr einen und nur einen Punkt C' so bestimmen, daß $ABC \equiv A'B'C'$ ist.

11. Ist ein Quadrupel von Punkten A, B, C, D gegeben, die nicht in einer Ebene liegen, so gibt es nicht einen von D verschiedenen Punkt X, für den $ABCX \equiv ABCD$ ist. (D. h.: Ist ein Tripel von Punkten $A'B'C' \equiv ABC$ gegeben, so kann man in einer einzigen Weise einen Punkt D' bestimmen, für den sich $A'B'C'D' \equiv ABCD$ ergibt.)

Um zu zeigen, wie diese Postulate der gewöhnlichen Lehre der Kongruenz als Grundlage dienen können, beginnen wir damit, die Kongruenz der Strecken und Winkel zu definieren.

„Zwei Strecken AB, CD heißen kongruent, wenn die Paare AB und CD kongruent sind."

Was die Winkel betrifft, schicken wir folgende Bemerkung voraus:

Es sei (ab) ein Winkel mit dem Scheitel O und O' ein Punkt auf der Geraden a'.

Nimmt man zwei Punkte A und B beziehungsweise auf den Strahlen a, b und einen Punkt A' auf a' derart, daß $OA' \equiv OA$ ist, so bestimmen wir (Post. 10) den Punkt B' so, daß $O'A'B' \equiv OAB$ ist.

Es wird so durch den Punkt B' der Strahl $O'B'$, den wir b' nennen wollen, und der Winkel $(a'b')$ mit dem Scheitel O' bestimmt. Wenn wir nun auf den Schenkeln a, a' beziehungsweise zwei Punkte C, C' derart annehmen, daß $OC \equiv O'C'$ ist, und auf den Schenkeln b, b' zwei Punkte D, D' derart, daß $OD \equiv O'D'$ ist, so ist leicht zu sehen, daß die beiden Figuren OCD, $O'C'D'$ kongruent sind. In der Tat folgt aus dem Postulat 10 bald, daß man zu der Figur $OA'B'$ zwei Punkte X, Y in der Weise hinzufügen kann, daß man hat

$$O'A'B'X'Y' \equiv OABCD.$$

Aber aus den vorhergehenden Postulaten folgt auch, daß X der Geraden $O'A'$ angehören muß und ebenso auch Y der Geraden $O'B'$;

und weiter folgt, daß $O'X \equiv OC$, $O'Y \equiv OD$ ist; man folgert hieraus, daß die Punkte X und Y beziehungsweise mit C' und D' zusammenfallen und deshalb $OCD \equiv O'C'D'$ ist.

Auf Grund dieser Bemerkung werden wir die Kongruenz zweier Winkel in folgender Weise definieren:

Zwei Winkel (ab), $(a'b')$ mit den Scheiteln O, O' heißen kongruent, wenn für den Fall, daß man auf ihren Schenkeln zwei Paare von Punkten A, B beziehungsweise A', B' so wählt, daß $OA \equiv O'A'$, $OB \equiv O'B'$ ist, daraus $OAB \equiv O'A'B'$ sich ergibt.[1])

Aus dem Vorangehenden erhält man sofort:

α) In einer gegebenen Ebene gibt es auf einer Seite des Strahls a' einen und nur einen Strahl b', für den der Winkel $(a'b')$ sich zu einem gegebenen Winkel (ab) als kongruent ergibt.

Die Gleichheit oder Kongruenz zweier Dreiecke kann man als Kongruenz der Tripel der Ecken definieren und daraus herleiten, daß die Seiten (Strecken oder Punktepaare) und ebenso auch die Winkel kongruent sind.

Hieraus leitet man nun leicht die drei grundlegenden Sätze über Kongruenz von Dreiecken ab. So folgt unmittelbar aus der oben gegebenen Definition der Winkelkongruenz der Satz:

I. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn beziehungsweise ein Winkel und die ihn einschließenden Seiten kongruent sind.

Weiter beweisen wir den Satz:

II. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie eine Seite und die beiden anliegenden Winkel beziehungsweise kongruent haben.

Es seien ABC, $A'B'C'$ die beiden Dreiecke, die $AB \equiv A'B'$, $C\widehat{A}B \equiv C'\widehat{A'}B'$, $C\widehat{B}A \equiv C'\widehat{B'}A'$ haben; ich behaupte, daß $ABC \equiv A'B'C'$ ist. In der Tat, wenn $AB \equiv A'B'$ ist, so können wir in der Ebene ABC auf derselben Seite von AB, auf der sich der Punkt C befindet, einen Punkt C'' (Post. 10) in der Weise bestimmen, daß

$$AC''B \equiv A'C'B'$$

ist.

Aus der Kongruenz dieser beiden Tripel und aus der darausfolgenden Kongruenz der durch sie bestimmten Winkel schließt man,

1) Insbesondere folgt, wenn man $OA \equiv OB$ auf a beziehungsweise b nimmt, aus Postulat 5 die Umkehrbarkeit des Winkels.

indem man die Voraussetzung und den Satz α berücksichtigt, daß die Strahlen AC'', BC'' von den Strahlen AC, BC nicht verschieden sein können, und daß infolgedessen die Punkte C, C'' zusammenfallen. Es ist also die Kongruenz der gegebenen Dreiecke ABC, $A'B'C'$ bewiesen.

III. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn die Seiten des einen beziehungsweise den Seiten des andern kongruent sind.

Es seien ABC, $A'B'C'$ die beiden Dreiecke, welche $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $BC \equiv B'C'$ haben; ich behaupte, daß $ABC \equiv A'B'C'$ ist.

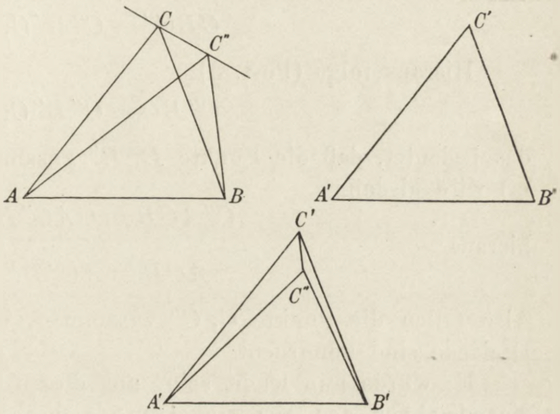

Fig. 22.

In der Tat, da $AB \equiv A'B'$ ist, kann man in der Ebene ABC und auf derselben Seite von AB, auf der sich C befindet, zu AB (Post. 10) einen Punkt C'' in der Weise hinzufügen, daß sich

$$ABC'' \equiv A'B'C'$$

ergibt.

Man wird alsdann, wenn man auch die Voraussetzung in Rechnung zieht, erhalten

$$AC \equiv AC'', \quad BC \equiv BC''.$$

Da weiter (Post. 5)

$$CAC'' \equiv C''AC$$

ist, wird man zu der Figur $C''AB$ einen Punkt B'' in der Weise hinzufügen können, daß sich

$$\text{m)} \qquad C''ACB'' \equiv CAC''B$$

ergibt.

Es wird eintreten können, daß die Punkte A und B in der Figur $CAC''B$ auf derselben Seite oder auch auf entgegengesetzten Seiten von der Geraden CC'' liegen; aber da auch die Punkte A, B'' in der Figur $C''ACB''$ in dem ersten Falle auf derselben Seite und im zweiten Falle auf entgegengesetzten Seiten von CC'' liegen werden, so werden B und B'' immer auf derselben Seite von CC'' liegen.

Man hat andererseits (Post. 5)

$$CBC'' \equiv C''BC$$

und nach der Beziehung m) auch

$$CBC'' \equiv C''B''C;$$

Hieraus folgt (Post. 3)

$$C''BC \equiv C''B''C;$$

das bedeutet, daß die Punkte B, B'' zusammenfallen. Die Beziehung m) wird alsdann

$$C''ACB \equiv CAC''B,$$

hieraus

$$ACB \equiv AC''B.$$

Also fallen die Punkte C, C'' zusammen, und die beiden gegebenen Dreiecke sind kongruent.

Es würde nun leicht sein, aus diesen Sätzen den Lehrsatz über die Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck, den über den Außenwinkel usw. abzuleiten, ebenso auch die Gleichheit der Scheitelwinkel, die Sätze über die Gleichheit (Kongruenz) der Vielecke und so fort. Aber was vorausgeht, scheint uns ausreichend, eine Idee von der Richtung zu geben, zu der die Postulate von Pasch führen; und deshalb gehen wir nun dazu über, kurz die Methode von Veronese darzulegen.

§ 6. Das System von Veronese.[1]) Eins der grundlegenden Prinzipien, auf denen Veronese das Gebäude der Geometrie gründet, ist das, daß er die Gerade als grundlegende Figur der Geometrie für die Konstruktion der übrigen Figuren ansieht.

Er führt als ursprünglich den Begriff der Kongruenz zwischen Strecken ein; folgendes ist eine erste Gruppe von Postulaten, die dieser Ideenordnung angehören:

1. Eine Strecke ist sich selbst kongruent.

2. Wenn eine Strecke einer andern kongruent ist, so ist auch die zweite der ersten kongruent.

3. Zwei Strecken, die einer dritten kongruent sind, sind untereinander kongruent.

1) Bei der Darlegung der Methode Veroneses haben wir außer den „*Fondamenti*" und den „*Elementi*" dieses Schriftstellers die Note von F. Palatini: „*I principî della Geometria esposti seconde il metodo di Veronese*" (Giornale di Battaglini 1904, Vol. 4) vor Augen gehabt.

4. Eine Strecke ist nicht einem ihrer Teile kongruent.

5. Die Strecke AB ist der umgekehrten Strecke BA kongruent.

6. Ist auf der Geraden ein Punkt A und eine beliebige Strecke XY gegeben, so gibt es auf derselben Geraden zwei mit XY kongruente Strecken AB und AC auf entgegengesetzten Seiten von A.

Diese Postulate sind ausreichend, die Definitionen und die Eigenschaften der Begriffe der Summe, der Differenz, der Vielfachen usw. von Strecken zu liefern; zusammen mit dem Postulat der Bestimmung der Geraden vermittels zweier Punkte, den Linieneigenschaften der Geraden (Anordnung und Stetigkeit) und dem Postulat von Archimedes dienen sie nach den Ansichten des Verfassers dazu, die Gerade zu charakterisieren, wenn man sie für sich selbst betrachtet.

Nachdem er dann die Existenz von Punkten außerhalb der Geraden vorausgesetzt hat, wird das Postulat eingeführt:

7. In jeder Geraden gibt es eine Strecke, die einer beliebigen gegebenen Strecke gleich ist.

Nachdem dies festgestellt ist, kann man die allgemeine Definition kongruenter Figuren geben; diese läßt sich (von der besonderen Ausdrucksweise des Verfassers abgesehen) in folgender Weise ausdrücken:

„Zwei Figuren heißen kongruent, wenn jedem Punkte der einen ein und nur ein Punkt der anderen entspricht, in der Weise, daß die Verbindungsstrecken von Paaren homologer Punkte in den beiden Figuren kongruent sind.“

Aus der Definition folgt ohne weiteres die Gleichheit (Kongruenz) jeder Figur mit sich selbst, diejenige zweier Figuren, die einer und derselben gleich sind, und die Möglichkeit, zwischen zwei Geraden (in denen die beiden Arten des Sinnes festgelegt sind oder nicht) auf unzählige Arten eine Beziehung der Gleichheit herzustellen, da die Wahl der Punkte A, A', von denen man zu ihrer Herstellung ausgeht, willkürlich ist.

Die Untersuchung der kongruenten Figuren wird von Veronese in den *„Elementi“* auf einem Wege ausgeführt, der mit dem Euklidischen Parallelenpostulat verknüpft ist. Die zugelassenen Postulate sprechen die Umkehrbarkeit des Geradenpaars und die grundlegende Eigenschaft von Geraden aus, die in der Euklidischen Geometrie in bezug auf einen Punkt symmetrisch (gegenüberliegend) sind, nämlich:

8. Die von zwei in einem Punkte O zusammenlaufenden Geraden r, s gebildete Figur ist zu der in umgekehrter Reihenfolge betrachteten Figur derselben beiden Graden kongruent.

9. Wenn zwei Punkte A, B einer Geraden r zu zwei anderen Punkten A', B' einer anderen Geraden r' in bezug auf einen Punkt O symmetrisch sind, so haben alle Punkte von r ihre für O symmetrischen Punkte auf r', und die beiden Geraden sind für die Mitte einer beliebigen Strecke, die einen Punkt der einen mit einem Punkte der andern verbindet, symmetrisch.

Diese Postulate (von denen das letzte ersichtlich das der Parallelen enthält) gestatten, wenn die Ebene einmal durch Projektion von einem Punkte aus konstruiert ist, deren grundlegende Eigenschaft zu beweisen (vgl. Art. 3).

Weiter erhält man in der Ebene zwei Arten von Verwandlungen (Transformationen) durch Kongruenz, die Symmetrie in bezug auf eine Gerade und die Symmetrie in bezug auf einen Punkt. Man kann überdies sagen, daß die Ableitung dieser Verwandlungen aus den oben angeführten Postulaten den grundlegenden Abschnitt in dem System von Veronese ausmacht. Wenn man die vorgenannten Symmetrien zusammensetzt, so ergeben sich in der Tat die Bewegungen der Ebene in ihrer ganzen Allgemeinheit; es ergibt sich also das Prinzip der Aufeinanderlegbarkeit (Deckung), auf das man die gewöhnliche Lehre von der Kongruenz gründet, als nachgewiesen.

In den „*Fondamenti*“ beschäftigt sich Veronese auch im allgemeinen mit der Art und Weise der Begründung der Lehre von der Kongruenz in den verschiedenen Hypothesen, die man erhält, wenn man von dem Parallelenpostulat absieht (vgl. Art. 8). Alsdann hat man nicht mehr das Postulat von Geraden, die in bezug auf einen Punkt symmetrisch sind, sondern es wird das Postulat von der Umkehrbarkeit des Geradenpaars durch ein allgemeineres ersetzt, das man so aussprechen kann:

8'. „Wenn $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$ ist und man auf den Strahlen AB, $A'B'$ die Punkte D, D' so annimmt, daß

$$AD = A'D'$$

ist, und auf AC, $A'C'$ die Punkte E, E' so, daß

$$AE = A'E'$$

ist, so ergibt sich

$$DE = D'E'.“$$

Diese Daten genügen übrigens nicht für sich allein, in absolut allgemeiner Weise die grundlegende Eigenschaft der Ebene nachzuweisen, die Veronese aus ihrer Konstruktion abzuleiten beabsichtigt. Die Erörterung der Hypothesen, die man zu diesem Zwecke hinzufügen muß, würde uns aus der Reihe der elementaren Ideen herausführen, an der wir in dieser Schrift festhalten. Übrigens kann die Frage für unseren Zweck als in zweiter Linie stehend angesehen werden.

Setzen wir deshalb diese Eigenschaft als vermittels eines Postulats eingeführt voraus, von dem wir die Form genauer bestimmen werden, und fragen wir uns, ob diese Daten ausreichend sind, um die grundlegenden Sätze über die Kongruenz der Dreiecke aufzustellen, oder was wir für diesen Zweck hinzufügen müssen. Wir werden so den Wert der grundlegenden Idee von Veronese für die Theorie, die uns beschäftigt, klarer beurteilen können, unabhängig von anderen Gesichtspunkten, die das System charakterisieren.

Wir wollen das erwähnte Postulat unter der folgenden Form nehmen:

9′. „Wenn man auf zwei Strahlen OA, OB beziehungsweise zwei Punkte A', B' nimmt, so trifft jeder Strahl, der von O aus einen Punkt der Strecke AB projiziert, die Strecke $A'B'$."

Dies Postulat führt uns unmittelbar zu den grundlegenden Eigenschaften des Winkels $\widehat{AOB}$, der als die Gesamtheit der Strahlen definiert ist, die von O aus die Punkte der Strecke AB (oder $A'B'$ usw.) projizieren (vgl. Art. 3). Die Kongruenz der beiden Geradenpaare OA, OB; $O'A'$, $O'B'$ wird der allgemeinen Definition gemäß mit der Kongruenz der beiden Winkel $\widehat{AOB}$, $\widehat{A'O'B'}$ gleichwertig sein.

Nach dem Postulat 8′ werden zwei Winkel $\widehat{AOB}$, $\widehat{A'O'B'}$ kongruent sein, wenn sich für den Fall, daß man $OA = O'A'$, $OB = O'B'$ nimmt, $AB = A'B'$ ergeben wird. In diesem Falle wird auch $\widehat{BAO} = \widehat{B'A'O'}$ sein usw. Wenn man alsdann einen Strahl OC im Innern von $\widehat{AOB}$ betrachtet, der AB in C schneidet, und man auf $A'B'$ einen Punkt C' so nimmt, daß $A'C' = AC$ ist, so wird sich $CO = C'O'$ ergeben, und demgemäß $\widehat{AOC} = \widehat{A'O'C'}$ wie auch $\widehat{BOC} = \widehat{B'O'C'}$.

Nachdem dies festgestellt ist, nehmen wir uns vor, die Kongruenzsätze für die Dreiecke zu beweisen.

Der Fall, in dem zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel bezüglich gleich sind, und derjenige, in dem die drei Seiten bezüglich gleich sind, folgen ohne weiteres aus dem Postulat 8′. Beschäftigen wir uns deshalb mit dem Fall, in dem die beiden Dreiecke eine Seite und die beiden anliegenden Winkel bezüglich gleich haben. In den beiden Dreiecken ABC, $A'B'C'$ (Fig. 23) sei $AB = A'B'$, $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$, $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$. Versuchen wir einen Beweis auf indirektem Wege.

Hierzu nehmen wir, wenn z. B. $B'C' > BC$ angenommen wird, C_1 auf $B'C'$ so an, daß $B'C_1 = BC$ ist; dann werden wir $AC = A'C_1$ und deshalb $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C_1} = \widehat{B'A'C'}$ haben.

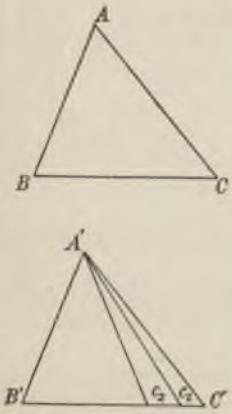
Fig. 23.

So erhielte man einen Winkel, der einem seiner Teile kongruent ist. Diese Folgerung erscheint in Wahrheit nicht in Widerspruch mit unseren Voraussetzungen. Nur wird $A'C_1 \gtrless A'C'$ sein müssen. Unter dieser Annahme werden wir aber innerhalb des Winkels $\widehat{B'A'C_1}$ einen Strahl konstruieren können, der $B'C_1$ in einem Punkte C_2 so schneidet, daß

$$\widehat{B'A'C_2} = \widehat{B'A'C_1} = \widehat{B'A'C'}$$

ist, und diese Konstruktion wird man unbegrenzt weiterführen können.

Wenn man nun das Postulat der Stetigkeit (Vgl. Art. 5) annimmt, so wird die Folge der Punkte C_1, C_2, ... einen Grenzpunkt K haben müssen, für den nicht

$$\widehat{B'A'K} = \widehat{B'A'C'}$$

wird sein können.

Denn diese Folgerung schließt eine andere in sich, die unserer Anschauung widerspricht. Man kann sich in Wahrheit leicht überzeugen, daß man in diesem Falle ein veränderliches Dreieck erhalten wird, von dem eine Seite unendlich klein wird, während die Differenz der beiden anderen Seiten sich oberhalb einer angebbaren Strecke hält. Die Möglichkeit eines derartigen Falles kann vermittels eines Postulats verneint werden, das man das der Stetigkeit der Ebene nennen könnte.[1])

Auf Grund hiervon gelangt man also zu dem Beweise, den wir beabsichtigt hatten, und demgemäß dazu, die gesamte gewöhnliche Lehre von der Kongruenz zu begründen.

Das angeführte Postulat hat auch in dem von Veronese in den „*Fondamenti*“[2]) dargelegten System eine bemerkenswerte Aufgabe, nur

---

1) Wenn die gewöhnliche Lehre von der Kongruenz schon begründet ist, folgt dieser Satz aus der Stetigkeit der Geraden.

2) Veronese, *Fondamenti*.

ist die dort gewählte Form ein wenig verschieden, da der Verfasser eine allgemeine Geometrie im Auge hat, die nichtarchimedische.

Die angegebenen Entwicklungen gestatten, uns über den Wert des Systems von Veronese ein Urteil zu bilden.

Die Grundidee, den allgemeinen Begriff der Kongruenz auf den Fall der Strecken zurückzuführen, verwirklicht ersichtlich einen theoretischen Fortschritt über die Methode von Pasch hinaus, einen Fortschritt, der übrigens auch den Ansichten anderer Forscher entsprechend erscheint. Aber die Entwicklung der Lehre wird, wenn man die Postulate von Veronese zum Ausgangspunkt wählt, vielleicht verwickelter als die, die man erhält, wenn man von den Postulaten von Pasch ausgeht. Eine didaktische Schwierigkeit indes ist beiden Methoden gemeinsam, nämlich die der Einführung des abstrakten Begriffs des Entsprechens gleich zu Anfang. Diese Schwierigkeit kann man beseitigt oder wenigstens vermindert nennen durch die Methode von Hilbert, zu deren Darlegung wir jetzt übergehen.

§ 7. Das System von Hilbert. Die Arbeit von Hilbert, die wir oben angeführt haben, enthält für die Art der Einführung des Kongruenzbegriffes einen neuen Gesichtspunkt. Während Pasch den Begriff der Kongruenz zwischen irgendwelchen Figuren und Veronese nur den zwischen Strecken als ursprünglich einführten, treten in dem System von Hilbert als ursprünglich die Begriffe der Kongruenz zwischen Strecken und zwischen Winkeln auf. Es ist ein Weg, der, in einem gewissen Sinne, zwischen denen der beiden anderen Autoren in der Mitte steht und der, systematisch in den Unterricht der Geometrie aufgenommen[1]), uns vom didaktischen Gesichtspunkte aus vorteilhafter erscheint als die beiden anderen. Wir glauben in der Tat, daß man, wenn man den anschaulich klaren Begriff der Winkelkongruenz durch eine Definition ersetzt (wie es Pasch und Veronese tun), nicht dazu gelangt, von dieser Beziehung eine unmittelbar verständliche Idee zu geben. Es ist übrigens augenscheinlich, daß die Postulate selbst, wenn sie auch unabhängig vom Begriff der Winkelkongruenz (z. B. das von Veronese durch die Kongruenz zwischen Geradenpaaren) formuliert werden, sich im wesentlichen auf die Anschauung dieses Begriffs gründen.

Wir weisen noch darauf hin, daß man diese Hilbertsche Formulierung als die den Euklidischen Anschauungen am nächsten stehende ansehen kann; sie stellt diese auf eine strenge Grundlage, indem sie die

1) So ist es geschehen in dem Werke von F. Enriques und U. Amaldi „*Elementi di Geometria*". Bologna, Zanichelli 1903 und 1905.

ursprünglichen Begriffe der Strecken- und Winkelkongruenz, die in jenen enthalten sind, heraushebt und die Beziehungen postuliert, die von dem möglichst eingeschränkten Gebrauch der Bewegung entnommen sind.

Hier seien, abgesehen von der Reihenfolge und einer Erweiterung, die zum Zwecke der Vereinfachung der Entwicklung der Lehre gemacht ist, die von Hilbert vorgeschlagenen Postulate aufgeführt:

1. Wenn eine Strecke einer anderen kongruent ist, so ist auch die zweite der ersten kongruent.

2. Wenn ein Winkel einem anderen kongruent ist, so ist auch der zweite dem ersten kongruent.

3. Zwei Strecken, die einer dritten kongruent sind, sind unter sich kongruent.

4. Zwei Winkel, die einem dritten kongruent sind, sind unter sich kongruent.

5. Jede Strecke AB ist unabhängig vom Sinne sich selbst kongruent, also:

$$AB \equiv AB \equiv BA.$$

6. Jeder Winkel (ab) ist unabhängig vom Sinne sich selbst kongruent, also:

$$(ab) \equiv (ab) \equiv (ba).$$

7. Auf jeder Geraden r' gibt es von einem beliebigen Punkte aus und auf jeder der beiden Seiten eine und nur eine Strecke, die zu einer der Geraden r angehörigen Strecke kongruent ist.

8. Ist ein von einem Punkte O ausgehender Strahl a gegeben, so gibt es in jeder Ebene, die ihn enthält, und auf jeder der beiden Seiten einen und nur einen von O ausgehenden Strahl b von der Eigenschaft, daß der Winkel (ab) sich als einem gegebenen Winkel $(a'b')$ kongruent ergibt.

9. Sind AB, BC zwei aufeinander folgende Strecken derselben Geraden r (d. h. solche, die einen Endpunkt und keinen anderen Punkt gemeinsam haben), $A'B'$, $B'C'$ zwei andere aufeinander folgende Strecken auf der Geraden r' und ist $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$, so hat man auch $AC \equiv A'C'$.

10. Sind (ab), (bc) zwei aufeinander folgende Winkel derselben Ebene π (d. h. solche, die den Scheitel und einen Schenkel gemeinsam haben), $(a'b')$, $(b'c')$ zwei andere aufeinander folgende Winkel in einer und derselben Ebene π' und ist $(ab) \equiv (a'b')$, $(bc) \equiv (b'c')$, so hat man auch $(ac) \equiv (a'c')$.

11. Wenn zwei Dreiecke zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel bezüglich kongruent haben, so haben sie auch die dritten

Seiten und die den kongruenten Seiten gegenüberliegenden Winkel bezüglich gleich.

Wir bemerken bald, daß aus den Postulaten 6 und 11 die Gleichheit der Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks folgt, und daß die Postulate 9 und 10 im wesentlichen den Satz aussprechen:

„Summen und Differenzen von bezüglich gleichen Strecken oder Winkeln sind gleich."

Wir fügen noch hinzu, daß man das Postulat 11, das den Begriff der Kongruenz zwischen Strecken mit dem zwischen Winkeln in Verbindung setzt, wie in der Arbeit von Hilbert, unter einer einfacheren Form geben könnte, indem man zunächst nur die Kongruenz der den gleichen Seiten gegenüberliegenden Winkel voraussetzt und nicht auch die der dritten Seiten, die aus der ersten und aus dem Postulat 8 unmittelbar folgt; hier ist vorgezogen, es mit diesem Teil zu vervollständigen, weil er wie der andere von derselben empirischen Demonstration durch Bewegung herrührt.

Nachdem nun die Gleichheit zweier Dreiecke als die Gleichheit der Seiten und der von den bezüglich gleichen Seiten eingeschlossenen Winkel bestimmt ist, gehen wir dazu über, die beiden anderen Sätze über die Kongruenz der Dreiecke darzulegen.

I. Zwei Dreiecke, die eine Seite und die beiden anliegenden Winkel bezüglich kongruent haben, sind kongruent.

Die beiden Dreiecke seien ABC, $A'B'C'$, welche haben

$$AB \equiv A'B', \ \widehat{CAB} \equiv \widehat{C'A'B'}, \ \widehat{CBA} \equiv \widehat{C'B'A'}.$$

Ich behaupte, daß die beiden Dreiecke kongruent sind. Es genügt zu zeigen, daß $CA \equiv C'A'$ ist, weil dann der Satz auf Grund des Postulats 11 sich als bewiesen ergibt.

Wäre nicht $CA \equiv C'A'$, so könnte man auf dem Strahl AC einen Punkt C'' so bestimmen, daß $AC'' \equiv A'C'$ wäre. Aus dem Vergleich der Dreiecke $C''AB$, $C'A'B'$ würde man alsdann erhalten

$$C''\widehat{BA} \equiv C'\widehat{B'A'}$$

und deshalb auch (Postulat 4)

$$C\widehat{BA} \equiv C''\widehat{BA},$$

entgegen dem Postulat 8.

II. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn die Seiten des einen denen des anderen bezüglich kongruent sind.

Es seien die beiden Dreiecke ABC, $A'B'C'$, die $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $BC \equiv B'C'$ haben mögen.

Ich behaupte, daß die beiden Dreiecke kongruent sind.

In der Ebene ABC und auf der entgegengesetzten Seite von der, auf der sich für AB der Punkt C befindet, bestimmen wir den Winkel $\widehat{BAC''} \equiv \widehat{C'A'B'}$ und nehmen $AC'' \equiv A'C'$. Aus den Dreiecken BAC'', $C'A'B'$ folgt alsdann

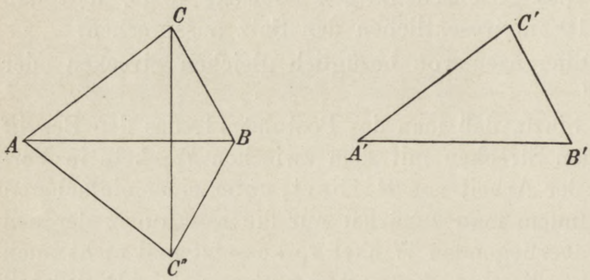

Fig. 24.

$$C''B \equiv C'B',$$

$$\widehat{AC''B} \equiv \widehat{A'C'B'}.$$

Konstruiert man die Strecke CC'', so bemerkt man, daß die Dreiecke CAC'', CBC'' gleichschenklig sind und deshalb die Winkel an der Basis gleich haben. Nach der oben für das Postulat 10 gemachten Bemerkung folgt sowohl in dem Falle, daß die Strecke CC'' die Strecke AB trifft, als auch in dem Falle, daß sie deren Verlängerung trifft,

$$\widehat{AC''B} \equiv \widehat{ACB}.$$

Aber man hat

$$\widehat{AC''B} \equiv \widehat{A'C'B'},$$

also

$$\widehat{ACB} \equiv \widehat{A'C'B'},$$

und die Dreiecke sind nach dem Postulat 11 kongruent.

§ 8. Grundlegende Sätze über Senkrechte. Wir haben schon angegeben, daß bei Euklid sich die Lehre von den Senkrechten auf das Postulat von der Gleichheit der rechten (oder gestreckten) Winkel stützt, eine Gleichheit, die sich durch Bewegung bewahrheiten lassen würde. Es lohnt der Mühe, zu sehen, wie es Hilbert gelingt, diese Lehre ohne Hinzufügung eines neuen Postulats aufzubauen.

Wir beginnen damit, den

Lehrsatz I: Nebenwinkel[1]) gleicher Winkel sind gleich, zu beweisen.

---

1) Unter dem Nebenwinkel eines gegebenen Winkels verstehen wir wie gewöhnlich denjenigen, der von einem der Schenkel des gegebenen Winkels und von der Verlängerung des anderen Schenkels über den Scheitel hinaus gebildet wird.

Sind (Fig. 25) (ab), $(a'b')$ die beiden gleichen Winkel mit den Scheiteln O und O', so betrachten wir ihre Nebenwinkel $(a_1 b)$, $(a'_1 b')$. Ich behaupte, daß

$$(a_1 b) \equiv (a'_1 b')$$

ist.

In der Tat, nimmt man drei beliebige Punkte A, B, A_1 bzw. auf den Strahlen, a, b, a_1, so bestimmen wir auf den Strahlen a', b', a'_1 die Punkte A', B', A'_1 so, daß

$$OA \equiv O'A',\ OB \equiv O'B',\ OA_1 \equiv O'A'_1$$

ist.

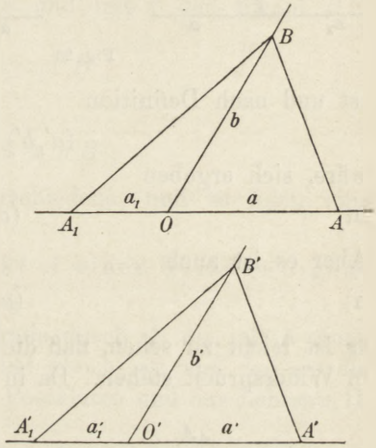

Fig. 25.

Zieht man dann die Strecken AB, $A_1 B$ und die entsprechenden $A'B'$, $A'_1 B'$, so folgt aus den gleichen (kongruenten) Dreiecken BOA, $B'O'A'$

$$BA \equiv B'A',\ \widehat{BAO} \equiv \widehat{B'A'O};$$

mithin sind auch die Dreiecke BAA_1, $B'A'A'_1$ gleich (kongruent), und man hat

$$A_1 B \equiv A'_1 B'.$$

Betrachtet man alsdann das weitere Paar Dreiecke BOA_1, $B'O'A'_1$, so findet man, daß sie die dritten Seiten bezüglich gleich haben, und schließt hieraus

$$(a_1 b) \equiv (a'_1 b'),$$

was wir beweisen wollten.

Zusatz. Zwei Scheitelwinkel sind gleich.

In der Tat sind zwei Scheitelwinkel Nebenwinkel desselben Winkels.

Erklärung. Ein Winkel heißt ein rechter, wenn er einem seiner Nebenwinkel gleich ist.[1])

Wir bemerken, daß, wenn ein Winkel einem seiner Nebenwinkel gleich ist, er nach dem vorangehenden Zusatz auch dem andern gleich ist.

Lehrsatz II: Die rechten Winkel sind gleich.

Es seien (Fig. 26) die beiden rechten Winkel (ab), $(a'b')$ gegeben. Ich behaupte, daß

$$(ab) \equiv (a'b')$$

ist.

1) Die Existenz eines rechten Winkels entnimmt man dann aus dem Lehrsatz III.

In der Tat, wenn nicht $(ab) \equiv (a'b')$ wäre, so würde man auf derselben Seite von a, auf der sich b befindet, einen von b verschiedenen Strahl c so bestimmen können, daß

$$(ac) \equiv (a'b')$$

ist.

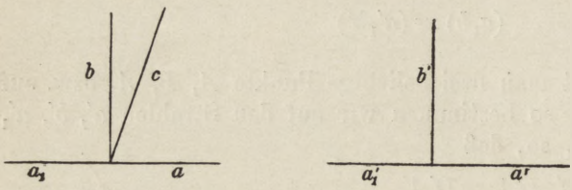

Fig. 26.

Alsdann würde, da nach Lehrsatz I

$$(a_1 c) \equiv (a'_1 b')$$

ist und nach Definition

$$(a'_1 b') \equiv (a'b') \equiv (ac)$$

wäre, sich ergeben

$$\text{m)} \qquad (a_1 c) \equiv (ac)$$

Aber es ist auch

$$\text{n)} \qquad (a_1 b) \equiv (ab);$$

es ist leicht zu sehen, daß die beiden Beziehungen m), n) miteinander in Widerspruch stehen. Da in Wahrheit die beiden Winkel (ac), (ab) nicht kongruent sind, so wird z. B.

$$(ac) < (ab) \text{ und } (a_1 c) > (a_1 b)$$

sein und nach n)

$$(a_1 c) > (ac),$$

was der Beziehung m) widerspricht. Die beiden Strahlen b, c können also nicht verschieden sein, und der Satz ist bewiesen.

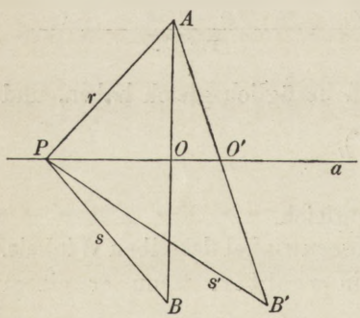

Fig. 27.

Lehrsatz III. Durch einen Punkt A, der nicht einer Geraden a angehört, geht eine und nur eine zu a senkrechte Gerade. (Fig. 27.)

In der Tat, wählen wir einen beliebigen P auf a, verbinden die Punkte A, P und nennen r den Strahl PA. Dann bestimmen wir in der Ebene Aa und auf der entgegengesetzten Seite zu der, auf der sich A befindet, den Strahl s durch P so, daß

$$(ra) \equiv (sa)$$

ist, und den Punkt B so, daß

$$PA \equiv PB$$

ist.

Verbindet man A mit B, so ist klar, daß AB auf a senkrecht ist, da aus den beiden gleichen (kongruenten) Dreiecken APO, BPO sich

$$A\widehat{OP} \equiv B\widehat{OP}$$

ergibt.

Diese Senkrechte ist dann die einzige, weil jede andere Grade AB', die a in O' träfe und zu a senkrecht wäre, offenbar, wenn man auf der anderen Seite $O'B' \equiv O'A$ machte und mit s' den Strahl PB' bezeichnete,

$$(ra) \equiv (s'a), \quad PA \equiv PB'$$

geben würde und daher

$$(sa) = (s'a), \quad PB \equiv PB';$$

also sind die Punkte B, B' nicht verschiedene, und es kann eine andere Senkrechte nicht geben.

Lehrsatz IV. Durch einen Punkt A einer Geraden a geht eine und nur eine Senkrechte zu a.

Eine solche ist in der Tat die Gerade durch A, die mit a einen Winkel bildet, der einem rechten Winkel gleich ist; und daß sie die einzige ist, ergibt sich offenbar aus den Postulaten und aus Lehrsatz II.

§ 9. Kongruenz der Figuren im allgemeinen. Das System der Postulate von Hilbert, das wir besprochen haben, gestattet, eine vollständig allgemeine Definition der Kongruenz der Figuren anzuschließen, während dieser Begriff in dem System von Pasch als ein ursprünglicher angenommen wird.

Die Definition, auf die wir anspielen, ist folgende:

Zwei Figuren heißen kongruent, wenn jedem Punkte der einen ein und nur ein Punkt der andern entspricht, in der Weise, daß die Strecken, die Paare entsprechender Punkte zu Endpunkten haben, und die Winkel, die entsprechende Strecken zu Schenkeln haben, gleich sind.[1])

Hilbert beweist selbst, daß man aus den Kongruenzsätzen für Dreiecke die Korrespondenz (Verwandtschaft) der Gleichheit (Kongruenz) für Halbebenen (oder Halbräume) ableiten kann, d. h. das gewöhnliche Prinzip der Deckung (Aufeinanderlegbarkeit).

Da aber der allgemeine Begriff der Verwandtschaft (des Entsprechens) in seiner Abstraktheit für didaktisch schwer gehalten werden kann, so ist es der Mühe wert, zu sehen, wie man zu einer

1) Hier muß man die Bedingung der Gleichheit des Sinns (Vgl. Art. 3) hinzufügen, wenn man sich auf die direkte Kongruenz beschränken will.

induktiven Definition der Gleichheit (Kongruenz) der Figuren, die in der Elementargeometrie auftreten, gelangen kann.

Wir werden uns hier auf die ebenen Figuren beschränken, indem wir uns an die Methode halten, die von F. Enriques und U. Amaldi in dem oben angeführten Lehrbuche befolgt ist.

Für allgemeine geradlinige (konvexe, konkave, netzförmige) Vielecke definiert man analog zu dem Fall der Dreiecke die Gleichheit (Kongruenz) als Gleichheit der Seiten und Winkel des einen mit den Seiten und Winkeln des andern; d. h. wenn man in jedem der Polygone die Seiten und die Winkel in der einen der beiden Reihenfolgen (von denen die eine der andern entgegengesetzt ist), zu denen die Ecken des Polygons Anlaß geben, angeordnet denkt, so wird man sagen, daß die beiden Polygone dann kongruent sind, wenn die Seiten und Winkel des einen in einer Reihenfolge in geordneter Weise den Seiten und Winkeln des andern in einer Reihenfolge gleich sind.

Die Gleichheit zweier Kreislinien (oder zweier Kreise) definiert man durch die Gleichheit der bezüglichen Radien und diejenige zweier kreisförmiger Bogen (oder zweier Sektoren), die gleichen Kreislinien (oder Kreisen) angehören, durch die Gleichheit der Mittelpunktswinkel, die sie fassen.

Für Figuren mit kreisförmigem oder gemischtem Umfang, wo jede von ihnen durch eine endliche Zahl von elementaren Konstruktionen (Strecken und Winkeln) bestimmt ist, kann man die Definition der Gleichheit durch die Identität der Konstruktionen selbst und durch die Gleichheit der Elemente, mit denen sie ausgeführt werden, bestimmen. Wir können demgemäß die folgende Definition annehmen:

Zwei Vielecke mit kreisförmigem oder gemischtem Umfange heißen gleich (kongruent), wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

1) wenn die geradlinigen Vielecke, die von ihren Ecken in derselben Ordnung bestimmt werden, gleich sind,

2) die Bogen, welche die Seiten der beiden Vielecke bestimmen, der Reihe nach gleich sind,

3) diese Bogen in den Vielecken in bezug auf ihre Sehnen gleiche Lage haben.

§ 10. Flächenwinkel und dreiseitige Ecken. In dem Vorangehenden haben wir uns auf die ebene Geometrie bezogen. Nun geben wir einen kurzen Überblick über die auf die Flächenwinkel (Dieder) und dreiseitigen Ecken (Trieder) bezüglichen Entwicklungen.

Wenn man die Lehre von der Gleichheit (Kongruenz) auf das Prinzip der Deckung durch Bewegung gründet, so hat man keine

Schwierigkeit in der Behandlung gleicher Flächenwinkel und in der Aufgabe, (durch ein Gedankenexperiment) zu erkennen, daß „alle Neigungswinkel eines Flächenwinkels gleich sind“ und daß „Flächenwinkel, die gleiche Neigungswinkel haben, zur Deckung gebracht werden können“. Das erste Experiment (Verschiebung) enthält aber miteinbegriffen das Parallelenpostulat.

Schließt man das experimentelle Prinzip der Deckung aus, so bietet sich von selbst die Idee dar, zwei Flächenwinkel, deren Neigungswinkel gleich sind, als „gleich“ zu definieren; aber man braucht hierzu den Beweis der Gleichheit der Neigungswinkel eines und desselben Flächenwinkels. Diesen kann man unabhängig vom Parallelenpostulat in folgender Weise geben.

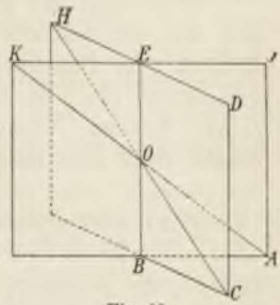

Fig. 28.

Wenn $\widehat{ABC}$, $\widehat{DEJ}$ zwei Neigungswinkel des Flächenwinkels mit der Kante BE sind (Fig. 28), so nehme man auf den Verlängerungen der Strahlen ED, EJ über den Scheitel E hinaus die Strecken EK, EH den auf den Schenkeln des ersten Winkels angegebenen Strecken BA und BC bezüglich gleich an. Jede der Strecken HC, AK trifft dann die Strecke BE in ihrer Mitte O. Man hat also

$$\text{Dreieck } KEO \equiv \text{Dreieck } ABO$$

und
$$\text{Dreieck } HEO \equiv \text{Dreieck } CBO,$$

also
$$KO \equiv AO, \quad HO \equiv CO$$

und auch
$$\text{Dreieck } HOK \equiv \text{Dreieck } CAO.$$

Hieraus schließt man

$$HK \equiv CA \text{ und Dreieck } HEK \equiv \text{Dreieck } ABC$$

und demgemäß die Gleichheit der beiden Neigungswinkel.

Weiter ist interessant, zu sehen, daß man die ganze Lehre von der Gleichheit der dreiseitigen Ecken begründen kann, ohne von dem Prinzip der Deckung, das in den gewöhnlichen Entwicklungen wiederkehrt, Gebrauch zu machen.[1])

1) Gewöhnlich erkennt man vermittels der Deckung die Gleichheit zweier dreiseitigen Ecken in den beiden Fällen, in denen sie zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel oder auch zwei Winkel und die beiden gemeinsame Seite bezüglich gleich haben. Den dritten Fall dann, in dem die Seiten bezüglich

Wir sehen als kongruent zwei dreiseitige Ecken an, welche die Flächenwinkel und die Seiten bezüglich gleich haben, ohne den Fall der direkten Kongruenz (der Möglichkeit der Deckung) und den der indirekten (symmetrische dreiseitige Ecken) zu unterscheiden, was man auf Grund des Begriffs des Sinnes (Art. 3) tun kann.

Nach den Ansichten Veroneses müßte die Behandlung der dreiseitigen Ecken derjenigen der ebenen Geometrie für die Dreiecke parallel laufen.

Stellt man die grundlegenden Sätze in Vergleich, die der Ebene und dem Bündel (der Gesamtheit der Geraden oder Strahlen und der Ebenen oder Büschel von Geraden oder Strahlen durch einen Punkt) gemeinsam sind, so wird man daraus die entsprechenden Folgerungen ziehen können, wenn man von einem Dualitätsprinzip Gebrauch macht, nach dem man den „Punkt" und die „Gerade" der Ebene durch die „Gerade" oder den „Strahl" und bzw. durch die „Ebene" oder das „Geraden- oder Strahlenbüschel" des Bündels ersetzt. Die Sache ist aber nicht so einfach und so unmittelbar klar, wie man wohl glauben könnte, und erfordert Betrachtungen sehr delikater Art.

Zwischen der Geometrie der Ebene und der des Bündels bestehen in der Tat grundlegende Unterschiede:

1) Die Gerade ist eine Linie, deren Punkte in einer offenen Folge angeordnet sind, und im Gegensatz hierzu führen die Elemente (Geraden oder Strahlen) des Büschels zu einer geschlossenen Folge oder genauer zu einer kreisförmigen Anordnung (Vgl. Art. 3).

2) In der Ebene hat man sich nicht schneidende (parallele) Geraden, während zwei Ebenen im Bündel immer eine Gerade gemeinsam haben (oder zwei entgegengesetzte Strahlen, wenn es sich um das Strahlenbündel handelt).

Die unmittelbare Anwendung der grundlegenden Ideen von Veronese würde also erfordern, daß die Lehre von der Kongruenz der Dreiecke in der Ebene in einer Weise entwickelt würde, bei der es offenbar ist, daß sie sich weder auf die Tatsache stützt, daß die Gerade eine offene Linie ist, noch auf das Parallelenpostulat. Wenn man dagegen (wie im System von Veronese) von Anfang an die Geometrie auf diesem Postulat aufbaut, so wird man in der Geometrie des Bündels

gleich sind, beweist man durch Zurückführung auf den ersten, dadurch daß man vermittels leichter Betrachtungen gleicher Dreiecke die Gleichheit der Neigungswinkel zweier entsprechenden Flächenwinkel nachweist.

Bei Euklid finden sich die gewöhnlichen Sätze über Gleichheit der dreiseitigen Ecken nicht; nur in dem Satz 26 des Buches 11 werden zwei dreiseitige Ecken gleich genannt, wenn sie bezüglich gleiche Seiten haben.

für diese Sätze, deren entsprechende, als auch in der Ebene geltend, auf Grund dieser Voraussetzungen schon bewiesen worden sind, einen neuen Beweis liefern müssen.

So beweist z. B. Veronese den Satz der Geometrie der Ebene: „Eine Seite eines Dreiecks ist kleiner als die Summe der beiden anderen“, indem er sich auf die Eigenschaften der senkrechten und schiefen Strecken stützt, die von einem Punkte nach einer Geraden gehen. Die diesen letzten entsprechenden Eigenschaften, die in der Geometrie des Bündels gelten, werden dann benutzt, um den (zu dem oben angeführten entsprechenden) Satz zu beweisen: „Eine Seite einer dreiseitigen Ecke ist kleiner als die Summe der beiden anderen“. Aber der Verfasser hätte von ihnen einen neuen Beweis geben müssen, da die Eigenschaften der senkrechten und der schiefen Strecken von einem Punkte nach einer Geraden nach einer Methode bewiesen wurden, die schon das Parallelenpostulat in sich schließt.

Im Grunde ist das Wesentliche beim Beweise nach dieser Art von Ideen der Umstand, daß in dem Bündel ein Prinzip der Transformation gilt, in dem die entsprechenden Winkel gleich sind, gemäß dem Prinzip der Kongruenztransformation in der Ebene. Zu diesem Zweck muß man nachweisen, daß man im Raume (auf zwei Weisen) eine Punkttransformation herstellen kann, in der gleichen Strecken gleiche Strecken entsprechen und in der

1) einem Punkte O der Punkt selbst entspricht,

2) zwei Strahlen durch O zwei anderen Strahlen durch O, die einen gleichen Winkel bilden.

Es ist klar, wie man, nachdem das oben erwähnte Transformationsprinzip hergestellt ist, die Kennzeichen der Gleichheit zweier dreiseitigen Ecken ableiten kann, die bezüglich zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel oder auch eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gleich haben. Den Fall zweier dreiseitiger Ecken, welche die drei Seiten bezüglich gleich haben, leitet man dann von diesen ab wie in der Ebene das dritte Kennzeichen über die Gleichheit (Kongruenz) der Dreiecke aus den beiden anderen.

Es ist bekannt, daß man zu den angegebenen Kennzeichen der Gleichheit für dreiseitige Ecken gewöhnlich ein viertes hinzufügt, nämlich das, in dem die beiden dreiseitigen Ecken die Flächenwinkel bezüglich gleich haben. Dies Kennzeichen kann als das dem dritten entsprechende bezeichnet werden nach dem Gesetz der Dualität im Bündel, das zur Vertauschung der Worte Gerade (oder Strahl) und Ebene (oder Halbebene), die vom Mittelpunkt des Bündels ausgehen, berechtigt. Nach diesem selben Gesetz der Dualität können offenbar auch die ersten beiden oben angeführten Kennzeichen der Gleichheit als einander entsprechend angesehen werden.

Wenden wir uns zu der allgemeinen Behandlung, von der wir gesprochen haben, so bemerken wir, daß die Schwierigkeiten, zu denen sie Anlaß gibt, offenbar durch die Tatsache bedingt sind, daß die Sätze über die Kongruenz der dreiseitigen Ecken nicht genau denen der Dreiecke entsprechen (da die Existenz ungleicher ähnlicher Ecken fehlt). Hieraus ergibt sich also, daß der Gedanke selbst, beiden Theorien eine parallele Entwicklung zu geben, anfechtbar erscheint.

Wir werden nun dazu übergehen, eine andere Behandlung des Gegenstandes anzuführen, die man in dem zitierten Buche von Enriques und Amaldi antrifft, nach der man dazu gelangt, die Kongruenzsätze für die dreiseitigen Ecken unabhängig vom Parallelenpostulat nachzuweisen.

Die vier Fälle der Gleichheit der dreiseitigen Ecken lassen sich, wie wir schon gesehen haben, auf zwei zurückführen, indem man die beiden andern durch das Prinzip der Dualität im Bündel ableitet, und zwar auf

1. den Fall, in dem man zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel bezüglich gleich hat,

2. den Fall, in dem die drei Seiten bezüglich gleich sind.

Die beiden Lehrsätze können in dem Satz vereinigt werden:

„In gleichen Flächenwinkeln sind zwei Schnitte, deren Schenkel gegen die Scheitelkante und genauer gegen einen Strahl von ihr gleich geneigt sind (gleich geneigte Schnitte), gleiche Winkel und umgekehrt.“

Unter dieser Form erscheint der zweite Satz als die Umkehrung des ersten, und seinen Beweis erhält man auch, wenn man die folgende Schlußweise, die für den Beweis des ersten gilt, umkehrt:

Man behandelt zuerst den besonderen Fall, in dem jeder der beiden betrachteten Schnitte einen Schenkel hat, der auf der Scheitelkante des bezüglichen Flächenwinkels senkrecht ist.

In den gleichen Flächenwinkeln $\alpha'\beta'$, $\alpha_1'\beta_1'$ (Fig. 29) seien also die beiden Schnitte ABC, $A'B'C'$ derart, daß die Winkel $E\widehat{B}C$, $E'\widehat{B'}C'$ rechte und die spitzen Winkel $E\widehat{B}A$, $E'\widehat{B'}A'$ gleich sind. Um die Gleichheit der beiden Schnitte zu beweisen, ziehe man in der

Ebene α' des ersten Flächenwinkels die Senkrechte BD zur Scheitelkante und nehme die Strecken BD, BC beliebig an; dann bestimme man auf der Scheitelkante einen Punkt E auf einer solchen Seite, daß BA dem Winkel $\widehat{DBE}$ angehört und DE in F trifft. In dem andern Flächenwinkel mache man die entsprechenden Konstruktionen, indem man $B'D' \equiv BD$, $B'C' \equiv BC$, $B'E' \equiv BE$ nimmt.

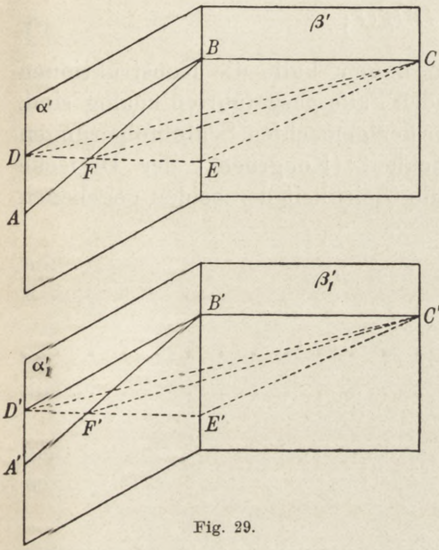

Fig. 29.

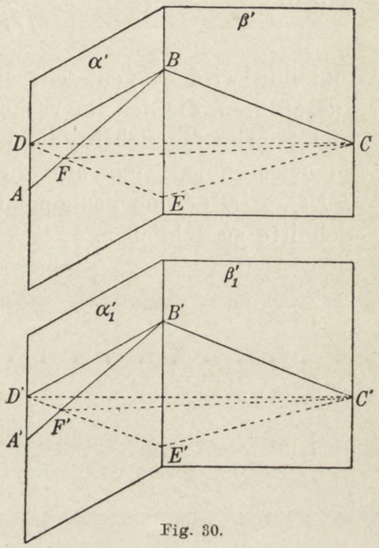

Fig. 30.

Da die Dreiecke CBD, DBE, EBC bzw. ihren entsprechenden gleich (kongruent) sind, so wird $CD \equiv C'D'$, $DE \equiv D'E'$, $EC \equiv E'C'$, $\widehat{DEB} \equiv \widehat{D'E'B'}$ sein, daher auch

Dreieck $BFE \equiv$ Dreieck $B'F'E'$, Dreieck $DCE \equiv$ Dreieck $D'C'E'$

und deshalb

$$BF \equiv B'F', \quad FE \equiv F'E', \quad \widehat{FEC} \equiv \widehat{F'E'C'}.$$

Daraus folgt

$$\text{Dreieck } FEC \equiv F'E'C',$$

hieraus

$$FC \equiv F'C'.$$

Die Dreiecke FBC, $F'B'C'$, welche die Seiten bezüglich gleich haben, geben schließlich $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$. q. e. d.

Wir gehen nun zu dem allgemeinen Falle über und betrachten (Fig. 30) in den gleichen Flächenwinkeln $\alpha'\beta'$, $\alpha_1'\beta_1'$ die Schnitte ABC, $A'B'C'$ von der Art, daß $A\widehat{B}E \equiv A'\widehat{B'}E'$, $C\widehat{B}E \equiv C'\widehat{B'}E'$ ist.

Um die Gleichheit der genannten Schnitte zu beweisen, ziehen wir in den Ebenen α, α' die Senkrechten BD, $B'D'$ auf den bezüglichen Scheitelkanten. Nach dem schon behandelten Falle werden wir haben:

$$D\widehat{B}C \equiv D'\widehat{B'}C';$$

und nun wird es genügen, auch in diesem Falle die Konstruktionen auszuführen, die den im vorangehenden Falle ausgeführten analog sind, und Schritt für Schritt die kurz vorher gemachten Schlußfolgerungen zu wiederholen, um auf die Gleichheit (Kongruenz) der Dreiecke FBC, $F'B'C'$ und demgemäß auf die Gleichheit der beiden gegebenen Schnitte zu schließen.

Druckfehler und Zusätze.

S. 38 Z. 3 v. o. lies Modena statt Bologna.
„ 40 „ 23 v. u. ist hinter „Linie" hinzuzufügen „als Länge ohne Breite" (Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές).
„ 98 „ 3 v. o. lies Prato statt Lodi.
„ 129 „ 3 v. o. „ Genua „ Pisa.
„ 194 ist nach dem Schluß von § 11 folgender Zusatz hinzuzufügen:

11a. Die oben angegebenen Beispiele lassen erkennen, daß aus der Voraussetzung der Volumengleichheit für zwei Polyeder durchaus nicht folgt, daß für sie der Fundamentalgleichung von Dehn genügt ist; diese ist vielmehr die notwendige Bedingung dafür, daß die beiden betrachteten Polyeder in kongruente polyederartige Teile zerlegbar sind. Es ist also in der Tat erwiesen, daß für die Polyeder (im Unterschied zu dem, was für die Polygone der Fall ist) die Gleichheit der Größe (oder des Volumens) eine allgemeinere Beziehung ist als die der Äquivalenz oder der Zerlegbarkeit in Teile, die miteinander zur Deckung gebracht werden können.

Betrachtet man nun alle Polyeder, die mit einem bestimmten Polyeder, z. B. mit dem Einheitswürfel, gleiches Volumen haben, so können wir sie in viele Kategorien oder Typen klassifizieren, indem man verschiedenen Typen die Polyeder zuweist, die nicht in kongruente Teile zerlegbar sind, und in einen und denselben Typus zusammen mit einem bestimmten Polyeder alle Polyeder einschließt, die mit diesem äquivalent sind. Dehn hat darauf aufmerksam gemacht[1]), aus den vorangehenden Schlüssen von ihm folge, daß die Gesamtheit dieser Typen nicht abzählbar ist, d. h. nicht mit der Gesamtheit der ganzen Zahlen oder, was dasselbe ist, mit der Gesamtheit der rationalen Punkte der Abszisse zwischen dem Koordinatenanfang und dem Einheitspunkte in eine gegenseitig eindeutige Korrespondenz gesetzt werden kann.

Aber so interessant diese Bemerkung ist, so fügt sie doch nur wenig zu den kargen Notizen hinzu, die wir über den Gegenstand besitzen.

Man weiß, daß jedem Typus zusammen mit einem bestimmten Polyeder auch das zu ihm (in bezug auf einen Punkt) symmetrische Polyeder gehört, da zwei symmetrische Polyeder immer in kongruente Teile zerlegt werden können.[2]) Man weiß außerdem aus den Elementen der Geometrie, daß alle Prismen (vom Volumen 1) demselben Typus angehören, da zwei Prismen von der Eigenschaft, daß keins von beiden ein größeres Volumen hat als

1) Zwei Anwendungen der Mengenlehre in der elementaren Geometrie Math. Annalen Bd. LIX. 1904.

2) Diese Tatsache, die mit sehr bekannten Eigenschaften der sphärischen Polygone zusammenhängt, wurde, soviel ich weiß, zuerst von Gerling bemerkt in der Antwort auf einen der zu Beginn angeführten Briefe von Gauß (Gauß Werke, Bd. 8 S. 242).

das andere, äquivalent d. h. in kongruente Teile zerlegbar sind.[1]) Aber schon in diesem Typus, dem alle Prismen angehören, treten auch andere Polyeder auf, da Hill[2]) die Äquivalenz (Zerlegbarkeit in kongruente Teile) mit Prismen für Tetraeder einer gewissen Kategorie bemerkt hat, die für ein vorher bestimmtes Volumen, z. B. für das Volumen 1, auch von einem willkürlichen Werte eines Winkels abhängen. Wie Vogt[3]) bemerkt hat, sind dies die Tetraeder, die man in der Zahl sechs aus jedem Rhomboeder (Parallelepipedon mit gleichen Kanten erhält, wenn man durch die Hauptdiagonale die Ebenen legt, welche die sechs diese Diagonale treffenden Kanten projizieren. So hat Juel[4]) auf die Äquivalenz mit einem Würfel für jede der sechs gleichen Pyramiden hingewiesen, welche die Seitenflächen eines Würfels zu Grundflächen und seinen Mittelpunkt zur gemeinsamen Spitze haben.[5])

Außer den Tetraedern von Hill und der Pyramide von Juel kennt man keine anderen pyramidenartigen Polyeder, die mit Prismen äquivalent sind; und es wäre sicher wünschenswert, wenn in dieser Ideenrichtung durch die Arbeit derer, welche die elementare Geometrie pflegen, ein Material gesammelt werden könnte, das reicher an besonderen Ergebnissen wäre. Vielleicht würde man so einen Hinweis für den Weg erhalten, den man einschlagen muß, um das Problem in Angriff zu nehmen, das noch gänzlich ungelöst ist und sehr schwierig erscheint, nämlich das Problem, die hinreichende Bedingung dafür aufzustellen, daß zwei Polyeder in gleiche Teile zerlegbar sind.

Hinsichtlich dieses Punktes können wir nur aussagen, daß für diesen Zweck sicher nicht eine einfache Umkehrung des Ergebnisses von Dehn genügt. Um sich hiervon zu überzeugen, betrachte man zwei beliebige gerade Prismen P und P', welche dieselbe Höhe haben, und bezeichne mit $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ und $\pi_1', \pi_2', \ldots, \pi_m'$ die Neigungswinkel der Flächenwinkel der Seiten (d. h. die Winkel der bezüglichen Grundflächen). Das System (S) aller linearen homogenen Beziehungen mit ganzen Koeffizienten, die zwischen den Kanten der beiden Prismen bestehen, wird vor allem das System (S_1) der

1) Vgl. z. B. Enriques-Amaldi, *Elementi di Geometria* ad uso delle scuole secondarie superiori, 4. Aufl. 1910.

2) Determination of the volumes of certain Species of Tetrahedra. Proceedings of the London Society.

3) Man vergleiche das erwähnte *Breslauer Programm*, das noch andere interessante Betrachtungen über Zerlegungen von Polyedern in Teile enthält, mit denen wir uns hier nicht beschäftigen können.

4) *Über das Volumen der Pyramide*: Jahresbericht der deutschen Math.-Vereinigung, Bd. 15, 1904. Vgl. die Note desselben Verfassers: Egalité par addition de quelques polyèdres. Berichte der K. Gesell. der Wiss. zu Kopenhagen, 1903. — In der ersten dieser Noten ist angegeben, daß in Göttingen auf Anregung von F. Schur Modelle für die Zerlegung eines Tetraeders von Hill in Teile konstruiert worden sind, aus denen man ein dreiseitiges Prisma herstellen kann, das dieselbe Basis hat, während die Höhe einem Drittel der Höhe des Tetraeders gleich und die Seitenkanten einer Seitenkante des Tetraeders parallel sind

5) H. Vogt bemerkt in dem angeführten Programm, daß der achte Teil der Pyramide von Juel ein besonderes Tetraeder von Hill ist.

Gleichungen zwischen allen Seitenkanten der beiden Prismen enthalten, auf alle möglichen Weisen zu je zwei und zwei genommen; und außerdem wird es eventuell andere Gleichungen (S_2) umfassen, in denen die Kanten der Grundflächen auftreten. Jedenfalls werden in jeder ganzzahligen Lösung des Systems (S) die den Seitenkanten entsprechenden Zahlen sämtlich gleich sein; weiß man also, daß die auf alle anderen Kanten bezüglichen Flächenwinkel rechte sind, so folgt für die beiden Ausdrücke, von denen man auf Grund des Satzes von Dehn nachweisen muß, daß sie für den Modul π kongruent sind, daß sie, wie auch die ganzzahlige Lösung des betrachteten Systems (S) beschaffen sei, als zwei gleiche Vielfache der beiden Summen $\pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_n$ und $\pi_1' + \pi_2' + \cdots + \pi_m'$ gegeben sind, jedes vermehrt um ein bestimmtes Vielfaches von $\frac{\pi}{2}\cdot$ Aber jede dieser beiden Summen ist bekanntlich einem Vielfachen von π gleich; hieraus folgt, daß die beiden Prismen P und P' die Bedingung von Dehn erfüllen, sie mögen einander äquivalent sein oder nicht.[1])

Schließlich bleibt uns noch zu bemerken, daß die vorangehende Betrachtung, die sich auf das System der geraden Prismen bezieht, die eine bestimmte Höhe haben, im wesentlichen nur die Schlüsse von Dehn auf die vieleckigen Flächen (Polygone) überträgt; und da für diese, wie wir soeben gesehen haben, die Bedingung in jedem Falle gilt, unabhängig von jeder Voraussetzung bezüglich ihrer Äquivalenz, so ergibt sich, daß das Band, daß für die Polyeder zwischen ihrer Zerlegbarkeit in kongruente Teile und der Bedingung von Dehn besteht, einen Zufälligkeitscharakter besitzt. Eine kritische Untersuchung, die darauf gerichtet wäre, vermittels grundlegender Hypothesen den Ursprung für diese Charakterverschiedenheit zwischen den geometrischen Größen der Ebene und des Raumes genau festzustellen, würde sicher von großem Interesse sein.

S. 268, Z. 22 lies $\cos A \cos \pi(b) \cos \pi(c) + \frac{\sin \pi(b) \sin \pi(c)}{\sin \pi(a)} = 1$

statt $\cos A = \cos \pi(b) \cos \pi(c) + \frac{\sin \pi(b) \sin \pi(c)}{\sin \pi(a)} - 1$,

S. 276, Z. 13 lies mit dem Radius $\sqrt{\frac{1}{c}}$ statt mit des Radius $\sqrt{c}$,

S. 290, letzte Zeile lies $\mathrm{Sh}\left[\frac{\log a}{2}\right] = \frac{a-1}{2\sqrt{a}}$ statt $\mathrm{Sh}\left[\frac{\log a}{2}\right] = \frac{a-1}{i\,2\sqrt{a}}$

1) Die vorstehende Erörterung schließt übrigens nicht aus, daß die Bedingung von Dehn für die Äquivalenz ausreichend sein kann, wenn man zu ihr die Voraussetzung der Volumengleichheit hinzunimmt.